

大學叢書

高級統計學

艾 偉 著

商務印書館發行

大學叢書

高級統計學

艾偉著

商務印書館發行

中華民國二十二年十月初版
中華民國二十四年五月再版

(30222)精

大學叢書
(教本)高級統計學一冊

每冊定價大洋

外埠酌加運費匯費

著者 艾 偉

發行人 王 雲 五
上海河南路

印刷所 商務印書館
上海河南路

發行所 商務印書館
上海及各埠

版權所有
印刷必究

中C二五二四

(本書校對者馮寶武)

序

統計學在現在可算都知道他的重要了。關於統計學的教本，在坊間所出版雖已汗牛充棟，然他們大半爲譯本，或由幾本外國書編譯而成，欲求一富有研究材料的書，實如鳳毛麟角，不可多得；其結果也，有許多問題在教科書上，殊無澈底之解決；而大學生於修完此課之後，轉往中學擔任教授之時，遂亦窮於應付。作者有鑒於是，在最近七年之中，於授課之餘，嘗自設題研究以求解決，或於授課之時，常常更換方法以資比較。最好者莫如學生之問難，因爲有所問始有所答，所答而不能解其惑，則思之，重思之，以求新的解釋，簡單的解釋，或清楚的解釋。去年授課之時，有解釋未盡者，則於今年用新法解釋之；今年授課之時，又生新的問題，而不能解釋圓滿者，則留待明年解釋。總之，作者在教室中解釋問題，雖偶有不能詳盡者，而對於學生之發問，則仍極端歡迎。其實在本書中間有一二新穎材料，或新穎解釋，在他書中所未曾見者，皆七年來十次統計班同學發問之所賜也。不過，七年來十次授課，經驗極短，故問題之未能解釋詳盡者，仍所在皆是，希望再五年或十年後，再有新的經驗和實驗，再行供獻於世。

最近七年中，作者在國立中央大學，擔任中華教育文化基金董事會所設之教育心理講座，因此得有研究問題並應用統計之機會。本書

中所有之證例材料，大半取之於七年來之實驗結果中。這結果在現在已彙集得非常之多，本統計學因限於篇幅，未能盡量容納，惟有再俟數年，材料加多，另編試驗教育專書耳。

本書命名曰教育學院統計學或高級統計學，所以分別高級師範統計學或初級統計學也。近年以來吾國所出版之專書，實屬寥若晨星，不可多觀，因此，大學所用之教本，不但高中用之，即初中亦用之。結果：在授者方面，既含混其辭；而在學者方面，又囫圇吞棗。這當然不是一種辦法，我們亦應當急起圖救。補救之方在同時編兩級書，俾各自劃分，不相互用。所以作者的這本書是為教育學院學生或大學學生作統計教本用的，或為中學教員作參考書用的。至於高級師範統計學現在編輯中，希望後此一年出版以應需要。

這本書的材料雖不豐富，然每星期授課三次，在一學期內決授不完；即每星期授課四次，在一學期內亦授不完。在教育學院裏最好或至少將統計學定為一年的學程，而在這一年內每星期授課三小時。如此辦法，則除授完本書內容外，可令學生作有系統的長期練習，或總溫習。此辦法若做不到，則本書除刪去一部分次要的材料外，須於一學期內，每星期四小時，授完之。這樣辦法似為最低限度。統計學在教育學院裏既被承認為重要的學科，然則在一學期內每星期多花一小時豈不算是正當的嗎？

這本書雖名為高級統計學，而其實分量加多。關於各公式的數學理論並未在此介紹，因為那是數理統計學所有的事。在這本書內間或應用微積分學以引申公式；這是因為重要的公式有引申之必要，且此

種引申又係直接的，即經一步微積分學之解釋，即能達到公式者。至於間接的引申，或用幾次高等數學原理，轉換幾個公式，始能引申到我們所用的公式者，則一概免去。其實，學者若於微積分學未曾習過，即此直接的引申亦可不必注意，因不注意於此，於應用上並不發生困難也。

這本統計學在從前是一部講義，數年來經過幾次更改者。作者於統計學既非專長，而所有經驗亦屬不豐，因此本書中挂漏遺誤之處諒亦難免。尚希引用此書者於閱讀之餘，指示一切，俾至再版時得以更正。

末了還有一句要聲明的是：此書之抄寫與校正，書內圖表之製定，以及各種計算上之核對在在俱費心思。此種精細之工作，在最近一年內，承費景瑚女士及嚴謙六，湯翼雲，鄭渭川，曹切千四先生盡力襄助，是作者所應當感謝的，而在這個當兒尤不能使作者忘記的是七年來十次統計班上常好發問以求清楚的解釋的同學。

艾 偉

民國二十一年二月

南京國立中央大學

高級統計學

目次

第一章 緒論

- 1 統計的意義.....1
- 2 統計學在科學上的地位.....2
- 3 統計學對於教育的貢獻.....3
- 4 統計的範圍.....3

第二章 次數的統計

- 5 材料的整理.....10
- 6 次數的統計方法.....10
- 7 組距寫法的討論.....14

第三章 統計的圖示法

- 8 圖示的重要.....23
- 9 直方圖與多邊圖.....23
- 10 中點的擇定.....26
- 11 直方，多邊兩圖的比較.....27
- 12 多邊圖的修勻法.....28

13 其他重要的圖示·····	35
第四章 均數	
14 均數的普通公式·····	38
15 次數表上均數的統計法·····	39
16 均數的簡捷統計法·····	40
第五章 中數	
17 中數與中成績·····	47
18 中數的計算法·····	49
19 幾個特殊例子·····	53
第六章 衆數	
20 衆數與組距的關係·····	59
21 衆數與均數，中數之關係·····	67
第七章 幾何均數	
22 幾何級數與幾何均數·····	73
23 學習問題上幾何均數的用處·····	74
24 人口與物價的增加上幾何均數的用處·····	77
第八章 調和均數	
25 調和均數的意義·····	81
26 調和均數的公式·····	82
27 調和均數與算術均數之關係·····	84
28 次數表上調和均數的計算法·····	86
第九章 差數	

29	差數的重要	88
30	兩極差	89
31	二十五分位或四分位數	91
第十章 均差		
32	簡單差數的平均	97
33	均差的普通公式	97
34	複雜差數的平均	98
35	環中數求均差的實驗研究	111
第十一章 均方差		
36	均方差的便利	129
37	均方差的計算法	129
38	差數在曲線上之位置	137
39	相關的差異	139
40	偏態之量法	141
第十二章 百分等級		
41	分數制度與其範圍	144
42	等級的簡單計算法	144
43	百分等級計算法	145
44	百分等級的公式	147
45	百分等級的圖的表示	148
46	百分曲線的另一繪法	150
第十三章 二項分配		

47	錯列	155
48	組合	157
49	簡單機率	159
50	二項展開式	162
51	機率實驗	165
第十四章 常態曲線		
52	曲綫與公式	170
53	常態曲線公式的引申	171
54	次數多邊圖使成常態曲線	176
55	理論與實際	180
第十五章 常態分配圖的面積		
56	面積的計算方法	189
57	等級與地位	192
58	常態圖面在測驗上的應用	198
第十六章 取樣的可靠性		
59	樣子與全體之關係	203
60	機誤及其限度	204
61	機誤的公式	205
62	一個機誤的實驗	209
63	兩數相差的機誤	215
64	其他的機誤公式	216
第十七章 二數相關		

65	緒論	218
66	相關係數	218
67	正相關與負相關	221
68	簡單的相關係數計算法	225
69	次數表上相關係數之求法	229
70	相關係數的意義	239
第十八章 迴歸線		
71	緒論	244
72	迴歸線的求法	245
73	迴歸的意義	247
74	迴歸線與材料的數量	247
75	迴歸方程	252
76	迴歸方程上的差誤與機誤	260
第十九章 等級相關		
77	等級相關的公式	262
78	等級相關的計算法	263
79	等級相關的機誤	267
80	幾個特殊例子	268
第二十章 非直線相關		
81	非直線相關的重要	272
82	非直線相關的公式	273
83	相關比的限度	277

84	相關比的計算法	278
85	直線性的試驗	280
86	相關比與組距之關係	282
第二十一章 品質相關		
87	緒論	285
88	四格表	287
89	<u>皮爾生氏</u> 的餘弦 π 法	289
90	<u>西巴</u> (Sheppard)氏的異號法	290
91	接觸係數	292
92	質量相關	297
第二十二章 多數相關		
93	部分相關	304
94	多數相關	310
95	部分的迴歸方程	313

表 次

表一	國立第四中山大學入學試驗錄取本預科新生 之國文成績表.....	12
表二	統計材料之初步整理.....	13
表三	組距之各種寫法.....	14
表四	第八種組距之詳細寫法.....	19
表五	中點與次數.....	26
表六	同上.....	27
表七	次數表(以 20 爲組距).....	30
表八	次數表(以 5 爲組距).....	32
表九	均數與均方差之機誤.....	39
表十	均數計算的第一法.....	40
表十一	均數計算的第二法(a).....	41
表十二	均數計算的第二法(b).....	42
表十三	均數計算的第三法.....	43
表十四	中數計算的第一法.....	49
表十五	中數計算的第二法(a).....	51
表十六	中數計算的第二法(b).....	52
表十七	中數的特殊計算法(a).....	53
表十八	中數的特殊計算法(b).....	54

表十九	中數的特殊計算法(c).....	55
表二十	中數的特殊計算法(d).....	56
表二十一	中數的特殊計算法(e).....	56
表二十二	次數表(以二為組距).....	60
表二十三	次數表(以三為組距).....	60
表二十四	次數表(以四為組距).....	60
表二十五	次數表(以六為組距).....	61
表二十六	次數表(以七為組距).....	61
表二十七	次數表(以八為組距).....	61
表二十八	次數表(以九為組距).....	61
表二十九	常態分配中之均中衆三數.....	68
表三十	偏態分配中之均中衆三數(a).....	69
表三十一	偏態分配中之均中衆三數(b).....	70
表三十二	理解成績之進步.....	75
表三十三	每次成績進步之表示.....	76
表三十四	均數與調和均數在應用上之分別.....	84
表三十五	次數表(計算調和均數).....	86
表三十六	二十五分值的計算(例一).....	92
表三十七	二十五分值的計算(例二).....	94
表三十八	均差的計算(第一法).....	99
表三十九	均差的計算(第二法 a).....	100
表四十	均差的計算(第二法 b).....	102

表四十一	均差的計算(第三法)	106
表四十二	環中數與環均數的兩均差之比較(用第二法)	118
表四十三	環中數與環均數的兩均差之比較(用第三法)	120
表四十四	組距之大小在均差計算上之影響(用第一或第二法)	121
表四十五	組距之大小在均差計算上之影響(用第三法)	122
表四十六	均方差的計算 第一法(a)	130
表四十七	均方差的計算 第一法(b)	131
表四十八	均方差的計算 第二法(a)	132
表四十九	均方差的計算 第二法(b)	133
表五十	均方差的證驗法	135
表五十一	計算差異係數的材料(a)	140
表五十二	計算差異係數的材料(b)	140
表五十三	百分等級表	146
表五十四	問題數與學生數之統計	151
表五十五	國幣連擲十次的機率表	163
表五十六	理論與實驗之比較	166
表五十七	第二實驗之結果	168
表五十八	σ 與其相當之縱線	177
表五十九	教師評判之等第表	193
表六十	化等第爲 r (甲)	194
表六十一	化等第爲 σ (乙)	196

表六十二	化等第爲 σ (丙)	197
表六十三	等第化爲 σ 的總表	197
表六十四	問題艱難度之求法	199
表六十五	T 分數之求法	200
表六十六	機誤的機遇表	207
表六十七	均方差的機遇表	208
表六十八	機遇的實驗結果(第一次)	210
表六十九	機遇的實驗結果(第二次)	211
表七十	塞艾二氏實驗結果之比較	213
表七十一	兩種教授法之比較	215
表七十二	簡單相關係數的計算法(其一)	226
表七十三	簡單相關係數的計算法(其二)	227
表七十四	求相關的材料	227
表七十五	簡單計算法(其三)	228
表七十六	統計班兩次月考成績	231
表七十七	相關表 第一步的整理	232
表七十八	相關表 第二步的整理	233
表七十九	相關係數的計算法(其一)	234
表八十	相關係數的計算法(其二)	237
表八十一	一部分計算法之表示	238
表八十二	相關係數大小及其等第之比較	240
表八十三	縱橫兩線的均數(由表七十八計算而出)	245

表八十四	體高體重相關表	248
表八十五	縱橫兩線的均數(從表八十四計算而出) ...	249
表八十六	縱橫兩線的均數(根據迴歸方程計算而出)	256
表八十七	等級相關的計算	264
表八十八	次數分配在等級相關上之影響(例一)	265
表八十九	次數分配在等級相關上之影響(例二)	266
表九十	特殊算法(例一)	268
表九十一	特殊算法(例二)	270
表九十二	表示非直線的相關	272
表九十三	相關比之計算(附單頁)	278
表九十四	兩質相關	285
表九十五	質量相關	286
表九十六	量的材料與無秩序的材料之相關	286
表九十七	四格表	287
表九十八	接觸係數的計算	292
表九十九	質量相關的計算	297
表一百	質量相關的最後計算	301
表一百零一	為求部分相關的各種材料	307
表一百零二	表示第一級係數之計算	308
表一百零三	表示第二級係數之計算	309
表一百零四	部分的迴歸係數之計算	316

圖 次

圖一	次數直方圖(入學試驗國文成績).....	24
圖二	次數多邊圖(入學試驗國文成績).....	25
圖三	次數在直線上的分配.....	27
圖四	次數分配圖(以 20 爲組距).....	29
圖五	次數分配圖(以 5 爲組距).....	31
圖六	次數多邊圖的修勻.....	33
圖七	統計上幾個重要的圖.....	36
圖八	中數的舉例.....	47
圖九	次數分配圖(以二爲組距).....	62
圖十	次數分配圖(以三爲組距).....	62
圖十一	次數分配圖(以四爲組距).....	63
圖十二	次數分配圖(以六爲組距).....	64
圖十三	次數分配圖(以七爲組距).....	65
圖十四	次數分配圖(以八爲組距).....	66
圖十五	次數分配圖(以九爲組距).....	67
圖十六	常態曲線上均,中,衆三數之地位.....	68
圖十七	偏態曲線上均,中,衆三數之地位(a).....	69
圖十八	偏態曲線上均,中,衆三數之地位(b).....	70
圖十九	分配不同之兩曲線.....	89

圖二十	表示次數分配被劃為四段.....	95
圖二十一	均差計算的解剖	109
圖二十二	初中一年級文言文成績	112
圖二十三	初中一年級白話文成績	113
圖二十四	初中二年級文言文成績	114
圖二十五	初中二年級白話文成績	115
圖二十六	初中三年級文言文成績	116
圖二十七	初中三年級白話文成績	117
圖二十八	表四十四(甲部)的圖的表示	123
圖二十九	表四十四(乙部)的圖的表示	124
圖三十	表四十五(甲部)的圖的表示	125
圖三十一	表四十五(乙部)的圖的表示	126
圖三十二	常態曲線上各差數的距離的表示	137
圖三十三	常態曲線上各差數所佔的面積	139
圖三十四	百分曲線之一種	149
圖三十五	百分曲線之另一種	152
圖三十六	錯列舉例	155
圖三十七	$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{10}$ 的成功機率曲線	164
圖三十八	理論與實驗之比較	167
圖三十九	幾個重要的曲線	170
圖四十	多面形漸近圓周之表示	171
圖四十一	常態曲線之解釋(其一)	172

圖四十二	常態曲線之解釋(其二)	172
圖四十三	常態曲線之解釋(其三)	173
圖四十四	常態曲線之解釋(其四)	173
圖四十五	常態曲線與次數多邊圖之重疊	179
圖四十六	智力分配圖(<u>桑代克</u> 的假定)	181
圖四十七	<u>美國</u> 國製測驗 A 種之結果(不分性別, 不分種族 之別).....	181
	其一 十一歲兒童智力之分配	
圖四十八	其二 十二歲兒童智力之分配	182
圖四十九	其三 十三歲兒童智力之分配	182
圖五十	其四 上三圖之混合表示	182
圖五十一	<u>俄魯斯</u> (Otis) 智力測驗之結果	183
	其一 十一歲兒童智力之分配	
圖五十二	其二 十二歲兒童智力之分配	183
圖五十三	其三 十三歲兒童智力之分配	183
圖五十四	其四 十四歲兒童智力之分配	184
圖五十五	其五 上四圖之混合表示	184
圖五十六	<u>海格鐵</u> (Haggerty Delta 2) 測驗之結果.....	184
	其一 十一歲兒童智力之分配	
圖五十七	其二 十二歲兒童智力之分配	185
圖五十八	其三 十三歲兒童智力之分配	185
圖五十九	其四 十四歲兒童智力之分配	185

圖六十	其五 上四圖之混合表示	186
圖六十一	上三混合圖之混合表示	186
圖六十二	面積的計算(例一)	190
圖六十三	面積的計算(例二)	190
圖六十四	面積的計算(例三)	191
圖六十五	等第在面積上之地位(甲)	194
圖六十六	等第在面積上之地位(乙)	195
圖六十七	等第在面積上之地位(丙)	196
圖六十八	全體的均數與樣子的均數之表示	214
圖六十九	相關的遠近的表示	223
圖七十	非直線相關的表示	225
圖七十一	象限之表示(其一)	235
圖七十二	象限之表示(其二)	236
圖七十三	迴歸線之表示(其一)	246
圖七十四	迴歸線之表示(其二)	250
圖七十五	已有之結果(其一 兩線接近)	251
圖七十六	其二 兩線分開	252
圖七十七	其三 兩線更分得開	253
圖七十八	直線及其傾斜度	254
圖七十九	根據迴歸方程所繪之直線	257
圖八十	直線相關與非直線相關	274
圖八十一	常態面積在相關係數計算上的應用	299

高級統計學

第一章

緒論

1 統計的意義

關於統計的名稱在德文爲“Statistik”，在英文爲“statistics”，他們的字形似發源於拉丁文中 status一字，他的意義是一種政治情形(a political state)。在昔德國嘗用統計來調查人口，出產，政治情形及其他國家事業。這統計的調查在德國用得非常普遍。大約在一七八七年統計一名詞始由靳美滿博士 (Dr. Zimmerman) 介紹到英國而沈克力爵士 (Sir John Sinclair) 於其著書描寫蘇格蘭的時候，把這名詞大用之而特用之，因爲他以爲這名詞很新奇，用來可以吸引讀者。從此這名詞在英國遂通行了。在這個當兒，沈克力組織了蘇格蘭的統計紀錄 (statistical account)，他並擔任這紀錄的編輯。在一七九〇年五月的一個通告裏，他也引用統計調查或訪問 (statistical inquiries) 一

名詞，和德國人所用的一樣。

在十九世紀的時候，這些名詞的意義頗有變遷。他們的新界說是：用數量方法來解釋國家的特質。這量的意義究竟從何時用起，我們無從揣測。就是到了一八三四年於英國的皇家統計學會 (The Royal Statistical Society) 成立的時候，其過渡尙止一半。

統計的最近界說當然注重於量的方面。他是受了多數因子的影響而得的量的結果：例如初中學生之國文成績，在測驗之時，其所得的量的結果，不知受了多少影響。他們的智慧，他們的健康，他們的年齡，他們的勤惰，以及家庭環境，學校環境，教材編配，教授方法等其最著者。所以統計學的方法，是一種方法用來講明受有各種影響的量的結果的。

2 統計學在科學上的地位

在現在各門科學比較的發達，研究者總想得一種量的結果。因此統計學乃被各專門科學家大為引用。實際上統計學乃科學之科學，因為各門科學都要借重他，始能把研究的結果整理起來，而公之於世，所以戈特(Goethe)說，『統計學治理世界』(Statistics govern the world) 他的話很不錯，因為統計學是一種工具，人們所有的科學知識是全靠着這工具然後獲得的。不過研究統計的人也要善用這工具，而不可濫用他。在科學的研究裏，量的結果固是重要，但是這結果要有意義，要能有理由的被解釋出來。這一點我們在這章的下段，和以後的幾章裏，還要提到的。在此地我們所應明瞭的是一方面我們應當知道統計

學在科學上的重要，而另一方面我們研究統計的人不可自詡，以為量的結果就是合乎科學的。

3 統計學對於教育的貢獻

可靠的量的結果不但在自然科學中認為重要，就是在社會科學中他也是不可少的。恐怕許多社會科學如經濟學，社會學等是因為經過了統計的整理，得了可靠的量的結果始成為科學的。這樣講起來，統計學不但有助於已成立的科學和從前專重敘述的科學，就是未成立的科學在受過統計學的洗禮以後也成為科學了。教育學之所以為科學的似亦不能逃避此公例。而統計學對於教育上之供獻，在最近二十年中很有可觀，這是我們應當承認的。在教育行政上如學校之費用，教師之薪金，學生成績之考查，缺席與退學之原因等問題在在均須統計的討論。近來測驗學盛行一時，一般研究的人更非於統計知識確有根底無從窺其蘊奧。然則從事教育的人，對於統計學若無充分之了解，還算得是科學的教育家嗎？

4 統計的範圍

統計的範圍非常之大。在本書中所討論的止有四部，然而此四部都是很重要的。讀者苟能了解而應用之，於科學方法上獲益當非淺鮮。

在詳細的，並分析的，討論各部以前，我們可以提綱挈領的把各部的應用敘述一下，使學者預先得一鳥瞰；或者於將來的學習歷程上有所裨益。

統計學的四大部是平均 (averages), 差數 (variability), 相關度 (correlation), 及可靠性 (reliability or unreliability)。平均是個普通名詞, 我們聽來也很熟悉, 因為商業上時常引用他。例如錢店裏算洋價, 每日有進有出, 有買有賣, 但是洋價時漲時跌, 日日不同。希望漲的錢商預先多買, 恐怕跌的則預先售盡。在半月或一月之內把所買的和所賣的相抵以後, 將餘存或餘欠之洋, 平均起來, 看他合個甚麼價。把這價與現時洋價相比, 若是前者低而後者高, 則餘存之洋越多越有利。例如餘存之洋平均合價七錢一分五釐, 而現時之洋價則為七錢二分五釐, 是餘存洋每千元可賺十兩。在這種情形之下, 所以餘存越多越有利。反之, 餘欠愈多則損失愈大, 因為現時若要買洋填補前欠, 每一千元須費七百二十五兩, 此種每千元十兩之損失, 若餘欠至數萬或數十萬不可謂不大。

商業上所用之平均大抵如此。普通商店所進出的款項, 日期比較的短, 數量比較的小, 用珠算方法, 求這樣的平均尚稱便利。至於日期很長或數量很多的地方, 用這樣的方法, 就要發生困難了。且量的結果所被影響的因子既多, 我們應當用比較的精確方法找出這些因子, 多多益善, 不能因為用了平均的方法, 就算滿意。所以統計方法是要應用的。用統計方法日期不怕久, 數量不怕大, 總可以應付。且別種因子足以影響結果的或者可以查出。總之, 用統計方法, 雖未為盡善, 要比較的精確些。

普通商店所用的平均方法, 止有上述一種, 而統計學上關於平均計算卻有五種之多。第一種為均數 (mean), 即普通所用之平均。第

二種爲中數 (median)，他是許多數裏的最中一數。設有二十歲的青年甲，乙，丙，丁，戊五人，甲長五英尺，乙長五英尺二寸，丙長五英尺四寸，丁長五英尺六寸，戊長五英尺八寸，其中中數爲五英尺四寸，即丙之尺長，因爲丙是他們最當中的一個。這是中數最簡單的一個例子。數量多的時候，計算起來並不如此簡單，且還有其他名詞與中數的意義很相近的。俟後篇專門討論時，再詳細的敘述罷。

第三種爲衆數。此數在理論上雖很難講，而在事實上卻易明瞭，因爲衆數就是含有最多的次數的一數。例如教育統計班七十人的試驗結果：得三十五分的有二人，得四十五分的有三人，得五十五分的有十人，得六十五分的有二十五人，得七十五分的有十五人，得八十五分的有十人，得九十五分的有五人。這七十人中以得六十五分的人數爲最多。所以六十五就是各分數中的衆數。

衆數在英文上爲 Mode，含有時髦 (Fashion) 的意義。例如青年女子着旗袍。其身長與袍之長短有一定之比例。假使一百人中比例得十與三者二人，得十與四者十人，得十與五者十九人，得十與六者三十五人，得十與七者二十人，得十與八者十一人，得十與九者三人。此七數中以三十五爲最大。這三十五女子所着之旗袍與其身長得十與六之比。所以這樣長短要算時髦的，其他不是太長，就是太短，都算不得是相稱的。

第四種爲調和均數 (harmornic mean)，第五種爲幾何均數 (geometrical mean)。這兩種均數爲用不廣，然遇有特別情形則非用他們不可。關於他們的用處在這裏用簡單的幾句話解釋，恐難使讀者明瞭，

祇好留待後篇再討論罷。

統計的第二部爲差數。差數之內分兩極差 (range)，二十五分差 (quartile deviation)，均差 (mean deviation) 及標準差 (standard deviation) 四種。他們的算法在統計學上雖各不同，而其意義卻無甚分別，因爲引用他們的目的總在求各數相差之多寡。在同樣材料中求各種差數當以兩極差的數目爲最大，因爲他是最多與最少兩數之相差，例如有初中三年級學生二十人，其成績最優者得九十八分，最劣者得三十八分，兩數相差有六十分之多，不可謂不大。最優與最劣或最多與最少處於各數之兩極端，所以我們叫他兩極差。若不用其差數六十分而止表示其最高數與最低數例如 $38-98$ ，這樣寫法我們叫兩極距離。

二十五分差又可叫作四分之一差，因爲用這方法的目的是在將所有的材料剖爲四段。這樣的算法比兩極差要精確。看兩極差或兩極距離我們祇知道最多與最少之相差。若次數很多而我們祇憑兩極差即下批評，在科學方法上殊欠公允。二十五分差的好處在能將許多數劈爲四段，看這四段之中每段相差多少。例如有二十歲的青年一百人，其最長者有六英尺二寸，最矮者有四英尺十寸，其兩極差爲一英尺四寸。若使此一百人列隊於操場之上，最矮者在前，最高者在後，再從此百人隊中找出第二十五名，第五十名及第七十五名三人之身長，則我們所知道的比較兩極差清楚多了。例如第二十五名的人長五英尺三寸，第五十名的人長五英尺六寸，第七十五名的人長五英尺八寸，我們一望即知道五英尺三寸至五英尺八寸兩數相距不過五寸而此距離中佔五十人爲全數之半，其他如四英尺十寸至五英尺三寸其距離亦爲五寸，

但是此距離中止二十五人，又五英尺八寸至六英尺二寸，其距離爲六寸，但此距離中亦止二十五人。從這幾個數目中我們可以知道身長五英尺三寸至八寸的人數比較的多，其他較高或較低的人都比較的少。我們有時要用二十五分值（就地位而言），其目的就在找出這分配上的差別，因爲這差別要比較的精確些。

均差與標準差比較上述兩種差數當還要精確些，因爲他們的差數既不是如兩極差兩數相減而出，又不是如二十五分差依次序抽取而得，乃是受全部影響而得之結果。其計算之法以均數或中數爲標準，先求各數與標準之相差，然後平均之，是爲均差。均差與標準差雖是兩個差數，其應用之廣狹不同，然實際上亦不過計算之時稍有分別耳。

統計的第三部爲相關度 (correlation)。相關度統計的目的在求兩種數目之相關：例如身長五英尺之人，其體重爲一百二十磅，則身長五英尺六寸之人，其體重應在一百二十磅以上。如此則身愈長而體亦愈重，是有相關，且是正相關。反之，身愈長而體越輕，也算一種相關，不過這是一種負相關。若是身之長短無關乎體之輕重，這可算沒有相關。這是一種理論的敘述，至於實際上身長與體重總是有關係的，相關之大小用相關係數以代表之。這相關係數是個純粹的數目，並無單位：例如身以尺量，體以磅權，此兩數相乘在機械學上固有所謂尺磅 (foot-pound) 之單位，但是求相關係數並不用這單位，因爲相關之兩數不止用尺用磅，有時年齡與身長，有時年齡與體重。若是每兩個數目成一單位如尺磅一類豈不麻煩？（從教學方面講，此種解釋爲一種通俗的解釋，）又相關係數之大小有一定的範圍，用幾何學可以證明。

最大者爲正一，最小者爲負一，毫無相關者其係數爲零。所以相關係數的範圍從正一起經零而至負一爲止，在零以上者爲正相關，在零以下者爲負相關，在這範圍之內，就算學理論講，爲一純粹數目。

統計的第四部爲可靠性 (reliability or unreliability)。這部在統計學上非常重要，因爲用統計方法，雖得有量的結果，而此結果是否可靠，尙是問題，必須決定。假使我們研究初中三年級學生國文理解力，希望定一標準，我們測驗的學生應當很多；但是究竟要多少始能定作標準是個問題。在中國全國初中三年級學生也許有五六萬，我們當然不能全數測到。就是江浙兩省的初三學生也許有七八千，我們亦不能測完。我們若是測驗一二百人即統計其結果，這結果當然不甚可靠；若測驗五六百人，其結果應當可靠些；若所測的人數在一千以上，其可靠性當更大。試驗可靠性的統計有所謂機誤 (probable error)。由機誤之大小可以推測結果之可靠與否，但是研究家亦往往誤用這種統計，因爲這機誤的用處是有限制的。例如初三學生的國文理解力，在測驗之時情形未必一致：有的學生因爲鉛筆斷了，致有時間上之犧牲；有的因爲測驗是一種新奇東西，做起來覺得有趣，而成績因之比平常爲優。在這些情形之下，用機誤而試其可靠性尙屬正當。若學校性質不同如有的偏重科學，有的偏重英文，有的偏重國文。在偏重國文的學校之中有專注重『今語文』的；有專注重『古語文』的，而亦有兩種並重的，在此複雜情形之下，我們不能任擇其一以作全體之代表。我們應當請這些性質不同的學校都有代表加入；那麼，將來所得的結果，始有普遍性，始能成爲一種適當的標準。所以學者在研究統計之時不

但要明瞭，並且要善用這些方法。

問 題

- (1) 試根據自己的經驗把教育工作有須統計表示的列舉四五個，例子並簡單的討論之。
- (2) 在中國統計的應用始於何時？（參閱周調陽：教育統計學，Willford I. King, Elements of Statistical Methods 或中國古書關於夏禹時代的政治者。）
- (3) 試列一表表示統計學四大部的內容大綱。
- (4) 假定高中畢業生五十人的平均體重為一百十五磅。這量的結果是用統計方法求出來的。試列舉影響這結果的重要因子。

第二章

次數的統計

5 材料的整理

次數的統計是整理統計材料的第一步。用統計方法的好處在把許多散漫的材料整理起來，使閱者於幾分鐘內瞭解材料的量的大意。所以從事於統計工作者雖止一二人而因用統計方法得閱讀之便利的，卻不知道有多少人呢。材料散亂當然不便取閱而亦不易保存。經過整理之後，納其結果於圖表之中，把他們張掛於研究室或辦公室內一目了然，那是何等清楚，何等便利？所以世界愈文明則社會愈複雜，社會愈複雜則人們的事務愈多，人們的事務愈多則他們的時間更當寶貴，更應經濟；在這個當兒，統計知識的需要當更大，這是毫無疑義的。我們於此想到上古之結繩爲政，兩兩相較那真是不可同日而語了。

6 次數的統計方法

材料的初步整理當用分組辦法。例如表一中所列第四中山大學錄取本預科新生一百九十六人之國文成績，有的得八十二分，有的得五十九分，還有其他的學生得種種不同的分數。我們從上看下，從左至右，費時很久，眼爲之花，但是仍舊沒有頭緒，得不着甚麼結論。在這個當兒，我們把這一百九十六人的國文分數，分組排列如表二，我們

一望即知道在二十分以下者並無一人，二十至三十止有二人，三十至四十則有二十四人。以後漸多，四十至五十有五十二人，五十至六十有六十五人，是為次數之最多者。由此以往次數又漸少。六十至七十有二十九人，七十至八十有十三人，八十至九十有十人，九十至一百則止一人。

次數最多的是六十五，上面已經講過，這些人的分數在五十與六十之間。這六十五人佔全體一百九十六人的百分之 33.16。若是我們把上下相近的52,29兩數加入，連同65為146。這146人的分數在四十與七十之間，他們的人數佔全體百分之74.49。在四十分以下的共有二十六人，佔全體人數百分之13.27，在七十與一百之間有二十四人，佔全體人數百分之12.24。從這三個百分數看來，我們就知道大多數人的分數集中在四十與七十之間，因為這三個組距內的人數在全體百分之七十以上呢。所以在結論上我們可以說：在這次國文試驗裏，錄取者有一百九十六人，其中成績在五十分至六十分的人數最多，計有六十五人，佔全體百分之三十三有奇。若擴大範圍，把上下兩組距包括在內，則其人數佔全體百分之七十四強。至四十以下或七十以上的都比較的少。

上述的統計不過在國文一方面，若把英文，算學，史地，理化，生物等科的成績，也照這樣統計起來，豈不是更清楚，更明瞭，更有比較嗎？

這統計的結論照我們看當無甚毛病。但是成績在四十分以下的亦在被取之列，也許有人懷疑。不過計算規則和錄取標準招生委員會自

有其精確辦法。非我們局外人所能一知半解，妄參末議的。其實我們的目的止在研究統計。若討論考試辦法，則未免越俎代庖了。

關於次數的統計，把表一的成績轉入表二，我們有一定的方法，就是先擇定分組的距離，例如在表二裏面我們擇定以十為組距，從0到

表一 國立第四中山大學入學試驗錄取本預科新生之國文成績表
(十六年八月)

82	74	49	33	40	58	47	42	50	49	58
59	54	53	30	38	60	53	47	45	21	54
76	38	26	50	31	80	41	51	38	54	43
67	63	49	64	38	56	47	45	50	85	38
55	48	49	72	82	46	77	34	47	33	53
56	45	49	56	47	99	69	68	38	56	74
66	42	50	55	50	54	65	53	39	82	38
53	64	49	33	39	41	65	47	61	38	49
56	56	68	53	49	44	60	55	41	56	57
44	57	49	74	51	63	53	47	51	44	62
71	50	49	35	47	52	60	53	52	60	64
83	75	55	54	38	61	44	40	68	45	61
67	53	30	52	32	58	47	69	66	69	66
49	57	40	53	48	56	43	44	82	56	66
49	30	41	53	49	51	52	44	30	85	38
53	49	42	55	70	60	87	50	54	79	30
52	44	57	50	44	70	82	42	58	54	
47	54	54	54	55	56	77	68	77	53	

表二

統計材料之初步整理

組距	劃線記數	次數
0		
10		
20		
30	==	2
40	#####	24
50	#####	52
60	#####	65
70	#####	29
80	#####	13
90	#####	10
100	-	1
合計		196

一百把他們歸作一行，第二行所留的地方較寬，以備劃線記其次數，第三行則表示其各次數之和。在劃線記數的時候，我們先讀表一，從左邊最上的一數看起，例如我們看到82，我們就用量尺遮蓋或用左手的第二指按住以下最近的一數，如59使這一行的數止有82現於吾人之眼簾，同時在表二裏面找到八十與九十的組距，由此看到他的第二行而劃一直線。此數劃記以後，再看表一裏面82以下最近的一數，這數是59。他應當在50至60的一組距內。我們把他記在第二行的時候，也用量尺遮蓋或用左手第二指按住他以下的數如是一直的記下去。在表一裏面第一行的數目盡則做第二行，第二行的數目盡則做第三行，以至

做完。在表二裏面劃記的時候，每逢第五線則劃一斜線，因為用這樣辦法，數起來比較容易。

作者在教室裏常見學生想免掉在第二行劃線記數的麻煩而直接數清每一組距內之數，將這些數填於第三行內。用這個方法雖免掉了一部分手續，但是結果並不甚佳。因為直接數清種想上雖覺便利而事實上容易錯誤，尤其是在次數很多的時候。且此種錯誤發生之時，我們往往不知其所在，必須從頭再做一次。這是何等麻煩？而時間上當然不經濟。就是一次做對，時間也未必比第一方法省，因為計算每一組距內之數，無論他是多少，我們總須閱遍這一百九十六個數。從零到一百若分爲十組則我們把這一百九十六個數，應各看十次。因此時間上不能節省，而容易發生錯誤的原因也在此。所以初學者應習用第一方法，這第二方法還是不要嘗試罷。

7 組距寫法的討論

關於組距的寫法在上面我們所用的是直線，就是表二第一行從零到十，從十到二十，以至從九十到一百各數相連的直線。這樣寫法我們用了五年餘覺得很方便，而同學中習用以後亦無誤會之者。作者創用這個寫法因為其他寫法在學習上容易發生錯誤。茲將組距的各種寫法表示於下加以討論，或者在比較上我們容易了解新的寫法的便利和明瞭。

表三 組距之各種寫法

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0—較小於10	0—10以下	0—10	0—9.99	0—9.99	0—9	5	0	0—
10—較小於20	10—20以下	10—20	10—19.99	10—	10—19	15	10	10—
20—較小於30	20—30以下	20—30	20—29.99	20—	20—29	25	20	20—
30—較小於40	30—40以下	30—40	30—39.99	30—	30—39	35	30	30—
40—較小於50	40—50以下	40—50	40—49.99	40—	40—49	45	40	40—
50—較小於60	50—60以下	50—60	50—59.99	50—	50—59	55	50	50—
60—較小於70	60—70以下	60—70	60—69.99	60—	60—69	65	60	60—
70—較小於80	70—80以下	70—80	70—79.99	70—	70—79	75	70	70—
80—較小於90	80—90以下	80—90	80—89.99	80—	80—89	85	80	80—
90—較小於100	90—100以下	90—100	90—100	90—100	90—100	95	90	90—100
							100	

第一第二兩種寫法爲敘述式的寫法，就是用普通文字來敘述數學的事實。此種寫法曾見於蔣斯 (Jones) 氏所著統計學書中。在他自己的意思，以爲這樣的寫法，在練習者方面，因熟悉普通文字故，或者不會發生錯誤。事實上是否如此，作者沒有這樣的教學經驗，不敢揣測。但是照數學上的通則講起來，凡可以用符號以代文字之時，總以用符號爲比較的簡單。今蔣氏既於能用符號之時，而仍用文字，未免麻煩。且他所用的文字，是否一目了然，完全不須口釋，也是問題。因爲所謂“較小於”(less than)或“以下”(under)，若不另加口釋，似不能使初學者完全了解。有這兩個原因——麻煩與費解——所以敘述式的寫法，不算好的方法。

第三種寫法統計學家用之者甚多。朱君毅氏在其所著“教育統計

學”一書中也曾應用。羅格 (Rugg) 氏在其 “Statistics Applied to Education” 一書中，對於此種寫法 曾加批評；以為在練習者方面，容易發生錯誤。在作者個人經驗中，也發見了錯誤不少。最容易者是一個數目，例如 35，或 40，表現於兩個組距內，好像35是(30—35)一組距之終點，同時又是(35—40)一組距之起點似的，或40是(35—40)一組距之終點，同時又是(40—45)一組距之起點似的。引用者在討論組距的時候，當然有所說明，不過算學上的練習不專恃說明，因為說明的用處止限於初學者了解方面。講到他們的練習他似無權過問了。這錯誤的發生雖有因為不懂的，但是練習上的偶然錯誤也常常發見。我們要知道，一個數目明明在兩個組距中，在整理多量材料之時，無論初學者或專家，其眼手聯合運動，由習慣而成自然，非多用腦力不能制止。但是在長時間的練習中，那有許多腦力來支配這種習慣。其結果，則上下兩組距必有誤納之弊。

第四種寫法嘗見於統計學教科書中。羅格氏於其所著之 “Statistical Methods Applied to Education” 亦採用此法。我們承認這樣寫法的意思是很好的，例如 20—29.99 其意以為在這組距中，其數目決不能到 30。一到30即屬於下一組，但是此種寫法未免麻煩。在每組距中要多寫許多無用的數目字，時間上太不經濟。還有一層，此種寫法易使學生不明中點之所在。所謂中點者即每組距內的最中一數。例如在表二裏以十為組距則 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 等數為各組距的相當中點。講到這個問題作者猶能記憶兩年前有一位同學來問，20—29.99 一組距的中點是什麼。這位同學在學習統計的時候，成績

非常之好。等到他充作中學教員，擔任統計的時候，對於這初步的應用，竟一時忘卻，不能了解。豈非教本上寫法不明瞭之過？

第五種寫法是第四種的變相。因為要避去多寫無用的數目字之麻煩，所以止在頭一組寫出 .99，以下各組則全免去。這種寫法較之第四種在時間上固然經濟。但是中點之所在，不易明瞭，仍是初學者之困難。

第六種寫法也是矯第四種之弊的。塞斯頓 (Thurstone) 氏在其“統計綱要” “Fundamentals of Statistics” 一書中曾經用過。這種寫法當然較第四種為簡單。就是成績分數既無小數，則凡小數之數目可以不寫。但是他的弊病未能盡除。在寫中點之時，學者仍容易錯誤。在經驗上作者常見學者把4.5當作(0—9)一組距的中點，因為他誤會(0—9)為由0至9。這種錯誤比(0—9.99)還要容易發生，因為遇見(0—9.99)而求中點，在學者方面往往自知不懂，不敢下筆。若遇(0—9)則大膽的寫下4.5而不自知其錯誤。有了這個緣故這種寫法頗難採用。

在第七種寫法中，止有中點，並無組距。這種寫法比較少見。採用此法之統計學家以為中點在次數分配圖中非常重要，不寫組距而寫中點未為不可。但是組距之表明也很重要，止寫中點而不寫組距；在閱讀次數表的時候，倉卒之間不識組距之大小，必須經過心理歷程由中點推測而得，也太麻煩。故最好寫法除中點容易明瞭外，組距之大小要一目瞭然。

第八種寫法似乎能滿足這些條件。在此種寫法中，兩數相連，用直

線而不用橫線者，也有特別意義。因為一個數目在一組距內代表其終點，決不能在另一組距內代表其起點或終點。一個組距有一個數目。其數目為其起點，至另一數目則為另一組距之起點。例如在表三裏第八行的第一數是 0，第二數是 10，第三數是 20。在這些數目上我們一望就知道他們是以 10 為組距的。每一組距止有一個起點數目，所以 0 為頭一組距的起點，10 為第二組距的起點，20 為第三組距的起點。以下的數目所表示的起點可以類推。在整理材料的時候，凡數目從 0 起而不達到 10，我們把他們放在第一組距內；從 10 起而不達到 20，我們放在第二組距內；從 20 起而不達到 30，我們放在第三組距內。以下數目的歸組可以類推下去。總之一個組距止有一個起點。數目等於那起點的，或大於他而小於下一組距的起點的，都在這個組距之內。在每一組距內我們納入數目都依據這個原則。所以這種寫法我們覺得代表得很清楚，而且各組的界限也很分明。還有一層，用這種寫法中點的表示也很明顯。從一組距的起點至另一組距的起點，既有直線相連，則將此直線折而為兩，其折處即是組距之中點。從此處畫一橫線直達中點數目的所在，頗合邏輯，也很明瞭。

這用直線的組距寫法好像是一種量尺，那些短直線各自相連，成一長直線，各組距的起點為其分段的數目，他們的中點又是那些分段的折半了。此種寫法雖免掉了上述幾種寫法之弊；但是還有一處，易受批評；就是立次數表的時候，用平常橫線紙，頗不便寫；若用白紙而自打橫直線，時間殊不經濟。其實這些困難也容易免掉。因為這種寫法，可用在作正式統計報告的時候，若在草算之時，不妨用第九種寫法。

表四 第八種組距之詳細寫法

組 距	中 點	次 數
0	5	0
10	15	0
20	25	2
30	35	24
40	45	52
50	55	65
60	65	29
70	75	13
80	85	10
90	95	1
100	總 數	196

其與第八種不同之處，在組距線之橫與直耳。這種寫法極其簡單，所以不能用在正式統計報告中者，因為每一橫線達到之處並無數目，在敘述上未免說不過去。

用第八種寫法作正式報告，若因時間不經濟，不妨印刷紙張，專為此用。為統計用的專門格紙，印刷者已不少。在組距中用五或十者機會很多，這些格紙似可定印，以備應用。

這種寫法自經作者創用以後業已五年有餘。這五年來在教學上似

未發生困難，如前次用其他寫法所發生者。朱君毅先生為吾國有數統計學者，對於這寫法曾來函討論，以為對此別無批評，惟以直線相連在各組距間多費空間為慮。其實我們並未濫用空間。因為這種寫法與他種寫法所佔之空間相等。參閱我們的例子可以釋然。

這種寫法除免去普通統計練習之弊病外，尚有應用數學上之優點。在數學上採用符號至少有三個原則：第一是要簡單，第二是所用的符號要確能代表明瞭的敘述文字。這兩個原則在我們的寫法中似都可以相合。

練習一

- I 試將附表中之英文與數學兩成績用統計方法加以整理，整理之時，試以十作組距。
- II 試從次數表中答以下各題：
- (1) 英文成績之兩極差爲何？（就材料分組以後的數而言）。
 - (2) 數學成績之兩極差爲何？（同上）。
 - (3) 英文成績得八十分或以上者佔全體人數百分之幾？
 - (4) 數學成績得八十分或以上者佔全體人數百分之幾？
 - (5) 假定全體人數百分之七十五或以上代表大多數，試問大多數之英文成績爲若干分至若干分？又大多數數學之成績爲若干分至若干分？
 - (6) 假定九十分或以上爲最高分數，試問英文成績與數學成績居此位者各有人數百分之幾？
 - (7) 又英文與數學的成績在二十分以下的各有幾人？

某大學本預科入學試驗錄取新生之英文成績表
(十六年八月)

10	30	72	40	12	65	14	12	32	63	20
20	10	15	30	20	20	24	30	20	13	22
28	63	44	22	13	17	30	20	49	26	31
24	34	19	28	28	17	8	14	15	23	14
26	42	40	30	77	28	11	37	28	65	70
22	30	20	45	45	63	33	26	43	60	41
52	12	30	60	10	58	15	25	35	25	15
18	15	19	35	14	38	28	35	25	58	31
22	28	71	53	12	68	26	42	18	35	61
46	41	24	66	12	56	40	53	18	26	28
40	36	40	6	13	32	20	36	16	10	53
36	49	77	33	49	24	10	8	38	18	12
14	51	34	66	29	60	16	18	36	16	15
10	29	10	30	28	24	18	16	51	11	28
10	14	6	65	32	32	16	11	20	26	0
14	13	38	39	18	12	16	10	32	32	10
38	34	34	10	35	21	32	40	25	29	37
32	34	62	47	45	10	30	52	15	27	66

某六學入學試驗錄取新生之數學成績表
(十六年八月)

90	53	90	63	60	86	48	50	80	40	70
90	68	48	70	58	90	85	90	45	20	20
90	85	80	85	81	81	35	67	90	70	90
77	66	20	65	55	86	30	88	55	70	90
49	85	65	85	86	94	45	80	59	82	88
90	78	86	70	88	39	53	60	48	40	28
86	65	35	34	88	62	90	90	63	60	10
60	88	41	90	88	90	75	29	76	40	25
60	70	80	86	30	82	65	90	78	28	43
68	70	10	83	65	90	30	53	50	68	60
68	70	80	85	70	38	43	90	80	15	95
40	81	88	65	36	88	50	20	84	68	88
90	30	68	40	90	55	68	90	56	10	83
85	85	90	83	65	85	48	70	70	28	35
67	88	80	40	80	50	88	80	68	71	65
85	60	50	88	80	86	65	60	58	79	54
65	70	90	55	70	55	70	85	65	94	88
83	65	55	90	89	60	30	70	82	56	23

第三章

統計的圖示法

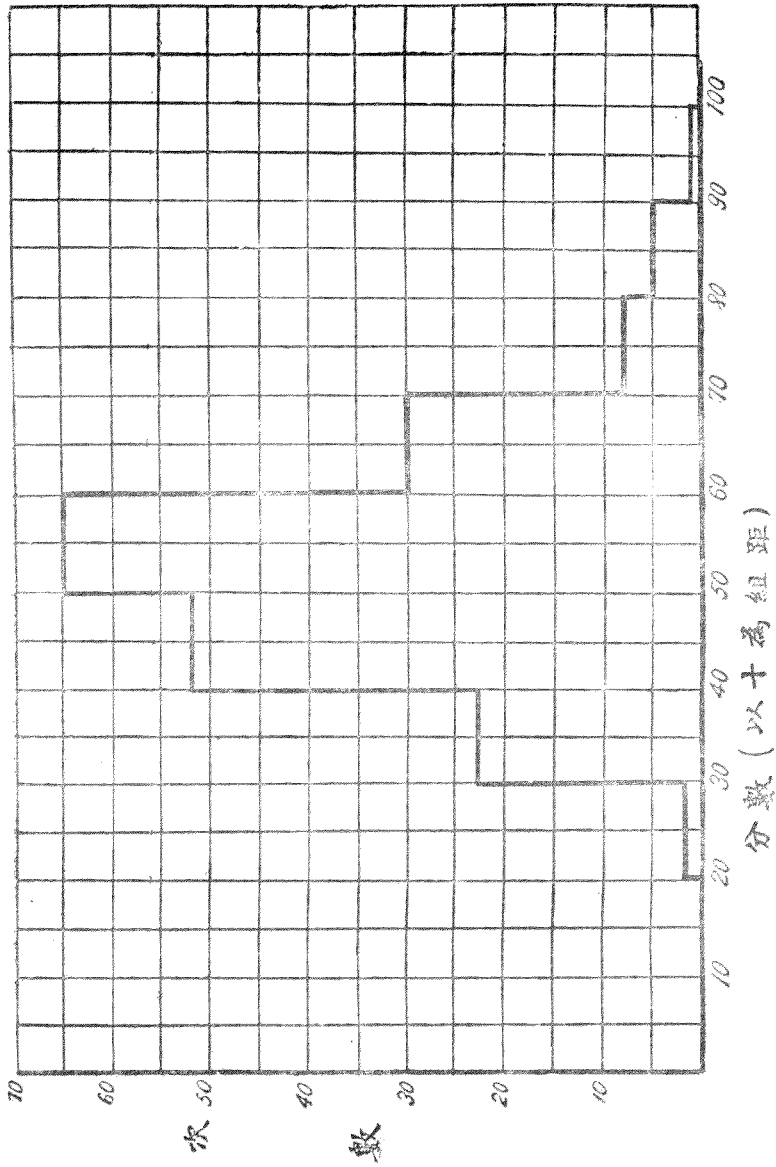
8 圖示的重要

表示統計的結果我們除用表以外亦常用圖。一個表或一個次數表裏面必有幾個或幾十個數目。他們雖然不是散漫的，但是看起來我們總覺得不相連貫。至於圖卻沒有這弊病，因為他是整個的。他有一定形狀。形狀同則結果同，形狀不同則所代表的結果當亦不同。我們要知道結果，止須看圖或把幾個圖比較一下就了然了。這種情形我們在以下數章將常常遇着。見的多，當更使我們明瞭。我們在這裏所應當注意的是：圖的表示既有他的優點，則凡作統計之時，除用表以表示量的結果外，應儘量的用圖俾各數之關連我們也得看出，也能從研究中下以結論。

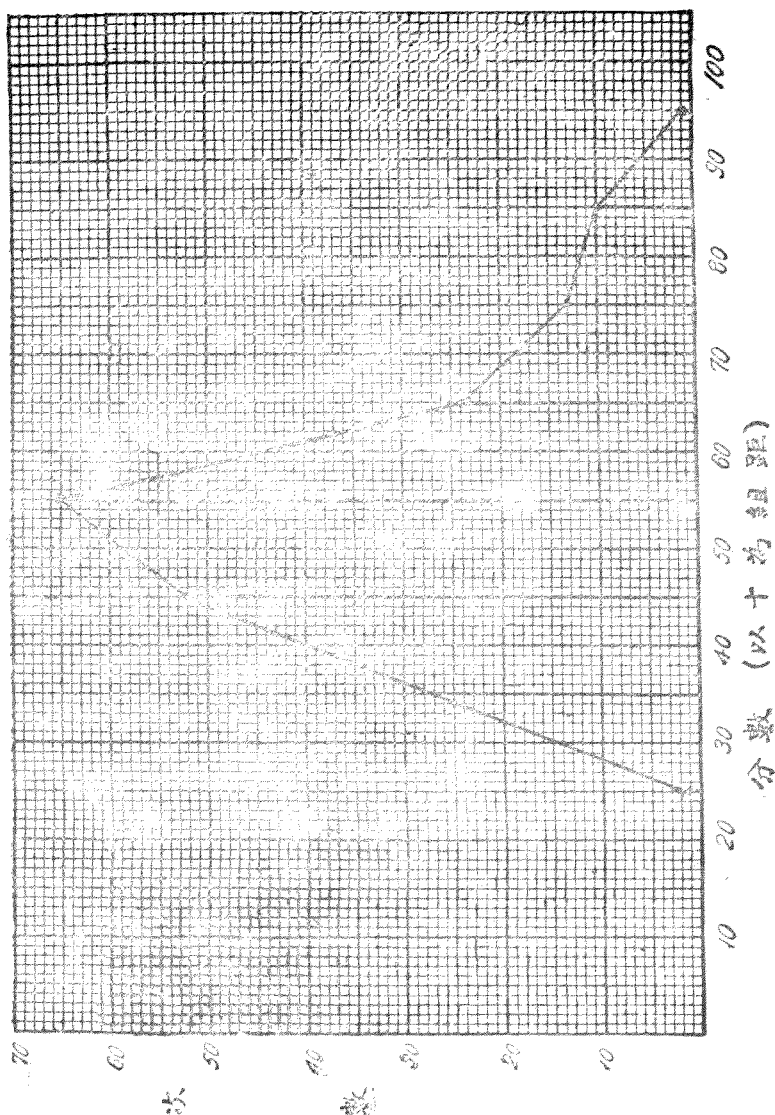
9 直方圖與多邊圖

關於次數圖我們普通所用計有兩種。一種圖叫直方圖如圖一，另一種叫多邊圖如圖二。這兩個圖相同和不同的地方我們一看就很明瞭，他們倆都是以橫線作組距。以縱線作次數的。這種辦法不但在這兩個圖上為然，就是以後我們作圖，我們都是依照這個規則的。

這兩個圖不同的地方在其形狀，所以一個叫作直方，一個叫作多



圖一 一次數直方圖(大學試驗國文成績)



圖二 次數多邊圖 (入學試驗國文成績)

邊。在做直方圖的時候，先在公釐格上劃好橫縱兩軸，把他們各個的

單位註明出來，如在橫軸上以分數為單位，在縱軸上以次數為單位是。方格與橫直單位的比較雖不必有固定的標準，但是最好每一方格代表一橫直單位。這樣辦在計算上比較便利，尤其是在直方圖上。

縱橫兩軸上的單位既已註明，我們就照各組距的次數劃起線來，成功一個直方圖。多邊圖上組距的全線並不表明出來，祇把他們的中點來作代表，例如20至30，或30至40在直方圖上全線畢露而在多邊圖上則祇以其中點25或35作代表。

10 中點的擇定

我們用中點有一種假定，就是在每一組距之內其次數之分配不是

表五 中點與次數

組 距	中 點	次 數
0	5	
10	15	
20	25	2
30	35	24
40	45	52
50	55	65
60	65	25
70	75	13
80	85	10
90	95	1
100		
總 數		196

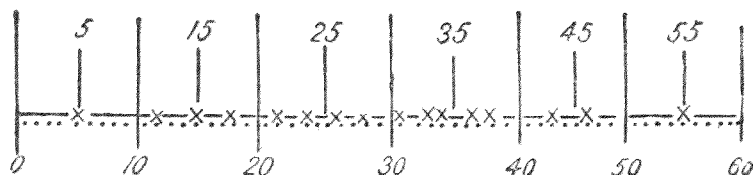
集中於中點就是各數平均或比較的平均分配於中點之上下，庶兩段次數的相抵仍等於或近於中點：例如表六裏面各組距的次數不同。若從圖（圖三）上看則有的集中於組距之中點如0—10, 10—20, 50—60是，有的則分配於中點之左右如20—30, 40—50是，而還有比較的平均分配於中點者如30—40是。實際上要每組距之中點均合理想當然很難，然大部分次數能集中於中點或比較的平均分配於中點之左右，則用這方法在計算之時便利多了。

表六 中點與次數

組距	中點	次數
0	5	1
10	15	3
20	25	4
30	35	5
40	45	2
50	55	1
60		

中點是否近乎理想與組距之大小頗有關係，因為組距選擇得好則次數可許集中於各組距之中點，或比較得平均分配於各中點之兩旁。這情形要從實際上始能查出。學者練習稍久，經驗自豐，以後對於這些問題當無甚困難之處。

中點既定之後我們儘可在橫軸上繪垂直線而以其長度代表各組距內之次數，



圖三 次數在直線上的分配

由各線之頂點依次相連即成一次數多邊圖。

11 直方，多邊兩圖的比較

以多邊圖比較直方圖，各有其優劣之點。用直方圖我們容易計算次數，因為圖內有多少方格，我們就知道有多少次數，但是在多邊圖上計算卻沒如此便利。不過多邊圖繪起來比較迅速而在形狀上看起來亦較明瞭。還有一層，多邊圖若不近乎理想我們能設法修勻之，使之近乎理想。所謂理想者並非拋棄統計事實，來臆造一種結果。實因材料不充分，我們當假定材料增加之後，所得的結果怎樣。猶憶在第一章

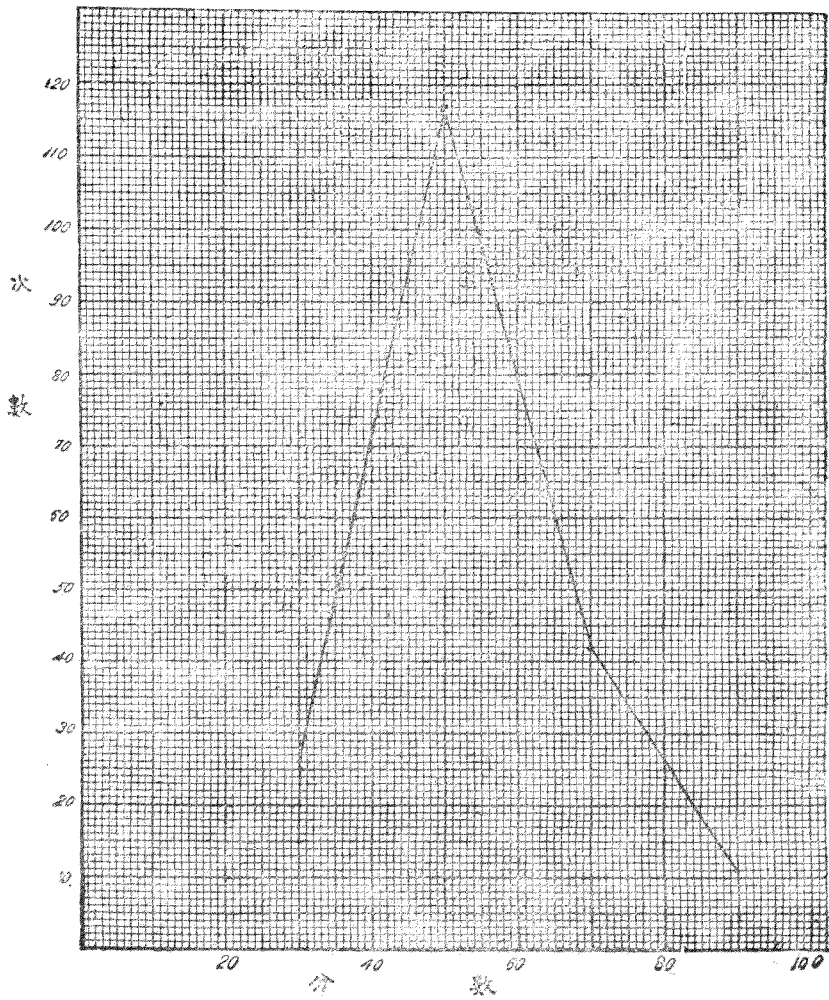
談到可靠性的時候，我們拿初中三年級國文測驗來做例子。我們知道江浙兩省初三學生至少有五千人，事實上我們不能全測。假使以二百人爲一組，每一組的結果均求其次數分配繪一曲線。這種曲線越多則他們的總和越近乎一種理想的曲線，或能代表這五千人的曲線。假使我們所測止有三組共六百人，他們的結果恐不如一千人的所有的代表性大，而一千人的又恐不如一千八百人的。所以組數越多，其結果越能代表。在事實上材料甚少的時候，我們可用一種修勻法，把圖略加修改，使之比較自然。

12 多邊圖的修勻法

從理論上講起來次數圖是由點所積成的。繪圖的時候，要點數多必須組距小，例如表七裏面及圖四之上以20作組距止有四點，在表二裏面及圖二之上以10作組距則有八點，在表八裏面及圖五之上以5作組距則點數增至十六。所以組距愈小則點數愈多，充其量，則次數多邊圖被修勻，而成功一種曲線。（表七見29頁，圖四見30頁，表八見31頁，圖五見32頁）

表七 次數表 (以20為組距)

組距	劃線	記數	次數
0			
20			
40			26
60			117
80			42
100			11
合計			196

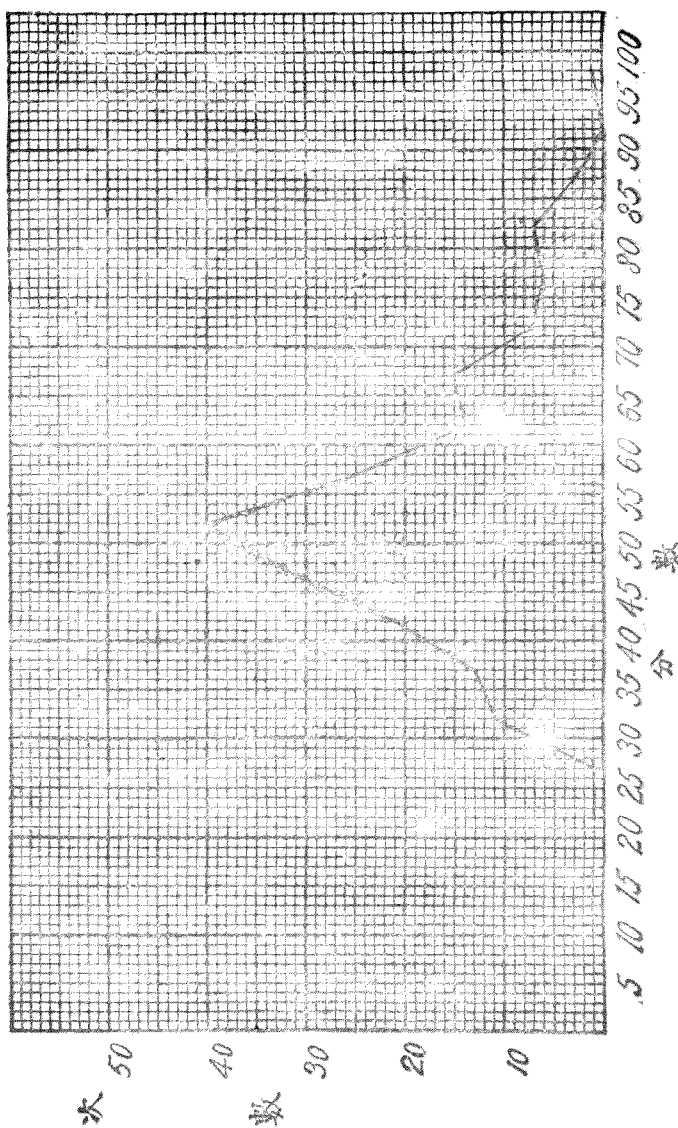


圖四 次數分配圖(以20為組距)

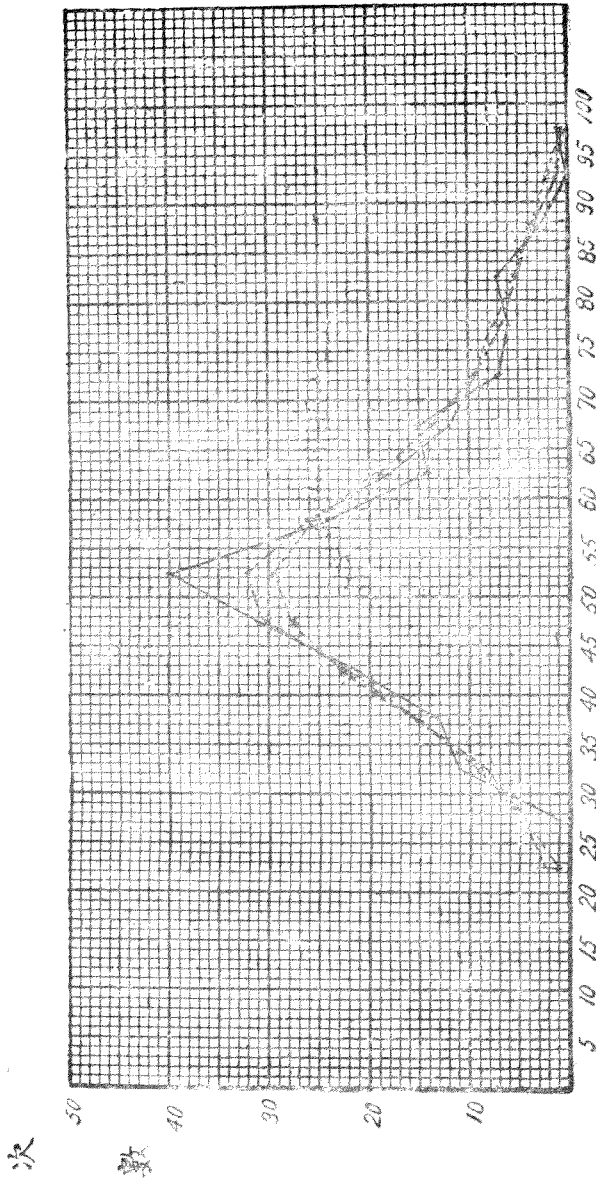
表八

國立第四中山大學入學試驗錄取新生之國文成績
(民國十六年八月)

組距	劃 線 記 數	次數
0		
5		
10		
15		
20		1
25		1
30	#####	11
35	#####	13
40	#####	21
45	#####	31
50	#####	40
55	#####	25
60	#####	14
65	#####	15
70	###	7
75	##	6
80	##	7
85		3
90		0
95		1
100		
合計		196



圖五 次數分配圖 (以5為組距)



次數多邊圖的修勻
分數 (以 5 為組距)

原來次數	1	11	13	21	31	40	25	14	15	15	7	6	7	3	0	1
首次修勻次數	1	4.3	8.3	15	21.7	30.7	26.3	18	12	9.3	6.7	5.3	3.3	3.3	1.3	1.7
二次修勻次數	2.1	4.5	9.2	15	22.5	28.1	25.4	18.8	13.1	9.3	7.1	5.1	3.3	3.3	1.8	0.9

圖六 次數多邊圖的修勻

但是點數之增加在理論上雖是可能的而實際上也看材料而定，例如溫度之升降在寒暑表中他是繼續不斷的，用這種材料，點數之增加是可能的。若用分數，大致以一分為單位，用小數點非不可能，不過實際上用的時候很少。用這種材料若因要點數多而把組距分得太小，恐怕許多組距裏面，將沒有次數，其結果則所繪之曲線必時斷時續，或成為幾段。此種次數圖似更不能代表甚麼了。所以組距有時不能太小，其原因即在此。

在修勻的例子中，我們所用的次數圖是以五為組距的。我們未嘗不可再用小一點的組距如2，或3，不過用五用十是一種普通辦法，計算時比較便利。若用2或3也許繪成曲線不至時斷時續，但是峯頭太多，起伏不常，也出乎常態之外。所以組距不但不能太大，也不能太小。從經驗上講，組距的大致數目應在15與25之間，少於10則結果恐難正確，多於30則列表又太麻煩。至用圖表示的時候，這最後的兩種情形似都不相宜。在我們的例子中，組距為五，組距數為十六，恰如經驗中所常見者。

關於修勻的方法，普通應用的很多。我們在此止敘述一種，就是平均修勻法。就是把代表次數的各點平均一下即得，例如在圖六之上，我們以A, B, C, D, 等字母代表各點，而用下列公式求出新圖之次數數目，這些新數目我們即以A', B', C', D'等字代之。

$$A' = \frac{2A + B}{3} = \frac{2(1) + 1}{3} = \frac{2+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$B' = \frac{A + B + C}{3} = \frac{1 + 1 + 11}{3} = \frac{13}{3} = 4.3$$

$$C' = \frac{B+C+D}{3} = \frac{1+11+13}{3} = \frac{25}{3} = 8.3$$

$$D' = \frac{C+D+E}{3} = \frac{11+13+21}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

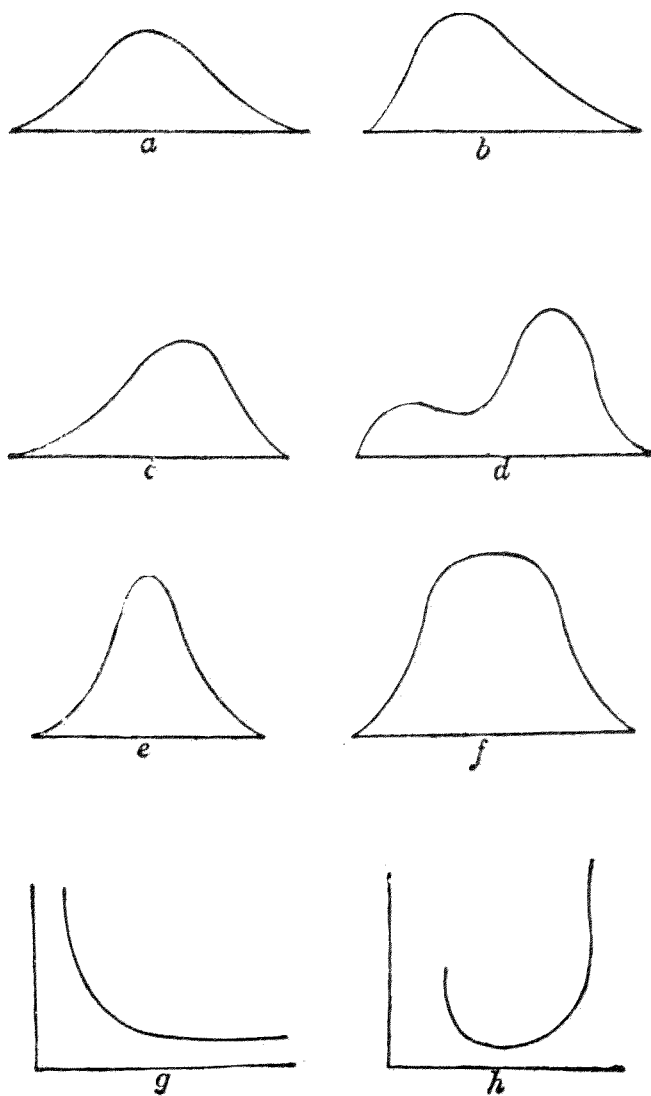
新數求出之後我們可在圖上找出其點之地位，然後以線連之，即成一新曲線。此所修之曲線若不能使我們滿意，可再修勻之。其找新次數數目之法同前。此時可以A'', B'', C'', D'', 等字代表這些新點。新點彼此相連又成一新曲線，是為第二次修勻之圖。

13 其他重要的圖示

圖不合乎理想而修勻之，使成為理想的，雖是一種辦法，但是這辦法的使用非常有限。因為圖的繪成是根據次數的分配的。次數的分配各個不同，視其材料的性質而定，所以圖也各自有其形狀，縱修勻之而他們各個的特性特形則仍存在，況且有許多圖是用不着或無法修改的。茲將幾個重要的圖分繪於下以供參閱。（圖見36頁）

在圖七裏面，a 為對稱的圖，或常態分配曲線，就是在這圖的最中為一高峯，兩旁的次數對稱的依次遞降。所謂把圖修勻使之近於理想就是把圖修改使之呈乎常態。在這種情形之下理論與事實用來作證例的都很多。將來要詳細的討論的。

b, c兩圖都不是對稱的，他們是偏態的圖。在b那次數的分配為正的偏態，在c為負的偏態。這些略不對稱的圖是我們所常見的。加以修勻之後他們亦有呈乎常態之可能。d圖為雙峯式的。有的時候因為組距的選擇不當故圖成為雙峯，但是有的時候實受材料的影響，而



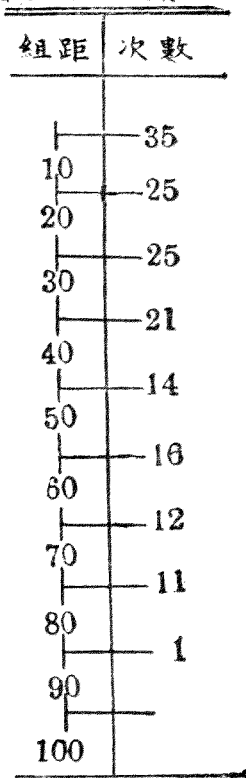
圖七 統計上幾個重要的圖

不能免避這樣的形式。e, f 兩圖另屬一種, e 形尖銳, f 頂極禿, 他們倆又各自有其特性。g 圖亦嘗見, 至 h 圖則較少。

練習題

- (1) 用前章所有之英文算學兩成績試求以五和以十作組距的次, 數分配, 並根據他們的分配, 各繪一直方圖, 一多邊圖。
- (2) 試修勻以五和以十作組距之次數多邊圖, 至修完第二次爲止。
- (3) 試根據右列次數分配繪一多邊圖。

國立中央大學十八年度入學試驗錄取新生理化成績



第四章

均 數

14 均數的普通公式

統計學的均數就是普通商人所用的平均，前面已經講過，不過統計學可統計任何數而平均之。在數量過多的時候，其均數的計算法要比普通商人所用的麻煩。在這麻煩的計算之中，而求其方法簡單，這就是統計學的長處。茲將各種方法，由簡而繁，演算如下：

現在先用普通商人所用的方法。下面是十個同學的試驗分數。普通算平均的方法是先將各分數加起來，然後以人數除之，即得其平均，例如：

42, 48, 53, 57, 61, 69, 74, 76, 82, 88, 爲十個同學的試驗分數。

將他們加起來而以十除之得下列計算式。

$$\frac{42+48+53+57+61+69+74+76+82+88}{10} = \frac{650}{10} = 65 \text{ 平均分數}$$

用代數方法可得一種普通公式如下：

試以 x_1 爲一個同學的分數， x_2 爲第二個同學的分數……由此類推至 x_n 則爲第 n 同學的分數。

所以由第一同學至第 n 同學其分數之代數爲 x_1, x_2, \dots, x_n 同

時以 N 代表同學之人數。將各代數組織起來，成下列公式：

$$\text{均數} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + \cdots + X_n}{N}$$

試以 M 代均數而以 ΣX 代 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + \cdots + X_n$ 一數列

$$\text{則 } M = \frac{\Sigma X}{N} \quad (1)$$

15 次數表上均數的統計法

有時兩位或三位同學所得的分數相同，算平均或均數的時候，似不必一一加上，將那分數用二或三乘之亦得，茲試設下題演算之。

表九 有次數而不分組
距的均數統計

分 數	次 數	(分數)(次數)
42	2	84
48	1	48
53	1	53
57	2	114
61	2	122
69	2	138
74	1	74
76	1	76
82	1	82
88	2	176
93	2	186
97	1	97

$$N = 18 \quad \Sigma X = 1250$$

$$M = \frac{\Sigma(\text{次數})(\text{分數})}{N}$$

若以 x 代分數， f 代次數

$$\text{則 } M = \frac{\Sigma fX}{N} \quad (2)$$

將各數代入公式

$$M = \frac{1250}{18} = 69.44$$

實際上在統計學上要算均數很少這樣簡單的。故次數是常有的，而且甚多，至於分數也不是這樣簡單，普通要用組距的。茲再將統計學上計算均數之方法演釋於下：

表十 第一法

組距	X 中點	f 次數	f X
20	25	2	50
30	35	24	840
40	45	52	2340
50	55	65	3575
60	65	29	1885
70	75	13	975
80	85	10	850
90	95	1	95
100			

$$N=196 \quad \Sigma fX=10,610$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Sigma fx}{N} \\ &= \frac{10,610}{196} \\ &= 54.13 \end{aligned}$$

16 均數的簡捷統計法

以上演釋的法子非常麻煩。每一中點要乘每一次數，中點的數既大，次數的數也不小，有這些長乘法，不但計算起來，時間不經濟，而且容易錯誤。統計學家知道如此，所以想出第二第三兩個法子來。

表十一 第二法(a)

組距	X 中點	f 次數	E	f E
20	—25	2	0	0
30	—35	24	1	24
40	—45	52	2	104
50	—55	65	3	195
60	—65	29	4	116
70	—75	13	5	65
80	—85	10	6	60
90	—95	1	7	7
100				

N=196 $\Sigma fE=571$

第二法之所以簡單，因為用了 E，可以免去公生數常乘各數之麻煩。試演算如下：

$$(I) \quad M = M_a + c$$

M_a 為假定之均數，即 $E=0$ 時，該排中所有組距之中點。在這個例子之中 $M_a=25$ 。

c 為校正數 = (M_c) (組距)

$$(II) \quad M_c = \frac{\Sigma fE}{N}$$

$$\text{所以 } M = M_a + \frac{\Sigma fE}{N} \text{ (組距)}$$

$$(III) \quad \text{以 } i \text{ 代表組距，則 } M = M_a + \frac{\Sigma fE}{N} (i) \quad (3)$$

代入各數

$$\begin{aligned}
 M &= 25 + \frac{571}{196} \quad (10) \\
 &= 25 + \frac{5710}{196} \\
 &= 25 + 29.13 \\
 &= 54.13
 \end{aligned}$$

表十二 第二法(b)

組距	\bar{x} 中點	f 次數	\bar{x} $25 + 10 \times E$	$f \bar{x} =$ $f(25 + 10E)$
20	25	2	$25 + 0$	$2(25 + 0)$
30	35	24	$25 + 10$	$24(25 + 10)$
40	45	52	$25 + 20$	$52(25 + 20)$
50	55	65	$25 + 30$	$65(25 + 30)$
60	65	29	$25 + 40$	$29(25 + 40)$
70	75	13	$25 + 50$	$13(25 + 50)$
80	85	10	$25 + 60$	$10(25 + 60)$
90	95	1	$25 + 70$	$1(25 + 70)$
100				

因為應用 E 數，而免去常乘公生數的麻煩，在(a)表中驟觀之，或者不易明瞭。若將(b)表仔細一看，就比較的清清楚了。原來25一數是各中點所包含的，而10為組距又是各中點之所共有的。所以 $\bar{x} = 25 + 10E$ 。E=1, $\bar{x} = 35$, E=2, $\bar{x} = 45$, E=3, $\bar{x} = 55$ 。由此可以類推。在這裏 \bar{x} 的數大，E 的數小。我們若把25與10兩數提出來，待終結的時候，一並加之乘之，豈不省事多了？

表十三 第三法

組距	X 中點	f 次 數	E	f E
20	—25	2	-3	-6
30	—35	24	-2	-48
40	—45	52	-1	-52
50	—55	65	0	-106
60	—65	29	1	29
70	—75	13	2	26
80	—85	10	3	30
90	—95	1	4	4
100				89
		196		$\Sigma fE=17$

第二法雖然簡便，但是所假定的最小組距之中點為零，若組距的數目很多，計算起來仍覺麻煩。不如於各組距中選一適中之數，將他的中點假定為零，小於他者用負號，大於他者用正號，計算之時正負相抵，其數必很小，易於計算，茲演釋於下：

$$M = M_a + c$$

$$\text{此時 } M_a = 55$$

$$c = M_c(\text{組距})$$

$$= \frac{\Sigma fE}{N}(\text{組距}) \text{ 或 } \frac{\Sigma fE}{N} \quad (i)$$

$$= \frac{-106 + 89}{196} \quad (10)$$

$$= \frac{-170}{196}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } M &= 55 - \frac{170}{196} \\
 &= 55 - .87 \\
 &= 54.13
 \end{aligned}$$

這第三法之所以簡便，因為假設均數選得很適中。假設均數選得很適中，則 $\Sigma fE+$ 與 $\Sigma fE-$ 兩數相消以後，其結果的數目無論是正是負必很小，換句話講，那校正數不要太大，太大則假設均數離真正均數必遠，而計算之手續益繁。在第三法裏我們假設的均數為五十五，他的次數是六十五。在這表中以這個組距的次數為最多。在其上下兩組距內的次數一為五十二，一為二十九。這兩個數目都不算小，此外則比較的小了。在 E 行裏，零的所在適處次數最大的地方。我們知道數目無論他如何大，在乘零以後卻等於零；又五十二與二十九兩數雖比較的大，然乘一以後仍等於原數，我們止把他們寫下，給以正負號，並無乘的手續。這三個數目既如此應付，此其所以簡便。至其他的次數都很小，也都容易乘了。

在結論上我們對於這簡捷法有重要的三點應當注意：第一我們要知道 E 行裏的零點沒有固定的位置，零數無論放在甚麼地方，那結果都是相同的。例如在第二第三兩法裏零數的位置各不相同，但是結果卻是一樣的。第二點我們應當注意的是假設均數與真正均數相近，那麼，那校正數就很小，就容易計算。第三點我們要注意的是 E 行裏的零點位置應處於次數最多或次多的地方。第二第三兩點往往不能同時顧到。在這個當兒我們應以簡捷為原則。

練習題

(1) 試用下列材料(甲)用第一法求均數。

(2) 試用下列材料(乙)用第二第三兩法求均數以便證驗。

(甲)

十八年度中大入
學試驗生物分數

組距	次數
10	1
15	2
20	1
25	14
30	16
35	19
40	30
45	22
50	12
55	21
60	8
65	7
70	4
75	2
80	1
85	

(乙)

十八年度中大入
學試驗史地分數

組距	次數
10	3
20	15
30	24
40	31
50	45
60	35
70	10
80	2
90	

(3) 假使某班的國文總分數為 2,093.44, 他們的均數為 65.42, 問這班共有學生多少?

-
- (4)某級有三百五十五人，於受英文測驗之後，其平均分數為71.03，因為人數多求均數的時候用的是第三法。其校正數為6.03。問所假設之均數是多少？
- (5)某級有學生一百零五人，分為甲乙兩班，甲班四十九人，乙班五十六人。該級舉行國文測驗之後，甲班的總分數為3,040.45，乙班的總分數為3,402.00。問兩班的平均成績孰優，其相差的分數多寡？

第五章

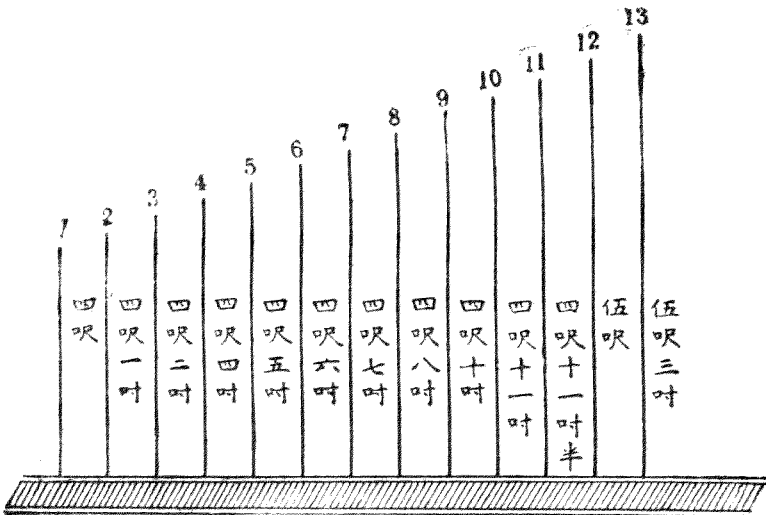
中數

17 中數與中成績

中數的意義很易明瞭，就是幾個或幾十個數裏的最中一數。例如 75, 82, 38, 59, 43, 65, 84, 89, 91, 87, 95，十一個數中若要求出他的最中一數，須先將這些數照程序排列如下：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
38	43	59	65	75	82	84	87	89	91	95

十一個數的最中一數就是第六個，他的數是82，所以82就是中數。



圖八 中數的舉例

我們若用實際的例子，用圖形把他表示出來，在幾個或幾十個數中求中數更易明瞭。現在用人的體高作例子，假如我們要求初中一年級年十四歲的學生的體高中數，我們可以請他們到操場上站隊，依次排列，最矮者在前，最長者在後，如圖八。（見47頁）

照這個圖形，初中一年十四的學生共有十三人，最矮者長四英尺，最高者長五英尺三寸，其中最中一生，照排列秩序，應為第七個，他的體高是四英尺七寸，這數就是這個團體的體高中數。

上面的兩個例子的數，都是單數，所以求中數的時候，止須指點出來，並無計算，若將第一例子加上一個數如：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
38	43	59	65	75	82	84	87	89	91	95	99

此時須將最中兩個數拿出來，把他們平均一下，其結果即是他們的中數，試求如下：

兩最中數為第六第七兩數，即82與84

$$\text{中數} = \frac{82+84}{2} = 83$$

有的統計學家如 Odell 以為這所求的並非中數(median)乃係中成績 (mid-score)。中成績計算簡單，有時止須在許多數中找出一個，至於中數之計算卻不如此，大概次數很多，算時較為繁難，方法亦不盡同，這種分別也有益處，尤其是對於喜用 $\frac{N+1}{2}$ 公式的統計家，這公式本為求各數之最中者 例如成績分數共有十一其最中一數為第六個，以 N，代表十一，用 $\frac{N+1}{2}$ 公式即得6。 ($\frac{N+1}{2} = \frac{11+1}{2} = \frac{12}{2}$)

=6)這就是最中一數，他的分數就是全體的中成績。各數總和若是雙數，如12，亦可用此公式，即此時N代表12。

$$\frac{N+1}{2} = \frac{12+1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ 即 } \frac{6+7}{2}$$

18 中數的計算法

我們要知道 $\frac{N+1}{2}$ 公式的應用非常有限，止可在求中成績 (mid-score) 的時候應用，若用之於求中數 (median) 時，就犯毛病了，這個毛病我們可以舉例證明，在舉例以前，我們當先介紹中數，(median) 的計算法。茲用第一法演算如下：

表十四 中數計算的第一法

組 距	次 數	次數和	以 md. 代中數
20			(a) Md. = $50 + \frac{20}{65}$ (10)
	2	2	= $50 + \frac{200}{65}$
30	24	26	= $50 + 3.08 = 53.08$
	52	78	(b) Md. = $60 - \frac{45}{65}$ (10)
40	65	20 45	= $60 - \frac{90}{13}$
50	29		= $60 - 6.92 = 53.08$
	13		
60	29		
	13		
70	10		
	10		
80	1		
	1		
90			
100			
<p>N = 196</p> <p>$\frac{N}{2} = \frac{196}{2} = 98$</p>			

此法不須公式，只將各相關的數按步就班的演算一下即得其結果，算法並不困難，最重要的一點，我們應注意的是求中數完全不用組距之中點，因為求中數，止在得 N 數中第 $\frac{N}{2}$ 之一數，與組距固無關也。

在這個例子裏， $N=196$ ， $\frac{N}{2}=\frac{196}{2}=98$ 。我們現在要找這 196 個之中的第九十八個分數，假使分數和體高一樣也能排列起來；那麼，我們可以從最高的或最低的分數數起，數到第九十八個即得，這些分數事實上不易排列，不過在次數表中加添了(次數和)一行也容易使我們數清，我們從最低分數算起，在次數行裏第一個數目是 2，第二個是 24，第三個是 52，在次數和行裏第一個數是 2，第二數是 $2+24=26$ ，第三數是 $26+52=78$ 。這數離 98 尚差 20 所以我們在次數行裏第四數 65 之中取出 20，這 65 個分數中的第 20 個就是 196 個分數中的第 98 個，在組距行裏第七十八個分數已經到了 50，再加 20，那第 98 個分數，當為 $50+\frac{20}{65}(60-50)=50+\frac{20}{65}(10)=50+3.08=53.08$ ，這數就是中數。

第二法須用公式茲演算如下：

現在以 L 代下段(如由 0 至 50)，以 U 代上段(如由 60 至 100)，以 S_1 代下段之次數和，以 S_2 代上段之次數和，以 f 代中數所在之組距的次數， N 仍代表次數總和。我們把這些數目代入以後，得 a ， b 兩公式及其算法如下：

$$(a) \text{Md.} = L + \frac{\frac{N}{2} - S_1}{f} \quad (i) \quad (4)$$

表十五 第二法(a)

組距	次數	次數和 (上下兩段自加)
0		
10	1	1
20	1	2
30	2	4
40	4	8
50	7	15
60	6	
70	6	17
80	5	11
90	4	6
100	2	2
N=		38

$$= 50 + \frac{\frac{38}{2} - 15}{6} \quad (10)$$

$$= 50 + \frac{(19 - 15)10}{6}$$

$$= 50 + \frac{40}{6}$$

$$= 50 + 6.67$$

$$= 56.67$$

$$(b) \text{Md.} = U - \frac{\frac{N}{2} - S_2}{f} \quad (i) \quad (5)$$

$$= 60 - \frac{\frac{38}{2} - 17}{6} \quad (10)$$

$$= 60 - \frac{(19 - 17)10}{6}$$

$$= 60 - \frac{20}{6}$$

$$= 60 - 3.33$$

$$= 56.67$$

用 a, b, 兩公式所得的結果相同, 此為一種證驗方法。兩公式同時應用一從下加, 一從上減, 所費時間並不甚多, 然而對於答數之正確, 卻比較的有把握多了。

剛才所用的例子其次數為38是雙數, 我們再用單數的次數算他一下。

表十六 第二法(b)

組距	次數	次數和 (上下兩段自加)
0	1	1
10	2	3
20	2	5
30	4	9
40	7	16
50	6	
60	6	17
70	5	11
80	4	6
90	2	2
100		
N=	39	

$$\begin{aligned}
 \text{(a) Md.} &= 50 + \frac{\left(\frac{39}{2} - 16\right)10}{6} \\
 &= 50 + \frac{(19.5 - 16)10}{6} \\
 &= 50 + \frac{35}{6} \\
 &= 55.83
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) Md.} &= 60 - \frac{\left(\frac{39}{2} - 17\right)10}{6} \\
 &= 60 - \frac{(19.5 - 17)10}{6} \\
 &= 60 - \frac{25}{6} \\
 &= 60 - 4.17 \\
 &= 55.83
 \end{aligned}$$

算中數的時候，所以用 $\frac{N}{2}$ 而不用 $\frac{N+1}{2}$ 的緣故，因為用 $\frac{N}{2}$ 在 (a)

(b) 兩公式中，其演算結果完全相同，若用 $\frac{N+1}{2}$ ，則兩個結果就不

一樣了，這就是上面所說用 $\frac{N+1}{2}$ 而算中數要犯毛病，茲試將上面的

材料用 $\frac{N+1}{2}$ 的公式演算出來，以證明兩個結果的不相同。

$$N=39 \quad \frac{N+1}{2} = \frac{39+1}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$\begin{aligned} \text{(a) Md.} &= 50 + \frac{(20-16)10}{6} \\ &= 50 + \frac{40}{6} \\ &= 56.67 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) M. l.} &= 60 - \frac{(20-17)10}{6} \\ &= 60 - \frac{30}{6} \\ &= 60 - 5 \\ &= 55 \end{aligned}$$

56.67 = 55 在算術上是絕對不可能的，所以用 $\frac{N+1}{2}$ 就有這個毛病，所以算中數的時候，還是不用這公式的好，學者注意。

19 幾個特殊例子

在以上所舉的幾個例子，其所用的材料都是常見的，所以應用公式之時 尚無多大麻煩，但是有時所用的材料，情形頗為特別，其次數的分配也無一定規則，演算這些材料的時候，若應用上面的公式往往發生問題。在那個時候我們要斟酌情形變通辦理，茲將這樣的例子，演算幾個如下：

表十七 特殊的計算法(a)

組 距	次 數	次 數 和 (上下兩段自加)	
0			$\begin{aligned} \text{(a) Md.} &= 15 + \frac{\left(\frac{24}{2} - 12\right) 5}{6} \\ &= 15 + \frac{12 - 12 \cdot 5}{6} \\ &= 15 + 0 \\ &= 15 \end{aligned}$
5	2	2	
10	2	4	
15	8	12	
20	6	12	
25	4	6	
30	2	2	
N =	24		

這樣情形雖特別，也很普通，次數的分配，若是極端常態，也屬於這一類，在這種情形之下，我們若知道上端或下端的幾個次數相加，其和(S)等於 $\frac{N}{2}$ 的時候，就不必算了，因為 $\frac{N}{2} = S$ ，則 $\frac{N}{2} - S = 0$ ；而這

分數的全部亦等於零，所以在 $Md = L + \frac{\frac{N}{2} - S_1}{f}$ (i) 或 $Md. = U - \frac{(\frac{N}{2} - S_2)}{f}$ (i) 的公式中，止剩 L 或 U 一數，一目了然，不必再算。

表十八 特殊的計算法(b)

組距	次數	次數和	
12			$(a) Md. = 21 + \frac{(\frac{14}{2} - 7)3}{0}$ $= 21$ $(b) Md. = 24 - \frac{(\frac{14}{2} - 7)3}{0}$ $= 24$
15	1	1	
18	3	4	
21	3	7	
24	0		
27	1	7	
30	2	6	
33	4	4	
N = 14			

這個例子曾發見于 Odell 的“Educational Statistics”一書中。用 (a) (b) 兩公式所得的結果均為不定式的。據 Odell 的意思，這樣結果的產生係因次數分配的差異所致。在此種特殊情形之下，應將 21，24 兩數相加，而以 2 除之，得其均數 $(\frac{21+24}{2} = \frac{45}{2} = 22.5)$ 此均數可當作他們中數。

表十九 特殊的計算法(c)

組距	次數	次數和
0		
5	4	4
10	5	9
15	5	14
20	6	20
25	7	27
30	10	
40	9	20
50	6	11
75	3	5
100	2	2
125		
N = 57		

在第三個例子之中，各次數所有之組距不盡相同，數少之時以五作組距，至20則組距變為10，在五十以上則變為25，如此不同組距之次數表，將他排列起來，欲求中數，似難下手，其實遇了這種材料，也無多大困難，我們知道在 $Md. = L + \frac{\frac{N}{2} - S_1}{f}$ (i) 的 $Md. = U - \frac{\frac{N}{2} - S_2}{f}$ (i) 的公式中所謂組距者，並非如算均數之時，每一組距均須顧到，其實這個組距專指包含 f 的組距，並非任何組距。明乎此，則計算之時，止須將含 f 之組距找

出，把他代在公式內，其他組距之大小不必計較。

在這個例子之中， $f = 10$ 而包含此 f 之組距為30-40亦等於10，試將此兩數代入公式，得下列算式及其結果。

$$(a) Md. = L + \frac{\frac{N}{2} - S_1}{f} (i)$$

$$= 30 + \frac{28.5 - 27}{10} (10)$$

$$= 30 + 1.50$$

$$= 31.50$$

$$(b) Md. = U - \frac{\frac{N}{2} - S_2}{f} (i)$$

$$= 40 - \frac{28.5 - 20}{10} (10)$$

$$= 40 - 8.5$$

$$= 31.50$$

表二十 特殊的計算法(d)

組距	次數	次數和	
50	1	1	$\text{Md.} = L + \frac{\frac{N}{2} - S_1}{f} (i)$ $= 100 + \frac{\frac{20}{2} - 8}{12} (0)$ $= 100 + \frac{10 - 8}{12} (0)$ $= 100$
60	0	1	
70	1	2	
80	2	4	
90	4	8	
100	12		
N=	20		

第四個例子的算法也很特別，因為次數的分配極不一致，若求次數之半已到極端。在次數行裏其最後十二人各得100，並不分配於任何組距內，或其組距等於零，將零代入上面之公式內，其結果則

$$\text{md.} = 100$$

表二十一 特殊的計算法(e)

組距	次數	次數和	
40	2	2	$\text{Md.} = 42 + \frac{\frac{22}{2} - 7}{6} (1)$ $= 42 + \frac{11 - 7}{6}$ $= 42 + \frac{4}{6}$ $= 42.67$
41			
42			
43			
44			
45			
46	3	7	
	2		
N=	22		

在此例子之中其算法驟視之，似不為錯，其實在這種情形之下，其材料應否用上面的公式整理，尙是問題，第一我們應當知道，以一為組距其次數中是否有小數者，若有小數，則以一為組距猶之整數之以十作組距者，其計算之法尙不為錯；若次數之中，並無小數，則僅可由第一數數至 $\frac{N}{2}$ 數即得其中數，似不必應用公式，故 $\frac{N}{2} = \frac{22}{2} = 11$ ，從第一人數至第十一人其成績為42，此42就是他們的成績中數。

上面的例子或與上面情形相同的例子，在練習統計時常常發見，非常之多不勝枚舉，我們演算之時，總宜留心，須用自己的思想，去解決這些特別問題，似不能拘於一定公式而不知變通也。

練習題

(1) 試用前章練習題內生物與史地兩種分數求中數。演算的時候用

(4) (5) 兩公式以便證驗。

i	f
5	1
10	7
15	9
20	10
30	15
40	12
50	6
75	2
100	

i	f
10	2
15	5
20	8
25	0
30	0
35	6
40	5
45	2
50	1
55	1
60	

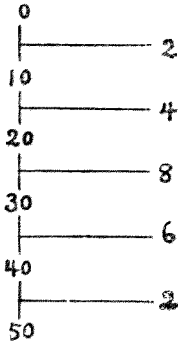
(2) 試用下列兩種材料求中數。演算的時候仍用(4)(5)兩公式。

(3) 中成績如何求法? 試舉例以明之。

(4) 根據下列材料求中數 (不用公式)。試在下列橫線上分配各組距內之次數, 並指明中數之所在。(第一組距內為 2, 繪時為



\bar{x} s^2



第六章

衆 數

20 衆數與組距的關係

衆數本無所謂統計，祇須在表上看那最大的次數，由此看到他的組距中點即得，例如在表二裏而次數之最大的是65，從這數看到他的組距中點是55，這55就是衆數。從圖上看也很明瞭，就是那高峯下面的一數。例如圖二，從其高峯往下看至橫軸上得 55，此數即是衆數。

雖然，衆數之所由定因為組距業經選好。若組距不定則衆數之大小亦成問題，因為組距變遷而曲線亦隨之變遷，曲線變遷則衆數之所在不定矣。茲試用東南大學十三年新生入學試驗之英文成績以 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 七數各作組距一次把他們列表並繪圖出來。在這成績次數表內以 2, 3, 4, 三數作組距者，我們一時看不出衆數，但看見些大大小小的數目，弄得我們糊裏糊塗，至在他們的圖上也是峯頭太多，不一而足。在以 6, 7 兩數作組距的圖上，他們的峯頭卻減少了。每一曲線之上祇有兩峯，普通稱為雙峯或雙衆(bi-modal)曲線。在以 8或9作組距的。圖上則各止有一峯，但是兩個衆數的大小不同，一是 68，一是58.5。所以衆數是由組距而定的，組距變而衆數亦變的。

不過我們把組距變小的原因是希望材料增加之後能得一理想的曲線。倘是事實上材料不能增加，而於組距變小之後，所繪的曲線峯頭

表二十二
(以二為組距)

組距	次數
26	1
28	1
30	—
32	4
34	4
36	1
38	4
40	2
42	9
44	11
46	15
48	6
50	13
52	7
54	14
56	10
58	7
60	8
62	16
64	12
66	11
68	9
70	11
72	7
74	13
76	9
78	4
80	2
82	8
84	4
86	3
88	1
90	2
92	2
94	1
96	
合計	232

表二十三
(以三為組距)

組距	次數
27	2
30	—
33	8
36	3
39	4
42	14
45	21
48	12
51	13
54	17
57	15
60	18
63	18
66	15
69	16
72	15
75	14
78	6
81	8
84	5
87	3
90	4
93	1
96	
合計	232

表二十四
(以四為組距)

組距	次數
24	1
28	1
32	8
36	5
40	11
44	26
48	19
52	21
56	17
60	24
64	23
68	20
72	20
76	13
80	10
84	7
88	3
92	3
96	
合計	232

迭起，這并不是我們的希望。總之，在普通情形之下，我們對於衆數的意義，是在適當的曲線之上，得一最多之次數，這曲線的適當與次數的最多是兩個條件。合乎這兩個條件，這衆數方有意義，至於組距之大小尚其餘事呢？

表二十五
(以六爲組距)

組 距	次 數
24	2
30	8
36	7
42	35
48	26
54	31
60	36
66	31
72	29
78	14
84	8
90	5
96	
合 計	232

表二十六
(以七爲組距)

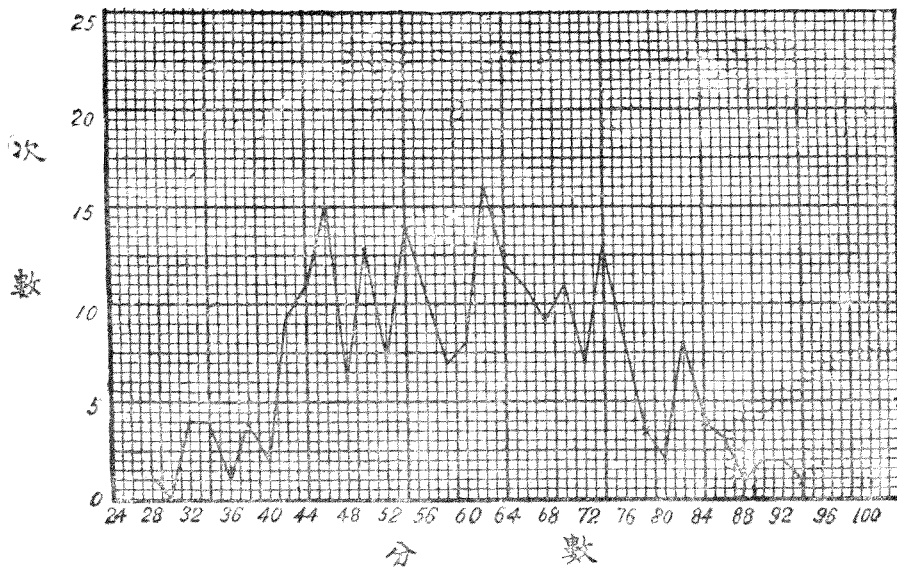
組 距	次 數
21	1
28	8
35	8
42	39
49	29
56	25
63	38
70	36
77	18
84	9
91	4
98	
合 計	232

表二十七
(以八爲組距)

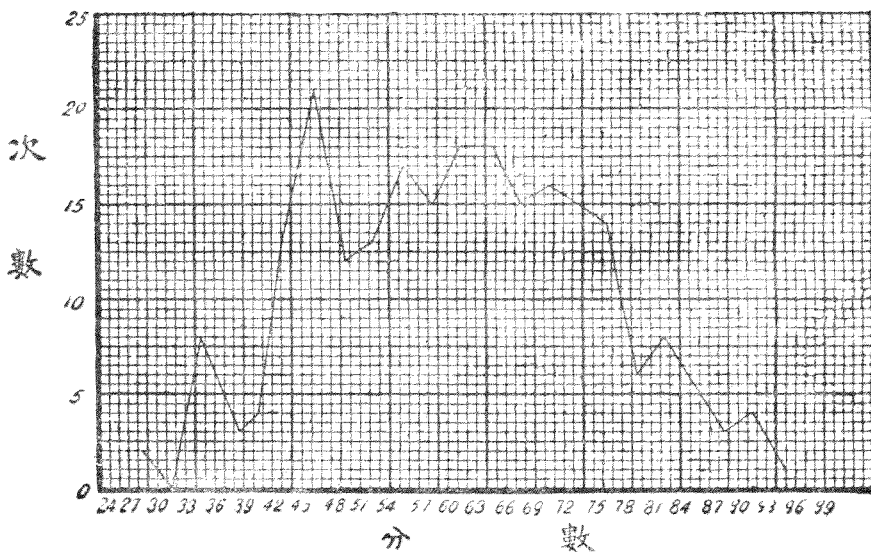
組 距	次 數
24	2
32	13
40	37
48	40
56	41
64	43
72	33
80	17
88	6
96	
合 計	232

表二十八
(以九爲組距)

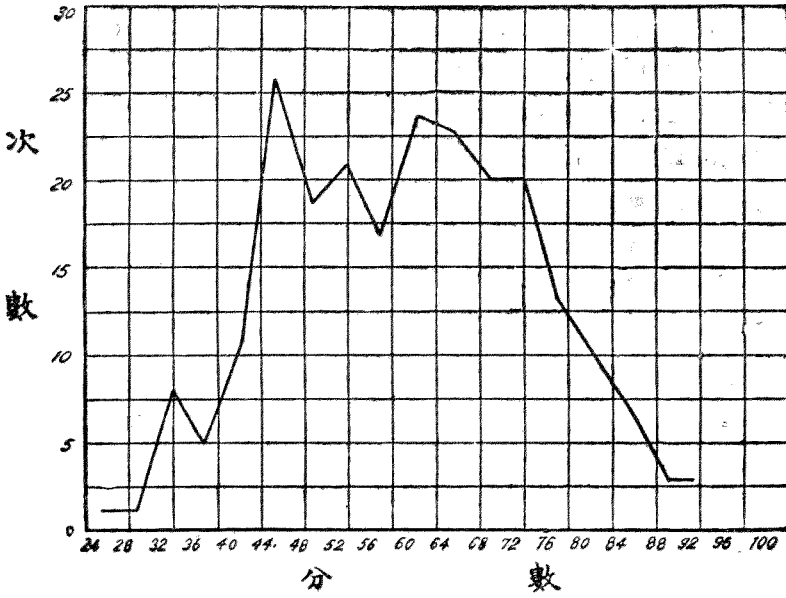
組 距	次 數
27	10
36	21
45	46
54	50
63	49
72	35
81	16
90	5
99	
合 計	232



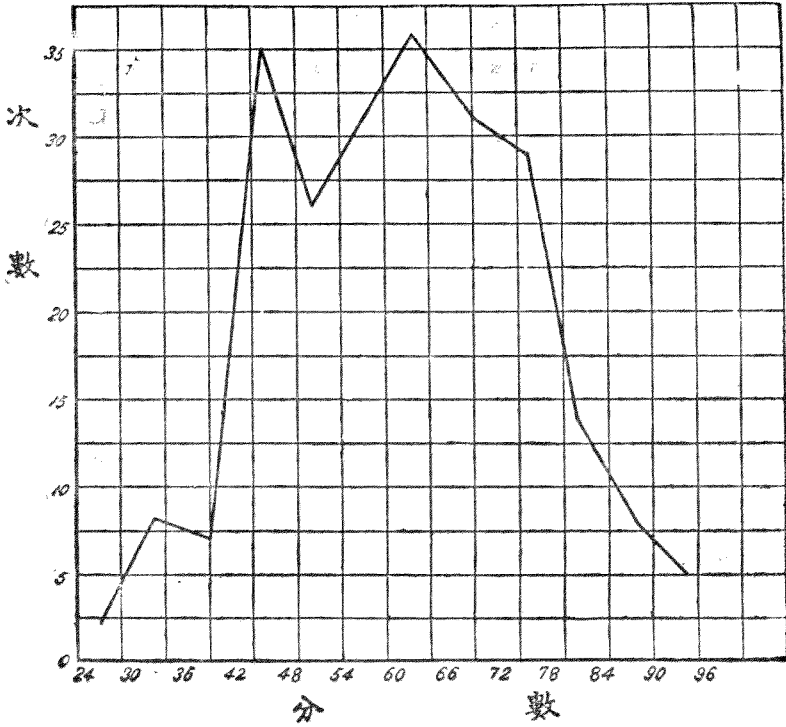
圖九 次數分配圖(以二為組距)



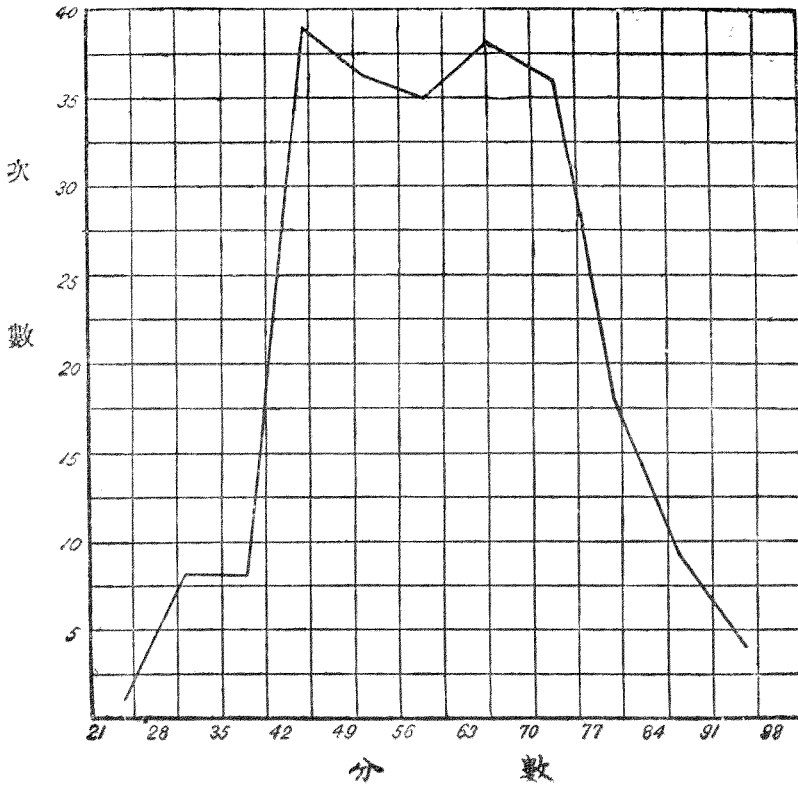
圖十 次數分配圖(以三為組距)



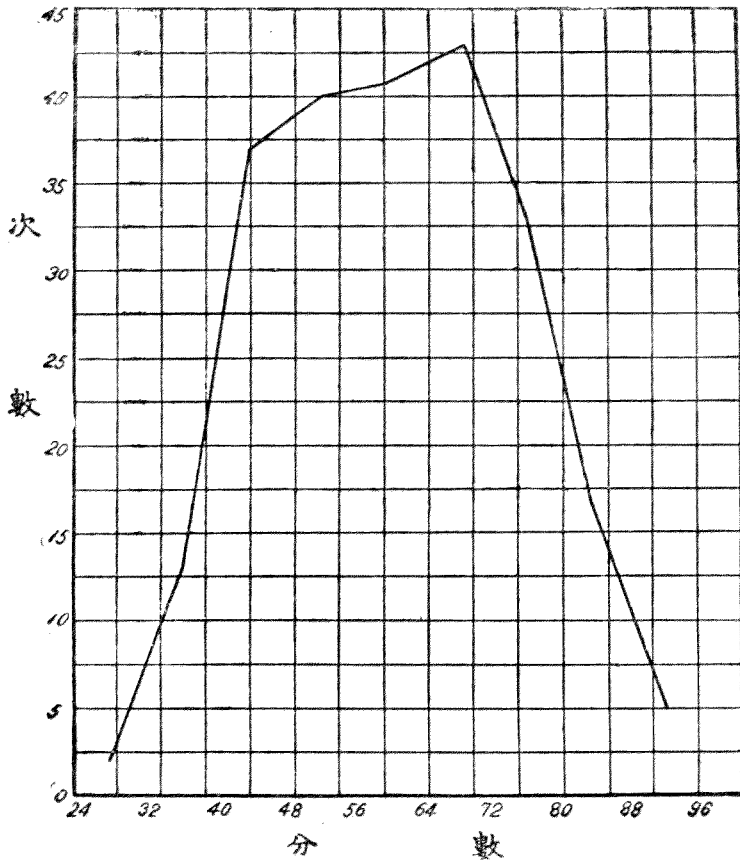
圖十一 次數分配圖 (以四爲組距)



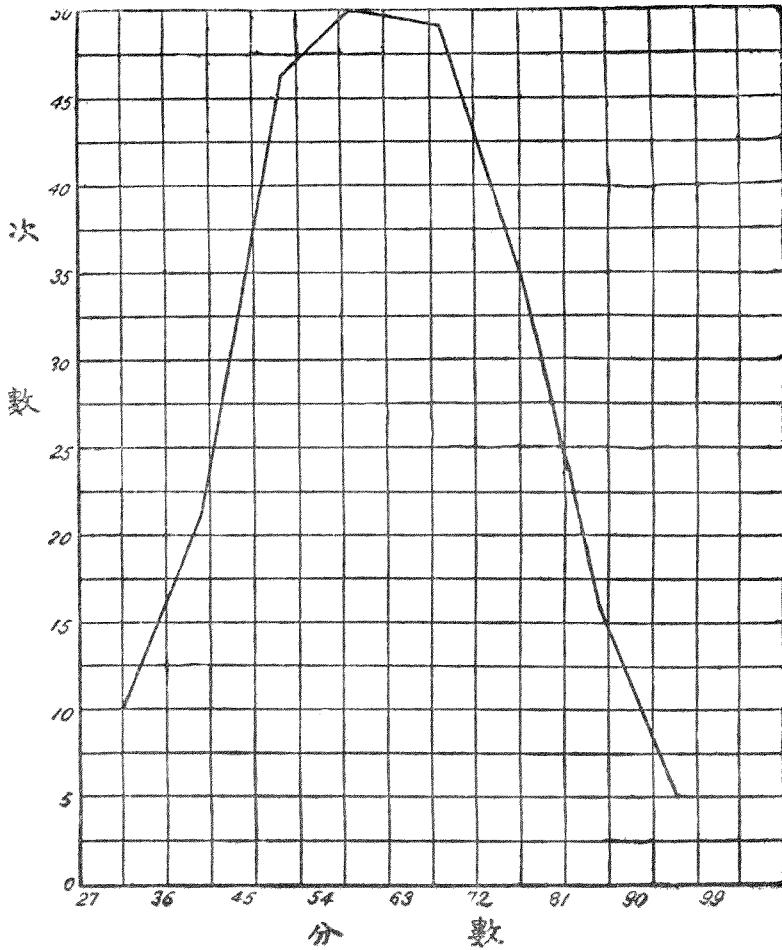
圖十二 次數分配圖 (以六為組距)



圖十三 次數分配圖 (以七為組距)



圖十四 次數分配圖 (以八為組距)



圖十五 次數分配圖 (以九爲組距)

21 衆數與均數，中數之關係

衆數，均數，和中數彼此有密切之關係。他們的關係在曲線上尤

為明顯。因為在曲線上每數有每數的地位。曲線同則此三數之地位相同，曲線不同而其地位亦隨之不同。茲試舉例如下：

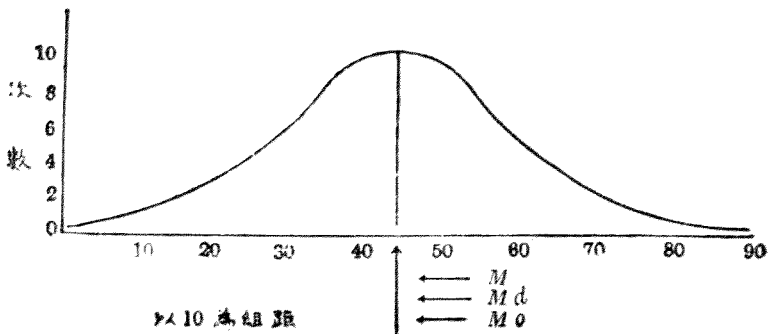
表二十九 常態分配圖中之均，中，衆三數

i 組距	X 中點	f 次數	acc. f. 次數和	fX
0				
10	5	1	1	5
20	15	2	3	30
30	25	4	7	100
40	35	8	15	280
50	45	10		450
60	55	8		440
70	65	4		260
80	75	2		150
90	85	1		85
N=		40	ΣfX=1800	

(1) $M. = \frac{\sum fx}{N} = \frac{1800}{40}$
= 45

(2) $Md. = L + \frac{\frac{N}{2} - S}{f} (i)$
= $40 + \frac{\frac{40}{2} - 15}{10} (10)$
= $40 + \frac{(20 - 15)(10)}{10}$
= 40 + 5
= 45

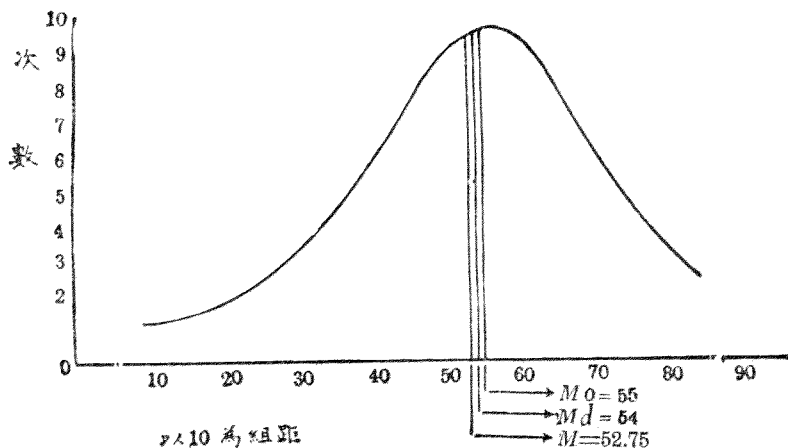
(3) $Mo. = 45$
(mo. 為衆數之代表)



圖十六 常態曲線上均，中，衆三數之地位

表三十 偏態分配中之均, 中, 衆三數(a)

i 組距	X 中點	f 次數	acc. f. 次數和	f X	
0					(1) $M_1 = \frac{\sum fx}{N}$
10	5	1	1	5	$= \frac{2110}{40}$
20	15	1	2	15	$= 52.75$
30	25	2	4	50	$\frac{N}{2} - S_1$
40	35	4	8	140	(2) $M_d = L + \frac{\frac{N}{2} - S_1}{f} (i)$
50	45	8	16	360	$\frac{40}{2} - 16$
60	55	10		550	$= 50 + \frac{4}{10} (10)$
70	65	8		520	$= 50 + 4$
80	75	4		300	$= 54$
90	85	2		170	(3) $M_o = 55$
N =		40	$\sum fX = 2110$		



圖十七 偏態曲線上均, 中, 衆三數之地位(a)

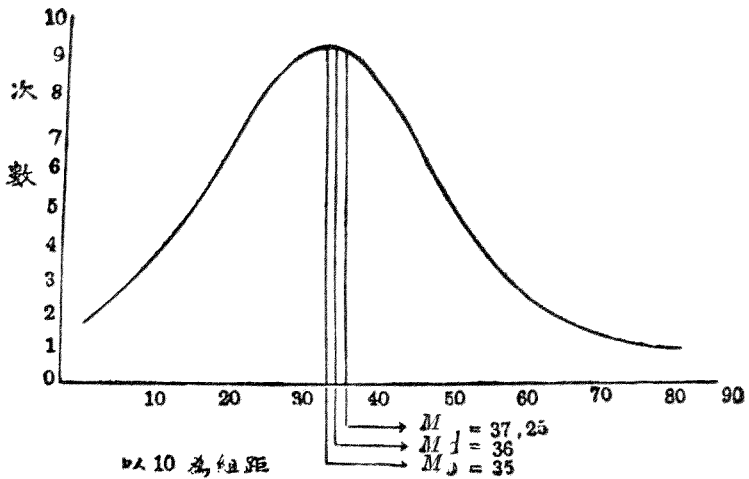
表三十一 偏態分配中之均，中，衆三數(b)

i	X	f	acc. f.	f X
0				
10	5	2	2	10
20	15	4	6	60
30	25	8	14	200
40	35	10		350
50	45	8		360
60	55	4		220
70	65	2		130
80	75	1		75
90	85	1		85
N=		40	$\Sigma fX=1490$	

