BIBLIOTECA
DE IDEAS
DEL
SIGLO XX

6

BIBLIOTECA DE IDEAS DEL SIGLO XX

GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

POR

ROBERTO BONOLA

CALPE

OBRAS PUBLICADAS

1.—Rickert: Ciencia cultural y ciencia natural.

2.—Born: La teoría de la relatividad de Einstein.

3.—Uxküll: Ideas para una concepción biológica del mundo.

4.—Spengler: La decadencia de Occidente, tomo I.

5.—Bonola: Geometrías no euclidianas.

EN PRENSA

Wölfflin: Conceptos fundamentales en la historia del arte.

Driesch: La ciencia y la filosofía del organismo, dos tomos.

GEOMETRIAS NO EUCLIDIANAS

BIBLIOTECA DE IDEAS DEL SIGLO XX

DIRIGIDA POR

D. JOSÉ ORTEGA Y GASSET

Profesor de Filosofía en la Universidad de Madrid.

V

GEOMETRIAS NO EUCLIDIANAS

POR ROBERTO BONOLA

MADRID

ROBERTO BONOLA

GEOMETRIAS NO EUCLIDIANAS

EXPOSICION HISTORICO-CRITICA DE SU DESARROLLO

TRADUCCIÓN DEL ITALIANO POR

LUIS GUTIÉRREZ DEL ARROYO

Con 71 figuras.

CALPE
1923

Papel expresamente fabricado por LA PAPELERA ESPAÑOLA.

Talleres "Calpe", Ríos Rosas, 24.—MADRID

En los últimos años se oye por dondequiera un monótono treno sobre la cultura fracasada y concluída. Filisteos de todas las lenguas y todas las observancias se inclinan ficticiamente compungidos sobre el cadáver de esa cultura, que ellos no han engendrado ni nutrido. La guerra mundial, que no ha sido tan mundial como se dice, parece ser el síntoma y, al par, la causa de la defunción.

La verdad es que no se comprende cómo una guerra puede destruir la cultura. Lo más a que puede aspirar el bélico suceso es a suprimir las personas que la crean o transmiten. Pero la cultura misma queda siempre intacta de la espada y el plomo. Ni se sospecha de qué otro modo pueda sucumbir una cultura que no sea por propia detención, dejando de producir nuevos pensamientos y nuevas normas. Mientras la idea de ayer sea corregida por la idea de hoy, no podrá hablarse de fracaso cultural.

Y, en efecto, lejos de existir éste, acontece que, al menos la ciencia, experimenta en nuestros días un incomparable crecimiento de vitalidad. Desde 1900, coincidiendo peregrinamente con la fecha inicial del nuevo siglo, comienzan a elevarse sobre el horizonte intelectual pensamientos de nueva trayectoria. Esporádicamente, sin percibir su radical parentesco, aparecen en unas y otras ciencias teorías que se caracterizan por disentir de las dominantes en el siglo XIX y lograr su superación. Nadie hasta ahora se había fijado en que todas esas ideas que se hallan en su hora de oriente, a pesar de referirse a los asuntos más disparejos, poseen una fisonomía común, una rara y sugestiva unidad de estilo.

Desde hace tiempo sostengo en mis escritos que existe ya un organismo de ideas peculiares a este siglo XX que ahora pasa por nosotros. La ideología del siglo XIX, vista desde ese organis-

mo, parece una pobre cosa tosca, maniática, imprecisa, inelegante y sin remedio periclitada.

Esto, que era en mis escritos poco más que una privada afirmación, podrá recibir ahora una prueba brillante con la Biblioteca de Ideas del siglo XX.

En ella reúno las obras más características del tiempo nuevo, donde principian su vida pensamientos antes no pensados. Desde la matemática a la estética y la historia, procurará esta colección mostrar el nuevo espíritu labrando su miel futura sobre toda la flora intelectual. Claro es que tratándose de una ideología en plena mocedad no podrá pedirse que existan ya tratados clásicos donde aparezca con una perfección sistemática. Es más, algunos de estos libros contienen, junto a las ideas de nuevo perfil, residuos de la antigua manera, y como las naves al ganar la ribera, mientras hincan ya la proa en la arena aun se hunde su timón en la marina.

* * *

Hablar de ideas del siglo XX frente a ideas del siglo XIX sólo puede parecer caprichoso a quien no advierte que las ideas están en una relación con las épocas muy parecida a la que sufren las plantas en los climas. Una época viene a ser un clima intelectual, el predominio de ciertos principios atmosféricos que favorecen o agostan determinadas cosechas. Un claro ejemplo de esto es lo ocurrido con las tendencias de renovación matemática que bajo el título de geometrías no *euclidianas se iniciaron en la pasada centuria. Las generaciones de entonces recibieron con hostilidad estos intentos de ampliar y purificar el ámbito de las cosas matemáticas. Algunos de los geniales descubridores ni siquiera se atrevieron a publicar en vida sus espléndidos hallazgos, temerosos de ver peligrar su prestigio. Mas he aquí que en nuestro siglo las geometrías no euclidianas adquieren súbita popularidad en los hombres de ciencia; se imponen como un nuevo clasicismo en el pensamiento matemático; penetran en la Física con Minkwsky y Einstein, y casi ponen en olvido las formas tradicionales de la geometría.*

No podía, pues, faltar en esta colección el recuerdo de los pasos que este nuevo sentido de la matemática ha ido dando subrepticiamente a lo largo de los siglos. La historia de las geometrías *euclidianas muestra en un caso concreto cómo las ideas hacen a veces durante siglos y siglos su camino subterráneo, esperando la hora propicia en que la atmósfera las solicita y las halaga.*

Los próximos años surgirán ineludiblemente nuevas y fecundas discusiones que permitan fijar los límites de esta triunfante matemática. A su hora de germinación ha seguido esta presente, que es de triunfo, a la cual sucederá otra de crítica, mesura y pulimento.

JOSÉ ORTEGA Y GASSET.

PREFACIO

El material reunido hace ya tiempo acerca de los orígenes y desarrollo de la *Geometría no euclidiana*, el interés que han adquirido las exposiciones histórico-críticas de los fundamentos de las disciplinas científicas, me han impelido a ensanchar los límites de la primera parte de mi artículo «Sobre la teoría de las paralelas y la Geometría no euclidiana», incluído, ahora hace seis años, entre las «Cuestiones relativas a la Geometría elemental» (1), reunidas y coordinadas por el profesor F. ENRIQUES.

El artículo, completamente rehecho para la versión alemana de aquella obra, trata preferentemente la parte constructiva del tema; este libro está dedicado, en cambio, a una difusa exposición de la historia de las paralelas y al desarrollo histórico de las geometrías de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI y de RIEMANN.

En el capítulo primero, partiendo de EUCLIDES y de los comentadores más antiguos del *V postulado*, he reproducido los razonamientos más característicos, con los que los griegos, los árabes y los geómetras del Renacimiento pretendieron establecer sobre bases más sólidas la teoría de las paralelas. En el capítulo II, principalmente con la obra de SACCHERI, LAMBERT y LEGENDRE, he procurado poner bien a la vista el trán-

(1) Bolonia, Zanichelli, 1900.

sito de las antiguas a las nuevas ideas, ocurrido a principios del siglo XIX; en los capítulos III y IV, a través de las investigaciones de GAUSS, SCHWEIKART, TAURINUS, y la obra constructiva de LOBATSCHEFSKI y BOLYAI, he expuesto los fundamentos del primero de los sistemas geométricos edificados sobre la negación de la hipótesis V de EUCLIDES. En el capítulo V he trazado sintéticamente los ulteriores desarrollos de la Geometría no euclidiana, que surgen de las indagaciones de RIEMANN y HELMHOLTZ sobre la estructura del espacio y de la extensión proyectiva de CAYLEY del concepto de *propiedad métrica*.

En todo el curso de la exposición me he afanado por presentar los diferentes hechos según su ordenación histórica; cuando, sin embargo, tal orden me hubiese alejado demasiado de la sencillez expositiva que me había prefijado, lo he sacrificado de buena gana para mantener al libro en un carácter estrictamente elemental.

Entre los muchos postulados equivalentes al V euclídeo, los más notables de los cuales van referidos al final del capítulo IV, hay uno de índole *estática*, que, verificado experimentalmente, pudiera proporcionar una base empírica a la teoría de las paralelas. De aquí una importante relación entre la *Geometría y la Estática* (GENOCCHI), a la cual, no habiendo encontrado un lugar adecuado en los capítulos precedentes, he dedicado la primera de las dos notas con que termina el libro.

La nota II se refiere a un asunto no menos interesante. Las investigaciones de GAUSS, LOBATSCHEFSKI y BOLYAI sobre las teorías de las paralelas tienen su origen en la extensión de uno de las conceptos fundamentales de la Geometría clásica. Pero un concepto se puede extender generalmente en varias direcciones.

En el caso que nos ocupa, el paralelismo ordinario, fundado sobre la hipótesis de rectas que no se cortan, coplanarias y equidistantes, fué extendido por los susodichos geómetras, prescindiendo del *postulado V* de EUCLIDES (equidistancia), y en seguida por CLIFFORD, abandonando la *hipótesis de la coplanaridad*.

De las paralelas de CLIFFORD, estudiadas primeramente con método proyectivo (CLIFFORD-KLEIN) y después con el auxilio de la Geometría diferencial (BIANCHI, FUBINI), faltaba un tratado elemental; la nota II está dedicada, en gran parte, a la exposición sintéticoelemental de las más sencillas y elegantes de sus propiedades. La nota termina con una rápida indicación del problema de CLIFFORD-KLEIN, que, históricamente, se liga al paralelismo de CLIFFORD y que tiende a caracterizar la estructura geométrica del espacio a base del más estricto sistema de postulados compatibles con los datos experimentales y con el principio de homogeneidad del espacio.

He aquí, brevemente, el contenido del libro.

Antes de confiar esta modesta obra al juicio de los lectores benévolos, siento el deber de dar vivamente las gracias a mi amado maestro, el profesor FEDERICO ENRIQUES, por los preciosos consejos con que me ha auxiliado en la disposición y en el contenido crítico de la materia; al profesor CORRADO SEGRE, que amablemente ha puesto a mi disposición el manuscrito de un *Curso de lecciones* sobre la Geometría no euclidiana explicado por él, hace ahora tres años, en la Universidad de Turín; al querido amigo profesor JUAN VAILATI, por las preciosas indicaciones proporcionadas acerca de la Geometría griega y la ayuda prestada en la revisión de las pruebas.

Finalmente, también al inmejorable Comm. CÉSAR ZANICHELLI, que ha acogido solícitamente mi trabajo en su colección de obras científicas, se dirige asimismo mi más sentida gratitud.

Pavía, marzo 1906.

ROBERTO BONOLA.

sobre la hipótesis de rectas que no se cortan, coplanarias y equidistantes, fué extendida por los susodichos geómetras, prescindiendo del postulado V de Euclides (equidistancia), y en seguida por Clifford, abandonando la *hipótesis de la coplanaridad*.

De las paralelas de Clifford, estudiadas primeramente con método proyectivo (Clifford-Klein) y después con el auxilio de la Geometría diferencial (Bianchi, Fubini), faltaba un tratado elemental: la nota II está dedicada, en gran parte, a la exposición sintético-elemental de las más sencillas y elegantes de sus propiedades. La nota termina con una rápida indicación del problema de Clifford-Klein, que, históricamente, se liga al paralelismo de Clifford y que tiende a caracterizar la estructura geométrica del espacio a base del más estricto sistema de postulados compatibles con los datos experimentales y con el principio de homogeneidad del espacio.

He aquí, brevemente, el contenido del libro.

Antes de confiar esta modesta obra al juicio de los lectores benévolos, siento el deber de dar vivamente las gracias a mi amado maestro, el profesor Federico Enriques, por los preciosos consejos con que me ha auxiliado en la disposición y en el contenido crítico de la materia; al profesor Corrado Segre, que amablemente ha puesto a mi disposición el manuscrito de un *Curso de lecciones* sobre la Geometría no euclidiana explicado por él, hace ahora tres años, en la Universidad de Turín; al querido amigo profesor Juan Vailati, por las preciosas indicaciones proporcionadas acerca de la Geometría griega y la ayuda prestada en la revisión de las pruebas.

Finalmente, también al inmejorable Comm. César Zanichelli, que ha acogido solícitamente mi trabajo en su colección de obras científicas, se dirige asimismo mi más sentida gratitud.

Pavía, marzo 1906.

Roberto Bonola.

GEOMETRIAS NO EUCLIDIANAS

CAPITULO PRIMERO

Los demostradores del V postulado euclídeo.

EL POSTULADO DE LAS PARALELAS ENTRE LOS GEÓMETRAS GRIEGOS.

§ 1. EUCLIDES (330-275, aproximadamente, antes de J. C.) llama paralelas a dos rectas coplanarias que, prolongadas cuanto se quiera, no se encuentran (Def. XXIII) (1). Demuestra (Prop. XXVII, XXVIII) que dos rectas que forman con una transversal suya ángulos alternos internos iguales, o bien ángulos correspondientes iguales, o ángulos internos de un mismo lado suplementarios, son paralelas. Para demostrar después las inversas de estas proposiciones, EUCLIDES se apoya en el siguiente *postulado* (V):

Si una línea recta que corta a otras dos forma ángulos internos del mismo lado de la secante cuya suma sea menor de dos rectos, aquellas dos, prolongadas hacia este lado, se encuentran.

La teoría euclídea de las paralelas se completa después con los siguientes teoremas:

Líneas rectas paralelas a una misma recta son paralelas entre sí (Prop. XXX).

---

(1) Para cuanto se relaciona con el texto euclídeo nos referiremos siempre a la edición crítica de J. L. HEIBERG (Leipzig, Teubner, 1883).

Por un punto dado se puede trazar una sola recta paralela a una recta dada (Prop. XXXI).

Los segmentos comprendidos entre segmentos iguales y paralelos son iguales y paralelos (Prop. XXXII).

Del último teorema se deduce la equidistancia de las dos paralelas. Entre las consecuencias más notables de esta teoría se encuentra el conocido teorema sobre la suma de los ángulos de un triángulo y las propiedades de las figuras semejantes.

§ 2. Desde los más antiguos, todos los comentadores del texto euclídeo opinaron que el *postulado V* no era bastante evidente para aceptarlo sin demostración, por lo cual trataron de deducirlo como consecuencia de otras proposiciones. Para conseguir este objeto, substituyeron a veces la definición euclídea de las paralelas, de forma *gramatical* negativa, con otras definiciones que no presentasen dicha forma, supuesta defectuosa.

PROCLO (410-485), en su *Comentario al libro I de Euclides* (1), nos transmite preciosas noticias acerca de las primeras tentativas hechas con este propósito. Refiere, por ejemplo, que POSIDONIO (siglo I antes de J. C.) había propuesto se llamasen paralelas a dos rectas coplanarias y equidistantes. Esta definición y la euclídea corresponden, sin embargo, a dos hechos que pueden presentarse separadamente, y PROCLO (pág. 177), refiriéndose a un tratado de GEMINO (siglo I antes de J. C.), aduce a este propósito los ejemplos de la hipérbola y de la concoide y de su posición con las respectivas asíntotas, para mostrar que podría haber líneas paralelas en el sentido euclídeo, esto es, líneas que prolongadas hasta el infinito no se encuentran, y, sin embargo, no paralelas en el sentido de POSIDONIO, esto es, no equidistantes.

---

(1) Para cuanto se relaciona con el texto de PROCLO nos referiremos a la edición dirigida por G. FRIEDLEIN. *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii* (Leipzig, Teubner, 1873).

Tal hecho es calificado por GEMINO, siempre al decir de PROCLO, como el más *paradójico* (παραδοξότατον) de toda la Geometría.

Queriendo luego concordar la definición euclídea con la de POSIDONIO, es necesario demostrar que dos rectas que no se encuentran son equidistantes, o bien que el lugar de los puntos equidistantes de una recta es una recta. Para tal demostración, EUCLIDES se apoya precisamente en su postulado.

PROCLO (pág. 364) rehusa por ello considerarlo entre los postulados, observando, en confirmación de tal opinión suya, que su inversa *(La suma de dos ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos)* es un teorema demostrado por EUCLIDES (Prop. XVII), no pareciéndole posible que una proposición cuya inversa es demostrable no sea a su vez demostrable. Pone también en guardia contra las abusivas llamadas a la evidencia e insiste sobre la posible (hipotética) existencia de rectas asintóticas (págs. 191-2).

TOLOMEO (siglo II después de J. C.), siempre al decir de PROCLO (págs. 362-5), intentó resolver la cuestión con este curioso razonamiento: Sean A B, CD dos paralelas; FG, una transversal; α y β, los dos ángulos internos a la izquierda de FG, y α' y β' los dos ángulos internos de la derecha. Entonces la suma $\alpha + \beta$ será o mayor o menor o bien igual a dos ángulos rectos. *Admítase* que si para un par de paralelas se verifica, por ejemplo, el primer caso ($\alpha + \beta > 2$ $\widehat{\textit{rectos}}$), otro tanto ocurrirá para todos los demás pares. Entonces, puesto que las rectas FB, GD son paralelas entre sí, como son paralelas las rectas FA, GC, de $\alpha + \beta > 2$ $\widehat{\textit{rectos}}$ se deduce: $\alpha' + \beta' > 2$ $\widehat{\textit{rectos}}$.

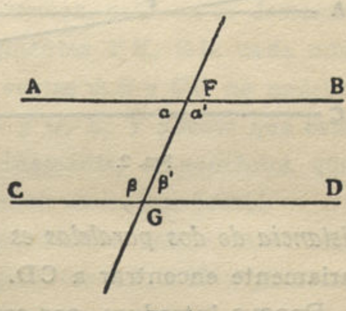


FIG. 1.

De aquí se sigue: $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4\ \widehat{rectos}$, lo que es manifiestamente absurdo. Luego no puede ser $\alpha + \beta > 2\ \widehat{rectos}$. Del mismo modo se demuestra que no puede ser $\alpha + \beta < 2\ \widehat{rectos}$; por consiguiente, será $\alpha + \beta = 2\ \widehat{rectos}$ (PROCLO, pág. 365).

De este resultado se deduce fácilmente el *postulado euclídeo.*

§ 3. PROCLO (pág. 371), después de haber criticado el razonamiento de TOLOMEO, intentó alcanzar el mismo objeto por otro camino. La demostración de PROCLO reposa sobre la siguiente proposición, que él considera como evidente: *La distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan puede hacerse tan grande como se quiera, prolongando suficientemente las dos rectas* (1). De ésta deduce el lema:

Una recta que encuentra a una de dos paralelas encuentra necesariamente también a la otra.

He aquí la demostración del lema dada por PROCLO: Sean AB, CD dos paralelas, y EG una transversal, incidente en F sobre la primera. La distancia de un punto variable sobre el rayo FG a la recta AB crece más allá de todo límite cuando el punto se aleja indefinidamente de F, *y puesto que la distancia de dos paralelas es finita*, la recta EG deberá necesariamente encontrar a CD.

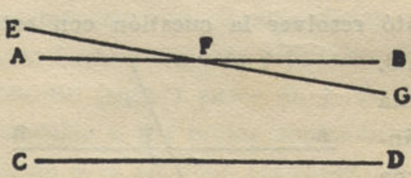


FIG. 2.

PROCLO introduce, por consiguiente, la hipótesis de que la distancia de dos paralelas se mantiene finita, hipótesis de la que lógicamente se deduce la de EUCLIDES.

---

(1) Esta proposición, considerada como evidente, es apoyada por PROCLO con la autoridad de ARISTÓTELES: Cfr. «*De Coelo*, I, 5». Una rigurosa demostración de la proposición en cuestión fué dada por el padre G. SACCHERI, en la obra citada en la página 26.

§ 4. Que el *postulado de Euclides* fuese objeto de discusiones e investigaciones entre los griegos, resulta también de la siguiente paradójica argumentación, con la cual, al decir de PROCLO (pág. 369), se pretendía demostrar que dos rectas cortadas por una tercera no se encuentran, aun cuando la suma de los ángulos internos de un mismo lado sea menor que dos ángulos rectos.

Sea AC una transversal de las dos rectas AB y CD, y E el punto medio de AC. Hacia el lado de AC, en que la suma de los ángulos internos es menor que dos ángulos rectos, se toman sobre AB y CD los segmentos AF y CG, iguales a AE. Las dos rectas AB y CD no pueden encontrarse entre los puntos A, F y C, G, porque, en un triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos.

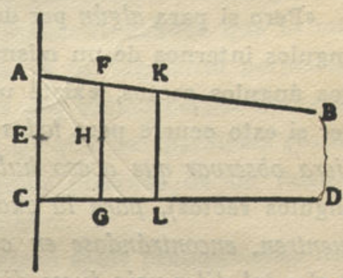


Fig. 3.

Uniendo después los puntos F, G, a partir del segmento FG, se repite la precedente construcción, esto es, se determinan sobre AB y CD los dos segmentos FK, GL, cada uno igual a la mitad de FG. Las dos rectas AB y CD no podrán encontrarse entre los puntos F, K y G, L. Y puesto que esta operación puede repetirse indefinidamente, se concluirá que las dos rectas AB y CD no se pueden encontrar jamás.

El vicio principal de la argumentación reside en el empleo del infinito, puesto que los segmentos AF, FK ... podrían, por disminuciones sucesivas, tender a cero y su *serie* ser finita. El autor de la paradoja ha hecho uso del mismo principio, con el que ZENÓN (495-435 antes de J. C.) pretendía demostrar que AQUILES no alcanzaría a la tortuga, aun moviéndose con una velocidad doble de la velocidad de esta última.

Esto fué observado, bajo otra forma, por PROCLO (páginas 369-70), diciendo que lo que así se demuestra es que, con el susodicho proceso, no se puede alcanzar el punto de encuentro (determinar: ὁρίζειν), no que éste no exista.

PROCLO observó además que «puesto que la suma de dos ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos (EUCLIDES, XVII), existen rectas que, cortadas por una tercera, se encuentran hacia el lado en que la suma de los ángulos internos es menor que dos ángulos rectos; así, a quien afirme que para una diferencia *cualquiera* entre dicha suma y dos ángulos rectos las dos rectas no se encuentran, se puede responder que para diferencias menores las rectas se encuentran».

«Pero si para *algún* par de rectas formando con una tercera ángulos internos de un mismo lado, cuya suma es menor que dos ángulos rectos, existe un punto de encuentro, falta por ver si esto ocurre para *todos* los pares. *Puesto que alguien pudiera observar que acaso hubiese una cierta diferencia* (a dos ángulos rectos), *para la cual aquéllas* (las rectas) *no se encuentren, encontrándose en cambio todas las demás para las cuales tal diferencia fuese distinta* (PROCLO, pág. 371).» De lo que siga resultará que la duda aquí presentada por PROCLO tiene fundamento solamente en el caso en que el segmento AC de la transversal (fig. 3) permanezca invariable, mientras las dos rectas del par, girando alrededor de los puntos A y G, hacen variar su *diferencia*.

§ 5. Otra demostración bastante antigua del *postulado V*, referida en el Comento árabe de AL-NIRIZI (1) (siglo IX), llegada hasta nosotros a través de la traducción latina de GERARDO DE CREMONA (2) (siglo XII), es atribuída a AGANIS (3).

(1) Cfr. R.-O. BESTHORN y J.-L. HEIBERG. *Codex Leidensis*, 399, 1. *Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadsch cum commentariis Al-Narizii* (Copenhague, F. Hegel, 1893-97).

(2) Cfr. M. CURTZE: *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii.* Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata. (Leipzig, Teubner, 1899.)

(3) A propósito de AGANIS conviene observar que CURTZE y HEIBERG

La parte de este comentario relativa a las definiciones, postulados y axiomas contiene frecuentes referencias al nombre de SAMBELICHIUS, que se identifica fácilmente con SIMPLICIUS, el célebre comentarista de ARISTÓTELES, que vivió en el siglo VI. SIMPLICIUS había entonces escrito una *Introducción al libro I de Euclides*, expresando en ella ideas semejantes a las de GEMINO y POSIDONIO, afirmando que el *postulado V* no es evidente y refiriendo la demostración de *su compañero* AGANIS.

Esta demostración está fundada en la hipótesis de que existen rectas equidistantes, rectas que AGANIS, como ya POSIDONIO, llama paralelas. De tal hipótesis deduce que la mínima distancia entre dos paralelas es un segmento perpendicular común a las dos rectas; que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí; que dos paralelas cortadas por una tercera forman ángulos internos de un mismo lado suplementarios, y recíprocamente.

La sencillez con que se demuestran estas proposiciones nos dispensa de repetir los razonamientos de AGANIS. Después de haber observado que de ellas se deducen las proposiciones XXX y XXXII de EUCLIDES (cfr. p. 7), indiquemos cómo AGANIS construye el punto de encuentro de dos rectas no equidistantes.

Sean AB y GD dos rectas cortadas por la transversal EZ, y tales que la suma de los ángulos internos $\widehat{AEZ}$, $\widehat{EZD}$ sea menor que dos rectos. Sin restar nada a la generalidad de la figura, se puede suponer que $\widehat{AEZ}$ sea recto.

Fíjese ahora sobre ZD un punto arbitrario T, desde el cual se traza TL, perpendicular a ZE; después divídase por el punto P el segmento EZ en dos partes iguales; luego, por el punto M, el segmento PZ en dos partes iguales, y así sucesivamente

---

lo identifican con GEMINO. En cambio, P. TANNERY, rechaza tal identificación. Cfr. TANNERY: *Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus?* Biblioteca Math. (3), t. II, págs. 9-11 (1901).

MZ, en dos partes iguales, etc..., hasta que uno de los puntos medios P, M, ··· caiga en el segmento LZ. Si éste, por ejemplo, es el punto M, trácese por M la recta perpendicular a EZ, que encontrará en N a la ZD. Constrúyase finalmente sobre ZD el segmento ZC, múltiplo de ZN, como ZE es múltiplo

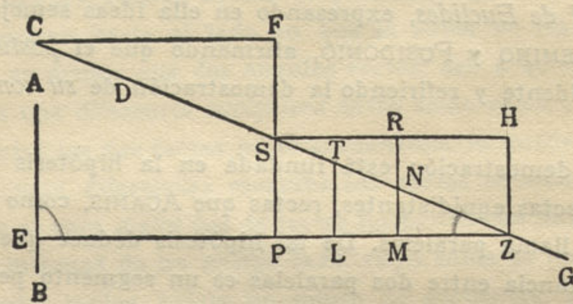


Fig. 4.

de ZM. En nuestro caso es: $ZC = 4.ZN$. *El punto C así obtenido es el punto de encuentro de las dos rectas A B y GD.*

Para probar esto necesitaríamos demostrar que los segmentos consecutivos e iguales ZN, NS, ··· de la recta ZD tienen proyecciones iguales sobre la ZE. No nos detenemos en esto porque tendremos que volver a ello en seguida (pág. 16). Por lo demás, el razonamiento lo sugiere la figura misma de Aganis.

Descubramos la característica de la precedente construcción: estriba en el uso (implícito) del llamado *postulado de Arquímedes, necesario* para fijar el segmento MZ, submúltiplo del EZ y menor que el LZ.

El postulado de las paralelas entre los árabes.

§ 6. Los árabes, sucesores de los griegos en la supremacía de las Matemáticas, se ocuparon como éstos en el *V postulado.* Algunos, sin embargo, aceptaron sin más las ideas y las demostraciones de sus maestros, como, por ejemplo, AL-NIRIZI (siglo IX), cuyo comentario a las definiciones, postulados y axiomas del *libro I* está modelado sobre la introducción a los *Elementos* debida a SIMPLICIUS, y cuya demostración de la *V hipótesis euclídea* es la arriba indicada (§ 5) de AGANIS.

Otros llevaron su contribución personal a la cuestión. NASÎR-EDDÎN (1201-1274), por ejemplo, aunque demuestra el *postulado V*, adaptándose al criterio seguido por AGANIS, merece ser recordado por la idea original de anteponer explícitamente el teorema sobre la suma de los ángulos de un triángulo y por la forma acabada de su razonamiento (1).

He aquí la parte esencial de la hipótesis que él admite: *Si dos rectas,* r *y* s, *son la primera perpendicular, la otra oblicua al segmento* AB, *los segmentos de las perpendiculares bajadas desde* s *sobre* r *son menores que* AB *en la región en que* AB *forma con* s *ángulo agudo, y mayores que* AB *en la región en que* AB *forma con* s *ángulo obtuso.* Síguese inmediatamente que si dos segmentos iguales, AB, $A'B'$, caen hacia una misma región y perpendicularmente sobre la recta BB', la recta AA' será perpendicular también a los dos segmentos dados. Además se tendrá: $AA' = BB'$, y, en suma, la figura $AA'B'B$ es un cuadrilátero con los ángulos rectos y los lados opuestos iguales, esto es, un *rectángulo.*

De este resultado NASÎR-EDDÎN obtiene fácilmente que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. Para el triángulo rectángulo la cosa es manifiesta, puesto que es la mitad de un rectángulo; para un triángulo cualquiera se obtiene el resultado mediante la descomposición del triángulo en dos triángulos rectángulos.

Sentado esto, he aquí, rápidamente, cómo el geómetra árabe demuestra el *postulado euclídeo* (cfr. AGANIS).

---

(1) Cfr. *Euclidis elementorum libri XII studio Nassiredini* (Roma, 1594). Esta obra, escrita en árabe, fué reproducida en 1657, 1801. No existe ninguna traducción de ella en otra lengua.

Sean AB y CD dos rayos, uno oblicuo y otro perpendicular a la recta AC. Sobre AB fíjese el segmento AH, y desde H bájese la perpendicular HH' sobre AC. Si el punto H' cae en C, o bien en la región opuesta a A respecto de C, los dos rayos AB y CD se encuentran sin más. Si H' cae entre A y C, trácese el segmento AL perpendicular a AC e igual a HH'. Entonces, por todo lo anteriormente dicho, será: $HL = AH'$. Consecutivamente a AH tómese HK, igual a AH, y desde K bájese la perpendicular KK' sobre AC. Siendo $KK' > HH'$, tómese $K'L' = H'H$ y únase H con L'. Siendo los dos cuadriláteros $K'H'HL'$, $H'ALH$ ambos rectángulos, los tres puntos L', H, L están en línea recta. Síguese de aquí: $L'\widehat{HK} = \widehat{AHL}$, y, por consiguiente, la igualdad de los dos triángulos AHL y $HL'K$. Por tanto, $L'H = HL$, y por la propiedad de los rectángulos, $K'H' = H'A$.

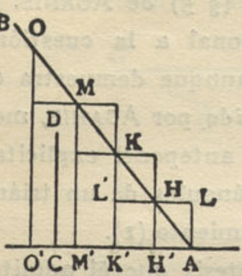


Fig. 5.

Tómese ahora KM, igual y consecutivo a HK, y desde M bájese MM', perpendicular a AC. Con un razonamiento igual al anterior se demuestra:

$$M'K' = K'H' = H'A.$$

Obtenido este primer resultado, tómese un múltiplo de AH' mayor que AC (*postulado de* ARQUÍMEDES). Sea, por ejemplo, $AO' = 4.AH' > AC$. Después, sobre AB, constrúyase $AO = 4.AH$, y desde O báje sela perpendicular a AC. Esta perpendicular será evidentemente OO'. Ahora, en el triángulo rectángulo $AO'O$, no pudiendo la recta CD, perpendicular al cateto $O'A$, encontrar al otro cateto OO', encontrará necesariamente la hipotenusa OA. Con esto queda demostrado que dos rectas, AB y CD, la una perpendicular y la otra oblicua a la transversal AC, se encuentran. En otros términos, se ha demostrado el *postulado euclídeo* en el caso en que uno de los ángulos internos sea recto. Haciendo después uso del teorema sobre la suma de los ángulos de un triángulo, NASÎR-EDDÎN reduce el caso general a este caso particular. No reproducimos el razonamiento porque más adelante tendremos que desarrollar otro igual (cfr., pág. 40) (1).

El postulado de las paralelas durante el Renacimiento y el siglo XVII.

§ 7. Tanto las primeras versiones de los *Elementos*, hechas en los siglos XII y XIII sobre los textos árabes, como las sucesivas, redactadas sobre los textos griegos a fines del XV y en la primera mitad del XVI, no llevan, en general, ninguna observación crítica al *V postulado*. La crítica renace después de 1550, principalmente a impulsos del *Comento* de PROCLO (2). Para mejor seguirla, citemos brevemente los trabajos de los más autorizados comentaristas de los siglos XVI y XVII.

F. COMMANDINO (1509-1575) añade, sin justificación, a la definición euclídea de las paralelas el concepto de equidistancia; respecto al *postulado V*, repite el juicio y la demostración de PROCLO (3).

(1) La demostración de NASÎR-EDDÎN del *postulado V* está desarrollada detalladamente por el geómetra inglés J. WALLIS, en el volumen II de sus obras (cfr. la nota de la página 20), y por G. CASTILLON, en su trabajo publicado en *Mém. de l'Académie Royale de Sciences et Belles-lettres* de Berlín, t. XVIII, págs. 175-183 (1788-89). Además, hacen referencia a ella otros muchos escritores, entre los cuales recordaremos principalmente G. S. KLÜGEL (cfr. nota (2), pág. 45); J. HOFFMAN *(Critik der Parallelen-Theorie*, Jena, 1807); V. FLAUTI *(Nueva demostración del postulado quinto...*, Nápoles, 1818).

(2) El *Comento* de PROCLO fué impreso por primera vez en Basilea (1533) en el texto original; después en Padua (1560) en la traducción latina de BAROZZI.

(3) *Elementorum libri XV* (Pesaro, 1572).

C. CLAVIO (1537-1612), en su traducción latina del texto euclídeo (1), expone y critica la demostración de PROCLO. Presenta después una nueva demostración de la hipótesis euclídea basándose en el teorema: *La línea equidistante de una recta es una recta*, que trata de justificar con razonamientos análogos. La demostración de CLAVIO tiene muchos puntos de contacto con la de NASÎR-EDDÎN.

P. A. CATALDI (?-1626) es el primer geómetra moderno que publica un trabajo exclusivamente dedicado a la cuestión de las paralelas (2). CATALDI parte del concepto de rectas equidistantes y no equidistantes; pero para probar la existencia efectiva de rectas equidistantes recurre a la hipótesis de que *rectas no equidistantes son convergentes en una región, y en la otra divergentes* (cfr. NASÎR-EDDÎN) (3).

G. A. BORELLI (1608-1679) admite, tratando de justificarlo, el siguiente axioma (XIV): *Si una línea recta transportada lateralmente en el mismo plano sobre otra línea recta la toca siempre con su punto extremo, y en todo su curso es perpendicular a aquélla, su otro punto extremo describirá en su movimiento una línea recta.*

Sucesivamente demuestra que dos rectas perpendiculares a una tercera son equidistantes, y define las paralelas como rectas equidistantes. Sigue la teoría de las paralelas (4).

§ 8. GIORDANO VITALE (1633-1711), volviendo al concepto de equidistancia formulado por POSIDONIO, siente con PROCLO la necesidad de rechazar que las paralelas de EUCLIDES puedan comportarse de un modo asintótico. A este fin define las pa-

(1) *Euclidis elementorum libri XV* (Roma, 1574).

(2) *Folleto sobre las líneas rectas equidistantes y no equidistantes* (Bolonia, 1603).

(3) Ulteriores observaciones sobre el mismo objeto fueron hechas por CATALDI en *Adiciones al folleto sobre las líneas rectas equidistantes y no equidistantes* (Bolonia, 1604).

(4) BORELLI: *Euclidis restitutus* (Pisa, 1658).

ralelas como dos rectas equidistantes, y trata de probar que el lugar de los puntos equidistantes de una recta es una recta (1).

La demostración reposa substancialmente sobre este lema: *Si entre dos puntos A y C, tomados en cualquier línea curva, cuya concavidad esté hacia X, se traza la recta AC, y si desde los infinitos puntos del arco AC se trazan perpendiculares a alguna recta, digo que es imposible que esas perpendiculares sean iguales entre sí.*

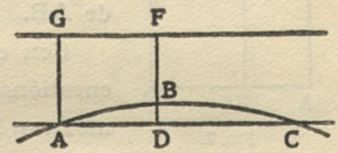


Fig 6.

La *alguna recta* de que se habla en el enunciado no es una recta *cualquiera* del plano, sino una recta construída del siguiente modo: Desde el punto B del arco AC bájese BD, perpendicularmente a la cuerda AC; después en A levántese AG, también perpendicularmente a AC; finalmente tómense los dos segmentos iguales AG y DF sobre las dos perpendiculares construídas y únanse los extremos G y F. La GF es la recta que GIORDANO considera en su demostración, recta respecto a la cual el arco AB no es ciertamente una línea equidistante.

Pero cuando el autor quiere demostrar que el lugar de los puntos equidistantes de una recta es también una recta, aplica el precedente lema a una figura en que no se verifican las relaciones que existen entre el arco ABC y la recta GF, de donde las consecuencias que deduce sobre la existencia de rectas equidistantes no son del todo lícitas.

Bajo este aspecto, la demostración de GIORDANO no ofrece ventaja alguna sobre las precedentes; ofrece, sin embargo, una notabilísima proposición, cuyo concepto adquirirá en lo sucesivo un mayor desarrollo.

Sea ABCD un cuadrilátero, con los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ rectos y

(1) GIORDANO VITALE: *Euclides restaurado o bien los antiguos elementos geométricos corregidos y facilitados. Libro XV* (Roma, 1680).

los lados AD y BC iguales; sea, además, HK una perpendicular, bajada desde un punto H del segmento DC sobre la base AB del cuadrilátero. GIORDANO demuestra: 1.°, que los ángulos $\widehat{D}$ y $\widehat{C}$ son iguales; 2.°, que cuando el segmento HK sea igual al segmento AD, los dos ángulos $\widehat{D}$ y $\widehat{C}$ son rectos y CD equidistante de AB.

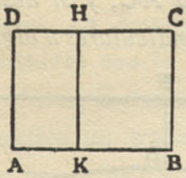


FIG. 7.

Con este teorema GIORDANO reduce la cuestión de las rectas equidistantes a demostrar la existencia de *un punto* H sobre DC, cuya distancia a AB sea igual a los dos segmentos AD y CB. Este nos parece uno de los resultados más notables obtenidos hasta aquella época respecto a la teoría de las paralelas (1).

§ 9. J. WALLIS (1616-1703), abandonando el concepto de equidistancia, explotado inútilmente por los precedentes geómetras, da una nueva demostración del *postulado V*, fundándose en la noción común: *De toda figura existe una semejante de magnitud arbitraria.* He aquí, rápidamente, cómo procede WALLIS (2).

Sean a y b dos rectas cortadas en A y B por la transversal c, y α y β los ángulos internos de un mismo lado de c, tales que $\alpha + \beta$ sea menor que dos ángulos rectos. Trazada por A la

(1) Cfr. BONOLA: *Un teorema de Giordano Vitale de Bitonto sobre las rectas equidistantes.* Boletín de Bibliografía e Historia de las Ciencias Matemáticas (1905).

(2) Cfr. WALLIS: *De Postulato Quinto; et Definizione Quinta. Lib. VI, Euclidis; disceptatio geometrica;* en Opera Math., t. II, págs. 669-678 (Oxford, 1693). Este trabajo de WALLIS contiene dos conferencias dadas en la Universidad de Oxford, la primera en 1651, la segunda en 1663. En ellas viene expuesta también la demostración de NASÎR-EDDÎN. La parte relativa a la demostración de WALLIS fué traducida al alemán por ENGEL y STÄCKEL en la *Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, págs. 21-36 (Leipzig, Teubner, 1895). Esta obra será en lo sucesivo indicada con *Th. d. P.*

recta b' de modo que b y b' formen con c ángulos correspondientes iguales, es claro que b' caerá en el ángulo adyacente a α. Si ahora transportamos continuamente la recta b de modo que B recorra el segmento AB y que el ángulo que forma con c se mantenga constantemente igual a β, la recta b, antes de alcanzar la posición final b', deberá necesariamente encontrar a a. Queda así determinado un triángulo AB_1C_1 con los ángulos en A y B_1 respectivamente iguales a α y β. Pero, por la hipótesis de WALLIS sobre la existencia de las figuras semejantes, sobre AB, como lado homólogo de AB_1, se podrá construir un triángulo ABC semejante al triángulo AB_1C_1, lo que significa que las rectas a y b deben concurrir en un punto, esto es, en el tercer vértice C del triángulo ABC. Luego, etc.....

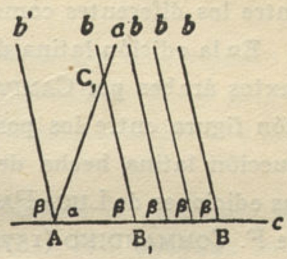


FIG. 8.

WALLIS trata después de justificar su original idea observando que EUCLIDES, postulando la existencia de un círculo de centro y radio dados *(postulado III)*, admite en substancia el principio de la semejanza para los círculos. Pero, aun cuando la intuición apoya favorablemente este punto de vista, el concepto de forma independiente de la extensión de una figura constituye una hipótesis, no ciertamente más evidente que el postulado de EUCLIDES.

Observemos todavía que WALLIS podía más sencillamente admitir la existencia de triángulos con ángulos iguales, o, como veremos en lo que sigue, de dos solos triángulos desiguales, con los ángulos dos a dos iguales [cfr. pág. 32, nota (1)].

§ 10. La obra crítica de los precedentes geómetras es suficiente para dar a conocer la evolución histórica de nuestro problema en los siglos XVI y XVII, por lo que juzgamos superfluo hablar de otros insignes investigadores, como fueron, por ejemplo, OLIVIERO DI BURY (1604), LUCA VALERIO (1613) H. SAVILE (1621), A. TAQUET (1654), A. ARNAULD (1667) (1). Estimamos más necesario decir algunas palabras sobre el lugar que ocupa en el organismo geométrico *la hipótesis euclídea* entre los diferentes comentaristas de los *Elementos*.

En la edición latina de los *Elementos* (1482), hecha sobre los textos árabes por CAMPANO (siglo XIII), la hipótesis en cuestión figura entre los postulados. Otro tanto ocurre en la traducción latina hecha del griego por B. ZAMBERTI (1505), en las ediciones de LUCA PACIOLO (1509), de N. TARTAGLIA (1543), de F. COMMANDINO (1572), de A. BORELLI (1658).

En cambio la primera impresión de los *Elementos* en lengua griega (Basilea, 1533) contiene la hipótesis entre los axiomas *(axioma XI)*. Sucesivamente la colocan entre los axiomas F. CANDALLA (1556), C. CLAVIO (1574), GIORDANO VITALE (1680) y también GREGORY (1703), en su clásica versión latina de las obras de EUCLIDES.

Para intentar darse cuenta de estas diferencias, las cuales, más que a los antedichos autores, se remontan a los códices transmitidos de los griegos, convendrá saber qué significado atribuyeron estos últimos a las palabras *postulados* (αἰτήματα) y *axiomas* (ἀξιώματα) (2). Notemos ante todo que la palabra *axiomas* aquí significa lo que EUCLIDES, en su texto, llama *nociones comunes* (κοιναὶ ἔννοιαι).

En PROCLO están indicadas tres maneras diferentes de entender la diferencia existente entre los axiomas y los postulados.

(1) Para cualquier indicación a este respecto, véase RICCARDI, *Ensayo de una bibliografía euclídea*. Mem. de Bolonia, serie 5, t. I, págs. 27-34 (1890).

(2) Para cuanto sigue cfr. PROCLO, en el capítulo que lleva por título *Petita et axiomata*. Recientemente G. VAILATI, en una comunicación suya al tercer Congreso Mat. (Heidelberg, 1904), ha llamado la atención de los estudiosos sobre el significado de estas palabras entre los griegos. Cfr.: *Sobre la significación de la diferencia entre los axiomas y los postulados en la Geometría griega*. Ver. des dritten Math. Kongresses, págs. 575-581 (Leipzig, Teubner, 1905).

La primera manera se relaciona con la diferencia existente entre *problema* y *teorema*. El *postulado* difiere del *axioma*, como el *problema* difiere del *teorema*, dice PROCLO. Con esto se debe entender que *el postulado afirma la posibilidad de una construcción*.

La segunda manera consiste en decir que *el postulado es una proposición de contenido geométrico, mientras que el axioma es una proposición común lo mismo a la geometría que a la aritmética*.

Finalmente, el tercer modo de entender la diferencia entre las dos palabras referido por PROCLO, está apoyado en la autoridad de ARISTÓTELES (384-322). Las palabras *axioma* y *postulado* en ARISTÓTELES no parecen usadas en sentido exclusivamente matemático. *Axioma es lo que es verdadero por sí mismo*, en virtud del significado de las palabras que contiene; *postulado es lo que, aun no siendo un axioma*, en el sentido arriba dicho, *se admite sin demostración*.

De modo que la palabra *axioma*, como aparece todavía mejor en un ejemplo tomado de ARISTÓTELES *(quitando cosas iguales de cosas iguales los restos son iguales)*, es usada en un sentido que corresponde aproximadamente al de las *nociones comunes* de EUCLIDES, mientras la palabra *postulado* tiene en ARISTÓTELES un sentido diferente de cada uno de los dos arriba indicados (1).

Ahora, según que se adopte una u otra de estas distinciones entre las dos palabras, una determinada proposición podrá clasificarse entre los *postulados* o entre los *axiomas*. Adoptan-

(1) Cfr. ARISTÓTELES: *Analytica Posteriora*, I, 10. Traslademos íntegramente el pasaje, un poco obscuro, en que el filósofo habla del postulado:

῞Οσα μὲν δυν δεικτά ὄντα λαμβάνει ἀυτὸς μὴ δείξας, ταῦτα ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μανθάνοντι ὑποτίθεται. Καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπὸθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον. Ἐὰν δὲ ἢ μηδεμίας ἐνούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίως ἐνούσης λαμβάνῃ, τὸ αυτὸ αἰτεῖται. Καὶ τούτῳ διαφέρει ὑηόθεοις καὶ αἰτῆμα. ἔστι λὰρ αἴτῆμα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δοξῃ.

do la primera, de los cinco postulados euclídeos, sólo los tres primeros, según PROCLO, merecerían este nombre, por cuanto en ellos solamente se pide poder hacer una construcción (unir dos puntos, prolongar una recta, describir un círculo de centro y radio arbitrarios). El IV (los ángulos rectos son iguales) y el V deberían, en cambio, clasificarse entre los axiomas (1).

Aceptando, en cambio, la segunda o la tercera distinción, los postulados euclídeos deben todos, los cinco, incluirse entre los postulados.

Con esto el origen de las divergencias entre los varios códices es fácilmente explicable. Para avalorar esta explicación, podemos añadir la incertidumbre en que se encuentran los historiadores al atribuir a EUCLIDES los *postulados*, las *nociones comunes* y las *definiciones* del primer libro. En lo que se refiere a los postulados, las dudas más grandes surgen contra los dos últimos; la presencia de los tres primeros concuerda bastante con el plan entero de la obra (2). Admitiendo, aunque sea contra la autoridad de GEMINO y PROCLO, la hipótesis de que el IV y V postulados no sean de EUCLIDES, el rigor ex-

---

(1) Es oportuno observar que el *postulado V* puede enunciarse así: *Se puede construir el punto común a dos rectas, cuando estas rectas cortadas por una transversal forman dos ángulos internos de un mismo lado cuya suma es menor que dos ángulos rectos.* De esto resulta que él afirma, como los tres primeros, la posibilidad de una construcción. Este carácter desaparece, sin embargo, totalmente si se le enuncia, por ejemplo, así: *Por un punto pasa una sola paralela a una recta,* o bien: *Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.* Parecería entonces que la distinción anteriormente indicada fuese solamente formal. Es necesario, sin embargo, no dejarse engañar por las apariencias; el *postulado V*, de cualquier modo que se enuncie, permite, en substancia, *construir* el punto de encuentro de todas las rectas de un haz, a excepción de una, con una recta determinada en el plano del haz. Todavía entre este postulado y los tres postulados de construcción existe una cierta diferencia: en éstos los datos son completamente independientes, en aquél los datos (las dos rectas cortadas por la transversal) están sujetos a una condición. Así que más que a los *postulados* o a los *axiomas*, la *hipótesis euclídea* pertenece a un género intermedio a unos y otros.

(2) Cfr. P. TANNERY: *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide.* Bulletin Sciences Math. (2), t. XXIV, págs. 162-175 (1884).

tremo de los *Elementos* debía conducir a los geómetras posteriores a rebuscar en el seno de la obra todas aquellas proposiciones admitidas sin demostración. Ahora, la que nos interesa se encuentra, bajo una forma muy concisa, expresa en la demostración de la proposición XXIX. De ésta puede sacarse el contenido del *postulado V* y unirse a los postulados de construcción o a los axiomas, según la opinión profesada por el transcritor de la obra de EUCLIDES.

Por lo demás, su lugar natural sería, también según GREGORY, después de la proposición XVII, de la que enuncia la inversa.

Notemos, en fin, que, cualquiera que sea el modo de resolver la cuestión de nombre aquí surgida, la moderna filosofía matemática tiende generalmente a suprimir la distinción entre postulado y axioma, entendida en el segundo y tercero de los modos arriba recordados, porque domina la idea de atribuir a las proposiciones fundamentales de la Geometría un carácter de hipótesis apoyadas en una base empírica, mientras parece superfluo poner entre estas proposiciones afirmaciones que sean simples consecuencias de las definiciones dadas.

CAPITULO II

Los precursores de la Geometría no euclidiana.

GEROLAMO SACCHERI (1667-1733).

