算學叢書

第一種

最小二乘式

李協 著

商務印書館出版

National Institute
國立編譯館
圖書
Library

最小二乘式

目錄

最小二乘式

敘論

余今將以一種最緻密之算法,名曰最小二乘式,介紹於吾國.此法用於測量地域,用於物理化學等觀察,平其舛差可以得極精確之結果,爲用甚要且鉅也.

中國訖今尙無最小二乘式算法譯本,或關乎此法之著述,足徵吾國人對於科學之懈弛.顧此法在歐洲則非新創,蓋闡明已百餘年矣.

1795年,德意志著名數學家 Gauss 年始十八歲,已闡明最小二乘式之理.同時法人 Legendre 亦有此發明.1806年已著論行世.而 Gauss 之法則於1809年始經宣佈.

發明之權,以前後論,自應屬之 Legendre. 顧 Gauss 獨能力窮此術,闡發無遺,踵其後者又能窮致其用,而在法國則反寂然也.

最小二乘式之名,則由 Legendre 始,蓋 Legendre 1806年所發表之著作'測定彗星軌道新法' (*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*) 其附卷有 *Sur la méthode des moindres carrés*, 最小二乘法論文也. Gauss 第一宣布關乎此法之著作,則爲臘丁文,名曰 *Theoria motus corporum coelestium inseconibus conicis solem ambientium*, 以後又有關乎此法之著作凡六種.

踵 Legendre 及 Gauss 而起者,若 Bessel, Euler, Jobueger, Lambert, Boscowich, Lagrange, Laplace 等,皆有功於此術者也.

今且進而言此法之原理.蓋人之官覺能力有限制,器具之精良非臻盡美,則觀察不能無舛差也.同一竿也,使甲乙並量其高,甲所報與乙所報不能盡同也.同一角也,用此器及彼器量其度分秒,二器所得不能一致也.同一人也,同一器也,使反覆量之,此次所得與彼次所得又不能無異也.一直角三角形也,量其三邊之長不能恰合於商高之定例也.(句方股方之和等於弦方,西人名曰 Pythagora's Law,在中國則商高時已知此定理.'周髀算經'曰,故折矩以爲句廣三,股脩四,徑隅五,旣方其外半之一矩環而共盤得成三四五.又曰,若求邪至日者,以日下爲句,日高爲股,句股各自乘,並而開方除之得邪.)量其三角,不能並爲二直角無盈朒也.

今欲免舛差之弊,有一法可乎?曰,凡量一物大小,恃一人,用一器,觀察一次足矣,羣言紛淆反足亂人意也.量直角三角形,得其二邊足矣,他邊之長可布籌而知也.得其二角足矣,他角可由一百八十度減已知之角而知也.畫蛇添足,非徒無益,又足害事也.

爲是言也,是無異士師之折獄,但據一證人之詞以爲斷,欲得其平難矣.夫證人多矣,詞各有異,苟合而加以審察,方可得其眞情.測算亦然,必合多數之觀察窮其舛差之由來,究其大小,始可得幾近無差之結果.此則需乎平差之術 (Ausgleechung-srechung),此最小二乘式算法之所由來也.

第一章 論觀察之差及其分類

觀察者之能力,與所獲舛差之大小頗有關繫.后羿一射,萬夫決拾;弱子操弓,慈母閉門.蓋羿之於射有不失正鵠之能力,弱子則東西南北且莫適從,遑云射乎,無怪乎慈母之閉門也.然耕當命僕,織當命婢,射亦當命習射者,言舛差則就習射者言,不當就不習射者言之也.今試懸一招焉,畫同心三圜於其上,聚習射者而命之射,以圜心爲的,中之者鮮矣.不出乎初圜者,射之上者也,然爲數無幾.介乎初次圜之間者,次焉者也,能者居多焉.介乎次圜三圜之間者,下焉者也,在習射者之中亦不數睹焉.並三圜而不能入,則可無與於此射矣.故舛差有無理之舛差,有有理之舛差.招在東而射西,無理者也.雖不中鵠不遠矣,有理者也.舛差有麤微之別焉.次圜之外,麤者也.次圜之內,微者也,首圜之內,則更微矣.觀察者須能免於麤舛差,始可以事觀察.

麤舛差之原,不特此也.使以經緯儀測角而風撼其三足架,遠視鏡軸之方向已失而觀察者莫覺.使以氣壓儀測高而氣溫驟變,寒暑針已報其差而觀察者弗睹.凡此類事,一有不愼,麤舛隨之,不能免除,亦不足以事觀察也.

麤差可免,微差不能也.取術愼,觀察細,練習頻,固可限其差於極微極細.然欲純然無差,不可及也.

舛差之所由來,命曰差源.今欲於各種觀察之結果探其差源,難能事也.然以舛差發現之情形,可別之爲二類:(1)其發現

也恆有一定之律,其方向恆不變,或常爲正,或常爲負.(2)其發現也無一定之律,其方向非不變,可爲正,可爲負.請舉例以明之.設布尺量距,使尺之長稍有過焉,雖其差僅微忽,然每布尺一次卽增一微忽之差,其差與布尺之次數爲正比,與所量之距之遠近爲正比,其方向常爲正.如是者,名曰有律之舛差.

使所用布尺無微忽之過與不及,而布尺時或稍前,或稍後,雖其前後之差亦不過微忽,而其結果亦可以使觀察之數頗有出入.但布尺或過前過後,二者不敢必其一有而他無,其機會相等也.或巧遇之而過前者與過後者數適相等,正負適相消,則其差爲零,然而不可必也.或不巧遇之而俱過前或俱過後,其差俱爲正或俱爲負,則其差爲極盈,或正負之數不等而以正負之差爲差,則其差較弱,然亦不可必也.如是者,名曰無律之舛差.抑有一事可以斷言者,則無律之差,其增長率常遲於有律之差也.

舛差之源不一類,必探其源,別其類,始可以言平差.

二類之差,或其一與焉,或兩者俱與焉,必審觀察之結果而別之.

例若量一物之大小,用同一器,守同一法,受同一外感(氣候或他物理上感觸),反復數次而所得結果互有出入,但其差甚微,非可以視作舛者,則其源蓋無律者也.反是,若每量一次用器異,外感殊,法亦不一,而各得微差,則其源或爲有律,或爲無律,或俱有責焉,必合二者所得舛差之量而審別之,乃可以定某類舛差分劑之多寡.

第二章 論或是率,舛差之或是率

天下事物,有可見其眞是者,有不可見其眞是而敢言其或是者.謂河中有鯉,吾敢言其眞是也;謂釣於河而得鯉,吾但可言其或是也.或是者有等差焉.謂良馬日馳五百里,吾敢信其多分是而少分非,謂駑蹇日馳五百里,吾敢信其少分是而多分非.擲一骰於盆中,而欲得⁝·⁝,必不可得也.·至⁝⁝任取其一,必可得也.獨欲得⁙則或可得或不可得,且多分不可得而僅少分可得.其不可得之率爲六之五,其可得之率爲六之一.蓋骰之六面,五面非⁙,僅一面爲⁙也.其可得之率,名曰或是率.

或是率何以定.曰,凡事物之遇也,有其機緣焉,機緣多者頻遇,機緣寡者罕遇.遊於稷下者所見多齊人,遊於郢者所見多楚人.於稷下則齊人之機緣多,而於郢則楚人之機緣多也.骰之六面,⁙居其一,是⁙之機緣僅六之一也.故言某事物之或是率者,以某事物機緣之數與凡所可有機緣之數相比也.舛差亦然.命某舛差機緣之數爲 m, 凡所可有機緣數爲 n, 則該舛差之或是率爲

$$W=\frac{m}{n} \tag{1}$$

n 必大於 m, 故或是率 W 必恆小於 1. 設 $m=n$, 則 $W=1$: 其義云何?則或是進而爲眞是也.設使骰之六面俱爲⁙,則每擲皆⁙,不必言或是矣.⁙之機緣於是有六,而骰所可現之面亦爲六,即凡所可有機緣之數爲六.以六比六,等於一.故一者,眞是之謂也,亦可命爲或是率之單位.

設 $m=0$, 則 $W=0$, 無機綠,卽無或是率也.故一骰所以不能擲七點者,以骰之六面無七點之機綠也.

設欲以二骰擲七點,則可.其機綠凡有六,因 $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$, 俱爲七也.而凡所可有之機綠則凡三十六.因此骰之每一面,皆有一機綠與他骰任一面並列,故此骰六面,一一與他骰之六面相遞並列,其機綠之數爲 $6\times6=36$ 也.於是知七點之或是率爲 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

設囊中有黑豆五,白豆七,黃豆九,任出其一,則黑豆之或是率爲 $\frac{5}{21}$, 白豆之或是率爲 $\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$, 黃豆之或是率爲 $\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.

設囊中三色豆之數如上.任出其一,欲其或爲黑或爲白,則黑豆之機綠有五,白豆之機綠有七,二豆之機綠共有十二,而凡所可有機綠之數爲二十一.故黑白豆任出其一之或是率爲 $\frac{12}{21}$.

普通論之,甲之機綠爲 a, 乙之機綠爲 b, 丙之機綠爲 c, 甲乙機綠之和爲 $a+b$, 凡所可有機綠之數爲 $a+b+c$. 故甲或乙任出其一之或是率爲 $W=\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}$.

甲獨出之或是率爲 $W_1=\frac{a}{a+b+c}$, 乙獨出之或是率爲 $W_2=\frac{b}{a+b+c}$, 故甲或乙任出其一之或是率爲

$$W=W_1+W_2, \tag{2}$$

名曰或是率之和.

設觀察時,一舛差 ϵ_1 之或是率爲 W_1,又一舛差 ϵ_2 之或是率爲 W_2,又一舛差 ϵ_3 之或是率爲 W_3,如是例推,則多舛差或是率之和爲

$$W=W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots \tag{2'}$$

設有二囊.甲囊貯黑豆五,白豆七.乙囊貯黑豆三,白豆六.而欲由每囊中各出一黑豆,則因甲囊中每一黑豆各有與乙囊中任一黑豆並出之一機緣,故二囊同時出一黑豆之機緣爲 $5\times3=15$,而凡所可有機緣之數則爲 $(5+7)(3+6)=12\times9=108$.故二囊同時出一黑豆之或是率爲 $\frac{15}{108}=\frac{5}{36}$.

普通論之,設甲囊中有黑豆 a',白豆 b',乙囊中有黑豆 a'',白豆 b''.欲同時由二囊中各出一黑豆,則其或是率爲

$$W=\frac{a'a''}{(a'+b')(a''+b'')}=\frac{a'}{a'+b'}\cdot\frac{a''}{a''+b''}.$$

由甲囊出一黑豆之或是率爲 $W'=\frac{a'}{a'+b'}$,由乙囊出一黑豆之或是率爲 $W''=\frac{a''}{a''+b''}$.故二囊同時各出一黑豆之或是率爲

$$W=W'\cdot W'', \tag{3}$$

名曰或是率之積.

設觀察多次,其每次舛差命爲 ϵ', ϵ'', ϵ''',……, 各舛差之或是率爲 W', W'', W''',……, 則其或是率之積爲

$$W=W'\cdot W''\cdot W'''\cdots\cdots. \tag{4}$$

以上所舉諸例,各事物之機緣數,皆假定爲可數而知者也.故其或是率亦易知之.設其或是率不能算得,則可以其出現之頻數,返而推其或是率.

例如言煤礦工人,千人中僅二百五十人壽達六十齡.則任指一煤礦工人,推其壽命,可否達六十,其或是率不過$\frac{250}{1000}=\frac{1}{4}$.

今再以是例推之於舛差.顧舛差之眞值,雖得知也.然一事物,觀察至多次,則雖不得其眞,而其近似乎眞者可比推而見也.近似乎眞者,維何?曰,平均值是也.

下舉之例,豫定者二事.(一)鉅舛差絕不至出現.(二)觀察用同法,用同器,同一謹密行之.

設一距離,量之二次.第一次得其長爲l_1,第二次爲l_2,二者數不相符,則俱非可命爲眞長也.

姑命L爲距離之長.所量得者或過之,爲$l_1=L+\epsilon_1$;或不及,爲$l_2=L-\epsilon_2$.是其舛差之方向,或爲正或爲負也,而正與負之機緣正相等耳.故舛差之和,必可望至正負相消而等於0,卽$\epsilon_1+\epsilon_2=0(\epsilon_1=+\epsilon;\ \epsilon_2=-\epsilon)$.以兩次所得之值$l_1$及$l_2$相加而二分之,卽得

$$L=\frac{L+\epsilon_1+L+\epsilon_2}{2}=\frac{2L}{2}=\frac{l_1+l_2}{2}, \tag{4}$$

名曰觀察結果之平均值,雖非眞值而較爲密近者也.

若觀察n次,得$l_1, l_2, l_3,\cdots\cdots, l_n$諸值.每次各帶一舛差爲$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\cdots\cdots, \epsilon_n$,其方向或爲正或爲負.因距機緣相等,故可命正負之數相等,卽其和$\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3\cdots\cdots+\epsilon_n=[\epsilon](1)=0$.姑命$L$爲距離之長,則$l_1=L+\epsilon_1$, $l_2=L+\epsilon_2$, $l_3=L+\epsilon_3,\cdots\cdots$, $l_n=L+\epsilon_n$.

(1) 凡數之和以方弧〔 〕代諸加號,爲Gauss所創用,本書依用之.下倣此.

而

$$L=\frac{L+\epsilon_1+L+\epsilon_2+L+\epsilon_3+\cdots+L+\epsilon_n}{n}=\frac{[L+\epsilon]}{n}$$

$$=\frac{nL+[\epsilon]}{n}=\frac{[l]}{n}, \qquad (4)$$

爲觀察 n 次距離之平均值,雖不可遽命爲距離之眞長,而較之觀察二次之平均値則更密近矣.

觀察之次數愈多,則其平均値愈近眞值.

不得觀察之眞値以定各舛差之或是率,就其平均値定之,亦可也.玆借一現成之例以明之.

昔 Bessel 測東普魯士之經緯度,其於 Trenk 站所測 Mednick-Fuchsderg 之角,凡十八次,其結果列舉如下表:

號數	觀察角度	舛差
1	83° 30′ 36.25″	−1.38″
2	7.50	−2.63
3	6.00	−1.13
4	4.77	+0.10
5	3.75	+1.12
6	0.25	+4.62
7	3.70	+1.17
8	6.14	−1.27
9	4.04	+0.83
10	6.96	−2.09
11	3.16	+1.71
12	4.57	+0.30
13	4.75	+0.12
14	6.50	−1.63
15	5.00	−0.13
16	4.75	+0.12
17	4.25	+0.62
18	5.25	−0.38
總計	87.59	+10.71
		−10.64
平均値 83° 30′ 34.87″		

上表舛差,以各次觀察之數與其平均值相較而得者也.設論各舛差之或是率,則視各舛差之在

0″及1″間者凡八
1″及2″間者凡七
2″及3″間者凡二
3″及4″間者凡〇
4″及5″間者凡一

總計舛差凡十有八.

由上統計中,可見舛差之小者,其遇也頻,舛差之大者,其遇也疏.蓋所用器壹,所用法同,其行量術也同一謹密,小差不能免,大差亦未易數數睹也.

由此觀之,舛差之或是率,關乎舛差之大小(關乎其精麤).上統計中,舛差之在0″及1″間者凡八遇,與舛差總計十八相比爲$\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$.取0″及1″之平均值爲0.5″,則0.5″之或是率爲

$$W(0.5'')=\frac{4}{9}=0.444\cdots\cdots.$$

但舛差之或是率,不但與其精麤有關繫也(如上例舛差之平均值爲0.5),且與其平均值上下二界之距有關繫(簡曰界距).上例平均值0.5″,其上下二界之距爲0″至1″=1″,其或是率固爲0.44…矣.設狹其界距,令由0.25″至0.75″,其平均值仍爲0.5″,而其遇之次數僅爲三,卽其或是率爲$W(0.5'')=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$.舛差之數愈多,所取之界距愈狹,則或是率之大小可作與界距大小爲正比觀之.

上理若以分析法推之,命舛差 ϵ 之或是率爲 $W(\epsilon)$,因或是率關乎 ϵ 之大小,可命爲 ϵ 之函數,其關繫可以 $\phi(\epsilon)$ 代之.又因其或是率與界距之大小爲正比,命界距爲 $d\epsilon$ (ϵ 之微分,蓋界距卽舛差增長之一段也),則或是率可總二關繫爲

$$W(\epsilon)=\phi(\epsilon)\,d\epsilon. \tag{5}$$

卽舛差 ϵ 在 $d\epsilon$ 界距中之或是率也.其上下二界爲

$$\epsilon-\frac{d\epsilon}{2} \text{ 及 } \epsilon+\frac{d\epsilon}{2},$$

或

$$\epsilon-d\epsilon \text{ 及 } \epsilon+d\epsilon.$$

ϵ 至 $d\epsilon$ 之間愈狹,則 $\phi(\epsilon)d\epsilon$ 之値愈小.設 $d\epsilon$ 小至無窮,則 $\phi(\epsilon)d\epsilon$ 亦小至無窮.如此,則借微分算法,可算一舛差於任意界距中之或是率.

設有多數舛差, ϵ 之或是率爲 $\phi(\epsilon)d\epsilon$, ϵ' 之或是率爲 $\phi(\epsilon')d\epsilon$, ϵ'' 之或是率爲 $\phi(\epsilon'')d\epsilon$, 如是例推,皆以 $d\epsilon$ 等距遞列.於此諸舛差中欲任遇一舛差,則其或是率爲 ϵ 或 ϵ' 或 ϵ'' 等任遇其一各或是率之和(公式2').又命其距 $d\epsilon$ 小至無窮,則任取上下二界 a 及 b 間一舛差之或是率爲

$$W_a^b=\int_a^b\phi(\epsilon)\,d\epsilon. \tag{6}$$

第三章 論外差函數

上章公式(6)內之$\phi(\epsilon)$,名曰外差函數.欲知外差在任二界a及b間之或是率,必先知此函數.此函數之性質究若何,吾敢斷言者,有以下三端.

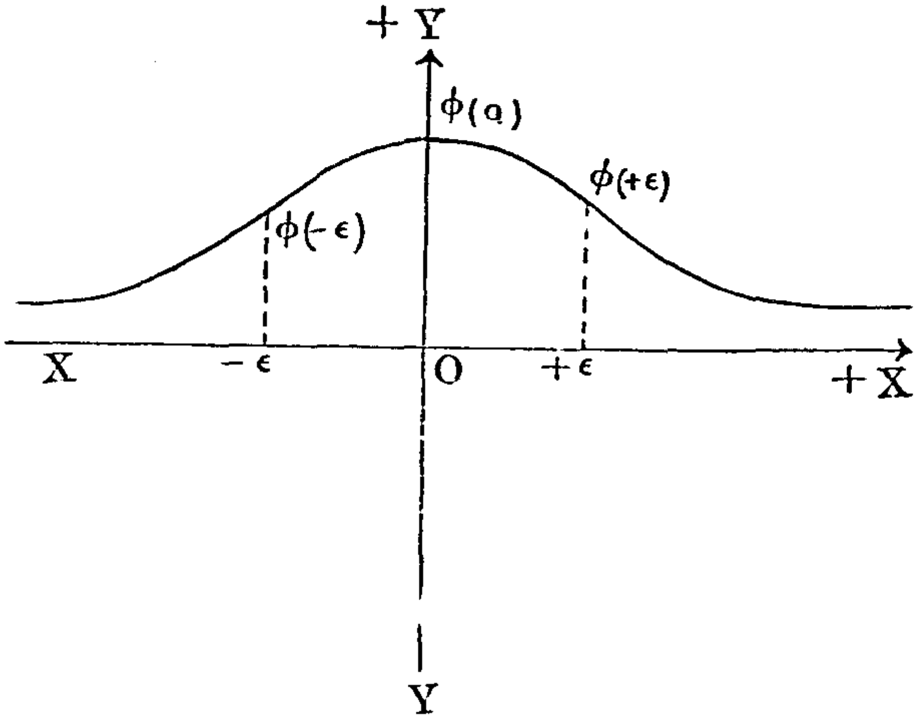
(1)此函數必爲偶函數.因觀察多次,正外差與負外差機緣當相等(見上章),則應

$$\phi(+\epsilon)=\phi(-\epsilon) \tag{7}$$

若非偶函數,則不能符此例也.

(2)ϵ之値增(無論正負,以其絕對値言之),則$\phi(\epsilon)$之値減.因外差愈蠢,其或是率應愈少也.

(3)$\epsilon=0$則$\phi(\epsilon)=Max.$,卽外差等於0則其或是率應最大也.



第一圖

試作圖以表之.作縱橫二軸 X 及 Y. 度 ϵ 於橫軸上,自元點 O 起向右爲正,向左爲負.由 X 任何點垂直向上度 $\phi(\epsilon)$ 與 Y 平行,則各點 $\phi(\epsilon)$ 之端點可聯成一曲線.試思此曲線應作何狀.

如第一圖:(1) 此曲線在 Y 軸兩側,必互相對稱,因 $\phi(+\epsilon)=\phi(-\epsilon)$ 故也. (2) X 軸必爲此曲線之漸近線,因舛差之過,固麤者稀而細者密,然其麤細稀密,究無絕定之界限也.

舛差函數之性質,於此可略見一斑.顧其於 ϵ 之關繫眞狀,猶未知也,則請用下法以明之.

1. 用代數平均值求舛差函數法

一簭之長,兩次量之,得數不相符,則疑其一過長,一不足也.合兩得數而折中之,則約得其實矣.若更多次量之,則其得數之或過或不及,二者約各居其半,以其機緣相等故也.合多次得數,而以觀察之次數除之,則愈密近矣.名曰折中數,或曰代數平均值.代數平均值之或是率,在各觀察得數中,可以謂爲最大者也.

命各次觀察之得數(各次觀察俱同等審愼者)爲 $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_n$, 各帶一舛差爲 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots\cdots, \epsilon_n$, 數之眞值命爲 χ.

觀察所得之數補其舛差,即爲眞值.故

$$\chi=l_1+\epsilon_1=l_2+\epsilon_2=\cdots\cdots=l_n+\epsilon_n$$

$$=\frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}+\frac{\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n}{n}=\frac{\Sigma l}{n}+\frac{\Sigma\epsilon}{n}.$$

上式右端之第一項,非他,即觀察數 l 之代數平均值也.命爲 x, 故

$$x=\frac{l_1+l_2+\cdots l_n}{n}=\frac{[l]}{n}, \tag{8}$$

而
$$\chi=\frac{[l]}{n}+\frac{[\epsilon]}{n}=x+\frac{[\epsilon]}{n}. \tag{9}$$

n 愈增,則 $\frac{[\epsilon]}{n}$ 之值愈減.若 $n=\infty$,則 $\frac{[\epsilon]}{n}=0$ 而 $\chi=x$,卽觀察數之代數平均值可以作其眞值觀也.然孰有此力觀察一事物至無窮次乎?故其眞值吾不能驟得.若得觀察數之眞值,則其所帶舛差之眞值亦不難由

$$\epsilon_1=\chi-l_1,\ \epsilon_2=\chi-l_2,\cdots\cdots,\ \epsilon_n=\chi-l_n$$

各式而顯然畢露.惟吾所知者,仍不過觀察數之代數平均值也,故其舛差亦不能卽得其眞而不過爲其或是之值命爲

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n$$

$$x=l_1+\lambda_1=l_2+\lambda_2=\cdots\cdots=l_n+\lambda_n,$$

或
$$x=\frac{[l]}{n}+\frac{[\lambda]}{n}. \tag{10}$$

惟上曾命 $x=\frac{[l]}{n}$,則必 $\frac{[\lambda]}{n}=0$.

n 爲觀察之次數,不能期其至於無窮,故

必
$$[\lambda]=0. \tag{11}$$

由此可知舛差之性質,有正有負.積之,則彼此相消而化爲烏有也.

予於第二章之末,已以或是率之積用於觀察之舛差,命 λ_1 之或是率爲 $\phi(\lambda_1)d\lambda_1$, λ_2 之或是率爲 $\phi(\lambda_2)d\lambda_2,\cdots\cdots$. λ_n 之或是率爲 $\phi(\lambda_n)d\lambda_n$. 則於 n 次觀察令各舛差相遞俱見,其或是率爲各舛差之積(公式(3')),卽

$W_{(\lambda)}=\phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2)\phi(\lambda_3)\cdots\phi(\lambda_n)$ ($d\Sigma$相乘過小,略去.)

