然ルニ　$\dfrac{z}{h}<1,\qquad 1-\theta>1-\theta\dfrac{z}{h},\qquad 1-\theta\dfrac{z}{h}>1-\dfrac{z}{h}.$

$$\therefore\quad |R_n|<\left(\frac{z}{h}\right)^n\frac{1}{1-\frac{z}{h}}.\qquad \therefore\quad \lim_{n\to\infty}R_n=0.$$

故ニ $0<h,\ |x|<h$ ナルトキハ次ノ展開式ガ成立スル.

$$\log(x+h)=\log h+\frac{x}{h}-\frac{x^2}{2h^2}+\frac{x^3}{3h^3}-\cdots\cdots.$$

二項定理　二項定理ノ展開ニ就イテハ今迄度々述ベタルモ此等ハ，正負ノ何レカノ整數ニ限ル場合デアツタ．コヽニ述ベルノハ任意ノ實數ニツイテデアル．

$f(x)=(1+x)^m$ トオイテ $m>n$ ナル n ニツイテ n 回微分スルト

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},\quad \text{但シ } n \text{ ハ正ノ整數.}$$

$$\therefore\quad f(0)=1,\quad f^{(n)}(0)=m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1).$$

從ツテ Maclaurin ノ定理ニヨリ次ノ展開式ヲ得ル．

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n^2.$$

然ルトキ

$$R_n^2=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}(1+\theta x)^{m-n}(1-\theta)^{n-1}x^n,\qquad 0<\theta<1.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}R_n^2=0$ ナルコトヲ證明スルタメニ次ノ如ク置ク．

$$A=mx(1+\theta x)^{m-1}.$$

$$B=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

$$C=\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

即チ $R_n^2=ABC$ デアル．此等ノ中 $n\to 0$ ナルトキ何レカ一ツガ 0 トナリ，他ノモノガ有限ナルコトヲ云ヘバ $\lim\limits_{n\to\infty}R_n^2=0$ トナル．然ルニ $-1<x<1$ ナルトキハ x ト m トガ與ヘラレルトキハ n ノ如何ニ關ハラズ A ハ有限デアル．

又

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$$

デアルカラ B モ有限デアル．次ニ C ヲ書キ直シテ

$$C=\left(\frac{m-1}{1}x\right)\left(\frac{m-2}{2}x\right)\cdots\cdots\left(\frac{m-n+1}{n-1}x\right)$$

トスルト

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{m-r}{r}x\right|=|x|<1$$

デアルカラ $|x|<K<1$ ナル一數 K ヲトルト十分大ナル數 r ニ對シテハ常ニ

$$\left|\frac{m-r}{r}x\right|<K$$

ナル關係ガ成立スル．今 N ヲ一ツノ正ノ整數トシ $r\geqq N$ ナルトキ上ノコトガ成立スルモノトスルト $n>N$ ナルトキハ

$$|C|=\left|\frac{m-1}{1}x\cdot\frac{m-2}{2}x\cdots\cdots\frac{m-N}{N}x\cdot\frac{m-\overline{N+1}}{N+1}x\cdots\cdots\frac{m-\overline{n-1}}{n-1}x\right|$$

$$<\left|\frac{m-1}{1}x\,\frac{m-2}{2}x\cdots\cdots\frac{m-\overline{N-1}}{N-1}x\right|K^{n-N}.$$

而シテ

$$\lim_{n\to\infty}K^{n-N}=0$$

デアルカラ

$$\lim_{n\to\infty}C=0.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}R_n^2=0.$$

故ニ $-1<x<1$ ナルトキ任意ノ實數 m ニ對シテ次ノ二項定理ガ成立スル．

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\cdots.$$

例題 1.　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ．

【解】　$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ デアルカラ

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}x^{2n}+\cdots\cdots$$

例題 2. b ガ a ニ比シ微少ナルトキ $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$ ハ大略 $\dfrac{a-b}{a}$ ニ等シイコトヲ證明セヨ.

〔證明〕 $$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}}}=\left(1-\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\frac{b}{a}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{b}{a}+\cdots\right)=1-\frac{b}{a}+\cdots\cdots\fallingdotseq 1-\frac{b}{a}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\fallingdotseq\frac{a-b}{a}.$$

例題 3. 次ノ値ヲ計算セヨ.

(i) $\sqrt[3]{1.01}$. 但シ誤差ヲ十萬分ノ一以下ニ止メヨ.

(ii) $3-\sqrt[5]{240}$. 但シ小數第四位マデ.

〔解〕 (i) Maclaurin ノ定理ニヨリ

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3(1+\theta x)^{-\frac{8}{3}}.$$

而シテ $x=0.01=10^{-2}$ ナルトキハ

$$\left|\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3(1+\theta x)^{-\frac{8}{3}}\right|<\frac{5}{81}\cdot10^{-6}<10^{-7}$$

デアルカラ

$$\sqrt[3]{1.01}=1+\frac{1}{3}\cdot10^{-2}-\frac{1}{9}10^{-4}+(10^{-7}\ \text{ヨリ小ナル數})$$

$$=1+(0.0033333\cdots\cdots)-(0.000011\cdots\cdots)+(10^{-7}\ \text{ヨリ小ナル數}).$$

故ニ求メル値ハ 1.003322 デ其ノ誤差ハ

$$0.000002+(10^{-7}\ \text{ヨリ小ナル數})<0.00001$$

トナル.

(ii) $$\sqrt[5]{240}=(3^5-3)^{\frac{1}{5}}=3\left(1-\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=3\left\{1+\frac{\frac{1}{5}}{1}\left(-\frac{1}{81}\right)+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{1\cdot2}\left(-\frac{1}{81}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=3-\frac{2}{270}-\frac{8}{218700}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad 3-\sqrt[5]{240}=\frac{2}{270}+\frac{8}{218700}+\cdots\cdots=(0.007407\cdots)+(0.000036\cdots)+\cdots\cdots$$
$$=0.007443\cdots\cdots$$

第三十章 函數展開ノ特別法

函數展開ノ特別法 一般ニ函數 $f(x)$ ノ展開式ヲ求メルニハ先ヅ $f^{(n)}(x)$ ヲ求メテ Taylor 又ハ Maclaurin ノ級數ヲ作リ, 其ノ R_n ナル剩餘ヲ計算シテ $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ ナルコトヲ證明シナケレバナラナイ. 然レドモ任意ノ函數ニツイテ此ノ方法ヲ實行スルコトハ到底不可能デアルカラ, 他ノ特別法ニ依ラナクテハナラナイ. 其ノ重ナルモノハ次ノ三ツデアル. 但シ此等ト雖モ特別ナ場合ニ限ルノデアル.

I. 第一次導函數ノ展開既知ナルトキ其ノ原函數ヲ展開スルコト

此ノ場合ニハ與ヘラレタ函數ガ展開サレタモノトシテ未定ノ係數ヲ用ヒテ之ヲ表ハシタ等式ノ兩邊ヲ微分シテ x ノ同次ノ項ノ係數ヲ比較シテ未定ノ係數ヲ決定スル.

例題 1. $\sin^{-1}x$ ヲ展開セヨ.

〔解〕 $\sin^{-1}x$ ヲ展開シ得タモノト假定シ

$$\sin^{-1}x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{1}$$

トオキ兩邊ヲ微分スルト

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{2}$$

二項定理ニ依リ $|x|<1$ ナルトキハ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)}x^{2n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{3}$$

(2) ト (3) トヲ比較シテ

$$a_1=1,\qquad a_2=0,\qquad a_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3},\qquad a_4=0,\qquad a_5=\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}.$$

一般ニ $a_{2n-1}=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n-2)}\dfrac{1}{2n-1}$, $a_{2n}=0.$

而シテ (1) ノ兩邊ニ $x=0$ ヲ代入スルト $a_0=0$ トナルカラ

$$\sin^{-1}x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots+\frac{1\cdot3\cdots\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots\cdots(2n-2)}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\cdots\quad(4)$$

但シ $-1<x<1$ デアル.

[注意] (4) ノ兩邊ニ $x=\dfrac{1}{2}$ ヲ代入スルト

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots\cdots.$$

コレヨリ理論上 π ヲ計算スルコトガ出來ル. 併シ此ノ級數ハ其ノ收斂ガ緩漫デアルカラ實用ニハ適シナイ. 實際ニハ他ノ方法デ計算スル.

例題 2. $\log(x+\sqrt{1+x^2})$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ.

[解] $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ トオクト

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\qquad \therefore\ \sqrt{1+x^2}f'(x)=1.$$

$$\therefore\ \sqrt{1+x^2}f''(x)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}f'(x)=0.\qquad \therefore\ (1+x^2)f''(x)+xf'(x)=0.$$

Leibniz ノ定理ニヨリ兩邊ヲ n 回微分スルト

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x)+(2n+1)xf^{(n+1)}(x)+n^2f^{(n)}(x)=0.$$

之ニ於テ $x=0$ トオクト

$$f^{(n+2)}(0)=-n^2f^{(n)}(0).$$

然ルニ $f'(0)=1,\ f''(0)=0$ ナルニ依リ

$$\begin{array}{ll} f'''(0)=-1^2. & f^{(4)}(0)=0.\\ f^{(5)}(0)=1^2\cdot3^2. & f^{(6)}(0)=0.\\ f^{(7)}(0)=-1^2\cdot3^2\cdot5^2. & f^{(8)}(0)=0.\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

一般ニ $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots\cdots(2n-1)^2$. $f^{(2n)}(0)=0.$

故ニ Maclaurin ノ級數ヲ作ルト

$$x-\frac{1^2}{3!}x^3+\frac{1^2\cdot3^2}{5!}x^5-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{7!}x^7+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots\cdots(2n-1)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots\cdots$$

$$=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots$$

トナル. コノ級數ハ $|x|\leqq1$ ニ於テ收斂シ, 從ツテ收斂域ニ於テ x ノ一ツノ函數ヲ表ハス, 今其ノ函數ヲ $\phi(x)$ トスルト

$$\phi(x)=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots\cdots.$$

コノ兩邊ヲ微分スルト

$$\phi'(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4-\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n)}x^{2n}+\cdots\cdots\cdots.$$

然ルニ二項定理ニヨリ $|x|<1$ ナルトキハ

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4-\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n)}x^{2n}+\cdots\cdots\cdots.$$

故ニ $|x|<1$ ナルトキハ

$$\phi'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{1+x^2}).$$

第一導函數ノ相等シイ原函數ハ常數ノ差ヲ有スルカラ

$$\phi(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})+c$$

デナケレバナラナイ. コヽニ於テ $x=0$ トオクト $c=0$ トナル.

$$\therefore\ \phi(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2}).$$

即チ $\log(x+\sqrt{1+x^2})=x-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\dfrac{x^5}{5}-\cdots\cdots\cdots$

$$+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots\cdots.$$

是求メル展開式デアル.

II. 微分方程式ヲ適用スル場合

第一次導函數ヲ展開シ得ルノハ特別ナ場合ニ限ルカラ, 微分方程式ヲ適用シテ求メル展開式ノ各項ノ係數ヲ定メ, 斯クシテ得ラレタ冪級數ノ收斂スル範圍ヲ定メル. 從ツテ此ノ方法デハ其ノ剩餘 R_n ヲ求メルコトガ出來ナイカラ, $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ ナルコトヲ證明スルコトガ出來ナイ. 從ツテ此ノ方法ハ完全ナ方法デハナイ. 但シ $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ ナルコトダケハ他ノ方法デ證明スルコトモアル.

例題 3. $y=e^{a\sin^{-1}x}$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ.

[解]
$$y=e^{a\sin^{-1}x}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$\frac{dy}{dx}=e^{a\sin^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{a\sin^{-1}x}\frac{a^2}{1-x^2}+\frac{xae^{a\sin^{-1}x}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2) ヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3) ヨリ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^2y}{1-x^2}+\frac{xay}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(4) ヲ (5) ニ代入スルト

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=a^2y\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

今

$$y=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots\cdots+A_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

トオクト

$$\frac{dy}{dx}=A_1+2A_2x+\cdots\cdots+nA_nx^{n-1}+\cdots\cdots.\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2A_2+3\cdot 2A_3x+\cdots\cdots+n(n-1)A_nx^{n-2}+\cdots\cdots.\cdots\cdots(9)$$

(7), (8), (9) ヲ (6) ニ代入スルト

$$\begin{aligned}&(1-x^2)\{2A_2+3\cdot 2A_3x+\cdots\cdots+n(n-1)A_nx^{n-2}+\cdots\cdots\}\\&-x(A_1+2A_2x+\cdots\cdots+nA_nx^{n-1}+\cdots\cdots)\\&=a^2(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots\cdots+A_nx^n+\cdots\cdots)\cdots\cdots\cdots\cdots(10)\end{aligned}$$

(10) ノ x ノ同次ノ係數ヲ等シトオイテ

$$A_{n+2}=\frac{a^2+n^2}{(n+1)(n+2)}A_n\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

(11) 式ヨリ A_0, A_1 ノ値ヲ知ルトキハ $A_2, A_3, A_4, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ ヲ求メルコトガ出來ル. 然ルニ A_0 ハ $y=e^{a\sin^{-1}x}$ ニ於テ $x=0$ ヲ代入シテ $A_0=1$ ヲ得ル. A_1 ハ

$$\frac{dy}{dx}=e^{a\sin^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

ニ於イテ $x=0$ ヲ代入シテ $A_1=a$ ヲ得ル. 故ニ (11) ニヨリ

$$A_2=\frac{a^2}{1\cdot 2}A_0=\frac{a^2}{2!}.$$

$$A_3=\frac{a^2+1}{2\cdot 3}A_1=\frac{(a^2+1)a}{3!}.$$

$$\therefore\quad A_4=\frac{a^2+2^2}{3\cdot 4}A_2=\frac{a^2(a^2+2^2)}{4!}.$$

$$A_5=\frac{a^2+3^2}{4\cdot 5}A_3=\frac{a(a^2+1)(a^2+3^2)}{5!}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad e^{a\sin^{-1}x}=1+ax+\frac{a^2}{2!}x^2+\frac{a(a^2+1)}{3!}x^3+\frac{a^2(a^2+2^2)}{4!}x^4$$
$$+\frac{a(a^2+1)(a^2+3^2)}{5!}x^5+\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

[注意] (12) ノ結果ヨリ $\sin^{-1}x$, $(\sin^{-1}x)^2$, $(\sin^{-1}x)^3$ ノ展開式ヲ求メルコトガ出來ル. 即チ $e^{a\sin^{-1}x}$ ニ指數函數ノ展開ヲ適用スルトキハ

$$e^{a\sin^{-1}x}=1+a\sin^{-1}x+\frac{a^2}{2!}(\sin^{-1}x)^2+\frac{a^3}{3!}(\sin^{-1}x)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

(12) ト (13) トノ右邊ニ於ケル a ノ係數ヲ等シトオイテ

$$\sin^{-1}x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\cdots$$

トナル. 又 a^2 ノ係數ヲ等シトオイテ

$$(\sin^{-1}x)^2=x^2+\frac{2^2}{3\cdot 4}x^4+\frac{2^2\cdot 4^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}x^8+\cdots\cdots\cdots.$$

更ニ a^3 ノ係數ヲ等シトオイテ

$$(\sin^{-1}x)^3=x^3+\frac{3!}{5!}3^2\left(1+\frac{1}{3^2}\right)x^5+\frac{3!}{7!}3^2\cdot 5^2\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)x^7+\cdots\cdots\cdots$$

トナル.

III. 展開既知ナル函數ノ和差又ハ積ヨリ成ル函數ノ展開

二ツノ收斂級數 U, V ノ和, 差, 積ハ又收斂ニシテ夫々 U+V, U−V, UV ナルコトハ既ニ證明シタカラ, 之ヲ展開既知ナル函數ニ適用スルノデアル.

例題 4. (i) $e^x+\cos x$, (ii) $e^x-\cos x$, (iii) $e^x\cos x$ ナル函數ヲ x ノ羃級數ニ展開セヨ.

[解] e^x, $\cos x$ ナル二ツノ函數ハ x ノスベテノ値ニ對シテ絶對收斂ニシテ次ノ展開式ガ成立ツ.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots\cdots\cdots.$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots\cdots\cdots.$$

故ニ

(i) $$e^x+\cos x=2+x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\cdots\cdots\cdots.$$

(ii) $$e^x-\cos x=x+x^2+\frac{x^3}{6}+\cdots\cdots\cdots.$$

(iii) $$e^{x}\cos x=1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}-\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

例題 5. $|x|<1$ ナルトキ

(i) $$\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}x^5+\cdots\cdots+\frac{2\cdot4\cdots2n}{3\cdot5\cdots(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots\cdots$$

ヲ證明シ，然ル後次ノ式ヲ誘導セヨ.

(ii) $$\tan^{-1}x=\frac{x}{1+x^2}\left\{1+\frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\right\}.$$

[解] (i) $|x|<1$ デアルカラ二項定理ニヨリ

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $$\sin^{-1}x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ハ $|x|<1$ ニ於テ絕對收斂デアルカラ邊々相乘ズルト

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\sin^{-1}x=x+\left(\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2}\right)x^3+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}+\frac{1}{2\cdot2\cdot3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)x^5$$
$$+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}+\frac{1\cdot3}{2\cdot2\cdot4\cdot5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)x^7+\cdots\cdots\cdots$$
$$=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}x^5+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}x^7+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{2\cdot4\cdots\cdots(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(ii) $y=\sin^{-1}x$ トオクト $x=\sin y.$ $\therefore$ $\tan y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

$y=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$ $\therefore$ $\sin^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=z$ トオクト $x=\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}},$ $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}},$ $\sin^{-1}x=\tan^{-1}z.$

コレ等ヲ (3) ニ代入スルト

$$(1+z^2)^{+\frac{1}{2}}\tan^{-1}z=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}+\frac{2}{3}\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^5+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\therefore\ \tan^{-1}z=\frac{z}{1+z^2}\left\{1+\frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\right\}.$$

コヽニ於テ z ヲ x デ置キ換ヘルト求メル展開式ヲ得ル.

例題 6. $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\tan x=\sin x+\frac{1}{2}\sin^3x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\sin^5x+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\sin^7x+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

[解] $$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x(1-\sin^2x)^{-\frac{1}{2}}.$$

然ルニ $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ ナルトキハ $\sin^2x<1$ デアルカラ二項定理ニヨリ

$$(1-\sin^2x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\sin^2x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\sin^4x+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\sin^6x+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\therefore\ \tan x=\sin x+\frac{1}{2}\sin^3x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\sin^5x+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\sin^7x+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

例題 7. 次ノ函數ハ x ノ冪級數ニ展開シ得ルモノト假定シテ其ノ展開式ヲ x^4 ノ項マデ求メヨ.

(i) $\dfrac{x}{\sin x}.$ (ii) $e^{\tan^{-1}x}.$

[解] (i) $$\frac{x}{\sin x}=\frac{x}{x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\cdots}=\frac{1}{1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\cdots\cdots}.$$

コヽニ於テ $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3\cdots\cdots$ ナル二項定理ニヨリ

$$\frac{x}{\sin x}=1+\left(\frac{1}{3!}x^2-\frac{1}{5!}x^4+\cdots\cdots\right)+\left(\frac{1}{3!}x^2-\frac{1}{5!}x^4+\cdots\cdots\right)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=1+\frac{1}{3!}x^2-\frac{x^4}{5!}+\left(\frac{1}{3!}\right)^2x^4\cdots\cdots=1+\frac{1}{3!}x^2+\frac{7}{360}x^4\cdots\cdots.$$

(ii)

$f(x)=e^{\tan^{-1}x},$ $f(0)=1.$

$f'(x)(1+x^2)=f(x),$ $f'(0)=1.$

$f''(x)(1+x^2)+2xf'(x)=f'(x),$ $f''(0)=1.$

$f'''(x)(1+x^2)+4xf''(x)+2f'(x)=f''(x),$ $f'''(0)=-1.$

$f^{(4)}(x)(1+x^2)+6xf'''(x)+6f''(x)=f'''(x),$ $f^{(4)}(0)=-7.$

$$\therefore\ e^{\tan^{-1}x}=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{7x^4}{24}-\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

例題 8. $\sin mx$ ヲ $\sin x$ ノ冪級數ニ展開シタル式ヲ

$$\sin mx=a_0+a_1\sin x+a_2\sin^2x+\cdots\cdots\cdots+a_n\sin^nx+\cdots\cdots\cdots$$

トスルトキ a_n ノ値如何.

[解] $\sin mx=a_0+a_1\sin x+a_2\sin^2 x+\cdots\cdots+a_n\sin^n x+\cdots\cdots=f(\sin x).$

此ノ式ノ兩邊ヲ $\sin x$ ニ關シテ n 回微分スルト

$$f^{(n)}(\sin x)=n!\,a_n+\frac{(n+1)!}{1}a_{n+1}\sin x+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

故ニ $x=0$ トスレバ

$$f^{(n)}(0)=n!\,a_n.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

次ニ

$$f'(\sin x)=\frac{d}{d\sin x}(\sin mx)=m\cos mx\frac{dx}{d\sin x}=m\frac{\cos mx}{\cos x}.$$

$$\therefore\quad \cos x f'(\sin x)=m\cos mx.$$

此ノ式ヲ更ニ $\sin x$ デ微分スルト

$$(1-\sin^2 x)f''(\sin x)-\sin x f'(\sin x)+m^2 f(\sin x)=0.$$

コヽニ於テ $\sin x$ ニ關シテ n 回微分スルト

$$(1-\sin^2 x)f^{(n+2)}(\sin x)-(2n+1)\sin x f^{(n+1)}(\sin x)-(n^2-m^2)f^{(n)}(\sin x)=0.$$

此ノ式ニ $x=0$ トオクト

$$f^{(n+2)}(0)=(n^2-m^2)f^{(n)}(0).$$

然ルニ $\qquad f'(0)=m,\qquad f''(0)=0$

ナルコトハ容易ニ知ラレル. 故ニ

$$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\cdots\cdots\cdots\cdots\{m^2-(2n-1)^2\}.$$

$$f^{(2n)}(0)=0.$$

故ニ (1) ヨリ $(2n+1)!\,a_{2n+1}=f^{(2n+1)}(0),\quad (2n)!\,a_{2n}=f^{(2n)}(0)$

ナルヲ以テ

$$a_{2n+1}=(-1)^n\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\cdots\cdots\{m^2-(2n-1)^2\}}{(2n+1)!}.$$

$$a_{2n}=0.$$

練 習 問 題 16.

(1) $\sin(x+h)$ ヲ h ノ冪級數ニ展開シ, 其レヲ用ヒテ

$$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$$

ヲ證明セヨ.

(2) $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$ ハ x ノ冪級數ニ展開シ得ルコトヲ證明シ, 且其ノ展開式ヲ求メヨ.

(3) $|x|<1$ ナルトキ展開ノ可能ナルコトヲ假定シ次ノ各式ヲ證明セヨ.

(i) $$\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}=x-\left(1+\frac{1}{3}\right)x^3+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)x^5\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

(ii) $$\{\log(1+x)\}^2=2\left\{\frac{x^2}{2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4}-\cdots\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots\cdots\right\}.$$

(4) 次ノ函數ハ x ノ冪級數ニ展開シ得ルモノト假定シ, 其ノ展開式ヲ x^4 ノ項マデ求メヨ.

(i) $\sec x.$ (ii) $\log(1-x+x^2).$ (iii) $\cos^n x.$ (iv) $e^x\log(1+x).$

(5) $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ ナルトキ, 次ノ展開式ヲ證明セヨ.

$$\cos x=1-\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{8}\sin^4 x-\frac{1}{16}\sin^6 x-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(6) 二項定理ニヨリテ次ノ數ノ近似値ヲ求メヨ. $\dfrac{1}{9854}.$

【解 答】

(1) $\sin(x+h)$ ヲ h ノ冪級數ニ展開シタモノハ絶對收斂級數デアルカラ其ノ項ノ順序ヲ變ヘルコトガ出來ル. 故ニ

$$\sin(x+h)=\sin x+\frac{\cos x}{1!}h-\frac{\sin x}{2!}h^2-\frac{\cos x}{3!}h^3+\frac{\sin x}{4!}h^4+\frac{\cos x}{5!}h^5+\cdots\cdots\cdots$$
$$=\sin x\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\cdots\cdots\cdots\cdots\right)$$
$$+\cos x\left(h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots\cdots\cdots\cdots\right)$$
$$=\sin x\cos h+\cos x\sin h.$$

(2) $$f(x)=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$$
$$f'(x)=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)\cos\alpha-e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)\sin\alpha.$$
$$=e^{x\cos\alpha}\cos(\alpha+x\sin\alpha).$$
$$f''(x)=e^{x\cos\alpha}\cos(2\alpha+x\sin\alpha).$$
$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$
$$f^{(n)}(x)=e^{x\cos\alpha}\cos(n\alpha+x\sin\alpha).$$
$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\theta x\cos\alpha}\cos(n\alpha+\theta x\sin\alpha)}{n!}x^n=0.$$

故＝ $\infty > x > -\infty$ ＝於テ x ノ羃級數＝展開スルコトガ出來ル．卽チ

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)=1+\frac{\cos\alpha}{1}x+\frac{\cos(2\alpha)}{2!}x^2+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{\cos(n\alpha)}{n!}x^n+\cdots\cdots\cdots.$$

(3)　(i)　$\dfrac{\tan^{-1}x}{1+x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots$

トオイテ分母ヲ拂フト

$$\tan^{-1}x=a_0+a_1x+(a_2+a_0)x^2+(a_3+a_1)x^3+\cdots\cdots+(a_n+a_{n-2})x^n+\cdots\cdots$$

兩邊ヲ微分シテ

$$\frac{1}{1+x^2}=a_1+2(a_2+a_0)x+3(a_3+a_1)x^2+4(a_4+a_2)x^3+\cdots\cdots\cdots$$
$$+n(a_n+a_{n-2})x^{n-1}+(n+1)(a_{n+1}+a_{n-1})x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又別＝二項定理ヨリ

$$(1+x^2)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

最初ノ式＝於テ $x=0$ トシテ $a_0=0$，故＝ (1)，(2) ノ係數ヲ比較シテ

$$a_0=0,\quad a_1=1,\quad a_2=0,\quad 3(a_3+1)=-1.\qquad\therefore\ a_3=-\left(1+\frac{1}{3}\right).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\therefore\ \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}=x-\left(1+\frac{1}{3}\right)x^3+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)x^5-\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n+1}+\cdots\cdots\cdots.$$

(ii)　$\{\log(1+x)\}^2=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots\cdots\cdots$

トオイテ兩邊ヲ微分スルト

$$2\log(1+x)\frac{1}{1+x}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots\cdots\cdots$$
$$+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+(n+2)a_{n+2}x^{n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$2\log(1+x)=a_1+(a_1+2a_2)x+(2a_2+3a_3)x^2+(3a_3+4a_1)x^3+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\{na_n+(n+1)a_{n+1}\}x^n+\{(n+1)a_{n+1}+(n+2)a_{n+2}\}x^{n+1}+\cdots\cdots.$$

此ノ兩邊ヲ更＝ x ＝ツイテ微分スルト

$$\frac{2}{1+x}=(a_1+2a_2)+2(2a_2+3a_3)x+3(3a_3+4a_4)x^2+\cdots\cdots\cdots$$
$$+n\{na_n+(n+1)a_{n+1}\}x^{n-1}+(n+1)\{(n+1)a_{n+1}+(n+2)a_{n+2}\}x^n+\cdots\cdots\cdots$$

然ル＝二項定理＝ヨリ

$$\frac{2}{1+x}=2(1+x)^{-1}=2\{1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots\cdots+(-1)^nx^n+\cdots\cdots\cdots\}.$$

$$a_0=0,\qquad a_1=0,\qquad 2a_2=2.\qquad\therefore\ a_2=1.$$
$$2(2a_2+3a_3)=-2,\qquad a_3=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}.$$
$$3(3a_3+4a_4)=2,\qquad a_4=\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\therefore\ \{\log(1+x)\}^2=2\left\{\frac{x^2}{2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4}-\cdots\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots\cdots\right\}.$$

(4)　(i)　$\sec x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

トオクト　$x=0$　ナルトキ　$a_0=1$.

(1) ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$\sec x\tan x=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$x=0$　ナルトキ　$a_1=0$.

(2) ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$\sec^3x+\sec x\tan^2x=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$x=0$　ナルトキ　$a_2=\dfrac{1}{2}$.

以下同樣＝シテ　$a_3=0,\quad a_4=\dfrac{5}{24}$.

$$\therefore\ \sec x=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

(ii)　$f(x)=\log(1-x+x^2)$.　　$f(0)=0$.

$f'(x)(x^2-x+1)=2x-1$.　　$f'(0)=-1$.

$f''(x)(x^2-x+1)+f'(x)(2x-1)=2$.　　$f''(0)=1$.

$f'''(x)(x^2-x+1)+2f''(x)(2x-1)+2f'(x)=0$.　　$f'''(0)=4$.

$f^{(iv)}(x)(x^2-x+1)+3f'''(x)(2x-1)+6f''(x)=0$.　　$f^{(iv)}(0)=6$.

$f^{(v)}(x^2-x+1)+4f^{(iv)}(x)(2x-1)+12f'''(x)=0$.　　$f^{(v)}(0)=-24$.

$$\therefore\ \log(1-x+x^2)=-x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

(iii)　$f(x,n)=\cos^nx$ トオクト $f(x,n)=f(-x,n)$ デアルカラ展開式ハ偶數羃ヨリ成ル．而シテ $f(0,n)=1$.

$$f'(x,n)=-n\cos^{n-1}x\sin x.$$
$$f''(x,n)=n(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2x-n\cos^nx$$
$$=n(n-1)f(x,n-2)-n^2f(x,n).\qquad\therefore\ f''(0,n)=-n.$$

$$f^{(iv)}(x,n)=n(n-1)f''(x,n-2)-n^2f''(x,n).$$

$$f^{(iv)}(0,n)=-n(n-1)(n-2)+n^3=n(3n-2).$$

$$f^{(vi)}(x,n)=n(n-1)f^{(iv)}(x,n-2)-n^2f^{(iv)}(x,n).$$

$$f^{(vi)}(0,n)=-n\{15(n-1)^2+1\}.$$

故ニ $$\cos^n x=1-\frac{n}{2!}x^2+\frac{n(3n-2)}{4!}x^4-\frac{n\{15(n-1)^2+1\}}{6!}x^6+\cdots\cdots.$$

(iv) $f(x)=e^x\log(1+x).$ $\qquad f(0)=0.$

$$f'(x)=e^x\log(1+x)+\frac{e^x}{1+x}. \qquad f'(0)=1.$$

$$f''(x)=e^x\log(1+x)+\frac{2e^x}{1+x}-\frac{e^x}{(1+x)^2}. \qquad f''(0)=1.$$

$$f'''(x)=e^x\log(1+x)+\frac{3e^x}{1+x}-\frac{3e^x}{(1+x)^2}+\frac{2e^x}{(1+x)^3}. \qquad f'''(0)=2$$

$$f^{(iv)}(x)=e^x\log(1+x)+\frac{4e^x}{1+x}-\frac{6e^x}{(1+x)^2}+\frac{8e^x}{(1+x)^3}-\frac{6e^x}{(1+x)^4}.$$

$$f^{(iv)}(0)=0.$$

$$f^{(v)}(x)=e^x\log(1+x)+\frac{5e^x}{1+x}-\frac{10e^x}{(1+x)^2}+\frac{20e^x}{(1+x)^3}$$

$$-\frac{30e^x}{(1+x)^4}+\frac{24e^x}{(1+x)^5}. \qquad f^{(v)}(0)=9.$$

$$\therefore\ e^x\log(1+x)=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{9x^5}{5!}+\cdots\cdots.$$

(5) $\sin^2x=z$ トオクトキハ $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ デアルカラ

$$\sin^2x=z<1,\qquad 1-\cos^2x=z,\qquad \cos^2x=1-z,\qquad \cos x=(1-z)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(1-z)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{16}z^3-\cdots\cdots.$$

$$\therefore\ \cos x=1-\frac{1}{2}\sin^2x-\frac{1}{8}\sin^4x-\frac{1}{20}\sin^6x-\cdots\cdots.$$

(6) $$\frac{1}{9854}=\frac{1}{10000\left(1-\frac{146}{10000}\right)}=\frac{1}{10000}\left(1-\frac{146}{10000}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{10000}\left\{1+\frac{146}{10000}+\left(\frac{146}{10000}\right)^2+\left(\frac{146}{10000}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=0.00010148.$$

第三十一章 函數展開ノ應用

函數ノ極大極小 函數 $f(x)$ 及ビ $f'(x)$ ガ連續ナルトキ $f'(x)=0$ ノ一ツノ根ヲ a トシ, $f(a)$ ガ極値ヲトルカ否カヲ判定スル方法ハ既ニ第十五章ニ於テ述ベタガ Taylor ノ定理ヲ應用スルト, 次ノ如ク容易ニ函數ノ極値ヲ求メルコトガ出來ル. 即チ Taylor ノ定理ニヨリ $f(x+h)$ ヲ展開スルト

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h),\qquad 0<\theta<1.$$

$f(x)$ ノ極値ノ點ニ於テハ $f'(x)=0$ デナケレバナラヌ. 何トナレバ, 然ラザルトキハ, h ヲ充分小ナラシメルト h^2 ハ h ニ較ベテ第二位ノ無限小デアルカラ, $f(x+h)-f(x)$ ノ符號ハ $hf'(x)$ ノ符號ニ依ツテ定マル. 從ツテ h ノ符號ニ依ツテ變化シ, 極値ノ條件ヲ滿足シナイ. 故ニ極値ヲ定メルタメニハ $f'(x)=0$ ノ根ヲ求メ其ノ一ツヲ a トスルト

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h),\qquad 0<\theta<1$$

トナル. 故ニ今 $f''(x)$ ガ $x=a$ ノ近傍ニ於テ連續ナルトキ $f''(a)$ ガ零ニ等シクナイトキハ h ノ充分小ナル値ニ對シテ $f''(a+\theta h)$ ハ $f''(a)$ ト同一符號ヲ有スル. 從ツテ $f(a+h)-f(a)$ ノ正負ハ $f''(a)$ ニヨツテ定マリ, h ノ正負ニハ無關係デアル. 即チ $f(a)$ ハ $f(x)$ ノ極値デアル. 而シテ $f''(a)<0$ ナルトキハ,

$$f(a\pm h)-f(a)<0$$

デアルカラ $f(a)$ ハ $f(x)$ ノ極大値デアル.

又 $f''(a)>0$ ナルトキハ

$$f(a\pm h)-f(a)>0$$

デアルカラ $f(a)$ ハ $f(x)$ ノ極小値デアル.

次ニ $f''(a)=0$ ナル場合ヲ考ヘルト更ニ $f'''(a)$ ガ $x=a$ ノ近傍デ連續ナルトキハ

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^3}{6}f'''(a+\theta_1 h), \qquad 0<\theta_1<1$$

トナル．故ニ $f'''(a)$ ガ零ニ等シクナイトキハ h ノ十分小ナル値ニ對シテ $f'''(a+\theta_1 h)$ ハ $f'''(a)$ ト同一ナル符號ヲ有スル．

從ツテ $f(a+h)-f(a)$ ハ h ノ正負ニ依リ其ノ符號ヲ變ズルカラ $f(a)$ ハ $f(x)$ ノ極値トハナラナイ．

若シ $f'''(a)=0$ ナルトキハ $f'''(a+\theta h)$ ノ符號ハ h ノ絕對値ガ充分小ナルトキハ必ズシモ一定デナイカラ上述ノ判定ハ適用セラレナイ．更ニ第四次マデノ展開式ニツイテ考ヘナクテハナラナイ．

一般ニ $f(x)$ ガ第 n 次マデノ導函數ヲ有シ，且ツ $f^{(n)}(x)$ ガ連續ナルトキ

$$f'(a)=f''(a)=\cdots\cdots\cdots\cdots=f^{(n-1)}(a)=0, \qquad f^{(n)}(a)\neq 0$$

ナルトキハ

$$f(a+h)-f(a)=\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n, \qquad 0<\theta<1$$

デアルカラ次ノ如ク判定スル．

n ガ偶數ニシテ $f^{(n)}(a)>0$ ナラバ $f(a)$ ハ極小値

$f^{(n)}(a)<0$ ナラバ $f(a)$ ハ極大値

n ガ奇數ナラバ $f(a)$ ハ極値デハナイ．

極値ニ關スル本判定法ハ第 n 次ノ導函數ヲ求メルコトガ困難ナ場合ニハ不便デアリ，且ツ $f^{(n)}(x)$ ヲ不連續ナラシメル x ニ對シテハ本法ハ全然使用スルコトガ出來ナイカラ，他ノ方法ニ依ラナケレバナラナイ．

例題 1. $f(x)=x^m(a-x)^n$ ノ極値ヲ求メヨ．但シ a ハ正數ニシテ m, n ハ共ニ正ノ整數トスル．

〔解〕
$$f'(x)=x^{m-1}(a-x)^{n-1}\{am-(m+n)x\}=0.$$

$$\therefore\quad x=0,\quad x=a,\quad x=\frac{am}{m+n}.$$

$$f''(x)=(m-1)x^{m-2}(a-x)^{n-1}\{am-(m+n)x\}$$
$$-(n-1)x^{m-1}(a-x)^{n-2}\{am-(m+n)x\}-(m+n)x^{m-1}(a-x)^{n-1}.$$

$$\therefore\quad f''\left(\frac{am}{m+n}\right)=-(m+n)\left(\frac{am}{m+n}\right)^{m-1}\left(a-\frac{am}{m+n}\right)^{n-1}<0.$$

故ニ $x=\dfrac{am}{m+n}$ ノトキ $f(x)$ ハ極大ニシテ其ノ値ハ

$$\frac{a^{m+n}\cdot m^m\cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

デアル．$m=n=1$ ナルトキハ，之以外ニ極値ハ存在シナイ．

m, n ガ 1 ヨリ大ナルトキハ

$$f^{(m)}(x)=m!(a-x)^n+x(x\text{ ノ多項式}).$$

$$f^{(m-1)}(x)=m!x(a-x)^n+x^2(x\text{ ノ多項式}).$$

$$\therefore\quad f^{(m-1)}(0)=0,\quad f^{(m)}(0)=m!\,a^n>0.$$

故ニ m ガ奇數ナラバ $x=0$ ノトキ $f(x)$ ハ極値ヲトラナイ．m ガ偶數ナラバ $x=0$ ノトキ $f(x)$ ハ極小トナリ，其ノ値ハ 0 デアル．次ニ

$$f^{(n-1)}(x)=(-1)^{n-1}n!(a-x)x^m+(a-x)^2(x\text{ ノ多項式}).$$

$$f^{n}(x)=(-1)^n n!\,x^m+(a-x)(x\text{ ノ多項式}).$$

$$\therefore\quad f^{(n-1)}(a)$$

$$f^{(n)}(a)=(-)^n n!\,n^n.$$

故ニ n ガ奇數ナラバ $x=a$ ノトキ $f(x)$ ハ極値ヲトラズ，n ガ偶數ナラバ $x=a$ ノトキ $f(x)$ ハ極小トナリ，其ノ値ハ零デアル．

例題 2. 次ノ函數ノ極値ヲ求メヨ．

(i) x^x．$x>0$． (ii) $a\cos x+b\cos 2x$． $a>0$， $b>0$．

〔解〕 $f(x)=x^x$ トオクト

$$\log f(x)=x\log x. \qquad \therefore\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=1+\log x.$$

$$\therefore\quad f'(x)=x^x(1+\log x). \qquad \therefore\quad 1+\log x=0.$$

$$f''(x)=x^x(1+\log x)^2+x^{x-1}.$$

$1+\log x=0$ ヨリ $x=\dfrac{1}{e}$．之ヲ $f''(x)$ ニ代入シテ

$$f''\left(\frac{1}{e}\right)>0.$$

故ニ $x=\dfrac{1}{e}$ ハ極小値ヲ興ヘル．而シテ極小値ハ

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}.$$

(ii)
$$f(x)=a\cos x+b\cos 2x, \qquad a>0, \qquad b>0.$$

$$f'(x)=-a\sin x-2b\sin 2x=-\sin x(a+4b\cos x)=0$$

ヨリ，$\sin x=0$, 又ハ $\cos x=\frac{-a}{4b}$.

$$f''(x)=-a\cos x-4b\cos 2x \quad \text{デアルカラ}$$

(I) $\sin x=0$, 即チ $x=n\pi$ ニシテ n ガ偶數ナルトキハ

$$f''(x)=-a-4b<0 \quad \text{ニシテ極大.}$$

$x=n\pi$ ニシテ n ガ奇數ナルトキ $f''(x)=a-4b$ ナルヲ以テ $a>4b$ ナラバ極小，$a<4b$ ナラバ極大デアル.

又 $a=4b$ ナラバ，$f''(x)=f''(n\pi)=0$ ニシテ

$$f'''(x)=a\sin x+8b\sin 2x=0.$$

$$f^{(\text{iv})}(x)=a\cos x+16b\cos 2x=-a+16b>0$$

ナルヲ以テ，コノトキハ極小デアル.

(II) $\cos x=-\frac{a}{4b}$ ナルトキハ

$$f''(x)=-a\cos x-4b(2\cos^2 x-1)=\frac{(4b+a)(4b-a)}{4b}$$

ナルヲ以テ，$4b-a>0$ ナラバ，$f''(x)>0$. 故ニ極小.

$$4b-a<0 \quad \text{ナラバ，} \quad |\cos x|=\frac{a}{4b}>1$$

ナルコトカラ適シナイ.

$4b=a$ ナルトキハ (I) ニ歸シテ極小デアル．以上ノ結果カラ

$x=2m\pi$ ナルトキ極大.

$x=(2m+1)\pi$ ナルトキ

$a\geqq 4b$ ナラバ極小，

$a<4b$ ナラバ極大.

$\cos x=-\frac{a}{4b}$ ナルトキ

$a\leqq 4b$ ナラバ極小.

函數ノ近似値ト誤差 h ノ絶對値ガ小ナルトキ $f(a+h)$ ノ近似値トシテ

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

トスルトキ，其ノ誤差 E ハ剰餘即チ

$$R_n^1=\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n\cdots\cdots\cdots\cdots(1), \qquad 0<\theta<1$$

デアル．コノ式ニ $n=2,3,4,\cdots\cdots$ 等トオクトキハ順次 $f(a+h)$ ノ近似値ヲ得ル．即チ $n=2$ ナルトキハ $f(a+h)$ ノ近似値ハ $f(a)+hf'(a)$ ニシテ其ノ誤差 R_2^1 ハ h ガ第一位ノ無限小ナルトキ第二位ノ無限小デアル．又 $n=3$ ナルトキハ $f(a+h)$ ノ近似値ハ，$f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)$ ニシテ其ノ誤差 R_3^1 ハ第三位ノ無限小デアル．同樣ニシテ (1) 式ノ誤差ハ第 n 位ノ無限小デアル.

h ガ微小ナルトキ誤差ノ限界ヲ定メルニハ R_n^1 ノ値ヲ考ヘレバヨイ．即チ x ガ a ヨリ $a+h$ マデ變ズル間ニ $f^{(n)}(x)$ ノ絶對値ノトル最大値ヲ G トスルト誤差ノ絶對値 E ハ次ノ如クナル.

$$E\leqq\frac{G}{n!}|h|^n.$$

例題 1. $\sin x$ ノ値トシテ x ヲ採用スルトキ，此ノ近似値ノ誤差ガ $\frac{1}{1000}$ ヨリ小ナルタメノ x ノ範圍ヲ求メヨ.

[解] $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots$ ハ交項收斂級數デアルカラ，$\sin x=x$ ノ誤差ヲ E トスルト，次ノ如キ x ノ範圍ヲ求メレバヨイ.

$$|E|<\left|\frac{1}{6}x^3\right|<\frac{1}{1000}.$$

$$\therefore \quad |x|<\sqrt[3]{0.006}<0.1817 \text{ radian.}$$

故ニ $\sin x$ ノ代リニ x ヲ採用スルトキ x ノ値トシテ $-0.1817<x<0.1817$ ヲ採用スルナラバ小數點以下第三位マデ正シイ.

例題 2. $\log_{10}n$ ト $\log_{10}(n+1)$ トノ値ヲ知ツテ $\log_{10}(n+h)$ ノ値ヲ比例部分ノ法則デ求メ，且其ノ近似値ヲ吟味セヨ．但シ $0<h<1$.

[解] $\log_{10}(n+h)-\log_{10}n=d$ トオクト d ハ次ノ如クシテ得ラレル.

$$d=\log_{10}\left(1+\frac{h}{n}\right)=\frac{1}{\log 10}\left\{\log\left(1+\frac{h}{n}\right)\right\}.$$

然ルニ

$$\log\left(1+\frac{h}{n}\right)=\frac{h}{n}-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{h}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{\theta h}{n}\right)}.$$

$$\therefore \quad d=\frac{1}{\log 10}\left\{\frac{h}{n}-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{h}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{\theta h}{n}\right)}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \quad \text{但シ} \quad 0<\theta<1.$$

故＝表差ヲ Δ トスレバ

$$\log_{10}(n+1)-\log_{10}n=\Delta.$$

$$\therefore\quad \Delta=\log_{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\log 10}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{\theta_1}{n}\right)^2}\right\},\quad 0<\theta_1<1\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

n ガ大トナレバ $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ ハ小トナルカラ，(1), (2) ノ括弧内ノ第二項ヲ省略シテ，

$$\frac{d}{\Delta}\doteqdot h,\quad 又ハ\quad d\doteqdot h\Delta.$$

是即チ比例部分ノ法則デ d ヲ求メル式デアル．故＝

$$\log_{10}(n+h)=\log_{10}n+\Delta h$$

トオクト誤差ヲ生ズル．其ノ誤差ヲ ε トシ，$\log_{10}(x+h)$ ノ近似度ヲ吟味スル＝

$$\varepsilon=d-\Delta h$$

デアルカラ (1), (2) ＝ヨリ

$$\varepsilon=\frac{1}{\log 10}\left[\frac{h}{n}-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{h}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{\theta h}{n}\right)^2}-h\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{\theta_1}{n}\right)^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2\log 10}\frac{h}{n^2}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{\theta_1}{n}\right)^2}-\frac{h}{\left(1+\frac{\theta h}{n}\right)^2}\right\}.$$

コヽ＝中括弧ノ中ノ二ツノ分數ハ何レモ 1 ヨリ小ナル正數デアル．從ツテ

$$|\varepsilon|<\frac{1}{(2\log 10)n^2}$$

デアル．

無限小ト極限値 $x=a$ ＝於テ函數 $f(x)$ ハ第 n 次マデ逐次導函數ヲ有シ，函數 $\varphi(x)$ ハ第 m 次マデ逐次導函數ヲ有スルモノトシ，且

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots\cdots\cdots\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\quad f^{(n)}(a)\neq 0,$$

$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\varphi''(a)=\cdots\cdots\cdots=\varphi^{(m-1)}(a)=0,\quad \varphi^{(m)}(a)\neq 0$$

ナルトキハ

$$f(a+h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),\qquad 0<\theta<1.$$

$$\varphi(a+h)=\frac{h^m}{m!}\varphi^{(m)}(a+\theta_1 h),\qquad 0<\theta_1<1.$$

トナルカラ，h ＝較ベテ $f(a+h)$ ハ第 n 位ノ無限小デ $\varphi(a+h)$ ハ第 m 位ノ無限小デアル．而シテ

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{m!}{n!}h^{n-m}\cdot\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{\varphi^{(m)}(a+\theta_1 h)}$$

デアルカラ，$x=a$ ノ近傍＝於テ $f^{(n)}(x)$，$\varphi^{(m)}(x)$ ガ共＝連續ナルトキハ

$$\lim_{h\to 0}f^{(n)}(a+\theta h)=f^{(n)}(a),\qquad \lim_{h\to 0}\varphi^{(m)}(a+\theta_1 h)=\varphi^{(m)}(a).$$

故＝

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(m)}(a)},\qquad m=n\ ナルトキ.$$

$$=0,\qquad n>m\ ナルトキ.$$

$$=\infty,\qquad n<m\ ナルトキ.$$

例題 1. $\log(1-x^2+x^4)$，$\log(1+x^2+x^4)$ ＝於テ x ヲ第一位ノ無限小トスルトキ，其ノ位數ヲ決定シ且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2+x^4)}{\log(1+x^2+x^4)}$$

ヲ求メヨ．

[解]
$$\log(1-x^2+x^4)=\log\frac{1+x^6}{1+x^2}=\log(1+x^6)-\log(1+x^2)$$

$$=\left(x^6-\frac{x^{12}}{2}+\cdots\cdots\cdots\right)-\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\cdots\cdots\cdots\right).$$

故＝第二位ノ無限小デアル．

$$\log(1+x^2+x^4)=\log\frac{1-x^6}{1-x^2}=\log(1-x^6)-\log(1-x^2)$$

$$=\left(-x^6-\frac{x^{12}}{2}-\cdots\cdots\cdots\right)-\left(-x^2-\frac{x^4}{2}-\cdots\cdots\cdots\right).$$

故＝是モ亦第二位ノ無限小デアル．

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2+x^4)}{\log(1+x^2+x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{2}{3}x^6-\cdots\cdots\cdots}{x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{2}{3}x^6\cdots\cdots\cdots}=-1.$$

例題 2. $x-\sin x$ ノ位數ヲ決定セヨ．

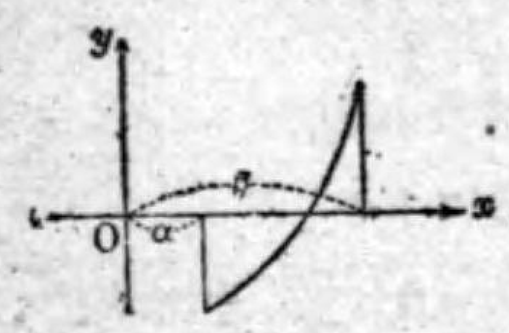
[解] $$x-\sin x = x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\right)$$

$$=x^3\left(\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}+\cdots\cdots\right).$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

即チ x^3 ト同位ノ無限小ナル故第三位ノ無限小デアル.

方程式ノ根ノ近似値 函數 $f(x)$ ハ (α, β) ナル變域ニ於テ第一次, 第二次ノ導函數ヲ有シ, 且 $f(x)$ ハ $x=\alpha$ ト $x=\beta$ トニ於テ反對ノ符號ヲ有シ, $f''(x)$ ハ此ノ變域ニ於テ一定ノ符號ヲ有スルモノトスル. 此ノ假定ヲ圖デ説明スルト次ノ如クナル.



$f(x)$ ハ $x=\alpha$ ト $x=\beta$ トニ於テ反對ノ符號ヲ有スルカラ $f(x)=0$ ハ α ト β トノ間ニ於テ一根ヲ有スル. 而シテ $f''(x)$ ハ此ノ變域ニ於テ一定ノ符號ヲ有スルカラ, $f'(x)=\tan\theta$ ハ常ニ増加シツツアルカ又ハ減少シツヽアル.

故ニ根ハ唯一根ヲ有スルノミデアル.

今此ノ一根ヲ x_0 トシ, 又 α ト β トノ間ニアル値ニシテ $f(x)$ ト $f''(x)$ トヲシテ同一ノ符號ナラシメルモノヲ a トスルトキハ

$$f(x_0)=f(a+x_0-a)=f(a)+\frac{x_0-a}{1}f'(a)$$

$$+\frac{(x_0-a)^2}{2}f''\{a+\theta(x_0-a)\}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$0<\theta<1.$$

$|\alpha-\beta|$ ヲ充分小ナラシメルトキハ x_0-a ハ又充分ニ小トナルカラ (1) ニ於テ最後ノ項ヲ省略スルトキハ根ノ近似値トシテ次ノ式ヲ得ル.

$$x_0=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

然ルニ (1) ノ方程式ニヨリ

$$x_0=a-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{(x_0-a)^2}{2}\frac{f''(c)}{f'(a)},\qquad c=a+\theta(x_0-a).$$

故ニ $$x_0=a_1-\frac{(x_0-a)^2}{2}\frac{f''(c)}{f'(a)}.\qquad \text{コヽニ}\quad a_1-a=-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

$$\therefore\ (x_0-a_1)(a_1-a)=\frac{(x_0-a)^2}{2}\cdot\frac{f(a)f''(c)}{\{f'(a)\}^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

又假定ニヨリ $f(a)f''(c)>0$ デアルカラ

$$\therefore\ a<a_1<x_0,\ \text{又ハ}\ a>a_1>x_0.$$

a_1 ヨリモ更ニ x_0 ニ近イ値ヲ求メルトキハ a_1 ヲ a ノ如クニ考ヘ順次此ノ方法ヲ繰リ返シテ

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)},\qquad a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

トシ, 何程ニテモ精密ニ根ノ値ヲ計算スルコトガ出來ル.

然レドモ c ハ單ニ a ト x_0 トノ間ノ數ト云フノミデ, 之ガ値ヲ求メルコトガ出來ナイ. 故ニ (2) ノ結果ハ次ノ如ク述ベルコトガ出來ル.

今求メントスル根 x_0 ヲ挾ンデ充分之ニ近イ二數 a, b ヲトルトキ a ト b トノ間ノスベテノ x ノ値ニ對シテ $f''(x)$ ガ常ニ $f(a)$ ト同一ノ符號ヲ有スルナラバ近似値

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

ハ又充分根ニ近似セシメルコトガ出來ル.

例題 方程式 $x^3+2x^2-9=0$ ノ正根ノ近似値ヲ求メヨ.

[解] $f(1.5)=3.375+4.5-9=-1.125<0,\quad f(2)=8+8-9=7>0.$

$f(x)$ ハ増加函數ナル故此ノ方程式ハ 1.5 ト 2 トノ間ニ唯一ツノ正根ガアル. 而シテ $f'(1.5)=3\times1.5^2+4\times1.5=13.75$ デアルカラ根ノ近似値ヲ α トスルト

$$\alpha=1.5-\frac{-1.125}{13.75}=1.5+\frac{1.125}{13.75}=1.5801\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

コノ 1.5801 ヲ用ヒテ同樣ナ方法ヲ繰返スト一層根ノ眞値ニ近イ値ヲ得ル.

練習問題 17.

(1) $f(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}$ ノ極値ヲ求メヨ.

(2) 一ツノ楕圓ニ於ケル一双ノ共軛直徑ノ中ニテ其ノ長サノ和ノ最大ナルモノ及ビ最

小ナルモノヲ求メヨ.

(3) 四ツノ與ヘラレタル線分ヲ以テナルベク大ナル四邊形ヲ作ラントス. 如何ニスベキカ.

(4) 周圍ノ長サガ一定ナル扇形ニテ面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ.

(5) 直線 g ノ同ジ側ニ二點 A, B アリ. 今 g 上ニ一點 P ヲトリ AP+BP ヲ最小ナラシメヨ.

(6) x ノ微小ナル値ニ對シテ次ノ式ヲ證明セヨ.

(i) $$\frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{e^x+e^{-x}-2\cos x} \fallingdotseq \frac{1}{2}+\frac{x^2}{4}.$$

(ii) $$(1+x)^{\frac{1}{x}} \fallingdotseq e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2\right).$$

(7) x ガ大ナルトキハ $\log(1+x)$ ハ殆ド

$$\log x+\frac{2}{2x+1}$$

ニ等シキコトヲ證明セヨ.

(8) 圓ノ一ツノ弧ニ對スル弦ノ長サヲ a トシ, 又ソノ半分ノ弧ニ對スル長サヲ b トスレバ, 最初ノ弧ノ長サハ大約 $\dfrac{8b-a}{3}$ ニ等シイコトヲ證明セヨ.

(9) h ガ a ニ比シテ微小ニシテ $x=a$ ト $x=a+h$ トノ間ニ於ケル $f(x)$ ノ第四次ノ導函數ガ有限ナルトキニ $f(a+h)$ ノ値ヲ

$$f(a)+hf'\left(a+\frac{h}{2}\right)$$

ニ等シクオクコトニ由ッテ生ズル誤差ノ絶對値ハ大略

$$\frac{7}{24}|h|^3g$$

ヨリ大ナラザルコトヲ證明セヨ. 但シ g ハ $(a,\ a+h)$ ニ於ケル $|f'''(x)|$ ノ最大値トスル.

(10) 展開式ヲ利用シテ次ノ不定形ノ極限値ヲ求メヨ.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2+x^4)}{\sin^2 x}.$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}.$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right).$

(11) $\sin 1$ ヲ小數第四位マデ正シク計算セヨ.

(12) 次ノ方程式ノ根ヲ小數第五位マデ求メヨ.

(i) $x^3-18x^2+101x-135=0.$ (ii) $x^3+x^2-x-12=0.$

[解　　答]

(1) $f(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}$ ニ於テ

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin x=2\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\cdots\right).$$

$$\therefore\ f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x=4\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^{11}}{11!}+\cdots\cdots\cdots\right).$$

$\therefore$ $f'(x)=0$ ナラシメル x ノ値ハ $x=0$ ニ限ル.

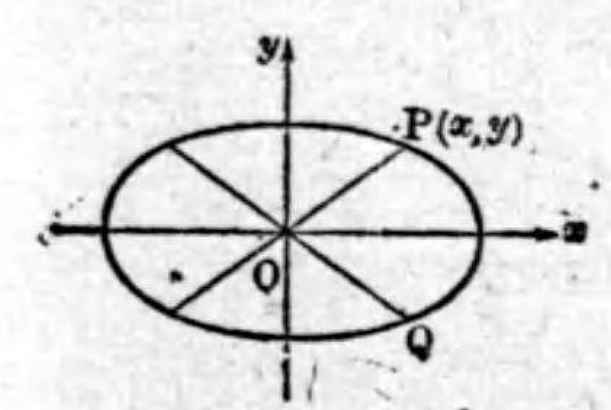
而シテ $f''(x)=e^x-2\cos x+e^{-x}.$ $\therefore$ $f''(0)=0.$

$f'''(x)=e^x+2\sin x-e^{-x}.$ $\therefore$ $f'''(0)=0.$

$f^{(4)}(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}.$ $\therefore$ $f^{(4)}(0)=4>0.$

故ニ $x=0$ ノトキ極小ニシテ其ノ値ハ $f(0)=4$ デアル.

(2) 楕圓ノ方程式ヲ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ トシ一ツノ徑 OP ノ端 P ノ座標ヲ $(x,\ y)$ トスル. 然ルトキハ OP ニ共軛ナル徑 OQ ノ端 Q ノ座標ハ $\left(\dfrac{a}{b}y,\ -\dfrac{b}{a}x\right)$ トナル.



$$\therefore\ \mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}y^2+\frac{b^2}{a^2}x^2}$$

$$=\sqrt{x^2+\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}+\sqrt{a^2-x^2+\frac{b^2}{a^2}x^2}$$

$$=\sqrt{b^2+\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x^2}+\sqrt{a^2-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x^2}.$$

$$\therefore\ f(x)=\sqrt{b^2+e^2x^2}+\sqrt{a^2-e^2x^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トオクコトガ出來ル. 而シテ OP+OQ ノ極値ハ $f(x)$ ノ極値トナル.

$$f'(x)=\frac{e^2x}{\sqrt{b^2+e^2x^2}}-\frac{e^2x}{\sqrt{a^2-e^2x^2}}=e^2x\left\{\frac{1}{\sqrt{b^2+e^2x^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2-e^2x^2}}\right\}$$

$$=e^2x\frac{\sqrt{a^2-e^2x^2}-\sqrt{b^2+e^2x^2}}{\sqrt{b^2+e^2x^2}\cdot\sqrt{a^2-e^2x^2}}=0.$$

$\therefore$ $x=0$, 又ハ $a^2-b^2=2e^2x^2$, 即チ $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}.$

(i) $x=0$ ナルトキ

$f''(x)$ ヲ求メルニ, $f'(x)=\dfrac{Q}{P}$ トオクト $f''(x)=\dfrac{Q'P-QP'}{P^2}.$

而シテ $f'(x)=\dfrac{Q}{P}=0$ ヨリ，$f''(x)=\dfrac{Q'}{P}$．依テ

$$f''(x)=\frac{e^2(\sqrt{a^2-e^2x^2}-\sqrt{b^2+e^2x^2})-e^4x^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{a^2-e^2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2+e^2x^2}}\right)}{\sqrt{b^2+e^2x^2}\sqrt{a^2-e^2x^2}}.$$

コヽニ於テ $x=0$ トスルト

$$f''(0)=\frac{e^2(a-b)}{ab}.\quad a>b \text{ ナルコトカラ } f''(0)>0.$$

即チ $x=0$ ノトキ $f(x)$ ハ極小値ヲトル．而シテ $f(0)=a+b$．
從ツテ極小値ハ $2(a+b)$ トナリ長軸，短軸ノ和トナル．

(ii)　$x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ ナルトキ

$\dfrac{a^2-b^2}{2}=e^2x^2$ デアルカラ

$$f''(x)=\frac{e^2\left\{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right\}-\dfrac{e^2(a^2-b^2)}{2}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}+\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}\right\}}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\,e^2(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}<0.$$

即チ此ノトキ $f(x)$ ハ極大値ヲトル．
而シテ (1) 式ニ

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ ヲ代入スレバ}$$

$$f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{2}}+\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{2}}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}.$$

從ツテ極大値ハ $2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$ トナリ兩共軛徑ガ等シキトキデアル．

(3)　四ツノ與ヘラレタ線分ノ長サヲ夫々 a, b, c, d トシ a, b ノ夾角ヲ θ，c, d ノ夾角ヲ ϕ，ソノ面積ヲ S トスルト

$$S=\frac{1}{2}(ab\sin\theta+cd\sin\phi);$$

又三角法ノ公式ヨリ

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta=c^2+d^2-2cd\cos\phi.$$

邊ノ長サガ一定シテキルカラ ϕ ハ θ ニツレテ變化ス．從ツテ面積 S モ ϕ モ共ニ θ ノ函數デアル．

$$\therefore\ \frac{dS}{d\theta}=\frac{1}{2}\left(ab\cos\theta+cd\cos\phi\frac{d\phi}{d\theta}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

又　$ab\sin\theta=cd\sin\phi\dfrac{d\phi}{d\theta}$．　$\therefore\ \dfrac{d\phi}{d\theta}=\dfrac{ab\sin\theta}{cd\sin\phi}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$

(1), (2) ヨリ

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{1}{2}\left(ab\cos\theta+cd\cos\phi\frac{ab\sin\theta}{cd\sin\phi}\right)=\frac{ab\sin(\phi+\theta)}{2\sin\phi}.$$

故ニ S ガ極値ヲトルタメニハ

$$\sin(\phi+\theta)=0.\qquad\therefore\ \phi+\theta=\pi.$$

而シテ此ノトキ　$\dfrac{d^2S}{d\theta^2}=\dfrac{Q'}{P}=\dfrac{ab\cos(\phi+\theta)}{2\sin\phi}<0.$

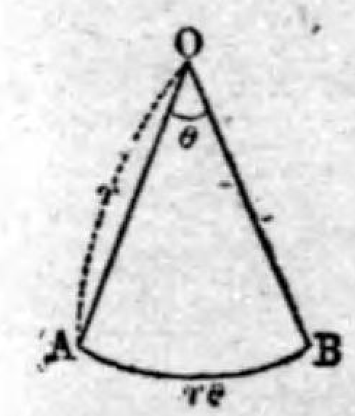
即チ四邊形ガ圓ニ內接スルトキハ其ノ面積ハ最大デアル．而シテ此ノトキ

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\theta).$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

故ニ二邊ガ a, b ニ等シク其ノ夾角ガ θ ニ等シイ三角形ノ外接圓ヲ作リ其ノ圓ニ內接シ三邊ガ夫々 a, b, c ニ等シイ四邊形ヲ作レバソノ第四邊ハ d ニ等シク，面積ハ最大トナル．

(4)　$\angle AOB$ ヲ θ トスルト $\overset{\frown}{AB}=r\theta$．



周圍 $=2r+r\theta=K$．

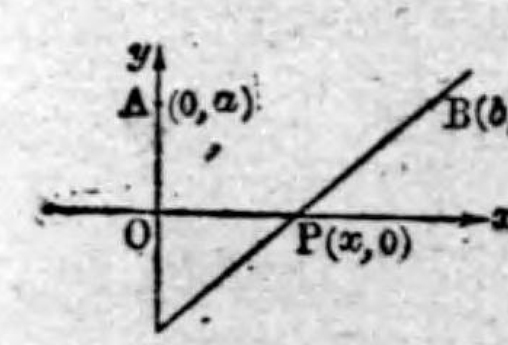
面積 $=\pi r^2\times\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{r^2\theta}{2}$．　且ツ　$\theta=\dfrac{K-2r}{r}$．

$\therefore$ 面積 $=f(r)=\dfrac{r^2\theta}{2}=\dfrac{r(K-2r)}{2}$ トナル．

$f'(r)=\dfrac{K-4r}{2}=0,\qquad f''(r)=-2<0.$

故ニ　$r=\dfrac{K}{4}$ ハ極大値ヲ與ヘル．而シテ求メル面積ハ $\dfrac{K^2}{16}$．

(5)



AO⊥g ナラシメル AO ヲ引キ，g ヲ x 軸，AO ヲ y 軸トスル．但シ OA ヲ y 軸ノ正ノ方向トス．又定點 A, B ノ座標ヲ夫々 $(0, a)$，(b, c) トシ，$(a>0, c>0)$ 條件ニ適スル點 P ノ座標ヲ $(x, 0)$ トスルト

$$AP+BP=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}=f(x).$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}$$

$$=\frac{x\sqrt{(b-x)^2+c^2}-(b-x)\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{(b-x)^2+c^2}}=0.$$

$$\therefore\ x^2(b-x)^2+c^2x^2=(b-x)^2(x^2+a^2).$$

$$(a^2-c^2)x^2-2a^2bx+a^2b^2=0.$$

$$x=\frac{a^2b\pm\sqrt{a^4b^2-a^2b^2(a^2-c^2)}}{a^2-c^2}=\frac{a^2b\pm abc}{a^2-c^2}.$$

$$x=\frac{ab}{a+c},\qquad x=\frac{ab}{a-c}.$$

$f'(x)=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}$ トスルト, $f''(x)=\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{P}}$ デアルカラ

$$f''(x)=\frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}-\frac{x(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}+\sqrt{x^2+a^2}-\frac{x(b-x)}{\sqrt{x^2+b^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{(b-x)^2+c^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+a^2}\{(b-x)^2+c^2-x(b-x)\}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}\{x^2+a^2-x(b-x)\}}{(x^2+a^2)\{(b-x)^2+c^2\}}.$$

尙上式＝ $f'(x)=0$ ナル關係ヲ適用スルト

$$f''(x)=\frac{x(c^2-a^2)+a^2b}{(x^2+a^2)\{(b-x)^2+c^2\}}.$$

而シテ $a>0,\ c>0$ ナルコト＝注意シテ驗算スレバ

$x=\frac{ab}{a+c}$ ハ $f'(x)=0$ ヲ滿足スルガ $x=\frac{ab}{a-c}$ ハ無緣根ナルコトヲ知ル.

$$f''(x)=\frac{abc}{x\text{ ノ如何ナル實數値＝對シテモ正}}>0.$$

從ツテ

$$f\left(\frac{ab}{a+c}\right)=\sqrt{b^2+(a+c)^2}$$

ハ極小値デアル.

$$x=\frac{ab}{a+c}\ \text{ナルトキ},\ \mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\sqrt{b^2+(a+c)^2}$$

ガ最小＝シテ, P ハ A ノ x 軸＝關スル對稱點ト B トヲ結ブ直線ト x 軸トノ交點トシテ得ラレル.

