中學畢業試驗準備用書

代　數

張鴻濱著

上海大東書局印行

代數問答目次

代數問答

第一類　代數概念

1. 問　什麼叫代數學？

答　代數學是研究用未知數字去解答問的科學。

2. 問　代數裏所必用的原素有那幾樣？

答　任何一個代數式，必須包含三個要素，就是

(1) 文字或叫做未知數。

(2) 數字。

(3) 運算符號。

3. 問　什麼文字是代數學中所用的？

答　代數學中所用的文字，普通是英文字母。在前半部的字母，大都作為已知數字看待，如 a.b,c,d等，這樣好像 123 等一樣。在後半部的字母如 x,y,z 等，則叫作未知數。

4. 問　代數裏所用的運算符號完全和算術上的相同嗎？

答　不完全相同，大體算術上所用的運算符號，如(＋)，(－)，(×)，(÷)，(＝)，({})，([])，(())等，都可應用在代數上。此外代數上還有性質符號，省略符號等，都是算術上所沒有的。

5. 問 什麼叫性質符號？

答 性質符號是用（＋）或（－）加在數字或文字之前，表明這個數是正的或負的，譬如 1,2,3, a,x,y 都是正的，通常都不寫出（＋）符號，而 $-1,-2,-3,-a,-x,-y$ 等則是負的。

6. 問 什麼叫作正或負呢？

答 正的就是和我們人所說的話，成所問的意思相同的答語，如民國十五年是北伐時期。這個十五年就可寫為15年，又如某人生在民國紀元前70年，活了46歲，問他死在民國紀元前那年，你可答說

$70-46+1=25$ 年。

負的意思是和所說的或所問的話意正相反對

，或者和實際情形反對等，如一個人向前走，而你偏用負向後退若干步來回答，又如上例民國十五年，也可說是民國紀元前(−15)年。某人死在民國前25年，可改說他死在民國紀元後負25年(−25年)，這就是說所答的和他本句完全相反。

7. 問　什麼叫省略符號？

答　在代數上不比算術上任何符號都不能省略；他常常不寫出那些符號，而學的人自然知道，如

(1) 乘號　數字與文字間，文字與文字間，及括號的前後大都不寫(×)

注意：——數字與數字間的乘號決不能省略。

(2) 除號　除號通常以(/)代之，如 $a \div b$ 可寫爲a/b

(3) 係數爲一時，一字也不寫。

8. 問　什麼叫作係數？

答　係數是以一數爲主，其餘和牠相乘的各數就叫作係數，或者說是乘積的一部因數對他部因數而言，就叫做係數，如 $27x$ 的 27 爲x係數。$3axy$ 的 $3ay$ 爲 x 係數，或 $3ax$ 爲 y 係數。x 的係數爲 1.

係數普通祇限於數字或已知數，所以 $3axy$ 都祇以 $3a$ 算爲 xy的係數。

9. 問　代數的形式如何？

答　代數的形式爲文字數字符號三者聯結而成。例如

$7abxy$，　$\frac{1}{3}a^2b^2xy$，　a^2bx

10. 問　什麼叫項？

答　代數中祇有乘除號而無加減號的形式，就名之爲項，如

$5x$，$210a^2bx$，$\frac{9}{4}x^2$，$\frac{8abx}{12ay}$

又括號內若有加減號時，在未去括號前也叫做項，如 $4x(a+y)$，$(5a^2b^2-2c)x$

11. 問　什麼是代數式？

答　結合各項而以加減號置於其中的就是代數式如 $6x^2+\frac{4}{3}x$，$5y+7x-3xy$.

一個代數式中祇有一項叫做獨項(或名單項)代數式，有二項的叫做兩項(或名複項)代數式，有三項的叫做三項代數式，餘類推，不

過比兩項多的代數式也可總名之爲多項式。

12. 問 什麼是方程式？

答 兩個代數式彼此相等。於是把牠們分置於等號的兩側。這種含有等號的形式就叫作方程式。

13. 問 方程式有幾種？

答 方程式的種類很多：

(1) 依其指數而分，有一次方程式，二次方程式，高次方程式（卽二次以上的方程式）齊次方程式。

(2) 依其未知數而分，有一元方程式，二元方程式，多元方程式。

(4) 依方程式的個數言，有一個方程式及聯立方程式之分。

(4) 依其各項形式而分，有整數方程式，分數方程式，有理方程式，無理方程式，虛數方程式等。

(5) 依其根値而分、有等値方程，不等値方程式，共軛方程式等。

14. 問　何謂冪？何謂次數？

答　冪就是指數，就是每一個數自乘若干次的意思如 x^2, y^3, a^8 等。

次數是指一項內所有指數的總和，如 xy^2 是三次項，a^2b^3 是五次項等。

15. 問　何謂齊次？

答　代數式中的各項次數都同的就是齊次。

16. 問　什麼叫根？

答 根的意義，在普通是指某數被開幾次方後所得的值，名爲根，如$\sqrt{a}$爲求平方根，$\sqrt[3]{b}$爲求立方根等。若用在某方程式上，則根的意義是求這個方程式內未知數的值的意思。

17. 問 方程式的根有幾種？

答 有七種，卽等根，不等根，共軛根，有理根，無理根，虛根，實根。

18. 問 說明上述七種根的區別？

答 等根是一個未知數含有兩個根，彼此相等的。

不等根是一個未知數能得兩個不同的根。

有理根是求得的根純爲整數。

無理根是未知數的根沒有眞正的整數，卽永遠開不盡方的根。

共軛根是有理根與無理根混合存在者，多超於二項。

虛根是根號內爲負值的形式。

實根，是根號內爲正值的形式。

19. 問　什麼叫代數數，絕對值？

答　代數數是含有數字與文字並存的值，如 3a, 絕對值是祇有數字而無文字的值，如7,8.等。

20. 問　項的種類有幾種？

答　項有三種，凡是兩項的未知數文字與指數都相同的叫做同類項。凡是兩項的未知數文字與指數都不相同的叫做異類項，若是沒有未知數的則叫做絕對項。

21. 問　括號運用的規則如何？

答 在加法裏括號取消或應用，都是一樣，沒有什麼影響，如

$$2x+3y+7z+8q=2x+(3y+7z+8q)$$

$$=2(x+4q)+3y+7z$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

任意的括否，都可以。

在減法裏則視其所要括的前一項符號而有變更，如前一項符號爲正，沒什麼問題。如前一項符號爲負，則須將所要括的各項完全使(+)變(−)，(−)變(+)始可，如

$$3a-2b+(4c+12a)+(4b-8c)=$$

$$=3a-[2b+4c-12a-(4b-8c)]$$

$$=3a-[2b-\{12a-4c-4b+8c\}]$$

$$=3a-[2b-(12a-4b+4c)]$$

$$=3a-[2b-12a+4b-4c]$$

$=3a-(6b-12a-4c)$

$=3a-6b+12a+4c$

$=15a-6b+4c$

在乘除法裏加入括號或取消括號，沒有什麼變動，不過表明先算括號內的乘積或商數後，再算外面的。

22. 問　怎樣叫加法或減法的交換律？

答　所謂交換律，就是說各項前後秩序沒有一定，可連同符號一齊移動。如

$a^2-3ab+4b^2=4b^2+a^2-3ab$

或 $=4b^2-3ab+a^2$

或 $=-3ab+a^2+4b^2$等。

23. 問　怎樣叫加法或減法的結合

律？

答　應用括號可任意結合各項的就叫作結合律，結合律在有負號在前時，須變換所結合各項的正負性質。如

$$8a^2+4c-5d-6d=4(2a^2+c)-(5b+6d)$$

或 $=2(4a^2-3d)+(4c-5b)$

或 $=2(4a^2+2c-3d)-5b$ 等。

24. 問　怎樣叫乘法的交換及結合定律？

答　乘數與被乘數位置可以互易。或多項的乘數與被乘數各自可行加減法的交換及結合定律，乘積不變，這就叫作乘法的交換及結合定律。

5. 問　除法也有交換及結合定律

嗎？

答　除法中雖在諸除數中或各自代表數式中行交換及結合定律。但被除數與除數間絕不能行交換律。

26. 問　在加減法中運用符號的規則如何？

答　在加法中運用符號，沒什麼關係。和的各項符號，與加數中相當各項符號同，卽與諸加數項符號相同，若加數相當各項有正負關係時，從其大者的符號。

符號在遇減法時，則先變減數的各項符號，然後與被減數相加。

27. 問　乘法的符號如何？

答　乘法的符號運用規則有四

(1) 正×正=正　或 $(+)\times(+)=(+)$

(2) 正×負=負　或 $(+)\times(-)=(-)$

(3) 負×正=負　或 $(-)\times(+)=(-)$

(4) 負×負=正　或 $(-)\times(-)=(+)$

卽同號相乘爲正，異號相乘爲負。

28. 問　除法的符號有何關係？

答　除法中的符號運用與乘法同，因除法的被除數。就是乘法中的積而除數實與乘法中的乘數相當也。所以得

(1) 正÷正=正　或 $(+)\div(+)=(+)$

(2) 負÷負=正　或 $(-)\div(-)=(+)$

(3) 正÷負=負　或 $(+)\div(-)=(-)$

(4) 負÷正=負　或 $(-)\div(+)=(-)$

換言之同號相除爲正，異號相除爲負。

29. 問　乘除各項若有指數時如何計算？

答　乘除各項若有指數，在乘法中同元的指數相加，在除法中同元指數應相減即被除數文字的指數減除數同文字的指數。

第二類　四則問題

30. 問　代數式的加法如何？

答　代數式的加法，就是將凡屬同類項結合起來。換言之，同類項係數相加，而不同類項則仍以代數式表之。如

(1)

$$\begin{array}{r} a+b \\ 4a+b \\ \hline 5a+2b \end{array} \Big\} +$$

(2)

$$\begin{array}{r} 3a+4b \\ a-2b \\ \hline 4a+2b \end{array} \Big\} +$$

(3) (4)

$$\begin{array}{r} a+a^2+4a^3 \\ -4a-a^2+2a^3 \\ \hline -3a\qquad+6a^3 \end{array}\Bigg\}+ \qquad \begin{array}{l} m^2+mn+n^2 \\ m^2-mn-n^2 \\ \hline 2m^2 \end{array}\Bigg\}+$$

31. 問　代數式的減法怎樣計算？

答　代數式的減法是先將減數的符號變換，即是將(＋)變爲(－)，(－)的變爲(＋)。然後照加法和被減數相加即可。如

(1) (2)

$$\begin{array}{l} 3a-2b \\ 2a-3b \\ \hline a+b \end{array}\Bigg\}- \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y \\ \hline -\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}y \end{array}\Bigg\}-$$

(3) (4)

$$\begin{array}{l} 2x-y \\ 2x+y \\ \hline -2y \end{array}\Bigg\}- \qquad \begin{array}{l} 2a^2+2x^2+2c^2 \\ -6a^2-6b^2\quad-6ab \\ \hline 8a^2+6b^2+2x^2+2c^2-6ab \end{array}\Bigg\}-$$

32. 問　多次減法怎樣計算？

答　先將任一個減數由被減數減去，以

所得差數再減另一個減數，如此遞推。如求 $b+2c-3a-(-3b+c+2a)-(2b-3c+a)$的差數。

$$\begin{array}{r} b+2c-3a \\ -3b+c+2a \\ \hline 4b+c-5a \\ 2b-3c+a \\ \hline 2b+4c-6a \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} - \\ \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} - \\ \\ \end{array}$$

又法，可先將各減數互加，然後由被減數減去這個和數卽得，如上題

$$\begin{array}{r} -3b+c+2a \\ 2b-3c+a \\ \hline -b-c+3a \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} +$$
$-b-c+3a$……各減數之和

$$\begin{array}{r} b+2c-3a \\ -b-2c+3a \\ \hline 2b+4c-6a \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} -$$

33. 問 代數式的簡單乘法怎樣？

答　簡單乘法大抵有一個乘式是單項或俱爲單項。這是很容易的，就是將那個單項乘式拿來乘他式的各項。依着乘的符號規則及指數規則就得出乘積。如

$$2a^3\times 5a^2=10a^{3+2}=10a^5$$

$$(-3x^2+3x^3-4x^4)(-6x^4)$$
$$=18x^5-18x^6+24x^7$$

34. 問　多項式的乘法怎樣？

答　多項式的乘法，須先以乘數的左端首項乘被乘數各項，再依次以乘數自左至右的各項逐一去乘被乘數，然後將同類項相加就得乘積，牠的形式有兩種

(1) 排列式

(a)

$$
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}16p^2+20pq+25p^2\\4p-5p\end{array}\right\}\times\\
\hline
64p^3+80p^2q+100pq^2\\
\qquad\quad -80p^2q-100pq^2-125q^3\\
\hline
64p^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -125q^3
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}x^3-4x^2y+6xy^2-3y^3\\3x^2-4xy+5y^2\end{array}\right\}\times\\
\hline
3x^5-12x^4y+18x^3y^2-9x^2y^3\\
\qquad -4x^4y+16x^3y^2-24x^2y^3+12xy^4\\
\qquad\qquad\qquad 5x^3y^2-20x^2y^3+30xy^4-15y^5\\
\hline
3x^5-16x^4y+39x^3y^2-53x^2y^3+42xy^4-15y^5
\end{array}
$$

(2) 心算式

(a) $(a^2-ab+b^2)(a+b)$

$=a^3-a^2b+ab^2+ab^2-ab^2+b^3$

$=a^3+b^3$

(b) $(2x^3-3x^2y+2xy^2+y^3)(x^2+3xy+2y^2)$

$=2x^5-3x^4y^7+2x^3y^2+x^2y^3+6x^4y$

$-9x^3y^2+6x^2y^3+3xy^4+4x^3y^2$

$-6x^3y^3+4x^4y+2y^5$

$=2x^5+3x^4y-3x^3y^2+x^2y^2+7xy^4+2y^5$

35. 問　除法中除數爲單項的怎樣算呢？

答　以除數除被除數第一項得商數第一項，除被除數第二項得商數第二項。如此遞推。如

$25a^7b^6c^4\div(-5a^6bc^4)$

$=-(25a^7b^6c^4\div5a^6bc^4)=-5ab$

又如$(3x^2-5ax)\div x=(3x^2\div x)-(5ax\div x)$

$=3x-5a$

36. 問　多項式的除法又怎樣計算呢？

答　多項式的除法有兩類，一是被除數

項數祗二項。一是被除數與除數俱爲多項，牠們算法是先以除數第一項除數被除第一項得首項商數，以此商數乘除數各項，再由被除數減之若有餘數則再依同法得第二項商數以第二項商數乘除數與餘數相減。如此遞推，至無餘數時止。如

(1) 被除數爲二項者。如

$$(a^3x^3+b^3y^3)\div(ax+by)=?$$

$$
\begin{array}{l|l}
a^3x^3+b^3y^3 & ax+by \\
\cline{2-2}
\underline{a^3x^3+a^2bx^2y} & a^2x^2-abxy+b^2a^2// \\
-a^2bx^2y & \\
\underline{-a^2bx^2y-ab^2xy^2} & \\
\qquad ab^2xy^2+b^3y^3 & \\
\qquad \underline{\underline{ab^2xy^2+b^3y^3}} &
\end{array}
$$

(2) 被除數與除數俱爲多項者。如

$$
\begin{array}{l}
16x^6-97x^4-84x^2+77x+8 \\
\qquad\qquad \underline{|\,4x^2+11x+1} \\
\qquad\qquad\ \ 4x^4-11x^3+5x^4-11x+8 \\
\underline{16x^6+44x^5+4x^4} \\
\quad -44x^5-101x^4 \\
\quad \underline{-44x^5-121x^4-11x^3} \\
\qquad\quad 20x^4+11x^3-84x^2 \\
\qquad\quad \underline{20x^4+55x^3+5x^2} \\
\qquad\qquad -44x^3-89x^2+77x \\
\qquad\qquad \underline{-44x^3-121x^2-11x} \\
\qquad\qquad\qquad 32x^2+88x+8 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{32x^2+88x+8}
\end{array}
$$

37. 問　若乘除式的指數甚高，而秩序無定，對於計算有何影響否？

答　自然有不便於計算的影響，尤於除法中為甚，普通多半按着指數的大小依次排列起來。這叫作整理。

38. 問　整理的方法有幾種。

答 整理在四則中是很需要的，約有五種

(1) 依交換及結合定律的整理，或名同類項整理法。

(2) 化簡法的整理。

(3) 依指數大小的整理法，有升冪及降冪之分。

(4) 依文字次序整理法。

(5) 去括弧的整理法。

39. 問 何謂化簡整理法？

答 化簡有二意義，一是同類項相加減的化簡，一是同元指數相歸併的化簡，前者屬同類項整理法後者可依指數規則而整理之。

40. 問　何謂升冪與降冪？

答　代數式中各項排列，是按着指數大小而定，凡小的指數在前而依次漸高的謂之升冪，若大的指數在前而依次漸低的謂之降冪。

41. 問　$a-2x+4y-3z-2b+c$ 將 a 與 x, b 與 y, c 與 z 各括於一弧中，且括弧中之 a,b,c, 必須爲正。

答　原題括之爲

$$a-2x+4y-3z-2b+c=(a-2x)-(2b-4y)+(c-3z)$$

42. 問　$a^5+3a^4-2a^3-4a^2+a+1$ 將 a 的奇數冪括於正括弧中

偶數羃括於負括弧中。

答 $a^5+3a^3-2a^3-4a^2+a+1$

$=(a^5-2a^3+a)-(-3a^4+4a^2-1)$

43. 問 $-3a-2b+2c+5d-e-2f$

順次每兩項括以一弧且括

弧之符號，奇項者相同。

答 $-3a-2b+2c+5d-e-2f$

$=-(3a+2b)+(2c+5d)-(e+2f)$

44. 問 $a^3+b^3+c^3-3abc-a(a^2-bc)$

$-b(b^2-ac)-c(c^2-ab)=$?

