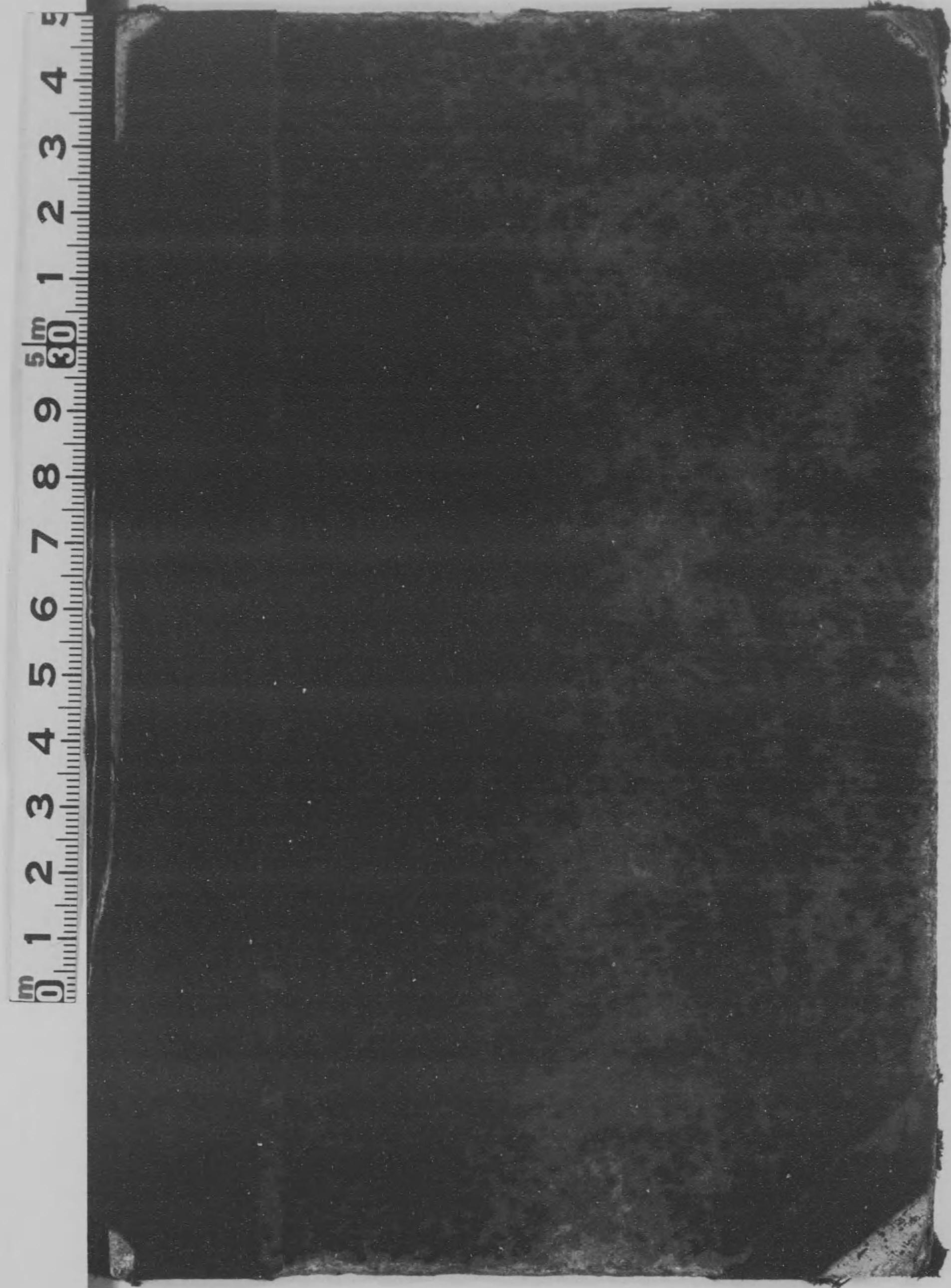
始



# 三角法
# 模範問題解義

宮本藤吉著

株式會社
明治書院

# 緒言

本書ハ其名ノ示スガ如ク、既ニ此学ノ大要ヲ習得セル学生ノ復習用ニ供センガ為メニ編纂シタルモノナリ。
其名ノ示ガ如ク既ニ

現時世ニ行ハルヽ同種ノ書物ヲ通覧スルニ、其殆ド總ベテハ徒ラニ價値少ナキ多數ノ問題ヲ秩序ナク羅列シ、之ニ姑息ノ解釋ヲ施シタルモノナリト云フモ過言ニアラズ。若シ此ノ如キ書物ニ就キテ攻究センカ、單ニ長キ時日ヲ要スルノミナラズ、要領ヲ見出ダスニ苦シミ、散漫ナル知識ヲ得ルニ止マルベシ。

著者之ニ鑑ミル所アリ、博ク欧米ノ名著ヲ閲シ、模範的問題ヲ選ビ、之ヲ多年考案シタル方法ニテ詳密ニ分類シ、且ツ之ニ嚴正ノ解釋ヲ与ヘ、併セテ其活用ノ方法ヲモ示スコトヽシタリ。想フニ本書一冊ノ攻究ハ同種ノ書物冊ノソレニ比シテ勝ルコト疑ヒナカルベシ。

巻末ニ附録トシテ大正元年以降ノ諸官立学校入学試驗問題ヲ載セ、之ヲ詳解シ、出題者ノ不注意ヲ指摘シ、且ツ問題ノ不備ヲ補正シタリ。是レ亦学生ノ大ニ便益ヲ感ズル所ナラント信ズ。

望ムラクハ多數ノ学生諸君、能ク本書ノ主旨ヲ体シテ其目的ヲ達成セラレンコトヲ。

大正五年四月、東京ニ於テ

宮本藤吉識.

# 目　次

附 錄

# 三角法
# 模範問題解義

(＊ヲ付シタル問題ハ稍困難ナルヲ以テ他ヲ讀了シタル後ニ之ヲ讀ムベシ)

## 緒論

〔1〕 **三角法ノ定義** 三角法ハ英語ニテ trigonometry ト云フ，蓋シ二ツノ希臘語 trigonon (三角形ノ意)，metron (測ルノ意) ガ結合シテ trigonometria (三角形ヲ測ル學問ノ意) トナリ之ガ轉化シタルモノナリ．故ニ往時ニ於テ此學ハ三角形ニ關スル計算ヲ爲スヲ以テ主要ノ目的トナシタルモノナリシガ，世ノ進ムニ從ヒテ次第ニ其區域ヲ擴張シ，今日ニ於テハ次ギノ定義ヲ下スコトトナレリ．

三角法ハ數學ノ一科ニシテ三角函數 (此術語ノ意義ハ第 (6) 條ニ在リ) ヲ論ズル學ナリ．

故ニ嚴密ニ言ハバ三角函數學ト稱スベキナレドモ，舊慣ニ從ヒ三角法ト稱シ居ルナリ．

〔2〕 **角ヲ測ル法** 三角函數ノ攻究ニハ先ヅ角ヲ測ルコト換言スレバ角ヲ數ニテ表ハスコトヲ知ラザルベカラズ．

角ヲ測ル法ハ通常次ノ二ツナリ.

**第一. 實用的測角法卽チ六十分法.**

(直角ノ $\dfrac{1}{90}$ 卽チ正三角形ノ一角ノ $\dfrac{1}{60}$)$=1°$,

$1°=60'$,　$1'=60''$.

秒ヨリモ小ナル角ハ秒ノ小數ニテ表ハス.

**第二. 理論的測角法卽チ弧度法.**

半徑ト等長ナル弧ノ上ニ立ツ中心角ヲ一「レーディアン」(或ハ一弧度又ハ一輻トモ云フ)ト名ヅケ, 之ヲ單位トシテ角ヲ測ル法ナリ.

**〔3〕 六十分法ト弧度法トノ關係** 圓ノ半徑ヲ R トスレバ半圓周ハ $\pi$R ナリ. 然ルニ半圓周ノ上ニ立ツ中心角ハ 180° ニシテ, 半圓周ハ R ノ $\pi$ 倍ナリ.

∴　180° ハ $\pi$「レーディアン」ナリ.

卽チ　$180°=\pi$.

**注意** $\pi$「レーディアン」ヲ單ニ $\pi$ ト書ク代ハリニ $\pi^{\circ}$ ト書キテモ可ナリ.

## 問　題

**·1.** 27° 10′ 16″ ヲ直角ノ小數ニテ表ハセ.

**【解】** 先ヅ 16″ ヲ分ノ小數ニ變ズルタメ 16 ヲ 60 ニテ除シ $\cdot 2\dot{6}$ ヲ得. 卽チ 10′16″ ハ $10'\cdot 2\dot{6}$ ナリ.

次ギニ 10′16″ ヲ度ノ小數ニ變ズルタメ $10\cdot 2\dot{6}$ ヲ 60 ニテ除シ $\cdot 17\dot{1}$ ヲ



得. 卽チ 27° 10′ 16″ ハ $27°\cdot 17\dot{1}$ ナリ.

終リニ 27° 10′ 16″ ヲ直角ノ小數ニ變ズルタメ $27\cdot 17\dot{1}$ ヲ 90 ニテ除シ $\cdot 30\dot{1}90123456\dot{7}$ ヲ得. 卽チ 27° 10′ 16″ ハ $\cdot 30\dot{1}90123456\dot{7}$ 直角ナリ.

此計算ヲ通例下ノ如ク簡單ニ表示ス

$$\begin{array}{r|ll}
60 & 16 & \\
\hline
60 & 10\cdot 2\dot{6} & [10'\,16'' \text{ ヲ分ニテ表ハシタルモノ}] \\
\hline
90 & 27\cdot 17\dot{1} & [27°\,10'\,16'' \text{ ヲ度ニテ表ハシタルモノ}] \\
\hline
 & \cdot 30\dot{1}90123456\dot{7} & (\text{答})
\end{array}$$

**·2.** $\cdot 30\dot{1}90123456\dot{7}$ 直角ヲ度, 分, 秒ニテ表ハセ.

**【解】**

$$\begin{array}{r} \cdot 30\dot{1}90123456\dot{7} \\ 90 \\ \hline 27\cdot 17\dot{1} \end{array}(\times\ [\text{度ノ數}] \qquad \begin{array}{r} \cdot 17\dot{1} \\ 60 \\ \hline 10\cdot 2\dot{6} \end{array}(\times\ [\text{分ノ數}] \qquad \begin{array}{r} \cdot 2\dot{6} \\ 60 \\ \hline 16 \end{array}(\times\ [\text{秒ノ數}]$$

(答) 27° 10′ 16″.

**·3.** 三角形ノ三ツノ角ヲ夫々 1°, 100′, 10000″ ナル單位ニテ測リタル數ガ 2, 1, 3 ニ比例スルトキハ其各角ノ度數如何.

**【解】** 第一, 第二ノ二角ノ度數ヲ夫々 $x$, $y$ トスレバ, 第三角ノ度數ハ $180-(x+y)$ ナリ. ∴ 題意ニ由リ次ギノ方程式ヲ得:

$$\frac{x}{2}=\frac{\frac{60y}{100}}{1}=\frac{\frac{60^2\{180-(x+y)\}}{10000}}{3}.$$

之ヲ簡單ニスレバ　$\dfrac{x}{2}=\dfrac{3y}{5}=\dfrac{3\{180-(x+y)\}}{25}$.

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{3y}{5}$ ヨリ $5x=6y$............(i);

$\dfrac{3y}{5}=\dfrac{3\{180-(x+y)\}}{25}$ ヨリ $x+6y=180$............(ii).

(ii) ニ (i) ヲ代用スレバ $6x=180$, 卽チ $x=30$.

之ヲ (i) ニ代用スレバ $y=25$, 從ツテ $180-(x+y)=125$.

(答) 30°, 25°, 125°.

**4.** 三角形ノ各角ヲ單位トシテ他ノ二角ノ和ヲ測リタル三數ガ等差級數ヲナストキハ其等ノ角ハ調和級數ヲナスコトヲ證セヨ.

【解】 三ツノ角ノ度數ヲ $x, y, z$ トスレバ, $x+y+z=180$ ナルヲ以テ $y+z=180-x$, $z+x=180-y$, $x+y=180-z$ ナリ.

∴ 題意ニ由リ $\dfrac{180-x}{x}+\dfrac{180-z}{z}=2\dfrac{180-y}{y}$.

之ヲ簡單ニスレバ $\dfrac{180}{x}-1+\dfrac{180}{z}-1=2\dfrac{180}{y}-2$, 即チ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y}$.

∴ $x, y, z$ ハ調和級數ヲナスコトヲ知ル.

**5.** 2 時 34 分 56 秒ノ時刻ニ於ケル時計ノ兩針ノ交角如何.

【解】 短針ノ速度ハ長針ノソレノ 12 分ノ 1 ナルガ故ニ, 所題ノ時刻ニ於テ時計ノ板面上 XII ナル數字ヨリ起算セル短針ノ分(時)ノ數ハ

$$10+34\frac{56}{60}\times\frac{1}{12} \text{ ナリ.}$$

∴ 兩針間ノ分(時)ノ數ハ $34\dfrac{56}{60}-\left(10+34\dfrac{56}{60}\times\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{991}{45}$ ナリ.

然ルニ 60 分(時)ニ應ズル角ハ 360° ナルヲ以テ, 所求ノ度數ハ

$$\frac{991}{45}\times\frac{360}{60}=132\frac{2}{15} \text{ ナリ.} \qquad \text{(答)}\ 132°\,8'.$$

**6*.** 二ツノ正多角形ノ一角ノ比ガ邊數ノ比ニ等シキトキハ此二形ノ邊數如何.

【解】 二形ノ邊數ヲ $x, y$ トスレバ各形ノ一角ハ直角ヲ單位トシテ夫々

$$2-\frac{4}{x},\quad 2-\frac{4}{y} \text{ ナリ.}$$



∴ 題意ニ由リ $\dfrac{2-\dfrac{4}{x}}{2-\dfrac{4}{y}}=\dfrac{x}{y}$.

之ヲ解セントスルニ先ヅ $y \neq 0$, $2-\dfrac{4}{y}\neq 0$ ナル故分母ヲ去リ且 2 ニテ除シテ

$$y-\frac{2y}{x}=x-\frac{2x}{y},\quad \text{即チ}\quad x-y=2\frac{x^2-y^2}{xy}.$$

∴ $x-y=0$ ……………………(i),

或ハ $1=\dfrac{2(x+y)}{xy}$ ……………(ii).

(i) ヨリ $x=y$.

(ii) ヨリ $x=\dfrac{2y}{y-2}=2+\dfrac{4}{y-2}$.

$y \gtreqless 3$ ナルコト明カナル故此方程式ニ $y=3$ ヲ用フレバ $x=6$. 又 $y=4$ ヲ用フレバ $x=4$, $y=5$ ヲ用フレバ $x=3\frac{1}{3}$ (之ハ採用スルコトヲ得ズ), $y=6$ ヲ用フレバ $x=3$, $y=7$ ヲ用フレバ $x=2\frac{4}{5}$ (之モ採用スルコトヲ得ズ), $y$ ニ 7 ヨリ大ナル整値ヲ與フレバ $x$ ハ恒ニ整數トナラズ.

之ヲ要スルニ所求ノ邊數ハ相等シキカ或ハ 3, 6 或ハ 6, 3 ナリ.

**7.** 15°26′6″ ヲ弧度ニテ表ハセ.

【解】

| | | |
|---|---|---|
| 60 | 6 | |
| 60 | 26·1 | [26′ 6″ ヲ分ニテ表ハシタルモノ] |
| | 15·435 | [15°26′ 6″ ヲ度ニテ表ハシタルモノ] |

π「レーディアン」=180° ナルヲ以テ (第 3 條參照), 所求ノ弧度ノ數ヲ $x$ トスレバ次ギノ比例式ヲ得:

$$180 : 15{\cdot}435=\pi : x.$$

之ヲ計算スレバ $x={\cdot}08575\pi$. (答) ·08575π「レーディアン」.

**8.** $\dfrac{4}{3}\pi$「レーディアン」ヲ六十分法ニテ表ハセ.

【解】 $\pi$「レーディアン」$=180^\circ$ ナルヲ以テ(第 3 條參照)

$\frac{4}{3}\pi$「レーディアン」$=\frac{4}{3}\times180^\circ=240^\circ$............(答)

**9.** 同ジ子午線上ニテ 145·2 哩ヲ距ツル二地ノ緯度ノ差ヲ求ム. 但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トシ, 地球ノ直徑ヲ 7920 哩トセヨ.

【解】 二地ヲ過グル地球ノ半徑ノ交角ノ弧度ハ $\frac{145{\cdot}2}{7920\div2}$.

然ルニ一弧度ハ $\frac{180^\circ}{\pi}$ ナル故此交角ノ度數ハ

$$\frac{145{\cdot}2}{7920\div2}\times\frac{180}{\pi} \quad 卽チ \quad \frac{145{\cdot}2}{3960}\times180\times\frac{7}{22}.$$

之ヲ計算スレバ 2·1 トナル.

∴ 所求ノ緯度ノ差ハ $(2{\cdot}1)^\circ$ 卽チ $2^\circ6'$ ナリ.

---

# 一ツノ角ノ三角函數

〔4〕 **常數, 變數ノ定義** 一定ノ値ヲ有スル數ヲ常數ト云ヒ, 種々ナル値ヲ有スル數ヲ變數ト云フ.

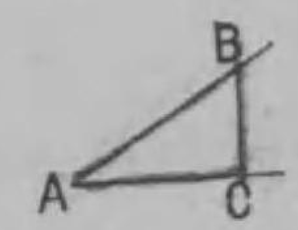
例ヘバ圓ノ半徑ヲ R トシ, 圓周ヲ C トスレバ, 幾何學ノ定理ニ由リ $C=2\pi R$ トナル. 此場合ニ於テ 2 ト $\pi$ トハ一定ノ値ヲ有スルモノニシテ卽チ常數ナリ, 然レドモ R ニハ種々ノ値ヲ與フルコトヲ得, C モ亦種々ノ値ヲ取リ得ルヲ以テ, R ト C トハ何レモ變數ナリ.

〔5〕 **函數ノ定義** 變數 $x$ ガ種々ノ値ヲ取ルニ從テ變數 $y$ ガ種々ノ値ヲ取ルトキハ, $y$ ヲ $x$ ノ函數ト云フ.



例ヘバ前條ノ場合ニ於テ C ハ R ノ函數ナルガ如シ.

又 ∠A ノ一邊上ニ任意ノ點 B ヲ取リ, B ヨリ他ノ邊ニ垂線 BC ヲ引ケバ, ∠A ガ種々ノ値ヲ取ルニ從ツテ此 $\frac{CB}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$ 等ハ種々ノ値ヲ取ルガ故ニ, 此等ノ比ハ何レモ ∠A ノ函數ナリ.



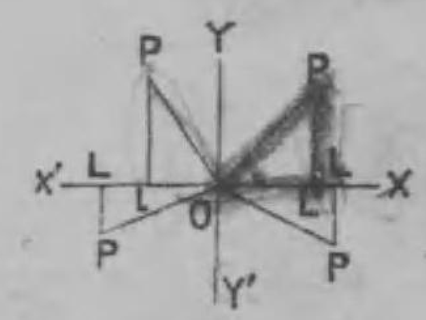

**注意** 此等ノ比ハ吾人ガ ∠A ノ三角函數ト名ヅクルモノニシテ, 三角函數トハ三角法ニ關スル函數ト云フ意ナリ.

〔6〕 **任意ノ角ノ三角函數ノ最モ正確ナル定義**

∠XOP ヲ A ト名ヅケ PL⊥XX′ トスレバ.

$$\sin A=\frac{LP}{OP},\quad \cos A=\frac{OL}{OP},\quad \tan A=\frac{LP}{OL},$$

$$\mathrm{cosec}\, A=\frac{OP}{LP},\quad \sec A=\frac{OP}{OL},\quad \cot A=\frac{OL}{LP}.$$




**注意 1.** △OLP ヲ ∠XOP ノ輔助三角形ト云フ. 此三角形ノ三邊ヲ呼ブニハ OL, LP, OP ト唱ヘ LO, PL, PO ト唱ヘザルヲ宜シトス. 例ヘバ $\sin A=\frac{PL}{OP}$ ナド唱フルハ不可ナリ, 上記ノ如ク $\frac{LP}{OP}$ ト唱フベシ. 他ノ函數亦然リ.

**注意 2.** *sin.* ト *cos.*, *tan.* ト *cot.*, *sec.* ト *cosec.* ハ夫々互ニ餘函數ヲナスト云フ.

〔7〕 **定義ヨリ直接ニ得ル公式**

$$\sin A \operatorname{cosec} A = \cos A \sec A = \tan A \cot A = 1,$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

〔8〕 $\overline{OL}^2 + \overline{LP}^2 = \overline{OP}^2$ **ナル性質ヨリ誘定セラルベキ公式**

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A, \quad 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A.$$

## 問　　題

**10.** $\tan A$ ヲ以テ A ノ他ノ三角函數ヲ表ハセ.

**【解】** $\cot A = \frac{1}{\tan A}$; $\sec A = \pm\sqrt{1+\tan^2 A}$; $\cos A = \frac{1}{\sec A} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$;

$$\sin A = \tan A \cos A = \pm\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}; \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}.$$

注意. 複號ハ總ベテ同ジ順序ニ採ルベシ.

[學生ハ此際 $\sin A$ ノ値ヲ求ムルニ $\sin A = \pm\sqrt{1-\cos^2 A}$ ト進ムコトヲ避ケテ上記ノ如ク進ムベシ. 何トナレバ $\pm\sqrt{1-\cos^2 A}$ ノ複號ト $\cos A$ ノ値ノ複號トノ順序ガ不明ナレバナリ.]

**11.** $\operatorname{cosec} A$ ヲ以テ A ノ他ノ三角函數ヲ表ハセ.

**【解】**

$$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}; \quad \cot A = \pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}; \quad \tan A = \frac{1}{\cot A} = \pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}};$$

$$\cos A = \sin A \cot A = \pm\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}}{\operatorname{cosec} A}; \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \pm\frac{\operatorname{cosec} A}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}}.$$

注意. 複號ハ總ベテ同ジ順序ニ採ルベシ.

[$\cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A}$ トシテ進マザリシハ前問ト同樣ノ理由ニ基ヅク.]

**12.** $\sec A = \frac{61}{11}$ ナルトキ A ノ他ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ.



**【解】** $\cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{11}{61}$;

$$\tan A = \pm\sqrt{\sec^2 A - 1} = \pm\sqrt{\left(\frac{61}{11}\right)^2 - 1} = \pm\frac{60}{11}; \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} = \pm\frac{11}{60};$$

$$\sin A = \cos A \tan A = \pm\frac{11}{61}\cdot\frac{60}{11} = \pm\frac{60}{61}; \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \pm\frac{61}{60}.$$

注意. 複號ハ總ベテ同ジ順序ニ採ルベシ.

[$\sin A$ ノ値ヲ求メタル方法ニ注意ヲ要ス.]

**13.** $\tan A = 2+\sqrt{3}$ ナルトキ A ノ他ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ.

**【解】** $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$;

$$\sec A = \pm\sqrt{1+\tan^2 A} = \pm\sqrt{1+(2+\sqrt{3})^2} = \pm\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \pm 2\sqrt{2+\sqrt{3}};$$

然ルニ代數學ニ於テ

$$\pm\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)$$

ナル公式アリ. 今之ヲ此場合ニ適用スレバ

$$\sec A = \pm 2\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \pm(\sqrt{6}+\sqrt{2});$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

$$\sin A = \cos A \tan A = \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(2+\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \pm\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \pm\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \pm(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

注意. 複號ハ總ベテ同ジ順序ニ採ルベシ.

[$\sin A$ ノ値ヲ求メタル方法ニ注意ヲ要ス.]

**14.** $\tan\phi = \frac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}$ ナルトキ $\operatorname{cosec}\phi$ ノ値如何.

【解】 $\operatorname{cosec}\phi=\pm\sqrt{1+\cot^2\phi}=\pm\sqrt{1+\dfrac{1}{\tan^2\phi}}=\pm\sqrt{1+\left(\dfrac{2mn+2n^2}{m^2+2mn}\right)^2}$

$$=\pm\frac{\sqrt{m^4+2m^2.2n(m+n)+\{2n(m+n)\}^2}}{m^2+2mn}=\pm\frac{m^2+2n(m+n)}{m^2+2mn}\quad(\text{答})$$

**15.** $\cot A=\dfrac{p}{q}$ ナルトキ $\dfrac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}$ ノ値如何.

【解】 $\dfrac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}=\dfrac{(p\cos A-q\sin A)\div\sin A}{(p\cos A+q\sin A)\div\sin A}=\dfrac{p\cot A-q}{p\cot A+q}$

$$=\frac{p\frac{p}{q}-q}{p\frac{p}{q}+q}=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

[學生ハ本問題ニ於テ $\cos A$, $\sin A$ ノ値ヲ求ムルコトナク直チニ $\cot A$ ヲ求メタル妙味ヲ賞翫セザルベカラズ.]

---

〔9〕 **三角恒等式** 三角函數ヲ含ム恒等式ヲ三角恒等式ト云フ.

〔10〕 **三角恒等式ヲ證明スル重要ナル方法**

イ. 既知ノ公式ヲ變形スルコト (問題 16 ヲ見ヨ);

ロ. 比較的複雜ナル一邊ヲ變形シテ他ノ一邊ヲ作ルコト (問題 17 ヲ見ヨ);

ハ. $\sin.$ 及ビ $\cos.$ ノミヲ含ム式トナスコト (問題18ヲ見ヨ);

ニ. 各邊ヲ別々ニ變形シテ比較スルコト (問題 19 ヲ見ヨ);

ホ. 簡單ナル恒等式ノ證明ニ歸セシムルコト (問題 20 ヲ見ヨ).



## 問題

**16.** $2\operatorname{cosec}^2A=1+\operatorname{cosec}^4A-\cot^4A$ ヲ證セヨ.

【解】 $1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A$ (公式)ナルヲ以テ $\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A-1.$

之ヲ平方ニスレバ $\cot^4A=\operatorname{cosec}^4A-2\operatorname{cosec}^2A+1.$

轉項スレバ $2\operatorname{cosec}^2A=1+\operatorname{cosec}^4A-\cot^4A.$

**17.** $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta+\cos\theta)(1+\sin\theta-\cos\theta)}$

$$=\frac{2\{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta\}}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}=\frac{2(1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2(2+2\sin\theta)}{2\sin\theta+2\sin^2\theta}\quad[\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ 1-\cos^2\theta=\sin^2\theta.]$$

$$=\frac{2(1+\sin\theta)}{\sin\theta(1+\sin\theta)}=\frac{2}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta.$$

**18.** $\tan^2A\sec^2A+\cot^2A\operatorname{cosec}^2A$

$=\sec^4A\operatorname{cosec}^4A-3\sec^2A\operatorname{cosec}^2A$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}\cdot\dfrac{1}{\cos^2A}+\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}\cdot\dfrac{1}{\sin^2A}=\dfrac{\sin^6A+\cos^6A}{\cos^4A\sin^4A}$

$$=\frac{(\sin^2A+\cos^2A)^3-3\sin^2A\cos^2A(\sin^2A+\cos^2A)}{\cos^4A\sin^4A}=\frac{1-3\sin^2A\cos^2A}{\cos^4A\sin^4A}$$

$$=\frac{1}{\cos^4A\sin^4A}-\frac{3\sin^2A\cos^2A}{\cos^4A\sin^4A}=\sec^4A\operatorname{cosec}^4A-3\sec^2A\operatorname{cosec}^2A.$$

**注意** 本問ノ如クニシテ次ギノ二ツノ恒等式ヲ證スルコトヲ得:

(i) $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}$.

(ii) $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\operatorname{cosec} A$.

**19.** $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\{1+(1-\cos^2 A)\}\{1+2(\operatorname{cosec}^2 A-1)\}$

$=(1+\sin^2 A)(2\operatorname{cosec}^2 A-1)=2\operatorname{cosec}^2 A+2-1-\sin^2 A$

[∵ $\sin^2 A\operatorname{cosec}^2 A=1$];

右邊$=\{1+(1+\cot^2 A)\}(2-\sin^2 A)=(1+\operatorname{cosec}^2 A)(2-\sin^2 A)$

$=2+2\operatorname{cosec}^2 A-\sin^2 A-1$ [∵ $\sin^2 A\operatorname{cosec}^2 A=1$].

∴ 左邊=右邊.

**20.** $\dfrac{1-\sec A+\tan A}{1+\sec A-\tan A}=\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}$ ヲ證セヨ.

【解】 本題ヲ證スルニハ分母ヲ去リタル

$(1-\sec A+\tan A)(\sec A+\tan A+1)=(\sec A+\tan A-1)(1+\sec A-\tan A)$,

即チ $(1+\tan A)^2-\sec^2 A=\sec^2 A-(1-\tan A)^2$ ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ之ヲ證スルニハ轉項シタル

$(1+\tan A)^2+(1-\tan A)^2=2\sec^2 A$, 即チ $2(1+\tan^2 A)=2\sec^2 A$,

即チ $1+\tan^2 A=\sec^2 A$ ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ公式ニ由リ $1+\tan^2 A=\sec^2 A$

∴ 本題ヲ證シ得タリ.

**注意** 本問ノ如クニシテ次ノ恒等式ヲ證スルコトヲ得:

$$\frac{1+\operatorname{cosec} A+\cot A}{1+\operatorname{cosec} A-\cot A}=\frac{\operatorname{cosec} A+\cot A-1}{\cot A-\operatorname{cosec} A+1}.$$

**21.** $(1-\tan^4 A)\cos^2 A+\tan^2 A=1$ ヲ證セヨ.



【解】 左邊$=(1+\tan^2 A)(1-\tan^2 A)\cos^2 A+\tan^2 A$

$=\sec^2 A(1-\tan^2 A)\cos^2 A+\tan^2 A=1-\tan^2 A+\tan^2 A=1.$

**22.** $\operatorname{cosec}^4\theta(1-\cos^4\theta)-2\cot^2\theta=1$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\operatorname{cosec}^4\theta(1+\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)-2\cot^2\theta$

$=\operatorname{cosec}^4\theta(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta-2\cot^2\theta$

$=\operatorname{cosec}^2\theta(1+\cos^2\theta)-2\cot^2\theta$ [∵ $\operatorname{cosec}^2\theta\sin^2\theta=1$]

$=\operatorname{cosec}^2\theta+\cot^2\theta-2\cot^2\theta$ [∵ $\operatorname{cosec}^2\theta\cos^2\theta=\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\cot^2\theta$]

$=\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1+\cot^2\theta-\cot^2\theta=1.$

**23.** $\dfrac{(\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta)^2}{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}=1+2\sin\theta\cos\theta$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{\operatorname{cosec}^2\theta+\sec^2\theta+2\operatorname{cosec}\theta\sec\theta}{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}=1+\dfrac{2\operatorname{cosec}\theta\sec\theta}{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}$

$=1+\dfrac{2\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}}=1+\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=1+2\sin\theta\cos\theta.$

**24.** $\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{\tan A+\sec A-(\sec^2 A-\tan^2 A)}{\tan A-\sec A+1}$

$=\dfrac{(\tan A+\sec A)(1+\tan A-\sec A)}{\tan A-\sec A+1}$

$=\tan A+\sec A=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos A}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}.$

**25.** $\tan A+\sin A=m$, $\tan A-\sin A=n$ [torn]

$m^2-n^2=\pm4\sqrt{mn}$ ナルコトヲ證シ, 且 [torn]

關係ヲ攻究セヨ.

【解】 $m^2-n^2=(m+n)(m-n)=(\tan A+\sin A+\tan A-\sin A)$

$\times(\tan A+\sin A-\tan A+\sin A)=4\tan A\sin A$ (正或ハ負ノ値);

$$\pm4\sqrt{mn}=\pm4\sqrt{(\tan A+\sin A)(\tan A-\sin A)}=\pm4\sqrt{\tan^2 A-\sin^2 A}$$

$$=\pm4\sqrt{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}-\sin^2 A}=\pm4\sin A\sqrt{\frac{1}{\cos^2 A}-1}=\pm4\sin A\sqrt{\sec^2 A-1}$$

$$=\pm4\sin A\sqrt{1+\tan^2 A-1}=\pm4\sin A\tan A.$$

$$\therefore\quad m^2-n^2=\pm4\sqrt{mn}.$$

然ルニ $\tan A$, $\sin A$ ガ同號ナルト異號ナルトニ從ヒ $m^2-n^2$ ハ夫々正, 負トナルヲ以テ, A ガ第一, 第四象限ニ在ルトキハ複號ノ中正號ヲ採リ, 他ノ場合ニ負號ヲ採ルベシ.

**26.** $\cot^2 A=\left(\frac{\cos B}{\tan C}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\tan D}\right)^2$ ナルトキハ

$\operatorname{cosec}^2 A=\left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)^2$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A=1+\left(\frac{\cos B}{\frac{\sin C}{\cos C}}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\frac{\sin D}{\cos D}}\right)^2$

$$=1+\frac{\cos^2 B(1-\sin^2 C)}{\sin^2 C}+\frac{\sin^2 B(1-\sin^2 D)}{\sin^2 D}$$

$$=1+\left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2-\cos^2 B+\left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)^2-\sin^2 B$$

$$=\left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)^2.\quad [\because\ 1-\cos^2 B-\sin^2 B=1-1=0.]$$

$\frac{\cos^4 A}{\ldots s^2 B}+\frac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$ ナラバ $\frac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\frac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=1$ キ

…ヨ.

…等式ノ分母ヲ去リ餘弦ヲ正弦ニテ記スレバ

…$B+(1-\sin^2 B)\sin^4 A=(1-\sin^2 B)\sin^2 B.$

…$-2\sin^2 A\sin^2 B+\sin^4 B=0,$



$$(\sin^2 A-\sin^2 B)^2=0,$$

$$\sin^2 A=\sin^2 B.$$

從ツテ $1-\sin^2 A=1-\sin^2 B$ 卽チ $\cos^2 A=\cos^2 B.$

此等ヲ假設ニ代入スレバ終結ヲ得ベシ.

**28.** $\sin\theta+\sin^2\theta=1$ ナラバ $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$ ナルコトヲ證セヨ. キ

【解】 假設ヨリ $\sin\theta=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta.$

之ヲ平方ニスレバ $\sin^2\theta=\cos^4\theta$ 卽チ $1-\cos^2\theta=\cos^4\theta.$

$$\therefore\quad \cos^2\theta+\cos^4\theta=1.$$

**29.** $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$ ナルトキ $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ ノ値ヲ求メヨ. キ

【解】 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=\frac{5}{4}(1-\sin\theta\cos\theta).$

然ルニ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\boxed{\frac{25}{16}}.$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{9}{32}.$$

$$\therefore\quad \sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{5}{4}\left(1-\frac{9}{32}\right)=\frac{115}{128}\quad (\text{答}).$$

**30.** $\tan^3 A=\frac{l}{m}$ ナルトキハ

$l\operatorname{cosec}A+m\sec A=\left(l^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ ナルコトヲ證セヨ.

但シ根數ハ總ベテ主値ノミヲ用フルモノトス.

【解】 $\operatorname{cosec}A=(1+\cot^2 A)^{\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{\tan^2 A}\right)^{\frac{1}{2}}=\left\{1+\left(\frac{m}{l}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{(l^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{l^{\frac{1}{3}}},$

…$A=(1+\tan^2 A)^{\frac{1}{2}}=\left\{1+\left(\frac{l}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{(l^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{3}}};$

$$\therefore\ l\,\mathrm{cosec}A+m\sec A=l^{\frac{2}{3}}(l^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{2}{3}}(l^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$
$$=(l^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(l^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}})=(l^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

**31.** $a\sec A-c\tan A=d,\ b\sec A+d\tan A=c$ ナルトキハ $a^2+b^2=c^2+d^2$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ヨリ $a\sec A=c\tan A+d,\ b\sec A=c-d\tan A.$
平方ノ和ヲ作レバ $(a^2+b^2)\sec^2A=(c^2+d^2)(1+\tan^2A).$
卽チ $(a^2+b^2)\sec^2A=(c^2+d^2)\sec^2A,$ 卽チ $a^2+b^2=c^2+d^2.$

**注意.** 此答解ハ次ギノ問題ノ答解ト見做スコトヲ得: 二ツノ關係式 $a\sec A-c\tan A=d,\ b\sec A+d\tan A=c$ ヨリ A ヲ逐ヒ出ダセ.

**32.** $\dfrac{\sin A}{\sin B}=p,\ \dfrac{\cos A}{\cos B}=q$ ナル關係式ヲ用ヒテ

$$\tan B=\pm\sqrt{\frac{q^2-1}{1-p^2}}$$ ナル關係式ヲ作ルベシ.

**【解】** 與ヘラレタル關係式ノ分母ヲ去リ
$$\sin A=p\sin B,\quad \cos A=q\cos B.$$
平方ノ和ヲ作レバ $\sin^2A+\cos^2A=p^2\sin^2B+q^2\cos^2B,$
卽チ $1=p^2\sin^2B+q^2\cos^2B.$
兩邊ヲ $\cos^2B$ ニテ除スレバ $\sec^2B=p^2\tan^2B+q^2.$
卽チ $1+\tan^2B=p^2\tan^2B+q^2.$ 卽チ $(1-p^2)\tan^2B=q^2-1.$
$$\therefore\ \tan B=\pm\sqrt{\frac{q^2-1}{1-p^2}}.$$

**33.*** $\sin\alpha=m\sin\beta,\ \tan\alpha=n\tan\beta$ ナル關係式ヲ用ヒテ $\cos\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{m^2-1}{n^2-1}}$ ナル關係式ヲ作ルベシ.



**【解】** 與ヘラレタル第一關係式ヲ第二關係式ニテ除スレバ $\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$ ナルヲ以テ $\cos\alpha=\dfrac{m}{n}\cos\beta$ ヲ得. 之ヲ變形シテ $\dfrac{n}{m}\cos\alpha=\cos\beta$ トシ, 與ヘラレタル第一關係式ヨリ $\dfrac{1}{m}\sin\alpha=\sin\beta$ ヲ作リ此等ノ平方ノ和ヲ求ムレバ
$$\frac{n^2}{m^2}\cos^2\alpha+\frac{1}{m^2}\sin^2\alpha=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1,$$
卽チ $\dfrac{n^2}{m^2}\cos^2\alpha+\dfrac{1}{m^2}(1-\cos^2\alpha)=1,$ 卽チ $\cos\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{m^2-1}{n^2-1}}.$

**34.*** $\cos A=n\sin B,\quad \cot A=\dfrac{\sin B}{\tan C}$ ナラバ

$$\cos C=\pm\frac{n}{\sqrt{1+n^2\cos^2B}}$$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ノ第二等式ヨリ $\tan C=\sin B\tan A.$
平方シテ 1 ヲ加フレバ $\sec^2C=1+\sin^2B\tan^2A.$
兩邊ニテ 1 ヲ除シ第一等式ヲ代用スレバ
$$\cos^2C=\frac{1}{1+\sin^2B(\sec^2A-1)}=\frac{1}{1+\sin^2B\left(\dfrac{1}{\cos^2A}-1\right)}=\frac{1}{1+\sin^2B\left(\dfrac{1}{n^2\sin^2B}-1\right)}$$
$$=\frac{n^2\sin^2B}{n^2\sin^2B+\sin^2B-n^2\sin^4B}=\frac{n^2}{n^2(1-\sin^2B)+1}=\frac{n^2}{n^2\cos^2B+1}.$$
$$\therefore\ \cos C=\pm\frac{n}{\sqrt{1+n^2\cos^2B}}.$$

**35.*** $a\tan A=b\tan B,\quad a^2x^2=a^2-b^2$ ナルトキハ $(1-x^2\sin^2B)(1-x^2\cos^2A)=1-x^2$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設第二式ヨリ $x^2=1-\dfrac{b^2}{a^2}.$

假設第一式ヨリ $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{\tan^2A}{\tan^2B}.\quad \therefore\ x^2=1-\dfrac{\tan^2A}{\tan^2B}\ \cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$

之ヲ終結ノ左邊ニ代用スレバ
$$(1-\sin^2B+\tan^2A\cos^2B)(1-\cos^2A+\sin^2A\cot^2B)$$

$$=(\cos^2 B+\tan^2 A\cos^2 B)(\sin^2 A+\sin^2 A\cot^2 B)$$

不
$$=\cos^2 B(1+\tan^2 A)\sin^2 A(1+\cot^2 B)$$

$$=\frac{\cos^2 B\sin^2 A}{\cos^2 A\sin^2 B}=\frac{\tan^2 A}{\tan^2 B}=1-x^2 \qquad [\text{(i) ニ由ル}].$$

○ **36.*** $\dfrac{\cos^3 A}{\cos B}+\dfrac{\sin^3 A}{\sin B}=1$ ナルトキハ

$\left(\dfrac{\cos B}{\cos A}-\dfrac{\sin B}{\sin A}\right)\left(\dfrac{\cos B}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\sin A}+1\right)=0$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ヨリ $\dfrac{\cos^3 A}{\cos B}+\dfrac{\sin^3 A}{\sin B}=\sin^2 B+\cos^2 B,$

$$\therefore\ \frac{\cos^3 A}{\cos B}-\cos^2 B=-\frac{\sin^3 A}{\sin B}+\sin^2 B.$$

卽チ $$\frac{\cos^3 A-\cos^3 B}{\cos B}=-\frac{\sin^3 A-\sin^3 B}{\sin B}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}.$$

又假設ヨリ $\dfrac{\cos^3 A}{\cos B}+\dfrac{\sin^3 A}{\sin B}=\sin^2 A+\cos^2 A,$

$$\therefore\ \frac{\cos^3 A}{\cos B}-\cos^2 A=-\frac{\sin^3 A}{\sin B}+\sin^2 A,$$

卽チ $$\frac{\cos^2 A(\cos A-\cos B)}{\cos B}=-\frac{\sin^2 A(\sin A-\sin B)}{\sin B}\cdots\text{(ii)}$$

(i) ヲ (ii) ニテ除スレバ

$$\frac{\cos^2 A+\cos A\cos B+\cos^2 B}{\cos^2 A}=\frac{\sin^2 A+\sin A\sin B+\sin^2 B}{\sin^2 A},$$

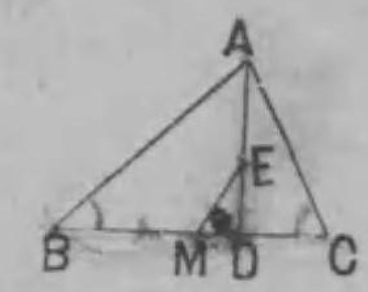
卽チ $$\frac{\cos^2 B}{\cos^2 A}-\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}+\boxed{\frac{\cos B}{\cos A}}-\frac{\sin B}{\sin A}=0,$$

卽チ $$\left(\frac{\cos B}{\cos A}-\frac{\sin B}{\sin A}\right)\left(\frac{\cos B}{\cos A}+\frac{\sin B}{\sin A}+1\right)=0.$$

**37.** △ABC ノ邊 BC ノ中點ト A ヨリ BC ヘノ垂線ノ中點トヲ結ビ付クル直線ト BC トノ成ス角ヲ $\theta$ トセバ, $\cot\theta=\cot B-\cot C$ ナルコトヲ證セヨ.



**【解】** BC ノ中點ヲ M トシ, AD⊥BC トシ, AD ノ中點ヲ E トスレバ, $D\hat{M}E=\theta$ ナリ.




$$\therefore\ \cot\theta=\frac{MD}{DE}=\frac{MD}{\frac{1}{2}DA}=\frac{2MD}{DA}.$$

$$=\frac{(BM+MD)-(BM-MD)}{DA.}=\frac{(BM+MD)-(MC-MD)}{DA}$$

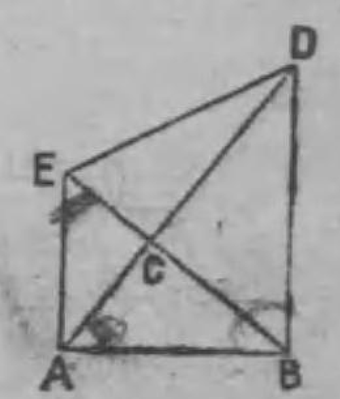
$$=\frac{BD-CD}{DA}=\frac{BD}{DA}-\frac{CD}{DA}=\cot B-\cot C.$$

○ **38.** 直△ABC ノ斜邊ヲ AB トシ AB ニ垂線 AE, BD ヲ引キ BC, AC ノ延長ト夫々 E, D ニテ交ラシムレバ $\tan CED=\tan^3 BAC$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** $A\hat{C}B=A\hat{B}D=B\hat{A}E=90°$ ナルヲ以テ $B\hat{A}C+A\hat{B}C=C\hat{B}D+A\hat{B}C,$

$B\hat{A}C+C\hat{A}E=C\hat{E}A+C\hat{A}E.\quad\therefore\ B\hat{A}C=C\hat{B}D=C\hat{E}A.$

∴ 此等ノ角ノ tan. ヲ比較スレバ




$$\frac{CD}{BC}=\tan CBD=\tan BAC,\quad \frac{CB}{AC}=\tan BAC,$$

$$\frac{CA}{EC}=\tan CEA=\tan BAC.$$

此等ノ等式ヲ相乘スレバ $\dfrac{CD}{EC}=\tan^3 BAC$, 卽チ $\tan CED=\tan^3 BAC.$

○ **39.** 直線 AD ノ三等分點ヲ B, C トシ, BC ヲ直徑トセル圓周上ノ任意ノ點ヲ P トシ, $A\hat{P}B=\theta,\ C\hat{P}D=\phi$ トスレバ $\tan\theta\tan\phi=\dfrac{1}{4}$ ナルコトヲ證セヨ.