(6) (i) $\log(1+x+x^2)=(x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+\frac{(x+x^2)^3}{3}-\frac{(x+x^2)^4}{4}+\cdots\cdots$

$$\log(1-x+x^2)=(-x+x^2)-\frac{(-x+x^2)^2}{2}+\frac{(-x+x^2)^3}{3}-\frac{(-x+x^2)^4}{4}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\ \log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)=x^2+\frac{1}{2}x^4+(x^6\text{ 以上ノ項})$$

又 $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$2\cos x=2-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^4}{4!}-\cdots\cdots$$

$$\therefore\ e^x+e^{-x}-2\cos x=2x^2+(x^6\text{ 以上ノ項}).$$

$$\therefore\ \frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{e^x+e^{-x}-2\cos x}=\frac{x^2+\frac{1}{2}x^4+(x^6\text{ 以上ノ項})}{2x^2+(x^6\text{ 以上ノ項})}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}x^2+(x^4\text{ 以上ノ項})}{(2+x^4\text{ 以上ノ項})}.$$

故＝ x^4 以上ノ項ヲ省略スルト

$$\frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{e^x+e^{-x}-2\cos x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^2.$$

(ii) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ トオクト

$$\log f(x)=\frac{1}{x}\log(1+x)=\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\cdots\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\cdots\cdots$$

$$\therefore\ f(x)=e^{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\cdots\cdots}$$

$$=ee^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\cdots\cdots}$$

$$=e\left\{1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\cdots\cdots\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\cdots\cdots\right)^2}{2!}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\doteqdot e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2\right).$$

(7) $\log(1+x)-\log x\ =\ \frac{1}{2x+1}=z$ ヲ代入スルト

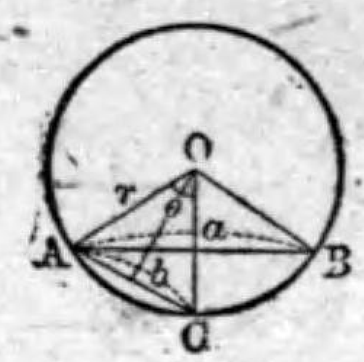
$$\log(1+x)-\log x=\log\frac{1+x}{x}=\log\frac{1+z}{1-z}$$

$$=\log(1+z)-\log(1-z)$$

$$=2\left\{\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\cdots\cdots\right\}=2\left\{\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3(2x+1)^3}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\doteqdot\frac{2}{2x+1}.$$

8）題意＝ヨリ　$a\doteqdot 2r\sin\theta,\quad b=2r\sin\frac{\theta}{2}.$　但シ　$\theta=\angle\mathrm{AOC}.$



$$\therefore\quad \frac{8b-a}{3}=\frac{1}{3}\left\{16r\sin\frac{\theta}{2}-2r\sin\theta\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left[16r\left\{\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^5-\cdots\cdots\right\}\right.$$

$$\left.-2r\left\{\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\cdots\cdots\right\}\right]$$

$$=\frac{r}{3}\left\{6\theta-\frac{\theta^5}{80}+\frac{\theta^7}{2688}-\cdots\cdots\right\}\doteqdot 2r\theta.$$

$$\widehat{\mathrm{AB}}=2r\theta.\qquad\therefore\ \widehat{\mathrm{AB}}=\frac{8b-a}{3}.$$

（9）Taylor ノ定理＝ヨリ

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f'''(a+\theta h).\qquad 0<\theta<1.$$

$$f'\left(a+\frac{h}{2}\right)=f'(a)+\frac{h}{2}f''(a)+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2f'''\left(a+\theta_1\frac{h}{2}\right).\qquad 0<\theta_1<1.$$

故＝題意＝於ケル誤差ヲ E トスレバ

$$|\mathrm{E}|=\left|f(a+h)-f(a)-hf'\left(a+\frac{h}{2}\right)\right|=\left|\frac{h^3}{6}f'''(a+\theta h)-\frac{h^3}{8}f'''\left(a+\theta_1\frac{h}{2}\right)\right|$$

$$<\frac{|h|^3}{2}\left\{\frac{|f'''(a+\theta h)|}{3}+\frac{\left|f'''\left(a+\theta_1\frac{h}{2}\right)\right|}{4}\right\}$$

$$<\frac{|h|^3}{2}\left(\frac{g}{3}+\frac{g}{4}\right)=\frac{7}{24}|h|^3g.$$

（10）（i）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log(1+x^2+x^4)}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2+x^4)-\frac{1}{2}(x^2+x^4)^2+\frac{1}{3}(x^2+x^4)^3-\cdots\cdots}{\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots\cdots\right)^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+\frac{1}{2}x^4-\cdots\cdots}{x^2-\frac{1}{3}x^4+\cdots\cdots}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\cdots\cdots}{1-\frac{1}{3}x^2+\cdots\cdots}=1.$$

（ii）$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x-x^2\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\left\{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{3x^3}\cdots\cdots\cdots\right\}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{4x^2}\cdots\cdots\cdots\right]=\frac{1}{2}.$$

（iii）問題（6）ノ（ii）ヨリ　$(1+x)^{\frac{1}{x}}\doteqdot e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2\right).$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e-e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2\right)}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}-\frac{11}{24}x\right)e=\frac{e}{2}.$$

（iv）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2x}\cdot\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

$$=1\times2\times\frac{1}{3!}=\frac{1}{3}.$$

（11）
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \sin1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{array}{rl} 1 &=1.00000\\ +)\ \frac{1}{5!}&=0.00833\\ \hline &\ \ 1.00833\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{rl} \frac{1}{3!}&=0.16667\\ +)\ \frac{1}{7!}&=0.00019\\ \hline &\ \ 0.16686\end{array}$$

第四項マデトメトソノ誤差ハ交番級數ノ性質カラ次ノ項 $\frac{1}{9!}$ ヨリ小デアル。然ル＝ $\frac{1}{9!}\doteqdot0.000003$ デアルカラ第四位マデ正シク算出スル＝ハ $\frac{1}{9!}$ 以下ヲ省略シテヨイ.

$$\therefore\quad \sin1=1.00833-0.16686=0.84147.$$

故＝第四位マデ正シイ値ハ 0.8414 デアル.

（12）（i）$f(x)=x^3-18x^2+101x-135=0$ トオクト

$$f(1)=-51<0,\qquad f(2)=3>0$$

デアルカラ此ノ方程式ハ 1 ト 2 トノ間＝根ヲ有スル．而シテ此ノ間ノ x ノ値＝對シテ

$$f'(x)=3x^2-36x+101>0,\qquad f''(x)=6(x-6)<0.$$

而シテ $f(1)$ ト $f''(1)$ トハ同符號デアルカラ此ノ場合 1 カラ始メルト

$$a_1=1-\frac{f(1)}{f'(1)}=1+\frac{51}{68}=1.75.$$

$$a_2=1.75-\frac{f(1.75)}{f'(1.75)}=1.75+\frac{8.015625}{47.1875}$$

$$=1.75+0.169867\cdots\cdots=1.919867\cdots\cdots$$

(ii) $f(x)=x^3+x^2-x-12=0$ トオクト $f(2)<0,\ f(3)>0.$

故ニ 2 ト 3 トノ間ニ一根ヲ有スル. 而シテコノ間ノ x ノ値ニ對シテ

$$f'(x)=3x^2+2x-1>0,\qquad f''(x)=6x+2>0,$$

$$f(3)=21>0.$$

$$\therefore\ a_1=3-\frac{f(3)}{f'(3)}=3-\frac{21}{32}=3-0.65625=2.34375.$$

第七編 偏導函數

第三十二章 偏微分法

二變數ノ函數 半徑 x, 高サ y ナル直圓壔ノ體積 V ハ

$$V=\pi x^2 y$$

デ表ハサレル. 即チ V ハ x, y ノ値ガ定マルトキ定マリ x, y ノ値ガ變レバ變ル. 斯樣ニ二ツノ變數 x ト y トガアツテ x, y ノ値ガ定マルトキ, 之ニヨツテ第三ノ變數 z ノ値ガ定マルトキ z ヲ x 及ビ y ノ函數トイヒ, 之ヲ表ハスニ

$$z=f(x,\ y),\quad z=\phi(x,\ y),\quad z=F(x,\ y)$$

等ノ記號ヲ用ヒル. 而シテ $x=a$, $y=b$ ナルトキノ z ノ値ヲ表ハスニ夫々

$$z=f(a,\ b),\quad z=\phi(a,\ b),\quad z=F(a,\ b)$$

等ヲ以テスル. コヽニ注意スベキハ此等ノ二ツノ自變數 x ト y トハ何等ノ函數關係ガナク自由ニ變動シ得ルコトデアル, 若シ x, y ノ間ニ何等カノ函數關係, 例ヘバ $y=mx+b$ ノ如キ關係ガアルトキハ此ノ y ノ値ヲ $z=f(x,\ y)$ ニ代入シタ $z=f(x,\ mx+b)$ ハ x 唯一ツノ函數トナリ最早二變數ノ函數デハナクナル.

一ツノ變數ノ函數ノ場合ト同樣 z ガ x ト y トノ函數ナルトキ z ノ取ル値ガ二ツ以上ノ場合ガアル. 例ヘバ

$$z^2=r^2-x^2-y^2 \quad ヨリ \quad z=\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

ヲトリ z ハ x 及ビ y ノ一値函數トシテ取扱フ. 而シテ此ノ函數關係ニ於テハ $x^2+y^2\leqq r^2$ ナル制限ノ下ニアル x, y ノ組ニ對シテノミ z ハソノ函數トナル. 斯樣ニ或制限ノ下ニアル x, y ノ組ノ全體ヲ函數 x, y ノ變域又ハ函數 z ノ定義域ト云フ.

函數 $z=f(x,\ y)$ ニ於テ x, y ガ夫々或有限確定値 a, b ニ限リナク近迫スル

トキ z ガ又或有限確定値 c ニ限リナク近迫スルナラバ c ヲ $x\to a,\ y\to b$ ナルトキノ $z=f(x,\ y)$ ノ極限値ト云ヒ

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,\ y)=c$$

ナル記號ヲ以テ表ハス．例ヘバ

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{3x-2y}{x^2+2y^2}=-\frac{1}{9}.\qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to \infty}}\frac{3x-y}{2x-2y}=\frac{1}{2}.$$

コヽニ注意スベキハ $z=f(x,\ y)$ ニ於テ $y=y_1$ ナル一定値ヲトラシメテ，$z=f(x,\ y_1)$ トスルトキハ z ハ x ノミノ函數トナリ，コヽニ於テ $x\to a+0$ ト $x\to a-0$ トニヨリ z ノ値ガ異ナル場合ガアル．從ツテコノ z ノ極限ニ對シテ y_1 ヲ變數ト見做シテ $y_1\to b$ ナラシメルトキハ z ノ極限値ハ一般ニ二ツアルコトヽナル．然ルニ之ニ反シテ最初ニ $y\to b$ ナラシメ，然ル後 $x\to a+0$，$x\to a-0$ ナラシメルトキ唯一ツノ極限値ヲ得ルコトガアル．斯樣ニ $x\to a$ ト $y\to b$ トノ何レヲ先ニスルカ，又ハ x ト y トノ極限値ヲトルトキノ相互關係ニヨリ，$f(x,\ y)$ ノ極限値ガ異ナル場合ガアル．例ヘバ

$$f(x,\ y)=\frac{x-y-mx^2+ny^2}{x+y+px^2+qy^2}$$

ナルトキ

$$\lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x,\ y)\}=\lim_{y\to 0}\frac{-1+ny}{1+qy}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x,\ y)\}=\lim_{x\to 0}\frac{1-mx}{1+px}=1$$

トナリ異ナル極限値ヲ有スル．故ニ今後

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,\ y)=c$$

ハ $x,\ y$ ノ關係如何ニ拘ラズ同一ノ極限値 c ヲ有スル記號トシテ取扱フコトトスル．

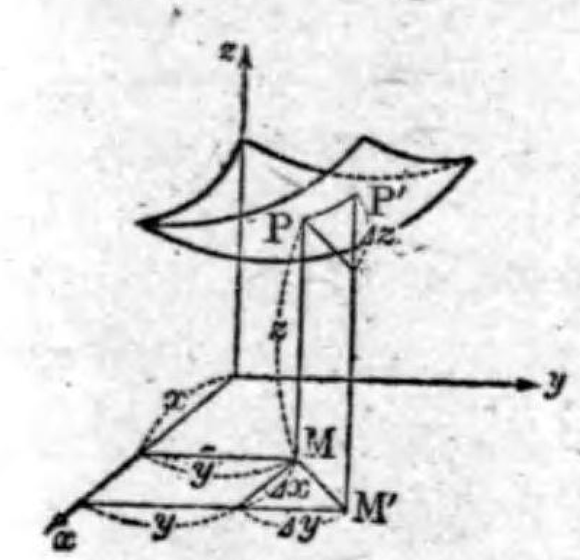
函數 $z=f(x,\ y)$ ニ於テ $x,\ y$ ガ如何樣ニ其ノ極限値 $a,\ b$ ニ近迫スルトモ

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,\ y)=f(a,\ b)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナルトキハ，此ノ函數ハ $x=a,\ y=b$ ニ於テ連續デアルト云フ．而シテ函數 z ガ x 及ビ y ノ或變域内ノスベテノ値ニ對シテ常ニ連續ナルトキハ，其ノ函數ハ其ノ變域ニ於テ連續デアルト云フ．(1) 式ハ之ヲ約言スルト次ノ如クナル．

自變數 $x,\ y$ ノ一方又ハ双方ニ非常ニ小ナル變化ヲ與ヘルトキノ函數 z ノ値ノ變化モ亦非常ニ小デアル．

コノコトヲ幾何學的ニ表ハスニハ，空間ニ於テ互ニ直交スル三直線ヲ x 軸，y 軸，z 軸ニトリ $z=f(x,\ y)$ ノ表ハス面ヲ作リ，其ノ上ノ一定點 P ノ座標ヲ $(x,\ y,\ z)$ トシ，點 P′ ノ座標ヲ $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ トスルト $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ ハ夫々 $x,\ y,\ z$ ノ增分トナル．而シテ點 P ニ於ケル函數ノ値ハ MP ニシテ，若シ函數 z ガ P ニ於テ連續ナルトキ $\Delta x,\ \Delta y$ ガ如何ヤウニ 0 ニ近迫スルトモ Δz モ亦 0 ニ近迫スル．卽チ M′P′ ハ P′ ガソノ面上ニ於テ如何ナル經路ヲ經テ P ニ近迫スルトモ常ニ極限ニ於テ MP ト一致スル．



＊一變數ニ關スル極限値，連續ニ關スル諸定理ハ二ツノ變數ノ場合ニモ其ノマヽ成立スルコトヲ容易ニ證明スルコトガ出來ル．

偏導函數　$z=f(x,\ y)$ ヲ $x,\ y$ ノ或變域ニ於テ連續ナル函數トスル．$x,\ y$ ハ自由ニ變動シ得ルカラ先ヅ y ヲ一定ニ保チ x ヲ $x+h$ ニ變動セシメルトキハ $f(x,\ y)$ ハ $f(x+h,\ y)$ ニ變ハル．勿論 $f(x,\ y)$ ガ $x,\ y$ ノ連續函數ナルコトカラ y ヲ一定ニ保ツテモ $f(x,\ y)$ ハ x ノ函數タルコトニハ變リガナイ．故ニ $h\to 0$ ナルトキハ $\{f(x+h,\ y)-f(x,\ y)\}\to 0$ デアル．然ルトキハ $h\to 0$ ナル極限ニ於テ

$$\frac{f(x+h,\ y)-f(x,\ y)}{h}$$

ガ極限値ヲ有スルトキハ，此ノ極限値ハ一般ニ x,y ノ函數デアル．之ヲ x ニ關スル $f(x,\ y)$ ノ**偏導函數**ト云ヒ $f_x(x,\ y)$ 又ハ $z_x,\ z'_x$ 等デ表ハス．卽チ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,\ y)-f(x,\ y)}{h}=f_x(x,\ y)=z_x$$

デアル．例ヘバ $f(x,\ y)=x^2-3xy+y^2+c$ ナルトキハ

$$f_x(x,\ y)=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2-3(x+h)y+y^2+c\}-(x^2-3xy+y^2+c)}{h}$$

$$=2x-3y$$

トナル．同様＝シテ x ヲ一定値＝保チ y ヲ $y+k$ ＝變動セシメルトキ，$k\to 0$ ナル極限＝於テ

$$\frac{f(x,\ y+k)-f(x,\ y)}{k}$$

ガ極限値ヲ有スルトキハ，此ノ極限値モ亦一般＝ x, y ノ函數デアル．之ヲ y ＝關スル $f(x,\ y)$ ノ偏導函數ト云ヒ $f_y(x,\ y)$ 又ハ z_y, z'_y 等デ表ハス．即チ

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x,\ y+k)-f(x,\ y)}{k}=f_y(x,\ y)=z_y$$

デアル．例ヘバ $f(x,\ y)=x^2-3xy+y^2+c$ ナルトキハ

$$f_y(x,\ y)=\lim_{k\to 0}\frac{\{x^2-3x(y+k)+(y+k)^2+c\}-\{x^2-3xy+y^2+c\}}{k}=-3x+2y$$

トナル．

$f_x(x,\ y)$, $f_y(x,\ y)$ ノ定義カラ明ナル如ク $f_x(x,\ y)$ ヲ求メル＝ハ $f(x,\ y)$ ノ y ヲ常數ト見做シテ一變數ノ微分法ヲ適用スレバヨイ．又 $f_y(x,\ y)$ ヲ求メル＝ハ $f(x,\ y)$ ノ x ヲ常數ト見做シテ y ＝ツイテ一變數ノ微分法ヲ適用スレバヨイ．

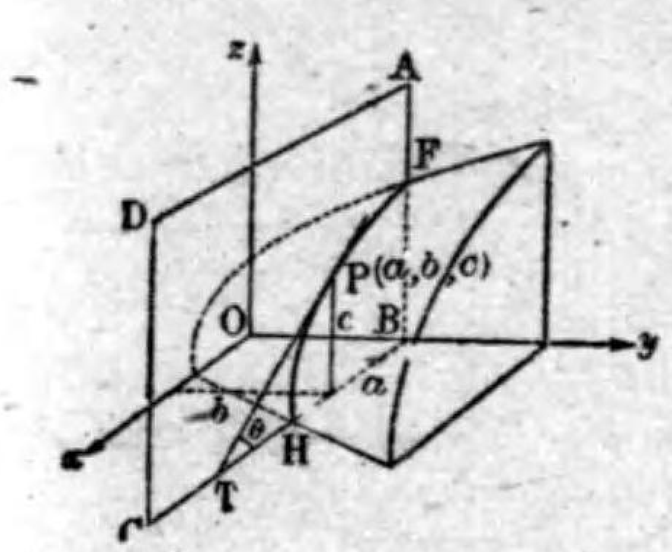
例ヘバ，$f(x,\ y)=\sin^{-1}\dfrac{x}{y}$ ナルトキハ

$$f_x(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

$$f_y(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}}}\cdot\frac{-x}{y^2}=\frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$$

一變數ノ函數 $z=f(x)$ ＝於テ $f'(a)$ ハ $x=a$ ＝應ズル曲線上ノ點＝於ケル

切線ガ x 軸ノ正ノ方向トナス角ノ正切ナルコトハ既＝述ベタ．コノコトハ偏導函數＝ツイテモ亦成リ立ツ．即チ $z=f(x,\ y)$ ヲ二變數 x, y ノ連續函數トスルトキ，$f_x(x,\ y)$ ハ y ヲ常數ト見タトキノ z ノ導函數デアルカラ，之＝例ヘバ，$y=b$ ヲ代入スルト $f_x(x,\ b)$ トナル．之ハ $z=f(x,\ y)$ ガ表ハス曲面ヲ $y=b$ ナル平面＝テ截ツタ截口ノ曲線＝應ズル導函數デアルカラ，此ノ曲線上ノ各點＝於ケル切線ノ方向係數ハ即チ $f_x(x,\ b)$ デアル．故＝ $f_x(a,\ b)$ ハ此ノ曲線上 $x=a$ ナル點＝於ケル切線ガ xy 平面トナス角ノ正切即チ方向係數ヲ與ヘルノデアル．此ノコトヲ圖デ説明スルト次ノ如クナル．



$z=f(x,\ y)$ ガ表ハス曲面ヲ左圖ノ如キモノトシ，曲面上ノ點 P(a, b, c) ヲ過リ xz 平面＝平行ナル平面 ABCD ＝テ此ノ曲面ヲ截ツタ截口ノ曲線ヲ HPF トスル．然ルトキハ平面 ABCD ノ方程式ハ $y=b$ デアルカラ AB ヲ z 軸，BC ヲ x 軸ト考ヘルト曲線 HPF ノ方程式ハ

$$z=f(x,\ b)$$

デアル．此ノ際＝於ケル $f_x(x,\ b)$ ハ $\dfrac{dz}{dx}$ ト同一意味ヲ有スル．從ツテ

$$f_x(a,\ b)=\tan\theta=\text{P ＝於ケル截口ノ曲線ノ切線ノ傾斜.}$$

同様＝シテ $x=a$ ナル平面＝テ曲面 $z=f(x,\ y)$ ヲ截ツタ截口ノ曲線ノ P 點＝於ケル切線ノ傾斜ハ $f_y(a,\ b)$ デ表ハサレル．

全微分ト偏導函數　一變數ノ函數 $y=f(x)$ ＝於テ $dy=f'(x)dx$ ヲ $f(x)$ ノ微分ト呼ブコトハ既＝述ベタ．今 $z=f(x,\ y)$ ＝於テ x ガ $x+\Delta x$, y ガ $y+\Delta y$ ＝變動シタトキノ z ノ變動ヲ $z+\Delta z$ トスルト

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$
$$=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)+f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$$
$$=\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\cdot\Delta x+\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}\cdot\Delta y.$$

コヽ＝於テ $\Delta x\to dx$, $\Delta y\to dy$ ノトキ $\Delta z\to dz$ トスルト

$\Delta x \to dx$ ＝對シテ

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \longrightarrow f_x(x, y).$$

$\Delta y \to dy$ ＝對シテ

$$\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y} \longrightarrow f_y(x, y)$$

トナル．從ツテ

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

コノ式＝於テ y ヲ常數ト考ヘルトキハ $dy=0$ トナリ

$$dz = f_x(x, y)dx$$

トナル．此ノ dz ハ y ガ一定ナルトキノ z ノ徴分デアルカラ特＝之ヲ ∂z ト書キ表シ，其ノトキノ dx ヲ ∂x ト書クト

$$\partial z = f_x(x, y)\partial x$$

トナル．之ヲ z ノ x ＝關スル**偏徴分**ト云フ．而シテ $f_x(x, y)$ ハ偏徴分 ∂z ノ係數デアルカラ之ヲ x ＝關スル**偏徴分係數**ト云フ．

同樣＝シテ $dx=0$ ナルトキハ

$$dz = f_y(x, y)dy$$

トナル．コノ dz ハ x ガ一定ナルトキノ z ノ徴分デアルカラ特＝之ヲ ∂z ト書キ其ノトキノ dy ヲ ∂y ト書クト

$$\partial z = f_y(x, y)\partial y$$

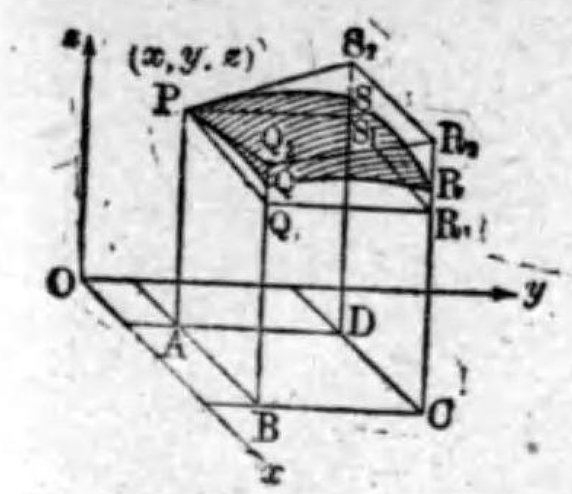
トナル．之ヲ z ノ y ＝關スル偏徴分ト云フ．而シテ $f_y(x, y)$ ハ偏徴分 ∂y ノ係數デアルカラ之ヲ y ＝關スル偏徴分係數ト云フ．偏徴分係數ノ記號ヲ用ヒルト (1) 式ハ次ノ如クナル．

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

即チ dz ハ偏徴分 $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ ト $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ トノ和ヨリ成ル．故＝之ヲ z ノ**全徴分**ト云フ．

偏導函數ト偏徴分係數トハ全ク同一ノモノデアル．

一變數ノ場合ト同樣＝全徴分 dz ト偏徴分 ∂z トハ z ノ實際ノ增分ト異ナルコトハ作圖＝依ツテ說明スルコトガ出來ル．之ガタメ＝空間＝於テ互＝直交スル三ツノ直線ヲ x 軸，y 軸，z 軸トシ，$z=f(x, y)$ ナル曲面ヲ作ル．曲面上ノ任意ノ一點 $P(x, y, z)$ ヨリ xy 平面＝下シタ垂線ノ足ヲ A トシ，各邊ガ夫々 x 軸，y 軸＝平行＝シテ且 A ヲ頂點トスル矩形 ABCD ノ邊 AB ヲ dx，AD ヲ dy トスル．



B, C, D ＝於テ xy 平面＝立テタ垂線ト $z=f(x, y)$ 面トノ交點ヲ夫々 Q, R, S トスル．又 xy 平面＝平行ナル矩形 $PQ_1R_1S_1$ ヲ完成スル．而シテ P ＝於テ平面 APQB 內＝アル曲面ノ切線ヲ PQ_2，平面 APSD 內＝アル曲面ノ切線ヲ PS_2 トスル．然ルトキハ

$$BQ = f(x+dx, y), \quad DS = f(x, y+dy), \quad CR = f(x+dx, y+dy),$$

$$f_x(x, y) = \tan Q_2PQ_1, \qquad f_y(x, y) = \tan S_2PS_1$$

デアル．從ツテ

$$Q_1Q_2 = f_x(x, y)\partial x = \partial z, \qquad \text{但シ} \quad \partial y = 0,$$

$$S_1S_2 = f_y(x, y)\partial y = \partial z, \qquad \text{但シ} \quad \partial x = 0$$

トナル．是即チ偏徴分ノ圖形表示デアル．

又二ツノ切線 PQ_2，PS_2 ヲ含ム平面ヲ作ルト曲面 $z=f(x, y)$ ガ切平面ヲ有スル限リ P ＝於ケル此ノ曲面ノ切平面トナル．之ト垂線 CR トノ交點ヲ R_2 トスルト

$$R_1R_2 = Q_1Q_2 + S_1S_2 = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

トナル．コレ即チ全徴分ノ圖形表示デアル．但シ此ノ際 x, y 共＝變動スルカラ PQ_1 ヲ ∂x トセズシテ dx トシ，PS_1 ヲ dy トシナケレバナラナイ．

R_2 ハ一般＝ R トハ一致シナイ．而シテ R_1R ハ函數 z ノ dx, dy ＝對シテノ P ＝於ケル增分＝シテ R_1R_2 ハ P ＝於ケル全徴分デアル．故＝全徴分 R_1R_2 ト增分 R_1R トハ一致シナイ．然レドモ其ノ差 RR_2 ハ dx, dy, 即チ PQ_1, PS_1 ガ無限小ナルトキ之＝比ベテ更＝高位ノ無限小トナルカラ省略スルコトガ出來ル．

高次導函數 函數 $z=f(x,y)$ ノ偏導函數ハ一般ニ x 及ビ y ノ函數デアルカラ更ニ之ヲ偏微分スルコトガ出來ル．其ノ結果ヲ表ハスニ次ノ如キ記號ヲ用ヒル．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}=f_{xx}(x,y)\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{xy}=f_{xy}(x,y)\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{yx}=f_{yx}(x,y)\cdots\cdots(3)$$

斯樣ニ二度續ケテ偏微分シタモノヲ**第二次偏導函數**ト云フ．

例題 1. $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ナルトキ $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ ヲ求メヨ．

〔解〕 $f_x(x,y)=\frac{1}{2}(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=-x(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$.

$f_y(x,y)=\frac{1}{2}(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)=-y(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$.

$$\therefore\quad f_{xx}(x\ y)=-(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}+x\times\frac{1}{2}(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$$
$$=-(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}-x^2(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$f_{xy}(x,y)=-(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}xy$.

$f_{yx}(x,y)=-(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}xy$.

(1), (2), (3) ヲ更ニ偏微分スルト

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial x^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=z_{xxx}=f_{xxx}(x,y).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=z_{yxx}=f_{yxx}(x,y).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=z_{xyx}=f_{xyx}(x,y)$$

トナル．コレヲ**第三次偏導函數**ト云フ．第三次偏導函數ニハ是等ノ外ニ $f_{xxy}(x,y)$, $f_{yyx}(x,y)$, $f_{yyy}(x,y)$ 等ガアル．

定理 $z=f(x\,y)$ **ガ連續ナル變域ニ於テ**

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

ガ又連續ナルトキハ次ノ等式ガ成立スル．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

〔證明〕 $f(x,y)$ ニ於テ y ヲ一定ニ保チ x ヲ $x+h$ ニ變動セシメタトキノ函數ノ增分

$$f(x+h,y)-f(x,y)$$

ハ x ノミノ函數ト考ヘルコトガ出來ルカラ平均値ノ定理ニ依リ

$$f(x+h,y)-f(x,y)=hf_x(x+\theta_1h,y)\cdots\cdots(1)\quad 0<\theta_1<1$$

ノ兩邊ニ於テ x,h ヲ一定ニ保チ y ヲ $y+k$ ニ變動セシメルト兩邊ノ增分ハ

$$\{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)\}-\{f(x+h,y)-f(x,y)\}$$
$$=hf_x(x+\theta_1h,y+k)-hf_x(x+\theta_1h,y)$$
$$=h\{f_x(x+\theta_1h,y+k)-f_x(x+\theta_1h,y)\}$$
$$=hk\{f_{xy}(x+\theta_1h,y+\theta_2k)\}\cdots\cdots(2)\quad 0<\theta_2<1.$$

次ニ $f(x,y)$ ニ於テ x ヲ一定ニ保チ y ヲ $y+k$ ニ變動セシメルトキノ函數ノ增分

$$f(x,y+k)-f(x,y)$$

ハ y ノミノ函數ト考ヘルコトガ出來ルカラコレニ平均値ノ定理ヲ適用スルト

$$f(x,y+k)-f(x,y)=kf_y(x,y+\theta_3k).\qquad 0<\theta_3<1.$$

コノ式ノ y,k ヲ一定ニ保チ x ヲ $x+h$ ニ變動セシメルト

$$\{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)\}-\{f(x,y+k)-f(x,y)\}$$
$$=kf_y(x+h,y+\theta_3k)-kf_y(x,y+\theta_3k)$$
$$=k\{f_y(x+h,y+\theta_3k)-f_y(x,y+\theta_3k)\}$$
$$=hkf_{yx}(x+\theta_4h,y+\theta_3k)\cdots\cdots(3)\quad 0<\theta_4<1.$$

(2) ト (3) トノ左邊ハ全ク同一デアルカラ右邊ヲ等シクオクト

$$f_{xy}(x+\theta_1h,y+\theta_2k)=f_{yx}(x+\theta_4h,y+\theta_3k).$$

假定ニヨリ f_{xy}, f_{yx} ハ共ニ連續デアルカラ $h\to 0$, $k\to 0$ ナル極限ニ於テハ

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y).$$

卽チ定理ハ證明サレタ．

斯樣ニ第二次偏微分ノ順序ヲ變更シ得ルコトヲ證明スルコトガ出來タカラ，之ヨリ一般ニ高次ノ偏導函數ニ於テモ其等ガ連續ナル限リ偏微分ノ順序ヲ任意ニ變更シ得ルコトヲ容易ニ類推スルコトガ出來ル．

例ヘバ

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$$

從ツテ今後

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x},\qquad f_{yxx}(x,y)$$

$u = f(x, y, z) \quad z = \varphi(x, y)$
$y = y$

等ハ字母ノ順序ニ從ツテ次ノ如ク書ク.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \qquad f_{xxy}(x, y).$$

例題 2. $z = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ ナルトキ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ヲ求メ, $x \to 0$, $y \to 0$ ナルトキノソノ極限値ハ x ト y トノ何レヲ先ニスルカニヨリ異ナルコトヲ證明セヨ.

[證明]
$$z = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)(x^3 - 3xy^2) - 2y(x^3 y - x y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2+y^2)^2(5x^4 - 12x^2y^2 - y^4) - 2(x^2+y^2)\cdot 2x(x^5 - 4x^3y^2 - xy^4)}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{(x^2+y^2)(5x^4 - 12x^2y^2 - y^4) - 4x(x^5 - 4x^3y^2 - xy^4)}{(x^2+y^2)^3}$$
$$= \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2+y^2)^3}.$$

$\frac{x^2(x^4)}{x^6}$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\} = \lim_{x \to 0} \frac{x^6}{x^6} = 1. \qquad \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^6}{y^6} = -1.$$

函數ノ函數ノ偏微分法

函數ノ函數ノ偏微分法 $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \phi(x, y)$ トスルトキ z ハ x, y ノ函數トナル. 故ニ u, v ハ x, y ニ關シテ微分可能ニシテ z ハ x, y ニ關シテ連續ナル偏導函數ヲ有スルモノトスル.

今 y ヲ一定ニ保チ x ヲ $x + \Delta x$ ニ變化セシメルト u, v ハ夫々 $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ ニ變化シ從ツテ z ハ $z + \Delta z$ ニ變化スルモノトスルト

$$\Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$
$$= f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v + \Delta v) - f(u, v)$$
$$= f_u(u + \theta_1 \Delta u, v + \Delta v)\Delta u + f_v(u, v + \theta_2 \Delta v)\Delta v. \quad 0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1.$$

從ツテ

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f_u(u + \theta_1 \Delta u, v + \Delta v)\frac{\Delta u}{\Delta x} + f_v(u, v + \theta_2 \Delta v)\frac{\Delta v}{\Delta x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

假定ニヨリ u, v ハ x ノ連續函數ナル故

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0.$$

又 z_u, z_v ハ u, v ノ連續函數ナル故

$$\lim_{\Delta x \to 0} f_u(u + \theta_1 \Delta u, v + \Delta v) = \lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} f_u(u + \theta_1 \Delta u, v + \Delta v) = f_u(u, v).$$

同樣ニ
$$\lim_{\Delta x \to 0} f_v(u, v + \theta_2 v) = f_v(u, v).$$

從ツテ (1) ヨリ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = f_u(u, v)\frac{\partial u}{\partial x} + f_v(u, v)\frac{\partial v}{\partial x}.$$

即チ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

同樣ニ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

若シ $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ ガ連續ナル偏導函數ヲ有シ且 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ モ亦偏導函數ヲ有スルトキハ更ニ (2) ヲ x ニツイテ偏微分シテ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$= \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right\}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+ \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right\}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

右邊ヲ整頓スルト

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

(2) ヲ y ニ就テ偏微分スルト同樣ニ次式ヲ得ル.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(3) ヲ y ニ就テ偏微分スルト

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

若シ $z = f(u, v)$ ニ於テ u, v ガ共ニ一ツノ共通ナル變數 t ノ函數ナルトキ

ハ z ハ t ノミノ函數トナル．故＝ z ガ u, v ＝關シテ微分可能，又 x, y ガ t ＝關シテ微分可能ナルトキ

$$\frac{dz}{dt}=f_u(u,v)\frac{du}{dt}+f_v(u,v)\frac{dv}{dt}.$$

$$\therefore\quad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}.$$

此ノ式ハ全微分ノ式 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$ ノ兩邊ヲ dt デ割ツタモノデアル．更＝ t デ微分スルト

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right)\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{dv}{dt}\right)\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{d^2v}{dt^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{d^2v}{dt^3}.$$

又 $z=f(x,y)$ ＝於テ $y=\phi(x)$ ナルトキハ z ハ x 又ハ y ノミノ函數トナル．

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy}.$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}$$

等トナル．

例題 1. $u=\frac{x^2y^2}{x+y}$ ナルトキ $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial x}$ ナルコトヲ證明セヨ．

［證明］

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xy^2}{x+y}-\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2y^2}{x+y}-\frac{2xy^2}{(x+y)^2}-\frac{2xy^2}{(x+y)^2}+\frac{2x^2y^2}{(x+y)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{4xy}{x+y}-\frac{2xy^2}{(x+y)^2}-\frac{2x^2y}{(x+y)^2}+\frac{2x^2y^2}{(x+y)^3}.$$

$$\therefore\quad x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy^2}{x+y}-\frac{4x^2y^2}{(x+y)^2}+\frac{2x^3y^2}{(x+y)^3}.$$

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{4xy^2}{x+y}-\frac{2xy^2}{x+y}+\frac{2x^2y^3}{(x+y)^3}.$$

$$\therefore\quad x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{4xy^2}{x+y}-\frac{4x^2y^2}{(x+y)^2}+\frac{2x^2y^2}{(x+y)^2}$$

$$=\frac{4xy^2}{x+y}-\frac{2x^2y^2}{(x+y)^2}=2\frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$\therefore\quad x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial x}.$$

例題 2. $z=f_1(y+ax)+f_2(y-ax)$ ナルトキハ f_1 及ビ f_2 ノ如何＝拘ラズ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ．

［證明］ $y+ax=u,\ y-ax=v$ トオクト $z=f_1(u)+f_2(v)$．

$$\frac{\partial z}{\partial x}=af_1'(u)-af_2'(v).\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'(u)+f_2'(v).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2f_1''(u)+a^2f_2''(v).\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_1''(u)+f_2''(v).$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\{f_1''(u)+f_2''(v)\}=a^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.\qquad \therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

例題 3. $u=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ヨリ $\tan^{-1}$ ナル函數ヲ消去セヨ．

［解］

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=-\frac{y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\ \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トヨリ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

［注意］ 偏微分係數ヲ含ム方程式ヲ偏微分方程式ト云フ．而シテ與ヘラレタ函數 u ハ此ノ偏微分方程式ヲ滿足セシメルト云フ．

例題 4. $z=f(x,y),\ x=at,\ y=bt$ ナルトキ t ＝關スル z ノ逐次導函數ヲ求メヨ．

［解］

$$\frac{dz}{dt}=a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2ab\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$\frac{d^3z}{dt^3}=a^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3a^2b\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+3ab^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+b^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

是ヨリ $\frac{d^nz}{dt^n}$ ヲ類推スルコトガ出來ル．今後是等ヲ次ノ如ク略記スル．

$$\frac{dz}{dt}=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)z.$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2z.$$

$$\frac{d^3z}{dt^3}=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^3z.$$

一般＝

$$\frac{d^nz}{dt^n}=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^nz.$$

例題 5. $x,\ y$ ノ函數 $f(x,y)$ ガ次ノ關係ヲ滿足スルトキ

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$$

函數 $f(x,y)$ ヲ $x,\ y$ ＝ツイテノ n 次ノ同次函數トイフ．n 次ノ同次函數 $f(x,y)$ ハ次ノ式ヲ滿足スルコトヲ證明セヨ．

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^rf(x,y)=n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)f(x,y).$$

[證明] n 次ノ同次函數 $f(x,y)$ ＝對シテハ

$$u=tx,\qquad v=ty$$

トオクトキハ

$$f(u,v)=t^nf(x,y)$$

トナルカラ此ノ兩邊ヲ t ＝ツイテ r 回微分スルト

$$\left(x\frac{\partial}{\partial u}+y\frac{\partial}{\partial v}\right)^rf(u,v)=n(n-1)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)t^{n-r}f(x,y)$$

ヲ得ル．コレハ $x,\ y,\ t$ ＝ツイテノ恒等式デアルカラ，今 $t=1$ トオクト，

$$u=x,\qquad v=y$$

トナル．

$$\therefore\quad \left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^rf(x,y)=n(n-1)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)f(x,y).$$

ヲ得ル．コレヲ同次函數＝關スル Euler ノ定理トイフ．

例ヘバ，$f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ハ零次ノ同次函數デアルカラ

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0,\qquad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

トナル．

6 二ツ以上ノ變數ノ函數ノ偏導函數 二變數ノ函數＝ツイテノ偏導函數並ビ＝之＝附随スル定義公式等ハ直＝之ヲ二ツ以上ノ變數ノ函數ノ場合＝擴張スルコトガ出來ル．今其ノ證明ヲ省略シテ其ノ結果ノミヲ書クト次ノ如クナル．

(i) n 個ノ變數 $x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots\cdots\cdots,x_n$ ノ函數ヲ表ハス＝

$$z=f(x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots\cdots\cdots,x_n)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ト書ク．而シテ $x_1\to a_1,\ x_2\to a_2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ x_n\to a_n$ ナル極限＝於テ

$$\lim f(x_1,x_2,\cdots\cdots\cdots\cdots,x_n)=f(a_1,a_2,\cdots\cdots\cdots\cdots,a_n)$$

ナルトキハ此ノ函數ハ $x_1=a_1,\ x_2=a_2,\ x_3=a_3,\cdots\cdots\cdots\cdots,x_n=a_n$ ＝於テ連續デアルトイフ．

(ii) 函數 (1) ヲ x_1 ノミ＝關シテ微分シタ結果ヲ次ノ如ク書ク．

$$\frac{\partial z}{\partial x_1},\quad 又ハ\quad f_{x_1}(x_1,x_2,\cdots\cdots\cdots\cdots,x_n)$$

x_1 ＝關シテ三度，x_2 ＝關シテ五度偏微分シタトキハ次ノ如ク書ク．

$$\frac{\partial^8 z}{\partial x_1^3\partial x_2^5}.$$

而シテ偏導函數ガ連續テルトキハ微分ノ順序ヲ變ヘテモ結果ハ同一デアル．

(iii) $z=f(x_1,x_2,\cdots\cdots\cdots\cdots,x_n)$ ＝於テ

$$x_1=\phi_1(t),\ x_2=\phi_2(t),\cdots\cdots\cdots\cdots,x_n=\phi_n(t)$$

ナルトキハ

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

例題 1. $u=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ハ次ノ偏微分方程式ヲ滿足セシメルコトヲ證明セヨ．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

[證明] $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\times 2x=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\times 2x=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

原式ノ對稱ナルコトヨリ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-x^2+2y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{-x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

此ノ三式ヲ加ヘ合セテ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

陰函數ノ微分法 二ツノ變數 x, y ノ間ニ $f(x,y)=0$ ナル關係アルトキ y ヲ x ノ陰函數ト云フ．例ヘバ

$$x^2+y^2-r^2=0$$

ナル方程式デ定メラレル函數 y ハ x ノ陰函數デアル．然レドモ之ヲ書キ換ヘテ y ニツイテ解カレタ形

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

トスルトキ，y ハ x ノ陽函數トナル．

$f(x,y)=0$ デ定メラレル函數ハ一般ニハ一値函數デハナイ．上例ニ於テノ陰函數 y ハ二値函數デアル．然レドモ若シ，$f(x,y)=0$ ニテ與ヘラレル函數 y ガ多値函數ナルトキ其ノ中ノ一ツノ値ヲトリ之ガ x ノ連續函數ニシテ且微分可能デアルト假定スル．斯樣ナ y ヲ x デ微分スルニハ次ノ如クスル．

$f(x,y)=0$ ノ兩邊ヲ x デ微分シテ

$$f_x(x,y)+f_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0.$$

$\therefore$ $f_y(x,y)\neq 0$ ナルトキハ，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}.$

或ハ簡單ノタメニ $f(x,y)=f$ デ表ハシテ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ト書ク．(1) 式ヲ更ニ x ニ關シテ微分スルト

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ハ x ト y トノ函數デアルカラ (1) ヲ適用スルト

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

同樣ニシテ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

是等ノ式ヲ (2) ニ代入スルト

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

此ノ式ハ又次ノ如クシテモ得ラレル．

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

ノ兩邊ヲ x ニツイテ微分スルト

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

即チ，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

此ノ式ニ上式ヨリ得ル $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ代入スレバヨイ．

例題 2. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}$ 及ビ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ求メヨ．

［解］ 與式ノ左邊ヲ x ニツイテ微分スルト

$$2ax+2hy+2hx\frac{dy}{dx}+2by\frac{dy}{dx}+2g+2f\frac{dy}{dx}=0.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left(a+h\dfrac{dy}{dx}\right)(hx+by+f)-(ax+hy+g)\left(h+b\dfrac{dy}{dx}\right)}{(hx+by+f)^2}.$$

之ニ (1) ヲ代入シテ整頓スルト

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2}{(hx+by+f)^3}$$

トナル．

次ニ $f(x, y, z)=0$ ナル關係式ニ於テハ之ヲ二ツノ場合ニ考ヘルコトガ出來ル．第一ノ場合ニハ

$$f(x, y, z)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ハ x, y, z ノ一ツ，例ヘバ z ガ他ノ二ツノ獨立變數 x ト y トノ函數デアルコトデアツテ第二ハ y, z ガ唯一ツノ變數 x ノ函數タルコトデアル．第一ノ場合ニハ x ト y トガ互ニ獨立デアルカラ先ヅ y ヲ一定ト見做シテ x ニ關シテ偏微分スルト，

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0. \qquad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$\therefore\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\neq 0$ ナルトキハ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

同樣ニ

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(4), (5) ノ兩邊ヲ夫々 x, y デ微分スルト $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 等ヲ求メルコトガ出來ル．

第二ノ場合ニハ

$$f(x, y, z)=0$$

ノ外ニ更ニ

$$\phi(x, y, z)=0$$

ナル關係アルコトヲ要スル．卽チ此ノ二ツノ函數關係ガ聯立スルトキ x, y, z ノ二ツ，例ヘバ y, z ハ他ノ一ツ x ノ函數トナル．斯樣ナ場合ニハ此ノ二ツノ方程式ノ兩邊ヲ x ニツイテ微分シテ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0.$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0$$

ヲ得ル．故ニ

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

ナルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}}, \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}}.$$

トナル．

例題 3. 聯立方程式

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \cdots\cdots(1), \qquad x^2+y^2=2ax \cdots\cdots(2)$$

ヨリ y_x, z_x. y_{xx}, z_{xx} ヲ求メヨ．

［解］ (1) 式ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0. \qquad \therefore\ x+y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) 式ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=2a. \qquad \therefore\ x+y\frac{dy}{dx}=a \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3), (4) ヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a-x}{y}, \qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{a}{z}.$$

此ノ二ツノ式ヲ更ニ微分シテ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y}-\frac{a-x}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{y}-\frac{(a-x)^2}{y^3}=\frac{-y^2-x^2+2ax-a^2}{y^3}.$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-a^2}{y^3}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{a}{z^2}\frac{dz}{dx}=-\frac{a^2}{z^3}.$$

$$\therefore\ \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{-a^2}{z^3}.$$

例題 4. $u=f(x, y, z)$, $\phi(x, y)=0$, $\psi(x, z)=0$

ナルトキ $\dfrac{du}{dx}$ ヲ求メヨ．

［解］ $u=f(x, y, z)$ ノ兩邊ヲ x ニツイテ微分スルト

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

又 $\phi(x,y)=0,\ \psi(x,z)=0$ ヲ x デ微分シテ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial y}},\qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial z}}.$$

此ノ二ツノ値ヲ上ノ式ニ代入シテ

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial y}}-\frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial z}}.$$

最後ニ n 個ノ變數 $x_1, x_2\cdots\cdots\cdots\cdots, x_n$ ノ陰函數 y ハ一般ニ

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n, y)=0$$

ノ形デ與ヘラレル．之ヲ $x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n$ ニ關シテ微分スルト

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x_i}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).\quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n).$$

從ツテ

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

トナル．是ヲ更ニ微分シテ高次ノ導函數ヲ求メルコトガ出來ル．

又一ツヨリ多クノ陰函數ガ聯立方程式ニヨツテ與ヘラレルトキ，例ヘバ

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2,\cdots\cdots\cdots\cdots, x_n, y, z)=0\\ f_2(x_1, x_2,\cdots\cdots\cdots\cdots, x_n, y, z)=0\end{aligned}\right\}$$

ナルトキ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_i}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_i}=0\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_i}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_i}=0\end{aligned}\right\}$$

ニシテ之ヲ解イテ $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ 及ビ $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ ヲ求メルコトガ出來ル．

練 習 問 題 18.

(1) $y=x^y$ ナルトキハ次式ヲ證明セヨ．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x(1-y\log x)}.$$

(2) $z=\dfrac{2y\sin^{-1}x}{x^2+y^2}$ ナルトキ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ヲ求メヨ．

(3) $\dfrac{y}{x}=\log\dfrac{y}{a+bx}$ ナルトキハ

$$x(y-x)(a+bx)\frac{dy}{dx}=y\{(a+bx)y-bx^2\}$$

ナルコトヲ證明セヨ．

(4) $r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$ ナルトキ

$$\frac{\partial^2\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial z^2}=0$$

ナルコトヲ證明セヨ．但シ x', y', z' ハ常數トスル．

(5) $x^2+y^2+z^2=a^2,\ lx+my+nz=p$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ求メヨ．

(6) $z=f(x,y)$ ガ $ax+by$ ノミノ函數ナルタメニ必要ニシテ且充分ナル條件ハ

$$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$$

ナルコトヲ證明セヨ．

(7) $u=\log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ ナルトキ

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{(x+y+z)^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

ナルコトヲ證明セヨ．

(8) $z=f(x,y),\quad x=u\cos\alpha-v\sin\alpha,\quad y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$ ナルトキ

$$z_{xx}+z_{yy}=z_{uu}+z_{vv}$$

ナルコトヲ證明セヨ．

(9) $z=xf(ax+by)+y\phi(ax+by)$ ナルトキ

$$b^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2ab\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

ナルコトヲ證明セヨ．

(10) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$ ニ於テ $V=f(r),\ r^2=x^2+y^2$ ナルトキ

$$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=0$$

ナルコトヲ證明セヨ．

【解　　答】

(1) $y=x^y$ ノ兩邊ノ對數ヲトルト $\log y=y\log x.$
此ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}\log x+\frac{y}{x}. \qquad \therefore\ x\frac{dy}{dx}=xy\log x\frac{dy}{dx}+y^2.$$

$$x(1-y\log x)\frac{dy}{dx}=y^2. \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x(1-y\log x)}.$$

(2)
$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\sin^{-1}x\frac{(x^2+y^2)-\boxed{2y\cdot y}}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2\sin^{-1}x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{4x\sin^{-1}x}{(x^2+y^2)^2}-\frac{8x(x^2-y^2)\sin^{-1}x}{(x^2+y^2)^3}.$$

$$=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2\sqrt{1-x^2}}-\frac{4x(x^2-3y^2)\sin^{-1}x}{(x^2+y^2)^3}.$$

(3)
$$\frac{y}{x}=\log y-\log(a+bx). \qquad \therefore\ y=x\log y-x\log(a+bx).$$

$$\frac{dy}{dx}=\log y+x\cdot\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}-\log(a+bx)-x\frac{b}{a+bx}.$$

$$\therefore\ x(y-x)(a+bx)\frac{dy}{dx}=y\{(a+bx)y-bx^2\}.$$

(4) $r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$ ノ兩邊ヲ微分スルト

$$2r\frac{\partial r}{\partial x}=2(x-x'). \qquad \therefore\ \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x'}{r}.$$

$$\therefore\ \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{(x-x')}{r^3}.$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-x')}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-x')^2}{r^5}.$$

同樣ニ

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-y')^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-z')^2}{r^5}.$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial^2 z}=\left\{-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-x')^2}{r^5}\right\}+\left\{-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-y')^2}{r^5}\right\}+\left\{-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-z')^2}{r^5}\right\}$$

$$=\frac{-3}{r^3}+3\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{r^5}=\frac{-3}{r^3}+3\frac{r^2}{r^5}=0.$$

(5) $x^2+y^2+z^2-a^2=f(x,y,z)=0,\quad lx+my+nz-p=\varphi(x,y,z)=0$ トオキ x, y, z ニツイテ微分スルト

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=l,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=m,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}=n.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial z}\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2x & 2z\\ l & n\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2y & 2z\\ m & n\end{vmatrix}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{lz-nx}{ny-mz}.$$

$$\frac{dz}{dx}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y}\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ l & m\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2y & 2z\\ m & n\end{vmatrix}.$$

$$\therefore\ \frac{dz}{dx}=\frac{mx-ly}{ny-mz}.$$

(6) **必要條件** $z=f(x,y)$ ガ $z=f(ax+by)$ ナルトキハ

$$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$$

デアル.

何トナレバ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=af'(ax+by),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=bf'(ax+by).$$

此ノ兩式ヨリ $f'(ax+by)$ ヲ消去スレバ

$$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$$

トナル.

充分條件 $z=f(x,y)$ ニ於テ

$$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$$

ナルトキハ, $z=f(x,y)$ ハ $ax+by$ ノ函數デアル.

此ノ證明ニハ $ax+by=u$ トオクトキ z ガ u ノミノ函數ナルコトヲ云ヘバヨイ. 之ガタメニ $x=\frac{u-by}{a}$ ヲ $f(x,y)$ ニ代入シテ

$$z=f\left(-\frac{by-u}{a},\ y\right)$$

ガ y ヲ含マナイコトヲ云ヘバヨイ.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y},\qquad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{b}{a}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{a}\left\{a\frac{\partial f}{\partial y}-b\frac{\partial f}{\partial x}\right\}=0.$$

故ニ z ニハ y ヲ含マナイ. 即チ z ハ u ノミノ函數デアル. 即チ $ax+by$ ノミノ函數デアル.

(7) $$u=\log(x+y+z)+\log(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y+z}+\frac{2x-z-y}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z}+\frac{2y-x-z}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}+\frac{2z-y-x}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y+z)^2}+\frac{2}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}-\frac{(2x-z-y)^2}{(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x+y+z)^2}+\frac{2}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}-\frac{(2y-x-z)^2}{(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{(x+y+z)^2}+\frac{2}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}-\frac{(2z-y-x)^2}{(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{(x+y+z)^2}\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ヨリ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-\frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

(2) 及ビ上式ヨリ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{3}{(x+y+z)^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.$$

(8) $$z_u=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha.$$

$$z_{uu}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\sin\alpha$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\alpha+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\alpha\cos\alpha.$$

同樣ニ

$$z_{vv}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\alpha+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\alpha-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\therefore\quad z_{uu}+z_{vv}=z_{xx}+z_{yy}.$$

(9) $ax+by=u$ トオクト $z=xf(u)+y\phi(u)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(u)+axf'(u)+ay\phi'(u).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=bxf'(u)+\phi(u)+by\phi'(u).$$

$$b\frac{\partial z}{\partial x}-a\frac{\partial z}{\partial y}=bf(u)-a\phi(u).$$

$$\therefore\quad b\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial z}{\partial x}-a\frac{\partial z}{\partial y}\right)-a\frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial z}{\partial x}-a\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$=b\frac{\partial}{\partial x}\{bf(u)-a\phi(u)\}-a\frac{\partial}{\partial y}\{bf(u)-a\phi(u)\}=0.$$

$$\therefore\quad b^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2ab\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(10) $$V_x=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}\quad\cdots\cdots\cdots(1).$$

又 $$2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x.\qquad\therefore\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\quad\cdots\cdots\cdots(2).$$

(2) ヲ (1) ニ代入シテ

$$V_x=f'(r)\frac{x}{r}.$$

故ニ

$$V_{xx}=f''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+f'(r)\frac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=f''(r)\left(\frac{x}{r}\right)^2+f'(r)\frac{r^2-x^2}{r^3}.$$

同樣ニ

$$V_{yy}=f''(r)\left(\frac{y}{r}\right)^2+f'(r)\frac{r^2-y^2}{r^3}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=0.$$

第三十三章　多變數ノ函數ノ展開ト極値

Taylor ノ定理ノ擴張　函數 $f(x,y)$ ハ連續ナル第 n 次偏導函數ヲ有スルモノトスルトキ，$f(x+h,y+k)$ ハ之ヲ次ノ如クシテ h 及ビ k ノ羃級數ニ展開スルコトガ出來ル．即チ

t ヲ任意ノ變數トシ

$$u=x+h=x+\alpha t,\qquad v=y+k=y+\beta t$$

ト置キ，又

$$f(u,v)=f(x+\alpha t,y+\beta t)=\mathrm{F}(t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスレバ

$$\mathrm{F}'(t)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\alpha+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\beta.$$

$$\mathrm{F}''(t)=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}\alpha\beta+\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}\beta^2.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ

$$\frac{\partial^m f(u,v)}{\partial u^m}\alpha^m+\frac{m}{1!}\frac{\partial^m f(u,v)}{\partial u^{m-1}\partial v}\alpha^{m-1}\beta+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^m f(u,v)}{\partial u^{m-2}\partial v^2}\alpha^{m-2}\beta^2$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{\partial^m f(u,v)}{\partial v^m}\beta^m$$

ナル形ノ式ヲ

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)^m f(u,v)$$

ト略記スルトキハ，一般ニ

$$\mathrm{F}^{(m)}(t)=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)^m f(u,v)$$

ト書クコトガ出來ル．以上ノ式ニ於テ $t=0$ トオクト

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{F}(0)=f(x,y).\\&\mathrm{F}^{(m)}(0)=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x,y).\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニ Maclaurin ノ定理ニヨリ $\mathrm{F}(t)$ ヲ t ノ羃ニ展開スルト

$$\mathrm{F}(t)=\mathrm{F}(0)+\frac{t}{1!}\mathrm{F}'(0)+\frac{t^2}{2!}\mathrm{F}''(0)+\cdots\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{F}^{(n-1)}(0)+\frac{t^n}{n!}\mathrm{F}^{(n)}(\theta t).$$

此ノ式ニ (1) ト (2) トヲ適用シテ

$$f(x+\alpha t,y+\beta t)=f(x,y)+\frac{t}{1!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$$
$$+\frac{t^2}{2!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(x,y)$$
$$+\frac{t^n}{n!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+\theta\alpha t,y+\theta\beta t).$$

但シ $0<\theta<1$ デアル．コヽニ於テ $\alpha t=h, \beta t=k$ ニ戻スト，二變數ノ函數ノ Taylor ノ定理ヲ得ル．即チ

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(x,y)$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+\theta h,y+\theta k).\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3) ニ於テ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+\theta h,y+\theta k)=0$$

ナルトキハ (3) ハ無限級數トナル．而シテ (3) ニ於テ

$x=0,\ y=0$ トオキ h, k ヲ x, y ニ書キ換ヘルト

$$f(x,y)=f(0,0)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$$

$$+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(0,0)$$

$$+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\theta x,\theta y).\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

是卽チ Maclurin ノ定理ノ擴張デアル. 尙 (3) ニ於テ $n=1$ トスルト

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+hf_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf_y(x+\theta h,y+\theta k)$$

トナル. コレハ二ツノ變數ノ函數ニ於ケル平均値ノ定理デアル.

例題 1. $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ ナルトキ $f(x+2,y+1)$ ヲ求メヨ。

[解] $f_x=2ax+by,\ f_y=bx+2cy,\ f_{xx}=2a,\ f_{xy}=b,\ f_{yy}=2c.$

故ニ $x=2,\ y=1$ ノトキ

$$f(2,1)=4a+2b+c,\ \ f_x(2,1)=4a+b,\ \ f_y(2,1)=2b+2c.$$

$$f_{xx}(2,1)=2a,\ \ f_{xy}(2,1)=b,\ \ f_{yy}(2,1)=2c.$$

故ニ Taylor ノ定理ニヨリ

$$f(x+2,y+1)=4a+2b+c+(4a+b)x+2(b+c)y$$

$$+\frac{1}{2}(2ax^2+2bxy+2cy^2)$$

$$=4a+2b+c+(4a+b)x+2(b+c)y+ax^2+bxy+cy^2.$$

例題 2. $f(x+h,y+k)$ ヲ h ノ冪級數ニ展開シ得ルモノトシ, 次ニ其ノ展開式ノ各項ヲ更ニ k ノ冪級數ニ展開シ得ルモノトシ, 最後ニ其ノ結果ノ級數ニ於テ項ノ順序ヲ任意ニ變更シ得ルモノト考ヘテ Taylor ノ定理ノ擴張ヲ證明セヨ.

[證明] $f(x+h,y+k)=\mathrm{F}(h)$ トオクトまくろーりんノ定理ニヨリ

$$\mathrm{F}(h)=\mathrm{F}(0)+\frac{h}{1!}\mathrm{F}'(0)+\frac{h^2}{2!}\mathrm{F}''(0)+\frac{h^3}{3!}\mathrm{F}'''(0)+\cdots\cdots\cdots.$$

然ルニ

$$\mathrm{F}(0)=f(x,y+k)$$

デアルカラ, 之ヲ $\phi(k)$ トシ k ノ冪ニ展開スルト

$$\phi(k)=\phi(0)+\frac{k}{1!}\phi'(0)+\frac{k^2}{2!}\phi''(0)+\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \mathrm{F}(0)=f(x,y)+\frac{k}{1!}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}+\frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}+\cdots\cdots\cdots.$$

又 $\mathrm{F}'(h)$ ヲ求メルタメニ $x+h=u$ トオクト,

$$\mathrm{F}'(h)=\frac{\partial f(u,y+k)}{\partial u}.\qquad \therefore\ \mathrm{F}'(0)=\frac{\partial f(x,y+k)}{\partial x}.$$

コレヲ k ノ冪ニ展開スルト

$$\mathrm{F}'(0)=\frac{\partial f(x,y+k)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+k\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}+\frac{k^3}{2!}\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^2\partial x}+\cdots\cdots\cdots;$$

同樣ニ

$$\mathrm{F}''(0)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+k\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y\partial x^2}+\frac{k^2}{2!}\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial y^2\partial x^2}+\frac{k^2}{2!}\frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial y^3\partial x^2}+\cdots\cdots\cdots;$$

$$\mathrm{F}'''(0)=\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}+k\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial y\partial x^3}+\cdots\cdots\cdots.$$

從ツテ

$$f(x+h,y+k)=\mathrm{F}(h)=\mathrm{F}(0)+\frac{h}{1!}\mathrm{F}'(0)+\frac{h^2}{2!}\mathrm{F}''(0)+\frac{h^3}{3!}\mathrm{F}'''(0)+\cdots\cdots\cdots$$

$$=f(x,y)+\frac{k}{1!}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{h}{1!}\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{k}{1!}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}+\frac{k^2}{2!}\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2}+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$+\frac{h^2}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+k\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$+\frac{h^3}{3!}\left\{\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

假定ニヨリ項ノ順序ヲ變更シ得ルカラ

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$+\frac{1}{2!}\left\{h^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{3!}\left\{h^3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\right\}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\ f(x+h,y+k)=f(x,y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y)+\cdots\cdots\cdots;$$

三ツ以上ノ變數ノ函數ノ偏導函數ガ連續ナルトキハ, Taylor ノ定理ハ更ニ之ヲ次ノ如ク擴張スルコトガ出來ル.

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3, \cdots\cdots, x_n+h_n)$$

$$=f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)+\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{(k-1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k-1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)+\mathrm{R}_k.$$

但シ R_k ハ次ノ如クデアル.

$$\mathrm{R}_k=\frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x_1+\theta h_1, x_2+\theta h_2, \cdots, x_n+\theta h_n).$$

ココニ $0<\theta<1.$

二ツノ變數ヲ含ム函數ノ極値 二ツノ變數ヲ有スル函數ノ極大極小ハ次ノ如ク定義サレル.

