漢　譯

斯蓋二氏解析幾何學

新亞書店發行

斯蓋二氏解析幾何學

The Elements of

ANALYTIC GEOMETRY

by

P. F. Smith and A. S. Gale

吳菊辰譯述

新亞書店印行

漢譯斯蓋二氏解析幾何學

定價國幣
（外埠酌加寄費）

譯述者	吳菊辰
校訂者	吳靜山
發行者	陳邦楨
印刷者	新亞書店
發行所	新亞書店

上海河南中路一五九號

中華民國三十七年十月八版

目　次

斯 蓋 二 氏

解析幾何學

第 一 章

代數及三角之複習

1. 數. 在代數運算中所遇之數有二,曰實數及虛數.

一數之平方爲正數者,此數稱爲實數. 零亦爲實數.

一數之平方爲負數者,此數稱爲純虛數. 任何純虛數可化爲負數之平方根,卽可寫作 $b\sqrt{-1}$ 之形式.其中 b 表實數,而 $(\sqrt{-1})^2=-1$.

一數之形式爲 $a+b\sqrt{-1}$, 而 a, b 均爲實數,且 b 不爲零者曰虛數或複數. 凡虛數之平方仍爲虛數, 如

$$(a+b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1},$$

若 a 不爲零,此數爲虛數.

2. 常數. 一數量,其值恆固定不變者,曰常數.

數值常數或絕對常數在任何問題中,其數值始終不變, 如 $2, -3, \sqrt{7}, \pi$ 等.

任意常數或參數在任何問題中,可指定爲一任意合理之數值. 既指定後,則始終不變.

任意常數恆以字母之首先數個表之.如記號尚嫌不足,可於文字右上角加撇,或於右下角加註添數,或二者同時用之.

用撇

a' (讀若 a 撇), a'' (讀若 a 二撇), a''' (讀若 a 三撇): 皆爲不同常數.

用添數

b_1 (讀若 b 一), b_2 (讀若 b 二): 亦爲不同常數.

二種兼用

c_1' (讀若 c 一撇), c_3'' (讀若 c 三兩撇): 亦爲不同常數.

3. 二次徵式. 任何二次式可簡化爲下列之徵式

(1) $$Ax^2+Bx+C=0$$

其中 x 爲未知數,而係數 A, B, C 爲任意常數. A, B, C 可表任何數値,惟 A 不爲零. 因若 A 等於零,則 (1) 不爲二次式矣. C 稱爲**常數項**.

(1) 之左端

(2) $$Ax^2+Bx+C$$

稱爲**二次徵式**. 任何二次式均可化作 (2) 之徵式, x 爲未知數, B^2-4AC 爲 (1) 或 (2) 之**判別式**, 通常以 $\triangle$ 表之.

故二次徵式之判別式 $\triangle$, 等於未知數一次羃係數之平方,減去二次羃係數與常數項乘積之四倍.

若以二數值代入二次式中之未知數,而能使二次式之值爲零者,此二數值稱爲二次式之**根**.

二次式 (2) 之根,亦卽二次方程式 (1) 之根,二次方程式之根可稱爲**適合於方程式**.

在代數學中已證得 (2) 或 (1) 有二根 x_1 及 x_2. 解 (1) 得

(3) $$\begin{cases} x_1=-\dfrac{B}{2A}+\dfrac{1}{2A}\sqrt{B^2-4AC}, \\ x_2=-\dfrac{B}{2A}-\dfrac{1}{2A}\sqrt{B^2-4AC}. \end{cases}$$

二式相加,得

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}. \tag{4}$$

二式相乘,得

$$x_1 x_2 = \frac{C}{A}. \tag{5}$$

因此得下之

定理 I. 二次方程式二根之和,等於未知數一次冪之反號係數,除以二次冪係數之商.

二根之積等於常數項除以二次冪係數之商.

二次式 (2) 可寫爲

$$Ax^2 + Bx + C \equiv^{*} A(x - x_1)(x - x_2). \tag{6}$$

將(6)之右端展開,以 (4), (5) 兩式之值代入,即可證之.

例如 $3x^2 - 4x + 1 = 0$ 之二根爲 1 及 $\frac{1}{3}$ 故得恆等式 $3x^2 - 4x + 1 \equiv 3(x-1)(x-\frac{1}{3})$.

當 A, B, C 爲實數時二根 x_1 及 x_2 之數值 (§ 1), 全恃判別式以定其性質.今述之於

定理 II. 若二次式之係數爲實數,判別式爲 $\triangle$,則

當 $\triangle$ 爲正時,二根爲不相等之二實數;

當 $\triangle$ 爲零時,二根爲相等之二實數;

當 $\triangle$ 爲負時,二根爲虛數.

定理 II 更可寫爲僅表實數之三種形式,即

$$(7)\quad \begin{cases} \text{若 } \triangle \text{ 爲正,從(6)} & Ax^2 + Bx + C \equiv A(x - x_1)(x - x_2); \\ \text{若 } \triangle \text{ 爲零,從(6)} & Ax^2 + Bx + C \equiv A(x - x_1)^2; \\ \text{若 } \triangle \text{ 爲負,} & Ax^2 + Bx + C \equiv A\left[\left(x + \dfrac{B}{2A}\right)^2 + \dfrac{4AC - B^2}{4A^2}\right]. \end{cases}$$

* 符號 ≡ 爲恆等,即示左右二式之值恆同,惟形式各異.

最後一恆等式可證之如下:

$$Ax^2+Bx+C\equiv A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)$$

$$\equiv A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{4A^2}\right).$$

括弧中加減 $\frac{B^2}{4A^2}$

$$\therefore\quad Ax^2+Bx+C\equiv A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}\right].\qquad Q.\ E.\ D.$$

4. 特殊二次式. 在§3之(1)中,若係數 B 及 C 有一個或兩個同時爲零時,(1) 稱爲**特殊二次式.**

第一款 $C=0$.

方程式 (1) 可分解因式

(1) $$Ax^2+Bx\equiv x(Ax+B)=0$$

得二根 $x_1=0,\ x_2=-\frac{B}{A}$. 故若二次方程式之常數項爲零時,有一根爲零. 其逆理亦成立,因在§3之 (1) 中,當 $x=0$ 時, C 應等於零.

第二款 $B=0$.

方程式 (1) 可化爲

(2) $$Ax^2+C=0.$$

從頁 3 之定理 I, $x_1+x_2=0$, 即

(3) $$x_1=-x_2.$$

故若二次方程式之未知數一次冪之係數爲零時,二根之數值相等,符號相反.其逆理亦成立,因二根之和旣爲零,從定理 I, $B=0$.

第三款 $B=C=0$.

方程式 (1) 可化爲

(4) $$Ax^2=0.$$

故二根均爲零,因從假設 A 旣不爲零,必 $x^2=0$.

5. 二次式之二根有關係時之情形.

若二次徵式

$$Ax^2+Bx+C=0$$

之二根 x_1 及 x_2 有關係時,則係數 A, B 及 C 亦必有相當之關係式存在.

例如,若二根相等,卽 $x_1=x_2$ 則從頁 3 定理 II 得 $B^2-4AC=0$.

再若一根爲零,則 $x_1x_2=0$, 故從頁 3 定理 I 得 $C=0$.

此二種相當關係可列成二行對照之:

二次徵式

根之關係	係數之關係式

在許多問題中,諸係數常含有一個或多個任意常數者,則可從根之關係而求得其係數之關係式.下列諸例,卽其解法.

例 1. 方程式

(1) $$2x^2-6x+k^2-3k-4=0$$

之一根爲零,參數 k 應爲何值?

解　已知 $A=2$, $B=-6$, $C=k^2-3k-4$. 從頁 4 第一款,若一根爲零, C 亦應爲零.

$$\therefore \quad k^2-3k-4=0.$$

解之,　$k=4$ 或 -1.　答.

例 2. 方程式

$$kx^2+2kx-4x=2-3k$$

之二根爲相等實數, k 應爲何值?

解　將所設方程式化爲徵式,得

(2) $$kx^2+(2k-4)x+(3k-2)=0$$

因此　$A=k$,　$B=2k-4$,　$C=3k-2$.

計算判別式 $\triangle$，得

$$\triangle=(2k-4)^2-4k(3k-2)$$
$$=-8k^2-8k+16=-8(k^2+k-2).$$

從頁 3 定理 II，若二根爲相等實數，判別式 $\triangle$ 應爲零.

$$\therefore\quad k^2+k-2=0.$$

解之，$\qquad k=-2$ 或 1. 答.

以 k 之值代入 (2) 驗算：

當 $k=-2$ 時，(2) 化爲 $-2x^2-8x-8=0$，或 $-2(x+2)^2=0$；

當 $k=1$ 時，(2) 化爲 $x^2-2x+1=0$，或 $(x-1)^2=0$.

故 k 等於上列二值時，(2) 左端可化爲頁 3 所示(7) 之形式.

例 3. 若方程式

$$(3)\qquad (b^2+a^2m^2)y^2+2a^2kmy+a^2k^2-a^2b^2=0$$

之二根相等，a, b, k 及 m 之關係式爲何？

解 (3) 已爲二次徵式，而

$$A=b^2+a^2m^2,\qquad B=2a^2km,\qquad C=a^2k^2-a^2b^2.$$

從頁 3 定理 II，判別式 $\triangle$ 應等於零；故

$$\triangle=4a^4k^2m^2-4(b^2+a^2m^2)(a^2k^2-a^2b^2)=0.$$

化簡，$\qquad a^2b^2(k^2-a^2m^2-b^2)=0.$ 答.

例 4. 下列聯立方程式

$$(4)\qquad 3x+4y=k,$$

$$(5)\qquad x^2+y^2=25$$

之二組解答相同，k 應爲何值？

解 從 (4) 求 y，得

$$(6)\qquad y=\tfrac{1}{4}(k-3x).$$

代入 (5) 並整理之,得

(7) $$25x^2-6kx+k^2-400=0.$$

設 (7) 之二根為 x_1 及 x_2,代入 (6) 得 y 之二對應值 y_1 及 y_2,即

(8) $$y_1=\frac{1}{4}(k-3x_1),\qquad y_2=\frac{1}{4}(k-3x_2).$$

於是 (4) 及 (5) 有二組公共解答 (x_1,y_1) 及 (x_2,y_2).但依題意二組解答相同,故必

(9) $$x_1=x_2 \text{ 及 } y_1=y_2.$$

若前一式 $(x_1=x_2)$ 正確,則從 (8) y_1 及 y_2 亦相等.

故 (4) 及 (5) 之公共解答當及僅當 (7) 之二根相等時為相同;即 (7) 之判別式應等於零(頁 3 定理 II).

$$\therefore\quad \triangle=36k^2-100(k^2-400)=0.$$

解之,　$k^2=625,$

$k=25$ 或 $-25.$　答.

驗算　以 k 之值代入 (7),

當 $k=25$,　(7) 化為 $x^2-6x+9=0,$

或 $(x-3)^2=0;$　$\therefore\ x=3;$

當 $k=-25$, (7) 化為 $x^2+6x+9=0,$

或 $(x+3)^2=0;$　$\therefore\ x=-3.$

再以 k, x 之值代入 (6),

當 $k=25$ 及 $x=3$,　得　$y=\frac{1}{4}(25-9)=4;$

當 $k=-25$ 及 $x=-3$,　得　$y=\frac{1}{4}(-25+9)=-4.$

故每一 k 之值,使 (4) 及 (5) 之公共解答相同,即

若 $k=25$,　公共解答為 $x=3$,　$y=4;$

若 $k=-25$,　公共解答為 $x=-3, y=-4.$　*Q. E. D.*

習題

1. 計算下列二次式之判別式，求其二根之和，差及其根之性質，並寫作頁 4(7)之形式.

(a) $2x^2-6x+4$.

(b) $x^2-9x-10$.

(c) $1-x-x^2$.

(d) $4x^2-4x+1$.

(e) $5x^2+10x+5$.

(f) $3x^2-5x-22$.

(g) $2x^2+13$.

(h) $9x^2-6x+1$.

(i) $5x^2-x-1$.

(j) $7x^2-6x-1$.

(k) $3x^2-5$.

(l) $2x^2+x-8$.

(m) $2x^2+x+8$.

(n) $6x^2-x-5$.

(o) $10x^2+60x+90$.

(p) $7x^2+7x+\frac{7}{4}$.

2. k 應爲何種實數，方足使下列二次方程式之一根爲指定之值？

一根爲零：

(a) $6x^2+5kx-3k^2+3=0$. 答. $k=\pm 1$.

(b) $2k-3x^2+6x-k^2+3=0$. 答. $k=-1$ 或 3.

(c) $x^2+10x+k^2+3=0$. 答. 無

(d) $10x^2-mx+3k^2-8k+2=0$. 答. $k=\frac{4}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{10}$.

一根爲 -2：

(e) $x^2-2kx+3=0$. 答. $k=-\frac{7}{4}$.

(f) $kx^2-x+3k^2-1=0$. 答. $k=-\frac{1}{3}$ 或 -1.

(g) $k^2x^2+6x=k^2-16$. 答. 無

(h) $kx^2+2kx=-3$. 答. 無

(i) $10x^2-7kx+k^2+9=0$. 答. $k=-7$.

3. 下列二次方程式之二根均爲零，k 及 m 應爲何值？

(a) $5x^2+mx+k-5=x$. 答. $k=5,\ m=1$.

(b) $x^2+(3k-m)x+k^2-4=0$. 答. $k=\pm 2,\ m=\pm 6$.

(c) $2x^2+(m^2+1)x+k^2=0$. 答. 無

(d) $x^2+(m^2+2k-3m)x+4k-6m=0$. 答. $k=0,\ m=0$.

(e) $t^2+(m^2+k^2-5)t+k+m+1=0$. 答. $k=1,\ m=-2$.

$k=-2,\ m=1$.

4. 下列二次方程式之二根相等，參數應爲何值？證驗所得結果是否眞確.

(a) $kx^2-3x-1=0$. 答. $k=-\frac{9}{4}$.

(b) $x^2-kx+9=0$. 答. $k=\pm 6$.

(c) $2kx^2+3kx+12=0$. 答. $k=\frac{32}{3}$.

(d) $2x^2+kx-1=0$. 答. 無

(e) $5x^2-3x+5k^2=0$. 答. $k=\pm\frac{3}{10}$.

(f) $x^2+kx+k^2+2=0$. 答. 無

(g) $x^2-2kx-k-\frac{1}{4}=0$. 答. $k=-\frac{1}{2}$.

(h) $x^2+2bx+2b^2+3b-4=0$. 答. $b=-4$ 或 1.

(i) $(m+2)x^2-2mx+1=0$. 答. $m=-1$ 或 2.

(j) $(m^2+4)x^2+3x+2=0$. 答. 無

(k) $x^2+(l-3)x-1=0$. 答. 無

(l) $(c^2-8)y^2-(2c-1)y+\frac{1}{2}=0$. 答. 無

(m) $az^2+2(a+3)z+16=0$. 答. $a=1$ 或 9.

5. 下列二次方程式之二根相等，求其係數之關係式。

(a) $m^2x^2+2kmx-2px=-k^2$. 答. $p(p-2km)=0$.

(b) $x^2+2mpx+2bp=0$. 答. $p(m^2p-2b)=0$.

(c) $2mx^2+2bx+a^2=0$. 答 $b^2=2a^2m$.

(d) $(1+m^2)x^2+2bmx+(b^2-r^2)=0$. 答. $b^2=r^2(1+m^2)$.

(e) $(b^2-a^2m^2)y^2-2b^2ky-a^2b^2m^2-b^2k^2$. 答. $a^2b^2m^2(k^2-a^2m^2+b^2)=0$.

(f) $(A+m^2B)x^2+2bmBx+b^2B+C=0$. 答 $b^2AB+m^2BC+AC=0$.

6. 參數應爲何值，方可使下列聯立方程式之一組解答相同？

(a) $x+2y=k$, $x^2+y^2=5$. 答. $k=\pm 5$.

(b) $y=mx-1$, $x^2=4y$. 答. $m=\pm 1$.

(c) $2x-3y=b$, $x^2+2x=3y$. 答. $b=0$.

(d) $y=mx+10$ $x^2+y^2=10$. 答. $m=\pm 3$.

(e) $lx+y-2=0$, $x^2-8y=0$. 答. 無

(f) $x+4y=c$, $x^2+2y^2=9$. 答. $c=\pm 9$.

(g) $x^2+y^2-x-2y=0$, $x+2y=c$. 答. $c=0$ 或 5.

(h) $x^2+4y^2-8x=0$, $mx-y-2m=0$. 答. 無

(i) $x^2+y^2-k=0$, $3x-4y=25$. 答. $k=25$.

(j) $x^2-y^2+2x-y=3$, $4x+y=c$. 答. $c=-12$ 或 3.

(k) $2xy-3x-y=0$, $y+3x+k=0$. 答. $k=-6$ 或 0.

(l) $x^2+4y^2-8y=0$, $x=c$. 答. $c=\pm 2$.

(m) $x^2+4y^2-8y=0,\ y=b.$ 答. $b=0,\ 2.$

(n) $2x^2+3y^2=35,\ 4x+9y=k.$ 答. $k=\pm 35.$

(o) $x^2+xy+2x+y=0,\ y=-2x+b.$ 答. $b=-4$ 或 $0.$

7. 若下列聯立方程式之二組解答相同,其係數之關係式若何?

(a) $bx+ay=ab,\ y^2=2px.$ 答. $ap(2b^2+ap)=0.$

(b) $y=mx+b,\ Ax^2+By=0.$ 答. $B(m^2B-4bA)=0.$

(c) $y=m(x-a),\ By^2+Dx=0.$ 答. $D(4am^2B-D)=0.$

(d) $bx+ay=ab,\ 2xy+c^2=0.$ 答. $ab(ab+2c^2)=0.$

(e) $kx-y=c,\ Ax^2+By^2=C.$ 答. $c^2AB-k^2BC-AC=0.$

(f) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p,\ x^2+y^2=r^2.$ 答. $p^2=r^2.$

6. 變數. 一數量在一問題中可表任意數值者曰變數.但此數量之變化,在特殊問題內,亦有限制,皆視問題之性質而定.此種限制,以不等式示之爲最便.

例如變數 x 之值在 -2 及 5 之間,卽 x 大於 -2* 而小於 6,可記爲

$$x>-2,\qquad x<5.$$

若記爲簡式,則

$$-2<x<5.$$

同理,若問題條件限制變數 x 爲小於或等於 -2 之負數,及大於或等於 5 之正數,則

$$x<-2 \text{ 或 } x=-2,\ \text{及 } x>5 \text{ 或 } x=5.$$

記爲簡式

$$x\leqq -2 \text{ 及 } x\geqq 5.$$

7. 二次式之符號變化. 任何二次式中之變數,若以各種數值代入,其二次式之符號可因之而決定.此種代數符號之決定,甚爲重要.此種問題之討論,全恃前者已知之不等符號(大於及小於).其要點卽爲下列之敍述:

若 a 爲常數,x 爲變數,而 a, x 均爲實數,則

* 實數(§1)之大小可解釋如下:當 $a-b$ 爲正數時,a 大於 b;$a-b$ 爲負數時,a 小於 b.因任何負數均小於正數;若 a, b 均爲負數,當 a 之絕對值小於 b 之絕對值時,則 a 大於 b.如 $3<5$,但 $-3>-5$.故改變不等式兩方之符號,不等符號應反向.

$$(1)\qquad \begin{cases}\text{當 } x<a \text{ 時，} x-a \text{ 爲負數；}\\ \text{當 } x>a \text{ 時，} x-a \text{ 爲正數.}\end{cases}$$

應用上列敍述及頁 3 之恆等式 (7) 可證

定理 III. 若二次式之判別式爲正，則對於在二根間之諸變數值，二次式* 與二次冪之係數符號相反，在其餘之數值時符號相同.

若判別式爲零或爲負，不論變數爲何種實數，二次式與二次冪之係數符號恆相同.

證　設 x 爲變數，二次徵式之形式爲 § 3, (1)，從 (7) 得

第一款　若 $\triangle$ 爲正　$Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)(x-x_2)$.

第二款　若 $\triangle$ 爲零　$Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)^2$,

第三款　若 $\triangle$ 爲負　$Ax^2+Bx+C\equiv A\left[\left(x+\dfrac{B}{2A}\right)^2+\dfrac{4AC-B^2}{4A^2}\right]$.

上列三款今分別論之.

第一款　因二根不相等，設 $x_1<x_2$，則從 (1)

當　$x_1<x<x_2$ 時，$x-x_1$ 爲正，$x-x_2$ 爲負，而 $(x-x_1)(x-x_2)$ 爲負；

當　$x<x_1$ 或 $x>x_2$ 時，$x-x_1$ 及 $x-x_2$ 皆爲負或皆爲正，而 $(x-x_1)(x-x_2)$ 爲正.

故二次式之符號在第一情形下爲 $-A$，而在另一情形下則爲 A.

第二款　因 $(x-x_1)^2$ 恆爲正，故二次式之符號與 A 相同.

第三款　因 $\triangle$ 爲負，則 $4AC-B^2\equiv-\triangle$ 爲正；故方括弧中常爲正數，而二次式之符號與 A 相同.　*Q. E. D.*

例如二次式　$2t^2-3t+1$.

此式 $\triangle=9-8=+1$，$A=2$，二根爲 $\frac{1}{2}$ 及 1.

$$\therefore\quad 2t^2-3t+1\equiv 2(t-\tfrac{1}{2})(t-1).$$

---

* 假定變數之值均爲實數. 又二次式之根能使二次式之值爲零，故此種數值應除去.

設以 t 之實數值代入上之二次式，則

當 $\frac{1}{2}<t<1$ 時，　　　二次式 $2t^2-3t+1<0$;

當 $t<\frac{1}{2}$ 或 $t>1$ 時，　　　二次式 $2t^2-3t+1>0$.

再觀 r 之二次式

$$3r^2+4r+9.$$

$\triangle=16-108=-92$, $A=3$, 由定理 III, 以 r 之任何實數代入時,二次式之值恆爲正.

定理 III 之應用. 下列諸例卽定理 III 之應用.

例1. 下列根式爲實數,試決定變數之實數值.

(a) $\sqrt{3-2x-x^2}$,　　　(b) $\sqrt{2y^2+3y+9}$.

解 試觀根號中之二次式:

(a) $\triangle=4+12=16$, $A=-1$, 二根爲 1 及 -3.

應用定理 III.

當 $-3<x<1$ 時,　　　二次式 $3-2x-x^2>0$;

當 $x<-3$ 或 $x>1$ 時,　　二次式 $3-2x-x^2<0$.

從題中條件,二次式須爲正或零. 故 $-3\leqq x\leqq 1$.　　　答.

(b) $\triangle=9-72=-63$, $A=2$, 由定理 III, 二次式爲正, 故不論 y 爲何種實數,根式恆爲實數.　　答.

例 2. 參數 k 應爲何值,可使二次方程式

$$kx^2+2kx-4x=2-3k \tag{2}$$

之二根爲 (a) 不相等二實數? (b) 虛數?

解 將原式化爲二次徵式:

$$kx^2+(2k-4)x+3k-2=0.$$

從此方程式得

$$\triangle\equiv B^2-4AC=-8(k^2+k-2). \tag{3}$$ [§ 5, 例 2]

從頁 3 定理 II,

(a) 若 $-8(k^2+k-2)>0$, 二根爲不相等之實數;

(b) 若 $-8(k^2+k-2)<0$, 二根爲虛數.

再應用定理 III 於二次式

$$-8(k^2+k-2),$$

得 $\triangle=64+512=576$, $A=-8$, 二根爲 -2 及 1.

當 $-2<k<1$ 時, 二次式 $-8(k^2+k-2)>0$;

當 $k<-2$ 或 $k>1$ 時, 二次式 $-8(k^2+k-2)<0$.

因此

(a) 若 $-2<k<1$, (2)之二根爲不相等之實數;

(b) 若 $k<-2$ 或 $k>1$ 時, (2)之二根爲虛數. 答.

例 3. 證 m 爲任何數値時,聯立方程式

$$(4)\qquad y=mx+3$$

$$(5)\qquad 4x^2+y^2+6x-16=0$$

有二組不同之實數解答.

解 從 (4), 以 y 之值代入 (5), 並列爲二次徵式,得

$$(6)\qquad (4+m^2)x^2+(6m+6)x-7=0.$$

計算 (6) 之判別式,除去因數 $+4$, 得

$$(7)\qquad 16m^2+18m+37.$$

從 (7) 應用 § 7 定理 III,

$$\triangle=324-64\cdot37 \text{ 爲負, 而 } A=16.$$

故 m 爲任何實數時,二次式(7)有正值.因此由 § 3 定理 II, (6) 之二根恆爲不相等之實數. 即 (6) 有二實根 x_1 及 x_2, 再由 (4) 可得 y 之二個對應實數値 y_1 及 y_2, 故知 m 爲任何實數時 (4) 及 (5) 有二組不同之實數解 (x_1,y_1) 及 (x_2,y_2). Q. E. D

習 題

1. 試作不等式，以表下列指定之變數能在規定之界限內.

(a) x 有自 0 至 5 之任何值.
(b) y 有任何正值.
(c) t 有任何負值.
(d) x 有小於 -2 或大於 -1 之任何值.
(e) r 有自 -3 至 8 之任何值.
(f) z 有任何負值，或不小於 3 之正值.
(g) x 有不小於 -8 及不大於 2 之任何值.

2. 在 § 5 習題 1 中，當變數爲任何數值時，試決定諸二次式之符號.

3. 在 § 5 習題 1 中，若諸二次式之平方根爲實數時，試決定變數之實數值.

4. 在 § 5 習題 4 中，試決定參數之實數值而使諸方程式之根爲 (a) 不相等二實數，(b) 虛數.

5. 在 § 5 習題 6 中，試決定參數之實數值而使諸聯立方程式之二組公解爲 (a) 不相同之實數，(b 虛數.

6. 當變數爲任何數值時，試決定三次式

$$2(x+1)(x-2)(x-4)$$

之代數符號.

提示： 三次式之三根依次爲 $-1, 2, 4$. 若 $x<-1$，每個因式爲負 [§ 7,(1)]，而三次式爲負等等.

答. 若 $x<-1$，三次式 <0；$-1<x<2$，三次式 >0；$2<x<4$，三次式 <0；$4<x$，三次式 >0.

7. 當變數爲任何實數時，試決定下列代數形之符號.

提示： 由代數學知有實數係數之任何代數形可分解爲一次及二次之實數因式，每個因式之符號可用 § 7 (1) 及定理 III 決定之. 先將各實根依次排列，再視變數之值之小於二根，在二根之間，及大於二根時之情形，如例 6.

(a) $(x+1)(2x^2-4x+7)$.
(b) $(x^2-2x-3)(x^3-4x^2)$.
(c) $(3x+8)(x^2-4x+4)(x^3-1)$.
(d) $(2x^2+3)(x^2-4)(x^4-1)$.
(e) $(2x+3)(x-1)(x+2)(x-3)$.
(f) $(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)$.
(g) $(3x^2-12)(2-x)(3-2x)(5x+4)$.
(h) $(x-1)^2(3+2x)(4-5x)(6-x)^3$.
(i) $7(x^2-4)(9-x^2)(16-x^2)$.
(j) $(x^2-8)(2x^2-8)(3x^2-27)$.
(k) $(2x+8)^2((9-3x)(7-6x)(12-11x)$.

8. 無窮大根. 設二次方程式

$$Ax^2+Bx+C=0 \tag{1}$$

之二根爲 x_1 及 x_2 [§ 3, (3)].

則從 (1) 所得之反商方程式

$$Cx^2+Bx+A=0 \tag{2}$$

之二根*爲 $\frac{1}{x_1}$ 及 $\frac{1}{x_2}$, 此二根爲 (1) 二根之反商.

設 B, C 之值†爲確定,而任 A 之值漸次減小以至於零,則從(2)因 $\frac{A}{C}$ (§ 3, 定理 I) 爲二根之積,故此積亦必接近於零.因之 (2) 必有一根漸近於零.此根之反商,即 (1) 之根必漸次增大以至無窮.

再設 (1) 及 (2) 中, C 之值†爲確定,而任 B 及 A 之值漸近於零,則從(2),二根之和 $-\frac{B}{C}$ 及其積 $\frac{A}{C}$ 均接近於零.因此二根皆漸近於零.此二根之反商,即 (1) 之根,皆漸次增大以至無窮.

從上所述理由,得

定理 IV. 若二次方程式二次冪之係數漸次變化而以零爲極限,則有一根變爲無窮大‡.若一次冪係數亦漸次變化而以零爲極限,則二根均變爲無窮大.

例 1. k 應接近於何數爲極限,方可使

$$3x^2+2kx-k^2x^2-3-2kx^2=0$$

之一根變爲無窮大?

解 將方程式列爲徵式得

$$(k^2+2k-3)x^2-2kx+3=0.$$

---

* 此定理在代數學中已證明,今再證之:

以 $\frac{1}{x_1}$ 及 $\frac{1}{x_2}$ 爲二根之方程式爲 $\left(x-\frac{1}{x_1}\right)\left(x-\frac{1}{x_2}\right)=0$.

化簡得 $x_1x_2x^2-(x_1+x_2)x+1=0$.

從 § 3, 定理 I, $x_1x_2=\frac{C}{A}$, $x_1+x_2=-\frac{B}{A}$. 以此二值代入上式且以 A 乘之即得(2).

† C 之值不爲零.

‡ 一變數之絕對値漸次增加而大於任何假定之數值,則可稱該變數變爲無窮大.

若 $k^2+2k-3=0$，則一根變爲無窮大，故 k 應接近於 1 及 -3． 答．

例 2. k 及 m 應接近於何數，方可使方程式

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2kmx-a^2k^2-a^2b^2=0$$

之二根變爲無窮大？

解 從定理 IV 得

$$b^2-a^2m^2=0, \quad 或 \quad m=\pm\frac{b}{a},$$

及

$$2a^2km=0, \quad 或 \quad k=0,$$

故 m 應接近於 $+\frac{b}{a}$ 或 $-\frac{b}{a}$，及 k 應接近於零． 答．

習 題

1. 參數應接近於何種實數爲極限，方可使下列方程式之一根爲無窮大？
   (a) $kx^2-3x+5=0$.
   (b) $(k^2-1)x^2+6x-5=0$.
   (c) $2x^2-3x+k^2x^2+5=kx^2$.
   (d) $(m^2-4)x^2-3x+8=0$.
   (e) $(c^2-3)y^2+2cy-6=0$.
   (f) $2b^2y^2-3y-3by^2+2=-2y^2$.
2. 參數 k 及 m 應接近於何種實數，方可使下列方程式之二根爲無窮大？
   (a) $m^2x^2+(2k-m+1)x+6=0$.
   (b) $(m^2-3m+2)y^2+(3k-2m)y+2=0$.
   (c) $(m^2+k^2-25)t^2+(m-7k+25)t+8=0$.
   (d) $m^2x^2+3kx+k^2x^2-4mx+25x-25x^2=2$.
   (e) $(m^2+3)x^2+(2k-5)x+8=0$.

9. 多個變數之方程式． 解析幾何學中常述及二個或不止二個變數之方程式．

若以幾個變數之値代入方程式而能恆等，則可稱此組變數値適合於方程式．

例如 $x=2, y=-3$ 適合於方程式

$$2x^2+3y^2=35,$$

因 $$2(2)^2+3(-3)^2=35.$$

同理， $x=-1, y=0, z=-4$ 適合於方程式

$$2x^2-3y^2+z^2-18=0,$$

因 $$2(-1)^2-3\cdot 0+(-4)^2-18=0.$$

若一方程式各端能化爲 $ax^m y^n z^p$ 形式之各項之和者，稱此方程式爲幾個變數（如 x, y, z）之代數方程式，其中 a 爲常數，m, n, p 爲正整數或零。

如方程式 $$x^4+x^2y^2-z^3+2x-5=0,$$

$$x^5y+2x^2y^2=-y^3+5x^2+2-x,$$

皆爲代數方程式.

又方程式 $$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$$

亦爲代數方程式.

因兩端平方 $$x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y=a,$$

移項 $$2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=a-x-y.$$

再平方 $$4xy=a^2+x^2+y^2-2ax-2ay+2xy.$$

移項 $$x^2+y^2-2xy-2ax-2ay+a^2=0. \qquad Q.E.D$$

代數方程式以各項中之最高次爲次數*．將方程式之各項移於左端，依變數之降次排列，則稱此代數方程式關於變數而整列.

例如若將方程式

$$2x'^2+3y'+6x'-2x'y'-2+x'^3=x'^2y'-y'^2,$$

關於變數 x', y' 而整列，則得

$$x'^3-x'^2y'+2x'^2-2x'y'+y'^2+6x'+3y'-2=0.$$

此方程式爲三次式.

凡方程式之不爲代數式者稱爲超越方程式.

---

* 項之次數即爲該項各變數之指數之和。

例如　　$y=\sin x,\qquad y=2^x,\qquad \log y=3x,$

均爲超越方程式.

習　題

1. 證明下列各式均爲代數方程式;再將各項依變數 x, y 或 x, y, z 排列,並決定其次數.

(a) $x^2+\sqrt{y-5}+2x=0.$

(b) $x^{\frac{2}{3}}+y+3x=0.$

(c) $xy+3x^4+6x^2y-7xy^3+5x-6+8y=2xy^2.$

(d) $x+y+z+x^2z-3xy-2z^2=5.$

(e) $y=2+\sqrt{x^2-2x-5}.$

(f) $y=x+5+\sqrt{2x^2-6x+3}.$

(g) $x=-\frac{1}{2}D+\sqrt{\frac{D^2}{4}-F-Ey-y^2}.$

(h) $y=Ax+B+\sqrt{Lx^2+Mx+N}.$

2. 證明齊次二次式*

$$Ax^2+Bxy+Cy^2,$$

僅判別式 $\Delta=B^2-4AC$ 能適合下列所設之條件時,則可寫作下列類似於 § 3, (7) 之三種形式之一.

I. 若 $\Delta>0$,　$Ax^2+Bxy+Cy^2\equiv A(x-l_1y)(x-l_2y),$

II. 若 $\Delta=0$,　$Ax^2+Bxy+Cy^2\equiv A(x-l_1y)^2,$

III. 若 $\Delta<0$,　$Ax^2+Bxy+Cy^2\equiv A\left[\left(x+\frac{B}{2A}y\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}y^2\right].$

10. 直角三角形中一角之函數. 任何直角三角形中,銳角 A 之函數之定義爲

$$\sin A=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\qquad \csc A=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$$

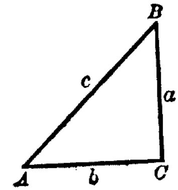
$$\cos A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}\qquad \sec A=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$$

$$\tan A=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}\qquad \cot A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$$

* 係數 A, B, C 及數 l_1, l_2 均假定爲實數.

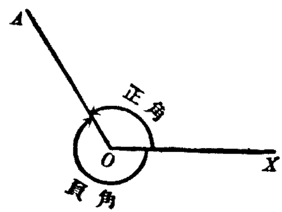
從上之定義可得下之定理:

在一直角三角形中,任何一邊等於其對角之正弦與斜邊之乘積,或其鄰角之餘弦與斜邊之乘積.



11. 角. 在三角法中,以 O 爲旋轉中心,直線 OA 在起始位置 OX 旋轉成 $\angle XOA$. 若 OA 旋轉方向與時針相反者, $\angle XOA$ 爲正,相同者爲負.

定邊 OX 稱爲基邊, OA 稱爲終邊.



角之量法 量角之大小,有二種方法,卽有二種單位角.

度量法 以旋轉一周之 $\frac{1}{360}$ 爲一單位角,此單位角稱爲一度.

弧度法 若一角所對之弧與此弧之半徑等長,則此角可作爲一單位角,稱爲一弧度.

以上二種單位角之關係爲

$$180 \text{ 度} = \pi \text{ 弧度} \quad (\pi = 3.14159\cdots\cdots)$$

再簡化之,

$$1 \text{ 度} = \frac{\pi}{180} = 0.0174\cdots\cdots \text{弧度}.$$

$$1 \text{ 弧度} = \frac{180}{\pi} = 57.29\cdots\cdots \text{度}.$$

用此二方程式可將二種單位角轉換,高等數學中,弧度法應用甚廣,本書亦採用之.

以 O 爲旋轉中心,動線 OA 旋轉之周數,可隨吾人意之所欲,故得下之重要結果;

任何實數可爲一角之弧度,反之,任何角可以一實數量之.

12. 三角法中之公式及定理.

1. $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$; $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$; $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.

2. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

3. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$; $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

4. $\sin(-x) = -\sin x$; $\csc(-x) = -\csc x$;
   $\cos(-x) = \cos x$; $\sec(-x) = \sec x$;
   $\tan(-x) = -\tan x$; $\cot(-x) = -\cot x$.

5. $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
   $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$;
   $\tan(\pi - x) = -\tan x$; $\tan(\pi + x) = \tan x$;

6. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$;
   $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$;
   $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$; $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$.

7. $\sin(2\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$, 等等.

8. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

9. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

10. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

11. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

12. $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

13. $\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$.

tan 240 = tan 60 = $\sqrt{3}$
tan 150 = $-$tan 30 = $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{3}{4}\pi$弧度 $= \frac{3}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} - 35^\circ$

14. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$;　　　$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2$;

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

15. $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$;　　　$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$;

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

16. 定理　正弦定律　任何三角形中,各邊與其對角之正弦成比例;

即 $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

17. 定理　餘弦定律　任何三角形中,一邊之平方等於其餘二邊平方之和減去該二邊與其夾角之餘弦相乘積之二倍;

即 $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

18. 定理　三角形之面積　任何三角形之面積等於任何二邊與該二邊夾角之正弦相乘積之半;

即 $$\text{面積} = \tfrac{1}{2}ab\sin C = \tfrac{1}{2}bc\sin A = \tfrac{1}{2}ca\sin B.$$

13. 三角函數之自然數.

角(弧度)	角(度數)	sin	cos	tan	cot		
.0000	0°	.0000	1.0000	.0000	∞	90°	1.5708
.0873	5°	.0872	.9962	.0875	11.430	85°	1.4835
.1745	10°	.1736	.9848	.1763	5.671	80°	1.3963
.2618	15°	.2588	.9659	.2679	3.732	75°	1.3090
.3491	20°	.3420	.9397	.3640	2.747	70°	1.2217
.4363	25°	.4226	.9063	.4663	2.145	65°	1.1345
.5236	30°	.5000	.8660	.5774	1.732	60°	1.0472
.6109	35°	.5736	.8192	.7002	1.428	55°	.9599
.6981	40°	.6428	.7660	.8391	1.192	50°	.8727
.7854	45°	.7071	.7071	1.0000	1.000	45°	.7854
		cos	sin	cot	tan	角(度數)	角(弧度)

角(弧度)	角(度數)	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	$0°$	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	∞	0	∞	1

14. 符號規則.

象限	sin	cos	tan	cot	sec	csc
第一 ……	+	+	+	+	+	+
第二 ……	+	−	−	−	−	+
第三 ……	−	−	+	+	−	−
第四 ……	−	+	−	−	+	−

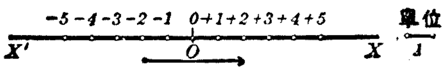
15. 希臘字母.

文字	讀音	文字	讀音	文字	讀音
Α α	Alpha	Ι ι	Iota	Ρ ρ	Rho
Β β	Beta	Κ κ	Kappa	Σ σ ς	Sigma
Γ γ	Gamma	Λ λ	Lambda	Τ τ	Tau
Δ δ	Delta	Μ μ	Mu	Υ υ	Upsilon
Ε ϵ	Epsilon	Ν ν	Nu	Φ ϕ	Phi
Ζ ζ	Zeta	Ξ ξ	Xi	Χ χ	Chi
Η η	Eta	Ο ο	Omicron	Ψ ψ	Psi
Θ θ	Theta	Π π	Pi	Ω ω	Omega

第　二　章

笛　卡　兒　坐　標

16.　方向直線.　設 $X'X$ 爲一無限直線，在此直線上選一原點 O. 再以適當之長爲單位，自 O 點向右量之爲正，向左爲負.於是任一實數之表一直線 OP 長度之度量者，可在直線上決定一點 P 之位置.



反之，直線上任何一點，可有相當之實數，以表 OP 長度之度量，P 在原點之右方則 OP 之長度爲正，在左方爲負.

設直線 $X'X$ 上一點相當於一正數，則自原點至該點之方向稱爲正向.凡已假定有原點，長度單位，及正向之直線稱爲**方向直線**.

箭頭常用以指示方向直線之正向.

設方向直線上有二點 A 及 B，而

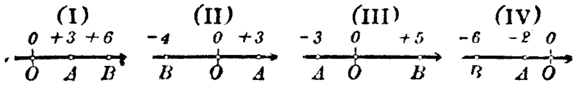
$$OA=a,\quad OB=b,$$

則 AB 之長度爲 $b-a$；即其長度爲 B 之相當數值減 A 之相當數值所得之差.此種情形可以下之定義表明之.

設 A, B 爲方向直線上任何二點，則 AB 之長爲

(1)
$$AB = OB - OA,$$

其中 O 爲原點.



說明

在圖 I. $AB=OB-OA=6-3=+3$;　　$BA=OA-OB=3-6=-3$;

II. $AB=OB-OA=-4-3=-7$;　　$BA=OA-OB=3-(-4)=7$;

III. $AB=OB-OA=+5-(-3)=+8$;　　$BA=OA-OB=-3-5=-8$;

IV. $AB=OB-OA=-6-(-2)=-4$;　　$BA=OA-OB=-2-(-6)=+4$.

從此得下列方向直線上長度之性質:

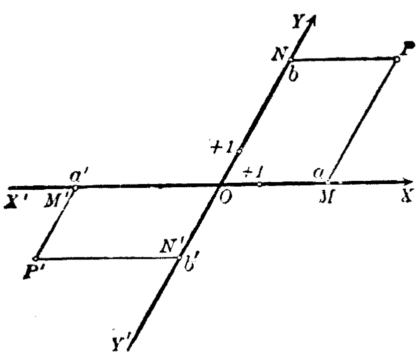
(2)　$AB=-BA$.

(3)　設自 A 至 B 之方向與直線之正向相同, AB 爲正,反之爲負.

設 A, B 二點均在方向直線上,則"二點間之距離"之辭句不能適用.而應稱 AB, 須知 AB 及 BA 並不相等, 但 $AB=-BA$.

17. 笛卡兒*坐標. 設二方向直線 $X'X$ 及 $Y'Y$ 相交於 O, P 爲平面上任何一點. 自 P 作二直線各平行於 $X'X$ 及 $Y'Y$. 則因

$$OM=a,\quad ON=b,$$



a, b 二數可稱爲 P 之**笛卡兒坐標**, a 爲**橫坐標**, b 爲**縱坐標**, 方向直線 $X'X$ 及 $Y'Y$ 稱爲**坐標軸**, $X'X$ 爲**橫軸**, $Y'Y$ 爲**縱軸**. 二軸交點爲**原點**.

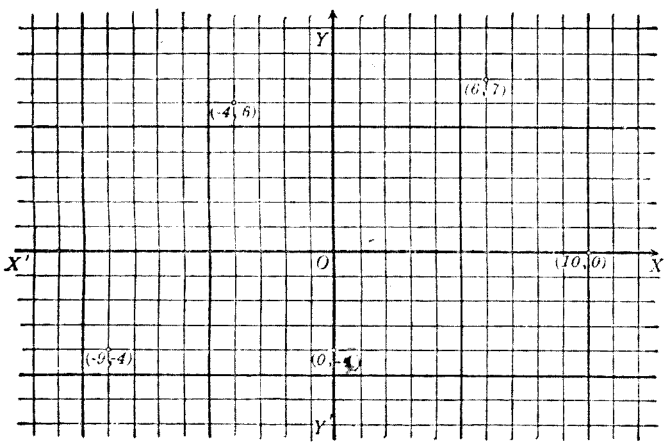
* 以坐標應用於幾何學自 René Descartes (1596-1650) 始,故稱之.

P 之坐標 a, b 可寫爲 (a, b)，記號 $P(a, b)$ 可稱爲"一點 P，其坐標爲 a 及 b."

平面上任何一點 P 決定二數值，卽 P 點之坐標．反之，已知任何二實數 a' 及 b'，可以 (a', b') 爲坐標在平面上求得一點 P'．蓋先作 $OM'=a'$，$ON'=b'$，再自 M' 及 N' 各作直線與二軸平行，此二線卽交於 $P'(a', b')$．故任何一點可決定一對實數，反之，一對實數可決定一點．

代數學中之虛數在坐標系上無位置，故初等解析幾何學中所述及者均爲實數．

18. 直角坐標． 此種坐標由互相垂直之二軸 $X'X$ 及 $Y'Y$ 決定之．以後如不特別指明，常作此種坐標．



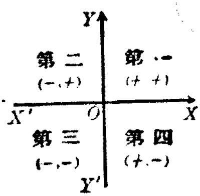
在直角坐標紙上作點甚爲簡便，坐標紙之構造可在紙上畫小方格使各邊與軸平行卽成．

上圖中描寫數點之位置，軸上每格表一單位．各點位置之求法述之如

下：

自 O 沿 $X'X$ 取一點使其距離所表之格數等於橫坐標.再自此點沿與縱軸平行之直線取一點,使其距離所表之格數等於縱坐標,卽得該點之位置.其符號可決定於下之

規則：



橫坐標之正負依所取之距離自 O 向右或向左而定,縱坐標之正負依所取之距離在 X 軸之上方或下方而定.

直交軸分平面爲四部分曰象限；其次序與符號均載明於圖中.

習　　題

1. 描寫 $(3,2)$, $(3,-2)$, $(-4,3)$, $(6,0)$, $(-5,0)$, $(0,4)$ 諸點之位置.

2. 描寫 $(1,6)$, $(3,-2)$, $(-2,0)$, $(4,-3)$, $(-7,-4)$, $(-2,4)$, $(0,-1)$, $(\sqrt{3},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{5},0)$ 諸點之位置.

3. 原點之坐標爲何?

4. 若 a, b 爲正數,下列各點在何種象限內: $(-a,b)$? $(-a,-b)$? $(b,-a)$? (a,b)?

5. 一點應在何種象限內,若其橫坐標爲正?爲負?縱坐標爲正?爲負?

6. 以 $(2,-1)$, $(-2,5)$, $(-8,-4)$, 爲頂點,描寫一三角形.

7. 以 $(-2,0)$, $(5\sqrt{3}-2,5)$, $(-2,10)$ 爲頂點,描寫一三角形.

8. 以 $(0,-2)$ $(4,2)$, $(0,6)$, $(-4,2)$ 爲頂點 描寫一四邊形.

9. 若一點平行於 x 軸而移動,何種坐標固定不變?若平行於 y 軸移動則如何?

10. 若一點之橫坐標爲零,此點能否移動?在何處?若縱坐標爲零則如何?在何處?若橫坐標縱坐標均爲零時則如何?在何處?

11. 若一點之橫坐標爲 2, 此點應在何處?縱坐標爲 -3 時則如何?

12. 若一點之橫坐標與縱坐標相等,此點應在何處?

13. 矩形二邊之長爲 a 及 b, 且各與 x 軸及 y 軸相合.求此矩形各頂點之坐標,設此矩形在第一象限?第二象限?第三象限?第四象限?

14. 作一四邊形，其頂點爲 $(-3,6)$ $(-3,0)$ $(3,0)$, $(3,6)$. 此爲何種四邊形?

15. 聯 $(3,5)$ 及 $(-3,-5)$; 再聯 $(3,-5)$ 及 $(-3,5)$. 求此二聯線交點之坐標.

16. 證 (x,y) 與 $(x,-y)$ 關於 $X'X$ 爲對稱; (x,y) 與 $(-x,y)$ 關於 $Y'Y$ 爲對稱; 及 (x,y) 與 $(-x,-y)$ 關於原點爲對稱.　$\perp = x.\ y.\ 0.$

17. 兩點之聯線爲原點所二等分，設一點之坐標爲 $(a,-b)$，則他一點之坐標爲何?

18. 作坐標軸所交角之二等分線. 在此線上任何點之橫坐標與縱坐標有何關係，設此二等分線在第一第三象限中? 在第二第四象限中?

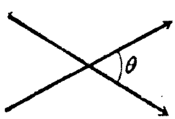
19. 正方形之邊長爲 $2a$，中心爲原點. 若此正方形之各邊與軸平行，其頂點之坐標爲何? 若對角線與軸相合則如何?

答. (a,a), $(a,-a)$, $(-a,-a)$, $(-a,a)$;
$(a\sqrt{2},0)$, $(-a\sqrt{2},0)$, $(0,a\sqrt{2})$, $(0,-a\sqrt{2})$.

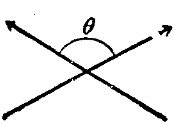
20. 等邊三角形之一邊爲 a，底邊與 x 軸相合，頂點在 $X'X$ 之上方. 若底邊之中點爲原點，則各頂點之坐標爲何? 若底邊之左端爲原點則如何?

答 $\left(\frac{a}{2},0\right)$, $\left(-\frac{a}{2},0\right)$, $\left(0,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$;
$(0,0)$, $(a,0)$, $\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

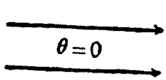
19. 角　二方向直線之交角爲二直線正向所成之角，圖中二方向直線所交之角爲 θ.

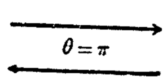


若二方向直線平行，其交角爲零或 π，依二線之方向相同或相反而定.

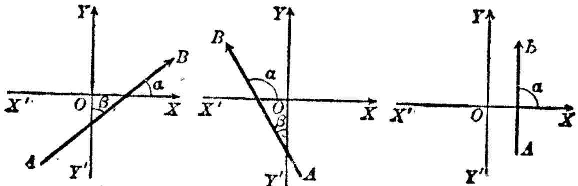


二方向直線之交角可有自 0 至 π 之一切値. 若以二方向線之一方向反轉，其交角 θ 變爲補角 $\pi-\theta$. 若二方向均反轉，則其交角不變.





一直線與 $X'X$ 相交時，吾人常假定向上之方向爲正(見圖).



(1)　(2)　(3)

定理 I.　若一向上直線與直交軸 OX 及 OY 之交角各為 α 及 β，則

(1)
$$\cos\beta = \sin\alpha.$$

證　各種情形可以上列三圖為準則.

由(1)圖，
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

因此
$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \qquad \text{[從 § 12. (6)]}.$$

由(2)圖
$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

因此
$$\cos\beta = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha \qquad \text{[從 § 12. (4) 及 (6)]}$$

由(3)圖
$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = 0.$$

$$\therefore \quad \cos\beta = 1 = \sin\alpha \qquad Q.\ E.\ D.$$

若一直線與 $X'X$ 平行，吾人恆假定與 $X'X$ 相同之方向（即向右）為正．因此 $\alpha = 0$，$\beta = \frac{\pi}{2}$，而(1)仍能適合，因

$$\cos\beta = \cos\frac{\pi}{2} = 0 = \sin 0 = \sin\alpha$$

習　題

1. 設一向下之有向線，證 con $\beta = -\sin\alpha$.　　$\gamma+\beta=270$，$\beta=90+\gamma$

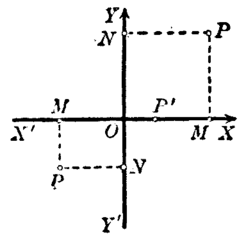
2. 求 α 及 β 之值，若該直線之方向爲 N. E.? N. W.? S. E.? S. W.?（假定二軸指羅盤上之方位基點）。

3. 設二向上之直交線，求其 α 間及 β 間之各個關係。

答。 $\alpha'-\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\beta'+\beta=\frac{\pi}{2}$.