或 $W_{(\lambda)}=\phi(x-l_1)\phi(x-l_2)\cdots\phi(x-l_n)$.

x之值若爲最或是者,則必各舛差或是率之積爲最大者,

卽

$$W_{(\lambda)}=\phi(x-l_1)\phi(x-l_2)\cdots\phi(x-l_n)=max.$$

凡乘數之式化爲對數則易處理,故上式可變爲

$$log\,W_{(\lambda)}=log\,\phi(x-l_1)+log\,\phi(x-l_2)+\cdots+log\,\phi(x-l_n)=max.$$

凡最大或最小之式,其導數(微商數)=0,

故 $$\frac{\phi'(x-l_1)}{\phi(x-l_1)}+\frac{\phi'(x-l_2)}{\phi(x-l_2)}+\cdots+\frac{\phi'(x-l_n)}{\phi(x-l_n)}=0.\text{[2]} \qquad (\alpha)$$

按上公式(11): $[\lambda]=0$,

卽得 $$(x-l_1)+(x-l_2)+\cdots+(x-l_n)=0 \qquad (\beta)$$

(α)及(β)二式合而爲一,命

$$\alpha=K\beta;\ K=\frac{\alpha}{\beta},$$

則 $$\frac{\phi'(x-l_1)}{\phi(x-l_1)}+\frac{\phi'(x-l_2)}{\phi(x-l_2)}+\cdots+\frac{\phi'(x-l_n)}{\phi(x-l_n)}$$

$$=K\left\{(x-l_1)+(x-l_2)+\cdots(x-l_n)\right\},$$

而 $$\frac{\phi'(x-l_1)}{(x-l_1)\phi(x-l_1)}=\frac{\phi'(x-l_2)}{(x-l_2)\phi(x-l_2)}=\cdots=\frac{\phi'(x-l_n)}{(x-l_n)\phi(x-l_n)}=K,$$

卽 $$K=\frac{\phi'(\lambda_1)}{\lambda_1\phi(\lambda_1)}=\frac{\phi'(\lambda_2)}{\lambda_2\phi(\lambda_2)}=\cdots=\frac{\phi'(\lambda_n)}{\lambda_n\phi(\lambda_n)}=\frac{\phi'(\lambda)}{\lambda\phi(\lambda)}.$$

因 $$\phi'(\lambda)=\frac{\partial\phi(\lambda)}{\partial\lambda},$$

(2) $\phi'(x-l_1)$以代該函數之微商,餘例推.

故 $$\frac{1}{\lambda\phi(\lambda)}\cdot\frac{\partial\phi(\lambda)}{\partial\lambda}=K,$$

卽 $$\frac{\partial\phi(\lambda)}{\phi(\lambda)}=K\lambda\partial\lambda.$$

求其積分得

$$n\,log\,\phi(\lambda)=\frac{K\lambda^2}{2}+n\,log\,C.$$[3]

化對數爲眞數,得

$$\phi(\lambda)=Ce^{\frac{K}{2}\lambda^2}.$$

同理,

$$\phi(\epsilon)=Ce^{\frac{K}{2}\epsilon^2}. \qquad (12)$$

代入上公式(6),得

$$W_a^b=\int_a^b\phi(\epsilon)\,d\epsilon=C\int_a^b e^{\frac{K}{2}\epsilon^2}\,d\epsilon. \qquad (13)$$

上式 K 之值必爲負數始便.因按上第一圖, $\epsilon=0$ 則 $\phi(\epsilon)=max.$ 過此點則漸減,故

可命 $$\frac{1}{2}K=-h^2.$$

則上式變爲

$$W_a^b=C\int_a^b e^{-h^2\epsilon^2}\,d\epsilon. \qquad (14)$$

(3) $n\,log$ 爲自然對數記號, $n\,log\,C$ 爲積分恆數之變形.

命 $a=-\infty$, $b=+\infty$, 則 $\overset{b}{\underset{a}{W}}$ 變爲確定 $=1$, 而

$$1=C\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon. \tag{15}$$

再以 t 代 $h\epsilon$, 則 $d\epsilon=\dfrac{dt}{h}$ 以 $-\infty$ 及 $+\infty$ 爲二界, 仍上則

$$\frac{C}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=1. \tag{16}$$

欲解此積分式, 爰引下例以爲助:

第二圖爲一旋體面, 其方程式爲

$$Z=e^{-(x^2+y^2)} \quad 或 \quad Z=e^{-r^2}.$$

今欲求該旋體曲面與 xy 平面間之容積, 試由二途入手.

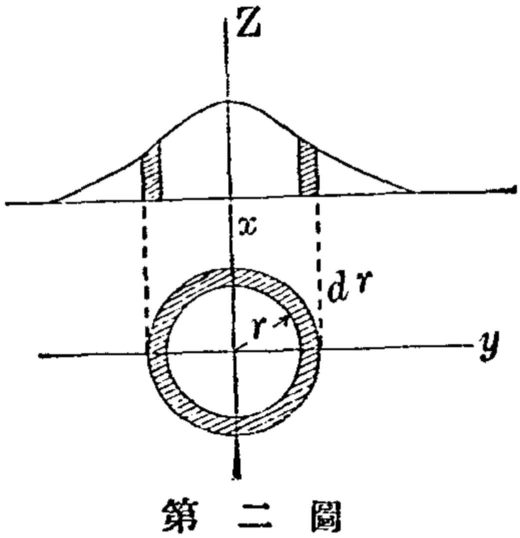
第一, 按 dx 及 dy 分析之爲積面微分

$$dU=Z\,dx\,dy,$$

式中 dU 爲容積微分, 則

$$U=\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$=\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-y^2}dx\,dy.$$



第 二 圖

式中 $-\infty$ 及 $+\infty$ 二界關於兩次積分.

第一次按 x 求積分, 第二次按 y 求積分, 得

$$U=\int e^{-x^2}\left(\int e^{-y^2}dy\right)dx \text{ 或 } U=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy.$$

在定積分式中,其原變數之號命爲 x 爲 y,或命爲 t,無所異同也.故上式亦可書爲

$$U=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)^2. \qquad (a)$$

第二.亦可按圓柱體分析之,如上第二圖.圓柱之半徑之 r 向外增爲 dr.其體積增長爲

$$dU'=2\pi r\,dr\,Z=2\pi r\,dr\,e^{-r^2}.$$

故其全容積爲

$$U=\int dU=2\pi\int_0^{\infty}re^{-r^2}dr. \qquad (b)$$

按積分公式

$$\int re^{-r^2}dr=-\frac{1}{2}e^{-r^2}.$$

取上界 $r=\infty$,下界 $r=0$,則

$$\int_0^{\infty}re^{-r^2}dr=\left(-0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=+\frac{1}{2}.$$

代入(b)得

$$U=\pi. \qquad (c)$$

以(a),(c)二式相較,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-r^2}dt=\sqrt{\pi}. \qquad (17)$$

代入上公式(16),

$$\frac{C}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{C}{h}\sqrt{\pi}=1,$$

故
$$C=\frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

代入公式(12),

$$\phi(\epsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon^2}. \tag{18}$$

舛差函數之解析方程於是求得矣.由此凡舛差之在任一定之界 a 及 b 內者,亦可得其或是率

$$W_a^b=\int_a^b\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon. \tag{19}$$

或命 $h\epsilon=t$, $d\epsilon=\frac{dt}{h}$, 取二界 $\epsilon=a$ 及 $\epsilon=b$ 變爲 $t=ah$ 及 $t=bh$, 則

$$W_a^b=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{ah}^{bh}e^{-t^2}dt. \tag{20}$$

今於此式中所未了然者,尙有一恆數 h. 此恆數非如積分恆數 C 可以任條件定之也,乃關乎觀察之準確程度.蓋舛差 ϵ 之或是率,不僅關於 ϵ (及 $d\epsilon$) 之大小,亦必視測量所用之器具觀察之方法如何耳. Gauss 命名 h 曰準確率 (Genauigkeitszahl) 其義適合.

求恆數 h 之法

設觀察一事物,其準確率爲 h, 其所帶之舛差爲 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$. 各舛差之或是率爲

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon_1^2}d\epsilon_1,\ \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon_2^2}d\epsilon_2,\ \cdots,\ \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\epsilon_n^2}d\epsilon_n.$$

各舛差於 n 次觀察相遞俱見,其或是率按前公式(3′)等於各舛差或是率之積,即

$$W=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2\epsilon_1^2-h^2\epsilon_2^2-\cdots-h^2\epsilon_n^2}$$

或
$$W=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\epsilon^2]}. \tag{21}$$

式中 $[\epsilon^2]=\epsilon_1^2+\epsilon_2^2+\cdots+\epsilon_n^2$.

欲由(21)式以求 h,請再申明 h 與 ϵ 之關係.夫 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$ 一系之舛差,何自而生乎.曰因 h 故,蓋 h 爲準確之率,而非能至於無上準確,毫無遺憾也.果如是,ϵ 且消滅矣.惟 h 爲限制 ϵ 之定衡,h 愈大,則 ϵ 愈微,事之最明瞭者也.顧 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$ 各不相同矣.使 $\epsilon_1=\epsilon_2$,則可謂二次觀察同一準確.惟其不同,則可想見其由於 h 之不能盡同也(其準確率相異也).ϵ 之數愈寡,此徵愈顯執一定之準確率 h 以衡諸不同之舛差,得無弗合否.然此纖毫出入,弗能免也.計惟有於諸 h 中擇其最可信任者以爲標準,則其率於各舛差中皆密近矣.

最可信任之 h 云何,謂一準確率,其生舛差系 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$ 之或是率較他 h 爲最大也.即上公式(21)中,$W=max$,故

$$\frac{\partial W}{\partial h}=0 \text{ 即 } \frac{\partial\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\epsilon^2]}}{\partial h}=0.$$

解此微分式而消去分母 $\sqrt{\pi^n}$ 得

$$0=\frac{\partial(h^n e^{-h^2[\epsilon^2]})}{\partial h}=h^{n-1}e^{h^2[\epsilon^2]}(n-2h^2[\epsilon^2]).$$

此式必括弧中數等於 0 始能爲 0, 故

$$n-2h^2[\epsilon^2]=0,$$

即
$$\frac{[\epsilon^2]}{n}=\frac{1}{2h^2}, \tag{22}$$

式中 $\frac{[\epsilon^2]}{n}$ 爲各舛差 ϵ 平方之和而除以觀察次數 n. 命其方根 $\sqrt{\frac{[\epsilon^2]}{n}}=m$ 爲均中舛差(詳論見後), 則

$$m=\frac{1}{h\sqrt{2}} \text{ 或 } h=\frac{1}{m\sqrt{2}}. \tag{23}$$

代入上公式(18), 得

$$\phi(\epsilon)=\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\epsilon^2}{2m^2}}.$$

舛差之或是率爲

$$W_{(\epsilon)}=\phi(\epsilon)\,d\epsilon=\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\epsilon^2}{2m^2}}d\epsilon. \tag{24}$$

再命

$$\frac{\epsilon}{m}=x, \quad \frac{d\epsilon}{m}=dx, \tag{25}$$

即以比例數 $\epsilon : m$ 計算舛差 ϵ 或以平均舛差 m 之單位度 ϕ. 於是得

$$W_{(\epsilon)}=W_{(mx)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \tag{26}$$

或
$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{27}$$

第四章 論或是舛差

上章公式(20)

$$\overset{b}{\underset{a}{W}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{ah}^{bh} e^{-t^2}\,dt$$

爲舛差在 a 及 b 二界內出現之或是率.若問舛差出現於 $-a$ 及 $+a$ 二界內之或是率若干,則爲

$$\overset{+a}{\underset{-a}{W}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t=-ah}^{t=+ah} e^{-t^2}\,dt.$$

正舛差與負舛差之値相等者,其或是率常相等.故舛差出現於 0 及 $+a$ 間者與出現於 $-a$ 及 0 間者,其或是率相等,而舛差出現於 $-a$ 及 $+a$ 間者其或是率卽爲出現於 0 及 a 間者或是率之倍.故

$$\overset{+a}{\underset{-a}{W}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{ah} e^{-t^2}\,dt. \tag{28}$$

欲解此積分式,必先化積分號內之數爲級數.按指數級數爲

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

命 $x=-t^2$ 則

$$e^{-t^2}=1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}-\cdots\cdots$$

$$\int e^{-t^2}\,dt=t-\frac{t^3}{3\cdot 1!}+\frac{t^5}{5\cdot 2!}+\frac{t^7}{7\cdot 3!}+\frac{t^9}{9\cdot 4!}-\cdots\cdots$$

以任一有限値 T 代 t, 則

$$\int_0^T e^{-t^2}\,dt = T - \frac{T^3}{3\cdot 1!} + \frac{T^5}{5\cdot 2!} - \frac{T^7}{7\cdot 3!} + \frac{T^9}{9\cdot 4!} - \cdots\cdots \tag{29}$$

此級數式中前後相繼二項之商為

$$q = \frac{(2n-1)}{(2n-1)n}T^2,$$

n 為任取項數. T 既為有限值,則此級數為斂級數.且此級數各項正負相間,故所取項數但得 q 常小於 1 則其縮斂已足, T 之值有限而 n 之增無限,故此目的不患不能達也.

T 之值若大,則所取之項數必甚多,始可得 $q<1$. 但此處為理論計用上式(29)可矣.

由(28)及(29)二式得

$$\underset{-a}{\overset{+a}{W}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(ah - \frac{(ah)^3}{3\cdot 1!} + \frac{(ah)^5}{5\cdot 2!} - \frac{(ah)^7}{7\cdot 3!} + \frac{(ah)^9}{9\cdot 4!} - \cdots\cdots\right) \tag{30}$$

例若 $ah=0.1$ 則得

$$\underset{-a}{\overset{+a}{W}} = 1.12838(0.100000-0.000333+0.000001) = 0.112463$$

依此法算之,得下表:

ah	$\underset{-a}{\overset{+a}{W}}$	ah	$\underset{-a}{\overset{+a}{W}}$	ah	$\underset{-a}{\overset{+a}{W}}$
0.0	0.00000	1.3	0.93401	2.7	0.99987
0.1	0.11246	1.4	0.95229	2.8	0.99992
0.2	0.22270	1.5	0.96611	2.9	0.99996
0.3	0.32863	1.6	0.97635	3.0	0.9999779
0.4	0.42839	1.7	0.98379	3.1	0.9999884
0.47694	0.5	1.8	0.98909	3.2	0.9999940
0.5	0.52050	1.9	0.99279	3.3	0.9999969
0.6	0.60386	2.0	0.99532	3.4	0.9999985
0.7	0.67780	2.1	0.99702	3.5	0.999999
0.8	0.74210	2.2	0.99814	3.6	0.9999996
0.9	0.79691	2.3	0.99886	3.7	0.9999998
1.0	0.84270	2.4	0.99931	3.8	0.9999999
1.1	0.88020	2.5	0.99959	∞	0.1
1.2	0.91031	2.6	0.99976		

表中所載,不過約舉要數.欲得此類詳備之表,可覓之於下列二書:

1. Czuber, *Theorie der Beobachtungsfehler*, Lepzig 1891, S. 121 und S. 411—413

2. Ferrero, *Esposizione del metodo dei minimi quadrati*, Firenze 1876, P. 223—225

上表中 $ah=0.47694$ (較確者爲 0.4769363…) 特別提出,因其屬於 $\underset{-a}{\overset{+a}{W}}=\frac{1}{2}$ 也.

設有舛差出現於 0 及 a 間,其或是率爲 0.5, 出現於 a 及 ∞ 間,其或是率亦爲 0.5, 則其出現於 0 及 ∞ 間之或是率可命爲 1

命 a 之一特別值爲 r, 則

$$\underset{0}{\overset{r}{W}}=\frac{1}{2}=\underset{r}{\overset{\infty}{W}}. \tag{31}$$

r 名曰或是舛差.或是舛差者,舛差之小於是者與舛差之大於是者其可望出現之數適相等也.

欲定 r 之值,用上級數式(30)命 $a=r$ 而得數爲$\frac{1}{2}$,

故 $$\underset{0}{\overset{r}{W}}=\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(rh-\frac{(rh)^3}{3\cdot1!}+\frac{(rh)^5}{5\cdot2!}-\frac{(rh)^7}{7\cdot3!}+\frac{(rh)^9}{9\cdot4!}-\cdots\right) \tag{32}$$

此式中 r 與 h 常相並,故可命

$$rh=\rho, \tag{33}$$

而上式變爲

$$\rho-\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^5}{10}-\frac{\rho^7}{42}+\frac{\rho^9}{216}-\cdots=\frac{\sqrt{\pi}}{4}=0.443113\cdots\cdots$$

欲解此式而得ρ之值,可用漸進法,先命

$$\rho=\frac{\sqrt{\pi}}{4}=0.443113=P,\ \rho^3=P^3.$$

再進之,　$$\rho-\frac{\rho^3}{4}=P;\ \rho=P+\frac{P^3}{3},$$

$$\rho^3=P^3+3P^2\frac{P^3}{3}+\cdots=P^3+P^5,\ 又\ \rho^5=P^5+\cdots,$$

$$\rho-\left(\frac{P^3}{3}+\frac{P^5}{3}\right)+\frac{P^5}{10}=P,$$

即　$$\rho=P+\frac{1}{3}P^3+\frac{7}{30}P^5+\cdots.$$

如此漸進,則得

$$\rho=P+\frac{1}{3}P^3+\frac{7}{30}P^5+\frac{127}{630}P^7+\cdots$$

即　$$\rho=0.4431+0.0290+0.0040+0.0007=0.4768\cdots$$

據 Gauss 所求,得詳確之值爲

$$rh=\rho=0.4769363, \qquad (33)$$
$$\log\rho=9.6784064.$$

由 $rh=\rho\left(即\ h=\frac{\rho}{r}\right)$ 可知準確率 h 與或是舛差 r 常爲反比.命 $h=1$ 則 $r=\rho$. 即 ρ 者爲一特別舛差,其準確率爲 1 也.

上章言均中舛差 $m=\frac{1}{h\sqrt{2}}$(公式 23.) $\frac{1}{h}=m\sqrt{2}$ 以與公式(33)相較,則

$$r=\frac{\rho}{h}=\rho\sqrt{2}\,m, \qquad (34)$$

$\rho\sqrt{2}$ 爲恆數,其值爲

$$\rho\sqrt{2}=0.6744898, \quad lag\,\rho\sqrt{2}=9.8286754.$$

依(34)可由均中舛差 m 求得或是舛差 r.

又 $\frac{[\epsilon]}{n}$ 上章曾命爲平均舛差,亦論其關係如下:

凡一舛差之出現,按公式(18),其或是率爲

$$W(\epsilon)=\phi(\epsilon)\,d\epsilon=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon.$$

若遇機緣 n 次,則 ϵ 出現之數可有 $n\,W(\epsilon)$ 次.故凡舛差之值與 ϵ 相等者,其出現之總次數可得

$$n\,W(\epsilon)\,\epsilon=n\epsilon\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon.$$

此但爲舛差之值與 ϵ 一特別值相等者可望出現之總數.若一切舛差合計之,則

$$[\epsilon]=\int n\,\epsilon\,\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon. \tag{35}$$

今所宜審較者,ϵ 之爲正爲負及積分上下二界之宜何取從耳.蓋 $[\epsilon]$ 若專爲 $+\epsilon$ 之和,則積分之界宜爲 0 及 $+\infty$. $[\epsilon]$ 若專爲 $-\infty$ 之和,則積分之界宜爲 $-\infty$ 及 0.若不論正負而合計之,則不宜取 $-\infty$ 及 $+\infty$ 以爲積分界,蓋如此則積分之值且爲 0 也.然可取 0 及 $+\infty$ 之積分值而倍之,則得由 $-\infty$ 至 0,又由 0 至 $+\infty$ 之積分值卽等於一切 $\pm\epsilon$ 之總數矣.故

$$[\pm\epsilon]=2n\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \epsilon e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon.$$

或

$$\frac{[\pm\epsilon]}{n}=\rho=2\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \epsilon e^{-h^2\epsilon^2}d\epsilon. \tag{36}$$

式中以ρ爲平均舛差之記號.欲解此積分式,命$h\epsilon=t$,

即 $\epsilon=\frac{t}{h}$, $d\epsilon=\frac{dt}{h}$, 得

$$t=\frac{2h}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty te^{-t^2}dt. \qquad (37)$$

因 $$\int te^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}$$ (普通積分公式),

$$\int_0^\infty te^{-t^2}dt=+\frac{1}{2}$$ (參閱上章),

得 $$\theta=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \qquad (38)$$

但按公式(23), $\frac{1}{h}=m\sqrt{2}$,

故 $$\theta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}m=1.2533\,\rho. \qquad (39)$$

由此可見均中舛差m與平均舛差θ常有一定之比例.但取平均舛差$\theta=\frac{[\epsilon]}{n}$而乘以1.2533,即得均中舛差$m$.用此法可以省求各舛差平方之勞.然其得數,不過大略不差,不如取ϵ^2之總値其數以n除之再開方之得數準確也.

上所論三種舛差彼此之關係,再列舉於下,以求醒目,且易記憶.

(1) 均中舛差(Mittlerer Fehler)$=m$.

(2) 或是舛差(Wahrscheinlicher Fehler)$=r$.

(3) 平均舛差(Durchschnittlicher Fehler)$=\rho$.

若有 n 眞舛差,則

$$m=\sqrt{\frac{[\epsilon^2]}{n}}, \qquad \rho=\frac{[\pm\epsilon]}{n}.$$

又 $h=$ 準確率 (Genauigkeitszahl)

$$\left.\begin{array}{llll}
\rho=rh & =0.4769363 & \log\rho & =9.6784603{\cdot}8 \\
r=\rho\sqrt{2}\,m & =0.6844898\,m & \log\rho\sqrt{2} & =9.8289753{\cdot}8 \\
r=\rho\sqrt{\pi}\,\theta & =0.8453476\,\rho & \log\rho\sqrt{\pi} & =9.9270353{\cdot}1 \\
m=\dfrac{1}{\rho\sqrt{2}}\,r & =1.4826021\,r & \log\dfrac{1}{\rho\sqrt{2}} & =0.1710246{\cdot}2 \\
m=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\theta & =1.2533141\,\theta & \log\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & =0.0980599{\cdot}4 \\
\theta=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,m & =0.7978846\,m & \log\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & =9.9019400{\cdot}6 \\
\theta=\dfrac{1}{\rho\sqrt{\pi}}\,r & =1.1829372\,r & \log\dfrac{1}{\rho\sqrt{\pi}} & =0.0729616{\cdot}9
\end{array}\right\}(40)$$

第五章 最小二乘式之理論

既有平均舛差 $\delta=\frac{[\pm\epsilon]}{n}$ 矣,又舉均中舛差 $m=\sqrt{\frac{[\epsilon]}{n}}$ 何也?曰,欲求計算之精密,則但得平均舛差未足恃也,故進而求其更密者.試舉一例以明之.

(甲)設有一人,用一定儀器,守一定法則,自一點起,循等長路徑,周而復始,平測[1]其高低者凡十次,其終點應與始點覆合爲0,而乃得下表所列各差:

平測次	終點與始點之差	
	$+mm$	$-mm$
1	4	
2	5	
3		6
4	5	
5		5
6	5	
7		5
8		6
9	5	
10		4
總計	24	26

$[\epsilon$ 絕對值$]=50$

平均舛差 $\delta=\frac{50}{10}=5$

(乙)又有一人,持他器,用他法,自同點起,循等長路徑俱如甲,周而復始,平測其高低,亦凡十次,所得之差列如下表:

平測次	終點與始點之差	
	$+mm$	$-mm$
1	1	
2		1
3	1	
4		10
5		12
6	0	
7		1
8		0
9		15
10		9
總計	2	48

$[\epsilon$ 絕對值$]=50$

平均舛差 $\delta=\frac{50}{10}=5$

(1) 水準測量 Leveling, 予譯作平測術.

由上二者觀之,其所得平均舛差何嘗不同,而其不能同等信恃之迹則顯然也.乙所得之差,其正負二值相懸遠甚於甲,是其舛差已不合於偶遇無律舛差之例,而似帶一有律之蠢舛差.若但以平均舛差繩之,則失此而入彼矣.惟然,故進而求其較精者即均中舛差是也.

均中舛差之優於平均舛差者何在?曰其優有二: (一)平均舛差係合正負二舛差取其絕對值之總數而平均之.均中則用各舛差之方,其符號常爲正也. (二)平均舛差無分舛差之大小而平均之.均中則舛差之大者其方更大,故能於均中時多得權[(1)]也,故能較密也.

均中舛差 $m=\sqrt{\frac{[\lambda^2]}{n}}(?)$ [(2)],其值常大於 $\delta=\frac{[\lambda\text{ 絕對值}]}{n}$. 試比較之如下:

$$\delta=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\qquad m=\sqrt{\frac{\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2}{2}},$$

$$\delta^2=\frac{\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+2\lambda_1\lambda_2}{4},\qquad m^2=\frac{\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2}{2}=\frac{2\lambda_1{}^2+2\lambda_2{}^2}{4},$$

$$m^2-\delta^2=\frac{\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2-2\lambda_1\lambda_2}{4}=\frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_2)^2.$$

$(\lambda_1-\lambda_2)^2$ 之符號常爲正,故 $m^2-\delta^2=+$,而 $m>\delta$ 自無疑義矣.

$[\lambda]=0$ 已見公式 (11). 至 $[\lambda^2]=[\lambda\lambda]$, 則因平方之符號常爲正,故其和不能令爲 0 也.然應限爲最小值,其故焉在,請用下式明之.

---

(1) 德文 Gewicht, 英文 Weight. 凡事物於團體中多得勢力者用此字.譯之以權,覺字義吻合,詳論於下章.

(2) 所以加 ? 者論於後.