δ ヲ充分小ナル正數トスルト

$$0<|h|<\delta, \quad 0<|k|<\delta$$

ナル如キスベテノ h, k ニ對シテ常ニ

$$f(a+h, b+k)<f(a, b)$$

ナルトキハ, $f(x, y)$ ハ $x=a,\ y=b$ ニ於テ極大トナルト云ヒ

$$f(a+h, b+k)>f(a, b)$$

ナルトキハ $f(x, y)$ ハ $x=a,\ y=b$ ニ於テ極小トナルト云フ. 而シテ $f(x, y)$ ノ極大極小ノ條件ハ次ノ如クシテ得ラレル.

今 $f(x, y)$ ハ x, y ニ關シテ第三次マデノ偏微分係數ガ一値連續ナルトキハ

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=\{hf_x(a, b)+kf_y(a, b)\}$$

$$+\frac{1}{2!}\{h^2f_{xx}(a, b)+2hkf_{xy}(a, b)+k^2f_{yy}(a, b)\}+\mathrm{R}_n \cdots\cdots\cdots(1).$$

但シ $$\mathrm{R}_n=\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a+\theta h, b+\theta k).$$

今 $$hf_x(a, b)+kf_y(a, b)\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

ガ零デナイトキハ h, k ハ絶對値ガ充分小ナルトキ

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ノ符號ハ全ク (2) デ定マル. 然ルニ h, k ノ符號ヲ種々ニ變ヘルト (2) ハ正負何レノ値ヲモ取ルコトガ出來ルカラ (3) ノ符號ハ一定シナイ. 即チ此ノ場合ハ $f(a, b)$ ハ $f(x, y)$ ノ極値デハナイ. 故ニ $f(a, b)$ ガ極値ナルタメニハ必ズ絶對値ノ小ナル h, k ノ總テノ値ニ對シテ

$$hf_x(a, b)+kf_y(a, b)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

デナケレバナラナイ. 而シテ h ト k トハ全ク獨立ニ變化スルカラ (4) ガ成立スルタメニハ

$$f_x(a, b)=0, \quad f_y(a, b)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

デナケレバナラナイ. 故ニ $f(x, y)$ ヲシテ極値ヲトラシメル x, y ノ値ヲ求メルニハ先ヅ聯立方程式

$$f_x(x, y)=0, \quad f_y(x, y)=0$$

ヲ解イテ x, y ノ値ヲ定メレバヨイ.

次ニ是等ノ x, y ノ値ガ $f(x, y)$ ヲシテ極値ナラシメルカ否カヲ研究スルタメニ (5) ノ條件ヲ (1) ニ適用スルト

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)$$

$$=\frac{1}{2!}\{h^2f_{xx}(a, b)+2hkf_{xy}(a, b)+k^2f_{yy}(a, b)\}+\mathrm{R}_n\cdots\cdots\cdots(6)$$

トナル. 故ニ

$$f_{xx}(a, b)=\mathrm{A}, \quad f_{xy}(a, b)=\mathrm{B}, \quad f_{yy}(a, b)=\mathrm{C}$$

トオクト, (6) ノ符號ハ

$$h^2\mathrm{A}+2hk\mathrm{B}+k^2\mathrm{C}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ニ依ツテ定マルコトハ, R_n ガ (7) ヨリ高位ノ無限小ナルコトカラ明デアル. 從ツテ (7) ガ負ナルトキハ $f(a, b)$ ハ極大デ正ナルトキハ極小トナル. 而シテ

$$h^2\mathrm{A}+2hk\mathrm{B}+k^2\mathrm{C}=\frac{k^2}{\mathrm{A}}\left\{\left(\mathrm{A}\frac{h}{k}+\mathrm{B}\right)^2+\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2\right\}\cdots\cdots\cdots(8)$$

デアルカラ次ノ三ツノ場合ヲ生ズル.

(1)　$AC-B^2>0$ ナル場合

コノ場合ハ (8) 式ノ符號ガ A ノ符號ト一致スルカラ $A<0$ ナルトキハ極大，$A>0$ ナルトキハ極小デアル．

(2)　$AC-B^2<0$ ナル場合

コノ場合ニハ h, k ヲ適當ニトルト $\left(A\frac{h}{k}+B\right)^2$ ハ如何ナル正値ヲモトルカラ

$$\left(A\frac{h}{k}+B\right)^2+AC-B^2$$

ハ正ニモ負ニモナル．從ツテ (8) ノ符號ガ一定シナイ．故ニ $f(a,b)$ ハ極値デナイ．

(3)　$AC-B^2=0$ ナル場合

コノ場合ニハ (8) ハ完全平方

$$\frac{k^2}{A}\left(A\frac{h}{k}+B\right)^2$$

トナル．而シテ $Ah+Bk\neq0$ ナルトキハ (8) ノ符號ハ A ノ符號ニヨツテ定マル．然レドモ $Ah+Bk=0$ ナルトキハ (8) ハ零トナル．故ニ此ノ場合ニハ h, k ノスベテノ値ニ對シテ (8) ハ一定ノ符號ヲ有スルカ否カ明カデナイ．依テ此ノ場合ハ更ニ第三次偏微分係數ノ項ニツイテ研究セネバナラヌ．

以上ハスベテ $A\neq0$ デアルトシタガ，若シ $A=0$ ナルトキハ

$$h^2A+2hkB+k^2C=2hkB+k^2C$$

トナルカラ $B\neq0$ ナルトキハ h, k ノ値ノトリ方ニヨツテ上ノ式ハ正トモ負トモナリ $f(a,b)$ ハ極値ヲトラナイ．

又 $A=B=0$ ナルトキハ

$$h^2A+2hkB+k^2C=k^2C$$

トナルカラ (3) ノ場合ト一致スル．以上ヲ綜合シテ次ノ結論ヲ得ル．

(I)　$f(x,y)$ ニ於テ $f_x=0$, $f_y=0$ ナル x, y ノ値ヲ求メ，其ノ一組ヲ a, b トスルトキ

$f_{xx}\cdot f_{yy}-(f_{xy})^2>0$, $f_{xx}<0$ ナルトキハ $f(a,b)$ ハ極大

$f_{xx}\cdot f_{yy}-(f_{xy})^2>0$, $f_{xx}>0$ ナルトキハ $f(a,b)$ ハ極小．

(II)　$f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2<0$ ナルトキハ $f(a,b)$ ハ極値デナイ．

(III)　$f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=0$ ナルトキハ $f(a,b)$ ハ極値ナルカ否カハ判明シナイカラ更ニ特別ナ研究ヲ要スル．

三ツ以上ノ變數ノ函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ ノ極値ヲ求メルニハ先ヅ

$$\left.\begin{array}{l} f_{x_1}(x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n)=0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n)=0 \end{array}\right\}$$

ナル聯立方程式ヲ解イテ得タ總テノ根ノ組ニ對シテ

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n)$$

ノ符號ヲ調ベタラヨイ．若シ其ノ符號ガ絶對値ノ充分小ナルスベテノ $h_1, h_2, h_3, \cdots\cdots\cdots, h_n$ ノ値ニ對シテ常ニ正ナラバ原函數ハ極小トナリ，常ニ負ナラバ原函數ハ極大トナル．但シ $h_1, h_2, \cdots\cdots\cdots, h_n$ ハ全部同時ニ零トナラナイモノトスル．

例題 1.　次ノ函數ノ極値ヲ求メヨ．

$a^3-3a^3+a^3$

(i)　$x^3-3axy+y^3$,　$a>0$.　　　(ii)　$e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$.

[解]　$f(x,y)=x^3-3axy+y^3$ トオクト

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3ay=0. \qquad \therefore\ x^2-ay=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-3ax+3y^2=0. \qquad \therefore\ -ax+y^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1), (2) ヨリ，$x=0$ 又ハ $x=a$．從ツテ

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} x=a \\ y=a \end{array}\right\}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3a.$$

故ニ $x=a$, $y=a$ ニ對シテ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=36xy-9a^2=36a^2-9a^2=27a^2>0.$$

且ツ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6a>0.$$

故ニ $f(x,y)$ ハ極小値ヲトリ，ソノ値ハ $f(a,a)=-a^3$.

$x=0,\ y=0$ ニ對シテハ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

トナルカラ極値ヲ與ヘナイ.

(ii)
$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-(x^2+y^2)}(-2x)(ax^2+by^2)+e^{-(x^2+y^2)}(2ax)$$
$$=2xe^{-(x^2+y^2)}(a-ax^2-by^2)=0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=2ye^{-(x^2+y^2)}(b-ax^2-by^2)=0.$$

之ヲ解イテ

$$\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\},\qquad \left.\begin{matrix}x=0\\y=\pm1\end{matrix}\right\},\qquad \left.\begin{matrix}y=0\\x=\pm1\end{matrix}\right\}.$$

$x=y=0$ ノトキハ

$$\mathrm{A}=2a,\qquad \mathrm{B}=0,\qquad \mathrm{C}=2b.$$

$a>0,\ b>0$ ナル故

$$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2>0,\qquad \mathrm{A}>0.$$

故ニ $x=y=0$ ノトキ極小ニシテ，極小値ハ 0 デアル.

$x=0,\ y=\pm1$ ノトキハ共ニ

$$\mathrm{A}=\frac{2(a-b)}{e},\qquad \mathrm{B}=0,\qquad \mathrm{C}=\frac{-4b}{e}.$$

故ニ $a>b>0$ ナルトキハ

$$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2<0$$

ナル故ニ極大デモ極小デモナイ．然レドモ

$0<a<b$ ナルトキハ $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2>0,\ \mathrm{A}<0$ ナル故 $x=0,\ y=\pm1$ ノトキ極大トナリ，其ノ値ハ $\dfrac{b}{e}$ デアル.

同様ニシテ $x=\pm1,\ y=0$ ナルトキハ $a>b>0$ ナラバ極大ニシテ，ソノ値ハ $\dfrac{a}{e}$，又 $0>a>b$ ナラバ極大デモ極小デモナイ.

［注意］ $x=0,\ y=0$ ナルトキハ $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(ax^2+by^2)=0$ ニシテ $x\neq0,\ y\neq0$ ニ於テハ $f(x,y)$ ハ常ニ正デアル．故ニ $x=0,\ y=0$ ハ極小ヲ與ヘル.

斯樣ナ判定ハ應用問題ニ於テ特ニ極大ト最大，又ハ極小ト最小トガ一致スルトキ適用シテ便利デアル.

例題 2. x,y,z ガ何レモ正ニシテ且 $x^2+y^2+z^2=1$ ナルトキ $yz+zx+xy$ ノ極値ヲ求メヨ.

［解］ $u=yz+zx+xy$ トオクト

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z+(x+y)\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x+z+(x+y)\frac{\partial z}{\partial y}.$$

然ルニ $x^2+y^2+z^2=1$ ヨリ

$$x+z\frac{\partial z}{\partial x}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1).\qquad y+z\frac{\partial z}{\partial y}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial x}=y+z-(x+y)\frac{x}{z}=\frac{(z-x)(x+y+z)}{z}.$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+z-(x+y)\frac{y}{z}=\frac{(z-y)(x+y+z)}{z}.$$

假設ニヨリ $x>0,\ y>0,\ z>0$ ナル故 $x+y+z>0$，從ツテ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \text{トナルノハ}$$

$z-x=0,\ z-y=0$ ノトキデアル．即チ $x=y=z$.

然ルニ，
$$x^2+y^2+z^2=1.\qquad \therefore\ x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

又
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\frac{\partial z}{\partial x}+(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\frac{\partial z}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

(1)，(2) ヲ微分シテ

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\qquad 1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

(1)，(2) ニ $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ代入シテ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-1.$$

從ツテ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2\sqrt{3},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\sqrt{3},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\sqrt{3}.$$

故ニ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\frac{\partial z}{\partial x}+(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(-2\sqrt{3})=-6.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\frac{\partial z}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(-2\sqrt{3})=-6.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-1-1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(-\sqrt{3})=-3.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=36-9=27>0.$$

故＝ $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ノトキ $yz+zx+xy$ ハ極大値 1 ヲトル.

例題 3. 三角形ノ内部ノ一點ヨリ三邊＝下セル垂線ノ積ガ最大ナル樣＝其ノ點ノ位置ヲ定メヨ.

[解] 三邊ノ長サヲ夫々 a, b, c, 面積ヲ S トシ三角形內ノ一點 P ヨリ三邊＝下シタ垂線ノ長サヲ夫々 x, y, z トスルト

$$ax+by+cz=2S \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル關係ガアル. コノ關係ノモト＝

$$f(x,y,z)=xyz \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ノ最大ヲ求メルノデアル.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{a}{c},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{b}{c}.$$

故＝

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(cz-ax)}{c}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(cz-by)}{c}=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3) ヨリ $ax=by=cz$, 或ハ $x=y=0$, 又ハ $y=z=0$, 又ハ $x=z=0$,

次＝

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{y\left(c\dfrac{\partial z}{\partial x}-a\right)}{c}=-\frac{2ay}{c}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{cz-ax-by}{c},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-2bx}{c}.$$

(1) ト $ax=by=cz$ ヨリ

$$x=\frac{2S}{3a},\qquad y=\frac{2S}{3b},\qquad z=\frac{2S}{3c}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{16S^2}{9c^2}-\frac{4S^2}{9c^2}>0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-4aS}{3bc}<0.$$

故＝ **$ax=by=cz$ ナルトキ, 卽チ點ガ重心ト一致スルトキ極大デアル.** 又 $x=y=0$ ナルトキ

$$z=\frac{2S}{c}$$

デ, 此ノ場合＝ハ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{-4S^2}{9c^2}<0$$

トナルカラ極値ヲトラナイ. $x=z=0$, $y=z=0$ ノトキモ同樣デアル.

例題 4. 空間＝ n 個ノ點 (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2),……, (a_n,b_n,c_n) アリ. コレラノ點＝至ル距離ノ平方ノ和ガ極小トナル如キ點ノ位置ヲ求メヨ.

[解] 求メル點ノ座標ヲ (x,y,z) トスルト

$$f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

デアルカラ

$$f_x(x,y,z)=2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)=2nx-2\sum_{i=1}^{n}a_i=0.$$

同樣＝

$$f_y(x,y,z)=2ny-2\sum_{i=1}^{n}b_i=0,\quad f_z(x,y,z)=2nz-2\sum_{i=1}^{n}c_i=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\Sigma a_i}{n},\qquad y=\frac{\Sigma b_i}{n},\qquad z=\frac{\Sigma c_i}{n}.$$

又

$$f_{xx}=2n,\qquad f_{yy}=2n,\qquad f_{zz}=2n,$$
$$f_{xy}=0,\qquad f_{yz}=0,\qquad f_{zx}=0$$

デアルカラ, h_1, h_2, h_3 ガ同時＝零デナイ限リ常＝

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}+h_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z)=2n(h_1^2+h_2^2+h_3^2)>0.$$

故＝求メル點ハ

$$x=\frac{\Sigma a_i}{n},\qquad y=\frac{\Sigma b_i}{n},\qquad z=\frac{\Sigma c_i}{n}$$

＝シテ是ハ重心デアル.

陰函數ノ極値

陰函數ノ極値ヲ求メル場合ハ普通次ノ形＝於テ起ル.

I. $f(x,y)=0$ ナル場合 $f(x,y)$ ヲ x, y ノ函數トスルトキ

$$f(x,y)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

＝依ツテ定メラレル函數 y ノ極値ハ (1) ヨリ得ル $\dfrac{dy}{dx}$ ＝對シテ

$$\frac{dy}{dx}=0$$

ヲ滿足スル x ノ値＝依ツテ定マル. 然ル＝

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

デアルカラ (2) 式ハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

トナル. 故ニ (1) 式デ定メラレタ函數 y ノ極値ヲ求メルニハ (1) ト (3) トヲ聯立方程式トシテ解キ, 其ノ根ニツイテ極値ノ判定ヲスレバヨイ. 然ルニ (1) 式ヨリ得ル $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

デアルカラ, 之ニ (2) ヲ代入スルト

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ヲ得ル. 故ニ (1), (3) ノ聯立方程式ノ根ニ對シテ (4) ガ負トナラバ, ソノ x ニ對シテ y ハ極大トナリ, (4) ガ正トナラバ, 其ノ x ニ對シテ y ハ極小トナル.

例題 1. 次ノ函數ノ極値ヲ求メヨ.

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

[解] $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)$ トオクト

$$f_x(x,y)=4x(x^2+y^2)-2a^2x.$$

$$\therefore\ (x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0,\qquad 4x(x^2+y^2)-2a^2x=0$$

ヲ聯立方程式トシテ解クト,

$$\left.\begin{matrix}x=0\\ y=0\end{matrix}\right\},\qquad \left.\begin{matrix}x=\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\\ y=\pm\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\end{matrix}\right\},\qquad \left.\begin{matrix}x=-\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\\ y=\pm\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\end{matrix}\right\}$$

トナル.

又

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{6x^2+2y^2-a^2}{y(2x^2+2y^2+a^2)}.$$

コヽニ於テ $x=\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $y=\pm\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ ニ對シテ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\mp\frac{6\times\dfrac{3a^2}{8}+2\times\dfrac{a^2}{8}-a^2}{\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}+a^2\right)}=\mp\frac{3}{\sqrt{2}a}\lesseqgtr 0.$$

又 $x=-\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $y=\pm\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ ニ對シテ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{6\times\dfrac{3a^2}{8}+2\times\dfrac{a^2}{8}-a^2}{\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}+a^2\right)}=\frac{3}{\sqrt{2}a}\gtreqless 0.$$

$x=0$, $y=0$ ハ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ ナラシメルカラ, 之ハ捨テル. 故ニ次ノ結果ヲ得ル.

$x=+\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ノトキ y ハ極大又ハ極小ニシテ 其ノ値ハ $\pm\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

$x=-\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ノトキ y ハ極小又ハ極大ニシテ, 其ノ値ハ $\mp\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

II. $z=f(x,y)$, $\phi(x,y)=0$ ナル場合 此ノ場合ニハ z ハ一變數 x ノ函數トナル. 從ツテ其ノ極値ヲ求メルニハ

$$z=f(x,y),\quad \phi(x,y)=0$$

ヨリ $\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ ヲ求メ, 而シテ

$$\phi(x,y)=0,\qquad \frac{dz}{dx}=0$$

ヲ聯立シテ解キ, 其ノ根ニ對シテ $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ ノ符號ヲ調ブレバヨイ.

例題 2. $x^3+y^3=3xy$ ナルトキ, x^2+y^2 ノ極値ヲ求メヨ.

[解] $z=x^2+y^2$, $\phi(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$ トオクト z ハ一ツノ獨立變數 x ノ函數トナル. 故ニ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx}\cdots\cdots\cdots(1).$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=3x^2-3y+(3y^2-3x)\frac{dy}{dx}=0\cdots\cdots\cdots(2).$$

(1), (2) ヨリ

$$\frac{dz}{dx}=2\left\{x+y\frac{3x^2-3y}{3x-3y^2}\right\}=\frac{2(x-y)(x+y+xy)}{x-y^2}.$$

故ニ $\frac{dz}{dx}=0$, $\phi(x,y)=0$ ヨリ

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{3}{2}\\ y&=\frac{3}{2}\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}x&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\}$$

ナル實根ヲ得ル. 而シテ

$x=y=\frac{3}{2}$ ノトキハ (1) ヨリ

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0.\quad\therefore\ \frac{dy}{dx}=-1.$$

又 (1), (2) ヨリ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2z}{dx^2}=2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y\frac{d^2y}{dx^2}.\\ &2x-2\frac{dy}{dx}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}=0.\end{aligned}\right\}$$

此ノ二式ヨリ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{32}{3},\qquad \frac{d^2z}{dx^2}=-28<0.$$

故ニ $x=y=\frac{3}{2}$ ナルトキ x^2+y^2 ハ極大トナリ其ノ値ハ $\frac{9}{2}$ デアル.

$x=y=0$ ナルトキハ零デナイ x, y ノ値 h, k ニ對シテ

$$f(h,k)-f(0,0)>0.$$

故ニ $x=y=0$ ハ x^2+y^2 ニ極小値ヲ與ヘル. 其ノ値ハ 0 デアル.

III. $u=f(x,y,z)$, $\phi(x,y,z)=0$ ナル場合 此ノ場合ニハ第二ノ式ヨリ z ハ x ト y トノ函數トナル. 故ニ其ノ z ヲ第一ノ式ニ代入スルト, u ハ x, y ノ函數トナル. 從ツテ此ノ u ノ極値ヲ求メルコトニナルカラ陽函數ノ場合ニ從ヒ, 先ヅ上式ヨリ

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

ヲ求メ聯立方程式

$$\phi(x,y,z)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

ヲ解キ, ソノ x, y, z ノ値ニ對シテ u ノ極大極小ヲ判定スレバヨイ.

例題 3. a ナル長サヲ有スル線分ヲ三分シ其ノ部分ノ相乘積ヲ最大ナラシメヨ.

[解] 三ツノ線分ヲ x, y, z トシ, $u=f(x,y,z)=xyz$ トスルト,

$$u=f(x,y,z)=xyz\cdots\cdots(1)\qquad x+y+z-a=0\cdots\cdots(2)$$

トナル. (2) ノ z ヲ (1) ニ代入シテ

$$u=xy(a-x-y)$$

ヲ得ル.

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial x}=y(a-2x-y),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x(a-x-2y).$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-2y,\qquad \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=a-2x-2y,\qquad \frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-2x.$$

從ツテ

$$\frac{\partial^2f}{\partial x^2}\frac{\partial^2f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}\right)^2=4xy-(a-2x-2y)^2.$$

又 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ヨリ $x=y=0$, $x=y=\frac{a}{3}$, $\begin{cases}x=0\\ y=a.\end{cases}$ $\begin{cases}x=a\\ y=0.\end{cases}$

$x=y=\frac{a}{3}$ ノトキ

$$\frac{\partial^2f}{\partial x^2}\frac{\partial^2f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{4a^2}{9}-\left(a-\frac{2a}{3}-\frac{2a}{3}\right)^2=\frac{1}{3}a^2>0,$$

$$\frac{\partial^2f}{\partial x^2}=-\frac{2a}{3}<0$$

ナル故 f ハ極大デアル. コノトキ

$$x=y=\frac{a}{3},\qquad z=a-x-y=\frac{a}{3}.$$

即チ三等分スレバヨイ.

$x=y=0$, $\begin{cases}x=0\\ y=a,\end{cases}$ $\begin{cases}x=a\\ y=0\end{cases}$ ハ無意味デアルカラ捨テル.

練習問題 19.

(1) $x^2+y^2+2axy+x^4+y^4$ ノ極大又ハ極小ヲ求メヨ.

(2) $x^2+xy+y^2+\dfrac{3(x+y)}{xy}$ ノ極値ヲ求メヨ.

(3) $f(x,y)=xe^{y+x\sin y}$ ノ極大極小ヲ求メヨ. 但シ $x>0$.

(4) $x^3y^3+y-x=0$ ナルトキ y ノ極値ヲ求メヨ.

(5) $y^4-4a^2xy+x^4=0$ ニ於テ y ノ極値ヲ求メヨ. 但シ $a>0$.

(6) 周圍ノ長サガ一定ナル三角形ノ中ニテ其ノ面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ

(7) 與ヘラレタル圓ニ外接スル三角形ノ面積ノ極大又ハ極小ヲ求メヨ.

(8) 定圓ニ內接スル最大面積ノ三角形ヲ求メヨ.

(9) 楕圓體 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ニ內接スル最大ナル直六面體ノ體積ヲ求メヨ.

(10) $a^xb^yc^z=\mathrm{K}$ ナルトキ $u=(x+1)(y+1)(z+1)$ ノ極大極小ヲ求メヨ.

(11) 直六面體ノ器物ハ如何ナル形ノトキ最モ經濟的ナルカ.

(12) 一定ノ面積ヲ有スル三角形ノ中ニテ其ノ周ノ最小ナルモノヲ求メヨ.

(13) 弧ノ長サガ一定ナル弓形ノ中デ面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ.

(14) 四面體內ノ一點ヨリ其ノ四ツノ平面ニ下ス垂線ノ平方ノ和ノ最小値ハ

$$\frac{9\mathrm{V}^2}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ. 但シ V ハ四面體ノ體積ニシテ, A, B, C, D ハ四ツノ面ノ面積ヲ表ハス.

【解　答】

(1) $f(x,y)=x^2+y^2+2axy+x^4+y^4$ トオクト

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x+ay+2x^3)=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2(y+ax+2y^3)=0.$$

コノ二ツノ方程式ヲ解イテ

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{i}).\quad \left.\begin{array}{l}x=y\\ 1+a+2(x^2-xy+y^2)=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{ii}).$$

$$\left.\begin{array}{l}x=-y\\ 1-a+2(x^2+xy+y^2)=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{iii}).\quad \left.\begin{array}{l}1-a+2(x^2+xy+y^2)=0\\ 1+a+2(x^2-xy+y^2)=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(\mathrm{iv}).$$

又 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(1+6x^2),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2(1+6y^2),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2a.$

從ツテ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=4\{(1+6x^2)(1+6y^2)-a^2\}=\mathrm{J}$ トオク.

(i) $x=0,\ y=0$ ナル場合

$$\mathrm{J}=4(1-a^2),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2>0.$$

$|a|<1$ ナルトキハ $\mathrm{J}>0$, $|a|>1$ トナルトキハ $\mathrm{J}<0$.
$|a|=1$ ナルトキハ $\mathrm{J}=0$. 故ニ $|a|<1$ ナルトキ, $f(0,0)=0$ ハ $f(x,y)$ ノ極小値ニシテ, $|a|>1$ ナルトキ $f(0,0)=0$ ハ $f(x,y)$ ノ極値デナイ.
$|a|=1$ ナルトキハ $f(h,k)=(h\pm k)^2+h^4+k^4>0$, 從ツテ $f(h,k)-f(0,0)>0$ トナルカラ $f(0,0)=0$ ハ $f(x,y)$ ノ極小値デアル.

(ii) $x-y=0,\ 1+a+2(x^2-xy+y^2)=0$ ナル場合

$x=y$ ヲ第二式ニ代入シテ

$$\left.\begin{array}{l}x^2=-\dfrac{1+a}{2}\\ y^2=-\dfrac{1+a}{2}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\therefore\ \mathrm{J}=4\{1-3(1+a)\}^2-4a^2=16(1+a)(1+2a).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\{1-3(1+a)\}=-2(2+3a).$$

(1) ヨリ x 及ビ y ハ $a\leqq-1$ ナルトキハ實根ヲ有シ, $x=0,\ y=0$ ナルトキハ (i) ノ場合トナル. 又 $a<-1$ ナルトキハ $\mathrm{J}>0$ ニシテ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ トナル. 故ニ

$x=\pm\sqrt{-\dfrac{1+a}{2}},\ y=\pm\sqrt{-\dfrac{1+a}{2}},\ a<-1$ ナルトキ, $f(x,y)$ ハ極小ニシテ, 其ノ値ハ

$$x^2+y^2+2axy+x^4+y^4=-(1+a)-a(1+a)+\frac{(1+a)^2}{2}=-\frac{(1+a)^2}{2}.$$

(iii) $x+y=0,\ 1-a+2(x^2+xy+y^2)=0$ ナル場合

$$\left.\begin{array}{l}x^2=\dfrac{a-1}{2}\\ y^2=\dfrac{a-1}{2}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\mathrm{J}=4\{1+3(a-1)\}^2-4a^2=16(a-1)(2a-1).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\{1+3(a-1)\}=2(3a-2).$$

x 及ビ y ハ $a\geqq1$ ナルトキハ實根ヲ有シ, $a=1$ ナルトキハ $x=0,\ y=0$ トナリ (i) ノ場合トナル. $a>1$ ナルトキハ $\mathrm{J}>0$ ニシテ, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$. 故ニ

$x=\pm\sqrt{\dfrac{a-1}{2}},\ y=\mp\sqrt{\dfrac{a-1}{2}},\ a>1$ ナルトキハ $f(x,y)$ ハ極小ニシ

テ其ノ値ハ

$$x^2+y^2+2axy+x^4+y^4=-\frac{(a-1)^2}{2}.$$

(iv) $\mathbf{1-a+2(x^2+xy+y^2)=0,\ 1+a+2(x^2-xy+y^2)=0}$ **ナル場合**

此ノ場合ハ x, y 共ニ實根ヲ有シナイカラ極値ガ存在シナイ。

(2)
$$f(x,y)=x^2+xy+y^2+\frac{3(x+y)}{xy}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+\frac{3}{y}\cdot\frac{x-x-y}{x^2}=2x+y-\frac{3}{x^2}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+2y+\frac{3}{x}\cdot\frac{y-x-y}{y^2}=x+2y-\frac{3}{y^2}=0.$$

之ヲ解イテ

$$x=1,\quad y=1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2x^3+6}{x^3},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2y^3+6}{y^3},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=64-1=63>0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=8>0.$$

故ニ $\mathbf{x=1,\ y=1}$ **ハ極小値** $\mathbf{f(1,1)=9}$ **ヲ與ヘル。**

(3) $x>0$ ナルトキ $f(x,y)>0$ ナル故，$f(x,y)$ ノ極値ト $\log f(x,y)$ ノ極値ハ同一ノ x, y ニ依ツテ與ヘラレル．

$$\log f(x,y)=\log x+y+x\sin y.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\log f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{x}+\sin y,\quad \frac{\partial\log f(x,y)}{\partial y}=1+x\cos y.$$

故ニ $\log f(x,y)$ ガ極値ヲ有スルトキハ

$$\frac{1}{x}+\sin y=0,\quad 1+x\cos y=0$$

ノトキナリ．サウシテ

$$\frac{\partial^2\log f(x,y)}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial^2\log f(x,y)}{\partial x\partial y}=\cos y,\quad \frac{\partial^2\log f(x,y)}{\partial y^2}=-x\sin y.$$

故ニ

$$J=\frac{\partial^2\log f(x,y)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\log f(x,y)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\log f(x,y)}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{\sin y}{x}-\cos^2 y.$$

之ニ $\frac{1}{x}+\sin y=0$ ヲ代入スルト

$$J=-(\sin^2 y+\cos^2 y)=-1<0.$$

故ニ $\mathbf{\log f(x,y)}$ **ハ極値ヲ有シナイ。從ツテ** $\mathbf{f(x,y)}$ **モ極値ヲ有シナイ。**

(4)
$$x^3y^3+y-x=0\cdots\cdots\cdots(1)$$

x デ微分スルト，$3x^2y^3+3x^3y^2\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}-1=0.$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1-3x^2y^3}{3x^3y^2+1}\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ヲ零ニ等シト置クト，$3y^3x^2-1=0\cdots\cdots\cdots(3)$

(1) ト (3) トヲ聯立シテ解クト，

$$x=\sqrt[5]{\frac{9}{8}},\quad y=\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{9}{8}}.$$

$\frac{dy}{dx}=0$ デアルカラ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{6y^3x}{3x^3y^2+1}$$

トナル。

此ノ式ニ上ノ x, y ノ値ヲ代入スルト

$$\frac{d^2y}{dx^2}<0.$$

故ニ $x=\sqrt[5]{\frac{9}{8}}$ ナルトキハ極大トナリ，極大値ハ

$$\textbf{極大値}=\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{9}{8}}=\sqrt[5]{\frac{4}{27}}.$$

(5)
$$f(x,y)=y^4-4a^2xy+x^4=0\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-4a^2y+4x^3=0\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トヲ解イテ

$$x=y=0.\ \text{又ハ}\ x=\pm a\sqrt[8]{3},\ y=\pm a\sqrt[8]{27}\cdots\cdots\cdots(3)$$

又
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{-12x^2}{4y^3-4a^2x}\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) ニ $\mathbf{x=a\sqrt[8]{3},\ y=a\sqrt[8]{27}}$ **ヲ代入スルト負トナルカラ，此ノ場合ハ極大デアル。又 (4) ニ** $\mathbf{x=-a\sqrt[8]{3},\ y=-a\sqrt[8]{27}}$ **ヲ代入スルト正トナルカラコノ場合ハ極小トナル。**

此ノ曲線ノぐらふハ左圖ノ如キモノデアルカラ

$$x=0,\quad y=0$$

ナルトキハ極値ヲ有シナイコトガワカル．

(6) 三角形ノ三邊ヲ x, y, z，其ノ面積ヲ S トシ $x+y+z=2s$ トオクトキハへろんノ

公式＝ヨリ

$$S^2=s(s-x)(s-y)(s-z),\qquad s-z=x+y-s.$$

$$\therefore\ S^2=s(s-x)(s-y)(x+y-s)=f(x,y)$$ トオク.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=s(s-y)(2s-2x-y).\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=s(s-x)(2s-x-2y).$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=-2s(s-y),\qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=-2s(s-x).$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=-s(3s-2x-2y).$$

$$J=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}-\left\{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}^2=s^2\{4(s-x)(s-y)-(3s-2x-2y)^2\}.$$

而シテ，
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$$

ヲ解イテ次ノ値ヲ得ル.

(i) $x=s,\ y=s.\quad \therefore\ z=0.$ (ii) $x=s,\ y=0.\quad \therefore\ z=s.$

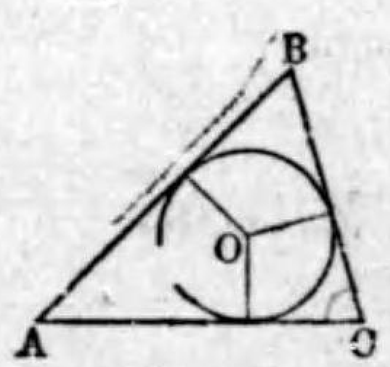
(iii) $x=0,\ y=s.\quad \therefore\ z=s.$ (iv) $x=\frac{2s}{3},\ y=\frac{2s}{3}.\quad \therefore\ z=\frac{2s}{3}$

(iv) ＝於テ $J>0,\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}<0.$

故＝三角形ガ等邊ナルトキ其ノ面積極大デアル.

(7) 與ヘラレタ圓ノ半徑ヲ r トシ，外接三角形ノ頂角ヲ A, B, C トスルト

$$\angle C=\pi-(\angle A+\angle B)$$



デアルカラ三角形ノ三邊ノ和ハ

$$2\left\{r\cot\frac{A}{2}+r\cot\frac{B}{2}+r\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)\right\}.$$

從ツテ面積ヲ S トスレバ

$$S=r^2\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\tan\frac{A+B}{2}\right).$$

コヽニ r ハ一定デアルカラ

$$f(A,B)=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\tan\frac{A+B}{2}$$

トオクト

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial A}&=-\frac{1}{2}\left(\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}-\sec^2\frac{A+B}{2}\right)=0\\ \frac{\partial f}{\partial B}&=-\frac{1}{2}\left(\operatorname{cosec}^2\frac{B}{2}-\sec^2\frac{A+B}{2}\right)=0\end{aligned}\right\}.$$

此ノ二式ヲ解イテ

$$\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}=\operatorname{cosec}^2\frac{B}{2}=\sec^2\frac{A+B}{2}.$$

然ルニ $\frac{A}{2}<90^\circ,\ \frac{B}{2}<90^\circ$ ナル故，

$$\operatorname{cosec}\frac{A}{2}=\operatorname{cosec}\frac{B}{2}.\quad \therefore\ A=B.$$

又 $$\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}=\sec^2\frac{A+B}{2}.\quad \therefore\ \frac{A}{2}+\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\ A=B=\frac{\pi}{3}.$$ 從ツテ $C=\frac{\pi}{3}.$

即チ △ABC ハ正三角形トナル. 此ノ場合＝

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A^2}=\frac{1}{2}\left\{\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}+\sec^2\frac{A+B}{2}\tan\frac{A+B}{2}\right\}=4\sqrt{3}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B^2}=\frac{1}{2}\left\{\operatorname{cosec}^2\frac{B}{2}\cot\frac{B}{2}+\sec^2\frac{A+B}{2}\tan\frac{A+B}{2}\right\}=4\sqrt{3}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A\partial B}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{A+B}{2}\tan\frac{A+B}{2}=2\sqrt{3}.$$

故＝ $\frac{\partial^2 f}{\partial A^2}\frac{\partial^2 f}{\partial B^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial A\partial B}>0$ 且ツ $\frac{\partial^2 f}{\partial A^2}>0$ デアルカラ正三角形ノトキ面積ハ極小トナル.

(8) 圓ノ半徑ヲ r トシ内接スル三角形ノ面積ヲ S, 三ツノ角ヲ A, B, C, 三邊ヲ a, b, c トスルト

$$S=\frac{1}{2}b\cdot c\sin A.$$

然ルニ
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r.$$

$$\therefore\ S=2r^2\sin A\sin B\sin C,$$ 且ツ $A+B+C=\pi.$

$$\therefore\ S=2r^2\sin A\sin B\sin(\pi-A-B),$$ r＝一定.

$$\therefore\ f(A,B)=\sin A\sin B\sin(\pi-A-B)$$

トオクト

$$\frac{\partial f(A,B)}{\partial A}=\cos A\sin B\sin(\pi-A-B)-\sin A\sin B\cos(\pi-A-B)$$
$$=\sin B\sin(\pi-A-B-A)=\sin B\sin(C-A).$$

同様＝
$$\frac{\partial f(A,B)}{\partial B}=\sin A\sin(C-B).$$

$$\frac{\partial f(A,B)}{\partial A}=0,\qquad \frac{\partial f(A,B)}{\partial B}=0$$

ヲ解イテ A＝B＝C. 但シ A＝0 等ハ無意味ナル故捨テル.

即チ**正三角形トナル．而シテ圓ニ內接スル三角形ハ極小値ヲ有シナイカラ，正三角形ノトキ其ノ面積最モ大デアル．**

(9) 內接直六面體ノ一ツノ頂點ノ座標ヲ (x, y, z) トシ，其ノ體積ヲ V トスルト，

$$V=8xyz \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ソノ頂點ハ楕圓面上ニアルガ故ニ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1), (2) ヲ x ニツイテ微分スレバ

$$\frac{\partial V}{\partial x}=8yz+8xy\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{x}{a^2}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial V}{\partial x}=8yz-8xy\frac{c^2x}{a^2z}=\frac{8y(a^2z^2-c^2x^2)}{a^2z}.$$

同樣ニ

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{8x(b^2z^2-c^2y^2)}{b^2z}.$$

故ニ V ガ極値ヲトルタメニハ

$$a^2z^2-c^2x^2=0, \qquad b^2z^2-c^2y^2=0.$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}.$$

然ルニ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad \therefore \quad \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^3}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad y=\frac{b}{\sqrt{3}}, \qquad z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

本問ニ於テハ最小値ハナイカラ，コノトキ V ハ最大トナル．**故ニ內接スル最大ナル直六面體ノ體積ハ**

$$8xyz=\frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

(10) 與ヘラレタル條件ヨリ a, b, c ハ正デナケレバナラナイカラ

$$x\log a+y\log b+z\log c=\log k.$$

今 z ヲ x, y ノ函數ト見テ微分スルト

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\log a}{\log c}. \qquad \therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x}=(y+1)(z+1)-(x+1)(y+1)\frac{\log a}{\log c}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\log b}{\log c}. \qquad \therefore \quad \frac{\partial u}{\partial y}=(x+1)(z+1)-(x+1)(y+1)\frac{\log b}{\log c}.$$

故ニ u ヲ極大又ハ極小ナラシメルタメニハ各式ヲ零トオイテ

$$(x+1)\log a=(z+1)\log c=(y+1)\log b=\frac{1}{3}\log(kabc).$$

$$\therefore \quad x+1=\frac{\log(kabc)}{3\log a}, \quad y+1=\frac{\log(kabc)}{3\log b}, \quad z+1=\frac{\log(kabc)}{3\log c}.$$

又 x, y, z ガ此ノ値ノトキ

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2\log a\log(kabc)}{3\log b\log c}.$$

故ニ此ノ最後ノ値ガ正ナルカ負ナルカニ從ツテ x, y, z ノ上ノ値ニ對シテ極大又ハ極小トナル．而シテ其ノ値ハ

$$\frac{[[\log(kabc)]]^3}{27\log a\log b\log c}.$$

(11) 底面ノ縱橫ヲ夫々 x, y 深サ z ナル直六面體ノ體積ヲ V，全表面積ヲ S トスルト

$$V=xyz, \qquad S=2(xy+yz+zx).$$

(i) 蓋アル場合

最モ經濟的ナルタメニハ最モ少ナキ材料ニテ定容積ノモノヲ作ルニアルヲ以テ V ヲ一定トシ，S ヲ最小ナラシメル如キ x, y, z ノ關係ヲ求メレバヨイ．

$$V=xyz \text{ ヨリ}, \qquad z=\frac{V}{xy}=f(x, y).$$

即チ z ハ x, y ノ函數ト見做スコトガ出來ル．

$$\therefore \quad \frac{\partial S}{\partial x}=2(y+z)+2(y+x)\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=2(x+z)+2(y+x)\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad zx+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial S}{\partial x}=\frac{2(xy-yz)}{x}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y}=\frac{2(xy-xz)}{y}.$$

故ニ S ヲ極大極小ナラシメル場合ハ

$$xy-yz=0, \qquad xy-xz=0. \qquad \therefore \quad x=y=z.$$

而シテ此ノ際 S ニハ極大ハナイカラ極小デアル．**即チ立方體ノトキ最モ經濟的トナル．**

(ii) 蓋ノナイ場合

$$S=2(yz+zx)+xy.$$

コレヨリ (i) ト同樣ニシテ

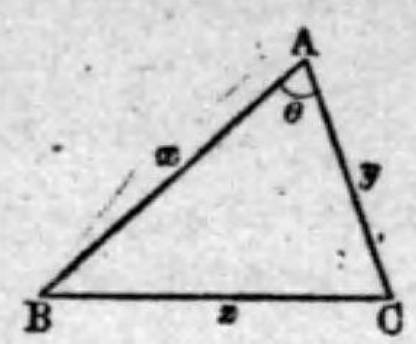
$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{xy-2yz}{x}=0, \qquad \frac{\partial S}{\partial y}=\frac{xy-2xz}{y}=0.$$

$$\therefore \quad x=y=2z.$$

故ニ此ノ場合ニハ底面ガ正方形ニシテ深サガ底ノ一邊ノ半分ニ等シキトキ最モ經濟的デアル．

(12) △ABC ノ ∠A ヲ θ, 三邊ノ長サヲ x, y, z, 面積ヲ S, 周ヲ s トスルト

$$s=x+y+z \cdots\cdots(1)$$



$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta \cdots\cdots(2)$$

$$2S=xy\sin\theta \cdots\cdots(3)$$

五ツノ變數 x, y, z, θ, s ノ間ニ三ツノ關係式ガアルカラ, x, y ヲ獨立變數トシ, z, θ, s ハ夫等ノ變數ノ函數デアルト考ヘルコトガ出來ル.

故ニ

$$\frac{\partial s}{\partial x}=1+\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z\frac{\partial z}{\partial x}=x-y\cos\theta+xy\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

$$\sin\theta+x\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}=0; \quad \frac{\partial s}{\partial y}=1+\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$z\frac{\partial z}{\partial y}=y-x\cos\theta+xy\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad \sin\theta+y\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}=0.$$

故ニ

$$z\frac{\partial z}{\partial x}=x-y\cos\theta-y\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=x-\frac{y}{\cos\theta}. \quad z\frac{\partial z}{\partial y}=y-x\cos\theta-x\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=y-\frac{x}{\cos\theta}.$$

從ツテ $z\frac{\partial s}{\partial x}=z+x-\frac{y}{\cos\theta}$. 同樣ニ $z\frac{\partial s}{\partial y}=z+y-\frac{x}{\cos\theta}$.

$$\frac{\partial s}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial s}{\partial y}=0$$

ヨリ $z+x-\frac{y}{\cos\theta}=0 \cdots\cdots(4)$, $z+y-\frac{x}{\cos\theta}=0 \cdots\cdots(5)$

(4) ト (5) トヲ邊々相減ジテ

$$(x-y)\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)=0.$$

θ ハ三角形ノ一角ナル故, $180°>\theta>0$, 從ツテ $1+\frac{1}{\cos\theta}\neq0$.

$$\therefore\ x-y=0. \quad \therefore\ z^2=x^2(2-2\cos\theta).$$

$x=y$ ヲ (4) 又ハ (5) ニ代入シテ上ノ式ノ $\frac{z^2}{x^2}$ ニ更ニ代入スルト

$$\sqrt{2-2\cos\theta}+1-\frac{1}{\cos\theta}=0.$$

$$\therefore\ \sqrt{2-2\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-1.$$

平方シテ

$$2-2\cos\theta=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}.$$

$$\therefore\ 2(1-\cos\theta)-\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}=0.$$

$$\therefore\ \frac{(1-2\cos\theta)(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\cos^2\theta}=0.$$

$1+\cos\theta\neq0$, $1-\cos\theta\neq0$, $\cos^2\theta\neq0$ ナルヲ以テ

$$\cos\theta=\frac{1}{2}. \quad \therefore\ \theta=60°.$$

而シテ此ノ際最大ガナイカラ最小デアル. 故ニ**頂角 60° ニシテ之ヲ夾ム二邊ノ等シイ三角形, 卽チ正三角形ガ最小デアル.**

(13) 弧ノ長サヲ l トシ, 半徑 r, 中心角 θ ナル弓形ヲ考ヘルトキハ $r\theta=l$ デアッテ弓形ノ面積ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)=\frac{l^2(\theta-\sin\theta)}{2\theta^2}$$

トナル. 依ツテ

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{l^2}{2}\cdot\frac{2\sin\theta-\theta-\theta\cos\theta}{\theta^3}=\frac{2l^2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^3}.$$

$$\frac{d^2S}{d\theta^2}=\frac{l^2}{2}\cdot\frac{\theta\sin\theta+\cos\theta-1}{\theta^3}.$$ 但 $\frac{dS}{d\theta}=\frac{Q}{P}=0$ ノトキ $\frac{d^2S}{d\theta^2}=\frac{Q'}{P}$ ヲ得ル.

$\frac{dS}{d\theta}=0$ ヨリ, $\cos\frac{\theta}{2}=0$ カ $\sin\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$ ヲ得ル.

而シテ $\sin\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$ ナラシメル θ ノ値ハ $\tan\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}=0$ ヲ滿足スルモノノミデアル. 然ルニ $f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}$ ハ $0<\theta\leqq\pi$ ニ於テ決シテ零トナルコトガナイ. 故ニ $\cos\frac{\theta}{2}=0$ ノミヲ採用スル.

サテ $\cos\frac{\theta}{2}=0$ カラ $\theta=\pi$. コノトキ,

$\frac{d^2S}{d\theta^2}=-\frac{l^2}{\pi^3}<0$ トナルカラ, 極大ヲ與ヘル. コノトキ面積ハ極大値 $\frac{l^2}{2\pi}$ トナリ, 弓形ハ半徑 $\frac{l}{\pi}$ ノ半圓周トナル.

(14) 一定點ヨリ四ツノ面ニ下ス垂線ノ長サヲ夫々 x, y, z, w トシ,

$$u=x^2+y^2+z^2+w^2 \cdots\cdots(1)$$

トオキ, u ノ最小値ヲ求メル. 然ルニ

$$Ax+By+Cz+Dw=3V \cdots\cdots(2)$$

故ニ w ヲ三ツノ變數 x, y, z ノ函數ト見做スコトガ出來ルカラ, 又 u モ x, y, z ノ函數ト見做スコトガ出來ル.

(1) ヨリ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\left(x+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2\left(y+w\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2\left(z+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \cdots\cdots\cdots(3)$$

又 (2) ヨリ

$$A+D\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad B+D\frac{\partial w}{\partial y}=0,\quad C+D\frac{\partial w}{\partial z}=0 \cdots\cdots\cdots(4)$$

故ニ (3), (4) ヨリ

$$A-\frac{Dx}{w}=0,\quad B-\frac{Dy}{w}=0,\quad C-\frac{Dz}{w}=0.$$

$$\therefore\ \frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}=\frac{w}{D}=\frac{Ax+By+Cz+Dw}{A^2+B^2+C^2+D^2}=\frac{3V}{A^2+B^2+C^2+D^2}.$$

$$\therefore\ x=\frac{3AV}{A^2+B^2+C^2+D^2},\quad y=\frac{3BV}{A^2+B^2+C^2+D^2},$$

$$z=\frac{3CV}{A^2+B^2+C^2+D^2},\quad w=\frac{3DV}{A^2+B^2+C^2+D^2}.$$

$$\therefore\ x^2+y^2+z^2+w^2=\frac{9V^2(A^2+B^2+C^2+D^2)}{(A^2+B^2+C^2+D^2)^2}=\frac{9V^2}{A^2+B^2+C^2+D^2}.$$

コレ u ノ極値デアル．而シテ之ハ最小値デアル．何トナレバ例ヘバ一ツノ頂點ト之ニ對スル面 A ニ至ル垂線ノ長サヲ x トスルト他ノ三ツノ面ニ下ス垂線ハ何レモ零トナルカラ

$$x^2+y^2+z^2+w^2=x^2.$$

而シテ $\qquad Ax=3V.\quad \therefore\ x^2=\dfrac{9V^2}{A^2}.$

然ルニ $\quad \dfrac{9V^2}{A^2+B^2+C^2+D^2}<\dfrac{9V^2}{A^2}$ デアルカラ最小値デアル．

第八編 微分變數ノ變換

第三十四章 微分變數ノ變換

微分方程式ト變數ノ變換

微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=a^2y \cdots\cdots\cdots(1)$$

ニ於テ $x=\sin t$ トオクト y ハ x ノ函數デアルカラ又 t ノ函數トナル．從ツテ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right\}\frac{dt}{dx}=\frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dy}{dt}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}.$$

然ルニ $\qquad \dfrac{dx}{dt}=\cos t,\quad \dfrac{d^2x}{dt^2}=-\sin t.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\cos t},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\cos t\dfrac{d^2y}{dt^2}+\sin t\dfrac{dy}{dt}}{(\cos t)^3}.$$

以上ノ x, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ (1) ニ代入スルト

$$(1-\sin^2 t)\frac{\cos t\dfrac{d^2y}{dt^2}+\sin t\dfrac{dy}{dt}}{\cos^3 t}-\sin t\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\cos t}=a^2y.$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dt^2}=a^2y \cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル．故ニ今何等カノ方法デ (2) 式ヨリ t ノ函數トシテ y ヲ表ハスコトガ出來ルトキハ

$$y=f(t)$$

トナリ，此ノ t ニ，$x=\sin t$ ヨリ得ル $t=\sin^{-1}x$ ヲ代入スルト

$$y=f(\sin^{-1}x)$$

トナル．コノ式ハ (1) ヨリ直接導カレル y ト x トノ函數關係ヲ表ハス式デアル．而シテ (1) ヨリ直接ニ x ノ函數トシテ y ヲ表ハス式ヲ導キ出スコトハ困難デアルガ，(2) ヨリ y ヲ t デ表ハス式ヲ導キ，然ル後之ヲ x ノ式ニ直スコトハ後ニ述ベル微分方程式ノ解法ニヨリ容易ナルコトヲ知ル．

斯様ニ微分方程式又ハ其ノ他ノ式ニ於テ變數ヲ他ノ變數ニ變換スルトキハ其ノ研究ヲ容易ナラシメルコトガアル．故ニ必要ニ應ジテ變數ヲ他ノ變數ニ直シ得ル様デナケレバナラナイ．而シテ普通最モ頻々ニ起ル變數ノ變換ハ次ノ場合デアル．

(I)　**獨立變數ヲ他ノ獨立變數ニ變換スル場合**

(II)　**獨立變數ヲ其ノ從屬變數ト變換スル場合**

(III)　**數多ノ變數ヲ變換スル場合**

デアル．(III) ノ場合ハ次章ニ於テ述ベル．

(I)　獨立變數ヲ他ノ獨立變數ニ變換スル場合

$y=f(x)$ ニ於テ自變數 x ヲ他ノ變數 t ノ函數トスルトキ，x ノ微分變數 dx ヲ t ノ微分變數ニ變換スルニハ上述ニ於テ知リ得タル如ク次ノ公式ヲ用ヒル．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dy}{dt}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此等ノ式ニ於テ左邊ノ獨立變數ハ x デアルガ右邊ニ於テハ t ガ獨立變數トナツテヰル．

(1), (2) ハ又 $x=\phi(t)$, $y=\varphi(t)$ ナル場合ニ於テ y ノ x ニ關スル導函數ヲ求メル公式デモアル．

(II)　獨立變數ト從屬變數トノ變換

上述ノ公式 (1), (2) ニ於テ，$t=y$ トオクト

$$\frac{dy}{dt}=1.\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dy}.\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{dy^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}.$$

此等ノ式ニ於テハ左邊ノ獨立變數ハ x，從屬變數ハ y デアルガ右邊ニ於テハ獨立變數ガ y，從屬變數ガ x デアル．此等ノ式ハ直接次ノ如クシテモ得ラレル．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)$$

$$=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}.$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}.$$

例題 1.　$y=\log x$ ナルトキ微分方程式

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+u=0$$

ニ於テ獨立變數 x ヲ y ニ變更セヨ．

〔解〕 $y=\log x$ ヨリ $x=e^y$.

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=e^y=x.\qquad \frac{du}{dy}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dy}=x\frac{du}{dx}.$$

$$\therefore\ \frac{d^2u}{dy^2}=x\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)=x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}.$$

$$\therefore\ \frac{d^2u}{dy^2}+u=0.$$

例題 2. $\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^3y}{dx^3}-3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0$ ニ於テ獨立變數ヲ x ヨリ y ニ變更スルコトニヨリテ $\dfrac{d^3x}{dy^3}=0$ ヲ得ルコトヲ示セ.

〔解〕 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\dfrac{d^2x}{dy^2}\dfrac{dy}{dx}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{\dfrac{d^3x}{dy^3}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2+3\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2\dfrac{dy}{x}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^6}=\frac{-\dfrac{d^3x}{dy^3}\dfrac{dx}{dy}+3\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^5}.$$

故ニ $\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^3y}{dx^3}-3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0$ ニ此等ノ式ヲ代入スルト次ノ如クナル.

$$\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\cdot\left\{\frac{-\dfrac{d^3x}{dy^3}\dfrac{dx}{dy}+3\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^5}\right\}-\frac{3\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^6}=0.$$

此ノ式ヲ簡單ニスルト

$$-\frac{\dfrac{d^3x}{dy^3}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^5}+\frac{3\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^6}-\frac{3\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^6}=0.$$

$$\therefore\ \frac{d^3x}{dy^3}=0.$$

第三十五章　數多變數ノ變換

$y=f(x)$ ニ於テ x, y ヲ他ノ變數ニ變換スルコト

$y=f(x)$ ニ於テ, $x=\phi(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$ トオクトキハ

$$\varphi(u,v)=f\{\phi(u,v)\}.\qquad \therefore\ v=\psi(u).$$

コレヨリ v ハ u ノ函數トナル. 從ツテ u ヲ新ナル獨立變數トシテ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 等ヲ u, v, $\dfrac{dv}{du}$, $\dfrac{d^2v}{du^2}$ 等デ表ハスコトガ出來ル. 何トナレバ

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du}.$$

$$\frac{dx}{du}=\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{dv}{du}.\qquad \frac{dy}{du}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{du}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{du}}{\dfrac{dx}{du}}=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial u}+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\cdot\dfrac{uv}{du}}.$$

$\dfrac{dy}{dx}$ ヲ x デ微分シテ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ得ル.

例題 1. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ナルトキ

$$\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

ヲ r, θ, $\dfrac{dr}{d\theta}$, $\dfrac{d^2r}{d\theta^2}$ デ表ハセ.

〔解〕 $y=f(x)$ ニ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ヲ代入スルト

$$r\sin\theta=f(r\cos\theta)$$

トナルカラ, r ハ θ ノ函數デアル. 從ツテ又 x 及ビ y ハ共ニ θ ノミノ函數ト考ヘルコトガ出來ル. 故ニ

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{dr}{d\theta}+\frac{\partial x}{\partial\theta}=\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta.$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{\partial y}{\partial r}\frac{dr}{d\theta}+\frac{\partial y}{\partial\theta}=\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\sin\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}{\left(\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\sin\theta\right)^2}.$$

(1) ヲ更ニ x ニツイテ微分スルト

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$

$$=\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta}\right\}\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta\right)^3}.$$

$$\therefore\ \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

$z=f(x, y)$ ニ於テ x, y ヲ他ノ變數ニ變換スルコト

コノ場合ニハ次ノ二ツニ分ケルコトガ出來ル.

(i) $z=f(x, y)$ ニ於テ $x=\phi(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$ ナルトキ自變數 x, y ヲ u, v ニ變換スルコト, 卽チ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ヲ u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ デ表ハスコトデアル. コレガタメニハ z ハ u, v ノ函數デアルカラ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

$x=\phi(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$ カラ $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ ハ求メラレルカラ (1), (2) ヲ解イテ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ヲ u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ デ表ハスコトガ出來ル.

例題 2. $z=f(x, y)$ ニ於テ, $x=u\cos\theta+v\sin\theta$, $y=u\sin\theta-v\cos\theta$ ナルトキ

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}$$

ノ自變數 x, y ヲ u, v ニ變換セヨ.

[解] z ハ x, y ノ函數デアルカラ又 u, v ノ函數デモアル. 故ニ

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

然ルニ

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\cos\theta.\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\sin\theta.$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\sin\theta.\quad \frac{\partial y}{\partial v}=-\cos\theta.$$

$$\therefore\ \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta-\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta.$$

$$\therefore\ \frac{\partial z}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial z}{\partial u}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\cos\theta\frac{\partial z}{\partial v}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial u}.$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2z}{\partial x^2}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial u}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial u}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial v}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial u}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+\sin^2\theta\frac{\partial^2z}{\partial v^2}.$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=-\cos\theta\frac{\partial}{\partial v}\left(-\cos\theta\frac{\partial z}{\partial v}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial u}\left(-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial v}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2z}{\partial v^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+\sin^2\theta\frac{\partial^2z}{\partial u^2}.$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}.$$

(ii) $z=f(x, y)$ ニ於テ, $u=\phi(x, y)$, $v=\varphi(x, y)$ ナルトキ, 自變數 u, v ヲ x, y ニ變換スルコト. コノ場合ニモ z ハ u, v ノ函數デアルカラ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

$u=\phi(x, y)$, $v=\varphi(x, y)$ カラ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ハ求メラレルカラ (1), (2) ハ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ヲ u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ デ表ハス式トナル.

例題 3. $z=f(x, y)$ ニ於テ $u=e^x+e^y$, $v=e^{-x}+e^{-y}$ ナルトキ次ノ式ノ獨立變數 x, y ヲ u, v ニ變換セヨ.

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}.$$

[解]

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\frac{\partial z}{\partial u}-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial v} \quad\cdots\cdots\cdots(1).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=e^{y}\frac{\partial z}{\partial u}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial v} \quad\cdots\cdots\cdots(2).$$

(1) ヨリ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+e^{x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$+e^{-x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)-e^{-x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=e^{x}\frac{\partial z}{\partial u}+e^{-x}\frac{\partial z}{\partial v}+e^{2x}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+e^{-2x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

(1) ヨリ同様ニシテ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{x+y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-e^{x-y}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-e^{-x+y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+e^{-(x+y)}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

(2) ヨリ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{y}\frac{\partial z}{\partial u}+e^{-y}\frac{\partial z}{\partial v}+e^{2y}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+e^{-2y}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$=(e^{2x}+2e^{x+y}+e^{2y})\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2(2+e^{x-y}+e^{-x+y})\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

$$+(e^{-2x}+2e^{-(x+y)}+e^{-2y})\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+(e^{x}+e^{y})\frac{\partial z}{\partial u}+(e^{-x}+e^{-y})\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=(e^{x}+e^{y})^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2(e^{x}+e^{y})(e^{-x}+e^{-y})\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(e^{-x}+e^{-y})^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$+(e^{x}+e^{y})\frac{\partial z}{\partial u}+(e^{-x}+e^{-y})\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=u^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2uv\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+v^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+u\frac{\partial z}{\partial u}+v\frac{\partial z}{\partial v}.$$

練 習 問 題 20.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{2x}{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{(1+x^2)^2}=0$ ニ於テ $x=\tan t$ ナルトキ, x ヲ t ニ變換セヨ.

(2) $y=f(x)$, $x=\phi(t)$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}$ 及ビ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ $\phi'(t)$, $\phi''(t)$ 及ビ $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ ニテ表ハセ.

(3) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ナルトキ

$$\frac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}$$

ノ獨立變數 x ヲ θ ニ, 從屬變數 y ヲ r ニ變換セヨ.

(4) 一ツノ直交軸ニ關シテ曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 (x, y) ニ於ケル

$$\rho=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

ハ他ノ直交軸ニ座標ヲ變更スルモ, 其ノ形ハ不變ナルコトヲ證明セヨ.

(5) $z=f(x, y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

(6) $z=f(x, y)$ ニ於テ $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\phi=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ ナルトキ次式ノ成立スルコトヲ證明セヨ,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}.$$

(7) $u=f(r)$. $r^2=x^2+y^2+z^2$ ナルトキ次ノ式ヲ證明セヨ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial r}.$

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{\partial u}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{x^2}{r^3}\right).$

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}\dfrac{du}{dr}+\dfrac{d^2u}{dr^2}.$

(8) $u=f(x, y, z)$ ニシテ

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\theta$$

ナルトキ次ノ各式ヲ證明セヨ.

(i) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2.$

(ii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\dfrac{1}{r^2}\left(\cot\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right).$

(iii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r^2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right\}.$

解 答

(1) $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\sec^2 t=(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}.$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\left\{(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}\right\}\frac{dx}{dt}=(1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x(1+x^2)\frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}.\qquad \dfrac{dx}{dt}=\phi'(t).$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\phi'(t)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

(1) ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\frac{dy}{dt}}{\phi'(t)}\right\}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\phi'(t)-\frac{dy}{dt}\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^2}\cdot\frac{1}{\phi'(t)}.$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\phi'(t)-\frac{dy}{dt}\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^3}.$$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$ デアルカラ

$$\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{x\frac{dy}{d\theta}-y\frac{dx}{d\theta}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}}$$

$$=\frac{r\cos\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta\right)-r\sin\theta\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta\right)^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)^2}}$$

$$=\frac{r^2}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}.$$

(4) 一ツノ直交軸ニ關スル點ノ座標ヲ x, y トシ原點ヲ (a, b) ニ, 且ツ軸ヲ θ ダケ回轉シタトキノ新直交軸ニ關スル同ジ點ノ座標ヲ X, Y トスルト

$$x=\mathrm{X}\cos\theta-\mathrm{Y}\sin\theta+a,$$
$$y=\mathrm{X}\sin\theta+\mathrm{Y}\cos\theta+b$$

デアル. 而シテ此ノ際 $y=f(x)$ ノ關係ガ $\mathrm{Y}=\mathrm{F}(\mathrm{X})$ ナル關係ニ變化シタモノトスルト

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\mathrm{X}}}{\frac{dx}{d\mathrm{X}}}=\frac{\sin\theta+\cos\theta\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}}{\cos\theta-\sin\theta\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\mathrm{X}}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\mathrm{X}}{dx}=\frac{\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}\cos\theta\left(\cos\theta-\sin\theta\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right)+\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}\sin\theta\left(\sin\theta+\cos\theta\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right)}{\left(\cos\theta-\sin\theta\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}}{\left(\cos\theta-\sin\theta\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right)^3}.$$

$$\therefore\ \rho=\frac{\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}}{\left(\cos\theta-\sin\theta\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right)^3}\div\left[1+\left\{\frac{\sin\theta+\cos\theta\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}}{\cos\theta-\sin\theta\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}}\right\}^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}}{\left\{1+\left(\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

トナリ座標ノ變換ニ依ツテモ其形ハ不變デアル.