答 $a^3b^3+c^3-3abc-a(a^2-bc)-$

$b(b^2-ac)-c(c^2-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc-$

$(a^3-abc)-(b^3-abc)-(c^3-abc)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc-a^3+abc-b^3+abc-b^3+$

$abc-c^3+abc=0$

45\. 問 $\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}xy+y^2\right)$

$\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}xy+y^2\right)=$?

答 $\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}xy+y_2\right)$

$\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}xy+y^2\right)$

$=\left\{\left(\frac{1}{4}x^2+y^2\right)+\frac{1}{2}xy\right\}\left\{\left(\frac{1}{4}x^2+y^2\right)-\frac{1}{2}xy\right\}$

$=\left(\frac{1}{4}x^2+y^2\right)^2-\left(\frac{1}{2}xy\right)^2$

$=\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}x^2y^2+y^4-\frac{1}{4}x^2y^2=\frac{1}{10}x^4$

$+\frac{1}{4}x^2y^2+y^4$

46\. 問 $(x+1)(x+2)(x+3)-(x-1)$

$(x-2)(x-3)=$?

答　$(x+1)(x+2)(x+3)=$

$$x^3+6x^2+11x+6\cdots\cdots(1)$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6\cdots(2)$$

(1)－(2) 即得原題 $=12x^2+12$

47. 問　$(x^3-3x^2+3x+y^3-1)\div$

$\{x+(y-1)\}=$?

答　$x^3-3x^2+3x+y^3-1$

$$\underline{|\,x+(y-1)}$$

$$x^2-(y+2)+(y^2+y+1)$$

$$\underline{x^3+x^2(y-1)}$$

$$-x^2(y+2)+3x$$

$$\underline{-x(y+2)-x(y-1)(y+2)}$$

$$x(y^2+y+1)+y^3-1$$

$$\underline{x(y^2+y+1)+(y-1)(y^2+y+1)}$$

48. 問　0對四則有重要性否？

答　0 對加法，完全無作用，對於減法若 0 爲被減數，其差應變號。對於乘除最爲

重要。凡乘數一部份有等於0時，則全部積亦爲0，換言之，積爲0時必乘數中有一部等於0，或都等於0 。在除法中，被除數爲0，商亦爲0，除數爲0，則不能計算。

第三類　一項方程式

49. 問　解方程式的步驟如何？

答　解任何方程式，都要遵守下列步驟

(1) 化簡

(2) 整理

(3) 移項

(4) 求值

(5) 考核值的眞僞。

50. 問　什麼叫移項？怎樣移法？

答　移項是將同類項歸於等號的同側。

或將所有各項都歸於等號的一側（普通是左側)而令他側爲0。移項的方法有二

(1) 原則的　卽利用等量加等量，其和等的公理。方程式的兩側同時加所欲移的項的相反性質的值，如

[例] $79+21=64+36$,移21爲右側，移36於左側。

[解] 兩邊同加 -21 及 -6

$79+21-21-36=64+36-21-36$

$\therefore 79-36=64-21$

又如 $2x+7=x+12$ 使x獨居左邊。

[解] 兩邊同加 $-7-x$

$2x+7-7-x=x+12-7-x$

$2x-x=12-7$

$\therefore\ x=5$

(2) 習慣的　當原則的方法熟悉後，普通多嫌其麻煩。於是祇運用其結果，而不加以說明，即欲移何項時，可改變該項的符號而移於等號之他一邊。

如 $a+b=c-d$ 移 b 於右邊。移 d 於左邊。

[解] 移項

$$a+d=c-b$$

又如 $2a-2=30-6a$ 使 a 居左邊

[解] 移項

$$2a+6a=30+2$$

$$8a=32$$

51. 問　求值法如何？

答　在簡單的方程式即一元一次方程式

，移未知數於一側，已知數於他一側，然後利用等量除等量其商亦等的公理，使未知數係數成一時，卽得所求之值。如

$3x+5=x+9$

［解］將原式移項

$3x-x=9-5$

$2x=4$

兩邊同以2除　　$\therefore x=\frac{4}{2}=2$

至於高項或多元的方程式，其求值法甚多，以後詳述。

52. 問　何故須考核根值？

答　因在解算時應用公理，每無形中增加僞根。尤其在應用問題中，就是沒增加僞根，也常有所答非所問的，加上負值一數，

常與實際所問相反，甚則也不是實際物質所能有，所以求得的根值，必須考核。

53. 問　考核根值的方法如何？

答　將求得的根值代入方程式的一側。然後再代入他側，結果兩側相等，卽表明所求無誤。

然後再審察根值的性質是否合於題意。

54. 問　解方程式所應用的公理有幾？幷列舉之。

答　有六：

(1) 等量加等量其和亦等。

(2) 等量減等量其差亦等。

(3) 等量乘等量其積亦等。

(4) 等量除等量其商亦等。

(5) 等量同乘某次方，其方亦等。

(6) 等量同開某次方，其根亦等。

55. 問 將 $y=\frac{3}{4}x$ 代入 $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}-\frac{x^2}{x^2-y^2}$ 之式中，然後簡單之。

答 〔解〕

$$原式=\frac{x}{x+\frac{3}{4}x}+\frac{\frac{3}{4}x}{x-\frac{3}{4}x}-\frac{\left(\frac{3}{4}x\right)^2}{x^2-\left(\frac{3}{4}x\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{4}{4}\right)x}{\left(1+\frac{3}{4}\right)x}+\frac{\left(\frac{3}{4}\right)x}{\left(1-\frac{3}{4}\right)x}-\frac{\left(\frac{9}{16}\right)x^2}{\left(1-\frac{9}{16}\right)x^2}$$

$$=\frac{\frac{4}{4}}{1+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{\frac{9}{16}}{1-\frac{9}{16}}$$

$$=\frac{4}{7}+3-\frac{9}{7}=2\frac{2}{7}$$

注意　上面的計算順序，係依題文而作。若單求其結果則應如次：

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}-\frac{y^2}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x(x-y)+y(x+y)-y^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x^2}{x^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2x^2}=\frac{1}{1-\frac{9}{16}}=2\frac{2}{7}$$

56. 問　化簡 $m+n-\dfrac{m^2+n^2}{m+n}$

答　[解]

$$原式=\frac{(m+n)^2-(m^2+n^2)}{m+n}$$

$$=\frac{2mn}{m+n}$$

57. 問　有旅客其行李合計之斤數爲 600 斤。而某鐵路之規

則，行李過規定斤數者卽按其斤數多寡收費，今一人付超過斤數費4角，一人付1元4角。若此行李屬於一人則應付2元4角。問規定之斤數若干？

答 設規定之斤數爲x斤，則依題意得式如下：

$$\frac{240}{600-x}=\frac{14+4}{600-2x}$$

解之，得 $240(600-2x)=(14+4)(600-x)$

$$144000-480x=10800-18x$$

$$462x=133200$$

$$x=\frac{133200}{462}=120$$

卽規定斤數爲 120 斤。

58. 問　有人問比達格拉斯門弟子之數，他答以謎語，謂門弟子有一半學哲學，三分之一學數學，其餘欲攻何門尙未定之人數，與新加入之三人相加時恰爲修哲學與數學之人數之四分之一，問總人數爲若干。

答　設總人數爲 x，依題意得式如次：

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\ x\right)=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x+3$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}x=\frac{1}{6}x+3$$

$$\frac{1}{24}x=3 \qquad x=72$$

即門子共有72人。

59. 問　有一人之生涯，其$\frac{1}{6}$爲兒童時期，$\frac{1}{12}$爲青年時期，$\frac{1}{7}$爲結婚時期，經過5年生了一子，又過4年，恰爲其一生年數之半，問其年數如何？

答　設所求之年度爲x，得式如下：

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}\right)x+5+4=\frac{1}{2}x$$

解式得　$x=84$

即其人共活84歲。

60\. 問　有一長方形，其邊之長比其等積正方形之邊多14尺而寬則比他少10尺問此長方形寬長各若干？

答　設正方形之一邊爲x尺

則 $x+14$ 爲長方形之長

$x-10$ 爲長方形之寬

而x^2爲正方形的面積，亦即長方形的面積。

$$\therefore (x-10)(x+14)=x^2$$

$$x^2+4x-140=x^2$$

$$4x=140$$

$$\therefore x=35$$

$$x+14=35+14=49$$

$$x-10=35-10=25$$

卽長4丈9尺寬2丈5尺

61. 問　設有一繩長84尺，以之測井，則井中一段的三倍適等於井外一段的4倍，問井深若干尺。

答　設井深爲x尺，則井外繩長必爲84－x尺，依題意得

$3x=4(84-x)$

$3x=336-4x$

$7x=336$

$\therefore x=48.$

卽井深48尺

62. 問　設象箸之數爲玉杯3倍，配成一桌(八副)後，所餘

箸數爲杯之5倍，問原有象箸玉杯各若干。

答 設玉杯數爲x則象箸數爲3x

依題意，得式

$3x-2\times 8=5(x-8)$

$3x-16=5x-40$

$2x=24$

$\therefore x=12$

$3x=36$

即玉杯12隻，象箸36雙。

63. 問 四數中每三數之和爲 20, 22, 24, 27, 問各數應爲若干？

答 設四數之和爲x，則最小數爲x－27

第二數爲 $x-24$，第三數爲 $x-22$，

第四數爲 $x-20$，故得方程式

$$x-27+x-24+x-22+x-20=x$$

$$4x-x=93$$

$$3x=93 \qquad \therefore x=31$$

即四數爲 $x-27=4$，$x-24=7$，

$x-22=9$，$x-20=11$.

64. 問　有鄉人入市，攜錢 2 袋以其半買肉，以餘錢三分之一買菜。所餘之 6 錢，連袋爲偷兒竊去，問袋中原有幾錢

答　設原有錢爲 x，則買肉餘錢爲 x－

$\frac{1}{2}x$即$\frac{1}{2}x$，此餘錢三分之一爲$\frac{1}{6}x$

故得方程式

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x=6$$

兩邊同乘6.

$$3x-x=36$$

$$2x=36$$

$$x=18$$

即袋中原有18錢。

65. 問　兔在犬前100步，犬逐之，兔6步之時犬能行5步，兔9步之長適等於犬7步之長，問兔行幾步，犬當追及。

答　設所求兎步數爲 x步，則其間犬之步數當爲$\frac{5}{6}x$ 步，又兎9步等於犬7步則犬之$\frac{5x}{6}$步等於兎之$\frac{5x}{6}\times\frac{9}{7}$步，故得

$$\frac{5x}{6}\times\frac{9}{7}=x+100$$

解之　$x=1400$

卽兎行1400步時爲犬追及。

66. 問　酒一石二斗，與水一石八斗，混合爲薄酒，酒九斗與水三斗混合爲濃酒。今欲造酒水等分之酒一石四斗問薄酒與濃酒當各用若干？

答　設薄酒爲 x斗，則濃酒爲 $14-x$ 斗

薄酒每斗之酒爲$\frac{12}{18+12}$ 卽 $\frac{2}{5}$分，水爲$\frac{18}{18+12}$卽$\frac{3}{4}$分。濃酒每斗之酒爲$\frac{9}{9+3}$卽$\frac{3}{4}$分，水爲$\frac{3}{9+3}$卽$\frac{1}{4}$分，今水酒等分，故得

$$\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}(14-x)=\frac{3}{5}x+\frac{1}{3}(14-x)$$

$$8x+210-15x=12x+70-5x$$

$$\therefore\ 14x=140 \qquad \therefore\ x=10$$

$$14-x=4$$

卽需薄酒1石濃酒4斗。

67. 問　甲乙二人，各取圍棋若干枚，甲以所得者多於乙，乃按所有之數與之，乙以所得者多於甲，乃按甲所

餘者返之，甲又以所得者多於乙，更按乙所餘者與之。乙以所得者又多於甲，更按甲所餘者返之，而甲乙之數適各爲16枚，問初取時甲乙各取若干枚？

答 設甲初取爲 x 枚，乙所取必爲 $2\times16-x$ 枚，卽 $32-x$ 枚。甲與乙後，甲餘爲 $x-(32-x)$ 卽 $2x-32$ 枚，乙有 $64-2x$ 枚，乙與甲後，甲所有爲 $4x-64$ 枚，乙所餘爲 $4x-64-(2x-32)$ 卽 $96-4x$ 枚。甲又與乙後，所餘爲 $4x-64-(96-4x)$ 卽 $8x-160$ 枚，乙又與甲後，甲所有爲 $16x-320$ 枚，故知

$$16x-320=16$$

$$16x=336$$

$$x=21 \qquad 32-x=11$$

卽甲初取21枚，乙初取11枚。

68. 問　何謂聯立方程式？

答　方程式中未知數含有二個或二個以上時，必須聯帶有與未知數同元數的數個方程式並存，才能解算，換言之，同時數個方程式並存以解二元或多元的根值者卽為聯立方程式。

69. 問　一次聯立方程式的解法如何？

答　一次聯立方程式的解法有四：

(1) 加減消去法。如

$x + y = 4 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$2x + 4y = 10 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

以(2)式減去(1)式的2倍，得

$2y = 2 \quad \therefore\ y = 1$

以4乘(1)式減去(2)式得

$2x = 6 \quad \therefore\ x = 3$

即用加法或減法，消去一元，使僅留一個未知數，再依一元方程式解法求值。

(2) 代入法如

$5x + 2y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x + y = 4 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

以(2)式移項得 $y = 4 - x \cdots\cdots\cdots(3)$

以(3)式代入(1)式得

$5x + 2(4 - x) = 0$

$3x = -8 \quad x = -\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$

以x值代入(3)式得

$$y=4-\frac{-8}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$$

卽使一未知數爲未知值代入他式以消去一未知數也。

(3) 等置法。如

$$8x=2y+6 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3y=2x-2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

將(2)式整理使同於(1)式的次序得

$$2x=3y+2 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)再4倍之得 $8x=12y+8 \cdots\cdots(4)$

(4)及(1)相等。故

$$2y+6=12y+8$$

$$10y=-2 \quad \therefore\ y=-\frac{1}{5}$$

將y值代入(3)式得 $x=\frac{7}{10}$

道個方法在使幾個方程式都同等於某數。於是無形中消去了一個未知數。

(4) 十字法，或名分離係數法。如

$ax+by+c=0$ ……………………… (1)

$a'x+by+c'=0$ ……………………… (2)

以a'乘(1)式；a乘(2)式。得

$aa'x+a'by+a'c=0$ ……………… (3)

$aa'x+ab'y+a'c=0$ ……………… (4)

(4)－(3)得

$-a'by+ab'y-a'c+ac'=0$

整理之得 $y(ab'-a'b)-(a'c-ac')=0$

$$y=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$$

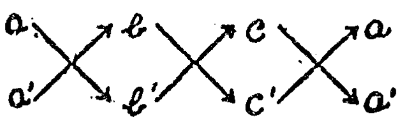
同理以 b' 乘(1)式減去(2)的b倍得

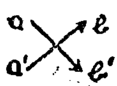
$x(ab'-a'b)+b'c-bc'=0$

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - ab'}$$

這種x及y的值，純是各係數或絕對項，都是已知數。這個值非常重要，名爲二元一次聯立方程式的根值公式。

現在再舉個易記的方法於下：將已知數依次排列



箭頭向下爲正號積。箭頭向上爲負號積。而  之二項積永爲 x,y 二者之分母。以後二十字各順序代表 x, 及y 的各分子。

不過這應注意的就是各數在公式的方程

式中都是正號。

例　$2x+3y=5$ ……………………(1)

　　$x-2y=0$ ……………………(2)