(1) $M. = \frac{1490}{40}$
 $= 37,25$

(2) $Md. = 30 + \frac{6}{10}(10)$
 $= 36$

(3) $Mo. = 35$



圖十八 偏態曲線上均，中，衆三數之地位(b)

在例一裏面其均數，中數，衆數相等。他們都是 45。所以他們在圖上相聚於 45 一點。所以在這圖上他們的地位是相同的。這圖名叫常態曲線或這圖是對稱的，因為當中最高，在這例子上其數爲十，左右兩旁略低其數均爲八，再往左右又低，其數都是六，再左右是四，是二。所以這圖的兩方是對稱的。凡遇對稱的圖，或常態曲線他們的均數，中數，衆數都是相等的。

在第二個例子裏面我們一望這個圖就知道他不是對稱的。他略呈偏態。他的偏尾向左。^{*}我們通常稱他爲負的偏態圖。在這圖上關於均數，中數，衆數的地位是有一定的。從表上計算起來，均數等於 52.57，中數等於 54，衆數等於 55。衆數最大，中數次之，均數最小。凡是略傾於右的圖，都有這樣現象。

在第三個例子裏這圖也不是對稱的。但是這圖的尾不偏於左而略偏於右。我們通常稱之爲正的偏態。在這圖上關於均數，中數，衆數的地位也是有一定的。從表上計算起來，均數等於 37.25，中數等於 36，衆數等於 35。在這個例子中均數最大，中數次之，衆數最小，恰與前例相反。但是凡在略傾於左的圖上這三數的地位大致相同。

總括起來講，均數，中數，衆數在曲線上的地位是隨其曲線而變遷的。在對稱的曲線上三數相同那是毫無問題的。在稍偏（或左

^{*}照 otis 的意思，與其叫這圖偏尾向左，不如叫他偏頭向右或右傾 (skewed to the right)，因為這樣叫比較合乎字典上“skewed”的意義。作者頗贊成此說，以後對於曲線的偏態即以左傾或右傾稱之。

或右)之圖上他們的數的關係可用下列公式求出,大致不差。

$$M_0 = M - 3(M - M_d) \quad (6)$$

練習題

- (1) 試擬一次數表 (其總數不得超過五十) 並根據此表繪一對稱的圖。(就此次數分配求均, 中, 衆三數)。
- (2) 假使一圖略偏於左其次數應如何分配試舉例以明之。
- (3) 假使 $M = 82$, $M_d = 78.65$, 試求 M_0 。假使此圖繪成, 其勢傾於何方?
- (4) 假使 $M_0 = 55.00$, $M_d = 46.25$, 試求 M 。假使此圖繪成, 其勢傾於何方?
- (5) 試繪一正的偏態圖並註明均, 中, 衆三數之地位。
- (6) 試繪一負的偏態圖並註明均, 中, 衆三數之地位。

第七章

幾何均數

22 幾何級數與幾何均數

幾何均數與幾何級數有關，故講到幾何均數，當先介紹幾何級數。其實這級數我們在小代數上已曾讀過，在此間不過舊事重提，便於回憶而已。幾何級數是若干項之一連，在這一連之內，其任一項為其前一項與公比之積。例如：

- | | 公比 r | | | |
|----|---------------|---------------|-----------------|-------------------------------------|
| a. | 1 | 3 | 9 | 27..... 3 |
| b. | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ |
| c. | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{9}{4}$ $-\frac{3}{2}$ |
| d. | 5 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{5}{27}$ $\frac{1}{3}$ |
| e. | a | ar | ar ² | ar ³r |

假使我們在 a 題內，要找出這一連的第三數，我們止須找出他的前一項和他們的公比，把這兩數相乘，其積即是第三數，在這個例子中，其前一項等於3，他們的公比亦等於三， $3 \times 3 = 9$ 是為第三數。又在 c 題中，第三數的前一項等於-1他們的公比等於 $-\frac{3}{2}$ 以 $-\frac{3}{2}$ 乘-1

得 $\frac{3}{2}$ 是爲第三數。e 題是個普通例子，在這個例子之中，r 是個公比，項數往後去一個，r 即多自乘一次。

至於幾何均數我們可用下列公式求出：

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} \quad (7)$$

假使 $n=2 \quad x_1=1 \quad x_2=9$

$$M_G = \sqrt{1 \times 9} = 3$$

假使 $n=3 \quad x_1=1 \quad x_2=3 \quad x_3=9$

$$M_G = \sqrt[3]{1 \times 3 \times 9} = 3$$

幾何均數在數量過大或開方太多的時候，用普通筆算求之非常麻煩。在這個當兒，我們可用對數表。用對數的時候，他的公式如下：

$$\log M_G = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 \cdots + \log x_n}{N}$$

或 $\log M_G = \frac{\sum \log x}{N} \quad (8)$

23 學習問題上幾何均數的用處

幾何均數在教育工作上用處雖少，然在學習方面遇有成績之進步，則必須用此，而不能用其他均數以代之。例如作者於民國十七年秋用中學國文理解力測驗以比較南京女中之國文理解程度。普通測驗只測一次，即統計其結果，此次我們令讀者閱讀五遍，每讀一遍，即考察其成績一次，有這五次成績，我們可以比較其進步情形。茲用該校高一生成績作例子演算於下：

表三十二 理解成績之進步

閱讀秩序	理解之百分數	每次成績之進步	增加率
第一次	34.00		1.0000
第二次	52.00	18.00	1.5294
第三次	60.67	8.67	1.1667
第四次	69.33	8.66	1.1427
第五次	77.33	8.00	1.1154
幾何均數			1.228

從表三十二的第二行看來，那五個數代表從第一次到第五次之成績。以這些數作 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ，而代入公式，求得 M_G 。在數學的意義上和公式的應用上當無甚毛病。不過我們用這個方法，其注意點在增加率(rate of increase)。要前後各數一個作一個的根據。換句話講，我們要知道第二數是第一數的百分之幾；第三數是第二數的百分之幾，以此求下去，使前後二數，彼此發生關係。所以在這表上有增加率一行。在這裏我們把 34.00（第二行之第一數）當作一，以 34.00 除 52.00 得 1.5294；以 52.00 除 60.67 得 1.1667；以 60.67 除 69.33 得 1.1427；以 69.33 除 77.33 得 1.1154。這樣，這五個數彼此始有關係，就是 34.00 既當作一，則 52.00 為其 1.5294；60.67 為 52.00 的 1.1667；69.33 為 60.67 的 1.1427；77.33 為 69.33 的 1.1154。每一個數拿他前一個數作根據，而得一定之率。從這增加率中求得幾何均數其演算方法如下：

$$M_G = \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4}$$

$$= 1.228$$

$$\log x_1 = \log 1.5294 = .18452$$

$$\log x_2 = \log 1.1667 = .06696$$

$$\log x_3 = \log 1.1427 = .05794$$

$$\log x_4 = \log 1.1154 = .04743$$

$$4).35685$$

$$\text{antilog } .08921 = 1.228$$

從1.228減去1——原來成績或第一次成績——得 .228或22.8%。這就是四次閱讀以後，所增加的平均百分數。在此處所以用幾何均數而不用算術均數者（通常所用之平均或均數亦稱之為算術均數 arithmetic mean A. M. or m.），因為四次之進步並非獨立的。乃是各有根據的。如第二次以第一次為根據(base)，第三次以第二次為根據，第四次以第三次為根據是。茲將此種情形，列表於下：

表三十三 每次成績進步之表示

	理解之百分數	每次算術上之增加	
第一次或原來成績	34.00	34.00	$34.00 \times (1) = 34.00$
第二次	52.00	41.75	$34.00 \times (1.228) = 41.75$
第三次	60.67	51.27	$41.75 \times (1.228) = 51.27$
第四次	69.33	62.96	$51.27 \times (1.228) = 62.96$
第五次	77.33	77.31	$62.96 \times (1.228) = 77.31$

觀上列之演算，我們對於幾何均數之意義，當較明瞭。原來學習之進步，是一次與一次有關係的。有了原來之成績，經再閱一遍，於

是進步，比前者多百分之22.8，再閱一遍，又比這新成績多百分之22.8。以此連貫下去，前一次就是後一次的根據。

這是用幾何均數所求得的結果。至於實在進步，卻有每次之成績在。如第一次為34.00，第二次則為52.00，後者較前者多18.00，第三次為60.67，比第二次多8.67，第四次為69.33，比第三次多8.66，第五次為77.33，比第四次多8.00。從實在情形看起來，首次之增加最多。

在這個研究裏，我們固然有實在的結果可作參考。惟有時止有前後兩數。例如原來算術加法之成績為1，經四星期之練習，增加百分之66.15。每星期之進步情形，我們並不知道，但是我們根據這兩數，可以求出此四星期之平均進步如下：

用對數表

$$\begin{aligned}
 M_G &= \sqrt[4]{1.6615} - 1 & \log 1.6615 &= .22050 \\
 &= 1.1353 - 1 & 4 \overline{) .22050} & \\
 &= .1353 \quad \text{或} & \text{antilog } .055125 &= 1.1353 \\
 &13.53\% & &
 \end{aligned}$$

24 人口與物價的增加上幾何均數的用處

幾何均數，不專用在學習之進步上，即人口之增加，物價之增加，均非用幾何均數不可。因為人口和物價之增加，並非獨立的，乃是各有根據的。所以去年人口比前年加增百分之十五，今年人口又比去年加增百分之十三，或某物價去年比前年所買貴百分之十八，今年比去

年所買又貴百分之二十二。這些一年根據一年的問題，若要求其平均增加，都是要用幾何均數的。

計算人口增加的時候，我們往往祇有前後兩數。例如南京人口（假定的）在民國十六年四月，止有二十二萬五千人，而至民國十七年十二月，則有四十九萬八千人。問從十六年五月至十七年十二月之二十個月中，每月平均增加百分之幾？在這個當兒，我們先求 225,000 與 498,000 之百分比，如：

$$\frac{498,000}{225,000} = 2.2133$$

$$M_G = \sqrt[20]{2.2133} - 1$$

$$= 1.0405 - 1$$

$$= .0405$$

或 4.05%

$$\log 2.2133 = 0.34504 \quad \frac{0.34504}{20} = .017212$$

$$\text{antilog } .017212 = 1.0405$$

照這樣算法，我們知道前後兩數，已能求出答案。再添新數，似非必要。惟有時材料較多，除前後二數外，其中又有一數。和前例裏面，我們另有一數是南京人口在十七年二月為三十四萬五千人。在這種情形之下，我們止能分作前後兩段計算，而不能再找二十個月的平均增加了。

關於幾何均數，還有一點我們應當知道的，就是幾何均數常常小

於算術均數。在我們的例子裏所得的幾何均數等于 1.228。若用算術均數計算，則其結果等于 1.239。在這裏兩數相差雖不算大，然此種差異，非用幾何均數實無從查出。

練習題

- (1) 設有一生，練習射擊，於三個月之內，其成績增加百分之六十。問每月平均進步百分之幾？
- (2) 假定上海人口，在民國八年為一百五十二萬三千人，而在民國十八年則為二百十八萬五千人，問從九年至十八年之十年內，每年平均增加百分之幾？
- (3) 試用下列材料求均數及幾何均數（先化各成績為百分數如以上例子）並比較他們的大小。

a. 白話文理解成績

（南京女中高一學生十人）

第一次	75.50
第二次	88.50
第三次	88.00
第四次	93.00
第五次	95.00

b. 南京女中初一生十人的理解成績

	文言	語體
第一次	24.00	62.50

第二次	34.67	72.50
第三次	44.00	79.00
第四次	48.67	84.50
第五次	53.33	85.00

(4)某大學於民國八年秋間開辦，當時錄取的新生數為428，至十三年秋該校有學生九百五十四人及至十八年秋，該校學生數增至二千〇二十五人。試求其增加率並幾何均數。

第八章

調和均數

25 調和均數的意義

調和均數(harmonic mean)在統計工作上爲用並不甚廣。但是有的時候，尤其是在平均速度的時候，我們須用這個均數。我們整理這些材料，算術均數亦未嘗不可用，不過同時用這兩種方法所得的結果不能比較，此就現在情形而言，其實在調和均數未發明以前，統計家所用者固是算術均數。後來在計算上查出用算術均數的錯誤乃設法改革，想出調和均數來代替。這種錯誤的來源在計算上很不容易查出，我們可用一簡單例子演算於下：

甲乙二人各乘一小舟，行於江中，甲的氣力大，每行一里，止需五分鐘，乙的氣力小，每行一里，則需七分半鐘。兩人共行二里共需十二分半鐘，平均每里需6.25分鐘。以6.25除六十，得9.6，這是兩人平均行舟的速度，就是每一小時平均行9.6里。從另一方面算，甲行一里需五分鐘，則一小時可行十二里，乙行一里需七分半鐘，則一小時可行八里，二人平均每小時可行十里，兩種算法毫無錯誤何以在結果上一得9.6里，一得10里？每小時平均行十里，則每里平均需6分鐘，但是實際上甲與乙各行一里，共需十二分半鐘，平均爲6.25分鐘。前者既是實際情形，則錯誤必在後者。後者之所以錯誤，實因單位不

同的原故。原來以工作為單位時，則人人所做的工作相等，做完即算了事，雖有速者不能多作。若以時間為單位，則於同樣時間之內速者所做的工作較多。在這個例子裏甲每小時比乙多行二里，所以後者的平均里數比前者的多，若實際上甲乙各走一小時，或所走之時間相等，我們當然就其每小時所走里數而平均之。茲將此兩種情形演算於下：

I	II	III
每小時所行里數	每行一里所需時數	每行一里所需分數
甲 12	.0833	5
乙 8	.1250	7.5
平均 $2 \overline{)20}$	$2 \overline{).2083}$	$2 \overline{)12.5}$
10里數	.1041時數	6.25分數
$60 \div 10 = 6$	$1 \div .1041 = 9.6$ 里數	$60 \div 6.25 = 9.6$ 里數

以上三組中二三兩組之結果相同。他們都是以工作為單位的，不過第二組是求每行一里所需之時數，而第三組所求則為每里所需之分數。第二組為第一組的倒數，因為 $1 \div 12 = .0833$ ， $1 \div 8 = .1250$ 。這是一種極簡單的比例。我們把兩個倒數平均以後，得 .1041，這是每一里平均所需的時數，用這數除一得 9.6，這是每小時所行的里數。所以若以工作為單位，而要求其速度時，我們應當用第二組算法，這就是求調和均數。

26 調和均數的公式

這第二組的材料我們可用調和均數演算於下：

$$\begin{aligned}
 M_H &= \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right)} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{2} (.0833 + .1250)} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{2} (.2083)} \\
 &= \frac{1}{.1041} \\
 &= 9.6 \text{ 里數}
 \end{aligned}$$

他的普通公式是：

$$\begin{aligned}
 M_H &= \frac{1}{\frac{1}{N} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{1}{x} \right)} \quad (9)
 \end{aligned}$$

這公式的第二種寫法是：

$$\frac{1}{M_H} = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{1}{x} \right)$$

他亦可寫作

$$M_H = \frac{N}{\Sigma \left(\frac{1}{x} \right)}$$

最後一種寫法恐怕是最簡單的。次數多的時候，用之比較便當。

27 調和均數與算術均數之關係

在教育工作上用調和均數當屬於學習方面，如演算代數題或幾何題數十個（假定每題的困難度相等）而求其平均速度是。茲再用一較複雜之例子演算於下：

表三十四 均數與調和均數在應用上之分別

I	II	III	IV
	(每一問題所需時數)		(每一分鐘所做題數)
每一小時所做問題數	每一小時所做問題數的倒數	每一問題所需之分數	每一問題所需分數的倒數
12	.0833	5	.2000
10	.1000	6	.1667
8	.1250	7.5	.1333
6	.1667	10	.1000
4	.2500	15	.0667
2	.5000	30	.0333
<u>6 12</u>	<u>6 1.2250</u>	<u>6 73.5</u>	<u>6 .7000</u>
7每小時所做題數	.2042	12.25	.1167
$60 \div 7 = 8.57$	$1 \div .2042 = 4.9$	$60 \div 12.25 = 4.9$	$1 \div .1167 = 8.57$
每一問題所需分數	每一小時所做題數	每小時所做題數	每一問題所需分數
(依速度之平均算法)	(依速度之調和均數算法)	(依絕對時間的平均算法)	(依絕對時間之調和均數算法)
		Absolute times	
			$60 \div 8.57 = 7$
			每小時所做題數

在第一組裏面每小時平均為 7，這是六人每小時或在相等時間之內，平均所做的問題。至於以 7 除 60 得 8.57，這是每一問題所需之分數，這分數之求得，必須六人之中人人工作的時間相等。在第三組裏面，每做一題，平均需 12.25 分鐘。這結果之求得，必須人人各做一題，或所做題數相等。至於以 12.25 除 60 得 4.9，這是人人各做一題，或所做的題數相等時，每小時所做的題數。在第二組裏面所有的數為第一組裏面所有的數的倒數，在這裏所得的結果與第三組裏面所得的相同，因為所謂第一組的各數的倒數者，實際上就是每一問題所需的時數。所以第二組與第三組之不同是，一則以時計，一則以分計，然而在方法上，一則用調和均數，一則用算術均數。在第四組裏面所有的數為第三組的倒數，他的結果與第一組所有相同。然而求他的結果，是用調和均數的算法。這樣比較起來，我們可以明瞭調和均數與算術均數是相互的，看他們所根據的是什麼而定其用法。在求速度的時候，若是時間相等則用均數，若是工作相等，則須用調和均數；反過來說其理相同。

調和均數與算術均數的分別非常重要，因為有的時候，用算術均數所得的結果相同。若用調和均數，則其差別可以看得出來。例如練習算術題者八人，分為兩組，每組四人。第一組每小時所做題數為 2, 3, 5, 6，第二組每小時所做題數為 3, 3, 5, 5。用均數算起來，兩組結果相同，平均每小時都做四題。若用調和均數算起來則第一組的結果為 3.33，第二組的結果為 3.75，兩數相差為 .42。這差數雖不甚大，然非用調和均數則看不出來。所以在這種情形之下 調和均數

與算術均數有分別的必要。

28 次數表上調和均數的計算法

調和均數亦常就次數表而計算之。例如在表35裏面我們所有的材料是：每秒鐘讀三個字的有六人，讀四個字的有八人，讀五個字的有
 表三十五 次數表
 十人，讀六個字的有九人，讀七個字的有五人，讀八個字的有二人。我們把這些數
 表三十五 次數表
 每分鐘所讀字數 次 數
 3 6
 4 8
 5 10
 6 9
 7 5
 8 2
 ــــــــــــــــــــــــ
 N=40
 納入公式得

$$\begin{aligned}
 M_H &= \frac{40}{\frac{6}{3} + \frac{8}{4} + \frac{10}{5} + \frac{9}{6} + \frac{5}{7} + \frac{2}{8}} \\
 &= \frac{40}{2+2+2+1\frac{1}{2} + \frac{5}{7} + \frac{2}{8}} \\
 &= \frac{40}{6 + \frac{3}{2} + \frac{5}{7} + \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{40}{6 + \frac{42+20+7}{28}} \\
 &= \frac{40}{8.46} \\
 &= 4.73
 \end{aligned}$$

假使我們用均數計算，所得的結果是5.13。兩數相差為.4。大致用調和均數計算，其結果總比用均數算的小。兩數比較究竟相差多少，

須視材料中各個數相差多少，及其均數之大小而定。倘各個數的標準差與其均數比較為數很小的時候，則調和均數與均數之相差亦不甚遠。在這種情形之下，若次數很多，且有組距，用調和均數當然麻煩。為節省時間起見，我們可不用這平均的算法，而拿中數來代替，以免掉算法上的錯誤。

練習題

1. 試用下列材料求調和均數

每分鐘所做題數	次數
8	1
10	3
12	6
16	4
18	2

2. 茲有甲，乙，丙三生每人各做問題四十個，甲所需之時間為四分鐘，乙所需為五分鐘，丙所需為六分鐘。試求其平均速度（即每分鐘做題若干）。

第九章

差數

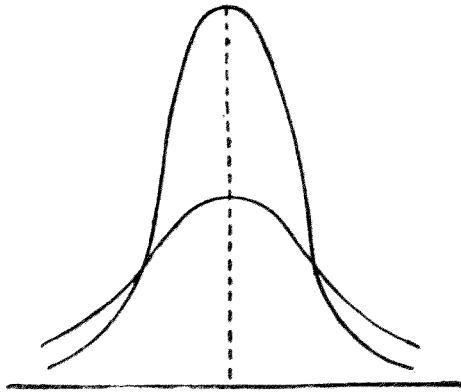
29 差數的重要

差數 (variability) 在統計學上佔重要地位。因為整理材料之時，均，中，衆等數雖能表示統計之結果，但其所表示者只限於一部分。其他結果有須用差數始能表明者。我們在此可舉一極簡單的例子：甲，乙，丙三生於試驗之後，一得四十九分，一得五十分，一得五十一分。又丁，戊，己三生於同樣試驗之後，一得十分，一得五十分，一得九十分。此兩組的成績從均，中，衆三數看起來都是五十分，無所軒輊。誰知道在各個組裏相差非常之大。我們若不設法把差數算出來，那特出之才真要埋沒了。這樣的例子在實際上固然很少，但是拿來證明兩組程度有齊有不齊，則極明顯。

假使我們舉行一種測驗在我們做統計的時候，大都把中數或均數和均差（或均方差）計算出來，並列於表中以備討論。倘幾組測驗之中，其各個均數或中數相隔甚近，而其均差或均方差則大小不一；或者如圖十九之上，兩曲線的均數或中數相等，而其分配則相隔約有兩倍。在這種情形之下，我們不得不懷疑我們所測之各組中必有程度不齊者。此種事實若果有之，我們應當忠告其學校行政當局，使之設法改進。當招考之時不宜濫收新生，而考試委員之評閱試卷，亦宜有固

定之標準。

我們在研究心理問題的時候，於幾組實驗中亦常發見其中數或均數均甚近，而其均差或均方差則有近有不近者。在這種情形之下，我們也要研究爲什麼均差之中有不近者。在此種實驗之中別的情形是否相等？至必要時，我們應當多做幾組實驗以便比較，看前後之結果，究竟孰對孰否。所以差數的統計是非常重要的。



圖十九 分配不同之兩曲線

30 兩極差

差數之中以兩極差的計算爲最簡單。例如我們有下列十個分數，我們第一步把他們從大至小（或從小至大）排列起來。

39, 52, 84, 76, 45, 99, 73, 55, 63, 94

如

次序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

分數 99 94 84 76 73 63 55 52 45 39

兩極距離 = 99 - 39

兩極差 = 60

從前有的教育統計家懶於算均數或中數，他祇把兩極差用二除之如 $60 \div 2 = 30$ ，把這結果即當作均數，這個辦法雖然方便，但是很不妥當的。因為兩極差不過是最優者與最劣者之相差。我們之所以用兩極差，也不過又看此兩者之成績。若以這差數當作均數，其全體或至受其影響，如我們所算之均數呢？這毛病至今經濟統計中尚有犯之者，此實大誤。

當材料尚未整理之時如表一所有（第十二頁），我們求兩極差，僅可就各單個分數中，找出最小與最大者如99，21二數是，從99減去21得78，這就是我們所要的兩極差。若材料已經整理，納入所劃定的組距之中，則在此統計表（參觀表二）中，99與21二數已不可復見，但見從二十起至一百止共分八個組距，其中各有次數。此統計表中既以十為組距，則最低組距之中點為25，最高者為95。這兩個中點就是我們的兩極成績， $95 - 25 = 70$ ，這70就是我們的兩極差。

用差數的目的本來是在考查各個數的分配情形。此就較精確的差數而言。至從兩極差而論分配，我們所能推測而得的卻很有限呢。例如有甲乙兩組各十二人於測驗之後，甲組的最高成績為95，最低為25，乙組的最高成績為80，最低為10。從兩極差上看這兩組的成績相等，從兩極距離上看則一為 $95 - 25$ ，一為 $80 - 10$ 。至其餘的分配如何我們試寫在下面：

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
甲組	70	65	60	55	50	45	40	35	30	28
乙組	79	75	72	70	68	65	63	60	55	50

從這十個分數看來，我們覺得用兩極差在比較上有點值得我們的注意。就是最高與次高，或最低與次低的兩數可許相離很近；如甲組25與28兩數，或在乙組80與79兩數是，但是他們也許相隔很遠，如在甲組95與70兩數，在乙組50與10兩數是。相隔很近的可不必談。若兩數相隔很遠，則多一數與少一數的關係卻很大呢！因為在乙組取出他的最高分數，這全組所受的影響還小，若在甲組取出他的最高分數，這組的兩極差卻大受影響了。

第二點我們應當注意的是：甲乙兩組的兩極差雖是一樣，而他們的各個數的分配卻不相同。從兩極距離上看，似甲組高於乙組，誰知道除那兩極的數目外在甲組裏其他十數均比乙組裏的小。這些情形若止用兩極差卻看不出來，所以兩極差在差數裏的用處實在有限。欲得較為精確的結果，我們同時須用其他差數，如二十五分值和均方差（或均差）是。

31 二十五分值或四分位數(quartiles)

二十五分值又可叫作四分之一值或四分位數，因為用這差數的意思是把材料劃分為四段，看他第四分之一，第二分之一，和第四分之三三數各是多少，又彼此相差若干。

茲用前項材料統計這些數於下。

(1) 下四分點或下二十五分値 = Q_1

$$= 40 + \frac{23}{52}(10) = 44.42$$

(2) $Q_2 = md = 50 + \frac{20}{65}(10) = 53.08$

(3) 上四分點或上二十五分値

$$= Q_3 = 60 + \frac{4}{29}(10) = 61.38$$

(4) 二十五分距 = $Q_3 - Q_1$

$$= 61.38 - 44.42 = 16.96$$

(5) 二十五分差 $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{61.38 - 44.42}{2}$$

$$= \frac{16.96}{2} = 8.48$$

(6) 上二十五分距 = $Q_3 - Q_2$

$$= 61.38 - 53.08 = 8.30$$

(7) 下二十五分距 = $Q_2 - Q_1 = 53.08 - 44.42 = 8.66$

表 36

二十五分値的計算(例一)

組距	次數	次數和
20	2	2
30	24	26
40	52	78
50	65	143
60	29	172
70	13	185
80	10	195
90	1	196
100		
	$N = 196$	
	$\frac{N}{4} = 49$	
	$\frac{N}{2} = 98$	
	$\frac{3N}{4} = 147$	

照上面的結果看起來，所謂二十五分値者，內分上下兩二十五分値，或上下兩四分點及中數，因為中數把所有的材料分為兩半，原可稱之為五十分値。在此地亦可稱之為中二十五分値，或第二二十五分値。總之所謂二十五分値者，是把所有材料分為四段，看這第四分之一， $\left(\frac{N}{4}\right)$ ，第二分之一 $\left(\frac{N}{2}\right)$ 及第四分之三 $\left(\frac{3N}{4}\right)$ 三人的成績各是多少，在此地 $Q_1 = 44.42$ ， $md = 53.08$ ， $Q_3 = 61.38$ ，上二十五分距 = 8.30，下二十五分距 = 8.66。有時學者不明次數分配的情形以為 Q_3 ，與 Q_1

既各爲上下二十五分，則其上下二十五分距應各相等，何以在此地一等於 8.30，一等於 8.66。不知此兩數之等與不等，全視曲線而定。設此曲線爲常態分配則此二數相等，例如表二十九（參觀第五十七頁）所有的次數爲一常態分配。他的中數爲45在那裏已經計算出來。我們若根據那些材料而算 Q_1 與 Q_3 則一爲33.75，一爲56.25。

$$Q_3 - md = 56.25 - 45 = 11.25$$

$$md - Q_1 = 45 - 33.75 = 11.25$$

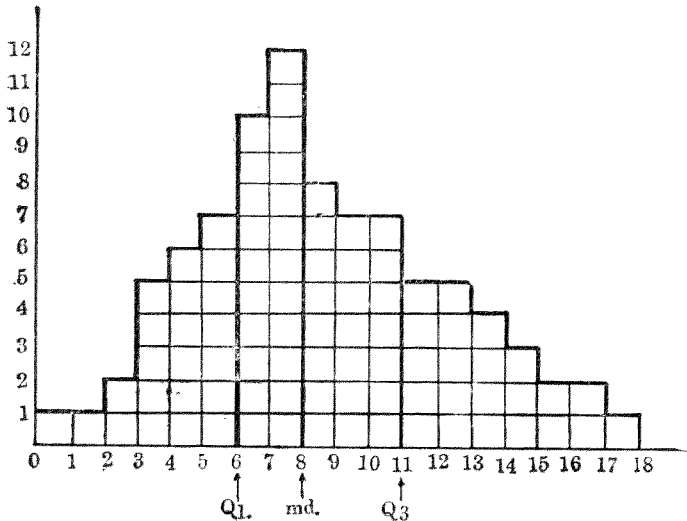
在此種情形之下所以上下兩四分距相等。若曲線不屬於常態則此兩數絕無相等之機會。在不等的情形之下，兩數相隔之遠近又視曲線之形狀而定。

在材料少，無小數，並不分組距的時候， Q_1 ， Q_3 與 md 三數嘗爲整數。例如在表三十七裏面 $Q_1=6$ ， $md=8$ ， $Q_3=11$ 是。我們若用這次數分配繪一直方圖，則每一方格代表一次數，次數等於88，故方格亦爲88。在這全圖之上以6，8，11三點各繪一垂直線迄於圖之界線則全圖被劃爲四段，從起點至六，從六至八，從八至十一，從十一至圖之終點，各爲一小圖，各佔此大圖之四分之一之次數。大圖共佔八十八格，而每一小圖佔二十二格，適當其四分之一，（圖見94頁）

在此圖上，上四分距 = $11 - 8 = 3$ ，下四分距 = $8 - 6 = 2$ ，兩數並不相等而且相差甚大，這是因爲6與8之間方格疊起較高，或曲線峯頭在此之故。從方格計算上看，從曲線的高處看，我們似更明瞭上下兩四分距所以不等之原因，而所有之普通誤會，亦可免除矣。

表三十七 二十五分值的計算(例二)

X	f	acc. f	
1	1	1	
2	1	2	
3	2	4	
4	5	9	
5	6	15	
6	7	22/	$\frac{N}{4} = 22 \quad Q_1 = 6$
7	10	32	
8	12	44/	$\frac{N}{2} = 44 \quad Md = 8$
9	8	52	
10	7	59	
11	7	66/	$\frac{3N}{4} = 66 \quad Q_3 = 11$
12	5		
13	5		
14	4		
15	3		
16	2		
17	2		
18	1		
N = 88			



圖二十 表示次數分配被劃為四段

練習題

- 試用第四章練習題內生物史地兩種成績求
 - Q_1 , Q_3 , Md
 - 上四分距, 下四分距
 - 四分距($Q_3 - Q_1$), 四分差($\frac{Q_3 - Q_1}{2}$)
- 試擬一不分組距之次數表, 並根據此次數之分配, 繪一直方圖其 Q_1 , Q_3 , Md 三數適將全圖分為四段。(注意: 圖成其形狀不可太奇特。欲免除此種困難次數宜少, 至多不得超過一百)。
- 試用同樣的材料, 求兩極差及兩極距離。
- 試在同樣的材料中, 用求 Q_1 與 Q_3 的方法, 求百分之十與百分

之九十兩點，並求這兩點之相差。（百分之十與百分之九十之相差在英文爲“the 10—90 percentile range”。這用法是 Kelley 建議的。他以爲用這方法既可免掉用兩極差的弊，而比二十五分差也要好些，因爲在這距離中，包括的材料多些。）

第十章

均差

32 簡單差數的平均

在材料不多並無組距的時候，均差的計算非常簡單。在此種情形之下，我們先求各數之均數，次求各個數與此均數之相差，就此相差而平均之，其結果即是均差。茲舉例於下。

X	4	6	7	9	12	15	17	21	23	26
d	10	8	7	5	2	1	3	7	9	12
ΣX	= 140					Σd	= 64			
N	= 10					N	= 10			
M_x	$= \frac{\Sigma X}{N} = \frac{140}{10} = 14$					M_d	$= \frac{64}{10} = 6.4$			

在這個例子之中， M_x 為 X 數列之均數， M_d 為其均差。均差在英文為 mean deviation，故其簡捷寫法亦可作為 M, D。

這種簡單例子嘗見於心理學實驗室裏工作報告之上。習練純熟的研究者，對於這簡單的工作，欲求結果，一轉瞬間珠算即得。即初學者對此恐亦無甚困難。

33 均差之普通公式

所謂 X 數列，就普通性質而論本係 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ，在各個數與均數之相差方面，亦有 d 之一數列，如 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ 是。我們知道

$$d_1 = X_1 - M, \quad d_2 = X_2 - M,$$

$$d_3 = X_3 - M \dots \dots d_n = X_n - M,$$

用普通公式表示出來，

$$\begin{aligned} M.D. &= \frac{d_1 + d_2 + d_3 \dots \dots + d_n}{N} \\ &= \frac{(X_1 - M) + (X_2 - M) + (X_3 - M) \dots \dots + (X_n - M)}{N} \\ &= \frac{\Sigma(X - M)}{N} \end{aligned}$$

在有次數的時候 $M.D. = \frac{\Sigma f(X - M)}{N}$ (10)

或 $\frac{\Sigma fd}{N}$ (11)

此數公式中當以最後一個為最簡單。我們在明瞭 $d = (X - M)$ 之後，自當應用此公式以省時間。

34 複雜差數的平均

我們統計均差的時候，若遇材料過多且有次數，我們當然劃分組距，希望就此複雜之情形，弄得很清楚而有秩序。茲用三個方法，演算幾個例子於下，以備比較的討論。

表三十八 均差的計算(第一法)

i 組距	X 中點	f 次數	d 差數	f d (次數)(差數)
25	27.5	2	33.47	66.94
30	32.5	7	28.47	199.29
35	37.5	6	23.47	140.82
40	42.5	16	18.47	295.52
45	47.5	27	13.47	363.69
50	52.5	29	8.47	245.63
55	57.5	22	3.47	76.34
60	62.5	29	1.53	44.37
65	67.5	27	6.53	176.31
70	72.5	26	11.53	299.78
75	77.5	18	16.53	297.54
80	82.5	14	21.53	301.42
85	87.5	4	26.53	106.12
90	92.5	4	31.53	126.12
95	97.5	1	36.53	36.53
100				
M=60.97		N=232	Σfd=2,776.42	

$$\begin{aligned}
 \text{M.D.} &= \frac{\Sigma fd}{N} \\
 &= \frac{2,776.42}{232} \\
 &= 11.97//
 \end{aligned}$$

用這個方法公式極其簡單，頗便於記憶。這與算均數的第一法相同，不過一則為X數列，一則為d數列而已。但是用這個方法計算起來非常麻煩，數目太多而太大的時候，尤其麻煩。在這個當兒，我們也要採取一種簡捷方法，像算均數的第三方法一樣。在第二個例子中我們就要如此辦了。

在用第二法演算以前，我們還有一句話講，就是求均差的時候，所求各數之相差的根據用均數可，用中數亦可。在實際上用均數的很多；但是從統計學的理論上講，環中數的均差要算最小。這最小的理論，與我們對於他的實驗研究，留待後面敘述。在現在我們不妨根據這均，中兩數各求一均差以資比較。

表三十九 均差的計算(第二法 a)

i 組距	X 中點	f 次 數	d'	fd'
25	27.5	2	-7	14
30	32.5	7	-6	42
35	37.5	6	-5	30
40	42.5	16	-4	64
45	47.5	27	-3	81
50	52.5	29	-2	58
55	57.5	22	-1	22
60	62.5	20	0	
65	67.5	27	1	27
70	72.5	26	2	52
75	77.5	18	3	54
80	82.5	14	4	56
85	87.5	4	5	20
90	92.5	4	6	24
95	97.5	1	7	7
100				

M=60.97 Md=61.21 N=232 $\Sigma fd' = 551$

$$C = \frac{T.M. - A.M.}{i}$$

或 $\frac{T.Md - A.Md}{i}$

$$M.D. = \frac{\Sigma fd' + C(N_a - N_b)}{N} \quad (i)$$

(1) 環均數之均差

$$C = \frac{60.97 - 62.5}{5} = -.306$$

$$(N_a - N_b) = 109 - 123 = -14$$

$$M.D. = \frac{551 + (-.306)(-14)}{232} \quad (5)$$

$$(M) = \frac{551 + 4.284}{232} \quad (5)$$

$$= \frac{555.284}{232} \quad (5)$$

$$= \frac{2,776.42}{232} = 11.97//$$

(2) 環中數之均差

$$C = \frac{61.21 - 62.5}{5} = -.258$$

$$M.D. = \frac{551 + (-.258)(-14)}{232} \quad (5)$$

$$(Md) = \frac{(551 + 3.612)5}{232}$$

$$= \frac{2,773.06}{232} = 11.95//$$

在這表裏我們所以用 d' 而不用 d 者，因為在第一個例子裏， d 曾代表各個數與真正均數 (true mean 或簡稱之為 T.M.) 之相差。此次用簡捷法，其中有假設均數 (assumed mean 或 A. M.) 或假設中數 (assumed median 或 A. Md)。這 d' 就是代表各個數與假設均數或中數之相差者。

我們用簡捷法有假設中數，當亦有校正數，俾在得最後結果之先以校正之。此校正數用下列公式可以獲得：

$$C = \frac{T. M. - A. M.}{i} \quad \text{或}$$

$$= \frac{T. Md - A. Md}{i}$$

用簡捷法求均差的整個公式為

$$M. D. = \frac{\Sigma fd' + C(N_a - N_b)}{N} \quad (i) \quad (12)$$

所謂 N_a 與 N_b 在表上可以看見。 N_a 代表比真正均數或中數小的各次數 (在表上為上段所有之次數) 之和， N_b 代表比真正均數或中數大的各次數 (在表上為下段所有之次數) 之和。上面之校正數公式就 N_a 與 N_b 兩數相等而言。若實際上 N_a 與 N_b 並不相等，即應並此而校正之。故校正數的全部應為 $C(N_a - N_b)$ 。在我們的例子之中， $N_a = 109$ ， $N_b = 123$ 。在環均數之均差上，全部校正數為 $(-.306)(-14) = 4.284$ ，在環中數之均差上全部校正數為 $(-.258)(-14) = 3.612$ 。從結果上看，環均數之均差為 11.97，環中數之均差為 11.95。兩相比較，前者大於後者，但是為數極小。從理論上講，環中數之均差應是最小，

所以前者總是大於後者。不過這結果之求得，也視方法而定。用第一第二兩法難免例外，此點俟在本章後面根據實驗以證明之。至此間尙有一句話要說，即用第一第二兩法，所得結果相同，因為這兩個方法不過一繁一簡，並非性質有所不同，學者應注意之。

表四十 均差的計算(第二法 b)

組 距	中 點	次 數	d'	fd'
0	47.5	1	-9	9
5		3	-8	24
10		8	-7	56
15		11	-6	66
20		13	-5	65
25		15	-4	60
30		17	-3	51
35		19	-2	38
40		21	-1	21
45		25	0	
50		23	1	23
55		20	2	40
60		18	3	54
65		16	4	64
70		14	5	70
75		12	6	72
80		10	7	70
85		5	8	40
90		2	9	18
95		1	10	10
100				
		N=254	fd'=851	

在第二法之(b)例子之中，關於計算的原則，與 a 例並無不同之處。不過此間所有的 假設中數小於真正中數。而在前例之中，則真正中數小於假設中數。茲試就公式上各字母代數而演算之於下。

$$T. Md = 48.8, \quad A. Md = 47.5$$

$$\begin{aligned} (I) \quad C &= \frac{T. Md. - A. Md.}{\text{組距}} \\ &= \frac{48.8 - 47.5}{5} \\ &= \frac{1.3}{5} = .26// \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (II) \quad C(N_a - N_b) &= .26(133 - 121) \\ &= .26(12) = 3.12// \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (III) \quad M. D. &= \frac{\Sigma fd' + C(N_a - N_b)}{N} \quad (\text{組距}) \\ &= \frac{851 + 3.12}{254} \quad (5) \\ &= \frac{4,270.60}{254} \\ &= 16.81// \end{aligned}$$

在(a)(b)兩例子之中，我們觀察一下，對於第二法可以明瞭。當練習的時候，我們應當注意下列幾點：

1. d' 數列中之各數，在零以下者，既是負數，至乘次數的時候，此種負號應仍保存。但是實際上此負號並未保存。此點在數理上似說

不過去——這就是均差統計的缺點——不過從事實上講，我們所求的是各數與中數之相差，加各差數而平均之，是為均差。至於負號在數理上雖維持。在此種情形之下，似無維持之必要，即維持之，亦無甚意義，因為正負兩號相消以後，所餘有幾（根據均數的當等於零）。這豈是我們求均差的本意嗎？

2. 第二點我們應當注意的是： d' 數列中在零以下之各數，雖不計負號，但是校正數(c)之號或正或負，則應維持。在(a)例之中，真正中數小於假設中數，故校正數為負號；在(b)例之中真正中數大於假設中數，故校正數為正號。其實就校正數全部—— $C(N_a - N_b)$ 而論，其結果總是加在 $\Sigma fd'$ 之上。如在(a)例之(c)為負號時而 $(N_a - N_b)$ 亦為負號，兩數相乘，仍是正號，所以校正數之全部總是加在 $\Sigma fd'$ 之上的。這一點在羅格(Rugg)的 *Statistical methods applied to Education* 一書上解釋得非常詳盡，請讀者參閱該書可也。

3. 猶憶計算均數之時，若用簡捷法，其假設均數可置於任何組距之內，而不礙其結果。現在我們計算均差，從數理上講，似可一仍舊貫，俾有伸縮之餘地。但是理論上雖如此，而實際上若選擇的假設中數與真正中數相隔太遠，則計算之時，非常麻煩。將假設中數置於任何組距之內的辦法，似未有嘗試之者。就事實而言，我們所假設之中數須在含有真正中數之組距內。在(a)(b)兩例之中即是如此。學者須注意之。

4. 第二計算法用之者有 G. L. Yule, Secrist, O. H. Rugg, 諸統計學家。嚴格講起來，此法不盡正確；因為他們所假定的為每組

距中之次數分配均勻。職是之故，所以把各組距的中點拿來代表其次數。他們的誤點不在他們之假定，而在他們未實行其假定。各組距之次數既平均分配，自應用其中點。此就不包含真正中數及假設中數而言。至包含此兩中數之組距內，應照次數分配平均計算，不能用他的中數作其次數之代表。職是之故，所以校正數應有兩部分，一為 $C(N_a - N_b)$ ，一為 $(.25 + C^2)N_i$ 故其全部公式為

$$M. D. = \frac{\Sigma fd' + C(N_a - N_b) + (.25 + C^2)N_i}{N} (\text{組距}) \quad (13)$$

在此地 N_i 代表含有假設中數之組距的次數， N_a 代表這組距以下的（在表上為上段）各組距內之次數和， N_b 代表這組距以上的（在表上為下段）各組距內之次數和。

茲試用 (b) 例的材料，演算此公式於下。俟答案求出之後，再行加以解釋可也。

$$(I) \quad C = \frac{T. Md - A. Md}{\text{組距}} = \frac{48.8 - 47.5}{5} = \frac{1.3}{5} = .26$$

$$\begin{aligned} (II) \quad C(N_a - N_b) &= \frac{T. Md - A. Md}{\text{組距}} (N_a - N_b) \\ &= \frac{48.8 - 47.5}{5} (108 - 121) \\ &= \frac{(1.3)(-13)}{5} = -\frac{16.9}{5} = -3.38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (III) \quad (.25 + C^2)N_i &= \left[.25 + \left(\frac{1.3}{5}\right)^2 \right] 25 \\ &= \left(.25 + \frac{1.69}{25} \right) 25 = 6.25 + 1.69 = 7.94 \end{aligned}$$

表四十一 均差的計算(第三法)

組距	中點	f	d'	fd'
0	47.5	1	-9	9
5		3	-8	24
10		8	-7	56
15		11	-6	66
20		13	-5	65
25		15	-4	60
30		17	-3	51
35		19	-2	38
40		21	-1	21
45		25	0	
50		23	1	23
55		20	2	40
60		18	3	54
65		16	4	64
70		14	5	70
75		12	6	72
80		10	7	70
85		5	8	40
90		2	9	18
95		1	10	10
100				

$\left. \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 11 \\ 13 \\ 15 \\ 17 \\ 19 \\ 21 \end{matrix} \right\} N_a^{108}$

$\left. \begin{matrix} 25 \\ 23 \\ 20 \\ 18 \\ 16 \\ 14 \\ 12 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} N_b^{121}$

$\left. \begin{matrix} 254 \\ 851 \end{matrix} \right\}$

$$\begin{aligned}
 \text{(IV)} \quad M. D. &= \frac{\sum fd' + C(N_a - N_b) + (.25 + C^2) N_1}{N} \text{ (組距)} \\
 &= \frac{851 - 3.88 + 7.94}{254} \text{ (5)} \\
 &= \frac{855.56 \text{ (5)}}{254} = \frac{4,277.8}{254} = 16.84
 \end{aligned}$$

此公式很易解釋。我們既假定每一組距內之次數分配均勻，則含有真正中數之組距內的次數當亦分配均勻。在這個例子之中真正中數為 48.8，其組距當為 45—49.99。此組距之內其次數為 25，我們用 N_1 來代表他。這 25 人的分數既均勻的分配於 45—49.99 之內，則真正中數之上下兩段，* 各有其一部分之分配。 $(.5 + C) N_1$ 為其下段之分配而 $(.5 - C) N_1$ 則為其上段之分配。我們要求這兩段的差數，可將 $(.5 + C)$ 與 $(.5 - C)$ 兩數各平均一下而以此兩數各乘一數—— $(.5 + C) N_1$ 及 $(.5 - C) N_1$ ——這樣，我們所求出之結果即是本組距內各數與真正中數相差之總和。茲試演算於下：

$(.5 + C) N_1 = (45 - 49.99)$ 組距內真正中數以下之一段次數

$$\frac{(.5 + C)}{2} = \text{下段各數與真正中數相差的平均,}$$

$$\frac{(.5 + C)}{2} (.5 + C) N_1 = \text{下段各數與真正中數相差的總和,}$$

$(.5 - C) N_1 = (45 - 49.99)$ 組距內真正中數以上之一段次數，

*此間上段就含有真正中數的組距內大於真正中數的各數而言，所謂下段即此組距內小於真正中數的各數。試參觀圖二十二 a 較易明瞭。

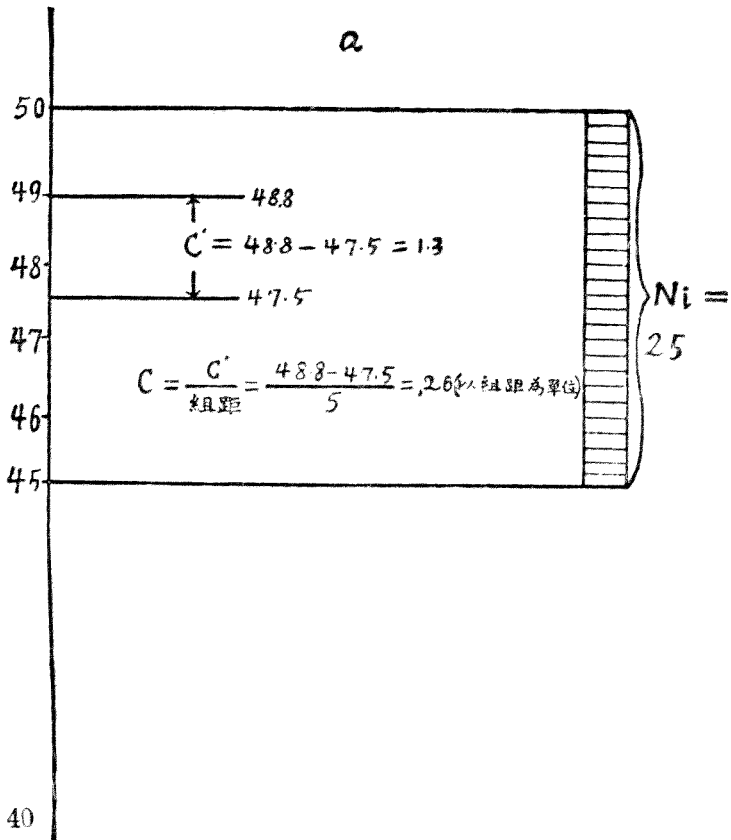
$\frac{(.5-C)}{2}$ = 上段各數與真正中數相差的平均,

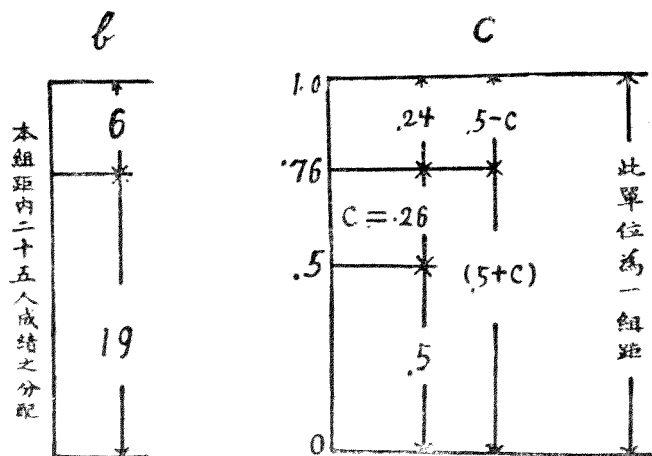
$\frac{(.5-C)}{2} \cdot (.5-C) N_i$ = 上段各數與真正中數相差的總和,

$\frac{(.5+C)^2 N_i}{2} + \frac{(.5-C)^2 N_i}{2} = \frac{[(.25 + C + C^2) + (.25 - C + C^2)] N_i}{2}$

上下兩段各數與真正中數相差的總和.

$$= \frac{(.5 + 2C^2) N_i}{2} = (.25 + C^2) N_i$$





圖二十一 均差計算的解剖

所以在新公式裏多 $(.25 + C^2)N_i$ 一段，意思是矯第二法裏面 (a) (b) 兩例之弊的，就是我們既經假定各組距內次數分配均勻，則應實行之，所以我們應當把 $(.25 + C^2)N_i$ 一段加在公式之內，始算履行了這個假定。

以上之解釋在代數式方面可謂詳盡，初學者稍加研究似無不明瞭之處。茲為便利閱者起見，再用圖形解釋之，或者將使之更覺明瞭，而不發生問題也。

在圖二十一 a 部之上有一極長之縱線代表 40 至 50 的兩個組距，其中以 45 至 50 一組距表示得最為明顯，因為真正中數和假設中數均在裏面。真正中數等於 48.8，假設中數等於 47.5。從真正中數減去假設中數其結果等於 1.3。這是圖上 C' 一段。

現在以組距除 C' 得 .26。這是 C 即校正數以組距為單位的。照組

距的理論上講，含有真正中數及假設中數之組距為 45—49.99 絕對不能達到 50，因為達到 50，就是達到了 50—54.99 的一組距。所以 45—49.99 裏面 25 人之成績分配應如圖上所示，不能達到 50。

從圖二十一之 C 部上看 45—49.99 一組距成爲一個單位。在此圖上 45 一點成爲零點，47.5 成爲 .5，50 成爲 1.0。C 等於 .26 的一段也看得清楚。所以

$$(.5 + C) = (.5 + .26) = .76$$

$$(.5 - C) = (.5 - .26) = .24$$

在 b 部上 $(.5 + C)N_1 = .76 \times 25 = 19$

$$(.5 - C)N_1 = .24 \times 25 = 6$$

下段差數之平均爲 $\frac{(.5 + C)}{2} = \frac{.5 + .26}{2} = \frac{.76}{2} = .38$

上段差數之平均爲 $\frac{(.5 - C)}{2} = \frac{.5 - .26}{2} = \frac{.24}{2} = .12$

所以 $\frac{(.5 + C)}{2} (.5 + C)N_1 = .38(19) = 7.22$

$$\frac{(.5 - C)}{2} (.5 - C)N_1 = .12(6) = .72$$

所以 $\frac{(.5 + C)(.5 + C)N_1}{2} + \frac{(.5 - C)(.5 - C)N_1}{2}$

$$= \frac{N_1}{2} [(.5 + C)^2 + (.5 - C)^2] = (.25 + C^2)N_1$$

或 $7.22 + .72 = 7.94 //$

35 環中數求均差的實驗研究

求均差的時候環均數可，環中數亦可，上面已經講過。在實際上雖常環均數而求均差，但是在理論上環中數的均差為比較的適宜，因為這個均差要算最小。關於這最小的理論在 Yule, Kelley 及 Jones 的書上均有證明。茲根據 Kelley 的公式把他的代表字母略為變通引申於下。

現在以 d 為環中數的差數

$$\therefore M. D._{M.d} = \frac{\sum d}{N}$$

又以 d' 為環分配圖的橫軸上任何點 P 的差數，在橫軸上這 P 與中數的距離為 Δ 這距離小於一個組距。

以 N 為總次數， N_a 為小於 P 的各數的次數

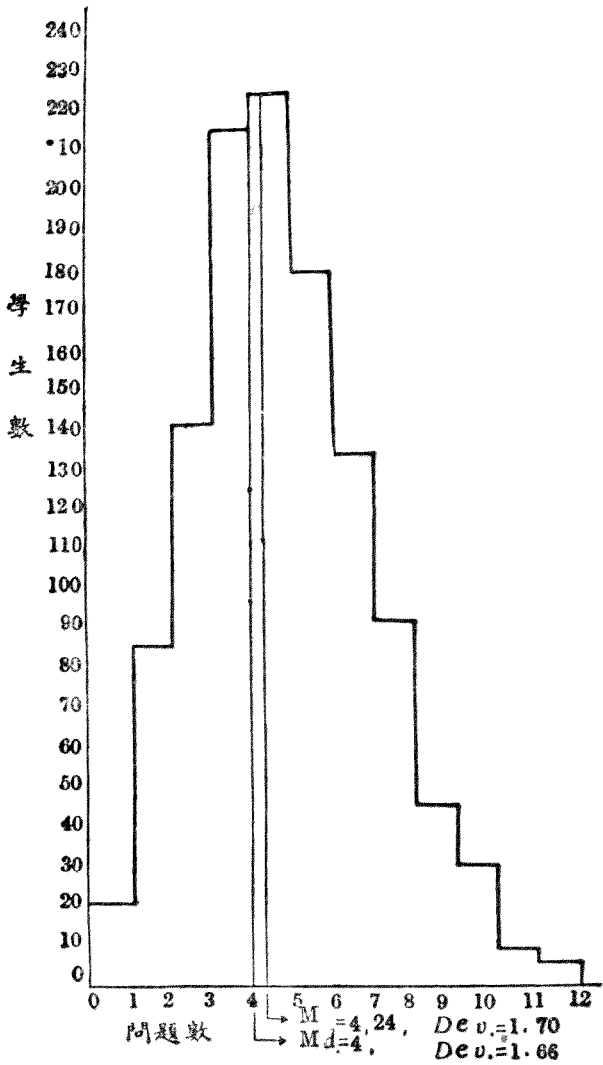
$$\begin{aligned} \therefore M. D._{p} &= \frac{\sum d'}{N} = \frac{\sum d + \{N_a - (N - N_a)\}\Delta}{N} \\ &= \frac{\sum d + N_a\Delta - (N - N_a)\Delta}{N} \end{aligned}$$

假使 Δ 是正號，則在橫軸上 P 立於中數之右，而 $N_a > (N - N_a)$

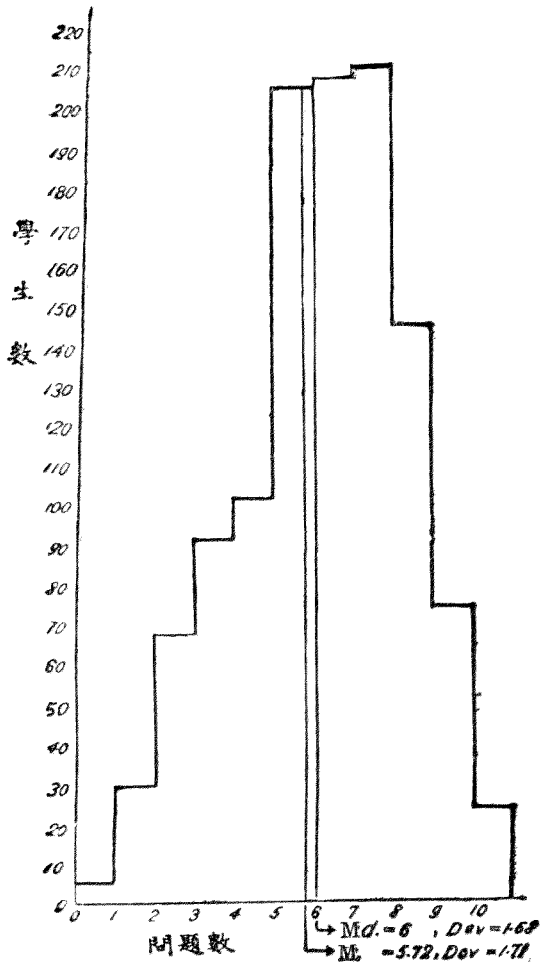
$$\therefore M. D._{p} = \frac{\sum d}{N} + (\text{正數})，\text{因為 } N_a\Delta - (N - N_a)\Delta = \text{正數}。$$

假使 Δ 是負號，則在橫軸上 P 立於中數之左而 $N_a < (N - N_a)$ ，此時 $N_a\Delta - (N - N_a)\Delta$ 仍等於正數。

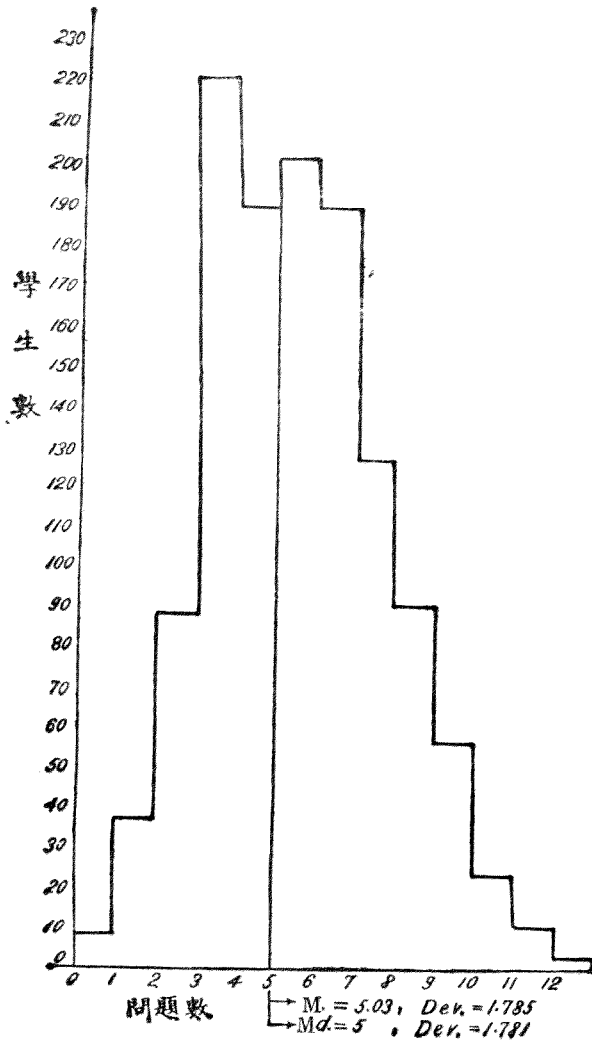
$$\therefore M. D._{p} = \frac{\sum d}{N} + (\text{正數})。$$



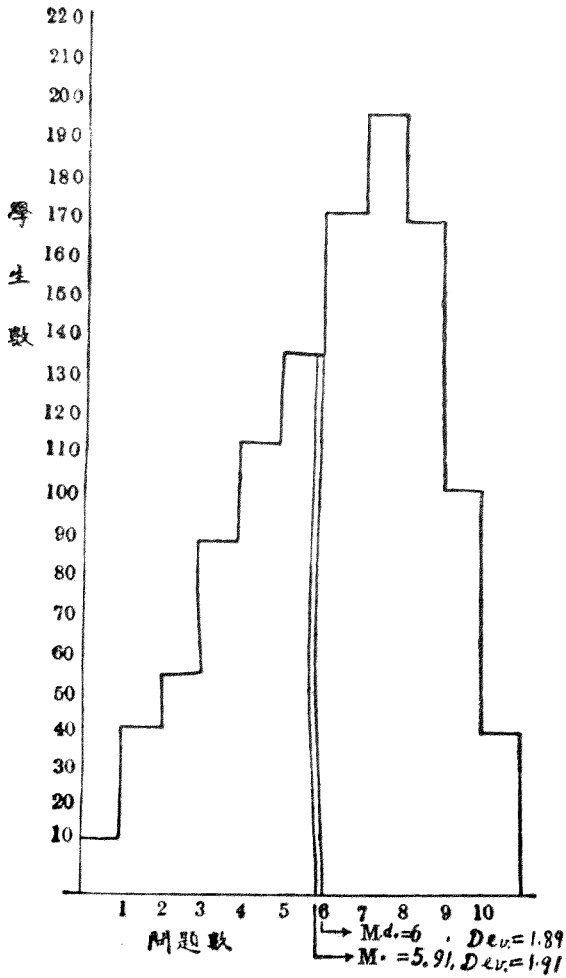
圖二十二 初中一年級文言文成績



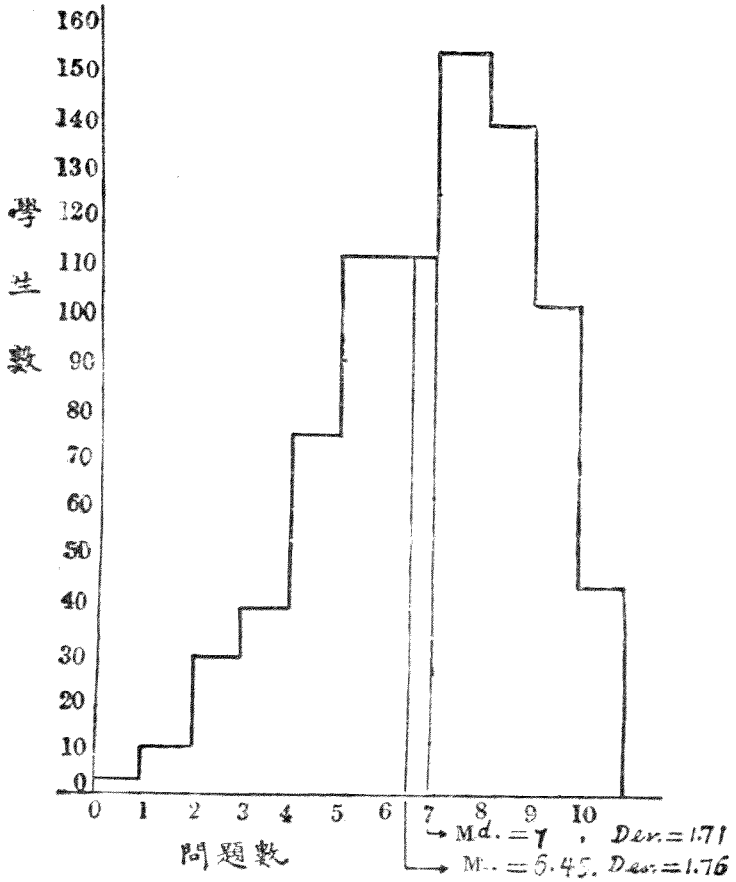
圖二十三 初中一年級白話文成績



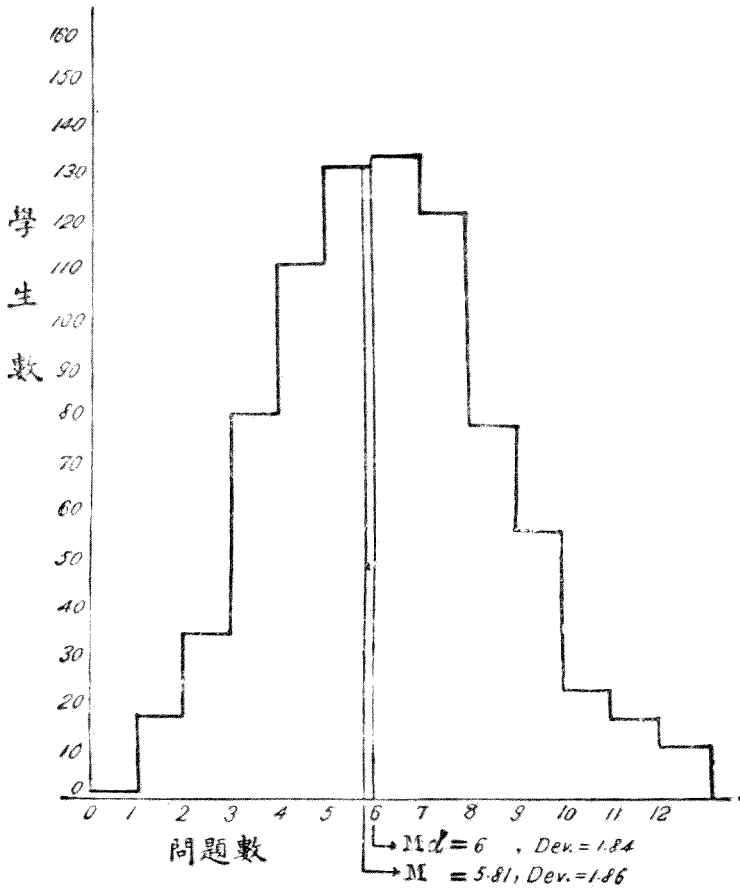
圖二十四 初中二年級文藝文成績



圖二十五 初中二年級白話文成績



圖二十六 初中三年級白話文成績



圖二十七 初中三年級文言文成績

所以 P 點無論大於或小於中數，環他的均差總大於環中數的均差。職是之故，所以後者的均差要算最小。

理論如此，我們用實際的例子也可以證明他。茲根據作者所測驗之初中三級國文成績繪圖以明之。這成績各分文言白話兩種。在初三

文言文方面其成績中數為6，均數為5.81，中數大於均數。在均差方面前者為1.84後者為1.86，環中數的比較的小。

在初三白話文方面其成績中數為7，均數為6.45，中數亦大於均數。在均差方面前者為1.71，後者為1.76，亦是環中數的均差比較的小。在初一初二兩級文言文方面都是均數大於中數，但是在均差方面仍是環中數的比較的小。又初一初二兩級白話文方面與初三兩種結果相同，即兩中數均比較的大於那兩均數，但是環中數的均差均比較的小。從這些實際情形看來，似可證實那理論。但是計算的方法用得不同，還能見到例外。上面的結果是用第一法或第二法算出來的。在這兩個方法裏即有例外發生，茲演算於下。

表四十二 環中數與環均數的兩均差之比較(用第二法)

組距	中點	次數	d'	fd'	
20					(1)環均數之均差
30	25	2	-3	6	$C = \frac{54.13 - 55.00}{10} = -.087$
40	35	24	-2	48	M.D. = $\frac{\sum fd' + C(N_a - N_b)}{N}$ (1)
50	45	52	-1	52	(M)
60	55	65	0		$= \frac{195 + (-.087)(78 - 118)}{196}$ (10)
70	65	29	1	29	$= \frac{195 + 3.48}{196} (10) = 10.13 //$
80	75	13	2	26	(2)環中數之均差
90	85	10	3	30	$C = \frac{53.08 - 55.00}{10} = -.192$
100	95	1	4	4	$= \frac{195 + (-.192)(78 - 118)}{196}$ (10)
					$= \frac{195 + 7.680}{196} (10) = 10.34 //$
M = 54.13		N = 196		$\sum fd' = 195$	
Md. = 53.08					

在這表上環中數之均差等於10.34，環均數之均差等於10.13。前者大於後者，似與數學的理論不符。其實這是方法的關係，並非真正例外。茲試用第三法演算這材料於下。（見120頁）

在用第三法的時候，材料雖是相同而結果卻已變遷。在這裏環均數的均差等於10.69，環中數的均差等於10.66。這結果是合乎理論的。我們知道在用第二法的時候，在環均數的均差方面其校正數為34.80，在環中數的均差方面其校正為76.80，後者的校正數比較的大，所以在總結果上環中數的均差比較的大了。在用第三法的時候，在環均數的均差方面其校正數為145.67，在環中數的均差方面其校正數為138.46，後者的校正數比較的小，所以在總結果上環中數的均差要比較的小了。所以這或大或小的關鍵完全在校正數上。在兩個方法裏校正數之所以不同，其原因在次數分配均勻的假定履行與否。原來含有真正中數的組距內的次數若不假定其分配均勻，則環中數的均差要不能算是最小。這樣看起來，環中數而求均差仍以用第三法為宜；否則在數學的理論上就說不過去了。茲用中央大學入學試驗的兩種成績，用2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10等數作組距，把他們分配起來，看這兩個方法裏環均數的均差與環中數的均差的比較怎樣。

表四十三 環中數與環均數的兩均差之比較 (用第三法)

組距	中點	次數	d'	d ²
20	25	2	-3	6
30	35	24	-2	48
40	45	52	-1	52
50	55	65	0	0
60	65	29	1	29
70	75	13	2	26
80	85	10	3	30
90	95	1	4	4
M = 54.13		N = 196		Σfd ² = 195
Md = 53.08				

(1) 環均數之均差

$$M.D. = \frac{\Sigma fd^2 + C(N_a - N_b) + (.25 + C^2)N_1}{N} \quad (1)$$

$$= \frac{195 + (-.087)(25) + (.25 + .007569)(65)}{196} \quad (10)$$

$$= \frac{195 - 2.175 + 16.742}{196} \quad (10)$$

$$= \frac{1950 + 145.67}{196} = 10.69 //$$

(2) 環中數之均差

$$M.D. = \frac{195 + (-.192)(25) + (.25 + .036864)(65)}{196} \quad (10)$$

$$= \frac{195 - 4.8 + 18.646}{196} \quad (10)$$

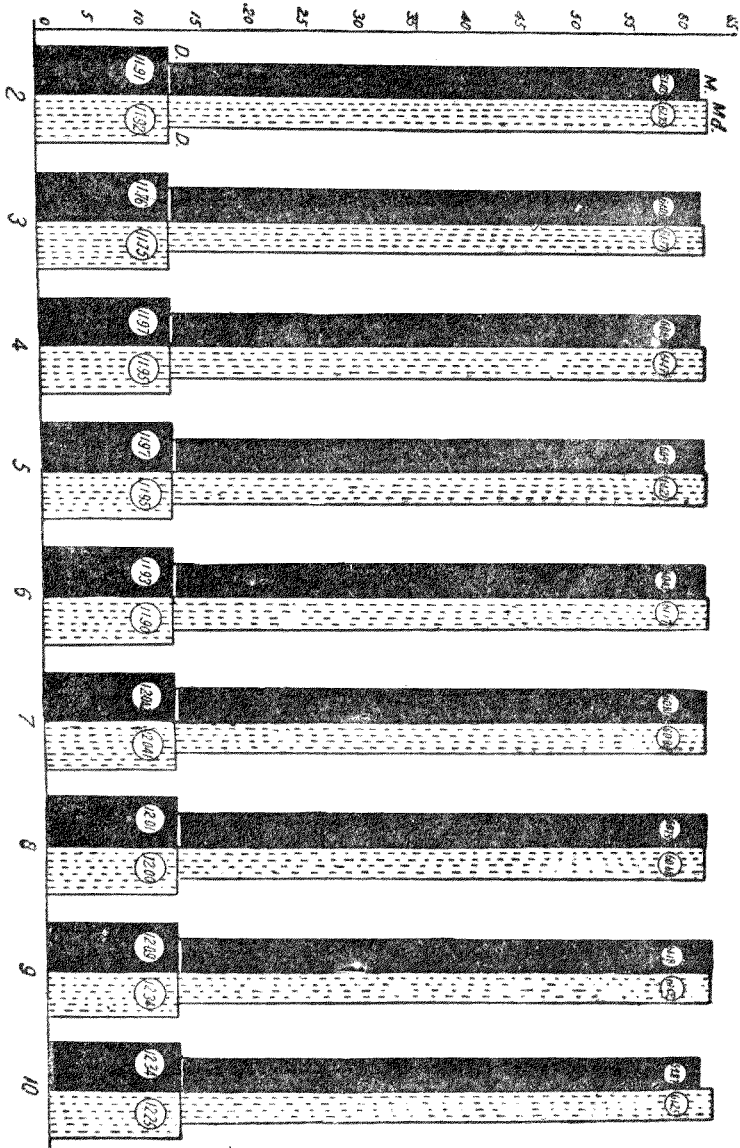
$$= \frac{1950 + 138.46}{196} = 10.66 //$$

表四十四 組距之大小在均差計算上之影響(用第一或第二法)

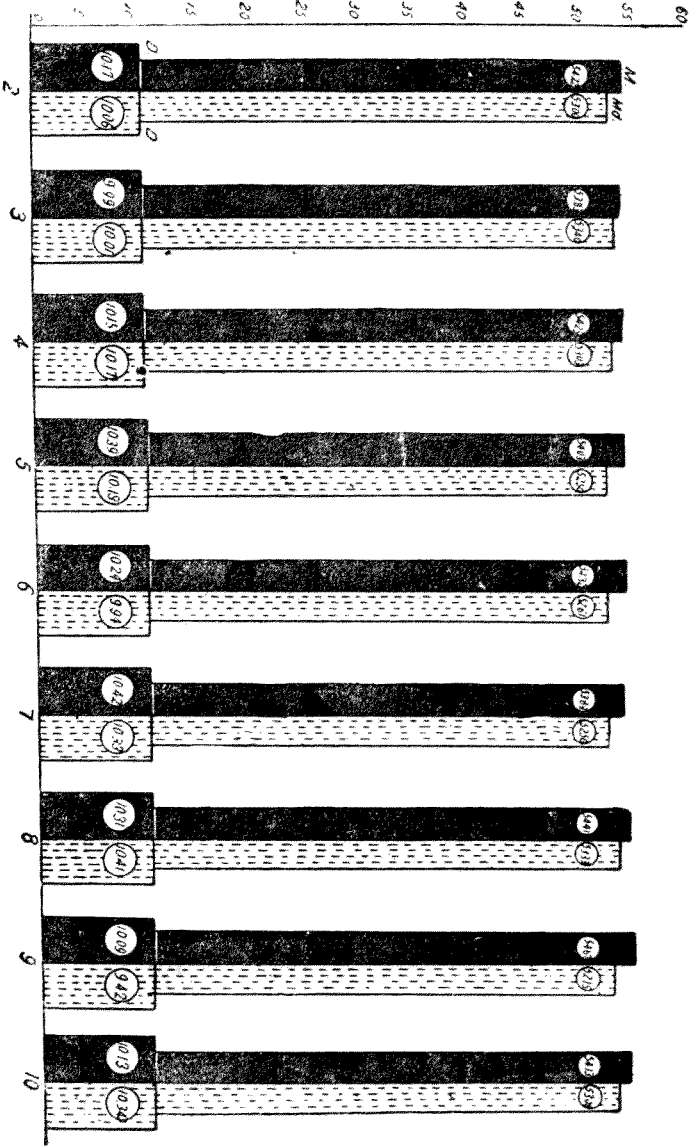
組距之範圍	(甲)二百三十二人成績					(乙)一百九十六人成績						
	均數	中數	相差	環均數之均差	環中數之均差	相差	均數	中數	相差	環均數之均差	環中數之均差	相差
2	61.03	61.75	- .72	11.91	11.92	- .01	54.22	53.00	+1.22	10.173	10.061	+ .112
3	61.05	61.17	- .12	11.76	11.75	+ .01	53.83	53.40	+ .43	9.992	10.009	- .017
4	60.86	61.17	- .31	11.97	11.95	+ .02	54.25	53.03	+1.22	10.148	10.171	- .023
5	60.97	61.21	- .24	11.97	11.95	+ .02	54.03	52.50	+1.53	10.387	10.128	+ .259
6	60.93	61.17	- .24	11.93	11.90	+ .03	54.32	52.61	+1.71	10.238	9.937	+ .301
7	60.81	60.80	+ .01	12.042	12.041	+ .001	53.89	52.50	+1.39	10.416	10.327	+ .089
8	60.79	60.68	+ .11	12.01	12.00	+ .01	54.41	53.33	+1.08	10.309	10.408	- .099
9	61.18	61.02	+ .16	12.09	12.07	+ .02	54.67	52.75	+1.92	10.093	9.422	+ .671
10	59.87	61.25	-1.38	12.34	12.35	+ .09	54.13	53.08	+1.05	10.127	10.311	- .214

表四十五 組距之大小在均差計算上之影響(用第三法)

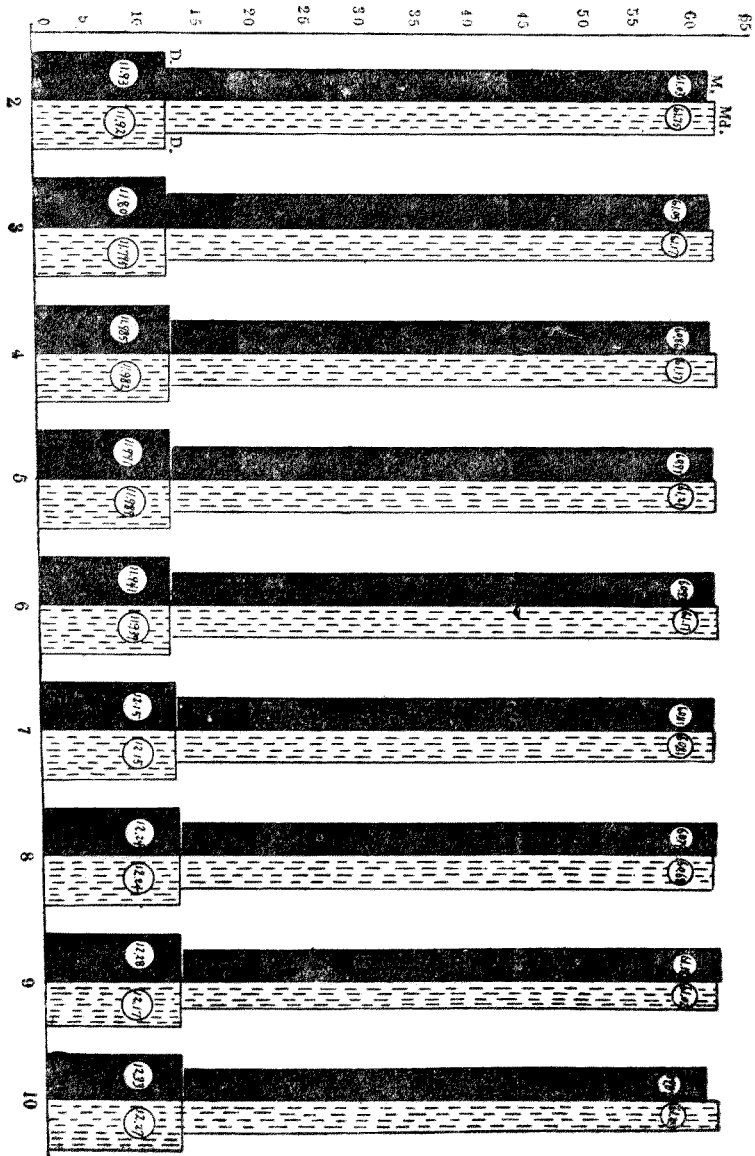
組距之範圍	(甲)二百三十二人成績					(乙)一百九十六人成績					
	均數	中數	相差	環均數之均差	環中數之均差	均數	中數	相差	環均數之均差	環中數之均差	相差
2	61.03	61.75	- .72	11.93	11.92	54.22	53.60	+1.22	10.18	10.11	+ .07
3	61.05	61.17	- .12	11.80	11.795	53.83	53.40	+ .43	10.03	10.02	+ .01
4	60.86	61.17	- .31	11.985	11.982	54.25	53.63	+1.22	10.28	10.22	+ .06
5	60.97	61.21	- .24	11.991	11.989	54.03	52.50	+1.53	10.46	10.36	+ .10
6	60.93	61.17	- .24	11.941	11.939	54.32	52.61	+1.71	10.35	10.23	+ .12
7	60.81	60.80	+ .01	12.14569	12.14568	53.89	52.50	+1.39	10.47	10.39	+ .08
8	60.79	60.68	+ .11	12.23995	12.23960	54.41	53.33	+1.08	10.71	10.47	+ .24
9	61.18	61.02	+ .16	12.28	12.17	54.67	52.75	+1.92	10.32	10.18	+ .14
10	59.87	61.25	-1.38	12.33	12.27	54.13	53.08	+1.05	10.69	10.66	+ .03



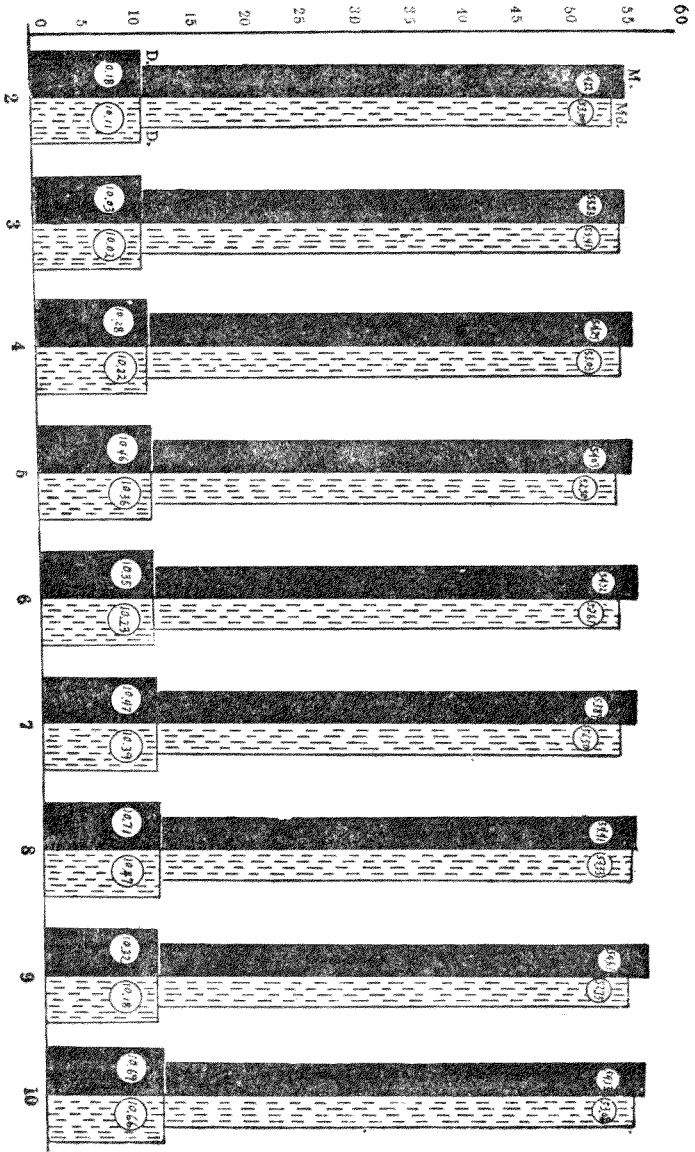
圖二十八 表四十四(甲)的圖的表



圖二十九 表四十四(乙)的圖的表示



圖三十 表四十五甲類的圖的表示



圖三十一 表四十五乙部的圖的表示

在廿八，廿九，三十，三十一四圖上，所有的黑柱，高的代表均數，低的一段代表環均數的均差，所有的花柱，高的代表中數，低的一段代表環中數的均差。廿八廿九兩圖表示應用第二法所得的結果。在圖廿八上中數比較均數有時小有時大，視乎組距之範圍而定。在均差方面多數以環中數的為比較的小，惟以二為組距的時候環中數為比較的略大。在這圖上有九個不同的分配，其中止有一個例外。圖廿九所表示也是應用第二法之結果。在這九個分配裏都是中數小於均數。在均差方面，九個之中有四個是環中數的比較的大。四與九之比將及一半，這並非例外了。

圖三十，三十一所表示乃應用第三法所得之結果。在二百三十二人之成績分配裏，中數比較的均數有時小有時大，至在均差方面均以環中數的為比較的小。有的時候兩數相差太少，非至小數點後第五位看不出來。總之用第三法環中數的均差要是最小是沒有例外的。在圖三十一之上，其情形也相同。在這九個分配之中，沒有一個均差是環中數的大。從這比較的規模大的研究裏，我們對於環中數的均差要是最小的理論，在用甚麼方法的時候是對的，可以明瞭了。

其實這兩個均差的相差，在任何情形之下，都非常之小，無足重輕。在表四十四之上二百三十二人成績裏其最大差數為 .09，最小差數為 .01，平均為 .024。在同一表上一百九十六人成績裏，其最大差數為 .671，最小差數為 **.017**，平均為 .198。在表四十五之上二百三十二人成績裏，其最大差數為 .11，最小差數為 .00001，平均為 .02137。在同一表上一百九十六人成績裏，其最大差數為 .24，最小差數為

.01平均爲.093。

從這相差的比較看來，這兩個均差用任何一個是沒有關係的，不過在研究工作上選定那一個就用那一個，一致的應用下去，不能兩個並用。在用環中數的均差的時候，我們宜用第三法計算；那麼，所得的結果才合乎算學上的理論，才免掉了或大或小情形參差的困難。

練習題

1. 試根據下列材料求均差

x 9 12 13 15 17 21 24 27 28 29 35 40

d

$\Sigma x =$

$\Sigma d =$

N =

N =

2. 試根據下列材料求均差：

組距	次數	a. 以均數作根據(用第一, 第二兩法)
20	4	b. 以中數作根據(用第一, 第二, 第三三法)
30	17	
40	25	
50	32	
60	17	
70	15	
80	10	
90	7	
100		

第十一章

標準差

36 標準差的便利

標準差爲差數統計之一種。他與均差不同之點在：後者止求各個差數而平均其總和；而前者則使各個差數自乘，就其積之總和求平均然後開方其商數。所以這個結果我們叫均方根差，在英文曰 root-mean-square deviation，亦曰 standard deviation，後者我們譯爲標準差。

猶憶在上章求均差的時候，我們對於各個差數有負號的，在數理上不能得完滿之解決，止就事實將全部差數而平均之，未嘗計及符號。此缺點在求標準差的時候，則並不存在，因爲各個差數有負號的於其自乘之後，已不可復見，蓋兩負相乘，其結果爲正號。因此數理上的困難在標準差上可算免掉。不特此也，標準差尙有其他便利：如計算之時所有的公式可運用代數式的算法，非常簡捷。至乘方方面雖較求均差時爲難，但是此種困難，止要有個乘方表，就免除了。

因爲標準差的便利，所以他的用處也非常之廣。他不但在差數之中佔重要的地位，而於求相關係數之時也要用到。至於在曲線上講到橫軸之距離他亦甚重要。此點當在敘明算法之後，再詳細的講罷。

37 標準差的計算法

標準差在公式上常以 σ (sigma) 代之。我們記得均差的簡單公式爲

$$M. D. = \frac{\sum(x-M)}{N}$$

$$\text{或} = \frac{\sum d}{N}$$

$$I \quad \text{所以} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} \quad (14)$$

$$\text{在有次數的時候, } M. D. = \frac{\sum fd}{N}$$

$$II \quad \text{而} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}} \quad (15)$$

茲用各種公式演算例子於下：

表四十六 標準差的計算

第一法 (a)

X	d	d ²
10	-6.5	42.25
12	-4.5	20.25
14	-2.5	6.25
18	+1.5	2.25
21	+4.5	20.25
24	+7.5	56.25
M. = 16.50		$\sum d^2 = 147.50$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} = \sqrt{\frac{147.50}{6}}$$

$$= \sqrt{24.58}$$

$$\approx 4.96$$

表四十七 第一法(b)

X	X' = X - 10	X' ²	
10	0	0	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X'^2}{N} - M'^2} = \sqrt{\frac{401}{6} - (6.5)^2}$ $= \sqrt{66.83 - 42.25}$ $= \sqrt{24.58}$ $= 4.96$
12	2	4	
14	4	16	
18	8	64	
21	11	121	
24	14	196	
M' = 6.5		ΣX' ² = 401	

第一法之(b)為(a)之簡捷計算法，就是在 X 數列中假設其最小數為零，依次遞減成 X' 數列。這種辦法與求均數的第二法大同而小異，其目的都是想把計算法弄得很簡便，不過一則有組距而一則無之。有組距當用中點，無組距則直接遞減。此法的公式之所以為

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X'^2}{N} - M'^2}$$

者因為 X' 數列為原來 X 數列之變遷。我們所求的既為 $\sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$ ，則應在 $\frac{\sum X'^2}{N}$ 中減去 M'² 始能得其適當結果。至 $\sigma = \sqrt{\frac{\sum X'^2}{N} - M'^2}$ 之一公式亦很容易明瞭，茲試引申之於下：

$$d = X - M$$

若用 X', M', 則

$$d = X' - M'$$

兩邊自乘，

$$d^2 = X'^2 - 2X'M' + M'^2$$

各求其和，得

$$\Sigma d^2 = \Sigma X'^2 - 2M'(\Sigma X') + NM'^2$$

但是因爲

$$M' = \frac{\Sigma X'}{N}$$

$$\text{或 } NM' = \Sigma X'$$

$$\text{所以 } \Sigma d^2 = \Sigma X'^2 - 2NM'^2 + NM'^2$$

$$= \Sigma X'^2 - NM'^2$$

我們可以寫作

$$\frac{\Sigma d^2}{N} = \frac{\Sigma X'^2}{N} - M'^2$$

III

$$\text{或 } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X'^2}{N} - M'^2} \quad (16)$$

表四十八 第二法(a)

組距	中點	次數	d	f·d ²
0				
5	2.5	2	-15.8	499.28
10	7.5	3	-10.8	349.92
15	12.5	3	-5.8	100.92
20	17.5	6	-.8	3.84
25	22.5	5	4.2	88.20
30	27.5	4	9.2	338.56
35	32.5	2	14.2	403.28
		25		
M. = 18.3		ΣFd ² = 1,784.00		

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{1,784.00}{25}} \\ &= \sqrt{71.36} \\ &= 8.45 \end{aligned}$$

在第二法之(a)中標準差的公式極其簡單，似不必再加以解釋。

此法在計算上似嫌麻煩，若無乘方表則算 Fd^2 的時候尤其麻煩。爲免除這些麻煩起見，我們可用(b)式。

表四十九 第二法(b)

組距	中點	次數	d'	f d'	f d'^2
20	25	2	-3	-6	18
30	35	24	-2	-48	96
40	45	52	-1	-52	52
50	55	65	0	-103	
60	65	29	1	29	29
70	75	13	2	26	52
80	85	10	3	30	90
90	95	1	4	4	16
100		196		+89	353
		$\Sigma f d' = -106$			
M. = 54.13	$\Sigma f d' + = +89$		$\Sigma f d'^2 = 353$		
		$\therefore \Sigma f d' = -17$			

$$\sigma = \left(\sqrt{\frac{\Sigma f d'^2}{N} - C^2} \right) \text{組距}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\Sigma f d'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f d'}{N} \right)^2} \right) \text{組距}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{353}{196} - \left(\frac{17}{196} \right)^2} \right) (10)$$

$$= \left(\sqrt{1.8010 - .0076} \right) (10)$$

$$= \left(\sqrt{1.7934} \right) (10)$$

$$= 1.3392 \times 10$$

$$= 13.39$$

用這個方法， Fd^2 的數非常之小，容易計算。至於他所以便利的理由，也與求均數或均差的時候一樣，用不着再加解釋。不過還有幾點，我們應當注意。第一，我們要知道在這幾個例子之中我們都是用均數作根據的。在數學上這也有最小的理論在內，如環中數的均差一樣。此點容在後面講明。第二，我們要注意的是在第二法之(b)裏面均數曾經註明，但實際上在公式裏面並未用到這均數，因爲用簡捷法，我

們止要知道 $\frac{\sum fd}{N}$ 而並不要知道 $\frac{\sum fX}{N}$ 。以後演算的時候，對於均數既不需用，可以不必求出，儘可直接求出標準差。第三點我們要注意的是：在 d' 行內其假設之零點最好在含有真正均數之組距內；不然，他亦須在其最鄰近的組距內。因為零點放得適當，則差數乘方的總和小；差數乘方的總和小，則計算上當較方便。這一點與用簡捷法算均數相同，因為假設的均數若與真正的均數相距很遠，在計算的時候，關於結果雖無甚出入，而在時間上卻不經濟，且易發生錯誤。算標準差的時候，每個差數既須自乘一次而後平均，則這些差數更不宜太大致使自乘的困難。其實此種困難容易免避，因為假設的均數若放在適當的組距之中，那些差數即不至太大，差數不至太大，則自乘即不費事了。

關於標準差以環均數為最小的理論，在數理上非常簡單極易證明。茲演釋於下：

現在假定 A 為分配圖的橫軸上與 M 相近的一點，他與 X 數列中各數的相差為

$$d' = X - A$$

猶之環均數的標準差中之

$$d = X - M$$

環 m 的標準差為

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} \quad \text{或} \quad \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum d^2$$

所以環 A 的標準差為

$$S = \sqrt{\frac{\sum d'^2}{N}} \quad \text{或} \quad S^2 = \frac{1}{N} \sum d'^2$$

現在以 $M - A = \Delta$,

表五十一 標準差的證驗法

(甲)					(乙)		
組距	次數	d''	fd''	fd'' ²	d'''	fd'''	fd''' ²
20	2	-2	-4	8	-4	-8	32
30	24	-1	-24	24	-3	-72	216
40	52	0	-28		-2	-104	208
50	66	1	65	65	-1	-65	65
60	29	2	58	116	0	-249	
70	13	3	39	117	1	13	13
80	10	4	40	160	2	20	40
90	1	5	5	25	3	3	9
100			+207			+36	
$\Sigma fd'' = -28$ $\Sigma fd''^2 = 615$ $\Sigma fd''' = -249$ $\Sigma fd'''^2 = 583$							
$\Sigma fd'' = +207$ $\Sigma fd''' = -213$							
$\Sigma fd'' = 179$							
$\sigma = \left[\sqrt{\frac{515}{196} - \left(\frac{179}{196}\right)^2} \right]_{10} = \left[\sqrt{2.6276 - .8341} \right]_{10}$					$\sigma = \left[\sqrt{\frac{582}{196} - \left(\frac{-213}{196}\right)^2} \right]_{10} = \left[\sqrt{2.9745 - 1.1810} \right]_{10}$		
$= \left[\sqrt{1.7935} \right]_{10} = 1.339 \times 10 = 13.39$					$= \left[\sqrt{1.7935} \right]_{10} = 1.339 \times 10 = 13.39$		

$$\text{所以} \quad d' = d + \Delta。$$

$$\text{兩邊自乘,} \quad d'^2 = d^2 + 2d\Delta + \Delta^2$$

$$\text{總加起來,} \quad \Sigma d'^2 = \Sigma d^2 + 2\Delta \cdot \Sigma d + N \cdot \Delta^2$$

右邊之第二項等於零，因為環均數的差數總和等於零，

$$\text{所以} \quad S^2 = \sigma^2 + \Delta^2$$

$$\text{或} \quad \sigma^2 = S^2 - \Delta^2$$

∴ 環均數的標準差要是最小。

在證驗方法之中我們還有一種茲試演算如前：（見 135 頁）

在表五十之中甲，乙兩部的結果均根據於一次數表，此表亦即第二法之 (b) 所用以求出標準差者。我們若止須證驗一部分，如第二法之 (b) 的 $\Sigma fd'^2 = 353$ 有無錯誤，我們可在表五十裏甲乙兩部中各假設一零點，一在均數之上，一在其下。由此得 Fd'' ， Fd''^2 ， Fd''' ， Fd'''^2 ，四個數目。根據下列公式他們的關係即可求出。

(甲)

$$d' = d'' - 1$$

$$d'^2 = d''^2 - 2d'' + 1$$

$$\Sigma d'^2 = \Sigma d''^2 - 2\Sigma d'' + N$$

$$\text{或} \quad \Sigma fd'^2 = \Sigma fd''^2 - 2\Sigma fd'' + N$$

$$\text{代入各數} \quad 353 = 515 - 2(179) + 196$$

$$= 515 - 358 + 196$$

$$= 353$$

(乙)

$$d' = d''' + 1$$

$$d'^2 = d''^2 + 2d''' + 1$$

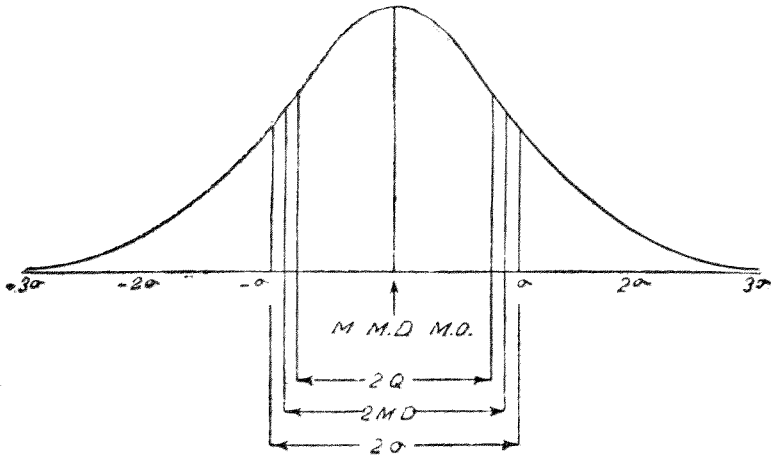
$$\Sigma d'^2 = \Sigma d''^2 + 2\Sigma d''' + N$$

或 $\Sigma fd'^2 = \Sigma fd''^2 + 2\Sigma fd''' + N$

代入各數 $353 = 583 + 2(-213) + 196$
 $= 583 - 426 + 196$
 $= 353$

38 差數在曲線上之位置

我們到現在關於重要的差數已經講了二十五分差，均差及標準差三種。他們在曲線上代表相當的距離。茲繪圖於下，以表示他們各個距離的大小，同時並表明均，中，衆三數在圖上所佔的地位。



圖三十二 常態曲線上各差數的距離的表示

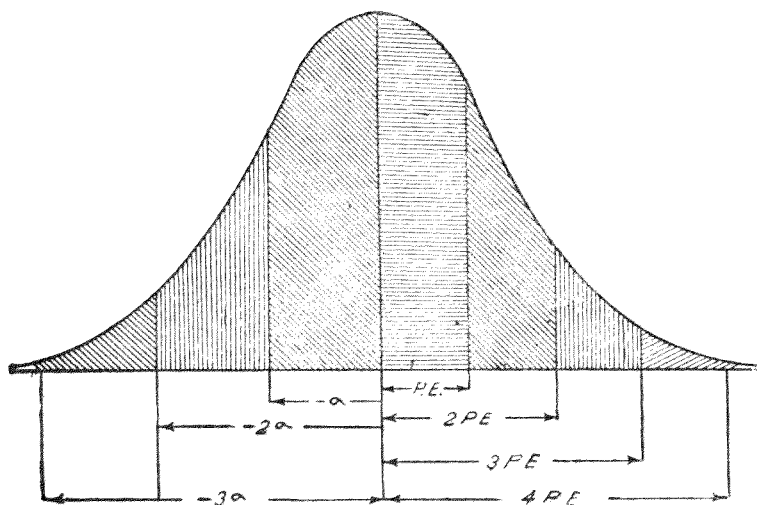
這圖是個常態分配曲線。凡在常態分配曲線之上均，中，衆三數同佔一點，即高峯之垂直線與橫軸相交之處而以箭頭表示者，此點我們在第六章圖十六（第六十八頁）上業經明瞭。所以不憚再述者，因為要使學者知道均，中，衆三數在圖上的表示止有一點而二十五分差，均差及標準差則各佔一段橫軸，或被用作單位以量橫軸之距離。這常態分配曲線，從數理上講，其兩端蔓延，靡有窮盡。故與橫軸始終不能相交。然若在曲線面積佔百分之 99.70 左右時截斷之，則此一段橫軸大約有六個 σ ，七個半 M.D. 或九個 Q。從面積上講，第一個 Q 佔全部百分之二十五。在圖三十二上正負兩 Q 共佔百分之五十，正負兩 M. D. 佔約百分之五十七，而正負兩 σ 則佔百分之 68.26，第二個 Q，或 M. D. 或 σ 既離高峯較遠，則所佔的面積當亦較少，第三個（正的或負）Q，或 M. D. 或 σ 所佔的當更少。在常態分配曲線上 Q 亦可稱 P. E.。各個 P. E. 與 σ 所佔的面積大致如下。

σ

+1 σ 或-1 σ =34.13%	68.26%
+2 σ 或-2 σ =47.72%	95.44%
+3 σ 或-3 σ =49.86%	99.72%

P. E.

+1P.E.或-1P.E.=25.00%	50%
+2P.E.或-2P.E.=41.13%	82.26%
+3P.E.或-3P.E.=47.85%	95.70%
+4P.E.或-4P.E.=49.65%	99.30%



圖三十三 常態曲線上各數所佔的面積

圖三十三上分作左右兩半，左半表示 σ 的距離並每一 σ 所佔之面積。在原始點 (origin) 以左的當為負號，故所有三個 σ 都是負的。在原始點以右當是正的，當有三個正 σ 。但是為經濟空間起見，我們用這右半表示 P. E.，那四個 P. E. 的距離和他們所佔的面積大致如圖所示。現在我們應當知道的以距離為重要。至面積方面，我們在以後數章再詳細的討論罷。

39 相關的差異

在差數方面，我們可以比較兩種實驗的結果，看他們各個的程度是否齊一，這是我們介紹差數之時所講過的。其實這些差異都是絕對的。就是兩種或多種實驗結果的差數，例如標準差，雖可彼此比較，但實

際上這些不同的標準差與他們的均數有什麼相關，我們頗難揣測。欲求相關的差異皮爾生教授 (Prof. Pearson) 曾定立一種公式，以求所謂差異係數 (coefficient of variation)。茲錄於下：

$$V = \frac{100\sigma}{M} \quad (17)$$

在此公式之內每一種結果的M與其 σ 發生關係，而所求出之差異

計算差異係數的材料

表五十一

(a)

表五十二

(b)

用 費	次 數
3圓	8
5圓	3
7圓	7
9圓	9
11圓	6
13圓	4
15圓	6
17圓	3
19圓	2
21圓	1
23圓	
總 數	49
M. = \$10.94	
σ . = \$4.87	
V. = 44.5	

用 費	次 數
10圓	7
20圓	6
30圓	12
40圓	6
50圓	7
60圓	8
70圓	1
80圓	1
90圓	1
100圓	1
110圓	
總 數	49
M. = \$43.16	
σ . = \$20.07	
V. = 46.5	

係數不至受單獨的 M 或 σ 的影響。茲附 Holzinger 所舉之例於下以供參考。(見 140 頁)

在五十一，五十二兩表中其均數一則不過十一圓，一則有四十三圓之多，這幾個數目可算不能比較，而其事實又各不同。但是我們拿差異係數來算，則知此兩種費用的相差並不甚大，可以比較。所以在這些事實上差異係數的應用卻非常重要。這係數是個純粹數目，並無單位，因為這數的表示不過差異的相關而已。

40 偏態之量法

在分配圖上除常態外有所謂正的偏態，負的偏態。這結果是根據幾個差數算出來的。關於量偏態的公式，很有幾個。在下面的是兩個例子。

$$\text{Skewness} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1} \quad (18)$$

$$\text{Skewness} = \frac{M - M_0}{\sigma} \quad (19)$$

在常態分配圖上用第 (18) 公式其分子 $Q_3 + Q_1 - 2M_d = 0$ ，用第 (19) 公式其分子 $M - M_0$ 亦等於零，那就是並無偏態的意思。關於正負兩偏態，茲根據第九章二十五分值的材料用第 (18) 公式演算於下。

I	II
$Q_3 = 61.38$	$Q_3 = 11$
$Q_1 = 44.42$	$Q_1 = 6$

$$Md = 53.08$$

$$Md = 8$$

$$\begin{aligned} \text{Skewness} &= \frac{61.38 + 44.42 - 2(53.08)}{61.38 - 44.42} & \text{Skewness} &= \frac{11 + 6 - 2(8)}{11 - 6} \\ &= \frac{105.80 - 106.16}{16.96} & &= \frac{17 - 16}{5} \\ &= \frac{-.36}{16.96} = -.02 & &= \frac{1}{5} = +.2 \end{aligned}$$

練習題

1. 試就下列材料用第一法之 a, b 兩式求標準差。

X

35

47

52

55

58

2. 試用第四章裏生物與史地兩種分數求標準差（用第二法 b 式並用證驗法）。

3. 試根據上項生物史地兩種材料繪一次數分配圖並表示一個 Q, 一個 M.D, 和一個 σ 各所佔的距離。（假定以 Md 作根據）

4. 在常態分配圖上兩個正的標準差和三個正的 P.E. 各佔面積百分之幾？

5. 試根據下列材料求差異係數。

a. $M_1 = 50.25$

$M_2 = 62.50$

	$\sigma_1 = 10.12$	$\sigma_2 = 12.10$
b.	$M_1 = 65.00$	$M_2 = 125.10$
	$\sigma_1 = 10.50$	$\sigma_2 = 16.50$

6. 根據下列材料求偏態

a.	$Q_3 = 25$	$Q_1 = 18$	$Md = 20$
b.	$Q_3 = 27$	$Q_1 = 16$	$Md = 22$
c.	$Q_3 = 28$	$Q_1 = 20$	$Md = 24$

第十二章

百分等級

41 分數制度與其範圍

平常我們所用的成績分數制度係以百分作根據的，但是習慣上我們廢去了『百分之』三個字，而簡易的講某生成績得八十五分，或某生成績得九十分。其意義就是百分之百為最高分數，百分之零為最低分數，而某二生一得百分之八十五分，一得百分之九十分。假使我們不用百分制，那所謂八十五分或九十分就無比較了，也就要無意義了，而在統計學上更成問題了。因為成績的考核方法有以三十三分為最高分數的，亦有以五十分為最高分數的，在智力測量上，因量表之不同，更有不同的分數制度。假使以三十三為最高分數，則得二十九分之學生其成績尚不算壞，若用斯丹福大學之修正比納西蒙測驗，則某生成績得一百十分也不算高。明乎此，則我們研究個人或團體成績的時候，就要注意這分數制度的範圍，就是最低分數與最高分數之距離。

42 等級的簡單計算法

在統計學上我們有一種等級制度，使團體中各個人的成績在高低上彼此相關，可以免掉那絕對分數的困難。例如下面幾個單獨分數，我們可以按次序排列起來由小至大：

35 82 93 76 43 75 64 33 47 59

(按次序排列由小至大)

等級 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

分數 33 35 43 47 59 64 75 76 82 93

我們的排列次序既是由小至大，則所謂一者當是最低的等級。所以這個秩序與善逆所用是不同的，在下列的例子中我們的分數有相同的。我們列等級的時候，不能如上面的例子，當分別平均之：

79 85 45 55 55 92 97 92 95 92

(按次序排列由小至大，並分別平均相同之等級)

等級 1 $2\frac{1}{2}$ $2\frac{1}{2}$ 4 5 7 7 7 9 10

分數 45 55 55 79 85 92 92 92 95 97

在此地所謂平均者，就是把那相同之分數所應佔之等級而平均之。55之一分數既有兩個而他們的等級在一與四之間，或他們應佔者為二三兩等級。我們就把二三兩數相加而以二除之，得他們倆的平均等級，就是各為 $2\frac{1}{2}$ 。所以等級之中既沒有二，又沒有三了。同理，我們把三個92所應佔之等級以三除之，他們各得等級七，而等級上就找不出六八兩數了。

43 百分等級計算法

在次數多的時候，我們用百分等級，可以明瞭各個成績的地位。猶憶上章講到二十五分值的的時候，我們所求出的上下兩四分點就是百分之二十五與七十五兩等級。又中數者即百分之五十等級。所以在二

十五分値一章內，我們止求出百分之二十五，五十及七十五三個等級，而在此章則所有表內之次數均可計算出來而與以等級。茲試列表於下。

表五十三 百分等級表

成 績		次 數				百 分 等 級	
組距	其中點	次數	次數和	(次數和) × (R)	其中點	等級距離	其中點
1	2	3	4	5	6	7	8
0-	5	0	0
10-	15	0	0	0(R)	1(R)	.000000	.005102
20-	25	2	2	2(R)	14(R)	.010204	.071428
30-	35	24	26	26(R)	52(R)	.132652	.265304
40-	45	52	78	78(R)	110.5(R)	.397956	.563771
50-	55	65	143	143(R)	157.5(R)	.729586	.803565
60-	65	29	172	172(R)	178.5(R)	.877544	.910707
70-	75	13	185	185(R)	190 (R)	.943870	.969380
80-	85	10	195	195(R)	195.5(R)	.994890	.997441
90-100	95	1	196	196(R)	—	1.000000	—

$$N = 196 \quad R(\text{rate}) = \frac{1}{N} = \frac{1}{196} = .005102$$

在這個表裏第一，二，三，四四行所有的數目當無甚問題，因為這些行數從前曾經用過的。第五至第八四行須加解釋，因為這四行是新添的。所謂R者即以總次數除一之謂，因為在第五行內與其用 $\frac{2}{196}$ ， $\frac{26}{196}$ ， $\frac{78}{196}$ …… $\frac{196}{196}$ 等數不如先以196除一而將各組距之次數和乘這商數。這商數就是R。我們要以R乘次數和者，因為要按各組距的中點而求其百分等級。所以在第六行裏我們有(次數和)×(R)的中點。

次數和與(R)既乘之後，其積表示於第八行內，而第七行內則表示百分等級之距離。所以第七第八兩行之數目，就是第五第六兩行內所有的數目之結果。（五六兩行在表內似嫌重複。我們為解釋起見，所以不厭求詳。學者練習純熟以後，五六兩行或四五六三行儘可取消，藉省時間）。

各行既經說明我們再從橫線上，當更加瞭然。假使我們要問四十五分的百分等級是多少，我們只須在橫線上從左看到右，在第八行裏找出26.53(即.265304。從百分數講 26.53 足矣)即得。實際上在40—50一組距內他們共有五十二人他們的成績既照中點算，而他們的等級距離也要照中點算。他們的等級距離為 13.27—39.80。所謂百分等級者即是得這等級以下的人的百分數。例如成績得七十分的他以下的人的百分數為 $\frac{172}{196}$ 或 172(R)(第五行)或 87.75(即第七行之.877544)。所以七十分的等級為 87.75，意思就是在總次數裏有百分之 91.07 的人數的成績在他以下。

44 百分等級的公式

從表上看，我們止知道各組距的起，中，兩點的百分等級。至於除去這兩點之外例如49，58等數，他們的等級在表上未嘗註明，我們須用公式以求出之。茲列此公式於下。

$$R_x = R_L + \frac{(X - L; L.)}{\text{組距}} (R_N - R_L) \quad (20)$$

在這個公式裏看起來許多代表字母，好像很難懂似的。但是把各

個字母註明之後，我們才知道這公式也不過是一個普通比例而已。

R_x 代表任何分數的百分等級我們所欲求者，

R_L 代表含有此等級的百分距離之起點，

R_N 代表上一距離之起點，

X 代表任何分數，

$L. L.$ 代表成績組距含有 X 分數的起點，

($L. L.$ 在英文爲 lower limit 即該組距起點之謂)

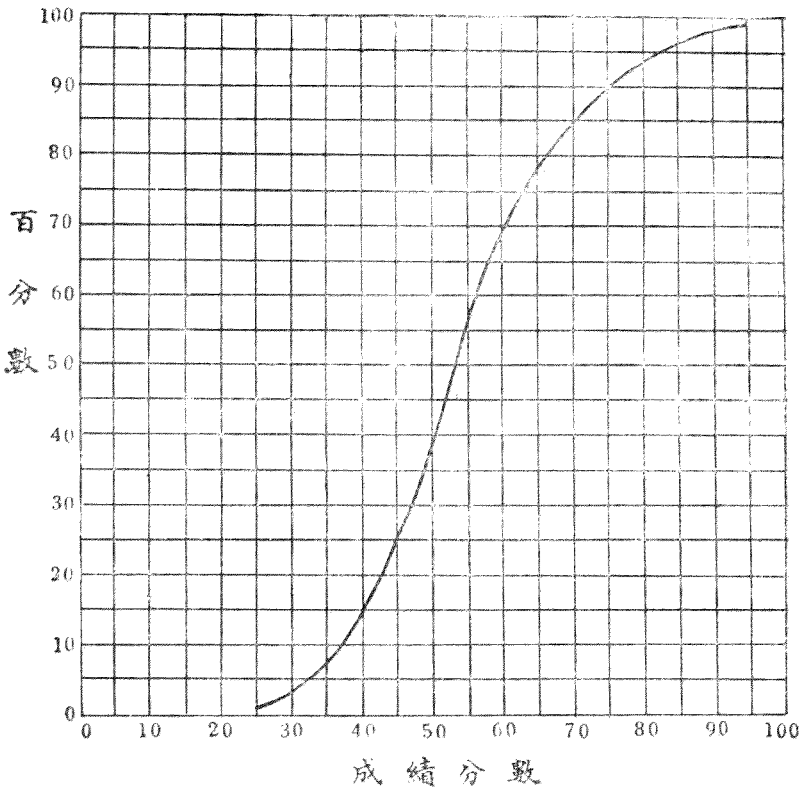
茲試用 49, 58 兩分數而求其各個百分等級。

$$\begin{aligned} \text{例一} \quad R_{49} &= 13.27 + \frac{49-40}{10}(39.80-13.27) \\ &= 13.27 + \frac{9(26.53)}{10} = 13.27 + 23.88 \\ &= 37.15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例二} \quad R_{58} &= 39.80 + \frac{58-50}{10}(72.96-39.80) \\ &= 39.80 + \frac{8}{10}(33.16) = 39.80 + 26.53 \\ &= 66.33 \end{aligned}$$

45 百分等級的圖的表示

百分等級亦可在曲線上表明之。茲試根據表五十三第八行內所有之距離中點繪一百分曲線如下。



圖三十四 百分曲線之一種

這曲線與普通所用的不同，因為普通的圖是用組距的中點與其各個次數繪的，而此圖之繪法，則係根據組距中點，及其遞加的次數，而以總次數除之的。換句話講，這是按照遞加的百分數繪的。例如在這圖的橫軸上 $x=25$ 的時候， $y=.005102$ 或 $.5102\%$ ， $x=35$ 的時候， $y=.071428$ 或 7.1428% 。這 x 的數是第二行的組距中點， y 的數是第八行的等級組距的中點。根據這兩行的數目找出點子，把他們連接起

來，平滑一下，就成功一個百分曲線。

在這曲線上欲求分數之百分等級，或在百分等級上求分數都很容易。例如我們要求58的百分等級，我們可在橫線上58所在地繪一垂直線，至與曲線相交為止，再由此交點繪一平行橫線，至表示百分數的縱線為止。我們一看就知道這數在66與67之間。假使縱線的分段把小數也表示出來，我們當得其確實數目(即 66.33)如用公式所求出者。

又如中數之百分等級為五十。若要求其分數可在縱線上五十所在地繪一直線，與橫軸平行，至與曲線相交為止，再由此交點繪一垂直線達到橫軸。這達到之點就是我們所求的分數。同理，我們可以求出上下兩四分點或其他百分數。

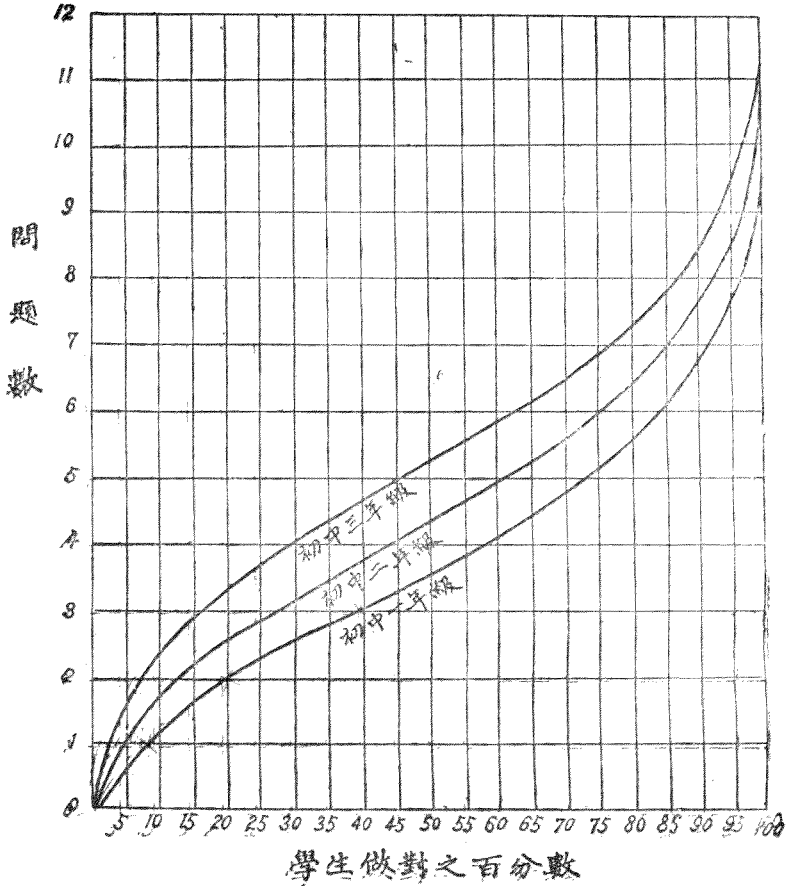
46 百分曲線的另一繪法

百分曲線還有一種繪法。用這種繪法其曲線的形狀與前者完全不同。因為前者的百分數在縱軸上，而此圖的百分數則在橫軸上。試參觀圖三十五，就知道他的形狀與前者的分別。在這圖上共有三個百分曲線，代表初中一，二，三三個年級的文言文理解成績，這是作者於民國十五年用自己所編的國文理解測驗量出來的。繪這種曲線所根據的材料要多，作者所測的人數在初中一年級有一千一百六十七人，在初中二年級有一千一百十人，在初中三年級有八百〇八人。這材料可算豐富，所以這曲線於繪成之後，非常平滑，在各年級中其成績的比較也看得非常清楚。例如十二個問題中答對兩題者，在初三級約有百分之六，在初二級約有百分之十二，而在初一級則有百分之二十一。