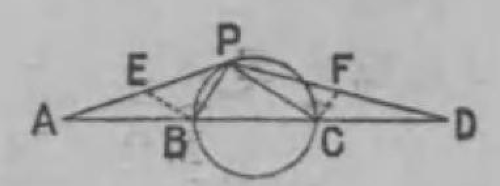
**【解】** BE, CF ヲ夫々 CP, BP ニ平行ニ引クトキハ,

$E\hat{B}P=B\hat{P}C=P\hat{C}F=90°$ ナルヲ以テ

三角函數ノ値ノ範



$\tan\theta=\frac{BE}{PB}$, $\tan\phi=\frac{CF}{PC}$.



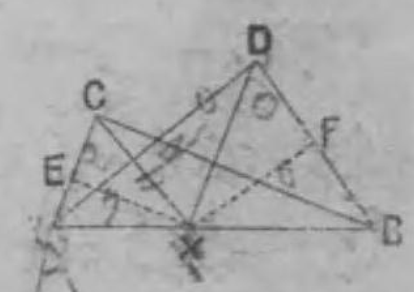

$$\therefore \quad \tan\theta\tan\phi=\frac{BE.CF}{PB.PC}.$$

然ルニ　AB=BC,　BE∥CP ナルヲ以テ CP=2BE;
同様ニ　BP=2CF.

$$\therefore \quad \tan\theta\tan\phi=\frac{BE.CF}{2CF.2BE}=\frac{1}{4}.$$

**40.** ACB, ADB ヲ共通ナル斜邊 AB ノ同傍ニ在ル二ツノ定マリタル直三角形トシ, X ヲ AB 上ノ動點トスレバ, $\tan$ACX $\tan$BDX ハ不變ナルコトヲ證セヨ.

【解】 XE, XF ヲ夫々 AC, BD ニ垂線ニ引ク.




$\tan ACX=\frac{EX}{CE}$,　$\tan BDX=\frac{FX}{DF}$ ナルヲ以テ

$$\tan ACX \tan BDX=\frac{EX.FX}{CE.DF}.$$

然ルニ　XE∥BC, XF∥AD ナルヲ以テ $\frac{CE}{AE}=\frac{BX}{AX}=\frac{BF}{DF}$.

$$\therefore \quad CE.DF=AE.BF.$$

$$\therefore \quad \tan ACX \tan BDX=\frac{EX}{AE}.\frac{FX}{BF}=\tan BAC \tan ABD.$$

然ルニ $B\hat{A}C$, $A\hat{B}D$ ハ不變ナルヲ以テ $\tan$BAC, $\tan$ABD ハ不變ニシテ從ツテ其乘積卽チ $\tan$ACX $\tan$BDX モ不變ナルコトヲ知ル.

---

## 11. 三角函數ノ値ノ範圍

I. *sin.* 及ビ *cos.* ハ $-1$ ヨリモ小ナラズ且ツ $+1$



ヨリモ大ナラズ;

II. *tan.* 及ビ *cot.* ハ $-\infty$ 以上ニシテ $+\infty$ 以下ナリ;

III. *sec.* 及ビ *cosec.* ハ $-1$ ヨリモ大ナラズ又 $+1$ ヨリモ小ナラズ.

## 問　　題

**41.** $x$ ヲ實數トスレバ $\sin\alpha=x+\frac{1}{x}$ ナル方程式ハ成立セザルコトヲ證セヨ.

【解】 先ヅ $x$ ヲ正數トシテ攷究セン.

$x<1$ トスレバ $\frac{1}{x}>1$ トナルヲ以テ $x+\frac{1}{x}>1$.

∴ $x+\frac{1}{x}$ ハ *sin.* ノ値トナルコトヲ得ズ.

$x=1$ トスレバ $\frac{1}{x}=1$ トナルヲ以テ $x+\frac{1}{x}=2$.

∴ $x+\frac{1}{x}$ ハ亦 *sin.* ノ値トナルコトヲ得ズ.

$x>1$ トスレバ $\frac{1}{x}$ ハ正數ナルヲ以テ $x+\frac{1}{x}>1$.

∴ $x+\frac{1}{x}$ ハ亦 *sin.* ノ値トナルコトヲ得ズ.

∴ $x$ ガ正數ナル場合ニ本題ノ眞ナルコトヲ知ル.

次ギニ $x$ ヲ負數トシテ攷究セン.

$x$ ノ絕對値卽チ $|x|$ ヲ $x'$ トスレバ

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|=x'+\frac{1}{x'}.$$

然ルニ　$x'+\frac{1}{x'}$ ハ上ノ證明ニヨリ 1 ヨリモ大ナリ.

$$\therefore \left|x+\frac{1}{x}\right|>1, \text{ 卽チ } x+\frac{1}{x}<-1.$$

∴ $x$ ガ負數ナル場合ニ於テモ本題ノ眞ナルコトヲ知ル.

**42.** $x$, $y$ ヲ同號ノ實數トスレバ $sec\alpha=\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$ ナル方程式ハ $x=y$ ナルトキノミ成立スルコトヲ證セヨ.

【解】 $x=y$ トスレバ $\dfrac{4xy}{(x+y)^2}=\dfrac{4x^2}{(2x)^2}=1$. ∴ 此場合ニハ sec. ノ値トナルコトヲ得ベシ.

又 $x\neq y$ トスレバ $(x+y)^2-4xy=(x-y)^2>0$ [∵ $x\neq y$ ナルヲ以テ $x-y\neq 0$, 且ツ $x-y$ ハ實數ノ差ナルヲ以テ實數ナレバナリ.]

∴ $(x+y)^2>4xy$, 且ツ $x$, $y$ ハ實數ナルヲ以テ $(x+y)^2>0$, 又 $x$, $y$ ハ同號ノモノナルヲ以テ $4xy \nless 0$; ∴ $\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$ ハ正數ニシテ 1 ヨリモ小ナリ. ∴ 此場合ニ $\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$ ハ sec. ノ値トナルコトヲ得ズ.

∴ 本題ノ眞ナルコトヲ知ル.

**43.** $tan^2\alpha+tan^2\beta+tan^2\gamma \geqq tan\alpha tan\beta+tan\beta tan\gamma+tan\gamma tan\alpha$ ヲ證セヨ.

【解】 $tan\alpha$, $tan\beta$, $tan\gamma$ ハ何レモ實數ナルヲ以テ次ギノ諸式モ亦實數ナリ.

$$tan\alpha-tan\beta,\ tan\beta-tan\gamma,\ tan\gamma-tan\alpha.$$

$$\therefore (tan\alpha-tan\beta)^2+(tan\beta-tan\gamma)^2+(tan\gamma-tan\alpha)^2\geqq 0,$$

$$\therefore \frac{1}{2}\{(tan\alpha-tan\beta)^2+(tan\beta-tan\gamma)^2+(tan\gamma-tan\alpha)^2\}\geqq 0.$$

卽チ $tan^2\alpha+tan^2\beta+tan^2\gamma-tan\alpha tan\beta-tan\beta tan\gamma-tan\gamma tan\alpha\geqq 0.$

之ヲ轉項スレバ所題ノ結果ヲ得.

---



## 12. 特別ナル角ノ三角函數ノ値.

$$sin0^\circ=cos90^\circ=0, \qquad cos0^\circ=sin90^\circ=1,$$

$$tan0^\circ=cot90^\circ=0, \qquad cot0^\circ=tan90^\circ=\infty,$$

$$sec0^\circ=cosec90^\circ=1, \qquad cosec0^\circ=sec90^\circ=\infty;$$

$$sin30^\circ=cos60^\circ=\frac{1}{2}, \qquad cos30^\circ=sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$tan30^\circ=cot60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad cot30^\circ=tan60^\circ=\sqrt{3},$$

$$sec30^\circ=cosec60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad cosec30^\circ=sec60^\circ=2;$$

$$sin45^\circ=cos45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad tan45^\circ=cot45^\circ=1,$$

$$sec45^\circ=cosec45^\circ=\sqrt{2}.$$

### 問　　題

**44.** A=0°, B=30°, C=45°, D=60°, E=90° ナルトキハ次式ノ値如何

$$(sin\mathrm{B}+sin\mathrm{E})(cos\mathrm{A}+cos\mathrm{D})-4sin\mathrm{A}(cos\mathrm{C}+sin\mathrm{E}).$$

【解】 所題ノ式

$$=(sin30^\circ+sin90^\circ)(cos0^\circ+cos60^\circ)-4sin0^\circ(cos45^\circ+sin90^\circ)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)-4\times 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)=\frac{9}{4}\text{ ……………(答)}$$

**45.** 同上, $(tan\,\mathrm{B}+cosec\,\mathrm{E}+cot\mathrm{C})(cos\mathrm{A}+cos\,\mathrm{E}+$

値如何.

【解】 所題ノ式$=(tan30°+cosec90°+cot45°)(cos0°+cos90°+1)$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1+1\right)(1+0+1)=\frac{2+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{(2+4\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+12}{3}$$............(答)

**46.** $tan90°cos90°$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 原式$=\frac{sin90°}{cos90°}\times cos90°=sin90°=1$..........(答)

**注意.** $tan90°cos90°=\infty\times 0$ ト運算スレバ一見不定ナルガ如キモ實ハ是レ不明ナルモノナリ. ∴ 上ノ如ク計算セヨ.

---

### 13. 逆三角函數ノ定義.

$sin.$ ノ値ガ $a$ ナル總ベテノ角ヲ表ハスニ記號 $sin^{-1}a$ ヲ用フ. 他ノ函數ニ就キテモ同様ナリ.

$sin^{-1}a$ 等ヲ逆三角函數(或ハ三角反函數)ト云フ.

$sin^{-1}a$ ノ値ノ中 $-90°$ ヨリモ小ナラズ且ツ $+90°$ ヨリモ大ナラザルモノヲ主値ト云ヒ, 之ヲ表ハスニ記號 $Sin^{-1}a$ ヲ用フ. $Tan^{-1}a$, $Cot^{-1}a$, $Cosec^{-1}a$ ニ就キテモ同様ナリ.

$cos^{-1}a$ ノ値ノ中 $0°$ ヨリモ小ナラズ且ツ $180°$ ヨリモ

ラザルモノヲ主値ト云ヒ, 之ヲ表ハスニ記號 $Cos^{-1}a$

$Sec^{-1}a$ ニ就キテモ同様ナリ.

レ書ニハ $Sin^{-1}a$ 等ヲ一般ノ値トシ, $sin^{-1}a$ 等



## 問題

**47.** 各角ヲ第一象限ニアリトセバ次式ノ値如何:

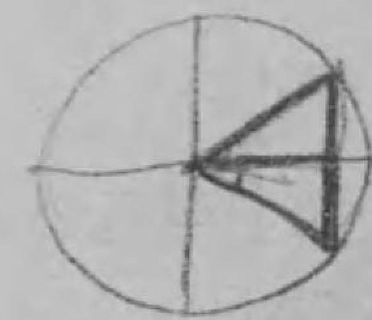
$$sin^{-1}\frac{1}{2}-cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+tan^{-1}\sqrt{3}+cot^{-1}\sqrt{3}-sec^{-1}2-cosec^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

【解】 所題ノ式$=30°-45°+60°+30°-60°-60°=-45°$........(答)

**48.** $2Cosec^{-1}2-Cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+3Cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}-Sin^{-1}1$ ノ値如何.

【解】 所題ノ式$=2\times30°-45°+3\times30°-90°=15°$...........(答)

---



**〔14〕 $n.360°+A$ ノ三角函數ノ公式.**

$n$ ヲ零或ハ任意ノ整數トスレバ次ギノ公式ヲ得:

$sin(n.360°+A)=sinA$, $cos(n.360°+A)=cosA$,

$tan(n.360°+A)=tanA$, $cot(n.360°+A)=cotA$,

$sec(n.360°+A)=secA$, $cosec(n.360°+A)=cosecA$.

**〔15〕 $-A$ ノ三角函數ノ公式.**

$sin(-A)=-sinA$, $cos(-A)=cosA$, $tan(-A)=-tanA$,

$cot(-A)=-cotA$, $sec(-A)=secA$, $cosec(-A)=-cosecA$.

trigonometry



〔16〕 $90°\pm A$ ノ三角函數ノ公式.

$\sin(90°\pm A)=\cos A$,　　$\cos(90°\pm A)=\mp\sin A$,

$\tan(90°\pm A)=\mp\cot A$,　　$\cot(90°\pm A)=\mp\tan A$,

$\sec(90°\pm A)=\mp\operatorname{cosec}A$,　　$\operatorname{cosec}(90°\pm A)=\sec A$.

〔17〕 $180°\pm A$ ノ三角函數ノ公式.

$\sin(180°\pm A)=\mp\sin A$,　　$\cos(180°\pm A)=-\cos A$,

$\tan(180°\pm A)=\pm\tan A$,　　$\cot(180°\pm A)=\pm\cot A$,

$\sec(180°\pm A)=-\sec A$,　　$\operatorname{cosec}(180°\pm A)=\mp\operatorname{cosec}A$.

## 問　　題

**49.** $0°$ ト $180°$ トノ間ニ於テ $\sin x$ ガ $\cos 50°$ ヨリ小ナルタメノ $x$ ノ範圍ヲ求メヨ.

$\cos 50° = \cos(90°-40°) = \sin 40°$

【解】 $\sin x<\cos 50°$ 卽チ $\sin x<\sin 40°$.

$\therefore$ $0°<x<40°$ 或ハ $140°<x<180°$.

**50.** $\cos(90°-\alpha)\sin(180°-\alpha)-\sin(90°-\alpha)\cos(180°-\alpha)$ ヲ最簡ニセヨ.

【解】 所題ノ式$=\sin\alpha\sin\alpha-\cos\alpha(-\cos\alpha)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$......(答)

**51.** $\triangle ABC$ ニ於テ

$\cos(B+C)-\cos\frac{B+C}{2}-\cos(180°+A)+\sin\frac{A}{2}$ ノ値如何.

【解】 所題ノ式$=\cos(180°-A)-\cos\left(90°-\frac{A}{2}\right)-\cos(180°+A)+\sin\frac{A}{2}$



$=-\cos A-\sin\frac{A}{2}-(-\cos A)+\sin\frac{A}{2}=0$............(答)

**52.** $\triangle ABC$ ニ於テ $C=90°$ ナルトキハ

$(\sin A-\sin B)^2+(\cos A+\cos B)^2=2$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\{\sin A-\sin(90°-A)\}^2+\{\cos A+\cos(90°-A)\}^2$

$=(\sin A-\cos A)^2+(\cos A+\sin A)^2$

$=2(\sin^2A+\cos^2A)=2$............(答)

**53.** $\boxed{\sin(A-40°)}=\boxed{\sin(A+80°)}$ ナルトキ A ヲ求メヨ.

但シ A ハ正ノ銳角ナリトス.

$A-40=A+80$

$(A-40)+(A+80)=180$

【解】 A ハ正ノ銳角ナル故 $A+80°$ ハ第一或ハ第二象限ニ在リ.

$\therefore$ $\sin(A+80°)$ ハ正ニシテ之ニ等シキ $\sin(A-40°)$ モ正ナル故,

$A-40°$ ハ第一象限ニ在リ.

$\therefore$ $A-40°=A+80°$ 或ハ $A-40°+(A+80°)=180°$.

然ルニ第一ノ方程式ハ明カニ不成立ナリ.

$\therefore$ 第二ノ方程式ヨリ $A=70°$............(答)

**54.** $\tan 60°\tan 30°-\cos 0°\tan 45°-\sin 0°\tan 90°$ ノ値如何.

【解】 $\sin 0°\tan 90°=\boxed{\sin 0°\cot 0°}=\sin 0°\times\boxed{\frac{\cos 0°}{\sin 0°}}=\cos 0°=1$.

$\therefore$ 所題ノ式$=\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}-1\times 1-1=-1$........(答)

**55.** $\sin 867°$, $\cos(-1001°)$, $\tan(-602°)$, $\sec 1327°$ ヲ最小正角ノ三角函數ニ變ゼヨ.

【解】 $\sin 867°=\sin(2\times 360°+147°)=\sin 147°=\sin(180°-33°)=\sin 33°$ (答)

$\cos(-1001°)=\cos(-3\times 360°+79°)=\cos 79°=\cos(90°-11°)=\sin 11°$ (答)

$$tan(-602°)=tan(-2\times360°+118°)=tan118°=tan(90°+28°)$$
$$=-cot28° \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{答})$$
$$sec1327°=sec(4\times360°-113°)=sec(-113°)=sec113°$$
$$=sec(90°+23°)=-cosec23° \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{答})$$

---

# 多クノ角ノ和及ビ差ノ三角函數

## 〔18〕 二角ノ和及ビ差ノ三角函數ニ就キテノ公式.

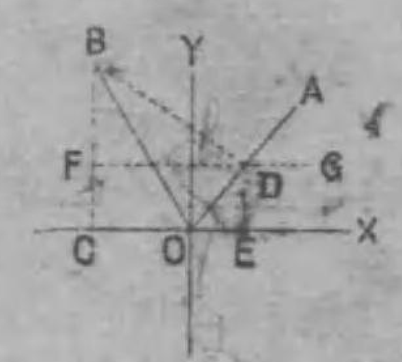
$$sin(A\pm B)=sinA cosB\pm cosA sinB,$$
$$cos(A\pm B)=cosA cosB\mp sinA sinB,$$
$$tan(A\pm B)=\frac{tanA\pm tanB}{1\mp tanA tanB},\quad cot(A\pm B)=\frac{cotA cotB\mp1}{cotB\pm cotA}.$$

### 問 題

**56.** $0°<\alpha<90°$, $0°<\beta<90°$, $90°<\alpha+\beta$ ナルトキ $sin(\alpha+\beta)=sin\alpha\, cos\beta+cos\alpha\, sin\beta$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** $X\hat{O}A=\alpha$, $A\hat{O}B=\beta$ トスレバ $X\hat{O}B=\alpha+\beta$ ナリ.

OB 上ノ一點 B ヨリ OX, OA ニ垂線 BC, BD ヲ引キ, D ヲ過リ OX ニ垂線 DE 及ビ平行線 FDG ヲ引ケ.




然ルトキハ $sin(\alpha+\beta)=\frac{CB}{OB}=\frac{CF+FB}{OB}=\frac{ED+FB}{OB}$

[∵ CEDF ハ矩形ナルヲ以テ CF=ED.]

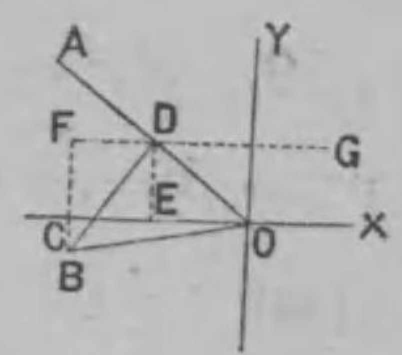
$$=\frac{ED}{OB}+\frac{FB}{OB}=\frac{ED}{OD}\cdot\frac{OD}{OB}+\frac{FB}{DB}\cdot\frac{DB}{OB}$$
$$=sin\alpha\, cos\beta+sinGDB\, sin\beta;$$



然ルニ $sinGDB=sin(GDA+ADB)=sin(\alpha+90°)$ [∵ DG ∥ OX, OA⊥BD.]

$$=cos\alpha.$$
$$\therefore\ sin(\alpha+\beta)=sin\alpha\, cos\beta+cos\alpha\, sin\beta.$$

**57.** $90°<\alpha<180°$, $0°<\beta<90°$, $180°<\alpha+\beta$ ナルトキ $cos(\alpha+\beta)=cos\alpha\, cos\beta-sin\alpha\, sin\beta$ ナルコトヲ證セヨ.




**【解】** $XOA=\alpha$, $AOB=\beta$ トスレバ $XOB=\alpha+\beta$ ナリ.

OB 上ノ一點 B ヨリ OX, OA ニ垂線 BC, BD ヲ引キ, D ヲ過リ OX ニ垂線 DE 及ビ平行線 FDG ヲ引ケ.

然ルトキハ $cos(\alpha+\beta)=\frac{OC}{OB}=\frac{OE+EC}{OB}=\frac{OE+DF}{OB}$

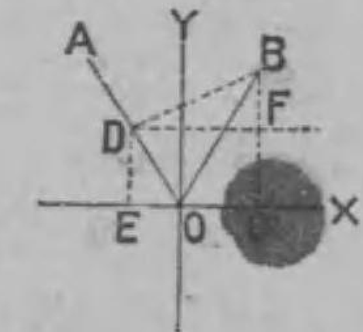
[∵ CEDF ハ矩形ナルヲ以テ EC=DF.]

$$=\frac{OE}{OB}+\frac{DF}{OB}=\frac{OE}{OD}\cdot\frac{OD}{OB}+\frac{DF}{DB}\cdot\frac{DB}{OB}=cos\alpha\, cos\beta+cosGDB\, sin\beta;$$

然ルニ $cosGDB=cos(GDA+ADB)=cos(\alpha+90°)$ [∵ DG ∥ OX, OA⊥BD.]

$$=-sin\alpha.$$
$$\therefore\ cos(\alpha+\beta)=cos\alpha\, cos\beta-sin\alpha\, sin\beta.$$

**58.** $90°<\alpha<180°$, $0°<\beta<90°$, $\alpha-\beta<90°$ ナルトキ $sin(\alpha-\beta)=sin\alpha\, cos\beta-cos\alpha\, sin\beta$ ナルコトヲ證セヨ.




**【解】** $X\hat{O}A=\alpha$, $B\hat{O}A=\beta$ トスレバ $X\hat{O}B=\alpha-\beta$ ナリ.

OB 上ノ一點 B ヨリ OX, OA ニ垂線 BC, BD ヲ引キ, D ヲ過リ OX ニ垂線 DE 及ビ平行線 DF ヲ引ケ.

然ルトキハ $sin(\alpha-\beta)=\frac{CB}{OB}=\frac{CF+FB}{OB}=\frac{ED+FB}{OB}$

[∵ CEDF ハ矩形ナルヲ以テ CF=ED.]

$$=\frac{ED}{OB}+\frac{FB}{OB}=\frac{ED}{OD}\cdot\frac{OD}{OB}+\frac{FB}{DB}\cdot\frac{DB}{OB}=\sin\alpha\cos\beta+\sin FDB\sin\beta;$$

然ルニ $\sin FDB=\sin(FDA-BDA)=\sin(\alpha-90^\circ)$ [$\because$ DF $\parallel$ OX, OA $\perp$ BD.]

$$=-\sin(90^\circ-\alpha)=-\cos\alpha.$$

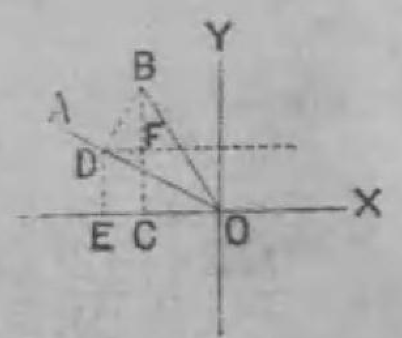
$$\therefore\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

**59.** $90^\circ<\alpha<180^\circ,\ 0^\circ<\beta<90^\circ,\ \alpha-\beta>90^\circ$ ナルトキ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** $X\hat{O}A=\alpha$, $B\hat{O}A=\beta$ トスレバ $X\hat{O}B=\alpha-\beta$ ナリ.

OB 上ノ一點 B ヨリ OX, OA ニ垂線 BC, BD ヲ引キ, D ヲ過リ OX ニ垂線 DE 及ビ平行線 DF ヲ引ケ.

然ルトキハ




$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{OC}{OB}=\frac{OE-CE}{OB}=\frac{OE-FD}{OB}=\frac{OE+DF}{OB}$$

[$\because$ CEDF ハ矩形ナルヲ以テ CE=FD, 且ツ DF ハ FD ト方向相反ス.]

$$=\frac{OE}{OB}+\frac{DF}{OB}=\frac{OE}{OD}\cdot\frac{OD}{OB}+\frac{DF}{DB}\cdot\frac{DB}{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\cos FDB\sin\beta;$$

然ルニ $\cos FDB=\cos(FDA-BDA)=\cos(\alpha-90^\circ)$ [$\because$ DF $\parallel$ OX, OA $\perp$ BD.]

$$=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha.$$

$$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

**60.** $15^\circ$ ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ.

**【解】** $\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

$\cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ+\sin45^\circ\sin30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\tan15^\circ=\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2-\sqrt{3}.$$



此等ノ値ノ反數ヲ求ムレバ夫々 $\operatorname{cosec}15^\circ$, $\sec15^\circ$, $\cot15^\circ$ ヲ得ベシ.

**61.** $\dfrac{2}{\sqrt{\cot^2 15^\circ-\cot^2 45^\circ}}=3^{\frac14}-3^{-\frac14}$ ヲ證セヨ.

**【解】** $\cot15^\circ=\cot(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\cot45^\circ\cot30^\circ+1}{\cot30^\circ-\cot45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$

$\therefore$ 所題ノ等式ノ左邊ハ

$$\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)^2}}}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt[4]{3}}$$

$$=\sqrt[4]{3}-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}=3^{\frac14}-3^{-\frac14}.$$

$\therefore$ 本題ヲ證シ得タリ.

**62.** $\sin A=\dfrac{11}{61}$, $\sin B=\dfrac{9}{41}$ ナルトキ $\cos(A-B)$ ノ値如何.

**【解】** $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$$=(\pm\sqrt{1-\sin^2 A})(\pm\sqrt{1-\sin^2 B})+\sin A\sin B$$

$$=\pm\sqrt{1-\left(\frac{11}{61}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{9}{41}\right)^2}+\frac{11}{61}\cdot\frac{9}{41}$$

$$=\pm\frac{60}{61}\cdot\frac{40}{41}+\frac{11}{61}\cdot\frac{9}{41}=\frac{2499}{2501}\text{ 或ハ }-\frac{2301}{2501}\cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

**63.** $\cos A=\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{cosec}B=\dfrac{13}{5}$ ナルトキ $\sin(A-B)$ ノ値如何. 但シ A ハ第四象限ノ角, B ハ第二象限ノ角ナリトス.

**【解】** $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$$=(\pm\sqrt{1-\cos^2 A})(\pm\sqrt{1-\sin^2 B})-\cos A\sin B;$$

然ルニ A ハ第四象限ノ角ナルヲ以テ $\sin A$ ハ負, B ハ第二象限ノ角ナルヲ以テ $\cos B$ モ負ナリ.

$\therefore\ \sin(A-B)=(-\sqrt{1-\cos^2 A})(-\sqrt{1-\sin^2 B})-\cos A\sin B$

$$=\left\{-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right\}\left\{-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}\right\}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{33}{65}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

**64.** $\tan A=\dfrac{12}{35},\ \cot B=\dfrac{63}{16}$ ナルトキ $\sec(A-B)$ ノ値如何.

**【解】** $\sec(A-B)=\dfrac{1}{\cos(A-B)}=\dfrac{1}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$

$$=\frac{1\div\cos A\cos B}{(\cos A\cos B+\sin A\sin B)\div\cos A\cos B}=\frac{\sec A\sec B}{1+\tan A\tan B}$$

$$=\frac{(\pm\sqrt{1+\tan^2 A})(\pm\sqrt{1+\tan^2 B})}{1+\tan A\tan B}=\frac{\pm\sqrt{1+\left(\frac{12}{35}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{16}{63}\right)^2}}{1+\frac{12}{35}\cdot\frac{16}{63}}$$

$$=\pm\frac{2405}{2397}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

**注意.** 本問ト同様ノ方法ヲ用ヒテ次ノ問題ヲ解クコトヲ得.

$\tan A=\dfrac{1}{2},\ \tan B=\dfrac{1}{3}$ トスレバ $\sin(A-B)$ ノ値如何.

sec

(答) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

**65.** $\sin A\cos(B+C)-\sin B\cos(A+C)=\sin(A-B)\cos C$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊 $=\sin A(\cos B\cos C-\sin B\sin C)-\sin B(\cos A\cos C-\sin A\sin C)$

$$=(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\cos C=\sin(A-B)\cos C.$$

**66.** $1+\tan A\tan 2A=\sec 2A$ ヲ證セヨ.



**【解】** 左邊 $=1+\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin 2A}{\cos 2A}=\dfrac{\cos 2A\cos A+\sin 2A\sin A}{\cos A\cos 2A}$

$$=\frac{\cos(2A-A)}{\cos A\cos 2A}=\frac{1}{\cos 2A}=\sec 2A.$$

**67.** $\sin(45^\circ-A)=\cos(A+45^\circ)$ ヲ證セヨ.

sin(45°−A)
sin(90°−(45°−A) +45°
cos(A+45°)

**【解】** 左邊 $=\cos\{90^\circ-(45^\circ+A)\}=\cos(45^\circ+A)$.

**68.** $\sin^2(A+45^\circ)+\sin^2(A-45^\circ)=1$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊 $=\sin^2(A+45^\circ)+\{-\sin(45^\circ-A)\}^2$

$$=\sin^2(A+45^\circ)+\sin^2(45^\circ-A)=\sin^2(A+45^\circ)+\cos^2\{90^\circ-(45^\circ-A)\}$$

$$=\sin^2(A+45^\circ)+\cos^2(45^\circ+A)=1.$$

**69.** $\tan\theta=\dfrac{A}{B}$ ナルトキハ.

$A\cos\omega+B\sin\omega=\pm\sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\omega)$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 終結ノ左邊 $=B\tan\theta\cos\omega+B\sin\omega$

$$=B\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\omega+\sin\omega\right)=B\frac{\sin(\theta+\omega)}{\cos\theta}=B\sec\theta\sin(\theta+\omega)$$

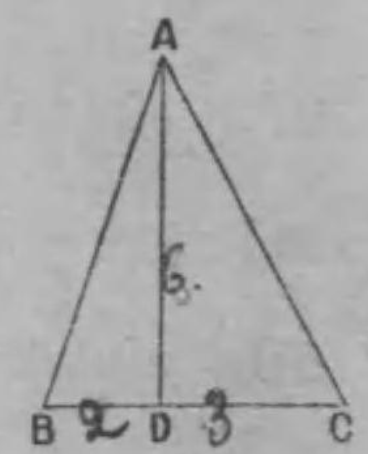
$$=B(\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}\sin(\theta+\omega)=B\left(\pm\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}\right)\sin(\theta+\omega)=\text{右邊}.$$

**70.** $\tan A=\dfrac{1}{2},\tan B=\dfrac{1}{3}$ ナルトキハ $A+B$ ノ一ツノ値ハ $45^\circ$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1=\tan 45^\circ$;

$\therefore$ A+B ハ 45° ナルコトアリ.

**71.** △ABC ノ頂點 A ヨリ底邊 BC ニ垂線 AD ヲ作ルトキ BD, CD, AD ガ 2, 3, 6 ニ比例スルトキハ頂角ノ大サ如何.

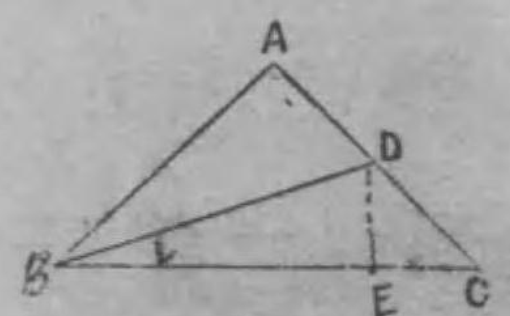



**【解】** $\tan BAC=\tan(DAB+DAC)$

$$=\frac{\tan DAB+\tan DAC}{1-\tan DAB\tan DAC}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=1.$$

然ルニ $0^\circ<B\hat{A}C<180^\circ$. $\therefore\ B\hat{A}C=45^\circ$........(答)

**72.** 直二等邊 △ABC ノ底邊ノ一端 B ヨリ中線 BD ヲ引ケバ $\cot CBD$ ノ値如何.




**【解】** AB=AC=1 トスレバ $AD=\frac{1}{2}$.

$$\cot CBD=\cot(CBA-DBA)=\frac{\cot DBA\cot CBA+1}{\cot DBA-\cot CBA}=\frac{2\times1+1}{2-1}=3......(答)$$

**73.** $\tan\alpha$ 及ビ $\tan\beta$ ヲ二次方程式 $x^2+6x+7=0$ ノ兩根ナリトセバ $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 根ト係數トノ關係ニ由リ $\tan\alpha+\tan\beta=-6$, $\tan\alpha\tan\beta=7$.

$$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-6}{1-7}=1=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

$$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta).$$

**74.** 方程式 $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ $\tan\alpha$, $\tan\beta$ トスレバ



$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$ ノ値如何.

**【解】** 所題ノ式 $=\cos^2(\alpha+\beta)\{\tan^2(\alpha+\beta)+p\tan(\alpha+\beta)+q\}$

$$=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}\{\tan^2(\alpha+\beta)+p\tan(\alpha+\beta)+q\}.$$

然ルニ方程式ノ根ト係數トノ關係ハ

$$\tan\alpha+\tan\beta=-p,\quad \tan\alpha\tan\beta=q.$$

$$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-p}{1-q}.$$

$$\therefore\ 所題ノ式=\frac{1}{1+\left(\frac{-p}{1-q}\right)^2}\left\{\left(\frac{-p}{1-q}\right)^2+p\frac{-p}{1-q}+q\right\}=q........(答)$$

---

## 〔19〕 一角ノ二倍ナル角ノ三角函數ニ就キテノ公式.

$\sin 2A=2\sin A\cos A$,

$\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A=1-2\sin^2A=2\cos^2A-1$,

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A},\quad \cot 2A=\frac{\cot^2A-1}{2\cot A}.$$

## 問題

**75.** $\sin A=\frac{1}{5}$ ナルトキ 2A ノ三角函數ノ値如何.

**【解】** $\sin 2A=2\sin A\cos A=2\sin A(\pm\sqrt{1-\sin^2A})$

$$=2\cdot\frac{1}{5}\left\{\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\right\}=\pm\frac{4\sqrt{6}}{25}$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 1 - 2\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{23}{25};$$

$$\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \pm\frac{4\sqrt{6}}{25} \div \frac{23}{25} = \pm\frac{4\sqrt{6}}{23};$$

他ノ函數ノ値ハ上ノ結果ノ反數ナルヲ以テ容易ニ之ヲ求メ得ベシ.

注意. 複號ハ總ベテ同ジ順序ニ採ルベシ.

**76.** $\cos A = \dfrac{3}{5}$ ナルトキ 2A ノ三角函數ノ値如何.

【解】 $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \pm 2\sqrt{1-\cos^2 A}\,.\cos A$

$$= \pm 2\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\,.\,\frac{3}{5} = \pm 2.\frac{4}{5}.\frac{3}{5} = \pm\frac{24}{25};$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25};$$

$$\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \pm\frac{24}{25} \div \left(-\frac{7}{25}\right) = \mp\frac{24}{7};$$

他ノ函數ノ値ハ上ノ結果ノ反數ナルヲ以テ容易ニ之ヲ求メ得ベシ.

注意. 複號ハ總ベテ同ジ順序ニ採ルベシ.

**77.** $\cos\dfrac{A}{2} - \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキ $\cos A$ ノ値如何.

【解】 $\cos\dfrac{A}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{1-\cos^2\dfrac{A}{2}}\,.$

平方ニスレバ $\cos^2\dfrac{A}{2} - \sqrt{2}\cos\dfrac{A}{2} + \dfrac{1}{2} = 1 - \cos^2\dfrac{A}{2},$

$$2\cos^2\frac{A}{2} - \sqrt{2}\cos\frac{A}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

$$\therefore \quad \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}.$$

$$\therefore \quad \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{......(答)}.$$



**注意** 上ノ解ニ於テ方程式ヲ平方ニシタレドモ右邊ニ複號ノ付キタルモノナル故, 別ニ差支ハナキナリ.

又次ギノ如クスルモ解セラルル樣ニ見ユ. 卽チ與ヘラレタル方程式ヲ平方ニシテ

$$1 - \sin A = \frac{1}{2}, \quad \therefore \quad \sin A = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad \cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

然レドモ之ハ不完全ナリ. 何トナレバ一邊ニ複號ノ付カザル方程式ヲ平方ニシタルガ故ニ, A ノ値ガ實際ノモヨリモ餘分ノモノヲ含ミタルカノ疑ヒアリ, 從ツテ $\cos A$ ノ値モ亦然ルカノ疑ヒアレバナリ. 故ニ此場合ニハ $\cos A$ ノ値ヲ吟味スルヲ要スベク, 而シテ此吟味ハ簡單ナルモノニアラズ. 運算ハ稍長ケレドモ最初ノ解ヲ用フル方ガ無難ナリ.

**78.** $\tan A = 3$ ナルトキ 2A ノ三角函數ノ値如何.

【解】 $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\dfrac{\sin A}{\cos A}\cos^2 A = 2\tan A\dfrac{1}{\sec^2 A}$

$$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{2\times 3}{1+3^2} = \frac{3}{5};$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A\left(1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right) = \frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}$$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-3^2}{1+3^2} = -\frac{4}{5};$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\times 3}{1-3^2} = -\frac{3}{4};$$

他ノ函數ノ値ハ上ノ結果ノ反數ナルヲ以テ容易ニ之ヲ求メ得ベシ.

**79.** $\tan\alpha=\frac{1}{7}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$ ナルトキ $\tan(\beta-2\alpha)$ ノ値如何.

【解】 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{7}}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{7}{24}$;

$$\tan(\beta-2\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan 2\alpha}{1+\tan\beta\tan 2\alpha}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{7}{24}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{7}{24}}=\frac{2}{11}\text{........(答)}$$

**80.** △ABC ニ於テ $\tan\frac{A}{2}=x$, $\tan\frac{B}{2}=y$ ナルトキハ $\tan C$ ノ値如何.

【解】 $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{x+y}{1-xy}$;

然ルニ $A+B+C=180°$ ナルヲ以テ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°$;

∴ $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}=\frac{x+y}{1-xy}$; ∴ $\tan\frac{C}{2}=\frac{1-xy}{x+y}$;

$$\therefore\ \tan C=\frac{2\tan\frac{C}{2}}{1-\tan^2\frac{C}{2}}=\frac{2\frac{1-xy}{x+y}}{1-\left(\frac{1-xy}{x+y}\right)^2}=\frac{2(1-xy)(x+y)}{(x+y+1-xy)(x+y-1+xy)}\text{...(答)}$$

**81.** $\tan\theta+\cot\theta=2\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ ナルトキ $\cos 2\theta$ ノ値如何.

【解】 假設ノ左邊ハ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}=\frac{2}{\sin 2\theta}$;

∴ 假設ハ $\frac{2}{\sin 2\theta}=2\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$. ∴ $\sin 2\theta=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$.



$$\therefore\ \cos 2\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2}=\pm\frac{2mn}{m^2+n^2}\text{........(答)}$$

**82.** $\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}=\tan 2A+\sec 2A$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊 $=\frac{\sin 2A}{\cos 2A}+\frac{1}{\cos 2A}=\frac{\sin 2A+1}{\cos 2A}$

$=\frac{2\sin A\cos A+\sin^2A+\cos^2A}{\cos^2A-\sin^2A}=\frac{(\cos A+\sin A)^2}{\cos^2A-\sin^2A}=$ 左邊.

**83.** $\sin 2A\tan 2A=\frac{4\tan^2A}{1-\tan^4A}$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊 $=4\frac{\sin^2A}{\cos^2A}\cdot\frac{1}{(1+\tan^2A)(1-\tan^2A)}=4\frac{\sin^2A}{\cos^2A}\cdot\frac{\cos^2A}{1-\frac{\sin^2A}{\cos^2A}}$

$=\frac{(2\sin A\cos A)^2}{\cos^2A-\sin^2A}=\frac{\sin 2A\sin 2A}{\cos 2A}=$ 左邊.

○ **84.** $\tan A=\frac{b}{a}$ ナルトキ

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\frac{2\cos A}{\sqrt{\cos 2A}}\text{ ヲ證セヨ.}$$

但シ A ハ 45° ヨリモ小ナル正角トス.

【解】 $0<A<45°$ ナルヲ以テ $0<\tan A<1$ 卽チ $0<\frac{b}{a}<1$.

∴ $a$ ヲ正トスレバ $0<b<a$

∴ 終結ノ左邊 $=\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}=\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}$.

又 $a$ ヲ負トスレバ $0>b>a$.

∴ 終結ノ左邊 $=\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{-a-b}}+\frac{\sqrt{-a-b}}{\sqrt{b-a}}=\frac{-2a}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}$

然ルニ $\dfrac{2}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-tan^2A}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-\dfrac{sin^2A}{cos^2A}}}=\dfrac{2cosA}{\sqrt{cos2A}}$

[∵ $cosA$ ハ正].

∴ 終結ヲ證シ得タリ.

---

## 〔20〕 一角ノ半ナル角ノ三角函數ニ就キテノ公式.

**I.** $sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}(\pm\sqrt{1+sinA}\pm\sqrt{1-sinA})$,

$cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}(\pm\sqrt{1+sinA}\mp\sqrt{1-sinA})$.

**【證】** $\left(sin\dfrac{A}{2}\pm cos\dfrac{A}{2}\right)^2=sin^2\dfrac{A}{2}+cos^2\dfrac{A}{2}\pm2sin\dfrac{A}{2}cos\dfrac{A}{2}$

$=1\pm sinA$;

∴ $sin\dfrac{A}{2}+cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{1+sinA}$, $sin\dfrac{A}{2}-cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{1-sinA}$;

此等ノ恒等式ノ和及ビ差ヲ取リ 2 ニテ除スレバ所題ノ公式ヲ得.

**II.** $tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{sinA}{1\pm\sqrt{1-sin^2A}}$.

**【證】** $tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{sin\dfrac{A}{2}}{cos\dfrac{A}{2}}=\dfrac{2sin\dfrac{A}{2}cos\dfrac{A}{2}}{2cos^2\dfrac{A}{2}}=\dfrac{sinA}{1+cosA}=\dfrac{sinA}{1\pm\sqrt{1-sin^2A}}$.

**III.** $sin\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-cosA}{2}}$, $cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+cosA}{2}}$,

$tan\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-cosA}{1+cosA}}$.

是レ第 19 條ニ於ケル $cos2A$ ノ公式ヨリ直チニ得ラルヽモノナリ.



## 問題.

**85.** $sin2A=\dfrac{1}{4}$ ナルトキ $sinA$ ノ値如何.

**【解】** $sinA=\dfrac{1}{2}(\pm\sqrt{1+sin2A}\pm\sqrt{1-sin2A})$

$=\dfrac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}\right)=\dfrac{\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{3}}{4}$........(答)

**86.** $sinA=\dfrac{3}{5}$ ナルトキ $\dfrac{A}{2}$ ノ正弦, 餘弦, 正切ヲ求メヨ. 但シ $0°<A<90°$.

**【解】** $cosA=\sqrt{1-sin^2A}$ [∵ $cosA$ ハ正]

$=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\dfrac{4}{5}$.

∴ $sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-cosA}{2}}$ [∵ $sin\dfrac{A}{2}$ ハ正]

$=\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{4}{5}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

又 $cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+cosA}{2}}$ [∵ $cos\dfrac{A}{2}$ ハ正]

$=\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{4}{5}}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

又 $tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{sin\dfrac{A}{2}}{cos\dfrac{A}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\div\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{3}$.

**注意** $sinA$ ノ値ト A ノ大サノ範圍トヲ知リテ $\dfrac{A}{2}$ ノ正弦, 餘弦ヲ求ムルニハ本間ノ如ク $cosA$ ヲ求メテ公式 III ニ依ルヲ便ナリトス.

**87.** $22°\dfrac{1}{2}$ ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ.

【解】 $\sin 22^\circ\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}$

$\left[0^\circ<22^\circ\frac{1}{2}<90^\circ\right.$ ナルヲ以テ $\sin 22^\circ\frac{1}{2}$ ハ正ナリ.$\left.\right]$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

$\cos 22^\circ\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}$ [前ト同様ニ $\cos 22^\circ\frac{1}{2}$ ハ正ナリ]

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$\tan 22^\circ\frac{1}{2}=\frac{\sin 22^\circ\frac{1}{2}}{\cos 22^\circ\frac{1}{2}}=\sqrt{2}-1;$$

他ノ函數ハ上ノ反數ナルヲ以テ其値ヲ求ムルコト容易ナリ.

**88.** $\cos A=\frac{40}{41},\ \cos B=\frac{60}{61}$ ヲ與ヘ $\sin^2\frac{A-B}{2}=\frac{1}{41\times 61}$ ナルコトヲ證セヨ. 但シ A, B ハ共ニ正ノ鋭角ナリトス.

【解】 $\sin^2\frac{A-B}{2}=\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)^2$

$$=\left(\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos B}{2}}-\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{41\times 2}}\sqrt{\frac{121}{61\times 2}}-\sqrt{\frac{81}{41\times 2}}\sqrt{\frac{1}{61\times 2}}\right)^2=\frac{1}{41\times 61}.$$

$\frac{A}{2},\ \frac{B}{2}$ ハ正ノ鋭角ナル故其三角函數ハ皆正ナリ. 故ニ上ノ計算ニハ皆正根ヲ用ヒタルナリ.