設眞數爲 L，各次觀察之値爲 $l_1, l_2, \cdots, l_n$.
每次觀察，皆隨一舛差，$\epsilon_1=L-l_1,\ \epsilon_2=L-l_2,\ \cdots,\ \epsilon_n=L-l_n$.
各舛差之或是率爲 $\phi(L-l_1),\ \phi(L-l_2), \cdots,\ \phi(L-l_n)$.
觀察時各舛差相遞俱現，其或是率爲

$$W=\phi(L-l_1)\cdot\phi(L-l_2)\cdot\phi(L-l_3)\cdots\phi(L-l_n).$$

今欲得其或是率爲最大值，即

$$W=max.$$

按公式 (21)，

$$W=\frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}}\ \epsilon^{-h^2\{(L-l_1)^2+(L-l_2)^2\cdots+(L-l_n)^2\}}=max.$$

ϵ 之指數爲負，故 $W=max.$ 必

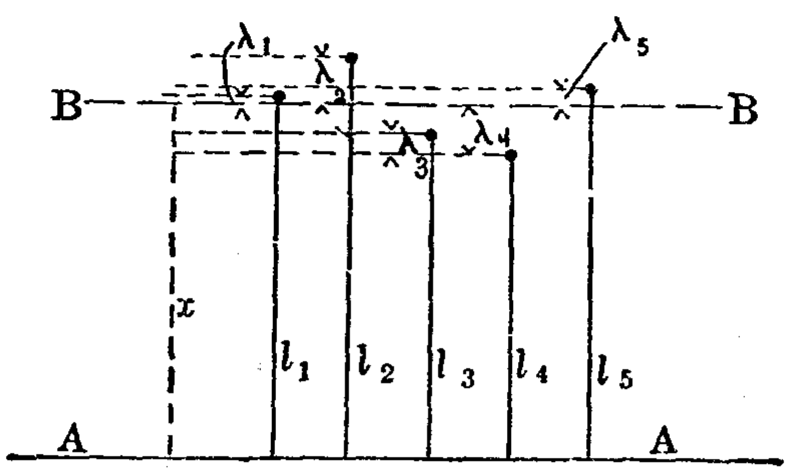
$$(L-l_1)^2+(L-l_2)^2+\cdots+(L-l_n)^2=min.,$$

即 $$\epsilon_1^2+\epsilon_2^2\cdots+\epsilon_n^2=[\epsilon^2]=[\epsilon\epsilon]=min. \qquad (41)$$

眞舛差不能得，則取各觀察得數 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 以與其平均值 $x=\frac{[l]}{n}$ 相較而得近似舛差 λ. 如上法以 x 代 L，則亦得

$$[\lambda\lambda]=min. \qquad (41a)$$

此理亦可用力學定理證之。如第三圖，以各次觀察得數



第 三 圖

$l_1, l_2, \cdots, l_5$ 度作縱線,正交於 $A-A$ 軸上.平均其值,得 x,亦正交 $A-A$ 度作縱線.自 x 之端點作橫線 $B-B$,平行於 $A-A$ 軸線. $l_1, l_2, \cdots, l_5$ 諸縱線端點分列於 $B-B$ 線上下.其與 $B-B$ 之距離,卽爲 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5$ 等諸近似舛差.今因各次觀察用器同,持法同,一人所獨爲,非假手他人者,故其準確率應同.命其權同爲1,可與力學上質點單位相擬,而 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5$ 則各單位質點與一軸線之距離也.凡質點乘軸線距離,名曰靜力量(1).若軸線經過各質點之重心,則各質點靜力量之和等於0.此力學定例也,而與 $[\lambda]=0$ 實相切符.又凡質點與軸線距離之平方相乘,名曰安量(2).而軸線經過各質點之重心,則各質點安量之和爲最小值,而 $[\lambda\lambda]=min.$ 與此理無貳致也.

既云 $[\lambda]=0$ 矣,又云 $[\lambda\lambda]=min.$,二者果相適而無齟齬乎?曰無.試用下式明之.

$$
\begin{array}{ll}
\text{命 } \lambda_1=x-l_1, & \text{則 } \lambda_1^2=x^2-2xl_1+l_1^2. \\
\quad\ \lambda_2=x-l_2, & \text{則 } \lambda_2^2=x^2-2xl_2+l_2^2. \\
\quad\ \vdots & \quad\ \vdots \\
\quad\ \lambda_n=x-l_n, & \text{則 } \lambda_n^2=x^2-2xl_n+l_n^2. \\
\hline
\end{array}
$$

$$[\lambda]=nx-[l],\ [\lambda\lambda]=nx^2-2x[l]+[ll].$$

今欲求一 x 之值,令 $[\lambda\lambda]=min.$,則

$$\frac{d[\lambda\lambda]}{dx}=2nx-2[l]=0,$$

或

$$x=\frac{2[l]}{2n}=\frac{[l]}{n}.$$

---

(1) 靜力量, Static moment.

(2) 安量, Moment of Inertia. 予友范靄春所譯,似較情性能率爲當.安字義如在安土重遷.

由是得 $$[\lambda]=n\frac{[l]}{n}-[l]=0.$$

可見二定理之無相齟齬也。

公式(41)爲最小二乘式之基本定理。最小二乘式之名由此而得。實應名最小平方和，較爲確當也。然此術尚未入中土，而最小二乘式之名已輸入久矣，故仍之。

若問平方之效如何，則仍用上所舉例以明之。

(甲)之舛差平方和爲 $4^2+5^2+5^2+5^2+5^2+6^2+5^2+5^2+6^2+4^2=254$,

(乙)之舛差平方和爲 $1^2+1^2+0+1^2+1$[illegible]$^2+1$[illegible]$^2+1^2+0+15^2+$[illegible]$^2=554$

(乙)大而(甲)小，見(乙)之準確不如(甲)遠矣。(其均中舛差，在(甲)爲 $m=\pm\sqrt{\frac{254}{10}}=\pm5.04mm.$，在(乙)爲 $m=\pm\sqrt{\frac{554}{10}}=\pm7.45mm.$)。

$m=\sqrt{\frac{[\lambda^2]}{n}}=\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}}$ 果無訛乎？第30頁何故加以疑問之符號也。曰使舛差而能得其眞也，則上式是已。顧眞舛差未可卽得也。以多次觀察 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 平均得 x，則 x 已非純粹無疵者矣。以各次觀察與 x 相較得 λ，則 λ 又烏得爲舛差之眞者哉。由 λ 以得 m，則 m 又烏能確。故命 ϵ 爲眞舛差，則 $m=\sqrt{\frac{[\epsilon\epsilon]}{n}}$ 是也。命 λ 爲非眞舛差，而爲觀察得數與其平均值相較之近似舛差，則 $m=\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}}$ 未爲得也。

今命觀察之眞值爲 L，其平均值爲 x，則 x 已含一舛差，爲 $L-x=M$ (M 爲正或爲負)，故 $L=x+M$，而各次觀察舛差之眞值爲

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= (x+M)-l_1 = L-l_1+M = \lambda_1+M,\\
\epsilon_2 &= (x+M)-l_2 = L-l_2+M = \lambda_2+M,\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
\epsilon_n &= (x+M)-l_n = L-l_n+M = \lambda_n+M,\\
\hline
[\epsilon\epsilon] &= \qquad\qquad\qquad\qquad [\lambda\lambda]+nM^2+M[\lambda].
\end{aligned}$$

按公式(11)， $[\lambda]=0,$

故 $$[\epsilon\epsilon]=[\lambda\lambda]+nM^2. \tag{42}$$

此式三項皆爲平方數之和，其符號俱爲正，故 $[\epsilon\epsilon]<[\lambda\lambda]$.

由此可見公式 $m=\pm\sqrt{\frac{[\epsilon\epsilon]}{n}}$ 中，若以 λ 代 ϵ，因 $[\lambda\lambda]<[\epsilon\epsilon]$，故其分母 n 亦必減之．但應減至若干，則因 M 之值未知，故未可定也．然此減小之分母，有必符之定約二．(一)使觀察僅止一次而但得 l 也，則其準確與否，全屬疑問．故 m 應爲無定值．(二)觀察之次數愈多，則 $\frac{[\lambda\lambda]}{n-z}$ 愈卽近於 $\frac{[\epsilon\epsilon]}{n}$ (z 爲應減小之數)．符此二約，舉莫如以 $n-1$ 代 n $(z=1)$.

蓋使 $n=1$，則 λ 亦爲 0，而 $m=\pm\sqrt{\frac{0}{0}}$ 爲無定值．

使 n 甚多，則 x 愈近於 L，λ 愈近於 ϵ，$n-1$ 愈近於 n，而

$$m=\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\sim\sqrt{\frac{[\epsilon\epsilon]}{n}},$$

且使 n 爲 0，則 m 爲虛數，更無均中舛差之可言矣．以此之故，故命

$$m^2=\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}, \tag{43}$$

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}, \tag{43a}$$

施之於平差算術爲更得也．

公式(43)且將用他法證之於後章．

第六章 最小二乘式之理論續,論權

混美玉碔砆以論價,價弗能平.齊功狗功人以行賞,賞必有偏.觀察亦然.使觀察者二人.一爲久練之才持精密之具.一則經驗素乏用器又麤.則二人所得結果不能同情以論也明矣.卽使二人經驗相揆,用器同精,而一則反復數四觀察之,一則僅一二次觀察之,其結果又不能同視也亦明矣.欲合二人所得結果而均之,自必重視其持器精者,經驗富者,觀察數者,重視之若何?曰加之權而已.

設觀察一事物五次,其所得爲 l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, 其平均値爲

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5}{5}.$$

設分而均之,令 $l'=\frac{l_1+l_2}{2}$, $l''=\frac{l_3+l_4+l_5}{3}$

則 $l_1+l_2=2l'$, $l_3+l_4+l_5=3l''$,

$$x=\frac{2l'+3l''}{5}=\frac{2l'+3l''}{2+3} \qquad (44)$$

蓋 l' 爲二次觀察之平均, l'' 爲三次觀察之平均,在理 l'' 宜較精於 l'. 若合 l' 及 l'' 而平均之,令 $x=\frac{l'+l''}{2}$ (?),必失其平.因 l'' 宜較 l' 重視之也.故不若 $x=\frac{2l'+3l''}{2+3}$ 之較爲得當.

設量一距離若干次而所得之數,

n_1 次爲 l_1

n_2 次爲 l_2

....

n_n 次爲 l_n

則其平均值自不能爲 $x=\frac{l_1+l_2+\cdots l_n}{n}$(?),

而必合觀察之次數而總均之爲

$$=\frac{(l_1+\cdots+l_1)+(l_2+\cdots+l_2)+\cdots+(l_n+\cdots+l_n)}{n_1+n_2+\cdots+n_n}$$

$$=\frac{n_1l_1+n_2l_2+\cdots+n_nl_n}{n_1+n_2+\cdots+n_n}=\frac{[nl]}{[n]} \qquad (44a)$$

此與上式(44)相符也.若如前一例以 $l_1, l_2,\cdots,l_n$ 爲又由他 n_1 次, n_2 次,$\cdots$,n_n 次觀察之平均值而總均之,亦無不可也. $x=\frac{[nl]}{[n]}$ 名曰通式平均值,以別於簡式平均值 $x=\frac{[l]}{n}$.

上式(44)中之2與3,及(43a)中之 $n_1, n_2, \cdots\cdots, n_n$, 卽可命之曰權(1).在同等觀察(2)中其權舉相同也.在不同等觀察(3)中其權有輕重則之殊.故觀察之精者增其權,觀察之麤者減其權.惟有增減而乃能不失其衡.

權之單位,可任意定之.惟同觀察中,必用同一單位焉.如上式(44a)任以一恆數 q 乘其分母分子, x 之值不變也.

故 $$x=\frac{qn_1l_1+qn_2l_2+\cdots+qn_nl_n}{qn_1+qn_2+\cdots+qn_n},$$

而命 $$qn_1=p_1,\ qn_2=p_2,\ \cdots\ qn_n=p_n,$$

則 $$x=\frac{p_1l_1+p_2l_2+\cdots+p_nl_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\frac{[pl]}{[p]} \qquad (45)$$

(1) 德文 Gewicht, 英文 Weight 有譯爲重者,予以爲不若權字之渾該也.

(2) 謂同一準確之觀察.

(3) 謂不同準確之觀察.

權之義按(44)及(44a)兩式既根於觀察次數,則因$m^2=\frac{[\epsilon\epsilon]}{n}$可知其與均中舛差$m$之平方爲反比.權與準確率$h$同因$m$之減而增,但$h$則與$m$爲反比.若權與準確率相比,則權與準確率之平方爲正比也.故可命

$$p_1=\frac{h_1^2}{h^2},\ p_2=\frac{h_2^2}{h^2},\cdots,\ p_n=\frac{h_n^2}{h^2} \tag{46}$$

$$p=\frac{h^2}{h^2}=1 \tag{46a}$$

h者權之值等於1時與相當之準確率也.h不必有定值而不妨懸擬之也.

觀察之不同等,其原不一.如上所舉例,則本同等之觀察而因複習之次數不壹,得不同等之結果者也.其他若器之有精有麤,方法之或疏或密,皆足令觀察有軒輊,而其權則不能株守一法定之也.

今再進而推求最小二乘式之定理,

命各次觀察之得數爲　$l_1,\quad l_2,\ \cdots\cdots\ l_n$

各次觀察之準確率爲　$h_1,\quad h_2,\ \cdots\cdots\ h_n$

各次觀察之近似舛差爲　$(x-l_1)\quad (x-l_2)\ \cdots\ (x-l_n)$

或　$\lambda_1,\quad \lambda_2,\ \cdots\cdots\ \lambda_n$

其或是率爲　$\phi(\lambda_1),\quad \phi(\lambda_2),\ \cdots\cdots\ \phi(\lambda_n)$

各舛差相遇互現之總或是率按公式(21)爲

$$W=\phi(\lambda_1).\phi(\lambda_2)\cdots\phi(\lambda_n)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}^n}h_1\cdot h_2\cdots h_n\,e^{-\{h_1^2\lambda_1^2+h_2^2\lambda_2^2+\cdots+h_n^2\lambda_n^2\}} \tag{47}$$

使 $W = max.$,

則必 $h_1^2\lambda_1^2 + h_2^2\lambda_2^2 + \cdots + h_n^2\lambda_n^2 = min.$,

即 $h_1^2(x-l_1)^2 + h_2^2(x-l_2)^2 + \cdots + h_n^2(x-l_n)^2 = min.$

因 $h_1^2 = p_1 h^2, h_2^2 = p_2 h^2, \cdots, h_n^2 = p_n h^2$,

故 $h^2\left\{p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2 + \cdots + p_n\lambda_n^2\right\} = min.$,

或 $\left\{p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2 + \cdots + p_n\lambda_n^2\right\} = min.$, (48)

即 $[p\lambda\lambda] = min$

若代以舛差眞値則 $[p\epsilon\epsilon] = min$ (48a)

此式與公式(41)及(41a)相當.又上式(48)微分之而命其微商爲0,則

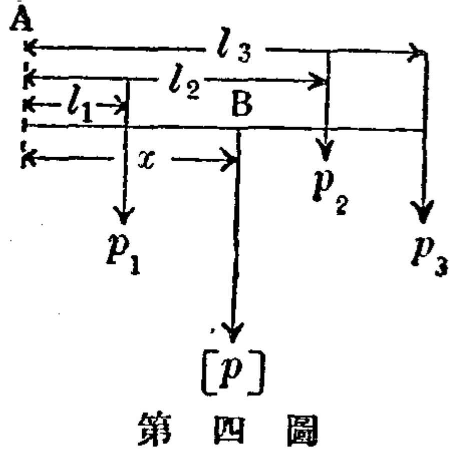
$$2p_1\lambda_1 + 2p_2\lambda_2 + \cdots + 2p_n\lambda_n = 0,$$

或 $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots + p_n\lambda_n = [p\lambda] = 0$

若代以舛差眞値,則 $[p\epsilon] = 0$ (49)

此式與公式(11)相當,與公式(48a)同爲不同等觀察中之最要定理也.

上二公式亦可用力學定理證之.如第四圖有不相等之重 p_1, p_2, $p_3\cdots$加於一桿上,以 $l_1, l_2, l_3\cdots$爲桿臂,繞 A 軸而轉,則由各重之靜力量 p_1l_1, p_2l_2, $p_3l_3\cdots\cdots$及方程式 $=\frac{[pl]}{[p]}$ 可求得諸重合力 $[p]$ 之臂桿 x.



第四圖

令軸由 A 移至 B, $AB=x$, 則 $p_1, p_2, p_3\cdots$各重繞新軸 B 之桿臂爲 $\lambda_1=x-l_1$, $\lambda_2=x-l_2$, $\lambda_3=x-l_3,\cdots$而

$$p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+p_3\lambda_3=[p\lambda]=0,$$

因 B 爲各重之重心點故也。

又 $[p\lambda^2]=min.$ 爲各重繞 B 軸之安量. $[p\lambda^2]=min.$ 在平差術用以求 x,而在力學則因以求得一軸,令各質點繞之其安量爲最小者也.

今再求不同等觀察之均中舛差。

(a) 由眞舛差 ϵ_1, $\epsilon_2,\cdots$求 m.

公式(21)可以 $h_1=h\sqrt{p_1}$, $h_2=h\sqrt{p_2},\cdots$(公式(46))等值代入

得
$$W=\frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}}\sqrt{p_1.p_2.p_3\cdots p_n}.\ e^{-h^2[p\epsilon\epsilon]} \qquad (50)$$

爲 ϵ 等舛差之或是率.

h 之每一値皆有相當之一或是率 W. 由舛差以轉求其準確率,則其値能令 $W=max.$ 者其値亦卽最爲或是者.

使
$$W=max,$$

則必
$$\frac{\partial W}{\partial h}=0.$$

$$\frac{\partial W}{\partial h}=\frac{\sqrt{p_1\ p_2\ p_3\cdots p_n}}{\sqrt{\pi^n}}\left\{nh^{n-1}\cdot e^{-h^2[p\epsilon\epsilon]}-[p\epsilon\epsilon]2h^{n+1}\cdot e^{-h^2[p\epsilon\epsilon]}\right\}=0$$

卽
$$\left\{nh^{n-1}-2h^{n+1}[p\epsilon\epsilon]\right\}=0,$$

卽
$$h^{n-1}\left\{n-2h^2[p\epsilon\epsilon]\right\}=0.$$

若 h^{n-1} 非等於0, 則必 $n-2h^2[p\epsilon\epsilon]=0$,

故 $$h=\sqrt{\frac{n}{2[p\epsilon\epsilon]}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{[p\epsilon\epsilon]}}, \tag{51}$$

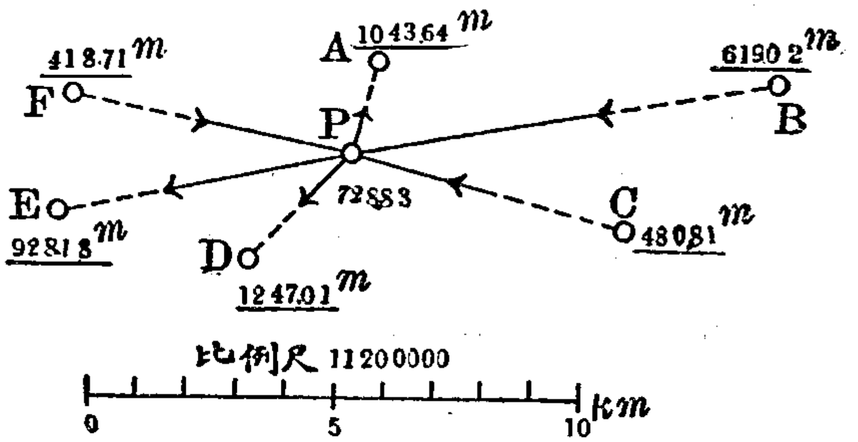
爲準確率之最或是値.

以公式(23)與(51)相較,得

$$m=\pm\sqrt{\frac{[p\epsilon\epsilon]}{n}}. \tag{52}$$

(b) ϵ 不得而知,所知者近似之舛差 λ 耳.欲由 λ 以求均中舛差,則可按上章求公式(43i)法.同理得

$$m=\pm\sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}} \tag{53}$$



第 五 圖

試設一例以明之.如第五圖 A, B, C, D, E, F 爲一山地上六點.其高出海面之度,已經測準,無可變更.如 A 點等高出海面若干 m 數,俱標之圖上,下作橫畫者是也.故假定六點之高無有舛差(或以其甚微不必計)而根據之,用三角測高法以測一點 P 之高,而 PA, PB,……等距離亦已知之.所得結果列如下表:

瞄視距離 S	各點高出海面之度		量得之高差	算得 P 點之高	
$AP=2010m$	A	$1043.64m$	$h_1=-314.73m$	$728.91m$	(甲)
$BP=8903$	B	619.02	$h_2=+109.20$	728.22	
$CP=5820$	C	480.81	$h_3=+248.24$	729.05	
$DP=3002$	D	1247.01	$h_4=-518.43$	728.58	
$EP=6197$	E	928.18	$h_5=-199.16$	729.02	
$FP=5800$	F	418.71	$h_6=+310.13$	728.84	

(簡式平均值=728.77)

上表所算得 P 點之高，其簡式平均值爲 $728.77m$，未可據以爲準也．蓋用三角測高，距離愈遠則測準愈難，$A, B\cdots$ 等距 P 距離不同，則其觀察所得不能等視之也．故於是須別其權之大小．按三角測高定理，知高差 h 之舛差，與瞄距(瞄視距離) S 爲正比．故其權 P，應與瞄距 S 之平方爲反比，即 $P=\frac{1}{S^2}$．

權之單位，任意定之，以其不過爲比例之數耳．今以 Km 計 S 而化零爲整(S 見(甲)表中)，得

$$S=2.0 \quad 8.9 \quad 5.8 \quad 3.0 \quad 6.2 \quad 5.8Km$$

則 $P=\frac{1}{S^2}=0.25 \quad 0.01 \quad 0.03 \quad 0.11 \quad 0.03 \quad 0.03$ ……………(乙)

上值中雖略去小數甚多，而於實際無影響也．以(甲)表中高之值(乙)表中 P 之值，算得下表各數．

l	P	Pl	$\lambda=0.83-l$	$P\lambda$	$P\lambda\lambda$	
728+0.91	0.25	0.2275	−0.08	−0.0200	0.0016	(丙)
+0.22	0.01	0.0022	+0.61	+0.0061	0.0037	
+1.05	0.03	0.0315	−0.22	−0.0066	0.0015	
+0.58	0.11	0.0638	+0.25	+0.0275	0.0070	
+1.02	0.03	0.0306	−0.19	−0.0057	0.0011	
+0.84	0.03	0.0252	−0.01	−0.0003	0.0000	
總數	0.46	0.3808		+0.0336 −0.0326	0.0149	

$$x=\frac{[pl]}{[p]}=\frac{0.3808}{0.46}=0.83$$ 爲通式平均值，

$$m=\sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}}=\sqrt{\frac{0.0149}{5}}=\pm\ 0.055m.$$

又結數之均中舛差爲

$$m=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{0.055}{\sqrt{0.46}}=\pm\ 0.080m$$

將論之於後章.

P點之高爲$H=728m+x=728.83m$,帶一均中舛差爲$\pm 0.08m$.

第七章　論舛差之傳播定律,結數之均中舛差及其權

凡觀察之事由局部觀察以得總觀察,如分段量長以得總距離,量二角一邊以得三角形之第二第三邊,則其總觀察名曰各局部觀察之結數,結數之均中舛差自不能與局部觀察無關繫焉.

今命結數之準確率爲H,其權爲P,其均中舛差爲M而推論其與局部觀察中h,p及m之關繫如下:

(一)權　予於上章旣論明權者非他,卽觀察次數之多寡(或爲實施之觀察次數,或爲理想者).結數者爲各局部觀察之積或其倍,故其權亦可由局部觀察之權得之也.今使各局部觀察爲非同等準確者,而各局部觀察中之各次觀察,則爲同等準確者.故

x_1其權爲p_1而所由以得x_1之各次觀察$l_1', l_1'', \cdots$其權爲1.

x_2其權爲p_2而所由以得x_2之各次觀察$l_2', l_2'', \cdots$其權爲1.

…………………………………………………………

則所由以得結數X之觀察總次數共爲

$$p_1+p_2+\cdots+p_n,$$

此亦卽結數X之權也.故

$$P=[p] \tag{54}$$

(二)準確率　由公式(46) $p=\frac{h^2}{h^2}=1$, $p_1=\frac{h_1^2}{h^2}$, $p_2=\frac{h_2^2}{h^2}$例推之,則

$$P=\frac{H^2}{h^2}=[p] \qquad (54a)$$

或 $$H=\sqrt{h^2[p]} \qquad (55)$$

(三)均中舛差　由公式(23) $m=\frac{1}{h\sqrt{2}}$ 例推之,則

$$M=\frac{1}{H\sqrt{2}} \qquad (56)$$

或 $$M=\frac{1}{h\sqrt{[p]}.\sqrt{2}}=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{m}{\sqrt{P}} \qquad (57)$$

(四)特例　若 $p_1=p_2=\cdots p_n=1$,

則 $$P=n, \qquad (54b)$$

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (57a)$$

今再分論結數之性質而研究舛差之傳播定律焉.命各局部觀察爲 $l_x', l_x'', \cdots l_x^n$ 及 $l_y', l_y'', \cdots l_y^n$ 而其眞值爲 $x, y, \cdots$, 命結數爲 $L_1, L_2, \cdots$ 而其眞值爲 X, 則 L_1 爲 $l_x', l_y'\cdots$ 之函數, L_2 爲 $l_x'', l_y''\cdots$ 之函數,而 X 爲 $x, y\cdots$ 之函數.故

$$L_1=\phi(l_x', l_y', \cdots); \ L_2=\phi(l_x'', l_y'', \cdots), \ X=\phi(x, y, \cdots) \qquad (58)$$

今試由最簡之例題入手,設一距離爲二段,量之各數次,其得數爲 $l_x', l_x'', \cdots l_x^n$ 及 $l_y', l_y'', \cdots l_y^n$, 其眞值命爲 x 與 y, 則距離共長之眞值爲

(1) $X=x+y$.