表五十四 問題數與學生數之統計

問題數	一 年 級			二 年 級			三 年 級		
	學生數	學生數和	百分數	學生數	學生數和	百分數	學生數	學生數和	百分數
0	20	20	1.71	8	8	.65	1	1	.12
1	84	104	7.20	37	45	2.98	17	18	2.10
2	140	244	12.00	88	133	7.10	34	52	4.21
3	214	438	18.34	291	354	17.82	80	132	9.90
4	223	681	19.11	189	513	15.24	111	243	13.74
5	178	830	15.25	201	744	16.21	131	374	16.21
6	132	991	11.31	188	632	15.16	133	507	16.46
7	90	1081	7.71	127	1059	10.24	121	628	14.98
8	44	1125	3.77	90	1149	7.26	77	705	9.53
9	29	1154	2.49	56	1205	4.52	55	760	6.81
10	8	1162	.69	23	1238	1.85	22	782	2.72
11	5	1167	.43	10	1238	.81	16	798	1.98
12	0		.00	2	1240	.16	10	808	1.24
合計	1167		100.00	1240		100.00	808		100.00

又如對六題者在初三級有百分之六十二強，在初二級有百分之七十五強而在初一級則增至百分之八十五矣。轉過來看各年級人數百分之五十所對的題數在初中一年級約 3.5 題，初中二年級約 4.6 題，初中三年級約 5.3 題。所以把這三個曲線畫在一塊非常容易比較。



圖三十五 百分曲線之另一種

近來測驗學異常發達，這曲線的應用亦因之而廣。有的統計學家以爲這曲線實爲百分曲線(percentile curve)，即英人高爾登(F. Galton)氏所稱之(ogive curve)。至前一種則並非百分曲線，實爲一種次數遞加的曲線(cumulative frequency curve)。他們之所以如此分別的理由，完全在數學的習慣上，至在應用上，兩者的分別實無甚關係。不過俄雷斯(Otis)氏在整理他的測驗結果的時候，所用的百分曲線是後者一種(即 percentile curve)。這一種在現在應用得已很普遍。當做研究的時候，我們不妨引用他，以表示從衆的態度。

練習題

1. 試用四十五頁上所有之材料(乙)造一百分表，並根據此表上所有之百分等級繪一曲線。
2. 用公式求出27, 64, 71三數的百分等級。
3. 根據下列初中一，二，三三年級白話文測驗結果各繪一百分曲線(第二種)並比較的討論此三級程度之差別。

問題數	一年級學生數	二年級學生數	三年級學生數
0	5	12	2
1	29	40	9
2	67	53	28
3	91	85	38
4	111	111	74
5	205	134	110

6	207	170	110
7	210	195	154
8	145	168	139
9	74	101	101
10	23	41	43
總計	1,167	1,110	808

第十三章

二項分配

47 錯列

假使京滬間往來火車每天有三次，第一次於每晨七時由京滬兩處開出，在常州相錯，於下午二時各達到目的地。第二次車於下午四時在京滬兩處開行，於十一時京車抵滬，滬車到京。又第三次車各於晚間十一時半開行，於次晨七時各抵目的地。從這時間表上看來，我們乘第一次車由京往滬，可乘第二或第三次車返京，若乘第二次車往滬，可乘第三次或第一次車返京，或乘第三次車往而乘第一或第二次車歸。這種辦法可用下圖表明之。

南京	上海
第一次車.....	第一次車
第二次車.....	第二次車
第三次車.....	第三次車
去	來
(1).....	(2)
(1).....	(3)
(2).....	(1)
(2).....	(3)
(3).....	(1)
(3).....	(2)

圖三十八 錯列舉例

從圖上看來，我們乘第一次車離京往滬，可在二三兩次車中擇一乘之而歸，若乘二次或三次車往，亦各有兩次車可以選擇，所以這往來京滬不同的方法有 3×2 或6種。這計算法名之曰錯列(permutation)，在算學上亦稱之排列，因為這許多不同的方法，不用公式亦可排列而出。假使有 a, b, c 三物每次取兩個排列之，得下列事實。

例一 a, b, c。
 ab ac
 ba bc
 ca cb

若有 a, b, c, d 四物每次亦取兩個，則得以下之排列式。

例二 a, b, c, d。
 ab ac ad
 ba bc bd
 ca cb cd
 da db dc

又 a, b, c, d, e 五物每次取兩個，則得以下之排列式。

例三 a, b, c, d, e。
 ab ac ad ae
 ba bc bd be
 ca cb cd ce
 da db dc de
 ea eb ec ed

從上面的三個例子看來，則排列之法例一得 $3 \times 2 = 6$ ，例二得 $4 \times 3 = 12$ ，例三得 $5 \times 4 = 20$ 。假使我們以 P 代排列或錯列，以 n 代物數，而以 r 代每次所取之物數，則在

$$\text{例一} \quad {}_n P_r = {}_3 P_2 = 3 \times 2 = 6$$

$$\text{在例二} \quad {}_n P_r = {}_4 P_2 = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{在例三} \quad {}_n P_r = {}_5 P_2 = 5 \times 4 = 20$$

假使我們有 a, b, c, d, e 五物而每次取三個則

$${}_n P_r = {}_5 P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

這排列的普通公式爲

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \quad (21)$$

43 組合

若從排列中，減去其重複者，例如 ab, ba 兩式中止取 ab 一式。這種計算方法名曰組合 (combination)。茲將以上三例之中減去其重複者，使成組合如下

$$\text{例一} \quad a, b, c$$

$$ab \quad ac$$

$$bc$$

$$\text{例二} \quad a, b, c, d$$

$$ab \quad ac \quad ad$$

$$bc \quad bd$$

$$cd$$

例三 a, b, c, d, e
 ab ac ad ae
 bc bd be
 cd ce
 de

現在以 C 代組合，以 n 代物數，而以 r 代每次所取之物數，則

在 例一 ${}_n C_r = {}_3 C_2 = \frac{3 \times 2}{1 \times 2} = 3$

在 例二 ${}_n C_r = {}_4 C_2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$

在 例三 ${}_n C_r = {}_5 C_2 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$

假使 n 等於 5，r 等於 3 則

$${}_n C_r = {}_5 C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$$

組合的普通公式為

$${}_n C_r = \frac{n((n-1)(n-2)\cdots(n-r+1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} \quad (22)$$

我們亦可寫作

$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!}$$

這 $r!$ 通常稱之為 “factorial r” 意思就是從 1 到 r 之積。

49 簡單機率

我們現在要討論機率了。所謂機率在英文曰 probability。例如買彩票，號數有十萬，而得中的卻止一個，假使我們以得中的為成功，不中的為失敗，則成功之機率為十萬分之一而失敗之機率為十萬分之九萬九千九百九十九。照這樣看起來，買彩票而有得中之機會實微乎其微，無怪乎許多人月望之而終不能得中一個。成功與失敗的關係既如我們所講，則以 P 代成功，以 Q 代失敗，我們可得下列公式：

$$P + Q = 1$$

在中彩的情形之下為

$$\frac{1}{100,000} + \frac{99,999}{100,000} = 1$$

在賭博場中有擲骰之戲，以單數雙數為成功與失敗之分，他們的機率為

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

假使我們有彩球一袋計一百個，內紅，黃，藍，白，黑球各二十個。現在以 B 代球 (ball)，以 r, y, b, w, d 代紅，黃，藍，白，黑五色則他們的公式為

$$B_r + B_y + B_b + B_w + B_d = 1$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

$$\text{或 } .2 + .2 + .2 + .2 + .2 = 1$$

假使另一袋有球八十個，內紅色者二十五個，黃色者三十五個，藍色者二十個。在公式中他們的關係如下。

$$B_r + B_y + B_b = 1$$

$$\frac{25}{80} + \frac{35}{80} + \frac{20}{80} = 1$$

$$\text{或 } .3125 + .4375 + .25 = 1$$

上面所講的為單事機率 (probability of single event)。假使我們用一國幣連擲數次，或用幾個國幣同時投擲；這樣，我們可得一複事之機率 (probability of compound event)，因為在各個事發生之時，彼此不相關連。例如用一國幣以連擲二次為一試，我們若把他們的兩面（大約一面是字，一面是數）分為反正，則一試之後，其結果不外以下排列：

第一次	正	正	反	反
第二次	正	反	正	反

在以上的例子之中第一第二為投擲之次序，就是一錢之投擲，在兩次之中可許全是正面，可許全是反面，也許首正次反，或首反次正。上面的排列可縮為三個組合即

1. 二正
2. 二反
3. 一反一正(或一正一反)

他們的機率為

$$P_{2正} = \frac{1}{4}$$

$$P_{2反} = \frac{1}{4}$$

$$P_{1反1正} = \frac{1}{2}$$

假使一國幣連擲三次，我們可得以下錯列：

第一次	正	正正反	正反反	反
第二次	正	正反正	反正反	反
第三次	正	反正正	反反正	反

在這八個不同的排列之中，可縮為四個組合，即

1.	2.	3.	4.
正	正	正	反
正	正	反	反
正	反	反	反

他們各得以下之機率：

$$\text{正正正之機率} = \frac{1}{8}$$

$$\text{正正反之機率} = \frac{3}{8}$$

$$\text{正反反之機率} = \frac{3}{8}$$

$$\text{反反反之機率} = \frac{1}{8}$$

50 二項展開式

從上面的排列及組合的應用上，我們對於複事之機率，可根據二項定理，說明如下：

$$\begin{aligned}(\text{正}+\text{反})^2 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right) + \binom{2}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{正}+\text{反})^3 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^3 = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right) + \binom{3}{3} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{正}+\text{反})^4 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{4 \times 3}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{2}\right) + \binom{4}{4} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = 1\end{aligned}$$

他們的普通公式為

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 \\ &\quad + \cdots + b^n\end{aligned}\tag{24}$$

我們亦可寫作

$$(a+b)^n = {}_n c_0 a^n + {}_n c_1 a^{n-1}b + {}_n c_2 a^{n-2}b^2 + {}_n c_3 a^{n-3}b^3 + \cdots + {}_n c_n b^n\tag{25}$$

若應用此公式於 $(Q+P)^n$ 上我們可得下列情形

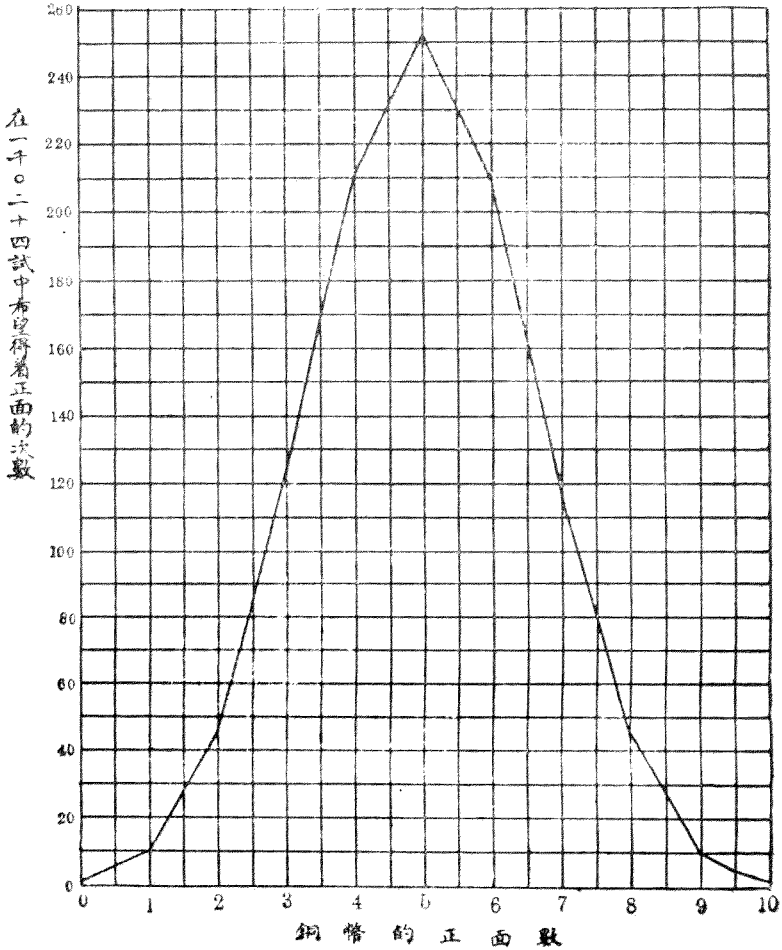
$$(Q+P)^n = {}_n C_0 Q^n + {}_n C_1 Q^{n-1}P + {}_n C_2 Q^{n-2}P^2 + {}_n C_3 Q^{n-3}P^3 + \dots + {}_n C_n P^n$$

假使我們用一個國幣連擲十次，我們根據二項定理可得正面之機率如下表

表五十五 國幣連擲十次的機率表

正 面	機 率
0	$\frac{1}{1024} = .000977$
1	$\frac{10}{1024} = .009766$
2	$\frac{45}{1024} = .043945$
3	$\frac{120}{1024} = .117187$
4	$\frac{210}{1024} = .205078$
5	$\frac{252}{1024} = .246093$
6	$\frac{210}{1024} = .205078$
7	$\frac{120}{1024} = .117187$
8	$\frac{45}{1024} = .043945$
9	$\frac{10}{1024} = .009766$
10	$\frac{1}{1024} = .000977$
總 數	1.000000

根據這個表我們繪一次數分配圖如下。這圖一望而知為對稱的圖，但是他的點數很少，尚不能成一平滑的曲線(a smooth curve)。欲使此圖成一平滑曲線，這圖上的點數必須加多。照二項定理，在n次方，



必有 $(n+1)$ 項。此圖爲二項展開式的十次方所成，故圖上共有十一點。假使乘方次數加多，則圖上的點數當亦加多。例如乘方爲二十次，則點數爲二十一，乘方次數爲八十次，則點數爲八十一。不過此間尚有一點，我們應當注意，就是點數加多以後，曲線亦隨之而加大。非若從前根據組距所繪之圖，組距小，點數多，而曲線終不變大的。明瞭此點，則知若不修勻，此圖決不能成爲一平滑的曲線。此次當更有精密的方法修勻曲線，容在下一章詳細的敘述罷。

51 機率實驗

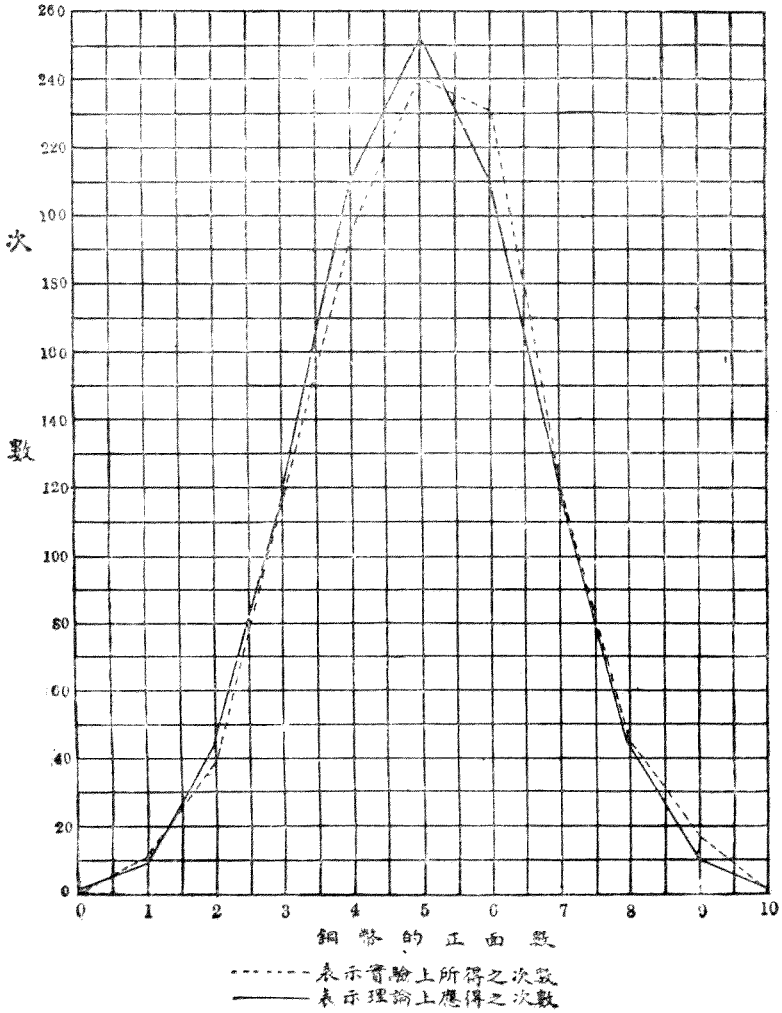
在此章我們尚要補充的是：二項分配本是一種理論，這理論究竟與事實相差多少，不敢斷定。姑實驗一下以資比較。我們的實驗計分兩種，一是銅圓十枚同時投擲，以視每次字面數之多寡。這總次數在 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{10}$ 之展開式應爲1024。我們的投擲方法是把十枚銅圓裝在香煙盒內，搖之使轉動，然後傾出。如是凡2048次，以二除之，得其平均爲1024，正等於 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{10}$ 之展開式的次數。其結果詳表五十六。第二種實驗爲三枚銅圓同時投擲，如是凡一萬次以視這結果與理論上的數目究竟相差多少。這比較統計詳表五十七。

從表五十六上看來，我們覺得理論與事實非常相近。全無字面或全是字面本是最難得者，然而在兩試之平均中，竟各得.5。7個字面的機率理論與實際相同。一個字面的機率理論與實際之相差止一次。其他方面有相差三四次的，有相差六七次。最大的相差不過21.5次，這是六個字面的機率，他的次數多所以相差比較的大。在這次實驗裏，

表五十六 理論與實驗之比較

銅圓字面數	理論上應得之次數	實驗上所得之次數
0	1	.5
1	10	11
2	45	39.5
3	120	117
4	210	194.5
5	252	240
6	210	231.5
7	120	120
8	45	52.5
9	10	17
10	1	.5
總數	1024	1024
	$M=5$	$M=4.73$
	$\sigma=1.5811$	$\sigma=1.5978$

四個字面與六個字面的次數相等，各為 210。五個字面的次數最大，其數為 252。在我們看起來，這三個次數既大，則在銅幣投擲之時，易受影響，然而五個字面的機率竟未受重大的影響，所以在總結果上，均數與均方差在理論與實驗兩方面都很相近。



圖三十八 理論與實驗之比較

我們試根據實驗上所得之次數繪一曲線把他疊在理論曲線上面。
這兩個圖的形式一望就知道是很相近的。那理論的圖好像是實驗的圖

被修勻似的。總之，這實驗上的結果與理論上的數目的相差是不遠的。

試再看第二種實驗情形。在這實驗裏既有一萬次之多則受『樣子』之影響當更少。在 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^8$ 之展開式上每八次之中應有無字面或全字面者各一次，又一個字面及兩個字面各三次。一萬次之八分之一當為 1250。所以我們把這實驗結果用 1250 除之得 1.0192, 3.0488, 2.8656 及 1.0664 四數。四數相加其和仍為 8。（參觀表五十七）這四個數比較理論上的，一望而知其相差甚少。而兩方的均數及均方差亦很接近。

表五十七 第二實驗之結果

銅圓字面數	理論上應得之次數		實驗上所得之次數	
	實驗一萬次的理論分配 (f)	$\frac{f}{1250}$	實驗一萬次的實際分配 (f')	$\frac{f'}{1250}$
0	1,250	1	1,274	1.0192
1	3,750	3	3,811	3.0488
2	3,750	3	3,582	2.8656
3	1,250	1	1,333	1.0664
總數	10,000	8	10,000	8.0000
	M = 1.5000 $\sigma = .8660$		M = 1.4974 $\sigma = .8783$	

從這兩個實驗看來，我們可以下個結論，以為機率上理論與實際是相差不遠的。

練習題

1. 試展開以下之二項分配並各繪一分配圖。

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^6, \quad \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^4$$

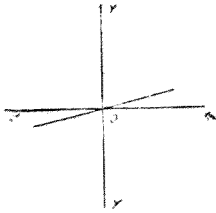
2. 某學程除教授演講外有參考書二十五本，其中由同學任選六本讀之。試求出此六本之組合。
3. 國立中央大學分八院四十七系，假使某生除主系外可任選兩輔系，問如此選法有多少種類。
4. 吾人試投擲錢幣以五次為一試。問在 354 試中三字二龍之機遇共有多少次？

第十四章

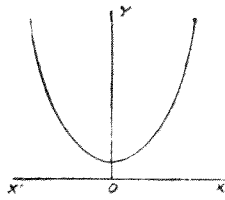
常態曲線

52 曲綫與公式

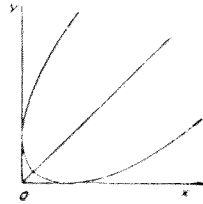
次數圖修勻使之趨於常態，我們在前章業經敘明。茲更有較精確之方法使次數圖呈乎常態。其實在數學上各種曲線都有一定的公式，例如下列的幾種曲線在解析幾何學上是最普通的。所以常態曲線也有他的一定的公式。茲根據二項定理討論於下。



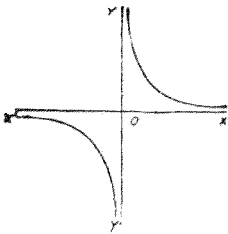
$$\underline{y = ax}$$



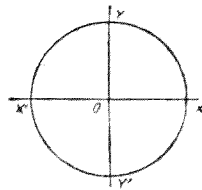
$$\underline{y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})}$$



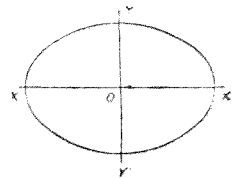
$$\underline{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}}$$



$$\underline{xy = a^2}$$



$$\underline{x^2 + y^2 = a^2}$$



$$\underline{b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2}$$

圖三十九 幾個重要的曲綫

53 常態曲線公式的引申*

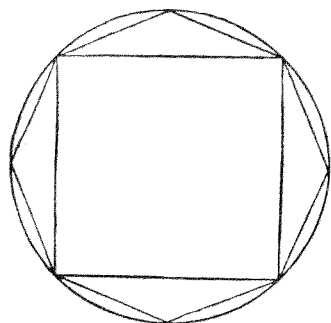
二項定理的普通公式在上章已經講明爲：

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

在此定理中若兩數同一價值，則二項展開以後可得下列公式。

$$(a+a)^n = a^n + na^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^n + \dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^n + na^n + a^n。$$

我們根據二項定理繪一次數分配圖，在前章已有例子。這圖本是個對稱的圖，惟其點數尚嫌太少不能使之平滑。猶憶在幾何學上多面

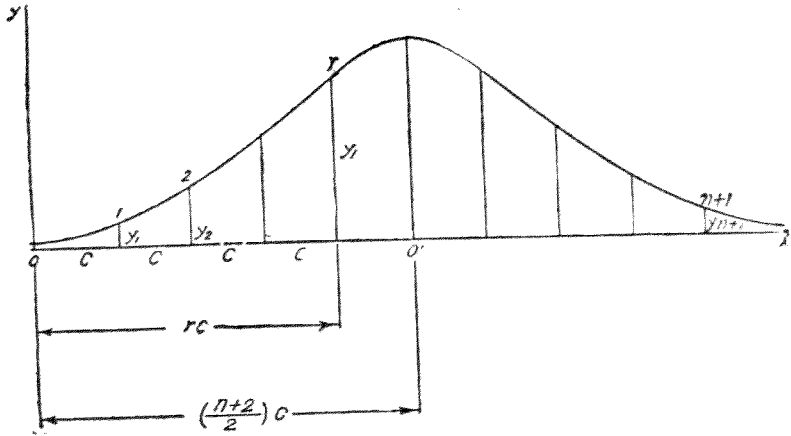


圖四十 多面形漸近圓周之表示

形繪於一圓之內，若面數加倍（圖四十）則距離圓周較近，愈加倍則愈近圓周，至達到爲止（approaching the circumference as a limit）。在二項分配圖上使成一常態曲線，亦正同此理。茲試以 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n+1}$ 與 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ ，湊成 $(x_1, y_1)(x_2, y_2), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ 等點而繪一曲線如

下。

* 若多數學生未習微積分，此節可以不講。



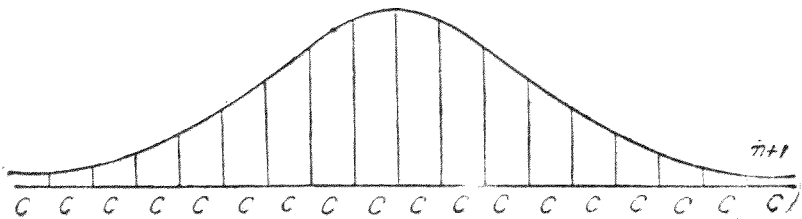
圖四十一 常態曲線之解釋(其一)

在這個圖的情形之下

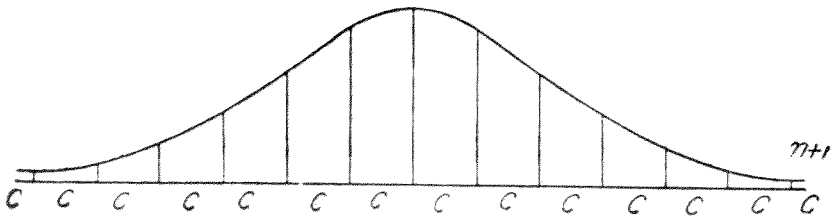
$$x_1 = c, x_2 = 2c, x_3 = 3c, \dots, x_{n+1} = (n+1)c,$$

$$x_r = rc, y_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)} a^n$$

c 與 n 的關係為反比的，就是 n 的數少則 c 的數大，若 n 的數多則 c 的數小，參觀四十二，四十三兩圖，當更明瞭他們的關係。

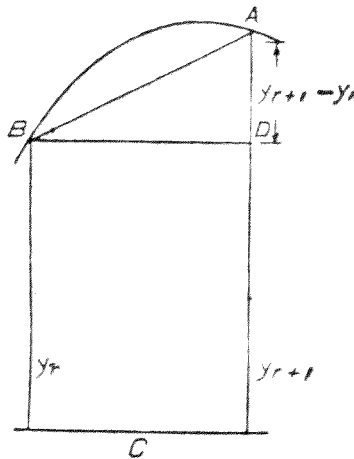


圖四十二 常態曲線之解釋(其二)



圖四十三 常態曲線之解釋(其三)

現在我們用圖四十一的一部分來說明常態曲線的關係並引申他的公式。



圖四十四 常態曲線之解釋(其四)

$$\text{Tan } \angle ABD = \frac{AD}{BD} = \frac{y_{r+1} - y_r}{c}$$

$$y_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} a^n$$

$$\begin{aligned}
 y_r &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)} a^n \\
 \therefore \frac{y_{r+1}-y_r}{c} &= \frac{a^n}{c} \left[\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)} \right] \\
 &= \frac{a^n}{c} \left(\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdots(r-1)} \right) \left[\frac{n-r+1}{r} - 1 \right] \\
 &= y_r \frac{(n-2r+1)}{rc} \quad (一)
 \end{aligned}$$

爲求普通公式並爲達到常態曲線起見，我們須找下列關係。

$$x = \frac{1}{2}(x_r + x_{r+1}), \quad y = \frac{1}{2}(y_r + y_{r+1}) \quad (二)$$

$$x_r = rc, \quad x_{r+1} = (r+1)c$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}[rc + (r+1)c]$$

$$= \frac{c}{2}(2r+1) \quad (三)$$

$$y = \frac{1}{2}(y_r + y_{r+1})$$

$$= \frac{a^n}{2} \left[\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdots(r-1)} \right] \left(\frac{n-r+1}{r} + 1 \right)$$

$$= \frac{y_r}{2r}(n+1) \quad (四)$$

$$\begin{aligned} \text{是以 } \tan \angle ABD &= y_r \frac{(n-2r+1)}{rc} = \frac{2ry}{(n+1)} \left[\frac{(n+2)-(2r+1)}{rc} \right] \\ &= \frac{2y}{(n+1)c} \left[(n+2) - \frac{2x}{c} \right] \end{aligned} \quad (五)$$

$$\left(\text{代入(三)} x = \frac{c}{2}(2r+1), \frac{2x}{c} = 2r+1 \right)$$

$$\text{如是 } \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{(n+1)c} \left[n+2 - \frac{2x}{c} \right]$$

爲求公式簡單起見，我們可用 $\left[(n+2)\frac{c}{2}, 0 \right]$ 爲原始點，在圖四十一

上我們可算由 0 移至 $0'$ ，此時之 x 爲 $x + \frac{(n+2)c}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{2y}{(n+1)c} \left[(n+2) - \frac{2x + (n+2)c}{c} \right] \\ &= \frac{2y}{(n+1)c} \left[\frac{(n+2)c - 2x - (n+2)c}{c} \right] \\ &= -\frac{4xy}{(n+1)c^2} \end{aligned} \quad (六)$$

求積分 Integrating

$$\int \frac{dy}{y} + \frac{4}{(n+1)c^2} \int x \, dx = 0$$

$$\therefore \log y + \frac{4}{(n+1)c^2} \left[\frac{x^2}{2} \right] + A = 0$$

(在此 A 爲一常數 Constant)

$$\log y + \frac{2x^2}{(n+1)c^2} + A = 0$$

$$\therefore y = y_0 e^{-\frac{2x^2}{(n+1)c^2}} \quad (26)$$

(y_0 爲一新的常數)

此公式亦可寫爲
$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (27)$$

$$\left(\text{此處 } \sigma^2 = \frac{(n+1)c^2}{4} \right)$$

這就是常態曲線或機率曲線的公式。 y_0 爲一直線由圖之高峯起，至橫軸上之均數止，在常態曲線上均，中，衆三數交集於一點， y_0 既代表高峯亦即次數之最多者。他亦可用下列公式求出

$$y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{N}{2.5066\sigma} \quad (28)$$

所以在一種實驗裏假使我們知道 N 和 σ ，則我們可以求出 y_0 。若將這一部分公式代入常態曲線公式裏，我們亦可寫爲

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (29)$$

54 次數多邊圖使成常態曲線

現在我們有了 $y_0 = \frac{N}{2.5066\sigma}$ 一公式，我們要修勻一個次數圖，卻非常容易，而且比從前的方法要精確些了，因為在附錄裏我們有個表可以檢查我所需要的次數。在這表裏當以 y_0 的數爲最大，因為 y_0 代表

次數之最多者。這圖既是常態曲線，他的高峯之下當是均數。從這一點起我們可計算 σ 。在表上我們可以查出與各 σ 或幾分之幾 σ 相當的次數，有了 σ 作距離，和與他們相當的次數，那當然可以繪成一個常態曲線了。茲試以表四十九的材料作例子演算於下。

在這表上 $N=196$, $\sigma=13.4$ 或 1.34 組距, $M=54.13$

$$y_0 = \frac{N}{2.5066\sigma} = \frac{196}{2.5066(1.34)} = \frac{196}{3.36} = 58.33$$

在檢查表上 y_0 的數既是最大的，以他爲一則其他次數必小於一。
茲於檢查表上找出各相當的次數如下

表五十八 σ 與其相當之縱線

根據表上	根據演算材料
$y_0 = 1.000$	$= 58.33$
與 $.5\sigma$ 相當之 $y = .883$	$= 51.51$
與 $1. \sigma$ 相當之 $y = .607$	$= 35.41$
與 1.5σ 相當之 $y = .325$	$= 18.96$
與 $2. \sigma$ 相當之 $y = .135$	$= 7.87$
與 2.5σ 相當之 $y = .044$	$= 2.57$
與 $3. \sigma$ 相當之 $y = .011$	$= .64$

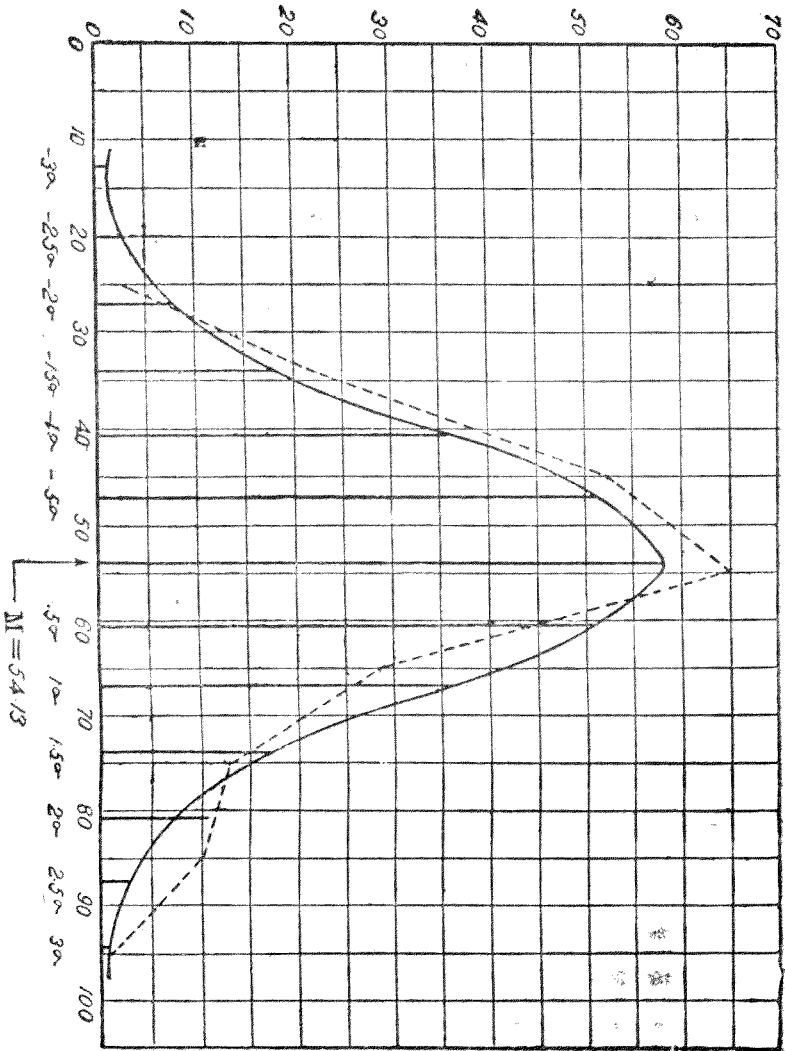
58.33一數是用公式算出來的。在 $y_0=1.000$ 的時候，與 $.5\sigma$ 相當之 y 既等於 .883，則 $y_0=58.33$ 的時候，他應當等於 51.51 (即 $\frac{.883}{1.000} \times 58.33 = 51.51$) 由此類推，我們求得其他與 σ 相當之次數。這圖既

是常態曲線，是對稱的，則與各負 σ 相當之次數當等於與各正 σ 相當之次數，所以我們不必另求。第二步我們所要求的是距離，就是每半個或一個 σ 究竟有多少。這 σ 的數等於13.4材料上已經備有。我們止須在橫軸上找出這些點來。計

$M = 54.13$	$M = 54.13$
$\underline{-6.70}$	$\underline{+6.70}$
$-.5\sigma = 47.43$	$+.5\sigma = 60.83$
$\underline{-6.70}$	$\underline{+6.70}$
$-1.0\sigma = 40.73$	$+1.0\sigma = 67.53$
$\underline{-6.70}$	$\underline{+6.70}$
$-1.5\sigma = 34.03$	$+1.5\sigma = 74.23$
$\underline{-6.70}$	$\underline{+6.70}$
$-2.0\sigma = 27.33$	$+2.0\sigma = 80.93$
$\underline{-6.70}$	$\underline{+6.70}$
$-2.5\sigma = 20.63$	$+2.5\sigma = 87.63$
$\underline{-6.70}$	$\underline{+6.70}$
$-3.0\sigma = 13.93$	$+3.0\sigma = 94.33$

現在我們有了距離並與各距離相當之次數。換句話講，我們有了 (x, y) 各點我們當然可以繪圖了。茲試聯各點而成之。(見179頁)

圖上的虛線是根據原來次數所繪的，實線是修勻的圖。在這種情形之下與其說修勻不如說是重疊，因為這修正的曲線實疊於原來的次數多邊圖之上。在這新圖之上從高峯至橫軸有一垂直線，就是 y_0 。他



圖四十五 常態曲線與次數多邊圖之重疊

等於 58.33。他遇橫軸於均數之一點，即 $M=54.13$ 用箭頭所示之處。從此向左右兩邊劃分 $.5\sigma$, 1.0σ , $\dots\dots 3.0\sigma$ 等距離，在右者為正號，在左者為負號。由各 σ 所在之地繪垂直線至等於各個 y 數為止，再連各項點即成此圖。在例子之中我們以 $.5\sigma$ 為最小的距離，故各個 y 數尚不甚多。為練習起見，即此連成曲線已能代表。若距離再要分得小些如 $.1\sigma$, $.2\sigma$, $.3\sigma$ 等或竟小至 $.01\sigma$ ，因之 y 數加多，繪圖時比較平滑亦未嘗不可。不過這種辦法殊覺麻煩，而在原則明瞭之後，似不必嘗試，藉省時間。

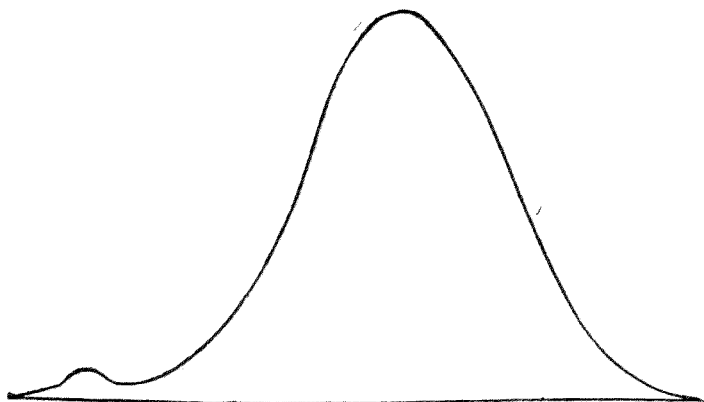
55 理論與實際

在測驗上欲使次數之分配呈乎常態，本是一種理想的辦法。在次數多至五六千的時候，分配起來或者近乎常態，但是在我們的例子之中次數不過 196，要他分配得近乎常態似成問題。所以這一點我們應當注意。

考常態曲線創用於英人高爾敦 (Galton) 氏*。他所根據的事實為 (a) 身體測量之結果及 (b) 人類能力之觀察。以後統計學家或測驗學家應用這理論的很多，因為常態曲線雖是一種理論，然而這是比較上最好的理論。據桑代克 (Thorndike) 氏說，應用常態曲線的理由頗不充足，因為身體測量中如體重，腕力等其分配並不成一常態曲線。又人類智力之分配同級生的當比同年生的為常態，似因同級生的成績乃教育力量所促成，至同年生之成績乃由天然原因，我們無從揣測。桑代克

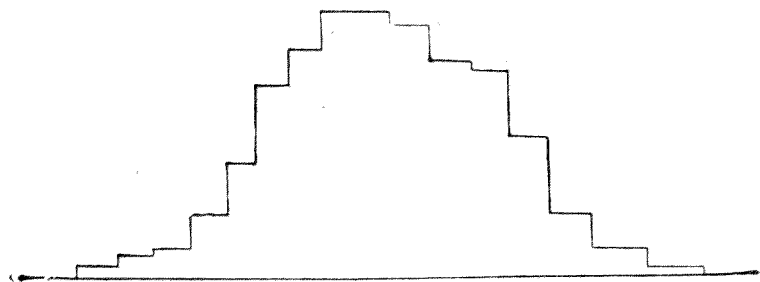
* 參閱拙著 曲綫配合之研究 (將由北平中華教育文化基金會印行)

以爲天然原因所可揣測的爲幼兒的種種疾病。兒童染了這樣疾病或能使其智力低落，所以這智力曲線似爲雙峯式的如下。



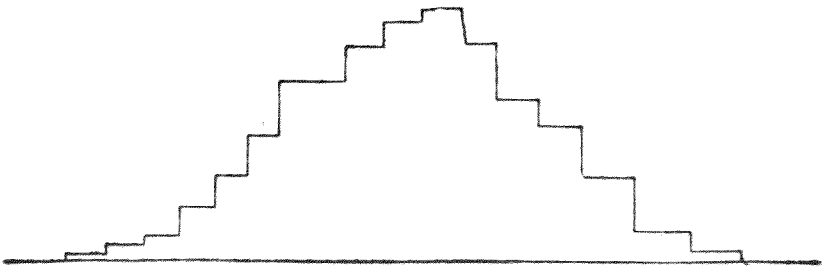
圖四十六 智力分配圖（桑代克的假定）

人數多，幾個分配圖混合起來，也很近於常態 茲繪桑代克彙集之各種智力分配圖於下以供參考。

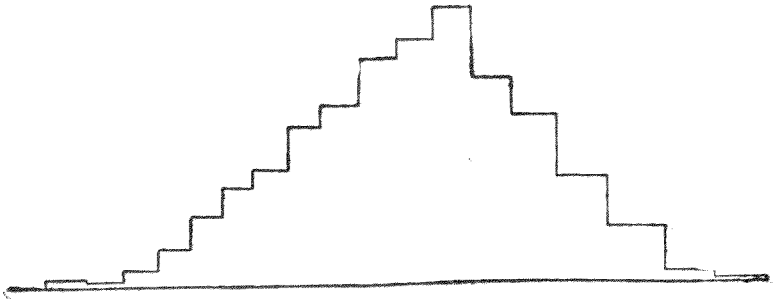


美國國製測驗A種之結果
（不分性別，不分種族之別）

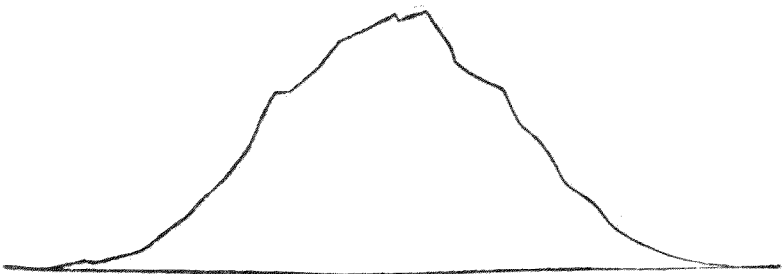
圖四十七 其一 十一歲兒童智力之分配



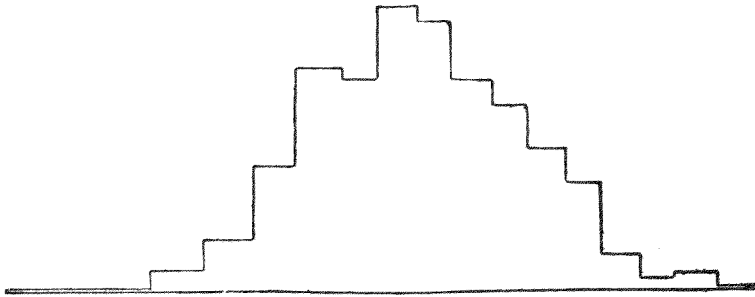
圖四十八 其二 十二歲兒童智力之分配



圖四十九 其三 十三歲兒童智力之分配

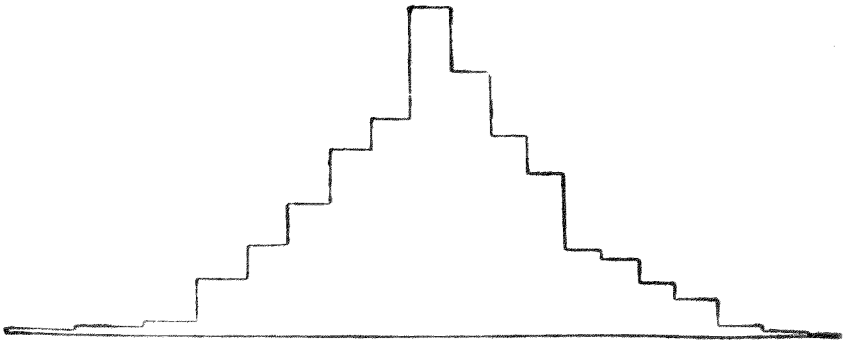


圖五十 其四 上三圖之混合表示

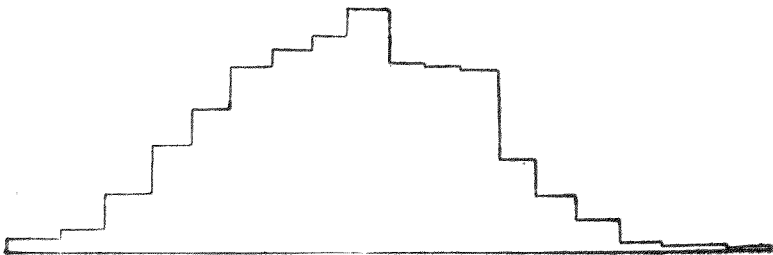


俄音斯(Otis)智力測驗之結果

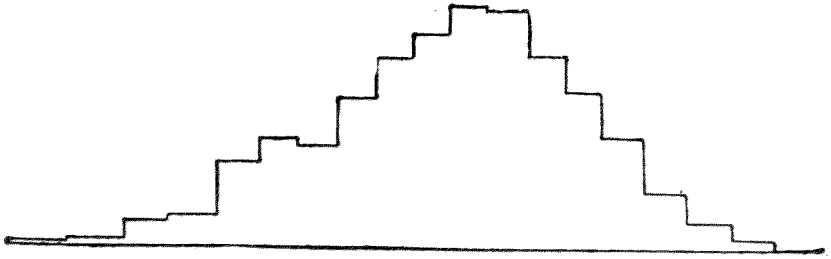
圖五十一 其一 十一歲兒童智力之分配



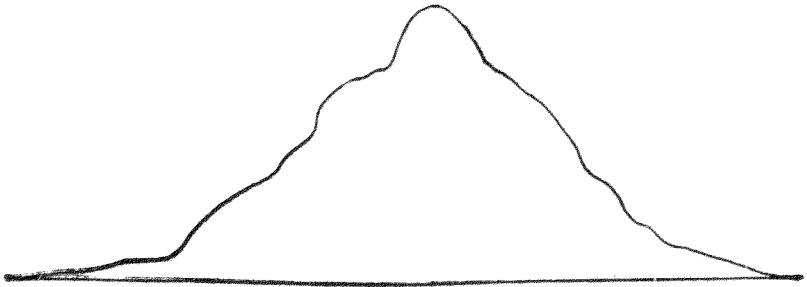
圖五十二 其二 十二歲兒童智力之分配



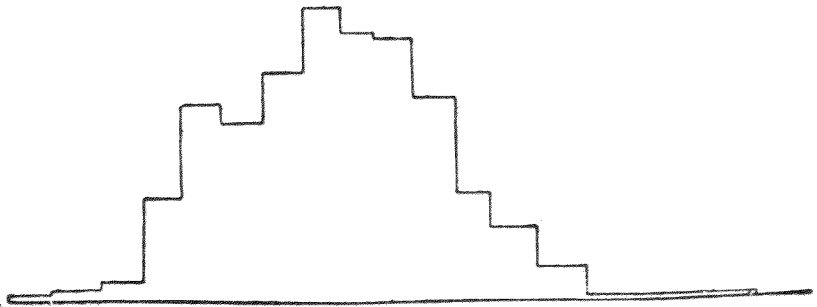
圖五十三 其三 十三歲兒童智力之分配



圖五十四 其四 十四歲兒童智力之分配

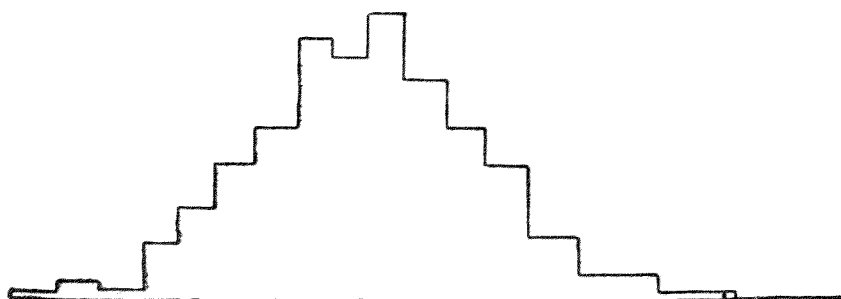


圖五十五 其五 上四圖之混合表示

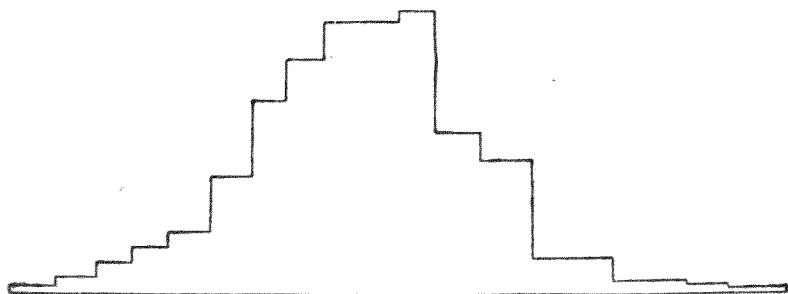


海格德(Haggerty Delta 2)測驗之結果

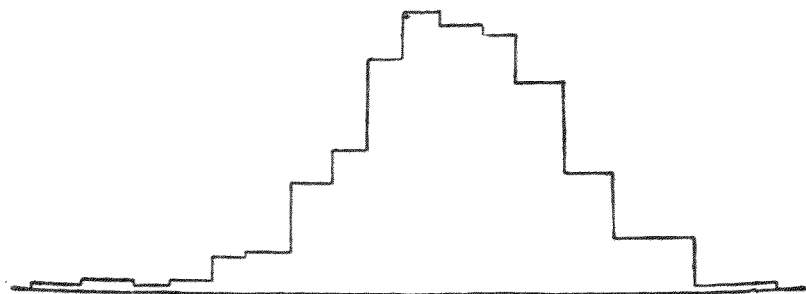
圖五十六 其一 十一歲兒童智力之分配



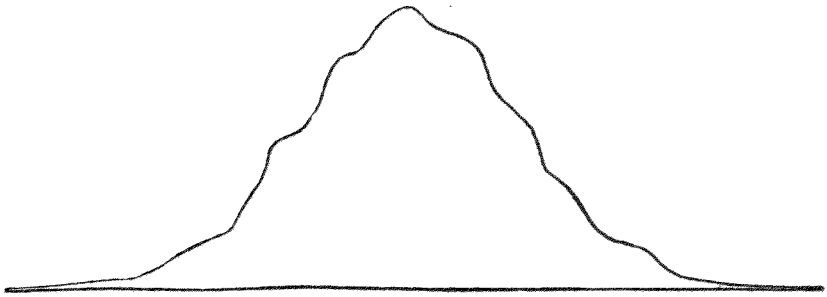
圖五十七 其二 十二歲兒童智力之分配



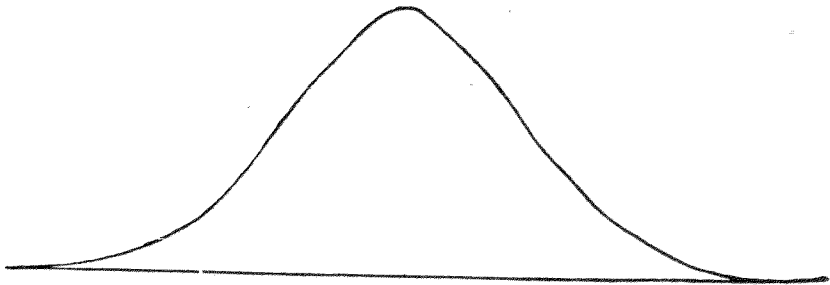
圖五十八 其三 十三歲兒童智力之分配



圖五十九 其四 十四歲兒童智力之分配



圖六十 上四圖之混合表示



圖六十一 上三混合圖之混合表示

從這幾個圖和他們的混合表示看來，我們覺得兒童智力之分配，在所測的人數極充分的時候，是很近乎常態的。所以要實際情形合乎理論，我們的實驗範圍就應當大，人數就應當多*。這一點俟在下章談到機誤的時候，再詳細討論罷。

練習題

1. 試根據下列材料繪一次數分配圖，並疊常態曲線於其上。

* 此亦視材料而定。在生物實驗中其結果之分配有終為偏態者。

組距	次數
30	9
40	25
50	163
60	366
70	868
80	1059
90	1074
100	799
110	318
120	103
130	36
140	12
150	2
160	
總數	4884

$$\sigma = 16.80$$

$$M = 89.28$$

注意：求 y_0 之時所用之 σ 須以組距為單位。

2. 試用下列材料在一面紙上繪 A, B 兩曲線，並在組距之中點上，表示其相當之 y 數。

曲線	σ	M	N	組距
A	16	50	400	10
B	16	50	800	10

3. 試在一面紙上用下列兩種材料，各繪一曲線，並在每半個 σ 所在處，表示其相當之 y 數。

曲線	σ	M	N	組距
A	10	60	400	10
B	15	60	600	10

4. 試在一面紙上，根據下列事實，各繪一曲線，並在每半個 σ 所在地，表示其相當之 y 數。

曲線	σ	M	N	組距
A	10	60	1000	10
B	15	60	1000	10

第十五章

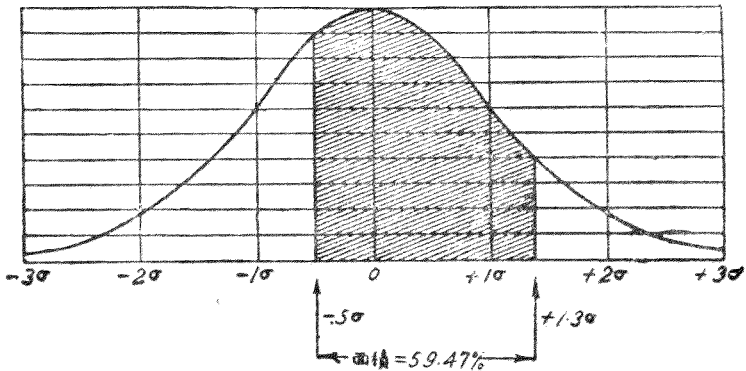
常態分配圖的面積

56 面積的計算方法

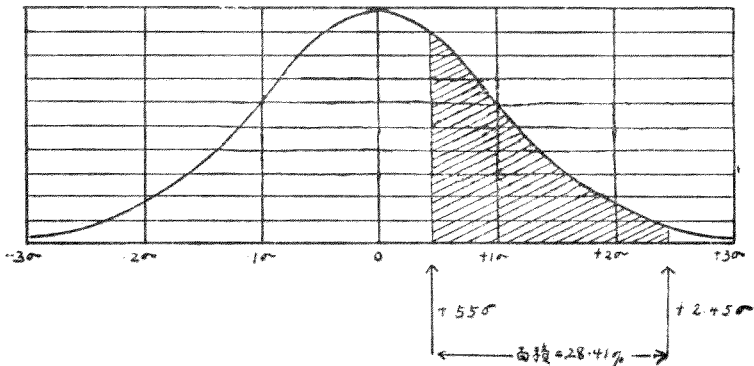
常態分配圖或常態曲線從數理上講，其兩端蔓延，靡有窮盡，是不與橫軸相交的，這一點我們在上章已經敘明。照這樣講，常態分配圖既不合攏，其面積似無由定。不過我們要知道這圖在蔓延之際，所有的面積非常之小，而實際上在他的面積含有百分之 99.80 或 99.90 的時候，我們對於其他兩端無論如何延長可不必注意。

以 σ 作距離而由距離上定面積，我們在十一章亦曾講過。在圖三十三（第一三九頁）上我們曾註明在均數左或右算起，第一個 σ 佔全部面積之 34.13%，第一，第二兩個 σ 則佔 47.72%。第一，第二，第三，三個 σ 則佔 49.86%。照這樣算，第二個 σ 實佔 13.59% 而第三個 σ 實佔 2.14%。這三個 σ 的面積所以不等的緣故，因為均數在高峯之下，凡近於他的 σ 其面積都很大，轉過來講，凡 σ 離他越遠的，則其所佔之面積越小，所以以均數為起點，無論這 σ 是往左或往右，他的面積是漸漸減少的。明瞭了這一點，我們才可以計算分配圖的任何部分的面積。還有一點我們應注意的是：在初等算學上我們習慣了算平方，長方，三角形，圓形等面積，至曲線的面積則非用高等算學，尤其是積分學，不能算出，因為在積分學上只要示明了兩端的限度，則

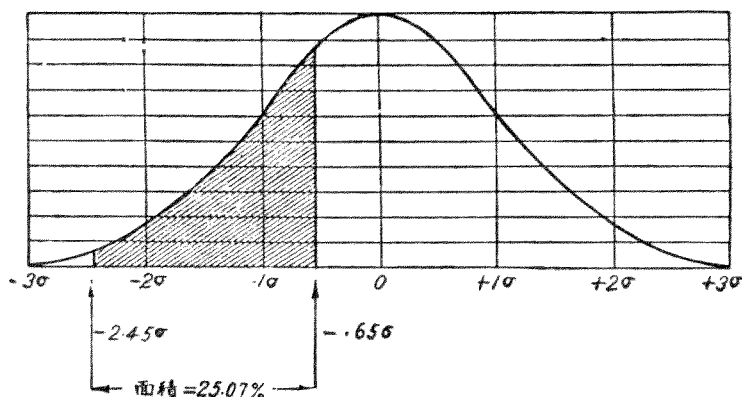
無論甚麼圖形的面積，總可根據他的公式求出來的，在應用上我們亦不必顧慮這高等算學的困難，因為為便利讀者起見附錄上備有一個表，從那裏對於多少 σ 等於多大面積，或多大面積等於多少 σ 可以隨時檢查而出。茲引幾個例子如下。



圖六十二 面積的計算(例一)



圖六十三 面積的計算(例二)



圖六十四 面積的計算(例三)

在圖六十二上我們要求的面積是從負.5σ到正1.3σ。我們從表上看半個σ(正的或負的)的面積等於19.15%。1.3σ的面積等於40.32%。兩數相加其和等於59.47%，這就是從負.5σ到正1.3σ的面積。在這裏我們應當注意的是：我們事先決不能把這兩部分的σ數相加，而找他們的和的面積，因為那個負的σ與均數接近，他佔的面積是很大的。若把他加在1.3σ之上，則其和等於1.8σ。在這種情形之下，這半個σ的面積是在1.3σ的右邊一段，即1.3σ至1.8σ之間的面積。這一段與均數相距既遠，其面積當然很小，且並不是我們所要求的，當然不對。關於這樣的錯誤，俟看了圖六十三及六十四的例子當更明瞭。

在圖六十三上我們所要求的是從+.55σ到+2.45σ的面積。在表上所有的σ數都是從零點起的。我們只有從零到+.55σ和從零到+2.45σ的面積，並無從+.55σ到+2.45σ的面積。我們欲求此一段的面積，須先求出由零至+2.45σ的面積，照表上他等於49.29%，

次求出由零至 $+ .55\sigma$ 的面積，照表上他等於20.88%，從前者減去後者，他們的差等於28.41%。這是對的。假使我們不這樣求答，而先求 σ 數的相差，然後在表上找面積，那就錯了。

在圖六十四上所欲求之面積，雖在負的方面，然從表上求答與找正的 σ 的面積時並無不同之處，計

$$-2.45\sigma \text{ 的面積} = 49.29\%$$

$$- .65\sigma \text{ 的面積} = 24.22\%$$

$$- .65\sigma \text{ 與 } -2.45\sigma \text{ 之間的面積} = 25.07\%$$

57 等級與地位

在學校裏，教師評閱試卷，有用等級制度者，如分最優，優，中，下，劣或A，B，C，D，E或甲，乙，丙，丁，戊，五等者。他們用這個方法，亦嘗根據常態曲線的理論。假使一級數十人的試卷，經兩三位教師評閱，他們所與的等級，在一個學生的成績上，未必完全相等。有與A者亦有與B者，視乎教員的寬嚴而定。還有一層，等級與地位是不相同的，例如甲生得A，其分數為90，乙生得C，其分數為65，又丙生得B，其分數為80，丁生得D，其分數為50。從這個例子看來，甲生高乙生兩等，而丙生亦高丁生兩等，但是他們彼此所高的分數一是25，一是30，並不相等。假使兩三位評判員止與等級而不給分數，則如此事實我們更無從知道了。在這種情形之下，我們應當設法把等級化為分數，或其他成績單位，若評判的教師不僅一人，我們也要設法把他們所與的等級，俟化為成績單位，然後平均一下。下面

是個例子試演算之。

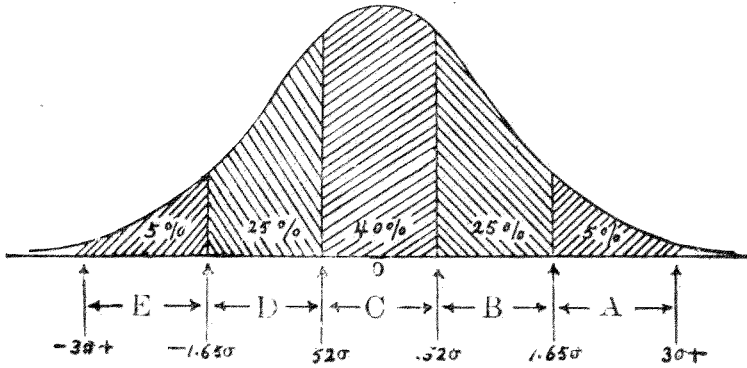
表五十九 教師評判之等第表

等 第	評 判 教 師		
	甲	乙	丙
A	5	10	20
B	25	20	25
C	40	40	35
D	25	20	15
E	5	10	5
總 數	100	100	100

在表五十九裏面甲，乙，丙三位評判員所與一百人之等第並不相同。三位評判員所評判者既同是這一百人的成績，何以得等第A者在甲止五人，在乙則有十人，而在丙則有二十人？當然，考核成績有嚴有寬，因為各個評判員的標準不同，有的希望太大，非達到他的理想的標準不與以最高等第。還有一層，評判員既以成見作根據，難免主觀之弊。在研究工作上，如製作文量表，要減少這些主觀的態度，第一要請富有經驗的專家來評判，而所請的人數也不能太少。這兩點在研究工作中都很重要的。

在表六十(見194頁)裏我們把評判員甲的等第化為 σ 以備平均。關於化的方法我們可以簡單的敘述一下

第一行是等第，第二行是得各等第的人的百分數。這兩行都是從表五十九抄來的。現在我們假定他們的分配為一種常態分配，故在圖



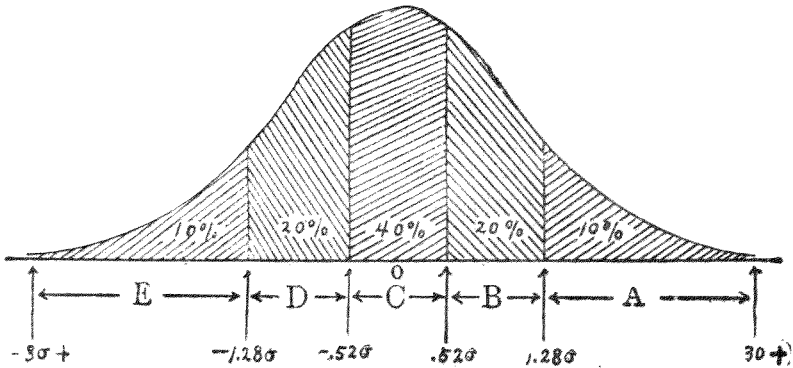
圖六十五 等第在面積上之地位(甲)

表六十 化等第為σ (甲)

評 判 員 甲				
等 第	百分數	兩 極	均 數	σ
A	5	+50 +45	+47.5%	+1.96
B	25	+45 +20	+32.5%	+ .94
C	40	+20 -20	0	0
D	25	-20 -45	-32.5%	- .94
E	5	-45 -50	-47.5%	+1.96

六十五上得等第A者佔該圖右端之5%面積。圖上均數所在地既為零，則在零點，或原始點，或 y_0 縱線之右者共佔面積百分之五十。所以右

端 5%面積的兩極為45與50。在距離上一為 $+1.65\sigma$ ，一為 $+3\sigma$ 。得等第B的人為百分之二十五。在面積上他們的兩極為25與40，在距離上一為 $+.52\sigma$ 一為 $+1.65\sigma$ 。得等第C的人為40%。在面積上他們的兩極為 -20 與 $+20$ 。在距離上一為 $-.52\sigma$ ，一為 $+.52\sigma$ 。得第等D的人為25%。在面積上他們的兩極為 -20 與 -45 。在距離上一為 $-.52\sigma$ ，一為 -1.65σ 。得等第E的人為5%在面積上他們的兩極為 -45 與 -50 。在距離上一得 -1.65σ ，一得 -3σ 。如是在圖上我們把他的面積劃分為A，B，C，D，E五段，而在距離上又把劃分處的 σ 註明。在表六十的第四行內我們求出各段的兩極均數。就此面積之均數而檢查相當的 σ 。所以A，B，C，D，E五等都化為 σ 了。

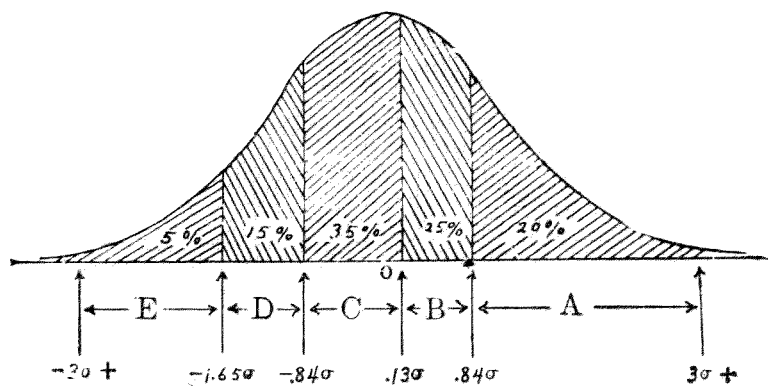


圖六十六 等第在面積上之地位(乙)

同理，在表六十一與六十二裏我們找出乙，丙兩評判員所與等第之 σ 數。將此結果連同表六十之所得，納入表六十三裏以便檢查。例如張生成績評判員甲與以B，評判員乙亦與以B而評判員丙則與以A。

表六十一 化等第爲 σ (乙)

評 判 員 乙				
等 第	百分數	兩 極	均 數	σ
A	10	+50 +40	+45%	+1.65
B	20	+40 +20	+30%	+ .84
C	40	+20 -20	0	0
D	20	-20 -40	-30%	- .84
E	10	-40 -50	-45%	-1.65



圖六十七 等第在面積上之地位(丙)

表六十二 化等第爲 σ (丙)

評 判 員 丙				
等 第	百分數	兩 極	均 數	σ
A	20	+50 +30	40%	+1.28
B	25	+30 +5	17.5%	+ .45
C	35	+5 -30	-12.5%	- .32
D	15	-30 -45	-37.5%	-1.15
E	5	-45 -50	-47.5%	-1.96

表六十三 等第化爲 σ 的總表

等 第	評 判 員		
	甲	乙	丙
A	+1.96 σ	+1.65 σ	+1.28 σ
B	+ .94 σ	+ .84 σ	+ .45 σ
C	0	0	- .32 σ
D	- .94 σ	- .84 σ	-1.15 σ
E	-1.96 σ	-1.65 σ	-1.96 σ

他的成績在 σ 應爲：
$$\frac{.940 + .840 + 1.280}{3} = +1.020$$

又如李生成績在甲爲D，在乙爲C，在丙則爲B。他的成績在 σ 應爲：

$$\frac{-.940+0+.450}{3} = -.160$$

所以有了這個檢查表(表六十三)在這一百人中我們可以就任何人的等第化爲 σ 而平均之。在表六十三裏尚有一點我們應當注意的，就是評判員丙考核成績，雖比較的寬，然等第化爲 σ 之後，其價值卻比較的小。例如與A相當之 σ ，在丙爲+1.28，在乙則爲+1.65，比丙的大，而在甲則爲1.96 又比乙的大了。在B，C，D三等第中其情形雖微有出入，而大致以甲的爲最大，乙的次之，丙的又次之。等第E似爲例外，因爲他被化爲 σ 之後，乙的最大，甲的與丙的相等。這種情形從最初(表五十九)即看得出來，因爲成績的分配在甲非常集中，兩頭人數很少；在乙分配較平，兩頭人數亦較多，在丙分配趨於右端，分數高的人爲數很多。由此看來，我們似覺甲先生嚴，丙先生寬，而乙先生則酌乎其中。

58 常態圖面在測驗上的應用

常態分配圖的面積亦常應用於測驗上。因爲測驗題的難易，可以根據答對者的百分數而定。例如答對第五題的人數佔百分之九十而答對第七題的人數佔百分之四十。這兩個結果比較起來當然第五題容易些。用這個方法比以每一題作一分，對了多少題就有多少分的要客觀些。在測驗工作裏，尤其是國文理解測驗或算學測驗，我們應當用這個方法，因爲兩題之中一爲百分之九十答對，一爲百分之四十答對，他們倆的相差的確是很大呢？

常態分配圖的面積既以百分計算，我們僅可根據每題答對者之百分數求 σ ，如是每一題有每一題的 σ 數。答對者的百分數比較的大，則這題的 σ 數應當比較的少，因為這題要比較的容易。轉過來講，答對者的百分數比較的小，則這題的 σ 數應當比較的多，因為這題要比較的困難。茲試舉例於下。

表六十四 問題艱難度之求法

測驗題	答對者的百分數	$\frac{1}{2}$ (面積)	σ	$\sigma + 5$
1	95	.45	-1.65	3.35
9	70	.20	- .52	4.48
12	46	.04	+ .10	5.10
17	5	.45	+1.65	6.65

在這個表上第一行是測驗題的數目，如第一題第九題等。第二行是各題答對者的百分數。第三行是面積的一半。因為在常態分配圖裏在 y 。兩邊的面積各佔百分之五十。在附錄的對照表上關於面積也分兩邊計算，所以從 .95 減去 .50 尚餘 .45。與這數相當的 σ 為 -1.65。這是第四行裏面的數。以下的 σ 數都是這樣求出來的。到了第五行又把減去之一半面積化為 5σ 加在其上。所以從第二第五兩行看來，測驗題答對者的百分數越大則他的 σ 越小。

美人麥柯爾 (McCall) 氏根據常態分配的原理來求他的 T 量表，

但是他所用的方法與此間所用微有不同。茲試舉例於下以供參考。

表六十五 T 分數之求法

原來分數	兒童數	超過數 $+\frac{1}{2}$ 達到數	超過數 $+\frac{1}{2}$ 達到數的百 分數	$\frac{1}{2}$ (面積)	σ	$\tau+5$	T分數
0	1	19.5	97.5	47.5	-1.96	3.04	30
1	0	19	95.0	45.0	-1.65	3.35	33
2	2	18	90.0	40.0	-1.28	3.72	37
3	2	16	80.0	30.0	-.84	4.16	42
4	3	13.5	67.5	17.5	-.45	4.55	45
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
總數	20						

從這表上看來麥柯爾並未求出每題的艱難度，乃假定分數為相等的單位，看得零分或一分或兩分的兒童各有多少。在這個例子裏兒童總數為20。其中得零分的止有一人，所以在第三行裏超過數 $+\frac{1}{2}$ 達到數等於 $19+\frac{1}{2}(1)$ 為19.5，他的百分比為97.5。由此可以求出 σ 。為省手續起見，麥柯爾根據常態分配的原理另造一個表，可以從超過數 $+\frac{1}{2}$ 達到數的百分比化為 σ 或T分數，那是很方便的。實際上T分數就是 $\sigma+5$ 的值以十乘之而不計其小數者。

在這方法裏麥柯爾既未顧到測驗題的艱難度，於理論上似乎不合而尤以在國文理解測驗或算學測驗裏易犯毛病。例如甲生答對了第一，第二，第三，第五，第六，第七，第十，七題。乙生答對了第一，第三，第四，第五，第六，第七，第八，七題。用麥柯爾的方法他們倆

的T分數是相同的，因為在這裏超過數 $+\frac{1}{2}$ 達到數的百分比是一樣的。假使用找艱難度的方法答對第二題者的百分數為七十，第十題者的百分數為九十，又答對第四題者的百分數為三十，第八題者的百分數為四十，那麼，甲、乙兩生的總成績就不一樣而且相差很遠了。所以麥柯爾的方法在地理歷史等測驗裏，其题目的艱難度相差不遠的，尚可採用，若在國文理解和算學測驗裏，用這個方法，有許多事實就不易查出來了。

練習題

1. 試在常態分配圖上求下列距離間之面積。

$$1. \quad +.55\sigma \text{——} +2.15\sigma$$

$$2. \quad -.25\sigma \text{——} +1.50\sigma$$

$$3. \quad -2.05\sigma \text{——} -.35\sigma$$

2. 試化下列之等第為 σ 並求出

$$1. \quad A_{\text{甲}} + A_{\text{乙}} + A_{\text{丙}},$$

$$2. \quad A_{\text{甲}} + B_{\text{乙}} + B_{\text{丙}},$$

$$3. \quad B_{\text{甲}} + B_{\text{乙}} + B_{\text{丙}},$$

$$4. \quad C_{\text{甲}} + C_{\text{乙}} + B_{\text{丙}},$$

之平均 σ 數。

等 第	評 判 員		
	甲	乙	丙
A	20	30	15
B	30	20	35
C	30	30	30
D	20	20	20

3. 根據下列材料求 S. D. 值(即艱難度值—— $\sigma+5$)

測 驗 題	答 對 者 的 百 分 數	面 積	σ	S. D. 值 $\sigma + 5$
1	90			
3	75			
7	60			
10	50			
9	35			

4. 根據下列材料求 T 分數。

題 數 (或 原 來 分 數)	答 對 兒 童 數	超 過 數 $+\frac{1}{2}$ 達 到 數 的 百 分 數	T 分 數
0	2		
1	6		
2	10		
3	15		
4	20		
5	14		
6	12		
7	8		
8	4		

第十六章

取樣的可靠性

59 樣子與全體之關係

關於可靠性我們在第一^一章裏面曾作簡單之敘述。在那裏我們曾用初中三年級國文測驗來作例子。我們假定江浙兩省有初中三年級學生六七千人，但是考察成績的時候，我們爲時間，經濟，人才三方面所限制，不能完全測到。實際上我們所測的不過數百人或千數百人，就此結果定一標準，以爲這就是初中三年級的國文常模（norm）。假使江浙兩省初中三年級生六千人謂之全體，則我們所選擇而測的幾個學校的初中三年生不過爲這全體中的樣子（sample）而已。我們所取的样子是能代表全體呢，還是一種特殊的（好的或壞的）樣子呢？我們知道在商業上也有打樣子的習慣。例如中國茶販到外國的時候，一船數千箱，當然不能一箱一箱的打開來查驗，只由嘗茶專家（tea taster）任取數箱嘗之，假使他說這茶不錯，他的意思是這茶如能代表全體，則全體也當然不錯。假使有一二奸商存心取巧。把艙面的箱子裝着好茶，下層的卻是壞茶。其結果樣子不能代表全體，名譽至此墮地。外商裹足，銷路減少。那取巧的商人希圖一二次的便宜，斷送了永久的顧客，真是弄巧成拙了。

在測驗上若選擇的樣子不能代表全體，雖不如商業上失敗之甚，

然而耗鉅款，費時間，徒勞無益，亦殊不值得。所以在舉行測驗之先，我們應當調查那許多學校無論如何我們要請他們參加的。例如我們要舉行國文測驗，我們要知道各校教授國文之旨趣，因為在國內中學校中，有附屬於國立大學的，有附屬於私立大學的，有的為省立，有的為縣立，有的為私立，有的為教會所立。在這些學校之中，有的偏重國文，有的偏重英文，有的偏重算學。在偏重國文的學校之中，又分為偏重『今話文』的與偏重『古話文』的兩種。在可能範圍之內，我們應當請他們都有代表加入，俾常模求出以後，成為一種適當的標準。

60 機誤及其限度

假使我們所選的樣子，確能代表全體，如是而求結果，難道就沒有別的錯誤了嗎？照我們的經驗上看，還是有的。例如舉行測驗的時間，我們本是規定的。在任何情形之下，時間應當相同。此所謂『別的情形相等』(other things being equal)。我們所求的既為某年級的國文能力，則閱讀的時間相等，始能知道國文能力未受其不等的影響。但是實際上一級數十人，在受測驗之時，難免有偶然因鉛筆斷了而犧牲了幾秒鐘，或偷看旁人一二問而得了偶然答對的便宜。這些偶然錯誤之中有多有少，我們是可以求得出來的。這種錯誤在統計學上名之曰機誤 (probable error)，或我們利用這機誤的公式，可以把這些錯誤量得出來而大致不差的。這些錯誤又叫變的錯誤 (variable errors)，因為他們是不一定的，是偶然的。還有一種錯誤是常的錯誤

(constant errors), 因為他們是常在的。例如我們測地的時候, 假使所用的量尺與標準尺有點相差, 如每一百尺相差三寸, 如是量下去, 就常常有這樣的錯誤, 在求結果的時候, 我們必須把他們全盤更正。又如舉行測驗之時, 主試者常遲一二分鐘始行收卷。因為有了這樣的習慣, 所以在統計上也發生了一種常的錯誤。這種錯誤事先可以預防, 事後可用別的方法更正。但是用機誤的公式所量出的並不屬於此一類, 這是我們應當明瞭的。總而言之, 機誤的用處是很有限的。樣子能否代表全體, 既非機誤之所知, 而習慣上常的錯誤, 亦非他所能為力。假如在江浙兩省初中三年級我們測驗了一千人, 他們確能代表全體而測驗的時候, 又無常的錯誤, 從此而算機誤, 我們能得可靠的結果。這一千人當然是由許多學校的初中三年級生組織而成的。假使以五十人為一組, 則此一千人乃由二十組所積成。這二十組各有一平均成績。他們彼此很難相等, 但是相差也不至太遠。假使全體的平均成績為 M , 而此二十組的各個平均成績為 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{20}$, 則在次數圖上 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{20}$, 當環 M 而分配。若是組數無限的加多, 則其可靠性更大。反之, 若所測止二三組, 人數不滿二百, 則其可靠性亦有限。

61 機誤的公式

機誤的公式若用數學原理引申出來頗冗長不便初學, 但是明瞭了以上的敘述, 則應用公式亦不困難。茲錄均數的機誤公式於下。

$$P. E._M = \frac{.6745\sigma}{\sqrt{N}} \quad (30)$$

P. E. 爲 probable error (機誤) 之簡寫。均數的機誤是與其總次數 (N) 和 σ 有關係的。他與 σ 的關係尚小，而與 N 的關係實大，因爲次數加多則 P. E._M 變小。次數越多則 P. E._M 越小，且樣子的均數越近於實在的或全體的均數，而這實驗的可靠性越大。(最小的 N 不得少於 30)。

現在我們用以前的材料 $N = 196$, $\sigma = 13.4$, $M = 54.13$ 來算機誤如下。

$$\begin{aligned} P. E._M &= \frac{.6745(13.4)}{\sqrt{196}} \\ &= \frac{9.0383}{14} = .646 \end{aligned}$$

以所 $M = 54.13 \pm .65$

樣子的均數爲 54.13，他的機誤爲 .65。54.13 - .65 = 53.48, 54.13 + .65 = 54.78，所以實在的或全體的均數大約在 53.48——54.78 之間。這機遇是一與一之比，就是全體的均數在內與不在內的機遇各有一半。這機遇的計算是根據常態分配的面積的。我們知道一個正的 P. E. 和一個負的 P. E. 各佔面積百分之二十五，所以正負兩個 P. E. 佔百分之五十，以 (100 - 50) 除 50 得一與一之比。假使我們用兩個機誤如 54.13 ± 2(.65)，這範圍爲 52.83——55.43，範圍加大則全體均數在內之機遇當更大。按兩個 P. E. 的面積爲百分之 41.13 正負各兩個 P. E. 則爲 82.26。以 (100 - 82.26) 除 82.26 得

$$\frac{82.26}{17.74} = 4.6$$

這就是說全體均數在 52.83——55.43 之內與不在其內之機遇為 4.6 與一之比。當然在內的機遇比較的多。同理，我們可以算出三個，四個，五個 P. E. 的均數範圍，並可算出全體均數在範圍以內之機遇。茲列表於下。

表六十六 機誤的機遇表

均 數 之 範 圍	所佔面積之百分數	機 遇
$M_1 \pm 1P. E. (53.48 - 54.78)$	50.00	1 -1
$M_1 \pm 2P. E. (52.83 - 55.43)$	82.26	4.6 -1
$M_1 \pm 3P. E. (52.18 - 56.08)$	95.70	22 -1
$M_1 \pm 4P. E. (51.53 - 56.73)$	99.30	142 -1
$M_1 \pm 5P. E. (50.88 - 57.38)$	99.93	1340 -1

計算取樣錯誤除 P. E. 外有用標準差者。他的公式如下。

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (31)$$

這公式與 P. E. 的公式原理相同。其所不同者為 P. E. 與 σ 之關係，因為 P. E. 比較的小止等於 $.6745\sigma$ 。用標準差算機遇可用下表。*

*關於樣子的可靠性，本數若大於其標準差二倍，或大於其機誤三倍，即為合用。若有重要的結論根據於他的，則本數須大於其標準差三倍，大於其機誤五倍。

表六十七 標準差的機遇表

均 數 之 範 圍	所佔面積之百分數	機 遇
$M_1 \pm 1 \sigma (53.17 - 55.09)$	68.27	2.15 - 1
$M_2 \pm 2 \sigma (52.21 - 56.05)$	95.45	21 - 1
$M_3 \pm 3 \sigma (51.25 - 57.01)$	99.73	369 - 1

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{13.4}{14} = .96$$

我們知道我們所用的材料為大學入學試驗的國文成績。這是預科和本一生的成績。這人數是 196。全國各大學每年所招之預科及本一生人數約在這數的二十倍左右。所以這一百九十六人是四千人中的樣子。假如我們也和美國一樣，有大學入學試驗的標準測驗，則我們根據我們學校的成績，可以推測全國大學入學試驗的總成績的情形一二。若是樣子不夠，我們也可聯合鄰近大學，加入他們的入學試驗成績，而得一可靠的標準。這種辦法似屬可行，而我們也打算於最近之將來從事研究並實行的。可是，在現在各種試驗既沒有一定的標準，而考試委員又各自為政。所以甲大學的標準也許太高，每年投考生數約有兩千，而所取者不過二百人，乙大學的標準也許太低，遇投考學生，來者不拒，如招兵似的盡量收容。總之在我們的研究情形之下，從樣子的均數 54.13 及其正負機誤 $\pm .65$ 上，我們推測不到全體的均數。我們也不能妄下結論，說全體均數在 53.48——54.78 之內和不在其內之機遇為一與一，或在 52.83——55.43 之內和不在其內之機遇為 4.6 與

一。

62 一個機誤的實驗

所謂在正負各一 P. E. 之內其機遇爲一與一，或在正負各二 P. E. 之內其機遇爲 4.6 與一。本是一種理論，根據常態分配圖的面積的。事實與理論相差幾何，我們不妨研究一下。在這個實驗裏我們用卡片 1024 張，每張各有一數由零到十，其分配即照 $(a+b)^{10}$ 之展開式，就是 0 與 10 各一張，1 與 9 各十張，2 與 8 各四十五張，3 與 7 各一百二十張，4 與 6 各二百十張，5 得 252 張，共一千零二十四張。在這總數裏我們隨意取出三十二張，而計其每張所有之數目。旋將這卡片歸入總數內使其混雜，然後再抽出三十二張。如是凡三十二次。所以這一千零二十四張卡片我們分作三十二個樣子，每個樣子計三十二張。在一個月之後我們爲比較起見，又另作三十二個樣子，每一樣子仍是三十二張。我們根據這兩次的實驗，求出各樣子的均數，及其機誤和差誤（即標準差）。

在六十八，六十九兩表裏第一行是樣子的數目從一到三十二，第二行是各樣子的均數，第三行是他們的標準差，第四行是各均數的機誤，第五行是各均數和他們的正負兩個 P. E. 的範圍。這全體的均數等於五，即 $(Q+P)^{10}$ 的展開式的均數，在十三章表五十六裏業已註明。所以在第六行裏我們問全體的均數是否在正負兩個 P. E. 之內。在表六十八裏在內者有十九，不在者有十三。在這個情形之下，在內與不在內的機遇爲十九與十三之比。照理論上講起來，應爲十六與十

表六十八 機遇的實驗結果(第一次)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
樣子	M	σ	P.E. _M	M \pm P.E. _M	全體均數在其內否	σ_M	M $\pm\sigma_M$	全體均數在其內否
1	4.88	1.31	.16	4.72-5.04	在	.23	4.65-5.11	在
2	4.78	1.63	.19	4.59-4.97	否	.29	4.49-5.07	在
3	5.16	1.72	.21	4.95-5.37	在	.30	4.86-5.46	在
4	5.13	1.24	.15	4.98-5.28	在	.22	4.91-5.35	在
5	4.63	1.34	.16	4.47-4.79	否	.24	4.39-4.87	否
6	4.88	1.79	.21	4.67-5.09	在	.31	4.57-5.19	在
7	5.00	1.39	.17	4.83-5.17	在	.25	4.75-5.25	在
8	5.13	1.22	.15	4.98-5.28	在	.26	4.87-5.39	在
9	4.97	1.55	.18	4.79-5.15	在	.27	4.70-5.24	在
10	5.13	1.65	.20	4.93-5.33	在	.29	4.84-5.42	在
11	5.09	1.29	.15	4.94-5.24	在	.23	4.86-5.32	在
12	5.00	1.00	.12	4.88-5.12	在	.18	4.82-5.18	在
13	4.34	1.36	.16	4.18-4.50	否	.24	4.10-4.58	否
14	5.16	1.23	.15	5.01-5.31	否	.22	4.94-5.38	在
15	5.16	1.89	.23	4.93-5.39	在	.33	4.83-5.49	在
16	4.78	1.78	.21	4.57-4.99	否	.33	4.45-5.11	在
17	5.28	1.40	.17	5.11-5.45	否	.25	5.03-5.53	否
18	4.78	1.39	.17	4.61-4.95	否	.25	4.53-5.03	在
19	5.16	1.77	.21	4.95-5.37	在	.31	4.85-5.47	在
20	4.66	1.24	.15	4.51-4.81	否	.22	4.44-4.88	否
21	5.06	1.32	.16	4.90-5.22	在	.23	4.83-5.29	在
22	4.94	1.64	.20	4.74-5.14	在	.29	4.65-5.23	在
23	4.47	1.37	.16	4.31-4.63	否	.24	4.23-4.71	否
24	4.78	1.48	.18	4.60-4.96	否	.26	4.52-5.04	在
25	5.03	1.86	.22	4.81-5.25	在	.33	4.70-5.36	在
26	5.06	1.51	.20	4.86-5.26	在	.27	4.79-5.33	在
27	4.97	1.51	.20	4.77-5.17	在	.27	4.70-5.24	在
28	5.03	1.57	.19	4.84-5.22	在	.28	4.75-5.31	在
29	4.78	1.32	.16	4.62-4.94	否	.23	4.55-5.01	在
30	5.16	1.50	.19	4.97-5.35	在	.27	4.89-5.43	在
31	5.38	1.69	.20	5.18-5.58	否	.30	5.08-5.68	否
32	4.75	1.52	.18	4.57-4.93	否	.27	4.48-5.02	在

表六十九 機遇的實驗結果 (第二次)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
樣子	M	σ	P.E. _M	M \pm P.E. _M	全體均數在其內否	σ_M	M $\pm\sigma_M$	全體均數在其內否
1	5.03	1.50	.18	4.85-5.21	在	.27	4.76-5.30	在
2	4.97	1.42	.17	4.80-5.14	在	.25	4.72-5.22	在
3	4.81	1.50	.18	4.63-4.99	否	.27	4.54-5.08	在
4	5.09	1.32	.16	4.93-5.25	在	.23	4.86-5.32	在
5	4.87	1.75	.21	4.66-5.08	在	.31	4.56-5.18	在
6	4.66	1.82	.22	4.44-4.88	否	.32	4.34-4.98	否
7	5.13	1.30	.15	4.98-5.28	在	.23	4.90-5.36	在
8	4.50	1.89	.23	4.27-4.73	否	.33	4.17-4.83	否
9	4.87	1.46	.17	4.70-5.04	在	.26	4.61-5.13	在
10	5.28	2.05	.24	5.01-5.52	否	.36	4.92-5.64	在
11	5.31	1.25	.15	5.16-5.46	否	.22	5.09-5.53	否
12	5.09	1.70	.20	4.89-5.29	在	.30	4.79-5.39	在
13	4.72	1.58	.19	4.53-4.91	否	.28	4.44-5.00	在
14	5.22	1.37	.16	5.06-5.38	否	.24	4.98-5.46	在
15	4.91	1.46	.17	4.74-5.08	在	.26	4.65-5.17	在
16	5.47	1.92	.23	5.24-5.70	否	.34	5.13-5.81	否
17	5.34	1.52	.18	5.16-5.52	否	.27	5.07-5.61	否
18	5.44	1.60	.19	5.25-5.63	否	.28	5.16-5.72	否
19	4.66	1.23	.15	4.51-4.81	否	.22	4.44-4.88	否
20	4.56	1.70	.20	4.36-4.76	否	.30	4.26-4.86	否
21	5.34	1.79	.21	5.13-5.55	否	.32	5.02-5.66	否
22	4.81	1.52	.18	4.63-4.99	否	.27	4.54-5.08	在
23	4.63	1.64	.20	4.43-4.83	否	.29	4.34-4.92	否
24	5.75	1.89	.23	5.52-5.98	否	.33	5.42-6.08	否
25	5.34	1.20	.14	5.20-5.48	否	.21	5.13-5.55	否
26	4.97	1.80	.22	4.75-5.19	在	.32	4.65-5.29	在
27	4.78	1.30	.15	4.63-4.93	否	.23	4.55-5.01	在
28	5.44	1.66	.20	5.24-5.64	否	.29	5.15-5.73	否
29	5.22	1.41	.17	5.05-5.39	否	.25	4.97-5.47	在
30	4.91	1.60	.19	4.72-5.10	在	.28	4.63-5.19	在
31	4.72	1.25	.15	4.57-4.87	否	.22	4.50-4.94	否
32	5.09	1.80	.22	4.87-5.31	在	.32	4.77-5.41	在

六之比。在這裏理論與實驗的相差爲三。在表六十九的第六行裏在內與不在內之機遇爲十一與二十一之比。在這裏理論與實驗的相差爲五。但是這兩個的相差是一正一負。所以兩實驗結果平均起來，在六十四樣子之中其全體的均數在內與不在內之機遇爲三十與三十四之比。這結果頗與理論相近。

在六十八，六十九兩表裏，尚有第七第八第九三行。第七行是各均數的差誤而以標準差計算者。第八行爲正負兩差誤之範圍。全體的均數在兩正負差誤以內與不在其內的機遇爲 2.15 與一之比，前面已經講過。他們的範圍既較大，故全體的均數在內的機遇也較多。在第九行裏，合第一第二兩次實驗而計算之，全體的均數在內與不在內之機遇爲四十四與二十之比。兩數相約得 2.2 與 1 之比。照這實驗看來理論與事實可算很近。

塞斯頓 (Thurstone) 氏在他的統計大綱 (Fundamentals of Statistics) 裏曾作一個機誤實驗。他用卡片一千張，其數目從零到二十四。這分配也是常態的，其均數爲十二。他於卡片總數中任取二十張爲一組，共五十組，合一千張。在他的結果中全體的均數在正負兩個 P. E. 範圍之內與不在其內的機遇爲二十六與二十四之比，可算很近理論。

塞斯頓氏並未算出各均數之差誤。現在我們根據他的實驗算出新的結果連同我們的結果一併歸納於表七十內以資比較。(見213頁)

從表上的結果看來我們覺得理論與實驗的相差尙不甚遠。我們對於這相差認爲滿意的，因爲我們的實驗無論做得如何仔細，如何精確，

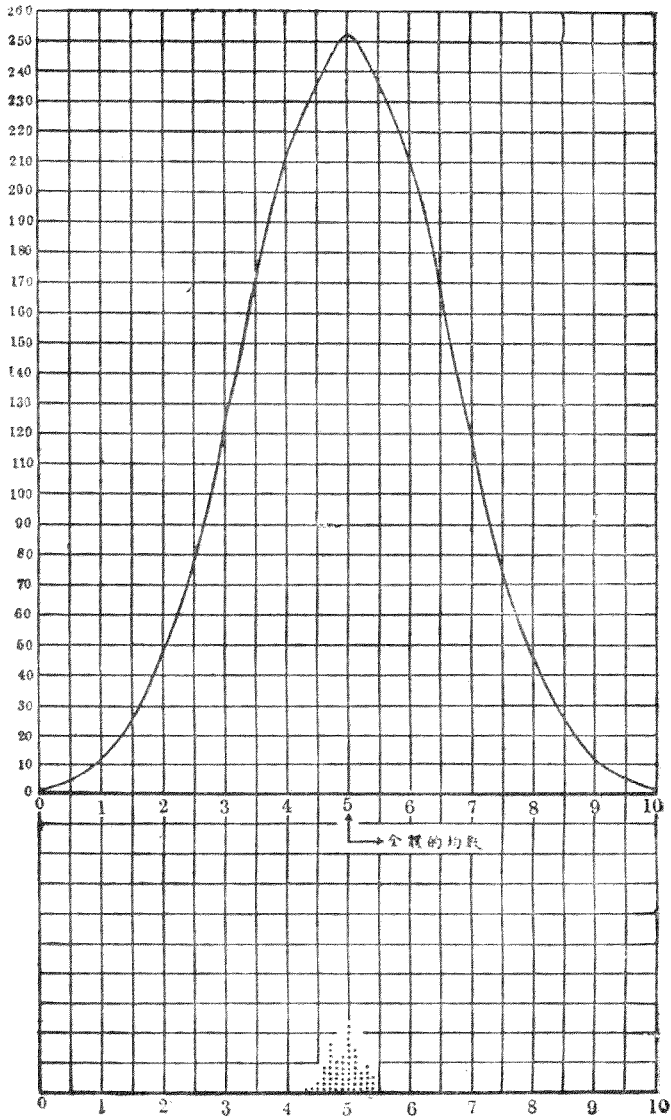
決難湊巧做得剛合乎理論。這實驗結果雖不絕對的與理論一樣，但是實驗之後，能使我們對於理論有一種極明瞭之印象。所謂全體的均數在正負兩個 P. E. 範圍之內與不在其內之機遇我們可以瞭然而無疑義。茲附下圖將更有助於我們的理解。

表七十 塞艾二氏實驗結果之比較

均數之 範圍	理論的 機遇	實 驗 的 機 遇							
		塞 斯 頓 氏		艾 偉 氏					
				第一實驗結果		第二實驗結果		平 均	
		比例	數目	比例	數目	比例	數目	比例	數目
M±1P.E1	-1.26—24	1.08—119	13	1.19—11	21	.52—130	34	.88—1	
M±2P.E4.6	-1.39—11	3.55—128	47	-1.23—92	56	1.51—133	92	1	
M±1σ	2.15—132	-1.78—126	6	1.3—118	14	1.29—141	20	2.2—1	

圖六十八是根據一千零二十四張卡片的分配繪的。圖的下部有黑點六十四，環常態曲線之均數而分配，兩端限度極小。常態曲線之均數為全體之均數，而那些黑點則為六十四樣子的各個均數。他們的分配極小，是證明他們與全體的均數很相近的。從理論上講，全體的均數在正負各一機誤的範圍以內有一半的機遇，所以樣子的均數越與全體的均數相近，則後者愈能處於前者的正負各一機誤之內。換一句話講，這六十四樣子的均數中其最中一半（三十二個）在其正負兩機誤展開之時，必能含有這全體的均數，而在左與在右的各四分之一樣子的均數則無此機會。這是從理論方面講。至於在實驗中樣子的均數，在正負兩 P. E. 展開之時，含有全體的均數的在六十四個中止有三十

圖 六 十 八



環 5 之黑點為六十四樣子的均數

個，而不含有者則有三十四個。

所以總結起來說，事實與理論是很相近的。他們雖不絕對的相近，然在相差上我們認為滿意。我們應當用種種不同的材料繼續實驗，並令初學者參加此項工作，以引起他們的興趣，幫助他們的了解。

63 兩數相差之機誤

在實驗的時候我們嘗比較兩種研究結果，看他們倆的數目之相差究因方法之不同呢或係偶然的呢？例如橫直讀的結果比較究竟橫讀優於直讀或直讀優於橫讀是因為排列的關係呢，還是因為偶然的湊合，不與讀法相干呢？在教學上這樣的問題也多，如兩種教法之比較，甲優於乙，是否甲法優於乙法，或由於其他原因。研究這種問題的時候，我們應用兩數相差之機誤不難解決。他的公式為

$$P. E. M_1 - M_2 = \sqrt{(P. E. M_1)^2 + (P. E. M_2)^2} \quad (32)$$

在這公式裏 M_1 為一種結果之均數而 M_2 則為另一種結果之均數。

表七十一 兩種教授法之比較

班次	甲班	乙班
方法	直接教授法	習慣教授法
人數	45	48
智力測驗結果之平均	137	138
試驗之先的成績平均	74.5	74.5
試驗半年以後的成績平均	91.43	89.64
標準差	7.08	7.23
均數的機誤	.785	.761

假使教授中學英文，我們有直接教授法和習慣教授法兩種。我們要試驗究竟那一種方法較優，可將學生分為程度相等的兩班同時施教。半年以後再行考察他們的進步。茲假定幾種結果如下。（見215頁）

這結果中我們所需要的為

$$M_1 = 91.43 \qquad M_2 = 89.64$$

$$P. E._{M_1} = .785 \qquad P. E._{M_2} = .761$$

代入公式

$$P. E._{M_1 - M_2} = \sqrt{(.785)^2 + (.761)^2} = 1.09$$

$$M_1 - M_2 = 91.43 - 89.64 = 1.79 \pm 1.09$$

在這結果中本數不及其機誤兩倍，所以這兩數相差的 1.79 究竟是否因為直接教授法的優點，我們不敢妄下結論，因為從可靠性方面講起來，本數至少要大於其機誤三倍的。這是最低限度。最低限度既不能達到，則結果之可靠性上即成問題。換句話講，這兩結果之有優有劣，是否因方法不同的關係，我們不敢斷定。欲解決這個問題，尚須繼續研究。

64 其他的機誤公式

除上述之兩機誤公式外尚有下列幾種。

$$P. E._{M_d} = \frac{.84535\sigma}{\sqrt{N}} = 1.2533 P. E._{M} \qquad (33)$$

$$P. E._{\sigma} = \frac{.6745\sigma}{\sqrt{2N}} = \frac{.4769\sigma}{\sqrt{N}} = .7071 P. E._{M} \qquad (34)$$

$$P. E._r = \frac{.6745(1-r^2)}{\sqrt{N}} \quad (35)$$

在最後一個公式裏所謂 r 係代表相關係數的，他的計算法在下章即要講到。用均數的機誤公式的時候，其次數分配不必一定要常態。但是用其他公式的時候，在證明上我們所假定的是常態分配。在相關係數的機誤公式裏若 N 數太小，而同時 r 數又太大此公式即不能應用。即應用之亦難得可靠之結果，學者希注意之。

練習題

1. 試用第 142 頁練習題 2 的材料求均數及中數之機誤。
2. 用 $\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ 求 σ_M (再用上列材料)
3. 試列一表求出 $M \pm 1 P. E.$, $M \pm 2 P. E.$, $M \pm 3 P. E.$, $M \pm 1\sigma$, $M \pm 2\sigma$ 等之範圍及其機遇。(根據上項材料)
4. 根據下列材料求兩數相差之機誤

$$M_1 = 104 \quad \sigma_1 = 10.0 \quad N_1 = 110$$

$$M_2 = 113 \quad \sigma_2 = 8.5 \quad N_2 = 106$$

第十七章

二數相關

65 緒論

在以上各章裏我們所敘述的大都是一個變數 (one variable) 的變種特性，如在 X 數列中各個數的分配是否集中，他們彼此間的相差是遠是近？有的時候爲比較起見，在集中趨勢或離中趨勢裏面亦嘗引用一二個變數，但是這些數不過是 x' ， x'' 而已，決非另一變數而以 y 代表的。這 y 的變數在二數相關裏始行加入。凡是科學的研究若有兩種事實，而此事實又能用數量表示出來，我們於此種情形之下，當盡量的求其相關。在物理學上如體積與溫度之關係；溫度升高以後在體積上有何變遷？這是物理學家所應當知道的。在植物學上如植物生長與水分之關係；水分加多或缺乏在植物之發育上有何變遷？這也是植物學家所應研究的。這種例子敘述起來，非常之多不一而足。所以數學的物理學家以爲無論甚麼東西，只要知道了他們的關係，總可以引出一個公式來，這就是算學上的函數概念。在心理學上或教育學上凡研究一種問題，我們可以引用函數概念的，我們亦當儘量的應用之。

65 相關係數

引用函數概念的條件是兩種事實須用數量表示出來，因爲有了數

量才能代入公式*.* 若找不出數量或有數量而無相當的單位以作標準則這條件未為履行。不特此也，在條件履行之後，也要有個簡單數目來表示這相關；不然，公式太複雜或須由公式中推測其相關，這種辦法也太麻煩。例如 $y=mx$ 的公式可算簡單，但是我們一望而不能求其解釋，必須推測自變數 (independent variable) 與倚變數 (dependent variable) 之關係，如 $x=0, y=?$, $x=1, y=?$ 就是總括起來講，看了這公式，我們雖知道他們是直線相關，但是這不是一個簡便方法，可以一目了然的。統計學家知道這種需要，所以他們想出一個相關係數的公式來，而以 r 代表這係數。這係數的計算由高爾登 (F. Galton) 發其端，而皮爾生 (K. Pearson) 總其成。因為要紀念這成功的發明家，所以我們也叫這係數為皮爾生的相關係數 (the Pearson coefficient of correlation)。這係數的公式亦極簡單，不過為應用的方便起見，我們有幾種形式，茲引申之於下。

現在以 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_n, Y_n)$

為 X 與 Y 二變數的各對，

以 M_x 為 X 數列中之均數，

M_y 為 Y 數列中之均數，

於是 $x = X - M_x$ (此間之 x 即算均差或標準差時所用之 d)

$y = Y - M_y$ 為各數與均數之相差。

*在統計方法上亦有不用數量而用品質的顯隱的，例如功課及格與不及格，視覺殘缺與不殘缺，學齡兒童之在學與不在學等，但計算起來究難如用數量的精確。

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \Sigma X^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \Sigma Y^2} \text{ 爲此兩數列之均方差。}$$

現在以 σ 爲單位較有標準，故以上 x 與 y 兩公式可改列如下。

$$x' = \frac{x}{\sigma_x}$$

$$y' = \frac{y}{\sigma_y}$$

用 x' 與 y' 則相關係數之公式爲

$$r = \frac{1}{N} \Sigma x' y' \quad (36)$$

這公式很簡單，因爲這相關係數不過是 X 與 Y 兩變數之積的總和而以總次數除之者，所以這係數在英文也叫 the product-moment coefficient。若用 x 與 y 則

$$r = \frac{\frac{1}{N} \Sigma xy}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{N} \Sigma xy}{\sqrt{\frac{1}{N} \Sigma x^2} \sqrt{\frac{1}{N} \Sigma y^2}} = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma(x^2)} \sqrt{\Sigma(y^2)}} \quad (37)$$

$$r = \frac{\frac{1}{N} \Sigma (X - M_x)(Y - M_y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (38)$$

$$= \frac{\frac{1}{N} \Sigma [XY - M_x Y - M_y X + M_x M_y]}{\sigma_x \sigma_y}$$

*公式(37)應用起來頗方便。若材料上無組距或次數很少又不需要標準差，僅可應用這公式藉省計算上之麻煩。

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{N}(\sum XY - M_x \sum Y - M_y \sum X + N M_x M_y)}{\sigma_x \sigma_y} \\
 &= \frac{\frac{1}{N}(\sum XY - N M_x M_y - N M_x M_y + N M_x M_y)^*}{\sigma_x \sigma_y} \\
 &= \frac{\frac{1}{N} \sum XY - M_x M_y}{\sigma_x \sigma_y} \quad (39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{N} \sum XY - M_x M_y}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum (X^2) - M_x^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum (Y^2) - M_y^2}} \quad * \\
 & \quad (40)
 \end{aligned}$$

67 正相關與負相關

相關之中有所謂正相關與負相關，而在正負之間者，也有所謂無相關或零相關。例如身高與體重兩個變數。假使許多學生的年紀都是十六歲，我們要看他們身較高的是否體亦較重。這樣，年歲既相同我

* 因為 $M_x = \frac{\sum X}{N}$, $M_y = \frac{\sum Y}{N}$ 所以 $N M_x = \sum X$, $N M_y = \sum Y$ 。

* 練習的材料中若有次數，在公式裏當然把 f 加進去。

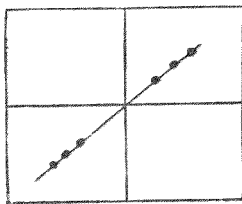
公式(40)在無組距的材料上亦極合用。

若在 X 數列中將其最小一數改為零，以後的數依次遞減，成倒 X' 數列(參閱 131 頁表四十七)，則公式(40)亦可寫為

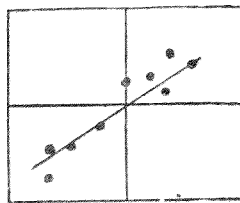
$$r = \frac{\frac{1}{N} \sum X' Y' - M_x' M_y'}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum X'^2 - M_x'^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum Y'^2 - M_y'^2}}$$

們當然可以求出身高與體重之關係。假使一組有四百人，我們把他們的各個身高與體重一對一對的量出來，這就是 (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , $\dots, (X_{400}, Y_{400})$ ，等數。若是身高每加一寸，體重即加五磅，一直照比例的加增上去；那麼，這相關可算是完全的。事實上當然不如此，因為在尋常經驗中，我們曾見過極胖的矮子，或很長的瘦子，不過這些不合比例的人究是少數，而在普通規則上，仍是長者之體較重，或體重之人較長。所以身高與體重在事實上雖不完全相關，卻是有大關係。

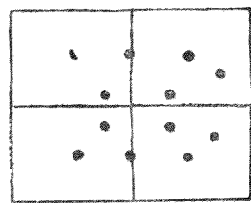
在事實上絕對的完全相關非常之少。在物理學上鋼塊的體積與其重量的相關可算是完全的，但是這樣的例子很少。在負的方面得完全相關的也很少。在氣量上欲溫度不變，壓力與體積的相關是負的，因為壓力增高則氣體變小，或氣體加大則壓力降低。關於這相關的各種情形，用下面的幾個圖表示出來恐怕要明瞭些。



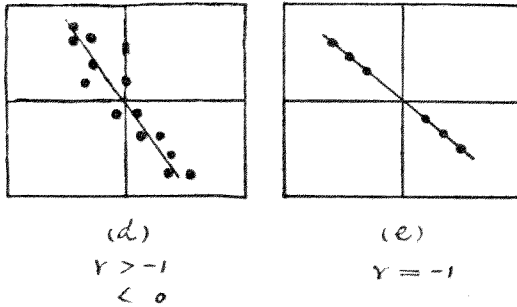
(a)
 $r = 1$



(b)
 $r > 0$
 $r < 1$



(c)
 $r = 0$



圖六十九 相關的遠近的代表

在(a), (e)兩圖裏面, 那直線是經過所有的點子的。在這樣情形之下, 他們的相關都是完全的。不過這兩直線的方向不同。我們知道 m 在這公式內是代表那直線的傾斜度 (slope) 的。在(a) m 為正號在(e) m 為負號。若兩 m 之數相同 (或相近) 而其符號不同, 其結果則兩直線的方向遂各不同, 因為他們的方向不同, 所以那相關在(a) 為正的, 在(e) 為負的。

我們知道用 $y = mx$ 公式而繪直線, 這直線是經過原始點的, 因 $x = 0$ 的時候, $y = 0$ 。關於他們的完全相關我們亦可用公式定之如下。

$$y = mx$$

$$\sigma_y = m\sigma_x$$

因為

$$\sqrt{\frac{\sum y^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum m^2 x^2}{N}}$$

$$\sum y = m\sum x$$

$$\sum xy = m\sum x^2 = mN\sigma_x^2 *$$

* 因為 $\sigma_x^2 = \frac{\sum x^2}{N}$, $N\sigma_x^2 = \sum x^2$

照相關的公式

$$r = \frac{\sum xy}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{mN\sigma_x^2}{mN\sigma_x^2} = 1$$

同理，在 y 等於 $-mx$ 的時候，我們亦可證明

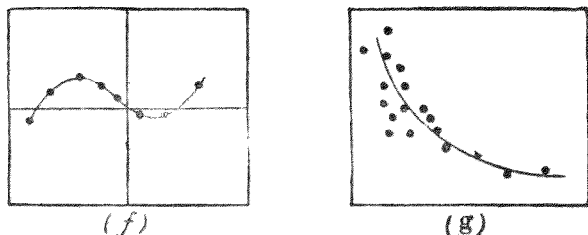
$$r = -1$$

所以凡是完全正相關的，他的係數總等於一，完全負相關的其係數總等於負一。這是相關係數的限度，就是這數不得大於正一，不得小於負一。

在(b)，(d)兩圖上所有的點子比較的分得太開，所以那兩直線都未能經過他們的全數，在這樣情形之下，他們的相關是不完全的。從直線的方向上看，在(b)為正相關，在(d)為負相關。在圖(c)上點子不但分得很開，而且是對稱的分的。在這種情形之下，我們無從畫直線，要畫也止能在橫軸上疊畫一直線，以表示那些點子相差的平均。這曲線代表零相關，就是完全不相關。若用公式以求相關係數，則計算出來 r 必等於零。在這五個圖的下面，關於 r 數的大小我們已經附帶的表示出來，一望即能明瞭。所以有了相關係數，算出來其數很簡單。從他的範圍（從負一至正一）看起來，我們知道那是正的，那是負的。在正負兩方面看，我們知道那是完全的，那是不完全的。這樣一個數是個純粹的數目，並不等於任何單位。所以身高以尺量，體重以磅權，其相關係數於計算之後，既不以尺為單位，又不以磅為單位，而亦不用尺磅聯合的單位，他乃是一個純粹的數目。

在上面的五個圖裏，點子有的散得均勻，我們能聯成一直線，有

的散得很開，但是我們也能畫一直線，使其通過大多數的點子。所以這些相關從圖上看起來都算是一種直線相關 (linear correlation)。下面兩個圖代表非直線相關 (non-linear correlation) 因為照點子的散開，我們頗難畫一直線，使他通過大多數。圖 (f) 代表完全的曲線相關或非直線的相關，而圖 (g) 則代表不完全的。關於這直線相關我們以後還要詳細的講的。



圖七十 非直線相關的表示

68 簡單的相關係數計算法

在前面相關係數的公式裏我們曾看見幾種形式，有的比較複雜，有的極其簡單；在簡單者之中，有的是為次數少而且無組距的材料用的。現在我們根據下列事實來應用公式(37)或公式(40)。因為他們倆都是用來算簡單的相關係數的。（見226頁）

在表七十二裏我們有學生六人的國文英文兩種成績。我們以 X 代表國文成績，以 Y 代表英文成績。第一步我們求這兩種成績的均數，把他們列於 X 與 Y 兩行下面。第二步我們求 x 與 y 兩行的數。 $x =$

$X - M_x$, $y = Y - M_y$ 前面已經講過，所以 x 與 y 兩行的數目就是用這兩公式求得來的。第三步我們求 x^2 , y^2 , xy 三行的數目，第四步得 Σx^2 , Σy^2 和 Σxy 三個數目。把這三個數代入 $r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2} \sqrt{\Sigma y^2}}$ 公式裏，即求得相關係數。這係數等於一，是謂完全正相關。

表七十二 簡單的相關係數計算法（其一）

學生	X 國文	Y 英文	x	y	x^2	y^2	xy
A	60	70	-12.5	-12.5	156.25	156.25	156.25
B	65	75	-7.5	-7.5	56.25	56.25	56.25
C	70	80	-2.5	-2.5	6.25	6.25	6.25
D	75	85	+2.5	+2.5	6.25	6.25	6.25
E	80	90	+7.5	+7.5	56.25	56.25	56.25
F	85	95	+12.5	+12.5	156.25	156.25	156.25
	72.5	82.5			437.50	437.50	437.50
	(M_x)	(M_y)			(Σx^2)	(Σy^2)	(Σxy)

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2} \sqrt{\Sigma y^2}}$$

$$= \frac{437.50}{\sqrt{437.50} \sqrt{437.50}}$$

$$= \frac{437.50}{437.50}$$

$$= 1$$

在這個例子之中，我們有兩點應當注意，第一是事實上國文與英文雖是正相關，然未見得為完全的。這例子實係一種假設的問題。第二點我們應當注意的是事實上材料若是太少，即係數求得出來亦無甚重要。在實驗的時候，這樣情形雖亦難免，然而我們總希望材料多一點。倘數目能在二十左右，那麼，我們所求的係數就比較的好用了。

表七十三 其二

學生	X 歷史	Y 地理	x	y	x ²	y ²	xy	$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2} \sqrt{\Sigma y^2}}$ $= \frac{350}{\sqrt{437.50} \sqrt{280}}$ $= \frac{350}{\sqrt{122,500}}$ $= \frac{350}{350}$ $= 1$
A	70	60	-12.5	-10	156.25	100	125.0	
B	75	64	-7.5	-6	56.25	36	45.0	
C	80	68	-2.5	-2	6.25	4	5.0	
D	85	72	+2.5	+2	6.25	4	5.0	
E	90	76	+7.5	+6	56.25	36	45.0	
F	95	80	+12.5	+10	156.25	100	125.0	
82.5		70			437.50	280	350	
(M _x)		(M _y)			(Σx ²)	(Σy ²)	(Σxy)	

在表七十三裏我們所用的公式也是第二個。不過在這裏 X與Y的差數與前不同。在前表 X與Y的各個數各以五進而在表則 X以五進，Y以四進。換句話講Y的成績的增進與 X的相比為 $1\frac{1}{4}$ 。所以在這裏他們的增加為比例式的增加，而非相等的增加。在結果上這相關係數仍等於一；這是我們應當注意的。從此我們可以預測在何種情形之下其相關係數為一。

表七十四

學生	算學	體操
A	75	90
B	80	84
C	85	78
D	90	72
E	95	66
F	100	60

左列的材料為學生六人的算學與體操兩種成績。從這表上看，其情形似乎與前不同，因為以前的兩種成績是同時增進的，而在這個例子之中算學成績漸漸增高，體操成績卻漸漸降低。從表面上的情形看來，我們即可推測這相關係數是負的。茲可用變相的公式(40)求他出來。

表七十五 其三

X'	Y'	X' ²	Y' ²	X'Y'
0	30	6	900	0
5	24	25	576	120
10	18	100	324	180
15	12	225	144	180
20	6	400	36	120
25	0	625	0	0
12.5	15.0	1,375	1,980	600
(m' _x)	(m' _y)	(ΣX ²)	(ΣY ²)	(ΣX'Y')

照變相的公式(40)

$$r = \frac{\frac{1}{N} \Sigma X'Y' - M'_x M'_y}{\sqrt{\frac{1}{N} \Sigma X'^2 - M'^2_x} \sqrt{\frac{1}{N} \Sigma Y'^2 - M'^2_y}}$$

我們亦可寫為

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Sigma X'Y' - NM'_x M'_y}{\sqrt{\Sigma X'^2 - NM'^2_x} \sqrt{\Sigma Y'^2 - NM'^2_y}} \\ &= \frac{600 - 6(12.5)(15)}{\sqrt{1375 - 6(12.5)^2} \sqrt{1980 - 6(15)^2}} \\ &= \frac{6(100 - 187.5)}{\sqrt{1375 - 937.5} \sqrt{1980 - 1350}} \\ &= \frac{-6(87.5)}{\sqrt{(437.5)(630)}} = \frac{-525}{\sqrt{275,625}} = \frac{-525}{525} = -1 \end{aligned}$$

從這兩個公式的應用看來，第(40)不見得比第(37)容易。在第(40)公式裏我們雖避免了求 $(X_1 - M_x)$ ， $(X_2 - M_x)$ ，…… $(X_6 - M_x)$ 和 $(Y_1 - M_y)$ ， $(Y_2 - M_y)$ ，…… $(Y_6 - M_y)$ 等數，而又把各個數的共加數變為零，如我們從前求標準差一樣，但是在公式裏增加了 NM_xM_y ， NM_x^2 ， NM_y^2 三數亦頗麻煩。倘數目小或數目大而各個數彼此間相差極少，則用此公式當較便宜，否則仍以第(37)公式為簡單。

69 次數表上相關係數之求法

材料多而分組距的時候，相關係數之求法不若前此之簡單。在這種情形之下，也和求均差或均方差時一樣，我們要假設一個均數，使那些複雜的數目變為簡單。相關係數既是關係 X，Y 兩個變數的；那麼，要假設均數，必須假設 X 與 Y 的兩個均數。所以為加入校正數起見，上面相關係數的公式應改為

$$r = \frac{\frac{\sum XY}{N} - C_x C_y}{\sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - C_x^2} \sqrt{\frac{\sum Y^2}{N} - C_y^2}} \quad (41)$$

在這個公式裏除了為校正起見，加添了 $C_x C_y$ 一數外，其他方面一仍舊貫，因為分母裏面的 C_x^2 與 C_y^2 兩數，在求標準差的時候，我們已經用過了的。根據第(41)公式我們尚可改變一下使其簡單。我們知道 $C_x = \frac{\sum x}{N}$ ， $C_y = \frac{\sum y}{N}$ ，所以我們亦可寫為

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{N} - \frac{\sum x \cdot \sum y}{N^2}}{\sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \frac{(\sum x)^2}{N^2}} \sqrt{\frac{\sum y^2}{N} - \frac{(\sum y)^2}{N^2}}}$$

$$= \frac{\sum xy - \frac{\sum x \cdot \sum y}{N}}{\sqrt{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}} \sqrt{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}}} \quad (42)$$

我們試應用這兩個公式演算一個例子。這例子的材料是本學期統計班的兩次月考成績。今年統計班在選課的時候本有七十六人，但是曾經受過兩次月考的止七十人。我們就這七十人的兩月成績比較一下看他們的相關如何。在表七十六裏我們看見每一學生的兩次月考成績。我們以Y代表第一次月考成績，而以X代表第二次月考成績。這表上的數目是一種待整理的材料。我們應當把他們整理起來，列一次數表。這次數表與從前的有點不同，因為從前我們只有X一個變數，現在我們有了X與Y兩個變數。他們的次數表要同時列的。所以在表七十七上我們以第一次月考成績為縱線，以第二次月考成績為橫線，照劃線記數的辦法把每生的兩種成績一個一個的劃下來。例如學生1的成績在第一次月考為80在第二次月考為65，我們先在縱線上找80—89.99一組距，找到了之後，即順着那方格一直往右的看到那橫軸60—69.99組距之下，以左手按住那方格，而以右手所持之筆劃一直線。劃第二直線時也是先找縱線後找橫線。如是一個一個的記下來，就成功一個相關表。

在表七十八裏我們已將那直線變為數目了。其實在練習的時候，

表七十六 統計班兩次月考成績

學生	Y	X
1	80	65
2	50	55
3	90	90
4	35	60
5	85	60
6	45	65
7	85	90
8	60	90
9	80	85
10	60	65
11	60	65
12	60	85
13	50	80
14	65	70
15	65	55
16	80	95
17	45	55
18	90	95
19	90	85
20	50	75
21	90	85
22	70	90
23	90	85
24	35	55
25	85	60
26	85	70
27	75	75
28	65	90
29	60	65
30	65	80
31	45	55
32	65	90
33	90	95
34	90	65
35	75	60