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta.$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=r\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right).$$

$$\therefore\ \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial r}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{\partial z}{\partial\phi}\cdot\dfrac{-y}{x^2+y^2},\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial r}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{\partial z}{\partial\phi}\cdot\dfrac{x}{x^2+y^2}.$

$$\therefore\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)^2.$$

又 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial r}\dfrac{y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$

$$+2\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\phi}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial\phi}\cdot\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{x^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$$

$$+2\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\phi}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2-\frac{\partial z}{\partial\phi}\cdot\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2}.$$

(7) (i). $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{x}{r}.$

(ii). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial u}{\partial r}\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial x\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right).$$

(iii). (ii) ヨリ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right).$$

同樣ニシテ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{y^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{z^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right).$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

(8) $x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta.$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\ \phi=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}.$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}=\sin\theta\cos\phi.$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\theta\sin\phi.$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}=\cos\theta.$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}.$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}.$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}=-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=-\frac{\sin\theta}{r}.$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}.$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}.$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0.$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial x}=\sin\theta\cos\phi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\theta\sin\phi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2), (3) ヲ平方シテ加ヘルト

(i) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\phi}\right)^2.$

(1) ヲ更ニ x ニツイテ微分スルト

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=&\cos\theta\cos\phi\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial x}-\sin\theta\sin\phi\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial r}\right\}\\&+\frac{-\sin\theta\cos\phi}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{-\cos\theta\sin\phi}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{-\cos\theta\cos\phi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial x}\\&+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\}-\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\sin\phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\frac{\partial r}{\partial x}\\&+\frac{\sin\phi\cos\theta}{r\sin^2\theta}\frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial\phi}\right\}.\end{aligned}$$

然ルニ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial r}\right\}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\}=\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial\phi}\right\}=\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

ナル故

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=&\cos^2\phi\left\{\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\}\\&-\frac{\sin 2\phi}{r}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial r}+\frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\phi}-\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right\}\\&+\frac{\sin^2\phi}{r}\left\{\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\}\\=&\cos^2\phi\,\mathrm{L}-\frac{\sin 2\phi}{r}\mathrm{M}+\frac{\sin^2\phi}{r}\mathrm{N}\end{aligned}$$

トオクト，同樣ニシテ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin^2\phi\,\mathrm{L}+\frac{\sin 2\phi}{r}\mathrm{M}+\frac{\cos^2\phi}{r}\mathrm{N}$$

トナル. 又

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\sin 2\theta}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\right).$$

$$\therefore\ \text{(ii)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

(iii). (ii) 式ヲ變形シテ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\left\{\left(r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right\}.$$

[注意] (ii) 式ハ又 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ナルトキ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$
$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

ナル關係式ヲ用ヒテモ證明スルコトガ出來ル。

第九編 平面曲線ノ研究

第三十六章 曲線ノ凹凸及ビ變曲點

平面曲線ト導函數 或ル平面曲線ノ方程式ガ知ラレルトキハ，其ノ平面曲線ニ關スル種々ノ性質ハ其ノぐらふニツイテ吟味シナクテモ，其ノ導函數ノ適用ニ依ツテ知ラレルコトガアル．本編ニ於テハ斯樣ナ問題ヲ取扱フノデアル．此ノ際ニ於ケル曲線ノ方程式ハ

$$y=f(x)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$F(x,y)=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$x=\phi(t),\ y=\varphi(t)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ノ何レデモヨイガ其ノ導函數即チ

(1) ノ場合 $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$

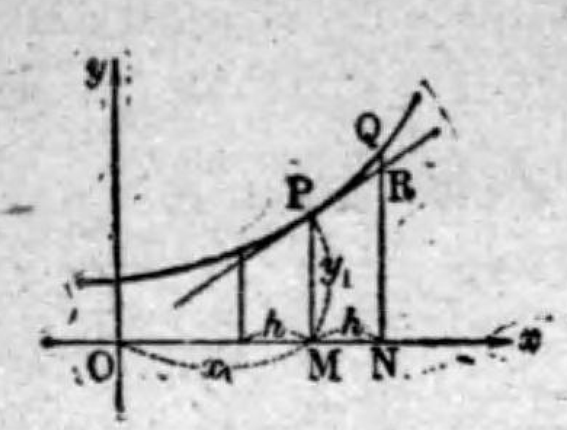
(2) ノ場合 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$

(3) ノ場合 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$

及ビ其ノ逐次導函數ハ何レモ一價連續ナルモノトスル．

導函數ヲ適用シテ曲線ノ切線，法線，凹凸，變曲點等ヲ求メル特別ナ場合ニツイテハ，旣ニ第十七章ニ於テ述ベタ．以下特ニ變曲點ノ一般ナ場合ニツイテ述ベルコトヽスル．

曲線ノ變曲點 $y=f(x)$ ナル方程式ノぐらふヲ次圖ノ如キモノトシ，



其ノ上ノ任意ノ一點ヲ $P(x_1, y_1)$，P ノ縱線ヲ $PM=y_1$ 橫線ヲ $OM=x_1$ トシ x_1 ニ h ナル增分ヲ與ヘタトキノ橫線ヲ ON，ON ニ對スル曲線上ノ點ヲ Q トスル．コヽニ增分 h ハ M ノ左右何レニアツテモヨイ．卽チ $MN=h$ ハ正負何レノ値ヲモ取リ得ル．然ルトキハ P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y-y_1=(x-x_1)f'(x_1).$$

$$\therefore\quad y=f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1).$$

此ノ式ニ於テ x ノ代リニ N ノ橫座標 $x=x_1+h$ ヲ代入スルト其レニ應ズル切線上ノ縱座標 $y=NR$ ヲ得ル．卽チ

$$NR=f(x_1)+hf'(x_1).$$

然ルニ

$$NQ=f(x_1+h)$$

$$=f(x_1)+hf'(x_1)+\frac{h^2}{2!}f''(x_1+\theta h) \quad\cdots\cdots(1).$$

$$0<\theta<1$$

$$\therefore\quad NQ-NR=\frac{h^2}{2!}f''(x_1+\theta h)\quad\cdots\cdots(2)$$

トナル．故ニ P 點ニ於テ $f''(x_1)>0$ ナルトキ，h ノ絕對値ガ十分小ナルトキハ $f''(x)$ ガ連續ナルコトヨリ $f''(x_1+\theta h)>0$ デアルカラ，h ノ正負ニ拘ラズ常ニ $NQ>NR$ デアル．卽チ曲線ハ P ノ近傍ニ於テ切線ノ上ニアル．故ニ曲線ハ P ニ於テ上方ニ凹デアル．

若シ又 $f''(x_1)<0$ ナルトキハ $NQ<NR$ トナリ，曲線ハ P ノ近傍ニ於テ切線ノ下方ニ在ル．故ニ曲線ハ P ニ於テ上方ニ凸デアル．

次ニ P ニ於テ $f''(x_1)=0$, $f'''(x_1)\neq 0$ ナルトキハ (1) ノ代リニ更ニ一項多ク展開スルト

$$NQ-NR=\frac{h^3}{3!}f'''(x_1+\theta h)\quad\cdots\cdots(3)$$

$$0<\theta<1$$

ヲ得ル．然ルニ此ノ式ノ右邊ニ於テ h ノ絕對値ガ十分小ナルトキハ $f'''(x_1+\theta h)$ ハ $f'''(x_1)$ ト同一ナル一定ノ符號ヲ有スルケレドモ，h^3 ハ h ノ正負ニヨツテ

其ノ符號ヲ變ズル．故ニ h ノ正負ニヨツテ NQ ト NR トハ其ノ大小關係ガ反對トナル．卽チ曲線ハ P ノ一方ノ側ニ於テハ切線ヨリ上方ニ在リ，他方ノ側ニ於テハ切線ヨリ下方ニ在ル．斯樣ナ場合ニハ P ハ變曲點デアル．

若シ更ニ $f''(x_1)=0$ デ且 $f'''(x_1)=0$ ナルトキハ，(3) ノ右邊ニ於テ $f'''(x_1+\theta h)$ ハ必ズシモ一定ノ符號ヲ有シナイカラ，更ニ一項多ク展開シテ吟味シナクテハナラナイ．此ノコトヲ推シ進メテ一般ニ

$$f''(x_1)=f'''(x_1)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(x_1)=0,\quad f^{(n)}(x_1)\neq 0$$

ナルトキハ，(2) 又ハ (3) ノ代リニ

$$NQ-NR=\frac{h^n}{n}f^{(n)}(x_1+\theta h)\qquad 0<\theta<1$$

ヲ得ル．コノ式ニツイテ上ト同樣ニ取扱フト次ノ結果ヲ得ル．

n ガ偶數ニシテ $f^{(n)}(x_1)>0$ ナルトキハ上方ニ凹デアル．

$f^{(n)}(x_1)<0$ ナルトキハ上方ニ凸デアル．

n ガ奇數ナルトキハ變曲點デアル．

卽チ曲線 $y=f(x)$ 上ノ變曲點ヲ求メルニハ先ヅ $f''(x)=0$ ヲ解イテ x ヲ求メ，其ノ値ヲ通過スルトキ $f''(x)$ ガ符號ヲ變ズルトキハ其ノ x ハ曲線ノ變曲點ノ橫座標デアル．

或ハ $f''(x)=0$ ナラシメル x ノ値ヲ代入スルトキ $f'''(x)$, $f^{(IV)}(x)$, …… 等ノ中初メテ 0 デナイモノガ奇數ノ n ニ對スル $f^{(n)}(x)$ ナラバ其ノ x ハ變曲點ノ橫座標デアル．

例題 1. $y=x(x-5)^4$ ノ變曲點ヲ求メヨ．

[解]　$f'(x)=5(x-5)^3(x-1)$, $f''(x)=20(x-5)^2(x-2)$.

故ニ $f''(x)=0$ ナラシメル x ノ値ハ 2 及ビ 5 デアル．而シテ

$$f'''(x)=60(x-5)(x-3)$$

デアルカラ

$$f'''(2)=60(-3)(-1)=180\neq 0.$$

故ニ點 $x=2$, $y=162$ ハ變曲點デアル．

次ニ $x=5$ ノトキハ $f'''(5)=0$ デアルカラ $f^{(4)}(x)$ ヲ求メルト

$$f^{(4)}(x)=120(x-4).\quad\therefore\ f^{(4)}(5)=120\neq 0.$$

故ニ點 $(5,0)$ ハ變曲點デナイ．

例題 2. $(1+x^2)y=6x$ ナル曲線ノ變曲點ヲ求メヨ.

〔解〕 $y=\dfrac{6x}{1+x^2}$,　$y'=\dfrac{6(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$,

$$y''=\frac{12x(x^2-3)}{(1+x^2)^3},\quad y'''=\frac{-36(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^4}.$$

故ニ $y''=0$ ナラシメル x ノ値ハ $0,\ \pm\sqrt{3}$ ニシテ, コレラノ値ニ對シテ y''' ハ 0 トナラナイカラ變曲點ハ

$$\left.\begin{aligned}x&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}x&=\sqrt{3}\\ y&=\frac{3}{2}\sqrt{3}\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}x&=-\sqrt{3}\\ y&=-\frac{3}{2}\sqrt{3}\end{aligned}\right\}$$

デアル.

例題 3. 曲線 $y^3=a^3(1-x)^5$ ノ變曲點ヲ求メヨ. 但シ $a>0$.

〔解〕 $y=a(1-x)^{\frac{5}{3}}$,　　$y'=-\dfrac{5}{3}a(1-x)^{\frac{2}{3}}$,

$$y''=\frac{10}{9}a(1-x)^{-\frac{1}{3}},\quad y'''=\frac{10}{27}a(1-x)^{-\frac{4}{3}}.$$

故ニ $y''=0$ ナラシメル値ガナイ. 然レドモ $x<1$ ナルトキ $y''>0$ ニシテ $x>1$ ナルトキ $y''<0$ トナル. 即チ $x=1$ ノトキ y'' ハ正ヨリ負ニ移ル. 即チ曲線ハ凸ヨリ凹ニ移ル. 故ニ $x=1$ ノトキ曲變點トナル. 即チ變曲點ハ $x=1,\ y=0$ デアル.

例題 4. 曲線 $y(x^2+a^2)=a^2(a-x)$ ハ一直線上ニアル三ツノ變曲點ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

〔解〕 $y(x^2+a^2)=a^2(a-x)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$ ノ兩邊ヲ微分シテ

$$y'(x^2+a^2)+2xy=-a^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$
$$y''(x^2+a^2)+4xy'+2y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$
$$y'''(x^2+a^2)+6xy''+6y'=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

變曲點ガ存在スルタメニハ $y''=0$ デ $y'''\neq0$ ナルコトヲ要ス. 今 $y''=0$ デ同時ニ $y'''=0$ トスルト (4) ヨリ $y'=0$ トナル. 從テ又 (3) ヨリ $y=0$ トナル. 然ルニ x ノ有限値ニ於テ (2) ヨリ y ト y' トハ同時ニ零トナルコトガ出來ナイ. 依テ y'' ト y''' トハ同時ニ零トナルコトハ出來ナイ. 故ニ (3) ヨリ

$$2xy'+y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ヲ滿足セシムル (1) ノ上ノ點ハ皆變曲點デアル.

(2) ト (5) トヨリ y' ヲ消去スルト

$$3x^2y+2a^2x-a^2y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(6).$$

(1) ト (6) トヨリ x^2y ヲ消去スルト

$$x+4y=3a\cdots\cdots\cdots\cdots(7).$$

故ニ求メル變曲點ハ直線 (7) ト三次曲線 (1) トノ交點デ其ノ數ハ一般ニ三ツニシテ, 且一直線 (7) 上ニアル.

例題 5. 曲線 $F(x,y)=0$ ニ於テ變曲點ヲ求メル式ヲ作リ, 且之ヲ應用シテ曲線 $xy^2=4a^2(2a-x)$ ノ變曲點ヲ求メヨ.

〔解〕 $F(x,y)=0$ ナルトキハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

故ニ　$\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2=0$,　及ビ　$F(x,y)=0$

ヨリ得タル x,y ノ値ニ對シテ, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq0$ ニシテ且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ガ此ノ點ニ於テ符號ヲ變ズルトキハ x,y ハ求メル變曲點ノ座標デアル.

サテ $F(x,y)=xy^2-4a^2(2a-x)$ ナルトキハ

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y^2+4a^2,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2xy,\quad \frac{\partial^2F}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=2y,\quad \frac{\partial^2F}{\partial y^2}=2x.$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{-2\times2y(y^2+4a^2)2xy+2x(y^2+4a^2)^2}{8x^3y^3}.$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ ヨリ　　$x(y^2+4a^2)(3y^2-4a^2)=0.$

コレト　　$xy^2-4a^2(2a-x)=0$

トヲ解イテ　　$y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}a,\quad x=\dfrac{3}{2}a.$

此ノ値ヲ代入シテ　　$\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq0.$

點 $\left(\dfrac{3}{2}a,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}a\right)$ ニ於テ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ハ正ヨリ負ニ變ジ $\left(\dfrac{3}{2}a,\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}a\right)$ ニ於テハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ハ負ヨリ正ニ變ズル. 故ニ

$\left(\dfrac{3}{2}a,\ \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}a\right)$ ハ求メル變曲點デアル.

例題 6. 曲線 $y^2=f(x)$ ノ變曲點ノ x 座標ハ方程式

$$\{f'(x)\}^2=2f(x)f''(x)$$

ヲ滿足スルコトヲ證明セヨ.

〔解〕 兩邊ヲ二度微分スルト

$$2yy'=f'(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(1).\qquad 2y'^2+2yy''=f''(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

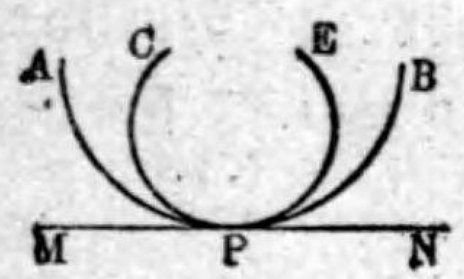
變曲點ニ於テハ $y''=0$ デアルカラ $2y'^2=f''(x)$. (1) ヨリ $y'=\dfrac{f'(x)}{2y}$,
コレヲ $2y'^2=f''(x)$ ニ代入シテ

$$\frac{\{f'(x)\}^2}{2y^2}=f''(x).$$

即チ
$$\{f'(x)\}^2=2y^2f''(x)=2f(x)f''(x).$$

第三十七章　切觸圓及ビ二曲線ノ切觸

圓ノ曲率　MPN ナル直線狀ノ針金ヲ P ニ於テ固定シテ彎曲シ, APB ナル圓弧ヲ作リ, 此ノ圓弧ヲ更ニ P ニ於テ固定シテ彎曲シ圓弧 CPE ヲ作ルトキハ, 之ハ圓弧 APB ヨリ彎曲ノ度ガ大デアリ, 直線 MPN ハ少シモ彎曲シテヰナイカラ彎曲ノ度ハ零デアル.



一般ニ一直線上ノ一點 P ニ於テ同側ニ此ノ直線ニ切スル圓ヲ作ルトキ, 內圓ハ外圓ヨリ彎曲ノ度ガ大デアル. 然ルニ內圓ノ半徑ハ外圓ノ半徑ヨリ小デアルカラ, 圓ノ半徑ガ小ナレバ小ナル程彎曲ノ度ガ大トナル. 故ニ圓ノ彎曲ノ度ヲ表ハスニ其ノ半徑 r ノ逆數

$$\frac{1}{r}$$

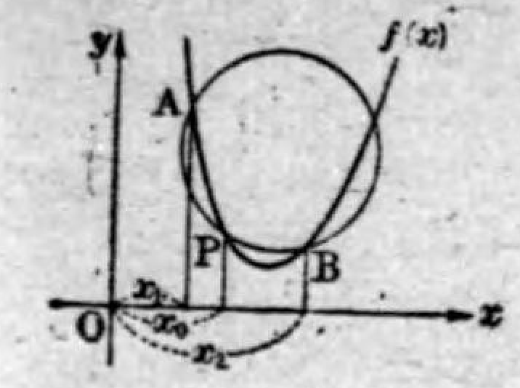
ヲ以テシ, 之ヲ其ノ圓ノ曲率ト云フ. 卽チ曲率ガ大ナレバ大ナル程, 換言スレバ半徑ガ小ナレバ小ナル程圓ノ曲度ハ大デアル. 直線ハ半徑ガ無限大ナル圓弧ト見做スコトガ出來ルカラ, 其ノ曲率ハ

$$\frac{1}{\infty}=0$$

デアル. 卽チ直線ハ少シモ彎曲シナイコトニナル.

切觸圓　上ノ圖ニ於テ二點 A, B ; C, E ガ夫々ノ圓周ニ沿フテ P ニ極メテ近ク接近シタルモノトスル. 此ノ樣ナ場合ニ三角形 APB, CPE ガ如何程小トナツテモ, 其ノ外接圓ノ大サニハ無關係デアル. 換言スレバ二點 A, B ガ如何程 P ニ接近シテモ其ノ外接圓ハ必ズシモ小トナラズ, 接近スルトキノ經路

ニヨリ或ハ大トナリ或ハ小トナル. 而シテ極限ニ於テハ一定ノ圓トナル. 故ニ今曲線上ニ相異ナル三點 A, P, B ヲトルト一般ニ之ヲ過ル圓ガ一ツアル. コヽニ於テ P ヲ固定シ A, B ヲ共ニ曲線ニ沿フテ限リナク P ニ接近セシメルトキ, 圓 APB ガ或ル一定ノ圓ニ限リナク接近スルトキ其ノ一定ノ圓ヲ點 P ニ於ケル此ノ曲線ノ**切觸圓**ト云フ. 此ノ際直線 AP, BP ハ共ニ P ニ於ケル曲線ノ切線トナル. 而シテ此ノ切線ハ又此ノ切觸圓ノ切線デモアルカラ, 曲線, 切觸圓ハ共ニ P ニ於ケル切線ニ P ニ於テ切スル.



以下曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トシ, 其ノ上ノ一點 $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル切觸圓ノ半徑, 中心ヲ求メル方法ヲ述ベル. 之ガタメ上圖ニ於テ A 及ビ B ノ座標ヲ夫々 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ トスル. 說明ノ便宜上 A, P, B ノ順ニ取ツタガ結果ニ於テハ其ノ順序ニ關係ガナイ.

サテ三點 A, P, B ヲ過ル圓ノ方程式ヲ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

トシ, 之ヲ書キ直スト

$$y=b\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}$$

トナル. 之ヲ $y=\varphi(x)$ デ表ハス. 此ノ圓ニ於テ P ヲ固定シテ A, B ヲ P ニ近迫セシメタ極限ガ切觸圓デアル. 然ルニ假定ニヨリ圓ト曲線ハ A, P, B デ交ルカラ $f(x)-\varphi(x)$ ハ A, P, B ニ於テ 0 トナル. 從ツテ $f'(x)-\varphi'(x)$ ハ平均値ノ定理ニヨリ x_0 ト x_1 ノ間ニ於ケル一ツノ値 x_3 及ビ x_0 ト x_2 トノ間ノ一ツノ値 x_4 ニ對シテ 0 トナル.

同樣ニ又 $f''(x)-\varphi''(x)$ ハ x_3 ト x_4 トノ間ノ一ツノ値ニ對シテ 0 トナル. 故ニ A, B ガ P ニ近迫シタ極限卽チ圓 APB ガ接觸圓トナツタ極限ニ於テハ $x_1=x_0=x_2$ トナリ, 此ノ極限ニ於テハ

$$f(x_0)=\varphi(x_0),\quad f'(x_0)=\varphi'(x_0),\quad f''(x_0)=\varphi''(x_0)$$

トナル. 是ハ P ニ於テ圓 $y=\varphi(x)$ ガ曲線 $y=f(x)$ ノ切觸圓ナルタメノ條件デアル. 詳シクムフト $f(x_0)=\varphi(x_0)$ ハ此ノ圓ガ點 P ヲ過ルタメノ條件ニシテ

$f'(x_0)=\varphi'(x_0)$ ハ此ノ圓ト曲線 $f(x)$ トガ P ニ於テ相切スルタメノ條件ニシテ $f''(x_0)=\varphi''(x_0)$ ハ此ノ圓ト曲線トハ單ニ相切スル以上ニ更ニ密接ナル關係ヲ有スルコトヲ示スノデアル．次ニ

$$\varphi(x_0)=b\pm\sqrt{r^2-(x_0-a)^2}$$

ヨリ

$$\varphi'(x_0)=\mp\frac{x_0-a}{\sqrt{r^2-(x_0-a)^2}}=-\frac{x_0-a}{\varphi(x_0)-b},$$

$$\varphi''(x_0)=-\frac{\varphi(x_0)-b-(x_0-a)\varphi'(x_0)}{\{\varphi(x_0)-b\}^2}=-\frac{1+\varphi'(x_0)^2}{\varphi(x_0)-b}$$

ヲ得ル．コヽニ於テ

$f(x_0)=\varphi(x_0)$ ヨリ $\qquad f(x_0)=b\pm\sqrt{r^2-(x_0-a)^2}$ ……………………(1)

$f'(x_0)=\varphi'(x_0)$ ヨリ $\qquad f'(x_0)=-\dfrac{x_0-a}{f(x_0)-b}$ ……………………(2)

$f''(x_0)=\varphi''(x_0)$ ヨリ $\qquad f''(x_0)=-\dfrac{1+f'(x_0)^2}{f(x_0)-b}$ ……………………(3)

ナル關係ヲ得ル．(3) ヨリ

$$b=f(x_0)+\frac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)}.$$

從ツテ (2) ヨリ

$$a=x_0-\frac{\{1+f'(x_0)^2\}f'(x_0)}{f''(x_0)}.$$

コレヲ (1) ニ代入シテ

$$r^2=\{f(x_0)-b\}^2+(x_0-a)^2=\frac{\{1+f'(x_0)^2\}^3}{f''(x_0)^2}$$

ヲ得ル．簡單ノタメ x_0 ヲ單ニ x ト書キ又 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ ノ代リニ夫々 y, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ト書クコトヽスルト切觸圓ノ中心及ビ半徑ヲ表ハス式ハ次ノ如クナル．

$$a=x-\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},\quad b=y+\frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$

$$r=\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2x}{dx^2}}$$

コヽニ半徑ハ常ニ正ヲトル．

例題 1. 拋物線 $y^2=4px$ 上ノ一點 (x,y) ニ於ケル切觸圓ノ中心 (a,b), 並ビニ半徑 r ヲ求メ且此ノ點ト焦點トノ距離ヲ r_1 トスルトキ

$$r=\frac{2r_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}$$

ナルコトヲ證明セヨ．

[證明] $y^2=4px$ ヨリ $2y'y=4p$, $y'^2+yy''=0$.

$$\therefore\ y'=\frac{2p}{y},\ y''=-\frac{4p^2}{y^3}.$$

$$\therefore\ a=x-\frac{\{1+(y')^2\}y'}{y''}=x-\frac{\left\{1+\dfrac{4p^2}{y^2}\right\}\dfrac{2p}{y}}{\dfrac{-4p^2}{y^3}}=x+\frac{y^2+4p^2}{2p}$$

$$=x+\frac{4px+4p^2}{2p}=x+2x+2p=3x+2p.$$

$$b=y+\frac{1+\dfrac{4p^2}{y^2}}{-\dfrac{4p^2}{y^3}}=y+\frac{y^3+4p^2y}{-4p^2}=-\frac{y^3}{4p^2}.$$

$$r=\left|\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right|=\left|\frac{\left\{1+\dfrac{4p^2}{y^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{4p^2}{y^3}}\right|=\frac{(4px+4p^2)^{\frac{3}{2}}}{4p^2}.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a=3x+2p,\ b=-\frac{y^3}{4p^2}}.$$

$$r=\frac{8p^{\frac{3}{2}}(x+p)^{\frac{3}{2}}}{4p^2}=\frac{2(x+p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}.$$

コノ式ニ於テ $r_1^2=(x-p)^2+y^2=(x-p)^2+4px=(x+p)^2$ ヲ代入スルト

$$\boldsymbol{r=\frac{2r_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}}.$$

例題 2. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上ノ一點ニ於ケル曲率半徑ヲ求メヨ．

[解] 與ヘラレタ曲線ノ方程式ヲ媒介變數 t ヲ以テ書キ換ヘルト

$$x=a\cos^3t,\quad y=a\sin^3t$$

トナル．然ルニ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dy}{dt}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}$$

デアルカラ

$$r=\frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}.$$

而シテ

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2t\sin t,\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=3a(2\sin^2t\cos t-\cos^3t).$$

$$\frac{dy}{dt}=3a\sin^2t\cos t,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=3a(2\sin t\cos^2t-\sin^3t).$$

$$\therefore\ r=\left|\frac{\{9a^2\cos^4t\sin^2t+9a^2\sin^4t\cos^2t\}^{\frac{3}{2}}}{-9a^2\cos^2t\sin t(2\sin t\cos^2t-\sin^3t)-9a^2\sin^2t\cos t(2\sin^2t\cos t-\cos^3t)}\right|$$

$$=\left|\frac{\{9a^2\cos^2t\sin^2t\}^{\frac{3}{2}}}{-9a^2\sin^2t\cos^2t}\right|$$

$$=\left|-3a\cos t\sin t\right|=\left|-3(a^3\cos^3t\sin^3t)^{\frac{1}{3}}\right|=\left|-3(ax\cdot y)^{\frac{1}{3}}\right|.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{r}=\left|-3(axy)^{\frac{1}{3}}\right|.$$

例題 3. 曲線 $x=a(m\cos t+\cos mt)$, $y=a(m\sin t-\sin mt)$ 上ノ $t=\frac{\pi}{2}$ ナル點ニ於ケル切觸圓ノ半徑ヲ求メヨ.

〔解〕 $\frac{dx}{dt}=-am(\sin t+\sin mt)$, $\frac{dy}{dt}=am(\cos t-\cos mt)$.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos t-\cos mt}{\sin t+\sin mt}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{-(\sin t-m\sin mt)(\sin t+\sin mt)-(\cos t-\cos mt)(\cos t+m\cos mt)}{(\sin t+\sin mt)^2}\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{(m-1)\{1-\cos(m+1)t\}}{am(\sin t+\sin mt)^3}.$$

$$\therefore\ r=\left|\frac{\left\{1+\frac{(\cos t-\cos mt)^2}{(\sin t+\sin mt)^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{(m-1)\{1-\cos(m+1)t\}}{am(\sin t+\sin mt)^3}}\right|=\left|\frac{am[2\{1-\cos(m+1)t\}]^{\frac{3}{2}}}{(m-1)\{1-\cos(m+1)t\}}\right|$$

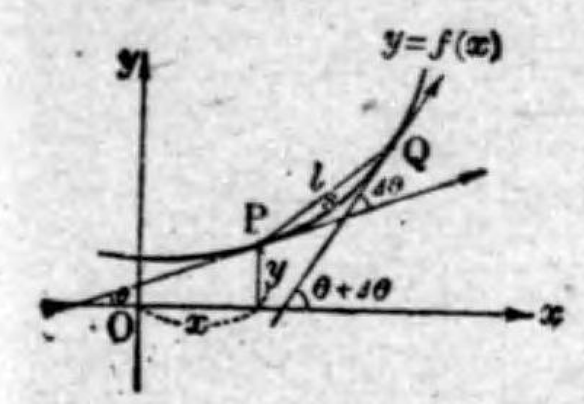
$$=\left|\frac{2am\left(4\sin^2\frac{m+1}{2}t\right)^{\frac{1}{2}}}{m-1}\right|=\left|\frac{4am\sin\frac{m+1}{2}t}{m-1}\right|.$$

故ニ $t=\frac{\pi}{2}$ ノトキノ半徑ヲ $r_{\frac{\pi}{2}}$ トスルト

$$\boldsymbol{r_{\frac{\pi}{2}}=\frac{4am\sin\left(\frac{m+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{m-1}}.$$

特ニ $m=1$ ナルトキハ ∞, $\frac{m+1}{2}$ ガ偶數ナルトキハ 0, $m\neq1$ ナルトキ $\frac{m+1}{2}$ ガ奇數ナルトキハ $\pm\frac{4am}{m-1}$ トナル.

曲線ノ曲率　曲線 $y=f(x)$ ガ一ツノ點ノ運動ニ依ツテ得ラレタモノトスルト其ノ上ノ一點 P ニ於ケル曲線ノ方向ハ P 點ノ運動ノ方向ト一致スル. 然ルニ P 點ニ於ケル運動ノ方向ハ P 點ニ於ケル曲線ノ切線ト同方向デアルカラ, 一般ニ曲線上ノ一點ニ於ケル其ノ曲線ノ方向ハ, 其ノ點ニ於ケル切線ヲ以テ表ハサレル. 今 P 點ニ於ケル切線ノ方向角ヲ θ トシ, 曲線上ノ他ノ一點 Q ニ於ケル切線ノ方向角ヲ $\theta+\Delta\theta$ トスルト, $\Delta\theta$ ハ點 P ヨリ點 Q ニ至ル迄ノ此ノ曲線ノ方向ノ變化ヲ表ハス角デアル. 而シテ P, Q ニ於ケル二切線ノナス角ニ等シイ. $\Delta\theta$ ハ點 P ガ點 Q ニ曲線ニ沿フテ行ク間ニ生ジタ方向ノ變化デアルカラ, 弧 PQ ノ長サヲ ΔS トスルト

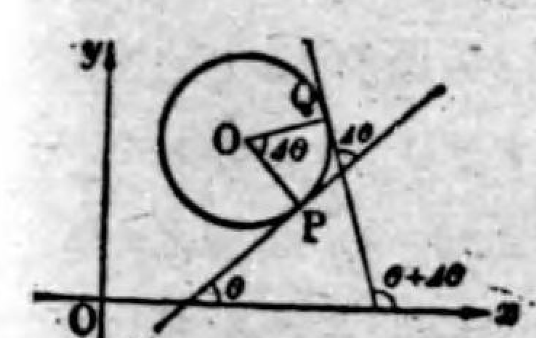


$$\frac{\Delta\theta}{\Delta S}$$

ハ點 P ガ點 Q ニ行ク間ニ生ジタ單位距離ニツイテノ方向ノ變化デアル. 故ニ特ニ一點 P ノ所ニ於ケル此ノ割合ヲ求メルニハ

$$\lim_{\Delta S\to0}\frac{\Delta\theta}{\Delta S}=\frac{d\theta}{dS}$$

ヲ計算スレバヨイ. 之ヲ P ニ於ケル此ノ曲線ノ曲率ト云フ. 此ノ定義ニ依テ半徑 r ナル圓ノ曲率ヲ求メルト次ノ如クナル.



$$\angle POQ=\Delta\theta.$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta S}=\frac{\Delta\theta}{\widehat{PQ}}=\frac{\Delta\theta}{r\Delta\theta}=\frac{1}{r}.$$

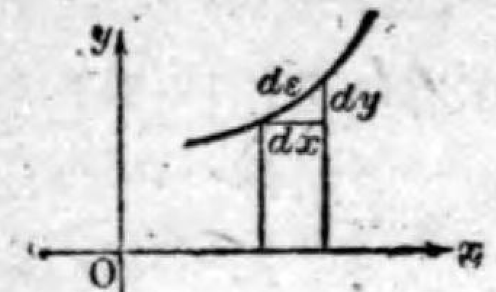
$$\therefore\ \frac{d\theta}{dS}=\frac{1}{r}.$$

即チ圓ノ曲率ハ一定デ半徑ノ逆數ニ等シク, 本章ノ最初ニ述ベタ定義ト一致スル.

一般ニ任意ノ曲線ニ於テハ其ノ上ノ各點ニ於テ夫々相異ナル曲率ヲ有スル. 之ヲ [illegible]スル タメ一ツノ座標軸ニ關シテ與ヘラレタ曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 $P(x,y)$ ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角ヲ θ デ表ハスト

$$\tan\theta=\frac{dy}{dx}.$$

此ノ兩邊ヲ x デ微分スルト



$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{d\theta}{dx}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\tan^2\theta}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}.$$

然ルニ $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$ デアルカラ

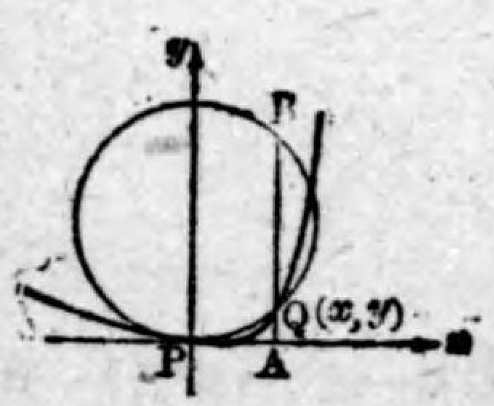
$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

故ニ點 P ニ於ケル曲率ハ

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{\dfrac{d\theta}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

デアル. 即チ曲線上ノ一點ニ於ケル曲率ハ其ノ點ニ於ケル切觸圓ノ半徑ノ逆數ニ等シイ. 然ルニ切觸圓ノ曲率ハ其ノ半徑ノ逆數デアルカラ結局曲線上ノ一點ニ於ケル切觸圓ハ其ノ點ニ於テ元ノ曲線ト同一ノ曲率ヲ有スルコトニナル. 故ニ切觸圓ノコトヲ又**曲率圓**トモ云ヒ, 其ノ中心及ビ半徑ヲ**曲率中心及ビ曲率半徑**トモ云ヒ r ヲ以テ表ハス.

曲率半徑ハ又次ノ如クシテ簡單ニ求メルコトガ出來ル. 曲率ヲ求メントスル曲線上ノ點 P ヲ原點トシ, P 點ニ於ケル切線ヲ x 軸, 法線ヲ y 軸トスル. 原點ノ近傍ニ於テ曲線上ニ他ノ一點 Q ヲトリ, Q ヲ過リ且原點ニ於テ x 軸ニ切スル圓ヲ畫キ, 次ニ Q ヲ過リ x 軸ニ垂線ヲ引キ其ノ足ヲ A トシ, 又此ノ垂線ガ再ビ圓ト交ハル點ヲ B トスル. 然ルトキハ



$$AB=\frac{PA^2}{AQ}=\frac{x^2}{y}$$

デアル. コヽニ於テ Q ガ曲線ニ沿フテ P ニ限リナク接近スルト考ヘルト, 其ノ極限ニ於テ此ノ圓ハ P ニ於ケル切觸圓トナリ, AB ハ切觸圓ノ直徑トナル. 故ニ P ニ於ケル曲率半徑ヲ r トスルト

$$r=\left|\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2y}\right|$$

デアル. 之ヲ **Newton ノ公式**ト云フ.

例題 1. 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ一點 (x,y) ニ於ケル曲率半徑 r ヲ求メヨ.

[解] $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\mp\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad y''=\mp\frac{ab}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}.$$

$$\therefore\quad r=\frac{\left\{1+\dfrac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}=\frac{\left\{a^2-\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)x^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

今離心率ヲ e トスルト

$$r=\frac{(a^2-e^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}=\frac{\{(a-ex)(a+ex)\}^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

故ニ點 (x,y) ト二ツノ焦點トノ距離ヲ r_1, r_2 トスルト,

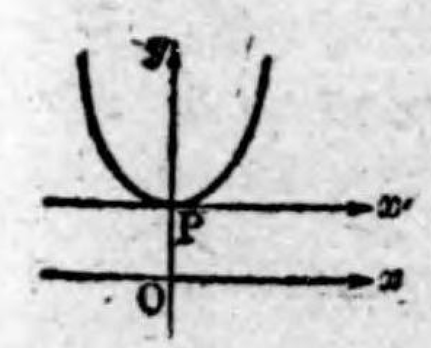
$r_1=a+ex,\quad r_2=a-ex$ デアルカラ

$$r=\frac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

デアル.

例題 2. 曲線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ ノ $(0,a)$ ニ於ケル曲率圓ノ半徑ヲ求メヨ.

[解] $(0,a)$ ニ於ケル切線ガ x 軸ニ平行デアルカラ原點ヲ $(0,a)$ ニ移シ, 其ノ切線ヲ x 軸トスルト曲線ノ方程式ハ



$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)-a$$

トナル. 故ニ Newton ノ公式ヲ用ヒテ

$$r=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2y}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)-2a}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{a\left\{\left(1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2!a^2}+\cdots\cdots\right)+\left\{1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2!a^2}-\cdots\cdots\right\}-2a\right.}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a.$$

例題 8. 一ツノ曲線ノ限リナク接近セル二ツノ點（此等ノ二ツノ點ヲ隣接點ト云フコトモアル）ニ於ケル法線ノ交點ハ其ノ點ニ於ケル曲率中心デアルコトヲ證明セヨ.

［解］ 曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 $P_1(x,y)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$Y-y=-\frac{1}{f'(x)}(X-x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

又曲線上ニ於テ P ニ近イ他ノ一點 $P_2(x+h,y+k)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$Y-(y+k)=-\frac{1}{f'(x+h)}\{X-(x+h)\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

デアル. (1) ヨリ (2) ヲ邊々相減ジテ兩邊ヲ h デ割ルト

$$\frac{k}{h}=\frac{1}{h}\left\{\frac{X-(x+h)}{f'(x+h)}-\frac{X-x}{f'(x)}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

(1) ト (2) トノ交點ハ (3) ヲ滿足スルカラ P_1 ト其ノ隣接點トニ於ケル法線ノ交點ハ (3) ニ於テ $h\to 0$ トシタ極限ノ式卽チ

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{X-x}{f'(x)}\right\}=\frac{-f'(x)-(X-x)f''(x)}{\{f'(x)\}^2}$$

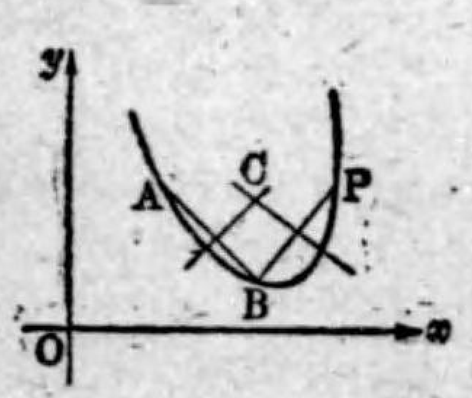
ヲ又滿足スル. 之ヨリ

$$X=x-\frac{\{1+f'(x)^2\}f'(x)}{f''(x)}$$

ヲ得ル. 之ヲ (1) ニ代入スルト

$$Y=f(x)+\frac{1+f'(x)^2}{f''(x)}$$

トナル. コレハ二ツノ隣接點ニ於ケル法線ノ交點ノ座標ニシテ既ニ述ベタ曲率中心ノ座標ト一致スル. 卽チ曲率中心ハ二ツノ相隣接セル法線ノ交點デアル.



コノコトハ次ノ如ク幾何學的ニ說明スルコトガ出來ル. 卽チ $y=f(x)$ ナル曲線上ニ三點 A, B, P ヲトルト, 之ヲ過ル圓ノ中心 C ハ弦 AB 及ビ BP ノ垂直二等分線ノ交點デアル. コヽニ於テ A, B ガ曲線ニ沿フテ限リナク P ニ接近シタトキノ極限ヲ考ヘルト, 直線 BP ハ P ニ於ケル切線トナルカラ其ノ垂直二等分線ハ P ニ於ケル法線トナル. 同樣ニ AB ノ垂直二等分線ハ B ニ於ケル法線トナル. 然ルニ B ハ又限リナク P ニ接近スルカラ結局二ツノ垂直二等分線ハ P 及ビ其ノ隣接點ニ於ケル法線トナル. 而シテ一方ニ於テハ其ノ極限ニ於テ C ハ P ニ於ケル切觸圓ノ中心, 卽チ曲率中心トナル. 故ニ曲率中心ハ二ツノ相隣接セル法線ノ交點デアル.

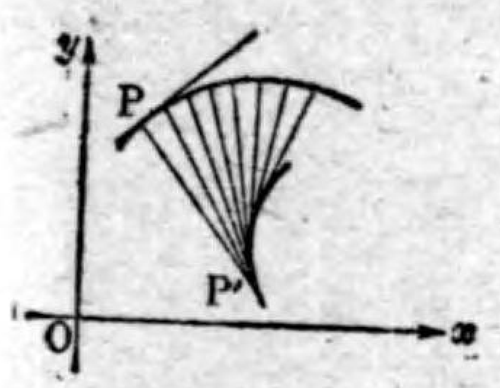
縮閉線及ビ伸開線

一ツノ曲線上ノ各點ニ對應スル曲率中心ノ軌跡ヲ其ノ曲線ノ**縮閉線**ト云フ. 而シテ縮閉線ニ對シテ原曲線ヲ呼ブトキハ其ノ**伸開線**ト云フ. 縮閉線ト伸開線ニ關シテ次ノ定理ガアル.

定理 1. 或曲線ノ法線ハ其ノ縮閉線ノ切線デアル. 又或曲線ノ切線ハ其ノ伸開線ノ法線デアル.

［證明］ 曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 $P(x,y)$ ニ對應スル曲率中心ヲ $P'(X,Y)$ トスルト,

$$\left.\begin{aligned}X&=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''}\\ Y&=y+\frac{1+y'^2}{y''}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$



コヽニ y, y', y'' ハ何レモ x ノ函數ニシテ x ヲ媒介變數 X, Y ヲ流通座標ト考ヘルト (1) ハ $y=f(x)$ ノ縮閉線ノ方程式デアル. 今 (1) ノ各式ヲ x ニ關シテ微分スルト

$$\frac{dX}{dx}=1-\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)y'-\frac{1+y'^2}{y''}y''$$

$$=-\left\{y'+\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)\right\}y'.$$

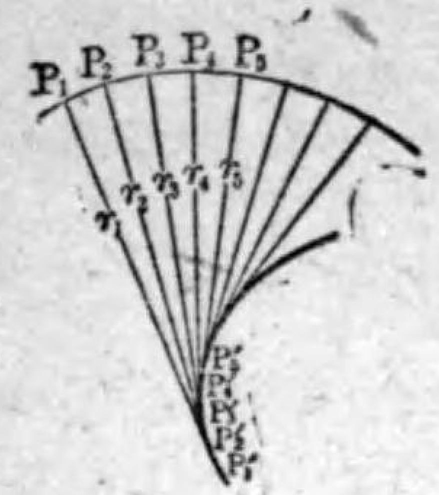
$$\frac{dY}{dx}=y'+\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right).$$

$$\therefore\ \frac{dY}{dX}=-\frac{1}{y'}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

然ルニ y' ハ $y=f(x)$ 上ノ一點 $P(x,y)$ ニ於ケル切線ノ方向角ノ正切ニシテ, $\frac{dY}{dX}$ ハ其ノ縮閉線ノ $P(x,y)$ ニ對應スル點 (X, Y) ニ於ケル切線ノ方向角ノ正切デアル. 故ニ (2) ハ $y=f(x)$ ノ法線ハ其ノ縮閉線ノ切線ニシテ, 縮閉線ノ切線ハ其ノ伸開線ノ法線ナルコトヲ示ス.

定理 2. 縮閉線ノ弧ノ長サハ其ノ兩端ニ對スル原曲線上ノ點ニ於ケル曲率半徑ノ差ニ等シイ.

［證明］ 原曲線上ノ諸點ヲ $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots\cdots$ トシ, ソノ各點ニ於ケル法線ヲ夫々 P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3', …… トシ, ソレラノ逐次ノ交點ヲ $P_1', P_2', \cdots\cdots$ トスル. ココニ於テ P_1, P_2



P_3, …… 等ノ諸點ガ曲線ニ沿フテ限リナク相接近スルトキハ，極限ニ於テ P'_1, P_2', P_3'…… 等ハ夫々 P_1, P_2, P_3…… 等ニ對應スル曲率中心デアルカラ，折線 $P_1'P_2'P_3'$…… ハ極限ニ於テ曲線 $P_1P_2P_3$…… ノ縮閉線トナル．故ニ P_1, P_2, P_3, …… ニ於ケル曲率半徑ヲ夫々 r_1, r_2, r_3, …… トスレバ，コレラノ諸點ガ十分相接近シタ場合ニハ殆ンド

$$P_1P_1'=P_2P_1'=r_1,\quad P_2P_2'=r_2.$$

同樣ニシテ

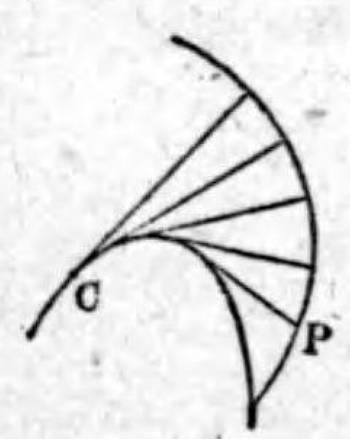
$$\therefore\ P_1'P_2'=r_1-r_2.$$
$$P_2'P_3'=r_2-r_3.$$
$$P_3'P_4'=r_3-r_4.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

コレラヲ逐々加ヘルト一般ニ

$$P_1'P_2'\cdots\cdots P_n'=r_1-r_n.$$

故ニ極限ニ於テハ縮閉線ノ弧ノ長サハ其ノ兩端ニ對スル原曲線上ノ點ニ於ケル曲率半徑ノ差ニ等シイ．

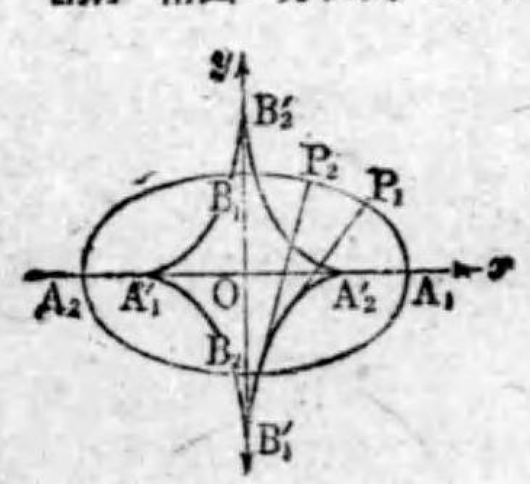
系　**一ツノ曲線ノ縮閉線ハ唯一ツデアル．然レドモ伸開線ハ無數ニ多クアル．而シテ同一ノ曲線ニ對スル伸開線ハ何レモ共通ノ法線ヲ有シ二ツノ伸開線ノ間ニ挾マレタ法線ノ部分ノ長サハ到ル所同一デアル．**



コノコトハ次ノコトカラ容易ニ理解セラレル．即チ左圖ノ如キ凸ノ曲線形 C ノ絲卷ニ絲ヲ卷キ付ケテ置イテ，コノ絲ヲ緊張シツヽ絲卷ヨリ離シ行クトキハ，絲ノ端 P ハ曲線 C ニ對スル伸開線ヲ描ク．縮閉線ニ對シテ原曲線ヲ伸開線トイフノハコノコトニ依ルノデアル．

例題 1.　楕圓ノ縮閉線ノ方程式ヲ求メヨ．

［解］　楕圓ノ方程式 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ヨリ



$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

故ニ曲率中心 (X, Y) ハ

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4}\\ Y&=\frac{-(a^2-b^2)y^3}{b^4}\end{aligned}\right\}$$

コノ二式ヨリ

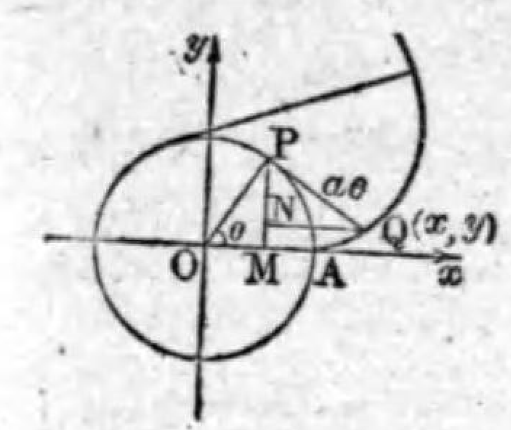
$$x=\left\{\frac{a^4X}{a^2-b^2}\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$y=-\left\{\frac{b^4Y}{a^2-b^2}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

此ノ x, y ヲ楕圓ノ方程式ニ代入スルト曲率中心 (X, Y) ノ軌跡ヲ得ル．即チ

$$(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

圖ニ於テ A_1, A_2, B_1, B_2 ニ應ズル曲率中心ハ夫々 A_1', A_2', B_1', B_2' デアル．

例題 2.　圓 $x^2+y^2=a^2$ ノ伸開線ヲ求メヨ．



［解］　圖ニ於テ圓周上ノ一點 P ニ於テ切線 PQ ヲ引キ

$$\angle POx=\theta,\quad PQ=弧\ AP=a\theta.$$

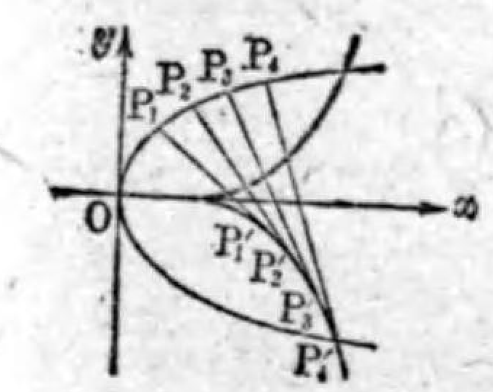
又 Q ノ座標ヲ (x, y) トスルト

$$x=OM+NQ=a\cos\theta+a\theta\sin\theta.$$
$$y=MP-NP=a\sin\theta-a\theta\cos\theta.$$

コレ θ ヲ媒介變數トスル方程式デアル．

例題 3.　拋物線 $y^2=4px$ ノ縮閉線ヲ求メヨ．

［解］　$y^2=4px$ ヨリ



$$\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4p^2}{y^3}.$$

故ニ曲率中心 (X, Y) ハ

$$\left.\begin{aligned} X&=3x+2p\\ Y&=-\frac{y^3}{4p^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

(1) ヨリ

$$x=\frac{X-2p}{3},\quad y=-(4p^2Y)^{\frac{1}{3}}.$$

コレヲ原方程式ニ代入スルト

$$pY^2=\frac{4}{27}(X-2p)^3$$

トナル．コレ即チ求メル縮閉線ノ方程式デアル．

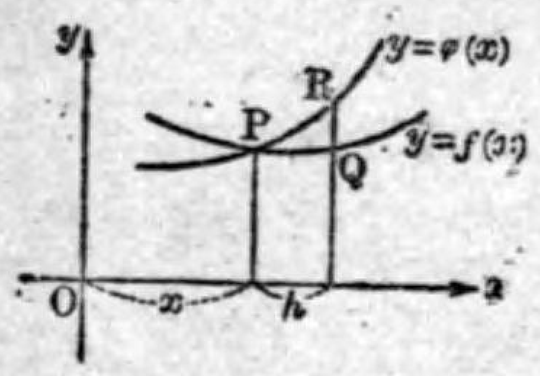
二ツノ曲線ノ切觸

曲線上ノ二點 (x, y), (x_1, y_1) ニ於テ $x_1\to x$ ナルトキハ $y_1\to y$ トナル．故ニ此ノ二點ヲ通過スル直線ハ $x_1\to x$ ナル極限ニ於テ點 (x, y) ニ於ケル切線トナリ，又曲線上ノ三點 (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) ヲ通過スル圓ハ $x_1\to x$, $x_2\to x$ ナル極限ニ於テ點 (x, y) ニ於ケル切觸圓トナル．

一般ニ曲線 $y=f(x)$ 上ノ $(n+1)$ 個ノ點 $(x,y),(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots\cdots,(x_n,y_n)$ ヲ通過スル曲線 $y=\varphi(x)$ ヲ考ヘ，之ニツイテ既ニ述ベタ三個ノ場合卽チ切觸圓ノ場合ト同樣ニ $x_1\to x,\ x_2\to x,\ x_3\to x,\ \cdots\cdots,\ x_n\to x$ ナル極限ヲ考ヘルト次ノ關係ヲ得ル．

$$f(x)=\varphi(x),\ f'(x)=\varphi'(x),\ f''(x)=\varphi''(x),\ \cdots\cdots,\ f^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x).$$

斯樣ナ場合ニ曲線 $y=f(x)$ ト曲線 $y=\varphi(x)$ トハ，點 (x,y) ニ於テ第 n 位ノ切觸ヲナスト云フ．此ノ定義ニ從フト二ツノ曲線 $y=f(x)$ ト $y=\varphi(x)$ トガ第一位ノ切觸ヲナス點ニ於テハ，共通ナル切線ヲ有シ，第二位ノ切觸ヲナス點ニ於テハ共通ナル切觸圓ヲ有スル．卽チ其ノ點ニ於ケル二ツノ曲線ノ曲率ハ相等シイ．



今二ツノ曲線 $y=f(x)$ ト $y=\varphi(x)$ トガ $P(x,y)$ ニ於テ第 n 位ノ切觸ヲナスモノトシ，$x=h$ ナル增分ヲ與ヘタトキノ橫線 $x+h$ ニ應ズル縱線ト此等二ツノ曲線トガ夫々 Q 及ビ R ニ於テ交ハルモノトシ，Q ガ R ノ上ニアルカ又ハ下ニアルカニ依ツテ線分 RQ ノ長サヲ夫々正又ハ負ト規約スルト

$$RQ=f(x+h)-\varphi(x+h).$$

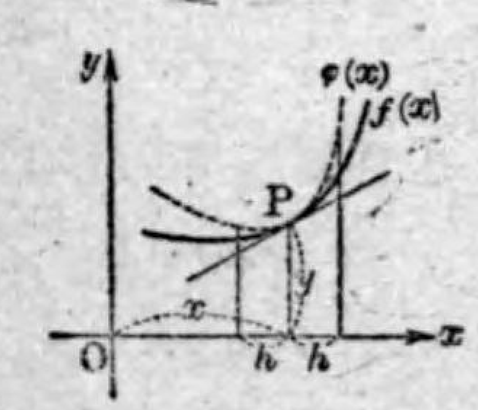
上式ノ右邊ヲ Taylor ノ定理ニヨリ h ノ冪級數ニ展開スルト第 n 位ノ切觸ヲナスコトカラ

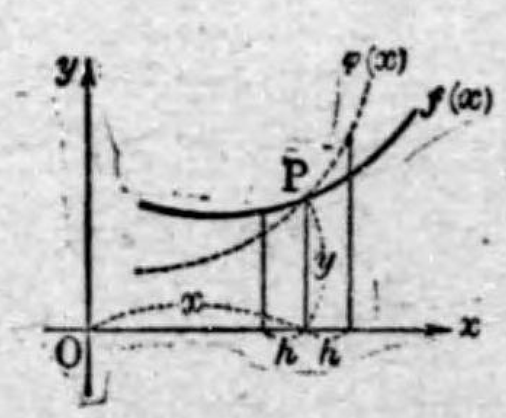
$$f(x)=\varphi(x),\ f'(x)=\varphi'(x),\ f''(x)=\varphi''(x),\ \cdots\cdots,\ f^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x).$$

從ツテ h^n ノ項マデハ其ノ係數ガ全部零トナルカラ結局

$$RQ=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\{f^{(n+1)}(x+\theta h)-\varphi^{(n+1)}(x+\theta h)\}\qquad 0<\theta<1$$

トナル．故ニ次ノ結果ヲ得ル．





h ガ第一位ノ無限小ナルトキハ RQ ハ第 $(n+1)$ 位ノ無限小トナル．而シテ接觸ノ位數 n ガ偶數ナルトキハ兩曲線ハ其ノ切點ニ於テ互ニ橫切リ，n ガ奇數ナルトキハ橫切ラナイ．

次ニ曲線 $y=\varphi(x)$ ト $y=f(x)$ トハ點 P ニ於テ第 n 位ノ切觸ヲナシ，他ノ曲線 $y=\phi(x)$ ト $y=f(x)$ トハ同一點 P ニ於テ第 m 位ノ切觸ヲナストキニ，之ニ對應スル RQ ヲ夫々 RQ_n，RQ_m トスルトキハ RQ_n ハ第 $(n+1)$ 位ノ無限小ニシテ，RQ_m ハ第 $(m+1)$ 位ノ無限小デアルカラ $m<n$ ナルトキハ勿論 $RQ_m>RQ_n$ デアル．故ニ二ツノ曲線ハ其ノ切觸スル點ニ於テ切觸ノ位數ガ高ケレバ高イ程，切觸點附近ニ於ケル曲線ノ形成ガ近似スル．

更ニ又點 (x,y) ニ於テ曲線 $y=\varphi(x)$ ガ曲線 $y=f(x)$ ト第 n 位ノ切觸ヲナス場合ニハ，$y=\varphi(x)$ ハ其ノ切觸點ニ於テ $(n+1)$ 個ノ條件

$$f(x)=\varphi(x),\ f'(x)=\varphi'(x),\ f''(x)=\varphi''(x),\ \cdots\cdots,\ f^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x)$$

ヲ滿足シナクテハナラナイ．此ノコトハ $y=\varphi(x)$ ガ少クトモ $(n+1)$ 個ノ常數ヲ有スルコトヲ意味スル．卽チ $y=\varphi(x)$ ハ

$y=\varphi(x,\ c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_{n+1},\ c_{n+2},\cdots\cdots)$ ナル形デナケレバナラナイ．

曲線 $y=\varphi(x,\ c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_{n+1})$ ガ點 (x,y) ニ於テ曲線 $y=f(x)$ ト第 n 位ノ切觸ヲナストキハ $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots\cdots,c_{n+1})$ ハ此ノ點ニ於テ $y=f(x)$ ノ第 n 位ノ**切觸曲線**デアルトイフ．

$y=\varphi(x)$ ガ他ノ曲線 $y=f(x)$ ト第 n 位ノ切觸ヲナスタメニハ $\varphi(x)$ ハ $\varphi(x,\ c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_{n+1})$ ナル形ナルヲ要スルカラ，一般ニ任意常數ヲ有スル或曲線ガ，他ノ定曲線ト切觸スルトキ其ノ切觸位數ノ最大値ハ其ノ曲線ノ方程式ノ中ニ含マレル任意常數ノ個數ヨリ 1 ヲ減ジタモノデアル．其ノ曲線ガ其ノ最大ノ位數ニ於テ他ノ曲線ト切觸スルトキ，**最大切觸**ヲナスト云フ．然レドモ特別ナル場合ニ於テハ，$n+1$ 個ダケノ任意常數ヲ有スル曲線ガ，他ノ定曲線ニ對シテ第 n 位ヨリ高位ノ切觸ヲナスコトガアル．斯樣ナ場合ニハ**超過切觸**ヲナスト云フ．

例題 1. 二次曲線 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ハ第何位ノ切觸ヲナスカ．

〔解〕 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ノ兩邊ヲ a デ割ルト

$$x^2+2\frac{h}{a}xy+\frac{b}{a}y^2+2\frac{g}{a}x+2\frac{f}{a}y+\frac{c}{a}=0$$

トナリ $\frac{h}{a}, \frac{b}{a}, \frac{g}{a}, \frac{f}{a}, \frac{c}{a}$ ヲ夫々一ツノ任意常數ト見做スト上ノ二次曲線ハ五ツノ任意常數ヲ有スル．故ニ第四位ノ切觸ヲナス．

例題 2．$x=a$ ニ於テ曲線 $y=\frac{x^3}{a^2}$ ト二次ノ切觸ヲナス拋物線ノ中，y 軸ニ平行ナル軸ヲ有スルモノヲ求メヨ．

［解］y 軸ニ平行ナル軸ヲ有スル拋物線ノ方程式ハ一般ニ

$$(x+\alpha)^2=p(y+\beta) \cdots\cdots(1)$$

デアル．故ニ

$$2(x+\alpha)=p\frac{dy}{dx} \cdots\cdots(2)$$

$$2=p\frac{d^2y}{dx^2} \cdots\cdots(3)$$

然ルニ與ヘラレタ方程式カラ $x=a$ ニ於テハ

$$y=a, \quad \frac{dy}{dx}=3, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6}{a}.$$

コレラノ値ヲ (1), (2) 及ビ (3) ニ代入スルト

$$\alpha=-\frac{a}{2}, \quad p=\frac{a}{3}, \quad \beta=-\frac{a}{4}.$$

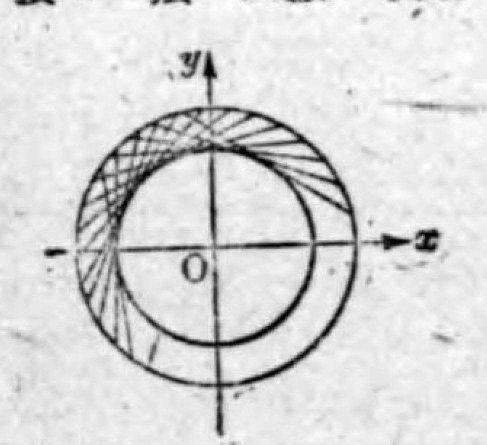
故ニ求メル拋物線ノ方程式ハ

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a}{3}\left(y-\frac{a}{4}\right)$$

デアル．

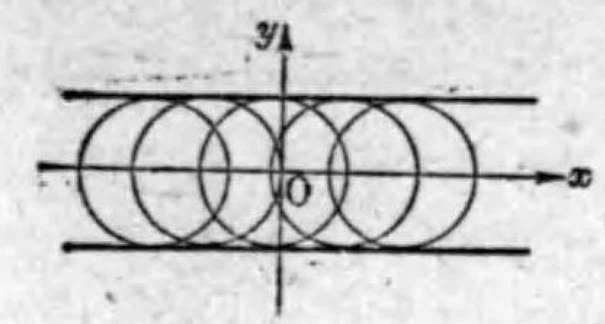
第三十八章　包　絡　線

包絡線　定圓ノ定長ノ弦ガ其兩端ヲ圓周上ニ置イテ滑ルトキハ其等ノ隣接セル弦ノ交點ノ軌跡ハ圓トナル．斯樣ニシテ出來タ圓ヲ定圓ノ定長ノ弦ノ移動ニ依ツテ生ズル包絡線ト云フ．定圓ノ定長ノ弦ハ其ノ中心ヨリノ距離ガ常ニ等シイカラ，上ノコトハ又次ノ如ク述ベルコトガ出來ル．



定點ヨリ一定ノ距離ニアル直線ノ移動ニ依ツテ生ズル包絡線ハ，定點ヲ中心トシテ定長ノ距離ヲ半徑トスル圓デアル．

包絡線ハ一定條件ニ從ツテ移動スル直線ニ依ツテ生ズルノミデナク，一定條件ニ從ツテ動ク曲線ニ依ツテモ生ズル．例ヘバ一定ノ圓ガ其ノ中心ヲ定直線上ニ置イテ移動スルトキ生ズル包絡線ハ，定直線ヨリ其ノ半徑ノ距離ニアル平行ナル二直線デアル．



上述ノ場合ニ於テ直線ノ方程式ハ

$x\cos\theta+y\sin\theta=r$ デ表ハサレルカラ，直線ガ移動スルコトハ常數ノ θ ガ變ハルコトヲ表ハス．又圓ノ方程式ハ一般ニ $(x-a)^2+y^2=r^2$ デ表ハサレルカラ圓ガ移動スルコトハ常數 a ガ變ハルコトヲ表ハス．

斯樣ニ曲線ノ方程式ガ常數ヲ含ミ，其ノ常數ノ一ツ例ヘバ a ヲトツテ其ノ値ヲ種々ニ變化セシメルト一ツノ曲線群ヲ得ル．其ノ曲線ノ交點ハ a ガ連續ニ變化スルトキ，一般ニ一ツノ連續曲線トナル．故ニ今曲線ノ方程式ヲ特ニ

$$f(x, y, a)=0$$

トシ，a ノ變動ニ依ツテ生ズル包絡線ニツイテ次ニ研究スル．コヽニ此ノ a ヲ母數トイフ．母數ハ必ズシモ一ツニ限ルコトナク二ツ以上ノコトモアル．

サテ曲線群 $f(x, y, a)=0$ ニ屬スル二ツノ曲線

$$f(x, y, a)=0, \quad f(x, y, a+\triangle a)=0$$

ヲトリ，コレガ相交ハル場合ヲ考ヘルニ其ノ交點ノ座標ハ

$$f(x, y, a+\Delta a)-f(x, y, a)=0,$$

即チ

$$f_a(x, y, a+\theta\Delta a)=0, \quad 0<\theta<1$$

ヲ滿足シナクテハナラナイ．コヽニ於テ $\Delta a\to 0$ ナラシメルト，其ノ交點ノ座標ハ

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0$$

ヲ滿足スル．故ニ

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0, \quad f(x, y, a)=0$$

ヨリ a ヲ消去スルト曲線群 $f(x, y, a)=0$ ノ中デ相隣接スル曲線ノ交點ノ座標デ滿足セラレル方程式，即チ交點ノ軌跡ヲ表ハス方程式ヲ得ル．コノ軌跡ヲ曲

線 $f(x,y,a)=0$ ノ包絡線ト云フ. 故ニ包絡線ノ方程式ヲ求メルニハ上ノ二ツノ方程式ヨリ a ヲ消去スレバヨイ.

例題 1. θ ヲ母數トスル直線群 $x\cos\theta+y\sin\theta=r$ ノ包絡線ノ方程式ヲ求メヨ.