命 $l_x', \cdots, l_y'\cdots$ 所帶之舛差爲 $\epsilon_x', \epsilon_x'', \cdots, \epsilon_y', \epsilon_y'', \cdots$ 則

$$x=l_x'+\epsilon_x'=l_x''+\epsilon_x''=\cdots=l_x^n+\epsilon_x^n$$

$$y=l_y'+\epsilon_y'=l_y''+\epsilon_y''=\cdots=l_y^n+\epsilon_y^n$$

命 $L_1=l_x'+l_y'$ $L_2=l_x''+l_y''\cdots$, $L_n=l_x^n+l_y^n$ 其所帶之舛差爲 ϵ_ϕ', ϵ_ϕ'',$\cdots\epsilon_\phi^n$ 則

$$X=L_1+\epsilon_\phi'=L_2+\epsilon_\phi''=\cdots=L_n+\epsilon_\phi^n,$$

或 $$X=l_x'+l_y+\epsilon_\phi'=l_x''+l_y''+\epsilon_\phi''=\cdots=l_x^n+l_y^n+\epsilon_\phi^n,$$

$$X=x-\epsilon_x'+y'-\epsilon_y'+\epsilon_\phi'=x-\epsilon_x''+y-\epsilon_y''+\epsilon_\phi''$$

$$=x-\epsilon_x^n+y-\epsilon_y^n+\epsilon_\phi^n=x+y,$$

或 $$0=-\epsilon_x'-\epsilon_y'+\epsilon_\phi'=-\epsilon_x''-\epsilon_y''+\epsilon_\phi''=\cdots=-\epsilon_x^n-\epsilon_y^n+\epsilon_\phi^n$$

故
$$\epsilon_\phi'=\epsilon_x'+\epsilon_y',$$
$$\epsilon_\phi''=\epsilon_x''+\epsilon_y'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\epsilon_\phi^n=\epsilon_x^n+\epsilon_y^n,$$

自乘得
$$\epsilon_\phi'\epsilon_\phi'=\epsilon_x'\epsilon_x'+\epsilon_y'\epsilon_y'+2\epsilon_x'\epsilon_y',$$
$$\epsilon_\phi''\epsilon_\phi''=\epsilon_x''\epsilon_x''+\epsilon_y''\epsilon_y''+2\epsilon_x''\epsilon_y'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\epsilon_\phi^n\epsilon_\phi^n=\epsilon_x^n\epsilon_x^n+\epsilon_y^n\epsilon_y^n+2\epsilon_x^n\epsilon_y^n.$$

積之得 $$[\epsilon\epsilon_\phi]=[\epsilon\epsilon_x]+[\epsilon\epsilon_y]+2[\epsilon_x\epsilon_y].$$

以 n 除之得

$$\frac{[\epsilon\epsilon\phi]}{n}=\frac{[\epsilon\epsilon_x]}{n}+\frac{[\epsilon\epsilon_y]}{n}+\frac{2[\epsilon_x\epsilon_y]}{n}. \tag{59}$$

ϵ_x, ϵ_y 可爲正可爲負,故其相乘之積亦可爲正可爲負.加之則其中正負相消,幾等於0矣.故末項之值可命爲0(n之數愈大則愈近於0).

則 $$\frac{[\epsilon\epsilon\phi]}{n}=\frac{[\epsilon\epsilon_x]}{n}+\frac{[\epsilon\epsilon_y]}{n} \tag{60}$$

卽 $$m_\phi{}^2=m_x{}^2+m_y{}^2. \tag{61}$$

m_x, m_y 卽各段觀察之均中舛差而 m_ϕ 爲二段之和之均中舛差 M 也，故

$$M=\pm\sqrt{m_x{}^2+m_y{}^2} \tag{62}$$

(2)設 $X=x-y$，則如上法求之，亦得

$$m_\phi{}^2=m_x{}^2+m_y{}^2, \tag{63}$$

$$M=m_\phi=\pm\sqrt{m_x{}^2+m_y{}^2} \tag{64}$$

(3)若 $X=x\pm y\pm z$，則可先合 $x\pm y$ 爲一，命等於 w，而以 $X=w\pm z$ 如上法求之，其結果得

I. $$M=m_\phi=\pm\sqrt{m_x{}^2+m_y{}^2+m_z{}^2} \tag{65}$$

由是得舛差傳播之第一例曰：

設 X 爲 $x, y, z,\cdots$ 之函數而爲其和或較，X 之近似値爲 L 爲各段 $l_x, l_y, l_z,\cdots$ 之函數而帶一均中舛差 M，則 M 爲各分觀察（局部觀察）均中舛差平方和之平方根.

設各段觀察爲非同等準確者，而其權在 x 段爲 px，在 y 段爲 p_y，在 z 段爲 $p_z,\cdots$ 則因

$$M=\pm\frac{m}{\sqrt{P}},$$

$$M^2=m_\phi{}^2=\frac{m^2}{P}=m_x{}^2+m_y{}^2+m_z{}^2+\cdots=\frac{m^2}{p_x}+\frac{m^2}{p_y}+\frac{m^2}{p_z}+\cdots \tag{66}$$

即
$$\frac{1}{P}=\frac{1}{p_x}+\frac{1}{p_y}+\frac{1}{p_z}+\cdots=\left[\frac{1}{p}\right],$$

或
$$P=\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}. \tag{67}$$

若
$$m_x=m_y=m_z=\cdots=m,$$
$$p_x=p_y=p_z=\cdots=p,$$

則
$$M=m\phi=\pm m\sqrt{n},$$

n為未知數$x, y,\cdots$之數,而

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\cdots=n\frac{1}{p},\quad 或\quad P=\frac{p}{n}. \tag{68}$$

茲又設一例,設用一桿尺以量距離,度a次而盡,桿尺之眞長為x,乃以標準尺校之若干次,則其長有出入焉,其校得之長為$l_1, l_2,\cdots l_n$,每次各帶一舛差為$\epsilon_1, \epsilon_2,\cdots\epsilon_n$.故

$$x=l_1+\epsilon_x'=l_2+\epsilon_x''=\cdots=l_n+\epsilon_x^n.$$

命距離之長為X,則$X=ax$,而量時之失確不計焉.

命
$$L_1=al_1,\quad X=L_1+\epsilon_\phi'=al_1+\epsilon_\phi',$$
$$l_1=x-\epsilon_x',\quad al_1=ax-a\epsilon_x'',$$

則
$$X=ax=ax-a\epsilon_x'+\epsilon_\phi'=ax-a\epsilon_x''+\epsilon_\phi''=\cdots,$$

或
$$0=-a\epsilon_x'+\epsilon_\phi'=-a\epsilon_x''+\epsilon_\phi''=\cdots=-a\epsilon_x^n+\epsilon_\phi^n,$$

即
$$\epsilon_\phi'=a\epsilon_x',\ \epsilon_\phi''=a\epsilon_x'',\ \cdots,\ \epsilon_\phi^n=a\epsilon_x^n.$$

自乘相加,而以n除之,得

$$\frac{[\epsilon\epsilon_\phi]}{n}=\frac{a^2[\epsilon\epsilon_x]}{n} \tag{69}$$

或 $$m_\phi^2 = a^2 m_x^2 \tag{70}$$

即 II. $$M = m_\phi = \pm a m_x \tag{71}$$

由是得舛差傳播之第二例曰:

設 X 爲 x 之函數而爲其倍數,則結數之均中舛差爲各分觀察均中舛差之同倍數.

若校尺時凡爲 p_x 次,則其權爲 p_x,而結數之權 P 可推之如下:

$$M^2 = m_\phi^2 = \frac{m^2}{P} = a^2 m_x^2 = a^2 \frac{m^2}{p_x}, \quad \frac{1}{P} = \frac{a^2}{p_x}.$$

即 $$P = \frac{p_x}{a^2} \tag{72}$$

若合上兩例而命

$$X = ax \pm by \pm cz \pm \cdots$$

其中 x 爲 $l_x', l_x'' \cdots l_x^n$ 之眞值,

y 爲 $l_y', l_y'', \cdots l_y^n$ 之眞值,

z 爲 $l_z', l_z'' \cdots l_z^n$ 之眞值,

....

而 $$L_1 = al_x' \pm bl_y' \pm cl_z' \pm \cdots,$$

$$L_2 = al_x'' \pm bl_y'' \pm cl_z'' \pm \cdots,$$

....

$$L_n = al_x^n \pm bl_y^n \pm cl_z^n \pm \cdots,$$

$$X = L_1 + \epsilon_\phi' = a(x - \epsilon_x') \pm b(y - \epsilon_y') \pm c(z - \epsilon_z') + \epsilon_\phi'$$

$$= ax \pm by \pm cz - a\epsilon_x' \pm b\epsilon_y' \pm c\epsilon_z' + \epsilon_\phi',$$

$$0=-a\epsilon_x'\pm b\epsilon_y'\pm c\epsilon_z'+\epsilon_\phi',$$

$$\epsilon_\phi'=a\epsilon_x'\mp b\epsilon_y'\mp c\epsilon_z'\mp\cdots,$$

$$\epsilon_\phi''=a\epsilon_x''\mp b\epsilon_y''\mp c\epsilon_z''\mp\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\epsilon_\phi^n=a\epsilon_x^n\mp b\epsilon_y^n\mp c\epsilon_z^n\mp\cdots,$$

自乘相加,而以n除之得

$$\frac{[\epsilon\epsilon_\phi]}{n}=\frac{a^2[\epsilon\epsilon_x]}{n}+\frac{b^2[\epsilon\epsilon_y]}{n}+\frac{c^2[\epsilon\epsilon_z]}{n}+\cdots\pm\frac{2ab[\epsilon_x\epsilon_y]}{n}$$

$$\pm\frac{2ac[\epsilon_x\epsilon_z]}{n}\pm\frac{2bc[\epsilon_y\epsilon_z]}{n}\pm\cdots$$

末三項命爲0,則

$$\frac{[\epsilon\epsilon_\phi]}{n}=\frac{a^2[\epsilon\epsilon_x]}{n}+\frac{b^2[\epsilon\epsilon_y]}{n}+\frac{c^2[\epsilon\epsilon_z]}{n}+\cdots \tag{73}$$

或
$$M^2=m_\phi^2=a^2m_x^2+b^2m_y^2+c^2m_z^2+\cdots \tag{74}$$

卽　III.
$$\left.\begin{aligned}M&=\pm\sqrt{a^2m_x^2+b^2m_y^2+c^2m_z^2+\cdots}\\ \text{或簡書之爲}\quad M&=\pm\sqrt{[a^2m_x^2]}\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

結數之權P,推之如下:

$$M^2=\frac{m^2}{P}=\frac{a^2m^2}{p_x}+\frac{b^2m^2}{p_y}+\frac{c^2m^2}{p_z}+\cdots,$$

$$\frac{1}{P}=\frac{a^2}{p_x}+\frac{b^2}{p_y}+\frac{c^2}{p_z}+\cdots,$$

簡書之
$$P=\frac{1}{\left[\frac{a^2}{p_x}\right]}\quad\text{(簡書法)} \tag{76}$$

特例　若$a=b=c=\cdots$,

(1)　$m_x=m_y=m_z=\cdots$,　$p_x=p_y=p_z=\cdots=p$,

$$M=m_\phi=\pm m\sqrt{[aa]},\quad P=\frac{p}{[aa]}. \tag{77}$$

(2) 若 $a=b=c=1$,

則 $$M=m_\phi=\pm m\sqrt{n},\ P=\frac{p}{n}. \tag{78}$$

IV. 通論 X 爲 $x, y, z\cdots$ 之函數,不問其關係如何,而以

$X=\phi(x, y, z, \cdots\cdots)$ 表之,其中

x 爲 $l_x', l_x'', \cdots l_x^n$ 等觀察之眞值,

y 爲 $l_y', l_y'', \cdots l_y^n$ 等觀察之眞值,

z 爲 $l_z', l_z'', \cdots l_z^n$ 等觀察之眞值,

則 $$x=l_x'+\epsilon_x',\quad y=l_y+\epsilon_y',\quad z=l_z'+\epsilon_z',\ \cdots,$$

$$L_1=\phi(l_x', l_y', l_z', \cdots),$$

$$X=\phi(l_x'+\epsilon_x', l_y'+\epsilon_y', l_z'+\epsilon_z', \cdots).$$

按 *Taylor* 定理(微積術中),

$$X=\phi(l_x', l_y', l_z'\cdots)+\frac{\partial\phi}{\partial x}\epsilon_x'+\frac{\partial\phi}{\partial y}\epsilon_y'+\frac{\partial\phi}{\partial z}\epsilon_z'+\cdots,$$

$$X=L_1+\epsilon_\phi',$$

$$\epsilon_\phi'=X-L_1=\frac{\partial\phi}{\partial x}\epsilon_x'+\frac{\partial\phi}{\partial y}\epsilon_y'+\frac{\partial\phi}{\partial z}\epsilon_z'+\cdots$$

$$\epsilon_\phi''=\frac{\partial\phi}{\partial x}\epsilon_x''+\frac{\partial\phi}{\partial y}\epsilon_y''+\frac{\partial\phi}{\partial z}\epsilon_z''+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\epsilon_\phi n=\frac{\partial\phi}{\partial x}\epsilon_x^n+\frac{\partial\phi}{\partial y}\epsilon_y^n+\frac{\partial\phi}{\partial z}\epsilon_z^n+\cdots$$

$$\frac{[\epsilon\epsilon_\phi]}{n}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\frac{[\epsilon\epsilon_x]}{n}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\frac{[\epsilon\epsilon_y]}{n}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\frac{[\epsilon\epsilon_z]}{n}+\cdots$$

$$+(\text{以下各項可命爲}0) \tag{79}$$

則 $$m_\phi^2=M^2=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) m_z^2+\cdots,$$

卽 $$M=m_\phi\doteq\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 m_z^2+\cdots}$$

$$=\pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}m_x\right)^2\right]} \quad \text{(簡書法)} \tag{80}$$

又 $$\frac{1}{P}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\frac{1}{p_x}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\frac{1}{p_y}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\frac{1}{p_z}+\cdots$$

$$=\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\frac{1}{p_x}\right] \quad \text{(簡書法)} \tag{81}$$

卽 $$P=\frac{1}{\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\frac{1}{p_x}\right]} \tag{82}$$

例題1. 設 $X=ax=\phi(x)$,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=a, \quad M=\pm\sqrt{a^2m_x^2}=\pm am_x.$$

2. $X=x+y=\phi(x)$,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=1 \text{(}y\text{ 作爲恆數)},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=1 \text{(}x\text{ 作爲恆數)},$$

$$M=\pm\sqrt{m_x^2+m_y^2}.$$

二例得數與上公式(64)及(71)相同.

3. 三角形 ABC, 已量得

$b=AC=106.00\pm0.06\ m$,

$\angle\beta=29°39'\pm1'$,

$\angle\gamma=120°07'\pm2'$,

求 $AB=c$ 之長若干?並問其權爲幾何?

由三角公式知

$$c=\frac{b}{\sin\beta}\sin\gamma.$$

c 邊之均中舛差按公式(80)

$$M_c^2=\left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)^2 m_b^2+\left(\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)^2 m_\beta^2+\left(\frac{\partial c}{\partial\gamma}\right)^2 m_\gamma^2$$

$$=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}m_b^2+\left(\frac{b\sin\gamma}{\sin^2\beta}\cos\beta\right)^2 m_\beta^2+\left(\frac{b}{\sin\beta}\cos\gamma\right)^2 m_\gamma^2$$

$$=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}m_b^2+c^2\cot g^2\beta\cdot m_\beta^2+c^2\cot g^2\gamma\cdot m_\gamma$$

式中 m_β 及 m_γ 用弧分計之(卽以 $\rho'=\frac{10800'}{\pi}$ 爲單位),若以 cm 計長,以分計角,則用 δ' 除上式之導數,而得下式

$$M_c^2=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}\cdot 6^2+\frac{c^2\cot g^2\beta}{\rho'^2}\cdot 1^2+\frac{c^2\cot g^2\gamma}{\rho'^2}\cdot 2^2.$$

b	2.02531
$E\sin\beta$	0.30566
$\sin\gamma$	9.93702
$185.35=c$	2.26799

$\sin\beta$	9.6943
$\sin\gamma$	9.9370
a^1	0.2427
$3.06=a_1^2$	0.4854

$90.25=a_2^2$	1.9528
a_2	0.9764
$\cot g\,\beta$	0.2447
c	4.2680
$E\rho'$	6.4637
$\cot g\,\gamma$	9.7635
a_3	0.4952
$9.78=a_3^2$	0.9904

[附註] $E\sin\beta$ 右列爲 $\sin\beta$ 對數之補數, $E\rho'$ 例推,

$$a_1=\frac{\partial c}{\partial b},\quad a_2=\frac{\partial c}{\partial\beta},\quad a_3=\frac{\partial c}{\partial\gamma}.$$

$$M_c^2 = 3.06 \times 36 + 90.25 \times 1 + 9.78 \times 4$$

$$= 110 + 90 + 39 = 239 = [m_x^2 a^2].$$

故　$$c = 185.35 \pm 0.15_5 m$$

c 邊之權可按公式 (57) 算之,

$$\frac{1}{P_c} = \frac{M_c^2}{m^2} = \frac{[m_x^2 a^2]}{m^2} = \frac{239}{m^2}.$$

命量 b 邊之權為 1, 則 $m = 6\ cm.$, $n^2 = 36$, 故

$$\frac{1}{P_c} = \frac{239}{36} = 6.64,$$

即　$$P_c = 0.15.$$

第八章　觀察之分類及其平差術

觀察之事,可分三類.一曰直接觀察.權而知輕重,度而知長短是也.二曰間接觀察.因甲乙乙丙之和或較而知甲乙丙.因水銀面之升降而知溫度氣壓之變更是也.三曰定約觀察,觀察之數須合乎一定之約,如三角形內三角之和必爲二正角,勾方股方之和必等於絃方是也.觀察之類異,則其平差之術亦不能全同.茲故分論之如下.

一. 直接觀察　凡上數章所論皆直接觀察也.茲再舉數例以明其平差術之用.

例題一　今有直接觀察所得之數如下表.各觀察俱同等準確,求其最或是值,並求其準確之度.

	觀察之值		近似舛差
	$l=$	$\lambda=x-l=$	$\lambda\lambda=$
	99.977 m	+.014	.000196
	99.976	+.015	.000225
	99.991	.000	.000000
	99.986	+.005	.000025
$n=9$	100.000	−.009	.000081
	99.991	.000	.000000
	99.999	−.008	.000064
	100.001	−.010	.000100
	100.000	−.009	.000081

$$x=\frac{[l]}{n}=99+\frac{8.921}{9}=99.99122,$$

$$[\lambda\lambda]=.000772.$$

觀察之均中舛差爲

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{0.000772}{8}}=0.00980\,m.=\pm 9.80\,mm.$$

結數之均中舛差爲

$$\mu=\pm\frac{m}{\sqrt{P}}=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{0.000772}{9\times 8}}=3.3\,mm.$$

故所得觀察之最或是値爲

$$X=99.991\pm 0.0033\,m.$$

而每次觀察之舛差不過爲觀差最或是値之$\pm\frac{0.0098}{99.991}$卽約等於萬分之一.

例題二　設有不同等準確觀察之得數 L_1, L_2 及 L_3. 三得數皆各由多次觀察 $l_1', l_1'', \cdots; l_2', l_2'', \cdots; l_3', l_3'', \cdots$ 等平均而得者. 故 L_1, L_2, 及 L_3 皆已各得其均中舛差如下:

$$L_1=139.841\,m.\qquad \text{均中舛差}\ m_1=\pm 0.010$$

$$L_2=139.848\qquad m_2=\pm 0.005$$

$$L_3=139.856\qquad m_3=\pm 0.015$$

求觀察之最或是値及其準確之度.

命　$L_1+\lambda_1=L_0+z$, L_0 設爲觀察之一近値, 而 z 則其校正數也. L_0+z 卽爲觀察之眞値, 故

$$\lambda_1=z-(L_1-L_0),$$

同理　$L_2+\lambda_2=L_3+\lambda_3=L_0+z$, 故

$$\lambda_2=z-(L_2-L_0),\quad \lambda_3=z-(L_3-L_0).$$

命 $L_0=139.840$，則

$$\lambda_1=z-1$$
$$\lambda_2=z-8 \qquad (A)$$
$$\lambda_3=z-16$$

上式即爲觀察方程式.今欲求各式之權，即按公式 (45) 如下:

觀察方程式	均中舛差	權
$z-1=\lambda_1$	$m_1=0.010$	$p_1=\frac{1}{m_1^2}=\frac{1}{100}$
$z-8=\lambda_2$	$m_2=0.005$	$p_2=\frac{1}{m_2^2}=\frac{1}{25}$ (B)
$z-16=\lambda_3$	$m_3=0.015$	$p_3=\frac{1}{m_3^2}=\frac{1}{225}$

按所謂權者本爲比例數，故於其分數位次可不拘也.

按公式 (47 a) $[P\lambda\lambda]=min.$

故 $\frac{\partial[p\lambda\lambda]}{\partial z}=0$, 即 $\frac{\partial(p_1\lambda_1^2+p_2\lambda_2^2+p_3\lambda_3^2)}{\partial z}=0$,

即 $2p_1\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial z}+2p_2\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial z}+2p_3\lambda_3\frac{\partial\lambda_3}{\partial z}=0$,

即 $p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+p_3\lambda_3=[p\lambda]=0$,

即 $p_1(z-1)+p_2(z-8)+p_3(z-16)=0.$

上式中之眞數以 l_1, l_2 及 l_3 代之:

$$p_1(z-l_1)+p_2(z-l_2)+p_3(z-l_3)=0.$$

其通式代數平均值爲

$$z=\frac{[pl]}{[p]}=\frac{p_1l_1+p_2l_2+p_3l_3}{p_1+p_2+p_3}.$$

分母分子各以q乘之則得

$$z=\frac{qp_1l_1+qp_2l_2+qp_3l_3}{qp_1+qp_2+qp_3}.$$

命$q=900$,則$qp_1=9$, $qp_2=36$, $qp_3=4$,

$$z=\frac{9\times1+36\times8+4\times16}{9+36+4}=7.4,$$

觀察之最或是值卽爲

$$L_0+z=139.8474,$$

以z之值代入(A)則得

$\lambda_1=7.4-\ 1=+6.4$	$\lambda_1\lambda_1=40.96$	$qp\lambda\lambda=368.64$
$\lambda_2=7.4-\ 8=-0.6$	$\lambda_2\lambda_2=\ 0.36$	12.96
$\lambda_3=7.4-16=-8.6$	$\lambda_3\lambda_3=73.96$	295.84
		$[qp\lambda\lambda]=677.44$

結數之均中件差按公式(53)及(57)

$$\mu=\pm\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\pm\frac{1}{\sqrt{[p]}}\sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{(n-1)}},$$

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{[p](n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{q[p\lambda\lambda]}{q[p](n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{[qp\lambda\lambda]}{[qp](n-1)}},$$

故 $$\mu=\pm\sqrt{\frac{677.44}{49\times2}}=\pm2.63,$$

故所得結果爲 $139.8474\pm0.0026.$

間接觀察及定約觀察,無直接之得數,故無從取其代數平均值.而觀察之值須由觀察方程式解而得之.觀察方程式,或爲直線式(卽聯立一次式),或非直線式(二次方以上三角對數

等函數式)，而化之爲直線式.使此等方程式其數與未知數之數相等，則依尋常代數解法，每未知數但有一值，無所謂平差也.必也方程式之數多於未知數，始可以言平差.

間接及定約觀察之平差，除公式(11)，(40)，(41a)，(48)，(49)定例而外，尙須有標準方程式以馭之，何謂標準方程式?

依第三章舛差$\lambda_1, \lambda_2 \cdots$相遞互見之或是率爲

$$W=\phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2)\cdots\phi(\lambda_n)(d_\lambda)^n,$$

$$\log W=\log\phi(\lambda_1)+\log\phi(\lambda_2)+\cdots+\log\phi(\lambda_n)+n\log d\lambda.$$

欲由觀察方程式計算未知數 $z_1, z_2 \cdots z_i$ 之值，所不能免者舛差 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 等也.而欲使 $z_1, z_2, \cdots z_i$ 等值爲最或是者，則須使$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$之出現爲最或是者.