Y 代表第一次月考成績
X 代表第二次月考成績

學生	Y	X
36	90	80
37	90	80
38	35	80
39	85	95
40	60	80
41	65	55
42	35	75
43	90	95
44	90	95
45	40	70
46	90	60
47	75	85
48	70	90
49	90	85
50	90	90
51	85	75
52	35	95
53	85	95
54	60	95
55	85	95
56	80	90
57	85	90
58	85	75
59	35	75
60	60	70
61	85	85
62	60	65
63	35	60
64	45	55
65	65	60
66	70	90
67	75	70
68	70	75
69	70	60
70	60	80

Y 代表第一次月考成績
X 代表第二次月考成績

七十七，七十八兩表可以合併起來，把數目就寫在各有直線的方格裏。此間所以分為兩表的緣故，因為這樣列法在步驟上比較清楚，學者容易明瞭。這七十八表還有不同之處即表的最右一行的方格裏載有順着

表七十七 相關表 第一步的整理

		(X) 第二次月致成績						
(Y)		30—	40—	50—	60—	70—	80—	90—100
第一次月致成績	100 90							
	80 							
	70 							
	60 							
	50 							
	40 							
	30 							

縱線的次數，又表的最下一行的方格裏記的是橫線的次數，而在這兩行的盡頭（即這表的右下角）則為次數的總和。橫線上的次數總和應與縱線上的次數總和相等。這也是一種證驗的方法，若是他們倆不相等，那麼，在計算中必有錯誤了。

在相關表裏 X 與 Y 的組距範圍可照普通選擇組距的原則而定，所

以無論那材料的單位是磅是寸是年齡，均可根據這原則而定其組距之大小。止要那些次數分配得適當就無問題了。

表七十八 相關表 第二步的整理

(Y)	(X) 第二次月考成績								
		30—	40—	50—	60—	70—	80—	90—100	(f) 次數
第 一 次 月 考 成 績	100 90				2		6	6	14
	 80				3	3	2	7	15
	 70				2	3	1	3	9
	 60			2	5	2	4	4	17
	 50			1		1	1		3
	 40			3	1	1			5
	 30			1	2	2	1	1	7
	(f) 次數			7	15	12	15	21	70

關於相關係數的計算法我們詳在七十九，八十兩表裏。在這兩個表裏其計算法不同而我們所用的公式亦各不同。其實在兩個表裏兩公式中任何一個均可用，我們所以分別的緣故完全因為舉例起見。

在相關表列成之後，第一步我們要在 X, Y 兩軸上各假設一個均數。這辦法與求標準差時相同，即假設之均數要近於真正均數所在之組距內。他的證驗方法是要求出 $\Sigma x+$ 與 $\Sigma x-$ 的相差和 $\Sigma y+$ 與 $\Sigma y-$

表七十九 相關係數的計算法 (其一)

	30-	40-	50-	60-	70-	80-	90-100	f	y	fy	fy ²
100 90			(-4) 2	(-2) 2		(2) 6	(4) 6	14	2	28	56
1 80			(-2) 3	(-1) 3	3	(1) 2	(2) 7	15	1	15	15
1 70				2	3	1	3	9	0		
1 60			(2) 2	(1) 5	2	(-1) 4	(-2) 4	17	-1	-17	17
1 50			(4) 1	(2) 2	1	(-2) 1	(-4) 1	3	-2	-6	12
1 40			(6) 3	(3) 1	1	(-3) 1	(-6) 1	5	-3	-15	45
1 30			(8) 1	(4) 2	2	(-4) 1	(-8) 1	7	-4	-28	112
f			7	15	12	15	21	70		-23	257
x			-2	-1	0	1	2				
fx			-14	-15		15	42	28			
fx ²			28	15		15	84	142			

第一象限內 $\Sigma fxy = 2(1) + 7(2) + 6(2) + 6(4) = 52$

第三,,,,, $\Sigma fxy = 5(1) + 2(2) + 1(4) + 1(3) + 3(6) + 2(4) + 1(8) = 50$

第二,,,,, $\Sigma fxy = 3(-1) + 2(-2) = -7$

第四,,,,, $\Sigma fxy = 4(-1) + 4(-2) + 1(-2) + 1(-4) + 1(-8) = -26$

$\Sigma xy = 52 + 50 - 7 - 26$

$= 69$

$$\Sigma xy - \frac{\Sigma x \cdot \Sigma y}{N} = 69 - \frac{28(-23)}{70}$$

$$r = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x \cdot \Sigma y}{N}}{\sqrt{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}} \sqrt{\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{N}}} = \frac{69 + 9.2}{\sqrt{(142 - \frac{(28)^2}{70})(257 - \frac{(-23)^2}{70})}}$$

$\Sigma x = 28$

$\Sigma x^2 = 142$

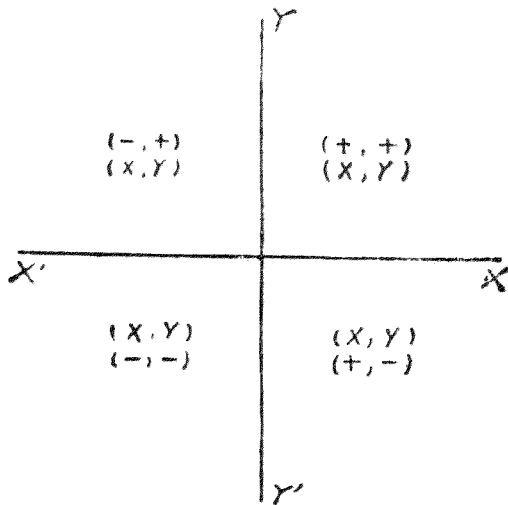
$\Sigma y = -23$

$\Sigma y^2 = 257$

$$= \frac{78.2}{\sqrt{(130.8)(249.44)}}$$

$$= \frac{39.1}{90.32} = .43$$

的相差在同樣的相差之中是最小的。我們在這表裏於 Y 軸上選擇 75 爲 Y 的假設均數，於 X 軸上亦選擇 75 爲 X 的假設均數。選擇既定，第二步辦法是沿這兩個假設均數的組距各畫兩道粗線，如是成功 X 與 Y 的兩個軸，而以他們倆相交之點爲假設之原始點。同時照算學上的普通規則，我們把這兩個軸的長寬所佔的面積分爲四個象限 (quadrant) 在這些象限以內，所有的 x 與 y 的性質當與算學上所規定的相同，例如在圖七十一上其第一象限內之 x 與 y 均爲正號，第二象限內 x 爲負號， y 爲正號。第三象限內兩者俱爲負號，第四象限內 x 爲正號， y 爲負號。圖七十一亦可改繪爲圖七十二。這個圖看起來更易明瞭。原來我們從前算均數或標準差的時候，既止有一個變數，所以我們所假



圖七十一 象限之表示 (其一)

表八十 相關係數的計算法 (其二)

Y	第二次月考成績					民國十八年十二月中央大學教育學院統計班兩次月考成績之相關									
	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	f	Y	fY	fY ²	ΣfX	ΣfY	ΣfXY	$r = \frac{\frac{\Sigma fXY - C_X C_Y}{N}}{\sigma_X \sigma_Y}$
100								14	2	28	56	2	18		
90			2		6		6	15	1	15	15	3	16	13	
80			3		3		7	9	0	0					$= \frac{1.1169}{2.580896}$
70			2		3		3	17	-1	-17	17	9	12	3	
60			2		5		1	3	-2	-6	12	2	1	1	$= .43$
50			1		1		1	5	-3	-15	45	7	7	7	
40			3		1		1	7	-4	-28	112	4	3	1	$r_x = 1.367$ $r_y = 1.888$
30			1		2		1	7	-4	-28	112	4	3	1	
f		7	15	12	15		21	70	-23	237	ΣfXY = 69	69	69	4	
x		-2	-1	0	1		2	(N)	(ΣfY)	(ΣfY ²)	N	(ΣfXY)			
fX		-11	-15	0	15		42	$C_X = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{28}{70} = .4$ $C_Y = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{-23}{70} = -.328$ $C_{XY} = \frac{\Sigma fXY}{N} = \frac{69}{70} = .9857$	$\sigma_X^2 = \frac{142}{70} - .16 = 2.0286$ $\sigma_X = 1.424$	$\sigma_Y^2 = \frac{237}{70} - .16 = 3.3643$ $\sigma_Y = 1.834$	$C_X^2 = .16$ $C_Y^2 = .1076$ $C_{XY}^2 = .9716$				
fX ²		28	15	15	84		142	(ΣfX ²)	142	1.367	1.888				

表八十所表示又是一種算法。這算法在假設均數與求 f , x , fx^2 , 和 f , y , fy^2 , 等數的時候與前法並無不同之處。所不同者是 fx 的求法。這次在表上有 $\Sigma fx+$, $\Sigma fx-$, $\Sigma fx+$, $\Sigma fxy-$ 等行與 f , fy , f^2 等行並列。因為這次在各象限之內並未註明 x 等數。所有 fx 的數我們僅可在表上讀出來而以 y 乘之。例如下列縮短的一個表，第一行是 y 的數，第二行是 $\frac{\Sigma fx}{-+}$ 的數。這負數是代表第二第三兩象限的 x 數而正數則是第一第四兩象限的 x 數。在第二行裏為首一數在負的方面是 2 因為在這裏 $x = -1$, $f = 2$ 所以 $fx = -2$ 。(參觀表八十) 在正的方面為首一數是 18, 這是 6×1 與 6×2 的結果。因為在原始點以右的橫軸依一, 二, 三, 四等次序而進。在 $x = 1$ 的時候 $f = 6$, 在 $x = 2$ 的時候, f 亦等於 6, 所以 $6(1) + 6(2) = 18$ 。在第三行裏亦是 $\frac{\Sigma fx}{-+}$,

表八十一 一部分計算法之表示

y	Σfx		Σfx		Σfxy	
	-	+	-	+	-	+
2	2	18		16		32
1	3	16		13		13
0						
-1	9	12		3	3	
-2	2	1	1			2
-3	7		7			21
-4	4	3	1			4
$\Sigma fxy = 69$						

在這一行的數是第二行 fx 與 $fx +$ 相消之後，所得的結果。所以 $+18 - 2$ 之後其結果等於 16， $+16 - 3$ 之後其結果等於 13。餘類推。在第四行裏 Σfxy 之下這數變為 +32 因為他是 $(\Sigma fx)(y)$ 之積。 $\Sigma fx = 16$ ， $y = 2$ ，所以 $16 \times 2 = 32$ 。頭一線算完之後，即算第二線。此時 $y = 1$ ， $fx = +13$ ，所以 $fxy = (fx)(y) = (13)(1) = 13$ 。如是的一線一線的算下去至求完並相加以後，得 $\Sigma fxy = 69$ 。這數與用前法所求的相同。在練習的時候，不妨兩法均用以便證驗。

此次我們所用的公式是第(41)。在演算方面公式的應用當無甚困難。在此地我們也可用第(42)公式，他的算法也極方便。不過在研究工作上有時候均方差是需要的，均方差既經求出，把他代入公式也很方便。所以選擇公式視需要與簡便而定。

70 相關係數的意義

相關係數是個純粹的數目，他的範圍是從負一經零而到正一，前面已經講過。在這範圍之內，所求得的一個數目，究竟有何意義是個問題。從數目的大小方面看，我們可得一種解釋，而統計學家亦有就此而分等第的。作者在研究各科成績之相關的時候，曾比較幾家的意見，而自定新的範圍。茲表列於下。（見 240 頁）

從這表上看來克納桑 (Crathorne) 氏的等第分得太多，而麥柯爾 (McCall) 氏又分得太少。拉克 (Rugg) 氏之所分似乎合用。但是他敘述得太繁。所謂『無足重輕』(negligible or indifferent)，所謂『有相關惟甚低』(present but low)，所謂『相關明顯』

(markedly present or marked) 未免太累贅。作者根據他的等第而以最低，低，切實，高名之。在敘述上似較便利。

表八十二 相關係數大小及其等第之比較

A. R. Crathorne		H. O. Rugg		W. A. McCall		艾偉氏	
範圍	等第	範圍	等第	範圍	等第	範圍	等第
0-.25	最低	0-.20	無足輕重	0-.40	低	0-.20	最低
.25-.40	低	.20-.40	有相關惟甚低	.40-.70	切實	.20-.40	低
.40-.55	中數	.40-.70	相關明顯	.70-1.00	高	.40-.70	切實
.55-.70	高	.70-1.00	高			.70-1.00	高
.70-1.00	最高						

此種分等第的辦法，在相關各科成績或各科測驗之結果的時候，當然合用，但是在其他相關上如年齡，年級等根據此種等第似不甚妥當。所以 Odell 討論到這個問題，他止把經過充分實驗而已成事實的幾個相關係數敘述出來，如父子之體高為 .40-.60，夫妻之年齡為 .85-.95，第一第二兩次標準測驗之結果為 .60-.90，性質相近之學科如英文與外國文為 .40-.70，第一第二兩次個別智力測驗之結果為 .90-.95 而不計其等第。

有人以為相關係數是為求因果關係的。這種意見未免太偏，因為完全的相關係數非常之少。相關而不完全是表明影響這結果的因子不少。例如中學成績與大學成績之相關係數為 .612。根據這個係數我們雖可就現在中學之某級成績，而推測其將來之大學成績，但是這種推測不見得有十分把握，因為年齡，性別，健康，向上心，學習方法

缺課與否以及教師之動作，試驗之方法均足以影響那一級的將來的大學成績。結果止有一個，而因子如此之多，我們怎麼可以推測而有把握呢？

相關係數本是一種量的結果，合乎科學的，但是我們不能盲目的用他，以為用了他就是一種科學的研究。例如歷史與地理的相關係數為 .82，體高與體重的相關係數亦為 .82。這兩係數的相等完全是偶然的。以此而推測歷史與體高和地理與體重的兩相關，那真是把風馬牛不相及的東西，弄成互相關係了。又如在一級之中，求出年齡與智力之相關係數為負的，研究家若不留心而妄下結論以為無論在那種情形之下，這係數都是負的，那又是誤用量的結果了。我們知道在一級之中年齡較小者必較聰明，因為他不聰明決不能升入此級，又年齡較大者必較笨，因為他若是不笨決不至於留級。所以要求年齡與智力之相關係數，必須在各級之中儘量的找出同年之人。例如我們要測驗八歲至十五歲的學生的智力，我們應當從初小，高小及初中各級中儘量的找出這些年紀的兒童，並且要到高一二年級中找出那年十四，五歲的學生。由此而求智力與年齡之相關係數，所得的結果不但是正的，而且是很大。所以研究家要腦筋清楚，思想透澈，才能成為科學家，那盲目的崇拜量的結果，以此自翊為科學家的，真是科學界中的罪人了。

練習題

1. 試用下列材料求國文與英文之相關係數。

- a. 用第(41)第(42)兩公式以便證驗。
 b. 計算之時用兩種表示方法。

號	數	國	文	英	文
1		60		42.5	
2		10		24	
3		5		31	
4		45		43	
5		85		14	
6		25		8.5	
7		10		31	
8		15		42	
9		75		12	
10		25		23	
11		15		36.5	
12		55		3	
13		60		85.5	
14		25		32.5	
15		50		61.5	
16		40		21.5	
17		45		4.5	
18		75		22	
19		35		29.5	

2. 試用第(37)第(40)兩公式求下列歷史與公民之相關。

學 生	歷 史	公 民
A	85	80
B	75	78
C	70	82
D	65	74
E	60	60
F	62	54
G	58	70
H	55	62

3. 根據下列材料求相關係數之機誤。

a. $N=70, r=.43$

b. $N=200, r=.67$

c. $N=186, r=.32$

d. $N=192, r=.12$

4. 試根據第一第二兩題之結果求相關係數之機誤，並比較此兩機誤之可靠性。

第十八章

迴歸線

71 緒論

在表七十八上有可注意的是：第二次月考成績比第一次的好，因為在第二次成績裏面，得五十分以下的沒有一人，而在第一次裏面則有十二人佔全體百分之 17.14。這十二人中其成績在 40——49.99 以內的有五人，在 30——39.99 以內有七人。這兩組的成績分配各有不同，有的進步甚緩，有的進步甚速，如首次月考成績在 40——49.99 以內的，至第二次亦不過在 50——59.99 以內進步可算甚緩；然亦有首次成績在 30——39.99 內而至第二次居然達到 90——100 一組距的。他的進步可算很速。這種例子當然很少，在這裏我們最好求其均數，則在對照的時候，其數目可以比較的相近。例如首次月考成績在 30——39.99 以內有七人，在第二次他們的成績均數為 73.57；又首次月考成績在 40——49.99 以內的有五人，在第二次他們的成績均數為 61.00，以此類推，我們可以求出第一次月考每一組距內的第二次成績均數，同理，我們也可以求出第二次月考每一組距內的第一次成績均數。換句話講，我們有了相關表，在直行裏我們可以求出每行的 y 的均數，在橫行裏我們可以求出每行的 x 的均數。

72 迴歸線的求法

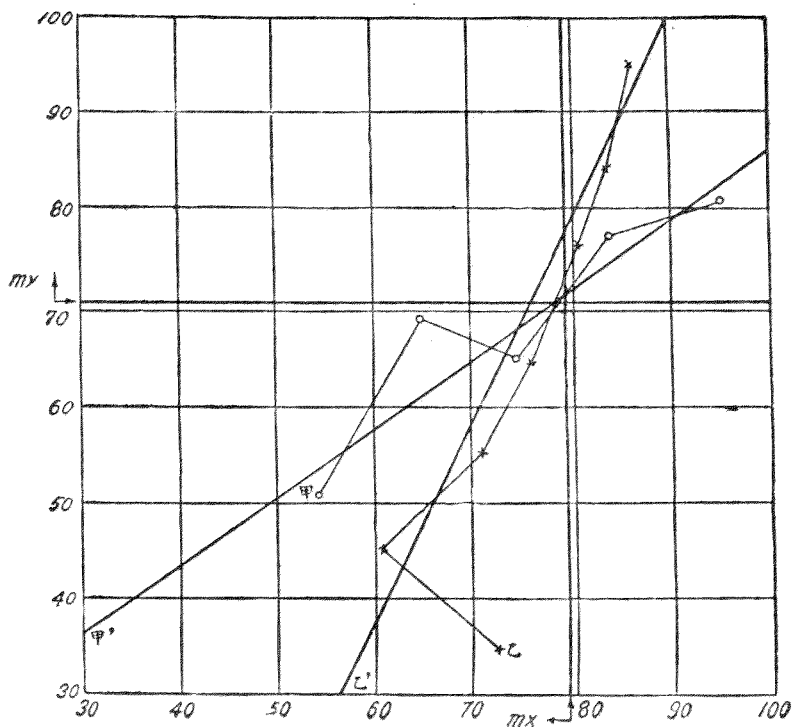
現在我們以 \bar{Y}_x 代表橫軸上每一組距內的Y的均數，以 \bar{X}_y 代表縱軸上每一組距內的X的均數。我們根據上面的相關表求出 \bar{Y}_x ， \bar{X}_y 等

表八十三 縱橫兩線的均數(由表七十八計算而出)

甲		乙	
x	\bar{Y}_x	y	\bar{X}_y
55	50.71	35	73.57
65	69.00	45	61.00
75	65.00	55	71.67
85	77.67	65	76.76
95	80.24	75	80.56
$M_y = 71.71*$		85	83.67
		95	86.43
		$M_x = 79.00*$	

* 此為總次數的均數並非各行均數的均數

均數而列於表八十三上，例如 $X=55$ 的時候， $\bar{Y}_x=50.71$ ，這 55 是橫軸上 50——59.99 一組距的中點，50.71 是這直行裏 Y 數的平均。又如 $Y=35$ 的時候， $\bar{X}_y=73.57$ ，這 35 是縱軸上 30——39.99 一組距的中點，73.57 是這橫行裏 x 數的平均。在表八十三的下端有 $m_y=71.71$ ， $m_x=79.00$ 兩數， m_y 代表總次數直行裏各數量的均數， m_x 代表總次數橫行裏各數量的均數。



圖七十三 迴歸線之表示(其一)

在圖七十三上我們於縱軸上找出 $m_y = 71.71$ 的一點，由此繪一直線與橫軸平行，同時在橫軸上找出 $m_x = 79.00$ 的一點，亦由此繪一直線與縱軸平行。現在我們根據表七十三上甲乙兩部的結果，繪甲乙兩曲線。甲線被連成的各點代表 y 的各個均數，乙線被連成的各點代表 x 的各個均數。就此甲乙兩曲線通過較能代表他們的兩直線，是為迴歸線。這是迴歸線的圖示法。關於他們的公式容在後面介紹。這直線

在甲爲Y在X上之迴歸，在乙爲X在Y上之迴歸。換句話講，我們就已知之X值而求Y，則Y爲在X上之迴歸；若就已知之Y值而求X則X爲在Y上之迴歸。

73 迴歸的意義

迴歸一名詞在英文爲 regression 這名詞初用之於高爾登 (Galton)，在其研究體高的遺傳的時候。他根據研究的結果以爲父親的體高與他們的均數之相差和兒子的體高與他們的均數之相差成一定的比例。換句話講，這體高的數量是隨着普通均數走的，或迴歸到 (regress or step back) 普通均數上的。這名詞本是在研究遺傳問題時用的。到現在他的用處已很普遍了。凡是在相關表上有 x 與 y 兩變數的，我們都能求出他們倆相互間的迴歸。這名詞在 Yule 的意思以爲不甚適當。他以爲迴歸線 (lines of regression) 應稱之爲特性線 (characteristic lines)，迴歸方程 (regression equations) 應稱之爲特性方程 (characteristic equations)。Yule 的名詞，固然比較近乎事實，可以採用；但是在統計學上，我們習用了高爾登的名詞，相沿既久，我們竟忘却他的不適當了。

74 迴歸線與材料的數量

我們根據七十人兩次月考的成績而繪迴歸線，材料似嫌太少。爲舉例以求簡單起見，這材料固然可用。若用來作預測的根據如高爾登之研究則未免危險。茲根據 Ruger 教授的體高體重相關表來作較爲合

用的例子。這表（表八十四）上的總次數是11382。他是十個表的次數

表八十四 體高體重相關表

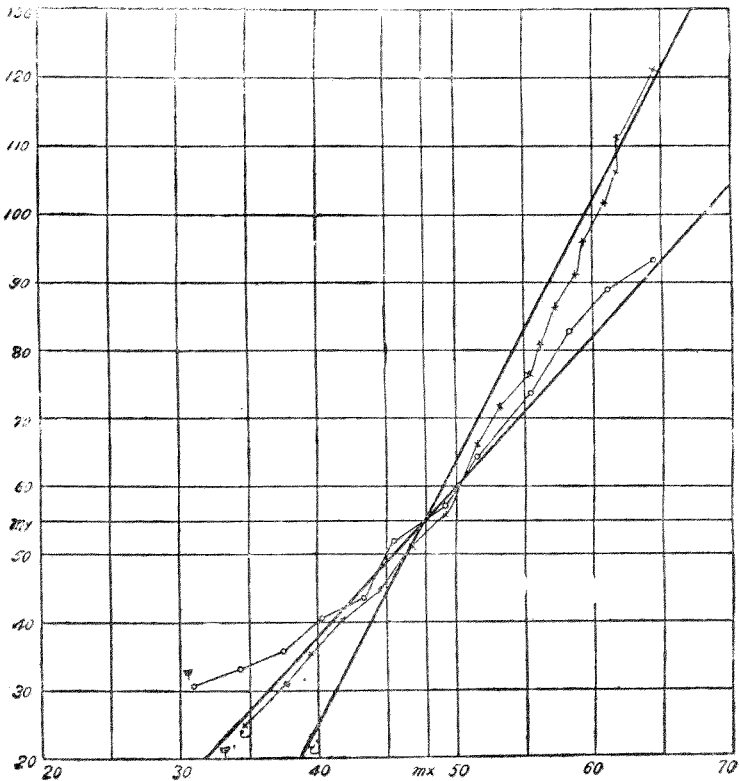
體 高 (以 英 寸 計)

	30-	33-	36-	39-	42-	45-	48-	51-	54-	57-	60-	63-	66	總數
24-	4	9	2	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	16
29-	3	42	62	25	3	1	—	—	—	—	—	—	—	136
34-	—	16	220	414	72	6	—	—	—	—	—	—	—	728
39-	1	3	51	617	697	95	11	1	—	—	—	—	—	1476
44-	—	1	7	122	875	603	38	8	1	—	—	—	—	1655
49-	—	—	4	12	249	988	411	33	5	4	—	—	—	1706
54-	—	1	3	1	17	436	905	171	11	4	3	—	—	1552
59-	—	—	1	—	1	39	630	568	51	6	1	—	—	1297
64-	—	—	—	1	—	8	161	621	206	3	2	2	—	1004
69-	—	—	—	1	—	—	35	374	340	24	2	—	—	776
74-	—	—	—	—	—	—	3	106	335	76	5	—	—	525
79-	—	—	—	—	—	—	2	22	120	93	4	1	—	242
84-	—	—	—	—	—	1	—	8	32	87	8	2	—	138
89-	—	—	—	—	—	—	—	1	10	36	18	1	—	66
94-	—	—	—	—	—	—	—	—	3	23	9	2	—	37
99-	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	11	3	—	19
104-	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	5	1	—	7
109-	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
114-	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
119-124	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
總 數	8	72	350	1193	1914	2178	2196	1913	1115	361	69	13	—	11382

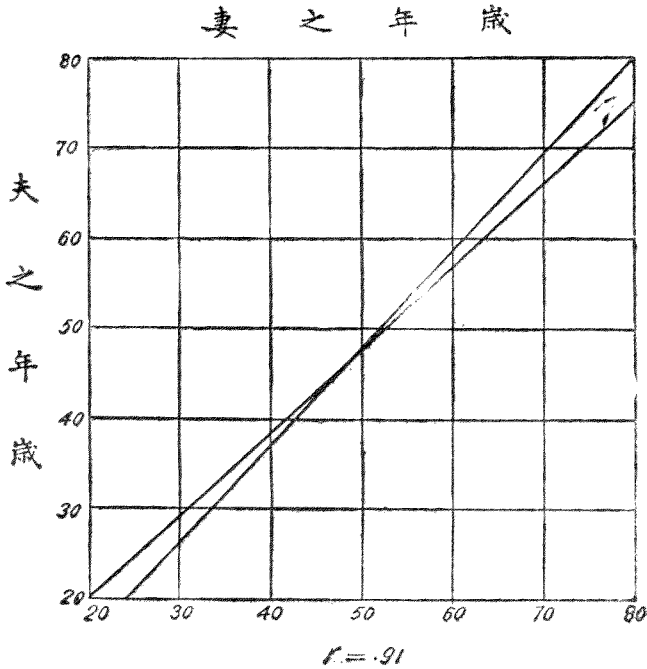
表八十五 縱橫兩線的均數(從表八十四計算而出)

甲		乙	
x	\bar{y}_x	y	\bar{x}_y
31.5 inches	30.25	26.5	34.88
34.5 ,,	32.96	31.5	37.19
37.5 ,,	36.90	46.5	39.81
40.5 ,,	40.23	41.5	42.26
43.5 ,,	45.03	46.5	44.53
46.5 ,,	50.87	51.5	46.89
49.5 ,,	57.78	56.5	48.97
52.5 ,,	65.57	61.5	50.99
55.5 ,,	73.15	66.5	52.63
58.5 ,,	82.15	71.5	53.87
61.5 ,,	89.62	76.5	55.35
64.5 ,,	92.65	81.5	56.47
	$M_y = 55.47$	86.5	57.03
		91.5	58.86
		96.5	59.31
		101.5	61.18
		106.5	61.07
		111.5	61.50
		116.5	—
		121.5	64.50
			$M_x = 47.96$

總加起來的。在年歲方面是從四歲半到十四歲半。每一年歲裏都有充分的代表，如年十二歲半至十三歲半的有 1202 人。十三歲半至十四歲半的有 428 人是。各年齡的人數充分則參合起來其範圍較大。茲根據表八十四算出 \bar{Y}_x 與 \bar{X}_y 各均數來，將其結果列於表八十五上而圖七十四則表示其迴歸線。在這圖上我們所應注意的是這兩迴歸線比較圖七十三所表示彼此要接近些。我們知道在相關表上若繪一直線能通過



圖七十四 迴歸線之表示 (其二)



圖七十五 已有之結果

其一 兩線接近

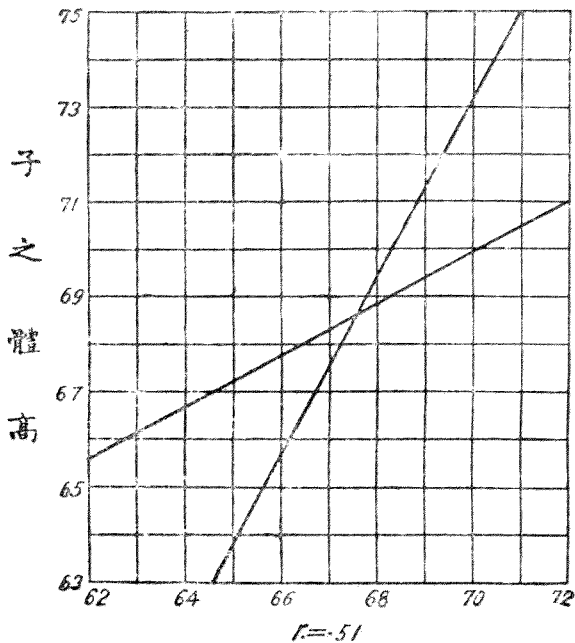
所有的點子，這種相關是為完全的。事實上這樣的例子很少。所以點子總是星羅棋布，有的密集於一處，有的分散於各方。在這種情形之下我們當利用迴歸線以試驗他們的直線性，看這兩迴歸線於繪成之後，相距的遠近。從七十五，七十六，七十七三圖看來，這情形更易明瞭。原來相關係數的大小是與這兩迴歸線有大關係的。相關係數大則兩線接得近，小則他們分得開。換句話講，相關表上的點子排得像直線似的，則兩迴歸線即接近。若散得很開，則兩迴歸線相隔亦遠。這樣的

講起來，七十人的兩次月考成績之相關當然比不上一萬餘人體高體重之相關的密切。

75 迴歸方程

迴歸線的圖示法上面已有例子。欲根據已知之 X 值而求 Y 在 X 上之迴歸，或根據已知之 Y 值而求 X 在 Y 上之迴歸，固可在圖上查出；但是查圖不如用公式之方便與準確。皮爾生 (Pearson) 曾利用已知

父 之 體 高



圖七十六 其二 兩線分開

之 r , σ_x , σ_y 定立兩公式如下:

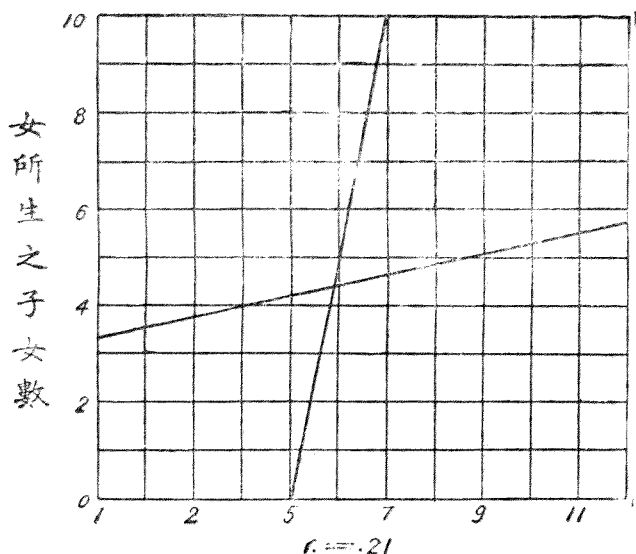
$$\bar{x} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y, \quad (43) \quad \bar{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x \quad (44)$$

我們用第(43)公式可以求出 x 在 y 上之迴歸, 用第(44)公式可以求出 y 在 x 上之迴歸。這兩個公式是根據最小二乘方的原則求出來的。他們是直線公式而以 $r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ 與 $r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ 兩值代表他們的傾斜度, (m)。假使我們求直行裏的各均數的直線, 他們普通公式是

$$\bar{y} = mx$$

在圖七十八上這直線不能經過所有的點子, 例如 P 點並不在此直

母所生之子女數



圖七十七 其三 兩線更分得開

線上。假使 $aP=y$, $ab=\bar{y}$ 則 $bP=y-\bar{y}$, 這是 P 點與直線上之 b 點的相差。在相關表上點子既星羅似的分布, 則這樣的相差自然很多。我們所希望的是 $\Sigma(y-\bar{y})^2$ 要是最小 (A minimum), 如是則直線的傾斜度亦由此而定。在直線的公式裏 $\bar{y}=mx$, 將 mx 代入 $\Sigma(y-\bar{y})^2$, 則

$$\Sigma(y-\bar{y})^2 = \Sigma(y-mx)^2 = \Sigma y^2 - 2m\Sigma xy + m^2\Sigma x^2 = a \text{ minimum}$$

或
$$\sigma_y^2 - 2mr\sigma_x\sigma_y + m^2\sigma_x^2 = a \text{ minimum}$$

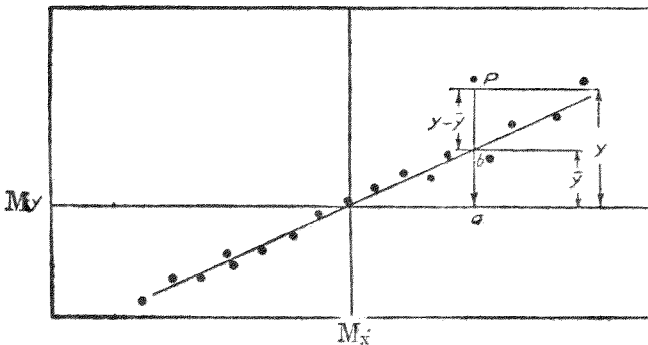
對於 m 求微分, 以其結果等於零, 則

$$-2r\sigma_x\sigma_y + 2m\sigma_x^2 = 0, \quad \therefore m = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

同理我們可以求出 $r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ 。這兩值作兩直線的傾斜度最為適當。他們

又叫迴歸係數, $r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ 為 x 在 y 上的迴歸係數, (The regression coefficient of x on y),

$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ 為 y 在 x 上的迴歸係數 (The regression



圖七十八 直線及其傾斜度

coefficient of y on x)。這兩迴歸線的公式不但在相關表上供給最適宜的直線，即在橫直行均數點上亦最適宜。知 $r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ 的值，我們就能推測，在 x 上每移動一單位的時候 y 的平均差數；或知 $r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ 的值，我們就能推測，在 y 上每移動一單位的時候 x 的平均差數。爲使公式單簡起見，我們可以 b_{xy} 代 $r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ ， b_{yx} 代 $r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ 。我們知道 $x = X - M_x$ ， $y = Y - M_y$ ，爲計算的方便起見，我們把迴歸方程改作下列公式。

$$\bar{X} - M_x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - M_y), \quad (45); \quad \bar{Y} - M_y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - M_x) \quad (46)$$

移項並去括弧

$$\bar{X} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} Y + M_x - r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} M_y, \quad (47)$$

$$\bar{Y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} X + M_y - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} M_x, \quad (48)$$

代入 b_{xy} 與 b_{yx} 我們的公式是

$$\bar{X} = b_{xy} Y - b_{xy} M_y + M_x \quad (49)$$

$$\bar{Y} = b_{yx} X - b_{yx} M_x + M_y \quad (50)$$

根據體高體重的材料我們可以應用這兩公式如下。

$$r = .91, \quad \sigma_x = 5.36, \quad \sigma_y = 12.97, \quad M_x = 47.96, \quad M_y = 55.47$$

$$\therefore b_{xy} = .91 \cdot \frac{5.36}{12.97} = .376$$

$$b_{yx} = .91 \cdot \frac{12.97}{5.36} = 2.202$$

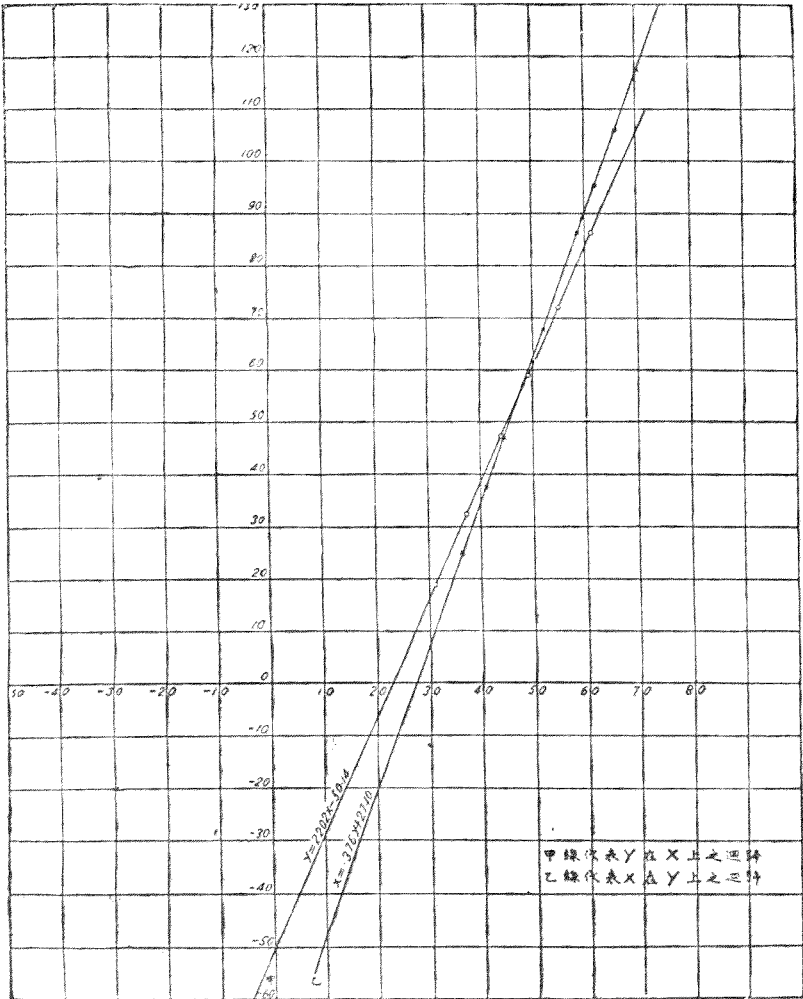
$$\begin{aligned}\bar{X} &= b_{xy} Y - b_{xy} M_y + M_x \\ &= .376 Y - .376 \times 55.47 + 47.96 \\ &= .376 Y - 20.86 + 47.96 \\ &= .376 Y + 27.10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= b_{yx} X - b_{yx} M_x + M_y \\ &= 2.202 X - 2.202 \times 47.96 + 55.47 \\ &= 2.202 X - 105.61 + 55.47 \\ &= 2.202 X - 50.14\end{aligned}$$

表八十六 縱橫兩線的均數（根據迴歸方程計算而出）

甲		乙	
X 體 高	Y 測算之體重	Y 體 重	X 測算之體高
31.5	19.22	26.5	37.06
37.5	32.44	36.5	40.82
43.5	45.65	46.5	44.58
49.5	58.86	56.5	48.34
55.5	72.07	66.5	52.10
61.5	85.28	76.5	55.86
		86.5	59.62
		96.5	63.38
		106.5	67.14
		116.5	70.90

在 $\bar{Y} = 2.202X - 50.14$ 一方程式裏，Y 爲 X 上的迴歸。在 X 變數上隨意假定幾個數如 31.5, 37.5, 43.5, ……61.5, 我們可求出相當的 Y 數來，把他們併列於表八十六的甲部。在 $\bar{X} = .376Y + 27.10$ 一方程式



圖七十九 根據迴歸方程所繪之直線

裏， X 爲 Y 上的迴歸。在 Y 變數上隨意假定幾個數如 26.5, 36.5, 46.5, ……116.5, 我們可求出相當的 X 數來，把他們併列於表八十六的乙部。我們知道這兩個公式都是直線公式。根據這個表甲乙兩部的結果我們於圖七十九上繪兩直線。兩方的點子均在其線上。照普通的公式 $y = mx$, m 是這線的傾斜度，而此線是經過原始點的，因爲 $x = 0$ 的時候， y 亦等於 0。假使直線不經過原始點則其公式爲 $y = mx + k$, 這 k 是個常數 (constant), 這常數在直線上指示其交點 (intercept) 所在處。我們的 $\bar{Y} = 2.202X - 50.14$, $\bar{X} = .376Y + 27.10$ 兩直線公式是不經過原始點的。在 $\bar{Y} = 2.202X - 50.14$ 裏, $m = 2.202$, $k = -50.14$ 。在 $\bar{X} = .376Y + 27.10$ 裏, $m = .376$, $k = 27.10$ 。這 m 與 k 兩數在圖上可以證明, 學者試指出之。我們在上面已經講明在橫軸上的 x 的均數, $M_x = 47.96$, 和在縱軸上 y 的均數, $M_y = 55.47$ 。他們倆結合起來所成的一點 (47.96, 55.47) 即爲兩直線的交點。在 $\bar{Y} = 2.202X - 50.14$ 裏試以 47.96 代 X , 我們得

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= 2.202(47.96) - 50.14 \\ &= 105.61 - 50.14 \\ &= 55.47 = M_y\end{aligned}$$

在 $\bar{X} = .376Y + 27.10$ 裏試以 55.47 代 Y , 我們得

$$\begin{aligned}\bar{X} &= .376(55.47) + 27.10 \\ &= 20.86 + 27.10 \\ &= 47.96 = M_x\end{aligned}$$

在我們的例子中我們以體高代 X , 體重代 Y 。有了這兩個迴歸方

程，我們根據體高可以測算體重，例如一人體高 61.5 英寸則其體重大約為 85.28 磅，或根據體重可以測算體高例如一人體重 96.5 磅，則其體高大約為 63.38 吋。這甲乙兩部的結果既代表甲乙兩線。我們在推測的時候，止能根據體高 61.5 英寸而約知其體重為 85.28 磅。若問體重 85.28 磅的人多少高，我們決不能答為 61.5 英寸。在這個當兒，我們應在乙部結果中找出。在那裏若無此 Y 數，我們即在 $X = .376Y + 27.10$ 裏以 85.28 代 Y 得

$$\begin{aligned}\bar{X} &= .376(85.28) + 27.10 \\ &= 32.07 + 27.10 \\ &= 59.17\end{aligned}$$

所以體高 61.5 英寸的人雖體重 85.28 磅而體重 85.28 磅的人其體高卻非 61.5 乃係 59.17。

還有一點我們應當聲明的，即在迴歸係數裏所用的兩個標準差，在計算之時，是根據他們的原來單位的而非以組距為單位的。在計算相關係數的時候，我們用組距作單位，因為分子的 Σfxy 與分母上的 σ_y ， σ_x 都是如此。這樣計算當然方便多了。

S	F	S-F
64	60	+4
65	62	+3
66	64	+2
67	66	+1
68	M 68	0
69	70	-1
70	72	-2
71	74	-3
72	76	-4

關於高爾登的體高遺傳研究前面已經講到。

他所得的迴歸線公式大約為

$$S = .5F + 34' \quad (M_S = M_F = 68')$$

S 與 F 代表子與父的體高。在附表上 S-F 表示迴歸，即子的測算體高較父的體高為近於其均數。例如 $F=62$ ， $S=65$ ， $F=74$ ， $S=71$ 。這

兩個S的數都在其均數與F之間。如 $F = 40''$ 或 $80''$ ，S的數仍在68與40或68與80之間。換句話講，兒子的體高是迴歸到其種族的均數的。

76 迴歸方程上的差誤與機誤

迴歸方程的差誤機誤兩公式如下。

差誤的公式

$$1. S_y(\text{est. } Y) = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} \quad (51)$$

$$2. S_x(\text{est. } X) = \sigma_x \sqrt{1 - r^2} \quad (52)$$

機誤的公式

$$1. P. E.(\text{est. } Y) = 6745 \sigma_y \sqrt{1 - r^2} \quad (53)$$

$$2. P. E.(\text{est. } X) = 6745 \sigma_x \sqrt{1 - r^2} \quad (54)$$

因為迴歸方程式有兩個，所以差誤與機誤的公式亦各有兩個。在上面的第一個為從X測算Y的差誤和機誤的兩公式 (Standard error and probable error of estimate in predicting Y from X)，第二個為從Y測算X的差誤和機誤的公式 (Standard error and probable error of estimate in predicting X from Y)。茲根據上列材料舉例於下。

$$S_y = 12.97 (\sqrt{1 - .91^2}) = 5.38$$

則Y在X上的迴歸方程的整個公式當為

$$\bar{Y} = 2.202X - 50.14 \pm 5.38$$

設 $X = 37.5''$ ，則 $\bar{Y} = 2.202(37.5) - 50.14 \pm 5.38$

$$= 32.42 \pm 5.38 \text{ 磅}$$

練習題

1. 試用十七章的練習材料算X在Y上和Y在X上的兩迴歸，並繪圖以表示之。
2. 以所有之 r , σ_x , σ_y 代入迴歸方程。根據這兩公式推算X在Y上與Y在X上的兩迴歸，並繪圖以表示之。
於圖上證明（並在計算上證明）兩直線的交點為 (M_x, M_y) 。
4. 試求迴歸方程上的機誤與差誤。

第十九章

等級相關

77 等級相關的公式

教師評定成績常有給等級而不與分數者。在此種情形之下，我們若要求兩種成績之相關，可用等級相關方法。這方法在計算上比較從前所用的便利。若材料的數量不多(如在三十以下)我們僅可把分數化為等級，就此而求等級相關，也是一種辦法。茲錄史皮滿(Spearman) 氏的公式如下：

$$\rho = 1 - \frac{6\sum(V_x - V_y)^2}{N(N^2 - 1)} \quad (55)$$

在這公式裏， V_x ， V_y 為 X，Y 兩成績的等級，N 為 X 的或 Y 的總次數。從這公式上看來，等級的相差越大，則此差數之總乘方亦大，其結果則 ρ 的數變小。轉過來講，若等級的相差很小，則 ρ 的數必大，而其相關即甚近。在這個公式裏有一種假定，即在這等級的次序裏凡兩鄰近等級之相差都是相等的，不管這鄰近兩等級是在此次序之中部還是在他的上部或下部。這種分配的假定頗與事實不合，因為事實上中部的兩鄰近成績的相差要比上部或下部的兩鄰近成績的相差小。為補救史皮滿氏公式的缺點起見，皮爾生 (Pearson) 引用了 $r = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} \rho \right)$ 一公式。於 ρ 求得之後，將他化為 r ，這 r 的數是根據常態分

配的。此外皮爾生又引用 $r = 2 \cos \frac{\pi}{3} (1-R) - 1$ 一公式，在這裏 $R = 1 - \frac{6 \sum g}{N^2 - 1}$ ，(56)這R的公式也是史皮滿建議的。這公式裏的g在英文爲 gain 就是正的 $(V_x - V_y)$ ，其他負的 $(V_x - V_y)$ 完全不要加入。把R求得之後化爲r，這數也是根據常態分配的。

78 等級相關的計算法

等級相關的計算法爲比較的容易，上面已經講過。茲用作者的測驗材料舉例如下。這是初中三年級二十三校（八百零八人）的文言，白話兩成績，他們是以S.D. 值爲單位的。在表八十七的第一行爲各校之號數從一起至二十三止，第二第三兩行是各校的文言，白話兩成績，第四第五兩行是他們的等級，第六行是兩等級的相差，第七行是各差數的乘方。在等級方面以最高分數爲第一可，以最低分數爲第一亦可，但是X, Y兩數量的等級必要一致。在計算的時候，若遇有相等的分數，我們應將他們平均一下而與以相當的等級。例如在文言行中得48.5的有兩個，他們倆應佔十五，十六兩等級，我們即將此兩數加上而以二除之，各得 $15\frac{1}{2}$ 。這法叫做中級法 (the mid-rank method)。我們在前幾章業經用過。還有一種弧級法 (the bracket rank method)。用這法時遇有兩數或三數相等，不平均，止就他們的爲首應得之等級寫下去。例如上面兩個48.5在此均爲15，又兩個47.8均爲19。過此再就次序寫下去。這弧級法用之者比較的少。

在這個例子裏 $R = .3011$ ， $\rho = .5420$ 。從附錄中查出他們相當的r，

表八十七 等級相關的計算

號數	文 言 S. D. 值	自 話 S. D. 值	等 級 V_x	等 級 V_y	d $V_x - V_y$	d^2 $(V_x - V_y)^2$
1	54.5	58.6	1	1	0	0
2	52.0	54.8	2	7	-5	25
3	51.9	56.6	3	2	+1	1
4	51.4	53.6	4	13	-9	81
5	50.5	56.4	5	3	+2	4
6	50.4	54.1	6	10	-4	16
7	50.0	53.0	7	16	-9	81
8	49.9	54.0	8	11	-3	9
9	49.8	55.2	9	5	+4	16
10	49.7	52.9	10	17	-7	49
11	49.6	55.0	11	6	+5	25
12	49.0	52.1	12	20	-8	64
13	48.8	52.8	13	18	-5	25
14	48.6	52.0	14	21	-7	49
15	48.5	54.7	15½	8	+7.5	56.25
16	48.5	55.9	15½	4	+11.5	132.25
17	48.4	52.4	17	19	-2	4
18	48.3	53.2	18	15	+3	9
19	47.8	51.4	19½	22	-2.5	6.25
20	47.8	53.9	19½	12	+7.5	56.25
21	47.2	53.4	21	14	+7	49
22	46.8	54.3	22	9	+13	5169
23	46.4	49.6	23	23	0	0

$$\Sigma g = 61.5 \quad \Sigma d^2 = 927$$

$$R = 1 - \frac{6\Sigma g}{N^2 - 1} = 1 - \frac{6(61.5)}{23^2 - 1} = 1 - \frac{369}{528} = .3011 \quad r = .487$$

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6(927)}{23(528)} = 1 - \frac{5562}{12144} = .5420 \quad r = .560$$

用普通相關公式 (product moment formula) $r = .547$

一為 .473，一為 .560。這兩數的相差為 .087。用普通的相關公式 (by-product moment formula) $r = .547$ 。在這種情形之下用 ρ 似比用 R 為近於用普通公式所求得的结果。實際上在多數情形之下，由 R 所求出之 r 與由 ρ 所求出之 r 不見得完全相同。這不同的原因在次數分配上，因為 R 與 ρ 兩公式經校正以後是根據常態分配的。絕對的常態分配的材料既比較的少，所以這結果總多少有點出入的。有許多統計學家止用 ρ 的數而並不把他化為 r ，就是這個緣故，關於分配的情形茲舉二例於下以資比較。

表八十八 次數分配在等級相關上之影響(例一)

次數之分配			號數	X	Y	r_x	r_y	d $V_x - V_y$	d^2	$R = 1 - \frac{6(2.5)}{9^2 - 1} = .8125$ $r = .9614$ $\rho = 1 - \frac{6(4.5)}{9(80)} = .9625$ $r = .966$ 用普通公式 $r = .940$
i	f_x	f_y								
50	1	1	1	95	90	1	1	0	0	
60			2	88	85	2	2.5	-.5	.25	
70	3	3	3	84	85	3	2.5	+ .5	.25	
80			4	78	75	4	4	0	0	
90	2	2	5	76	72	5	5.5	-.5	.25	
100			6	70	72	6	5.5	+ .5	.25	
N	9	9	7	65	68	7.5	7	+ .5	.25	
			8	65	58	7.5	9	-1.5	2.25	
			9	55	60	9	8	+ 1	1	
									2.5 (Σg)	4.5 (Σd^2)

在八十八，八十九兩表中其次數分配（在各表之左）一為常態，一為偏態。在常態分配中由 R 與 ρ 所求出之 r ，一為 .9614 一為 .966，

二數相差不過 .0046, 可算很近。用普通公式所求之 $r = .940$, 其與 .9614, .966 兩數之相差亦不甚遠。在偏態分配中由 R 與 ρ 所求出之 r 一為 .663, 一為 .785, 二數之相差為 .122 比較的很遠。用普通公式所求出之 $r = .710$ 與 .662 之相差為 .047, 與 .785 之相差為 .076。這相差的原因完全在分配上。從附錄的對照表上看來, r 與 ρ 之相差至多不過 .018, r 與 R 之相差則可大至 .23。所以 ρ 與 r 的相差實比較的小。在表八十九裏 $\rho = .771$, 經校正以後他等於 .785, 實際上與用普通公式所求得的 r 數(=.710) 相去益遠, 所以許多統計學家不贊成校正, 因為遇偏態的分配, 在校正以後, 更不能與普通 r 的數比較了。從經驗上講, 由 R 或由 ρ 所求出之 r 與用普通公式所求出之 r 的相差約在 .05

表八十九 次數分配在等級相關上之影響(例二)

次數之分配			號數	X	Y	V _x	V _y	d V _x -V _y	2	$R = 1 - \frac{6(7.5)}{9(9-1)} = .4375$ $r = .663$ $\rho = 1 - \frac{6(27.5)}{9(81-1)} = .7708$ $r = .785$ 用普通公式 $r = .710$
i	f _x	f _y								
50	1	2	1	100	78	1	3	-2	4	
60	1	3	2	95	90	2	1	+1	1	
70	1	2	3	90	75	3	4	-1	1	
80	3	1	4	87	80	4	2	+2	4	
90	3	1	5	85	60	5	6.5	-1.5	2.25	
100			6	80	55	6	8	-2	4	
N	9	9	7	75	62	7	5	+2	4	
			8	65	50	8	9	-1	1	
			9	50	60	9	6.5	+2.5	6.25	
								7.5	27.5	
								(Σg)	(Σg ²)	

以下。在這數以上者頗不多見。

從計算上講當然 R 的公式比較的便利。且這公式亦有相當的數學基礎。若時間有限而數目又不須過於精確，儘可應用 R 的公式。因為他的便利，所以這公式叫做尺度(Foot-rule)公式。不過統計學家的意見並不一致，用 ρ 的公式者亦不在少數呢？

79 等級相關的機誤

等級相關的機誤公式在 ρ 方面為

$$P. E. \rho = \frac{.6745(1-\rho^2)}{\sqrt{N}} \quad (57)$$

引用了 $r = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$ 之後，

$$P. E. = \frac{.7063(1-r^2)}{\sqrt{N}} \quad (58)$$

我們試根據表八十七 ρ 的結果演算於下。

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 927}{23 \times 528} = .542$$

$$\therefore r = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right) = .56$$

$$P. E. = \frac{.7063(1-.56^2)}{\sqrt{23}} = .10$$

$$\therefore r = .56 \pm .10$$

在這裏 r 大於他的機誤在五倍以上，故其結果尚屬可靠。不過我們要知道，在計算等級相關的時候， N 的數總不會很大。 N 的數既不

會大，若遇很小之 r ，就此而算機誤，決難得可靠的結果。倘於偶然之間， r 的數足夠他們機誤的三倍。我們因 N 數很小的關係，也不可即下結論。最好就同樣材料而求其相關，看他有無別的情形發生。就此兩個 r 的機誤而求其相差（兩數相差之機誤的公式見第十六章）。若兩個 r 的相差仍大於這兩機誤的相差三倍或四倍，這成績就比較的可靠了。

80 幾個特殊例子

在計算等級相關的時候，那原來的分數若偶然有兩三個相等尚不要緊。若相等的太多，那於等級相關的結果就大有影響了。茲把這樣情形的例子舉一於下以資證明。

表九十 特殊算法（例一）

號數	X	Y	V_x	V_y	$\frac{d}{V_x - V_y}$	d^2
1	25	50	5	3	+2	4
2	35	50	4	3	+1	1
3	45	50	3	3	0	
4	55	50	2	3	-1	1
5	65	50	1	3	-2	4
					3	10
					(Σr)	(Σd^2)

$R = 1 - \frac{6 \times 3}{5^2 - 1} = .25$

$r = .414$

$\rho = 1 - \frac{6 \times 10}{5(21)} = .50$

$r = .518$

用普通相關係數公式

$r = 0$

在表九十上由 ρ 所求之 r 與由 R 所求出之 r 有一定之數目，而用普通公式所求出之 r 則等於零，是用一種方法兩種成績有關係，而用他種方法則他們倆即全無關係。究竟孰對孰否，何去何從，應有相當的解決。其實這兩種方法要算普通方法比較的對，因為在等級相關的公式裏有一種假定即 XY 兩變數的標準差是相等的。例如 X 與 Y 各有七個數。倘這七個數各不相同，則在等級方面均是由一到七的。所以兩個標準差同是 2。我們知道除非各個等級均不相同，那兩標準差始相等。倘材料之中偶有兩個等級相同，尚不緊要。若相同之多如上面的例子那就發生毛病了。 ρ 的公式本是由普通相關係數的公式來的，其不同之點在前者假定兩標準差是相等的。茲演釋於下：

現在以 X, Y 代兩變數，以 d 代他們的相差，

$$\text{則 } d = x - y, \quad d^2 = (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$\text{總加起來 } \Sigma d^2 = \Sigma x^2 + \Sigma y^2 - 2\Sigma xy \text{ 或 } \Sigma xy = \frac{\Sigma x^2 + \Sigma y^2 - \Sigma d^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{普通相關係數的公式爲 } r &= \frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{\frac{\Sigma x^2 + \Sigma y^2 - \Sigma d^2}{2}}{2\sigma_x\sigma_y} \\ &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \frac{\Sigma d^2}{N}}{2\sigma_x\sigma_y} \end{aligned}$$

$$\text{兩標準差既假定相等，則 } r = \frac{2\sigma^2 - \frac{\Sigma d^2}{N}}{2\sigma^2} = 1 - \frac{\Sigma d^2}{2N\sigma^2}$$

在等級的材料上 $\sigma^2 = \frac{N^2-1}{12}$ *, $\therefore r = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2-1)}$

等級相關常受分配之影響前面已經講過，茲再舉一種例子於下：

表九十一 特殊算法(例二)

號數	X	Y	V _x	V _y	$\frac{d}{V_x - V_y}$	d ²	
1	95	30	1	1	0	0	$\rho = 1 - \frac{6\sum d^2}{N(N^2-1)} = 1$ r=1
2	60	28	2	2	0	0	
3	52	26	3	3	0	0	$R = 1 - \frac{6\sum d^2}{N^2-1} = 1$ r=1 用普通公式 r=.97
4	21	24	4	4	0	0	
5	8	22	5	5	0	0	
6	4	20	6	6	0	0	

在表九十一上由 ρ 與由 R 所求出之 r 與用普通公式所求出之 r 相差雖不甚大，但是用等級相關的方法，我們對於分配情形實在看不出來。所以在計算等級相關之先，我們應當研究那分數的分配。倘是這分配有奇特之處，我們要看由 ρ 或由 R 所求出之結果是否掩飾了這實在情形。所以在等級相關裏那分配的性質是非常重要的。

練習題

1. 試用下列材料求 ρ 與 R，並從表上查出 ρ 與 R 的相當之 r；次

*此公式是用積分學引申出來的，但用簡單的幾個等級亦可證明。如上面七個數，

N=7，則 $\sigma^2=4$ ，或 N=5，則 $\sigma^2=2$ 是。

用 product moment 公式求 r 以便比較。

2. 試根據同樣的材料，求等級相關之機誤。

(a)	X	Y	(b)	X	Y	(c)	X	Y
	90	95		90	88		92	70
	85	95		85	75		89	70
	85	85		80	85		85	75
	80	75		75	74		80	70
	70	80		72	64		70	60
	64	60		70	70			
	50	65		60	60			
				55	50			

並且舉有兩個例圖。遇有此種情形，我們不應再用普通的或直線的相關係數公式，那是我們應當知道的。在這個當兒，我們另有一個公式，以適合此曲線式的分布。這曲線相關的公式是非常重要的，因為不用這公式那兩數相關間的真正結果決不能表示出來。例如在表九十二裏那點子的分布，我們一望就知道不能形成一直線。遇有這樣材料若用直線相關的公式，則所得的結果為零。然而從非直線相關上看，那結果不但不等於零，而且是完全正相關。所以從結果的比較上看，我們認為非直線相關的計算也是很重要的。

82 非直線相關的公式

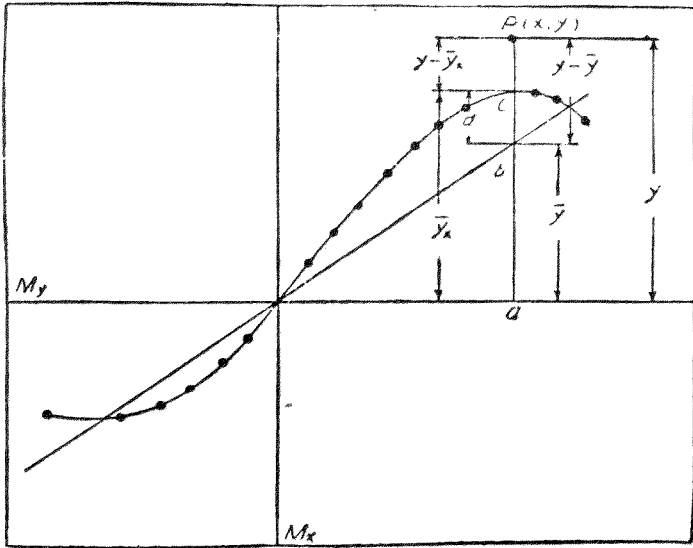
非直線相關公式的引申是皮爾生教授的貢獻。這所求的係數叫做相關比 (correlation ratio)。在公式上以 η (eta) 代表之。猶憶在十八章裏討論迴歸線的時候，我們有一種測算的差誤公式如

$$S_y^2 = \sigma_y^2(1 - r^2)$$

在這裏假使 $r=1$ ，則 $S_y=0$ ，可謂毫無差誤。換句話講，這 x 與 y 的相關是完全的。假使 r 不等於一，則差誤總是有的，他的大小與 r 的大小成一種反比例。在相關比裏皮爾生所根據的就是這些標準差，因為由標準差可以看見那相關表上 (x, y) 點子的分布情形。所以第一步皮爾生把這公式寫作

$$\sigma_{xy}^2 = \sigma_y^2(1 - \eta^2) \quad (59)$$

左邊的標準差是相關表上各行的標準差於自乘之後，總加起來而平均者 (the mean of the weighted squares of the standard deviations



圖八十 相關比舉例

of the arrays) 用字母表示出來,

$$\sigma_{ay}^2 = \frac{\sum(f \cdot \sigma_{ix}^2)}{N} \quad (60)$$

在圖八十之上 $ab = \bar{y}$, b 在直線上, $ac = \bar{y}_x$, c 在此線上, $aP = y$ P 是這相關表上的任何一點。假使相關是直線的, 則 c 與 b 同在一點, $\Sigma(y - \bar{y}_x)^2 = \Sigma(y - \bar{y})^2$, $\sigma_{ay}^2 = S_y^2$, 或 $\eta = r$ 。假使相關不是直線的, 則 \bar{y}_x 不等於 \bar{y} , σ_{ay}^2 不等於 S_y^2 。轉過來講, 假使在非直線相關裏, 所有的點子都落於那迴歸線上或 y 行的均數線上 (the line of the column means) 則 $(y - \bar{y}_x)$ 與 σ_{ay} 都等於零。在這個當兒 $\eta = 1$ 。但這樣情形很少。所以 σ_{ay} 不常等於零而 y 與 \bar{y}_x 的相差總是有的。因為如此在各行裏我們應求他的標準差, 他的表示是:

$$\sigma^2_{fx} = \frac{\Sigma(y - \bar{y}_x)^2}{f_x} \quad (61)$$

所以 $\sigma^2_{ay} = \frac{\Sigma\Sigma'(y - \bar{y}_x)^2}{N} *$

$$\begin{aligned} N \sigma^2_{ay} &= \Sigma\Sigma'y^2 - 2\Sigma\Sigma'y\bar{y}_x + \Sigma\Sigma'\bar{y}_x^2 \\ &= N\sigma_y^2 - 2\Sigma[\bar{y}_x\Sigma'(y)] + \Sigma(f_x\bar{y}_x^2) \\ &= N\sigma_y^2 - 2\Sigma[\bar{y}_xf_x\bar{y}_x] + \Sigma f_x\bar{y}_x^2 \\ & \qquad \qquad \qquad [\Sigma'(y) = f_x\bar{y}_x \text{ 猶之 } \Sigma y = NM] \\ &= N\sigma_y^2 - \Sigma(f_x\bar{y}_x^2) \\ &= N\sigma_y^2 - N\sigma^2_{\bar{y}_x} \end{aligned}$$

兩邊的N取消之後

$$\begin{aligned} \sigma^2_{ay} &= \sigma_y^2 - \sigma^2_{\bar{y}_x} \\ \therefore \sigma^2_y(1 - \eta^2) &= \sigma_y^2 - \sigma^2_{\bar{y}_x} \\ 1 - \eta^2 &= \frac{\sigma_y^2 - \sigma^2_{\bar{y}_x}}{\sigma_y^2} \\ &= 1 - \frac{\sigma^2_{\bar{y}_x}}{\sigma_y^2} \\ \therefore \eta^2 &= \frac{\sigma^2_{\bar{y}_x}}{\sigma_y^2} \quad \text{或} \quad \eta = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} \end{aligned}$$

所以 η 是一種相關比，就是各行的均數的標準差 (the standard deviation of the means of the arrays) 與其全部的標準差 (the standard deviation of the whole table) 相比。因為從那些 (x, y) 的點子上能使我們看見分布的曲直。在直線相關裏我們既有兩迴歸線，

* 上撇 (prime) 所以分別各行之和與總和。

在非直線相關裏我們亦應有兩個相關比，一為X在Y上的相關比，一為Y在X上的相關比。這一對公式應寫如下式

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}x}}{\sigma_y}, \quad (62); \quad \eta_{xy} = \frac{\sigma_{\bar{x}y}}{\sigma_x} \quad (63)$$

上面的公式尚須變遷一下，在應用上始較方便。茲演釋於下：

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}x}}{\sigma_y} = \frac{\sqrt{\frac{\sum f_x (M_y - \bar{Y}_x)^2}{N}}}{\sigma_y}$$

在此地 $M_y = A.M_y + \frac{\sum Y}{N}$ (i), $\bar{Y}_x = A.M_y + \frac{\sum' Y}{f_x}$ (i),

$$\text{所以 } \frac{M_y - \bar{Y}_x}{i} = \frac{\sum Y}{N} - \frac{\sum' Y}{f_x}$$

兩邊自乘之後，

$$\frac{(M_y - \bar{Y}_x)^2}{i^2} = \left(\frac{\sum Y}{N}\right)^2 - 2\left(\frac{\sum Y}{N}\right)\left(\frac{\sum' Y}{f_x}\right) + \left(\frac{\sum' Y}{f_x}\right)^2$$

各行並全表總加之後，

$$\begin{aligned} \frac{\sum f_x (M_y - \bar{Y}_x)^2}{i^2} &= N \left(\frac{\sum Y}{N}\right)^2 - 2\left(\frac{\sum Y}{N}\right)(\sum Y) + \sum \left[\left(\frac{\sum' Y}{f_x}\right)^2\right] \\ &= \sum \left[\frac{(\sum' Y)^2}{f_x}\right] - \frac{(\sum Y)^2}{N} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_{\bar{y}x} = \sqrt{\frac{\sum f_x (M_y - \bar{Y}_x)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum (\sum' Y)^2}{f_x} - C_y^2(i)}$$

$$\therefore \eta_{yx} = \frac{\sqrt{\frac{\sum (\sum' Y)^2}{f_x} - C_y^2}}{\sqrt{\frac{\sum Y^2}{N} - C_y^2}} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \text{同理 } \sigma_{\bar{x}_y} &= \sqrt{\frac{\Sigma f_y (M_x - \bar{X}_y)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma (\Sigma' x)^2}{\frac{f_y}{N} - C_x^2(i)}}; \\ \therefore \eta_{xy} &= \frac{\sqrt{\frac{\Sigma (\Sigma' x)^2}{\frac{f_y}{N} - C_x^2}}}{\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - C_x^2}} \quad (65) \end{aligned}$$

83 相關比的限度

相關比和相關係數一樣，在數目上有一定的限度。這數目是不小於零的，因為他既是兩個均方差的比，最小的數是零，不會小於零，所以相關比也不會小於零。在大的方面，相關比得至 1.00，這是完全的非直線相關，上面已經講過，從計算上看來，相關比的數總是大於或等於相關係數的數的，這事實我可用一極簡單的數理證明。在上面我們曾說，在迴歸成直線的時候， $y - \bar{y} = y - \bar{y}_x$ 各行都是一樣，所以 $S_y = \sigma_{ay}$ ， $r = \eta_{yx}$ 。假使迴歸不成直線，則 $\bar{y}_x = \bar{y} \pm d$ 或 $y - \bar{y}_x \pm d = y - \bar{y}$ 在兩邊自乘並總加之後，上面的方程式變為

$$\Sigma f_x (y - \bar{y}_x)^2 \pm 2 \Sigma f_x (y - \bar{y}_x) d + \Sigma f_x d^2 = \Sigma f_x (y - \bar{y})^2$$

在左邊的中間一項在各行裏都等於零，因為環均數的差數總加起來，正負號相消以後總等於零，所以這方程式只剩下

$$\Sigma f_x (y - \bar{y}_x)^2 + \Sigma f_x d^2 = \Sigma f_x (y - \bar{y})^2 *$$

若用 N 以除各項則此方程式變為

* Σf_x 與 $\Sigma \Sigma'$ 之意義相同。

$$\sigma_{ay}^2 + \sigma_d^2 = S_y^2$$

現在將 η 與 r 代入，則

$$\sigma_y^2(1 - \eta^2_{yx}) + \sigma_d^2 = \sigma_y^2(1 - r^2) \quad *$$

$$\sigma_y^2 - \sigma_y^2 \eta^2_{yx} + \sigma_d^2 = \sigma_y^2 - \sigma_y^2 r^2$$

$$\therefore \sigma_y^2(\eta^2_{yx} - r^2) = \sigma_d^2 \quad (66)$$

此步足以證明，除在直線相關裏 $\eta = r$ 外，在其他情形中 η 總是大于 r 的，因為 σ_d 總是一個正號的數目。

84 相關比的計算法

相關比的計算頗為容易。止在相關表上求係數的時候於橫的直的两方各多加四行而已。茲在表九十三裏舉例以明之。在這裏直行中有所謂 f , y , fy 及 fy^2 四行，這是為求相關係數用的。此外有 $\Sigma'x$, Σxy , $(\Sigma'x)^2$, $\frac{(\Sigma'x)^2}{f_y}$ 及 \bar{x}_y 五行，此五行中前二行在求相關係數的時候也會用過，止 $(\Sigma'x^2)$, $\frac{(\Sigma'x)^2}{f_y}$ 及 \bar{X}_y 三行是新添的。 $(\Sigma'x)^2$ 是 $\Sigma'x$ 一行中各數自乘者，此不問可知。第八行中之 fy 為各橫行 x 數中的總 y 數。例如第一橫行裏 y 的組距為 95—100。在這裏 $\Sigma'x = 1(-5) = -5$ (1 是次數)， $(\Sigma'x)^2 = 25$, fy 為 f 行中之數，在此等於 1，所以 $\frac{(\Sigma'x)^2}{f_y} = 25$ 。又如第十橫行裏 y 的組距為 50—54.99。在這裏 $\Sigma'x = 6(-3) + 3(-2) = -24$, $(\Sigma'x)^2 = 576$, $fy = 9$ 所以 $\frac{(\Sigma'x)^2}{f_y}$

*因為 $\sigma_{ay}^2 = \sigma_y^2(1 - \eta^2)$, $S_y^2 = \sigma_y^2(1 - r^2)$

=64。這樣，我們可以在每一橫行裏求出 $\frac{(\sum'x)^2}{f_y}$ ，最末一行裏所有的數為 \bar{X}_y 的數，就是每一橫行裏的真正均數。同理，在相關表的下面 $f, x, fx, fx^2, \sum'y, \sum'xy, (\sum'y)^2, \frac{(\sum'y)^2}{f_x}$ 及 \bar{Y}_x 九行裏我們可以依次求出各數，並在每一直行裏求出 $\frac{(\sum'y)^2}{f_x}$ 和他們的真正均數。在這裏我們要注意的是那 $(\sum'y)^2$ 絕對與 $\sum'y^2$ 不同， $(\sum'x)^2$ 亦絕對與 $\sum'x^2$ 不同。因為 $\sum'y^2$ 與 $\sum'x^2$ 是全表裏的數為求 σ_y 與 σ_x 用的，而 $(\sum'y)^2$ 與 $(\sum'x)^2$ 則為每一直行和每一橫行求 $\sigma_{\bar{y}_x}$ 和 $\sigma_{\bar{x}_y}$ 用的。 $\sum'xy$ 的數橫直各有一行，因一為 $(\sum'x)(y)$ ，一為 $(\sum'y)(x)$ ，其結果則橫直兩行均為 $\sum'xy$ 。這兩行的總和應當相等，在求相關係數的時候，用作證驗未為不可。有了這幾行的數目，把他們代入公式，即求得 r, η_{yx} 與 η_{xy} 三數。在這裏 $r = -.828$ 這是負相關而且很小，但是在相關比方面 $\eta_{yx} = .958, \eta_{xy} = .960$ 都算很大。在這裏若止用 r 而不用 η ，這真正的結果恐無從表出。所以我們覺得應用相關比是很重要的。

有的時候為繪圖起見各橫直行裏的真正均數有求出之必要，而我們為舉例起見已在表九十三上把他們的結果表示出來。他們的算法與求普通的算術均數一樣，止公式所用的字母稍有變更而已。茲將兩公式寫在下面並附以計算的例子：

$$\begin{aligned} \bar{X}_y &= m_x + \frac{\sum'x}{f_y}(i) & \bar{Y}_x &= m_y + \frac{\sum'y}{f_x}(i) \\ &= A.M._x + \frac{\sum'x}{f_y}(i_x) \quad (67); & &= A.M._y + \frac{\sum'y}{f_x}(i_y) \quad (68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例一 } \bar{X}_{97.5} &= 15 + \left(\frac{-5}{1}\right)(2) & \bar{Y}_5 &= 37.5 + \frac{12}{1}(5) \\ &= 15 - 10 = 5 & &= 37.5 + 60 = 97.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例二 } \bar{X}_{72.5} &= 15 + \left(\frac{-8}{2}\right)(2) & \bar{Y}_9 &= 37.5 + \frac{80}{22}(5) \\ &= 15 - 8 = 7 & &= 37.5 + 18.18 = 55.68 \end{aligned}$$

在公式裏 $A. M._x$ 代表總表裏橫行的假設均數，在這個例子裏其數為 15。 $\Sigma'x$ 為第五行裏的數， \bar{t}_y 則為第一行裏的數，以 i_x 為橫行的組距。有了這些數目則橫行裏的真正均數都能求出。

在直行裏情形亦正相同。在這裏 $A. M._y$ 為總表裏直行的均數，在這個例子裏其數為 37.5 其他數止須在表上找出，代入公式，即能求出各直行之真正均數。

有了這些數目則 y 的均數線與 x 的均數線都可畫了。

85 直線性的試驗

在我們的例子裏 r 的數與 η_{yx} , η_{xy} 的數相隔很遠。在我們計算以前我們已能推測這情形，因為在相關表上那些 (x, y) 的點子分布成一曲線，一望便知。所以我們遇有這樣材料對於求 η 與否並無多大困難。不過有的時候 r 的數與 η_{yx} , η_{xy} 的數相隔很近。在計算之前，從相關表上，我們實在看不出來他們究否成一直線或一曲線。在這個當兒，布雷克滿 (Blakeman) 氏建議一個試驗方法，就中定立一個直線性的標準 (the criterion of linearity)。這標準是

$$\frac{\sqrt{N}}{.6745} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\eta^2 - r^2} = 2.5$$

根據這個標準我們可以知道那左邊的數不得小於 2.5，始能用相關比，因為那數若小於 2.5，則相關比與係數的相差極小。在這種情形之下，我們若用兩數相差之機誤，則所得的結果決不能證明這細微的相差是直線與非直線的關係。假使那左邊的數大於 2.5，那麼，我們可以斷定這相關是曲線的，所以用相關係數不能代表他，而我們應當用相關比了。

為計算便利起見上面的標準可以化為

$$N(\eta^2 - r^2) < 11.37$$

在我們的例子裏

$$\begin{aligned} N(\eta_{yx}^2 - r^2) &= 157[(.958)^2 - (-.828)^2] \\ &= 157 \times .231 \\ &= 36.424 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(\eta_{xy}^2 - r^2) &= 157[(.960)^2 - (.828)^2] \\ &= 157 + .236 \\ &= 37.052 \end{aligned}$$

在結果上這兩個數都比 11.37 大，所以我們應當用相關比，始能把那些 (x, y) 的點子的分布情形表示出來。

相關比的機誤公式為

$$F. E. = \frac{.6745}{\sqrt{N}}(1 - \eta^2) \quad (69)$$

在我們的例子裏兩個相關比於加入 P. E. 之後，應為

$$\eta_{yx} = .958 \pm .0044, \quad \eta_{xy} = .960 \pm .0042$$

86 相關比與組距之關係

在相關比的數目上，有的時候因為組距用得太大致所得的結果比較的大。組距小至一的時候，在每一組距裏或一行裏往往止有一個數，我們要求那行的均數就止須寫出不必求了。但是這結果與用二，或三，或五作組距的時候，每一組距裏或一行裏有一個數的必很少。在這種情形之下，每行的均數乃是就各數平均出來的。組距小至一的時候，或一行止有一個數的時候，若算 η 這數目即為一，未免太大。為校正起見，皮爾生建議應用下列公式。

$$\eta^2_T = \frac{\eta^2 - \frac{(K-1)}{N}}{1 - \frac{(K-2)}{N}} \quad \text{或} \quad \eta_T = \sqrt{\frac{\eta^2 - \frac{(K-1)}{N}}{1 - \frac{(K-2)}{N}}} \quad (70)$$

在這公式裏 N 為總次數 K 為 x 的或 y 的行數。在我們的例子裏

$$\begin{aligned} \eta_{yx(T)} &= \sqrt{\frac{.958^2 - \frac{(19-1)}{157}}{1 - \frac{(19-2)}{157}}} & \eta_{xy(T)} &= \sqrt{\frac{.961^2 - \frac{(19-1)}{157}}{1 - \frac{(19-2)}{157}}} \\ &= \sqrt{\frac{.8031}{1 - .1083}} = \sqrt{\frac{.8031}{.8917}} & &= \sqrt{\frac{.8069}{1 - .1083}} = \sqrt{\frac{.8069}{.8917}} \\ &= \sqrt{.900639} = .949 & &= \sqrt{.904901} = .951 \end{aligned}$$

在求 η 的時候，組距若用得太大，我們也有一種校正的公式，但

是那相差的數目很小，不計算他也不要緊。其實因為組距太小而校正的手續也有不用的。不過在橫直行的數目相差很大的時候，若比較這兩個相關比，我們應當用這校正的公式。

練習題

1. 試根據下表求 r , η_{yx} , η_{xy} 。

		經 驗 年 數										f
		0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
薪 金	\$5000						1					1
	\$4500					1						1
	\$4000					1			1			2
	\$3500						1	2		1		4
	\$3000					1	1		2	1	1	6
	\$2500			1		1	3	5	4	3	1	18
	\$2000		1	1	6	7	4	2	2	1		
	\$1500		4	8	7	6	5					
	\$1000	10	4									
	f	10	9	10	13	17	14	9	9	6	2	100

- 求 η_{yx} 與 η_{xy} 的機誤。
- 試驗他們的直線性。
- 求橫直行裏的真正均數，並根據這些數各繪一均數線或迴歸線。
- 用校正的公式求真正的 (true or the most probable) 相關比。

6. 試根據表(九十二)的材料求 r , η_{yx} 和 η_{xy} , 並試驗他們的直線性。

第二十一章

品質相關

87 緒論

相關的統計最好是要 x, y ，兩變數都有數量，都有單位，那麼，我們所求得的结果纔有根據，纔較精確。不過事實上不見得完全如是。有的時候兩個變數之中一質一量，或兩個俱質，而質的方面又嘗有無秩序的。例如下列三表，在（九十四）為兩質相關，在（九十五）為一質與一量的相關，在（九十六）為量的材料與無秩序的材料的相关。

表九十四 兩質相關

學業成績	品 行					
	極劣	劣	平常	好	優良	
上 等	2	3	9	15	16	質的 材 料
中 等	5	8	12	10	2	
下 等	10	8	5	2	—	
質 的 材 料						

所謂無秩序的材料，如在表上直行裏的農，工，商，教等可以任意排列而不礙其秩序，因為四者之中實無所謂秩序。在九十四，九十五兩表上，質的材料之所以有秩序，因為舉行兩方面的各種材料都含有等級的意義。為其如此，我們不能任意排列他們。同時我們在九十四，

表九十五 質量相關

學業成績	智 商					質 的 材 料
	70—	80—	90—	100—	110-1:0	
上 等	—	3	7	12	14	質 的 材 料
中 等	3	9	5	2	1	
下 等	9	10	6	1	—	
量 的 材 料						

表九十六 量的材料與無秩序的材料之相關

父 親 的 職 業	兒 童 的 智 商						無 秩 序 的 材 料
	70—	80—	90—	100—	110—	120—140	
農 人	5	7	10	12	10	5	無 秩 序 的 材 料
工 人	4	3	9	12	8	6	
商 人	4	6	6	9	12	3	
教 員	2	4	7	12	10	6	
量 的 材 料							

九十五兩表上，能找出他們的大致的相關情形，因為在九十四品行優良的在學業上得上等的多，或品行壞的得下等的多，在九十五智商高的得上等的多，或智商低的得下等的多。至於在九十六這種情形我們頗不易看出。在職業方面我們若能把農，工，商，教分得較為詳細，如在工人方面又分為細工與粗工，或用腦力的工人與不用腦力的工人，或成功的工人與未成功的工人，或領袖工人與普通工人；那麼，父之職業與子之智商的相關我們可以推測一二，因為有藝術的或用腦力的

工人當然要比普通的工人聰明些，爲其如此，他們的兒子的智商也許高些。在表九十六上所有的分類既很籠統，所以他們的相關實在不易看出。然而我們未嘗不可引申一種公式，用來求他們的相關。下面的幾種是我們通常應用的，俟一一的簡單的敘述之。

88 四格表

四格表是一種最簡單的相關表。在這表上止記材料的有無或存在與不存在。例如歷史與地理的相關，在這裏我們並沒有各個成績的詳細分數，止有兩門全及格，兩門全不及格，歷史及格而地理不及格，和地理及格而歷史不及格四種情形，或四個數目。在這四格表上 a 的記號爲 ++，b 的爲 +−，c 的爲 −+，d 的爲 −−，就是在 a 兩門

表九十七 四格表

		歷 史 成 績		
		x_1	x_2	f
地 理 成 績	y_1	a ++	b +−	a+b
	y_2	c −+	d −−	c+d
	f	a+c	b+d	N

功課全及格，在 b 歷史及格而地理不及格，在 c 歷史不及格而地理及格，在 d 兩門均不及格。N 是他們的總次數。在直行裏 y_1 的次數爲 a+b， y_2 的次數爲 c+d，在橫行裏 x_1 的次數爲 a+c， x_2 的次數爲 b+d，結果橫直行的總

次數仍是相同。爲求這四格表的相關起見，余爾 (Yule) 氏建議了兩個公式如下：

$$(I) \quad Q = \frac{ad - bc}{ad + bc} \quad (71); \quad (II) \quad \omega = \frac{\sqrt{ad} - \sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}} \quad (72)$$

在第一個公式裏 Q 代表相關係數，在這裏叫做余爾氏的關聯係數 (Yule's coefficient of association)。在第二個公式裏所用的代表字爲 ω ，這字在英文上讀爲 omega，他代表的係數叫做余爾氏的歸結係數 (Yule's coefficient of colligation)。在這兩個公式中，其不同之點，在後者的各數爲前者的各數方根而已。第二個公式余爾氏介紹得較晚(1912)。他自己以爲第一個雖覺簡單，第二個實較合用，但是皮爾生(Pearson)和海淵(Heron)對於這兩個都不贊成，兩方辯論甚多。此間不暇敘述，不過有一點我們可略提一下。在討論第一公式的時候，余爾以爲以一數乘直行，以另一數乘橫行而其結果不變。例如在下面以 8 乘 a 與 b ，再以 4 乘 b 與 d ，其結果分子與分母各多一因子 32，上下相約之後 Q 之數並不變更。這樣情形在余爾氏的意思

a	b	8 a	32 b
c	d	c	4 d

以爲很方便，尤其是在材料的比例可以隨意增減的時候。不過這種便利照皮爾生、海淵等看起來，以爲有害於這係數，因爲材料的數目變遷以後，而係數仍無所動，何從而知其影響？

現在我們用余爾氏的兩個公式各計算一例題。在這裏 $a=25$, $b=6$, $c=4$, $d=4$ ，則

	x_1	x_2	F
y_1	25	6	31
y_2	4	4	8
F	29	10	39

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{25 \times 4 - 4 \times 6}{25 \times 4 + 4 \times 6} & \omega &= \frac{\sqrt{25 \times 4} - \sqrt{4 \times 6}}{\sqrt{25 \times 4} + \sqrt{4 \times 6}} \\
 &= \frac{76}{124} & &= \frac{10 - 4.899}{10 + 4.899} \\
 &= .61 & &= .34
 \end{aligned}$$

從公式上看，假使 b, c 兩數之中有一等於零，則 bc 即全等於零。結果 Q 或 ω 等於一，因為在這樣情形之下， $Q = \frac{ad}{ad}$ ， $\omega = \sqrt{\frac{ad}{ad}}$ ；假使 ad 二數之中有一等於零，則 ad 即全等於零。結果 $Q = \frac{-bc}{bc}$ ， $\omega = -\sqrt{\frac{bc}{bc}}$ 或各等於負一；假使 $ad = bc$ ，則 Q 與 ω 均等於零，因為在兩公式上那分數上的分子均等於零，所以這兩個係數的範圍是由負一經零而至正一的。

89 皮爾生氏的餘弦 π 法

皮爾生建議一種相關方法叫做餘弦 π 法 (the cosine π method)。這 π 在英文為 Pi，代表 180 度，在三角學上常常用的。這方法似比余爾的任何一個好。他的公式是：

$$r = \cos \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}} \pi \quad (73)$$

用這公式的時候，我們要檢查餘弦對數表。茲試根據前面材料代入此公式：則

$$r = \cos \frac{\sqrt{4 \times 6}}{\sqrt{25 \times 4} + \sqrt{4 \times 6}} \pi = \cos .329 \times 180^\circ = \cos 59^\circ 13' = .51$$

從算術的運用上看，我們先求那分數上的各方根，得着.329的時候，即以 180° 乘之，然後於三角學的對數表上查出 $\cos 59^\circ 13'$ 的數目。這手續比較的麻煩。爲節省手續起見，我們在附錄上備有一檢查表。於計算之時，我們止須將 $\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}$ 求出來，即可檢查那相當的 r 。

90 西巴 (Sheppard) 氏的異號法

與皮爾生的方法相似的有西巴氏的異號法 (the method of unlike signs)。他的公式是：

$$r = \cos \frac{U}{L+U} \pi \quad (74)$$

U 在英文代表 unlike 或 unlike signs 在中文譯爲異號，L 在英文爲 like 或 like signs，在中文譯爲同號。在這公式裏 U 與 L 代替皮爾生的公式裏的 \sqrt{bc} 與 \sqrt{ad} ，不過在計算上這兩公式並不相同，因爲在西巴的公式裏 $U = b+c$ ， $L = a+d$ ，所以 $\frac{U}{L+U} = \frac{b+c}{a+d+b+c} = \frac{b+c}{N}$ 。 $\pi = 180^\circ$ 上面已經講過，所以 $\frac{U}{L+U} \pi = \frac{b+c}{N} (180^\circ) = 100 \frac{b+c}{N} (1.8^\circ)$ 。 $L+U$ 或 N 的數既常常等於 100， $b+c$ 或 U 既爲其百分數，這全部公式亦可寫爲

$$r = \cos U \cdot 1.8^\circ \quad (75)$$

現在我們把 b, c, N 三數代入公式則 $U = 25.6\%$ 所以

$$r = \cos 25.6 \times 1.8^\circ = \cos 46^\circ 48' = .69$$

若用附錄中的檢查表比較方便，而在計算上亦止以 N 除 $b+c$ ，根據

這求得的數目檢查相當之 r 即得。在這個例子裏 $\frac{b+c}{N} = .256$ ，在表

上與 .256 相近的為 .258，我們就用此數而找出相當的 $r = .69$ ，所以

.69 就是這異號相關的係數。在檢查表上 U 或 $\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}$ 的值是從

零到 .5 為止的，因為 $.5 \times 180^\circ = 90^\circ$ ， 90° 的餘弦等於零。若角度加

大那餘弦就等於負數了。所以遇有 U 或 $\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}$ 的值等於 .5 以

上的數例如 .76 的時候，我們即由一減去 .76 得 .24 再從表上查出相

當之 r ，是為負數。所以這係數與其他相關係數一樣也是從負一經零而至正一的。

用西巴氏的方法所求得的結果與用皮爾生氏的方法之所得相差不遠，然而在計算上卻簡便多了，所以許多統計家對於計算相關若不一定要十分精確，就應用了西巴氏的公式。不過這係數的機誤比較的大，除非這係數在 .5 以上而總次數又多，我們不能因為公式的簡便而失了數目上的精確。這機誤的公式為

$$P. E. = \sin \left[.1686\pi(1-r^2) \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \right] \quad (76)$$

在我們的例子裏

$$P. E. = \sin \left[.1686(180^\circ)(1-.69^2) \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \right]$$

$$=.23$$

所以 $r = .69 \pm .23$

在這個例子裏，本數剛夠他的機誤三倍。倘 r 的數在 .5 以下而 N 的數又很小的時候，這公式就不大合用了。

91 接觸係數

接觸係數是一種質的相關係數。這名稱在英文爲 the coefficient of contingency。在中文有意譯爲相關係數者，此譯名實與從前的相關係數混淆而不能分。茲爲祛除此弊起見，特直譯爲接觸係數。此係數多半用在無秩序的品質相關的時候。例如計算父子性情之相關，在沉靜，抑鬱，溫和，激烈諸性情中本無所謂秩序。換句話講，這幾種性情在 x 與 y 兩行中可以任意放置而不礙相關之計算。這係數在計算上實根據機率原則。茲舉例於下以便說明。

表九十八 接觸係數的計算

等第	國文	英文	算學	史地	理化	f_y
甲	1	1	2	2	—	6
乙	2	3	2	4	2	13
丙	4	2	4	2	2	14
丁	—	2	2	1	2	7
f_x	7	8	10	9	6	40

在這個例子裏各直行的材料是國文，英文，算學，史地，理化五科。

這五科無所謂先後秩序，當然可以任意排列，惟橫行裏的甲，乙，丙，丁因為等第的關係比較上有秩序。在教育工作上這樣的材料最為普通，所以我們用他來作例子。我們現在以 f_{xy} 代每格所有之次數如粗線格中之 4，以 f_x 代橫行中一種品質的次數，如在算學行其橫行次數為 10，以 f_y 代直行中一種品質的次數，如丙行中其直行次數為 14。若有一數落於某橫行，或某直行，他必有落於那行的機率。機率之大小視某橫行或某直行的次數與其總次數之比例大小而定。假使有一數落於粗線格內，在 f_x 方面其機率為 f_x/N （例如， $10/40$ ），在 f_y 方面其機率為 f_y/N （例如， $14/40$ ）。這兩種事實若是獨立的，則他們倆的聯合發見的機率應為 $\frac{f_x f_y}{N^2}$ （例如， $\frac{14 \times 10}{40 \times 40} = \frac{7}{80}$ ）。所以在 N 數之中這一數的機率為 $N \left(\frac{f_x f_y}{N^2} \right)$ 或 $\frac{f_x f_y}{N}$ 。在我們的粗線格的例子裏他等於

$40 \left(\frac{7}{80} \right) = \frac{7}{2} = 3.5$ 。這粗線格裏的次數為 4。 $4 - 3.5 = .5$ 。用代數表示，

這兩數之相差為 $f_{xy} - \frac{f_x f_y}{N}$ 。這個數量普通上即代表 x, y 兩特性獨立上的距離，換句話講，這數量就是他們的接觸數量（a measure of contingency）。這就一個數而言。若以全部論之，這關係應為：

$$\phi^2 = \frac{X^2}{N} = \frac{1}{N} \sum \left[\frac{\left(f_x - \frac{f_x f_y}{N} \right)^2}{\frac{f_x f_y}{N}} \right] \quad (77)$$

在英文 ϕ 之音為 phi， X 之音為 chi 皆高等算學中的代數字。在這裏皮爾生教授引用之以為均方接觸函數（mean square contingency

function)。其實我們所需要的是一種從零到一的範圍裏的係數。他的公式爲：

$$C = \sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}} - \sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}} \quad (78)$$

這係數皮爾生叫做均方接觸係數 (the coefficient of mean square contingency)，在計算的時候，這公式尙不方便。我們知道

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum \left[\frac{\left(f_{xy} - \frac{f_x f_y}{N} \right)^2}{\frac{f_x f_y}{N}} \right] = \sum \left\{ \frac{f_{xy}^2}{\frac{f_x f_y}{N}} \right\} - 2 \sum f_{xy} + \frac{\sum f_x f_y}{N} \\ &= \sum \left\{ \frac{f_{xy}^2}{\frac{f_x f_y}{N}} \right\} - 2N + \frac{N^2}{N} = S' - N \end{aligned}$$

在這裏 S' 代表右邊第一項的乘方和。現在代入 S' 與 N 則

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}} = \sqrt{\frac{S'-N}{N+S'-N}} = \sqrt{\frac{S'-N}{S'}} \quad (79)$$

這公式是余爾氏建議的。若以 S 代 $\left\{ \frac{f_{xy}^2}{f_x f_y} \right\}$ ，則 $S' = NS$

而

$$C = \sqrt{\frac{NS-N}{NS}} = \sqrt{\frac{S-1}{S}} \quad (80)$$

這公式是賀麟閣 (Holzinger) 介紹的。在計算上我們覺得後者比較前者爲方便。茲根據表九十八的材料應用這個公式。計算的第一步在求每接觸表上每一格的 $\frac{f_{xy}^2}{f_x f_y}$ 。若照次序排列起來，應有下列的各分數：

$$\frac{1}{7 \times 6} \quad \frac{1}{8 \times 6} \quad \frac{4}{10 \times 6} \quad \frac{4}{9 \times 6} \quad \text{---}$$

$\frac{4}{7 \times 13}$	$\frac{9}{8 \times 13}$	$\frac{4}{10 \times 13}$	$\frac{16}{9 \times 13}$	$\frac{4}{6 \times 13}$
$\frac{16}{7 \times 14}$	$\frac{4}{8 \times 14}$	$\frac{16}{10 \times 14}$	$\frac{4}{9 \times 14}$	$\frac{4}{6 \times 14}$
—	$\frac{4}{8 \times 7}$	$\frac{4}{10 \times 7}$	$\frac{1}{9 \times 7}$	$\frac{4}{6 \times 7}$

將他們計算出來得下列各小數：

.0238	.0208	.0667	.0741	—
.0440	.0865	.0308	.1367	.0513
.1633	.0357	.1143	.0317	.0476
—	.0714	.0571	.0159	.0952

把這些小數總加起來，得 1.1669 這是 $\Sigma \left\{ \frac{f_{xy}^2}{f_x f_y} \right\}$ 的數，我們也用 S 代表他。所以

$$C = \sqrt{\frac{S-1}{S}} = \sqrt{\frac{.1669}{1.1669}} = .38$$

$$\log .1669 = \overline{1.22246}$$

$$\log 1.1669 = \frac{.06703}{1.15543} \quad \text{antilog} \frac{\overline{1.15543}}{2} = \text{antilog} \overline{1.57772} = .38$$

據余爾氏講，接觸係數的大小與那 x, y 兩質的數目的多少或行數有關。在我們的例子裏橫行為國，英，算等五科或 x=5，直行為甲，乙，丙，丁四級或 y=4。假使 x 與 y 各等於 t 則 C 在 $\sqrt{\frac{t-1}{t}}$ 的結果上為最大的數。若 x, y 兩質的數目少，或 t 的數目小，則 C

不能超過一定的數。余爾氏爲此列表如下。

設 $t=2$	C 不能超過	0.707
設 $t=3$	C 不能超過	.816
設 $t=4$	C 不能超過	.866
設 $t=5$	C 不能超過	.894
設 $t=6$	C 不能超過	.913
設 $t=7$	C 不能超過	.926
設 $t=8$	C 不能超過	.935
設 $t=9$	C 不能超過	.943
設 $t=10$	C 不能超過	.949

所謂 C 不能超過一定的數，就是相關若爲完全的，其接觸係數亦不過等於那數。例如上面所說的父子性情的相關，假使沉靜，抑鬱，溫和，激烈四者，父有此子亦有此，則次數之分配將形成一直線如附表。

子 之 性 情	父 之 性 情				f_y
	沉靜	抑鬱	溫和	激烈	
沉靜	3	—	—	—	3
抑鬱	—	4	—	—	4
溫和	—	—	4	—	4
激烈	—	—	—	3	3
f_x	3	4	4	3	14

表。其結果則 $\frac{f_{xy}^2}{f_x f_y}$ 各等於一。

若橫直各有四行，則 S 或 t

等於四。 $C = \sqrt{\frac{t-1}{t}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}}$

$= .866$ 所以 C 不能超過此數。

從公式上看，橫直行無論如何

加多，完全的接觸係數雖近於

一而不能到達一。因爲這個限度，橫直行即不能太少。普通 2-2 表或 3-3 表用這公式頗不妥當。最好從 5-5 表起。但是橫直行亦不

能故意加多，加多之後不但不易計算，而 x 或 y 的特性分得太詳，使那無足重輕的也加入，反足以影響那係數了。

92 質量相關

相關表上常有一個材料為數量的，而另一種材料則有質而無量，前面已經講過。遇有這種情形，我們可假定質的材料的分配為一常態曲線，由這個假定而化質為量，再把普通公式 (the product-moment formula) 變通一下而求其係數。茲用下列材料，計算此種相關並說明之。

表九十九 質量相關的計算

測驗成績	教 師 評 判				總次數
	D	C	B	A	
20					
30	1	1	—	—	2
40	2	3	2	—	7
50	3	5	4	3	15
60	3	4	6	5	18
70	1	3	4	7	15
80	1	2	2	4	9
90	—	1	2	3	6
總 次 數	11	19	20	22	72
百 分 數	15.3	26.4	27.8	30.5	

在這個例子裏 y 的數是量的，而 x 的數則為質的。這 x 的數雖

是質的，然他們有一定的秩序如 A, B, C, D 等是。就總次數而言 A, B, C, D 各佔一個百分數，合為一百分。若用常態曲線，此四個百分數在分配圖上各佔相當之面積。就此面積而化為 σ 數是為量的結果，此種結果在第十五章裏已經用過，學者諒能回憶。在這裏我們所用的公式為

$$r = \frac{\sum fy \left(\frac{\bar{x}_y}{\sigma_x} \right) i_y}{N \sigma_y}$$

這公式是從 $r = \frac{\sum fxy - \frac{(\sum fx)(\sum fy)}{N}}{N \sigma_x \sigma_y}$ 變化出來的。假使兩個標準差的

數量在分子上用原來的數目作單位，則此公式亦可寫為

$$r = \frac{\left[\sum fxy - \frac{(\sum fx)(\sum fy)}{N} \right] i_x i_y}{N \sigma_x \sigma_y}$$

這 i_x, i_y 是 x, y 的組距，若 \bar{Y}_x 代表直行的均數， M_y 代表全表的均數，

$$\text{則 } \bar{Y}_x - M_y = \left[\frac{\sum' fy}{f_x} - \frac{\sum fy}{N} \right] i_y$$

現在以 $\sum fx(i_x)$ 乘此方程式之兩邊，則

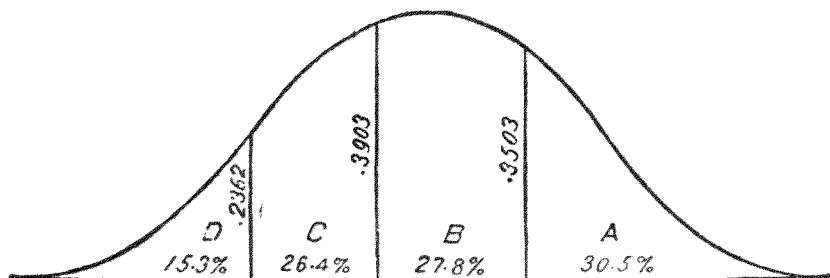
$$\sum fx(\bar{Y}_x - M_y) i_x = \left[\sum fxy - \frac{(\sum fx)(\sum fy)}{N} \right] i_x i_y$$

$$\text{所以 } r = \frac{\left[\sum fxy - \frac{(\sum fx)(\sum fy)}{N} \right] i_x i_y}{N \sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum fx(\bar{Y}_x - M_y) i_x}{N \sigma_x \sigma_y} \quad (81)$$

$$\text{同理 } r = \frac{\sum fy(\bar{X}_y - M_x) i_y}{N \sigma_x \sigma_y} \quad (82)$$

在我們的例子裏，橫行的數屬於質的，所以我們就用第二個公式。我們知道在常態曲線上 $M_x = 0$ ，所以這公式變為

$$r = \frac{\sum f y \left(\frac{\bar{x}_y}{\sigma_x} \right) i_y}{N \sigma_y} \quad (88)$$



圖八十一 常態面積在相關係數計算上的應用

在應用這公式以前，我們應把橫行的質化為量，求出 $\frac{\bar{x}_y}{\sigma_x}$ 來。在求出此數之先，我們應當把每兩部分面積之間的縱線的數查出。在圖八十一之上，D 與 C 之間的為 .2362，C 與 B 之間的為 .3903，B 與 A 之間的為 .3503。在附錄的檢查表上常態曲線的最高縱線（或 y_0 ）為一，其兩旁之縱線則均小於一而成一定之比例。其實從公式上計算這最高縱線為 .3989，故用檢查表時所有縱線數（此縱線可用 y 或 z 代表之）均應以 .3989 乘之。（若不在此時而在最後一次乘之亦可）

求各部分面積平均的時候，我們應用 $\frac{\bar{x}_a}{\sigma_x} = \frac{z_1 - z_2}{a}$ 一公式。用這公式比用從前的方法為精確。在此 a 為一部分面積， z_1 與 z_2 為其兩端之縱線，茲試根據前圖材料計算於下：

$$D. \quad \frac{\bar{x}_D}{\sigma_x} = \frac{0 - .2362}{.153} = -1.544\sigma$$

$$C. \quad \frac{\bar{x}_C}{\sigma_x} = \frac{.2362 - .3903}{.264} = -.584\sigma$$

$$B. \quad \frac{\bar{x}_B}{\sigma_x} = \frac{.3903 - .3503}{.278} = +.144\sigma$$

$$A. \quad \frac{\bar{x}_A}{\sigma_x} = \frac{.3503 - 0}{.305} = +1.149\sigma$$

現在表九十九上橫行的A, B, C, D各質已經化爲量了。再就此量而求 $\frac{\bar{x}_y}{\sigma_x}$ 如下:

$$\frac{\bar{x}_{25}}{\sigma_x} = \frac{1(-1.544) + 1(-.584)}{2} = -1.064$$

$$\frac{\bar{x}_{35}}{\sigma_x} = \frac{2(-1.544) + 3(-.584) + 2(.144)}{7} = -.650$$

$$\frac{\bar{x}_{45}}{\sigma_x} = \frac{3(-1.544) + 5(-.584) + 4(.144) + 3(1.149)}{15} = -.236$$

$$\frac{\bar{x}_{55}}{\sigma_x} = \frac{3(-1.544) + 4(-.584) + 6(.144) + 5(1.149)}{18} = -.020$$

$$\frac{\bar{x}_{65}}{\sigma_x} = \frac{1(-1.544) + 3(-.584) + 4(.144) + 7(1.149)}{15} = +.355$$

$$\frac{\bar{x}_{75}}{\sigma_x} = \frac{1(-1.544) + 2(-.584) + 2(.144) + 4(1.149)}{9} = +.241$$

$$\frac{\bar{x}_{85}}{\sigma_x} = \frac{1(-.584) + 2(.144) + 3(1.149)}{6} = +.525$$

把這結果納入下表同時求y的標準差。

表一百 質量相關的最後計算

f	y	fy	$\frac{\bar{x}_y}{\sigma_x}$	$f_y \frac{\bar{x}_y}{\sigma_x}$	fy ²
2	-3	-6	-1.064	6.384	18
7	-2	-14	-.650	9.100	28
15	-1	-15	-.236	3.540	15
18	0		-.020	0.000	
15	1	15	+.355	5.325	15
9	2	18	+.241	4.338	36
6	3	18	+.525	9.450	54
72		+16		38.137	166

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{166}{72} - \left(\frac{16}{72}\right)^2} = \sqrt{2.306 - .049} = \sqrt{2.257} = 1.5$$

$$N\sigma_y = 72(1.5) = 108.00 \text{ 組距單位}$$

$$= 1,080.00 \text{ 原來單位}$$

$$r = \frac{\sum fy \left(\frac{\bar{x}_y}{\sigma_x}\right)}{N\sigma_y} = \frac{38.137 \times 10}{1,080.00} = .35$$

練習題

- 試根據下列材料求 (a) 關聯係數, (b) 歸結係數, (c) 餘弦相關, (d) 異號相關。

1.		2.
85	20	a. 國英兩文全及格者27人
20	15	b. 國文及格英文不及格者4人
		c. 國文不及格英文及格者9人
		d. 國英兩文全不及格者3人

2. 根據下列材料求接觸係數

等第	國文	英文	算學	史地	f
甲	2	3	4	4	13
乙	3	4	2	5	14
丙	2	2	2	2	8
丁	2	—	—	1	3
f	9	9	8	12	38

3. 根據下列材料，應用 $r = \frac{\sum f y \left(\frac{\bar{x}_y}{\sigma_x} \right) i_y}{N \sigma_y}$ 求 r。

	D	C	B	A	f
20					
30	1	1	—	—	2
40	2	1	1	—	4
50	3	2	2	2	9
60	2	3	4	3	12
70	1	2	2	4	9
80	—	2	2	3	7
90	—	1	1	1	3
90	9	12	12	13	46

第二十二章

多數相關

93 部分相關

部分相關在英文爲 partial correlation。普通上在求兩種材料的相關的時候，其他的因子足以影響這些材料的我們並未計及。例如我們所求的國文與英文的相關係數爲 .60。在這個當兒，我們並不知道被測驗者的智慧如何，但是我們相信學習國文或英文都需要相當的智慧的。換句話講，這國英兩文的相關係數之所以能到 .60 是因爲有智慧一因子在內。假使我們能從被測驗者之中選出智慧相等者，看這些人的英文與國文的相關如何。由此所求的相關係數當不含有智慧一因子在內。事實上要選擇智慧相等的，而求其國英兩文的相關係數當然很難。在這個當兒，我們可用一種公式，這就是部分相關的公式。這『部分』“partial”的意義我們在此可以明瞭，即從智慧不等的全體中選出智慧相等的一部分人，就他們的兩種成績而求相關是爲部分相關。假使以 1 代表國文，以 2 代表英文，3 代表智慧測驗的分數，則 r_{12} 爲國文與英文之相關係數， r_{13} 爲國文與智慧之相關係數，而 r_{23} 爲英文與智慧之相關係數。現在要除去智慧的因子而求國英兩文的部分相關，其公式爲：

$$r_{12\cdot3} = \frac{r_{12} - (r_{13} \times r_{23})}{\sqrt{(1-r_{13}^2)(1-r_{23}^2)}}$$

將已有的材料 $r_{12} = .60$, $r_{13} = .70$, $r_{23} = .80$ 代入公式, 則

$$\begin{aligned} r_{12\cdot3} &= \frac{.60 - (.70 \times .80)}{\sqrt{(1-.70^2)(1-.80^2)}} \\ &= \frac{.60 - .56}{\sqrt{.51 \times .36}} \\ &= \frac{.04}{.43} = .09 \end{aligned}$$

從這結果上看來, 我們覺得智慧一因子在國文或英文的學習上非常重要。智慧與國文之相關係數為 .70, 智慧與英文之相關係數為 .80, 國英兩文之相關係數, 在智慧不除外的時候為 .60; 若把智慧除外, 或在多數材料中祇將智慧相等的那一部分材料選出, 在這個當兒, 國英兩文的相關係數竟降至 .09, 真是意想不到。所以國英兩文相關之高實受了智慧的影響; 若不把智慧一因子放在其內, 則國英兩文的相關係數可算微乎其微了。

在必要的時候, 我們可將英文除外而求國, 智相關, 或將國文除外而求英, 智相關。他們的公式是:

$$r_{13\cdot2} = \frac{r_{13} - (r_{12} \times r_{23})}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{23}^2)}}$$

$$r_{23\cdot1} = \frac{r_{23} - (r_{12} \times r_{13})}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{13}^2)}}$$

從 $r_{12\cdot3}$, $r_{13\cdot2}$, 和 $r_{23\cdot1}$ 三代表字看來, 我們要注意那點之所在。

在點之左者兩數爲求部分相關者，而右者一數則爲除外者。在右者往往不止一數例如 $r_{12\cdot34}$, $r_{12\cdot43}$, $r_{13\cdot24}$, $r_{13\cdot42}$ 等是。在這裏除國、英、智三種成績外，假定另加一種常識成績。我們要從智慧相等的人中選出其常識成績相等的，或從常識成績相等的人中選出智慧相等的，然後就此部分之成績而求其國英兩文之相關係數。三種成績中一種除外的爲第一級之部分相關 (partial correlations of first-order)，四種成績中兩種除外的爲第二級之部分相關。餘類推。(兩種成績相關而無除外者當爲零級 zero-order) 茲將第二級的公式舉例於下：

$$r_{12\cdot34} = \frac{r_{12\cdot3} - (r_{14\cdot3} \times r_{24\cdot3})}{\sqrt{(1-r_{14\cdot3}^2)(1-r_{24\cdot3}^2)}}$$

$$r_{12\cdot43} = \frac{r_{12\cdot4} - (r_{13\cdot4} \times r_{23\cdot4})}{\sqrt{(1-r_{13\cdot4}^2)(1-r_{23\cdot4}^2)}}$$

$$r_{13\cdot42} = \frac{r_{13\cdot2} - (r_{14\cdot2} \times r_{34\cdot2})}{\sqrt{(1-r_{14\cdot2}^2)(1-r_{34\cdot2}^2)}}$$

$$r_{13\cdot42} = \frac{r_{13\cdot4} - (r_{12\cdot4} \times r_{32\cdot4})}{\sqrt{(1-r_{12\cdot4}^2)(1-r_{32\cdot4}^2)}}$$

部分相關的普通公式爲：

$$r_{12\cdot34\cdots n} = \frac{r_{12\cdot34\cdots(n-1)} - (r_{1n\cdot34\cdots(n-1)} \times r_{2n\cdot34\cdots(n-1)})}{\sqrt{[1-r_{1n\cdot34\cdots(n-1)}^2][1-r_{2n\cdot34\cdots(n-1)}^2]}} \quad (84)$$

我們知道第一級部分相關之計算還算便當，因爲我們祇須將幾個零級的相關係數代入公式即可求出。在求第二級部分相關的時候，我們有了第一級的結果始能代入。假使第一級部分相關係數並非所需，

我們也要求他們出來，始能得着第二級的結果。若求第三第四等級的部分相關，那更麻煩了。不過在研究工作上我們多半應用第一級的，間或應用第二級的，絕少應用第三級或以上的。

在多數情形之下，第一級部分相關係數總小於零級的相關係數，而高一級的係數也比低一級的係數小。我們有時發見例外，大約在低級係數中有負數的時候。例如 $r_{12} = .20$, $r_{13} = .40$, $r_{23} = -.30$ ，用這些數代入公式而計算之，則 $r_{12.3} = .366$ ，比低級的係數中 r_{12} , r_{23} 大矣。部分相關係數的範圍如零級係數一樣也是由負一經零而至正一的，但是有的時候，這係數居然大於正一。例如 $r_{12} = .40$, $r_{13} = .60$, $r_{23} = -.80$ ，則 $r_{12.3} = 1.83$ 。第一級的結果如此，必係低級中的係數有錯誤之處，或者 .40, .60, -.80 三數並非在一組中，而被統計的人誤置者。

計算部分相關的時候，材料中若有四個零級係數而所求之係數為一二兩級，我們應當用對數表比較便利，同時我們應當有較為詳細而清楚的表格，把他們排列起來，此種辦法於計算上既較有秩序，而為將來的檢查也較方便。茲用下列材料求一二兩級的係數並分表列之。

表一百零一 為求部分相關的各種材料

材 料	公 式	相關係數(零級)		$\log(1-r^2)$
1. 代表地理成績	$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{(1-r_{13}^2)^{\frac{1}{2}}(1-r_{23}^2)^{\frac{1}{2}}}$	12	0.68	$\overline{1.73046}$
2. 代表歷史成績		13	0.34	$\overline{1.94665}$
3. 代表國文成績	$r_{12.34} = \frac{r_{13.2} - r_{14.3}r_{24.3}}{(1-r_{13.2}^2)^{\frac{1}{2}}(1-r_{24.3}^2)^{\frac{1}{2}}}$	14	0.51	$\overline{1.86.17}$
4. 代表英文成績		23	0.49	$\overline{1.88076}$
		24	0.43	$\overline{1.91121}$
		34	0.43	$\overline{1.91121}$

表一百零二 表示第一級係數之計算

1	2	3	4	5	6	7	8	
相關係數 (零級)	$\log(1-r^2)$	分子積項 r_r	全部分子	全部分子的對數	全部分母的對數	係數的對數	相關係數 (第一級)	
12	.68	$\bar{1}.73046$.1666	.5134	$\bar{1}.71046$	$\bar{1}.91371$	$\bar{1}.79675$	12.3 .626
13	.34	$\bar{1}.94665$.3332	.0068	$\bar{3}.83251$	$\bar{1}.80561$	$\bar{2}.02600$	13.2 .011
23	.49	$\bar{1}.88076$.2312	.2588	$\bar{1}.41296$	$\bar{1}.83856$	$\bar{1}.57440$	23.1 .375
12	.68	$\bar{1}.73046$.2193	.4007	$\bar{1}.66342$	$\bar{1}.89019$	$\bar{1}.77323$	12.4 .593
14	.51	$\bar{1}.86917$.2924	.2176	$\bar{1}.33766$	$\bar{1}.82084$	$\bar{1}.51682$	14.2 .329
24	.43	$\bar{1}.91121$.3468	.0832	$\bar{2}.92012$	$\bar{1}.79982$	$\bar{1}.12050$	24.1 .152
13	.34	$\bar{1}.94665$.2113	.1207	$\bar{1}.08171$	$\bar{1}.89019$	$\bar{1}.19152$	13.4 .155
14	.51	$\bar{1}.86917$.1462	.3638	$\bar{1}.56086$	$\bar{1}.92893$	$\bar{1}.63193$	14.3 .428
34	.43	$\bar{1}.91121$.1734	.2566	$\bar{1}.40926$	$\bar{1}.90791$	$\bar{1}.50135$	34.1 .317
23	.49	$\bar{1}.88076$.1849	.3051	$\bar{1}.48444$	$\bar{1}.91121$	$\bar{1}.57323$	23.4 .374
24	.43	$\bar{1}.91121$.2107	.2193	$\bar{1}.34104$	$\bar{1}.89599$	$\bar{1}.44505$	24.3 .279
34	.43	$\bar{1}.91121$.2107	.2193	$\bar{1}.34104$	$\bar{1}.89599$	$\bar{1}.44505$	34.2 .279

在表一百零一裏所列各項為求一二兩級係數應用之材料。最後一行為 $(1-r^2)$ 之對數。所謂 r^2 者實為 r_{12}^2 , r_{13}^2 , r_{14}^2 , r_{23}^2 , r_{24}^2 , r_{34}^2 等。反正，每一橫行裏有相當的數目，為簡單的納入一行起見，故上題止標明為 $\log(1-r^2)$ 。在表一百零二裏我們將零級係數各用兩次，因為零級係數止有六個而第一級係數則有十二個。這十二個分為十二橫線，每三橫線為一組以便計算。例如第一線裏第一級係數為 r_{12-3} ，這數等於 $\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{(1-r_{13}^2)^{\frac{1}{2}}(1-r_{23}^2)^{\frac{1}{2}}}$ 。第一直行裏的 r_{12} 與第八直行裏的 r_{12-3} 同在第一橫線上，第二第三兩橫線為 r_{13} , r_{23} 。將這 r_{12} ,

表一百零三 表示第二級係數之計算

1	2	3	4	5	6	7	8		
相關係數 (第一級)	$\log(1-r^2)$	分子積 項 $r r$	全 分 子	全 分 子 的 對 數	全 分 母 的 對 數	係數的對數	相 關 係 數 (第 二 級)		
12.4	.593	$\bar{1}.81181$.058	.535	$\bar{1}.72835$	$\bar{1}.96400$	$\bar{1}.76635$	12.43	.584
13.4	.155	$\bar{1}.98944$.222	-.067	$-(\bar{2}.82007)$	$\bar{1}.87319$	$-(\bar{2}.95288)$	13.12	-.090
23.4	.374	$\bar{1}.93456$.042	.282	$\bar{1}.45025$	$\bar{1}.90033$	$\bar{1}.54962$	23.41	.355
12.3	.626	$\bar{1}.78399$.119	.507	$\bar{1}.70501$	$\bar{1}.93847$	$\bar{1}.76654$	12.34	.584
14.3	.428	$\bar{1}.91212$.175	.253	$\bar{1}.40312$	$\bar{1}.87440$	$\bar{1}.52872$	14.32	.338
24.3	.279	$\bar{1}.96481$.268	.011	$\bar{2}.04139$	$\bar{1}.84803$	$\bar{2}.19333$	24.31	.046
13.2	.011	$\bar{1}.99065$.042	-.081	$-(\bar{2}.90819)$	$\bar{1}.95753$	$-(\bar{2}.95036)$	13.24	-.089
14.2	.329	$\bar{1}.95025$.003	.326	$\bar{1}.51322$	$\bar{1}.98238$	$\bar{1}.53034$	14.23	.340
31.2	.279	$\bar{1}.96481$.004	.275	$\bar{1}.43433$	$\bar{1}.97510$	$\bar{1}.46423$	31.21	.291
23.1	.375	$\bar{1}.93418$.042	.333	$\bar{1}.52244$	$\bar{1}.97319$	$\bar{1}.54925$	23.14	.354
24.1	.132	$\bar{1}.99236$.119	.013	$\bar{2}.11394$	$\bar{1}.94110$	$\bar{2}.16984$	24.13	.015
34.1	.317	$\bar{1}.95401$.050	.267	$\bar{1}.42651$	$\bar{1}.93327$	$\bar{1}.46324$	34.12	.291

r_{13} , r_{23} 三個零級係數代入公式，則 $r_{12\cdot3}$ 即可求得。在第二橫線上零級係數為 r_{13} ，一級係數為 $r_{13\cdot2}$ ，在第三橫線上零級係數為 r_{23} ，一級係數為 $r_{23\cdot1}$ 。要求 $r_{13\cdot2}$ ，和 $r_{23\cdot1}$ 我們都需要 r_{12} ， r_{13} ， r_{23} 三個係數，所以我們說每三橫線為一組。在第一組裏將三個一級係數求出之後，再就第二組的三個零級係數而求那所需的三個一級係數，餘類推。在第三直行裏所謂分子積項即 $r r$ 之謂。在第一橫線上—級係數既為 $r_{12\cdot3}$ 則右邊的分項積項應為 $r_{13} r_{23}$ ，這兩數恰在第二第三兩橫線上。第二橫線上之一級係數為 $r_{13\cdot2}$ ，那公式右邊的分項積項為