§ 11. La obra del padre GEROLAMO SACCHERI *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia* (Milán, 1733) está dedicada en su mayor parte a la demostración del *postulado V*. La idea directriz de las investigaciones geométricas de SACCHERI se encuentra en su *Logica demonstrativa* (Turín, 1697), precisamente en un tipo especial de razonamiento, ya usado por EUCLIDES (Lib. IX, Prop. XII), por el cual, *aunque se admita como hipótesis la falsedad de la proposición que se quiere demostrar, se llega igualmente a concluir que es verdadera* (1).

Conforme con esta idea, el autor toma como datos las veintiséis primeras proposiciones de EUCLIDES, y supuesta como hipótesis la falsedad del *postulado V*, busca, entre las consecuencias de esta hipótesis, una proposición cualquiera que le autorice a afirmar la verdad del postulado mismo.

Antes de exponer la obra saccheriana recordemos que EU-

(1) Cfr. G, VAILATI: *Sobre una obra olvidada del P. Gerolamo Saccheri*, Rivista Filosofica (1903).

CLIDES, para demostrar su proposición XVI (el ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de los ángulos internos opuestos), admite implícitamente que la recta sea *infinita*, estando substancialmente fundado su razonamiento en la existencia de un segmento doble de un segmento dado.

De la posibilidad de negar esta hipótesis hablaremos en lo que sigue; por ahora observemos que SACCHERI la admite tácitamente, puesto que en el curso de su obra hace uso de la *proposición del ángulo externo.*

Observemos, en fin, que se sirve también del *postulado de Arquímedes* y de la *hipótesis de la continuidad de la recta* (1), para extender a todas las figuras de un tipo dado ciertas proposiciones admitidas como verdaderas solamente para una figura de aquel tipo.

§ 12. La figura fundamental de SACCHERI es el cuadrilátero *birectángulo isósceles*, esto es, el cuadrilátero con dos lados opuestos iguales y perpendiculares a la base. Las propiedades de tal figura se deducen del siguiente *lema*, de fácil demostración:

Si en un cuadrilátero ABCD, con los ángulos consecutivos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ *rectos, los lados AD y BC son iguales también, el ángulo* $\widehat{C}$ *es igual al ángulo* $\widehat{D}$ (prop. I), *y si los lados AD y BC son desiguales, de los dos ángulos* $\widehat{C}$ *y* $\widehat{D}$ *es mayor el adyacente al lado menor y viceversa.*

Sea ahora ABCD un cuadrilátero birectángulo ($\widehat{A} = \widehat{B} = 1\ \widehat{\textit{recto}}$) e isósceles ($AD = BC$); en la hipótesis euclídea también los ángulos $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$ son rectos, de modo que admitiendo que estos ángulos puedan ser ambos *obtusos* o ambos *agudos* se niega implícitamente el *postulado V*. SACCHERI discute jus-

(1) Esta hipótesis es usada por SACCHERI en su forma intuitiva; es decir, un segmento, que pasa de un modo continuo de la longitud a a la longitud b, distinta de a, adquiere, durante la variación, una longitud cualquiera comprendida entre a y b.

tamente las tres hipótesis relativas a los ángulos $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$, que él denominaba respectivamente *hipótesis del ángulo recto* ($\widehat{C} = \widehat{D} = 1$ *recto*), *hipótesis del ángulo obtuso* ($\widehat{C} = \widehat{D} > 1$ *recto*), *hipótesis del ángulo agudo* ($\widehat{C} = \widehat{D} < 1$ *recto*).

El primer resultado notable es el siguiente: *Según que en el cuadrilátero birectángulo isósceles ABCD se verifique la hip. áng. recto, la hip. áng. obtuso o la hip. áng. agudo, se tendrá respectivamente:* $AB = CD$, $AB > CD$, $AB < CD$ (prop. III). En efecto, en la *hip. áng. recto*, del lema precedente se deduce inmediatamente: $AB = CD$. En la *hip. áng. obtuso*, la perpendicular OO' por el medio del segmento AB divide al cuadrilátero fundamental en dos cuadriláteros iguales y rectángulos en O y O'. Siendo, pues, $\widehat{D} > \widehat{A}$, por el citado lema será $AO > DO'$; por tanto, $AB > CD$. En la *hipótesis ángulo agudo* estas desigualdades cambian de sentido; por tanto, $AB < CD$.

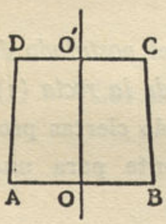


FIG. 9.

El teorema demostrado se invierte razonando por reducción al absurdo (prop. IV).

Si en un solo caso es verdadera la hipótesis del ángulo recto, es verdadera en todos los demás casos (prop. V).

Supongamos verificada en el cuadrilátero birectángulo isósceles ABCD la *hip. áng. recto*. Tomados en AD y BC los puntos H y K, equidistantes de AB, fórmese el cuadrilátero ABKH. Si HK es perpendicular a AH y BK, también en el nuevo cuadrilátero sería verdadera la *hip. áng. recto*. Por el contrario, supóngase $\widehat{AHK}$ agudo y, por consiguiente, su adyacente $\widehat{DHK}$ obtuso. Entonces, en el cuadrilátero ABKH, por la *hip. áng. agudo*, sería $AB < HK$, mientras que en el cuadrilátero HKCD, por la *hip. áng. obtuso*, sería $HK < DC$. Pero estas dos desigualda-

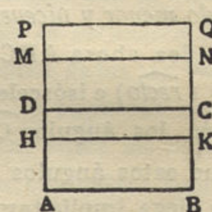


FIG. 10.

des son contradictorias, siendo $AB = DC$ (*hip. áng. recto* en $ABCD$). Por lo tanto, $\widehat{AHK}$ no puede ser agudo; y puesto que con el mismo razonamiento se probaría que $\widehat{AHK}$ no puede ser obtuso, se concluye que también en el cuadrilátero $ABHK$ es válida la *hip. áng. recto*.

Sobre las prolongaciones de AD y BC tómense los puntos M y N, equidistantes de la base AB. Digo que también en el cuadrilátero $ABNM$ vale la *hip. áng. recto*. En efecto, si AM es múltiplo de AD, la proposición es inmediata; de lo contrario, tómese un múltiplo de AD mayor que AM (*post. de Arquímedes*), y sobre los rayos $AD \cdots$, $BC \cdots$ los dos segmentos AP y BQ, iguales a este múltiplo. Por todo lo dicho anteriormente, en el cuadrilátero $ABPQ$ es válida la *hip. áng. recto*, y, por consiguiente, la misma hipótesis vale también en el cuadrilátero $ABNM$.

Finalmente, la hipótesis en cuestión vale para un cuadrilátero de base cualquiera, puesto que en la figura 10 puede tomarse por base uno de los lados perpendiculares a AB.

OBSERVACIÓN.—Este teorema de SACCHERI está substancialmente contenido en el de GIORDANO VITALE, expuesto en la página 20. En efecto, refiriéndonos a la figura 7, la hipótesis

$$DA = HK = CB$$

es equivalente a la otra

$$\widehat{D} = \widehat{H} = \widehat{C} = 1 \textit{ recto}.$$

Pero de la primera se desprende la equidistancia de las dos rectas DC y AB (1), y de aquí la validez de la *hip. áng. recto* en todos los cuadriláteros birectángulos isósceles de altura

(1) Verdaderamente, GIORDANO, en su razonamiento, se refiere explícitamente a los puntos del segmento DC que demuestra son equidistantes de la base AB del cuadrilátero. Pero el mismo razonamiento es aplicable a todos los puntos de la recta DC. Cfr. la nota de R. BONOLA citada en la página 20.

igual al segmento DA. La misma hipótesis vale también después para un cuadrilátero de altura cualquiera, porque en él puede invertirse el oficio de los dos segmentos, base y altura.

Si en un solo caso es verdadera la hipótesis del ángulo obtuso, es verdadera también en todos los demás casos (prop. VI).

Refirámonos al mismo cuadrilátero ABCD, suponiendo que los angulos $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$ sean obtusos. Tomados sobre AD y BC los puntos H, K, equidistantes de AB, obsérvese en primer lugar que el segmento HK no puede ser perpendicular a los dos lados, puesto que en el cuadrilátero ABKH, y, por consiguiente, en el cuadrilátero fundamental, se verificaría la *hip. áng. recto*. Supóngase entonces que $\widehat{KHA}$ sea agudo. Entonces, por la *hip. áng. agudo* sería $HK >$ $> AB$, mientras que verificándose en ABCD la *hip. áng. obtuso* es $AB > CD$. Síguese de aquí: $HK > AB > CD$. Moviendo ahora de un modo continuo la recta HK de manera que permanezca perpendicular a la mediana OO′ del cuadrilátero fundamental, el segmento HK, comprendido entre los lados opuestos AD y BC, mayor que AB en la posición inicial, llegaría a ser menor que AB en la posición final CD. Basándose en el postulado de la continuidad, existiría entonces una posición intermedia H′K′, para la cual $H'K' = AB$. Por consiguiente, en el cuadrilátero ABK′H′ valdría la *hip. áng. recto* (prop. III), la cual, por el teorema precedente, no dejaría subsistir en ABCD la *hip. áng. obtuso*. El razonamiento es también válido si los segmentos AH y BK son mayores que AD, y de aquí que no es posible que el ángulo $\widehat{AHK}$ sea agudo. Luego en ABKH es válida la *hip. áng. obtuso*, como en ABCD.

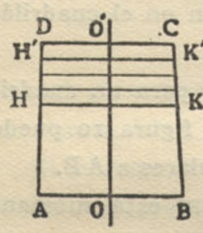


FIG. 11.

Pasemos ahora a demostrar el teorema para un cuadrilátero de base cualquiera; por ejemplo, de base BK.

Siendo los ángulos $\widehat{K}$ y $\widehat{H}$ obtusos, la perpendicular en K a

KB encontrará al segmento AH en el punto M, formando el ángulo $\widehat{AMK}$ obtuso (teor. ángulo externo). Entonces en ABKM será (lema primero) AB > KM. Tomando ahora sobre AB el segmento BN igual a MK, puede construirse el cuadrilátero birectángulo isósceles BKMN, con el ángulo $\widehat{MNB}$ obtuso, como externo al triángulo ANM. Entonces en el nuevo cuadrilátero vale también la *hip. áng. obtuso.*

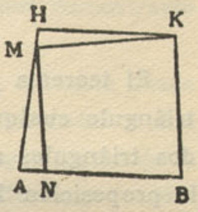


Fig. 12.

Con esto el teorema está completamente demostrado.

Si en un solo caso es verdadera la hipótesis del ángulo agudo, es verdadera en todos los casos (prop. VII).

El teorema se demuestra inmediatamente por reducción al absurdo.

§ 13. De estos últimos teoremas deduce SACCHERI fácilmente una importante consecuencia relativa a los triángulos: *Según que se verifique la hipótesis del ángulo recto, la hipótesis del ángulo obtuso o la hipótesis del ángulo agudo, la suma de los ángulos de un triángulo será respectivamente igual, mayor o menor que dos ángulos rectos* (prop. IX).

Sea ABC un triángulo rectángulo en B. Complétese el cuadrilátero trazando AD igual a BC y perpendicular a AB, uniendo después D con C.

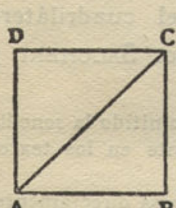


Fig. 13.

En la *hip. áng. recto,* los dos triángulos ABC y ACD son iguales, por lo cual $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$. Síguese inmediatamente, en el triángulo ABC:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2 \text{ rectos}.$$

En la *hip. áng. obtuso,* siendo AB > DC, será $\widehat{ACB} > \widehat{DAC}$ (1), por lo cual en el triángulo en cuestión tendremos:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 2 \text{ rectos}.$$

(1) Esta desigualdad viene demostrada por SACCHERI en su *proposi-*

En la *hip. áng. agudo*, siendo AB $<$ DC, síguese: $\widehat{ACB} < \widehat{DAC}$, y de aquí, en el mismo triángulo:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 2 \text{ } \widehat{\textit{rectos}}.$$

El teorema demostrado, que se extiende fácilmente a un triángulo cualquiera, con la descomposición de la figura en dos triángulos rectángulos, viene invertido por SACCHERI en la proposición XV, mediante un razonamiento por reducción al absurdo.

Una fácil consecuencia de estos resultados es el siguiente teorema:

Si en un solo triángulo la suma de los ángulos es igual, mayor o menor que dos ángulos rectos, en todos los demás triángulos esta suma será respectivamente igual, mayor o menor que dos ángulos rectos (1).

Este teorema, que SACCHERI no enuncia explícitamente en la primera y tercera hipótesis, fué nuevamente encontrado y dado a conocer por LEGENDRE casi un siglo después. Debería llamarse, por consiguiente, teorema de SACCHERI, y no teorema de LEGENDRE, como se hace ordinariamente.

§ 14. Los precedentes teoremas sobre el cuadrilátero birectángulo isósceles fueron demostrados por SACCHERI y

---

ción VIII y sirve de lema a la *proposición IX*. Hemos omitido la sencilla demostración, porque se encuentra muy frecuentemente en los textos elementales, antes de la teoría de las paralelas.

(1) Otra proposición de SACCHERI, que no nos interesa directamente, afirma que *si en un solo cuadrilátero la suma de los ángulos es igual, mayor o menor que cuatro ángulos rectos, se deduce respectivamente la hip. ang. recto, la hip. ang. obtuso o la hip. ang. agudo*. Con esta proposición se relaciona una observación de SACCHERI sobre el postulado de WALLIS (cfr. § 9). WALLIS podía sencillamente admitir la existencia de dos solos triángulos con ángulos iguales y lados desiguales para deducir la existencia de un cuadrilátero en el cual la suma de los ángulos es igual a cuatro ángulos rectos, y de aquí la validez de la *hip. ang. recto* y a continuación el *postulado V*.

posteriormente por otros geómetras, auxiliándose del *postulado de Arquímedes* y del *principio de la continuidad* (cfr. proposición V, VI). El Sr. M. DEHN (1) ha demostrado, sin embargo, que ellos no son independientes. Podemos demostrarlo elementalmente del siguiente modo (2).

Sobre la recta r fíjense dos puntos B y D; elévense desde ellos los dos segmentos perpendiculares e iguales entre sí BA y DC, y únanse después los dos puntos A y C por medio de la recta s. La figura obtenida, en la cual evidentemente se tiene $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$, es fundamental para nuestras consideraciones, y a ella nos referiremos constantemente. Sentado esto, sean E y E′ dos puntos de s: el primero, situado entre A y C; el segundo, no; sean, además, F y F′ los pies de las perpendiculares bajadas desde E y E′ sobre la recta r. Se verifican entonces los siguientes teoremas:

1.º $$\textit{Si} \left\{ \begin{array}{c} EF = AB, \\ \textit{o bien} \\ E'F' = AB \end{array} \right\} \textit{los ángulos } \widehat{BAC} \textit{ y } \widehat{DCA} \textit{ son rectos.}$$

2.º $$\textit{Si} \left\{ \begin{array}{c} EF > AB \\ \textit{o bien} \\ E'F' < AB \end{array} \right\} \textit{los ángulos } \widehat{BAC} \textit{ y } \widehat{DCA} \textit{ son obtusos.}$$

3.º $$\textit{Si} \left\{ \begin{array}{c} EF < AB, \\ \textit{o bien} \\ E'F' > AB \end{array} \right\} \textit{los ángulos } \widehat{BAC} \textit{ y } \widehat{DCA} \textit{ son agudos.}$$

(1) Cfr. Math. Ann., t. LIII, págs. 405-439: *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck.*

(2) Cfr. BONOLA: *Los teoremas del Padre Gerolamo Saccheri sobre la suma de los ángulos de un triángulo y las investigaciones de M. Dehn.* Rend. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXXVIII (1905).

Demostremos el teorema primero:

De la hipótesis $EF = AB$ se deducen las siguientes relaciones:

$$\widehat{BAE} = \widehat{FEA}; \qquad \widehat{FEC} = \widehat{DCE};$$

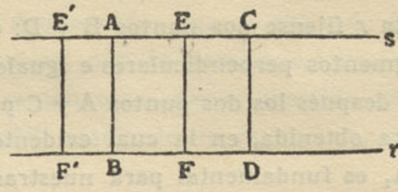


FIG. 14.

las cuales, unidas a la relación fundamental

$$\widehat{BAC} = \widehat{DCA},$$

conducen a establecer la igualdad de los dos ángulos $\widehat{FEA}$ y $\widehat{FEC}$. Los cuales, siendo adyacentes, serán ambos rectos, y, por consiguiente, rectos los dos ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{DCA}$.

El mismo razonamiento es aplicable en la hipótesis

$$E'F' = AB.$$

Demostremos el segundo teorema:

Supongamos, en primer lugar, $EF > AB$. Entonces sobre EF tomemos $FI = AB$ y unamos I con A y C. fig 15

Se verifican entonces las siguientes relaciones:

$$\widehat{BAI} = \widehat{FIA}, \qquad \widehat{DCI} = \widehat{FIC}.$$

Además, por el teorema del ángulo externo (EUCLIDES, XVII), tendremos también:

$$\widehat{FIA} + \widehat{FIC} > \widehat{FEA} + \widehat{FEC} = 2 \ \widehat{rectos}.$$

Y puesto que se tiene

$$\widehat{BAC} + \widehat{DCA} > \widehat{BAI} + \widehat{DCI},$$

se deduce:

$$\widehat{BAC} + \widehat{DCA} > \widehat{FIA} + \widehat{FIC} > 2 \textit{ rectos}.$$

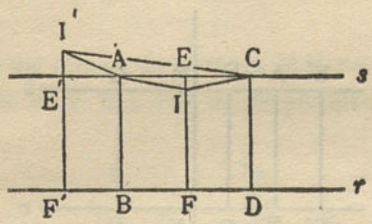


Fig. 15.

Ahora, por la igualdad de los dos ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{DCA}$, se obtiene:

$$\widehat{BAC} > 1 \textit{ recto}. \qquad \text{l. q. d. d.}$$

Supongamos, en segundo lugar, $E'F' < AB$. Entonces prolonguemos $F'E'$ hasta obtener el segmento $F'I' = AB$ y unamos I' con C y A.

Verifícanse las siguientes relaciones:

$$\widehat{F'I'A'} = \widehat{BAI'}; \qquad \widehat{F'I'C} = \widehat{DCI'};$$
$$\widehat{I'AE'} > \widehat{I'CE'}; \qquad \widehat{F'I'A} < \widehat{F'I'C}.$$

Combinando estas relaciones, se deduce, en primer lugar:

$$\widehat{BAI'} < \widehat{DCI'},$$

de la cual, restando miembro a miembro la penúltima de las precedentes, obtendremos:

$$\widehat{BAE'} < \widehat{DCE'} = \widehat{BAC}.$$

Pero los dos ángulos $\widehat{BAE'}$, $\widehat{BAC}$ son adyacentes, por lo cual $\widehat{BAC}$ resulta obtuso, l. q. d. d.

De un modo completamente análogo se demuestra el tercer teorema.

Estos teoremas se invierten después fácilmente, razonando por reducción al absurdo. En particular, si M y N son los pun-

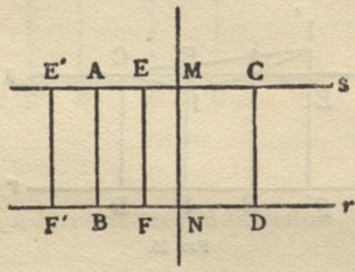


FIG. 16.

tos medios de los dos segmentos AC y BD, para el segmento MN de la perpendicular común a las dos rectas AC y BD, tendremos que:

$$\textit{si } \widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 1 \widehat{\textit{recto}}, \textit{ entonces } MN = AB;$$

$$\textit{si } \widehat{BAC} = \widehat{DCA} > 1 \widehat{\textit{recto}}, \textit{ entonces } MN > AB;$$

$$\textit{si } \widehat{BAC} = \widehat{DCA} < 1 \widehat{\textit{recto}}, \textit{ entonces } MN < AB.$$

Además es fácil ver que:

1.º $\textit{Si } \widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 1 \widehat{\textit{recto}}, \textit{ también } \left\{ \begin{array}{c} \widehat{FEM} \\ \widehat{F'E'M} \end{array} \right\} = 1 \widehat{\textit{recto}};$

2.º $\textit{Si } \widehat{BAC} = \widehat{DCA} > 1 \widehat{\textit{recto}}, \textit{ también } \left\{ \begin{array}{c} \widehat{FEM} \\ \widehat{F'E'M} \end{array} \right\} > 1 \widehat{\textit{recto}};$

3.º $\textit{Si } \widehat{BAC} = \widehat{DCA} < 1 \widehat{\textit{recto}}, \textit{ también } \left\{ \begin{array}{c} \widehat{FEM} \\ \widehat{F'E'M} \end{array} \right\} < 1 \widehat{\textit{recto}}.$

En efecto; en el primer caso, siendo las rectas r y s equidistantes, se verifican las siguientes relaciones:

$$\widehat{NMA} = \widehat{FEM} = \widehat{BAC} = \widehat{F'E'M} = 1 \textit{ recto}.$$

Para demostrar el segundo y tercer caso basta razonar por reducción al absurdo, teniendo presente los resultados arriba obtenidos.

Sea ahora P un punto de la recta MN no comprendido entre los puntos M y N. Sea PR la perpendicular a MN, y RK

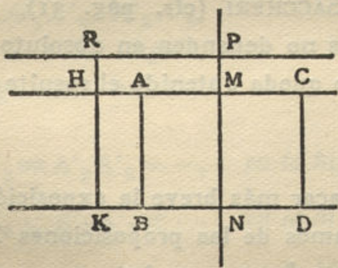


FIG. 17.

la perpendicular a BD en K. Esta última perpendicular encontrará a AC en un punto H. Sentado esto, los anteriores teoremas permiten, sin más, afirmar que:

$$\textit{si } \widehat{BAM} = 1 \textit{ recto, también} \left\{ \begin{matrix} \widehat{KHM} \\ \widehat{KRP} \end{matrix} \right\} = 1 \textit{ recto};$$

$$\textit{si } \widehat{BAM} > 1 \textit{ recto, también} \left\{ \begin{matrix} \widehat{KHM} \\ \widehat{KRP} \end{matrix} \right\} > 1 \textit{ recto};$$

$$\textit{si } \widehat{BAM} < 1 \textit{ recto, también} \left\{ \begin{matrix} \widehat{KHM} \\ \widehat{KRP} \end{matrix} \right\} < 1 \textit{ recto}.$$

Estas propiedades, como fácilmente se comprende, se verifican también si el punto P cae entre M y N.

En resumen, los tres últimos teoremas, que manifiestamente coinciden con los de Saccheri, relativos a los cuadriláteros birectángulos isósceles, es decir: *si en un solo caso es verdadera, respectivamente, la hipótesis del ángulo recto, del ángulo obtuso o del ángulo agudo, será verdadera en cualquier otro caso*, están demostrados independientemente del *postulado de Arquímedes.*

Queriendo ahora pasar de los teoremas sobre los cuadriláteros a los teoremas sobre los triángulos, enunciados al principio de este párrafo, podemos desde luego referirnos a los razonamientos de Saccheri (cfr. pág. 31), puesto que aquellos razonamientos no dependen en absoluto del postulado en cuestión. Con esto queda obtenido el resultado que nos habíamos propuesto.

§ 15. Para hacer más breve la exposición de la obra saccheriana, extraigamos de las proposiciones XI y XII el contenido del siguiente *lema* segundo:

Sea ABC un triángulo rectángulo en C; sean H el punto medio de AB y K el pie de la perpendicular bajada desde H sobre AC.

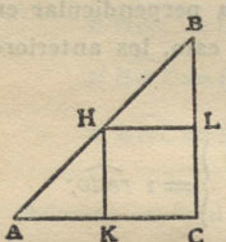


Fig. 18.

Tendremos entonces:

$AK = KC$, *en la hip. áng. recto;*

$AK < KC$, *en la hip. áng. obtuso;*

$AK > KC$, *en la hip. áng. agudo.*

La parte relativa a la *hip. áng. recto* es inmediata. En la *hip. áng. obtuso*, siendo la suma de los ángulos de un cuadrilátero mayor que cuatro ángulos rectos, será $\widehat{AHK} < \widehat{HBC}$. Bajada después desde H la HL, perpendicular a BC, los dos triángulos AHK y HBL, con las hipotenusas iguales, en virtud de la precedente relación dan lugar a la siguiente desigualdad: AK < HL. Pero en el cuadrilátero trirectángulo HKCL, el ángulo $\widehat{H}$ es obtuso *(hip. áng. obtuso)*, por lo cual será HL < KC, de donde AK < KC.

Del mismo modo se demuestra la tercera parte del lema.

La siguiente proposición es una extensión fácil de este lema:

Si sobre un lado de un ángulo de vértice A se toman los segmentos consecutivos iguales AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ··· y se construyen las respectivas proyecciones AA'_1, $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, ··· sobre el segundo lado del ángulo, se verifican las siguientes relaciones:

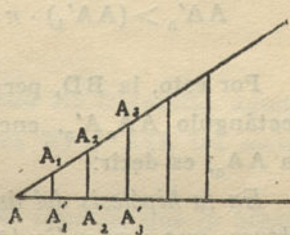


Fig. 19.

$AA'_1 = A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \cdots$, *en la hip. áng. recto;*

$AA'_1 < A'_1A'_2 < A'_2A'_3 < \cdots$, *en la hip. áng. obtuso;*

$AA'_1 > A'_1A'_2 > A'_2A'_3 > \cdots$, *en la hip. áng. agudo.*

Omitimos, por brevedad, la fácil demostración.

Veamos desde luego qué importantes consecuencias pueden deducirse de esta proposición en la *hip. áng. recto* y en la *hip. áng. obtuso.*

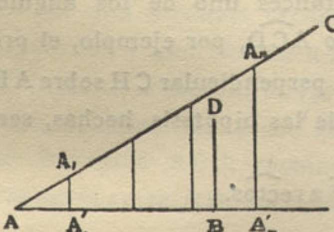


Fig. 20

Sean AC y BD dos rectas: la primera, oblicua; la segunda, perpendicular a la recta AB. Sobre AC, del lado del ángulo agudo $\widehat{CAB}$ y de la perpendicular BD, se toma el segmento arbitrario AA_1 y se construye su proyección AA'_1 sobre AB. Determínese después un número n bastante grande, para que el enésimo múltiplo de AA'_1 sea mayor que AB; después, sobre AC, del lado de A_1, constrúyase el segmento AA_n, múltiplo de AA_1, según el número n (1). Bajando después desde A_n la perpendicular $A_nA'_n$ sobre AB, tendremos:

$$AA'_n = (AA'_1) \cdot n > AB, \quad \textit{en la hip. áng. recto;}$$

$$AA'_n > (AA'_1) \cdot n > AB, \quad \textit{en la hip. áng. obtuso.}$$

Por esto, la BD, perpendicular al lado AA'_n del triángulo rectángulo $AA_nA'_n$, encontrará necesariamente la hipotenusa AA_n; es decir:

En la hipótesis del ángulo recto y en la hipótesis del ángulo obtuso, una perpendicular y una oblicua a una misma recta se encuentran (prop. XI, XII) (2).

De aquí se deduce el siguiente teorema:

En la hipótesis del ángulo recto y en la del ángulo obtuso es verdadero el V postulado de Euclides (prop. XIII).

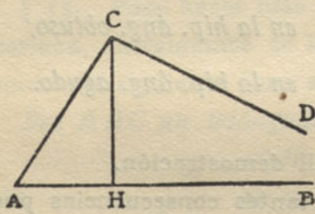


Fig. 21.

Sean AB y CD dos rectas cortadas por la recta AC. Supongamos que sea

$$\widehat{BAC} + \widehat{ACD} < 2 \text{ rectos}.$$

Entonces uno de los ángulos $\widehat{BAC}$ o $\widehat{ACD}$, por ejemplo, el primero, será agudo. Desde C bájese la perpendicular CH sobre AB. En el triángulo ACH, en virtud de las hipótesis hechas, será

$$\widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{H} \geqq 2 \text{ rectos}.$$

(1) El postulado de Arquímedes, de que se hace aquí uso, aparece en tal forma que incluye implícitamente la infinidad de la recta.

(2) El método seguido por Saccheri para demostrar esta proposición es substancialmente idéntico al de Nasîr-Eddîn. Nasîr-Eddîn se refiere, sin embargo, solamente a la *hip. áng. recto*, habiendo demostrado anteriormente que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. Es oportuno observar que Saccheri conoció y criticó la obra del geómetra árabe.

Pero por hipótesis tenemos también:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ACD} < 2 \text{ rectos}.$$

Combinando estas dos relaciones se obtiene:

$$\widehat{H} > \widehat{HCD}.$$

Y puesto que $\widehat{H}$ es recto, el ángulo $\widehat{HCD}$ resulta agudo. Luego, en virtud de las proposiciones XI y XII, las rectas CD y AB se encuentran (1).

Este resultado permite a SACCHERI concluir que *la hipótesis del ángulo obtuso es falsa* (prop. XIV). En efecto, en esta hipótesis se verifica el *postulado euclídeo* (prop. XIII), y, por consiguiente, se verifican los teoremas ordinarios que de este postulado se deducen. Pero entonces en el cuadrilátero fundamental la suma de los ángulos es igual a cuatro ángulos rectos, es decir, es verdadera la *hip. áng. recto* (2).

§ 16. Queriendo SACCHERI probar que el *postulado V* es válido incondicionalmente, se dispone a destruir también la *hip. áng. agudo*.

Entre tanto será bueno observar que *en esta hipótesis existen una perpendicular y una oblicua a una misma recta que no se encuentran* (prop. XVII). Para construirlas, desde el vértice B del triángulo ABC, rectángulo en C, trácese la recta BD, de modo que sea $\widehat{ABD} = \widehat{BAC}$. Entonces,

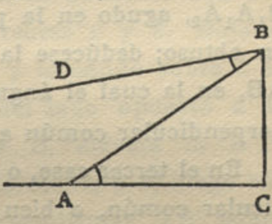


FIG. 22.

(1) También esta demostración se encuentra en la obra de NASÎR-EDDÎN, en la que evidentemente se ha inspirado SACCHERI en sus investigaciones.

(2) Es oportuno observar que en esta demostración SACCHERI hace uso de aquel tipo especial de razonamiento de que hablamos en el § 11. En efecto: *aunque se admita como verdadera la hip. áng. obtuso, se llega a concluir que es verdadera la hip. áng. recto*. Es ésta una forma característica que en algunos casos puede tomar el razonamiento ordinario por reducción al absurdo.

por la *hip. áng. agudo* el ángulo $\widehat{CBD}$ es agudo y las dos rectas CA y BD, que no se encuentran (EUCLIDES, XXVII), son una oblicua y la otra perpendicular a la BC.

De ahora en adelante nos referiremos exclusivamente a la *hip. áng. agudo.*

Sean *a* y *b* dos rectas coplanarias no incidentes. Desde los puntos A_1 y A_2 de *a* bájense las perpendiculares $A_1 B_1$ y $A_2 B_2$ sobre *b*. Los ángulos $\widehat{A_1}$ y $\widehat{A_2}$ del cuadrilátero obtenido pueden ser: 1.°, uno recto y uno agudo; 2.°, ambos agudos; 3.°, uno agudo y otro obtuso. En el primer caso existe desde luego la perpendicular común a las dos rectas *a* y *b*. En el segundo caso se prueba la existencia de la perpendicular común razonando por continuidad (SACCHERI, prop. XXII). En efecto, si se mueve de un modo continuo la recta $A_1 B_1$, manteniéndola perpendicular a *b*, hasta llevarla sobre $A_2 B_2$, el ángulo $B_1\widehat{A_1}A_2$, agudo en la posición inicial, crece hasta convertirse en obtuso; dedúcese la existencia de una posición intermedia AB, en la cual el ángulo $B\widehat{A_1}A_2$ es recto. Entonces AB es la perpendicular común a las dos rectas *a* y *b*.

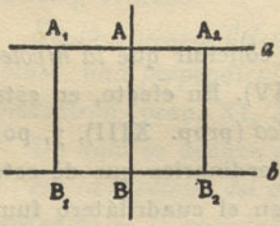


FIG. 23.

En el tercer caso, o las rectas *a* y *b* no admiten una perpendicular común, o bien la perpendicular común, si existe, no cae entre B_1 y B_2.

Dada, como *hipótesis*, la existencia de dos rectas coplanarias no incidentes y desprovistas de perpendiculares comunes, SACCHERI demuestra que tales rectas van siempre acercándose (prop. XXIII) y que su distancia acaba por ser menor que un segmento tan pequeño como se quiera (prop. XXV). En otros términos, si existen dos rectas coplanarias no incidentes, sin perpendiculares comunes, deben comportarse *asintóticamente* entre sí (1).

(1) Este resultado justifica la duda presentada por los griegos respecto a la existencia posible de rectas coplanarias asintóticas (cfr. pág. 8)

Para probar la existencia efectiva de rectas asintóticas, SACCHERI razona aproximadamente así: Las rectas de un haz de centro A pueden, con respecto a una recta b coplanaria con el haz y no pasando por A, repartirse en dos grupos:

1.º *Rectas del haz incidentes sobre* b.

2.º *Rectas del haz que admiten con* b *una perpendicular común.*

En virtud del principio de la continuidad, existen dos rectas, p y q, que dividen al haz en dos partes. A la primera parte pertenecen las rectas incidentes sobre b; a la segunda parte, las rectas no incidentes sobre b, y teniendo con b una perpendicular común. En cuanto a las rectas p y q, se demuestra que no pertenecen ni a una ni a la otra parte.

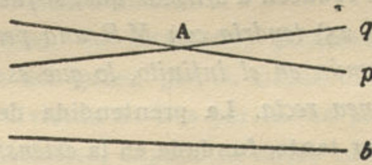


FIG. 24.

En efecto, que p no sea incidente sobre b es manifiesto. Para probar que p no admite perpendicular común con b, razonamos por reducción al absurdo. Sea PB la hipotética perpendicular a las dos rectas p y b. Bajada desde A la perpendicular AM sobre b, y tomando sobre b el punto B′, del lado opuesto a M respecto de B, elévese la B′P′ perpendicularmente a b; luego bájese la perpendicular AP′ sobre B′P′. La recta AP′ no es incidente sobre B, porque admite con b una perpendicular común y encuentra a la PB en un punto R.

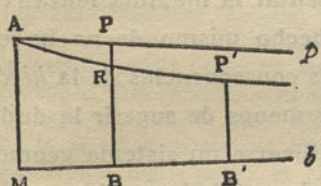


FIG. 25.

El ángulo $\widehat{ARB}$, suplementario del ángulo agudo $\widehat{BRP'}$, es obtuso, por lo cual el rayo AR caerá en el ángulo $\widehat{MAP}$. Pero entonces AR sería al mismo tiempo secante y no secante respecto de b. Esta contradicción obliga a desechar la hipótesis de una perpendicular común a b y p. Concluiremos, por tanto, que las dos rectas p y q son asintóticas a la recta b (1).

§ 17. En este punto SACCHERI trata de concluir, confiando, más que en la lógica, en la intuición y en la fe, la validez del *postulado V*. Para demostrar que la *hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta* (prop. XXXIII), se apoya sobre cinco lemas, desarrollados en unas 16 páginas; en substancia, sin embargo, se reducen a *afirmar* que, *si fuese verdadera, la recta* AP' (figura 25) *tendría con* MB *una perpendicular común en un punto común en el infinito, lo que es contrario a la naturaleza de la línea recta*. La prentendida demostración de SACCHERI está, por tanto, fundada en la *extensión al infinito* de ciertas propiedades, válidas para figuras situadas a distancia finita.

SACCHERI, sin embargo, no queda satisfecho de su razonamiento, e intenta alcanzar la deseada prueba volviendo al antiguo concepto de equidistancia. No vale la pena de exponer la nueva discusión, pues no representa mejora alguna sobre lo hecho por sus predecesores.

Aun no consiguiendo su objeto, la obra saccheriana es de gran importancia; además de representar la máxima tentativa en favor del *postulado V*, por el hecho mismo de no haber descubierto contradicciones entre las consecuencias de la *hipótesis del ángulo agudo*, no podía por menos de sugerir la duda de si sobre esta hipótesis podría edificarse un sistema geométrico lógicamente consecuente y si el postulado euclídeo sería indemostrable (2).

---

(1) En la obra de SACCHERI, antes de este resultado, se encuentran otras muchas proposiciones interesantes, entre las cuales es digna de mención la siguiente: *Si dos rectas se aproximan cada vez más, y su distancia se mantiene siempre superior a un cierto segmento asignable, la hipótesis del ángulo agudo queda destruída*. Así que postular la ausencia de rectas asintóticas equivale a admitir el postulado euclídeo.

(2) La obra del P. SACCHERI fué bastante difundida después de su

JUAN ENRIQUE LAMBERT (1728-1777).

§ 18. Qué influencia tuviese la obra de SACCHERI sobre los geómetras del siglo XVIII no se puede precisar; todavía es probable que el geómetra suizo LAMBERT la conociese (1), puesto que en su *Theorie der Parallellinien* (1766) cita una disertación de G. S. KLUGEL (1739-1812) (2), donde se analiza detalladamente la obra del geómetra italiano.

La *Theorie der Parallellinien,* de LAMBERT, publicada en 1786, después de la muerte del autor, por G. BERNOULLI y C. F. HINDENBURG (3), está dividida en tres partes. La primera, de naturaleza crítica y filosófica, expone la doble cuestión que podemos proponernos sobre el *postulado V*, esto es, si puede demostrarse con el simple auxilio de los precedentes, o si, por el contrario, no se exige el empleo de alguna otra hipótesis. La segunda parte está dedicada a la exposición de varias tentativas, en las que el postulado euclídeo se reduce a proposiciones sencillísimas, las cuales, sin embargo, deberían ser

publicación y de ella hablaron dos historias de las matemáticas: la de J. C. HEILBRONNER (Leipzig, 1742) y la de MONTUCLA (París, 1758). Además es minuciosamente analizada por G. S. KLÜGEL en su disertación más abajo citada (nota 2). Sin embargo, cae luego en el olvido. Sólo en 1889 E. BELTRAMI, con su nota: *Un precursor italiano de Legendre y de Lobatschefsky* (Rend. Acc. Lincei (4), V, págs. 441-448), reclamó sobre ella la atención de los geómetras. En seguida la obra de SACCHERI fué traducida al inglés por G. B. HALSTED (Am. Math. Montly, I, 1894 y siguientes), al alemán por STÄCKEL y ENGEL (Th. der P., 1895), al italiano por G. BOCCARDINI (Milán, Hoepli, 1904).

(1) Cfr. SEGRE: *Conjeturas acerca de la influencia de Girolamo Saccheri sobre la formación de la geometría no euclidiana.* Actas Ac. Ciencias de Turin, t. XXXVIII (1903).

(2) *Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent A. G. Kaestner et auctor respondens G. S. Klügel.* (Gottinga, 1763.)

(3) Cfr.: Magazin für reine und angewandte Math., 2 Stüch, páginas 137-164, 3 Stüch, págs. 325-358 (1786). La obra de LAMBERT fué nuevamente publicada por STÄCKEL y ENGEL en su *Th. der P.*, págs. 135-208, precedida de noticias históricas relativas al autor.

a su vez demostradas. La tercera, la más importante, contiene un sistema de investigaciones semejantes a las del padre SACCHERI, que rápidamente resumiremos.

§ 19. La figura fundamental de LAMBERT es un *cuadrilátero trirectángulo*, y se exponen las tres hipótesis sobre la naturaleza del cuarto ángulo. La primera es la *hip. áng. recto;* la segunda, la *hip. áng. obtuso,* y la tercera, la *hip. áng. agudo.* También en la manera de tratar estas hipótesis el autor se acerca al método saccheriano.

La *primera hipótesis* conduce fácilmente al sistema euclídeo.

Para rechazar la *segunda hipótesis,* LAMBERT recurre a una figura formada con dos rectas, *a* y *b*, perpendiculares a la tercera recta AB. Desde los puntos sucesivos B, B_1, B_2..., B_n de la *b* baja las perpendiculares BA, B_1A_1, B_2A_2..., B_nA_n sobre *a*, y demuestra, en primer lugar, que los segmentos de las perpendiculares comprendidos entre *a* y *b* van decreciendo a partir de la perpendicular AB; después, que la diferencia entre cada uno de ellos y el siguiente va decreciendo.

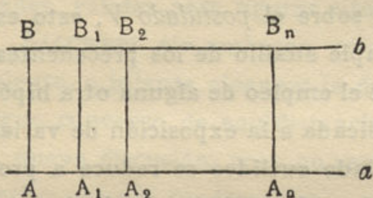


FIG. 26.

De modo que resulta:

$$BA - B_nA_n > (BA - B_1A_1) \cdot n.$$

Pero, para *n* bastante grande, el segundo miembro de la desigualdad es tan grande como se quiera *(post. Arquímedes)* (1), mientras que el primer miembro es siempre menor que BA. Esta contradicción permite a LAMBERT declarar falsa *la segunda hipótesis.*

(1) El *postulado de Arquímedes* también se usa aquí bajo tal forma que incluye la infinidad de la recta (cfr. SACCHERI, nota de la pág. 40).

Para tratar la *tercera hipótesis* LAMBERT recurre también a la precedente figura, sobre la cual demuestra que los segmentos BA, B_1A_1, B_2A_2,... B_nA_n van creciendo y que al mismo tiempo crecen las diferencias entre cada uno de ellos y el precedente. Este resultado, sin embargo, no le conduce a contradicciones, por lo cual, lo mismo que SACCHERI, se ve obligado a proseguir las deducciones. Entonces, en la *tercera hipótesis*, encuentra que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos; y, yendo más allá que SACCHERI, descubre que la *deficiencia de un polígono*, esto es, la diferencia entre 2 (n — 2) ángulos rectos y la suma de los ángulos de un polígono *es proporcional al área del mismo polígono*. Este resultado se obtiene más fácilmente observando que tanto el área cuanto la deficiencia de un polígono suma de otros varios son respectivamente la suma de las áreas y de las deficiencias de los polígonos que lo componen (1).

§ 20. Otro descubrimiento notable de LAMBERT se refiere a la medida de las magnitudes geométricas. Consiste precisamente en que, mientras en la geometría ordinaria a la medida de los segmentos corresponde solamente un significado *relativo* a la elección de una particular *unidad*, en la geometría fundada en la *tercera hipótesis* se puede, en cambio, conferirle un significado *absoluto*.

Es necesario ante todo aclarar la distinción que se presenta entre *absoluto* y *relativo*. En muchas cuestiones acontece que los elementos que se suponen dados se pueden dividir en dos grupos, de modo que los del *primer grupo* permanezcan fijos

(1) Conviene observar que SACCHERI había ya encontrado, en la *hip. áng. agudo*, la deficiencia de que se habla, e implícitamente notado también que un cuadrilátero suma de otros varios tiene por deficiencia la suma de las deficiencias (prop. XXV). Sin embargo, no había sacado de aquí ninguna consecuencia respecto a la proporcionalidad entre el área y la deficiencia.

en todo el campo de nuestras consideraciones, mientras que los del *segundo grupo* puedan variar en una multiplicidad de casos posibles. Cuando esto ocurre, se suele frecuentemente prescindir de la explícita mención de los datos del primer grupo, y considerar como *relativo* todo lo que depende de los datos variables y como *absoluto* todo lo que depende solamente de los datos fijos.

Así, por ejemplo, en la teoría de los *campos de racionalidad* se toman como datos del *segundo grupo* (datos variables) ciertas irracionales elementales (constituyendo una *base)*, y como datos del *primer grupo* la unidad [1], que frecuentemente se omite por ser común a todos los campos. Entonces, hablando de un número, se dice que es *racional relativamente* a una base dada, si pertenece al campo de racionalidad definido por aquella base; se dice, en cambio, que es *racional absolutamente* si resulta racional respecto a la base 1, común a todos los campos.

Viniendo ahora a la Geometría, observamos que, en todo estudio concreto, generalmente se suponen dadas ciertas figuras y la magnitud de sus elementos; pero además de estos datos variables (del *segundo grupo)*, que pueden ser elegidos de un modo arbitrario, están siempre presupuestas, implícitamente, las figuras fundamentales: *rectas*, *planos*, *haces*, etc. (datos fijos o del *primer grupo)*. Entonces, toda construcción, toda medida, toda propiedad de una figura cualquiera deberá considerarse como *relativa* si es esencialmente relativa a los datos variables; deberá, en cambio, llamarse *absoluta* si es relativa solamente a los datos fijos (figuras fundamentales), o bien si, viniendo enunciada en relación a los datos variables, depende de ellos sólo aparentemente, de modo que permanece fija al variar éstos.

En este sentido es claro que en la geometría ordinaria la medida de los segmentos tiene necesariamente un significado relativo. En efecto, la existencia de las transformaciones por semejanza no nos permite individualizar de algún modo la magnitud de un segmento respecto a las figuras fundamentales (recta, haz, etc.). Para el ángulo, en cambio, se puede escoger un modo de medida que expresa una propiedad absoluta suya; basta, en efecto, tomar la relación entre el ángulo y un giro, esto es, el haz completo, que es una de las figuras fundamentales.

Volvamos ahora a LAMBERT y a su geometría correspondiente a la *tercera hipótesis*. El observa que a todo segmento puede hacerse corresponder un determinado ángulo, fácilmente construible. Síguese de esto que todo segmento está en relación con la figura fundamental *haz;* y de aquí que, en la nueva (hipotética) geometría, también a la medida de los segmentos debería poderse atribuir un significado absoluto.

Para ver después, del modo más sencillo, cómo a todo segmento puede coordinarse un ángulo y obtener así una representación numérica absoluta de los segmentos, imaginemos construído sobre todo segmento un triángulo equilátero. Podemos asociar a cada segmento el ángulo del triángulo respectivo y luego la medida de este ángulo, ya que existe una correspondencia biunívoca entre los segmentos y los ángulos comprendidos entre ciertos límites.

La obtenida representación numérica de los segmentos no goza, sin embargo, de la *propiedad distributiva* que corresponde a la *longitud*, porque sumando dos segmentos no resultan sumados los ángulos correspondientes. Se puede, sin embargo, determinar una función del ángulo que goce de esta propiedad y asociar a un segmento, no el ángulo en cuestión, sino esta función del ángulo. Tal función, para todo valor del ángulo comprendido entre ciertos límites, nos da una *medida absoluta* de los segmentos. La *unidad absoluta* es aquel segmento para el cual la función toma el valor 1.

Si se observa después que cuando una cierta función del ángulo sea distributiva en el sentido arriba indicado, también el producto de esta función por una constante arbitraria goza de la misma propiedad, es claro que se podrá disponer siempre de esta constante, de modo que la unidad absoluta de los segmentos sea aquel segmento que corresponde a un ángulo determinado; por ejemplo, al ángulo de 45°. La posibilidad de construir, dado el ángulo, la unidad absoluta de los segmentos está ligada a la resolución del siguiente problema: *Construir en la hip. áng. agudo un triángulo equilátero de determinada deficiencia.*

Para cuanto se refiere a la medida absoluta de las áreas poligonales, observemos que está dada, desde luego, por la deficiencia de los polígonos. También para los poliedros pudiera instituirse una medida absoluta.

Pero, según nuestra intuición espacial, la medida absoluta de todas estas magnitudes geométricas no nos parece posible; de donde, *negando la existencia y la unidad absoluta para los segmentos, se pudiera, con* LAMBERT, *rechazar la tercera hipótesis.*

§ 21. No se crea que LAMBERT suponga haber así demostrado el *postulado V*, puesto que comprende cuán arbitraria sea la precedente afirmación.

Para obtener la prueba deseada procede a la indagación de las consecuencias de la *tercera hipótesis;* pero no acierta mas que a transformar su cuestión en otras igualmente difíciles de ser resueltas.

Otras cosas muy interesantes contiene la *Theorie der Parallellinien;* por ejemplo: la comparación de la geometría, que sería válida sobre el plano si fuese lícita la *segunda hipótesis*, con la geometría esférica (1), y las observaciones relativas a la *independencia* de esta última del postulado de las paralelas.

(1) En efecto, en geometría esférica la suma de los ángulos de un cuadrilátero es mayor que cuatro ángulos rectos, etc.

Refiriéndose después a la *tercera hipótesis*, expresa la siguiente aguda y original idea: *Ich sollte daraus fast den Schluss machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor.*

A este modo de concebir las cosas acaso fué llevado por la fórmula $r^2(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}-\pi)$, que expresa el área de un triángulo esférico, porque, mudando en ella el radio r por el radio imaginario $r\sqrt{-1}$, resulta:

$$r^2(\pi-\widehat{A}-\widehat{B}-\widehat{C}),$$

esto es, la fórmula del área de un triángulo plano, en la *tercera hipótesis* de LAMBERT (1).

§ 22. LAMBERT dejó, pues, la cuestión en suspenso; antes bien, el no haber publicado sus investigaciones hace suponer que había entrevisto algún horizonte nuevo.

Entre tanto, es conveniente observar que, por el mal resultado general de semejantes investigaciones, en la segunda mitad del siglo XVIII iba formándose la convicción de que fuese necesario admitir sin demostración el postulado euclídeo o algún otro postulado equivalente.

En Alemania, donde con frecuencia se sucedían los estudios sobre este asunto, la convicción había ya adoptado una forma bastante precisa. La encontramos en A. G. KAESTNER (1719-1800), gran cultivador de las investigaciones sobre paralelas (2), y en su discípulo G. S. KLÜGEL, autor de la apreciable crítica sobre las más célebres tentativas para la demostración del *postulado V*, citada en la página 45 (nota 2). En este trabajo, KLÜGEL, hallando insuficiente cada una de las demostraciones propuestas, examina la posibilidad de que

(1) Cfr. STÄCKEL y ENGEL: *Th. der P.*, pág. 146.