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$相遞互見或是率之最大者，必 $\log W=max.$ 乃可.故必

$$\frac{\partial \log W}{\partial z_1}=\frac{1}{\phi(\lambda_1)}\cdot\frac{\partial\phi(\lambda_1)}{\partial z_1}+\cdots+\frac{1}{\phi(\lambda_n)}\cdot\frac{\partial\phi(\lambda_n)}{\partial z_1}=0$$

$$\frac{\partial \log W}{\partial z_2}=\frac{1}{\phi(\lambda_1)}\cdot\frac{\partial\phi(\lambda_1)}{\partial z_2}+\cdots+\frac{1}{\phi(\lambda_n)}\cdot\frac{\partial\phi(\lambda_n)}{\partial z_2}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \log W}{\partial z_i}=\frac{1}{\phi(\lambda_1)}\cdot\frac{\partial\phi(\lambda_1)}{\partial z_i}+\cdots+\frac{1}{\phi(\lambda_n)}\cdot\frac{\partial\phi(\lambda_n)}{\partial z_i}=0$$

但因
$$\frac{\partial\phi(\lambda)}{\partial z}=\phi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial z},$$

又因簡便計命

$$\frac{\phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)}=\psi(\lambda),$$

則得

$$\left.\begin{aligned}&\psi(\lambda_1)\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_1}+\psi(\lambda_2)\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_1}+\cdots+\psi(\lambda_n)\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_1}=0\\&\psi(\lambda^1)\frac{\partial\lambda^1}{\partial z_2}+\psi(\lambda_2)\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_2}+\cdots+\psi(\lambda_n)\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_2}=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\psi(\lambda_1)\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_i}+\psi(\lambda_2)\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_i}+\cdots+\psi(\lambda_n)\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_i}=0\end{aligned}\right\}\qquad(83)$$

公式(83)函數ψ與各項乘以定因數者無異,而右端則爲0,故可簡約之如下:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_1}+\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_1}+\cdots+\lambda_n\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_1}=0\\&\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_2}+\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_2}+\cdots+\lambda_n\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_2}=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_i}+\cdots+\lambda_n\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_i}=0\end{aligned}\right\}\qquad(84)$$

上之公式名曰標準方程式.[1]舛差平方之和爲最小值,$[\lambda\lambda]=min$之義亦包函其中,實爲以下一切平差術之基本方程式.

二. 間接觀察 茲引用例題數則以明標準方程式之用法.

例題一 設欲定三種物體之重s_1, s_2, s_3而無標準無差之砝碼,則互置各重於二盤而稱之,得以下各結果:

(1) 標準方程式 Normalgleichung: 爲 Gauss 所定.

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s_2 + 1.7\,g. \\ s_3 &= \quad 2.4 \\ s_2 + s_3 &= s_1 + 1.0 \\ s_2 &= s_3 + 3.0 \end{aligned}\right\}\text{觀察方程式}$$

計方程式四而未知數三,故有平差之可言.

命 s_1, s_2, s_3 三重之最或是值為 z_1, z_2, z_3,而觀察之近似外差為 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 則

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \quad z_1 - z_2 \qquad -1.7 \\ \lambda_2 &= \qquad\qquad z_3 - 2.4 \\ \lambda_3 &= -z_1 + z_2 + z_3 - 1.0 \\ \lambda_4 &= \qquad z_2 - z_3 - 3.0 \end{aligned}$$

按公式 (84) $$\frac{\partial \lambda_1}{\partial z_1} = \frac{\partial (z_1 - z_2 - 1.7)}{\partial z_1} = 1, \ \frac{\partial \lambda_2}{\partial z_1} = \frac{\partial (z_3 - 2.4)}{\partial z_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial z_1} = \frac{\partial (-z_1 + z_2 + z_3 - 1.0)}{\partial z_1} = -1, \ \frac{\partial \lambda_4}{\partial z_1} = 0.$$

如是例推,故

$$(z_1 - z_2 - 1.7) + (-z_1 + z_2 + z_3 - 1.0)(-1) = 0,$$

$$(z_1 - z_2 - 1.7)(-1) + (-z_1 + z_2 + z_3 - 1.0) + (z_2 - z_3 - 3.0) = 0,$$

$$(z_3 - 2.4) + (-z_1 + z_2 + z_3 - 1.0) + (z_2 - z_3 - 3.0)(-1) = 0.$$

此式整飭之即得標準方程式:

$$\left.\begin{aligned} 2z_1 - 2z_2 - \ z_3 - 0.7 &= 0 \\ -2z_1 + 3z_2 \qquad -2.3 &= 0 \\ -\ z_1 \qquad +3z_3 - 0.4 &= 0 \end{aligned}\right\}\text{標準方程式}$$

以三方程式求三未知數,故可按代數恆法解之,得

$$z_1=7.1,\quad z_2=5.5,\quad z_3=2.5.$$

由上例題可得求標準方程式之捷法曰: 每一觀察皆爲立一觀察方程式. 以每觀察方程式中某未知數之係數乘該觀察方程式之左端而加之, 卽爲該未知數之標準方程式. 凡有幾未知數卽得幾標準方程式.

若觀察非同準確,每觀察各別之以其權,權者卽與觀察複習之次數同. 按上法求標準方程式, 則每方程式必以其權數倍之. 如上例題使其觀察之權爲 4, 9, 1, 4 則其觀察方程式可書之如下:

$$\begin{array}{rl} z_1-z_2\qquad -1.7=v_1 & \text{其權爲}\ 4 \\ z_3-2.4=v_2 & \quad ,,\ ,,\ ,,\ 9 \\ -z_1+z_2+z_3-1.0=v_3 & \quad ,,\ ,,\ ,,\ 1 \\ z_2-z_3-3.0=v_4 & \quad ,,\ ,,\ ,,\ 4 \end{array}$$

是四觀察方程式其實卽等於 $(4+9+1+4)=18$. 方程式卽第一方程式複之四次, 第二方程式複之九次, 如此例推也. 本此則按上法求其標準方程式, 得

$$4(z_1-z_2-1.7)+(-z_1+z_2+z_3-1.0)(-1)=0,$$

$$4(z_1-z_2-1.7)(-1)+(-z_1+z_2+z_3-1.0)+4(z_2-z_3-3.0)=0,$$

$$9(z_3-2.4)+(-z_1+z_2+z_3-1.0)+4(z_2-z_3-3.0)(-1)=0.$$

卽

$$\begin{aligned} 5z_1-5z_2-\ z_3-\ 5.8&=0, \\ -5z_1+9z_2-\ 3z_3-\ 6.2&=0, \\ -\ z_1-3z_2+14z_3-10.6&=0. \end{aligned}$$

上各方程式按聯立代數方程式法解之,卽得

$$z_1=7.07,\quad z_2=5.42,\quad z_3=2.42.$$

依此例題,則不同準確觀察之標準方程式普通之式可書爲

$$\left.\begin{aligned}
&p_1\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_1}+p_2\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_1}+\cdots+p_n\lambda_n\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_1}=0\\
&p_1\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_2}+p_2\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_2}+\cdots+p_n\lambda_n\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_n}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_1\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_i}+p_2\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_i}+\cdots+p_n\lambda_n\frac{\partial\lambda_n}{\partial z_i}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(85)$$

間接觀察之均中弅差於第十章論之.

三. 定約觀察　凡所求之未知數.不但須合乎所得之觀察方程式.且須吻合於一定之約.其定約之數必少於未知數蓋非若此,則未知數且可以定約求得,無賴乎觀察方程式,卽無所謂平差也.

玆先舉一簡單之例題以見其解法之一般,其詳將於第十二章論之.

例題. 設有四邊形量其內角得

$$\left.\begin{aligned}
&A=101^\circ\ 13'\ 22''\ \text{其權爲}\ 3\\
&B=\ 93^\circ\ 49'\ 17''\ \ ,,\ ,,\ ,,\ 2\\
&C=\ 87^\circ\ \ 5'\ 39''\ \ ,,\ ,,\ ,,\ 2\\
&D=\ 77^\circ\ 52'\ 40''\ \ ,,\ ,,\ ,,\ 1
\end{aligned}\right\}\qquad(A)$$

$$A+B+C+D=360^\circ\ 0'\ 58''$$

但四角之和必合乎定約:

$$A+B+C+D=360^{\circ}, \qquad (B)$$

故觀察實各帶有舛差,其和爲58″也.

命各角之最或是値爲

$$A^0=A+z_1, \quad B^0=B+z_2, \quad C^0=C+z_3, \quad D^0=D+z_4,$$

而 z_1, z_2, z_3, z_4 爲各觀察之校正數.以與上式 (A) 相減則得觀察方程式

$$\left.\begin{array}{ll} z_1=0 & \text{權 } 3 \\ z_2=0 & \;\;,, \;\; 2 \\ z_3=0 & \;\;,, \;\; 2 \\ z_4=0 & \;\;,, \;\; 1 \end{array}\right\} \qquad (C)$$

又定約方程式:

$$z_1+z_2+z_3+z_4+58=0. \qquad (D)$$

由 (C) 及 (D) 諸式中消去 z_4,則餘

$$\begin{array}{rl} z_1=0 & \text{權 } 3 \\ z_2=0 & \;\;,, \;\; 2 \\ z_3=0 & \;\;,, \;\; 2 \\ z_1+z_2+z_3+58=0 & \;\;,, \;\; 1 \end{array} \qquad (E)$$

此式並作觀察方程式觀之,用前法求標準方程式得

$$\begin{aligned} 4z_1+\ z_2+\ z_3+58&=0 \\ z_1+3z_2+\ z_3+58&=0 \\ z_1+\ z_2+3z_3+58&=0 \end{aligned}$$

按尋常代數法解之,得校正數爲

$$z_1=-8.29, \quad z_2=12.43, \quad z_3=12.43, \quad z_4=-24.85.$$

以此諸校正數加諸(A),則得四角之最或是值爲

$$
\begin{aligned}
A &= 101^\circ\ 13'\ 13''.71\\
B &= 93\ \ 49\ \ 4\ .57\\
C &= 87\ \ 5\ \ 26\ .57\\
D &= 77\ \ 52\ \ 15\ .15
\end{aligned}
$$

定約觀察之均中舛差亦詳下第十章.

第九章　論非直線方程式及經驗方程式

上章所舉間接觀察及定約觀察平差諸例,所用者皆爲直線方程式(即一次式).惟實際上觀察所施,非概可以直線方程式括者,或爲高級諸方程式,或爲越函數(對數,三角函數等)式,皆難逕化之爲標準方程式.亦有所觀察事理,尙未得其函數性質,即尙未成方程式,故必先按其觀察所得探其性質而繩之以方程式.其非直線式者,須化之爲直線式.

(一)化非直線方程式爲直線方程式.

命觀察所得 $L_1, L_2, L_3, \cdots L_n$ 爲所求未知數 $X, Y, Z\cdots$ 之函數.故其彼此關繫,可用下式表之:

$$\left.\begin{aligned} &F_1(X, Y, Z, \cdots) - L_1 = 0 \\ &F_2(X, Y, Z, \cdots) - L_2 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_n(X, Y, Z, \cdots) - L_n = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

欲使 L 與其函數吻合無間,(一)須觀察無纖毫舛差,(二)須方程式之數與未知數之數恰相等劑,無過少,亦無過多.但二者皆非事實所可也.舛差爲觀察所必不可免,而過多之方程式亦爲平差所必需.然則 L 終不與函數吻合無間矣.必也加以校正之值.故命 $L+\lambda$ 爲最或是之觀察值而 λ 爲舛差,而上式(86)即改作:

$$\left.\begin{aligned} &F_1(X, Y, Z, \cdots) - L_1 = \lambda_1 \\ &F_2(X, Y, Z, \cdots) - L_2 = \lambda_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_n(X, Y, Z, \cdots) - L_n = \lambda_n \end{aligned}\right\} \qquad (86a)$$

此方程式假定爲非直線式,今欲化之爲直線式,須以他數 $x, y, z, \cdots$ 代 $X, Y, Z, \cdots$, 而 x, y, z 爲極小之值,其二次方以上之值,可略棄不論.其法每一未知數皆以一近値及一校正數之和代之.故可命

$$X=N_x+x, \quad Y=N_y+y, \quad Z=N_z+z, \cdots \tag{87}$$

$N_x, N_y, N_z, \cdots$ 爲近値,爲已知數,而 $x, y, z, \cdots$ 爲其校正數,爲未知數也.以此代入 (86a) 則得

$$\left.\begin{aligned} &F_1(N_x+x,\ N_y+y,\ N_z+z,\ \cdots)-L_1=\lambda_1 \\ &F_2(N_x+x,\ N_y+y,\ N_z+z,\ \cdots)-L_2=\lambda_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_n(N_x+x,\ N_y+y,\ N_z+z,\ \cdots)-L_n=\lambda_n \end{aligned}\right\} \tag{86b}$$

用<u>戴勞</u>氏 (Taylor's) 定理展上式爲級數,則得

$$\left.\begin{aligned} &F_1(N_x,N_y,N_z,\cdots)+x\frac{dF_1}{dN_x}+y\frac{dF_1}{dN_y}+z\frac{dF_1}{dN_z}+\frac{x^2}{1.2}\,\frac{d^2F_1}{dN_x{}^2} \\ &\qquad\qquad+\frac{y^2}{1.2}\,\frac{d^2F_1}{dN_y{}^2}+\frac{z^2}{1.2}\,\frac{d^2F_1}{dN_z{}^2}+\cdots-L_1=\lambda_1 \\ &F_2(N_x,N_y,N_z,\cdots)+x\frac{dF_2}{dN_x}+y\frac{dF_2}{dN_y}+z\frac{dF_2}{dN_z}+\cdots-L_2=\lambda_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{86c}$$

上式中凡 x, y, z 二次方以上皆略去之.首項及末項爲已知數,併之爲:

$$\left.\begin{aligned} &m_1=F_1(N_x,N_y,N_z,\cdots)-L_1 \\ &m_2=F_2(N_x,N_y,N_z,\cdots)-L_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &m_n=F_n(N_x,N_y,N_z,\cdots)-L_n \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

又命
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dF_1}{dN_x}=a_1,\quad \dfrac{dF_1}{dN_y}=b_1,\quad \dfrac{dF_1}{dN_z}=c_1,\ \cdots \\ \dfrac{dF_2}{dN_x}=a_2,\quad \dfrac{F_2}{dN_y}=b_2,\quad \dfrac{dF_2}{dN_z}=c_2,\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dF_n}{dN_x}=a_n,\quad \dfrac{dF_n}{dN_y}=b_n,\quad \dfrac{dF_n}{dN_z}=c_n,\ \cdots\end{array}\right\}\tag{89}$$

代入(86c), 卽得簡單之直線方程式:

$$\left.\begin{array}{l}a_1x+b_1y+c_1z+\cdots+m_1=\lambda_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\cdots+m_2=\lambda_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nx+b_ny+c_nz+\cdots+m_n=\lambda_n\end{array}\right\}\tag{90}$$

在此式中未知數之數爲 i, 方程式之數爲 n, 與觀察 L 之數相等. 使 $n=i$, 則必 $\lambda=0$, 無平差之可言. 使 $n<i$, 則未知數成爲無定數. 必也 $n>i$, 有過多之觀察式, 始能平其差.

今更欲用他法求標準方程式以爲平差之用, 其結果與上(84)式相同. 按最小二程式之基本公式(41), (41a), 凡舛差平方之和須爲最小值, 卽 $[\lambda\lambda]=min$.

自乘(90)式得

$$\lambda_1^2=a_1^2x^2+2a_1b_1xy+2a_1c_1xz+\cdots+2a_1m_1x+b_1^2y^2+2b_1c_1yz$$
$$+\cdots+2b_1m_1y+c_1^2z^2+\cdots+2c_1m_1z+\cdots+m_1^2$$
$$\lambda_2^2=a_2^2x^2+2a_2b_2xy+2a_2c_2xz+\cdots+2a_2m_2x+b_2^2y^2+2b_2c_2yz$$
$$+\cdots+2b_2m_2y+c_2^2z^2+\cdots+2c_2m_2z+\cdots+m_2^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

和之得:

$$[\lambda\lambda]=[aa]x^2+2[ab]xy+2[ac]xz+\cdots+2[am]x+[bb]y^2+$$
$$2[bc]yz+\cdots+2[bm]y+[cc]z^2+\cdots+2[cm]z+[mm]$$

欲求 $x, y, z,\cdots$ 之值能使 $[\lambda\lambda]=min.$ 者，故微分之而命其微商爲0，則得標準方程式如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d[\lambda\lambda]}{dx}&=2[aa]x+2[ab]y+2[ac]z+\cdots+2[am]=0\\ \frac{d[\lambda\lambda]}{dy}&=2[ab]x+2[bb]y+2[bc]z+\cdots+2[bm]=0\\ \frac{d[\lambda\lambda]}{dz}&=2[ac]x+2[bc]y+2[cc]z+\cdots+2[cm]=0\end{aligned}\right\}\qquad(91)$$

細審此式，則知其方程式之數恰與未知數之數相等，故依代數解法，卽得 $x, y, z,\cdots$ 之值也. 2之係數可以消去

（二）常有觀察之數，尙未敢定其與其函數關繫若何，及有無關繫否，則可作縱橫軸分縱標及橫標列之，而聯其所得諸點. 使其聯線毫無紀律，則二者之間或絕無關繫，或者函數不止與觀察之數有關繫，此外或尙有其他與有關繫者缺而未舉也.

設所得聯線整飭有律，可以解析幾何取之. 使爲直線，則爲直線式. 使爲 n 次屈轉之曲線，卽爲 $(n+1)$ 次之代數式. 而其如何關繫之定律，不難以曲線截 Y 軸之長，以其方向係數等等定之. 凡如是所得之方程式，名曰經驗方程式

假使觀察之數，毫無舛差，則各點之聯線，可爲有定律之曲線所過，毫無出入. 惟舛差在所不免，故各曲線，亦於有律中略有出入，而其聯線不能爲完全整飭之曲線. 今欲求其函數關繫之定律，必以其最或是之觀察值定之. 最或是之觀察值，則

以各縱標之出入,卽或是舛差之平方和爲極小值,$[\lambda\lambda]=min$,定之.

例題(一)　設於$A-I$各地測驗氣壓.各地高出海面之高h,假設爲三角測量法測得甚準作爲無差者.各地氣壓之高B如下表:

	h	B	
A	120.2公尺	751.18公釐	
B	225.1	742.37	
C	270.6	738.50	
D	347.6	731.27	
E	406.7	726.99	(A)
F	492.4	718.16	
G	708.1	700.48	
H	733.5	697.64	
I	768.9	695.23	

地面出海之高與氣壓之高之關繫,按理論應爲

$$h=Y\log\frac{X}{B} \qquad (B)$$

或

$$\log X-\log B=\frac{h}{Y} \qquad (B_1)$$

式中X及Y爲須待定之係數.

先任用上表相當B與h之二值,代入(B_1),如

$$\left.\begin{aligned}\log N_x-\log 751.18&=\frac{120.2}{N_y}\\ \log N_x-\log 695.23&=\frac{768.9}{N_y}\end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

二式用代數法解之,得

$$N_x=762.03,\quad N_y=19298 \tag{D}$$

作爲 X 及 Y 之近值.

又變上函數 (A) 爲

$$\frac{h}{Y}=log\frac{X}{B},\ \frac{X}{B}=10^{h/Y},\ \frac{B}{X}=10^{-h/Y},$$

或
$$B-X\cdot10^{-h/Y}=0 \tag{E}$$

卽
$$F(X,Y)=X\cdot10^{-h/Y} \tag{F}$$

而 (86a) $F_1(X,Y)-L_1=\lambda_1$ 等式在此卽爲:

$$X\cdot10^{-h/Y}-B_1=\lambda_1 \tag{G}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以近值代入而加以校正數 x, y 則得

$$\left.\begin{array}{l}(N_x+x)\cdot10^{-h/(N_y+y)}-B_1=\lambda_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} \tag{H}$$

或
$$(762.03+x)\cdot10^{-h/(19298+y)}-B_1=\lambda_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

或
$$\left.\begin{array}{l}762.03\times10^{-h/19298}+x\dfrac{dF}{dN_x}+y\dfrac{dF}{dN_y}-B_1=\lambda_1\cdot\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} \tag{I}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dF}{dN_x}=a=10^{-h/19298}\\ \dfrac{dF}{dN_y}=b=762.03\times10^{-h/19298}\cdot\dfrac{h}{19298^2}\cdot\dfrac{I}{M}\end{array}\right\} \tag{K}$$

式中 $\frac{1}{M}$ 爲 10 之自然對數 $=2.30258509$.

a 及 b 之值可依下式用對數表算之:

$$
(L)\begin{cases} \log\ a=-\dfrac{h}{19298} \quad \text{或} \quad \log\dfrac{1}{a}=\dfrac{h}{19298} \\ \log\ b=-\dfrac{h}{19298}+\log\dfrac{762.03\,h}{M\cdot 19298^2}=\log\ a+\log\dfrac{762.03\,h}{M\cdot 19298^2} \\ \log\,(m+B)=\log\ 762.03-\dfrac{h}{19298}=\log\ 762.03+\log\ a \end{cases}
$$

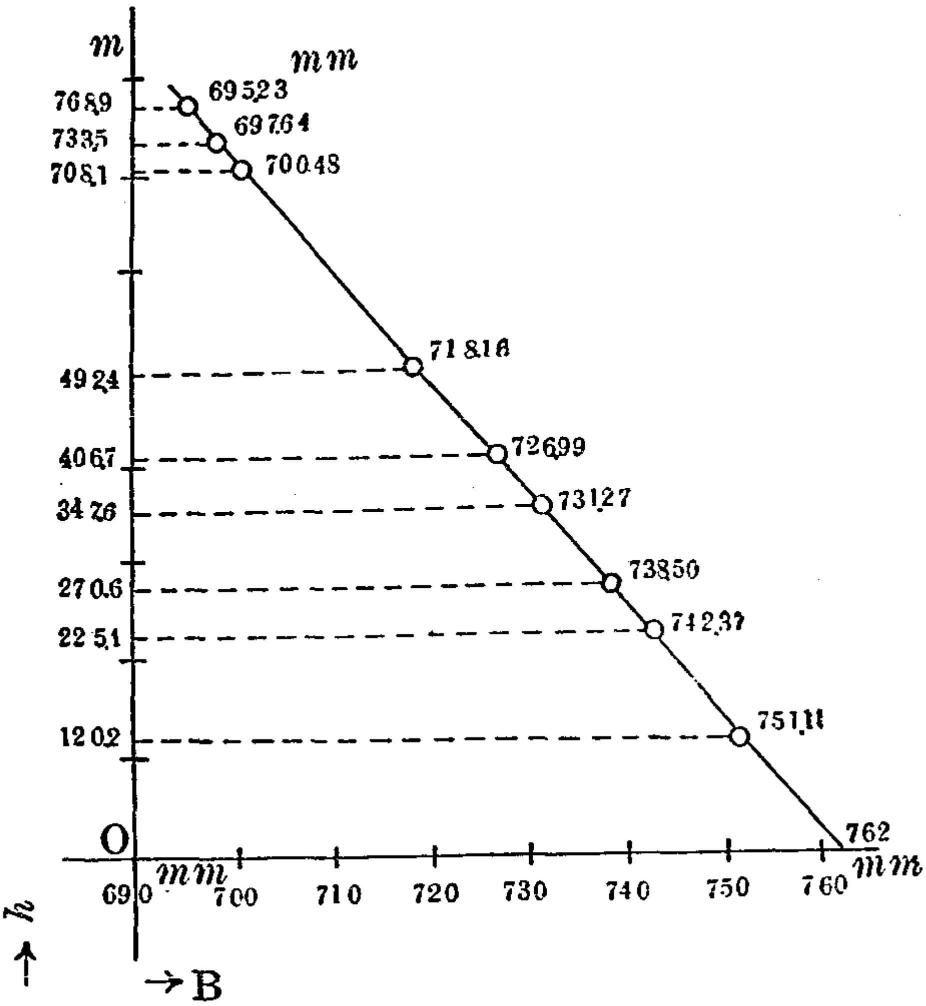
代入上表 h 各值,則得 $a_1, a_2,\cdots, b_1, b_2,\cdots$, 及 $m_1, m_2,\cdots$ 各值,而觀察方程式卽可順序書之如下:

$$
\left.\begin{array}{l} \qquad a \qquad\qquad b \qquad\qquad m \\ 0.986\,x+0.00056\,y+0.00=\lambda_1 \\ 0.973\,x+0.00103\,y-0.53=\lambda_2 \\ 0.968\,x+0.00123\,y-0.68=\lambda_3 \\ 0.959\,x+0.00157\,y-0.20=\lambda_4 \\ 0.953\,x+0.00182\,y-1.06=\lambda_5 \\ 0.943\,x+0.00219\,y+0.38=\lambda_6 \\ 0.919\,x+0.00307\,y-0.20=\lambda_7 \\ 0.916\,x+0.09317\,y+0.53=\lambda_8 \\ 0.912\,x+0.00331\,y+0.00=\lambda_9 \end{array}\right\} \qquad (M)
$$

m_1 及 m_9 所以爲 0 者非偶然,乃因所用 X 及 Y 之近值,由第一及末一觀察得來故也.