**89.** $\tan A=\frac{3}{4}$ ナルトキ $\sin\frac{A}{2}$ ノ値如何.

【證】 $\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}=\pm\frac{4}{5};$



$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\pm=\sqrt{\frac{\text{[redacted]}}{2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}\ \text{或ハ}\ \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}\ \cdots\cdots\cdots\text{(答)}$$

**90.** $\tan\theta=\frac{7}{24}$ ナルトキ $\tan\frac{\theta}{2}$ ノ値如何.

【解】 $\frac{7}{24}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}.$

$1-\tan^2\frac{\theta}{2}=0$ トスレバ $\tan\frac{\theta}{2}=\pm 1;$

∴ 上ノ方程式ハ $\frac{7}{24}=\infty$ トナル; 是レ背理ナリ;

∴ $1-\tan^2\frac{\theta}{2}\neq 0;$ ∴ 上ノ方程式ノ分母ヲ去リ

$$7\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)=48\tan\frac{\theta}{2};$$

轉項シテ $7\tan^2\frac{\theta}{2}+48\tan\frac{\theta}{2}-7=0,$

卽チ $\left(7\tan\frac{\theta}{2}-1\right)\left(\tan\frac{\theta}{2}+7\right)=0;$

∴ $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{7}$ 或ハ $-7$…………(答)

**注意.** 上ト同様ニシテ次ギノ問題ヲ解スルコトヲ得ベシ.

$\tan 150^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ知リテ $\tan 75^\circ$ ヲ求ム.

(答) $2+\sqrt{3}$.

**91.** $\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$ ナルトキハ

$\tan^2\frac{A}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\cot^2\frac{\beta}{2}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $\tan^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{1-\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}}{1+\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}}$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\cot^2\frac{\beta}{2}.$$

**注意** 上ト同様ニシテ次ギノ問題ヲ解スルコトヲ得.

(i) $\cos\theta=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ ナルトキハ $\tan^2\frac{\theta}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$ ナルコトヲ證セヨ.

(ii) $\cos\theta=\frac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}$ ナルトキハ

$\tan\frac{1}{2}\theta=\pm\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{1}{2}\alpha$ ナルコトヲ證セヨ.

**92.** $\tan^2x+\sec 2x=\frac{7\sqrt{3}-10}{\sqrt{3}}$ ナルトキ $\cos 2x$ ノ値如何.

【解】 $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x}=\frac{7\sqrt{3}-10}{\sqrt{3}}.$

分母ヲ去リテ整頓スレバ

$$(10-8\sqrt{3})\cos^2 2x+(10-5\sqrt{3})\cos 2x+\sqrt{3}=0.$$

$$\cos 2x=\frac{5\sqrt{3}-10\pm\sqrt{271-140\sqrt{3}}}{2(10-8\sqrt{3})}=\frac{5\sqrt{3}-10\pm(14-5\sqrt{3})}{2(10-8\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{或ハ}\ -\frac{4\sqrt{3}+5}{23}.$$

然ルニ此二値ハ $1+\cos 2x$, $\cos 2x$ ヲ零トスル値ニアラズ且ツ何レモ 1 ト −1 トノ間ニ在リ. ∴ 此二値ハ所求ノモノナリ.

**93.** 次ギノ恒等式ヲ證セヨ:

$$\tan\left(30^\circ+\frac{1}{2}\theta\right)\tan\left(30^\circ-\frac{1}{2}\theta\right)=\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}.$$



【解】 左邊$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\tan\frac{1}{2}\theta}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{1}{2}\theta}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\tan\frac{1}{2}\theta}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{1}{2}\theta}=\frac{\frac{1}{3}-\tan^2\frac{1}{2}\theta}{1-\frac{1}{3}\tan^2\frac{1}{2}\theta}.$

最後ノ式ノ $\tan^2\frac{1}{2}\theta=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ ヲ代入スレバ

$$\frac{1+\cos\theta-3+3\cos\theta}{3+3\cos\theta-1+\cos\theta}=\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}.$$

∴ 本問ヲ證シ得タリ.

**94.** $\sin 100^\circ, \sin 452^\circ$ ヲ用ヒテ夫々 $\sin 50^\circ, \sin 226^\circ$ ヲ表ハセ.

$\sin^2 50+\cos^2 50+2\sin 50\cos 50,$
$1+\sin 100=(\sin 50+\cos 50)^2$

【解】 $\sin 50^\circ, \cos 50^\circ$ ハ共ニ正ナルヲ以テ $\sin 50^\circ+\cos 50^\circ=\sqrt{1+\sin 100^\circ}$; 且ツ $\sin 50^\circ>\cos 50^\circ$ ナルヲ以テ $\sin 50^\circ-\cos 50^\circ$ ハ正ニシテ $\sqrt{1-\sin 100^\circ}$ トナル. ∴ 此二値ノ和ノ半ヲ取リテ

$$\sin 50^\circ=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 100^\circ}+\sqrt{1-\sin 100^\circ})\text{............(答)}$$

又 $\sin 226^\circ, \cos 226^\circ$ ハ共ニ負ナルヲ以テ $\sin 226^\circ+\cos 226^\circ=-\sqrt{1+\sin 452^\circ}$; 且ツ $\sin 226^\circ<\cos 226^\circ$ ナルヲ以テ $\sin 226^\circ-\cos 226^\circ$ ハ負ニシテ $-\sqrt{1-\sin 452^\circ}$ トナル.

∴ 此二値ノ和ノ半ヲ取リテ

$$\sin 226^\circ=\frac{1}{2}(-\sqrt{1+\sin 452^\circ}-\sqrt{1-\sin 452^\circ})\text{............(答)}$$

**95.** $\sin 260^\circ, \sin 1880^\circ$ ヲ用ヒテ夫々 $\cos 130^\circ, \cos 940^\circ$ ヲ表ハセ.

【解】 $\sin 130^\circ$ ハ正ニシテ $|\sin 130^\circ|>|\cos 130^\circ|$;

∴ $\sin 130^\circ+\cos 130^\circ=\sqrt{1+\sin 260^\circ}$; $\cos 130^\circ$ ハ負ナルヲ以テ $\sin 130^\circ-\cos 130^\circ$ ハ正ニシテ $\sqrt{1-\sin 260^\circ}$ トナル.

∴ 此二値ノ差ノ半ヲ取リテ

$$\cos 130^\circ=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin 260^\circ}-\sqrt{1-\sin 260^\circ}\right)\text{…………(答)}$$

又 $\sin 940^\circ$, $\cos 940^\circ$ ハ共ニ負ナルヲ以テ $\sin 940^\circ+\cos 940^\circ=-\sqrt{1+\sin 1880^\circ}$; 且ツ $\sin 940^\circ>\cos 940^\circ$ ナルヲ以テ $\sin 940^\circ-\cos 940^\circ$ ハ正ニシテ $\sqrt{1-\sin 1880^\circ}$ トナル.

∴ 此二値ノ差ノ半ヲ取リテ

$$\cos 940^\circ=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{1+\sin 1880^\circ}-\sqrt{1-\sin 1880^\circ}\right)\text{………(答)}$$

**96.** $\sin(-684^\circ)$ ヲ用ヒテ $\tan(-342^\circ)$ ヲ表ハセ.

【解】第20條公式 II ニ由リ

$$\tan(-342^\circ)=\frac{\sin(-684^\circ)}{1+\cos(-684^\circ)}=\frac{\sin(-684^\circ)}{1+\sqrt{\{1-\sin^2(-684^\circ)\}}}.$$

[∵ $-684^\circ$ ハ第一象限ノ角ナルヲ以テ cos. ハ正ナリ.]

最後ノ式ヲ答トス.

**97.** $\cos 1000^\circ$ ヲ用ヒテ $\sin 500^\circ$, $\cos 500^\circ$ 及ビ $\tan 500^\circ$ ヲ表ハセ.

【解】$500^\circ$ ハ第二象限ノ角ナルヲ以テ sin. ハ正, cos. ハ負, tan. ハ負ナリ.

$$\therefore\ \sin 500^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 1000^\circ}{2}},\quad \cos 500^\circ=-\sqrt{\frac{1+\cos 1000^\circ}{2}},$$

$$\tan 500^\circ=-\sqrt{\frac{1-\cos 1000^\circ}{1+\cos 1000^\circ}}.$$

**98.** $\tan 8000^\circ$ ヲ用ヒテ半角ノ sin., cos., tan. ヲ表ハセ.

【解】$\sin 4000^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\cos 8000^\circ}{2}}$ [∵ $\sin 4000^\circ>0$]

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 8000^\circ}}\right)}\quad [\because\ \cos 8000^\circ>0].$$



最後ノ式ヲ答トス.

次ギニ $\cos 4000^\circ=\sqrt{\dfrac{1+\cos 8000^\circ}{2}}$ [∵ $\cos 4000^\circ>0$]

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 8000^\circ}}\right)}\quad [\because\ \cos 8000^\circ>0].$$

最後ノ式ヲ答トス.

又 $\tan 4000^\circ=\dfrac{\sin 4000^\circ}{\cos 4000^\circ}=\dfrac{2\sin^2 4000^\circ}{2\sin 4000^\circ\cos 4000^\circ}=\dfrac{1-\cos 8000^\circ}{\sin 8000^\circ}$

$=\dfrac{\sec 8000^\circ-1}{\tan 8000^\circ}$ [分母子ヲ $\cos 8000^\circ$ ニテ除シタルナリ]

$=\dfrac{\sqrt{1+\tan^2 8000^\circ}-1}{\tan 8000^\circ}$ [∵ $\sec 8000^\circ>0$].

最後ノ式ヲ答トス.

---

## 〔21〕一角ノ三倍ナル角ノ三角函數ニ就キテノ公式.

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha},\quad \cot 3\alpha=\frac{3\cot\alpha-\cot^3\alpha}{1-3\cot^2\alpha}.$$

### 問 題

**99.** $18^\circ$ ノ三角函數ノ値如何.

【解】$2\times18^\circ+3\times18^\circ=90^\circ$ ナルヲ以テ $\sin(2\times18^\circ)=\cos(3\times18^\circ)$,

即チ $2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ$.

然ルニ $\cos 18^\circ\neq 0$. ∴ 最後ノ等式ヲ $\cos 18^\circ$ ニテ除スレバ

$$2\sin 18^\circ=4\cos^2 18^\circ-3=4(1-\sin^2 18^\circ)-3,$$

即チ $4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ-1=0$.

之ヲ解ケバ $\sin 18^\circ=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$.

然ルニ $\sin 18^\circ$ ハ正ナルヲ以テ複號ノ中ノ負號ヲ棄テ

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

又 $\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}$　[$\cos 18^\circ$ ハ正ナルヲ以テ]

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

又 $\tan 18^\circ=\dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\dfrac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$

**100.** $\cos 36^\circ$ ノ値ヲ求メヨ.

**【解】** $2\times 36^\circ+3\times 36^\circ=180^\circ$ ナルヲ以テ $\sin(2\times 36^\circ)=\sin(3\times 36^\circ)$,

卽チ $2\sin 36^\circ\cos 36^\circ=3\sin 36^\circ-4\sin^3 36^\circ$.

然ルニ $\sin 36^\circ\neq 0$ ナルヲ以テ最後ノ等式ヲ $\sin 36^\circ$ ニテ除スレバ

$$2\cos 36^\circ=3-4\sin^2 36^\circ=3-4(1-\cos^2 36^\circ),$$

卽チ　$4\cos^2 36^\circ-2\cos 36^\circ-1=0$.

之ヲ解ケバ　$\cos 36^\circ=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$.

然ルニ $\cos 36^\circ$ ハ正ナルヲ以テ複號ノ中ノ負號ヲ棄テ

$$\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

**101.** $\tan 2\alpha=-\dfrac{3}{4}$ ナルトキハ $\cos 3\alpha$ ノ値如何.

**【解】** $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{\sec 2\alpha}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 2\alpha}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}}=\pm\dfrac{4}{5}$;

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1\pm\frac{4}{5}}{2}}=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}\ \text{或ハ}\ \pm\frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4\left(\pm\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^3-3\left(\pm\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\ \text{或ハ}$$

$$4\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^3-3\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\pm\frac{9}{50}\sqrt{10}\ \text{或ハ}\ \pm\frac{13}{50}\sqrt{10}\cdots\cdots(\text{答})$$



**102.** $\tan A\tan(60^\circ+A)\tan(120^\circ+A)=-\tan 3A$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊$=\tan A\dfrac{\sqrt{3}+\tan A}{1-\sqrt{3}\tan A}\cdot\dfrac{-\sqrt{3}+\tan A}{1+\sqrt{3}\tan A}=\dfrac{\tan^3 A-3\tan A}{1-3\tan^2 A}$

$$=-\tan 3A.$$

**103.** $\tan 3\alpha\cot\alpha$ ノ取リ得ル總ベテノ値ヲ擧ゲヨ.

**【解】** $\tan 3\alpha\cot\alpha=\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{3-\tan^2\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$.

今 $\dfrac{3-\tan^2\alpha}{1-3\tan^2\alpha}=\lambda$ ト命ズレバ $1-3\tan^2\alpha$ ハ $0$ トナルカ然ラザルカノ二ツニ一ツナリ.

先ヅ $1-3\tan^2\alpha=0$ トスレバ $\lambda=\infty\cdots\cdots\cdots(\text{i})$.

又 $1-3\tan^2\alpha\neq 0$ トスレバ $3-\tan^2\alpha=\lambda(1-3\tan^2\alpha)$,

卽チ　$(3\lambda-1)\tan^2\alpha-(\lambda-3)=0$.

然ルニ $\tan\alpha$ ハ實數ナル故 $(3\lambda-1)(\lambda-3)\geqq 0$.

$\therefore$ $\lambda$ ハ $\dfrac{1}{3}$ ト $3$ トノ間ノ値ヲ取ルコトナシ$\cdots\cdots(\text{ii})$.

(i) ト (ii) トヲ取リ纒ムレバ (ii) ト同一ノ結果ヲ得. 何トナレバ (i) ハ (ii) ノ中ニ含マルレバナリ.

---

## 〔22〕 二角ノ $\sin.$ 及ビ $\cos.$ ノ和及ビ差ヲ積ニ變ズルコトニ就キテノ公式.

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$

$$cos\mathrm{A}+cos\mathrm{B}=2cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2},$$

$$cos\mathrm{A}-cos\mathrm{B}=2sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}sin\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2}.$$

**注意.** $sin\mathrm{A}+cos\mathrm{B}=sin\mathrm{A}+sin(90°-\mathrm{B})$

$$=2sin\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}+45°\right)cos\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}-45°\right);$$

$sin\mathrm{A}-cos\mathrm{B}=sin\mathrm{A}-sin(90°-\mathrm{B})$

$$=2cos\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}+45°\right)sin\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}-45°\right).$$

## 問　　題

**104.** $cos60°+2cos70°+cos80°=4cos^25°cos70°$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=(cos60°+cos80°)+2cos70°=2cos70°cos10°+2cos70°$

$=2cos70°(cos10°+1)=2cos70°(2cos^25°-1+1)=4cos^25°cos70°.$

**105.** $sin\frac{2\pi}{7}+sin\frac{4\pi}{7}-sin\frac{6\pi}{7}=4sin\frac{\pi}{7}sin\frac{2\pi}{7}sin\frac{3\pi}{7}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=2sin\frac{3\pi}{7}cos\frac{\pi}{7}-2sin\frac{3\pi}{7}cos\frac{3\pi}{7}=2sin\frac{3\pi}{7}\left(cos\frac{\pi}{7}-cos\frac{3\pi}{7}\right)$

$=2sin\frac{3\pi}{7}2sin\frac{2\pi}{7}sin\frac{\pi}{7}=4sin\frac{\pi}{7}sin\frac{2\pi}{7}sin\frac{3\pi}{7}.$

**106.** $\frac{sin45°+cos75°}{sin45°-cos75°}=\frac{1}{\sqrt{3}}cot15°$ ヲ證セヨ.



【解】 左邊$=\frac{sin45°+sin15°}{sin45°-sin15°}=\frac{2sin30°cos15°}{2cos30°sin15°}=tan30°cot15°$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}cot15°.$

**107.** 次ギノ恒等式ヲ證セヨ:

$$2[sin(30°+x)+cos(60°+x)]^2-[cos(45°-x)-sin(45°-x)]^2$$
$$=2cos2x.$$

【解】 左邊$=2[sin(30°+x)+sin(30°-x)]^2-[sin(45°+x)-sin(45°-x)]^2$

〔一角ノ餘弦ニ餘角ノ正弦ヲ代用シタリ〕

$=2(2sin30°cosx)^2-(2cos45°sinx)^2$

$=2(2\times\frac{1}{2}\times cosx)^2-(2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times sinx)^2$

$=2(cos^2x-sin^2x)=$右邊.

**108.** $\alpha=\frac{\pi}{17}$ ヲ與ヘテ $\frac{cos\alpha\ cos13\alpha}{cos3\alpha+cos5\alpha}$ ノ價ヲ求ム.

【解】 所題ノ式$=\frac{cos\alpha\ cos13\alpha}{2cos4\alpha\ cos\alpha}=\frac{cos13\alpha}{2cos4\alpha}=\frac{cos\frac{13}{17}\pi}{2cos\frac{4}{17}\pi}=-\frac{1}{2}.$

$\left[\because\ \frac{13}{17}\pi+\frac{4}{17}\pi=\pi.\quad \therefore\ cos\frac{13}{17}\pi=-cos\frac{4}{17}\pi.\right]$

π(ハレダアニ)=180

**109.** $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}=360°$ ナルトキ次式ヲ證セヨ:

$$cos\mathrm{A}+cos\mathrm{B}+cos\mathrm{C}+cos\mathrm{D}=4cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}cos\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}cos\frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}}{2}.$$

【解】 $cos\mathrm{D}=cos(360°-\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C})=cos(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}).$

∴ 證セントスル等式ノ左邊ハ

$cos\mathrm{A}+cos\mathrm{B}+cos\mathrm{C}+cos(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B+2C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B+2C}{2}\right)=\text{右邊}.$$

○ **110.** $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ ナラバ $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}}{1+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}}=\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\beta+\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$

$$=\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

---

## 〔23〕 二角ノ $\sin.$ 及ビ $\cos.$ ノ積ヲ和或ハ差ニ變ズルコトニ就キテノ公式.

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B),$$

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B),$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B),$$

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B).$$

### 問　　題

**111.** $\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos(B+C)\cos(B-C)+\cos(A+C)\cos(A-C)=\cos2A$ ヲ證セヨ.

【解】 $\cos(A+B)\cos(A-B)=\frac{1}{2}$. $2\cos(A+B)\cos(A-B)=\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B)$;



同様ニ $\cos(B+C)\cos(B-C)=\frac{1}{2}(\cos2B+\cos2C)$,

$\cos(A+C)\cos(A-C)=\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2C)$.

∴ 所題ノ式ノ左邊

$$=\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B-\cos2B-\cos2C+\cos2A+\cos2C)=\cos2A.$$

**112.** $\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ)=\dfrac{1+2\cos2A}{1-2\cos2A}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{\sin(A+60^\circ)\sin(A-60^\circ)}{\cos(A+60^\circ)\cos(A-60^\circ)}$ tan

$$=\frac{\frac{1}{2}(\cos120^\circ-\cos2A)}{\frac{1}{2}(\cos2A+\cos120^\circ)}=\frac{-\frac{1}{2}-\cos2A}{\cos2A-\frac{1}{2}}=\text{右邊}.$$

**113.** $4\sin A\sin B\sin C$ ヲ和ニ變ゼヨ.

【解】 所題ノ式$=(2\sin A\sin B)2\sin C=\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}2\sin C$

$=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)$

$=\sin(C+A-B)+\sin(C-A+B)-\{\sin(C+A+B)+\sin(C-A-B)\}$

$=-\sin(A+B+C)+\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)+\sin(-A+B+C)$.

(答)

---

## 〔24〕 $\sin., \cos.$ ノ和, 差ヲ含ム恒等式ノ普通ノ證明法.

$\sin., \cos.$ ノ和, 差ヲ含ム恒等式ヲ證スルニハ通例其和, 差ヲ積ニ變ジテ考フベシ.

### 問　　題

**114.** $\cos A+\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)=0$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\cos A+\{\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)\}$

$=\cos A+2\cos 120^\circ\cos A=\cos A+2\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cos A=\cos A-\cos A=0.$

**115.** $\cos 35^\circ+\sin 175^\circ-\cos 25^\circ=0$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=(\cos 35^\circ-\cos 25^\circ)+\sin(180^\circ-175^\circ)$

$=2\sin 30^\circ\sin(-5^\circ)+\sin 5^\circ=-2\left(\dfrac{1}{2}\right)\sin 5^\circ+\sin 5^\circ$

$=-\sin 5^\circ+\sin 5^\circ=0.$

**116.** $\cos 10A+\cos 8A+3\cos 4A+3\cos 2A=8\cos A\cos^3 3A$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=2\cos 9A\cos A+6\cos 3A\cos A=2\cos A(\cos 9A+3\cos 3A)$

$=2\cos A(4\cos^3 3A-3\cos 3A+3\cos 3A)=8\cos A\cos^3 3A.$

**117.** $\cos^3 A-\sin^3 A=\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)(1+\sin A\cos A)$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=(\cos A-\sin A)(\cos^2 A+\sin^2 A+\sin A\cos A)$

$=\{\sin(90^\circ-A)-\sin A\}(1+\sin A\cos A)$

$=2\cos 45^\circ\sin(45^\circ-A)(1+\sin A\cos A)$

$=2\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\{90^\circ-(45^\circ-A)\}(1+\sin A\cos A)$

$=\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)(1+\sin A\cos A).$

**118.** $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}$ ヲ最簡ニセヨ.

【解】 所題ノ式$=\dfrac{(\sin 2\alpha+\sin 6\alpha)+\sin 4\alpha}{(\cos 2\alpha+\cos 6\alpha)+\cos 4\alpha}=\dfrac{2\sin 4\alpha\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}{2\cos 4\alpha\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$

$=\dfrac{\sin 4\alpha(2\cos 2\alpha+1)}{\cos 4\alpha(2\cos 2\alpha+1)}=\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}=\tan 4\alpha$.. ......(答)

**119.** $\dfrac{\sin\alpha-\sin 4\alpha+\sin 7\alpha-\sin 10\alpha}{\cos\alpha-\cos 4\alpha+\cos 7\alpha-\cos 10\alpha}$ ヲ最簡ニセヨ.



【解】 所題ノ式$=\dfrac{(\sin\alpha+\sin 7\alpha)-(\sin 4\alpha+\sin 10\alpha)}{(\cos\alpha+\cos 7\alpha)-(\cos 4\alpha+\cos 10\alpha)}$

$=\dfrac{2\sin 4\alpha\cos 3\alpha-2\sin 7\alpha\cos 3\alpha}{2\cos 4\alpha\cos 3\alpha-2\cos 7\alpha\cos 3\alpha}=\dfrac{2\cos 3\alpha(\sin 4\alpha-\sin 7\alpha)}{2\cos 3\alpha(\cos 4\alpha-\cos 7\alpha)}=\dfrac{\sin 4\alpha-\sin 7\alpha}{\cos 4\alpha-\cos 7\alpha}$

$=\dfrac{2\cos\frac{11}{2}\alpha\sin\left(-\frac{3}{2}\alpha\right)}{2\sin\frac{11}{2}\alpha\sin\frac{3}{2}\alpha}=-\cot\dfrac{11}{2}\alpha$..........(答)

**120.** $\sin(A+B)-\dfrac{\sin(2A+B)-\sin B}{2\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos A}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\sin(A+B)-\dfrac{2\cos(A+B)\sin A}{2\cos A}$

$=\dfrac{\sin(A+B)\cos A-\cos(A+B)\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin\{(A+B)-A\}}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos A}.$

**121.** A, B, C ガ等差級數ヲナストキハ

$\sin A-\sin C=2\sin(B-C)\cos B$ ヲ證セヨ.

【解】 $\sin A-\sin C=2\cos\dfrac{A+C}{2}\sin\dfrac{A-C}{2}$

$=2\cos B\sin\dfrac{2B-2C}{2}$ [$\because A+C=2B.\ \therefore A-C=2B-2C.$]

$=2\sin(B-C)\cos B.$

**122.** $\sin\theta=a$ トシテ $\sin 5\theta$ ノ値ヲ $a$ ノ降冪ノ順ニ記セ.

【解】 $\sin 5\theta=\sin 5\theta+\sin\theta-\sin\theta=2\sin 3\theta\cos 2\theta-\sin\theta$

$=2(3\sin\theta-4\sin^3\theta)(1-2\sin^2\theta)-\sin\theta.$

$=2(3a-4a^3)(1-2a^2)-a=16a^5-20a^3+5a$........(答)

**注意.** 本問ト同樣ニシテ次ギノ問題ヲ解スルコトヲ得:

$\cos\theta=a$ トシテ $\cos 5\theta$ ノ値ヲ $a$ ノ降冪ノ順ニ記セ.

(答) $16a^5-20a^3+5a.$

**123.** $\sin\theta+\sin\phi=a,\ \cos\theta+\cos\phi=b$ ナルトキ

$\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$ ノ値如何.

**【解】** $2\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\phi)=a,\ \ 2\cos\frac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\phi)=b.$

前者ヲ後者ニテ除スレバ

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)}{\cos\frac{1}{2}(\theta+\phi)}=\frac{a}{b}.\qquad\therefore\ \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\phi)}{\cos^2\frac{1}{2}(\theta+\phi)}=\frac{a^2}{b^2},$$

$$\therefore\ \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\phi)}{\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\phi)+\cos^2\frac{1}{2}(\theta+\phi)}=\frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

$$\therefore\ \sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

**124.** $a\cos A+b\sin A=a\cos B+b\sin B=c$ ナルトキハ

次ギノ等式ヲ證セヨ:

$$\frac{a}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{A-B}{2}}.$$

**【解】**

$a\cos A+b\sin A=a\cos B+b\sin B$ ヨリ $a(\cos A-\cos B)=b(\sin B-\sin A),$

即チ　$2a\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}=2b\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2},$

$$\therefore\ a\sin\frac{A+B}{2}=b\cos\frac{A+B}{2}\qquad\left[\because\ 一般ニ\ \sin\frac{B-A}{2}\neq0\right].$$

$$\therefore\ \frac{a}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{A+B}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i}).$$

又 $a\cos A+b\sin A=c,\ a\cos B+b\sin B=c$ ニ於テ第一ニ $\cos B$ ヲ, 第二ニ $\cos A$ ヲ乘ジテ減法ヲ行ヘバ $b\sin(A-B)=c(\cos B-\cos A),$



即チ　$2b\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2c\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},$

$$b\cos\frac{A-B}{2}=c\sin\frac{A+B}{2}\qquad\left[\because\ 一般ニ\ \sin\frac{A-B}{2}\neq0\right].$$

$$\therefore\ \frac{b}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{A-B}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii}).$$

(i), (ii) ヨリ一般ニ所題ノ結果ヲ得.

**〔25〕 1 ニ正弦或ハ餘弦ヲ加減シタル式ノ公式.**

第 19 條ヨリ

$$1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2},\qquad 1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}.$$

又 $\cos(90°-A)=\sin A$ ナルヲ以テ上ノ關係式ニ由リ

$$1+\sin A=2\cos^2\left(45°-\frac{A}{2}\right),\quad 1-\sin A=2\sin^2\left(45°-\frac{A}{2}\right).$$

又第 20 條ヨリ $1\pm\sin A=\left(\sin\frac{A}{2}\pm\cos\frac{A}{2}\right)^2.$

以上ノ諸關係式ハ皆三角恒等式ヲ證スルニ必要ナルモノナリ.

---

## 問　　題

**125.** $\{\sin A+\sin B+\sin(A+B)\}^2+\{1+\cos A+\cos B+\cos(A+B)\}^2$ ヲ最簡ニセヨ.

**【解】** 所題ノ式 $=\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)^2$

$$+\left(2\cos^2\frac{A+B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2$$

$$=4\sin^2\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+4\cos^2\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)^2$$

$$=4\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)^2\left(\sin^2\frac{A+B}{2}+\cos^2\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=4\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)^2=16\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\text{…………(答)}$$

**126.** $\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}=\tan^2\left(45^\circ+\dfrac{A}{2}\right)$ ヲ證ヨセ.

(商船學校入學試驗問題)

**【解】** 左邊$=\dfrac{1+\cos(90^\circ-A)}{1-\cos(90^\circ-A)}=\dfrac{2\cos^2\left(45^\circ-\dfrac{A}{2}\right)}{2\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{A}{2}\right)}=\cot^2\left(45^\circ-\dfrac{A}{2}\right)$

$$=\tan^2\left\{90^\circ-\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)\right\}=\tan^2\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right).$$

○ **127.** $\dfrac{1+\sin A}{1+\cos A}=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan\dfrac{A}{2}\right)^2$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊$=\dfrac{\sin^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}{2\cos^2\dfrac{A}{2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}\right)^2$

$$=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+1\right)^2.$$

**128.** $\dfrac{\sin 2A}{1+\sin 2A}=\dfrac{2}{(1+\tan A)(1+\cot A)}$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊$=\dfrac{2\sin A\cos A}{\sin^2A+\cos^2A+2\sin A\cos A}=\dfrac{2\sin A\cos A}{(\sin A+\cos A)(\sin A+\cos A)}$

$$=\frac{2\sin A\cos A\div\sin A\cos A}{\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A}\cdot\dfrac{\sin A+\cos A}{\cos A}}=\frac{2}{(1+\cot A)(\tan A+1)}.$$



○ **129.** $\sec A+\tan A=\tan\left(45^\circ+\dfrac{A}{2}\right)$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊$=\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}=\dfrac{1+\cos(90^\circ-A)}{\sin(90^\circ-A)}$

$$=\frac{2\cos^2\left(45^\circ-\dfrac{A}{2}\right)}{2\sin\left(45^\circ-\dfrac{A}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\dfrac{A}{2}\right)}=\cot\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)$$

$$=\tan\left\{90^\circ-\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)\right\}=\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right).$$

**130.** $\tan^2A=1+2\tan^2B$ ナルトキハ $\cos^2B=1+\cos 2A$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ノ等式ノ兩邊ニ 1 ヲ加フレバ

$1+\tan^2A=2(1+\tan^2B)$ 　卽チ $\sec^2A=2\sec^2B.$

$\therefore\ \dfrac{1}{\cos^2A}=\dfrac{2}{\cos^2B},$ 　$\therefore\ \cos^2B=2\cos^2A=1+\cos 2A.$

**131.** $\dfrac{2\cos A\cos(90^\circ+A)}{\tan 225^\circ+\cos(-2A)}+\dfrac{\operatorname{cosec}150^\circ}{\cot\left(90^\circ+\dfrac{A}{2}\right)-\tan\left(\dfrac{A}{2}-90^\circ\right)}$

ヲ簡單ニセヨ.

**【解】** 所題ノ式$=\dfrac{2\cos A(-\sin A)}{1+\cos 2A}+\dfrac{2}{-\tan\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{A}{2}}$

$$=\frac{-2\sin A\cos A}{2\cos^2A}+\frac{2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{2}-\sin^2\dfrac{A}{2}}=-\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}=0\text{…………(答)}$$

**132.** $\dfrac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{\dfrac{1}{cos8A}-1}{\dfrac{1}{cos4A}-1}=\dfrac{1-cos8A}{cos8A}\cdot\dfrac{cos4A}{1-cos4A}=\dfrac{2sin^2 4A cos4A}{cos8A.2sin^2 2A}$

$$=\frac{2sin4Acos4A.\ 2sin2Acos2A}{cos8A.\ 2sin^2 2A}=\frac{sin8A}{cos8A}\cdot\frac{cos2A}{sin2A}=\frac{tan8A}{tan2A}.$$

**133.** $\dfrac{1+sin\theta-cos\theta}{1+sin\theta+cos\theta}$ ヲ最簡ニセヨ.

【解】 所題ノ式$=\dfrac{2sin^2\frac{\theta}{2}+2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}}{2cos^2\frac{\theta}{2}+2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2sin\frac{\theta}{2}\left(cos\frac{\theta}{2}+sin\frac{\theta}{2}\right)}{2cos\frac{\theta}{2}\left(cos\frac{\theta}{2}+sin\frac{\theta}{2}\right)}=tan\dfrac{\theta}{2}.$

(答)

**134.** $\dfrac{1-cosA+cosB-cos(A+B)}{1+cosA-cosB-cos(A+B)}=tan\dfrac{A}{2}cot\dfrac{A}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】

左邊$=\dfrac{1-cos(A+B)+(cosB-cosA)}{1-cos(A+B)-(cosB-cosA)}=\dfrac{2sin^2\frac{A+B}{2}+2sin\frac{A+B}{2}sin\frac{A-B}{2}}{2sin^2\frac{A+B}{2}-2sin\frac{A+B}{2}sin\frac{A-B}{2}}$

$$=\frac{sin\frac{A+B}{2}+sin\frac{A-B}{2}}{sin\frac{A+B}{2}-sin\frac{A-B}{2}}=\frac{2sin\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}}{2cos\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}}=tan\frac{A}{2}cot\frac{B}{2}.$$

**135.** 二次方程式 $x^2-2px+q^2=0$ ニ於テ

$p=\dfrac{1}{2}sec\theta,\ q=\dfrac{1}{2}tan\theta$ ナルトキハ

其兩根ハ $\dfrac{1}{1-tan^2\frac{\theta}{2}},\ \dfrac{1}{cot^2\frac{\theta}{2}-1}$ ナルコトヲ證セヨ.



【解】 與ヘラレタル方程式ハ $x^2-sec\theta.x+\dfrac{1}{4}tan^2\theta=0$ トナル.

$\therefore\ x=\dfrac{sec\theta\pm\sqrt{sec^2\theta-tan^2\theta}}{2}=\dfrac{sec\theta\pm1}{2}=\dfrac{\frac{1}{cos\theta}\pm1}{2}=\dfrac{1\pm cos\theta}{2cos\theta}.$

複號ノ中ノ (+) ヲ採レバ $x=\dfrac{2cos^2\frac{\theta}{2}}{2\left(cos^2\frac{\theta}{2}-sin^2\frac{\theta}{2}\right)}=\dfrac{1}{1-tan^2\frac{\theta}{2}}.$

又 (−) ヲ採レバ $x=\dfrac{2sin^2\frac{\theta}{2}}{2\left(cos^2\frac{\theta}{2}-sin^2\frac{\theta}{2}\right)}=\dfrac{1}{cot^2\frac{\theta}{2}-1}.$

∴ 題言ノ如シ.

**136.** 次ギノ無限級數ノ和ヲ最簡形ニテ表ハセ:

$a\ sin\theta,\ a\ sin\theta cos\theta,\ a\ sin\theta cos^2\theta,\ a\ sin\theta cos^3\theta,\dots\dots\dots\dots$

【解】 此級數ハ公比ガ $cos\theta$ ナル無限等比級數ニシテ然カモ $|cos\theta|\not>1$ ナリ.

∴ $|cos\theta|<1$ ナルトキ, 和ハ公式ニ由リ

$\dfrac{a\ sin\theta}{1-cos\theta}$, 卽チ $\dfrac{2a\ sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}}{2sin^2\frac{\theta}{2}}=a\ cot\dfrac{\theta}{2}.$

又 $cos\theta=1$ ナルトキハ $sin\theta=0$ ナルヲ以テ, 和ハ

$a\ sin\theta+a\ sin\theta+\dots\dots\dots\dots=a\ sin\theta\times\infty=a\times0\times\infty.$

又 $cos\theta=-1$ ナルトキモ $sin\theta=0$ ナルヲ以テ, 和ハ

$a\ sin\theta-a\ sin\theta+a\ sin\theta-\dots\dots\dots\dots=0$ 或ハ $a\ sin\theta.$

∴ 此場合ニ於テ, 和ハ 0 或ハ $a\times0$.

(答) $a\ cot\dfrac{\theta}{2}$, $a\times0\times\infty$, 0 或ハ $a\times0$.

〔26〕 *sin., cos.* **ノ積ヲ含ム恒等式ノ普通ノ證明法.** *sin., cos.* ノ積ヲ含ム恒等式ヲ證スルニハ通例其積ヲ和或ハ差ニ變ジテ考フベシ.

## 問　　題

**137.** $\sin\theta\sin2\theta+\sin3\theta\sin6\theta=\sin4\theta\sin5\theta$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos3\theta)+\frac{1}{2}(\cos3\theta-\cos9\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos9\theta)$

$=\frac{1}{2}(2\sin5\theta\sin4\theta)=\sin4\theta\sin5\theta.$

**138.** $\sin(\beta-\alpha)\sin(\delta-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)\sin(\delta-\alpha)$

$=\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\delta)$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\alpha-\delta+\gamma)-\cos(\beta-\alpha+\delta-\gamma)\}$

$+\frac{1}{2}\{\cos(\gamma-\beta-\delta+\alpha)-\cos(\gamma-\beta+\delta-\alpha)\}$

$=\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\alpha-\delta+\gamma)-\cos(\gamma-\beta+\delta-\alpha)\}$

$[\because\ \cos(\beta-\alpha+\delta-\gamma)=\cos\{-(\beta-\alpha+\delta-\gamma)\}=\cos(\gamma-\beta-\delta+\alpha)]$

$=\frac{1}{2}2\sin(\gamma-\alpha)\sin(\delta-\beta)=\sin\{-(\gamma-\alpha)\}\sin\{-(\delta-\beta)\}=\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\delta).$

**139.** $\cos40^\circ\cos(-80^\circ)-\cos(-260^\circ)\cos160^\circ$

$+\cos160^\circ\sin50^\circ$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 所題ノ式$=\frac{1}{2}\{\cos(-40^\circ)+\cos120^\circ\}-\frac{1}{2}\{\cos(-100^\circ)+\cos420^\circ\}$

$+\frac{1}{2}(\sin210^\circ-\sin110^\circ)=\frac{1}{2}(\cos40^\circ-\cos100^\circ-\sin110^\circ)$

$+\frac{1}{2}\{\cos(180^\circ-60^\circ)-\cos(360^\circ+60^\circ)+\sin(180^\circ+30^\circ)\}$



$=\frac{1}{2}\{2\sin70^\circ\sin30^\circ-\sin(180^\circ-70^\circ)\}+\frac{1}{2}(-\cos60^\circ-\cos60^\circ-\sin30^\circ)$

$=\frac{1}{2}(2\sin70^\circ.\frac{1}{2}-\sin70^\circ)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$…………(答)

**注意.** 本問ト同樣ニシテ次ギノ問題ヲ解スルコトヲ得:

$\sin100^\circ\sin(-160^\circ)+\cos200^\circ\cos(-280^\circ)$ ノ値ヲ求メヨ.

(答) $-\frac{1}{2}.$

**140.** $\cos40^\circ\cos80^\circ\cos160^\circ$ ノ値ヲ求メヨ.

【解】 所題ノ式$=\frac{1}{2}(\cos120^\circ+\cos40^\circ)\cos160^\circ$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos160^\circ+\frac{1}{2}\cos40^\circ\cos160^\circ$

$=-\frac{1}{4}\cos160^\circ+\frac{1}{4}(\cos200^\circ+\cos120^\circ)$

$=-\frac{1}{4}\cos160^\circ+\frac{1}{4}\cos(360^\circ-160^\circ)+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{1}{4}\cos160^\circ+\frac{1}{4}\cos(-160^\circ)-\frac{1}{8}$

$=-\frac{1}{4}\cos160^\circ+\frac{1}{4}\cos160^\circ-\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$……..(答)

**注意.** 本題ト同樣ニシテ次ノ問題ヲ解スルコトヲ得:

(i) $4\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ$ ノ値ヲ求メヨ. (答) $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

(ii) $\sin20^\circ\sin40^\circ\sin60^\circ\sin80^\circ$ ノ値ヲ求メヨ. (答) $\frac{3}{16}.$

**141.** $\sin A(\cos2A+\cos4A+\cos6A)=\sin3A\cos4A$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\sin A(2\cos 4A\cos 2A+\cos 4A)=\cos 4A(2\cos 2A\sin A+\sin A)$

$$=\cos 4A(\sin 3A-\sin A+\sin A)=\sin 3A\cos 4A.$$

**142.** $\dfrac{\sin 8A}{2\sin A}=\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊$=\dfrac{1}{2\sin A}(2\cos A\sin A+2\cos 3A\sin A+2\cos 5A\sin A+2\cos 7A\sin A)$

$$=\frac{1}{2\sin A}(\sin 2A+\sin 4A-\sin 2A+\sin 6A-\sin 4A+\sin 8A-\sin 6A)=\frac{\sin 8A}{2\sin A}.$$

**注意.** 本問ト同樣ニシテ次ノ問題ヲ解スルコトヲ得:

$$\sin 2A+\sin 4A+\sin 6A=\frac{\cos A-\cos 7A}{2\sin A}.$$

**143.** $\cos(A-2B)-\cos(A-B)+\cos A-\cos(A+B)$

$$+\cos(A+2B)=\cos A\frac{\cos\frac{5}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B}$$ ヲ證セヨ.

【解】

左邊$=\{\cos(A-2B)+\cos(A+2B)\}-\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}+\cos A$

$$=2\cos A\cos 2B-2\cos A\cos B+\cos A=\cos A(2\cos 2B-2\cos B+1)$$

$$=\frac{\cos A}{\cos\frac{1}{2}B}\left(2\cos 2B\cos\frac{1}{2}B-2\cos B\cos\frac{1}{2}B+\cos\frac{1}{2}B\right)$$

$$=\frac{\cos A}{\cos\frac{1}{2}B}\left(\cos\frac{5}{2}B+\cos\frac{3}{2}B-\cos\frac{3}{2}B-\cos\frac{1}{2}B+\cos\frac{1}{2}B\right)=\cos A\frac{\cos\frac{5}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B}.$$

○ **144.** $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots\cdots\cdots\cdots+\sin n\alpha$



$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$ ヲ證セヨ.

【解】

左邊$=\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\sin 3\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\cdots\cdots\cdots+\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}+\cos\frac{5\alpha}{2}-\cos\frac{7\alpha}{2}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right\}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}$$

=右邊.

**注意.** 本問ト同樣ニシテ次ノ問題ヲ解スルコトヲ得:

$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots\cdots\cdots\cdots+\cos n\alpha$

$$=\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$ ヲ證セヨ.

○ **145.*** $\dfrac{\cos A}{\cos B}+\dfrac{\sin A}{\sin B}=-1$ ナルトキハ $\dfrac{\cos^3 B}{\cos A}+\dfrac{\sin^3 B}{\sin A}=1$ ヲ證セヨ.

【解】 終結ノ左邊$=\dfrac{\sin A\cos B(1-\sin^2 B)+\cos A\sin B(1-\cos^2 B)}{\cos A\sin A}$

$$=\frac{\sin(A+B)-\sin B\cos B(\sin A\sin B+\cos A\cos B)}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{\sin(A+B)-\sin B\cos B\cos(A-B)}{\cos A\sin A}.$$

然ルニ假設ニ由リ $\cos A\sin B+\cos B\sin A=-\cos B\sin B$,

卽チ $\sin(A+B)=-\sin B\cos B$. 之ヲ上式ニ代用スレバ

$$終結ノ左邊=\frac{-\sin B\cos B+\sin(A+B)\cos(A-B)}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}\sin 2B+\frac{1}{2}\sin 2A+\frac{1}{2}\sin 2B}{\frac{1}{2}\sin 2A}=1.$$

**146.*** $\sin(n+1)\alpha=2\cos\alpha\sin n\alpha-\sin(n-1)\alpha$ ヲ證シ, 之ヲ用ヒテ次ギノ級數ノ和ヲ求メヨ.

$$1+x\sin\alpha+x^2\sin 2\alpha+x^3\sin 3\alpha+\dots\dots\dots\dots$$

但シ $|x|<1$ トス.

【解】 $2\cos\alpha\sin n\alpha-\sin(n-1)\alpha$

$$=\sin(n+1)\alpha+\sin(n-1)\alpha-\sin(n-1)\alpha=\sin(n+1)\alpha.$$

次ギニ所求ノ和ヲ S トスレバ

$$S=1+x\sin\alpha+x^2(2\cos\alpha\sin\alpha-\sin 0\alpha)+x^3(2\cos\alpha\sin 2\alpha-\sin\alpha)$$
$$+x^4(2\cos\alpha\sin 3\alpha-\sin 2\alpha)+\dots\dots\dots\dots$$
$$=1+x\sin\alpha+2x\cos\alpha(x\sin\alpha+x^2\sin 2\alpha+\dots\dots\dots\dots)$$
$$-x^2(x\sin\alpha+x^2\sin 2\alpha+\dots\dots\dots\dots)$$
$$=1+x\sin\alpha+(2x\cos\alpha-x^2)(S-1)$$

[∵ S ニ於ケル最後ノ三項ハ何レモ 0 ト見做シテ差支ヘナケレバナリ].

$$\therefore\quad S=\frac{1+x\sin\alpha-2x\cos\alpha+x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}=1+\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\dots\dots\dots\dots(答)$$



## 〔27〕 正弦, 餘弦ヲ含ム恒等式ノ別證明法.

### 問　　題

**147.** $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}$ ヲ最簡ニセヨ.

【解】 $所題ノ式=\dfrac{\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(2\cos\alpha+1)}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ (答)

**148.** $\dfrac{\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=1+2\sin 2\alpha$ ヲ證セヨ.

【解】 $左邊=\dfrac{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$$=\frac{4(\cos^3\alpha-\sin^3\alpha)-3(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=4(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha)-3$$

$$=4\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)-3=1+2\sin 2\alpha.$$

**149.** $\dfrac{\sin 3\alpha\sin 2\beta-\sin 3\beta\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha\sin\beta-\sin 2\beta\sin\alpha}=1+4\cos\alpha\cos\beta$ ヲ證セヨ.