(2) Para cualquier noticia relativa a KAESTNER cfr. STÄCKEL y ENGEL: *Th. der P.*, págs. 139-141.

rectas que no se encuentran sean divergentes *(Möglich wäre es freilich dass Gerade die sich nicht schneiden, von einander abweichen)*, y añade que la apariencia de contrasentido que esto presenta no es el resultado de una prueba rigurosa ni una consecuencia de los determinados conceptos de las líneas rectas o curvas, sino más bien algo que se deduce de la experiencia y del juicio de nuestros sentidos. *(Dass so etwas widersinnig ist, wissen wir nicht in Folge strenger Schlusse oder vermöge deutlicher Begriffe von der gereden und der krummen Linie, vielmehr durch die Erfahrung und durch dass Urteil unsrer Augen.)*

Las investigaciones de SACCHERI y LAMBERT propenden a apoyar la opinión de KLÜGEL; pero no pueden suponerse como prueba de la indemostrabilidad de la hipótesis euclídea. Y ni siquiera se alcanzaría una prueba si, continuando el camino abierto por los dos citados geómetras, se dedujeran todas cuantas proposiciones se quisieran, no contradictorias con los principios de la Geometría.

Sin embargo, el aventurarse en este último campo, sin la preocupación saccheriana de descubrir en él contradicciones, constituye, en la historia, el paso decisivo para conquistar la indemostrabilidad del *postulado de Euclides* y descubrir las *geometrías no euclidianas.*

Pero desde la obra de SACCHERI y LAMBERT a la de LOBATSCHEFSKI y BOLYAI, que se informan en la idea aquí expresada, debe pasar todavía más de medio siglo.....

LOS GEÓMETRAS FRANCESES DE FINES DEL SIGLO XVIII.

§ 23. La crítica sobre las paralelas, que ya en Italia y en Alemania había conducido a resultados de gran interés, tuvo también en Francia, a fines del siglo XVIII y principios del XIX, un notable impulso.

D'ALEMBERT (1717-1783), en un artículo suyo sobre Geometría (1759), declara que: *La definition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de Géométrie* (1). Sostiene que con una buena definición de línea recta se deberían evitar ambas dificultades. Propone llamar paralela a una recta dada, a cualquier otra recta coplanaria que une dos puntos equidistantes y situados en una misma región de aquélla. Esta definición permite construir inmediatamente las paralelas; sin embargo, sería necesario demostrar que estas paralelas son equidistantes. Este teorema fué propuesto por D'ALEMBERT, casi como desafío, a sus contemporáneos.

§ 24. DE MORGAN, en su colección de paradojas, cuenta que LAGRANGE (1736-1813), hacia el fin de su vida, escribió una Memoria sobre las paralelas. Presentada a la Academia francesa, interrumpió su lectura exclamando: *Il faut que j'y songe encore!*, y retiró el manuscrito (2).

Además, HOÜEL refiere que LAGRANGE, conversando con BIOT, afirmaba la independencia de la trigonometría esférica del *postulado de Euclides* (3). Para avalorar esta afirmación puede añadirse que LAGRANGE se ocupó con especial interés de la trigonometría esférica (4) y que fué el inspirador, si no autor, de una Memoria *Sur les principes fondamentaux de la Mécanique* (1760-61) (5), en la cual D. DE FONCENEX desarrolla una cuestión de independencia análoga a la anteriormente indicada de la trigonometría esférica. Precisamente FONCENEX demuestra que la ley analítica para la composición

---

(1) Cfr. D'ALEMBERT: *Mélanges de Litterature, d'Histoire et de Philosophie*, t. V, § XI (1759).—Cfr. también: *Encyclopedie Méthodique Mathématique*, t. II, pág. 519, artículo *Parallèles* (1785).

(2) A. DE MORGAN: *Budget of Paradoxes*, pág. 173 (Londres, 1872).

(3) Cfr. J. HOÜEL: *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*, pág. 84, nota. (París, G. Villars, 1883.)

(4) Miscellanea Taurinensia, t. II, págs. 299-322 (1760-61).

(5) Cfr. LAGRANGE: *Œuvres*, t. VII, pág. 331-363.

de las fuerzas concurrentes no depende ni del *postulado V* ni de cualquier otro equivalente (1).

§ 25. El concepto de semejanza, como concepto fundamental, ya usado por WALLIS en 1663 (cfr. § 9), reaparece a principios del siglo XIX, con el autorizado apoyo de dos grandes geómetras: L. N. M. CARNOT (1753-1823) y LAPLACE (1749-1827).

En una nota (pág. 481) a su *Géométrie de Position* (1803), CARNOT afirma que la teoría de las paralelas se enlaza con la noción de semejanza, cuyo grado de evidencia corresponde, aproximadamente, al de *igualdad*, y que una vez admitida esta noción es fácil establecer con rigor la teoría en cuestión.

LAPLACE (1824), después de haber observado que la ley de NEWTON (ley de la atracción universal), por su sencillez, por su generalidad y por la correspondencia que encuentra en los fenómenos físicos, debe mirarse como rigurosa, observa que una de sus propiedades más notables es que si las dimensiones de todos los cuerpos del universo, sus distancias mutuas y sus velocidades decrecieran proporcionalmente, los cuerpos celestes describirían líneas enteramente semejantes a las que describen, de modo que el universo, reducido sucesivamente hasta el espacio más pequeño imaginable, ofrecería siempre las mismas apariencias a sus observadores. Estas apariencias, continúa, son, pues, independientes de las dimensiones del universo, de modo que la sencillez de las leyes naturales no permite al observador mas que conocer relaciones. Refiriéndose a esta concepción astronómica del espacio, añade en una nota: «Las tentativas de los geómetras para demostrar el *postulado de Euclides* sobre las paralelas han sido hasta ahora inútiles. Sin embargo, nadie pone en duda este postulado y los teoremas que Euclides deduce. La percepción del espacio encierra,

(1) Cfr. Cap. VI.

pues, una propiedad especial, evidente por sí misma, sin la cual no se puede rigurosamente establecer las propiedades de las paralelas. La idea de la extensión limitada, por ejemplo, del círculo, no contiene nada que dependa de su magnitud absoluta. Pero si nosotros disminuimos con el pensamiento su radio, nos vemos llevados invenciblemente a disminuir en la misma relación su circunferencia y los lados de todas las figuras inscritas. Esta proporcionalidad me parece ser un postulado más natural que el de Euclides, y es notable volver a encontrarlo en los resultados de la gravitación universal (1).

§ 26. Junto a los precedentes geómetras, se suele recordar también a J. B. FOURIER (1768-1830), por una discusión sobre la línea recta sostenida por él con MONGE (2). Queriendo relacionar esta discusión con las investigaciones sobre las paralelas, basta referirse a la idea expresada por D'ALEMBERT, que la demostración del postulado puede ligarse a la definición de recta (cfr. § 23).

FOURIER, considerando como *primitivo* el concepto de distancia entre dos puntos, propone definir primero la esfera; luego, el plano, como lugar de los puntos equidistantes de dos puntos dados (3); después, la recta, como lugar de los puntos equidistantes de tres puntos dados. Este modo de presentar el problema de los fundamentos de la Geometría concuerda con las ideas profesadas a continuación por otros geómetras que se ocuparon expresamente en la cuestión de las paralelas (W. BOLYAI, N. LOBASTCHEFSKI, DE TILLY). En este sentido la discusión entre FOURIER y MONGE tiene su pues-

---

(1) Cfr. LAPLACE: *Œuvres*, t. VI. Livre V, Ch. V, pág. 472.

(2) Cfr.: Séances de l'Ecole normale; Débats, t. I, págs. 28-33 (1795). La discusión fué reproducida en *Mathésis*, t. IX, págs. 139-141 (1883).

(3) Esta definición del plano fué dada por LEIBNITZ cerca de un siglo antes. Cfr., por ejemplo, los *Opuscules et fragments inédits*, publicados por L. COUTURAT, págs. 554-5. (París, Alcan, 1903.)

to entre los primeros documentos que se refieren a la *Geometría no euclidiana* (1).

ADRIANO MARIA LEGENDRE (1752-1833).

§ 27. Los precedentes geómetras se limitaron a exponer las dificultades y a emitir juicios acerca del postulado; quien intentó, en cambio, transformarlo en teorema fué LEGENDRE, cuyas investigaciones, esparcidas en las diferentes ediciones de sus *Eléments de Géométrie* (1794-1823), están resumidas en las *Réfléxions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle* (Mém. Academie Sciences, Paris, t. XIII, 1833).

En las más interesantes tentativas, LEGENDRE, como antes SACCHERI, ataca la cuestión por el lado de la suma de los ángulos de un triángulo, suma que él quiere demostrar igual a dos ángulos rectos.

A este fin trata desde el principio de descartar la hipótesis saccheriana del ángulo obtuso, estableciendo que *en cualquier triángulo la suma de los ángulos es menor* (hip. áng. agudo) *o igual* (hip. áng. recto) *a dos ángulos rectos.*

Expongamos una sencilla y elegante demostración de LEGENDRE.

Sean, sobre una recta, n segmentos iguales y consecutivos A_1A_2, A_2A_3, $\cdots A_nA_{n+1}$, sobre los cuales, en una misma región de la recta, se construyen n triángulos iguales, teniendo por terceros vértices los puntos B_1, B_2, $\cdots$ B_n.

Los segmentos B_1B_2, B_2B_3, $\cdots$ $B_{n-1}B_n$, que unen estos últimos vértices, son iguales, y pueden considerarse como ba-

(1) Añadamos que estudios e investigaciones posteriores demostraron que tampoco la definición de FOURIER permite crear la teoría euclídea de las paralelas sin el auxilio del *postulado V* o de cualquier otro postulado equivalente.

ses de otros $n - 1$ triángulos iguales: $B_1 A_2 B_2$, $B_2 A_3 B_3$, ... $B_{n-1} A_n B_n$. Complétese la figura con el triángulo $B_n A_{n+1} B_{n+1}$, igual a los precedentes.

Llamando β al ángulo en B_1 del triángulo $A_1 B_1 A_2$ y α al ángulo en A_2 del triángulo consecutivo, digo que es $\beta \leqq \alpha$.

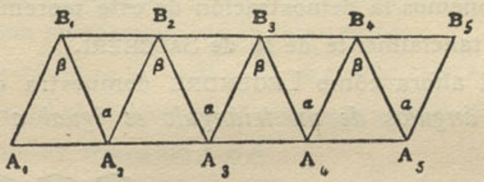


Fig. 27.

En efecto, si fuese $\beta > \alpha$, de la comparación de los dos triángulos $A_1 B_1 A_2$ y $B_1 A_2 B_2$, que tienen dos lados iguales, se deduciría $A_1 A_2 > B_1 B_2$.

Además, siendo la quebrada $A_1 B_1 B_2 \cdots B_{n+1} A_{n+1}$ mayor que el segmento $A_1 A_{n+1}$, se tendría

$$A_1 B_1 + (B_1 B_2) \cdot n + A_{n+1} B_{n+1} > (A_1 A_2) \cdot n,$$

esto es:

$$2 A_1 B_1 > (A_1 A_2 - B_1 B_2) \cdot n.$$

Pero esta desigualdad, para n bastante grande, contradice el *postulado de Arquímedes*, por lo cual no puede ser $A_1 A_2 > B_1 B_2$, y, por consiguiente, es absurdo suponer $\beta > \alpha$. Síguese de aquí que $\beta \leqq \alpha$, de donde se deduce inmediatamente que la suma de los tres ángulos del triángulo $A_1 B_1 A_2$ es menor o igual a dos ángulos rectos.

Este teorema suele llamarse impropiamente *primer teorema de Legendre*. Decimos impropiamente porque SACCHERI, al demostrar falsa la *hip. áng. obtuso*, había ya establecido, casi un siglo antes, este teorema (cfr. pág. 41).

El llamado *segundo teorema de Legendre*, dado también por

SACCHERI, y bajo forma más general (cfr. pág. 32), es el siguiente:

Si en un solo triángulo la suma de los ángulos es menor o igual a dos ángulos rectos, es, respectivamente, menor o igual a dos ángulos rectos en cualquier otro triángulo.

No exponemos la demostración de este teorema porque no difiere substancialmente de la de SACCHERI.

He aquí ahora cómo LEGENDRE demuestra que *la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.*

En el triángulo ABC supóngase $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} < 2$ *rectos.* Fijado el punto D sobre el lado AB, trácese la transversal DE de modo que el ángulo $A\widehat{D}E$ sea igual al ángulo $\widehat{B}$. En el cuadrilátero $DBCE$ la suma de los ángulos es menor que cuatro rectos, de donde $A\widehat{E}D > A\widehat{C}B$. El ángulo en $\widehat{E}$ del triángulo ADE es entonces una función bien determinada (decreciente) del lado AD, o, lo que viene a ser lo mismo, la longitud del lado AD está completamente determinada cuando se conoce la medida (en ángulos rectos) del ángulo $\widehat{E}$ y de los dos ángulos fijos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$. Pero este resultado, según LEGENDRE, es absurdo porque la longitud de un segmento no tiene significación si no se conoce la unidad de medida a que está referida, y la naturaleza de la cuestión no indica en modo alguno esta unidad.

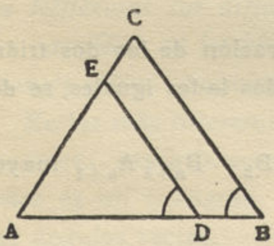


FIG. 28.

Por consiguiente, hay que rechazar la hipótesis $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} < 2$ *rectos*, y, por tanto, se tendrá: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 2$ *rectos.*

Pero de esta igualdad síguese fácilmente la demostración del *postulado euclídeo.*

El método de LEGENDRE se basa, pues, en el postulado de LAMBERT, que niega la existencia de una *unidad absoluta* para los segmentos.

§ 28. En otra demostración, LEGENDRE hace uso de la hipótesis: *Por un punto cualquiera tomado en el interior de un ángulo se puede siempre trazar una recta que encuentre a los dos lados del ángulo* (1).

He aquí cómo procede:

Sea ABC un triángulo, en el cual, si es posible, la suma de los ángulos sea menor que dos ángulos rectos.

Siendo : $2\ \widehat{rectos} - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$ *(deficiencia)*, constrúyase el punto A′ simétrico del A respecto al lado BC. La deficiencia del nuevo triángulo CBA′ es también α. Después, en virtud de la hipótesis arriba enunciada, trácese por A′ una transversal que encuentre en B_1 y C_1 a los lados del ángulo $\widehat{A}$. La deficiencia del triángulo AB_1C_1, como fácilmente se verifica, es la suma de las deficiencias de los cuatro triángulos que lo componen (cfr. también LAMBERT, pág. 47), y, por tanto, mayor que 2α. Repitiendo, a partir del triángulo AB_1C_1, la precedente construcción, se obtendrá un nuevo triángulo de deficiencia mayor que 4α. Después de *n* operaciones de igual naturaleza, se habrá construído un triángulo de deficiencia mayor que $2^n\alpha$. Pero para *n* bastante grande es $2^n\alpha > 2$ rectos *(postulado Arquímedes)*, lo que es absurdo. Por tanto, $\alpha = 0$, y de aquí : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2\ \widehat{rectos}$.

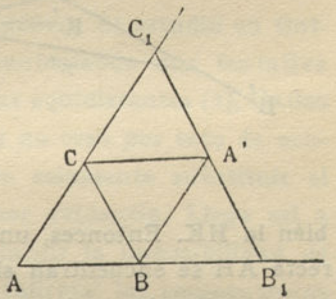


FIG. 29.

Esta demostración está apoyada en el *postulado de Arquímedes*. He aquí cómo se podría evitar el uso de tal postulado:

---

(1) De esta hipótesis ya se había servido J. F. LORENZ para el mismo fin: cfr. *Grundriss der reinen und angewandten Mathematik*. (Helmstedt, 1791).

Sean AB y HK una oblicua y una perpendicular a AH. Constrúyase la recta AB′, simétrica de AB respecto de AH. Por el punto H, en virtud de la hipótesis de LEGENDRE, pasa una recta *r*, que encuentra a los dos lados del ángulo BAB′. Si esta recta es distinta de la HK, también su simétrica *r*′, respecto a AH, goza de la misma propiedad, y, por consiguiente, tam-

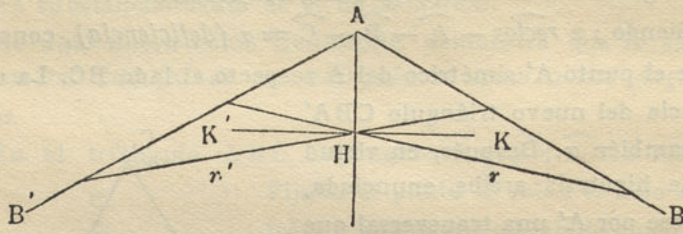


FIG. 30

bién la HK. Entonces, una perpendicular y una oblicua a la recta AH se encuentran siempre. De este resultado síguese la teoría ordinaria de las paralelas, y, por tanto, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2\ \widehat{\text{rectos}}$.

En otras demostraciones, LEGENDRE hace uso de razonamientos analíticos y, también erróneamente, de magnitudes infinitas.

Con esta obra tan varia LEGENDRE creyó, al fin, resuelta la inextricable dificultad escondida en el principio de la Geometría. En substancia, sin embargo, no añade nada de verdaderamente nuevo al material y a las convicciones ganadas por sus predecesores. Su mayor mérito está en la forma sencilla y elegante que supo dar a alguna de sus investigaciones, por lo que éstas alcanzaron aquella difusión, que tanto contribuyó a ensanchar el círculo de los cultivadores de las nuevas ideas, que entonces estaban formándose.

WOLFGANG BOLYAI (1775-1856).

§ 29. En este capítulo se ha mencionado ya al geómetra húngaro W. BOLYAI, que se ocupó de las paralelas desde la época en que estudiaba en Gottinga (1796-1799), probablemente por consejo de KAESTNER y del joven profesor de Astronomía K. F. SEYFFER (1762-1822), con quien tenía relaciones de amistad.

En 1804 envió a GAUSS, su compañero de estudio en Gottinga, una *Theoria Parallelarum*, conteniendo una tentativa para demostrar la existencia de rectas equidistantes (1). GAUSS impugnó esta demostración. BOLYAI no cesó por esto de ocuparse del *axioma XI*, consiguiendo solamente substituir el axioma por otros de mayor o menor evidencia. Llega así a dudar de su demostrabilidad y a intuir la imposibilidad de *reducir la hipótesis euclídea*, porque (afirma) las consecuencias derivadas de la negación del *axioma XI* no pueden contradecir los principios de la Geometría, en cuanto la ley de la intersección de dos rectas, como quiera que sea admitida, representa un nuevo dato, independiente de los otros que le preceden (2).

WOLFGANG reúne sus ideas acerca de los principios de las matemáticas en la obra *Tentamen juventutem studiosa in elementa Matheseos* (1832-33), y en particular sus investigaciones sobre el *axioma XI*, poniendo en evidencia en cada tentativa la nueva hipótesis a introducir para hacer rigurosa la demostración.

Un notable *postulado*, del que WOLFGANG deduce el de EUCLIDES, es el siguiente: *Tres puntos no en línea recta yacen*

(1) La *Theoria Parallelarum* fué publicada en latín y traducida al alemán por STÄCKEL y ENGEL en el t. XLIX de Math. Ann., págs. 168-205 (1897).

(2) Cfr. STÄCKEL: *Die Entdeckung del Nichteuklidischen Geometrie durch J. Bolyai*. Math. u. Naturwissenschaf. Berich. aus Ungarn, t. XVII (1901).

siempre sobre una esfera, o lo que es lo mismo: *tres puntos no en línea recta pertenecen siempre a una circunferencia* (1).

He aquí cómo puede deducirse el postulado euclídeo:

Sean AA′ y BB′ dos rectas, una oblicua y la otra perpendicular a AB. Tomado el punto M en el segmento AB y los simétricos de M respecto a las rectas AA′ y BB′, se obtendrán dos puntos, M′, M″, no en línea recta con M. Estos tres puntos M, M′, M″ pertenecen a una circunferencia, y entonces las dos rectas AA′ y BB′, debiendo ambas pasar por el centro del círculo, se encuentran.

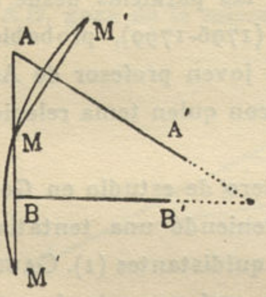


FIG. 31.

Pero del hecho que una perpendicular y una oblicua a una misma recta se encuentren se deduce, desde luego, la singularidad de la paralela.

FEDERICO LUIS WACHTER (1792-1817).

§ 30. Visto cómo el postulado euclídeo depende de la posibilidad de trazar un círculo por tres puntos cualesquiera no en línea recta, se presenta espontánea la idea de establecer la existencia de tal círculo anteriormente a toda investigación sobre las paralelas.

Una tentativa en esta dirección fué hecha por F. L. WACHTER.

WACHTER, discípulo de GAUSS en Gottinga (1809) y profesor de Matemáticas en el gimnasio de Dantzig, se ocupó repetidas veces de la demostración del *postulado*, y creyó haber alcanzado el objeto, primero en una carta a GAUSS (diciem-

(1) Cfr. W. BOLYAI: *Kurzer Grundriss eines Versuchs*, etc., pág. 46 (Maros Vásárhely, 1851).

bre 1816), después en un pequeño opúsculo impreso en Dantzing en 1817 (1).

En esta publicación es donde trata de establecer que por cuatro puntos arbitrarios del espacio (no pertenecientes a un plano) pasa una esfera, sirviéndose del siguiente postulado: *Cuatro puntos arbitrarios del espacio determinan completamente una superficie* (superficie de los cuatro puntos), *y dos de estas superficies se cortan en una sola línea, completamente determinada por tres puntos.*

Es inútil seguir el razonamiento con que WACHTER trata de demostrar que la *superficie de los cuatro puntos* es una esfera, porque, faltando en su opúsculo una definición precisa de aquella superficie, sus deducciones tienen solamente carácter intuitivo.

Merece, en cambio, especial atención un pasaje de su carta de 1816, escrita después de una conversación con GAUSS, en la que se había hablado de una *geometría antieuclídea.*

En esta carta, WACHTER, refiriéndose a la superficie límite de una esfera cuyo radio tiende al infinito, que en la hipótesis euclídea se identifica con el plano, afirma que *sobre ella, aun en el caso de falsedad del postulado V, sería válida una geometría idéntica a la del plano ordinario.*

La afirmación es de la mayor importancia, porque nos presenta uno de los más notables resultados válidos en el sistema geométrico correspondiente a la hipótesis saccheriana del ángulo agudo (cfr. LOBATSCHEFSKI, § 40) (2).

---

(1) *Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi.*

(2) Para cuanto se refiere a WACHTER cfr. P. STÄCKEL: *Friederich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie;* Math. Ann., t. LIV, pág. 49-85 (1901). En este artículo se exponen las cartas de WACHTER sobre este asunto y el opúsculo de 1817 arriba citado.

CAPITULO III

Los fundadores de la Geometría no euclidiana.

CARLOS FEDERICO GAUSS (1777-1855).

§ 31. Veinte siglos de inútiles esfuerzos, y señaladamente las últimas investigaciones infructuosas sobre el *postulado V*, indujeron a muchos geómetras de principios del siglo pasado a la convicción de que la organización definitiva de la teoría de las paralelas constituye un problema irresoluble. La escuela de Gottinga, desde 1763, había declarado oficialmente la necesidad de someterse a la hipótesis euclídea, y esta idea, expresada por KLÜGEL en su *Conatuum* (cfr. pág. 52), fué compartida y sostenida por su maestro A. G. KAESTNER, entonces profesor en la Universidad de Gottinga (1).

No obstante, el interés por nuestro asunto fué siempre vivo y, aun no dejando de fatigar inútilmente a los indagadores de la presunta demostración del *postulado*, guió finalmente al descubrimiento de los nuevos sistemas geométricos, los cuales, fundados también en la intuición, se desarrollan en un campo más vasto, haciendo caso omiso del principio contenido en el postulado euclídeo.

Toda la dificultad para penetrar en el nuevo orden de ideas

(1) Cfr. STÄCKEL y ENGEL: *Th. der P.*, pág. 139-142.

aparece manifiesto a quien, refiriéndose a aquel tiempo, reflexiona en las concepciones entonces dominantes de la filosofía kantiana.

§ 32. Fué GAUSS el primero en tener una visión clara de una geometría independiente del *postulado V*, visión que durante unos cincuenta años permaneció encerrada en la mente del ilustre geómetra y que dió a luz solamente después de las obras de LOBATSCHEFSKI (1829-30) y G. BOLYAI (1832).

Los documentos que permiten una reconstrucción aproximada de las investigaciones gaussianas sobre las paralelas son la correspondencia de GAUSS con W. BOLYAI, OLBERS, SCHUMACHER, GERLING, TAURINUS y BESSEL (1799-1844); dos pequeñas notas en *Gött. gelehrte Anzigen* (1816-1822), y algunos apuntes encontrados entre sus cartas (1831) (1).

Confrontando varios pasajes de las cartas de GAUSS es posible fijar como punto de partida de sus *meditaciones* el año 1792.

El siguiente trozo de una carta a W. BOLYAI (17 diciembre 1799) prueba que GAUSS, como antes SACCHERI y LAMBERT, ha intentado demostrar el *postulado V* tomando como hipótesis su falsedad.

«En cuanto a mí, mis trabajos están ya muy adelantados; pero el camino por el que he penetrado no conduce al fin que se persigue, y que tú afirmas haber alcanzado (2), sino que más bien conduce a poner en duda la existencia de la Geometría.

»He llegado, es verdad, a muchas cosas, que para la mayor parte de los hombres constituirían una demostración válida; pero que, en mi opinión, no prueban, por decirlo así, NADA; por ejemplo: si se pudiese demostrar la existencia posible de un triángulo rectilíneo, cuya área fuese mayor que toda área

(1) Cfr. GAUSS: *Opere*, t. VIII, pág. 159-270.

(2) Recuérdese que W. BOLYAI, en Gottinga, se ocupaba del asunto y creía haber superado el obstáculo. Cfr. § 29.

dada, entonces estaría en condiciones de demostrar con rigor perfecto toda la Geometría.

»Casi todos, es cierto, quisieran dar a esto el título de axioma; yo, no; podría, en efecto, ocurrir que, por lejanos que entre sí estuviesen los vértices de un triángulo en el espacio, su área fuese, sin embargo, inferior *(infra)* a un límite asignado.»

En 1804, respondiendo a W. Bolyai, con motivo de la *Theoria Parallelarum*, expresa después la esperanza de que los escollos, contra los que han tropezado sus investigaciones, acaben por dejarle libre el paso.

De todo esto, Stäckel y Engel, que recogieron y documentaron la susodicha correspondencia de Gauss, deducen que no por intuición genial el eminente geómetra reconoció la existencia de una *Geometría no euclidiana*, lógicamente inatacable, sino que debió, al contrario, de dedicarse a una larga y fatigosa labor antes de vencer al antiguo prejuicio.

¿Conoció Gauss en el primer período de sus investigaciones las obras de Saccheri y Lambert? ¿Qué influjo ejercieron en su actividad? El profesor Segre, en sus *Conjeturas* antes citadas (pág. 45 [1]), observa que tanto Gauss como Bolyai, durante su estancia en Gottinga (el primero de 1795 al 98, el segundo de 1796 al 99), se ocuparon de las paralelas. Es, por consiguiente, posible que, por mediación de Kaestner y Seiffer, conocedores profundos ambos de este asunto, vinieran en conocimiento de *Euclides ab omni naevo vindicatus* y de la *Theorie der Parallellinien;* pero los datos históricos que se poseen, sin minorar el valor de esta conjetura, no son suficientes para avalorarla completamente.

§ 33. A este primer período de la obra gaussiana sigue un segundo, después de 1813, ilustrado principalmente por algunas cartas: una de Wachter (1816); otras dirigidas a Gerlin (1819), Taurinus (1824) y Schumacher (1831), y por los apuntes encontrados entre las cartas de Gauss.

Tales documentos nos muestran que GAUSS, en este segundo período, vencida toda vacilación, procedió al desarrollo de los teoremas fundamentales de una nueva Geometría, que él llama primero *antieuclidiana* (cfr. la carta de WACHTER citada en la pág. 63); después *Geometría astral* (siguiendo a SCHWEIKART, cfr. pág. 71), y finalmente *no euclidiana* (cfr. carta a SCHUMACHER). Llega así a adquirir la certeza de que la *Geometría no euclidiana* no contiene en sí misma ninguna contradicción, aunque a primera vista muchos de sus resultados tengan un aire paradójico (carta a SCHUMACHER, 12 de junio de 1831).

Sin embargo, GAUSS no dejó traslucir nada de estas ideas por la seguridad de no ser comprendido (temía *das Geschrei der Böotier;* carta a BESSEL, 27 de enero 1829); sólo a algunos amigos íntimos confió algo de sus investigaciones, y cuando por necesidad se ve obligado a escribir a TAURINUS (1824), le ruega que guarde el silencio sobre las comunicaciones que le hace.

Los apuntes encontrados entre los manuscritos de GAUSS contienen un rápido esbozo de la nueva teoría de las paralelas, y debían formar parte de una proyectada exposición de la *Geometría no euclidiana,* a propósito de la cual escribía (mayo, 1831) a SCHUMACHER:

«Hace algunas semanas he comenzado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto, que se remontan en parte a cuarenta años, y de las cuales nada había redactado, lo que me ha obligado tres o cuatro veces a empezar de nuevo toda la labor en mi cabeza. No quisiera, sin embargo, que todo esto pereciese conmigo.»

§ 34. He aquí cómo define GAUSS las paralelas:

Si la recta AM, coplanaria y no incidente sobre BN, es tal que toda recta trazada por A y comprendida en el ángulo $B\widehat{A}M$ encuentra a la BN, entonces AM se dice paralela a BN.

Nótese la diferencia entre esta definición y la de EUCLIDES.

En efecto, prescindiendo del *postulado V*, por A podrían pasar rectas diferentes de AM, no incidentes sobre BN, las cuales serían paralelas a BN sólo con la antigua definición.

En la definición gaussiana el punto A parece tener un oficio especial, por lo que es necesario establecer que la paralela AM es independiente de A. Por esto GAUSS demuestra que si A′ es un punto cualquiera de AM, la recta AM es paralela a BN, también *a través* del punto A′.

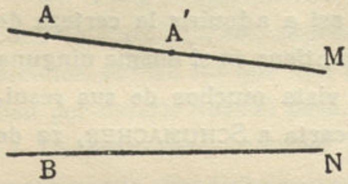


FIG. 32.

De la definición de paralela no resulta luego evidente la *reciprocidad* del paralelismo; es decir, que también BN es paralela a AM. Esta propiedad es objeto de otra elegante demostración de GAUSS.

En fin, demuestra que dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí *(transitividad* del paralelismo).

Aquí es preciso observar que GAUSS se refiere implícitamente al *paralelismo en una región dada.* En efecto, su definición de paralela considera los rayos que salen de A y hacia una determinada región de la transversal AB, por ejemplo, a la derecha, como si la recta AM debiera llamarse la paralela a BN *hacia la derecha.* La paralela a BN *hacia la izquierda* no es necesariamente AM, pues el suponer esto equivaldría a hacer una hipótesis equivalente al postulado euclídeo.

Volviendo a la proposición arriba enunciada, es claro que las dos rectas paralelas a una tercera deben suponerse paralelas hacia un mismo lado.

Finalmente, GAUSS establece el concepto de puntos *correspondientes* sobre dos paralelas, AA′ y BB′. Los puntos A y B son *correspondientes* cuando la recta AB forma con las dos paralelas ángulos internos de un mismo lado iguales (fig. 33).

Entonces, si CC' es una tercera paralela hacia el lado en que son paralelas las dos primeras, y si C es correspondiente de B, también A y C son correspondientes.

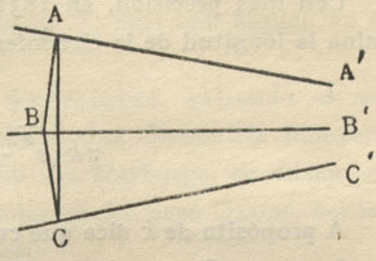


Fig. 33.

Aunque aquí se detienen los apuntes de GAUSS, notemos la importante significación de las últimas consideraciones.

El concepto de puntos correspondientes, transportado al caso en que las rectas AA', BB', CC' pertenecen a un haz, esto es, pasan por un punto, nos permite definir la circunferencia como *lugar de los puntos correspondientes de un punto dado sobre las rectas de un haz*. Pero este *lugar* puede construirse también cuando las rectas del haz son paralelas. En el caso euclídeo se obtiene una recta; descartando la *hipótesis euclídea*, el lugar en cuestión es una línea, que, aun teniendo muchas propiedades comunes con la circunferencia, no es una circunferencia. Así, *tres de sus puntos no pertenecen nunca a una circunferencia*. Semejante línea puede concebirse como *límite* de una circunferencia cuyo radio tiende al infinito.

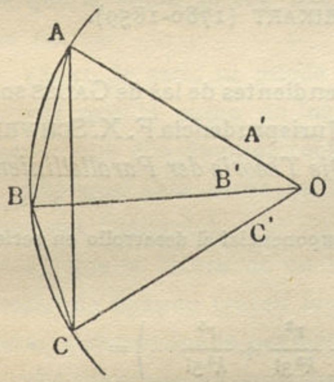


Fig. 34.

GAUSS no prosiguió su redacción porque en 1832 conoció la obra de JUAN BOLYAI sobre la *Geometría absoluta*.

Por cartas anteriores y posteriores a la interrumpida redacción sabemos también que GAUSS había descubierto en su Geometría una unidad absoluta para los segmentos (cfr. LAMBERT, LEGENDRE), y que en sus fórmulas aparece una constante k, conocida la cual se puede resolver cualquier problema (carta a GERLING).

Con más precisión, en 1831 (carta a SCHUMACHER) determina la longitud de la circunferencia de radio r bajo la forma:

$$\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right).$$

A propósito de k dice que cuando se quiera poner de acuerdo la nueva Geometría con la experiencia, precisa suponerla infinitamente grande respecto a todas las magnitudes mensurables.

Para $k = \infty$, la expresión gaussiana se convierte en la ordinaria longitud de la circunferencia (1). Esta observación puede extenderse a todo el sistema descubierto por GAUSS, sistema que, para $k = \infty$, contiene, como caso límite, el de EUCLIDES.

FERNANDO CARLOS SCHWEIKART (1780-1859).

§ 35. Contemporáneas e independientes de las de GAUSS son las investigaciones del profesor de Jurisprudencia F. X. SCHWEIKART (2), que en 1807 imprimía *Die Theorie der Parallellinien*,

(1) Para verlo substitúyase a cada exponencial el desarrollo en serie. Entonces tendremos:

$$\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right) = 2\pi k\left(\frac{r}{k} + \frac{r^3}{k^3 3!} + \frac{r^5}{k^5 5!} \cdots\right) =$$

$$= 2\pi r\left(1 + \frac{r^2}{k^2 3!} + \frac{r^4}{k^4 5!} + \cdots\right).$$

Pasando al límite, para $k = \infty$, se obtiene: $2\pi r$.

(2) Estudió Derecho en la Universidad de Marburgo y siguió de 1796 a 1798 las lecciones de Matemáticas dadas en aquella Universidad por el profesor J. K. F. HAUFF, autor de varios escritos sobre las paralelas. Cfr. *Th. der P.*, pág. 243.

nebst Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie, la cual, en contra a cuanto deja suponer el título, no contiene un tratado independiente del *postulado V*, sino uno basado en el concepto de los paralelógramos.

En seguida, sin embargo, SCHWEIKART, entrando en un nuevo orden de ideas, desarrollaba una Geometría independiente de la *hipótesis de Euclides*. En Marburgo, en diciembre de 1818, consignaba a GERLIN un pliego para GAUSS, conteniendo las siguientes indicaciones:

[NOTICIA]

«Existen dos tipos de Geometría—una Geometría en sentido estricto—: la euclídea, y una Geometría astral *(astralische Grössenlehre)*.

»Los triángulos, en esta última, tienen la particularidad de que la suma de sus tres ángulos no es igual a dos ángulos rectos.

»Sentado esto, se puede demostrar rigurosamente:

»*a)* que la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos;

»*b)* que esta suma es tanto menor cuanto mayor es el área del triángulo;

c) que la altura de un triángulo rectángulo isósceles, aun creciendo cuando crecen los lados, sin embargo no puede superar a determinado segmento, que yo llamo CONSTANTE.

»El cuadrado, en consecuencia, tiene la forma de la figura 35.

»Si esta constante fuese para nosotros el semieje terrestre (y en consecuencia de esto, toda línea recta trazada entre dos estrellas fijas que distan entre sí 90° sería tangente a la esfera terrestre) sería infinitamente grande respecto a las dimensiones que se presentan en la vida cotidiana.

»La geometría euclídea se verifica en la hipótesis de que la constante sea infinitamente grande. Sólo entonces es verdad que la suma de los tres ángulos de todo triángulo es igual a dos rectos, y esto se deja demostrar fácilmente, tan sólo

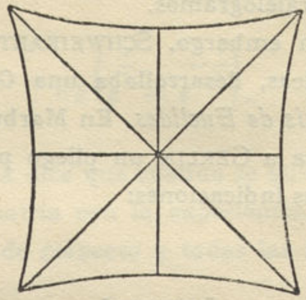


Fig. 35.

si se admite como dato que la constante sea infinitamente grande.» (1).

La *Geometría astral* de SCHWEIKART es la *no euclidiana* de GAUSS, correspondiendo enteramente al sistema de SACCHERI y LAMBERT en la *hip. áng. agudo*. Más bien el contenido de la precedente noticia deriva inmediatamente de las proposiciones de SACCHERI expuestas en el *Conatuum*, de KLÜGEL, y del teorema de LAMBERT sobre el área del triángulo. Y ya que SCHWEIKART, en su *Theorie* de 1807, cita las obras de estos dos últimos autores, queda así afirmada la influencia directa de LAMBERT, indirecta, al menos, de SACCHERI sobre las investigaciones de SCHWEIKART (2).

En marzo de 1819, GAUSS, respondiendo a GERLING respecto a la *Geometría astral*, ensalza a SCHWEIKART, y declara que concuerda con todo cuanto contiene el folleto que le ha enviado. Añade que él ha desarrollado la *Geometría astral* de manera de poder resolver cualquier cuestión, dada la constante

(1) Cfr. el t. VIII de las obras de GAUSS, pág. 180-81.
(2) Cfr. las *Conjeturas* de SEGRE, citada en la pág. 45.

de SCHWEIKART. Concluye determinando el límite superior del área de un triángulo bajo la forma (1):

$$\frac{\pi CC}{\left\{\text{log. hip. } (1 + \sqrt{2})\right\}^2}.$$

SCHWEIKART no publicó sus investigaciones.

FRANCISCO ADOLFO TAURINUS (1794-1874).

§ 36. Además de haberse ocupado personalmente de las paralelas, SCHWEIKART indujo (1820) a su sobrino TAURINUS a dedicarse a ello, llamando su atención sobre la *Geometría astral* y sobre el favorable juicio de GAUSS.

Sólo en 1824 parece que TAURINUS se ocupase seriamente del asunto, pero no ciertamente con las miras del tío. El estaba y estuvo siempre persuadido de la verdad absoluta del *postulado V* y alimentó la esperanza de poderlo demostrar. Fracasado en las primeras tentativas y bajo la influencia de SCHWEIKART y GAUSS, reemprende el estudio de la cuestión. En 1825 publicó una *Theorie der Parallellinien*, conteniendo desarrollos no euclidianos, rechazando la *hip. áng. obtuso* y con investigaciones semejantes a las de SACCHERI y LAMBERT en la *hip. áng. agudo*. Volvió a encontrar así la constante de SCHWEIKART, a la que llamó *parámetro*, e incapaz de representarse el espacio como un concepto susceptible de varias determinaciones, concluye que deberían al mismo tiempo valer todos los sistemas correspondientes a los infinitos valores asig-

(1) La constante C que figura en esta expresión es la constante de SCHWEIKART, no aquella que GAUSS denotó con k y por medio de la cual expresa la longitud de la circunferencia (cfr. pág. 70). Las dos constantes están ligadas por la siguiente relación: $k = \frac{C}{\text{log.} (1 + \sqrt{2})}$.

nados al parámetro. Este modo de interpretar el significado del parámetro conduce a TAURINUS a rechazar también la *hip. áng. agudo*, aun reconociendo la *compatibilidad lógica* de las proposiciones que de ella se deducen.

Al año siguiente publicó TAURINUS su *Geometriae prima elementa* (Colonia, 1826), donde vuelve a exponer, mejoradas, las investigaciones de 1825. El trabajo concluye con un importantísimo apéndice, en el que el autor demuestra cómo se puede efectivamente construir un sistema geométrico (analítico) correspondiente a la *hip. áng. agudo* (1).

A este fin TAURINUS parte de la fórmula fundamental de la Trigonometría esférica:

$$\cos\frac{a}{k} = \cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k} + \operatorname{sen}\frac{b}{k}\operatorname{sen}\frac{c}{k}\cos\alpha,$$

y en ella substituye el radio real k por el radio imaginario ik (donde $i = \sqrt{-1}$). La fórmula obtenida por TAURINUS puede escribirse, mediante el uso de las *funciones hiperbólicas* (2), en la siguiente forma:

$$[1] \qquad \mathrm{Ch}\frac{a}{k} = \mathrm{Ch}\frac{b}{k}\,\mathrm{Ch}\frac{c}{k} - \mathrm{Sh}\frac{b}{k}\,\mathrm{Sh}\frac{c}{k}\cos\alpha.$$

(1) Para cuanto se refiere a la eventual influencia de SACCHERI y LAMBERT sobre TAURINUS cfr. las *Conjeturas* de SEGRE, citadas en la página 45.

(2) Para comodidad del lector recordamos la definición analítica y las propiedades fundamentales de las *funciones hiperbólicas*:

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{Sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \\ &\mathrm{Ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \\ &\mathrm{Th}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \qquad \mathrm{Cth}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned} \right.$$

Esta es la fórmula fundamental de la *Geometría logarítmico-esférica (logarithmisch-sphärischen Geometrie)* de TAURINUS.

Es fácil demostrar que en la *Geometría log.-esférica* la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180°. Refirámonos, para mayor sencillez, al triángulo equilátero, poniendo en la [1] $a = b = c$. Resolviendo respecto a $\cos \alpha$, tendremos

$$\cos \alpha = \frac{\mathrm{Ch}^2 \frac{a}{k} - \mathrm{Ch} \frac{a}{k}}{\mathrm{Sh}^2 \frac{a}{k}} = \frac{\mathrm{Ch} \frac{a}{k}}{1 + \mathrm{Ch} \frac{a}{k}}.$$

Pero

$$\mathrm{Ch} \frac{a}{k} = 1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{a}{k} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{a}{k} \right)^4 + \cdots,$$

Notando luego que las funciones circulares sen x, cos x, tg $x \cdots$, son susceptibles también de una definición analítica, y que precisamente

$$\text{(II)} \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \\ \operatorname{tg} x &= \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}; \quad \operatorname{ctg} x = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}, \end{aligned} \right.$$

es fácil ver que las funciones circulares y las hiperbólicas están ligadas por las siguientes relaciones:

$$\text{(III)} \left\{ \begin{aligned} i \,\mathrm{Sh}\, x &= \operatorname{sen} (ix); \quad & i \,\mathrm{Th}\, x &= \operatorname{tg} (ix) \\ \mathrm{Ch}\, x &= \cos (ix); \quad & - i \,\mathrm{Cth}\, x &= \operatorname{ctg} (ix). \end{aligned} \right.$$

Estas últimas permiten transformar las fórmulas fundamentales de la goniometría, en las correspondientes para las funciones hiperbólicas. Las cuales son las siguientes:

$$\text{(IV)} \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x = 1 \\ & \mathrm{Sh}\, (x \pm y) = \mathrm{Sh}\, x \,\mathrm{Ch}\, y \pm \mathrm{Sh}\, y \,\mathrm{Ch}\, x \\ & \mathrm{Ch}\, (x \pm y) = \mathrm{Ch}\, x \,\mathrm{Ch}\, y \pm \mathrm{Sh}\, x \,\mathrm{Sh}\, y. \end{aligned} \right.$$

por consiguiente,

$$(*) \qquad \cos\alpha = \frac{1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \cdots}{2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \cdots}.$$

Esta fracción evidentemente es mayor que $\frac{1}{2}$, por lo cual será $\alpha < 60^{\circ}$, de donde la suma de los ángulos del triángulo es menor que 180°.

Además es oportuno notar que

$$\lim_{a=0} \cos\alpha = \frac{1}{2};$$

es decir, el límite de α, tendiendo a a cero, es 60°. Por lo cual en la *Geometría log.-esférica* la suma de los ángulos de un triángulo tiende a 180° cuando los lados tienden a cero.

Sobre la fórmula (*) podemos hacer las siguientes observaciones:

$$\lim_{k=\infty} \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

o bien: para k, tendiendo al infinito, α tiende a 60°. Esto es: si se supone la constante k infinitamente grande, el ángulo del triángulo equilátero es de 60°, como en la Geometría ordinaria.

Mas generalmente se podría ver que la [1], para $k = \infty$, se convierte en

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

o sea la fórmula fundamental de la trigonometría plana euclidea. Este resultado puede, ventajosamente, relacionarse con las afirmaciones de GAUSS y SCHWEIKART.

§ 37. La segunda fórmula fundamental de la trigonometría esférica

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\frac{a}{k},$$

con un simple cambio del *coseno circular* en el *coseno hiperbólico*, se convierte en la segunda fórmula fundamental de la *Geometría log.-esférica:*

$$[2] \qquad \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\,\mathrm{Ch}\frac{a}{k}.$$

Para $\alpha = 0$ y $\beta = 90^\circ$ se obtiene:

$$[3] \qquad \mathrm{Ch}\frac{a}{k} = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}.$$

El triángulo correspondiente a esta fórmula tiene un ángulo nulo y los dos lados que lo forma de longitud infinita y parale-

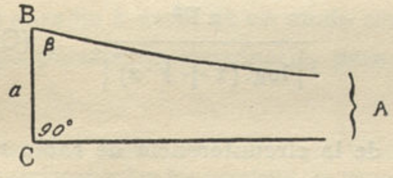


FIG. 36.

los (asintóticos). El ángulo β, comprendido entre el lado paralelo y el lado perpendicular a CA, como resulta de la [3], es función de a: podremos desde ahora llamarle *ángulo de paralelismo* correspondiente a la distancia a (cfr. LOBATSCHEFSKI, página 84).

Para $\beta = 45^\circ$, el segmento BC, cuya longitud es calculable mediante la [3], es la *constante* de SCHWEIKART (cfr. pág. 71). Llamando P esta constante, tendremos:

$$\mathrm{Ch}\frac{P}{k} = \sqrt{2},$$

de donde, resolviendo respecto a k,

$$k = \frac{P}{\log.\,(1 + \sqrt{2})}.$$

Esta relación, que liga las dos constantes k y P, fué deducida por TAURINUS. La constante k es la misma usada por GAUSS (cfr. pág. 70) para expresar la longitud de la circunferencia.

§ 38. Siempre transformando las fórmulas de la trigonometría esférica, substituyendo el radio real por el radio imaginario, TAURINUS deduce otros importantes teoremas de la *Geometría log.-esférica;* por ejemplo: que el área de un triángulo es proporcional a su *deficiencia* (LAMBERT, pág. 47); que el límite superior del área en cuestión es:

$$\frac{\pi P^2}{\left\{\log.\,(1 + \sqrt{2})\right\}^2} \qquad \text{(GAUSS, pág. 73),}$$

que la longitud de la circunferencia de radio r es:

$$2\pi k\,\mathrm{Sh}\frac{r}{k} \qquad \text{(GAUSS, pág. 70),}$$

que el área del círculo está dada por:

$$2\pi k^2 \left(\mathrm{Ch}\frac{r}{k} - 1\right),$$

que el área de la superficie esférica y el volumen de la esfera están dados respectivamente por:

$$4\pi k^2 \operatorname{Sh}^2 \frac{r}{k},$$

$$4\pi k^3 \frac{1}{2}\left(\operatorname{Sh}\frac{r}{k}\operatorname{Ch}\frac{r}{k} - \frac{r}{k}\right).$$

No nos detendremos en los correspondientes desarrollos analíticos, porque nada añadirían para aclarar el método. Notemos ahora que los resultados de TAURINUS confirman la previsión de LAMBERT respecto a su *tercera hipótesis* (cfr. pág. 49), ya que las fórmulas de la *Geometría log.-esférica*, analíticamente interpretadas, dan las relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo trazado sobre una esfera de radio imaginario (1).