依分離係數法的排列為

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & -0 & 1 \end{array}$$

$$\therefore x=\frac{3\times(-0)-(-2)(-5)}{2\times(-2)-(1)(3)}=\frac{10}{7}$$

$$y=\frac{(-5)(1)-(-0)(2)}{2(-2)-(1)(3)}=\frac{5}{7}$$

70. 問　在上四法中常用的或最便利的是那個？

答　最便利的當然是十字法，不過要解超於二元的一次聯立方程式就不能用，能解任何多元一次聯立方程式的，當以加減消去

法爲便利而簡單。代入法亦可，不過麻煩些。至於等置法，普通多不常用。

71. 問 解多元一次聯立方程式根本法則若何。

答 根本要點，在使多元者逐漸消去俾化爲一元。

72. 問 有若干人以馬若干匹行40里之路，因馬數少於人數，於是計每人平均乘馬行者爲30里。但若馬減3匹人增4個，則騎行僅20里，問最初之人數及馬數各若干？

答　設最初人數爲 x，馬爲 y 匹。得式

$$40y=30x \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$40(y-3)=20(x+4) \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)式得　$y=\frac{3}{4}x \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

將(3)代入(2)式中得

$$40\left(\frac{3}{4}x-3\right)=20(x+4)$$

解之得　$30x-120=20x+80$

$$10x=200$$

$$x=20$$

將x值代入(3)式　$y=\frac{3}{4}\times 20=15$

即人數爲 20，馬數爲15匹。

73. 問　某農夫以所有之儲金買牛羊若干頭，若買牛 4 頭，羊32頭，儲金適盡。若牛

數仍舊，而羊數減半，其所餘之金，除付運費外，尚餘9元。但牛一頭之運費為其總價$\frac{1}{20}$。羊一頭之運費為其總價$\frac{1}{60}$。又牛羊每頭平均之運費為$\frac{3}{10}$元問原有之儲金幾何？又牛羊每頭價若干？

答　設儲金為 x 元。牛一頭價為 y元，羊每頭價為 z 元，則依題意得式如下：

$$4y+32z=x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x-(4y+16z)-\frac{3}{10}(4+16)=9\cdots(2)$$

$$\frac{1}{20}\times 4y+\frac{1}{60}\times 16z=\frac{3}{10}(4+16)\cdots(3)$$

(1)(2)式相加得

$$16z-6=9 \qquad \therefore\ z=\frac{15}{16}$$

以z值代入(8)式得

$$\frac{1}{5}y+\frac{1}{4}=6 \qquad \therefore\ y=\frac{115}{4}$$

將 y,z值代入(1)式得

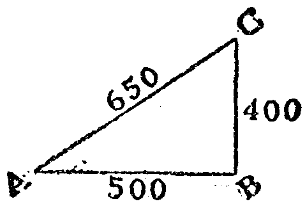
$$x=4\times\frac{115}{4}+32\times\frac{15}{16}=145$$

即儲金爲145元，每頭牛價爲28·75元，羊爲$\frac{15}{16}$元。

74. 問　有一鎗手距靶子 500 碼。射擊後$4\frac{1}{3}$秒時聽得彈中靶子之响聲。又有一旁觀者與鎗手相距 650 碼，與靶子距 400 碼。聞發槍聲

後$2\frac{1}{3}$秒卽聞中靶子之彈聲。問音與彈之速率每秒各幾碼？但音與彈之速率，兩次皆作爲同樣。

答 如圖，A 爲槍手之位置，B 爲靶子之位置，C 爲旁觀者之位置。今設音每秒之速率爲x碼，彈之速率爲y碼，則



音傳播於 AB 間之時間爲$\frac{500}{x}$秒，彈行於 AB 間之時間爲$\frac{500}{y}$秒。又音傳播於 AC 間所要之時間爲$\frac{650}{x}$秒，傳播於 BC 間所需時爲$\frac{400}{x}$秒。依題意得：

$$\frac{500}{x}+\frac{500}{y}=4\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{500}{y}+\frac{400}{x}-\frac{650}{x}=2\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) 式以 xy 乘之得

$$500y+500x=\frac{13}{3}xy\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) 式以 xy 乘之得

$$500x+400y-650y=\frac{7}{3}xy$$

$$500x-250y=\frac{7}{3}xy\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3)—(4)式得 $750y=\frac{6}{3}xy=2xy$

$$\therefore\ x=\frac{750y}{2y}=375$$

將x值代入(3)式中得

$$500y+500\times375=\frac{13}{3}\times375\times y$$

$$500y-13\times125y=-500\times375$$

$$125\times9y=500\times375$$

$$y=\frac{500\times375}{125\times9}=166\frac{2}{3}$$

即音之速力爲375碼，彈之速力爲$166\frac{2}{3}$碼。

75. 問　書二卷，初版合計600頁再版時下卷減$\frac{1}{4}$。上卷增30頁，則上下卷頁數相等。問初版時每卷各若干頁？

答　設初版上卷爲x頁，下卷爲y頁，

故　$x+y=600$ ……………………………(1)

$x+30=y-\frac{1}{4}y$ …………………… (2)

(1)－(2)式得 $y-30=600-y+\frac{1}{4}y$

$7y=2520$　　$\therefore\ y=360$

將 y 值代入(1)式

$$x=600-360=240$$

即上卷初爲240頁，下卷爲360頁。

76\. 問　知 $x^4-3x^3+5x+lx+m$ 爲 $x-2$, $x-3$ 的公倍數。試決定 m 及 l 之值。

答　既云爲二者之公倍數，則二者除之當爲0。

$$x-2)\,x^4-3x^3+5x^2+lx+m$$

$$(x^3-x^2+3x+l+6$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^4-2x^3} \\
\quad -x^3+5x^2 \\
\quad \underline{-x^3+2x^2} \\
\qquad 3x^2+lx \\
\qquad \underline{3x^2-6x} \\
\qquad\quad (l+6)x+m \\
\qquad\quad \underline{(l+6)x-2(l+6)} \\
\qquad\qquad m+2(l+6)
\end{array}$$

$\therefore\ m+2(l+6)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

又 $x-3)x^3-x^2+3x+l+6(x^2+2x+9$

$$
\begin{array}{r}
x^3-3x^2 \\
\hline
2x^2+3x \\
2x^2-6x \\
\hline
9x+l+6 \\
9x-27 \\
\hline
l+33
\end{array}
$$

$\therefore\ l+33=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

田(2)式　　$l=-33,$

將 l 值代入(1)式　$m=54.$

卽 m 值爲54, l 值爲 $-33.$

77. 問　知 $ax+by+6=0$ 及 $bx+ay-4=0$ 的根爲 $x=4, y=2.$ 試決定 a, b 之值。

答　將 x,y 之值代入方程式得

$4a+b+6=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$$2a+4b-4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

依十字法

$$\begin{array}{cccccccc} 4 & & 2 & & 6 & & 4 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 2 & & 4 & & -4 & & 2 \end{array}$$

$$\therefore\ a=\frac{2\times(-4)-4\times6}{4\times4-2\times2}=\frac{-32}{12}=-\frac{8}{3}$$

$$b=\frac{6\times2-(-4)\times4}{4\times4-2\times2}=\frac{28}{12}=\frac{7}{3}$$

78. 問　求下列式之值。

$$2x+y-z-2u=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x-2y+z+u=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$x-3y\times2z\times2u=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$2x+2y-2z-u=11 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

答　將(2),(4)二式相加得

$$3x-z=17 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

將(1),(3)二式相加得

$$3x-2y+z=11 \cdots\cdots(6)$$

將(1)式與(2)式的2倍相加得

$$4x-3y+z=9 \cdots\cdots(7)$$

(5)+(6)式得 $6x-2y=28$

$$3x-y=14 \cdots\cdots(8)$$

(5)+(7)式得 $7x-3y=26 \cdots\cdots(9)$

以3乘(8)式減(9)式　$2x=16$

$$\therefore x=8$$

將x值代入(8)式　$y=3\times8-14=10$

將x值代入(5)　$z=3\times8-17=7$

將x,y,z值代(2)式　$u=2-8+2\times10-7=7$

第四類　乘除公式及因數問題

79. 問 乘除公式有幾？

答 乘與除互可變更，所以舉了乘的公式，也就含有除的公式在內了，故普通祇言乘除公式而不再分列，其種類共有十一，內中常用者五。

80. 問 常用的乘除公式爲何？

答 (1) 二項式的平方。

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

(2) 二項式的積。

$$(ax+c)(bx+d)=$$

$abx^2+(ad+bc)x+cd$ 或簡單的

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

(3) 二數和與差之積

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

(4) 二數的立方

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

(5) 二數的立方和與差

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

81. 問　其餘的乘除公式爲何？

答　除上五者外，尙有

(6) 二數的多次方

$$(x \pm y)^n = x^n \pm ax^{n-1}y + bx^{n-2}y^2$$

$$\pm cx^{n-3}y^3 + \cdots\cdots \pm mxy^{n-1} \pm py^n$$

其係數a,b,c……可由巴司開氏三角形査得。

其末項爲(＋)或(－)視其是否偶數項而定，凡二數差的偶數項俱爲負，奇數項

爲正。

(7) 二數多次方的和與差。

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+$
$\cdots\cdots+b^{n-1})$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+$
$\cdots\cdots+b^{n-1})$

但 n 爲偶數時上列第二式亦可變爲

$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+$
$\cdots\cdots+b^{n-1})$

二數多次方的和時，n 祇能等於奇數始合上列第一式，若爲偶數，則不能分解。

(8) 二數 n 次方加減其m倍$\frac{n}{2}$次方之積的積。

$(x^n+mx^{\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}}+y^n)(x^n-mx^{\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}}$

$$+y^{n})=x^{2m}+y^{2m}-(m^2-2)x^{m}y^{m}$$

(9) 三項式和的立方。

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)$$
$$+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc$$

(10)多項式和的平方。

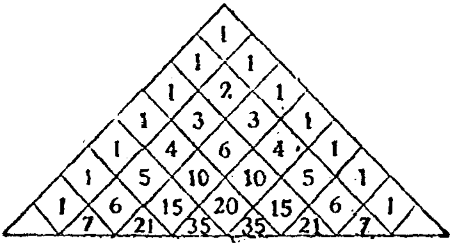
$$(a+b+c+d+\cdots\cdots)^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$+2a(b+c+d+\cdots\cdots)+2b(c+d+\cdots)$$
$$+2c(d+e+\cdots\cdots)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(11)多項式和的立方。

多項式和的立方＝各項立方和 $+3\times$ 每項平方 $\times$ 餘各項和 $+6\times$ 每三項積。

82. 問　何謂巴司開氏三角形。

答　巴司開氏三角形如下：



卽二橫對角數之和爲其下夾角的數字。而第幾橫行各數卽爲 x 幾次方的係數如

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ （第四行）

$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+$

$15x^2y^4+6xy^5+y^6$ （第七行）

83. 問 什麼叫因數？

答 因數就是乘積的部分，如$5\times8=40$ 5和8都叫因數。

84. 問 因數的種類有幾？

答　因數種有二，一爲獨項因數。一爲分羣因數卽因數中包括項數頗多。

85. 問　因數如何求法？

答　因數求法有二，一爲應用以前的公式。一爲係數視察法（多限於三項）

86. 問　係數視察法的規則如何？

答　係數視察法有一定的規則。

(1) 視察x^2及絕對性的性質符號，以定因數內的x及絕對性符號，凡x^2及絕對項性質符號爲正者，因數內或俱爲正，或一部x或絕對性俱爲負，若x^2及絕對項符號有爲負者，則因數必一爲正一爲負。

(2) 視察x的性質符號，以定因數內絕對項正值大或負值大。

（2）分解絕對數值使積＝絕對項，而和＝x的係數。

87。問　試分解 x^4+y^4 的因數

答　$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=(x^2+y^2-\sqrt{2}\,xy)(x^2+y^2+\sqrt{2}\,xy)$

88。問　試分解 $24x^2-30x-75$ 之因數。

答　$24x^2-30x-75=3(8x^2-10x-25)$

因 $8=2\times4,\quad -25=(+5)(-5)$

$-10=4\times(-5)+2\times5$

$\therefore\ 24x^2-30x-75=3(4x+5)(2x-5)$

89。問　試應用 $x^2+px+q=$

$$\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$$

$\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$之公式

分解 x^2+6x+7 之因數。

答 $x^2+6x+7=\left(x+\frac{6}{2}+\frac{\sqrt{6^2-4\times7}}{2}\right)$

$\left(x+\frac{6}{2}-\frac{\sqrt{6^2-4\times7}}{2}\right)$

$=(x+3+\sqrt{2})(x+3-\sqrt{2})$

90. 問 試求 x^4+xy^{15} 之因數。

答 $x^4+xy^{15}=x(x^3+y^{15})$

$=x\{x^3+(y^5)^3\}$

$=x(x+y^5)(x^2-xy^5+y^{10})$

91. 問 試求$x^2-\frac{22}{3}x+\frac{35}{3}$之因數。

答 $x^2-\frac{22}{3}x+\frac{35}{3}=\left(x-\frac{7}{3}\right)(x-5)$

92。問 試求$\frac{x^3y^5}{27}-y-\frac{xy^3}{108}+\frac{1}{4x^2}$

之因數。

答 原式$=\frac{4x^5y^5-108x^2y^2-x^3y^3+27}{108x^2}$

$$=\frac{4x^2y^2(x^3y^3-27)-(x^3y^3-27)}{108x^2}$$

$$=\frac{(x^3y^3-27)(4x^2y^2-1)}{108x^2}$$

$$=\frac{\{(xy)^3-3^3\}\{(2xy)^2-1^2\}}{108x^2}$$

$$=\frac{(xy-3)(x^2y^2+xy-9)(2xy+1)(2xy-1)}{108x^2}$$

93。問 $x+y+z=0$時試證明

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$

答 將 $x+y=-z$ 兩邊立方之

則 $x^4+3xy(x+y)+y^3=-z^3$

$\therefore\ x^3+y^3+z^3=-3xy(-z)=3xyz.$

94. 問　若欲x^2+7x+a能爲$x+4$所除盡，問a之值如何？

答　行除法得商 $x+3$ 與剩餘$a-12$ 故 $a=12$ 卽可整除。

95. 問　若$x=a-b$或$x=a+b$時，試證明$x^2-2ax+a^2-b=0$

答　$x^2-2ax+a^2-b^2=0$

$\therefore (x-a)^2-b^2=0$

$(x-a-b)(x-a+b)=0$

$\{x-(a+b)\}\{x-(a-b)\}=0$

卽 $x=a+b$　或 $x=a-b$

故 $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

96. 問　$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=$

$2(x-y)(x-z)+2(y-z)$

$(y-x)+2(z-x)(z-y)$

試證明之。

答 左邊$=(x^2-2xy+y^2)+(z^2-2yz+y^2)+(z^2-2xz+x^2)$

$=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$

右邊$=2\{(x^2-xy-xz+yz)+(y^2-yz-xy+xz)+(z^2-xy-yz+xy)\}=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$

上式左右兩邊相等，已將題證明。

97. 問 試證明 $x^2+px+q=$

$$\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$$

$$\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\times$$

答 $x^2+px+q=x^2\times px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$

$$=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2$$

$$=\left\{x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right\}$$

$$\left\{x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right\}$$

98. 問 什麼叫最高公因數？

答 最高公因數是幾個代數式的因數中彼此共有的那個最大的因數。簡寫爲 H. C. F.

99. 問　求最高公因數用何法？

答　有五法

(1) 公式求法　以公式求各個因數，然後寫其最高公因數。

(2) 配因數法　當某式非依次爲升羃式降羃時，則可補成順序的次數，求其因數。

(3) 互除法　以甲式除乙式，再以餘數除甲式。得第二次餘式時再除第一次餘式至能整除之餘式卽爲二者之最高公因數，若有超於二以上式時，則先求二式的最高公因數，然後以此公因數再與他式互除，此時所得之公因數卽爲三者的最高公因數。

(4) 分離係數法　此法卽互除法，轉輾相除時祇寫係數而不寫未知數。

(5) 相減求因數法　這是個特殊的方法，先將兩式相減，以其較數求因數，再以因數分別除兩式。誰能整除兩式，則卽爲兩式的最高公因數。

100. 問　x^3+1 與 x^3+mx^2+mx+1 的 H.C.F 以公式法求之。

答　$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$$x^3+mx^2+mx+1=(x^3+1)+mx(x+1)$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)+mx(x+1)$$
$$=(x+1)(x^2-x+1+mx)$$

$\therefore$ H.C.F 爲 $x+1$

101. 問　以公式法求 $x^2-3x-70$, $x^3-39x+70$ 與 $x^3-48x+7$ 的 H.C.F.