$r_{12} r_{23}$ ，這兩數爲第一第三兩橫線上之零級係數。又第三橫線上之一級係數爲 r_{23-1} ，那公式的分子積項爲 $r_{12} r_{13}$ ，這兩數爲第一第二兩橫線上之零級係數。所以在這十二橫線上每三線爲一組。此一組算好，再算另一組，如是一直算下去非常方便不至錯亂。在直行的第四行裏爲全部分子，例如 $\frac{r_{12} - r_{13} r_{23}}{(1 - r_{13}^2)^{\frac{1}{2}} (1 - r_{23}^2)^{\frac{1}{2}}}$ 爲一分數而 $r_{12} - r_{13} r_{23}$ 則爲其分子或全部分子。在第一橫線上 $r_{12} = .68$ ， $r_{13} r_{23} = .1666$ ，則全部分子爲 $.68 - .1666 = .5134$ 。在第四行裏以下各數可以類推。第五行是全分子的對數。第六行爲全部分母的對數，那分母在上面的例子中爲 $(1 - r_{13}^2)^{\frac{1}{2}} (1 - r_{23}^2)^{\frac{1}{2}}$ 這是第二直行裏的第二第三兩數，在對數上被加之後，而以二除之者。從全分子的對數減去全部分母的對數得係數的對數，由此求反對數 (antilog)，則得第一級之相關係數。一級係數既全求出，則可進而求二級係數，所求的方法與前相同，惟所得的結果則另列一表中，庶計算之步驟可以一目了然；看得清楚。

94 多數相關

多數相關在英文爲 multiple correlation。這是一種成績與數種成績的相關，例如地理與歷史，國文的相關，這是一種成績與兩種成績的相關，又如地理與歷史，國文，英文的相關，這是一種成績與三種成績的相關。假使以 1 代表地理，2 代表歷史，3 代表國文，4 代表英文，則多數相關係數的代表字在前者爲 R_{1-23} ，在後者爲 R_{1-234} ， R 右腳下的 23 或 234 是表示這幾種成績合併起來而求他們與 1 之相關者。在三種成績裏那相關的公式爲：

$$R_{1\cdot 23} = \sqrt{1 - (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13\cdot 2}^2)}$$

在四種成績裏那公式爲

$$R_{1\cdot 234} = \sqrt{1 - (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13\cdot 2}^2)(1 - r_{14\cdot 23}^2)}$$

他們的普通公式爲

$$R_{1\cdot 234 \cdots n} = \sqrt{1 - (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13\cdot 2}^2)(1 - r_{14\cdot 23}^2) \cdots (1 - r_{1n\cdot 23 \cdots (n-1)}^2)} \quad (85)$$

在這些多數相關的公式裏都含有部分的相關係數，至少爲第一級的，所以要求多數相關應先求出部分相關。不過在一種成績與兩種成績相關表，止有一 $r_{13\cdot 2}$ ，我們不妨把這個係數化爲零級係數，則在計算那多數相關之前，可以免掉許多麻煩。我們知道

$$r_{13\cdot 2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} \quad \text{。 在這公式右邊的各项中純是零級係數，}$$

將這代入 $R_{1\cdot 23} = \sqrt{1 - (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13\cdot 2}^2)}$ 一公式裏則

$$R_{1\cdot 23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

在其餘的兩個多數相關裏，那公式爲

$$R_{2\cdot 13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2}}$$

$$R_{3\cdot 12} = \sqrt{\frac{r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{12}^2}}$$

用這些公式以求結果當然比較便利，但是這公式的應用止限於三個變數的；若變數加多希望仍用零級係數，在公式上也太麻煩，反不如求出那些部分相關係數代入公式而求結果的爲易。

賀麟閣 (Karl J. Holzinger) 編有一冊爲習教育和心理的學生用的統計表 (Statistical Tables for Stutents in Education and Psychology)*。其中第六表是 $(1-r^2)$ 的對數。這對數在求多數相關的時候，非常方便。假使我們把多數相關的公式變通一下，那對數表尤其有用。例如 $R_{1.34} = \sqrt{1 - (1-r_{13}^2)(1-r_{14.3}^2)}$ 一公式，可以寫爲：

$$R_{1.34}^2 = 1 - (1-r_{13}^2)(1-r_{14.3}^2)$$

$$1 - R_{1.34}^2 = (1-r_{13}^2)(1-r_{14.3}^2)$$

根據前面的材料 $r_{13} = .34$, $r_{14.3} = .428$ 則

$$\log[1 - (.34)^2] = \overline{1.94665}$$

$$\log[1 - (.428)^2] = \overline{1.91212}$$

$$\log[1 - R_{1.34}^2] = \overline{1.85877}$$

$$\therefore R_{1.34} = .527$$

在這裏我們祇須找出方程式右邊的兩個 $(1-r^2)$ 的對數，把他們加上，再反找過來，即獲得那多數相關的係數。

在四個變量中那公式爲 $1 - R_{1.342}^2 = (1 - r_{13}^2)(1 - r_{14.3}^2)(1 - r_{12.34}^2)$ 。要求 $R_{1.342}$ ，我們也先找那右邊的三個 $(1-r^2)$ 的對數，所以

$$\log[1 - (.34)^2] = \overline{1.94665}$$

$$\log[1 - (.428)^2] = \overline{1.91212}$$

*附譯於本書後面

$$\log[1 - (.584)^2] = \overline{1.81885}$$

$$\log[1 - R_{1.342}^2] = \overline{1.67762}$$

$$\therefore R_{1.342} = .724$$

在多數相關裏我們要注意的是那係數不會比在公式裏的零級係數小的。爲其如此，許多研究家在作測驗的時候，嘗用這個方法把各種測驗合併起來，與一定的標準如學校成績或教師評定之結果求相關，希望那係數越高越好。不過有的時候，因爲零級係數太高，此後所加也很有限。例如相關係數在年齡（A）與體高（H）之間爲 .80，在體高與體重（W）之間爲 .75，又在年齡與體重之間爲 .70。由此而求多數相關，在結果中 $R_{A \cdot HW}$ 不過等於 .81。所加實在很少。但是求多數相關是很麻煩的，費了許多工夫，求出這點差別，真是所得不償所失了。

95 部分的迴歸方程

在第十八章裏關於迴歸方程我們已經講得很多，但是那是屬於二數相關的，所以那方程式爲 $\bar{x} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y + k$ 。在部分相關裏，變數既不止兩個，我們應選擇適當的代表字庶較明顯。零級相關係數我們向以 r_{12} , r_{13} , r_{23} 等字代表，在變數方面我們可以 x_1 , x_2 , x_3 等字代表而 σ_x , σ_y 等亦可改寫爲 σ_1 , σ_2 , σ_3 等。茲再將上面的公式改寫如下：

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 &= r_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} X_2 + k \\ &= b_{12} X_2 + k\end{aligned}$$

在變數加多的時候如 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, 那迴歸公式從 $(n-1)$ 變數中而測 X_1 為

$$\bar{X}_1 = b_{12 \cdot 34 \dots n} X_2 + b_{13 \cdot 24 \dots n} X_3 + \dots + b_{1n \cdot 23 \dots (n-1)} X_n + k \quad (86)$$

這是 x 的直線性函數。 $b_{12 \cdot 34 \dots n}$, $b_{13 \cdot 24 \dots n}$, $b_{1n \cdot 23 \dots (n-1)}$ 和 k 都是常數 (constant), 選擇的時候, 根據那差數乘方總和要是最小的原理的。

我們把這些普通公式寫在下面:

$$b_{12 \cdot 34 \dots n} = r_{12 \cdot 34 \dots n} \frac{\sigma_{1 \cdot 34 \dots n}}{\sigma_{2 \cdot 34 \dots n}} \quad (87)$$

這公式裏面的值為部分相關的迴歸係數。在幾個變數之中其他變數若照常不動 (kept constant), 止那與迴歸係數相連的一個變數有所變動, 這樣, 則變動每至一單位必能使倚變數受平均之變動。在這裏標準差的公式為

$$\sigma_{1 \cdot 23 \dots n} = \sigma_1 \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13 \cdot 2}^2) \dots (1 - r_{1n \cdot 23 \dots (n-1)}^2)} \quad (88)$$

那測算的機誤 (probable error of estimate) 當為

$$P. E._{\text{est}} = .6745 \sigma_{1 \cdot 23 \dots n} \quad (89)$$

為計算上的簡單起見, 我們用三個變數作例題並先寫其公式如下:

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 &= b_{12 \cdot 3} X_2 + b_{13 \cdot 2} X_3 + k_1 \\ &= r_{12 \cdot 3} \frac{\sigma_{1 \cdot 3}}{\sigma_{2 \cdot 3}} X_2 + r_{13 \cdot 2} \frac{\sigma_{1 \cdot 2}}{\sigma_{3 \cdot 2}} X_3 + k_1\end{aligned}$$

$$= r_{12 \cdot 3} \frac{\sigma_1 \sqrt{1-r_{13}^2}}{\sigma_2 \sqrt{1-r_{23}^2}} X_2 + r_{13 \cdot 2} \frac{\sigma_1 \sqrt{1-r_{12}^2}}{\sigma_3 \sqrt{1-r_{23}^2}} X_3 + k_1$$

把 $r_{12 \cdot 3}$ 和 $r_{13 \cdot 2}$ 的值變爲零級係數，則此公式成爲

$$\bar{X}_1 = \frac{\sigma_1 (r_{12} - r_{13} r_{23})}{\sigma_2 (1-r_{23}^2)} X_2 + \frac{\sigma_1 (r_{13} - r_{12} r_{23})}{\sigma_3 (1-r_{23}^2)} X_3 + k_1$$

同理，

$$\bar{X}_2 = \frac{\sigma_2 (r_{12} - r_{13} r_{23})}{\sigma_1 (1-r_{13}^2)} X_1 + \frac{\sigma_2 (r_{23} - r_{12} r_{13})}{\sigma_3 (1-r_{13}^2)} X_3 + k_2$$

$$\bar{X}_3 = \frac{\sigma_3 (r_{13} - r_{12} r_{23})}{\sigma_1 (1-r_{12}^2)} X_1 + \frac{\sigma_3 (r_{23} - r_{12} r_{13})}{\sigma_2 (1-r_{12}^2)} X_2 + k_3$$

這常數 k 可根據下列普通公式求出：

$$k = M_1 - b_{12 \cdot 34} \dots M_2 - b_{13 \cdot 24} \dots M_3 - \dots - b_{1n \cdot 23} \dots (n-1) M_n \quad (90)$$

在三個變數之中

$$k_1 = M_1 - b_{12 \cdot 3} M_2 - b_{13 \cdot 2} M_3$$

同理， $k_2 = M_2 - b_{21 \cdot 3} M_1 - b_{23 \cdot 1} M_3$

$$k_3 = M_3 - b_{31 \cdot 2} M_1 - b_{32 \cdot 1} M_2$$

在測算的時候，若試驗其可靠性可求出其機誤或標準差 (standard error of estimate)。前者的公式上面已經寫出是根據後者的。在三個變數之中標準差的公式如下：

$$\sigma_{1 \cdot 23} = \sigma_1 \sqrt{1-r_{12}^2} \sqrt{1-r_{13 \cdot 2}^2} = \sigma_1 \sqrt{1-r_{13}^2} \sqrt{1-r_{12 \cdot 3}^2}$$

$$\text{或 } \sigma_{1 \cdot 23} = \sigma_1 \sqrt{\frac{1-r_{12}^2-r_{13}^2-r_{23}^2+2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{23}^2}} = \frac{\sigma_1 \sqrt{S_{123}}}{\sqrt{1-r_{23}^2}}$$

$$\sigma_{2 \cdot 13} = \sigma_2 \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2}} = \frac{\sigma_2 \sqrt{S_{123}}}{\sqrt{1 - r_{13}^2}}$$

$$\sigma_{3 \cdot 12} = \sigma_3 \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{12}^2}} = \frac{\sigma_3 \sqrt{S_{123}}}{\sqrt{1 - r_{12}^2}}$$

這 S_{123} 代表分子之各項。在計算三個變數的問題的時候，若材料上止有零級係數，用上面的標準差公式比較方便。茲用下列材料演算一例題如下。

1代表默讀，2代表默字，3代表常識

$$M_1 = 59.36 \quad \sigma_1 = 6.45 (\text{原來單位}) \quad r_{12} = .43$$

$$M_2 = 53.70 \quad \sigma_2 = 8.58 (\text{原來單位}) \quad r_{13} = .46$$

$$M_3 = 59.23 \quad \sigma_3 = 7.20 (\text{原來單位}) \quad r_{23} = .35$$

$$\text{公式: } \bar{X}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{(r_{12} - r_{13}r_{23})}{1 - r_{23}^2} X_2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \frac{(r_{13} - r_{12}r_{23})}{1 - r_{23}^2} X_3 + k_1$$

$$k_1 = M_1 - b_{12 \cdot 3} M_2 - b_{13 \cdot 2} M_3$$

$$P. E._{\text{est}} = .6745 \sigma_{1 \cdot 23} = \frac{.6745 \sigma_1 \sqrt{S_{123}}}{\sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

表一百零四 部分的迴歸係數之計算

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
r	rr	r-rr	log(r-rr)	σ	log σ	log(1-r ²)	
12	.43	.1610	.2690	$\bar{1}.42975$	1 6.45	.80956	—
13	.46	.1505	.3095	$\bar{1}.49066$	2 8.58	.93349	—
23	.35	—	—	—	3 7.20	.85733	$\bar{1}.94325$

(8)	9	(10)	(11)	
log (全部分子)	log (全部分母)	log (係數)	第 級迴歸係數	
(4) (6)兩行	(6) (7)兩行	(8) (9)兩行		
.23931	.87671	$\bar{1}.36257$	$b_{12.3}$.2304
.30022	.80058	$\bar{1}.49964$	$b_{13.2}$.3160

$$\begin{aligned}
 k_1 &= M_1 - b_{12.3}M_2 - b_{13.2}M_3 \\
 &= 59.36 - .2304 \times 56.70 - .3160 \times 59.23 \\
 &= 59.36 - 13.06368 - 18.71668 = 27.58
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P. E._{est.} &= .6745\sigma_{1.23} \\
 &= 3.655
 \end{aligned}$$

所以這全公式爲：

$$\bar{x}_1 = .2304x_2 + .3160x_3 + 27.58 \pm 3.655$$

$$P. E. (est) = .6745\sigma_{1.23} = \frac{.6745 \times 6.45 \sqrt{S_{123}}}{\sqrt{1-r_{23}^2}} = \frac{.6745 \times 6.45 (.6195)^{\frac{1}{2}}}{(1-.35^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\log .6745 = \bar{1}.82898$$

$$\log 6.45 = 80956$$

$$\log (.6195)^{\frac{1}{2}} = \bar{1}.89602$$

$$.53456$$

$$\log (1-.35^2)^{\frac{1}{2}} = \bar{1}.97163$$

$$\text{antilog } .56293 = 3.655$$

在這個例子裏兩自變數 X_2 , X_3 代表默字與常識的兩種成績，倚變數 X_1 為默讀成績。我們要測算，當默字與常識各增或減十分的時候，那默讀的成績受有如何的平均影響，我們即將這數代替 X_2 與 X_3 而求得 X_1 的數目。若兩自變數各增減二十分的時候，我們照樣代入公式求得結果。這部分相關的迴歸方程之為用比較的少，在高級的尤其少；不過在教育問題上，爲了幾種因子造成一種結果，我們當然要引用他庶可獲得適當的結果。

多數相關中亦有迴歸，但在公式裏我們並不直接應用多數相關的係數來求他們的迴歸。前面的迴歸例子雖是爲部分相關的，而多數相關的迴歸實已包含在內，因爲在公式的右邊有兩個自變數，每一自變數有一項，各爲一部分迴歸；若統右邊的各项而計之，則爲多數迴歸，因爲這迴歸是各項積合而成的。

練習題

1. 根據下列材料求部分相關的係數。

相關係數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_{12}	.40	.50	.60	.75	.30	.40	.54	.83	.54	.41
r_{13}	.50	.50	.50	.50	.40	.40	.40	.58	.59	.13
r_{23}	.50	.50	.50	.50	.60	.60	.60	.23	.00	-.24
$r_{12 \cdot 3}$										

2. 根據上面的材料求多數相關的係數 ($R_{1 \cdot 23}$)。
3. 用賀麟閣的統計表求下列之多數相關的係數。

$$\text{a. } r_{13} = .48 \quad \text{b. } r_{12} = .23 \quad \text{c. } r_{13} = .85$$

$$r_{14 \cdot 3} = .40 \quad r_{13 \cdot 2} = .21 \quad r_{14 \cdot 3} = .76$$

$$R_{1 \cdot 34} = ? \quad R_{1 \cdot 23} = ? \quad r_{12 \cdot 34} = .70$$

$$R_{1 \cdot 342} = ?$$

4. 試根據默讀，默字，常識三種成績在 $\bar{X}_2 = \frac{\sigma_2(r_{12} - r_{13}r_{23})}{\sigma_1(1 - r_{13}^2)}X_1 + \frac{\sigma_2(r_{23} - r_{12}r_{13})}{\sigma_3(1 - r_{13}^2)}X_3 + k_2$ 的方程式裏求 x_2 。

公式表

頁數

第四章	$M = \frac{\sum X}{N}$	(1)	39
	$M = \frac{\sum fE}{N}$	(2)	39
	$M = Ma + \frac{\sum fE}{N}(i)$	(3)	41
第五章	$Md = L + \frac{\frac{N}{2} - S_1}{f}(i)$	(4)	50
	$Md = L - \frac{\frac{N}{2} - S_2}{f}(i)$	(5)	51
第六章	$M_o = M - 3(M - Md)$	(6)	72
第七章	$M_G = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_n}$	(7)	74
	$\log M_G = \frac{\sum \log X}{N}$	(8)	74
第八章	$M_H = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum \left(\frac{1}{X} \right)}$	(9)	83
第十章	$M.D. = \frac{\sum f(X - \bar{M})}{N}$	(10)	98
	$= \frac{\sum fd}{N}$	(11)	98

$$\text{M.D.} = \frac{\sum fd' + C(N_a - N_b)}{N} \quad (i) \quad (12) \quad 101$$

$$\text{M.D.} = \frac{\sum fd' + (N_a - N_b) + (.25 + C^2) Ni}{N} \quad \text{組距} \quad (13) \quad 105$$

第十一章 $\sigma = \sqrt{\frac{\sum a^2}{N}} \quad *$ (14) 130

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f d^2}{N}} \quad *$$
 (15) 130

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X'^2}{N} - M'^2} \quad *$$
 (16) 132

$$V = \frac{100\sigma}{M} \quad (17) \quad 140$$

$$\text{Skewness} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2md}{Q_3 - Q_1} \quad (18) \quad 141$$

$$\text{Skewness} = \frac{M - Mo}{\sigma} \quad (19) \quad 141$$

第十二章 $R_s = R_L + \frac{(N - L_L)}{\text{組距}} (R_n - R_L)$ (20) 147

第十三章 ${}_n P_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ (21) 157

$${}_n C_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} \quad (22) \quad 158$$

$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} \quad (23) \quad 158$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

$$(24) \quad 162$$

* 以組距為單位

$$(a+b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + {}_n C_3 a^{n-3} b^3 + \dots + {}_n C_n b^n \quad (25) \quad 162$$

第十四章 $y = y_0 e^{-\frac{2x^2}{(n+1)C^2}} \quad (26) \quad 176$

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (27) \quad 176$$

$$y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{N}{2.5066\sigma} \quad (28) \quad 176$$

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (29) \quad 176$$

第十六章 $P.E.M = \frac{.6745\sigma}{\sqrt{N}} \quad (30) \quad 206$

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (31) \quad 207$$

$$P.E.M_1 - M_2 = \sqrt{(P.E.M_1)^2 + (P.E.M_2)^2} \quad (32) \quad 215$$

$$P.E.M_1 = \frac{.84535\sigma}{\sqrt{N}} = 1.2533 P.E.M \quad (33) \quad 216$$

$$P.E.r = \frac{.6745\sigma}{\sqrt{2N}} = \frac{.4769\sigma}{\sqrt{N}} = .7071 P.E.M \quad (34) \quad 216$$

$$P.E.r = \frac{.6745(1-r^2)}{\sqrt{N}} \quad (35) \quad 217$$

$$\text{第十七章 } r = \frac{1}{N} \Sigma x'y' \quad (36) \quad 220$$

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma(x^2)} \sqrt{\Sigma(y^2)}} \quad (37) \quad 220$$

$$r = \frac{\frac{1}{N} \Sigma(X - M_x)(Y - M_y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (38) \quad 220$$

$$r = \frac{\frac{1}{N} \Sigma XY - M_x M_y}{\sigma_x \sigma_y} \quad (39) \quad 221$$

$$r = \frac{\frac{1}{N} \Sigma XY - M_x M_y}{\sqrt{\frac{1}{N} \Sigma(X^2) - M_x^2} \sqrt{\frac{1}{N} \Sigma(Y^2) - M_y^2}} \quad (40) \quad 221$$

$$r = \frac{\frac{\Sigma xy}{N} - C_x C_y}{\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - C_x^2} \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N} - C_y^2}} \quad (41) \quad 229$$

$$r = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x \cdot \Sigma y}{N}}{\sqrt{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}} \sqrt{\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{N}}} \quad (42) \quad 230$$

$$\text{第十八章 } \bar{x} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y \quad (43) \quad 253$$

$$\bar{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x \quad (44) \quad 253$$

$$\bar{X} - M_x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - M_y) \quad (45) \quad 255$$

$$\bar{Y} - M_y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - M_x) \quad (46) \quad 255$$

$$\bar{X} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} Y + \bar{M}_x - r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} M_y \quad (47) \quad 255$$

$$\bar{Y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} X + M_y - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} M_x \quad (48) \quad 255$$

$$\bar{X} = b_{xy} Y - b_{xy} M_y + M_x \quad (49) \quad 255$$

$$\bar{Y} = b_{yx} X - b_{yx} M_x + M_y \quad (50) \quad 255$$

$$S_y(\text{est. } Y) = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} \quad (51) \quad 260$$

$$S_x(\text{est. } X) = \sigma_x \sqrt{1 - r^2} \quad (52) \quad 260$$

$$P. E.(\text{est. } Y) = .6745 \sigma_y \sqrt{1 - r^2} \quad (53) \quad 260$$

$$P. E.(\text{est. } X) = .6745 \sigma_x \sqrt{1 - r^2} \quad (54) \quad 260$$

第十九章 $\rho = 1 - \frac{6\Sigma(V_x - V_y)^2}{N(N^2 - 1)} \quad (55) \quad 262$

$$R = 1 - \frac{6\Sigma g}{N^2 - 1} \quad (56) \quad 263$$

$$P. E. \rho = \frac{.6745(1 - \rho^2)}{\sqrt{N}} \quad (57) \quad 267$$

$$P. E. = \frac{.7063(1 - r^2)}{\sqrt{N}} \quad (58) \quad 267$$

第二十章 $\sigma_{ay}^2 = \sigma_y^2(1 - \eta^2) \quad (59) \quad 273$

$$\sigma_{ay}^2 = \frac{\sum (f_x \sigma_{ix}^2)}{N} \quad (60) \quad 274$$

$$\sigma_{ix}^2 = \frac{\sum (y - \bar{y}_x)^2}{f_x} \quad (61) \quad 275$$

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} \quad (62) \quad 276$$

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\bar{y}_y}}{\sigma_x} \quad (63) \quad 276$$

$$\eta_{yx} = \frac{\sqrt{\frac{\sum (\sum' y)^2}{f_x} \frac{1}{N} - C_y^2}}{\sqrt{\frac{\sum y^2}{N} - C_y^2}} \quad (64) \quad 276$$

$$\eta_{xy} = \frac{\sqrt{\frac{\sum (\sum' x)^2}{f_y} \frac{1}{N} - C_x^2}}{\sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - C_x^2}} \quad (65) \quad 277$$

$$\sigma_y^2 (\eta_{yx}^2 - r^2) = \sigma_d^2 \quad (66) \quad 278$$

$$\bar{X}_y = A. M._x + \frac{\sum' x}{f_y} (i_x) \quad (67) \quad 279$$

$$\bar{Y}_x = A. M._y + \frac{\sum' y}{f_x} (i_y) \quad (68) \quad 279$$

$$P. E. = \frac{.6745}{\sqrt{N}} (1 - \eta^2) \quad (69) \quad 281$$

$$r_T = \sqrt{\frac{\eta^2 - \frac{(K-1)}{N}}{1 - \frac{(K-2)}{N}}} \quad (70) \quad 282$$

第二十一章 $Q = \frac{ad - bc}{ad + bc} \quad (71) \quad 287$

$$\omega = \frac{\sqrt{ad} - \sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}} \quad (72) \quad 287$$

$$r = \cos \frac{\sqrt{bd}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}} \pi \quad (73) \quad 289$$

$$r = \cos \frac{U}{L+U} \pi \quad (74) \quad 290$$

$$r = \cos U.1.8^0 \quad (75) \quad 290$$

$$P. E. = \sin \left[.1686\pi (1-r^2) \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \right] \quad (76) \quad 291$$

$$\phi^2 = \frac{\chi^2}{N} = \frac{1}{N} \sum \left[\frac{(f_x \bar{y} - \frac{f_x f_y}{N})^2}{\frac{f_x f_y}{N}} \right] \quad (77) \quad 293$$

$$C = \sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}} \quad (78) \quad 294$$

$$C = \sqrt{\frac{S' - N}{S'}} \quad (79) \quad 294$$

$$C = \sqrt{\frac{S-1}{S}} \quad (80) \quad 294$$

$$r = \frac{\sum f_x (\bar{Y}_x - M_y) i_x}{N \sigma_x \sigma_y} \quad (81) \quad 298$$

$$r = \frac{\sum f_y (\bar{X}_y - M_x) i_y}{N \sigma_x \sigma_y} \quad (82) \quad 298$$

$$r = \frac{\sum f_y \left(\frac{\bar{X}_y}{\sigma_x} \right) i_y}{N \sigma_y} \quad (83) \quad 299$$

第二十二章
$$r_{12 \cdot 34 \cdots n} = \frac{r_{12 \cdot 34 \cdots (n-1)} - (r_{1n \cdot 34 \cdots (n-1)} \times r_{2n \cdot 34 \cdots (n-1)})}{\sqrt{[1 - r_{1n \cdot 34 \cdots (n-1)}^2] [1 - r_{2n \cdot 34 \cdots (n-1)}^2]}}$$
 (84) 306

$$R_{1 \cdot 234 \cdots n} = \sqrt{1 - (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13 \cdot 2}^2)(1 - r_{14 \cdot 3}^2) \cdots (1 - r_{1n \cdot 23 \cdots (n-1)}^2)}$$
 (85) 311

$$X_1 = b_{12 \cdot 34 \cdots n} X_2 + b_{13 \cdot 24 \cdots n} X_3 + \cdots + b_{1n \cdot 23 \cdots (n-1)} X_n + k$$
 (86) 314

$$b_{12 \cdot 34 \cdots n} = r_{12 \cdot 34 \cdots n} \frac{\sigma_{1 \cdot 34 \cdots n}}{\sigma_{2 \cdot 34 \cdots n}}$$
 (87) 314

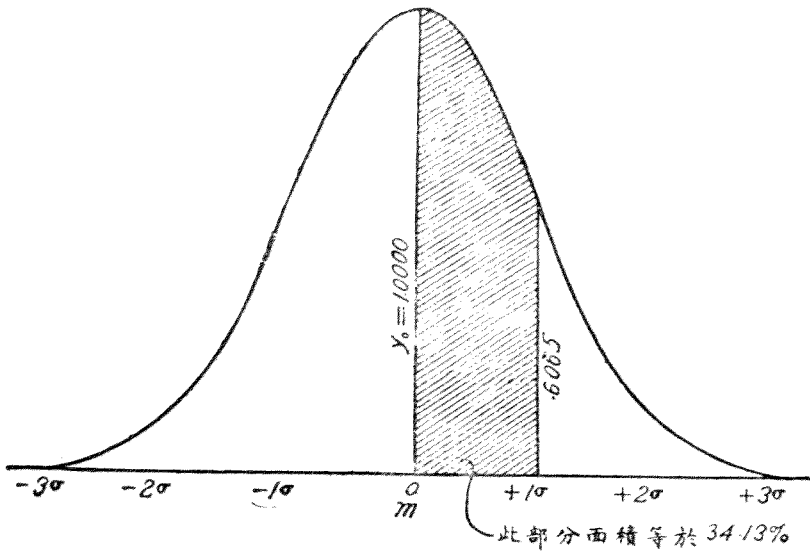
$$\sigma_{1 \cdot 23 \cdots n} = \sigma_1 \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13 \cdot 2}^2) \cdots (1 - r_{1n \cdot 23 \cdots (n-1)}^2)}$$
 (88) 314

$$P. E._{est} = .6745 \sigma_{1 \cdot 23 \dots n} \quad (89) \quad 314$$

$$k = M_1 - b_{12 \cdot 34 \dots n} M_2 - b_{13 \cdot 24 \dots n} M_3 \dots b_{1n \cdot 23 \dots (n-1)} M_n \quad (90) \quad 315$$

附錄一

在 σ ，縱線，與面積的對照表裏，第一行為 σ 的數，他代表常態曲線橫軸上的距離，第二行為縱線，我們以 y 或 z 代表他，第三行為面積。在常態曲線上 Y_0 為其最高縱線，而均數適處其下，均數所在處即 $x=0$ 的地方。由此在橫軸上計算 σ ，在右者為正號，在左者為負號。從縱線與面積兩方面而言，這 σ 的正負與他們無甚關係，因為這圖是對稱的。 $+1\sigma$ 與 -1σ 的相當的 y 或 z 都是.6065，在表上可以看



得出來。在面積方面，從 $x=0$ (即 m 所在處) 至 $x = +1\sigma$ ，或 $x = -1\sigma$ ，其間所佔的面積為全部之百分之 34.13 (即.3413)。又如 $x = \pm 2\sigma$ 的時候， y 或 $z = .1353$ ，面積 = 47.72%。

照表上看， $y_0=1.0000$ ，他是立在橫軸上的最高縱線，在他兩邊的 y 的數均小於1.0000，所以當 $x=\pm 1\sigma$ 的時候， $y=.6065$ ， $x=\pm 2\sigma$ 的時候， $y=.1353$ 。這 y 的數是根據下列公式求出來的。

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = y_0 \left(\frac{1}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} \right)$$

在 $x=0$ 的時候， $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=1$ ，因為 $e^0=1$ 。在這個時候， y 的數要算最大，在公式上 $y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} = y_0$ 。假使 $N=1$ ，則 $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2.5066\sigma}$ 。為便利起見以 σ 等於一，則 $y = \frac{1}{2.5066} = .3989$ 。在 $x=1$ 的時候， $y = \frac{1}{2.5066} (2.7183)^{-\frac{1}{2}} = .2420$ （因為 $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = (2.7183)^{-\frac{1}{2}}$ ）由此類推，我們可以求出一個 x 與 y 的對照表。在附表上我們假定.3989為1.0000，由此照比例算下去。所以從公式上算起來， $x=0$ ， $y=.3989$ ； $x=1$ ， $y=.2420$ ，在我們的表上則 $x=0$ ， $y=1$ ； $x=1$ ， $y=.6065$ 。有的時候，我們要用原來公式上的數目，在這個當兒，我們止須把對照表上所需要的 y 用.3989乘之即得。

在P.E.，縱線，與面積的對照表方面我們也假定最高縱線等於一，至面積的計算亦如第十一章內所敘，即一個P.E.所佔為25%，兩個P.E.所佔為41.13%等是。

對照表一

σ	y 或 z	$\frac{1}{2}a$	σ	y 或 z	$\frac{1}{2}a$
距離	縱 綫	面 積	距離	縱 綫	面 積
.0	1.0000	.0000	2.6	.0340	.4953
.1	.9950	.0398	2.7	.0261	.4965
.2	.9802	.0793	2.75	.0228	.4970
.25	.9692	.0987	2.8	.0198	.4974
.3	.9560	.1179	2.9	.0149	.4981
.4	.9231	.1554	3.0	.0111	.4987
.5	.8825	.1915	3.1	.0082	.4990
.6	.8353	.2257	3.2	.0050	.4993
.7	.7827	.2580	3.25	.0051	.4994
.75	.7548	.2734	3.3	.0043	.4995
.8	.7261	.2881	3.4	.0031	.4997
.9	.6670	.3159	3.5	.0022	.4998
1.0	.6065	.3413	3.6	.0015	.4998
1.1	.5461	.3643	3.7	.0011	.4999
1.2	.4868	.3849	3.75	.0009	.4999
1.25	.4578	.3944	3.8	.0007	.4999
1.3	.4296	.4032	3.9	.0005	.5000**
1.4	.3753	.4192	4.0	.0003	.5000
1.5	.3247	.4332	4.1	.0002	.5000
1.6	.2780	.4452	4.2	.0001	.5000
1.7	.2357	.4554	4.25	.0001	.5000
1.75	.2163	.4609	4.3	.0001	.5000
1.8	.1979	.4641	4.4	.0001	.5000
1.9	.1645	.4713	4.5	.0000*	.5000
2.0	.1353	.4772	4.6	.0000	.5000
2.1	.1103	.4821	4.7	.0000	.5000
2.2	.0889	.4861	4.75	.0000	.5000
2.25	.0796	.4878	4.8	.0000	.5000
2.3	.0710	.4893	4.9	.0000	.5000
2.4	.0561	.4918	5.0	.0000	.5000
2.5	.0439	.4938			

*這些值並不確實為 .0000，但是他們小於 .00005。

**這些值並不確實為 .5000，但是他們大於 .49995。

對照表二

P. E. 距離	y 或 z 縱 綫	ga 面 積	P. E. 距離	y 或 z 縱 綫	ga 面 積
.0	1.0000	.0000	3.1	.1124	.4817
.1	.9977	.0269	3.2	.0974	.4845
.2	.9909	.0537	3.25	.0705	.4858
.25	.9858	.0670	3.3	.0840	.4870
.3	.9797	.0802	3.4	.0721	.4891
.4	.9643	.1063	3.5	.0516	.4909
.5	.9447	.1320	3.6	.0525	.4924
.6	.9214	.1571	3.7	.0144	.4937
.7	.8945	.1816	3.75	.0408	.4943
.75	.8799	.1935	3.8	.0375	.4948
.8	.8645	.2053	3.9	.0314	.4957
.9	.8317	.2281	4.0	.0263	.4965
1.0	.7965	.2500	4.1	.0219	.4972
1.1	.7594	.2709	4.2	.0181	.4977
1.2	.7207	.2909	4.25	.0164	.4979
1.25	.7009	.3004	4.3	.0149	.4981
1.3	.6808	.3097	4.4	.0122	.4985
1.4	.6403	.3275	4.5	.0100	.4988
1.5	.5994	.3442	4.6	.0081	.4990
1.6	.5586	.3597	4.7	.0066	.4992
1.7	.5182	.3732	4.75	.0059	.4993
1.75	.4983	.3811	4.8	.0053	.4994
1.8	.4785	.3876	4.9	.0043	.4995
1.9	.4399	.4000	5.0	.0034	.4996
2.0	.4026	.4113	5.1	.0027	.4997
2.1	.3667	.4217	5.2	.0021	.4998
2.2	.3324	.4311	5.25	.0019	.4998
2.25	.3161	.4354	5.3	.0017	.4998
2.3	.3002	.4396	5.4	.0013	.4999
2.4	.2698	.4473	5.5	.0010	.4999
2.5	.2413	.4541	5.6	.0008	.4999
2.6	.2149	.4603	5.7	.0006	.4999
2.7	.1905	.4657	5.75	.0005	.4999
2.75	.1760	.4682	5.8	.0005	.5000*
2.8	.1681	.4705	5.9	.0004	.5000
2.9	.1476	.4748	6.0	.0003	.5000
3.0	.1291	.4785			

*這些值並不確實為 .5000，但是他們大於 .49995。

附錄二

在對照表三裏第一行為 r 的數，第二行為 ρ 的數，第三行為 R 的數。在這個表裏，這些彼此相當的數是根據下列兩個公式計算出來的。

$$r = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} \rho\right), \quad r = 2 \cos_3^{\pi}(1 - R) - 1$$

例如 $\rho = .220$ ，則 $r = 2 \sin\left(\frac{180^\circ}{6} \times .22\right)$

$$= 2 \sin 30^\circ \times .22 = 2 \sin 6^\circ 36' = 2(.1145) = .229$$

*

又如 $R = .470$ ，則 $r = 2 \cos 60^\circ (1 - .47) - 1$

$$= 2 \cos 31^\circ 48' - 1 = 2 \times .8499 - 1 = .6998$$

*

假使在表上查不出 ρ 或 R 的相當的 r ，我們可照比例計算一下。通常若止有小數兩位，我們似一望即得其結果，不必推算。若小數在兩位以上，我們即須推算。如在 $\rho = .252$ 的時候，我們查看表上，並未見有此數，與他最近的是 $.249$ ，那相當的 $r = .26$ ，所以由 ρ 所化之 r ，用 $.26$ 當然要比 $.25$ 或 $.27$ 近些。又如當 $R = .72$ 的時候，在表上與這數最相近的是 $.713$ 和 $.729$ ，前者的相當的 $r = .91$ ，後者的相當的 $r = .92$ 。這 $.713$ 與 $.729$ 的相差既為 $.016$ ，而 $.72$ 一數既比 $.713$ 多 $.007$ ，我們在 $.91$ 上可以加 $\frac{.007}{.016} = .04$ ，所以在結果上由 R 所化之 r 的值等於 $.914$ 。

*.1145 和 .8499 是從三角學上對照表裏找出來的。

對照表三

r	ρ	R	r	ρ	R	r	ρ	R
.00	.000	.000	.34	.326	.201	.68	.663	.453
.01	.010	.006	.35	.336	.208	.69	.673	.461
.02	.019	.011	.36	.346	.214	.70	.683	.470
.03	.029	.017	.37	.355	.221	.71	.693	.479
.04	.038	.022	.38	.365	.227	.72	.703	.489
.05	.048	.028	.39	.375	.234	.73	.714	.498
.06	.057	.034	.40	.385	.240	.74	.724	.508
.07	.067	.039	.41	.394	.247	.75	.734	.517
.08	.076	.045	.42	.404	.254	.76	.744	.527
.09	.086	.050	.43	.414	.261	.77	.755	.538
.10	.096	.056	.44	.424	.268	.78	.765	.548
.11	.105	.062	.45	.433	.274	.79	.776	.559
.12	.115	.068	.46	.443	.281	.80	.786	.569
.13	.124	.074	.47	.453	.288	.81	.796	.580
.14	.134	.079	.48	.463	.296	.82	.807	.592
.15	.143	.085	.49	.473	.303	.83	.817	.603
.16	.153	.091	.50	.483	.310	.84	.828	.615
.17	.163	.097	.51	.492	.317	.85	.838	.628
.18	.172	.103	.52	.502	.324	.86	.849	.641
.19	.182	.109	.53	.512	.332	.87	.859	.654
.20	.191	.115	.54	.522	.339	.88	.870	.667
.21	.201	.121	.55	.532	.347	.89	.881	.682
.22	.211	.127	.56	.542	.354	.90	.892	.697
.23	.220	.133	.57	.552	.362	.91	.902	.713
.24	.230	.139	.58	.562	.370	.92	.913	.729
.25	.239	.145	.59	.572	.378	.93	.924	.747
.26	.249	.151	.60	.582	.385	.94	.934	.766
.27	.259	.157	.61	.592	.393	.95	.945	.786
.28	.268	.163	.62	.602	.402	.96	.956	.809
.29	.278	.169	.63	.612	.410	.97	.967	.834
.30	.288	.176	.64	.622	.418	.98	.978	.865
.31	.297	.182	.65	.632	.427	.99	.989	.905
.32	.307	.188	.66	.642	.435	1.00	1.000	1.000
.33	.317	.195	.67	.652	.444			

附錄三

對照表四是根據皮爾生的 $\cos \pi$ 法和西巴的異號法而產生的。在這兩個方法之中，若用他們的公式，必須用三角學上的角度對照表以資檢查。實際上我們所欲求者是 r 或與 r 相當之 $\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}$ ，或 $U\left(\frac{b+c}{N}\right)$ ，所以我們不如免去那求角度的麻煩，就那分數或 U 的值而算與他們相當的 r 。

在檢查的時候，若 $\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}$ 或 U 的值為 .316，則 $r = .55$ ，因為 .316 比 .318 近於 .315。在這表上我們知道那分數的或 U 的值未有大於 .500 的。假使有的值大於 .500，我們當從 1.00 減去這數，就此結果在表上找出與他相當之 r 。例如有 U 之值為 .795，由 1.000 減去此數為 .205，而他的相當之 r 為 .80，餘類推。

對照表四

r	$\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}$ 或 U	r	$\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}$ 或 U	r	$\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}$ 或 U
.00	.500	.34	.390	.68	.262
.01	.497	.35	.386	.69	.258
.02	.494	.36	.383	.70	.253
.03	.490	.37	.379	.71	.249
.04	.487	.38	.376	.72	.244
.05	.484	.39	.373	.73	.240
.06	.481	.40	.369	.74	.235
.07	.478	.41	.366	.75	.230
.08	.475	.42	.362	.76	.225
.09	.471	.43	.359	.77	.220
.10	.468	.44	.355	.78	.215
.11	.465	.45	.351	.79	.210
.12	.462	.46	.348	.80	.205
.13	.458	.47	.344	.81	.199
.14	.455	.48	.341	.82	.194
.15	.452	.49	.337	.83	.188
.16	.449	.50	.333	.84	.183
.17	.446	.51	.330	.85	.177
.18	.442	.52	.326	.86	.170
.19	.439	.53	.322	.87	.164
.20	.436	.54	.318	.88	.158
.21	.433	.55	.315	.89	.151
.22	.429	.56	.311	.90	.144
.23	.426	.57	.307	.91	.138
.24	.423	.58	.303	.92	.128
.25	.420	.59	.299	.93	.120
.26	.416	.60	.295	.94	.111
.27	.413	.61	.291	.95	.101
.28	.410	.62	.287	.96	.090
.29	.406	.63	.283	.97	.078
.30	.403	.64	.279	.98	.064
.31	.400	.65	.275	.99	.045
.32	.396	.66	.271	1.00	.000
.33	.393	.67	.266		

高級統計學應用對數表

賀麟閣原製

艾 偉訂正

表 次

表數

1. 整數的平方與方根,其數至1050.....	1
2. 整數的積,其數至 100×99	8
3. 整數的商數至 $100 \div 99$	28
4. 積: $(1-100) \times 2^2, 3^2, \dots, (12)^2$	48
5. 數目的四位對數.....	50
6. $(1-r^2)$ 的五位對數 r 的值爲 .000至 .999	52
7. $\sqrt{1-r^2}$ 的五位對數 r 的值爲 .000至 .999	54
8. $\sqrt{1-r}$ 的五位值 r 的值爲 .000至 .999	56
9. 均數與均方差之機誤 (假定 $\sigma=1$)	58
10. 相關係數機誤的值,其數至 $N=1000$	65
11. 常態機率曲線的面積與縱線(從均數量起與均方差對照).....	75
12. 常態機率曲線的差數與縱線(從均數量起與面積對照).....	77
13. 重要常數表(附其值與其對數).....	79
14. 常態曲線的 P. E. 差數 (從均數量起與面積對照)	80
15. \sqrt{pq} 在此地 $p+q=1$	81
16. 史皮滿等級相關公式 $\rho=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$ 的便利求法	82
17. D 的平方表(爲便利史氏公式者)	82
18. $.6745\sigma_{(x-y)}/\sigma_y$ 的值,在此地 $\sigma_y < \sigma_x$	83
19. x 的值爲求 $\cos^{-1}x$ 用者.....	85
20. $\left[(1-r_{1a}^2)(1-r_{2a}^2) \right]^{-\frac{1}{2}}$ 的值	87

表 一

平方與方根

1

數目	平方	方根	數目	平方	方根	數目	平方	方根
1	1	1.000	51	26 01	7.141	101	1 02 01	10.050
2	4	1.414	52	27 04	7.211	102	1 04 04	10.100
3	9	1.732	53	28 09	7.280	103	1 06 09	10.149
4	16	2.000	54	29 16	7.348	104	1 08 16	10.198
5	25	2.236	55	30 25	7.416	105	1 10 25	10.247
6	36	2.449	56	31 36	7.483	106	1 12 36	10.296
7	49	2.646	57	32 49	7.550	107	1 14 49	10.344
8	64	2.828	58	33 64	7.616	108	1 16 64	10.392
9	81	3.000	59	34 81	7.681	109	1 18 81	10.440
10	1 00	3.162	60	36 00	7.746	110	1 21 00	10.488
11	1 21	3.317	61	37 21	7.810	111	1 23 21	10.536
12	1 44	3.464	62	38 44	7.874	112	1 25 44	10.583
13	1 69	3.606	63	39 69	7.937	113	1 27 69	10.630
14	1 96	3.742	64	40 96	8.000	114	1 29 96	10.677
15	2 25	3.873	65	42 25	8.062	115	1 32 25	10.724
16	2 56	4.000	66	43 56	8.124	116	1 34 56	10.770
17	2 89	4.123	67	44 89	8.185	117	1 36 89	10.817
18	3 24	4.243	68	46 24	8.246	118	1 39 24	10.863
19	3 61	4.359	69	47 61	8.307	119	1 41 61	10.909
20	4 00	4.472	70	49 00	8.367	120	1 44 00	10.954
21	4 41	4.583	71	50 41	8.426	121	1 46 41	11.000
22	4 84	4.690	72	51 84	8.485	122	1 48 84	11.045
23	5 29	4.796	73	53 29	8.544	123	1 51 29	11.091
24	5 76	4.899	74	54 76	8.602	124	1 53 76	11.136
25	6 25	5.000	75	56 25	8.660	125	1 56 25	11.180
26	6 76	5.099	76	57 76	8.718	126	1 58 76	11.225
27	7 29	5.196	77	59 29	8.775	127	1 61 29	11.269
28	7 84	5.292	78	60 84	8.832	128	1 63 84	11.314
29	8 41	5.385	79	62 41	8.888	129	1 66 41	11.358
30	9 00	5.477	80	64 00	8.944	130	1 69 00	11.402
31	9 61	5.568	81	65 61	9.000	131	1 71 61	11.446
32	10 24	5.657	82	67 24	9.055	132	1 74 24	11.489
33	10 89	5.745	83	68 89	9.110	133	1 76 89	11.533
34	11 56	5.831	84	70 56	9.165	134	1 79 56	11.576
35	12 25	5.916	85	72 25	9.220	135	1 82 25	11.619
36	12 96	6.000	86	73 96	9.274	136	1 84 96	11.662
37	13 69	6.083	87	75 69	9.327	137	1 87 69	11.705
38	14 44	6.164	88	77 44	9.381	138	1 90 44	11.747
39	15 21	6.245	89	79 21	9.434	139	1 93 21	11.790
40	16 00	6.325	90	81 00	9.487	140	1 96 00	11.832
41	16 81	6.403	91	82 81	9.539	141	1 98 81	11.874
42	17 64	6.481	92	84 64	9.592	142	2 01 64	11.916
43	18 49	6.557	93	86 49	9.644	143	2 04 49	11.958
44	19 36	6.633	94	88 36	9.695	144	2 07 36	12.000
45	20 25	6.708	95	90 25	9.747	145	2 10 25	12.042
46	21 16	6.782	96	92 16	9.798	146	2 13 16	12.083
47	22 09	6.856	97	94 09	9.849	147	2 16 09	12.124
48	23 04	6.928	98	96 04	9.899	148	2 19 04	12.166
49	24 01	7.000	99	98 01	9.950	149	2 22 01	12.207
50	25 00	7.071	100	100 00	10.000	150	2 25 00	12.247

表一(續)

2			平方與方根			平方與方根			平方與方根		
數目	平方	方根	數目	平方	方根	數目	平方	方根	數目	平方	方根
151	2 28 01	12.288	201	4 04 01	14.177	251	6 30 01	15.843			
152	2 31 04	12.329	202	4 08 04	14.213	252	6 35 04	15.875			
153	2 34 09	12.369	203	4 12 09	14.248	253	6 40 09	15.906			
154	2 37 16	12.410	204	4 16 16	14.283	254	6 45 16	15.937			
155	2 40 25	12.450	205	4 20 25	14.318	255	6 50 25	15.969			
156	2 43 36	12.490	206	4 24 36	14.353	256	6 55 36	16.000			
157	2 46 49	12.530	207	4 28 49	14.387	257	6 60 49	16.031			
158	2 49 64	12.570	208	4 32 64	14.422	258	6 65 64	16.062			
159	2 52 81	12.610	209	4 36 81	14.457	259	6 70 81	16.093			
160	2 56 00	12.649	210	4 41 00	14.491	260	6 76 00	16.125			
161	2 59 21	12.689	211	4 45 21	14.526	261	6 81 21	16.155			
162	2 62 44	12.728	212	4 49 44	14.560	262	6 86 44	16.186			
163	2 65 69	12.767	213	4 53 69	14.595	263	6 91 69	16.217			
164	2 68 96	12.806	214	4 57 96	14.629	264	6 96 96	16.248			
165	2 72 25	12.845	215	4 62 25	14.663	265	7 02 25	16.279			
166	2 75 56	12.884	216	4 66 56	14.697	266	7 07 56	16.310			
167	2 78 89	12.923	217	4 70 89	14.731	267	7 12 89	16.340			
168	2 82 24	12.961	218	4 75 24	14.765	268	7 18 24	16.371			
169	2 85 61	13.000	219	4 79 61	14.799	269	7 23 61	16.401			
170	2 89 00	13.038	220	4 84 00	14.832	270	7 29 00	16.432			
171	2 92 41	13.077	221	4 88 41	14.866	271	7 34 41	16.462			
172	2 95 84	13.115	222	4 92 84	14.900	272	7 39 84	16.492			
173	2 99 29	13.153	223	4 97 29	14.933	273	7 45 29	16.523			
174	3 02 76	13.191	224	5 01 76	14.967	274	7 50 76	16.553			
175	3 06 25	13.229	225	5 06 25	15.000	275	7 56 25	16.583			
176	3 09 76	13.266	226	5 10 76	15.033	276	7 61 76	16.613			
177	3 13 29	13.304	227	5 15 29	15.067	277	7 67 29	16.643			
178	3 16 84	13.342	228	5 19 84	15.100	278	7 72 84	16.673			
179	3 20 41	13.379	229	5 24 41	15.133	279	7 78 41	16.703			
180	3 24 00	13.416	230	5 29 00	15.166	280	7 84 00	16.733			
181	3 27 61	13.454	231	5 33 61	15.199	281	7 89 61	16.763			
182	3 31 24	13.491	232	5 38 24	15.232	282	7 95 24	16.793			
183	3 34 89	13.528	233	5 42 89	15.264	283	8 00 89	16.823			
184	3 38 56	13.565	234	5 47 56	15.297	284	8 06 56	16.852			
185	3 42 25	13.601	235	5 52 25	15.330	285	8 12 25	16.882			
186	3 45 96	13.638	236	5 56 96	15.362	286	8 17 96	16.912			
187	3 49 69	13.675	237	5 61 69	15.395	287	8 23 69	16.941			
188	3 53 44	13.711	238	5 66 44	15.427	288	8 29 44	16.971			
189	3 57 21	13.748	239	5 71 21	15.460	289	8 35 21	17.000			
190	3 61 00	13.784	240	5 76 00	15.492	290	8 41 00	17.029			
191	3 64 81	13.820	241	5 80 81	15.524	291	8 46 81	17.059			
192	3 68 64	13.856	242	5 85 64	15.556	292	8 52 64	17.088			
193	3 72 49	13.892	243	5 90 49	15.588	293	8 58 49	17.117			
194	3 76 36	13.928	244	5 95 36	15.620	294	8 64 36	17.146			
195	3 80 25	13.964	245	6 00 25	15.652	295	8 70 25	17.176			
196	3 84 16	14.000	246	6 05 16	15.684	296	8 76 16	17.205			
197	3 88 09	14.036	247	6 10 09	15.716	297	8 82 09	17.234			
198	3 92 04	14.071	248	6 15 04	15.748	298	8 88 04	17.263			
199	3 96 01	14.107	249	6 20 01	15.780	299	8 94 01	17.292			
200	4 00 00	14.142	250	6 25 00	15.811	300	9 00 00	17.321			

表一 (續)

平方與方根

3

數目	平方	方根	數目	平方	方根	數目	平方	方根
301	9 06 01	17.349	351	12 32 01	18.735	401	16 08 01	20.025
302	9 12 04	17.378	352	12 39 04	18.762	402	16 16 04	20.050
303	9 18 09	17.407	353	12 46 09	18.788	403	16 24 09	20.075
304	9 24 16	17.436	354	12 53 16	18.815	404	16 32 16	20.100
305	9 30 25	17.464	355	12 60 25	18.841	405	16 40 25	20.125
306	9 36 36	17.493	356	12 67 36	18.868	406	16 48 36	20.149
307	9 42 49	17.521	357	12 74 49	18.894	407	16 56 49	20.174
308	9 48 64	17.550	358	12 81 64	18.921	408	16 64 64	20.199
309	9 54 81	17.578	359	12 88 81	18.947	409	16 72 81	20.224
310	9 61 00	17.607	360	12 96 00	18.974	410	16 81 00	20.248
311	9 67 21	17.635	361	13 03 21	19.000	411	16 89 21	20.273
312	9 73 44	17.664	362	13 10 44	19.026	412	16 97 44	20.298
313	9 79 69	17.692	363	13 17 69	19.053	413	17 05 69	20.322
314	9 85 96	17.720	364	13 24 96	19.079	414	17 13 96	20.347
315	9 92 25	17.748	365	13 32 25	19.105	415	17 22 25	20.372
316	9 98 56	17.776	366	13 39 56	19.131	416	17 30 56	20.396
317	10 04 89	17.804	367	13 46 89	19.157	417	17 38 89	20.421
318	10 11 24	17.833	368	13 54 24	19.183	418	17 47 24	20.445
319	10 17 61	17.861	369	13 61 61	19.209	419	17 55 61	20.469
320	10 24 00	17.889	370	13 69 00	19.235	420	17 64 00	20.494
321	10 30 41	17.916	371	13 76 41	19.261	421	17 72 41	20.518
322	10 36 84	17.944	372	13 83 84	19.287	422	17 80 84	20.543
323	10 43 29	17.972	373	13 91 29	19.313	423	17 89 29	20.567
324	10 49 76	18.000	374	13 98 76	19.339	424	17 97 76	20.591
325	10 56 25	18.028	375	14 06 25	19.365	425	18 06 25	20.616
326	10 62 76	18.055	376	14 13 76	19.391	426	18 14 76	20.640
327	10 69 29	18.083	377	14 21 29	19.416	427	18 23 29	20.664
328	10 75 84	18.111	378	14 28 84	19.442	428	18 31 84	20.688
329	10 82 41	18.138	379	14 36 41	19.468	429	18 40 41	20.712
330	10 89 00	18.166	380	14 44 00	19.494	430	18 49 00	20.736
331	10 95 61	18.193	381	14 51 61	19.519	431	18 57 61	20.761
332	11 02 24	18.221	382	14 59 24	19.545	432	18 66 24	20.785
333	11 08 89	18.248	383	14 66 89	19.570	433	18 74 89	20.809
334	11 15 56	18.276	384	14 74 56	19.596	434	18 83 56	20.833
335	11 22 25	18.303	385	14 82 25	19.621	435	18 92 25	20.857
336	11 28 96	18.330	386	14 89 96	19.647	436	19 00 96	20.881
337	11 35 69	18.358	387	14 97 69	19.672	437	19 09 69	20.905
338	11 42 44	18.385	388	15 05 44	19.698	438	19 18 44	20.928
339	11 49 21	18.412	389	15 13 21	19.723	439	19 27 21	20.952
340	11 56 00	18.439	390	15 21 00	19.748	440	19 36 00	20.976
341	11 62 81	18.466	391	15 28 81	19.774	441	19 44 81	21.000
342	11 69 64	18.493	392	15 36 64	19.799	442	19 53 64	21.024
343	11 76 49	18.520	393	15 44 49	19.824	443	19 62 49	21.048
344	11 83 36	18.547	394	15 52 36	19.849	444	19 71 36	21.071
345	11 90 25	18.574	395	15 60 25	19.875	445	19 80 25	21.095
346	11 97 16	18.601	396	15 68 16	19.900	446	19 89 16	21.119
347	12 04 09	18.628	397	15 76 09	19.925	447	19 98 09	21.142
348	12 11 04	18.655	398	15 84 04	19.950	448	20 07 04	21.166
349	12 18 01	18.682	399	15 92 01	19.975	449	20 16 01	21.190
350	12 25 00	18.708	400	16 00 00	20.000	450	20 25 00	21.213

表一 (續)

4				平方與方根				
數目	平方	方根	數目	平方	方根	數目	平方	方根
451	20 34 01	21.237	501	25 10 01	22.383	551	30 36 01	23.473
452	20 43 04	21.260	502	25 20 04	22.405	552	30 47 04	23.495
453	20 52 09	21.284	503	25 30 09	22.428	553	30 58 09	23.516
454	20 61 16	21.307	504	25 40 16	22.450	554	30 69 16	23.537
455	20 70 25	21.331	505	25 50 25	22.472	555	30 80 25	23.558
456	20 79 36	21.354	506	25 60 36	22.494	556	30 91 36	23.580
457	20 88 49	21.378	507	25 70 49	22.517	557	31 02 49	23.601
458	20 97 64	21.401	508	25 80 64	22.539	558	31 13 64	23.622
459	21 06 81	21.424	509	25 90 81	22.561	559	31 24 81	23.643
460	21 16 00	21.448	510	26 01 00	22.583	560	31 36 00	23.664
461	21 25 21	21.471	511	26 11 21	22.605	561	31 47 21	23.685
462	21 34 44	21.494	512	26 21 44	22.627	562	31 58 44	23.707
463	21 43 69	21.517	513	26 31 69	22.650	563	31 69 69	23.728
464	21 52 96	21.541	514	26 41 96	22.672	564	31 80 96	23.749
465	21 62 25	21.564	515	26 52 25	22.694	565	31 92 25	23.770
466	21 71 56	21.587	516	26 62 56	22.716	566	32 03 56	23.791
467	21 80 89	21.610	517	26 72 89	22.738	567	32 14 89	23.812
468	21 90 24	21.633	518	26 83 24	22.760	568	32 26 24	23.833
469	21 99 61	21.656	519	26 93 61	22.782	569	32 37 61	23.854
470	22 09 00	21.679	520	27 04 00	22.804	570	32 49 00	23.875
471	22 18 41	21.703	521	27 14 41	22.825	571	32 60 41	23.896
472	22 27 84	21.726	522	27 24 84	22.847	572	32 71 84	23.917
473	22 37 29	21.749	523	27 35 29	22.869	573	32 83 29	23.937
474	22 46 76	21.772	524	27 45 76	22.891	574	32 94 76	23.958
475	22 56 25	21.794	525	27 56 25	22.913	575	33 06 25	23.979
476	22 65 76	21.817	526	27 66 76	22.935	576	33 17 76	24.000
477	22 75 29	21.840	527	27 77 29	22.956	577	33 29 29	24.021
478	22 84 84	21.863	528	27 87 84	22.978	578	33 40 84	24.042
479	22 94 41	21.886	529	27 98 41	23.000	579	33 52 41	24.062
480	23 04 00	21.909	530	28 09 00	23.022	580	33 64 00	24.083
481	23 13 61	21.932	531	28 19 61	23.043	581	33 75 61	24.104
482	23 23 24	21.954	532	28 30 24	23.065	582	33 87 24	24.125
483	23 32 89	21.977	533	28 40 89	23.087	583	33 98 89	24.145
484	23 42 56	22.000	534	28 51 56	23.108	584	34 10 56	24.166
485	23 52 25	22.023	535	28 62 25	23.130	585	34 22 25	24.187
486	23 61 96	22.045	536	28 72 96	23.152	586	34 33 96	24.207
487	23 71 69	22.068	537	28 83 69	23.173	587	34 45 69	24.228
488	23 81 44	22.091	538	28 94 44	23.195	588	34 57 44	24.249
489	23 91 21	22.113	539	29 05 21	23.216	589	34 69 21	24.269
490	24 01 00	22.136	540	29 16 00	23.238	590	34 81 00	24.290
491	24 10 81	22.159	541	29 26 81	23.259	591	34 92 81	24.310
492	24 20 64	22.181	542	29 37 64	23.281	592	35 04 64	24.331
493	24 30 49	22.204	543	29 48 49	23.302	593	35 16 49	24.352
494	24 40 36	22.226	544	29 59 36	23.324	594	35 28 36	24.372
495	24 50 25	22.249	545	29 70 25	23.345	595	35 40 25	24.393
496	24 60 16	22.271	546	29 81 16	23.367	596	35 52 16	24.413
497	24 70 09	22.293	547	29 92 09	23.388	597	35 64 09	24.434
498	24 80 04	22.316	548	30 03 04	23.409	598	35 76 04	24.454
499	24 90 01	22.338	549	30 14 01	23.431	599	35 88 01	24.474
500	25 00 00	22.361	550	30 25 00	23.452	600	36 00 00	24.495

表一 (續)

平方與方根

5

數目	平方	方根	數目	平方	方根	數目	平方	方根
601	36 12 01	24.515	651	42 38 01	25.515	701	49 14 01	26.476
602	36 24 04	24.536	652	42 51 04	25.534	702	49 28 04	26.495
603	36 36 09	24.556	653	42 64 09	25.554	703	49 42 09	26.514
604	36 48 16	24.576	654	42 77 16	25.573	704	49 56 16	26.533
605	36 60 25	24.597	655	42 90 25	25.593	705	49 70 25	26.552
606	36 72 36	24.617	656	43 03 36	25.612	706	49 84 36	26.571
607	36 84 49	24.637	657	43 16 49	25.632	707	49 98 49	26.589
608	36 96 64	24.658	658	43 29 64	25.652	708	50 12 64	26.608
609	37 08 81	24.678	659	43 42 81	25.671	709	50 26 81	26.627
610	37 21 00	24.698	660	43 56 00	25.690	710	50 41 00	26.646
611	37 33 21	24.718	661	43 69 21	25.710	711	50 55 21	26.665
612	37 45 44	24.739	662	43 82 44	25.729	712	50 69 44	26.683
613	37 57 69	24.759	663	43 95 69	25.749	713	50 83 69	26.702
614	37 69 96	24.779	664	44 08 96	25.768	714	50 97 96	26.721
615	37 82 25	24.799	665	44 22 25	25.788	715	51 12 25	26.739
616	37 94 56	24.819	666	44 35 56	25.807	716	51 26 56	26.758
617	38 06 89	24.839	667	44 48 89	25.826	717	51 40 89	26.777
618	38 19 24	24.860	668	44 62 24	25.846	718	51 55 24	26.796
619	38 31 61	24.880	669	44 75 61	25.865	719	51 69 61	26.814
620	38 44 00	24.900	670	44 89 00	25.884	720	51 84 00	26.833
621	38 56 41	24.920	671	45 02 41	25.904	721	51 98 41	26.851
622	38 68 84	24.940	672	45 15 84	25.923	722	52 12 84	26.870
623	38 81 29	24.960	673	45 29 29	25.942	723	52 27 29	26.889
624	38 93 76	24.980	674	45 42 76	25.962	724	52 41 76	26.907
625	39 06 25	25.000	675	45 56 25	25.981	725	52 56 25	26.926
626	39 18 76	25.020	676	45 69 76	26.000	726	52 70 76	26.944
627	39 31 29	25.040	677	45 83 29	26.019	727	52 85 29	26.963
628	39 43 84	25.060	678	45 96 84	26.038	728	52 99 84	26.981
629	39 56 41	25.080	679	46 10 41	26.058	729	53 14 41	27.000
630	39 69 00	25.100	680	46 24 00	26.077	730	53 29 00	27.019
631	39 81 61	25.120	681	46 37 61	26.096	731	53 43 61	27.037
632	39 94 24	25.140	682	46 51 24	26.115	732	53 58 24	27.055
633	40 06 89	25.159	683	46 64 89	26.134	733	53 72 89	27.074
634	40 19 56	25.179	684	46 78 56	26.153	734	53 87 56	27.092
635	40 32 25	25.199	685	46 92 25	26.173	735	54 02 25	27.111
636	40 44 96	25.219	686	47 05 96	26.192	736	54 16 96	27.129
637	40 57 69	25.239	687	47 19 69	26.211	737	54 31 69	27.148
638	40 70 44	25.259	688	47 33 44	26.230	738	54 46 44	27.166
639	40 83 21	25.278	689	47 47 21	26.249	739	54 61 21	27.185
640	40 96 00	25.298	690	47 61 00	26.268	740	54 76 00	27.203
641	41 08 81	25.318	691	47 74 81	26.287	741	54 90 81	27.221
642	41 21 64	25.338	692	47 88 64	26.306	742	55 05 64	27.240
643	41 34 49	25.357	693	48 02 49	26.325	743	55 20 49	27.258
644	41 47 36	25.377	694	48 16 36	26.344	744	55 35 36	27.276
645	41 60 25	25.397	695	48 30 25	26.363	745	55 50 25	27.295
646	41 73 16	25.417	696	48 44 16	26.382	746	55 65 16	27.313
647	41 86 09	25.436	697	48 58 09	26.401	747	55 80 09	27.331
648	41 99 04	25.456	698	48 72 04	26.420	748	55 95 04	27.350
649	42 12 01	25.475	699	48 86 01	26.439	749	56 10 01	27.368
650	42 25 00	25.495	700	49 00 00	26.458	750	56 25 00	27.386

表一(續)

6

平方與方根

數目	平方	方根	數目	平方	方根	數目	平方	方根
751	56 40 01	27.404	801	64 16 01	28.320	851	72 42 01	29.172
752	56 55 04	27.423	802	64 32 04	28.320	852	72 59 04	29.189
753	56 70 09	27.441	803	64 48 09	28.337	853	72 76 09	29.206
754	56 85 16	27.459	804	64 64 16	28.355	854	72 93 16	29.223
755	57 00 25	27.477	805	64 80 25	28.373	855	73 10 25	29.240
756	57 15 36	27.495	806	64 96 36	28.390	856	73 27 36	29.257
757	57 30 49	27.514	807	65 12 49	28.408	857	73 44 49	29.275
758	57 45 64	27.532	808	65 28 64	28.425	858	73 61 64	29.292
759	57 60 81	27.550	809	65 44 81	28.443	859	73 78 81	29.309
760	57 76 00	27.568	810	65 61 00	28.460	860	73 96 00	29.326
761	57 91 21	27.586	811	65 77 21	28.478	861	74 13 21	29.343
762	58 06 44	27.604	812	65 93 44	28.496	862	74 30 44	29.360
763	58 21 69	27.622	813	66 09 69	28.513	863	74 47 69	29.377
764	58 36 96	27.641	814	66 25 96	28.531	864	74 64 96	29.394
765	58 52 25	27.659	815	66 42 25	28.548	865	74 82 25	29.411
766	58 67 56	27.677	816	66 58 56	28.566	866	74 99 56	29.428
767	58 82 89	27.695	817	66 74 89	28.583	867	75 16 89	29.445
768	58 98 24	27.713	818	66 91 24	28.601	868	75 34 24	29.462
769	59 13 61	27.731	819	67 07 61	28.618	869	75 51 61	29.479
770	59 29 00	27.749	820	67 24 00	28.636	870	75 69 00	29.496
771	59 44 41	27.767	821	67 40 41	28.653	871	75 86 41	29.513
772	59 59 84	27.785	822	67 56 84	28.671	872	76 03 84	29.530
773	59 75 29	27.803	823	67 73 29	28.688	873	76 21 29	29.547
774	59 90 76	27.821	824	67 89 76	28.705	874	76 38 76	29.563
775	60 06 25	27.839	825	68 06 25	28.723	875	76 56 25	29.580
776	60 21 76	27.857	826	68 22 76	28.740	876	76 73 76	29.597
777	60 37 29	27.875	827	68 39 29	28.758	877	76 91 29	29.614
778	60 52 84	27.893	828	68 55 84	28.775	878	77 08 84	29.631
779	60 68 41	27.911	829	68 72 41	28.792	879	77 26 41	29.648
780	60 84 00	27.928	830	68 89 00	28.810	880	77 44 00	29.665
781	60 99 61	27.946	831	69 05 61	28.827	881	77 61 61	29.682
782	61 15 24	27.964	832	69 22 24	28.844	882	77 79 24	29.698
783	61 30 89	27.982	833	69 38 89	28.862	883	77 96 89	29.715
784	61 46 56	28.000	834	69 55 56	28.879	884	78 14 56	29.732
785	61 62 25	28.018	835	69 72 25	28.896	885	78 32 25	29.749
786	61 77 96	28.036	836	69 88 96	28.914	886	78 49 96	29.766
787	61 93 69	28.054	837	70 05 69	28.931	887	78 67 69	29.783
788	62 09 44	28.071	838	70 22 44	28.948	888	78 85 44	29.799
789	62 25 21	28.089	839	70 39 21	28.965	889	79 03 21	29.816
790	62 41 00	28.107	840	70 56 00	28.983	890	79 21 00	29.833
791	62 56 81	28.125	841	70 72 81	29.000	891	79 38 81	29.850
792	62 72 64	28.142	842	70 89 64	29.017	892	79 56 64	29.866
793	62 88 49	28.160	843	71 06 49	29.034	893	79 74 49	29.883
794	63 04 36	28.178	844	71 23 36	29.052	894	79 92 36	29.900
795	63 20 25	28.196	845	71 40 25	29.069	895	80 10 25	29.916
796	63 36 16	28.213	846	71 57 16	29.086	896	80 28 16	29.933
797	63 52 09	28.231	847	71 74 09	29.103	897	80 46 09	29.950
798	63 68 04	28.249	848	71 91 04	29.120	898	80 64 04	29.967
799	63 84 01	28.267	849	72 08 01	29.138	899	80 82 01	29.983
800	64 00 00	28.284	850	72 25 00	29.155	900	81 00 00	30.000

表一 (續)

平方與方根

7

數目	平方	方根	數目	平方	方根	數目	平方	方根
901	81 18 01	30.017	951	90 44 01	30.838	1001	100 20 01	31.639
902	81 36 04	30.033	952	90 63 04	30.854	1002	100 40 04	31.654
903	81 54 09	30.050	953	90 82 09	30.871	1003	100 60 09	31.670
904	81 72 16	30.067	954	91 01 16	30.887	1004	100 80 16	31.686
905	81 90 25	30.083	955	91 20 25	30.903	1005	101 00 25	31.702
906	82 08 36	30.100	956	91 39 36	30.919	1006	101 20 36	31.718
907	82 26 49	30.116	957	91 58 49	30.935	1007	101 40 49	31.733
908	82 44 64	30.133	958	91 77 64	30.952	1008	101 60 64	31.749
909	82 62 81	30.150	959	91 96 81	30.968	1009	101 80 81	31.765
910	82 81 00	30.166	960	92 16 00	30.984	1010	102 01 00	31.780
911	82 99 21	30.183	961	92 35 21	31.000	1011	102 21 21	31.796
912	83 17 44	30.199	962	92 54 44	31.016	1012	102 41 44	31.812
913	83 35 69	30.216	963	92 73 69	31.032	1013	102 61 69	31.828
914	83 53 96	30.232	964	92 92 96	31.048	1014	102 81 96	31.843
915	83 72 25	30.249	965	93 12 25	31.064	1015	103 02 25	31.859
916	83 90 56	30.265	966	93 31 56	31.081	1016	103 22 56	31.875
917	84 08 89	30.282	967	93 50 89	31.097	1017	103 42 89	31.890
918	84 27 24	30.299	968	93 70 24	31.113	1018	103 63 24	31.906
919	84 45 61	30.315	969	93 89 61	31.129	1019	103 83 61	31.922
920	84 64 00	30.332	970	94 09 00	31.145	1020	104 04 00	31.937
921	84 82 41	30.348	971	94 28 41	31.161	1021	104 24 41	31.953
922	85 00 84	30.364	972	94 47 84	31.177	1022	104 44 84	31.969
923	85 19 29	30.381	973	94 67 29	31.193	1023	104 65 29	31.984
924	85 37 76	30.397	974	94 86 76	31.209	1024	104 85 76	32.000
925	85 56 25	30.414	975	95 06 25	31.225	1025	105 06 25	32.016
926	85 74 76	30.430	976	95 25 76	31.241	1026	105 26 76	32.031
927	85 93 29	30.447	977	95 45 29	31.257	1027	105 47 29	32.047
928	86 11 84	30.463	978	95 64 84	31.273	1028	105 67 84	32.062
929	86 30 41	30.480	979	95 84 41	31.289	1029	105 88 41	32.078
930	86 49 00	30.496	980	96 04 00	31.305	1030	106 09 00	32.094
931	86 67 61	30.512	981	96 23 61	31.321	1031	106 29 61	32.109
932	86 86 24	30.529	982	96 43 24	31.337	1032	106 50 24	32.125
933	87 04 89	30.545	983	96 62 89	31.353	1033	106 70 89	32.140
934	87 23 56	30.561	984	96 82 56	31.369	1034	106 91 56	32.156
935	87 42 25	30.578	985	97 02 25	31.385	1035	107 12 25	32.171
936	87 60 96	30.594	986	97 21 96	31.401	1036	107 32 96	32.187
937	87 79 69	30.610	987	97 41 69	31.417	1037	107 53 69	32.202
938	87 98 44	30.627	988	97 61 44	31.432	1038	107 74 44	32.218
939	88 17 21	30.643	989	97 81 21	31.448	1039	107 95 21	32.234
940	88 36 00	30.659	990	98 01 00	31.464	1040	108 16 00	32.249
941	88 54 81	30.676	991	98 20 81	31.480	1041	108 36 81	32.265
942	88 73 64	30.692	992	98 40 64	31.496	1042	108 57 64	32.280
943	88 92 49	30.708	993	98 60 49	31.512	1043	108 78 49	32.296
944	89 11 36	30.725	994	98 80 36	31.528	1044	108 99 36	32.311
945	89 30 25	30.741	995	99 00 25	31.544	1045	109 20 25	32.326
946	89 49 16	30.757	996	99 20 16	31.559	1046	109 41 16	32.342
947	89 68 09	30.773	997	99 40 09	31.575	1047	109 62 09	32.357
948	89 87 04	30.790	998	99 60 04	31.591	1048	109 83 04	32.373
949	90 06 01	30.806	999	99 80 01	31.607	1049	110 04 01	32.388
950	90 25 00	30.822	1000	100 00 00	31.623	1050	110 25 00	32.404

表二

積

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	2
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	3
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	4
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	5
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	6
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	7
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	8
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	10
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	11
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	12
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	13
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	14
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	15
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	16
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	17
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	18
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	19
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	20
21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	21
22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	22
23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	23
24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	24
25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	25
26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	26
27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	27
28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	28
29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	29
30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	30
31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	31
32	64	96	128	160	192	224	256	288	320	32
33	66	99	132	165	198	231	264	297	330	33
34	68	102	136	170	204	238	272	306	340	34
35	70	105	140	175	210	245	280	315	350	35
36	72	108	144	180	216	252	288	324	360	36
37	74	111	148	185	222	259	296	333	370	37
38	76	114	152	190	228	266	304	342	380	38
39	78	117	156	195	234	273	312	351	390	39
40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	40
41	82	123	164	205	246	287	328	369	410	41
42	84	126	168	210	252	294	336	378	420	42
43	86	129	172	215	258	301	344	387	430	43
44	88	132	176	220	264	308	352	396	440	44
45	90	135	180	225	270	315	360	405	450	45
46	92	138	184	230	276	322	368	414	460	46
47	94	141	188	235	282	329	376	423	470	47
48	96	144	192	240	288	336	384	432	480	48
49	98	147	196	245	294	343	392	441	490	49
50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	50

表二 (續)

積

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
51	102	153	204	255	306	357	408	459	510	51
52	104	166	208	260	312	364	416	468	520	52
53	106	159	212	265	318	371	424	477	530	53
54	108	162	216	270	324	378	432	486	540	54
55	110	165	220	275	330	385	440	495	550	55
56	112	168	224	280	336	392	448	504	560	56
57	114	171	228	285	342	399	456	513	570	57
58	116	174	232	290	348	406	464	522	580	58
59	118	177	236	295	354	413	472	531	590	59
60	120	180	240	300	360	420	480	540	600	60
61	122	183	244	305	366	427	488	549	610	61
62	124	186	248	310	372	434	496	558	620	62
63	126	189	252	315	378	441	504	567	630	63
64	128	192	256	320	384	448	512	576	640	64
65	130	195	260	325	390	455	520	585	650	65
66	132	198	264	330	396	462	528	594	660	66
67	134	201	268	335	402	469	536	603	670	67
68	136	204	272	340	408	476	544	612	680	68
69	138	207	276	345	414	483	552	621	690	69
70	140	210	280	350	420	490	560	630	700	70
71	142	213	284	355	426	497	568	639	710	71
72	144	216	288	360	432	504	576	648	720	72
73	146	219	292	365	438	511	584	657	730	73
74	148	222	296	370	444	518	592	666	740	74
75	150	225	300	375	450	525	600	675	750	75
76	152	228	304	380	456	532	608	684	760	76
77	154	231	308	385	462	539	616	693	770	77
78	156	234	312	390	468	546	624	702	780	78
79	158	237	316	395	474	553	632	711	790	79
80	160	240	320	400	480	560	640	720	800	80
81	162	243	324	405	486	567	648	729	810	81
82	164	246	328	410	492	574	656	738	820	82
83	166	249	332	415	498	581	664	747	830	83
84	168	252	336	420	504	588	672	756	840	84
85	170	255	340	425	510	595	680	765	850	85
86	172	258	344	430	516	602	688	774	860	86
87	174	261	348	435	522	609	696	783	870	87
88	176	264	352	440	528	616	704	792	880	88
89	178	267	356	445	534	623	712	801	890	89
90	180	270	360	450	540	630	720	810	900	90
91	182	273	364	455	546	637	728	819	910	91
92	184	276	368	460	552	644	736	828	920	92
93	186	279	372	465	558	651	744	837	930	93
94	188	282	376	470	564	658	752	846	940	94
95	190	285	380	475	570	665	760	855	950	95
96	192	288	384	480	576	672	768	864	960	96
97	194	291	388	485	582	679	776	873	970	97
98	196	294	392	490	588	686	784	882	980	98
99	198	297	396	495	594	693	792	891	990	99

積

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
2	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	2
3	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	3
4	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	4
5	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	5
6	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	6
7	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	7
8	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	8
9	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	9
10	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	10
11	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	11
12	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	12
13	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	13
14	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	14
15	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	15
16	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	16
17	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	17
18	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	18
19	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	19
20	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	20
21	231	252	273	294	315	336	357	378	399	420	21
22	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	22
23	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	23
24	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480	24
25	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	25
26	286	312	338	364	390	416	442	468	494	520	26
27	297	324	351	378	405	432	459	486	513	540	27
28	308	336	364	392	420	448	476	504	532	560	28
29	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	29
30	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	30
31	341	372	403	434	465	496	527	558	589	620	31
32	352	384	416	448	480	512	544	576	608	640	32
33	363	396	429	462	495	528	561	594	627	660	33
34	374	408	442	476	510	544	578	612	646	680	34
35	385	420	455	490	525	560	595	630	665	700	35
36	396	432	468	504	540	576	612	648	684	720	36
37	407	444	481	518	555	592	629	666	703	740	37
38	418	456	494	532	570	608	646	684	722	760	38
39	429	468	507	546	585	624	663	702	741	780	39
40	440	480	520	560	600	640	680	720	760	800	40
41	451	492	533	574	615	656	697	738	779	820	41
42	462	504	546	588	630	672	714	756	798	840	42
43	473	516	559	602	645	688	731	774	817	860	43
44	484	528	572	616	660	704	748	792	836	880	44
45	495	540	585	630	675	720	765	810	855	900	45
46	506	552	598	644	690	736	782	828	874	920	46
47	517	564	611	658	705	752	799	846	893	940	47
48	528	576	624	672	720	768	816	864	912	960	48
49	539	588	637	686	735	784	833	882	931	980	49
50	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000	50

表二 (續)
積

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
51	561	612	663	714	765	816	867	918	969	1020	51
52	572	624	676	728	780	832	884	936	988	1040	52
53	583	636	689	742	795	848	901	954	1007	1060	53
54	594	648	702	756	810	864	918	972	1026	1080	54
55	605	660	715	770	825	880	935	990	1045	1100	55
56	616	672	728	784	840	896	952	1008	1064	1120	56
57	627	684	741	798	855	912	969	1026	1083	1140	57
58	638	696	754	812	870	928	986	1044	1102	1160	58
59	649	708	767	826	885	944	1003	1062	1121	1180	59
60	660	720	780	840	900	960	1020	1080	1140	1200	60
61	671	732	793	854	915	976	1037	1098	1159	1220	61
62	682	744	806	868	930	992	1054	1116	1178	1240	62
63	693	756	819	882	945	1008	1071	1134	1197	1260	63
64	704	768	832	896	960	1024	1088	1152	1216	1280	64
65	715	780	845	910	975	1040	1105	1170	1235	1300	65
66	726	792	858	924	990	1056	1122	1188	1254	1320	66
67	737	804	871	938	1005	1072	1139	1206	1273	1340	67
68	748	816	884	952	1020	1088	1156	1224	1292	1360	68
69	759	828	897	966	1035	1104	1173	1242	1311	1380	69
70	770	840	910	980	1050	1120	1190	1260	1330	1400	70
71	781	852	923	994	1065	1136	1207	1278	1349	1420	71
72	792	864	936	1008	1080	1152	1224	1296	1368	1440	72
73	803	876	949	1022	1095	1168	1241	1314	1387	1460	73
74	814	888	962	1036	1110	1184	1258	1332	1406	1480	74
75	825	900	975	1050	1125	1200	1275	1350	1425	1500	75
76	836	912	988	1064	1140	1216	1292	1368	1444	1520	76
77	847	924	1001	1078	1155	1232	1309	1386	1463	1540	77
78	858	936	1014	1092	1170	1248	1326	1404	1482	1560	78
79	869	948	1027	1106	1185	1264	1343	1422	1501	1580	79
80	880	960	1040	1120	1200	1280	1360	1440	1520	1600	80
81	891	972	1053	1134	1215	1296	1377	1458	1539	1620	81
82	902	984	1066	1148	1230	1312	1394	1476	1558	1640	82
83	913	996	1079	1162	1245	1328	1411	1494	1577	1660	83
84	924	1008	1092	1176	1260	1344	1428	1512	1596	1680	84
85	935	1020	1105	1190	1275	1360	1445	1530	1615	1700	85
86	946	1032	1118	1204	1290	1376	1462	1548	1634	1720	86
87	957	1044	1131	1218	1305	1392	1479	1566	1653	1740	87
88	968	1056	1144	1232	1320	1408	1496	1584	1672	1760	88
89	979	1068	1157	1246	1335	1424	1513	1602	1691	1780	89
90	990	1080	1170	1260	1350	1440	1530	1620	1710	1800	90
91	1001	1092	1183	1274	1365	1456	1547	1638	1729	1820	91
92	1012	1104	1196	1288	1380	1472	1564	1656	1748	1840	92
93	1023	1116	1209	1302	1395	1488	1581	1674	1767	1860	93
94	1034	1128	1222	1316	1410	1504	1598	1692	1786	1880	94
95	1045	1140	1235	1330	1425	1520	1615	1710	1805	1900	95
96	1056	1152	1248	1344	1440	1536	1632	1728	1824	1920	96
97	1067	1164	1261	1358	1455	1552	1649	1746	1843	1940	97
98	1078	1176	1274	1372	1470	1568	1666	1764	1862	1960	98
99	1089	1188	1287	1386	1485	1584	1683	1782	1881	1980	99

表二 (續)
積

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
2	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	2
3	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90	3
4	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	4
5	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	5
6	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	6
7	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210	7
8	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240	8
9	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270	9
10	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	10
11	231	242	253	264	275	286	297	308	319	330	11
12	252	264	276	288	300	312	324	336	348	360	12
13	273	286	299	312	325	338	351	364	377	390	13
14	294	308	322	336	350	364	378	392	406	420	14
15	315	330	345	360	375	390	405	420	435	450	15
16	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480	16
17	357	374	391	408	425	442	459	476	493	510	17
18	378	396	414	432	450	468	486	504	522	540	18
19	399	418	437	456	475	494	513	532	551	570	19
20	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600	20
21	441	462	483	504	525	546	567	588	609	630	21
22	462	484	506	528	550	572	594	616	638	660	22
23	483	506	529	552	575	598	621	644	667	690	23
24	504	528	552	576	600	624	648	672	696	720	24
25	525	550	575	600	625	650	675	700	725	750	25
26	546	572	598	624	650	676	702	728	754	780	26
27	567	594	621	648	675	702	729	756	783	810	27
28	588	616	644	672	700	728	756	784	812	840	28
29	609	638	667	696	725	754	783	812	841	870	29
30	630	660	690	720	750	780	810	840	870	900	30
31	651	682	713	744	775	806	837	868	899	930	31
32	672	704	736	768	800	832	864	896	928	960	32
33	693	726	759	792	825	858	891	924	957	990	33
34	714	748	782	816	850	884	918	952	986	1020	34
35	735	770	805	840	875	910	945	980	1015	1050	35
36	756	792	828	864	900	936	972	1008	1044	1080	36
37	777	814	851	888	925	962	999	1036	1073	1110	37
38	798	836	874	912	950	988	1026	1064	1102	1140	38
39	819	858	897	936	975	1014	1053	1092	1131	1170	39
40	840	880	920	960	1000	1040	1080	1120	1160	1200	40
41	861	902	943	984	1025	1066	1107	1148	1189	1230	41
42	882	924	966	1008	1050	1092	1134	1176	1218	1260	42
43	903	946	989	1032	1075	1118	1161	1204	1247	1290	43
44	924	968	1012	1056	1100	1144	1188	1232	1276	1320	44
45	945	990	1035	1080	1125	1170	1215	1260	1305	1350	45
46	966	1012	1058	1104	1150	1196	1242	1288	1334	1380	46
47	987	1034	1081	1128	1175	1222	1269	1316	1363	1410	47
48	1008	1056	1104	1152	1200	1248	1296	1344	1392	1440	48
49	1029	1078	1127	1176	1225	1274	1323	1372	1421	1470	49
50	1050	1100	1150	1200	1250	1300	1350	1400	1450	1500	50

表二 (續)
積

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
51	1071	1122	1173	1224	1275	1326	1377	1428	1479	1530	51
52	1092	1144	1196	1248	1300	1352	1404	1456	1508	1560	52
53	1113	1166	1219	1272	1325	1378	1431	1484	1537	1590	53
54	1134	1188	1242	1296	1350	1404	1458	1512	1566	1620	54
55	1155	1210	1265	1320	1375	1430	1485	1540	1595	1650	55
56	1176	1232	1288	1344	1400	1456	1512	1568	1624	1680	56
57	1197	1254	1311	1368	1425	1482	1539	1596	1653	1710	57
58	1218	1276	1334	1392	1450	1508	1566	1624	1682	1740	58
59	1239	1298	1357	1416	1475	1534	1593	1652	1711	1770	59
60	1260	1320	1380	1440	1500	1560	1620	1680	1740	1800	60
61	1281	1342	1403	1464	1525	1586	1647	1708	1769	1830	61
62	1302	1364	1426	1488	1550	1612	1674	1736	1798	1860	62
63	1323	1386	1449	1512	1575	1638	1701	1764	1827	1890	63
64	1344	1408	1472	1536	1600	1664	1728	1792	1856	1920	64
65	1365	1430	1495	1560	1625	1690	1755	1820	1885	1950	65
66	1386	1452	1518	1584	1650	1716	1782	1848	1914	1980	66
67	1407	1474	1541	1608	1675	1742	1809	1876	1943	2010	67
68	1428	1496	1564	1632	1700	1768	1836	1904	1972	2040	68
69	1449	1518	1587	1656	1725	1794	1863	1932	2001	2070	69
70	1470	1540	1610	1680	1750	1820	1890	1960	2030	2100	70
71	1491	1562	1633	1704	1775	1846	1917	1988	2059	2130	71
72	1512	1584	1656	1728	1800	1872	1944	2016	2088	2160	72
73	1533	1606	1679	1752	1825	1898	1971	2044	2117	2190	73
74	1554	1628	1702	1776	1850	1924	1998	2072	2146	2220	74
75	1575	1650	1725	1800	1875	1950	2025	2100	2175	2250	75
76	1596	1672	1748	1824	1900	1976	2052	2128	2204	2280	76
77	1617	1694	1771	1848	1925	2002	2079	2156	2233	2310	77
78	1638	1716	1794	1872	1950	2028	2106	2184	2262	2340	78
79	1659	1738	1817	1896	1975	2054	2133	2212	2291	2370	79
80	1680	1760	1840	1920	2000	2080	2160	2240	2320	2400	80
81	1701	1782	1863	1944	2025	2106	2187	2268	2349	2430	81
82	1722	1804	1886	1968	2050	2132	2214	2296	2378	2460	82
83	1743	1826	1909	1992	2075	2158	2241	2324	2407	2490	83
84	1764	1848	1932	2016	2100	2184	2268	2352	2436	2520	84
85	1785	1870	1955	2040	2125	2210	2295	2380	2465	2550	85
86	1806	1892	1978	2064	2150	2236	2322	2408	2494	2580	86
87	1827	1914	2001	2088	2175	2262	2349	2436	2523	2610	87
88	1848	1936	2024	2112	2200	2288	2376	2464	2552	2640	88
89	1869	1958	2047	2136	2225	2314	2403	2492	2581	2670	89
90	1890	1980	2070	2160	2250	2340	2430	2520	2610	2700	90
91	1911	2002	2093	2184	2275	2366	2457	2548	2639	2730	91
92	1932	2024	2116	2208	2300	2392	2484	2576	2668	2760	92
93	1953	2046	2139	2232	2325	2418	2511	2604	2697	2790	93
94	1974	2068	2162	2256	2350	2444	2538	2632	2726	2820	94
95	1995	2090	2185	2280	2375	2470	2565	2660	2755	2850	95
96	2016	2112	2208	2304	2400	2496	2592	2688	2784	2880	96
97	2037	2134	2231	2328	2425	2522	2619	2716	2813	2910	97
98	2058	2156	2254	2352	2450	2548	2646	2744	2842	2940	98
9	2079	2178	2277	2376	2475	2574	2673	2772	2871	2970	99

表二 (續)
積

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
2	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	2
3	93	96	99	102	105	108	111	114	117	120	3
4	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	4
5	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	5
6	186	192	198	204	210	216	222	228	234	240	6
7	217	224	231	238	245	252	259	266	273	280	7
8	248	256	264	272	280	288	296	304	312	320	8
9	279	288	297	306	315	324	333	342	351	360	9
10	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400	10
11	341	352	363	374	385	396	407	418	429	440	11
12	372	384	396	408	420	432	444	456	468	480	12
13	403	416	429	442	455	468	481	494	507	520	13
14	434	448	462	476	490	504	518	532	546	560	14
15	465	480	495	510	525	540	555	570	585	600	15
16	496	512	528	544	560	576	592	608	624	640	16
17	527	544	561	578	595	612	629	646	663	680	17
18	558	576	594	612	630	648	666	684	702	720	18
19	589	608	627	646	665	684	703	722	741	760	19
20	620	640	660	680	700	720	740	760	780	800	20
21	651	672	693	714	735	756	777	798	819	840	21
22	682	704	726	748	770	792	814	836	858	880	22
23	713	736	759	782	805	828	851	874	897	920	23
24	744	768	792	816	840	864	888	912	936	960	24
25	775	800	825	850	875	900	925	950	975	1000	25
26	806	832	858	884	910	936	962	988	1014	1040	26
27	837	864	891	918	945	972	999	1026	1053	1080	27
28	868	896	924	952	980	1008	1036	1064	1092	1120	28
29	899	928	957	986	1015	1044	1073	1102	1131	1160	29
30	930	960	990	1020	1050	1080	1110	1140	1170	1200	30
31	961	992	1023	1054	1085	1116	1147	1178	1209	1240	31
32	992	1024	1056	1088	1120	1152	1184	1216	1248	1280	32
33	1023	1056	1089	1122	1155	1188	1221	1254	1287	1320	33
34	1054	1088	1122	1156	1190	1224	1258	1292	1326	1360	34
35	1085	1120	1155	1190	1225	1260	1295	1330	1365	1400	35
36	1116	1152	1188	1224	1260	1296	1332	1368	1404	1440	36
37	1147	1184	1221	1258	1295	1332	1369	1406	1443	1480	37
38	1178	1216	1254	1292	1330	1368	1406	1444	1482	1520	38
39	1209	1248	1287	1326	1365	1404	1443	1482	1521	1560	39
40	1240	1280	1320	1360	1400	1440	1480	1520	1560	1600	40
41	1271	1312	1353	1394	1435	1476	1517	1558	1599	1640	41
42	1302	1344	1386	1428	1470	1512	1554	1596	1638	1680	42
43	1333	1376	1419	1462	1505	1548	1591	1634	1677	1720	43
44	1364	1408	1452	1496	1540	1584	1628	1672	1716	1760	44
45	1395	1440	1485	1530	1575	1620	1665	1710	1755	1800	45
46	1426	1472	1518	1564	1610	1656	1702	1748	1794	1840	46
47	1457	1504	1551	1598	1645	1692	1739	1786	1833	1880	47
48	1488	1536	1584	1632	1680	1728	1776	1824	1872	1920	48
49	1519	1568	1617	1666	1715	1764	1813	1862	1911	1960	49
50	1550	1600	1650	1700	1750	1800	1850	1900	1950	2000	50

表二 (續)

積

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
51	1581	1632	1683	1734	1785	1836	1887	1938	1989	2040	51
52	1612	1664	1716	1768	1820	1872	1924	1976	2028	2080	52
53	1643	1696	1749	1802	1855	1908	1961	2014	2067	2120	53
54	1674	1728	1782	1836	1890	1944	1998	2052	2106	2160	54
55	1705	1760	1815	1870	1925	1980	2035	2090	2145	2200	55
56	1736	1792	1848	1904	1960	2016	2072	2128	2184	2240	56
57	1767	1824	1881	1938	1995	2052	2109	2166	2223	2280	57
58	1798	1856	1914	1972	2030	2088	2146	2204	2262	2320	58
59	1829	1888	1947	2006	2065	2124	2183	2242	2301	2360	59
60	1860	1920	1980	2040	2100	2160	2220	2280	2340	2400	60
61	1891	1952	2013	2074	2135	2196	2257	2318	2379	2440	61
62	1922	1984	2046	2108	2170	2232	2294	2356	2418	2480	62
63	1953	2016	2079	2142	2205	2268	2331	2394	2457	2520	63
64	1984	2048	2112	2176	2240	2304	2368	2432	2496	2560	64
65	2015	2080	2145	2210	2275	2340	2405	2470	2535	2600	65
66	2046	2112	2178	2244	2310	2376	2442	2508	2574	2640	66
67	2077	2144	2211	2278	2345	2412	2479	2546	2613	2680	67
68	2108	2176	2244	2312	2380	2448	2516	2584	2652	2720	68
69	2139	2208	2277	2346	2415	2484	2553	2622	2691	2760	69
70	2170	2240	2310	2380	2450	2520	2590	2660	2730	2800	70
71	2201	2272	2343	2414	2485	2556	2627	2698	2769	2840	71
72	2232	2304	2376	2448	2520	2592	2664	2736	2808	2880	72
73	2263	2336	2409	2482	2555	2628	2701	2774	2847	2920	73
74	2294	2368	2442	2516	2590	2664	2738	2812	2886	2960	74
75	2325	2400	2475	2550	2625	2700	2775	2850	2925	3000	75
76	2356	2432	2508	2584	2660	2736	2812	2888	2964	3040	76
77	2387	2464	2541	2618	2695	2772	2849	2926	3003	3080	77
78	2418	2496	2574	2652	2730	2808	2886	2964	3042	3120	78
79	2449	2528	2607	2686	2765	2844	2923	3002	3081	3160	79
80	2480	2560	2640	2720	2800	2880	2960	3040	3120	3200	80
81	2511	2592	2673	2754	2835	2916	2997	3078	3159	3240	81
82	2542	2624	2706	2788	2870	2952	3034	3116	3198	3280	82
83	2573	2656	2739	2822	2905	2988	3071	3154	3237	3320	83
84	2604	2688	2772	2856	2940	3024	3108	3192	3276	3360	84
85	2635	2720	2805	2890	2975	3060	3145	3230	3315	3400	85
86	2666	2752	2838	2924	3010	3096	3182	3268	3354	3440	86
87	2697	2784	2871	2958	3045	3132	3219	3306	3393	3480	87
88	2728	2816	2904	2992	3080	3168	3256	3344	3432	3520	88
89	2759	2848	2937	3026	3115	3204	3293	3382	3471	3560	89
90	2790	2880	2970	3060	3150	3240	3330	3420	3510	3600	90
91	2821	2912	3003	3094	3185	3276	3367	3458	3549	3640	91
92	2852	2944	3036	3128	3220	3312	3404	3496	3588	3680	92
93	2883	2976	3069	3162	3255	3348	3441	3534	3627	3720	93
94	2914	3008	3102	3196	3290	3384	3478	3572	3666	3760	94
95	2945	3040	3135	3230	3325	3420	3515	3610	3705	3800	95
96	2976	3072	3168	3264	3360	3456	3552	3648	3744	3840	96
97	3007	3104	3201	3298	3395	3492	3589	3686	3783	3880	97
98	3038	3136	3234	3332	3430	3528	3626	3724	3822	3920	98
99	3069	3168	3267	3366	3465	3564	3663	3762	3861	3960	99

積

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
2	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100	2
3	123	126	129	132	135	138	141	144	147	150	3
4	164	168	172	176	180	184	188	192	196	200	4
5	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	5
6	246	252	258	264	270	276	282	288	294	300	6
7	287	294	301	308	315	322	329	336	343	350	7
8	328	336	344	352	360	368	376	384	392	400	8
9	369	378	387	396	405	414	423	432	441	450	9
10	410	420	430	440	450	460	470	480	490	500	10
11	451	462	473	484	495	506	517	528	539	550	11
12	492	504	516	528	540	552	564	576	588	600	12
13	533	546	559	572	585	598	611	624	637	650	13
14	574	588	602	616	630	644	658	672	686	700	14
15	615	630	645	660	675	690	705	720	735	750	15
16	656	672	688	704	720	736	752	768	784	800	16
17	697	714	731	748	765	782	799	816	833	850	17
18	738	756	774	792	810	828	846	864	882	900	18
19	779	798	817	836	855	874	893	912	931	950	19
20	820	840	860	880	900	920	940	960	980	1000	20
21	861	882	903	924	945	966	987	1008	1029	1050	21
22	902	924	946	968	990	1012	1034	1056	1078	1100	22
23	943	966	989	1012	1035	1058	1081	1104	1127	1150	23
24	984	1008	1032	1056	1080	1104	1128	1152	1176	1200	24
25	1025	1050	1075	1100	1125	1150	1175	1200	1225	1250	25
26	1066	1092	1118	1144	1170	1196	1222	1248	1274	1300	26
27	1107	1134	1161	1188	1215	1242	1269	1296	1323	1350	27
28	1148	1176	1204	1232	1260	1288	1316	1344	1372	1400	28
29	1189	1218	1247	1276	1305	1334	1363	1392	1421	1450	29
30	1230	1260	1290	1320	1350	1380	1410	1440	1470	1500	30
31	1271	1302	1333	1364	1395	1426	1457	1488	1519	1550	31
32	1312	1344	1376	1408	1440	1472	1504	1536	1568	1600	32
33	1353	1386	1419	1452	1485	1518	1551	1584	1617	1650	33
34	1394	1428	1462	1496	1530	1564	1598	1632	1666	1700	34
35	1435	1470	1505	1540	1575	1610	1645	1680	1715	1750	35
36	1476	1512	1548	1584	1620	1656	1692	1728	1764	1800	36
37	1517	1554	1591	1628	1665	1702	1739	1776	1813	1850	37
38	1558	1596	1634	1672	1710	1748	1786	1824	1862	1900	38
39	1599	1638	1677	1716	1755	1794	1833	1872	1911	1950	39
40	1640	1680	1720	1760	1800	1840	1880	1920	1960	2000	40
41	1681	1722	1763	1804	1845	1886	1927	1968	2009	2050	41
42	1722	1764	1806	1848	1890	1932	1974	2016	2058	2100	42
43	1763	1806	1849	1892	1935	1978	2021	2064	2107	2150	43
44	1804	1848	1892	1936	1980	2024	2068	2112	2156	2200	44
45	1845	1890	1935	1980	2025	2070	2115	2160	2205	2250	45
46	1886	1932	1978	2024	2070	2116	2162	2208	2254	2300	46
47	1927	1974	2021	2068	2115	2162	2209	2256	2303	2350	47
48	1968	2016	2064	2112	2160	2208	2256	2304	2352	2400	48
49	2009	2058	2107	2156	2205	2254	2303	2352	2401	2450	49
50	2050	2100	2150	2200	2250	2300	2350	2400	2450	2500	50

表二 (續)
積

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
51	2091	2142	2193	2244	2295	2346	2397	2448	2499	2550	51
52	2132	2184	2236	2288	2340	2392	2444	2496	2548	2600	52
53	2173	2226	2279	2332	2385	2438	2491	2544	2597	2650	53
54	2214	2268	2322	2376	2430	2484	2538	2592	2646	2700	54
55	2255	2310	2365	2420	2475	2530	2585	2640	2695	2750	55
56	2296	2352	2408	2464	2520	2576	2632	2688	2744	2800	56
57	2337	2394	2451	2508	2565	2622	2679	2736	2793	2850	57
58	2378	2436	2494	2552	2610	2668	2726	2784	2842	2900	58
59	2419	2478	2537	2596	2655	2714	2773	2832	2891	2950	59
60	2460	2520	2580	2640	2700	2760	2820	2880	2940	3000	60
61	2501	2562	2623	2684	2745	2806	2867	2928	2989	3050	61
62	2542	2604	2666	2728	2790	2852	2914	2976	3038	3100	62
63	2583	2646	2709	2772	2835	2898	2961	3024	3087	3150	63
64	2624	2688	2752	2816	2880	2944	3008	3072	3136	3200	64
65	2665	2730	2795	2860	2925	2990	3055	3120	3185	3250	65
66	2706	2772	2838	2904	2970	3036	3102	3168	3234	3300	66
67	2747	2814	2881	2948	3015	3082	3149	3216	3283	3350	67
68	2788	2856	2924	2992	3060	3128	3196	3264	3332	3400	68
69	2829	2898	2967	3036	3105	3174	3243	3312	3381	3450	69
70	2870	2940	3010	3080	3150	3220	3290	3360	3430	3500	70
71	2911	2982	3053	3124	3195	3266	3337	3408	3479	3550	71
72	2952	3024	3096	3168	3240	3312	3384	3456	3528	3600	72
73	2993	3066	3139	3212	3285	3358	3431	3504	3577	3650	73
74	3034	3108	3182	3256	3330	3404	3478	3552	3626	3700	74
75	3075	3150	3225	3300	3375	3450	3525	3600	3675	3750	75
76	3116	3192	3268	3344	3420	3496	3572	3648	3724	3800	76
77	3157	3234	3311	3388	3465	3542	3619	3696	3773	3850	77
78	3198	3276	3354	3432	3510	3588	3666	3744	3822	3900	78
79	3239	3318	3397	3476	3555	3634	3713	3792	3871	3950	79
80	3280	3360	3440	3520	3600	3680	3760	3840	3920	4000	80
81	3321	3402	3483	3564	3645	3726	3807	3888	3969	4050	81
82	3362	3444	3526	3608	3690	3772	3854	3936	4018	4100	82
83	3403	3486	3569	3652	3735	3818	3901	3984	4067	4150	83
84	3444	3528	3612	3696	3780	3864	3948	4032	4116	4200	84
85	3485	3570	3655	3740	3825	3910	3995	4080	4165	4250	85
86	3526	3612	3698	3784	3870	3956	4042	4128	4214	4300	86
87	3567	3654	3741	3828	3915	4002	4089	4176	4263	4350	87
88	3608	3696	3784	3872	3960	4048	4136	4224	4312	4400	88
89	3649	3738	3827	3916	4005	4094	4183	4272	4361	4450	89
90	3690	3780	3870	3960	4050	4140	4230	4320	4410	4500	90
91	3731	3822	3913	4004	4095	4186	4277	4368	4459	4550	91
92	3772	3864	3956	4048	4140	4232	4324	4416	4508	4600	92
93	3813	3906	3999	4092	4185	4278	4371	4464	4557	4650	93
94	3854	3948	4042	4136	4230	4324	4418	4512	4606	4700	94
95	3895	3990	4085	4180	4275	4370	4465	4560	4655	4750	95
96	3936	4032	4128	4224	4320	4416	4512	4608	4704	4800	96
97	3977	4074	4171	4268	4365	4462	4559	4656	4753	4850	97
98	4018	4116	4214	4312	4410	4508	4606	4704	4802	4900	98
99	4059	4158	4257	4356	4455	4554	4653	4752	4851	4950	99

表二 (續)
積

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
2	102	104	106	108	110	112	114	116	118	120	2
3	153	156	159	162	165	168	171	174	177	180	3
4	204	208	212	216	220	224	228	232	236	240	4
5	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	5
6	306	312	318	324	330	336	342	348	354	360	6
7	357	364	371	378	385	392	399	406	413	420	7
8	408	416	424	432	440	448	456	464	472	480	8
9	459	468	477	486	495	504	513	522	531	540	9
10	510	520	530	540	550	560	570	580	590	600	10
11	561	572	583	594	605	616	627	638	649	660	11
12	612	624	636	648	660	672	684	696	708	720	12
13	663	676	689	702	715	728	741	754	767	780	13
14	714	728	742	756	770	784	798	812	826	840	14
15	765	780	795	810	825	840	855	870	885	900	15
16	816	832	848	864	880	896	912	928	944	960	16
17	867	884	901	918	935	952	969	986	1003	1020	17
18	918	936	954	972	990	1008	1026	1044	1062	1080	18
19	969	988	1007	1026	1045	1064	1083	1102	1121	1140	19
20	1020	1040	1060	1080	1100	1120	1140	1160	1180	1200	20
21	1071	1092	1113	1134	1155	1176	1197	1218	1239	1260	21
22	1122	1144	1166	1188	1210	1232	1254	1276	1298	1320	22
23	1173	1196	1219	1242	1265	1288	1311	1334	1357	1380	23
24	1224	1248	1272	1296	1320	1344	1368	1392	1416	1440	24
25	1275	1300	1325	1350	1375	1400	1425	1450	1475	1500	25
26	1326	1352	1378	1404	1430	1456	1482	1508	1534	1560	26
27	1377	1404	1431	1458	1485	1512	1539	1566	1593	1620	27
28	1428	1456	1484	1512	1540	1568	1596	1624	1652	1680	28
29	1479	1508	1537	1566	1595	1624	1653	1682	1711	1740	29
30	1530	1560	1590	1620	1650	1680	1710	1740	1770	1800	30
31	1581	1612	1643	1674	1705	1736	1767	1798	1829	1860	31
32	1632	1664	1696	1728	1760	1792	1824	1856	1888	1920	32
33	1683	1716	1749	1782	1815	1848	1881	1914	1947	1980	33
34	1734	1768	1802	1836	1870	1904	1938	1972	2006	2040	34
35	1785	1820	1855	1890	1925	1960	1995	2030	2065	2100	35
36	1836	1872	1908	1944	1980	2016	2052	2088	2124	2160	36
37	1887	1924	1961	1998	2035	2072	2109	2146	2183	2220	37
38	1938	1976	2014	2052	2090	2128	2166	2204	2242	2280	38
39	1989	2028	2067	2106	2145	2184	2223	2262	2301	2340	39
40	2040	2080	2120	2160	2200	2240	2280	2320	2360	2400	40
41	2091	2132	2173	2214	2255	2296	2337	2378	2419	2460	41
42	2142	2184	2226	2268	2310	2352	2394	2436	2478	2520	42
43	2193	2236	2279	2322	2365	2408	2451	2494	2537	2580	43
44	2244	2288	2332	2376	2420	2464	2508	2552	2596	2640	44
45	2295	2340	2385	2430	2475	2520	2565	2610	2655	2700	45
46	2346	2392	2438	2484	2530	2576	2622	2668	2714	2760	46
47	2397	2444	2491	2538	2585	2632	2679	2726	2773	2820	47
48	2448	2496	2544	2592	2640	2688	2736	2784	2832	2880	48
49	2499	2548	2597	2646	2695	2744	2793	2842	2891	2940	49
50	2550	2600	2650	2700	2750	2800	2850	2900	2950	3000	50

表二 (續)
積

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
51	2601	2652	2703	2754	2805	2856	2907	2958	3009	3060	51
52	2652	2704	2756	2808	2860	2912	2964	3016	3068	3120	52
53	2703	2756	2809	2862	2915	2968	3021	3074	3127	3180	53
54	2754	2808	2862	2916	2970	3024	3078	3132	3186	3240	54
55	2805	2860	2915	2970	3025	3080	3135	3190	3245	3300	55
56	2856	2912	2968	3024	3080	3136	3192	3248	3304	3360	56
57	2907	2964	3021	3078	3135	3192	3249	3306	3363	3420	57
58	2958	3016	3074	3132	3190	3248	3306	3364	3422	3480	58
59	3009	3068	3127	3186	3245	3304	3363	3422	3481	3540	59
60	3060	3120	3180	3240	3300	3360	3420	3480	3540	3600	60
61	3111	3172	3233	3294	3355	3416	3477	3538	3599	3660	61
62	3162	3224	3286	3348	3410	3472	3534	3596	3658	3720	62
63	3213	3276	3339	3402	3465	3528	3591	3654	3717	3780	63
64	3264	3328	3392	3456	3520	3584	3648	3712	3776	3840	64
65	3315	3380	3445	3510	3575	3640	3705	3770	3835	3900	65
66	3366	3432	3498	3564	3630	3696	3762	3828	3894	3960	66
67	3417	3484	3551	3618	3685	3752	3819	3886	3953	4020	67
68	3468	3536	3604	3672	3740	3808	3876	3944	4012	4080	68
69	3519	3588	3657	3726	3795	3864	3933	4002	4071	4140	69
70	3570	3640	3710	3780	3850	3920	3990	4060	4130	4200	70
71	3621	3692	3763	3834	3905	3976	4047	4118	4189	4260	71
72	3672	3744	3816	3888	3960	4032	4104	4176	4248	4320	72
73	3723	3796	3869	3942	4015	4088	4161	4234	4307	4380	73
74	3774	3848	3922	3996	4070	4144	4218	4292	4366	4440	74
75	3825	3900	3975	4050	4125	4200	4275	4350	4425	4500	75
76	3876	3952	4028	4104	4180	4256	4332	4408	4484	4560	76
77	3927	4004	4081	4158	4235	4312	4389	4466	4543	4620	77
78	3978	4056	4134	4212	4290	4368	4446	4524	4602	4680	78
79	4029	4108	4187	4266	4345	4424	4503	4582	4661	4740	79
80	4080	4160	4240	4320	4400	4480	4560	4640	4720	4800	80
81	4131	4212	4293	4374	4455	4536	4617	4698	4779	4860	81
82	4182	4264	4346	4428	4510	4592	4674	4756	4838	4920	82
83	4233	4316	4399	4482	4565	4648	4731	4814	4897	4980	83
84	4284	4368	4452	4536	4620	4704	4788	4872	4956	5040	84
85	4335	4420	4505	4590	4675	4760	4845	4930	5015	5100	85
86	4386	4472	4558	4644	4730	4816	4902	4988	5074	5160	86
87	4437	4524	4611	4698	4785	4872	4959	5046	5133	5220	87
88	4488	4576	4664	4752	4840	4928	5016	5104	5192	5280	88
89	4539	4628	4717	4806	4895	4984	5073	5162	5251	5340	89
90	4590	4680	4770	4860	4950	5040	5130	5220	5310	5400	90
91	4641	4732	4823	4914	5005	5096	5187	5278	5369	5460	91
92	4692	4784	4876	4968	5060	5152	5244	5336	5428	5520	92
93	4743	4836	4929	5022	5115	5208	5301	5394	5487	5580	93
94	4794	4888	4982	5076	5170	5264	5358	5452	5546	5640	94
95	4845	4940	5035	5130	5225	5320	5415	5510	5605	5700	95
96	4896	4992	5088	5184	5280	5376	5472	5568	5664	5760	96
97	4947	5044	5141	5238	5335	5432	5529	5626	5723	5820	97
98	4998	5096	5194	5292	5390	5488	5586	5684	5782	5880	98
99	5049	5148	5247	5346	5445	5544	5643	5742	5841	5940	99

表二 (續)
積

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
2	122	124	126	128	130	132	134	136	138	140	2
3	183	186	189	192	195	198	201	204	207	210	3
4	244	248	252	256	260	264	268	272	276	280	4
5	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	5
6	366	372	378	384	390	396	402	408	414	420	6
7	427	434	441	448	455	462	469	476	483	490	7
8	488	496	504	512	520	528	536	544	552	560	8
9	549	558	567	576	585	594	603	612	621	630	9
10	610	620	630	640	650	660	670	680	690	700	10
11	671	682	693	704	715	726	737	748	759	770	11
12	732	744	756	768	780	792	804	816	828	840	12
13	793	806	819	832	845	858	871	884	897	910	13
14	854	868	882	896	910	924	938	952	966	980	14
15	915	930	945	960	975	990	1005	1020	1035	1050	15
16	976	992	1008	1024	1040	1056	1072	1088	1104	1120	16
17	1037	1054	1071	1088	1105	1122	1139	1156	1173	1190	17
18	1098	1116	1134	1152	1170	1188	1206	1224	1242	1260	18
19	1159	1178	1197	1216	1235	1254	1273	1292	1311	1330	19
20	1220	1240	1260	1280	1300	1320	1340	1360	1380	1400	20
21	1281	1302	1323	1344	1365	1386	1407	1428	1449	1470	21
22	1342	1364	1386	1408	1430	1452	1474	1496	1518	1540	22
23	1403	1426	1449	1472	1495	1518	1541	1564	1587	1610	23
24	1464	1488	1512	1536	1560	1584	1608	1632	1656	1680	24
25	1525	1550	1575	1600	1625	1650	1675	1700	1725	1750	25
26	1586	1612	1638	1664	1690	1716	1742	1768	1794	1820	26
27	1647	1674	1701	1728	1755	1782	1809	1836	1863	1890	27
28	1708	1736	1764	1792	1820	1848	1876	1904	1932	1960	28
29	1769	1798	1827	1856	1885	1914	1943	1972	2001	2030	29
30	1830	1860	1890	1920	1950	1980	2010	2040	2070	2100	30
31	1891	1922	1953	1984	2015	2046	2077	2108	2139	2170	31
32	1952	1984	2016	2048	2080	2112	2144	2176	2208	2240	32
33	2013	2046	2079	2112	2145	2178	2211	2244	2277	2310	33
34	2074	2108	2142	2176	2210	2244	2278	2312	2346	2380	34
35	2135	2170	2205	2240	2275	2310	2345	2380	2415	2450	35
36	2196	2232	2268	2304	2340	2376	2412	2448	2484	2520	36
37	2257	2294	2331	2368	2405	2442	2479	2516	2553	2590	37
38	2318	2356	2394	2432	2470	2508	2546	2584	2622	2660	38
39	2379	2418	2457	2496	2535	2574	2613	2652	2691	2730	39
40	2440	2480	2520	2560	2600	2640	2680	2720	2760	2800	40
41	2501	2542	2583	2624	2665	2706	2747	2788	2829	2870	41
42	2562	2604	2646	2688	2730	2772	2814	2856	2898	2940	42
43	2623	2666	2709	2752	2795	2838	2881	2924	2967	3010	43
44	2684	2728	2772	2816	2860	2904	2948	2992	3036	3080	44
45	2745	2790	2835	2880	2925	2970	3015	3060	3105	3150	45
46	2806	2852	2898	2944	2990	3036	3082	3128	3174	3220	46
47	2867	2914	2961	3008	3055	3102	3149	3196	3243	3290	47
48	2928	2976	3024	3072	3120	3168	3216	3264	3312	3360	48
49	2989	3038	3087	3136	3185	3234	3283	3332	3381	3430	49
50	3050	3100	3150	3200	3250	3300	3350	3400	3450	3500	50