例題(二)　如仍用上題之觀察,設 h 及 B 之關係尚未得知,而欲求得一經驗方程式以馭之,法作縱橫軸如第五圖,度 h 爲縱標,度 B 爲橫標,而聯其所得各點.視聯線與直線無異,故其方程式可以一次式

第五圖



$$B=x+hy \qquad (A)$$

表之.但h視爲無差者.而B則有九值.每一值各得一式;即凡有九式,皆近於(A)而皆不能吻合.蓋每一觀察,皆含有舛差,故可書爲

$$\left.\begin{array}{l} B_1+\lambda_1=x+hy \\ B_2+\lambda_2=x+hy \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (B)$$

或

$$x+hy-B_1=\lambda_1 \qquad (B_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

按之公式 (90)　$a=1,\quad b=h,\quad m=-B,$

即

$$\left.\begin{array}{l} x+120.2\,y-751.18=\lambda_1 \\ x+225.1\,y-742.37=\lambda_2 \\ x+270.6\,y-738.50=\lambda_3 \\ x+347.6\,y-731.27=\lambda_4 \\ x+406.7\,y-726.99=\lambda_5 \\ x+492.4\,y-718.16=\lambda_6 \\ x+708.1\,y-700.48=\lambda_7 \\ x+733.5\,y-697.64=\lambda_8 \\ x+768.9\,y-695.23=\lambda_9 \end{array}\right\} \qquad (C)$$

今欲求 x 及 y 之最或是值,須令 $[\lambda\lambda]=min$, 按上標準方程式解之

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\,x+[ab]\,y+[am]=0 \\ [ab]\,x+[bb]\,y+[bm]=0 \end{array}\right\} \qquad (D)$$

$$[aa]=9,\ [ab]=4073.1,\ [am]=-6501.82,$$

$$[bb]=2297666,\ [bm]=-2903006.867,$$

以此各值代入 (D) 而用代數法解之, 即得

$$x=+761.77,$$

$$y=-0.08695,$$

而經驗方程式即可書爲:

$$B=761.77-0.08695\,h.$$

第十章　論權系數及間接定約觀察之均中舛差

凡所觀察爲多數未知數之函數,其各未知數,可用標準方程式求之,如第八章所舉例.惟並欲知所定各未知數之準確程度,知其均中舛差,則非先知各未知數在該方程式中之分劑若何,卽其權爲若干,不可.蓋各未知數於函數式中正負係數不同,則其權不一,其權旣因係數而異,故亦可由其係數而定之.

(一)權係數.

玆爲立式簡易計,假定觀察之所求知者爲x,y,z三未知數,而觀察方程式之數凡四.按(90)爲

$$\left.\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1z+m_1&=\lambda_1\\a_2x+b_2y+c_2z+m_2&=\lambda_2\\a_3x+b_3y+c_3z+m_3&=\lambda_3\\a_4x+b_4y+c_4z+m_4&=\lambda_4\end{aligned}\right\}\qquad(A)$$

旣有觀察方程式,卽可立標準方程式,按(91)爲

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[ac]z+[am]&=0\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bm]&=0\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cm]&=0\end{aligned}\right\}\qquad(B)$$

設思上之標準方程式解後,x,y,z之値亦可作m之直線函數式觀之.又因其符號無關切要,故以$-x,-y,-z$代之而命,

$$\left.\begin{aligned}-x&=\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_2+\alpha_3 m_3+\alpha_4 m_4\\-y&=\beta_1 m_1+\beta_2 m_2+\beta_3 m_3+\beta_4 m_4\\-z&=\gamma_1 m_1+\gamma_2 m_2+\gamma_3 m_3+\gamma_4 m_4\end{aligned}\right\}\qquad(C)$$

舉其一以爲例,如末一式,命 m 之均中舛差爲 μ, z 之均中舛差爲 μ_z, 則按舛差之傳播定律 (公式74)

$$\mu_z=\gamma_1^2\mu^2+\gamma_2^2\mu^2+\gamma_3^2\mu^2+\gamma_4^2\mu^2=[\gamma\gamma]\mu^2\qquad(92)$$

又因權之相比,如其均中舛差平方之反比,故

$$\frac{\mu_z^2}{\mu^2}=\frac{1}{P_z}=[\gamma\gamma]\qquad(92a)$$

上式中以單位權爲 m 之權,而以 P_z 命爲 z 之權. $[\gamma\gamma]$ 命之曰 z 之權係數.

標準方程式亦可用不定係數法解之以得未知數之值. 例如欲求 z, 則可以 Q_1 乘 (B) 之第一式, Q_2 乘其第二式, Q_3 乘其第三式,得:

$$\left.\begin{aligned}Q_1[aa]x+Q_1[ab]y+Q_1[ac]z+Q_1[am]&=0\\Q_2[ab]x+Q_2[bb]y+Q_2[bc]z+Q_2[bm]&=0\\Q_3[ac]x+Q_3[bc]y+Q_3[cc]z+Q_3[cm]&=0\end{aligned}\right\}\qquad(D)$$

式中 Q_1, Q_2, Q_3 皆爲暫尙未知之不定係數. 三式相加,而欲消去 x, y, 獨立 z, 則命 x 及 y 之係數爲0, 而 z 之係數爲1, 即:

$$\left.\begin{aligned}Q_1[aa]+Q_2[ab]+Q_3[ac]&=0\\Q_1[ab]+Q_2[bb]+Q_3[bc]&=0\\Q_1[ac]+Q_2[bc]+Q_3[cc]&=1\end{aligned}\right\}\qquad(E)$$

如是則三式相加後得:

$$z+Q_1[am]+Q_2[bm]+Q_3[cm]=0 \tag{93}$$

詳此式卽得

$$z+Q_1(a_1m_1+a_2m_2+a_3m_3+a_4m_4)$$
$$+Q_2(b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3+b_4m_4)$$
$$+Q_3(c_1m_1+c_2m_2+c_3m_3+c_4m_4)=0.$$

按 m 彙列之，則爲

$$z+(Q_1a_1+Q_2b_1+Q_3c_1)m_1+(Q_1a_2+Q_2b_2+Q_3c_2)m_2$$
$$+(Q_1a_3+Q_2b_3+Q_3c_3)m_3+(Q_1a_4+Q_2b_4+Q_3c_4)m_4=0 \tag{94}$$

以此式與 (C) 中第三式卽

$$z+\gamma_1m_1+\gamma_2m_2+\gamma_3m_3+\gamma_4m_4=0$$

相較，卽得

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1&=Q_1a_1+Q_2b_1+Q_3c_1\\ \gamma_2&=Q_1a_2+Q_2b_2+Q_3c_2\\ \gamma_3&=Q_1a_3+Q_2b_3+Q_3c_3\\ \gamma_4&=Q_1a_4+Q_2b_4+Q_3c_4\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

又以 a_1 乘上第一式，a_2 乘第二式，a_3 乘第三式，a_4 乘第四式，則得

$$\left.\begin{aligned}a_1\gamma_1&=Q_1a_1a_1+Q_2a_1b_1+Q_3a_1c_1\\ a_2\gamma_2&=Q_1a_2a_2+Q_2a_2b_2+Q_3a_2c_2\\ a_3\gamma_3&=Q_1a_3a_3+Q_2a_3b_3+Q_3a_3c_3\\ a_4\gamma_4&=Q_1a_4a_4+Q_2a_4b_4+Q_3a_4c_4\end{aligned}\right\} \tag{F}$$

四式相加得

$$[a\gamma]=Q_1[aa]+Q_2[ab]+Q_3[ac].$$

按 (E) $Q_1[aa]+Q_2[ab]+Q_3[ac]=0$, 故

$$[a\gamma]=Q_1[aa]+Q_2[ab]+Q_3[ac]=0$$

同法以 b 及 c 爲之,則得

$$\left.\begin{aligned}[b\gamma]&=Q_1[ab]+Q_2[bb]+Q_3[bc]=0\\ [c\gamma]&=Q_1[ac]+Q_2[bc]+Q_3[cc]=1\end{aligned}\right\}\qquad (G)$$

故得 $[a\gamma]=0$, $[b\gamma]=0$, $[c\gamma]=1$, 消去 x, y 而求 z. 若欲求 x, 則同上法消去 y, z; 求 y, 消去 x, z. 其所得之式序列如下:

權　係　數

$$\left.\begin{array}{llll}\text{求 } x: & [a\alpha]=1 & [b\alpha]=0 & [c\alpha]=0\\ \text{求 } y: & [a\beta]=0 & [b\beta]=1 & [c\beta]=0\\ \text{求 } z: & [a\gamma]=0 & [b\gamma]=0 & [c\gamma]=1\end{array}\right\}\qquad (96)$$

玆又以 a_1, a_2, a_3, a_4 挨次遞乘 (95) 則得

$$\left.\begin{aligned}a_1\gamma_1&=Q_1a_1a_1+Q_2a_1b_1+Q_3a_1c_1\\ a_2\gamma_2&=Q_1a_2a_2+Q_2a_2b_2+Q_3a_2c_2\\ a_3\gamma_3&=Q_1a_3a_3+Q_2a_3b_3+Q_3a_3c_3\\ a_4\gamma_4&=Q_1a_4a_4+Q_2a_4b_4+Q_3a_4c_4\end{aligned}\right\}\qquad (H)$$

相加,　$[a\gamma]=Q_1[a\alpha]+Q_2[ab]+Q_3[ac]$.

按 (96) 則 $[b\alpha]=0$, $[c\alpha]=0$, $[a\alpha]=1$, 故

$$[a\gamma]=Q_1\qquad (97)$$

同法以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 及 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 代 $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ 爲之,則得

$$[\beta\gamma]=Q_2, [\gamma\gamma]=Q_3\qquad (97a)$$

以此諸值代入 (93), 則得

$$-z=[\alpha\gamma][am]+[\beta\gamma][bm]+[\gamma\gamma][cm]\qquad (98)$$

又代入 (E) 卽得

$$\left.\begin{array}{l}[aa][\alpha\gamma]+[ab][\beta\gamma]+[ac][\gamma\gamma]=0\\ [ab][\alpha\gamma]+[bb][\beta\gamma]+[bc][\gamma\gamma]=0\\ [ac][\alpha\gamma]+[bc][\beta\gamma]+[cc][\gamma\gamma]=1\end{array}\right\}\qquad(99)$$

上 (98) 及 (99) 爲求 z 而設，用對稱交換法，則可得求 x 及求 y 諸式，總列之如下：

標準方程式之不定解式

$$\left.\begin{array}{l}-x=[\alpha\alpha][am]+[\alpha\beta][bm]+[\alpha\gamma][cm]\\ -y=[\alpha\beta][am]+[\beta\beta][bm]+[\beta\gamma][cm]\\ -z=[\alpha\gamma][am]+[\beta\gamma][bm]+[\gamma\gamma][cm]\end{array}\right\}\qquad(100)$$

權方程式

$$\begin{array}{l|l}[aa][\alpha\alpha]+[ba][\alpha\beta]+[ca][\alpha\gamma]=1 & [aa][\alpha\beta]+[ba][\beta\beta]+[ca][\beta\gamma]=0\\ [ab][\alpha\alpha]+[bb][\alpha\beta]+[cb][\alpha\gamma]=0 & [ab][\alpha\beta]+[bb][\beta\beta]+[cb][\beta\gamma]=1\\ [ac][\alpha\alpha]+[bc][\alpha\beta]+[cc][\alpha\gamma]=0 & [ac][\alpha\beta]+[bc][\beta\beta]+[cc][\beta\gamma]=0\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}[aa][\alpha\gamma]+[ba][\beta\gamma]+[ca][\gamma\gamma]=0\\ [ab][\alpha\gamma]+[bb][\beta\gamma]+[cb][\gamma\gamma]=0\\ [ac][\alpha\gamma]+[bc][\beta\gamma]+[cc][\gamma\gamma]=1\end{array}\right\}\qquad(101)$$

此式中 $[aa]$, $[ab]$,… 等皆爲已知數，以代數法解之，卽得 $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, … 權係數之值. 以所求得之值代入 (C) 卽得 x, y, z 爲 $[am]$, $[bm]$, $[cm]$ 之直線函數式.

求得 $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$, 則 x, y, z 之權，卽可按 (92a) 推得，卽

$$P_z=\frac{1}{[\gamma\gamma]}=\frac{1}{Q_8}.$$

同理：$$P_x=\frac{1}{[\alpha\alpha]},\quad P_y=\frac{1}{[\beta\beta]}.$$

(二)觀察之均中舛差.

既有各未知數之權,可以推其均中舛差乎?曰尙未也.蓋須先有單位權之均中舛差,而後可以其比之而得各未知數之均中舛差.

按前公式(43a),直接觀察之均中舛差爲

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}.$$

蓋其所求之未知數,止於一而已.今設觀察所求之未知數不止於一而其數爲q,則其均中舛差之式當若何?請商討之如下.

(1)設q爲1,則其均中舛差之方程式,自必仍如(43a)而不變.故上式只可作均中舛差公式之特例,而其普通之式不能有所多變.

(2)設$n<q$,卽未知數之數多於觀察(卽多於觀察方程式)之數,未知數之值且不能定,況言其均中舛差乎?故該均中舛差公式必示以虛數之值.

(3)設$n=q$,則觀察方程式之數,適與未知數之數相若,故各未知數之值可定,而無乖差之可言,卽無均中舛差之可得,該均中舛差公式必示以不定之值.

(4)設$n>q$,惟觀察之數大於未知數之數始得見.以見其舛差,始可由其均差平方之和以推其均中舛差.故該均中舛差公式乃示以有定之值.

(5)所求之均中舛差不第與$[\lambda\lambda]$有關,尤且必與觀察之數n有關;故均中舛差可作爲二者之函數觀之,即

$$m=F([\lambda\lambda],n,k),$$

式中k則他數之與m有關繫者也.

(6)均中舛差爲0,必其觀察毫無舛差,即$v_1=v_2=\cdots=0$而後可(實事上則絕未有也).

以上六端惟有下式

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-q}} \tag{102}$$

可以相合,蓋使

(1) $q=1$ 則 $m=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$, 如(43$a$)所已見者.

(2) $n<q$ 則 $m=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{\text{負}}}$, 爲虛數.

(3) $n=q$ 則 $m=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{0}}=\frac{0}{0}$, 爲不定數.

(4) $n>q$ 則 $m=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{>1}}$ 爲有定數.

n之值愈大,則所根據以求m之數愈多,而m之值愈可恃.

(7) $n>q$, 必$[\lambda\lambda]=0$乃可使$m=0$, 蓋每一λ^2之值皆爲有限之正值, $n-q$之差愈多,則該值亦愈增.

由此故可定(102)爲均中舛差之普通公式用於間接觀察者.

設觀察爲定約者,則觀察方程式之外,又有定約方程式焉.設觀察方程式之數爲n,定約方程式之數爲n',未知數之數仍

爲q,按第八章定約觀察平差之法,定約方程式與觀察方程式之間可以先消去n'未知數,所餘者爲$q-n'$獨立之未知數耳,故仍可以間接觀察之式馭之,而得

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-(q-n')}}=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-q+n'}} \qquad (103)$$

以上所定者爲單位權之均中舛差,若欲用或是舛差,則可按第四章末$r=0.6844898\,m$,以恆數0.6844898乘所推得之均中舛差m而已.

既有單位權之均中舛差,又知各未知數之權,則可按(56)以得該未知數之均中舛差,如欲求z之均中舛差m_z,而已得其權爲P_z,則

$$P_z:1=\frac{1}{m_z^2}:\frac{1}{m^2}, \quad m_z=\frac{m}{\sqrt{P_z}}$$

即在間接觀察爲:

$$m_z=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{P_z(n-q)}} \qquad (104)$$

在定約觀察爲:

$$m_z=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{P_z(n-q+n')}} \qquad (105)$$

問題一.(間接觀察)　設有觀察方程式:

$$\left.\begin{aligned} x-y\qquad -1.7&=\lambda_1\\ z-2.4&=\lambda_2\\ -x+y+z-1.0&=\lambda_3\\ y-z-3.0&=\lambda_4 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

玆將其係數及其互乘列表如下:

a	b	c	m	aa	bb	cc	ab	ac	bc	am	bm	cm
1	−1	0	−1.7	1	1	0	−1	0	0	−1.7	1.7	0
0	0	1	−2.4	0	0	1	0	0	0	0	0	−2.4
−1	1	1	−1.0	1	1	1	−1	−1	1	1.0	−1	−1
0	1	−1	−3.0	0	1	1	0	0	−1	0	−3	+3
				$[aa]=2$	$[bb]=3$	$[cc]$ [illegible]	$[ab]=-2$	$[ac]=-1$	$[bc]$ [illegible]	$[am]=-0.7$	$[bm]=-2.3$	$[cm]=-0.4$

按公式(101)求 x 之權:

$$
\begin{aligned}
2[\alpha\alpha]-2[\alpha\beta]-\ [\alpha\gamma]&=1\\
-2[\alpha\alpha]+3[\alpha\beta]\qquad\quad&=0\\
-\ [\alpha\alpha]\qquad\quad+3[\alpha\gamma]&=0
\end{aligned}
$$

解之,得 $[\alpha\alpha]=3,\quad[\alpha\beta]=2,\quad[\alpha\gamma]=1,$ (B)

$$P_x=\frac{1}{[\alpha\alpha]}=\frac{1}{3},\ \text{即爲}\ x\ \text{之權}$$

以(B)之值代入(100)第一式,卽得

$$-x=3\times(-0.7)+2\times(-2.3)+(-0.4)=-7.1,\quad \text{卽}\ x=7.1$$

求 y:

$$
\begin{aligned}
2[\alpha\beta]-2[\beta\beta]-\ [\beta\gamma]&=0\\
-2[\alpha\beta]+3[\beta\beta]\qquad\quad&=1\\
-\ [\alpha\beta]\qquad\quad+3[\beta\gamma]&=0
\end{aligned}
$$

解之,得 $[\alpha\beta]=2,\quad[\beta\beta]=\frac{5}{3},\quad[\beta\gamma]=\frac{2}{3},$ (C)

$$P_y=\frac{1}{[\beta\beta]}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5},\ \text{爲}\ y\ \text{之權.}$$

以 (C) 之值代入(100)第二式，即得

$$-y=-2\times0.7-\frac{5}{3}\times2.3-\frac{2}{3}\times0.4=-5.5,\quad \text{即 } y=5.5$$

求 z:

$$\begin{aligned} 2[\alpha\gamma]-2[\beta\gamma]-\ [\gamma\gamma]&=0\\ -2[\alpha\gamma]+3[\beta\gamma]\qquad\quad &=0\\ -\ [\alpha\gamma]\qquad\quad +3[\gamma\gamma]&=0 \end{aligned}$$

解之,得 $[\alpha\gamma]=1,\ [\beta\gamma]=\frac{2}{3},\ [\gamma\gamma]=\frac{2}{3}$.　　(D)

$$P_z=\frac{1}{[\gamma\gamma]}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}.$$

以 (D) 之值代入(100)第三式，即得

$$-z=-0.7-\frac{2}{3}\times2.3-\frac{2}{3}\times0.4=-2.5,\quad \text{即 } z=2.5.$$

次求其單位權之均中舛差以 x,y,z 之值代入(A)中,則得

$$\begin{aligned} 7.1-5.5-1.7&=\lambda_1=-.1 &\quad \lambda_1^2&=.01\\ 2.5-2.4&=\lambda_2=+.1 &\quad \lambda_2^2&=.01\\ -7.1+5.5+2.5-1.0&=\lambda_3=-.1 &\quad \lambda_3^2&=.01\\ 5.5-2.5-3.0&=\lambda_4=0 &\quad \lambda_4^2&=0 \end{aligned}$$

$$[\lambda\lambda]=0.03,\quad n=4,\quad q=3$$

則單位權之均中舛差爲

$$m=\pm\sqrt{\frac{0.03}{4-3}}=\pm\sqrt{0.03}=\pm0.17$$

x 之均中舛差爲 $\pm\sqrt{\frac{0.03}{1/3}}=0.3\ =m_x$

y 之均中舛差爲 $\pm\sqrt{\frac{0.03}{3/5}}=0.22=m_y$

z 之均中舛差爲 $\pm\sqrt{\frac{0.03}{3/2}}=0.14=m_z$

若觀察之準確不同，則於 (100) 及 (101) 公式中須以 $[paa]$, $[pab]\cdots$, $[pam]$, $[pbm]$,… 等代 $[aa]$, $[ab]$,…, $[am]$, $[bm]$… 等. 其單位權之均中舛差公式爲

$$m=\pm\sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-q}} \qquad (106)$$

其他算法俱同. 下例題二爲不同等觀察方有定約者.

問題二(定約觀察) 設有觀察方程式:

$$\left.\begin{array}{llll} x+y & -3.0=0 & \text{其權爲} & 1 \\ x & -z+1.5=0 & \text{其權爲} & 4 \\ \quad y & -2.2=0 & \text{其權爲} & 3 \\ x & +z-3.4=0 & \text{其權爲} & 2 \end{array}\right\} \qquad (A)$$

此外更有一定約方程式

$$z-y-0.5=0 \qquad (B)$$

先由 (A) 及 (B) 消去 z, 則餘

$$\left.\begin{array}{rll} x+y-3.0=0 & \text{其權} & 1 \\ x-y+1.0=0 & \text{其權} & 4 \\ y-2.2=0 & \text{其權} & 3 \\ x+y-2.9=0 & \text{其權} & 2 \end{array}\right\} \qquad (C)$$

權 p	a	b	m	paa	pab	pbb	pam	pbm
1	1	1	-3	1	1	1	-3	-3
4	1	-1	1	4	-4	4	4	-4
3	0	1	-2.2	0	0	3	0	-6.6
2	1	1	-2.9	2	2	2	-5.8	-5.8
				$7=$	$-1=$	$10=$	$-4.8=$	$-19.4=$
				$[paa]$	$[pab]$	$[pbb]$	$[pam]$	$[pbm]$

按 (101) 求 x 之權:

$$7[aa]-[a\beta]=1$$

$$-[aa]+10[a\beta]=0$$

解之,得 $[aa]=\frac{10}{69}$, $[a\beta]=\frac{1}{69}$, $P_x=6.9$

按(100) $x=\frac{10}{69}\times 4.8+\frac{1}{69}\times 19.4=\frac{67.4}{69}=0.98$

同法,得 $y=2.04$, $P_y=9.9$,

又由 (B) 得 $z=2.54$.

但 x, y 之權雖已知而 z 之權則仍未也. 若於 (A) 及 (B) 之間消去 y, 則得

$$x+z-3.5=0 \qquad \text{其權 } 1$$

$$x+z+1.4=0 \qquad \text{其權 } 4$$

$$z-2.7=0 \qquad \text{其權 } 3$$

$$x+z-3.4=0 \qquad \text{其權 } 2$$

仍用上法求得 $P_z=9.9$, $z=2.54$

卽得 x, y, z 之值,則以代入 (A) 而得

λ	$\lambda\lambda$	$P\lambda\lambda$
0.02	0.0004	0.0004
0.06	0.0036	0.0144
0.16	0.0256	0.0768
0.12	0.0144	0.0288

$$[P\lambda\lambda]=0.1204,\qquad n=4,\quad n'=1,\quad q=3$$

$$m=\pm\sqrt{\frac{0.1204}{4-3+1}}=0.25=\pm\sqrt{\frac{[P\lambda\lambda]}{n-q+n'}}\qquad(107)$$

$$m_x=\frac{0.25}{\sqrt{6.9}}=0.09$$

$$m_y=\frac{0.25}{\sqrt{9.9}}=0.08$$

$$m_z=\frac{0.25}{\sqrt{9.9}}=0.08$$

第十一章　論GAUSS標準方程式之排列式解法

1. **標準方程式解法**　標準方程式固可以尋常代數解式法解之.但未知數多者,係數覆數煩者,則解式之事輒非常煩冗,易致舛紊.高司以排列式法解之,較爲醒目.玆述之如下.

玆舉含二未知數之標準方程式以爲例:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]x+[ab]y+[am]=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [ab]x+[bb]y+[bm]=0\end{array}\right.\qquad (A)$$

式中由左上角斜降向右之對角線,其係數概爲正式,其他係數則皆二數相乘之積也.今欲由二式中消去一未知數(x)以得他未知數(y),則以第一式 x 之係數乘第二式,第二式 x 之係數乘第一式而相減,則得

$$([aa][bb]-[ab][ab])\ y+([aa][bm]-[ab][am])=0$$

或 $$y=\frac{-([aa][bm]-[ab][am])}{([aa][bb]-[ab][ab])}=-\frac{[bm]-\frac{[ab]}{[aa]}[am]}{[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]}\qquad (B)$$

式之右端,分子分母,俱不易記.*Gauss* 設爲符號以代之:

命 $$\left.\begin{array}{l}[\overset{\times}{b}\overset{\times}{m}]-\frac{[a\overset{\times}{b}]}{[aa]}[a\overset{\times}{m}]=[\overset{\times}{b}\overset{\times}{m}\cdot 1]\\ [\overset{\times}{b}\overset{\times}{b}]-\frac{[a\overset{\times}{b}]}{[aa]}[a\overset{\times}{b}]=[\overset{\times}{b}\overset{\times}{b}\cdot 1]\end{array}\right\}\qquad (108)$$

則
$$y=-\frac{[bm\cdot1]}{[bb\cdot1]} \tag{109}$$

公式(108)中之減數分子爲二因數之積,而每一因數又各爲二因數之積,其一爲 a, 其他則又卽爲被減數中之二因數.減數之分母,又卽 a 之正方.故符號中卽以該二因數起而綴之以1, 1者指簡化式之級數卽第一級也.凡第一級簡化式中,苟其未知數之位置未曾調動,則其分子分母減數之分母俱爲 $[aa]$.字母之上附以記號×者,欲讀者注意字母之順序而易於記憶其符號也.

既得 y, 則 x 之值固可以 y 之值代入任一標準方程式而得之.但爲整易起見,不如調移標準方程式各項之次序如下:

$$\left.\begin{aligned}[bb]y+[ab]x+[bm]&=0\\ [ab]y+[aa]x+[am]&=0\end{aligned}\right\} \tag{A_1}$$

其調移之法無他,卽令 x 與 y 互調其位置而已.用此法則各未知數之權亦可立卽算出,見後例.