20. 正射影. 一點在一直線上之**正射影**，卽爲自點至直線所作垂線之足.

如圖



M 爲 P 點在 $X'X$ 上之正射影；

N 爲 P 點在 $Y'Y$ 上之正射影；

P' 爲 P' 點在 $X'X$ 上之正射影.

若 A 及 B 爲方向直線上之二點，M 及 N 爲 A, B 二點在第二方向直線 CD 上之射影．則 MN 稱爲 **AB 在 CD 上之射影**.

定理 II. 第一射影定理. 若 A, B 爲一方向直線上之二點，而此方向直線與另一方向直線之交角爲 γ，則

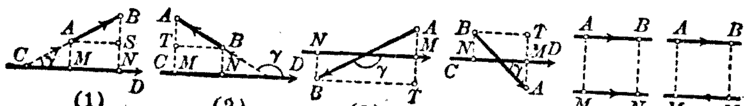
(II) $$AB \text{ 在 } CD \text{ 上之射影} = AB\cos\gamma.$$

證 下列各圖中設

$$a = AB \text{ 長度之絕對值},$$

$$l = AS \text{ 或 } BT \text{ 長度之絕對值};$$

則 a 及 l 均表各線長度之正數，在直角三角形 ABS 及 ABT 中應用餘弦定義 (§ 10).



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

從(1)圖，
$$l=a\cos BAS=a\cos\gamma,$$
$$MN=l,\quad AB=a.$$
$$\therefore\quad MN=AB\cos\gamma.$$

從(2)圖，
$$l=a\cos ABT=a\cos(\pi-\gamma)$$
$$=-a\cos\gamma, \qquad [\S\ 12, (5)]$$
$$MN=l,\quad AB=-a.$$
$$\therefore\quad MN=AB\cos\gamma.$$

從(3)圖，
$$l=a\cos ABT=a\cos(\pi-\gamma)$$
$$=-a\cos\gamma,$$
$$MN=-l,\quad AB=a.$$
$$\therefore\quad MN=AB\cos\gamma.$$

從(4)圖，
$$l=a\cos ABT=a\cos\gamma,$$
$$MN=-l,\quad AB=-a,$$
$$\therefore\quad MN=AB\cos\gamma.$$

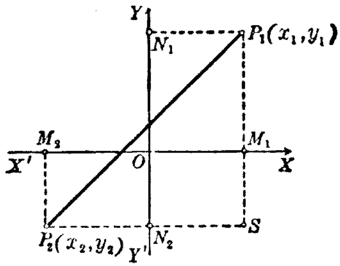
從(5)圖，
$$\gamma=0,\quad MN=l,\quad AB=a.$$
因此
$$MN=AB=AB\cos 0\ (\text{因}\cos 0=1).$$
$$\therefore\quad MN=AB\cos\gamma.\qquad MN=AB$$

從(6)圖，
$$\gamma=\pi,\quad MN=-l,\quad AB=a.$$
因此
$$MN=-AB=AB\cos\pi\ (\text{因}\cos\pi=-1).$$
$$\therefore\quad MN=AB\cos\gamma.$$
Q. E. D.

設已知二點　$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，

由圖得

$$M_1M_2=P_1P_2\text{ 在 }X'X\text{ 上之射影},$$
$$N_1N_2=P_1P_2\text{ 在 }Y'Y\text{ 上之射影}.$$



但從 § 16, (1).

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1,$$

$$N_1N_2 = ON_2 - ON_1 = y_2 - y_1.$$

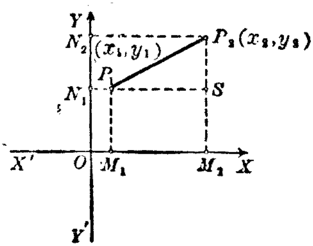
故得

定理 III. 設任意二點 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$；則

(III) $$\begin{cases} x_2 - x_1 = P_1P_2 \text{ 在 } X'X \text{ 上之射影}; \\ y_2 - y_1 = P_1P_2 \text{ 在 } Y'Y \text{ 上之射影}. \end{cases}$$

21. 長度. 今可證得重要

定理 IV. 聯兩點 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 之直線，其長度 l 之公式為



(IV) $$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

證 過 P_1 及 P_2 作直線平行於二軸使成直角三角形 P_1SP_2.

則 $$SP_1 = M_2M_1 = x_1 - x_2 \qquad \text{從(III)}$$

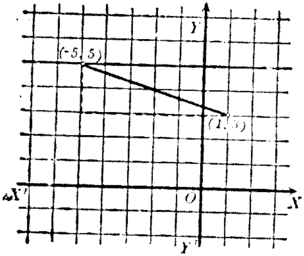
$$P_2S = N_2N_1 = y_1 - y_2, \qquad \text{從(III)}$$

$$P_1P_2 = \sqrt{\overline{P_2S}^2 + \overline{SP_1}^2};$$

故得 $$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \qquad Q. E. D.$$

若 P_1 及 P_2 在任何位置，(IV) 之求法如下：

過 P_1 及 P_2 作直線平行於二軸使成一直角三角形，此三角形之二邊等於 P_1P_2 在二軸上之射影．此二射影可用 (III) 求之，其值之符號或全為正，或一正一負，或全為負．但所求 P_1P_2 之長度為二射影平方和之平方根．故不論其射影為正為負，其結果恆同．若多作不同位置之圖形，可使此法更易明瞭．



例 1.　求兩點 (1, 3) 及 (−5, 5) 聯線之長度．

解　命 (1, 3) 及 (−5, 5) 各為 P_1 及 P_2 則

$$x_1=1,\ y_1=3,\ 及\ x_2=-5,\ y_2=5;$$

代入 (IV)，得

$$l=\sqrt{(1+5)^2+(3-5)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$

所應注意者卽所求之長度為以 6 及 2 作二直角邊所成直角三角形斜邊之長度．

註　P_1 及 P_2 在任何位置時，公式 (III) 及 (IV) 恆能正確，此事極為重要．此種公式之應用卽以已知值直接代入，如上例然．求普遍公式，與已知點在何種象限無關，故為便利計，已知點恆假定在第一象限內而使各已知數量皆為正值．

習　題

1.　求下列諸點聯線之長度及在軸上之射影：

(a)　(−4, −4) 及 (1, 3).　　答．射影 5, 7；長度 $=\sqrt{74}$.

(b)　$(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 及 $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$.　　答．射影 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$；長度 $=\sqrt{10}$.

(c)　(0, 0) 及 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.　　答．射 $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{3}$；長度 $=a$.

(d) $(a+b, c+a)$ 及 $(c+a, b+c)$.

答. 射影 $c-b, b-a$; 長度 $=\sqrt{(b-c)^2+(a-b)^2}$.

2. 求下列三角形各邊在軸上之射影:

(a) $(0, 6), (1, 2), (3, -5)$.

(b) $(1, 0)$ $(-1, -5), (-1, -8)$.

(c) $(a$ $b)$ $(b, c), (c, d)$.

3. 求習題 2 中三角形各邊之長度.

4. 求公式 (III) 及 (IV), (a) 若 $x_1=x_2$; (b) 若 $y_1=y_2$.

5. 求一三角形各邊之長度,此三角形之頂點爲 $(4, 3), (2, -2), (-3, 5)$.

6. 證 $(1, 4), (4, 1), (5, 5)$ 爲等腰三角形之頂點.

7. 證 $(2, 2), (-2, -2), (2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ 爲等邊三角形之頂點.

8. 證 $(3, 0), (6, 4), (-1, 3)$ 爲直角三角形之頂點,其面積爲何?

9. 證 $(-4, -2), (2, 0), (8, 6), (2, 4)$ 爲平行四邊形之頂點,並求其對角線之長度.

10. 證 $(11, 2), (6, -10), (-6, -5), (-1, 7)$ 爲正方形之頂點,求其面積.

11. 證 $(1, 3), (2, \sqrt{6}), (2, -\sqrt{6})$ 皆與原點等距,即諸點均在以原點爲中心,$\sqrt{10}$ 爲半徑之圓周上.

12. 證矩形之對角線相等.

13. 三角形之頂點爲 $(a, b), (-a, b), (-a, -b)$, 求其周圍.

14. 將下列諸點順次兩兩聯結成一多邊形,求其周圍:

$(6, 4), (4, -3), (0, -1), (-5, -4)$ $(-2, 1)$.

15. 一直線之長爲 13, 一端之坐標爲 $(-4, 8)$, 他端之縱坐標爲 3, 其橫坐標爲何?

16. 若一點 (x, y) 與 $(7, -2)$ 之距離爲 11, 則此點之坐標應適合於何種方程式?

17. 一點 (x, y) 與 $(2, 3)$ 及 $(4, 5)$ 兩點等距,應以何種方程式表明其結果?

18. 設 $\angle XOY$ (§ 17 圖) 等於 ω, 證 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 之距離爲

$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega}.$$

19. 若 $\omega=\frac{\pi}{3}$, 求 $(-3, 3)$, 及 $(4, -2)$ 兩點間之距離. 答. $\sqrt{39}$.

20. 若 $\omega=\frac{\pi}{3}$, 求以 $(1, 3), (2, 7), (-4, -4)$ 爲頂點之三角形之周圍.

答. $\sqrt{21}+\sqrt{223}+\sqrt{109}$.

21. 若 $\omega=\frac{\pi}{6}$, 求三角形 $(1, 2), (-2, -4), (3, -5)$ 之周圍.

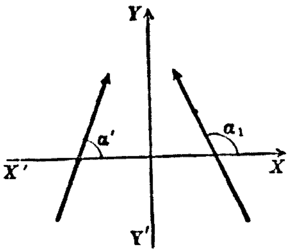
答. $3\sqrt{5+2\sqrt{3}}+\sqrt{26-5\sqrt{3}}+\sqrt{53-14\sqrt{3}}$.

22. 證 $(6, 6), (7, -1), (0, -2), (-2, 2)$ 均在以 $(3, 2)$ 爲中心之圓周上.

23. 若 $\omega=\frac{3\pi}{4}$, 求$(\sqrt{3}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 間之距離.　　　答. $\sqrt{10+\sqrt{2}}$.

24. 若多邊形各邊有順次環繞周圍之方向，證各邊在一軸上射影之和爲零.

22. 傾角及斜率. 一向上直線與 x 軸之交角爲此直線之**傾角**.



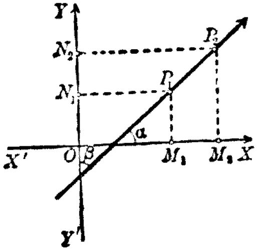
一直線傾角之正切，爲此直線之**斜率**.

α, α_1, α_2, α' 等常表直線之傾角，m, m_1, m_2, m' 等常表斜率，故 $m=\tan\alpha$, $m_1=\tan\alpha_1$，餘類推.

傾角可有自 0 至 π 之一切值(§ 19). 因一角之正切，在第一二象限中，爲任何之正數或負數，故斜率可有一切之實數. 一直線平行於 $X'X$ 其傾角爲 0 或 π，其斜率當爲零. 一直線平行於 $Y'Y$，其斜率當爲無窮大.

定理 V. 若 m 爲 $P_1(x_1, y_1)$, $P(x_2, y_2)$ 兩點聯線之斜率，則

(V)
$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$



證
$$M_1M_2=x_2-x_1 \qquad [\text{從 § 20, (III)}]$$
$$=P_1P_2\cos\alpha. \qquad [\text{從 § 20, (II)}]$$

(1)
$$\therefore\quad P_1P_2\cos\alpha=x_2-x_1.$$

同理　$N_1N_2 = y_2 - y_1$　[從 § 20,(III)]

$= P_1P_2 \cos\beta.$　[從 § 20,(II)]

(2)　$\therefore\quad P_1P_2\cos\beta = y_2 - y_1.$

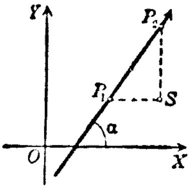
但　$\cos\beta = \sin\alpha.$　[從 § 19,(I)]

因此從(2)

(3)　$P_1P_2 \sin\alpha = y_2 - y_1.$

(3)除以(1),　$\tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$　*Q. E. D.*

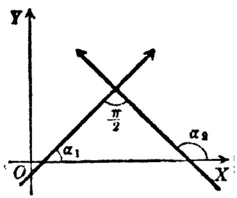
註　作直角三角形如 § 21, 定理IV, 使 P_1P_2 爲斜邊, 則 $\tan\alpha\,(=\tan\angle SP_1P_2)$ 之値, 爲對邊 $SP_2 = y_2 - y_1$ 與隣邊 $P_1S = x_2 - x_1$* 之比. 用此可驗公式 (V).



定理 VI.　若二直線平行則斜率相等. 若二直線垂直, 則一線之斜率爲第二線斜率之負倒數. 其逆理亦成立.

證　設 α_1 及 α_2 爲二線之傾角, m_1 及 m_2 爲斜率.

若二線平行　$\alpha_1 = \alpha_2$,　$\therefore\quad m_1 = m_2.$



若二線垂直, 如圖,

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2},\ \text{或}\ \alpha_1 = \alpha_2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad m_1 = \tan\alpha_1 = \tan\left(\alpha_2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$= -\cot\alpha_2$　[從 § 12, (4) 及 (6)]

* 過 P_1 作一直線, 使其斜率爲 $\frac{a}{b}$, 可自 P_1 向右量 b 單位得 S 點, 再自 S 向上量 a 單位得 P_2 點, 聯 P_1P_2 卽得. 若斜率爲負分數 $-\frac{a}{b}$, 則 S 在 P_1 之左或 P_2 在 S 之下均可.

$$= -\frac{1}{\tan\alpha_2}. \qquad [從 § 12, (1)]$$

$$\therefore \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}. \qquad Q.E.D.$$

逆定理之證明，祇須逐步倒推，在第二部分中 α_2 大於 α_1.

習 題

1. 求 (1, 3) 及 (2, 7) 聯線之斜率。 答. 4.
2. 求 (2,7) 及 (−4, −4) 聯線之斜率. 答. $\frac{11}{6}$.
3. 求 $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ 及 $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$聯線之斜率. 答. $2\sqrt{6}-5$.
4. 求 $(a+b, c+a)$ 及 $(c+a, b+c)$ 聯線之斜率. 答. $\frac{b-a}{c-b}$.
5. 求三角形 (1, 1), (−1, −1), $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 各邊之斜率. 答. 1, $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$, $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.
6. 用斜率證 (−4, −2), (2, 0), (8, 6), (2, 4) 爲平行四邊形之頂點.
7. 用斜率證 (3, 0), (6, 4), (−1, 3) 爲直角三角形之頂點.
8. 用斜率證 (0, −2), (4, 2), (0, 6), (−4, 2) 爲矩形之頂點. 再用公式 (IV) 證此矩形爲正方形.
9. 用斜率證習題 8 中正方形之對角線相等.
10. 用斜率證 (10, 0), (5, 5), (5, −5), (−5, 5) 爲梯形之頂點.
11. 證 (a,b) 及 $(c, -d)$ 之聯線平行於 $(-a, -b)$ 及 $(-c, d)$ 之聯線.
12. 證原點與 (a, b) 之聯線垂直於原點與 $(-b, a)$ 之聯線.
13. 一直線之傾角爲何，若此直線平行於 $Y'Y$? 垂直於 $Y'Y$?
14. 一直線之斜率爲何，若此直線平行於 $Y'Y$? 垂直於 $Y'Y$?
15. (2, 2) 及 (−2, −2) 兩點聯線之傾角爲何? 答. $\frac{\pi}{4}$.
16. (−2, 0) 及 (−5,3) 兩點聯線之傾角爲何? 答. $\frac{3\pi}{4}$.
17. (3, 0) 及 $(4, \sqrt{3})$ 兩點聯線之傾角爲何? 答. $\frac{\pi}{3}$.
18. (3, 0) 及 $(2, \sqrt{3})$ 兩點聯線之傾角爲何? 答. $\frac{2\pi}{3}$.
19. (0, −4) 及 $(-\sqrt{3}, -5)$ 兩點聯線之傾角爲何? 答. $\frac{\pi}{6}$.
20. (0, 0) 及 $(-\sqrt{3}, 1)$ 兩點聯線之傾角爲何? 答. $\frac{5\pi}{6}$.

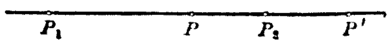
21. 用斜率證 $(2, 3)$, $(1, -3)$, $(3, 9)$ 三點共線.

22. 用斜率證 $(a, b+c)$, $(b, c+a)$, $(c, a+b)$ 三點共線

23. 證 $(1, 5)$ 在 $(0, 2)$ 及 $(2, 8)$ 二點之聯線上，並與該二點等距.

24. 證 $(3, -2)$ 及 $(5, 1)$ 之聯線與 $(10, 0)$ 及 $(13, -2)$ 之聯線垂直.

23. 分點. 一方向直線上有二定點 P_1 及 P_2. 在此線上另有第三點 P 或 P', "分此線爲二分", 吾人稱 P 或 P' 爲**分**點. 此點在 P_1P_2 之內曰



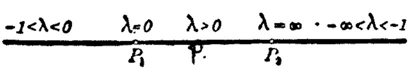
內分, 在外曰**外分**. 分點之位置全視此點與 P_1 及 P_2 距離之比值而定. 設此線有方向, 其距離須用一規則定之, 今如下述:

過 P_1 及 P_2 之方向直線上設有一分點 P_1, 則 P 點分 P_1P_2 爲二分 P_1P 及 PP_2. $\dfrac{P_1P}{PP_2}$ 之比值*即爲**分比**.

吾人常以 λ 表此比值, 即

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}.$$

若爲內分, P_1P 及 PP_2 方向相同, 故符號亦同, 而 λ 爲正. 若爲外分, λ 爲負. 因此 λ 之符號即指分點 P 在線分 P_1P_2 之內或外; 其絕對值即指分點 P 是否近於 P_1 或 P_2. λ 之分配示之於下圖.



即 λ 在 P_1 及 P_2 間有任何一切正值, 在 P_1 之左有 0 與 -1 間之任何負值, 在 P_2 之右有 -1 與 $-\infty$ 之任何負值. 惟 λ 爲 -1 之值除外.

用坐標可證

定理 VII. 分點. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 兩點聯線之分點爲 P. 若所分

* 爲便於記憶計, 寫比值時, 在分子中 P 點在後, 在分母中 P 點在前.

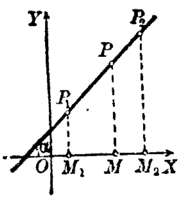
二分之比值爲

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda,$$

則分點 P 之坐標 (x, y) 爲

(VII) $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

證 已知 $$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}.$$



設 α 爲 P_1P_2 之傾角. M_1, M, M_2 各爲 P_1, P, P_2 在 x 軸上之射影.

從第一射影定理 [§ 20, (II)].

$$M_1M=P_1P\cos\alpha,$$

$$MM_2=PP_2\cos\alpha.$$

相除, $$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda.$$ (假設)

但 $$M_1M=x-x_1.$$

$$MM_2=x_2-x,$$ [從 § 20, (III)]

代入, $$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

去分母, 求 x,

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

同理 $$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$ *Q. E. D.*

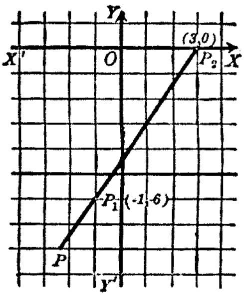
系. 中點. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 兩點聯線中點之坐標 (x, y) 爲所設二

點橫坐標及縱坐標之各個平均數；即

$$x=\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\qquad y=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2).$$

若 P 爲 P_1P_2 之中點，則 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}=1.$

例 1. P 點分 $P_1(-1,-6)$, $P_2(3,0)$ 之比爲 $\lambda=-\frac{1}{4}$, 求 P 點.



解 應用(VII), $x_1=-1, y_1=-6, x_2=3, y_2=0.$

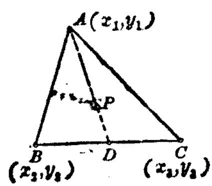
$$\therefore\quad x=\frac{-1-\frac{1}{4}\cdot 3}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}}=-2\tfrac{1}{3},$$

$$y=\frac{-6-\frac{1}{4}\cdot 0}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-6}{\frac{3}{4}}=-8.$$

$\therefore$ P 點爲 $(-2\frac{1}{3},-8)$. 答.

例 2. 三角形之三頂點爲(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3), 求三中線交點之坐標.

解 設中線爲 AD, 中線之交點爲 P, 則由平面幾何學 $AP=\frac{2}{3}AD$, 即 $AP:PD::2:1$, 或 $\lambda=2$.



從系得 D 爲 $[\frac{1}{2}(x_2+x_3),\frac{1}{2}(y_2+y_3)]$.

應用 (VII), A 之坐標爲 (x_1,y_1), D 之坐標相當於 (x_2,y_2), 得 P 點之坐標

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{1}{2}(x_2+x_3)}{1+2},$$

$$y=\frac{y_1+2\cdot\frac{1}{2}(y_2+y_3)}{1+2}.$$

$$\therefore\qquad x=\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\qquad y=\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$ 答.

此三角形中線交點之橫坐標，爲三個頂點橫坐標之平均數，縱坐標亦然.

因答數爲對稱式,其求法與選擇中線無關.此即證明上二式爲三中線交點之普遍公式.

習 題

1. 求 $(4, -6)$ 及 $(-2, -4)$ 聯線中點之坐標. 答. $(1, -5)$.
2. 求 $(a+b, c+d)$ 及 $(a-b, d-c)$ 聯線中點之坐標. 答. (a, d).
3. 三角形之三頂點爲 $(2, 3)$, $(4, -5)$ 及 $(-3, -6)$, 求三邊之中點及三中線之長度.
4. 一點分 $(-1, 4)$ 及 $(-5, -8)$ 之聯線成 $1:3$ 之比,求分點之坐標. 答. $(-2, 1)$.
5. 一點分 $(-3, -5)$ 及 $(6, 9)$ 之聯線成 $2:5$ 之比,求分點之坐標. 答. $(-\frac{3}{7}, -1)$.
6. 一點以 $-\frac{4}{3}$ 之比值分 $(2, 6)$ 及 $(-4, 8)$ 之聯線爲兩分,求分點之坐標.
答. $(-22, 14)$.
7. 一點以 $-\frac{2}{3}$ 之比值分 $(-3. -4)$ 及 $(5, 2)$ 之聯線爲兩分,求分點之坐標.
答 $(-19, -16)$.
8. 求 $(-2, -1)$ 及 $(3, 2)$ 聯線之三等分點之坐標. 答. $(-\frac{1}{3}, 0)$, $(\frac{4}{3}, 1)$.
9. 證直角三角形斜邊之中點與三頂點等距.
10. 平行四邊形之頂點爲 $(1, 2)$, $(-5, -3)$, $(7, -6)$, $(1, -11)$, 證其對角線互相平分.
11. 證平行四邊形之對角線互相平分.
12. 四邊形之頂點爲 $(6, 8)$, $(-4, 0)$, $(-2, -6)$, $(4, -4)$,證其對邊中點之聯線互相平分.
13. 在習題 12 之四邊形中,用斜率證鄰邊中點之聯線成一平行四邊形.
14. 梯形之頂點爲 $(-8, 0)$, $(-4, -4)$, $(-4\ \ 4)$ 及 $(4, -4)$,證不平行二邊中點之聯線平行於其底,且其長度等於二底邊和之半.
15. 一點 $(-2, 3)$ 分 $(-3, 5)$ 及 $(4, -9)$ 之聯線成何種比? 答. $\frac{1}{6}$.
16. 一點 $(16, 3)$ 分 $(-5, 0)$ 及 $(2, 1)$ 之聯線成何種比? 答. $-\frac{3}{2}$.
17. 三角形之頂點爲 $(-5, 3)$, $(1, -3)$, $(7, 5)$, 證任何二邊中點之聯線平行於第三邊且等於第三邊之半.
18. 若 $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(6, 2)$ 爲三角形三邊之中點.各頂點之坐標爲何?
答. $(-1, 2)$, $(5, 0)$, $(7, 4)$.
19. 平形四邊形之三頂點爲 $(1,2)$, $(-5, -3)$, $(7, -6)$, 第四頂點之坐標爲何?
答. $(1, -11)$, $(-11, 5)$ 或 $(13, -1)$.
20. 一線之中點爲 $(6, 4)$, 一端爲 $(5, 7)$, 他端之坐標爲何? 答. $(7, 1)$.
21. 三角形之頂點爲 $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$, 求中線交點(重心)之坐標.

22. 等腰三角形之頂點爲 (1, 5), (5, 1), (−9, −9), 用底邊及高以求面積.

23. 延長 AB 至 C, 使 $BC=\frac{1}{2}AB$. 若 A 及 B 之坐標各爲 (5, 6) 及 (7, 2), C 點之坐標爲何?

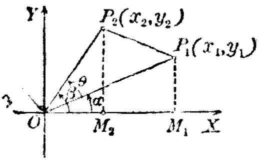
24. 證公式 (VII) 於斜角坐標系亦眞確. 即 $\angle XOY$ 可爲任何値.

25. 一點分 (5, 5) 及 (3, 7) 之聯線爲二等分, 此點與原點之距離爲何? 此點與原點聯線之斜率爲何?　　答. $2\sqrt{13}$, $\frac{3}{2}$.

24. 面積. 設多邊形各頂點之坐標爲已知, 其面積即可求得, 今先證

定理 VIII. 三角形之三頂點爲原點, $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$, 其面積可得之於下列公式

(VIII) $$\triangle OP_1P_2 \text{ 之面積} = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1).$$



證　在圖中, 設

$$\alpha = \angle XOP_1,$$

$$\beta = \angle XOP_2,$$

$$\theta = \angle P_1OP_2.$$

(1) $$\therefore \quad \theta = \beta - \alpha.$$

從 § 12, 18.

(2) $$\triangle OP_1P_2 \text{ 之面積} = \tfrac{1}{2}OP_1 \cdot OP_2 \sin\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}OP_1 \cdot OP_2 \sin(\beta - \alpha) \qquad \text{[從(1)]}$$

$$= \tfrac{1}{2}OP_1 \cdot OP_2 (\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha).$$

[從 § 12, 9]

但圖中

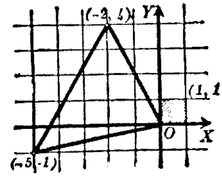
$$\sin\beta = \frac{M_2P_2}{OP_2} = \frac{y_2}{OP_2}, \qquad \cos\beta = \frac{OM_2}{OP_2} = \frac{x_2}{OP_2},$$

$$\sin\alpha = \frac{M_1P_1}{OP_1} = \frac{y_1}{OP_1}, \qquad \cos\alpha = \frac{OM_1}{OP_1} = \frac{x_1}{OP_1}.$$

代入 (3) 並化簡之，得

$$\triangle OP_1P_2 \text{ 之面積} = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1). \qquad Q.\ E.\ D.$$

例 1. 求三角形之面積，其頂點爲原點，$(-2, 4)$ 及 $(-5, -1)$.



解 命 $(-2, 4)$ 爲 P_1, $(-5, -1)$ 爲 P_2.

則 $x_1 = -2,\ y_1 = 4,\ x_2 = -5,\ y_2 = -1.$

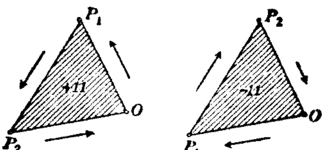
代入 (VIII)

$$\text{面積} = \tfrac{1}{2}[(-2)\cdot(-1) - (-5)\cdot 4] = 11.$$

即所求面積 $=11$ 單位面積.

若命 $(-2, 4)$ 爲 P_2, 及 $(-5, -1)$ 爲 P_1, 則用公式 (VIII) 所得結果爲 -11.

如下二圖



(1) (2)

面積之正及負可區別之於

定理 IX. 依頂點 O, P_1, P_2 之次序環繞：

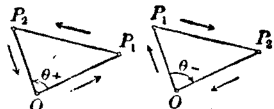
若面積在左方，如圖 (1)，則 (VIII) 之結果爲正；

若面積在右方，如圖 (2)，則 (VIII) 之結果爲負.

證 當面積在左方時如圖 (1)，則從 (1)，$\beta > \alpha$ 而 θ 爲正. 故 $\sin\theta$ 爲正而 OP_1P_2 之面積從 (2) 亦可知其爲正. 當面積在右方時如圖 (2)，則 $\beta < \alpha$，而 θ 爲負. 故 OP_1P_2 之面積從 (2) 亦可知其爲負.

公式 (VIII) 可用以求多角形之面積，祇須將多角形分爲諸三角形而

以原點爲公共頂點．今設想一任何三角形，其面積之求法可用

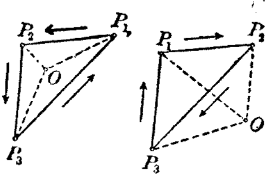


(1)　(2)

定理 X.　三角形之頂點爲 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$，其面積爲下之公式

(X)　$\triangle P_1P_2P_3$ **之面積** $= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)$.

依頂點 $P_1P_2P_3$ 之次序環繞時，此公式之結果爲正或爲負全視其面積在左方或右方而定．



(1)　(2)

證　依原點之在三角形內或形外而分爲兩種．

圖(1)，　原點在三角形內，由觀察得

(5)　$\triangle P_1P_2P_3$ 之面積

$$= \triangle OP_1P_2 + \triangle OP_2P_3 + \triangle OP_3P_1,$$

上列各三角形面積均爲同號．

圖(2)，　原點在三角形外，由觀察得

(6)　$\triangle P_1P_2P_3$ 之面積 $= \triangle OP_1P_2 + \triangle OP_2P_3 + \triangle OP_3P_1$.

三角形 OP_1P_2, OP_3P_1 爲同號, OP_2P_3 爲異號，其代數和即爲所求結果．

由(VIII)，　$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$,

$\triangle OP_2P_3 = \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2)$,　$\triangle OP_3P_1 = \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3)$.

代入 (5) 及 (6) 即得 (X).

又 (5) 之面積爲正，(6) 爲負．　*Q. E. D.*

爲便於應用公式 (X)，可用下之

規則．　求三角形之面積．

第一步．　將頂點橫坐標與縱坐標各列爲一行，第一頂點之坐標重複

寫出.

第二步. 以任一橫坐標與次列之縱坐標相乘,加其積,得

$$x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1.$$

第三步. 以任一縱坐標與次列之橫坐標相乘,加其積,得

$$y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1.$$

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{array}$$

第四步. 從第二步之結果減去第三步之結果,再除以2,得所求面積.

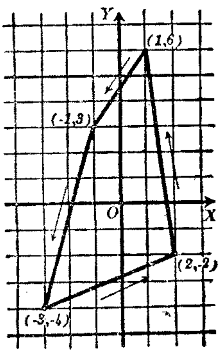
即公式 (X).

此規則可適用於任何多邊形,證之甚易,祇須注意第一步中之手續如下:

將各頂點之坐標,依環繞周圍之方向次第寫出,再重複第一頂點之坐標.

例 2. 求四邊形之面積,其頂點爲(1,6), (−3, −4), (2, −2), (−1, 3).

$$\begin{array}{rr} 1 & 6 \\ -1 & 3 \\ -3 & -4 \\ 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{array}$$



解 畫各點位置,頂點之次序依圖中箭頭之方向.

第一步. 依次寫各頂點之坐標.

第二步. 各橫坐標乘以次列之縱坐標,相加.得

$$1 \times 3 + (-1) \times (-4) + (-3) \times (-2) + 2 \times 6 = 25.$$

第三步. 各縱坐標乘以次列之橫坐標,相加.得

$$6 \times (-1) + 3 \times (-3) + (-4) \times 2 + (-2) \times 1 = -25.$$

第四步. 從第二步結果減去第三步結果,再除以2.

$$\therefore \quad \text{面積} = \frac{25+25}{2} = 25 \text{ 單位面積.}$$ 答.

因面積在左方,此結果之符號爲正.

習題

1. 三角形之頂點為 $(2, 3)$, $(1, 5)$, $(-1, -2)$, 求面積. 答. $\frac{11}{2}$.

2. 三角形之頂點為 $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$, 求面積. 答. 29.

3. 三角形之頂點為 $(8, 3)$, $(-2, 3)$, $(4, -5)$, 求面積. 答. 40.

4. 三角形之頂點為 $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, 求面積. 答. ab.

5. 三角形之頂點為 $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2), 求面積. 答. $\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{2}$.

6. 三角形之頂點為 $(a, 1)$, $(0, b)$, $(c, 1)$, 求面積. 答. $\frac{(a-c)(b-1)}{2}$.

7. 三角形之頂點為 (a, b), (b, a), $(c, -c)$, 求面積. 答. $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)$.

8. 三角形之頂點為 $(3, 0)$, $(0, 3\sqrt{3})$, $(6, 3\sqrt{3})$, 求面積. 答. $9\sqrt{3}$.

9. 三角形之頂點為 $(2, 3)$, $(5, 4)$, $(-4, 1)$, 證此三角形之面積為零, 因此證三點共線.

10. 三角形之頂點為 $(a, b+c)$, $(b, c+a)$, $(c, a+b)$, 證此三角形之面積為零, 因此證三點共線.

11. 三角形之頂點為 $(a, c+a)$, $(-c, 0)$, $(-a, c-a)$, 證此三角形之面積為零, 因此證三點共線.

12. 四邊形之頂點為 $(-2, 3)$, $(-3, -4)$, $(5, -1)$, $(2, 2)$, 求面積. 答. 31.

13. 五邊形之頂點為 $(1, 2)$, $(3, -1)$, $(6, -2)$, $(2, 5)$, $(4, 4)$, 求面積. 答. 18.

14. 平行四邊形之頂點為 $(10, 5)$, $(-2, 5)$, $(-5, -3)$, $(7, -3)$, 求面積. 答. 96.

15. 四邊形之頂點為 $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(9, 11)$, $(0, 3)$, 求面積. 答. 41.

16. 四邊形之頂點為 $(7, 0)$, $(11, 9)$, $(0, 5)$, $(0, 0)$, 求面積. 答. 59.

17. 三角形之頂點為 $(4, 6)$, $(2, -4)$, $(-4, 2)$, 證此三角形之面積為各邊中點聯線所成三角形面積之四倍.

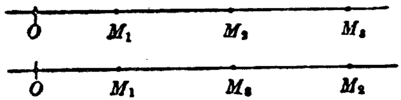
18. 三角形之頂點為 $(3, -8)$, $(-4, 6)$, $(7, 0)$, 從各頂點至重心之嫁線分原三角形為三個等積三角形.

19. 四邊形之頂點為 $(0, 0)$, $(6, 8)$, $(10, -2)$, $(4, -4)$, 證各隣邊中點聯線所成四邊形之面積等於原四邊形之半.

25. 第二射影定理.

導題 I. 若 M_1, M_2, M_3 為方向直線上任意三點, 則

$$M_1M_3 = M_1M_2 + M_2M_3.$$



證　設 O 爲原點.

從 § 16, (1)
$$M_1M_2=OM_2-OM_1,$$
$$M_2M_3=OM_3-OM_2.$$

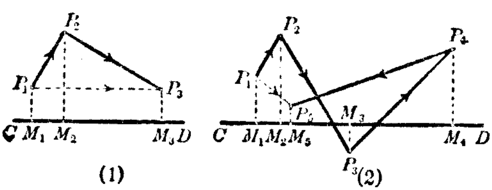
相加，
$$M_1M_2+M_2M_3=OM_3-OM_1.$$

但從 §16, (1)
$$M_1M_3=OM_3-OM_1$$
$$\therefore\quad M_1M_3=M_1M_2+M_2M_3. \qquad Q.\ E.\ D.$$

此結果極易推廣，茲證

導題 II. 若 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_{n-1}, M_n$ 爲方向直線上任意 n 點，則
$$M_1M_n=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_4+\cdots\cdots+M_{n-1}M_n,$$
上式中右端各線分之第一文字卽爲次一線分之前一文字.

自折線之第一點至末一點之聯線稱爲**封閉線**.



(1)　　(2)

如圖 (1)，封閉線爲 P_1P_3；如圖 (2)，封閉線爲 P_1P_5.

定理 XI. 第二射影定理. 若折線之方向自第一點依次至末一點，則各線分在任何方向直線上射影之代數和等於其封閉線之射影.

證　從導題卽可證明.

如圖(1)

$$M_1M_2 = P_1P_2 \text{ 之射影},$$

$$M_2M_3 = P_2P_3 \text{ 之射影},$$

$$M_1M_3 = \text{封閉線 } P_1P_3 \text{ 之射影}.$$

但從導題 I

$$M_1M_2 + M_2M_3 = M_1M_3,$$

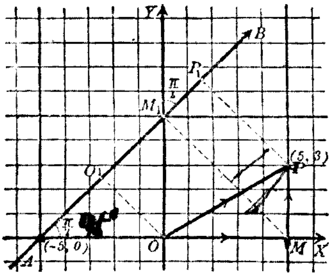
故可得本定理之證明.

同理,圖 (2) 亦然.　　*Q. E. D.*

系. 若多邊形之各邊有環繞周閉之方向,則各邊在任何方向直線上射影之和爲零.

因此多邊形之封閉線爲零.

例 1. 傾角爲 $\frac{\pi}{4}$ 之一直線過 $(-5,0)$ 一點,求原點及 $(5,3)$ 之聯線在該直線上之射影.



解　如圖,　應用第二射影定理,

$$OP \text{ 在 } AB \text{ 上之射影}$$

$$= OM \text{ 之射影} + MP \text{ 之射影}$$

$$= OM\cos\frac{\pi}{4} + MP\cos\frac{\pi}{4}$$

(從 § 20, 第一射影定理)

$$= \tfrac{5}{2}\sqrt{2} + \tfrac{3}{2}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}. \qquad \text{答.}$$

此問題解法(如例 1.)之注意點卽爲應用定理 XI 將所設線換以平行於二軸之折線.

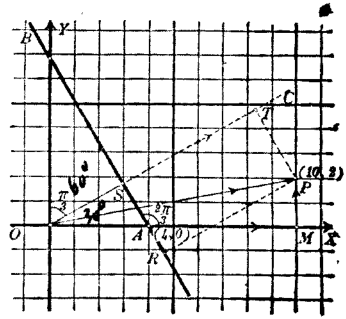
例 2. 一直線過 $(4,0)$ 一點,傾角爲 $\frac{2\pi}{3}$,求此直線至一點 $(10,2)$ 之距離.

120°

解　如圖,作 OC 垂直於所設直線 AB.

$\angle XAS = \dfrac{2\pi}{3}$, 或 120°.

$\therefore \quad \angle XOS = 30^\circ, \quad \angle SOY = 60^\circ.$



求垂直距離 RP.

作折線 OMP 在 OC 上之射影.從第二射影定理

OP 之射影 $= OM$ 之射影 $+ MP$ 之射影.

$$= OM\cos\angle XOS + MP\cos\angle SOY$$

$$= 10\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 2\cdot\tfrac{1}{2}.$$

(1) $$= 1 + 5\sqrt{3}.$$

但在圖中

$$OP\text{之射影} = OS + ST$$

$$= OA\cos XOS + RP$$

(2) $$= 4\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \times RP.$$

從 (1) 及 (2)

$$RP + 2\sqrt{3} = 1 + 5\sqrt{3}.$$

$$RP = 1 + 3\sqrt{3}.$$ 答.

習　題

1. 橫軸上有四點與原點之距離各爲 1, 3, 6 及 10, 用導題 II 求 P_1P_4.

2. 依次聯 $(-1, 4), (3, 6), (6, -2), (8, 1), (1, -1)$ 諸點成一折線, 證各綫分在 x 軸上之射影適合於第二射影定理.

3. 聯 $(1, 2), (5, 4), (-1, -4), (3, -1)$ 及 $(1, 2)$ 諸點成一折線,用圖證此折線在任何直線上之射影爲零.

4. 一直線過一點 $(-1, 1)$，傾角爲 $\frac{\pi}{6}$. 求 $(2, 1)$ 及 $(5, 3)$ 之聯線在該直線上之射影。

答. $\frac{3\sqrt{3}+2}{2}$.

5. 前題之聯線，在傾角爲 $\frac{\pi}{6}$ 之任何直線上之射影爲何？何故？

6. 求 $(-1, 3)$ 及 $(2, 4)$ 之聯線在傾角爲 $\frac{3\pi}{4}$ 之任何直線上之射影。 答. $-\sqrt{2}$.

7. 求聯 $(-1, 4)$ $(3, 6)$ 及 $(5, 0)$ 之折線在傾角爲 $\frac{\pi}{4}$ 之直線上之射影. 再用封閉線之射影證實所得之結果無誤。 答 $\sqrt{2}$.

8. 求聯 $(0, 0)$, $(4, 2)$ 及 $(6, -3)$ 諸點之折線在傾角爲 $\frac{2\pi}{3}$ 之直線上之射影。

答. $\frac{-6-3\sqrt{3}}{2}$.

9. 三角形之頂點爲 $(2, 1)$, $(-1, 5)$, $(-3, 1)$，證各邊在傾角爲 $\frac{\pi}{6}$ 之直線上所成射影之和爲零。

10. 一直線過 $(-4, 0)$ 一點，傾角爲 $\frac{\pi}{4}$，求自一點 $(6, 3)$，至此直線之垂直距離。

答. $\frac{7}{\sqrt{2}}$.

11. 一直線過 $(6, 0)$ 一點，傾角爲 $\frac{3\pi}{4}$，求自一點 $(-5, -1)$ 至此直線之垂直距離。

答. $6\sqrt{2}$.

12. 一直線過 $(5, 0)$ 一點，傾角爲 $\frac{\pi}{6}$. 另一直線過 $(0, 2)$ 一點而與前一直線平行，求二平線間之垂直距離。 答. $\frac{5+2\sqrt{3}}{2}$.

第 三 章

曲線及方程式

26. 適合於所設條件諸點之軌跡. 凡經過適合於所設條件之諸點而不經過其他諸點之曲線*,稱爲適合於該條件之諸點之**軌跡**.

在平面幾何學中已證得下列結果:

二定點聯線之垂直二等分線爲與二定點等距離諸點之軌跡.

二直線交角之平分線爲與二直線等距離諸點之軌跡.

解軌跡問題須含下列二事:

1. 由適合於條件且足以應用之諸點,作一軌跡,則諸點均在此軌跡上.

2. 討論軌跡之性質亦即決定曲線之性質†.

解析幾何學常論上列軌跡問題之二部.

27. 適合於所設條件諸點軌跡之方程式. 今以坐標用於軌跡問題.設一點 P 之坐標爲 (x, y),若此點適合於所設條件而在軌跡上,則從所設條件可引得含有變數 x 及 y 之方程式.下列例題,顯示此種情形,甚爲重要.

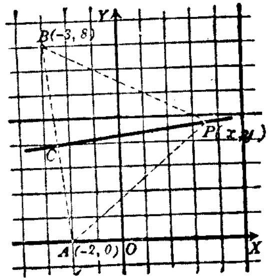
例 1. 若一點與 $A(-2, 0)$ 及 $B(-3, 8)$ 二點等距,求其坐標 x 及 y 之

---

* 此後曲線指連續直線或曲線.

† 初等幾何學中所論軌跡祇有直線與圓兩種,用直尺圓規即可作成,故第二部比較的不重要.

方程式.



解　設 $P(x, y)$ 爲軌跡上之任意點，則從所設條件得

(1) $$PA = PB.$$

但從 § 21, 公式 (IV),

$$PA = \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2},$$

$$PB = \sqrt{(x+3)^2 + (y-8)^2}.$$

代入 (1)

(2) $$\sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-8)^2}.$$

平方，化簡

(3) $$2x - 16y + 69 = 0.$$

在方程式(3)中，變數 x 及 y 爲軌跡上一點之坐標，亦即爲 AB 之垂直二等分線上任何點之坐標．此方程式有二重要性質：

1. 軌跡上任何點之坐標，代入方程式(3)中之 x 及 y,結果恆能正確．

設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲軌跡上之一點，則 $P_1A = P_1B$, 從 § 21, 公式 (IV)

(4) $$\sqrt{(x_1+2)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1+3)^2 + (y_1-8)^2},$$

平方，化簡

(5) $$2x_1 - 16y_1 + 69 = 0$$

故 x_1 及 y_1 適合於 (3).

2. 反之，任何點之坐標，若能適合於 (3), 此點必在軌跡上．

設 $P_1(x_1, y_1)$ 之坐標適合於 (3), 則 (5) 正確，因此 (4) 亦成立．Q. E. D

在特殊情形時，A 及 B 之中點 C, 其坐標 $x = -2\frac{1}{2}$, $y = 4$ (§ 23, 系)適合於 (3), 因 $$2(-2\tfrac{1}{2}) - 16 \times 4 + 69 = 0.$$

此例顯示軌跡問題在純粹幾何學與解析幾何學中有下列之關係.

軌跡問題

純粹幾何學	解析幾何學
幾何條件(爲軌跡上任何點所適合).	以變數 x 及 y 爲坐標之方程式(爲軌跡上任何點之坐標所適合).

從此得基本定義:

適合於所設條件一點之**軌跡之方程式**, 即爲以變數 x 及 y 爲坐標之方程式表明(1)軌跡上任何點之坐標均能適合於方程式;及(2),反之,若一點之坐標能適合於方程式,此點必在軌跡上.

此定義說明凡求得之軌跡方程式須兩方證明. 此節或下節例題均詳述之.

從此定義立可得下

系. 當及祇當一點之坐標適合於方程式時,此點在軌跡上.

28 第一基本問題. 求一曲線之方程式,此曲線爲適合於所設條件諸點之軌跡.

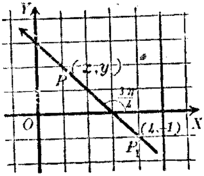
下列規則在多數情形下,可用以解此類問題.

規則. 第一步. 假定 $P(x, y)$ 爲適合於所設條件之任一點,亦即在軌跡上之點.

第二步. 寫出所設條件.

第三步. 用坐標表所設條件, 並化簡之. 最後含有 x, y 及問題中所設常數之方程式即爲所求方程式.

例 1. 一直線過 $(4, -1)$ 一點,傾角爲 $\frac{3\pi}{4}$,求此直線之方程式.



解　第一步．假定 $P(x,y)$ 爲直線上任何點．

第二步．因傾角 α 爲 $\frac{3}{4}\pi$，故所設條件爲

(1)　　P_1P 之斜率 $=\tan\alpha=-1.$

第三步．從 § 22，(V)，

(2)　　P_1P 之斜率 $=\tan\alpha=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y+1}{x-4}.$

[以 (x,y) 代 (x_1,y_1)，$(4,-1)$ 代 (x_2,y_2)]．

∴　從 (1)，　$\dfrac{y+1}{x-4}=-1,$

或

(3)　　$x+y-3=0.$　　答．

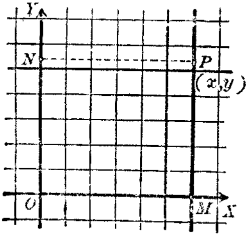
證(3)爲所求方程式：

1.　直線上任何點之坐標 (x_1,y_1) 適合於 (3)，因 (x_1,y_1) 及 $(4,-1)$ 兩點聯線之斜率爲 -1；故從 § 22，(V)，以 $(4,-1)$ 代 (x_2,y_2)，

$$-1=\frac{y_1+1}{x_1-4},\text{ 或 } x_1+y_1-3=0.$$

即 x_1 及 y_1 適合於方程式(3)．

2.　反之，任一點，其坐標能適合於方程式(3)者必在直線上．若 (x_1,y_1) 即爲此點，則 $x_1+y_1-3=0$ 而 $-1=\dfrac{y_1+1}{x_1-4}$ 爲眞確，故 (x_1,y_1) 在經過 $(4,-1)$ 而傾角爲 $\dfrac{3\pi}{4}$ 之直線上．　　*Q. E. D.*



例 2.　一直線平行於 y 軸，且在 y 軸右之六個單位距離，求其方程式．

解　第一步．假定 $P(x,y)$ 爲直線上之任何點，作 NP 垂直於 OY．

第二步．所設條件爲

(4) $$NP=6.$$

第三步. 因 $NP=OM=x$, (4) 化爲

(5) $$x=6.$$ 答.

方程式(5)卽爲所求方程式:

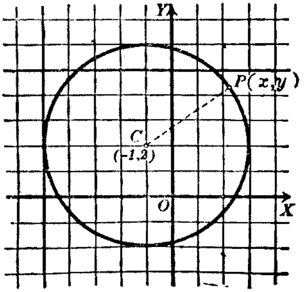
1. 適合於條件之點之坐標可代入 (5). 若 $P_1(x_1,y_1)$ 卽爲此點,則依所設條件 $x_1=6$, 卽 $(x_1. y_1)$ 適合於(5).

2. 反之,若坐標 (x_1,y_1) 適合於(5), 則 $x_1=6$, 故 $P_1(x_1,y_1)$ 在 $Y'Y$ 右之六個單位距離. Q. E. D.

上述方法,證明所求得之軌跡方程式,有兩種特性.學者須愼重學習,並須應用於下列諸題.

例 3. 一點與 $(-1,2)$ 之距離常爲 4, 求此點軌跡之方程式.

解 第一步. 假定 $P(x,y)$ 爲軌跡上任何點.



第二步. 命 $(-1,2)$ 爲 C, 所設條件爲

(6) $$PC=4.$$

第三步. 從 § 21 公式 (IV),

$$PC=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}.$$

代入(6),

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=4.$$

平方,化簡

(7) $$x^2+y^2+2x-4y-11=0.$$

此爲所求方程式,卽以 (-1.2) 爲中心, 4 爲半徑之圓之方程式.此題證法與上題同.

習 題

1. 求直線方程式，此直線平行於 OY，且

(a) 在其右之 4 個單位距離.

(b) 在其左之 7 個單位距離.

(c) 在 $(3, 2)$ 右之 2 個單位距離.

(d) 在 $(2, -2)$ 左之 5 個單位距離.

2. 一直線平行於 OY，且與 OY 有 $a-b$ 個單位距離，其方程式爲何？此直線應位於 OY 之何方，若 $a>b>0$？ 若 $0>b>a$？

3. 求直線方程式，此直線平行於 OX，且

(a) 在 OX 上之 3 個單位距離.

(b) 在 OX 下之 6 個單位距離.

(c) 在 $(-2, -3)$ 上之 7 個單位距離.

(d) 在 $(4, -2)$ 下之 5 個單位距離.

4. XX' 之方程式爲何？YY' 爲何？

5. 求直線方程式，若此線平行於直線 $x=4$ 且在其右之 3 個單位距離. 在其左之 8 個單位距離.

6. 求直線方程式，若此線平行於直線 $y=-2$ 且在其下之 4 個單位距離. 在其上之 5 個單位距離.

7. 直線 $y=a-b$ 位於何處，若 $a>b>0$？若 $b>a>0$？

8. x 軸之方程式爲何？y 軸爲何？

9. 一點移動時與 x 軸之距離恆爲 2，此點軌跡之方程式爲何？ 與 y 軸之距離恆爲 2 則如何？與直線 $x=-5$ 則如何？與直線 $y=4$ 則如何？

10. 一點移動時與直線 $x=5$ 及 $x=9$ 等距離，其軌跡之方程式爲何？與 $y=3$ 及 $y=-7$ 等距離則如何？

11. 矩形之頂點爲 $(5, 2)$, $(5, 5)$, $(-2, 2)$, $(-2, 5)$，各邊之方程式爲何？

在習題 12 及 13 中，P_1 爲所求直線上之所設點，m 爲直線之斜率，α 爲其傾角.

12. 一直線之方程式爲何，若

(a) P_1 爲 $(0, 3)$ 及 $m=-3$？ 答. $3x+y-3=0$.