［解］ $f(x,y,\theta)=x\cos\theta+y\sin\theta-r=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$ トオクト

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=-x\sin\theta+y\cos\theta=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

(1) ト (2) トヨリ θ ヲ消去スルタメ

$$x^2\cos^2\theta+2xy\sin\theta\cos\theta+y^2\sin^2\theta=r^2.$$
$$x^2\sin^2\theta-2xy\sin\theta\cos\theta+y^2\cos^2\theta=0.$$

邊々相加ヘテ

$$x^2+y^2=r^2$$

トナリ圓ヲ表ハス.

定理 曲線群ノ包絡線ハ其ノ群ニ屬スル各曲線ト共通ナル切線ヲ有スル.

［證明］ 曲線群ノ方程式ヲ $f(x,y,a)=0$ トスルト其ノ包絡線ノ方程式ハ

$$f(x,y,a)=0,\quad \frac{\partial f(x,y,a)}{\partial a}=0$$

ヨリ a ヲ消去シテ得ラレル. 故ニ $f_a(x,y,a)=0$ ヲ書キ換ヘテ, 例ヘバ

$$a=\phi(x,y)$$

トシ, 之ヲ $f(x,y,a)=0$ ニ代入スレバヨイ. 然ルトキハ y,a ハ何レモ x ノ函數デアルカラ, 斯様ニシテ得タ式ヲ x ニ關シテ微分シテ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

然ルニ $\dfrac{\partial f}{\partial a}=0$ デアルカラ

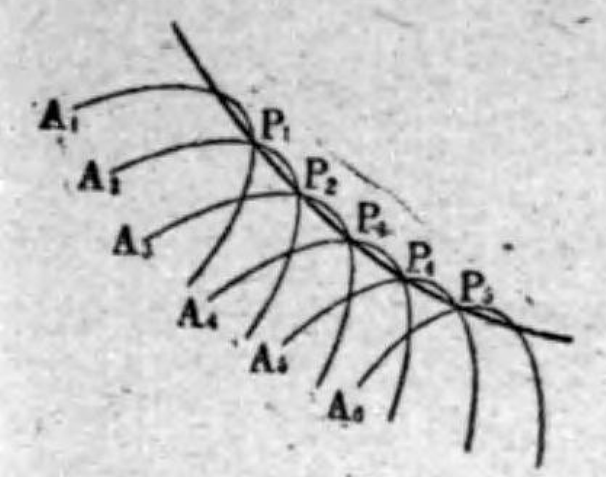
$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.\quad\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

トナル. 是包絡線上ノ一點ニ於ケル切線ノ方向係數デアル. 然ルニ曲線 $f(x,y,a)=0$ 上ノ同一點ニ於ケル切線ノ方向係數ハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.\quad\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

トナリ, 同一ノ方向係數ヲ得ル. 故ニ原曲線 $f(x,y,a)=0$ ト包絡線トハ其ノ共有點ニ於テハ同一ノ切線ヲ有スル. 即チ**兩曲線ハ相切スル.**

上述ノ定理ハ又次ノ如ク幾何學的ニ説明スルコトガ出來ル. 即チ今母數 a ガ $a+\Delta a,\ a+2\Delta a,\ \cdots\cdots$ 等少シ宛其ノ値ヲ變ズルトキ, $f(x,y,a)$ ノ之ニ應ズル曲線ヲ $A_1,A_2,A_3,A_4\cdots\cdots$ トシ A_1 ト A_2, A_2 ト A_3, $\cdots\cdots$ ノ交點ヲ夫々 $P_1, P_2, \cdots\cdots$ 等トスル. コヽニ於テ $A_1, A_2, \cdots\cdots$ 等ヲ限リナク相接近セシメタ極限ニ於テハ $P_1, P_2, \cdots\cdots$ 等ノ點ハ包絡線上ノ限リナク相接近シタ點トナル. 從ツテ今直線 P_1P_2 ダケニツイテ考ヘルト, 上記ノ極限ニ於テハ此ノ直線ハ曲線 A_2 ノ切線トナリ, 同時ニ又包絡線ノ切線トモナル. 即チ曲線 A_2 ト包絡線トハ同一ノ切線ヲ有スルカラ互ニ相切スル. 其ノ他ノ曲線ニツイテモ同一ナル結果ヲ得ルカラ, 一般ニ包絡線ハ曲線群ノ各曲線ト相切スル.



次ニ一ツノ曲線群ニ於テ二ツノ母數 a,b ヲ含ミ且 a,b ノ間ニ一ツノ關係アルトキ, 即チ

$$f(x,y,a,b)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1),\qquad \varphi(a,b)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルトキ, 其ノ包絡線ヲ求メルニハ, 此等ノ二ツカラ a, b ノ中何レカ一ツヲ消去シテ一ツノ母數ヲ有スルモノニ直シテ上述ノ方法ヲ適用スレバヨイ. 或ハ b ガ a ノ函數ナルコトカラコノ二ツノ方程式ヲ a ニツイテ微分シテ

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{da}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial a}+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{db}{da}=0$$

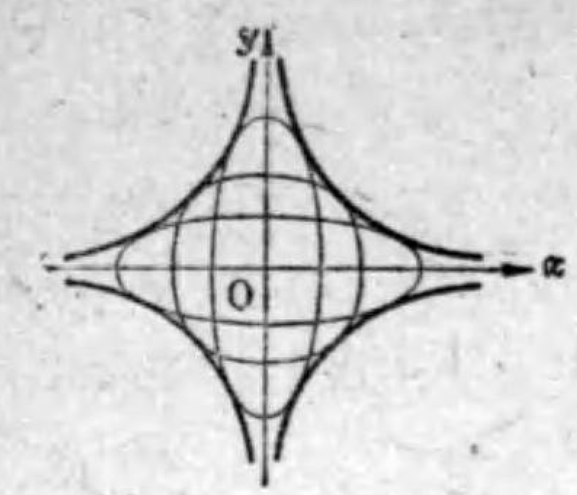
ヲ求メ, コレヨリ $\dfrac{db}{da}$ ヲ消去シテ

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial a} & \dfrac{\partial f}{\partial b}\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial a} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial b}\end{vmatrix}=0$$

ヲ導キ, コレト $f(x,y,a,b)=0$, $\varphi(a,b)=0$ トヨリ a,b ヲ消去スレバヨイ.

例題 兩軸ガ一致シ, 其ノ面積ノ一定ナル楕圓群ノ包絡線ヲ求メヨ.

［解］ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ヲ楕圓群ノ方程式トスルト其ノ面積ハ $\pi ab=k$(一定) デアルカラ



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(1),\qquad \pi ab=k\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナリ a, b ナル二ツノ母數ヲ有スルコトヽナル.

(1), (2) ヲ a ニツイテ微分スルト

$$\frac{x^2}{a^3}+\frac{y^2}{b^3}\frac{db}{da}=0,\qquad b+a\frac{db}{da}=0.$$

コレヨリ $\frac{db}{da}$ ヲ消去スルト

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}.$$

故ニ (1) ヨリ

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad a=\pm x\sqrt{2},\qquad b=\pm y\sqrt{2}.$$

コレヲ (2) ニ代入シテ

$$xy=\pm\frac{k}{2\pi}$$

トナル. コレ求メル包絡線ノ方程式デ二双ノ等邊双曲線ヲ表ハス.

包絡線トシテノ縮閉線　一ツノ曲線ノ二ツノ限リナク相接近シタ法線ノ交點ノ極限ハ曲率中心デ, 其ノ軌跡ガ縮閉線ナルコトハ既ニ述ベタ. 之ヨリ縮閉線ハ原曲線ノ法線ノ包絡線デアルコトガワカル. 解析的ニハ次ノ如クシテ證明スル.

曲線上ノ一點 (x, y) ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

デアル. 此ノ式中ノ y, y' ヲ x ノ函數ト考へ, x ヲ母數トシテ (1) ノ包絡線ヲ求メルタメ (1) ヲ x ニ關シテ微分スル.

$$-y'=\frac{y''}{y'^2}(X-x)+\frac{1}{y'}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

(2) ヨリ　　$X=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''}.$

從ツテ (1) ヨリ　　$Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}$

ヲ得ル. 此ノ二ツノ式ニ於テ x ヲ媒介變數ト見做スト縮閉線ノ方程式デアル. 此ノコトカラ原曲線ノ法線ガスベテ縮閉線ニ切スルコトモ理解セラレル.

例題 1.　法線群ノ包絡線トシテ抛物線 $y^2=4px$ ノ縮閉線ヲ求メヨ.

〔解〕 抛物線上ノ一點 (x, y) ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$Y-y=-\frac{y}{2p}(X-x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

然ルニ (x, y) ハ抛物線上ノ點デアルカラ

$$y^2=4px.\quad\therefore\quad x=\frac{y^2}{4p}.$$

コレヲ (1) ニ代入シテ

$$Y-y=-\frac{y}{2p}\left(X-\frac{y^2}{4p}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

コノ式ニ於テ y ヲ母數トシテ微分スルト

$$-1=-\frac{1}{2p}\left(X-\frac{y^2}{4p}\right)+\frac{y^2}{4p^2}.$$

$$\therefore\quad X=2p+\frac{3y^2}{4p}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

從ツテ (2) ヨリ

$$Y=-\frac{y^3}{4p^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

(3), (4) ヨリ y ヲ消去スルト

$$4(X-2p)^3=27pY^2.$$

是求メル縮閉線ノ方程式デアル.

例題 2.　法線群ノ包絡線トシテ曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ノ縮閉線ヲ求メヨ.

〔解〕 與ヘラレタ曲線上ノ一點ヲ $(a\cos^3\varphi,\ a\sin^3\varphi)$ トスルト, 其點ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$y-a\sin^3\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}(x-a\cos^3\varphi).$$

$$\therefore\quad y\sin\varphi-x\cos\varphi+a\cos 2\varphi=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

φ ヲ母數トシテ φ デ微分スルト

$$y\cos\varphi+x\sin\varphi-2a\sin 2\varphi=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

(1), (2) ヨリ

$$x=a(\cos\varphi+\sin\varphi\sin 2\varphi),\quad y=a(\sin\varphi+\cos\varphi\sin 2\varphi).$$

$$\therefore\quad x+y=a(\cos\varphi+\sin\varphi)(1+\sin 2\varphi).$$

$$x-y=a(\cos\varphi-\sin\varphi)(1-\sin 2\varphi).$$

$$\therefore\quad (x+y)^2=a^2(1+\sin 2\varphi)^3,\quad (x-y)^2=a^2(1-\sin 2\varphi)^3.$$

$$\therefore\quad (x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}.$$

例題 3.　法線群ノ包絡線トシテ楕圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ノ縮閉線ヲ求メヨ.

〔解〕 楕圓ノ上ノ一點 P ニ於ケル離心角ヲ φ トスルト, 其ノ點ノ座標ハ $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$

デアル．而シテ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}.$$

故ニ P ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$y-b\sin\varphi=\frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}(x-a\cos\varphi).$$

コレヨリ容易ニ

$$by=ax\tan\varphi-(a^2-b^2)\sin\varphi\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ得ル．縮閉線ハ法線群ノ包絡線デアルカラ，φ ヲ母數トシテ (1) ヲ φ デ微分スルト

$$0=ax\sec^2\varphi-(a^2-b^2)\cos\varphi.$$

$$\therefore\ \cos^3\varphi=\frac{ax}{a^2-b^2}.$$

故

$$(ax)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}\cos^2\varphi\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

コレヲ (1) ニ代入スルト

$$by=(a^2-b^2)\sin\varphi(\cos^2\varphi-1)=-\sin^3\varphi(a^2-b^2).$$

$$\therefore\ (by)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\varphi(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

(2) ト (3) トヨリ

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

コレ縮閉線ノ方程式デアル．

練習問題 21.

(1) 曲線 $y=\dfrac{x^3}{a^2+x^2}$ ノ變曲點ヲ求メヨ．

(2) 曲線 $y=\dfrac{x^2(a+x)}{a(x-a)}$ ニ於テ横座標ガ $x=a(1-\sqrt[3]{2})$ ナル點ガ變曲點ナルコトヲ證明セヨ．

(3) 二次曲線ハ變曲點ヲ有シナイコトヲ證明セヨ．

(4) 曲線 $y^2=\dfrac{a^2x}{a-x}$ ノ原點ニ於ケル曲率半徑ヲ求メヨ．

(5) 曲線上ノ任意ノ點 ニ於ケル切線上ニ一點 P′ ヲトリ，PP′ ヲ定長 l ニ等シカラシメルトキ，P′ ノ軌跡ヲ求メ，ソノ上ノ一點ニ於ケル法線ハ其ノ點ニ對應スル原曲線上ノ點ニ於ケル曲率中心ヲ過ルコトヲ證明セヨ．

(6) 曲線 $x=3t^2,\ y=3t-t^3$ ノ縮閉線ヲ求メヨ．

(7) 曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ノ縮閉線ヲ求メヨ．

(8) 拋物線ト其ノ縮閉線トノ交點ノ一ツニ於ケル縮閉線ノ切線ガ拋物線ト再ビ出會フ點ト縮閉線ノ頂點トヲ結ブ直線ハ，拋物線ノ軸ニ垂直ナルコトヲ證明セヨ．

(9) 半徑 a ナル圓 C ガ一定直線上ヲ滑ルコトナク轉動スルトキ，其ノ圓周上ノ一點 A ノ軌跡ハ

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta)$$

ナルコトヲ示シ，且 A ト圓ノ中心 C トヲ結ブ直線ノ包絡線ハ，原圓 C ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓ヲ轉動シテ生ズル曲線ナルコトヲ證明セヨ．此ノ二ツノ曲線ヲ擺線（ヘイセン）ト云フ．

(10) 擺線ノ縮閉線ハ原曲線ト全ク同一ノ形ノ擺線ナルコトヲ證明セヨ．

(11) 一ツノ曲線上ノ一ツノ點ニ於テ，コレト第二位ノ切觸ヲナス等邊双曲線ノ中心ノ軌跡ハ，其ノ曲線ノ其ノ點ニ於ケル曲率半徑ヲ直徑トスル圓ナルコトヲ證明セヨ．

(12) y 軸ニ平行ナル主軸ヲ有スル拋物線ニシテ，定曲線

$$y=f(x)=x^3-9x^2+24x-16$$

上ノ $x=2$ ナル一點ニ於テ之ト最大切觸ヲナスモノヲ求メヨ．

(13) 原點ニ於テ x 軸ニ切スル曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トシ，コヽニ

$$f''(0)=p,\quad f'''(0)=q,\quad f^{(4)}(0)=r$$

トスル．然ルトキ二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ガ此ノ曲線ト原點ニ於テ第四位ノ切觸ヲナスタメノ條件ヲ求メヨ．

(14) 與ヘラレタ曲線ト定點ニ於テ第三位ノ切觸ヲナス楕圓又ハ双曲線ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ．

(15) 二定點ヨリノ距離ノ積ガ一定ナル如キ直線群ノ包絡線ヲ求メヨ．

(16) 三角形ノ一ツノ頂角ノ大サ及ビ位置ガ一定ニシテ且其ノ面積ガ一定ナルトキ，其ノ定頂角ニ對スル邊ノ包絡線ヲ求メヨ．

(17) 定圓周上ノ定點ヲ過ル弦ヲ直徑トスル圓群ノ包絡線ヲ求メヨ．

(18) 一定ノ初速度 v_0 ヲ以テ一定ノ垂直面內ニ仰角 α ヲ以テ發射セラレタル彈丸ノ包絡線ヲ求メヨ．

【解　答】

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2(a^2+x^2)-2x^4}{(a^2+x^2)^2}$ ヨリ $(a^2+x^2)^2\dfrac{dy}{dx}=x^2(3a^2+x^2).$

兩邊ヲ x ニ就テ微分スルト

$$(a^2+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x(a^2+x^2)\frac{dy}{dx}=6a^2x+4x^3\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

變曲點ニ於テハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0,\quad \dfrac{d^3y}{dx^3}\neq0$ デアルカラ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(6a^2x+4x^3)}{(a^2+x^2)^2}-\frac{4x^3(3a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^3}=0.$$

x ハ實數デアルカラ $a^2+x^2\neq 0.$

$$\therefore\quad x\left\{(6a^2+4x^2)-\frac{4x^2(3a^2+x^2)}{a^2+x^2}\right\}=0.$$

即チ　$x=0$, 又ハ　$x=\pm\sqrt{3}a.$

(1) ヲ更ニ微分スルト

$$(a^2+x^2)^2\frac{d^3y}{dx^3}+4x(a^2+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(4a^2+12x^2)\frac{dy}{dx}+4x(a^2+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$=6a^2+12x^2.$$

而シテ變曲點ニ對シテハ $y''=0$ ナル故

$$(a^2+x^2)^2\frac{d^3y}{dx^3}+(4a^2+12x^2)\frac{dy}{dx}=6a^2+12x^2.$$

即チ　$(a^2+x^2)^2\dfrac{d^3y}{dx^3}+(4a^2+12x^2)\dfrac{x^2(3a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^2}=6a^2+12x^2.$

$x=0$ ニ對シテハ

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{6}{a^2}\neq 0.$$

$x=\pm\sqrt{3}a$ ニ對シテハ

$$(4a^2)^2\frac{d^3y}{dx^3}=6a^2+36a^2-\frac{(4a^2+36a^2)\times 3a^2\times 6a^2}{(4a^2)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-3a^2}{16a^4}=\frac{-3}{16a^2}\neq 0.$$

故ニ變曲點ハ $(0,0),\left(\sqrt{3}a,\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a\right),\left(-\sqrt{3}a,-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a\right)$ ノ三ツデアル.

(2) 分母ヲ拂ツテ

$$ay(x-a)=x^3+ax^2.\quad\therefore\quad a\frac{dy}{dx}(x-a)+ay=3x^2+2ax\cdots\cdots\cdots(1).$$

更ニ兩邊ヲ微分シテ　$a\dfrac{d^2y}{dx^2}(x-a)+2a\dfrac{dy}{dx}=6x+2a.$

變曲點デハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ ナル故 $2a\dfrac{dy}{dx}=6x+2a\cdots\cdots\cdots(2).$

(1) ト (2) トヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ消去スルト

$$(x-a)(3x+a)+ay=3x^2+2ax.$$

$$\therefore\quad (x-a)(3x+a)+\frac{x^2(x+a)}{x-a}=3x^2+2ax.$$

分母ヲ拂ヒ整頓スルト

$$x^3-3ax^2+3a^2x+a^3=0.$$

$$\therefore\quad (x-a)^3=-2a^3.\quad\therefore\quad x=a(1-\sqrt[3]{2}).$$

此ノ x ノ値ニ對シテ $\dfrac{d^3y}{dx^3}\neq 0$ デアルカラ $x=a(1-\sqrt[3]{2})$ ニ於テ y ハ變曲點デアル.

(3) 二次曲線ノ一般ノ方程式ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$$

$$\therefore\quad y=\frac{-1}{b}\{hx+f\pm\sqrt{(h^2-ab)x^2+2(hf-bg)x+f^2-bc}\}.$$

今　$h^2-ab=\mathrm{A},\quad hf-bg=\mathrm{B},\quad f^2-bc=\mathrm{C}$

デ表ハスト.

$$y=-\frac{1}{b}\{hx+f\pm\sqrt{\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}x+\mathrm{C}}\}.$$

$$\therefore\quad y'=-\frac{1}{b}\left\{h\pm\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}x+\mathrm{C}}}\right\}.$$

$$y''=\mp\frac{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}{b(\sqrt{\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}x+\mathrm{C}})^3}.$$

y'' ノ符號ヲ變化セシメル x ノ値ハ存在シナイカラ二次曲線ニハ變曲點ガナイ.

(4)　$y^2=\dfrac{a^2x}{a-x},\quad 2y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a^3}{(a-x)^2}.\quad\therefore\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a^2}{2\sqrt{x}(a-x)^{\frac{3}{2}}}.$

即チ原點ニ於ケル曲線ノ切線ハ x 軸ニ垂直トナル. 故ニ Newton ノ方法ヲ用ヒルコトガ出來ナイ. 從ツテ切線ヲ x 軸ニスルタメニ 90° 回轉スル必要ガアル. 即チ

$$x=-\mathrm{Y},\quad y=\mathrm{X}$$

トオクト曲線ハ

$$\mathrm{X}^2=\frac{-a^2\mathrm{Y}}{a+\mathrm{Y}}$$

トナリ　$2\mathrm{X}=\dfrac{-a^3}{(a+\mathrm{Y})^2}\dfrac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}.\quad\therefore\quad \dfrac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}=\dfrac{2\mathrm{X}(a+\mathrm{Y})^2}{-a^3}.$

故ニ原點ニ於テ $\dfrac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}=0$ トナリ x 軸ガ切線トナル.

$$\rho=\lim_{x\to 0}\left|\frac{\mathrm{X}^2}{2\mathrm{Y}}\right|=\lim_{\substack{\mathrm{X}\to 0\\ \mathrm{Y}\to 0}}\left|\frac{-a^2}{2(a+\mathrm{Y})}\right|=\frac{a}{2}.$$

即チ求メル曲率半徑ハ $\dfrac{a}{2}$ デアル.

(5) 與ヘラレタ曲線ヲ $y=f(x)$ トシ, 其ノ上ノ一點 $P(x,y)$ ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角ヲ α トシ, P' ノ座標ヲ (X_1, Y_1) トスルト

$$X_1=x+l\cos\alpha, \qquad Y_1=y+l\sin\alpha$$

デアル. PP' ハ $y=f(x)$ ノ切線デアルカラ

$$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha.$$

$$\therefore\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}, \qquad \sin\alpha=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}.$$

$$\therefore\ X_1=x+\frac{l}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}, \qquad Y_1=y+\frac{lf'(x)}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}.$$

コレ x ヲ媒介變數トスル軌跡ノ方程式デアル. コノ軌跡上ノ一點 (X_1, Y_1) ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$Y-Y_1=-\frac{dX_1}{dY_1}(X-X_1).$$

然ルニ

$$\frac{dX_1}{dx}=1-\frac{lf'(x)f''(x)}{[1+\{f'(x)\}^2]^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{dY_1}{dx}=f'(x)+\frac{lf''(x)}{[1+\{f'(x)\}^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\therefore\ \frac{dX_1}{dY_1}=-\frac{lf'(x)f''(x)-[1+\{f'(x)\}^2]^{\frac{3}{2}}}{lf''(x)+f'(x)[1+\{f'(x)\}^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

故ニ法線ノ方程式ハ

$$Y-\left[y+\frac{lf'(x)}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}\right]=$$

$$\frac{lf'(x)f''(x)-[1+\{f'(x)\}^2]^{\frac{3}{2}}}{lf''(x)+f'(x)[1+\{f'(x)\}^2]^{\frac{3}{2}}}\left[X-x-\frac{l}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}\right].$$

一方點 (X_1, Y_1) ニ對應スル原曲線上ノ點ハ (x, y) デ (x, y) ニ於ケル原曲線ノ曲率中心ヲ (α, β) トスルト

$$\alpha=x-\frac{1+\{f'(x)\}^2}{f''(x)}f'(x), \qquad \beta=y+\frac{1+\{f'(x)\}^2}{f''(x)}.$$

コノ α, β ノ値ヲ上ノ法線ノ流通座標 X, Y ニ代入スルト滿足スル. 故ニ證明サレタ.

(6)

$$y'=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{3-3t^2}{6t}=\frac{1-t^2}{2t}.$$

$$y''=\frac{-4t^2-2(1-t^2)}{4t^2}\,\frac{dt}{dx}=\frac{-(1+t^2)}{12t^3}.$$

故ニ曲線上ノ任意ノ點 (x, y) ニ對應スル曲率圓ノ中心ノ座標ハ

$$X=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''}=3t^2-\frac{\left\{1+\left(\dfrac{1-t^2}{2t}\right)^2\right\}\dfrac{1-t^2}{2t}}{\dfrac{-(1+t^2)}{12t^3}}=\frac{3(1+2t^2-t^4)}{2}.$$

同樣ニ

$$Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}=-4t^3.$$

コレ t ヲ媒介變數トスル縮閉線ノ方程式デアル.

(7) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ヨリ

$$\frac{dy}{dx}=-x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3}(x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}).$$

$$\therefore\ X=x-\frac{-x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(1+x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}})}{\frac{1}{3}(x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}})}=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}.$$

$$Y=y+\frac{1+x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}(x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}})}=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

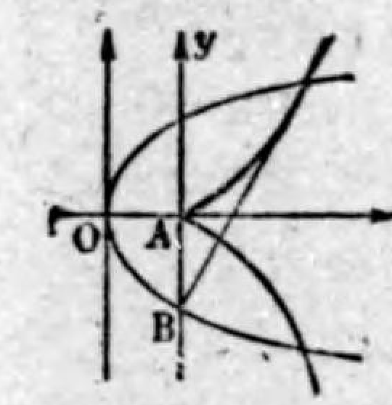
コレヨリ

$$X+Y=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^3.$$

$$X-Y=(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^3.$$

$$\therefore\ (X+Y)^{\frac{2}{3}}+(X-Y)^{\frac{2}{3}}=2(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=2a^{\frac{2}{3}}.$$

(8) 拋物線ノ方程式ヲ $y^2=4px$ トスルト其ノ縮閉線ノ方程式ハ



$$y^2=\frac{4}{27p}(x-2p)^3$$

トナル. 原點ヲ縮閉線ノ頂點 $A(2p, 0)$ ニ移スト拋物線ノ方程式ハ

$$y^2=4p(x+2p) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニシテ縮閉線ノ方程式ハ

$$y^2=\frac{4}{27p}x^3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

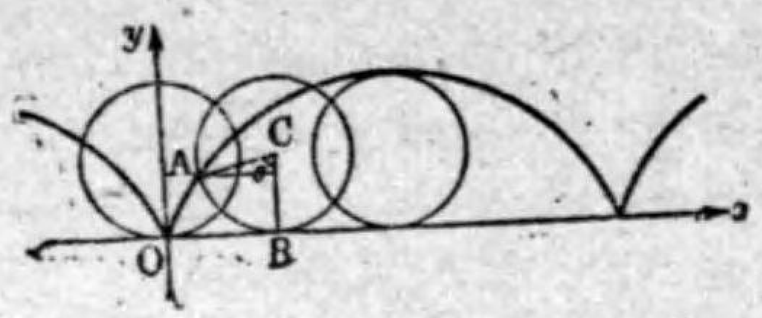
トナル. 而シテ新 y 軸ト (1) トノ交點ノ一ツヲ B トスルト B ノ座標ハ (1) ヨリ $(0, -2\sqrt{2}p)$ トナリ, 從ツテ B ニ於ケル (1) ノ法線ハ

$$y+2\sqrt{2}p=\frac{2\sqrt{2}p}{2p}x. \qquad \therefore\ y=\sqrt{2}x-2\sqrt{2}p \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

トナル. 然ルニ此ノ法線ハ (2) ノ切線デアルカラ其ノ切點ガ (1), (2) ノ交點ノ一ツナルコトヲ云ヘバヨイ. 即チ (1), (2), (3) ノ三ツガ一點ニ會スルコトヲ云

ヘバヨイ．然ルニ (1), (3) ヨリ B 以外ノ交點 P ノ座標ハ $x=6p,\ y=4\sqrt{2}p$ ニシテ之ハ (2) ヲ滿足スル．故ニ (1), (2), (3) ハ一點 P ニ會スル．故ニ P ニ於ケル縮閉線ノ切線ハ B ニ於テ再ビ拋物線ト出會ヒ，且 AB ハ拋物線ノ軸 Ox ニ垂直デアル．

(9) (i) 圓周上ノ定點ガ定直線ニ觸レルトキ其ノ點ヲ原點トシ定直線ヲ x 軸，之ニ垂直ナル直線ヲ y 軸トスル．



定點ガ原點ヨリ發シテ A ナル位置ニ來タトキ圓ノ中心ヲ C，圓ト x 軸トノ切點ヲ B トシ，$\angle ACB=\theta$ トスルト

$$線分\ \overline{OB}=\widehat{AB}=a\theta$$

デアル．故ニ A ノ座標ヲ (x, y) トスルト

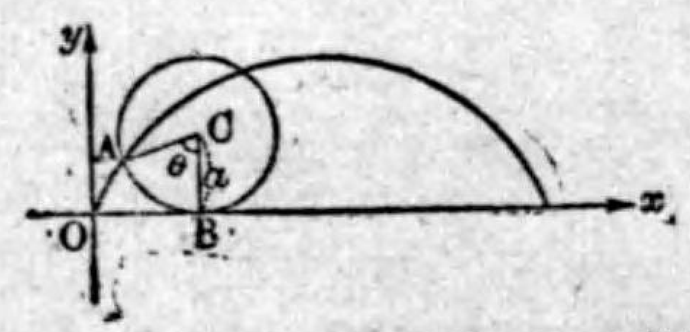
$$x=OB-AC\sin\theta=a\theta-a\sin\theta=a(\theta-\sin\theta).$$
$$y=BC-AC\cos\theta=a-a\cos\theta=a(1-\cos\theta).$$

故ニ求メル軌跡ノ方程式ハ

$$x=a(\theta-\sin\theta),\qquad y=a(1-\cos\theta)$$

デアル．

(ii) C ノ座標ハ $x=a\theta,\ y=a$．故ニ直線 AC ノ方程式ハ



$$\frac{y-a}{x-a\theta}=\frac{a(1-\cos\theta)-a}{a(\theta-\sin\theta)-a\theta}.$$

$$\therefore\ x-a\theta=\tan\theta(y-a)\cdots\cdots\cdots(1).$$

θ ヲ母數トシテ微分スルト

$$-a=\sec^2\theta(y-a)\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

(1), (2) ハ θ ヲ媒介變數トスル包絡線ノ方程式デアル．然ルニ (2) ヨリ

$$y=a(1-\cos^2\theta)=\frac{a}{2}(1-\cos2\theta)$$

又 (1), (2) ヨリ y ヲ消去スルト

$$x=a(\theta-\sin\theta\cos\theta)=\frac{a}{2}(2\theta-\sin2\theta).$$

故ニ $2\theta=\theta_1$ トオクト求メル包絡線ノ方程式ハ

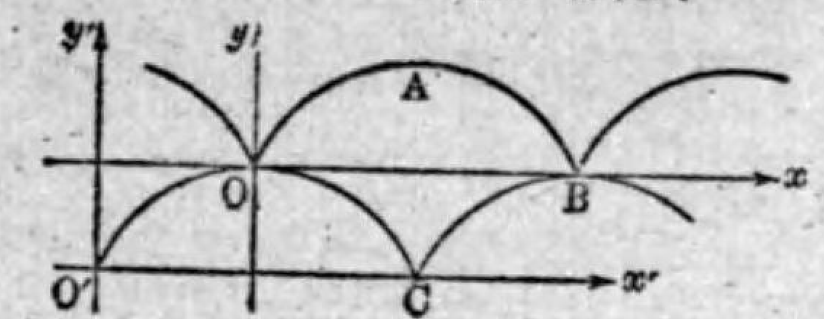
$$x=\frac{a}{2}(\theta_1-\sin\theta_1),\qquad y=\frac{a}{2}(1-\cos\theta_1)$$

トナル．是即チ轉動圓ノ半徑ガ $\frac{a}{2}$ ナル擺線ノ方程式デアル．

(10) 半徑 a ナル圓ガ一直線上ヲ轉動スルトキ生ズル擺線ノ方程式ハ

$$x=a(\theta-\sin\theta),\qquad y=a(1-\cos\theta).$$

故ニ θ ヲ母數トスル縮閉線ノ方程式ハ



$$X=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''}=a(\theta+\sin\theta).$$

$$Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}=-a(1-\cos\theta).$$

此ノ方程式ニ於テ座標軸ヲ平行ニ移動シテ原點ヲ $(-\pi a, -2a)$ ニ移ストコノ縮閉線ノ方程式ハ

$$X-\pi a=a(\theta+\sin\theta),$$
$$Y-2a=-a(1-\cos\theta).$$
$$\therefore\ X=a(\pi+\theta+\sin\theta),$$
$$Y=a(1+\cos\theta)$$

トナル．媒介變數ハ任意ニトツテヨイカラ $\pi+\theta=\theta'$ トオクト

$$X=a\{\theta'+\sin(\theta'-\pi)\}.$$
$$Y=a\{1+\cos(\theta'-\pi)\}.$$
$$\therefore\ X=a(\theta'-\sin\theta'),\qquad Y=a(1-\cos\theta')$$

トナリ全ク原曲線ト同一ノ形デアル．

【注意】 擺線ノ端 O 及ビ中點 A ニ於ケル曲率半徑ハ夫々 0, $4a$ ニシテ曲線 OA ニ對應スル縮閉線 OC ノ長サガ O, A ニ於ケル曲率半徑ノ差デアルカラ弧 OA ノ長サハ $4a$ デアル．從ツテ擺線ノ一ツノ全長ハ $8a$ デアルカラ回轉圓ノ直徑ノ 4 倍ニ等シイ．

(11) 與ヘラレタ曲線 $y=f(x)$ 上ノ與ヘラレタ點ヲ原點トシ，其ノ點ヲ過ル一ツノ等邊双曲線ノ方程式ヲ

$$A(x-\alpha)^2+2H(x-\alpha)(y-\beta)-A(y-\beta)^2=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスルト (α, β) ハ其ノ中心ノ座標トナル．コノ方程式ヲ x ニツキ二回微分スルト

$$A(x-\alpha)+H(y-\beta)+H(x-\alpha)y'-A(y-\beta)y'=0.$$
$$A+2Hy'+H(x-\alpha)y''-A(y-\beta)y''-Ay'^2=0.$$

コノ双曲線ガ原點ニ於テ與ヘラレタ曲線ト第二位ノ切觸ヲナスタメニハ $y=f(x)$ ヨリ得ル y', y'' ヲ m, n トスルト

$$A\alpha^2+2H\alpha\beta-A\beta^2=1.\ \ 〔(1)\ ガ原點ヲ通ルカラ\ x=0,\ y=0〕$$
$$A\alpha+H\beta+H\alpha m-A\beta m=0.$$
$$A+2Hm-H\alpha n+A\beta n-Am^2=0$$

ナルヲ要ス．

コノ三ツヨリ A, H ヲ消去スルト

$$n\alpha^2+n\beta^2-m(1+m^2)\alpha+(1+m^2)\beta=0.$$

$$\therefore\quad \left\{\alpha-\frac{m(1+m^2)}{2n}\right\}^2+\left\{\beta+\frac{1+m^2}{2n}\right\}^2=\frac{(1+m^2)^3}{4n^2}$$

トナル. 是ニヨルト中心 (α, β) ノ軌跡ハ與ヘラレタ曲線ノ與ヘラレタ點ニ於ケル曲率半徑 $\dfrac{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{n}$ ヲ直徑トスル圓デアル.

(12) 今最大切觸ヲナス拋物線ノ方程式ヲ $y=\varphi(x)=ax^2+bx+c$ トスル.

$$\varphi(x)=ax^2+bx+c. \qquad f(x)=x^3-9x^2+24x-16.$$
$$\varphi'(x)=2ax+b. \qquad f'(x)=3x^2-18x+24.$$
$$\varphi''(x)=2a. \qquad f''(x)=6x-18.$$
$$\varphi'''(x)=0. \qquad f'''(x)=6.$$

ニシテ $f'''(x)\neq\varphi'''(x)$ デアルカラ兩曲線ハ第三位ノ切觸ヲナスコトガナイ. 而シテ $x=2$ ナル點ニ於テ兩曲線ガ第二位ノ切觸ヲナスタメノ條件ハ

$$f(2)=\varphi(2) \quad ヨリ \quad 4=4a+2b+c.$$
$$f'(2)=\varphi'(2) \quad ヨリ \quad 0=4a+b.$$
$$f''(2)=\varphi''(2) \quad ヨリ \quad -6=2a.$$

之ヲ解イテ

$$a=-3, \qquad b=12, \qquad c=-8$$

ヲ得ル. 故ニ求メル拋物線ノ方程式ハ

$$y=-3x^2+12x-8$$

デアル.

(13) $y=f(x)$ ト原點ニ於テ第四位ノ切觸ヲナスタメニハ第四次微分係數マデ相等シクナクテハナラナイ. 而シテ曲線ハ原點ヲ過ルカラ $c=0$ デアリ又 x 軸ガ切線ナル故方程式ハ $x=0$ ナル等根ヲ有スルコトカラ, $y=0$ デアル.

次ニ與式ヲ x デ微分スルト

$$ax+hy+hxy'+byy'+fy'=0 \cdots\cdots(1).$$

然ルニ原點ニ於テ $y'=0$ デアルカラ $ax+hy=0$ デナケレバナラナイ. (1) ヲ更ニ微分スルト

$$a+2hy'+hxy''+by'^2+byy''+fy''=0.$$

原點ニ於テハ $x=0,\ y=0,\ y'=0$ デアルカラ

$$a+fp=0 \cdots\cdots(2).$$

又

$$3hy''+hxy'''+3by'y''+byy'''+fy'''=0.$$

原點ニ於テハ $x=0,\ y=0,\ y'=0$ デアルカラ

$$3hy''+fy'''=0 \cdots\cdots(3).$$

更ニ　$3hy'''+hy'''+hxy^{(4)}+3by''^2+3by'y'''+by'y'''+byy^{(4)}+fy^{(4)}=0.$

原點ニ於テハ

$$x=0, \qquad y=0, \qquad y'=0$$

デアルカラ

$$4hy'''+3by''^2+fy^{(4)}=0 \cdots\cdots(4).$$

故ニ求メル條件ハ次ノ如クナル.

$$c=0. \qquad g=0.$$
$$a+fp=0.$$
$$\mathbf{3hp+fq=0.}$$
$$\mathbf{4hq+3bp^2+fr=0.}$$

(14) 定點ヲ原點トシ, コノ點ニ於ケル曲線ノ切線ヲ x 軸トシ, 第三位ノ切觸ヲナス楕圓又ハ双曲線ノ方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

トスル. 此ノ際 x 軸ガ切線トナルカラ問題 (13) ニ於テ述ベタ如ク $c=0,\ g=0$ トナルカラ方程式ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2fy=0$$

トナル. コノ式ヲ x デ微分スルト

$$ax+hy+(hx+by+f)\frac{dy}{dx}=0 \cdots\cdots(1).$$

$$a+2h\frac{dy}{dx}+b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(hx+by+f)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \cdots\cdots(2).$$

$$3h\frac{d^2y}{dx^2}+3b\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+(hx+by+f)\frac{d^3y}{dx^3}=0 \cdots\cdots(3).$$

x 軸ガ切線デアルカラ $\dfrac{dy}{dx}=0$, 又第三位ノ切觸ヲナスカラ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ハ與ヘラレタ曲線 $y=f(x)$ ヨリ得ラレル. 之ヲ m, n トオクト

$$a+fm=0, \qquad 3hm+fn=0 \cdots\cdots(4).$$

求メル曲線ノ中心ハ

$$ax+hy+g=0, \qquad hx+by+f=0$$

此ノ二ツカラ x, y ノ値ヲ求メ且 (4) ヨリ得ル f, h ヲ代入スルト $g=0$ ナル故

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{a^2n}{3m^3}\cdot\frac{1}{ab-h^2} \\ y&=\frac{a^2}{m}\cdot\frac{1}{ab-h^2}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(5)$$

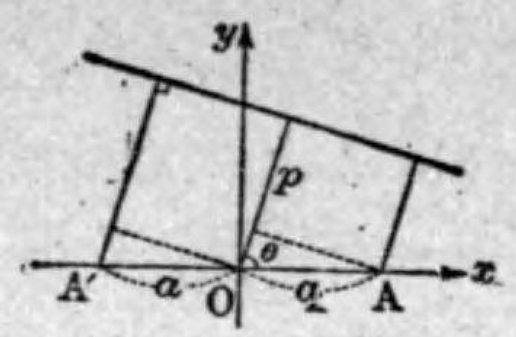
トナル.

(5) ヨリ未知數 a, b, h^2 ヲ消去スルト

$$\mathbf{3m^2x+ny=0}$$

トナリ, 求メル軌跡ハ直線デアル.

(15) 二定點 A′A ヲ結ブ直線ヲ x 軸トシ, A′A ノ垂直二等分線ヲ y 軸トスルト直線群ノ方程式ハ



$$x\cos\theta+y\sin\theta=p\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トナル. 而シテ $A'A=2a$, 一定ノ面積ヲ k^2 トスルト題意ヨリ

$$(a\cos\theta-p)(-a\cos\theta-p)=k^2.$$

$$\therefore\ a^2\cos^2\theta=p^2-k^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

即チ p ハ θ ノ函數トナル.

$$p\frac{dp}{d\theta}+a^2\cos\theta\sin\theta=0.\qquad \therefore\ \frac{dp}{d\theta}=-\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{p}.$$

(1) ヲ θ ニ關シテ微分スルト

$$x\sin\theta-y\cos\theta=\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{p}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

(1) ト (3) トヨリ

$$x=\frac{a^2\cos\theta\sin^2\theta}{p}+p\cos\theta=\frac{a^2\cos\theta}{p}-\frac{a^2\cos^3\theta}{p}+p\cos\theta.$$

$$y=p\sin\theta-\frac{a^2\cos^2\theta\sin\theta}{p}.$$

此ノ兩式ニ (2) ヲ代入スルト

$$x=\frac{\cos\theta}{p}(a^2+k^2)\qquad y=\frac{k^2\sin\theta}{p}.$$

$$\therefore\ \frac{x^2}{a^2+k^2}+\frac{y^2}{k^2}=\frac{x\cos\theta}{p}+\frac{y\sin\theta}{p}=1.$$

是求メル包絡線ノ方程式ニシテ $\sqrt{a^2+k^2}$, k ヲ長軸, 短軸ノ半分トスル楕圓ニシテ定點 A′A ハ其ノ焦點デアル.

(16) 定頂角ノ二邊ヲ二ツノ座標軸トシ, ソノナス角ヲ ω トスルト第三邊ハ斜交軸ヲ用ヒテ

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニテ表ハサレル. 且面積ガ一定デアルカラ之ヲ k^2 トスルト

$$\frac{1}{2}\alpha\beta\sin\omega=k^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

(1), (2) ヲ α デ微分スルト

$$\frac{x}{\alpha^2}+\frac{y}{\beta^2}\frac{d\beta}{d\alpha}=0,\qquad \frac{1}{2}\left(\beta+\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\sin\omega=0.$$

$$\therefore\ \frac{x}{\alpha^2}-\frac{y}{\beta^2}\frac{\beta}{\alpha}=0,\qquad \beta x=\alpha y\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2), (3) ヨリ α, β ヲ消去スルタメ (1) ヨリ

$$\beta x+\alpha y=\alpha\beta.$$

之ト (3) トヨリ

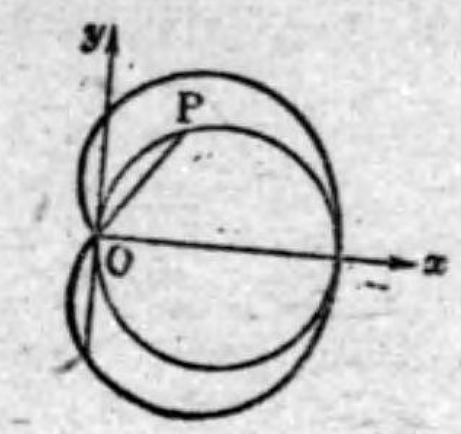
$$2\alpha y=\alpha\beta,\quad 2\beta x=\alpha\beta.\qquad \therefore\ \alpha=2x,\quad \beta=2y.$$

コレヲ (2) ニ代入シテ

$$2xy\sin w=k^2$$

トナル. コレ兩軸ノ角ガ w ナル場合ノ双曲線ノ方程式デアル.

(17) 定點 O ニ於ケル定圓ノ切線ヲ y 軸トシ定點ヲ通ル直徑ヲ x 軸トスルト半徑 r ノ圓ノ方程式ハ



$$x^2-2rx+y^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

定點ヲ過ル任意ノ弦ヲ OP トシ P ノ座標ヲ $(2a, 2b)$ トスルト OP ヲ直徑トスル圓ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2.$$

$$\therefore\ x^2-2ax+y^2-2by=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

然ルニ P ハ圓周上ノ動點デアルカラ (1) ヲ滿足スル.

$$\therefore\ 4(a^2-ra+b^2)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

a ヲ母數トシテ (2) 及ビ (3) ヲ微分スルト

$$-2x-2y\frac{db}{da}=0,\qquad 2a-r+2b\frac{db}{da}=0.$$

コノ二式カラ $\frac{db}{da}$ ヲ消去スルト

$$2bx-2ay+ry=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

(2) ト (4) トヨリ a, b ヲ求メルト

$$a=\frac{x(x^2+y^2)+ry^2}{2(x^2+y^2)},\qquad b=\frac{y(x^2+y^2)-rxy}{2(x^2+y^2)}.$$

コレヲ (3) ニ代入スルト

$$\left\{\frac{x(x^2+y^2)+ry^2}{x^2+y^2}\right\}^2-2\left\{\frac{x(x^2+y^2)+ry^2}{(x^2+y^2)}\right\}r+\left\{\frac{y(x^2+y^2)-rxy}{x^2+y^2}\right\}^2=0.$$

$$\therefore\ (x^2+y^2)^2-2rx(x^2+y^2)-r^2y^2=0.$$

是求メル包絡線ノ方程式ニシテ Lemniscate トナル.

(18) 發射點ヲ原點トシ水平線, 垂直線ヲ夫々 x 軸, y 軸トスル. 又發射後 t 秒後ノ彈丸ノ位置ヲ (x, y) トスルト

$$x=v_0t\cos\alpha,\qquad y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}.$$

コレヨリ t ヲ消去スルト

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

コレ即チ彈道ノ方程式ニシテ拋物線ヲ表ハス.

$$f(x, y, \alpha)=x\tan\alpha-y-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスルト

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}=x\sec^2\alpha-\frac{gx^2\sin\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

(2) ヨリ

$$\tan\alpha=\frac{v_0^2}{gx}.\quad\therefore\ \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{g^2x^2+v_0^4}{g^2x^2}.$$

(1) ニ代入シテ α ヲ消去スルト

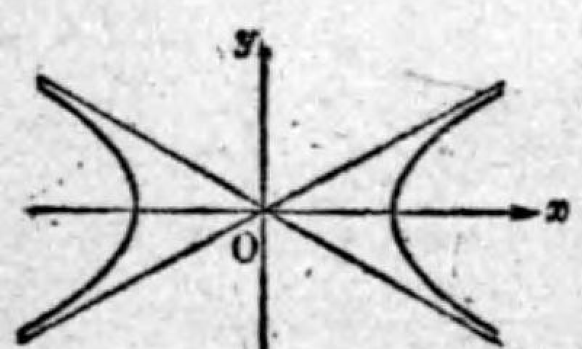
$$y=\frac{v_0^2}{g}-\frac{g^2x^2+v_0^4}{2v_0^2g}.$$

$$\therefore\ y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

是即チ求メル包絡線ニシテ又一ツノ拋物線トナル.

第三十九章　漸　近　線

漸近線ノ第一定義　双曲線拋物線等ノ如ク曲線ガ無限ニ延ビタ分枝ヲ有スルトキハ, コレヲ其ノ曲線ノ**無限分枝**ト云フ. 無限分枝ニハ原點カラノ距離ガ何程ニテモ大ナル如キ點ガ存在スル.

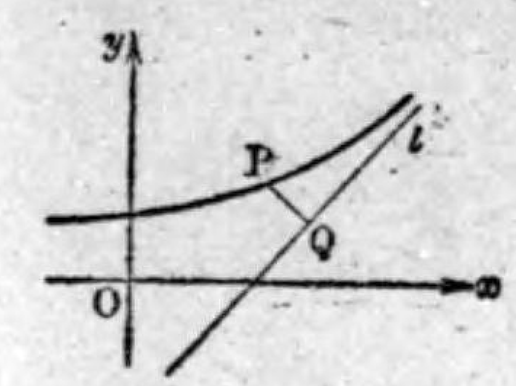


無限分枝ヲ有スル曲線ニ於テ其ノ分枝上ノ點カラ一ツノ定直線ニ至ル距離ガ, 其ノ點ガ遠ザカル程小トナリ, 無限遠トナル極限ニ於テ零ニ收斂スルトキ, コノ定直線ヲ其ノ無限分枝又ハ曲線ノ漸近線ト云フ. 上圖ノ如ク双曲線ノ無限分枝ハ漸近線ヲ有スルガ拋物線ノ無限分枝ニハ漸近線ガナイ. 何トナレバ拋物線ノ切線ノ切點ヲ無限遠方ニトレバ切線ノ原點カラノ距離ハ無限大トナルカラデアル. $y=f(x)$ ナル曲線ガ漸近線ヲ有スルトキ其ノ漸近線ノ求メ方ヲ次ニ述ベル.

漸近線ノ求メ方　$y=f(x)$ ナル曲線上ノ一點 P(x, y) ヨリ一直線 l ニ下シタ垂線ヲ PQ トスル. コヽニ直線 l ハ y 軸ニ平行デナイ場合, 即チ x 軸ト斜交スルカ又ハ平行ナル場合トシ, 其ノ方程式ヲ

$$Y=\alpha X+\beta \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスル. 然ルトキハ解析幾何學ノ公式ニヨリ



$$PQ=\frac{|y-\alpha x-\beta|}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

デアル. 今曲線 $y=f(x)$ ガ直線 l ノ方向ニ延ビタ無限分枝ヲ有スルモノトシ, 且 l ガ其ノ漸近線デアルトスル. P 點ハ原點ヨリノ距離ガ無限大トナルトキハ漸近線ノ定義カラ PQ→0 トナラナケレバナラナイ. 然ルニ上述ノ漸近線ハ x 軸ニ斜交スルカ, 又ハ平行ナル場合デアルカラ分枝上ノ點ガ原點ヨリ遠ザカレバ遠ザカル程其ノ點ニ應ズル x ノ絕對値ハ大トナル. 故ニ

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-\alpha x-\beta)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}-\alpha-\frac{\beta}{x}\right)=0.$$

然ルニ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\beta}{x}=0$ デアルカラ

$$\alpha=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

之ニ依ツテ定メラレタ α ヲ (2) ニ代入スルト

$$\beta=\lim_{x\to\pm\infty}(y-\alpha x) \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

トナル. コノ α, β ヲ (1) ニ代入スルト求メル一ツノ漸近線ヲ得ル. ココニ一ツノ漸近線ト云ツタノハ曲線ニ依ツテハ分枝ガ二ツ以上アルコトガアリ, 其ノ各々ニツイテ漸近線ヲ有スルトキハ是等ノ漸近線ノ中ノ一ツト云フコトヲ意味スル. 從ツテ其ノ分枝ノ各々ニツイテ α, β ヲ求メナクテハナラナイ. 又無限分枝ガ x ノ正又ハ負ノ何レカ一方ニノミ延長スルコトガ明白ナルトキハ, (3), (4) ニ於テ其ノ明白ナ一方ニ對スル極限値ノミヲ計算スレバヨイ.

以上ハ y 軸ニ平行デナイ漸近線ヲ求メル方法デアルガ, 若シ y 軸ニ平行ナルモノヲ求メルニハ, 先ヅ兩軸ヲ交換シテ然ル後上述ノ方法ヲ適用スレバヨイ.

或ハ又次ノ如クシテモヨイ.

y 軸ニ平行ナル漸近線ヲ $x=a$ トスル. 然ルトキハ之ニ沿ウテ走ル無限分枝上ニテハ $y=\pm\infty$ ナルトキ $x\to a$ デアル. 故ニ先ヅ曲線ノ方程式ニ於テ x ガ或有限確定値 a ニ近ヅクトキ, y ノ極限値ガ正又ハ負ノ無限大トナルナラバ $x=a$ ハ求メル y 軸ニ平行ナル漸近線デアル.

例題 1. $x^3-3axy+y^3=0$ ノ漸近線ヲ求メヨ. 但シ $a>0$.

[解] 與式ヲ書キ換ヘテ

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3-3a\frac{y}{x^2}+1=0.$$

サテ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\alpha$ トスルト, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x^2}=0$ デアルカラ

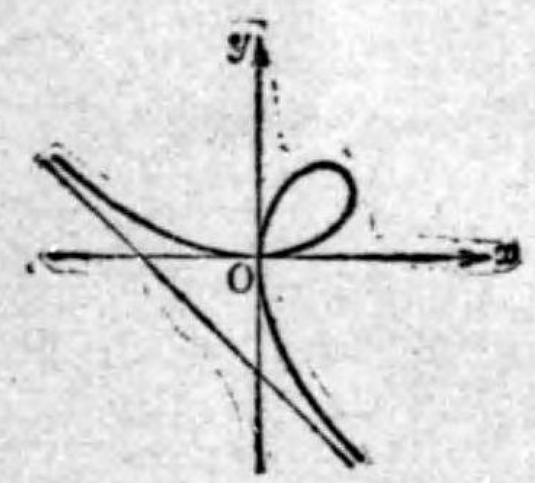
$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^3-3a\frac{y}{x^2}+1\right\}=0$$

ヨリ

$$\alpha^3+1=0. \quad \therefore\ \alpha=-1.$$

次ニ

$$\beta=\lim_{x\to\infty}(y-\alpha x)=\lim_{x\to\infty}(y+x).$$



然ルニ與ヘラレタ方程式ヨリ

$$y+x=\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}.$$

$$\lim_{x\to\infty}(y+x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3a\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}.$$

而シテ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=-1$ デアルカラ

$$\beta=\lim_{x\to\infty}(y+x)=\frac{-3a}{3}=-a.$$

故ニ y 軸ニ平行デナイ漸近線ノ方程式ハ

$$y=-x-a. \quad 或ハ \quad y+x+a=0.$$

y 軸ニ平行ナ漸近線ハ $y\to\infty$ ニ對シテ $x\to\infty$ デアルコトカラ存在シナイ.

【注意】 $x^3-3axy+y^3=0$ ハ x ト y トヲ入レ換ヘテモ變ラナイカラ $x=y$ ニ關シテ對稱デアル. 故ニ x ト y トハ同位ノ無限大デアルカラ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x^2}=0$ デアル.

例題 2. 曲線 $y^2(x+a)=x^2(x-a)$, $a>0$ ノ漸近線ヲ求メヨ.

【解】 與ヘラレタ方程式ヲ書キ直スト

$$y=\pm x\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}.$$

即チ

$$y=x\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1), \qquad y=-x\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

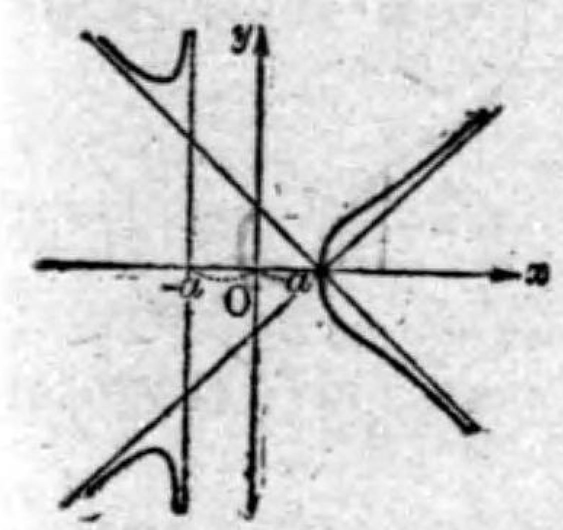
トナル. (1) ヨリ

$$y=x\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=x\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{x}+\frac{3}{8}\cdot\frac{a^2}{x^2}-\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{x}-\frac{1}{8}\cdot\frac{a^2}{x^2}-\cdots\cdots\right)$$

$$=x\left(1-\frac{a}{x}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2}-\cdots\cdots\right).$$

$$\therefore\ \alpha=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=1,$$

$$\beta=\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=-a.$$



故ニ漸近線ノ方程式ハ

$$y=x-a$$

デアル. (2) ヨリ

$$y=-x\left(1-\frac{a}{x}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2}-\cdots\cdots\cdots\right).$$

$$\therefore\ \alpha=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=-1,$$

從ツテ

$$\beta=\lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=a.$$

故ニ漸近線ノ方程式ハ $y=-x+a$

デアル.

次ニ曲線ノ方程式ニ於テ $y\to\pm\infty$ ナラシメル x ノ値ハ $x=-a$ ニ限ル. 故ニ y 軸ニ平行ナル漸近線ハ

$$x=-a$$

唯一ツデアル. 以上ノ結果求メル漸近線ハ

$$y-x+a=0, \qquad y+x-a=0, \qquad x+a=0$$

デアル.

例題 3. 曲線 $x^2y=x^4+1$ ノ漸近線ヲ求メヨ.

〔解〕 $x^2y=x^4+1$ ヨリ $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

$$\alpha=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+\dfrac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)=\pm\infty.$$

即チ α ガ有限確定デナイカラ y 軸ニ平行デナイ漸近線ヲ有シナイ. 次ニ

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\infty.$$

故ニ $x=0$ ハ y 軸ニ平行ナル漸近線デアル．

最後ニ $x^2y=x^4+1$ ヲ書キ換ヘテ

$$y-x^2=\frac{1}{x^2}.$$

コヽニ於テ x ノ値ヲ十分大キクトルトキハ，$\dfrac{1}{x^2}$ ハ殆ンド零トナリ，省略シテヨイカラ曲線ノ形ハ

$$y=x^2$$

ニ近似スル．換言スルト原曲線ノ無限分枝ハ拋物線 $y=x^2$ ノ無限分枝ニ限リナク近ヅク．コノ拋物線 $y=x^2$ ヲ原曲線ノ**漸近拋物線**ト云フノデアル．

一般ニ或曲線ノ無限分枝ニ限リナク接近シ來ル第二ノ曲線ヲ，最初ノ曲線ノ**漸近曲線**ト云フ．

漸近線ノ第二定義　曲線ノ無限分枝上ノ一點ニ於ケル切線ニ於テ其ノ切點ガ無限分枝ニ沿ヒテ原點ヨリ無限大ノ距離ニ進ムトキ，其ノ切線ガ一定ノ極限ノ位置ヲ占メルトキ，其ノ極限ノ位置ニ於ケル直線ヲ其ノ曲線ノ**漸近線**ト云フ．

此ノ定義ニ從フト漸近線トハ無限遠ニ於テ曲線ニ切スル切線デアルト云フコトガ出來ル．此ノ第二ノ定義ニ依ツテ漸近線ヲ求メルニハ次ノ如クスル．

曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 (x, y) ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\mathrm{Y}-y=\frac{dy}{dx}(\mathrm{X}-x).$$

$$\therefore\ \mathrm{Y}=\frac{dy}{dx}\mathrm{X}+\left(y-\frac{dy}{dx}x\right).$$

之ガ漸近線ナルタメニハ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{dy}{dx}=\alpha',\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(y-\frac{dy}{dx}x\right)=\beta'.$$

從ツテ y 軸ニ平行デナイ漸近線ハ

$$\mathrm{Y}=\alpha'\mathrm{X}+\beta'$$

トナル．此ノ際 α', β' ノ一方又ハ兩方ガ有限確定デナイトキハ y 軸ニ平行デ

ナイ漸近線ガ存在シナイノデアル．又 y 軸ニ平行ナルモノヲ求メルニハ先ヅ x 軸ト y 軸トヲ交換シテ置ケバヨイ．

以上第一第二ノ漸近線ノ求メ方ハ必ズシモ一致シナイ．何トナレバ不定形 $\dfrac{0}{0}$ ノ極限値ノ理論ニヨリ

$$\alpha=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{dy}{dx}=\alpha',\qquad \therefore\ \alpha=\alpha'.$$

トナリ，一致スルケレドモ

$$\beta=\lim_{x\to\pm\infty}(y-\alpha x)=\lim_{x\to\pm\infty}(y-\alpha' x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[y-\left\{\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{dy}{dx}\right)x\right\}\right]$$

トナリ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left\{y-\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{dy}{dx}x\right)\right\}\ \text{ハ必ズシモ}\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(y-\frac{dy}{dx}x\right)$$

トハ一致シナイカラ常ニ

$$\beta=\beta'$$

ガ成立スルトハ限ラナイカラデアル．例ヘバ

$y=\dfrac{\sin x}{x}$ ナル曲線ハ第一ノ定義ニ從ヘバ

$$\alpha=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0,\qquad \beta=\lim_{x\to\pm\infty}\left\{y-\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{dy}{dx}\right)\right\}=0.$$

故ニ漸近線ハ

$$y=0$$

トナルモ，第二ノ定義ニ從ヘバ

$$\alpha'=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)=0.$$

$$\beta'=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-\frac{dy}{dx}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=-\lim_{x\to\pm\infty}\cos x$$

トナリ，β' ハ不定トナルカラ此ノ曲線ハ第二ノ定義ニヨル漸近線ヲ有シナイノデアル．換言スルト曲線 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ ノ無限分枝ハ x 軸ニ限リナク近迫スルガ，分枝上ノ各點ニ於ケル切線ハ x ノ値ト共ニ其ノ位置ヲ變動シ，決シテ x 軸ニ近迫シナイノデアル．

例題 1. $y=e^x$ ノ漸近線ヲ求メヨ．

[解] $x\to\infty$ ナルトキ $y\to\infty$, $x\to-\infty$ ナルトキ $y=0$ ナル二ツノ無限分枝ヲ有ス．而シテ

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty.$$

即チ x 軸ノ正方向ニ於テハ α ガ有限デナイカラ漸近線ガナイ. 次ニ

$$\alpha=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=0,\qquad \beta=\lim_{x\to-\infty}y=0$$

デアルカラ $y=0$ ハ此ノ分枝ノ漸近線デアル.

又 x ガ有限ナル値ニ對シテ y ガ無限大トナラナイカラ x 軸ニ垂直ナル漸近線ガナイ. 故ニ求メル漸近線ハ $y=0$, 即チ x 軸只一ツデアル.

例題 2. 拋物線 $y^2=4ax,\ a>0$ ノ漸近線ヲ求メヨ.

【解】
$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4ax}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}}=0.$$
$$\beta=\lim_{x\to\infty}(y-\alpha x)=\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}2\sqrt{ax}=\infty.$$

即チ β ガ無限大トナルカラ漸近線ガナイ.

例題 3. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ漸近線ヲ求メヨ.]

【解】
$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\pm\frac{b}{a}.$$
$$\beta=\lim_{x\to\infty}\left(y\mp\frac{b}{a}x\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\{\pm\sqrt{x^2-a^2}\mp x\}$$
$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left\{\pm x\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mp x\right\}=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left\{\pm x\left(1-\frac{a^2}{2x^2}+\cdots\cdots\right)\mp x\right\}=0.$$

故ニ求メル漸近線ハ

$$y=\frac{b}{a}x,\qquad y=-\frac{b}{a}x$$

デアル. $x\to-\infty$ ナルトキモ同一ノ結果ヲ得ル.

x, y ニ關スル有理整方程式 $f(x,y)=0$ ノ漸近線

(1) y 軸ニ平行デナイ漸近線

$f(x,y)=0$ ヲ x, y ニツキ n 次ノ有理整方程式トシ, 之ガ表ハス曲線ガ漸近線 $y=\alpha x+\beta$ ヲ有スルモノトスル.

然ルトキハ

$$y=\alpha x+\beta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ハ

$$f(x,y)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ニ無限遠點ニ於テ切スルカラ (1), (2) ヲ聯立方程式トシテ解クト, 其ノ根ノ中二ツハ無限大ノ等根デナケレバナラナイ. 故ニ今 (1) ト (2) トヲ聯立方程式トシテ解クト

$$f(x,\alpha x+\beta)=0.$$

コノ左邊ヲ x ニツイテ整頓スルト

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots\cdots+A_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヲ得ル. コヽニ $A_0, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ ハ夫々 α, β ニツイテ有理整式デ A_0 ハ β ヲ含マナイ.

今 (3) ノ根ヲ $x=\frac{1}{y}$ トスルト

$$A_0+A_1y+A_2y^2+\cdots\cdots+A_ny^n=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

トナル. 而シテ (3) ガ無限大ナル根ヲ有スルコトハ (4) ガ零ナル根ヲ有スルコトデアル. 即チ

$$A_0=0.$$

(4) ガ $y=0$ ナル等根ヲ有スルタメニハ

$$A_0=0\qquad A_1=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$

コノ (5) ヲ解イテ α, β ノ有限確定値ヲ得ルトキハ, 之ヨリ漸近線ノ方程式ヲ求メルコトガ出來ル.

(2) y 軸ニ平行ナ漸近線

曲線ノ方程式 $f(x,y)=0$ ヲ y ニツイテ整頓シテ

$$f(x,y)=a_0y^n+(a_1x+b_1)y^{n-1}+(a_2x^2+b_2x+c_2)y^{n-2}+\cdots\cdots=0$$

トスル. コヽニ於テ $a_0\neq0$ ナルトキハ, y 軸ニ平行ナ任意ノ直線 $x=k$ ト曲線トノ交點ハ, 曲線ガ n 次ナルコトカラ常ニ實又ハ虚ナル n 個ヲ求メルコトガ出來ル. 即チ無限遠點ノ交點ハナイ. 故ニ y^n ノ項ガ存スルトキハ y 軸ニ平行ナ漸近線ハ存在シナイ.