答　$x^2-3x+70=(x-10)(x+7)$

$x^3-39x+70=x^3+7x^2-7x^2-49x$

$+10x+70$

$=x^2(x+7)-7x(x+7)+10(x+7)$

$=(x+7)(x^2-7x+10)$

$x^3-48x+1=x^3+7x^2-7x^2-49x+x+7$

$=x^2(x+7)-7x(x+7)+(x+7)$

$=(x+7)(x^2-7x+1)$

$\therefore$ H.C.F. 爲$(x+7)$

按此題後二式的求法卽爲配因數法。

102. 問　以互除法求 $x^4-9x-30x$

-25 與 $x^5+x^4-7x+5x$

的 H.C.F.

答　先化 $x^5+x^4-7x^2+5x=x(x^4-x^3$

$-7x+5)$

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
 & x^4+x^3-7x+5 & x^4-9x^2+30x-25 & 1 \\
-x-8 & x^4+9x^3+23x^2+30x & x^4+x^3\quad -7x+5 & -x-6 \\
\hline
 & -8x^3-23x^2-37x+5 & -x^3-9x^2-23x- & \\
 & -8x^3-72x^2-184x-240 & 30-x^3-3x^2-5x & \\
\hline
 & 49\,|\,49x^2+147x+245 & -6x^2-18x-30 & \\
 & \qquad x^2+3x+5 & -6x^2-18x-30 & \\
\end{array}
$$

$\therefore$ H.C.F. 爲 x^2+3x+5

103. 問　以互除法求 $35x^3+47x^2+13x+1$ 與 $42x^4+41x^3-9x-9x-1$ 的 H.C.F.

答

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
5x & 35x^3+47x^2+13x+1 & 42x^4+41x^3-9x^2-9x-1 & \\
 & & \qquad\qquad x-5 & \\
\hline
1 & 35x^3+40x^2+5x & 210x^4+205x^3-45x^2-45x-5 & 6x+11 \\
\hline
 & 7x^2+8x+1 & 210x^4+282x^3+78x^2+6x & \\
 & 7x^2+8x+1 & & \\
\hline
 & & -77x^3-123x^2-51x-5 & \\
 & & \qquad\times(-5) & \\
\hline
 & & 385x^3+615x^2+255x+25 & \\
 & & 385x^3+517x^2+143x\times 11 & \\
\hline
 & & 14\,|\,98x^2+112x+14 & \\
 & & \qquad 7x^2+8x+1 & \\
\end{array}
$$

∴ H.C.F. 爲 $7x^2+8x+1$

104. 問　以分離係數法求 $x^3-10x^2+26x-8$ 與 $x^3-9x^2+23x-12$ 的 H.C.F.

答　1−10+26−8)1−9+23−12(1

1−10+26−8

1−3−4)1−10+26−8(1−

1−3−4

−7+30−8

−7+21−28

9)9−36

1−4

1−4)1−3−4(1+1

1−4

1−4

1−4

H.C.F. 爲 $x-4$

105. 問　以相減求因數法求 x^3+7x^2

$+17x+15$ 與 x^3+8x^2+19x

$+12$ 的 H.C.F.

答　兩式相減得

$x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

以 $x-1$ 與 $x+3$ 分除原二式，惟 $x+3$ 能整除。　$\therefore$ H.C.F. 爲 $x+3$.

106. 問　什麼叫最低公倍數？

答　某式爲其他諸式整除時，則某式爲諸式的公倍數，但公倍數可無限大，普通祗以最小的那個公倍數計算，名爲最低公倍數。簡寫爲 L. C. M.

107. 問　求諸式的最低公倍數的方法如何？

答　以諸式的公因數及非公因數互乘卽

得。

108. 問　求 $3a^2+2ab$,　$2a^3-18ab$,

$a^3+6a^2b+9ab^2$的 L.C.M.

答　$3a^2+2ab=2a(a+3b)$

$$2a^2-18ab^2=2a(a-9b^2)$$

$$=2a(a+3b)(a-3b)$$

$$a^3+6a^2b+9ab^2=a(a^2+6ab+9b^2)$$

$$=a(a+3b)^2$$

$\therefore$ L.C.M. 爲 $6a(a+3b)^2(a-3b^2)$

第五類　分數問題

109. 問　何謂簡分數？

答　分數的分子分母利用因數解法，消去其公因數，而化爲簡單的形式，卽叫簡分

數。

110. 問　求 $\frac{x^3-3x-2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$ 的簡分數。

答　原式

$$=\frac{x^3+x^2-x^2-x-2x-2}{x^4+x^3+x^3+x^2+x^2+x+x+1}$$

$$=\frac{x^2(x+1)-x(x+1)-2(x+1)}{x^3(x+1)+x^2(x+1)+x(x+1)+(x+1)}$$

$$=\frac{(x+1)(x^2-x-2)}{(x+1)(x^3+x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{x-2}{x^2+1}$$

111. 問　何謂通分母。

答　將諸分數式之諸分母化爲最低公倍數，這種就叫作通分母。

112. 問　試將 $\frac{1}{x^2-(a+b)x+ab}$，

$$\frac{1}{x^2-(a+c)x\times ac},$$

及 $$\frac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$$

行通分母。

答　原三式的分母爲

$$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$$

$$x^2-(a+c)x+ac=(x-a)(x-c)$$

$$x^2-(b+c)x+bc=(x-b)(x-c)$$

$\therefore$ L.C.M 爲 $(x-a)(x-b)(x-c)$

$\therefore$ 通分母後三式化爲

$$\frac{x-c}{(x-a)(x-b)(x-c)},$$

$$\frac{x-b}{(x-a)(x-b)(x-c)},$$

$$\frac{x-a}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

113. 問　化簡 $\frac{2b-a}{x-b}+\frac{b-2a}{x+b}+\frac{3x(a-b)}{x^2-b^2}$

答　原式

$$=\frac{(2b-a)(x-b)}{x^2-b^2}+\frac{(b-2a)(x-b)}{x^2-b^2}$$

$$+\frac{3x(a-b)}{x^2-b^2}$$

$$=\frac{2bx-ax+2b^2-ab+bx-2ax-b^2-2ab\rightarrow}{x^2-b^2}$$

$$\frac{\leftarrow+3ax-3b}{}=\frac{b^2+ab}{x^2-b^2}=\frac{b(a+b)}{x^2-b^2}$$

114. 問　分數的乘法怎樣做法？

答　分子乘分子爲新分子，分母互乘爲新分母。然後求得簡分數卽可。

115. 問　求 $\frac{x^6-y^6}{x^4+2x^2y^2+y^4}\times\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}$

$$\times\frac{x+y}{x^3-y^3}$$

答　原式

$$=\frac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)(x^2+y^2)(x+y)}{(x^2+y^2)^2(x^2-xy+y^2)(x^3-y^3)}$$

$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x+y)}{(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)}=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$$

116. 問　將 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ 化簡

答　原式 $=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x+1}}$

$$=\frac{1}{\dfrac{x+1-x}{x+1}}=\frac{x\times 1}{x+1-x}=x+1$$

117. 問　化簡 $\dfrac{\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}}{\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1-x}{x}}$

答　原式 $=\dfrac{\dfrac{x^3+(1+x)(1-x)}{x(1+x)}}{\dfrac{x^2-(x+1)(1-x)}{x(1+x)}}$

$$=\frac{x^2+1-x^2}{x^2-1+x^2}=\frac{1}{2x^2-1}$$

118。問 分數的除法怎樣做法？

答 分數的除法，可將除數的分子分母倒置，然後以乘法乘被除數即可。

119。問 $\frac{x^3+3a^2x+30x^2+a^3}{x^3+y^3}\div\frac{(a+x)^2}{x^2-xy+y_2}$ 結果爲何？

答 原式$=\frac{(x+a)^3}{(x^3-xy+y^2)(x+y)}$

$$\times\frac{x^2-xy+y^2}{(x+a)^2}=\frac{x+a}{x+y}$$

120。問 化簡$\frac{3}{x+1}-\frac{2x-1}{x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}$

答 原式$=\frac{3}{x+1}-\frac{4x-2}{2x^2+x-1}$

$$=\frac{3}{x+1}-\frac{2(2x-1)}{(2x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{3-2}{x+1}=\frac{1}{x+1}$$

121. 問　將 $\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)}$ 分解為部分分數。

答　$\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$

兩邊各乘以 $(x-1)(x-2)$ 則

$$3x+7=A(x-2)+B(x-1)$$

因通分母後分子 x 項的和等於 3x，而絕對項的和為7

$\therefore$　$3x=Ax+Bx$

即　$3=A+B$ ······························(1)

$7=-2A-B$ ·························· (2)

(1)+(2)　$10=-A.$

(1)×2+(2)　$13=B$

$$\therefore \quad \frac{3x+7}{(x-1)(x-2)}=\frac{13}{x-2}-\frac{10}{x-1}$$

122. 問 解$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+10}=\dfrac{1}{x+4}$
$+\dfrac{1}{x\times 8}$

答 $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x+8}-\dfrac{1}{x+10}$

$$\frac{2}{x^2+6x+8}=\frac{2}{x^2+18x-80}$$

卽 $x^2\times 6x+8=x^2+18x+80$

$\therefore$ $12x=-72 \quad x=-6$

123. 問 試解$\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-4}{x-5}$
$-\dfrac{x-5}{x-6}$

答 將各項自除後得

$1+\dfrac{1}{x-2}-1-\dfrac{1}{x-3}=1+\dfrac{1}{x-5}$
$1-\dfrac{1}{x-6}$

$$\frac{-1}{x^2-5x+6}=\frac{-1}{x^2-11x+30}$$

$$x^2-5x+6=x^2-11x+30$$

$$\therefore\ 6x=24\qquad x=4.$$

124. 問　試解 $\dfrac{13}{x+2y+3}+\dfrac{3}{4x-5y+6}=0$

$$\frac{3}{6x-5y+4}=\frac{19}{3x+2y+1}$$

答　將兩式化之。

$$52x-65y+78+3x+6y+9=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$9x+6y+3-114x+95y-76=0\ \cdots\cdots\cdots\ (2)$$

(1) 化為 $55x-59y+87=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2) 化為 $105x-101y+73=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)−(3) $50x-42y-14=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(3)−(5) $5x-17y+101=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

(6)×10−(4)得

$$128y=1024\qquad\therefore\ y=8.$$

將y值代入(6)式

$$x=\frac{17\times 8-101}{5}=7.$$

125. 問　有二分數，其分子一為 2, 一為 5, 此二分數和之二倍為 3, 二分母交換所成二分數之和為 2, 問原有二分數如何？

答　設 2 之分母為 x, 5 之分母為y,

$$2\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{y}\right)=3$$

$$\frac{4}{x}+\frac{10}{y}=3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{2}{y}+\frac{5}{x}=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由十字法知

$$\frac{1}{x}=\frac{10\times(-2)-2(-3)}{4\times2-5\times10}=\frac{6-20}{8-50}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{y}=\frac{(-3)\times5-(-2)\times4}{4\times2-5\times10}=\frac{8-15}{8-50}=\frac{1}{6}$$

$x=3.\qquad y=6.$

故二分數爲 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{5}{6}$，

126. 問 沿川有甲乙二村，相距12里，一人自甲之乙，步行至半程，舍陸乘舟，溯流而上，共經7時，而抵乙。歸時步行至半程，復舍陸乘舟。順流而下。共經六時而抵甲。但知步行之速，歸時爲往時$\frac{3}{4}$。舟行之速歸時爲往時之二倍

，問往時步行及舟行之速率。

答　設往時步行速爲 x 里，舟行速爲 y 里，步行需時爲 $\frac{6}{x}$ 舟行時爲 $\frac{6}{y}$

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=7\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{6}{\frac{3}{4}x}+\frac{6}{2y}=6$$

$$\frac{8}{x}+\frac{3}{y}=6\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由十字法知

$$\frac{1}{x}=\frac{6\times(-6)-3\times(-7)}{6\times3-8\times6}=\frac{21-36}{18-48}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y}=\frac{(-7)\times8-(-6)\times6}{6\times3-8\times6}=\frac{36-56}{18-48}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ x=2\text{里}\quad y=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}\text{里}$$

第六類　指數及方根問題

127. 問　指數定則如何？

答　指有定則有六，卽

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(4) $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$

(5) $(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

(6) $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ or $\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}} = a^{-\frac{1}{m}}$

128. 問　指數與方根有何關係？

答　方根爲分數指數，換言之，含分數指數的未知數卽表明爲一種方根。故指數定

則即可應用於方根如

$$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n=a^{\frac{n}{m}}=(\sqrt[m]{a})^n$$

$$\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}}=a^{-\frac{1}{m}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a}}$$

129. 問　方根有幾種並略釋之？

答　根有下列幾種：

(1) 有理根，即能開盡的方根。

(2) 無理根，即永無盡數的方根。

(3) 同類根，根之文字相同。

(4) 同次根，根之次數相同。

130. 問　方根式如何化法。

答　(1) 化簡，即將根式含有能開方的

因數化在根號外。如

$$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$$

(2) 分數根式則使分母不爲根式。如

$$\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$$

(3) 與 (1) 法相反卽將根號外之因數化入根號內如 $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$

(4) 化爲同次根。如

$$\sqrt{a^3}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^9}+\sqrt[6]{b^2}$$

若爲同類根則化爲同次根後卽可加減其係數而合爲一項。

(5) 根式的乘除，先化爲同次根，然後實行其文字的乘除。如

$$\sqrt{a^3}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^9}\times\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^9b^2}$$

$$\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^3\times a^2}=\sqrt[6]{a^5}$$

$$\sqrt{a} \div \sqrt[3]{a} = \sqrt{\frac{a^3}{a^2}} = \sqrt[6]{a}$$

131. 問　證明 $a^{\circ} = 1$

答　由指数定則　$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$

當 $n=0$ 時　$a^{m+0} = a^{m} \times a^{\circ} = a^{m}$

卽 $a^{\circ} = 1$

又由　$a^{m} / a^{n} = a^{m-n}$

當 $m=n$ 時　$a^{m-n} = a^{\circ}$

但 $a^{m-n} = \frac{a^{m}}{a^{n}} = 1$

$\therefore\ a^{\circ} = 1$

132. 問　試簡約 $3a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot c^{-3} \times$

$4^{-1} a^{\frac{1}{6}} b^{-\frac{5}{6}} c^{3}$ 之式

答　原式 $= 3 \times \frac{1}{4} \times a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}} b^{\frac{3}{2}+\frac{5}{6}}$

$c^{-3+3} = \frac{3}{4} a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{2}{3}}$

133. 問　試簡$\dfrac{x^{-1}y^{0}z^{-3}}{x^{-2}y^{3}z^{2}}$之式

答　原式$=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times 1\times\dfrac{1}{z^{3}}}{\dfrac{1}{x^{2}}\times y^{3}z^{2}}$

$$=\frac{1}{xz^{3}}\times\frac{1}{\dfrac{1}{x^{2}}\times y^{3}z^{5}}$$

$$=\frac{1}{xz^{3}}\times\frac{x^{2}}{y^{3}z^{2}}=\frac{x}{y^{3}z^{5}}$$

134. 問　化$\sqrt[3]{3}$爲9次根

答　$\sqrt[3]{3}=3\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[9]{27}$

135. 問　簡約$\sqrt[6]{125}$

答　$\sqrt[6]{125}=3\times\sqrt[3]{5^{3}}=\sqrt[2]{5}=\sqrt{5}$

136. 問　化$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$爲同次根

答　因兩根指數的最小公倍數爲 6.