Añadiremos que TAURINUS reconoció, como LAMBERT, que la Geometría esférica corresponde enteramente al sistema válido en la *hip. áng. obtuso;* además, que la Geometría ordinaria constituye un eslabón de enlace entre la Geometría esférica y la *Geometría log.-esférica.*

En efecto, si el radio k varía de un modo continuo del campo real al campo puramente imaginario, pasando por el infi-

(1) En este momento conviene observar que LAMBERT, simultáneamente a las investigaciones sobre las paralelas, se ha ocupado de las funciones trigonométricas con argumento imaginario, cuyo enlace con la Geometría no euclidiana fué puesto en evidencia por TAURINUS. Pudiera ocurrir que LAMBERT hubiese reconocido que las fórmulas de la trigonometría esférica conservan una *forma real* aun mudando en ellas el radio real por el radio imaginario puro. Con esto la previsión de LAMBERT, relativa a la *hip. áng. agudo* (cfr. pág. 51) tendría un fundamento indiscutible. Nada, sin embargo, nos autoriza para creer que LAMBERT había efectivamente relacionado sus investigaciones sobre las funciones trigonométricas con la teoría de las paralelas, cfr. P. STÄCKEL: *Bemerkungen zu Lamberts Theorie der Parallellinien.*—Biblioteca Math., págs. 107-110 (1899).

nito, se pasa del sistema esférico al sistema *log.-esférico*, a través del de EUCLIDES.

Aunque TAURINUS, como ya se ha dicho, excluyó la posibilidad de una *Geometría log.-esférica* válida en el plano, no desconoce el interés teórico que puede ofrecer, y, reclamando sobre sus fórmulas la atención de los geómetras, parece prever la existencia de algún caso concreto en el cual encuentre una interpretación (1).

---

(1) La importancia de SCHWEIKART y TAURINUS, en el descubrimiento de la Geometría no euclidiana, fué realzada y puesta de relieve por STÄCKEL y ENGEL, que en la *Th. der P.* les dedicaron un capítulo entero (pág. 237-286), exponiendo los pasajes más importantes de las obras de TAURINUS y algunas cartas entre éste, GAUSS y SCHWEIKART.

Véase, además, el artículo de STÄCKEL sobre *Franz Adolph Taurinus*, Abhandlungen Z. Gheschichte d. Math., t. IX, pág. 397-427 (1899).

CAPITULO IV

Los fundadores de la Geometría no euclidiana.

(Continuación.)

NICOLÁS IVANOVICH LOBATSCHEFSKI (1793-1856) (1).

§ 39. LOBTSCHEFSKI estudió Matemáticas en la Universidad de Kasan, bajo la dirección del alemán J. M. C. BARTELS (1769-1836), amigo y compatriota de GAUSS; se licenció en 1813, y permaneció en la Universidad, primero como auxiliar, después como profesor, enseñando todas las ramas de las Matemáticas y también la Física y la Astronomía.

En 1815, LOBATSCHEFSKI se ocupaba ya de las paralelas, y en un manuscrito suyo, relativo a las lecciones de 1815-17, se encuentran algunas tentativas para la demostración del *postulado V* e investigaciones semejantes a las de LEGENDRE. Pero sólo después de 1823 concibió la *Geometría imaginaria*. Esto resulta de un tratado suyo manuscrito sobre la Geometría elemental, donde dice que no se posee demostración alguna

(1) Para cuanto se refiere a las noticias históricas y críticas respecto a LOBATSCHEFSKI recomendamos, de una vez para siempre, el volumen de F. ENGEL: *N. J. Lobatschefskij.—Zwei geometrische Abhandlungen aus dem russichen uebersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers.* (Leipzig, Teubner, 1899.)

del *postulado V*, pero que tal demostración no debe ser imposible.

Entre 1823 y 1825, las ideas de LOBATSCHEFSKI se orientaron hacia una Geometría independiente de la *hipótesis de Euclides*, y el primer fruto de los nuevos estudios es la *Exposition succinte des principes de la géométrie, avec une demonstration rigoureuse du théorème des parallèles*, presentada el 12 [24] de febrero de 1826 a la sección físicomatemática de la Universidad de Kasan. En esta *Lectura*, cuyo manuscrito no ha aparecido, LOBATSCHEFSKI expone los fundamentos de una geometría más general que la ordinaria, en la que por un punto pasan dos paralelas a una recta y donde la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos *(hip. áng. agudo* de SACCHERI y LAMBERT).

En 1829-30 confió a la imprenta una Memoria *Sobre los fundamentos de la Geometría* (1), conteniendo la parte esencial de la precedente *Lectura* y ulteriores aplicaciones de la nueva teoría al análisis. Sucesivamente salieron la *Geometría imaginaria* (1835) (2), los *Nuevos fundamentos de la Geometría con una completa teoría de las paralelas* (1835-38) (3), las *Aplicaciones de la Geometría imaginaria a alguna integral* (1836) (4); después la *Géométrie imaginaire* (1837) (5), y en 1840 el opúsculo resumen *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (6), escrito en lengua alemana y destinado por Lo-

(1) Boletín de Kasan (1829-30).—*Obras Geométricas* de LOBATSCHEFSKI (Kasan, 1883-86), t. I, pág. 1-67.—Traducción alemana de F. ENGEL, pág. 1-66 del volumen citado en la pág. 81.

(2) Escritos científicos de la Universidad de Kasan (1835).—*Ob. Geom.*, t. I, pág. 71-120.

(3) Escritos cient. Un. Kasan (1835-38).—*Ob. Geom.*, t. I, pág. 219-486.—Trad. alemana de F. ENGEL, pág. 67-235 del vol. citado en la página 81.

(4) Escritos cient. Un. Kasan (1836).—*Ob. Geom.*, t. I, pág. 121-218.

(5) Diario de CRELLE, t. XVII, págs. 295-320.—*Ob. Geom.*, t. II, páginas 581-613.

(6) Berlín (1840).—*Ob. Geom.*, t. II, págs. 553-578.—Trad. francesa de J. HOUEL, contenida en Mém. de Bordeaux, t. IV (1866), o tam-

BATSCHEFSKI a llamar la atención de los geómetras sobre sus investigaciones. Finalmente, en 1855, un año antes de su muerte, ya ciego, dictó y publicó, en lengua rusa y francesa, una exposición completa de su sistema geométrico bajo el título *Pangéométrie ou précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles* (1).

§ 40. La Geometría no euclidiana, la misma concebida por GAUSS y SCHWEIKART alrededor de 1816, estudiada por TAURINUS bajo forma de un sistema abstracto en 1826, entraba en 1829-30 a formar parte del público patrimonio científico.

Para exponer del modo más rápido el método seguido por LOBATSCHEFSKI en la construcción de la *Geometría imaginaria* o *Pangeometría*, refirámonos a sus *Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas*, de 1840.

En ellas LOBATSCHEFSKI, después de haber establecido un grupo de teoremas independientes de la teoría de las paralelas, considera sobre el plano un haz de centro A y una recta BC que no pertenece a él. Sea AD la recta del haz perpendicular a BC y AE la recta perpendicular a AD. Esta recta, en el sistema euclídeo, es la *única* que no corta a BC. En la geometría de LOBATSCHEFSKI *existen en el haz A otras rectas no secantes a BC;* las *no secantes* están separadas de las *secantes* por dos

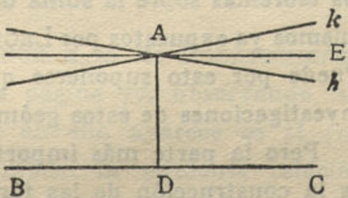


FIG. 37.

bién en *Recherches géométriques sur la theorie des parallèles* (París, Hermann, 1900).

(1) Colección de disertaciones científicas escritas por los profesores de la Real Universidad en el quincuagésimo aniversario de su existencia, tomo I, págs. 279-340 (1856).—*Ob. Geom.*, t. II, págs. 617-80.—Trad. italiana de G. Battaglini en el Giornale di Mat., t. V, págs. 273-336.

rectas, h y k, que a su vez no encuentran a BC (cfr. SACCHERI, página 43).

Estas rectas, que el autor llama *paralelas*, tienen cada una un determinado *sentido de paralelismo:* la h de nuestra figura corresponde al lado derecho; la k, al lado izquierdo. El ángulo formado por la perpendicular AD con una de las paralelas es el *ángulo de paralelismo* correspondiente a la distancia AD. LOBATSCHEFSKI usa el símbolo $\Pi\ (a)$ para denotar el ángulo de paralelismo correspondiente a la distancia a. En la Geometría ordinaria se tiene constantemente: $\Pi\ (a) = 90^{o}$; en la de LOBATSCHEFSKI $\Pi\ (a)$ es una función bien determinada de a, que tiende a 90^{o} cuando a tiende a cero, que tiende a cero cuando a tiende al infinito.

De la definición de las paralelas el autor deduce después sus principales propiedades, esto es, la *conservación*, la *reciprocidad*, la *transitividad* del carácter del paralelismo (cfr. GAUSS, página 68) y el modo de ser *asintótico* de las paralelas.

La demostración de estas propiedades está precedida de los teoremas sobre la suma de los ángulos de un triángulo, los mismos ya expuestos por LEGENDRE, y aun antes por SACCHERI. Puede por esto suponerse que LOBATSCHEFSKI conociera las investigaciones de estos geómetras, especialmente del primero.

Pero la parte más importante de la *Geometría imaginaria* es la construcción de las fórmulas trigonométricas.

Para deducirlas, el autor introduce dos nuevas figuras: el *oriciclo* (círculo de radio infinito; cfr. GAUSS, pág. 69) y la *orisfera* (esfera de radio infinito), que en la Geometría ordinaria son respectivamente la recta y el plano. Y ya que sobre la orisfera, a la que pertenecen ∞^2 oriciclos, puede constituirse una Geometría análoga a la ordinaria, en la cual los oriciclos substituyen a las rectas, LOBATSCHEFSKI obtiene así este primer notable resultado: *Sobre la orisfera, es válida la Geometría euclídea* (cfr. WACHTER, pág. 63), *y en particular la ordinaria trigonometría plana.*

De esta notable propiedad y de otra relativa a los *oriciclos coaxiales* (círculos concéntricos de radio infinito) se sirve LOBATSCHEFSKI para deducir las fórmulas de la nueva trigonometría plana y de la trigonometría esférica. Estas últimas coinciden con las fórmulas ordinarias de la esfera, si bien cuando los elementos del triángulo estén medidos en ángulos rectos.

§ 41. Conviene observar la forma dada por LOBATSCHEFSKI a sus fórmulas. Si en el triángulo plano ABC llamamos a, b, c los lados opuestos a A, B, C; $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ los ángulos de paralelismo correspondientes a los lados, la fórmula fundamental de LOBATSCHEFSKI es:

$$[4] \qquad \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\operatorname{sen} \Pi(b) \operatorname{sen} \Pi(c)}{\operatorname{sen} \Pi(a)} = 1.$$

Es fácil ver que esta fórmula y la de TAURINUS [1] (pág. 74) son transformables una en otra.

Para pasar de la de TAURINUS a la de LOBATSCHEFSKI basta hacer uso de la [3] de la página 77, observando, sin embargo, que el ángulo β que en ella aparece es $\Pi(a)$. Para el paso inverso sirve también la siguiente relación, dada por LOBATSCHEFSKI:

$$[5] \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = a^{-x},$$

que es la misma [3] de TAURINUS, bajo forma un poco diferente.

La constante a que figura en la [5] es indeterminada: representa la relación constante de dos arcos de oriciclos coaxiales comprendidos entre los mismos radios, distantes uno de otro la unidad de medida. Eligiendo, con LOBATSCHEFSKI, una unidad conveniente, podremos tomar a igual a e, esto es, a la base de los logaritmos naturales. Queriendo, en cambio, aproximar los resultados de LOBATSCHEFSKI a la *Geometría logarítmico-esférica* de TAURINUS, o bien a la *Geometría no euclidiana* de GAUSS, pondremos:

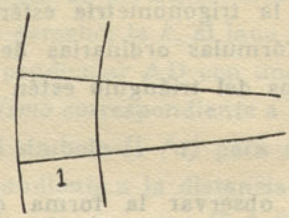


FIG. 38.

$$a = e^{\frac{1}{k}}.$$

Entonces la [5] se convierte en:

$$[5'] \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$

o lo que es lo mismo:

$$[6] \qquad \operatorname{Ch} \frac{x}{k} = \frac{1}{\operatorname{sen} \Pi(x)}.$$

Con esta relación se transforma inmediatamente la fórmula [4], de LOBATSCHEFSKI, en la [1], de TAURINUS. Por consiguiente:

La Geometría log.-esférica de TAURINUS *es idéntica a la Geometría imaginaria (Pangeometría) de* LOBATSCHEFSKI.

§ 42. He aquí los más notables resultados que LOBATSCHEFSKI deduce de sus fórmulas:

a) Para triángulos con lados pequeñísimos (infinitesimales), a las fórmulas de la *trigonometría imaginaria* pueden substituirse, en menos de infinitésimos de órdenes superiores al segundo, las fórmulas trigonométricas ordinarias.

b) La substitución de los lados a, b, c en lados puramente imaginarios ia, ib, ic convierte las fórmulas de la *trigonometría imaginaria* en las fórmulas de la trigonometría esférica (1).

d) Estableciendo en el plano y en el espacio un sistema de coordenadas semejante al cartesiano ordinario, es posible, con los métodos de la Geometría analítica, calcular las longitudes de las líneas, las áreas de las superficies y los volúmenes de los sólidos.

§ 43. ¿Cómo LOBATSCHEFSKI se vió llevado a ocuparse de las paralelas y a descubrir la Geometría imaginaria?

Se dice que BARTELS, maestro de LOBATSCHEFSKI en Kasan, estaba unido por la amistad con GAUSS (pág. 81); si ahora se añade que aquél pasó en Brunsvich, con GAUSS, los dos años que precedieron a su elección en Kasan (1807) y que mantiene después con GAUSS una relación epistolar, se presenta espontánea la hipótesis de que éste no sea ajeno a las investigaciones de LOBATSCHEFSKI.

Ya hemos visto que GAUSS, antes de 1807, había intentado resolver la cuestión de las paralelas y que sus esfuerzos hasta aquella época no habían dado más fruto que la esperanza de superar los escollos en que habían tropezado sus investigaciones. Por consiguiente, todo lo que BARTELS pudo haber aprendido de GAUSS antes de 1807 se reduciría a algún resultado negativo. En lo que se refiere a las posteriores ideas de GAUSS, parece seguro que BARTELS no tuviese conocimiento de ellas, de modo que debemos suponer que LOBATSCHEFSKI creó su Geometría independientemente de cualquier influjo gaussia-

(1) Este resultado justifica el método seguido por TAURINUS en la construcción de su *Geometría log.-esférica*.

no (1). Otros influjos pudieran suponerse; por ejemplo, los debidos a las obras de SACCHERI y LAMBERT, que el geómetra ruso, o directamente o mediante KLÜGEL y MONTUCLA, pudiera haber conocido. Pero nada preciso se puede formular acerca de esta suposición (2). De todos modos, o la falta de demostraciones de sus predecesores, o la inutilidad de sus primeras investigaciones (1815-17), indujeron a LOBATSCHEFSKI, como antes a GAUSS, a pensar que la dificultad para superarlas tuviese un fundamento diverso del supuesto hasta entonces. LOBATSCHEFSKI expresa claramente esta idea en los *Nuevos fundamentos de la Geometría*, de 1835, donde dice:

«La infructuosidad de las tentativas, hechas desde la época de Euclides por espacio de dos milenios, despertó en mí la sospecha de que en los mismos datos no estuviese contenida la verdad que se había querido demostrar, y que para su confirmación pudieran servir, como en el caso de otras leyes naturales, las experiencias, a ejemplo de las observaciones astronómicas. Habiéndome convencido finalmente de la exactitud de mi conjetura y adquirida la creencia de haber resuelto completamente el difícil problema, escribí, en el año 1826, una Memoria sobre este asunto *(Exposition succinte des principes de la Géométrie)*» (3).

Las palabras de LOBATSCHEFSKI dan a conocer una concepción filosófica del espacio opuesta a la kantiana, que entonces gozaba del favor máximo. La doctrina kantiana considera el espacio como una intuición subjetiva, necesario presupuesto de toda experiencia; la de LOBATSCHEFSKI, enlazándose más bien con el sensualismo y la corriente empirista, hace entrar la Geometría en el campo de las ciencias experimentales (4).

---

(1) Cfr. F. ENGEL, ob. citada en la pág. 81; Zweiter Theil: *Lobatschefskij Leben und Schriften*, cap. VI, pág. 373-383.

(2) Cfr. las *Conjeturas* de SEGRE citadas en la pág. 45.

(3) Página 67 de la citada obra de ENGEL.

(4) Cfr. el discurso de A. VASILIEV sobre LOBATSCHEFSKI (Kasan, 1893).—Trad. alemana de ENGEL, Zeits. f. Math. u. Phy., t. XI, pág. 205-44 (1895).

§ 44. Falta ahora poner en relación la *Pangeometría* de Lobatschefski con la cuestión suscitada por el *postulado euclídeo.* La cual, como se ha visto, aspiraba a construir la teoría de las paralelas con sólo el auxilio de las 28 primeras proposiciones de Euclides.

Respetando esta exigencia, Lobatschefski define el paralelismo y le asigna los caracteres relevantes de reciprocidad y transitividad. El carácter de equidistancia se presenta después a Lobatschefski en su verdadera esencia. Muy lejos de estar ligado indisolublemente a las 28 primeras proposiciones euclídeas, contiene, por el contrario, un nuevo elemento.

La verdad de esta aserción resulta directamente de la existencia de la *Pangeometría* (ciencia lógica deductiva fundada en las 28 proposiciones en cuestión y en la negación del *postulado V)*, en la cual las paralelas *no son equidistantes*, sino asintóticas. Que la Geometría sea luego una ciencia lógicamente consecuente, esto es, exenta de contradicciones internas, se explica, con Lobatschefski, refiriéndose a la formulación analítica de que es susceptible.

He aquí cómo se expresa a este psopósito Lobatschefski al final de su obra:

«Habiendo mostrado en lo que precede de qué modo es preciso calcular la longitud de las líneas curvas, el área de las superficies y el volumen de los cuerpos, nos es permitido afirmar que la Pangeometría es una ciencia completa. Una simple ojeada sobre las ecuaciones [4], que expresan la dependencia existente entre los lados y los ángulos de los triángulos rectilíneos, es suficiente para demostrar que, a partir de ahí, la Pangeometría deviene un método analítico, que reemplaza y generaliza los métodos analíticos de la Geometría ordinaria. Se podría comenzar la exposición de la Pangeometría por las susodichas ecuaciones y también tratar de substituir a estas ecuaciones otras que expresasen las dependencias entre los ángulos y los lados de todo triángulo rectilíneo; pero en este último caso sería preciso demostrar que estas nuevas ecuaciones concuerdan con las nociones fundamentales de la Geometría. Las ecuaciones [4], habiendo sido deducidas de estas nociones fundamentales, concuerdan necesariamente con ellas, y todas las ecuaciones con que se quisieran substituir, si estas ecuaciones no son una consecuencia de las ecuaciones [4], deben conducir a resultados contrarios a estas nociones. Así, las ecuaciones [4] son la base de la Geometría más general, pues no dependen de la suposición de que la suma de los tres ángulos de todo triángulo rectílineo sea igual a dos ángulos rectos» (1).

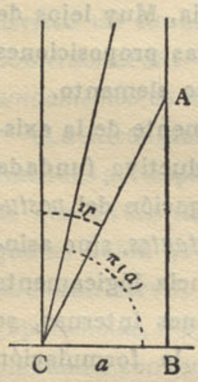


Fig. 39.

§ 45. Para establecer algo acerca de la constante *k*, contenida implícitamente en las fórmulas de LOBATSCHEFSKI y explícitamente en las de TAURINUS, es necesario aplicar la nueva trigonometría a algún caso práctico. A este fin, LOBATSCHEFSKI se sirve de un triángulo rectángulo, ABC, en el cual el lado $BC = a$ es el diámetro de la órbita terrestre y A una estrella fija en dirección perpendicular a BC. Indiquemos con $2p$ la *paralaje* máxima de la estrella A. Tendremos:

$$\Pi(a) > \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2} - 2p;$$

de donde

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(a) > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg} p}.$$

Pero

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(a) = e^{-\frac{a}{k}} \qquad \text{(Cfr. pág. 85, [5'])}$$

(1) Cfr. la *Pangeometría* en la trad. italiana de G. BATTAGLINI, Gior. di Matematiche, t. V, pág. 334.

luego

$$e^{\frac{a}{k}} < \frac{1 + \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p}.$$

Ahora, en la hipótesis $p < \frac{\pi}{4}$, tenemos:

$$\frac{a}{k} = \log \frac{1 + \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p} = 2\left(\operatorname{tg} p + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 p + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 p + \cdots\right).$$

Además, siendo

$$\operatorname{tg} 2p = \frac{2 \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg}^2 p} = 2(\operatorname{tg} p + \operatorname{tg}^3 p + \operatorname{tg}^5 p + \cdots),$$

será finalmente

$$\frac{a}{k} < \operatorname{tg} 2p.$$

Substituyendo, con LOBATSCHEFSKI, $2p$ por la paralaje de *Sirio*, que es de $1'',24$, y efectuando los cálculos, se obtiene:

$$\frac{a}{k} < 0{,}000006012.$$

Este resultado no nos permite fijar un valor a k, sino asegurar que es muy grande respecto al diámetro terrestre. Se podría repetir el cálculo con paralajes mucho menores, por ejemplo, de $0'',1$, encontrando a k mayor en un millón de veces al diámetro de la órbita terrestre.

Para que en el espacio físico fuese válida la Geometría euclídea, y por consiguiente el *postulado V*, debería ser k infinito, o lo que es lo mismo, deberían existir estrellas con paralajes tan pequeñas como se quiera.

Ahora, una respuesta a la última cuestión se comprende que no podremos darla nunca, puesto que las observaciones astronómicas serán siempre limitadas. Sea como quiera, dada la enorme magnitud de k respecto a las líneas directamente medibles, deberemos, con LOBATSCHEFSKI, suponer válida en el campo experimental la hipótesis euclídea.

A la misma conclusión podríamos llegar considerando la cuestión por el lado de la suma de los ángulos de un triángulo. Las observaciones astronómicas indican que la deficiencia de un triángulo, con lados casi iguales a la distancia de la tierra al sol, no puede ser superior a 0'',0003. Ahora, si en lugar de un triángulo astronómico considerásemos un triángulo terrestre, con los ángulos accesibles a las medidas directas, en virtud del principio de proporcionalidad entre el área y la deficiencia, la eventual deficiencia de tal triángulo entraría necesariamente en los límites de los errores experimentales; así que, experimentalmente, podremos suponer que la deficiencia en cuestión sea nula, y, por consiguiente, sea válido en el campo experimental el *postulado euclídeo* (1).

JUAN BOLYAI (1802-1860).

§ 46. Con LOBATSCHEFSKI comparte la gloria del descubrimiento de la *Geometría no euclidiana* el húngaro J. BOLYAI, hijo de WOLFGANG BOLYAI (cfr. pág. 61), oficial en el ejército austriaco. Desde joven demostró una maravillosa aptitud para las matemáticas, en las que le instruyó su mismo padre. Las

(1) Para el contenido de este párrafo cfr. LOBATSCHEFSKI: *Ueber die Anfangsgründe der Geometrie*, pág. 22-24 de la obra de ENGEL citada en la pág. 81. Véanse, además, las observaciones de ENGEL en las páginas 248-252 de la misma obra.

lecciones de WOLFGANG atrajeron pronto la atención de JUAN sobre el *axioma XI*, a cuya demostración quiere luego dedicarse, desoyendo los consejos paternos, que aspiraban a desviarle de tal empresa. La teoría de las paralelas formó así la ocupación favorita del joven matemático durante su estancia (1817-22) en la Real Academia de Ingenieros en Viena.

En aquel tiempo JUAN tuvo relaciones de amistad con CARLOS SZÁSZ (1798-1853), y en las conversaciones de aquellos grandes estudiosos germinaron algunas de las ideas que condujeron después a BOLYAI a crear la *Ciencia absoluta del espacio.*

Parece que a SZÁSZ se debe la idea explícita de considerar la paralela a AM, trazada por B, como la posición límite de una secante BC, que gira alrededor de B en un sentido determinado, esto es, de considerar a BC paralela a AM, cuando BC, según una expresión de SZÁSZ, se *desprende* (abspringe) de AM. BOLYAI llamaba a esta paralela con el nombre de *paralela asintótica o asíntota* (cfr. SACCHERI). En las conversaciones de los dos amigos se presentaron el concepto de *línea de equidistancia de una recta;* el otro importantísimo de *paraciclo (oriciclo* de LOBATSCHEFSKI), y se reconoció que se habría obtenido la demostración del *axioma XI* si se pudiese establecer que el *paraciclo* es una recta.

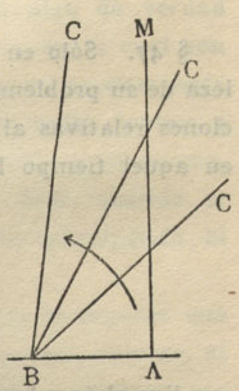


FIG. 40.

Habiendo SZÁSZ abandonado Viena a principios de 1821, para encargarse de la enseñanza del Derecho en el Colegio de Nagy-Enyed (Hungría), JUAN queda sólo para proseguir en sus especulaciones. Hasta el año 1820 estuvo dominado por la idea de encontrar una demostración al *axioma XI*, siguiendo un camino análogo al de SACCHERI y LAMBERT. Bien pronto cree haber conseguido su objeto, como se deduce de la correspondencia con su padre.

El reconocimiento de los errores cometidos fué para Juan el paso decisivo hacia los futuros descubrimientos, porque conviene en «que no necesita hacer ninguna violencia a la Naturaleza ni modelarla conforme alguna quimera ciegamente formada, sino que se debe, en cambio, de un modo razonable y natural, mirar la Naturaleza misma con la verdad y contentarse con la representación menos imperfecta posible».

JUAN BOLYAI se propone entonces construir una *teoría absoluta* del espacio, siguiendo el método clásico de los griegos, esto es, aplicando el método deductivo, pero sin decidir *a priori* sobre la validez o no validez del *postulado V*.

§ 47. Sólo en 1823 BOLYAI penetró la verdadera naturaleza de su problema; en lo sucesivo no añade a ello sino condiciones relativas al material y a la forma. Había descubierto en aquel tiempo la fórmula

$$e^{-\frac{a}{k}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(a),$$

que liga el ángulo de paralelismo $\Pi(a)$ al correspondiente segmento (cfr. LOBATSCHEFSKI, pág. 86), relación que es la clave de toda la trigonometría no euclidiana. Para destacar los descubrimientos de JUAN en este período, copiemos un trozo de la carta que escribió, desde Temesvár, a su padre el 3 de noviembre de 1823.

«Estoy decidido ahora a publicar una obra sobre la teoría de las paralelas, apenas haya ordenado la materia y las circunstancias me lo permitan. No lo he hecho todavía; pero el camino que he seguido ha ciertamente, por decirlo así, casi alcanzado el propósito; el propósito propio no está alcanzado; pero he descubierto cosas tan hermosas, que me he quedado sorprendido con ellas y se debería lamentar por siempre que se hubiesen perdido. Cuando las veáis, lo reconoceréis vos mismo. Entre tanto no os puedo decir mas que esto: *He creado de la nada un nuevo universo.* Todo lo que os he comunicado hasta ahora no es mas que un palacio de papel frente a esta torre. Estoy tan persuadido de que esto me dará gloria, como si hubiese ya acaecido.»

WOLFGANG expresó el deseo de acoger inmediatamente en el *Tentamen* la teoría de su hijo, porque «si la cosa está realmente conseguida, es conveniente apresurarse a darla a la luz pública por dos motivos: primero, porque las ideas pasan fácilmente de uno a otro, que puede anticiparse a publicarlas; en segundo lugar, porque hay también algo de verdad en esto, que muchas cosas tienen una época, en la cual son descubiertas al mismo tiempo en más lugares, precisamente como en primavera brotan las violetas en todas partes; y puesto que toda lucha científica es sólo una gran guerra, a la que no sé cuándo seguirá la paz, se debe, cuando se puede, vencer, puesto que aquí la victoria corresponde al primero».

WOLFGANG BOLYAI estaba acaso bien lejos de suponer que su presentimiento correspondiese a un hecho real, esto es, al simultáneo descubrimiento de la Geometría no euclidiana por obra de GAUSS, TAURINUS y LOBATSCHEFSKI.

En 1826 JUAN comunicó su trabajo a J. WALTER von ECKWEHR (1789-1857), antes profesor suyo en la Academia militar, y en 1829 remitió el manuscrito a su padre. WOLFGANG no quedó muy satisfecho, principalmente porque no alcanzó a comprender cómo debiera de entrar nunca en las fórmulas de JUAN una constante indeterminada. Sin embargo, padre e hijo se entendieron para publicar en apéndice al primer volumen del *Tentamen* la nueva teoría del espacio.

He aquí el título de la obra de JUAN BOLYAI: *Appendix scientian spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate*

Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica (1).

El apéndice fué enviado por primera vez (junio 1831) a GAUSS, sin que llegase a su destino, y por segunda vez en enero de 1832. Seis semanas después (6 marzo, 1832) GAUSS respondía así a WOLFGANG:

«Si empiezo diciendo que *no puedo elogiar este trabajo* (de JUAN), tú quedarás, ciertamente, por un instante maravillado; pero no puedo decir otra cosa; alabarlo sería alabarme a mí mismo. En efecto, todo el contenido de la obra, el camino trazado por tu hijo, los resultados a que llegó coinciden casi enteramente con mis meditaciones, que han ocupado en parte mi mente de treinta a treinta y cinco años a esta parte. Así, me quedé completamente estupefacto. En cuanto a mi trabajo personal, del cual, hasta aquí, he confiado bien poco al papel, era mi intención no dejar que se publicase nada durante mi vida. En efecto, la mayor parte de los hombres no tienen ideas claras sobre las cuestiones de que se habla, y yo he encontrado muy pocas personas que prestasen un especial interés a lo que les comuniqué sobre tal asunto. Para poder tener este interés se necesita ante todo haber sentido muy vivamente lo que esencialmente falta, y sobre esta materia casi todos están en una completa obscuridad. Al contrario, era mi idea escribir, con el tiempo, todo esto, para que al menos no pereciese conmigo. Y así es para mí una agradable sorpresa ver que esta fatiga puede serme evitada ahora, y estoy sumamente contento de que sea precisamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de un modo tan notable.»

WOLFGANG comunicó esta carta a su hijo, añadiendo: «La

(1) Reimpresa en formato de lujo, por la Academia Húngara de Ciencias, con motivo del primer centenario del nacimiento del autor (Budapest, 1902). Véase la traducción italiana de G. BATTAGLINI, en el t. VI del Giornale di Matematiche, pág. 97-115 (1868).

respuesta de GAUSS respecto a tu obra redunda en honor de nuestra patria y de nuestra nación.»

Un efecto completamente distinto produce en JUAN la carta de GAUSS. No podía ni quería convencerse de que otro, antes e independientemente de él, hubiese llegado a la *Geometría no euclidiana*. Sospechó también que su padre hubiese comunicado a GAUSS sus descubrimientos antes de enviarle el *Appendix*, y que éste quisiera apropiarse la prioridad del descubrimiento. Y aunque en seguida debió de convencerse de que tal sospecha era infundada, JUAN conservó siempre una injustificable aversión por el eminente geómetra (1).

§ 48. He aquí una indicación de los más importantes resultados contenidos en la obra de JUAN BOLYAI:

a) Definición de las paralelas y sus propiedades independientes del postulado euclídeo.

b) Círculo y esfera de radio infinito. La Geometría sobre la esfera de radio infinito es idéntica a la Geometría plana ordinaria.

c) La trigonometría esférica es independiente del postulado de EUCLIDES. Demostración directa de las fórmulas.

d) Trigonometría plana en el caso no euclídeo. Aplicaciones al cálculo de las áreas y de los volúmenes.

e) Problemas resolubles elementalmente. Construcción de un cuadrado equivalente a un círculo, en la hipótesis de la falsedad del postulado V.

Aunque LOBATSCHEFSKI había dado un mayor desarrollo a la *Geometría imaginaria*, especialmente a su contenido analítico, BOLYAI ha tratado más profundamente la cuestión de la

(1) Para el contenido de este y del precedente párrafo cfr.: STÄCKEL: *Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai*, Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XVII (1901); STÄCKEL y ENGEL: *Gauss die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie.* Math. Ann., t. IL, pág. 149-167 (1897); Bull. Sc. Math. (2), t. XXI, páginas 206-228.

dependencia o independencia de las proposiciones geométricas del postulado euclídeo. Donde LOBATSCHEFSKI aspira principalmente a construir un sistema geométrico sobre la negación del postulado en cuestión, JUAN BOLYAI pone en evidencia las proposiciones y construcciones que en la Geometría ordinaria no dependen de aquel postulado. Tales proposiciones, que él llama *absolutamente verdaderas*, pertenecen a la *ciencia absoluta* del espacio. La investigación de las proposiciones de esta ciencia pudiera efectuarse confrontando la Geometría de EUCLIDES con la de LOBATSCHEFSKI. Todo lo que tienen de común las dos Geometrías, por ejemplo, las fórmulas de la trigonometría esférica, pertenece a la Geometría absoluta. JUAN BOLYAI, sin embargo, no sigue este camino; él demuestra directamente, esto es, independientemente del postulado euclídeo, sus proposiciones absolutamente verdaderas.

§ 49. Un teorema absoluto de BOLYAI, maravilloso por su sencillez y elegancia, es el siguiente:

En un triángulo rectilíneo las circunferencias de radio igual a los lados están entre sí como los senos de los ángulos opuestos.

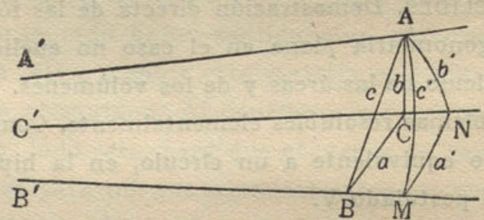


FIG. 41.

Sea ABC un triángulo rectángulo en C, y BB′ la perpendicular en B al plano del triángulo. Por los vértices A y C trácense las rectas AA′ y CC′, paralelas en un determinado sentido a BB′; después, por A, imagínese descrita la orisfera (eventualmente plana) que corta ortogonalmente las rectas AA′, BB′ y CC′ respectivamente en los puntos A, M y N. Si se llaman a', b', c' los lados del triángulo rectángulo orisférico AMN, en virtud de cuanto en otra parte se dijo [por ejemplo, en el § 48 (b)], se tendrá:

$$\operatorname{sen} \widehat{AMN} = b' : c'.$$

Pero sobre la orisfera, dos arcos de oriciclo están entre sí como las circunferencias que tienen por radios (oricíclicos) aquellos arcos, así que, indicando con *cirf.* x' la circunferencia de radio oricíclico x', se podrá escribir:

$$\operatorname{sen} \widehat{AMN} = \text{cirf. } b' : \text{cirf. } c'.$$

Por otra parte, una circunferencia trazada sobre la orisfera con radio oricíclico x' puede mirarse como una circunferencia ordinaria, cuyo radio rectilíneo x sea la mitad de la cuerda del arco oricíclico $2x'$. Así que, denotando por $\bigcirc x$ la circunferencia de radio rectilíneo x y observando que los dos ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AMN}$ son iguales, la anterior relación toma la forma

$$\operatorname{sen} \widehat{ABC} = \bigcirc b : \bigcirc c.$$

De la propiedad del triángulo rectángulo ABC, expresada en esta igualdad, se puede deducir el enunciado teorema de BOLYAI, del mismo modo que de la relación euclídea

$$\operatorname{sen} \widehat{ABC} = b : c$$

se deduce la proporcionalidad entre los lados de un triángulo y los senos de los ángulos opuestos (*Appendix*, § 25).

El teorema de BOLYAI se expresa luego brevemente así:

$$[1] \qquad \bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c = \operatorname{sen} \alpha : \operatorname{sen} \beta : \operatorname{sen} \gamma.$$

Si ahora quisiéramos especializar el sistema geométrico, tendremos:

1.º En la hipótesis euclídea,

$$\bigcirc x = 2\pi x;$$

y substituyendo en [1],

$$[1'] \qquad a : b : c = \text{sen}\,\alpha : \text{sen}\,\beta : \text{sen}\,\gamma.$$

2.º En la hipótesis no euclídea (cfr. pág. 70),

$$\bigcirc x = \pi k \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}} \right) = 2\pi k\,\text{Sh}\,\frac{x}{k},$$

y operando como arriba,

$$[1''] \qquad \text{Sh}\,\frac{a}{k} : \text{Sh}\,\frac{b}{k} : \text{Sh}\,\frac{c}{k} = \text{sen}\,\alpha : \text{sen}\,\beta : \text{sen}\,\gamma.$$

Esta última relación puede mirarse como el *teorema de los senos* de la Geometría de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI.

De la [1], con procedimientos análogos a los ordinarios basados en la [1'], BOLYAI deduce la *proporcionalidad entre los senos de los ángulos y los senos de los lados en un triángulo esférico.* De esto resulta la independencia de la trigonometría esférica del postulado de EUCLIDES (*Appendix*, § 26). Este hecho pone todavía más en relieve la importancia del teorema de BOLYAI.

§ 50. Pertenece también a la Geometría absoluta la siguiente construcción de una paralela por el punto D a la recta AN (*Appendix*, § 34).

Trazadas las rectas DB y AE perpendicularmente a AN, bájese desde D la perpendicular DE a la recta AE. El ángulo

$E\widehat{D}B$ del cuadrilátero trirectángulo ABDE es recto o agudo, por lo cual ED es igual o mayor que AB. Con centro A descríbase una circunferencia de radio ED; ésta cortaría al segmento

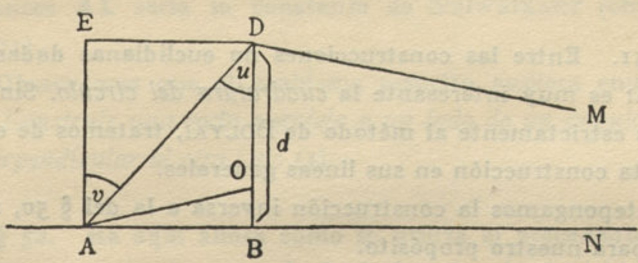


FIG. 42.

DB en un punto O, coincidente con B, o bien comprendido entre B y D. *La recta* AO *forma con* DB *un ángulo* $A\widehat{O}B$ *igual al ángulo de paralelismo correspondiente al segmento* BD (1)

---

(1) He aquí rápidamente cómo BOLYAI demuestra esta proposición. Las circunferencias $\bigcirc$ AB y $\bigcirc$ ED, engendradas por los puntos B y D en sus rotaciones alrededor de la recta AE, pueden considerarse como pertenecientes la primera al plano perpendicular en A al eje AE, la segunda a una *superficie equidistante* de este plano. La equidistancia entre superficie y plano está dada por el segmento $d = BD$. La relación entre las dos circunferencias en cuestión resulta por esto función *solamente* de d. Esta relación puede también expresarse recurriendo al teorema de BOLYAI (§ 49), el cual, aplicado a los dos triángulos rectángulos ADE y ADB, conduce a la relación:

$$\bigcirc AB : \bigcirc ED = \text{sen}\, u : \text{sen}\, v.$$

De aquí se deduce que la relación sen u : sen v no varía si, conservando fijo a d, la recta AE se desvía, manteniéndose perpendicular a BD. En particular si el pie de AE tiende al infinito sobre AN, u tiende a $\Pi\,(d)$ y v a un ángulo recto. Por consiguiente:

$$\bigcirc AB : \bigcirc ED = \text{sen}\, \Pi\,(d) : 1.$$

Por otra parte, en el triángulo rectángulo AOB se verifica la relación:

$$\bigcirc AB : \bigcirc AO = \text{sen}\, A\widehat{O}B : 1,$$

la cual, unida a la precedente, conduce a establecer la igualdad de los dos ángulos $\Pi\,(d)$ y $A\widehat{O}B$, l. q. q. d.

(*Appendix*, § 27). Se construirá, pues, por D una paralela a AN, trazando la recta DM de modo que el ángulo $\widehat{BDM}$ resulte igual al ángulo $\widehat{AOB}$.

§ 51. Entre las construcciones no euclidianas dadas por Bolyai es muy interesante la *cuadratura del círculo*. Sin atenernos estrictamente al método de Bolyai, tratemos de exponer esta construcción en sus líneas generales.

Antepongamos la construcción inversa a la del § 50, necesaria para nuestro propósito.

Construir, en la hip. no euclídea, el segmento correspondiente a un ángulo (agudo) *de paralelismo dado.*

Puesto que el teorema sobre la *eventual* incidencia de las tres alturas de un triángulo es válido también en la Geometría de Lobatschefski-Bolyai, sobre el lado AB del ángulo agudo $\widehat{BAA'}$ (fig. 43) fíjese un punto B tal que la paralela BB′ a la recta AA′ forme el ángulo $\widehat{B'BA}$ agudo. Las dos semirrectas

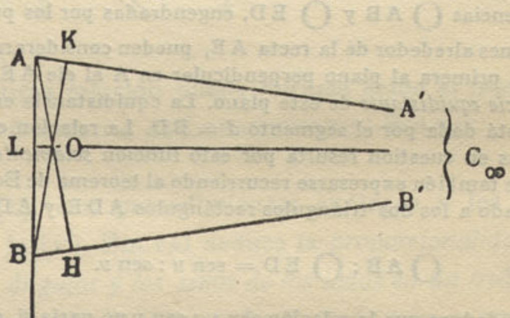


Fig. 43.

AA′···, BB′··· y el segmento AB pueden mirarse como lados de un triángulo, del cual es un vértice el punto C_∞, común a las dos paralelas AA′ y BB′. Entonces, si desde los vértices A y B se bajan las perpendiculares AH y BK sobre los lados opuestos, estas perpendiculares *se encuentran* en un punto O, interior al triángulo, en el cual concurre también la perpendicular bajada desde C_∞ sobre AB. Luego si desde O se baja la perpendicular OL sobre AB, vendrá determinado el segmento AL, correspondiente al ángulo de paralelismo $\widehat{BAA'}$.

Como caso particular, el ángulo $\widehat{BAA'}$ pudiera ser de 45°; entonces AL sería la constante de SCHWEIKART (cfr. página 71).

Observemos que el problema resuelto pudiera enunciarse así: *Construir una recta paralela a un lado de un ángulo agudo y perpendicular al otro lado* (1).

§ 52. He aquí ahora cómo se utiliza el precedente resultado para *construir un cuadrado de área igual a la del triángulo máximo.*

Siendo el área Δ de un triángulo

$$k^2(\pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}),$$

para el triángulo máximo, esto es, para el triángulo con los tres vértices en el infinito, tendremos:

$$\Delta = k^2\pi.$$

Para determinar el ángulo ω de un cuadrado de área $k^2\pi$ basta recordar (LAMBERT, pág. 47) que también el área de un polígono, como la del triángulo, es proporcional a la deficiencia relativa, por lo cual deberá subsistir la relación

$$k^2\pi = k^2(2\pi - 4\omega),$$

de la cual

$$\omega = \frac{1}{4}\pi = 45^{\circ}.$$

(1) La solución de BOLYAI *(Appendix,* § 35) es, sin embargo, más complicada.

Sentado esto, consideremos el triángulo rectángulo OAM, que es la octava parte del cuadrado en cuestión. Poniendo

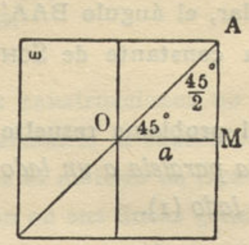


Fig. 44.

OM $= a$ y aplicando la fórmula [2] de la página 77, se obtiene:

$$\mathrm{Ch}\,\frac{a}{k} = \cos\frac{1}{2}\,45^{\circ} : \mathrm{sen}\,45^{\circ},$$

o también

$$\mathrm{Ch}\,\frac{a}{k} = \mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,135^{\circ} : \mathrm{sen}\,45^{\circ}.$$

Si ahora se construyen, según el § 51, los dos segmentos b', c', correspondientes a los ángulos de paralelismo $\frac{1}{2}\,135^{\circ}$ y 45°, y se recuerda que (pág. 86 [6])

$$\mathrm{Ch}\,\frac{x}{k} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\Pi\,(x)},$$

entre los tres segmentos a, b' y c' subsistirá la relación

$$\mathrm{Ch}\,\frac{a}{k}\,\mathrm{Ch}\,\frac{b'}{k} = \mathrm{Ch}\,\frac{c'}{k}\,.$$

Finalmente, si se consideran b' y c' como cateto el primero e hipotenusa el segundo de un triángulo rectángulo, el otro cateto a' de este triángulo, en virtud de la [1] de la página 74, está determinado por la ecuación

$$\mathrm{Ch}\,\frac{a'}{k}\,\mathrm{Ch}\,\frac{b'}{k}=\mathrm{Ch}\,\frac{c'}{k}\,.$$

Comparando esta igualdad con la precedente, se obtiene: $a'=a$. Construído así a, es construíble inmediatamente el cuadrado de área igual a la del triángulo máximo.

§ 53. Para construir ahora un círculo de área igual a la de este cuadrado, o, lo que es lo mismo, a la del triángulo máximo, es necesario transformar la expresión

$$\circ\, r=2\pi k^2\left(\mathrm{Ch}\,\frac{r}{k}-1\right),$$

que da el área del círculo de radio r (cfr. pág. 78), introduciendo el ángulo de paralelismo $\Pi\left(\frac{r}{2}\right)$, correspondiente al semi-rayo. Haciéndolo así, se obtiene (1):

$$\circ\, r=\frac{4\pi k^2}{\mathrm{tg}^2\,\Pi\left(\frac{r}{2}\right)}\,.$$

(1) En efecto, por las propiedades de las funciones hiperbólicas se obtiene:

$$\mathrm{Ch}\,\frac{r}{k}-1=2\,\mathrm{Sh}^2\,\frac{r}{2k}=\left(e^{\frac{r}{2k}}-e^{-\frac{r}{2k}}\right)^2,$$

y por las propiedades del ángulo de paralelismo (cfr. pág. 86):

$$e^{-\frac{r}{2k}}=\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\cdot$$

Por otra parte, si por los extremos del segmento $AB = r$ se trazan las dos paralelas AA' y BB', de modo que los

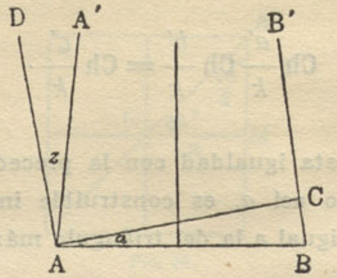


FIG. 45.

ángulos que forman con AB sean iguales, será

$$\widehat{A'AB} = \widehat{B'BA} = \Pi\left(\frac{r}{2}\right)$$

Bajada ahora la perpendicular AC sobre BB' y la perpendicular AD a AC, y haciendo

$$\widehat{CAB} = \alpha, \qquad \widehat{DAA'} = z,$$

se tiene:

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg}\left[\Pi\left(\frac{r}{2}\right) - \alpha\right] = \frac{\operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)}.$$

Utilizando las fórmulas trigonométricas en el triángulo ABC es fácil eliminar α del último miembro de la precedente relación, y obtener así (1)

$$\operatorname{tg} z = \frac{2}{\operatorname{tg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)},$$

(1) En efecto, en el triángulo rectángulo ABC se tiene:

$$\operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{k}\right)\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{Ch}\frac{r}{k}.$$

de la cual, por medio de la última expresión de $\bigcirc r$, se obtiene:

$$\bigcirc r = \pi k^2 \operatorname{tg}^2 z.$$

Esta fórmula, demostrada por otro camino por BOLYAI (*Appendix*, § 43), permite asociar a todo círculo un determinado ángulo z. Si fuese $z = 45^\circ$, entonces se tendría:

$$\bigcirc r = \pi k^2,$$

esto es, *el área del círculo, cuyo ángulo z es de* 45°, *es igual al área del triángulo máximo*, y, por tanto, a la del cuadrado del § 52.

Dado $z = A'\widehat{A}D$ (fig. 45), se construye después r, trazando: 1.°, la recta AC perpendicular a AD; 2.°, la recta BB′ paralela a AA′ y perpendicular a AC (§ 51); 3.°, la *bisectriz* de la *zona* comprendida entre AA′ y BB′ (mediante el teorema sobre el punto de encuentro de las bisectrices en un triángulo con un vértice *impropio*); 4.°, la perpendicular AB a esta bisectriz: el segmento AB, comprendido entre AA′ y BB′, es el radio r.

§ 54. El problema de construir después un polígono equivalente a un círculo de área $\pi k^2 \operatorname{tg}^2 z$ está, como observa BOLYAI, ligado íntimamente al valor numérico de $\operatorname{tg}^2 z$. Es resoluble para todo valor entero de $\operatorname{tg}^2 z$ y para todo valor frac-

---

de la cual, siendo

$$\operatorname{Ch}\frac{r}{k} = 2\operatorname{Sh}^2\frac{r}{2k} + 1 = 2\operatorname{ctg}^2\Pi\left(\frac{r}{2}\right) + 1,$$

se deduce:

$$\operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{ctg}^2\Pi\left(\frac{r}{2}\right) + 1,$$

y por tanto:

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right) = 1 + \operatorname{tg}^2\Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

Estas dos relaciones permiten escribir la expresión de $\operatorname{tg} z$ del modo exigido.

cionario, cuando, sin embargo, el denominador de la fracción reducida a los términos mínimos caiga dentro de la forma asignada por GAUSS para la inscripción de los polígonos regulares (*Appendix*, § 43).

La posibilidad de construir un cuadrado equivalente a un círculo conduce a JUAN a concluir: «*Habeturque aut Axioma XI. Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica;* etsi hucusque indecisum manserit, quodnam ex his duobus revera locum habeat.»