由標準方程式(A_1)卽可得

$$x=-\frac{[am]-\frac{[ba]}{[bb]}[bm]}{[aa]-\frac{[ba]}{[bb]}[ba]} \tag{B_1}$$

或
$$x=-\frac{[am\cdot1]}{[aa\cdot1]}.$$

今更舉三未知數之標準方程式以爲例:

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[ac]z+[am]&=0\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bm]&=0\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cm]&=0\end{aligned}\right\} \tag{A_2}$$

觀式中各項各未知數之係數,知其皆爲一定之駢列(*symmetry*,舊譯對稱).自左上角斜降向右,其對角線所遇之係數皆爲正方,而其旁兩兩對列皆相同之積數.設未知數多於三以至任何數k,其駢列之狀亦必相同.今欲逐次消去未知數而化簡其式,可分爲數級:

第一化簡級　消去左手第一未知數.

第二化簡級　消去左手第二未知數.

第三化簡級　消去左手第三未知數.

以至$k-1$級,則僅餘未知數一而已.

消去左手未知數之法,普通書之如下:

$$\left.\begin{array}{l}\text{以}\dfrac{\text{第一項之第二係數}}{\text{第一項之第一係數}}\text{乘第一方程式加入第二方程式}\\[2ex]\text{以}\dfrac{\text{第一項之第三係數}}{\text{第一項之第一係數}}\text{乘第一方程式加入第三方程式}\\[2ex]\text{以}\dfrac{\text{第一項之第四係數}}{\text{第一項之第一係數}}\text{乘第一方程式加入第四方程式}\end{array}\right\}\quad(110)$$

....

每簡化一次卽消失一未知數,一方程式.若未知數止於三,則其簡化式用上所定符號書之爲

$$\text{第一簡化級}\left\{\begin{array}{l}[bb\cdot 1]\,y+[bc\cdot 1]\,z+[bm\cdot 1]=0\\ [bc\cdot 1]\,y+[cc\cdot 1]\,z+[cm\cdot 1]=0\end{array}\right\}\qquad(B_2)$$

式中$[bb\cdot 1]$及$[bm\cdot 1]$符號所代見上.苟讀者明於創立符號之例,則亦可立知

$$[bc\cdot1]=[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$$

$$[cc\cdot1]=[cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$$

$$[cm\cdot1]=[cm]-\frac{[ac]}{[aa]}[am]$$

矣.再審第一級簡化方程式之各係數,則見其駢列之狀仍存如前.故仍可用(110)之法以 $-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$ 乘第一方程式加入第二方程式而得第二級簡化式:

$$[cm\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bm\cdot1]+\left\{[cc\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bc\cdot1]\right\}z=0$$

而得
$$z=-\frac{[cm\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bm\cdot1]}{[cc\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bc\cdot1]}. \qquad (C_2)$$

此式甚繁,不便書寫.故如未知數多於三,簡化之事仍須進行,則亦必有簡略之符號以代之.

命
$$\left.\begin{cases}[\overset{\times\times}{c}m\cdot1]-\dfrac{[b\overset{\times}{c}\cdot1]}{[bb\cdot1]}[b\overset{\times}{m}\cdot1]=[\overset{\times\times}{c}m\cdot2]\\[2ex] [\overset{\times\times}{d}f\cdot1]-\dfrac{[b\overset{\times}{d}\cdot1]}{[bb\cdot1]}[b\overset{\times}{f}\cdot1]=[\overset{\times\times}{d}f\cdot2]\end{cases}\right\}\text{如此例推.} \qquad (111)$$

觀式中用×符號字母之次序,可見其與(108)相類.其減數之分母,則以 $[bb\cdot1]$ 代 $[aa]$.若至第三簡化級,則以 $[cc\cdot2]$ 爲分母,而

$$\left.\begin{aligned}[ef\cdot2]-\frac{[ce\cdot2]}{[cc\cdot2]}[cf\cdot2]&=[ef\cdot3]\\ [fm\cdot2]-\frac{[cf\cdot2]}{[cc\cdot2]}[cm\cdot2]&=[fm\cdot3]\end{aligned}\right\},\text{如此例推.} \qquad (112)$$

至第四簡化級,則以 $[dd\cdot 3]$ 爲分母,而

$$[fm\cdot 3]-\frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}[dm\cdot 3]=[fm\cdot 4],\text{ 如此例推.}\qquad (113)$$

至第五簡化級,則以 $[ee\cdot 4]$ 爲分母,而

$$[fm\cdot 4]-\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}[em\cdot 4]=[fm\cdot 5]$$

第五級以上如此例推.若以此等符號用之於 (C_2),則

$$z=-\frac{[cm\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\qquad (114)$$

若欲得 y 之値而先消去 z, 次 x, 則可調移標準方程式各未知數之位置如下:

$$[cc]\,z+[ac]\,x+[bc]\,y+[cm]=0$$

$$[ac]\,z+[aa]\,x+[ab]\,y+[am]=0$$

$$[bc]\,z+[ab]\,x+[bb]\,y+[bm]=0$$

同理欲得 x, 先消去 y, 次 z, 則調動之如下:

$$[bb]\,y+[bc]\,z+[ab]\,x+[bm]=0$$

$$[bc]\,y+[cc]\,z+[ac]\,x+[cm]=0$$

$$[ab]\,y+[ac]\,z+[aa]\,x+[am]=0$$

簡化之次序同上.

2. 計算觀察準確率所必需之$[\lambda\lambda]$,亦可由化簡標準方程式而得之.蓋按第九章,若有三未知數.

$$[\lambda\lambda]=[aa]x^2+2[ab]xy+2[ac]xz+2[am]x+[bb]y^2+2[bc]yz$$
$$+2[bm]y+[cc]z^2+2[cm]z+[mm]$$

未知數非三而任爲幾何者,其式亦可例推.今由此式中逐次消去 x, y, z. 其法以標準方程式之第一式自乘,除之以 $[aa]$. 用以減上 $[\lambda\lambda]$ 之式而用 *Gauss* 簡略符號書之,則得

$$[\lambda\lambda]=[bb\cdot1]\,y^2+2[bc\cdot1]\,yz+2[bm\cdot1]\,y+[cc\cdot1]z^2$$
$$+2[cm\cdot1]\,z+[mm\cdot1]$$

又由此式中減去'第一簡化級第一式之自乘而除以 $[bb\cdot1]$ 者之左端',則得:

$$[\lambda\lambda]=[cc\cdot2]\,z^2+2[cm\cdot2]\,z+[mm\cdot2]$$

又由此式中減去'第二簡化級方程式自乘而除以 $[cc\cdot2]$ 者之左端',則得:

$$[\lambda\lambda]=[mm\cdot3] \qquad (115a)$$

若未知數之數非三而爲任幾何 k, 則

$$[\lambda\lambda]=[mm\cdot k] \qquad (115)$$

例如未知數之數爲一,則

$$[\lambda\lambda]=[aa]\,x^2+2[am]\,x+[mm]$$

以 $$x=-\frac{[am]}{[aa]} \text{ 及 } x^2=\frac{[am]^2}{[aa]^2},$$

即得:

$$[\lambda\lambda]=\frac{[am]^2}{[aa]}-2\frac{[am]^2}{[aa]}+[mm]=[mm]-\frac{[am]}{[aa]}[am]=[mm\cdot1]$$

試審:

由 $[mm]$ 可以得 $[mm\cdot1]=[mm]-\frac{[am]}{[aa]}[am]$

由 $[mm\cdot1]$ 可以得 $[mm\cdot2]=[mm\cdot1]-\frac{[bm\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bm\cdot1]$

由 $[mm\cdot2]$ 可以得 $[mm\cdot3]=[mm\cdot2]-\frac{[cm\cdot2]}{[cc\cdot2]}[cm\cdot2]$

則可知殘差 λ 之正方和亦可於最末未知數卽首求之未知數求得而後,乘機得之.其所費之手續不過於 $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$, $[am]$ 而外又加入 $[mm]$ 而已.而其化簡方程式,亦與前同.

λ 之值有定,故 $[\lambda\lambda]$ 之值亦不得互有異同.若求他未知數用調移標準方程式之法而每次各用上法定 $[\lambda\lambda]$ 之值,則其得數必相同始可.

3. 又第十章 (99) 權方程式以 $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $\cdots$ $[\beta\beta]$, $\cdots$ $[\gamma\gamma]$ 等爲未知數而其各係數則與標準方程式完全無異.惟恆數一項,求 $[\alpha\alpha]$ 則在第一式爲 -1,而他式皆爲 0; 求 $[\beta\beta]$ 則在第二式爲 -1,而在他式皆爲 0; 求 $[\gamma\gamma]$ 則在第三式爲 -1 而在他式皆爲 0. 今舉三未知數爲例求 z 之權, $P_z=\frac{1}{[\gamma\gamma]}$, 則按 (99) 以 $[\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$, $[\gamma\gamma]$ 作 x, y, z 同例觀之,而用 (114) 公式,得:

$$[\gamma\gamma]=-\frac{[cm\cdot2]}{[cc\cdot2]}$$

因 $$[cm\cdot2]=[cm\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bm\cdot1]$$

$$[cm\cdot1]=[cm]\ -\frac{[ac]}{[aa]}[am]=-1\,(\text{因}\,[cm]=-1,[am]=0)$$

$$[bm\cdot1]=[bm]\ -\frac{[ab]}{[aa]}[am]=0\quad(\text{因}\,[bm]=0,\quad[am]=0)$$

故 $[cm\cdot2]=1$ 而 $[\gamma\gamma]=\frac{1}{[cc\cdot2]}$, 卽得 z 之權爲:

$$P_z=[cc\cdot2] \tag{116}$$

z及y之權亦可於調移標準方程式以求x,y之值時同例得之:

$$P_x=[aa\cdot 2],\quad P_y=[bb\cdot 2] \tag{116a}$$

若未知數之數爲k,則最末未知數卽首求之未知數z_k,其權爲
$Pz_k=[gg.\,(k-1)]$.

例如有二未知數則y之權爲$P_y=[bb\cdot 1]$. 如此例推.

4. 校誤. 凡算數過繁者,一有錯誤,從新佈算,則失時費神甚多,故校誤之法,實爲需要,使錯誤得隨時覺察. 玆述其法如下:

甲. 設如解標準方程式而得x, y, z三未知數之值,代入

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+m_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+m_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{D}$$

等式,其右端不得0而各得一差λ,則

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+m_1=\lambda_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+m_2=\lambda_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{E}$$

以a_1乘(D)之第一式, a_2乘其第二式, a_3乘其第三式,…,而相加,則得:

$$[aa]x+[ab]y+[ac]z+[am]=[a\lambda]=0 \tag{117}$$

以b_1乘第一式, b_2乘第二式, b_3乘第三式,…,而相加,則得:

$$\left.\begin{array}{r} [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bm]=[b\lambda]=0 \\ \text{同理得}\qquad [c\lambda]=0 \end{array}\right\} \tag{117a}$$

公式(117)與前公式(11) $[\lambda]=0$實相符合. 凡平校得之舛差,必須合此定理,而未知數之數固不限於三也.

乙. 以(D)式各項係數及恆數相加為s,即

$$\left.\begin{aligned} s_1&=a_1+b_1+c_1+\cdots+m_1 \\ s_2&=a_2+b_2+c_2+\cdots+m_2 \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以a_1乘(118)之第一式,a_2乘其第二式,以次類推而相加,則得

$$[as]=[aa]+[ab]+[ac]+\cdots+[am]. \tag{119}$$

又依例以

$$\begin{matrix} b_1, & b_2, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_1, & m_2, & \cdots \\ s_1, & s_2, & \cdots \end{matrix}$$

遞乘之,則得

$$\left.\begin{aligned} [bs]&=[ab]+[bb]+[bc]+\cdots+[bm] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [ms]&=[am]+[bm]+[cm]+\cdots+[mm] \\ [ss]&=[as]+[bs]+[cs]+\cdots+[sm] \end{aligned}\right\} \tag{119a}$$

(119), (119a)名曰校誤方程式,即可以為校誤之資計算者. 但於$[aa]$, $[ab]$, $[ac]\cdots[am]$, $[bb]$, $[bc]$,$\cdots[bm]$,$\cdots$等諸和數外,又加算$[as]$, $[bs]$, $\cdots[ms]$,則可應用上式以校計算之有訛與否.詳本章所附例題.

又各簡化級俱可得校誤方程式如下:

第一簡化級:
$$\left.\begin{array}{l}[bb\cdot 1]+[bc\cdot 1]+\cdots+[bm\cdot 1]=[bs\cdot 1]\\ [bc\cdot 1]+[cc\cdot 1]+\cdots+[cm\cdot 1]=[cs\cdot 1]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [bm\cdot 1]+[cm\cdot 1]+\cdots+[mm\cdot 1]=[ms\cdot 1]\\ [bs\cdot 1]+[cs\cdot 1]+\cdots+[ms\cdot 1]=[ss\cdot 1]\end{array}\right\}\quad(120)$$

第二簡化級:
$$\left.\begin{array}{l}[cc\cdot 2]+\cdots+[cm\cdot 2]=[cs\cdot 2]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [cm\cdot 2]+\cdots+[mm\cdot 2]=[ms\cdot 2]\\ [cs\cdot 2]+\cdots+[ms\cdot 2]=[ss\cdot 2]\end{array}\right\}\quad(121)$$

如此例推.

5. 化簡標準方程式之實行法. 已有觀察方程式,將其係數排列爲一表(視本章所附例題之表)而逐次計算$[aa]$, $[bb]$,⋯$[mm]$等諸正方和,再逐次計算$[ab]$, $[ac]$,⋯, $[bc]$,⋯諸積數和. 計算時若其準確之程以三位小數爲已足,則用尋常對數計算尺可也. 若欲更精,則用乘法表或對數表,或較大之計算尺,計算機器等.

假使各項係數及恆數 a, b,⋯ m 甚相懸殊,則計算頗爲煩勞. 倘能化各數使其位數大略相同,則便利多矣. 其法有二:其一,凡觀察方程式中某未知數之係數過大者,以十約之,或百約之,爲新未知數以代該未知數. 某項未知數之係數過小者,以十倍之,或百倍之,爲新未知數以代該未知數.如是則其係數升十倍,百倍,或降十倍,百倍得與他項係數大略相同:其二,變更所用量法單位.(如長以公尺計,或以公寸公分計,角以分或秒

計,或以分析量法計,重以公斤或公分計.但同一題中以量法劃一爲便.)

標準方程式之駢列狀,已論於前,玆舉四未知數爲例如下:

$$
\begin{aligned}
[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+[ad]z_4+[am]&=0\\
[ab]z_1+[bb]z_2+[bc]z_3+[bd]z_4+[bm]&=0\\
[ac]z_1+[bc]z_2+[cc]z_3+[cd]z_4+[cm]&=0\\
[ad]z_1+[bd]z_2+[cd]z_3+[dd]z_4+[dm]&=0
\end{aligned}
$$

此式中對角線左右係數皆相同,故計算時各書其一可矣,而 z_1, z_2, z_3, z_4 則可略去不書,其式如下:

$$
\text{標準方程式係數之簡書法}\left\{
\begin{array}{ccccc}
\underline{[aa]} & [ab] & [ac] & [ad] & [am]\\
 & \underline{[bb]} & [bc] & [bd] & [bm]\\
 & & \underline{[cc]} & [cd] & [cm]\\
 & & & \underline{[dd]} & [dm]
\end{array}
\right\}\qquad(122)
$$

如應用(119, 119a)以校誤,則連 $[as]$, $[bs]$,…等並書之.其簡式如下:

$$
\left.
\begin{array}{cccc|c}
 & & & & \text{校}\\
\underline{[aa]} & [ab] & [ac] & [am] & [as]\\
 & \underline{[bb]} & [bc] & [bm] & [bs]\\
 & & \underline{[cc]} & [cm] & [cs]\\
 & & & \underline{[mm]} & [ms]\\
\hline
 & & & & \underline{[ss]}
\end{array}
\text{(加法依箭頭所示)}\right\}\qquad(123)
$$

加入$[as]$, $[bs]$…等，其在簡化手術中，與求未知數以係數簡化之事在各簡化級完全無異.

第一簡化級之簡書法爲:

$$
\begin{array}{cccc|c}
 & & & & 校 \\
\underline{[bb\cdot1]} & [bc\cdot1] & \cdots & [bm\cdot1] & [bs\cdot1] \\
 & \underline{[cc\cdot1]} & \cdots & [cm\cdot1] & [cs\cdot1] \\
 & & & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
 & & & \underline{[mm\cdot1]} & [ms\cdot1] \\
\cline{4-5}
 & & & & [ss\cdot1]
\end{array}
\qquad (124)
$$

第二簡化級之簡書法爲:

$$
\begin{array}{ccc|c}
 & & & 校 \\
\underline{[cc\cdot2]} & \cdots & [cm\cdot2] & [cs\cdot2] \\
 & & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
 & & \underline{[mm\cdot2]} & [ms\cdot2] \\
\cline{3-4}
 & & & \underline{[ss\cdot2}
\end{array}
\qquad (125)
$$

由標準方程式之係數以得第一簡化級各係數，由第一簡化級以得第二簡化級各係數，如此例推. 若未知數只有三，則其餘各項俱消，而第二級簡化以後即得:

$$z=-\frac{[cm\cdot2]}{[cc\cdot2]}.$$

然簡化之事仍繼續之以得第三簡化級:

$$
\left.
\begin{array}{r}
[mm\cdot3]-[ms\cdot3]=0 \\
-[ms\cdot3]+[ss\cdot3]=0
\end{array}
\right\}
\qquad (126)
$$

此式中不復含有未知數,而按公式(115)(115a)由此可以得

$$[mm\cdot 3]=[ms\cdot 3]=[ss\cdot 3]=[\lambda\lambda] \qquad (127a)$$

且亦爲最末校誤之一助.

設未知數之數爲 k, 則第 k 級簡化以後得:

$$[mm\cdot k]=[ms\cdot k]=[ss\cdot k]=[\lambda\lambda] \qquad (127)$$

例題. 今由 O 點出四直線 OA, OB, OC, OD 欲得各線方向之差,交錯量各點與 O 點間之角,得:

$$\left.\begin{array}{llll}
1. & AOB=106^\circ\,52'43'' & 7. & BOD=178^\circ\,74'13'' \\
2. & BOC=\ \ 99^\circ\,78'12'' & 8. & BOA=293^\circ\,47'50'' \\
3. & COD=\ \ 78^\circ\,95'97'' & 9. & COA=193^\circ\,69'29'' \\
4. & DOA=114^\circ\,73'35'' & 10. & COB=300^\circ\,21'78'' \\
5. & AOC=206^\circ\,30'68'' & 11. & DOB=221^\circ\,25'90'' \\
6. & AOD=385^\circ\,26'90'' & 12. & DOC=321^\circ\,05'00''
\end{array}\right\} \qquad (F)$$

欲定四直線之方向有三方向角足矣.今所量之角數凡有十二,是過多者爲 12−3=9 也. 觀察方程式之數爲 12. 未知數之數爲 3.

今命三方向角應有之值爲:

$$AOB\ 角=X$$

$$BOC\ 角=Y$$

$$COD\ 角=Z$$

X, Y, Z 之值尙未得而知.茲先各以近值代之而加以校正數.

卽命:

$$\left.\begin{aligned} AOB=X=N_x+x&=106°\,52'\,43''+x \\ BOC=Y=N_y+y&=\ \ 99°\,78'\,12''+y \\ COD=Z=N_z+z&=\ \ 78°\,95'\,97''+z \end{aligned}\right\} \qquad (H)$$

以此值與各觀察數相較,而因觀察不能無舛差,故仿普通觀察方程式 $ax+by+cz+m=\lambda$ 而得:

$$\left.\begin{array}{llll} 1. & x \qquad\quad +0=\lambda_1 & 7. & +y+z-4''=\lambda_7 \\ 2. & \quad y \qquad +0=\lambda_2 & 8. & -x \qquad\quad +7''=\lambda_8 \\ 3. & \qquad\quad z+0=\lambda_3 & 9. & -x-y \quad +16''=\lambda_9 \\ 4. & -x-y-z+13''=\lambda_4 & 10. & -y \quad +10''=\lambda_{10} \\ 5. & +x+y \quad -13''=\lambda_5 & 11. & -y-z+1''=\lambda_{11} \\ 6. & +x+y+z-8''=\lambda_6 & 12. & -z+3''=\lambda_{12} \end{array}\right\} \qquad (H)$$

各未知數之係數非 1 卽 0,惟恆數項較爲繁複耳.今欲亦化之使爲與 1 相近之數,故變其單位爲十秒.如此則所求得未知數之值亦以十秒爲單位.今列表計算簡化及校誤需要之數如下:

號數	a	b	c	m	s	aa	ab	ac	am	as	bb	bc	bm	bs	cc	cm	cs	mm	ms	ss
						+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	−	+	+	−	+
1	+1	0	0	0	+1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
3	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
4	−1	−1	−1	+1·3	−1·7	1	1	1	1·3	1·7	1	1	1·3	1·7	1	1·3	1·7	1·69	2·21	2·89
5	+1	+1	0	−1·3	+0·7	1	1	0	1·3	0·7	1	0	1·3	0·7	0	0	0	1·69	0·91	0·49
6	+1	+1	+1	−0·8	+2·2	1	1	1	0·8	2·2	1	1	0·8	2·2	1	0·8	2·2	0·64	1·76	4·84
7	0	+1	+1	−0·4	+1·6	0	0	0	0	0	1	1	0·4	1·6	1	0·4	1·6	0·16	0·64	2·56
8	−1	0	0	+0·7	−0·3	1	0	0	0·7	0·3	0	0	0	0	0	0	0	0·49	0·21	0·09
9	−1	−1	0	+1·6	−0·4	1	1	0	1·6	0·4	1	0	1·6	0·4	0	0	0	2·56	0·64	0·16
10	0	−1	0	+1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
11	0	−1	−1	+0·1	−1·9	0	0	0	0	0	1	1	0·1	1·9	1	0·1	1·9	0·01	0·19	3·61
12	0	0	−1	+0·3	−0·7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0·3	0·7	0·09	0·21	0·49
[ ]=	0	0	0	+2·5	+2·5	6	4	2	5·7	6·3	8	4	6·5	9·5	6	2·9	9·1	8·33	6·77	18·15

由上表所得結果，得標準方程式爲

$$6x+4y+2z-5.7=0$$
$$4x+8y+4z-6.5=0$$
$$2x+4y+6z-2.9=0$$

簡化之計算以計算尺行之得數及校誤按 (123) 至 (125) 列表如下：

標準方程式係數及簡化：

					校
$+6$	$+4$	$+2$	-5.7	$+6.3$	$+6.3$
	$(-2\frac{2}{3})$	$(-1\frac{1}{3})$	$(+3.8)$	(-4.2)	
	$+8$	$+4$	-6.5	$+9.5$	$+9.5$
		$(-\frac{2}{3})$	$(+1.9)$	(-2.1)	
		$+6$	-2.9	$+9.1$	$+9.1$
			(-5.42)	$(+5.98)$	
			$+8.33$	-6.77	-6.77
				(-6.62)	
				$+18.13$	$+18.13$

第一簡化級及簡化：

				校
$+5\frac{1}{3}$	$+2\frac{2}{3}$	-2.7	$+5.3$	$+5.3$
	$(-1\frac{1}{3})$	$(+1.35)$	(-2.65)	
	$+5\frac{1}{3}$	-1.0	$+7.0$	$+7.0$
		(-1.37)	$(+2.68)$	
		$+2.91$	$-0.79)$	-0.79
			(-5.27)	
			$+11.51$	$+11.51$

第二簡化級及簡化:

			校
+4	+0.35	+4.35	+4.35
	(−0.02)	(−0.38)	
	+1.54	+1.89	+1.89
		(−4.74)	
		+6.24	+6.24

學者須練習計算手術,使不假思索,而自不至於亂茫.如以標準方程式中首排第二項之 +4 自乘,除以首排首項之 +6,得 $2\frac{2}{3}$,以減 +4 下之 +8 得第一簡化級首項之數 $+5\frac{1}{3}$. 又以標準方程式中首排 +4 與 +2 相乘除以首排首項之數 +6, 得 $1\frac{1}{3}$,以減 +2 下之 +4 得第一簡化級首排第二項數 $+2\frac{2}{3}$.如是例推.又以標準方程式中首排第三項數 +2 自乘而除以首項數+6,得$\frac{2}{3}$ 減 +2 下之 +6 得第一簡化級二排首項之數 $+5\frac{1}{3}$. 又以標準方程式內首排第三第四項數相乘而除以首項之數 +6, 得 −1.9,以減 −5.7 下之 −2.9 得第一簡化級第二排第二項數 −1.0. 如是例推.由第一簡化級得第二簡化級各數法俱同.