(b) $P_1(-4, -2)$ 及 $m=\frac{1}{3}$？ 答. $x-3y-2=0$.

(c) P_1 爲 $(-2, 3)$ 及 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$？ 答. $\sqrt{2}x-2y+6+2\sqrt{2}=0$.

(d) P_1 爲 (0, 5) 及 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$? 答. $\sqrt{3}x-2y+10=0.$

(e) P_1 爲 (0, 0) 及 $m=-\frac{2}{3}$? 答. $2x+3y=0.$

11. m.

(f) P_1 爲 (a, b) 及 $m=0$? 答. $y=b.$

(g) P_1 爲 $(-a, b)$ 及 $m=\infty$? 答. $x=-a.$

13. 一直線之方程式爲何，若

(a) P_1 爲 (2, 3) 及 $\alpha=45°$? 答. $x-y+1=0.$

(b) P_1 爲 (−1, 2) 及 $\alpha=45°$? 答. $x-y+3=0.$

(c) P_1 爲 $(-a, -b)$ 及 $\alpha=45°$? 答. $x-y=b-a.$

(d) P_1 爲 (5,2) 及 $\alpha=60°$? 答. $\sqrt{3}x-y+2-5\sqrt{3}=0.$

(e) P_1 爲 (0, −7) 及 $\alpha=60°$? 答. $\sqrt{3}x-y-7=0.$

(f) P_1 爲 (−4, 5) 及 $\alpha=0°$? 答. $y=5.$

(g) P_1 爲 (2, −3) 及 $\alpha=90°$? 答. $x=2.$

(h) P_1 爲 $(3, -3\sqrt{3})$ 及 $\alpha=120°$? 答. $\sqrt{3}x+y=0.$

(i) P_1 爲 (0, 3) 及 $\alpha=150°$? 答. $\sqrt{3}x+3y-9=0.$

(j) P_1 爲 (a, b) 及 $\alpha=135°$? 答. $x+y=a+b.$

14. (3, 9), (4, 6), (5, 5) 是否在直線 $3x+2y=25$ 上?

15. 求圓之方程式，已知

(a) 中心在 (3, 2), 及半徑 =4. 答. $x^2+y^2-6x-4y-3=0.$

(b) 中心在 (12, −5) 及 $r=13.$ 答. $x^2+y^2-24x+10y=0.$

(c) 中心在 (0, 0) 及半徑 $=r.$ 答. $x^2+y^2=r^2.$

(d) 中心在 (0, 0) 及 $r=5.$ 答. $x^2+y^2=25.$

(e) 中心在 $(3a, 4a)$ 及 $r=5a.$ 答. $x^2+y^2-2a(3x+4y)=0.$

(f) 中心在 $(b+c, b-c)$ 及 $r=c.$ 答. $x^2+y^2-2(b+c)x-2(b-c)y+2b^2+c^2=0.$

16. 求圓之方程式，此圓之中心爲 (5, −4), 且圓周經過 (−2, 3) 一點.

17. 求圓之方程式，此圓以 (3, −5) 及 (−2, 2) 之聯線爲直徑.

18. 求圓之方程式，此圓與二軸之切點與原點之距離爲 6 個單位.

19. 一圓以 (−6, 8) 與原點聯線之中點爲中心，且其圓經過 (2, 3) 一點，求其方程式.

20. 一點移動時與二定點 (2, −3) 及 (−1, 4) 等距，求此軌跡之方程式並描寫其圖形.

答. $3x-7y+2=0.$

21. 求下列二點聯線上所作垂直二等分線之方程式

(a) (2, 1), (−3, −3). 答. $10x+8y+13=0.$

(b) (3, 1), (2, 4). 答. $x-3y+5=0.$

(c) (−1, −1), (3, 7). 答. $x+2y-7=0.$

(*d*) (0, 4) (3, 0).　　答. $6x-8y+7=0$.

(*e*) (x_1, y_1), (x_2, y_2).　　答. $2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y+x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2=0$.

22. 證明習題 21 中所設二點聯線中點之坐標適合於其垂直二等分線之方程式。

23. 三角形之頂點為 (4, 8), (10, 0), (6, 2), 求各邊之垂直二等分線之方程式. 證此三垂直二等分線交於一點 (11, 7).

24. 一點 (h, k) 與 $(-1, 1)$ 及 $(1, 2)$ 等距,又與 $(1, 2)$ 及 $(1, -2)$ 等距. 從此二關係,各求一方程式. 於是證一點 $(\frac{3}{4}, 0)$ 與 $(-1,1)$, $(1,2)$, $(1, -2)$ 等距.

29. 直線及圓之普遍方程式. 前節所述之方法可使吾人得到下列結果.

1. 一直線平行於 Y 軸,其方程式之形式為 $x=$ 常數.

2. 一直線平行於 x 軸,其方程式之形式為 $y=$ 常數.

定理 I. 一直線經過 Y 軸上一點 $B(0, b)$, 其斜率為 m, 則方程式為

$$y=mx+b. \tag{I}$$

證 第一步. 假定 $P(x, y)$ 為直線上任何點.

第二步. 所設條件為

$$PB\text{ 之斜率}=m$$

第三步. 從 § 22 定理 V,

$$PB\text{ 之斜率}=\frac{y-b}{x-0},$$

[以 (x, y) 代 (x_1, y_1) 及 $(0, b)$ 代 (x_2, y_2)].

於是 $$\frac{y-b}{x}=m,\quad\text{或}\quad y=mx+b.$$ Q. E. D

定理 II. 一圓之中心為 (α, β), 半徑為 r, 其方程式為

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0. \tag{II}$$

證 第一步. 假定 $P(x, y)$ 為軌跡上任何點.

第二步. 若中心 (α, β) 為 C, 所設條件為

$$PC=r.$$

第三步．　從 § 21, (IV),

$$PC=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r.$$

平方，化簡得 (II).　　　　Q. E. D

系．　一圓之中心爲原點，半徑爲 r，其方程式爲

$$\boldsymbol{x^2+y^2=r^2}.$$

下列事實應加注意．

一直線爲變數 x 及 y 之一次方程式所決定．

一圓爲變數 x 及 y 之二次方程式所決定，其二次項含有 x 及 y 平方之和．

30．　方程式之軌跡．　前節已示明，軌跡問題在解析幾何中，可化爲變數 x 及 y 之方程式．此求得或假定之方程式，其解法須分爲二部，如本章第一節中所述．

1．　以能適合於方程式之諸點坐標，描出足以應用之諸點，作一軌跡，故此軌跡必經過諸點．

2．　討論軌跡之性質，卽決定曲線之性質．

此二問題可稱爲

1．　描寫方程式之軌跡（第二基本問題）．

2．　討論方程式（第三基本問題）．

吾人須注意於含有變數 x 及 y（一元或二元）之所設方程式，今自下之定義始．

含有以二變數爲坐標之**方程式之軌跡**爲經過諸點之一個或一羣曲

線，此諸點之坐標適合於方程式*，而此曲線祇經過其坐標能適合於方程式之諸點.

從此定義足以證明下之定理爲正確：

定理 III. 若一所設方程式之形式任意變換（如移項，乘以常數等）其軌跡之性質仍不變.

今依次解第二及第三基本問題.

31. 第二基本問題.

規則. 描寫方程式之軌跡.

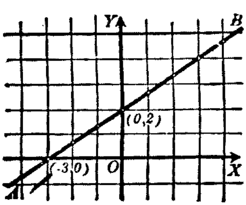
第一步. 以一變數表他一變數解所設方程式†.

第二步. 從此公式，假定一變數以任何實數值，求他一變數之值.

第三步. 以求得之各組值，作各點位置.‡

第四步. 若所求諸點足以決定軌跡之形象，則過諸點聯一曲線.

所求諸點之個數並無限制，故宜多作數點使其軌跡較爲精密.



在下列諸例中應注意其次序.

例 1. 描寫方程式 $2x-3y+6=0$ 之軌跡.

解　第一步. 求 y.

$$y=\tfrac{2}{3}x+2.$$

---

* 含有變數 x 及 y 之方程式，不一定爲任何點之坐標所適合 因坐標爲實數而方程式或不能爲實數所適合，如方程式 $x^2+y^2+1=0$ 卽屬此類，因 x 及 y 旣爲實數，x^2 及 y^2 須爲正數(或零). 因此 x^2+y^2+1 常爲正數，大於或等於 1 而決不等於零. 故此種方程式無軌跡. 辭句"方程式之軌跡爲虛"常用之.

一方程式或祇能爲有限諸點之坐標所適合，如 $x^2+y^2=0$ 祇能爲 $x=0$, $y=0$ 所適合. 此種凡坐標能適合於方程式之一點或諸點，稱爲方程式之軌跡.

† 所設方程式中恒以較易求得之變數解之.

‡ 須知坐標之值均爲實數.

第二步． 設 x 爲各值，求 y 之相當值，將各組值列於下表：

x	y	x	y
0	2	0	2
1	$2\frac{2}{3}$	-1	$1\frac{1}{3}$
2	$3\frac{1}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$
3	4	-3	0
4	$4\frac{2}{3}$	-4	$-\frac{2}{3}$
……	……	……	……

若　　$x=1,\ y=\frac{2}{3}\cdot1+2=2\frac{2}{3}$；

$x=2,\ y=\frac{2}{3}\cdot2+2=3\frac{1}{3}$；

等等！

第三步． 將求得各點作圖．

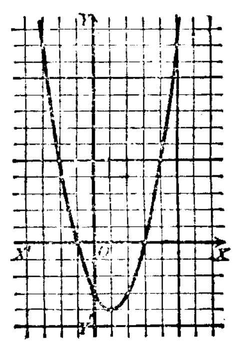
第四步． 過所作諸點，聯一光滑曲線．

例 2． 描寫方程式 $y=x^2-2x-3$ 之軌跡．

解　第一步． 所設方程式已求得 y．

第二步． 設 x 爲各值，求 y 之相當值，將各組值列於下表：

x	y	x	y
0	-3	0	-3
1	-4	-1	0
2	-3	-2	5
3	0	-3	12
4	5	-4	21
5	12	……	……
6	21		
……	……		



第三步． 將求得各點，作圖．

第四步． 過所作諸點，聯一光滑曲線，卽爲圖中曲線．

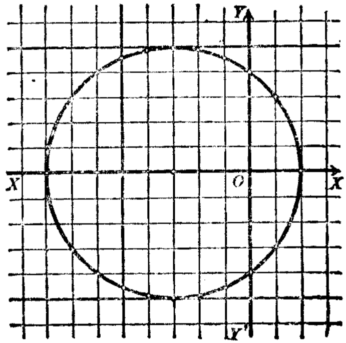
例 3． 描寫方程式 $x^2+y^2+6x-16=0$ 之軌跡．

第一步． 求 y．

$$y=\pm\sqrt{16-6x-x^2}.$$

第二步． 設 x 爲各值，求 y 之相當值．

x	y	x	y
0	± 4	0	± 4
1	± 3	-1	± 4.6
2	0	-2	± 4.9
3	虛數	-3	± 5
4	虛數	-4	± 4.9
5	虛數	-5	± 4.6
6	虛數	-6	± 4
7	虛數	-7	± 3
		-8	0
		-9	虛數



例如，設 $x=1$, $\qquad y=\pm\sqrt{16-6-1}=\pm 3$;

設 $x=3$, $\qquad y=\pm\sqrt{16-18-9}=\pm\sqrt{-11}$, 虛數;

設 $x=-1$, $\qquad y=\pm\sqrt{16+6-1}=\pm 4{\cdot}6$;

等等.

第三步．描寫各點位置．

第四步． 過所作諸點聯一光滑曲線．

習　　題

1. 描寫下列各方程式之軌跡:

(a) $x+2y=0$.

(b) $x+2y=3$.

(c) $3x-y+5=0$.

(d) $y=4x^2$.

(e) $x^2+4y=0$.

(f) $y=x^2-3$.

(g) $x^2+4y-5=0$.

(h) $y=x^2+x+1$.

(i) $x=y^2+2y-3$.

(j) $4x=y^3$.

(k) $4x=y^3-1$.

(l) $y=x^3-1$.

(m) $y=x^3-x$.

(n) $y=x^3-x^2-5$.

(o) $x^2+y^2=4$.

(p) $x^2+y^2=9$.

(q) $x^2+y^2=25$.

(r) $x^2+y^2+9x=0$.

(s) $x^2+y^2+4y=0$.

(t) $x^2+y^2-6x-16=0$.

(u) $x^2+y^2-6y-16=0$.

(v) $4y=x^4-8$.

(w) $4x=y^4+8$.

(x) $y=\frac{x}{1+x^2}$.

(y) $x=\frac{1-y^2}{1+y^2}$.

(z) $x=\frac{2}{1+y^2}$.

2. 證下列各方程式無軌跡(§ 30 底註).

(a) $x^2+y^2+1=0$.

(b) $2x^2+3y^2=-8$.

(c) $x^2+4=0$.

(d) $x^4+y^2+8=0$.

(e) $(x+1)^2+y^2+4=0$.

(f) $x^2+y^2+2x+2y+3=0$.

(g) $4x^2+y^2+8x+5=0$.

(h) $y^4+2x^2+4=0$.

(i) $9x^2-4y^2+18x+8y+15=0$

(j) $x^2+xy+y^2+3=0$.

提示： 將各方程式之形式化爲平方之和,解之,求一變數.再應用 § 7 定理 III 於所求得之二次根式.

32. 比較原理. 在 § 31 習題 1 及習題 3 中,吾人可決定軌跡之性質,卽可用 § 29 公式(I)及(II)討論方程式.其方法甚重要,稱爲**比較原理**.

若指定所設方程式之各係數爲適當值,而能與已知之普遍方程式全同,則此方程式所表軌跡之性質,可與一已知方程式由比較而決定之.

今述比較方法於下之

規則. 第一步. 將所設方程式變形*(如需要),使其中一項或多項與普遍方程式之相當項全同.

第二步. 命兩方程式相當項之係數相等,如有缺項,其係數爲零.

第三步. 解第二步所得之各方程式,以求所設方程式中各待定係數之值+.

* 此種變形稱爲'將所設方程式變爲普遍方程式之形式".

+ 所求之值或不可能(如虛數),因此可有二種解釋 —— 所設方程式無軌跡,或不能化爲所求形式.

例 1. 證方程式 $2x-3y+6=0$ 爲一直線(§31, 例 1 之圖).

解 第一步. 與 §29 中普遍方程式 (I) 比較,

$$y=mx+b. \tag{1}$$

求 y, 將所設方程式化成(1)之形式,

$$y=\tfrac{2}{3}x+2. \tag{2}$$

第二步. 二式右端全同, 比較 x 之係數.

$$m=\tfrac{2}{3}. \tag{3}$$

比較常數項,

$$b=2. \tag{4}$$

第三步. 從方程式 (3) 及 (4) 得係數 m 及 b 之值, 此二數值均合理. 因從 §22, 一直線之斜率可有任何值, 且與 y 軸相交所得交點 $(0, b)$ 之縱坐標 b 可爲任何實數. 故方程式 $2x-3y+6=0$ 表一直線, 其斜率爲 $\frac{2}{3}$, 且經過 $(0, 2)$ 一點. *Q. E. D.*

例 2. 證方程式

$$x^2+y^2+6x-16=0 \tag{5}$$

之軌跡爲一圓 (§31, 例 3 之圖).

解 第一步. 與 §29 中普遍方程式 (II) 比較,

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0. \tag{6}$$

(5) 及 (6) 右端相同, 且首二項 x^2+y^2 亦同.

第二步. 比較 x 之係數,

$$-2\alpha=6. \tag{7}$$

比較 y 之係數,

$$-2\beta=0. \tag{8}$$

比較常數項,

$$a^2+\beta^2-r^2=-16. \tag{9}$$

第三步. 從 (7) 及 (8),

$$a=-3,\ \beta=0.$$

以此二值代入 (9) 求 r, 得

$$r^2=25, \text{ 或 } r=5.$$

因 a, β, r 可有任何實數, 故 (5) 之軌跡爲一圓, 其中心爲 $(-3, 0)$, 半徑爲 5.

習 題

1. 描寫下列各方程式之軌跡. 證所得軌跡均爲直線, 並求斜率 m 及與 y 軸之交點 $(0, b)$.

(a) $2x+y-6=0.$ 答. $m=-2,\ b=6.$

(b) $x-3y+8=0.$ 答 $m=\frac{1}{3},\ b=2\frac{2}{3}.$

(c) $x+2y=0.$ 答 $m=-\frac{1}{2},\ b=0.$

(d) $5x-6y-5=0.$ 答. $m=\frac{5}{6},\ b=-\frac{5}{6}.$

(e) $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{8}=0.$ 答 $m=\frac{3}{4},\ b=-\frac{3}{16}.$

(f) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{6}-1=0.$ 答 $m=\frac{6}{5},\ b=-6.$

(g) $7x-8y=0.$ 答 $m=\frac{7}{8},\ b=0.$

(h) $\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y-\frac{7}{8}=0.$ 答 $m=\frac{9}{4},\ b=-1\frac{5}{16}.$

2. 描寫下列各方程式之軌跡, 並證所得軌跡爲一圓, 求其中心 (a, β) 及半徑 r.

(a) $x^2+y^2-16=0.$ 答 $(a, \beta)=(0, 0);\ r=4.$

(b) $x^2+y^2-49=0.$ 答 $(a, \beta)=(0, 0);\ r=7.$

(c) $x^2+y^2-25=0.$ 答. $(a, \beta)=(0, 0);\ r=5.$

(d) $x^2+y^2+4x=0.$ 答 $(a, \beta)=(-2, 0);\ r=2.$

(e) $x^2+y^2-8y=0.$ 答. $(a, \beta)=(0, 4);\ r=4.$

(f) $x^2+y^2+4x-8y=0.$ 答 $(a, \beta)=(-2, 4);\ r=\sqrt{20}.$

(g) $x^2+y^2-6x+4y-12=0.$ 答. $(a, \beta)=(3, -2);\ r=5.$

(h) $x^2+y^2-4x+9y-\frac{3}{4}=0.$ 答. $(a, \beta)=(2, -\frac{9}{2});\ r=5.$

(i) $3x^2+3y^2-6x-8y=0.$ 答. $(a, \beta)=(1, \frac{4}{3});\ r=\frac{5}{3}.$

下列各問題, 因易於描寫其軌跡並決定其性質, 故可用解析法全部解之.

3. 一點與二軸 $X'X$ 及 $Y'Y$ 距離之比常爲 $\frac{2}{3}$. 求此點軌跡之方程式.

答. 直線 $2x-3y=0$.

4. 一點與二軸距離之和爲 10. 求此點軌跡之方程式. 答. 直線 $x+y-10=0$.

5. 一點與 $(3,0)$ 及 $(0,-2)$ 二點距離平方之差爲 8. 求此點軌跡之方程式.

答. 平行線 $6x+4y+3=0$, $6x+4y-13=0$.

6. 一點移動時與二軸等距離. 求此點軌跡之方程式, 並描寫其圖象.

答. 垂直線 $x+y=0$, $x-y=0$.

7. 一點移動時與二直線 $x-4=0$ 及 $y+5=0$ 等距離. 求此點軌跡之方程式, 並描寫其圖象. 答. 垂直線 $x-y-9=0$, $x+y+1=0$.

8. 一點與 $(3,0)$ 及 $(-3,0)$ 二點距離平方之和爲 68. 描寫其軌跡.

答. 圓 $x^2+y^2=25$.

9. 一點移動時與 $(8,0)$ 及 $(2,0)$ 二點距離之比常爲 2. 描寫其軌跡.

答 圓 $x^2+y^2=16$.

10. 一點移動時與 $(2,1)$ 及 $(-4,2)$ 二點距離之比爲 $\frac{1}{2}$. 求此點軌跡之方程式並描寫其圖象. 答 圓 $3x^2+3y^2-24x-4y=0$.

證下列定理時, 二軸由學者自擇, 故題中並未提及. 惟選軸時應使其求法簡便而普遍.

11. 一點移動時與二垂直線距離之和爲一常數. 證此點之軌跡爲一直線.

提示. 以所設二垂直線爲二軸, 所求方程式爲 $x+y=$ 常數.

12. 一點移動時與二定點距離平方之差爲一常數. 證此點之軌跡爲一直線.

提示. 過二定點作 XX', 過二定點之中點作 YY'. 二定點之坐標可寫爲 $(a,0)$ $(-a,0)$ 若"常數差"爲 k, 則得軌跡 $4ax=k$ 或 $4ax=-k$.

13. 一點移動時與二定點距離平方之和爲一常數, 證此點之軌跡爲一圓.

提示. 軸之選擇與習題 12 同.

14. 一點移動時與二定點距離之比爲一常數. 試決定其軌跡之性質.

答. 若常數不等於 1, 軌跡爲一圓; 若等於 1, 則爲直線.

下列問題表明下之

定理. 若一方程式可化爲含有變數之諸因式之乘積, 且其因式之乘積爲零, 則使每一因式爲零可得其軌跡.

15. 描寫軌跡 $4x^2-9y^2=0$.

解 分解因式

(1) $$(2x-3y)(2x+3y)=0.$$

由定理，此軌跡為二直線

(2) $$2x-3y=0,$$

(3) $$2x+3y=0.$$

證　1. 任何點 (x_1, y_1) 之坐標，若適合 (1) 必能適合於 (2) 或 (3).

因若 (x_1, y_1) 適合於 (1) 則

(4) $$(2x_1-3y_1)(2x_1+3y_1)=0.$$

乘積若為零，必有一因式為零.

即 $$2x_1-3y_1=0,$$

故 (x_1, y_1) 適合於 (2)；

又 $$2x_1+3y_1=0,$$

故 (x_1, y_1) 適合於 (3).

2. 若一點 (x_1, y_1) 在 (2) 或 (3) 之直線上 必在 (1) 之軌跡上.

因若 (x_1, y_1) 在直線 $2x-3y=0$ 上

則 (§ 27，系)

(5) $$2x_1-3y_1=0.$$

因 $(2x_1-3y_1)(2x_1+3y_1)$ 之第一因式為零，其乘積亦為零．即 (x_1, y_1) 適合於 (1).

故軌跡 (1) 上之任何點必在 (2) 及 (3) 之軌跡上，其逆理亦成立．此例即證明本定理.

16. 證下列方程式之軌跡為二直線，並描寫其圖象.

(a) $x^2-y^2=0.$

(b) $9x^2-y^2=0.$

(c) $x^2=9y^2.$

(d) $x^2-4x-5=0.$

(e) $y^2-6y=7.$

(f) $y^2-5xy+6y=0.$

(g) $xy-2x^2-3x=0.$

(h) $xy-2x=0.$

(i) $xy=0.$

(j) $3x^2+xy-2y^2+6x-4y=0.$

(k) $x^2-y^2+x+y=0.$

(l) $x^2-xy+5x-5y=0.$

(m) $x^2-2xy+y^2+6x-6y=0.$

(n) $x^2-4y^2+5x+10y=0.$

(o) $x^2+4xy+4y^2+5x+10y+6=0.$

(p) $x^2+3xy+2y^2+x+y=0.$

(q) $x^2-4xy-5y^2+2x-10y=0.$

(r) $3x^2-2xy-y^2+5x-5y=0.$

17. 證 $Ax^2+Bx+C=0$ 之軌跡為二平行直線，為一直線，或為一點，全視其判別式 $\triangle=B^2-4AC$ 為正，為零或為負而決定.

18. 證 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 之軌跡為相交二直線，為一直線，或為一點，全視其判別式 $\triangle=B^2-4AC$ 為正，為零或為負而決定.

33. 第三基本問題．方程式之討論.

第二基本問題之解法，僅述一曲線經過諸點，其坐標能適合於所設方

程式.至於曲線之特性,並未論及.故所聯各點之曲線,僅能與正確軌跡大致相合.此方法未免錯誤,因任何二點間曲線之形象,未能決定故也.爲求正確軌跡計,在未描寫軌跡之前須將所設方程式,先加討論.今詳述之.

軌跡之性質與圖象,悉依方程式之形式而定.故討論之手續,因各題而變化.惟下列二款,任何問題皆適用之.

1. 此曲線是否爲封閉或無限伸張?
2. 此曲線能否關於軸或原點爲對稱?

下例卽用此法.

例 1.　描寫

(1) $$x^2 + 4y^2 = 16$$

之軌跡,並討論其方程式.

解　第一步.　求 x.

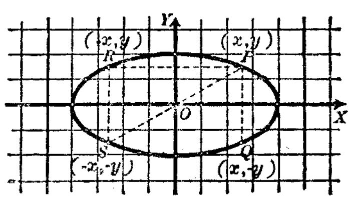
(2) $$x = \pm 2\sqrt{4 - y^2}.$$

第二步.　設 y 爲各種數値,求 x 之相當値,列表.

第三步.　以表中各組數値,作各點之位置.

第四步.　經過所作各點聯一光滑曲線.

x	y	x	y
± 4	0	± 4	0
± 3.4	1	± 3.4	-1
± 2.7	$1\frac{1}{2}$	± 2.7	$-1\frac{1}{2}$
0	2	0	-2
虛數	3	虛數	-3



討論.　1. 方程式 (1) 顯示 x 及 y 均不能無限增大.因 x 及 y 之實數

値均使 x^2 及 $4y^2$ 爲正，而其和須等於 16. 故 x^2 及 $4y^2$ 均不能大於 16. 因此所求曲線爲封閉.

再以另一方法論之.

從 (2), 縱坐標 y 不能大於 2, 亦不能小於 -2. 因根號中 $4-y^2$ 不能爲負數. (2) 亦示明 x 有自 -4 至 4 之數値.

2.　決定關於軸之對稱, 可照下法行之.

方程式 (1) 無 x 及 y 之奇次冪; 故可寫作下列之任一形式:

(3)　$(x)^2+4(-y)^2=16,$　以 $(x,-y)$ 換 (x,y);

(4)　$(-x)^2+4(y)^2=16,$　以 $(-x,y)$ 換 (x,y);

(5)　$(-x)^2+4(-y)^2=16$　以 $(-x,-y)$ 換 (x,y).

(1) 化爲 (3), 與圖中之 $P(x,y)$ 點換以 $Q(x,-y)$ 點相當. 但二點 P 及 Q 關於 XX' 爲對稱, 而 (1) 及 (3) 有同一軌跡 (§ 30. 定理 III). 因此若一點以其關於 XX' 之對稱點代換, (1) 之軌跡不變. 故此軌跡關於 x 軸爲對稱. 同理, 從 (4) 此軌跡關於 y 軸爲對稱. 又從 (5) 此軌跡關於原點爲對稱.

此軌跡稱爲橢圓.

例 2.　描寫

(6)
$$y^2-4x+15=0$$

之軌跡, 並討論其方程式.

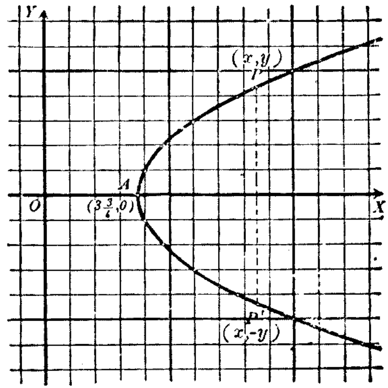
解　第一步.　解此方程式求 x, (因若求 y 須開平方), 得

(7)
$$x=\tfrac{1}{4}(y^2+15).$$

第二步.　設 y 爲各數値, 求 x.

因方程式中祇有 y^2, 不論 y 之値爲正爲負, 其結果相同. 各組數値列於表中.

x	y
$3\frac{3}{4}$	0
4	± 1
$4\frac{3}{4}$	± 2
6	± 3
$7\frac{3}{4}$	± 4
10	± 5
$12\frac{3}{4}$	± 6
……	……



例如　$y=\pm 3$,

則　$x=\frac{1}{4}(9+15)=6$, 等等……

第三步．以表中各組數值作點．

第四步．經過所作各點，聯一光滑曲線．

討論．1. 從 (7), y 增大時，x 亦增大．故此曲線從二軸漸次伸張，以至無窮．

2. 因 (6) 無 y 之奇次冪．此方程式可寫作

$$(-y)^2-4(x)+15=0,$$

卽可以 $(x,-y)$ 代換 (x,y)．故此軌跡關於 x 軸爲對稱．

此曲線稱爲**拋物線**．

例 3. 描寫

$$xy-2y-4=0 \tag{8}$$

之軌跡．

解　第一步．求 y.

$$y=\frac{4}{x-2}. \tag{9}$$

第二步. 設 x 爲各數值, 求 y.

當 $x=2$ 時, $y=\frac{4}{0}=\infty$.

x	y	x	y
0	-2	0	-2
1	-4	-1	$-\frac{4}{3}$
$1\frac{1}{2}$	-8	-2	-1
$1\frac{3}{4}$	-16	-4	$-\frac{2}{3}$
2	∞	-5	$-\frac{4}{7}$
$2\frac{1}{4}$	16	⋮	⋮
$2\frac{1}{2}$	8	-10	$-\frac{1}{3}$
3	4	……	……
4	2		
5	$\frac{4}{3}$		
6	1		
⋮	⋮		
12	0.4		
……	……		

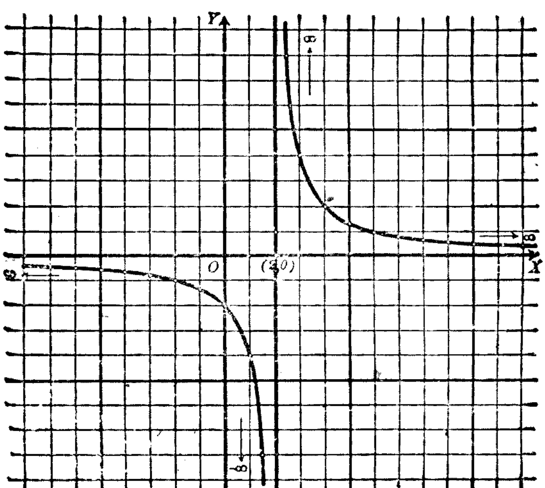
第三步. 作各點.

第四步. 如圖中畫曲線,此曲線有二支.

1. 從(9),當 x 增加至無限時, y 漸次減小以至於零. 此曲線向右或向左無限伸張而漸次接近於 x 軸. 若從(8)解 x, 其結果爲

$$x=2+\frac{4}{y},$$

當 y 增加至無限時, x 漸近於 2, 故此軌跡向上或向下無限伸張而漸近於直線 $x=2$. 如遇此種情形,須假定 x 爲略小於 2 或略大於 2 之諸數值,如表.



2. 此方程式,不能以下列三種之任何一種代換:

$$(x,-y) \text{ 代換 } (x,y),$$

$$(-x,y) \text{ 代換 } (x,y),$$

$$(-x,-y) \text{ 代換 } (x,y).$$

因代換後之新方程式,與原方程式不能有同一軌跡.故此軌跡不能與二軸對稱,亦不能與原點對稱.

此曲線稱爲**雙曲線**.

例 4. 描寫

(10) $$4y = x^3.$$

解　第一步. 求 y.

第二步. 設 x 爲各數值, 求 y. 在二整數間取 x 之值,可使其二點不至相距太遠.

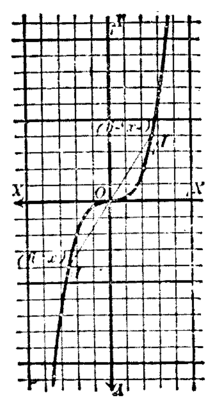
x	y	x	y
0	0	0	0
1	$\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{27}{32}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{32}$
2	2	-2	-2
$2\frac{1}{2}$	$3\frac{29}{32}$	$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{29}{32}$
3	$6\frac{3}{4}$	-3	$-6\frac{3}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$10\frac{23}{32}$	$-3\frac{1}{2}$	$-10\frac{23}{32}$

例如, 若 $x = 2\frac{1}{2}$, 則

$$y = \frac{1}{4}\cdot\frac{125}{8} = \frac{125}{32} = 3\frac{29}{32}, \text{ 等.}$$

第三步. 畫求得之各點.

第四步. 從所作諸點,決定一曲線.



討論. 1. 從方程式 (10), x 及 y 同時增大,故此曲線從二軸向外無限伸張.

2. (10) 中無偶次冪及常數項,原方程式可寫作

$$4(-y) = (-x)^3,$$

即可以 $(-x,-y)$ 代換 (x,y).

故此軌跡關於原點爲對稱.

此軌跡稱爲**三次拋物線**.

34. 對稱. 上列諸例已假定下之定義:

一曲線上有各對點關於一軸或一點對稱,則此曲線之本身可稱爲關於一軸或一點**對稱**.

測驗軌跡之方程式是否爲對稱,其法如下:若以 $(x,-y)$ 換方程式中之 (x,y) 而軌跡不變,則 (a,b) 爲軌跡上之點,$(a,-b)$ 亦必爲軌跡上之點.此二點關於 XX' 爲對稱,餘類推.因此得

定理 IV. 若以 $-y$ 換方程式中之 y 而方程式之軌跡不變,此軌跡關於 x 軸爲對稱.

若以 $-x$ 換方程式中之 x 而方程式之軌跡不變,此軌跡關於 y 軸爲對稱.

若以 $-x$ 及 $-y$ 各換方程式中之 x 及 y 而方程式之軌跡不變,此軌跡關於原點爲對稱.

若此方程式爲含有 x 及 y 之代數方程式 (§ 9),此定理可另行說明.含有變數 x 及 y 之代數方程式之軌跡稱爲**代數曲線**.故從定理 IV 得

定理 V. 代數曲線之對稱. 方程式中無 y 之奇次冪,此軌跡關於 XX' 爲對稱;若無 x 之奇次冪,此軌跡關於 YY' 爲對稱.若各項均爲偶次冪*或奇次冪,此軌跡關於原點爲對稱.

35. 討論之增廣. 此節將述除原有二種討論外之三種討論.

3. 原點是否在曲線上?

此問題可由下之定理解決之.

* 常數項須視爲偶次(零次)項.

定理 VI. 若代數方程式無常數項,此方程式之軌跡必經過原點.

證 若方程式無常數項, (0, 0) 之坐標可適合於方程式. 因此原點必在曲線上 (§ 27, 系). *Q. E. D.*

4. x 及 y 之何種數值應除外?

因坐標爲實數,故有下之

規則. 決定 x 及 y 之一切值中所應除去之數值.

第一步. 解方程式,用 y 表 x, 從此結果, 決定 y 之各值而使 x 有虛數值. 此種 y 之數值應除外.

第二步. 解方程式,用 x 表 y, 從此結果, 決定 x 之各值而使 y 有虛數值. 此種 x 之數值應除外.

曲線在 x 軸上之**截距**, 卽爲曲線與 XX' 交點之橫坐標.

曲線在 y 軸上之截距, 卽爲曲線與 YY' 交點之縱坐標.

規則. 求截距.

以 $y=0$ 代入方程式, 求 x 之實數值. 此卽爲 x 軸上之截距.

以 $x=0$ 代入方程式, 求 y 之實數值. 此卽爲 y 軸上之截距.

此規則之證明,可從定義得之.

此規則解決下之問題.

5. 此軌跡之截距爲何?

36. 討論方程式之法則. 設一方程式,在作軌跡圖象之前, 須依次說明下列諸問題.

1. 原點是否在軌跡上? (定理 VI).

2. 此軌跡是否關於軸或原點爲對稱? (定理 IV 及 V).

3. 截距爲何? (§ 35 之規則).

4.　x 及 y 之除去數值爲何？(§ 35 之規則).

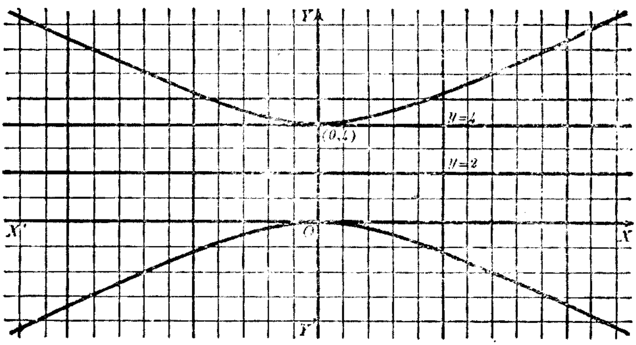
5.　此曲線是否爲封閉或無限伸張？(§ 33).

逐條說明上列諸款，稱爲方程式之普遍討論.

例 1.　普遍討論下方程式

$$x^2-4y^2+16y=0 \tag{1}$$

描寫其軌跡.



1.　此方程式無常數項，卽原點在曲線上.

2.　此方程式無 x 之奇次項，故此軌跡對於 YY' 爲對稱.

3.　命 $y=0$ 得 $x=0$，此爲 x 軸上之截距；命 $x=0$ 得 $y=0$ 及 4，此爲 y 軸上之截距.

4.　解 x,

$$x=\pm 2\sqrt{y^2-4y}. \tag{2}$$

因 y 之値在 0 與 4 之間使 y^2-4y 爲負 (§ 7 定理 III)，故應除去.

解 y,

$$y=2\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2-16}. \tag{3}$$

因 x^2+16 常爲正數，故 x 無除去之數値.

5. 從 (3), x 增大時, y 亦增大. 故此曲線從二軸向外無限伸張. 用 (2) 描寫此軌跡, 所得曲線爲雙曲線.

習 題

1. 普遍討論下列方程式並描寫其軌跡:

(a) $x^2-4y=0.$

(b) $y^2-4x+3=0.$

(c) $x^2+4y^2-16=0.$

(d) $9x^2+y^2-18=0.$

(e) $x^2-4y^2-16=0.$

(f) $x^2-4y^2+16=0.$

(g) $x^2-y^2+4=0.$

(h) $x^2-y+x=0.$

(i) $xy-4=0.$

(j) $9y+x^3=0.$

(k) $4x-y^3=0.$

(l) $6x-y^4=0.$

(m) $5x-y+y^3=0.$

(n) $9y^2-x^3=0.$

(o) $9y^2+x^3=0.$

(p) $2xy+3x-4=0.$

(q) $x^2-xy+8=0.$

(r) $x^2+xy-4=0.$

(s) $x^2+2xy-3y=0.$

(t) $2xy-y^3+4x=0.$

(u) $3x^2-y+x=0.$

(v) $4y^2-2x-y=0.$

(w) $x^2-y^2+6x=0.$

(x) $x^2+4y^2+8y=0.$

(y) $9x^2+y^2+18x-6y=0.$

(z) $9x^2-y^2+18x+6y=0.$

2. 假定下列各方程式之任意常數爲適當數值, 但不能爲特殊值*. 以決定諸方程式軌跡之性質.

(a) $y^2=2mx.$

(b) $x^2-2my=m^2.$

(c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

(d) $2xy=a^2.$

(e) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

(f) $x^2-y^2=a^2.$

(g) $x^2+y^2=r^2.$

(h) $x^2+y^2=2rx.$

(i) $x^2+y^2=2ry.$

(j) $x^2+y^2=2ax+2by.$

(k) $ay^2=x^3.$

(l) $a^2y=x^3.$

3. 描寫下方程式之軌跡:

$$y^2=(x-a)(x-b)(x-c).$$

(a) 當 $a<b<c.$

(b) 當 $a=b<c.$

* 例如在 (a) 及 (b) 中, $m=0$ 爲特殊值. 下列諸題中, 常數等於零, 均爲特殊値.

(c) 當 $a<b$, $b=c$.　　(d) 當 $a=b=c$.

習題 2 中自 (a) 至 (f) 各方程式之軌跡稱爲二次曲線或圓錐曲線——此曲線在特殊情形時爲直線及圓.

若一動點與一定點及一定直線距離之比爲常數，此點之軌跡爲圓錐曲線.

4. 證圓錐曲線之方程式爲 x 及 y 之二次式.

提示. 取定直線爲 YY'，過定點而垂直於 YY' 之直線爲 XX'. 命定點爲 $(p, 0)$，常數比爲 e.　　答. $(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0$.

5. 描寫並討論習題 4 之軌跡.

(a) 若 $e=1$. 此曲線稱爲拋物線 (§ 33, 例 2).

(b) 若 $e<1$. 此曲線稱爲橢圓 (§ 33, 例 1).

(c) 若 $e>1$. 此曲線稱爲雙曲線 (§ 33, 例 3).

6. 描寫下列各方程式之軌跡.

(a) $x^2y-5=0$.　　(e) $y=\dfrac{5}{x^2-3x}$.　　(i) $x=\dfrac{y^2}{y-1}$.

(b) $x^2y-y+2x=0$.　　(f) $y=\dfrac{4x^2}{x^2-4}$.　　(j) $x=\dfrac{y-2}{y-3}$.

(c) $xy^2-4x+6=0$.　　(g) $y=\dfrac{x-3}{x+1}$.　　(k) $4x=\dfrac{y^2}{y^2-9}$.

(d) $x^3y-y+8=0$.　　(h) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+x}$.　　(l) $x=\dfrac{8y}{3-y^2}$.

37. 交點. 若二曲線相交，其交點之坐標必能適合於二曲線之方程式 (§ 27, 系). 在代數學中已證明，欲求能適合於方程式之值，須解聯立方程式. 因此得下之

規則. 求已知二方程式所表曲線之交點.

第一步. 將二方程式聯立，用代數方法解之.

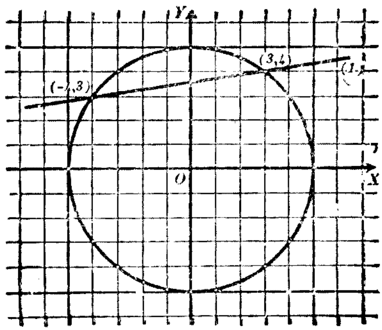
第二步. 所得各組實數解答卽爲交點之坐標.

因交點之坐標恆爲實數，故祇有實數解答方得爲交點之坐標.

例 1. 求下二軌跡之交點.

(1) $x-7y+25=0,$

(2) $x^2+y^2=25.$



解　第一步．　解 (1), 求 x,

(3) $x=7y-25.$

代入 (2), $(7y-25)^2+y^2=25.$

化簡,　$y^2-7y+12=0.$

$\therefore\quad y=3$ 及 $4.$

代入 (3) [不代入 (2)], $x=-4$ 及 $+3.$

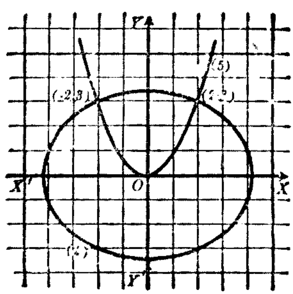
第二步．　交點爲 $(-4,3)$ 及 $(3,4)$　答．

圖中直線 (1) 爲方程式 (1) 之軌跡．圓爲 (2) 之軌跡．

例 2.　求下列軌跡之交點:

(4) $2x^2+3y^2=35,$

(5) $3x^2-4y=0.$



解　第一步．　解 (5), 求 x^2.

(6) $x^2=\frac{4}{3}y.$

代入 (4) 並化簡之,

$$9y^2+8y-105=0.$$

$$\therefore\quad y=3\text{ 及 }-\frac{35}{9}.$$

代入 (6), 解之,　$x=\pm 2$ 及 $\pm\frac{2}{9}\sqrt{-105}.$

第二步．　以實數值各組配搭, 其交點爲 $(+2,3)$, $(-2,3)$.　答．

圖中橢圓 (4) 爲 (4) 之軌跡, 拋物線 (5) 爲 (5) 之軌跡．

習　題

求下列軌跡之交點．

1. $\left.\begin{array}{l}7x-11y+1=0\\ x+y-2=0\end{array}\right\}.$ 答. $\left(\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}\right)$.

2. $\left.\begin{array}{l}x+y=7\\ x-y=5\end{array}\right\}.$ 答. $(6, 1)$.

3. $\left.\begin{array}{l}y=3x+2\\ x^2+y^2=4\end{array}\right\}.$ 答. $(0, 2)$, $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$.

4. $\left.\begin{array}{l}y^2=16x\\ y-x=0\end{array}\right\}.$ 答. $(0, 0)$, $(16, 16)$.

5. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=a^2\\ 3x+y+a=0\end{array}\right\}.$ 答. $(0, -a)$, $\left(-\frac{3a}{5}, \frac{4a}{5}\right)$.

6. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2-4x+6y-12=0\\ 2y=3x+3\end{array}\right\}.$ 答. $\left(\frac{1}{13}, \frac{21}{13}\right)$, $(-3, -3)$.

7. $\left.\begin{array}{l}x^2-y^2=16\\ x^2=8y\end{array}\right\}.$ 答. $(\pm 4\sqrt{2}, 4)$.

8. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=41\\ xy=20\end{array}\right\}.$ 答. $(\pm 5, \pm 4)$, $(\pm 4, \pm 5)$.

9. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2-6x-2y-15=0\\ 9x^2+9y^2+6x-6y-27=0\end{array}\right\}.$ 答. $(-2, 1)$, $\left(-\frac{21}{13}, -\frac{12}{13}\right)$.

10. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=49\\ y=3x+b\end{array}\right\}.$ b 應爲何値方可使二曲線相切?

答. $\left(\frac{-3b\pm\sqrt{490-b^2}}{10}, \frac{b\pm 3\sqrt{490-b^2}}{10}\right)$, $b=\pm 7\sqrt{10}$.

11. $\left.\begin{array}{l}y^2=2px\\ x^2=2py\end{array}\right\}.$ 答. $(0, 0)$, $(2p, 2p)$.

12. $\left.\begin{array}{l}4x^2+y^2=5\\ y^2=8x\end{array}\right\}.$ 答. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

13. $\left.\begin{array}{l}x^2=4ay\\ y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}\end{array}\right\}.$ 答. $(2a, a)$, $(-2a, a)$.

14. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=100\\ y^2=\dfrac{9x}{2}\end{array}\right\}.$ 答. $(8, 6)$, $(8, -6)$.

15. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=5a^2\\ x^2=4ay\end{array}\right\}$ 答. $(2a, a)$, $(-2a, a)$.

16. $\left.\begin{array}{l}b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\\ x^2+y^2=a^2\end{array}\right\}.$ 答. $(a, 0)$, $(-a, 0)$.

17.　二軌跡 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 及 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4$ 交於四點．求此四點所成四邊形各邊及對角線之長度．

答．點，$(\pm\sqrt{10}\ \pm\frac{3}{2}\sqrt{6})$．邊，$2\sqrt{10}, 3\sqrt{6}$．　對角線，$\sqrt{94}$．

求下列各邊所成三角形或多邊形之面積．

18.　$3x+y+4=0,\ 3x-5y+34=0,\ 3x-2y+1=0.$　答．36．

19.　$x+2y=5,\ 2x+y=7,\ y=x+1.$　答．$\frac{3}{2}$．

20.　$x+y=a, x-2y=4a,\ y-x+7a=0.$　答．$12a^2$．

21　$x=0,\ y=0,\ x=4,\ y=-6.$　答．24．

22.　$x-y=0,\ x+y=0,\ x-y=a,\ x+y=b.$　答．$\frac{ab}{2}$．

23.　$y=3x-9,\ y=3x+5,\ 2y=x-6,\ 2y=x+14.$　答．56．

24.　求二曲線 $3x-2y+6=0$, $x^2+y^2=9$ 交點間之距離．　答．$\frac{18}{13}\sqrt{13}$．

25.　軌跡 $y^2=4x$ 能否與軌跡 $2x+3y+2=0$ 相交？　答．相交．

26.　三線 $3x+y-2=0$, $ax+2y-3=0$, $2x-y-3=0$ 共點，a 應爲何值？

答．$a=5$，

27.　求 $x^2+y^2=13$ 及 $y^2=3x+3$ 公共弦之長度．　答．6．

28.　三角形之三邊爲 $x+7y+11=0$, $3x+y-7=0$, $x-3y+1=0$．求中線之長度．

答．$2\sqrt{5}$, $\frac{5}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{170}$．

證下列軌跡之二交點合一，卽二軌跡相切．

29.　$y^2-10x-6y-31=0,\ 2y-10x=47.$

30.　$9x^2-4y^2+54x-16y+29=0,\ 15x-8y+11=0.$

38．超越曲線． 以前所論之方程式，皆爲含有 x 及 y 之代數方程式，卽各變數之指數均爲已知數．今將描寫超越曲線而 § 31 之規則仍沿用之．

例 1．描寫軌跡

$$y=\log_{10}x. \tag{1}$$

解　假定 x 爲各數值，用對數表求 y 之相當值．從對數定義(1)可化爲

$$x=10^y. \tag{2}$$

$-\frac{18+16}{5}=\frac{8}{5}$

故亦可假定 y 爲各數值，從(2)求 x 之相當值．今列各組數值於表中．

x	y	x	y
1	0	.1	-1
3.1	$\frac{1}{2}$	.01	-2
10	1	.001	-3
100	2	.0001	-4
……	……	……	……

描寫圖形時,

在 XX' 上取 2 格作一單位,

在 YY' 上取 4 格作一單位.

普遍討論. 1. 此曲線不過原點,因 $(0,0)$ 不適合於方程式.

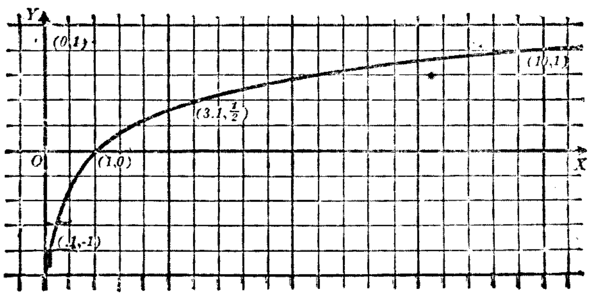
2 此曲線關於二軸或原點爲不對稱.

3. 從 (1), 命 $x=0$,

$$y=\log 0=-\infty=YY' \text{ 上之截距}.$$

從 (2), 命 $y=0$,

$$x=10^{0}=1=XX' \text{ 上之截距}.$$



4. 從 (2), 因負數無對數, 故 x 之負數值應除去.

從 (2), y 無除去數值.

5. 從 (2), y 增大時, x 亦增大. 此軌跡從二軸向外無限伸張.

從 (1) 當

x 接近於零,

y 接近於負無窮大;

故此曲線向下無限伸張, 並與 YY' 漸漸接近.

例 2. 描寫軌跡

(3) $$y=\sin x,$$

若橫坐標 x 爲角之弧度 (第一章 § 11).

解　假定 x 爲各數値,求其相當之度數,然後用自然正弦表 (§ 13) 求 y 之值.

例如,若

$$x=1,\ 因\ 1\ 弧度\ =57^\circ\cdot 29,$$

$$y=\sin 57^\circ\cdot 29=0\cdot 843. \qquad [從 (3)].$$

爲便於作圖計,選 x 之數値時,務使其相當之度數爲完整之數値. 今用 π 表 x 之數値於下之表中.

x	y	x	y
0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	.50	$-\frac{\pi}{6}$	−.50
$\frac{\pi}{3}$	.86	$-\frac{\pi}{3}$	.86
$\frac{\pi}{2}$	1.00	$-\frac{\pi}{2}$	−1.00
$\frac{2\pi}{3}$	.86	$-\frac{2\pi}{3}$	−.86
$\frac{5\pi}{6}$	.50	$-\frac{5\pi}{6}$	−.50
π	0	$-\pi$	0

例如,若

$$x=\frac{\pi}{3},\ y=\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60^\circ=0\cdot 86.$$

$$x=-\frac{2\pi}{3},\ y=\sin-\frac{2\pi}{3}=-\sin\frac{2\pi}{3}\ (\S\ 12).$$

$$=-\sin 120^\circ=-\sin 60^\circ\ (\S 12).$$

$$=-0\cdot 86.$$

描寫圖形時,每三格作一單位,取

$$AO=OB=\pi=3\cdot 1416,$$

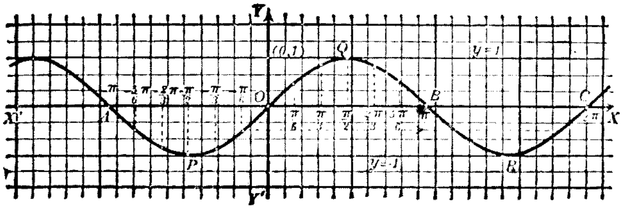
分 AO 及 OB 爲六等分.