【解】 $左邊=\dfrac{(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)2\sin\beta\cos\beta-(3\sin\beta-4\sin^3\beta)2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta-2\sin\beta\cos\beta\sin\alpha}$

$$=\frac{2\sin\alpha\sin\beta\{(3-4\sin^2\alpha)\cos\beta-(3-4\sin^2\beta)\cos\alpha\}}{2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha-\cos\beta)}$$

$$=\frac{\{3-4(1-\cos^2\alpha)\}\cos\beta-\{3-4(1-\cos^2\beta)\}\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos\beta}$$

$$=\frac{\cos\alpha-\cos\beta+4\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha-\cos\beta)}{\cos\alpha-\cos\beta}=1+4\cos\alpha\cos\beta.$$

## 〔28〕 正弦, 餘弦ノ他ノ函數ヲ含ム恒等式ノ普通ノ證明法.

*sin.*, *cos.* ニアラザル三角函數ヲ含ム恒等式ヲ證スルニハ, 通例此等ノ函數ヲ *sin.*, *cos.* ノ項ニテ表ハシ, 以テ前四條ノ方法ヲ用フベシ.

### 問　　題

**150.** $\sec\alpha=1+\tan\alpha\tan\frac{\alpha}{2}$ ヲ證セヨ.

$$=\frac{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha$$

【解】 右邊$=1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=1+\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=1+\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$

$$=\frac{\cos\alpha+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha.$$

**151.** $\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha=\mathrm{cosec}\,\alpha$ ヲ證セヨ.

【解】 $\cot\alpha+\mathrm{cosec}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}=\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\cot\dfrac{\alpha}{2}.$

$$\therefore\ \cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha=\mathrm{cosec}\,\alpha.$$

**152.** $\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}-\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\dfrac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$



$$=\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)}{\frac{1}{2}(\cos A+\cos B)}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}.$$

**153.** $\dfrac{1-\tan^2(45^\circ-\alpha)}{1+\tan^2(45^\circ-\alpha)}=\sin2\alpha$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{1-\dfrac{\sin^2(45^\circ-\alpha)}{\cos^2(45^\circ-\alpha)}}{\sec^2(45^\circ-\alpha)}=\cos^2(45^\circ-\alpha)-\sin^2(45^\circ-\alpha)$

$$\left[\because\ \frac{1}{\sec^2A}=\cos^2A\right]$$

$$=\cos2(45^\circ-\alpha)=\cos(90^\circ-2\alpha)=\sin2\alpha.$$

**154.** $\mathrm{cosec}\,2\theta+\cot4\theta+\mathrm{cosec}\,4\theta=\cot\theta$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{1}{\sin2\theta}+\left(\dfrac{\cos4\theta}{\sin4\theta}+\dfrac{1}{\sin4\theta}\right)=\dfrac{1}{\sin2\theta}+\dfrac{\cos4\theta+1}{\sin4\theta}$

$$=\frac{1}{\sin2\theta}+\frac{2\cos^22\theta}{2\sin2\theta\cos2\theta}=\frac{1}{\sin2\theta}+\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}=\frac{1+\cos2\theta}{\sin2\theta}$$

$$=\frac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta.$$

**155.** $\tan9^\circ-\tan27^\circ-\tan63^\circ+\tan81^\circ=4$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\tan9^\circ+\tan(90^\circ-9^\circ)-\tan27^\circ-\tan(90^\circ-27^\circ)$

$$=\tan9^\circ+\cot9^\circ-\tan27^\circ-\cot27^\circ=\frac{\sin9^\circ}{\cos9^\circ}+\frac{\cos9^\circ}{\sin9^\circ}-\left(\frac{\sin27^\circ}{\cos27^\circ}+\frac{\cos27^\circ}{\sin27^\circ}\right)$$

$$=\frac{\sin^29^\circ+\cos^29^\circ}{\cos9^\circ\sin9^\circ}-\frac{\sin^227^\circ+\cos^227^\circ}{\cos27^\circ\sin27^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin18^\circ}-\frac{1}{\frac{1}{2}\sin54^\circ}$$

$$=2\frac{\sin54^\circ-\sin18^\circ}{\sin18^\circ\sin54^\circ}=2\frac{2\cos36^\circ\sin18^\circ}{\sin18^\circ\sin54^\circ}=4\frac{\cos(90^\circ-54^\circ)}{\sin54^\circ}=4\frac{\sin54^\circ}{\sin54^\circ}=4.$$

**156.** $\{sec\alpha+cosec\alpha(1+sec\alpha)\}\left(1-tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\alpha}{4}\right)$

$$=\left(sec\frac{\alpha}{2}+cosec\frac{\alpha}{2}\right)sec^2\frac{\alpha}{4}$$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊 $=\left\{\frac{1}{cos\alpha}+\frac{1}{sin\alpha}\left(1+\frac{1}{cos\alpha}\right)\right\}\left(1-\frac{sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)\left(1-\frac{sin^2\frac{\alpha}{4}}{cos^2\frac{\alpha}{4}}\right)$

$$=\left(\frac{1}{cos\alpha}+\frac{cos\alpha+1}{sin\alpha\ cos\alpha}\right)\frac{cos^2\frac{\alpha}{2}-sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{cos^2\frac{\alpha}{4}-sin^2\frac{\alpha}{4}}{cos^2\frac{\alpha}{4}}$$

$$=\left(\frac{1}{cos\alpha}+\frac{2cos^2\frac{\alpha}{2}}{2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}cos\alpha}\right)\frac{cos\alpha}{cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{cos\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{4}}$$

$$=\left(\frac{1}{cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{sin\frac{\alpha}{2}}\right)sec^2\frac{\alpha}{4}=\left(sec\frac{\alpha}{2}+cosec\frac{\alpha}{2}\right)sec^2\frac{\alpha}{4}.$$

---

## 〔29〕 正切，餘切ヲ含ム恒等式ノ別證明法.

三角恒等式ノ中ニハ前條ノ方法ニ據ラズシテ簡單ニ解セラルヽモノモ亦少シトセズ．次ギノ問題ノ如キ是レナリ．

### 問　　題

○ **157.** $cot\frac{\pi}{8}-tan\frac{\pi}{8}=2$ ヲ證セヨ.



【解】 左邊 $=\frac{1}{tan\frac{\pi}{8}}-tan\frac{\pi}{8}=\frac{1-tan^2\frac{\pi}{8}}{tan\frac{\pi}{8}}=2\frac{1-tan^2\frac{\pi}{8}}{2tan\frac{\pi}{8}}=2\frac{1}{tan\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}$

$$=2cot\frac{\pi}{4}=2\times1=2.$$

**158.** $tan(45°+A)-tan(45°-A)=2tan2A$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊 $=tan\{90°-(45°-A)\}-tan(45°-A)$

$$=cot(45°-A)-tan(45°-A)=\frac{1}{tan(45°-A)}-tan(45°-A)$$

$$=\frac{1-tan^2(45°-A)}{tan(45°-A)}=2\frac{1-tan^2(45°-A)}{2tan(45°-A)}=2\frac{1}{tan\{2(45°-A)\}}$$

$$=2cot(90°-2A)=2tan2A.$$

○ **159.** $tan^4\theta=\frac{2tan\theta-sin2\theta}{2cot\theta-sin2\theta}$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊 $=\frac{2tan\theta-2\frac{sin\theta}{cos\theta}cos^2\theta}{2cot\theta-2sin^2\theta\frac{cos\theta}{sin\theta}}=\frac{2tan\theta(1-cos^2\theta)}{2cot\theta(1-sin^2\theta)}=\frac{tan\theta}{\frac{1}{tan\theta}}\cdot\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}$

$$=tan^2\theta tan^2\theta=tan^4\theta.$$

**160.** $tanA+2tan2A+4tan4A=cotA-8cot8A$ ヲ證セヨ.

【解】 $tanA-cotA=tanA-\frac{1}{tanA}=-\frac{1-tan^2A}{tanA}=-2\frac{1-tan^2A}{2tanA}$

$$=-2\frac{1}{tan2A}=\boxed{-2cot2A}\ \cdots\cdots\cdots(\alpha);$$

$\therefore\ tanA-cotA+2tan2A=2(tan2A-cot2A)=2(-2cot4A)=-4cot4A;$ 〔(α) ト同理〕

tan 2A − cot 2A = −2 cot 4A

tan 4A − cot 4A = −2 cot 8A

$\therefore\ \tan A - \cot A + 2\tan 2A + 4\tan 4A = 4(\tan 4A - \cot 4A) = 4(-2\cot 8A)$

[(α) ト同理]

$= -8\cot 8A.$ $\therefore$ 所題ノ如シ.

---

## 〔30〕 和角, 差角ノ正切, 餘切ノ公式ノ活用.

三角恒等式ノ中ニハ第 8 條ニ於ケル和角, 差角ノ *tan.*, *cot.* ノ公式ヲ用ヒテ簡單ニ解シ得ラルヽモノ少カラズ. 次ギノ問題ノ如キ是レナリ.

### 問　　題

**161.** $\sqrt{3} + \tan 40° + \tan 80° = \sqrt{3}\tan 40° \tan 80°$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊$= \sqrt{3} + \dfrac{\tan 40° + \tan 80°}{1 - \tan 40° \tan 80°}(1 - \tan 40° \tan 80°)$

$= \sqrt{3} + \tan(40° + 80°)(1 - \tan 40° \tan 80°) = \sqrt{3} - \sqrt{3}(1 - \tan 40° \tan 80°)$

[$\because$ $\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$]

$= \sqrt{3}\tan 40° \tan 80°.$

**162.** $A + B = 45°$ ナルトキハ

$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 終結ノ左邊$= 1 + \tan A + \tan B + \tan A \tan B.$

然ルニ $\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \tan(A + B) = \tan 45° = 1.$

$\therefore\ \tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B.$



之ヲ上式ニ代用スレバ

終結ノ左邊$= 1 + 1 - \tan A \tan B + \tan A \tan B = 2.$

**163.** $\tan(A + 60°)\tan(A - 60°) + \tan A \tan(A + 60°) + \tan(A - 60°)\tan A = -3$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊$= \{1 + \tan(A + 60°)\tan(A - 60°)\}$

$+ \{1 + \tan A \tan(A + 60°)\} + \{1 + \tan(A - 60°)\tan A\} - 3$

$= \dfrac{1 + \tan(A + 60°)\tan(A - 60°)}{\tan(A + 60°) - \tan(A - 60°)}\{\tan(A + 60°) - \tan(A - 60°)\}$

$+ \dfrac{1 + \tan A \tan(A + 60°)}{\tan A - \tan(A + 60°)}\{\tan A - \tan(A + 60°)\}$

$+ \dfrac{1 + \tan(A - 60°)\tan A}{\tan(A - 60°) - \tan A}\{\tan(A - 60°) - \tan A\} - 3$

$= \dfrac{1}{\tan\{(A + 60°) - (A - 60°)\}}\{\tan(A + 60°) - \tan(A - 60°)\}$

$+ \dfrac{1}{\tan\{A - (A + 60°)\}}\{\tan A - \tan(A + 60°)\}$

$+ \dfrac{1}{\tan\{(A - 60°) - A\}}\{\tan(A - 60°) - \tan A\} - 3$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{\tan(A + 60°) - \tan(A - 60°)$

$+ \tan A - \tan(A + 60°) + \tan(A - 60°) - \tan A\} - 3$

[$\because$ $\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = \tan(-60°) = -\sqrt{3}$]

$= -3.$

**注意.** 差角ノ *cot.* ノ公式ヲ用フレバ本問ト同様ニシテ下ノ問題ヲ解スルコヲ得:

$\cot(A + 60°)\cot(A - 60°) + \cot A \cot(A + 60°) + \cot(A - 60°)\cot A = -3$ ヲ證セヨ.

## 〔31〕 正弦, 餘弦ノ平方ヲ含ム恒等式.

$sin^2.$, $cos^2.$ ヲ含ム三角恒等式ヲ證スルニハ先ヅ此等ヲ $sin^2A=\dfrac{1-cos2A}{2}$, $cos^2A=\dfrac{1+cos2A}{2}$ ナル公式ニ據リテ二倍ノ角ノ $cos.$ ヲ含ムモノニ變ジ, 然ル後第 24 條乃至第 27 條ノ方法ヲ行フベシ.

## 〔32〕 二角ノ sin. 及ビ cos. ノ平方ノ和及ビ差ニ關シテノ公式.

I. $sin(A+B)sin(A-B)=sin^2A-sin^2B=cos^2B-cos^2A.$

【解】 第一式 $=(sinAcosB+cosAsinB)(sinAcosB-cosAsinB)$

$=sin^2Acos^2B-cos^2Asin^2B$

$=sin^2A(1-sin^2B)-(1-sin^2A)sin^2B=sin^2A-sin^2B;$

$sin^2A-sin^2B=1-cos^2A-(1-cos^2B)=cos^2B-cos^2A.$

II. $cos(A+B)cos(A-B)=cos^2A-sin^2B=cos^2B-sin^2A.$

【解】 第一式 $=(cosAcosB-sinAsinB)(cosAcosB+sinAsinB)$

$=cos^2Acos^2B-sin^2Asin^2B$

$=cos^2A(1-sin^2B)-(1-cos^2A)sin^2B=cos^2A-sin^2B;$

$cos^2A-sin^2B=1-sin^2A-(1-cos^2B)=cos^2B-sin^2A.$

### 問　　題

**164.** $cos^2 27°{\cdot}5+cos^2 32°{\cdot}5+cos^2 87°{\cdot}5=\dfrac{3}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊 $=\dfrac{1+cos55°}{2}+\dfrac{1+cos65°}{2}+\dfrac{1+cos175°}{2}$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}(cos55°+cos65°+cos175°)$



cos 2A = 2cos²A − 1

$\frac{1+cos2A}{2}=cos^2A$

$\therefore cos^2(\alpha+45°)=\frac{1+cos(2\alpha+\ldots)}{2}$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}(2cos60°cos5°+cos175°)$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}(2\times\dfrac{1}{2}\times cos5°-cos5°)=$ 右邊.

**165.** 次ギノ恒等式ヲ證セヨ:

$$cos^2A-cosAcos(60°+A)+sin^2(30°-A)=\frac{3}{4}.$$

【解】 左邊 $=\dfrac{1}{2}\left\{1+cos2A-cos(60°+2A)-cos60°+1-cos(60°-2A)\right\}.$

$=\dfrac{1}{2}(1+1-\dfrac{1}{2}+cos2A-2cos60°cos2A)=$ 右邊.

**166.** $sec^2(\alpha+45°)-sec^2(\alpha-45°)=4\,tan2\alpha\,sec2\alpha$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊 $=\dfrac{1}{cos^2(\alpha+45°)}-\dfrac{1}{cos^2(\alpha-45°)}$

$=\dfrac{2}{1+cos(2\alpha+90°)}-\dfrac{2}{1+cos(2\alpha-90°)}=\dfrac{2}{1-sin2\alpha}-\dfrac{2}{1+sin2\alpha}$

$=2\dfrac{2sin2\alpha}{1-sin^22\alpha}=\dfrac{4sin2\alpha}{cos^22\alpha}=4\dfrac{sin2\alpha}{cos2\alpha}\cdot\dfrac{1}{cos2\alpha}=$ 右邊.

○ **167.*** $sin^2\alpha+sin^22\alpha+sin^23\alpha+\ldots\ldots+sin^2n\alpha$

$=\dfrac{1}{2}\left\{n-\dfrac{cos(n+1)\alpha\,sinn\alpha}{sin\alpha}\right\}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊 $=\dfrac{1-cos2\alpha}{2}+\dfrac{1-cos4\alpha}{2}+\dfrac{1-cos6\alpha}{2}+\ldots\ldots+\dfrac{1-cos2n\alpha}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\{n-(cos2\alpha+cos4\alpha+cos6\alpha+\ldots\ldots+cos2n\alpha)\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{n-\dfrac{1}{sin\alpha}(cos2\alpha\,sin\alpha+cos4\alpha\,sin\alpha+cos6\alpha\,sin\alpha+\ldots\ldots+cos2n\alpha\,sin\alpha)\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{n-\frac{1}{2\sin\alpha}[\sin3\alpha-\sin\alpha+\sin5\alpha-\sin3\alpha+\sin7\alpha-\sin5\alpha+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\sin(2n+1)\alpha-\sin(2n-1)\alpha]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{n-\frac{1}{2\sin\alpha}[\sin(2n+1)\alpha-\sin\alpha]\right\}=\frac{1}{2}\left\{n-\frac{1}{2\sin\alpha}2\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha\right\}$$

＝右邊.

**168.** $\sin^4 22^\circ\frac{1}{2}+\sin^4 67^\circ\frac{1}{2}+\sin^4 112^\circ\frac{1}{2}+\sin^4 157^\circ\frac{1}{2}$ $=\frac{3}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】

$$左邊=\left(\sin^2 22^\circ\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin^2 67^\circ\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin^2 112^\circ\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin^2 157^\circ\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1-\cos45^\circ}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos135^\circ}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos225^\circ}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos315^\circ}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\times2\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=\frac{1}{2}\times2\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

**169.** $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2(A+B)}=\dfrac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}$ ヲ證セヨ.

【解】 $左邊=\dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2(A+B)}=\dfrac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}=右邊.$

[分母子ヲ $\cos A\cos B$ ニテ除シタルナリ.]

**170.** $\cos^2 A-\cos^2 3A=\sin4A\sin2A$ ヲ證セヨ.

【解】 $左邊=\sin(A+3A)\sin(3A-A)$　[(I) ニ據ル]

＝右邊.



**171.** $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta)$ ヲ證セヨ.

【解】 $\sin^2\alpha-\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2\beta$

$=\sin(\alpha+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\alpha-\beta)+\sin^2\beta$　[(I) ニ據ル]

$=\sin(2\alpha+\beta)\sin(-\beta)+\sin^2\beta=\sin\beta\{\sin\beta-\sin(2\alpha+\beta)\}$

$=\sin\beta.2\cos(\alpha+\beta)\sin(-\alpha)=-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta).$

∴ 轉項スレバ所題ノ如クナル.

**注意.** 本問ト同樣ニシテ次ノ問題ヲ解スルコトヲ得:

$\sin^2 B+\sin^2(A-B)+2\sin B\sin(A-B)\cos A$ ヲ最簡ニセヨ.

(答) $\sin^2 A$.

**172.** $1+\cos2(A-B)\cos2B=\cos^2 A+\cos^2(A-2B)$ ヲ證セヨ.

【解】 $右邊=\cos^2 A+1-\sin^2(A-2B)=1+\{\cos^2 A-\sin^2(A-2B)\}$

$=1+\cos(A+A-2B)\cos(A-A+2B)$　[(II) ニ據ル]

$=1+\cos2(A-B)\cos2B.$

**173.** $\cos^2 A+\cos^2(120^\circ+A)+\cos^2(120^\circ-A)=\dfrac{3}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】 $左邊=\cos^2 A+\cos^2(120^\circ+A)+\{1-\sin^2(120^\circ-A)\}$

$=\cos^2 A+\cos^2(120^\circ+A)-\sin^2(120^\circ-A)+1$

$=\cos^2 A+\cos(120^\circ+A+120^\circ-A)\cos(120^\circ+A-120^\circ+A)+1$

[(II) ニ據ル]

$=\cos^2 A+\cos(180^\circ+60^\circ)\cos2A+1=\cos^2 A-\cos60^\circ\cos2A+1$

$=\cos^2 A-\dfrac{1}{2}(2\cos^2 A-1)+1=\dfrac{3}{2}.$

○ **174.** $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2(A+B)$

$=2\sin A\sin B\sin(A+B)\{\cot A+\cot B-\cot(A+B)\}$ ヲ證セヨ.

**【解】** 右邊 $=2\sin A\sin B\sin(A+B)\left\{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}\right\}$

$=2\sin A\sin B\sin(A+B)\left\{\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}-\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}\right\}$

$=2\sin^2(A+B)-2\sin A\sin B\cos(A+B).$

∴ 本題ヲ證スルニハ

$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2(A+B)=2\sin^2(A+B)-2\sin A\sin B\cos(A+B)$ 或ハ之ヲ轉項シタル

$\sin^2A+\sin^2B-\sin^2(A+B)=-2\sin A\sin B\cos(A+B)$ ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ最後ノ等式ノ左邊ハ

$\sin^2A+\sin(B+A+B)\sin(B-A-B)$　[(I) ニ據ル]

$=\sin^2A-\sin(A+2B)\sin A=-\sin A\{\sin(A+2B)-\sin A\}$

$=-\sin A.2\cos(A+B)\sin B=-2\sin A\sin B\cos(A+B).$

∴ 本題ヲ證シ得タリ.

○ **175.** $1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma$ ヲ因數ニ分解セヨ.

**【解】** 所題ノ式 $=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\{\cos^2\alpha-(1-\cos^2\beta)\}-\cos^2\gamma$

$=\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\cos\gamma-(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)-\cos^2\gamma$

$=-\{\cos^2\gamma-[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\}$ [(II) ニ據ル]

$=-\{\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\}\{\cos\gamma-\cos(\alpha-\beta)\}$

$=-2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.2\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}$

$=4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}$......(答)



或ハ次ギノ如ク解スルモ可ナリ：

所題ノ式 $=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)-(\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\gamma)$

$=\sin^2\alpha\sin^2\beta-(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)^2$

$=(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma)$

$=\{\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma\}\{\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\}=$......[上ノ答解ノ如クナセバ可ナリ].

○ **176.** $B+\frac{C-A}{2}$, $\frac{C+A}{2}$, $B-\frac{C-A}{2}$ ノ cos. ガ等比級數ヲナストキハ $\frac{A+C}{2}-B$, $\frac{C-A}{2}$, $\frac{A+C}{2}+B$ ノ sin. モ亦等比級數ヲナスコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ニ由リ $\cos\left(B+\frac{C-A}{2}\right)\cos\left(B-\frac{C-A}{2}\right)=\cos^2\frac{C+A}{2}$,

即チ　$\cos^2B-\sin^2\frac{C-A}{2}=\cos^2\frac{C+A}{2}$; [(II) ニ據ル]

轉項スレバ　$\cos^2B-\cos^2\frac{C+A}{2}=\sin^2\frac{C-A}{2}$,

即チ　$\sin\left(\frac{A+C}{2}-B\right)\sin\left(\frac{A+C}{2}+B\right)=\sin^2\frac{C-A}{2}$.　[(I) ニ據ル]

∴ $\sin\left(\frac{A+C}{2}-B\right)$, $\sin\frac{C-A}{2}$, $\sin\left(\frac{A+C}{2}+B\right)$ ハ等比級數ヲナス.

---

## 〔33〕 正弦，餘弦ノ立方ヲ含ム恒等式.

$\sin^3.$, $\cos^3.$ ヲ含ム三角恒等式ヲ證スルニハ先ヅ此等ヲ第 21 條ノ公式ノ變形タル $\sin^3A=\frac{3\sin A-\sin 3A}{4}$, $\cos^3A=\frac{3\cos A+\cos 3A}{4}$ ナル公式ニ據リテ一次ノ三角函數ヲ含ムモノニ變ジ，然ル後第 24 條乃至第 27 條ノ方法ヲ行フベシ.

## 問　　題

**177.** $\sin 3\alpha \sin^3\alpha + \cos 3\alpha \cos^3\alpha = \cos^3 2\alpha$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊 $= \sin 3\alpha \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} + \cos 3\alpha \dfrac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$

$$= \frac{3(\sin 3\alpha \sin\alpha + \cos 3\alpha \cos\alpha) + \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha}{4}$$

$$= \frac{3\cos 2\alpha + \cos 6\alpha}{4} = \cos^3 2\alpha.$$

$= 4\cos^3 2\alpha - 3\cos 2\alpha$

**注意.** 本問ト同様ニシテ次ギノ問題ヲ解クコトヲ得ベシ:

$$\cos^3\alpha \sin 3\alpha + \sin^3\alpha \cos 3\alpha = \frac{3}{4}\sin 4\alpha \text{ ヲ證セヨ.}$$

**178.** $\sin^3\alpha + \sin^3(120° + \alpha) - \sin^3(120° - \alpha) = -\dfrac{3}{4}\sin 3\alpha$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊 $= \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} + \dfrac{3\sin(120° + \alpha) - \sin(360° + 3\alpha)}{4} - \dfrac{3\sin(120° - \alpha) - \sin(360° - 3\alpha)}{4}$

$$= \frac{3}{4}\{\sin\alpha + \sin(120° + \alpha) - \sin(120° - \alpha)\} - \frac{1}{4}\{\sin 3\alpha + \sin 3\alpha - \sin(-3\alpha)\}$$

$$= \frac{3}{4}(\sin\alpha + 2\cos 120° \sin\alpha) - \frac{3}{4}\sin 3\alpha = \frac{3}{4}\left\{\sin\alpha + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\alpha\right\} - \frac{3}{4}\sin 3\alpha$$

$$= -\frac{3}{4}\sin 3\alpha.$$

**注意.** 本問ト同様ニシテ次ギノ問題ヲ解クコトヲ得ベシ:

$$\cos^3\alpha + \cos^3(120° + \alpha) + \cos^3(120° - \alpha) = \frac{3}{4}\cos 3\alpha \text{ ヲ證セヨ.}$$



### 〔34〕 $2\cos\alpha \pm 1$ ヲ積ニ變ズルコト.

次ギノ因數分解法ハ稍困難ナル三角恒等式ヲ證スルニ方リ屢々用ヒラルルモノナリ:

(i) $2\cos\alpha + 1 = 2\left(1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right) + 1 = 3 - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$$= \frac{3\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \boxed{\frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}}.$$

(ii) $2\cos\alpha - 1 = 2\left(2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1\right) - 1 = 4\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 3$

$$= \frac{4\cos^3\frac{\alpha}{2} - 3\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \boxed{\frac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}.$$

## 問　　題

○ **179.** $\sin 54° - \sin 18° = \dfrac{1}{2}$ ヲ證セヨ.

**【解】** $\sin 54° - \dfrac{1}{2} = \cos(90° - 54°) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\cos 36° - 1}{2}$

$$= \frac{2(2\cos^2 18° - 1) - 1}{2} = \frac{4\cos^2 18° - 3}{2} = \frac{4\cos^3 18° - 3\cos 18°}{2\cos 18°}$$

$$= \frac{\cos 54°}{2\cos 18°} = \frac{\sin(90° - 54°)}{2\cos 18°} = \frac{2\sin 18° \cos 18°}{2\cos 18°} = \sin 18°.$$

∴ 轉項スレバ所題ノ如クナル.

**180** $\cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\frac{3\pi}{7}=2\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$

$=\cos\frac{3\pi}{7}\left(2\cos\frac{2\pi}{7}+1\right)=\cos\frac{3\pi}{7}\left\{2\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{7}\right)+1\right\}=\cos\frac{3\pi}{7}\left(3-4\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$

$=\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\frac{3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}$

$=\frac{1}{2}.$

**181.** $\sin\alpha+\sin(72^\circ+\alpha)+\sin(36^\circ-\alpha)$

$=\sin(72^\circ-\alpha)+\sin(36^\circ+\alpha)$ ヲ證セヨ.

【解】 本題ヲ證スルニハ之ヲ轉項シタル

$\sin\alpha+\sin(72^\circ+\alpha)-\sin(72^\circ-\alpha)=\sin(36^\circ+\alpha)-\sin(36^\circ-\alpha)$,

卽チ $\sin\alpha+2\cos72^\circ\sin\alpha=2\cos36^\circ\sin\alpha$,

或ハ之ヨリ $\sin\alpha$ ヲ省キタル $1+2\cos72^\circ=2\cos36^\circ$ ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ $1+2\cos72^\circ=1+2(1-2\sin^2 36^\circ)=3-4\sin^2 36^\circ$

$=\frac{3\sin36^\circ-4\sin^3 36^\circ}{\sin36^\circ}=\frac{\sin108^\circ}{\sin36^\circ}$

$=\frac{\sin(180^\circ-108^\circ)}{\sin36^\circ}=\frac{2\sin36^\circ\cos36^\circ}{\sin36^\circ}=2\cos36^\circ.$

∴ 本題ヲ證シ得タリ.

## [35] 和ガ 180° ナル三ツノ角ノ三角函數.

$A+B+C=180^\circ$ ナル要件ヲ有スル關係式ヲ證スルニハ是迄用ヒ來リタル種々ナル方法ニ此要件ヲ適宜混用スレバ可ナリ.



## 問　　題

$A+B+C=180^\circ$ ナルトキ次ギノ關係式ヲ證セヨ：

(182--200)

**182.** $\cos2A-\cos2B+\sin2C$

$=-4\sin C\sin(45^\circ+A)\cos(45^\circ+B).$

【解】 左邊$=2\sin(A+B)\sin(B-A)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\{\cos(90^\circ-B+A)-\cos(A+B)\}$

[∵ $\sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\sin C$;

$\sin(B-A)=\cos\{90^\circ-(B-A)\}=\cos(90^\circ-B+A)$;

$\cos C=\cos(180^\circ-A-B)=-\cos(A+B)$].

$=2\sin C\,.\,2\sin(45^\circ+A)\sin(B-45^\circ)=-4\sin C\sin(45^\circ+A)\sin(45^\circ-B)$

$=-4\sin C\sin(45^\circ+A)\cos\{90^\circ-(45^\circ-B)\}$

$=-4\sin C\sin(45^\circ+A)\cos(45^\circ+B).$

**183.** $\sin A+\sin B+\cos C+1$

$=4\cos\frac{C}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{2}\right).$

【解】 左邊$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos^2\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\left(90^\circ-\frac{A+B}{2}\right)\right\}$

$\left[∵\ \cos\frac{C}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{A+B}{2}\right)=\sin\frac{A+B}{2}\right]$

$=2\cos\frac{C}{2}\,.\,2\cos\left(45^\circ-\frac{B}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)=$右邊.

**注意.** 本問ト同樣ニシテ次ギノ問題ヲ解クコトヲ得:

$A+B+C=180°$ ナルトキ

$(cosA+cosB)+cosC-1=4sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$ ヲ證セヨ.

**184.** $sin4A+sin4B+sin4C=-4sin2Asin2Bsin2C.$

【解】 左邊 $=2sin(2A+2B)cos(2A-2B)+2sin2Ccos2C$

$=-2sin2C\{cos(2A-2B)-cos(2A+2B)\}$

$[\because\ sin(2A+2B)=sin(360°-2C)=sin(-2C)=-sin2C;$

$cos2C=cos(360°-2A-2B)=cos(-2A-2B)=cos(2A+2B).]$

$=-2sin2C\ 2sin2Asin2B=$ 右邊.

$A+B+C=180°$

**185.** $sin3A+sin3B+sin3C=-4cos\frac{3A}{2}cos\frac{3B}{2}cos\frac{3C}{2}.$

【解】 左邊 $=2sin\frac{3A+3B}{2}cos\frac{3A-3B}{2}+2sin\frac{3C}{2}cos\frac{3C}{2}$

$=-2cos\frac{3C}{2}\left(cos\frac{3A-3B}{2}+cos\frac{3A+3B}{2}\right)$

$\left[\because\ sin\frac{3A+3B}{2}=sin\left(270°-\frac{3C}{2}\right)=sin\left(180°+90°-\frac{3C}{2}\right)\right.$

$\left.=-sin\left(90°-\frac{3C}{2}\right)=-cos\frac{3C}{2}\right.$; 同樣ニ $\left.sin\frac{3C}{2}=-cos\frac{3A+3B}{2}\right]$

$=-4cos\frac{3C}{2}cos\frac{3A}{2}cos\frac{3B}{2}.$

○ **186.** $sin(A-60°)+sin(B-60°)+sin(C-60°)$

$=-4sin\left(\frac{A}{2}-30°\right)sin\left(\frac{B}{2}-30°\right)sin\left(\frac{C}{2}-30°\right).$

【解】 左邊 $=2sin\left(\frac{A+B}{2}-60°\right)cos\frac{A-B}{2}+2sin\left(\frac{C}{2}-30°\right)cos\left(\frac{C}{2}-30°\right)$



$=-2sin\left(\frac{C}{2}-30°\right)\left\{cos\frac{A-B}{2}-cos\left(\frac{A+B}{2}-60°\right)\right\}$

$\left[\because\ \frac{A+B}{2}-60°+\frac{C}{2}-30°=0.\quad\therefore\ sin\left(\frac{A+B}{2}-60°\right)\right.$

$\left.=-sin\left(\frac{C}{2}-30°\right);\ cos\left(\frac{C}{2}-30°\right)=cos\left(\frac{A+B}{2}-60°\right)\right]$

$=-2sin\left(\frac{C}{2}-30°\right).2sin\left(\frac{A}{2}-30°\right)sin\left(\frac{B}{2}-30°\right)=$ 右邊.

○ **187.** $cos\frac{A}{2}+cos\frac{B}{2}+\boxed{cos\frac{C}{2}}$

$=4cos\left(45°-\frac{A}{4}\right)cos\left(45°-\frac{B}{4}\right)cos\left(45°-\frac{C}{4}\right).$

【解】 左邊 $=2cos\frac{A+B}{4}cos\frac{A-B}{4}+2sin\frac{A+B}{4}cos\frac{A+B}{4}$

$\left[\because\ cos\frac{C}{2}=cos\left(90°-\frac{A+B}{2}\right)=sin\frac{A+B}{2}=2sin\frac{A+B}{4}cos\frac{A+B}{4}\right]$

$=2cos\frac{A+B}{4}\left\{cos\frac{A-B}{4}+cos\left(90°-\frac{A+B}{4}\right)\right\}$

$\left[\because\ sin\frac{A+B}{4}=cos\left(90°-\frac{A+B}{4}\right)\right]$

$=2cos\frac{180°-C}{4}\cdot 2cos\left(45°-\frac{B}{4}\right)cos\left(45°-\frac{A}{4}\right)=$ 右邊.

**188.** $sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}-1$

$=4sin\left(45°-\frac{A}{4}\right)sin\left(45°-\frac{B}{4}\right)sin\left(45°-\frac{C}{4}\right).$

【解】 左邊 $=2sin\frac{A+B}{4}cos\frac{A-B}{4}+cos\frac{A+B}{2}-1\quad\left[\because\ \frac{C}{2}+\frac{A+B}{2}=90°\right]$

$=2sin\frac{A+B}{4}cos\frac{A-B}{4}-2sin^2\frac{A+B}{4}$

$$\left[1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right.\quad \text{ナル公式ニ據ル}\Big|$$

$$=2\sin\frac{A+B}{4}\left\{\cos\frac{A-B}{4}-\cos\left(90^\circ-\frac{A+B}{4}\right)\right\}$$

$$=2\sin\frac{180^\circ-C}{4}\cdot 2\sin\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)=\text{右邊}.$$

○ **189.** $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C.$

**【解】** $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C-1=\cos^2A+\cos^2B-\sin^2C$

$=\cos^2A+\cos(B+C)\cos(B-C)$

$=-\cos A\cos(B+C)-\cos A\cos(B-C)\qquad[\because\ A+B+C=180^\circ]$

$=-\cos A\{\cos(B+C)+\cos(B-C)\}=-2\cos A\cos B\cos C.$

∴ 轉項スレバ所題ノ如クナル.

○ **190.** $\sin(B-C)\cos^3A+\sin(C-A)\cos^3B+\sin(A-B)\cos^3C$

$$=-\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B).$$

**【解】**

$$\text{左邊}=-\sin(B-C)\cos(B+C)\frac{1+\cos2A}{2}-\sin(C-A)\cos(C+A)\frac{1+\cos2B}{2}$$

$$-\sin(A-B)\cos(A+B)\frac{1+\cos2C}{2}\qquad[\because\ A+B+C=180^\circ]$$

$$=\frac{1}{4}(\sin2C-\sin2B+\sin2A-\sin2C+\sin2B-\sin2A)$$

$$+\frac{1}{4}(\sin2C\cos2A-\sin2B\cos2A+\sin2A\cos2B-\sin2C\cos2B$$

$$+\sin2B\cos2C-\sin2A\cos2C)$$

$$=\frac{1}{4}\{\sin(2C-2A)+\sin(2A-2B)+\sin(2B-2C)\}$$

$$=\frac{1}{2}\sin(B-C)\{\cos(B-C)-\cos(2A-B-C)\}$$

$$=\sin(B-C)\sin(A-C)\sin(A-B)=\text{右邊}.$$



**191.** $\dfrac{\cos A}{\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}=2.$

**【解】** $\text{左邊}=\dfrac{\frac{1}{2}(\sin2A+\sin2B+\sin2C)}{\sin A\sin B\sin C}.$

然ルニ $\sin2A+\sin2B+\sin2C=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\{-\cos(A+B)\}\qquad[\because\ A+B+C=180^\circ]$

$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}=2\sin C.2\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin C.$

∴ $\text{左邊}=\dfrac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=2.$

**192.** $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

**【解】** $\text{左邊}=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}(1-\tan A\tan B)+\tan C$

$=\tan(A+B)(1-\tan A\tan B)+\tan C=\tan(180^\circ-C)(1-\tan A\tan B)+\tan C$

$=-\tan C(1-\tan A\tan B)+\tan C=\text{右邊}.$

$\cot B(\cot A+\cot C)+\cot C\cot A$

$=\cot B\dfrac{(\cot A+\cot C)}{\cot A\cot C-1}(\cot A\cot C-1)+\cot C\cot A$

○ **193.** $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1.$

$=-\cot B\tan B(\cot A\cot C-1)+\cot C\cot A$

**【解】** $\text{左邊}=\cot A\cot B-1+1+\cot B\cot C+\cot C\cot A$

$=\cot A\cot C-1+\cot C\cot A=1$

$=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}(\cot A+\cot B)+1+\cot B\cot C+\cot C\cot A$

$=\cot(A+B)(\cot A+\cot B)+1+\cot B\cot C+\cot C\cot A$

$=-\cot C(\cot A+\cot B)+1+\cot B\cot C+\cot C\cot A$

$[\because\ \cot(A+B)=\cot(180^\circ-C)=-\cot C]$

$=1.$

**194.** $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1.$

**【解】** $\text{左邊}=-\left(1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\right)+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}+1$

$$=-\frac{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+1$$

$$=-\frac{1}{\tan\frac{A+B}{2}}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+1$$

$$=-\tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+1$$

$$\left[\because\ \frac{1}{\tan\frac{A+B}{2}}=\cot\frac{A+B}{2}=\cot\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)=\tan\frac{C}{2}\right]$$

$=1.$

**195.** $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$

【解】 左邊$=\dfrac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}-1}\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}-1\right)+\cot\frac{C}{2}$

$$=\frac{1}{\cot\frac{A+B}{2}}\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}-1\right)+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{C}{2}\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}-1\right)+\cot\frac{C}{2}$$

$$\left[\because\ \frac{1}{\cot\frac{A+B}{2}}=\tan\frac{A+B}{2}=\tan\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}\right]$$

=右邊.

○ **196.** $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A$

$$=1+\sec A\sec B\sec C.$$

【解】 左邊$=\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin C\sin A}{\cos C\cos A}$ $\dfrac{\cos(A+B+C)+\cos A\cos B\cos C}{\cos A\cos B\cos C}$

$$=\frac{\sin B(\sin A\cos C+\cos A\sin C)+\sin C\sin A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$$

然ルニ最後ノ分數ノ分子ハ



$\sin B\sin(A+C)+\sin C\sin A\cos B$

$=\sin^2 B+\sin C\sin A\cos B=1-\cos^2 B+\sin C\sin A\cos B$

$=1+\cos B(-\cos B+\sin C\sin A)$

$=1+\cos B\{\cos(C+A)+\sin C\sin A\}=1+\cos A\cos B\cos C.$

$\therefore$ 左邊$=\dfrac{1}{\cos A\cos B\cos C}+1=$右邊.

○ **197.** $\dfrac{\tan B}{\tan C}+\dfrac{\tan C}{\tan B}+\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan A}{\tan C}+\dfrac{\tan A}{\tan B}+\dfrac{\tan B}{\tan A}$

$$=\sec A\sec B\sec C-2.$$

【解】 左邊$=\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan C}+\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan C+\tan A}{\tan B}$

$$=\frac{\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}}{\frac{\sin C}{\cos C}}+\frac{\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}}{\frac{\sin A}{\cos A}}+\frac{\frac{\sin(C+A)}{\cos C\cos A}}{\frac{\sin B}{\cos B}}$$

$$=\frac{\cos C}{\cos A\cos B}+\frac{\cos A}{\cos B\cos C}+\frac{\cos B}{\cos C\cos A}\qquad[\because\ A+B+C=180^\circ]$$

$$=\frac{\cos^2 C+\cos^2 A+\cos^2 B}{\cos A\cos B\cos C}.$$

然ルニ $\cos^2 C+\cos^2 A+\cos^2 B=1-2\cos A\cos B\cos C.$ [問. 189 ニ由ル.]

$\therefore$ 左邊=右邊.

○ **198.**

$$\tan\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}=\tan\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\sec\frac{A}{2}.$$

【解】 左邊$=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$$\left[\because\quad \frac{A+B+C}{2}=90^\circ\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

最後ノ分數ハ A, B, C ノ輪換ニ依リテ不變ナル故左邊亦然ラザルヲ得ズ.

$\therefore$ 左邊＝右邊.

**199.**

$$\sin A\sin(A+2C)+\sin B\sin(B+2A)+\sin C\sin(C+2B)=0.$$

**【解】** 左邊

$$=\frac{1}{2}\{\cos 2C-\cos(2A+2C)+\cos 2A-\cos(2A+2B)+\cos 2B-\cos(2B+2C)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos 2C-\cos(360^\circ-2B)+\cos 2A-\cos(360^\circ-2C)$$

$$+\cos 2B-\cos(360^\circ-2A)\}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2C-\cos 2B+\cos 2A-\cos 2C+\cos 2B-\cos 2A)$$

[$\because$ $\cos(360^\circ-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ ナル公式ニ據ル]

$=0.$

**200.**

$$\cos 3A\sin(B-C)+\cos 3B\sin(C-A)+\cos 3C\sin(A-B)$$

$$=-4\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B).$$

**【解】** 左邊

$$=\frac{1}{2}\{\sin(3A+B-C)-\sin(3A-B+C)+\sin(3B+C-A)-\sin(3B-C+A)$$

$$+\sin(3C+A-B)-\sin(3C-A+B)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\sin(180^\circ+2A-2C)-\sin(180^\circ+2A-2B)+\sin(180^\circ+2B-2A)$$



$$-\sin(180^\circ+2B-2C)+\sin(180^\circ+2C-2B)-\sin(180^\circ+2C-2A)\}$$

[$\because$ $3A+B-C=A+B+C+2A-2C=180^\circ+2A-2C$, 等]

$$=\frac{1}{2}\{-\sin(2A-2C)+\sin(2A-2B)-\sin(2B-2A)+\sin(2B-2C)$$

$$-\sin(2C-2B)+\sin(2C-2A)\}$$

[$\because$ $\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$ ナル公式ニ據ル]

$$=\sin(2B-2C)+\sin(2C-2A)+\sin(2A-2B)$$

[$\because$ $-\sin\alpha=\sin(-\alpha)$ ナル公式ニ據ル]

$$=2\sin(B-A)\cos(A+B-2C)+2\sin(A-B)\cos(A-B)$$

$$=-2\sin(A-B)\{\cos(A+B-2C)-\cos(A-B)\}$$

[$\because$ $\sin(B-A)=-\sin(A-B)$]

$$=-2\sin(A-B).\ 2\sin(A-C)\sin(C-B)$$

$=-4\sin(A-B)\{-\sin(C-A)\}\{-\sin(B-C)\}=$右邊.

**201.** $\triangle ABC$ ニ於テ $\sin C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$ ナルトキハ $C=90^\circ$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ヨリ

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\quad\left[\because\quad \frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ\right]$$

然ルニ $\cos\frac{C}{2}\neq 0,\quad \sin\frac{C}{2}\neq 0.$ [$\because$ $0^\circ<C<180^\circ$]

$$\therefore\quad \sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2},\qquad \therefore\quad \sin\frac{C}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

然ルニ $\sin\frac{C}{2}>0.$ $\left[\because\quad 0^\circ<\frac{C}{2}<90^\circ\right]$

$$\therefore\quad \sin\frac{C}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \therefore\quad \frac{C}{2}=45^\circ,\qquad \therefore\quad C=90^\circ.$$

**202.** $\triangle ABC$ ニ於テ $\sin 2B+\sin 2C=\sin 2A$ ナルトキハ此三角形ノ形狀如何.

**【解】** 假設ヨリ　$2\sin(B+C)\cos(B-C)=2\sin A\cos A=2\sin(B+C)\cos A.$

$[\because\ A+(B+C)=180^\circ]$

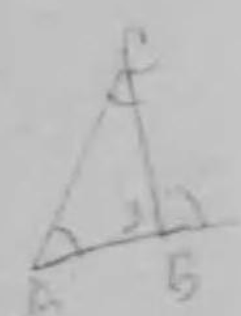
然ルニ　$0^\circ<B+C<180^\circ$　ナルヲ以テ $\sin(B+C)\neq 0.$

$\therefore\ \cos(B-C)=\cos A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}.$

然ルニ　$|B-C|<180^\circ,\ 0^\circ<A<180^\circ$　ナルヲ以テ　(i) ヨリ

$B-C=A$ 或ハ $-(B-C)=A;$

卽チ　$A+C=B$ 或ハ $A+B=C.$



三角形ニ於テ二角ノ和ガ第三角ニ等シキトキハ此第三角ハ直角ナリ.

$\therefore$　$B=90^\circ$ 或ハ $C=90^\circ.$

$\therefore$　$\triangle ABC$ ハ B 或ハ C ニ於テ直角ヲ有スル直三角形ナリ.