未知數之數止於三,故第二級簡化以後,卽可得

$$z=-\frac{[cm\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=-\frac{0.35}{4}=0.09\text{十秒}=0.9''$$

$$Z=78^{\circ}\,95'\,97''-0.9''=78^{\circ}\,95'\,96.1''$$

$$P_z=[cc\cdot 2]=4$$

第三簡化級及最末校誤[λλ]:

$$\begin{array}{cc} \underline{+1.52} & +1.51 \\ & \underline{+1.50} \end{array}$$

觀察一次之均中舛差爲

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{1.51}{9}}=\pm 0.41\text{十秒}=\pm 4.1''$$

Z角之均中舛差爲

$$\mu_z=\frac{\mu}{\sqrt{P_z}}=\pm\frac{4.1}{2}=\pm 2''$$

欲知 y 之值,則按本章1.下所述之法調動標準方程式係數之位置,按前法再算之如下:

標準方程式及簡化:

					校
$\underline{+6}$	$+2$	$+4$	-2.9	$+9.1$	$+9.1$
	$(-\frac{2}{3})$	$(-1\frac{1}{3})$	$(+0.97)$	(-3.0)	
	$\underline{+6}$	$+4$	$+5.7$	$+6.3$	$+6.3$
		$(-2\frac{2}{3})$	$(+1.93)$	(-6.07)	
		$+8$	-6.5	$+9.5$	$+9.5$
			(-1.40)	$(+4.40)$	
			$+8.33$	$+6.77$	$+6.77$
				(-13.8)	
				$+18.13$	$+18.13$

第一簡化級及簡化:

				校
$+5\frac{1}{3}$	$+2\frac{2}{3}$	-4.73	$+3.27$	$+3.3$
	$(-1\frac{1}{3})$	$(+2.37)$	(-1.64)	
	$+5\frac{1}{3}$	-4.57	$+3.43$	$+3.43$
		(-4.20)	$(+2.90)$	
		$+6.93$	-2.37	-2.37
			(-2.00)	
			$+4.33$	$+4.33$

第二簡化級及簡化:

			校
$+4$	-2.20	$+1.80$	$+1.79$
	(-1.21)	$(+0.99)$	
	$+2.73$	$+0.53$	$+0.53$
		(-0.81)	
		$+2.33$	$+2.33$

由此得

$$y=-\frac{[cm\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=-\frac{-2.20}{4}=+0.55\text{ 十秒 }=5.5''$$

即

$$Y=99^{\circ}\,78'\,12''+5.5''=99^{\circ}\,78'\,17.5''$$

$$P_y=[cc\cdot 2]=4$$

第二簡化級及最末校誤[λλ]:

$$\begin{array}{cc} +1.52 & +1.52 \\ & +1.52 \end{array}$$

與求 Z 簡化所得者同.

y 與 z 之權同爲 4, 蓋由於量角時各角被量及之次數相均,十二觀察中角各現四次,故其權俱相同也.由此推 x 之權亦爲 4, 而照上式調移算法之事可省,但以 z 及 y 代入標準方程式之任一式卽得 x. 如代入第一式,得

$$6x+4y+2z-5.7=6x+4\times0.55+2\times(-0.09)-5.7=0.$$

由此得 $$x=\frac{3.68}{6}=+0.61\text{ 十秒 }=+6.1'',$$

而

$$X=106°\,52'\,43''+6.1''=106°\,52'\,49.1'',$$

$$P_x=4$$

$$\mu_x=\pm 2''$$

故求 AOB, BOC 及 COD 三角之最或是值爲

$$\left.\begin{array}{l} X=106°\,52'\,49.1''\pm 2'' \\ Y=\ \ 99°\,78'\,17.5''\pm 2'' \\ Z=\ \ 78°\,95'\,96.1''\pm 2'' \end{array}\right\} P_x=P_y=P_z=4$$

茲又以 x, y, z 之最或是值代入十二觀察(H)中,則得各舛差 λ, 而此等舛差必合乎

$$[a\lambda]=0,\quad [b\lambda]=0,\quad [c\lambda]=0$$

又必合乎

$$[\lambda\lambda]=1.52.$$

茲列表算之如下:

號數	λ +	λ −	aλ +	aλ −	bλ +	bλ −	cλ +	cλ −	λλ
1	0.61		0.61		0		0		0.37
2	0.55		0		0.55		0		0.30
3		0.09	0		0			0.09	0.01
4	0.23			0.23		0.23		0.23	0.05
5		0.14		0.14		0.14	0		0.02
6	0.27		0.27		0.27		0.27		0.07
7	0.06		0		0.06		0.06		0
8	0.09			0.09	0			0	0.01
9	0.44			0.44		0.44		0	0.19
10	0.45		0			0.45		0	0.20
11		0.36	0		0.36		0.36		0.13
12	0.39		0		0			0.39	0.15
	[ ] =		0.88	0.90	1.24	1.26	0 69	0.71	1.50
			$\underbrace{\qquad}_{0.02}$		$\underbrace{\qquad}_{0.02}$		$\underbrace{\qquad}_{0.02}$		此數近於1.52

此數皆近於0

凡應符合之公式未能盡合者,由於計算時小數末位有所取舍也.

第十二章　論定約觀察之副係數解法

定約觀察之平差術，消去一部分未知數而以間接觀察之平差術馭之(見前第八章)，其法固簡，但若定約之式繁多而恆數項又複劇者，則算事之煩累將不勝.最小二乘式之鼻祖 *Gauss* 特擬一法，名曰副係數法 (*Methode der Korrelaten*)，可以簡約算事甚多.茲述之如下.

假設有函數內函 n 未知數 $x, y, z\cdots$

$$\Omega = F(x,\ y,\ z,\cdots) \qquad (A)$$

其中未知數 x, y, z 非獨立的，而爲數定約所範.其定約方程式爲:

$$\left.\begin{array}{l} \phi\ (x, y, z)\ =0 \\ \psi\ (x, y, z)\ =0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \text{其數凡有 } r \qquad (B)$$

而未知數之數 n 實大於定約方程式之數 r.

今欲使函數 Ω 之值爲極大或極小，則按微分算理，Ω 之全微分 (*total differential*) 應爲 0, 即

$$d\,\Omega = \frac{\partial F}{\partial_x} dx + \frac{\partial F}{\partial_y} dy + \frac{\partial F}{\partial_z} dz = 0 \qquad (128)$$

使無定約以範之，則必使各項 dx, dy, dz 之係數爲 0, 而 $d\Omega$ 乃可爲0.今各未知數除其本函數外尙須守數式之定約，故 (123) 之外，尙須有 r 定約方程式微分所得之式:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\phi}{\partial_x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial_y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial_z}dz=0\\ \frac{\partial\psi}{\partial_x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial_y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial_z}dz=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\qquad(129)$$

其數凡爲 r

用 (129) 式可以 $n-r$ 微分 (*Diff rentiale* dx, dy, dz 等) 代他微分，其數凡爲 r. 旣消去 r 微分之數，則他 $n-r$ 之微分乃皆獨立，而其係數乃可命之爲0.但此法亦可以未定係數法(*Methode der Unbestimmten Coeffi:ienten*) 代之. 其法以未定數 $k_1\,k_2\cdots k_r$ (卽副係數) 乘 (129) 各式而加之於 (128)，則得:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial F}{\partial_x}+k_1\frac{\partial\phi}{\partial_x}+k_2\frac{\partial\psi}{\partial_x}=0\\ \frac{\partial F}{\partial_y}+k_1\frac{\partial\phi}{\partial_y}+k_2\frac{\partial\psi}{\partial_y}=0\\ \frac{\partial F}{\partial_z}+k_1\frac{\partial\phi}{\partial_z}+k_2\frac{\partial\psi}{\partial_z}=0\end{array}\right\}\qquad(130)$$

此式之數凡得 n, 卽與未知數之數相同. 再加入(B)之 r 定約方程式，則凡得 $n+r$ 獨立方程式以求 r 副係數及 n 未知數之值，而此問題解矣.

以上所論，法理可簡約之如下:

設有函數 吊$=F(x, y, z)$, 求其最小值而須令各未知數合乎以下定約:

$$\phi\ (x,y,z)=0,\qquad \psi\ (x,y,z)=0$$

則以副係數 k_1, k_2 乘定約方程式而加之於函數式得:

$$呂' = F(x,y,z) + k_1\phi(x,y,z) + k_2\psi(x,y,z)$$

再求其最小值如通常所用之法.

(一)今以此術施之於定約觀察之平差. 設有未知數四,爲 z_1, z_2, z_3, z_4, 其權相等而其所須守之定約爲:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \alpha_4 z_4 &= 0 \\ \beta_0 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 + \beta_4 z_4 &= 0 \\ \gamma_0 + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \gamma_3 z_3 + \gamma_4 z_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (131)\text{或 } C$$

[注意] 此式與觀察方程式不同者,在係數 $\alpha, \beta, \cdots$ 易橫列之次序而爲縱列耳.

今以 $z_1, z_2 \cdots$ 之眞值不可得而以觀察所得之值代之, 則右端不能恰爲 0, 而有出入命觀察之值爲 M_1, M_2, M_3, M_4, 其出入爲 d_1, d_2, d_3, d_4, 則:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 &= d_1 \\ \beta_0 + \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \beta_3 M_3 + \beta_4 M_4 &= d_2 \\ \gamma_0 + \gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 + \gamma_3 M_3 + \gamma_4 M_4 &= d_3 \end{aligned}\right\} \qquad (132)\text{或 } D$$

今於每一觀察值各加一校正數,則其出入可消,故命:

$$z_1 = M_1 + \lambda_1, \quad z_2 = M_2 + \lambda_2, \quad z_3 = M_3 + \lambda_3, \quad z_4 = M_4 + \lambda_4$$

代入 (C) 卽得:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1(M_1+\lambda_1) + \alpha_2(M_2+\lambda_2) + \alpha_3(M_3+\lambda_3) + \alpha_4(M_4+\lambda_4) &= 0 \\ \beta_0 + \beta_1(M_1+\lambda_1) + \beta_2(M_2+\lambda_2) + \beta_3(M_3+\lambda_3) + \beta_4(M_4+\lambda_4) &= 0 \\ \gamma_0 + \gamma_1(M_1+\lambda_1) + \gamma_2(M_2+\lambda_2) + \gamma_3(M_3+\lambda_3) + \gamma_4(M_4+\lambda_4) &= 0 \end{aligned}\right\} (131a)\text{或 } E$$

以與 (D) 相減即得:

$$\text{其數普通爲 } r\left\{\underbrace{\begin{aligned} a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3+a_4\lambda_4+d_1=0 \\ \beta_1\lambda_1+\beta_2\lambda_2+\beta_3\lambda_3+\beta_4\lambda_4+d_2=0 \\ \gamma_1\lambda_1+\gamma_2\lambda_2+\gamma_3\lambda_3+\gamma_4\lambda_4+d_3=0 \end{aligned}}_{\text{其數普通爲 } n}\right\} \quad (133) \text{或} F$$

或

$$\left.\begin{aligned} [a\lambda] &= -d_1 \\ [\beta\lambda] &= -d_2 \\ [\gamma\lambda] &= -d_3 \end{aligned}\right\} \quad (133a)$$

此式亦可名之曰定約方程式. 蓋此等爲 λ 所必守之定約也. 此式之外欲求 λ 之最或是值, 尙須

$$[\lambda\lambda] = min.$$

今欲得 (F) 式之最小値而同時兼顧 131) 之定約, 故可按上述之未定係數法以 $-2k_1$, $-2k_2$, $-2k_3$ 分乘 (131) 中各式(所以用 -2 倍者, 因 -2 以後又可以消去也), 則得:

$$\left.\begin{aligned} -2a_1k_1\lambda_1-2a_2k_1\lambda_2-2a_3k_1\lambda_3-2a_4k_1\lambda_4-2d_1k_1=0 \\ -2\beta_1k_2\lambda_1-2\beta_2k_2\lambda_2-2\beta_3k_2\lambda_3-2\beta_4k_2\lambda_4-2d_2k_2=0 \\ -2\gamma_1k_3\lambda_1-2\gamma_2k_3\lambda_2-2\gamma_3k_3\lambda_3-2\gamma_4k_3\lambda_4-2d_3k_3=0 \end{aligned}\right\} \quad (134)$$

以此式加入 (F) 而按 λ 次序排列之, 則得:

$$\left.\begin{aligned} \text{呂}' = \ & \lambda_1^2-2\lambda_1(a_1k_1+\beta_1k_2+\gamma_1k_3) \\ & +\lambda_2^2-2\lambda_2(a_2k_1+\beta_2k_2+\gamma_2k_3) \\ & +\lambda_3^2-2\lambda_3(a_3k_1+\beta_3k_2+\gamma_3k_3) \\ & +\lambda_4^2-2\lambda_4(a_4k_1+\beta_4k_2+\gamma_4k_3) \\ & -2\ (d_1k_1+d_2k_2+d_3k_3) \end{aligned}\right\} \quad (135)$$

令 $\Omega' = min$ 則按 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 以次微分之,命爲 0, 卽

$$0 = 2\lambda_1 - 2(\alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + \gamma_1 k_3)$$

或 $\lambda_1 = \alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + \gamma_1 k_3$

同法得

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + \gamma_1 k_3 \\ \lambda_2 &= \alpha_2 k_1 + \beta_2 k_2 + \gamma_2 k_3 \\ \lambda_3 &= \alpha_3 k_1 + \beta_3 k_2 + \gamma_3 k_3 \\ \lambda_4 &= \alpha_4 k_1 + \beta_4 k_2 + \gamma_4 k_3 \end{aligned}\right\} \qquad (136)$$

以此式 λ 之值代入 (131a) 而按 k_1, k_2, k_3 次序排列之,得:

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\alpha]\, k_1 + [\alpha\beta]\, k_2 + [\alpha\gamma]\, k_3 + d_1 &= 0 \\ [\alpha\beta]\, k_1 + [\beta\beta]\, k_2 + [\beta\gamma]\, k_3 + d_2 &= 0 \\ [\alpha\gamma]\, k_1 + [\beta\gamma]\, k_2 + [\gamma\gamma]\, k_3 + d_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (137)$$

此式與前 (91) 相類,故亦可名曰標準方程式.其數與定約方程式之數相等,由此可求得各副係數 k_1, k_2, k_3 之值.由 k_1, k_2, k_3 按 (43) 以求 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 於是 $z_1 = M_1 + \lambda_1$, $z_2 = M_2 + \lambda_2$, $z_3 = M_3 + \lambda_3$, $z_4 = M_4 + \lambda_4$ 亦可定矣.又一切校正數 λ 已知,則每一觀察之均中舛差爲

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{r}}. \qquad (138)$$

式中 r 爲定約方程式之數.

(二)設觀察之權不等而爲 P_1, P_2, P_3, P_4, 則按前 (48a)

$$[P\lambda\lambda] = min$$

一切算法按上法行之,則可見凡在等權觀察其係數爲 $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ 者,在不等權觀察皆須以 $\frac{\alpha}{P}, \frac{\beta}{P}, \frac{\gamma}{P}$ 代之.故其所得標準方程式爲

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\alpha\alpha}{P}\right]k_1+\left[\frac{\alpha\beta}{P}\right]k_2+\left[\frac{\alpha\gamma}{P}\right]k_3+d_1&=0\\\left[\frac{\alpha\beta}{P}\right]k_1+\left[\frac{\beta\beta}{P}\right]k_2+\left[\frac{\beta\gamma}{P}\right]k_3+d_2&=0\\\left[\frac{\alpha\gamma}{P}\right]k_1+\left[\frac{\beta\gamma}{P}\right]k_2+\left[\frac{\gamma\gamma}{P}\right]k_3+d_3&=0\end{aligned}\right\}\qquad(139)$$

校正式爲

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{\alpha_1}{P_1}k_1+\frac{\beta_1}{P_1}k_2+\frac{\gamma_1}{P_1}k_3\\\lambda_2&=\frac{\alpha_2}{P_2}k_1+\frac{\beta_2}{P_2}k_2+\frac{\gamma_2}{P_2}k_3\\\lambda_3&=\frac{\alpha_3}{P_3}k_1+\frac{\beta_3}{P_3}k_2+\frac{\gamma_3}{P_3}k_3\\\lambda_4&=\frac{\alpha_4}{P_4}k_1+\frac{\beta_4}{P_4}k_2+\frac{\gamma_4}{P_4}k_3\end{aligned}\right\}\qquad(140)$$

例題 設測量五地點 A, B, C, D, E 之高所得結果,列如下表:

號數	由	至	高之懸差 Δh	平測段之長	平測復習次數
1	D	E	+10.194 公尺	3.5 公里	1
2	E	B	+10.659	2.6	1
3	D	B	+20.871	1.7	1
4	D	C	+40.791	1.0	1
5	B	C	+19.930	2.3	1
6	A	E	+38.460	4.2	2
7	A	D	+28.218	1.9	2
8	A	C	+69.076	2.8	2

A 點之高已經定準爲 201.754 公尺,求他各點之高.

解. 各點聯成三角形者四.即 EDB, CDA, ADE, BDC, 命各點高之懸差已經平準之值(即其最或是值)爲:

$$D-E=X_1,\quad E-B=X_2,\quad D-B=X_3,\quad D-C=X_4$$

$$B-C=X_5,\quad A-E=X_6,\quad A-D=X_7,\quad A-C=X_8$$

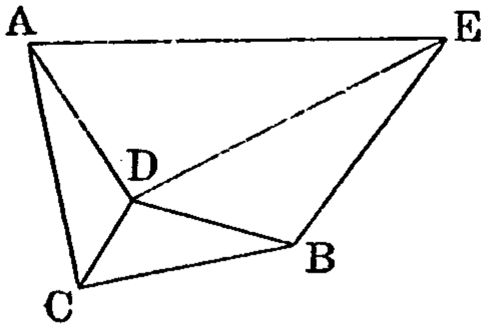
則有以下之各定約:

$$\phi_1(X\cdots)=X_1+X_2-X_3=0$$

$$\phi_2(X\cdots)=X_4-X_3+X_7=0$$

$$\phi_3(X\cdots)=X_1-X_6+X_7=0$$

$$\phi_4(X\cdots)=X_3-X_4+X_5=0$$



按之前(131)式:

$\alpha_1=+1,$	$\beta_1=0$	$\gamma_1=1$	$\delta_1=0$
$\alpha_2=+1$	$\beta_2=0$	$\gamma_2=0$	$\delta_2=0$
$\alpha_3=-1$	$\beta_3=0$	$\gamma_3=0$	$\delta_3=+1$
$\alpha_4=0$	$\beta_4=1$	$\gamma_4=0$	$\delta_4=-1$
$\alpha_5=0$	$\beta_5=0$	$\gamma_5=0$	$\delta_5=+1$
$\alpha_6=0$	$\beta_6=0$	$\gamma_6=-1$	$\delta_6=0$
$\alpha_7=0$	$\beta_7=1$	$\gamma_7=+1$	$\delta_7=0$
$\alpha_8=0$	$\beta_8=-1$	$\gamma_8=0$	$\delta_8=0$

以觀察所得之值代各 X, 則:

$\phi_1=10.194+10.659-20.871=d_1=-18$ 公釐 $=1.3$ 公分

$\phi_2=40.791-69.076+28.248=d_2=-37$ 公釐 $=-3.7$ 公分

$\phi_3=10.194-38.460+28.248=d_3=-18$ 公釐 $=-1.8$ 公分

$\phi_4=20.871-40.791+19.930=d_4=+10$ 公釐 $=1.0$ 公分

凡平測高低之均中舛差與其距離之方根爲正比(其證法不贅於此)故觀察之權與距離爲反比,卽

$$P_1=\frac{1}{3.5},\qquad P_2=\frac{1}{2.6},\qquad P_3=\frac{1}{1.7},\qquad P_4=\frac{1}{1.0}$$

$$P_5=\frac{1}{2.3},\qquad P_6=\frac{2}{4.2}=\frac{1}{2.1},\quad P_7=\frac{2}{1.9}\qquad P_8=\frac{2}{2.8}=\frac{1}{1.4}$$

茲更列表佈其算法以求副係數之係數如下:

號數	α	β	γ	δ	P	$\frac{\alpha\alpha}{P}$	$\frac{\alpha\beta}{P}$	$\frac{\alpha\gamma}{P}$	$\frac{\alpha\delta}{P}$	$\frac{\beta\beta}{P}$	$\frac{\beta\gamma}{P}$	$\frac{\beta\delta}{P}$	$\frac{\gamma\gamma}{P}$	$\frac{\gamma\delta}{P}$	$\frac{\delta\delta}{P}$
1	+1	0	1	0	$\frac{1}{3.5}$	+3.5	0	+3.5	0	0	0	0	3.5	0	0
2	+1	0	0	0	$\frac{1}{2.6}$	+2.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	−1	0	0	+1	$\frac{1}{1.7}$	+1.7	0	0	−1.7	0	0	0	0	0	1.7
4	0	+1	0	−1	$\frac{1}{1.0}$	0	0	0	0	+1.0	0	−1.0	0	0	−1.0
5	0	0	0	+1	$\frac{1}{2.3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.3
6	0	0	−1	0	$\frac{1}{2.1}$	0	0	0	0	0	0	0	2.1	0	0
7	0	+1	+1	0	$\frac{2}{1.9}$	0	0	0	0	+0.95	0.95	0	0.95	0	0
8	0	−1	0	0	$\frac{1}{1.4}$	0	0	0	0	+1.4	0	0	0	0	0
					[ ] =	+7.8	0	+3.5	−1.7	3.35	0.95	−1.0	6.55	0	3.0

由此得標準方程式如下:

$$
\begin{aligned}
7.8\,k_1 \qquad\qquad &+3.5\,k_3-1.7\,k_4-1.8=0\\
+3.35\,k_2&+0.95\,k_3-1.0\,k_4-3.7=0\\
3.5\,k_1+0.95\,k_2&+6.55\,k_3\qquad\quad -1.8=0\\
-1.7\,k_1-1.0\,k_2 &\qquad\qquad +3.0\,k_4+1.0=0
\end{aligned}
$$

解此式得:

$$k_1=0.139,\quad k_2=1.107\quad k_3=0.183\quad k_4=0.027$$

由 (146) 得:

$$\lambda_1=\frac{1}{\frac{1}{3.5}}0.139+0+\frac{1}{\frac{1}{3.5}}0.183+0$$

公分　公尺

$$=3.5(0.139+0.183)= \qquad 1.127=\quad 0.013$$

$$\lambda_2=\frac{1}{\frac{1}{2.6}}0.139+0+0+0=2.6\times0.139= \qquad 0.361=-0.004$$

$$\lambda_3=\frac{-1}{\frac{1}{1.7}}0.139+0+0+\frac{1}{\frac{1}{1.7}}0.027= \qquad -0.190=-0.002$$

$$\lambda_4=0+\frac{1}{\frac{1}{1.0}}1.107+0+\frac{-1}{\frac{1}{1.0}}0.027= \qquad 1.080=\quad 0.011$$

$$\lambda_5=0+0+0+\frac{1}{\frac{1}{2.3}}0.027= \qquad 0.062=\quad 0.006$$

$$\lambda_6=0+0+\frac{-1}{\frac{1}{2.1}}0.183+0= \qquad -0.384=-0.004$$

$$\lambda_7 = 0 + \frac{\frac{1}{2}}{1.9} 1.107 + \frac{\frac{1}{2}}{1.9} 0.183 + 0 = \qquad 1.225 = \quad 0.012$$

$$\lambda_8 = 0 + \frac{\frac{-1}{1}}{1.4} 1.107 + 0 + 0 = \qquad -1.550 = -0.015$$

於是得:

$$X_1 = 10.194 + 0.013 \quad = 10.207 \text{ 公尺}$$

$$X_2 = 10.659 + 0.004 \quad = 10.663$$

$$X_3 = 20.871 - 0.002 \quad = 20.869$$

$$X_4 = 40.791 + 0.011 \quad = 40.802$$

$$X_5 = 19.930 + 0.0006 = 19.9306$$

$$X_6 = 38.460 - 0.004 \quad = 38.456$$

$$X_7 = 28.248 + 0.012 \quad = 28.260$$

$$X_8 = 69.076 - 0.015 \quad = 69.061$$

A 點既定爲 201.754 公尺高, 故

$$E = 201.75 \quad - 38.456 \quad = 163.294 \text{ 公尺}$$

$$D = 463.294 + 10.207 \quad = 173.501$$

$$C = 113.501 - 40.802 \quad = 132.699$$

$$B = 132.699 + 19.9306 = 152.6296$$

$$A = \qquad\qquad = 201.754$$

連江陳文著

初級中學適用

實用主義 中學新代數

第一册定價五角

第二册定價七角

是書以德國白氏涅氏合著之葛萊主義數學中之代數學爲藍本。參以英美學說。編纂而成。全書注重函數及圖解。所有代數式。均用圖表顯明。或用圖式解之。旁通代數與幾何之路徑。上奠解析幾何學之基礎。至代數的解。如挈比例、半負對數之計算、高次之算術級數、年金之計算及應用等。尤爲有用之新法。可以直接施諸實用者。全書分二册。第一册至多元一次方程止。適合初級中學二年級之用。第二册至二次方程止。適合初級中學三年級之用。答案分訂附册。尤爲便利。

商務印書館發行

元(1357)

National Institute Library Peking
國立編譯館
圖書

現代初中教科書

三角術

劉正經編輯　一冊四角

本書先講三角術的目的。使學者明白他的功用。才能引起學習的興味。直角三角形解法和普通三角形解法。在三角術裏最有實用上的價值。故舉例特多。對數表的用法。亦詳細說明。

商務印書館發行

元叉(1386)

Mathematical Library

On Least Squares

The Commercial Press, Limited

All rights reserved

中華民國十三年六月初版

(算學叢書第一種)最小二乘式一冊

(每冊定價大洋玖角)

(外埠酌加運費匯費)

著者　李協

發行者　商務印書館

印刷所　商務印書館　上海北河南路北首寶山路

總發行所　商務印書館　上海棋盤街中市

分售處　商務印書館　北京　天津　保定　奉天　吉林　龍江　濟南　太原　開封　鄭州　西安　南京　杭州　蘭谿　安慶　蕪湖　南昌　漢口　長沙　常德　衡州　成都　重慶　瀘縣　福州　廣州　潮州　香港　梧州　雲南　貴陽　張家口　新嘉坡

此書有著作權翻印必究

五八一七自