$\therefore\ \sqrt{2}=\sqrt[6]{2^{3}}=\sqrt[6]{8}$

$$\therefore\ \sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$$

137. 問　試證明

$$\sqrt[n+3]{\left(\frac{n-\sqrt[1]{x^2}}{n+\sqrt[1]{x}}\right)^{n^2-1}}=x$$

答　原式左邊 $=\left(\dfrac{n-\sqrt[1]{x^2}}{n+\sqrt[1]{x}}\right)^{\frac{n^2-1}{n+3}}$

$$=\left(x^{\frac{2}{n-1}-\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{n^2-1}{n+3}}$$

$$=\left(x^{\frac{n+3}{n^2-1}}\right)^{\frac{n^2-1}{n+3}}$$

$$=x^{\frac{n+3}{n^2-1}\times\frac{n^2-1}{n+3}}$$

$$=x$$

$$\therefore\ \sqrt[n+3]{\left.\frac{n-\sqrt[1]{x^2}}{n+\sqrt[1]{x}}\right)^{n^2-1}}=x$$

138. 問　試證明 $2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{32}$

答　$2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8\times4}$

$=\sqrt[3]{32}$

$\therefore\ 2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{32}$

139. 問 求$\sqrt{32}$與$\sqrt{50}$之和

答 $\sqrt{32}+\sqrt{50}=\sqrt{16\times2}+\sqrt{25\times2}$

$=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

140. 問 求$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}$之積

答 $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{32}.$

141. 問 求$\sqrt[3]{4a^2}\div\sqrt{2a}$之商

答 $\sqrt[3]{4a^2}\div\sqrt{2a}=\sqrt[6]{16a^4}\div\sqrt[6]{8a^3}$

$=\sqrt[6]{16a^4/8a^3}=\sqrt[6]{2a}$

142. 問 求$\sqrt{-9}+\sqrt{-16}$之和

答 $\sqrt{-9}+\sqrt{-16}=\sqrt{9\times(-1)}+$

$\sqrt{16\times(-1)}=3\sqrt{-1}+4\sqrt{-1}=7\sqrt{-1}$

因虛數單位$\sqrt{-1}$恆以i表之故

$\sqrt{-9}+\sqrt{-16}=7i$

143. 問　求$\sqrt{-25}$與$\sqrt{-4}$之積

答　$\sqrt{-25}\times\sqrt{-4}=\sqrt{25(-1)}$

$\times\sqrt{4(-1)}$

$=5i\times 2i$

$=10i^2=10\times(-1)$

$=-10.$

144. 問　求$\sqrt{-25}\div\sqrt{-4}$之商

答　$\dfrac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{5i}{2i}=\dfrac{5}{2}=2\dfrac{1}{2}$

145. 問　求多項的平方根，如何解法？

答　求多項平方根的解法有二：

(1) 如上述獨項者則以公式解法，較爲簡單。

(2) 若爲多項，其步驟如次：

(a) 依升冪或降冪排列之。

(b) 求第一項平方根。

(c) 以此根之2倍除餘式求商，爲第二項根。

(d) 以第二項乘第二項與首項根之2倍之積，由餘式減去。

(e) 若仍有餘數，則按(c)(d)法遞求，至爲0時止。

如求 $a^2+2ab+b^2$ 的平方根。

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad a+b \\
 & \sqrt{a^2+2ab+b^2} \\
 & a^2 \\
\hline
2a+b & 2ab+b^2 \\
\times\quad b & 2ab+b^2 \\
\hline
\end{array}
$$

卽原式平方根爲 $a+b$

146. 問　求 $(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^5-a^2b^3-a^3b^2+b^5)$ 之平方根。

答

$$\sqrt{(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^5-a^2b^3-a^3b^2+b^5}$$

$$=\sqrt{(a+b)(a^2+ab+b^2)\{a^2(a^3-b^3)-b^2(a^3-b^3)\}}$$

$$=\sqrt{(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-b^2)(a^3-b^3)}$$

$$=\sqrt{(a+b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a-b)(a-b)}$$
$$\overline{(a^2+b+b^2)}$$

$$=\sqrt{(a+b)^2(a^2+ab+b^2)^2(a-b)^2}$$

$$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$=(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)$$

147. 問　求 $(a^4+b^4+a^2b^2)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ 之平方根。

答 原式

$=\sqrt{(a^4+b^4+a^2b^2)(a^4+b^4+a^2b^2)}$

$=\sqrt{(a^4+a^2b^2+b^4)^2}$

$=a^4+a^2b^2+b^4$

148. 問 求 $9x^6-12x^5+22x^4+x^2+12x+4$ 的平方根。

答

$$
\begin{array}{lll}
 & & 3x^3-2x^2+3x+2 \\
 & & \sqrt{9x^6-12x^5+22x^4+x^2+12x+4} \\
 & & 9x^6 \\
6x^3-2x^2 & & -12x^5+22x^4 \\
 & & -12x^5+4x^4 \\
2(3x^3-2x^2)=6x^3 & & 18x^4+x^2 \\
-4x^2+3x & & 18x^4-12x^3+9x^2 \\
6x^3-4x^2+6x+2 & & 12x^3-8x^2+12x+4 \\
 & & 12x^3-8x^2+12x+4
\end{array}
$$

即原式平方根爲 $3x^3-2x^2+3x+2$

149. 問 求 $x^6-6x^4+15x-20+\frac{11}{x^2}-\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}$的平方根

答

$$
\begin{array}{l|l}
 & \quad x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3} \\
 & \sqrt{x^6-6x^4+15x^2-20+\frac{11}{x^2}-\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}} \\
 & \quad x^6 \\
\hline
2x^3-3x & -6x^4+15x^2 \\
 & -6x^4+9x^2 \\
\hline
2x^3-6x+\frac{3}{x} & 6x^2-20+\frac{11}{x^2} \\
 & 6x^2-18+\frac{9}{x^2} \\
\hline
2x^3-6x+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^3} & -2+\frac{6}{x^2}-\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6} \\
 & -2+\frac{6}{x^2}-\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6} \\
\hline
\end{array}
$$

即原式平方根爲$x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$

150. 問 求多項式的立方根解法若

何？

答　求多項式的立方根步驟如次：

(1) 排列。

(2) 求首項的立方根爲第一項根。

(3) 3×（第一項根之平方）除次項得第二項根。

(4) 以第二項根×｛3×（第一項根的平方＋第一項根×第二項根）＋第二項根的平方｝由餘式減去。

(5) 若尚有餘式則依(3)(4)二法遞求。

如求 $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$ 的立方根。

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x+3y \\
 & \sqrt[3]{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3} \\
 & \quad 8x^3 \\
\hline
12x^2+18xy+9y^2 & 36x^2y+54xy^2+27y^3 \\
 & 36x^2y+54xy^2+27y^3 \\
\hline
\end{array}
$$

151. 問　求 $8x^6-36x^5+102x^4-$

$171x^3+204x^2-144x+64$

的立方根。

答

$$\begin{array}{ll}
 & \qquad\qquad 2x^2-3x+4 \\
\multicolumn{2}{l}{\sqrt[3]{8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64}} \\
\multicolumn{2}{l}{\;\; 8x^6} \\
\hline
\left.\begin{array}{l}12x^4-18x^3\\ +9x^2 \\ \qquad -3x\end{array}\right\}\times & \begin{array}{|l}-36x^5+102x^4-171x^3\\ -36x^5+54x^4-27x^3 \\ \hline\end{array} \\
\left.\begin{array}{l}3(2x^2-3x)^2+3\times\\ 4(2x^2-3x)+16 \\ \qquad\qquad 4\end{array}\right\}\times & \begin{array}{|l}48x^4-144x^3+204x^2\\ \qquad -144x+64 \\ 48x^4-144x^3+204x^2 \\ \qquad -144x+64 \\ \hline\end{array}
\end{array}$$

第七類　二次及高次方程式

152. 問　何謂純二次方程式？

答　純二次方程式就是一元式中祗有二次及絕對項者，或有一次未知數而全式適爲平方者。

153. 問　二次方程式的解法若何？

答　解法有四：

(1) 移項與開方，此爲最純二次式，如

$x^2-9=0 \quad \therefore x^2=9 \quad x=\pm 3$

(2) 分解因數法。如

$x^2+2ax+a^2=0$

$(x+a)^2=0$

$x+a=0 \qquad \therefore x=-a$

(3) 完成平方法。如遇不易分解因數的二次方程式可利用此法。如

$3x^2-4x=39$

$$x^2-\frac{4}{3}x=13$$

兩邊同加$\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$$x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=13+\frac{4}{9}$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{121}{9}$$

兩邊同開方 $x-\frac{2}{3}=\pm\frac{11}{3}$

$$x=\pm\frac{11}{3}+\frac{2}{3}$$

$$=5,\ 或\ -3$$

(4) 公式解法。二次方程式之普通式爲

(a) $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(b) $x^2+px+q=0$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

(c) x係數爲偶數時。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

154. 問　二次方程式之根常超於二，有錯誤時否？

答　二次方程式根之眞僞，較一次式更甚，故解任何式皆宜考核，尤以應用問題應特別注意。

155. 問　二次式的根公式中常含根式，如何可一望而知其根值爲整數抑爲共軛根？

答　根之判別祗在$\sqrt{b^2-4ac}$一項，其鑒定法如下：

(1) $b^2-4ac>0$ 時，爲二不等的實根。

(a) $ac>0$ $\sqrt{b^2-4ac}<b$ 時，二根異

值而同號。

(b) $c=0$ $\sqrt{b^2-4ac}=b$時，

一根爲0，一根爲$-\frac{b}{a}$.

(c) $ac<0$, $\sqrt{b^2-4ac}>b$ 時，二根異

值而異號。

(2) $b^2-4ac=0$ 時，爲相等二實根卽爲$-\frac{b}{2a}$

(3) $b^2-4ac>0$ 時，爲二不等的虛根。

156. 問 有相連三數，其積等於中數之三倍，求各數。

答 設x爲第一位數，其餘當爲 $x+1$及 $x+2$ 依題意

$$x(x+1)(x+2)=3(x+1)$$

$$x^3+3x^2-x-3=0$$

$x^2(+3)-(x+3)=0$

$(x+3)(x^2-1)=0$

$(x+1)(x-1)(x+3)=0$

當 $x+1=0$ 時　$x=-1$

當 $x-1=0$ 時　$x=1$

當 $x+3=0$ 時　$x=-3$

此三根値中，$x=-1$ 不合題示因積爲0也。

所以三數當爲

1, 2, 3, 或 −3, −2, −1

157. 問　有一矩形，長較寬多19尺，如長加33尺寬加40尺，面積卽爲原有的2倍問原長寬各若干？

答　設寬爲 x 尺，則長必爲x+19尺。

面積爲$(x+19)x$平方尺

由題意

$$(x+19+33)(x+40)=2x(x+19)$$

$$x^2+92x+2080=2x^2+38x$$

$$x^2-54x-2080=0$$

$$(x-80)(x+26)=0$$

$$\therefore\ x-80 \text{ 或} -26$$

按實際寬絕無-26尺之事。 $\therefore x=80$尺

卽寬爲80尺長爲 $x+19=99$尺

158. 問 父子年齡之和爲100而其年數之積的十分之一比父年多180,求父子各年幾何?

答 設父年爲x歲,子年必爲$100-x$歲

。依題意得式

$$\frac{1}{10}x(100-x)=x+180$$

$$x^2-90x+1800=0$$

$$(x-30)(x-60)=0$$

$$\therefore x=30 \text{ 或 } 60.$$

但x爲父之年齡而父子年齡和又爲 100 是父年絕不能等於30因父年不能小於子年也。故知父年爲 60, 子年爲 $100-x=40$ 歲。

159. 問　某甲以若干元買馬一匹。減價賣去，得金24元，而其損失之成數爲馬原價與 100 元相對。問馬之原價幾何？

答　設馬原價爲 x 元，則損失當爲

$x\times\frac{x}{100}$ 卽等於 $x-24$ 元，故得式

$$x\times\frac{x}{100}=x-24$$

$$x^2-100x+2400=0$$

$$(x-60)(x-40)=0$$

$x=60$ 或 40

此二値均合題意故馬原價爲60或40元。

160. 問　某甲賣馬一匹，得金 144 元，其利益之成數，爲馬原價與 100 元相對。問原價幾何？

答　設馬一匹之原價爲x元。

$$144\div\left(1+\frac{x}{100}\right)=x$$

$$x^2+100x-14400=0$$

$$(x-80)(x+180)=0$$

$$x=80 \text{ 或 } -180$$

按 −180 元不適合，故去之卽馬原價爲 80 元。

161. 問 有長1760步之街道，其電桿之距離皆等，若減捍 1 根，各柱之距離卽較前多增$2\frac{14}{15}$步，問原有之桿數爲若干？

答 設桿數爲x,兩桿距離當爲$\frac{1760}{x}$步。

$$\therefore \frac{1760}{x-1}-\frac{1760}{x}=2\frac{14}{15}$$

解之得 $x=25$, $x=-24$.

負數不適題意，故電桿之數爲25根。

162. 問　用某等速度行 300 哩之汽車，若每時速度增 5 哩卽比預定時間早到兩時，問原速度爲若干？

答　設預定速度爲每時 x 哩，則行 300 哩共需 $\frac{300}{x}$ 時。故得式

$$\frac{300}{x+5}=\frac{300}{x}-2$$

$$x^2+5x-750=0$$

$$(x+30)(x-25)=0$$

$$\therefore\ x=-30,\ 或\ 25,$$

因負30哩不合題意故原速度爲每時25哩。

163. 問　某商人以金80元買橘子若干，內有 500 個腐敗。其

餘照原買之總數每個加1分賣出，得利25元，問橘子一個之原買爲若干？

答 設橘子原買總數爲 x 個則每個原價爲

$\frac{8000}{x}$ 分，賣價爲 $\frac{8000+x}{x}$ 分

但賣出個數爲 $x-500$.

則所賣銀當爲 $(x-500)\left(\frac{8000+x}{x}\right)$ 分

$\therefore\ (x-500)\left(\frac{8000+x}{x}\right)=8000+2500$

解之得 $x=4000$ 或 -1000

因負數不合，故橘子原總數爲 4000 個

其每個原價爲 $\frac{8000}{4000}=2$ 分

164. 問 以金65元分給甲乙丙三人

人，甲所得比乙所得多5元，丙所得為甲乙所得數之積，問三人各得若干？

答 設乙所得為x元，則甲所得為 $x+5$ 元丙所得為 $x(x+5)$ 元，故得式如下：

$$(x+5)+x+(x+5)x=65$$

$$x^2+7x-60=0$$

解之 $x=5$ 或 -12

因負數不合去之，故甲得 $5+5=10$ 元，乙得5元，丙得 $10\times5=50$ 元

165. 問 A以180元等分於若干貧民，B亦以同樣的金額等分於若干貧民，雖每人所

得比A所施與的多6元，但人數少40，問A所施與每人得若干？

答　設A所施與之貧民每人得x元，則貧民數當爲$\frac{180}{x}$乙所施與之貧民數當爲

$$\frac{180}{x}-40$$

$$x=\frac{180}{\frac{180}{x}-40}-6$$

$$x^2+6x-27=0$$

$$\therefore\ (x+9)(x-3)=0$$

$$\therefore\ x=-9\ \text{或}\ 3.$$

因負9不合去之，故甲所施與每人得3元。

166. 問　某人以1875元買鐵路股票

若干股。自己只留15股，餘以每股得4元利益之價賣出。共收入1740元，問此人原買若干股？

答　設原買入x股，則每股買價爲$\frac{1875}{x}$元。又所賣之股數爲$(x-15)$，每股價爲$\frac{1875}{x}+4$元。

故得式如下：

$$\left(\frac{1875}{x}+4\right)(x-15)=1740$$

$$4x^2+75x-28125=0$$

$$\therefore x=\frac{-75\pm\sqrt{75^2-4\times4\times(-28125)}}{2\times4}$$

$$=\frac{-75\pm675}{8}$$

因負値不合，故$x=\frac{-75+675}{8}=75$股。

167. 問　某人以金 800 元買牛若干頭，若要比現買之數多 4 頭，每頭之價卽應減10元問牛數及每頭原價若干？

答　設牛數爲 x 頭，則每頭原價爲$\frac{800}{x}$元。又若多買 4 頭則每頭價爲$\frac{800}{x+4}$元

$$\therefore \frac{800}{x}=\frac{800}{x+4}+10$$

解之得 $x=16$ 或 -20

因負數不合，故牛數爲 16 頭，每頭原價爲

$\frac{800}{16}=50$元

168. 問　某人以三角錢買雞蛋，若每買10個便宜3分可多買5個，問10個雞蛋價若干？

答 設10個雞蛋價為 x分，所買蛋數為

$$\frac{30}{x}\times 10$$

又每10個便宜 3 分時則蛋數為 $\frac{30}{x-3}\times 10$

$$\therefore \frac{30}{x-3}\times 10-\frac{30}{x}\times 10=5$$

解之 $x=15$ 或 -12

因負數不合，故每10個鴨蛋價為15分。

169. 問 某人以金84元租田若干畝，自己留 4 畝耕種，餘以每畝 5 角之利轉租於人，所得之租價恰為原付出之租額。問所租之田為若干畝？

答 設 x為所租田之畝數，則每畝租價

為$\frac{84}{x}$元，卽轉租於人之畝數為$(x-4)$畝。每畝之租價為$\left(\frac{84}{x}+\frac{1}{2}\right)$元

$$\therefore (x-4)\left(\frac{84}{x}+\frac{1}{2}\right)=84$$

解之得 $x=28$ 或 -24

因負數不合，故所租畝數為28畝。

170. 問　白糖7斤之價比紅糖7斤之價貴2角1分。今兩種糖各買2元4角，白糖比紅糖少買4斤，問紅糖7斤之價。

答　設紅糖7斤之價為x分，則白糖7斤之價為$x+21$分，而2元4角可各買之斤數紅糖為$\frac{240}{x}\times 7$斤，白糖為$\frac{240}{x+21}\times 7$斤

$$\therefore 7\times\frac{240}{x}-7\times\frac{240}{x+21}=4$$

$$x^2+21x-8820=0$$

$$(x-84)(x+105)=0$$

$$\cdots\cdots x=84 \text{ 或 } 105$$

因 -105 分不合，故7斤紅糖價爲8角4分。

171. 問　甲乙二旅人同時從東西兩地相向出發，經若干日相會。其後甲經16日乙經36日，各抵東西兩地，若二人每日速率皆一律，問兩人所行全路之日數各若干？

答　設 x 爲自出發至相會之日數則 x+

16爲甲行全路之日數，x＋36 爲乙行全路之日數，今以全路爲 1, 則得式如下：

$$\frac{1}{x+16}+\frac{1}{x+63}=\frac{1}{x}$$

$$x(x+36)+x(x+16)=(x+16)(x+36)$$

$$\therefore\ x^2=576$$

$$x=\pm 24$$

因 -24 不合， $\therefore\ x=24$

卽甲共行 $24+16=40$ 日

乙共行 $24+36=60$ 日

172. 問　某人往距離7哩之地，行1哩後其速度每時忽快 1 哩，因此比預定之時早到半小時，問此人行全路需時若干？

答　設預定爲 x時，則初時速度爲$\frac{7}{x}$哩，後爲$\left(\frac{7}{x}+1\right)$哩，而1哩後所餘之6哩，依預定時間應爲$\frac{6}{\frac{7}{x}}$但實際爲$\frac{6}{\frac{7}{x}+1}$