**203.** $\triangle ABC$ ニ於テ $\cos A=\cos B\cos C$ ナルトキハ $\cot B\cot C=\dfrac{1}{2}$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** $A+B+C=180^\circ$ ナルヲ以テ

$$\cos A=\cos(180^\circ-B-C)=-\cos(B+C).$$

$\therefore$　假設ヨリ　$-\cos(B+C)=\cos B\cos C,$

卽チ　$-\cos B\cos C+\sin B\sin C=\cos B\cos C,$ 卽チ $2\cos B\cos C=\sin B\sin C$

兩邊ヲ $2\sin B\sin C$ ニテ除スレバ $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$ ナルヲ以テ $\cot B\cot C=\dfrac{1}{2}.$

**注意.** 本問ト同樣ニシテ次ギノ問題ヲ解クコトヲ得:

$\triangle ABC$ ニ於テ $\sin A=\cos B\cos C$ ナルトキハ $\tan B+\tan C=1$ ナルコトヲ證セヨ.

○**204.** $\triangle ABC$ ニ於テ $\sin\left(A+\dfrac{C}{2}\right)=5\sin\dfrac{C}{2}$ ナルトキ



ハ $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{2}{3}$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** $\dfrac{C}{2}=90^\circ-\dfrac{A+B}{2}$ ナルヲ以テ

$$\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)=\sin\left(A+90^\circ-\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(90^\circ-\frac{B-A}{2}\right)=\cos\frac{B-A}{2};$$

又　$\sin\dfrac{C}{2}=\sin\left(90^\circ-\dfrac{A+B}{2}\right)=\cos\dfrac{A+B}{2}.$

$\therefore$　假設ヨリ　$\cos\dfrac{B-A}{2}=5\cos\dfrac{A+B}{2},$

卽チ　$\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{A}{2}=5\left(\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}-\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\right),$

卽チ　$6\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}.$

兩邊ヲ $6\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$ ニテ除スレバ $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ ナルヲ以ヲ直チニ終結ヲ得ベシ.

○**205.** $\triangle ABC$ ニ於テ $\sin A,\ \sin B,\ \sin C$ ガ等差級數ヲナストキハ $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ニ由リ $\sin A+\sin C=2\sin B,$

卽チ　$2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=4\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$

然ルニ　$\dfrac{A+C}{2}+\dfrac{B}{2}=90^\circ$　ナルヲ以テ

$$\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A+C}{2},\quad \cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A+C}{2}.$$

$\therefore$　(i) ハ變ジテ　$\cos\dfrac{A-C}{2}=2\cos\dfrac{A+C}{2},$

即チ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$,

即チ $3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$ トナル.

此兩邊ヲ $3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$ ニテ除スレバ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ ナルヲ以テ終結ノ如クナルコトヲ知ル.

**206.** △ABC ニ於テ $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ ガ等差級數ヲナストキハ $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=3$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ニ由リ

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}=2\cot\frac{B}{2}=2\tan\frac{A+C}{2}\quad\left[\because\ \frac{B}{2}+\frac{A+C}{2}=90°\right]$$

$$=\frac{2}{\cot\frac{A+C}{2}}=\frac{2\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}-1}.$$

$\therefore\ \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}-1=2.\qquad\therefore\ \cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=3.$

或ハ次ギノ如ク解スルモ可ナリ:

假設ニ由リ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}=2\cot\frac{B}{2}$.

兩邊ニ $\cot\frac{B}{2}$ ヲ加フルトキハ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=3\cot\frac{B}{2}$,

即チ $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=3\cot\frac{B}{2}$; [問題 195 ニ由ル]

兩邊ヲ $\cot\frac{B}{2}$ ニテ除スレバ終結ノ如クナル.



**207.** △ABC ニ於テ

$$x\sin^2B+y\sin^2A=y\sin^2C+z\sin^2B=z\sin^2A+x\sin^2C$$

ナルトキハ $x:y:z=\sin2A:\sin2B:\sin2C$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** $\left.\begin{array}{l} x\sin^2B+y\sin^2A=y\sin^2C+z\sin^2B\ldots\ldots\ldots\ldots(i)\\ x\sin^2B+y\sin^2A=z\sin^2A+x\sin^2C\ \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)\end{array}\right\}$ トシ

(i)×$\sin^2A$ ヨリ (ii)×$\sin^2B$ ヲ減ズレバ

$$x\sin^2B(\sin^2A-\sin^2B+\sin^2C)=y\sin^2A(\sin^2C-\sin^2A+\sin^2B).$$

$$x\sin^2B\{\sin(A+B)\sin(A-B)+\sin^2C\}=y\sin^2A\{\sin(C+A)\sin(C-A)+\sin^2B\}.$$

$$x\sin^2B\sin C\{\sin(A-B)+\sin(A+B)\}=y\sin^2A\sin B\{\sin(C-A)+\sin(C+A)\},$$

$[\because\ A+B+C=180°]$

$$x\sin^2B\sin C.\ 2\sin A\cos B=y\sin^2A\sin B.\ 2\sin C\cos A.$$

$\therefore\ x:y=\sin2A:\sin2B.$

ヒト同様ニ $x$ ヲ逐ヒ出ダセバ $y:z=\sin2B:\sin2C$.

∴ 所題ノ如シ.

**208.** △ABC ニ於テ $\frac{\sin A}{x}=\frac{\sin B}{y}=\frac{\sin C}{z}$ ナルトキハ $(x-y)\cot\frac{C}{2}+(y-z)\cot\frac{A}{2}+(z-x)\cot\frac{B}{2}=0$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ニ於ケル三ツノ相等シキ比ノ各々ヲλト命ズレバ比例ノ定理ニ由リ

$$\frac{\sin A-\sin B}{x-y}=\lambda,\quad \text{即チ}\quad \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{x-y}=\lambda,$$

即チ $x-y=\dfrac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\lambda}.$

兩邊ニ $\cot\frac{C}{2}$ ヲ乘ズレバ

$$(x-y)\cot\frac{C}{2}=\frac{2}{\lambda}\cot\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\left[\because\ \cot\frac{C}{2}=\cot\left(90^\circ-\frac{A+B}{2}\right)=\tan\frac{A+B}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\right]$$

$$=\frac{2}{\lambda}\left(\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right);$$ [第 32 條ノ公式ニ據ル]

同様ニ $$(y-z)\cot\frac{A}{2}=\frac{2}{\lambda}\left(\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right),$$

$$(z-x)\cot\frac{B}{2}=\frac{2}{\lambda}\left(\sin^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right).$$

∴ 終結ニ於ケル左邊ハ

$$\frac{2}{\lambda}\left(\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)=0.$$

但シ $\lambda\neq 0$.

**209.*** △ABC ニ於テ $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ ガ等差級數ヲナストキハ $\cos(B+C-A)=\dfrac{4+5\cos 2C}{5+4\cos 2C}$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** $\tan A+\tan C=2\tan B$ [假設ヨリ]

$$=2\tan(180^\circ-A-C)=-2\tan(A+C)=-2\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}.$$

∴ $1-\tan A\tan C=-2.$ ∴ $\tan A\tan C=3.$ ∴ $\tan A=3\cot C.$

兩邊ノ平方ヲ比較スレバ

$\tan^2 A=9\cot^2 C$ 卽チ $\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\dfrac{9(1+\cos 2C)}{1-\cos 2C}.$



合除ノ理ヲ用フレバ

$$\frac{-2\cos 2A}{2}=\frac{8+10\cos 2C}{10+8\cos 2C},$$ 卽チ $$-\cos 2A=\frac{4+5\cos 2C}{5+4\cos 2C}.$$

然ルニ $-\cos 2A=\cos(180^\circ-2A)=\cos(A+B+C-2A)=\cos(B+C-A).$

∴ 終結ノ如シ.

---

## 〔36〕 既知關係ヨリ未知關係ヲ證スルコト.

或ル關係ヲ與ヘテ他ノ關係ヲ證スベキ問題ヲ解スルニハ一定ノ方法ナシ. 學生宜シク次ギニ擧ゲタル問題ノ答解ヲ熟讀シ, 之ニ準ジテ此種ノ問題ヲ解スベシ.

### 問　題

○ **210.** $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$ ナルトキハ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha$$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ヨリ $\dfrac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\dfrac{m}{1}.$

合除ノ理ヲ用フレバ

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}=\frac{1+m}{1-m},$$ 卽チ $$\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}=\frac{1+m}{1-m},$$

卽チ $\tan(\alpha+\beta)\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{1+m}{1-m}.$ ∴ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1+m}{1-m}\tan\alpha.$

**211.** $\tan\theta=m$, $\tan\phi=n$ ナルトキハ

$\sin 2(\theta+\phi)=\dfrac{2(m+n)(1-mn)}{(1+m^2)(1+n^2)}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 終結ノ右邊ニ假設ヲ代入スレバ

$$\frac{2(tan\theta+tan\phi)(1-tan\theta\ tan\phi)}{(1+tan^2\theta)+(1+tan^2\phi)}=2\left(\frac{sin\theta}{cos\theta}+\frac{sin\phi}{cos\phi}\right)\left(1-\frac{sin\theta\ sin\phi}{cos\theta\ cos\phi}\right)cos^2\theta\ cos^2\phi$$

$$\left[\because\ 1+tan^2\theta=sec^2\theta=\frac{1}{cos^2\theta},\ \text{等}\right]$$

$$=2(sin\theta\ cos\phi+cos\theta\ sin\phi)(cos\theta\ cos\phi-sin\theta\ sin\phi)$$

$$=2sin(\theta+\phi)cos(\theta+\phi)=sin2(\theta+\phi).$$

○ **212.** 方程式 $\frac{1}{a}cos\theta+\frac{1}{b}sin\theta=\frac{1}{c}$ ニ適スル $\theta$ ノ二値ヲ $\beta, \gamma$ トスレバ $a\,cos\frac{\beta+\gamma}{2}=b\,sin\frac{\beta+\gamma}{2}=c\,cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $\beta, \gamma$ ハ與ヘラレタル方程式ニ適スルヲ以テ

$$\frac{1}{a}cos\beta+\frac{1}{b}sin\beta=\frac{1}{c}\cdots\cdots\cdots(i),\quad \frac{1}{a}cos\gamma+\frac{1}{b}sin\gamma=\frac{1}{c}\cdots\cdots\cdots(ii).$$

(i) ヨリ (ii) ヲ減ズレバ $\frac{1}{a}(cos\beta-cos\gamma)+\frac{1}{b}(sin\beta-sin\gamma)=0.$

即チ $\frac{2}{a}sin\frac{\beta+\gamma}{2}sin\frac{\gamma-\beta}{2}=\frac{2}{b}cos\frac{\beta+\gamma}{2}sin\frac{\gamma-\beta}{2}$;

兩邊ヨリ $2sin\frac{\gamma-\beta}{2}$ ヲ省ケバ $\frac{1}{a}sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{1}{b}cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$

即チ $a\,cos\frac{\beta+\gamma}{2}=b\,sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$

又 (i)×$sin\gamma$ ヨリ (ii)×$sin\beta$ ヲ減ズレバ

$$\frac{1}{a}(sin\gamma\ cos\beta-cos\gamma\ sin\beta)=\frac{1}{c}(sin\gamma-sin\beta).$$

即チ $\left\{\frac{1}{a}sin(\gamma-\beta)\ \text{即チ}\ \frac{2}{a}sin\frac{\gamma-\beta}{2}cos\frac{\gamma-\beta}{2}\right\}=\frac{2}{c}cos\frac{\gamma+\beta}{2}sin\frac{\gamma-\beta}{2}.$

兩邊ヲ $2sin\frac{\gamma-\beta}{2}$ ニテ除スレバ



$\frac{1}{a}cos\frac{\gamma-\beta}{2}=\frac{1}{c}cos\frac{\gamma+\beta}{2}$ 即チ $a\,cos\frac{\beta+\gamma}{2}=c\,cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$

**213.** 四邊形 ABCD ニ於テ

$$cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}+cos\frac{C}{2}cos\frac{D}{2}=sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}sin\frac{D}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

【解】 本題ヲ證スルニハ之ヲ轉項シタル

$$\left(cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}-sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}\right)+\left(cos\frac{C}{2}cos\frac{D}{2}-sin\frac{C}{2}sin\frac{D}{2}\right)=0.$$

即チ $cos\frac{A+B}{2}+cos\frac{C+D}{2}=0$ ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ $\frac{A+B}{2}+\frac{C+D}{2}=180°$ ナルヲ以テ $cos\frac{A+B}{2}=-cos\frac{C+D}{2}$

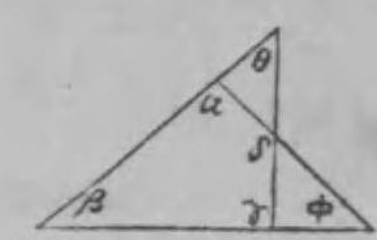
即チ $cos\frac{A+B}{2}+cos\frac{C+D}{2}=0.$

∴ 本題ヲ證シ得タリ.

○ **214.** 四邊形ノ各角ヲ順次ニ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トシ對邊ノ交角ヲ $\theta, \phi$ トスレバ $cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\gamma}{2}+cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\delta}{2}=cos\frac{\theta}{2}cos\frac{\phi}{2}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 終結ノ左邊 $=\frac{1}{2}\left(cos\frac{\alpha+\gamma}{2}+cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)$

$$+\frac{1}{2}\left(cos\frac{\beta+\delta}{2}+cos\frac{\beta-\delta}{2}\right).$$




然ルニ $\frac{\alpha+\gamma}{2}+\frac{\beta+\delta}{2}=180°$ ナルヲ以テ

$$cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=-cos\frac{\beta+\delta}{2};$$

$\frac{\alpha}{2}-\frac{\gamma}{2}=180-$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=180$



又 $$\frac{\alpha-\gamma}{2}=\frac{180^\circ-(\beta+\phi)-\{180^\circ-(\beta+\theta)\}}{2}=\frac{\theta-\phi}{2},$$

$$\frac{\beta-\delta}{2}=\frac{180^\circ-(\alpha+\phi)-\{180^\circ-(\alpha-\theta)\}}{2}=-\frac{\theta+\phi}{2}.$$

∴ 終結ノ左邊 $=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta-\phi}{2}+\cos\frac{\theta+\phi}{2}\right)$　$\left[\because\ \cos\left(-\frac{\theta+\phi}{2}\right)=\cos\frac{\theta+\phi}{2}\right]$

$$=\frac{1}{2}.2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}.$$

**215.** $\sin X\sin Y=\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$, $\cos X\cos Y=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma$, $\cos^2X+\cos^2Y=1+\cos^2(\alpha+\beta+\gamma)$ ナルトキハ $\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2\gamma=\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 假設ノ第一關係式ヲ平方ニスレバ

$$\sin^2X\sin^2Y=(1-\cos^2X)(1-\cos^2Y)=\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2\gamma\ldots\ldots\ldots\text{(i)};$$

假設ノ第二關係式ヲ平方ニスレバ

$$\cos^2X\cos^2Y=\cos^2(\alpha+\beta)\cos^2\gamma=\{1-\sin^2(\alpha+\beta)\}(1-\sin^2\gamma)\ldots\ldots\text{(ii)};$$

假設ノ第三關係式ヨリ

$$\cos^2X+\cos^2Y=1+1-\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)=2-\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)\ldots\ldots\text{(iii)}.$$

(i)−(ii)+(iii) トスレバ $1=1+\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2\gamma-\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)$.

從ツテ終結ノ如クナルコトヲ知ル.

**216.** $\sin X\cos Y=\tan\alpha\cot\gamma$, $\sin Y\cos X=\tan\beta\cot\gamma$, $\cos^2Y-\cos^2X=\cos^2\gamma$ ナルトキハ $\sec^2\alpha-\sec^2\beta=\sin^2\gamma$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 假設ノ第一關係式ヲ平方ニスレバ

$$\sin^2X\cos^2Y=(1-\cos^2X)\cos^2Y=\tan^2\alpha\cot^2\gamma=(\sec^2\alpha-1)\cot^2\gamma\ldots\ldots\text{(i)};$$

假設ノ第二關係式ヲ平方ニスレバ

$$\sin^2Y\cos^2X=(1-\cos^2Y)\cos^2X=\tan^2\beta\cot^2\gamma=(\sec^2\beta-1)\cot^2\gamma\ldots\ldots\text{(ii)}.$$

(i) ヨリ (ii) ト假設ノ第三關係式トヲ減ズレバ

$$0=(\sec^2\alpha-\sec^2\beta)\cot^2\gamma-\cos^2\gamma.$$



兩邊ニ $\tan^2\gamma$ 卽チ $\frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}$ ヲ乘ズレバ $0=\sec^2\alpha-\sec^2\beta-\sin^2\gamma$.

之ヲ轉項スレバ終結ノ如クナルコトヲ知ル.

---

**〔37〕 補助角ノ定義.**

一式ニ新ラシキ角ノ三角函數ヲ混ジテ其式ヲ變形スルトキ其角ヲ補助角(輔助角或ハ憑角トモ云フ)ト云フ.

補助角ノ用ヒ方ハ次ギノ問題ノ答解ヲ視テ之ヲ理會スベシ.

**〔38〕 一式ノ對數形.**

一式ヲ對數形ニ變ズルトハ其式ヲ對數計算ニ便利ナル形狀ニ變ズルコトナリ. 次ギノ問題ノ答解ヲ視テ其要領ヲ會得スベシ.

### 問　　　題

**217.** $a+b$ ヲ對數形ニ變ゼヨ.

【解】 $a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)$.

今 $\frac{b}{a}=\tan\phi$ ト置クトキハ $a+b=a(1+\tan\phi)=a\left(1+\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\right)$

$$=a\frac{\cos\phi+\sin\phi}{\cos\phi}=a\frac{\sin(90^\circ-\phi)+\sin\phi}{\cos\phi}=a\frac{2\sin45^\circ\cos(45^\circ-\phi)}{\cos\phi}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,a\cos(45^\circ-\phi)}{\cos\phi}\ldots\ldots\ldots\text{(答)}$$

**注意 I.** 上ノ答解ニ用ヒタル $\phi$ ハ所謂補助角ナリ.

**注意 II.** 本問ト同樣ニシテ下ノ問題ヲ解スルコトヲ得：

$a-b$ ヲ對數形ニ變ゼヨ. (答) $\dfrac{\sqrt{2}a\sin(45^\circ-\phi)}{\cos\phi}$.

**218.** $\dfrac{a+b}{a-b}$ ヲ對數形ニ變ゼヨ.

【解】 所題ノ式$=\dfrac{a\left(1+\dfrac{b}{a}\right)}{a\left(1-\dfrac{b}{a}\right)}=\dfrac{1+\dfrac{b}{a}}{1-\dfrac{b}{a}}=\dfrac{1+\tan\phi}{1-\tan\phi}$ $\left[\text{但シ } \dfrac{b}{a}=\tan\phi \text{ トス}\right]$

$$=\frac{\tan 45^\circ+\tan\phi}{1-\tan 45^\circ\tan\phi}=\tan(45^\circ+\phi)\text{.........(答)}$$

○ **219.** $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ ヲ對數形ニ變ゼヨ.

【解】 所題ノ式$=a\left(\sin\alpha+\dfrac{b}{a}\cos\alpha\right)=a(\sin\alpha+\tan\phi\cos\alpha)$

$\left[\text{但シ } \dfrac{b}{a}=\tan\phi \text{ トス}\right]$

$$=a\left(\sin\alpha+\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\cos\alpha\right)=a\frac{\sin\alpha\cos\phi+\cos\alpha\sin\phi}{\cos\phi}=\frac{a\sin(\alpha+\phi)}{\cos\phi}\text{.........(答)}$$

○ **220.** $b$ ヲ正トシ $a>b$ トスレバ $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ ノ對數形如何.

【解】

所題ノ式$=\sqrt{\dfrac{a\left(1-\dfrac{b}{a}\right)}{a\left(1+\dfrac{b}{a}\right)}}+\sqrt{\dfrac{a\left(1+\dfrac{b}{a}\right)}{a\left(1-\dfrac{b}{a}\right)}}=\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}}}+\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{b}{a}}{1-\dfrac{b}{a}}}$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}}+\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{1-\cos\phi}}$$

$\left[0<\dfrac{b}{a}<1 \text{ ナルヲ以テ } 0^\circ<\phi<90^\circ \text{ トシテ } \dfrac{b}{a}=\cos\phi \text{ トナシ得レバナリ}\right]$



$$=\tan\frac{\phi}{2}+\cot\frac{\phi}{2}=\frac{\sin\dfrac{\phi}{2}}{\cos\dfrac{\phi}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\phi}{2}}{\sin\dfrac{\phi}{2}}=\frac{1}{\sin\dfrac{\phi}{2}\cos\dfrac{\phi}{2}}=\frac{1}{\dfrac{1}{2}\sin\phi}=2\operatorname{cosec}\phi\text{...(答)}$$

**221.** $\sqrt[3]{a^6+b^6}$ ヲ對數形ニ變ゼヨ.

【解】 所題ノ式$=\sqrt[3]{a^6\left(1+\dfrac{b^6}{a^6}\right)}=a^2\sqrt[3]{1+\tan^2\phi}$ $\left[\text{但シ } \dfrac{b^3}{a^3}=\tan\phi \text{ トス}\right]$

$$=a^2(\sec\phi)^{\frac{2}{3}}\text{.........(答)}$$

**222.*** $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ實數ナリトシ之ヲ對數形ニテ表ハセ.

【解】 代數學ノ公式ニ由リ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}\right).$$

$a, c$ ガ同號ナルトキハ $4ac$ ハ正ニシテ且ツ $b^2$ ヨリモ大ナラズ, 何トナレバ若シ然ラズンバ $x$ ガ虚トナルベケレバナリ.

∴ 此場合ニハ $0\gtreqless\dfrac{4ac}{b^2}\gtreqless 1$.

今 $\dfrac{4ac}{b^2}=\sin^2\phi$ トスレバ $x=-\dfrac{b}{2a}\left(1\mp\sqrt{1-\sin^2\phi}\right)=-\dfrac{b}{2a}(1\mp\cos\phi)$

$$=\left(-\frac{b}{2a}.2\sin^2\frac{\phi}{2} \text{ 或ハ } -\frac{b}{2a}.2\cos^2\frac{\phi}{2}\right)=\left(-\frac{b}{a}\sin^2\frac{\phi}{2} \text{ 或ハ } -\frac{b}{a}\cos^2\frac{\phi}{2}\right)\text{...(答)}$$

又 $a, c$ ガ異號ナルトキハ $-\dfrac{4ac}{b^2}$ ハ正ナルヲ以テ之ヲ $\tan^2\phi'$ ト命ズレバ

$$x=-\frac{b}{2a}\left(1\mp\sqrt{1+\tan^2\phi'}\right)=-\frac{b}{2a}(1\mp\sec\phi')=-\frac{b}{2a}\cdot\frac{\cos\phi'\mp 1}{\cos\phi'}$$

$$=\left(\frac{2b\sin^2\dfrac{\phi'}{2}}{2a\cos\phi'} \text{ 或ハ } -\frac{2b\cos^2\dfrac{\phi'}{2}}{2a\cos\phi'}\right)=\left(\frac{b\sin^2\dfrac{\phi'}{2}}{a\cos\phi'} \text{ 或ハ } -\frac{b\cos^2\dfrac{\phi'}{2}}{a\cos\phi'}\right)\text{...(答)}$$

## 〔39〕 三角函數ヲ含ム式ノ値ノ變化.

角ノ變化ニ伴フテ其角ノ三角函數ヲ含ム式ノ値ガ如何ニ變化スルカヲ攻究スルニハ, 先ヅ其式ヲ變形シテ變數部ノ箇處ヲ成ルベク少クシ, 然ル後之ニ角ノ種々ノ値ヲ適用スベシ.

### 問　　題

**223.** A ガ $0°$ ヨリ $360°$ マデ增ストキハ $\tan A+\cot A$ ノ値ハ如何ニ變化スルカ.

**【解】** 所題ノ式ヲ $f(A)$ ト命ズレバ

$$f(A)=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{1}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2A}=\frac{2}{\sin 2A}.$$

∴ A ガ $0°$ ヨリ $45°$ マデ增ストキ, $f(A)$ ハ $+\infty$ ヨリ減ジテ 2 トナリ;
A ガ $45°$ ヨリ $90°$ マデ增ストキ, $f(A)$ ハ 2 ヨリ增シテ $+\infty$ トナリ;
A ガ $90°$ ヨリ $135°$ マデ增ストキ, $f(A)$ ハ $-\infty$ ヨリ增シテ $-2$ トナリ;
A ガ $135°$ ヨリ $180°$ マデ增ストキ, $f(A)$ ハ $-2$ ヨリ減ジテ $-\infty$ トナル.

又 A ガ $180°$ ヨリ $360°$ マデ增ストキ $f(A)$ ノ取ルベキ變化ハ A ガ $0°$ ヨリ $180°$ マデ增ストキノソレト全ク同一ナリ.
何トナレバ $\tan(180°+A)+\cot(180°+A)=\tan A+\cot A$ ナレバナリ.

**224.** 同前, $\sin A+\cos A$.

**【解】** 所題ノ式ヲ $f(A)$ ト命ズレバ

$$f(A)=\sqrt{2}\left(\sin A.\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos A.\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{2}(\sin A\cos 45°+\cos A\sin 45°)=\sqrt{2}\sin(A+45°).$$



∴ A ガ $0°$ ヨリ $45°$ マデ增ストキ, $f(A)$ ハ 1 ヨリ增シテ $\sqrt{2}$ トナリ.
A ガ $45°$ ヨリ $90°$ マデ增ストキ, $f(A)$ ハ $\sqrt{2}$ ヨリ減ジテ 1 トナリ;
A ガ $90°$ ヨリ $135°$ マデ增ストキ, $f(A)$ ハ 1 ヨリ減ジテ 0 トナリ;
A ガ $135°$ ヨリ $180°$ マデ增ストキ, $f(A)$ ハ 0 ヨリ減ジテ $-1$ トナル.

又 A ガ $180°$ ヨリ $360°$ マデ增ストキ $f(A)$ ノ取ルベキ變化ハ A ガ $0°$ ヨリ $180°$ マデ增ストキノソレノ符號ノミヲ變ジタルモノナリ. 何トナレバ $\sin(180°+A)+\cos(180°+A)=-\sin A-\cos A$ ナレバナリ.

**注意.** 上ノ問題ニ於ケル $\sqrt{2}\sin(A+45°)$ ナル結果ハ第 22 條注意ノ如クスルモ得ラルベシ. 然レドモ其方法ハ各項ノ係數ガ同一ナルトキニ限ルヲ以テ一般ニ通ゼザルモノト知ルベシ.

又 $\sqrt{2}$ ナル數ハ各項ノ係數ノ平方ノ和ノ平方根ノコトナリ. 何故ニ此ノ如キ數ヲ選ビタルカト云フニ, 此數ニテ各係數ヲ除シタル結果ハ其平方ノ和 1 トナルヲ以テ一ツヲ或ル角ノ sin., 他ヲ其角ノ cos. ト見做シ得ルノ便アレバナリ.

**225.** 同前, $\sqrt{3}\sin A-\cos A$.

**【解】** 所題ノ式ヲ $f(A)$ ト命ズレバ

$$f(A)=2\left(\sin A.\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos A.\frac{1}{2}\right)=2(\sin A\cos 30°-\cos A\sin 30°)=2\sin(A-30°).$$

∴ A ガ $0°$ ヨリ $30°$ マデ增ストキ, $f(A)$ ハ $-1$ ヨリ增シテ 0 トナリ;
A ガ $30°$ ヨリ $120°$ マデ增ストキ, $f(A)$ ハ 0 ヨリ增シテ 2 トナリ;
A ガ $120°$ ヨリ $180°$ マデ增ストキ, $f(A)$ ハ 2 ヨリ減ジテ 1 トナル.

又 A ガ 180° ヨリ 360° マデ増ストキ $f(\mathrm{A})$ ノ取ルベキ變化ハ A ガ 0° ヨリ 180° マデ増ストキノソレノ符號ノミヲ變ジタルモノナリ. 何トナレバ $\sqrt{3}\,sin(180°+\mathrm{A})-cos(180°+\mathrm{A})=-\sqrt{3}\,sin\mathrm{A}+cos\mathrm{A}$ ナレバナリ.

---

## 〔40〕 三角函數ヲ含ム式ノ極大, 極小.

種々ナル値ヲ取ル角ノ三角函數ヲ含ム式ノ極大及ビ極小ノ値ヲ求メンニハ, 矢張リ前條ト同樣ノ方法ヲ用フベシ.

### 問　　題

**226.** A ガ如何ナル最小正角ナルトキ次ギノ各式ハ如何ナル極大及ビ極小ノ値ヲ取ルベキカ:

(i) $cos^2\mathrm{A}-sin^2\mathrm{A}$.　　(ii) $sin\mathrm{A}+cos\mathrm{A}$.

**【解】** (i) 所題ノ式ヲ $f(\mathrm{A})$ ト命ズレバ $f(\mathrm{A})=cos2\mathrm{A}$.

∴ $2\mathrm{A}=0$ 卽チ $\mathrm{A}=0$ ナルトキ $f(\mathrm{A})$ ハ極大值 1 ヲ取リ, $2\mathrm{A}=180°$ 卽チ $\mathrm{A}=90°$ ナルトキ $f(\mathrm{A})$ ハ極小值 $-1$ ヲ取ル.

(ii) 所題ノ式ヲ $f(\mathrm{A})$ ト命ズレバ

$$f(\mathrm{A})=\sqrt{2}\left(sin\mathrm{A}.\frac{1}{\sqrt{2}}+cos\mathrm{A}.\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}(sin\mathrm{A}cos45°+cos\mathrm{A}sin45°)$$

$$=\sqrt{2}\,sin(\mathrm{A}+45°).$$

∴ $\mathrm{A}+45°=90°$ 卽チ $\mathrm{A}=45°$ ナルトキ $f(\mathrm{A})$ ハ極大值 $\sqrt{2}$ ヲ取リ, $\mathrm{A}+45°=270°$ 卽チ $\mathrm{A}=225°$ ナルトキ $f(\mathrm{A})$ ハ極小值 $-\sqrt{2}$ ヲ取ル.

**注意.** 本問ト同樣ニシテ次ギノ二問題ヲ解クコトヲ得:

| sin | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| cos | 1 | 0 | -1 | 0 | +1 |
| | 0 | ∞ | 0 | -∞ | 0 |
| | 0 | 90 | 180 | 270 | 360 |

sin ノ極大 1 極小 -1
cos ノ極大 0 極小



(i) 同上, $sin\mathrm{A}-cos\mathrm{A}$.

(答) 135° ノトキ極大值 $\sqrt{2}$; 315° ノトキ極小值 $-\sqrt{2}$.

(ii) 同上, $sin\mathrm{A}-\sqrt{3}\,cos\mathrm{A}$.

(答) 150° ノトキ極大值 2; 330° ノトキ極小值 $-2$.

**227.** 同前, $1+sin\mathrm{A}+cos\mathrm{A}+sin\mathrm{A}\,cos\mathrm{A}$.

**【解】** 所題ノ式ヲ $f(\mathrm{A})$ ト命ズレバ

$$f(\mathrm{A})=(1+sin\mathrm{A})(1+cos\mathrm{A})=\{1+cos(90°-\mathrm{A})\}(1+cos\mathrm{A})$$

$$=2cos^2\left(45°-\frac{\mathrm{A}}{2}\right).2cos^2\frac{\mathrm{A}}{2}=\left\{2cos\left(45°-\frac{\mathrm{A}}{2}\right)cos\frac{\mathrm{A}}{2}\right\}^2$$

$$=\{cos45°+cos(\mathrm{A}-45°)\}^2=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+cos(\mathrm{A}-45°)\right\}^2.$$

∴ $\mathrm{A}-45°=0°$ 卽チ $\mathrm{A}=45°$ ナルトキ $f(\mathrm{A})$ ハ極大值 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)^2$ 卽チ $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ ヲ取リ, $\mathrm{A}-45°=135°$ 卽チ $\mathrm{A}=180°$ ナルトキ $f(\mathrm{A})$ ハ極小值 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ 卽チ 0 ヲ取ル.

**228.** 同前, $3+5sinx-2sin^2x$.

**【解】** 所題ノ式ヲ $f(\mathrm{A})$ トスレバ

$$f(\mathrm{A})=-2\left(sin^2x-\frac{5}{2}sinx-\frac{3}{2}\right)=-2\left\{\left(sinx-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}-\frac{3}{2}\right\}.$$

∴ $f(\mathrm{A})$ ノ極大, 極小ノ値ヲ求ムルニハ { } 内ノ式ノ極小, 極大ノ値卽チ $\left(sinx-\frac{5}{4}\right)^2$ ノ極小, 極大ノ値ニ應ズル $f(\mathrm{A})$ ノ値ヲ求ムレバ可ナリ.

∴ $x=90°$ ナルトキ $f(\mathrm{A})$ ハ極大值 $-2\left\{\left(1-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}-\frac{3}{2}\right\}$ 卽チ 6 ヲ取リ, $x=270°$ ナルトキ $f(\mathrm{A})$ ハ極小值 $-2\left\{\left(-1-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}-\frac{3}{2}\right\}$ 卽チ $-4$ ヲ取ル.

**229.** 同前, $2cos^2x+\sqrt{3}\,sinx\,cosx+3sin^2x-1$.

**【解】** 所題ノ式ヲ $f(\mathrm{A})$ ト命ズレバ

$$f(\mathrm{A})=1+\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{3}{2}(1-\cos2x)-1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{3}{2}$$

$$=\sin2x\cos30^\circ-\cos2x\sin30^\circ+\frac{3}{2}=\sin(2x-30^\circ)+\frac{3}{2}.$$

$\therefore$ $2x-30^\circ=90^\circ$ 卽チ $x=60^\circ$ ナルトキ $f(\mathrm{A})$ ハ極大値 $\frac{5}{2}$ ヲ取リ,

$2x-30^\circ=270^\circ$ 卽チ $x=150^\circ$ ナルトキ $f(\mathrm{A})$ ハ極小値 $\frac{1}{2}$ ヲ取ル.

**230.*** $8\sec^2\theta+18\cos^2\theta$ ノ極小値ヲ求メヨ.

**【解】** 原式$=2(4\sec^2\theta+9\cos^2\theta)=2\{(2\sec\theta-3\cos\theta)^2+12\}$.

然ルニ $(2\sec\theta-3\cos\theta)^2$ ハ正ナル故之ヲ 0 トスル値アラバ直チニ原式ノ極小値ヲ知リ得ベシ. 今試ミニ $2\sec\theta-3\cos\theta=0$ トスレバ

$$\frac{2}{\cos\theta}=3\cos\theta,\quad \cos^2\theta=\frac{2}{3}\quad [\because\ \cos\theta\neq0]\quad \therefore\ \cos\theta=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

卽チ $\cos\theta$ ノ此値ヲ用フレバ原式ノ極小値ヲ得.

$\therefore$ 所求ノ値ハ $2(0^2+12)=24$…………(答)

**231.*** $18\sec^2\theta+8\cos^2\theta$ ノ極小値ヲ求メヨ.

**【解】** (之ハ前問ノ如クニシテ $\cos\theta$ ヲ求ムレバ其絶對値ガ 1 ヨリモ大トナル故前問ト同様ニ解スルヲ得ズ. $\therefore$ 次ギノ如ク解スベシ).

原式$=8\sec^2\theta+8\cos^2\theta+10\sec^2\theta=8\{(\sec\theta-\cos\theta)^2+2\}+10\sec^2\theta$.

然ルニ $(\sec\theta-\cos\theta)^2$ ハ正ナル故之ヲ 0 ナラシムレバ $\sec\theta=\cos\theta=\pm1$.

而シテ $\sec.$ ノ最小絶對値ハ 1 ナル故 $(\sec\theta-\cos\theta)^2$ ヲ極小トナセバ之ト同時ニ $\sec^2\theta$ モ極小トナル.

$\therefore$ 原式ノ極小値ハ $8(0^2+2)+10=26$…………(答)

**232.** $a\sin\theta+b\cos\theta$ ノ極大, 極小ノ値ヲ求メヨ ($\theta$ ハ變角).

**【解】** 原式$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$.



然ルニ $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ハ其平方ノ和 1 ニ等シキヲ以テ

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\phi,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\phi$ ト置クコトヲ得. 然ルトキハ

原式$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi)$.

然ルニ $\sin(\theta+\phi)$ ノ極大, 極小ノ値ハ夫々 1, $-1$ ナリ.

$\therefore$ 原式ノ極大, 極小ノ値ハ夫々 $\sqrt{a^2+b^2},\ -\sqrt{a^2+b^2}$ ナリ.

**233.*** $a\cos(\alpha+\theta)+b\sin\theta$ ノ極大, 極小ノ値ヲ求メヨ ($\theta$ ハ變角).

**【解】** 原式$=a\cos\alpha\cos\theta-a\sin\alpha\sin\theta+b\sin\theta=(b-a\sin\alpha)\sin\theta+a\cos\alpha\cos\theta$.

$\therefore$ 前問ト同理ニ由リ所求ノ極大, 極小ノ値ハ

$$\pm\sqrt{(b-a\sin\alpha)^2+a^2\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}\text{……(答)}$$

**234.*** $\alpha,\beta$ ガ第一象限ノ角ニシテ且ツ $\alpha+\beta$ ガ一定ナルトキハ $\tan\alpha+\tan\beta$ ノ極小値如何.

**【解】** 原式$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$.

然ルニ $\alpha,\beta$ ハ第一象限ノ角ナルヲ以テ $\tan\alpha,\tan\beta,\sin(\alpha+\beta)$ ハ皆正ナリ.

$\therefore$ 原式ハ正トナリ從ツテ $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ モ亦正トナル.

然ルニ $\sin(a+\beta)$ ハ一定ナルヲ以テ原式ノ極小値ヲ取ル場合ハ $\cos(\alpha-\beta)$ ノ極大値ヲ取ル場合卽チ $\cos(\alpha-\beta)=1$ ナルトキナリ.

$\therefore$ 所求ノ極小値ハ

$$\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+1}=\frac{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\text{…………(答)}$$

**235.*** A, B, C ガ皆正ニシテ且ツ $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=180^\circ$ ナルトキハ $\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}+\sin\mathrm{C}$ ノ極大値如何.

**【解】** 原式$=2\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}+\sin\mathrm{C}$.

∴　原式ガ極大値ヲ取ルトキ $cos\frac{A-B}{2}$ ハ極大値ヲ取ラザルベカラズ.

∵　若シ然ラザレバ C 從ツテ A+B ヲ其儘ニナシ置キテ $cos\frac{A-B}{2}$ ヲ極大トスルトキ原式ハ更ニ增大シ（∵ $sin\frac{A+B}{2}$ ハ正ナル故）原式ノ極大値ヨリモ大ナル値ヲ得ルコトナレバナリ.

∴　原式ガ極大値ヲ取ルトキ $cos\frac{A-B}{2}=1$,　∴　$A=B$.

同様ニ此場合ニ於テ $B=C$.

∴　所求ノ極大値ハ $sinA+sinA+sinA=3sin60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$………(答)

**236.*　同上，$sinAsinBsinC$ ノ極大値如何.**

【解】　原式$=\frac{1}{2}\{cos(A-B)-cos(A+B)\}sinC$.

然ルニ $sinC$ ハ正ナルヲ以テ原式ノ極大ナル場合ニハ $cos(A-B)$ ガ極大ナラザルベカラズ.　∵　若シ然ラザレバ C 從ツテ A+B ヲ其儘ニナシ置キテ $cos(A-B)$ ヲ極大トスルトキ原式ハ極大値ヨリモ大トナレバナリ.

∴　原式ノ極大ナル場合ニ於テ $cos(A-B)=1$,　∴　$A=B$.

同様ニ此場合ニ於テ $B=C$.

∴　所求ノ極大値ハ $sinAsinAsinA=sin^3 60°=\frac{3\sqrt{3}}{8}$………(答)

**237.*　同上，$cotA+cotB+cotC$ ノ極小値ヲ求メヨ.**

【解】　原式$=\frac{cosA}{sinA}+\frac{cosB}{sinB}+cotC=\frac{sin(A+B)}{sinAsinB}+cotC$

$$=\frac{2sin(A+B)}{cos(A-B)-cos(A+B)}+cotC.$$

茲ニ $sin(A+B)$, $sinA$, $sinB$ ハ皆正ナルヲ以テ原式ガ極小トナルトキ $cos(A-B)-cos(A+B)$ ハ正ニシテ極大トナルベシ.　∵　若シ然ラザレバ C 從ツテ A+B ヲ其儘ニナシ置キテ $cos(A-B)$ ニ極大値ヲ與フルトキ原式ガ極小値ヨリモ小トナレバナリ.

∴　原式ノ極小ナル場合ニハ $cos(A-B)=1$,　∴　$A=B$.



同様ニ此場合ニ $B=C$.

∴　所求ノ極小値ハ $cotA+cotA+cotA=3cot60°=\sqrt{3}$………(答)

---

## 對　數

### 〔41〕 對數ニ關スル定義.

$a^x=b$ ナル關係ヲ表ハスニ記法 $log_a b=x$ ヲ用ヒ，$a$ ヲ底，$b$ ヲ眞數（或ハ逆對數），$x$ ヲ對數ト云フ.

### 問　題

**238.　次ギノ各對數ヲ計算セヨ：**

$log_{2\sqrt{2}}128$,　$log_4 0{\cdot}125$,　$log_{2\cdot25}3{\cdot}375$,　$log_4\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$,　$log_{81}tan30°$.

【解】　$log_{2\sqrt{2}}128=x$ トスレバ $(2\sqrt{2})^x=128$, 卽チ $2^{\frac{3}{2}x}=2^7$.

∴　$\frac{3}{2}x=7$,　　∴　$x=\frac{14}{3}$………(答)

又　$log_4 0{\cdot}125=x$ トスレバ $4^x=0{\cdot}125$, 卽チ $2^{2x}=2^{-3}$.

∴　$2x=-3$,　　∴　$x=-\frac{3}{2}$………(答)

又　$log_{2\cdot25}3{\cdot}375=x$ トスレバ $(2{\cdot}25)^x=3{\cdot}375$, 卽チ $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{3}{2}\right)^3$.

∴　$2x=3$,　　∴　$x=\frac{3}{2}$………(答)

又　$log_4\sqrt[5]{\frac{1}{2}}=x$ トスレバ $4^x=\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$, 卽チ $2^{2x}=2^{-\frac{1}{5}}$.

∴　$2x=-\frac{1}{5}$,　　∴　$x=-\frac{1}{10}$………(答)

又　$log_{81}tan30°=x$ トスレバ $81^x=tan30°$, 卽チ $3^{4x}=3^{-\frac{1}{2}}$.

$\therefore\ 4x=-\frac{1}{2},\qquad \therefore\ x=-\frac{1}{8}.$

$a^x=b\quad a^x b^y c^z=abc$
$b^y=c\quad (abc)^{xyz}=(abc)$
$c^z=a$

**239.** $log_a b\, log_b c\, log_c a=1$ ヲ證セヨ.

【解】 $log_a b=x,\ log_b c=y,\ log_c a=z$ トスレバ本問ハ $a^x=b,\ b^y=c,\ c^z=a$ トシテ $xyz=1$ ナルコトヲ證スルニ歸ス.

偖 $a^{xyz}=(a^x)^{yz}=b^{yz}=(b^y)^z=c^z=a^1.\qquad \therefore\ xyz=1.$

**240.** $c=a^n,\ d=b^m$ ナルトキハ $n\,log_c d=m\,log_a b$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $log_c d=x,\ log_a b=y$ トスレバ $c^x=d,\ a^y=b.$

$\therefore\ a^{nx}=(a^n)^x=c^x=d=b^m=(a^y)^m=a^{my}.\qquad \therefore\ nx=my,$

即チ終結ノ如クナル.

**241.** $\dfrac{log_a n}{log_{ma} n}=1+log_a m$ ヲ證セヨ.

【解】 $log_a n=x,\ log_{ma} n=y,\ log_a m=z$ トスレバ $a^x=n,\ (ma)^y=n,\ a^z=m.$

$\therefore\ a^{\frac{x}{y}}=(a^x)^{\frac{1}{y}}=n^{\frac{1}{y}}=\{(ma)^y\}^{\frac{1}{y}}=ma=a^z.a=a^{1+z}.$

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=1+z,$ 即チ終結ノ如クナル.

**242.** $log_r(log_a b^r\, log_b c^{r^2}\, log_c a^{r^3})=6$ ヲ證セヨ.

【解】 $log_a b^r=x,\ log_b c^{r^2}=y,\ log_c a^{r^3}=z$ トスレバ $a^x=b^r,\ b^y=c^{r^2},\ c^z=a^{r^3}.$

$\therefore\ a^{xyz}=(a^x)^{yz}=(b^r)^{yz}=(b^y)^{rz}=(c^{r^2})^{rz}=(c^z)^{r^3}=(a^{r^3})^{r^3}=a^{r^6}.$

$\therefore\ xyz=r^6,\qquad \therefore\ log_r xyz=6.$ 即チ終結ノ如クナル.

---

## 〔42〕 對數ノ種類.

對數ニ次ギノ二種アリ:



第一. 常用對數(「ブリッグズ」ノ對數トモ云フ)即チ 10 ヲ底トスルモノ.

「ブリッグズ」Briggs ハ英國ノ數學者ニシテ西暦紀元 1561 年ニ生レ同 1630 年ニ死セリ.

第二. 自然對數(「ネーピアー」ノ對數トモ云フ)

即チ $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots ad\ inf.$ 即チ $2{\cdot}71828\ldots\ldots$

ナル數(通例 $e$ ニテ表ハス)ヲ底トセルモノ.

「ネーピアー」Napier ハ蘇格蘭ノ數學者ニシテ西暦 1550 年ニ生レ同 1617 年ニ死セリ.

**注意.** 常用對數ハ應用數學ニ於テ用ヒラレ,自然對數ハ理論數學ニ於テ用ヒラル.

又初等數學ニ於テハ常用對數ヲ記スニ其底ヲ記サザルヲ通例トス.