若シ $a_0=0$ 即チ y^n ノ項ヲ缺クトキハ, (1) ノ場合ト同ジ理由ニヨリ $x=k$ ナル直線トノ交點ノ一ツハ常ニ無限遠點ニアル. 故ニコノトキ y^{n-1} ノ係數ヲ零トオクト

$$a_1x+b_1=0. \quad 但シ\ a_1\neq 0$$

トナリ，コノ直線ニ對シ曲線トノ交點ハ更ニ一ツ無限遠點ニ於テ交ハルコトヽナル．即チ

$$\boxed{a_1x+b_1=0}$$

ハ求メル漸近線ノ方程式デアル．

若シ $a_0=0,\ a_1=0,\ b_1\neq 0$ ナルトキハ，y 軸ニ平行ナ直線ト曲線トノ交點ハ一ツダケ無限遠點ニアルモ外ニハナイカラ，此ノ場合ニハ y 軸ニ平行ナ漸近線ハナイ．

若シ又 $a_0=0,\ a_1=0,\ b_1=0$，即チ x, y ニ關スル n 次ノ有理整方程式ニ於テ y^n, y^{n-1} ノ項ガ缺ケテキル場合ニハ y^{n-2} ノ係數ヲトリ

$$a_2x^2+b_2x+c_2=0$$

トスルト，之ヲ解イテ得ル

$$x=k_1, \quad x=k_2$$

ハ曲線ト夫々更ニ無限遠點ニ於テ交ハルカラ，二ツトモ漸近線ノ方程式デアル．

以下同樣ニ類推シテ

$$f(x,y)=(a_0x^k+\cdots\cdots+a_k)y^{n-k}+B_1y^{n-k-1}+\cdots\cdots=0$$

ナルトキハ

$$a_0x^k+\cdots\cdots+a_k=0$$

ヲ解イテ得ル實根ヲ $k_1, k_2\cdots\cdots$ トスルト

$$x=k_1, \quad x=k_2\cdots\cdots$$

ハ何レモ y 軸ニ平行ナ漸近線ノ方程式デアル．

(3) x 軸ニ平行ナ漸近線

$$f(x,y)=a_0x^n+(a_1y+b_1)x^{n-1}+(a_2y^2+b_2y+c_2)x^{n-2}\cdots\cdots=0$$

ナル形ニ書キ換ヘ

$$a_0\neq 0$$

ナルトキハ x 軸ニ平行ナ漸近線ハ存在シナイ．若シ $a_0=0$，即チ x^n ノ係數ガ零ナルトキハ

$$a_1y+b_1=0, \quad a_1\neq 0$$

ハ x 軸ニ平行ナ漸近線デアル．

更ニ又 $a_0=0,\ a_1=0,\ b_1=0$，即チ x^n, x^{n-1} ノ項ヲ缺クトキ

$$a_2y^2+b_2y+c_2=0$$

ガ實根 k_1, k_2 ヲ有スルトキ　$y=k_1, \quad y=k_2$

ガ x 軸ニ平行ナ漸近線デアル．以下同樣ニシテ進ムコトガ出來ル．

以上ノコトカラ曲線 $f(x,y)=0$ ノ漸近線ノ數ハ多クトモ $f(x,y)$ ノ次數ノ數ダケ有シ，決シテソレヨリ多クナルコトハナイコトガ推定セラレル．

例題 1. $y^2(x-2a)=x^3-a^3$ ノ漸近線ヲ求メヨ．

［解］ y 軸ニ平行デナイ漸近線ヲ

$$y=\alpha x+\beta$$

トシテ原方程式ニ代入スルト

$$(\alpha x+\beta)^2(x-2a)=x^3-a^3.$$

x ノ降冪順ニ整頓スルト

$$(\alpha^2-1)x^3+(2\alpha\beta-2a\alpha^2)x^2+\cdots\cdots=0.$$

$$\therefore\ \alpha^2-1=0. \qquad 2\alpha\beta-2a\alpha^2=0.$$

之ヲ解クト $\alpha=1,\ \beta=a$ 及ビ $\alpha=-1,\ \beta=-a$.

故ニ

$$y=x+a, \qquad y=-(x+a)$$

ハ y 軸ニ平行デナイ漸近線デアル．

次ニ y 軸ニ平行ナル漸近線ヲ求メルタメニ

$$(x-2a)y^2-(x^3-a^3)=0$$

ト書キ換ヘルト三次式ニシテ y^3 ノ項ヲ缺ク．故ニ y^2 ノ係數ヲ零トオイテ得ル．]

$$x-2a=0$$

ハ y 軸ニ平行ナル漸近線デアル．

x 軸ニ平行ナル漸近線ヲ求メルタメニ書キカヘルト

$$x^3-y^2x+2ay^2-a^3=0$$

トナル．即チ三次ニシテ x^3 ノ項ガ有ルカラ x 軸ニ平行ナル漸近線ハ存シナイ．

答　$\boldsymbol{y=x+a, \quad y=-(x+a), \quad x=2a.}$

例題 2. 曲線 $(x-2a)y^2=x^2(x-a)$ ノ漸近線ヲ求メヨ．但シ $a>0$.

［解］ 座標軸ニ平行デナイ漸近線ヲ求メルタメ

$$y=\alpha x+\beta$$

ヲ漸近線ノ方程式トシ，之ヲ原方程式ニ代入スルト

$$(x-2a)(\alpha x+\beta)^2=x^2(x-a).$$

$$(\alpha^2-1)x^3+(a-2a\alpha^2+2\alpha\beta)x^2+(\beta^2-4a\alpha\beta)x-2a\beta^2=0.$$

$$\therefore\ \alpha^2-1=0, \qquad a-2a\alpha^2+2\alpha\beta=0.$$

之ヲ解イテ $\alpha=\pm1$. 從ツテ $\beta=\pm\frac{a}{2}$.

故ニ座標軸ニ平行デナイ漸近線ハ

$$y=x+\frac{a}{2}.\quad \text{及ビ}\quad y=-\left(x+\frac{a}{2}\right)$$

トナル.

次ニ y 軸ニ平行ナル漸近線ヲ求メルニハ原方程式ガ x,y ニツイテ三次ノ方程式デ y^3 ノ項ヲ缺イテキルカラ y^2 ノ係數ヲ零トオイテ

$$x-2a=0$$

ハ y 軸ニ平行ナ漸近線デアル.

x^3 ノ項ハ存在スルカラ x 軸ニ平行ナモノハナイ.

答 $y=x+\frac{a}{2}$, $y=-\left(x+\frac{a}{2}\right)$, $x=2a$.

第四十章　曲線ノ特異點

通常點ト特異點　一般ニ曲線上ノ一點ニ於テハ切線ハ唯一ツニ限リ, 其ノ切線ノ方向ハ切點ノ位置ノ移動ニ伴ヒ連續的ニ變化スルノガ普通デアル. 然レドモ特別ノ點ニ於テハ切線ガ一ツヨリ多ク存在スルコトガアリ, 又一ツモ存在シナイコトモアル. 時トシテハ切線ノ方向ガ切點ノ位置ニ伴ツテ不連續的ニ變化スルコトモアル. 曲線上ノ斯樣ナ異狀ヲ呈スル點ヲ**特異點**トイヒ, 左樣デナイ普通ノ點ヲ**通常點**ト云フ.

代數曲線ノ特異點　曲線ノ方程式ヲ $F(x,y)=0$ トシ, 其ノ上ノ一點 $P(a,b)$ ガ通常點ナルカ特異點ナルカ, 若シ特異點ナラバ如何ナル異狀ヲ呈スルカ等ヲ知ルニハ次ノ如クスレバヨイ.

座標軸ヲ平行移動シテ原點ヲ $P(a,b)$ ニ移スト曲線ノ方程式ハ

$$F(x+a,\ y+b)=0$$

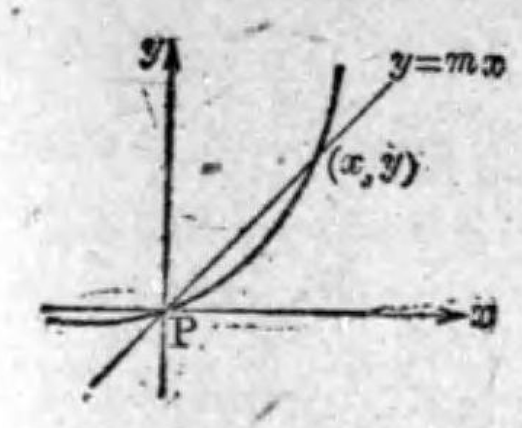
トナル. コノ左邊ハ x,y ノ函數デアルカラ之ヲ Taylor ノ定理ニヨリ展開スルト

$$F(a,b)+\{F_x(a,b)x+F_y(a,b)y\}$$
$$+\frac{1}{2!}\{F_{xx}(a,b)x^2+2F_{xy}(a,b)xy+F_{yy}(a,b)y^2\}+\cdots\cdots=0$$

トナル. 而シテ $P(a,b)$ ハ曲線上ノ點デアルカラ $F(a,b)=0$ トナル. 故ニ $F_x(a,b)$, $F_y(a,b)$ 等ヲ F_x, F_y 等ト略記スルト

$$F_x x+F_y y+\frac{1}{2!}(F_{xx}x^2+2F_{xy}xy+F_{yy}y^2)+\cdots\cdots=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

トナル.



今原點 P ヲ過ル直線ノ方程式ヲ

$$y=mx \quad\cdots\cdots(2)$$

トシ, 此ノ直線ガ更ニ曲線 (1) ト交ハル點ニ於ケル x 座標ハ (1) ニ (2) ヲ代入シテ得ラレル x ノ値デアル. 即チ

$$(F_x x+F_y mx)+\frac{1}{2!}(F_{xx}x^2+2F_{xy}mx^2+F_{yy}m^2x^2)+\cdots\cdots=0$$

ヨリ得ラレル x ノ値デアル. 或ハ書キ換ヘテ

$$(F_x+F_y m)x+\frac{1}{2!}(F_{xx}+2mF_{xy}+m^2F_{yy})x^2+\cdots\cdots=0 \quad\cdots\cdots(3).$$

此ノ方程式ノ x ノ値ハ明ニ零デアル. 是ハ P 自身ガ今引イタ直線ト曲線トノ交點デアルコトヨリ來ルノデアル.

(3) ハ F_x, F_y ノ中少クトモ一ツガ零トナラナイトキハ一般ニ $x=0$ ナル根ヲ唯一ツ有スルガ, 特ニ

$$F_x+F_y m=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

ナル樣ニ m ヲトルト少クトモ 0 ナル二ツノ x ノ値ヲ有スル. 換言スレバ P ヲ過ルアラユル直線ノ中デ特ニ (4) ニ依テ定マル方向係數ヲ有スル直線ノミガ曲線ノ切線トナル. 故ニ F_x, F_y ノ中少クトモ一ツガ零デナイトキハ, P ハ通常點デアル. 一般ニ曲線上ノ點ニシテ F_x, F_y ノ中少クトモ一ツヲ 0 ナラシメナイ點ハ通常點デアル. 而シテ其ノ點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y=mx,\qquad F_x+F_y m=0$$

ヨリ m ヲ消去シタ

$$y=-\frac{F_x}{F_y}x,\quad \text{或ハ}\quad F_x x+F_y y=0$$

デアル.

此ノコトヨリ曲線上ノ通常點ヲ原點トスルトキ, 其ノ點ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メルニハ曲線ノ方程式中ノ一次ノ項ヲ 0 ニ等シドオケバヨイ.

次ニ F_x, F_y 共ニ零ニシテ F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} ノ中少クトモ一ツガ零デナイトキハ，(3) ハ m ノ値ノ如何ニ拘ラズ常ニ $x=0$ ナル根ヲ二ツダケ有スル．即チ此ノ場合ニハ P ヲ過リ如何ナル方向ニ直線ヲ引イテモ，常ニ曲線ト P ニ於テ二點ニテ交ハルコトヽナル．斯様ナ點ヲ**二重點**ト云フ．二重點ヲ過リ特ニ

$$F_{xx}+2F_{xy}m+F_{yy}m^2=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ナル m ニ相當スル方向ニ直線ヲ引クトキハ，(3) ナル方程式ハ $x=0$ ナル根ヲ少クトモ三ツ有スルコトヽナル．之即チ其ノ直線ガ二重點ニ於ケル切線ナルコトヲ示スノデアル．

(5) ニ依リ m ノ値ガ二ツ決定セラレルカラ二重點ニ於テハ一般ニ二ツノ切線ガ存在スル．而シテ其ノ切線ノ方程式ハ

$$y=mx \quad ト \quad F_{xx}+2F_{xy}m+F_{yy}m^2=0$$

トヨリ，m ヲ消去シテ得ラレル．即チ

$$F_{xx}x^2+2F_{xy}xy+F_{yy}y^2=0.$$

コノ方程式ハ曲線ノ方程式ノ二次ノ項ダケヲ零ニ等シイトオイテ得ラレルカラ，若シ原點ガ二重點ナルトキハ其ノ點ニ於ケル二本ノ切線ノ方程式ハ曲線ノ方程式中ノ二次ノ項ダケヲ零ニ等シトオイテ得ラレル．

次ニ (5) ヨリ得ラレル m ハ二重點ニ於ケル二本ノ切線ノ方向係數デアルガ，(5) ニ依ツテ得ラレル m ノ値ハ必ズシモ實數ナリトハ限ラナイ．故ニ二重點ニ於ケル切線ヲ吟味スルタメニハ (5) ニ於ケル m ノ値ヲ吟味シナクテハナラナイ．

二重點ノ吟味 二重點ニ於ケル切線ノ模樣ニ依ツテ二重點ノ性質ガ吟味セラレル．故ニ (5) ノ判別式ニツイテ次ノ如ク吟味スル．

(i) $F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}>0$ ナル場合 コノ場合ニハ m ノ二ツノ値ハ共ニ實數デ且相異ナル．從ツテ二本ノ切線ガ引カレルカラ曲線ハ P ヲ二度相異ナル方向ニ過ル．斯樣ナ二重點ヲ**結節點**トイフ．

例題 1. 曲線 $F(x,y)=x^3-3axy+y^3=0,\ a>0$ ノ二重點ヲ吟味セヨ．

[解]
$$F_x=3x^2-3ay, \quad F_y=-3ax+3y^2.$$
$$F_{xx}=6x, \quad F_{xy}=-3a, \quad F_{yy}=6y.$$

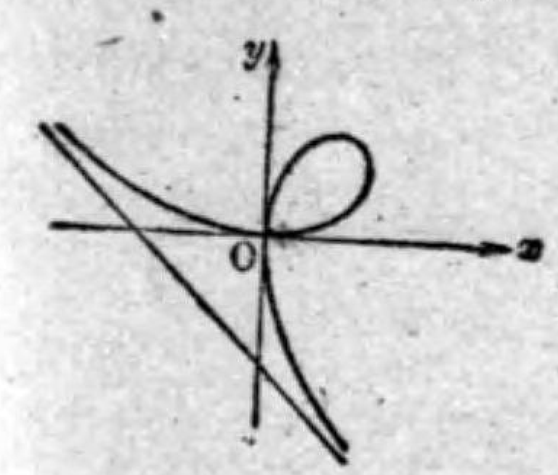
曲線 $F(x,y)=x^3-3axy+y^3=0$ ノ二重點ヲ求メルタメニハ $F_x=0,\ F_y=0$ ニシテ且 $F=0$ ヲ滿足スル x, y ヲ求メレバヨイ．然ルニ

$$3x^2-3ay=0, \quad -3ax+3y^2=0$$

ヲ解クト

$$\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\},\qquad \left.\begin{matrix}x=a\\y=a\end{matrix}\right\}.$$

然ルニ $x=0,\ y=0$ ハ $F(x,y)=0$ ヲ滿足スレドモ $x=a,\ y=a$ ハ滿足シナイカラ之ハ捨テル．



而シテ $x=0,\ y=0$ ナルトキハ

$$F_{xx}=0, \quad F_{xy}=-3a\neq 0, \quad F_{yy}=0$$

デアルカラ原點 (0, 0) ハ二重點ニシテ且

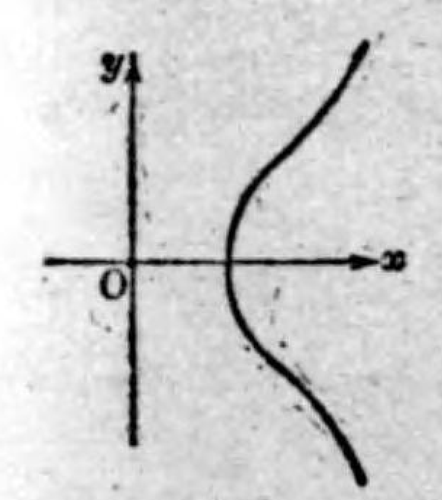
$$F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}=9a^2>0$$

デアルカラ，m ノ二ツノ實數値ヲ與ヘル．即チ原點ハ結節點デ其ノ點ニ於ケル切線ハ $xy=0$．即チ $x=0$ 又ハ $y=0$ トナリ兩軸自身デアル．

(ii) $F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}<0$ ナル場合 コノ場合ニハ m ノ二ツノ値ハ共ニ虛數デアルカラ，此ノ點ニ於テハ切線ハ一本モアリ得ナイ．此ノトキ其ノ二重點自身ハ $F=0$ ヲ滿足セシメルケレドモ，其ノ附近ニハ之ヲ滿足セシメル點ガ存在シナイ．即チ二重點ハ曲線ノ他ノ部分ト離レテ唯一點存在シ曲線ノ如何ナル分枝ニ沿ウテモ此ノ種ノ二重點ニ到達スルコトガ出來ナイ．斯樣ナ點ヲ**弧立點**ト云フ．

例題 1. 曲線 $F(x,y)=y^2+x^2-x^3=0$ ノ特異點ヲ求メヨ．

[解]



$$F_x=-3x^2+2x=0, \quad F_y=2y=0.$$

ヨリ $x=0,\ y=0$．而シテ (0, 0) ハ曲線上ノ點デアル．且 (0, 0) デハ

$$F_{xx}=-6x+2, \quad F_{xy}=0, \quad F_{yy}=2.$$
$$F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}=-4<0$$

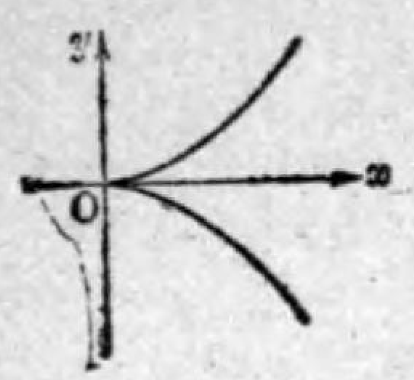
トナリ原點ハ弧立點トナリぐらふハ左圖ノ如クナル．

或ハ $y^2+x^2-x^3=0$ ヨリ $y=\pm x\sqrt{x-1}$ トナリ，原點 (0, 0) ハ此ノ方程式ヲ滿足スルケレドモ，$x<1$ ナル變域デハ y ノ實數値ヲ有シナイカラ原點ハ弧立點デアル．

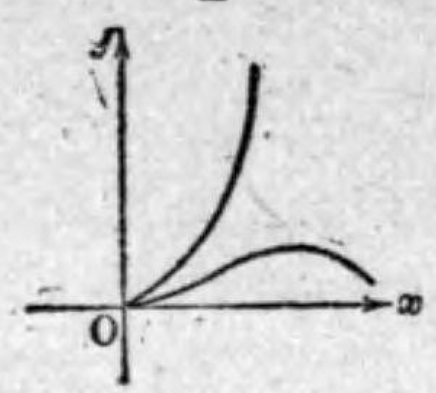
(iii) $F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}=0$ ナル場合 此ノ場合ニハ m ノ二ツノ値ハ實數ニシテ相等シク從ツテ二本ノ切線ガ存在スル．ケレドモ實ハ此ノ二本ノ切線

ハ相合シテ唯一ツトナル．而シテ曲線上ノ點＝シテ二ツノ切線ガ相合シテ唯一ツトナル場合ハ下ノ圖ノ如ク二ツアル．其ノ一ツハ甲圖ノ如ク二重點ヨリ同方向＝出發スル曲線ノ二分枝ガ共通切線ノ反對ノ側＝アル場合＝シテ，他ノ一ツハ乙圖ノ如ク共通切線ノ同一側＝アル場合デアル．之ヲ區別スルタメ＝甲圖ノ場合ノ二重點ヲ**第一種ノ尖點**ト云ヒ，乙圖ノ場合ノ二重點ヲ**第二種ノ尖點**ト云フ．而シテ第一種，第二種ノ尖點ヲ稱シテ單＝**尖點**ト云フ．

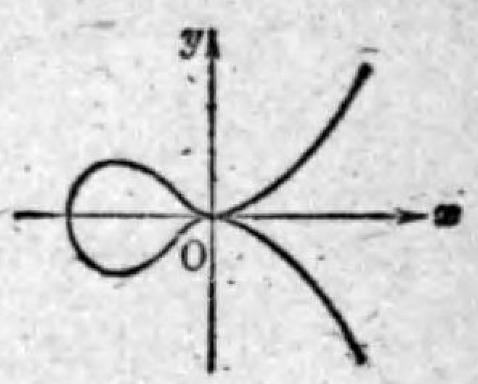
甲



乙



時トシテハ同一曲線ノ二分枝ガ相切スル如キ場合ガアル．斯樣ナ二重點ヲ**自切點**ト云フ．左圖ハ自切點トナル場合ヲ表ハス．



例題 1. $F(x,y)=(y-x)^2-(x-1)^3=0$ ノ二重點ヲ求メヨ．

〔解〕 $$F_x=-2(y-x)-3(x-1)^2=0,\quad F_y=2(y-x)=0$$

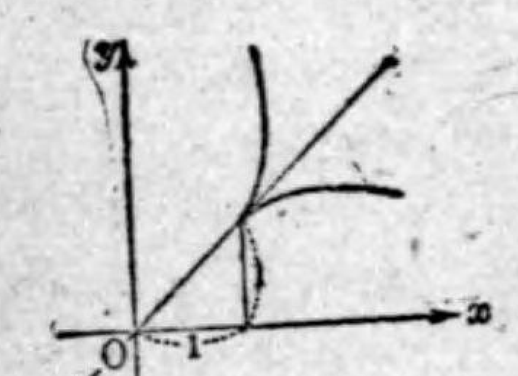
ヲ解クト $x=y=1$ トナリ，之ハ曲線上ノ點デアル．

次＝ $$F_{xx}=2-6(x-1),\quad F_{xy}=-2,\quad F_{yy}=2$$

デアルカラ $x=y=1$ ＝於テハ

$$F_{xx}=2,\quad F_{xy}=-2,\quad F_{yy}=2.$$

$$\therefore\ F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}=0$$



トナル．即チ $x=1,\ y=1$ ハ尖點デアル．而シテ原方程式ヨリ

$$y=x\pm\sqrt{(x-1)^3}$$

デアルカラ，$x<1$ ノトキ y ＝ハ實數値ガナイ．又 $x>1$ ナルトキハ y ＝二ツノ値ガアル．

又 $$F_{xx}+2F_{xy}m+F_{yy}m^2=0.$$

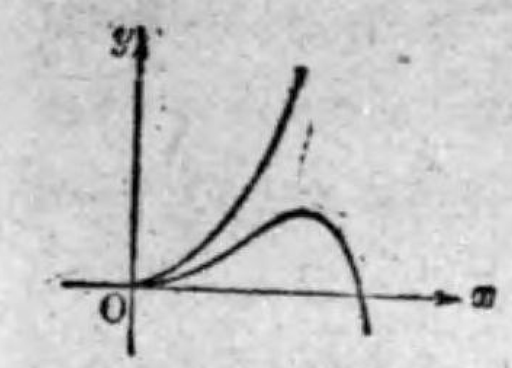
ヨリ $$2-4m+2m^2=0.\qquad \therefore\ m=1.$$

故＝ $y=x$ ハ $(1,1)$ ＝於ケル切線ノ方程式デ y ノ二ツノ値ハコノ切線＝對シテ上下＝一ツ宛アル．故＝ $(1,1)$ ハ**第一種ノ尖點**デアル．

例題 2. 曲線 $F(x,y)=y^2(1-x)-2x^2y+x^4=0$ ノ特異點ヲ求メヨ．

〔解〕 $$F_x=-y^2-4xy+4x^3=0,\quad F_y=2y(1-x)-2x^2=0$$

上ノ式ヨリ $x=0,\ y=0.$



而シテ $(0,0)$ ＝於テハ

$$F_{xx}=-4x+12x^2=0,\quad F_{xy}=-2y-4x=0,$$
$$F_{yy}=2(1-x)=2.$$
$$F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}=0.$$

故＝原點ハ尖點デアル．

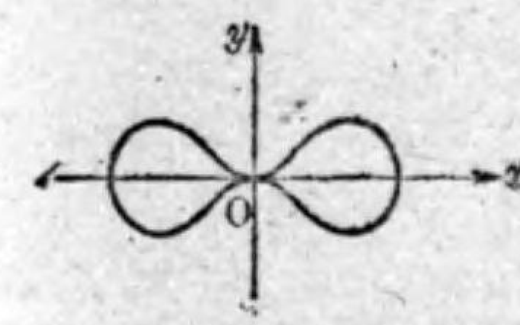
且 $y=\dfrac{x^2}{1\pm\sqrt{x}}$ デアルカラ $0<x<1$ ナルトキハ y ノ二ツノ値ハ共＝正デアル．即チ曲線ハ尖點ノ近ク＝於テハ其ノ切線ナル x 軸ノ上方＝アルカラ原點ハ第二種ノ尖點デアル．

例題 3. 曲線 $F(x,y)=y^2-x^4+x^6=0$ ノ二重點ヲ求メヨ．

〔解〕 $$F_x=-4x^3+6x^5=0,\quad F_y=2y=0$$

ヲ滿足スル曲線上ノ點ハ $(0,0)$ デアル．$(0,0)$ デハ

$$F_{xx}=-12x^2+30x^4=0,\quad F_{xy}=0,\quad F_{yy}=2.$$
$$F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}=0$$



デアルカラ原點ハ二重點＝シテ，切線 $y^2=0$ ハ原點＝於テ曲線ノ二ツノ分枝＝切スル．而シテ原方程式ヲ書キ換ヘルト

$$y=\pm x^2\sqrt{1-x^2}$$

トナルカラ，曲線ハ x 軸＝關シテ對稱＝シテ，且 $-1\leqq x\leqq 1$ ナル範圍内＝於テハ y ハ實數デアル．即チ原點ハ自切點デアル．

以上二重點ノ場合ト同一ノ理由＝ヨリ

$$F_x,\ F_y,\ F_{xx},\ F_{xy},\ F_{yy}$$

ガ悉ク 0 ＝シテ

$$F_{xxx},\quad F_{xxy},\quad F_{xyy},\quad F_{yyy}$$

ノ中少クトモ一ツガ零デナイトキ＝ハ，其ノ點＝於テハ m ノ値ノ如何＝拘ハラズ (3) ナル方程式ノ三根ガ $x=0$ トナル．即チ P ヲ過ル任意ノ直線ハ一般＝曲線ト三點デ交ハルコトヽナル．斯樣ナ點ヲ**三重點**ト云フ．而シテ三重點ヲ原點トスルトキ其ノ點＝於ケル切線ノ方程式ヲ求メル＝ハ原曲線ノ方程式ノ三次ノ項ノミヲ零＝等シトオケバヨイ．即チ

$$F_{xxx}x^3+3F_{xxy}x^2y+3F_{xyy}xy^2+F_{yyy}y^3=0$$

デアル．

尙一般＝曲線 $F(x,y)=0$ 上ノ一點 P ＝於テ F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy} 等ガ悉ク 0 ＝シテ第 n 次ノ偏微分係數ノ中少クトモ一ツ零デナイモノガ存在スルトキハ點 P ヲ此ノ曲線ノ **n 重點**ト云フ．

(3) ノ式カラ明ナル如ク n 重點ヲ過ル任意ノ直線ハ一般ニ曲線ト n 個ノ點デ交ハル．而シテ此ノ點ニ於ケル切線ハ此等ノ n 個ノ點ガ此點ニ收斂スル場合デアル．故ニ此ノ點ヲ原點トスルトキ切線ノ方程式ハ原曲線ノ方程式ノ n 次ノ項ノミヲ取ツテ之ヲ零ニ等シト置ケバヨイ．

二重點，三重點，……n 重點ヲ總稱シテ**重複點**ト云フ．重複點ヲ求メルニハ先ヅ $F=0$ ニシテ且 $F_x=0$, $F_y=0$ ナル點ヲ求メ，其ノ座標ヲ更ニ F_{xx}, F_{xxx} 等ノ高次ノ偏導函數ニ代入シ，上記ノ定義ニヨリ其ノ重複ノ度ヲ決定スレバヨイ．

例題 1. 曲線 $F(x,y)=x^4+2ax^2y-ay^3=0$ ハ原點ニ於テ三重點ヲ有シ且其ノ點ニ於ケル切線ハ $y=0$, $y=\pm\sqrt{2}x$ ナルコトヲ證明セヨ．

[ ]
$$F_x=4x^3+4axy, \qquad F_y=2ax^2-3ay^2.$$
$$F_{xx}=12x^2+4ay, \quad F_{xy}=4ax, \quad F_{yy}=-6ay.$$
此ノ式ノ値ハ皆 $x=0$, $y=0$ ニ於テ零トナル．而シテ
$$F_{xxx}=24x, \quad F_{xxy}=4a, \quad F_{xyy}=0, \quad F_{yyy}=-6a.$$
故ニ $x=0$, $y=0$ ニ於テ F_{xxy}, F_{yyy} ハ零トナラナイカラ原點ハコノ曲線ノ三重點デアル．而シテ其ノ切線ノ方程式ハ三次ノ項ヲ零トオイテ
$$2ax^2y-ay^3=0, \quad 即チ \quad y(y^2-4x^2)=0.$$
$$\therefore\ y=0, \quad 又ハ \quad y=\pm\sqrt{2}x.$$

[別解] 與ヘラレタ方程式ノ最低次ノ項ヲ零トオクト
$$y=0, \quad y=\pm\sqrt{2}x.$$
即チ原點ニ於テ三本ノ切線ヲ引クコトガ出來ル．故ニ原點ハ三重點デアル．

例題 2. 曲線 $F(x,y)=x^5-bx^4-a^3y^2=0$ ノ特異點ヲ求メヨ．$a>0$, $b>0$.

[解] 最低次ノ項ヲ零トオクト
$$y^2=0.$$
故ニ x 軸ハ切線ニシテ，且二本ノ切線ガ相合シタル場合デアルカラ，原點ハ自切點カ，第一種ノ尖點カ，又ハ第二種ノ尖點デアル．然ルニ
$$y=\pm\frac{x^2\sqrt{x-b}}{\sqrt{a^3}}$$
デアルカラ，$x<b$ ナルトキ y ハ虛數トナリ，從ツテ原點ノ附近ニ曲線ハ存在シナイ．即チ原點ハコノ曲線ノ弧立點デアル．

[注意] 此ノ場合ニハ
$$F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}=0$$
トナル．故ニタトヘ $F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}=0$ デアツテモ必ズシモ其ノ點ハ尖點又ハ自切點デアル

トハ斷言出來ナイ．故ニ尖點又ハ自切點ナルコトヲ斷言スルニハ
$$F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}=0$$
ノ外ニ尚其ノ點ノ近傍ニ曲線ガ存在スルコトヲ確メナクテハナラナイ．又此ノ例ノ如ク一ツノ點ガ弧立點デ其ノ附近ニ曲線ハ存在シナイニ拘ラズ，其ノ點ニ於ケル切線ハ實在スルコトガアル．

例題 3. 曲線 $F(x,y)=(y-c)^2-(x-a)^4(x-b)=0$ ノ特異點ヲ求メヨ．

[解] $x=a$, $y=c$ ニ原點ヲ移スト
$$y^2=x^4(x-b+a)$$
トナル．而シテ此ノ場合ノ切線ハ
$$y^2=0.$$
從ツテ原曲線ノ切線ハ
$$y-c=0$$
トナル．即チ特異點ハ $x=a$, $y=c$ デアル．

且
$$F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}=0$$
デアルカラ (a,c) ハ尖點カ弧立點デアル．然ルニ
$$y-c=\pm(x-a)^2\sqrt{x-b}.$$
故ニ與ヘラレタ曲線ハ切線 $y=c$ ニ關シテ對稱ニシテ，且 $x\geqq b$ デナケレバナラナイ．從ツテ

$a>b$ ナルトキ (a,c) ハ自切點，
$a=b$ ナルトキ (a,c) ハ第一種ノ尖點，
$a<b$ ナルトキ (a,c) ハ弧立點

デアル．即チ $a<b$ ナルトキハ (a,c) ニハ切線ハ實在スルケレドモ其ノ附近ニハ曲線ハ存在シナイ．

重複點ノ近傍ニ於ケル代數曲線ノ形狀 重複點ヲ座標ノ原點トスルトキ，代數曲線ノ方程式ハ次ノ如ク表ハサレル．
$$Ax^2+2Hxy+By^2+u_3+u_4+\cdots\cdots+u_n\cdots\cdots=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$
コヽニ u_n ハ x,y ニ關スル n 次ノ同次函數デアル．

(1) ニ於テ $A\neq0$, $H\neq0$, $B\neq0$ ナルトキハ原點ニ於ケル切線ノ方程式ハ
$$Ax^2+2Hxy+By^2=0$$
トナル．從ツテ

$\boldsymbol{H^2-AB>0}$ ナルトキ二ツノ切線ハ共ニ實ニシテ曲線ハ此ノ點ニテ相交ハル二ツノ分枝ヲ有スル．即チ原點ハ結節點デアル．

$\mathrm{H}^2 - \mathrm{AB} < 0$ ナルトキハ二ツノ切線ハ共ニ虚ニシテ存在シナイ．即チ曲線ニハ原點ヨリ發スル分枝ガナイ．此ノ場合ニハ原點ハ孤立點デアル．

$\mathrm{H}^2 - \mathrm{AB} = 0$ ナルトキハ二ツノ切線ハ相合シテ一ツトナル．此ノ場合ニハ原點附近ニ於テ曲線ハ種々ノ形ヲ取リ得ルカラ，之ヲ一層明確ニスルタメニ原點ニ於ケル切線ガ x 軸トナル如ク座標軸ヲ回轉スルトキ曲線ノ方程式ハ次ノ形ヲ取ル．

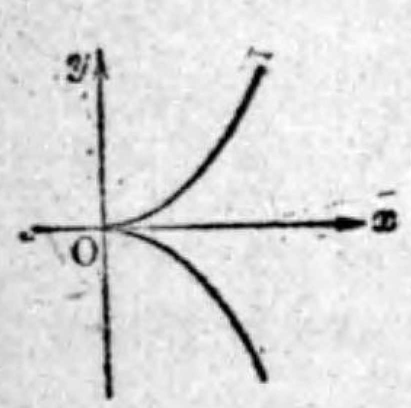
$$y^2+ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+fx^4+\cdots\cdots=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

(2) ノ各項ハ原點ノ近傍ニ於テハ何レモ無限小デアル．此等各項ノ無限小ノ中少クトモ二ツノ最低位ノ無限小ガアル．何トナレバ今假リニ y^2 一ツダケ最低位トシ他ハ皆之ヨリ高位デアルトスルト

$$y^2=-(ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+fx^4+\cdots\cdots)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナル等式ニ於テ右邊ハ y^2 ヨリ高位ノ無限小ノ代數和デアルカラ y^2 ト同位トナルコトハ出來ナイ．故ニ (3) ノ等式ハ成立シナイコトヽナルカラデアル．

斯クシテ (3) ニ於テ y^2 ト ax^3 ト同位ノ無限小ト考ヘルト bx^2y 以下ノ無限小ハ是等ヨリ高位ノ無限小トナルカラ，是等ハ原點ノ近傍ニ於テハ省略スルコトガ出來ル．故ニ原點附近ニ於テハ曲線ノ形ハ $y^2+ax^3=0$ ニ近似スル．即チ



曲線ハ y 軸ノ一方ニアツテ x 軸ニ關シテ對稱ノ形ヲナスカラ原點ハ第一種ノ尖點デアル．

若シ $a=0$ ナルトキハ曲線ノ方程式ハ下ノ形ヲトル．

$$y^2+bx^2y+cxy^2+dy^3+fx^4+\cdots\cdots=0\cdots\cdots(4).$$

此ノ式ニ於テ y^2 ト bx^2y トヲ同位ノ無限小ト考ヘルト x^4 モ亦是等ト同位トナリ，其ノ他ノ項ハ何レモ高位ノ無限小トナルカラ是等ハ原點ノ近傍ニ於テハ省略スルコトガ出來ル．故ニ原點附近ニ於テハ曲線ノ形ハ

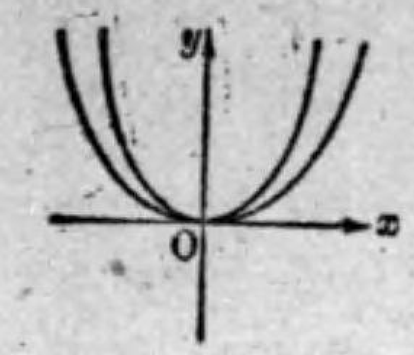
$$y^2+bx^2y+fx^4=0.$$

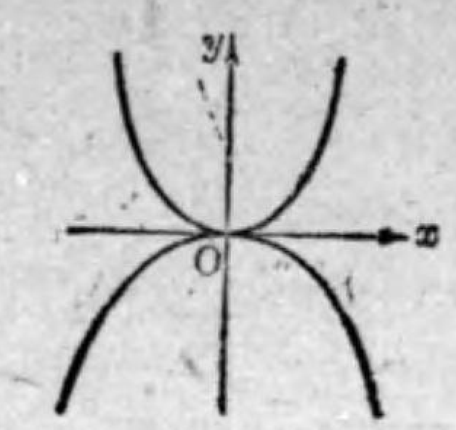
即チ

$$y=-\frac{b}{2}x^2\pm\frac{\sqrt{b^2-4f}}{2}x^2$$

ニ近似スル．コノ際

$b^2-4f>0$ ナルトキハ曲線ハ原點ニ於テ y 軸ヲ軸トスル二ツノ拋物線ト同樣ナ形ヲナス．





$b^2-4f<0$ ナルトキハ原點ハ孤立點デアル．

$b^2-4f=0$ ナルトキハ

$$y^2+bx^2y+fx^4=\left(y+\frac{b}{2}x^2\right)^2$$

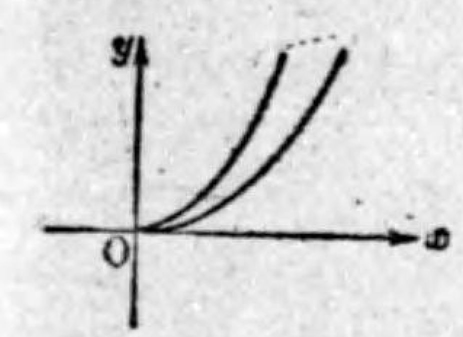
トナルカラ (4) ハ

$$\left(y+\frac{b}{2}x^2\right)^2+cxy^2+dy^3+\cdots\cdots=0,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

トナル．而シテ y^2 ト x^2y トガ同位ト見做ストキ y ハ x^2 ト同位デアルカラ，y ハ x ヲ第一位ノ無限小トスルトキ第二位ノ無限小デアル．從ツテ xy^2 ハ第五位ノ無限小デアル．即チ $cxy^2+dy^3+\cdots\cdots$ ノ各項ハ第五位，又ハ其ヨリ高位ノ無限小デアル．從ツテ第六位以上ノ無限小ヲ省略シ，第五位ノ無際小ノミヲ取ツテ之ヲ κx^5 デ表ハスト (5) ノ式ハ次ノ形ヲトル．

$$y=-\frac{b}{2}x^2\pm\sqrt{\kappa x^5}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

即チ曲線ハ原點附近ニ於テ左ノ曲線ニ近似スル．而シテ(6)ハ二ツノ拋物線樣ノ



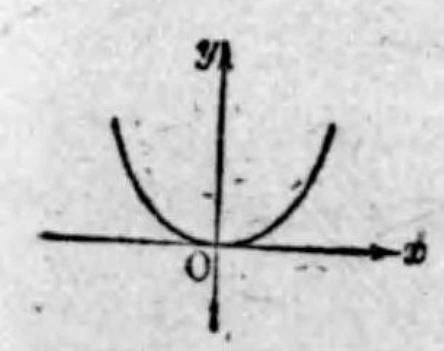
曲線ニシテ x 軸ニ關シテモ亦 y 軸ニ關シテモ各々其ノ一方ニノミ存在スル．即チ原點ハ第二種ノ尖點デアル．

更ニ b, c 等ノ零ナル場合，其ノ他一般ニ重複點ノ近傍ニ於ケル曲線ノ形ハ上述ト同樣ノ方法デ推定スルコトガ出來ル．

例題 1. $x^3-3axy+y^3=0, a>0$ ノ原點ノ近傍ニ於ケル曲線ノ形ヲ決定セヨ．

［解］ $x^3, -3axy, y^3$ ハ何レモ原點ノ近傍ニ於テ無限小デアル．而シテ此等ノ和ガ零デアルカラ此ノ中少クトモ二ツハ同位デナケレバナラナイ．

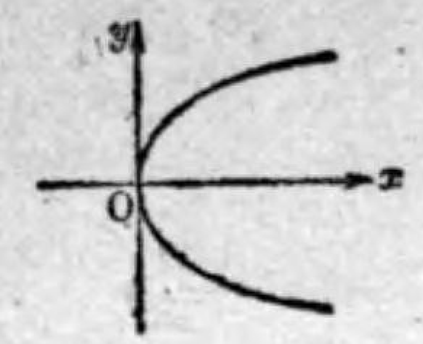
今 x^3 ト xy トヲ同位ト考ヘルト x^2 ト y トハ同位デアル．從ツテ y^3 ハ x^6 ト同位トナリ x^3, xy ヨリモ高位トナル．故ニ y^3 ヲ捨テテ考ヘルト原點附近ニ於ケル原曲線ハ一ツノ分枝ガ大略



$$x^3-3axy=0, \quad 即チ \quad x^2=3ay.$$

ナル拋物線ノ形ヲトル．即チ左圖ノ如クナル．

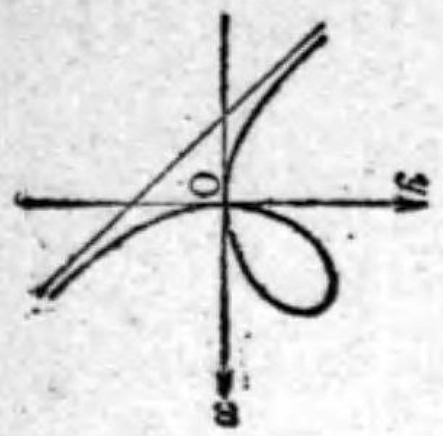
次ニ xy ト y^3 トヲ同位ト考ヘルトキハ x ト y^2 トハ同位トナリ，從ツテ x^3 ハ y^6 ト同位トナル．即チ x^3 ハ xy, y^3 ノ何レヨリモ高位トナルカラ之ヲ捨テヽ考ヘルト原點附近ニ於テハ原曲線ノ他ノ一ツノ分枝ハ大略



$$-3axy+y^3=0 \quad \text{即チ} \quad 3ax=y^2$$

ナル拋物線ノ形ヲトル．卽チ左圖ノ形ヲトル．

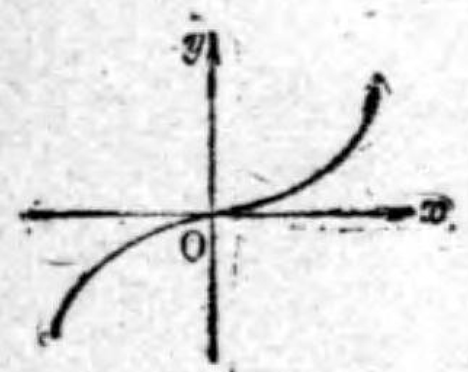
最後ニ x^3 ト y^3 トヲ同位ト考ヘルト x ト y トハ同位トナリ xy ハ x^2 ト同位トナル．從ツテ $-3axy$ ハ x^3, y^3 ノ何レヨリモ低位トナル．而シテ最低位ノ項ガ唯一ツトナルカラ是ハ不可能デアル．故ニ與ヘラレタ曲線ハ原點ニ於テ



$$x^2=3ay, \quad 3ax=y^2$$

ニ似タ二ツノ分枝ヲ有シ此ノ他ニ分枝ガナイ．之ヲ綜合スルト左圖ノ如クナル．

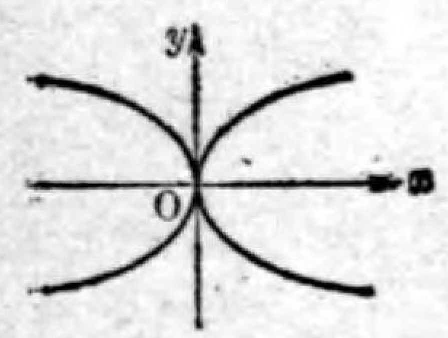
例題 2. $x^5-2a^2x^2y+y^5=0$ ノ原點ノ近傍ノ形狀ヲ畫ケ．



［解］ 前題ト同樣ニ x^5 ト x^2y トヲ同位ト考ヘルト y ハ x^3 ト同位デアルカラ，第三項ハ他ノ二項ニ比シテ高位トナルカラ之ヲ捨テル．卽チ原點ノ近傍デハ曲線ハ概略

$$x^5-2a^2x^2y=0, \quad \text{即チ} \quad x^3=2a^2y$$

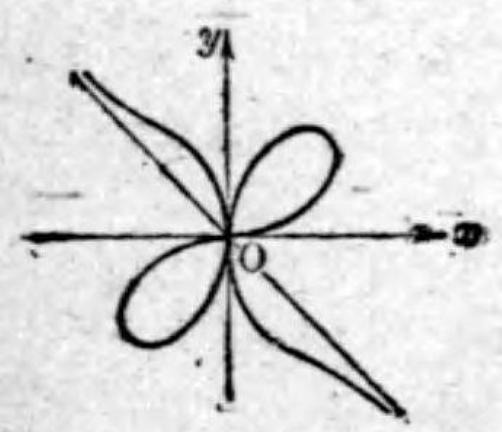
ナル形狀ヲトリ左圖ノ如クナル．



次ニ y^5 ト x^2y ト同位ト考ヘルト x ト $\pm y^2$ トガ同位トナルカラ，x^5 ハ y^{10} ト同位トナリ，他ノ二項ニ較ベテ高位トナルカラ之ヲ捨テル．卽チ原點ノ近傍デハ曲線ハ概略

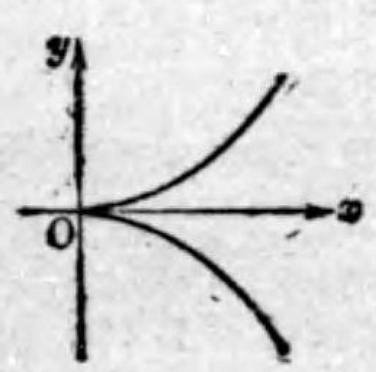
$$y^2=\pm\sqrt{2}\,ax$$

ナル二ツノ拋物線ノ形ヲトリ左圖ノ如クナル．



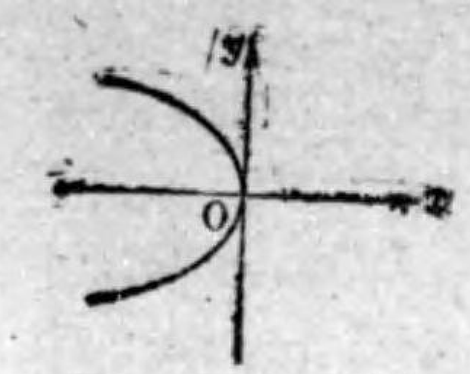
最後ニ x^5 ト y^5 トヲ同位ト考ヘルト第二項ハ他ノ二項ニ較ベテ低位トナル．而シテ最低位ノ項ハ唯一ツデアルカラ之ハ不合理トナル．以上ノ結果ヲ綜合シテ曲線ハ左圖ノ如クナル．

例題 3. $x^4-axy^2-y^4=0$ $(a>0)$ ノ原點附近ニ於ケル形ヲ吟味セヨ．



［解］ 原點附近ニ於テ x^4 ト xy^2 トヲ同位ノ無限小ト考ヘルト y^4 ハ之ヨリモ高位デアル．從ツテ原曲線ノ形ハ原點ニ於テ $x^3-ay^2=0$ ト同樣ナ形ヲトル．卽チ左圖ノ如クナル．

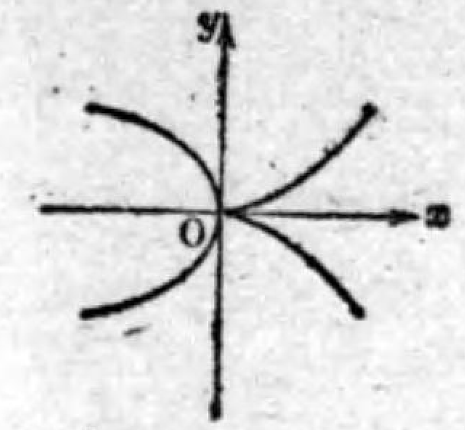
又 xy^2 ト y^4 トヲ同位ト考ヘルトキハ x^4 ハ之ヨリモ高



位トナルカラ原曲線ノ形ハ原點附近ニ於テ曲線 $y^2+ax=0$ ト同樣ナ形トナリ左圖ノ如クナル．

最後ニ x^4 ト y^4 トヲ同位ト考ヘルトキハ xy^2 ハ是等ヨリ低位トナル．而シテ最低位ノ項ハ唯一ツトナルカラ之ハ不合理デアル．

以上ノ結果ヲ綜合シテ原點附近ニ於テ原曲線ハ左圖ノ如クナル．



例題 4. $x^4+x^2y^2+y^4=x(ax^2-by^2)$ ノ原點附近ノ形ヲ決定セヨ．

［解］ 原點ニテハ

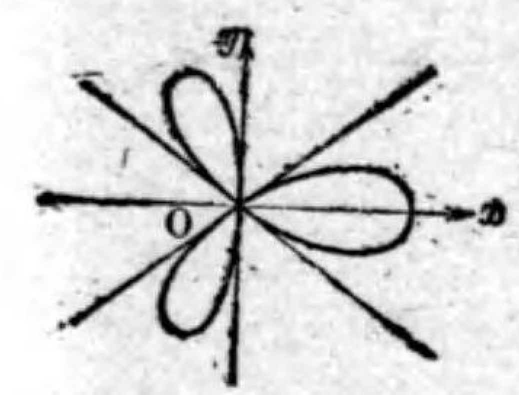
$$F_x=0, \quad F_y=0$$

ニシテ且

$$F_{xx}=0, \quad F_{xy}=0, \quad F_{yy}=0,$$

$$F_{xxx}=-6a, \quad F_{xxy}=0, \quad F_{xyy}=-2b, \quad F_{yyy}=0$$

デアルカラ原點ハ三重點デアル．



切線ノ方程式ヲ求メルタメニ最低次ノ項ヲ零トオクト

$$x(ax^2-by^2)=0.$$

卽チ切線ノ方程式ハ

$$x=0, \quad y=\sqrt{\frac{a}{b}}\,x, \quad y=-\sqrt{\frac{a}{b}}\,x$$

トナル．

原點附近ニ於テ原曲線ノ分枝ハ此ノ切線ノ外ニハナイ．何トナレバ，x^3 ト y^4 トヲ同位トスレバ xy^2 ハ唯一ツ最低位トナル．之ハ不可能デアル．又 x^3 ト x^2y^2 トガ同位ナルトキモ xy^2 唯一ツ最低位トナルカラ之亦不可能デアル．更ニ yx^2 ト y^4，xy^2 ト x^4 トガ同位ナルコトモ不可能デアルカラデアル。

次ニ原方程式ノ左邊ハ xy ノ四次式デ右邊ハ三次式デアルカラ x, y ハ大ナル値ヲトルコトガ出來ナイ．以上ノ結果曲線ハ上圖ノ如クナル．

第四十一章 曲線ノ追跡

代數曲線ノ追跡 曲線ノ方程式ヲ知ツテ其ノ圖形ヲ畫クコトヲ曲線ノ追跡ト云フ．解析幾何學ニ依リ二次方程式ニ依ツテ表ハサレル曲線ハ，其ノ方程式ノ形ノ如何ニ拘ハラズ之ヲ追跡スルコトガ出來ル．故ニコヽニ取扱フ方

程式ハ二次以上ノ x, y ニ關スル代數方程式デアル.

曲線ノ追跡ニハ一定ノ方法ハ存シナイガ, 今マデ述ベタ曲線ノ知識ノ活用ニ依リ, 概ネ次ノ如クスレバヨイ.

(1) 座標軸, 原點, 其他特別ナ直線ニ關スル對稱ノ有無ヲ調ベルコト.

(2) 座標軸, ソノ他特別ナ直線又ハ曲線トノ交點ヲ求メ, 其他曲線上ノ容易ニ見出シ得ル點ヲ求メルコト.

(3) 曲線ノ存在スル區域ト存在シナイ區域トヲ明ニスルコト.

(4) $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メテ曲線ノ方向ヲ調ベ, 且之ニ依ツテ x ノ變動ニ對スル y ノ極値ヲ決定スルコト.

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ求メテ曲線ノ凹凸及ビ變曲點ヲ調ベルコト.

(6) 特異點ノ位置ヲ決定シ, 且其ノ附近ニ於ケル曲線ノ形ヲ調ベルコト.

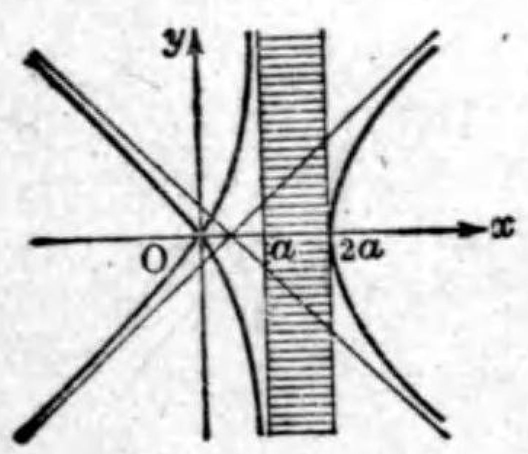
(7) 漸近線ヲ求メ之ニ對スル曲線ノ無限分枝ノ位置ヲ決定スルコト.

(8) 曲率半徑ヲ求メルコト.

例題 1. 曲線 $y^2(x-a)=x^2(x-2a)$, $a>0$ ヲ追跡セヨ.

[解] (1) **對稱ノ有無** y^2 ノ項ノミヲ含ムカラ x 軸ニ關シテ對稱デアル.

(2) **座標軸トノ交點**



$$y=\pm x\sqrt{\frac{x-2a}{x-a}}$$

ナル故 $(0,0)$, $(2a,0)$ ハ曲線上ノ點デアル.

(3) **存在區域** $a<x<2a$ ナル x ノ値ニ對シテ y ハ虛數トナルカラ, 此ノ區域デハ存在シナイ.

(4) **漸近線** $x-a=0$ ハ y 軸ニ平行ナ漸近線デアル. 其ノ他ノ漸近線ヲ求メルタメニ $y=\alpha x+\beta$ トオキ α, β ヲ決定シテヨイガ, 曲線ト漸近線トノ位置ノ關係ヲ吟味スルタメ次ノ如クスル.

$$y=\pm x\sqrt{\frac{1-\frac{2a}{x}}{1-\frac{a}{x}}}=\pm x\left(1-\frac{2a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\pm x\left(1-\frac{a}{x}-\frac{a^2}{2x^2}-\cdots\cdots\right)\left(1+\frac{a}{2x}+\frac{3a^2}{8x^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\pm x\left(1-\frac{a}{2x}-\frac{5a^2}{8x^2}-\cdots\cdots\right)$$

$$=\pm\left(x-\frac{a}{2}-\frac{5a^2}{8x}-\cdots\cdots\right).$$

コヽニ於テ $x\to\pm\infty$ ナラシメルト $y=\pm\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$ トナル. コレ漸近線ノ方程式デアル.

$y>0$, $x>0$ ニ對シテ

$$y=x-\frac{a}{2}, \qquad y=x-\frac{a}{2}-\frac{5a^2}{8x}$$

ヲ比ベルト, 曲線ノ方ノ y ハ漸近線ノ方ノ y ヨリ小デアルカラ, 第一象限ニ於テハ曲線ハ漸近線ノ下方ニアル.

$y>0$, $x<0$ ニ對シテ

$$y=-\left(x-\frac{a}{2}\right), \quad y=-\left(x-\frac{a}{2}-\frac{5a^2}{8x}\cdots\cdots\right)$$

ヲ比ベルト曲線ノ方ノ y ハ, 漸近線ノ y ヨリ小デアルカラ第二象限デハ曲線ハ漸近線ノ下方ニアル.

第三, 第四象限デハ x 軸ニ對稱ナルコトカラ曲線ト漸近線トノ關係ハ直チニ解ル.

(5) **曲線ト漸近線トノ交點** $\left(\dfrac{1}{5}a, -\dfrac{3}{10}a\right)$, $\left(\dfrac{1}{5}a, \dfrac{3}{10}a\right)$.

(6) $\dfrac{dy}{dx}$ **ノ吟味**

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{2x^2-5ax+4a^2}{2(x-a)\sqrt{(x-a)(x-2a)}}=\pm\frac{2\left(x-\frac{5}{4}a\right)^2+\frac{7}{8}a^2}{2(x-a)\sqrt{(x-a)(x-2a)}}$$

複號中ノ正號ニツイテ $-\infty<x<a$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}>0$.

$x>2a$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}>0$.

故ニ

$$y=x\sqrt{\frac{x-2a}{x-a}}$$

ハ增加ノ狀態ニアル.

複號中ノ負號ニツイテ, 卽チ

$$y=-x\sqrt{\frac{x-2a}{x-a}}$$

ハ減少ノ狀態ニアル.

$\dfrac{dy}{dx}=0$ ナラシメル x ノ實數値ハ存在シナイカラ極大値, 極小値ハナイ.

(7) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **ノ吟味**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{a^2(8a-5x)}{4(x-a)^2(x-2a)\sqrt{(x-a)(x-2a)}}.$$

複號中正號ヲトルト $x<a$ ノトキ $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ トナルカラ曲線ハ上方ニ凹デアル. $x>2a$ ノトキ $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ トナルカラ上方ニ凸デアル.

$x=\dfrac{8a}{5}$ ノトキ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ トナルケレドモ, コノトキ y ノ實數値ハ存在シナイカラ變曲點ハ存在シナイ.

複號中ノ負號ヲトルト上述ノ反對トナル.

(8) **重複點** 原點ハ二重點デソノ切線ノ方程式ハ

$y^2=2x^2$, 卽チ $y=\pm\sqrt{2}\,x$ トナルカラ原點ハ結節點デアル.

以上ノ結果ヲ綜合シテ圖ノ如クナル.

例題 2. 曲線 $(x+3a)y^2=x(x-a)(x-2a)$ ヲ追跡セヨ. 但シ $a>0$.

[解] (1) **對稱ノ有無** y^2 ノ項ノミヲ含ムカラ曲線ハ x 軸ニ關シテ對稱デアル.

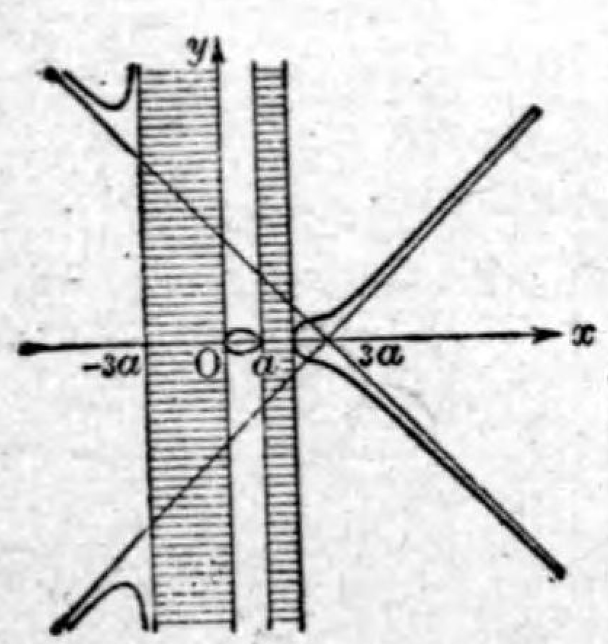
(2) **座標軸トノ交點** 原方程式ヨリ

$$y=\pm\sqrt{\frac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}}.$$

故ニ $(0,0)$, $(a,0)$, $(2a,0)$ ハ曲線上ノ點デアル.

(3) **曲線ノ存在區域** $-3a<x<0$ ノ區域及ビ $a<x<2a$ ノ區域ニ於テハ y ハ虛數トナルカラ曲線ハ存在シナイ.

(4) **漸近線** y 軸ニ平行ナル漸近線ハ $x+3a=0$ デアル. 其ノ他ノ漸近線ヲ求メルタメニ方程式ヲ書キ換ヘルト



$$\begin{aligned}y&=\pm x\sqrt{\frac{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{2a}{x}\right)}{1+\frac{3a}{x}}}\\&=\pm x\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3a}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\\&=\pm x\left(1-\frac{a}{2x}-\frac{a^2}{8x^2}-\cdots\cdots\right)\\&\quad\times\left(1-\frac{a}{x}-\frac{a^2}{2x^2}-\cdots\cdots\right)\\&\quad\times\left(1-\frac{3a}{2x}+\frac{27a^2}{8x^2}-\cdots\cdots\right)\\&=\pm x\left(1-\frac{3a}{x}+\frac{11a^2}{2x^2}\cdots\cdots\right).\end{aligned}$$

故ニ $y=\pm(x-3a)$ ハ漸近線デアル.

漸近線ト曲線トノ關係位置ヲ決定スルタメニ

$$y=x-3a,\quad y=x-3a+\frac{11a^2}{2x}$$

ヲ較ベルト, 第一象限ニアリテハ曲線ノ y ハ漸近線ノ y ヨリ大デアルカラ曲線ハ漸近線ノ上方ニアル. 又

$$y=-(x-3a),\quad y=-\left(x-3a+\frac{11a^2}{2x}\cdots\cdots\right)$$

ヲ較ベルト第二象限デハ曲線ハ漸近線ノ上方ニアル.

第三, 第四象限デハ對稱關係ニヨツテ其ノ位置ハ容易ニ決定サレル.

漸近線ト曲線トハ

$$\left(\frac{27}{11}a,\ -\frac{6}{11}a\right),\ \left(\frac{27}{11}a,\ \frac{6}{11}a\right)$$

ナル二點デ交ハル.

(5) $\dfrac{dy}{dx}$ **ノ吟味**

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x^3+3ax^2-9a^2x+3a^3}{(x+3a)\sqrt{x(x-a)(x-2a)(x+3a)}}$$

$x=0$, $y=0$ ノトキ $y'=\infty$; $x=a$, $y=0$ ノトキ $y'=\infty$.

$x=2a$, $y=0$ ノトキ $y'=\infty$; $x=-3a$, $y=0$ ノトキ $y'=\infty$.

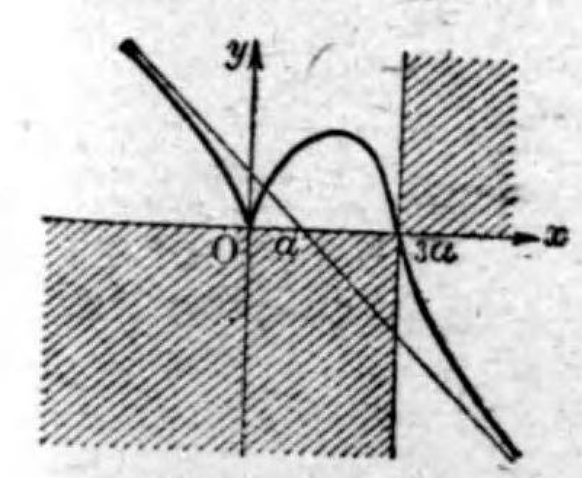
而シテ $y>0$ ノトキ, x ガ 0 ヨリ a マデ變化スレバ y ノ値ハ連續ニシテ且 $x=0$, $x=a$ ニ對シテ $y=0$ デアル. 故ニ $0<x<a$ ニ於テ y ノ極大値ガ存在スル.

$x\to-3a$ ノトキ $y\to\infty$, $x\to-\infty$ ナルトキ $y\to\infty$ デアルカラ $x=-3a$ ヨリ左方ニ於テ極小ガ存在スル.

(6) **特異點** 特異點ハ存在シナイ.

以上ノ結果曲線ハ圖ノ如クナル.

例題 3. 曲線 $y^3=3ax^2-x^3$ ヲ追跡セヨ. 但シ $a>0$.



[解] (1) **對稱ノ有無** x, y 共ニ奇數冪ヲ含ムカラ兩座標軸ニ關シテ對稱デナイ.

(2) **座標軸トノ交點** 原方程式ヲ書キ換ヘルト

$$y^3=x^2(3a-x)$$

トナルカラ兩軸ト $(0,0)$, $(3a,0)$ デ交ハル.

(3) **曲線ノ存在區域** $x<3a$ ノトキ $y>0$. $x>3a$ ノトキ $y<0$ デアルカラ曲線ハ $x=3a$ ナル直線ノ左方ニ於テハ x 軸ノ上方ニ, 右方ニ於テハ下方ニノミ存在スル.