表二 (續)
積

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
51	3111	3162	3213	3264	3315	3366	3417	3468	3519	3570	51
52	3172	3224	3276	3328	3380	3432	3484	3536	3588	3640	52
53	3233	3286	3339	3392	3445	3498	3551	3604	3657	3710	53
54	3294	3348	3402	3456	3510	3564	3618	3672	3726	3780	54
55	3355	3410	3465	3520	3575	3630	3685	3740	3795	3850	55
56	3416	3472	3528	3584	3640	3696	3752	3808	3864	3920	56
57	3477	3534	3591	3648	3705	3762	3819	3876	3933	3990	57
58	3538	3596	3654	3712	3770	3828	3886	3944	4002	4060	58
59	3599	3658	3717	3776	3835	3894	3953	4012	4071	4130	59
60	3660	3720	3780	3840	3900	3960	4020	4080	4140	4200	60
61	3721	3782	3843	3904	3965	4026	4087	4148	4209	4270	61
62	3782	3844	3906	3968	4030	4092	4154	4216	4278	4340	62
63	3843	3906	3969	4032	4095	4158	4221	4284	4347	4410	63
64	3904	3968	4032	4096	4160	4224	4288	4352	4416	4480	64
65	3965	4030	4095	4160	4225	4290	4355	4420	4485	4550	65
66	4026	4092	4158	4224	4290	4356	4422	4488	4554	4620	66
67	4087	4154	4221	4288	4355	4422	4489	4556	4623	4690	67
68	4148	4216	4284	4352	4420	4488	4556	4624	4692	4760	68
69	4209	4278	4347	4416	4485	4554	4623	4692	4761	4830	69
70	4270	4340	4410	4480	4550	4620	4690	4760	4830	4900	70
71	4331	4402	4473	4544	4615	4686	4757	4828	4899	4970	71
72	4392	4464	4536	4608	4680	4752	4824	4896	4968	5040	72
73	4453	4526	4599	4672	4745	4818	4891	4964	5037	5110	73
74	4514	4588	4662	4736	4810	4884	4958	5032	5106	5180	74
75	4575	4650	4725	4800	4875	4950	5025	5100	5175	5250	75
76	4636	4712	4788	4864	4940	5016	5092	5168	5244	5320	76
77	4697	4774	4851	4928	5005	5082	5159	5236	5313	5390	77
78	4758	4836	4914	4992	5070	5148	5226	5304	5382	5460	78
79	4819	4898	4977	5056	5135	5214	5293	5372	5451	5530	79
80	4880	4960	5040	5120	5200	5280	5360	5440	5520	5600	80
81	4941	5022	5103	5184	5265	5346	5427	5508	5589	5670	81
82	5002	5084	5166	5248	5330	5412	5494	5576	5658	5740	82
83	5063	5146	5229	5312	5395	5478	5561	5644	5727	5810	83
84	5124	5208	5292	5376	5460	5544	5628	5712	5796	5880	84
85	5185	5270	5355	5440	5525	5610	5695	5780	5865	5950	85
86	5246	5332	5418	5504	5590	5676	5762	5848	5934	6020	86
87	5307	5394	5481	5568	5655	5742	5829	5916	6003	6090	87
88	5368	5456	5544	5632	5720	5808	5896	5984	6072	6160	88
89	5429	5518	5607	5696	5785	5874	5963	6052	6141	6230	89
90	5490	5580	5670	5760	5850	5940	6030	6120	6210	6300	90
91	5551	5642	5733	5824	5915	6006	6097	6188	6279	6370	91
92	5612	5704	5796	5888	5980	6072	6164	6256	6348	6440	92
93	5673	5766	5859	5952	6045	6138	6231	6324	6417	6510	93
94	5734	5828	5922	6016	6110	6204	6298	6392	6486	6580	94
95	5795	5890	5985	6080	6175	6270	6365	6460	6555	6650	95
96	5856	5952	6048	6144	6240	6336	6432	6528	6624	6720	96
97	5917	6014	6111	6208	6305	6402	6499	6596	6693	6790	97
98	5978	6076	6174	6272	6370	6468	6566	6664	6762	6860	98
99	6039	6138	6237	6336	6435	6534	6633	6732	6831	6930	99

積

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
2	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160	2
3	213	216	219	222	225	228	231	234	237	240	3
4	284	288	292	296	300	304	308	312	316	320	4
5	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	5
6	426	432	438	444	450	456	462	468	474	480	6
7	497	504	511	518	525	532	539	546	553	560	7
8	568	576	584	592	600	608	616	624	632	640	8
9	639	648	657	666	675	684	693	702	711	720	9
10	710	720	730	740	750	760	770	780	790	800	10
11	781	792	803	814	825	836	847	858	869	880	11
12	852	864	876	888	900	912	924	936	948	960	12
13	923	936	949	962	975	988	1001	1014	1027	1040	13
14	994	1008	1022	1036	1050	1064	1078	1092	1106	1120	14
15	1065	1080	1095	1110	1125	1140	1155	1170	1185	1200	15
16	1136	1152	1168	1184	1200	1216	1232	1248	1264	1280	16
17	1207	1224	1241	1258	1275	1292	1309	1326	1343	1360	17
18	1278	1296	1314	1332	1350	1368	1386	1404	1422	1440	18
19	1349	1368	1387	1406	1425	1444	1463	1482	1501	1520	19
20	1420	1440	1460	1480	1500	1520	1540	1560	1580	1600	20
21	1491	1512	1533	1554	1575	1596	1617	1638	1659	1680	21
22	1562	1584	1606	1628	1650	1672	1694	1716	1738	1760	22
23	1633	1656	1679	1702	1725	1748	1771	1794	1817	1840	23
24	1704	1728	1752	1776	1800	1824	1848	1872	1896	1920	24
25	1775	1800	1825	1850	1875	1900	1925	1950	1975	2000	25
26	1846	1872	1898	1924	1950	1976	2002	2028	2054	2080	26
27	1917	1944	1971	1998	2025	2052	2079	2106	2133	2160	27
28	1988	2016	2044	2072	2100	2128	2156	2184	2212	2240	28
29	2059	2088	2117	2146	2175	2204	2233	2262	2291	2320	29
30	2130	2160	2190	2220	2250	2280	2310	2340	2370	2400	30
31	2201	2232	2263	2294	2325	2356	2387	2418	2449	2480	31
32	2272	2304	2336	2368	2400	2432	2464	2496	2528	2560	32
33	2343	2376	2409	2442	2475	2508	2541	2574	2607	2640	33
34	2414	2448	2482	2516	2550	2584	2618	2652	2686	2720	34
35	2485	2520	2555	2590	2625	2660	2695	2730	2765	2800	35
36	2556	2592	2628	2664	2700	2736	2772	2808	2844	2880	36
37	2627	2664	2701	2738	2775	2812	2849	2886	2923	2960	37
38	2698	2736	2774	2812	2850	2888	2926	2964	3002	3040	38
39	2769	2808	2847	2886	2925	2964	3003	3042	3081	3120	39
40	2840	2880	2920	2960	3000	3040	3080	3120	3160	3200	40
41	2911	2952	2993	3034	3075	3116	3157	3198	3239	3280	41
42	2982	3024	3066	3108	3150	3192	3234	3276	3318	3360	42
43	3053	3096	3139	3182	3225	3268	3311	3354	3397	3440	43
44	3124	3168	3212	3256	3300	3344	3388	3432	3476	3520	44
45	3195	3240	3285	3330	3375	3420	3465	3510	3555	3600	45
46	3266	3312	3358	3404	3450	3496	3542	3588	3634	3680	46
47	3337	3384	3431	3478	3525	3572	3619	3666	3713	3760	47
48	3408	3456	3504	3552	3600	3648	3696	3744	3792	3840	48
49	3479	3528	3577	3626	3675	3724	3773	3822	3871	3920	49
50	3550	3600	3650	3700	3750	3800	3850	3900	3950	4000	50

表二 (續)
積

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
51	3621	3672	3723	3774	3825	3876	3927	3978	4029	4080	51
52	3692	3744	3796	3848	3900	3952	4004	4056	4108	4160	52
53	3763	3816	3869	3922	3975	4028	4081	4134	4187	4240	53
54	3834	3888	3942	3996	4050	4104	4158	4212	4266	4320	54
55	3905	3960	4015	4070	4125	4180	4235	4290	4345	4400	55
56	3976	4032	4088	4144	4200	4256	4312	4368	4424	4480	56
57	4047	4104	4161	4218	4275	4332	4389	4446	4503	4560	57
58	4118	4176	4234	4292	4350	4408	4466	4524	4582	4640	58
59	4189	4248	4307	4366	4425	4484	4543	4602	4661	4720	59
60	4260	4320	4380	4440	4500	4560	4620	4680	4740	4800	60
61	4331	4392	4453	4514	4575	4636	4697	4758	4819	4880	61
62	4402	4464	4526	4588	4650	4712	4774	4830	4898	4960	62
63	4473	4536	4599	4662	4725	4788	4851	4914	4977	5040	63
64	4544	4608	4672	4736	4800	4864	4928	4992	5056	5120	64
65	4615	4680	4745	4810	4875	4940	5005	5070	5135	5200	65
66	4686	4752	4818	4884	4950	5016	5082	5148	5214	5280	66
67	4757	4824	4891	4958	5025	5092	5159	5226	5293	5360	67
68	4828	4896	4964	5032	5100	5168	5236	5304	5372	5440	68
69	4899	4968	5037	5106	5175	5244	5313	5382	5451	5520	69
70	4970	5040	5110	5180	5250	5320	5390	5460	5530	5600	70
71	5041	5112	5183	5254	5325	5396	5467	5538	5609	5680	71
72	5112	5184	5256	5328	5400	5472	5544	5616	5688	5760	72
73	5183	5256	5329	5402	5475	5548	5621	5694	5767	5840	73
74	5254	5328	5402	5476	5550	5624	5698	5772	5846	5920	74
75	5325	5400	5475	5550	5625	5700	5775	5850	5925	6000	75
76	5396	5472	5548	5624	5700	5776	5852	5928	6004	6080	76
77	5467	5544	5621	5698	5775	5852	5929	6006	6083	6160	77
78	5538	5616	5694	5772	5850	5928	6006	6084	6162	6240	78
79	5609	5688	5767	5846	5925	6004	6083	6162	6241	6320	79
80	5680	5760	5840	5920	6000	6080	6160	6240	6320	6400	80
81	5751	5832	5913	5994	6075	6156	6237	6318	6399	6480	81
82	5822	5904	5986	6068	6150	6232	6314	6396	6478	6560	82
83	5893	5976	6059	6142	6225	6308	6391	6474	6557	6640	83
84	5964	6048	6132	6216	6300	6384	6468	6552	6636	6720	84
85	6035	6120	6205	6290	6375	6460	6545	6630	6715	6800	85
86	6106	6192	6278	6364	6450	6536	6622	6708	6794	6880	86
87	6177	6264	6351	6438	6525	6612	6699	6786	6873	6960	87
88	6248	6336	6424	6512	6600	6688	6776	6864	6952	7040	88
89	6319	6408	6497	6586	6675	6764	6853	6942	7031	7120	89
90	6390	6480	6570	6660	6750	6840	6930	7020	7110	7200	90
91	6461	6552	6643	6734	6825	6916	7007	7098	7189	7280	91
92	6532	6624	6716	6808	6900	6992	7084	7176	7268	7360	92
93	6603	6696	6789	6882	6975	7068	7161	7254	7347	7440	93
94	6674	6768	6862	6956	7050	7144	7238	7332	7426	7520	94
95	6745	6840	6935	7030	7125	7220	7315	7410	7505	7600	95
96	6816	6912	7008	7104	7200	7296	7392	7488	7584	7680	96
97	6887	6984	7081	7178	7275	7372	7469	7566	7663	7760	97
98	6958	7056	7154	7252	7350	7448	7546	7644	7742	7840	98
99	7029	7128	7227	7326	7425	7524	7623	7722	7821	7920	99

表二 (續)
積

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
2	162	164	166	168	170	172	174	176	178	180	2
3	243	246	249	252	255	258	261	264	267	270	3
4	324	328	332	336	340	344	348	352	356	360	4
5	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	5
6	486	492	498	504	510	516	522	528	534	540	6
7	567	574	581	588	595	602	609	616	623	630	7
8	648	656	664	672	680	688	696	704	712	720	8
9	729	738	747	756	765	774	783	792	801	810	9
10	810	820	830	840	850	860	870	880	890	900	10
11	891	902	913	924	935	946	957	968	979	990	11
12	972	984	996	1008	1020	1032	1044	1056	1068	1080	12
13	1053	1066	1079	1092	1105	1118	1131	1144	1157	1170	13
14	1134	1148	1162	1176	1190	1204	1218	1232	1246	1260	14
15	1215	1230	1245	1260	1275	1290	1305	1320	1335	1350	15
16	1296	1312	1328	1344	1360	1376	1392	1408	1424	1440	16
17	1377	1394	1411	1428	1445	1462	1479	1496	1513	1530	17
18	1458	1476	1494	1512	1530	1548	1566	1584	1602	1620	18
19	1539	1558	1577	1596	1615	1634	1653	1672	1691	1710	19
20	1620	1640	1660	1680	1700	1720	1740	1760	1780	1800	20
21	1701	1722	1743	1764	1785	1806	1827	1848	1869	1890	21
22	1782	1804	1826	1848	1870	1892	1914	1936	1958	1980	22
23	1863	1886	1909	1932	1955	1978	2001	2024	2047	2070	23
24	1944	1968	1992	2016	2040	2064	2088	2112	2136	2160	24
25	2025	2050	2075	2100	2125	2150	2175	2200	2225	2250	25
26	2106	2132	2158	2184	2210	2236	2262	2288	2314	2340	26
27	2187	2214	2241	2268	2295	2322	2349	2376	2403	2430	27
28	2268	2296	2324	2352	2380	2408	2436	2464	2492	2520	28
29	2349	2378	2407	2436	2465	2494	2523	2552	2581	2610	29
30	2430	2460	2490	2520	2550	2580	2610	2640	2670	2700	30
31	2511	2542	2573	2604	2635	2666	2697	2728	2759	2790	31
32	2592	2624	2656	2688	2720	2752	2784	2816	2848	2880	32
33	2673	2706	2739	2772	2805	2838	2871	2904	2937	2970	33
34	2754	2788	2822	2856	2890	2924	2958	2992	3026	3060	34
35	2835	2870	2905	2940	2975	3010	3045	3080	3115	3150	35
36	2916	2952	2988	3024	3060	3096	3132	3168	3204	3240	36
37	2997	3034	3071	3108	3145	3182	3219	3256	3293	3330	37
38	3078	3116	3154	3192	3230	3268	3306	3344	3382	3420	38
39	3159	3198	3237	3276	3315	3354	3393	3432	3471	3510	39
40	3240	3280	3320	3360	3400	3440	3480	3520	3560	3600	40
41	3321	3362	3403	3444	3485	3526	3567	3608	3649	3690	41
42	3402	3444	3486	3528	3570	3612	3654	3696	3738	3780	42
43	3483	3526	3569	3612	3655	3698	3741	3784	3827	3870	43
44	3564	3608	3652	3696	3740	3784	3828	3872	3916	3960	44
45	3645	3690	3735	3780	3825	3870	3915	3960	4005	4050	45
46	3726	3772	3818	3864	3910	3956	4002	4048	4094	4140	46
47	3807	3854	3901	3948	3995	4042	4089	4136	4183	4230	47
48	3888	3936	3984	4032	4080	4128	4176	4224	4272	4320	48
49	3969	4018	4067	4116	4165	4214	4263	4312	4361	4410	49
50	4050	4100	4150	4200	4250	4300	4350	4400	4450	4500	50

表二 (續)

積

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
51	4131	4182	4233	4284	4335	4386	4437	4488	4539	4590	51
52	4212	4264	4316	4368	4420	4472	4524	4576	4628	4680	52
53	4293	4346	4399	4452	4505	4558	4611	4664	4717	4770	53
54	4374	4428	4482	4536	4590	4644	4698	4752	4806	4860	54
55	4455	4510	4565	4620	4675	4730	4785	4840	4895	4950	55
56	4536	4592	4648	4704	4760	4816	4872	4928	4984	5040	56
57	4617	4674	4731	4788	4845	4902	4959	5016	5073	5130	57
58	4698	4756	4814	4872	4930	4988	5046	5104	5162	5220	58
59	4779	4838	4897	4956	5015	5074	5133	5192	5251	5310	59
60	4860	4920	4980	5040	5100	5160	5220	5280	5340	5400	60
61	4941	5002	5063	5124	5185	5246	5307	5368	5429	5490	61
62	5022	5084	5146	5208	5270	5332	5394	5456	5518	5580	62
63	5103	5166	5229	5292	5355	5418	5481	5544	5607	5670	63
64	5184	5248	5312	5376	5440	5504	5568	5632	5696	5760	64
65	5265	5330	5395	5460	5525	5590	5655	5720	5785	5850	65
66	5346	5412	5478	5544	5610	5676	5742	5808	5874	5940	66
67	5427	5494	5561	5628	5695	5762	5829	5896	5963	6030	67
68	5508	5576	5644	5712	5780	5848	5916	5984	6052	6120	68
69	5589	5658	5727	5796	5865	5934	6003	6072	6141	6210	69
70	5670	5740	5810	5880	5950	6020	6090	6160	6230	6300	70
71	5751	5822	5893	5964	6035	6106	6177	6248	6319	6390	71
72	5832	5904	5976	6048	6120	6192	6264	6336	6408	6480	72
73	5913	5986	6059	6132	6205	6278	6351	6424	6497	6570	73
74	5994	6068	6142	6216	6290	6364	6438	6512	6586	6660	74
75	6075	6150	6225	6300	6375	6450	6525	6600	6675	6750	75
76	6156	6232	6308	6384	6460	6536	6612	6688	6764	6840	76
77	6237	6314	6391	6468	6545	6622	6699	6776	6853	6930	77
78	6318	6396	6474	6552	6630	6708	6786	6864	6942	7020	78
79	6399	6478	6557	6636	6715	6794	6873	6952	7031	7110	79
80	6480	6560	6640	6720	6800	6880	6960	7040	7120	7200	80
81	6561	6642	6723	6804	6885	6966	7047	7128	7209	7290	81
82	6642	6724	6806	6888	6970	7052	7134	7216	7298	7380	82
83	6723	6806	6889	6972	7055	7138	7221	7304	7387	7470	83
84	6804	6888	6972	7056	7140	7224	7308	7392	7476	7560	84
85	6885	6970	7055	7140	7225	7310	7395	7480	7565	7650	85
86	6966	7052	7138	7224	7310	7396	7482	7568	7654	7740	86
87	7047	7134	7221	7308	7395	7482	7569	7656	7743	7830	87
88	7128	7216	7304	7392	7480	7568	7656	7744	7832	7920	88
89	7209	7298	7387	7476	7565	7654	7743	7832	7921	8010	89
90	7290	7380	7470	7560	7650	7740	7830	7920	8010	8100	90
91	7371	7462	7553	7644	7735	7826	7917	8008	8099	8190	91
92	7452	7544	7635	7726	7817	7908	8000	8091	8182	8273	92
93	7533	7626	7719	7812	7905	7998	8091	8184	8277	8370	93
94	7614	7708	7802	7896	7990	8084	8178	8272	8366	8460	94
95	7695	7790	7885	7980	8075	8170	8265	8360	8455	8550	95
96	7776	7872	7968	8064	8160	8256	8352	8448	8544	8640	96
97	7857	7954	8051	8148	8245	8342	8439	8536	8633	8730	97
98	7938	8036	8134	8232	8330	8428	8526	8624	8722	8820	98
99	8019	8118	8217	8316	8415	8514	8613	8712	8811	8910	99

表二 (續)

積

	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	
2	182	184	186	188	190	192	194	196	198	200	2
3	273	276	279	282	285	288	291	294	297	300	3
4	364	368	372	376	380	384	388	392	396	400	4
5	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500	5
6	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	6
7	637	644	651	658	665	672	679	686	693	700	7
8	728	736	744	752	760	768	776	784	792	800	8
9	819	828	837	846	855	864	873	882	891	900	9
10	910	920	930	940	950	960	970	980	990	1000	10
11	1001	1012	1023	1034	1045	1056	1067	1078	1089	1100	11
12	1092	1104	1116	1128	1140	1152	1164	1176	1188	1200	12
13	1183	1196	1209	1222	1235	1248	1261	1274	1287	1300	13
14	1274	1288	1302	1316	1330	1344	1358	1372	1386	1400	14
15	1365	1380	1395	1410	1425	1440	1455	1470	1485	1500	15
16	1456	1472	1488	1504	1520	1536	1552	1568	1584	1600	16
17	1547	1564	1581	1598	1615	1632	1649	1666	1683	1700	17
18	1638	1656	1674	1692	1710	1728	1746	1764	1782	1800	18
19	1729	1748	1767	1786	1805	1824	1843	1862	1881	1900	19
20	1820	1840	1860	1880	1900	1920	1940	1960	1980	2000	20
21	1911	1932	1953	1974	1995	2016	2037	2058	2079	2100	21
22	2002	2024	2046	2068	2090	2112	2134	2156	2178	2200	22
23	2093	2116	2139	2162	2185	2208	2231	2254	2277	2300	23
24	2184	2208	2232	2256	2280	2304	2328	2352	2376	2400	24
25	2275	2300	2325	2350	2375	2400	2425	2450	2475	2500	25
26	2366	2392	2418	2444	2470	2496	2522	2548	2574	2600	26
27	2457	2484	2511	2538	2565	2592	2619	2646	2673	2700	27
28	2548	2576	2604	2632	2660	2688	2716	2744	2772	2800	28
29	2639	2668	2697	2726	2755	2784	2813	2842	2871	2900	29
30	2730	2760	2790	2820	2850	2880	2910	2940	2970	3000	30
31	2821	2852	2883	2914	2945	2976	3007	3038	3069	3100	31
32	2912	2944	2976	3008	3040	3072	3104	3136	3168	3200	32
33	3003	3036	3069	3102	3135	3168	3201	3234	3267	3300	33
34	3094	3128	3162	3196	3230	3264	3298	3332	3366	3400	34
35	3185	3220	3255	3290	3325	3360	3395	3430	3465	3500	35
36	3276	3312	3348	3384	3420	3456	3492	3528	3564	3600	36
37	3367	3404	3441	3478	3515	3552	3589	3626	3663	3700	37
38	3458	3496	3534	3572	3610	3648	3686	3724	3762	3800	38
39	3549	3588	3627	3666	3705	3744	3783	3822	3861	3900	39
40	3640	3680	3720	3760	3800	3840	3880	3920	3960	4000	40
41	3731	3772	3813	3854	3895	3936	3977	4018	4059	4100	41
42	3822	3864	3906	3948	3990	4032	4074	4116	4158	4200	42
43	3913	3956	3999	4042	4085	4128	4171	4214	4257	4300	43
44	4004	4048	4092	4136	4180	4224	4268	4312	4356	4400	44
45	4095	4140	4185	4230	4275	4320	4365	4410	4455	4500	45
46	4186	4232	4278	4324	4370	4416	4462	4508	4554	4600	46
47	4277	4324	4371	4418	4465	4512	4559	4606	4653	4700	47
48	4368	4416	4464	4512	4560	4608	4656	4704	4752	4800	48
49	4459	4508	4557	4606	4655	4704	4753	4802	4851	4900	49
50	4550	4600	4650	4700	4750	4800	4850	4900	4950	5000	50

表二 (續)
積

	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	
51	4641	4692	4743	4794	4845	4896	4947	4998	5049	5100	51
52	4732	4784	4836	4888	4940	4992	5044	5096	5148	5200	52
53	4823	4876	4929	4982	5035	5088	5141	5194	5247	5300	53
54	4914	4968	5022	5076	5130	5184	5238	5292	5346	5400	54
55	5005	5060	5115	5170	5225	5280	5335	5390	5445	5500	55
56	5096	5152	5208	5264	5320	5376	5432	5488	5544	5600	56
57	5187	5244	5301	5358	5415	5472	5529	5586	5643	5700	57
58	5278	5336	5394	5452	5510	5568	5626	5684	5742	5800	58
59	5369	5428	5487	5546	5605	5664	5723	5782	5841	5900	59
60	5460	5520	5580	5640	5700	5760	5820	5880	5940	6000	60
61	5551	5612	5673	5734	5795	5856	5917	5978	6039	6100	61
62	5642	5704	5766	5828	5890	5952	6014	6076	6138	6200	62
63	5733	5796	5859	5922	5985	6048	6111	6174	6237	6300	63
64	5824	5888	5952	6016	6080	6144	6208	6272	6336	6400	64
65	5915	5980	6045	6110	6175	6240	6305	6370	6435	6500	65
66	6006	6072	6138	6204	6270	6336	6402	6468	6534	6600	66
67	6097	6164	6231	6298	6365	6432	6499	6566	6633	6700	67
68	6188	6256	6324	6392	6460	6528	6596	6664	6732	6800	68
69	6279	6348	6417	6486	6555	6624	6693	6762	6831	6900	69
70	6370	6440	6510	6580	6650	6720	6790	6860	6930	7000	70
71	6461	6532	6603	6674	6745	6816	6887	6958	7029	7100	71
72	6552	6624	6696	6768	6840	6912	6984	7056	7128	7200	72
73	6643	6716	6789	6862	6935	7008	7081	7154	7227	7300	73
74	6734	6808	6882	6956	7030	7104	7178	7252	7326	7400	74
75	6825	6900	6975	7050	7125	7200	7275	7350	7425	7500	75
76	6916	6992	7068	7144	7220	7296	7372	7448	7524	7600	76
77	7007	7084	7161	7238	7315	7392	7469	7546	7623	7700	77
78	7098	7176	7254	7332	7410	7488	7566	7644	7722	7800	78
79	7189	7268	7347	7426	7505	7584	7663	7742	7821	7900	79
80	7280	7360	7440	7520	7600	7680	7760	7840	7920	8000	80
81	7371	7452	7533	7614	7695	7776	7857	7938	8019	8100	81
82	7462	7544	7626	7708	7790	7872	7954	8036	8118	8200	82
83	7553	7636	7719	7802	7885	7968	8051	8134	8217	8300	83
84	7644	7728	7812	7896	7980	8064	8148	8232	8316	8400	84
85	7735	7820	7905	7990	8075	8160	8245	8330	8415	8500	85
86	7826	7912	7998	8084	8170	8256	8342	8428	8514	8600	86
87	7917	8004	8091	8178	8265	8352	8439	8526	8613	8700	87
88	8008	8096	8184	8272	8360	8448	8536	8624	8712	8800	88
89	8099	8188	8277	8366	8455	8544	8633	8722	8811	8900	89
90	8190	8280	8370	8460	8550	8640	8730	8820	8910	9000	90
91	8281	8372	8463	8554	8645	8736	8827	8918	9009	9100	91
92	8372	8464	8556	8648	8740	8832	8924	9016	9108	9200	92
93	8463	8556	8649	8742	8835	8928	9021	9114	9207	9300	93
94	8554	8648	8742	8836	8930	9024	9118	9212	9306	9400	94
95	8645	8740	8835	8930	9025	9120	9215	9310	9405	9500	95
96	8736	8832	8928	9024	9120	9216	9312	9408	9504	9600	96
97	8827	8924	9021	9118	9215	9312	9409	9506	9603	9700	97
98	8918	9016	9114	9212	9310	9408	9506	9604	9702	9800	98
99	9009	9108	9207	9306	9405	9504	9603	9702	9801	9900	99

表 三

商 數

例如 $8 \div 17 = .4706$

被 除 數

除數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	除數
2	.5000	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	4.500	5.000	2
3	.3333	.6667	1.000	1.333	1.667	2.000	2.333	2.667	3.000	3.333	3
4	.2500	.5000	.7500	1.000	1.250	1.500	1.750	2.000	2.250	2.500	4
5	.2000	.4000	.6000	.8000	1.000	1.200	1.400	1.600	1.800	2.000	5
6	.1667	.3333	.5000	.6667	.8333	1.000	1.167	1.333	1.500	1.667	6
7	.1429	.2857	.4286	.5714	.7143	.8571	1.000	1.143	1.286	1.429	7
8	.1250	.2500	.3750	.5000	.6250	.7500	.8750	1.000	1.125	1.250	8
9	.1111	.2222	.3333	.4444	.5556	.6667	.7778	.8889	1.000	1.111	9
10	.1000	.2000	.3000	.4000	.5000	.6000	.7000	.8000	.9000	1.000	10
11	.0909	.1818	.2727	.3636	.4545	.5455	.6364	.7273	.8182	.9091	11
12	.0833	.1667	.2500	.3333	.4167	.5000	.5833	.6667	.7500	.8333	12
13	.0769	.1538	.2308	.3077	.3846	.4615	.5385	.6154	.6923	.7692	13
14	.0714	.1429	.2143	.2857	.3571	.4286	.5000	.5714	.6429	.7143	14
15	.0667	.1333	.2000	.2667	.3333	.4000	.4667	.5333	.6000	.6667	15
16	.0625	.1250	.1875	.2500	.3125	.3750	.4375	.5000	.5625	.6250	16
17	.0588	.1176	.1765	.2353	.2941	.3529	.4118	.4706	.5294	.5882	17
18	.0556	.1111	.1667	.2222	.2778	.3333	.3889	.4444	.5000	.5556	18
19	.0526	.1053	.1579	.2105	.2632	.3158	.3684	.4211	.4737	.5263	19
20	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000	20
21	.0476	.0952	.1429	.1905	.2381	.2857	.3333	.3810	.4286	.4762	21
22	.0455	.0909	.1364	.1818	.2273	.2727	.3182	.3636	.4091	.4545	22
23	.0435	.0870	.1304	.1739	.2174	.2609	.3043	.3478	.3913	.4348	23
24	.0417	.0833	.1250	.1667	.2083	.2500	.2917	.3333	.3750	.4167	24
25	.0400	.0800	.1200	.1600	.2000	.2400	.2800	.3200	.3600	.4000	25
26	.0385	.0769	.1154	.1538	.1923	.2308	.2692	.3077	.3462	.3846	26
27	.0370	.0741	.1111	.1481	.1852	.2222	.2593	.2963	.3333	.3704	27
28	.0357	.0714	.1071	.1429	.1786	.2143	.2500	.2857	.3214	.3571	28
29	.0345	.0690	.1034	.1379	.1724	.2069	.2414	.2759	.3103	.3448	29
30	.0333	.0667	.1000	.1333	.1667	.2000	.2333	.2667	.3000	.3333	30
31	.0323	.0645	.0968	.1290	.1613	.1935	.2258	.2581	.2903	.3226	31
32	.0313	.0625	.0938	.1250	.1563	.1875	.2188	.2500	.2813	.3125	32
33	.0303	.0606	.0909	.1212	.1515	.1818	.2121	.2424	.2727	.3030	33
34	.0294	.0588	.0882	.1176	.1471	.1765	.2059	.2353	.2647	.2941	34
35	.0286	.0571	.0857	.1143	.1429	.1714	.2000	.2286	.2571	.2857	35
36	.0278	.0556	.0833	.1111	.1389	.1667	.1944	.2222	.2500	.2778	36
37	.0270	.0541	.0811	.1081	.1351	.1622	.1892	.2162	.2432	.2703	37
38	.0263	.0526	.0789	.1053	.1316	.1579	.1842	.2105	.2368	.2632	38
39	.0256	.0513	.0769	.1026	.1282	.1538	.1795	.2051	.2308	.2564	39
40	.0250	.0500	.0750	.1000	.1250	.1500	.1750	.2000	.2250	.2500	40
41	.0244	.0488	.0732	.0976	.1220	.1463	.1707	.1951	.2195	.2439	41
42	.0238	.0476	.0714	.0952	.1190	.1429	.1667	.1905	.2143	.2381	42
43	.0233	.0465	.0698	.0930	.1163	.1395	.1628	.1860	.2093	.2326	43
44	.0227	.0455	.0682	.0909	.1136	.1364	.1591	.1818	.2045	.2273	44
45	.0222	.0444	.0667	.0889	.1111	.1333	.1556	.1778	.2000	.2222	45
46	.0217	.0435	.0652	.0870	.1087	.1304	.1522	.1739	.1957	.2174	46
47	.0213	.0426	.0638	.0851	.1064	.1277	.1489	.1702	.1915	.2128	47
48	.0208	.0417	.0625	.0833	.1042	.1250	.1458	.1667	.1875	.2083	48
49	.0204	.0408	.0612	.0816	.1020	.1224	.1429	.1633	.1837	.2041	49
50	.0200	.0400	.0600	.0800	.1000	.1200	.1400	.1600	.1800	.2000	50

表三(續)

商數
被除數

除數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	除數
51	.0196	.0392	.0588	.0784	.0980	.1176	.1373	.1569	.1765	.1961	51
52	.0192	.0385	.0577	.0769	.0962	.1154	.1346	.1538	.1731	.1923	52
53	.0189	.0377	.0566	.0755	.0943	.1132	.1321	.1509	.1698	.1887	53
54	.0185	.0370	.0556	.0741	.0926	.1111	.1296	.1481	.1667	.1852	54
55	.0182	.0364	.0545	.0727	.0909	.1091	.1273	.1455	.1636	.1818	55
56	.0179	.0357	.0536	.0714	.0893	.1071	.1250	.1429	.1607	.1786	56
57	.0175	.0351	.0526	.0702	.0877	.1053	.1228	.1404	.1579	.1754	57
58	.0172	.0345	.0517	.0690	.0862	.1034	.1207	.1379	.1552	.1724	58
59	.0169	.0339	.0508	.0678	.0847	.1017	.1186	.1356	.1525	.1695	59
60	.0167	.0333	.0509	.0667	.0833	.1000	.1167	.1333	.1500	.1667	60
61	.0164	.0328	.0492	.0656	.0820	.0984	.1148	.1311	.1475	.1639	61
62	.0161	.0323	.0484	.0645	.0806	.0968	.1129	.1290	.1452	.1613	62
63	.0159	.0317	.0476	.0635	.0794	.0952	.1111	.1270	.1429	.1587	63
64	.0156	.0313	.0469	.0625	.0781	.0938	.1094	.1250	.1406	.1563	64
65	.0154	.0308	.0462	.0615	.0769	.0923	.1077	.1231	.1385	.1538	65
66	.0152	.0303	.0455	.0606	.0758	.0909	.1061	.1212	.1364	.1515	66
67	.0149	.0299	.0448	.0597	.0746	.0896	.1045	.1194	.1343	.1493	67
68	.0147	.0294	.0441	.0588	.0735	.0882	.1029	.1176	.1324	.1471	68
69	.0145	.0290	.0435	.0580	.0725	.0870	.1014	.1159	.1304	.1449	69
70	.0143	.0286	.0429	.0571	.0714	.0857	.1000	.1143	.1286	.1429	70
71	.0141	.0282	.0423	.0563	.0704	.0845	.0986	.1127	.1268	.1408	71
72	.0139	.0278	.0417	.0556	.0694	.0833	.0972	.1111	.1250	.1389	72
73	.0137	.0274	.0411	.0548	.0685	.0822	.0959	.1096	.1233	.1370	73
74	.0135	.0270	.0405	.0541	.0676	.0811	.0946	.1081	.1216	.1351	74
75	.0133	.0267	.0400	.0533	.0667	.0800	.0933	.1067	.1200	.1333	75
76	.0132	.0263	.0395	.0526	.0658	.0789	.0921	.1053	.1184	.1316	76
77	.0130	.0260	.0390	.0519	.0649	.0779	.0909	.1039	.1169	.1299	77
78	.0128	.0256	.0385	.0513	.0641	.0769	.0897	.1026	.1154	.1282	78
79	.0127	.0253	.0380	.0506	.0633	.0759	.0886	.1013	.1139	.1266	79
80	.0125	.0250	.0375	.0500	.0625	.0750	.0875	.1000	.1125	.1250	80
81	.0123	.0247	.0370	.0494	.0617	.0741	.0864	.0988	.1111	.1235	81
82	.0122	.0244	.0366	.0488	.0610	.0732	.0854	.0976	.1098	.1220	82
83	.0120	.0241	.0361	.0482	.0602	.0723	.0843	.0964	.1084	.1205	83
84	.0119	.0238	.0357	.0476	.0595	.0714	.0833	.0952	.1071	.1190	84
85	.0118	.0235	.0353	.0471	.0588	.0706	.0824	.0941	.1059	.1176	85
86	.0116	.0233	.0349	.0465	.0581	.0698	.0814	.0930	.1047	.1163	86
87	.0115	.0230	.0345	.0460	.0575	.0690	.0805	.0920	.1034	.1149	87
88	.0114	.0227	.0341	.0455	.0568	.0682	.0795	.0909	.1023	.1136	88
89	.0112	.0225	.0337	.0449	.0562	.0674	.0787	.0899	.1011	.1124	89
90	.0111	.0222	.0333	.0444	.0556	.0667	.0778	.0889	.1000	.1111	90
91	.0110	.0220	.0330	.0440	.0549	.0659	.0769	.0879	.0989	.1099	91
92	.0109	.0217	.0326	.0435	.0543	.0652	.0761	.0870	.0978	.1087	92
93	.0108	.0215	.0323	.0430	.0538	.0645	.0753	.0860	.0968	.1075	93
94	.0106	.0213	.0319	.0426	.0532	.0638	.0745	.0851	.0957	.1064	94
95	.0105	.0211	.0316	.0421	.0526	.0632	.0737	.0842	.0947	.1053	95
96	.0104	.0208	.0313	.0417	.0521	.0625	.0729	.0833	.0938	.1042	96
97	.0103	.0206	.0309	.0412	.0515	.0619	.0722	.0825	.0928	.1031	97
98	.0102	.0204	.0306	.0408	.0510	.0612	.0714	.0816	.0918	.1020	98
99	.0101	.0202	.0303	.0404	.0505	.0606	.0707	.0808	.0909	.1010	99

表三 (續)

除數	商 數										除數
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
2	5.500	6.000	6.500	7.000	7.500	8.000	8.500	9.000	9.500	10.000	2
3	3.667	4.000	4.333	4.667	5.000	5.333	5.667	6.000	6.333	6.667	3
4	2.750	3.000	3.250	3.500	3.750	4.000	4.250	4.500	4.750	5.000	4
5	2.200	2.400	2.600	2.800	3.000	3.200	3.400	3.600	3.800	4.000	5
6	1.833	2.000	2.167	2.333	2.500	2.667	2.833	3.000	3.167	3.333	6
7	1.571	1.714	1.857	2.000	2.143	2.286	2.429	2.571	2.714	2.857	7
8	1.375	1.500	1.625	1.750	1.875	2.000	2.125	2.250	2.375	2.500	8
9	1.222	1.333	1.444	1.556	1.667	1.778	1.889	2.000	2.111	2.222	9
10	1.100	1.200	1.300	1.400	1.500	1.600	1.700	1.800	1.900	2.000	10
11	1.000	1.091	1.182	1.273	1.364	1.455	1.545	1.636	1.727	1.818	11
12	.9167	1.000	1.083	1.167	1.250	1.333	1.417	1.500	1.583	1.667	12
13	.8462	.9231	1.000	1.077	1.154	1.231	1.308	1.385	1.462	1.538	13
14	.7857	.8571	.9286	1.000	1.071	1.143	1.214	1.286	1.357	1.429	14
15	.7333	.8000	.8667	.9333	1.000	1.067	1.133	1.200	1.267	1.333	15
16	.6875	.7500	.8125	.8750	.9375	1.000	1.063	1.125	1.188	1.250	16
17	.6471	.7059	.7647	.8235	.8824	.9412	1.000	1.059	1.118	1.176	17
18	.6111	.6667	.7222	.7778	.8333	.8889	.9444	1.000	1.056	1.111	18
19	.5789	.6316	.6842	.7368	.7895	.8421	.8947	.9474	1.000	1.053	19
20	.5500	.6000	.6500	.7000	.7500	.8000	.8500	.9000	.9500	1.000	20
21	.5238	.5714	.6190	.6667	.7143	.7619	.8095	.8571	.9048	.9524	21
22	.5000	.5455	.5909	.6364	.6818	.7273	.7727	.8182	.8636	.9091	22
23	.4783	.5217	.5652	.6087	.6522	.6957	.7391	.7826	.8261	.8696	23
24	.4583	.5000	.5417	.5833	.6250	.6667	.7083	.7500	.7917	.8333	24
25	.4400	.4800	.5200	.5600	.6000	.6400	.6800	.7200	.7600	.8000	25
26	.4231	.4615	.5000	.5385	.5769	.6154	.6538	.6923	.7308	.7692	26
27	.4074	.4444	.4815	.5185	.5556	.5926	.6296	.6667	.7037	.7407	27
28	.3929	.4286	.4643	.5000	.5357	.5714	.6071	.6429	.6786	.7143	28
29	.3793	.4138	.4483	.4828	.5172	.5517	.5862	.6207	.6552	.6897	29
30	.3667	.4000	.4333	.4667	.5000	.5333	.5667	.6000	.6333	.6667	30
31	.3548	.3871	.4194	.4516	.4839	.5161	.5484	.5806	.6129	.6452	31
32	.3438	.3750	.4063	.4375	.4688	.5000	.5313	.5625	.5938	.6250	32
33	.3333	.3636	.3939	.4242	.4545	.4848	.5152	.5455	.5758	.6061	33
34	.3235	.3529	.3824	.4118	.4412	.4706	.5000	.5294	.5588	.5882	34
35	.3143	.3429	.3714	.4000	.4286	.4571	.4857	.5143	.5429	.5714	35
36	.3056	.3333	.3611	.3889	.4167	.4444	.4722	.5000	.5278	.5556	36
37	.2973	.3243	.3514	.3784	.4054	.4324	.4595	.4865	.5135	.5405	37
38	.2895	.3158	.3421	.3684	.3947	.4211	.4474	.4737	.5000	.5263	38
39	.2821	.3077	.3333	.3590	.3846	.4103	.4359	.4615	.4872	.5128	39
40	.2750	.3000	.3250	.3500	.3750	.4000	.4250	.4500	.4750	.5000	40
41	.2683	.2927	.3171	.3415	.3659	.3902	.4146	.4390	.4634	.4878	41
42	.2619	.2857	.3095	.3333	.3571	.3810	.4048	.4286	.4524	.4762	42
43	.2558	.2791	.3023	.3256	.3488	.3721	.3953	.4186	.4419	.4651	43
44	.2500	.2727	.2955	.3182	.3409	.3636	.3864	.4091	.4318	.4545	44
45	.2444	.2667	.2889	.3111	.3333	.3556	.3778	.4000	.4222	.4444	45
46	.2391	.2609	.2826	.3043	.3261	.3478	.3696	.3913	.4130	.4348	46
47	.2340	.2553	.2766	.2979	.3191	.3404	.3617	.3830	.4043	.4255	47
48	.2292	.2500	.2708	.2917	.3125	.3333	.3542	.3750	.3958	.4167	48
49	.2245	.2449	.2653	.2857	.3061	.3265	.3469	.3673	.3878	.4082	49
50	.2200	.2400	.2600	.2800	.3000	.3200	.3400	.3600	.3800	.4000	50

表三 (續)

31

除數	商數										除數
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
51	.2157	.2353	.2549	.2745	.2941	.3137	.3333	.3529	.3725	.3922	51
52	.2115	.2308	.2500	.2692	.2885	.3077	.3269	.3462	.3654	.3846	52
53	.2075	.2264	.2453	.2642	.2830	.3019	.3208	.3396	.3585	.3774	53
54	.2037	.2222	.2407	.2593	.2778	.2963	.3148	.3333	.3519	.3704	54
55	.2000	.2182	.2364	.2545	.2727	.2909	.3091	.3273	.3455	.3636	55
56	.1964	.2143	.2321	.2500	.2679	.2857	.3036	.3214	.3393	.3571	56
57	.1930	.2105	.2281	.2456	.2632	.2807	.2982	.3158	.3333	.3509	57
58	.1897	.2069	.2241	.2414	.2586	.2759	.2931	.3103	.3276	.3448	58
59	.1864	.2034	.2203	.2373	.2542	.2712	.2881	.3051	.3220	.3390	59
60	.1833	.2000	.2167	.2333	.2500	.2667	.2833	.3000	.3167	.3333	60
61	.1803	.1967	.2131	.2295	.2459	.2623	.2787	.2951	.3115	.3279	61
62	.1774	.1935	.2097	.2258	.2419	.2581	.2742	.2903	.3065	.3226	62
63	.1746	.1905	.2063	.2222	.2381	.2540	.2698	.2857	.3016	.3175	63
64	.1719	.1875	.2031	.2188	.2344	.2500	.2656	.2813	.2969	.3125	64
65	.1692	.1846	.2000	.2154	.2308	.2462	.2615	.2769	.2923	.3077	65
66	.1667	.1818	.1970	.2121	.2273	.2424	.2576	.2727	.2879	.3030	66
67	.1642	.1791	.1940	.2090	.2239	.2388	.2537	.2687	.2836	.2985	67
68	.1618	.1765	.1912	.2059	.2206	.2353	.2500	.2647	.2794	.2941	68
69	.1594	.1739	.1884	.2029	.2174	.2319	.2464	.2609	.2754	.2899	69
70	.1571	.1714	.1857	.2000	.2143	.2286	.2429	.2571	.2714	.2857	70
71	.1549	.1690	.1831	.1972	.2113	.2254	.2394	.2535	.2676	.2817	71
72	.1528	.1667	.1806	.1944	.2083	.2222	.2361	.2500	.2639	.2778	72
73	.1507	.1644	.1781	.1918	.2055	.2192	.2329	.2466	.2603	.2740	73
74	.1486	.1622	.1757	.1892	.2027	.2162	.2297	.2432	.2568	.2703	74
75	.1467	.1600	.1733	.1867	.2000	.2133	.2267	.2400	.2533	.2667	75
76	.1447	.1579	.1711	.1842	.1974	.2105	.2237	.2368	.2500	.2632	76
77	.1429	.1558	.1688	.1818	.1948	.2078	.2208	.2338	.2468	.2597	77
78	.1410	.1538	.1667	.1795	.1923	.2051	.2179	.2308	.2436	.2564	78
79	.1392	.1519	.1646	.1772	.1899	.2025	.2152	.2278	.2405	.2532	79
80	.1375	.1500	.1625	.1750	.1875	.2000	.2125	.2250	.2375	.2500	80
81	.1358	.1481	.1605	.1728	.1852	.1975	.2099	.2222	.2346	.2469	81
82	.1341	.1463	.1585	.1707	.1829	.1951	.2073	.2195	.2317	.2439	82
83	.1325	.1446	.1566	.1687	.1807	.1928	.2048	.2169	.2289	.2410	83
84	.1310	.1429	.1548	.1667	.1786	.1905	.2024	.2143	.2262	.2381	84
85	.1294	.1412	.1529	.1647	.1765	.1882	.2000	.2118	.2235	.2353	85
86	.1279	.1395	.1512	.1628	.1744	.1860	.1977	.2093	.2209	.2326	86
87	.1264	.1379	.1494	.1609	.1724	.1839	.1954	.2069	.2184	.2299	87
88	.1250	.1364	.1477	.1591	.1705	.1818	.1932	.2045	.2159	.2273	88
89	.1236	.1348	.1461	.1573	.1685	.1798	.1910	.2022	.2135	.2247	89
90	.1222	.1333	.1444	.1556	.1667	.1778	.1889	.2000	.2111	.2222	90
91	.1209	.1319	.1429	.1538	.1648	.1758	.1868	.1978	.2088	.2198	91
92	.1196	.1304	.1413	.1522	.1630	.1739	.1848	.1957	.2065	.2174	92
93	.1183	.1290	.1398	.1505	.1613	.1720	.1828	.1935	.2043	.2151	93
94	.1170	.1277	.1383	.1489	.1596	.1702	.1809	.1915	.2021	.2128	94
95	.1158	.1263	.1368	.1474	.1579	.1684	.1789	.1895	.2000	.2105	95
96	.1146	.1250	.1354	.1458	.1563	.1667	.1771	.1875	.1979	.2083	96
97	.1134	.1237	.1340	.1443	.1546	.1649	.1753	.1856	.1959	.2062	97
98	.1122	.1224	.1327	.1429	.1531	.1633	.1735	.1837	.1939	.2041	98
99	.1111	.1212	.1313	.1414	.1515	.1616	.1717	.1818	.1919	.2020	99

表三 (續)

商數

被除數

除數	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	除數
2	10.50	11.00	11.50	12.00	12.50	13.00	13.50	14.00	14.50	15.00	2
3	7.000	7.333	7.667	8.000	8.333	8.667	9.000	9.333	9.667	10.00	3
4	5.250	5.500	5.750	6.000	6.250	6.500	6.750	7.000	7.250	7.500	4
5	4.200	4.400	4.600	4.800	5.000	5.200	5.400	5.600	5.800	6.000	5
6	3.500	3.667	3.833	4.000	4.167	4.333	4.500	4.667	4.833	5.000	6
7	3.000	3.143	3.286	3.429	3.571	3.714	3.857	4.000	4.143	4.286	7
8	2.625	2.750	2.875	3.000	3.125	3.250	3.375	3.500	3.625	3.750	8
9	2.333	2.444	2.556	2.667	2.778	2.889	3.000	3.111	3.222	3.333	9
10	2.100	2.200	2.300	2.400	2.500	2.600	2.700	2.800	2.900	3.000	10
11	1.909	2.000	2.091	2.182	2.273	2.364	2.455	2.545	2.636	2.727	11
12	1.750	1.833	1.917	2.000	2.083	2.167	2.250	2.333	2.417	2.500	12
13	1.615	1.692	1.769	1.846	1.923	2.000	2.077	2.154	2.231	2.308	13
14	1.500	1.571	1.643	1.714	1.786	1.857	1.929	2.000	2.071	2.143	14
15	1.400	1.467	1.533	1.600	1.667	1.733	1.800	1.867	1.933	2.000	15
16	1.313	1.375	1.438	1.500	1.563	1.625	1.688	1.750	1.813	1.875	16
17	1.235	1.294	1.353	1.412	1.471	1.529	1.588	1.647	1.706	1.765	17
18	1.167	1.222	1.278	1.333	1.389	1.444	1.500	1.556	1.611	1.667	18
19	1.105	1.158	1.211	1.263	1.316	1.368	1.421	1.474	1.526	1.579	19
20	1.050	1.100	1.150	1.200	1.250	1.300	1.350	1.400	1.450	1.500	20
21	1.000	1.048	1.095	1.143	1.190	1.238	1.286	1.333	1.381	1.429	21
22	.9545	1.000	1.045	1.091	1.136	1.182	1.227	1.273	1.318	1.364	22
23	.9130	.9565	1.000	1.043	1.087	1.130	1.174	1.217	1.261	1.304	23
24	.8750	.9167	.9583	1.000	1.042	1.083	1.125	1.167	1.208	1.250	24
25	.8400	.8800	.9200	.9600	1.000	1.040	1.080	1.120	1.160	1.200	25
26	.8077	.8462	.8846	.9231	.9615	1.000	1.038	1.077	1.115	1.154	26
27	.7778	.8148	.8519	.8889	.9259	.9630	1.000	1.037	1.074	1.111	27
28	.7500	.7857	.8214	.8571	.8929	.9286	.9643	1.000	1.036	1.071	28
29	.7241	.7586	.7931	.8276	.8621	.8966	.9310	.9655	1.000	1.034	29
30	.7000	.7333	.7667	.8000	.8333	.8667	.9000	.9333	.9667	1.000	30
31	.6774	.7097	.7419	.7742	.8065	.8387	.8710	.9032	.9355	.9677	31
32	.6563	.6875	.7188	.7500	.7813	.8125	.8438	.8750	.9063	.9375	32
33	.6364	.6667	.6970	.7273	.7576	.7879	.8182	.8485	.8788	.9091	33
34	.6176	.6471	.6765	.7059	.7353	.7647	.7941	.8235	.8529	.8824	34
35	.6000	.6286	.6571	.6857	.7143	.7429	.7714	.8000	.8286	.8571	35
36	.5833	.6111	.6389	.6667	.6944	.7222	.7500	.7778	.8056	.8333	36
37	.5676	.5946	.6216	.6486	.6757	.7027	.7297	.7568	.7838	.8108	37
38	.5526	.5789	.6053	.6316	.6579	.6842	.7105	.7368	.7632	.7895	38
39	.5385	.5641	.5897	.6154	.6410	.6667	.6923	.7179	.7436	.7692	39
40	.5250	.5500	.5750	.6000	.6250	.6500	.6750	.7000	.7250	.7500	40
41	.5122	.5366	.5610	.5854	.6098	.6341	.6585	.6829	.7073	.7317	41
42	.5000	.5238	.5476	.5714	.5952	.6190	.6429	.6667	.6905	.7143	42
43	.4884	.5116	.5349	.5581	.5814	.6047	.6279	.6512	.6744	.6977	43
44	.4773	.5000	.5227	.5455	.5682	.5909	.6136	.6364	.6591	.6818	44
45	.4667	.4889	.5111	.5333	.5556	.5778	.6000	.6222	.6444	.6667	45
46	.4565	.4783	.5000	.5217	.5435	.5652	.5870	.6087	.6304	.6522	46
47	.4468	.4681	.4894	.5106	.5319	.5532	.5745	.5957	.6170	.6383	47
48	.4375	.4583	.4792	.5000	.5208	.5417	.5625	.5833	.6042	.6250	48
49	.4286	.4490	.4694	.4898	.5102	.5306	.5510	.5714	.5918	.6122	49
50	.4200	.4400	.4600	.4800	.5000	.5200	.5400	.5600	.5800	.6000	50

表三 (續)

商數
被除數

除數	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	除數
51	.4118	.4314	.4510	.4706	.4902	.5098	.5294	.5490	.5686	.5882	51
52	.4038	.4231	.4423	.4615	.4808	.5000	.5192	.5385	.5577	.5769	52
53	.3962	.4151	.4340	.4528	.4717	.4906	.5094	.5283	.5472	.5660	53
54	.3889	.4074	.4259	.4444	.4630	.4815	.5000	.5185	.5370	.5556	54
55	.3818	.4000	.4182	.4364	.4545	.4727	.4909	.5091	.5273	.5455	55
56	.3750	.3929	.4107	.4286	.4464	.4643	.4821	.5000	.5179	.5357	56
57	.3684	.3860	.4035	.4211	.4386	.4561	.4737	.4912	.5088	.5263	57
58	.3621	.3793	.3966	.4138	.4310	.4483	.4655	.4828	.5000	.5172	58
59	.3559	.3729	.3898	.4068	.4237	.4407	.4576	.4746	.4915	.5085	59
60	.3500	.3667	.3833	.4000	.4167	.4333	.4500	.4667	.4833	.5000	60
61	.3443	.3607	.3770	.3934	.4098	.4262	.4426	.4590	.4754	.4918	61
62	.3387	.3548	.3710	.3871	.4032	.4194	.4355	.4516	.4677	.4839	62
63	.3333	.3492	.3651	.3810	.3968	.4127	.4286	.4444	.4603	.4762	63
64	.3281	.3438	.3594	.3750	.3906	.4063	.4219	.4375	.4531	.4688	64
65	.3231	.3385	.3538	.3692	.3846	.4000	.4154	.4308	.4462	.4615	65
66	.3182	.3333	.3485	.3636	.3788	.3939	.4091	.4242	.4394	.4545	66
67	.3134	.3284	.3433	.3582	.3731	.3881	.4030	.4179	.4328	.4478	67
68	.3088	.3235	.3382	.3529	.3676	.3824	.3971	.4118	.4265	.4412	68
69	.3043	.3188	.3333	.3478	.3623	.3768	.3913	.4058	.4203	.4348	69
70	.3000	.3143	.3286	.3429	.3571	.3714	.3857	.4000	.4143	.4286	70
71	.2958	.3099	.3239	.3380	.3521	.3662	.3803	.3944	.4085	.4225	71
72	.2917	.3056	.3194	.3333	.3472	.3611	.3750	.3889	.4028	.4167	72
73	.2877	.3014	.3151	.3288	.3425	.3562	.3699	.3836	.3973	.4110	73
74	.2838	.2973	.3108	.3243	.3378	.3514	.3649	.3784	.3919	.4054	74
75	.2800	.2933	.3067	.3200	.3333	.3467	.3600	.3733	.3867	.4000	75
76	.2763	.2895	.3026	.3158	.3289	.3421	.3553	.3684	.3816	.3947	76
77	.2727	.2857	.2987	.3117	.3247	.3377	.3506	.3636	.3766	.3896	77
78	.2692	.2821	.2949	.3077	.3205	.3333	.3462	.3590	.3718	.3846	78
79	.2658	.2785	.2911	.3038	.3165	.3291	.3418	.3544	.3671	.3797	79
80	.2625	.2750	.2875	.3000	.3125	.3250	.3375	.3500	.3625	.3750	80
81	.2593	.2716	.2840	.2963	.3086	.3210	.3333	.3457	.3580	.3704	81
82	.2561	.2683	.2805	.2927	.3049	.3171	.3293	.3415	.3537	.3659	82
83	.2530	.2651	.2771	.2892	.3012	.3133	.3253	.3373	.3494	.3614	83
84	.2500	.2619	.2738	.2857	.2976	.3095	.3214	.3333	.3452	.3571	84
85	.2471	.2588	.2706	.2824	.2941	.3059	.3176	.3294	.3412	.3529	85
86	.2442	.2558	.2674	.2791	.2907	.3023	.3140	.3256	.3372	.3488	86
87	.2414	.2529	.2644	.2759	.2874	.2989	.3103	.3218	.3333	.3448	87
88	.2386	.2500	.2614	.2727	.2841	.2955	.3068	.3182	.3295	.3409	88
89	.2360	.2472	.2584	.2697	.2809	.2921	.3034	.3146	.3258	.3371	89
90	.2333	.2444	.2556	.2667	.2778	.2889	.3000	.3111	.3222	.3333	90
91	.2308	.2418	.2527	.2637	.2747	.2857	.2967	.3077	.3187	.3297	91
92	.2283	.2391	.2500	.2609	.2717	.2826	.2935	.3043	.3152	.3261	92
93	.2258	.2366	.2473	.2581	.2688	.2796	.2903	.3011	.3118	.3226	93
94	.2234	.2340	.2447	.2553	.2660	.2766	.2872	.2979	.3085	.3191	94
95	.2211	.2316	.2421	.2526	.2632	.2737	.2842	.2947	.3053	.3158	95
96	.2188	.2292	.2396	.2500	.2604	.2708	.2813	.2917	.3021	.3125	96
97	.2165	.2268	.2371	.2474	.2577	.2680	.2784	.2887	.2990	.3093	97
98	.2143	.2245	.2347	.2449	.2551	.2653	.2755	.2857	.2959	.3061	98
99	.2121	.2222	.2323	.2424	.2525	.2626	.2727	.2828	.2929	.3030	99

表三 (續)

34

商數

被除數

除數	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	除數
2	15.50	16.00	16.50	17.00	17.50	18.00	18.50	19.00	19.50	20.00	2
3	10.33	10.67	11.00	11.33	11.67	12.00	12.33	12.67	13.00	13.33	3
4	7.750	8.000	8.250	8.500	8.750	9.000	9.250	9.500	9.750	10.00	4
5	6.200	6.400	6.600	6.800	7.000	7.200	7.400	7.600	7.800	8.000	5
6	5.167	5.333	5.500	5.667	5.833	6.000	6.167	6.333	6.500	6.667	6
7	4.429	4.571	4.714	4.857	5.000	5.143	5.286	5.429	5.571	5.714	7
8	3.875	4.000	4.125	4.250	4.375	4.500	4.625	4.750	4.875	5.000	8
9	3.444	3.556	3.667	3.778	3.889	4.000	4.111	4.222	4.333	4.444	9
10	3.100	3.200	3.300	3.400	3.500	3.600	3.700	3.800	3.900	4.000	10
11	2.818	2.909	3.000	3.091	3.182	3.273	3.364	3.455	3.545	3.636	11
12	2.583	2.667	2.750	2.833	2.917	3.000	3.083	3.167	3.250	3.333	12
13	2.385	2.462	2.538	2.615	2.692	2.769	2.846	2.923	3.000	3.077	13
14	2.214	2.286	2.357	2.429	2.509	2.571	2.643	2.714	2.786	2.857	14
15	2.067	2.133	2.200	2.267	2.333	2.400	2.467	2.533	2.600	2.667	15
16	1.938	2.000	2.063	2.125	2.188	2.250	2.313	2.375	2.438	2.500	16
17	1.824	1.882	1.941	2.000	2.059	2.118	2.176	2.235	2.294	2.353	17
18	1.722	1.778	1.833	1.889	1.944	2.000	2.056	2.111	2.167	2.222	18
19	1.632	1.684	1.737	1.789	1.842	1.895	1.947	2.000	2.053	2.105	19
20	1.550	1.600	1.650	1.700	1.750	1.800	1.850	1.900	1.950	2.000	20
21	1.476	1.524	1.571	1.619	1.667	1.714	1.762	1.810	1.857	1.905	21
22	1.409	1.455	1.500	1.545	1.591	1.636	1.682	1.727	1.773	1.818	22
23	1.348	1.391	1.435	1.478	1.522	1.565	1.609	1.652	1.696	1.739	23
24	1.292	1.333	1.375	1.417	1.458	1.500	1.542	1.583	1.625	1.667	24
25	1.240	1.280	1.320	1.360	1.400	1.440	1.480	1.520	1.560	1.600	25
26	1.192	1.231	1.269	1.308	1.346	1.385	1.423	1.462	1.500	1.538	26
27	1.148	1.185	1.222	1.259	1.296	1.333	1.370	1.407	1.444	1.481	27
28	1.107	1.143	1.179	1.214	1.250	1.286	1.321	1.357	1.393	1.429	28
29	1.069	1.103	1.138	1.172	1.207	1.241	1.276	1.310	1.345	1.379	29
30	1.033	1.067	1.100	1.133	1.167	1.200	1.233	1.267	1.300	1.333	30
31	1.000	1.032	1.065	1.097	1.129	1.161	1.194	1.226	1.258	1.290	31
32	.9688	1.000	1.031	1.063	1.094	1.125	1.156	1.188	1.219	1.250	32
33	.9394	.9697	1.000	1.030	1.061	1.091	1.121	1.152	1.182	1.212	33
34	.9118	.9412	.9706	1.000	1.029	1.059	1.088	1.118	1.147	1.176	34
35	.8857	.9143	.9429	.9714	1.000	1.029	1.057	1.086	1.114	1.143	35
36	.8611	.8889	.9167	.9444	.9722	1.000	1.028	1.056	1.083	1.111	36
37	.8378	.8649	.8919	.9189	.9459	.9730	1.000	1.027	1.054	1.081	37
38	.8158	.8421	.8684	.8947	.9211	.9474	.9737	1.000	1.026	1.053	38
39	.7949	.8205	.8462	.8718	.8974	.9231	.9487	.9744	1.000	1.026	39
40	.7750	.8000	.8250	.8500	.8750	.9000	.9250	.9500	.9750	1.000	40
41	.7561	.7805	.8049	.8293	.8537	.8780	.9024	.9268	.9512	.9756	41
42	.7381	.7619	.7857	.8095	.8333	.8571	.8810	.9048	.9286	.9524	42
43	.7209	.7442	.7674	.7907	.8140	.8372	.8605	.8837	.9070	.9302	43
44	.7045	.7273	.7500	.7727	.7955	.8182	.8409	.8636	.8864	.9091	44
45	.6889	.7111	.7333	.7556	.7778	.8000	.8222	.8444	.8667	.8889	45
46	.6739	.6957	.7174	.7391	.7609	.7826	.8043	.8261	.8478	.8696	46
47	.6596	.6809	.7021	.7234	.7447	.7660	.7872	.8085	.8298	.8511	47
48	.6458	.6667	.6875	.7083	.7292	.7500	.7708	.7917	.8125	.8333	48
49	.6327	.6531	.6735	.6939	.7143	.7347	.7551	.7755	.7959	.8163	49
50	.6200	.6400	.6600	.6800	.7000	.7200	.7400	.7600	.7800	.8000	50

表三 (續)

		商 數											
		被 除 數											
除數	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	除數		
51	.6078	.6275	.6471	.6667	.6863	.7059	.7255	.7451	.7647	.7843	51		
52	.5962	.6154	.6346	.6538	.6731	.6923	.7115	.7308	.7500	.7692	52		
53	.5849	.6038	.6226	.6415	.6604	.6792	.6981	.7170	.7358	.7547	53		
54	.5741	.5926	.6111	.6296	.6481	.6667	.6852	.7037	.7222	.7407	54		
55	.5636	.5818	.6000	.6182	.6364	.6545	.6727	.6909	.7091	.7273	55		
56	.5536	.5714	.5893	.6071	.6250	.6429	.6607	.6786	.6964	.7143	56		
57	.5430	.5614	.5789	.5965	.6140	.6316	.6491	.6667	.6842	.7018	57		
58	.5345	.5517	.5690	.5862	.6034	.6207	.6379	.6552	.6724	.6897	58		
59	.5254	.5424	.5593	.5763	.5932	.6102	.6271	.6441	.6610	.6780	59		
60	.5167	.5333	.5500	.5667	.5833	.6000	.6167	.6333	.6500	.6667	60		
61	.5082	.5246	.5410	.5574	.5738	.5902	.6066	.6230	.6393	.6557	61		
62	.5000	.5161	.5323	.5484	.5645	.5806	.5968	.6129	.6290	.6452	62		
63	.4921	.5079	.5238	.5397	.5556	.5714	.5873	.6032	.6190	.6349	63		
64	.4844	.5000	.5156	.5313	.5469	.5625	.5781	.5938	.6094	.6250	64		
65	.4769	.4923	.5077	.5231	.5385	.5538	.5692	.5846	.6000	.6154	65		
66	.4697	.4848	.5000	.5152	.5303	.5455	.5606	.5758	.5909	.6061	66		
67	.4627	.4776	.4925	.5075	.5224	.5373	.5522	.5672	.5821	.5970	67		
68	.4559	.4706	.4853	.5000	.5147	.5294	.5441	.5588	.5735	.5882	68		
69	.4493	.4638	.4783	.4928	.5072	.5217	.5362	.5507	.5652	.5797	69		
70	.4429	.4571	.4714	.4857	.5000	.5143	.5286	.5429	.5571	.5714	70		
71	.4366	.4507	.4648	.4789	.4930	.5070	.5211	.5352	.5493	.5634	71		
72	.4306	.4444	.4583	.4722	.4861	.5000	.5139	.5278	.5417	.5556	72		
73	.4247	.4384	.4521	.4658	.4795	.4932	.5068	.5205	.5342	.5479	73		
74	.4189	.4324	.4459	.4595	.4730	.4865	.5000	.5135	.5270	.5405	74		
75	.4133	.4267	.4400	.4533	.4667	.4800	.4933	.5067	.5200	.5333	75		
76	.4079	.4211	.4342	.4474	.4605	.4737	.4868	.5000	.5132	.5263	76		
77	.4026	.4156	.4286	.4416	.4545	.4675	.4805	.4935	.5065	.5195	77		
78	.3974	.4103	.4231	.4359	.4487	.4615	.4744	.4872	.5000	.5128	78		
79	.3924	.4051	.4177	.4304	.4430	.4557	.4684	.4810	.4937	.5063	79		
80	.3875	.4000	.4125	.4250	.4375	.4500	.4625	.4750	.4875	.5000	80		
81	.3827	.3951	.4074	.4198	.4321	.4444	.4568	.4691	.4815	.4938	81		
82	.3780	.3902	.4024	.4146	.4268	.4390	.4512	.4634	.4756	.4878	82		
83	.3735	.3855	.3976	.4096	.4217	.4337	.4458	.4578	.4699	.4819	83		
84	.3690	.3810	.3929	.4048	.4167	.4286	.4405	.4524	.4643	.4762	84		
85	.3647	.3765	.3882	.4000	.4118	.4235	.4353	.4471	.4588	.4706	85		
86	.3605	.3721	.3837	.3953	.4070	.4186	.4302	.4419	.4535	.4651	86		
87	.3563	.3678	.3793	.3908	.4023	.4138	.4253	.4368	.4483	.4598	87		
88	.3523	.3636	.3750	.3864	.3977	.4091	.4205	.4318	.4432	.4545	88		
89	.3483	.3596	.3708	.3820	.3933	.4045	.4157	.4270	.4382	.4494	89		
90	.3444	.3556	.3667	.3778	.3889	.4000	.4111	.4222	.4333	.4444	90		
91	.3407	.3516	.3626	.3736	.3846	.3956	.4066	.4176	.4286	.4396	91		
92	.3370	.3478	.3587	.3696	.3804	.3913	.4022	.4130	.4239	.4348	92		
93	.3333	.3441	.3548	.3656	.3763	.3871	.3978	.4086	.4194	.4301	93		
94	.3298	.3404	.3511	.3617	.3723	.3830	.3936	.4043	.4149	.4255	94		
95	.3263	.3368	.3474	.3579	.3684	.3789	.3895	.4000	.4105	.4211	95		
96	.3229	.3333	.3438	.3542	.3646	.3750	.3854	.3958	.4063	.4167	96		
97	.3196	.3299	.3402	.3505	.3608	.3711	.3814	.3918	.4021	.4124	97		
98	.3163	.3265	.3367	.3469	.3571	.3673	.3776	.3878	.3980	.4082	98		
99	.3131	.3232	.3333	.3434	.3535	.3636	.3737	.3838	.3939	.4040	99		

表三 (續)

36		商數										36	
		被除數											
除數	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	除數	41	
2	20.50	21.00	21.50	22.00	22.50	23.00	23.50	24.00	24.50	25.00	2	20.50	
3	13.67	14.00	14.33	14.67	15.00	15.33	15.67	16.00	16.33	16.67	3	13.67	
4	10.25	10.50	10.75	11.00	11.25	11.50	11.75	12.00	12.25	12.50	4	10.25	
5	8.200	8.400	8.600	8.800	9.000	9.200	9.400	9.600	9.800	10.00	5	8.200	
6	6.833	7.000	7.167	7.333	7.500	7.667	7.833	8.000	8.167	8.333	6	6.833	
7	5.857	6.000	6.143	6.286	6.429	6.571	6.714	6.857	7.000	7.143	7	5.857	
8	5.125	5.250	5.375	5.500	5.625	5.750	5.875	6.000	6.125	6.250	8	5.125	
9	4.556	4.667	4.778	4.889	5.000	5.111	5.222	5.333	5.444	5.556	9	4.556	
10	4.100	4.200	4.300	4.400	4.500	4.600	4.700	4.800	4.900	5.000	10	4.100	
11	3.727	3.818	3.909	4.000	4.091	4.182	4.273	4.364	4.455	4.545	11	3.727	
12	3.417	3.500	3.583	3.667	3.750	3.833	3.917	4.000	4.083	4.167	12	3.417	
13	3.154	3.231	3.308	3.385	3.462	3.538	3.615	3.692	3.769	3.846	13	3.154	
14	2.929	3.000	3.071	3.143	3.214	3.286	3.357	3.429	3.500	3.571	14	2.929	
15	2.733	2.800	2.867	2.933	3.000	3.067	3.133	3.200	3.267	3.333	15	2.733	
16	2.563	2.625	2.688	2.750	2.813	2.875	2.938	3.000	3.063	3.125	16	2.563	
17	2.412	2.471	2.529	2.588	2.647	2.706	2.765	2.824	2.882	2.941	17	2.412	
18	2.278	2.333	2.389	2.444	2.500	2.556	2.611	2.667	2.722	2.778	18	2.278	
19	2.158	2.211	2.263	2.316	2.368	2.421	2.474	2.526	2.579	2.632	19	2.158	
20	2.050	2.100	2.150	2.200	2.250	2.300	2.350	2.400	2.450	2.500	20	2.050	
21	1.952	2.000	2.048	2.095	2.143	2.190	2.238	2.286	2.333	2.381	21	1.952	
22	1.864	1.909	1.955	2.000	2.045	2.091	2.136	2.182	2.227	2.273	22	1.864	
23	1.783	1.826	1.870	1.913	1.957	2.000	2.043	2.087	2.130	2.174	23	1.783	
24	1.708	1.750	1.792	1.833	1.875	1.917	1.958	2.000	2.042	2.083	24	1.708	
25	1.640	1.680	1.720	1.760	1.800	1.840	1.880	1.920	1.960	2.000	25	1.640	
26	1.577	1.615	1.654	1.692	1.731	1.769	1.808	1.846	1.885	1.923	26	1.577	
27	1.519	1.556	1.593	1.630	1.667	1.704	1.741	1.778	1.815	1.852	27	1.519	
28	1.464	1.500	1.536	1.571	1.607	1.643	1.679	1.714	1.750	1.786	28	1.464	
29	1.414	1.448	1.483	1.517	1.552	1.586	1.621	1.655	1.690	1.724	29	1.414	
30	1.367	1.400	1.433	1.467	1.500	1.533	1.567	1.600	1.633	1.667	30	1.367	
31	1.323	1.355	1.387	1.419	1.452	1.484	1.516	1.548	1.581	1.613	31	1.323	
32	1.281	1.313	1.344	1.375	1.406	1.438	1.469	1.500	1.531	1.563	32	1.281	
33	1.242	1.273	1.303	1.333	1.364	1.394	1.424	1.455	1.485	1.515	33	1.242	
34	1.206	1.235	1.265	1.294	1.324	1.353	1.382	1.412	1.441	1.471	34	1.206	
35	1.171	1.200	1.229	1.257	1.286	1.314	1.343	1.371	1.400	1.429	35	1.171	
36	1.139	1.167	1.194	1.222	1.250	1.278	1.306	1.333	1.361	1.389	36	1.139	
37	1.108	1.135	1.162	1.189	1.216	1.243	1.270	1.297	1.324	1.351	37	1.108	
38	1.079	1.105	1.132	1.158	1.184	1.211	1.237	1.263	1.289	1.316	38	1.079	
39	1.051	1.077	1.103	1.128	1.154	1.179	1.205	1.231	1.256	1.282	39	1.051	
40	1.025	1.050	1.075	1.100	1.125	1.150	1.175	1.200	1.225	1.250	40	1.025	
41	1.000	1.024	1.049	1.073	1.098	1.122	1.146	1.171	1.195	1.220	41	1.000	
42	.9762	1.000	1.024	1.048	1.071	1.095	1.119	1.143	1.167	1.190	42	.9762	
43	.9535	.9767	1.000	1.023	1.047	1.070	1.093	1.116	1.140	1.163	43	.9535	
44	.9318	.9545	.9773	1.000	1.023	1.045	1.068	1.091	1.114	1.136	44	.9318	
45	.9111	.9333	.9556	.9778	1.000	1.022	1.044	1.067	1.089	1.111	45	.9111	
46	.8913	.9130	.9348	.9565	.9783	1.000	1.022	1.043	1.065	1.087	46	.8913	
47	.8723	.8936	.9149	.9362	.9574	.9787	1.000	1.021	1.043	1.064	47	.8723	
48	.8542	.8750	.8958	.9167	.9375	.9583	.9792	1.000	1.021	1.042	48	.8542	
49	.8367	.8571	.8776	.8980	.9184	.9388	.9592	.9796	1.000	1.020	49	.8367	
50	.8200	.8400	.8600	.8800	.9000	.9200	.9400	.9600	.9800	1.000	50	.8200	

表三 (續)

商 數

被 除 數

除數	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	除數
51	8039	8235	8431	8627	8824	9020	9216	9412	9608	9804	51
52	7885	8077	8269	8462	8654	8846	9038	9231	9423	9615	52
53	7736	7925	8113	8302	8491	8679	8868	9057	9245	9434	53
54	7593	7778	7963	8148	8333	8519	8704	8889	9074	9259	54
55	7455	7636	7818	8000	8182	8364	8545	8727	8909	9091	55
56	7321	7500	7679	7857	8036	8214	8393	8571	8750	8929	56
57	7193	7368	7544	7719	7895	8070	8246	8421	8596	8772	57
58	7069	7241	7414	7586	7759	7931	8103	8276	8448	8621	58
59	6949	7119	7288	7458	7627	7797	7966	8136	8305	8475	59
60	6833	7000	7167	7333	7500	7667	7833	8000	8167	8333	60
61	6721	6885	7049	7213	7377	7541	7705	7869	8033	8197	61
62	6613	6774	6935	7097	7258	7419	7581	7742	7903	8065	62
63	6508	6667	6825	6984	7143	7302	7460	7619	7778	7937	63
64	6406	6563	6719	6875	7031	7188	7344	7500	7656	7813	64
65	6308	6462	6615	6769	6923	7077	7231	7385	7538	7692	65
66	6212	6364	6515	6667	6818	6970	7121	7273	7424	7576	66
67	6119	6269	6418	6567	6716	6866	7015	7164	7313	7463	67
68	6029	6176	6324	6471	6618	6765	6912	7059	7206	7353	68
69	5942	6087	6232	6377	6522	6667	6812	6957	7101	7246	69
70	5857	6000	6143	6286	6429	6571	6714	6857	7000	7143	70
71	5775	5915	6056	6197	6338	6479	6620	6761	6901	7042	71
72	5694	5833	5972	6111	6250	6389	6528	6667	6806	6944	72
73	5616	5753	5890	6027	6164	6301	6438	6575	6712	6849	73
74	5541	5676	5811	5946	6081	6216	6351	6486	6622	6757	74
75	5467	5600	5733	5867	6000	6133	6267	6400	6533	6667	75
76	5395	5526	5658	5789	5921	6053	6184	6316	6447	6579	76
77	5325	5455	5584	5714	5844	5974	6104	6234	6364	6494	77
78	5256	5385	5513	5641	5769	5897	6026	6154	6282	6410	78
79	5190	5316	5443	5570	5696	5823	5949	6076	6203	6329	79
80	5125	5250	5375	5500	5625	5750	5875	6000	6125	6250	80
81	5062	5185	5309	5432	5556	5679	5802	5926	6049	6173	81
82	5000	5122	5244	5366	5488	5610	5732	5854	5976	6098	82
83	4940	5060	5181	5301	5422	5542	5663	5783	5904	6024	83
84	4881	5000	5119	5238	5357	5476	5595	5714	5833	5952	84
85	4824	4941	5059	5176	5294	5412	5529	5647	5765	5882	85
86	4767	4884	5000	5116	5233	5349	5465	5581	5698	5814	86
87	4713	4828	4943	5057	5172	5287	5402	5517	5632	5747	87
88	4659	4773	4886	5000	5114	5227	5341	5455	5568	5682	88
89	4607	4719	4831	4944	5056	5169	5281	5393	5506	5618	89
90	4556	4667	4778	4889	5000	5111	5222	5333	5444	5556	90
91	4505	4615	4725	4835	4945	5055	5165	5275	5385	5495	91
92	4457	4565	4674	4783	4891	5000	5109	5217	5326	5435	92
93	4409	4516	4624	4731	4839	4946	5054	5161	5269	5376	93
94	4362	4468	4574	4681	4787	4894	5000	5106	5213	5319	94
95	4316	4421	4526	4632	4737	4842	4947	5053	5158	5263	95
96	4271	4375	4479	4583	4688	4792	4896	5000	5104	5208	96
97	4227	4330	4433	4536	4639	4742	4845	4948	5052	5155	97
98	4184	4286	4388	4490	4592	4694	4796	4898	5000	5102	98
99	4141	4242	4343	4444	4545	4646	4747	4848	4949	5051	99

表三(續)

38		商數										38	
		被除數											
除數	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	除數		
2	25.50	26.00	26.50	27.00	27.50	28.00	28.50	29.00	29.50	30.00	2		
3	17.00	17.33	17.67	18.00	18.33	18.67	19.00	19.33	19.67	20.00	3		
4	12.75	13.00	13.25	13.50	13.75	14.00	14.25	14.50	14.75	15.00	4		
5	10.20	10.40	10.60	10.80	11.00	11.20	11.40	11.60	11.80	12.00	5		
6	8.500	8.667	8.833	9.000	9.167	9.333	9.500	9.667	9.833	10.00	6		
7	7.286	7.429	7.571	7.714	7.857	8.000	8.143	8.286	8.429	8.571	7		
8	6.375	6.500	6.625	6.750	6.875	7.000	7.125	7.250	7.375	7.500	8		
9	5.667	5.778	5.889	6.000	6.111	6.222	6.333	6.444	6.556	6.667	9		
10	5.100	5.200	5.300	5.400	5.500	5.600	5.700	5.800	5.900	6.000	10		
11	4.636	4.727	4.818	4.909	5.000	5.091	5.182	5.273	5.364	5.455	11		
12	4.250	4.333	4.417	4.500	4.583	4.667	4.750	4.833	4.917	5.000	12		
13	3.923	4.000	4.077	4.154	4.231	4.308	4.385	4.462	4.538	4.615	13		
14	3.643	3.714	3.786	3.857	3.929	4.000	4.071	4.143	4.214	4.286	14		
15	3.400	3.467	3.533	3.600	3.667	3.733	3.800	3.867	3.933	4.000	15		
16	3.188	3.250	3.313	3.375	3.438	3.500	3.563	3.625	3.688	3.750	16		
17	3.000	3.059	3.118	3.176	3.235	3.294	3.353	3.412	3.471	3.529	17		
18	2.833	2.889	2.944	3.000	3.056	3.111	3.167	3.222	3.278	3.333	18		
19	2.684	2.737	2.789	2.842	2.895	2.947	3.000	3.053	3.105	3.158	19		
20	2.550	2.600	2.650	2.700	2.750	2.800	2.850	2.900	2.950	3.000	20		
21	2.429	2.476	2.524	2.571	2.619	2.667	2.714	2.762	2.810	2.857	21		
22	2.318	2.364	2.409	2.455	2.500	2.545	2.591	2.636	2.682	2.727	22		
23	2.217	2.261	2.304	2.348	2.391	2.435	2.478	2.522	2.565	2.609	23		
24	2.125	2.167	2.208	2.250	2.292	2.333	2.375	2.417	2.458	2.500	24		
25	2.040	2.080	2.120	2.160	2.200	2.240	2.280	2.320	2.360	2.400	25		
26	1.962	2.000	2.038	2.077	2.115	2.154	2.192	2.231	2.269	2.308	26		
27	1.889	1.926	1.963	2.000	2.037	2.074	2.111	2.148	2.185	2.222	27		
28	1.821	1.857	1.893	1.929	1.964	2.000	2.036	2.071	2.107	2.143	28		
29	1.759	1.793	1.828	1.862	1.897	1.931	1.966	2.000	2.034	2.069	29		
30	1.700	1.733	1.767	1.800	1.833	1.867	1.900	1.933	1.967	2.000	30		
31	1.645	1.677	1.710	1.742	1.774	1.806	1.839	1.871	1.903	1.935	31		
32	1.594	1.625	1.656	1.688	1.719	1.750	1.781	1.813	1.844	1.875	32		
33	1.545	1.576	1.606	1.636	1.667	1.697	1.727	1.758	1.788	1.818	33		
34	1.500	1.529	1.559	1.588	1.618	1.647	1.676	1.706	1.735	1.765	34		
35	1.457	1.486	1.514	1.543	1.571	1.600	1.629	1.657	1.686	1.714	35		
36	1.417	1.444	1.472	1.500	1.528	1.556	1.583	1.611	1.639	1.667	36		
37	1.378	1.405	1.432	1.459	1.486	1.514	1.541	1.568	1.595	1.622	37		
38	1.342	1.368	1.395	1.421	1.447	1.474	1.500	1.526	1.553	1.579	38		
39	1.308	1.333	1.359	1.385	1.410	1.436	1.462	1.487	1.513	1.538	39		
40	1.275	1.300	1.325	1.350	1.375	1.400	1.425	1.450	1.475	1.500	40		
41	1.244	1.268	1.293	1.317	1.341	1.366	1.390	1.415	1.439	1.463	41		
42	1.214	1.238	1.262	1.286	1.310	1.333	1.357	1.381	1.405	1.429	42		
43	1.186	1.209	1.233	1.256	1.279	1.302	1.326	1.349	1.372	1.395	43		
44	1.159	1.182	1.205	1.227	1.250	1.273	1.295	1.318	1.341	1.364	44		
45	1.133	1.156	1.178	1.200	1.222	1.244	1.267	1.289	1.311	1.333	45		
46	1.109	1.130	1.152	1.174	1.196	1.217	1.239	1.261	1.283	1.304	46		
47	1.085	1.106	1.128	1.149	1.170	1.191	1.213	1.234	1.255	1.277	47		
48	1.062	1.083	1.104	1.125	1.146	1.167	1.187	1.208	1.229	1.250	48		
49	1.041	1.061	1.082	1.102	1.122	1.143	1.163	1.184	1.204	1.224	49		
50	1.020	1.040	1.060	1.080	1.100	1.120	1.140	1.160	1.180	1.200	50		

表三 (續)

商數
被除數

除數	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	除數
51	1.000	1.020	1.039	1.059	1.078	1.098	1.118	1.137	1.157	1.176	51
52	.9808	1.000	1.019	1.038	1.058	1.077	1.096	1.115	1.135	1.154	52
53	.9623	.9811	1.000	1.019	1.038	1.057	1.075	1.094	1.113	1.132	53
54	.9444	.9630	.9815	1.000	1.019	1.037	1.056	1.074	1.093	1.111	54
55	.9273	.9455	.9636	.9818	1.000	1.018	1.036	1.055	1.073	1.091	55
56	.9107	.9286	.9464	.9643	.9821	1.000	1.018	1.036	1.054	1.071	56
57	.8947	.9123	.9298	.9474	.9649	.9825	1.000	1.018	1.035	1.053	57
58	.8793	.8966	.9138	.9310	.9483	.9655	.9828	1.000	1.017	1.034	58
59	.8644	.8814	.8983	.9153	.9322	.9492	.9661	.9831	1.000	1.017	59
60	.8500	.8667	.8833	.9000	.9167	.9333	.9500	.9667	.9833	1.000	60
61	.8361	.8525	.8689	.8852	.9016	.9180	.9344	.9508	.9672	.9836	61
62	.8226	.8387	.8548	.8710	.8871	.9032	.9194	.9355	.9516	.9677	62
63	.8095	.8254	.8413	.8571	.8730	.8889	.9048	.9206	.9365	.9524	63
64	.7969	.8125	.8281	.8438	.8594	.8750	.8906	.9063	.9219	.9375	64
65	.7846	.8000	.8154	.8308	.8462	.8615	.8769	.8923	.9077	.9231	65
66	.7727	.7879	.8030	.8182	.8333	.8485	.8636	.8788	.8939	.9091	66
67	.7612	.7761	.7910	.8060	.8209	.8358	.8507	.8657	.8806	.8955	67
68	.7500	.7647	.7794	.7941	.8088	.8235	.8382	.8529	.8676	.8824	68
69	.7391	.7536	.7681	.7826	.7971	.8116	.8261	.8406	.8551	.8696	69
70	.7286	.7429	.7571	.7714	.7857	.8000	.8143	.8286	.8429	.8571	70
71	.7183	.7324	.7465	.7606	.7746	.7887	.8028	.8169	.8310	.8451	71
72	.7083	.7222	.7361	.7500	.7639	.7778	.7917	.8056	.8194	.8333	72
73	.6986	.7123	.7260	.7397	.7534	.7671	.7808	.7945	.8082	.8219	73
74	.6892	.7027	.7162	.7297	.7432	.7568	.7703	.7838	.7973	.8108	74
75	.6800	.6933	.7067	.7200	.7333	.7467	.7600	.7733	.7867	.8000	75
76	.6711	.6842	.6974	.7105	.7237	.7368	.7500	.7632	.7763	.7895	76
77	.6623	.6753	.6883	.7013	.7143	.7273	.7403	.7532	.7662	.7792	77
78	.6538	.6667	.6795	.6923	.7051	.7179	.7308	.7436	.7564	.7692	78
79	.6456	.6582	.6709	.6835	.6962	.7089	.7215	.7342	.7468	.7595	79
80	.6375	.6500	.6625	.6750	.6875	.7000	.7125	.7250	.7375	.7500	80
81	.6296	.6420	.6543	.6667	.6790	.6914	.7037	.7160	.7284	.7407	81
82	.6220	.6341	.6463	.6585	.6707	.6829	.6951	.7073	.7195	.7317	82
83	.6145	.6265	.6386	.6506	.6627	.6747	.6867	.6988	.7108	.7229	83
84	.6071	.6190	.6310	.6429	.6548	.6667	.6786	.6905	.7024	.7143	84
85	.6000	.6118	.6235	.6353	.6471	.6588	.6706	.6824	.6941	.7059	85
86	.5930	.6047	.6163	.6279	.6395	.6512	.6628	.6744	.6860	.6977	86
87	.5862	.5977	.6092	.6207	.6322	.6437	.6552	.6667	.6782	.6897	87
88	.5795	.5909	.6023	.6136	.6250	.6364	.6477	.6591	.6705	.6818	88
89	.5730	.5843	.5955	.6067	.6180	.6292	.6404	.6517	.6629	.6742	89
90	.5667	.5778	.5889	.6000	.6111	.6222	.6333	.6444	.6556	.6667	90
91	.5604	.5714	.5824	.5934	.6044	.6154	.6264	.6374	.6484	.6593	91
92	.5543	.5652	.5761	.5870	.5978	.6087	.6196	.6304	.6413	.6522	92
93	.5484	.5591	.5699	.5806	.5914	.6022	.6129	.6237	.6344	.6452	93
94	.5426	.5532	.5638	.5745	.5851	.5957	.6064	.6170	.6277	.6383	94
95	.5368	.5474	.5579	.5684	.5789	.5895	.6000	.6105	.6211	.6316	95
96	.5313	.5417	.5521	.5625	.5729	.5833	.5938	.6042	.6146	.6250	96
97	.5258	.5361	.5464	.5567	.5670	.5773	.5876	.5979	.6082	.6186	97
98	.5204	.5306	.5408	.5510	.5612	.5714	.5816	.5918	.6020	.6122	98
99	.5152	.5253	.5354	.5455	.5556	.5657	.5758	.5859	.5960	.6061	99

表三(續)

商數
被除數

除數	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	除數
2	30.50	31.00	31.50	32.00	32.50	33.00	33.50	34.00	34.50	35.00	2
3	20.33	20.67	21.00	21.33	21.67	22.00	22.33	22.67	23.00	23.33	3
4	15.25	15.50	15.75	16.00	16.25	16.50	16.75	17.00	17.25	17.50	4
5	12.20	12.40	12.60	12.80	13.00	13.20	13.40	13.60	13.80	14.00	5
6	10.17	10.33	10.50	10.67	10.83	11.00	11.17	11.33	11.50	11.67	6
7	8.714	8.857	9.000	9.143	9.286	9.429	9.571	9.714	9.857	10.000	7
8	7.625	7.750	7.875	8.000	8.125	8.250	8.375	8.500	8.625	8.750	8
9	6.778	6.889	7.000	7.111	7.222	7.333	7.444	7.556	7.667	7.778	9
10	6.100	6.200	6.300	6.400	6.500	6.600	6.700	6.800	6.900	7.000	10
11	5.545	5.636	5.727	5.818	5.909	6.000	6.091	6.182	6.273	6.364	11
12	5.083	5.167	5.250	5.333	5.417	5.500	5.583	5.667	5.750	5.833	12
13	4.692	4.769	4.846	4.923	5.000	5.077	5.154	5.231	5.308	5.385	13
14	4.357	4.429	4.500	4.571	4.643	4.714	4.786	4.857	4.929	5.000	14
15	4.067	4.133	4.200	4.267	4.333	4.400	4.467	4.533	4.600	4.667	15
16	3.813	3.875	3.938	4.000	4.063	4.125	4.188	4.250	4.313	4.375	16
17	3.588	3.647	3.706	3.765	3.824	3.882	3.941	4.000	4.059	4.118	17
18	3.389	3.444	3.500	3.556	3.611	3.667	3.722	3.778	3.833	3.889	18
19	3.211	3.263	3.316	3.368	3.421	3.474	3.526	3.579	3.632	3.684	19
20	3.050	3.100	3.150	3.200	3.250	3.300	3.350	3.400	3.450	3.500	20
21	2.905	2.952	3.000	3.048	3.095	3.143	3.190	3.238	3.286	3.333	21
22	2.773	2.818	2.864	2.909	2.955	3.000	3.045	3.091	3.136	3.182	22
23	2.652	2.696	2.739	2.783	2.826	2.870	2.913	2.957	3.000	3.043	23
24	2.542	2.583	2.625	2.667	2.708	2.750	2.792	2.833	2.875	2.917	24
25	2.440	2.480	2.520	2.560	2.600	2.640	2.680	2.720	2.760	2.800	25
26	2.346	2.385	2.423	2.462	2.500	2.538	2.577	2.615	2.654	2.692	26
27	2.259	2.296	2.333	2.370	2.407	2.444	2.481	2.519	2.556	2.593	27
28	2.179	2.214	2.250	2.286	2.321	2.357	2.393	2.429	2.464	2.500	28
29	2.103	2.138	2.172	2.207	2.241	2.276	2.310	2.345	2.379	2.414	29
30	2.033	2.067	2.100	2.133	2.167	2.200	2.233	2.267	2.300	2.333	30
31	1.968	2.000	2.032	2.065	2.097	2.129	2.161	2.194	2.226	2.258	31
32	1.906	1.938	1.969	2.000	2.031	2.063	2.094	2.125	2.156	2.188	32
33	1.848	1.879	1.909	1.939	1.970	2.000	2.030	2.061	2.091	2.121	33
34	1.794	1.824	1.853	1.882	1.912	1.941	1.971	2.000	2.029	2.059	34
35	1.743	1.771	1.800	1.829	1.857	1.886	1.914	1.943	1.971	2.000	35
36	1.694	1.722	1.750	1.778	1.806	1.833	1.861	1.889	1.917	1.944	36
37	1.649	1.676	1.703	1.730	1.757	1.784	1.811	1.838	1.865	1.892	37
38	1.605	1.632	1.658	1.684	1.711	1.737	1.763	1.789	1.816	1.842	38
39	1.564	1.590	1.615	1.641	1.667	1.692	1.718	1.744	1.769	1.795	39
40	1.525	1.550	1.575	1.600	1.625	1.650	1.675	1.700	1.725	1.750	40
41	1.488	1.512	1.537	1.561	1.585	1.610	1.634	1.659	1.683	1.707	41
42	1.452	1.476	1.500	1.524	1.548	1.571	1.595	1.619	1.643	1.667	42
43	1.419	1.442	1.465	1.488	1.512	1.535	1.558	1.581	1.605	1.628	43
44	1.386	1.409	1.432	1.455	1.477	1.500	1.523	1.545	1.568	1.591	44
45	1.356	1.378	1.400	1.422	1.444	1.467	1.489	1.511	1.533	1.556	45
46	1.326	1.348	1.370	1.391	1.413	1.435	1.457	1.478	1.500	1.522	46
47	1.298	1.319	1.340	1.362	1.383	1.404	1.426	1.447	1.468	1.489	47
48	1.271	1.292	1.312	1.333	1.354	1.375	1.396	1.417	1.437	1.458	48
49	1.245	1.265	1.286	1.306	1.327	1.347	1.367	1.388	1.408	1.429	49
50	1.220	1.240	1.260	1.280	1.300	1.320	1.340	1.360	1.380	1.400	50

表三 (續)

商 數

41

被 除 數

除數	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	除數
51	1.196	1.216	1.235	1.255	1.275	1.294	1.314	1.333	1.353	1.373	51
52	1.173	1.192	1.212	1.231	1.250	1.269	1.288	1.308	1.327	1.346	52
53	1.151	1.170	1.189	1.208	1.226	1.245	1.264	1.283	1.302	1.321	53
54	1.130	1.148	1.167	1.185	1.204	1.222	1.241	1.259	1.278	1.296	54
55	1.109	1.127	1.145	1.164	1.182	1.200	1.218	1.236	1.255	1.273	55
56	1.089	1.107	1.125	1.143	1.161	1.179	1.196	1.214	1.232	1.250	56
57	1.070	1.088	1.105	1.123	1.140	1.158	1.175	1.193	1.211	1.228	57
58	1.052	1.069	1.086	1.103	1.121	1.138	1.155	1.172	1.190	1.207	58
59	1.034	1.051	1.068	1.085	1.102	1.119	1.136	1.153	1.169	1.186	59
60	1.017	1.033	1.050	1.067	1.083	1.100	1.117	1.133	1.150	1.167	60
61	1.000	1.016	1.033	1.049	1.066	1.082	1.098	1.115	1.131	1.148	61
62	.9839	1.000	1.016	1.032	1.048	1.065	1.081	1.097	1.113	1.129	62
63	.9683	.9841	1.000	1.016	1.032	1.048	1.063	1.079	1.095	1.111	63
64	.9531	.9688	.9844	1.000	1.016	1.031	1.047	1.063	1.078	1.094	64
65	.9385	.9538	.9692	.9846	1.000	1.015	1.031	1.046	1.062	1.077	65
66	.9242	.9394	.9545	.9697	.9848	1.000	1.015	1.030	1.045	1.061	66
67	.9104	.9254	.9403	.9552	.9701	.9851	1.000	1.015	1.030	1.045	67
68	.8971	.9118	.9265	.9412	.9559	.9706	.9853	1.000	1.015	1.029	68
69	.8841	.8986	.9130	.9275	.9420	.9565	.9710	.9855	1.000	1.014	69
70	.8714	.8857	.9000	.9143	.9286	.9429	.9571	.9714	.9857	1.000	70
71	.8592	.8732	.8873	.9014	.9155	.9296	.9437	.9577	.9718	.9859	71
72	.8472	.8611	.8750	.8889	.9028	.9167	.9306	.9444	.9583	.9722	72
73	.8356	.8493	.8630	.8767	.8904	.9041	.9178	.9315	.9452	.9589	73
74	.8243	.8378	.8514	.8649	.8784	.8919	.9054	.9189	.9324	.9459	74
75	.8133	.8267	.8400	.8533	.8667	.8800	.8933	.9067	.9200	.9333	75
76	.8026	.8158	.8289	.8421	.8553	.8684	.8816	.8947	.9079	.9211	76
77	.7922	.8052	.8182	.8312	.8442	.8571	.8701	.8831	.8961	.9091	77
78	.7821	.7949	.8077	.8205	.8333	.8462	.8590	.8718	.8846	.8974	78
79	.7722	.7848	.7975	.8101	.8228	.8354	.8481	.8608	.8734	.8861	79
80	.7625	.7750	.7875	.8000	.8125	.8250	.8375	.8500	.8625	.8750	80
81	.7531	.7654	.7778	.7901	.8025	.8148	.8272	.8395	.8519	.8642	81
82	.7439	.7561	.7683	.7805	.7927	.8049	.8171	.8293	.8415	.8537	82
83	.7349	.7470	.7590	.7711	.7831	.7952	.8072	.8193	.8313	.8434	83
84	.7262	.7381	.7500	.7619	.7738	.7857	.7976	.8095	.8214	.8333	84
85	.7176	.7294	.7412	.7529	.7647	.7765	.7882	.8000	.8118	.8235	85
86	.7093	.7209	.7326	.7442	.7558	.7674	.7791	.7907	.8023	.8140	86
87	.7011	.7126	.7241	.7356	.7471	.7586	.7701	.7816	.7931	.8046	87
88	.6932	.7045	.7159	.7273	.7386	.7500	.7614	.7727	.7841	.7955	88
89	.6854	.6966	.7079	.7191	.7303	.7416	.7528	.7640	.7753	.7865	89
90	.6778	.6889	.7000	.7111	.7222	.7333	.7444	.7556	.7667	.7778	90
91	.6703	.6813	.6923	.7033	.7143	.7253	.7363	.7473	.7582	.7692	91
92	.6630	.6739	.6848	.6957	.7065	.7174	.7283	.7391	.7500	.7609	92
93	.6559	.6667	.6774	.6882	.6989	.7097	.7204	.7312	.7419	.7527	93
94	.6489	.6596	.6702	.6809	.6915	.7021	.7128	.7234	.7340	.7447	94
95	.6421	.6526	.6632	.6737	.6842	.6947	.7053	.7158	.7263	.7368	95
96	.6354	.6458	.6563	.6667	.6771	.6875	.6979	.7083	.7188	.7292	96
97	.6289	.6392	.6495	.6598	.6701	.6804	.6907	.7010	.7113	.7216	97
98	.6224	.6327	.6429	.6531	.6633	.6735	.6837	.6939	.7041	.7143	98
99	.6162	.6263	.6364	.6465	.6566	.6667	.6768	.6869	.6970	.7071	99

表三 (續)

42

商 數

被 除 數

除數	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	除數
2	35.50	36.00	36.50	37.00	37.50	38.00	38.50	39.00	39.50	40.00	2
3	23.67	24.00	24.33	24.67	25.00	25.33	25.67	26.00	26.33	26.67	3
4	17.75	18.00	18.25	18.50	18.75	19.00	19.25	19.50	19.75	20.00	4
5	14.20	14.40	14.60	14.80	15.00	15.20	15.40	15.60	15.80	16.00	5
6	11.83	12.00	12.17	12.33	12.50	12.67	12.83	13.00	13.17	13.33	6
7	10.14	10.29	10.43	10.57	10.71	10.86	11.00	11.14	11.29	11.43	7
8	8.875	9.000	9.125	9.250	9.375	9.500	9.625	9.750	9.875	10.000	8
9	7.889	8.000	8.111	8.222	8.333	8.444	8.556	8.667	8.778	8.889	9
10	7.100	7.200	7.300	7.400	7.500	7.600	7.700	7.800	7.900	8.000	10
11	6.455	6.545	6.636	6.727	6.818	6.909	7.000	7.091	7.182	7.273	11
12	5.917	6.000	6.083	6.167	6.250	6.333	6.417	6.500	6.583	6.667	12
13	5.462	5.538	5.615	5.692	5.769	5.846	5.923	6.000	6.077	6.154	13
14	5.071	5.143	5.214	5.286	5.357	5.429	5.500	5.571	5.643	5.714	14
15	4.733	4.800	4.867	4.933	5.000	5.067	5.133	5.200	5.267	5.333	15
16	4.438	4.500	4.563	4.625	4.688	4.750	4.813	4.875	4.938	5.000	16
17	4.176	4.235	4.294	4.353	4.412	4.471	4.529	4.588	4.647	4.706	17
18	3.944	4.000	4.056	4.111	4.167	4.222	4.278	4.333	4.389	4.444	18
19	3.737	3.789	3.842	3.895	3.947	4.000	4.053	4.105	4.158	4.211	19
20	3.550	3.600	3.650	3.700	3.750	3.800	3.850	3.900	3.950	4.000	20
21	3.381	3.429	3.476	3.524	3.571	3.619	3.667	3.714	3.762	3.810	21
22	3.227	3.273	3.318	3.364	3.409	3.455	3.500	3.545	3.591	3.636	22
23	3.087	3.130	3.174	3.217	3.261	3.304	3.348	3.391	3.435	3.478	23
24	2.958	3.000	3.042	3.083	3.125	3.167	3.208	3.250	3.292	3.333	24
25	2.840	2.880	2.920	2.960	3.000	3.040	3.080	3.120	3.160	3.200	25
26	2.731	2.769	2.808	2.846	2.885	2.923	2.962	3.000	3.038	3.077	26
27	2.630	2.667	2.704	2.741	2.778	2.815	2.852	2.889	2.926	2.963	27
28	2.536	2.571	2.607	2.643	2.679	2.714	2.750	2.786	2.821	2.857	28
29	2.448	2.483	2.517	2.552	2.586	2.621	2.655	2.690	2.724	2.759	29
30	2.367	2.400	2.433	2.467	2.500	2.533	2.567	2.600	2.633	2.667	30
31	2.290	2.323	2.355	2.387	2.419	2.452	2.484	2.516	2.548	2.581	31
32	2.219	2.250	2.281	2.313	2.344	2.375	2.406	2.438	2.469	2.500	32
33	2.152	2.182	2.212	2.242	2.273	2.303	2.333	2.364	2.394	2.424	33
34	2.088	2.118	2.147	2.176	2.206	2.235	2.265	2.294	2.324	2.353	34
35	2.029	2.057	2.086	2.114	2.143	2.171	2.200	2.229	2.257	2.286	35
36	1.972	2.000	2.028	2.056	2.083	2.111	2.139	2.167	2.194	2.222	36
37	1.919	1.946	1.973	2.000	2.027	2.054	2.081	2.108	2.135	2.162	37
38	1.868	1.895	1.921	1.947	1.974	2.000	2.026	2.053	2.079	2.105	38
39	1.821	1.846	1.872	1.897	1.923	1.949	1.974	2.000	2.026	2.051	39
40	1.775	1.800	1.825	1.850	1.875	1.900	1.925	1.950	1.975	2.000	40
41	1.732	1.756	1.780	1.805	1.829	1.854	1.878	1.902	1.927	1.951	41
42	1.690	1.714	1.738	1.762	1.786	1.810	1.833	1.857	1.881	1.905	42
43	1.651	1.674	1.698	1.721	1.744	1.767	1.791	1.814	1.837	1.860	43
44	1.614	1.636	1.659	1.682	1.705	1.727	1.750	1.773	1.795	1.818	44
45	1.578	1.600	1.622	1.644	1.667	1.689	1.711	1.733	1.756	1.778	45
46	1.543	1.565	1.587	1.609	1.630	1.652	1.674	1.696	1.717	1.739	46
47	1.511	1.532	1.553	1.574	1.596	1.617	1.638	1.660	1.681	1.702	47
48	1.479	1.500	1.521	1.542	1.562	1.583	1.604	1.625	1.646	1.667	48
49	1.449	1.469	1.490	1.510	1.531	1.551	1.571	1.592	1.612	1.633	49
50	1.420	1.440	1.460	1.480	1.500	1.520	1.540	1.560	1.580	1.600	50

表三 (續)

商 數

43

被 除 數

除數	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	除數
51	1.392	1.412	1.431	1.451	1.471	1.490	1.510	1.529	1.549	1.569	51
52	1.365	1.385	1.404	1.423	1.442	1.462	1.481	1.500	1.519	1.538	52
53	1.340	1.358	1.377	1.396	1.415	1.434	1.453	1.472	1.491	1.509	53
54	1.315	1.333	1.352	1.370	1.389	1.407	1.426	1.444	1.463	1.481	54
55	1.291	1.309	1.327	1.345	1.364	1.382	1.400	1.418	1.436	1.455	55
56	1.268	1.286	1.304	1.321	1.339	1.357	1.375	1.393	1.411	1.429	56
57	1.246	1.263	1.281	1.298	1.316	1.333	1.351	1.368	1.386	1.404	57
58	1.224	1.241	1.259	1.276	1.293	1.310	1.328	1.345	1.362	1.379	58
59	1.203	1.220	1.237	1.254	1.271	1.288	1.305	1.322	1.339	1.356	59
60	1.183	1.200	1.217	1.233	1.250	1.267	1.283	1.300	1.317	1.333	60
61	1.164	1.180	1.197	1.213	1.230	1.246	1.262	1.279	1.295	1.311	61
62	1.145	1.161	1.177	1.194	1.210	1.226	1.242	1.258	1.274	1.290	62
63	1.127	1.143	1.159	1.175	1.190	1.206	1.222	1.238	1.254	1.270	63
64	1.109	1.125	1.141	1.156	1.172	1.188	1.203	1.219	1.234	1.250	64
65	1.092	1.108	1.123	1.138	1.154	1.169	1.185	1.200	1.215	1.231	65
66	1.076	1.091	1.106	1.121	1.136	1.152	1.167	1.182	1.197	1.212	66
67	1.060	1.075	1.090	1.104	1.119	1.134	1.149	1.164	1.179	1.194	67
68	1.044	1.059	1.074	1.088	1.103	1.118	1.132	1.147	1.162	1.176	68
69	1.029	1.043	1.058	1.072	1.087	1.101	1.116	1.130	1.145	1.159	69
70	1.014	1.029	1.043	1.057	1.071	1.086	1.100	1.114	1.129	1.143	70
71	1.000	1.014	1.028	1.042	1.056	1.070	1.085	1.099	1.113	1.127	71
72	.9861	1.000	1.014	1.028	1.042	1.056	1.069	1.083	1.097	1.111	72
73	.9726	.9863	1.000	1.014	1.027	1.041	1.055	1.068	1.082	1.096	73
74	.9595	.9730	.9865	1.000	1.014	1.027	1.041	1.054	1.068	1.081	74
75	.9467	.9600	.9733	.9867	1.000	1.013	1.027	1.040	1.053	1.067	75
76	.9342	.9474	.9605	.9737	.9868	1.000	1.013	1.026	1.039	1.053	76
77	.9221	.9351	.9481	.9610	.9740	.9870	1.000	1.013	1.026	1.039	77
78	.9103	.9231	.9359	.9487	.9615	.9744	.9872	1.000	1.013	1.026	78
79	.8987	.9114	.9241	.9367	.9494	.9620	.9747	.9873	1.000	1.013	79
80	.8875	.9000	.9125	.9250	.9375	.9500	.9625	.9750	.9875	1.000	80
81	.8765	.8889	.9012	.9136	.9259	.9383	.9506	.9630	.9753	.9877	81
82	.8659	.8780	.8902	.9024	.9146	.9268	.9390	.9512	.9634	.9756	82
83	.8554	.8675	.8795	.8916	.9036	.9157	.9277	.9398	.9518	.9639	83
84	.8452	.8571	.8690	.8810	.8929	.9048	.9167	.9286	.9405	.9524	84
85	.8353	.8471	.8588	.8706	.8824	.8941	.9059	.9176	.9294	.9412	85
86	.8256	.8372	.8488	.8605	.8721	.8837	.8953	.9070	.9186	.9302	86
87	.8161	.8276	.8391	.8506	.8621	.8736	.8851	.8966	.9080	.9195	87
88	.8068	.8182	.8295	.8409	.8523	.8636	.8750	.8864	.8977	.9091	88
89	.7978	.8090	.8202	.8315	.8427	.8539	.8652	.8764	.8876	.8989	89
90	.7889	.8000	.8111	.8222	.8333	.8444	.8556	.8667	.8778	.8889	90
91	.7802	.7912	.8022	.8132	.8242	.8352	.8462	.8571	.8681	.8791	91
92	.7717	.7826	.7935	.8043	.8152	.8261	.8370	.8478	.8587	.8696	92
93	.7634	.7742	.7849	.7957	.8065	.8172	.8280	.8387	.8495	.8602	93
94	.7553	.7660	.7766	.7872	.7979	.8085	.8191	.8298	.8404	.8511	94
95	.7474	.7579	.7684	.7789	.7895	.8000	.8105	.8211	.8316	.8421	95
96	.7396	.7500	.7604	.7708	.7813	.7917	.8021	.8125	.8229	.8333	96
97	.7320	.7423	.7526	.7629	.7732	.7835	.7938	.8041	.8144	.8247	97
98	.7245	.7347	.7449	.7551	.7653	.7755	.7857	.7959	.8061	.8163	98
99	.7172	.7273	.7374	.7475	.7576	.7677	.7778	.7879	.7980	.8081	99

表三 (續)

44		商 數											
		被 除 數											
除數	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	除數		
2	40.50	41.00	41.50	42.00	42.50	43.00	43.50	44.00	44.50	45.00	2		
3	27.00	27.33	27.67	28.00	28.33	28.67	29.00	29.33	29.67	30.00	3		
4	20.25	20.50	20.75	21.00	21.25	21.50	21.75	22.00	22.25	22.50	4		
5	16.20	16.40	16.60	16.80	17.00	17.20	17.40	17.60	17.80	18.00	5		
6	13.50	13.67	13.83	14.00	14.17	14.33	14.50	14.67	14.83	15.00	6		
7	11.57	11.71	11.86	12.00	12.14	12.29	12.43	12.57	12.71	12.86	7		
8	10.13	10.25	10.38	10.50	10.63	10.75	10.88	11.00	11.13	11.25	8		
9	9.000	9.111	9.222	9.333	9.444	9.556	9.667	9.778	9.889	10.00	9		
10	8.100	8.200	8.300	8.400	8.500	8.600	8.700	8.800	8.900	9.000	10		
11	7.364	7.455	7.545	7.636	7.727	7.818	7.909	8.000	8.091	8.182	11		
12	6.750	6.833	6.917	7.000	7.083	7.167	7.250	7.333	7.417	7.500	12		
13	6.231	6.308	6.385	6.462	6.538	6.615	6.692	6.769	6.846	6.923	13		
14	5.786	5.857	5.929	6.000	6.071	6.143	6.214	6.286	6.357	6.429	14		
15	5.400	5.467	5.533	5.600	5.667	5.733	5.800	5.867	5.933	6.000	15		
16	5.063	5.125	5.188	5.250	5.313	5.375	5.438	5.500	5.563	5.625	16		
17	4.765	4.824	4.882	4.941	5.000	5.059	5.118	5.176	5.235	5.294	17		
18	4.500	4.556	4.611	4.667	4.722	4.778	4.833	4.889	4.944	5.000	18		
19	4.263	4.316	4.368	4.421	4.474	4.526	4.579	4.632	4.684	4.737	19		
20	4.050	4.100	4.150	4.200	4.250	4.300	4.350	4.400	4.450	4.500	20		
21	3.857	3.905	3.952	4.000	4.048	4.095	4.143	4.190	4.238	4.286	21		
22	3.682	3.727	3.773	3.818	3.864	3.909	3.955	4.000	4.045	4.091	22		
23	3.522	3.565	3.609	3.652	3.696	3.739	3.783	3.826	3.870	3.913	23		
24	3.375	3.417	3.458	3.500	3.542	3.583	3.625	3.667	3.708	3.750	24		
25	3.240	3.280	3.320	3.360	3.400	3.440	3.480	3.520	3.560	3.600	25		
26	3.115	3.154	3.192	3.231	3.269	3.308	3.346	3.385	3.423	3.462	26		
27	3.000	3.037	3.074	3.111	3.148	3.185	3.222	3.259	3.296	3.333	27		
28	2.893	2.929	2.964	3.000	3.036	3.071	3.107	3.143	3.179	3.214	28		
29	2.793	2.828	2.862	2.897	2.931	2.966	3.000	3.034	3.069	3.103	29		
30	2.700	2.733	2.767	2.800	2.833	2.867	2.900	2.933	2.967	3.000	30		
31	2.613	2.645	2.677	2.710	2.742	2.774	2.806	2.839	2.871	2.903	31		
32	2.531	2.563	2.594	2.625	2.656	2.688	2.719	2.750	2.781	2.813	32		
33	2.455	2.485	2.515	2.545	2.576	2.606	2.636	2.667	2.697	2.727	33		
34	2.382	2.412	2.441	2.471	2.500	2.529	2.559	2.588	2.618	2.647	34		
35	2.314	2.343	2.371	2.400	2.429	2.457	2.486	2.514	2.543	2.571	35		
36	2.250	2.278	2.306	2.333	2.361	2.389	2.417	2.444	2.472	2.500	36		
37	2.189	2.216	2.243	2.270	2.297	2.324	2.351	2.378	2.405	2.432	37		
38	2.132	2.158	2.184	2.211	2.237	2.263	2.289	2.316	2.342	2.368	38		
39	2.077	2.103	2.128	2.154	2.179	2.205	2.231	2.256	2.282	2.308	39		
40	2.025	2.050	2.075	2.100	2.125	2.150	2.175	2.200	2.225	2.250	40		
41	1.976	2.000	2.024	2.049	2.073	2.098	2.122	2.146	2.171	2.195	41		
42	1.929	1.952	1.976	2.000	2.024	2.048	2.071	2.095	2.119	2.143	42		
43	1.884	1.907	1.930	1.953	1.977	2.000	2.023	2.047	2.070	2.093	43		
44	1.841	1.864	1.886	1.909	1.932	1.955	1.977	2.000	2.023	2.045	44		
45	1.800	1.822	1.844	1.867	1.889	1.911	1.933	1.956	1.978	2.000	45		
46	1.761	1.783	1.804	1.826	1.848	1.870	1.891	1.913	1.935	1.957	46		
47	1.723	1.745	1.766	1.787	1.809	1.830	1.851	1.872	1.894	1.915	47		
48	1.687	1.708	1.729	1.750	1.771	1.792	1.812	1.833	1.854	1.875	48		
49	1.653	1.673	1.694	1.714	1.735	1.755	1.776	1.796	1.816	1.837	49		
50	1.620	1.640	1.660	1.680	1.700	1.720	1.740	1.760	1.780	1.800	50		

表三 (續)

商 數

被 除 被

45

除數	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	除數
51	1.588	1.608	1.627	1.647	1.667	1.686	1.706	1.725	1.745	1.765	51
52	1.558	1.577	1.596	1.615	1.635	1.654	1.673	1.692	1.712	1.731	52
53	1.528	1.547	1.566	1.585	1.604	1.623	1.642	1.660	1.679	1.698	53
54	1.500	1.519	1.537	1.556	1.574	1.593	1.611	1.630	1.648	1.667	54
55	1.473	1.491	1.509	1.527	1.545	1.564	1.582	1.600	1.618	1.636	55
56	1.446	1.464	1.482	1.500	1.518	1.536	1.554	1.571	1.589	1.607	56
57	1.421	1.439	1.456	1.474	1.491	1.509	1.526	1.544	1.561	1.579	57
58	1.397	1.414	1.431	1.448	1.466	1.483	1.500	1.517	1.534	1.552	58
59	1.373	1.390	1.407	1.424	1.441	1.458	1.475	1.492	1.508	1.525	59
60	1.350	1.367	1.383	1.400	1.417	1.433	1.450	1.467	1.483	1.500	60
61	1.328	1.344	1.361	1.377	1.393	1.410	1.426	1.443	1.459	1.475	61
62	1.306	1.323	1.339	1.355	1.371	1.387	1.403	1.419	1.435	1.452	62
63	1.286	1.302	1.317	1.333	1.349	1.365	1.381	1.397	1.413	1.429	63
64	1.266	1.281	1.297	1.313	1.328	1.344	1.359	1.375	1.391	1.406	64
65	1.246	1.262	1.277	1.292	1.308	1.323	1.338	1.354	1.369	1.385	65
66	1.227	1.242	1.258	1.273	1.288	1.303	1.318	1.333	1.348	1.364	66
67	1.209	1.224	1.239	1.254	1.269	1.284	1.299	1.313	1.328	1.343	67
68	1.191	1.206	1.221	1.235	1.250	1.265	1.279	1.294	1.309	1.324	68
69	1.174	1.188	1.203	1.217	1.232	1.246	1.261	1.275	1.290	1.304	69
70	1.157	1.171	1.186	1.200	1.214	1.229	1.243	1.257	1.271	1.286	70
71	1.141	1.155	1.169	1.183	1.197	1.211	1.225	1.239	1.254	1.268	71
72	1.125	1.139	1.153	1.167	1.181	1.194	1.208	1.222	1.236	1.250	72
73	1.110	1.123	1.137	1.151	1.164	1.178	1.192	1.205	1.219	1.233	73
74	1.095	1.108	1.122	1.135	1.149	1.162	1.176	1.189	1.203	1.216	74
75	1.080	1.093	1.107	1.120	1.133	1.147	1.160	1.173	1.187	1.200	75
76	1.066	1.079	1.092	1.105	1.118	1.132	1.145	1.158	1.171	1.184	76
77	1.052	1.065	1.078	1.091	1.104	1.117	1.130	1.143	1.156	1.169	77
78	1.038	1.051	1.064	1.077	1.090	1.103	1.115	1.128	1.141	1.154	78
79	1.025	1.038	1.051	1.063	1.076	1.089	1.101	1.114	1.127	1.139	79
80	1.013	1.025	1.038	1.050	1.063	1.075	1.088	1.100	1.113	1.125	80
81	1.000	1.012	1.025	1.037	1.049	1.062	1.074	1.086	1.099	1.111	81
82	.9878	1.000	1.012	1.024	1.037	1.049	1.061	1.073	1.085	1.098	82
83	.9759	.9880	1.000	1.012	1.024	1.036	1.048	1.060	1.072	1.084	83
84	.9643	.9762	.9881	1.000	1.012	1.024	1.036	1.048	1.060	1.071	84
85	.9529	.9647	.9765	.9882	1.000	1.012	1.024	1.035	1.047	1.059	85
86	.9419	.9535	.9651	.9767	.9884	1.000	1.012	1.023	1.035	1.047	86
87	.9310	.9425	.9540	.9655	.9770	.9885	1.000	1.011	1.023	1.034	87
88	.9205	.9318	.9432	.9545	.9659	.9773	.9886	1.000	1.011	1.023	88
89	.9101	.9213	.9326	.9438	.9551	.9663	.9775	.9888	1.000	1.011	89
90	.9000	.9111	.9222	.9333	.9444	.9556	.9667	.9778	.9889	1.000	90
91	.8901	.9011	.9121	.9231	.9341	.9451	.9560	.9670	.9780	.9890	91
92	.8804	.8913	.9022	.9130	.9239	.9348	.9457	.9565	.9674	.9783	92
93	.8710	.8817	.8925	.9032	.9140	.9247	.9355	.9462	.9570	.9677	93
94	.8617	.8723	.8830	.8936	.9043	.9149	.9255	.9362	.9468	.9574	94
95	.8526	.8632	.8737	.8842	.8947	.9053	.9158	.9263	.9368	.9474	95
96	.8438	.8542	.8646	.8750	.8854	.8958	.9063	.9167	.9271	.9375	96
97	.8351	.8454	.8557	.8660	.8763	.8866	.8969	.9072	.9175	.9278	97
98	.8265	.8367	.8469	.8571	.8673	.8776	.8878	.8980	.9082	.9184	98
99	.8182	.8283	.8384	.8485	.8586	.8687	.8788	.8889	.8990	.9091	99

