

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 12

Übungsaufgaben

AUFGABE 12.1. Berechne die ersten fünf Glieder des Cauchy-Produkts der beiden konvergenten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

AUFGABE 12.2. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

AUFGABE 12.3. Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei absolut konvergente Potenzreihen in $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

gegeben ist.

AUFGABE 12.4. Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von x) die Summen der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}.$$

AUFGABE 12.5. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten c_i zu den Potenzen x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 in der dritten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^3.$$

AUFGABE 12.6.*

Wir betrachten das Polynom

$$P = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3.$$

- (1) Berechne die Werte von P an den Stellen $-2, -1, 0, 1, 2$.
- (2) Skizziere den Graphen von P auf dem Intervall $[-2, 2]$. Gibt es einen Bezug zur Exponentialfunktion e^x ?
- (3) Bestimme eine Nullstelle von P innerhalb von $[-2, 2]$ mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{4}$.

AUFGABE 12.7. Berechne von Hand die ersten vier Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$\exp 1.$$

AUFGABE 12.8. Zeige die folgenden Abschätzungen.

a)

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!},$$

b)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

AUFGABE 12.9. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

- (1) Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
- (2) Es ist $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.
- (3) Für $b > 1$ und $x > 0$ ist $b^x > 1$.
- (4) Für $b < 1$ und $x > 0$ ist $b^x < 1$.
- (5) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
- (6) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
- (7) Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
- (8) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

AUFGABE 12.10.*

Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

stetig ist.

AUFGABE 12.11. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

bei $b > 1$ streng wachsend und bei $b < 1$ streng fallend ist.

AUFGABE 12.12.*

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ gibt.

AUFGABE 12.13. Zeige, dass eine Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto b^x,$$

aus einem arithmetischen Mittel ein geometrisches Mittel macht.

AUFGABE 12.14.*

Es sei

$$f(x) = a^x$$

eine Exponentialfunktion mit $a \neq 1$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ definiert die Gerade durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x + 1, f(x + 1))$ einen Schnittpunkt mit der x -Achse, den wir mit $s(x)$ bezeichnen. Zeige

$$s(x + 1) = s(x) + 1.$$

Skizziere die Situation.

AUFGABE 12.15. Man gebe ein Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

mit $f(0) = 1$ und mit $f(x + 1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die von 2^x verschieden ist.

AUFGABE 12.16.*

Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei Exponentialfunktionen keine Exponentialfunktion sein muss.

AUFGABE 12.17.*

Es sei $u \in \mathbb{R}$ fixiert. Zeige, dass die Potenzfunktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^u,$$

stetig ist.

AUFGABE 12.18. Es sei b eine positive reelle Zahl und $q = n/m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die durch

$$b^q := (b^n)^{1/m}$$

definierte Zahl unabhängig von der Bruchdarstellung für q ist.

AUFGABE 12.19. Es sei $a > 0$ und $q = \frac{r}{s}$ eine rationale Zahl. Zeige, dass die Schreibweise

$$a^q = \sqrt[s]{a^r}$$

mit der Definition

$$a^q = \exp(q \ln a)$$

verträglich ist.

AUFGABE 12.20.*

Berechne

$$2^{\frac{9}{10}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

AUFGABE 12.21. Berechne

$$5^{\frac{3}{7}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

AUFGABE 12.22.*

Vergleiche die beiden Zahlen

$$\sqrt{3}^{-\frac{9}{4}} \text{ und } \sqrt{3}^{-\sqrt{5}}.$$

AUFGABE 12.23. Vergleiche die drei Zahlen

$$2^{\sqrt{3}}, 4, 3^{\sqrt{2}}.$$

AUFGABE 12.24. Seien $b, d > 0$. Zeige

$$\lim_{b \rightarrow 0} b^d = 0.$$

AUFGABE 12.25. Sei $b > 0$. Zeige

$$\lim_{d \rightarrow 0} b^d = 1.$$

AUFGABE 12.26.*

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}}$$

(mit $n \geq 1$) in \mathbb{R} konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 12.27. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

- (1) Es ist $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(y)} = y$, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b .
- (2) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
- (3) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.

(4) Es gilt

$$\log_a y = \log_a (b^{\log_b y}) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 12.28. (4 Punkte)

Berechne e^3 mit Hilfe der Exponentialreihe bis auf einen Fehler von $\frac{1}{1000}$.

Die Restgliedabschätzung aus Aufgabe 12.31 darf verwendet werden.

AUFGABE 12.29. (3 Punkte)

Berechne die Koeffizienten c_0, c_1, \dots, c_5 der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, die das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe ist.

AUFGABE 12.30. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5$ in der vierten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^4.$$

AUFGABE 12.31. (5 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$R_{N+1}(x) = \exp x - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $|x| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*

$$|R_{N+1}(x)| \leq \frac{2}{(N+1)!} |x|^{N+1}$$

gilt.

AUFGABE 12.32. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge

$$\left(\frac{\exp n}{n^d} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.¹

¹Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.

AUFGABE 12.33. (2 Punkte)

Zu Beginn des Studiums ist Professor Knopfloch doppelt so schlau wie die Studenten. Innerhalb eines Studienjahres werden die Studenten um 10% schlauer. Leider baut der Professor ab und verliert pro Jahr 10% seiner Schlaueit.

- (1) Zeige, dass nach drei Studienjahren der Professor immer noch schlauer als die Studenten ist.
- (2) Zeige, dass nach vier Studienjahren die Studenten den Professor an Schlaueit übertreffen.

AUFGABE 12.34. (2 Punkte)

Eine Wahrungsgemeinschaft habe eine Inflation von jahrlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7