(4) **重複點** 原線ハ二重點デ其ノ切線ノ方程式ハ $x^2=0$ デアル. 故ニ曲線ハ原點デ y 軸ニ切スル. 而シテ曲線ハ (2) ヨリ原點ノ附近デハ x 軸ノ上方ニノミ存在シ, 又 x ノ任意

ノ値ニ對シテ y ハ常ニ一ツノ實數値ヲ有スルカラ，曲線ハ y 軸ノ兩側ニ存在スル．故ニ原點ハ第一種ノ尖點デアル．

(5) **漸近線** 軸ニ平行ナル漸近線ハ存在シナイ．其ノ他ノ漸近線ハ

$$y=-x+a$$

デアル．コノ漸近線ト曲線トハ $\left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$ ナル唯一點デ交ル．故ニ曲線ガ原點ヲ過ルコトヨリ $x=\frac{a}{3}$ ヨリ左方デハ漸近線ノ下方ニ，右方デハ其ノ上方ニ存在スル．

(6) $\frac{dy}{dx}$ **ノ吟味**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2ax-x^2}{y^2}.$$

$-\infty<x<0$ ノトキ $\frac{dy}{dx}<0$ デアルカラ曲線ハ減少狀態ニアル．

$0<x<2a$ ノトキ $\frac{dy}{dx}>0$ デアルカラ曲線ハ增加ノ狀態ニアル．

$x>2a$ ノトキ $\frac{dy}{dx}<0$ デアルカラ減少狀態ニアル．

而シテ $x=0$ ノトキ $\frac{dy}{dx}=\pm\infty$ ニシテ極小デアル．

$x=2a$ ノトキ $\frac{dy}{dx}=0$ トナリ極大デアル．極大値ハ $\sqrt[3]{4}a$ デアル．

(7) $\frac{d^2y}{dx^2}$ **ノ吟味**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2a^2x^2}{y^5}$$

ヨリ $y>0$ ナル區域，即チ $x<3a$ ナルトキ $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ デアルカラ上方ニ凸．$x>3a$ ノトキ $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ デアルカラ上方ニ凹デアル．又 $x=3a$ ノトキ $\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\infty$ トナルカラ，$(3a,0)$ ハ變曲點デアル．以上ノ結果曲線ハ圖ノ如クナル．

例題 4. 曲線 $x^5-2a^2x^2y+y^5=0,\ a>0$ ヲ追跡セヨ．

[解] (1) **對稱ノ有無** 原方程式ニ於テ (x,y) ノ代リニ $(-x,-y)$ ト置イテ變リガナイカラ原點ハ對稱ノ中心デアル．

(2) **曲線上ノ點** 曲線ハ原點 $(0,0)$ ヲ過ル．又直線 $x=y$ ト (a,a)．$(-a,-a)$ ノ二點デ交ハル．

(3) **曲線ノ存在區域** 原方程式ヲ書キ換ヘルト

$$x^5+y^5=2a^2x^2y.$$

然ルニ第二象限ニ於テハ，$y>0$，$x^2>0$．

$$\therefore\ x^5+y^5>0.$$

而シテ第二象限ニ於テハ，$x^5<0$．

$$\therefore\ y>|x|.$$

同樣ニシテ第四象限ニ於テハ

$$|y|>x.$$

又原式ヨリ

$$x^5=y(2a^2x^2-y^4).$$

第一象現ニ於テハ $x^5>0$，$y>0$ ナルヲ以テ

$$\sqrt{2}\,ax>y^2.$$

即チ第一象限ニ於テハ原曲線ハ $\sqrt{2}\,ax=y^2$ ナル拋物線ノ內部ニアル．同樣ニシテ第四象限ニ於テハ同ジ拋物線ノ外部ニアル．

第二，第三象限ニツイテハ原點ニ關シ對稱ナルコトカラ容易ニ類推スルコトガ出來ル．

次ニ

$$y^5=x^2(2a^2y-x^3)$$

ナルヲ以テ，第一象限ニ於テハ $y^5>0$，$x^2>0$ ヨリ

$$2a^2y>x^3.$$

即チ第一象限ニ於テハ原曲線ハ三次曲線 $2a^2y=x^3$ ヨリ上方ニアル．又原點ニ關シテ對稱ナルコトヨリ第三象限ニ於テハ $2a^2y=x^3$ ヨリ下方ニアル．

(4) $\frac{dy}{dx}$ **ノ吟味** $\frac{dy}{dx}$ ヲ吟味スルタメニ方程式ヲ媒介變數ヲ用ヒテ表ハスト

$$x=\pm\sqrt{2}\,a\sqrt{\frac{t}{1+t^5}},\quad y=\pm\sqrt{2}\,at\sqrt{\frac{t}{1+t^5}}.$$

ヲハニ x,y ガ實數ナルタメニ

$$t>0,\ 又ハ\ t<-1$$

デナケレバナラナイ．

サテ x,y ノ正號ヲトツテ之ヲ t ニ關シテ微分スルト

$$\frac{dx}{dt}=\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{1-4t^5}{\sqrt{t(1+t^5)^3}},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{t(3-2t^5)}{\sqrt{t(1+t^5)^3}}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{t(3-2t^5)}{1-4t^5}.$$

之ヨリ t ノ變動ニ對スル x,y 及ビ $\frac{dy}{dx}$ ノ變動ヲ表デ表ハスト次ノ如クナル．

t	$-\infty$	…	-1	0	…	$\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$	…	$\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$	…	∞
x	0	+	∞	0	+	極大	…	+	…	0
y	0	−	$-\infty$	0	…	+	…	極大	+	0
$\frac{dy}{dx}$	$-\infty$	−	-1	0	+	∞ $-\infty$	−	0	+	∞

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ノ吟味

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{3+36t^5+8t^{10}}{(1-4t^5)^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{\sqrt{t(1+t^5)^3}}{1-4t^5}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{(-9+5\sqrt{3}-4t^5)(-9-5\sqrt{3}-4t^5)\sqrt{t(1+t^5)^3}}{2(1-4t^5)^3}.$$

故ニ $0<t<\sqrt[5]{\dfrac{1}{4}}$ ナルトキハ, $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$, 即チ上方ニ凹.

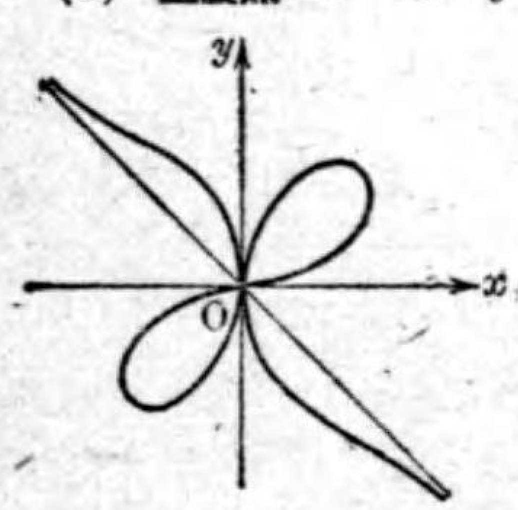
$t>\sqrt[5]{\dfrac{1}{4}}$ ナルトキハ, $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$, 即チ上方ニ凸.

$\sqrt[5]{\dfrac{-9-5\sqrt{3}}{4}}<t<-1$ ナルトキハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$, 上方ニ凸.

$t<\sqrt[5]{\dfrac{-9-5\sqrt{3}}{4}}$ ナルトキハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$, 上方ニ凹.

$t=\sqrt[5]{\dfrac{-9-5\sqrt{3}}{4}}$ ナル點ニ於テハ變曲點トナル.

(6) **重複點** $x^5-2a^2x^2y+y^5=0$ ヨリ最低次ノ項ハ三次デアルカラ原點ハ三重點ニシテ此ノ外ニ重複點ハナイ. 而シテ重複點附近ニ於ケル曲線ノ形狀ハ



$$x^5-2a^2x^2y=0 \text{ ヨリ } x^3=2a^2y.$$
$$y^5-2a^2x^2y=0 \text{ ヨリ } y^4=2a^2x^2.$$
$$\text{又ハ } y^2=\pm\sqrt{2}\,ax$$

トナル.

(7) **漸近線** $x^5-2a^2x^2y+y^5=0$ ヨリ y ヲ x デ表ハスコトガ出來ナイガ, x ガ有限デアルカラ x 軸ニ垂直ナル漸近線ハ存在シナイ. 次ニ

$\dfrac{y}{x}=t$ トオキ $y=tx$ トスルト

$$x^5+t^5x^5-2a^2tx^3=0. \quad \therefore\ 1+t^5-\frac{2a^2t}{x^2}=0.$$

$x\to\infty$ ナルトキ $1+\lim\limits_{x\to\infty}t^5=0.$ $\quad\therefore\ \alpha^5=\lim\limits_{x\to\infty}t^5=-1.$ $\quad\therefore\ \alpha=-1.$

次ニ $y+x=u$ トシ, $y=u-x$ トオクト

$$x^5+(u-x)^5-2a^2x^2(u-x)=0.$$
$$\therefore\ u^5-5u^4x+(10u^3-2a^2u)x^2-(10u^2-2a^2)x^3+5ux^4=0.$$
$$\therefore\ \frac{u^5}{x^4}-\frac{5u^4}{x^3}+\frac{10u^3-2a^2u}{x^2}-\frac{10u^2-2a^2}{x}+5u=0.$$

故ニ $x\to\infty$ ノトキ $\lim\limits_{x\to\infty}5u=0.$ $\quad\therefore\ \beta=\lim\limits_{x\to\infty}u=0.$

即チ求メル漸近線ハ $y+x=0$ デアル. 以上ノ結果曲線ハ上圖ノ如クナル.

練習問題 22.

(1) r 個ノ直線 $y+m_1x+k_1=0$, $y+m_2x+k_2=0$, ……, $y+m_rx+k_r=0$ ガ何レモ一ツノ n 次曲線ノ漸近線ナルトキハ, 其ノ曲線ノ方程式ハ次ノ如ク表ハサレルコルヲ證明セヨ.

$$(y+m_1x+k_1)(y+m_2x+k_2)\cdots\cdots(y+m_rx+k_r)f_{n-r}+f_{n-2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

但シ f_{n-r} ハ x,y ニツキ $(n-r)$ 次, f_{n-2} ハ $(n-2)$ 次又ハ其レ以下ノ多項式トス.

(2) n 次曲線ノ方程式ガ

$$(y+m_1x+k_1)(y+m_2x+k_2)\cdots\cdots(y+m_rx+k_r)f_{n-r}+f_{n-2}=0$$

ノ形ニ書キ換ヘラレルトキハ, r 個ノ直線

$$y+m_1x+k_1=0,\ y+m_2x+k_2=0,\ \cdots\cdots,\ y+m_rx+k_r=0$$

ハ一般ニ何レモ其ノ漸近線ナルコトヲ證明セヨ.

(3) $x^4-y^4=a^2xy+b^2y^2$ ノ漸近線ヲ求メヨ.

(4) $(x+y)^2(x+2y)^2=x^2+y^2$ ノ漸近線ヲ求メヨ.

(5) 曲線 $(y-x^2)^2=x^n$ ニ於テ n ガ奇數ニシテ 4 ヨリ小ナルカ, 又ハ 4 ヨリ大ナルカニ從ツテ原點ハ第一種又ハ第二種ノ尖點トナリ, n ガ偶數ナルトキハ原點ハ常ニ二重尖點ナルコトヲ證明セヨ. 但シ $n>2$.

(6) 曲線 $a^2y^2-2bx^2y-x^5=0$ ハ原點ニ於テ自切點ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

(7) 曲線 $ay^2-x^3+bx^2=0$ ニ於テ a, b ガ同符號ナルカ, 異符號ナルカニ從ツテ, 原點ハ其ノ孤立點又ハ結節點ナルコトヲ證明セヨ.

(8) 曲線 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ ノ特異點ヲ求メヨ.

(9) 原點ヲ過ル代數曲線ノ原點ニ於ケル切線ノ方程式ハ, 其ノ最低次ノ項ヲ零ニ等シトオイテ得ルコトヲ證明シ, 之ニ依ツテ原點ハ次ノ三ツノ曲線上ノ如何ナル性質ノ點ナルカヲ判定セヨ.

(i) $y^2=x^2(1-x^2)$. (ii) $y^2-x^3+2x^3=0$. (iii) $(y-x^2)^2=x^3$.

(10) 二次曲線並ビニ三次曲線ハ第二種ノ尖點ヲ有シ得ナイコトヲ證明セヨ.

(11) 曲線 $y^2=(x-a)^2(x-b)$ ガ結節點ヲ有スルナラバ, 變曲點ヲ有シナイガ, 若シ孤立點ヲ有スルナラバ二ツノ變曲點ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

(12) 次ノ各曲線ヲ追跡セヨ.

[1] $y=x(x^2-1)$. [2] $y=x^2+x^3$.

[3] $y(x-a)(x-b)=c^3,\ a>b>0.$
[4] $y(1+x^2)=1-x.$
[5] $y(x+a)^2=a^2x,\ a>0.$
[6] $y^2=ax^3+bx^2+cx+d.$
[7] $y^2x=(x-a)^3.$
[8] $y^2(x+a)=x^3-a^3.$
[9] $(by-cx)^2=a(x-a)^3,\ b>0,\ c>0.$
[10] $(x^2+y^2)x=a(x^2-y^2),\ a>0.$
[11] $x^3+y^3=a^3.$
[12] $x^2y^2=a^2(y^2-x^2).$
[13] $x^3y^2=a^2y^2+b^2x^2.$
[14] $x^2y^2=a^2(a^2-x^2),\ a>0.$
[15] $x^2y^2=(y+a)^2(b^2-y^2),\ a>0,\ b>0.$
[16] $y^2(x^2-a^2)=x^2(x^2-4a^2),\ a>0.$
[17] $x^4+a^2xy-y^4=0.$
[18] $x^4-3axy^2+2ay^3=0.$
[19] $x^4-a^2xy+b^2y^2=0.$
[20] $x^4+y^4=2ax(x^2-y^2).$
[21] $x^4+y^4-2a^2y^2-2b^2x^2+b^4=0.$
[22] $a(by-x^2)^2=x^5,\ a>0.$
[23] $a^3y^2=b^2x^3-x^5,\ a>0,\ b>0.$
[24] $x^5-ax^2y^2+y^5=0,\ a>0.$

解　　答

(1) n 次ノ曲線ノ方程式ヲ $f_n(x,y)=0$ トスルト是ハ次ノ如ク變形スルコトガ出來ル.

$$(y+m_1x+k_1)(y+m_2x+k_2)\cdots\cdots(y+m_rx+k_r)f_{n-r}(x,y)+F(x,y)=0 \cdots\cdots (1).$$

コヽニ $f_{n-r}(x,y)$ ハ x,y ニツイテ $(n-r)$ 次ノ多項式ニシテ又

$$F(x,y)=f_n(x,y)-(y+m_1x+k_1)(y+m_2x+k_2)\cdots\cdots(y+m_rx+k_r)f_{n-r}(x,y)$$

トスル.

(1) 上ノ任意ノ一點 (x,y) ヨリ一ツノ漸近線 $y+m_1x+k_1=0$ ニ下ス垂線ノ長サヲ l トスルト (1) ヨリ

$$y+m_1x+k_1=\frac{-F(x,y)}{(y+m_2x+k_2)\cdots\cdots(y+m_rx+k_r)f_{n-r}(x,y)}$$

デアルカラ,

$$l=\frac{|y+m_1x+k_1|}{\sqrt{1+m_1^2}}=\frac{|F(x,y)|}{\sqrt{1+m_1^2}\,|(y+m_2x+k_2)\cdots\cdots(y+m_rx+k_r)f_{n-r}(x,y)|}\cdots(2).$$

漸近線ノ定義ニヨリ $x\to\infty,\ y\to\infty$ ノトキ $l\to 0$ デアルカラ

$$\lim\left|\frac{F(x,y)}{\sqrt{1+m_1^2}(y+m_2x+k_2)\cdots\cdots(y+m_rx+)f_{n-r}(x,y)}\right|=0.$$

又 (1) 式ヲ書キ換ヘテ y ヲ x デ表ハシタ式ヲ $y=g(x)$ トスルト, $y=-m_1x-k_1$ ガ一ツノ漸近線デアルカラ $g(x)$ ハ次ノ形デナケレバナラヌ.

$$y=g(x)=-m_1x-k_1+h(x),\qquad \lim_{x\to\infty}h(x)=0.$$

故ニ (2) ヨリ

$$F(x,y)\ \text{ハ}\ \sqrt{1+m_1^2}(y+m_2x+k_2)\cdots\cdots(y+m_rx+k_r)f_{n-r}(x,y)=\phi(x,y)$$

ヨリ低次デナクテハナラナイ. 然ルニ $\phi(x,y)$ ハ $(n-1)$ 次デアルカラ $F(x,y)$ ハ $n-2$

次以下デナクテハナラナイ.

コノコトハ $y+m_2x+k_2=0,\ \cdots\cdots,\ y+m_rx+k_r=0.$ 等ノ何レノ漸近線ニツイテモ同樣ニ成リ立ツ. 卽チ題言ハ眞デアル.

(2) 與ヘラレタ曲線ノ方程式ニ於テ $y=-m_1x-k_1$ トオクト乘積ノ項ハ零トナルカラ

$$f_{n-r}(x,-m_1x-k_1)=0$$

トナル. コレハ x ニツイテ $(n-2)$ 次, 又ハ其レ以下ニシテ卽チ n 次曲線ノ方程式ニ上述ノ代入ヲ行フト少クトモ $x^n,\ x^{n-1}$ ノ係數ハ零トナル. 故ニ $y=-(m_1x+k_1)$ ハ其ノ一ツノ漸近線デアル. $y+m_2x+k_2=0$ ニツイテモ同樣デアル.

若シコレ等 r 個ノ直線ノ中ニ相合スルモノガアルトキハ, 其レハ必ズシモ漸近線デナイ. 何トナレバ $m_1=m_2,\ k_1=k_2$ ニシテ

$$(y+m_1x+k_1)(y+m_2x+k_2)=(y+m_1x+k_1)^2$$

デアルトスルト曲線ノ方程式

$$(y+m_1x+k_1)(y+m_2x+k_2)\cdots\cdots(y+m_rx+k_r)f_{n-r}(x,y)+f_{n-2}(x,y)=0.$$

ニ於テ, $y=m_2x+k_2=m_1x+k_1=0$ デアルカラ

$$y=-m_1x-k_1+\lambda$$

トオイテモ λ ノ如何ニ拘ラズ $x^n,\ x^{n-1}$ ノ係數ハ零トナリ, 從ツテ漸近線ノ方程式ヲ求メル式

$$y=\alpha x+\beta$$

ノ β ハ定マラナイカラデアル. 斯樣ナ場合ニハ尙次ノ x^{n-2} ノ係數ヲ零ナラシメルヤウニ β ヲ定メナクテハナラナイ. 斯樣ナ β ヲ K トスルトコノ場合ノ漸近線ハ

$$y=-m_1x+K$$

ニシテ, 之ハ $y=-m_1x-k_1$ ニ平行ナルモ必ズシモ之ト一致スルモノデハナイ.

$y=m_1x+K_1$ $y=m_2x+K_2,$ $y=m_3x+K_3$ ガ相合スル場合モ同樣デアル. 依ツテ n 次曲線ガ

$$(y+m_1x+k_1)(y+m_2x+k_2)\cdots\cdots(y+m_rx+k_r)f_{n-r}(x,y)+f_{n-2}(x,y)=0$$

ナル形ノトキハ, 其ノ乘積因數ノ項ノ一次因數ノ中單純ナルモノヲ零ニ等シトオクト, 皆其ノ曲線ノ漸近線ノ方程式トナルケレドモ二次以上ノ因數ニツイテハ必ズシモ左樣デナイ.

(3) $x^4-y^4=a^2xy+b^2y^2$ ヲ書キ換ヘルト

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-a^2xy-b^2y^2=0$$

ニシテ $x-y,\ x+y$ ナル一次因數ハ重複シナイカラ之ヲ零トオイテ得ル

$$x-y=0,\qquad x+y=0$$

ハ求メル漸近線デアル.

(4) $(x+y)^2(x+2y)^2=x^2+y^2$ ノ二ツノ因數ハ二乘デアルカラ, 先ヅ其ノ中ノ一ツ $x+y=K$ トオクト, $y=K-x.$

$$\therefore\ \mathrm{K}^2(x+2y)^2=x^2+(\mathrm{K}-x)^2.$$

コレヨリ x^2 ノ係數ハ K^2-2.　$\therefore\ \mathrm{K}=\pm\sqrt{2}$.

故ニ

$$x+y=\pm\sqrt{2}$$

ハ二ツノ漸近線トナル．

次ニ　$x+2y=\mathrm{K}$ トオクト同樣ニシテ x^2 ノ係數ハ $\dfrac{k^2}{4}-\dfrac{5}{4}$.

$$\therefore\ \mathrm{K}=\pm\sqrt{5}.$$

故ニ　$x+2y=\pm\sqrt{5}$ ハ他ノ二ツノ漸近線デアル．

(5)　$f(x,y)=(y-x^2)^2-x^n$　トオクト

$$f_x=-4x(y-x^2)-nx^{n-1},\quad f_y=2(y-x^2).$$

故ニ　$x=0,\ y=0$ ハ其ノ特異點デアル．而シテ

$$f_{xx}=-4(y-3x^2)-n(n-1)x^{n-2},\quad f_{xy}=-4x,\quad f_{yy}=2.$$

故ニ原點ニ於テ

$$f^2{}_{xy}-f_{xx}f_{yy}=0.$$

且ツ原點ニ於テ切線ハ $y^2=0$. 卽チ x 軸デアルカラ原點ハ尖點ナルコトヲ知ル．然ルニ

$$y=x^2(1\pm x^{\frac{n-4}{2}}).$$

故ニ　$n<4$ ナルトキハ原點ノ近傍ニ於テ

$$x^{\frac{n-4}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{4-n}{2}}}>1.$$

從ツテ y ノ二ツノ値ハ異符號ヲ有ス．而シテ n ガ奇數ナルトキハ x ハ負トナルコトガ出來ナイ．

故ニ　n=奇數<4 ナルトキハ原點ハ第一種ノ尖點トナル．次ニ　n=奇數>4 ナルトキハ原點ノ近傍ニ於テ　$x^{\frac{n-4}{2}}<1$ ナルガ故ニ，y ハ同符號ヲ有シ且 n=奇數デアルカラ曲線ハ x 軸ノ正ノ側ニノミアル．從ツテ此ノ場合ニハ第二種ノ尖點トナル．

n ガ偶數ナルトキハ曲線ハ y 軸ニ關シ對稱トナルカラ原點ハ常ニ二重ノ尖點トナル．

(6)　$f(x,y)=a^2y^2-2bx^2y-x^5$.

$$f_x=-4bxy-5x^4.\qquad f_y=2a^2y-2bx^2.$$

$$f_{xx}=-4by-20x^3.\qquad f_{xy}=-4bx.\qquad f_{yy}=2a^2.$$

故ニ原點 $(0,0)$ ハ f_x, f_y ヲ 0 ナラシメ，且ツ

$$f^2{}_{xy}-f_{xx}f_{yy}=0$$

ナラシメル．從ツテ原點ハ尖點又ハ自切點ニシテ，且ツ其ノ切線ハ $y^2=0$ デアル．而シテ與ヘラレタ方程式ヲ y ニツイテ解クト

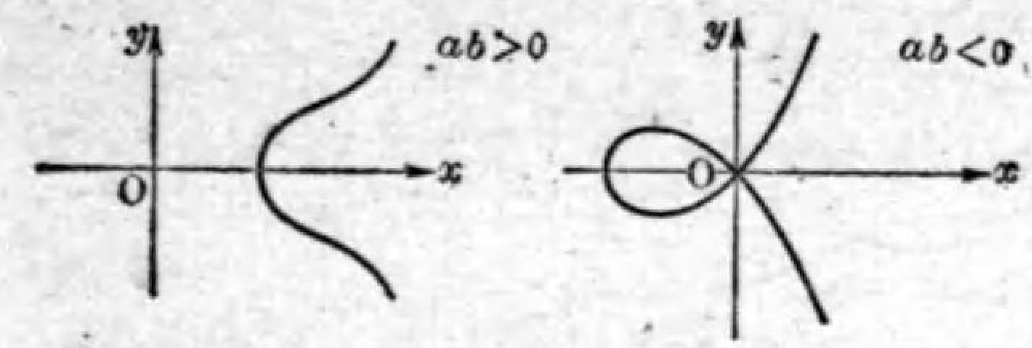
$$y=\frac{x^2}{a^2}(b\pm\sqrt{b^2+a^2x}).$$

故ニ　$x\geqq-\dfrac{b^2}{a^2}$ ナルトキ y ハ實數値ヲトル．從ツテ曲線ハ原點ノ兩側ニアルカラ原點ハ自切點デアル．

(7)　$f(x,y)=x^3-bx^2-ay^2$　トオクト

$$f_x=3x^2-2bx,\qquad f_y=-2ay.$$

故ニ　$x=0,\ y=0$ ハ特異點デアル．而シテ



$$f_{xx}=6x-2b.$$
$$f_{xy}=0.$$
$$f_{yy}=-2a.$$

故ニ原點ニ於テ

$$f_{xy}{}^2-f_{xx}f_{yy}=-4ab.$$

故ニ　$ab>0$ ナルトキ原點ハ孤立點

　　$ab<0$ ナルトキ原點ハ結節點デアル．

(8)　$F(x,y)=\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}-1$　トオクト $F(x,y)$ ハ x, y ノ有理函數デナイカラ，特異點ヲ決定スルタメニ今迄述ベタ方法ヲ適用スルコトガ出來ナイ．故ニ先ヅ與式ヲ有理化スル必要ガアル．之ガタメ移項シテ兩邊ヲ三乘シテ後移項シテ再ビ三乘スルト，

$$27\frac{x^2y^2}{a^2b^2}=\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^3.$$

コヽニ於テ

$$f(x,y)=\frac{27x^2y^2}{a^2b^2}-\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^3=0$$

トシテ，

$$f_x=\frac{6x}{a^2}\left\{\frac{9}{b^2}y^2+\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\right\}=0.$$

$$f_y=\frac{6y}{b^2}\left\{\frac{9}{a^2}x^2+\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\right\}=0.$$

之ヨリ

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=\pm b\end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l}x=\pm a\\ y=0\end{array}\right\}.$$

$$f_{xx}=\frac{6}{a^2}\left\{\frac{9}{b^2}y^2+\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\right\}+\frac{6x}{a^2}\left\{\frac{-4x}{a^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right\}.$$

$$f_{xy}=\frac{6x}{a^2}\left\{\frac{18}{b^2}y+2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\left(-\frac{2y}{b^2}\right)\right\}.$$

$$f_{yy}=\frac{6}{b^2}\left\{\frac{9}{a^2}x^2+\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\right\}+\frac{6y}{b^2}\left\{\frac{-4y}{a^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right\}.$$

$\therefore$　$(a,0)$ ニ於テ

$$f_{xx}=0,\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=\text{有限値}.$$

$$\therefore\ f^2{}_{xy}-f_{xx}f_{yy}=0$$

トナリ，且ツ曲線ハ $(a,0)$ ニ於テ

$$\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{b^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

ナル故，x 軸ニ切シ x 軸ニ關シテ對稱デアル．即チ $(a,0)$ ハ第一種ノ尖點デアル．他ノ點ニ於テモ同樣ニ第一種ノ尖點デアル．

(9) $u_r(x,y)$ ヲ以テ x, y ニツイテ r 次ノ同次式ヲ表ハスモノトスルト，原點ヲ過ル代數曲線ノ方程式ハ次ノ如ク表ハサレル．

$$f(x,y)=u_r+u_{r+1}+u_{r+2}+\cdots\cdots=0.\ \text{但シ}\ r\geqq1\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

曲線上ノ點 (x_1, y_1) ト原點トヲ過ル直線ノ方程式ヲ

$$y=mx\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トスルト (x_1, y_1) ハ (1), (2) ヲ滿足スルカラ

$$f(x_1, y_1)=u_r(x_1, y_1)+u_{r+1}(x_1, y_1)+\cdots\cdots\cdots=0.$$

$$y_1=mx_1.$$

コノ二式ヨリ y_1 ヲ消去スルト

$$f(x_1, mx_1)=u_r(x_1, mx_1)+u_{r+1}(x_1, mx_1)+\cdots\cdots\cdots=0.$$

然ルニ $u_r(x,y)$ ハ r 次ノ同次式デアルカラ

$$u_r(x_1, mx_1)=x_1{}^r\cdot u_r(1,m).$$

$$\therefore\ x_1{}^r u_r(1,m)+x_1{}^{r+1}u_{r+1}(1,m)+\cdots\cdots=0.$$

(x_1, y_1) ハ原點以外ノ點ナル故　$x_1\neq0$

$$\therefore\ u_r(1,m)+x_1u_{r+1}(1,m)+x_1{}^2u_{r+2}(1,m)+\cdots\cdots=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

コヽニ於テ (x_1y_1) ヲ曲線ニ沿フテ原點ニ近ヅケルトキソノ極限ニ於テ (2) ハ (1) ノ原點ニ於ケル切線トナル．而シテ其ノトキ (3) ハ

$$u_r(1,m)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

トナルカラ，結局 m ガ (4) ヲ滿足スルトキ (2) ハ (1) ノ切線トナル．即チ (4) ヨリ定マル m ノ r 個ノ値ヲ (2) ニ代入スルト原點ニ於ケル r 個ノ切線ヲ得ル．從ツテ (2), (4) ヨリ m ヲ消去スルト，求メル切線ノ方程式ヲ得ル．而シテ (2), (4) ヨリ m ヲ消去スルト

$$u_r\left(1, \frac{y}{x}\right)=0,\quad \text{又ハ}\quad u_r(x,y)=0.$$

即チ原點ヲ過ル代數曲線ノ原點ニ於ケル切線ノ方程式ハ，其ノ最低次ノ項ヲ 0 ニ等シ

ト置イテ得ラレル．而シテ $r>1$ ナルトキハ切線ハ二個以上アツテ原點ハ曲線上ノ重複點トナル．

(i) $y^2=x^2(1-x^2)$ ヲ書キ換ヘテ $y^2-x^2+x^4=0.$

最低次ノ項ヲ 0 トオクト，$y^2-x^2=0.$　$\therefore\ y=x,\ y=-x$ トナリ，異ナル二ツノ切線ヲ有スルカラ原點ハ結節點デアル．

(ii) $y^2-x^3+2x^2=0$　最低次ノ項ヲ 0 ニ等シトオクト

$y^2+2x^2=0$ トナル．即チ切線ヲ一ツモ有シナイカラ原點ハ孤立點デアル．

(iii) $(y-x^2)^2=x^3$　ヨリ最低次ノ項ヲ 0 ニ等シトオクト

$y^2=0$ トナリ相合スル二ツノ切線 $y=0$ ヲ有スル．故ニ原點ハ尖點デアル．

(10) 尖點ヲ原點トシ其ノ切線ヲ x 軸トスル直角座標ヲトルト，二次曲線ノ方程式ハ $y^2=0$ ナル形ヲトル．何トナレバ原點ニ於テ相合スル切線ハ x 軸即チ $y^2=0$ デアルカラ，コノ曲線ノ方程式ノ最低次ノ項ガ y^2 ニシテ，且ツ二次曲線デアルカラ二次以上ノ項ヲ有シ得ナイカラデアル．即チ尖點ヲ有スル二次曲線ハ相合スル二直線ニシテ，從ツテ第二種ノ尖點ヲ有スルコトガ出來ナイノデアル．

次ニ上ト同ジ座標軸ヲトルト三次曲線ノ方程式ハ

$$y^2=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$$

トナル．何トナレバ原點ニ於ケル切線ノ方程式ハ $y^2=0$ デアルカラ，最低次ノ項ガ y^2 デナケレバナラナイカラデアル．

而シテ $y^2=0$ ヲ切線トスル原點附近ニ於ケル分岐ハ

$$y^2=ax^3$$

ニテ與ヘラレル．何トナレバ y^2 ト x^3 トガ同位ナルトキハ，其ノ他ノ項ハ之ヨリ高位トナリ略シ得ルカラデアル．然ルトキハ $y=\pm x\sqrt{ax}$ トナリ，此ノ二ツノ分岐ハ切線 $y^2=0$ ノ兩側ニアル．即チ原點ハ常ニ第一種ノ尖點ニシテ第二種トハナラナイ．即チ三次曲線ハ第二種ノ尖點ヲ有シ得ナイ．此ノ際 $y^2=bx^2y$ ナル分岐モ考ヘラレルガ之ハ尖點ヲ與ヘナイ．

(11) 與ヘラレタル方程式ヨリ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{3x+a-4b}{(x-b)^{\frac{3}{2}}}.$$

故ニ此ノ曲線ガ變曲點ヲ有スルナラバ其ノ點ノ座標ハ

$$x=\frac{4b-a}{3}.$$

之ヲ原方程式ニ代入シテ

$$y=\pm(x-a)\sqrt{x-b}=\pm\frac{4}{3\sqrt{3}}\sqrt{(b-a)^3}.$$

然ルニ　$f(x,y)=y^2-(x-a)^2(x-b)$　トスルト

$f_x=-(x-a)(3x-a-2b),\quad f_y=2y.$

$f_{xx}=-6x+4a+2b,\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=2.$

故＝此ノ曲線ガ結節點ヲ有スルナラバ，其ノ座標ハ $(a,0)$ ＝シテ且ツ其ノ點＝於テ

$$f^2_{xy}-f_{xx}f_{yy}=4(3x-2a-b)>0$$

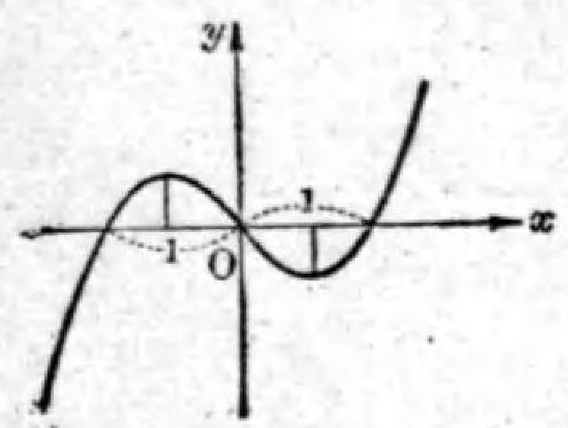
デナケレバナラナイ．即チ

$$4(a-b)>0$$

デナケレバナラナイ．然ルトキハ變曲點ノ座標ハ虚數トナル故＝結節點ヲ有スルナラバ變曲點ハ存在シナイ．

若シコノ曲線ガ孤立點ヲ有スルナラバ其ノ座標ハ $(a,0)$ ＝シテ且ツ $(a-b)<0$ デアル．故＝變曲點ノ座標ハ二ツトモ實數トナル．即チ此ノ曲線ガ孤立點ヲ有スルナラバ變曲點ハ必ズ二ツ存在スル．

(12) 【1】 $\boldsymbol{y=x(x^2-1)}$　$y=0$ ナルトキ $x=-1,\ x=0,\ x=1.$

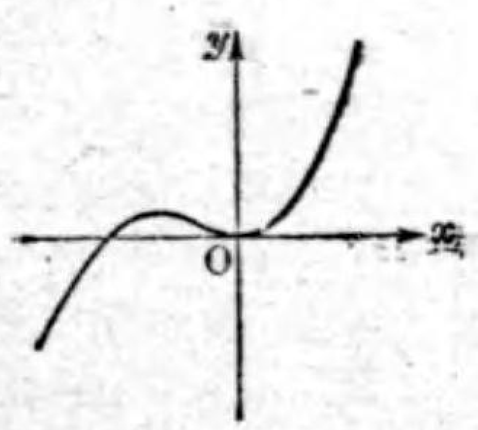


x ノ符號ヲ變ヘルト y ノ符號ハ變ルケレドモ其ノ絕對値＝ハ變化ガナイ．即チ $(x,\ y)$ ガ曲線上ノ點ナルトキ $(-x,\ -y)$ モ亦曲線上ノ點デアルカラ曲線ハ原點＝關シテ對稱デアル．

$\dfrac{dy}{dx}=3x^2-1=0$ ヨリ $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ハ極値ヲ與ヘル．

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=6x.$ 故＝ $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ナルトキ極小値 $\dfrac{-2}{3\sqrt{3}}$，$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ナルトキ極大値 $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}.$

【2】 $\boldsymbol{y=x^2+x^3}$　$y=0$ ナルトキ $x=0.$ $x=-1.$

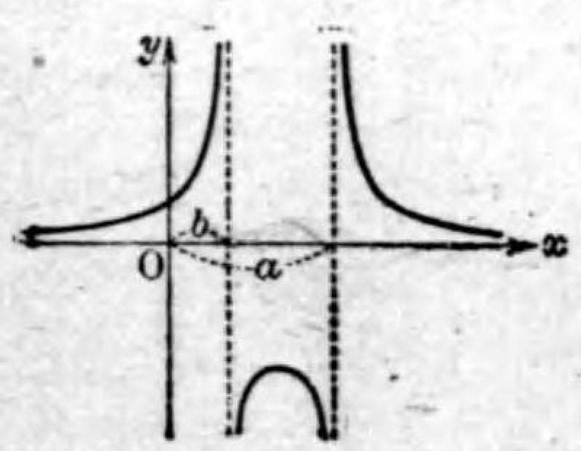


原點附近＝於ケル曲線ノ形ハ $y=x^2.$

原點＝於ケル切線ハ $y=0.$

$\dfrac{dy}{dx}=2x+3x^2=0$ ヨリ $x=0$，$x=-\dfrac{2}{3}$ ハ極値ヲ與ヘル．

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=2+6x.$ 故＝ $x=0$ ナルトキ極小値 0 又 $x=-\dfrac{2}{3}$ ナルトキ極大値 $\dfrac{4}{27}.$



【3】 $\boldsymbol{y(x-a)(x-b)=c^3}$　$\boldsymbol{a>b>0}$ **トス．**

漸近線ハ　$x=a,\ x=b,\ y=0.$

$x>a$ 又ハ $x<b$ ナルトキ $y>0.$

$a>x>b$ ナルトキ $y<0.$

$x=\dfrac{a+b}{2}$ ＝關シテ曲線ハ對稱．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-c^3(2x-a-b)}{(x-a)^2(x-b)^2}=0 \text{ ヨリ}$$

$x=\dfrac{a+b}{2}$ ナルトキ極値ヲトル．

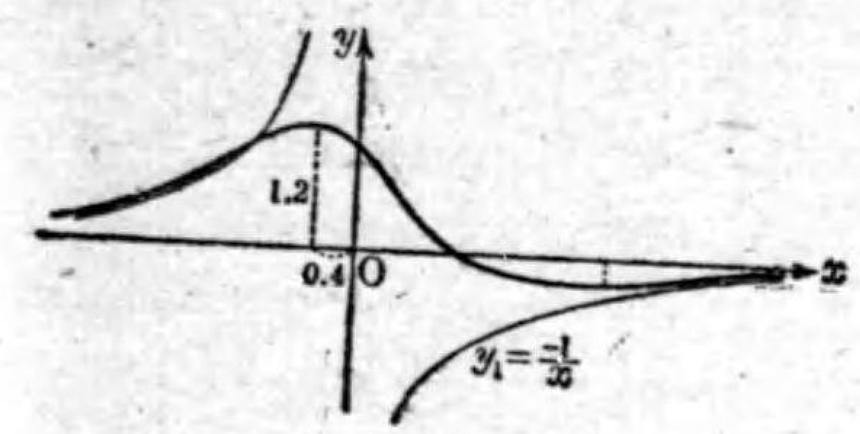
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2c^3\{(x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2\}}{(x-a)^3(x-b)^3}.$$

故＝　$x=\dfrac{a+b}{2}$ ナルトキ極大＝シテソノ値ハ $\dfrac{-4c^3}{(a-b)^2}.$

$x>a$ 及ビ $x<b$ ノトキ $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0.$　故＝上＝凹．

$b<x<a$ ノトキ $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ ＝シテ上＝凸デアル．

【4】 $\boldsymbol{y(1+x^2)=1-x.}$　軸トノ交點 $(0,1)$，$(1,0).$



$y>0$ ナルトキ $x<1,$

$y<0$ ナルトキ $x>1.$

$yx^2+x+y-1=0$ ノ判別式ヨリ

$1-4y(y-1)\geqq 0.$

$4y^2-4y-1\leqq 0.$

$$\therefore\ \frac{1-\sqrt{2}}{2}\leqq y\leqq\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

漸近線ハ $y=0$，漸近曲線ハ　$y=\dfrac{1-x}{1+x^2}=\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}+x}$ ヨリ　$y_1=\dfrac{-1}{x}.$

漸近曲線ト原曲線トノ交點ハ $(-1,1).$

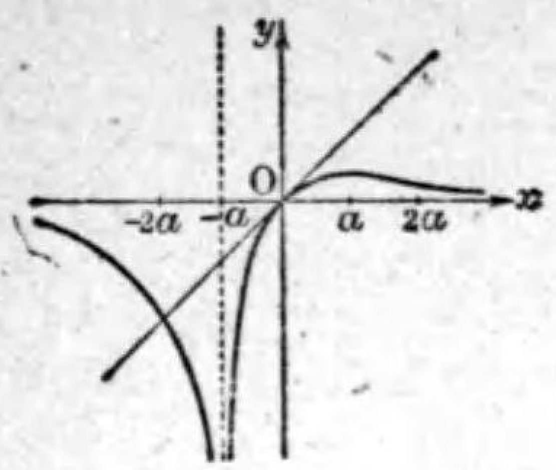
$x>0$ ナルトキハ $y>y_1$，$x<-1$ ナルトキ $y>y_1.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}=\frac{\{x-(\sqrt{2}+1)\}\{x+(\sqrt{2}-1)\}}{(x^2+1)^2}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3}=-2\frac{(x+1)\{x-(\sqrt{3}+2)\}\{x+(\sqrt{3}-2)\}}{(x^2+1)^3}.$$

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		0		$2-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{2}$		$2+\sqrt{3}$		∞
y	0		1		$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$		1		$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$		0		$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1-\sqrt{3}}{4}$		0
$\frac{dy}{dx}$	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+
$\frac{d^2y}{dx^2}$	+	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	0	−	−

［5］ $y(x+a)^2=a^2x$, $a>0$ トス. $(0,0)$ ハ曲線上ニアル. x, y ハ必ズ同符號デナケレバナラナイカラ曲線ハ第一, 第三象限ニ限ル.



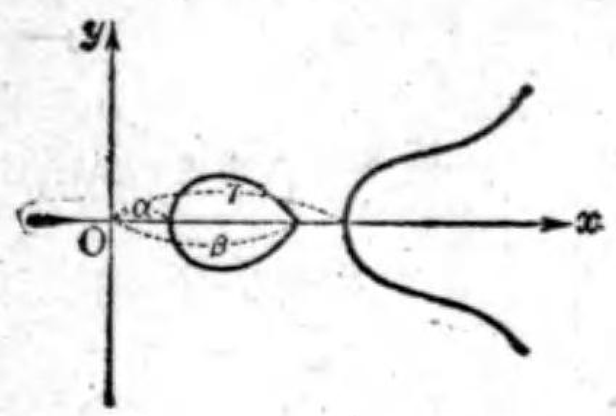
漸近線ハ $x=-a$, $y=0$.

$$y=\frac{a^2x}{(x+a)^2},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{a^2(a-x)}{(x+a)^3}=0$$

ヨリ $x=a$ ニ於テ極値ヲトル. 此ノトキ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-2a^2\dfrac{2a-x}{(x+a)^4}<0$ ナル故

極大値 $\dfrac{a}{4}$.

［6］ $y^2=ax^3+bx^2+cx+d$. 曲線ハ x 軸ニ關シテ對稱デアル故 $y>0$ ナル場合ノミヲ考ヘル.



$$y^2=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

トオクト, 軸トノ交點ハ

$$(\alpha,0),\quad (\beta,0),\quad (\gamma,0)$$

$2y\dfrac{dy}{dx}=3ax^2+2bx+c$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx}=0$ ナラシメル x ノ値ハ $3ax^2+2bx+c=0$ ノ根ニシテ, 之ハ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ノ根ノ間ニアル. 之ヲ m, n トスルト

$$\alpha<m<\beta<n<\gamma \text{ トナル.}$$

x	……	α	……m……	β	……	n	……	γ	……∞
y		0	————	0				0	……∞
$\dfrac{dy}{dx}$		∞	……+……0……−……	$-\infty$				∞	……+……

重複點ハ存在シナイ. $y=\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}}\left(1+\dfrac{b}{ax}+\dfrac{c}{ax^2}+\dfrac{d}{ax^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ヨリ

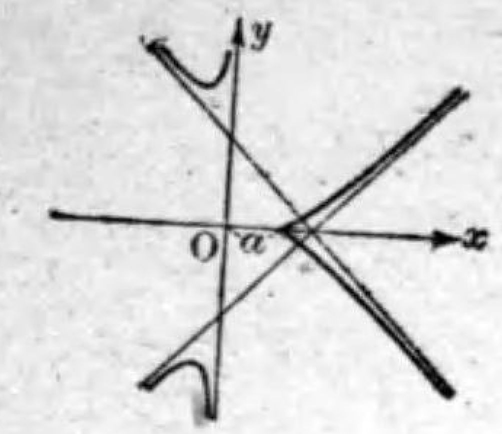
$$y=\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{ax}+\frac{c}{ax^2}+\frac{d}{ax^3}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{b}{ax}+\frac{c}{ax^2}+\frac{d}{ax^3}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$
$$=\sqrt{ax}\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{c}{2ax}+\cdots\cdots\right\}.$$

故ニ x ガ充分大ナルトキ漸近曲線ハ $y=\sqrt{ax}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$. 卽チ, $y^2=ax\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ デアル. 之ハ問題 7 ノ曲線ト同ジ曲線ニシテ x ガ大ナル値ヲトルトキ上ニ向ツテ凹トナル. 從ツテ原曲線モ亦充分大ナル x ノ値ニ對シテ上方ニ凹デアル.

$\alpha=\gamma$ ナル場合ハ $y^2=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ トナリ問題 11 ノ曲線トナル.

$\alpha=\beta=\gamma$ ナルトキハ $y^2=a(x-\alpha)^3$ トナル.

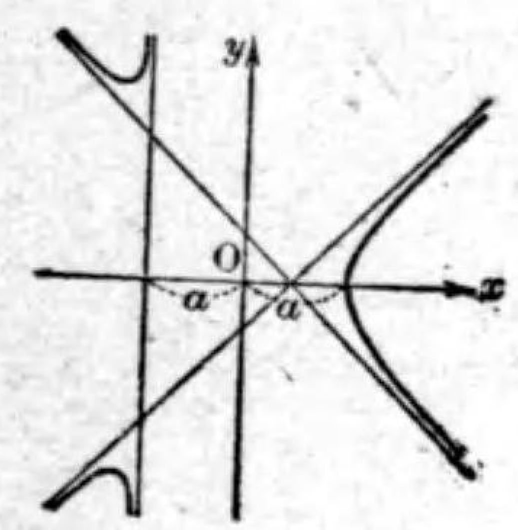
［7］ $y^2x=(x-a)^3$. 曲線ハ $0<x<a$ ナル範圍ニハ存在シナイ. 而シテ x 軸ニ關シテ對稱デアル. 原方程式ハ次ノ如ク書カレル.



$$y=\pm\left(x-\frac{3a}{2}+\frac{3a^2}{8x}-\cdots\cdots\right).$$

故ニ漸近線ハ $y=x-\dfrac{3a}{2}$, $y=-x+\dfrac{3a}{2}$ ニシテ第一象限ニアリテハ曲線ハ第一漸近線ノ上方ニアリ, 又第四象限ニアリテハ曲線ハ第二漸近線ノ下方ニアル. 原點ヲ $x=a$ ニ移セバ $(x-a)y^2=x^3$ トナリ最低次ノ項ハ $-ay^2=0$ ナルヲ以テ $y=0$ ハ切線ニシテ新原點ハ第一種ノ尖點デアル. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ ナラシメル點ガナイカラ變曲點ハ存在シナイ.

［8］ $y^2(x+a)=x^3-a^3$. 曲線ハ x 軸ニ關シテ對稱ニシテ軸トノ交點ハ $(a,0)$ デアル. 與式ヨリ $x>0$ ナルトキ $x>a$, $x<0$ ナルトキ $x<-a$ デアル. 漸近線ハ $x=-a$ デアル.



$$y^2=(x^3-a^3)(x+a)^{-1}$$
$$=\left(x^2-\frac{a^3}{x}\right)\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-1}$$
$$=\left(x^2-\frac{a^3}{x}\right)\left(1-\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}-\cdots\cdots\right)$$
$$=x^2-ax+a^2-\frac{a^3}{x}\cdots\cdots.$$

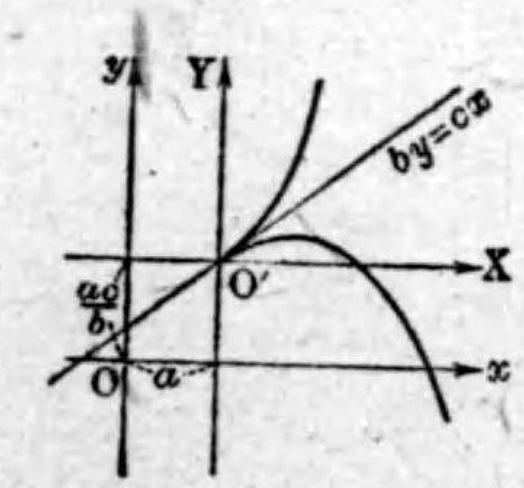
故ニ漸近曲線ハ $y^2=x^2-ax+a^2$ トナリ双曲線デアル.

從ツテ漸近線ハ此ノ双曲線

$$y^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2$$

ノ漸近線 $y=\pm\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$ ト一致スル.

［9］ $(by-cx)^2=a(x-a)^3$. $x=X+a$, $y=Y+\dfrac{ac}{b}$ ニ原點ヲ移スト原方程式ハ



$$(bY-cX)^2=X^3 \text{ トナル.}$$

故ニ此ノ曲線ヲ追跡スル. 軸トノ交點 $(0,0)$, $(c^2,0)$. $(bY-cX)^2\geqq 0$ デアルカラ $X\geqq 0$. 卽チ曲線ハ X ノ正方向ノミニアル.

曲線ハ $(bY-cX)^2=X^3$ ヨリ

$Y=\dfrac{X}{b}(c+\sqrt{X})$, $Y=\dfrac{X}{b}(c-\sqrt{X})$ ナル二ツノ分枝ヨリナル.

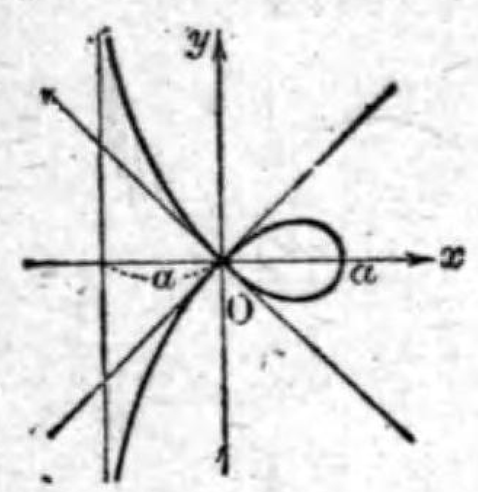
$Y=\dfrac{X}{b}(c+\sqrt{X})$ ニツイテ $Y'=\dfrac{1}{b}\left(c+\dfrac{3}{2}\sqrt{X}\right)$, $Y''=\dfrac{3}{4b}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{X}}$ デアルカラ此ノ

分枝ハ上方ニ凹ニシテ極値ヲ有セズ.

$Y=\frac{X}{b}(c-\sqrt{X})$ ニツイテ, $Y'=\frac{1}{b}(c-\frac{3}{2}\sqrt{X})$, $Y''=-\frac{3}{4b}\frac{1}{\sqrt{X}}$ デアルカラ此ノ分枝ハ上方ニ凸ニシテ $x=\frac{4}{9}c^2$ ニ於テ Y ハ極大値ヲ取ル.

[10] $(x^2+y^2)x=a(x^2-y^2)$, $a>0$. 曲線ハ x 軸ニ關シテ對稱ニシテ軸トノ交點ハ $(0,0)$, $(a,0)$ デアル. 與式ヨリ

$$y^2=\frac{x^2(a-x)}{a+x}. \quad \therefore \quad -a<x\leqq a.$$



$x=-a$ ハ漸近線デアル.

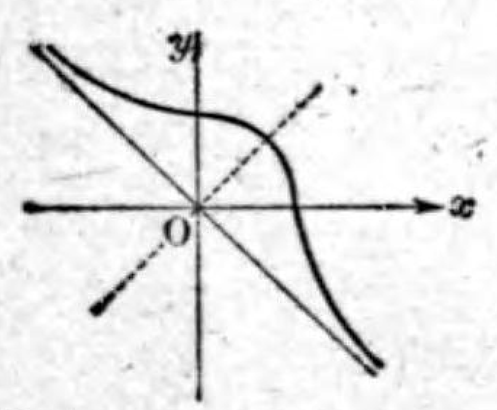
$$f(x,y)=y^2(x+a)+x^3-ax^2=0 \text{ ヨリ}$$
$$f_x=3x^2-2ax+y^2=0,$$
$$f_y=2y(x+a)=0.$$

之ヲ解イテ $x=y=0$.

$$f_{xx}=6x-2a, \quad f_{xy}=2y, \quad f_{yy}=2(x+a).$$
$$\{f_{xy}(0,0)\}^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)=4a^2>0.$$

故ニ原點ハ結節點ニシテ切線ハ $y^2=x^2$ デアル.

[11] $x^3+y^3=a^3$, $a>0$. x ト y トヲ交換スルモ與式ハ變ラナイカラ $x=y$ ニ關シテ對稱デアル. 軸トノ交點ハ $(0,a)$, $(a,0)$. 漸近線ハ $x+y=0$.



$$y=\sqrt[3]{a^3-x^3}. \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-x^2}{\sqrt[3]{(a^3-x^3)^2}}.$$

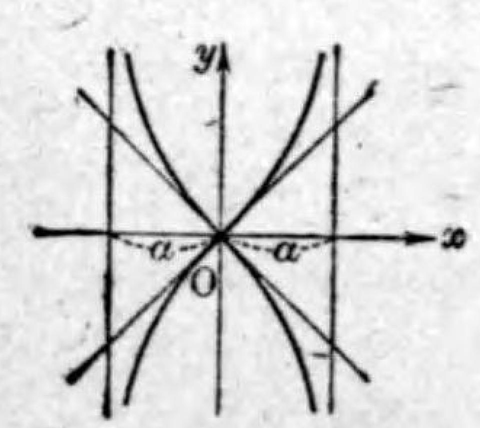
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2a^3x}{\sqrt[3]{(a^3-x^3)^5}}.$$

$\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ナラシメル x ノ値ハ 0, 故ニ $(0,a)$ ハ變曲點. 從ツテ $(a,0)$ モ亦變曲點デアル.

[12] $x^2y^2=a^2(y^2-x^2)$. x 軸, y 軸ニ關シテ對稱, 軸トノ交點ハ $(0,0)$.

$$a^2(y^2-x^2)=x^2y^2\geqq 0 \quad \therefore \quad y^2\geqq x^2.$$

又 $y^2=\frac{a^2x^2}{a^2-x^2}\geqq 0$, $\therefore$ $x^2<a^2$. 故ニ曲線ハ $x=\pm a$ ノ間ニアツテ且 $y=\pm x$ ノ間ニシテ y 軸ヲ含ム所ニアル. 原式ヲ書キ換ヘテ



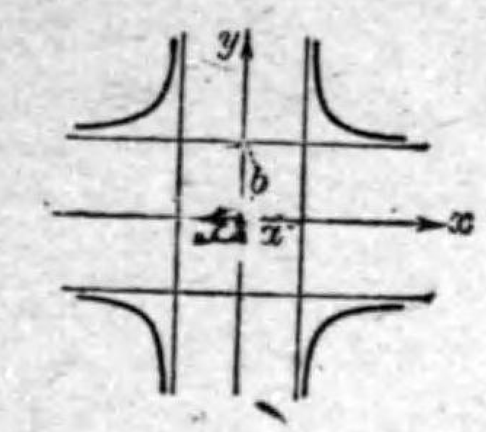
$$(a^2-x^2)y^2-a^2x^2=0 \quad \text{即チ漸近線ハ } x=\pm a.$$
$$f(x,y)=x^2y^2-a^2(y^2-x^2)=0 \text{ トオクト}$$
$$f_x=2xy^2+2a^2x=0, \quad f_y=2x^2y-2a^2y=0,$$
$$\therefore \quad x=y=0.$$
$$f_{xx}=2y^2+2a^2, \quad f_{xy}=4xy, \quad f_{yy}=2x^2-2a^2.$$
$$f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}=4a^4>0.$$

故ニ原點ハ結節點ニシテ $y=\pm x$ ハ原點ニ於ケル切線.

$$y^2=\frac{a^2x^2}{a^2-x^2} \text{ ヨリ } yy'=\frac{a^4x}{(a^2-x^2)^2}, \quad yy''=\frac{3a^4x^2}{(a^2-x^2)^3}.$$

第一象限ニテハ $x>0$, $y>0$ デアルカラ $y'>0$, $y''>0$. 即チ曲線ハ常ニ上方ニ凹ニシテ且常ニ増加ノ狀態ニアル.

[13] $x^2y^2=a^2y^2+b^2x^2$. 曲線ハ x 軸, y 軸ニ關シテ對稱, 原式ヨリ



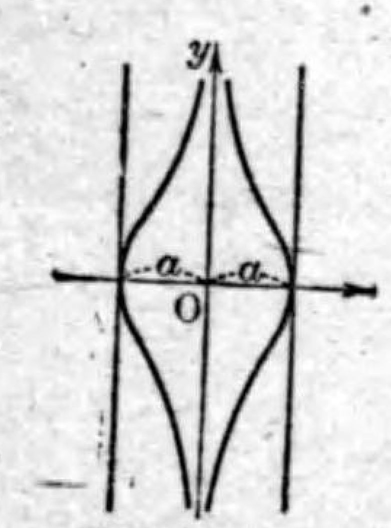
$$(x^2-a^2)y^2=b^2x^2, \quad (y^2-b^2)x^2=a^2y^2.$$

故ニ $x=\pm a$, $y=\pm b$ ハ漸近線ニシテ此等ノ漸近線ノ間ニ曲線ハ存在シナイ. 原點ハ孤立點.

$$y^2=\frac{b^2x^2}{x^2-a^2}, \quad yy'=\frac{-a^2b^2x}{(x^2-a^2)^2}.$$
$$yy''=\frac{3a^2b^2x^2}{(x^2-a^2)^2}.$$

曲線ハ兩軸ニ關シテ對稱ナル故第一象限ニ於テ $x>0$, $y>0$, $y'<0$, $y''>0$. 即チ曲線ハ常ニ上方ニ向ツテ凹ニシテ減少ノ狀態ニアル.

[14] $x^2y^2=a^2(a^2-x^2)$, $a>0$. 曲線ハ x 軸, y 軸ニ關シテ對稱ニシテ $(\pm a,0)$ ヲ通ル.



$a^2(a^2-x^2)=x^2y^2\geqq 0$ ナル故 $x^2<a^2$. 即チ曲線ハ二直線 $x=\pm a$ ノ間ニアル. 漸近線ハ $x=0$ 即チ y 軸デアル.

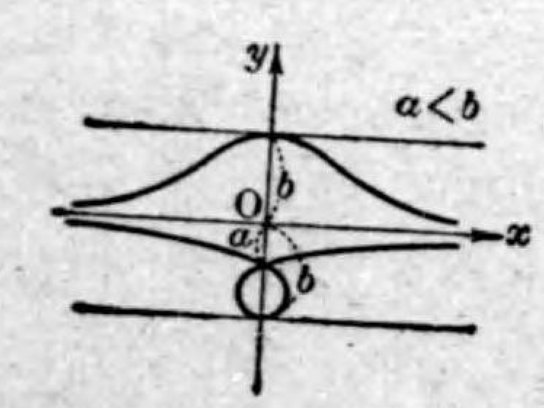
$$y^2=a^2\frac{a^2-x^2}{x^2}, \quad yy'=-\frac{a^3}{x^3}, \quad yy''=a^4\frac{2a^2-3x^2}{x^4(a^2-x^2)}.$$

第一象限ニ於テ $x>0$, $y>0$, $y'<0$.

$0<x<\sqrt{\frac{2}{3}}a$ ナルトキ $y''>0$. 故ニ上方ニ凹.

$x=\sqrt{\frac{2}{3}}a$ ナルトキ $y''=0$ 即チ變曲點. $\sqrt{\frac{2}{3}}a<x<a$ ナルトキ $y''<0$ 即チ上方ニ凸デアル.

[15] $x^2y^2=(y+a)^2(b^2-y^2)$, $a>0$, $b>0$. 曲線ハ y 軸ニ關シテ對稱. 軸トノ交點 $(0,-a)$, $(0,\pm b)$.



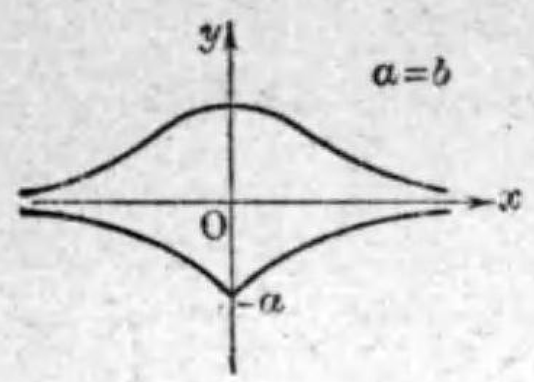
$$x^2y^2\geqq 0, \quad (y+a)^2>0. \quad \therefore \quad b^2>y^2.$$

即チ曲線ハ $y=\pm b$ ノ間ニアル.

漸近線ハ $y=0$

$$f(x,y)=x^2y^2-(y+a)^2(b^2-y^2)=0 \text{ トオクト}$$
$$f_x=2xy^2=0,$$
$$f_y=2x^2y+2y(y+a)^2-2(y+a)(b^2-y^2)=0.$$

ヨリ, $x=0$, $y=-a$.



$f_{xx}=2y^2,\quad f_{xy}=4xy.$

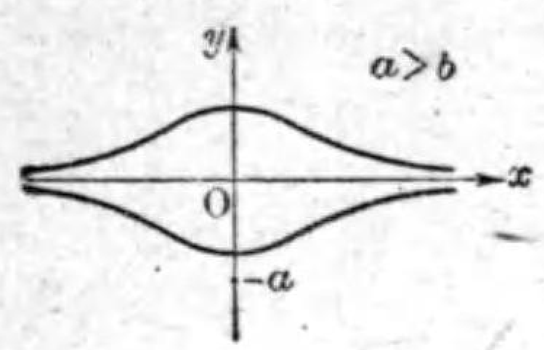
$f_{yy}=2x^2+2(y+a)^2+8y(y+a)-2(b^2-y^2).$

$f_{xy}{}^2-f_{xx}f_{yy}=-4a^2(a^2-b^2).$

故＝ $(0,-a)$ ハ $a<b$ ナルトキ結節點.

$a>b$ ナルトキ孤立點.

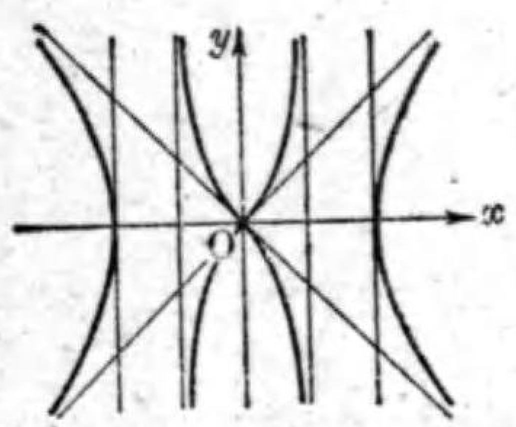
$a=b$ ナルトキ曲線ハ



$y=\pm a$ ノ間＝アツテ且 y 軸＝關シテ對稱ナル故第一種ノ尖點デアル.

[16] $\boldsymbol{y^2(x^2-a^2)=x^2(x^2-4a^2),\ a>0.}$ 曲線ハ兩軸＝關シテ對稱＝シテ $(0,0)$, $(\pm 2a,0)$ ヲ通ル. 原式ヨリ $(x^2-a^2)(x^2-4a^2)>0$. 卽チ曲線ハ $x=-2a$, $x=-a$; $x=a$, $x=2a$ ノ間＝ハ存在シナイ. 漸近線ハ

$x=\pm a,\quad y=\pm x$ デアル.