表三 (續)

46		商數										46	
		被除數											
除數	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	除數		
2	45.50	46.00	46.50	47.00	47.50	48.00	48.50	49.00	49.50	50.00	2	2	
3	30.33	30.67	31.00	31.33	31.67	32.00	32.33	32.67	33.00	33.33	3	3	
4	22.75	23.00	23.25	23.50	23.75	24.00	24.25	24.50	24.75	25.00	4	4	
5	18.20	18.40	18.60	18.80	19.00	19.20	19.40	19.60	19.80	20.00	5	5	
6	15.17	15.33	15.50	15.67	15.83	16.00	16.17	16.33	16.50	16.67	6	6	
7	13.00	13.14	13.29	13.43	13.57	13.71	13.86	14.00	14.14	14.29	7	7	
8	11.38	11.50	11.63	11.75	11.88	12.00	12.13	12.25	12.38	12.50	8	8	
9	10.11	10.22	10.33	10.44	10.56	10.67	10.78	10.89	11.00	11.11	9	9	
10	9.100	9.200	9.300	9.400	9.500	9.600	9.700	9.800	9.900	10.00	10	10	
11	8.273	8.364	8.455	8.545	8.636	8.727	8.818	8.909	9.000	9.091	11	11	
12	7.583	7.667	7.750	7.833	7.917	8.000	8.083	8.167	8.250	8.333	12	12	
13	7.000	7.077	7.154	7.231	7.308	7.385	7.462	7.538	7.615	7.692	13	13	
14	6.500	6.571	6.643	6.714	6.786	6.857	6.929	7.000	7.071	7.143	14	14	
15	6.067	6.133	6.200	6.267	6.333	6.400	6.467	6.533	6.600	6.667	15	15	
16	5.688	5.750	5.813	5.875	5.938	6.000	6.063	6.125	6.188	6.250	16	16	
17	5.353	5.412	5.471	5.529	5.588	5.647	5.706	5.765	5.824	5.882	17	17	
18	5.056	5.111	5.167	5.222	5.278	5.333	5.389	5.444	5.500	5.556	18	18	
19	4.789	4.842	4.895	4.947	5.000	5.053	5.105	5.158	5.211	5.263	19	19	
20	4.550	4.600	4.650	4.700	4.750	4.800	4.850	4.900	4.950	5.000	20	20	
21	4.333	4.381	4.429	4.476	4.524	4.571	4.619	4.667	4.714	4.762	21	21	
22	4.136	4.182	4.227	4.273	4.318	4.364	4.409	4.455	4.500	4.545	22	22	
23	3.957	4.000	4.043	4.087	4.130	4.174	4.217	4.261	4.304	4.348	23	23	
24	3.792	3.833	3.875	3.917	3.958	4.000	4.042	4.083	4.125	4.167	24	24	
25	3.640	3.680	3.720	3.760	3.800	3.840	3.880	3.920	3.960	4.000	25	25	
26	3.500	3.538	3.577	3.615	3.654	3.692	3.731	3.769	3.808	3.846	26	26	
27	3.370	3.407	3.444	3.481	3.519	3.556	3.593	3.630	3.667	3.704	27	27	
28	3.250	3.286	3.321	3.357	3.393	3.429	3.464	3.500	3.536	3.571	28	28	
29	3.138	3.172	3.207	3.241	3.276	3.310	3.345	3.379	3.414	3.448	29	29	
30	3.033	3.067	3.100	3.133	3.167	3.200	3.233	3.267	3.300	3.333	30	30	
31	2.935	2.968	3.000	3.032	3.065	3.097	3.129	3.161	3.194	3.226	31	31	
32	2.844	2.875	2.906	2.938	2.969	3.000	3.031	3.063	3.094	3.125	32	32	
33	2.758	2.788	2.818	2.848	2.879	2.909	2.939	2.970	3.000	3.030	33	33	
34	2.676	2.706	2.735	2.765	2.794	2.824	2.853	2.882	2.912	2.941	34	34	
35	2.600	2.629	2.657	2.686	2.714	2.743	2.771	2.800	2.829	2.857	35	35	
36	2.528	2.556	2.583	2.611	2.639	2.667	2.694	2.722	2.750	2.778	36	36	
37	2.459	2.486	2.514	2.541	2.568	2.595	2.622	2.649	2.676	2.703	37	37	
38	2.395	2.421	2.447	2.474	2.500	2.526	2.553	2.579	2.605	2.632	38	38	
39	2.333	2.359	2.385	2.410	2.436	2.462	2.487	2.513	2.538	2.564	39	39	
40	2.275	2.300	2.325	2.350	2.375	2.400	2.425	2.450	2.475	2.500	40	40	
41	2.220	2.244	2.268	2.293	2.317	2.341	2.366	2.390	2.415	2.439	41	41	
42	2.167	2.190	2.214	2.238	2.262	2.286	2.310	2.333	2.357	2.381	42	42	
43	2.116	2.140	2.163	2.186	2.209	2.233	2.256	2.279	2.302	2.326	43	43	
44	2.068	2.091	2.114	2.136	2.159	2.182	2.205	2.227	2.250	2.273	44	44	
45	2.022	2.044	2.067	2.089	2.111	2.133	2.156	2.178	2.200	2.222	45	45	
46	1.978	2.000	2.022	2.043	2.065	2.087	2.109	2.130	2.152	2.174	46	46	
47	1.936	1.957	1.979	2.000	2.021	2.043	2.064	2.085	2.106	2.128	47	47	
48	1.896	1.917	1.937	1.958	1.979	2.000	2.021	2.042	2.062	2.083	48	48	
49	1.857	1.878	1.898	1.918	1.939	1.959	1.980	2.000	2.020	2.041	49	49	
50	1.820	1.840	1.860	1.880	1.900	1.920	1.940	1.960	1.980	2.000	50	50	

表三 (續)

商數
被除數

47

除數	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	除數
51	1.784	1.804	1.824	1.843	1.863	1.882	1.902	1.922	1.941	1.961	51
52	1.750	1.769	1.788	1.808	1.827	1.846	1.865	1.885	1.904	1.923	52
53	1.717	1.736	1.755	1.774	1.792	1.811	1.830	1.849	1.868	1.887	53
54	1.685	1.704	1.722	1.741	1.759	1.778	1.796	1.815	1.833	1.852	54
55	1.655	1.673	1.691	1.709	1.727	1.745	1.764	1.782	1.800	1.818	55
56	1.625	1.643	1.661	1.679	1.696	1.714	1.732	1.750	1.768	1.786	56
57	1.596	1.614	1.632	1.649	1.667	1.684	1.702	1.719	1.737	1.754	57
58	1.569	1.586	1.603	1.621	1.638	1.655	1.672	1.690	1.707	1.724	58
59	1.542	1.559	1.576	1.593	1.610	1.627	1.644	1.661	1.678	1.695	59
60	1.517	1.533	1.550	1.567	1.583	1.600	1.617	1.633	1.650	1.667	60
61	1.492	1.508	1.525	1.541	1.557	1.574	1.590	1.607	1.623	1.639	61
62	1.468	1.484	1.500	1.516	1.532	1.548	1.565	1.581	1.597	1.613	62
63	1.444	1.460	1.476	1.492	1.508	1.524	1.540	1.556	1.571	1.587	63
64	1.422	1.438	1.453	1.469	1.484	1.500	1.516	1.531	1.547	1.563	64
65	1.400	1.415	1.431	1.446	1.462	1.477	1.492	1.508	1.523	1.538	65
66	1.379	1.394	1.409	1.424	1.439	1.455	1.470	1.485	1.500	1.515	66
67	1.358	1.373	1.388	1.403	1.418	1.433	1.448	1.463	1.478	1.493	67
68	1.338	1.353	1.368	1.382	1.397	1.412	1.426	1.441	1.456	1.471	68
69	1.319	1.333	1.348	1.362	1.377	1.391	1.406	1.420	1.435	1.449	69
70	1.300	1.314	1.329	1.343	1.357	1.371	1.386	1.400	1.414	1.429	70
71	1.282	1.296	1.310	1.324	1.338	1.352	1.366	1.380	1.394	1.408	71
72	1.264	1.278	1.292	1.306	1.319	1.333	1.347	1.361	1.375	1.389	72
73	1.247	1.260	1.274	1.288	1.301	1.315	1.329	1.342	1.356	1.370	73
74	1.230	1.243	1.257	1.270	1.284	1.297	1.311	1.324	1.338	1.351	74
75	1.213	1.227	1.240	1.253	1.267	1.280	1.293	1.307	1.320	1.333	75
76	1.197	1.211	1.224	1.237	1.250	1.263	1.276	1.289	1.303	1.316	76
77	1.182	1.195	1.208	1.221	1.234	1.247	1.260	1.273	1.286	1.299	77
78	1.167	1.179	1.192	1.205	1.218	1.231	1.244	1.256	1.269	1.282	78
79	1.152	1.165	1.177	1.190	1.203	1.215	1.228	1.241	1.253	1.266	79
80	1.138	1.150	1.163	1.175	1.188	1.200	1.213	1.225	1.238	1.250	80
81	1.123	1.136	1.148	1.160	1.173	1.185	1.198	1.210	1.222	1.235	81
82	1.110	1.122	1.134	1.146	1.159	1.171	1.183	1.195	1.207	1.220	82
83	1.096	1.108	1.120	1.133	1.145	1.157	1.169	1.181	1.193	1.205	83
84	1.083	1.095	1.107	1.119	1.131	1.143	1.155	1.167	1.179	1.190	84
85	1.071	1.082	1.094	1.106	1.118	1.129	1.141	1.153	1.165	1.176	85
86	1.058	1.070	1.081	1.093	1.105	1.116	1.128	1.140	1.151	1.163	86
87	1.046	1.057	1.069	1.080	1.092	1.103	1.115	1.126	1.138	1.149	87
88	1.034	1.045	1.057	1.068	1.080	1.091	1.102	1.114	1.125	1.136	88
89	1.022	1.034	1.045	1.056	1.067	1.079	1.090	1.101	1.112	1.124	89
90	1.011	1.022	1.033	1.044	1.055	1.067	1.078	1.089	1.100	1.111	90
91	1.000	1.011	1.022	1.033	1.044	1.055	1.066	1.077	1.088	1.099	91
92	.9891	1.000	1.011	1.022	1.033	1.043	1.054	1.065	1.076	1.087	92
93	.9785	.9892	1.000	1.011	1.022	1.032	1.043	1.054	1.065	1.075	93
94	.9681	.9787	.9894	1.000	1.011	1.021	1.032	1.043	1.053	1.064	94
95	.9579	.9684	.9789	.9895	1.000	1.011	1.021	1.032	1.042	1.053	95
96	.9479	.9583	.9688	.9792	.9896	1.000	1.010	1.021	1.031	1.042	96
97	.9381	.9485	.9588	.9691	.9794	.9897	1.000	1.010	1.021	1.031	97
98	.9286	.9388	.9490	.9592	.9694	.9796	.9898	1.000	1.010	1.020	98
99	.9192	.9293	.9394	.9495	.9596	.9697	.9798	.9899	1.000	1.010	99

表 四

: $(1-50) \times 2^2, 3^2, \text{etc.}$

	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	$(11)^2$	$(12)^2$	
1	4	9	16	25	36	49	64	81	121	144	1
2	8	18	32	50	72	98	128	162	242	288	2
3	12	27	48	75	108	147	192	243	363	432	3
4	16	36	64	100	144	196	256	324	484	576	4
5	20	45	80	125	180	245	320	405	605	720	5
6	24	54	96	150	216	294	384	486	726	864	6
7	28	63	112	175	252	343	448	567	847	1008	7
8	32	72	128	200	288	392	512	648	968	1152	8
9	36	81	144	225	324	441	576	729	1089	1296	9
10	40	90	160	250	360	490	640	810	1210	1440	10
11	44	99	176	275	396	539	704	891	1331	1584	11
12	48	108	192	300	432	588	768	972	1452	1728	12
13	52	117	208	325	468	637	832	1053	1573	1872	13
14	56	126	224	350	504	686	896	1134	1694	2016	14
15	60	135	240	375	540	735	960	1215	1815	2160	15
16	64	144	256	400	576	784	1024	1296	1936	2304	16
17	68	153	272	425	612	833	1088	1377	2057	2448	17
18	72	162	288	450	648	882	1152	1458	2178	2592	18
19	76	171	304	475	684	931	1216	1539	2299	2736	19
20	80	180	320	500	720	980	1280	1620	2420	2880	20
21	84	189	336	525	756	1029	1344	1701	2541	3024	21
22	88	198	352	550	792	1078	1408	1782	2662	3168	22
23	92	207	368	575	828	1127	1472	1863	2783	3312	23
24	96	216	384	600	864	1176	1536	1944	2904	3456	24
25	100	225	400	625	900	1225	1600	2025	3025	3600	25
26	104	234	416	650	936	1274	1664	2106	3146	3744	26
27	108	243	432	675	972	1323	1728	2187	3267	3888	27
28	112	252	448	700	1008	1372	1792	2268	3388	4032	28
29	116	261	464	725	1044	1421	1856	2349	3509	4176	29
30	120	270	480	750	1080	1470	1920	2430	3630	4320	30
31	124	279	496	775	1116	1519	1984	2511	3751	4464	31
32	128	288	512	800	1152	1568	2048	2592	3872	4608	32
33	132	297	528	825	1188	1617	2112	2673	3993	4752	33
34	136	306	544	850	1224	1666	2176	2754	4114	4896	34
35	140	315	560	875	1260	1715	2240	2835	4235	5040	35
36	144	324	576	900	1296	1764	2304	2916	4356	5184	36
37	148	333	592	925	1332	1813	2368	2997	4477	5328	37
38	152	342	608	950	1368	1862	2432	3078	4598	5472	38
39	156	351	624	975	1404	1911	2496	3159	4719	5616	39
40	160	360	640	1000	1440	1960	2560	3240	4840	5760	40
41	164	369	656	1025	1476	2009	2624	3321	4961	5904	41
42	168	378	672	1050	1512	2058	2688	3402	5082	6048	42
43	172	387	688	1075	1548	2107	2752	3483	5203	6192	43
44	176	396	704	1100	1584	2156	2816	3564	5324	6336	44
45	180	405	720	1125	1620	2205	2880	3645	5445	6480	45
46	184	414	736	1150	1656	2254	2944	3726	5566	6624	46
47	188	423	752	1175	1692	2303	3008	3807	5687	6768	47
48	192	432	768	1200	1728	2352	3072	3888	5808	6912	48
49	196	441	784	1225	1764	2401	3136	3969	5929	7056	49
50	200	450	800	1250	1800	2450	3200	4050	6050	7200	50

表四 (續)

積: $(51-100) \times 2^2, 3^2, \text{etc.}$

	2 ²	3 ²	4 ²	5 ²	6 ²	7 ²	8 ²	9 ²	(11) ²	(12) ²	
51	204	459	816	1275	1836	2499	3264	4131	6171	7344	51
52	208	468	832	1300	1872	2548	3328	4212	6292	7488	52
53	212	477	848	1325	1908	2597	3392	4293	6413	7632	53
54	216	486	864	1350	1944	2646	3456	4374	6534	7776	54
55	220	495	880	1375	1980	2695	3520	4455	6655	7920	55
56	224	504	896	1400	2016	2744	3584	4536	6776	8064	56
57	228	513	912	1425	2052	2793	3648	4617	6897	8208	57
58	232	522	928	1450	2088	2842	3712	4698	7018	8352	58
59	236	531	944	1475	2124	2891	3776	4779	7139	8496	59
60	240	540	960	1500	2160	2940	3840	4860	7260	8640	60
61	244	549	976	1525	2196	2989	3904	4941	7381	8784	61
62	248	558	992	1550	2232	3038	3968	5022	7502	8928	62
63	252	567	1008	1575	2268	3087	4032	5103	7623	9072	63
64	256	576	1024	1600	2304	3136	4096	5184	7744	9216	64
65	260	585	1040	1625	2340	3185	4160	5265	7865	9360	65
66	264	594	1056	1650	2376	3234	4224	5346	7986	9504	66
67	268	603	1072	1675	2412	3283	4288	5427	8107	9648	67
68	272	612	1088	1700	2448	3332	4352	5508	8228	9792	68
69	276	621	1104	1725	2484	3381	4416	5589	8349	9936	69
70	280	630	1120	1750	2520	3430	4480	5670	8470	10080	70
71	284	639	1136	1775	2556	3479	4544	5751	8591	10224	71
72	288	648	1152	1800	2592	3528	4608	5832	8712	10368	72
73	292	657	1168	1825	2628	3577	4672	5913	8833	10512	73
74	296	666	1184	1850	2664	3626	4736	5994	8954	10656	74
75	300	675	1200	1875	2700	3675	4800	6075	9075	10800	75
76	304	684	1216	1900	2736	3724	4864	6156	9196	10944	76
77	308	693	1232	1925	2772	3773	4928	6237	9317	11088	77
78	312	702	1248	1950	2808	3822	4992	6318	9438	11232	78
79	316	711	1264	1975	2844	3871	5056	6399	9559	11376	79
80	320	720	1280	2000	2880	3920	5120	6480	9680	11520	80
81	324	729	1296	2025	2916	3969	5184	6561	9801	11664	81
82	328	738	1312	2050	2952	4018	5248	6642	9922	11808	82
83	332	747	1328	2075	2988	4067	5312	6723	10043	11952	83
84	336	756	1344	2100	3024	4116	5376	6804	10164	12096	84
85	340	765	1360	2125	3060	4165	5440	6885	10285	12240	85
86	344	774	1376	2150	3096	4214	5504	6966	10406	12384	86
87	348	783	1392	2175	3132	4263	5568	7047	10527	12528	87
88	352	792	1408	2200	3168	4312	5632	7128	10648	12672	88
89	356	801	1424	2225	3204	4361	5696	7209	10769	12816	89
90	360	810	1440	2250	3240	4410	5760	7290	10890	12960	90
91	364	819	1456	2275	3276	4459	5824	7371	11011	13104	91
92	368	828	1472	2300	3312	4508	5888	7452	11132	13248	92
93	372	837	1488	2325	3348	4557	5952	7533	11253	13392	93
94	376	846	1504	2350	3384	4606	6016	7614	11374	13536	94
95	380	855	1520	2375	3420	4655	6080	7695	11495	13680	95
96	384	864	1536	2400	3456	4704	6144	7776	11616	13824	96
97	388	873	1552	2425	3492	4753	6208	7857	11737	13968	97
98	392	882	1568	2450	3528	4802	6272	7938	11858	14112	98
99	396	891	1584	2475	3564	4851	6336	8019	11979	14256	99
100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100	12100	14400	100

數目的四位對數

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	0000	0041	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4 8 12	17 21 25	29 33 37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4 8 11	15 19 23	26 30 34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3 7 10	14 17 21	24 28 31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3 6 10	13 16 19	23 26 29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3 6 9	12 15 18	21 24 27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 6 8	11 14 17	20 22 25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3 5 8	11 13 16	18 21 24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2 5 7	10 12 15	17 20 22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2 5 7	9 12 14	16 19 21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2 4 7	9 11 13	16 18 20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2 4 6	8 10 12	14 15 17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2 3 5	7 9 10	12 14 15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2 3 5	6 8 9	11 13 14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1 3 4	6 7 8	10 11 12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1 3 4	5 6 8	9 10 12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1 3 4	5 6 8	9 10 11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1 2 3	5 6 7	8 9 10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1 2 3	4 5 6	8 9 10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1 2 3	4 5 6	7 7 8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1 2 3	4 5 5	6 7 8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1 2 3	4 4 5	6 7 8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9

各比例部分每十分之一在右邊完全寫明。任何數目的四位對數，加上其比例部分即可直接讀出。這部分相當於數目的第四位。其錯誤在最後一位可許為一。

表五 (續)

數目的四位對數

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1 2 2	3 4 5	5 6 7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1 2 2	3 4 5	5 6 7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1 2 2	3 4 5	5 6 7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1 1 2	3 4 4	5 6 7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1 1 2	3 4 4	5 6 7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1 1 2	3 4 4	5 6 6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1 1 2	3 4 4	5 6 6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1 1 2	3 3 4	5 6 6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1 1 2	3 3 4	5 5 6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1 1 2	3 3 4	5 5 6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1 1 2	3 3 4	5 5 6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1 1 2	3 3 4	5 5 6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1 1 2	3 3 4	5 5 6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1 1 2	3 3 4	4 5 6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1 1 2	2 3 4	4 5 6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1 1 2	2 3 4	4 5 6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1 1 2	2 3 4	4 5 5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1 1 2	2 3 4	4 5 5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1 1 2	2 3 4	4 5 5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1 1 2	2 3 4	4 5 5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1 1 2	2 3 3	4 5 5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1 1 2	2 3 3	4 5 5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1 1 2	2 3 3	4 4 5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1 1 2	2 3 3	4 4 5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1 1 2	2 3 3	4 4 5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1 1 2	2 3 3	4 4 5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1 1 2	2 3 3	4 4 5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1 1 2	2 3 3	4 4 5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1 1 2	2 3 3	4 4 5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1 1 2	2 3 3	4 4 5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1 1 2	2 3 3	4 4 5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1 1 2	2 3 3	4 4 5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0 1 1	2 2 3	3 4 4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0 1 1	2 2 3	3 4 4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0 1 1	2 2 3	3 4 4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0 1 1	2 2 3	3 4 4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0 1 1	2 2 3	3 4 4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0 1 1	2 2 3	3 4 4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0 1 1	2 2 3	3 4 4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0 1 1	2 2 3	3 4 4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0 1 1	2 2 3	3 4 4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0 1 1	2 2 3	3 4 4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0 1 1	2 2 3	3 4 4
98	9912	9917	9921	9925	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0 1 1	2 2 3	3 4 4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0 1 1	2 2 3	3 3 4
7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9

(1-r²) 的對數

r	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
000	00000	00000	00000	00000	99999†	99999	99998	99998	99997	99996
010	99996	99995	99994	99993	99991	99990	99989	99987	99986	99984
020	99983	99981	99979	99977	99975	99973	99971	99968	99966	99963
030	99961	99958	99956	99953	99950	99947	99944	99941	99937	99934
040	99930	99927	99923	99920	99916	99912	99908	99904	99900	99896
050	99891	99887	99882	99878	99873	99868	99864	99859	99854	99849
060	99843	99838	99833	99827	99822	99816	99810	99805	99799	99793
070	99787	99781	99774	99768	99762	99755	99748	99742	99735	99728
080	99721	99714	99707	99700	99692	99685	99678	99670	99662	99655
090	99647	99639	99631	99623	99615	99606	99598	99589	99581	99572
100	99564	99555	99546	99537	99528	99519	99509	99500	99490	99481
110	99471	99462	99452	99442	99432	99422	99412	99401	99391	99381
120	99370	99359	99349	99338	99327	99316	99305	99294	99283	99271
130	99260	99248	99237	99225	99213	99201	99189	99177	99165	99153
140	99140	99128	99115	99103	99090	99077	99064	99051	99038	99025
150	99012	98998	98985	98971	98958	98944	98930	98916	98902	98888
160	98874	98859	98845	98831	98816	98801	98786	98772	98757	98742
170	98726	98711	98696	98680	98665	98649	98633	98618	98602	98586
180	98570	98553	98537	98521	98504	98488	98471	98454	98437	98420
190	98403	98386	98369	98351	98334	98316	98299	98281	98263	98245
200	98227	98209	98191	98172	98154	98135	98117	98098	98079	98060
210	98041	98022	98003	97984	97964	97945	97925	97905	97885	97865
220	97845	97825	97805	97785	97764	97744	97723	97702	97682	97661
230	97640	97618	97597	97576	97554	97533	97511	97489	97468	97446
240	97424	97401	97379	97357	97334	97312	97289	97266	97243	97220
250	97197	97174	97151	97127	97104	97080	97056	97032	97008	96984
260	96960	96936	96912	96887	96862	96838	96813	96788	96763	96738
270	96713	96687	96662	96636	96611	96585	96559	96533	96507	96481
280	96454	96428	96401	96375	96348	96321	96294	96267	96240	96212
290	96185	96157	96130	96102	96074	96046	96018	95990	95961	95933
300	95904	95875	95847	95818	95789	95760	95730	95701	95671	95642
310	95612	95582	95552	95522	95492	95462	95431	95401	95370	95339
320	95308	95277	95246	95215	95183	95152	95120	95089	95057	95025
330	94993	94960	94928	94896	94863	94830	94797	94764	94731	94698
340	94665	94631	94598	94564	94530	94496	94462	94428	94394	94359
350	94325	94290	94255	94220	94185	94150	94115	94079	94043	94008
360	93972	93936	93900	93864	93827	93791	93754	93717	93680	93643
370	93606	93569	93531	93494	93456	93418	93380	93342	93304	93266
380	93227	93188	93150	93111	93072	93032	92993	92954	92914	92874
390	92834	92794	92754	92714	92674	92633	92592	92551	92510	92469
400	92428	92386	92345	92303	92261	92219	92177	92135	92092	92050
410	92007	91964	91921	91878	91835	91791	91748	91704	91660	91616
420	91572	91527	91483	91438	91393	91348	91303	91258	91212	91167
430	91121	91075	91029	90983	90937	90890	90843	90797	90750	90702
440	90655	90608	90560	90512	90464	90416	90368	90319	90271	90222
450	90173	90124	90075	90025	89976	89926	89876	89826	89776	89725
460	89675	89624	89573	89522	89471	89419	89368	89316	89264	89212
470	89159	89107	89054	89001	88948	88895	88842	88788	88734	88681
480	88627	88572	88518	88463	88408	88353	88298	88243	88187	88132
490	88076	88020	87963	87907	87850	87793	87736	87679	87622	87564

† 藍線前四個尾數外,在此頁各數都有-1的性,此線前四數則為零性。

表六(續)

(1-r²) 的對數

	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
500	87506	87448	87390	87332	87273	87214	87155	87096	87037	86977
510	86917	86857	86797	86737	86676	86615	86554	86493	86432	86370
520	86308	86246	86184	86122	86059	85996	85933	85870	85807	85743
530	85679	85615	85550	85486	85421	85356	85291	85225	85160	85094
540	85028	84962	84895	84828	84761	84694	84627	84559	84491	84423
550	84354	84286	84217	84148	84079	84009	83939	83869	83799	83728
560	83658	83587	83516	83444	83372	83300	83228	83156	83083	83010
570	82937	82863	82790	82716	82641	82567	82492	82417	82342	82266
580	82191	82115	82038	81962	81885	81808	81730	81653	81575	81497
590	81418	81339	81260	81181	81101	81022	80941	80861	80780	80699
600	80618	80536	80455	80372	80290	80207	80124	80041	79957	79873
610	79789	79705	79620	79535	79449	79363	79277	79191	79104	79017
620	78930	78842	78754	78666	78577	78488	78399	78310	78220	78129
630	78039	77948	77857	77765	77673	77581	77488	77396	77302	77209
640	77115	77020	76926	76831	76735	76639	76543	76447	76350	76253
650	76155	76057	75959	75860	75761	75662	75562	75462	75361	75260
660	75159	75057	74955	74852	74749	74646	74542	74438	74333	74228
670	74123	74017	73911	73804	73697	73590	73482	73374	73265	73156
680	73046	72936	72825	72714	72603	72491	72379	72266	72153	72039
690	71925	71810	71695	71580	71463	71347	71230	71112	70994	70876
700	70757	70638	70518	70397	70276	70155	70033	69910	69787	69664
710	69539	69415	69290	69164	69038	68911	68784	68656	68527	68398
720	68269	68139	68008	67877	67745	67612	67479	67346	67211	67076
730	66941	66805	66668	66531	66393	66255	66115	65976	65835	65694
740	65552	65410	65267	65123	64979	64834	64688	64541	64394	64246
750	64098	63949	63799	63648	63496	63344	63191	63038	62883	62728
760	62572	62416	62258	62100	61941	61781	61621	61459	61297	61134
770	60970	60805	60640	60473	60306	60138	59969	59799	59628	59457
780	59284	59111	58936	58761	58585	58408	58230	58050	57870	57689
790	57507	57324	57140	56955	56769	56582	56394	56204	56014	55823
800	55630	55437	55242	55046	54849	54651	54452	54252	54050	53847
810	53643	53438	53232	53024	52815	52605	52393	52181	51967	51751
820	51534	51316	51097	50876	50654	50430	50205	49978	49750	49521
830	49290	49058	48823	48588	48351	48112	47872	47630	47386	47141
840	46894	46645	46395	46143	45889	45633	45375	45116	44855	44591
850	44326	44059	43790	43519	43246	42971	42694	42415	42133	41850
860	41564	41276	40986	40693	40398	40101	39802	39500	39195	38888
870	38578	38266	37952	37634	37314	36991	36666	36337	36006	35671
880	35334	34994	34650	34304	33954	33601	33245	32885	32522	32155
890	31785	31412	31034	30653	30269	29880	29487	29090	28690	28285
900	27875	27462	27044	26621	26194	25762	25325	24883	24437	23985
910	23528	23065	22597	22123	21644	21159	20667	20170	19666	19156
920	18639	18115	17585	17047	16502	15949	15389	14820	14244	13659
930	13066	12463	11852	11231	10600	9959	9309	8647	7975	7291
940	6659*	6588*	6516*	6443*	6368*	6292*	6215*	6136*	6055*	9973*
950	98900*	98045*	97172*	96280*	95368*	94436*	93482*	92506*	91506*	90482*
960	89432*	88354*	87248*	86112*	84944*	83743*	82506*	81232*	79918*	78561*
970	77159*	75708*	74206*	72649*	71032*	69351*	67600*	65773*	63865*	61867*
980	59870*	57564*	55238*	52777*	50166*	47385*	44411*	41214*	37760*	34003*
990	29885*	25331*	20238*	14461*	9778*	99891**	90222**	77750**	60163**	30081**

尾數有*號者其性為-2,有**者其性為-3。其他均為-1。

$\sqrt{1-r^2}$ 的對數

r	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.000	00000	00000	00000	00000	00000	99999	99999	99999	99999	99998
.010	99998	99997	99997	99996	99996	99995	99994	99994	99993	99992
.020	99991	99990	99989	99988	99987	99986	99985	99984	99983	99982
.030	99980	99979	99978	99976	99975	99973	99972	99970	99969	99967
.040	99965	99963	99962	99960	99958	99956	99954	99952	99950	99948
.050	99946	99943	99941	99939	99937	99934	99932	99929	99927	99924
.060	99922	99919	99916	99914	99911	99908	99905	99902	99899	99896
.070	99893	99890	99887	99884	99881	99878	99874	99871	99867	99864
.080	99861	99857	99853	99850	99846	99843	99839	99835	99831	99827
.090	99823	99819	99815	99811	99807	99803	99799	99795	99790	99786
.100	99782	99777	99773	99768	99764	99759	99755	99750	99745	99740
.110	99736	99731	99726	99721	99716	99711	99706	99701	99696	99690
.120	99685	99680	99674	99669	99664	99658	99652	99647	99641	99636
.130	99630	99624	99618	99612	99607	99601	99595	99589	99582	99576
.140	99570	99564	99558	99551	99545	99539	99532	99526	99519	99512
.150	99506	99499	99492	99486	99479	99472	99465	99458	99451	99444
.160	99437	99430	99423	99415	99408	99401	99393	99386	99378	99371
.170	99363	99356	99348	99340	99332	99325	99317	99309	99301	99293
.180	99285	99277	99269	99260	99252	99244	99235	99227	99219	99210
.190	99202	99193	99184	99176	99167	99158	99149	99140	99132	99123
.200	99114	99104	99095	99086	99077	99068	99058	99049	99040	99030
.210	99021	99011	99001	98992	98982	98972	98962	98953	98943	98933
.220	98923	98913	98903	98892	98882	98872	98862	98851	98841	98830
.230	98820	98809	98799	98788	98777	98766	98756	98745	98734	98723
.240	98712	98701	98690	98678	98667	98656	98644	98633	98622	98610
.250	98599	98587	98575	98564	98552	98540	98528	98516	98504	98492
.260	98480	98468	98456	98444	98431	98419	98406	98394	98382	98369
.270	98356	98344	98331	98318	98305	98292	98279	98266	98253	98240
.280	98227	98214	98201	98187	98174	98160	98147	98133	98120	98106
.290	98092	98079	98065	98051	98037	98023	98009	97995	97981	97966
.300	97952	97938	97923	97909	97894	97880	97865	97850	97836	97821
.310	97806	97791	97776	97761	97746	97731	97716	97700	97685	97670
.320	97654	97639	97623	97607	97592	97576	97560	97544	97528	97512
.330	97496	97480	97464	97448	97431	97415	97399	97382	97366	97349
.340	97332	97316	97299	97282	97265	97248	97231	97214	97197	97180
.350	97162	97145	97128	97110	97093	97075	97057	97040	97022	97004
.360	96986	96968	96950	96932	96914	96895	96877	96859	96840	96822
.370	96803	96784	96766	96747	96728	96709	96690	96671	96652	96633
.380	96614	96594	96575	96555	96536	96516	96497	96477	96457	96437
.390	96417	96397	96377	96357	96337	96316	96296	96276	96255	96235
.400	96214	96193	96172	96152	96131	96110	96089	96067	96046	96025
.410	96004	95982	95961	95939	95917	95896	95874	95852	95830	95808
.420	95786	95764	95741	95719	95697	95674	95652	95629	95606	95583
.430	95561	95538	95515	95491	95468	95445	95422	95398	95375	95351
.440	95328	95304	95280	95256	95232	95208	95184	95160	95135	95111
.450	95087	95062	95037	95013	94988	94963	94938	94913	94888	94863
.460	94837	94812	94786	94761	94735	94710	94684	94658	94632	94606
.470	94580	94553	94527	94501	94474	94448	94421	94394	94367	94340
.480	94313	94286	94259	94232	94204	94177	94149	94121	94094	94066
.490	94038	94010	93982	93953	93925	93897	93868	93840	93811	93782

除最前五個對數的尾數外在此頁各數性都是-1,此最前五數之性則為零。

表七(續)

$\sqrt{1-r^2}$ 的對數

r	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
500	93753	93724	93695	93666	93636	93607	93578	93548	93518	93489
510	93459	93429	93399	93368	93338	93308	93277	93247	93216	93185
520	93154	93123	93092	93061	93030	92998	92967	92935	92903	92871
530	92839	92807	92775	92743	92711	92678	92645	92613	92580	92547
540	92514	92481	92447	92414	92381	92347	92313	92279	92245	92211
550	92177	92143	92108	92074	92039	92005	91970	91935	91899	91864
560	91829	91793	91758	91722	91686	91650	91614	91578	91542	91505
570	91468	91432	91395	91358	91321	91283	91246	91209	91171	91133
580	91095	91057	91019	90981	90942	90904	90865	90826	90787	90748
590	90709	90670	90630	90590	90551	90511	90471	90430	90390	90350
600	90309	90268	90227	90186	90145	90104	90062	90020	89979	89937
610	89895	89852	89810	89767	89725	89682	89639	89595	89552	89509
620	89465	89421	89377	89333	89289	89244	89200	89155	89110	89065
630	89019	88974	88928	88883	88837	88791	88744	88698	88651	88604
640	88557	88510	88463	88415	88368	88320	88272	88223	88175	88126
650	88078	88029	87979	87930	87881	87831	87781	87731	87681	87630
660	87570	87528	87477	87426	87375	87323	87271	87219	87167	87114
670	87062	87009	86955	86902	86849	86795	86741	86687	86632	86578
680	86523	86468	86413	86357	86301	86246	86189	86133	86076	86019
690	85962	85905	85848	85790	85732	85673	85615	85556	85497	85438
700	85379	85319	85259	85199	85138	85077	85016	84955	84894	84832
710	84770	84707	84645	84582	84519	84455	84392	84328	84264	84199
720	84134	84069	84004	83938	83872	83806	83740	83673	83606	83538
730	83470	83402	83334	83266	83197	83127	83058	82988	82918	82847
740	82776	82705	82633	82561	82489	82417	82344	82271	82197	82123
750	82049	81974	81899	81824	81748	81672	81596	81519	81442	81364
760	81286	81208	81129	81050	80971	80891	80810	80730	80649	80567
770	80485	80403	80320	80237	80153	80069	79985	79900	79814	79728
780	79642	79555	79468	79381	79292	79204	79115	79025	78935	78845
790	78754	78662	78570	78478	78384	78291	78197	78102	78007	77911
800	77815	77718	77621	77523	77425	77326	77226	77126	77025	76924
810	76822	76719	76616	76512	76408	76302	76197	76090	75983	75876
820	75767	75658	75548	75438	75327	75215	75102	74989	74875	74761
830	74645	74529	74412	74294	74175	74056	73936	73815	73693	73570
840	73447	73323	73197	73071	72944	72816	72688	72558	72427	72296
850	72163	72030	71895	71760	71623	71486	71347	71207	71067	70925
860	70782	70638	70493	70347	70199	70051	69901	69750	69598	69444
870	69289	69133	68976	68817	68657	68496	68333	68168	68003	67836
880	67667	67497	67325	67152	66977	66800	66622	66442	66261	66078
890	65893	65706	65517	65327	65134	64940	64744	64545	64345	64142
900	63938	63731	63522	63311	63097	62881	62663	62442	62218	61992
910	61764	61532	61299	61062	60822	60579	60334	60085	59833	59578
920	59320	59058	58792	58524	58251	57975	57694	57410	57122	56830
930	56533	56232	55926	55615	55300	54980	54654	54323	53987	53645
940	53298	52944	52584	52217	51844	51464	51077	50682	50280	49869
950	49450	49023	48586	48140	47684	47218	46741	46253	45753	45241
960	44716	44177	43624	43056	42472	41872	41253	40616	39959	39280
970	38579	37854	37103	36328	35516	34675	33800	32887	31932	30933
980	29885	28782	27619	26389	25083	23693	22205	20607	18880	17002
990	14943	12666	10119	07230	03894	99946	95111*	88875*	80081*	65041

對數的尾數有*號者其性爲-2,其他在此百均爲-1.

$\sqrt{1-r}$ 的 值

r	000	001	002	003	004	005	006	007	008	009
.000	1.0000	99950	99900	99850	99800	99750	99700	99649	99599	99549
.010	99499	99448	99398	99348	99298	99247	99197	99146	99096	99045
.020	98995	98944	98894	98843	98793	98742	98691	98641	98590	98539
.030	98489	98438	98387	98336	98285	98234	98184	98133	98082	98031
.040	97980	97929	97877	97826	97775	97724	97673	97622	97570	97519
.050	97468	97417	97365	97314	97263	97211	97160	97108	97057	97005
.060	96954	96902	96850	96799	96747	96695	96644	96592	96540	96488
.070	96437	96385	96333	96281	96229	96177	96125	96073	96021	95969
.080	95917	95864	95812	95760	95708	95656	95603	95551	95499	95446
.090	95394	95341	95289	95237	95184	95131	95079	95026	94974	94921
.100	94868	94816	94763	94710	94657	94604	94552	94499	94446	94393
.110	94340	94287	94234	94181	94128	94074	94021	93968	93915	93862
.120	93808	93755	93702	93648	93595	93541	93488	93434	93381	93327
.130	93274	93220	93167	93113	93059	93005	92952	92898	92844	92790
.140	92736	92682	92628	92574	92520	92466	92412	92358	92304	92250
.150	92195	92141	92087	92033	91978	91924	91869	91815	91761	91706
.160	91652	91597	91542	91488	91433	91378	91324	91269	91214	91159
.170	91104	91049	90995	90940	90885	90830	90774	90719	90664	90609
.180	90554	90499	90443	90388	90333	90277	90222	90167	90111	90056
.190	90000	89944	89889	89833	89778	89722	89667	89610	89554	89499
.200	89442	89387	89331	89275	89219	89163	89107	89051	88994	88938
.210	88882	88826	88769	88713	88657	88600	88544	88487	88431	88374
.220	88318	88261	88204	88148	88091	88034	87977	87920	87864	87807
.230	87750	87693	87636	87579	87521	87464	87407	87350	87293	87235
.240	87178	87121	87063	87006	86948	86891	86833	86776	86718	86660
.250	86603	86545	86487	86429	86371	86313	86255	86197	86139	86081
.260	86023	85965	85907	85849	85790	85732	85674	85615	85557	85499
.270	85440	85381	85323	85264	85206	85147	85088	85029	84971	84912
.280	84853	84794	84735	84676	84617	84558	84499	84439	84380	84321
.290	84261	84202	84143	84083	84024	83964	83905	83845	83785	83726
.300	83666	83606	83546	83487	83427	83367	83307	83247	83187	83126
.310	83066	83006	82946	82885	82825	82765	82704	82644	82583	82523
.320	82462	82401	82341	82280	82219	82158	82098	82037	81976	81915
.330	81854	81792	81731	81670	81609	81547	81486	81425	81363	81302
.340	81240	81179	81117	81056	80994	80932	80870	80808	80747	80685
.350	80623	80561	80498	80436	80374	80312	80250	80187	80125	80062
.360	80000	79937	79875	79812	79750	79687	79624	79561	79498	79436
.370	79373	79310	79246	79183	79120	79057	78994	78930	78867	78804
.380	78740	78677	78613	78549	78486	78422	78358	78294	78230	78166
.390	78102	78038	77974	77910	77846	77782	77717	77653	77589	77524
.400	77460	77395	77330	77266	77201	77136	77071	77006	76942	76877
.410	76811	76746	76681	76616	76551	76485	76420	76354	76289	76223
.420	76158	76092	76026	75961	75895	75829	75763	75697	75631	75565
.430	75498	75432	75366	75299	75233	75166	75100	75033	74967	74900
.440	74833	74766	74699	74632	74565	74498	74431	74364	74297	74229
.450	74162	74095	74027	73959	73892	73824	73756	73689	73621	73553
.460	73485	73417	73348	73280	73212	73144	73075	73007	72938	72870
.470	72801	72732	72664	72595	72526	72457	72388	72319	72250	72180
.480	72111	72042	71972	71903	71833	71764	71694	71624	71554	71484
.490	71414	71344	71274	71204	71134	71063	70993	70922	70852	70781

多數應有之小數點除爲首一數外均未註出。

$\sqrt{1-r}$ 的 值

r	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
500	70711	70640	70569	70498	70427	70356	70285	70214	70143	70071
510	70000	69929	69857	69785	69714	69642	69570	69498	69426	69354
520	69282	69210	69138	69065	68993	68920	68848	68775	68702	68629
530	68557	68484	68411	68337	68264	68191	68118	68044	67971	67897
540	67823	67750	67676	67602	67528	67454	67380	67305	67231	67157
550	67082	67007	66933	66858	66783	66708	66633	66558	66483	66408
560	66332	66257	66182	66106	66030	65955	65879	65803	65727	65651
570	65574	65498	65422	65345	65269	65192	65115	65038	64962	64885
580	64807	64730	64653	64576	64498	64420	64343	64265	64187	64109
590	64031	63953	63875	63797	63718	63640	63561	63482	63403	63325
600	63246	63166	63087	63008	62929	62849	62769	62690	62610	62530
610	62450	62370	62290	62209	62129	62048	61968	61887	61806	61725
620	61644	61563	61482	61400	61319	61237	61156	61074	60992	60910
630	60828	60745	60663	60581	60498	60415	60332	60249	60166	60083
640	60000	59917	59833	59749	59666	59582	59498	59414	59330	59245
650	59161	59076	58992	58907	58822	58737	58652	58566	58481	58395
660	58310	58224	58138	58052	57966	57879	57793	57706	57619	57533
670	57446	57359	57271	57184	57096	57009	56921	56833	56745	56657
680	56569	56480	56391	56303	56214	56125	56036	55946	55857	55767
690	55678	55588	55498	55408	55317	55227	55136	55045	54955	54863
700	54772	54681	54589	54498	54406	54314	54222	54129	54037	53944
710	53852	53759	53666	53572	53479	53385	53292	53198	53104	53009
720	52915	52820	52726	52631	52536	52440	52345	52249	52154	52058
730	51962	51865	51769	51672	51575	51478	51381	51284	51186	51088
740	50990	50892	50794	50695	50596	50498	50398	50299	50200	50100
750	50000	49900	49800	49699	49598	49497	49396	49295	49193	49092
760	48990	48888	48785	48683	48580	48477	48374	48270	48166	48062
770	47958	47854	47749	47645	47539	47434	47329	47223	47117	47011
780	46904	46797	46690	46583	46476	46368	46260	46152	46043	45935
790	45826	45717	45607	45497	45387	45277	45166	45056	44944	44833
800	44721	44609	44497	44385	44272	44159	44045	43932	43818	43704
810	43589	43474	43359	43243	43128	43012	42895	42778	42661	42544
820	42426	42308	42190	42071	41952	41833	41713	41593	41473	41352
830	41231	41110	40988	40866	40743	40620	40497	40373	40249	40125
840	40000	39875	39749	39623	39497	39370	39243	39115	38987	38859
850	38730	38601	38471	38341	38210	38079	37947	37815	37683	37550
860	37417	37283	37148	37014	36878	36742	36606	36469	36332	36194
870	36056	35917	35777	35637	35496	35355	35214	35071	34928	34785
880	34641	34496	34351	34205	34059	33912	33764	33615	33466	33317
890	33166	33015	32863	32711	32558	32404	32249	32094	31937	31780
900	31623	31464	31305	31145	30984	30822	30659	30496	30332	30166
910	30000	29833	29665	29496	29326	29155	28983	28810	28636	28460
920	28284	28107	27928	27749	27568	27386	27203	27019	26833	26646
930	26458	26268	26077	25884	25690	25495	25298	25100	24900	24698
940	24495	24290	24083	23875	23664	23452	23238	23022	22804	22583
950	22361	22136	21909	21679	21448	21213	20976	20736	20494	20248
960	20000	19748	19494	19235	18974	18708	18349	18166	17889	17607
970	17321	17029	16733	16432	16125	15811	15492	15166	14832	14491
980	14142	13784	13416	13038	12649	12247	11832	11402	10954	10488
990	10000	09487	08944	08367	07746	07071	06325	05477	04472	03162

小數點均未註出

均數與均方差之機誤 (假定 $\sigma=1$)

n	χ_1	χ_2	n	χ_1	χ_2	n	χ_1	χ_2
1	.07449	.47094	51	.09445	.06678	101	.06711	.04746
2	.47694	.33724	52	.09353	.06614	102	.06678	.04722
3	.38942	.27536	53	.09265	.06551	103	.06646	.04699
4	.33724	.23847	54	.09179	.06490	104	.06614	.04677
5	.30164	.21329	55	.09095	.06431	105	.06582	.04654
6	.27536	.19471	56	.09013	.06373	106	.06551	.04632
7	.25493	.18026	57	.08934	.06317	107	.06521	.04611
8	.23847	.16862	58	.08856	.06262	108	.06490	.04589
9	.22483	.15898	59	.08781	.06209	109	.06460	.04568
10	.21329	.15082	60	.08708	.06157	110	.06431	.04547
11	.20337	.14380	61	.08636	.06107	111	.06402	.04527
12	.19471	.13768	62	.08566	.06057	112	.06373	.04507
13	.18707	.13228	63	.08498	.06009	113	.06345	.04487
14	.18026	.12747	64	.08431	.05962	114	.06317	.04467
15	.17415	.12314	65	.08366	.05916	115	.06290	.04447
16	.16862	.11923	66	.08302	.05871	116	.06262	.04428
17	.16359	.11567	67	.08240	.05827	117	.06236	.04409
18	.15898	.11241	68	.08179	.05784	118	.06209	.04391
19	.15474	.10942	69	.08120	.05742	119	.06183	.04372
20	.15082	.10665	70	.08062	.05700	120	.06157	.04354
21	.14719	.10408	71	.08005	.05660	121	.06132	.04336
22	.14380	.10168	72	.07949	.05621	122	.06107	.04318
23	.14064	.09945	73	.07894	.05582	123	.06082	.04300
24	.13768	.09735	74	.07841	.05544	124	.06057	.04283
25	.13490	.09539	75	.07788	.05507	125	.06033	.04266
26	.13228	.09353	76	.07737	.05471	126	.06009	.04249
27	.12981	.09179	77	.07687	.05435	127	.05985	.04232
28	.12747	.09013	78	.07637	.05400	128	.05962	.04216
29	.12525	.08856	79	.07589	.05366	129	.05939	.04199
30	.12314	.08708	80	.07541	.05332	130	.05916	.04183
31	.12114	.08566	81	.07494	.05299	131	.05893	.04167
32	.11923	.08431	82	.07448	.05267	132	.05871	.04151
33	.11741	.08302	83	.07403	.05235	133	.05849	.04136
34	.11567	.08179	84	.07359	.05204	134	.05827	.04120
35	.11401	.08062	85	.07316	.05173	135	.05805	.04105
36	.11241	.07949	86	.07273	.05143	136	.05784	.04090
37	.11088	.07841	87	.07231	.05113	137	.05763	.04075
38	.10942	.07737	88	.07190	.05084	138	.05742	.04060
39	.10800	.07637	89	.07150	.05056	139	.05721	.04045
40	.10665	.07541	90	.07110	.05027	140	.05700	.04031
41	.10534	.07448	91	.07071	.05000	141	.05680	.04017
42	.10408	.07359	92	.07032	.04972	142	.05660	.04002
43	.10286	.07273	93	.06994	.04946	143	.05640	.03988
44	.10168	.07190	94	.06957	.04919	144	.05621	.03974
45	.10055	.07110	95	.06920	.04893	145	.05601	.03961
46	.09945	.07032	96	.06884	.04868	146	.05582	.03947
47	.09838	.06957	97	.06848	.04843	147	.05563	.03934
48	.09735	.06884	98	.06813	.04818	148	.05544	.03920
49	.09636	.06813	99	.06779	.04793	149	.05526	.03907
50	.09539	.06745	100	.06745	.04769	150	.05507	.03894

* χ_1 爲均數之機誤, χ_2 爲均方差之機誤.

表九 (續)

n	χ_1	χ_2	n	χ_1	χ_2	n	χ_1	χ_2
151	.05489	.03881	201	.04757	.03364	251	.04257	.03013
152	.05471	.03868	202	.04746	.03356	252	.04249	.03004
153	.05453	.03856	203	.04734	.03347	253	.04240	.02998
154	.05435	.03843	204	.04722	.03339	254	.04232	.02993
155	.05418	.03831	205	.04711	.03331	255	.04224	.02987
156	.05400	.03819	206	.04699	.03323	256	.04216	.02981
157	.05383	.03806	207	.04688	.03315	257	.04207	.02975
158	.05366	.03794	208	.04677	.03307	258	.04199	.02969
159	.05349	.03782	209	.04666	.03299	259	.04191	.02964
160	.05332	.03771	210	.04654	.03291	260	.04183	.02958
161	.05316	.03759	211	.04643	.03283	261	.04175	.02952
162	.05299	.03747	212	.04632	.03276	262	.04167	.02947
163	.05283	.03736	213	.04622	.03268	263	.04159	.02941
164	.05267	.03724	214	.04611	.03262	264	.04151	.02935
165	.05251	.03713	215	.04600	.03253	265	.04143	.02930
166	.05235	.03702	216	.04589	.03245	266	.04136	.02924
167	.05219	.03691	217	.04579	.03238	267	.04128	.02919
168	.05204	.03680	218	.04568	.03230	268	.04120	.02913
169	.05188	.03669	219	.04558	.03223	269	.04112	.02908
170	.05173	.03658	220	.04547	.03216	270	.04105	.02903
171	.05158	.03647	221	.04537	.03208	271	.04097	.02897
172	.05143	.03637	222	.04527	.03201	272	.04090	.02892
173	.05128	.03626	223	.04517	.03194	273	.04082	.02887
174	.05113	.03616	224	.04507	.03187	274	.04075	.02881
175	.05099	.03605	225	.04497	.03180	275	.04067	.02876
176	.05084	.03595	226	.04487	.03173	276	.04060	.02871
177	.05070	.03585	227	.04477	.03166	277	.04053	.02866
178	.05056	.03575	228	.04467	.03159	278	.04045	.02860
179	.05041	.03565	229	.04457	.03152	279	.04038	.02855
180	.05027	.03555	230	.04447	.03145	280	.04031	.02850
181	.05013	.03545	231	.04438	.03138	281	.04024	.02845
182	.05000	.03535	232	.04428	.03131	282	.04017	.02840
183	.04986	.03526	233	.04419	.03125	283	.04009	.02835
184	.04972	.03516	234	.04409	.03118	284	.04002	.02830
185	.04959	.03507	235	.04400	.03111	285	.03995	.02825
186	.04946	.03497	236	.04391	.03105	286	.03988	.02820
187	.04932	.03488	237	.04381	.03098	287	.03981	.02815
188	.04919	.03478	238	.04372	.03092	288	.03974	.02810
189	.04906	.03469	239	.04363	.03085	289	.03968	.02805
190	.04893	.03460	240	.04354	.03079	290	.03961	.02801
191	.04880	.03451	241	.04345	.03072	291	.03954	.02796
192	.04868	.03442	242	.04336	.03066	292	.03947	.02791
193	.04855	.03433	243	.04327	.03060	293	.03940	.02786
194	.04843	.03424	244	.04318	.03053	294	.03934	.02782
195	.04830	.03415	245	.04309	.03047	295	.03927	.02777
196	.04818	.03407	246	.04300	.03041	296	.03920	.02772
197	.04806	.03398	247	.04292	.03035	297	.03913	.02767
198	.04793	.03389	248	.04283	.03029	298	.03907	.02763
199	.04781	.03381	249	.04274	.03022	299	.03901	.02758
200	.04769	.03372	250	.04266	.03016	200	.03894	.02754

n	X ₁	X ₂	n	X ₁	X ₂	n	X ₁	X ₂
301	.03888	.02749	351	.03600	.02546	401	.03368	.02382
302	.03881	.02744	352	.03595	.02542	402	.03364	.02378
303	.03875	.02740	353	.03590	.02538	403	.03360	.02376
304	.03868	.02735	354	.03585	.02535	404	.03356	.02373
305	.03862	.02731	355	.03580	.02531	405	.03352	.02370
306	.03856	.02726	356	.03575	.02528	406	.03347	.02367
307	.03850	.02722	357	.03570	.02524	407	.03343	.02364
308	.03843	.02718	358	.03565	.02521	408	.03339	.02361
309	.03837	.02713	359	.03560	.02517	409	.03335	.02358
310	.03831	.02719	360	.03555	.02514	410	.03331	.02355
311	.03825	.02704	361	.03550	.02510	411	.03327	.02353
312	.03819	.02700	362	.03545	.02507	412	.03323	.02350
313	.03812	.02696	363	.03540	.02503	413	.03319	.02347
314	.03806	.02692	364	.03535	.02500	414	.03315	.02344
315	.03800	.02687	365	.03530	.02496	415	.03311	.02341
316	.03794	.02683	366	.03526	.02493	416	.03307	.02338
317	.03788	.02679	367	.03521	.02490	417	.03303	.02336
318	.03782	.02675	368	.03516	.02486	418	.03299	.02333
319	.03776	.02670	369	.03511	.02483	419	.03295	.02330
320	.03771	.02666	370	.03507	.02479	420	.03291	.02327
321	.03765	.02662	371	.03502	.02476	421	.03287	.02324
322	.03759	.02658	372	.03497	.02473	422	.03283	.02322
323	.03753	.02654	373	.03492	.02469	423	.03279	.02319
324	.03747	.02650	374	.03488	.02465	424	.03276	.02316
325	.03741	.02646	375	.03483	.02463	425	.03272	.02313
326	.03736	.02642	376	.03478	.02460	426	.03268	.02311
327	.03730	.02637	377	.03474	.02456	427	.03264	.02308
328	.03724	.02633	378	.03469	.02453	428	.03260	.02305
329	.03719	.02629	379	.03465	.02450	429	.03256	.02303
330	.03713	.02625	380	.03460	.02447	430	.03253	.02300
331	.03707	.02621	381	.03456	.02443	431	.03249	.02297
332	.03702	.02618	382	.03451	.02440	432	.03245	.02295
333	.03696	.02614	383	.03446	.02437	433	.03241	.02292
334	.03691	.02610	384	.03442	.02434	434	.03238	.02289
335	.03685	.02606	385	.03438	.02431	435	.03234	.02287
336	.03680	.02602	386	.03433	.02428	436	.03230	.02284
337	.03674	.02598	387	.03429	.02424	437	.03227	.02281
338	.03669	.02594	388	.03424	.02421	438	.03223	.02279
339	.03663	.02590	389	.03420	.02418	439	.03219	.02276
340	.03658	.02587	390	.03415	.02415	440	.03216	.02274
341	.03653	.02583	391	.03411	.02412	441	.03212	.02271
342	.03647	.02579	392	.03407	.02409	442	.03208	.02269
343	.03642	.02575	393	.03402	.02406	443	.03205	.02266
344	.03637	.02571	394	.03398	.02403	444	.03201	.02263
345	.03631	.02568	395	.03394	.02400	445	.03197	.02261
346	.03626	.02564	396	.03389	.02397	446	.03194	.02258
347	.03621	.02560	397	.03385	.02394	447	.03190	.02256
348	.03616	.02557	398	.03381	.02391	448	.03187	.02253
349	.03610	.02553	399	.03377	.02388	449	.03183	.02251
350	.03605	.02549	400	.03372	.02385	450	.03180	.02248

表九 (續)

n	X_1	X_2	n	X_1	X_2	n	X_1	X_2
451	.03176	.02246	501	.03013	.02131	551	.02873	.02032
452	.03173	.02243	502	.03010	.02129	552	.02871	.02030
453	.03169	.02241	503	.03007	.02127	553	.02868	.02028
454	.03166	.02238	504	.03004	.02124	554	.02866	.02026
455	.03162	.02236	505	.03001	.02122	555	.02863	.02024
456	.03159	.02233	506	.02998	.02120	556	.02860	.02023
457	.03155	.02231	507	.02996	.02118	557	.02858	.02021
458	.03152	.02229	508	.02993	.02116	558	.02855	.02019
459	.03148	.02226	509	.02990	.02114	559	.02853	.02017
460	.03145	.02224	510	.02987	.02112	560	.02850	.02015
461	.03141	.02221	511	.02984	.02110	561	.02848	.02014
462	.03138	.02219	512	.02981	.02108	562	.02845	.02012
463	.03135	.02217	513	.02978	.02106	563	.02843	.02010
464	.03131	.02214	514	.02975	.02104	564	.02840	.02008
465	.03128	.02212	515	.02972	.02102	565	.02838	.02006
466	.03125	.02209	516	.02969	.02100	566	.02835	.02005
467	.03121	.02207	517	.02966	.02098	567	.02833	.02003
468	.03118	.02205	518	.02964	.02096	568	.02830	.02001
469	.03115	.02202	519	.02961	.02094	569	.02828	.01999
470	.03111	.02200	520	.02958	.02092	570	.02825	.01998
471	.03108	.02198	521	.02955	.02089	571	.02823	.01996
472	.03105	.02195	522	.02952	.02087	572	.02820	.01994
473	.03101	.02193	523	.02949	.02085	573	.02818	.01992
474	.03098	.02191	524	.02947	.02084	574	.02815	.01991
475	.03095	.02188	525	.02944	.02082	575	.02813	.01990
476	.03092	.02186	526	.02941	.02080	576	.02810	.01987
477	.03088	.02184	527	.02938	.02078	577	.02808	.01986
478	.03085	.02181	528	.02935	.02076	578	.02806	.01984
479	.03082	.02179	529	.02933	.02074	579	.02803	.01982
480	.03079	.02177	530	.02930	.02072	580	.02801	.01980
481	.03075	.02175	531	.02927	.02070	581	.02798	.01978
482	.03072	.02172	532	.02924	.02068	582	.02796	.01977
483	.03069	.02170	533	.02922	.02066	583	.02793	.01975
484	.03066	.02168	534	.02919	.02064	584	.02791	.01974
485	.03063	.02166	535	.02916	.02062	585	.02789	.01972
486	.03060	.02163	536	.02913	.02060	586	.02786	.01970
487	.03056	.02161	537	.02911	.02058	587	.02784	.01969
488	.03053	.02159	538	.02908	.02056	588	.02782	.01967
489	.03050	.02157	539	.02905	.02054	589	.02779	.01965
490	.03047	.02155	540	.02903	.02052	590	.02777	.01964
491	.03044	.02152	541	.02900	.02051	591	.02774	.01962
492	.03041	.02150	542	.02897	.02049	592	.02772	.01960
493	.03038	.02148	543	.02895	.02047	593	.02770	.01959
494	.03035	.02146	544	.02892	.02045	594	.02767	.01957
495	.03032	.02144	545	.02889	.02043	595	.02765	.01955
496	.03029	.02142	546	.02887	.02041	596	.02763	.01954
497	.03026	.02139	547	.02884	.02039	597	.02761	.01952
498	.03022	.02137	548	.02881	.02037	598	.02758	.01950
499	.03019	.02135	549	.02879	.02036	599	.02756	.01949
500	.03016	.02133	550	.02876	.02034	600	.02754	.01947

n	χ_1	χ_2	n	χ_1	χ_2	n	χ_1	χ_2
601	.02751	.01945	651	.02644	.01869	701	.02548	.01801
602	.02749	.01944	652	.02642	.01868	702	.02546	.01800
603	.02747	.01942	653	.02639	.01866	703	.02544	.01799
604	.02744	.01941	654	.02637	.01865	704	.02542	.01798
605	.02742	.01939	655	.02635	.01864	705	.02540	.01796
606	.02740	.01937	656	.02633	.01862	706	.02538	.01795
607	.02738	.01936	657	.02631	.01861	707	.02537	.01794
608	.02735	.01934	658	.02629	.01859	708	.02535	.01792
609	.02733	.01933	659	.02627	.01858	709	.02533	.01791
610	.02731	.01931	660	.02625	.01856	710	.02531	.01790
611	.02729	.01929	661	.02623	.01855	711	.02530	.01789
612	.02726	.01928	662	.02621	.01854	712	.02528	.01787
613	.02724	.01926	663	.02620	.01852	713	.02526	.01786
614	.02722	.01925	664	.02618	.01851	714	.02524	.01785
615	.02720	.01923	665	.02616	.01849	715	.02522	.01784
616	.02718	.01922	666	.02614	.01848	716	.02521	.01782
617	.02715	.01920	667	.02612	.01847	717	.02519	.01781
618	.02713	.01919	668	.02610	.01845	718	.02517	.01780
619	.02711	.01917	669	.02608	.01844	719	.02515	.01779
620	.02709	.01915	670	.02606	.01843	720	.02514	.01777
621	.02707	.01914	671	.02604	.01841	721	.02512	.01776
622	.02704	.01912	672	.02602	.01840	722	.02510	.01775
623	.02702	.01911	673	.02600	.01838	723	.02508	.01774
624	.02700	.01909	674	.02598	.01837	724	.02507	.01773
625	.02698	.01908	675	.02596	.01836	725	.02505	.01771
626	.02696	.01906	676	.02594	.01834	726	.02503	.01770
627	.02694	.01905	677	.02592	.01833	727	.02502	.01769
628	.02692	.01903	678	.02590	.01832	728	.02500	.01768
629	.02689	.01902	679	.02588	.01830	729	.02498	.01766
630	.02687	.01900	680	.02587	.01829	730	.02496	.01765
631	.02685	.01899	681	.02585	.01828	731	.02495	.01764
632	.02683	.01897	682	.02583	.01826	732	.02493	.01763
633	.02681	.01896	683	.02581	.01825	733	.02491	.01762
634	.02679	.01894	684	.02579	.01824	734	.02490	.01760
635	.02677	.01893	685	.02577	.01822	735	.02488	.01759
636	.02675	.01891	686	.02575	.01821	736	.02486	.01758
637	.02672	.01890	687	.02573	.01820	737	.02485	.01757
638	.02670	.01888	688	.02571	.01818	738	.02483	.01756
639	.02668	.01887	689	.02570	.01817	739	.02481	.01754
640	.02666	.01885	690	.02568	.01816	740	.02479	.01753
641	.02664	.01884	691	.02566	.01814	741	.02478	.01752
642	.02662	.01882	692	.02564	.01813	742	.02476	.01751
643	.02660	.01881	693	.02562	.01812	743	.02474	.01750
644	.02658	.01879	694	.02560	.01810	744	.02473	.01749
645	.02656	.01878	695	.02558	.01809	745	.02471	.01747
646	.02554	.01876	696	.02557	.01808	746	.02469	.01746
647	.02652	.01875	697	.02555	.01807	747	.02468	.01745
648	.02650	.01874	698	.02553	.01805	748	.02466	.01744
649	.02648	.01872	699	.02551	.01804	749	.02465	.01743
650	.02646	.01871	700	.02549	.01803	750	.02463	.01742

表九(續)

63

n	X ₁	X ₂	n	X ₁	X ₂	n	X ₁	X ₂
751	.02461	.01740	801	.02383	.01685	851	.02312	.01635
752	.02460	.01739	802	.02382	.01684	852	.02311	.01634
753	.02458	.01738	803	.02380	.01683	853	.02309	.01633
754	.02456	.01737	804	.02379	.01682	854	.02308	.01632
755	.02455	.01736	805	.02377	.01681	855	.02307	.01631
756	.02453	.01735	806	.02376	.01680	856	.02305	.01630
757	.02451	.01733	807	.02374	.01679	857	.02304	.01629
758	.02450	.01732	808	.02373	.01678	858	.02303	.01628
759	.02448	.01731	809	.02371	.01677	859	.02301	.01627
760	.02447	.01730	810	.02370	.01676	860	.02300	.01626
761	.02445	.01729	811	.02368	.01675	861	.02299	.01625
762	.02443	.01728	812	.02367	.01674	862	.02297	.01624
763	.02442	.01727	813	.02366	.01673	863	.02296	.01624
764	.02440	.01725	814	.02364	.01672	864	.02295	.01623
765	.02439	.01724	815	.02363	.01671	865	.02293	.01622
766	.02437	.01723	816	.02361	.01670	866	.02292	.01621
767	.02435	.01722	817	.02360	.01669	867	.02291	.01620
768	.02434	.01721	818	.02358	.01668	868	.02289	.01619
769	.02432	.01720	819	.02357	.01667	869	.02288	.01618
770	.02431	.01719	820	.02355	.01666	870	.02287	.01617
771	.02429	.01718	821	.02354	.01665	871	.02285	.01616
772	.02428	.01717	822	.02353	.01664	872	.02284	.01615
773	.02426	.01715	823	.02351	.01662	873	.02283	.01614
774	.02424	.01714	824	.02350	.01661	874	.02281	.01613
775	.02423	.01713	825	.02348	.01660	875	.02280	.01612
776	.02421	.01712	826	.02347	.01659	876	.02279	.01611
777	.02420	.01711	827	.02345	.01658	877	.02278	.01610
778	.02418	.01710	828	.02344	.01657	878	.02276	.01610
779	.02417	.01709	829	.02343	.01656	879	.02275	.01609
780	.02415	.01708	830	.02341	.01655	880	.02274	.01608
781	.02414	.01707	831	.02340	.01654	881	.02272	.01607
782	.02412	.01706	832	.02338	.01653	882	.02271	.01606
783	.02410	.01704	833	.02337	.01652	883	.02270	.01605
784	.02409	.01703	834	.02336	.01651	884	.02269	.01604
785	.02407	.01702	835	.02334	.01651	885	.02267	.01603
786	.02406	.01701	836	.02333	.01650	886	.02266	.01602
787	.02404	.01700	837	.02331	.01649	887	.02265	.01601
788	.02403	.01699	838	.02330	.01648	888	.02263	.01600
789	.02401	.01698	839	.02329	.01647	889	.02262	.01600
790	.02400	.01697	840	.02327	.01646	890	.02261	.01599
791	.02398	.01696	841	.02326	.01645	891	.02260	.01598
792	.02397	.01695	842	.02324	.01644	892	.02258	.01597
793	.02395	.01694	843	.02323	.01643	893	.02257	.01596
794	.02394	.01693	844	.02322	.01642	894	.02256	.01595
795	.02392	.01692	845	.02320	.01641	895	.02255	.01594
796	.02391	.01690	846	.02319	.01640	896	.02253	.01593
797	.02389	.01689	847	.02318	.01639	897	.02252	.01592
798	.02388	.01688	848	.02316	.01638	898	.02251	.01592
799	.02386	.01687	849	.02315	.01637	899	.02250	.01591
800	.02385	.01686	850	.02313	.01636	900	.02248	.01590

n	χ_1	χ_2	n	χ_1	χ_2
901	.02247	.01589	951	.02187	.01547
902	.02246	.01588	952	.02186	.01546
903	.02245	.01587	953	.02185	.01545
904	.02243	.01586	954	.02184	.01544
905	.02242	.01585	955	.02183	.01543
906	.02241	.01585	956	.02181	.01543
907	.02240	.01584	957	.02180	.01542
908	.02238	.01583	958	.02179	.01541
909	.02237	.01582	959	.02178	.01540
910	.02236	.01581	960	.02177	.01539
911	.02235	.01580	961	.02176	.01539
912	.02233	.01579	962	.02175	.01538
913	.02232	.01578	963	.02174	.01537
914	.02231	.01578	964	.02172	.01536
915	.02230	.01577	965	.02171	.01535
916	.02229	.01576	966	.02170	.01535
917	.02227	.01575	967	.02169	.01534
918	.02226	.01574	968	.02168	.01533
919	.02225	.01573	969	.02167	.01532
920	.02224	.01572	970	.02166	.01531
921	.02223	.01572	971	.02165	.01531
922	.02221	.01571	972	.02163	.01530
923	.02220	.01570	973	.02162	.01529
924	.02219	.01569	974	.02161	.01528
925	.02218	.01568	975	.02160	.01527
926	.02217	.01567	976	.02159	.01527
927	.02215	.01566	977	.02158	.01526
928	.02214	.01566	978	.02157	.01525
929	.02213	.01565	979	.02156	.01524
930	.02212	.01564	980	.02155	.01524
931	.02211	.01563	981	.02153	.01523
932	.02209	.01562	982	.02152	.01522
933	.02208	.01561	983	.02151	.01521
934	.02207	.01561	984	.02150	.01520
935	.02206	.01560	985	.02149	.01520
936	.02205	.01559	986	.02148	.01519
937	.02203	.01558	987	.02147	.01518
938	.02202	.01557	988	.02146	.01517
939	.02201	.01556	989	.02145	.01517
940	.02200	.01556	990	.02144	.01516
941	.02199	.01555	991	.02143	.01515
942	.02198	.01554	992	.02142	.01514
943	.02196	.01553	993	.02140	.01514
944	.02195	.01552	994	.02139	.01513
945	.02194	.01551	995	.02138	.01512
946	.02193	.01551	996	.02137	.01511
947	.02192	.01550	997	.02136	.01510
948	.02191	.01549	998	.02135	.01510
949	.02189	.01548	999	.02134	.01509
950	.02188	.01547	1000	.02133	.01508

相關係數的機誤

例如 $N=95, r=.128 \pm .068$

相關係數

<i>N</i>	00	02	04	06	08	10	.12	.14	.16	.18	<i>N</i>
20	1508	1508	1506	1503	1499	1493	1486	1479	1470	1459	20
25	1349	1348	1347	1344	1340	1335	1330	1323	1314	1305	25
30	1231	1231	1229	1227	1224	1219	1214	1207	1200	1192	30
35	1140	1140	1138	1136	1133	1129	1124	1118	1111	1103	35
40	1066	1066	1065	1063	1060	1056	1051	1046	1039	1032	40
45	1005	1005	1004	1002	0999	0995	0991	0986	0980	0973	45
50	0954	0953	0952	0950	0948	0944	0940	0935	0929	0923	50
55	0909	0909	0908	0906	0904	0900	0896	0892	0886	0880	55
60	0871	0870	0869	0868	0865	0862	0858	0854	0848	0843	60
65	0837	0836	0835	0834	0831	0828	0825	0820	0815	0809	65
70	0806	0806	0805	0803	0801	0798	0795	0790	0786	0780	70
75	0779	0779	0778	0776	0774	0771	0768	0764	0759	0754	75
80	0754	0754	0753	0751	0749	0747	0743	0739	0735	0730	80
85	0732	0731	0730	0729	0727	0724	0721	0717	0713	0708	85
90	0711	0711	0710	0708	0706	0704	0701	0697	0693	0688	90
95	0692	0692	0691	0690	0688	0685	0682	0678	0674	0670	95
100	0674	0674	0673	0672	0670	0668	0665	0661	0657	0653	100
110	0643	0643	0642	0641	0639	0637	0634	0630	0627	0622	110
120	0616	0615	0615	0614	0612	0610	0607	0604	0600	0596	120
130	0592	0591	0591	0589	0588	0586	0583	0580	0576	0572	130
140	0570	0570	0569	0568	0566	0564	0562	0559	0555	0552	140
150	0551	0550	0550	0549	0547	0545	0543	0540	0537	0533	150
160	0533	0533	0532	0531	0530	0528	0526	0523	0520	0516	160
170	0517	0517	0516	0515	0514	0512	0510	0507	0504	0501	170
180	0503	0503	0502	0501	0500	0498	0495	0493	0490	0486	180
190	0489	0489	0489	0488	0486	0484	0482	0480	0477	0473	190
200	0477	0477	0476	0475	0474	0472	0470	0468	0465	0461	200
210	0465	0465	0465	0464	0462	0461	0459	0456	0454	0450	210
220	0455	0455	0454	0453	0452	0450	0448	0446	0443	0440	220
230	0445	0445	0444	0443	0442	0440	0438	0436	0433	0430	230
240	0435	0435	0435	0434	0433	0431	0429	0427	0424	0421	240
250	0427	0426	0426	0425	0424	0422	0420	0418	0416	0413	250
260	0418	0418	0418	0417	0416	0414	0412	0410	0408	0405	260
270	0410	0410	0410	0409	0408	0406	0405	0402	0400	0397	270
280	0403	0403	0402	0402	0401	0399	0397	0395	0393	0390	280
290	0396	0396	0395	0395	0394	0392	0390	0388	0386	0383	290
300	0389	0389	0389	0388	0387	0386	0384	0382	0379	0377	300
310	0383	0383	0382	0382	0381	0379	0378	0376	0373	0371	310
320	0377	0377	0376	0376	0375	0373	0372	0370	0367	0365	320
330	0371	0371	0371	0370	0369	0368	0366	0364	0362	0359	330
340	0366	0366	0365	0364	0363	0362	0361	0359	0356	0354	340

小數點均未註出

表十(續)

相關係數

N	.00	.02	.04	.06	.08	.10	.12	.14	.16	.18	N
360	0361	0360	0360	0359	0358	0357	0355	0353	0351	0349	350
360	0355	0355	0355	0354	0353	0352	0350	0349	0346	0344	360
370	0351	0351	0350	0349	0348	0347	0346	0344	0342	0339	370
380	0346	0346	0345	0345	0344	0343	0341	0339	0337	0335	380
390	0342	0341	0341	0340	0339	0338	0337	0335	0333	0330	390
400	0337	0337	0337	0336	0335	0334	0332	0331	0329	0326	400
410	0333	0333	0333	0332	0331	0330	0328	0327	0325	0322	410
420	0329	0329	0329	0328	0327	0326	0324	0323	0321	0318	420
430	0325	0325	0325	0324	0323	0322	0321	0319	0317	0315	430
440	0322	0321	0321	0320	0319	0318	0317	0315	0313	0311	440
450	0318	0318	0317	0317	0316	0315	0313	0312	0310	0308	450
460	0314	0314	0314	0313	0312	0311	0310	0308	0306	0304	460
470	0311	0311	0311	0310	0309	0308	0307	0305	0303	0301	470
480	0308	0308	0307	0307	0306	0305	0303	0302	0300	0298	480
490	0305	0305	0304	0304	0303	0302	0300	0299	0297	0295	490
500	0302	0302	0301	0301	0300	0299	0297	0296	0294	0292	500
520	0296	0296	0295	0295	0294	0293	0292	0290	0288	0286	520
540	0290	0290	0290	0289	0288	0287	0286	0285	0283	0281	540
560	0285	0285	0285	0284	0283	0282	0281	0279	0278	0276	560
580	0280	0280	0280	0279	0278	0277	0276	0275	0273	0271	580
600	0275	0275	0275	0274	0274	0273	0271	0270	0268	0266	600
620	0271	0271	0270	0270	0269	0268	0267	0266	0264	0262	620
640	0267	0267	0266	0266	0265	0264	0263	0261	0260	0258	640
660	0263	0262	0262	0262	0261	0260	0259	0257	0256	0254	660
680	0259	0259	0258	0258	0257	0256	0255	0254	0252	0250	680
700	0255	0255	0255	0254	0253	0252	0251	0250	0248	0247	700
720	0251	0251	0251	0250	0250	0249	0248	0246	0245	0243	720
740	0248	0248	0248	0247	0246	0245	0244	0243	0242	0240	740
760	0245	0245	0244	0244	0243	0242	0241	0240	0238	0237	760
780	0242	0241	0241	0241	0240	0239	0238	0237	0235	0234	780
800	0238	0238	0238	0238	0237	0236	0235	0234	0232	0231	800
820	0236	0235	0235	0235	0234	0233	0232	0231	0230	0228	820
840	0233	0233	0232	0232	0231	0230	0229	0228	0227	0225	840
860	0230	0230	0230	0229	0229	0228	0227	0225	0224	0223	860
880	0227	0227	0227	0227	0226	0225	0224	0223	0222	0220	880
900	0225	0225	0224	0224	0223	0223	0222	0220	0219	0218	900
920	0222	0222	0222	0222	0221	0220	0219	0218	0217	0215	920
940	0220	0220	0220	0219	0219	0218	0217	0216	0214	0213	940
960	0218	0218	0217	0217	0216	0216	0215	0213	0212	0211	960
980	0215	0215	0215	0215	0214	0213	0212	0211	0210	0208	980
1000	0213	0213	0213	0213	0212	0211	0210	0209	0208	0206	1000

小數點均未註出

表十(續)

相關係數

N	.20	.22	.24	.26	.28	.30	.32	.34	.36	.38	N
20	1448	1435	1421	1406	1390	1372	1354	1334	1313	1290	20
25	1295	1284	1271	1258	1243	1228	1211	1193	1174	1154	25
30	1182	1172	1161	1148	1135	1121	1105	1089	1072	1054	30
35	1094	1085	1074	1063	1051	1037	1023	1008	992	975	35
40	1024	1015	1005	994	983	970	957	943	928	912	40
45	0965	0957	0948	0938	0927	0915	0903	0889	0875	0860	45
50	0916	0908	0899	0889	0879	0868	0856	0844	0830	0816	50
55	0873	0865	0857	0848	0838	0828	0816	0804	0792	0778	55
60	0836	0829	0821	0812	0802	0792	0782	0770	0758	0745	60
65	0803	0796	0788	0780	0771	0761	0751	0740	0728	0716	65
70	0774	0767	0760	0752	0743	0734	0724	0713	0702	0690	70
75	0748	0741	0734	0726	0718	0709	0699	0689	0678	0666	75
80	0724	0718	0711	0703	0695	0686	0677	0667	0656	0645	80
85	0702	0696	0689	0682	0674	0666	0657	0647	0637	0626	85
90	0683	0677	0670	0663	0655	0647	0638	0629	0619	0608	90
95	0664	0659	0652	0645	0638	0630	0621	0612	0602	0592	95
100	0648	0642	0636	0629	0622	0614	0605	0597	0587	0577	100
110	0617	0612	0606	0600	0593	0585	0577	0569	0560	0550	110
120	0591	0586	0580	0574	0567	0560	0553	0545	0536	0527	120
130	0568	0563	0557	0552	0545	0538	0531	0523	0515	0506	130
140	0547	0542	0537	0532	0525	0519	0512	0504	0496	0488	140
150	0529	0524	0519	0513	0508	0501	0494	0487	0479	0471	150
160	0512	0507	0503	0497	0491	0485	0479	0472	0464	0456	160
170	0497	0492	0488	0482	0477	0471	0464	0458	0450	0443	170
180	0483	0478	0474	0469	0463	0457	0451	0445	0438	0430	180
190	0470	0466	0461	0456	0451	0445	0439	0433	0426	0419	190
200	0458	0454	0449	0445	0440	0434	0428	0422	0415	0408	200
210	0447	0443	0439	0434	0429	0424	0418	0412	0405	0398	210
220	0437	0433	0429	0424	0419	0414	0408	0402	0396	0389	220
230	0427	0423	0419	0415	0410	0405	0399	0393	0387	0381	230
240	0418	0414	0410	0406	0401	0396	0391	0385	0379	0373	240
250	0410	0406	0402	0398	0393	0388	0383	0377	0371	0365	250
260	0402	0398	0394	0390	0386	0381	0375	0370	0364	0358	260
270	0394	0391	0387	0383	0378	0374	0368	0363	0357	0351	270
280	0387	0384	0380	0376	0371	0367	0362	0356	0351	0345	280
290	0380	0377	0373	0369	0365	0360	0356	0350	0345	0339	290
300	0374	0371	0367	0363	0359	0354	0350	0344	0339	0333	300
310	0368	0365	0361	0357	0353	0349	0344	0339	0333	0328	310
320	0362	0359	0355	0352	0347	0343	0338	0333	0328	0323	320
330	0356	0353	0350	0346	0342	0338	0333	0328	0323	0318	330
340	0351	0348	0345	0341	0337	0333	0328	0324	0318	0313	340

小數點均未註出

表十 (續)

N	相 關 係 數										N
	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	
350	0346	0343	0340	0336	0332	0328	0324	0319	0314	0308	350
360	0341	0338	0335	0331	0328	0323	0319	0314	0309	0304	360
370	0337	0334	0330	0327	0323	0319	0315	0310	0305	0300	370
380	0332	0329	0326	0323	0319	0315	0311	0306	0301	0296	380
390	0328	0325	0322	0318	0315	0311	0307	0302	0297	0292	390
400	0324	0321	0318	0314	0311	0307	0303	0298	0294	0289	400
410	0320	0317	0314	0311	0307	0303	0299	0295	0290	0285	410
420	0316	0313	0310	0307	0303	0299	0295	0291	0286	0282	420
430	0312	0310	0307	0303	0300	0296	0292	0288	0283	0278	430
440	0309	0306	0303	0300	0296	0293	0289	0284	0280	0275	440
450	0305	0303	0300	0296	0293	0289	0285	0281	0277	0272	450
460	0302	0299	0296	0293	0290	0286	0282	0278	0274	0269	460
470	0299	0296	0293	0290	0287	0283	0279	0275	0271	0266	470
480	0296	0293	0290	0287	0284	0280	0276	0272	0268	0263	480
490	0293	0290	0287	0284	0281	0277	0274	0269	0265	0261	490
500	0290	0287	0284	0281	0278	0274	0271	0267	0263	0258	500
520	0284	0281	0279	0276	0273	0269	0265	0262	0257	0253	520
540	0279	0276	0274	0271	0267	0264	0261	0257	0253	0248	540
560	0274	0271	0269	0266	0263	0259	0256	0252	0248	0244	560
580	0269	0267	0264	0261	0258	0255	0251	0248	0244	0240	580
600	0264	0262	0259	0257	0254	0251	0247	0244	0240	0236	600
620	0260	0258	0255	0253	0250	0247	0243	0240	0236	0232	620
640	0256	0254	0251	0249	0246	0243	0239	0236	0232	0228	640
660	0252	0250	0247	0245	0242	0239	0236	0232	0229	0225	660
680	0248	0246	0244	0241	0238	0235	0232	0229	0225	0221	680
700	0245	0243	0240	0238	0235	0232	0229	0225	0222	0218	700
720	0241	0239	0237	0234	0232	0229	0226	0222	0219	0215	720
740	0238	0236	0234	0231	0229	0226	0223	0219	0216	0212	740
760	0235	0233	0231	0228	0225	0223	0220	0216	0213	0209	760
780	0232	0230	0228	0225	0223	0220	0217	0214	0210	0207	780
800	0229	0227	0225	0222	0220	0217	0214	0211	0208	0204	800
820	0226	0224	0222	0220	0217	0214	0211	0208	0205	0201	820
840	0223	0221	0219	0217	0214	0212	0209	0206	0203	0199	840
860	0221	0219	0217	0214	0212	0209	0206	0203	0200	0197	860
880	0218	0216	0214	0212	0210	0207	0204	0201	0198	0195	880
900	0216	0214	0212	0210	0207	0205	0202	0199	0196	0192	900
920	0213	0212	0210	0207	0205	0202	0200	0197	0194	0190	920
940	0211	0209	0207	0205	0203	0200	0197	0195	0191	0188	940
960	0209	0207	0205	0203	0201	0198	0195	0193	0189	0186	960
980	0207	0205	0203	0201	0199	0196	0193	0191	0188	0184	980
1000	0205	0203	0201	0199	0197	0194	0191	0189	0186	0182	1000

小 數 點 均 未 註 出

表十(續)

69

相 關 係 數

N	.40	.42	.44	.46	.48	.50	.52	.54	.56	.58	N
20	1267	1242	1216	1189	1161	1131	1100	1068	1035	1001	20
25	1133	1111	1088	1064	1038	1012	984	956	926	895	25
30	1024	1014	0993	0971	0948	0924	0898	0872	0845	0817	30
35	0958	0939	0919	0899	0877	0855	0832	0808	0783	0757	35
40	0896	0878	0860	0841	0821	0800	0778	0756	0732	0708	40
45	0845	0828	0811	0793	0774	0754	0734	0712	0690	0667	45
50	0801	0786	0769	0752	0734	0715	0696	0676	0655	0633	50
55	0764	0749	0733	0717	0700	0682	0664	0644	0624	0604	55
60	0731	0717	0702	0687	0670	0653	0635	0617	0598	0578	60
65	0703	0689	0675	0660	0644	0627	0610	0593	0574	0555	65
70	0677	0664	0650	0636	0620	0605	0588	0571	0553	0535	70
75	0654	0641	0628	0614	0599	0584	0568	0552	0535	0517	75
80	0633	0621	0608	0595	0580	0566	0550	0534	0518	0500	80
85	0615	0603	0590	0577	0563	0549	0534	0518	0502	0485	85
90	0597	0586	0573	0561	0547	0533	0519	0504	0488	0472	90
95	0581	0570	0558	0546	0533	0519	0505	0490	0475	0459	95
100	0567	0556	0544	0532	0519	0506	0492	0478	0463	0448	100
110	0540	0530	0519	0507	0495	0482	0469	0456	0441	0427	110
120	0517	0507	0497	0485	0474	0462	0449	0436	0423	0409	120
130	0497	0487	0477	0466	0455	0444	0432	0419	0406	0393	130
140	0479	0469	0460	0449	0439	0428	0416	0404	0391	0378	140
150	0463	0454	0444	0434	0424	0413	0402	0390	0378	0365	150
160	0448	0439	0430	0420	0410	0400	0389	0378	0366	0354	160
170	0435	0426	0417	0408	0398	0388	0377	0366	0355	0343	170
180	0422	0414	0405	0396	0387	0377	0367	0356	0345	0334	180
190	0411	0403	0395	0386	0377	0367	0357	0347	0336	0325	190
200	0401	0393	0385	0376	0367	0358	0348	0338	0327	0316	200
210	0391	0383	0375	0367	0358	0349	0340	0330	0319	0309	210
220	0382	0375	0367	0359	0350	0341	0332	0322	0312	0302	220
230	0374	0366	0359	0351	0342	0334	0324	0315	0305	0295	230
240	0366	0359	0351	0343	0335	0327	0318	0308	0299	0289	240
250	0358	0351	0344	0336	0328	0320	0311	0302	0293	0283	250
260	0351	0345	0337	0330	0322	0314	0305	0296	0287	0278	260
270	0345	0338	0331	0324	0316	0308	0299	0291	0282	0272	270
280	0339	0332	0325	0318	0310	0302	0294	0286	0277	0267	280
290	0333	0326	0319	0312	0305	0297	0289	0281	0272	0263	290
300	0327	0321	0314	0307	0300	0292	0284	0276	0267	0258	300
310	0322	0316	0309	0302	0295	0287	0279	0271	0263	0254	310
320	0317	0311	0304	0297	0290	0283	0275	0267	0259	0250	320
330	0312	0306	0299	0293	0286	0278	0271	0263	0255	0246	330
340	0307	0301	0295	0288	0282	0274	0267	0259	0251	0243	340

小 數 點 均 未 註 出

表十 (續)
相 關 係 數

N	.40	.42	.44	.46	.48	.50	.52	.54	.56	.58	N
350	0303	0297	0291	0284	0277	0270	0263	0255	0247	0239	360
360	0299	0293	0287	0280	0274	0267	0259	0252	0244	0236	360
370	0295	0289	0283	0276	0270	0263	0256	0248	0241	0233	370
380	0291	0285	0279	0273	0266	0260	0252	0245	0237	0230	380
390	0287	0281	0275	0269	0263	0256	0249	0242	0234	0227	390
400	0283	0278	0272	0266	0260	0253	0246	0239	0231	0224	400
410	0280	0274	0269	0263	0256	0250	0243	0236	0229	0221	410
420	0276	0271	0265	0259	0253	0247	0240	0233	0226	0218	420
430	0273	0268	0262	0256	0250	0244	0237	0230	0223	0216	430
440	0270	0265	0259	0254	0247	0241	0235	0228	0221	0213	440
450	0267	0262	0256	0251	0245	0238	0232	0225	0218	0211	450
460	0264	0259	0254	0248	0242	0236	0229	0223	0216	0209	460
470	0261	0256	0251	0245	0239	0233	0227	0220	0214	0206	470
480	0259	0254	0248	0243	0237	0231	0225	0218	0211	0204	480
490	0256	0251	0246	0240	0234	0229	0222	0216	0209	0202	490
500	0253	0248	0243	0238	0232	0226	0220	0214	0207	0200	500
520	0248	0244	0239	0233	0228	0222	0216	0210	0203	0196	520
540	0244	0239	0234	0229	0223	0218	0212	0206	0199	0193	540
560	0239	0235	0230	0225	0219	0214	0208	0202	0196	0189	560
580	0235	0231	0226	0221	0216	0210	0204	0198	0192	0186	580
600	0231	0227	0222	0217	0212	0207	0201	0195	0189	0183	600
620	0228	0223	0218	0214	0208	0203	0198	0192	0186	0180	620
640	0224	0220	0215	0210	0205	0200	0195	0189	0183	0177	640
660	0221	0216	0212	0207	0202	0197	0192	0186	0180	0174	660
680	0217	0213	0209	0204	0199	0194	0189	0183	0178	0172	680
700	0214	0210	0206	0201	0196	0191	0186	0181	0175	0169	700
720	0211	0207	0203	0198	0193	0189	0183	0178	0173	0167	720
740	0208	0204	0200	0195	0191	0186	0181	0176	0170	0165	740
760	0206	0202	0197	0193	0188	0183	0179	0173	0168	0162	760
780	0203	0199	0195	0190	0186	0181	0176	0171	0166	0160	780
800	0200	0196	0192	0188	0184	0179	0174	0169	0164	0158	800
820	0198	0194	0190	0186	0181	0177	0172	0167	0162	0156	820
840	0195	0192	0188	0183	0179	0175	0170	0165	0160	0154	840
860	0193	0189	0185	0181	0177	0172	0168	0163	0158	0153	860
880	0191	0187	0183	0179	0175	0171	0166	0161	0156	0151	880
900	0189	0185	0181	0177	0173	0169	0164	0159	0154	0149	900
920	0187	0183	0179	0175	0171	0167	0162	0158	0153	0148	920
940	0185	0181	0177	0173	0169	0165	0161	0156	0151	0146	940
960	0183	0179	0176	0172	0168	0163	0159	0154	0149	0144	960
980	0181	0177	0174	0170	0166	0162	0157	0153	0148	0143	980
1000	0179	0176	0172	0168	0164	0160	0156	0151	0146	0142	1000

小 數 點 均 未 註 出

表十 (續)

相關係數

N	.60	.62	.64	.66	.68	.70	.72	.74	.76	.78	N
20	0965	0928	0890	0851	0811	0769	0726	0682	0637	0591	20
25	0863	0830	0796	0761	0725	0688	0650	0610	0570	0528	25
30	0788	0758	0727	0695	0662	0628	0593	0557	0520	0482	30
35	0730	0702	0673	0643	0613	0581	0549	0516	0482	0446	35
40	0683	0657	0630	0602	0573	0544	0514	0482	0450	0418	40
45	0644	0619	0594	0568	0541	0513	0484	0455	0425	0394	45
50	0610	0587	0563	0538	0513	0486	0459	0432	0403	0374	50
55	0582	0560	0537	0513	0489	0464	0438	0411	0384	0356	55
60	0557	0536	0514	0491	0468	0444	0419	0394	0368	0341	60
65	0535	0515	0494	0472	0450	0427	0403	0378	0353	0328	65
70	0516	0496	0476	0455	0433	0411	0388	0365	0341	0316	70
75	0498	0479	0460	0440	0419	0397	0375	0352	0329	0305	75
80	0483	0464	0445	0426	0405	0385	0363	0341	0319	0295	80
85	0468	0450	0432	0413	0393	0373	0352	0331	0309	0286	85
90	0455	0438	0420	0401	0382	0363	0342	0322	0300	0278	90
95	0443	0426	0409	0391	0372	0353	0333	0313	0292	0271	95
100	0432	0415	0398	0381	0363	0344	0325	0305	0285	0264	100
110	0412	0396	0380	0363	0346	0328	0310	0291	0272	0252	110
120	0394	0379	0364	0348	0331	0314	0297	0279	0260	0241	120
130	0379	0364	0349	0334	0318	0302	0285	0268	0250	0232	130
140	0365	0351	0337	0322	0306	0291	0275	0258	0241	0223	140
150	0352	0339	0325	0311	0296	0281	0265	0249	0233	0216	150
160	0341	0328	0315	0301	0287	0272	0257	0241	0225	0209	160
170	0331	0318	0305	0292	0278	0264	0249	0234	0219	0203	170
180	0322	0309	0297	0284	0270	0256	0242	0227	0212	0197	180
190	0313	0301	0289	0276	0263	0250	0236	0221	0207	0192	190
200	0305	0294	0282	0269	0256	0243	0230	0216	0201	0187	200
210	0298	0287	0275	0263	0250	0237	0224	0211	0197	0182	210
220	0291	0280	0268	0257	0244	0232	0219	0206	0192	0178	220
230	0285	0274	0263	0251	0239	0227	0214	0201	0188	0174	230
240	0279	0268	0257	0246	0234	0222	0210	0197	0184	0170	240
250	0273	0263	0252	0241	0229	0218	0205	0193	0180	0167	250
260	0268	0258	0247	0236	0225	0213	0201	0189	0177	0164	260
270	0263	0253	0242	0232	0221	0209	0198	0186	0173	0161	270
280	0258	0248	0238	0228	0217	0206	0194	0182	0170	0158	280
290	0253	0244	0234	0224	0213	0202	0191	0179	0167	0155	290
300	0249	0240	0230	0220	0209	0199	0188	0176	0164	0152	300
310	0245	0236	0226	0216	0206	0195	0184	0173	0162	0150	310
320	0241	0232	0223	0213	0203	0192	0182	0171	0159	0148	320
330	0238	0229	0219	0210	0200	0189	0179	0168	0157	0145	330
340	0234	0225	0216	0206	0197	0187	0176	0165	0155	0143	340

小數點均未註出

表十 (續)

相關係數

N	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	N
350	0231	0222	0213	0203	0194	0184	0174	0163	0152	0141	350
360	0228	0219	0210	0201	0191	0181	0171	0161	0150	0139	360
370	0224	0216	0207	0198	0189	0179	0169	0159	0148	0137	370
380	0221	0213	0204	0195	0186	0176	0167	0157	0146	0135	380
390	0219	0210	0202	0193	0184	0174	0164	0155	0144	0134	390
400	0216	0208	0199	0190	0181	0172	0162	0153	0142	0132	400
410	0213	0205	0197	0188	0179	0170	0160	0151	0141	0130	410
420	0211	0203	0194	0186	0177	0168	0159	0149	0139	0129	420
430	0208	0200	0192	0184	0175	0166	0157	0147	0137	0127	430
440	0206	0198	0190	0181	0173	0164	0155	0145	0136	0126	440
450	0203	0196	0188	0179	0171	0162	0153	0144	0134	0125	450
460	0201	0194	0186	0177	0169	0160	0151	0142	0133	0123	460
470	0199	0192	0184	0176	0167	0159	0150	0141	0131	0122	470
480	0197	0190	0182	0174	0166	0157	0148	0139	0130	0121	480
490	0195	0188	0180	0172	0164	0155	0147	0138	0129	0119	490
500	0193	0186	0178	0170	0162	0154	0145	0136	0127	0118	500
520	0189	0182	0175	0167	0159	0151	0142	0134	0125	0116	520
540	0186	0179	0171	0164	0156	0148	0140	0131	0123	0114	540
560	0182	0175	0168	0161	0153	0145	0137	0129	0120	0112	560
580	0179	0172	0165	0158	0151	0143	0135	0127	0118	0110	580
600	0176	0170	0163	0155	0148	0140	0133	0125	0116	0108	600
620	0173	0167	0160	0153	0146	0138	0130	0123	0114	0106	620
640	0171	0164	0157	0150	0143	0136	0128	0121	0113	0104	640
660	0168	0162	0155	0148	0141	0134	0126	0119	0111	0103	660
680	0166	0159	0153	0146	0139	0132	0125	0117	0109	0101	680
700	0163	0157	0151	0144	0137	0130	0123	0115	0108	0100	700
720	0161	0155	0148	0142	0135	0128	0121	0114	0106	0098	720
740	0159	0153	0146	0140	0133	0126	0119	0112	0105	0097	740
760	0157	0151	0144	0138	0132	0125	0118	0111	0103	0096	760
780	0155	0149	0143	0136	0130	0123	0116	0109	0102	0095	780
800	0153	0147	0141	0135	0128	0122	0115	0108	0101	0093	800
820	0151	0145	0139	0133	0127	0120	0113	0107	0099	0092	820
840	0149	0143	0137	0131	0125	0119	0112	0105	0098	0091	840
860	0147	0142	0136	0130	0124	0117	0111	0104	0097	0090	860
880	0146	0140	0134	0128	0122	0116	0110	0103	0096	0089	880
900	0144	0138	0133	0127	0121	0115	0108	0102	0095	0088	900
920	0142	0137	0131	0126	0120	0113	0107	0101	0094	0087	920
940	0141	0135	0130	0124	0118	0112	0106	0100	0093	0086	940
960	0139	0134	0129	0123	0117	0111	0105	0098	0092	0085	960
980	0138	0133	0127	0122	0116	0110	0104	0097	0091	0084	980
1000	0137	0131	0126	0120	0115	0109	0103	0096	0090	0084	1000

小數點均未註出

表十(續)

相關係數

N	.80	.82	.84	.86	.88	.90	.92	.94	.96	.98	N
20	0543	0494	0444	0393	0340	0287	0232	0176	0118	0060	20
25	0486	0442	0397	0351	0304	0256	0207	0157	0106	0053	25
30	0443	0403	0363	0321	0278	0234	0189	0143	0097	0049	30
35	0410	0373	0336	0297	0257	0217	0175	0133	0089	0045	35
40	0384	0349	0314	0278	0241	0203	0164	0124	0084	0042	40
45	0362	0329	0296	0262	0227	0191	0154	0117	0079	0040	45
50	0343	0312	0281	0248	0215	0181	0147	0111	0075	0038	50
55	0327	0298	0268	0237	0205	0173	0140	0106	0071	0036	55
60	0313	0285	0256	0227	0196	0165	0134	0101	0068	0034	60
65	0301	0274	0246	0218	0189	0159	0129	0097	0066	0033	65
70	0290	0264	0237	0210	0182	0153	0124	0094	0063	0032	70
75	0280	0255	0229	0203	0176	0148	0120	0091	0061	0031	75
80	0271	0247	0222	0196	0170	0143	0116	0088	0059	0030	80
85	0263	0240	0215	0191	0165	0139	0112	0085	0057	0029	85
90	0256	0233	0209	0185	0160	0135	0109	0083	0056	0028	90
95	0249	0227	0204	0180	0156	0131	0106	0081	0054	0027	95
100	0243	0221	0199	0176	0152	0128	0104	0079	0053	0027	100
110	0232	0211	0189	0167	0145	0122	0099	0075	0050	0025	110
120	0222	0202	0181	0160	0139	0117	0095	0072	0048	0024	120
130	0213	0194	0174	0154	0133	0112	0091	0069	0046	0023	130
140	0205	0187	0168	0148	0129	0108	0088	0066	0045	0023	140
150	0198	0180	0162	0143	0124	0105	0085	0064	0043	0022	150
160	0192	0175	0157	0139	0120	0101	0082	0062	0042	0021	160
170	0186	0169	0152	0135	0117	0098	0079	0060	0041	0020	170
180	0181	0165	0148	0131	0113	0096	0077	0059	0039	0020	180
190	0176	0160	0144	0127	0110	0093	0075	0057	0038	0019	190
200	0172	0156	0140	0124	0108	0091	0073	0056	0037	0019	200
210	0168	0152	0137	0121	0105	0088	0071	0054	0036	0018	210
220	0164	0149	0134	0118	0103	0086	0070	0053	0036	0018	220
230	0160	0146	0131	0116	0100	0085	0068	0052	0035	0018	230
240	0157	0143	0128	0113	0098	0083	0067	0051	0034	0017	240
250	0154	0140	0126	0111	0096	0081	0066	0050	0033	0017	250
260	0151	0137	0123	0109	0094	0079	0064	0049	0033	0017	260
270	0148	0134	0121	0107	0093	0078	0063	0048	0032	0016	270
280	0145	0132	0119	0105	0091	0077	0062	0047	0032	0016	280
290	0143	0130	0117	0103	0089	0075	0061	0046	0031	0016	290
300	0140	0128	0115	0101	0088	0074	0060	0045	0031	0015	300
310	0138	0125	0113	0100	0086	0073	0059	0045	0030	0015	310
320	0136	0124	0111	0098	0085	0072	0058	0044	0030	0015	320
330	0134	0122	0109	0097	0084	0071	0057	0043	0029	0015	330
340	0132	0120	0108	0095	0083	0070	0056	0043	0029	0014	340

小數點均未註出

表十(續)

相關係數

N	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	N
350	0130	0118	0106	0094	0081	0069	0055	0042	0028	0014	350
360	0128	0116	0105	0093	0080	0068	0055	0041	0028	0014	360
370	0126	0115	0103	0091	0079	0067	0054	0041	0027	0014	370
380	0125	0113	0102	0090	0078	0066	0053	0040	0027	0014	380
390	0123	0112	0101	0089	0077	0065	0052	0040	0027	0014	390
400	0121	0110	0099	0088	0076	0064	0052	0039	0026	0013	400
410	0120	0109	0098	0087	0075	0063	0051	0039	0026	0013	410
420	0118	0108	0097	0086	0074	0063	0051	0038	0026	0013	420
430	0117	0107	0096	0085	0073	0062	0050	0038	0026	0013	430
440	0116	0105	0095	0084	0073	0061	0049	0037	0025	0013	440
450	0114	0104	0094	0083	0072	0060	0049	0037	0025	0013	450
460	0113	0103	0093	0082	0071	0060	0048	0037	0025	0012	460
470	0112	0102	0092	0081	0070	0059	0048	0036	0024	0012	470
480	0111	0101	0091	0080	0069	0058	0047	0036	0024	0012	480
490	0110	0100	0090	0079	0069	0058	0047	0035	0024	0012	490
500	0109	0099	0089	0079	0068	0057	0046	0035	0024	0012	500
520	0106	0097	0087	0077	0067	0056	0045	0034	0023	0012	520
540	0105	0095	0085	0076	0065	0055	0045	0034	0023	0011	540
560	0103	0093	0084	0074	0064	0054	0044	0033	0022	0011	560
580	0101	0092	0082	0073	0063	0053	0043	0033	0022	0011	580
600	0099	0090	0081	0072	0062	0052	0042	0032	0022	0011	600
620	0098	0089	0080	0071	0061	0051	0042	0032	0021	0011	620
640	0096	0087	0078	0069	0060	0051	0041	0031	0021	0011	640
660	0095	0086	0077	0068	0059	0050	0040	0031	0021	0010	660
680	0093	0085	0076	0067	0058	0049	0040	0030	0020	0010	680
700	0092	0084	0075	0066	0058	0048	0039	0030	0020	0010	700
720	0090	0082	0074	0065	0057	0048	0039	0029	0020	0010	720
740	0089	0081	0073	0065	0056	0047	0038	0029	0019	0010	740
760	0088	0080	0072	0064	0055	0046	0038	0028	0019	0010	760
780	0087	0079	0071	0063	0054	0046	0037	0028	0019	0010	780
800	0086	0078	0070	0062	0054	0045	0037	0028	0019	0009	800
820	0085	0077	0069	0061	0053	0045	0036	0027	0018	0009	820
840	0084	0076	0069	0061	0053	0044	0036	0027	0018	0009	840
860	0083	0075	0068	0060	0052	0044	0035	0027	0018	0009	860
880	0082	0074	0067	0059	0051	0043	0035	0026	0018	0009	880
900	0081	0074	0066	0059	0051	0043	0035	0026	0018	0009	900
920	0080	0073	0065	0058	0050	0042	0034	0026	0017	0009	920
940	0079	0072	0065	0057	0050	0042	0034	0026	0017	0009	940
960	0078	0071	0064	0057	0049	0041	0033	0025	0017	0009	960
980	0078	0071	0063	0056	0049	0041	0033	0025	0017	0009	980
1000	0077	0070	0063	0056	0048	0041	0033	0025	0017	0008	1000

小數點均未註出

常態曲線的面積與縱綫(從均數量起與均方差對照)

面積從縱綫			面積從縱綫			面積從縱綫			面積從縱綫		
$z/\sigma=0$ to given z/σ	at z/σ		z/σ to given z/σ	$z/\sigma=0$ at z/σ		z/σ to given z/σ	$z/\sigma=0$ at z/σ		z/σ to given z/σ	$z/\sigma=0$ at z/σ	
.00	.0000	.3989	.50	.1915	.3521	1.00	.3413	.2420	1.50	.4332	.1295
.01	.0040	.3989	.51	.1950	.3503	1.01	.3438	.2396	1.51	.4345	.1276
.02	.0080	.3989	.52	.1985	.3485	1.02	.3461	.2371	1.52	.4357	.1257
.03	.0120	.3988	.53	.2019	.3467	1.03	.3485	.2347	1.53	.4370	.1238
.04	.0160	.3986	.54	.2054	.3448	1.04	.3508	.2323	1.54	.4382	.1219
.05	.0199	.3984	.55	.2088	.3429	1.05	.3531	.2299	1.55	.4394	.1200
.06	.0239	.3982	.56	.2123	.3410	1.06	.3554	.2275	1.56	.4406	.1182
.07	.0279	.3980	.57	.2157	.3391	1.07	.3577	.2251	1.57	.4418	.1163
.08	.0319	.3977	.58	.2190	.3372	1.08	.3599	.2227	1.58	.4429	.1145
.09	.0359	.3973	.59	.2224	.3352	1.09	.3621	.2203	1.59	.4441	.1127
.10	.0398	.3970	.60	.2257	.3332	1.10	.3643	.2179	1.60	.4452	.1109
.11	.0438	.3965	.61	.2291	.3312	1.11	.3665	.2155	1.61	.4463	.1092
.12	.0478	.3961	.62	.2324	.3292	1.12	.3686	.2131	1.62	.4474	.1074
.13	.0517	.3956	.63	.2357	.3271	1.13	.3708	.2107	1.63	.4484	.1057
.14	.0557	.3951	.64	.2389	.3251	1.14	.3729	.2083	1.64	.4495	.1040
.15	.0596	.3945	.65	.2422	.3230	1.15	.3749	.2059	1.65	.4505	.1023
.16	.0636	.3939	.66	.2454	.3209	1.16	.3770	.2036	1.66	.4515	.1006
.17	.0675	.3932	.67	.2486	.3187	1.17	.3790	.2012	1.67	.4525	.0989
.18	.0714	.3925	.68	.2517	.3166	1.18	.3810	.1989	1.68	.4535	.0973
.19	.0753	.3918	.69	.2549	.3144	1.19	.3830	.1965	1.69	.4545	.0957
.20	.0793	.3910	.70	.2580	.3123	1.20	.3849	.1942	1.70	.4554	.0940
.21	.0832	.3902	.71	.2611	.3101	1.21	.3869	.1919	1.71	.4564	.0925
.22	.0871	.3894	.72	.2642	.3079	1.22	.3888	.1895	1.72	.4573	.0909
.23	.0910	.3885	.73	.2673	.3056	1.23	.3907	.1872	1.73	.4582	.0893
.24	.0948	.3876	.74	.2703	.3034	1.24	.3925	.1849	1.74	.4591	.0878
.25	.0987	.3867	.75	.2734	.3011	1.25	.3944	.1826	1.75	.4599	.0863
.26	.1026	.3857	.76	.2764	.2989	1.26	.3962	.1804	1.76	.4608	.0848
.27	.1064	.3847	.77	.2794	.2966	1.27	.3980	.1781	1.77	.4616	.0833
.28	.1103	.3836	.78	.2823	.2943	1.28	.3997	.1758	1.78	.4625	.0818
.29	.1141	.3825	.79	.2852	.2920	1.29	.4015	.1736	1.79	.4633	.0804
.30	.1179	.3814	.80	.2881	.2897	1.30	.4032	.1714	1.80	.4641	.0790
.31	.1217	.3802	.81	.2910	.2874	1.31	.4049	.1691	1.81	.4649	.0775
.32	.1255	.3790	.82	.2939	.2850	1.32	.4066	.1669	1.82	.4656	.0761
.33	.1293	.3778	.83	.2967	.2827	1.33	.4082	.1647	1.83	.4664	.0748
.34	.1331	.3765	.84	.2995	.2803	1.34	.4099	.1626	1.84	.4671	.0734
.35	.1368	.3752	.85	.3023	.2780	1.35	.4115	.1604	1.85	.4678	.0721
.36	.1406	.3739	.86	.3051	.2756	1.36	.4131	.1582	1.86	.4686	.0707
.37	.1443	.3725	.87	.3078	.2732	1.37	.4147	.1561	1.87	.4693	.0694
.38	.1480	.3712	.88	.3106	.2709	1.38	.4162	.1539	1.88	.4699	.0681
.39	.1517	.3697	.89	.3133	.2685	1.39	.4177	.1518	1.89	.4706	.0669
.40	.1554	.3683	.90	.3159	.2661	1.40	.4192	.1497	1.90	.4713	.0656
.41	.1591	.3668	.91	.3186	.2637	1.41	.4207	.1476	1.91	.4719	.0644
.42	.1628	.3653	.92	.3212	.2613	1.42	.4222	.1456	1.92	.4726	.0632
.43	.1664	.3637	.93	.3238	.2589	1.43	.4236	.1435	1.93	.4732	.0620
.44	.1700	.3621	.94	.3264	.2565	1.44	.4251	.1415	1.94	.4738	.0608
.45	.1736	.3605	.95	.3289	.2541	1.45	.4265	.1394	1.95	.4744	.0596
.46	.1772	.3589	.96	.3315	.2516	1.46	.4279	.1374	1.96	.4750	.0584
.47	.1808	.3572	.97	.3340	.2492	1.47	.4292	.1354	1.97	.4756	.0573
.48	.1844	.3555	.98	.3365	.2468	1.48	.4306	.1334	1.98	.4761	.0562
.49	.1879	.3538	.99	.3389	.2444	1.49	.4319	.1315	1.99	.4767	.0551

表十一 (續)

面積從縱綫			面積從縱綫			面積從縱綫			面積從縱綫		
$x/\sigma=0$ to given x/σ	at x/σ		x/σ	$x/\sigma=0$ to given x/σ	at x/σ	x/σ	$x/\sigma=0$ to given x/σ	at x/σ	x/σ	$x/\sigma=0$ to given x/σ	at x/σ
2.00	.4772	.0540	2.50	.4938	.0175	3.00	.4987	.0044	3.50	.4998	.0009
2.01	.4778	.0529	2.51	.4940	.0171	3.01	.4987	.0043	3.51	.4998	.0008
2.02	.4783	.0519	2.52	.4941	.0167	3.02	.4987	.0042	3.52	.4998	.0008
2.03	.4788	.0508	2.53	.4943	.0163	3.03	.4988	.0040	3.53	.4998	.0008
2.04	.4793	.0498	2.54	.4945	.0158	3.04	.4988	.0039	3.54	.4998	.0008
2.05	.4798	.0488	2.55	.4946	.0154	3.05	.4989	.0038	3.55	.4998	.0007
2.06	.4803	.0478	2.56	.4948	.0151	3.06	.4989	.0037	3.56	.4998	.0007
2.07	.4808	.0468	2.57	.4949	.0147	3.07	.4989	.0036	3.57	.4998	.0007
2.08	.4812	.0459	2.58	.4951	.0143	3.08	.4990	.0035	3.58	.4998	.0007
2.09	.4817	.0449	2.59	.4952	.0139	3.09	.4990	.0034	3.59	.4998	.0006
2.10	.4821	.0440	2.60	.4953	.0136	3.10	.4990	.0033	3.60	.4998	.0006
2.11	.4826	.0431	2.61	.4955	.0132	3.11	.4991	.0032	3.61	.4998	.0006
2.12	.4830	.0422	2.62	.4956	.0129	3.12	.4991	.0031	3.62	.4999	.0006
2.13	.4834	.0413	2.63	.4957	.0126	3.13	.4991	.0030	3.63	.4999	.0005
2.14	.4838	.0404	2.64	.4959	.0122	3.14	.4992	.0029	3.64	.4999	.0005
2.15	.4842	.0395	2.65	.4960	.0119	3.15	.4992	.0028	3.65	.4999	.0005
2.16	.4846	.0387	2.66	.4961	.0116	3.16	.4992	.0027	3.66	.4999	.0005
2.17	.4850	.0379	2.67	.4962	.0113	3.17	.4992	.0026	3.67	.4999	.0005
2.18	.4854	.0371	2.68	.4963	.0110	3.18	.4993	.0025	3.68	.4999	.0005
2.19	.4857	.0363	2.69	.4964	.0107	3.19	.4993	.0025	3.69	.4999	.0004
2.20	.4861	.0355	2.70	.4965	.0104	3.20	.4993	.0024	3.70	.4999	.0004
2.21	.4864	.0347	2.71	.4966	.0101	3.21	.4993	.0023	3.71	.4999	.0004
2.22	.4868	.0339	2.72	.4967	.0099	3.22	.4994	.0022	3.72	.4999	.0004
2.23	.4871	.0332	2.73	.4968	.0096	3.23	.4994	.0022	3.73	.4999	.0004
2.24	.4875	.0325	2.74	.4969	.0093	3.24	.4994	.0021	3.74	.4999	.0004
2.25	.4878	.0317	2.75	.4970	.0091	3.25	.4994	.0020	3.75	.4999	.0004
2.26	.4881	.0310	2.76	.4971	.0088	3.26	.4994	.0020	3.76	.4999	.0003
2.27	.4884	.0303	2.77	.4972	.0086	3.27	.4995	.0019	3.77	.4999	.0003
2.28	.4887	.0297	2.78	.4973	.0084	3.28	.4995	.0018	3.78	.4999	.0003
2.29	.4890	.0290	2.79	.4974	.0081	3.29	.4995	.0018	3.79	.4999	.0003
2.30	.4893	.0283	2.80	.4974	.0079	3.30	.4995	.0017	3.80	.4999	.0003
2.31	.4896	.0277	2.81	.4975	.0077	3.31	.4995	.0017	3.81	.4999	.0003
2.32	.4898	.0270	2.82	.4976	.0075	3.32	.4995	.0016	3.82	.4999	.0003
2.33	.4901	.0264	2.83	.4977	.0073	3.33	.4996	.0016	3.83	.4999	.0003
2.34	.4904	.0258	2.84	.4977	.0071	3.34	.4996	.0015	3.84	.4999	.0003
2.35	.4906	.0252	2.85	.4978	.0069	3.35	.4996	.0015	3.85	.4999	.0002
2.36	.4909	.0246	2.86	.4979	.0067	3.36	.4996	.0014	3.86	.4999	.0002
2.37	.4911	.0241	2.87	.4979	.0065	3.37	.4996	.0014	3.87	.4999	.0002
2.38	.4913	.0235	2.88	.4980	.0063	3.38	.4996	.0013	3.88	.4999	.0002
2.39	.4916	.0229	2.89	.4981	.0061	3.39	.4997	.0013	3.89	.4999	.0002
2.40	.4918	.0224	2.90	.4981	.0060	3.40	.4997	.0012	3.90	.5000	.0002
2.41	.4920	.0219	2.91	.4982	.0058	3.41	.4997	.0012	3.91	.5000	.0002
2.42	.4922	.0213	2.92	.4982	.0056	3.42	.4997	.0012	3.92	.5000	.0002
2.43	.4925	.0208	2.93	.4983	.0055	3.43	.4997	.0011	3.93	.5000	.0002
2.44	.4927	.0203	2.94	.4984	.0053	3.44	.4997	.0011	3.94	.5000	.0002
2.45	.4929	.0198	2.95	.4984	.0051	3.45	.4997	.0010	3.95	.5000	.0002
2.46	.4931	.0194	2.96	.4985	.0050	3.46	.4997	.0010	3.96	.5000	.0002
2.47	.4932	.0189	2.97	.4985	.0048	3.47	.4997	.0010	3.97	.5000	.0002
2.48	.4934	.0184	2.98	.4986	.0047	3.48	.4997	.0009	3.98	.5000	.0001
2.49	.4936	.0180	2.99	.4986	.0046	3.49	.4998	.0009	3.99	.5000	.0001

常態曲綫的差數與縱綫(從均數量起與面積對照)