故得式如下：

$$\frac{6}{\frac{7}{x}}-\frac{6}{\frac{7}{x}+1}=\frac{1}{2}$$

解之 x之正植爲 $2\frac{1}{3}$

故所求之時間爲 $2\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=1\frac{5}{6}$時

173. 問　某水槽有二水管，單開大管注水，比單開小管注水，要早6時而水滿。若兩管同時開放，4時卽滿，

問二水管單獨注水各需時幾何？

答　設大管所需時為x時，小管需 $x+6$ 時，今以水槽之容積為1，則各管每時注水之量為$\frac{1}{x}$及$\frac{1}{x+6}$，故得式

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$$

解之 $x=6$ 或 -4

但負數不合，故甲為6時，乙為12時。

174. 問　有瓶容酒若干兩，另有一瓶，容其二倍之水；今從各瓶取出6兩，將酒注水瓶，水注酒瓶，則各瓶酒水比數相同；求最初之酒

瓶有酒若干兩。

答　設最初酒瓶中之酒爲x兩，水瓶中水爲2x兩；其後各瓶之酒與水之量，在酒瓶者酒爲(x－6)兩，水爲6兩，在水瓶中酒爲6兩水爲2x－6兩。

$$\therefore \frac{x-6}{6}=\frac{6}{2x-6}$$

解之 x＝0, 或 9

因0不合，故酒量原爲9兩。

175. 問　從6斗酒之瓶中吸出若干升，補以水；又吸出比以前之量倘多1斗4升之混合液，再補以水；其時所餘者爲酒水各半，求最初吸

出之酒量。

答　設所求之酒量為 x 斤。則其後吸出之混合液為$(x+14)$斤。

然第一次吸出後所餘之酒為$(60-x)$升。

第二次吸出後所餘之酒為

$(60-x)\left(1-\frac{x+14}{60}\right)$升

故得式如下：

$$(60-x)\left(1-\frac{x+14}{60}\right)=\frac{60}{2}$$

$$x^2-106x+960=0$$

$$(x+10)(x-96)=0$$

$$\therefore\ x=10 \text{ 或 } 96$$

因96升大於全量60升，不合去之。

故所求之量為 1 斗。

176. 問　相距100哩之AF兩市，其

間鐵路自A起有30哩之坡，其後爲50哩之平地，又經20哩之坡始抵F市；其每時速度，平地比上坡快5哩；今在午前8時由A出發，途中經B,C,D,E站各停3分鐘。午後12時42分達F市。若B,C,D,E與A市距離爲20,$42\frac{1}{2}$，$67\frac{1}{2}$及90哩。問到B,C,D,E四站各在何時？

答 設上坡每時速爲x哩，則平地爲(x+5)哩，而$\frac{30}{x}+\frac{50}{x+5}+\frac{20}{x}$即

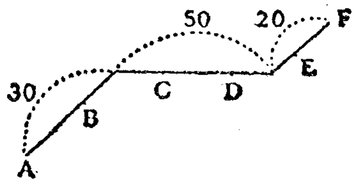
$\left(\frac{50}{x+5}+\frac{50}{x}\right)$時為車子不停由A市到Z市所行之時間，今實際所行共需

$12\frac{42}{60}-8\frac{3\times4}{60}=4\frac{1}{2}$時

$$\therefore \frac{50}{x+5}+\frac{50}{x}=4\frac{1}{2}$$

解之 $x=20$ 或 $-\frac{25}{9}$

因負值不合，故此火車之速度為20哩，因此知經1小時到B站即午前9時，而由B站開車為9時3分。



BC之距為$\left(42\frac{1}{2}-20\right)$即$22\frac{1}{2}$哩，中間上

坡爲10哩，平地爲$12\frac{1}{2}$哩，故需時

$\left(\frac{10}{20}+\frac{12\frac{1}{2}}{25}\right)$卽1小時，因此知到C站爲午前

10時3分，開車爲10時6分，又CD之間爲

$\left\{67\frac{1}{2}-\left(30+12\frac{1}{2}\right)\right\}$卽平地25哩，由

題意知需行1小時，卽火車到D站爲午前11

時6分，開車時爲11時9分，又DE站距爲

$\left(90-67\frac{1}{2}\right)$卽$22\frac{1}{2}$哩，其中平地爲$50-$

$\left(12\frac{1}{2}+25\right)=12\frac{1}{2}$哩，上坡爲$22\frac{1}{2}-12$

$\frac{1}{2}=10$哩。故進行時間爲$\frac{12\frac{1}{2}}{25}+\frac{10}{20}=1$小

時。

卽火車到E站爲午後時12時9分。

177. 問　甲乙二人各作等量之工作，

甲比乙早半時開始，二人同至正午十二時休息一時，此時各人均作該事之半，但乙至午後7時完工，甲至午後10時前15分始竣，問二人開工之時刻各如何？

答　設甲在午前作工 x時，乙在午前工作爲 $x-\frac{1}{2}$時。

因午前工作該事之半，故甲在午前所作 x時之工作等於乙在午後6時所作之工。又甲在午後所作 $8\frac{3}{4}$ 時之工，等於乙在午前 $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 時之工，今若以甲每時工作量爲

a，乙每時工作量為 b，則得式如下：

$$ax=6b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$8\frac{3}{4}a=\left(x-\frac{1}{2}\right)b \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2)÷(1)式得

$$\frac{8\frac{3}{4}}{x}=\frac{x-\frac{1}{2}}{6}$$

$$x^2-\frac{1}{2}x=\frac{105}{2}$$

解之 $x=7\frac{1}{2}$ 或 -7.

因-7不合，故甲在午前4時30分乙在午前5時開始工作。

178。問 試解 $x^4-10x^2+9=0$

答 將原式變為

$$(x^2)^2-10(x^2)+9=0$$

$$(x^2-9)(x^2-1)=0$$

$x^2=9$ 或 1

卽 $x=\pm 3$. 或 ± 1.

179. 問　試解 $x^4-10x^2+25=0$

答　原式變爲 $(x^2)^2-10(x^2)+25=0$

$(x^2-5)^2=0$

$x^2=5 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{5}$

注意：本題號爲四次方程式，但祇有二根，

這是二根相等的特殊情形。

180. 問　高次方程式的解法如何？

答　高次方程式的解法不外化之爲二次或三次，或分解其因數使成低次方程式，然後依低次方程式解法解之。

181. 問　試解$3x=1$

答　原式移項爲 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

當 $x-1=0$ $\therefore x=1$

當 $x^2+x+1=0$ 時，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times1}}{2}$$

$$x=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$$

故 $x^3=1$ 之立方根在代數上應用三個，而算術上則祇有一個，至含虛根之二值，普通多以 w_1 及 w, 表之。

182. 問 試解 $x^3=a^3$

答 原式爲 $\left(\frac{x}{a}\right)^3=1$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3-1=0$$

依上題知 $\frac{x}{a}=1, w, w_1$

$\therefore x=a, aw, aw_1$

183. 問　試解 $x^6=64$

答　命 $x^3=y$ 則原式變爲

$$y^2=64$$

$$y=\pm 8$$

卽 $x^3=\pm 8$

$\therefore x=\pm 2, \pm 2w, \pm 2w_1$

184. 問　試解 $\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}+\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\frac{34}{35}$

答　命 $\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}=y$ 則原式爲

$$y+\frac{1}{y}=\frac{34}{35}$$

$$15y^2-34y+15=0$$

$$y=\frac{3}{5} \text{ 或 } \frac{5}{3}$$

因之 $5(x^2-a^2)=3(x^2+a^2)$

解之爲 $x=\pm 2a.$

又 $3(x^2-a^2)=5(x^2+a^2)$

$x=\pm 2ai$

185. 問　何謂由根求作方程式？及其作法？

答　由根求作方程式，即知某方程式之根求作某方程式之意，其作法由

$ax^2+bx+c=0$ 及

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

的關係，知 α,β 爲二根時。

$$則\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a},$$

此二式卽爲作方程式的公式。

186. 問　有兄弟二人同解一個方程式。兄因將 x 之係數寫錯

誤得6及1兩根，弟因將不含x項寫錯，誤得4及1兩根，問正根爲何？

答　兄所解之方程式。當爲

$\alpha+\beta=6+1=7$

$\alpha\beta=6\times1=6$

卽　$x^2-7x+6=0$

弟所解之程式爲

$\alpha+\beta=4+1=5$

$\alpha\beta=4\times1=4$

卽　$x^2-5x+4=0$

故正確之方程式爲

$x^2-5x+6=0$

$(x-3)x-2)=0$

$x=3$ 或 2

即正根爲 3 及 2

187. 問　方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的

二根爲 α, β

則 $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{3abc-b^3}{a^2c}$

試證之。

答　因 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ………… (1)

$\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ………………… (2)

(1) 立方得 $\alpha^3+3\alpha\beta^2+3\alpha\beta^2+\beta^3=$

$-\frac{b^3}{a^3}$ …………………………(3)

但 $3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2=3\alpha\beta(\alpha+\beta)=$

$-3\frac{bc}{a^2}$ ………………………… (4)

(3)－(4)得

$$\alpha^3+\beta^3=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

以(2)除上式，得

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{3abc-b^3}{a^3}\times\frac{a}{c}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{3abc-b^3}{a^2c}$$

188。問 $x^2+fx+g=0$ 之二根爲α,β則以$\alpha+\frac{1}{\beta}$及$\beta+\frac{1}{\alpha}$爲根之二次方程式必爲 $gx^2+f(1+g)x+(1+g)^2=0$ 試證之。

答 因 $\alpha+\beta=-f.\quad \alpha\beta=g.$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{f}{g} \quad 即 \quad \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=-\frac{f}{g}$$

新方程式x之係數當爲

$$-\left\{\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)\right\}=$$

$$-\left\{(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)\right\}$$

$$=+f+\frac{f}{g}$$

其積爲

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta+1}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\alpha\beta+1)^2}{\alpha\beta}=\frac{(g+1)^2}{g}$$

故新式爲

$$x^2+\left(f+\frac{f}{g}\right)x+\frac{(g+1)^2}{g}=0$$

$$gx^2+f(g+1)x+(1+g)^2=0.$$

189. 問　解二次聯立方程式之法若何？

答　此視方程式之性質而定，當二方程式不爲同次時如

$$x+y=9$$

$x^3+3xy+y^2=99$

其解法同於一次聯立方程式，若二者互爲同次其步驟爲

(a) 整理，

(b) 消已知項，

(c) 求含未知數之根，

(d) 代入求眞根，

又法，令此未知數等於他未知數之m倍，代入卽可化爲一元方程式。

190. 問　試解此兩方程式：

$x-y=2$ 及 $3x^2-2xy=5$

答　$x-y=2$ 可變爲 $y=x-2$ 代入

$3x^2-2xy=5$ 中得

$3x^2-2x(x-2)=5$

簡之得 $x^2+4x-5=0$

$x=-5$ 或 $1.$

將 x 值代入 y 式中

當 $x=-5$ 時　　$y=-7$

$x=1$　時　　$y=-1.$

191. 問　解此兩方程式：

$x+y=8$ ………………………… (1)

$x^2+y^2=34$ ………………………… (2)

答　與前題同樣解法亦可，但尚有下列一法。

平方(1)式之兩邊，得

$x^2+2xy+y^2=64$ ………………………… (3)

(3)－(2)式得　$2xy=30$

$xy=15$ ………………………… (4)

$(2)-(4)\times 2 \qquad (x-y)^2=4$

$$x-y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(1)與(5)得 $\quad x=3, y=5$ 或 $x=5, y=3$

192. 問 解此兩方程式：

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=20 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

答 設 $\frac{1}{x}=X \quad \frac{1}{y}=Y$

則原式化爲

$$X-Y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$X^2-Y^2=20 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

依上題法解之爲

$X=4 \qquad X=2$

$X=-2 \qquad Y=-4$

因此 $x=\frac{1}{4}$ $y=\frac{1}{2}$

$x=\frac{-1}{2}$ $y=\frac{-1}{4}$

193. 問 解下列之方程式：

$y^2-xy=15$ ……………………(1)

$x^2+xy=14$ ……………………(2)

答 以$14\times(1)-15\times(2)$式得

$15x^2+29xy-14y^2=0$

$(5x-2y)(3x+7y)=0$

$5x=2y$ $x=\frac{2}{5}y$ ……………………(3)

或 $3x=-7y$ $x=-\frac{7}{3}y$ ……………………(4)

將(3)式代入(1)式

$y^2=25$ $y=\pm5$ $\therefore x=\pm2$

將(4)式代入(1)式

$$y^2=\frac{9}{2} \qquad y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \quad x=\pm\frac{7}{\sqrt{2}}$$

故所求之根值爲

$$\left.\begin{array}{l}x=2\\y=5\end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l}x=-2\\y=-5\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=\frac{7}{\sqrt{2}}\\y=-\frac{3}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x=-\frac{7}{\sqrt{2}}\\y=\frac{3}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}$$

194. 問　解下之方程式：

$$x^4+x^2y^2+y^4=2613 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x^2+xy+y^2=67 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

答　(1)÷(2)得 $x^2-xy+y^2=39 \cdots (3)$

$[(2)+(3)]\div 2$得 $x^2+y^2=53 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

$[(2)-(3)]\div 2$得 $xy=14 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

解(4)與(5)得

$$\left.\begin{aligned}x&=\pm 7\\ y&=\pm 2\end{aligned}\right\} \text{或} \left.\begin{aligned}x&=\pm 2\\ y&=\pm 7\end{aligned}\right\}$$

195. 問 解下列方程式：

$$3x^2+5x-8y=36\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2-3x-4y=3\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

答 (1)−(2)×2 得

$$-x^2+11x=30$$

$$x^2-11x+30=0$$

$x=5$ 或 6

由此得 $\left.\begin{aligned}x&=5\\ y&=8\end{aligned}\right\}$ 或 $\left.\begin{aligned}x&=6\\ y&=12\tfrac{3}{4}\end{aligned}\right\}$

196. 問 解下列方程式：

$$xy=6\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$yz=12\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$zx=8\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

答　將(1), (2), (3)相當邊相乘，得

$$x^2y^2z^2=576$$

$$xyz=\pm 24 \cdots\cdots (4)$$

以(1), (2), (3)各除(4)式，得

$$z=\pm 4,\ x=\pm 2,\ y=\pm 3$$

197. 問　解下列方程式：

$$xy+xz=27 \cdots\cdots (1)$$

$$yz+xy=32 \cdots\cdots (2)$$

$$xz+yz=35 \cdots\cdots (3)$$

答　將三式相加，得

$$2(xy+yz+xz)=94$$

$$xy+yz+xz=47 \cdots\cdots (4)$$

以(4)與(1), (2), (3)各式相減，則得

$$yz=20 \cdots\cdots (5)$$

$$xz=15 \cdots\cdots (6)$$

$$xy=12 \cdots\cdots (7)$$

依上題解法，得

$$\left.\begin{aligned} x&=3\\ y&=4\\ z&=5 \end{aligned}\right\} \text{ 或 } \left.\begin{aligned} x&=-3\\ y&=-4\\ z&=-5 \end{aligned}\right\}$$