在 B 點外此曲線之軌跡可以下之關係決定之.

$$\sin(2\pi+x)=\sin x.$$

因此 $$y=\sin x=\sin(2\pi+x),$$

若以 $x+2\pi$ 代換 x, 此曲線不變. 此示任何點可向右移動 2π 之距離. 因此 ARO 弧可平行於 XX' 而移動, 至 A 落於 B 爲止, 即至 BRC 之



位置. 亦卽此曲線在新位置上之一部. 同理, OQB 弧可平行於 XX' 而移動, 至 O 落於 C 爲止. 如此進行, 軌跡之全部含有無限個全同弧交錯在 XX' 之上下.

普遍討論. 1. 此曲線經過原點. 因 $(0, 0)$ 適合於方程式.

2. 因 $\sin(-x) = -\sin x$, 變 (3) 之符號,

$$-y = -\sin x$$

或

$$-y = \sin(-x).$$

因此, 若以 $(-x, -y)$ 代換 (x, y), 此軌跡不變, 故此軌跡關於原點爲對稱 (§ 34, 定理 IV).

3. 在 (3), 若 $x = 0$,

$$y = \sin 0 = 0 = y \text{ 軸上之截距}.$$

解 (3) 求 x,

$$x = \sin^{-1} y. \tag{4}$$

在 (4) 若 $y = 0$,

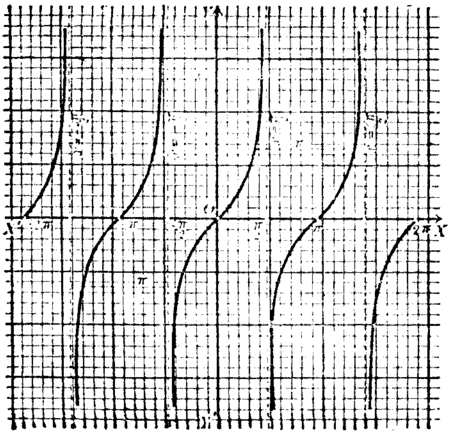
$$x = \sin^{-1} 0$$

$$= n\pi, \ n \text{ 爲任何整數}.$$

故曲線交 x 軸於 O 點左方或右方無限次數. 諸交點彼此之距離均爲 π.

4. 在 (3), 因任何數均可爲角之弧度, 故 x 可有任何值.

在(4),因一角之正弦有自 -1 至 $+1$ 之一切值,故 y 可有自 -1 至 $+1$ 之一切值.



5. 此曲線沿 XX' 向兩方無限伸張. 但完全在 $y=+1$ 及 $y=-1$ 兩直線之間.

從方程式(3),此曲線稱爲**正弦曲線**,或從其形狀而稱爲**波狀曲線**.

例 3. 描寫軌跡 $y=\tan x$. 照上例可討論此曲線之性質,並描寫其軌跡.

習　　題

描寫下列諸方程式之軌跡:

1. $y=\cos x$.
2. $y=\cot x$.
3. $y=\sec x$.
4. $y=\sin^{-1}x$.
5. $y=\tan^{-1}x$.
6. $y=2^x$.
7. $y=2\log_{10}x$.
8. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.
9. $y=\sin 2x$.
10. $y=\tan\frac{x}{2}$.
11. $y=2\cos x$.
12. $y=\sin x+\cos x$.

39. 方程式之圖解. 含有二變數之任何方程式,可以曲線表其圖象,稱爲方程式之圖解.祇須以二變數爲坐標,照通常描寫軌跡之方法行之.以此方法應用於已知定律,在科學中常見之.

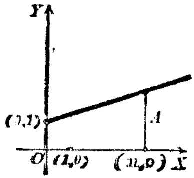
例 1. 畫一單利公式之圖象,此單利公式表本利和與本金,時期及利率之關係.

此公式在代數學中爲

(1) $$A=P(1+rn),$$

其中　　A = 本利和，P = 本金，r = 利率，n = 年數.

解　爲簡便計，命 $P=1$ 圓*，取



OX 上一格 $=1$ 年，

OY 上一格 $=1$ 圓，

橫坐標 $=n$ 之值，

縱坐標 $=A$ 之值.

所求圖象即爲下方程式之軌跡

(2)
$$y=rx+1.$$

(2) 之軌跡爲一直線，此直線經過 (0, 1) 一點，其斜率等於 r (§ 29, 定理 I).

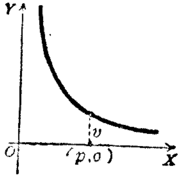
此圖象可用以解利息問題. 如年數 n 爲已知，祇須量直線上一點之縱坐標 A，其值即爲本金一元在已知利率於 n 年之本利和.

例 2.　在物理學中，已證得定量理想氣體之體積 (v) 壓力 (p) 及絕對溫度 (t) 有下之關係：

(3)
$$pv=kt,$$

其中 k 爲常數，全視各種氣體之性質而定.

若假定溫度爲常數，畫此公式之圖象.



解　取

OX 軸上一格 = 壓力之單位，

OY 軸上一格 = 體積之單位，

橫坐標 = 壓力，

縱坐標 = 體積.

所求圖象，即爲下方程式之軌跡

* 縱坐標之值乘以 P，即爲本金 P 圓之本利和.

(4) $$xy=\text{常數}.$$

此曲線爲雙曲線之一支*，向上或向右無限伸張而各漸近於軸．如此曲線稱爲等溫線，此種圖象稱爲壓力體積之圖象．

習　　題

1. 畫單利公式之圖象，若變數爲

(a) n 及 P.　(c) A 及 P.　(e) P 及 r.

(b) n 及 r.　(d) A 及 r.

2. 畫例 2 中公式之圖象，若變數爲

(a) p 及 t.　(b) v 及 t.

3. 任何本金 (P) 以複利息 $(r\%)$ 計算，在 n 年之本利和 (A) 爲下之複利公式

$$A=P(1+r)^n.$$

畫此公式之圖象，若變數爲

(a) A 及 P.　(c) A 及 n.　(e) P 及 n.

(b) A 及 r.　(d) P 及 r.　(f) r 及 n.

提示．兩方取對數計算爲便．

* 負體積無意義，故祇有軌跡之一部可適用．

第　四　章

直線及普遍一次方程式

40. 以坐標觀念應用於幾何學而求得其曲線與方程式之關係，已在前章論及．解析幾何學更須分別研究各曲線及方程式．本章專論直線，及表坐標之二變數 x 及 y 所成之普遍一次方程式．

41. 直線方程式之次數． 第三章已證得（§ 29, 定理 I）．

(1) $$y = mx + b$$

爲一直線方程式，其斜率爲 m，Y 軸上之截距爲 b；m 及 b 可有任何正，負及零之數值（§ 22）．但一直線若平行於 Y 軸，其方程式不能化爲 (1) 之形式．因，第一，此直線與 Y 軸無截距，第二，其斜率爲無窮大，不能代 (1) 中之 m．故平行於 Y 軸之直線應爲下之形式

(2) $$x = \text{常數}.$$

一直線之方程式可化成 (1) 或 (2) 之形式，因此方程式均爲 x 及 y 之一次式，故得

定理 I. 一直線之方程式爲坐標 x 及 y 之一次方程式．

42. 普遍一次方程式，$Ax+By+C=0$． 方程式

(1) $$Ax + By + C = 0,$$

稱爲 x 及 y 之普遍一次方程式，其中 A, B 及 C 爲任意常數（§ 2）．蓋任何一次式均可化爲該形式也．

方程式 (1) 表一切直線．

因方程式 $y=mx+b$ 可寫作 $mx-y+b=0$，而 $A=m$，$B=-1$，$C=b$；又方程式 $x=$ 常數可寫作 $x-$ 常數 $=0$，而 $A=1$，$B=0$，$C=-$ 常數。

定理 II. （定理 I 之逆）普遍一次方程式

(1) $$Ax+By+C=0$$

之軌跡爲一直線。

證　解 (1) 求 y，得

(2) $$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

此方程式與 (1) 之軌跡同（§ 30 定理 III）。

從 § 29，定理 I，軌跡 (2) 爲一直線，其斜率爲 $m=-\frac{A}{B}$，在 Y 軸上之截距爲 $b=-\frac{C}{B}$。

若 $B=0$，(1) 不能化爲 (2) 之形式。但若 $B=0$，(1) 變爲

$$Ax+C=0,$$

或 $$x=-\frac{C}{A}.$$

此方程式之軌跡爲一直線，與 Y 軸平行（§ 29，1）。故不論何種情形，(1) 之軌跡爲一直線。　*Q. E. D.*

系 I. 直線

$$Ax+By+C=0$$

之斜率爲 $m=-\frac{A}{B}$；此値即爲 x 之反號係數除以 y 之係數。

系 II. 直線

$$Ax+By+C=0,$$

及 $$A'x+B'y+C'=0,$$

在及祇在 x 及 y 之係數成比例，即 $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$ 時爲平行。

因在及祇在二直線之斜率相等時，二直線爲平行，即

$$-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'}.$$

變號，用更比定理得

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}.$$

系 III. 直線

$$Ax+By+C=0,$$

及

$$A'x+B'y+C'=0,$$

在及祇在

$$AA'+BB'=0$$

時爲垂直.

因在及祇在一直線之斜率爲第二直線斜率之負倒數時，二直線爲垂直；即

$$-\frac{A}{B}=\frac{B'}{A'},$$

或

$$AA'+BB'=0.$$

系 IV. 直線

$$Ax+By+C=0,$$

在 X 及 Y 軸上之截距各爲

$$a=-\frac{C}{A} \text{ 及 } b=-\frac{C}{B}.$$

命 $y=0$，解 x，得 X 軸上之截距（§ 35 規則）. Y 軸上之截距已在上面求得.

在數字係數之問題中，其截距可用 § 35 之規則求之. 系 I 及系 IV 祇作參考而已. 今將方程式化爲

$$y=mx+b$$

之形式，x 之係數即爲斜率.

定理 I 及 II 可歸併述之如下：

方程式中，在及祇在 x 及 y 爲一次式時，其軌跡爲一直線.

定理 II 敍述一次方程式之軌跡爲一直線. 故作一次方程式之軌跡時，

祇須在軌跡上求得二點.聯此二點,卽得直線.此所求得之二點,卽爲直線與二軸之交點.若二點與原點相距甚近,則可用一點,另一點在較遠之處求之,其坐標照 § 31 規則計算.

定理 III. 若兩個一次方程式

(3) $$Ax+By+C=0,$$

及

(4) $$A'x+B'y+C'=0,$$

有同一軌跡,則相當項係數成比例,卽

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

證　方程式 (3) 及 (4) 之直線旣表同一軌跡,則 Y 軸上之截距與斜率應各各相同.因有相同斜率

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'},\qquad (\S\ 42,\text{系 I}).$$

因在 Y 軸上之截距相同

$$\frac{C}{B}=\frac{C'}{B'},\qquad (\S\ 42,\text{系 IV}).$$

從更比定理得

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\text{ 及 }\frac{C}{C'}=\frac{B}{B'};$$

因此 $$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.\qquad Q.\ E.\ D.$$

例 1.　求 a 及 b 之值而使

$$2ax+2y-5=0,$$

及 $$4x-3y+7b=0$$

表同一軌跡.

解　二方程式可表同一軌跡，若(定理 III).

$$\frac{2a}{4}=\frac{2}{-3}=\frac{-5}{7b},$$

a 及 b 之值可從下二式解之，

$$\frac{2a}{4}=\frac{2}{-3} \text{ 及 } \frac{2}{-3}=\frac{-5}{7b}$$

$$\therefore \quad a=\frac{-4}{3}, \quad b=\frac{15}{14}.$$

43. 二個一次方程式解答之幾何意義.

若解二方程式

(1) $$Ax+By+C=0,$$

及

(2) $$A'x+B'y+C'=0,$$

得此二方程式(1)及(2)所表直線交點之坐標(§ 37, 規則). 若二直線平行則無交點，若二直線合一，則直線上各點均為交點. 故方程式(1)及(2)聯立時，其解答之個數與二直線之位置，可列成下之關係：

直線之位置	方程式解答之個數
相交直線	一解
平行線	無解
疊合直線	無限解.

有時為簡便計，不須解方程式. 而可決定其解答之個數. 猶如不解二次方程式，而可決定其根之性質然. 下之定理，即此方法.

定理 IV. 二個一次方程式

$$Ax+By+C=0,$$

及
$$A'x+B'y+C'=0.$$

普遍言之,有 x 及 y 之一解答,若在

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$$

時則無解答;但在

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$$

時則有無限個解答.

用 § 42 系 II 及定理 III 卽得此定理之證明.

習　　題

1. 求下列諸直線之截距,並描寫其圖象.

(a) $2x+3y=6$.　　答. 3, 2.

(b) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$.　　答. 2, 4.

(c) $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1$.　　答. 3, −5.

(d) $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1$.　　答. 4, −2.

2. 畫下列各直線之圖象.

(a $2x-3y+5=0$.　　(c) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

(b) $y-5-4x=0$.　　(d) $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$.

3. 求直線方程式,並化爲普遍形式,已知

(a) $m=2,\ b=-3$.　　答. $2x-y-3=0$.

(b) $m=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$.　　答. $x+2y-3=0$.

(c) $m=\frac{2}{5},\ b=-\frac{5}{2}$.　　答. $4x-10y-25=0$.

(d) $a=\frac{\pi}{4}$, $b=-2$.　　　　答. $x-y-2=0$.

(e) $a=\frac{3\pi}{4}$, $b=3$.　　　　答. $x+y-3=0$.

提示. 代入 $y=mx+b$.

4. 求下列各組聯立方程式解答之個數,並描寫其軌跡.

(a) $\begin{cases}2x+3y-6=0.\\4x+6y+9=0.\end{cases}$　　　　答. 無解答.

(b) $\begin{cases}x-y=1.\\x+y=1.\end{cases}$　　　　答. 一組解答.

(c) $\begin{cases}2-3x=y.\\6x+2y=4.\end{cases}$　　　　答. 無限個解答.

(d) $\begin{cases}4x-5y+20=0.\\12x-15y+6=0.\end{cases}$　　　　答. 無解答.

5. 畫直線 $2x-3y+6=0$ 及 $x-y=0$. 並畫當 $k=0,\ \pm1,\ \pm2$ 時,方程式 $(2x-3y+6)+k(x-y)=0$ 之軌跡.

6. 選擇下列各組之平行線及垂直線.

(a) $\begin{cases}L_1:\ y=2x-3.\\L_2:\ y=-3x+2.\\L_3:\ y=2x+7.\\L_4:\ y=\frac{1}{3}x+4.\end{cases}$　　　　答. $L_1 \parallel L_3$; $L_2 \perp L_4$.

(b) $\begin{cases}L_1:\ x+3y=0.\\L_2:\ 8x+y+1=0.\\L_3:\ 9x-3y+2=0.\end{cases}$　　　　答. $L_1 \perp L_3$.

(c) $\begin{cases}L_1:\ 2x-5y=8.\\L_2:\ 5y+2x=8.\\L_3:\ 35x-14y=8.\end{cases}$　　　　答. $L_2 \perp L_3$.

7. 一四邊形之四邊爲 $2x-3y+4=0$, $3x-y-2=0$, $4x-6y-9=0$ 及 $6x-2y+4=0$. 證此四邊形爲平行四邊形.

8. 求一直線之方程式,其斜率爲 -2, 並經過 $y=3x+4$ 及 $y=-x+4$ 之交點.

答. $2x+y-4=0$.

9. $y=mx+b$ 爲何種軌跡,若 b 爲常數, m 爲參數?若 m 爲常數, b 爲參數?

10. 寫一普遍之直線方程式,而此直線平行於

(a) $y=2x+7$.　　　　(c) $y-3x-4=0$.

(b) $y=-x+9$.　　　　(d) $2y-4x+3=0$.

11. 寫一普遍之直線方程式，而此直線與 Y 軸之截距與習題 10 中之 (a), (b), (c), (d) 相同。

12. 一直線平行於 $2x-3y=0$，在 Y 軸上之截距為 -2，求其方程式。

答. $2x-3y-6=0$.

13. 若 B 及 C 為常數，A 為參數，$Ax+By+C=0$ 之軌跡為何？若 A 及 B 為常數，C 為參數則如何？

44. 二條件決定一直線. 初等幾何學中已示二條件可決定一直線。例如二點決定一直線，或過一點而與一所設直線平行祇可作一直線。但有時適合於二條件之直線有二個或不止二個；如過圓外一點可作二直線與圓相切，或可作四直線與相交二圓相切。

解析法中可照下列方法決定之。任何直線方程式之形式為

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$

若係數 A, B 及 C 中，已知其二，卽可以第三個係數表此二係數，而此直線卽可完全決定。

例如若 $A=2B$ 及 $C=-3B$，方程式 (1) 化為

$$2Bx+By-3B=0,$$

或

$$2x+y-3=0.$$

凡直線所適合之幾何條件，可導得含有係數 A, B 及 C 中一個或一個以上之方程式。

如一直線經過原點，必得 $C=0$ (§ 35 定理 VI)；或斜率為 3，則 $-\dfrac{A}{B}=3$ (§ 42 系 I)。

一直線適合二條件導得含有 A, B 及 C 之二個方程式，可使一係數表其餘二個係數。故有二條件，就可決定一直線。

若含 A, B 及 C 之方程式為一次式，則適合於所設條件之直線祇有一個。蓋以二個一次方程式，普遍言之，祇有一組解答 (§ 43 定理 IV)。若一方程式為二次，他一個為一次，而其公共解答為實數，則適合於所設條件之直線有二個。普遍言之，適合於二個條件之直線數全視含有 A, B

及 C 之方程式次數而決定.

規則. 決定適合於二個條件之直線方程式.

第一步. 假定直線方程式爲

$$Ax+By+C=0.$$

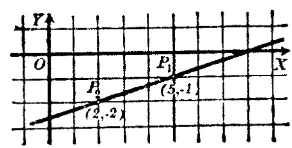
第二步. 求 A, B 及 C 間之二方程式，每一方程式表直線之一已知條件.

第三步. 解此二方程式，以係數 A, B 及 C 中之任一個表其餘二個.

第四步. 以第三步結果代入第一步之方程式，全式以所餘之一個係數除之，卽得所求之直線方程式.

例 1. 一直線過 $P_1(5,-1)$ 及 $P_2(2,-2)$ 二點，求其方程式.

解 第一步. 設所求方程式爲



(1) $$Ax+By+C=0.$$

第二步. 因 P_1 在 (1) 之軌跡上(§ 27, 系).

(2) $$5A-B+C=0;$$

又因 P_2 在直線上，

(3) $$2A-2B+C=0.$$

第三步. 解 (2) 及 (3) 用 C 表 A 及 B, 得

$$A=-\tfrac{1}{8}C,\quad B=\tfrac{3}{8}C.$$

第四步. 代入 (1)

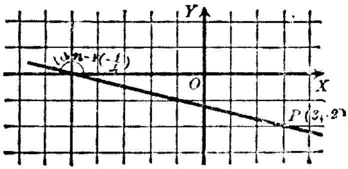
$$-\tfrac{1}{8}Cx+\tfrac{3}{8}Cy+C=0.$$

全式以 C 除之，化簡，得所求方程式爲

$$x-3y-8=0.$$

例 2.　一直線過 $P_1(3,-2)$，斜率爲 $-\frac{1}{4}$，求其方程式.

解　第一步.　設所求方程式爲



(4) $$Ax+By+C=0.$$

第二步.　因 P_1 在 (4) 上,

(5) $$3A-2B+C=0;$$

又因斜率爲 $-\frac{1}{4}$，

(6) $$-\frac{A}{B}=-\frac{1}{4}.$$

第三步.　解 (5) 及 (6)，用 B 表 A 及 C，得

$$A=\tfrac{1}{4}B,\quad C=\tfrac{5}{4}B.$$

第四步.　代入 (4)

$$\tfrac{1}{4}Bx+By+\tfrac{5}{4}B=0,$$

或 $$x+4y+5=0.$$

習　　題

1.　求適合於下列條件之直線方程式，並畫其圖象.

(a) 經過 (0, 0) 及 (8, 2).　答.　$x-4y=0$.

(b) 經過 $(-1, 1)$ 及 $(-3, 1)$.　答.　$y-1=0$.

(c) 經過 $(-3, 1)$ 及斜率 $=2$.　答.　$2x-y+7=0$.

(d) 截距 $a=3$ 及 $b=-2$.　答.　$2x-3y-6=0$.

(e) 斜率 $=-3$，X 軸上截距 $=4$.　答.　$3x+y-12=0$.

(f) 截距 $a=-3$ 及 $b=-4$.　答.　$4x+3y+12=0$.

(g) 經過 (2, 3) 及 $(-2,-3)$.　答.　$3x-2y=0$.

(h) 經過 (3, 4) 及 $(-4,-3)$.　答　$x-y+1=0$.

(i) 經過 (2, 3) 及斜率 $=-2$.　答.　$2x+y-7=0$.

(j) 截距爲 2 及 -5.　答.　$\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1$.

2.　一直線經過原點且平行於直線 $2x-3y=4$，求方程式.　答.　$2x-3y=0$.

3. 一直線經過原點且與直線 $5x+y-2=0$ 垂直，求其方程式.

答. $x-5y=0$.

4. 一直線經過 $(3, 2)$ 一點，且與直線 $4x-y-3=0$ 平行，求其方程式.

答. $4x-y-10=0$.

5. 一直線經過 $(3, 0)$ 一點，且與直線 $2x+y-5=0$ 垂直，求其方程式.

答 $x-2y-3=0$.

6. 一直線經過 $(6, 3)$ 一點，且在 Y 軸上之截距為 5，求其方程式.

答. $x+3y-15=0$.

7. 一直線在 x 軸上之截距爲3，且與直線 $x-4y+2=0$ 平行，求其方程式.

答 $x-4y-3=0$.

8. 一直線經過原點，且過二直線 $x-2y+3=0$ 及 $x+2y-9=0$ 之交點，求其方程式.

答. $x-y=0$.

9. 一直線之斜率爲 m，且經過一點 $P_1(x_1, y_1)$，求其方程式.

答 $y-y_1=m(x-x_1)$.

10. 一直線之截距爲 a 及 b，求其方程式.　　答. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

11. 一直線經過 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$，求其方程式.

答. $(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+x_2y_1-x_1y_2=0$.

12. 證上題之結果可寫作下之形式

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

提示. 加減 x_1y_1，分解因式，移項化爲比例式.

45. 用直線上一點之坐標及其斜率表直線方程式. 本節以下，均用前節之規則決定常遇且適合二條件之直線方程式之普遍形式. 此種普遍形式之方程式，可使吾人寫出一方程式甚易，猶如已知斜率及 Y 軸上之截距而寫 $y=mx+b$ 之方程式然.

定理 V. 點斜式. 一直線經過一點 $P_1(x_1, y_1)$ 而有斜率 m，其方程式爲

(V) $$y-y_1=m(x-x_1).$$

證 第一步. 設所設直線之方程式爲

(1) $$Ax+By+C=0.$$

第二步． 從假設

(2) $$Ax_1+By_1+C=0,$$

及

(3) $$-\frac{A}{B}=m.$$

第三步． 解 (2) 及 (3), 用 B 表 A 及 C, 得

$$A=-mB \text{ 及 } C=B(mx_1-y_1).$$

第四步． 代入 (1), 得

$$-mBx+By+B(mx_1-y_1)=0.$$

以 B 除之, 移項

$$y-y_1=m(x-x_1). \qquad Q. E. D.$$

若 P_1 在 Y 軸上, 則 $x_1=0$ 及 $y_1=b$, 此方程式變爲 $y=mx+b$.

46. 用截距表直線方程式． 吾人現求經過二已知點之直線方程式，今先假定二已知點爲軸上之二點．此節所述之直線，不平行於任何軸，且不經過原點．蓋若此直線經過原點，則軸上二點相合．此直線就不能決定．

定理 VI． 截距式． 若 a 及 b 爲一直線在 X 及 Y 軸上之截距，則此直線之方程式爲

(VI) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

證 第一步． 設所設直線之方程式爲

(1) $$Ax+By+C=0.$$

第二步． 從截距定義 (§ 35), 二點 $(a, 0)$ 及 $(0, b)$ 在直線上； 故

(2) $$Aa+C=0,$$

(3) $$Bb+C=0.$$

第三步 解 (2) 及 (3), 用 C 表 A 及 B 得

$$A=-\frac{1}{a}C \text{ 及 } B=-\frac{1}{b}C.$$

第四步. 代入 (1) 得

$$-\frac{1}{a}Cx-\frac{1}{b}Cy+C=0.$$

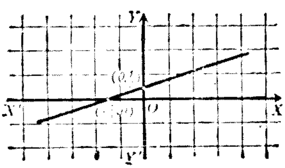
以 C 除之, 移項

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad Q.\ E.\ D.$$

例 1. 化軌跡 $2x-6y+3=0$ 之方程式爲截距式, 並畫其圖象.

解 移常數項, 得

$$2x-6y=-3.$$



以 -3 除之,

$$\frac{2x}{-3}+2y=1,$$

或 $$\frac{x}{-\frac{3}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1。$$

此方程式屬於 (VI) 之形式. 因此得

$$a=-\tfrac{3}{2} \text{ 及 } b=\tfrac{1}{2}.$$

畫二點 $(-\frac{3}{2},0)$ 及 $(0,\frac{1}{2})$, 聯此二點卽爲所求直線.

47. 經過二點之直線方程式.

定理 VII. 兩點式. 一直線經過二點 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$, 其方程式爲

(VII) $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

證　設直線之方程式爲

(1) $$Ax+By+C=0,$$

則從假設

(2) $$Ax_1+By_1+C=0,$$

及

(3) $$Ax_2+By_2+C=0.$$

照 § 44 規則，解 (2) 及 (3)，用 C 表 A 及 B，代入 (1)，再除以 C；此法卽爲自 (1)，(2) 及 (3) 消去 A，B 及 C. 消去之手續當以下法爲簡易.

從 (1) 減 (2)，得

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0,$$

或

(4) $$A(x-x_1)=-B(y-y_1).$$

同樣，從 (3) 減 (2)，得

(5) $$A(x_2-x_1)=-B(y_2-y_1).$$

以 (5) 除 (4)，得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.\qquad Q.\ E.\ D.$$

系.　三點 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 及 $P_3(x_3, y_3)$ 共線，其條件爲

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}.$$

此條件卽爲 P_3 須在 P_1 及 P_2 之聯線 (VII) 上 (§ 27 系).

此系之證法較其本身更爲有用. 此條件可從 (VII) 直接求得，須熟記之.

習題

1. 用代公式法求適合於 § 44 習題 1 中條件之直線方程式.

2. 求適合於下列條件之直線方程式,並畫其圖象.

(a) 經過原點,斜率 $=3$. 答. $3x-y=0$.

(b) 經過 $(3,-2)$ 及 $(0,-1)$. 答. $x+3y+3=0$.

(c) 截距為 4 及 -3. 答. $3x-4y-12=0$.

(d) Y 軸上截距 $=5$ 及斜率 $=3$. 答. $3x-y+5=0$.

(e) 經過 $(1,-2)$ 及 $(3,-4)$. 答. $x+y+1=0$.

(f) 截距為 -1 及 -3. 答. $3x+y+3=0$.

(g) 經過 $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 及斜率 $=-\frac{2}{3}$. 答. $4x+6y-7=0$.

(h) 經過 $(0,0)$ 及斜率 $=m$. 答. $y=mx$.

3. 三角形之頂點為 $(-3,2)$, $(3,-2)$ 及 $(0,-1)$. 求各邊之方程式.

答. $2x+3y=0$, $x+3y+3=0$ 及 $x+y+1=0$.

4. 求習題 3 中三角形三中線之方程式,並證三中點共點.

答. $x=0$, $7x+9y+3=0$, 及 $5x+9y+3=0$.

提示. 證三線共點祇須證二線之交點在第三線上.

5. 證任何三角形之中線共點.

提示. 取一頂點為原點,一邊為 x 軸,則三頂點之坐標可假定為 $(0,0)$, $(a,0)$ 及 (b,c).

6. 試決定下列各點是否在一直線上.

(a) $(0,0)$, $(1,1)$, $(7,7)$. 答. 是.

(b) $(2,3)$, $(-4,-6)$, $(8,12)$. 答. 是.

(c) $(3,4)$, $(1,2)$, $(5,1)$. 答. 否.

(d) $(3,-1)$, $(-6,2)$, $(-\frac{3}{2},1)$. 答. 否.

(e) $(5,6)$, $(\frac{5}{3},1)$, $(-1,-\frac{6}{5})$. 答. 是.

(f) $(7,6)$, $(2,1)$, $(6,-2)$. 答. 否.

7. 化下列方程式為 (VI) 之形式,並畫其軌跡.

(a) $2x+3y-6=0$. (d) $3x+4y+1=0$.

(b) $x-3y+6=0$. (e) $2x-4y-7=0$.

(c) $3x-4y+9=0$. (f) $7x-6y-3=0$.

8. 求習題 3 中三角形各邊中點聯線之方程式,並證其各與第三邊平行.

答. $4x+6y+3=0$, $x+3y=0$ 及 $x+y=0$.

9. 一直線經過原點及二直線 $x+2y=1$ 及 $2x-4y-3=0$ 之交點，求其方程式。

答．$x+10y=0$.

10 證正方形二對角線互相垂直。

提示．取二邊爲軸，每邊之長爲 a.

11. 三角形任何二邊中點之聯線平行於第三邊，試證之。

提示．選軸時使其頂點爲 $(0, 0)$, $(a, 0)$ 及 (b, c).

12. 一直線經過一點 $(3, -4)$，且與直線 $2x-y=3$ 有同一斜率，求其方程式。

答．$2x-y-10=0$.

13. 一直線經過 $(-1, 4)$ 一點，且平行於 $3x+y+1=0$ 之一直線，求其方程式。

答．$3x+y-1=0$

14. 平行四邊形之二邊爲 $2x+3y-7=0$ 及 $x-3y+4=0$. 若一頂點之坐標爲 $(3, 2)$. 求其餘二邊。　答．$2x+3y-12=0$ 及 $x-3y+3=0$.

15. 一直線經過 $(-2, 3)$ 一點，且與直線 $x+2y=1$ 垂直，求其方程式。

答．$2x-y+7=0$.

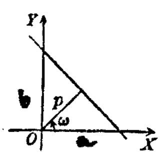
16. 證不論 k 爲何值，三直線 $x-2y=0$, $x+2y-8=0$ 及 $x+2y-8+k(x-2y)=0$ 共點。

17. 用 § 22 定理 V 照 § 28 規則求公式 (V) 及 (VII).

18. 用相似三角形相當邊成比例之定理照 § 28 規則求公式 (VI) 及 (VII).

19. 用直角三角形中一銳角正切之定義照 § 28 規則求公式 $y=mx+b$ 及 (V).

20. 自原點至一直線之垂直距離爲 p，此垂線與 X 軸正方向之交角爲 ω. 用 p 及 ω 求此直線之方程式。



提示．照圖中解直角三角形，用 p 及 ω 求截距，代入 (VI)

答．$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$.

21. 若 x_1 及 y_1 爲常數，m 爲參數，(V) 之軌跡爲何？

22. (VI) 之軌跡爲何，若 a 爲常數，b 爲參數？若 b 爲常數，a 爲參數？

23. 求經過 $(2, -1)$ 一點任何直線之方程式。

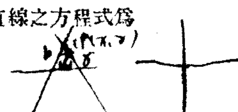
24. 求在 X 軸上截距爲 3 之任何直線之方程式。

25. 一直線在 Y 軸上之截距爲 -2. 求其二種不同形式之方程式。

26. 求斜率爲 $-\frac{1}{2}$ 之任何直線之方程式。

27. 設二斜軸之交角爲 ω，則以傾角 α 及 Y 軸上截距 b 所表直線之方程式爲

$$y=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}x+b.$$

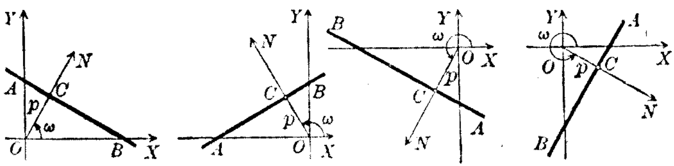


28. 若二軸之交角爲 ω，則一直線經過 $P_1(x_1, y_1)$ 而傾角爲 α 之方程式爲

$$y-y_1=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}(x-x_1).$$

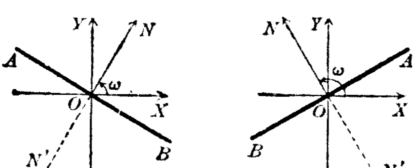
29. 證明方程式 (VI) 及 (VII) 於斜角坐標系亦成立.

48. 直線方程式之法線式. 前節之直線由二點或一點及一方向所決定.此二方法常用於初等幾何學中.今更有以二條件決定一直線之方法,解析幾何學中專用之.



設 AB 爲任何直線, ON 爲自原點至 AB 所作之垂線,其垂足爲 C. 假定 ON 之方向自 O 至 N——即自原點至直線——並命 OC 正向之長爲 p, 正角 XON 爲 ω*. 此正角之量法爲以 OX 爲始邊, ON 爲終邊, 與三角法中所述者相同 (§ 11). 從圖中知任何直線之位置, 可以一對 p 及 ω 之值決定之, p 及 ω 均爲正數且 $\omega<2\pi$.

反之,一直線可決定一正值 p 及一正值 ω, 而 ω 小於 2π. 若 $p=0$, AB 經過原點,上述 ON 正向之規定爲無意義.從下圖, 可擇 ω 爲 XON 或 XON' 角. 當 $p=0$ 時吾人常假定 $\omega<\pi$. 且 ON 以向上爲正向.



定理 VIII. 直線方程式之**法線式**+爲

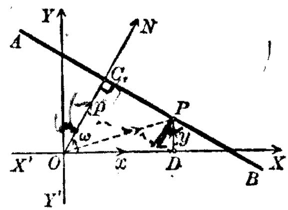
---

* ω 並非二方向直線 OX 及 ON 之交角如 § 19 中所述.

+ 此方程式之意義可於第 IX 章中法線之定義表明之.

(VIII) $$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0.$$

式中 p 爲自原點至直線之垂直距離卽爲法線，ω 爲垂線與以 X 軸之正向線 OX 爲始邊之正角.



證 設 $P(x,y)$ 爲所設直線 AB 上之任何點. 則因 AB 垂直於 ON, OP 在 ON 上之射影等於 p(§ 20 定義). 從第二射影定理 (§ 25) OP 在 ON 上之射影等於 OD 及 DP 在 ON 上射影之和. P 在 AB 上之條件爲

(1) OD 在 ON 上之射影 $+$ DP 在 ON 上之射影 $=p$.

從第一射影定理 (§ 20), 得

(2) OD 在 ON 上之射影 $=OD\cos\omega=x\cos\omega$,

(3) DP 在 ON 上之射影 $=DP\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=y\sin\omega$.

二方向直線 DP 及 ON 之交角等於 OY 及 ON 之交角 $=\frac{\pi}{2}-\omega$.

以 (2) 及 (3) 代入 (1), 得

$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0. \qquad Q.\ E.\ D.$$

化所設方程式

(4) $$Ax+By+C=0$$

爲法線式, 吾人須決定 ω 及 p 之值而使 (4) 之軌跡與

(5) $$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$$

全同.

於是相當項之係數應成比例 (§ 42 定理 III).

$$\therefore\quad \frac{\cos\omega}{A}=\frac{\sin\omega}{B}=\frac{-p}{C}.$$

命其比值爲 r; 則

$$(6)\qquad \cos\omega = rA,$$

$$(7)\qquad \sin\omega = rB, \text{ 及}$$

$$(8)\qquad -p = rC.$$

求 r, (6) 及 (7) 平方, 相加得

$$\sin^2\omega + \cos^2\omega = r^2(A^2+B^2).$$

但 $$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1;$$

因此 $$r^2(A^2+B^2) = 1, \text{ 或}$$

$$(9)\qquad r = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

方程式(8)顯示根式所取之符號; 因 p 爲負, r 及 C 須異號. 若 $C=0$, 則從 (8) $p=0$. 因此 $\omega<\pi$ (§ 48); 而 $\sin\omega$ 爲正, 從 (7) r 及 B 須同號.

從 (9) 以 r 之值代入 (6), (7) 及 (8) 得

$$\cos\omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\omega = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad p = -\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

故 (5) 可化爲

$$(10)\qquad \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

此卽 (4) 之法線式 此討論之結果可述於下之

規則. 化 $Ax+By+C=0$ 爲法線式.

第一步. 求 $\sqrt{A^2+B^2}$ 之數值.

第二步. 使第一步所得結果之符號與 C 相反, 若 $C=0$ 則與 B 相同.

第三步. 以第二步結果除所設方程式, 卽得所求方程式.

用直線方程式之法線式有二種便利: 第一, 不論此直線平行於軸或經

過原點均可化爲法線式、第二，如下節所述，可用以求自直線至一點之距離。

習　　題

1. ON（§ 48 之圖）應在何種象限內，若 $\sin\omega$ 及 $\cos\omega$ 均爲正？均爲負？$\sin\omega$ 爲正及 $\cos\omega$ 爲負？$\sin\omega$ 爲負及 $\cos\omega$ 爲正？

2. 求直線方程式，並畫其圖象，已知

(a) $\omega=0,\ p=5.$　　答．$x=5.$

(b) $\omega=\dfrac{3\pi}{2},\ p=3.$　　答．$y+3=0.$

(c) $\omega=\dfrac{\pi}{4},\ p=3.$　　答．$\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,y-6=0.$

(d) $\omega=\dfrac{2\pi}{3},\ p=2.$　　答．$x-\sqrt{3}\,y+4=0.$

(e) $\omega=\dfrac{7\pi}{4},\ p=4.$　　答．$\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,y-8=0.$

3. 化下列方程式爲法線式並求 p 及 ω 之值．

(a) $3x+4y-2=0.$　　答．$p=\frac{2}{5},\ \omega=\cos^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{4}{5}.$

(b) $3x-4y-2=0.$　　答．$p=\frac{2}{5},\ \omega=\cos^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}(-\frac{4}{5}).$

(c) $12x-5y=0.$　　答．$p=0,\ \omega=\cos^{-1}(-\frac{12}{13})=\sin^{-1}(\frac{5}{13}).$

(d) $2x+5y+7=0.$　　答．$p=\dfrac{7}{+\sqrt{29}},\ \omega=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{-\sqrt{29}}\right)=\sin^{-1}\dfrac{5}{-\sqrt{29}}.$

(e) $4x-3y+1=0.$　　答．$p=\frac{1}{5},\ \omega=\cos^{-1}(-\frac{4}{5})=\sin^{-1}\frac{3}{5}.$

(f) $4x-5y+6=0.$　　答．$p=\dfrac{6}{+\sqrt{41}}\ \ \omega=\cos^{-1}\left(\dfrac{4}{-\sqrt{41}}\right)=\sin^{-1}\left(\dfrac{5}{+\sqrt{41}}\right).$

4. 求自原點至下列各直線之垂直距離．

(a) $12x+5y-26=0.$　　答．2

(b) $x+y+1=0.$　　答．$\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

(c) $3x-2y-1=0.$　　答．$\frac{1}{13}\sqrt{13}.$

5 求 (VIII) 當 (a) $\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$；　(b) $\pi<\omega<\frac{3\pi}{2}$；

y [illegible] (w-90)=y [illegible]

(c) $\frac{3\pi}{2}<\omega<2\pi$，　(d) $p=0$ 及 $0<\omega<\frac{\pi}{2}$.

6. p 及 ω 應爲何值可使軌跡 (VIII) 平行於 X 軸? Y 軸?經過原點?

7. 一直線之斜率爲 -2, 自原點之垂直距離爲 5. 求其方程式.

答. $2\sqrt{5}x+\sqrt{5}y-25=0$ 及 $2\sqrt{5}x+\sqrt{5}y+25=0$.

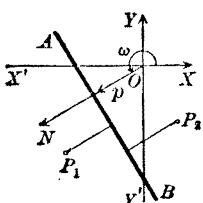
8. 自原點至一直線之距離爲 10, 而此直線經過 (5, 10) 一點,求其方程式.

答. $y=10$ 及 $4x+3y=50$.

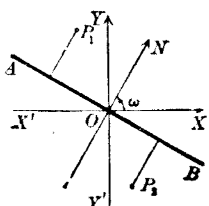
9. (VIII) 爲何種軌跡,若 p 爲常數, ω 爲參數?若 ω 爲常數, p 爲參數?

19. 自原點至一直線之距離爲 5. 求適合於此條件之諸直線方程式.

49. 自直線至一點之距離. 自原點所作垂直於 AB 之法線 ON [圖(1)] 其正向爲自 O 至 AB(§ 48); 若 AB 經過 O [圖(2)]則 ON 以向上之方向爲正向. ON 之正向卽爲任何垂直於 AB 之直線之正向. 因此若 P_1



(1)



(2)

與原點在 AB 之兩旁時, 自 AB 至 P_1 之距離爲正; 在一旁時爲負. 若 AB 經過原點, 則自 AB 至 P_1 之方向向上時其距離爲正, 向下時爲負. 如圖中自 AB 至 P_1 之距離爲正, 自 AB 至 P_2 之距離爲負.

定理 IX. 自直線

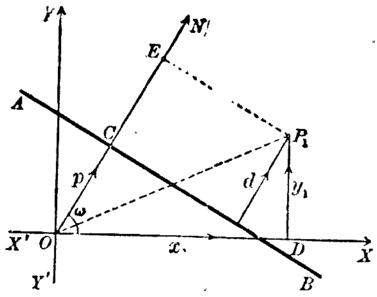
$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$$

至 $P_1(x_1, y_1)$ 之距離 d 爲

$$d=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-p. \qquad \text{(IX)}$$

證 設 AB 爲所設直線, ON 垂直於 AB. 由第二射影定理 (§ 25) 得

OP_1 在 ON 上之射影 $=OD$ 在 ON 上之射影 $+DP_1$ 在 ON 上之射影



從圖，OP_1 在 ON 上之射影 $= OE$

$$= p + d$$

由第一射影定理 (§ 20),

OD 在 ON 上之射影 $= OD \cos \omega$

$$= x_1 \cos \omega$$

DP_1 在 ON 上之射影

$$= DP_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = y_1 \sin \omega.$$

因此 $$p + d = x_1 \cos \omega + y_1 \sin \omega,$$

故 $$d = x_1 \cos \omega + y_1 \sin \omega - p. \qquad Q.\ E.\ D.$$

從此定理可得下之

規則. 求自所設直線至所設點之垂直距離.

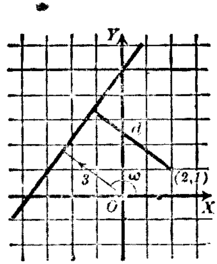
第一步. 化所設直線之方程式爲法線式 (§ 48 規則).

第二步. 以所設點之坐標代方程式左端之 x 及 y, 其結果卽爲所求之距離.

此結果之符號顯示所設點與原點是否在直線之一旁或兩旁.

例 1. 求自直線 $4x - 3y + 15 = 0$ 至一點 (2 1) 之距離.

解 第一步 化所設方程式爲法線式, 得



$$-\tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y - 3 = 0.$$

第二步. 以 2 代 x, 1 代 y 得

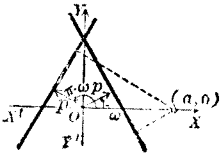
$$d = -\tfrac{4}{5}\cdot 2 + \tfrac{3}{5}(1) - 3 = -4.$$

負號是何意義?

例 2. 自等腰三角形兩腰至底邊上任何一點距離之和爲一常數. 試

證之.

解　取底邊之中點為原點,底邊為 X 軸,則二腰上 p 之值相等, ω 之值相補,因此若一腰方程式之法線式為



$$x\cos\omega + y\sin\omega - p = 0,$$

則另一腰之方程式為

$$x\cos(\pi-\omega) + y\sin(\pi-\omega) - p = 0,$$

或 $$-x\cos\omega + y\sin\omega - p = 0.$$

設 $(a,0)$ 為底邊上任意一點,則自二腰至 $(a,0)$ 之距離各為 $a\cos\omega - p$ 及 $-a\cos\omega - p$,故其距離之和為 $-2p$,即為常數.

習　題

1. 求下列各直線至各點之距離.

(a) $x\cos 45^\circ + y\sin 45^\circ - \sqrt{2} = 0$ 至 $(5,-7)$.　答. $-2\sqrt{2}$.

(b) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0$ 至 $(2, 1)$.　答. $-\frac{3}{5}$.

(c) $3x + 4y + 15 = 0$ 至 $(-2, 3)$.　答. $-\frac{21}{5}$.

(d) $2x - 7y + 8 = 0$ 至 $(3, -5)$.　答. $-\frac{49}{+\sqrt{53}}$.

(e) $x - 3y = 0$ 至 $(0, 4)$.　答. $\frac{12}{+\sqrt{10}}$.

2. 原點與一點 $(3,-2)$ 是否在直線 $x - y + 1 = 0$ 之一旁?　答. 是.

3. 直線 $2x + 3y + 2 = 0$ 是否在原點與一點 $(-2, 3)$ 之間.　答. 否.

4. 三直線 $2x + 3y = 0$, $x + 3y + 3 = 0$ 及 $x + y + 1 = 0$ 成一三角形.求此三角形三個高之長度.　答. $\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{10}}$, 及 $\sqrt{2}$.

5. 求自直線 $Ax + By + C = 0$ 至一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之距離.　答. $\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$.

6. 證定理 IX, 當

(a) $p = 0$, $\omega < \frac{\pi}{2}$;　(b) $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$;　(c) $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$;　(d) $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$.

7. 一點與 $3x-4y+1=0$ 及 $4x+3y-1=0$ 等距，求此點之軌跡.

答. $7x-y=0$ 及 $x+7y-2=0$

8. 一點與 $12x+5y-1=0$ 之距離爲此點與 Y 軸間距離之 2 倍，求此點之軌跡.

答. $14x-5y+1=0$.

9. 一點與 $4x-3y+1=0$ 之距離爲此點與 $5x-12y=0$ 間距離之 k 倍，求此點之軌跡.

答 $(52-25k)x-(39-60k)y+13=0$.

10. 求習題 9 中二直線所成角之二等分線.

答. $77x-99y+13=0$ 及 $27x+21y+13=0$.

11. 求平行線間之距離，

(a) $\begin{cases} y=2x+5. \\ y=2x-3. \end{cases}$ 答. $\dfrac{8}{+\sqrt{5}}$.　　(c) $\begin{cases} 2x-3y+4=0. \\ 4x-6y+9=0. \end{cases}$ 答. $\dfrac{1}{2\sqrt{13}}$.

(b) $\begin{cases} y=-3x+1. \\ y=-3x+4. \end{cases}$ 答. $\dfrac{3}{+\sqrt{10}}$.　　(d) $\begin{cases} y=mx+3. \\ y=mx-3. \end{cases}$ 答. $\dfrac{6}{+\sqrt{1+m^2}}$.

12. 用定理 IX，求直線之法線方程式.

13 證等腰三角形二腰上之高相等.

14. 證等邊三角形之三個高相等.

15. 自等邊三角形三邊至任意一點距離之和爲一常數，試證之.
提示. 取三角形之中心爲原點，以 X 軸平行於一邊.

16. 求三角形之面積，其三邊爲

(a) $2x-3y+30=0$, $x=0$, $x+y=0$.　答. 30.

(b) $x+y=2$, $3x+4y-12=0$, $x-y+6=0$.　答. $\frac{4}{7}$.

(c) $3x-4y+12=0$, $x-3y+6=0$, $2x-y=0$.　答. $3\frac{3}{5}$.

(d) $x+3y-3=0$, $5x-y-15=0$, $x-y+1=0$.　答. 8.

17. 畫下列各直線之圖形，並求其所成四邊形之面積.

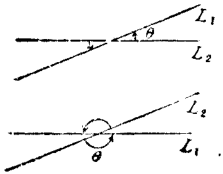
(a) $x=y$, $y=6$, $x+y=0$, $3x+2y-6=0$.　答. $16\frac{4}{5}$.

(b) $x+2y-5=0$, $y=0$, $x+4y+5=0$, $2x+y-4=0$.　答. 18.

(c) $2x-4y+8=0$, $x+y=0$, $2x-y-4=0$, $2x+y-3=0$.　答. $4\frac{71}{120}$.

50. 一直線與第二直線之交角. 二方向線所成之角已定爲 (§ 19) 二正方向之交角. 若一直線之方程式爲已知，則方向之正負未曾確定. 爲區別計，吾人恆規定**一直線與第二直線之交角**爲自第二直線至第一直線之正角 (§ 11).

如 L_1 與 L_2 之交角為 θ. 吾人常稱為"一直線與第二直線之交角". 若二直線無方向,"二直線間所成之角"之辭句須避免之. 故除 §11 及 §19 所解釋之角外, 今再用第三種方法解釋之.



定理 X. 一直線

$$L: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

與第二直線

$$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

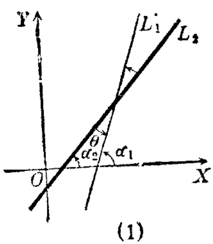
之交角 θ 為

$$\tan\theta = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}. \tag{X}$$

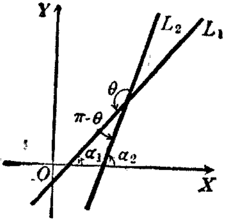
證 設 α_1 及 α_2 各為 L_1 及 L_2 之傾角. 則因三角形之外角等於內對角之和, 得

在圖(1), $\alpha_1 = \theta + \alpha_2$, 或 $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$,

在圖(2), $\alpha_2 = \pi - \theta + \alpha_1$, 或 $\theta = \pi + (\alpha_1 - \alpha_2)$.



(1)



(2)

因 (§ 12, 5),

$$\tan(\pi + \phi) = \tan\phi.$$

故在任何圖中

$$\tan\theta=\tan(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$=\frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}. \qquad [§ 12, 13]$$

但 $\tan\alpha_1$ 爲 L_1 之斜率, $\tan\alpha_2$ 爲 L_2 之斜率; 因此 (§ 42, 系 1)

$$\tan\theta=\frac{-\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}}{1+\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)}.$$

化簡, 得
$$\tan\theta=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}. \qquad Q.E.D.$$

系. 若 m_1 及 m_2 爲二直線之斜率, 則第一直線與第二直線之交角 θ 爲

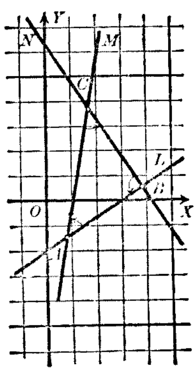
$$\mathbf{\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}}.$$

例 1. 求一三角形之各角, 已知其三邊之方程式爲

$L: 2x-3y-6=0$,

$M: 6x-y-6=0$,

$N: 6x+4y-25=0$.



解　欲知所設直線之何種交角爲三角形之內角, 須先畫直線之圖形, 使成 ABC 三角形. A 角爲 M 與 L 之交角, 卽在定理 X 中, 以 M 代 L_1 及 L 代 L_2.

因此　$A_1=6$,　$B_1=-1$;

$A_2=2$,　$B_2=-3$.

