Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 15

Aufgaben

AUFGABE 15.1. Es sei B ein diskreter Bewertungsring, sei $u \in B^\times$ eine Einheit und sei $X^n - u$ irreduzibel in $B[X]$. Zeige, dass

$$R = B[X]/(X^n - u)$$

normal ist, falls n eine Einheit in B ist.

AUFGABE 15.2. Es sei B ein diskreter Bewertungsring, in dem 2 eine Einheit sei, und sei p eine Ortsuniformisierende von B. Bestimme, für welche m der Ring

$$R = B[X]/\big(X^2 - p^m\big)$$

ein normaler Integritätsbereich ist.

AUFGABE 15.3. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $S \subseteq L$ eine endliche Ringerweiterung von $\mathbb{Z}$. Zeige, dass S genau dann normal ist, wenn für jede Primzahl p die Nenneraufnahme $S_{\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}p}$ normal ist.

AUFGABE 15.4. Bestimme für welche Primzahlen p das Polynom $X^2 + 3 \in \mathbb{Z}/(p)[X]$ irreduzibel ist bzw. in einfache Linearfaktoren zerfällt. Für welche Primzahlen ist $\mathbb{Z}_{(p)}[X]/(X^2 - 3)$ normal?

AUFGABE 15.5.*

(1) Zeige, dass das Polynom $X^3 + X + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist.
(2) Bestimme die Primfaktorzerlegung von $X^3 + X + 1$ in $\mathbb{Z}/(3)[X]$.
(3) Bestimme die Primfaktorzerlegung von $X^3 + X + 1$ in $\mathbb{Z}/(31)[X]$.
(4) Man finde eine positive Zahl n derart, dass für alle Primzahlen p, die n nicht teilen, der Faserring $\mathbb{Z}/(p)[X]/(X^3 + X + 1)$ reduziert ist.
(5) Bestimme, ob $\mathbb{Z}[X]/(X^3 + X + 1)$ ein Zahlbereich ist.

AUFGABE 15.6. Beweise Satz 9.8 mit Korollar 15.3 und einer Sonderbetrachtung für diejenigen Primzahlen, die dadurch nicht abgedeckt sind.

Es sei K ein Körper. Ein Polynom $P \in K[X]$ heißt *separabel*, wenn es über keinem Erweiterungskörper $K \subseteq L$ mehrfache Nullstellen besitzt.

AUFGABE 15.7.*

Es sei K ein Körper und sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) P ist separabel.
(2) Es gibt eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ derart, dass P über L in einfache Linearfaktoren zerfällt.
(3) P und die Ableitung P' sind teilerfremd.
(4) P und die Ableitung P' erzeugen das Einheitsideal.

AUFGABE 15.8. Es sei K ein Körper und $P \in K[X]$ ein separables Polynom. Zeige, dass ein Teiler $F \in K[X]$ von P ebenfalls separabel ist.

AUFGABE 15.9. Es sei $F \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom, das in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Zeige, dass für alle Primzahlen p bis auf endlich viele Ausnahmen alle Primpolynome in der Primfaktorzerlegung von $F \in \mathbb{Z}/(p)[X]$ einfach sind.

AUFGABE 15.10. Es sei K ein Körper und

$$K[Y] \longrightarrow K[X] \cong K[Y][X]/(Y - X^n),\ Y \longmapsto X^n,$$

die n-te Potenzabbildung. Bestimme zu $b \in K$ den Faserring über $(Y - b)$. Wann sind alle Primfaktoren von $X^n - b$ einfach?

AUFGABE 15.11. Es sei p eine Primzahl. Zeige, dass die Polynome $X^n - p \in \mathbb{Q}[X]$ für jedes $n \geq 1$ irreduzibel sind.

AUFGABE 15.12. Zeige, dass ein Polynom der Form $X^n - p^2 \in \mathbb{Q}[X]$ mit einer Primzahl p im Allgemeinen nicht irreduzibel ist.

AUFGABE 15.13. Es sei B ein diskreter Bewertungsring. Zu einem von 0 verschiedenen Polynom $P \in B[X]$ sei $\operatorname{ord}(P)$ die minimale Ordnung der Koeffizienten von P. Zeige

$$\operatorname{ord}(PQ) = \operatorname{ord}(P) + \operatorname{ord}(Q).$$

Aufgabe 15.14. Es sei R ein Dedekindbereich mit Quotientenkörper K und es sei $P \in R[X]$ ein Polynom mit teilerfremden Koeffizienten. Zeige

$$(P)R[X] = R[X] \cap (P)K[X].$$

Zeige ferner, dass die Voraussetzung über die Teilerfremdheit notwendig ist.

Aufgabe 15.15. Es sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K und es sei $P \in R[X]$ ein Polynom mit teilerfremden Koeffizienten, das in $K[X]$ irreduzibel sei. Zeige, dass P auch in $R[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 15.16. Es sei $P \in \mathbb{Z}[X]$ ein ganzzahliges normiertes Polynom, dass in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sei. Zeige, dass P auch in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 15.17. Es sei K ein Körper und A eine endlichdimensionale, reduzierte K-Algebra. Zeige, dass dann A ein endliches direktes Produkt von endlichen Körpererweiterungen von K ist.

Abbildungsverzeichnis