La indecisión así formulada le parece en aquella época (1831) irresoluble, puesto que cierra su trabajo con estas palabras: «Superesset denique (ut res omni numero absolvatur), impossibilitatem (absque suppositione aliqua) decidendi, num Σ [sistema euclideo] aut aliquod (et quodnam) S [sistema non euclideo] sit, demonstrare: quod tamen occasioni magis idoneae reservatur.»

JUAN, sin embargo, no publicó nunca tal demostración.

§ 55. Después de 1831, BOLYAI se ocupó todavía de su Geometría, y en particular de los siguientes problemas:

1.º Conexión entre la trigonometría esférica y la trigonometría no euclidiana.

2.º ¿Se puede demostrar rigurosamente que el axioma euclídeo no es una consecuencia de los precedentes?

3.º Volumen del tetraedro en Geometría no euclidiana.

En lo que se refiere al primero de estos problemas, BOLYAI, además de darse cuenta de la relación analítica que liga a las dos trigonometrías (cfr. LOBATSCHEFSKI, pág. 86), reconoció que en la hipótesis no euclídea existen tres tipos de superficies *uniformes* (1), sobre las cuales son válidas respectivamente la trigonometría no euclidiana, la trigonometría ordinaria y la trigonometría esférica. Son del primer tipo las super-

(1) Con este nombre BOLYAI parece indicar aquellas superficies que, en cuanto a la movilidad sobre sí mismas, se comportan como el plano.

ficies planas e *hiperesféricas* (equidistantes de un plano), del segundo tipo las *paraesféricas* (orisferas de LOBATSCHEFSKI) y del tercer tipo las *esferas*. De las superficies hiperesféricas se pasa a las esféricas, a través del caso límite de las paraesferas. Este paso se realiza analíticamente, haciendo variar de un modo continuo del campo real al campo imaginario puro, pasando por el infinito, a un cierto parámetro que aparece en las fórmulas (cfr. TAURINUS, págs. 79-80).

El segundo problema, el relativo a la indemostrabilidad del *axioma XI*, BOLYAI no acierta a resolverlo, ni a formarse una exacta convicción acerca de él. Durante un cierto tiempo creyó que no se podría de ningún modo decidir, entre el caso euclídeo y el no euclídeo, cuál fuese el verdadero, apoyándose, como antes LOBATSCHEFSKI, en el valor analítico de la nueva trigonometría. Después se verificó en JUAN un retorno a las antiguas ideas, seguido de una nueva tentativa para demostrar el *axioma XI*. En esta tentativa aplica las fórmulas no euclídeas a un sistema de cinco puntos completamente independientes. Entre las distancias de estos puntos existe necesariamente una relación; ahora bien: por un error de cálculo, JUAN no encontró esta relación, y durante cierto tiempo creyó haber así demostrado la falsedad de la hipótesis no euclídea y la absoluta verdad del *axioma XI* (1).

Después, sin embargo, advierte el error; pero no marcha según esta dirección en ulteriores investigaciones, porque el método aplicado a un sistema de seis o más puntos le hubiera conducido a cálculos demasiado largos.

(1) He aquí el título del trabajo en que JUAN se proponía exponer esta demostración: *Beweis des bis nun auf der Erde immer noch zweifelhaft gewesenen, weltberühmten und, als der gesammten Raum-und Bewegungslehre zum Grunde dienend, auch in der That allerhöchstwichtigsten* 11. *Euklid'schen Axioms. Von J. Bolyai, von Bolya, k. k. Génie-Stabshauptmann in Pension*. Véase a este propósito el trabajo de P. STÄCKEL: *Untersuchungen aus der Absoluten Geometrie aus Johann Bolyai's Nachlass*. Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XXIII, pág. 280-307 (1902). A este trabajo nos remitimos para todo el contenido del § 55.

El tercer problema arriba indicado, relativo al tetraedro, es de índole puramente geométrica. Las soluciones de BOLYAI fueron encontradas y dadas a conocer recientemente por STÄCKEL (cfr. pág. 109, nota [1]). Del mismo problema se había ocupado extensamente LOBATSCHEFSKI a fines de 1829 (1), y GAUSS, en la carta en parte referida en la pág. 96, se lo proponía a JUAN.

Añadiremos, en fin, que J. BOLYAI, al conocer (1848) la *Geometrische Untersuchungen*, de LOBATSCHEFSKI, se ocupó de ella con intención crítica (2), y que, para superar al geómetra ruso, se aprestó a componer una gran obra sobre la reforma de los principios de las Matemáticas, concebida al mismo tiempo de la publicación del *Appendix*, pero no llegó a llevarla a cabo (3).

LA TRIGONOMETRÍA ABSOLUTA.

§ 56. Aunque las fórmulas de la trigonometría no euclidiana contengan, como caso límite, las ordinarias relaciones entre lados y ángulos de un triángulo (cfr. págs. 75-76), todavía no entran en la que JUAN BOLYAI llamaba *Geometría absoluta*. En realidad, dichas fórmulas no se aplican desde luego a los dos tipos de Geometría y fueron deducidas suponiendo la validez de la *hip. áng. agudo*. Relaciones aplicables completamente al caso euclídeo y al caso no euclídeo fueron encontradas por nosotros en el § 49, y constituyen el teorema de BOLYAI. Son tres, de las cuales dos solamente independientes, y nos proporcionan así un primer grupo de fórmulas de la *trigonometría absoluta*.

---

(1) Véanse pág. 53 y siguientes de la obra citada en la pág. 81.

(2) Cfr. P. STÄCKEL und J. KURSCHÁK: *Johann Bolyai's Bemerkungen ueber N. Lobatschewskij's Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XVIII, páginas 250-279 (1902).

(3) Cfr. P. STÄCKEL: *Johann Bolyai's Raumlehre*. Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XIX (1903).

Otras fórmulas de la trigonometría absoluta fueron dadas en 1870 por el geómetra belga M. DE TILLY, en sus *Etudes de Mécanique abstraite* (1).

Las fórmulas de DE TILLY se refieren a los triángulos rectángulos y fueron deducidas mediante consideraciones cinemáticas, que utilizan solamente aquellas propiedades de una región limitada del plano, que son independientes del valor de la suma de los ángulos del triángulo.

Además de la función $\bigcirc x$, que ya se encuentra en las fórmulas de BOLYAI, en las de DE TILLY aparece otra función, $\mathbf{E}x$, definida del modo siguiente: Sea r una recta, l la *línea equidistante* de r el segmento x. Puesto que los arcos de l son proporcionales a las respectivas proyecciones sobre r, es claro que la relación entre un arco (rectificado) de l y su proyección no dependerá de la longitud del arco, sino solamente de la distancia x. La función que expresa esta relación es la función $\mathbf{E}\,x$ introducida por DE TILLY.

Sentado esto, he aquí las fórmulas de la trigonometría absoluta que se refieren al triángulo ABC:

$$[1]\quad \begin{cases} \bigcirc a = \bigcirc c \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ \bigcirc b = \bigcirc c \cdot \operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

$$[2]\quad \begin{cases} \cos\alpha = \mathbf{E}a \cdot \operatorname{sen}\beta \\ \cos\beta = \mathbf{E}b \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

$$[3]\qquad \mathbf{E}c = \mathbf{E}a \cdot \mathbf{E}b$$

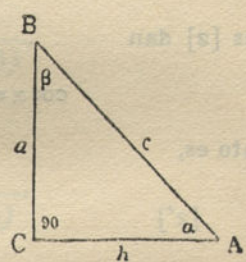


FIG. 46.

El grupo [1] es el teorema de BOLYAI en el triángulo rec-

(1) Mémoires couronnés et autres Mémoires de la Real Academia de Bélgica, t. XXI (1870). Véase también, del mismo autor: *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique.* Mém. de la Societé des Sciences de Bordeaux, t. III, premier Cahier (1878).

tángulo. Todas las fórmulas de la trigonometría absoluta se deducen combinando oportunamente estos tres grupos. En particular, en el triángulo rectángulo se obtiene:

$$\bigcirc^2 a \cdot (\mathrm{E}a + \mathrm{E}b \cdot \mathrm{E}c) + \bigcirc^2 b \cdot (\mathrm{E}b + \mathrm{E}c \cdot \mathrm{E}a) =$$
$$= \bigcirc^2 c \cdot (\mathrm{E}c + \mathrm{E}a \cdot \mathrm{E}b).$$

Esta puede considerarse como la expresión del teorema de PITÁGORAS en la Geometría absoluta (1).

§ 57. Veamos ahora cómo de las relaciones del párrafo precedente pueden deducirse las de la Geometría euclídea y de la no euclídea.

Caso euclídeo.—La equidistante l es una recta (por tanto, $\mathrm{E}x = 1$), las circunferencias son proporcionales a los radios. Entonces las [1] se convierten en

$$[1'] \left\{ \begin{array}{l} a = c \operatorname{sen} \alpha, \\ b = c \operatorname{sen} \beta; \end{array} \right.$$

las [2] dan

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta, \qquad \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha,$$

esto es,

$$[2'] \qquad \alpha + \beta = 90^0;$$

en fin, la [3] se reduce a una identidad.

Las [1'], [2'] comprenden toda la trigonometría ordinaria.

---

(1) Cfr. R BONOLA: *La trigonometría absoluta según Juan Bolyai*, Rend. Istituto Lombardo, (2), t. XXXVIII (1905).

Caso no euclídeo.—Combinando entre sí las [1] y las [2] se obtiene:

$$[5] \qquad \frac{\bigcirc^2 a}{\mathrm{E}^2 a - 1} = \frac{\bigcirc^2 b}{\mathrm{E}^2 b - 1}.$$

Si después aplicamos la primera de las [2] a un triángulo rectángulo con el vértice A tendiendo al infinito, y, por tanto, α tendiendo a cero, tendremos:

$$\lim \cos\alpha = \lim (\mathrm{E}a \cdot \operatorname{sen}\beta).$$

Pero $\mathrm{E}a$ es independiente de α; el ángulo β, en el límite, deviene el ángulo de paralelismo correspondiente a a, esto es, $\Pi(a)$. Tendremos entonces:

$$\mathrm{E}a = \frac{1}{\operatorname{sen}\Pi(a)}.$$

Otro tanto puede decirse de $\mathrm{E}b$. Substituyendo en la [5] tenemos:

$$\frac{\bigcirc^2 a}{\operatorname{ctg}^2 \Pi(a)} = \frac{\bigcirc^2 b}{\operatorname{ctg}^2 \Pi(b)};$$

de donde

$$\frac{\bigcirc a}{\operatorname{ctg}^2 \Pi(a)} = \frac{\bigcirc b}{\operatorname{ctg}^2 \Pi(b)}.$$

Esta relación, unida a la expresión de $\mathrm{E}x$, nos permite completamente obtener de las [1], [2] y [3] las fórmulas de la trigonometría de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI.

$$[1''] \qquad \begin{cases} \operatorname{ctg}\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(c) \,.\, \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{ctg}\Pi(b) = \operatorname{ctg}\Pi(c) \,.\, \operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

$$[2''] \quad \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \Pi\,(b) \\ \operatorname{sen} \beta = \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \Pi\,(a) \end{cases}$$

$$[3''] \quad \operatorname{sen} \Pi\,(c) = \operatorname{sen} \Pi\,(a) \cdot \operatorname{sen} \Pi\,(b).$$

Estas relaciones, a que satisfacen los elementos de todo triángulo rectángulo, están en la forma dada por LOBATSCHEFSKI (1). Si en lugar de los ángulos de paralelismo $\Pi\,(a)$, $\Pi\,(b)$, $\Pi\,(c)$ se quisieran introducir funciones directas de los lados, bastaría recordar (pág. 86) que

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi\,(x) = e^{-\frac{x}{k}},$$

y expresar las funciones circulares de $\Pi\,(x)$ con funciones hiperbólicas de x. Se obtendrían entonces las precedentes relaciones bajo la nueva forma:

$$[1'''] \quad \begin{cases} \operatorname{Sh} \frac{a}{k} = \operatorname{Sh} \frac{c}{k} \operatorname{sen} \alpha. \\ \operatorname{Sh} \frac{b}{k} = \operatorname{Sh} \frac{c}{k} \operatorname{sen} \beta. \end{cases}$$

$$[2'''] \quad \begin{cases} \cos \alpha = \operatorname{sen} \beta \operatorname{Ch} \frac{a}{k}. \\ \cos \beta = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{Ch} \frac{b}{k}. \end{cases}$$

$$[3'''] \quad \operatorname{Ch} \frac{c}{k} = \operatorname{Ch} \frac{a}{k} \operatorname{Ch} \frac{b}{k}.$$

§ 58. Una observación importantísima sobre la Trigonome-

(1) Cfr., por ejemplo, *Geometrische Untersuchungen* de LOBATSCHEFSKI, citados en la página 82.

tría absoluta es la siguiente: *Interpretando los elementos de sus fórmulas como elementos de un triángulo esférico, aquélla ofrece un sistema de relaciones válidas también para los triángulos esféricos.*

La razón de esta propiedad de la trigonometría absoluta reside en el hecho, ya notado en la página 110, que aquélla fué deducida utilizando sólo las relaciones pertenecientes a regiones limitadas de plano, que no dependen de la hipótesis sobre la suma de los ángulos de un triángulo y por ello válidas también sobre la esfera.

Quien quisiere obtener directamente el resultado podría observar:

1.º Que en la Geometría esférica las circunferencias son proporcionales a los senos de los radios (esféricos), por lo cual la primera fórmula de los triángulos esféricos rectángulos

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \alpha$$

se transforma inmediatamente en la primera de las [1].

2.º Que un circulo de radio esférico $\frac{1}{2}\pi - b$ puede considerarse como una línea equidistante del círculo máximo concéntrico, y que la relación $\mathrm{E}b$ entre estos dos círculos está dada por

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - b\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi} = \cos b,$$

por lo cual las fórmulas de los triángulos esféricos rectángulos

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \cos a,$$
$$\cos c = \cos a \cos b,$$

se transforman inmediatamente en las [2] y [3].

Concluyendo: *Las fórmulas de la trigonometría absoluta son válidas también sobre la esfera.*

Hipótesis equivalentes al postulado euclídeo.

§ 59. Antes de abandonar el campo elemental nos parece oportuno llamar la atención del lector sobre el valor que en el organismo de la Geometría tienen algunas proposiciones que, en cierto sentido, pueden considerarse como *hipótesis equivalentes* al *postulado V*.

Para entendernos claramente comencemos por explicar el significado de esta equivalencia.

Dos hipótesis son *absolutamente equivalentes* cuando cada una de ellas se deduce de la otra sin el auxilio de ninguna nueva hipótesis. En este sentido son absolutamente equivalentes las dos hipótesis siguientes:

a) Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

b) Por un punto fuera de una recta pasa una sola paralela a aquella recta.

Este género de equivalencia no tiene mucho interés, porque las dos hipótesis son sencillamente dos formas diversas de una misma proposición. Veamos ahora cómo el concepto de equivalencia puede generalizarse. Supongamos que una teoría deductiva esté fundada sobre un cierto sistema de hipótesis, que notaremos con $\{A, B, C, \ldots H\}$. Sean ahora M y N dos nuevas hipótesis tales que del sistema $\{A, B, C, \ldots H, M\}$ pueda deducirse N, y del sistema $\{A, B, C, \ldots H, N\}$ pueda deducirse M. Indicaremos esto escribiendo:

$$\{A, B, C, \ldots H, M\} \cdot \supset \cdot N,$$

$$\{A, B, C, \ldots H, N\} \cdot \supset \cdot M.$$

Entonces, generalizando el concepto de equivalencia, diremos que las dos hipótesis M y N son equivalentes *relativamente al sistema fundamental* $\{A, B, C, \ldots H\}$.

Insistamos en la importancia que el sistema fundamental $\{A, B, C, \ldots H\}$ tiene en esta definición. En efecto, puede ocurrir que, restringiendo el sistema fundamental, omitiendo, por ejemplo, la hipótesis A, *no sean simultáneamente* posibles las dos deducciones

$$\{B, C, \ldots H, M\} \cdot \supset \cdot M,$$

$$\{B, C, \ldots H, N\} \cdot \supset \cdot N.$$

Entonces, respecto al nuevo sistema fundamental $\{B, C, \ldots H\}$, las dos hipótesis *no son equivalentes.*

Después de estas aclaraciones de orden lógico veamos lo que resulta de los precedentes desarrollos, respecto a la equivalencia entre algunas hipótesis y la *hipótesis euclídea.*

Tomemos, en primer lugar, como sistema fundamental de hipótesis el formado por los postulados de *asociación* [A] y de *distribución* [B], que caracterizan en la manera ordinaria los conceptos de recta y plano; por los postulados de *congruencia* [C] y por el *postulado de Arquímedes* [D].

Con relación a este sistema fundamental, que indicaremos con $\{A, B, C, D\}$, las siguientes hipótesis son entre sí equivalentes y equivalentes a la formulada por EUCLIDES en su *postulado V:*

a) Los ángulos internos de un mismo lado formados por dos paralelas con una transversal son suplementarios (TOLOMEO).

b) Dos rectas paralelas son equidistantes.

c) Si una recta encuentra a una de dos paralelas encuentra también a la otra [PROCLO]; o bien: dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí; o también: por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a esta recta.

d) De un triángulo cualquiera puede siempre construirse un triángulo semejante de magnitud arbitraria [WALLIS].

e) Por tres puntos no en línea recta pasa siempre una esfera [W. BOLYAI].

f) Por un punto situado entre los lados de un ángulo pasa siempre una recta que corta los dos lados del ángulo [LORENZ].

α) Si dos rectas, *r* y *s*, son una perpendicular y la otra oblicua a la transversal AB, los segmentos de las perpendiculares bajadas desde los puntos de *s* sobre *r* son menores que AB, en la región en que AB forma con *s* un ángulo agudo [NASÎR-EDDÎN].

β) El lugar de los puntos equidistantes de una recta es una recta.

γ) La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos [SACCHERI].

Supongamos ahora que restringimos el sistema fundamental de hipótesis *prescindiendo de la hipótesis de Arquímedes.* Entonces las proposiciones *a)*, *b)*, *c)*, *d)*, *e)* y *f)*, también respecto al nuevo sistema fundamental {A, B, C}, son entre sí equivalentes y equivalentes al *postulado V de Euclides.* En cuanto a las proposiciones α), β), γ), aun siendo entre sí equivalentes respecto al sistema {A, B, C}, *ninguna* es equivalente al *postulado euclídeo.* Este resultado, que pone de relieve la función del postulado de ARQUÍMEDES, está contenido en una ya citada Memoria de M. DEHN (1900) (1). En esta Memoria se demuestra que la hipótesis γ) sobre la suma de los ángulos de un triángulo es compatible no sólo con la Geometría elemental ordinaria, sino también con una nueva Geometría, necesariamente *no arquimediana,* donde no es válido el *postulado V,* y en la cual por un punto pasan infinitas rectas no secantes respecto a una recta dada. A esta Geometría el autor dió el nombre de *Semi-Euklidische Geometrie.*

---

(1) Cfr. pág. 33, nota [1].

La difusión de la geometría no euclidiana.

§ 60. Las obras de LOBATSCHEFSKI y BOLYAI no tuvieron a su aparición aquella acogida que tantos siglos de lenta y continua preparación parecían prometer. Esto, sin embargo, no debe maravillarnos, porque la historia de la ciencia nos enseña que todo cambio radical en cada una de las disciplinas no derriba de un golpe las convicciones, las preocupaciones, sobre las cuales los pensadores y los estudiosos, a través de un largo período de tiempo, edificaron sus doctrinas.

En nuestro caso, la afirmación de la Geometría no euclidiana fué retrasada también por razones especiales, como la dificultad que ofrecían a la lectura las obras rusas de LOBATSCHEFSKI, la obscuridad de los nombres de los dos renovadores y la concepción kantiana del espacio entonces dominante.

A disipar las tinieblas que envolvieron en los primeros años las nuevas teorías contribuyeron los escritos franceses y alemanes de LOBATSCHEFSKI, pero sobre todo la obra constante e infatigable de algunos geómetras, cuyos nombres están hoy ligados a la difusión y al triunfo de la Geometría no euclidiana. Queremos hablar principalmente de C. L. GERLING (1788-1864), R. BALTZER (1818-1887) y FR. SCHMIDT (1827-1901), en Alemania; J. HOÜEL (1823-1886), G. BATTAGLINI (1826-1894), E. BELTRAMI (1835-1900) y A. FORTI, en Francia y en Italia.

§ 61. GERLING, que desde 1816 estaba en correspondencia con GAUSS sobre las paralelas (1) y que en 1819 le comunicaba la nota de SCHWEIKART sobre la *Astralgeometrie* (cfr. pág. 71), tuvo del mismo GAUSS (1832), y con palabras que no pudieron dejar de suscitar en él una legítima curiosidad, la noticia de un *kleine Schrift* sobre la Geometría no euclidiana, compuesta por

(1) Cfr. el t. VIII de las *Obras de Gauss*, págs. 167-69

un joven oficial austriaco, hijo de W. BOLYAI (1). Las posteriores indicaciones bibliográficas conseguidas (1844) por GAUSS sobre las obras de LOBATSCHEFSKI y BOLYAI (2) indujeron a GERLING a procurarse las *Geometrische Untersuchungen* y el *Appendix*, y a librarle así del olvido en que parecían confinados.

§ 62. La correspondencia entre GAUSS y SCHUMACHER, publicada entre 1860 y 1863 (3); las muchas veces citadas obras de LOBATSCHEFSKI y BOLYAI; las tentativas de LEGENDRE para dar, aunque en los textos elementales, una organización rigurosa a la teoría de las paralelas, indujeron a BALTZER a substituir en la segunda edición de sus *Elemente der Matematik* (1867) (4) la definición euclídea de paralela por la derivada de la nueva concepción del espacio y a clasificar, con LOBATSCHEFSKI, entre las propiedades experimentales la relación $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, que caracteriza al triángulo euclídeo. Para justificar luego la innovación, BALTZER no dejó de presentar unas breves indicaciones sobre la posibilidad teórica de una Geometría más general que la ordinaria, fundada sobre la hipótesis de dos paralelas y de destacar con justo relieve los nombres de sus fundadores. Al mismo tiempo llamó la atención de HOÜEL, cuyo interés por las cuestiones relativas a la Geometría elemental era bien conocido en el campo cientí-

---

(1) Cfr. la carta de GAUSS a GERLING, pág. 220, t. VIII de las *Obras de Gauss*. En esta carta GAUSS, hablando del contenido del *Appendix*, dice: «Ich alle meine eigenen Ideen und RESULTATE wiederfinde mit grösser Eleganz entwickelt», y del autor del trabajo: «Ich halte diesen jungen Geometer v. BOLYAI für ein Genie erster Grösse.....»

(2) *Ob. Gauss*, t. VIII, págs. 234-38.

(3) *Briefwechesel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher;* t. II, páginas 268-431; t. V, pág. 246 (Altona, 1860-63). Respecto a las ideas de GAUSS, conocidas en aquella época, véase también: SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN; *Gauss zum Gedächtniss*, págs. 80-81 (Leipzig, 1856).

(4) Cfr. los *Elementos de Matemáticas* de BALTZER, traducidos por L. CREMONA, t. IV, págs. 5-7, 24-31 (Génova, 1867).

fico (1), sobre la Geometría no euclidiana, solicitándole a traducir en lengua francesa las *Geometrische Untersuchungen* y el *Appendix*.

§ 63. La versión francesa del opúsculo de LOBATSCHEFSKI se publicó en 1866, junto a la de un extracto de la correspondencia entre GAUSS y SCHUMACHER (2). La aproximación así obtenida entre las ideas de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI y las de GAUSS fué muy fecunda, porque el nombre de GAUSS y su sanción de los descubrimientos de los dos entonces obscuros e ignorados geómetras contribuyeron del modo más eficaz y seguro a dar crédito e importancia a las nuevas doctrinas.

La traducción francesa del *Appendix* se publicó en 1867 (3), precedida de una *Notice sur la vie et les travaux des deux mathématiciens hongrois W. et J. Bolyai di Bolya*, escrita por el arquitecto FR. SCHMIDT por invitación del mismo HOÜEL (4) y seguida de las observaciones de W. BOLYAI, extractos del primer volumen del *Tentamen* y de un opúsculo resumido de WOLF-

---

(1) HOÜEL había publicado, en 1863, su famoso *Essai d'une exposition rationelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire;* Archiv. d. Math. u. Phy., t. XL (1863).

(2) Mémoires de la Societé des Sciences Phy. et Naturelles de Bordeaux, t. IV, págs. 88-120 (1866). Fué también publicada en un opúsculo separado, con el título: *Etudes géométriques sur la théorie des parallèles* por N. J. LOBATSCHEFSKI, Conseiller d'Etat de l'Empire de Russie et Professeur a l'Université de Kasan; traduit de l'allemand por J. HOÜEL, *Suivis d'un Extrait de la correspondance de* GAUSS *et de* SCHUMACHER (París, G. Villars, 1866).

(3) Mém. Soc. Scienc. Phy. et Nat. de Bordeaux, t. V, págs. 189-248. Fué también publicada aparte en un opúsculo con el título: *La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou fausseté de l'Axiôme XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori); suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'Axiôme XI*, par JEAN BOLYAI, Capitaine au corps du génie dans l'armée autrichienne; *Précédé d'une notice sur la vie et les travaux de W. et de J. Bolyai*, par M. Fr. SCHMIDT. (París, G. Villars, 1868).

(4) Cfr.: P. STÄCKEL: *Franz Schmidt*, Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver., t. XI, págs. 141-46 (1902).

GANG sobre los principios de la Aritmética y de la Geometría (1).

Los datos recogidos por SCHMIDT sobre los dos BOLYAI fueron publicados al mismo tiempo (1867) en *Archiv. d. Math. u. Phy.*; y al año siguiente, A. FORTI, que ya había impreso un artículo históricocrítico sobre LOBATSCHEFSKI (2), daba a conocer a los italianos el nombre y las obras de los dos ahora célebres geómetras húngaros (3).

A favor de HOÜEL recordemos también su interés por los manuscritos de JUAN BOLYAI, entonces conservados (1867), en virtud de una disposición testamentaria de WOLFGANG, en la Biblioteca del Colegio Reformado de Maros Vásárhely. Por medio del príncipe B. BONCOMPAGNI (1821-1894), que interesó a su vez al ministro de Cultos húngaro, barón EÖTVÖS, consiguió que fuesen depositados (1869) en la Academia húngara de Ciencias de Budapest (4) y pudiesen así ser objeto de los pacientes y cuidadosos estudios, primero de SCHMIDT, recientemente de STÄCKEL.

Además, HOÜEL no dejó de moverse en muy diferentes ocasiones, a fin de asegurar a la Geometría no euclidiana un

(1) Este opúsculo de W. BOLYAI se suele citar brevemente con las primeras palabras de su título: *Kurzer Grundriss*. Fué impreso en Maros-Vásárhely en 1851.

(2) *Acerca de la geometría imaginaria o no euclidiana. Consideraciones históricocríticas;* Revista Bolonesa de Ciencias, Letras, Artes y Escuelas, tomo II, págs. 171-84 (1867). Fué impreso separadamente en un opúsculo de 16 páginas (Bolonia, Fava y Garagnani, 1867). El mismo trabajo, con varias adiciones y con el título: *Estudios geométricos sobre la teoría de las paralelas de N. J. Lobatschefski*, fué reimpreso en el diario político *La Provincia di Pisa*, año III, n. 25, 27, 29 y 30 (1867) y publicado de nuevo aparte bajo el título primitivo (Pisa, Nistri, 1867).

(3) Cfr.: *Acerca de la vida y los escritos de Wolfgang y Juan Bolyai de Bolya, matemáticos húngaros*, Boletín de Bibliografía y de Historia de las Ciencias Mat. y Físicas, t. I, págs. 277-99 (1869). Este artículo de FORTI está enriquecido con copiosas notas históricas y bibliográficas de B. BONCOMPAGNI.

(4) Cfr. el artículo de STÄCKEL sobre FR. SCHMIDT citado anteriormente en el texto.

triunfo duradero; baste citar su *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie* (1), los artículos *Sur l'impossibilité de demontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide* (2), las *Notices sur la vie et les travaux de* N. J. LOBATSCHEFSKY (3), las traducciones francesas de varios trabajos relativos a la Geometría no euclidiana (4), para comprender qué ferviente apóstol había encontrado ésta en el célebre matemático francés.

§ 64. Con análoga fe y actividad introducía y difundía por Italia las nuevas especulaciones geométricas nuestro compatriota JOSE BATTAGLINI, y el *Giornale di Matematica*, por él fundado y dirigido, desde 1867 en adelante fué como el órgano oficial de la Geometría no euclidiana.

El primer trabajo de BATTAGLINI *Sobre la geometría imaginaria de Lobatschefsky* (5), escrito para establecer directamente el principio que sirve de base a la teoría general de las paralelas y a la trigonometría lobatschefskiana y seguido, pocas páginas después, de la traducción italiana de la *Pangeometría* (6), y ésta, a su vez, en 1868, de la traducción del *Appendix*. Al mismo tiempo, en el sexto volumen del *Giornale di Matematica* salía el célebre *Ensayo de interpretación de la Geometría*

---

(1) Primera edición. París, G. Villars, 1867; segunda edición, 1883.

(2) Giornale di Matematiche, t. VII, págs. 84-89; Nouvelles Annalse (2), t. IX, págs. 93-96.

(3) Bull. des Sciences Math., t. I, págs. 66-71, 324-28, 384-88 (1870).

(4) Además de las versiones de que se habla en el texto HOÜEL, tradujo un trabajo de BATTAGLINI [cfr. la nota (5)], dos de BELTRAMI [cfr. página 124, nota (1); pág. 144, nota], uno de RIEMANN [cfr. pág. 136] y uno de HELMHOLTZ [cfr. pág. 149].

(5) Giornale di Mat., t. V, págs. 217-31 (1867).—Nápoles, Rend. Acc. Science Fis. e Matem., t. VI, págs. 157-73 (1867).—Traducción francesa de HOÜEL: Nouv. Annales, (2), t. VII, págs. 209-21, 265-77 1868).

(6) Fué también impresa aparte en un opúsculo con el título: *Pangeometría o Compendio de Geometría fundado sobre una teoría general y rigurosa de las paralelas*, Nápoles, 1867; segunda edición, 1874.

no euclidiana (1), de E. BELTRAMI, «que proyectó una luz inesperada en la controversia, entonces agitada, acerca de los principios fundamentales de la Geometría y de los conceptos de GAUSS y LOBATSCHEFSKI» (2).

Hojeando los años sucesivos del *Giornale di Matematica* se encuentran frecuentemente trabajos relativos a la Geometría no euclidiana: dos de BELTRAMI (1872), que se relacionan con el precitado *Ensayo;* varios de BATTAGLINI (1874-78) y D'OVIDIO (1875-77), tratando algunas cuestiones de la nueva Geometría con los métodos proyectivos inaugurados por CAYLEY; el de HOÜEL (1870) sobre la indemostrabilidad del postulado euclídeo; otros de CASSANI (1873-81), GÜNTHER (1876), DE-ZOLT (1877), FRATTINI (1878), RICORDI (1880), etc.

§ 65. La obra de difusión, iniciada y valerosamente conducida por los susodichos geómetras, tuvo además un eficacísimo impulso de otro grupo de publicaciones, que en aquel entonces (1868-72) presentaba el problema de los fundamentos de la Geometría bajo forma más general y elevada que la que informaba las investigaciones elementales de GAUSS, LOBATSCHEFSKI y BOLYAI. De los nuevos métodos y direcciones, a los que están ligados los nombres de algunos entre los más eminentes matemáticos y filósofos contemporáneos, hablaremos brevemente en el capítulo V; aquí nos basta observar que la antigua cuestión de las paralelas, a la cual las investigaciones de LEGENDRE, cuarenta años antes, parecían haber quitado todo interés, atrajo todavía, y bajo un aspecto completamente nuevo, la atención de los geómetras y filósofos, haciéndose centro de un vastísimo campo de indagaciones. De ellas, algunas tuvieron el simple objeto de hacer más accesible

(1) Fué traducido al francés por HOÜEL en los Annales Scient. de l'Ecole Normale Sup., págs. 251-88, t. VI (1869).

(2) Cfr. la *Conmemoración de E. Beltrami* de L. CREMONA; Giornale di Mat., t. XXXVIII, pág. 362 (1900).

al gran público matemático las obras de los fundadores de la Geometría no euclidiana; otras trataron de ampliar los resultados, el contenido, el significado de la nueva doctrina, contribuyendo al mismo tiempo a los progresos de ciertas ramas especiales de las matemáticas superiores (1).

---

(1) Cfr., por ejemplo, E. PICARD: *La Science Moderne et son état actuel*, pág. 75 (París, Flammarión, 1905).

CAPITULO V

Los desarrollos sucesivos de la Geometría no euclidiana.

§ 66. Para dar cuenta de los progresos ulteriores de la Geometría no euclidiana, según las direcciones *métricodiferencial* y *proyectiva*, deberemos salir del campo elemental, para hablar de algunas elevadas teorías matemáticas, como la *Geometría métricodiferencial sobre las variedades*, la teoría de los *grupos continuos de transformaciones*, la *Geometría proyectiva pura* (sistema STAUDT) y las *Geometrías métricas* a ella subordinadas. No consintiendo la índole de este volumen entrar, aunque sea sumariamente, en cuestiones elevadas, nos limitaremos a las únicas cosas necesarias para hacer comprender al lector el espíritu que informan las nuevas indagaciones y conducirlo a otro sistema geométrico debido a RIEMANN, que las precedentes investigaciones excluían desde el principio al admitir la infinidad de la recta. Este sistema es conocido con el nombre de su fundador y corresponde a la hipótesis del ángulo obtuso de SACCHERI y LAMBERT (1).

---

(1) Quien desee un gran desarrollo de los asuntos tratados en este capítulo puede consultar las *Vorlesungen über die Nickt-Euklidische Geometrie* de F. KLEIN (Gottinga, 1893) y las *Lecciones sobre la geometría diferencial* de L. BIANCHI, t. I, capítulos XI, XII, XIII y XIV, págs. 326-513 (Pisa, Spoerri, 1903).

Dirección métricodiferencial.

LA GEOMETRÍA SOBRE UNA SUPERFICIE.

§ 67. Para facilitar el propósito conviene partir de las consideraciones siguientes:

Dada una superficie, propongámonos ver hasta qué punto se puede fundar sobre ella una Geometría análoga a la del plano.

Por dos puntos A y B de la superficie pasa generalmente una línea bien determinada que le pertenece, la cual marca sobre la superficie la mínima distancia entre los dos puntos. Tal línea es la *geodésica* que une los dos puntos dados. Si se trata, por ejemplo, de una esfera, la geodésica, que une dos puntos (no extremos de un diámetro), es un arco del círculo máximo por ellos determinado.

Ahora bien; queriendo comparar la Geometría sobre una superficie con la Geometría sobre el plano, parece natural poner en parangón las geodésicas de aquélla, midiendo las distancias sobre la superficie con las rectas de éste, y también considerar como *(geodésicamente) iguales*, sobre una superficie, a dos figuras trazadas en ella que puedan hacerse corresponder punto a punto, de modo que las distancias geodésicas entre los pares de puntos correspondientes sean iguales.

A este concepto de igualdad se puede llegar de un modo intuitivo admitiendo que la superficie sea realizada con una hoja *flexible* e *inextensible*, y que con un movimiento de la superficie, en el cual ésta no permanezca rígida, sino flexible, como se ha dicho antes, las figuras superficiales llamadas por nosotros iguales puedan superponerse una a otra.

Tomemos como ejemplo un trozo de superficie cilíndrica, que, por simple flexión sin extensión, doblez ni rotura, pueda *aplicarse* sobre una región plana. Es claro que en este caso deberán llamarse iguales *sobre la superficie* dos figuras que se extiendan sobre figuras planas iguales, bien entendido que dos figuras tales no son generalmente iguales *en el espacio*.

Volviendo a una superficie cualquiera, el sistema de convenciones antes indicado da origen a una *Geometría sobre la superficie*, que consideraremos siempre por regiones convenientemente limitadas *(regiones normales)*. Dos superficies aplicables una sobre otra con una flexión sin extensión tendrán la misma Geometría; así, por ejemplo, sobre una superficie cualquiera cilíndrica, y en general sobre una superficie cualquiera *desarrollable*, se tendrá una Geometría semejante a la de una superficie plana.

Un ejemplo de Geometría sobre una superficie, esencialmente diversa de la del plano, nos es proporcionado por la Geometría de la esfera, porque es imposible aplicar una porción de esfera sobre el plano. Todavía entre la Geometría plana y la esférica tenemos, sin embargo, una notable analogía; esta analogía halla su fundamento en el hecho de que la esfera puede moverse libremente sobre sí misma, precisamente como el plano; así que para las figuras iguales sobre la esfera valen proposiciones en todo análogas a los postulados de la congruencia sobre el plano.

Tratemos de generalizar este ejemplo. A fin de que una superficie convenientemente limitada pueda moverse, con flexión sin extensión, sobre sí misma como la superficie plana, es preciso que un cierto número (K), invariante respecto a las susodichas flexiones, tenga un *valor constante* en todos los puntos de la superficie. Este número ha sido introducido por GAUSS con el nombre de *curvatura* (1).

---

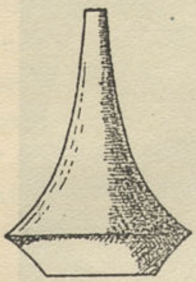
(1) Recordando que la curvatura de una línea plana en un punto es la inversa del radio del círculo osculador en aquel punto, he aquí cómo puede definirse la curvatura en un punto M de una superficie.

Trazada por M la normal *n* a la superficie considérese el haz de planos

Se pueden construir efectivamente superficies de *curvatura constante*, distinguiendo los tres casos posibles:

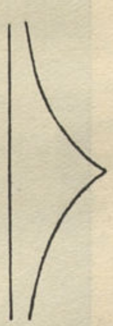
$$K = o, \quad K > o, \quad K < o.$$

Para $K = o$ se tienen las superficies desarrollables (apli-



Seudoesfera.

FIG. 47.



Tractriz.

FIG. 48.

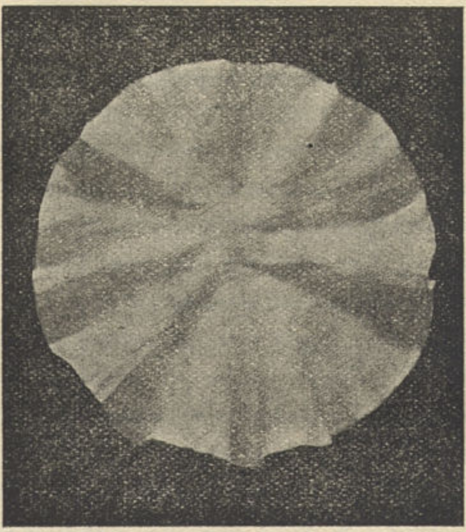
cables sobre el plano). Para $K > o$ se tienen las superficies aplicables sobre una superficie esférica de radio $\sqrt{\frac{1}{K}}$, y la esfera puede mirarse como modelo de ellas.

Para $K < o$ se tienen las superficies aplicables sobre la *seudoesfera*, la cual puede presentarse como modelo de las *superficies de curvatura constante negativa*.

por n y el correspondiente haz de curvas que aquél produce en la superficie. Entre las curvas (planas) de tal haz existen dos ortogonales entre sí, cuyas curvaturas (arriba definidas) gozan de las propiedades de máximo o mínimo. El producto de estas curvaturas da la curvatura de la superficie en el punto M (GAUSS). A la curvatura de GAUSS corresponde luego un notabilísimo carácter; ella se mantiene invariable para toda flexión sin extensión de la superficie; de modo que si dos superficies son aplicables, en el sentido indicado en el texto, deben, en los puntos correspondientes, tener la misma curvatura (GAUSS). Este resultado, invertido por MINDING en el caso de las superficies de curvatura constante, pone de manifiesto que las superficies libremente móviles sobre sí mismas están caracterizadas por la constancia de la curvatura.

Puig Adam

La seudoesfera es una superficie de revolución; la ecuación de la curva meridiana [*tractriz* (1)], referida al eje de revo-



Superficie de curvatura constante negativa (2)

FIG. 49.

lución z y a una recta x perpendicular a z y convenientemente escogida, es

$$[1] \qquad z = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2},$$

donde k está ligada a la curvatura K por la relación

$$K = -\frac{1}{k^2}.$$

(1) La tractriz es la curva en la cual el segmento de tangente comprendido entre el punto de contacto y la asíntota tiene una longitud constante.

(2) La superficie, de la cual la figura 49 es una reproducción fotográfica, fué construída por BELTRAMI. Ahora forma parte de la colección de *modelos* que pertenece al INSTITUTO MATEMÁTICO de Pavía.

Sobre la seudoesfera engendrada por la [1] puede colocarse cualquier porción de superficie de curvatura constante $-\dfrac{1}{k^2}$.

§ 68. Entre la Geometría sobre una superficie de curvatura constante y la de una porción de plano, tomadas una y otra con las convenientes limitaciones, existe una analogía, que podemos poner en evidencia *traduciendo* las primeras definiciones y propiedades de una en las de la otra, como está sumariamente indicado por las contraposiciones de frases que se observa en el siguiente cuadro:

a) Superficie.	*a)* Región de plano.
b) Punto.	*b)* Punto.
c) Geodésica.	*c)* Recta.
d) Arco de geodésica.	*d)* Segmento rectilíneo.
e) Propiedades lineales de la geodésica.	*e)* Postulados relativos a la ordenación de los puntos sobre la recta.
f) Dos puntos determinan una geodésica.	*f)* Dos puntos determinan una recta.
g) Propiedades fundamentales de la igualdad de arcos geodésicos y de ángulos.	*g)* Postulados de la congruencia segmentaria y angular.
h) Si dos triángulos geodésicos tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido, también los restantes lados y ángulos son iguales.	*h)* Si dos triángulos rectilíneos tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido, también los restantes lados y ángulos son iguales.

Síguese de aquí que se pueden considerar comunes a la Geometría de las superficies en cuestión todas aquellas propiedades pertenecientes a regiones limitadas de plano, que en el sistema euclídeo son independientes del postulado de las paralelas y en cuya demostración no se hace uso del *plano completo* (por ejemplo, de la infinidad de la recta).

Procedamos ahora a confrontar con las correspondientes de la superficie las proposiciones relativas a la región plana que están en conexión con la hipótesis euclídea. Se tiene, por ejemplo, que, sobre el plano, la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos. La propiedad correspondiente no es generalmente verdadera sobre la superficie.

En efecto, GAUSS demostró que sobre una superficie de curvatura K, constante o variable de punto a punto de la superficie, la integral

$$\int K \cdot d\sigma,$$

aplicada a la superficie de un triángulo geodésico ABC, es igual al *exceso de la suma de sus tres ángulos sobre dos ángulos rectos* (1). Esto es,

$$\int_{ABC} K \cdot d\sigma = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

Apliquemos esta fórmula a la superficie de curvatura constante, distinguiendo los tres casos posibles.

1.er caso: $K = o.$

Entonces tendremos:

$$\int_{ABC} K \cdot d\sigma = o, \quad \text{de donde:} \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi.$$

Sobre la superficie de curvatura nula la suma de los ángulos

(1) Cfr., por ejemplo, las citadas *Lecciones sobre la Geometría diferencial* de L. BIANCHI, cap. VI.

de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. Este resultado, por lo demás, nos era conocido.

2.° caso: $$K = \frac{1}{k^2} > 0.$$

Entonces tendremos:

$$\int_{ABC} K \cdot d\sigma = \frac{1}{k^2} \int_{ABC} d\sigma.$$

Pero la integral $\int d\sigma$ aplicada al triángulo ABC, da el área Δ de aquel triángulo, de modo que

$$\frac{\Delta}{k^2} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

De esta relación sacamos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi;$$

$$\Delta = k^2 (A + B + C - \pi).$$

Es decir:

a) Sobre la superficie de curvatura constante positiva la suma de los ángulos de un triángulo geodésico es mayor que dos ángulos rectos.

b) El área de un triángulo geodésico es proporcional al exceso de la suma de sus tres ángulos sobre dos ángulos rectos.

3.^{er} caso: $$K = -\frac{1}{k^2}.$$

Entonces tendremos:

$$\int_{ABC} K d\sigma = -\frac{1}{k^2} \int_{ABC} d\sigma = -\frac{\Delta}{k^2},$$

donde, también aquí, con Δ indicamos el área del triángulo ABC. Síguese entonces

$$\frac{\Delta}{k^2} = \pi - \left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}\right),$$

de la cual se sacan las dos relaciones siguientes:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < \pi$$

$$\Delta = k^2 \left(\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}\right).$$

Es decir:

a) Sobre la superficie de curvatura constante negativa la suma de los tres ángulos de un triángulo geodésico es menor que dos ángulos rectos.

b) El área de un triángulo geodésico es proporcional a la deficiencia de la suma de sus tres ángulos respecto a dos ángulos rectos.

Resumamos los resultados en la siguiente tabla:

Superficie de curvatura constante.

Valor de la curvatura.	Tipo de la superficie.	Carácter específico.
$K = 0$	plano	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$
$K = \frac{1}{k^2}$	esfera	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$
$K = -\frac{1}{k^2}$	seudoesfera	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < \pi$

La Geometría de las superficies de curvatura nula y de curvatura constante positiva nos es conocida, porque corresponden a la Geometría plana y a la Geometría esférica.

El estudio de la geometría de las superficies de curvatura constante negativa fué iniciado por F. MINDING (1806-1885) con la investigación de las formas de revolución sobre las cuales pueden aplicarse (1). La siguiente observación de MINDING, extensamente desarrollada por D. CODAZZI (1824-1873), permite luego establecer la trigonometría. *Si en las fórmulas trigonométricas de la esfera se tienen fijos los ángulos y se multiplican los lados por* $i = \sqrt{-1}$, *se obtienen las relaciones a que satisfacen los elementos de los triángulos geodésicos de las superficies de curvatura constante negativa* (2). Estas relaciones *(trigonometría seudoesférica)* evidentemente coinciden con las de TAURINUS, esto es, con las fórmulas de la Geometría de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI.

§ 69. De los anteriores párrafos resulta que las propiedades relativas a la suma de los ángulos de un triángulo, en la Geometría de las superficies de curvatura constante, corresponden respectivamente:

para	$K = 0$,	a las válidas en el plano, en virtud de la *hip. ang. recto;*
para	$K > 0$,	a las que substituirían en el plano, en virtud de la *hip. ang. obtuso;*
para	$K < 0$,	a las válidas en el plano, en virtud de la *hip. ang. agudo.*

(1) *Wie sich entschneiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaasse;* Crelle, t. XIX, páginas 370-87 (1839).

(2) MINDING: *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen;* Crelle, t. XX, págs. 323-27 (1840).—D. CODAZZI: *Acerca de las superficies que tienen constante el producto de los dos radios de curvatura;* Ann. di Scien. Mat. e Fis., t. VIII, págs. 346-55 (1857).

El primero de estos resultados es evidente *a priori*, porque se trata de superficies desarrollables.

La analogía entre la Geometría sobre las superficies de curvatura constante negativa, por ejemplo, y la Geometría de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI se podría hacer más manifiesta todavía poniendo en parangón las relaciones entre los elementos de los triángulos geodésicos trazados sobre aquellas superficies con las fórmulas de la trigonometría no euclidiana. Esta comparación fué hecha por E. BELTRAMI en su *Ensayo de interpretación de la Geometría no euclidiana* (1).

Resulta así que la Geometría sobre una superficie de curvatura constante positiva o negativa se puede considerar como una *interpretación concreta de la Geometría no euclidiana, que se obtiene en una región limitada del plano, adoptando la hip. ang. obtuso o la del ang. agudo.*

La posibilidad de interpretar la Geometría de las *variedades de dos dimensiones* mediante la de las superficies ordinarias era conocida por B. RIEMANN (1826-1866) desde 1854, año en el cual compone la célebre disertación: *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (2), que es el fundamento de la dirección métricodiferencial.

---

(1) Giorn. di Mat., t. VI, págs. 284-312 (1868).—Opere Mat., t. I, páginas 374-405 (Hoepli, 1902).

(2) *Obras de Riemann*, 1.ª ed. (1876), págs. 254-96; 2.ª ed. (1892), páginas 272-87. Fué leída por RIEMANN en 1854, para su habilitación en la Facultad filosófica de Gottinga, ante un público compuesto no sólo de matemáticos. Por esto no contiene desarrollos analíticos y los conceptos allí expuestos tienen un ropaje preferentemente intuitivo. Alguna aclaración analítica se encuentra en las notas de la Memoria enviada por RIEMANN en respuesta a una cuestión sacada a concurso por el Instituto de París *(Ob. Riemann*, 1.ª ed., págs. 384-91).

El fundamento filosófico de la *Disertación* es el estudio de las propiedades de las cosas *en su modo de comportarse en lo infinitésimo.* Cfr. el discurso de KLEIM: *Riemann y su importancia en el desarrollo de la matemática moderna*, traducido por E. PASCAL en los Annali di Mat. (2), t. XXIII, página 222.

La *Disertación* fué publicada solamente en 1867 (Gött. Abh., XIII), después de la muerte del A., por R. DEDEKIND, después traducida al fran-

La interpretación de BELTRAMI se presenta como caso particular de la de RIEMANN. La cual, por las propiedades de las superficies de curvatura constante, nos muestra claramente cómo la serie de las deducciones obtenidas de las tres hipótesis sobre la suma de los ángulos de un triángulo debe conducir a sistemas geométricos lógicamente coherentes.