例ヘバ $log\,a$ ハ $log_{10}a$ ヲ表ハスガ如シ.

## 〔43〕 對數ノ基本ノ性質.

第一. $log_a xy=log_a x+log_a y.$ 第二. $log_a\dfrac{x}{y}=log_a x-log_a y.$

第三. $log_a x^{\frac{m}{l}}=\dfrac{m}{l}log_a x.$

此等ハ皆第 41 條ノ問題ノ如クニスレバ容易ニ證セラルベキモノナリ.

## 〔44〕 常用對數ノ便利ナル特性.

第一. 指標(即チ對數ノ整數部)ヲ容易ニ求メ得ルコト.

例ヘバ $log283{\cdot}507$ ノ指標ハ 2 (卽チ眞數ノ整數部ノ位數ヨリ 1 ヲ減ジタルモノ)ニシテ, $log{\cdot}000584$ ノ指標ハ $\overline{4}$ (卽チ眞數ノ小數點ト最初ノ有効ノ數字トノ間ニアル零ノ數ニ 1 ヲ加ヘテ之ヲ負トシタルモノ)ナルガ如シ.

**第二. 小數點ノ位置ノミヲ異ニセル數ノ對數ノ假數(卽チ對數ノ小數部)ハ皆同一ナルコト.**

例ヘバ $log283{\cdot}507$, $log{\cdot}00283507$ 等ノ假數ハ皆同一ナルガ如シ.

## 問　　題

**243.** 一數ノ自然對數ヲ知リテ其數ノ常用對數ヲ求ムル法如何. 又之ヲ逆ニシタルモノハ如何.

【解】 一數ヲ $a$ トシ其自然對數ヲ $x$ トスレバ $log_e a=x$ 卽チ $e^x=a$.

$\therefore$ $log\,a=log\,e^x=x\,log\,e$. 從ツテ $x=\dfrac{log\,a}{log\,e}$.

$\therefore$ $a$ ノ常用對數ヲ求ムルニハ其自然對數ニ $e$ ノ常用對數ヲ乘ズレバ可ナリ.

又 $a$ ノ自然對數ヲ求ムルニハ其常用對數ヲ $e$ ノ常用對數ニテ除スレバ可ナリ.

**244.** $\dfrac{log\sqrt{27}+log8-log\sqrt{1000}}{log1{\cdot}2}=1\dfrac{1}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{log3^{\frac{3}{2}}+log2^3-log10^{\frac{3}{2}}}{log\dfrac{3\times2^2}{10}}=\dfrac{\dfrac{3}{2}log3+3log2-\dfrac{3}{2}}{log3+2log2-1}$ [$\because$ $log10=1$]

$$=\frac{\frac{3}{2}(log3+2log2-1)}{log3+2log2-1}=1\frac{1}{2}.$$



**245.** $log\dfrac{133}{65}+3log\dfrac{13}{7}+log\dfrac{539}{171}-log\dfrac{143}{90}-\dfrac{1}{2}log\dfrac{4}{3}$ ヲ最簡ニセヨ.

【解】 所題ノ式$=log(7\times19)-log(5\times13)+3log13-3log7+log(7^2\times11)$

$$-log(3^2\times19)-log(11\times13)+log(3^2\times2\times5)-\frac{1}{2}log2^2+\frac{1}{2}log3$$

$$=log7+log19-log5-log13+3log13-3log7+2log7+log11$$

$$-2log3-log19-log11-log13+2log3+log2+log5-log2+\frac{1}{2}log3$$

$=log13+\dfrac{1}{2}log3$……..(答)

**246.** $a^{logb}=b^{loga}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊ノ常用對數ヲ求ムレバ $loga^{logb}=logb\,loga$;
右邊ノ常用對數ヲ求ムレバ $logb^{loga}=loga\,logb$. $\therefore$ 左邊$=$右邊.

**247.** $(ab)^{loga+logb}=a^{loga}b^{logb}a^{2logb}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊ノ常用對數ヲ求ムレバ $(loga+logb)logab=(loga+logb)^2$;
右邊ノ常用對數ヲ求ムレバ $loga\,loga+logb\,logb+2logb\,loga=(loga+logb)^2$.
$\therefore$ 左邊$=$右邊.

**248.** $a, b, c$ ガ等比級數ヲナストキハ $loga, logb, logc$ ハ等差級數ヲナシ $log_a n, log_b n, log_c n$ ハ調和級數ヲナスコトヲ證セヨ.

【解】 假設ニ由リ $ac=b^2$. $\therefore$ 兩邊ノ常用對數ハ相等シ;
卽チ $loga+logc=2logb$. $\therefore$ $loga, logb, logc$ ハ等差級數ヲナスコトヲ知ル.

又 $log_a n, log_b n, log_c n$ ガ調和級數ヲナスコトヲ證スルニハ
$\dfrac{1}{log_a n}+\dfrac{1}{log_c n}=\dfrac{2}{log_b n}$ ヲ證スレバ可ナリ.

今 $\log_a n=x$, $\log_b n=y$, $\log_c n=z$ トスレバ $a^x=b^y=c^z=n$.

$$\therefore\quad ac=n^{\frac{1}{x}}n^{\frac{1}{z}}=n^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}\qquad b^2=(n^{\frac{1}{y}})^2=n^{\frac{2}{y}}.$$

然ルニ假設ニ由リ $ac=b^2$ ナルヲ以テ $n^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}=n^{\frac{2}{y}}$.

$$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y},\quad \text{即チ}\quad \frac{1}{\log_a n}+\frac{1}{\log_c n}=\frac{2}{\log_b n}.$$

---

## 〔45〕 指數方程式.

指數ニ未知數ヲ含ム方程式卽チ指數方程式ヲ解スルニハ對數ヲ用フルヲ便ナリトス. 次ギニ對數ヲ用ヒテ解スル方程式ノ例ヲ擧ゲン.

### 問　　題

次ギノ各方程式ヲ解ケ:

**249.** $\log(x+2)=3$.

**【解】** $\log(x+2)=3$ ナルヲ以テ $x+2=10^3$; $\therefore\ x=998$.

**250.** $\log x^{\frac{5}{2}}=1{\cdot}25$.

**【解】** $\frac{5}{2}\log x=1{\cdot}25$; $\therefore\ \log x=\frac{1}{2}$ $\therefore\ x=\sqrt{10}$.

**251.** $a^x b^{n-x}=c^{2x+1}$.

**【解】** $\log(a^x b^{n-x})=\log c^{2x+1}$, 卽チ $x\log a+(n-x)\log b=(2x+1)\log c$;

$$\therefore\quad x=\frac{\log c-n\log b}{\log a-\log b-2\log c}.$$



**注意.** 本問ト同樣ニシテ次ノ問題ヲ解シ得ベシ:

**方程式** $a^x b=c$ ヲ解ケ.　(答) $\frac{\log c-\log b}{\log a}$.

**252.** $a^x+\frac{1}{a^x}=\frac{b^2+1}{b}$.

**【解】** 分母ヲ去レバ $ba^{2x}-(b^2+1)a^x+b=0$,

卽チ $(ba^x-1)(a^x-b)=0$.

$\therefore\ a^x=\frac{1}{b}$ 或ハ $b$. (何レモ原方程式ニ適スルコト實驗ニ由リテ明カナリ)

今 $a^x=\frac{1}{b}$ トスレバ $\log a^x=\log\frac{1}{b}$, 卽チ $x\log a=-\log b$.

$$\therefore\quad x=-\frac{\log b}{\log a}.$$

又 $a^x=b$ トスレバ $\log a^x=\log b$, 卽チ $x\log a=\log b$. $\therefore\ x=\frac{\log b}{\log a}$.

$\therefore\ x=\pm\frac{\log b}{\log a}$ ヲ答トス.

**253.** $9^x-3^{x+1}=18$.

**【解】** $3^{2x}-3.3^x-18=0$, 卽チ $(3^x-6)(3^x+3)=0$.

$$\therefore\quad 3^x=6\ \text{或ハ}\ -3.$$

今 $3^x=6$ トスレバ $\log 3^x=\log 6$, 卽チ $x\log 3=\log 6$. $\therefore\ x=\frac{\log 6}{\log 3}$.

又 $3^x=-3$ トスレバ $x$ ノ有限實値ヲ求ムルコトヲ得ズ.

$\because\ 3^{-\infty}=0$ ナル故, $3^x=-3$ ナルベキ $x$ ハ $-\infty$ ヨリモ小ナルベケレバナリ. 斯ノ如キ $x$ ノ値ハ通常之ヲ棄ツベシ.

$\therefore$ 所要ノ根ハ $\frac{\log 6}{\log 3}$ ノミ.

**254.** $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)}=3$.

**【解】** 分母ヲ去レバ　$log(35-x^3)=3log(5-x)=log(5-x)^3$.

$\therefore$　$35-x^3=(5-x)^3$,　即チ $x^2-5x+6=0$,　即チ $(x-2)(x-3)=0$.

$\therefore$　$x=2$ 或ハ 3.（何レモ原方程式ニ適スルコト實驗ニ由リテ明カナリ）

**255.**　$logx+logy=1,\ x+y=11.$

**【解】** 第一方程式ヨリ $logxy=1$,　$\therefore$　$xy=10$.

之ト第二方程式トヨリ $x=10,\ y=1$ 或ハ $x=1,\ y=10$ ヲ得.

**256.**　$logx-logy=log3-log4,\ y-x=2.$

**【解】** 第一方程式ヨリ　$\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}$.

之ト第二方程式トヨリ $x=6,\ y=8$ ヲ得.

**257.**　$m^x+n^y=a,\ m^{x+2}+n^{y+2}=b.$

**【解】** 第二方程式ヨリ　$m^2.m^x+n^2.n^y=b$.

之ト第一方程式トヨリ　$m^x=\dfrac{b-an^2}{m^2-n^2},\ n^y=\dfrac{am^2-b}{m^2-n^2}$.

此等ノ對數ヲ取レバ

$$x=\frac{log(b-an^2)-log(m^2-n^2)}{logm},\quad y=\frac{log(am^2-b)-log(m^2-n^2)}{logn}.$$

**258.**　$y^{logz}z^{logy}=a^2,\ z^{logx}x^{logz}=b^2,\ x^{logy}y^{logx}=c^2.$

**【解】** 第一方程式ノ兩邊ノ對數ヲ比較スレバ

$logz\,logy+logy\,logz=2loga$　即チ　$logy\,logz=loga$…………(i).

同樣ニ第二, 第三方程式ヨリ

$logz\,logx=logb$……………(ii),　$logx\,logy=logc$…………(iii).

(ii)×(iii)÷(i) ヲ平方ニ開ケバ

$$logx=\pm\sqrt{\frac{logb\,logc}{loga}},\qquad \therefore\quad x=10^{\pm\sqrt{\frac{logb\,logc}{loga}}}.$$

之ヲ (iii), (ii) ニ代用スレバ

$$y=10^{\pm\sqrt{\frac{logc\,loga}{logb}}},\qquad z=10^{\pm\sqrt{\frac{loga\,logb}{logc}}}.$$

但シ複號ハ同順ナリトス.



## 〔46〕 對數ニ關スル計算.

對數ヲ用ヒテ諸種ノ計算ヲ爲サンニハ予ガ改訂譯述シタル"改訂ガウス五桁ノ對數表附用法"ヲ用フベシ. 而シテ此書ヲ如何ニ使用スベキカハ其卷末ニ與ヘタル用法ヲ熟讀スレバ明カナラン. 玆ニハ唯表ヨリ必要ナル對數ヲ引キ出ダシタルモノトシテ問題ヲ解カントス.

### 問　　題

**259.**　$log35724=4{\cdot}55296$ ナルコトヲ知リテ $({\cdot}35724)^5$, $\sqrt[5]{{\cdot}00035724}$ ノ常用對數ヲ求メヨ.

**【解】** $log({\cdot}35724)^5=5log{\cdot}35724=5\times\bar{1}{\cdot}55296=\bar{3}{\cdot}76480$……(答)

又　$log\sqrt[5]{0{\cdot}00035724}=\dfrac{1}{5}log{\cdot}00035724=\dfrac{1}{5}\times\bar{4}{\cdot}55296=\bar{1}{\cdot}31059$……(答)

**260.**　$log2={\cdot}30103,\ log3={\cdot}47712$ ヲ知リテ $log\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $log5\sqrt{2}$, $log2{\cdot}4$ ヲ計算セヨ.

**【解】** $log\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}log3-log2=\dfrac{1}{2}\times{\cdot}47712-{\cdot}30103=\bar{1}{\cdot}93753$………(答)

$log5\sqrt{2}=log\dfrac{10}{2}+log\sqrt{2}=1-log2+\dfrac{1}{2}log2=1-\dfrac{1}{2}log2$

$=1-\dfrac{1}{2}\times{\cdot}30103={\cdot}84948$………(答)

又　$log2{\cdot}4=log\dfrac{2^3\times3}{10}=3log2+log3-log10$

$=3\times{\cdot}30103+{\cdot}47712-1={\cdot}38021$………(答)

**261.**　$8^{31}$ ハ幾桁ノ數ナルカ. 但シ $log2={\cdot}30103$.

**【解】** $\log 8^{31}=\log 2^{93}=93\log 2=93\times\cdot30103=27\cdot99579.$

$\therefore$ $27+1=28$ 桁.........(答)

**262.** $\log\cdot14495=\bar{1}\cdot16122$, $\log\cdot14496=\bar{1}\cdot16125$ ヲ知リテ $\log\cdot00144957$ ヲ求メヨ.

**【解】**

$$\begin{array}{rrr} 14496 & 14495\cdot7 & \bar{1}\cdot16125 \\ -)\ 14495 & -)\ 14495 & -)\ \bar{1}\cdot16122 \\ \hline 1 & \cdot7 & 3 \end{array}$$

$1:\cdot7=3:x,\quad x=2\cdot1;$

$$\begin{array}{r} \cdot16122 \\ +)\ 21 \\ \hline \end{array}$$

$\log\cdot00144957=\bar{3}\cdot16124$.........(答)

**263.** 前問ト同一ノ既知數ニ由リテ $\log x=\bar{2}\cdot16124$ ナルベキ $x$ ヲ求メヨ.

**【解】**

$$\begin{array}{rrr} 14496 & \bar{1}\cdot16125 & 16124 \\ -)\ 14495 & -)\ \bar{1}\cdot16122 & -)\ 16122 \\ \hline 1 & 3 & 2 \end{array}\qquad 1:y=3:2,\quad y=\cdot7.$$

$\therefore$ $x=\cdot0144957.$

**注意.** $x$ ノ値ニ於ケル小數點ト最初ノ有効ノ數字トノ間ニアル零ノ數ハ $\bar{2}$ ノ 2 ヨリモ 1 ダケ少キモノナリ.

**264.** $L\sin 13°31'$ (卽チ $10+\log\sin 13°31'$)$=9\cdot36871$, $1'$ ノ表差(卽チ角ガ $1'$ 大キクナルトキ對數ノ增ス値)$=\cdot00053$ ナルコトヲ知リテ $L\sin 13°31'42''$ ノ値ヲ求メヨ.



**【解】** $60:42=53:x,\quad x=37.$

$$\begin{array}{r} 9\cdot36871 \\ +)\ 37 \\ \hline \end{array}$$

$L\sin 13°31'42''=9\cdot36908.$

**注意.** 正ナル鋭角ノ $L\sin.$ ノ代ハリニ其 $L\tan.$, $L\sec.$, $\log\sin.$, $\log\tan.$, $\log\sec.$, $\sin.$, $\tan.$ 或ハ $\sec.$ ヲ與ヘタルトキモ上ト同様ニ計算ヲ行フベシ.

**265.** $L\tan 69°57'=10\cdot43776$, $1'$ ノ表差 $=\cdot00039$ ヲ知リテ $L\tan x=10\cdot43786$ ナルベキ $x$ ヲ求メヨ.

**【解】**

$$\begin{array}{r} 10\cdot43786 \\ -)\ 10\cdot43776 \\ \hline 10 \end{array}\qquad 60:y=39:10,\quad y=15.$$

$\therefore$ $x=69°57'15''.$

**注意.** 正ナル鋭角ノ $L\tan.$ ノ代ハリニ其 $L\sin.$, $L\sec.$, $\log\sin.$, $\log\tan.$, $\log\sec.$, $\sin.$, $\tan.$ 或ハ $\sec.$ ヲ與ヘタルトキモ上ト同様ニ計算ヲ行フベシ.

**266.** $L\cos 63°18'=9\cdot65255$, $1'$ ノ表差(卽チ角ガ $1'$ 大キクナルトキ對數ノ減ズル値)$=\cdot00025$ ナルコトヲ知リテ $L\cos 63°18'17''$ ノ値ヲ求メヨ.

**【解】** $60:17=25:x,\quad x=7.$

$$\begin{array}{r} 9\cdot65255 \\ -)\ 7 \\ \hline \end{array}$$

$L\cos 63°18'17''=9\cdot65248.$

**注意.** 正ナル鋭角ノ $L\cos.$ ノ代ハリニ其 $L\cot.$, $L\text{cosec.}$, $\log\cos.$, $\log\cot.$, $\log\text{cosec.}$, $\cos.$, $\cot.$ 或ハ $\text{cosec.}$ ヲ與ヘタル

トキモ上ト同様ニ計算ヲ行フベシ.

**267.** $L\cot 60°38' = 9{\cdot}75028$, $1'$ ノ表差 (卽チ角ガ $1'$ 小サクナルトキ對數ノ增ス値) $= {\cdot}00030$ ナルコトヲ知リテ $L\cot x = 9{\cdot}75042$ ナルベキ $x$ ヲ求メヨ.

【解】

$$\begin{array}{r} 9{\cdot}75042 \\ -)\ \underline{9{\cdot}75028} \\ 14 \end{array} \qquad 60 : y = 30 : 14, \qquad y = 28.$$

$\therefore\ x = 60°38' - 28'' = 60°37'32''$ ......(答)

---

## 三角形ノ邊ト角トノ關係

**〔47〕 正弦比例.**

三角形ノ各角ヲ A, B, C ト名ヅケ此等ニ對スル邊ヲ夫々 $a, b, c$ ト名ヅクレバ次ギノ公式アリ:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

之ヲ正弦 (*sine*) 比例ト名ヅク.

### 問　　題

○ **268.** 三角形ノ三ツノ角ノ大サガ 1, 2, 3 ニ比例スルトキハ三ツノ邊ノ長サノ比如何.

【解】 最小角ノ度數ヲ $x$ トスレバ, 他ノ二角ノ度數ハ $2x$, $3x$ ナリ.

$\therefore\ x + 2x + 3x = 180,\quad x = 30.$

$\therefore$ 三ツノ角ハ $30°, 60°, 90°$ ナリ.

然ルニ邊ハ對角ノ正弦ニ比例スルヲ以テ, 所求ノ比ハ



$\sin 30° : \sin 60° : \sin 90°$ 卽チ $\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$

卽チ $1 : \sqrt{3} : 2.$

○ **269.** △ABC ノ邊 AB ト邊 AC トノ比ハ $\sqrt{3} : 2$ ニシテ $\hat{B}$ ハ $\hat{C}$ ヨリモ 30° 大ナリ. 此三角形ノ三ツノ角ヲ求メヨ.

【解】 $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$ 〔假設及ビ正弦比例〕

$= \dfrac{\sin(C + 30°)}{\sin C}$ 〔假設〕

$= \cos 30° + \cot C \sin 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \cot C \times \dfrac{1}{2}.$

$\therefore\ \cot C = 2\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

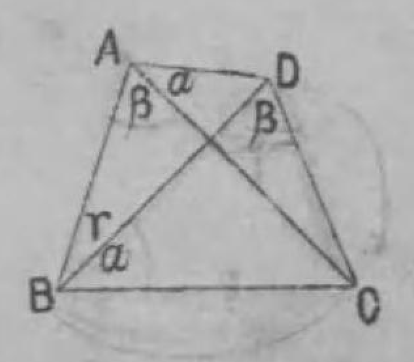
$\therefore\ C = 60°.$

$\therefore\ B = 60° + 30° = 90°, \qquad A = 180° - 60° - 90° = 30°.$

【答】 $A = 30°,\ B = 90°,\ C = 60°.$

**270.** 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ニ於テ $C\hat{A}D = \alpha$, $B\hat{A}C = \beta$, $A\hat{B}D = \gamma$ トセバ $CD = \dfrac{AB \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $C\hat{B}D = C\hat{A}D = \alpha,\ B\hat{D}C = B\hat{A}C = \beta.$




△BCD ニ於テ正弦比例ニ由リ

$CD = \dfrac{BC \sin\alpha}{\sin\beta}$ ........(i)

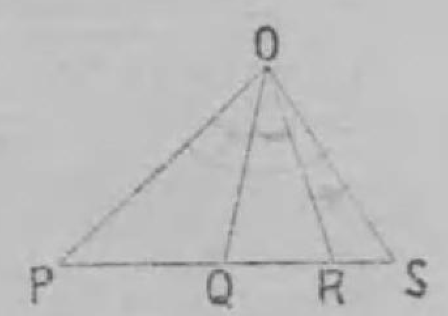
△ABC ニ於テモ同樣ニ

$$BC=\frac{AB\ sin\beta}{sin(180^\circ-\alpha-\beta-\gamma)}=\frac{AB\ sin\beta}{sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

之ヲ (i) ニ代用スレバ　CD=.........

**271.** P, Q, R, S ハ順次一直線上ニ取レル四點ナルトキ，其直線外ニ任意ノ一點 O ヲ取リ，之ヲ P, Q, R, S ニ結ブトキハ

$$\frac{PQ.\ RS}{QR.\ PS}=\frac{sinPOQ\ sinROS}{sinQOR\ sinPOS}$$ ナルコトヲ證セヨ.




【解】　正弦比例ニ由リ

$$\frac{PQ}{OQ}=\frac{sinPOQ}{sinOPQ},\quad \frac{OQ}{QR}=\frac{sinORQ}{sinQOR},$$

$$\frac{RS}{OS}=\frac{sinROS}{sinORS},\quad \frac{OS}{PS}=\frac{sinOPQ}{sinPOS}.$$

此等ヲ相乗スレバ, $sinORQ=sinORS$ ナルヲ以テ所題ノ如クナル.

**272.** △ABC ニ於テ

$c\,(sin^2A+sin^2B)=sinC\,(a\,sinA+b\,sinB)$ ナルコトヲ證セヨ

【解】(第一)　$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=\lambda$ トスレバ

$$a=\lambda\,sinA,\ b=\lambda\,sinB,\ c=\lambda\,sinC.$$

∴　終結ノ左邊$=\lambda\,sinC(sin^2A+sin^2B)$;

右邊$=sinC(\lambda\,sinA\,sinA+\lambda\,sinB\,sinB)$

$=\lambda\,sinC(sin^2A+sin^2B)$.

∴　終結ノ眞ナルコトヲ知ル.

【解】(第二)　$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=\lambda$ トスレバ



$$sinA=\frac{a}{\lambda},\quad sinB=\frac{b}{\lambda},\quad sinC=\frac{c}{\lambda}.$$

∴　終結ノ左邊$=c\left(\frac{a^2}{\lambda^2}+\frac{b^2}{\lambda^2}\right)=\frac{1}{\lambda^2}c(a^2+b^2)$;

右邊$=\frac{c}{\lambda}\left(a\frac{a}{\lambda}+b\frac{b}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda^2}c(a^2+b^2)$.

∴　終結ノ眞ナルコトヲ知ル.

**注意.** 第一ノ答解ニ於テ左右兩邊ヨリ λ ヲ省クトキハ

$$sinC(sin^2A+sin^2B)=sinC(sinA\,sinA+sinB\,sinB)$$

トナル. 之ヲ所題ノ終結ト比較スレバ終結ノ兩邊ニ於ケル三角形ノ邊ノ代ハリニ對角ノ sin. ヲ用ヒタルモノナルヲ視ル. 是レ上ノ問題ノ如ク終結ノ兩邊ガ三角形ノ邊ニ就キテ一次ノ齊次式ナル場合ニ限ルニアラズ, 任意ノ同次ナル齊次式ニテモ亦然ルモノナリ. 故ニ次ギノ事項ヲ得.

三角形ノ邊ヲ含ム關係式ノ兩邊ガ三角形ノ邊ニ就キテ同次ノ齊次式ナルトキハ之ヲ其等ノ邊ノ代ハリニ對角ノ sin. ヲ用ヒタル關係式ニ變ズルコトヲ得ベシ.

又第二ノ答解ニ於テ左右兩邊ヨリ $\frac{1}{\lambda^2}$ ヲ省クトキハ

$$c(a^2+b^2)=c(aa+bb)$$

トナル. 之ヲ所題ノ終結ト比較スレバ終結ノ兩邊ニ於ケル三角形ノ角ノ sin. ノ代ハリニ對邊ヲ用ヒタルモノナ

ルヲ視ル. 是レ亦上ノ問題ノ如ク終結ノ兩邊ガ三角形ノ角ノ $\sin.$ ニ就キテ二次ノ齊次式ナル場合ニ限ルニアラズ, 任意ノ同次ナル齊次式ニテモ亦然ルモノナリ. 故ニ次ギノ事項ヲ得:

三角形ノ角ノ $\sin.$ ヲ含ム關係式ノ兩邊ガ其等ノ $\sin.$ ニ就キテ同次ノ齊次式ナルトキハ之ヲ其等ノ $\sin.$ ノ代ハリニ對邊ヲ用ヒタル關係式ニ變ズルコトヲ得ベシ.

又上ト同樣ノ考究ニ由リテ次ギノ事項ヲ得:

分數ノ分母子ガ三角形ノ邊(或ハ角ノ $\sin.$) ニ就キテ同次ノ齊次式ナルトキハ此分數ハ其等ノ邊(或ハ角ノ $\sin.$) ノ代ハリニ對角ノ $\sin.$ (或ハ對邊) ヲ用ヒタルモノニ等シ.

例ヘバ $\dfrac{a^2-3bc}{4c^2+5b^2}=\dfrac{\sin^2A-3\sin B\sin C}{4\sin^2C+5\sin^2B}$ ナルガ如シ.

**273.** △ABC ニ於テ $b\sin B-c\sin C=a\sin(B-C)$ ヲ證セヨ.

**【解】** 本題ヲ證スルニハ等號ノ兩邊ノ三角形ノ邊ノ代ハリニ對角ノ $\sin.$ ヲ用ヒタル $\sin^2B-\sin^2C=\sin A\sin(B-C)$ ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ此關係式ノ左邊ハ

$$\sin(B+C)\sin(B-C)=\sin(180°-A)\sin(B-C)=\sin A\sin(B-C).$$

∴ 本題ヲ證シ得タリ.

**注意.** 本問ト同樣ニシテ次ギノ問題ヲ解スルコトヲ得ベシ:

△ABC ニ於テ次ギノ等式ヲ證セヨ.



$$2(a\cos A-b\cos B)\sin C=c(\sin 2A-\sin 2B),$$

$$(a+b)\sin\frac{C}{2}=c\cos\frac{A-B}{2}.$$

$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$ …… 公式

**274.** △ABC ニ於テ $\dfrac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊ノ分母子ハ三角形ノ邊ニ就キテ一次ノ齊次式ナルヲ以テ sine 比例ヲ應用スレバ此等ノ邊ノ代ハリニ對角ノ $\sin.$ ヲ用ヒテ可ナリ. 卽チ

$$左邊=\frac{\sin A-\sin C\cos B}{\sin B-\sin C\cos A}=\frac{\sin(B+C)-\sin C\cos B}{\sin(A+C)-\sin C\cos A}$$

[∵ $\sin A=\sin(180°-B-C)=\sin(B+C)$, 等]

$$=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C-\sin C\cos B}{\sin A\cos C+\cos A\sin C-\sin C\cos A}=\frac{\sin B\cos C}{\sin A\cos C}=右邊.$$

**275.** △ABC ニ於テ次式ヲ證セヨ:

$$(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{A}{2}=a^2.$$

**【解】** 本題ヲ證スルニハ兩邊ノ三角形ノ邊ノ代ハリニ對角ノ $\sin.$ ヲ用ヒタル

$$(\sin B+\sin C)^2\sin^2\frac{A}{2}+(\sin B-\sin C)^2\cos^2\frac{A}{2}=\sin^2A$$

ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ最後ノ關係式ノ左邊ハ

$$\left(2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2\sin^2\frac{A}{2}+\left(2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\right)^2\cos^2\frac{A}{2}$$

$$=\left\{2\sin\left(90°-\frac{A}{2}\right)\sin\frac{A}{2}\right\}^2\cos^2\frac{B-C}{2}+\left\{2\cos\left(90°-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{A}{2}\right\}^2\sin^2\frac{B-C}{2}$$

$$=\left(2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\right)^2\left(\cos^2\frac{B-C}{2}+\sin^2\frac{B-C}{2}\right)=\sin^2A.$$

∴ 本題ヲ證シ得タリ.

**276.** △ABC ニ於テ $b, a, c$ ガ等比級數ヲナストキハ $\cos(B-C)=1-\cos A-\cos 2A$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ニ由リ $bc=a^2$.

之ニ sine 比例ヲ應用シテ三角形ノ邊ノ代ハリニ對角ノ sin. ヲ用フルトキハ

$\sin B\sin C=\sin^2 A$, 卽チ $\frac{1}{2}\{\cos(B-C)-\cos(B+C)\}=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)$,

卽チ $\cos(B-C)=\cos(B+C)+1-\cos 2A=\cos(180°-A)+1-\cos 2A$

$=1-\cos A-\cos 2A$.

**277.** △ABC ニ於テ $a, b, c$ ガ等差級數ヲナストキハ $2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ニ由リ $a+c=2b$.

之ニ sine 比例ヲ應用シテ三角形ノ邊ノ代リニ對角ノ sin. ヲ用フルトキハ

$\sin A+\sin C=2\sin B$, 卽チ $2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.....(a).

然ルニ $\sin\frac{A+C}{2}=\sin\left(90°-\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{B}{2}$ ナルヲ以テ (a) ヨリ

$\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$, 卽チ $\cos\frac{A-C}{2}-\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}$,

卽チ $\cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B}{2}$,

$\left[\because \sin\frac{B}{2}=\sin\left(90°-\frac{A+C}{2}\right)=\cos\frac{A+C}{2}\right]$

卽チ $2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}$.

**278.** △ABC ニ於テ $2\cos A+\cos B+\cos C=2$ ナルトキハ $b, a, c$ ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.



**【解】** 假設ニ於ケル關係式ヨリ $\cos B+\cos C=2(1-\cos A)$,

卽チ $2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=4\sin^2\frac{A}{2}$........(a).

然ルニ $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$.

(a) ヨリ $2\cos\frac{B-C}{2}=4\sin\frac{A}{2}$.

兩邊ニ $\sin\frac{B+C}{2}$, 卽チ $\sin\left(90°-\frac{A}{2}\right)$, 卽チ $\cos\frac{A}{2}$ ヲ乘ズレバ

$2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$, 卽チ $\sin B+\sin C=2\sin A$.

此關係式ニ sine 比例ヲ應用シテ各角ノ sin. ノ代ハリニ對邊ヲ用フルトキハ $b+c=2a$.

∴ $b, a, c$ ハ等差級數ヲナスコトヲ知ル.

**279.** △ABC ニ於テ A, B, C ガ 2, 3, 4 ニ比例スレバ $\cos\frac{A}{2}=\frac{a+c}{2b}$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 終結ノ右邊ノ分母子ハ三角形ノ邊ニ就キテ一次ノ齊次式ナルヲ以テ sine 比例ヲ應用スレバ此等ノ邊ノ代ハリニ對角ノ sin. ヲ用ヒタルモノトナル.

卽チ 右邊$=\frac{\sin A+\sin C}{2\sin B}$............(a).

然ルニ假設ニ由リ $\frac{A}{2}=\frac{B}{3}=\frac{C}{4}$, 卽チ $B=\frac{3A}{2}$, $C=2A$.

之ヲ (a) ニ代用スレバ

$$右邊=\frac{\sin A+\sin 2A}{2\sin\frac{3A}{2}}=\frac{2\sin\frac{3A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{3A}{2}}=左邊.$$

**280.** $\triangle ABC$ ニ於テ $A=2C$ ナルトキハ $a^2=bc+c^2$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ヨリ $\sin A=\sin 2C$.

$\therefore\ \sin^2 A=\sin 2C.\ \sin 2C=\sin C.\ 2\sin 2C\cos C=\sin C(\sin 3C+\sin C)$.

然ルニ $\sin B=\sin(180°-A-C)=\sin(180°-3C)=\sin 3C$.

$\therefore\ \sin^2 A=\sin C(\sin B+\sin C)$.

$\therefore$ 正弦比例ニ由リ $a^2=c(b+c)$.

**281.** $\triangle ABC$ ニ於テ

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C,\quad \sin A=2\sin B\cos C$$ ナルトキハ

此三角形ハ直二等邊ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ノ第一關係式ニ *sine* 比例ヲ應用シ各角ノ *sin.* ノ代ハリニ對邊ヲ用フルトキハ $a^2=b^2+c^2$ トナル.

卽チ一邊ノ平方ガ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シキヲ以テ $\triangle ABC$ ハ $A=90°$ ナルモノナルコトヲ知ル.

又 $A=90°$ ナルヲ以テ $B+C=90°$; $\therefore\ \cos C=\sin B$.

$\therefore$ 假設ノ第二關係式ヨリ $\sin 90°=2\sin^2 B$, 卽チ $1=2\sin^2 B$.

$\therefore\ \sin B=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

然ルニ $0°<B<90°$ ナルヲ以テ $\sin B$ ハ正ナリ.

$\therefore\ \sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\therefore\ B=45°$; 從ツテ $C=45°$; 從ツテ $b=c$.

$\therefore\ \triangle ABC$ ハ又二等邊ナルコトヲ知ル.

**282.** C ガ直角ナル $\triangle ABC$ ニ就キテ $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{b+c}$ ヲ證セヨ.

**【解】** 正弦比例ニ由リ $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}$.

然ルニ $\sin B+\sin C=\sin(90°-A)+\sin 90°=\cos A+1$.



$$\therefore\quad \frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\tan\frac{A}{2}.$$

**283.** $\triangle ABC$ ニ於テ $C=90°$ ナルトキ

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\frac{2\sin A}{\sqrt{\cos 2B}}$$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊$=\dfrac{(\sqrt{a+b})^2+(\sqrt{a-b})^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$=\dfrac{2\sin A}{\sqrt{\sin^2 A-\sin^2 B}}$ 〔正弦比例〕

$=\dfrac{2\sin A}{\sqrt{\cos^2 B-\sin^2 B}}$ 〔$\because\ A+B=90°$〕

=右邊.

**284.** $\triangle ABC$ ニ於テ $B=60°$ ナルトキハ

$$\frac{a+c}{2b}=\sin(30°+C)$$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 終結ノ左邊ノ分母子ハ三角形ノ邊ニ就キテ一次ノ齊次式ナルヲ以テ *sine* 比例ヲ應用スレバ此等ノ邊ノ代ハリニ對角ノ *sin.* ヲ用ヒタルモノトナル. 卽チ

$$左邊=\frac{\sin A+\sin C}{2\sin B}\cdots\cdots\cdots\cdots(a).$$

然ルニ $B=60°$ ナルヲ以テ

$$A+C=180°-B=120°,\quad \therefore\ A=120°-C.$$

$\therefore$ (a) ヨリ

$$左邊=\frac{\sin(120°-C)+\sin C}{2\sin 60°}=\frac{2\sin 60°\cos(60°-C)}{2\sin 60°}$$

$$=\cos(60°-C)=\sin\{90°-(60°-C)\}=\sin(30°+C).$$

**285.** $\triangle ABC$ ニ於テ $a\cos A=b\cos B$ ナルトキハ此三角形ハ二等邊ナルカ或ハ直ナルコトヲ證セヨ.

【解】 假設ノ關係式ニ sine 比例ヲ應用シ三角形ノ邊ノ代ハリニ對角ノ sin. ヲ用フレバ $\sin A\cos A=\sin B\cos B$,

即チ $\frac{1}{2}\sin 2A=\frac{1}{2}\sin 2B$, 即チ $\sin 2A=\sin 2B$.

$\therefore$ $\sin 2A-\sin 2B=0$, 即チ $2\cos(A+B)\sin(A-B)=0$,

即チ $\cos(A+B)\sin(A-B)=0$.

$\therefore$ $\cos(A+B)=0$……(i), 或ハ $\sin(A-B)=0$……(ii).

然ルニ $0°<A+B<180°$ ナルヲ以テ (i) ヨリ $A+B=90°$;

從ッテ $C=90°$.

$\therefore$ 此場合ニ於テ $\triangle ABC$ ハ $C=90°$ ナルモノナリ.

又 $0°\leqq|A-B|<180°$ ナルヲ以テ (ii) ヨリ $A-B=0°$;

從ッテ $A=B$.

$\therefore$ 此場合ニ於テ $\triangle ABC$ ハ $a=b$ ナルモノナリ.

**注意.** 次ギノ問題ハ畢竟本問ト同一ナルモノニ歸ス:

$\triangle ABC$ ニ於テ $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$ ナルトキハ, $\triangle ABC$ ハ直ナルカ或ハ二等邊ナルコトヲ證セヨ.

**286.** $\triangle ABC$ ニ於テ

$$a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$$

ナルトキハ此三角形ハ二等邊ナルコトヲ證セヨ.

【解】 等式ヲ轉項スレバ

$$a\left(\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\right)=b\left(\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}-\frac{\sin B}{\cos B}\right),$$



即チ $$a\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}=b\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos B}.$$

然ルニ $0°<\frac{A+B}{2}<90°$ ナル故 $\cos\frac{A+B}{2}\neq 0$.

$\therefore$ 兩邊ヨリ $\cos\frac{A+B}{2}$ ヲ省キ得. 即チ $\dfrac{a\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A}=\dfrac{b\sin\frac{A-B}{2}}{\cos B}$.

$\therefore$ $\sin\frac{A-B}{2}=0$……………………(i).

或ハ $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$…………………(ii).

(i) ヨリ $\left|\frac{A-B}{2}\right|<90°$ ナル故 $\frac{A-B}{2}=0$. $\therefore$ $A=B$…………$(\alpha)$.

(ii) ヨリ sine 比例ヲ用ヒテ $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$, 即チ $\tan A=\tan B$.

然ルニ A, B ハ 0° ト 180° トノ間ニアル故正切ノ相等ハ角ノ相等ヲ表ハス.

$\therefore$ $A=B$…………$(\beta)$.

$(\alpha)$, $(\beta)$ ノ何レヨリモ $a=b$. $\therefore$ $\triangle ABC$ ハ二等邊ナリ.

**287.** 三角形ノ邊ノ平方ガ等差級數ヲナストキハ對角ノ cot. モ亦等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.

【解】 三角形ヲ ABC ト命ズレバ假設ニ由リ $a^2+c^2=2b^2$.

之ニ sine 比例ヲ應用シ三角形ノ邊ノ代ハリニ對角ノ sin. ヲ用フルトキハ $\sin^2 A+\sin^2 C=2\sin^2 B$.

兩邊ヲ $\sin A\sin B\sin C$ ニテ除スレバ $\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}+\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}=\dfrac{2\sin B}{\sin C\sin A}$.

各分子ニ補角ノ sin. ヲ代入スレバ $\dfrac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}+\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\dfrac{2\sin(C+A)}{\sin C\sin A}$.

各分子ヲ展開シ分母ニテ除スレバ, $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$ ナルヲ以テ

$$\cot C+\cot B+\cot B+\cot A=2(\cot A+\cot C).$$

卽チ $2\cot B=\cot A+\cot C$. $\therefore$ $\cot A, \cot B, \cot C$ ハ等差級數ヲナス.

**288.** $\triangle ABC$ ニ於テ $a, b, c$ ガ等差級數ヲナシ $A-C=90^\circ$ ナルトキハ各角ノ正弦如何.

【解】 假設ニ由リ $a+c=2b$.

之ニ sine 比例ヲ應用シテ三角形ノ邊ノ代ハリニ對角ノ sin. ヲ用フルトキハ $\sin A+\sin C=2\sin B$,

卽チ $2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=4\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$..........($\alpha$).

然ルニ $\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin\left(90^\circ-\dfrac{B}{2}\right)=\cos\dfrac{B}{2}$.

且ツ $A-C=90^\circ$ 〔假設〕.

$\therefore$ ($\alpha$) ヨリ $\cos 45^\circ=2\sin\dfrac{B}{2}$. $\left[\because 0^\circ<\dfrac{A+C}{2}<90^\circ, \therefore \sin\dfrac{A+C}{2}\neq 0\right]$

$\therefore$ $\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

$\therefore$ $\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{1-\sin^2\dfrac{B}{2}}$ $\left[\because 0^\circ<\dfrac{B}{2}<180^\circ, \therefore \cos\dfrac{B}{2}>0.\right]$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

$\therefore$ $\sin B=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$..........(答)

又 $A+B+C=180^\circ$, $A-C=90^\circ$.

$\therefore$ 減法ニ由リ $B+2C=90^\circ$; $\therefore$ $\cos 2C=\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

$\therefore$ $\sin C=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2C}{2}}$ [$\because$ $0^\circ<C<180^\circ$, $\therefore$ $\sin C>0$.]

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{7}}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{7}-1}{4}\ \text{.......(答)}$$

$\therefore$ $\sin A=2\sin B-\sin C=2.\dfrac{\sqrt{7}}{4}-\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}=\dfrac{\sqrt{7}+1}{4}$.......(答)



○ **289.** $\triangle ABC$ ニ於テ $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{5}{6}$, $\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{20}{37}$ ナルトキハ $a, b, c$ ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.

【解】 $$\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{1}{\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}=\frac{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}=\frac{1-\frac{5}{6}.\frac{20}{37}}{\frac{5}{6}+\frac{20}{37}}=\frac{2}{5}.$$

本題ヲ證スルニハ $a+c=2b$ 卽チ $\sin A+\sin C=2\sin B$ ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ $$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}=\frac{2\times\frac{5}{6}}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{60}{61}.$$

同様ニ $\sin B=\dfrac{1480}{1769}$, $\sin C=\dfrac{20}{29}$. 而シテ $\dfrac{60}{61}+\dfrac{20}{29}=\dfrac{2960}{1769}=2\times\dfrac{1480}{1769}$.

$\therefore$ $\sin A+\sin C=2\sin B$. $\therefore$ 本問題ヲ證シ得タリ.

---

## 〔48〕 一邊ヲ此邊上ニ於ケル他ノ二邊ノ正射影ニテ表ハスコト.

$\triangle ABC$ ニ於テ次ギノ公式アリ：

$$a=b\cos C+c\cos B,\qquad b=c\cos A+a\cos C,$$
$$c=a\cos B+b\cos A.$$

### 問題

**290.** $\triangle ABC$ ニ於テ

$(a+b)\cos C+c(\cos A+\cos B)>a\cos B+b\cos A$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=(a\cos C+c\cos A)+(b\cos C+c\cos B)=b+a,$

右邊$=c.$

然ルニ $b+a>c.$ $\therefore$ 左邊>右邊.

**291.** △ABC ニ於テ $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=(b\cos C+c\cos B)(b\cos C-c\cos B)=b^2\cos^2 C-c^2\cos^2 B$

$=b^2(1-\sin^2 C)-c^2(1-\sin^2 B)=b^2-c^2-(b^2\sin^2 C-c^2\sin^2 B).$

然ルニ $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$; $\therefore$ $b\sin C=c\sin B,$ $\therefore$ $b^2\sin^2 C=c^2\sin^2 B.$

$\therefore$ 左邊$=b^2-c^2.$

**292.** △ABC ニ於テ $a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=2ab\sin C$ ヲ證セヨ.

【解】 本題ヲ證スルニハ $a^2.2\sin B\cos B+b^2.2\sin A\cos A=2ab\sin C,$ 或ハ之ニ sine 比例ヲ應用シテ各角ノ sin. ノ代ハリニ對邊ヲ用ヒ且ツ兩邊ヲ $2ab$ ニテ除シタル $a\cos B+b\cos A=c$ ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ最後ノ關係式ハ公式ニテ明カナリ.

$\therefore$ 本題ヲ證シ得タリ.

**293.** △ABC ニ於テ下式ヲ證セヨ:

$$a\sec A+b\sec B+c\sec C=a\sec A\tan B\tan C.$$

【解】 左邊$=\dfrac{a}{\cos A}+\left(\dfrac{b}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}\right)=\dfrac{a}{\cos A}+\dfrac{b\cos C+c\cos B}{\cos B\cos C}$

$=\dfrac{a}{\cos A}+\dfrac{a}{\cos B\cos C}$

$=a\dfrac{\cos B\cos C+\cos A}{\cos A\cos B\cos C}=a\dfrac{\cos B\cos C-\cos(B+C)}{\cos A\cos B\cos C}$

[$\because$ $\cos A=\cos\{180^\circ-(B+C)\}=-\cos(B+C)$]

$=a\dfrac{\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}$ [$\cos(B+C)$ ヲ展開シテ演算セリ]



$=a\dfrac{1}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}\cdot\dfrac{\sin C}{\cos C}=a\sec A\tan B\tan C.$

**294.** △ABC ニ於テ $a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}$ ナルトキハ邊ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.

【解】 假設ノ左邊$=a\dfrac{1+\cos C}{2}+c\dfrac{1+\cos A}{2}=\dfrac{a+c+(a\cos C+c\cos A)}{2}$

$=\dfrac{a+c+b}{2};$

$\therefore$ 假設ヨリ $\dfrac{a+c+b}{2}=\dfrac{3b}{2},$ 卽チ $a+c=2b.$

$\therefore$ $a, b, c$ ハ等差級數ヲナスコトヲ知ル.