面積從		縱綫	面積從		縱綫	面積從		縱綫	面積從		縱綫
$z/\sigma=0$	z/σ	at z/σ	$z/\sigma=0$	z/σ	at z/σ	$z/\sigma=0$	z/σ	at z/σ	$z/\sigma=0$	z/σ	at z/σ
000	0.0000	3989	050	0.1257	3958	100	0.2533	3863	150	0.3853	3704
001	0.0025	3989	051	0.1282	3957	101	0.2559	3861	151	0.3880	3700
002	0.0050	3989	052	0.1307	3955	102	0.2585	3858	152	0.3907	3696
003	0.0075	3989	053	0.1332	3954	103	0.2611	3856	153	0.3934	3692
004	0.0100	3989	054	0.1358	3953	104	0.2637	3853	154	0.3961	3688
005	0.0125	3989	055	0.1383	3951	105	0.2663	3850	155	0.3989	3684
006	0.0150	3989	056	0.1408	3950	106	0.2689	3848	156	0.4016	3680
007	0.0175	3989	057	0.1434	3949	107	0.2715	3845	157	0.4043	3676
008	0.0201	3989	058	0.1459	3947	108	0.2741	3842	158	0.4070	3672
009	0.0226	3988	059	0.1484	3946	109	0.2767	3840	159	0.4097	3668
010	0.0251	3988	060	0.1510	3944	110	0.2793	3837	160	0.4125	3664
011	0.0276	3988	061	0.1535	3943	111	0.2819	3834	161	0.4152	3660
012	0.0301	3988	062	0.1560	3941	112	0.2845	3831	162	0.4179	3656
013	0.0326	3987	063	0.1586	3940	113	0.2871	3828	163	0.4207	3652
014	0.0351	3987	064	0.1611	3938	114	0.2898	3825	164	0.4234	3647
015	0.0376	3987	065	0.1637	3936	115	0.2924	3823	165	0.4261	3643
016	0.0401	3986	066	0.1662	3935	116	0.2950	3820	166	0.4289	3639
017	0.0426	3986	067	0.1687	3933	117	0.2976	3817	167	0.4316	3635
018	0.0451	3985	068	0.1713	3931	118	0.3002	3814	168	0.4344	3630
019	0.0476	3985	069	0.1738	3930	119	0.3029	3811	169	0.4372	3626
020	0.0502	3984	070	0.1764	3928	120	0.3055	3808	170	0.4399	3621
021	0.0527	3984	071	0.1789	3926	121	0.3081	3804	171	0.4427	3617
022	0.0552	3983	072	0.1815	3924	122	0.3107	3801	172	0.4454	3613
023	0.0577	3983	073	0.1840	3922	123	0.3134	3798	173	0.4482	3608
024	0.0602	3982	074	0.1866	3921	124	0.3160	3795	174	0.4510	3604
025	0.0627	3982	075	0.1891	3919	125	0.3186	3792	175	0.4538	3599
026	0.0652	3981	076	0.1917	3917	126	0.3213	3789	176	0.4565	3595
027	0.0677	3980	077	0.1942	3915	127	0.3239	3786	177	0.4593	3590
028	0.0702	3980	078	0.1968	3913	128	0.3266	3782	178	0.4621	3585
029	0.0728	3979	079	0.1993	3911	129	0.3292	3779	179	0.4649	3581
030	0.0753	3978	080	0.2019	3909	130	0.3319	3776	180	0.4677	3576
031	0.0778	3977	081	0.2045	3907	131	0.3345	3772	181	0.4705	3571
032	0.0803	3977	082	0.2070	3905	132	0.3372	3769	182	0.4733	3567
033	0.0828	3976	083	0.2096	3903	133	0.3398	3766	183	0.4761	3562
034	0.0853	3975	084	0.2121	3901	134	0.3425	3762	184	0.4789	3557
035	0.0878	3974	085	0.2147	3899	135	0.3451	3759	185	0.4817	3552
036	0.0904	3973	086	0.2173	3896	136	0.3478	3755	186	0.4845	3548
037	0.0929	3972	087	0.2198	3894	137	0.3505	3752	187	0.4874	3543
038	0.0954	3971	088	0.2224	3892	138	0.3531	3748	188	0.4902	3538
039	0.0979	3970	089	0.2250	3890	139	0.3558	3745	189	0.4930	3533
040	0.1004	3969	090	0.2275	3887	140	0.3585	3741	190	0.4959	3528
041	0.1030	3968	091	0.2301	3885	141	0.3611	3738	191	0.4987	3523
042	0.1055	3967	092	0.2327	3883	142	0.3638	3734	192	0.5015	3518
043	0.1080	3966	093	0.2353	3881	143	0.3665	3730	193	0.5044	3513
044	0.1105	3965	094	0.2378	3878	144	0.3692	3727	194	0.5072	3508
045	0.1130	3964	095	0.2404	3876	145	0.3719	3723	195	0.5101	3503
046	0.1156	3963	096	0.2430	3873	146	0.3745	3719	196	0.5129	3498
047	0.1181	3962	097	0.2456	3871	147	0.3772	3715	197	0.5158	3493
048	0.1206	3961	098	0.2482	3868	148	0.3799	3712	198	0.5187	3487
049	0.1231	3959	099	0.2508	3866	149	0.3826	3708	199	0.5215	3482

面積從		縱綫	面積從		縱綫	面積從		縱綫	面積從		縱綫
$z/\sigma=0$	z/σ	at z/σ	$z/\sigma=0$	z/σ	at z/σ	$z/\sigma=0$	z/σ	at z/σ	$z/\sigma=0$	z/σ	at z/σ
.200	0.5244	.3477	.250	0.6745	.3178	.300	0.8416	.2800	.350	1.0364	.2332
.201	0.5273	.3472	.251	0.6776	.3171	.301	0.8452	.2791	.351	1.0407	.2321
.202	0.5302	.3466	.252	0.6808	.3164	.302	0.8488	.2783	.352	1.0450	.2311
.203	0.5330	.3461	.253	0.6840	.3157	.303	0.8524	.2774	.353	1.0494	.2300
.204	0.5359	.3456	.254	0.6871	.3151	.304	0.8560	.2766	.354	1.0537	.2290
.205	0.5388	.3450	.255	0.6903	.3144	.305	0.8596	.2757	.355	1.0581	.2279
.206	0.5417	.3445	.256	0.6935	.3137	.306	0.8633	.2748	.356	1.0625	.2269
.207	0.5446	.3440	.257	0.6967	.3130	.307	0.8669	.2740	.357	1.0669	.2258
.208	0.5476	.3434	.258	0.6999	.3123	.308	0.8705	.2731	.358	1.0714	.2247
.209	0.5505	.3429	.259	0.7031	.3116	.309	0.8742	.2722	.359	1.0758	.2237
.210	0.5534	.3423	.260	0.7063	.3109	.310	0.8779	.2714	.360	1.0803	.2226
.211	0.5563	.3417	.261	0.7095	.3102	.311	0.8816	.2705	.361	1.0848	.2215
.212	0.5592	.3412	.262	0.7128	.3095	.312	0.8853	.2696	.362	1.0893	.2204
.213	0.5622	.3406	.263	0.7160	.3087	.313	0.8890	.2687	.363	1.0939	.2193
.214	0.5651	.3401	.264	0.7192	.3080	.314	0.8927	.2678	.364	1.0985	.2182
.215	0.5681	.3395	.265	0.7225	.3073	.315	0.8965	.2669	.365	1.1031	.2171
.216	0.5710	.3389	.266	0.7257	.3066	.316	0.9002	.2660	.366	1.1077	.2160
.217	0.5740	.3384	.267	0.7290	.3058	.317	0.9040	.2651	.367	1.1123	.2149
.218	0.5769	.3378	.268	0.7323	.3051	.318	0.9078	.2642	.368	1.1170	.2138
.219	0.5799	.3372	.269	0.7356	.3044	.319	0.9116	.2633	.369	1.1217	.2127
.220	0.5828	.3366	.270	0.7388	.3036	.320	0.9154	.2624	.370	1.1264	.2115
.221	0.5858	.3360	.271	0.7421	.3029	.321	0.9192	.2615	.371	1.1311	.2104
.222	0.5888	.3354	.272	0.7454	.3022	.322	0.9230	.2606	.372	1.1359	.2093
.223	0.5918	.3349	.273	0.7488	.3014	.323	0.9269	.2596	.373	1.1407	.2081
.224	0.5948	.3343	.274	0.7521	.3007	.324	0.9307	.2587	.374	1.1455	.2070
.225	0.5978	.3337	.275	0.7554	.2999	.325	0.9346	.2578	.375	1.1503	.2059
.226	0.6008	.3331	.276	0.7588	.2992	.326	0.9385	.2568	.376	1.1552	.2047
.227	0.6038	.3325	.277	0.7621	.2984	.327	0.9424	.2559	.377	1.1601	.2035
.228	0.6068	.3319	.278	0.7655	.2976	.328	0.9463	.2550	.378	1.1650	.2024
.229	0.6098	.3313	.279	0.7688	.2969	.329	0.9502	.2540	.379	1.1700	.2012
.230	0.6128	.3306	.280	0.7722	.2961	.330	0.9542	.2531	.380	1.1750	.2000
.231	0.6158	.3300	.281	0.7756	.2953	.331	0.9581	.2521	.381	1.1800	.1989
.232	0.6189	.3294	.282	0.7790	.2945	.332	0.9621	.2511	.382	1.1850	.1977
.233	0.6219	.3288	.283	0.7824	.2938	.333	0.9661	.2502	.383	1.1901	.1965
.234	0.6250	.3282	.284	0.7858	.2930	.334	0.9701	.2492	.384	1.1952	.1953
.235	0.6280	.3275	.285	0.7892	.2922	.335	0.9741	.2482	.385	1.2004	.1941
.236	0.6311	.3269	.286	0.7926	.2914	.336	0.9782	.2473	.386	1.2055	.1929
.237	0.6341	.3263	.287	0.7961	.2906	.337	0.9822	.2463	.387	1.2107	.1917
.238	0.6372	.3256	.288	0.7995	.2898	.338	0.9863	.2453	.388	1.2160	.1905
.239	0.6403	.3250	.289	0.8030	.2890	.339	0.9904	.2443	.389	1.2212	.1893
.240	0.6433	.3244	.290	0.8064	.2882	.340	0.9945	.2433	.390	1.2265	.1880
.241	0.6464	.3237	.291	0.8099	.2874	.341	0.9986	.2423	.391	1.2319	.1868
.242	0.6495	.3231	.292	0.8134	.2866	.342	1.0027	.2413	.392	1.2372	.1856
.243	0.6526	.3224	.293	0.8169	.2858	.343	1.0069	.2403	.393	1.2426	.1843
.244	0.6557	.3218	.294	0.8204	.2849	.344	1.0110	.2393	.394	1.2481	.1831
.245	0.6588	.3211	.295	0.8239	.2841	.345	1.0152	.2383	.395	1.2536	.1818
.246	0.6620	.3204	.296	0.8274	.2833	.346	1.0194	.2373	.396	1.2591	.1806
.247	0.6651	.3198	.297	0.8310	.2825	.347	1.0237	.2362	.397	1.2646	.1793
.248	0.6682	.3191	.298	0.8345	.2816	.348	1.0279	.2352	.398	1.2702	.1780
.249	0.6713	.3184	.299	0.8381	.2808	.349	1.0322	.2342	.399	1.2759	.1768

表十二 (續)

面積從		縱綫	面積從		縱綫	面積從		縱綫	面積從		縱綫
$x/a=0$	x/a	at x/a	$x/a=0$	x/a	at x/a	$x/a=0$	x/a	at x/a	$x/a=0$	x/a	at x/a
.400	1.2816	.1755	.425	1.4395	.1416	.450	1.6449	.1031	.475	1.9600	.0585
.401	1.2873	.1742	.426	1.4466	.1401	.451	1.6546	.1015	.476	1.9774	.0565
.402	1.2930	.1729	.427	1.4538	.1387	.452	1.6646	.0998	.477	1.9954	.0545
.403	1.2988	.1716	.428	1.4611	.1372	.453	1.6747	.0982	.478	2.0141	.0525
.404	1.3047	.1703	.429	1.4684	.1357	.454	1.6849	.0965	.479	2.0335	.0505
.405	1.3106	.1690	.430	1.4758	.1343	.455	1.6954	.0948	.480	2.0537	.0484
.406	1.3165	.1677	.431	1.4833	.1328	.456	1.7060	.0931	.481	2.0749	.0464
.407	1.3225	.1664	.432	1.4909	.1313	.457	1.7169	.0914	.482	2.0969	.0443
.408	1.3285	.1651	.433	1.4985	.1298	.458	1.7279	.0897	.483	2.1201	.0422
.409	1.3346	.1637	.434	1.5063	.1283	.459	1.7392	.0879	.484	2.1444	.0400
.410	1.3408	.1624	.435	1.5141	.1268	.460	1.7507	.0862	.485	2.1701	.0379
.411	1.3469	.1610	.436	1.5220	.1253	.461	1.7624	.0844	.486	2.1973	.0357
.412	1.3532	.1597	.437	1.5301	.1237	.462	1.7744	.0826	.487	2.2262	.0335
.413	1.3595	.1583	.438	1.5382	.1222	.463	1.7866	.0809	.488	2.2571	.0312
.414	1.3658	.1570	.439	1.5464	.1207	.464	1.7991	.0791	.489	2.2904	.0290
.415	1.3722	.1556	.440	1.5548	.1191	.465	1.8119	.0773	.490	2.3263	.0267
.416	1.3787	.1542	.441	1.5632	.1176	.466	1.8250	.0755	.491	2.3656	.0243
.417	1.3852	.1529	.442	1.5718	.1160	.467	1.8384	.0736	.492	2.4089	.0219
.418	1.3917	.1515	.443	1.5805	.1144	.468	1.8522	.0718	.493	2.4573	.0195
.419	1.3984	.1501	.444	1.5893	.1128	.469	1.8663	.0699	.494	2.5121	.0170
.420	1.4051	.1487	.445	1.5982	.1112	.470	1.8808	.0680	.495	2.5758	.0145
.421	1.4118	.1473	.446	1.6072	.1096	.471	1.8957	.0662	.496	2.6521	.0118
.422	1.4187	.1458	.447	1.6164	.1080	.472	1.9110	.0643	.497	2.7478	.0091
.423	1.4255	.1444	.448	1.6258	.1064	.473	1.9268	.0623	.498	2.8782	.0063
.424	1.4325	.1430	.449	1.6352	.1048	.474	1.9431	.0604	.499	3.0902	.0034

表十三
重要常數表

常數	其值	值之對數
(Constant)		
π	3.14159 26536	0.49714 98727
$1/\pi$	0.31830 98862	9.50285 01273-10
$\sqrt{\pi}$	1.77245 38509	0.24857 49363
$1/\sqrt{\pi}$	0.56418 95835	9.75142 50637-10
$\sqrt{2\pi}$	2.50662 82746	0.39908 99342
$1/\sqrt{2\pi}$	0.39894 22803	9.60091 00658-10
e	2.71828 18285	0.43429 44819
$1/e$	0.36787 94411	9.56570 55181-10
\sqrt{e}	1.64872 12707	0.21714 72410
$1/\sqrt{e}$	0.60653 06597	9.78285 27590-10
$\sqrt{2}$	1.41421 35624	0.15051 49978
$\sqrt{3}$	1.73205 08076	0.23856 06274
$\sqrt{5}$	2.23606 79775	0.34948 50022
P.E./ σ	.6744898	9.8289754-10

表十四
常態曲綫的 P. E. 差數

面積從 $\pm/PE=0$.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.000	.0000	.0037	.0074	.0111	.0149	.0186	.0223	.0260	.0297	.0335
.010	.0372	.0409	.0446	.0483	.0520	.0558	.0595	.0632	.0669	.0706
.020	.0744	.0781	.0818	.0855	.0892	.0930	.0967	.1004	.1041	.1079
.030	.1116	.1153	.1190	.1228	.1265	.1302	.1340	.1377	.1414	.1452
.040	.1489	.1526	.1564	.1601	.1639	.1676	.1713	.1751	.1788	.1826
.050	.1863	.1901	.1938	.1975	.2013	.2050	.2088	.2126	.2163	.2201
.060	.2238	.2276	.2313	.2351	.2389	.2426	.2464	.2502	.2539	.2577
.070	.2615	.2653	.2690	.2728	.2766	.2804	.2842	.2880	.2917	.2955
.080	.2993	.3031	.3069	.3107	.3145	.3183	.3221	.3259	.3297	.3335
.090	.3374	.3412	.3450	.3488	.3526	.3565	.3603	.3641	.3679	.3718
.100	.3756	.3795	.3833	.3871	.3910	.3948	.3987	.4025	.4064	.4103
.110	.4141	.4180	.4219	.4257	.4296	.4335	.4374	.4412	.4451	.4490
.120	.4529	.4568	.4607	.4646	.4685	.4724	.4763	.4802	.4842	.4881
.130	.4920	.4959	.4999	.5038	.5077	.5117	.5156	.5196	.5235	.5275
.140	.5315	.5354	.5394	.5434	.5473	.5513	.5553	.5593	.5633	.5673
.150	.5713	.5753	.5793	.5833	.5873	.5913	.5954	.5994	.6034	.6075
.160	.6115	.6156	.6196	.6237	.6277	.6318	.6359	.6400	.6440	.6481
.170	.6522	.6563	.6604	.6645	.6686	.6727	.6769	.6810	.6851	.6893
.180	.6934	.6976	.7017	.7059	.7100	.7142	.7184	.7226	.7268	.7309
.190	.7351	.7394	.7436	.7478	.7520	.7562	.7605	.7647	.7690	.7732
.200	.7775	.7817	.7860	.7903	.7946	.7989	.8032	.8075	.8118	.8161
.210	.8204	.8248	.8291	.8335	.8378	.8422	.8466	.8509	.8553	.8597
.220	.8641	.8685	.8729	.8774	.8818	.8862	.8907	.8951	.8996	.9041
.230	.9086	.9130	.9175	.9220	.9266	.9311	.9356	.9402	.9447	.9493
.240	.9538	.9584	.9630	.9676	.9722	.9768	.9814	.9860	.9907	.9953
.250	1.0000	1.0047	1.0094	1.0140	1.0187	1.0235	1.0282	1.0329	1.0376	1.0424
.260	1.0472	1.0519	1.0567	1.0615	1.0663	1.0711	1.0760	1.0808	1.0857	1.0905
.270	1.0954	1.1003	1.1052	1.1101	1.1150	1.1200	1.1249	1.1299	1.1349	1.1399
.280	1.1449	1.1499	1.1549	1.1599	1.1650	1.1701	1.1751	1.1802	1.1853	1.1905
.290	1.1956	1.2008	1.2059	1.2111	1.2163	1.2215	1.2267	1.2320	1.2372	1.2425
.300	1.2478	1.2531	1.2584	1.2637	1.2691	1.2745	1.2799	1.2853	1.2907	1.2961
.310	1.3016	1.3070	1.3125	1.3180	1.3236	1.3291	1.3347	1.3403	1.3459	1.3515
.320	1.3571	1.3628	1.3685	1.3742	1.3799	1.3856	1.3914	1.3972	1.4030	1.4088
.330	1.4146	1.4205	1.4264	1.4323	1.4383	1.4442	1.4502	1.4562	1.4622	1.4683
.340	1.4744	1.4805	1.4866	1.4928	1.4990	1.5052	1.5114	1.5177	1.5240	1.5303
.350	1.5366	1.5430	1.5494	1.5558	1.5623	1.5688	1.5753	1.5818	1.5884	1.5950
.360	1.6017	1.6084	1.6151	1.6218	1.6286	1.6354	1.6422	1.6491	1.6560	1.6630
.370	1.6700	1.6770	1.6841	1.6912	1.6983	1.7055	1.7127	1.7200	1.7273	1.7346
.380	1.7420	1.7495	1.7569	1.7645	1.7720	1.7797	1.7873	1.7950	1.8028	1.8106
.390	1.8185	1.8264	1.8343	1.8423	1.8504	1.8585	1.8667	1.8750	1.8833	1.8916
.400	1.9000	1.9085	1.9171	1.9257	1.9343	1.9431	1.9519	1.9607	1.9697	1.9787
.410	1.9878	1.9970	2.0062	2.0155	2.0249	2.0344	2.0440	2.0537	2.0634	2.0732
.420	2.0832	2.0932	2.1033	2.1135	2.1238	2.1343	2.1448	2.1554	2.1662	2.1770
.430	2.1880	2.1991	2.2103	2.2217	2.2332	2.2448	2.2566	2.2685	2.2805	2.2927
.440	2.3051	2.3176	2.3303	2.3432	2.3563	2.3695	2.3829	2.3965	2.4104	2.4244
.450	2.4387	2.4532	2.4679	2.4829	2.4981	2.5136	2.5294	2.5455	2.5618	2.5785
.460	2.5956	2.6130	2.6307	2.6488	2.6674	2.6863	2.7058	2.7257	2.7460	2.7670
.470	2.7885	2.8106	2.8333	2.8567	2.8809	2.9058	2.9316	2.9584	2.9861	3.0149
.480	3.0449	3.0762	3.1089	3.1432	3.1793	3.2174	3.2577	3.3006	3.3464	3.3957
.490	3.4490	3.5073	3.5715	3.6431	3.7245	3.8189	3.9320	4.0739	4.2672	4.5816

表十六
史皮滿等級相關

公式 $\rho = 1 - \Sigma D^2 \left[\frac{6}{N^3 - N} \right]$ 的便利求法

N	$\frac{6}{N^3 - N}$	N	$\frac{6}{N^3 - N}$	N	$\frac{6}{N^3 - N}$	N	$\frac{6}{N^3 - N}$	N	$\frac{6}{N^3 - N}$
20	0007519	30	0002225	40	.0000938	50	.0000480	60	.0000278
21	0006494	31	0002016	41	.0000871	51	.0000452	61	.0000264
22	0005647	32	0001833	42	0000810	52	.0000427	62	.0000252
23	.0004941	33	0001671	43	.0000755	53	.0000403	63	.0000240
24	.0004348	34	0001528	44	.0000705	54	.0000381	64	.0000229
25	.0003846	35	0001401	45	.0000659	55	.0000361	65	.0000219
26	.0003419	36	0001287	46	.0000617	56	.0000342	66	.0000209
27	.0003053	37	0001185	47	.0000578	57	.0000324	67	.0000200
28	.0002737	38	0001094	48	.0000543	58	.0000308	68	.0000191
29	0002463	39	.0001012	49	.0000510	59	0000292	69	.0000183

表十七

D 的平方表(爲便利史氏公式者)

D	D ²	D	D ²	D	D ²	D	D ²	D	D ²
5	0.25	13 0	169 00	25 5	650 25	38 0	1444 00	50 5	2550 25
1.0	1.00	13 5	182 25	26 0	676 00	38 5	1482 25	51 0	2601 00
1.5	2.25	14 0	196 00	26 5	702 25	39 0	1521 00	51 5	2652 25
2.0	4.00	14 5	210 25	27 0	729 00	39 5	1560 25	52 0	2704 00
2.5	6.25	15 0	225 00	27 5	756 25	40 0	1600 00	52 5	2756 25
3.0	9.00	15 5	240 25	28 0	784 00	40 5	1640 25	53 0	2809 00
3.5	12.25	16 0	256 00	28 5	812 25	41 0	1681 00	53 5	2862 25
4.0	16.00	16 5	272 25	29 0	841 00	41 5	1722 25	54 0	2916 00
4.5	20.25	17 0	289 00	29 5	870 25	42 0	1764 00	54 5	2970 25
5.0	25.00	17 5	306 25	30 0	900 00	42 5	1806 25	55 0	3025 00
5.5	30.25	18 0	324 00	30 5	930 25	43 0	1849 00	55 5	3080 25
6.0	36.00	18 5	342 25	31 0	961 00	43 5	1892 25	56 0	3136 00
6.5	42.25	19 0	361 00	31 5	992 25	44 0	1936 00	56 5	3192 25
7.0	49.00	19 5	380 25	32 0	1024 00	44 5	1980 25	57 0	3249 00
7.5	56.25	20 0	400 00	32 5	1056 25	45 0	2025 00	57 5	3306 25
8.0	64.00	20 5	420 25	33 0	1089 00	45 5	2070 25	58 0	3364 00
8.5	72.25	21 0	441 00	33 5	1122 25	46 0	2116 00	58 5	3422 25
9.0	81.00	21 5	462 25	34 0	1156 00	46 5	2162 25	59 0	3481 00
9.5	90.25	22 0	484 00	34 5	1190 25	47 0	2209 00	59 5	3540 25
10.0	100.00	22 5	506 25	35 0	1225 00	47 5	2256 25	60 0	3600 00
10.5	110.25	23 0	529 00	35 5	1260 25	48 0	2304 00	60 5	3660 25
11.0	121.00	23 5	552 25	36 0	1296 00	48 5	2352 25	61 0	3721 00
11.5	132.25	24 0	576 00	36 5	1332 25	49 0	2401 00	61 5	3782 25
12.0	144.00	24 5	600 25	37 0	1369 00	49 5	2450 25	62 0	3844 00
12.5	156.25	25 0	625 00	37 5	1406 25	50 0	2500 00	62 5	3906 25

表十八

 $.6745 \sigma_{(x-y)}/\sigma_y$ 的值在此地 $\sigma_y < \sigma_x$

83

比率 σ_x/σ_y	T_{xy} 的值									
	.00	.20	.30	.40	.50	.55	.60	.65	.70	.74
1 0	.954	.853	.798	.739	.674	.640	.603	.564	.522	.486
1 1	1.003	.897	.840	.778	.711	.674	.636	.596	.552	.515
1 2	1.054	.944	.885	.821	.751	.714	.674	.633	.588	.550
1 3	1.106	.994	.932	.866	.795	.757	.717	.674	.629	.590
1 4	1.160	1.045	.982	.915	.842	.804	.763	.720	.674	.636
1 5	1.216	1.098	1.034	.966	.892	.853	.812	.769	.723	.685
1 6	1.273	1.153	1.088	1.018	.944	.905	.864	.821	.775	.736
1 7	1.330	1.208	1.143	1.073	.998	.959	.917	.874	.829	.791
1 8	1.389	1.265	1.199	1.129	1.054	1.014	.973	.930	.885	.847
1 9	1.448	1.323	1.256	1.186	1.110	1.071	1.030	.987	.942	.904
2 0	1.508	1.382	1.315	1.244	1.168	1.129	1.088	1.045	1.000	.963
2 1	1.569	1.442	1.374	1.303	1.227	1.188	1.147	1.104	1.060	1.023
2 2	1.630	1.502	1.434	1.362	1.287	1.247	1.207	1.164	1.121	1.084
2 3	1.692	1.563	1.495	1.423	1.347	1.308	1.267	1.225	1.182	1.146
2 4	1.754	1.624	1.556	1.484	1.408	1.369	1.329	1.287	1.244	1.208
2 5	1.816	1.686	1.617	1.545	1.470	1.431	1.390	1.349	1.306	1.271
2 6	1.879	1.748	1.679	1.607	1.532	1.493	1.453	1.412	1.369	1.334
2 7	1.942	1.811	1.742	1.670	1.595	1.556	1.516	1.475	1.432	1.398
2 8	2.005	1.874	1.805	1.733	1.658	1.619	1.579	1.538	1.496	1.462
2 9	2.069	1.937	1.868	1.796	1.721	1.682	1.642	1.602	1.560	1.526
3 0	2.133	2.001	1.931	1.859	1.785	1.746	1.706	1.666	1.624	1.590
3 1	2.197	2.065	1.995	1.923	1.848	1.810	1.770	1.730	1.689	1.655
3 2	2.261	2.129	2.059	1.987	1.913	1.874	1.835	1.795	1.754	1.720
3 3	2.326	2.193	2.123	2.051	1.977	1.938	1.899	1.859	1.819	1.785
3 4	2.390	2.257	2.188	2.116	2.041	2.003	1.964	1.924	1.884	1.851
3 5	2.455	2.322	2.252	2.180	2.106	2.068	2.029	1.989	1.949	1.916
3 6	2.520	2.387	2.317	2.245	2.171	2.133	2.094	2.055	2.014	1.982
3 7	2.585	2.451	2.382	2.310	2.236	2.198	2.159	2.120	2.080	2.047
3 8	2.650	2.516	2.447	2.375	2.301	2.263	2.225	2.186	2.146	2.113
3 9	2.716	2.582	2.512	2.440	2.366	2.329	2.290	2.251	2.211	2.179
4 0	2.781	2.647	2.577	2.506	2.432	2.394	2.356	2.317	2.277	2.245
4 1	2.846	2.712	2.643	2.571	2.497	2.460	2.422	2.383	2.343	2.311
4 2	2.912	2.778	2.708	2.637	2.563	2.526	2.487	2.449	2.409	2.377
4 3	2.978	2.843	2.774	2.702	2.629	2.591	2.553	2.515	2.475	2.444
4 4	3.043	2.909	2.839	2.768	2.695	2.657	2.619	2.581	2.542	2.510
4 5	3.109	2.975	2.905	2.834	2.760	2.723	2.685	2.647	2.608	2.576
4 6	3.175	3.040	2.971	2.900	2.826	2.789	2.751	2.713	2.674	2.643
4 7	3.241	3.106	3.037	2.965	2.892	2.855	2.818	2.779	2.741	2.709
4 8	3.307	3.172	3.103	3.031	2.959	2.921	2.884	2.846	2.807	2.776
4 9	3.373	3.238	3.169	3.098	3.025	2.988	2.950	2.912	2.874	2.842

表十八 (續)

比率

 r_{xy} 的 值

r_z/σ_y	.78	.80	.82	.84	.86	.88	.90	.92	.94	.96
1 0	.447	.427	.405	.382	.357	.330	.302	.270	.234	.191
1 1	.474	.452	.430	.406	.380	.353	.323	.291	.254	.211
1 2	.508	.486	.463	.439	.414	.386	.357	.325	.289	.249
1 3	.549	.527	.504	.480	.454	.428	.399	.368	.335	.297
1 4	.594	.572	.550	.526	.501	.475	.447	.418	.386	.352
1 5	.643	.622	.599	.576	.552	.527	.500	.472	.442	.410
1 6	.696	.674	.653	.630	.606	.582	.556	.529	.501	.471
1 7	.750	.730	.708	.686	.663	.639	.614	.589	.562	.534
1 8	.807	.787	.765	.744	.721	.698	.674	.650	.624	.597
1 9	.865	.845	.824	.803	.781	.759	.736	.712	.687	.662
2 0	.925	.905	.885	.864	.842	.821	.798	.775	.751	.726
2 1	.985	.966	.946	.925	.904	.883	.861	.839	.816	.792
2 2	1 047	1 027	1 008	.988	.967	.946	.925	.903	.880	.857
2 3	1 109	1 090	1 070	1 051	1 030	1 010	.989	.968	.946	.923
2 4	1 171	1 153	1 133	1 114	1 094	1 074	1 054	1 033	1 011	.989
2 5	1 235	1 216	1 197	1 178	1 158	1 139	1 119	1 098	1 077	1 056
2 6	1 298	1 280	1 261	1 242	1 223	1 204	1 184	1 164	1 143	1 122
2 7	1 362	1 344	1 326	1 307	1 288	1 269	1 249	1 229	1 209	1 189
2 8	1 426	1 408	1 390	1 372	1 353	1 334	1 315	1 295	1 275	1 255
2 9	1 491	1 473	1 455	1 437	1 418	1 400	1 381	1 361	1 342	1 322
3 0	1 556	1 538	1 520	1 502	1 484	1 465	1 447	1 428	1 408	1 389
3 1	1 621	1 603	1 586	1 568	1 550	1 531	1 513	1 494	1 475	1 456
3 2	1 686	1 669	1 651	1 633	1 615	1 597	1 579	1 560	1 542	1 523
3 3	1 751	1 734	1 717	1 699	1 681	1 663	1 645	1 627	1 608	1 590
3 4	1 817	1 800	1 782	1 765	1 747	1 730	1 712	1 693	1 675	1 657
3 5	1 883	1 866	1 848	1 831	1 814	1 796	1 778	1 760	1 742	1 724
3 6	1 948	1 931	1 914	1 897	1 880	1 862	1 845	1 827	1 809	1 791
3 7	2 014	1 997	1 981	1 963	1 946	1 929	1 911	1 894	1 876	1 858
3 8	2 080	2 064	2 047	2 030	2 013	1 995	1 978	1 960	1 943	1 925
3 9	2 146	2 130	2 113	2 096	2 079	2 062	2 045	2 027	2 010	1 992
4 0	2 212	2 196	2 179	2 163	2 146	2 129	2 111	2 094	2 077	2 059
4 1	2 279	2 262	2 246	2 229	2 212	2 195	2 178	2 161	2 144	2 126
4 2	2 345	2 329	2 312	2 296	2 279	2 262	2 245	2 228	2 211	2 193
4 3	2 411	2 395	2 379	2 362	2 346	2 329	2 312	2 295	2 278	2 261
4 4	2 478	2 462	2 445	2 429	2 412	2 396	2 379	2 362	2 345	2 328
4 5	2 544	2 528	2 512	2 496	2 479	2 463	2 446	2 429	2 412	2 395
4 6	2 611	2 595	2 579	2 562	2 546	2 529	2 513	2 496	2 479	2 462
4 7	2 677	2 661	2 645	2 629	2 613	2 596	2 580	2 563	2 547	2 530
4 8	2 744	2 728	2 712	2 696	2 680	2 663	2 647	2 630	2 614	2 597
4 9	2 811	2 795	2 779	2 763	2 747	2 730	2 714	2 697	2 681	2 664

X 之 值 爲 求 $\cos^{-1} X$ 用 者

X	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.000	1.571	1.570	1.569	1.568	1.567	1.566	1.565	1.564	1.563	1.562
.010	1.561	1.560	1.559	1.558	1.557	1.556	1.555	1.554	1.553	1.552
.020	1.551	1.550	1.549	1.548	1.547	1.546	1.545	1.544	1.543	1.542
.030	1.541	1.540	1.539	1.538	1.537	1.536	1.535	1.534	1.533	1.532
.040	1.531	1.530	1.529	1.528	1.527	1.526	1.525	1.524	1.523	1.522
.050	1.521	1.520	1.519	1.518	1.517	1.516	1.515	1.514	1.513	1.512
.060	1.511	1.510	1.509	1.508	1.507	1.506	1.505	1.504	1.503	1.502
.070	1.501	1.500	1.499	1.498	1.497	1.496	1.495	1.494	1.493	1.492
.080	1.491	1.490	1.489	1.488	1.487	1.486	1.485	1.484	1.483	1.482
.090	1.481	1.480	1.479	1.478	1.477	1.476	1.475	1.474	1.473	1.472
.100	1.471	1.470	1.469	1.468	1.467	1.465	1.465	1.463	1.463	1.462
.110	1.461	1.460	1.459	1.458	1.456	1.456	1.454	1.454	1.452	1.452
.120	1.450	1.449	1.449	1.447	1.447	1.445	1.445	1.443	1.443	1.441
.130	1.440	1.439	1.438	1.437	1.436	1.435	1.434	1.433	1.432	1.431
.140	1.430	1.429	1.428	1.427	1.426	1.425	1.424	1.423	1.422	1.421
.150	1.420	1.419	1.418	1.417	1.416	1.415	1.414	1.413	1.412	1.411
.160	1.410	1.409	1.408	1.407	1.406	1.405	1.404	1.403	1.402	1.401
.170	1.400	1.399	1.398	1.397	1.396	1.395	1.394	1.393	1.392	1.391
.180	1.390	1.389	1.388	1.387	1.386	1.385	1.384	1.383	1.382	1.381
.190	1.380	1.379	1.378	1.376	1.376	1.374	1.374	1.372	1.372	1.370
.200	1.370	1.368	1.367	1.366	1.365	1.364	1.363	1.362	1.361	1.360
.210	1.359	1.358	1.357	1.356	1.355	1.354	1.353	1.352	1.351	1.350
.220	1.349	1.348	1.347	1.346	1.345	1.344	1.343	1.342	1.341	1.340
.230	1.339	1.338	1.337	1.336	1.335	1.334	1.333	1.331	1.331	1.329
.240	1.328	1.327	1.326	1.325	1.324	1.323	1.322	1.321	1.320	1.319
.250	1.318	1.317	1.316	1.315	1.314	1.313	1.312	1.311	1.310	1.309
.260	1.308	1.307	1.306	1.305	1.304	1.303	1.301	1.301	1.299	1.299
.270	1.297	1.296	1.295	1.294	1.293	1.292	1.291	1.290	1.289	1.288
.280	1.287	1.286	1.285	1.284	1.283	1.282	1.281	1.280	1.279	1.278
.290	1.277	1.276	1.274	1.274	1.272	1.271	1.270	1.269	1.268	1.267
.300	1.266	1.265	1.264	1.263	1.262	1.261	1.260	1.259	1.258	1.257
.310	1.255	1.255	1.253	1.253	1.251	1.250	1.249	1.248	1.247	1.246
.320	1.245	1.244	1.243	1.242	1.241	1.240	1.239	1.238	1.237	1.236
.330	1.235	1.233	1.232	1.231	1.230	1.229	1.228	1.227	1.226	1.225
.340	1.224	1.223	1.222	1.221	1.220	1.219	1.217	1.216	1.215	1.214
.350	1.213	1.212	1.211	1.210	1.209	1.208	1.207	1.206	1.205	1.204
.360	1.203	1.201	1.200	1.199	1.198	1.197	1.196	1.195	1.194	1.193
.370	1.192	1.191	1.190	1.189	1.187	1.187	1.185	1.184	1.183	1.182
.380	1.181	1.180	1.179	1.178	1.177	1.175	1.175	1.173	1.172	1.171
.390	1.170	1.169	1.168	1.167	1.166	1.165	1.164	1.163	1.162	1.160
.400	1.159	1.158	1.157	1.156	1.155	1.154	1.153	1.152	1.150	1.149
.410	1.148	1.147	1.146	1.145	1.144	1.143	1.142	1.141	1.139	1.139
.420	1.137	1.136	1.135	1.134	1.133	1.132	1.131	1.130	1.129	1.127
.430	1.126	1.125	1.124	1.123	1.122	1.121	1.120	1.118	1.117	1.116
.440	1.115	1.114	1.113	1.112	1.111	1.110	1.109	1.107	1.106	1.105
.450	1.104	1.103	1.102	1.101	1.100	1.098	1.097	1.096	1.095	1.094
.460	1.093	1.092	1.091	1.089	1.088	1.087	1.086	1.085	1.084	1.083
.470	1.082	1.080	1.079	1.078	1.077	1.076	1.075	1.074	1.073	1.071
.480	1.070	1.069	1.068	1.067	1.066	1.064	1.063	1.062	1.061	1.060
.490	1.059	1.058	1.057	1.055	1.054	1.053	1.052	1.051	1.050	1.048

X	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.500	1.047	1.046	1.045	1.044	1.043	1.041	1.040	1.039	1.038	1.037
.510	1.036	1.034	1.033	1.032	1.031	1.030	1.029	1.027	1.026	1.025
.520	1.024	1.023	1.022	1.020	1.019	1.018	1.017	1.016	1.015	1.013
.530	1.012	1.011	1.010	1.009	1.007	1.006	1.005	1.004	1.003	1.002
.540	1.000	.999	.998	.997	.996	.995	.993	.992	.991	.990
.550	.988	.987	.986	.985	.983	.982	.981	.980	.979	.978
.560	.977	.975	.974	.973	.972	.970	.969	.968	.967	.965
.570	.964	.963	.962	.961	.959	.958	.957	.956	.954	.953
.580	.952	.951	.950	.948	.947	.946	.945	.943	.942	.941
.590	.940	.938	.937	.936	.935	.933	.932	.931	.930	.929
.600	.927	.926	.925	.924	.922	.921	.920	.919	.917	.916
.610	.915	.913	.912	.911	.910	.903	.907	.906	.905	.903
.620	.902	.901	.899	.898	.897	.896	.894	.893	.892	.890
.630	.889	.888	.887	.885	.884	.883	.881	.880	.879	.878
.640	.876	.875	.874	.872	.871	.870	.869	.867	.866	.865
.650	.863	.862	.860	.859	.858	.857	.855	.854	.853	.851
.660	.850	.849	.847	.846	.845	.843	.842	.841	.839	.838
.670	.837	.835	.834	.833	.831	.830	.828	.827	.826	.824
.680	.823	.822	.820	.819	.818	.816	.815	.813	.812	.811
.690	.809	.808	.807	.805	.804	.802	.801	.800	.798	.797
.700	.795	.794	.793	.791	.790	.788	.787	.786	.784	.783
.710	.781	.780	.778	.777	.776	.774	.773	.771	.770	.769
.720	.767	.766	.764	.763	.761	.760	.758	.757	.755	.754
.730	.753	.751	.750	.748	.747	.745	.744	.742	.741	.739
.740	.738	.736	.735	.733	.732	.730	.729	.727	.726	.724
.750	.723	.721	.720	.718	.717	.715	.714	.712	.711	.709
.760	.707	.706	.705	.703	.701	.700	.698	.697	.695	.693
.770	.692	.690	.689	.687	.686	.684	.682	.681	.679	.678
.780	.676	.675	.673	.671	.670	.668	.666	.665	.663	.661
.790	.660	.658	.657	.655	.653	.652	.650	.648	.647	.645
.800	.643	.642	.640	.638	.637	.635	.634	.632	.630	.628
.810	.627	.625	.623	.622	.620	.618	.616	.615	.613	.611
.820	.609	.608	.606	.604	.602	.601	.599	.597	.595	.593
.830	.592	.590	.588	.586	.584	.583	.581	.579	.577	.575
.840	.574	.572	.570	.568	.566	.564	.562	.561	.559	.557
.850	.555	.553	.551	.549	.547	.545	.543	.541	.539	.538
.860	.536	.533	.531	.530	.528	.526	.524	.522	.520	.517
.870	.515	.513	.511	.509	.507	.505	.503	.501	.499	.497
.880	.495	.493	.491	.489	.486	.484	.482	.480	.478	.476
.890	.474	.471	.469	.467	.465	.462	.460	.458	.456	.453
.900	.451	.449	.447	.444	.442	.440	.437	.435	.432	.430
.910	.428	.425	.423	.420	.418	.415	.413	.410	.408	.405
.920	.403	.400	.398	.395	.392	.390	.387	.385	.382	.379
.930	.376	.374	.371	.368	.365	.362	.360	.357	.354	.351
.940	.348	.345	.342	.339	.336	.333	.330	.327	.324	.321
.950	.318	.314	.311	.308	.305	.301	.298	.294	.291	.287
.960	.284	.280	.277	.273	.269	.265	.262	.258	.254	.250
.970	.246	.241	.237	.233	.229	.224	.220	.215	.210	.205
.980	.200	.195	.190	.185	.179	.173	.168	.161	.155	.148
.990	.142	.134	.127	.118	.110	.100	.090	.077	.063	.045

	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
.50	1.15+	1.15+	1.15+	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16
.51	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17	1.17
.52	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.18
.53	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18
.54	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19
.55	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20
.56	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21
.57	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22
.58	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23
.59	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24
.60	1.25	1.25+	1.25+	1.25+	1.25+	1.25+	1.25+	1.25+	1.25+	1.26
.61	1.26	1.26	1.26	1.26	1.26	1.26	1.26	1.27	1.27	1.27
.62	1.27	1.27	1.27	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28
.63	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29
.64	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.31	1.31
.65	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32
.66	1.33	1.33	1.33	1.33	1.33	1.33	1.33	1.33	1.34	1.34
.67	1.35-	1.35-	1.35-	1.35-	1.35-	1.35-	1.35-	1.35+	1.35+	1.35+
.68	1.36	1.36	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37	1.37	1.37	1.37
.69	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	1.39	1.39	1.39
.70	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.41
.71	1.42	1.42	1.42	1.42	1.42	1.42	1.42	1.42	1.42	1.43
.72	1.44	1.44	1.44	1.44	1.44	1.44	1.44	1.44	1.45-	1.45-
.73	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.47	1.47	1.47	1.47
.74	1.49	1.49	1.49	1.49	1.49	1.49	1.49	1.49	1.49	1.49
.75	1.51	1.51	1.51	1.51	1.51	1.51	1.51	1.52	1.52	1.52
.76	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54
.77	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57
.78	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60
.79	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.64	1.64	1.64
.80	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67
.81	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71
.82	1.75-	1.75-	1.75-	1.75-	1.75	1.75-	1.75+	1.75+	1.75+	1.75+
.83	1.79	1.79	1.79	1.79	1.79	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80
.84	1.84	1.84	1.84	1.84	1.84	1.85-	1.85-	1.85-	1.85-	1.85+
.85	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90-	1.90	1.90	1.90	1.90	1.91
.86	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.96	1.97	1.97
.87	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03	2.04
.88	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11
.89	2.19	2.19	2.19	2.19	2.19	2.20	2.20	2.20	2.20	2.20
.90	2.29	2.29	2.29	2.30	2.30	2.30	2.30	2.30	2.30	2.30
.91	2.41	2.41	2.41	2.41	2.41	2.41	2.42	2.42	2.42	2.42
.92	2.55+	2.55+	2.55+	2.55+	2.55+	2.55+	2.56	2.56	2.56	2.56
.93	2.72	2.72	2.72	2.72	2.72	2.72	2.73	2.73	2.73	2.73
.94	2.93	2.93	2.93	2.93	2.93	2.94	2.94	2.94	2.94	2.94
.95	3.20	3.20	3.20	3.20	3.21	3.21	3.21	3.21	3.21	3.22
.96	3.57	3.57	3.57	3.57	3.57	3.58	3.58	3.58	3.58	3.59
.97	4.11	4.11	4.11	4.12	4.12	4.12	4.12	4.12	4.13	4.13
.98	5.03	5.03	5.03	5.03	5.03	5.03	5.04	5.04	5.04	5.05-
.99	7.09	7.09	7.09	7.09	7.09	7.10	7.10	7.11	7.11	7.12

表二十(續)

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
.50	1.16	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.18
.51	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18
.52	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19	1.19	1.19
.53	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.20	1.20	1.20
.54	1.19	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.21	1.21	1.21
.55	1.20	1.20	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22
.56	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.23	1.23
.57	1.22	1.22	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.24	1.24	1.24
.58	1.23	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.25-	1.25-	1.25+
.59	1.24	1.25-	1.25-	1.25-	1.25+	1.25+	1.25+	1.26	1.26	1.26
.60	1.26	1.26	1.26	1.26	1.26	1.26	1.27	1.27	1.27	1.27
.61	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.28	1.28	1.28	1.28	1.29
.62	1.28	1.28	1.28	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.30	1.30
.63	1.29	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.31	1.31	1.31
.64	1.31	1.31	1.31	1.31	1.31	1.32	1.32	1.32	1.32	1.33
.65	1.32	1.32	1.33	1.33	1.33	1.33	1.33	1.34	1.34	1.34
.66	1.34	1.34	1.34	1.34	1.34	1.35-	1.35-	1.35+	1.35+	1.36
.67	1.35+	1.36	1.36	1.36	1.36	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37
.68	1.37	1.37	1.37	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	1.39	1.39
.69	1.39	1.39	1.39	1.39	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.41
.70	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.42	1.42	1.42	1.42	1.43
.71	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.44	1.44	1.44	1.44	1.45
.72	1.45-	1.45-	1.45+	1.45+	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.47
.73	1.47	1.47	1.47	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.49	1.49
.74	1.49	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.51	1.51	1.51	1.51
.75	1.52	1.52	1.52	1.52	1.53	1.53	1.53	1.53	1.54	1.54
.76	1.55-	1.55-	1.55-	1.55+	1.55+	1.56	1.56	1.56	1.56	1.57
.77	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	1.59	1.59	1.59	1.59	1.60
.78	1.61	1.61	1.61	1.61	1.61	1.62	1.62	1.62	1.62	1.63
.79	1.64	1.64	1.64	1.65-	1.65-	1.65-	1.65+	1.66	1.66	1.66
.80	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.69	1.69	1.69	1.69	1.70
.81	1.71	1.72	1.72	1.72	1.72	1.72	1.73	1.73	1.73	1.74
.82	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	1.77-	1.77	1.77	1.78	1.78
.83	1.80	1.80	1.81	1.81	1.81	1.81	1.82	1.82	1.82	1.83
.84	1.85+	1.85+	1.86	1.86	1.86	1.86	1.87	1.87	1.87	1.88
.85	1.91	1.91	1.91	1.91	1.92	1.92	1.92	1.93	1.93	1.93
.86	1.97	1.97	1.97	1.98	1.98	1.98	1.99	1.99	1.99	2.00
.87	2.04	2.04	2.04	2.05-	2.05-	2.05+	2.05+	2.06	2.06	2.07
.88	2.12	2.12	2.12	2.12	2.13	2.13	2.13	2.14	2.14	2.14
.89	2.20	2.21	2.21	2.21	2.21	2.22	2.22	2.23	2.23	2.23
.90	2.31	2.31	2.31	2.31	2.32	2.32	2.32	2.33	2.33	2.34
.91	2.42	2.43	2.43	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45-	2.45+	2.46
.92	2.56	2.57	2.57	2.57	2.58	2.58	2.58	2.59	2.59	2.60
.93	2.73	2.74	2.74	2.74	2.75-	2.75+	2.76	2.76	2.77	2.77
.94	2.95-	2.95-	2.95+	2.96	2.96	2.96	2.97	2.97	2.98	2.99
.96	3.22	3.22	3.23	3.23	3.23	3.24	3.24	3.25-	3.26	3.26
.96	3.59	3.59	3.60	3.60	3.61	3.61	3.62	3.62	3.63	3.64
.97	4.13	4.14	4.14	4.15-	4.15+	4.16	4.17	4.17	4.18	4.19
.98	5.05+	5.06	5.06	5.07	5.08	5.08	5.09	5.10	5.11	5.12
.99	7.12	7.13	7.14	7.15-	7.16	7.17	7.18	7.19	7.20	7.22

表二十(續)

91

	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
00	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04
01	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04
02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05-
03	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05-
04	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05-
05	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05-
06	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05-
07	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05-
08	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05-
09	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05-
10	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05+
11	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05+
12	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05-	1.05+
13	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05+	1.05+
14	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05-	1.05+	1.06
15	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05+	1.05+	1.06
16	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05-	1.05+	1.06	1.06
17	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05-	1.05+	1.05+	1.06	1.06
18	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05-	1.05+	1.06	1.06	1.06
19	1.04	1.04	1.04	1.05-	1.05-	1.05+	1.05+	1.06	1.06	1.06
20	1.04	1.04	1.05-	1.05-	1.05+	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.07
21	1.04	1.05-	1.05-	1.05+	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07
22	1.05-	1.05-	1.05+	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07
23	1.05-	1.05+	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07
24	1.05+	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08
25	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08
26	1.06	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08
27	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09
28	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09
29	1.07	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09
30	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09	1.10
31	1.07	1.08	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09	1.10	1.10
32	1.08	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10
33	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.11
34	1.09	1.09	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11
35	1.09	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12
36	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12
37	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12
38	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.13	1.13
39	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13
40	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.14	1.14
41	1.12	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.15-
42	1.12	1.13	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.14	1.15-	1.15+
43	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.14	1.15-	1.15+	1.15+	1.16
44	1.14	1.14	1.14	1.14	1.15-	1.15+	1.15+	1.16	1.16	1.16
45	1.14	1.15-	1.15-	1.15+	1.15+	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17
46	1.15-	1.15+	1.15+	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17	1.17	1.18
47	1.16	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18
48	1.16	1.17	1.17	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19
49	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19	1.19	1.20

	.20	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29
.50	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19	1.19	1.20	1.20	1.20	1.21
.51	1.19	1.19	1.19	1.19	1.20	1.20	1.20	1.21	1.21	1.21
.52	1.19	1.20	1.20	1.20	1.21	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22
.53	1.20	1.21	1.21	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22	1.23	1.23
.54	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.23	1.23	1.23	1.24	1.24
.55	1.22	1.22	1.23	1.23	1.23	1.24	1.24	1.24	1.25-	1.25+
.56	1.23	1.23	1.24	1.24	1.24	1.25-	1.25-	1.25+	1.26	1.26
.57	1.24	1.24	1.25-	1.25+	1.25+	1.26	1.26	1.26	1.27	1.27
.58	1.25+	1.26	1.26	1.26	1.26	1.27	1.27	1.27	1.28	1.28
.59	1.26	1.27	1.27	1.27	1.28	1.28	1.28	1.29	1.29	1.29
.60	1.28	1.28	1.28	1.28	1.29	1.29	1.29	1.30	1.30	1.31
.61	1.29	1.29	1.29	1.30	1.30	1.30	1.31	1.31	1.31	1.32
.62	1.30	1.30	1.31	1.31	1.31	1.32	1.32	1.32	1.33	1.33
.63	1.31	1.32	1.32	1.32	1.33	1.33	1.33	1.34	1.34	1.35-
.64	1.33	1.33	1.33	1.34	1.34	1.34	1.35-	1.35+	1.36	1.36
.65	1.34	1.35-	1.35-	1.35+	1.36	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37
.66	1.36	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37	1.38	1.38	1.39	1.39
.67	1.37	1.38	1.38	1.38	1.39	1.39	1.40	1.40	1.40	1.41
.68	1.39	1.39	1.40	1.40	1.40	1.41	1.41	1.42	1.42	1.43
.69	1.41	1.41	1.42	1.42	1.42	1.43	1.43	1.43	1.44	1.44
.70	1.43	1.43	1.44	1.44	1.44	1.45-	1.45+	1.45+	1.46	1.46
.71	1.45-	1.45+	1.46	1.46	1.46	1.47	1.47	1.47	1.48	1.48
.72	1.47	1.47	1.48	1.48	1.48	1.49	1.49	1.50	1.50	1.51
.73	1.49	1.50	1.50	1.50	1.51	1.51	1.52	1.52	1.52	1.53
.74	1.52	1.52	1.52	1.53	1.53	1.54	1.54	1.54	1.55-	1.55+
.75	1.54	1.55-	1.55-	1.55+	1.56	1.56	1.57	1.57	1.57	1.58
.76	1.57	1.57	1.58	1.58	1.59	1.59	1.59	1.60	1.60	1.61
.77	1.60	1.60	1.61	1.61	1.61	1.62	1.62	1.63	1.63	1.64
.78	1.63	1.63	1.64	1.64	1.65-	1.65+	1.65+	1.66	1.66	1.67
.79	1.66	1.67	1.67	1.68	1.68	1.68	1.69	1.69	1.70	1.70
.80	1.70	1.70	1.71	1.71	1.72	1.72	1.73	1.73	1.74	1.74
.81	1.74	1.74	1.75-	1.75+	1.76	1.76	1.77	1.77	1.78	1.78
.82	1.78	1.79	1.79	1.80	1.80	1.80	1.81	1.81	1.82	1.83
.83	1.83	1.83	1.84	1.84	1.85-	1.85+	1.86	1.86	1.87	1.87
.84	1.88	1.89	1.89	1.89	1.90	1.90	1.91	1.91	1.92	1.93
.85	1.94	1.94	1.95-	1.95+	1.96	1.96	1.97	1.97	1.98	1.98
.86	2.00	2.00	2.01	2.01	2.02	2.02	2.03	2.04	2.04	2.05-
.87	2.07	2.07	2.08	2.08	2.09	2.09	2.10	2.11	2.11	2.12
.88	2.15-	2.15+	2.16	2.16	2.17	2.17	2.18	2.19	2.19	2.20
.89	2.24	2.24	2.25-	2.25+	2.26	2.27	2.27	2.28	2.28	2.29
.90	2.34	2.35-	2.35+	2.36	2.36	2.37	2.38	2.38	2.39	2.40
.91	2.46	2.47	2.47	2.48	2.48	2.49	2.50	2.51	2.51	2.52
.92	2.60	2.61	2.62	2.62	2.63	2.64	2.64	2.65-	2.66	2.67
.93	2.78	2.78	2.79	2.80	2.80	2.81	2.82	2.83	2.83	2.84
.94	2.99	3.00	3.00	3.01	3.02	3.03	3.04	3.04	3.05+	3.06
.95	3.27	3.28	3.28	3.29	3.30	3.31	3.32	3.33	3.34	3.35-
.96	3.65-	3.65+	3.66	3.67	3.68	3.69	3.70	3.71	3.72	3.73
.97	4.20	4.21	4.22	4.23	4.24	4.25-	4.26	4.27	4.28	4.30
.98	5.13	5.14	5.15+	5.16	5.18	5.19	5.20	5.22	5.24	5.25+
.99	7.24	7.25+	7.27	7.28	7.30	7.32	7.34	7.36	7.39	7.41

表二十 (續)

	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
.00	1.05-	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09
.01	1.05-	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09
.02	1.05-	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09
.03	1.05-	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09
.04	1.05-	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09
.05	1.05-	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09
.06	1.05+	1.05+	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09
.07	1.05+	1.05+	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09
.08	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09
.09	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09
.10	1.05+	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09
.11	1.05+	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09
.12	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09
.13	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10
.14	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10
.15	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10
.16	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10
.17	1.06	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10
.18	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09	1.10	1.10
.19	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11
.20	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11
.21	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11
.22	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11
.23	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12
.24	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12
.25	1.08	1.09	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12
.26	1.09	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12
.27	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13
.28	1.09	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13
.29	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.13	1.13
.30	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14
.31	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14
.32	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15-
.33	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15-	1.15+
.34	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.15-	1.15+
.35	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.15-	1.15+	1.16
.36	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.15-	1.15+	1.16	1.16
.37	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.15-	1.15+	1.16	1.16	1.17
.38	1.13	1.14	1.14	1.15-	1.15-	1.15+	1.16	1.16	1.17	1.17
.39	1.14	1.14	1.15-	1.15+	1.15+	1.16	1.16	1.17	1.17	1.18
.40	1.14	1.15-	1.15+	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18
.41	1.15-	1.15+	1.16	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19
.42	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20
.43	1.16	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20
.44	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.21
.45	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.21	1.21	1.22
.46	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.21	1.21	1.22	1.22
.47	1.19	1.19	1.20	1.20	1.20	1.21	1.21	1.22	1.22	1.23
.48	1.19	1.20	1.20	1.21	1.21	1.22	1.22	1.23	1.23	1.24
.49	1.20	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22	1.23	1.23	1.24	1.25

	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
.50	1 21	1 21	1 22	1 22	1 23	1 23	1 24	1 24	1 25-	1 25+
.51	1 22	1 22	1 23	1 23	1 24	1 24	1 25-	1 25+	1 26	1 26
.52	1 23	1 23	1 24	1 24	1 24	1 25-	1 25+	1 26	1 27	1 27
.53	1 24	1 24	1 24	1 25-	1 25+	1 26	1 26	1 27	1 27	1 28
.54	1 25-	1 25-	1 25+	1 26	1 26	1 27	1 27	1 28	1 28	1 29
.55	1 26	1 26	1 26	1 27	1 27	1 28	1 28	1 29	1 29	1 30
.56	1 27	1 27	1 27	1 28	1 28	1 29	1 29	1 30	1 30	1 31
.57	1 28	1 28	1 28	1 29	1 29	1 30	1 30	1 31	1 32	1 32
.58	1 29	1 29	1 30	1 30	1 31	1 31	1 32	1 32	1 33	1 33
.59	1 30	1 30	1 31	1 31	1 32	1 32	1 33	1 33	1 34	1 34
.60	1 31	1 31	1 32	1 32	1 33	1 33	1 34	1 35-	1 35+	1 36
.61	1 32	1 33	1 33	1 34	1 34	1 35-	1 35+	1 36	1 36	1 37
.62	1 34	1 34	1 35-	1 35+	1 36	1 36	1 37	1 37	1 38	1 38
.63	1 35-	1 35+	1 36	1 36	1 37	1 37	1 38	1 39	1 39	1 40
.64	1 36	1 37	1 37	1 38	1 38	1 39	1 39	1 40	1 41	1 41
.65	1 38	1 38	1 39	1 39	1 40	1 40	1 41	1 42	1 42	1 43
.66	1 40	1 40	1 40	1 41	1 42	1 42	1 43	1 43	1 44	1 45-
.67	1 41	1 42	1 42	1 43	1 43	1 44	1 44	1 45-	1 46	1 46
.68	1 43	1 43	1 44	1 44	1 45+	1 46	1 46	1 47	1 47	1 48
.69	1 45-	1 45+	1 46	1 46	1 47	1 47	1 48	1 49	1 49	1 50
.70	1 47	1 47	1 48	1 48	1 49	1 49	1 50	1 51	1 51	1 52
.71	1 49	1 49	1 50	1 50	1 51	1 52	1 52	1 53	1 54	1 54
.72	1 51	1 52	1 52	1 53	1 53	1 54	1 54	1 55+	1 56	1 56
.73	1 53	1 54	1 54	1 55-	1 56	1 56	1 57	1 58	1 58	1 59
.74	1 56	1 56	1 57	1 58	1 58	1 59	1 59	1 60	1 61	1 61
.75	1 58	1 59	1 60	1 60	1 61	1 61	1 62	1 63	1 63	1 64
.76	1 61	1 62	1 62	1 63	1 64	1 64	1 65-	1 66	1 66	1 67
.77	1 64	1 65-	1 65+	1 66	1 67	1 67	1 68	1 69	1 69	1 70
.78	1 68	1 68	1 69	1 69	1 70	1 71	1 71	1 72	1 73	1 74
.79	1 71	1 72	1 72	1 73	1 73	1 74	1 75-	1 76	1 76	1 77
.80	1 75-	1 75+	1 76	1 77	1 77	1 78	1 79	1 79	1 80	1 81
.81	1 79	1 79	1 80	1 81	1 81	1 82	1 83	1 84	1 84	1 85+
.82	1 83	1 84	1 84	1 85+	1 86	1 86	1 87	1 88	1 89	1 90
.83	1 88	1 89	1 89	1 90	1 91	1 91	1 92	1 93	1 94	1 95-
.84	1 93	1 94	1 95-	1 95+	1 96	1 97	1 98	1 98	1 99	2 00
.85	1 99	2 00	2 00	2 01	2 02	2 03	2 03	2 04	2 05+	2 06
.86	2 05+	2 06	2 07	2 08	2 08	2 09	2 10	2 11	2 12	2 13
.87	2 13	2 13	2 14	2 15-	2 16	2 16	2 17	2 18	2 19	2 20
.88	2 21	2 21	2 22	2 23	2 24	2 25-	2 26	2 27	2 28	2 29
.89	2 30	2 31	2 31	2 32	2 33	2 34	2 35+	2 36	2 37	2 38
.90	2 41	2 41	2 42	2 43	2 44	2 45-	2 46	2 47	2 48	2 49
.91	2 53	2 54	2 55-	2 55+	2 56	2 57	2 59	2 60	2 61	2 62
.92	2 67	2 68	2 69	2 70	2 71	2 72	2 74	2 75-	2 76	2 77
.93	2 85+	2 86	2 87	2 88	2 89	2 90	2 92	2 93	2 94	2 95+
.94	3 07	3 08	3 09	3 10	3 12	3 13	3 14	3 15+	3 17	3 18
.95	3 36	3 37	3 38	3 39	3 41	3 42	3 43	3 45-	3 46	3 48
.96	3 74	3 76	3 77	3 78	3 80	3 81	3 83	3 84	3 86	3 88
.97	4 31	4 33	4 34	4 36	4 37	4 39	4 41	4 43	4 45-	4 47
.98	5 27	5 29	5 31	5 32	5 34	5 36	5 39	5 41	5 43	5 46
.99	7 43	7 46	7 49	7 51	7 54	7 57	7 60	7 63	7 66	7 70

	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
.00	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-
.01	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-
.02	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-
.03	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-
.04	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-
.05	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-
.06	1.09	1.10	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-
.07	1.09	1.10	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15-
.08	1.09	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15+
.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15+
.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-	1.15+
.11	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-	1.15+
.12	1.10	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-	1.16
.13	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15-	1.16
.14	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15+	1.16
.15	1.10	1.11	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-	1.15+	1.16
.16	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-	1.15+	1.16
.17	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15-	1.16	1.16
.18	1.11	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15+	1.16	1.17
.19	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-	1.15+	1.16	1.17
.20	1.11	1.12	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15-	1.16	1.16	1.17
.21	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15-	1.15+	1.16	1.17	1.17
.22	1.12	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15-	1.15+	1.16	1.17	1.18
.23	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15+	1.16	1.16	1.17	1.18
.24	1.12	1.13	1.14	1.14	1.15-	1.15+	1.16	1.17	1.17	1.18
.25	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15+	1.16	1.16	1.17	1.18	1.18
.26	1.13	1.14	1.14	1.15-	1.15+	1.16	1.17	1.17	1.18	1.19
.27	1.13	1.14	1.14	1.15+	1.16	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19
.28	1.14	1.14	1.15-	1.15+	1.16	1.17	1.17	1.18	1.19	1.19
.29	1.14	1.15-	1.15+	1.16	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20
.30	1.14	1.15-	1.16	1.16	1.17	1.17	1.18	1.19	1.19	1.20
.31	1.15-	1.15+	1.16	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21
.32	1.15+	1.16	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.20	1.21
.33	1.16	1.16	1.17	1.17	1.18	1.19	1.19	1.20	1.21	1.22
.34	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22
.35	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.22
.36	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20	1.21	1.21	1.22	1.23
.37	1.17	1.18	1.19	1.19	1.20	1.21	1.21	1.22	1.23	1.23
.38	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24
.39	1.18	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24	1.25-
.40	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25+
.41	1.20	1.20	1.21	1.21	1.22	1.23	1.23	1.24	1.25-	1.26
.42	1.20	1.21	1.21	1.22	1.23	1.23	1.24	1.25-	1.26	1.26
.43	1.21	1.21	1.22	1.23	1.23	1.24	1.25-	1.25+	1.26	1.27
.44	1.22	1.22	1.23	1.23	1.24	1.25-	1.25+	1.26	1.27	1.28
.45	1.22	1.23	1.23	1.24	1.25-	1.25+	1.26	1.27	1.28	1.28
.46	1.23	1.23	1.24	1.25-	1.25+	1.26	1.27	1.28	1.28	1.29
.47	1.24	1.24	1.25-	1.25+	1.26	1.27	1.28	1.28	1.29	1.30
.48	1.24	1.25-	1.26	1.26	1.27	1.28	1.28	1.29	1.30	1.31
.49	1.25+	1.26	1.26	1.27	1.28	1.28	1.29	1.30	1.31	1.32

	.40	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49
50	1.26	1.27	1.27	1.28	1.29	1.29	1.30	1.31	1.32	1.32
51	1.27	1.27	1.28	1.29	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.33
52	1.28	1.28	1.29	1.30	1.30	1.31	1.32	1.33	1.33	1.34
53	1.29	1.29	1.30	1.31	1.31	1.32	1.33	1.34	1.34	1.35+
54	1.30	1.30	1.31	1.32	1.32	1.33	1.34	1.35-	1.35+	1.36
55	1.31	1.31	1.32	1.33	1.33	1.34	1.35-	1.36	1.36	1.37
56	1.32	1.32	1.33	1.34	1.34	1.35+	1.36	1.37	1.38	1.38
57	1.33	1.33	1.34	1.35-	1.36	1.36	1.37	1.38	1.39	1.40
58	1.34	1.35-	1.35+	1.36	1.37	1.37	1.38	1.39	1.40	1.41
59	1.35+	1.36	1.36	1.37	1.38	1.39	1.39	1.40	1.41	1.42
60	1.36	1.37	1.38	1.38	1.39	1.40	1.41	1.42	1.42	1.43
61	1.38	1.38	1.39	1.40	1.41	1.41	1.42	1.43	1.44	1.45-
62	1.39	1.40	1.40	1.41	1.42	1.43	1.44	1.44	1.45+	1.46
63	1.40	1.41	1.42	1.43	1.43	1.44	1.45+	1.46	1.47	1.48
64	1.42	1.43	1.43	1.44	1.45-	1.46	1.47	1.47	1.48	1.49
65	1.44	1.44	1.45-	1.46	1.47	1.47	1.48	1.49	1.50	1.51
66	1.45+	1.46	1.47	1.47	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52	1.53
67	1.47	1.48	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52	1.53	1.54	1.55-
68	1.49	1.50	1.50	1.51	1.52	1.53	1.54	1.55-	1.55+	1.56
69	1.51	1.51	1.52	1.53	1.54	1.55-	1.56	1.57	1.57	1.58
70	1.53	1.54	1.54	1.55+	1.56	1.57	1.58	1.59	1.60	1.61
71	1.55-	1.56	1.56	1.57	1.58	1.59	1.60	1.61	1.62	1.63
72	1.57	1.58	1.59	1.60	1.60	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65+
73	1.60	1.60	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65-	1.66	1.67	1.68
74	1.62	1.63	1.64	1.65-	1.66	1.66	1.67	1.68	1.69	1.71
75	1.65-	1.66	1.67	1.67	1.68	1.69	1.70	1.71	1.72	1.73
76	1.68	1.69	1.70	1.70	1.71	1.72	1.73	1.74	1.75+	1.76
77	1.71	1.72	1.73	1.74	1.75-	1.76	1.77	1.78	1.79	1.80
78	1.74	1.75+	1.76	1.77	1.78	1.79	1.80	1.81	1.82	1.83
79	1.78	1.79	1.80	1.81	1.82	1.83	1.84	1.85-	1.86	1.87
80	1.82	1.83	1.84	1.85-	1.86	1.87	1.88	1.89	1.90	1.91
81	1.86	1.87	1.88	1.89	1.90	1.91	1.92	1.93	1.94	1.96
82	1.91	1.92	1.93	1.94	1.95-	1.96	1.97	1.98	1.99	2.00
83	1.96	1.97	1.98	1.99	2.00	2.01	2.02	2.03	2.04	2.06
84	2.01	2.02	2.03	2.04	2.05+	2.06	2.08	2.09	2.10	2.11
85	2.07	2.08	2.09	2.10	2.11	2.13	2.14	2.15+	2.16	2.18
86	2.14	2.15-	2.16	2.17	2.18	2.19	2.21	2.22	2.23	2.25-
87	2.21	2.22	2.23	2.25-	2.26	2.27	2.28	2.30	2.31	2.33
88	2.30	2.31	2.32	2.33	2.34	2.36	2.37	2.39	2.40	2.42
89	2.39	2.40	2.42	2.43	2.44	2.46	2.47	2.48	2.50	2.52
90	2.50	2.52	2.53	2.54	2.55+	2.57	2.58	2.60	2.62	2.63
91	2.63	2.64	2.66	2.67	2.69	2.70	2.72	2.73	2.75-	2.77
92	2.78	2.80	2.81	2.83	2.84	2.86	2.87	2.89	2.91	2.93
93	2.97	2.98	3.00	3.01	3.03	3.05-	3.06	3.08	3.10	3.12
94	3.20	3.21	3.23	3.25-	3.26	3.28	3.30	3.32	3.34	3.36
95	3.49	3.51	3.53	3.55-	3.57	3.59	3.61	3.63	3.65+	3.67
96	3.90	3.92	3.94	3.96	3.98	4.00	4.02	4.05-	4.07	4.10
97	4.49	4.51	4.53	4.56	4.58	4.61	4.63	4.66	4.69	4.72
98	5.48	5.51	5.54	5.56	5.60	5.63	5.66	5.69	5.73	5.76
99	7.73	7.77	7.81	7.85-	7.89	7.94	7.98	8.03	8.08	8.13

表二十 (續)

	.50	.51	.52	.53	.54	.55	.56	.57	.58	.59
.00	1.15+	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
.01	1.15+	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
.02	1.15+	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
.03	1.16	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
.04	1.16	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
.05	1.16	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
.06	1.16	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
.07	1.16	1.17	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
.08	1.16	1.17	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
.09	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
.10	1.16	1.17	1.18	1.19	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24
.11	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.24	1.25-
.12	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25-
.13	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25-
.14	1.17	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25+
.15	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25+
.16	1.17	1.18	1.19	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25+
.17	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.22	1.24	1.25-	1.26
.18	1.17	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25-	1.26
.19	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25+	1.26
.20	1.18	1.19	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25+	1.26
.21	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24	1.26	1.27
.22	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25-	1.26	1.27
.23	1.19	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25+	1.26	1.27
.24	1.19	1.20	1.21	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25+	1.26	1.28
.25	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25-	1.26	1.27	1.28
.26	1.20	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25-	1.26	1.27	1.28
.27	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24	1.25+	1.26	1.27	1.29
.28	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25-	1.26	1.27	1.28	1.29
.29	1.21	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25+	1.26	1.27	1.28	1.29
.30	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25-	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30
.31	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25-	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30
.32	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25+	1.26	1.27	1.28	1.30	1.31
.33	1.22	1.23	1.24	1.25-	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30	1.31
.34	1.23	1.24	1.24	1.25+	1.26	1.27	1.28	1.29	1.31	1.32
.35	1.23	1.24	1.25-	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30	1.31	1.32
.36	1.24	1.25-	1.25+	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30	1.32	1.33
.37	1.24	1.25+	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33
.38	1.25-	1.26	1.27	1.27	1.28	1.29	1.30	1.32	1.33	1.34
.39	1.25+	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34
.40	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35+
.41	1.27	1.27	1.28	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.35-	1.36
.42	1.27	1.28	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35+	1.36
.43	1.28	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35-	1.36	1.37
.44	1.29	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.36	1.37	1.38
.45	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35+	1.36	1.37	1.39
.46	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35-	1.36	1.37	1.38	1.39
.47	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35-	1.36	1.37	1.38	1.39	1.40
.48	1.32	1.33	1.33	1.34	1.35+	1.36	1.38	1.39	1.40	1.41
.49	1.32	1.33	1.34	1.35+	1.36	1.37	1.38	1.40	1.41	1.42

	.50	.51	.52	.53	.54	.55	.56	.57	.58	.59
.60	1.33	1.34	1.35+	1.36	1.37	1.38	1.39	1.41	1.42	1.43
.61	1.34	1.35+	1.36	1.37	1.38	1.39	1.40	1.41	1.43	1.44
.62	1.35+	1.36	1.37	1.38	1.39	1.40	1.41	1.42	1.44	1.45-
.63	1.36	1.37	1.38	1.39	1.40	1.41	1.42	1.44	1.45-	1.46
.64	1.37	1.38	1.39	1.40	1.41	1.42	1.43	1.45-	1.46	1.47
.65	1.38	1.39	1.40	1.41	1.42	1.43	1.45-	1.46	1.47	1.48
.66	1.39	1.40	1.41	1.42	1.43	1.45-	1.46	1.47	1.48	1.49
.67	1.41	1.41	1.42	1.44	1.45-	1.46	1.47	1.48	1.49	1.51
.68	1.42	1.43	1.44	1.45-	1.46	1.47	1.48	1.49	1.51	1.52
.69	1.43	1.44	1.45-	1.46	1.47	1.48	1.49	1.51	1.52	1.53
.60	1.44	1.45+	1.46	1.47	1.49	1.50	1.51	1.52	1.53	1.55-
.61	1.46	1.47	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52	1.54	1.55-	1.56
.62	1.47	1.48	1.49	1.50	1.51	1.53	1.54	1.55+	1.56	1.58
.63	1.49	1.50	1.51	1.52	1.53	1.54	1.55+	1.57	1.58	1.59
.64	1.50	1.51	1.52	1.53	1.55-	1.56	1.57	1.58	1.60	1.61
.65	1.52	1.53	1.54	1.55+	1.56	1.58	1.59	1.60	1.62	1.63
.66	1.54	1.55-	1.56	1.57	1.58	1.59	1.61	1.62	1.63	1.65-
.67	1.56	1.57	1.58	1.59	1.60	1.61	1.63	1.64	1.65+	1.67
.68	1.57	1.59	1.60	1.61	1.62	1.63	1.65-	1.66	1.67	1.69
.69	1.60	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65+	1.67	1.68	1.70	1.71
.70	1.62	1.63	1.64	1.65+	1.66	1.68	1.69	1.70	1.72	1.73
.71	1.64	1.65+	1.66	1.67	1.69	1.70	1.71	1.73	1.74	1.76
.72	1.66	1.68	1.69	1.70	1.71	1.73	1.74	1.75+	1.77	1.78
.73	1.69	1.70	1.71	1.73	1.74	1.75+	1.77	1.78	1.80	1.81
.74	1.72	1.73	1.74	1.75+	1.77	1.78	1.79	1.81	1.83	1.84
.75	1.75-	1.76	1.77	1.78	1.80	1.81	1.82	1.84	1.86	1.87
.76	1.78	1.79	1.80	1.81	1.83	1.84	1.86	1.87	1.89	1.91
.77	1.81	1.82	1.83	1.85-	1.86	1.88	1.89	1.91	1.92	1.94
.78	1.85-	1.86	1.87	1.88	1.90	1.91	1.93	1.94	1.96	1.98
.79	1.88	1.90	1.91	1.92	1.94	1.95+	1.97	1.98	2.00	2.02
.80	1.92	1.94	1.95+	1.97	1.98	2.00	2.01	2.03	2.05-	2.06
.81	1.97	1.98	2.00	2.01	2.03	2.04	2.06	2.08	2.09	2.11
.82	2.02	2.03	2.05-	2.06	2.08	2.09	2.11	2.13	2.14	2.16
.83	2.07	2.08	2.10	2.11	2.13	2.15-	2.16	2.18	2.20	2.22
.84	2.13	2.14	2.16	2.17	2.19	2.21	2.22	2.24	2.26	2.28
.85	2.19	2.21	2.22	2.24	2.26	2.27	2.29	2.31	2.33	2.35+
.86	2.26	2.28	2.29	2.31	2.33	2.35-	2.37	2.38	2.41	2.43
.87	2.34	2.36	2.37	2.39	2.41	2.43	2.45-	2.47	2.49	2.51
.88	2.43	2.45-	2.46	2.48	2.50	2.52	2.54	2.56	2.58	2.61
.89	2.53	2.55-	2.57	2.59	2.61	2.63	2.65-	2.67	2.69	2.72
.90	2.65-	2.67	2.69	2.71	2.73	2.75-	2.77	2.79	2.82	2.84
.91	2.78	2.80	2.82	2.84	2.87	2.89	2.91	2.94	2.96	2.99
.92	2.95-	2.97	2.99	3.01	3.03	3.06	3.08	3.11	3.13	3.16
.93	3.14	3.16	3.18	3.21	3.23	3.26	3.28	3.31	3.34	3.37
.94	3.38	3.41	3.43	3.46	3.48	3.51	3.54	3.57	3.60	3.63
.95	3.70	3.72	3.75-	3.78	3.81	3.83	3.87	3.90	3.93	3.97
.96	4.12	4.15+	4.18	4.21	4.24	4.28	4.31	4.35-	4.38	4.42
.97	4.75+	4.78	4.81	4.85-	4.89	4.93	4.97	5.01	5.05+	5.09
.98	5.80	5.84	5.88	5.93	5.97	6.02	6.06	6.12	6.17	6.22
.99	8.18	8.24	8.30	8.36	8.42	8.49	8.55+	8.63	8.70	8.78

表二十 (續)

	.60	.61	.62	.63	.64	.65	.66	.67	.68	.69
.00	1.25	1.26	1.27	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35-	1.36	1.38
.01	1.25+	1.26	1.27	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35-	1.36	1.38
.02	1.25+	1.26	1.27	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35-	1.36	1.38
.03	1.25+	1.26	1.28	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35-	1.36	1.38
.04	1.25+	1.26	1.28	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35-	1.37	1.38
.05	1.25+	1.26	1.28	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35-	1.37	1.38
.06	1.25+	1.26	1.28	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35-	1.37	1.38
.07	1.25+	1.27	1.28	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35+	1.37	1.39
.08	1.25+	1.27	1.28	1.29	1.31	1.32	1.34	1.35+	1.37	1.39
.09	1.26	1.27	1.28	1.29	1.31	1.32	1.34	1.35+	1.37	1.39
.10	1.26	1.27	1.28	1.29	1.31	1.32	1.34	1.35+	1.37	1.39
.11	1.26	1.27	1.28	1.30	1.31	1.32	1.34	1.36	1.37	1.39
.12	1.26	1.27	1.28	1.30	1.31	1.33	1.34	1.36	1.37	1.39
.13	1.26	1.27	1.29	1.30	1.31	1.33	1.34	1.36	1.38	1.39
.14	1.26	1.27	1.29	1.30	1.31	1.33	1.34	1.36	1.38	1.40
.15	1.26	1.28	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35-	1.36	1.38	1.40
.16	1.27	1.28	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35-	1.36	1.38	1.40
.17	1.27	1.28	1.29	1.31	1.32	1.34	1.35+	1.37	1.38	1.40
.18	1.27	1.28	1.30	1.31	1.32	1.34	1.35+	1.37	1.39	1.40
.19	1.27	1.29	1.30	1.31	1.33	1.34	1.36	1.37	1.39	1.41
.20	1.28	1.29	1.30	1.31	1.33	1.34	1.36	1.37	1.39	1.41
.21	1.28	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35-	1.36	1.38	1.39	1.41
.22	1.28	1.29	1.31	1.32	1.33	1.35-	1.36	1.38	1.40	1.42
.23	1.28	1.30	1.31	1.32	1.34	1.35+	1.37	1.38	1.40	1.42
.24	1.29	1.30	1.31	1.33	1.34	1.36	1.37	1.39	1.40	1.42
.25	1.29	1.30	1.32	1.33	1.34	1.36	1.37	1.39	1.41	1.43
.26	1.29	1.31	1.32	1.33	1.35-	1.36	1.38	1.40	1.41	1.43
.27	1.30	1.31	1.32	1.34	1.35+	1.37	1.38	1.40	1.42	1.43
.28	1.30	1.31	1.33	1.34	1.36	1.37	1.39	1.40	1.42	1.44
.29	1.31	1.32	1.33	1.35-	1.36	1.37	1.39	1.41	1.43	1.44
.30	1.31	1.32	1.34	1.35-	1.36	1.38	1.40	1.41	1.43	1.45-
.31	1.31	1.33	1.34	1.35+	1.37	1.38	1.40	1.42	1.43	1.45+
.32	1.32	1.33	1.35-	1.36	1.37	1.39	1.40	1.42	1.44	1.46
.33	1.32	1.34	1.35+	1.36	1.38	1.39	1.41	1.43	1.44	1.46
.34	1.33	1.34	1.36	1.37	1.38	1.40	1.42	1.43	1.45+	1.47
.35	1.33	1.35-	1.36	1.37	1.39	1.40	1.42	1.44	1.46	1.47
.36	1.34	1.35+	1.37	1.38	1.39	1.41	1.43	1.44	1.46	1.48
.37	1.35-	1.36	1.37	1.39	1.40	1.42	1.43	1.45-	1.47	1.49
.38	1.35+	1.36	1.38	1.39	1.41	1.42	1.44	1.46	1.47	1.49
.39	1.36	1.37	1.38	1.40	1.41	1.43	1.45-	1.46	1.48	1.50
.40	1.36	1.38	1.39	1.40	1.42	1.44	1.45+	1.47	1.49	1.51
.41	1.37	1.38	1.40	1.41	1.43	1.44	1.46	1.48	1.50	1.51
.42	1.38	1.39	1.40	1.42	1.43	1.45-	1.47	1.48	1.50	1.52
.43	1.38	1.40	1.41	1.43	1.44	1.46	1.47	1.49	1.51	1.53
.44	1.39	1.41	1.42	1.43	1.45-	1.47	1.48	1.50	1.52	1.54
.45	1.40	1.41	1.43	1.44	1.46	1.47	1.49	1.51	1.53	1.55-
.46	1.41	1.42	1.44	1.45+	1.47	1.48	1.50	1.52	1.54	1.56
.47	1.42	1.43	1.44	1.46	1.47	1.49	1.51	1.53	1.55-	1.57
.48	1.42	1.44	1.45+	1.47	1.48	1.50	1.52	1.54	1.55+	1.57
.49	1.43	1.45-	1.46	1.48	1.49	1.51	1.53	1.55	1.56	1.58

	.60	.61	.62	.63	.64	.65	.66	.67	.68	.69
.50	1.44	1.46	1.47	1.49	1.50	1.52	1.54	1.56	1.57	1.60
.51	1.45+	1.47	1.48	1.50	1.51	1.53	1.55-	1.57	1.59	1.61
.52	1.46	1.48	1.49	1.51	1.52	1.54	1.56	1.58	1.60	1.62
.53	1.47	1.49	1.50	1.52	1.53	1.55+	1.57	1.59	1.61	1.63
.54	1.49	1.50	1.51	1.53	1.55-	1.56	1.58	1.60	1.62	1.64
.55	1.50	1.51	1.53	1.54	1.56	1.58	1.59	1.61	1.63	1.65+
.56	1.51	1.52	1.54	1.55+	1.57	1.59	1.61	1.63	1.65-	1.67
.57	1.52	1.54	1.55+	1.57	1.58	1.60	1.62	1.64	1.66	1.68
.58	1.53	1.55-	1.56	1.58	1.60	1.62	1.63	1.65+	1.67	1.70
.59	1.55-	1.56	1.58	1.59	1.61	1.63	1.65-	1.67	1.69	1.71
.60	1.56	1.58	1.59	1.61	1.63	1.65-	1.66	1.68	1.70	1.73
.61	1.58	1.59	1.61	1.62	1.64	1.66	1.68	1.70	1.72	1.74
.62	1.59	1.61	1.62	1.64	1.66	1.68	1.70	1.72	1.74	1.76
.63	1.61	1.62	1.64	1.66	1.68	1.69	1.71	1.73	1.76	1.78
.64	1.63	1.64	1.66	1.68	1.69	1.71	1.73	1.75+	1.77	1.80
.65	1.65-	1.66	1.68	1.69	1.71	1.73	1.75+	1.77	1.79	1.82
.66	1.66	1.68	1.70	1.71	1.73	1.75+	1.77	1.79	1.82	1.84
.67	1.68	1.70	1.72	1.73	1.75+	1.77	1.79	1.81	1.84	1.86
.68	1.70	1.72	1.74	1.76	1.77	1.79	1.82	1.84	1.86	1.88
.69	1.73	1.74	1.76	1.78	1.80	1.82	1.84	1.86	1.88	1.91
.70	1.75+	1.77	1.78	1.80	1.82	1.84	1.86	1.89	1.91	1.93
.71	1.77	1.79	1.81	1.83	1.85-	1.87	1.89	1.91	1.94	1.96
.72	1.80	1.82	1.84	1.86	1.88	1.90	1.92	1.94	1.97	1.99
.73	1.83	1.85-	1.86	1.88	1.90	1.93	1.95-	1.97	2.00	2.02
.74	1.86	1.88	1.90	1.91	1.93	1.96	1.98	2.00	2.03	2.05+
.75	1.89	1.91	1.93	1.95-	1.97	1.99	2.01	2.04	2.06	2.09
.76	1.92	1.94	1.96	1.98	2.00	2.02	2.05-	2.07	2.10	2.13
.77	1.96	1.98	2.00	2.02	2.04	2.06	2.09	2.11	2.14	2.17
.78	2.00	2.02	2.04	2.06	2.08	2.10	2.13	2.15+	2.18	2.21
.79	2.04	2.06	2.08	2.10	2.12	2.15-	2.17	2.20	2.22	2.25+
.80	2.08	2.10	2.12	2.15-	2.17	2.19	2.22	2.25-	2.27	2.30
.81	2.13	2.15+	2.17	2.20	2.22	2.24	2.27	2.30	2.33	2.36
.82	2.18	2.21	2.23	2.25-	2.27	2.30	2.33	2.35+	2.38	2.41
.83	2.24	2.26	2.29	2.31	2.33	2.36	2.39	2.41	2.44	2.48
.84	2.30	2.33	2.35-	2.37	2.40	2.43	2.45+	2.48	2.51	2.55+
.85	2.37	2.40	2.42	2.44	2.47	2.50	2.53	2.56	2.59	2.62
.86	2.45-	2.47	2.50	2.52	2.55+	2.58	2.61	2.64	2.67	2.71
.87	2.54	2.56	2.59	2.61	2.64	2.67	2.70	2.73	2.77	2.80
.88	2.63	2.66	2.68	2.71	2.74	2.77	2.80	2.84	2.87	2.91
.89	2.74	2.77	2.80	2.82	2.85+	2.89	2.92	2.95+	2.99	3.03
.90	2.87	2.90	2.92	2.95+	2.99	3.02	3.05+	3.09	3.13	3.17
.91	3.01	3.04	3.07	3.11	3.14	3.17	3.21	3.25-	3.29	3.33
.92	3.19	3.22	3.25+	3.29	3.32	3.36	3.40	3.44	3.48	3.52
.93	3.40	3.43	3.47	3.50	3.54	3.58	3.62	3.66	3.71	3.76
.94	3.66	3.70	3.74	3.77	3.82	3.86	3.90	3.95-	4.00	4.05+
.95	4.00	4.04	4.08	4.12	4.17	4.21	4.26	4.31	4.37	4.42
.96	4.46	4.51	4.55+	4.60	4.65-	4.70	4.75+	4.81	4.87	4.93
.97	5.14	5.19	5.24	5.30	5.35+	5.41	5.48	5.54	5.61	5.68
.98	6.28	6.34	6.41	6.47	6.54	6.61	6.69	6.77	6.85+	6.94
.99	8.86	8.94	9.03	9.12	9.23	9.33	9.43	9.55+	9.67	9.79

表二十(續)

	.70	.71	.72	.73	.74	.75	.76	.77	.78	.79
.00	1.40	1.42	1.44	1.46	1.49	1.51	1.54	1.57	1.60	1.63
.01	1.40	1.42	1.44	1.46	1.49	1.51	1.54	1.57	1.60	1.63
.02	1.40	1.42	1.44	1.46	1.49	1.51	1.54	1.57	1.60	1.63
.03	1.40	1.42	1.44	1.46	1.49	1.51	1.54	1.57	1.60	1.63
.04	1.40	1.42	1.44	1.46	1.49	1.51	1.54	1.57	1.60	1.63
.05	1.40	1.42	1.44	1.46	1.49	1.51	1.54	1.57	1.60	1.63
.06	1.40	1.42	1.44	1.47	1.49	1.51	1.54	1.57	1.60	1.63
.07	1.40	1.42	1.44	1.47	1.49	1.52	1.54	1.57	1.60	1.64
.08	1.40	1.42	1.45-	1.47	1.49	1.52	1.54	1.57	1.60	1.64
.09	1.41	1.43	1.45-	1.47	1.49	1.52	1.54	1.57	1.60	1.64
.10	1.41	1.43	1.45-	1.47	1.49	1.52	1.55-	1.58	1.61	1.64
.11	1.41	1.43	1.45-	1.47	1.50	1.52	1.55-	1.58	1.61	1.64
.12	1.41	1.43	1.45+	1.47	1.50	1.52	1.55-	1.58	1.61	1.64
.13	1.41	1.43	1.45+	1.48	1.50	1.52	1.55+	1.58	1.61	1.65-
.14	1.41	1.43	1.46	1.48	1.50	1.53	1.55+	1.58	1.61	1.65-
.15	1.42	1.44	1.46	1.48	1.50	1.53	1.56	1.59	1.62	1.65-
.16	1.42	1.44	1.46	1.48	1.51	1.53	1.56	1.59	1.62	1.65+
.17	1.42	1.44	1.46	1.48	1.51	1.53	1.56	1.59	1.62	1.66
.18	1.42	1.44	1.46	1.49	1.51	1.54	1.56	1.59	1.62	1.66
.19	1.43	1.45-	1.47	1.49	1.51	1.54	1.57	1.60	1.63	1.66
.20	1.43	1.45-	1.47	1.49	1.52	1.54	1.57	1.60	1.63	1.66
.21	1.43	1.45+	1.47	1.50	1.52	1.55-	1.57	1.60	1.63	1.67
.22	1.44	1.46	1.48	1.50	1.52	1.55-	1.58	1.61	1.64	1.67
.23	1.44	1.46	1.48	1.50	1.53	1.55+	1.58	1.61	1.64	1.68
.24	1.44	1.46	1.48	1.51	1.53	1.56	1.59	1.61	1.65-	1.68
.25	1.45-	1.47	1.49	1.51	1.54	1.56	1.59	1.62	1.65+	1.68
.26	1.45+	1.47	1.49	1.52	1.54	1.57	1.59	1.62	1.65+	1.69
.27	1.45+	1.47	1.50	1.52	1.54	1.57	1.60	1.63	1.66	1.69
.28	1.46	1.48	1.50	1.52	1.55-	1.57	1.60	1.63	1.66	1.70
.29	1.46	1.48	1.51	1.53	1.55+	1.58	1.61	1.64	1.67	1.70
.30	1.47	1.49	1.51	1.53	1.56	1.58	1.61	1.64	1.68	1.71
.31	1.47	1.49	1.52	1.54	1.56	1.59	1.62	1.65-	1.68	1.72
.32	1.48	1.50	1.52	1.54	1.57	1.60	1.62	1.65+	1.69	1.72
.33	1.48	1.50	1.53	1.55-	1.58	1.60	1.63	1.66	1.69	1.73
.34	1.49	1.51	1.53	1.56	1.58	1.61	1.64	1.67	1.70	1.73
.35	1.49	1.52	1.54	1.56	1.59	1.61	1.64	1.67	1.71	1.74
.36	1.50	1.52	1.54	1.57	1.59	1.62	1.65-	1.68	1.71	1.75-
.37	1.51	1.53	1.55+	1.58	1.60	1.63	1.66	1.69	1.72	1.76
.38	1.51	1.54	1.56	1.58	1.61	1.63	1.66	1.69	1.73	1.76
.39	1.52	1.54	1.56	1.59	1.61	1.64	1.67	1.70	1.74	1.77
.40	1.53	1.55-	1.57	1.60	1.62	1.65-	1.68	1.71	1.74	1.78
.41	1.54	1.56	1.58	1.60	1.63	1.66	1.69	1.72	1.75+	1.79
.42	1.54	1.56	1.59	1.61	1.64	1.67	1.70	1.73	1.76	1.80
.43	1.55+	1.57	1.60	1.62	1.65-	1.67	1.70	1.74	1.77	1.81
.44	1.56	1.58	1.60	1.63	1.66	1.68	1.71	1.75-	1.78	1.82
.45	1.57	1.59	1.61	1.64	1.66	1.69	1.72	1.76	1.79	1.83
.46	1.58	1.60	1.62	1.65-	1.67	1.70	1.73	1.77	1.80	1.84
.47	1.59	1.61	1.63	1.66	1.68	1.71	1.74	1.78	1.81	1.85-
.48	1.60	1.62	1.64	1.67	1.69	1.72	1.75+	1.79	1.82	1.86
.49	1.61	1.63	1.65+	1.68	1.71	1.73	1.76	1.80	1.83	1.87

	.70	.71	.72	.73	.74	.75	.76	.77	.78	.79
.50	1.62	1.64	1.66	1.69	1.72	1.75-	1.78	1.81	1.85-	1.88
.51	1.63	1.65+	1.68	1.70	1.73	1.76	1.79	1.82	1.86	1.90
.52	1.64	1.66	1.69	1.71	1.74	1.77	1.80	1.83	1.87	1.91
.53	1.65+	1.67	1.70	1.73	1.75+	1.78	1.81	1.85-	1.88	1.92
.54	1.66	1.69	1.71	1.74	1.77	1.80	1.83	1.86	1.90	1.94
.55	1.68	1.70	1.73	1.75+	1.78	1.81	1.84	1.88	1.91	1.95+
.56	1.69	1.71	1.74	1.77	1.79	1.82	1.86	1.89	1.93	1.97
.57	1.70	1.73	1.75+	1.78	1.81	1.84	1.87	1.91	1.94	1.98
.58	1.72	1.74	1.77	1.80	1.83	1.86	1.89	1.92	1.96	2.00
.59	1.73	1.76	1.78	1.81	1.84	1.87	1.91	1.94	1.98	2.02
.60	1.75+	1.77	1.80	1.83	1.86	1.89	1.92	1.96	2.00	2.04
.61	1.77	1.79	1.82	1.85-	1.88	1.91	1.94	1.98	2.02	2.06
.62	1.78	1.81	1.84	1.86	1.90	1.93	1.96	2.00	2.04	2.08
.63	1.80	1.83	1.86	1.88	1.91	1.95-	1.98	2.02	2.06	2.10
.64	1.82	1.85-	1.88	1.90	1.93	1.97	2.00	2.04	2.08	2.12
.65	1.84	1.87	1.90	1.93	1.96	1.99	2.02	2.06	2.10	2.15-
.66	1.86	1.89	1.92	1.95-	1.98	2.01	2.05-	2.09	2.13	2.17
.67	1.89	1.91	1.94	1.97	2.00	2.04	2.07	2.11	2.15+	2.20
.68	1.91	1.94	1.97	2.00	2.03	2.06	2.10	2.14	2.18	2.22
.69	1.93	1.96	1.99	2.02	2.05+	2.09	2.13	2.17	2.21	2.25+
.70	1.96	1.99	2.02	2.05-	2.08	2.12	2.15+	2.19	2.24	2.28
.71	1.99	2.02	2.05-	2.08	2.11	2.15-	2.18	2.23	2.27	2.32
.72	2.02	2.05-	2.08	2.11	2.14	2.18	2.22	2.26	2.30	2.35+
.73	2.05-	2.08	2.11	2.14	2.18	2.21	2.25+	2.29	2.34	2.39
.74	2.08	2.11	2.14	2.18	2.21	2.25-	2.29	2.33	2.38	2.42
.75	2.12	2.15-	2.18	2.21	2.25-	2.29	2.33	2.37	2.42	2.47
.76	2.15+	2.18	2.22	2.25+	2.29	2.33	2.37	2.41	2.46	2.51
.77	2.19	2.23	2.26	2.29	2.33	2.37	2.41	2.46	2.50	2.56
.78	2.24	2.27	2.30	2.34	2.38	2.42	2.46	2.50	2.55+	2.61
.79	2.28	2.32	2.35+	2.39	2.42	2.47	2.51	2.56	2.61	2.66
.80	2.33	2.37	2.40	2.44	2.48	2.52	2.56	2.61	2.66	2.72
.81	2.39	2.42	2.46	2.50	2.54	2.58	2.62	2.67	2.72	2.78
.82	2.45-	2.48	2.52	2.56	2.60	2.64	2.69	2.74	2.79	2.85-
.83	2.51	2.55-	2.58	2.62	2.67	2.71	2.76	2.81	2.87	2.92
.84	2.58	2.62	2.66	2.70	2.74	2.79	2.84	2.89	2.95-	3.01
.85	2.66	2.70	2.74	2.78	2.82	2.87	2.92	2.98	3.03	3.10
.86	2.74	2.78	2.82	2.87	2.91	2.96	3.01	3.07	3.13	3.20
.87	2.84	2.88	2.92	2.97	3.02	3.07	3.12	3.18	3.24	3.31
.88	2.95-	2.99	3.03	3.08	3.13	3.18	3.24	3.30	3.36	3.43
.89	3.07	3.11	3.16	3.21	3.26	3.32	3.37	3.44	3.51	3.58
.90	3.21	3.26	3.31	3.36	3.41	3.47	3.53	3.60	3.67	3.74
.91	3.38	3.42	3.48	3.53	3.59	3.65-	3.71	3.78	3.85+	3.93
.92	3.57	3.62	3.68	3.73	3.79	3.86	3.93	4.00	4.08	4.16
.93	3.81	3.86	3.92	3.98	4.05-	4.11	4.19	4.26	4.35-	4.44
.94	4.11	4.16	4.22	4.29	4.36	4.43	4.51	4.59	4.68	4.78
.95	4.48	4.55-	4.61	4.69	4.76	4.84	4.93	5.02	5.12	5.22
.96	5.00	5.07	5.15-	5.22	5.31	5.40	5.49	5.60	5.71	5.82
.97	5.76	5.84	5.93	6.02	6.12	6.22	6.33	6.45-	6.57	6.71
.98	7.04	7.14	7.24	7.35+	7.47	7.60	7.73	7.87	8.03	8.20
.99	9.93	10.07	10.21	10.37	10.54	10.72	10.91	11.11	11.33	11.56

表二十 (續)

103

	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
00	1.67	1.71	1.75-	1.79	1.84	1.90	1.96	2.03	2.11	2.19
01	1.67	1.71	1.75-	1.79	1.84	1.90	1.96	2.03	2.11	2.19
02	1.67	1.71	1.75-	1.79	1.84	1.90	1.96	2.03	2.11	2.19
03	1.67	1.71	1.75-	1.79	1.84	1.90	1.96	2.03	2.11	2.19
04	1.67	1.71	1.75-	1.79	1.84	1.90	1.96	2.03	2.11	2.19
05	1.67	1.71	1.75-	1.80	1.85-	1.90	1.96	2.03	2.11	2.20
06	1.67	1.71	1.75+	1.80	1.85-	1.90	1.96	2.03	2.11	2.20
07	1.67	1.71	1.75+	1.80	1.85-	1.90	1.96	2.03	2.11	2.20
08	1.67	1.71	1.75+	1.80	1.85-	1.90	1.97	2.03	2.11	2.20
09	1.67	1.71	1.75+	1.80	1.85+	1.91	1.97	2.04	2.11	2.20
10	1.68	1.71	1.76	1.80	1.85+	1.91	1.97	2.04	2.12	2.20
11	1.68	1.72	1.76	1.80	1.85+	1.91	1.97	2.04	2.12	2.21
12	1.68	1.72	1.76	1.81	1.86	1.91	1.97	2.04	2.12	2.21
13	1.68	1.72	1.76	1.81	1.86	1.91	1.98	2.05-	2.12	2.21
14	1.68	1.72	1.76	1.81	1.86	1.92	1.98	2.05-	2.13	2.21
15	1.69	1.72	1.77	1.81	1.86	1.92	1.98	2.05+	2.13	2.22
16	1.69	1.73	1.77	1.82	1.87	1.92	1.99	2.05+	2.13	2.22
17	1.69	1.73	1.77	1.82	1.87	1.93	1.99	2.06	2.14	2.23
18	1.69	1.73	1.78	1.82	1.87	1.93	1.99	2.06	2.14	2.23
19	1.70	1.74	1.78	1.83	1.88	1.93	2.00	2.07	2.14	2.23
20	1.70	1.74	1.78	1.83	1.88	1.94	2.00	2.07	2.15-	2.24
21	1.70	1.74	1.79	1.83	1.89	1.94	2.00	2.07	2.15+	2.24
22	1.71	1.75-	1.79	1.84	1.89	1.95-	2.01	2.08	2.16	2.25-
23	1.71	1.75+	1.80	1.84	1.89	1.95+	2.01	2.08	2.16	2.25+
24	1.72	1.76	1.80	1.85-	1.90	1.96	2.02	2.09	2.17	2.26
26	1.72	1.76	1.80	1.85+	1.90	1.96	2.02	2.09	2.17	2.27
27	1.73	1.77	1.81	1.86	1.91	1.97	2.03	2.10	2.18	2.27
28	1.73	1.77	1.81	1.86	1.91	1.97	2.04	2.11	2.19	2.28
29	1.74	1.78	1.82	1.87	1.92	1.98	2.04	2.11	2.19	2.28
30	1.74	1.78	1.83	1.87	1.93	1.98	2.05-	2.12	2.20	2.29
31	1.75-	1.79	1.83	1.88	1.93	1.99	2.05+	2.13	2.21	2.30
32	1.75+	1.79	1.84	1.89	1.94	2.00	2.06	2.13	2.21	2.31
33	1.76	1.80	1.84	1.89	1.95-	2.00	2.07	2.14	2.22	2.31
34	1.77	1.81	1.85+	1.90	1.95+	2.01	2.08	2.15-	2.23	2.32
35	1.77	1.81	1.86	1.91	1.96	2.02	2.08	2.16	2.24	2.33
36	1.78	1.82	1.86	1.91	1.97	2.03	2.09	2.16	2.25	2.34
37	1.79	1.83	1.87	1.92	1.98	2.03	2.10	2.17	2.26	2.35+
38	1.79	1.84	1.88	1.93	1.98	2.04	2.11	2.18	2.27	2.36
39	1.80	1.84	1.89	1.94	1.99	2.05+	2.12	2.19	2.28	2.37
40	1.81	1.85+	1.90	1.95-	2.00	2.06	2.13	2.20	2.29	2.38
41	1.82	1.86	1.91	1.96	2.01	2.07	2.14	2.21	2.30	2.39
42	1.83	1.87	1.92	1.97	2.02	2.08	2.15-	2.22	2.31	2.40
43	1.84	1.88	1.93	1.98	2.03	2.09	2.16	2.23	2.32	2.42
44	1.85-	1.89	1.94	1.99	2.04	2.10	2.17	2.25-	2.33	2.43
45	1.86	1.90	1.95-	2.00	2.05+	2.11	2.18	2.26	2.34	2.44
46	1.87	1.91	1.96	2.01	2.06	2.13	2.19	2.27	2.36	2.46
47	1.88	1.92	1.97	2.02	2.08	2.14	2.21	2.28	2.37	2.47
48	1.89	1.93	1.98	2.03	2.09	2.15+	2.22	2.30	2.39	2.48
49	1.90	1.94	1.99	2.04	2.10	2.16	2.23	2.31	2.40	2.50
50	1.91	1.96	2.00	2.06	2.11	2.18	2.25-	2.33	2.42	2.52

	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
50	1.92	1.97	2.02	2.07	2.13	2.19	2.26	2.34	2.43	2.53
51	1.94	1.98	2.03	2.08	2.14	2.21	2.28	2.36	2.45-	2.55-
52	1.95+	2.00	2.05-	2.10	2.16	2.22	2.29	2.37	2.46	2.57
53	1.97	2.01	2.06	2.11	2.17	2.24	2.31	2.39	2.48	2.59
54	1.98	2.03	2.08	2.13	2.19	2.26	2.33	2.41	2.50	2.61
55	2.00	2.04	2.09	2.15-	2.21	2.27	2.35-	2.43	2.52	2.63
56	2.01	2.06	2.11	2.16	2.22	2.29	2.37	2.45-	2.54	2.65-
57	2.03	2.08	2.13	2.18	2.24	2.31	2.38	2.47	2.56	2.67
58	2.05-	2.09	2.14	2.20	2.26	2.33	2.41	2.49	2.58	2.69
59	2.06	2.11	2.16	2.22	2.28	2.35+	2.43	2.51	2.61	2.72
60	2.08	2.13	2.18	2.24	2.30	2.37	2.45-	2.54	2.63	2.74
61	2.10	2.15+	2.21	2.26	2.33	2.40	2.47	2.56	2.66	2.77
62	2.12	2.17	2.23	2.29	2.35-	2.42	2.50	2.59	2.68	2.80
63	2.15-	2.20	2.25-	2.31	2.37	2.44	2.52	2.61	2.71	2.82
64	2.17	2.22	2.27	2.33	2.40	2.47	2.55+	2.64	2.74	2.85+
65	2.19	2.24	2.30	2.36	2.43	2.50	2.58	2.67	2.77	2.89
66	2.22	2.27	2.33	2.39	2.45+	2.53	2.61	2.70	2.80	2.92
67	2.25-	2.30	2.35+	2.41	2.48	2.56	2.64	2.73	2.84	2.95+
68	2.27	2.33	2.38	2.44	2.51	2.59	2.67	2.77	2.87	2.99
69	2.30	2.36	2.41	2.48	2.55-	2.62	2.71	2.80	2.91	3.03
70	2.33	2.39	2.45-	2.51	2.58	2.66	2.74	2.84	2.95-	3.07
71	2.37	2.42	2.48	2.55-	2.62	2.70	2.78	2.88	2.99	3.11
72	2.40	2.46	2.52	2.58	2.66	2.74	2.82	2.92	3.03	3.16
73	2.44	2.50	2.56	2.62	2.70	2.78	2.87	2.97	3.08	3.21
74	2.48	2.54	2.60	2.67	2.74	2.82	2.91	3.02	3.13	3.26
75	2.52	2.58	2.64	2.71	2.79	2.87	2.96	3.07	3.18	3.32
76	2.56	2.62	2.69	2.76	2.84	2.92	3.01	3.12	3.24	3.37
77	2.61	2.67	2.74	2.81	2.89	2.98	3.07	3.18	3.30	3.44
78	2.66	2.72	2.79	2.87	2.95	3.03	3.13	3.24	3.36	3.51
79	2.72	2.78	2.85-	2.92	3.01	3.10	3.20	3.31	3.43	3.58
80	2.78	2.84	2.91	2.99	3.07	3.16	3.27	3.38	3.51	3.65+
81	2.84	2.91	2.98	3.06	3.14	3.24	3.34	3.46	3.59	3.74
82	2.91	2.98	3.05+	3.13	3.22	3.32	3.42	3.54	3.68	3.83
83	2.99	3.06	3.13	3.21	3.30	3.40	3.51	3.64	3.78	3.93
84	3.07	3.14	3.22	3.30	3.40	3.50	3.61	3.74	3.88	4.04
85	3.16	3.24	3.32	3.40	3.50	3.60	3.72	3.85+	4.00	4.16
86	3.27	3.34	3.42	3.51	3.61	3.72	3.84	3.97	4.13	4.30
87	3.38	3.46	3.54	3.64	3.74	3.85+	3.97	4.11	4.27	4.45-
88	3.51	3.59	3.68	3.78	3.88	4.00	4.13	4.27	4.43	4.62
89	3.65+	3.74	3.83	3.93	4.04	4.16	4.30	4.45-	4.62	4.81
90	3.82	3.91	4.01	4.11	4.23	4.36	4.50	4.65+	4.83	5.03
91	4.02	4.11	4.21	4.32	4.44	4.58	4.73	4.89	5.08	5.29
92	4.25+	4.35+	4.46	4.57	4.70	4.84	5.00	5.18	5.37	5.60
93	4.54	4.64	4.75+	4.88	5.02	5.17	5.33	5.52	5.73	5.97
94	4.89	5.00	5.12	5.25+	5.40	5.56	5.74	5.95-	6.17	6.43
95	5.34	5.46	5.60	5.74	5.90	6.08	6.28	6.49	6.74	7.02
96	5.95+	6.09	6.24	6.40	6.58	6.78	7.00	7.24	7.52	7.83
97	6.85+	7.01	7.19	7.37	7.58	7.81	8.06	8.34	8.66	9.03
98	8.38	8.57	8.78	9.01	9.26	9.54	9.85+	10.19	10.58	11.03
99	11.82	12.09	12.39	12.71	13.07	13.46	13.89	14.37	14.93	15.55+

表二十(續)

105

	.90	.91	.92	.93	.94	.95	.96	.97	.98	.99
.00	2.29	2.41	2.55+	2.72	2.93	3.20	3.57	4.11	5.03	7.09
.01	2.29	2.41	2.55+	2.72	2.93	3.20	3.57	4.11	5.03	7.09
.02	2.29	2.41	2.55+	2.72	2.93	3.20	3.57	4.11	5.03	7.09
.03	2.30	2.41	2.55+	2.72	2.93	3.20	3.57	4.12	5.03	7.09
.04	2.30	2.41	2.55+	2.72	2.93	3.21	3.57	4.12	5.03	7.09
.05	2.30	2.41	2.55+	2.72	2.94	3.21	3.58	4.12	5.03	7.10
.06	2.30	2.42	2.56	2.73	2.94	3.21	3.58	4.12	5.04	7.10
.07	2.30	2.42	2.56	2.73	2.94	3.21	3.58	4.12	5.04	7.11
.08	2.30	2.42	2.56	2.73	2.94	3.21	3.58	4.13	5.04	7.11
.09	2.30	2.42	2.56	2.73	2.94	3.22	3.59	4.13	5.05-	7.12
.10	2.31	2.42	2.56	2.73	2.95-	3.22	3.59	4.13	5.05+	7.12
.11	2.31	2.43	2.57	2.74	2.95-	3.22	3.59	4.14	5.06	7.13
.12	2.31	2.43	2.57	2.74	2.95+	3.23	3.60	4.14	5.06	7.14
.13	2.31	2.43	2.57	2.74	2.96	3.23	3.60	4.15-	5.07	7.15-
.14	2.32	2.44	2.58	2.75-	2.96	3.23	3.61	4.15+	5.08	7.16
.15	2.32	2.44	2.58	2.75+	2.96	3.24	3.61	4.16	5.08	7.17
.16	2.32	2.44	2.58	2.76	2.97	3.24	3.62	4.17	5.09	7.18
.17	2.33	2.45-	2.59	2.76	2.97	3.25-	3.62	4.17	5.10	7.19
.18	2.33	2.45+	2.59	2.77	2.98	3.26	3.63	4.18	5.11	7.20
.19	2.34	2.46	2.60	2.77	2.99	3.26	3.64	4.19	5.12	7.22
.20	2.34	2.46	2.60	2.78	2.99	3.27	3.65-	4.20	5.13	7.24
.21	2.35-	2.47	2.61	2.78	3.00	3.28	3.65+	4.21	5.14	7.25+
.22	2.35+	2.47	2.62	2.79	3.00	3.28	3.66	4.22	5.15+	7.27
.23	2.36	2.48	2.62	2.80	3.01	3.29	3.67	4.23	5.16	7.28
.24	2.36	2.48	2.63	2.80	3.02	3.30	3.68	4.24	5.18	7.30
.25	2.37	2.49	2.64	2.81	3.03	3.31	3.69	4.25-	5.19	7.32
.26	2.38	2.50	2.64	2.82	3.04	3.32	3.70	4.26	5.20	7.34
.27	2.38	2.51	2.65-	2.83	3.04	3.33	3.71	4.27	5.22	7.36
.28	2.39	2.51	2.66	2.83	3.05+	3.34	3.72	4.28	5.24	7.39
.29	2.40	2.52	2.67	2.84	3.06	3.35-	3.73	4.30	5.25+	7.41
.30	2.41	2.53	2.67	2.85+	3.07	3.36	3.74	4.31	5.27	7.43
.31	2.41	2.54	2.68	2.86	3.08	3.37	3.76	4.33	5.29	7.46
.32	2.42	2.55-	2.69	2.87	3.09	3.38	3.77	4.34	5.31	7.49
.33	2.43	2.55+	2.70	2.88	3.10	3.39	3.78	4.36	5.32	7.51
.34	2.44	2.56	2.71	2.89	3.12	3.41	3.80	4.37	5.34	7.54
.35	2.45-	2.57	2.72	2.90	3.13	3.42	3.81	4.39	5.36	7.57
.36	2.46	2.59	2.74	2.92	3.14	3.43	3.83	4.41	5.39	7.60
.37	2.47	2.60	2.75-	2.93	3.15+	3.45-	3.84	4.43	5.41	7.63
.38	2.48	2.61	2.76	2.94	3.17	3.46	3.86	4.45-	5.43	7.66
.39	2.49	2.62	2.77	2.95+	3.18	3.48	3.88	4.47	5.46	7.70
.40	2.50	2.63	2.78	2.97	3.20	3.49	3.90	4.49	5.48	7.73
.41	2.52	2.64	2.80	2.98	3.21	3.51	3.92	4.51	5.51	7.77
.42	2.53	2.66	2.81	3.00	3.23	3.53	3.94	4.53	5.54	7.81
.43	2.54	2.67	2.83	3.01	3.25-	3.55-	3.96	4.56	5.56	7.85-
.44	2.55+	2.69	2.84	3.03	3.26	3.57	3.98	4.58	5.60	7.89
.45	2.57	2.70	2.86	3.05-	3.28	3.59	4.00	4.61	5.63	7.94
.46	2.58	2.72	2.87	3.06	3.30	3.61	4.02	4.63	5.66	7.98
.47	2.60	2.73	2.89	3.08	3.32	3.63	4.05-	4.66	5.69	8.03
.48	2.62	2.75-	2.91	3.10	3.34	3.65+	4.07	4.69	5.73	8.08
.49	2.63	2.77	2.93	3.12	3.36	3.67	4.10	4.72	5.76	8.13

	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
50	2.65-	2.78	2.95-	3.14	3.38	3.70	4.12	4.75+	5.80	8.18
51	2.67	80	2.97	3.16	3.41	3.72	4.15+	4.78	5.84	8.24
52	2.69	2.82	2.99	3.18	3.43	3.75-	4.18	4.81	5.88	8.30
53	2.71	2.84	3.01	3.21	3.46	3.78	4.21	4.85-	5.93	8.36
54	2.73	2.87	3.03	3.23	3.48	3.81	4.24	4.89	5.97	8.42
55	2.75-	2.89	3.06	3.26	3.51	3.83	4.28	4.93	6.02	8.49
56	2.77	2.91	3.08	3.28	3.54	3.87	4.31	4.97	6.06	8.55+
57	2.79	2.94	3.11	3.31	3.57	3.90	4.35-	5.01	6.12	8.63
58	2.82	2.96	3.13	3.34	3.60	3.93	4.38	5.05+	6.17	8.70
59	2.84	2.99	3.16	3.37	3.63	3.97	4.42	5.09	6.22	8.78
60	2.87	3.01	3.19	3.40	3.66	4.00	4.46	5.14	6.28	8.86
61	2.90	3.04	3.22	3.43	3.70	4.04	4.51	5.19	6.34	8.94
62	2.92	3.07	3.25+	3.47	3.74	4.08	4.55+	5.24	6.41	9.03
63	2.95+	3.11	3.29	3.50	3.77	4.12	4.60	5.30	6.47	9.12
64	2.99	3.14	3.32	3.54	3.82	4.17	4.65-	5.35+	6.54	9.23
65	3.02	3.17	3.36	3.58	3.86	4.21	4.70	5.41	6.61	9.33
66	3.05+	3.21	3.40	3.62	3.90	4.26	4.75+	5.48	6.69	9.43
67	3.09	3.25-	3.44	3.66	3.95-	4.31	4.81	5.54	6.77	9.55+
68	3.13	3.29	3.48	3.71	4.00	4.37	4.87	5.61	6.85+	9.67
69	3.17	3.33	3.52	3.76	4.05+	4.42	4.93	5.68	6.94	9.79
70	3.21	3.38	3.57	3.81	4.11	4.48	5.00	5.76	7.04	9.93
71	3.26	3.42	3.62	3.86	4.16	4.55-	5.07	5.84	7.14	10.07
72	3.31	3.48	3.68	3.92	4.22	4.61	5.15-	5.93	7.24	10.21
73	3.36	3.53	3.73	3.98	4.29	4.69	5.22	6.02	7.35+	10.37
74	3.41	3.59	3.79	4.05-	4.36	4.76	5.31	6.12	7.47	10.54
75	3.47	3.65-	3.86	4.11	4.43	4.84	5.40	6.22	7.60	10.72
76	3.53	3.71	3.93	4.19	4.51	4.93	5.49	6.33	7.73	10.91
77	3.60	3.78	4.00	4.26	4.59	5.02	5.60	6.45-	7.87	11.11
78	3.67	3.85+	4.08	4.35-	4.68	5.12	5.71	6.57	8.03	11.31
79	3.74	3.93	4.16	4.44	4.78	5.22	5.82	6.71	8.20	11.56
80	3.82	4.02	4.25+	4.54	4.89	5.34	5.95+	6.85+	8.38	11.82
81	3.91	4.11	4.35+	4.64	5.00	5.46	6.09	7.01	8.57	12.09
82	4.01	4.21	4.46	4.75+	5.12	5.60	6.24	7.19	8.78	12.39
83	4.11	4.32	4.57	4.88	5.25+	5.74	6.40	7.37	9.01	12.71
84	4.23	4.44	4.70	5.02	5.40	5.90	6.58	7.58	9.26	13.07
85	4.36	4.58	4.84	5.17	5.56	6.08	6.78	7.81	9.54	13.46
86	4.50	4.73	5.00	5.33	5.74	6.28	7.00	8.06	9.85+	13.89
87	4.65+	4.89	5.18	5.52	5.95-	6.49	7.24	8.34	10.19	14.37
88	4.83	5.08	5.37	5.73	6.17	6.74	7.52	8.66	10.58	14.93
89	5.03	5.29	5.60	5.97	6.43	7.02	7.83	9.03	11.03	15.55+
90	5.26	5.53	5.85+	6.24	6.72	7.35-	8.20	9.43	11.53	16.26
91	5.53	5.82	6.15+	6.56	7.07	7.72	8.61	9.92	12.12	17.09
92	5.85+	6.15+	6.51	6.94	7.48	8.17	9.12	10.49	12.82	18.08
93	6.24	6.56	6.94	7.40	7.97	8.71	9.72	11.19	13.68	19.27
94	6.72	7.07	7.48	7.97	8.59	9.39	10.47	12.06	14.73	20.79
95	7.35-	7.72	8.17	8.71	9.39	10.26	11.44	13.18	16.10	22.73
96	8.20	8.61	9.12	9.72	10.47	11.44	12.76	14.68	17.95+	25.32
97	9.43	9.92	10.49	11.19	12.06	13.18	14.68	16.92	20.66	29.15+
98	11.53	12.12	12.82	13.68	14.73	16.10	17.95+	20.66	25.25+	35.59
99	16.26	17.09	18.08	19.27	20.79	22.73	25.32	29.15+	35.59	50.25+