Esta conclusión, en lo que se refiere a la *hip. ang. obtuso*, parece contradecir los teoremas de SACCHERI, LAMBERT y LEGENDRE, que excluyen desde el principio la posibilidad de una Geometría fundada sobre dicha hipótesis. La contradicción se elimina, sin embargo, fácilmente, reflexionando que en la demostración de aquellos teoremas se utilizaron, no sólo las propiedades fundamentales referentes a una región limitada del plano, sino también propiedades del plano completo; por ejemplo, la infinidad de la recta.

FUNDAMENTOS DE UNA GEOMETRÍA PLANA SEGÚN LAS IDEAS DE RIEMANN.

§ 70. Las observaciones precedentes nos llevan a poner los fundamentos de una Geometría métrica, prescindiendo del postulado de EUCLIDES y adoptando un punto de vista más general que el ocupado anteriormente.

a) Convengamos en partir de una región limitada del plano (región normal), *no del plano entero.*

b) Concedamos como postulado las proposiciones elementales, reveladas por los sentidos, en la región inicialmente tomada;

cés por J. HOÜEL (Annali di Mat., (2), t. III, 1870; Œuvres Math. de Riemann, 1876); al inglés, por W. CLIFFORD (Nature, t. VIII, 1873) y por G. B. HALSTED (Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji, t. VII, 1895); al polaco por DICKSTEIN (Comm. Acad. Litt. Cracoviensis, t. IX, 1877) y al ruso por D. SINTSOFF (Noticias de la Sociedad Fisicomatemática de la Real Universidad de Kasan (2), t. III, Apéndice, 1893).

proposiciones relativas a la determinabilidad de la recta, a la congruencia, etc.

c) Admitamos que las propiedades de la región inicial pueden extenderse alrededor de un punto cualquiera del plano (no decimos al plano completo abarcado de una sola ojeada).

La Geometría desarrollada con la base de estos principios será la Geometría plana más general, conciliable con los datos que expresan el resultado de nuestras experiencias tomadas en un sentido riguroso, pero limitadamente a un campo accesible.

De acuerdo con cuanto se dijo en el § 69, es claro que dicha Geometría encontrará una concreta interpretación en la de las superficies de curvatura constante.

Pero tal correspondencia subsiste solamente desde el punto de vista *(diferencial)*, según el cual se confrontan regiones limitadas. Si nos colocamos en el punto de vista *(integral)*, según el cual se comparan la Geometría del plano entero y la Geometría sobre la superficie, el parangón no subsiste ya. En efecto, bajo este aspecto, ya no puede decirse siquiera que sobre dos superficies con una misma curvatura constante valga la misma Geometría. Por ejemplo: el cilindro circular tiene una curvatura nula y una región de él puede desarrollarse sobre una región del plano; pero el cilindro entero no es aplicable de este modo sobre el plano entero. La Geometría integral sobre el cilindro difiere por esto de la del plano entero euclídeo. En efecto, hay sobre el cilindro geodésicas cerradas (secciones circulares), y generalmente dos geodésicas de él (hélices) se encuentran en un número infinito de puntos, no sólo en dos.

Diferencias análogas existirán, en general, entre una de las Geometrías métricas no euclidianas, que pudieran fundarse sobre la base de los postulados arriba enunciados, y la Geometría de una correspondiente superficie de curvatura constante.

Cuando intentamos abarcar en sentido integral la Geometría sobre una superficie de curvatura constante (por ejemplo, sobre la esfera o sobre la seudoesfera) veíamos, en general, que la propiedad fundamental de una región normal, relativa a la determinación de la geodésica que pasa por dos puntos, cesa de ser válida. Este hecho no es, sin embargo, una consecuencia necesaria de las hipótesis sobre que se basa, en el sentido antes dicho, una métrica no euclidiana general del plano. En efecto, cuando se pregunta si es lógicamente posible un sistema de Geometría plana, satisficiendo a las condiciones *a)*, *b)* y *c)*, y tal que los postulados de la congruencia y el de determinación de la recta sean válidos en el plano completo, se obtienen, además del ordinario sistema euclídeo, los dos sistemas geométricos siguientes:

1.º *El sistema de* Lobatschefski-Bolyai, ya anteriormente encontrado, en el que por un punto pasan dos paralelas a una recta.

2.º *Un nuevo sistema* (llamado de Riemann), que corresponde a la *hip. ang. obtuso* de Saccheri, en el cual no existen paralelas.

En este último sistema la recta es una *línea cerrada*, de longitud finita; se evita por esto la contradicción que se hubiera encontrado suponiendo la recta abierta (infinita), hipótesis de que se hace uso para establecer el teorema del ángulo externo de Euclides y algunos resultados de Saccheri.

§ 71. El primero en notar la existencia de un sistema geométrico compatible con la *hip. ang. obtuso* fué Riemann, porque fué el primero en substituir la hipótesis de la recta infinita, con la otra más general de *recta ilimitada*. La distinción que aquí se presenta entre infinito e ilimitado es de importancia fundamental. Refiramos a este propósito las palabras de Riemann: «Cuando se extienden las construcciones del espacio a lo infinitamente grande, se necesita hacer distinción entre lo ilimitado y lo infinito; lo primero pertenece a las relaciones de extensión; lo segundo, a las relaciones métricas. Que el espacio sea una variedad ilimitada de tres dimensiones es una hipótesis que se aplica en todas las concepciones relativas al mundo externo, que nos sirve para completar en todo momento el campo de nuestras percepciones y construir los lugares posibles de los objetos observados, y que se encuentra constantemente verificada en todas estas aplicaciones. La propiedad del espacio de ser ilimitado posee, pues, una certeza empírica, que ningún otro dato empírico posee. Pero la infinidad del espacio no se sigue de aquí de ningún modo; al contrario, si se suponen los cuerpos independientes de sus posiciones y se atribuye al espacio una curvatura constante, el espacio sería necesariamente finito, apenas esta medida de la curvatura tuviese un valor positivo, por pequeño que fuera» (1).

En suma, el postulado que atribuye a la recta una longitud infinita, sobrentendido en las investigaciones de los precedentes geómetras, no es para RIEMANN menos discutible que el de las paralelas; lo que RIEMANN considera indiscutible es la ilimitación del espacio, propiedad compatible, tanto con la hipótesis de la recta infinita (abierta) como con la de la recta finita (cerrada).

La posibilidad lógica del sistema de RIEMANN se puede inducir de la interpretación concreta que recibe mediante la *Geometría de la radiación de rectas.* Las propiedades de la radiación de rectas se traducen fácilmente en la del plano de RIEMANN, y viceversa, con el auxilio del siguiente *diccionario:*

Radiación	Plano
recta	punto
plano (haz)	recta
ángulo de dos rectas	segmento
ángulo diedro	ángulo
triedro	triángulo
....	....

(1) Cfr. la *Disertación* de RIEMANN, parte III, § 2

He aquí, por ejemplo, la traducción de algunas entre las más notables proposiciones de la radiación:

a) La suma de los tres diedros de un triedro es mayor que dos diedros rectos.	*a)* La suma de los tres ángulos de un triángulo es mayor que dos ángulos rectos.
b) Todos los planos perpendiculares a otro plano pasan por una recta.	*b)* Todas las rectas perpendiculares a otra recta pasan por un punto.
c) Si a todo plano de la radiación hacemos corresponder la recta en que se cortan los planos perpendiculares al plano dado, se obtiene una correspondencia entre planos y rectas que goza de la siguiente propiedad: las rectas correspondientes a los planos de un haz pertenecen a un plano, el cual, a su vez, tiene por recta correspondiente la arista del haz.	*c)* Si a toda recta del plano hacemos corresponder el punto en que se cortan las rectas perpendiculares a la recta dada, se obtiene una correspondencia entre rectas y puntos que goza de la siguiente propiedad: los puntos correspondientes a las rectas de un haz pertenecen a una recta, la cual, a su vez, tiene por punto correspondiente el centro del haz.
La correspondencia así definida toma el nombre de *polaridad absoluta* (ortogonal) de la radiación.	La correspondencia así definida toma el nombre de *polaridad absoluta* del plano.

§ 72. Una notable observación respecto a la *hip. ang. obtuso* fué hecha recientemente por DEHN.

Refiriéndonos a los razonamientos de SACCHERI (pág. 39), LAMBERT (págs. 46-47) y LEGENDRE (págs. 56-58), se percibe fácilmente que estos autores, para demostrar la falsedad de la *hip. ang. obtuso*, se apoyaron, no sólo en la hipótesis de la recta infinita, sino también en la *hipótesis arquimediana*.

Ahora nos podemos preguntar si esta última es realmente necesaria para establecer el resultado. En otras palabras, podemos preguntarnos si, excluyendo el *postulado de Arquímedes*, las dos hipótesis que atribuyen, una a la recta los caracteres de las líneas abiertas, la otra a la suma de los ángulos de un triángulo un valor mayor de 180°, son compatibles entre sí. A tal pregunta responde DEHN con la Memoria citada en la página 33 [nota 1], construyendo una Geometría *no arquimediana*, en la cual la recta es abierta y los triángulos verifican la segunda hipótesis saccheriana. Así que la segunda de las tres hipótesis de SACCHERI es compatible con la hipótesis de la recta abierta, en el seno de un sistema *no arquimediano*. La nueva Geometría fué llamada por DEHN *Nicht-Legendre'sche Geometrie.*

§ 73. Si bien, como habíamos dicho, la Geometría de una superficie de curvatura constante (positiva o negativa) no refleja, en general, la entera Geometría no euclidiana del plano de LOBATSCHEFSKI y de RIEMANN, se puede preguntar si tal acuerdo puede tener lugar para alguna superficie particular.

A esta pregunta se responde así:

1.° *No existe ninguna superficie regular* (1) *analítica, sobre la cual se verifique, en su integridad, la Geometría de* LOBATSCHEFSKI-BOLYAI (teorema de HILBERT) (2).

---

(1) Esto es, exenta de singularidades.

(2) *Uber Flächen von konstanter Gausscher Krümmung.* Transactions of the American Math. Society, t. II, págs. 86-99 (1901); *Grundlagen der Geometrie*, 2.ª ed., págs. 162-75 (Leipzig, Teubner, 1903).

La cuestión resuelta con el *teorema de* HILBERT se presentó a los geómetras a continuación de la interpretación de BELTRANI de la Geometría de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI.—HELMHOLTZ, en 1870, en su artículo *Les axiomes de la Géométrie* (Revue des Cours scientif., t. VII, pág. 499), había afirmado la imposibilidad de construir una superficie seudoesférica, extendida indefinidamente en todas direcciones, y A. GENOCCHI, en la *Lettre à Mr. Quetelet sur diverses questions mathématiques* (Belgique Bull (2), t. XXXVI, págs. 181-98, 1873) y más extensamente en el trabajo:

2.º *Una superficie sobre la cual se verificase en su integridad la Geometría del plano de Riemann debería ser necesariamente cerrada.*

La única superficie regular, analítica, cerrada de curvatura constante positiva es la esfera (teorema de LIEBMANN) (1). Pero sobre la esfera, en cuyas regiones normales es válida la Geometría de RIEMANN, dos rectas se encuentran siempre en dos puntos (opuestos). Concluiremos, por tanto:

En el espacio ordinario no existen superficies que verifiquen íntegramente todas las propiedades de los planos no euclidianos.

§ 74. En este momento conviene observar que la esfera, entre todas las superficies de curvatura constante no nula, está dotada de un carácter que la aproxima más que las otras al plano. En efecto, la esfera puede moverse sobre sí misma de igual modo que el plano, de manera que las propiedades de congruencia valen, no sólo para regiones normales, sino, como

---

Sur une Mémoire de D. Foncenex et sur les géométries non euclidiennes (Turín, Memorias (3), t. XXIX, págs. 365-404, 1877), después de haber expuesto la insuficiencia de ciertos razonamientos intuitivos, dirigidos a probar la existencia concreta de una superficie apta para representar el entero plano no euclídeo, insiste sobre la probable existencia de puntos singulares (como, por ejemplo, los situados en la línea de retroceso de la figura 47) en todo modelo concreto de superficie de curvatura constante negativa.

Sobre el teorema de HILBERT añadamos que el carácter analítico de la superficie, admitido por el autor, se demostró ser superfluo. Véase a este propósito la disertación de G. LÜTKEMEYER: *Uber den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differentialgleichungen* (Göttingen, 1902) y la nota de E. HOLMGREN: *Sur les surfaces à courbure constante negative*, Comptes Rendus, primer sem., 1902, págs. 840-43.

(1) *Eine neue Eigenschaft der Kugel*, Gött. Nachricten, 1899, páginas 44-54.—En las páginas 172-75 de *Grundlagen der Geometrie* de HILBERT está también demostrada esta propiedad. Notemos que las superficies de curvatura constante positiva son necesariamente analíticas. Véase, a este propósito, la citada disertación de LÜTKEMEYER (pág. 163) y la Memoria de HOLMGREN: *Uber eine Klasse von partielle Differentialgleichungen der Zweiten Ordnung*. Math. Ann., t. LVII, págs. 407-20 (1903).

sobre el plano, para la superficie esférica entera abarcada de una ojeada.

Este hecho nos sugiere un modo de enunciar los postulados de la Geometría que no excluya *a priori* la posible existencia de un plano con todos los caracteres de la esfera, comprendido el de los puntos opuestos. Se podría, en efecto, exigir que sobre el plano fuesen válidos:

1.º Los postulados *b)* y *c)* (cfr. § 70) en toda región normal.

2.º Los postulados de congruencia sobre el plano entero.

Se encontrarían entonces los sistemas geométricos de EUCLIDES, de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI, de RIEMANN *(tipo elíptico)*, anteriormente encontrados, en los cuales dos rectas tienen sólo un punto común; otro sistema riemanniano *(tipo esférico)*, en el cual dos rectas tienen siempre dos puntos comunes.

§ 75. Cómo había concebido RIEMANN su plano completo, si había pensado en el *plano elíptico* o en el *plano-esfera*, o había reconocido la posibilidad de entrambos, no se puede precisar, porque él en su Memoria hace Geometría diferencial y dedica solamente pocas palabras a las formas completas. Pero los continuadores de su dirección, entre ellos BELTRAMI, considerando constantemente la Geometría riemanniana junto a la esférica, fueron llevados a suponer que sobre el plano completo de RIEMANN, como sobre la esfera (por la existencia de puntos opuestos), el postulado de determinación de la recta presentase excepciones (1), y que la única forma compatible con la *hip. ang. obtuso* fuese el *plano-esfera.*

(1) Cfr., por ejemplo, la breve indicación sobre la Geometría de los espacios de curvatura constante positiva, con que BELTRAMI cierra su Memoria *Teoría fundamental de los espacios de curvatura constante* (Ann. di Matem. (2), t. II, págs. 354-5, 1868). Esta Memoria, que deberemos volver a citar en lo que sigue, fué traducida al francés por HOÜEL en el t. VI, páginas 347-77, de los Annales scien. de l'Ecole Normale Supérieure

Las propiedades esenciales del *plano elíptico* fueron dadas por A. CAYLEY (1821-1895) en 1859; pero la relación entre estas propiedades y la Geometría no euclidiana fué indicada por KLEIN sólo en 1871. A KLEIN se debe, por tanto, la clara distinción entre las dos Geometrías riemannianas y la representación de la elíptica con la Geometría de la radiación (cfr. § 71).

Para comprender en qué consiste la diferencia entre la Geometría esférica y la elíptica fijemos la atención sobre dos tipos de superficie que se presentan en el espacio ordinario, esto es, sobre las superficies de dos caras *(bilaterales)* y sobre las superficies de una sola cara *(unilaterales)*.

Ejemplos de superficies bilaterales son el plano ordinario; las superficies de segundo orden (cónicas, cilíndricas, esféricas) y, en general, todas las que limitan sólidos. Sobre éstas es posible distinguir dos caras.

Un ejemplo de superficie unilateral nos lo da el *folio de Moebius (Moebiussche Blatte)*, el cual se construye fácilmente así. Cortada una faja rectangular ABCD, en vez de unir los lados opuestos AB y CD de modo que se obtenga una superficie cilíndrica, se unen esos mismos lados después que uno de ellos, por ejemplo, el CD, ha girado 180° alrededor de su punto medio. Entonces la que era cara superior del rectángulo, en la proximidad de CD, viene a encontrarse continuada por la cara inferior del rectángulo primitivo, así que *sobre el folio de Moebius, la distinción de las dos caras resulta imposible.*

Folio de Moebius.

FIG. 50.

Queriendo distinguir las superficies unilaterales de las bilaterales mediante un carácter que dependa sólo de las propiedades intrínsecas de las superficies, se procede así. Fijado un punto de la superficie y un sentido de rotación alrededor de él, hágase recorrer al punto un camino cerrado sobre la superficie que no atraviese su eventual contorno; para las superficies bilaterales, cuando el punto retorna a la posición inicial, el sentido inicial de la rotación coincide con el sentido final; para las superficies unilaterales (como fácilmente se verifica sobre el folio de Moebius, recorriendo la línea mediana de la superficie) existen caminos cerrados, para los cuales el sentido final de la rotación es inverso del inicial.

Volviendo a los dos planos de RIEMANN, se puede ahora fácilmente explicar en qué consiste su diferencia substancial: *el plano-esfera está dotado de los caracteres de las superficies bilaterales; el plano elíptico de los de las superficies unilaterales.*

La propiedad del plano elíptico ahora enunciada encuentra luego, como todas las otras, una interpretación concreta en la radiación de rectas.

En efecto, un abatimiento de una recta sobre sí misma alrededor del centro de la radiación cambia entre sí las dos rotaciones que tienen por eje aquella recta.

Otra propiedad del plano elíptico, ligada a la precedente, es ésta: *el plano elíptico*, al contrario de lo que ocurre con el euclídeo y los otros no euclídeos, *no viene cortado en dos hojas por sus rectas.* Esto puede expresarse también diciendo que, dados sobre él dos puntos, A y A′, y una recta arbitraria, se puede pasar de A a A′ por un camino que no salga del plano ni atraviese la recta.

Este hecho se traduce en una clara propiedad de la radiación, que es superfluo recordar.

§ 76. Análoga a la interpretación del plano elíptico es la que puede darse del plano-esfera, mediante la *radiación de rayos (semirrectas)*. La traducción de las propiedades de este plano en las propiedades de la radiación de rayos se efectúa con el uso de un *diccionario* semejante al del § 71, en el que la palabra *punto* está contrapuesta a la palabra *rayo*.

La consideración de la radiación de rayos al lado de la radiación de rectas se presta bastante bien para aclarar las relaciones y explicar las diferencias que existen entre las dos Geometrías riemannianas.

Podemos considerar dos radiaciones: una de rectas y otra de rayos, con el mismo centro. Es claro que a toda recta de la primera corresponden dos rayos de la segunda; que toda figura de la primera está formada con dos figuras simétricas de la segunda, y que, con ciertas restricciones, las propiedades métricas de las dos formas son las mismas. Así que si se conviene en mirar los dos rayos opuestos de la radiación de rayos como formando un solo elemento, la radiación de rayos se identifica con la radiación de rectas.

Las mismas consideraciones se aplican a los dos planos de RIEMANN. A todo punto del plano elíptico corresponden dos distintos y opuestos del plano-esfera; a dos rectas del primero que pasan por aquel punto, dos rectas del segundo que tienen dos puntos comunes, etc.

El plano elíptico, respecto del plano-esfera, debe entonces concebirse como un *plano doble.*

A propósito del plano elíptico y del plano-esfera, conviene observar que las fórmulas de la trigonometría absoluta, indicadas en el § 56, pueden aplicarse a ellos en toda región suya convenientemente limitada. Esto resulta del hecho, ya notado en el § 58, que las fórmulas de la trigonometría absoluta son válidas sobre la esfera, cuya Geometría, para cuanto se refiere a las regiones normales, coincide con la de los dos planos en cuestión.

FUNDAMENTOS DE UNA GEOMETRÍA ESPACIAL SEGÚN RIEMANN.

§ 77. Volviendo ahora al espacio, partamos del fundamento filosófico que los postulados, si bien se les concede por hipótesis un valor riguroso, expresan verdades de índole experimental, verificables sólo en una región limitada, y admitamos que, con arreglo a dichos postulados, los puntos del espacio estén representados por tres coordenadas, x_1, x_2, x_3.

En esta representación (analítica), a toda línea vendrán a corresponder tres ecuaciones paramétricas:

$$x_1 = f_1(t), \qquad x_2 = f_2(t), \qquad x_3 = f_3(t),$$

y entonces podemos proponernos determinar una función s, del parámetro t, que exprese la *longitud* de un arco de curva.

Persistiendo la *propiedad distributiva*, por la cual la longitud de un arco es igual a la suma de las longitudes de las partes en que puede imaginarse dividido, tal función estará completamente determinada cuando se conozca la *distancia elemental (ds)* de dos puntos infinitamente vecinos, de coordenadas:

$$x_1, \qquad x_2, \qquad x_3,$$
$$x_1 + dx_1, \qquad x_2 + dx_2, \qquad x_3 + dx_3.$$

RIEMANN parte de hipótesis bastante generales, que vienen satisfechas del modo más simple, asumiendo como expresión del cuadrado de la distancia elemental (ds^2) una forma cuadrática, siempre positiva, en las diferenciales de las variables:

$$ds^2 = \sum a_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

en la cual las a_{ij} son funciones de x_1, x_2, x_3.

Admitiendo ahora el principio de la superposición de las figuras, se demuestra que las funciones a_{ij} deben ser de tal naturaleza que permitan, tras un oportuno cambio del sistema de coordenadas, que ds^2 tome la forma:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 + \frac{K}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)},$$

en la cual K es lo que RIEMANN, por extensión del concepto gaussiano, denomina convencionalmente *curvatura del espacio.*

Según, pues, que K sea mayor, igual o menor que cero, tendremos el espacio de curvatura constante positiva, el espacio de curvatura nula o el espacio de curvatura constante negativa.

Demos un paso más, admitiendo el extender al espacio completo el principio de superposición (movimientos) y el postulado por el cual la recta está determinada, sin excepción, por dos puntos; se encuentran entonces tres formas espaciales, esto es, tres Geometrías lógicamente posibles y conciliables con los datos de que hemos partido.

La primera de estas Geometrías, correspondiente a la curvatura positiva, está caracterizada por el hecho de que en todo plano vale el sistema de RIEMANN, por lo cual el espacio de curvatura positiva será ilimitado y finito en todas direcciones; la segunda, correspondiente a la curvatura nula, es la ordinaria Geometría de EUCLIDES; la tercera, en fin, que corresponde al valor negativo de la curvatura, da lugar en todo plano al sistema de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI.

LA OBRA DE H. HELMHOLTZ Y LAS INVESTIGACIONES DE S. LIE.

§ 78. También HERMANN HELMHOLTZ (1821-1894), en algunos trabajos suyos de índole matemática y filosófica (1),

(1) *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie*; Heidelberg, Verhandl. d. natur.-med. Vereins, t. IV, págs. 197-202 (1868); t. V, páginas 31-32 (1869).—Wissenschaftliche Abhandlungen von H. HELMHOLTZ, tomo II, págs. 610-17 (Leipzig, 1883).—Fué traducido al francés por J. HOÜEL y publicado en las Mémoires de la Société des Sciences Phy. et Nat. de Bordeaux (t. V, 1868) y también unido a los *Etudes géometriques* de LOBATSCHEFSKI y a la *Correspondance de Gauss et de Schumacher* (Paris, Hermann, 1895).

ha tratado la cuestión relativa a los fundamentos de la Geometría. En vez de asumir *a priori* la forma

$$ds^2 = \sum a_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

como expresión de la distancia elemental, ha hecho ver que esta expresión, en la forma dada por RIEMANN para los espacios de curvatura constante, es la única posible, cuando a las hipótesis de RIEMANN se añade, desde el principio, la relativa a la superposición de las figuras, de manera conforme al movimiento de los *cuerpos rígidos*. El *problema* de RIEMANN-HELMHOLTZ ha sido sometido a una profunda crítica por S. LIE (1842-1899), el cual ha partido de la idea fundamental, reconocida por KLEIN en las investigaciones de HELMHOLTZ, que *ser dos figuras congruentes significa poder transformarse una en otra mediante una cierta transformación puntual del espacio, y que las propiedades por las que la congruencia toma el aspecto lógico de igualdad son inherentes al hecho de formar los movimientos un grupo de transformaciones* (1).

Por tanto, el problema RIEMANN-HELMHOLTZ viene mediante LIE, bajo la forma siguiente:

Determinar todos los grupos continuos del espacio que, dentro

---

Ueber die Thatsaschen, die der Geometrie zu Grunde liegen; Götting. Nachr., t. XV, págs. 193-221 (1868).—Wissenschaftliche Abhandlungen von H. HELMHOLTZ, t. II, págs. 618-39.

The Axioms of Geometry; The Academy, t. I, págs. 123-81 (1870).—Revue des cours scientifiques, t. VII, págs. 498-501 (1870).

Ueber die Axiome der Geometrie; Populäre wissenschaftliche Vortrage. 3. Heft. págs. 21-54. (Braunschweig, 1876).—Trad. inglesa: Mind., t. I, páginas 301-21.—Trad. francesa: Revue scient. de la France et de l'Etranger (2), t. XII, págs. 1197-1207 (1877).

Ueber der Ursprung und Sinn Bedentung der geometrischen Sätze; Wissenschaftliche Abhandlungen von H. HELMHOLTZ, t. II, págs. 640-60. Traducción inglesa: Mind, t. II, págs. 212-24 (1878).

(1) Cfr. KLEIN: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, 1782).—Trad. italiana de G. FANO. Annali di Matem. (2), t. XVII, págs. 301-43 (1899).

de una región limitada, gozan de las propiedades de los movimientos.

Postuladas convenientemente tales propiedades en relación al concepto de *libre movilidad* de los elementos lineales y superficiales, partiendo de un punto, se encuentran *tres tipos de grupos*, los cuales caracterizan las tres Geometrías de EUCLIDES, de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI y de RIEMANN (1).

Dirección proyectiva.

SUBORDINACIÓN DE LA GEOMETRÍA MÉTRICA A LA PROYECTIVA.

§ 79. Finalmente, también la *Geometría proyectiva* está en una marcada relación con los tres sistemas geométricos de EUCLIDES, de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI y de RIEMANN.

Para dar una idea también de este último modo de tratar el problema recordemos que la Geometría proyectiva, según el sistema de G. C. STAUDT (1798-1867), reposa exclusivamente sobre las *nociones gráficas* relativas a los puntos, a las rectas y a los planos y excluye sistemáticamente todo concepto *de congruencia y de movimiento* (por tanto, de *medida*, etc.). Por lo cual la Geometría proyectiva, prescindiendo de un cierto grupo de postulados, comprenderá un número más restringido de propiedades generales, las cuales, en lo que concierne a las figuras planas, son las propiedades *(proyectivas)* que permanecen invariables por proyecciones y secciones.

(1) Cfr. LIE: *Theorie der Transformationsgruppen*, t. III, págs. 437-543 (Leipzig, Teubner, 1893).—En igual orden de ideas, H. POINCARÉ, en su trabajo *Sur les hypothèses fondamentaux de la Géométrie* (Bull. de la Société Math., de France, t. XV, págs. 203-16, 1887), resolvía el problema de fijar *todas las hipótesis* que caracterizan, entre los varios grupos de transformaciones, el grupo fundamental de la Geometría plana euclídea.

Sin embargo, fundada en el espacio la Geometría proyectiva, *pueden introducirse en su organismo los conceptos métricos, como relaciones de las figuras con ciertos entes (métricos) particulares.*

Limitándonos al caso del plano euclídeo, veamos de qué interpretación *gráfica* son susceptibles *los conceptos métricos fundamentales de paralelismo y de perpendicularidad.*

Conviene a tal fin considerar de un modo especial *la recta del infinito* del plano y la *involución absoluta* que sobre ella determinan los pares de rayos ortogonales de un haz. Los puntos dobles de tal involución, imaginarios conjugados, son denominados *puntos cíclicos* por su propiedad de pertenecer a todos los círculos del plano (PONCELET, 1822) (1).

Sentado esto, el *paralelismo* de dos rectas se expresa gráficamente con *la propiedad que tienen de concurrir en un punto de la recta del infinito; la perpendicularidad* de dos rectas se expresa gráficamente con *la propiedad de sus puntos del infinito, de ser conjugados en la involución absoluta, esto es, de separar armónicamente los puntos cíclicos* (CHASLES, 1850) (2).

Otras propiedades métricas, que pueden expresarse gráficamente, son las inherentes a las magnitudes angulares, ya que toda relación

$$F(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \cdots) = 0,$$

entre los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, ⋯ puede substituirse con esta:

$$F\left(\frac{\log a}{2i}, \frac{\log b}{2i}, \frac{\log c}{2i}, \cdots\right) = 0,$$

(1) *Traité des propriétés projectives des figures*, 2.ª ed., t. I, núm. 94, página 48 (París, G. Villars, 1865).

(2) *Traité de Géométrie supérieure*, 2.ª ed., núm. 660, pág. 425 (París, G. Villars, 1880).

en la cual *a*, *b*, *c*... son las *razones dobles* formadas por los lados de los ángulos con las rectas (imaginarias), que desde su vértice proyectan los puntos cíclicos (LAGUERRE, 1853) (1).

Mas en general se demuestra que la congruencia entre dos figuras planas cualesquiera puede expresarse con una relación gráfica de ellas con la recta del infinito y la involución absoluta (2), y puesto que la congruencia es el fundamento de todas las propiedades métricas, síguese de aquí que la recta del infinito y la involución absoluta permiten subordinar a la Geometría proyectiva todas las propiedades de la Geometría métrica euclidiana. *Las propiedades métricas aparecen, pues, en la Geometría proyectiva no como propiedades gráficas de las figuras consideradas en sí mismas, sino como propiedades gráficas en relación a los entes métricos fundamentales, constituídos por la recta del infinito y por la involución absoluta.*

El conjunto de los entes métricos fundamentales se denomina brevemente *absoluto del plano* (CAYLEY).

Cuanto hemos dicho para el plano se extiende naturalmente al espacio. En el espacio, los entes métricos fundamentales, que permiten subordinar las propiedades métricas a las gráficas, son *el plano del infinito y una cierta polaridad (polaridad absoluta)* sobre este plano, sección de la polaridad de la radiación que a toda recta hace corresponder el plano ortogonal (cfr. § 71). La cónica fundamental de dicha polaridad es *imaginaria*, porque en la radiación no existen rectas reales que estén situadas sobre el respectivo plano perpendicular. Se ve luego fácilmente que aquélla contiene todos los pares de puntos cíclicos pertenecientes a los varios planos del espacio y que por ello resulta común a todas las esferas. De aquí la denominación de *círculo cíclico* para el ente métrico fundamental del espacio.

(1) *Sur la théorie des foyers*, Nouv. Ann., t. XII, pág. 57.—Œuvres de LAGUERRE, t. II, págs. 12-3 (París, G. Villars, 1902).

(2) Véase, por ejemplo, las *Lecciones de Geometría proyectiva* de F. ENRIQUES, págs. 177-88 (Bolonia, Zanichelli, 2.ª ed., 1904).

§ 80. Surgen ahora espontáneamente las dos preguntas siguientes:

1.º *En las hipótesis no euclidianas ¿es posible la creación de la Geometría proyectiva?*

2.º *Dada la posibilidad de tal creación, ¿las propiedades métricas podrán, como en el caso euclídeo, subordinarse a las proyectivas?*

La respuesta es afirmativa para ambas. Si en el espacio es válida la Geometría de RIEMANN, la fundación de la Geometría proyectiva no ofrece dificultad alguna por el hecho de encontrarse desde luego verificadas las propiedades gráficas que están en la base de la ordinaria proyectiva después de la introducción de los *entes impropios*. Si en el espacio es válido el sistema LOBATSCHEFSKI-BOLYAI, se puede también fundar la Geometría proyectiva introduciendo, con oportunas convenciones, *puntos*, *rectas* y *planos impropios o ideales* por medio del mismo criterio que ordinariamente se sigue en el caso euclídeo para completar el espacio con los elementos en el infinito. Bastaría para esto considerar, junto a la *radiación propia* (conjunto de rectas pasando por un punto), dos *radiaciones impropias*, formadas una por todas las rectas paralelas en un mismo sentido a una recta dada, la otra por todas las perpendiculares a un plano dado, e introducir *puntos impropios* que se consideran como *centros* de estas radiaciones.

Pero los puntos impropios pertenecientes a un plano no pueden, en este caso como en el euclídeo, asignarse a una recta *(recta en el infinito);* constituyen una región entera, separada de la región de los puntos efectivos (puntos *propios)* por una cónica *(cónica límite o en el infinito)*. Esta cónica es el lugar de los puntos *impropios* determinados por los haces de rectas paralelas.

En el espacio luego los puntos *impropios* están separados de los puntos propios por una *cuádrica no reglada (cuádrica límite o en el infinito)*, lugar de los puntos impropios, según los cuales se cortan las rectas paralelas. Establecida la validez de la Geometría proyectiva en las hipótesis no euclidianas (KLEIN) (1), para obtener la subordinación de la métrica a la proyectiva basta considerar, como en el caso euclídeo, los *entes métricos fundamentales (absolutos)* e interpretar las propiedades métricas de las figuras como relaciones gráficas de ellas respecto a estos entes. Sobre el plano de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI, el ente métrico fundamental es la cónica límite que separa la región de los puntos propios de la de los puntos impropios; sobre el plano de RIEMANN es una cónica imaginaria, definida por la *polaridad absoluta* del plano (cfr. pág. 141).

Tanto en uno como en otro caso, las *propiedades métricas de las figuras son todas las propiedades gráficas que permanecen inalterables en las transformaciones proyectivas* (2) *que dejan fijo el absoluto.*

Estas transformaciones proyectivas constituyen luego los ∞^3 *movimientos* del plano no euclidiano.

En el caso euclídeo, las llamadas transformaciones (que no alteran el absoluto) son las ∞^4 semejanzas, entre las cuales, en particular, se encuentran los ∞^3 movimientos.

En el espacio, la subordinación de la métrica a la proyectiva se hace por medio de la cuádrica límite *(absoluto del espacio)*. Si ésta es real, se obtiene la Geometría de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI; si es imaginaria, se obtiene la de RIEMANN, tipo elíptico.

---

(1) La cuestión de la independencia de la Geometría proyectiva de la teoría de las paralelas es rápidamente tocada por KLEIN en su primera publicación *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie;* Math. Ann., t. IV, págs. 573-625 (1871). Un desarrollo más amplio de la cuestión se puede ver en la segunda publicación de KLEIN sobre el mismo asunto: Math. Ann., t. VI, págs. 112-145 (1873).

(2) Es sabido que por *transformaciones proyectivas* se entiende aquellas transformaciones que hacen corresponder a un punto un punto, a una recta una recta, a punto y recta que se pertenecen punto y recta que se pertenecen.

Las propiedades métricas de las figuras son entonces las propiedades gráficas del espacio en relación a su absoluto, esto es, *las propiedades gráficas que permanecen inalterables en todas las transformaciones proyectivas que dejan fijo el absoluto del espacio.*

§ 81. ¿Cómo se expresan, respecto al absoluto, los conceptos de distancia y de ángulo?

Introducido sobre el plano proyectivo un sistema cualquiera de coordenadas homogéneas (x_1, x_2, x_3) que permita representar la recta con ecuaciones lineales, la ecuación de la cónica absoluta será del tipo

$$\Omega_{xx} = \Sigma a_{ij}\, x_i\, x^j = 0.$$

Entonces la distancia de los dos puntos $X(x_1, x_2, x_3)$, $Y(y_1, y_2, y_3)$ viene expresada, con un factor constante, por el *logaritmo de la razón doble del grupo que forman con los puntos M y N, en que la recta que los une encuentra al absoluto.*

Poniendo luego

$$\Omega_{xy} = \Sigma a_{ij}\, x_i\, y_j$$

y recordando, por la Geometría analítica, que la razón doble de los cuatro puntos X, Y, M, N está dada por

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2{}_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2{}_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}},$$

la expresión D_{xy} de la distancia será entonces

$$[1] \qquad D_{xy} = \frac{k}{2} \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2{}_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2{}_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}};$$

o bien, introduciendo las funciones inversas de las funciones circulares e hiperbólicas (1):

$$[2] \quad \begin{cases} D_{xy} = i\,k \text{ arc cos } \dfrac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}} \\[2ex] D_{xy} = k \text{ Arc Ch } \dfrac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}} \end{cases}$$

$$[3] \quad \begin{cases} D_{xy} = i\,k \text{ arc sen } \dfrac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}} \\[2ex] D_{xy} = k \text{ Arc Sh } \dfrac{\sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}. \end{cases}$$

La constante k que aparece en estas fórmulas está luego ligada a la curvatura K de RIEMANN por la siguiente relación:

$$K = -\frac{1}{k^2}.$$

Para la interpretación proyectiva del concepto de ángulo valen consideraciones análogas. *El ángulo de dos rectas es proporcional al logaritmo de la razón doble del grupo que ellas forman con las tangentes trazadas al absoluto por su punto común.* Si se quiere luego que la medida del haz entero esté dada por 2π, como en la métrica ordinaria, es necesario tomar por factor de proporcionalidad la fracción $\dfrac{1}{2i}$. Para expresar des-

(1) Las relaciones entre las funciones circulares, hiperbólicas y la función logarítmica están contenidas en las siguientes identidades:

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\log a}{2i}\right) = \dfrac{a+1}{2\sqrt{a}} \\[2ex] \operatorname{sen}\left(\dfrac{\log a}{2i}\right) = \dfrac{1}{i}\,\dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Ch}\left(\dfrac{\log a}{2}\right) = \dfrac{a+1}{2\sqrt{a}} \\[2ex] \text{Sh}\left(\dfrac{\log a}{2}\right) = \dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}. \end{cases}$$

pués analíticamente el ángulo de dos rectas u (u_1, u_2, u_3), v (v_1, v_2, v_3) pongamos:

$$\Psi_{uu} = \Sigma b_{ij}\, u_i\, u\,.$$

Si b_{ij} es el complemento algébrico del elemento a_{ij} del discriminante de Ω_{xx}, la ecuación tangencial del absoluto está dada por

$$\Psi_{uu} = 0$$

y el ángulo de dos rectas por las siguientes fórmulas:

$$[1'] \quad \widehat{uv} = \frac{1}{2i} \log \frac{\Psi_{uv} + \sqrt{\Psi^2_{uv} - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}}{\Psi_{uv} - \sqrt{\Psi^2_{uv} - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}}$$

$$[2'] \begin{cases} \widehat{uv} = \text{arc cos} \dfrac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} \\ \widehat{uv} = \dfrac{1}{i} \text{ Arc Ch} \dfrac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} \end{cases}$$

$$[3'] \begin{cases} \widehat{uv} = \text{arc sen} \dfrac{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv} - \Psi^2_{uv}}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} \\ \widehat{uv} = \dfrac{1}{i} \text{ Arc Sh} \dfrac{\sqrt{\Psi^2_{uv} - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}}\,. \end{cases}$$

Una expresión análoga sirve para la distancia de dos puntos y el ángulo de dos planos en la Geometría del espacio; bastaría suponer que

$$\Omega_{xx} = 0, \qquad \Psi_{uu} = 0$$

representasen las ecuaciones (puntuales y tangenciales) del absoluto del espacio en vez del absoluto del plano. Según que $\Omega_{xx}=O$ sea la ecuación de una cuádrica real de puntos elípticos o de una cuádrica imaginaria, las fórmulas se referirán a la Geometría de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI o a la Geometría de RIEMANN.

§ 82. Las fórmulas precedentes, relativas al ángulo de dos rectas o dos planos, contienen, como caso particular, las de la métrica ordinaria. En efecto, refiriéndonos por sencillez al plano y a un sistema ortogonal de ejes coordenados, la ecuación tangencial del absoluto euclídeo (*puntos cíclicos*, § 79) es

$$u_1^2+u_2^2=o.$$

La fórmula [2′], poniendo en ella

$$\Psi_{uu}=u_1^2+u_2^2,\quad \Psi_{vv}=v_1^2+v_2^2,\quad \Psi_{uv}=u_1v_1+u_2v_2,$$

se convierte en

$$\widehat{uv}=\text{arc cos}\,\frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)}},$$

de donde

$$\cos\widehat{uv}=\frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)}}.$$

Si ahora se tiene en cuenta que los cosenos directores de la recta $u(u_1, u_2, u_3)$ son

$$\cos\widehat{ux}=\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}},\qquad \cos\widehat{uy}=\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}},$$

la última relación se convierte en

$$\cos\widehat{uv}=\cos\widehat{ux}\cos\widehat{vx}+\cos\widehat{uy}\cos\widehat{vy},$$

o sea la expresión ordinaria que da el ángulo de dos rectas en el plano euclídeo.

Para la distancia de dos puntos X, Y, las cosas no son tan sencillas cuando el absoluto degenera en los puntos cíclicos. En efecto, las dos intersecciones M, N de la recta XY con el absoluto coinciden ahora en el único punto del infinito de esta recta, y la fórmula [1] da constantemente:

$$D_{xy} = \frac{k}{2} \log (M_\infty N_\infty XY) = \frac{k}{2} \log 1 = 0.$$

Todavía un oportuno artificio permite obtener la ordinaria fórmula de la distancia como caso límite de la [3].

Para conseguir más fácilmente el objeto imaginemos las ecuaciones del absoluto (no degenerado) en coordenadas de puntos y de rectas, reducidas a la forma:

$$\Omega_{xx} = \varepsilon x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$\Psi_{uu} = u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = 0.$$

Entonces, poniendo

$$\Delta = \frac{\sqrt{\varepsilon (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2}}{\sqrt{\varepsilon x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + x_3^2} \; \sqrt{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon y_2^2 + y_3^2}},$$

la [3] del precedente párrafo da

$$D_{xy} = ik \text{ arc sen} \sqrt{\varepsilon}\,\Delta.$$

Sea ε infinitamente pequeño; despreciando infinitésimos de orden superior al segundo, podremos, en la fórmula precedente, substituir al *arco* el *seno*. Si después escogemos k^2 infinitamente grande, de modo que el producto $ik\sqrt{\varepsilon}$ se mantenga finito e igual a la unidad para todo valor de ε, la fórmula en cuestión se convierte en

$$D_{xy} = \frac{\sqrt{\varepsilon (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2}}{\sqrt{\varepsilon x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + x_3^2} \;\sqrt{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon y_2^2 + y_3^2}}.$$

Pasemos ahora al límite para $\varepsilon = 0$. La ecuación tangencial del absoluto deviene

$$u_1^2 + u_2^2 = 0;$$

la cónica degenera en dos puntos imaginarios conjugados, situados sobre la recta $u_3 = 0$. La fórmula de la distancia, introduciendo las coordenadas no homogéneas

$$X_i = \frac{x_i}{x_3}, \quad Y_i = \frac{y_i}{y_3},$$

toma la forma

$$D_{xy} = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2},$$

la cual es característica para la Geometría euclídea. Con esto queda alcanzado nuestro objeto.

Llamamos la atención sobre el hecho que para obtener de la fórmula general de la distancia la especial del caso euclídeo, debemos hacer tender k^2 al infinito. Y puesto que la curvatura de RIEMANN está dada por

$$\frac{1}{k^2},$$

se obtiene también por este camino una confirmación del resultado que asigna al espacio euclídeo una curvatura riemanniana nula.

§ 83. Las propiedades de las figuras planas, en relación a una cónica, y las del espacio, en relación a una cuádrica, constituyen en su conjunto la *métrica proyectiva*. La métrica proyectiva fué estudiada por CAYLEY (1), independientemente de las relaciones que tiene con la Geometría no euclidiana, relaciones que fueron descubiertas y expuestas algún año después por F. KLEIN (2).

A KLEIN se debe también una nomenclatura muy usada para las métricas proyectivas. Llama *Geometría hiperbólica* a la Geometría de CAYLEY relativa a un absoluto real no degenerado; *Geometría elíptica* la relativa a un absoluto imaginario no degenerado; *Geometría parabólica* el caso límite de las dos precedentes. De modo que en lo sucesivo podremos usar esta nomenclatura para denotar los tres sistemas geométricos de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI, de RIEMANN (tipo elíptico) y de EUCLIDES.

REPRESENTACIÓN DE LA GEOMETRÍA DE LOBATSCHEFSKI-BOLYA SOBRE EL PLANO EUCLÍDEO.

§ 84. A la interpretación proyectiva de las métricas no euclidianas, de que hemos tratado más arriba, se une una interesante representación que puede hacerse de la *Geometría hiperbólica* sobre el plano euclídeo. Para obtenerla fijemos sobre el plano una cónica real no degenerada; por ejemplo, un círculo, y con relación a este círculo establezcamos las siguientes definiciones:

Plano = Región de los puntos interiores al círculo.
Punto = Punto interior al círculo.
Recta = Cuerda del círculo.

(1) Cfr.: *Sixth Memoir upon Quantics;* Philosophical Transactions, tomo CXLIX, págs. 61-90 (1859); o bien: Math. Papers de CAYLEY, t. II, páginas 561-92.

(2) Cfr.: *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie;* Math. Ann., t. IV, págs. 573-625 (1871).

Se puede entonces verificar inmediatamente que los postulados relativos a la determinación de la recta, a las propiedades segmentarias y angulares, se traducen en proposiciones, que son siempre válidas cuando se adoptan las susodichas significaciones de los entes.

Pero en el sucesivo desarrollo de la Geometría, a dichos postulados se unen los postulados de congruencia, contenidos en el siguiente *principio de movimiento:*

Dados en el plano dos puntos, A, A', y por ellos, respectivamente, las rectas a, a', existen cuatro maneras de superponer el plano a sí mismo, de modo que A y a coincidan respectivamente con A' y a'. Mas precisamente *una* manera de superposición queda definida si se fijan como correspondientes un rayo de a y un rayo de a', una región del plano respecto a a y una región del plano respecto a a'. De estos cuatro movimientos dos son *congruencias directas,* dos *congruencias inversas.*

Cuando se adoptan las precedentes interpretaciones de los entes *punto, recta, plano,* el principio aquí expresado se traduce en la siguiente proposición:

Dada en el plano una cónica (por ejemplo, un círculo), y fijados dos puntos interiores, A, A', y por ellos, respectivamente, las cuerdas a, a', existen cuatro transformaciones proyectivas del plano, que mudan en sí misma la región de los puntos interiores a la cónica y que hacen corresponder A y a respectivamente a A' y a'. Para fijar *una* de ellas basta exigir que un extremo dado de a corresponda a un extremo dado de a', y a una determinada región del plano respecto a a, una determinada región del plano respecto a a'. De estas cuatro transformaciones, dos subordinan sobre la cónica *proyectividades concordes,* las otras dos *proyectividades discordes.*

§ 85. Demostremos el contenido de esta proposición, refiriéndonos, por sencillez, a dos cónicas distintas τ, τ', situadas o no en el mismo plano.

Sean M, N los extremos de la cuerda *a;* M′, N′ los de la cuerda *a*′, y P, P′ los *polos* de *a* y *a*′ respecto a las cónicas correspondientes τ, τ'.

Ahora, la recta PA corta a la cónica τ en dos puntos reales y distintos, R, S, y la recta P′A′, a la cónica τ' en los dos puntos reales y distintos R′, S′.

Una transformación proyectiva que mude τ en τ', la recta *a* en la recta *a*′, el punto A en el punto A′, hace corresponder

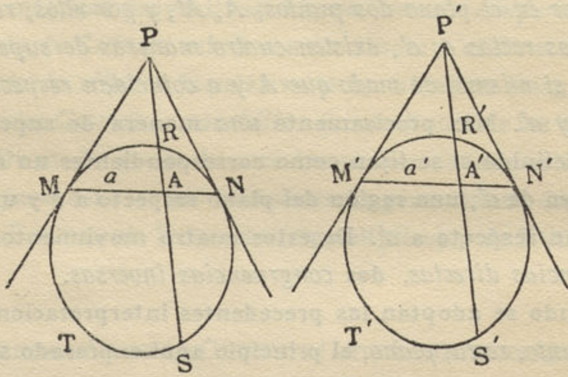


Fig. 51.

al punto P el punto P′, a la recta PA la recta P′A′. Esta transformación lleva consigo luego una correspondencia proyectiva entre las dos cónicas, en la cual a los puntos del par M, N, corresponden los del par M′, N′, y a los del par R, S, los del par R′, S′.

Recíprocamente, una transformación proyectiva entre las dos cónicas que goce de estas propiedades está subordinada a una transformación proyectiva entre los dos planos, como la arriba descrita (1).

Pero considerando las dos cónicas τ, τ', vemos que a los puntos de la cuaterna MNRS de τ se puede, ordenadamente,

---

(1) Para esta demostración y los teoremas de Geometría proyectiva en que está fundada cfr., por ejemplo, las *Lecciones de Geometría proyectiva* de F. Enriques, cap. X, págs. 251-3.

hacer corresponder los puntos de una cualquiera de las siguientes cuaternas de τ':

$$\begin{matrix} M' & N' & R' & S' \\ N' & M' & S' & R' \\ M' & N' & S' & R' \\ N' & M' & R' & S', \end{matrix}$$

por lo cual queda probada la existencia de las cuatro proyectividades de que se habla en la enunciada proposición.

Si ahora suponemos que las dos cónicas coinciden, nada hay que cambiar en el anterior razonamiento. Añadiremos, sin embargo, que de las cuatro proyectividades en cuestión, una, y una sola, hace corresponder el segmento AM al segmento A'M', mientras se corresponden entre sí las dos regiones rayadas en la figura.