---

## 〔49〕 二邊及ビ其夾角ニテ他ノ邊ヲ表ハスコト等.

△ABC ニ於テ次ギノ公式アリ:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\qquad b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C;$$

或ハ之ヲ變形シテ

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

**注意.** 第一群ノ公式ハ二邊及ビ其夾角ヲ知リテ第三邊ヲ求ムル(對數計算ヲ用ヒズシテ)トキニ用ヒラレ; 第二群ノ公式ハ三邊ヲ知リテ角ヲ求ムル(對數計算ヲ用ヒズシテ)トキ, 及ビ理論問題ニ於テ角ノ cos. ヲ邊ノミニテ表ハスコトヲ要スルトキニ用ヒラ"

## 問　　題

**295.** △ABC ニ於テ公式 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=K$ ヲ用ヒテ公式 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ヲ作レ.

【解】 正弦比例ヲ平方シ相等シキ比ニ關スル理ニ由レバ

$$\frac{a^2-b^2-c^2}{\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C}=K^2.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a^2-b^2-c^2&=K^2(\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C)\\&=K^2\{\sin(A+B)\sin(A-B)-\sin^2 C\}\\&=K^2\sin C\{\sin(A-B)-\sin(A+B)\}\quad[\because\ \sin(A+B)=\sin C]\\&=K^2\sin C(-2\cos A\sin B)=-2(K\sin B)(K\sin C)\cos A\\&=-2bc\cos A.\end{aligned}$$

之ヲ轉項シテ所求ノ公式ヲ得.

**296.** △ABC ニ於テ $A=60°$, $b=8$, $c=5$ ナルトキハ $a$ ハ如何.

【解】 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=8^2+5^2-2.8.5.\dfrac{1}{2}=49.$

$\therefore\ a=7$ 〔但シ三角形ノ邊ハ正ト規約シタレバナリ〕

**297.** 三角形ノ二邊ヲ夫々 $x+y\cos A$, $y+x\cos A$ トシ其間ノ角ヲ A, 第三邊ヲ $a$ トスレバ $a=\sin A(x^2+y^2+2xy\cos A)^{\frac{1}{2}}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $a^2=(x+y\cos A)^2+(y+x\cos A)^2-2(x+y\cos A)(y+x\cos A)\cos A$〔公式〕

$$\begin{aligned}&=x^2+y^2\cos^2 A+2xy\cos A+y^2+x^2\cos^2 A+2xy\cos A\\&\qquad-2xy\cos A-2x^2\cos^2 A-2y^2\cos^2 A-2xy\cos^3 A\\&=x^2(1-\cos^2 A)+y^2(1-\cos^2 A)+2xy\cos A(1-\cos^2 A)\end{aligned}$$

$\sin^2 A(x^2+y^2+2xy\cos A)$;

$2xy\cos A)^{\frac{1}{2}}$.



然ルニ $a$ ハ三角形ノ邊ナルヲ以テ正トスベク, 又 $0°<A<180°$ ナルヲ以テ $\sin A$ ハ正ナリ. ∴ 複號ノ中負號ヲ棄テ

$$a=\sin A(x^2+y^2+2xy\cos A)^{\frac{1}{2}}.$$

**298.** △ABC ニ於テ $a=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキハ各角ハ如何.

【解】 $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

$\therefore\ B=45°$…………(答)

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ヨリ $\cos C=-\dfrac{1}{2}$, $\therefore\ C=120°$…………(答)

$\therefore\ A=180°-(45°+120°)=15°$…………(答)

**299.** 三角形ノ三邊ヲ $m^2+m+1$, $2m+1$, $m^2-1$ トスレバ其最大角ハ 120° ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $m^2-1>0$ ナル故 $|m|>1$.

$2m+1>0$ ナル故 $m<-1$ トスルヲ得ズ. $\therefore\ m>1$.

然ルニ $m^2+m+1-(2m+1)=m^2-m=m(m-1)$.

爰ニ $m>1$, $m-1>0$ ナル故 $m(m-1)>0$.

$\therefore\ m^2+m+1>2m+1.$

又 $m^2+m+1-(m^2-1)=m+2>0$ 〔$\because\ m>1$〕.

$\therefore\ m^2+m+1>m^2-1.$

∴ $m^2+m+1$ ハ最大邊ナリ. 今此對角ヲ $\alpha$ トスレバ

$$\cos\alpha=\frac{(2m+1)^2+(m^2-1)^2-(m^2+m+1)^2}{2(2m+1)(m^2-1)}=-\frac{1}{2}.$$

$\therefore\ \alpha=120°.$

**300.** $\triangle ABC$ ニ於テ $b+c,\ c+a,\ a+b$ ガ 4, 5, 6 ニ比例スレバ A ノ値如何.

【解】 題意ニ依リ $\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{5}=\dfrac{a+b}{6}.$

之ニ分數ノ定理ヲ適用スレバ $\dfrac{c+a-(b+c)}{5-4}=\dfrac{a+b}{6},$

即チ $\dfrac{a-b}{1}=\dfrac{a+b}{6}.\quad \therefore\ \dfrac{a+b+a-b}{6+1}=\dfrac{a+b-(a-b)}{6-1},$

即チ $\dfrac{2a}{7}=\dfrac{2b}{5},\quad \therefore\ \dfrac{a}{7}=\dfrac{b}{5}.$ 同様ニ $\dfrac{b}{5}=\dfrac{c}{3}.$

$\therefore\ a=7,\ b=5,\ c=3$ トシテ A ヲ計算スレバ可ナリ.

然ルニ $\cos A=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}=-\dfrac{1}{2}.$

而シテ A ハ $0°$ ト $180°$ トノ間ニアリ. $\therefore\ A=120°.$

**301.** $\triangle ABC$ ニ於テ

$\dfrac{b^2}{a}\cos A+\dfrac{c^2}{b}\cos B+\dfrac{a^2}{c}\cos C=\dfrac{a^4+b^4+c^4}{2abc}$ ヲ證セヨ.

【解】 左邊$=\dfrac{b^2}{a}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\dfrac{c^2}{b}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\dfrac{a^2}{c}\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ＝右邊.

**302.** $\triangle ABC$ ニ於テ

$\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=0$ ヲ證セヨ.

【解】 $\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{b-c}{a}\cdot\dfrac{1+\cos A}{2}=\dfrac{b-c}{a}\cdot\dfrac{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}$

$=\dfrac{(b-c)\{(b+c)^2-a^2\}}{4abc}=\dfrac{a+b+c}{4abc}\{b^2-c^2-a(b-c)\};$

同様ニ $\dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{a+b+c}{4abc}\{c^2-a^2-b(c-a)\},$



$\dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{a+b+c}{4abc}\{a^2-b^2-c(a-b)\}.$

$\therefore$ 左邊$=\dfrac{a+b+c}{4abc}\{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)\}$

$=0.$

**303.** $\triangle ABC$ ニ於テ $\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin C}$ ナルトキハ此三角形ハ二等邊ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin C}$ ヨリ $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{a}{2c},\quad \therefore\ c^2+a^2-b^2=a^2,$

即チ $c^2=b^2,\quad \therefore\ c=b.\quad \therefore$ 題言ノ如シ.

**304.** $\triangle ABC$ ニ於テ $\tan A(\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A)$

$=\tan B(\sin^2C+\sin^2A-\sin^2B)$ ヲ證セヨ.

【解】 本題ヲ證スルニハ

$\dfrac{\sin A}{\cos A}(\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A)=\dfrac{\sin B}{\cos B}(\sin^2C+\sin^2A-\sin^2B),$

或ハ之ニ sine 比例ヲ應用シテ各角ノ sin. ノ代ハリニ對邊ヲ用ヒタル

$\dfrac{a}{\cos A}(b^2+c^2-a^2)=\dfrac{b}{\cos B}(c^2+a^2-b^2)$ ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ此關係式ノ左邊ハ $\dfrac{a}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}(b^2+c^2-a^2)=2abc;$

同様ニ右邊モ亦 $2abc.\quad \therefore$ 本題ヲ證シ得タリ.

**305.** $\triangle ABC$ ニ於テ $\tan A,\ \tan B,\ \tan C$ ガ調和級數ヲナストキハ $a^2, b^2, c^2$ ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.

【解】 設假ニ由リ

$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{2}{\tan B},$ 即チ $\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin C}=\dfrac{2\cos B}{\sin B}.$

今之ニ sine 比例ヲ應用シテ各角ノ sin. ノ代ハリニ對邊ヲ用ヒ且ツ

$\cos A$ 等ニ $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 等ヲ代入スレバ

$$\frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a}+\frac{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{c}=\frac{2\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{b};$$

公分母 $2abc$ ヲ省キテ簡單ニスレバ $a^2+c^2=2b^2$.

∴ $a^2, b^2, c^2$ ハ等差級數ヲナスコトヲ知ル.

○ **306.** $\triangle ABC$ ニ於テ $a^2, b^2, c^2$ ガ等差級數ヲナストキハ $a\sec A, b\sec B, c\sec C$ ハ調和級數ヲナスコトヲ證セヨ.

**【解】** 本題ヲ證スルニハ $\dfrac{1}{a\sec A}+\dfrac{1}{c\sec C}=\dfrac{2}{b\sec B}$,

即チ $$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos C}{c}=\frac{2\cos B}{b},$$

即チ $$\frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a}+\frac{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{c}=\frac{2\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{b},$$

或ハ公分母ヲ省キテ簡單ニシタル $a^2+c^2=2b^2$ ヲ證スレバ可ナリ.

然ルニ假設ニ由レバ最後ノ關係式ハ眞ナリ.

∴ 本題ヲ證シ得タリ.

---

## 〔50〕 三角形ノ角ノ半ノ公式.

$\triangle ABC$ ノ各角ノ半ノ三角函數ヲ邊ニテ表ハス公式ハ次ギノ如シ: 〔但シ $2s=a+b+c$ トス〕

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$$



$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}};$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}};$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\quad \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

## 問　　題

**307.** $\triangle ABC$ ニ於テ $1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{2c}{a+b+c}$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊 $=1-\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=1-\dfrac{s-c}{s}=\dfrac{c}{s}$

$$=\frac{c}{\frac{1}{2}(a+b+c)}=\frac{2c}{a+b+c}.$$

**308.** $\triangle ABC$ ニ於テ $a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}$ ナルトキハ $a, b, c$ ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ.

**【解】** 假設ノ左邊 $=a\dfrac{s(s-c)}{ab}+c\dfrac{s(s-a)}{bc}=\dfrac{s(2s-c-a)}{b}=s.$

∴ 假設ハ $s=\dfrac{3b}{2}$.

∴ $2s=3b$ 即チ $a+b+c=3b,\ a+c=2b.$ ∴ 題言ノ如シ.

**309.** △ABC ニ於テ

$$(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0$$ ヲ證セヨ.

**【解】** $(b-c)\cot\frac{A}{2}=(b-c)\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$

$$=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}\{s(b-c)-a(b-c)\};$$

同樣ニ $(c-a)\cot\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}\{s(c-a)-b(c-a)\},$

$(a-b)\cot\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}\{s(a-b)-c(c-b)\}.$

∴ 左邊

$$=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}\{s(b-c+c-a+a-b)-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)\}$$

$$=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}\times 0.$$

然ルニ $s-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}>0.$ [$\because\ b+c>a,\quad \therefore\ b+c-a>0.$]

同樣ニ $s-b>0,\ s-c>0.$

∴ $\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}$ ハ有限ナリ. ∴ 左邊=0.

**310.** △ABC ニ於テ $(b-c)(s-a)\cos^2\frac{A}{2}$

$$+(c-a)(s-b)\cos^2\frac{B}{2}+(a-b)(s-c)\cos^2\frac{C}{2}=0$$ ヲ證セヨ.

**【解】** $(b-c)(s-a)\cos^2\frac{A}{2}=(b-c)(s-a)\frac{s(s-a)}{bc}=\frac{s}{abc}\{a(b-c)(s-a)^2\}$

$$=\frac{s}{abc}\{a(b-c)s^2-a(b-c)(2as-a^2)\}=\frac{s}{abc}\{a(b-c)s^2-a^2(b^2-c^2)\};$$

同樣ニ $(c-a)(s-b)\cos^2\frac{B}{2}=\frac{s}{abc}\{b(c-a)s^2-b^2(c^2-a^2)\},$



$$(a-b)(s-c)\cos^2\frac{C}{2}=\frac{s}{abc}\{c(a-b)s^2-c^2(a^2-b^2)\}.$$

左邊 $=\frac{s}{abc}[\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}s^2-a^2(b^2-c^2)-b^2(c^2-a^2)-c^2(a^2-b^2)]$

$=\frac{s}{abc}\times 0.$

然ルニ $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$ ナルヲ以テ $\frac{s}{abc}$ ハ有限ナリ.

∴ 左邊 =0.

**311.** △ABC ニ於テ $x,\ y,\ z$ ヲ正ノ鋭角トシ

$\cos x=\frac{a}{b+c},\quad \cos y=\frac{b}{c+a},\quad \cos z=\frac{c}{a+b}$ トスレバ

$\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2}\tan\frac{z}{2}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** $\tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [$\frac{x}{2}$ ハ正ノ鋭角ナル故正根ヲ採ル]

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}}}=\sqrt{\frac{b+c-a}{a+b+c}}=\sqrt{\frac{s-a}{s}}.$$

同樣ニ $\tan\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{s-b}{s}},\quad \tan\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{s-c}{s}}.$

∴ $\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2}\tan\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}}.$

又 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

$$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}}.$$

∴ 所題ノ如シ.

---

## 〔51〕 三角形ノ面積.

△ABC ノ面積 S ニ關シテ次ギノ公式アリ.

$$S=\frac{1}{2}bc\,\sin A=\frac{1}{2}ca\,\sin B=\frac{1}{2}ab\,\sin C$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

## 問　　題

**312.** $S=\dfrac{a^2\{\cos(B-C)+\cos A\}}{4\sin A}$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊$=\dfrac{a^2\{\cos(B-C)-\cos(B+C)\}}{4\sin A}$

[$\because$ $\cos A=\cos(180^\circ-B-C)=-\cos(B+C)$]

$=\dfrac{a^2 2\sin B\sin C}{4\sin A}=\dfrac{a^2 b\sin C}{2a}$　$\left[\because\ \dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{b}{a}\right]$

$=\dfrac{1}{2}ab\sin C=S.$

**313.** $S=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4\tan\dfrac{A+B-C}{2}}$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊$=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4\tan\dfrac{A+B+C-2C}{2}}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4\tan(90^\circ-C)}$　[$\because$ $A+B+C=180^\circ$]

$=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4\cot C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4\cos C}\sin C$　$\left[\because\ \cot C=\dfrac{\cos C}{\sin C}\right]$

$=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4.\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}\sin C=\dfrac{1}{2}ab\sin C=S.$

**314.** $S=\dfrac{a^2-b^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊$=\dfrac{a^2-b^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A\sin B\sin(A+B)}{\sin(A-B)\sin(A+B)}$



[分母子ニ $\sin(A+B)$ ヲ乘ジタルナリ]

$=\dfrac{a^2-b^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A\sin B\sin C}{\sin^2A-\sin^2B}$　[第 32 條ノ (1) ニ由ル]

$=\dfrac{a^2-b^2}{2}\cdot\dfrac{ab\sin C}{a^2-b^2}$　[問 272 ノ注意ニ由ル]

$=\dfrac{1}{2}ab\sin C=S.$

**315.** $S=s^2\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊$=s^2\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=S.$

**316.** $S=\left(\dfrac{a^2}{\sin A}+\dfrac{b^2}{\sin B}+\dfrac{c^2}{\sin C}\right)\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ ヲ證セヨ.

【解】 右邊$=\left(\dfrac{a^2}{\sin A}+b\dfrac{a}{\sin A}+c\dfrac{a}{\sin A}\right)\sin\dfrac{A}{2}\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

[sine 比例, 及ビ公式ニ依ル.]

$=\dfrac{a}{2\cos\dfrac{A}{2}}\cdot 2s\cdot\dfrac{s-a}{a}\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$　$\left[\because\ \sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2},\ a+b+c=2s.\right]$

$=\dfrac{s(s-a)}{\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}}\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=S.$

---

## 〔52〕 三角形ノ外半徑, 内半徑, 傍半徑.

$\triangle ABC$ ノ外接圓ノ半徑ヲ R; 内切圓ノ半徑ヲ $r$; $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ ノ内ニアル傍切圓ノ半徑ヲ夫々 $r_1$, $r_2$, $r_3$ トスレバ

此等ニ關シテ次ギノ公式アリ:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.$$

$$r=\frac{S}{s},\quad r_1=\frac{S}{s-a},\quad r_2=\frac{S}{s-b},\quad r_3=\frac{S}{s-c}.$$

## 問　　題

**317.** $R=\dfrac{abc}{4S}$ ヲ證セヨ.

**【解】** $R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{abc}{2bc\sin A}=\dfrac{abc}{4\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)}=\dfrac{abc}{4S}.$

**318.** $r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ ヲ證セヨ.

**【解】** $r=\dfrac{S}{s}=\dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$ =右邊.

**319.** $\sqrt{rr_1r_2r_3}=S$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊$=\sqrt{\dfrac{S}{s}\cdot\dfrac{S}{s-a}\cdot\dfrac{S}{s-b}\cdot\dfrac{S}{s-c}}=\dfrac{S^2}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}=\dfrac{S^2}{S}=S.$

**320.** $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r}$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊$=\dfrac{s-a}{S}+\dfrac{s-b}{S}+\dfrac{s-c}{S}=\dfrac{3s-(a+b+c)}{S}=\dfrac{3s-2s}{S}=\dfrac{s}{S}=\dfrac{1}{r}.$

**321.** $r_1+r_2+r_3-r=4R$ ヲ證セヨ.

**【解】** 左邊$=\dfrac{S}{s-a}+\dfrac{S}{s-b}+\dfrac{S}{s-c}-\dfrac{S}{s}=S\dfrac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)}+S\dfrac{c}{s(s-c)}$



$=cS\left\{\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}+\dfrac{1}{s(s-c)}\right\}$　　[∵ $2s=a+b+c$]

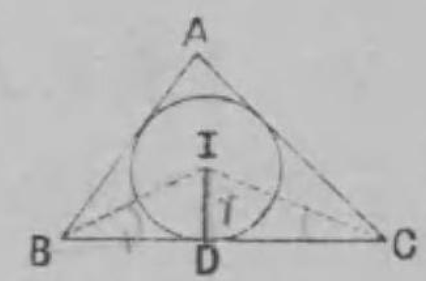
$=cS\dfrac{2s^2-(a+b+c)s+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=cS\dfrac{ab}{S^2}$

[∵ $2s=a+b+c,\ S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.]

$=4\dfrac{abc}{4S}=4R.$　　[問 317 ニ由ル]

**322.** $r=a\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\sec\dfrac{A}{2}=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ ヲ證セヨ.

**【解】** △ABC ノ内心ヲ I, 内切圓ノ半徑 $r$ ヲ ID トセヨ.




IB, IC ヲ引クトキハ $I\hat{B}D=\dfrac{B}{2},\ I\hat{C}D=\dfrac{C}{2}.$

且ツ ID⊥BC. ∴ $BD=DI\cot IBD=r\cot\dfrac{B}{2}.$

同様ニ $CD=r\cot\dfrac{C}{2}.$

∴ $a=BC=BD+CD=r\left(\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\right)=r\left(\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right)$

$=r\dfrac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=r\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$　　$\left[∵\ \dfrac{B+C}{2}+\dfrac{A}{2}=90°\right]$

∴ $r=a\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\sec\dfrac{A}{2}.$　　$\left[∵\ \dfrac{1}{\cos\frac{A}{2}}=\sec\dfrac{A}{2}\right]$

又 $r=4\dfrac{a}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=4\dfrac{a}{2\sin A}\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

$=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}.$

**323.** 三角形ノ一ツノ傍切圓ノ直徑ガ其周ニ等シキトキハ其三角形ハ直ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $\triangle ABC$ ニ於テ $\hat{A}$ ノ内ニアル傍切圓ノ直徑ヲ周ニ等シトスレバ

$$2r_1=2s,\ 即チ\ \frac{S}{s-a}=s,\ 即チ\ \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}=s;$$

簡約シテ平方ニスレバ $(s-b)(s-c)=s(s-a)$, 即チ $bc=s(b+c-a)$; 二倍シテ簡約スレバ $b^2+c^2=a^2$, 即チ二邊ノ平方ノ和ガ第三邊ノ平方ニ等シ.

$\therefore$ $\triangle ABC$ ハ $A=90°$ ナルモノナリ.

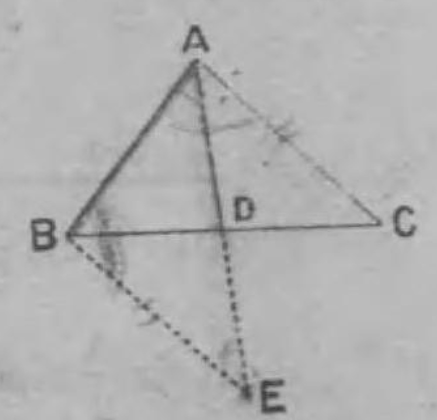
---

## 〔53〕 三角形ノ中線.

三角形ノ中線ニ關スル問題ヲ解スルニハ中線及ビ重心ニ關スル幾何學上ノ性質ヲ基トシ之ニ三角法ノ諸公式ヲ適宜活用スレバ可ナリ. 次ギニ擧ゲタル問題ノ答解ハ其概要ヲ示スモノナリ.

### 問　題

**324.** $\triangle ABC$ ニ於テ A ヨリノ中線ヲ AD トスレバ $AD=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$ ナルコトヲ證セヨ.




【解】 AD ヲ之ト等長ニ E マデ延バシ BE ヲ引クトキハ幾何學ノ定理ニ由リ

$$BE=AC,\quad A\hat{B}E=180°-B\hat{A}C.$$

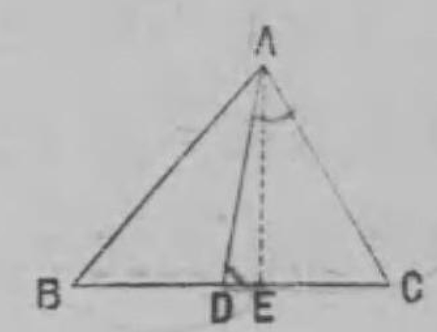
$\triangle ABE$ ニ於テ $\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2-2AB.\,BE\cos ABE.$



即チ $(2AD)^2=c^2+b^2-2cb\cos(180°-A)=b^2+c^2+2bc\cos A.$

$$\therefore\ AD=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}.$$

**325.** $\triangle ABC$ ニ於テ A ヨリ引ケル中線ヲ AD トスレバ $\cot ADC=\frac{1}{2}(\cot B-\cot C)$ ナルコトヲ證セヨ.




【解】 AE ヲ BC ニ垂線ニ引クトキハ

$$\cot ADC=\frac{DE}{EA}=\frac{\frac{1}{2}(BE-CE)}{EA}$$

$$\left[\because\ BE=\frac{BC}{2}+DE,\ CE=\frac{BC}{2}-DE;\quad \therefore\ BE-CE=2DE\right].$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{BE}{EA}-\frac{CE}{EA}\right)=\frac{1}{2}(\cot B-\cot C).$$

**326.** 同上, $D\hat{A}C=\phi$ トスレバ

$$\tan\left(\frac{A}{2}-\phi\right)=\frac{b-c}{b+c}\tan\frac{A}{2}$$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 $\triangle ACD$ ニ於テ sine 比例ヲ作レバ $\frac{\sin C}{\sin\phi}=\frac{AD}{DC}.$

$\triangle ABD$ ニ於テ sine 比例ヲ作レバ $\frac{\sin B}{\sin BAD}=\frac{\sin B}{\sin(A-\phi)}=\frac{AD}{BD}.$

然ルニ $BD=DC$ ナルヲ以テ $\frac{AD}{DC}=\frac{AD}{BD}.$

$\therefore\ \frac{\sin C}{\sin\phi}=\frac{\sin B}{\sin(A-\phi)},\quad \therefore\ \frac{\sin(A-\phi)}{\sin\phi}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c}.$ [sine 比例ニ由ル].

之ニ合除ノ理ヲ用フレバ

$$\frac{\sin(A-\phi)-\sin\phi}{\sin(A-\phi)+\sin\phi}=\frac{b-c}{b+c}\quad 卽チ\quad \frac{2\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\phi\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{A}{2}-\phi\right)}=\frac{b-c}{b+c}.$$

卽チ $\tan\left(\frac{A}{2}-\phi\right)=\frac{b-c}{b+c}\tan\frac{A}{2}.$

## 〔54〕 三角形ノ角ノ二等分線.

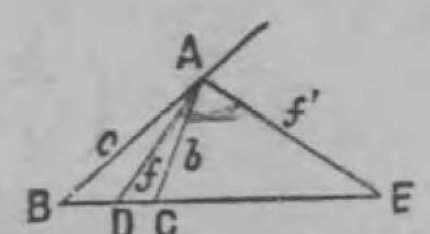
三角形ノ角ノ二等分線(或ハ一般ニ角頂ヨリ對邊或ハ其延長部ニ引キタル直線)ノ長サニ關スル問題ニハ第51條ノ第一公式ヲ活用スベシ. 次ギノ問題ノ答解ヲ視テ其梗概ヲ會得セヨ.

### 問　　題

**327.** △ABC ニ於テ $\hat{BAC}$ 及ビ其外角ノ二等分線ノ長サヲ夫々 $f, f'$ トスレバ次ギノ關係アルコトヲ證セヨ:

$$f=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2},$$

$$f'=\frac{2bc}{c-b}\sin\frac{A}{2}.$$




**【解】** △ABD+△ACD=△ABC ナルヲ以テ第51條ノ公式ニ由リ

$$\frac{1}{2}cf\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bf\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

∴ $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ ナルコトヲ注意シ兩邊ヲ $f$ ノ係數ニテ除スレバ

$$f=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

又 △ABE−△ACE=△ABC ナルヲ以テ上ト同様ニ



$$\frac{1}{2}cf'\sin BAE-\frac{1}{2}bf'\sin CAE=\frac{1}{2}bc\sin A\text{..........}(\alpha).$$

然ルニ $\sin BAE=\sin(DAE+BAD)=\sin\left(90^\circ+\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}.$

$\sin CAE=\sin(DAE-DAC)=\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}.$

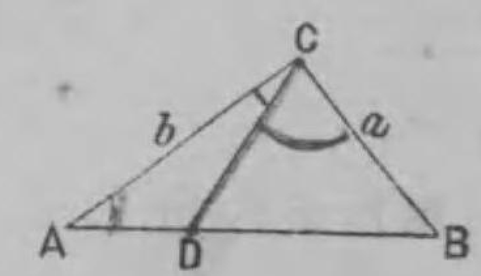
∴ 此等ヲ (α) ニ代入シ兩邊ヲ $f'$ ノ係數ニテ除スレバ上ト同様ニ

$$f'=\frac{2bc}{c-b}\sin\frac{A}{2}.$$

**328.** 直△ABC ノ斜邊 AB ヲ D ニテ分チ AD : BD$=a:b$ ナラシムレバ

$\tan ACD=\frac{a^2}{b^2}$,　$CD=\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{a+b}$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** △ACD ニ於テ sine 比例ヲ作レバ




$$\frac{\sin ACD}{\sin A}=\frac{AD}{CD}\text{.........}(\alpha).$$

△BCD ニ於テ sine 比例ヲ作レバ

$$\frac{\sin(90^\circ-ACD)}{\sin B}=\frac{BD}{CD}\text{.........}(\beta).$$

(α) ヲ (β) ニテ除スレバ $\sin(90^\circ-ACD)=\cos ACD$,

$\frac{\sin ACD}{\cos ACD}=\tan ACD,\ \frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a},\ \frac{AD}{BD}=\frac{a}{b}$ ナルヲ以テ $\tan ACD=\frac{a^2}{b^2}.$

又 △ACD+△BCD=△ABC ナルヲ以テ第51條ノ公式ニ由リ

$$\frac{1}{2}b.\ CD\sin ACD+\frac{1}{2}a.\ CD\sin(90^\circ-ACD)=\frac{1}{2}ab.$$

∴ $CD=\frac{ab}{b\sin ACD+a\cos ACD}=\frac{ab\sec ACD}{b\tan ACD+a}$

[分母子ヲ cosACD ニテ除シタルナリ]

$=\frac{ab\sqrt{1+\tan^2 ACD}}{b\tan ACD+a}.$ [∵ $0^\circ<ACD<90^\circ$. ∴ secACD ハ正]

之ニ上ニ得タル $\tan\mathrm{ACD}$ ノ値ヲ代入スレバ $\mathrm{CD}=\dfrac{\sqrt{a^4+b^4}}{a+b}$.

---

## 〔55〕 三角形ノ垂足三角形.

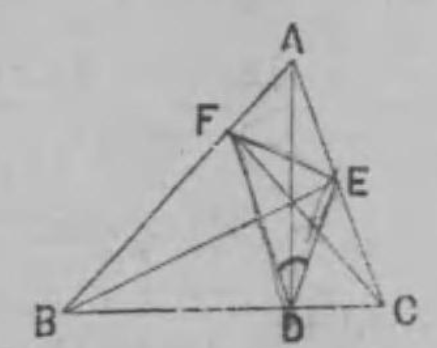
三角形ノ垂足三角形ニ關スル問題ヲ解クニハ垂足三角形ニ關スル幾何學上ノ性質ヲ基トシ之ニ三角法ノ公式ヲ活用スベシ.

### 問　　題

**329.** 鋭 △ABC ノ垂足三角形ノ各邊ハ $a\cos\mathrm{A}$, $b\cos\mathrm{B}$, $c\cos\mathrm{C}$ ニシテ, 其面積ハ $2\mathrm{S}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 垂足三角形ヲ DEF ト名ヅクレバ, △AEF ニ就キテ

$$\overline{\mathrm{EF}}^2=\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{AF}}^2-2\mathrm{AE}.\mathrm{AF}\cos\mathrm{A}.$$




然ルニ △ABC ニ就キテ $\mathrm{BE}\perp\mathrm{CA}$, $\mathrm{CF}\perp\mathrm{AB}$ ナルヲ以テ $\mathrm{AE}=c\cos\mathrm{A}$, $\mathrm{AF}=b\cos\mathrm{A}$.

$$\therefore\ \overline{\mathrm{EF}}^2=(c\cos\mathrm{A})^2+(b\cos\mathrm{A})^2-2c\cos\mathrm{A}.\,b\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{A}$$
$$=(c^2+b^2-2bc\cos\mathrm{A})\cos^2\mathrm{A}=a^2\cos^2\mathrm{A}.$$

$\therefore\ \mathrm{EF}=a\cos\mathrm{A}.$

同様ニ $\mathrm{FD}=b\cos\mathrm{B}$, $\mathrm{DE}=c\cos\mathrm{C}$.

又 $\mathrm{A\hat{E}B}=\mathrm{A\hat{D}B}=90^\circ$ ナルヲ以テ四邊形 ABDE ハ AB ヲ直徑トセル圓ニ內接ス. $\therefore\ \mathrm{C\hat{D}E}=\mathrm{B\hat{A}C}$.

同様ニ $\mathrm{B\hat{D}F}=\mathrm{B\hat{A}C}$, $\therefore\ \mathrm{E\hat{D}F}=180^\circ-2\mathrm{A}$.



然ルニ $\triangle\mathrm{DEF}=\dfrac{1}{2}\mathrm{FD}.\mathrm{DE}\sin\mathrm{EDF}$

$$=\frac{1}{2}.\,b\cos\mathrm{B}.\,c\cos\mathrm{C}\sin(180^\circ-2\mathrm{A})$$
$$=\frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}.\,2\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}\qquad[\because\ \sin(180^\circ-2\mathrm{A})=\sin2\mathrm{A}=2\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{A}]$$
$$=2\mathrm{S}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}.$$

**330.** 鋭 △ABC ノ垂足三角形ノ內切圓ノ半徑ハ $2\mathrm{R}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 前問ノ圖ニ於テ △DEF ノ內切圓ノ半徑ヲ $p$ トスレバ第 52 條ノ公式ニ由リ

$$p=\frac{\triangle\mathrm{DEF}}{\frac{1}{2}(\mathrm{DE}+\mathrm{EF}+\mathrm{FD})}=\frac{2\mathrm{S}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}}{\frac{1}{2}(a\cos\mathrm{A}+b\cos\mathrm{B}+c\cos\mathrm{C})}\qquad[\text{前問ニ由ル}]$$
$$=\frac{ab\sin\mathrm{C}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}}{\frac{1}{2}(a\cos\mathrm{A}+b\cos\mathrm{B}+c\cos\mathrm{C})}\qquad[\text{第 51 條ニ由ル}]$$
$$=\frac{a\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}}{\frac{1}{2}(\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}\cos\mathrm{B}+\sin\mathrm{C}\cos\mathrm{C})}\qquad[\text{問 272 ノ注意ニ由ル}].$$

然ルニ $\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{A}+\sin\mathrm{B}\cos\mathrm{B}+\sin\mathrm{C}\cos\mathrm{C}=\dfrac{1}{2}(\sin2\mathrm{A}+\sin2\mathrm{B}+\sin2\mathrm{C})$

$$=\frac{1}{2}\{2\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})+2\sin\mathrm{C}\cos\mathrm{C}\}$$
$$=\sin\mathrm{C}\{\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B})\}$$
$$[\because\ \sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\sin(180^\circ-\mathrm{C})=\sin\mathrm{C};\ \cos\mathrm{C}=\cos(180^\circ-\mathrm{A}-\mathrm{B})=-\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B})]$$
$$=2\sin\mathrm{C}\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}.$$

$$\therefore\ p=\frac{a\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}}{\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}}=2\mathrm{R}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}.\qquad[\text{第 52 條ニ由ル}]$$

---

## 〔56〕 四邊形ニ關スル問題.

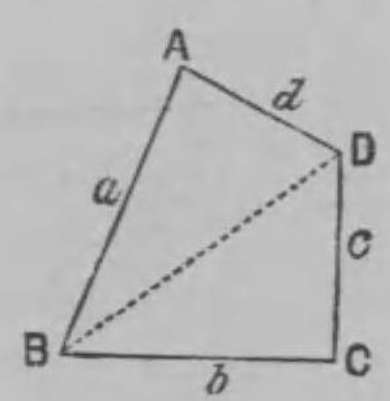
四邊形ノ問題ヲ解スルニハ各角ノ和ノ 360° ナルコトト一對角線ヲ引ケバ二ツノ三角形トナルコトトニ注意シ三角法ノ公式ヲ適宜ニ活用スレバ可ナリ.

### 問　　題

**331.** 圓ニ内接セラルベキ四邊形 ABCD ノ各邊ヲ $a, b, c, d$ トシ, 周ノ半ヲ $s$ トシ, 面積ヲ S トスレバ

$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ ナルコトヲ證セヨ.

又此四邊形ニ内切圓ヲモ作リ得レバ $S^2=abcd$ ナルコトヲ證セヨ.




**【解】** 對角線 BD ヲ引クトキハ

$\mathrm{S}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}$

$=\frac{1}{2}ad\,sin\mathrm{A}+\frac{1}{2}bc\,sin\mathrm{C}$ ［第 51 條ニ由ル］

$=\frac{1}{2}sin\mathrm{A}(ad+bc).$

［$\because$ $sin\mathrm{C}=sin(180°-\mathrm{A})=sin\mathrm{A}$］

$\therefore$ $4\mathrm{S}=2sin\mathrm{A}(ad+bc)$............($\alpha$)

又 △ABD, △BCD ニ就キテ第 49 條ノ公式ヲ用フレバ

$\overline{\mathrm{BD}}^2=a^2+d^2-2ad\,cos\mathrm{A}=b^2+c^2-2bc\,cos\mathrm{C}=b^2+c^2+2bc\,cos\mathrm{A}.$

［$\because$ $cos\mathrm{C}=cos(180°-\mathrm{A})=-cos\mathrm{A}$］

$\therefore$ $a^2+d^2-b^2-c^2=2cos\mathrm{A}(ad+bc)$............($\beta$).

($\alpha$), ($\beta$) ノ平方ノ和ヲ作レバ

$16\mathrm{S}^2+(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=4(ad+bc)^2,$

卽チ $16\mathrm{S}^2=4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$



$=\{(a+d)^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-(a-d)^2\}$

$=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)$

$=2(s-c).2(s-b).2(s-d).2(s-a).$

$\therefore$ $\mathrm{S}^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$

又 ABCD ニ内切圓ヲ作リ得レバ $a+c=b+d=s.$

$\therefore$ $s-a=c,\ s-b=d,\ s-c=a,\ s-d=b.$

$\therefore$ $\mathrm{S}^2=abcd.$

**332*.** ABCD ガ圓ニ内接セラルレバ其圓ノ半徑ハ

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 前問ノ圖ニ於テ

$\overline{\mathrm{BD}}^2=a^2+d^2-2ad\,cos\mathrm{A}=b^2+c^2+2bc\,cos\mathrm{A}.$

$\therefore$ $cos\mathrm{A}=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}.$

$\therefore$ $\mathrm{BD}=\left(a^2+d^2-ad\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{ad+bc}\right)^{\frac{1}{2}}=\left\{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\right\}^{\frac{1}{2}}.$

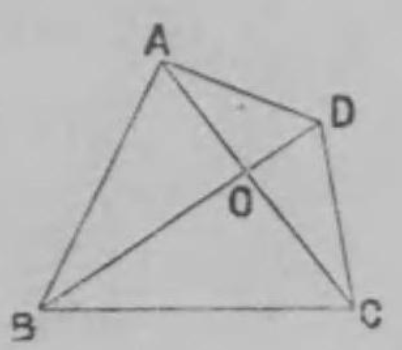
又 $sin\mathrm{A}=(1-cos^2\mathrm{A})^{\frac{1}{2}}$ ［$\because$ $0°<\mathrm{A}<180°$, $\therefore$ $sin\mathrm{A}$ ハ正］

$=\left[1-\left\{\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\}^{\frac{1}{2}}}{ad+bc}.$

$\therefore$ $\mathrm{R}=\frac{\mathrm{BD}}{2sin\mathrm{A}}=\frac{1}{4}\left\{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$

**333.** 四邊形ノ二ツノ對角線ヲ $x, y$ トシ其交角ヲ $\phi$ トスレバ面積ハ $\frac{1}{2}xy\,sin\phi$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** 四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ,




$AC=x,\ BD=y,\ A\hat{O}B=\phi$ トス. 又面積ヲ S トスレバ

$$S=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCD+\triangle ODA$$

$$=\frac{1}{2}OA.\ OB\,\sin\phi+\frac{1}{2}OB.\ OC\sin(180^\circ-\phi)$$

$$+\frac{1}{2}OC.\ OD\sin\phi+\frac{1}{2}OD.\ OA\sin(180^\circ-\phi)$$

$$=\frac{1}{2}\{OA(OB+OD)+OC(OB+OD)\}\sin\phi$$

$$=\frac{1}{2}(OA+OC)(OB+OD)\sin\phi=\frac{1}{2}AC.BD\sin\phi=\frac{1}{2}xy\,\sin\phi.$$

**334.** 四邊形 ABCD ノ各邊ヲ $a, b, c, d$ トシ, 二ツノ對角線ヲ $x, y$ トシ, 其交角ヲ $\phi$ トスレバ面積ハ $\frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)\tan\phi$ 或ハ $\frac{1}{4}\{4x^2y^2-(b^2+d^2-a^2-c^2)^2\}^{\frac{1}{2}}$ ナルコトヲ證セヨ.

【解】 前問ノ圖ニ於テ $AB=a,\ BC=b,\ CD=c,\ DA=d$ トスレバ

$\triangle OBC$ ニ就キテ $b^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-2OB.OC\cos(180^\circ-\phi)$

$$=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+2OB.OC\cos\phi,$$

$\triangle ODA$ ニ就キテ $d^2=\overline{OD}^2+\overline{OA}^2-2OD.OA\cos(180^\circ-\phi)$

$$=\overline{OD}^2+\overline{OA}^2+2OD.OA\cos\phi,$$

$\triangle OAB$ ニ就キテ $a^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2OA.OB\cos\phi,$

$\triangle OCD$ ニ就キテ $c^2=\overline{OC}^2+\overline{OD}^2-2OC.OD\cos\phi.$

$\therefore\ b^2+d^2-a^2-c^2=2(OA+OC)(OB+CD)\cos\phi=2xy\cos\phi\ldots\ldots(\alpha)$

双方ニ $\frac{1}{4}\tan\phi$ ヲ乘ズレバ $\frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)\tan\phi=\frac{1}{2}xy\,\sin\phi=S.$ [前問]



又前問ニ由リ $S=\frac{1}{2}xy\,\sin\phi$ 卽チ $4S=2xy\,\sin\phi\ldots\ldots\ldots(\beta).$

$(\alpha), (\beta)$ ノ平方ノ和ヲ作レバ

$$16S^2+(b^2+d^2-a^2-c^2)^2=4x^2y^2,$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{4}\{4x^2y^2-(b^2+d^2-a^2-c^2)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

---

# 三角形ノ解法

## 〔57〕 三角形ノ解法.

三角形解法ノ基本ノ場合ハ次ギノ四ツナリ:

第一. 一邊ト二角トヲ知リテ三角形ヲ解スルコト,

第二. 二邊ト夾角トヲ知リテ三角形ヲ解スルコト,

第三. 二邊ト一對角トヲ知リテ三角形ヲ解スルコト,

第四. 三邊ヲ知リテ三角形ヲ解スルコト.

次ギニ擧ゲタル問題ノ答解ヲ視テ此等ノ各場合ニ於ケル解法ヲ會得スベシ.

### 問題

**335.** $\triangle ABC$ ニ於テ $a=123,\ B=29^\circ17',\ C=135^\circ$ ナルトキ $c$ ヲ求メヨ. 但シ $\log 123=2{\cdot}08991,$ $\log 3211=3{\cdot}50664,$ 1 ノ表差 $={\cdot}00013,$ $\log 2={\cdot}30103,$ $L\sin 15^\circ 43'=9{\cdot}43278.$

**【解】** $A=180°-(29°17'+135°)=15°43'$.

*sine* 比例ニ由リ $\dfrac{c}{a}=\dfrac{sinC}{sinA}$, 即チ $c=\dfrac{123\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{sin15°43'}$.

$\therefore\ log\, c=log123-\dfrac{1}{2}log2-Lsin15°43'\underline{+10}=2{\cdot}50661.$

$50664-50661=3.$　　$1:x=13:3,\quad x={\cdot}2;\quad 3211-{\cdot}2=3210{\cdot}8.$

$\therefore\ c=321{\cdot}08$............(答)

**336.** $\triangle ABC$ ニ於テ $tanB=1$, $tanC=2$, $b=100$ ナルトキハ $a=60\sqrt{5}$ ナルコトヲ證セヨ.

**【解】** $tanA=-tan(B+C)$　　　[$\because$ $A+B+C=180°$]

$$=-\frac{tanB+tanC}{1-tanBtanC}=-\frac{1+2}{1-1\times2}=3.$$

$$sinA=\frac{tanA}{\sqrt{1+tan^2A}}$$

[$\because$ $0°<A<180°$ ナル故 $sinA>0$. $\therefore$ 正根ヲ採ル.

$$=\frac{3}{\sqrt{1+9}}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

同様ニ　$sinB=\dfrac{1}{\sqrt{1+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

正弦比例ニ由リ　$a=\dfrac{b\,sinA}{sinB}=\dfrac{100\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=60\sqrt{5}$.

**337.** $\triangle ABC$ ニ於テ $a=522$, $b=320$, $C=34°22'$ ナルトキ他ノ二角ヲ求メヨ.

但シ $log\,tan72°49'=0{\cdot}50971$, $log\,1{\cdot}01=0{\cdot}00432$, $log\,cot52°11'44''=\bar{1}{\cdot}88975$, $log4{\cdot}21=0{\cdot}62428$.



本問ヲ解スルニハ次ギノ公式ヲ用フルヲ要ス:

$$tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}cot\frac{C}{2}.$$

此公式ノ證ハ次ギノ如シ:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{sinA-sinB}{sinA+sinB}\qquad[問\ 272\ ノ注意]$$

$$=\frac{2cos\dfrac{A+B}{2}sin\dfrac{A-B}{2}}{2sin\dfrac{A+B}{2}cos\dfrac{A-B}{2}}=cot\frac{A+B}{2}tan\frac{A-B}{2}$$

$$=tan\frac{C}{2}tan\frac{A-B}{2}.\qquad\left[\because\ cot\frac{A+B}{2}=cot\left(90°-\frac{C}{2}\right)=tan\frac{C}{2}\right]$$

$$\therefore\ tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}cot\frac{C}{2}.$$

$\therefore$ 本問ノ答解ハ次ギノ如シ:

**【解】** 公式 $tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}cot\dfrac{C}{2}$ ヨリ

$$tan\frac{A-B}{2}=\frac{522-320}{522+320}cot\,17°11'=\frac{101}{421}cot17°11'.$$

$$\therefore\ log\,tan\frac{A-B}{2}=log\,101-log\,421+\underline{log\,cot17°11'}$$

$$=2{\cdot}00432-2{\cdot}62428+0{\cdot}50971$$

[$\because$ $log\,cot17°11'=log\,tan72°49'$]

$$=\bar{1}{\cdot}88975=log\,cot52°11'44''$$

$$=log\,tan37°48'16''.$$

$$\therefore\ \frac{A-B}{2}=37°48'16''.$$

然ルニ　$\dfrac{A+B}{2}=90°-\dfrac{C}{2}=72°49'$.