於是　　$\tan A = \dfrac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} = \dfrac{-2+18}{12+3} = \dfrac{16}{15},$

故　　$A = \tan^{-1}\left(\dfrac{16}{15}\right).$

B 爲 L 與 N 之交角，從 § 42，系 III，$B = \dfrac{\pi}{2}.$

C 爲 N 與 M 之交角，若

$$\tan C = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2},$$

必使　　$A_1 = 6,\qquad B_1 = 4;$

$A_2 = 6,\qquad B_2 = -1.$

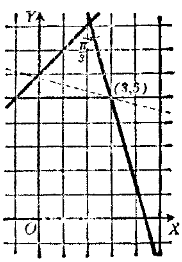
因此　　$\tan C = \dfrac{24+6}{36-4} = \dfrac{30}{32} = \dfrac{15}{16},$

而　　$C = \tan^{-1}\left(\dfrac{15}{16}\right).$

今可驗算此結果，若 $B = \dfrac{\pi}{2}$，則 $A = \dfrac{\pi}{2} - C$；因此 (§ 12, 6 及 1).

$\tan A = \cot C = \dfrac{1}{\tan C}$，故正確．

例 2.　一直線過 (3, 5) 一點，且與 $x - y + 6 = 0$ 之交角爲 $\dfrac{\pi}{3}$. 求此直線之方程式．



解　設 m_1 爲所求直線之斜率，則其方程式爲

(1)　　$y - 5 = m_1(x - 3).$

所設直線之斜率爲 $m_2 = 1$，因 (1) 與所設直線之交角爲 $\dfrac{\pi}{3}$，故得(從系)

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{m_1 - 1}{1 + m_1},$$

或
$$\sqrt{3}=\frac{m_1-1}{1+m_1},$$

故
$$m_1=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-(2+\sqrt{3}).$$

代入 (1), 得
$$y-5=-(2+\sqrt{3})(x-3),$$

或
$$(2+\sqrt{3})x+y-(11+3\sqrt{3})=0.$$

在平面幾何學中，此題有二解，——上列直線及圖中虛線. 爲何將虛線除外?

習　　題

1. 求直線 $3x-y+2=0$ 與 $2x+y-2=0$ 之交角；並求第二線與第一線之交角，證此二交角相補。 答. $\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

2. 求

(a) $2x-5y+1=0$ 與 $x-2y+3=0$ 之交角。

(b) $x+y+1=0$ 與 $x-y+1=0$ 之交角.

(c) $3x-4y+2=0$ 與 $x+3y-7=0$ 之交角。

(d) $6x-3y+3=0$ 與 $x=6$ 之交角.

(e) $x-7y+1=0$ 與 $x+2y-4=0$ 之交角.

畫各線之圖象，並以弧標明所求之角.

答. (a) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{12}\right)$; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\tan^{-1}\left(\frac{13}{9}\right)$;

(d) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$; (e) $\tan^{-1}\left(\frac{9}{13}\right)$.

3. 求一三角形之各角，已知其邊爲 $x+3y-4=0$, $3x-2y+1=0$ 及 $x-y+3=0$.

答. $\tan^{-1}\left(-\frac{11}{3}\right)$, $\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$, $\tan^{-1}(2)$.

提示. 畫三角形，視何種交角爲三角形之內角.

4. 三直線 $5x-y+3=0$, $y=2$, $x-4y+3=0$ 成一三角形，求其外角。

答. $\tan^{-1}(5)$, $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$, $\tan^{-1}\left(-\frac{19}{9}\right)$.

5. 三直線 $2x-3y-6=0$, $3x+4y-12=0$, $x-3y+6=0$ 成一三角形，求其一外角及二內對角．用 § 12 公式證驗此結果．

6. 三直線 $3x+2y-4=0$, $x-3y+6=0$ 及 $4x-3y-10=0$ 成一三角形，求三內角．用下列公式證驗其結果．

若 $A+B+C=180°$, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

7. 求一直線，此直線經過一所設點並與所設直線之交角爲所設角．

(a) $(2, 1)$, $\frac{\pi}{4}$, $2x-3y+2=0$. 答． $5x-y-9=0$.

(b) $(1, -3)$, $\frac{3\pi}{4}$, $x+2y+4=0$. 答． $3x+y=0$.

(c) $(2, -5)$, $\frac{\pi}{4}$, $x+3y-8=0$. 答． $x-2y-12=0$.

(d) (x_1, y_1), ϕ, $y=mx+b$. 答． $y-y_1=\frac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}(x-x_1)$.

(e) (x_1, y_1), ϕ, $Ax+By+C=0$. 答． $y-y_1=\frac{B\tan\phi-A}{A\tan\phi+B}(x-x_1)$.

8. 前已確定"一直線與第二直線之交角"之解釋．今用此從圖證明經過二直線之交點作一直線與該二直線成等角爲不可能．再用公式 (X) 證之．如何解釋二直線交角平分線之意義？

9. 設二直線 $L_1: 3x-4y-3=0$ 及 $L_2: 4x-3y+12=0$；求一直線方程式，此直線經過二直線之交點且與 L_1 之交角等於 L_2 與此直線之交角． 答． $7x-7y+9=0$.

51. 直線系． x 及 y 之一次方程式，若含有一個任意常數，其軌跡表無限個直線．因若假定每一任意常數之值，即可得一直線之軌跡．

含有任意常數之一次方程式，其直線成爲一系．適合一條件之一切直線，其方程式必含有一任意常數．故一個幾何條件決定一直線系．

如方程式 $y=2x+b$ 表斜率爲 2 之直線系，其中 b 爲任意常數，又方程式 $y-5=m(x-3)$ 表經過 $(3, 5)$ 一點之直線系，其中 m 爲任意常數．

第二規則． 求適合於二個條件之直線方程式．

第一步． 寫適合於一個條件之直線系方程式．

第二步． 以第二條件決定直線系方程式中之任意常數．

第三步． 以第二步之結果代入第一步之方程式，即得所求方程式．

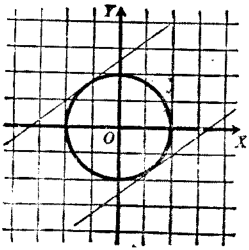
此規則較 § 44 規則易於應用. 在 § 50, 例 2 已用過, 以下仍須用之.

適合於條件之直線個數卽爲第二步所得任意常數之實數個數.

例 1. 一直線之斜率爲 $\frac{3}{4}$, 且祇交圓 $x^2+y^2=4$ 於一點, 求直線方程式.

解 第一步. 設斜率爲 $\frac{3}{4}$ 之直線方程式 (§ 29 定理 I), 爲

$$y=\tfrac{3}{4}x+b.$$



第二步. 直線與圓交點之坐標, 可由解聯立方程式之方法求之 (§ 37 規則). 以直線方程式中 y 之值代入圓之方程式, 得

$$x^2+(\tfrac{3}{4}x+b)^2=4,$$

或 $$25x^2+24bx+(16b^2-64)=0.$$

此方程式之二根, 從假設, 應相等; 故其判別式爲零 (§ 3 定理 II).

卽 $$576b^2-100(16b^2-64)=0,$$

$$\therefore\quad b=\pm\tfrac{5}{2}.$$

第三步. 以 b 之值代入第一步之方程式, 得二解

$$y=\tfrac{3}{4}x+\tfrac{5}{2}$$

及 $$y=\tfrac{3}{4}x-\tfrac{5}{2}.$$

習　題

1. 求適合下列一個條件之直線系方程式.
   (a) 經過 $(-2, 3)$.
   (b) 斜率 $-\frac{2}{5}$.
   (c) 自原點之距離爲 3.
   (d) Y 軸上之截距爲 -3.
   (e) 經過 $(6, -1)$.
   (f) X 軸上之截距爲 6.
   (g) 斜率爲 $\frac{1}{2}$.

(h) Y 軸上之截距為 5.

(i) 自原點之距離為 4.

2. 下列各直線系,表何幾何條件?

(a) $2x-3y+4k=0$.

(b) $kx-3y-7=0$.

(c) $x+y-k=0$.

(d) $x+k=0$.

(e) $x+2ky-3=0$.

(f) $2kx-3y+2=0$.

(g) $x\cos\alpha+y\sin\alpha+5=0$.

提示. 化所設方程式為已知一次方程式之形式.

3. 決定 k 之值,已知

(a) 直線 $2x-3y+k=0$ 經過 $(-2, 1)$ 一點. 答. $k=7$.

(b) 直線 $2kx-5y+3=0$ 之斜率為 3. 答. $k=\frac{15}{2}$.

(c) 直線 $x+y-k=0$ 經過 $(3, 4)$ 一點. 答. $k=7$.

(d) 直線 $3x-4y+k=0$ 在 X 軸上之截距為 2. 答. $k=-6$.

(e) 直線 $x-3ky+4=0$ 在 Y 軸上之截距為 -3. 答. $k=-\frac{4}{9}$.

(f) 直線 $4x-3y+6k=0$ 與原點之距離為三個單位 答. $k=\pm\frac{5}{2}$.

4. 一直線之斜率為 $-\frac{5}{12}$ 且截交圓 $x^2+y^2=1$ 於一點,求直線方程式.

答. $5x+12y=\pm 13$.

5. 一直線經過 $(1, 2)$ 一點,且截交圓 $x^2+y^2=4$ 於一點,求直線方程式.

答. $y=2$ 及 $4x+3y=10$.

6. 一直線經過 $(-2, 5)$ 一點且與 Y 軸之交角為 45°,求直線方程式.

答. $x+y-3=0$.

7. 一直線經過 $(2, -1)$ 一點,且自原點之距離為 2 單位,求其方程式.

答. $x=2$. 及 $3x-4y=10$.

8. 一直線之斜率為 $\frac{3}{4}$ 且自此直線至一點 $(2, 4)$ 之距離為 2,求其方程式.

答. $3x-4y=0$.

52. 平行於所設直線之直線系.

定理 XI. 平行於所設直線

$$Ax+By+C=0$$

之直線系爲

(XI) $$Ax+By+k=0,$$

式中 k 爲任意常數.

證　(XI) 所表之一切直線均平行於所設直線 (§ 42 系 II). 惟尚須證明平行於所設直線之一切直線可以 XI 表之. 平行於所設直線之任何直線可以其所經過之點 $P_1(x_1, y_1)$ 決定之. 若 P_1 在 (XI) 上,

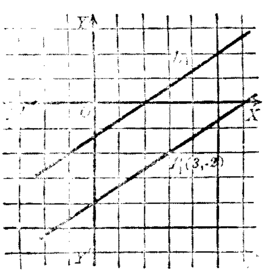
則 $$Ax_1+By_1+k=0;$$

因此 $$k=-Ax_1-By_1.$$

卽 k 之值可因軌跡 (XI) 經過任何點 P_1 而選定. 故 (XI) 表平行於所設直線之一切直線. *Q. E. D.*

須注意者, (XI) 中 x 及 y 之係數與所設方程式相同.

例 1.　一直線經過 $P_1(3,-2)$ 一點, 且平行於 $L_1: 2x-3y-4=0$, 求其方程式.



解　應用 § 51 規則.

第一步.　平行於所設直線之直線系爲

$$2x-3y+k=0.$$

第二步.　所求直線經過 P_1; 因此

$$2\cdot 3-3(-2)+k=0,$$

故 $$k=-12.$$

第三步.　以 k 之值代入, 所求方程式爲

$$2x-3y-12=0.$$

53.　垂直於所設直線之直線系.

定理 XII.　垂直於所設直線

$$Ax+By+C=0$$

之直線系爲

(XII) $$Bx - Ay + k = 0,$$

式中 k 爲任意常數.

證 (XII) 所表之一切直線均可垂直於所設之直線，因 (§ 42 系 III) $AB - BA = 0$. 今尚須證明垂直於所設直線之一切直線可以 (XII) 表之. 垂直於所設直線之任何直線，可以其所經過之一點 $P_1(x_1, y_1)$ 決定之. 若 P_1 在 (XII) 上,

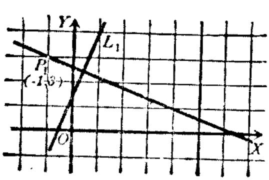
則 $$Bx_1 - Ay_1 + k = 0,$$

因此 $$k = Ay_1 - Bx_1.$$

即 k 之值可因軌跡 (XII) 經過任何點 P_1 而選定. 故 (XII) 表垂直於所設直線之一切直線. *Q. E. D.*

須注意者，(XII) 中 x 及 y 之係數爲所設方程式中 y 及 x 之係數，惟有一係數反號.

例 1. 一直線經過 $P_1(-1, 3)$ 一點，且垂直於 $L_1: 5x - 2y + 3 = 0$，求其方程式.



解 應用 § 51 規則.

第一步. 垂直於所設直線之直線系，爲

$$2x + 5y + k = 0.$$

第二步. 所求直線經過 P_1；因此

$$2(-1) + 5 \cdot 3 + k = 0,$$

或 $$k = -13.$$

第三步. 以 k 之值代入，所求方程式爲

$$2x + 5y - 13 = 0$$

習 題

1. 求一直線方程式，此直線經過一點

(a) (0, 0) 且平行於 $x-3y+4=0$. 答. $x-3y=0$.

(b) (3, -2) 且平行於 $x+y+2=0$. 答. $x+y-1=0$.

(c) (-5, 6) 且平行於 $2x+4y-3=0$. 答. $x+2y-7=0$.

(d) (-1, 2) 且垂直於 $3x-4y+1=0$. 答. $4x+3y-2=0$.

(e) (-7, 2) 且垂直於 $x-3y+4=0$. 答. $3x+y+19=0$.

2. 三角形之頂點為 (-3, 2) (3, -2) 及 (0, -1)，求自頂點所作平行於對邊之直線方程式.

答. 三角形之三邊為 $2x+3y=0$, $x+3y+3=0$, $x+y+1=0$,
所求方程式為 $2x+3y+3=0$, $x+3y-3=0$, $x+y-1=0$.

3. 求自習題 2 中三角形之頂點至對邊所作垂線之方程式，並證三垂線共點.

答 $3x-2y-2=0$, $3x-y+11=0$, $x-y-5=0$.

4. 求習題 2 中三角形各邊之垂直二等分線方程式. 並證三線共點.

答. $3x-2y=0$, $3x-y-6=0$, $x-y+2=0$.

5. 平行四邊形二邊之方程式為 $3x-4y+6=0$ 及 $x+5y-10=0$. 若一頂點為 (4, 9) 求其餘二邊之方程式. 答 $3x-4y+24=0$ 及 $x+5y-49=0$.

6. 三角形之頂點為 (2, 1), (-2, 3) 及 (4, -1). 求下列各種直線方程式 (a) 三角形之三邊, (b) 各邊之垂直二等分線, (c) 自各頂點至對邊之垂線. 在 (b) 及 (c) 中證三線共點以驗其結果.

7. 任何三角形三邊之垂直二等分線共點，試證之.

8. 自三角形各頂點至對邊之垂線共點，試證之.

9. 若 $Ax+By+C=0$ 經過一點 $P_1(x_1, y_1)$，試以 A 及 B 表 C 之值，且證經過 P_1 之直線系方程式為 $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$.

54. 經過二所設直線交點之直線系方程式.

定理 XIII. 經過所設二直線

$$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$$

及

$$L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$$

交點之直線系方程式為

(XIII) $$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

式中 k 爲任意常數.

證 (XIII) 所表之一切直線經過 L_1 及 L_2 之交點. 因若設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲 L_1 及 L_2 之交點. 則 (§ 27 系)

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1=0$$

及 $$A_2x_1+B_2y_1+C_2=0.$$

將第二方程式乘以 k 加入第一式,得

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1+k(A_2x_1+B_2y_1+C_2)=0.$$

此卽爲 P_1 在 (XIII) 上之條件.

經過 L_1 及 L_2 交點之一切直線可以 (XIII) 表之. 其證法與定理 XI 及 XII 相同. *Q. E. D.*

系. 若 L_1 及 L_2 平行. 則 (XIII) 表平行於 L_1 及 L_2 之直線系.

若 L_1 及 L_2 平行，則

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},$$

因此 $$\frac{A_1}{kA_2}=\frac{B_1}{kB_2},$$

用合比定理， $$\frac{A_1+kA_2}{A_1}=\frac{B_1+kB_2}{B_1}.$$

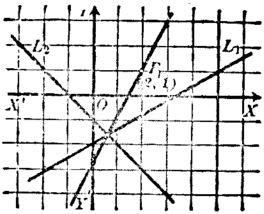
故 L_1 及 (XIII) 平行 (§ 42 系 II).

須注意者, (XIII) 爲以 k 乘 L_2 之方程式加 L_1 之方程式.

例 1. 一直線經過 $P_1(2, 1)$ 及 $L_1: 3x-5y-10=0$ 與 $L_2: x+y+1=0$ 之交點, 求其方程式.

解 應用 § 51 規則, 經過所設二直線交點之直線系方程式爲

$$3x-5y-10+k(x+y+1)=0.$$



若 P_1 在此直線上，則

$$6-5-10+k(2+1+1)=0.$$

故　　$k=\frac{9}{4}$.

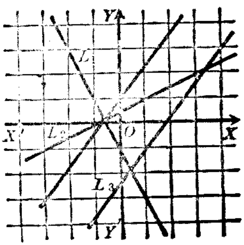
以 k 之值代入而化簡之，得所求方程式

$$21x-11y-31=0.$$

例 2.　一直線過 $L_1: 2x+y+1=0$ 及 $L_2: x-2y+1=0$ 之交點，且平行於 $L_3: 4x-3y-7=0$，求其方程式.

解　應用 § 51 規則，經過所設直線 L_1 及 L_2 交點之直線系方程式爲

$$2x+y+1+k(x-2y+1)=0,$$



或　　$(2+k)x+(1-2k)y+(1+k)=0.$

若此直線平行於 L_3 (§ 42 系 II),

$$\frac{2+k}{4}=\frac{1-2k}{-3};$$

故　　$k=2.$

代入，化簡，得

$$4x-3y+3=0.$$

當 L_1 及 L_2 爲法線式時，定理 XIII 中 k 之幾何意義更爲明顯.

定理 XIV.　自 $L_1: x\cos\omega_1+y\sin\omega_1-p_1=0$

及　　$L_2: x\cos\omega_2+y\sin\omega_2-p_2=0$

至直線 $L: x\cos\omega_1+y\sin\omega_1-p_1+k(x\cos\omega_2+y\sin\omega_2-p_2)=0$ 上任何點距離之比爲一常數 $-k$.

證　設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲 L 上任何點，則

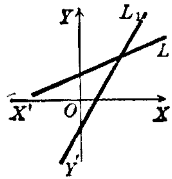
$$x_1\cos\omega_1+y_1\sin\omega_1-p_1+k(x_1\cos\omega_2+y_1\sin\omega_2-p_2)=0.$$

因此 $$-k=\frac{x_1\cos\omega_1+y_1\sin\omega_1-p_1}{x_1\cos\omega_2+y_1\sin\omega_2-p_2}.$$

分子爲自 L_1 至 P_1 之距離，分母爲自 L_2 至 P_1 之距離(§ 49, 定理 IX). 故 $-k$ 爲自 L_1 及 L_2 至 L 上任何點距離之比. *Q. E. D.*

系. 若 $k=\pm 1$, 則 L 爲 L_1 及 L_2 一交角之平分線，卽二直線交角之平分線，可將二直線化爲法線式，加之或減之，卽得.

因 $k=\pm1$, 則自 L_1 及 L_2 至 L 上任何點之距離相等.



如 L_1 及 L_2 之交角有原點存在，則此角或其對頂角稱爲 L_1 及 L_2 之內角. 其餘二對頂角稱爲外角. 依照自一直線至一點所作距離之符號規則 (§ 49), 知 k 爲負值時，L 在 L_1 及 L_2 之內角中；k 爲正值時，L 在 L_1 及 L_2 之外角中. 若原點在 L_1 或 L_2 上，則須畫出圖象，再從圖決定其位置.

習　題

1. 不必求交點，試求一直線方程式，此直線經過 $2x-3y+2=0$ 及 $3x-4y-2=0$ 之交點，且

(a) 經過原點.

(b) 平行於 $5x-2y+3=0$.

(c) 垂直於 $3x-2y+4=0$.

答. (a) $5x-7y=0$; (b) $5x-2y-50=0$; (c) $2x+3y-58=0$.

2. 三線 $2x-3y+1=0$, $x-y=0$ 及 $3x+4y-2=0$ 成一三角形. 求一直線方程式，此直線經過三角形各頂點，且

(a) 平行於對邊.

(b) 垂直於對邊.

答. (a) $3x+4y-7=0$, $14x-21y+2=0$, $17x-17y+5=0$;

(b) $4x-3y-1=0$, $21x+14y-10=0$, $17x+17y-9=0$.

3. 求直線 $4x-3y-1=0$ 及 $3x-4y+2=0$ 交角之平分線，並證此二平分線互相垂直。

答. $7x-7y+1=0$ 及 $x+y-3=0$.

4. 求直線 $5x-12y+10=0$ 及 $12x-5y+15=0$ 交角平分線之方程式，用定理 X 證驗此結果。

5. 自直線 $4x-3y+4=0$ 及 $5x+12y-8=0$ 至一點距離之比為 13:5，求此點之軌跡。

答. $9x+9y-4=0$.

6. 三直線 $4x-3y=12$, $5x-12y-4=0$ 及 $12x-5y-13=0$ 成一三角形。求此三角形三內角之平分線。並證三平分線共點。

答. $7x-9y-16=0$, $7x+7y-9=0$, $112x-64y-221=0$.

7. 三直線 $5x-12y=0$, $5x+12y+60=0$ 及 $12x-5y-60=0$ 成一三角形，求此三角形三內角之平分線，並證三平分線共點。

答. $2y+5=0$ $17x+7y=0$, $17x-17y-60=0$.

8. 三角形之三邊為 $3x+4y-12=0$, $3x-4y=0$ 及 $4x+3y+24=0$, 證前二直線所成內角之平分線與其餘二頂點之外角平分線共點。

9. 一直線經過 $x+y-2=0$ 及 $x-y+6=0$ 之交點，又過 $2x-y+3=0$ 及 $x-3y+2=0$ 之交點，求此直線方程式。

答. $19x+3y+26=0$.

提示. 經過二組相交直線交點之直線系方程式為

$$x+y-2+k(x-y+6)=0$$

及

$$2x-y+3+k'(x-3y+2)=0.$$

此二直線合一，若 (§ 42 定理 III).

$$\frac{1+k}{2+k'}=\frac{1-k}{-1-3k'}=\frac{-2+6k}{3+2k'}.$$

設 ρ 為其比值，得

$$1+k=2\rho+\rho k',$$

$$1-k=-\rho-3\rho k',$$

及

$$-2+6k=3\rho+2\rho k'.$$

從上方程式可消去 $\rho k'$ 及 ρ, 因此可求 k 之值而決定第一個直線系方程式，此亦即為第二個直線系方程式。

10 一直線經過 $2x+5y-3=0$ 及 $3x-2y-1=0$ 之交點，又過 $x-y=0$ 及 $x+3y-6=0$ 之交點，求此直線方程式。

答. $43x-35y-12=0$.

四直線交於六點成一**完全四邊形**. 六頂點決定三個對角線，其中二個即為四直線所成普通四邊形之對角線。

11. 完全四邊形之四邊為 $x+2y=0$, $3x-4y+2=0$, $x-y+3=0$ 及 $3x-2y+4=0$. 求

三個對角線之方程式。 答。 $2x-y+1=0,\ x+2=0,\ 5x-6y+8=0.$

12. 證二直線交角之二個平分線互相垂直。

13. 求 (XI) 及 (XII) 中 k 之幾何解釋。

14. 當 L_1 及 L_2 不爲法線式時，求 (XIII) 中 k 之幾何解釋。

15. 證三角形三個內角之平分線共點。

16. 證三角形二外角與第三內角之平分線共點。

55. 直線之參數方程式. 一向上*之方向線與坐標軸之交角 α 及 β (§ 19) 稱爲此直線之**方向角**. 其餘弦 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ 稱爲此直線之**方向餘弦**. 此方向餘弦適合於下之關係式

(1) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1.$$

因 (§ 19 定理 I) $\cos\beta=\sin\alpha$ 及 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

假定一直線經過 $P_1(x_1, y_1)$, 其方向角爲 α 及 β. 設 $P(x, y)$ 爲此直線上任一點，並命有向線距 P_1P 爲 ρ. 則 P_1P 在兩軸上之射影各爲(§ 20 定理 III).

$$x-x_1 \text{ 及 } y-y_1,$$

或 (§ 20 定理 II).

$$\rho\cos\alpha \text{ 及 } \rho\cos\beta.$$

因此 $$x-x_1=\rho\cos\alpha \text{ 及 } y-y_1=\rho\cos\beta;$$

故

$$x=x_1+\rho\cos\alpha.$$

$$y=y_1+\rho\cos\beta.$$

因此得

定理 XV. 參數式. 一直線經過 $P_1(x_1, y_1)$, 方向角爲 α 及 β, 在此直線上任一點 $P(x, y)$ 之坐標爲

(XV) $$\begin{cases} x=x_1+\rho\cos\alpha, \\ y=y_1+\rho\cos\beta. \end{cases}$$

* 若此直線與 X 軸平行，則此直線之方向爲向右，故 $\alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{2}$.

式中 ρ 爲有向變距 P_1P.

方程式 (XV) 爲以參數 ρ 表直線上任意一點之坐標 (x, y), 故稱爲**參數方程式**. 若 ρ 自 $-\infty$ 變至 $+\infty$, $P(x, y)$ 點描寫一正向直線. 在論一直線上一點 P_1 至此直線與一所設曲線交點之距離時,此方程式甚有用.

定理 XVI. 對稱式. 以直線上一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之坐標及方向餘弦所表之直線方程式爲

(XVI) $$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}. = \rho.$$

提示. 解 (XV) 求 ρ, 並消去之.

定理 XVII. 一直線

$$Ax+By+C=0$$

之方向餘弦爲

$$\cos\alpha=\frac{-B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \cos\beta=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

根式前之符號與 B 相同.

證　設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲所設直線上一點, 則 (§ 27, 系)

$$Ax_1+By_1+C=0.$$

從所設方程式減之, 得

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0.$$

移項,全式以 $-AB$ 除之; 得

$$\frac{x-x_1}{-B}=\frac{y-y_1}{A}.$$

以 (XVI) 除之, 得 $$\frac{\cos\alpha}{-B}=\frac{\cos\beta}{A}.$$

設 r 爲其比值, 則

$$\cos\alpha = -Br \quad 及 \quad \cos\beta = Ar.$$

平方，相加，
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = (A^2+B^2)r^2.$$

於是從 § 55, (1)
$$r = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

因此

(2) $$\cos\alpha = \frac{-B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad 及 \quad \cos\beta = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

根式前符號應與 A 相同. *Q. E. D.*

[因此直線向上，$\beta \leqq \frac{\pi}{2}$，故 $\cos\beta$ 爲正].

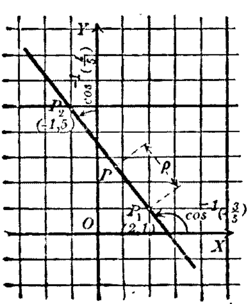
系. 若 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ 與 a 及 b 成比例，則

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

根式前符號須與 b 相同.

欲化一所設直線方程式爲對稱式或參數式，須先知此直線上一點之坐標 (可照 § 31 規則求之) 及方向餘弦 (從定理 XVII 求之)，再用定理 XV 或 XVI，可得所求方程式.

例 1. 一直線之參數方程式爲 $x = 2 - \frac{3}{5}\rho$ 及 $y = 1 + \frac{4}{5}\rho$. 描寫此直線之軌跡.



解 與 (XV) 比較，得直線上一點 $P_1(2, 1)$. 求得第二點，即可畫直線. 今列下表.

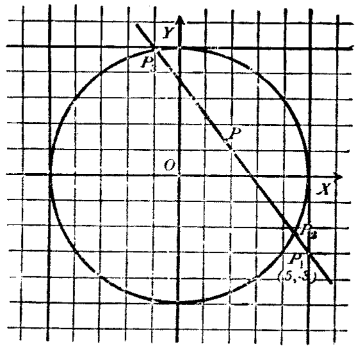
ρ	x	y
0	2	1
5	−1	5

故聯 $P_1(2, 1)$ 及 $P_2(-1, 5)$ 之直線即爲所求線.

(x, y) 或 $(2-\frac{3}{5}\rho, 1+\frac{4}{5}\rho)$ 爲直線上動點 P 之坐標. 自 P_1 至 P 之距離即爲

變數 ρ.

例 2. 已知圓 $C: x^2+y^2=25$ 及一直線，其參數方程式爲 $x=5-\frac{3}{5}\rho$ 及 $y=-3+\frac{4}{5}\rho$；求自 $P_1(5,-3)$ 至此直線與 C 交點之距離之乘積，並求此直線所成弦之中點.



解　從定理 XV 直線上任何點之坐標爲$(5-\frac{3}{5}\rho,\ -3+\frac{4}{5}\rho)$,其中 ρ 指自 P_1 至該點之距離.若該點在 C 上(§ 27. 系)，

$$(5-\tfrac{3}{5}\rho)^2+(-3+\tfrac{4}{5}\rho)^2=25,$$

化簡，

$$\rho^2-\frac{54}{5}\rho+9=0. \tag{3}$$

二次式之二根爲有向變距 $\rho_1=P_1P_2$ 及 $\rho_2=P_1P_3$, 而 P_2 及 P_3 爲直線與圓之交點. 因若 $P_2(5-\frac{3}{5}\rho_1,-3+\frac{4}{5}\rho_1)$ 在圓上，

$$(5-\tfrac{3}{5}\rho_1)^2+(-3+\tfrac{4}{5}\rho_1)^2=25,$$

或

$$\rho_1^2-\frac{54}{5}\rho_1+9=0.$$

因此 ρ_1 及 ρ_2 爲 (3) 之根.

二距離之積爲 9 (§ 3 定理 I).

二根和之半爲 P_1P, 或 $\frac{27}{5}$ (§ 3 定理 I). 因 $\rho=\frac{27}{5}$ 故得 $x=\frac{44}{25}$, 及 $y=\frac{33}{25}$, 而弦之中點爲 $P\left(\frac{44}{25},\frac{33}{25}\right)$.

習　　題

1. 描寫下列各直線之軌跡:

$$(a)\ \begin{cases} x=2+\frac{4}{5}\rho. \\ y=-1+\frac{3}{5}\rho. \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x=-3-\frac{12}{13}\rho. \\ y=\frac{5}{13}\rho. \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} x=1-\frac{5}{13}\rho. \\ y=2+\frac{12}{13}\rho. \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x=-1-\frac{1}{\sqrt{5}}\rho. \\ y=5+\frac{2}{\sqrt{5}}\rho. \end{cases}$$

2. 若 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ 爲一向上直線之方向餘弦，則 $-\cos\alpha$ 及 $-\cos\beta$ 爲該直線向下時之方向餘弦，試證之。

3. 求直線 $\begin{cases} x=3-\frac{4}{5}\rho \\ y=-2+\frac{3}{5}\rho \end{cases}$ 上諸點之坐標，已知 $\rho=3, -2, 4$. 用§ 21 定理 IV，證驗諸點坐標中 ρ 之幾何意義。

4. 求自 $P_1(2, 1)$ 至直線 $x=2-\frac{3}{5}\rho$ 及 $y=1+\frac{4}{5}\rho$ 與圓 $x^2+y^2=25$ 交點之距離，並解釋此結果之符號。 答. -20.

5. 已知橢圓 $x^2+4y^2=16$ 及直線 $x=x_1-\frac{4}{5}\rho$ 及 $y=y_1+\frac{3}{5}\rho$；求一方程式，其二根爲自 $P_1(x_1, y_1)$ 至直線與橢圓交點之距離。

答. $\frac{52}{25}\rho^2-\frac{8x_1-24y_1}{5}\rho+x_1^2+4y_1^2-16=0.$

6. 在習題 5 中，P_1 須爲弦之中點，其條件爲何？

提示. ρ 之二絕對值相等，符號相反。

7. 已知拋物線 $y^2=4x$ 及直線 $x=2+\rho\cos\alpha$, $y=-4+\rho\cos\beta$；若此直線交拋物線祇有一點，求 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ 所應適合之條件。 答. $\cos^2\alpha+4\cos\alpha\cos\beta+2\cos^2\beta=0.$

8. 若 a, b 爲二數值，而 $a^2+b^2=1$，證 a 及 b 爲一直線之方向餘弦。

9. 從 § 45 定理 V 及 § 19 定理 I，求方程式 (XVI).

10. 證 (XVI) 中之比值爲 P_1P 之長度。

提示. 將 (XVI) 平方，應用分子之和與分母之和相比之比例定理，再開平方。

11. 用習題 10，從方程式 (XVI) 求 (XV).

總 習 題

1. 在直線 $3x-5y+6=0$ 上求一點，與 $(3, -4)$ 及 $(2, 1)$ 等距。

2. 求一直線方程式，此直線經過二直線 $7x+y-3=0$ 及 $3x+6y-11=0$ 之交點，且垂直於此交點與原點之聯線。

3. 一直線經過一點 $(2, 5)$ 且此直線在二軸間之距離爲該點所等分，求此直線方程式。

4. 一直線經過一點 $(2, -3)$ 且此直線在二直線 $3x+y-2=0$ 及 $x+5y+10=0$ 間之距離爲該點所等分，求此直線之方程式。

5. 菱形之對角線互相垂直，試證之。

6. 若 Y 軸與 X 軸之交角爲 ω，用 Y 軸上之截距 b 及傾角 α 表此直線方程式。

7. 若 Y 軸與 X 軸之交角爲 ω，求一直線方程式，此直線之傾角爲 α，且經過一點 $P_1(x_1, y_1)$。

8. 若 Y 軸與 X 軸之交角爲 ω'. 求一直線之法線方程式。

9. 若二軸斜交，求一直線與第二直線交角之正切。

10. 諸直線，若 $m=b$，必經過一定點，試證之，並求該點之坐標。

11. 諸直線，若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$ 常數，必經過一定點，試證之，並求該定點之坐標。

12. 諸直線 $Ax+By+C=0$，若 $A+B+C=0$，必經過一定點，並求該定點之坐標。

13. 求直線 $2x-3y=0, x+4y-2=0$，$2x-3y+\lambda(x+4y-2)=0$，$2x-3y-\lambda(x+4y-2)=0$ 與 X 軸之交點，並證前二點之聯線爲後二點所內分或外分，其內外分比之絕對值相同。

14. P_1 及 P_2 在方程式 $Ax+By+C=0$ 之軌跡上，而另一點分 P_1P_2 爲 λ 之比亦在此方程式之軌跡上。以此證明 $Ax+By+C=0$ 表一直線。

15. 三直線 $2x-3y+120=0$，$x+y=0$ 及 $3x+4y-6=0$ 成一三角形，求此三角形之三個外角平分線，並證此三平分線交對邊於三點，而此三點共線。

16. 求一直線方程式，此直線經過 $Ax+By+C=0$ 及 $A'x+B'y+C'=0$ 之交點，且 (a) 經過原點，(b) 平行於 X 軸，(c) 平行於 Y 軸。

17. 證直線 $(A+\lambda A')x+(B+\lambda B')y+(C+\lambda C')=0$ 經過一點，其中 λ 爲變數，其餘文字均爲常數。

18. 設 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$ 及 $A_3x+B_3y+C_3=0$ 三線成一三角形，求證任何直線方程式 $Ax+By+C=0$ 可寫爲

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)+\gamma(A_3x+B_3y+C_3)=0,$$

式中 α, β 及 γ 爲一定常數。

提示. 用 § 42 定理 III.

19. 一直線 $2x-5y+8=0$ 分 $P_1(1, 3)$ 及 $P_2(7, 2)$ 二點之聯線爲二分，求此二分之比。

提示. 一點以 λ 之比分 P_1P_2 爲二分，其坐標爲 $\left(\frac{1+7\lambda}{1+\lambda}, \frac{3+2\lambda}{1+\lambda}\right)$；因此點在所設直線上，故可決定 λ 之值。

20. 一直線 $x+3y-6=0$ 分 $(-3, 2)$ 及 $(6, 1)$ 二點之聯線爲二分，求其比值。

21. 一直線 $y=mx-7$ 分 $(3, 2)$ 及 $(1, 4)$ 二點聯線成 $3:2$ 之比，試決定 m 之值。

22. 求一直線方程式，此直線經過 $(2, -3)$ 一點，且分 $(6, 3)$ 及 $(2, -1)$ 二點聯線成 $2:5$

之比。

23. 證自直線 $Ax+By+C=0$ 至二點 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 距離之比為

$$\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

24. 證直線 $Ax+By+C=0$ 分 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 二點之聯線為二分，其比為

$$-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

25. 一任意直線截一三角形之三邊 P_1P_2, P_2P_3, 及 P_3P_1 於 L, M, N, 用前題證

$$\frac{P_1L}{LP_2}\times\frac{P_2M}{MP_3}\times\frac{P_3N}{NP_1}=-1.$$

26. 描寫直線 $2x-3y+5=0$ 之圖象，並指出適合於 $2x-3y+5>0$ 之諸點。

27. 三直線 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ 及 $A_3x+B_3y+C_3=0$ 成一三角形，求其面積。

第　五　章

圓及方程式 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

56. 圓之普遍方程式. 若 (α, β) 爲圓之中心，r 爲半徑，則圓之方程式爲 (§ 29 定理 II)

$$(1)\qquad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0,$$

或

$$(2)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2.$$

在特殊情形時，若原點爲中心，$\alpha=0, \beta=0$, (2) 可化爲

$$(3)\qquad x^2+y^2=r^2.$$

方程式 (1) 之形式爲

$$(4)\qquad x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

其中

$$(5)\qquad D=-2\alpha,\ E=-2\beta,\ 及\ F=\alpha^2+\beta^2-r^2.$$

吾人能否逆言之，方程式 (4) 之軌跡爲一圓？比較 (4) 與 (1) 得 (5)，故

$$(6)\qquad \alpha=-\frac{D}{2},\ \beta=-\frac{E}{2},\ 及\ r^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

α 及 β 均爲實數，若 D^2+E^2-4F 爲正，則 r 亦爲實數而 (4) 之軌跡爲一圓.

描寫軌跡 (4) 之諸點 (§ 31 規則)，求 y，得

$$(7)\qquad y=-\frac{E}{2}\pm\sqrt{-x^2-Dx+\left(\frac{E^2-4F}{4}\right)}.$$

(7) 根號中二次式之判別式爲

$$\Theta = D^2 - 4(-1)\left(\frac{E^2 - 4F}{4}\right) = D^2 + E^2 - 4F,$$

此卽爲 (6) 中 r^2 之分子。

若 Θ 爲正，而 x 之値在二根之間，則根號中之二次式爲正 (§ 7 定理 III)，此方程式有一軌跡，見前．

若 Θ 爲零,則二次式之二根爲相等實數(§ 3 定理 II)．但 x 爲根以外之其餘數値時，二次式爲負(§7 定理 III)．故此軌跡爲一點 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

因在 $x = -\frac{D}{2}$ 時，(7) 中之二次式等於零。因此從 (7)，y 之相當值爲 $-\frac{E}{2}$. 此亦可從 (6) 中求之，祇須假定 r 接近於零，圓卽變爲中心 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 一點.

若 Θ 爲負，x 爲根以外之任何數値時，(7) 中之二次式爲負．因此 (7) 爲虛數 (§ 3 定理 II) 故無軌跡．

等式 $\Theta = D^2 + E^2 - 4F$ 稱爲 (4) 之**判別式**．當 $\Theta = 0$, (4) 之軌跡常稱爲**點圓**或**半徑爲零之圓**.

從此證得

定理 I. 方程式

(I) $$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

有判別式 $\Theta = D^2 + E^2 - 4F$, 其軌跡決定如下：

(a) 當 Θ 爲正,此軌跡爲一圓,其中心爲 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, 半徑爲 $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{\Theta}$.

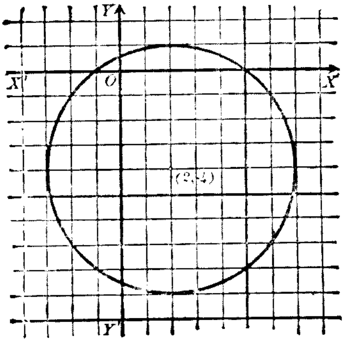
(b) 當 Θ 爲零,此軌跡爲點圓 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

(c) 當 Θ 爲負,無軌跡.

系. 當 $E=0$,(I) 之中心在 X 軸上；當 $D=0$,中心在 Y 軸上.

以後如云 (I) 爲圓之方程式,即假定 Θ 爲正.

例 1. 求方程式 $x^2+y^2-4x+8y-5=0$ 之軌跡.



解 所設方程式即爲(I)之形式,而

$D=-4,\ E=8,\ F=-5.$

因此 $\Theta=16+64+20=100>0.$

故此軌跡爲一圓，中心爲 $(2,-4)$, 半徑爲 $\frac{1}{2}\sqrt{100}=5.$

方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 稱爲 **x 及 y 之普遍二次方程式.** 因式中含有 x 及 y 之二次與二次以下之各項.

定理 II. 普遍二次方程式

(II) $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

在及祗在 $A=C, B=0$ 及 $\dfrac{D^2+E^2-4AF}{A^2}$ 爲正時,其軌跡爲一圓.

證 任何圓之方程式必有 (I) 之形式；因此 x^2 及 y^2 之係數相等, xy 爲缺項；即軌跡 (II) 祗在 $A=C$ 及 $B=0$ 時爲一圓.若此條件適合, (II) 可寫爲

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0,$$

上式在及祗在判別式 $\dfrac{D^2+E^2-4AF}{A^2}$ 爲正時,其軌跡爲一圓. *Q. E. D.*

57. 三個條件決定一圓. 圓之方程式可寫爲下之任何一種形式

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

或 $$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

任一方程式有三個任意常數. 欲決定此三常數之值須有三個方程式, 而每一方程式即爲適合於幾何條件之常數關係式. 故三個條件可決定一圓.

規則. 決定適合於三個條件之圓方程式

第一步. 設所求方程式爲

(1) $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

或

(2) $$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

可視爲更較簡便.

第二步. 求常數 α, β 及 r [或 D, E 及 F] 之三個方程式, 以表 (1) [或 (2)] 之圓適合於三個條件.

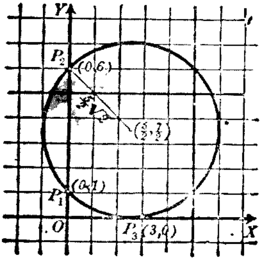
第三步. 解第二步所得之方程式, 求 α, β 及 r [或 D, E 及 F] 之值.

第四步. 以第三步結果代入 (1) [或 (2)], 即得所求方程式.

例 1. 求經過三點 $P_1(0, 1)$, $P_2(0, 6)$ 及 $P_3(3, 0)$ 之圓方程式.

解 第一步. 設所求方程式爲

(3) $$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$



第二步. 因 P_1, P_2 及 P_3 在 (3) 上, 其坐標必能適合於 (3), 因此得

(4) $$1+E+F=0,$$

(5) $$36+6E+F=0,$$

及

(6) $$9+3D+F=0.$$

第三步．　解 (4), (5) 及 (6), 得

$$E=-7,\ F=6,\ D=-5.$$

第四步．　代入 (3), 所求方程式爲

$$x^2+y^2-5x-7y+6=0.$$

從定理 I 知此圓之半徑爲 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$,* 中心爲 $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$.

例 2.　一圓經過 $P_1(0,-3)$ 及 $P_2(4,-0)$, 且中心在直線 $x+2y=0$ 上求其方程式．

解　第一步．　設所設方程式爲

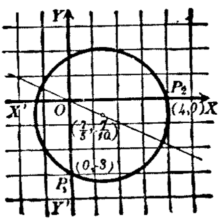
(7)　$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

第二步．　因 P_1 及 P_2 在 (7) 之軌跡上，可得

(8)　$$9-3E+F=0,$$

及

(9)　$$16+4D+F=0.$$



(7) 之中心爲 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$. 又因此點在所設直線上

$$-\frac{D}{2}+2\left(-\frac{E}{2}\right)=0,$$

或

(10)　$$D+2E=0.$$

第三步．　解 (8), (9) 及 (10), 得

$$D=-\frac{14}{5},\ E=\frac{7}{5}\ 及\ F=-\frac{24}{5}.$$

* 半徑易求，因每邊爲單位長之正方形，其對角線之長爲 $\sqrt{2}$. 欲作 $\sqrt{n}$ 長之直線，可以 $n+1$ 之長爲直徑作半圓，在直徑上，距離一端爲一單位長之處作一垂線與半圓周相交，此垂線之長，卽爲 $\sqrt{n}$.

第四步．　代入(7)，得所求方程式

$$x^2+y^2-\frac{14}{5}x+\frac{7}{5}y-\frac{24}{5}=0$$

或

$$5x^2+5y^2-14x+7y-24=0.$$

中心爲$\left(\frac{7}{5},\ -\frac{7}{10}\right)$，半徑爲$\frac{1}{2}\sqrt{29}$.

習　題

1. 求圓之方程式，其中心爲
   - (a) (0, 1) 及半徑爲 3.　　答．$x^2+y^2-2y-8=0$.
   - (b) (−2, 0) 及半徑爲 2.　　答．$x^2+y^2+4x=0$.
   - (c) (−3, 4) 及半徑爲 5.　　答．$x^2+y^2+6x-8y=0$.
   - (d) (α, 0) 及半徑爲 α.　　答．$x^2+y^2-2\alpha x=0$.
   - (e) (0, β) 及半徑爲 β.　　答．$x^2+y^2-2\beta y=0$.
   - (f) (0, −β) 及半徑爲 β.　　答．$x^2+y^2+2\beta y=0$.
2. 求下列諸方程式之軌跡．
   - (a) $x^2+y^2-6x-16=0$.
   - (b) $3x^2+3y^2-10x-24y=0$.
   - (c) $x^2+y^2=0$.
   - (d) $x^2+y^2-8x-6y+25=0$.
   - (e) $x^2+y^2-2x+2y+5=0$.
   - (f) $x^2+y^2-6x+4y-5=0$.
   - (g) $(x+1)^2+(y-2)^2=0$.
   - (h) $7x^2+7y^2-4x-y=3$.
   - (i) $x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2=0$.
   - (j) $x^2+y^2+16x+100=0$.
3. 求圓之方程式，已知
   - (a) 中心爲 (2, 3) 且經過一點 (3, −2).　　答．$x^2+y^2-4x-6y-13=0$.
   - (b) 經過三點 (0, 0), (8, 0), (0, −6).　　答．$x^2+y^2-8x+6y=0$.
   - (c) 經過三點 (4, 0), (−2, 5), (0, −3).　　答．$19x^2+19y^2+2x-47y-312=0$.
   - (d) 經過二點 (3, 5) 及 (−3, 7)，且中心在 X 軸上．　　答．$x^2+y^2+4x-46=0$.
   - (e) 經過二點 (4, 2)及(−6, −2)，且中心在 Y 軸上．　　答．$x^2+y^2+5y-30=0$.
   - (f) 經過二點 (5, −3) 及 (0, 6)，且中心在直線 $2x-3y-6=0$ 上．　　答．$3x^2+3y^2-114x-64y+276=0$.
   - (g) 中心爲 (−1, −5)，且切於 X 軸　　答．$x^2+y^2+2x+10y+1=0$.
   - (h) 經過 (1, 0) 及 (5, 0)，且切於 Y 軸．　　答．$x^2+y^2-6x\pm2\sqrt{5}y+5=0$.

(i) 經過三點 (0, 1), (5, 1), (2, −3).　答. $2x^2+2y^2-10x+y-3=0$.

(j) 以 (3, 2) 及 (−7, 4) 之聯線爲直徑.　答. $x^2+y^2+4x-6y-13=0$.

(k) 以 (3, −4) 及 (2, −5) 之聯線爲直徑.　答. $x^2+y^2-5x+9y+26=0$.

(l) 外接於三直線 $x-6=0$, $x+2y=0$ 及 $x-2y=8$ 所成之三角形.

答. $2x^2+2y^2-21x+8y+60=0$

(m) 經過三點 (1, −2), (−2, 4), (3, −6). 用 § 47 系解釋此結果.

(n) 內切於三直線 $4x+3y-12=0$, $y-2=0$ 及 $x-10=0$ 所成之三角形.

答. $36x^2+36y^2-516x+60y+1585=0$.

4. 當 $k=0, 2, 4, 5, -2, -4, -8$ 時, 描寫 $x^2+y^2-2x+4y+k=0$ 之圖象. k 之何值應除外?　答. $k>5$.

5. 在 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 之方程式中, D 及 E 爲一定, F 變更, 其軌跡爲何?

6. k 應爲何值方可使 $x^2+y^2-4x+2ky+10=0$ 有一軌跡?

答. $k>+\sqrt{6}$ 及 $k<-\sqrt{6}$.

7. k 應爲何值方可使 $x^2+y^2+kx+F=0$ 有一軌跡, 若 (a) F 爲正; (b) F 爲零; (c) F 爲負?　答. (a) $k>2\sqrt{F}$ 及 $k<-2\sqrt{F}$; (b) 及 (c) k 爲任何值.

8. 求習題 7 中方程式之點圓個數.

答. (a) 二個, (b) 一個, (c) 無.

9. 設 ω 爲斜軸之交角, 求圓之方程式.

答. $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega=r^2$.

10. 寫圓之方程式, 若其半徑爲 5, 中心在 X 軸上; 在 Y 軸上.

11. k 有幾值能使軌跡

$$(a)\ x^2+y^2+4kx-2y+5k=0,$$
$$(b)\ x^2+y^2+4kx-2y-k=0$$
$$(c)\ x^2+y^2+4kx-2y+4k=0$$

爲一點圓.　答. (a) 二個; (b) 無; (c) 一個.

12. 描寫圓 $x^2+y^2+4x-9=0$, $x^2+y^2-4x-9=0$ 及 $x^2+y^2+4x-9+k(x^2+y^2-4x-9)=0$ 在 $k=\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{5}$ 時之軌跡. k 有無應除外之數值?

13. 描寫圓 $x^2+y^2+4x=0$, $x^2+y^2-4x=0$ 及 $x^2+y^2+4x+k(x^2+y^2-4x)=0$ 在 k 有習題 12 之各值時之軌跡. k 有無應除外之數值?

14. 描寫圓 $x^2+y^2+4x+9=0$, $x^2+y^2-4x+9=0$ 及 $x^2+y^2+4x+9+k(x^2+y^2-4x+9)=0$ 在 $k=-3, -\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{5}, -\frac{7}{9}, -\frac{9}{7}$ -1 時之軌跡. k 有何值應除外?

58. 圓系. 方程式之形式爲

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

者爲**圓系**，其中有一個或多個係數爲任意常數．如方程式

$$x^2+y^2-r^2=0$$

表同心圓系，其中心在原點．今將論及有用之圓系其方程式有如 § 54 (XIII).

定理 III. 已知二圓

$$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

及
$$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0;$$

則方程式

(III) $$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

之軌跡爲一圓．但 $k=-1$ 時，此軌跡爲一直線．

證 (III) 去括弧，集合 x 及 y 之同類項，得

$$(1+k)x^2+(1+k)y^2+(D_1+kD_2)x+(E_1+kE_2)y+(F_1+kF_2)=0.$$

以 $1+k$ 除之，得

$$x^2+y^2+\frac{D_1+kD_2}{1+k}x+\frac{E_1+kE_2}{1+k}y+\frac{F_1+kF_2}{1+k}=0.$$

此方程式之軌跡爲一圓 (§ 56 定理 I)．若 $k=-1$，則不能除以 $1+k$．但 (III) 變成

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0.$$

此係 x 及 y 之一次式，其軌跡爲一直線，稱爲 C_1 及 C_2 之**根軸**.