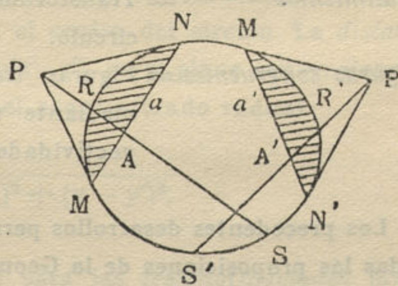


FIG. 52.

Además, las dos proyectividades definidas por las cuaternas

$$\begin{pmatrix} M & N & R & S \\ M' & N' & R' & S' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} M & N & R & S \\ N' & M' & S' & R' \end{pmatrix}$$

determinan sobre la cónica proyectividades concordes, y las otras dos, definidas por las cuaternas

$$\begin{pmatrix} M & N & R & S \\ M' & N' & S' & R' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} M & N & R & S \\ N' & M' & R' & S' \end{pmatrix},$$

determinan proyectividades discordes.

§ 86. Ahora volvamos, completándolas, a las definiciones del § 84, relativamente a un círculo dado sobre un plano.

Plano	= Región de los puntos interiores al círculo.
Punto	= Punto interior al círculo.
Recta	= Cuerda del círculo.
Movimientos	= Transformaciones proyectivas del plano, que mudan en sí misma la región de los puntos interiores al círculo.
Abatimientos	= Transformaciones homológicas del círculo.
Figuras congruentes	= Figuras transformables una en otra mediante una de las llamadas proyectividades.

Los precedentes desarrollos permiten, sin más, afirmar que todas las proposiciones de la Geometría plana elemental, ligadas a los conceptos de recta, ángulo, congruencia, pueden traducirse convenientemente en propiedades relativas al sistema de los puntos interiores al círculo, sistema que indicaremos $\{S\}$.

En particular, veamos lo que corresponde en el sistema $\{S\}$ a dos rectas ortogonales del plano ordinario.

Observemos para ello que si r y s son dos rectas ortogonales, un abatimiento del plano alrededor de s superpone a sí misma la recta r, cambiando, sin embargo, los dos rayos en que ésta queda dividida por s.

Según las definiciones establecidas, un *abatimiento* en $\{S\}$ es una homología, que tiene por *eje* una cuerda s del círculo y por *centro* el polo de la cuerda. Las rectas dobles en esta homologia son, a excepción de s, todas las rectas que pasan por el centro de homología; de modo que *en el sistema* $\{S\}$ *deberán llamarse perpendiculares dos rectas conjugadas respecto al círculo fundamental.*

Se podrían fácilmente verificar en $\{S\}$ todas las proposiciones relativas a las rectas perpendiculares; en particular, que si desde el punto común de dos cuerdas conjugadas en $\{S\}$ se trazan las tangentes (imaginarias conjugadas) al círculo fundamental, estas tangentes están separadas armónicamente por las dos rectas ortogonales (cfr. pág. 152).

§ 87. Veamos también cómo en la métrica convencional, establecida en el interior del círculo, puede expresarse la *distancia* de dos puntos.

Introdúzcase para ello un sistema de coordenadas ortogonales (x, y) con el origen en el centro del círculo. La *distancia* de dos puntos A (x, y), B (x', y'), en el plano convencional, no puede representarse con el acostumbrado radical

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2},$$

puesto que *no es invariante* para las transformaciones proyectivas, antes llamadas movimientos; la *distancia* será una función de sus coordenadas, invariante respecto a las susodichas transformaciones, y que sobre la recta goce de la propiedad distributiva, expresada por la fórmula

$$\text{dist}\,(AB) = \text{dist}\,(AC) + \text{dist}\,(CB).$$

Ahora, una expresión de las coordenadas (x, y), (x', y'), de A y B, que permanezca invariable para todas las transformaciones proyectivas que dejan fijo el círculo límite, es la razón doble de los cuatro puntos A, B, M, N, donde M, N son los extremos de la cuerda AB; la expresión más general que goce de la pedida propiedad invariante es una función arbitraria de tal razón doble.

Deseando luego que dicha función resulte distributiva en el sentido arriba indicado, precisa tomarla con un factor de proporcionalidad igual al logaritmo de

$$(ABMN) = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}.$$

Tendremos entonces:

$$\text{dist}\,(AB) = \frac{k}{2} \log\,(ABMN).$$

Análogamente se procede para valuar el ángulo de dos rectas. En este caso hay que observar que, queriendo que el ángulo recto esté expresado por $\frac{\pi}{2}$, es necesario tomar por constante de multiplicación del logaritmo el factor $\frac{1}{2i}$. Tendremos así:

$$\widehat{ab} = \frac{1}{2i} \log\,(abmn),$$

donde con m, n se indican las tangentes imaginarias conjugadas trazadas por el vértice del ángulo al círculo, y con $(abmn)$, la razón doble de las cuatro rectas a, b, m, n, expresada analíticamente por

$$\frac{\text{sen}\,(am)}{\text{sen}\,(bm)} : \frac{\text{sen}\,(an)}{\text{sen}\,(bn)}.$$

§ 88. Refiriéndonos a cuanto se dijo respecto a la subordinación de la Geometría métrica a la proyectiva (§ 81), es claro que las fórmulas precedentes, relativas a la *distancia* y al *ángulo*, coinciden con las que se obtendrían sobre el plano no euclídeo, cuyo absoluto fuese un círculo. Esto bastaría para hacernos concluir que la Geometría del sistema $\{S\}$ proporciona una representación concreta de la Geometría de Lo-

BATSCHEFSKI-BOLYAI. Sin embargo, queriendo darnos cuenta de un modo más profundo de este hecho, busquemos cómo se traducen en $\{S\}$ la definición y las propiedades de las rectas paralelas.

Sean $r\ (u_1, u_2, u_3)$ y $r'\ (v_1, v_2, v_3)$ dos cuerdas distintas del círculo fundamental. Refiriendo el círculo a un sistema cartesiano ortogonal con el origen en el centro y tomando por unidad de medida el radio, tendremos

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$u^2 + v^2 - 1 = 0,$$

por ecuación puntual y tangencial del círculo.

Haciendo homogéneas estas ecuaciones, obtenemos

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2 = 0,$$
$$u_1{}^2 + u_2{}^2 - u_3{}^2 = 0.$$

El ángulo $\widehat{rr'}$ de las dos rectas puede calcularse por medio de las fórmulas [3′] del § 81, poniendo en ellas:

$$\Psi_{uu} = u_1{}^2 + u_2{}^2 - u_3{}^2$$
$$\Psi_{vv} = v_1{}^2 + v_2{}^2 - v_3{}^2$$
$$\Psi_{uv} = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3.$$

Obtendremos, por ejemplo:

$$\operatorname{sen} \widehat{rr'} = \frac{\sqrt{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 - (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 - (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2}}{\sqrt{(u_1{}^2 + u_2{}^2 - u_3{}^2)(v_1{}^2 + v_2{}^2 - v_3{}^2)}}$$

Si ahora se observa que las rectas r y r' tienen respectivamente por ecuaciones

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0,$$
$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0,$$

y que estas rectas concurren en el punto de coordenadas

$$x_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2,$$

$$x_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3,$$

$$x_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1,$$

la anterior expresión del ángulo $\widehat{rr'}$ toma la forma

$$[4] \qquad \operatorname{sen} \widehat{rr'} = \frac{\sqrt{(x_3^2 - x_2^2 - x_1^2)}}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)}}$$

En ésta se ve que la condición necesaria y suficiente para que el ángulo $\widehat{rr'}$ sea nulo es que sea nulo el numerador de la fracción obtenida.

Pero para que se anule este numerador es preciso que el punto (x_1, x_2, x_3), en que se cortan las dos cuerdas, pertenezca

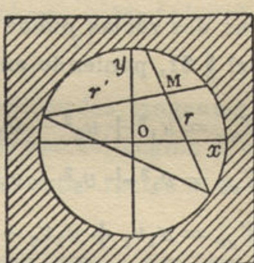


FIG. 53.

a la circunferencia del círculo fundamental, y recíprocamente, por lo cual: *En la interpretación convencional de las proposiciones geométricas por medio del sistema* $\{S\}$, *deberemos llamar paralelas a dos cuerdas que se encuentran en un punto de la circunferencia fundamental, porque el ángulo de tales cuerdas es nulo.*

Y puesto que por un punto interior a un círculo pasan dos cuerdas, que unen aquel punto con los extremos de otra cuerda arbitraria, en el sistema $\{S\}$ quedará verificada la proposición fundamental de la Geometría hiperbólica.

§ 89. Para encontrar en $\{S\}$ la fórmula relativa al ángulo de paralelismo, calculemos ante todo el ángulo $\widehat{OMN}$, comprendido entre el eje y la recta MN, que une un punto M de y con el extremo N del eje x. Indicando con a la distan-

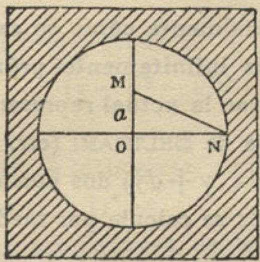


FIG. 54.

cia ordinaria de los dos puntos M y O, las coordenadas homogéneas de la recta MN y de la recta OM son respectivamente $(a, 1, -a)$, $(1, 0, 0)$, y las coordenadas del punto de encuentro de estas rectas son $(0, a, 1)$. Entonces la fórmula [4] del párrafo anterior da

$$\operatorname{sen} \widehat{OMN} = \sqrt{1 - a^2}.$$

Por otra parte, la distancia convencional entre los dos puntos O y M, por la [2] del § 81, está dada por

$$OM = k \text{ Arc Ch } \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}},$$

de donde

$$\text{Ch} \frac{OM}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Confrontando esta fórmula con la relativa al seno del ángulo $\widehat{OMN}$ se deduce

$$\mathrm{Ch}\,\frac{OM}{k} = \frac{1}{\operatorname{sen} \widehat{OMN}},$$

relación que coincide con la dada por TAURINUS, LOBATSCHEFSKI y BOLYAI para el ángulo de paralelismo (cfr. pág. 86).

§ 90. Veamos finalmente cómo se expresa en $\{S\}$ la distancia de dos puntos infinitamente próximos *(distancia elemental)*, para comparar la actual representación de la Geometría hiperbólica con la de BELTRAMI (cfr. § 69).

Sean (x, y), $(x + dx, y + dy)$ dos puntos infinitamente próximos. Su distancia ds se calcula por medio de la [2] del § 81, poniendo en ella:

$$\Omega_{xx} = x^2 + y^2 - 1,$$

$$\Omega_{yy} = (x + dx)^2 + (y + dy)^2 - 1,$$

$$\Omega_{xy} = x(x + dx) + y(y + dy) - 1.$$

Si luego se substituye el *arco* por el *seno* y se eleva al cuadrado, después de algunas reducciones se obtiene:

$$ds^2 = k^2 \frac{(dx^2 + dy^2)(1 - x^2 - y^2) + (xdx + ydy)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2 (1 - 2xdx - 2ydy - dx^2 - dy^2)}.$$

Despreciando finalmente los infinitamente pequeños de orden superior al segundo:

$$ds^2 = k^2 \frac{(dx^2 + dy^2)(1 - x^2 - y^2) + (xdx + ydy)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2},$$

o bien:

$$[5] \qquad ds^2 = k^2 \frac{(1 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1 - x^2)dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

Recordemos ahora que BELTRAMI, en 1868, interpretaba la Geometría de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI con las de las superficies de curvatura constante negativa. El estudio de la Geometría de tales superficies se efectúa partiendo de un sistema (u, v) de coordenadas tomado sobre la superficie y por las leyes según las cuales se miden las *distancias elementales* (ds). La elección de un oportuno sistema (u, v) permite a BELTRAMI (1866) representar el cuadrado de ds en la forma siguiente:

$$k^2 \frac{(1 - v^2)\,du^2 + 2uv\,du\,dv + (1 - u^2)\,dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2},$$

donde la constante k^2 es la inversa, cambiada de signo, de la curvatura de la superficie (1).

Para estudiar las propiedades de las superficies en cuestión y ponerlas en parangón con las de la métrica de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI, BELTRAMI, en su *Ensayo* citado en la página 136, se sirvió del siguiente artificio: Sobre un plano auxiliar representó los puntos de la superficie de modo que al punto (u, v) de ésta correspondiese en aquél el punto de coordenadas cartesianas

$$x = u, \qquad y = v.$$

Los puntos de la superficie vinieron así representados en el plano por puntos interiores al círculo

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

los puntos en el infinito de la superficie, por puntos de la circunferencia de este círculo; las geodésicas, por cuerdas; las

(1) *Resoluciones del problema de reproducir los puntos de una superficie sobre un plano de modo que las líneas geodésicas vengan representadas por líneas rectas;* Ann. di Mat., t. VII, págs. 185-204 (1866).—Opere Mat., tomo I, págs. 262-80 (Milán, Hoepli, 1902).

geodésicas paralelas, por cuerdas incidentes en un punto de la citada circunferencia, etc. La expresión de ds^2 se traduce luego en la expresión [5], según la cual se miden las distancias elementales en el sistema $\{S\}$. De esto resulta que BELTRAMI, con su representación plana de las superficies de curvatura constante, se vió llevado a una de las métricas proyectivas de CAYLEY, y precisamente a la métrica relativa a un círculo fundamental, expuesta por nosotros en los §§ 80 y 81.

§ 91. La representación de la Geometría plana hiperbólica sobre el plano euclídeo es susceptible de ser extendida al caso del espacio. Para representar la Geometría del espacio de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI en el espacio ordinario bastaría poner en este último las definiciones siguientes:

Espacio	= Región de los puntos interiores a una esfera.
Punto	= Punto interior a la esfera.
Recta	= Cuerda de la esfera.
Plano	= Puntos de un plano secante interiores a la esfera.
Movimientos	= Transformaciones proyectivas del espacio que mudan en sí misma la región de los puntos interiores a la esfera, etc...

Con esta especie de *diccionario* se podrían traducir las proposiciones de la estereometría hiperbólica en otras tantas propiedades del espacio euclídeo relativas al sistema de los puntos interiores a la esfera (1).

(1) De la interpretación de la estereometría no euclidiana, y en general de la interpretación de la Geometría de las variedades de curvatura constante de más dimensiones, se ocupó también BELTRAMI en la Memoria: *Teoría fundamental de los espacios de curvatura constante;* Annali di Matem. (2), t. II, págs. 232-55 (1868).—Opere Mat., t. I, págs. 406-29 (Milán, Hoepli, 1902).

Representación de la Geometría elíptica de Riemann en el espacio euclídeo.

§ 92. Para cuanto respecta a la Geometría plana, ya hemos dicho antes (págs. 139-40) que la Geometría de la ordinaria radiación de rectas ofrece una interpretación concreta del sistema elíptico de Riemann. Si luego se corta la radiación con el plano ordinario, completado por la recta del infinito, se obtiene una representación sobre el plano euclídeo del plano riemanniano en cuestión.

Queriendo una representación del espacio elíptico sobre el espacio euclídeo, bastaría tomar en éste una polaridad uniforme, *a la que corresponda una cuádrica fundamental imaginaria no degenerada,* y establecer respecto a esta cuádrica un sistema de definiciones análogo al precedentemente indicado en el caso hiperbólico. No insistimos, sin embargo, sobre esto, porque no ofrece ninguna dificultad nueva.

Notemos, no obstante, que en esta representación *todos los puntos del espacio euclídeo, comprendidos los puntos del plano del infinito, vendrían a corresponder biunívocamente a puntos del espacio riemanniano.*

Fundación de la Geometría, partiendo de los conceptos gráficos.

§ 93. Los principios expuestos en los párrafos anteriores conducen a un nuevo orden de ideas, en el cual se ponen como primer fundamento de la Geometría las *propiedades gráficas,* antes que las propiedades de congruencia y de movimiento, de que se sirvieron Riemann y Helmholtz. Nótese que, no queriendo desde el principio introducir ninguna hipótesis sobre la intersección de rectas coplanarias, conviene partir de un oportuno sistema de postulados, válido en una *región limitada* del espacio, y completar sucesivamente la región inicial por medio de *puntos, rectas y planos impropios* (cfr. pág. 154) (1).

Desarrollada la Geometría proyectiva, se pueden introducir en el espacio las propiedades métricas, añadiendo a los postulados iniciales los que caracterizan los movimientos o la congruencia. Haciéndolo así, se encuentra que una cierta polaridad del espacio, ligada a los conceptos métricos, viene transformada en sí misma para todos los movimientos. Se demuestra después que la cuádrica fundamental de esta polaridad no puede ser mas que:

a) Una Cuádrica real no reglada,

b) Una Cuádrica imaginaria (de ecuación real),

c) Una Cuádrica degenerada como lugar.

Se encuentran, pues, también por este camino, LOS TRES SISTEMAS GEOMÉTRICOS a que llegaron RIEMANN y HELMHOLTZ, partiendo del concepto de distancia elemental (2).

SOBRE LA INDEMOSTRABILIDAD DEL POSTULADO DE EUCLIDES.

§ 94. Antes de poner fin a esta exposición histórica nos parece útil decir algunas palabras sobre la indemostrabilidad del postulado de EUCLIDES.

El hecho mismo de que las innumerables tentativas reali-

---

(1) Para los relativos desarrollos véase: KLEIN, obras citadas en la página 155; PASCH: *Vorlessungen über neuere Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1882); SCHUR: *Uber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie*, Math. Ann., t. XXXIX, págs. 113-124 (1891); BONOLA: *Sobre la introducción de los elementos impropios en Geometría proyectiva*, Giornale di Matem., t. XXXVIII, págs. 105-116 (1900).

(2) Para la deducción de este resultado véase: BONOLA; *Determinación por vía geométrica de los tres tipos de espacio: hiperbólico, parabólico y elíptico*; Circolo Mat. Palermo, t. XV, págs. 56-65 (1901).

zadas para su demostración no condujeran al resultado esperado puede hacer surgir la duda de *que sea indemostrable*, ya que el instinto geométrico parece afirmarnos que una proposición tan sencilla, si es demostrable, debe serlo por razonamientos igualmente sencillos. Pero tal consideración no puede de ningún modo admitirse como una *prueba* de la indemostrabilidad en cuestión.

Prescindiendo del postulado de EUCLIDES, para seguir los desarrollos de GAUSS, LOBATSCHEFSKI y BOLYAI, se construye un edificio geométrico, en el cual no se encuentran contradicciones lógicas, y que por ello precisamente parece confirmar la posibilidad lógica de la hipótesis no euclidiana, que es como decir la *independencia* del postulado de EUCLIDES de los primeros principios de la Geometría, y, por tanto, su *indemostrabilidad*. Todavía el hecho de que no se hayan encontrado contradicciones no basta para asegurarnos de esto; es preciso asegurarse de que prosiguiendo los indicados desarrollos jamás podrían aparecer tales contradicciones. Se puede hacer surgir tal convicción, de un modo seguro, de la consideración de las fórmulas de la trigonometría no euclidiana. Si, en efecto, nos referimos al sistema de todas las ternas de números (x, y, z), y consideramos convencionalmente toda terna como un *punto analítico*, podemos definir la *distancia* de dos puntos analíticos partiendo de las fórmulas de la susodicha trigonometría no euclidiana. Construimos así un sistema analítico, el cual, ofreciendo una convencional interpretación de la Geometría no euclidiana, demuestra su posibilidad lógica.

En este sentido, las fórmulas de la trigonometría no euclidiana de Lobatschefski-Bolyai dan la prueba de la independencia del postulado de Euclides de los primeros principios de la Geometría (relativos a la recta, al plano y a la congruencia).

Se puede buscar una *prueba geométrica* de la independencia misma refiriéndose a los desarrollos ulteriores, de que hemos hecho mención. Para esto conviene partir del principio de que

Gutdeldert

los conceptos construídos por nuestra intuición, independientemente de la correspondencia que encuentren en el mundo exterior, son *a priori lógicamente posibles*, y así es lógicamente posible la Geometría euclídea y toda serie de deducciones fundadas sobre ella.

Ahora, la interpretación que la Geometría plana no euclidiana hiperbólica recibe en la Geometría sobre las superficies de curvatura constante negativa ofrece, *hasta cierto punto*, una primera prueba de la indemostrabilidad del postulado euclídeo. Precisamente queda así establecido que *el postulado susodicho no puede demostrarse fundándose en los primeros principios de la Geometría, válidos en una región limitada del plano*. En efecto, toda contradicción lógica que surgiese de la hipótesis opuesta se traduciría en una contradicción en la Geometría sobre las superficies de curvatura constante negativa.

Con todo, puesto que el parangón entre el plano hiperbólico y las superficies de curvatura negativa subsiste, como hemos dicho, solamente para *regiones limitadas*, no queda así excluído que el postulado euclídeo pueda demostrarse en el *plano completo*.

Para disipar esta duda convendría referirse a la *variedad* abstracta de curvatura constante, puesto que no existe ninguna superficie concreta del espacio ordinario sobre la cual sea válida la geometría hiperbólica *integral* (cfr. § 73).

Pero, aun después de esto, la indemostrabilidad del postulado de EUCLIDES resultaría probada solamente en la *Geometría plana*. Quedaría, pues, por discutir la posibilidad de demostrar el postulado mismo con *consideraciones estereométricas*.

La creación de la Geometría, según las opiniones de RIEMANN, extendiendo a un campo de tres dimensiones las ideas de la Geometría sobre las superficies, ofrece la prueba completa de la indemostrabilidad, basada en la existencia de un *sistema analítico no euclídeo*. Se trata, pues, de otra prueba analítica. Lo mismo puede decirse de los desarrollos de HELMHOLTZ y

LIE; pero estos últimos ofrecen, puede decirse, también una prueba geométrica, inferida de la existencia de los *grupos de transformaciones del espacio euclídeo, semejantes a los grupos de movimientos de la Geometría no euclidiana.* Bien entendido que es preciso aquí prestar atención a la consideración de la Geometría en su integridad.

Más simple y geométricamente luminosa es la *prueba de la indemostrabilidad del postulado de Euclides inferida de las métricas proyectivas de Cayley.*

Esta prueba se refiere a la representación de la Geometría no euclidiana con la métrica convencional relativa a un círculo o a una esfera, interpretación que hemos desarrollado ampliamente en el caso del plano (cfr. §§ 84-92) (1).

De las métricas proyectivas antes citadas nace también, y con la misma sencillez, la prueba de la posibilidad lógica de la hipótesis elíptica de RIEMANN, para la cual, limitada al caso del plano, serviría también la interpretación que hemos dado como *Geometría de la radiación* (§ 71).

---

(1) Otra demostración más sencilla y elegante de la independencia del Postulado I se deduce fácilmente de la representación ideada por KLEIN y POINCARÉ, del plano no euclidiano sobre el plano euclidiano, en el cual los puntos del plano no euclidiano se representan por los puntos de un medio plano euclidiano; las rectas, por las semicircunferencias ortogonales a la frontera o contorno rectilíneo del medio plano, etc. También la Geometría elíptica puede representarse de un modo semejante, y sus correspondientes en el espacio euclidiano, las Geometrías del espacio, hiperbólica y elíptica. Una exacta descripción de estas interpretaciones se encuentra en WEBER *und* WELLSTEIN, *Encyclopedie der Elementar-Mathematik*, II, §§ 9-11, páginas 39-81, Leipzig, 1905, así como en el cap. II de la *Nichtenklidischen Geometrie* de H. LIEBMANN (Sammlung Schubert, 59, Leipzig, 1905).

NOTA PRIMERA

Los principios fundamentales de la estática y el postulado de Euclides.

SOBRE EL PRINCIPIO DE LA PALANCA.

§ 1. Para demostrar el principio de la palanca, ARQUÍMEDES (287-212) se apoya en ciertas hipótesis: algunas, enunciadas; otras, sobreentendidas. Entre las hipótesis pasadas en silencio, además de la que con lenguaje moderno se llama *hipótesis del refuerzo de las ligaduras* (1), hay uno de los mismos casos de equilibrio de la palanca, que pudiera enunciarse así:

Una palanca, suspendida por su punto medio, está en equilibrio cuando a un extremo se aplica el peso 2P y al otro extremo se cuelga, por el punto medio, una nueva palanca, llevando en cada extremo un peso igual a P (2).

Sin entrar aquí en la historia de las críticas hechas a ARQUÍMEDES por el uso de tal hipótesis y de las varias tentativas

---

(1) Esta hipótesis puede enunciarse así: *Si varios cuerpos, sujetos por ligaduras, están en equilibrio bajo la acción de fuerzas dadas, estarán también en equilibrio si a las ligaduras ya existentes se añaden otras nuevas.* Cfr., por ejemplo, J. ANDRADE: *Léçons de Mécanique Physique*, pág. 59 (París, 1898).

(2) Cfr.: *Archimedis opera Omnia*, en la edición crítica de J. L. HEIBERG, t. II, págs. 142 y siguientes (Leipzig, Teubner, 1881).

realizadas para demostrarla (1), refiramos a este propósito las argumentaciones de LAGRANGE, porque de ellas puede hacerse derivar de un modo sencillo y claro una importantísima conexión entre la hipótesis en cuestión y el postulado de las paralelas.

§ 2. Sea ABD un triángulo isósceles (AD = BD), cuyos vértices A y B soportan dos pesos iguales a P, y el vértice D un peso igual a 2P. Este triángulo estará en equilibrio alrededor de la recta MN, que une los puntos medios de los lados iguales del triángulo, porque cada uno de estos lados puede mirarse como una palanca cuyos extremos soportan pesos iguales.

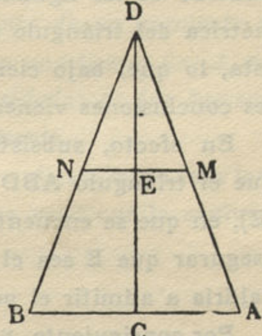


FIG. 55.

Pero el equilibrio de la figura se puede obtener también apoyando el triángulo sobre una recta que pase por el vértice D y por el punto medio (C) del lado AB, por lo cual, llamando E al punto de encuentro de los dos ejes MN y CD, nuestro triángulo estará en equilibrio si se le suspende por el punto E.

«Or — continúa LAGRANGE — comme l'axe (MN) passe par le milieu des deux côtés du triangle, il passerà aussi nécessairement par le milieu de la droite menée du sommet du triangle au milieu (C) de sa base; donc le levier transversal (CD) aura le point d'appui (E) dans le milieu et devra, par conséquent,

(1) Cfr., por ejemplo, E. MACH: *La Mécanique, exposé historique et critique de son développement*, trad. por E. BERTRAND, págs. 21 y siguientes (París, Hermann, 1904). Respecto a las varias hipótesis sobre que puede fundarse la demostración del principio de la palanca, recomendamos el reciente volumen de P. DUHEM: *Les origines de la Statique* (París, Hermann, 1905), especialmente la nota C (págs. 356-58), *Sur les divers axiomes d'où se peut déduir la théorie du levier.*

être chargé ègalement aux deux bouts (C, D): donc la charge que supporte le point d'appui du levier, qui fait la base du triangle, et qui est chargé, à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids double du sommet et, par conséquent, égale à la somme des deux poids» (1).

§ 3. El razonamiento de LAGRANGE, además de contener algunas *hipótesis de índole estática*, relativas a las simetrías, al refuerzo de las ligaduras, etc. (2), utiliza una propiedad geométrica del triángulo euclídeo. Pero si se quiere prescindir de ésta, lo que, bajo cierto aspecto, parece natural, las anteriores conclusiones vienen modificadas.

En efecto, subsistiendo como verdadero el principio de que el triángulo ABD esté en equilibrio alrededor del punto (E), en que se encuentran los dos ejes MN y CD, no se puede asegurar que E sea el punto medio de CD, porque esto equivaldría a admitir el postulado de EUCLIDES.

Por consiguiente, *no se podrá asegurar que los dos pesos aplicados en A y B puedan substituirse con el único peso 2P, aplicado en C*, puesto que, si tal substitución pudiese tener lugar, debería subsistir el equilibrio de una palanca con pesos iguales en los extremos, alrededor de un punto que *puede no ser* su punto medio.

Recíprocamente, si se admite, con ARQUÍMEDES, que a dos pesos iguales pueda substituirse un peso único aplicado al punto medio de la palanca, se deduce fácilmente que E es el punto medio de CD, y, sucesivamente, que ABD es un triángulo euclídeo.

Con esto queda establecida la equivalencia entre el postulado V de Euclides y la susodicha hipótesis de Arquímedes. Tal

(1) *Œuvres de Lagrange*, t. XI, págs. 4-5.

(2) Para el análisis de los *principios físicos* en que se funda la estática ordinaria véase el cap. V de la obra en publicación de F. ENRIQUES: *Problemas de la Ciencia*. (Bolonia, Zanichelli, 1906.)

equivalencia, bien entendido, es *relativa* al sistema de hipótesis formado por las hipótesis estáticas antes indicadas y por las hipótesis geométricas ordinarias.

Adoptando el lenguaje moderno, podremos hablar de *fuerzas*, de *composición de fuerzas*, de *resultante*, en lugar de pesos, de palancas, etc.

Entonces la hipótesis en cuestión toma la forma siguiente:

Dos fuerzas de igual intensidad, situadas en un mismo plano, aplicadas perpendicularmente a los extremos de un segmento y hacia un mismo lado de él, se componen en una fuerza única, de intensidad igual a la suma de las intensidades de las fuerzas dadas y aplicadas al punto medio del segmento.

En virtud de cuanto arriba se dijo, la aplicación de esta ley de composición exige que en el espacio se verifique la ordinaria teoría de las paralelas.

Sobre la composición de las fuerzas concurrentes.

§ 4. También el otro principio fundamental de la estática, esto es, la *ley del paralelógramo de las fuerzas*, en la usual interpretación geométrica que a él se acompaña, está en estrecha conexión con la naturaleza euclídea del espacio. Sin embargo, si se examina la parte esencial de dicho principio, es decir, la expresión analítica de la resultante (R) de dos fuerzas (P) iguales y concurrentes, es fácil establecer que subsiste *independientemente* de cualquier hipótesis sobre las paralelas. Esto puede ponerse en evidencia deduciendo la fórmula

$$R = 2P \cdot \cos\alpha,$$

donde 2α es el ángulo formado por las dos fuerzas concurrentes, de los siguientes principios:

1.º Dos o más fuerzas aplicadas a un mismo punto admiten una determinada resultante.

2.º La resultante de dos fuerzas iguales y contrarias es nula.

3.º La resultante de dos o más fuerzas aplicadas a un mismo punto y actuando en una misma línea tiene por intensidad la suma de las intensidades de las fuerzas dadas, el mismo punto de aplicación y la misma línea de acción.

4.º La resultante de dos fuerzas iguales aplicadas a un mismo punto está dirigida según la bisectriz del ángulo formado por las dos fuerzas.

5.º La intensidad de la resultante es función continua de la intensidad de las componentes.

Veamos rápidamente cómo puede conseguirse el propósito. El valor (R) de la resultante de dos fuerzas de igual intensidad (P), formando entre sí el ángulo 2α, es función sólo de P y de α; de modo que podremos escribir:

$$R = 2f(P, \alpha).$$

Una primera aplicación de los principios enumerados conduce a establecer la proporcionalidad entre R y P, y esto independientemente de cualquier hipótesis sobre las paralelas (cfr. la nota de la pág. 197); entonces la precedente relación puede escribirse más simplemente así:

$$R = 2P \cdot f(\alpha).$$

Se trata de fijar la forma de $f(\alpha)$.

§ 5. Calculemos $f(\alpha)$ para algunos valores particulares de la variable.

1.º Sea $\alpha = 45^{\circ}$.

En el punto O, en que concurren las dos fuerzas P_1 y P_2

de igual intensidad P, imaginemos aplicadas dos fuerzas iguales y contrarias, perpendiculares a R y de intensidad $\frac{1}{2}R$. Al mismo tiempo imaginemos descompuesta R en otras dos,

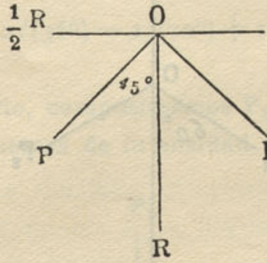


FIG. 56.

dirigidas según R y de intensidad $\frac{1}{2}R$; podremos entonces mirar cada una de las P como la resultante de dos fuerzas a ángulo recto de intensidad $\frac{1}{2}R$. Tendremos entonces:

$$P = 2\frac{1}{2}R \cdot f(45^o).$$

Por otra parte, siendo R la resultante de P_1 y P_2, será

$$R = 2P \cdot f(45^o).$$

De estas dos relaciones se obtiene:

$$f(45^o) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

2.° Sea $\alpha = 60^o$.

Entonces en O, y en dirección opuesta a R, apliquemos una fuerza R', de intensidad R.

El sistema formado por las dos fuerzas P y por la R' es un

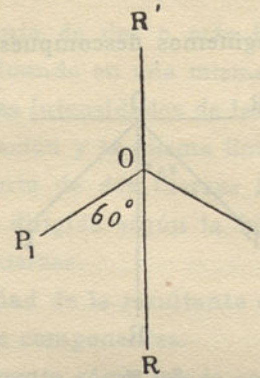


FIG. 57.

sistema en equilibrio. Entonces, por la simetría de la figura, resulta $R' = P$, y de aquí, $R = P$. Por otra parte, siendo

$$R = 2\,P \cdot f(60^o),$$

tendremos

$$f(60^o) = \frac{1}{2}.$$

3.° Sea $\alpha = 36^o$.

Si en O se aplican cinco fuerzas P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, de intensidad P, y tales que cada una de ellas forme con la siguiente un ángulo de 72°, se obtiene un sistema en equilibrio. Para la resultante R de P_2, P_3, tendremos entonces

$$R = 2P \cdot f(36^o);$$

para la resultante R' de P_1, P_4 tendremos en cambio

$$R' = 2P \cdot f(72^o).$$

Por otra parte, R' tiene la misma dirección que P_5, esto es, dirección igual y contraria a la de R, por lo cual

$$2P \cdot f(36^0) = 2P \cdot f(72^0) + P,$$

y de aquí

$$[1] \qquad 2f(36^0) = 2f(72^0) + 1.$$

Si, por el contrario, compusiésemos P_1 con P_2 y P_3 con P_4, obtendríamos dos fuerzas de intensidad $2P \cdot f(36^0)$, formando

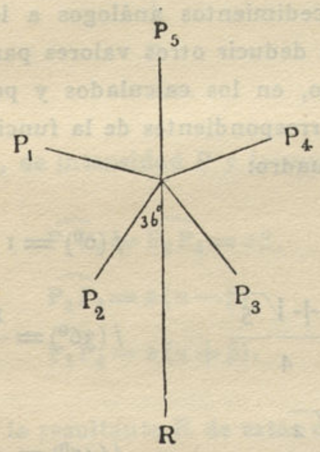


FIG. 58.

entre sí un ángulo de 144^0; componiendo las dos fuerzas obtenidas hallaríamos una nueva fuerza R'', de intensidad

$$4P \cdot f(36^0) \cdot f(72^0).$$

Pero R'', por la simetría de la figura, tiene la misma dirección que P_5 y sentido contrario, por lo cual, debiendo subsistir el equilibrio, podremos escribir:

$$P = 4P \cdot f(36^0) \cdot f(72^0),$$

o bien:

$$[2] \qquad 1 = 4f(36^0)\cdot f(72^0).$$

De las relaciones [1] y [2], resolviendo respecto a $f(36^0)$ y $f(72^0)$, se obtiene:

$$f(36^0) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \qquad f(72^0) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

§ 6. Con procedimientos análogos a los del precedente párrafo se podrían deducir otros valores para $f(\alpha)$. Deteniéndonos, sin embargo, en los calculados y poniéndolos en parangón con los correspondientes de la función cos α, obtenemos el siguiente cuadro:

$$\cos 0^0 = 1 \qquad\qquad f(0^0) = 1$$

$$\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad\qquad f(36^0) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad f(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 60^0 = \frac{1}{2} \qquad\qquad f(60^0) = \frac{1}{2}$$

$$\cos 72^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad\qquad f(72^0) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 90^0 = 0 \qquad\qquad f(90^0) = 0.$$

Este cuadro nos hace prever la identidad de las dos funciones $f(\alpha)$ y cos α. Para tener una ulterior confirmación de este hecho, determinemos la *ecuación funcional* a que satisface $f(\alpha)$.

Para ello imaginemos aplicadas en un punto O cuatro fuer-

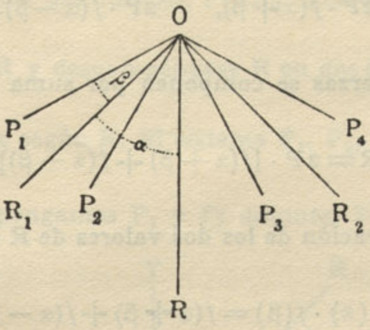


FIG. 59.

zas, P_1, P_2, P_3, P_4, de intensidad P y formando entre sí los siguientes ángulos:

$$\widehat{P_1 P_2} = \widehat{P_3 P_4} = 2\beta,$$

$$\widehat{P_2 P_3} = 2(\alpha - \beta),$$

$$\widehat{P_1 P_4} = 2(\alpha + \beta).$$

Determinemos la resultante R de estas cuatro fuerzas, procediendo de dos modos diversos.

Si componemos P_1 con P_2 y P_3 con P_4, obtenemos dos fuerzas: R_1, R_2, de intensidad:

$$2P \cdot f(\beta),$$

formando entre sí el ángulo 2α. Componiendo R_1 y R_2 en una única fuerza R, obtendremos:

$$R = 4P \cdot f(\alpha)\ f(\beta).$$

Por otra parte, componiendo P_1 con P_4 y P_2 con P_3 se obtienen dos resultantes parciales, teniendo ambas la dirección de R y respectivamente las intensidades:

$$2P \cdot f(\alpha + \beta), \qquad 2P \cdot f(\alpha - \beta).$$

Estas dos fuerzas se componen por suma y dan

$$R = 2P \cdot [f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta)].$$

De la comparación de los dos valores de R se deduce

$$[1] \qquad 2f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta)$$

esto es, la ecuación funcional pedida.

Si ahora recordamos que

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cdot \cos\beta,$$

y tenemos presente la identidad entre los valores de $f(\alpha)$ y $\cos\alpha$, dados en la tabla anterior, y la hipótesis de la continuidad de $f(\alpha)$, sin ulteriores desarrollos podremos escribir:

$$f(\alpha) = \cos\alpha,$$

y, por consiguiente,

$$R = 2P \cdot \cos\alpha.$$

La validez de esta fórmula del espacio euclídeo viene así extendida a los espacios no euclídeos.

§ 7. La ley de composición de dos fuerzas iguales y concurrentes permite resolver el problema general de la resultante, porque se pueden fijar, sin ulteriores hipótesis, las *componentes* de una fuerza R sobre dos ejes ortogonales, pasando por su punto de aplicación O.

En efecto, sean x, y estos ejes, y α, β los ángulos que forman con R. Si por O se traza la perpendicular a OR, formará con x el ángulo α y con y el ángulo β. Sobre esta recta, y partiendo de O, imagínense dos fuerzas, P_1, P_2, iguales y contrarias, de intensidad $\frac{1}{2}R$ y descompóngase R en dos fuerzas $P = \frac{1}{2}R$, dirigidas ambas según R. El sistema P_1, P_2, P, P tiene por resultante R.

Ahora compongamos P_1 y P; después, P_2 y P; obtenemos

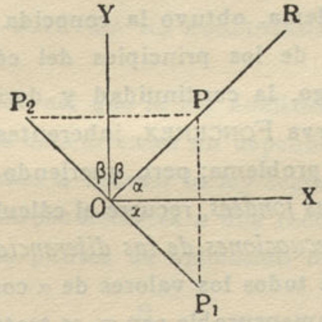


FIG. 60.

dos fuerzas X, Y, una dirigida según x, la otra según y, de intensidades

$$X = R \cdot \cos\alpha,$$
$$Y = R \cdot \cos\beta.$$

Estas dos fuerzas son las componentes de R en los dos ejes asignados. En lo que se refiere a sus intensidades, éstas coinciden con las que se encuentran en la teoría ordinaria fundada en el principio del paralelógramo de las fuerzas; pero los segmentos OX y OY que las representan sobre los ejes *no son necesariamente*, como en el caso euclídeo, las *proyecciones* de R. En efecto, es fácil ver que donde los segmentos dichos fuesen las proyecciones ortogonales de R sobre x e y, valdría en el plano la hipótesis euclídea.

§ 8. El método funcional usado en el § 6 para la composición de las fuerzas concurrentes se remonta en esencia a D. DE FONCENEX (1734-1799). Con un procedimiento análogo al que nos condujo a la ecuación a que satisface la $f(\alpha)$ [$= y$], FONCENEX llega a la ecuación diferencial (1)

$$\frac{d^2 y}{d\alpha^2} + k^2 y = o,$$

de la cual, integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema, obtuvo la conocida expresión de $f(\alpha)$.

La aplicación de los principios del cálculo infinitesimal exige, sin embargo, la continuidad y derivabilidad de $f(\alpha)$, condiciones, observa FONCENEX, inherentes a la misma naturaleza (física) del problema; pero queriendo prevenir *jusqu'aux difficultés les moins fondées,* recurre al cálculo de las *diferencias finitas* y a unas *ecuaciones de las diferencias,* que le permiten obtener $f(\alpha)$ para todos los valores de α comensurables con π. El caso de α inconmensurable con π, se trata «par une méthode familière aux Géomètres et frequent surtout dans les ecrits des Anciens», es decir, con el método de exhaustación (2).

---

(1) La ecuación pudiera obtenerse de la [1] de la pág. 190, del modo siguiente: Poniendo $\beta = d\alpha$ y suponiendo $f(\alpha)$ desarrollable en serie de TAYLOR para todo valor de α, se obtiene:

$$2f(\alpha)\cdot[f(o) + d\alpha\cdot f'(o) + \frac{d\alpha^2}{2} f''(o) + \cdots] = 2f(\alpha) + 2\frac{d\alpha^2}{2} f''(\alpha) + \cdots$$

Igualando los coeficientes de $d\alpha^2$ y poniendo $y = f(\alpha)$ y $k^2 = -f''(o)$, se obtiene:

$$\frac{d^2 y}{d\alpha^2} + k^2 y = o, \qquad \text{l. q. q. d.}$$

(2) Cfr. FONCENEX: *Sur les principes fondamentaux de la Mécanique;* Miscellanea Taurinensia, t. II, págs. 305-315 (1760-61). Los razonamientos de FONCENEX están reproducidos e ilustrados por A. GENOCCHI en el trabajo: *Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes;* Turin, Memorias (2), t. XXIX, págs. 366-71 (1877).

Todo el procedimiento de FONCENEX, y lo mismo el desarrollado en el § 6, es independiente del postulado de EUCLIDES; todavía hay que notar que FONCENEX no tenía el propósito de libertar la ley de composición de fuerzas concurrentes de la teoría de las paralelas, sino más bien el de *demostrar* la ley en cuestión, creyendo quizás, como otros geómetras (D. BERNOULLI, D'ALEMBERT), que fuese una verdad independiente de cualquier experiencia.

LA ESTÁTICA NO EUCLIDIANA.

§ 9. Demostrado así que la ley analítica para la composición de las fuerzas concurrentes no depende del postulado V de EUCLIDES, pasemos a deducir la ley según la cual se componen las fuerzas perpendiculares a una recta.

Sean A y A′ los puntos de aplicación de las dos fuerzas

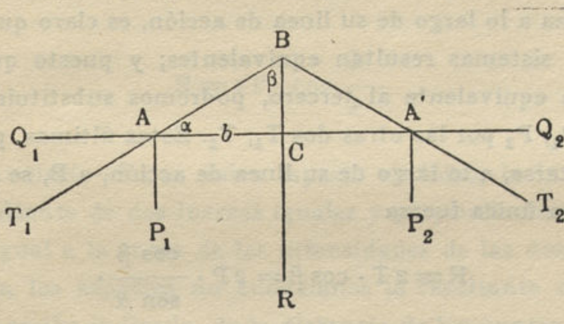


FIG. 61.

P_1 y P_2, de intensidad P; sea C el punto medio del segmento AA′, y B, un punto de la perpendicular CB a AA′. Unido A con B, y poniendo

$$\beta = \widehat{ABC}, \qquad \alpha = \widehat{BAC},$$

es claro que la fuerza P_1 podría mirarse como la componente de una fuerza T_1, aplicada en A y dirigida según BA. La intensidad T de esta fuerza está dada por

$$T = \frac{P}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

La otra componente Q_1 de T_1, dirigida normalmente a P_1, tiene por intensidad

$$Q = T \cdot \cos \alpha = P \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Repitiendo las mismas consideraciones sobre la fuerza P_2, obtendremos sobre el plano los siguientes sistemas de fuerzas:

1.º Sistema P_1, P_2.

2.º Sistema P_1, P_2, Q_1, Q_2.

3.º Sistema T_1, T_2.

Admitiendo el poder transportar el punto de aplicación de una fuerza a lo largo de su línea de acción, es claro que los dos primeros sistemas resultan equivalentes; y puesto que el segundo es equivalente al tercero, podremos substituir las dos fuerzas P_1, P_2 por las otras dos T_1, T_2. Estas últimas, pudiendo transportarse, a lo largo de su línea de acción, a B, se compondrán en la única fuerza

$$R = 2T \cdot \cos \beta = 2P \cdot \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha},$$

transportable a su vez a C, manteniéndose fija la dirección perpendicular a AA'.

El resultado arriba obtenido, cuya *independencia* del postulado de EUCLIDES es manifiesta, puede aplicarse a los tres tipos de Geometría.

GEOMETRÍA DE EUCLIDES.—En el triángulo ABC se tiene:

$$\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha.$$

De aquí,

$$R = 2P.$$

Geometría de Lobatschefski-Bolyai.—En el triángulo ABC, llamando $2b$ al segmento AA′, se tiene (pág. 114):

$$\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{Ch}\frac{b}{k}.$$

De aquí,

$$R = 2P \cdot \operatorname{Ch}\frac{b}{k}.$$

Geometría de Riemann.—Siempre en el mismo triángulo se tiene:

$$\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \cos\frac{b}{k},$$

por lo cual

$$R = 2P \cdot \cos\frac{b}{k}.$$

Conclusión.—En el único espacio euclídeo, la intensidad de la resultante de dos fuerzas iguales y perpendiculares a una recta es igual a la suma de las intensidades de las dos fuerzas dadas. En los espacios no euclidianos la resultante depende, del modo arriba indicado, de la distancia de los puntos de aplicación de las dos componentes (1).

§ 10. El caso de dos fuerzas desiguales P, Q, perpendi-

(1) Para ulteriores desarrollos de estática no euclidiana remitimos al lector a los autores siguientes: J. M. de Tilly: *Etudes de Mécanique abstraite*, Mém. Couronnés et autres mém., t. XXI (1870).—J. Andrade: *La Statique et les Géométries de Lobatschefski, d'Euclide et de Riemann*. Nota II de la obra citada en la pág. 180.

culares a una misma recta, se trata de un modo análogo al precedente. En la Geometría euclídea se llegaría a las conocidas relaciones:

$$R = P + Q,$$

$$\frac{R}{p+q} = \frac{P}{q} = \frac{Q}{p};$$

en la Geometría de LOBATSCHEFSKI-BOLYAI el problema de la resultante conduciría a las fórmulas siguientes:

$$R = P \cdot \mathrm{Ch}\frac{p}{k} + Q \cdot \mathrm{Ch}\frac{q}{k},$$

$$\frac{R}{\mathrm{Sh}\frac{p+q}{k}} = \frac{P}{\mathrm{Sh}\frac{q}{k}} = \frac{Q}{\mathrm{Sh}\frac{p}{k}};$$

de las cuales, con la acostumbrada substitución de las funciones circulares a las hiperbólicas, se pasa inmediatamente a las correspondientes de la Geometría riemanniana:

$$R = P \cdot \cos\frac{p}{k} + Q \cdot \cos\frac{q}{k},$$

$$\frac{R}{\operatorname{sen}\frac{p+q}{k}} = \frac{P}{\operatorname{sen}\frac{q}{k}} = \frac{Q}{\operatorname{sen}\frac{p}{k}}.$$

En estas fórmulas p, q indican las distancias de los puntos de aplicación de P y Q al de R.

Estos resultados pueden consignarse bajo una única forma, válida para la Geometría absoluta:

$$R = P \cdot E_p + Q \cdot E_q,$$

$$\frac{R}{O_{(p+q)}} = \frac{P}{O_q} = \frac{Q}{O_p}.$$

Para deducirla directamente bastaba hacer uso, en los razonamientos arriba indicados, de la trigonometría absoluta en lugar de la euclidiana y no euclidiana.

DEDUCCIONES ESTÁTICAS DE LA TRIGONOMETRÍA PLANA.