198. 問　解下列方程式

$$yz=a^2 \cdots\cdots (1)$$

$$xz=b^2 \cdots\cdots (2)$$

$$xy=c^2 \cdots\cdots (3)$$

答　以(1)除(2)(3)之積，得

$$\frac{zx \cdot xy}{yz}=\frac{b^2c^2}{a^2}$$

$$x^2=\frac{b^2c^2}{a^2} \quad \therefore x=\pm\frac{bc}{a}$$

同法 $y=\pm\frac{ac}{b}$， $z=\pm\frac{ab}{c}$。

199. 問 求下列三式中 x,y,z 之值：

$$2^{y-1}=16^{x-1}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3^{\frac{1}{x}}=9^{\frac{1}{z}}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\sqrt[x]{2^{y-3}}=2\sqrt[x]{8^{z-2}}\cdots\cdots\cdots(3)$$

答 $2^{y-1}=(2^4)^{x-1}$

$$2^{y-1}=2^{4x-4}$$

$$y-1=4x-4$$

$$4x-y=3\cdots\cdots\cdots(4)$$

又 $3^{\frac{1}{x}}=(3^2)^{\frac{1}{z}}$

$$3^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{z}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{x}=\frac{2}{z}$$

卽 $2x-z=0\cdots\cdots\cdots(5)$

又 $2^{\frac{y-2}{x}}=8^{\frac{z-2}{2x}}=2^{3x\frac{z-2}{2x}}$

$\therefore \dfrac{y-3}{x}=\dfrac{3z-6}{2x}$

$2y-6=3z-6$

即 $2y-3z=0$ ………………………… (6)

解 (4)(5)(6) 聯立方程式得

$x=3,\ y=9,\ z=6$

200. 問　有長比寬多 8 尺之教室，其四壁之面積為1120平方尺，若高增 4 尺，則二小面與一大面之壁，其面積亦恰為1120平方尺，問此教室之長寬高各若干？

答　設長為x尺高為y尺，則 x−8 為寬，

得式如下。

$$2xy+2(x-8)y=1120\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x(y+4)+2(x-8)(y+4)=1120\cdots\cdots(2)$$

卽 $4xy-16y=1120\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$$3xy+12x-16y=1184\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以 $\frac{3}{4}$ 乘(3)與(4)式相減，再除以4，

得 $3x-y=86$

$$y=3x-86$$

將y值代入(3)式，得

$$3x^2-98x+64=0$$

解之得 $x=32$ 或 $\frac{2}{3}$

但 $x>8$ 故 $\frac{2}{3}$ 不合

因此 $y=10$

所求之長爲32尺寬爲24尺高爲10尺

201. 問 將16分成3數，最大數之平方根等於他二數之差，最小數之平方又等於他二數之差，問三數。

答 設x爲大數，y爲中數，z爲小數。

$$x+y+z=16 \cdots\cdots (1)$$

$$y-z=\sqrt{x} \cdots\cdots (2)$$

$$x-y=z^2 \cdots\cdots (3)$$

由(2)式

$$x=y^2+z^2-2yz$$

代入(3)式再以y除，得

$$y=2z+1$$

由(2)式 $x=(z+1)^2$

將 x,y, 值代入(1)式則

$z^2+5z=14$

解之得適宜之值為 $z=2$

$x=9 \quad y=5$

202. 問　某商人以125元買甲乙二種物品，甲賣91元乙賣36元，甲所得利益之成數等於乙損失之成數，問各種原價為若干？

答　設甲之原價為 x 元，乙之原價為 y 元。

$$x+y=125 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{91-x}{x}=\frac{y-36}{y}$$

$$2xy-36x-91y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由(1)得 $y=125-x$ 代入(2)式

$2x(125-x)-36x-91(125-x)=0$

$2x^2-305x+11375=0$

$x=65$ 或 87.5

$y=60$ 或 37.5

205. 問　於 38:31 之各項中減去何數則等於 4:3？

答　設應去之數爲 x 則

$38-x:31-x=4:3$

$4(31-x)=3(38-x)$

$x=4\times31-3\times38=10$

206. 問　有甲乙二數，甲隨乙變，設乙爲 $\frac{4}{3}$ 時甲爲 $\frac{3}{4}$，若甲爲 9 時乙爲何？

答　設甲數爲 x 乙爲 y 則

$x = my$

因此$\frac{3}{4} = \frac{4m}{3}$

$\therefore m = \frac{9}{16}$

$9 = \frac{9}{16}y$

$y = 16$

207. 問 試解$x(x+y)+y(x-y)=158$

及 $7x(x+y)=72y(x-y)$

答 命 $y=xz$ 則原式變爲

$x^2(1+z)+x^2(1-z)z=158 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$7x^2(1+z)-72x^2z(1-z)=0 \cdots\cdots\cdots (2)$

卽 $7+7z-72z+72z^2=0$

$72z^2-65z+7=0$

$(8z-1)(9z-7)=0$

$$\therefore\ z=\frac{1}{8}\ 或\ \frac{7}{9}$$

將 $z=\frac{1}{8}$代入(3)式

$$x^2\left(1+\frac{1}{8}\right)+x^2\left(1-\frac{1}{8}\right)\times\frac{1}{8}=158$$

解之 $x^2=64\times 2\quad\therefore\ x=8\pm\sqrt{2}$

$$\therefore\ y=\pm\sqrt{2}$$

將 $z=\frac{7}{9}$代入(3)式

$$x^2\left(1+\frac{7}{9}\right)+x^2\left(1-\frac{7}{9}\right)\times\frac{7}{9}=158$$

$x^2=81\quad\therefore\ x=\pm 9\quad y=\pm 7$

208. 問 無理方程式之解法如何？

答 無理方程式卽方程式中含有根項。

解法將無理數移於一側，有理項移於於他側，然後平方或立方以消去根號，再依高次方程式之解法解之。

209. 問　高次方程式之解法若何？

答　設法化爲二次方程式，然後解之。

210. 問　何謂逆數方程式？

答　逆數方程式乃專指一元高次方程式中係數前後兩兩遙等者而言。如

$$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$$

211. 問　逆數方程式的解法若何？

答　先化爲二次方程式，然後再解，其化法以中項未知數除全式，卽以x^2除，如上式得

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$$

212. 問　解 $2x^2+6x=226-\sqrt{x^2+3x-8}$

答　移項

$$2(x^2+3x-8)+\sqrt{x^2+3x-8}-210=0$$

$$\{2\sqrt{x^2+3x-8}+21\}\{\sqrt{x^2+3x-8}-10\}=0$$

$$\therefore\ \sqrt{x^2+3x-8}=-\frac{21}{2}\ 或\ 10$$

當 $\sqrt{x^2+3x-8}=-\frac{21}{2}$ 時，兩邊平方，

$$x^2+3x-8=\frac{441}{4}$$

$$4x^2+12x-32=441$$

配方 $4x^2+12x+9=482$

$$(2x+3)^2=482$$

$$2x+3=\pm\sqrt{482}$$

$$\therefore\ x=(-3\pm\sqrt{482})/2$$

又當 $\sqrt{x^2+3x-8}=10$ 時

$$x^2+3x-8=100$$

$$x^2+3x-108=0$$

$$(x+12)(x-9)=0\quad\therefore\ x=-12\ 或\ 9$$

卽 $x=9,\ -12,\ \dfrac{-3\pm\sqrt{482}}{2}$

213. 問　解 $\sqrt{x+7-\sqrt{5(x-2)}}=3$

答　兩邊平方得

$$x+7-\sqrt{5(x-2)}=9$$

移項 $x-2=\sqrt{5(x-2)}$ 再平方之

$$x^2-4x+4=5x-10$$

$$x^2-9x+14=0$$

$$(x-7)(x-2)=0 \quad \therefore\ x=7\ 或\ 2$$

214. 問　試解 $40x^4-286x^3+573x^2-286x+40=0$

答　以 x^2 除全式，得

$$40\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-286\left(x+\frac{1}{x}\right)+573=0$$

令　$y=x+\dfrac{1}{x}$　則 $y^2-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 代入

$$\therefore\ 40(y^2-2)-286y+573=0$$

$$40y^2-286y+493=0$$

$$y=\frac{286-\sqrt{81796-78880}}{2\times 40}$$

$$=\frac{286\pm 54}{80}=\frac{17}{4}\ 或\ \frac{29}{10}$$

當 $y=\dfrac{17}{4}$ 時

$$x+\frac{1}{x}=\frac{17}{4}$$

$$4x^2-17x+4=0$$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{4\times 2}$$

$$=\frac{17\pm 15}{8}=4\ 或\ \frac{1}{4}$$

當 $y=\dfrac{29}{10}$ 時 $\quad x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{29}{10}$

$$10x^2-29x+10=0$$

$$x=\frac{29\pm\sqrt{841-400}}{2\times 10}$$

$$=\frac{29\pm21}{20}=\frac{5}{2}\text{ 或 }\frac{2}{5}$$

215. 問　解 $9x^5+5x^4-\frac{22}{9}x^3-\frac{22}{9}x^2+5x+9=0$

答　$9(x^5+1)+5x(x^3+1)-\frac{22}{9}x^2(x+1)=0$

$$9(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)+5x(x+1)\times(x^2-x+1)-\frac{22}{9}x^2(x+1)=0$$

$$(x+1)(9x^4-4x^3+\frac{14}{9}x^2-4x+9)=0$$

$x+1=0\qquad\therefore x=-1$

$$9x^4-4x^3+\frac{14}{9}x^2-4x+9=0$$

卽　$9\left(x^2+\frac{1}{x}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{14}{9}=0$

令　$y=x+\frac{1}{x}\qquad y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$

$$\therefore\ 9y^2-18-4y+\frac{14}{9}=0$$

$$81y^2-36y-148=0$$

$$y=\frac{36\pm\sqrt{1296+4\times81\times148}}{2\times81}$$

$$=\frac{36\pm36\sqrt{38}}{2\times81}=\frac{2\pm2\sqrt{38}}{9}$$

$$\therefore\ x+\frac{1}{x}=\frac{2\pm2\sqrt{38}}{9}$$

$$x^2-\frac{2\pm2\sqrt{38}}{9}x+1=0$$

$$x=\frac{2\pm2\sqrt{38}\pm2\sqrt{-42\pm2\sqrt{38}}}{2\times9}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{38}\pm i\sqrt{42\mp2\sqrt{38}}}{9}$$

216。問　試解 $x-y=1$　$x^5-y^5=781$

答　以 $x-y=1$ 除 $x^5-y^4=781$ 得

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=781$$

$$x^4+y^4+xy(x^2+y^2)+x^2y^2=781\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

將　$x-y=1$ 平方得

$$x^2-2xy+y^2=1$$

$$x^2+y^2=1+2xy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2) 再平方得

$$x^4+y^4+2x^2y^2=4x^2y^2+4xy+1$$

$$x^4+y^4=2x^2y^2+4xy+1 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

以(2),(3)之等值代入(1)式中

$$2x^2y^2+4xy+1+xy(2xy+1)+x^2y^2 =781$$

$$5x^2y^2+5xy=780$$

$$x^2y^2+xy-156=0$$

$$xy=\frac{-1\pm\sqrt{1+624}}{2}=\frac{-1\pm25}{2}$$

因　$y=x-1$

$$x(x-1)=\frac{-1\pm25}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{-1\pm25}{2}+\frac{1}{4}$$

$$x-\frac{1}{2}=\frac{\pm\sqrt{-1\pm50}}{2}$$

$$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{-1\pm50}}{2},$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{-1\pm50}}{2}$$

卽 $x=4, y=3, x=-3, y=-4$

$$x=\frac{1\pm i\sqrt{51}}{2},\quad y=\frac{-1\pm i\sqrt{51}}{2}$$

第八類　排列，組合及 $(a+x)^n$ 之展開式問題

217. 問　排列及組合之區別何在？

答　排列法不問實質是否相同，祗問形式得次序不同，卽盡其責。組合則需實質與

次序各不相同。如 abcd 四字以每三字為一組，則在

排列為

abc	bac	cab	dab
abd	bca	cba	dba
acd	bad	cad	dac
adc	bda	cda	dca
acb	bcd	cbd	dbc
adb	bdc	cdb	dcb

組合則僅為

abc	bcd
abd	acd

218. 問　排列及組合之解法若何？

答　排列之記號為 nPr 其算法為

$$nPr=n(n-1)(n-2)(x-3)\times\cdots(n-r+1)$$

卽右式共有 r 個因數。

組合之記號爲 nCr 其算法爲

$$ {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\times\cdots3\times2\times1} $$

r! 卽逐乘之意。

219. 問 ${}_5P_3$ 與 ${}_5C_3$ 之値若何？

答 ${}_5P_3=5\times4\times3=60$

$$ {}_5C_3=\frac{{}_5P_3}{3!}=\frac{60}{3\times2\times1}=10 $$

220. 問 ${}_nP_r=(n-r+1)\,{}_nP_{r-1}$ 中之 r，順次代以 $r-1, r-2, \cdots 3, 2$ 等所得各公式之積爲 $nPr=N(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$. 試證明之。

答 設順次代入之公式爲

$${}_nP_r=(n-r+1)\,{}_nP_{r-1}$$

$${}_nP_{r-1}=(n-r+2)\,{}_nP_{r-2}$$

$${}_nP_{r-2}=(n-r+3)\,{}_nP_{r-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}_nP_3=(n-3+1)\,{}_nP_2$$

$${}_nP_2=(n-2+1)\,{}_nP_1\quad({}_nP_1=n)$$

相當邊相乘得

$${}_nP_r=(n-r+1)\cdots\cdots(n-2)(n-1)n$$

$$=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

221. 問　試證明 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

答　$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots3\times2\times1}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!\,r!}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$${}_nC_{n-r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(n-r)+1\}}{(n-r)!}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(r+1)}{(n-r)!}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(r+1)r!}{(n-r)!r!}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\therefore {}_nC_r={}_nC_{n-r}$.

222. 問　試求 ${}_{20}C_{17}$ 之值。

答　${}_{20}C_{17}={}_{20}C_{20-17}={}_{20}C_3$

$$=\frac{20\times19\times18}{1\times2\times3}\doteq1140.$$

223. 問　${}_nC_6={}_nC_3$ 則n之值若何？

答　$\therefore\ {}_nC_6={}_nC_{n-6}$　$\therefore\ n-6=3$

$\therefore\ n=9$

224. 問　${}_{2n}P_3=2\times{}_nP_4$ 則 n 之值如何？

答 $_{2n}P_3=2n(2n-1)(2n-2)$

$2\times{}_nP_4=2n(n-1)(n-2)(n-3)$

$\therefore\ 2n(2n-1)(2n-2)=$

$2n(n-1)(n-2)(n-3)$

卽 $n^2-9n+8=0$

$(n-1)(n-8)=0$

$n=1$ 或 8

但由題意 $n4$ $\therefore\ n=8$

225. 問 $_nP_r=N_{n-1}P_{r-1}$ 試證明之

答 $_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

$N_{n-1}P_{r-1}=n\times(n-1)(n-2)\cdots\{(n-1)-(r-1)+1\}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

$\therefore {}_nP_r=N_{n-1}P_{r-1}$

226. 問 $(n-r){}_nP_r=N_{n-1}P_r$ 試證明

之。

答 $(n-r)_nP_r=(n-r)\times n(n-1)\times(n-2)\cdots(n-r+1)$

$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)$

$N_{n-1}P_r=N\times(n-1)(n-2)\cdots\{(n-1)-r+1\}$

$=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r)$

$\therefore\ (n-r)_nP_r=N_{n-1}P_r$

227. 問 $R_nC_r=N_{n-1}C_{r-1}$ 試證明之。

答 $R_nC_r=N_{n-1}C_{r-1}$ 可化爲

$${}_nC_r=\frac{n}{r}{}_{n-1}C_{r-1}$$

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\frac{n}{r}{}_{n-1}C_{r-1}=\frac{n}{r}\times\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!}$$

$$=\frac{n(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\therefore\ R_{n}C_{r}=N_{n-1}C_{r-1}$$

228. 問 $_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}$ 試證明之。

答 $$_{n+1}C_r=\frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}$$

$$_nC_r+{}_nC_{r-1}=\frac{n!}{r!(n-r!)}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$=\frac{n!(n-r+1)+n!r}{r!(n-r+1)!}$$

$$=\frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

$$\therefore\ {}_{n+1}C_r=C_{nr}+{}_nC_{r=1}$$

229. 問 有學生30人，使每回組合

五人競走，問組合之法有幾？

答　$_{30}C_5=\dfrac{30\times29\times28\times27\times26}{5\times4\times3\times2\times1}$