Q. E. D.

系 I. 圓 (III) 之中心在 C_1 及 C_2 之中心聯線上，且分該聯線爲二分，此二分之比值爲 k.

因從§56, 定理 I, C_1 之中心為 $P_1\left(-\frac{D_1}{2}, -\frac{E_1}{2}\right)$ 及 C_2 之中心為 $P_2\left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2}\right)$. 以比值 k 分 P_1P 為兩分，其分點之坐標為 $\left[\frac{-\frac{D_1}{2}+k\left(-\frac{D_2}{2}\right)}{1+k}, \frac{-\frac{E_1}{2}+k\left(-\frac{E_2}{2}\right)}{1+k}\right]$, 或化簡為 $\left(-\frac{D_1+kD_2}{2(1+k)}, -\frac{E_1+kE}{2(1+k)}\right)$. 此即為 (III) 之中心.

系 II. C_1 及 C_2 根軸之方程式為

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0.$$

系 III. 二圓之根軸與中心聯線垂直.

提示. 求 C_1 及 C_2 之中心聯線 (§ 47 定理 VII). 再用 § 42 系 III 證此線垂直於根軸.

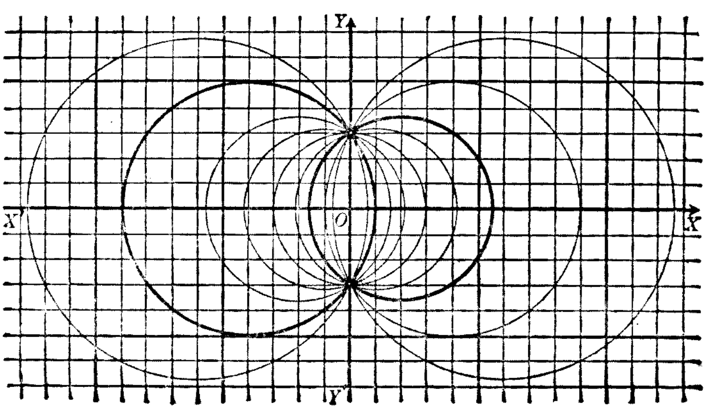
(III) 有三種不同形式，可於下例表明之. 此三種形式相當於 C_1 及 C_2 之關係位置，即二圓交於二點，相切，或不相交.

例 1. 描寫圓系

$$x^2+y^2+8x-9+k(x^2+y^2-4x-9)=0.$$

之軌跡.

解 圖中示



$$x^2+y^2+8x-9=0 \text{ 及 } x^2+y^2-4x-9=0$$

二圓爲粗黑線，其餘各圓相當於

$$k=2,\ 5,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ -4,\ -\tfrac{5}{2} \text{ 及 } -\tfrac{1}{4};$$

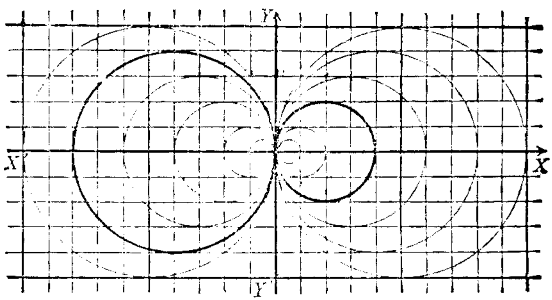
諸圓均過前二圓之交點.

二圓之根軸爲 $k=-1$ 時之直線，卽 Y 軸.

例 2. 描寫圓系

$$x^2+y^2+8x+k(x^2+y^2-4x)=0$$

之軌跡.



解 圖中示 $x^2+y^2+8x=0$ 及 $x^2+y^2-4x=0$

二圓用粗黑線，其餘各圓相當於

$$k=2,\ 3,\ \tfrac{7}{5},\ 5,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ -7,\ \tfrac{1}{5},\ -4,\ -3 \text{ 及 } -\tfrac{1}{7}.$$

諸圓均切前二圓於一點，此點卽爲前二圓之切點. $k=2$ 時此軌跡爲原點.

例 3. 描寫圓系

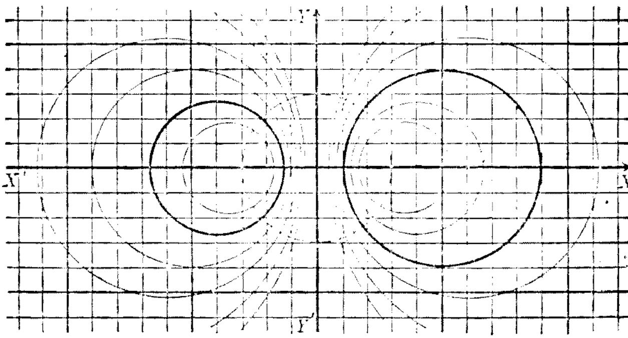
$$x^2+y^2-10x+9+k(x^2+y^2+8x+9)=0$$

之軌跡.

解 圖中示 $x^2+y^2-10x+9=0$ 及 $x^2+y^2+8x+9=0$

二圓用粗黑線，其餘各圓相當於

$$k=\frac{1}{5},\ 17,\ \frac{1}{8},\ -10,\ -\frac{1}{10}\ \text{及}\ -\frac{11}{2}.$$



諸圓均與虛線圓直交以後說明之. $k=\frac{2}{7}$ 及 $k=8$ 時，此軌跡各為點圓 $(3, 0)$ 及 $(-3, 0)$.

以上三例，$k=-1$ 時，其根軸為 Y 軸.

定理 IV. 若二圓

$$C_1:\ x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

及

$$C_2:\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

交於二點 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$，則圓系

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

表示經過 P_1 及 P_2 之任何圓.

證　第一，此圓系之任何圓經過 P_1 及 P_2. 因 P_1 在 C_1 及 C_2 上故得

$$x_1^2+y_1^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1=0$$

及

$$x_1^2+y_1^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2=0.$$

第二式乘以 k，加入第一式，得

$$x_1^2+y_1^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1+k(x_1^2+y_1^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2)=0.$$

此卽爲 P_1 在圓系中任何一圓上之條件. 同樣可證此圓系之任何圓經過 P_2.

第二， 任何圓經過 P_1 及 P_2 必屬於此圓系. 因用 P_1, P_2 及不在 P_1P_2 直線上之一點 $P_3(x_3, y_3)$, 可決定一圓. 若 P_3 在圓系之一圓上，則得

$$x_3{}^2 + y_3{}^2 + D_1x_3 + E_1y_3 + F_1 + k(x_3{}^2 + y_3{}^2 + D_2x_3 + E_2y_3 + F_2) = 0.$$

因此
$$k = -\frac{x_3{}^2 + y_3{}^2 + D_1x_3 + E_1y_3 + F_1}{x_3{}^2 + y_3{}^2 + D_2x_3 + E_2y_3 + F_2}.$$

卽從一圓經過 P_3 之條件, 可決定 k 之值. 因 P_3 爲不在 P_1P_2 上之任何點而該圓爲經過 P_1 及 P_2 之任一圓, 故經過 P_1 及 P_2 之任何圓屬於此圓系. *Q. E. D*

系. 二相交圓之根軸爲其公共弦.

同理可證

定理 V. 若二圓

$$C_1 : x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

及
$$C_2 : x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

在 $P_1(x_1, y_1)$ 相切，則圓系

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

表示切 C_1 及 C_2 於切點 P_1 之任何圓.

此類定理說明在 C_1 及 C_2 相交或相切時, 如何可作圓系中之圓, 但 C_1 及 C_2 不相交時，無此類似定理. 以下吾人將述一種方法使可適用於上列三種.

定理 VI. 若取 C_1 及 C_2 之中心聯線及根軸各爲 x 及 y 之二軸，則 § 58 (III) 之方程式可寫爲

(VI) $$x^2+y^2+k'x+F=0,$$

式中 k' 爲任意常數.

證 不論二軸如何選擇, C_1 及 C_2 有下之形式

$$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

及 $$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

若 C_1 及 C_2 之中心在 X 軸上, 則 $E_1=0$ 及 $E_2=0$ (§ 56 系). 根軸之方程式 (§ 58 系 II) 變爲

$$(D_1-D_2)x+(F_1-F_2)=0.$$

若此直線爲 Y 軸,其方程式應爲 $x=0$, 故得 $F_1-F_2=0$, 因此 $F_1=F_2$. 在 (III) 以 F 代 F_1 及 F_2 且使 $E_1=0$ 及 $E_2=0$, 可得

$$x^2+y^2+D_1x+F+k(x^2+y^2+D_2x+F)=0.$$

集合同類項, 全式以 $1+k$ 除之, 得

$$x^2+y^2+\frac{D_1+kD_2}{1+k}x+F=0.$$

x 之係數因 k 而變更, 今可以一文字代之;若

$$\frac{D_1+kD_2}{1+k}=k',$$

卽得方程式 (VI). *Q. E. D.*

系. 圓系 (VI) 之中心在 X 軸上.

(VI) 較 (III) 簡便. 如欲討論圓系 (III), 祇須討論 (VI) 卽可.

定理 VII. 若 r' 爲圓系

$$x^2+y^2+k'x+F=0$$

之半徑,其中心爲 $(\alpha', 0)$, 則

$$r'^2=\alpha'^2-F.$$

證　從 § 56 定理 I 得 $r'^2=\frac{k'^2-4F}{4}$ 及 $\alpha'^2=\frac{k'^2}{4}$. 因此 $r'^2=\alpha'^2-F$.

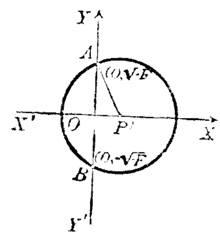
系 I.　若 F 爲負，r' 爲直角三角形之斜邊，其直角邊爲 α' 及 $\sqrt{-F}$*.

系 II.　若 F 爲零，則 $r'=\alpha'$.

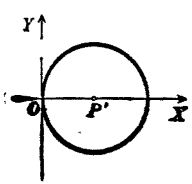
系 III.　若 F 爲正，α' 爲直角三角形之斜邊，其直角邊爲 r' 及 $\sqrt{F}$.

用上列諸系，可作 (VI) 之圓系．惟須注意圓系之中心均在 X 軸上 (從系)．今分三類論之．

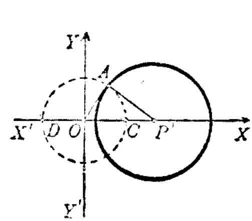
第一款．　$F<0$. 此類中，α' 爲一切實數時，$r'^2=\alpha'^2-F$ 爲正．因此 X 軸上任何點可用作中心，其圓卽屬此系．



在 OY 上取 $OA=\sqrt{-F}$. 在 X 軸上取任意點 P' 爲中心，$P'A$ 爲半徑作圓，此圓屬於此系．因設 $OP'=\alpha'$，則由系 I $P'A=r'$. 故此系表示諸圓，其中心在 X 軸上且經過 $A(0,+\sqrt{-F})$ 點．又此類圓亦必經過 $B(0,-\sqrt{-F})$ 點．



第二款．　$F=0$. 此類中，$r'^2=\alpha'^2$. 因此 X 軸上諸點均可用作中心．此圓系之圓均經過原點 (35 定理 VI)．故以 X 軸上任意點爲中心，$P'O$ 爲半徑之諸圓均屬此系．此圓系之圓互切且切 Y 軸於原點．



第三款．　$F>0$. 此類中，在 α' 之絕對值大於 $\sqrt{F}$ 時，$r'^2=\alpha'^2-F$ 爲正．因此 α' 之絕對值小於 $\sqrt{F}$ 時之 X 軸上諸點不能用作中心．以 O 爲中心，$\sqrt{F}$ 爲半徑作一圓，卽圖中虛線圓．設 P' 爲 X 軸上而在虛線圓外之任意點，作 $P'A$ 與

---

* 若 F 爲負，$-F$ 爲正，因此 $\sqrt{-F}$ 爲一實數．

虛線圓相切．以 P' 爲中心，$P'A$ 爲半徑，作圓．此圓卽屬此系．因若 $P'O=a'$，而 $OA=\sqrt{F}$，A 爲直角，故從系 III，$P'A=r'$．二圓交點上之切線互相垂直．此二圓可稱爲**直交**．故此系表示諸圓，其中心在 X 軸上，此類圓均與虛線圓直交．若 P' 落在 C 點或 D 點，則半徑爲零，卽點圓 C 及 D 均屬此系．此二點稱爲**限點**．因此得

定理 VIII.　圓系

$$x^2+y^2+k'x+F=0$$

之中心在 X 軸上，且

(a) F 爲負時經過 $(0,+\sqrt{-F})$ 及 $(0,-\sqrt{-F})$ 二點；

(b) F 爲零時，相切於原點；

(c) F 爲正時，與圓 $x^2+y^2=F$ 直交．

證法中之作圖，用以畫 § 58 例 1, 2, 3, 之圖形，

從圖得知，用解析法可證若 F 爲負時，無點圓；F 爲零時，有一個點圓；F 爲正時，有二個點圓

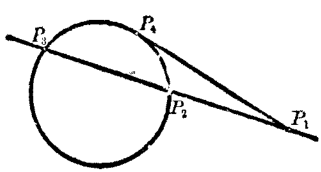
59.　切線之長度．

定理 IX.　設一點 $P_1(x_1, y_1)$ 及圓

$$C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

則自 P_1 至圓所作之割線與圓外線分之積爲

(IX)
$$\boldsymbol{x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F.}$$



證　設過 P_1 之直線方程式爲 (§ 55 定理 XV)

$$x=x_1+\rho\cos\alpha,$$

$$y=y_1+\rho\cos\beta.$$

若一點 (x, y) 或 $(x_1+\rho\cos\alpha,\ y_1+\rho\cos\beta)$ 在 C 上，則得（§ 27 系）

$$(x_1+\rho\cos\alpha)^2+(y_1+\rho\cos\beta)^2 + D(x_1+\rho\cos\alpha)+E(y_1+\rho\cos\beta)+F=0$$

化簡，依 ρ 之昇冪序整列，且用 § 55, (1)，得

$$\rho^2+\rho\left[(2x_1+D)\cos\alpha+(2y_1+E)\cos\beta\right] + x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F_1=0.$$

二次式之二根卽爲割線 P_1P_3 及圓外線分 P_1P_2 之長度．故 P_1P_3 及 P_1P_2 之乘積爲（§ 3 定理 I）

$$x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F.$$

此式不含 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$，故與割線之方向無關． *Q. E. D*

系． 自 P_1 至 C 所作切線長度之平方爲 (IX).

當割線圍繞 P_1 旋轉而變爲 C 之切線時，P_1P_3 及 P_1P_2 均等於 P_1P_4.

定理 X． 自圓

$$C_k:\ x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

上任意一點至圓

$$C_1:\ x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

及

$$C_2:\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

所作切線長度平方之比爲一常數等於 $-k$.

證　設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲 C_k 上任意一點，則

$$x_1^2+y_1^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1+k(x_1^2+y_1^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2)=0.$$

以括弧中式除全式，移項，得

$$\frac{x_1^2+y_1^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1}{x_1^2+y_1^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2}=-k.$$

從系知分式中之分子爲自 P_1 至 C_1 所作切線長度之平方，分母爲自

P_1 至 C_2 所作切線長度之平方．因此二切線長度平方之比爲一常數等於 $-k$.　*Q. E. D.*

系 I. 自一點至二圓 C_1 及 C_2 所作切線長度平方之比爲常數 $-k$ 此點之軌跡爲圓 C_k,

定理 X 祇證此系之一部，尙須證明自諸點至 C_1 及 C_2 所作切線長度平方之比若爲 $-k$, 諸點均在 C_k 上.

系 II. 自一點至二圓之切線相等，此點之軌跡爲二圓之根軸.

習　題

1. 用定理 VIII, 描寫下列諸圓系.

   (a) $x^2+y^2+4x-1+k(x^2+y^2-2x-1)=0$.

   (b) $x^2+y^2+4x+1+k(x^2+y^2-2x+1)=0$.

   (c) $x^2+y^2+4x+k(x^2+y^2-2x)=0$.

   (d) $x^2+y^2+2x-4+k(x^2+y^2+6x-4)=0$.

   (e) $x^2+y^2+2x+9+k(x^2+y^2-4x+9)=0$.

   (f) $x^2+y^2-6x+k(x^2+y^2+8x)=0$.

2. 求切線之長度，此切線自一點

   (a) $(5, 2)$ 至圓 $x^2+y^2-4=0$.　答. 5.

   (b) $(-1, 2)$ 至圓 $x^2+y^2-6x-2y=0$.　答. $\sqrt{7}$.

   (c) $(2, 5)$ 至圓 $2x^2+2y^2+2x+4y-1=0$.　答. $\frac{9}{2}\sqrt{2}$.

   (d) $(1, 2)$ 至圓 $x^2+y^2=25$.　答. $\sqrt{-20}$.

   (d) 題虛數解答爲何意義?　答. 一點在圓內.

3. 決定下列圓系之性質

   (a) $x^2+y^2+2x-4y+k(x^2+y^2-2x+4y)=0$.

   (b) $x^2+y^2+4x-y+k(x^2+y^2-4x+y-4)=0$.

   (c) $x^2+y^2+2x-4y+1+k(x^2+y^2-2x+4y+1)=0$.

4. 一圓經過二圓 $x^2+y^2-1=0$ 及 $x^2+y^2+2x=0$ 之交點，且過 $(3, 2)$ 一點，求此圓之方程式.　答. $7x^2+7y^2-24x-19=0$.

5. 一圓經過 $x^2+y^2-6x=0$ 及 $x^2+y^2-4=0$ 之交點，且過 $(2, -2)$ 一點，求此圓之方程式.　答. $x^2+y^2-3x-2=0$.

6. 求圓系 $x^2+y^2-4x-3+k(x^2+y^2-4y-3)=0$ 中一圓之方程式，已知其中心在 $x-y-4=0$ 之直線上. 答. $x^2+y^2-6x+2y-3=0$.

7. 求一圓之方程式，此圓經過 $x^2+y^2-4x+2y=0$ 及 $x^2+y^2-2y-4=0$ 之交點，且其中心在 $2x+4y-1=0$ 之直線上. 答. $x^2+y^2-3x+y-1=0$.

8. 求圓之方程式，半徑爲 4，且經過 $x^2+y^2-4=0$ 及 $x^2+y^2+2x-3=0$ 之交點.

答. $x^2+y^2-6x-7=0$ 及 $x^2+y^2+8x=0$.

9. 求 $x^2+y^2-4x=0$，$x^2+y^2+6x-8y=0$ 及 $x^2+y^2+6x-8=0$ 三圓中兩兩之根軸，並證三根軸共點。

10. 求 $x^2+y^2-9=0$，$3x^2+3y^2-6x+8y-1=0$ 及 $x^2+y^2+8y=0$ 三圓中兩兩之根軸，並證三根軸共點。

11. 證任何三圓之兩兩根軸共點。

12. 用習題 11 證明可作一圓與任何三圓直交.

13. 用習題 11 證明若諸圓經過二定點，則與一定圓之公共弦必過一定點.

14. 自一圓上任意點 P_1 至他圓上切線之平方與此二圓根軸至 P_1 之距離成比例，求證.

15. 若 C_1 及 C_2 (定理 III) 爲同心圓，則圓系 (III) 亦爲同心圓.

16. 若 C_1 及 C_2 (定理 III) 爲同心圓，則方程式 (III) 不能化爲定理 VI 之形式，求證.

17. 圓系 (III) 中任二圓之根軸與 C_1 及 C_2 之根軸相同，試證之.

18. 若三圓均爲點圓，習題 11 應如何敍述?

總 習 題

1. 三角形之三邊爲 $x+2y=0$, $3x-2y=6$ 及 $x-y=5$. 求其外接圓之方程式。

2. 求習題 1 中三角形之內切圓方程式。

3. 求二圓 $x^2+y^2=25$ 及 $x^2+y^2-16x+39=0$ 交點上半徑之交角.

提示. 求半徑，中心聯線之長度，再應用 § 12 之 17.

4. 求二圓 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 及 $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 交點上半徑之交角.

5. 若習題 4 中半徑之交角爲直角，求其條件.

6. 內接於半圓周之角爲直角，試證之.

7. 自圓周上一點至直徑上所作之垂線爲直徑上二線分之比例中項，試證之.

8. 若 ω 爲斜軸 OX 及 OY 之交角，則 $x^2+2\cos\omega\ xy+y^2+Dx+Ey+F=0$ 之軌跡爲一圓.

9. 已知一圓 $C:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 及一直線 $L:Ax+By+C=0$；證曲線系

$x^2+y^2+Dx+Ey+F+k(Ax+By+C)=0$ 表示諸圓，其中心在經過 C 之中心而垂直於 L 之直線上。

10. 求習題 9 中曲線系所表任何二圓之根軸。

11. 求習題 9 之方程式中 k 之幾何意義。

12. 習題 9 之方程式應爲何種形式，若

(a) Y 軸卽爲直線 L 而 X 軸經過 C 之中心?

(b) 原點爲 C 之中心而 Y 軸平行於 L?

13. 說明在 (a) $r<a$; (b) $r=a$; 及 (c) $r>a$ 時如何可作此圓系 $x^2+y^2-r^2+k(x-a)=0$。

14. 證 (III) 之判別式爲

$$\frac{r_2^2k^2-(d^2-r_1^2-r_2^2)k+r_1^2}{(1+k)^2},$$

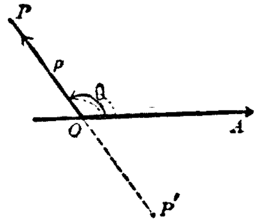
式中 r_1 及 r_2 各爲 C_1 及 C_2 之半徑，d 爲 C_1 及 C_2 中心聯線之長度。

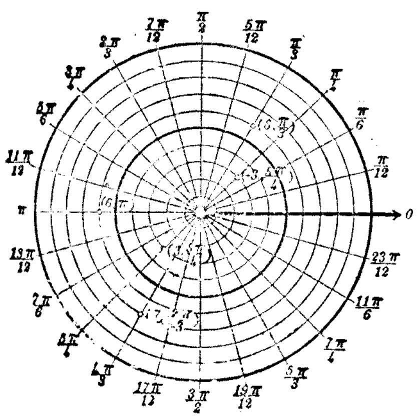
15. 從習題 14 證明若 (III) 無點圓，則 C_1 及 C_2 相交；若 (III) 有一點圓，則 C_1 及 C_2 相切；若 (III) 有二點圓，則 C_1 及 C_2 不相交。

第　六　章

極　坐　標

60. 極坐標. 本章專論以一對實數決定平面上一點之第二方法.吾人假定一定點 O, 稱爲極, 及經過 O 之一直線 OA, 稱爲**極軸**. 從此決定一任意點 P 所成之一長度 $OP=\rho$ 及一角 $AOP=\theta$. ρ 及 θ 二數值稱爲 P 之**極坐標**. ρ 爲**動徑**, θ 爲**動角**. 動角之正負, 與三角法中所述者相同 (§ 11). 若 P 在 θ 之終邊上, 動徑爲正, 在終邊過 O 之延線上, 爲負.





如圖中, P 之動徑爲正, P' 之動徑爲負.

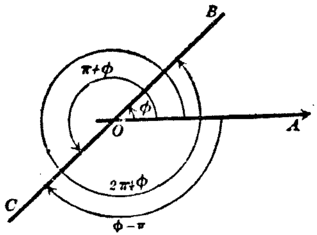
任何一對實數 (ρ, θ) 決定一點.

規則. 以極坐標 (ρ, θ) 描寫一點之位置.

第一步. 如三角法中之方法, 作動角 θ 之終邊.

第二步. 若動徑爲正, 在 θ 之終邊上取長度 $OP=\rho$; 若爲負, 延長終邊過極點, 而取 OP 等於 ρ 之絕對值. 則 P 即爲所求點.

如上圖，各點之極坐標爲$\left(6,\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(3,\frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(-3,\frac{5\pi}{4}\right)$, $(6,\pi)$ 及$\left(7,-\frac{2\pi}{3}\right)$.



任何點 P 決定無限組實數 (ρ,θ).

θ 之値相差一 π 之倍數，卽若 ϕ 爲 θ 之一値，其餘各値之形式當爲 $\phi+k\pi$，而 k 爲正或負之整數．若 P 在 OB 上，ρ 之數値，以所選之 θ 取 OB 或 OC 爲終邊而決定其正負．如 $OB=\rho$，B 之坐標可寫爲下之任何一種形式 (ρ,ϕ), $(-\rho,\pi+\phi)$, $(\rho,2\pi+\phi)$, $(-\rho,\phi-\pi)$等。

以後如不說明，吾人恆假定 θ 爲正，或零，及小於 2π；卽 $0\leqq\theta<2\pi$.

習　題

1. 描寫以下各點位置：$\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(6,\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-2,\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-4,\frac{4\pi}{3}\right)$, $(5,\pi)$.

2. 描寫以下各點位置：$\left(6,\pm\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-2,\pm\frac{\pi}{2}\right)$, $(3,\pi)$, $(-4,\pi)$, $(6,0)$, $(-6,0)$.

3. 證二點 (ρ,θ) 及 $(\rho,-\theta)$ 關於極軸爲對稱。

4. 證二點 (ρ,θ) 及 $(-\rho,\theta)$ 關於極點爲對稱。

5. 證二點 $(-\rho,\pi-\theta)$ 及 (ρ,θ) 關於極軸爲對稱。

61. 方程式之軌跡. 設一含有變數 ρ 及 θ 之方程式，此方程式之**軌跡** (§ 30) 爲一曲線，而

1. 一點之坐標 (ρ,θ)，若能適合於方程式，此點必在軌跡上．
2. 曲線上任一點之坐標必適合於方程式．

解方程式，求 ρ，此 ρ 之値相當於各 θ 之値．待所求諸點足以決定曲線之形象時，聯之卽得一光滑曲線。

描寫圖象時，用極坐標紙較爲簡便．因其經過極點之直線，可決定 θ 之値，其以極點爲中心之圓，可決定 ρ 之値。用 § 13 之表可作 ρ 及 θ 各組數值之表。

討論方程式之軌跡時應注意下列各點：

1. 命 $\theta=0$ 及 $\theta=\pi$，求 ρ，得極軸上之截距。

若 θ 之其餘各值可使 $\rho=0$, 則仍得極軸上之一點,即極點.

2. 若以 $-\rho$ 代換 ρ, 祇變方程式之形式,此曲線關於極點爲對稱.

3. 若以 $-\theta$ 代換 θ, 祇變方程式之形式,此曲線關於極軸爲對稱.

4. 若有 θ 之值可使 ρ 變爲無窮大,此曲線之方向自極點向外無限伸張.

5. 方程式中,如有應除去之 θ 之數值,須求出.

θ	ρ	θ	ρ
0	10	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{12}$	9.7	$\frac{7\pi}{12}$	-2.6
$\frac{\pi}{6}$	8.7	$\frac{2\pi}{3}$	-5
$\frac{\pi}{4}$	7	$\frac{3\pi}{4}$	-7
$\frac{\pi}{3}$	5	$\frac{5\pi}{6}$	-8.7
$\frac{5\pi}{12}$	2.6	$\frac{11\pi}{12}$	-9.7
		π	-10

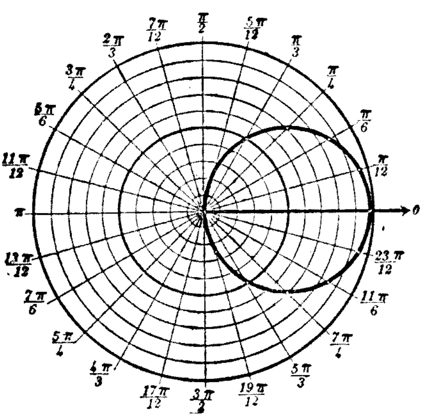
例 1. 討論並描寫下方程式之軌跡

$$\rho=10\cos\theta.$$

解 討論可使描寫簡便,故先述之.

1. $\theta=0$ 時 $\rho=10$, $\theta=\pi$ 時 $\rho=-10$ 故曲線交極軸於極點右 10 單位處.

2. 因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$ (§ 12, 4). 此曲線關於極軸爲對稱.



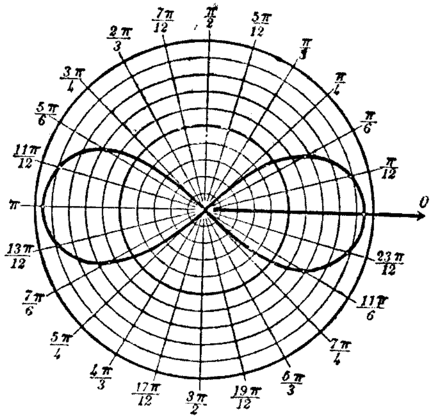
3. 因 $\cos\theta$ 不能無限增加,故此曲線不能無限伸張而爲一封閉曲線.

4. 無 θ 之值使 ρ 爲虛數.

計算 ρ 及 θ 各組之相當值列表(如上表).

因曲線關於極軸爲對稱, 故其餘各部可以對稱關係而描寫之,此軌跡爲一圓.

例 2. 討論並描寫方程式 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 之軌跡.



解　從討論得下之性質.

1. $\theta=0$ 或 π, $\rho=\pm a$. 故曲線交極軸於極點左及右 a 單位處.

2. 此曲線關於極點爲對稱.

3. 因 $\cos(-2\theta)=\cos 2\theta$ (§12, 4). 此曲線關於極軸亦爲對稱.

4. ρ 不能變爲無窮大.

5. 當 $\cos 2\theta$ 爲負, ρ 爲虛數. 若 $\cos 2\theta$ 爲負, 2θ 須在第二或第三象限中, 卽

$$\frac{3\pi}{2}>2\theta>\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{7\pi}{2}>2\theta>\frac{5\pi}{2}.$$

因此 θ 應除去之數值爲

$$\frac{3\pi}{4}>\theta>\frac{\pi}{4} \text{ 及 } \frac{7\pi}{4}>\theta>\frac{5\pi}{4}.$$

θ	ρ	θ	ρ
0	$\pm a$	$\frac{\pi}{6}$	$\pm .7a$
$\frac{\pi}{12}$	$\pm .93a$	$\frac{\pi}{4}$	0

用 2, 3 及 5 計算表中各値.

以所求得之各組數値作點, 並作關於極軸之對稱點. 聯之, 得一完全曲線. 此曲線稱爲**雙紐線**. 圖中 $a=9\cdot5$.

例 3. 討論並描寫方程式

$$\rho=\frac{2}{1+\cos\theta}.$$

解　1. $\theta=0$ 時, $\rho=1$; $\theta=\pi$ 時, $\rho=\infty$; 故此曲線交極軸於極點右一單位處.

2. 此曲線關於極點爲不對稱. 如何可從 1. 推知?

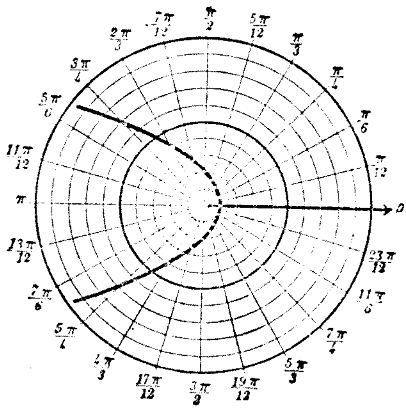
3. 因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$ (§ 12, 4), 此曲線關於極軸爲對稱.

4. 當 $1+\cos\theta=0$ 或 $\cos\theta=-1$ 時，ρ 變爲無窮大，因此 $\theta=\pi$. 此曲線從一方向無限伸張.

5. ρ 不爲虛數.

θ	ρ	θ	ρ
0	1	$\frac{7\pi}{12}$	2.7
$\frac{\pi}{12}$	1.02	$\frac{2\pi}{3}$	4
$\frac{\pi}{6}$	1.07	$\frac{3\pi}{4}$	6.7
$\frac{\pi}{4}$	1.2	$\frac{5\pi}{6}$	14
$\frac{\pi}{3}$	1.3	$\frac{11\pi}{12}$	50
$\frac{5\pi}{12}$	1.6	π	∞
$\frac{\pi}{2}$	2		

由 3, 祇須計算表中各組值至 $\theta=\pi$, 其餘曲線可以對稱關係描寫之. 此曲線爲拋物線.



習　　題

討論並描寫下列方程式之軌跡.

1. $\rho=10,\ \theta=\tan^{-1}1$.
2. $\rho=5.\ \theta=\frac{5\pi}{6}$.
3. $\rho=16\cos\theta$.
4. $\rho\cos\theta=6$.
5. $\rho\sin\theta=4$.
6. $\rho=\frac{4}{1-\cos\theta}$.
7. $\rho=\frac{8}{2-\cos\theta}$.
8. $\rho=\frac{8}{1-2\cos\theta}$.
9. $\rho=a\sin\theta$.
10. $\rho=a(1-\cos\theta)$
11. $\rho^2\sin 2\theta=16$.
12. $\rho^2=16\sin 2\theta$.
13. $\rho^2\cos^2 2\theta=a^2$.
14. $\rho=a\sin 2\theta,\ \rho=a\cos 2\theta$.

15. $\rho=\dfrac{8}{1-e\cos\theta}$.

設 $e=1, 2, \frac{1}{2}$.

16. $\rho\cos\theta=a\sin^2\theta$.

17. $\rho\cos\theta=a\cos 2\theta$.

18. $\rho=a(4+b\cos\theta)$.

設 $b=3, 4, 6$.

19. $\rho=\dfrac{10}{1+\tan\theta}$.

20. $\rho=a\sec\theta\pm b$.

設 $a>b, a=b, a<b$.

21. $\rho=a\theta$.

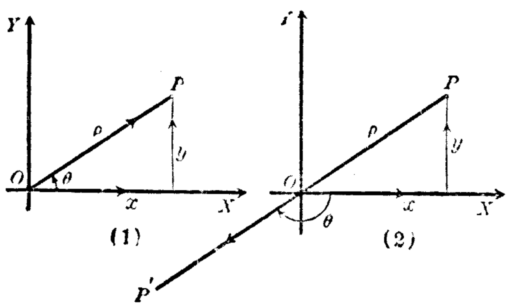
22. $\rho=a\sin 3\theta, \rho=a\cos 3\theta$.

23. 若一方程式中，以 $\frac{\pi}{2}+\theta$ 及 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 代換 θ 後祇變其形式，則此方程式之軌跡關於 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 爲對稱.

24. 以習題 23 之對稱關係應用於 4, 5, 10, 11, 及 12 之軌跡.

62. 直角坐標系化爲極坐標系之變換. 設 OX 及 OY 爲直交軸，再設 O 爲極坐標之極點，OX 爲極軸. 假定 (x, y) 及 (ρ, θ) 各爲直角坐標系及極坐標系中 P 點之坐標，則依 ρ 之正負分爲二類述之.

當 ρ 爲正 (圖 1). 從定義，不論 P 在何種象限內，得



(1) (2)

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho},\quad \sin\theta=\frac{y}{\rho}.$$

因此

(1) $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta.$

當 ρ 爲負 (圖 2)，吾人可設想 P 點關於 O 之對稱點 P'，其直角坐標及極坐標各爲 $(-x, -y)$ 及 $(-\rho, \theta)$. 因 ρ 爲負，P' 之動徑 $-\rho$ 爲正，故用方程式 (1) 得 P' 點之坐標

$$-x=-\rho\cos\theta,\quad -y=-\rho\sin\theta.$$

因此 P 點之坐標爲

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

此與前相同.

故得

定理 I. 若極點合於原點，極軸合於 X 軸，則

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$$

式中 (x, y) 及 (ρ, θ) 各爲一點之直角坐標及極坐標.

方程式 (I) 稱爲直角坐標系化爲極坐標系之**方程式變換**，卽以一點之極坐標表該點之直角坐標. 吾人可從已知之直角坐標以求極坐標，或反求之.

從圖得

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho^2=x^2+y^2, & \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}, \\ \sin\theta=\dfrac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}, & \cos\theta=\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

上方程式卽以一點之直角坐標表該點之極坐標，但應用時不若 (I) 之便利.

例 1. 求圓 $x^2+y^2=25$ 之極坐標方程式.

解 以 (I) 中 x, y 之值代入，得 $\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=25$，或(從 § 12, 3) $\rho^2=25$；因此 $\rho=\pm 5$. 此爲所求方程式，表明一點 (ρ, θ) 自原點之距離爲五單位.

例 2. 求雙紐線 (§ 61例 2) $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 之直角坐標系方程式.

解 從 § 20, 14 得

$$\rho^2=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta).$$

全式乘以 ρ^2， $\qquad \rho^4=a^2(\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta).$

從 (2) 及 (I). $\qquad (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$ 答.

63. 應用.

定理 II. 直線之普遍極坐標系方程式為

$$\text{(II)} \qquad \rho(A\cos\theta + B\sin\theta) + C = 0,$$

式中 A, B 及 C 為任意常數.

證 一直線之普遍直角坐標系方程式為 (§ 42 定理 II)

$$Ax + By + C = 0$$

以 (1) 代入，即得 (II). *Q. E. D.*

若 $A = 0$, 此直線平行於極軸；若 $B = 0$, 則垂直於極軸；若 $C = 0$, 則經過極點.

同樣得

定理 III. 一圓之普遍極坐標系方程式為

$$\text{(III)} \qquad \rho^2 + \rho(D\cos\theta + E\sin\theta) + F = 0,$$

式中 D, E 及 F 為任意常數.

系. 若極在圓周上，極軸經過中心，則此圓之方程式為

$$\rho - 2r\cos\theta = 0,$$

式中 r 為圓之半徑.

若中心在極軸或 X 軸上，$E=0$ (§ 56 系)；若此圓經過極或原點，$F=0$. 中心之橫坐標等於半徑，故 (§ 56 定理 I) $-\dfrac{D}{2}=r$, 或 $D=-2r$. 代 D, E 及 F 之值於 (III) 得 $\rho-2r\cos\theta=0$.

定理 IV. 所設二點 $P_1(\rho_1, \theta_1)$ 及 $P_2(\rho_2, \theta_2)$ 聯線之長度 l 為

$$\text{(IV)} \qquad l^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1 - \theta_2).$$

證 設 P_1 及 P_2 之直角坐標各為 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 則從 § 62 定理 I.

$$x_1 = \rho_1\cos\theta_1,\quad x_2 = \rho_2\cos\theta_2.$$

$$y_1 = \rho_1\sin\theta_1,\quad y_2 = \rho_2\sin\theta_2.$$

從 § 21 定理 IV,

$$l^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

因此 $$l^2=(\rho_1\cos\theta_1-\rho_2\cos\theta_2)^2+(\rho_1\sin\theta_1-\rho_2\sin\theta_2)^2.$$

去括弧,用 § 12 中 3 及 11, 卽得 (IV). *Q. E. D.*

習 題

1. 變換下列方程式爲極坐標系方程式,並描寫其軌跡.

(a) $x-3y=0$. 答. $\theta=\tan^{-1}(\frac{1}{3})$.

(b) $y+5=0$. 答. $\rho=\frac{-5}{\sin\theta}$.

(c) $x^2+y^2=16$. 答. $\rho=\pm 4$.

(d) $x^2+y^2-ax=0$. 答. $\rho=a\cos\theta$.

(e) $2xy=7$. 答. $\rho^2\sin 2\theta=7$.

(f) $x^2-y^2=a^2$. 答. $\rho^2\cos 2\theta=a^2$.

(g) $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$. 答. $\rho\cos(\theta-\omega)-p=0$.

(h) $(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$. 答. $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$.

(i) $2xy+4y^2-8x+9=0$. 答. $\rho^2(\sin 2\theta+4\sin^2\theta)-8\rho\cos\theta+9=0$.

2. 變換 § 61 習題 1 至 21 之方程式爲直角坐標系方程式.

3. 求 $(3,4)$, $(-4,3)$, $(5,-12)$, $(4,5)$ 諸點之極坐標.

4. 求 $\left(5,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-2,\frac{3\pi}{4}\right)$, $(3,\pi)$ 諸點之直角坐標.

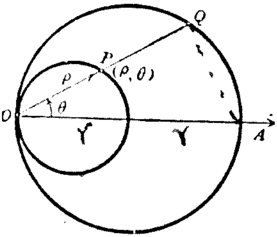
5. 變換 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 爲直角坐標系方程式.

64. 軌跡之方程式. 求軌跡之方程式,有時用極坐標較用直角坐標爲簡易.若一長度變動之直線圍繞一定點旋轉而求其一端之軌跡時,用此法更爲便利.求軌跡之極方程式,其步驟有如 § 28 之規則.

例 1. 極點在圓 $C:\rho-2r\cos\theta=0$ 上,經過極點,作圓內諸弦,求諸弦中點之軌跡.

解 設 $P(\rho,\theta)$ 爲軌跡上任意一點,則從假設

$$OP=\tfrac{1}{2}OQ,$$



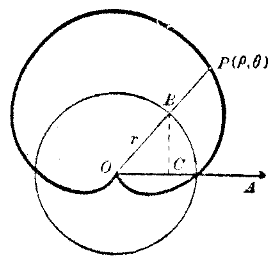
而 Q 為 C 圓上之一點.

但 $OP=\rho$ 及 $OQ=2r\cos\theta$.

因此 $\rho=r\cos\theta$.

從 § 63 系，知以 C 圓中經過 O 點之半徑為直徑，作一圓，即為所求之軌跡.

例 2. 延長一圓之半徑，使其延長部分與該半徑交圓周上一點之縱坐標相等. 求此直線端點之軌跡.



解 設 r 為圓半徑，極點為中心，$P(\rho,\theta)$ 為軌跡上任意一點，則從假設

$$OP=OB+CB.$$

但 $OP=\rho$,

$OB=r$,

及 $CB=r\sin\theta$.

因此 P 點軌跡之方程式為

$$\rho=r+r\sin\theta$$

此方程式之軌跡稱為心臟線.

習 題

1. 經過圓周上一定點作諸弦，延長之使與弦之長度相等. 求其端點之軌跡.

答. 一圓. 其半徑為所設圓之直徑.

2. 經過 $\rho=10\cos\theta$ 圓周上之極點作諸弦，並延長 10 單位，求其端點之軌跡.

答. $\rho=10(1+\cos\theta)$.

3. 經過 $\rho=2a\cos\theta$ 圓周上之極點作諸弦，並延長 $2b$ 之距離，求其端點之軌跡.

答. $\rho=2(b+a\cos\theta)$.

4. 自一定點至一定圓作諸直線，求其中點之軌跡.

提示. 取定點為極，極軸經過圓之中心.

答. 一圓,其半徑爲所設圓半徑之半,其中心爲極與所設圓中心之中點.

5. 過一定點 O, 作一直線,交定直線於 P_1, 在此直線上,求一點 P 之軌跡而使

$$OP_1 \cdot OP = a^2.$$
答. 一圓.

6. 過一定點 O, 作一直線交定圓於 P_1 及 P_2 在此直線上求 P 點之軌跡而使

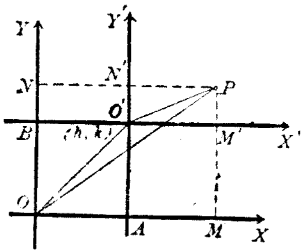
$$OP = 2\frac{OP_1 \cdot OP_2}{OP_1 + OP_2}.$$
答. 一直線.

第　七　章

坐　標　之　變　換

65. 吾人可任意選擇坐標軸，軸之選擇，務使所得結果爲簡單形式．若二軸已知，再求所設曲線關於他組軸之方程式，甚爲重要．從一組軸變換爲他組軸稱爲**坐標之變換**．吾人恆規定二軸自原位置變動至新位置並求以新坐標表原坐標之公式．

66. **坐標軸之平移．** 若二軸自原位置 OX 及 OY 移動至新位置 $O'X'$ 及 $O'Y'$ 而 $O'X'$ 及 $O'Y'$ 各平行於 OX 及 OY，則稱二軸自原位置**平移**至新位置．



設新原點爲 $O'(h, k)$，並設P點在二軸平移前後之坐標各爲 (x, y) 及 (x', y')．求 OP 及 $OO'P$ 在 OX 上之射影得（§ 25 定理 XI）．

$$x = x' + h.$$

同理 $$y = y' + k.$$

因此得

定理 I. 若二軸平移至新原點 (h, k)，且 (x, y) 及 (x', y') 各爲 P 點在二軸移動前後之坐標，則

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = x' + h,} \\ \boldsymbol{y = y' + k.} \end{cases}$$

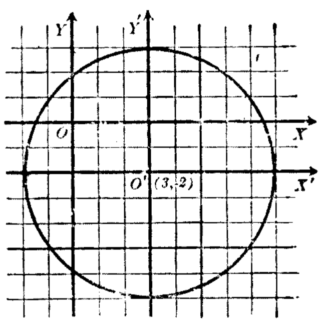
方程式 (I) 稱為**移軸之方程式**. 若一曲線關於原軸之方程式為已知, 可以 (I) 中 x 及 y 之值代入而得該曲線關於新軸之方程式. 因原方程式表 $P(x, y)$ 點在曲線上, 而方程式 (I) 在 (x, y) 為任何數值時恆能正確, 又新方程式表 x' 及 y' 之關係, 即 $P'(x', y')$ 在曲線上. 故 (§ 27, 系)新方程式為曲線之新坐標所表之方程式.

例 1. 若二軸平移至新原點 $(3, -2)$, 變換方程式

$$x^2+y^2-6x+4y-12=0.$$

解　此處可得 $h=3$, $k=-2$, 方程式 (1) 化為

$$x=x'+3,\quad y=y'-2.$$



代入原方程式,得

$$(x'+3)^2+(y'-2)^2-6(x'+3)$$
$$+4(y'-2)-12=0.$$

化簡, $$x'^2+y'^2=25.$$

此結果可預知. 因所設方程式之軌跡 (§ 56 定理 I) 為一圓, 其中心為 $(3, -2)$, 半徑為 5 今將原點平移至中心,則圓之方程式應為所求得之形式 (§ 29' 系).

習　　題

1. 當二軸平移至新原點 $(3, 6)$ 時, 求 $(3, -5)$ 及 $(-4, 2)$ 二點之新坐標.

2. 將二軸平移至下列所指定之新原點,變換各方程式,並描寫原軸新軸及曲線之圖象.

(a) $3x-4y=6$　$(2, 0)$.　　答. $3x'-4y'=0$.

(b) $x^2+y^2-4x-2y=0$, $(2, 1)$.　　答. $x'^2+y'^2=5$.

(c) $y^2-6x+9=0$, $(\frac{3}{2}, 0)$.　　答. $y'^2=6x'$.

(d) $x^2+y^2-1=0$　$(-3, -2)$.　　答. $x'^2+y'^2-6x'-4y'+12=0$

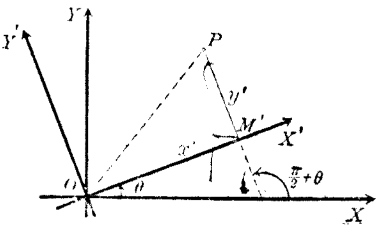
(e) $y^2-2kx+k^2=0$, $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$.　　答. $y'^2=2kx'$.

(f) $x^2-4y^2+8x+24y-20=0,\ (-4,\ 3)$.　　答. $x'^2-4y'^2=0$.

3. 求方程式 (I), 若 O' 在 (a) 第二象限; (b) 第三象限; (c) 第四象限.

67. 坐標軸之旋轉. 設二軸 OX 及 OY 圍繞 O 點旋轉一 θ 角而至新位置 OX' 及 OY'. 則一點關於 OX 及 OY 之坐標與關於 OX' 及 OY' 之坐標之方程式稱爲**轉軸之方程式**.

定理 II. 若二軸旋轉一 θ 角,其方程式爲



$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta. \end{cases}$$

證　設 P 爲任意點,其原坐標與新坐標各爲 $(x,\ y)$ 及 $(x',\ y')$. 聯 OP 且作 PM' 垂直於 OX', 求 OP 及 $OM'P$ 在 OX 上之射影得

OP 在 OX 上之射影 $=x$.　　(§ 20 定理 III).

OM' 在 OX 上之射影 $=x'\cos\theta$.　　(§ 20 定理 II).

$M'P$ 在 OX 上之射影 $=y'\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$　　(§ 20 定理 II)

$=-y'\sin\theta$.　　(§ 12, 6).

因此 (§ 25 定理 XI)

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta.$$

同樣, 求 OP 及 $OM'P$ 在 OY 上之射影得

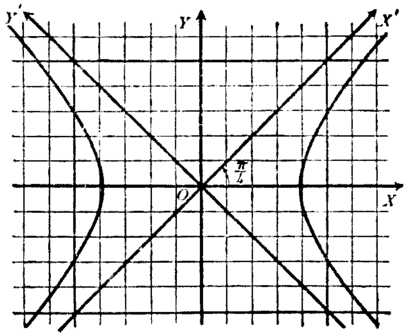
$$y=x'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+y'\cos\theta.$$

$$=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

Q. E. D.

若一曲線之方程式爲已知, 則以 (II) 代入該方程式中之 x 及 y, 得該曲線關於 OX' 及 OY' 之新方程式.

例 1.　若二軸旋轉 $\frac{\pi}{4}$，變換方程式 $x^2-y^2=16$.



解　因 $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

及　$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

方程式 (II) 化爲

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入原方程式，得

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2=16,$$

化簡，

$$x'y'+8=0.$$

習　　題

1. 若二軸旋轉 $\frac{\pi}{2}$，求 (3, 1), (−2, 6) 及 (4, −1) 各點之坐標.
2. 將二軸旋轉至下列所指定之角度，變換各方程式，並描寫原軸，新軸及曲線之圖象.

(a) $x-y=0,\ \frac{\pi}{4}$.　　答. $y'=0$.

(b) $x^2+2xy+y^2=8,\ \frac{\pi}{4}$.　　答. $x'^2=4$.

(c) $y^2=4x,\ -\frac{\pi}{2}$.　　答. $x'^2=4y'$.

(d) $x^2+4xy+y^2=16,\ \frac{\pi}{4}$.　　答. $3x'^2-y'^2=16$.

(e) $x^2+y^2=r^2,\ \theta$.　　答. $x'^2+y'^2=r^2$.

(f) $x^2+2xy+y^2+4x-4y=0,\ -\frac{\pi}{4}$.　　答. $\sqrt{2}y'^2+4x'=0$.

3. 若 θ 爲鈍角，求方程式 (II).

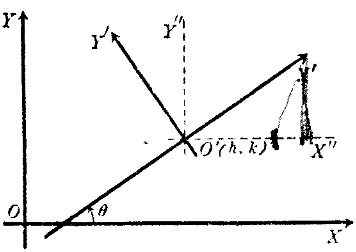
68. 坐標之普遍變換.　若二軸任意變動，則可定爲將二軸自原位置

平移至新位置,再旋轉一適當角度.

定理 III. 若二軸平移至新原點 (h, k), 再旋轉 $-\theta$ 角,則坐標系變換之方程式為

$$
\text{(III)} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = x' \cos\theta - y' \sin\theta + h}, \\ \boldsymbol{y = x' \sin\theta + y' \cos\theta + k}. \end{cases}
$$

證 將軸平移至 $O'X''$ 及 $O'Y''$, 從 (I), 得



$$x = x'' + h,$$

$$y = y'' + k.$$

式中 (x'', y'') 為 P 點關於 $O'X''$ 及 $O'Y''$ 之坐標.

再旋轉二軸, 從 (II), 得

$$x'' = x' \cos\theta - y' \sin\theta,$$

$$y'' = x' \sin\theta + y' \cos\theta.$$

以 x'' 及 y'' 之值代入, 即得 (III). *Q. E. D.*

69. 軌跡之分類. 代數方程式之軌跡 (§ 9) 常以方程式之次數區別之. 此種分類法, 證之下列定理,即示不論軸如何選擇, 軌跡方程式之次數恆不變.