§ 11. Veamos finalmente cómo es posible invertir la cuestión: *esto es, dada la ley de composición de las fuerzas deducir las relaciones fundamentales de la trigonometría.*

Para esto observemos que la intensidad R de la resultante de dos fuerzas (P), iguales y perpendiculares a un eje $AA' = 2b$, será, en general, función de P y b; denotando con $\varphi(P, b)$ esta función, tendremos:

$$R = \varphi(P, b),$$

o más sencillamente (1):

$$R = P \cdot \varphi(b).$$

(1) La proporcionalidad entre R y P procede de la *ley asociativa*, fundamento de la composición de las fuerzas. En efecto, imaginemos descompuesta cada fuerza P, aplicada en A y A′, en la suma de n fuerzas, de intensidad $\frac{P}{n}$; componiendo, obtendremos para R la siguiente expresión:

$$R = n \cdot \varphi\left(\frac{P}{n}, b\right).$$

Comparando ésta con la otra dada en el texto, se obtiene:

$$\varphi\left(\frac{P}{n}, b\right) = \frac{1}{n}\varphi(P, b).$$

De un modo análogo se demuestra la fórmula

$$\varphi(kP, b) = k\varphi(P, b)$$

para todo valor racional de k, y se la extiende después a los irracionales de k. De modo que si ponemos $P = 1$, $k = P$, tendremos:

$$(P, b) = P \cdot \varphi(b), \qquad \text{l. q. q. d.}$$

Por otra parte, en el § 9 (pág. 194) hemos llegado a la siguiente expresión de R:

$$R = 2P \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Eliminando entre ésta y la precedente R y P, se obtiene:

$$\varphi(b) = 2 \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Conocida luego la expresión analítica de $\varphi(b)$, la fórmula obtenida dará una relación entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

Para determinar $\varphi(b)$ es necesario establecer la correspondiente ecuación funcional. Para esto aplíquense perpendi-

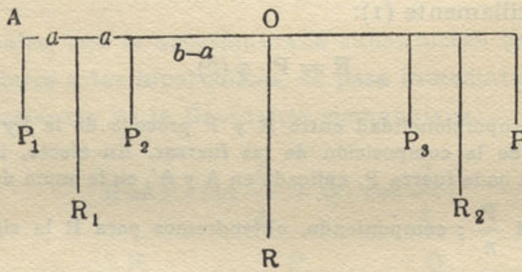


Fig. 62.

cularmente a la recta AA′ cuatro fuerzas iguales, P_1, P_2, P_3, P_4, de modo que los puntos de aplicación de P_1 y P_4 disten entre sí $2(a + b)$, y los de P_2 y P_3 $2(b - a)$.

Podremos determinar la resultante R de estas cuatro fuerzas de dos modos diversos:

1.º Componiendo P_1 con P_2 y P_3 con P_4, se obtienen dos fuerzas R_1, R_2 de intensidad

$$P \cdot \varphi(a);$$

componiendo R_1 con R_2 obtendremos:

$$R = P \cdot \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

2.º Componiendo P_1 con P_4 se obtiene una fuerza de intensidad

$$P \cdot \varphi(b + a);$$

componiendo P_2 con P_3 se obtiene otra fuerza de intensidad:

$$P \cdot \varphi(b - a).$$

Componiendo, finalmente, estas dos resultantes parciales se obtiene:

$$R = P \cdot \varphi(b + a) + P \cdot \varphi(b - a).$$

De las dos expresiones de R se saca la ecuación funcional a que satisface $\varphi(b)$:

$$[2] \qquad \varphi(b) \cdot \varphi(a) = \varphi(b + a) + \varphi(b - a).$$

Esta ecuación, poniendo $\varphi(b) = 2f(b)$, se identifica con la encontrada en el § 6 (pág. 190) al tratar de la composición de fuerzas concurrentes.

El método seguido para obtener la [2] es debido a D'ALEMBERT (1); si en ella se suponen a y b iguales entre sí y se observa que $\varphi(0) = 2$ se obtiene otra ecuación:

$$[3] \qquad [\varphi(x)]^2 = \varphi(2x) + 2,$$

encontrada anteriormente por FONCENEX al tratar el problema del equilibrio de la palanca (2).

(1) *Opuscules mathématiques*, t. VI, pág. 371 (1779).
(2) Cfr. la citada Memoria de FONCENEX, págs. 319-22.

§ 12. El problema estático de la composición de las fuerzas está reducido a la *integración* de una ecuación funcional.

FONCENEX, que fué el primero en tratarlo así (1), supone ser $\varphi(x) =$ *constante* la única solución de la [3], teniendo la *constante*, como fácilmente se verifica, el valor numérico 2. Sucesivamente LAPLACE y D'ALEMBERT integraron la [3], obteniendo:

$$\varphi(x) = e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}},$$

donde c es una constante o una función cualquiera, que toma el mismo valor cambiando x en $2x$ (2).

La solución de LAPLACE y D'ALEMBERT, aplicada al problema estático del párrafo anterior, conduce luego a excluir el caso en que c sea función de x; además, siendo inadmisibles para c los valores del tipo $a + ib$, con a y b diferentes de cero, tendremos tres casos posibles, según que c sea real, imaginario puro o infinito (3). Correspondiendo a estos tres casos tenemos tres leyes posibles para la composición de las fuerzas, y,

---

(1) En otra parte (pág. 53), hablando de lo escrito sobre la mecánica de FONCENEX, se dijo que LAGRANGE fué su inspirador, si no el autor. Esta opinión, acogida por GENOCCHI y por otros geómetras, procede de DELAMBRE. He aquí cómo se expresa el ilustre biógrafo de LAGRANGE: «Il (LAGRANGE) fournissait à FONCENEX la partie analytique des ses Mémoires en lui laissant le soin de développer les raisonnemens sur lesquels portaient ses formules. En effet, on remarque déjà dans ces Mémoires (de FONCENEX) cette marche purement analytique, qui depuis a fait le caractère des grandes productions de LAGRANGE. Il avait trouvé une nouvelle théorie du levier».—*Notice sur la vie et les ouvrages de M. le Comte Lagrange;* Mém. Inst. de France, classe Math. et Phy., t. XIII, página XXXVj (1812).

(2) Cfr. D'ALEMBERT: *Sur les principes de la Mécanique;* Mém. de l'Ac. des Sciences de Paris (1769).—LAPLACE: *Recherches sur l'integration des équations différentielles, etc.;* Mém. Ac. Sciences de Paris (Savants étrangers), t. VII (1773).—Œuvres de Laplace, t. VIII, págs. 106-107.

(3) A este resultado se puede llegar directamente integrando la [2], o, lo que es lo mismo, la [1] del § 6. Véase, a este propósito, el método elemental usado por CAUCHY para determinar la $f(a)$ que satisface a la [1]: *Œuvres de Cauchy*, segunda serie, t. III, págs. 106-113.

por consiguiente, tres tipos distintos de relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Estos resultados pueden reunirse en el siguiente cuadro, donde con k se indica un número esencialmente real y positivo.

Valor de c	Forma de $\varphi(x)$	Relaciones trigonométricas	Tipo de plano
$c = k$	$e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}} = 2\,\mathrm{Ch}\frac{x}{k}$	$\mathrm{Ch}\frac{b}{k} = \frac{\cos\beta}{\mathrm{sen}\,\alpha}$	hiperbólico.
$c = ik$	$e^{\frac{ix}{k}} + e^{-\frac{ix}{k}} = 2\cos\frac{x}{k}$	$\cos\frac{b}{k} = \frac{\cos\beta}{\mathrm{sen}\,\alpha}$	elíptico.
$c = \infty$	$e^{\frac{x}{\infty}} + e^{-\frac{x}{\infty}} = 2$	$1 = \frac{\cos\beta}{\mathrm{sen}\,\alpha}$	parabólico.

CONCLUSIÓN.—La ley de composición de las fuerzas perpendiculares a una recta caracteriza, pues, en cierto sentido, las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo, y por ello las propiedades geométricas del plano y del espacio.

Este hecho fué señalado y puesto en evidencia por A. GENOCCHI (1817-1889) en algunos trabajos importantísimos (1), a los cuales remitimos al lector para todas las noticias históricas y bibliográficas que importan a este asunto.

(1) Uno de ellos es la Memoria citada en la pág. 192; otro, que se remonta al 1869, tiene por título: *De los primeros principios de la Mecánica y de la Geometría en relación con el postulado de Euclides;* Annali della Società italiana delle Scienze (3), t. II, págs. 153-89.

NOTA SEGUNDA

Las paralelas y la superficie de Clifford.—Indicaciones sobre el problema de Clifford-Klein.

LAS PARALELAS DE CLIFFORD.

§ 1. Las paralelas de EUCLIDES son rectas que poseen las siguientes propiedades:

a) *Pertenecer a un plano.*

b) *No tener puntos comunes.*

c) *Ser equidistantes.*

Prescindiendo de la propiedad *c)*, y siguiendo las ideas de GAUSS, LOBATSCHEFSKI y BOLYAI, se obtiene una primera extensión del concepto de paralelismo; pero las paralelas que a ella corresponden tienen poquísimas propiedades comunes con las paralelas ordinarias. Esto se debe al hecho de que las propiedades más culminantes que se encuentran estudiando estas últimas dependen substancialmente de la condición *c)*. Se puede, por tanto, tratar de extender el concepto de paralelismo, de manera que se conserven, hasta donde sea posible, a las *nuevas paralelas* los caracteres que dependen de la equidistancia euclídea. Para esto, siguiendo a W. K. CLIFFORD (1845-1879), prescindimos, en la definición de paralelas, de *la condición de la coplanaridad*, quedando subsistentes las otras dos. La nueva definición de paralelas será entonces la siguiente:

dos rectas, coplanarias o cruzándose, se dicen paralelas cuando los puntos de una son equidistantes de la otra.

§ 2. Se presentan entonces dos casos, según que dichas paralelas pertenezcan o no al mismo plano.

El caso en que las rectas equidistantes sean coplanarias está ya agotado, puesto que los precedentes desarrollos (§ 8) nos permiten afirmar que el espacio correspondiente es el euclídeo ordinario. Supondremos, pues, que las dos rectas equidistantes r y s se crucen y que los segmentos de perpendicular bajados desde los puntos de r sobre s sean iguales: estos segmentos serán evidentemente perpendiculares también a r. Sean AA′ y BB′ dos de estos segmentos. El cuadrilátero alabeado ABB′A′, que así resulta, tiene cuatro ángulos rectos y dos lados opuestos iguales. Es fácil ver que también los otros dos lados opuestos AB, A′B′ son iguales, y que cada diagonal, por ejemplo, AB′, forma con las dos paralelas ángulos alternos internos iguales. Esto resulta de la congruencia de los dos triángulos rectángulos AA′B′, AB′B.

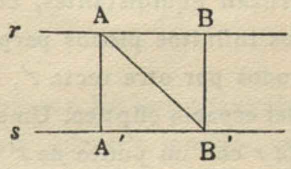


Fig. 63.

Si ahora se examina el triedro A(A′B′B), en virtud de un teorema sobre las caras, válido a la vez en los tres sistemas geométricos, podremos escribir:

$$\widehat{A'AB'} + \widehat{B'AB} > \widehat{A'AB} = 1 \text{ recto}.$$

Esta relación, por la igualdad de los dos ángulos $\widehat{AB'A'}$ y $\widehat{B'AB}$, puede escribirse así:

$$\widehat{A'AB'} + \widehat{AB'A'} > 1 \text{ recto}.$$

Bajo la nueva forma nos dice que en el triángulo rectángulo

AA′B′ la suma de los ángulos agudos es mayor que un ángulo recto. Esto significa que en el triángulo en cuestión se verifica la *hip. ang. obtuso*, y, por consiguiente, que las *paralelas que se cruzan pueden sólo existir en el espacio de* RIEMANN.

§ 3. Para demostrar después que en el espacio *elíptico* de RIEMANN existen efectivamente pares de rectas que se cruzan equidistantes, consideremos una recta arbitraria r y los infinitos planos perpendiculares a ella; estos planos pasan todos por otra recta r', la polar de r en la polaridad absoluta del espacio elíptico. Un segmento cualquiera que una un punto de r con un punto de r' es perpendicular tanto a r como a r', y tiene una longitud constantemente igual a la semirecta. De esto resulta que r y r' son rectas que se cruzan y equidistantes.

Pero dichas dos rectas equidistantes ofrecen un caso particularísimo, en cuanto todos los puntos de r tienen la misma distancia no sólo de r', sino *de todos los puntos* de r'.

Para poner de manifiesto la existencia de rectas equidistantes, en las cuales la última particularidad no tenga lugar

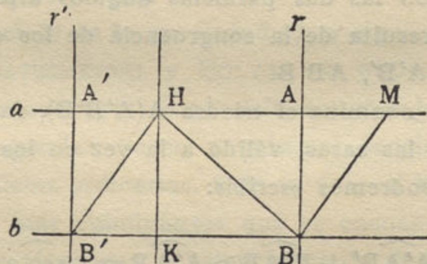


FIG. 64.

consideremos también dos rectas r y r', una polar de la otra, y sobre ellas los respectivos segmentos AB, A′B′ iguales a un segmento dado menor que la semirecta. Uniendo A con A′ y B con B′ se obtienen dos rectas a y b, no polares una de otra y perpendiculares ambas a las dos rectas r y r'. Se puede demostrar fácilmente que *a* y *b* son equidistantes. Para esto fíjese sobre AA′ un segmento A′H; luego, sobre el segmento suplementario (1) de A′HA fíjese el segmento AM igual a A′H. Unidos los puntos H y M respectivamente con B′ y B, se obtienen dos triángulos rectángulos A′B′H y ABM, que, en virtud de las construcciones hechas, resultan congruentes. Se tendrá, por tanto, la siguiente igualdad:

$$HB' = BM.$$

Si ahora se une H con B y se comparan los dos triángulos HB′B y HBM, se ve inmediatamente que son iguales, por tener el lado HB común, los lados HB′ y MB iguales en virtud de la anterior relación, y los lados B′B y HM también iguales, porque cada uno de ellos es una semirecta. Los dos triángulos en cuestión tendrán también iguales las alturas HK y BA, correspondientes a los lados iguales BB′ y HM. Esto nos dice, en otras palabras, que los diferentes puntos de la recta *a* son equidistantes de la recta *b*. Y puesto que el razonamiento puede repetirse partiendo de la recta *b*, bajando las perpendiculares sobre la *a*, se deduce que el segmento HK, además de ser perpendicular a *b*, es también perpendicular a *a*.

Obsérvese luego que de la igualdad de los varios segmentos AB, HK, A′B′... se deduce la igualdad de los respectivos segmentos suplementarios, por lo cual las dos rectas *a* y *b* pueden considerarse equidistantes una de otra de dos modos diversos. Cuando ocurriese que el segmento AB fuese igual a su suplementario, entonces se presentaría el caso excepcional anteriormente citado, en el cual *a* y *b* son polares una de otra, y, por consiguiente, todos los puntos de *a* tendrían igual distancia de los diferentes puntos de *b*.

(1) Los dos segmentos que dos puntos determinan sobre una recta se llaman suplementarios.

§ 4. Las paralelas que se cruzan del espacio elíptico fueron descubiertas por CLIFFORD en 1873 (1). He aquí sus propiedades más notables:

1) *Dos paralelas forman con todas sus transversales ángulos correspondientes iguales, ángulos alternos internos iguales, etc.*

2) *Si en un cuadrilátero alabeado los lados opuestos son iguales y los ángulos adyacentes suplementarios, los lados opuestos son paralelos.*

De aquí que un tal cuadrilátero pueda llamarse *paralelógramo alabeado.*

De las dos propiedades enunciadas, la primera se verifica inmediatamente, la segunda podría demostrarse con un razonamiento del mismo tipo del empleado en el § 3.

3) *Si dos segmentos son iguales y paralelos, uniendo convenientemente sus extremos se obtiene un paralelogramo alabeado.*

Esta propiedad, que puede considerarse, en cierto sentido, como inversa de la segunda, es también de inmediata verificación.

4) *Por un punto cualquiera* (M) *del espacio, que no pertenezca a la polar de una recta* (r), *pasan dos paralelas a la recta.*

En efecto, desde el punto M bájese la perpendicular MN sobre r y sea N′ el punto en que la polar de MN corta a la r. Sobre esta polar fíjense luego los dos segmentos N′M′ y N′M″, iguales a NM, y únanse los puntos M′, M″ con M. Las dos rectas r' y r'' así obtenidas son las paralelas buscadas.

Si M perteneciese a la polar de r, sería MN igual a la semirecta y los dos puntos M″ y M′ coincidirían. Por consiguiente, vendrían a coincidir también las dos paralelas r' y r''.

El ángulo comprendido entre las dos paralelas $r'r''$ puede medirse con el segmento M′M″, que sus lados interceptan sobre la polar del vértice; entonces podremos decir que la mi-

(1) *Preliminary Sketch on Biquaternions;* Proceedings of the London Math. Society, t. IV, págs. 381-95 (1873).—Math. Papers de CLIFFORD, páginas 181-200.

tad del ángulo $r'r''$, esto es, *el ángulo de paralelismo*, es igual a la *distancia* de *paralelismo*.

Para distinguir las dos paralelas r', r'' consideremos un movimiento *helicoidal* del espacio, de eje MN, en el cual evi-

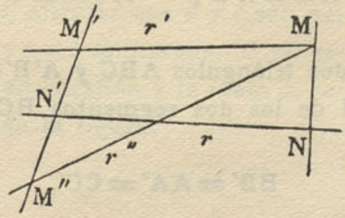


Fig. 65.

dentemente queda fijo el haz de planos perpendiculares a MN y el eje M'M'' de este haz. Tal movimiento puede considerarse como resultante de una traslación a lo largo de MN, acompañada de una rotación alrededor de la misma recta, o bien de dos traslaciones, una a lo largo de MN, otra a lo largo de M'M''. Si las dos traslaciones tienen igual *amplitud*, se obtiene un *deslizamiento* del espacio.

Los deslizamientos pueden ser *dextrorsum* o *sinistrorsum*. Entonces, refiriéndonos a las dos paralelas r', r'', es claro que una de ellas podrá superponerse a r con un deslizamiento *dextrorsum* de amplitud MN, mientras que la otra se superpondría a r con un deslizamiento *sinistrorsum* de la misma amplitud. Por esto las dos rectas r' y r'' se deberán llamar, la primera, *paralela dextrorsum;* la otra, *paralela sinistrorsum* a r.

5) Dos paralelas $\left\{\begin{matrix}\text{dextrorsum}\\ \text{sinistrorsum}\end{matrix}\right\}$ a una misma recta son paralelas $\left\{\begin{matrix}\text{dextrorsum}\\ \text{sinistrorsum}\end{matrix}\right\}$ entre sí.

Sean b y c paralelas *dextrorsum* a a. Desde los puntos A y A' de a, distantes entre sí la semirecta, bajamos las perpendiculares AB, A'B' sobre b y las perpendiculares AC, A'C' sobre c. Las rectas A'B', A'C' son las polares de AB y AC, por lo cual el ángulo $\widehat{BAC}$ es igual al ángulo $\widehat{B'A'C'}$. Además, por las propiedades de las paralelas, existen las siguientes igualdades segmentarias:

$$AB = A'B', \qquad AC = A'C',$$

por las que los dos triángulos ABC y A'B'C' son iguales. De aquí la igualdad de los dos segmentos BC y B'C'. Además siendo

$$BB' = AA' = CC',$$

el cuadrilátero alabeado BB'C'C tiene los lados opuestos iguales.

Pero para establecer que *b* y *c* son paralelas precisa también demostrar que los ángulos adyacentes del cuadrilátero en cues-

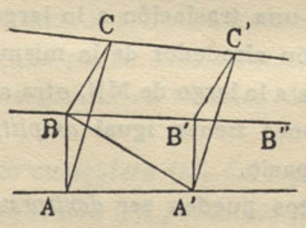


Fig. 66.

tión son suplementarios (cfr. *2)*, pág. 206). Para esto compararemos los dos triedros B(AB'C) y B'(A'B''C'). En ellos existen las siguientes igualdades entre las caras:

$$\widehat{ABB'} = \widehat{A'B'B''} = 1 \text{ recto}.$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}.$$

Además, los dos diedros de arista BA y B'A' son ambos iguales a un diedro recto, disminuído (o aumentado) en el diedro que tiene por sección normal el ángulo $\widehat{A'BB'}$; dedúcese la igualdad de los dos triedros en cuestión, y de aquí la igualdad de las dos caras $\widehat{B'BC}$ y $\widehat{B''B'C'}$. De esto se deduce que los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{B'}$ del cuadrilátero BB'C'C son suplementarios, y, sucesivamente (trazando las diagonales del cuadrilátero, etcétera), que $\widehat{B}$ es suplementario de $\widehat{C}$, que $\widehat{C}$ es suplementario de $\widehat{C'}$, etc.

Podemos, pues, afirmar que b y c son paralelas. Que el paralelismo entre b y c sea *dextrorsum*, si tal es el paralelismo entre las dos rectas en cuestión y la recta a, se verifica intuitivamente, examinando la figura.

La cuádrica de Clifford.

§ 5. De las precedentes consideraciones resulta que *todas las rectas que se apoyan en tres paralelas dextrorsum son entre sí paralelas sinistrorsum.* En efecto, si ABC es una secante común a las tres rectas a, b, c, y si se toman sobre estas rectas, en un mismo sentido (1), tres segmentos iguales AA', BB', CC', los puntos A', B', C' pertenecen a una recta paralela a ABC. El paralelismo entre ABC y A'B'C' es luego *sinistrorsum*.

De esto se deduce que tres paralelas a, b, c definen una superficie reglada de segundo orden *(cuádrica de Clifford)*, de la cual las rectas secantes a a, b, c constituyen un primer sistema de generatrices (g_s); el segundo sistema de generatrices (g_d) está constituído por la infinitas rectas que, como a, b, c, se apoyan en las g_s.

A la cuádrica de Clifford corresponden las siguientes propiedades características:

a) Dos generatrices de un mismo sistema son paralelas entre sí.

b) Dos generatrices de distinto sistema se encuentran bajo un ángulo constante.

(1) Es claro que fijado *un sentido* sobre una recta, queda también fijado sobre toda otra recta paralela a ella.

§ 6. Pasemos a demostrar que *la superficie de* CLIFFORD *admite dos ejes distintos de rotación*. Para esto, desde un punto cualquiera M tracemos las paralelas d *(dextrorsum)* y s *(sinistrorsum)* a una recta r, e indiquemos con δ la distancia MN de cada paralela a r. Manteniendo fija la d hagamos girar s alrededor de r, y sean s', s'', s'''... las sucesivas posiciones que toma s en esta rotación. Es claro que s, s', s''... son todas paralelas *sinistrorsum* a r, y que se apoyan todas en la recta d; así que s, en su rotación alrededor de r, engendra una superficie de CLIFFORD.

Recíprocamente, si d y s son dos generatrices de una superficie de CLIFFORD, pasando por un punto M de la superficie, y 2δ el ángulo comprendido entre ellas, podemos levantar en M la perpendicular al plano sd y sobre ella fijar los dos

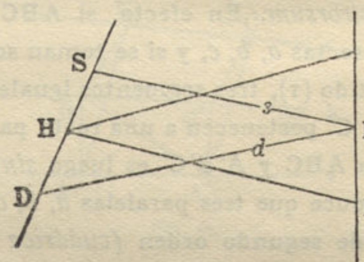


FIG. 67.

segmentos $MN = ML = \delta$. Llamando D y S a los puntos en que la polar de LN encuentra respectivamente a las rectas d, s, y H al punto medio de $DS = 2\delta$, las rectas HL y HN son paralelas tanto a s como a d. De las dos rectas HL y HN escojamos la que resulta paralela *dextrorsum* a d y *sinistrorsum* a s; sea, por ejemplo, HN. Entonces la superficie de CLIFFORD considerada puede engendrarse por la rotación de s o d alrededor de HN. Con esto queda probado que toda superficie de CLIFFORD admite un *eje de rotación* y que todos los puntos de la superficie son equidistantes de él.

La existencia de otro eje de rotación resulta inmediatamente al observar que todos los puntos del espacio equidistantes de HN son también equidistantes de la recta polar de HN, la cual será, por tanto, el *segundo eje de rotación* de la superficie de CLIFFORD.

§ 7. La equidistancia de los puntos de la superficie de CLIFFORD a cada uno de los ejes de rotación conduce a otra notabilísima propiedad de la superficie. En efecto, todo plano que pase por un eje (r) la corta según una línea equidistante del eje; los puntos de esta línea, estando también a igual distancia del punto (O) en que el plano secante encuentra al otro eje de la superficie, pertenecen a un círculo cuyo centro (O) es el polo de r respecto a la línea en cuestión. Los *meridianos* y los *paralelos* de la superficie son, pues, círculos.

La superficie entonces podrá engendrarse haciendo girar un círculo alrededor de la polar de su centro, o bien haciendo mover un círculo de modo que su centro describa una recta y su plano se mantenga constantemente perpendicular a ella (BIANCHI) (1).

El último modo de generación, perteneciendo también al cilindro euclídeo, pone en evidencia la analogía entre la superficie de CLIFFORD y el ordinario cilindro circular. Esta analogía pudiera desarrollarse ulteriormente considerando las propiedades de las trayectorias (hélices) de los puntos de la superficie, engendradas con un movimiento helicoidal del espacio alrededor de una cualquiera de los ejes de la cuádrica.

§ 8. Veamos finalmente cómo la Geometría sobre la superficie de CLIFFORD, entendida en el sentido indicado por nosotros en los párrafos 67 y 68, coincide con la de EUCLIDES. Para esto determinemos la ley según la cual se miden, sobre la superficie, las distancias elementales (ds).

(1) *Sobre las superficies de curvatura nula en geometría elíptica;* Annali di Mat., (2), t. XXIV, pág. 107 (1896).—*Lecciones de Geometría diferencial*, pág. 454.

Sean u, v un paralelo y un meridiano, pasando por un punto O de la superficie, y M un punto arbitrario de ella, el meridiano y el paralelo que pasan por M determinan respectivamente sobre u y v dos arcos, OP, OQ, cuyas longitudes u, v serán las coordenadas de M. Es manifiesta la analogía entre el sistema de coordenadas adoptado y el sistema cartesiano ortogonal.

Sea M′ un punto infinitamente próximo a M; si u, v son las coordenadas de M, las de M′ podrán indicarse con $u + du$, $v + dv$. Si ahora se considera el triángulo infinitesimal MM′N, cuyo tercer vértice N es el punto en que se encuentran el paralelo de M y el meridiano de M′, es claro que el ángulo $\widehat{MNM'}$ es recto, y que las longitudes MN, NM′ de los catetos son precisamente du, dv.

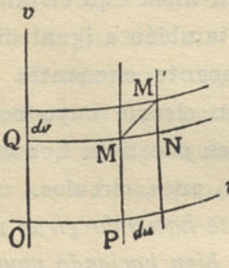


FIG. 68.

Por otra parte, el triángulo en cuestión puede mirarse como rectilíneo (situado en el plano tangente en M); así que, por las propiedades infinitesimales de los triángulos planos, su hipotenusa ds está ligada a los catetos du, dv por el teorema de PITÁGORAS:

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Pero esta forma para ds^2 es característica de la Geometría ordinaria; así que podemos desde luego afirmar que *en toda región normal de la superficie de* CLIFFORD *se verifican las propiedades del plano euclídeo.*

Una importante aplicación de este hecho conduce al cálculo del *área* de la cuádrica en cuestión. En efecto, descompongamos esta última en paralelogramos congruentes infinitesimales por medio de sus generatrices; el área de uno de estos paralelogramos tendrá la ordinaria expresión:

$$dx \cdot dy \cdot \operatorname{sen} \theta,$$

donde dx, dy representan las longitudes de los lados y θ el ángulo constante comprendido entre ellos (ang. de dos generatrices).

El área de la cuádrica será entonces

$$\Sigma dx \cdot dy \cdot \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta \cdot \Sigma dx \cdot \Sigma dy.$$

Pero ambas sumas, Σdx, Σdy, representan la longitud l de la recta, por lo que el área Δ de la superficie de CLIFFORD toma la sencillísima forma:

$$\Delta = l^2 \cdot \operatorname{sen} \theta,$$

idéntica a la que expresa el área de un paralelogramo euclídeo (CLIFFORD) (1).

INDICACIONES SOBRE EL PROBLEMA DE CLIFFORD-KLEIN.

§ 9. Las ideas de CLIFFORD, explicadas en los precedentes párrafos, condujeron a KLEIN a un nuevo modo de formular el problema fundamental de la Geometría. Queriendo dar una ligera indicación de las ideas de KLEIN, refirámonos a los resultados del § 68, relativos a la posibilidad de interpretar la Geometría plana con la de las superficies de curvatura constante. El parangón entre las propiedades de los planos euclídeo y no euclídeos y las de las superficies en cuestión fué entonces restringido a regiones convenientemente limitadas; ampliando el parangón a las *formas completas*, se encontrarán, en general, diferencias, imputables alguna vez a la presencia

(1) *Preliminary Sketch.....*, citado en la pág. 206.—Las propiedades de la cuádrica en cuestión, ligeramente indicadas por CLIFFORD en 1873, encontraron un mayor desarrollo en el trabajo de KLEIN: *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie* (Math. Ann., t. XXXVII, págs. 544-72, 1890).

de *puntos singulares* de las superficies (ejemplo, vértice de un cono), otras a la *conexión* de ellas.

Prescindamos de los puntos singulares, y como ejemplo de superficie de curvatura constante, *por todas partes regular*, dotada de una conexión distinta de la del plano euclídeo, consideremos el cilindro ordinario.

La diferencia entre la Geometría plana y la cilíndrica, entendidas una y otra en sentido integral, fué ya explicada (página 138), observando que el postulado de la congruencia entre dos rectas arbitrarias cesa de ser verdadero en el cilindro. Sin embargo, existen numerosas propiedades comunes a las dos Geometrías, teniendo su origen en el doble carácter de tener tanto el plano como el cilindro la misma curvatura y de ser ambos regulares.

Estas propiedades pueden resumirse diciendo:

1) La Geometría de *una* región normal del cilindro es idéntica a la Geometría de *una* región normal del plano.

2) La Geometría de una región normal *cualquiera* del cilindro, fijada en torno a un punto *arbitrario* de él, es idéntica a la Geometría de una región normal *cualquiera* del plano.

La importancia de un parangón entre la Geometría del plano y la de una superficie, fundado en las propiedades 1) y 2), surge de las siguientes consideraciones.

Una Geometría del plano, construída con criterios experimentales, depende de dos grupos distintos de hipótesis. El primer grupo expresa la validez de ciertos hechos, directamente observado en un entorno accesible a las experiencias *(postulados de la región normal)*; el segundo grupo extiende a regiones inaccesibles algunas propiedades de la región inicial *(postulados de extensión)*.

Los postulados de extensión podrían pedir, por ejemplo, que sobre el plano completo fuesen válidas las propiedades de la región accesible; seremos conducidos entonces a las dos formas del plano, parabólica e hiperbólica; si en cambio dichos postulados pidiesen la extensión de las propiedades en cuestión, con eventual reserva para las que atribuyen a la recta los caracteres de línea abierta, junto a los dos planos indicados deberemos enumerar también el plano elíptico.

Pero las precedentes consideraciones sobre las superficies regulares de curvatura constante sugieren un modo más general de enunciar los postulados de extensión; podremos, en efecto, pedir simplemente que en torno a cada punto del plano sean verificadas las propiedades de la región inicial. Entonces la clase de las formas posibles del plano se amplía notablemente; se podría, por ejemplo, concebir una forma de curvatura nula, doblemente conexa y representable completamente sobre el cilindro del espacio euclídeo.

La investigación de todas las variedades de dos dimensiones, de curvatura constante, por todas partes regulares, es el objeto del problema de CLIFFORD-KLEIN.

§ 10. ¿Es posible realizar con convenientes superficies regulares de curvatura constante del espacio euclídeo todas las *formas de* CLIFFORD-KLEIN?

La respuesta es negativa, como resulta claramente del siguiente ejemplo. La única superficie regular *desarrollable* del espacio euclídeo, cuya Geometría no sea idéntica a la del plano, es el cilindro de sección cerrada: por otra parte, la cuádrica de CLIFFORD del espacio elíptico es una superficie regular, de curvatura nula, esencialmente diversa del plano y del cilindro.

Sin embargo, con oportunas *convenciones* se puede *representar*, en el espacio ordinario, también la cuádrica de CLIFFORD.

Refirámonos en primer lugar al cilindro. Queriendo *desarrollar* el cilindro, es necesario hacerlo *simplemente conexo* con un corte a lo largo de una generatriz (g); después, con flexión sin extensión, se le adapta sobre el plano, recubriendo una *zona* comprendida entre dos paralelas (g_1, g_2).

Entre los puntos del cilindro y los de la zona existe una correspondencia *biunívoca;* hacen sólo excepción los puntos de la generatriz g, a cada uno de los cuales corresponden dos puntos, situados uno sobre g_1, otro sobre g_2. Pero si se *conviene* en mirar estos dos puntos como *idénticos*, esto es, como un único punto, entonces la correspondencia resulta *biunívoca*, sin excepción, y *la Geometría de la zona es enteramente la misma que la del cilindro.*

Una representación análoga a la descrita se puede establecer también para la cuádrica de CLIFFORD. Primero se hace la superficie simplemente conexa con dos cortes a lo largo de las generatrices (g, g'), que pasan por un punto suyo, obteniendo, en el espacio elíptico, un paralelogramo alabeado, cuyos lados tienen cada uno la longitud de la recta y cuyos ángulos θ y θ' ($\theta + \theta' = 2\ \widehat{\text{rectos}}$) son los ángulos formados por g y g'.

Sentado esto, fijemos sobre el plano euclídeo un rombo cuyos lados tengan la longitud de la recta elíptica y cuyos ángulos sean θ y θ'. Sobre este rombo puede representarse *congruentemente* (desarrollarse) la cuádrica de CLIFFORD. La correspondencia entre los puntos de la superficie y los del rombo es biunívoca, con excepción de los puntos de g y g', a cada uno de los cuales corresponden dos, situados sobre lados opuestos del rombo. Sin embargo, si se conviene en mirar estos puntos como dos a dos idénticos, entonces la correspondencia resulta biunívoca sin excepción, y *la Geometría del rombo es enteramente idéntica a la de la cuádrica de* CLIFFORD (1).

§ 11. Las indicadas representaciones del cilindro y de la superficie de CLIFFORD nos muestran cómo, para el caso de la curvatura nula, la investigación de las formas de CLIFFORD-KLEIN puede reducirse a la determinación de polígonos euclídeos convenientes, eventualmente degenerados en zonas, cu-

(1) Cfr.: *Preliminary Sketch*.....—Véase, además, el citado (pág. 213) trabajo de KLEIN: *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie.*

yos lados son dos a dos transformables uno en otro con convenientes movimientos del plano, y cuyos ángulos tienen por suma cuatro ángulos rectos (KLEIN) (1). Después no quedará mas que mirar como idénticos dos a dos los puntos de los lados susodichos para tener sobre el plano ordinario las imágenes de las formas pedidas.

De modo análogo se presenta la investigación de las formas de CLIFFORD-KLEIN, para el valor positivo y negativo de la curvatura y la ulterior extensión al espacio de dicho problema (2).

(1) Obra citada.
(2) Un estudio sistemático del problema de CLIFFORD-KLEIN se encuentra en la obra de W. KILLING: *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Bd. I, págs. 271-349 (Paderborn, 1893).

NOTA III

La construcción de paralelas no euclidianas.

1. La construcción de paralelas no euclidianas depende de la adjunción de triángulos rectángulos y de cuadriláteros trirectángulos; en efecto, resulta inmediatamente, cuando esta adjunción es conocida, una serie de construcciones distintas (1).

Para poder expresar esta adjunción introduciremos las notaciones siguientes: sea c la hipotenusa del triángulo rectángulo, a y b los catetos, λ y μ sus ángulos opuestos. Además serán designados con letras griegas $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu)$ los ángulos de paralelismo pertenecientes a los segmentos designados por las letras latinas (a, b, c, d, m) (V. más atrás, § 40), y dos segmentos, cuyos ángulos de paralelismo son complementarios, serán distinguidos uno de otro con un acento; así será, por ejemplo:

$$\Pi(a') = \frac{\pi}{2} - \Pi(a), \quad \Pi(l') = \frac{\pi}{2} - \Pi(l),$$

etcétera.

Entonces es válido el teorema: *A cada triángulo rectángulo* (a, b, c, λ, μ) *corresponde un cuadrilátero trirectángulo con el cuarto (agudo) ángulo* β, *cuyos lados se ven desde el vértice del ángulo agudo en el orden* c, m', a, l.

Es válido aun el inverso de este teorema.

(1) Véase pág. 256 de la obra de ENGEL (citada en el § 38).

De esto se deduce la siguiente construcción (fig. 69): Para trazar por A la paralela BC, se baja la perpendicular AB a BC; luego se levanta la perpendicular a AB en A, y por fin, desde C se traza la altura (Lot) CD; ahora se halla la intersección con DC del círculo cuyo centro es A y cuyo radio es $AE = BC = c$. AE es entonces paralela a BC, porque

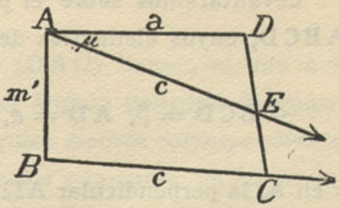


FIG. 69.

$$\sphericalangle EAD = \mu,$$

puesto que

$$\sphericalangle BAE = \frac{\pi}{2} - \mu = \Pi(m').$$

Para evitar las fórmulas trigonométricas en la demostración de esta construcción se puede tratar de demostrar directamente que la prolongación de la recta AE (simplemente a causa de la igualdad de BC y AE) no corta a la prolongación de BC, pero también que no tiene con ella ninguna altura (Lot) común, y que por consiguiente debe ser paralela a ella. Esta demostración no ha sido tratada hasta ahora.

Se puede además justificar la construcción demostrando el teorema que dice que en el triedro de aristas paralelas la suma de los ángulos diedros es dos rectos, y en un n — edro de aristas paralelas dicha suma es $(2n - 4)$ rectos (V. § 48) (1).

Finalmente, es también posible deducir, sin utilizar la Geometría no euclidiana del espacio, que la adjunción de que se trata en el anterior teorema—la construcción de paralelas hasta aquí hechas, como ya lo muestra la figura 69, sólo en parte se usará—es demostrable.

(1) Véase LOBATSCHEFSKI. (Trad. de ENGEL), pág. 171.

2. *Demostración directa de la construcción por medio de poliedros radiados de aristas paralelas.*

Levantaremos sobre el plano del cuadrilátero trirectángulo ABCD, cuyos elementos determinantes designaremos con:

$$\sphericalangle \mathrm{BCD} = \beta, \ \mathrm{AD} = a, \ \mathrm{DC} = l, \ \mathrm{CB} = c, \ \mathrm{BA} = m',$$

y en A, la perpendicular AΩ, y por B, C y D trazaremos las paralelas BΩ, CΩ, DΩ.

Después tracemos por A la paralela AΘ a BC, que encuentra

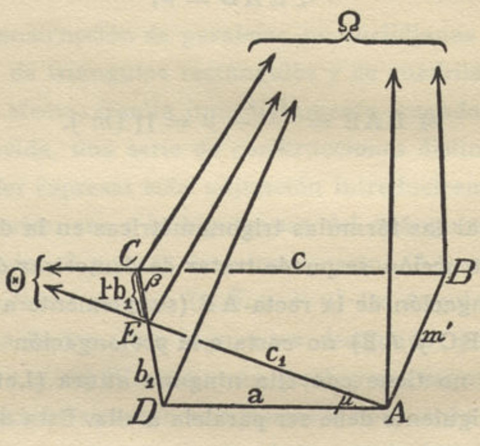


FIG. 70.

a CD en E ($\mathrm{ED} = b_1$), y por AΩ y E hagamos pasar un plano que corta a CDΩ según E Ω. Por definición es entonces

$$\sphericalangle \mathrm{EAD} = \frac{\pi}{2} - \Pi(m') = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = \mu.$$

Se establece en seguida que el plano ΩAB es perpendicular a a y que el plano ΩDA lo es a l, porque ΩA y AB son perpendiculares a a y ΩD y a lo son a l.

Además es

$$\sphericalangle AB\Omega = \sphericalangle \theta AB = \frac{\pi}{2} - \mu.$$

Los dos triedros C (DBΩ) y E (DAΩ) tienen, el uno a lo largo de la arista CΩ (porque en el ángulo poliedro de cuatro aristas paralelas Ω (ABCD) los ángulos diedros correspondientes a las aristas ΩA, ΩB y ΩD son rectos y la suma de los cuatro ángulos diedros es igual a cuatro ángulos rectos), el otro a lo largo de EA, un ángulo diedro recto; además el ángulo diedro de CD es idéntico al de ED (por tanto, igual a α).

Nosotros conocemos también la igualdad del tercer ángulo diedro. Este tercer ángulo diedro es en el primer triedro igual al ángulo de los planos ABCD y CBΩ; por tanto, igual a

$$\frac{1}{2}\pi - \mu = \sphericalangle AB\Omega.$$

En el segundo triedro, el ángulo diedro en EΩ es igual, como fácilmente se calcula, porque también pertenece al triedro de aristas paralelas Ω (ADE), al ángulo diedro en ΩD, que, como sabemos, vale un recto, menos el correspondiente a ΩA, que es igual a μ; por tanto, el ángulo diedro EΩ es igual a $\frac{1}{2}\pi - \mu$.

Así, pues, el triedro C (DBΩ) es congruente con el triedro E (DΩA).

De aquí se deduce que

$$\sphericalangle BC\Omega = \sphericalangle \Omega EA,$$

y las perpendiculares correspondientes a estos ángulos de paralelismo

$$C = BC \text{ y } C_1 = AE$$

son iguales entre sí, como queríamos demostrar.

Se deduce todavía de esto que

$$\sphericalangle\ DEA = \sphericalangle\ DC\Omega,$$

es decir, que en el triángulo, el ángulo (λ_1) opuesto al lado a es

$$\lambda_1 = \Pi\,(l) = \lambda;$$

y finalmente,

$$\sphericalangle\ DCB = \sphericalangle\ DE\Omega;$$

es decir,

$$\beta = \Pi\,(b_1) \text{ o } b_1 = b.$$

Con esto queda completamente demostrada la adjunción que en el teorema anterior se enuncia (1).

3. *Demostración de la adjunción en el plano.*—Prolonguemos en el triángulo rectángulo ABC (fig. 71) la hipotenusa AB = C

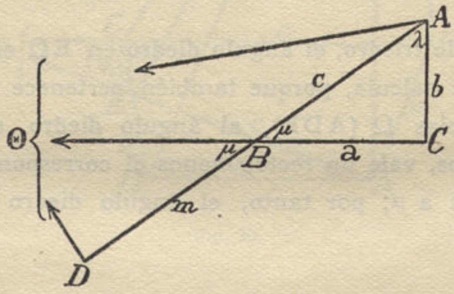


Fig. 71.

hasta el pie D de la perpendicular común a las paralelas a la prolongación de BC; según las notaciones antes introducidas, es

$$BD = m.$$

(1) Bonola: *Ist. Lomb. Rendiconti.* Serie II, vol. 37 (1904), páginas 255-58. Ya antes fué demostrado este teorema, también con método puramente geométrico, por F. Engel: *Bull. de la Soc. Physico-Mathématique,* Kasan (2) VI (1896), y en los *Berichten der K. S. G. d. W., Math-Phys,* Klasse 50 (Leipzig, 1898), págs. 181-87.

Tracemos ahora las paralelas por A a Dθ y a CBθ; se tiene:

$$\sphericalangle \text{CAD} = \beta \, (= \Pi\,(b),$$

y también igualmente

$$\lambda + \sphericalangle \text{DA}\Theta = \lambda + \Pi\,(c+m).$$

Obtenemos así la primera de las seis siguientes relaciones, de las cuales la tercera y la quinta se obtienen por construcciones semejantes; la segunda, cuarta y sexta resultan de lo que antecede, cada vez que se permutan los catetos a y b y paralelamente los ángulos λ y μ. De este modo se deduce la tabla (1):

$$\lambda + \Pi\,(c+m) = \beta, \qquad \mu + \Pi\,(c+l) = \alpha;$$

$$\lambda + \beta = \Pi\,(c-m), \qquad \mu + \alpha = \Pi\,(c-l);$$

$$\Pi\,(b+l) + \Pi\,(m-a) = \frac{1}{2}\pi, \qquad \Pi\,(m+a) + \Pi\,(l-b) = \frac{1}{2}\pi.$$

Relaciones semejantes a éstas pueden deducirse también, para el cuadrilátero trirectángulo, por medio de construcciones análogas, prolongando ciertos lados, trazando las perpendiculares a ellos que son paralelas a los otros lados construídos, etc. Designemos en el cuadrilátero con β_1 el ángulo agudo y los lados con c_1, m'_1, a_1, l_1; se obtiene la tabla:

$$\lambda_1 + \Pi\,(c_1+m) = \beta_1, \qquad \gamma_1 + \Pi\,(l_1+a'_1) = \beta_1,$$

$$\lambda_1 + \beta_1 = \Pi\,(c_1-m), \qquad \gamma_1 + \beta_1 = \Pi\,(l_1-a'_1),$$

$$\Pi(l_1+b_1) + \Pi\,(m_1-a) = \frac{1}{2}\pi, \qquad \Pi\,(c_1+b_1) + \Pi\,(a'_1-m'_1) = \frac{1}{2}\pi.$$

Las fórmulas segunda, cuarta y sexta se deducen permutando en las otras c_1 y m'_1 con l_1 y a_1 (como en el triángulo rectángulo). Supongamos ahora construído un triángulo rectángulo con la

(1) Véase LOBATSCHEFSKI. (Trad. de ENGEL), págs. 15-16.

hipotenusa c y uno de los ángulos adyacentes μ, y cuyos restantes elementos serán designados, según sabemos, por a, b, λ; igualmente sea un cuadrilátero trirectángulo, con el ángulo agudo contiguo a c, y el otro lado de él sea m'; los elementos restantes sean a_1, l_1 y β_1. Entonces resulta de la comparación de la primera y tercera fórmulas referentes al triángulo, con la primera y tercera correspondientes al cuadrilátero, que también es

$$\beta_1 = \beta, \lambda_1 = \lambda.$$

Las fórmulas quinta de ambas tablas dan entonces

$$a_1 = a.$$

Con esto queda una vez más demostrado el teorema.

De las dos tablas de fórmulas podrá ulteriormente deducirse que a un cuadrilátero trirectángulo con los elementos (a, b, c, λ, μ) corresponde un segundo con los elementos:

$$a_1 = a, b_1 = l', c_1 = m, \lambda_1 = \frac{\pi}{2} - \beta; \mu_1 = \gamma',$$

circunstancia muy importante para las ulteriores construcciones. Pero en esto no queremos entrar.

Las construcciones hasta aquí hechas dependen totalmente de fundamentos *métricos;* pero se puede también utilizar el hecho de que los conceptos métricos de ortogonalidad y de paralelismo tienen una significación proyectiva (§ 79) y de que la Geometría proyectiva es independiente del postulado de las paralelas (§ 80).

¿Cómo se podrán encontrar, según esto, por ejemplo, las dos paralelas a una recta, pasando por un punto A?

Sean sobre g los puntos P_1, P_2, P_3 y P'_1, P'_2, P'_3, de modo que los puntos designados con letras acentuadas todos están a un mismo lado de los correspondientes puntos sin acentos, y que sea

$$P_1 P'_1 = P_2 P'_2 = P_3 P'_3;$$

se une A con P_1, P_2 y P_3, y se designan las tres rectas por s_1, s_2, s_3, así como se une con P'_1, P'_2, P'_3 por medio de las tres rectas s'_1, s'_2, s'_3. Con estos tres pares de rayos queda definida una proyectividad en el haz de rayos (s), cuyos elementos dobles son evidentemente las dos paralelas buscadas. Estos elementos dobles podrán ser construídos por los métodos de la Geometría proyectiva (1).

La cónica absoluta está entonces determinada por cinco puntos (esto es, cinco pares de paralelas), y con esto se transforman todos los demás problemas métricos en proyectivos. Represéntese (véase el § 84) la Geometría de Lobatschefsky-Bolyai de modo que la imagen de la cónica absoluta pueda ser una cónica dada y situada en lo finito; entonces, con esta «traducción», los problemas de la Geometría no euclidiana plana se pueden resolver de un modo sencillo y elegante, como ha demostrado M. Grossmann (2). Pero no debe olvidarse que esta sencillez se volverá a perder en cuanto pasemos de la «traducción» al «texto original».

En el plano no euclidiano la cónica fundamental es inaccesible y sus puntos sólo están dados por haces de paralelas; los puntos exteriores a la cónica fundamental, que en la «traducción» son accesibles, en el «texto original» ya son inaccesibles; existen aquí haces de rectas que no se cortan en un punto, sino que precisamente pasan por el polo (ideal) de una cierta recta y situado sobre la cónica fundamental.

Al querer traducir realmente todas las construcciones se presentan en seguida dificultades semejantes a las que se encuentran en la traducción de un idioma extranjero, donde muy a menudo un adjetivo debe parafrasear a una larga proposición.

---

(1) Véase, por ejemplo, la trad. alemana de Enriques: *Projektive Geometrie* (citada también en el § 79), § 73, pág. 256.

(2) M. Grossmann: *Die fundamentalen Konstruktionen der nicht-euklidische Geometrie. Programm der Thurganischen Kantonschule.* Frauenfeld, 1904.

INDICE DE LOS AUTORES CITADOS

CH

D

E

F

G

H

K

L

ÍNDICE

Páginas.

CAPITULO IV

Los fundadores de la Geometría no euclidiana.

(Continuación.)

CAPITULO V

Los desarrollos sucesivos de la Geometría no euclidiana.

Dirección métrico-diferencial.

Dirección proyectiva.

Páginas.

NOTA I

Los principios fundamentales de la Estática y el postulado de Euclides.

NOTA II

Las paralelas y la superficie de Clifford.—Indicaciones sobre el problema de Clifford-Klein.

NOTA III

La construcción de pàralelas no euclidianas (pág. 218.)