最後ノ二ツノ等式ノ和, 差ヲ作レバ

$$A=110°37'16'',\quad B=35°44''.$$

**338.** $\triangle ABC$ ニ於テ $tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}$ ナル關係アラバ C ハ直角ナルベキコトヲ證セヨ.

【解】 公式 $tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}cot\dfrac{C}{2}$ ト與ヘラレタル關係トヲ比較スレバ

$cot\dfrac{C}{2}=1.$ ［但シ $tan\dfrac{A-B}{2}\neq 0$ 卽チ $A\neq B$ トス］

$\therefore\ \dfrac{C}{2}=45°,\quad \therefore\ C=90°.$

**339.** $\triangle ABC$ ニ於テ $b=32,\ c=40,\ B=52°32'15''$ ナルトキ A, C ノ値如何. 但シ $log2=\cdot3010300$; $Lsin52°32'=9\cdot8996604$, $1'$ ノ表差$=968$; $Lsin82°50'=9\cdot9965937$, $1'$ ノ表差$=159$ トス.

【解】 sine 比例ニ由リ $\dfrac{sinC}{sinB}=\dfrac{c}{b}$,

卽チ $LsinC=log40-log32+Lsin52°32'15''$

$=1+2log2-5log2+Lsin52°32'15''$

$=1-3log2+Lsin52°32'15''.$

然ルニ $60:15=968:x,\qquad \therefore\ x=242.$

$\therefore\ Lsin52°32'15''=9\cdot8996604+\cdot0000242=9\cdot8996846.$

$\therefore\ LsinC=1-\cdot9030900+9\cdot8996846=9\cdot9965946.$

然ルニ $9965946-9965937=9,$

$60:y=159:9,\qquad \therefore\ y=3.$

$\therefore\ C=82°50'3''.$

$\therefore\ A=180°-(52°32'15''+82°50'3'')=44°37'42''.$

然ルニ B ハ鋭角且ツ $b<c$ ナルヲ以テ C ハ上ニ得タル値ノ外其補角トナルコトアリ.

$\therefore\ C=180°-82°50'3''=97°9'57''.$



$\therefore\ A=180°-(52°32'15''+97°9'57'')=30°17'48''.$

（或ハ $82°50'3''-52°32'15''$ ヲ用フルモ可ナリ.）

（答） $A=44°37'42''$, $C=82°50'3''$;

或ハ $A=30°17'48''$, $C=97°9'57''$.

**340.** 次ギノ各場合ニ於テ $\triangle ABC$ ハ兩意（前問ノ如ク二種ノ結果ヲ得ルコトナリ）ナルカ:

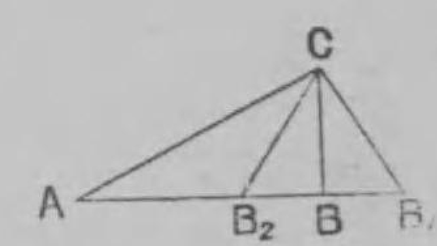
(i) $A=30°,\ b=8,\ a=4$;

(ii) $A=30°,\ b=8,\ a=6$;

(iii) $A=30°,\ b=8,\ a=3$.

【解】 C ヨリ對邊ニ引ケル垂線ノ長サヲ $h$ トスレバ

$h=b\,sinA$




$\therefore$ (i) ニ於テハ $h=8\times\dfrac{1}{2}=4=a.$

$\therefore$ $a$ ハ圖ニ於ケル CB ト一致シ三角形ハ唯一種トナル.

又 (ii) ニ於テハ $h<a<b$, 且ツ $A<90°$.

$\therefore$ 此場合ニ於テハ $a$ ハ圖ニ於ケル $CB_1$, $CB_2$ ノ位置ヲ取ルヲ以テ三角形ハ二種トナル.

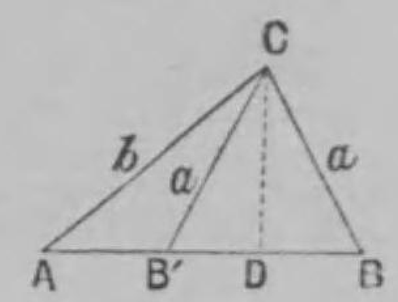
又 (iii) ニ於テハ $h>a$ トナルヲ以テ, 此場合ニハ三角形ヲ作ルコトヲ得ズ.

**341.** $a,\ b,\ A$ ヲ既知トセル兩意ノ場合ニ於テ次ギノ關係式ヲ證セヨ:

(i) $\dfrac{sinC}{c}=\dfrac{sinC'}{c'}$, (ii) $\dfrac{sinC}{sinB}+\dfrac{sinC'}{sinB'}=2cosA.$

但シ $C',\ c'$ ハ夫々 $C,\ c$ ノ第二ノ値ナリトス.

【解】（i）圖ニ於テ




$\hat{ACB}=C$, $\hat{ACB'}=C'$, $AB=c$, $AB'=c'$ トス.

$\triangle ABC$ ニ於テ *sine* 比例ニ由リ

$$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin A}{a};$$

$\triangle AB'C$ ニ於テ *sine* 比例ニ由リ $\dfrac{\sin C'}{c'}=\dfrac{\sin A}{a}$　　$\therefore\ \dfrac{\sin C}{c}=\dfrac{\sin C'}{c'}$.

(ii) $\triangle ABC$ ニ於テ $\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{c}{b}$;　　$\triangle AB'C$ ニ於テ $\dfrac{\sin C'}{\sin B'}=\dfrac{c'}{b}$.

$$\therefore\ \frac{\sin C}{\sin B}+\frac{\sin C'}{\sin B'}=\frac{c}{b}+\frac{c'}{b}=\frac{c+c'}{b}.$$

CD ヲ AB ニ垂線ニ引クトキハ $CB=CB'$ ナルヲ以テ $B'D=DB$.

$$\therefore\ \frac{\sin C}{\sin B}+\frac{\sin C'}{\sin B'}=\frac{(AD+DB)+(AD-DB)}{b}=2\frac{AD}{b}=2\cos A.$$

**342.** $\triangle ABC$ ニ於テ $a=7$, $b=20$, $c=25$ ナルトキ A ヲ求メヨ.

但シ $L\tan 6°17'=9.04181$, $1'$ ノ表差$=116$;

$\log 3=.47712$, $\log 13=1.11394$, $\log 19=1.27875$ トス.

【解】 公式ニ由リ $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

然ルニ　$s=\dfrac{1}{2}(7+20+25)=26$,　$s-a=26-7=19$,

$s-b=26-20=6$,　$s-c=26-25=1$.

$$\therefore\ \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{6\times 1}{26\times 19}}=\sqrt{\frac{3}{13\times 19}}.$$

$$\therefore\ L\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\log 3-\log 13-\log 19)+10=9.04222.$$

$9.04222-9.04181=.00041$.　　$\therefore\ 60:x=116:41$,　$x=21$.

$\therefore\ \dfrac{A}{2}=6°17'21''$,　　$\therefore\ A=12°34'42''$........（答）



**343.** 一邊，對角及ビ他ノ二邊ノ和ヲ知リテ三角形ヲ解セヨ.

【解】 三角形ヲ ABC トシ $a$, A, $b+c$ ヲ知レリトセヨ.

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}\qquad\text{[問 272 ノ注意]}$$

$$=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\left[\because\ \sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\right]$$

$$\therefore\ L\cos\frac{B-C}{2}=L\sin\frac{A}{2}+\log(b+c)-\log a.$$

此式ヨリ $\dfrac{B-C}{2}$ ノ値ヲ求メ得.

然ルニ $\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{180°-A}{2}$ ナルヲ以テ $\dfrac{B+C}{2}$ ノ値モ知ルコトヲ得.

$\therefore\ \dfrac{B-C}{2}$, $\dfrac{B+C}{2}$ ノ値ノ和及ビ差ヲ求ムレバ夫々 B, C ノ値ヲ知ルコトヲ得.

又 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$ ナルヲ以テ $\log b=\log a+L\sin B-L\sin A$.

此式ヨリ $b$ ノ値ヲ求ムルコトヲ得. 而シテ此値ヲ $b+c$ ノ値ヨリ減ズレバ $c$ ノ値ヲ求ムルコトヲ得.

**344.** 一邊，對角及ビ他ノ二邊ノ差ヲ知リテ三角形ヲ解セヨ.

【解】 三角形ヲ ABC トシ $a$, A, $b-c$ ヲ知レリトセヨ.

$$\frac{b-c}{a}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A}.\qquad\text{[問 272 ノ注意]}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

$$\left[\because\ \cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\right]$$

$\therefore\ \mathrm{L}\sin\frac{B-C}{2}=\mathrm{L}\cos\frac{A}{2}+\log(b-c)-\log a.$

此式ヨリ $\frac{B-C}{2}$(鋭角)ノ値ヲ求メ得.

然ルニ $\frac{B+C}{2}=\frac{180^\circ-A}{2}$ ナルヲ以テ $\frac{B+C}{2}$ ノ値モ知ルコトヲ得.

$\therefore$ $\frac{B+C}{2}, \frac{B-C}{2}$ ノ値ノ和及ビ差ヲ求ムレバ夫々 B, C ノ値ヲ知ルコトヲ得.

又 $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$ ヨリ $\log b=\log a+\mathrm{L}\sin B-\mathrm{L}\sin A.$

之ヨリ $b$ ヲ求ムルコトヲ得. 而シテ此値ト $b-c$ ノ値トノ差ヲ求ムレバ $c$ ノ値ヲ定ムルコトヲ得.

**345.** 二角及ビ對邊ノ和ヲ知リテ三角形ヲ解セヨ.

**【解】** 三角形ヲ ABC トシ A, B, $a+b$ ヲ知レリトセヨ.

公式 $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$ ヨリ下式ヲ得:

$$a-b=(a+b)\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{A+B}{2}.$$

何トナレバ $\tan\frac{C}{2}=\tan\left(90^\circ-\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{A+B}{2}$ ナレバナリ.

$\therefore\ \log(a-b)=\log(a+b)+\mathrm{L}\tan\frac{A-B}{2}+\mathrm{L}\cot\frac{A+B}{2}-20.$

此式ヨリ $a-b$ ノ値ヲ求ムルコトヲ得.

$\therefore$ $a+b, a-b$ ノ値ノ和及ビ差ノ半ヲ求ムレバ夫々 $a, b$ ノ値ヲ知ルコトヲ得.

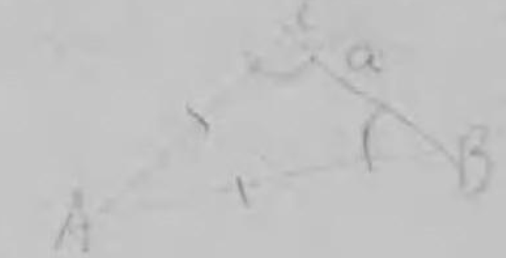


又 $C=180^\circ-(A+B)$ ナルヲ以テ之ヨリ C ノ値ヲ求ムルコトヲ得.

又 $\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}$ ヨリ $\log c=\log a+\mathrm{L}\sin C-\mathrm{L}\sin A.$

此式ヨリ $c$ ノ値ヲ求ムルコトヲ得.

**346.** △ABC ニ於テ B, $a$, $b+c$ ヲ知レリトスレバ C ヲ求ムル方法如何.



**【解】** $\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}$ [問 272 ノ注意]

$$=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}\qquad\left[\because\ \frac{A}{2}+\frac{B+C}{2}=90^\circ\right]$$

合除ノ理ヲ用フレバ

$$\frac{b+c-a}{b+c+a}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B+C}{2}}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$$

$\therefore\ \tan\frac{C}{2}=\frac{b+c-a}{b+c+a}\cot\frac{B}{2}$

$\therefore\ \mathrm{L}\tan\frac{C}{2}=\log(b+c-a)-\log(b+c+a)+\mathrm{L}\cot\frac{B}{2}.$

最後ノモノハ所求ノ算式ナリ.

**347.** △ABC ニ於テ $a, b$, A−B ヲ知レリトスレバ A ヲ求ムル方法如何.

**【解】** 公式 $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$ ヨリ

$$\tan\frac{A+B}{2}=\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{A-B}{2}.$$

$\therefore\ \mathrm{L}\tan\frac{A+B}{2}=\log(a+b)-\log(a-b)+\mathrm{L}\tan\frac{A-B}{2}.$

此式ヨリ $\frac{A+B}{2}$ ヲ求メ得.

$\frac{A+B}{2}$, $\frac{A-B}{2}$ ノ値ノ和ヲ求ムレバ A ヲ知ルコトヲ得.

**348.** △ABC ニ於テ A, B, S ヲ知レリトスレバ $a$ ヲ求ムル方法如何.

【解】 sine 比例ニ由リ $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$. ∴ $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$.........(α).

又公式ニ由リ

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sin(180°-A-B)=\frac{1}{2}ab\sin(A+B)$$

之ニ (α) ヲ代入スレバ $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sin B}{\sin A}\sin(A+B)$.

$$\therefore\quad a^2=\frac{2S\sin A}{\sin B\sin(A+B)}.$$

之ヲ對數式ニ變ズレバ

$$\log a=\frac{1}{2}\{\log 2+\log S+L\sin A-L\sin B-L\sin(A+B)+10\}.$$

是レ所求ノ算式ナリ.

**349.** △ABC ニ於テ A, B, $s$ ヲ知レリトスレバ $a$ ヲ求ムル方法如何.

【解】 先ヅ C=180°−(A+B) ヨリ C ヲ求メヨ.

次ギニ $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\frac{s-a}{s}$.

$$\therefore\quad \log(s-a)=\log s+L\tan\frac{B}{2}+L\tan\frac{C}{2}-20.$$

此式ヨリ $s-a$ ノ値ヲ求メ之ヲ $s$ ヨリ減ズレバ $a$ ヲ得ベシ.



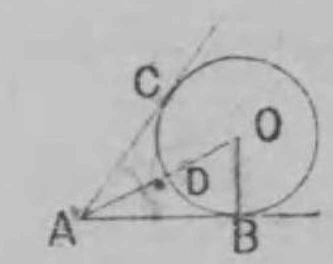
# 測量問題

## 〔58〕 直線ノ長サヲ求ムル問題.

直線ノ長サヲ求ムル問題ヲ解スルニハ別ニ特殊ノ方法アルニアラズ, 唯三角形解法ノ問題ヲ適宜ニ活用スルニ過ギズ. 次ギニ此種ノ問題ヲ擧ゲン.

### 問　題

**350.** 圓形ノ池アリ. 此池ガ地上ノ一點ニ對スル角 60° ニシテ, 其點ヨリ池邊ニ到ル最短距離 15 間ナリ. 此池ノ直徑幾間ナルカ.




【解】 A ヲ測點トシ圓池 O ニ切線 AB, AC ヲ引キ, OA ト圓池ノ周トノ交點ヲ D トスレバ

$B\hat{A}C=60°$, AD=15 間ナリ.

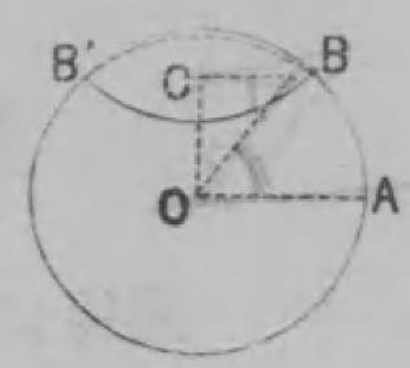
切點 B ヲ過ギル半徑 OB ヲ引キ此長サヲ $x$ 間トスレバ $B\hat{A}D=\frac{60°}{2}=30°$, $A\hat{B}O=90°$ ナルヲ以テ

$$\frac{BO}{AD+DO}=\sin BAO \quad 即チ \quad \frac{x}{15+x}=\sin 30°=\frac{1}{2}.$$

之ヲ解キテ $x=15$ ヲ得. ∴ 所求ノ直徑ハ 15×2=30 (間).

**351.** 地球ノ自轉ニ由リ, 緯度 45° ノ處ニ居ル人ハ一時間ニ幾哩, 空間ニ於テ運バルヽ譯ナルカ. 但シ地球ノ半徑ヲ 4000 哩トス.

**【解】** O ヲ地球ノ中心, B ヲ人ノ位置トシ




$\widehat{AOB}=45°$ トス.

此人ノ一日間ニ運バルル小圓周 BB′ ノ平面ニ垂線 OC ヲ引キ B, C ヲ連又レバ CB ハ此小圓周ノ半徑ナリ.

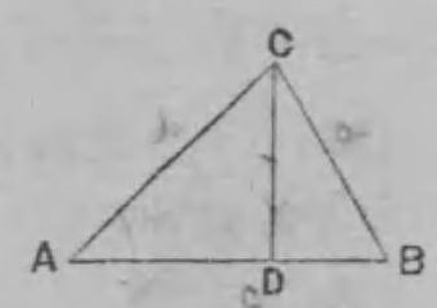
$\widehat{OCB}=90°$, $\widehat{OBC}=45°$ ナルヲ以テ $CB=OB\cos45°=4000\times\frac{1}{\sqrt{2}}$.

∴ 圓周 $BB'=2\pi\times4000\times\frac{1}{\sqrt{2}}$.

∴ 所求ノ長サハ $2\pi\times4000\times\frac{1}{\sqrt{2}}\div24=\frac{500\sqrt{2}}{3}\pi$ (哩).

**352.** 河岸ニ長サ 100 尺ノ基線 AB ヲ設ケ A, B ニテ對岸ノ人家 C ヲ觀測シタルニ $\widehat{CAB}=45°$, $\widehat{CBA}=60°$ ヲ得タリ. C ト AB トノ距離如何.

**【解】** CD ヲ AB ニ垂線ニ引キ $CD=x$ 尺トスレバ




$\frac{AD}{x}=\cot CAB$, $\frac{BD}{x}=\cot CBA$;

卽チ $AD=x\cot45°$, $BD=x\cot60°$.

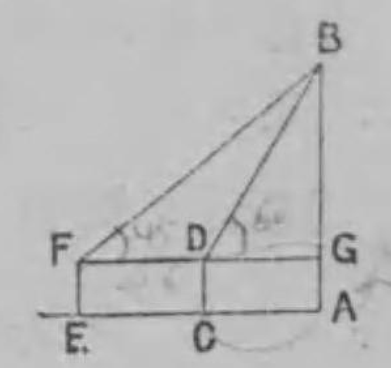
∴ 加法ヲ行ヒ $AD+BD=100=x(\cot45°+\cot60°)$.

∴ $x=\frac{100}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=50(3-\sqrt{3})$. (答) $50(3-\sqrt{3})$ 尺.

**353.** 人アリ, 河岸ニ立チテ之ニ正對セル彼岸ノ一樹ヲ測リ仰角 60° ヲ得タリ. 然ルニ此人 40 間ヲ退キテ再ビ之ヲ測リタルニ仰角 45° ナリト云フ. 樹高及ビ河幅如何. 但シ眼高ヲ 5 尺トス.



**【解】** AB ヲ樹木, AC ヲ河幅, CD ヲ人ノ舊位置, EF ヲ人ノ新位置トシ, $\widehat{GDB}=60°$, $\widehat{GFB}=45°$, $FD=40$ 間, $CD=EF=AG=5$ 尺, $GB=x$ 間トス.




$\frac{FG}{x}=\cot45°$, $\frac{DG}{x}=\cot60°$ ナルヲ以テ

$FG=x\cot45°$, $DG=x\cot60°$.

減法ヲ行ヘバ $FG-DG=40=x(\cot45°-\cot60°)$.

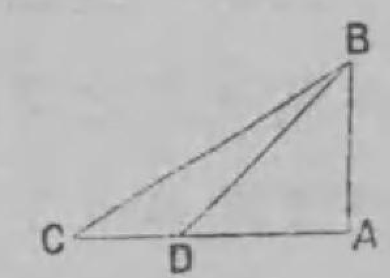
∴ $x=\frac{40}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=20(3+\sqrt{3})$. ∴ $AB=20(3+\sqrt{3})+\frac{5}{6}$.

又 $DG=x\cot60°=20(3+\sqrt{3})\frac{1}{\sqrt{3}}=20(\sqrt{3}+1)$.

(答) 樹高 $20(3+\sqrt{3})+\frac{5}{6}$ 間, 河幅 $20(\sqrt{3}+1)$ 間.

**354.** 直立セル一塔アリ. 其底ヲ通ズル水平面上ノ一點ニテ其頂ヲ見レバ仰角 32°27′ ナリ. 此點ヨリ塔ニ向ツテ同平面上尙 100 尺ヲ進ミタル點ニテ頂ヲ見レバ仰角 45° ナリ. 此平面上塔ノ高サ幾尺ナルカ. 但シ $\tan32°20'=0.6330$, $\tan32°30'=0.6371$ ナリトス.

**【解】** AB ヲ塔トシ C, D ヲ兩測點トスレバ




$\widehat{ACB}=32°27'$, $\widehat{ADB}=45°$, $CD=100$ 尺.

△ABD ニ於テ $\hat{A}=90°$, $ADB=45°$ ナルヲ以テ

$\widehat{ABD}=45°=\widehat{ADB}$. ∴ $AB=DA$.

今 $AB=x$ 尺トスレバ $CA=CD+DA=100+x$.

∴ $\frac{AB}{CA}=\tan ACB$, 卽チ $\frac{x}{100+x}=\tan32°27'$............(i).

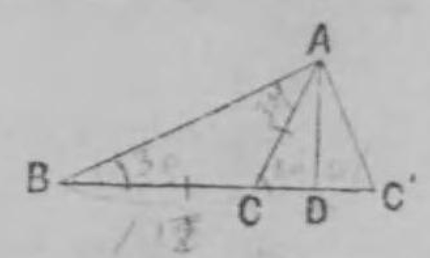
而シテ $(6371-6330)\times\cdot7=29$, ∴ $\cdot6330+\cdot0029=\cdot6359=\tan32°27'$.

∴ (i) ハ $\frac{x}{100+x}=\cdot6359$............(ii).

分母ヲ去リテ解スレバ $x=175$. 是レ (ii) ノ分母ヲ 0 トスル値ニアラズ.
∴ 是レ (ii) ノ根ナリ. (答) 約 175 尺.

**355.** 眞直ナル道路ヲ歩メル人ガ或ル地點ニ於テ道路ト 30° ノ方向ニ或ル地物ヲ認メ夫レヨリ一里ヲ進ミテ又其地物ヲ望ミシニ此時ハ道路ト 60° ノ方向ニ認メタリト云フ. 然ラバ地物ト道路トノ距離如何.

**【解】** A ヲ地物トシ, B ト C トヲ前後ノ測點トシ, AD ヲ所求ノ距離トスレバ




$D\hat{B}A=30°$, $D\hat{C}A=60°$, $BC=1$ 里.

偖 $C\hat{A}B=D\hat{C}A-D\hat{B}A=30°=D\hat{B}A$,

∴ $CA=BC=1$ 里.

$AD=x$ 里トスレバ $x=CA\sin DCA=1\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (答) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 里.

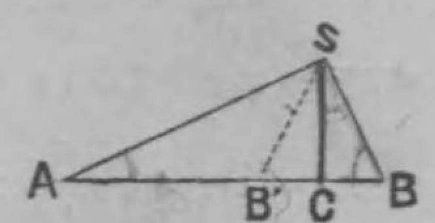
**注意.** 後ノ測點ヲ $C'$ トスレバ $BC'A=60°$, 從ツテ $B\hat{A}C'=90°$;

∴ $C'A=\dfrac{1}{2}BC'=\dfrac{1}{2}$;

∴ $AD=C'A\sin BC'A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (里)(之ヲ答トスルモ可ナリ).

**356.** 投錨セル一汽船アリ. 海岸ニ沿フタル直線上ノ一點ヨリ之ヲ測レバ其直線ト 30° ノ角ヲナシ, 其線ニ沿フテ進ムコト 300 間ニシテ又之ヲ測レバ 60° ノ角ヲナスト云フ. 其直線ヨリ汽船マデノ最近距離ヲ問フ. 但シ其距離 200 間未滿ナルコトハ已ニ測知セラレタルモノトス.

**【解】** S ヲ汽船トシ A, B ヲ前後ノ測點トシ, CS ヲ所求ノ距離トスレバ




欠

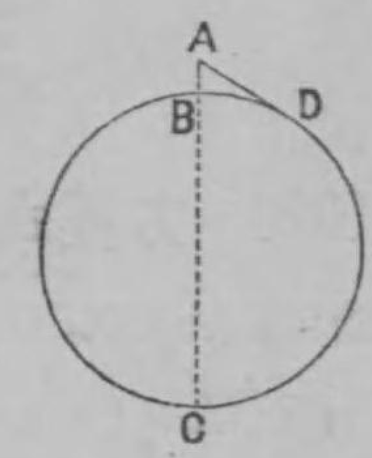
欠



## 問　題

**389.** 高サ $h$ 呎ナル物體ノ頂上ヲ望見シ得ベキ最大距離ハ幾哩ナルカ. 但シ地球ヲ半徑 3960 哩ナル球ナリトス.

**【解】** AB ヲ物體, BC ヲ地球ノ直徑, AD ヲ A ヲ望見シ得ル最大距離トスレバ AD ハ A ヨリ地球ニ引ケル切線トナル.




幾何學ノ定理ニ由リテ $\overline{AD}^2=AB(AB+BC)$.

然ルニ AB ハ BC ニ比スレバ甚小ナルヲ以テ, AB+BC ハ之ヲ BC トシテ計算スルモ可ナリ.

即チ $\overline{AD}^2=AB.BC$.

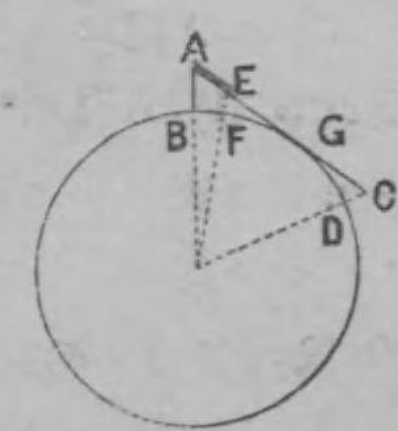
今 $AD=x$ 哩トスレバ, 1 哩=5280 呎ナルヲ以テ

$$x^2=\frac{h}{5280}\times 2\times 3960=\frac{3h}{2}.$$

平方ニ開キヲ負値ヲ棄ツレバ　$x=\sqrt{\frac{3h}{2}}$ 哩…………(答)

**390.** 海面上 64 呎ナル高サノ檣頭ヨリ若干ノ距離ニ在ル燈臺ノ燈光ヲ望見シタルニ丁度水面ニアリ. 然レドモ燈臺ニ向ツテ 30 分間進航シタル後海面上 16 呎ナル高サノ甲板ヨリ燈光ヲ望見スレバ亦丁度水面上ニ見ユト云フ. 地球ヲ半徑 3960 哩ノ球ト見做シテ船ノ速度ヲ計算セヨ.

**【解】** AB, EF ヲ船ノ前後ノ位置トシ, A ヲ檣頭, E ヲ甲板, CD ヲ燈臺, C ヲ燈光トスレバ A, E, C ハ一直線上ニアリテ此直線ハ球ニ切ス. 此切點ヲ G トセヨ.




題意ニ由リ AB=64, EF=16.

$AG=x$ 哩, $EG=y$ 哩トスレバ前問ト同様ニシテ

$x=\sqrt{\frac{3\times64}{2}}=4\sqrt{6}$,　$y=\sqrt{\frac{3\times16}{2}}=2\sqrt{6}$.

∴ AE ノ哩數ハ $4\sqrt{6}-2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$.

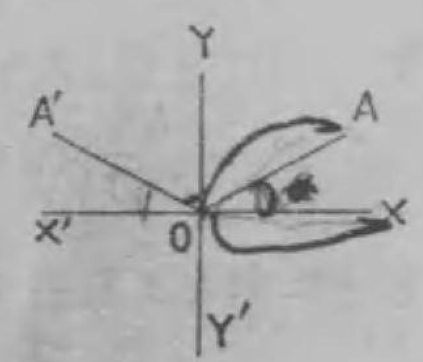
是レ大略船ノ 30 分間ニ航シタル哩數ナリ.

∴ 船ノ一時間ノ速度ハ　$2\sqrt{6}\times2=4\sqrt{6}$ 哩…………………(答)

---

# 三 角 方 程 式

## 〔62〕 方程式 $\sin x=\sin\alpha$ ヲ解スルコト.




圖ニ於テ OX, OA ヲ角 $\alpha$ ノ二邊トスレバ OX 及ビ($X\hat{O}A=A'\hat{O}X'$ ト取リタル) OA' ハ角 $180°-\alpha$ ノ二邊ナリ.

然ルニ OX, OA ヲ二邊トセル總ベテノ角ノ sin. ハ皆 $\sin\alpha$ ニ等シ. 而シテ $m$ ヲ 0 或ハ任意ノ整數トスレバ此總ベテノ角ハ皆次ギノ式ニテ表ハサル:

$$m.360°+\alpha\text{…………………(i).}$$

又 $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ ナルヲ以テ OX, OA' ヲ二邊トセル總ベテノ角ノ sin. モ亦皆 $\sin\alpha$ ニ等シ. 而シテ $n$ ヲ 0 或ハ任意ノ整數トスレバ此總ベテノ角ハ皆次ギノ式ニテ表ハサル:

$$n.360°+180°-\alpha\text{……………(ii).}$$

$\sin\alpha$ ナル sin. ヲ有スル角ハ (i), (ii) ノ他ニコレナキコト明カナリ.

∴ $x$ ノ總ベテノ値ハ (i), (ii) ナリ.

然ルニ (i) ハ 180° ノ偶數 (0 ヲモ含ム, 以下皆然リ) 倍ニ $\alpha$ ヲ加ヘタルモノヲ表ハシ, (ii) ハ 180° ノ奇數倍ヨリ $\alpha$ ヲ減ジタルモノヲ表ハス.

∴ $x$ ノ總ベテノ値ハ之ヲ次ギノ一式ニテ表ハスコトヲ得ベシ, 但シ $p$ ヲ 0 或ハ任意ノ整數トス:

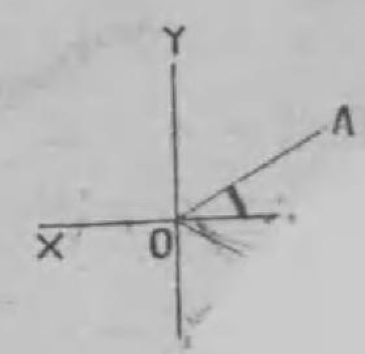
$$p.180°+(-1)^p\alpha.$$



**注意第一.** 上ノ説明ハ OA ノ位置如何ニ拘ラズ常ニ眞實ナリ、又此後用フル所ノ $m, n, p$ 等ハ皆 0 或ハ任意ノ整數ヲ表ハストス.

**注意第二.** 方程式 $\sin x=\sin\alpha$ ノ解ヲ弧度ニテ表ハセバ $p\pi+(-1)^p\alpha$ ナリ.

## 〔63〕 方程式 $\cos x=\cos\alpha$ ヲ解スルコト.




圖ニ於テ OX, OA ヲ角 $\alpha$ ノ二邊トスレバ OX 及ビ $X\hat{O}A=A'\hat{O}X$ ト取リタル OA' ハ角 $-\alpha$ ノ二邊ナリ.

然ルニ OX, OA ヲ二邊トセル總ベテノ角ノ cos. ハ皆 $\cos\alpha$ ニ等シ.

而シテ此總ベテノ角ヲ表ハス式ハ次ギノ如シ:

$$m.360°+\alpha\text{…………………(i).}$$

又 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ ナルヲ以テ OX, OA' ヲ二邊トセ cos. モ亦皆 $\cos\alpha$ ニ等シ. 而シテ此總ベテノ角ヲ表ハス

$$n.360°-\alpha\text{……………………(ii).}$$

$\cos\alpha$ ナル cos. ヲ有スル角ハ (i), (ii) ヨリ外ニハナシ.

∴ $x$ ノ總ベテノ値ハ (i), (ii) ナリ.

然ルニ (i) ハ 180° ノ偶數倍ニ $\alpha$ ヲ加ヘタルモノヲ表ハシ, (ii) ハ 180° ノ偶數倍ヨリ $\alpha$ ヲ減ジタルモノヲ表ハス.

∴ $x$ ノ總ベテノ値ハ次ギノ一式ニテ表ハサル:

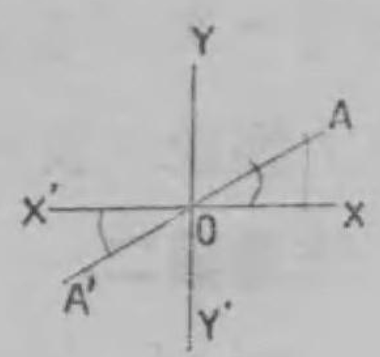
$$p.360°\pm\alpha.$$ $\pm x$

**注意第一.** 上ノ説明ハ OA ノ位置如何ニ拘ラス常ニ眞實ナリ.

**意注第二.** $\cos x=\cos\alpha$ ノ解ヲ弧度法ニテ表ハセバ $2p\pi\pm\alpha$ ナリ.

**〔64〕 方程式 $\tan x=\tan\alpha$ ヲ解スルコト.**

圖ニ於テ OX, OA ヲ角 $\alpha$ ノ二邊トスレバ OX 及ビ AO ノ引長部ナル OA′ ハ 角 $180°+\alpha$ ノ二邊ナリ.




前二條ノ如ク論ズレバ OX, OA 及ビ OX, OA′ ヲ夫々二邊トセル二群ノ總ベテノ角ノ tan. ハ皆 $\tan\alpha$ ニ等シキコトヲ知ル.

然ルニ第一群ノ總ベテノ角ヲ表ハス式ハ $m.360°+\alpha$ ニシテ, 第二群ノソレハ $n.360°+180°+\alpha$ ナリ. 而ノテ此二式ハ夫々 $180°$ ノ偶數倍及ビ奇數倍ニ $\alpha$ ヲ加ヘタルモノヲ表ハス.

$\therefore\ x=p.180°+\alpha.$

第一. 上ノ説明ハ OA ノ位置如何ニ拘ラズ常ニ

$\tan x=\tan\alpha$ ノ解ヲ弧度法ニテ表ハセバ

ナリ.

**三函數ニ關スル公式.**

三條ト同様ニ論ズレバ次ギノ結果ヲ得:

$\cot x=\cot\alpha$ ノ解ハ $x=p.180°+\alpha$ ナリ.

〔弧度法ニテハ $x=p\pi+\alpha$〕.

$\sec x=\sec\alpha$ ノ解ハ $x=p.360°\pm\alpha$ ナリ.

〔弧度法ニテハ $x=2p\pi\pm\alpha$〕.

$\mathrm{cosec}\,x=\mathrm{cosec}\,\alpha$ ノ解ハ $x=p.180°+(-1)^p\alpha$ ナリ.

〔弧度法ニテハ $x=p\pi+(-1)^p\alpha$〕.

**〔66〕 三角方程式ノ基本ノ場合.**



前四條ノ場合ヲ三角方程式ノ基本ノ場合ト云フ. 次ギニ基本ノ場合ニ由リテ直チニ解シ得ベキ問題ヲ擧ゲン.

## 問　　題

**391.** $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ解ケ.

【解】 $\sin x=\sin 45°.$ 　$x=n.180+(-1)^n 45°$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $x=p.180°+(-1)^p 45°$…………(答)

**392.** $\cos x=0$ ヲ解ケ.

$\cos x=\cos 90$

【解】 $\cos x=\cos 90°.$ 　$x=p.360\pm 90=(4p\pm1)90°$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $x=p.360°\pm90°=(4p\pm1)90°.$

然ルニ $4p\pm1$ ハ總ベテノ奇數ヲ表ハスヲ以テ之ヲ $2n+1$ ト記セバ

$x=(2n+1)90°=n.180°+90°$…… ……(答)

**393.** $\tan x=\sqrt{3}$ ヲ解ケ.

【解】 $\tan x=\tan 60°.$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $x=p.180°+60°$…………(答)

**394.** $2\sin(\alpha-30°)\cos\alpha$ ヲ和(或ハ差)ニ變形シ, 然ル後之ヲ最大ナラシムル $\alpha$ ノ値ヲ決定セヨ.

【解】 原式 $=\sin(2\alpha-30°)+\sin(-30°)$

$=\sin(2\alpha-30°)-\dfrac{1}{2}.$

∴ 原式ヲ最大ナラシムルニハ $\sin(2\alpha-30°)=1$ トスレバ可ナリ.

即チ $2\alpha-30°=n.180°+(-1)^n 90°.$

然ルニ最後ノ値ハ $n$ ノ奇數, 偶數ニ拘ラズ

$p.360°+90°$

トナル.

$\therefore\ \alpha = p.180^\circ + 60^\circ.$

**395.** $\sin(60^\circ - 2x) = \sin(x + 36^\circ)$ ヲ解ケ.

**【解】** 基本ノ場合ニ由リ　$60^\circ - 2x = p.180^\circ + (-1)^p(x + 36^\circ).$

$p$ ヲ偶數 $2m$ トスレバ　$60^\circ - 2x = m.360^\circ + x + 36^\circ.$

$\therefore\ x = -m.120^\circ + 8^\circ.$

然ルニ $m$ ハ正負ノ何レテモ表ハスガ故ニ $-m$ ハ正負ノ何レチモ表ハス.

$\therefore$ $-m$ チ $n$ ト記ストキハ　$x = n.120^\circ + 8^\circ.$

又 $p$ チ奇數 $2m+1$ トスレバ　$60^\circ - 2x = m.360^\circ + 180^\circ - x - 36^\circ.$

$\therefore\ x = -m.360^\circ - 84^\circ.$

之チ上ノ場合ト同樣ニ論ズレバ　$x = n.360^\circ - 84^\circ.$

(答) $n.120^\circ + 8^\circ,\ n.360^\circ - 84^\circ.$

**396.** $\cos(45^\circ + x) = \cos(60^\circ - 2x)$ ヲ解ケ.

**【解】** 基本ノ場合ニ由リ　$45^\circ + x = p.360^\circ \pm (60^\circ - 2x).$

複號ノ中 (+) ヲ取レバ　$45^\circ + x = p.360^\circ + 60^\circ - 2x.$

$\therefore\ x = p.120^\circ + 5^\circ.$

又複號ノ中 (−) ヲ取レバ　$45^\circ + x = p.360^\circ - 60^\circ + 2x.$

$\therefore\ x = -p.360^\circ + 105^\circ.$

然ルニ $-p$ ハ正負ノ何レチモ表ハスチ以テ之チ $m$ ト置ケバ

$x = m.360^\circ + 105^\circ.$

(答) $p.120^\circ + 5^\circ,\ m.360^\circ + 105^\circ.$

**397.** $\tan(x - 60^\circ) = \tan(2x + 36^\circ)$ ヲ解ケ.

**【解】** 基本ノ場合ニ由リ　$x - 60^\circ = p.180^\circ + 2x + 36^\circ.$

$\therefore\ x = -p.180^\circ - 96^\circ.$

然ルニ $-p$ ハ正負ノ何レチモ表ハスガ故ニ之チ $m$ ト置ケバ

$x = m.180^\circ - 96^\circ$............(答)

**398.** $\sin x = \cos x$ ヲ解ケ.

**【解】** $\cos(90^\circ - x) = \cos x.$



$\therefore$ 基本ノ場合ニ由リ　$90^\circ - x = p.360^\circ \pm x.$

複號ノ中 (+) ヲ取レバ　$90^\circ - x = p.360^\circ + x.$

$\therefore\ x = -p.180^\circ + 45^\circ.$

然ルニ $-p$ ハ正負ノ何レチモ表ハスガ故ニ之チ $m$ ト置ケバ

$x = m.180^\circ + 45^\circ.$

又 $90^\circ \neq p.360^\circ$ ナルチ以テ複號ノ中 (−) ヲ取リタル方程式ハ成立セズ.

$\therefore\ x = m.180^\circ + 45^\circ$ ヲ答トス.

**注意.** $\sin x = \sin(90^\circ - x)$ トナシ $\sin.$ ニ關シテ解スルモ可ナリ. 然レドモ $\cos.$ ニ關シテ解スル方ガ一般ニ簡易ナリ.

**399.** $\sin^2 x = \cos^2 x$ ヲ解ケ.

**【解】** 平方ニ開クトキハ　$\sin x = \pm \cos x.$

$\sin x = \cos x$ ヨリハ前問ノ如クニシテ　$x = m.180^\circ + 45^\circ$............(i).

$\sin x = -\cos x$ ヨリハ

$-\sin x = \cos x,$ 卽チ $\sin(-x) = \cos x,$

卽チ $\cos(90^\circ + x) = \cos x.$　$[\because\ \sin(-x) = \cos\{90^\circ - (-x)\} = \cos(90^\circ + x)]$

$\therefore$ 基本ノ場合ニ由リ　$90^\circ + x = p.360^\circ \pm x.$

然ルニ $90^\circ \neq p.360^\circ$ ナルチ以テ複號ノ中 (+) ヲ取リタル方程式ハ成立セズ.

又複號ノ中 (−) ヲ取レバ　$x = p.180^\circ - 45^\circ$..................(ii).

(i), (ii) チ取リ纏ムレバ　$x = n.180^\circ \pm 45^\circ = (4n \pm 1)45^\circ.$

然ルニ $4n \pm 1$ ハ總ベテノ奇數ヲ表ハスチ以テ之チ $2q+1$ ト置ケバ

$x = (2q+1)45^\circ = q.90^\circ + 45^\circ$..................(答)

**400.** $\sin\left(\dfrac{2x}{3} - 45^\circ\right) + \cos(x + 45^\circ) = 0$ ヲ解ケ.

**【解】** $\cos(x + 45^\circ) = -\sin\left(\dfrac{2x}{3} - 45^\circ\right) = \sin\left(45^\circ - \dfrac{2x}{3}\right) = \cos\left(45^\circ + \dfrac{2x}{3}\right).$

∴ 基本ノ場合ニ由リ $x+45°=p.360°\pm\left(45°+\frac{2x}{3}\right)$.

複號ノ中 (+) ヲ取レバ $x=p.1080°$.

又 (−) ヲ取レバ $x=p.216°-54°$.

(答) $p.1080°$, $p.216°-54°$.

**注意.** 本問ト同樣ニ攻究スレバ本問ニ於ケル $sin.$, $cos.$ ノ位置ニ互ニ餘函數ヲナス任意ノ三角函數ヲ用ヒタル方程式ヲ解スルコトヲ得ベシ. 次ギノ問題ノ如キ是レナリ.

**401.** $sec(2x+60°)+cosec(45°-x)=0$ ヲ解ケ.

**【解】** $sec(2x+60°)=-cosec(45°-x)=cosec(x-45°)=sec(135°-x)$.

∴ 基本ノ場合ニ由リ $2x+60°=p.360°\pm(135°-x)$.

複號ノ中 (+) ヲ取レバ $x=p.120°+25°$.

又 (−) ヲ取レバ $x=p.360°-195°=(2p-1)180°-15°$.

然ルニ $2p-1$ ハ總ベテノ奇數ヲ表ハスガ故ニ之ヲ $2m+1$ ト置ケバ

$x=(2m+1)180°-15°=m.360°+165°$.

(答) $p.120°+25°$, $m.360°+165°$.

**402.** $tan(20°-3x)+cot(70°+x)=0$ ニ適スル $x$ ノ値ニシテ 0° ト 360° トノ間ニ在ルモノヲ求メヨ.

**【解】** $tan(20°-3x)=-cot(70°+x)=cot(-70°-x)=tan(160°+x)$.

∴ 基本ノ場合ニ由リ $20°-3x=p.180°+160°+x$.

∴ $x=-p.45°-35°$.

然ルニ $-p$ ハ正負ノ何レヲモ表ハスガ故ニ之ヲ $m$ ト置クトキハ

$x=m.45°-35°$.

$m=1$ トスレバ $x=10°$; $m=2$ トスレバ $x=55°$;

$m=3$ トスレバ $x=100°$; $m=4$ トスレバ $x=145°$;

$m=5$ トスレバ $x=190°$; $m=6$ トスレバ $x=235°$;



$m=7$ トスレバ $x=280°$; $m=8$ トスレバ $x=325°$.

(答) 10°, 55°, 100°, 145°, 190°, 235°, 280°, 325°.

**403.** $sin\theta=cos\theta$, $tan\theta=cot\theta$ ヲ同時ニ成立セシムベキ $\theta$ ノ値如何.

**【解】** 問 398 ニ由リ $sin\theta=cos\theta$ ヨリ $\theta=m.180°+45°$,

又 $tan\theta=cot\theta$ ヨリ $tan\theta=tan(90°-\theta)$.

∴ $\theta=n.180°+90°-\theta$, ∴ $\theta=n.90°+45°$

然ルニ $n$ ガ偶數ナルトキ $\theta=n.90°+45°$ ハ $\theta=m.180°+45°$ ノ中ニ含マル.

∴ 所求ノ値ハ此共通ノ値卽チ $\theta=m.180°+45°$ ナリ.

---

## 〔67〕 一元ニ變ジテ解スル三角方程式.

種々ナル三角函數ヲ含ム方程式ハ之ヲ唯一種ノ三角函數ヲ含ムモノニ變ジテ解スルヲ便トスルコト屢々コレアリ. 次ギノ問題ノ如キ是レナリ.

**注意.** 此後ハ主トシテ方程式ノ解ヲ弧度法ニテ表ハスベシ. 蓋シ此程度マデ進ミタル學生ハ此法ヲ用フルニ困難ヲ感ゼザルベク且ツ後來進ンデ高等ノ數學ヲ學バンニハ此法ニ熟練スルコトヲ要スレバナリ.

### 問題

**404.** $sin^2x=\frac{3}{2}cos\,x$ ヲ解ケ.