定理 IV. 坐標系變換時, 方程式之次數不變.

證 方程式 (III) 為 x' 及 y' 之一次式, 若以 (III) 之 x 及 y 代入一方程式其次數不能增高. 反之, 亦不能降低. 因將新軸變還原軸時, 方程式之次數決不能增高也*.

坐標系變換時,方程式之次數,既不增高, 又不降低, 故仍不變. Q. E. D.

* 從方程式 (III) 求 x' 及 y', 其結果為 x 及 y 之一次式.

70. 用坐標之變換簡化方程式． 變換坐標系之目的在用以討論所規定之曲線方程式之各種形式．更用以推論諸方程式所化成之最簡式．

規則 簡化方程式之形式．

第一步． 從 (I)［或 (II)］以 x 及 y 之值代入所設方程式，並合併 x' 及 y' 之同類項．

第二步． 使第一步所得含有 h 及 k 之二項係數（或含 θ 之一係數）為零．

第三步． 解第二步所得之方程式，求 h 及 k* (或 θ)．

第四步． 以 h 及 k (或 θ) 之值代入第一步所得之結果，卽得所求方程式．

解習題時，規則或須用兩次．卽先以二軸旋轉再平移之或先平移而後旋轉．此法較應用方程式 (III) 為簡便．至於第二步中使何種係數為零，全視目的所需而決定．

新方程式中變數右上角之撇可除去，惟須知此為關於新軸之方程式．

例 1． 將軸平移簡化方程式 $y^2-8x+6y+17=0$．

解 第一步． 命 $x=x'+h$ 及 $y=y'+k$，得

$$(y'+k)^2-8(x'+h)+6(y'+k)+17=0,\ \text{或}$$

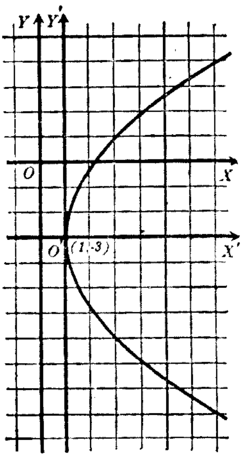
(1)
$$y'^2-8x'+\left.\begin{array}{r}2k\\+6\end{array}\right|y'+\left.\begin{array}{r}k^2\\-8h\\+6k\\+17\end{array}\right|^{\dagger}=0.$$

---

* 方程式或不能解 (§ 43 定理 IV)．

† 縱括為括號之一種，如 $2k+6$ 為 y' 之係數，及 $k^2-8h+6k+17$ 為常數項．此種括號可用以同時去括號及集合同類項．

第二步. 命 y' 之係數及常數項(即含有 h 及 k 之係數)爲零, 得



$$(2)\qquad 2k+6=0,$$

$$(3)\qquad k^2-8h+6k+17=0.$$

第三步. 解 (2) 及 (3), 求 h 及 k, 得

$$k=-3,\ h=1.$$

第四步. 代入 (1), 因 h 及 k 適合於 (2) 及 (3)

得
$$y'^2-8x'=0.$$

此軌跡爲拋物線, 圖中示新軸與原軸.

例 2. 將軸平移, 簡化方程式

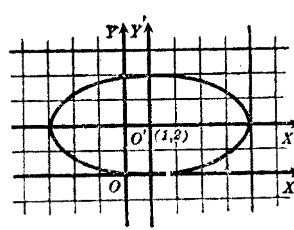
$$x^2+4y^2-2x-16y+1=0.$$

解　第一步. 命 $x=x'+h$, $y=y'+k$, 得

$$(4)\qquad \begin{array}{r|r|r|l} x'^2+4y'^2+2h & x'+8k & y'+\quad h^2 & =0. \\ -2 & -16 & +4k^2 & \\ & & -2h & \\ & & -16k & \\ & & +1 & \end{array}$$

第二步. 命 x' 及 y' 之係數爲零, 得

$$2h-2=0,\ 8k-16=0.$$



第三步. 解方程式, 得

$$h=1,\ k=2.$$

第四步. 代入 (4), 得

$$x'^2+4y'^2=16.$$

畫新軸, 得軌跡之圖象.

例 3. 將軸旋轉, 移去 $x^2+4xy+y^2=4$ 之 xy 項.

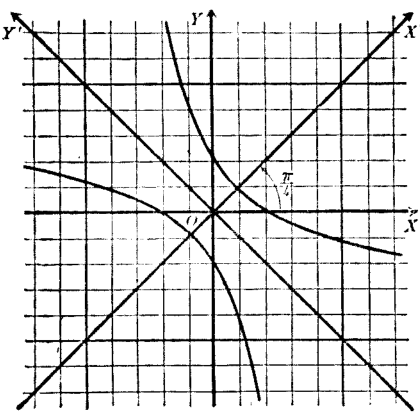
解　第一步．命 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ 及 $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$.

因此

$$\begin{array}{r|l|l|l} \cos^2\theta & x'^2-2\sin\theta\cos\theta & x'y'+\sin^2\theta & y'^2=4. \\ +4\sin\theta\cos\theta & \quad +4(\cos^2\theta-\sin^2\theta) & \quad -4\sin\theta\cos\theta & \\ +\sin^2\theta & \quad +2\sin\theta\cos\theta & \quad +\cos^2\theta & \end{array}$$

從 § 12 之 3 及 14,

(5)　$$(1+2\sin 2\theta)\,x'^2+4\cos 2\theta\, x'y'+(1-2\sin 2\theta)\,y'^2=4.$$



第二步．命 $x'y'$ 之係數為零，得

$$\cos 2\theta=0.$$

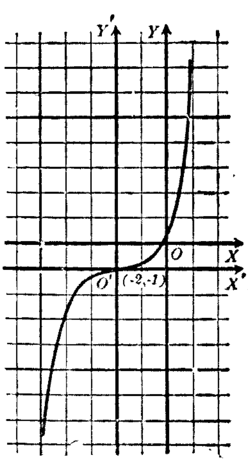
第三步．因此

$$2\theta=\frac{\pi}{2},\quad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}.$$

第四步．代入(5)，因 $\sin\frac{\pi}{2}=1$ (§ 13)，得

$$3x'^2-y'^2=4.$$

此方程式之軌跡為雙曲線．圖示新軸所畫軌跡之圖象．



從 $\cos 2\theta=0$ 可得 $2\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$，$n$ 為正負整數或零．因此 $\theta=\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}$．使 θ 等於其中任何一值，xy 項卽可移去，但 θ 恆取最小之正值．

例 4．將軸平移，簡化

$$x^3+6x^2+12x-4y+4=0$$

解　第一步．使

$$x=x'+h,\quad y=y'+k.$$

得

$$(6)\qquad \begin{array}{l|l|l|l} x'^3+3h & x'^2+\ \ 3h^2 & x'-4y'+\quad h^3 & =0. \\ \quad\ +6 & \quad\ +12h & \qquad\quad\ +\ \ 6h^2 & \\ & \quad\ +12 & \qquad\quad\ +12h & \\ & & \qquad\quad\ -\ \ 4k & \\ & & \qquad\quad\ +\ \ 4 & \end{array}$$

第二步． 命 x'^2 之係數及常數項爲零．得

$$3h+6=0,$$

$$h^3+6h^2+12h-4k+4=0.$$

第三步． 解方程式，得

$$h=-2,\ k=-1.$$

第四步． 代入 (6)，得 $\qquad x'^3-4y'=0.$

此軌跡爲圖中之三次拋物線．

習　　題

1. 將軸平移，簡化下列諸方程式，描寫原軸，新軸及曲線之圖象．

(a) $x^2+6x+8=0.$ 答． $x'^2=1.$

(b) $x^2-4y+8=0.$ 答． $x'^2=4y'$

(c) $x^2+y^2+4x-6y-3=0.$ 答． $x'^2+y'^2=16.$

(d) $y^2-6x-10y+19=0.$ 答． $y'^2=6x'.$

(e) $x^2-y^2+8x-14y-33=0.$ 答． $x'^2-y'^2=0.$

(f) $x^2+4y^2-16x+24y+84=0$ 答． $x'^2+4y'^2=16.$

(g) $y^3+8x-40=0.$ 答． $8x'+y'^3=0.$

(h) $x^3-y^2+14y-49=0.$ 答． $y'^2=x'^3.$

(i) $4x^2-4xy+y^2-40x+20y+99=0.$ 答． $(2x'-y')^2-1=0.$

2. 將軸旋轉，移去下列諸方程式之 xy 項，描寫原軸，新軸及曲線之圖象．

(a) $x^2-2xy+y^2=12.$ 答． $y'^2=6.$

(b) $x^2-2xy+y^2+8x+8y=0.$ 答． $\sqrt{2}\,y^2+8x'=0.$

(c) $xy=18.$ 答． $x'^2-y'^2=36.$

(d) $25x^2+14xy+25y^2=288.$　　答. $16x'^2+9y'^2=144.$

(e) $3x^2-10xy+3y^2=0.$　　答. $x'^2-4y'^2=0.$

(f) $6x^2+20\sqrt{3}\,xy+26y^2=324.$　　答. $9x'^2-y'^2=81.$

71. 一次及二次方程式之應用.　此節將應用前節規則以證普遍定理.

定理 V. 將軸變動,可使普遍一次方程式

$$Ax+By+C=0$$

變爲 $x'=0$.

證　應用 § 70 規則, 用方程式 (III).

命
$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+h,$$
$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+k.\qquad 得$$

(1)
$$\left.\begin{matrix}A\cos\theta\\+B\sin\theta\\ \end{matrix}\right|x'\left.\begin{matrix}-A\sin\theta\\+B\cos\theta\\ \end{matrix}\right|y'\left.\begin{matrix}+Ah\\+Bk\\+C\end{matrix}\right|=0.$$

使 y' 之係數及常數項爲零, 得

(2)
$$-A\sin\theta+B\cos\theta=0,$$

(3)
$$Ah+Bk+C=0.$$

從 (2)
$$\tan\theta=\frac{B}{A},\ 或\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right).$$

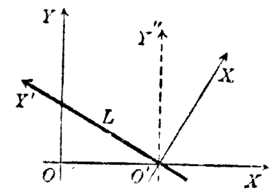
從 (3) 得無限組之 h 及 k 之對應值,其中一組爲

$$h=-\frac{C}{A},\ k=0.$$

代入 (1), 後二項消去, 再以 x' 之係數除之, 得 $x'=0$.　　*Q. E. D.*

因 (3) 爲 (h,k) 在所設直線 L 上之條件, 故先將原點平移至直線上一點 (h,k), 再將軸旋轉使新 y 軸與 L 重合. 則 (h,k) 卽爲 L 與 X 軸之交點 O'.

此定理在幾何學中甚爲明顯，因 $x'=0$ 爲新 Y 軸之方程式，而任何直線可選爲 Y 軸．但此定理尙可照上法用以證明任何一次方程式之軌跡爲一直線．因 $x'=0$ 之軌跡顯然表明一直線也．



定理 VI. 二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

中．xy 項恆可移去，祇須將軸旋轉一 θ 角而使

$$\text{(VI)}\qquad \tan 2\theta=\frac{B}{A-C}.$$

證 命 $$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta.$$

及 $$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

得

$$(4)\quad \left.\begin{matrix}A\cos^2\theta\\+B\sin\theta\cos\theta\\+C\sin^2\theta\end{matrix}\right| x'^2 \left.\begin{matrix}-2A\sin\theta\cos\theta\\+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\+2C\sin\theta\cos\theta\end{matrix}\right| x'y' \left.\begin{matrix}+A\sin^2\theta\\-B\sin\theta\cos\theta\\+C\cos^2\theta\end{matrix}\right| y'^2.$$

$$\left.\begin{matrix}+D\cos\theta\\+E\sin\theta\end{matrix}\right| x' \left.\begin{matrix}-D\sin\theta\\+E\cos\theta\end{matrix}\right| y'+F=0.$$

使 $x'y'$ 之係數爲零，得

$$(C-A)\cdot 2\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0,$$

或 (§ 12, 14) $$(C-A)\sin 2\theta+B\cos 2\theta=0.$$

因此 $$\tan 2\theta=\frac{B}{A-C}.$$

若 θ 適合於此關係，代入 (4)，卽可得不含 xy 項之方程式． *Q. E. D*

系． 若以軸旋轉，變換方程式時，不以常數乘或除新方程式，則其常

數項不變.

因 (4) 之常數項與所設方程式相同。

定理 VII.　將軸平移,若二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

二次項之判別式 $\triangle=B^2-4\,AC$ 不等於零,則一次項可移去.

證　命
$$x=x'+h,\quad y=y'+k.$$

得

$$(5)\qquad Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+\left.\begin{array}{l}2\,Ah\\+Bk\\+D\end{array}\right|x'+\left.\begin{array}{l}Bh\\+2\,Ck\\+E\end{array}\right|y'+\left.\begin{array}{l}Ah^2\\+Bhk\\+Ck^2\\+Dh\\+Ek\\+F\end{array}\right|=0$$

使 x' 及 y' 之係數爲零,得

$$(6)\qquad 2\,Ah+Bk+D=0,$$

$$(7)\qquad Bh+2\,Ck+E=0.$$

解方程式,除非 (§ 43 定理 IV)

$$\frac{2\,A}{B}=\frac{B}{2\,C},$$

或
$$B^2-4\,AC=0.$$

h 及 k 之值恆可求得. 若以此代入 (5),則所得方程式不含一次項.

Q. E. D.

系 I.　若將軸平移,變換方程式,二次方程式中二次項之系數不變,除非新方程式乘以或除以一常數.

因 (5) 之二次項係數與所設方程式相同.

系 II. 若 $\triangle$ 不等於零，二次方程式之軌跡有對稱中心.

因若將一次項移去，此軌跡關於新原點爲對稱 (§ 34 定理 V).

若 $\triangle=B^2-4AC=0$, 而 (§ 43 定理 IV) $\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}=\frac{D}{E}$. 方程式 (6) 及 (7) 仍可求得 h 及 k, 惟新原點 (h, k) 爲直線 $2Ax+By+D=0$ 上任何點，即直線上任何點，均可爲對稱中心.

例如方程式 $x^2+4xy+4y^2+4x+8y+3=0$ 中 (6) 及 (7) 爲

$$2h+4k+4=0,$$

$$4h+8k+8=0.$$

上二方程式之係數成比例，故其解答無限. 一組解答爲 $h=-2$, $k=0$. 從此組解答化爲

$$x^2+4xy+4y^2-1=0,$$

或

$$(x+2y+1)(x+2y-1)=0.$$

此軌跡爲二平行線，且關於此二線中間之一平行線上任何點爲對稱.

總 習 題

1. 簡化並描寫下列諸軌跡.

(a) $y^2-5y+6=0$.

(b) $x^2+2xy+y^2-6x-6y+5=0$.

(c) $y^2+6x-10y+2=0$.

(d) $x^2+4y^2-8x-16y=0$.

(e) $x^2+4xy+y^2=8$.

(f) $x^2-9y^2-2x-36y+4=0$.

(g) $25y^2-16x^2+50y-119=0$.

(h) $x^2+2xy+y^2-8x=0$.

2. 若須移去二次方程式之一次項 (定理 VII)，求原點應移動之位置.

3. 將軸平移，變換方程式

$$(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0 \text{ 爲 } (1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0,$$

(h, k) 應爲何處一點?

4. 簡化習題 3 中第二方程式

5. 將軸旋轉一角 $+\frac{\pi}{2}$ 及 $-\frac{\pi}{2}$, 從圖求其方程式，並代入 § 67 (II) 以證驗之

6. 將軸變動，一次方程式可變爲 $y'=0$, 試證之. 此種可能方法有幾種?

7. 將極軸旋轉一角 ϕ, 其方程式爲 $\theta=\theta'+\phi$.

8. 將 (h, k) 爲極點 極軸與 X 軸之交角爲 ϕ, 則自直角坐標系化爲極坐標系之方程式爲

$$x=h+\rho\cos(\theta+\phi),$$

$$y=k+\rho\sin(\theta+\phi).$$

9. 自直角坐標系變爲斜角坐標系之方程式爲

$$x=x'+y'\cos\omega,$$

$$y = y' \sin \omega,$$

若 X 軸相合，而 OX' 及 OY' 之交角爲 ω.

10. 自一組斜軸變爲第二組斜軸而原點相同，其變換方程式爲

$$x = x' \frac{\sin(\omega - \phi)}{\sin \omega} + y' \frac{\sin(\omega - \psi)}{\sin \omega},$$

$$y = x' \frac{\sin \phi}{\sin \omega} + y' \frac{\sin \psi}{\sin \omega},$$

其中 ω, ϕ 及 ψ 各爲 OX 與 OY, OX 與 OX' 及 OX 與 OY' 之交角.

第　八　章

錐線及二次方程式

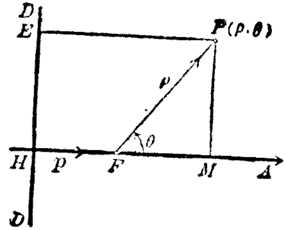
72. 極坐標方程式. 一動點 P 與定點 F 及定直線 DD 距離之比爲一常數. P 點之軌跡稱爲**圓錐曲線***,簡稱錐線. F 爲**焦點**, DD 爲**準線**. 常數比爲**離心率**. 經過焦點而垂直於準線之直線稱爲**主軸**.

定理 I. 若以錐線之焦點爲極點,主軸爲極軸,則其極方程式爲

(I)
$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta},$$

式中 e 爲離心率, p 爲自準線至焦點之距離.

證 設 P 爲錐線上任意一點,由定義



$$\frac{FP}{EP}=e.$$

從圖, $FP=\rho$

及
$$EP=HM=p+\rho\cos\theta.$$

以 FP 及 EP 之值代入,得

$$\frac{\rho}{p+\rho\cos\theta}=e;$$

或求 ρ,
$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}.\qquad Q.E.D$$

從 (I) 知

---

* 此類曲線,可由一平面與一圓錐相交而成.

1.　一錐線關於主軸爲對稱.

因以 $-\theta$ 代換 θ 而 $\cos(-\theta)=\cos\theta$, 方程式祇變其形式.

2.　畫圖，無 θ 之值應除去.

其餘性質，依 $e \gtreqqless 1$ 而分三類討論之 (§ 61).

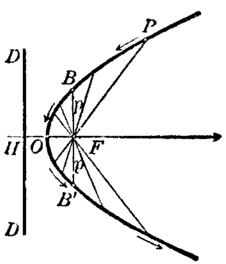
抛物線 $e=1$. 當 $e=1$, (I) 化爲

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta},$$

此軌跡稱爲**抛物線**.

1.　因 $\theta=0$, $\rho=\infty$; $\theta=\pi$, $\rho=\frac{p}{2}$. 故抛物線交主軸祇有一 O 點，此點稱爲**頂點**. 此點在焦點 F 之左 $\frac{p}{2}$, 且爲 F 及 DD 間距離之中點.

2.　當分母 $1-\cos\theta$ 爲零時，ρ 變爲無窮大. 若 $1-\cos\theta=0$, 則 $\cos\theta=1$, 因此 $\theta=0$ 爲小於 2π 而使 ρ 變爲無窮大之惟一數值.



3.　當 θ 自 0 增加至 $\frac{\pi}{2}$,

則　$\cos\theta$ 自 1 減少至 0,

$1-\cos\theta$ 自 0 增加至 1,

ρ 自 ∞ 減少至 p,

此點 $P(\rho,\theta)$ 描寫抛物線中自無窮遠至 B 之一部分.

當　θ 自 $\frac{\pi}{2}$ 增加至 π,

則　$\cos\theta$ 自 0 減少至 -1,

$1-\cos\theta$ 自 1 增加至 2,

ρ 自 p 減少至 $\frac{p}{2}$,

此點 $P(\rho,\theta)$ 描寫抛物線中自 B 至頂點 O 之一部分.

因此曲線關於主軸為對稱，當 θ 自 π 增加至 $\frac{3\pi}{2}$，$P(\rho,\theta)$ 點描寫拋物線中自 O 至 B' 之一部分；又當 θ 自 $\frac{3\pi}{2}$ 增加至 2π，P 點描寫自 B' 至無窮遠之一部分．

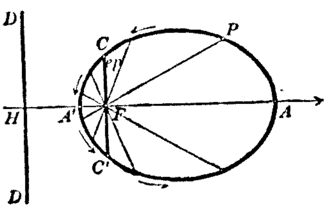
當 $e<1$ 時，此錐線稱為**橢圓**，$e>1$ 時稱為**雙曲線**．此二種曲線之相同及相異處可分別對照討論之．

橢圓，$e<1$．

1. 因 $\theta=0$，$\rho=\frac{ep}{1-e}=\frac{e}{1-e}p$．

又 $e<1$ 分母為正而 ρ 亦為正，故在 F 之右得橢圓上之 A 點．

當 $e<1$ 時依 $e\gtreqless\frac{1}{2}$ 而 $\frac{e}{1-e}\gtreqless 1$，故 FA 可大於，等於或小於 FH．



因 $\theta=\pi$，$\rho=\frac{ep}{1+e}=\frac{e}{1+e}p$．$\rho$ 為正，故在 F 之左得一點 A'．

又 $\frac{e}{1+e}<1$，$\rho<p$；A' 在 H 及 F 之間．

A 及 A' 稱為橢圓之頂點．

2. ρ 變為無窮大，若

$$1-e\cos\theta=0,$$

或
$$\cos\theta=\frac{1}{e}.$$

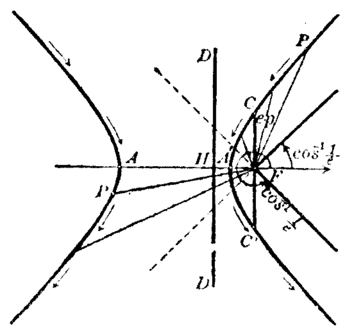
雙曲線，$e>1$．

1. 因 $\theta=0$，$\rho=\frac{ep}{1-e}=\frac{e}{1-e}p$．

又 $e>1$，分母為負而 ρ 亦為負，故在 F 之左得雙曲線上之 A 點．

當 $e>1$ 時，$\frac{e}{1-e}>1$（絕對值）而 $\rho>p$；

故 A 在 H 之左．



因 $\theta=\pi$，$\rho=\frac{ep}{1+e}=\frac{e}{1+e}p$．$\rho$ 為正，故在 F 之右得第二點 A'．

又 $\frac{e}{1+e}<1$，$\rho<p$；A' 在 H 及 F 之間．

A 及 A' 稱為雙曲線之頂點．

2. ρ 變為無窮大，若

$$1-e\cos\theta=0,$$

或
$$\cos\theta=\frac{1}{e}.$$

因 $e<1$，則 $\frac{1}{e}>1$；故無 θ 之値可使 ρ 爲無窮大.

3. 當 θ 自 0 增加至 $\frac{\pi}{2}$,

則 $\cos\theta$ 自 1 減少至 0,

$1-e\cos\theta$ 自 $1-e$ 增加至 1;

因此 ρ 自 $\frac{ep}{1-e}$ 減少至 ep.

而 $P(\rho,\theta)$ 描寫橢圓自 A 至 C.

當 θ 自 $\frac{\pi}{2}$ 增加至 π,

則 $\cos\theta$ 自 0 減少至 -1,

$1-e\cos\theta$ 自 1 增加至 $1+e$;

因此 ρ 自 ep 減少至 $\frac{ep}{1+e}$,

而 $P(\rho,\theta)$ 描寫橢圓自 C 至 A'.

橢圓之其餘部分 $A'C'A$ 可以關於主軸之對稱關係而描寫之.

橢圓爲封閉曲線.

因 $e>1$，則 $\frac{1}{e}<1$，故 θ 有二値可使 ρ 爲無窮大.

3. 當 θ 自 0 增加至 $\cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$,

則 $\cos\theta$ 自 1 減少至 $\frac{1}{e}$,

$1-e\cos\theta$ 自 $1-e$ 增加至 0;

因此 ρ 自 $\frac{ep}{1-e}$ 減少至 $-\infty$,

而 $P(\rho,\theta)$ 描寫左支曲線之下半部自 A 至無窮遠.

當 θ 自 $\cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$ 增加至 $\frac{\pi}{2}$,

則 $\cos\theta$ 自 $\frac{1}{e}$ 減少至 0,

$1-e\cos\theta$ 自 0 增加至 1;

因此 ρ 自 ∞ 減少至 ep.

而 $P(\rho,\theta)$ 描寫右支曲線之上半部自無窮遠至 C.

當 θ 自 $\frac{\pi}{2}$ 增加至 π,

則 $\cos\theta$ 自 0 減少至 -1.

$1-e\cos\theta$ 自 1 增加至 $1+e$;

因此 ρ 自 ep 減少至 $\frac{ep}{1+e}$,

而 $P(\rho,\theta)$ 描寫雙曲線自 C 至 A'.

雙曲線之其餘部分自 $A'C'$ 至無窮遠及自無窮遠至 A 可以關於主軸之對稱關係而描寫之.

雙曲線爲兩支無限伸張曲線.

習 題

1. 描寫並討論下列錐線. 求 e 及 p，且畫焦點及準線.

(a) $\rho=\frac{2}{1-\cos\theta}$.

(b) $\rho=\frac{2}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$.

(c) $\rho=\frac{8}{1-2\cos\theta}$.

(d) $\rho=\frac{5}{2-2\cos\theta}$.

(e) $\rho=\dfrac{3}{3-\cos\theta}$.　　(g) $\rho=\dfrac{2}{2-\cos\theta}$.

(f) $\rho=\dfrac{6}{2-3\cos\theta}$.　　(h) $\rho=\dfrac{12}{3-4\cos\theta}$.

2. 將習題 1 中方程式變爲直角坐標系方程式，用 § 70 規則化簡並討論所得之結果，求新變數所表之焦點坐標及準線方程式，用新軸描寫每一方程式之軌跡及其焦點與準線。

答。(a) $y^2=4x,\ (1,0),\ x=-1.$

(b) $\dfrac{x^2}{\frac{64}{9}}+\dfrac{y^2}{\frac{16}{3}}=1,\ \left(-\dfrac{4}{3},0\right),\ x=-\dfrac{16}{3}.$

(c) $\dfrac{x^2}{\frac{64}{9}}-\dfrac{y^2}{\frac{64}{3}}=1,\ \left(\dfrac{16}{3},0\right),\ x=\dfrac{4}{3}.$

(d) $y^2=5x,\ (\frac{5}{4},0),\ x=-\frac{5}{4}.$

(e) $\dfrac{x^2}{\frac{81}{64}}+\dfrac{y^2}{\frac{9}{8}}=1,\ \left(-\dfrac{3}{8},0\right),\ x=-\dfrac{27}{8}.$

(f) $\dfrac{x^2}{\frac{144}{25}}-\dfrac{y^2}{\frac{36}{5}}=1,\ \left(\dfrac{18}{5},0\right),\ x=\dfrac{8}{5}.$

(g) $\dfrac{x^2}{\frac{16}{9}}+\dfrac{y^2}{\frac{4}{3}}=1,\ \left(-\dfrac{2}{3},0\right),\ x=-\dfrac{8}{3}.$

(h) $\dfrac{x^2}{\frac{1296}{49}}-\dfrac{y^2}{\frac{144}{7}}=1,\ \left(\dfrac{48}{7},0\right),\ x=\dfrac{27}{7}.$

3. 變 (I) 爲直角坐標系方程式，化簡，(a) $e=1$，若 (b) $e\gtrless 1$，用直角坐標系求焦點之坐標及準線之方程式。

答。(a) $y^2=2px,\ \left(\dfrac{p}{2},0\right),\ x=-\dfrac{p}{2}.$

(b) $\dfrac{x^2}{\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}}+\dfrac{y^2}{\frac{e^2p^2}{1-e^2}}=1,\ \left(-\dfrac{e^2p}{1-e^2},0\right),\ x=-\dfrac{p}{1-e^2}.$

4. 當 (a) 焦點在準線之左；(b) 極軸與準線平行，求錐線之方程式。

答。(a) $\rho=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$；(b) $\rho=\dfrac{ep}{1-e\sin\theta}$.

5. 描寫並討論下列錐線，求 e 及 p，並作其準線。

(a) $\rho=\dfrac{8}{1+\cos\theta}$.　　(c) $\rho=\dfrac{7}{3+10\cos\theta}$.

(b) $\rho=\dfrac{6}{1-\sin\theta}$.　　(d) $\rho=\dfrac{5}{3-\sin\theta}$.

73. 變換爲直角坐標系.

定理 II. 若以錐線之焦點爲原點，主軸爲 X 軸，則其方程式爲

(II) $$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0,$$

式中 e 爲離心率，$x=-p$ 爲準線之方程式.

證 (I) 去分母 § 72, 得

$$\rho-e\rho\cos\theta=ep.$$

命 $\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\rho\cos\theta=x$ (§ 62), 得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}-ex=ep,$$

或 $$\pm\sqrt{x^2+y^2}=ex+ep.$$

兩端平方，並集合 x 及 y 之同類項，即得所求方程式. 準線 DD 因在 F 左 p 單位 (§ 72 圖), 故其方程式爲 $x=-p$. *Q. E. D.*

74. 直角坐標系方程式之簡化及討論. 拋物線, $e=1$.

當 $e=1$, (II) 化爲

$$y^2-2px-p^2=0.$$

應用 § 70規則，以

(1) $$x=x'+h,\quad y=y'+k,$$

得

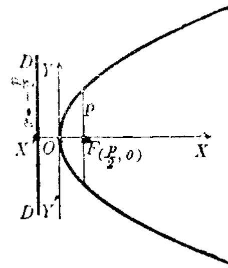
(2) $$y'^2-2px'+2ky'+k^2-2ph-p^2=0.$$

命 y' 之係數及常數項等於零，求 h 及 k, 得

(3) $$h=-\frac{p}{2},\quad k=0$$

以此值代入 (2)，去撇，則拋物線之方程式化為

$$y^2 = 2\,px.$$

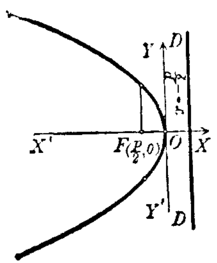


從 (3) 知原點已自 F 移至拋物線之頂點 O，而焦點之新坐標為 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，又準線之新方程式為 $x = -\frac{p}{2}$. 因此得

定理 III. 若以拋物線之軸為 X 軸，頂點為原點，其方程式為

(III) $$y^2 = 2\,px.$$

焦點為 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，準線之方程式為 $x = -\frac{p}{2}$.



拋物線 (III) 之普遍討論，除以前 (§ 72) 已知者外更可得下之性質。

1. 拋物線經過原點，除此外不再與軸相交。

2. x 之值與 p 符號相反者應除去 (§ 35 規則)，故 p 為正時，此曲線在 YY' 之右，p 為負時，在左。

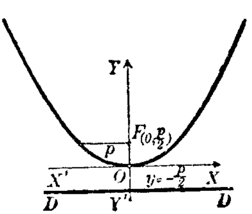
3. y 之值無除去者；故此曲線向上下無限伸張。

定理 IV. 若以拋物線之軸為 Y 軸，頂點為原點，其方程式為

(IV) $$x^2 = 2\,py.$$

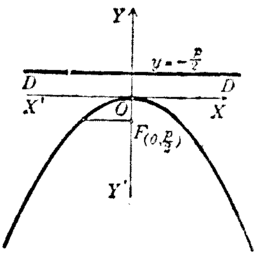
焦點為 $\left(0, \frac{p}{2}\right)$，準線方程式為 $y = \frac{-p}{2}$.

證 將軸旋轉 $-\frac{\pi}{2}$ 即命 $\theta = -\frac{\pi}{2}$，§ 67 方程式 (II) 變為



$$x = y',$$

$$y = -x'.$$



以此二式代入 (III), 去撇, 得 $x^2=2\,py$.

Q. E. D.

軸旋轉後,此圖形爲以正方向旋轉一角 $\frac{\pi}{2}$.
圖在 X 軸之上或下,視 p 之爲正抑爲負而定.

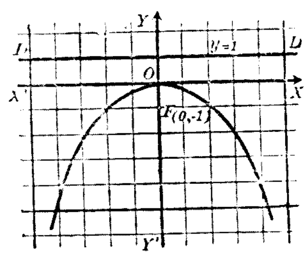
方程式 (III) 及 (IV) 稱爲拋物線方程式之徵式.

方程式之形式爲

$$Ax^2+Ey=0 \text{ 及 } Cy^2+Dx=0.$$

而式中 A, E, C 及 D 均不爲零者,可用移項及除法化爲 (III) 或 (IV) 之徵式.故此二軌跡均爲拋物線.

例 1. 描寫軌跡 $x^2+4y=0$,並求焦點及準線.

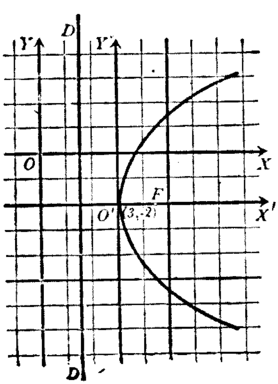


解 所設方程式可寫爲

$$x^2=-4\,y.$$

與(IV)比較,此軌跡爲拋物線而 $p=-2$, 焦點爲 $(0,-1)$, 準線爲直線 $y=1$.

例 2. 若一拋物線之頂點爲 $O'(3,-2)$,準線平行於 Y 軸,若 $p=3$, 求其方程式.



解 拋物線關於以 $O'X'$ 及 OY' 爲二軸之方程式爲 (定理 III)

(4) $$y'^2=6\,x'.$$

二軸自 O 向 O' 平移, 其方程式爲 (§ 66 定理 I)

$$x=x'+3,\ y=y'-2,$$

卽

(5) $$x'=x-3,\ y'=y+2.$$

代入 (4), 得所求方程式

$$(y+2)^2=6(x-3),$$

或 $$y^2-6x+4y+22=0.$$

F 之坐標關於 $O'X'$ 及 $O'Y'$ 二軸爲 (定理 III) $\left(\frac{3}{2},0\right)$, DD 之方程式爲 $x'=-\frac{3}{2}$. 從 (5) 知 F 之坐標關於 OX 及 OY 二軸爲 $\left(\frac{9}{2},-2\right)$, DD 之方程式爲 $x=\frac{3}{2}$.

習　題

1. 描寫下列方程式之軌跡.畫每種圖象之焦點及準線.

(a) $y^2=4x$.　　(d) $y^2-6x=0$.

(b) $y^2+4x=0$.　　(e) $x^2+10y=0$.

(c) $x^2-8y=0$.　　(f) $y^2+x=0$.

2. 若準線平行於 Y 軸, 求拋物線之方程式, 已知

(a) $p=6$, 頂點爲 $(3,4)$.　　答. $(y-4)^2=12(x-3)$.

(b) $p=-4$, 頂點爲 $(2,-3)$.　　答. $(y+3)^2=-8(x-2)$.

(c) $p=8$, 頂點爲 $(-5,7)$.　　答. $(y-7)^2=16(x+5)$.

(d) $p=4$, 頂點爲 (h,k).　　答. $(y-k)^2=8(x-h)$.

3. 經過焦點而垂直於軸之弦稱爲正焦弦. 求 $y^2=2px$ 正焦弦之長度.　　答. $2p$.

4. 一拋物線之軸平行於 Y 軸, 頂點爲 (α,β), 其方程式爲何?

答. $(x-\alpha)^2=2p(y-\beta)$.

5. 變下列方程式爲極坐標系方程式, 並將所得結果討論之.

(a) $y^2=2px$,　　(b) $x^2=2py$.

6. 拋物線 (III) 上二點之横坐標與其縱坐標之平方成比例, 試證之.

75. 直角坐標系方程式之簡化及討論.　有心二次曲線, $e\gtrless 1$.

當 $e\gtrless 1$, § 73 方程式 (II) 化爲

$$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0.$$

化簡 (§ 70 規則), 命

(1) $$x=x'+h,\ y=y'+k.$$

得

(2) $$\left.\begin{array}{c}(1-e^2)x'^2+y'^2+2\,h(1-e^2)\\ -2e^2p\end{array}\right|\begin{array}{r}x'+2\,ky'+(1-e^2)h^2\\ +k^2\\ -2\,e^2ph\\ -e^2p^2\end{array}\Bigg|=0.$$

命 x' 及 y' 之係數爲零, 得

$$2\,h(1-e^2)-2\,e^2p=0,\ 2k=0,$$

因此

(3) $$h=\frac{e^2p}{1-e^2},\quad k=0.$$

代入 (2), 去撇, 得

$$(1-e^2)x^2+y^2-\frac{e^2p^2}{1-e^2}=0,$$

或

(4) $$\frac{x^2}{\dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}}=1.$$

移常數項, 全式以常數項除之, 再以第一式之分子分母除以 $1-e^2$ 即得此式.

橢圓, $e<1$.

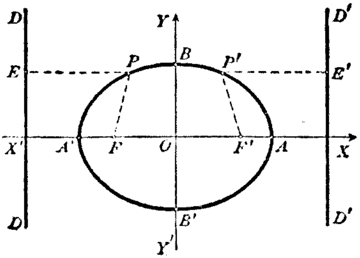
從 (3) 當 $e<1$ 時, h 爲正. 因此新原點 O 在焦點 F' 之右.

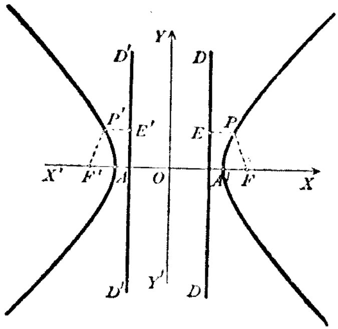
雙曲線, $e>1$.

從 (3), 當 $e>1$ 時, h 爲負. 因此新原點 O 在焦點 F 之左.

又 $\dfrac{e^2}{1-e^2}>1$ (絕對值), 因此 $h>p$ (絕對值); 故新原點在準線 DD 之左.

(4) 之軌跡關於 YY' 爲對稱 (§ 34 定理 V), 因此 O 爲 AA' 之中點. 作





二圖,F' 爲 F 關於 YY' 之對稱點, $D'D'$ 爲 DD 之對稱直線, F' 及 $D'D'$ 爲新焦點及新準線,

設 P 及 P' 爲曲線上關於 YY' 之二對稱點, 從對稱關係 $PF=P'F'$ 及 $PE=P'E'$. 但由定義 $\frac{PF}{PE}=e$, 則 $\frac{P'F'}{P'E'}=e$. 因此以 F' 爲焦點 $D'D'$ 爲準線, P' 所描寫之錐線與以 F 爲焦點 DD 爲準線 P 所描寫者相同。

因(4)之軌跡關於原點爲對稱(§34 定理 V), 故稱爲**有心二次曲線**. 對稱中心卽稱爲**中心**. 因此有心二次曲線有二焦點及二準線.

在任一圖中, 焦點 F 之坐標爲

$$\left(-\frac{e^2p}{1-e^2}, 0\right).$$

因 F 之原坐標爲 (0, 0). 代入 (1), 其新坐標爲 $x'=-h$, $y'=-k$, 或從 (3) $\left(-\frac{e^2p}{1-e^2}, 0\right)$.

故 F' 之坐標爲 $\left(\frac{e^2p}{1-e^2}, 0\right)$.

準線 DD 之新方程式爲 $x=-\frac{p}{1-e^2}$.

因從 (1) 及 (3), $x=x'+\frac{e^2p}{1-e^2}$, $y=y'$. 代入 $x=-p$ (定理 II), 去撇, 得 $x=-\frac{p}{1-e^2}$.

因此 $D'D'$ 之方程式為 $x=\dfrac{p}{1-e^2}$.

導題. 有心二次曲線之中心為原點，主軸為 X 軸，其方程式為

$$\frac{x^2}{\dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}}=1. \tag{4}$$

焦點為 $\left(\pm\dfrac{e^2p}{1-e^2},0\right)$.

準線為直線 $x=\pm\dfrac{p}{1-e^2}$,

橢圓，$e<1$.

為便利計使

(5) $a=\dfrac{ep}{1-e^2}$, $b^2=\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$, $c=\dfrac{e^2p}{1-e^2}$.

a^2 及 b^2 為 (4) 之分母，c 為一焦點之橫坐標。因 $e<1$, $1-e^2$ 為正；因此 a, b^2 及 c 皆為正.

故 $$a^2-b^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}-\frac{e^2p^2}{1-e^2},$$

$$=\frac{e^4p^2}{(1-e^2)^2}=c^2$$

及 $$\frac{a^2}{c}=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}\div\frac{e^2p}{1-e^2}=\frac{p}{1-e^2}$$

因此準線(導題)即為直線 $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$.

以 (5) 代入 (4) 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

軸上截距為 $x=\pm a$ 及 $y=\pm b$. $AA'=2a$ 稱為長軸，$BB'=2b$ 為短軸。因 $a^2-b^2=c^2$ 為正；故 $a>b$ 即長軸大於短軸.

雙曲線，$e>1$.

為便利計使

(6) $a=-\dfrac{ep}{1-e^2}$, $b^2=-\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$, $c=-\dfrac{e^2p}{1-e^2}$.

a^2 及 $-b^2$ 為 (4) 之分母，c 為一焦點之橫坐標。因 $e>1$, $1-e^2$ 為負；因此 a, b^2 及 c 皆為正.

故 $$a^2+b^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}-\frac{e^2p^2}{1-e^2}$$

$$=\frac{e^4p^2}{(1-e^2)^2}=c^2$$

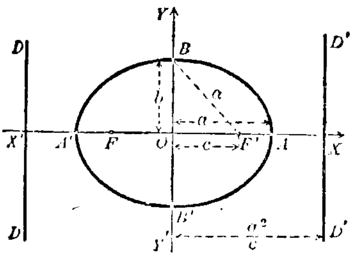
及 $$\frac{a^2}{c}=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}\div-\frac{e^2p}{1-e^2}=-\frac{p}{1-e^2}.$$

因此準線(導題)即為直線 $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$.

以 (6) 代入 (4) 得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

軸上截距為 $x=\pm a$，但此雙曲線不交 Y 軸。$AA'=2a$ 稱為貫軸 $BB'=2b$ 為共軛軸.



今將導題複述如下：

定理 V. 橢圓之中心爲原點，焦點在 X 軸上，其方程式爲

(V) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

式中 $2a$ 爲長軸，$2b$ 爲短軸．若 $c^2=a^2-b^2$，則焦點爲 $(\pm c, 0)$ 準線爲 $x=\pm\frac{a^2}{c}$.

方程式 (5) 可使吾人用 (V) 之常數 a, b, c 表 (I) 之常數 e 及 p (§ 72). 因

(7) $$\frac{c}{a}=\frac{e^2p}{1-e^2}\div\frac{ep}{1-e^2}=e$$

及

(9) $$\frac{b^2}{c}=\frac{e^2p^2}{1-e^2}\div\frac{e^2p}{1-e^2}=p.$$

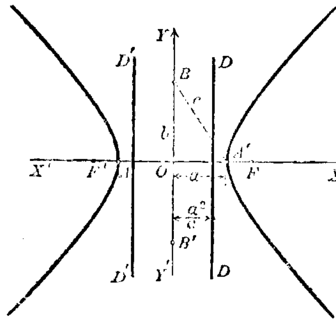
圖中 $OB=b$, $OF'=c$；因 $c^2=a^2-b^2$，則 $BF'=a$. 故以 B 爲圓心，OA 爲半徑，畫弧，交 XX' 於 F 及 F'，則 F 及 F' 爲所作二焦點．

若 $a=b$，則 (V) 化爲

$$x^2+y^2=a^2,$$

此軌跡爲一圓．

以軸旋轉一角 $-\frac{\pi}{2}$ (§ 67 定理 II). 變 (V) 得



今將導題複述如下：

定理 VI. 雙曲線之中心爲原點，焦點在 X 軸上，其方程式爲

(VI) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

式中 $2a$ 爲貫軸，$2b$ 爲共軛軸，若 $c^2=a^2+b^2$，則焦點爲 $(\pm c, 0)$ 準線爲 $x=\pm\frac{a^2}{c}$.

方程式(6)可使吾人用 (VI) 之常數 a, b, c 表 (I) 之常數 e 及 p (§ 72). 因

(8) $$\frac{c}{a}=-\frac{e^2p}{1-e^2}\div-\frac{ep}{1-e^2}=e$$

及

(10) $$\frac{b^2}{c}=-\frac{e^2p^2}{1-e^2}\div-\frac{e^2p}{1-e^2}=p.$$

圖中 $OB=b$, $OA'=a$；因 $c^2=a^2+b^2$，則 $BA'=c$. 故以 O 爲圓心，BA' 爲半徑，畫弧交 XX' 於 F 及 F'. 則 F 及 F' 爲所作二焦點．

若 $a=b$，則 (VI) 化爲

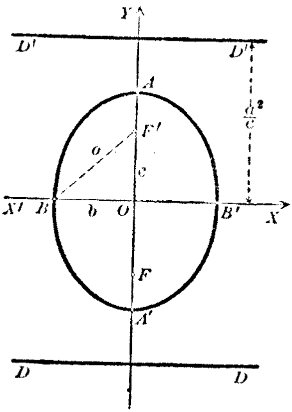
$$x^2-y^2=a^2,$$

此軌跡稱爲等軸雙曲線．

以軸旋轉一角 $\frac{\pi}{2}$ (§ 67 定理 II). 變 (VI) 得

定理 VII. 橢圓之中心爲原點,焦點在 Y 軸上,其方程式爲

(VII) $$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

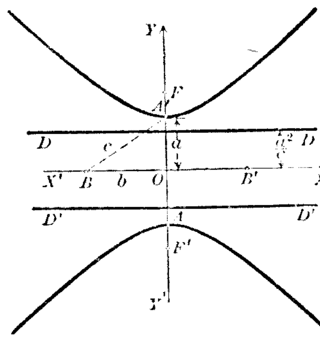


式中 $2a$ 爲長軸, $2b$ 爲短軸.若 $c^2=a^2-b^2$,則焦點爲 $(0, \pm c)$,準線爲直線 $y=\pm\frac{a^2}{c}$.

(V) 與 (VII) 相異之處爲 (V) 中 x^2 之分母大於 y^2 之分母, 而 (VII) 中則反之.(V) 及 (VII) 稱爲橢圓之徵式.

定理 VIII. 雙曲線之中心爲原點,焦點在 Y 軸上,且方程式爲

(VIII) $$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$



式中 $2a$ 爲貫軸 $2b$ 爲共軛軸.若 $c^2=a^2+b^2$,則焦點爲 $(0, \pm c)$ 準線爲直線 $y=\pm\frac{a^2}{c}$.

(VI) 及 (VIII) 相異之處爲 (VI) 中 y^2 之係數爲負, x^2 之係數爲正, 而 (VIII) 則反之.(VI) 及 (VIII) 稱爲雙曲線之徵式.

方程式之形式爲

$$Ax^2+Cy^2+F=0,$$

而式中 A, C 及 F 均爲異於零者,可寫作

(11) $$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}=1.$$

移常數項,以常數項除之,再將二分式之分子分母各除以 A 及 C.

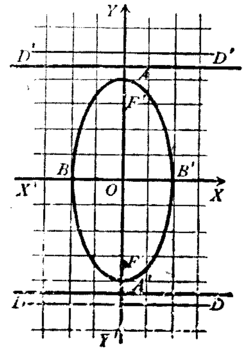
此方程式之軌跡爲

1. 一橢圓,若 α 及 β 均爲正.而 a^2 等於大分母, b^2 等於小分母.

2. 一雙曲線，若 α 及 β 異號．而 a^2 爲正分母，b^2 爲負分母．

3. 若 α 及 β 均爲負，(11) 無軌跡．

例 1. 求橢圓 $4x^2+y^2=16$ 之軸，焦點，準線及離心率．



解 以 16 除全式，得

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

第二分母較大．與 (VII) 比較

$$b^2=4,\ a^2=16,\ c^2=16-4=12.$$

故 $\qquad b=2.\ a=4,\ c=\sqrt{12}.$

因 a, b, c 須爲正，故平方根祇用正號．

因此長軸 $AA'=8$，短軸 $BB'=4$，焦點 F 及 F' 爲 $(0,\pm\sqrt{12})$，準線 DD 及 $D'D'$ 之方程式爲 $y=\pm\dfrac{a^2}{c}=\pm\dfrac{16}{\sqrt{12}}=\pm\dfrac{4}{3}\sqrt{12}.$

從 (7) 及 (9)，$e=\dfrac{\sqrt{12}}{4}$ 及 $p=\dfrac{4}{\sqrt{12}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{12}.$

習 題

1. 描寫下列方程式之軌跡，準線及焦點，並求 e 及 p 之值．

(a) $x^2+9y^2=81.$ (e) $9y^2-4x^2=36.$

(b) $9x^2-16y^2=144.$ (f) $x^2-y^2=25.$

(c) $16x^2+y^2=25.$ (g) $4x^2+7y^2=13.$

(d) $4x^2+9y^2=36.$ (h) $5x^2-3y^2=14.$

2. 橢圓之中心爲原點，焦點在 X 軸上，求其方程式，若

(a) $a=5$ $b=3$. 答． $9x^2+25y^2=225.$

(b) $a=6$, $c=\frac{?}{3}$. 答． $32x^2+36y^2=1152.$

(c) $b=4$ $c=3$. 答． $16x^2+25y^2=400.$

(d) $c=8$ $e=\frac{2}{3}$. 答. $5x^2+9y^2=720$.

3. 雙曲線之中心爲原點,焦點在 X 軸上,求其方程式,若

(a) $a=3$, $b=5$. 答. $25x^2-9y^2=225$.

(b) $a=4$, $c=5$. 答. $9x^2-16y^2=144$.

(c) $e=\frac{3}{2}$, $a=5$. 答. $5x^2-4y^2=125$.

(d) $c=8$, $e=4$. 答. $15x^2-y^2=60$

4. 證橢圓及雙曲線之正焦弦(過焦點而垂直於主軸之弦)爲 $\frac{2b^2}{a}$.

5. 等軸雙曲線之離心率爲何? 答. $\sqrt{2}$.

6. 變 (V) 及 (VI) 爲極坐標系,並將所求得之方程式討論之.

7. 圓之焦點及準線在何處?

8. 橢圓及雙曲線之中心爲 (α, β),主軸平行於 X 軸,其方程式爲何?

答. $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$; $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$.

76. 共軛雙曲線及漸近線. 若一雙曲線之貫軸及共軛軸各爲第二雙曲線之共軛軸及貫軸,此二雙曲線稱爲**共軛雙曲線**.其中心相同,主軸(§ 72)互相垂直.

若雙曲線之方程式爲徵式,變 x^2 及 y^2 係數之符號,其結果卽爲共軛雙曲線之方程式.

若一雙曲線之方程式爲 (VI) 則共軛雙曲線之方程式爲 (VIII),卽一式正分母之絕對値爲他式負分母之絕對値,而一式之貫軸卽爲他式之共軛軸.

如方程式

(1) $$16x^2-y^2=16 \text{ 及 } -16x^2+y^2=16$$

之軌跡爲共軛雙曲線,此二式又可寫爲

$$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{16}=1 \text{ 及 } -\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{16}=1.$$

第一式之焦點在 X 軸,第二式在 Y 軸.第一式之貫軸及第二式之共軛軸等於 2,而第一式之共軛軸及第二式之貫軸等於 8.

二共軛雙曲線之焦點與原點等距.

因 c^2(定理 VI 及 VIII)等於半貫軸及半共軛軸平方之和,此和於二共軛雙曲線爲相同.如上列第一雙曲線 $c^2=1+16$,第二雙曲線 $c^2=16+1$.

若以雙曲線方程式之徵式，使其常數項爲零，則所得新方程式之軌跡爲一對直線（§ 32 定理），此二直線稱爲雙曲線之**漸近線**.