$=142506$

230. 問　有兵士20人，每回任意選擇3人執要務，問同一人能選若干回？

答　20人中之一人，例如求甲幾回被選，則每3人之選拔，甲恆爲其選拔中之人，故祗需求其餘二人可有幾種方法自19人中選之，得式

$$_{19}C_2=\frac{19\times18}{2\times1}=171\text{ 回}$$

231. 問　將書6本，列於書箱，但

其中有一本不許列於首或末，問其列法有若干？

答　6本書之列法爲 ${}_6P_6$ 卽720其中一本不列於首者爲 ${}_5P_5=120$ 不列於末者亦同，故所求列法爲

$${}_6P_6-2{}_5P_5=720-2\times120$$
$$=480$$

232. 問 $(1+x)^7$ 的展開式爲何？

答　由巴司開三角形知

$$(1+x)^7=1+7x+21x^2+35x^3$$
$$+35x^4+21x^5+7x^6+x^7$$

233. 問　上式展開後的係數與 ${}_nC_r$ 有何關係？

$$\therefore\ (1+x)^7=1+7x+\frac{7\times6}{1\times2}x^2+$$

$$\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}x^3+\frac{7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4}x^4+$$

$$\frac{7\times6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4\times5}x^5+$$

$$\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4\times5\times6}x^6+\frac{7!}{7!}x^7$$

答　上式 $={}1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+$

$${}_nC_4x^4+{}_nC_5x^5+{}_nC_6x^6+{}_nC_7x^7$$

其中 n= 指數。

234. 問　以 ${}_nC_r$ 表明 $(a+x)_n$ 的展開式

答　$(a+x)n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}x+{}_nC_2a^{n-2}x^2+{}_nC_3a^{n-3}x^3+\cdots{}_nC_{n-2}a^2x^{n-2}+{}_nC_{n-1}ax^{n-1}+{}_nC_nx_n$

但 ${}_nC_0={}_nC_n=1$, ${}_nC_1={}_nC_{n-1}$, ${}_nC_2={}_nC_{n-2}$

故 $(a+x)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}x+{}_nC_2a^{n-2}x^2$

$+\cdots {}_nC_2a^2x^{n-3}+{}_nC_1ax^{n-1}+x^n$

235. 問　依二項式展開定理求 999 之第 4 冪。

答　$999=1000-1$

$(999)^4=(1000-1)^4$

$=1000^4-4\times1000^3+\frac{4\times3}{1\times2}\times1000^2$

$-\frac{4\times3\times2}{1\times2\times3}\times1000+1$

$=(1,000,000,000,000+6,000,000+1)\times$

$(4,000,000,000+4,000)$

$=996005996001$

第九類　比例問題

236. 問　解比例之要則爲何？

答　比例之形式爲 $a:b=c:d$. 其要則以

代數式表之如下：

(1) $ad=bc.$

(2) $a:c=b:d.$

(3) $b:a=d:c$

(4) $a\pm b:b=c\pm d:d$

(5) $a\pm b:a\mp b=c\pm d:c\mp d.$

(6) $a:b=b:c$ 時 $b=\sqrt{ac}.$

237. 問 $l:a-b=m:b-c=n:c-a$ 時，證明 $l+m+n=0$

答 令 $k=\dfrac{l}{a-b}=\dfrac{m}{b-c}=\dfrac{n}{c-a}$

$\therefore\ l=k(a-b),m=k(b-c)$

$n=k(c-a)$

$l+m+n=k(a-b)+k(b-c)+k(c-a)$

$=k\{a-b+b-c+c-a\}=k\times 0=0$

$\therefore\ l+m+n=0$

238. 問 $pq=rs\quad qt=su$ 求證 $p:r=t:u$

答 由原二式 $\frac{p}{r}=\frac{s}{q}$ 及 $\frac{t}{u}=\frac{s}{q}$

$\therefore\ p:r=t:u.$

239. 問 $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ag-bx}{c}$

求證 $x:a=y:b=z:c$

答 設 $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}=x$

$a(bz-cy)=a^2x,\quad b(cx-az)=b^2x$

$c(ay-bx)=c^2x$

$a(bz-cy)+b(cx-az)+c(ay-bx)$

$=(a^2+b^2+c^2)x$

$x(a^2+b^2+c^2)=0$

$\therefore\ x=0$

$\therefore\ bz-cy=0\quad cx-az=0$

$$ay-bx=0$$

即 $\frac{z}{c}=\frac{y}{b}$，$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$，$\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$

$$\therefore \frac{z}{c}=\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$$

240. 問 $\frac{4x\times5y}{5x-y}=2$時，y 與 x 之比若何？

答 $4x+5y=6x-2y$

$$7y=2x$$

$$y:x=2:7$$

241. 問 若$\frac{x}{z}=\frac{3}{4}$則$7x-4y$之於$3x+y$之比若何？

答 $y=4m$ 則$x=4m\times\frac{3}{4}=3m$

$7x-4y=21m-16m=5m.$

$3x+y=9m+4m=13m$

$\therefore\ 7x-4y:3x+y=5m:13m$

$=5:13$

242. 問　若 $x^2+6y^2=5xy$ 則x與y之比若何？

答　$x^2-5xy+6y^2=0$

$(x-2y)(x-3y)=0$

當　$x-2y=0$ 時　$x:y=2:1$

當　$x-3y=0$ 時　$x:y=3:1$

卽所求之比或爲 2:1, 或爲 3:1

243. 問　試求 a^3b 與 ab^3 之比例中項

答　$a^3b:x=x:ab^3$

$x=\sqrt{a^3b\times ab^3}=\pm a^2b^2$

244. 問　$x\propto y$ 且 $x=18$ 時，$y=7$ 問 $y=21$ 時，x值若何？

答　$x=my$　$\therefore 18=m\times 7$

$$m=\frac{18}{7}$$

$$\therefore x=\frac{18}{7}\times 21=54$$

245. 問　$x\infty\frac{1}{y}$ 且 $x=15$ 時若 $y=4$

問 $x=6$ 時 y 值爲若干？

答　$x=m\times\frac{1}{y}$　$15=m\times\frac{1}{4}$

$$\therefore m=60$$

依題意　$6=60\times\frac{1}{y}$

$$y=10$$

246. 問　二數之和爲 125 而其比例中項爲60，問二數若干？

答　設數二爲 $x, y.$

$x+y=125$ ………………………………… (1)

$xy=60^2=3600$ ………………………… (2)

解之 $x=80$ 或 45

$y=45$ 或 80

第十類　級數問題

247. 問　等差與等比級數的分別若何？

答　等差級數相鄰前後二項所差之數互等，而等比級數乃相鄰前後二項之商互等。

248. 問　等差級數之符號與公式若何？

答　等差級數(縮寫爲A.P.)其形式爲

$a, a+d, a+2d, a+3d,\cdots\cdots$

$a+(n-1)d$

a 爲首項，n 爲項數，d爲公差，其總和若爲 S 則

$$S=\frac{n\{a+[a+(n-1)d]\}}{2}$$

$$=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

若令 l 爲末項　　$l=a+(n-1)d$

$$\therefore S=\frac{n(a\times l)}{2}$$

等差中項 $A=\frac{a+l}{2}$

249. 問　有一直角三角形，其三邊之長爲連續三整數，問三數如何？

答　設連續三數爲 $x-1, x, x+1$

則 $(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$

$x^2-4x=0\quad x(x-4)=0$

$x=0$ 或 4

因 x 爲整數 $x=4$

所求三數爲三 3, 4, 5

250. 問 有三數爲等差級數，其和爲 18 ，其平方和爲126，問三數各若何？

答 三等差級數爲 $a, a+d, a+2d$

$a+a+d+a+2d=18$ ……………… (1)

$a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2=126$ ……… (2)

(1) 卽 $3(a+d)=18$　$a+d=6$

將 $a+d$ 值代入(2)式

$a^2+6^2+(6+d)^2=126$

$a^2+12d+d^2=54$

以 $a=6-d$ 代入上式

$(6-d)^2+12d+d^2=54$

$36+2d^2=54 \quad d^2=9$

$\therefore\ d=\pm 3$

$a=6-d=6\pm 3=9$ or 3

$\therefore$ 三等差級數 3,6,9. 或 9,6,3.

251. 問　有四數爲等差級數，其和爲20，其平方和爲 120 問四數各若何？

答　設等差爲 2d, 則級數當爲

$x-3d,\ x-d,\ x+d,\ x+3d$

$x-3d+x-d+x+d+x+3d=20$

$4x=20 \quad \therefore\ x=5$

又 $(x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2$

$=120 x^2+5d^2=30$

$$d^2=\frac{30-25}{5}=1$$

$$d=\pm 1$$

故級數為 2, 4, 6, 8

252. 問　試求至100之1000能以7整除之整數和。

答　7之倍數大於 100 而近於 100 者為 105，近於1000而小於 1000 者為 994，於是得 $a=105, l=994$ $d=7$ $n=(994-105)\div 7+1$ $=128$　$S=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{128(105+994)}{2}$

$$=70336$$

253. 問　有樹百株，欲每隔 5 丈植之，今有在植第一株樹前10丈之人，將每株運至植

處，問運完共走路若干？

答 所求之路程為 x 丈，由題知

$a=10\times2=20 \quad d=5\times2$

$n=100$

$$S=\frac{100}{2}\times\{2\times20+(100-1)\times10\}$$

$$=51500 \text{ 丈}$$

卽共走 51500 丈，或 286 里20丈。

254. 問 有112頁之書，欲於7日寫完，第一日寫10頁，以後每日所寫之紙數須成為等差級數。問每日須增若干頁？

答 設每日增d頁，由題知 $S=112$

$a=10, \quad n=7$

$\therefore\ 112=\frac{1}{2}\{10\times 2+(7-1)d\}$

解之 $d=2$

即每日增二頁。

255. 問 試舉等比級數之符號及公式。

答 等比級數簡寫為G. P.其符號首項為a, 公比為r, 項數為n, 中項為g, 總和為S, 末項為l, 其公式為

$$S=\frac{a(1-r^{n})}{1-r}\text{或 }S=\frac{a(r^{n}-1)}{r-1}.$$

$$g=\sqrt{ab}\qquad l=ar^{n-1}$$

無限等比級數之總和為

$$S=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^{n}}{1-r}$$

256. 問 試於2與54間插二等比中項。

答 因項數爲 4

$\therefore 54 = a \times r^{n-1} = 2 \times r^3$

$r^3 = 27 \qquad r = 3$

$\therefore$ 二中項爲 $2 \times 3 = 6,\ 6 \times 3 = 18$

257. 問 有等比三級數，其和爲28，其平方和爲 336，問各數若干？

答 設三級數爲 $a,\ ar,\ ar^2$

$a + ar + ar^2 = 28 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 336 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$(2) \div (1) \quad a - ar + ar^2 = 12 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

$(3) \div (1) \quad \dfrac{1 - r + r^2}{1 + r + r^2} = \dfrac{12}{28}$

解之 $r = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \dfrac{5 \pm 3}{4}$

$= 2 \text{ or } 1$

以 r 值代入(3)式

$$a(1-2+4)=12$$

或 $a(1-1+1)=12$

$\therefore\ a=4$ or 12

但 $a=12$ 不合原題　　$\therefore\ a=4$

卽三級數爲 $4,\ ar=8,\ ar^2=16$

258. 問　何謂調和級數？

答　調和級數爲一種分數，其逆數則適爲等差級數者。

259. 問　調和級數之算法及與等差等比之關係如何？

答　調和級數本身無解算之定式，惟普通多以其化爲等差級數計値，然後再倒囘，但其中項爲則　$H=\dfrac{2ab}{a+b}$

其與等差等比級數，祗有中項之關係，卽

$$A=\frac{a+b}{2},\quad H=\frac{2ab}{a+b}$$

$$AH=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab=g^2$$

6).問　有二數其等比中項爲12,其調和中項爲$9\frac{3}{5}$，問此二數？

答　$g=\sqrt{ab}=12$………………………(1)

$$H=\frac{2ab}{a+b}=9\frac{3}{5}\text{……………}(2)$$

$ab=12^2=144$ 代入(2)式

$$2\times144\times5=48a+48b$$

$$a+b=30\qquad\therefore a=30-b$$

將a值代入 $ab=144$ 式中

$$b=\frac{144}{30-b}\qquad\therefore b=\frac{30\pm18}{2}$$

$b=24$ 或 6

$a=30-b=6$ 或 24

卽二數爲 6 及 24

261. 問　a,b,c 爲調和級數，則 $a:a-b=a+c:a-c$. 試證之。

答　$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$

$\therefore \frac{a}{a+c}=\frac{a-b}{(b-c)+(a-b)}=\frac{a-b}{a-c}$

$\therefore a:a+c=a-b:a-c$

卽 $a:a-b=a+c:a-c$

262. 問　等差級數之第 $m+1$ 項，第 $n+1$ 項，第 $r+1$ 項爲等比級數，而 m,n,r 爲調和級數，則其等差級數之

公差對於初項之比爲$-\frac{2}{n}$，

試證之

答　等差初項爲 a, 公差爲 d

$$\frac{a+md}{a+nd}=\frac{a+nd}{a+rd}$$

$$\therefore\ a^2+(m+r)ad+mrd^2=a^2+2nd+n^2d^2$$

$$\therefore\ \frac{d}{a}=\frac{m+r-2n}{n^2-mr}$$

但 $\frac{2}{n}=\frac{1}{m}+\frac{1}{r}$ $\therefore\ 2mr=mn+nr$

$$\therefore\ \frac{d}{a}=\frac{2(m+r-2n)}{2n^2-(mn+nr)}=-\frac{2}{n}$$

第十一類　對數問題

263。問　何謂對數？

答　對數就是求指數的數值如 $x=y^n$ 任

對數寫法卽爲 $a=\log_y x$

264. 問　何謂對數表？

答　對數表是前人將指數數值與眞數對列以便計算的表格，大抵以 e 為底的叫作算學對數表。以10為底的叫作然對數表，普通所用卽以10為底者。

265. 問　"以10為底"之意義是什麼？

答　以 10 為底就是說某數是 10 的幾次方，如

$100=10^2$ 可寫為 $2=\log_{10}100$

266. 問　運算對數的法則如何？

答　對數的運算法則

(1) 積的對數如 $xy=a^m$

$$m=\log_a xy=\log_a x+a\log_a y$$

(m普通多不寫)

(2) 商的對數如 $\frac{a}{b}=e^{n}$

$$\log_c\frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$$

(3) 冪的對數，如$(a^m)^n=x^n$

$$\log_a x^m=m\log_a x$$

(4) 根的對數,如 $A=a^m$

$$\sqrt[n]{A}=a^{\frac{m}{n}}$$

$$\log_a\sqrt[n]{A}=\frac{m}{n}=\frac{1}{n}\log_a A$$

其所以如此，可由指數定則參悟。

267.問 $\log\frac{a}{b}+\log\frac{b}{c}+\log\frac{c}{a}$

$=0$試證之。

答 原式左邊$=(\log a-\log b)+(\log b-\log c)+(\log c-\log a)=0$

別證，左邊$=\log\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\right)$

$$=\log 1=0$$

268. 問　試自$\log(x-1)-\log(x^2-5x+4)+1=0$求x之值。

答　原式可化為

$$\log\frac{x-1}{x^2-5x+4}=-1$$

$$\log\frac{x-1}{(x-1)(x-4)}=\log\frac{1}{10}$$

$$\log\frac{1}{x-4}=\log\frac{1}{10}$$

即 $\frac{1}{x-4}=\frac{1}{10}$

$\therefore\ x=14$

269. 問　對數表的查法如何？

答　若由眞數查對數，則先以眞數左側

之三位或二位查對數表左側N行下之數。次再橫查上行數字使符於眞數之其餘左側之數；然後以此二數位置縱橫之交點之數記爲小數。再看眞數有幾位則以減 1 後的較數記於整數位置處，此名指標，小數名假數，（但眞數爲小數時，指標卽等於眞數的位數，其上劃一橫綫以示區別）如

$$\log 3450 = 3.5378$$

其 5378 卽對數表中之數，3爲指標。

若由對數查眞數，則與上法適反，卽先查假數，然後縱橫查出其眞數，再由指數定整數之位數，如求$\bar{4}.9143$的眞數。

.9143 在對數表上爲 821 眞數。

因指標爲 4 卽整數位爲 $4+1=5$

$\therefore$ 眞數爲 82100

270. 問　用對數表計算 $\sqrt[3]{0\cdot00297}$ 之數。

答　$\log\sqrt[3]{0\cdot00279}=\frac{1}{3}\log 0.00279$

$=\frac{1}{3}\times 3\cdot\overline{4}456$

$=\overline{1}\cdot4456=\log 0\cdot14078$

即　$\sqrt[3]{0\cdot00279}=\cdot14073$

271. 問　年利 5 釐，本金 100 元，問100 年後之本利和爲若干？(每年加利一次)

答　$\log A=\log P+\log(1+i)^n$

$=\log 100+n\log 1\cdot05$

$=2+100\times0\cdot02119$

$$=4.11900=\log 13152$$

即 100 年後本利和爲 13152 元。

大東