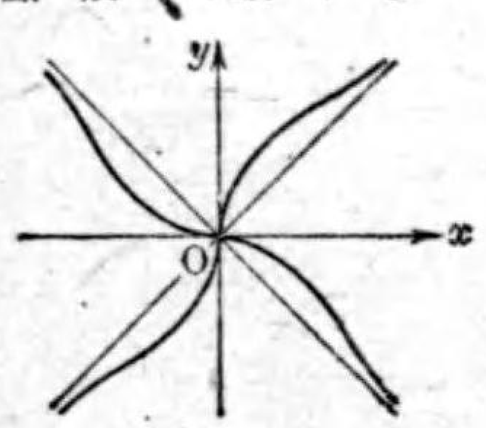
$$f(x,y)=y^2(x^2-a^2)-x^2(x^2-4a^2)=0$$

トオクト, $f^2_{xy}-f_{xx}f_{yy}=16a^4>0.$

故＝原點ハ結節點＝シテ切線ハ

$$y=\pm 2x.$$

[17] $\boldsymbol{x^4+a^2xy-y^4=0.}$ 曲線ハ x, y ヲ入レカヘテモ變ラヌカラ原點＝關シ對稱. 原點＝於ケル切線ハ, $xy=0$, 卽チ x 軸, y 軸デアル. 次＝原點附近ノ形狀ヲ見ル＝



$x^4+a^2xy=0$ ヨリ $y=\dfrac{-x^3}{a^2}.$

$a^2xy-y^4=0$ ヨリ $x=\dfrac{y^3}{a^2}.$

$f(x,y)=x^4+a^2xy-y^4=0,\quad f_x=4x^3+a^2y.$

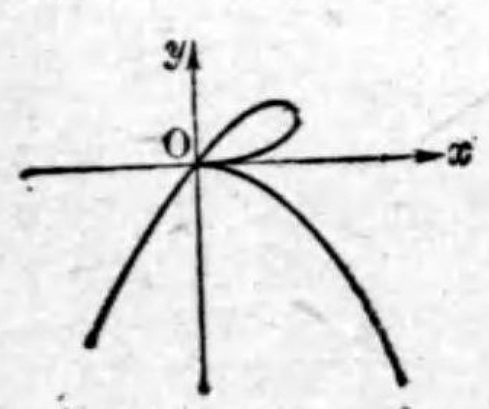
$f_y=a^2x-4y^3,\quad f_{xx}=12x^2,\quad f_{xy}=a^2,$

$f_{yy}=-12y^2.$

$f^2_{xy}-f_{xx}f_{yy}=a^4>0$. 卽チ原點ハ結節點.

漸近線 $y=x,\quad y=-x.$

[18] $\boldsymbol{x^4-3axy^2+2ay^3=0,\qquad a>0.}$



$f(x,y)=x^4-3axy^2+2ay^3.$

$f_x=4x^3-3ay^2,\quad f_y=-6axy+6ay^2.$

$f_{xx}=12x^2,\quad f_{xy}=-6ay,\quad f_{yy}=-6ax+12ay.$

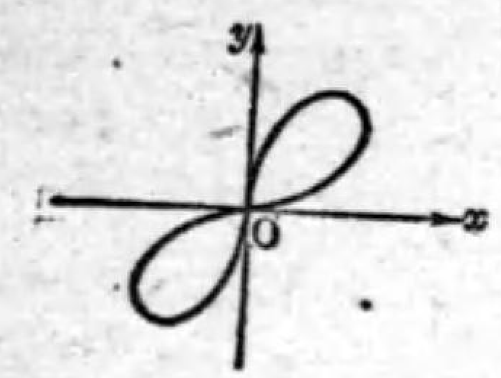
$f_{xxx}=24x,\quad f_{xxy}=0,\quad f_{xyy}=-6a,\quad f_{yyy}=12a.$

故＝原點ハ三重點＝シテ切線ハ

$-3axy^2+2ay^3=0$ ヨリ $y^2=0$, 及ビ $3x=2y.$

之ハ又原點附近ノ分枝ヲ表ハス. $x^4-3axy^2=0$ ヨリ原點附近＝於ケル曲線ハ $y^2=\dfrac{x^3}{3a}.$ 故＝原點＝於テ第一種ノ尖點ヲ有ス.

[19] $\boldsymbol{x^4-a^2xy+b^2y^2=0.}$ (x,y) ガ曲線上ノ點ナラバ, $(-x,-y)$ モ亦曲線上ノ點デアル. 故＝第一象限ト第三象限トハ原點＝關シテ對稱デアル.



$x^4+b^2y^2=a^2xy>0$. 故＝第二, 第四象限＝曲線ハ存在シナイ.

$f(x,y)=x^4-a^2xy+b^2y^2=0.$

$f_x=4x^3-a^2y,\quad f_y=-a^2x+2b^2y,\quad f_{xx}=12x^2.$

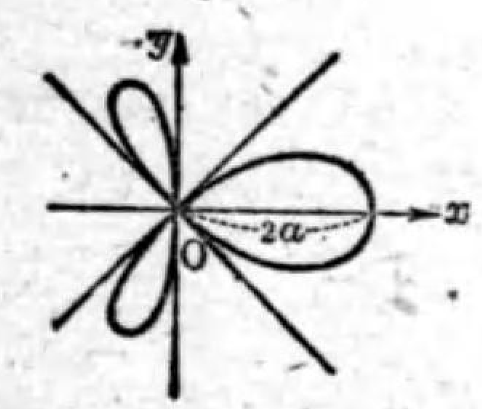
$f_{xy}=-a^2,\quad f_{yy}=2b^2.\qquad \therefore\ f^2_{xy}-f_{xx}f_{yy}=a^4>0.$

故＝原點ハ結節點デアル. 原點附近＝於テハ

$x^4-a^2xy=0$ ヨリ $y=\dfrac{x^3}{a^2}.$

$-a^2xy+b^2y^2=0$ ヨリ $y=\dfrac{a^2}{b^2}x.$

[20] $\boldsymbol{x^4+y^4=2ax(x^2-y^2),\ a>0.}$ 曲線ハ x 軸＝關シテ對稱＝シテ $(0,0)$, $(2a,0)$ ヲ過ル.



$x^4+y^4=2ax(x^2-y^2)\geqq 0.$

$\therefore\ x>0$ ナルトキハ $y^2<x^2.$

$x<0$ ナルトキハ $y^2>x^2.$

又原式ヲ書キ變ヘテ

$(x^2-y^2-ax)^2=x^2(a^2-2y^2)>0.$

$\therefore\ \left|y\right|<\dfrac{a}{\sqrt{2}}.$

同樣＝シテ $(y^2+ax)^2=x^2(a^2+2ax-x^2)>0.$

$\therefore\ x^2-2ax-a^2<0.$ 卽チ $a(1-\sqrt{2})<x<a(1+\sqrt{2}).$

$f(x,y)=x^4+y^4-2ax(x^2-y^2)=0$ トオクト

$f_x=4x^3-6ax^2+2ay^2=0,\quad f_y=4y^3+4axy=0$ ヨリ

$x=0,\ y=0$ ノミ適スル. 而シテ原點＝於テハ

$f_{xx}=0;\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=0,\quad f_{xxx}=-12a,\quad f_{xxy}=0,\quad f_{xyy}=4a,\quad f_{yyy}=0.$

故＝原點ハ三重點デアル. 三重點＝於ケル切線ハ $x=0$, $y=\pm x$ デアル. 原點ノ近傍＝於テ y^2 ト x トヲ同位ノ無限小ト考ヘルト x^4, x^3 ハ高位トナルカラ曲線ノ一ツノ分枝ハ $y^2=-2ax$ ＝近似スル.

次＝ $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ ナル座標軸ノ回轉ヲ行ヘバ原方程式ハ

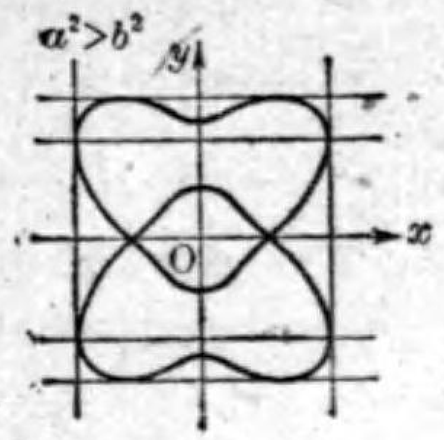
$$X^4+6X^2Y^2+Y^4=-4\sqrt{2}a(X^2Y-XY^2)$$

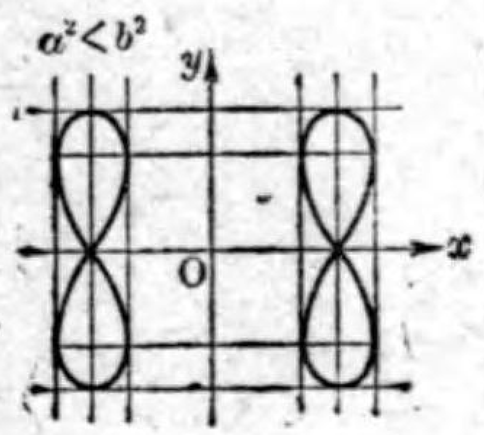
トナリ原點ノ近傍ニ於テ曲線ノ第二第三ノ分枝ハ

$$X^2=-4\sqrt{2}aY, \quad Y^2=4\sqrt{2}aX$$

ニ近似スル.

[21] $\boldsymbol{x^4+y^4-2a^2y^2-2b^2x^2+b^4=0.}$





$a \neq b$ トス. 曲線ハ兩軸ニ關シテ對稱. 故ニ第一象限ニツイテノミ考ヘレバヨイ.

$x=0$ ナルトキ

$a^2>b^2$ ナラバ $y^2=a^2\pm\sqrt{a^4-b^4}$

$a^2<b^2$ ナラバ y^2 ノ實數値ナシ.

$y=0$ ナルトキハ $x=\pm b$.

原式ヲ書キ換ヘテ

$$(x^2-b^2)^2+(y^2-a^2)^2=a^4 \cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

之ヨリ $x^2=b^2\pm y\sqrt{2a^2-y^2}$.

$$2a^2-y^2\geqq 0. \quad \therefore \; -\sqrt{2}a\leqq y\leqq\sqrt{2}a.$$

$$y^2=2a^2 \text{ ナルトキ } x^2=b^2.$$

又 (1) ヨリ $y^2=a^2\pm\sqrt{a^4-(x^2-b^2)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(2).$

$$\therefore \; a^4-(x^2-b^2)^2\geqq 0.$$

故ニ $a^2>b^2$ ナラバ $a^2+b^2\geqq x^2$.

$x^2=a^2+b^2$ ナラバ $y^2=a^2$.

$a^2<b^2$ ナラバ $a^2+b^2\geqq x^2\geqq b^2-a^2$.

$x^2=b^2\pm a^2$ ナルトキ $y^2=a^2$.

$f(x,y)=(x^2-b^2)^2+(y^2-a^2)^2-a^4=0$ トオクト

$f_x=4x(x^2-b^2)=0, \quad f_y=4(y^2-a^2)y=0.$

$f_{xx}=12x^2-b^2, \quad f_{xy}=0, \quad f_{yy}=12y^2-a^2.$

$\therefore \; x=\pm b, \quad y=0$ ナルトキノミ適スル.

且此ノ點ハ結節點デアル.

$x=X+b, \; y=Y$ ナル座標軸ノ變換ヲ行フト (1) ハ

$$(X^2+2bX)^2+(Y^2-a^2)^2=a^4 \text{ 又ハ } X^4+Y^4+4b^2X^3+4b^2X^2-2a^2Y^2=0$$

トナリ新原點ハ結節點ニシテ切線ハ $2b^2X^2-a^2Y^2=0$ 卽チ

$$Y=\pm\sqrt{2}\frac{b}{a}X \quad \text{トナル.}$$

(2) ヨリ $y^2=a^2+\sqrt{a^4-(x^2-b^2)^2}$. $x=b$ ナルトキ $y=\sqrt{2}a$. $x=\sqrt{b^2\pm a^2}$ ナルトキ $y=a$. 故ニ上ノ曲線ノ分枝ハ $y=a$ ヨリ $y=\sqrt{2}\,a$ マデノ間ニアル.

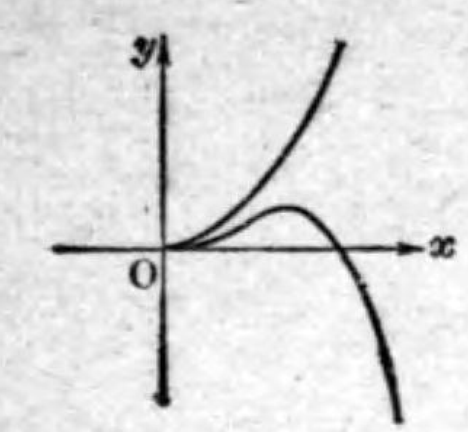
$a=b$ ナルトキハ原方程式ハ

$$\{x^2-\sqrt{2}xy+y^2-a^2\}\{x^2+\sqrt{2}xy+y^2-a^2\}=0$$

トナリ二ツノ楕圓トナル.

[22] $\boldsymbol{a(by-x^2)^2=x^5, \quad a>0.}$ 曲線ト軸トノ交點ハ $(0,0)$, $(a,0)$ デアル. $a(by-x^2)^2=x^5\geqq 0$ ナル故曲線ハ第一第四象限ニノミ存在スル.

$f(x,y)=a(by-x^2)^2-x^5=0$ トオクト



$f_x=-4a(by-x^2)x-5x^4=0, \quad f_y=2ab(by-x^2)=0.$

$f_{xx}=-4a(by-x^2)+8ax^2-20x^3.$

$f_{xy}=-4abx, \quad f_{yy}=2ab^2.$

故ニ原點ニ於テハ $f^2_{xy}-f_{xx}f_{yy}=0$.

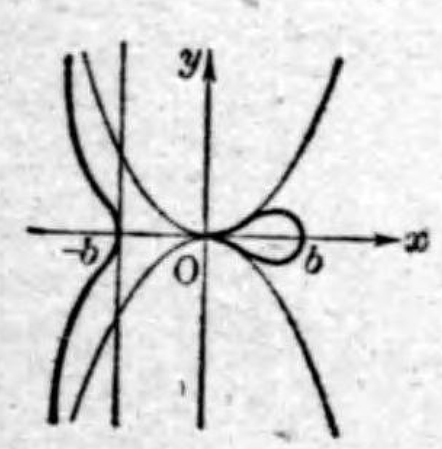
而シテ原點ニ於ケル切線ハ $y^2=0$ ニシテ原點ハ第二種ノ尖點デアル. 又 y ト x^2 ト同位ノ無限小トスルト x^5 ハ高位トナリ原點ノ近傍ニ於ケル曲線ハ $by=x^2$ ニ近似スル.

$$by=x^2\pm\frac{x^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}=x^2\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \text{ ヨリ}$$

$$by_1=x^2\left\{1+\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\cdots\cdots\cdots(1), \qquad by_2=x^2\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\cdots\cdots\cdots(2).$$

(1) ハ上方ニ凹, (2) ハ $x<\frac{64}{225}a$ ノトキ上方ニ凹, $x\frac{64}{225}a$ ノトキ上方ニ凸ニシテ $x=\frac{6}{25}a$ ナルトキ極大値ヲトル.

[23] $\boldsymbol{a^3y^2=b^2x^3-x^5, \quad a>0, \; b>0.}$ 曲線ハ x 軸ニ關シテ對稱ニシテ $(0,0)$, $(\pm b,0)$ ヲ過ル.



$a^3y^2=x^3(b^2-x^2)\geqq 0$, $x\geqq 0$ ナルトキハ $x\leqq b$. $x<0$ ナルトキハ $x\leqq -b$.

$f(x,y)=a^3y^2-b^2x^3+x^5=0$ トオクト

$f_x=-3b^2x^2+5x^4=0, \quad f_y=2a^3y=0.$ ヨリ

$$x=y=0$$

$f_{xx}=-6b^2x+20x^3, \quad f_{xy}=0, \quad f_{yy}=2a^3.$

$\therefore \; f^2_{xy}-f_{xx}f_{yy}=0.$

故ニ原點ハ第一種ノ尖點ニシテ原點ニ於ケル切線ハ

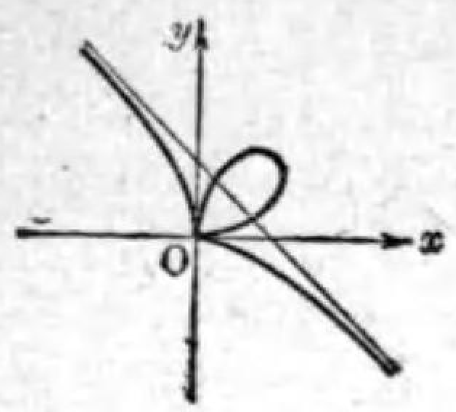
$y^2=0$ ナリ. y^2 ト x^3 トヲ同位ノ無限小トスルト x^5 ハ高位トナルカラ原點ノ近傍ニ於テハ曲線ハ $a^3y^2=b^2x^3$ ニ近似スル.

[24] $\boldsymbol{x^5-ax^2y^2+y^5=0, \quad a>0.}$ x ト y トヲ交換シテモ原式ハ變ラナイカラ $y=x$ ニ關シテ對稱デアル. 軸トノ交點ハ $(0,0)$ デアル.

$ax^2y^2=x^5+y^5\geqq 0$. $\therefore$ x,y 同時ニハ負トナラヌ. 卽チ第三象限ニ曲線ハ存在シナイ. 漸近線ヲ求メルタメ原式ヨリ

$$1-\frac{a}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^5=0 \qquad \therefore\ \alpha=-1,\ \beta=\frac{a}{5}.$$

故ニ漸近線ハ $y=-x+\frac{a}{5}$ ニシテ曲線ト $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{50}a$, $y=\frac{5\mp\sqrt{5}}{50}a$ デ交ハル.



$f(x,y)=x^5-ax^2y^2+y^5=0$ トオクト

$f_x=5x^4-2axy^2=0$, $f_y=5y^4-2ax^2y=0$ ヨリ $x=y=0$.

$f_{xx}=20x^3-2ay^2$, $f_{xy}=-4axy$, $f_{yy}=20y^3-2ax^2$.

$f_{xxx}=60x^2$, $f_{xxy}=-4ay$, $f_{xyy}=-4ax$, $f_{yyy}=60y^2$.

$f_{xxxx}=120x$, $f_{xxxy}=0$, $f_{xxyy}=-4a\neq0$, $f_{xyyy}=0$,

$f_{yyyy}=120y$.

故ニ原點ハ四重點ニシテ $x^2y^2=0$ ハ切線デアル. 原點ノ近傍ニ於テハ曲線ハ

$x^3=ay^2$, $\quad y^3=ax^2$

ニ近似スル.

第十編 極座標ニ於ケル曲線ノ研究

第四十二章 切線, 法線, 變曲點並ビニ曲率

曲線並ビニ直線ノ方程式 直角座標ニ於テ曲線ノ方程式ハ

$$y=f(x),\quad f(x,y)=0,\quad 又ハ\quad x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

等デ表ハサレル. 此等ノ方程式ニ, 直角座標ヨリ極座標ニ直ス公式

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

ヲ代入スルト

$$r\sin\theta=f(r\cos\theta),\qquad \begin{cases} r\cos\theta=\varphi(t),\\ r\sin\theta=\psi(t).\end{cases}$$
$$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=0,$$

トナリ, コヽニ於テ更ニ適當ナ演算ヲ施スト此等ノ方程式ハ次ノ形ヲトル.

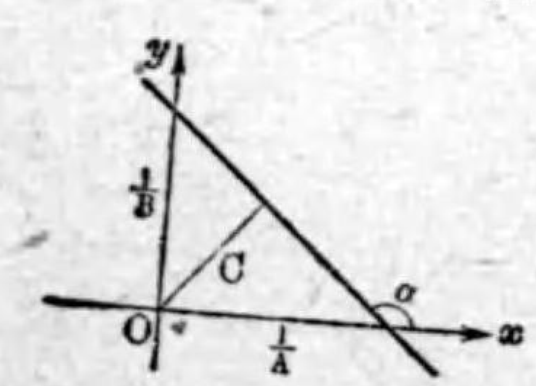
$$r=f(\theta),\qquad \begin{cases} r=\phi(t),\\ \theta=\psi(t).\end{cases}$$
$$f(r,\theta)=0.$$

是曲線ヲ表ハス極座標ノ方程式デアル. 此等ノ方程式ニツイテ切線, 法線等ヲ研究スルタメニ先ヅ極座標ニ於ケル直線ノ方程式ニツイテ次ニ述ベル.

直角座標ニ於テ原點ヲ過ラナイ直線ノ一般方程式ハ

$$Ax+By=1$$

デアル. 之ヲ極座標ニ直スト



$$\frac{1}{r}=A\cos\theta+B\sin\theta\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

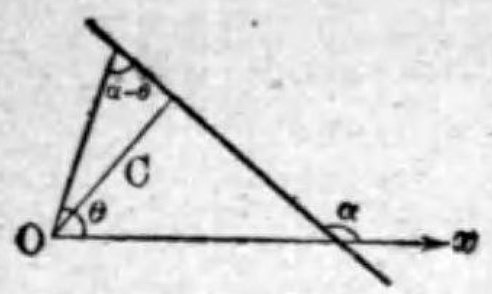
トナル. 是レ極座標ニ於ケル直線ノ方程式デアル.

此ノ直線ガ x 軸トナス角ヲ α トスルト

$$\tan\alpha=-\frac{A}{B}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

極ヨリ此ノ直線マデノ距離ヲ C トスルト直角三角形ノ面積ヨリ

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}=C\cdot\sqrt{\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}}.\quad \therefore\ C=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$



トナル. (2) ノ平方ニ 1 ヲ加ヘルト (3) ヨリ

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha=\frac{A^2+B^2}{B^2}=\frac{1}{B^2C^2}.$$

$\therefore\ \cos\alpha=-B\cdot C.$ コヽニ圖ノ如ク A, B ガ正, α ガ鈍角ナル場合ヲ考ヘル. 他ノ場合モ同様デアル. (2) ニ $\cos\alpha$ ヲ代入シテ

$$\sin\alpha=A\cdot C.$$

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ヲ (1) ニ代入シテ

$$\frac{1}{r}=\frac{\sin\alpha}{C}\cos\theta-\frac{\cos\alpha}{C}\sin\theta.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

$$\therefore\ r\sin(\alpha-\theta)=C.$$

是 α ト C トヲ知ツテ得ル極座標ニ於ケル直線ノ方程式デアル.

極座標ニ於ケル切線法線 與ヘラレタ曲線ノ方程式ヲ $r=f(\theta)$ トシ, 其ノ上ニアル一點 $P(r_0,\theta_0)$ ノ直角座標ヲ (x_0, y_0) トスルト

$$x_0=r_0\cos\theta_0,\qquad y_0=r_0\sin\theta_0$$

デアルカラ切線ノ方向係數 $m=\dfrac{dy_0}{dx_0}$ ハ $\dfrac{dr_0}{d\theta_0}=r'_0$ トオクト

$$\frac{dy_0}{dx_0}=\frac{r_0\cos\theta_0+r'_0\sin\theta_0}{r_0'\cos\theta_0-r_0\sin\theta_0}=\frac{r_0+r_0'\tan\theta_0}{r_0'-r_0\tan\theta_0}.$$

コレ等ヲ直角座標ニ於ケル切線ノ方程式

$$y-y_0=\frac{dy_0}{dx_0}(x-x_0)$$

ニ代入スルト

$$r\sin\theta-r_0\sin\theta_0=\frac{r_0+r_0'\tan\theta_0}{r_0'-r_0\tan\theta_0}(r\cos\theta-r_0\cos\theta_0).$$

コヽニ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ニシテ流通座標デアル. コノ式ノ分母ヲ拂ツテ移項スルト

$$r_0^2\left(\frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}+\cos\theta_0\right)=r[\{r_0\tan\theta_0(\sin\theta+\cos\theta)\}-r_0'(\sin\theta-\tan\theta_0\cos\theta)].$$

$$\therefore\ \frac{r_0^2}{\cos\theta_0}=r\left[\frac{r_0\cos(\theta-\theta_0)-r_0'\sin(\theta-\theta_0)}{\cos\theta_0}\right].$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)-\frac{r_0'}{r_0^2}\sin(\theta-\theta_0).$$

$$\therefore\ \frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\left(\frac{1}{r_0}\right)'\sin(\theta-\theta_0).$$

コヽニ $\left(\dfrac{1}{r_0}\right)'$ ハ $\dfrac{1}{r}$ ヲ θ デ微分シタモノニ $\theta=\theta_0$ トオイタ式ヲ表ハス. 是曲線上ノ點 (r_0,θ_0) ニ於ケル切線ノ方程式デアル.

同様ニシテ法線ノ方程式ハ

$$y-y_0=-\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}(x-x_0)$$

ヨリ

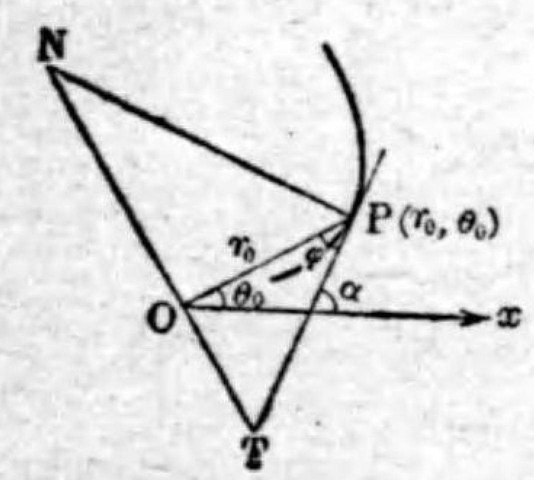
$$r\sin\theta-r_0\sin\theta_0=-\frac{r_0'-r_0\tan\theta_0}{r_0+r_0'\tan\theta_0}(r\cos\theta-r_0\cos\theta_0).$$

之ヲ變形シテ

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\frac{1}{r_0'}\sin(\theta-\theta_0)$$

トナル.

切線, 法線ノ長サ 點 $P(r_0,\theta_0)$ ニ於ケル切線ガ原線 Ox ノ正ノ方向トナス角ヲ α, 動徑 OP トナス角ヲ φ トスルト



$$\varphi=\alpha-\theta_0$$

デアルカラ

$$\tan\varphi=\frac{\tan\alpha-\tan\theta_0}{1+\tan\alpha\tan\theta_0}.$$

然ルニ $\tan\alpha$ ハ P 點ニ於ケル切線ガ x 軸ノ正ノ方向トナス角ノ正切デアルカラ

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{r_0+r_0'\tan\theta_0}{r_0'-r_0\tan\theta_0}.$$

コレヲ上式ニ代入スルト

$$\tan\varphi=\frac{r_0}{r_0'}.$$

今原點 O ヲ過リ OP ニ垂線ヲ引キ P ニ於ケル切線及ビ法線ト交ハル點ヲ

夫々 T, N トスルト

$$\mathrm{OT}=|r_0\tan\varphi|=\left|\frac{r_0^2}{r_0'}\right|.$$

$$\mathrm{ON}=|r_0\tan\mathrm{OPN}|=|r_0\cot\varphi|=|r_0'|.$$

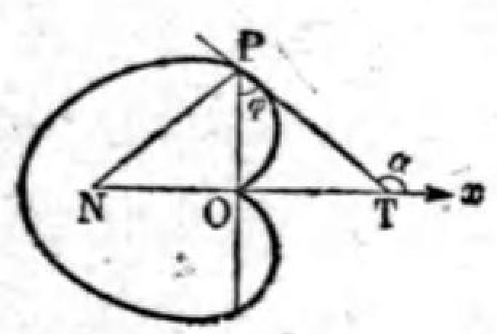
$$\mathrm{PT}=\sqrt{r_0^2+\frac{r_0^4}{r_0'^2}}=\left|\frac{r_0}{r_0'}\right|\sqrt{r_0^2+r_0'^2}.$$

$$\mathrm{PN}=\sqrt{r_0^2+r_0'^2}.$$

OT, ON ヲ極座標ニ於ケル切線影, 法線影ト云ヒ PT, PN ヲ夫々切線及ビ法線ノ長サト云フ.

例題 1. 曲線 $r=a(1-\cos\theta)$ 上ノ一點 $\mathrm{P}\left(a,\frac{\pi}{2}\right)$ ニ於ケル φ, α ノ値ヲ求メ且切線, 法線ノ方程式並ニ切線影, 法線影ヲ求メヨ.

〔解〕



$\frac{dr_0}{d\theta_0}=a\sin\theta_0$ ナル故 P ニ於テハ $\frac{dr_0}{d\theta_0}=a.$

$$\tan\varphi=\frac{r_0}{\frac{dr_0}{d\theta_0}}=\frac{a}{a}=1. \quad \therefore\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

$$\alpha=\theta_0+\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

故ニ公式 $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\left(\frac{1}{r_0}\right)'\sin(\theta-\theta_0)$ ヨリ

切線ノ方程式 $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{a^2}a\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right).$

$$\therefore\ \frac{1}{r}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{a}.$$

$$\therefore\ r(\sin\theta+\cos\theta)=a.$$

公式 $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\frac{1}{r_0'}\sin(\theta-\theta_0)$ ヨリ

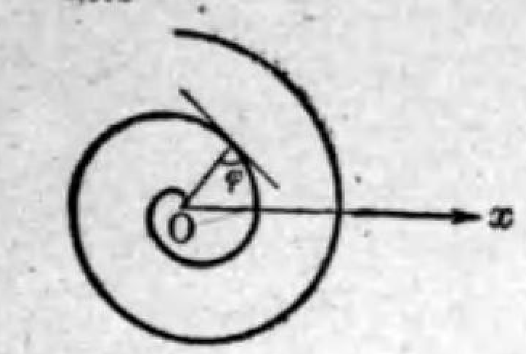
法線ノ方程式 $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{a}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right).$

$$\therefore\ r(\sin\theta-\cos\theta)=a.$$

切線影$=a$, 法線影$=a$.

例題 2. 曲線 $r=a\theta$ 上ノ一點 (r_0, θ_0) ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式並ニ法線影ノ長サヲ求メヨ.

〔解〕



$$r_0=a\theta_0. \quad \frac{1}{r_0}=\frac{1}{a\theta_0}. \quad \left(\frac{1}{r_0}\right)'=\frac{-1}{a\theta_0^2}. \quad r_0'=a$$

ヲ公式

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\left(\frac{1}{r_0}\right)'\sin(\theta-\theta_0)$$

ニ代入スルト切線ノ方程式ハ

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a\theta_0}\cos(\theta-\theta_0)-\frac{1}{a\theta_0^2}\sin(\theta-\theta_0).$$

又公式

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\frac{1}{r_0'}\sin(\theta-\theta_0)$$

ニ代入スルト法線ノ方程式ハ

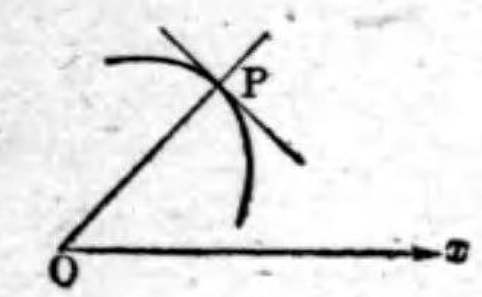
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a\theta_0}\cos(\theta-\theta_0)+\frac{1}{a}\sin(\theta-\theta_0)$$

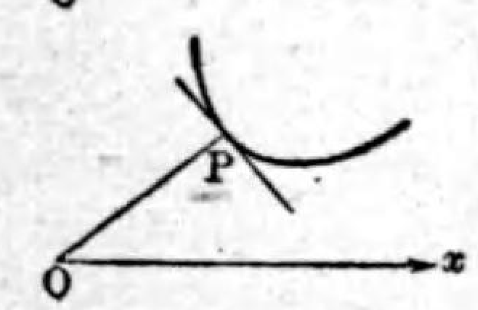
トナル.

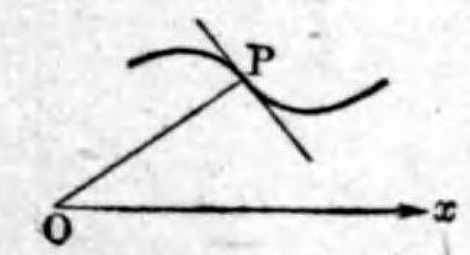
$$\text{法線影ノ長サ}=r_0'=a$$

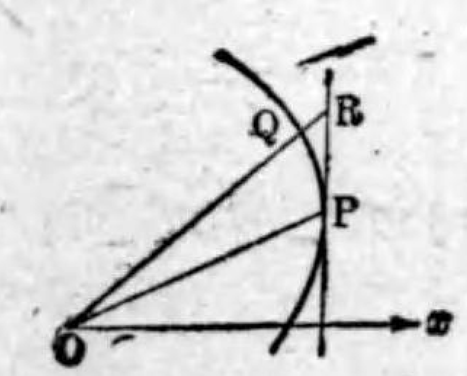
トナル. 即チ一定デアル.

極座標ニ於ケル曲線ノ凹凸及ビ變曲點









曲線上ノ一點 P ノ近傍ノ部分ガ P 點ニ於ケル切線ニ對シテ常ニ極ト同ジ側ニアルトキハ曲線ハ P 點ニ於テ**極ニ凹**ナリト云ヒ, 之ニ反シテ曲線ガ切線ニ對シテ極ト反對ノ側ニアルトキハ**極ニ凸**ナリト云フ.

若シ又曲線ガ P 點ノ一方ニ於テハ切線ニ對シテ極ト同ジ側ニアリ他方ニ於テハ極ト反對ノ側ニアルトキハ P 點ヲ**變曲點**ト云フ. 今如何ナル場合ニ於テ是等ノ狀態ヲナスカヲ次ニ研究スルノデアル.

曲線 $r=f(\theta)$ 上ノ一點 $\mathrm{P}(r_0, \theta_0)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\left(\frac{1}{r_0}\right)'\sin(\theta-\theta_0)$$

デアル. 今曲線上ニ他ノ一點 $\mathrm{Q}(r, \theta)$ ヲトリ OQ ト切線トノ交點ヲ $\mathrm{R}(r_1, \theta)$ トシ

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}=\delta$$

トオク．然ルトキハ P ニ於テ曲線ガ極ニ對シテ凹ナルカ，凸ナルカ，又ハ變曲點ナルカニ從ツテ P ノ近傍デハ

$$\delta>0,\qquad \delta<0,\qquad \delta=0$$

デアル．サテ R ハ切線上ノ點デアルカラ其ノ座標ハ切線ノ方程式ヲ滿足スル．

$$\therefore\ \frac{1}{r_1}=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\left(\frac{1}{r_0}\right)'\sin(\theta-\theta_0).$$

故ニ

$$\delta=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)-\left(\frac{1}{r_0}\right)'\sin(\theta-\theta_0)\cdots\cdots\cdots(1).$$

コノ δ ハ θ ノ函數デアルカラ θ ニツイテ微分スルト

$$\frac{d\delta}{d\theta}=\left(\frac{1}{r}\right)'+\frac{1}{r_0}\sin(\theta-\theta_0)-\left(\frac{1}{r_0}\right)'\cos(\theta-\theta_0)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2}=\left(\frac{1}{r}\right)''+\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\left(\frac{1}{r_0}\right)'\sin(\theta-\theta_0)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

今 $\theta=\theta_0$ トオクト (1) ヨリ $\delta=0$, (2) ヨリ $\dfrac{d\delta}{d\theta}=0$ ヲ得ル．而シテ (3) ヨリ

$$\left(\frac{d^2\delta}{d\theta^2}\right)_0=\left(\frac{1}{r_0}\right)''+\frac{1}{r_0}$$

トナリ，且

$$\left(\frac{1}{r}\right)'=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta},\qquad \left(\frac{1}{r}\right)''=\frac{2r'^2}{r^3}-\frac{r''}{r^2}$$

デアルカラ

$$\left(\frac{d^2\delta}{d\theta^2}\right)_0=\frac{1}{r_0^3}\{r_0^2+2r_0'^2-r_0r_0''\}$$

トナル．今 $r_0>0$ トスルト

$$r_0^2+2r_0'^2-r_0r_0''>0$$

ナルトキハ $\delta=0$ ハ極小値デアル．從ツテ P ノ近傍ニ於テハ $\delta>0$, 卽チ

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}>0,\qquad r_1>r$$

トナリ，P ニ於テ曲線ハ極ニ凹デアル．故ニ P ニ於ケル切線ニ對シテ曲線ハ極ト同ジ側ニアル．若シ又

$$r_0^2+2r_0'^2-r_0r_0''<0$$

ナルトキハ $\delta=0$ ハ極大値デアル．從ツテ P ノ近傍デハ $\delta<0$, 卽チ

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}<0,\qquad r>r_1$$

トナリ，P ニ於テ曲線ハ極ニ凸デアル．故ニ P ニ於ケル切線ニ對シテ曲線ハ極ト反對側ニアル．更ニ又

$$r_0^2+2r_0'^2-r_0r_0''=0$$

ナルトキハ δ ハ P ノ近傍ニ於テ其ノ符號ヲ變ズル．卽チ P ハ變曲點デアル．

以上ハ OP, OR ノ長サヲ正ナリト考ヘタガ若シ負ナルトキハ上ノ大小關係ガスベテ反對トナル．然ルニ

$$\left(\frac{d^2\delta}{d\theta^2}\right)_0=\frac{1}{r_0^3}\{r_0^2+2r_0'^2-r_0r_0''\}$$

ニ於テ右邊ノ分母ハ r_0 ト共ニ其ノ符號ヲ變ズルカラ，今一般性ノタメ r_0 ノ代リニ r ヲ以テスルト，r ノ正負ニ關セズ次ノ如ク斷定スルコトガ出來ル．

$r^2+2r'^2-rr''>0$　ナルトキハ極ニ凹．

$r^2+2r'^2-rr''<0$　ナルトキハ極ニ凸．

$r^2+2r'^2-rr''$　ガ符號ヲ變ズル點ハ變曲點．

若シ又曲線ノ方程式 $r=f(\theta)$ ニ於テ $u=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{f(\theta)}$ トオクトキ $\dfrac{du}{d\theta}$, $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$ ヲ求メルコトガ $\dfrac{dr}{d\theta}$, $\dfrac{d^2r}{d\theta^2}$ ヲ求メルヨリモ容易ナルトキハ，

$$\frac{du}{d\theta}=-\frac{r'}{r^2},\qquad \frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{-rr''+2r'^2}{r^3}$$

ナルヲ以テ，

$$u+\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{r^3}$$

トナルカラ，$r=f(\theta)$ ニ對シテ

$$\frac{r^2+2r'^2-rr''}{r^3}$$

ヲ吟味スル代リニ $u=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{f(\theta)}$ ニ對シテ

$$u+\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

ヲ吟味スレバヨイ．

例題 1. 曲線 $r=\dfrac{a}{\sqrt{\theta}}$ ノ凹凸及ビ變曲點ヲ吟味セヨ．

[解]

$$r'=-\frac{1}{2}a\theta^{-\frac{3}{2}},\qquad r''=\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}a\theta^{-\frac{5}{2}}.$$

$$\therefore\ r^2+2r'^2-rr''=\frac{a^2}{\theta}+2\left(-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\theta^{\frac{3}{2}}}\right)^2-\frac{a}{\theta^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{1}{\theta^{\frac{5}{2}}}.$$

$$=\frac{a^2}{\theta}+\frac{a^2}{2\theta^3}-\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{\theta^3}=a^2\frac{4\theta^2-1}{4\theta^3}$$

デアルカラ $\theta>\dfrac{1}{2}$ ナルトキハ

$$r^2+2r'^2-rr''>0.$$

故ニ $\theta>\dfrac{1}{2}$ ナル曲線ノ部分ハ極ニ對シテ凹ニシテ $\theta<\dfrac{1}{2}$ ナルトキ

$$r^2+2r'^2-rr''<0.$$

故ニ $\theta<\dfrac{1}{2}$ ナル曲線ノ部分ハ極ニ對シテ凸デアル．又 $\theta=\dfrac{1}{2}$ ナル點ノ前後ニ於テ

$$r^2+2r'^2-rr''$$

ハ其ノ符號ヲ變ズルカラ點 $\left(\sqrt{2}a,\ \dfrac{1}{2}\right)$ ハ變曲點デアル．

例題 2. 曲線 $r=\dfrac{a\theta^2}{\theta^2-1}$ ノ變曲點ヲ求メヨ．

[解] $u=\dfrac{1}{r}=\dfrac{\theta^2-1}{a\theta^2}$ トオクト，

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{2}{a\theta^3},\qquad \frac{d^2u}{d\theta^2}=-\frac{6}{a\theta^4}.$$

$$\therefore\ u+\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{\theta^2-1}{a\theta^2}-\frac{6}{a\theta^4}=\frac{\theta^4-\theta^2-6}{a\theta^4}.$$

即チ
$$u+\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{(\theta^2-3)(\theta^2+2)}{a\theta^4}.\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

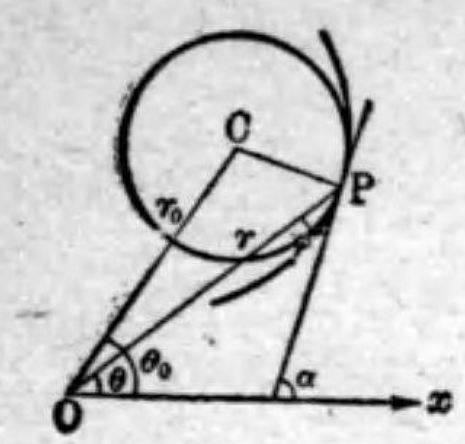
θ ガ $\theta^2=3$ ヲ通過スルトキ (1) ノ符號ガ變ズル．而シテ $\theta=\pm\sqrt{3}$ ニ對シテ

$$r=\frac{3a}{3-1}=\frac{3a}{2}$$

ナル故 $\left(\dfrac{3a}{2},\ \pm\sqrt{3}\right)$ ハ求メル變曲點デアル．

曲率，曲率半徑 曲線ノ方程式ヲ $r=f(\theta)$ トシ其ノ上ノ點 $\mathrm{P}(r,\theta)$ ニ於ケル切觸圓ノ中心ヲ $\mathrm{C}(r_0,\theta_0)$，P ニ於ケル曲線ノ切線ガ OP 及ビ x 軸ノ正

ノ方向トナス角ヲ夫々 φ,α トスレバ



$$\alpha=\theta+\varphi$$

デアルカラ，

$$d\alpha=d\theta+d\varphi\ \cdots\cdots\cdots(1).$$

又
$$\tan\varphi=\frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}}\ \cdots\cdots\cdots(2)$$

デアルカラ，此ノ兩邊ヲ θ デ微分スルト

$$\sec^2\varphi\,\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

(2) ヨリ

$$\tan^2\varphi+1=\frac{r^2}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}+1.\qquad \therefore\ \sec^2\varphi=\frac{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

故ニ上ノ式ハ次ノ如クナル．

$$d\varphi=\frac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta.$$

之ヲ (1) ニ代入スルト

$$d\alpha=d\theta\left\{1+\frac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}\right\}=\frac{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta\ \cdots\cdots\cdots(3).$$

然ルニ $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ノ兩邊ヲ θ デ微分スルト

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta.$$

此ノ兩邊ヲ平方シテ加ヘルト

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2=\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2$$

$$\therefore \quad ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

而シテ曲率ノ定義カラ曲率半徑ヲ ρ トスルト

$$\rho=\frac{ds}{d\alpha}$$

デアルカラコレニ (3) 及ビ (4) ヲ代入スルト

$$\rho=\left|\frac{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}\right| \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6).$$

又前圖ニ於ケル ΔOCP ヨリ

$$r_0\cos(\theta_0-\theta)+\rho\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=r,$$

$$r_0\sin(\theta_0-\theta)=\rho\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).$$

コレラノ式ヲ $r_0\cos(\theta_0-\theta)$, $r_0\sin(\theta_0-\theta)$ ニツイテ解クト

$$r_0\cos(\theta_0-\theta)=r-\rho\sin\varphi, \quad r_0\sin(\theta_0-\theta)=\rho\cos\varphi.]$$

(2) 式ヨリ

$$\sin\varphi=\frac{r}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}, \qquad \cos\varphi=\frac{\frac{dr}{d\theta}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}.$$

上ノ二ツノ式ト (6) トヨリ

$$r_0\cos(\theta_0-\theta)=\frac{r\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right\}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}},$$

$$r_0\sin(\theta_0-\theta)=\frac{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}\frac{dr}{d\theta}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

ヲ得ル. コレヨリ r_0, θ_0 ヲ求メルコトガ出來ル. 從ツテ切觸圓ノ中心ノ座標ヲ求メルコトガ出來ル.

若シ曲線ノ方程式 $r=f(\theta)$ ニ於テ $u=\frac{1}{r}=\frac{1}{f(\theta)}$ トオクトキ $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ ヲ求メルコトガ $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{d^2r}{d\theta^2}$ ヲ求メルヨリモ容易ナルトキハ

$$r'=-\frac{u'}{u^2}, \qquad r''=\frac{2u'^2-uu''}{u^3}$$

デアルカラ, 之ヲ (6) 式ニ代入シテ

$$\rho=\left|\frac{\left\{\frac{1}{u^2}+\frac{u'^2}{u^4}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{u^2}+2\frac{u'^2}{u^4}-\frac{1}{u}\cdot\frac{2u'^2-uu''}{u^3}}\right|$$

$$=\left|\frac{\left\{1+\left(\frac{u'}{u}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u+u''}\right|$$

ナル式ヲ得ルカラ之ヲ適用スレバヨイ.

倚切觸圓, 曲率等ノ定義ハ直角座標, 極座標ニ無關係ニシテ曲線自身ニノミ關スルモノデアル. 故ニ切觸圓ノ半徑ノ逆數ガ曲率ニ等シイコト, 其ノ他縮閉線, 伸開線, 二ツノ曲線ノ切觸等ニ關スル諸性質ハ極座標ニ於テモ直角座標ノ場合ト同樣ニ成立スルカラコヽニハ別ニ述ベナイ.

例題 1. 曲線 $r=ca^\theta$ ノ曲率半徑, 曲率中心ヲ求メヨ, 但シ $a>0$, $c>0$.

〔解〕 $\frac{dr}{d\theta}=ca^\theta\log a=r\log a$, $\quad \frac{d^2r}{d\theta^2}=ca^\theta(\log a)^2=r(\log a)^2$.

コレラヲ公式ニ代入シテ

$$\rho=\frac{r\{1+(\log a)^2\}^{\frac{3}{2}}}{1+(\log a)^2}=r\{1+(\log a)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$r_0\cos(\theta_0-\theta)=0, \qquad r_0\sin(\theta_0-\theta)=r\log a.$$

コレヲ解イテ

$$\theta_0-\theta=\frac{\pi}{2}. \qquad \therefore \quad \theta_0=\frac{\pi}{2}+\theta.$$

從ツテ

$$r_0=r\log a=ca^\theta\log a.$$

例題 2. 曲線上 $r=a(1-\cos\theta)$ 上ノ任意ノ點ニ於ケル曲率半徑ヲ求メヨ.

〔解〕 $\frac{dr}{d\theta}=a\sin\theta$, $\quad \frac{d^2r}{d\theta^2}=a\cos\theta$

デアルカラ公式ニ代入シテ

$$\rho=\frac{\{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta\}^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-\cos\theta)^2+2a^2\sin^2\theta-a^2\cos\theta(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{a^3(2-2\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{a^2\cdot 3(1-\cos\theta)}=\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{1}{2}}a(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2}a\sqrt{a(1-\cos\theta)}=\frac{2}{3}\sqrt{2ar}.$$

例題 3.　曲線　$r=\dfrac{l}{1+e\cos\theta}$ ノ曲率半徑ヲ求メヨ.

［解］

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\theta}{l}\quad \text{トオクト}$$

$$u'=\frac{-e\sin\theta}{l},\qquad u''=\frac{-e\cos\theta}{l}.$$

故ニ

$$\rho=\left|\frac{\left\{1+\left(\frac{u'}{u}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u+u''}\right|$$

ニ代入シテ

$$\rho=\left|\frac{\left\{1+\frac{e^2\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1+e\cos\theta}{l}-\frac{e\cos\theta}{l}}\right|=\left|\frac{l(1+e^2+2e\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\cos\theta)^3}\right|.$$

例題 4.　曲線 $r=e^{a\theta}$ ノ縮閉線ヲ求メヨ.

［解］　曲線上ノ任意ノ點ニ對應スル曲率圓ノ中心ヲ (r_0,θ_0) トスルト

$$r_0\cos(\theta_0-\theta)=\frac{r(r'^2-rr'')}{r^2+2r'^2-rr''},\qquad r_0\sin(\theta_0-\theta)=\frac{r'(r^2+r'^2)}{r^2+2r'^2-rr''}$$

然ルニ與ヘラレタ方程式ヨリ

$$r'=ae^{a\theta}=ar,\qquad r''=a^2e^{a\theta}=a^2r.$$

$$\therefore\ r_0\cos(\theta_0-\theta)=\frac{r(a^2r^2-a^2r^2)}{r^2+2a^2r^2-a^2r^2}=0,\qquad r_0\sin(\theta_0-\theta)=\frac{(r^2+a^2r^2)ar}{r^2+2a^2r^2-a^2r^2}=ar.$$

故ニ

$$r_0=ar,\quad \theta_0-\theta=90^\circ,\quad \text{即チ}\quad \theta_0=\theta+90^\circ.$$

故ニ求メル縮閉線ノ方程式ハ θ ヲ媒介變數トスルトキ

$$r_0=ae^{a\theta},\qquad \theta_0=\theta+\frac{\pi}{2}.$$

例題 5.　曲線上ノ一點ヲ極トシ，其ノ點ニ於ケル切線ヲ原線トスルトキハ，其ノ點ニ於ケル曲率半徑ハ $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{r}{2\theta}$ ナルコトヲ證明セヨ.

［解］　直交軸ニ於テ原點ニ於ケル切線ヲ x 軸トスルトキ其ノ點ニ於ケル曲率半徑ハ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2y}$$

デアル. 然ルニ極座標ニ於テハ　$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$　デアルカラ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2y}=\lim_{\theta\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta}{2r\sin\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{r\cos^2\theta}{2\sin\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}}\cdot\frac{r}{2\theta}\cdot\cos^2\theta=\lim_{\theta\to 0}\frac{r}{2\theta}.$$

包絡線

曲線群 $f(r,\theta,a)=0$ ノ包絡線ノ方程式ハ二ツノ方程式 $f(r,\theta,a)=0$, $f_a(r,\theta,a)=0$ ヨリ a ヲ消去スルコトニ依ツテ之ヲ求メルコトガ出來ル. 而シテ $f(r,\theta,a)=0$ ノ a ヲ種々ニ變ジテ得ル曲線ト包絡線トノ共通點ニ於ケル切線ヲ考ヘルト，曲線ノ方程式ハ $f(r,\theta,a)=0$ ニシテ且 $a=\varphi(r,\theta)$ ト考ヘルコトガ出來ルカラ

$$f_\theta+f_r r'+(\varphi_\theta+\varphi_r r')f_a=0.$$

即チ

$$f_\theta+f_r r'=0.$$

是即チ曲線 $f(r,\theta,a)=0$ 上ノ點 (r,θ) ニ於ケル切線ノ方程式ヲ定メル式デアル.　故ニ曲線群ノ包絡線ト其ノ群ニ屬スル各曲線トノ共通點ニ於ケル r' ノ値ハ相等シイ. 然ルニ

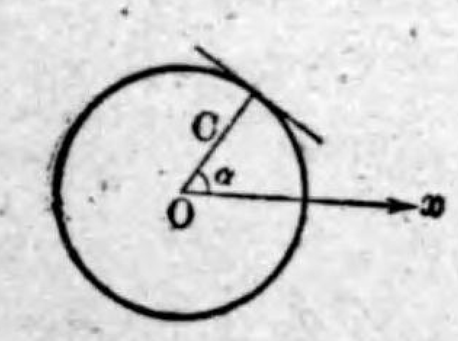
$$\tan\theta=\frac{r}{r'}$$

デアルカラ共通點ニ於ケル θ ノ値ハ相等シイ.　故ニ曲線群ノ包絡線ハ其ノ群ニ屬スル各曲線ト共通ナル點ニ於テ其ノ曲線ト共通ナル切線ヲ有スル.

例題 1.　α ヲ母數トスルトキ極座標ニ於ケル直線群

$$r\cos(\theta-\alpha)=C\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ノ包絡線ヲ求メヨ.



［解］　與ヘラレタ方程式 (1) ヲ α ニ關シテ微分スルト

$$r\sin(\theta-\alpha)=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル. (1), (2) ヲ平方シテ相加ヘテ α ヲ消去スルト

$$r^2=C^2$$

ヲ得ル. 即チ**包絡線ハ極ヲ中心トシテ半徑 C ナル圓デアル.**

例題 2.　曲線　$r^n\cos n\theta=a^n$ ノ動徑ノ端ニ於テ之ニ垂直ナル直線群ノ包絡線ヲ求メヨ.

[解] 與ヘラレタ曲線上ノ任意ノ一點 (r_1, α) ニ於テ其ノ動徑ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$r\cos(\theta-\alpha)=r_1 \cdots\cdots\cdots(1)$$

デアル. 何トナレバ極ヨリ此ノ直線ニ至ル距離ハ r_1 ニシテ且其ノ方向ハ α デアルカラデアル. 然ルニ

$$r_1^n \cos n\alpha=a^n \cdots\cdots\cdots(2).$$

(1), (2) ヲ α ニ關シテ微分スルト

$$r\sin(\theta-\alpha)-\frac{dr_1}{d\alpha}=0, \qquad nr_1^{n-1}\cdot\frac{dr_1}{d\alpha}\cos n\alpha-nr_1^n\sin n\alpha=0.$$

$$\therefore\ r\sin(\theta-\alpha)-r_1\tan n\alpha=0 \cdots\cdots\cdots(3).$$

(1), (3) ヨリ　$\tan(\theta-\alpha)=\tan n\alpha.\quad \therefore\ \theta-\alpha=n\alpha.\quad \therefore\ \alpha=\dfrac{\theta}{n+1}.$

從ツテ (1), (2) ヨリ

$$r_1=r\cos n\alpha=r\frac{a^n}{r_1^n}.\qquad \therefore\ r_1^{n+1}=ra^n.$$

$$r_1=r^{\frac{1}{n+1}}a^{\frac{n}{n+1}}.$$

r_1, α ノ値ヲ (1) ニ代入シテ

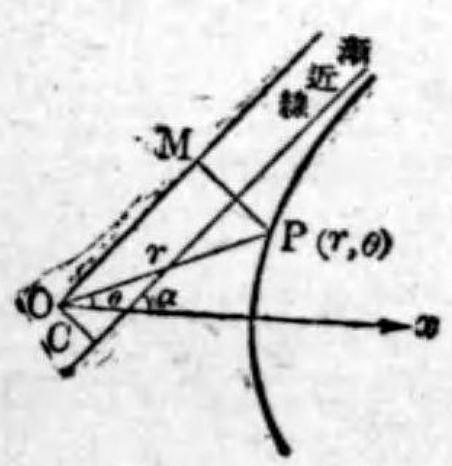
$$r\cos\left(\theta-\frac{\theta}{n+1}\right)=r^{\frac{1}{n+1}}a^{\frac{n}{n+1}}.$$

$$\therefore\ r^{\frac{n}{n+1}}\cos\left(\frac{n\theta}{n+1}\right)=a^{\frac{n}{n+1}}.$$

是求メル包絡線ノ方程式デアル.

第四十三章　漸近線並ニ曲線ノ追跡

漸近線　漸近線トハ其ノ第一定義ニヨルト動點ガ無限分枝ニ沿ヒテ原點ヨリ無限大ノ距離ニ進ムトキ, 其ノ點ヨリ或一定直線ニ下シタル垂線ノ長サガ無限小ナル如キ定直線ノコトデアル. 故ニ今與ヘラレタ曲線ヲ $r=f(\theta)$ トシ其ノ漸近線ヲ



$$R\sin(\alpha-\Theta)=C$$

トスル. コヽニ α ハ漸近線ガ原線 Ox トナス角ニシテ, C ハ極 O ヨリ漸近線ニ下シタ垂線ノ長サデアル. 今曲線上ノ一點 $P(r,\theta)$ ガ其無限分枝ニ沿フテ

動クトキ, OP ノ距離ガ無限大トナル極限ノ位置ニ於テ直線 OP ハ漸近線ニ平行トナル. 之ヲ OM トスル. 然ルトキハ角 MOx ハ α ニ等シクナル. 故ニ α ヲ求メルニハ曲線ノ方程式ニ於テ $x\to\pm\infty$ ナルトキノ θ ノ値ヲ求メレバヨイ.

次ニ P ヨリ OM ニ下シタ垂線ヲ PM トスルト

$$PM=r\sin(\alpha-\theta).$$

$$\therefore\ C=\lim_{\theta\to\alpha} r\sin(\alpha-\theta)$$

トナル. 斯クシテ得タル α, C ヲ用ヒテ求メル漸近線ハ

$$R\sin(\alpha-\Theta)=C$$

トナル.

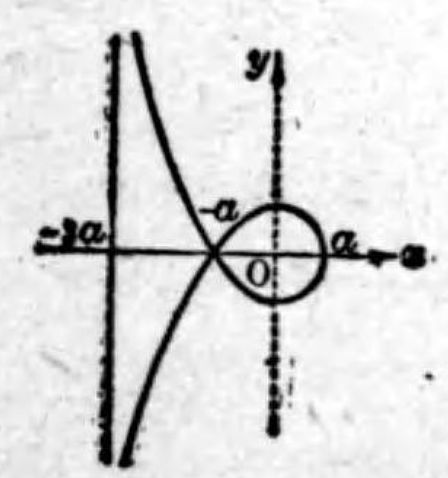
C ヲ決定スルニ漸近線ノ第二ノ定義ヲ用ヒルト次ノ如クナル. 即チ C ハ漸近線ヲ曲線 $r=f(\theta)$ ノ無限遠點ニ切點ヲ有スル切線ト見做シタトキノ切線影トナルカラ

$$C=\lim_{r\to\infty} r^2\frac{d\theta}{dr}$$

トナル.

例題 1.　$r=a\sec\dfrac{\theta}{3},\quad a>0.$　ノ漸近線ヲ求メヨ.

[解]



$$\alpha=\lim_{r\to\infty}\theta=\lim_{r\to\infty}3\sec^{-1}\frac{r}{a}=\frac{3\pi}{2}.$$

$$C=\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}} r\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}} a\sec\frac{\theta}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=a\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\frac{\theta}{3}}=a\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}}\frac{3\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{3}}=3a.$$

故ニ求メル漸近線ハ

$$r\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=3a.$$

此ノ式ハ之ヲ次ノ如クシテ直角座標ニ直スコトガ出來ル.

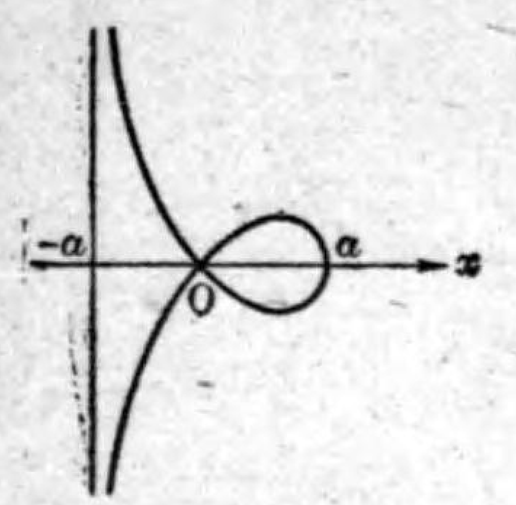
$$r\left(\sin\frac{3\pi}{2}\cos\theta-\sin\theta\cos\frac{3\pi}{2}\right)=3a.$$

$$\therefore\ r\cos\theta=-3a.\qquad \therefore\ x=-3a.$$

卽チ y 軸ニ平行トナル.

例題 2. $r\cos\theta=a\cos 2\theta$ ノ漸近線ヲ漸近線ノ第二定義ニ依ツテ求メヨ.

[解]



$$r=\frac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

故ニ $r\to\infty$ ナラシメル θ ハ $\theta\to\frac{\pi}{2}$. $\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{a(-2\sin 2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos 2\theta)}{\cos^2\theta}.$$

$$\therefore\ r^2\frac{d\theta}{dr}=\frac{a^2\cos^2 2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta\cdot a(-2\sin 2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos 2\theta)}.$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} r^2\frac{d\theta}{dr}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos^2 2\theta}{-2\sin 2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos 2\theta}=-a.$$

故ニ求メル漸近線ハ

$$r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-a.\qquad \therefore\ r\cos\theta=-a.$$

例題 3. 曲線 $(r-a)\sin\theta=b$ ノ漸近線ヲ求メヨ.

[解] $r=\frac{b}{\sin\theta}+a$ ナル故ニ n ヲ零又ハ任意ノ整數トスルト $\theta=n\pi$ ノトキ $r\to\infty$ トナルカラ $\alpha=n\pi$.

又

$$C=\lim_{\theta\to n\pi}\left(\frac{b}{\sin\theta}+a\right)\sin(n\pi-\theta)=b\lim_{\theta\to n\pi}\frac{\sin(n\pi-\theta)}{\sin\theta}+a\lim_{\theta\to n\pi}\sin(n\pi-\theta)$$

$$=b\lim_{\theta\to n\pi}\frac{-\cos(n\pi-\theta)}{\cos\theta}.$$

故ニ $n=2m$ ナルトキ $C=-b$, $n=2m+1$ ナルトキ $C=b$.

故ニ漸近線ハ

$$r\sin(2m\pi-\theta)=-b.\qquad \therefore\ r\sin\theta=b.$$

$$r\sin\{(2m+1)\pi-\theta\}=b.\qquad \therefore\ r\sin\theta=b.$$

卽チ漸近線ハ直角座標デハ $y=b$ デアル.

曲線ノ追跡

極座標ニ於ケル曲線ノ追跡モ亦直角座標ニ於ケル場合ト同様ニ行ヘバヨイ. 卽チ次ノ如クスル.

(1) 與ヘラレタ方程式ヲ追跡ニ便利ナル形ニ變ズル.

(2) 原線, 極又ハ他ノ定直線, 定點ニ關スル對稱ノ有無ヲ吟味スル.

(3) 曲線ノ存在スル區域ヲ定メル.

(4) $\frac{dr}{d\theta}$ ノ値ヲ求メ且其ノ正負ヲ吟味シテ極値ヲ決定スル.

(5) 曲線ノ凹凸及ビ變曲點ヲ求メル.

(6) 動徑ト切線トノ間ノ角ヲ求メル.

(7) 漸近線ヲ求メル.

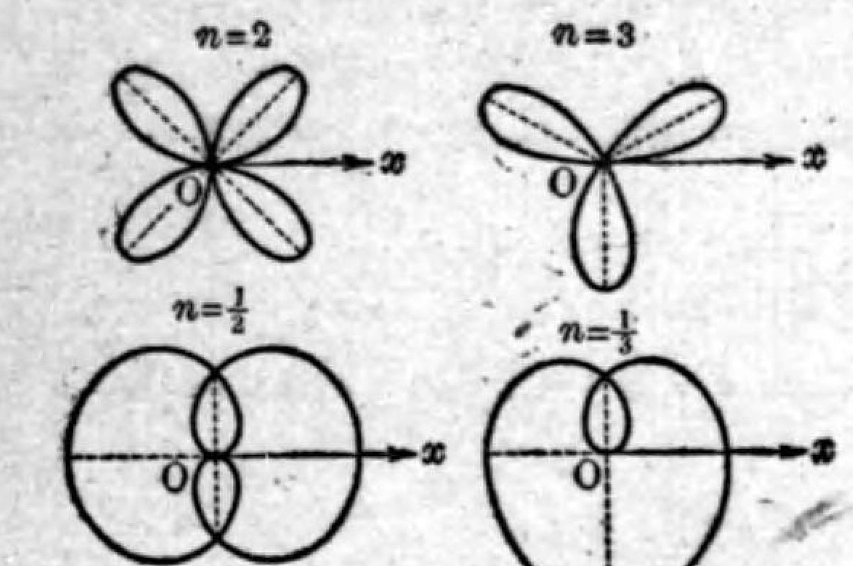
(8) 曲率ヲ求メル.

(9) r 又ハ θ ニ順次ニ種々ノ値ヲ代入シテ之ニ對應スル θ 又ハ r ノ値ヲ求メテ曲線上ノ値ヲ定メル.

例題 1. 次ノ曲線ヲ追跡セヨ.

$$r=a\sin n\theta,\qquad a>0.$$

[解] (1) **對稱ノ有無** 此ノ方程式ハ r ヲ $-r$, θ ヲ $-\theta$ トシテモ其ノ形ヲ變ヘナイカラ, 曲線ハ極ヲ通過シテ原線ニ垂直ナル直線ニ對シテ對稱デアル.



(2) **存在區域** $|\sin n\theta|\leqq 1$ デアルカラ $|r|\leqq a$, 卽チ曲線ハ極ヲ中心トシ半徑 a ナル圓ノ外部ニハ存在シナイ. 從ツテ漸近線ヲ有シナイ.

(3) **極値**

$$r'=an\cos n\theta,\qquad r''=-an^2\sin n\theta.$$

故ニ $\theta=\frac{m}{n}\pi+\frac{\pi}{2n}$ ニ於テ r ハ極値ヲ取ル. 例ヘバ $m=0$ ナルトキ卽チ $\theta=\frac{\pi}{2n}$ ノトキハ極大. $m=1$ ナラバ, $\theta=\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}$ デ極小トナル.

(4) **變曲點** $r^2+2r'^2-rr''=a^2(\sin n\theta)^2+a^2n^2(1+\cos^2 n\theta)>0$. 卽チ $r^2+2r'^2-rr''$ ガ常ニ正ナル故變曲點ヲ有シナイ.

(5) **動徑ト切線トノナス角**

$$\tan\varphi=\frac{r}{r'}=\frac{\tan n\theta}{n}.$$

故ニ $\theta=\frac{m}{n}\pi$ ノトキ $\varphi=0$, $\theta=\frac{2m+1}{2n}\pi$ ノトキ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ デアル. 但シ m ハ整數デアル.

(6) $r=f(\theta)$ ノ變化表

θ	0	$\frac{\pi}{4n}$	$\frac{\pi}{2n}$	$\frac{3\pi}{4n}$	$\frac{\pi}{n}$	$\frac{5\pi}{4n}$	$\frac{3\pi}{2n}$	$\frac{7\pi}{4n}$	$\frac{2\pi}{n}$
r	0	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$-a$	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	0