如雙曲線

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \tag{2}$$

之漸近線爲二直線

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0, \tag{3}$$

或

$$bx + ay = 0 \text{ 及 } bx - ay = 0. \tag{4}$$

二直線均過原點，其斜率各爲

$$-\frac{b}{a} \text{ 及 } \frac{b}{a}. \tag{5}$$

漸近線之重要性質述於

定理 IX. 雙曲線之任一支在無窮遠處接近於其漸近線.

證　設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲 (2) 任一支上之一點.若此點近於 (4) 中之第一漸近線，則自此線至 P_1 之距離（192 頁之圖）爲（§ 49 規則）

$$d = \frac{bx_1 + ay_1}{+\sqrt{b^2 + a^2}}. \tag{6}$$

因 P_1 在 (2) 上，　$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2.$

分解因式，　$bx_1 + ay_1 = \dfrac{a^2b^2}{bx_1 - ay_1}.$

代入 (6)，　$d = \dfrac{a^2b^2}{+\sqrt{b^2 + a^2}(bx_1 - ay_1)}.$

若 P_1 漸至無窮遠，x_1 及 y_1 變爲無窮大而 d 接近於 0.

因 x_1 及 y_1 在第二及第四象限中爲異號，故 bx_1 及 ay_1 不能消去.

故此曲線漸次接近於漸近線.　*Q. E. D.*

二共軛雙曲線有相同漸近線.

因使二方程式之常數項爲零，其結果相同，故有同一軌跡.

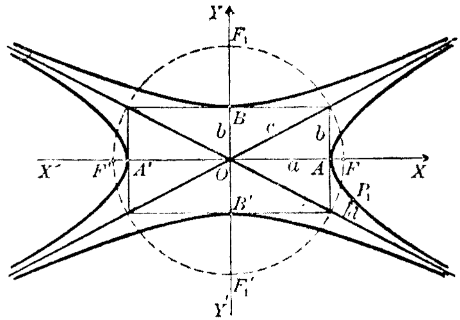
如共軛雙曲線 (1) 之漸近線各爲

$$16x^2-y^2=0 \text{ 及 } -16x^2+y^2=0,$$

此二式相同

雙曲線之正確圖形可作出如下:

作法　在有焦點之軸上，取 $OA=OA'=a$, 在他軸上，取 $OB=OB'=b$. 過 A, A', B, B' 作直線，平行於軸成一矩形*. 作矩形之對角線及外接圓. 作曲線，切矩形之二邊於 A 及 A', 並漸次接近於其對角線，此即爲所求雙曲線. 若作曲線，切矩形之二邊於 B 及 B' 而漸次接近於對角線，則得共軛雙曲線. 二雙曲線之焦點即爲圓與二軸之交點.



因矩形之二頂點 $(\pm a, \pm b)$ 在 (4) 之漸近線上，故對角線即爲漸近線. 又因 $c^2=a^2+b^2$, 對角線之半等於自原點至焦點之距離 c.

77. 以漸近線爲軸之等軸雙曲線.　等軸雙曲線之方程式爲(§ 75 定理 VI)

(1)
$$x^2-y^2=a^2.$$

漸近線爲直線

$$x-y=0 \text{ 及 } x+y=0.$$

此二直線垂直 (§ 42 系 III), 故可用以作坐標軸.

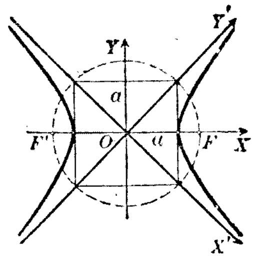
定理 X.　以漸近線爲軸，等軸雙曲線之方程式爲

(X)
$$2xy=a^2.$$

---

* 內切於此矩形可作一橢圓.

證　將軸旋轉一角 $-\frac{\pi}{4}$ 以與漸近線相合。



因此以 (§ 67 定理 II)

$$x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}$$

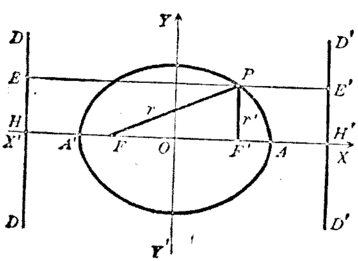
代入 (1), 得

$$\frac{(x'+y')^2}{2}-\frac{(-x'+y')^2}{2}=a^2.$$

化簡去撇, 得　$$2xy=a^2.$$　*Q. E. D.*

73　有心二次曲線焦點之性質.　二次曲線上任一點至焦點之直線稱爲**焦半徑**. 曲線上任一點至二焦點可作二個焦半徑.

定理 XI.　自橢圓上任一點至二焦點所得二個焦半徑之和等於長軸 $2a$.



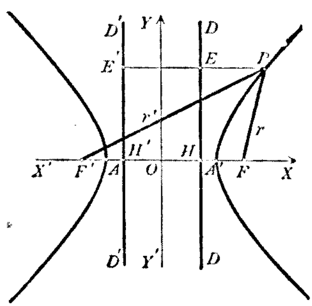
證　設 P 爲橢圓上任一點, 由 § 72 定義

$$r=e\cdot PE,\ r'=e\cdot PE'.$$

因此 $r+r'=e(PE+PE')$

$$=e\cdot HH'.$$

定理 XII.　自雙曲線上任一點至二焦點所得二個焦半徑之差等於貫軸 $2a$.



證　設 P 爲雙曲線上任一點, 由 § 72 定義

$$r=e\cdot PE,\ r'=e\cdot PE',$$

因此 $r'-r=e(PE'-PE)$

$$=e\cdot HH'.$$

從 § 75, (7), $e=\dfrac{c}{a}$,

又從準線之方程式(定理 V)

$$HH'=2\cdot\frac{a^2}{c}.$$

故 $r+r'=\dfrac{c}{a}\cdot2\dfrac{a^2}{c}=2a.$

Q. E. D.

從 § 75, (8), $e=\dfrac{c}{a}$,

又從準線之方程式(定理 VI)

$$HH'=2\cdot\frac{a^2}{c}.$$

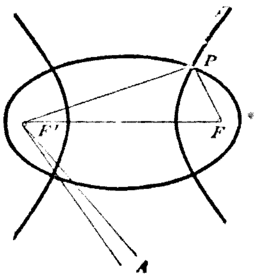
故 $r'-r=\dfrac{c}{a}\cdot2\dfrac{a^2}{c}=2a.$

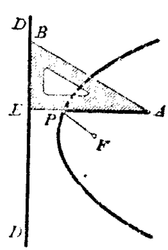
Q. E. D.

79. 二次曲線之機械作圖. 定理 XI 及 XII 顯示橢圓與雙曲線之簡單作圖法,在畫板上二焦點 F 及 F' 處釘二針,以線圍繞之,如圖.

若將線在 A 處握緊,以鉛筆放在 FPF' 之線環中,拉緊滑動,則 $PF+PF'$ 爲一定,而 P 畫一橢圓.若長軸爲$2a$,則線環 FPF 之長度必爲 $2a$.

若以鉛筆牢繫於線上之 P 點.將 A 處握緊,二線同時拉放之,則因 $PF'-PF$ 爲一定而 P 畫一雙曲線.若貫軸爲 $2a$,則繫鉛筆時須使 PF' 及 PF 之差等於 $2a$.





作拋物線,使直角三角形之一直角邊 EB 合於準線 DD 上.取與 AE 等長之一線,一端繫於焦點 F,另一端繫於 A.以鉛筆置於 P 而將線拉緊,則當三角形沿 DD 上下滑動時,因 $PF=PE$, P 點即畫一拋物線.

習　　題

1. 求下列雙曲線之漸近線及共軛雙曲線之方程式，並描寫其圖象。

(a) $4x^2-y^2=36$.　　(c) $16x^2-y^2+64=0$.

(b) $9x^2-25y^2=100$.　　(d) $8x^2-16y^2+25=0$.

2. 若漸近線在第一及第三象限中，求證定理 IX.

3. 若 e 及 e' 爲二共軛雙曲線之離心率，則 $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1$.

4. 自雙曲線之漸近線至焦點之距離等於絕對値 b.

5. 若一直線過雙曲線之一焦點而垂直於一漸近線，則自此直線至中心之距離等於絕對値 a.

6. 自二漸近線至雙曲線上任一點距離之積爲一定。

7. 拋物線 $y^2=2px$ 上一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之焦半徑爲 $\frac{p}{2}+x_1$.

8. 橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之焦半徑爲 $r=a-ex_1$ 及 $r'=a+ex_1$.

9. 若一點 $P_1(x_1, y_1)$ 在雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 之右支上，其焦半徑爲 $r=ex_1-a$ 及 $r'=ex_1+a$，在左支上則爲 $r=-ex_1-a$ 及 $r'=-ex_1+a$.

10. 自等軸雙曲線上任一點至中心之距離爲該點上二個焦半徑之比例中項。

11. 雙曲線之離心率等於一漸近線傾角之正割。

80. 二次方程式軌跡之類別. 以前所述任何錐線，其方程式均爲二次*. 若以軸任意移轉，其方程式形式雖異，次數仍同 (§ 69 定理 IV). 今將二次方程式軌跡之所有形式分類討論之.

從 § 71 (定理 VI)，將軸旋轉可移去 xy 項. 故祇須討論方程式之下一種

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{1}$$

此式可分爲二款

第一款. A 或 C 皆不爲零.

第二款. A 或 C 有一爲零.

* 錐線亦可稱爲二次曲線，以後常用之.

A 及 C 不能同時爲零，否則 (1) 將不爲二次式.

第一款

若 A 或 C 皆不爲零，則 $\triangle = B^2 - 4AC$ 不爲零，因此(§ 71 定理 VII)，將軸平移，可去 x 及 y 項. 故 (1) 變爲 (§ 71 定理 VII 之系 I).

(2) $$Ax'^2 + Cy'^2 + F' = 0.$$

今以 A 及 C 之符號相同或相異，又可分爲兩類.

橢圓類，A 及 C 同號.

1. $F' \neq 0$*. 則 (2) 可寫作

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1,$$

式中 $\alpha = -\dfrac{F'}{A}$, $\beta = -\dfrac{F'}{C}$.

故若 F' 與 A 及 C 異號，此軌跡爲橢圓；但若 F' 與 A 及 C 同號，則無軌跡.

2. $F' = 0$. 此軌跡爲一點.仍可視作一橢圓，惟二軸均爲零，故稱爲變態橢圓.

雙曲線類，A 及 C 異號.

1. $F' \neq 0$*，則 (2) 可寫作

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1,$$

式中 $\alpha = -\dfrac{F'}{A}$, $\beta = -\dfrac{F'}{C}$.

故此軌跡爲雙曲線. 若 F' 與 A 同號，其焦點在 Y 軸上，若 F' 與 C 同號，則在 X 軸上.

2. $F' = 0$. 此軌跡爲一對相交直線. 仍可視作一雙曲線，惟二軸均爲零，故可稱爲變態雙曲線.

第二款

若 A 及 C 有一爲零，此軌跡屬於拋物線類. 吾人恆假定 $A = 0$ 及 $C \neq 0$, 故 (1) 變爲

(3) $$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

因若 $A \neq 0$ 及 $C = 0$, (1) 變爲 $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$. 將軸旋轉一角 $\frac{\pi}{2}$ (§ 67 定理 II)，使 $x = -y'$, $y = x'$, 此方程式化爲 $Ay'^2 + Ex' - Dy' + F = 0$, 此即 (3) 之形式.

將軸平移，(3) 可化爲

(4) $$Cy^2 + Dx = 0 \text{ 或}$$

(5) $$Cy^2 + F' = 0.$$

* 讀若 F' 不等於零.

因以
$$x=x'+h,\quad y=y'+k.$$
代入 (3)，得

$$Cy'^2+Dx'+\left.\begin{array}{r}2\,Ck\\+E\end{array}\right|\,y'+\left.\begin{array}{r}Ck^2\\+Dh\\+Ek\\+F\end{array}\right|=0. \tag{6}$$

若從
$$2\,Ck+E=0,\qquad Ck^2+Dh+Ek+F=0,$$
決定 h 及 k 之值，則 (6) 化爲 (4). 但若 $D=0$，則不能在後式求 h，故常數項不一定能移去. 因此 (6) 祇可化成 (5).

以 (4) 與 § 74, (III) 比較，此軌跡爲抛物線. 又若 F' 及 C 爲異號，(5) 之軌跡爲一對平行線 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{F'}{C}}$. 若 $F'=0$，則爲一直線 $y=0$. 若 F' 及 C 爲同號，則無軌跡. 當二次方程式之軌跡表一組平行線或一直線時，此軌跡稱爲**變態抛物線**.

今已證得

定理 XIII. 二次方程式之軌跡爲一錐線，一點，或一對直線(此二直線或可重合). 若將軸變動，其方程式可化爲下列三種形式之一：
$$Ax^2+Cy^2+F^*=0,\quad Cy^2+Dx=0,\quad Cy^2+F^*=0,$$
式中 A, C 及 D 皆異於零.

系. 方程式
$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$
中缺 xy 項，其軌跡屬於

抛物線類若 $A=0$ 或 $C=0$，

橢圓類若 A 與 C 同號，

雙曲線類若 A 與 C 異號.

* 方程式化成最簡形式後，不需加撇，以與 (1) 區別.

習　　題

1. 變 (1) 爲 (2)，原點應移至何處？　　答. $\left(-\dfrac{D}{2A},\ -\dfrac{E}{2C}\right)$.

2. 變 (3) 爲 (4)？爲 (5)？原點應移至何處？　答. $\left(\dfrac{E^2-4CF}{4CD},\ -\dfrac{E}{2C}\right)$, $\left(0,\ -\dfrac{E}{2C}\right)$.

3. 將軸平移，簡化 $Ax^2+Dx+Ey+F=0$, (a) 若 $E\neq0$, (b) 若 $E=0$ 並求原點所移動之位置.

答. (a) $Ax^2+Ey=0$, $\left(-\dfrac{D}{2A},\ \dfrac{D^2-4AF}{4AE}\right)$.

(b) $Ax^2+F'=0$, $\left(-\dfrac{D}{2A},\ 0\right)$.

4. 下列方程式屬於何類？

(a) $4x^2+y^2-13x+7y-1=0$.

(b) $y^2+3x-4y+9=0$.

(c) $121x^2-44y^2+68x-4=0$.

(d) $x^2+4y-3=0$.

(e) $x^2+7y^2-8x+1=0$.

(f) $x^2+y^2-6x+8y=0$.

(g) $3x^2-4y^2-6y+9=0$,

(h) $x^2-8x+9y-11=0$.

(i) §71 總習題之習題 1 中，不含 xy 項之方程式.

81. 二次方程式軌跡之作圖. 自方程式

$$(1)\qquad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

去 xy 項，須將軸旋轉一角 θ 而 (§71 定理 VI)

$$(2)\qquad \tan 2\theta=\frac{B}{A-C},$$

但旋轉公式 (§67 II) 中須用 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$. 故從 §12, 1 及 3 得

$$(3)\qquad \cos 2\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}.$$

從 (2), 吾人恆可在第一或第二象限內選擇 2θ 之值而 (3) 之符號必與 (2) 相同，且 θ 爲銳角；再從 §12, 15 得

$$(4)\qquad \sin\theta=+\sqrt{\frac{1-\cos2\theta}{2}},\quad \cos\theta=+\sqrt{\frac{1+\cos2\theta}{2}}.$$

若 (1) 爲數值方程式且 $\triangle=B^2-4AC\neq0$, 則先去 x 及 y 項 (§71 定

理 VII). 而後去 xy 項, 其計算較為簡易. 故有下之

規則　作二次數值方程式之軌跡.

第一步.　計算 $\triangle = B^2 - 4AC$.

第二步.　簡化方程式, 將軸

(a) 先平移而後旋轉, 若 $\triangle \neq 0$;

(b) 先旋轉而後平移, 若 $\triangle = 0$.

第三步.　觀察此方程式所表軌跡之性質 (§ 80).

第四步.　畫所用之軸, 並描寫其軌跡.

在第二步中, 可用 (2), (3), (4) 及 § 67, (II) 等方程式, 將軸旋轉. 但若缺 xy 項, 則不需旋轉二軸. 至於移軸之方程式, 可自 § 70 規則得之.

例 1.　作圖並討論

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 12x - 6y = 0$$

之軌跡.

解.　第一步.　$\triangle = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$.

第二步.　將軸旋轉一角 θ, 從 (2)

$$\tan 2\theta = \frac{4}{1-4} = -\frac{4}{3}.$$

再從 (3),
$$\cos 2\theta = -\frac{3}{5},$$

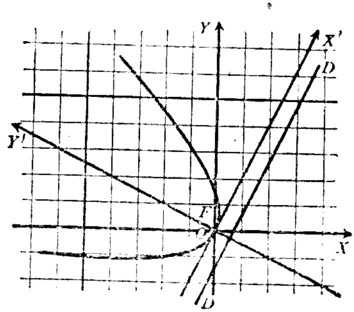
又從 (4),
$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ 及 } \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

軸旋轉之方程式 [§ 67, (II)] 為

(1)
$$x = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}.$$

代入所設方程式*得

$$x'^2-\frac{6}{\sqrt{5}}y'=0.$$



不需平移二軸.

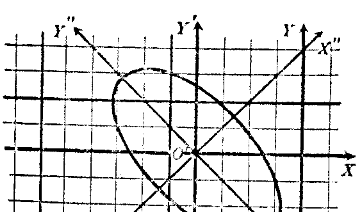
第三步. 此方程式可寫爲

$$x'^2=\frac{6}{\sqrt{5}}y'.$$

故此軌跡爲拋物線而 $p=\frac{3}{\sqrt{5}}$, 焦點在 Y' 軸上.

第四步. 圖示二種坐標軸†, 拋物線, 焦點及準線.

以新坐標表之, 焦點爲 $\left(0, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$, 準線爲直線 $y'=-\frac{3}{2\sqrt{5}}$ (§ 74, 定理 IV). 以 (1) 之新坐標 x' 及 y' 代入, 可求焦點之原坐標, 再解 (1) 中之 y' 代入準線之方程式可得準線之原方程式.



例 2. 作軌跡

$$5x^2+6xy+5y^2+22x-6y+21=0$$

解 第一步. $\triangle=6^2-4\cdot5\cdot5\neq0$.

第二步. 先將軸平移, 其方程式爲

$$x=x'-4,\quad y=y'+3,$$

而所變得之方程式爲

$$5x'^2+6x'y'+5y'^2=32.$$

---

* 若 $\triangle=0$, 二次項成一完全平方, 以所設方程式寫爲

$$(x+2y)^2+12x-6y=0$$

形式時, 代入手續較爲簡便. 第十二章中將證明, 當 $\triangle=0$ 時, 此軌跡常屬拋物線類.

† OX' 之傾角爲 θ, 因此斜率 $\tan\theta$ 可從 (4) 得之. 此例 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{\sqrt{5}}\div\frac{1}{\sqrt{5}}=2$. 故 X' 軸可用 § 22 定理 V 底註之方法作之.

從 (2) 知二軸須旋轉 $\frac{\pi}{4}$. 因此使

$$x' = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}},\quad y' = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}};$$

得最後之方程式爲

$$4x''^2 + y''^2 = 16.$$

第三步． 此最簡方程式可寫作

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{16} = 1.$$

故此軌跡爲橢圓，其長軸爲 8，短軸爲 4，焦點在 Y'' 軸上．

第四步． 圖示三種坐標軸及橢圓．

習　　題

1. 簡化下列諸方程式並作其軌跡，焦點及準線．

(a) $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0.$ 答. $x''^2 - 4y''^2 + 1 = 0$

(b) $4x^2 + 4xy + y^2 + 8x - 16y = 0.$ 答. $5x'^2 - 8\sqrt{5}\,y' = 0.$

(c) $41x^2 - 24xy + 34y^2 + 25 = 0.$ 答. $x'^2 + 2y'^2 + 1 = 0.$

(d) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0.$ 答. $x''^2 + 4y''^2 - 16 = 0.$

(e) $y^2 + 6x - 6y + 21 = 0.$ 答. $y'^2 + 6x' = 0.$

(f) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0.$ 答. $y''^2 = 0.$

(g) $12xy - 5y^2 + 48y - 36 = 0.$ 答. $4x''^2 - 9y''^2 = 36.$

(h) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 3y - 12 = 0.$ 答. $52y''^2 - 49 = 0.$

(i) $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 88x + 34y + 149 = 0.$ 答. $2x''^2 + 3y''^2 = 0.$

(j) $12x^2 + 8xy + 18y^2 + 48x + 16y + 43 = 0.$ 答. $4x^2 + 2y^2 = 1.$

(k) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 36x - 48y + 61 = 0.$ 答. $x''^2 + 1 = 0.$

(l) $7x^2 + 50xy - 7y^2 = 50.$ 答. $16x'^2 - 9y'^2 = 25.$

(m) $x^2 + 3xy - 3y^2 + 6x + 9y + 9 = 0.$ 答. $3x''^2 - 7y''^2 = 0.$

(n) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 400 = 0.$ 答. $y''^2 - 4x'' = 0.$

(o) $95x^2 + 56xy - 10y^2 - 56x + 20y + 194 = 0.$ 答. $6x''^2 - y''^2 + 12 = 0.$

(p) $5x^2 - 5xy - 7y^2 - 165x + 1320 = 0.$ 答. $15x''^2 - 11y''^2 - 330 = 0.$

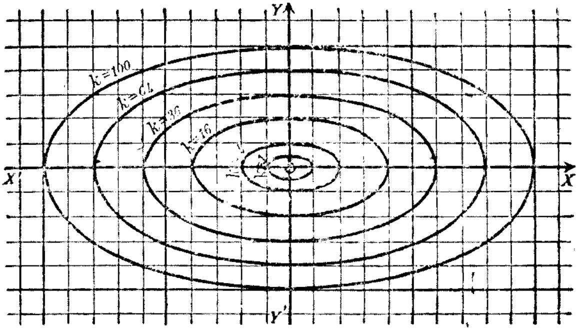
82. 二次曲線系. 本節目的欲以例題及習題,說明二次曲線及變態二次曲線間或不同種類二次曲線間之關係.

同類二次曲線系表示變態二次曲線爲其極限形式,而異類二次曲線系表示拋物線類介於橢圓及雙曲線二類之間.

例 1. 討論二次曲線系 $x^2+4y^2=k$.

解 因 x^2 及 y^2 之係數同號,此軌跡屬於橢圓類 (§ 80, 系). 當 k 爲正時,此軌跡爲橢圓;當 $k=0$ 時,此軌跡爲原點,變態橢圓. 又當 k 爲負時,無軌跡.

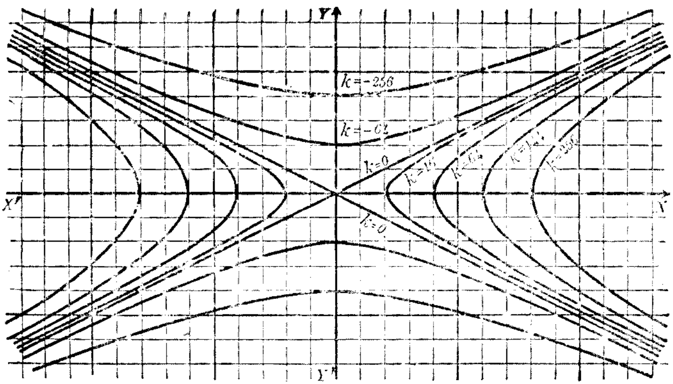
圖中軌跡 $k=100, 64, 36, 16, 4, 1, 0$. 若 k 接近於 0 時,橢圓漸次變小而終爲一點. k 爲負時無軌跡. 因此一點爲橢圓與無軌跡二種情形間之極限情形.



例 2. 討論二次曲線系 $4x^2-16y^2=k$.

解 因 x^2 及 y^2 之係數異號,此軌跡屬於雙曲線類. 此雙曲線有相同漸近線 (§ 76), 即直線 $x\pm 2y=0$. 所設方程式可寫作

$$\frac{x^2}{\frac{k}{4}}-\frac{y^2}{\frac{k}{16}}=1.$$



此軌跡爲一雙曲線．當 k 爲正時，焦點在 X 軸上．k 爲負時，在 Y 軸上．若 $k=0$ 則所設方程式表示此軌跡爲一對漸近線．

圖中軌跡 $k=256,\ 144,\ 64,\ 16,\ 0,\ -64,\ -256$．不論 k 自正或自負接近於 0 時，此雙曲線二頂點逐漸移近而終成一對漸近線．因此一對相交直線爲焦點在 X 軸及 Y 軸之二種雙曲線之極限情形．

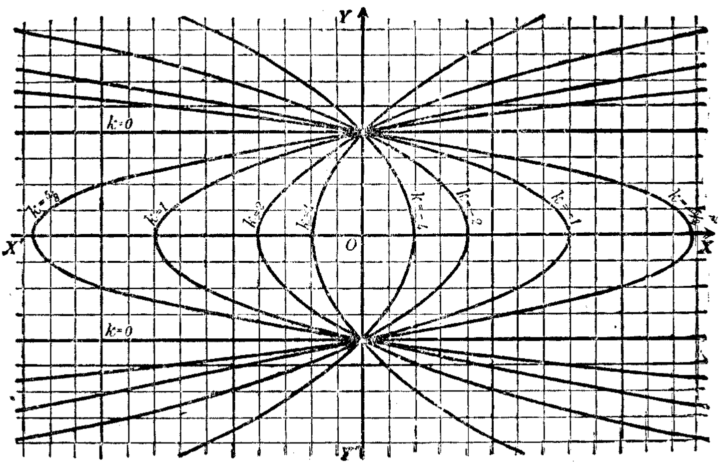
例 3.　討論二次曲線系 $y^2=2kx+16$.

解　方程式中祇有一項爲二次，此軌跡屬於拋物線類（§ 80，系）．將軸平移至新原點 $\left(-\frac{8}{k},0\right)$ 所設方程式可化簡（§ 70，規則），得

$$y'^2=2kx'.$$

故此軌跡爲一拋物線，其頂點爲 $\left(-\frac{8}{k},0\right)$ 而 $p=k$．當 k 爲正時，此曲線向右伸張，k 爲負時，向左伸張．但若 $k=0$，此軌跡爲變態拋物線 $y=\pm 4$.

圖中軌跡 $k=\pm 4,\ \pm 2,\ \pm 1,\ \pm\frac{5}{8},\ 0$．若 k 接近於 0 時，不論其自正或自負，拋物線之頂點與原點漸次離遠而終成二直線 $y=\pm 4$．因此變態



抛物線爲二平行線，此即爲向右或向左伸張之二種抛物線間之極限情形.

例 4. 討論二次曲線系 $\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$.

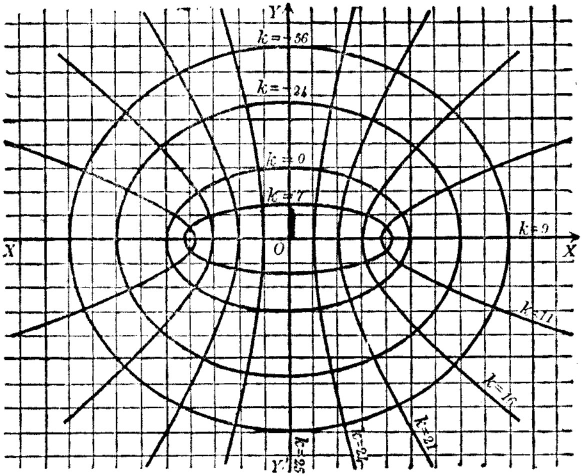
解 當 $k<9$, 此軌跡爲一橢圓，其焦點爲 $(\pm c, 0)$ 而 $c^2=(25-k)-(9-k)=16$ (§ 75 定理 V). 當 $9<k<25$ 時，此軌跡爲一雙曲線. 其焦點爲 $(\pm c, 0)$ 而 $c^2=(25-k)-(9-k)=16$ (§ 75 定理 VI). 當 $k>25$ 時，無軌跡. 因橢圓與雙曲線有同一焦點, $(\pm 4, 0)$, 故稱爲共焦.

去分母，得

$$(9-k)x^2+(25-k)y^2=(9-k)(25-k).$$

因此當 $k=9$ 或 25 時，此軌跡爲變態抛物線 $y^2=0$ 或 $x^2=0$.

圖中軌跡 $k=-56, -24, 0, 7, 9, 11, 16, 21, 24, 25$. 若 k 漸增而接近於 9, 橢圓漸次扁平而終爲 X 軸. 若 k 漸減而接近於 9, 則雙曲線漸次扁平而終爲 X 軸. 因此抛物線類之軌跡 $y^2=0$ 爲橢圓與雙曲線間之極限



情形．若 k 漸增而接近於 25，雙曲線之二支漸近於 Y 軸而終以 Y 軸爲其極限位置．

例 5. 描寫並討論軌跡 $kx^2+2y^2-8x=0$.

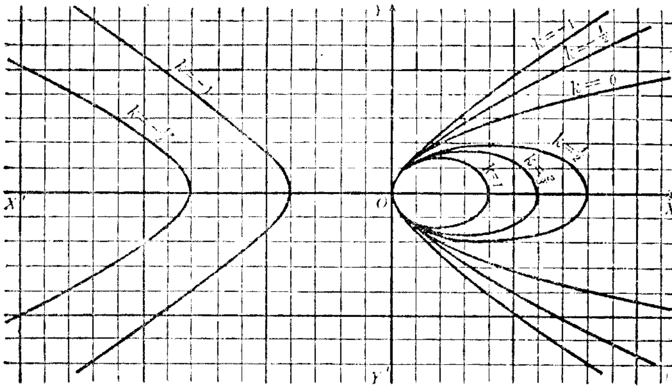
解 若 $k=0$，此軌跡爲拋物線．若 k 不爲零，此軌跡依 k 爲正或負而成橢圓或雙曲線．k 爲任何值時，此軌跡經過原點．

將軸平移，化簡（§ 70 規則），可知設原點在 $\left(\frac{2}{k}, 0\right)$，則方程式可化爲

$$\frac{x'^2}{\frac{4}{k^2}}+\frac{y'^2}{\frac{2}{k}}=1.$$

從此，軸可確定，軌跡亦可作出．

圖中軌跡 $k=1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 0, -1, -\frac{1}{2}$．若 k 爲正而接近於零，橢圓逐漸變大而接近於拋物線．若 k 爲負而接近於零，雙曲線之右支接近於拋物線而左支自原點遠離．此卽表明拋物線爲橢圓及雙曲線間之極限情形．



若 k 接近於 $+\infty$ 或 $-\infty$ 時，此軌跡將如何？

習 題

1. 分別描寫例題 1，2 及 3 圖中二次曲線之焦點及準線．在每一二次曲線系中變態二次曲線之焦點及準線在何處？用解析法證驗此結果．

2. 描寫下列二次曲線系之圖象，並示每一曲線系屬於一類．作諸二次曲線以示變態曲線為其極限情形．

(a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=k.$ (c) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=k.$

(b) $y^2=2kx.$ (d) $x^2=2ky-6.$

3. 用習題 2 中之曲線系照習題 1 演算之．

4. 設 k 為正值，描寫二次曲線系 $\dfrac{x^2}{k}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 之軌跡．若 $k=16$，其軌跡為何？再說明 k 漸增或漸減而接近於 16 時，焦點及準線將如何？圓之焦點及準線何在？

5. 描寫習題 4 中 k 為正值或負值時之二次曲線軌跡，並示 k 自正或自負而接近於零時，該曲線將如何變化？

6. 描寫下列二次曲線系之圖象，並證每一曲線系之曲線共焦．討論每種變態曲線，並證每種曲線系之二曲線經過平面上任一點．

(a) $\dfrac{x^2}{16-k}+\dfrac{y^2}{36-k}=1.$ (c) $\dfrac{x^2}{64-k}+\dfrac{y^2}{16-k}=1.$

(b) $y^2=2kx+k^2.$ (d) $x^2=2ky+k^2.$

7. 描寫並討論下列二次曲線系：

(a) $16(x-k)^2+9y^2=144$.　　(c) $(y-k)^2=4x$.

(b) $xy=k$.　　(d) $4(x-k)^2-9(y-k)^2=36$.

8. 描寫下列曲線系之圖象，並討論 k 接近於零及無窮大時之軌跡．且示每種情形之焦點及準線將如何?

(a) $\dfrac{(x-k)^2}{k^2}+\dfrac{y^2}{36}=1$.　　(b) $\dfrac{(x-k)^2}{k^2}-\dfrac{y^2}{36}=1$.

9. 下列諸曲線系中，使每一括弧為零，得二曲線．證每一曲線系之軌跡必過該二曲線之交點．當 k 為指定之值時，描寫並討論其軌跡．

(a) $(y^2-4x)+k(y^2+4x)=0$, $k=+1$, -1.

(b) $(x^2+y^2-16)+k(x^2-y^2-4)=0$, $k=+1$, -1, -4.

(c) $(x^2+y^2-16)+k(x^2-y^2-16)=0$, $k=+1$, -1.

(d) $(x^2+16y^2-64)+k(x^2-4y^2-36)=0$, $k=-1$, 4, $-\frac{16}{9}$.

(e) $x^2+4y+k(x^2-4y+16)=0$, $k=+1$, -1.

總　習　題

1. 作下列方程式之軌跡，焦點及準線．

(a) $9x^2+24xy+16y^2-50x+80y-275=0$.

(b) $56x^2-64xy+109y^2-176x+282y-896=0$.

(c) $5x^2-12xy+6x-36y-63=0$.

2. 若 $y^2=2px$ 經過一點 $(3,-1)$，求 p 之值．

3. 若 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 經過二點 $(3,-6)$ 及 $(4,8)$．求 a 及 b 之值．

4. P 點與 $(c,0)$ 及 $(-c,0)$ 二點距離之和為 $2a$．求 P 點軌跡之方程式．

5. P 點與 $(c,0)$ 及 $(-c,0)$ 二點距離之差為 $2a$．求 P 點軌跡之方程式．

6. 自直線 $x=-\dfrac{p}{2}$ 至一點之距離及此點與 $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ 之距離相等，求此點軌跡之方程式．

7. 證二次曲線或變態二次曲線可從所適合之五條件求之，並立一規則以求其方程式．提示．比較 §§ 44, 57 之規則．

8. 求二次曲線之方程式，已知適合下列諸條件．

(a) 經過 $(0,0)$, $(1,2)$, $(1,-2)$, $(4,4)$, $(4,-4)$.

(b) 經過 $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,4)$, $(0,4)$, $(-1,-2)$.

(c) 經過 $(3,7)$, $(4,6)$, $(5,3)$ 且 $A=B$ 及 $C=0$.

(d) 經過 $(1,2)$, $(3,4)$, $(4,2)$, $(2,1)$, $(4,2)$

(*e*) 經過 $(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $(6,\ 6)$, $(5,\ 6)$.

(*f*) 經過 $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(-3,\ 2)$, $(5,\ 2)$, 且二軸平行於坐標軸.

9. 一曲線經過五點而有三點或四點在一直線上，此曲線之性質若何？

以有心二次曲線之中心爲中心及 a 爲半徑所作之圓稱爲輔圓.

10. 橢圓與輔圓上各一點，若其橫坐標相同，則縱坐標之比爲 $b:a$.

11. 橢圓之面積爲 πab.

提示. 分長軸爲數等分，以此爲底，作橢圓及輔圓之內接矩形. 應用習題 10, 並將矩形個數無限增加.

12. 雙曲線之輔圓經過準線與漸近線之交點.

13. 證 $xy+Dx+Ey+F=0$ 之軌跡爲以漸近線平行於坐標軸之雙曲線或一組垂直線.

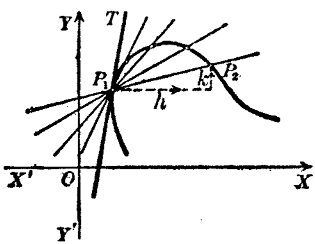
14. 討論軌跡 $x^2-y^2+Dx+Ey+F=0$ 之形式.

第　九　章

切　線　及　法　線

83. 切線之斜率. 設 P_1 為曲線 C 上之一點，P_2 為在 C 上而近於 P_1 之第二點．若 P_2 在 C 上移動而接近於 P_1 則割線 P_1P_2 之極限位置 P_1T 稱為切曲線 C 於 P_1 之**切線**.

P_1T 之斜率為 P_1P_2 斜率之極限，P_2 之坐標可寫為 (x_1+h, y_1+k)，其



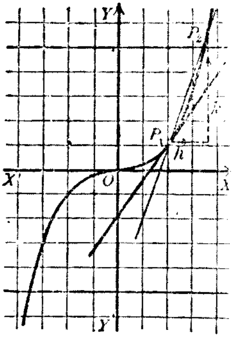
中 h 及 k 為正數或負數全視 P_1 及 P_2 之關係位置而定．經過 P_1 及 P_2 之割線斜率為 (§ 22 定理 V)

(1)
$$\frac{y_1-y_1-k}{x_1-x_1-h}=\frac{k}{h}.$$

若 P_2 接近於 P_1，h 及 k 均接近於零，因此 $\frac{k}{h}$ 接近於 $\frac{0}{0}$，此為不定式．$\frac{k}{h}$ 之極限值可用 P_1 及 P_2 在 C 上之條件 (§ 27, 系) 求之，如下例

例 1.　求曲線 C:$8y=x^3$ 上任一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線斜率.

解　設 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_1+h, y_1+k)$ 為 C 上之二點。則 (§27, 系)



(2)　　$$8\,y_1 = x_1^{\,3}$$

及　　$$8(y_1 + k) = (x_1 + h)^3,$$

或

(3)　　$$8\,y_1 + 8\,k = x_1^{\,3} + 3x_1^{\,2}h + 3x_1h^2 + h^3.$$

從 (3) 減 (2) 得

$$8\,k = 3\,x_1^{\,2}h + 3\,x_1h^2 + h^3.$$

分解因式　$8\,k = h(3x_1^{\,2} + 3\,x_1h + h^2)$;

因此　$$\frac{k}{h} = \frac{3\,x_1^{\,2} + 3\,x_1h + h^2}{8}.$$

若 P_2 接近於 P_1, h 及 k 接近於零，故

$$\lim\frac{k}{h} = \lim\frac{3x_1^{\,2} + 3\,x_1h + h^2}{8} = \frac{3x_1^{\,2}}{8}.$$

故在 P_1 之切線斜率爲 $m = \dfrac{3\,x_1^{\,2}}{8}$.

C 關於 O 點爲對稱，因 m 之値中，祇有 x_1 及 y_1 之偶次冪，故在對稱點上之切線互相平行．在原點上之切線穿過曲線．

此例所用方法甚普通，今得下之

規則． 決定曲線 C 上一點 P_1 之切線斜率．

第一步．　設 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_1 + h, y_1 + k)$ 爲 C 上之二點．以坐標代入 C 之方程式，相減．

第二步．　解第一步結果，求過 P_1 及 P_2 所作割線之斜率 $\dfrac{k}{h}$*.

第三步．　h 及 k 接近於零時，求第二步結果之極限，此極限卽爲所求斜率．

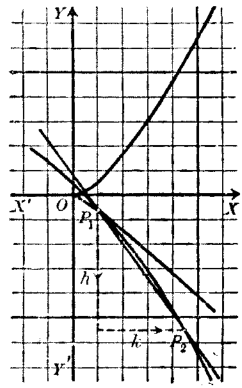
---

* 式中各項仍含有 h 及 k，依常理言之，不能謂爲解方程式．

例 2. **求半三次拋物線** $3y^2=x^3$ 上 $P_1(x_1,y_1)$ 之切線斜率.

解　第一步. 設 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_1+h,y_1+k)$ 爲曲線上二點.

則 (§ 27 系)



$$3{y_1}^2={x_1}^3 \tag{4}$$

及 $3{y_1}^2+6ky_1+3k^2={x_1}^3+3{x_1}^2h+3x_1h^2+h^3$.

相減　$6y_1k+3k^2=3{x_1}^2h+3x_1h^2+h^3$.

第二步. 分解因式

$$k(6y_1+3k)=h(3{x_1}^2+3x_1h+h^2).$$

因此　$$\frac{k}{h}=\frac{3{x_1}^2+3x_1h+h^2}{6y_1+3k}.$$

第三步. 若 h 及 k 接近於零,

$$\lim\frac{k}{h}=\lim\frac{3{x_1}^2+3x_1h+h^2}{6y_1+3k}=\frac{3{x_1}^2}{6y_1}=\frac{{x_1}^2}{2y_1}.$$

因此在 P_1 之切線斜率爲 $m=\frac{{x_1}^2}{2y_1}$.

在原點, $m=\frac{0}{0}$ 爲不定式. 求在原點上 m 之値, 吾人可應用規則二次, 命 $x_1=0$ 及 $y_1=0$, 或從 m 之値藉 (4) 消去 y_1 即可決定在原點上之切線斜率.

習　　題

1. 求下列諸曲線上指定各點之切線斜率.

(a) $y^2=8x$, $P_1(2,4)$.　答. 1.

(b) $x^2+y^2=25$, $P_1(3,-4)$.　答. $\frac{3}{4}$.

(c) $4x^2+y^2=16$, $P_1(0,4)$.　答. 0.

(d) $x^2-9y^2=81$, $P_1(15,-4)$.　答. $-\frac{5}{12}$.

2. 求下列諸曲線上一點 $P_1(x_1,y_1)$ 之切線斜率.

(a) $y^2=6x$. 答. $\frac{3}{y_1}$.

(b) $16y=x^4$. 答. $\frac{x_1^3}{4}$.

(c) $x^2+y^2=16$. 答. $-\frac{x_1}{y_1}$

(d) $x^2-y^2=4$. 答. $\frac{x_1}{y_1}$.

(e) $y^2=x^3+x^2$. 答 $\frac{3x_1^2+2x_1}{2y_1}$.

(f) $4x^2+y^2-16x-2y=0$. 答. $\frac{8-4x_1}{y_1-1}$.

(g) $xy=a^2$. 答. $-\frac{y_1}{x_1}$.

(h) $xy+y^2=8$. 答. $-\frac{y_1}{x_1+2y_1}$.

(i) $x^2-y^2-8x+4y=0$. 答. $\frac{4-x_1}{2-y_1}$.

(j) $x^2+y^2+6x-8y=0$. 答. $\frac{x_1+3}{4-y_1}$.

84. 切線及法線之方程式.

規則. 求曲線 C 上一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線方程式.

第一步. 求 C 上一點 P_1 之切線斜率 (§ 83 規則).

第二步. 以 x_1, y_1 及 m 代入直線方程式之點斜式 [§ 45 (V)].

第三步. 以 P_1 在 C 上之條件簡化方程式 (§ 27 系).

例 1. 求切 $C:8y=x^3$ 於 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線方程式.

解 第一步. 從 § 83 例 1, 斜率爲 $m=\frac{3x_1^2}{8}$.

第二步. 因此切線方程式爲

$$y-y_1=\frac{3x_1^2}{8}(x-x_1)$$

或

$$3x_1^2x-8y-3x_1^3+8y_1=0. \tag{1}$$

第三步. 因 P_1 在 C 上, $8y_1=x_1^3$.

代入 (1), 得

(2) $$3x_1^2x-8y-2x_1^3=0.$$

在曲線 C 上一點 P_1 之**法線**為過 P_1 而與 C 之切線垂直於 P_1 之直線. 其方程式可從切線方程式以 § 51 規則及 § 53 定理 XII 求之.

例 2. 求例 1 曲線上一點 P_1 之法線方程式.

解 一直線垂直於 (2) 之方程式為 (§ 53 定理 XII)

(3) $$8x+3x_1^2y+k=0.$$

若 P_1 在此直線上, 則 (§ 27, 系)

$$8x_1+3x_1^2y_1+k=0.$$

因此 $$k=-8x_1-3x_1^2y_1.$$

代入 (3), 所得法線方程式為

$$8x+3x_1^2y-8x_1-3x_1^2y_1=0.$$

習　題

1. 在 § 83 習題 2 中 (a) 至 (e) 之曲線上, 求在一點 $P(x_1, y_1)$ 之切線及法線方程式.

答. (a) $y_1y=3(x+x_1)$, $y_1x+3y=x_1y_1+3y_1$.

(b) $x_1^3x-4y=12y_1$, $4x+x_1^3y=4x_1+x_1^3y_1$.

(c) $x_1x+y_1y=16$, $y_1x-x_1y=0$.

$(d$ $x_1x-y_1y=4$, $y_1x+x_1y=2x_1y_1$.

(e) $(3x_1^2+2x_1)x-2y_1y-x_1^3=0$, $2y_1x+(3x_1^2+2x_1)y=3x_1^2y_1+4x_1y_1$.

2. 在 § 83 習題 2 中 (f) 至 (j) 之曲線上, 先求一點之坐標, 再求該點上之切線及法線方程式.

3. 求下列諸曲線在指定各點上之切線及法線方程式.

(a) $y^2-8x+4y=0$ $(0, 0)$. 答. $2x-y=0$, $x+2y=0$.

(b) $xy=4$, $(2, 2)$. 答. $x+y=4$, $x-y=0$.

$c)$ $x^2-4y^2=25$, $P_1(x_1, y_1)$. 答. $x_1x-4y_1y=25$, $4y_1x+x_1y=5x_1y_1$.

(d) $x^2+2xy=4$, $P_1(x_1, y_1)$.

答. $(x_1+y_1)x+x_1y=4$, $x_1x-(x_1+y_1)y=x_1^2-x_1y_1-y_1^2$.

(e) $y^2=2px$, $P_1(x_1, y_1)$. 答. $y_1y=p(x+x_1)$, $y_1x+py=x_1y_1+py_1$.

(*f*) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $P_1(x_1,y_1)$. 答. $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$, $\frac{y_1x}{b^2}-\frac{x_1y}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}x_1y_1$.

(*g*) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, $P_1(x_1, y_1)$.

答. $b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$, $a^2y_1x+b^2x_1y=(a^2+b^2)x_1y_1$.

(*h*) $x^2-y^2+x^3=0$, $(0, 0)$. 答. $y=\pm x$, $x=\mp y$.

85. 二次曲線之切線及法線方程式.

定理 I. 在圓

$$C: x^2+y^2=r^2$$

上一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線方程式為

$$\text{(I)} \qquad \boldsymbol{x_1x+y_1y=r^2}.$$

證 設 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_1+h, y_1+k)$ 為 C 圓上之二點, 則 (§ 27 系)

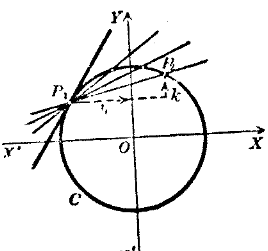
$$\text{(1)} \qquad x_1^2+y_1^2=r^2$$

及

$$(x_1+h)^2+(y_1+k)^2=r^2,$$

或

$$\text{(2)} \qquad x_1^2+2x_1h+h^2+y_1^2+2y_1k+k^2=r^2.$$



從 (2) 減 (1), 得

$$2x_1h+h^2+2y_1k+k^2=0.$$

移項分解因式,

$$k(2y_1+k)=-h(2x_1+h),$$

因此 $$\frac{k}{h}=-\frac{2x_1+h}{2y_1+k}$$

為經過 P_1 及 P_2 所作割線之斜率.

設 P_2 接近於 P_1, h 及 k 接近於 0, 則在 P_1 之切線斜率 m 為

$$m=\lim\left(-\frac{2x_1+h}{2y_1+k}\right)=-\frac{x_1}{y_1}.$$

在 P_1 之切線方程式爲 (§ 45 定理 V).

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$

或 $$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2.$$

但從 (1), $$x_1^2+y_1^2=r^2,$$

故所求方程式爲 $$x_1x+y_1y=r^2.$$ *Q. E. D.*

定理 II. 切軌跡

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

於一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線方程式爲

(II) $$\boldsymbol{Ax_1x+B\frac{y_1x+x_1y}{2}+Cy_1y+D\frac{x+x_1}{2}+E\frac{y+y_1}{2}+F=0.}$$

證 設 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_1+h, y_1+k)$ 爲二次曲線上二點. 則 (§ 27 系)

(3) $$Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0 \text{ 及}$$

$$A(x_1+h)^2+B(x_1+h)(y_1+k)+C(y_1+k)^2+D(x_1+h)+E(y_1+k)+F=0.$$

去括號, 得

(4) $$Ax_1^2+2Ax_1h+Ah^2+Bx_1y_1+Bx_1k+By_1h+Bhk$$
$$+Cy_1^2+2Cy_1k+Ck^2+Dx_1+Dh+Ey_1+Ek+F=0.$$

從 (4) 減 (3), 得

(5) $$2Ax_1h+Ah^2+Bx_1k+By_1h+Bhk+2Cy_1k+Ck^2+Dh+Ek=0.$$

移含有 h 之各項再分解因式, (5) 變爲

$$k(Bx_1+2Cy_1+Ck+E)=-h(2Ax_1+Ah+By_1+Bk+D),$$

因此 $$\frac{k}{h}=-\frac{2Ax_1+By_1+D+Ah+Bk}{Bx_1+2Cy_1+E+Ck}.$$

此爲割線 P_1P_2 [§ 83 (1)] 之斜率.

設 P_2 接近於 P_1, h 及 k 均接近於 0, 則切線之斜率爲

$$m = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E},$$

而切線之方程式爲 (§ 45 定理 V)

$$y - y_1 = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E}(x - x_1).$$

化此方程式爲所求形式,須去分母及移項,得

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y$$
$$- (2Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1) = 0.$$

但從 (3), 此方程式之後一括弧等於

$$-(Dx_1 + Ey_1 + 2F).$$

以此代入,則切線方程式爲

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y + (Dx_1 + Ey_1 + 2F) = 0.$$

去括弧,集合係數 A, B, C, D, E 及 F 之各項,再以 (2) 除之,卽得(II).

Q. E. D.

定理 II 可使吾人寫出任何二次方程式軌跡之切線方程式.下列規則,可使吾人便於記憶.

規則. 寫二次方程式軌跡上一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線方程式.

第一步. 在所設方程式中,以 x_1x 及 y_1y 代 x^2 及 y^2, $\frac{y_1x + x_1y}{2}$ 代 xy, $\frac{x + x_1}{2}$ 及 $\frac{y + y_1}{2}$ 代 x 及 y.

第二步. 若已知 x_1 及 y_1 之數値,以 x_1 及 y_1 代入第一步結果.卽得所求方程式。

同理,從此規則可得

定理 III. 在一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線方程式,若切於

橢圓　$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$　則爲　$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$;

雙曲線　$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$　則爲　$b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$;

拋物線　$y^2=2px$　則爲　$y_1y=p(x+x_1)$.

用 § 84 方法得

定理 IV. 在一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之法線方程式, 於

橢圓　$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$　爲　$a^2y_1x-b^2x_1y=(a^2-b^2)x_1y_1$;

雙曲線　$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$　爲　$a^2y_1x+b^2x_1y=(a^2+b^2)x_1y_1$;

拋物線　$y^2=2px$　爲　$y_1x+py=x_1y_1+py_1$.

習　　題

1. 求下列二次曲線在指定各點上之切線及法線方程式。

(a) $3x^2-10y^2=17$, $(3, 1)$.

(b) $y^2=4x$, $(9, -6)$.

(c) $x^2+y^2=25$, $(-3, -4)$.

(d) $2x^2-y^2=14$, $(3, -2)$.

(e) $x^2+5y^2=14$, $(3, 1)$.

(f) $x^2=6y$, $(-6, 6)$.

(g) $x^2-xy+2x-7=0$, $(3, 2)$.

(h) $xy-y^2+6x+8y-6=0$, $(-1, 4)$.

在切線及法線上自切點至 X 軸之有向距離各稱爲**切線長度**及**法線長度**. 切線及法線在 X 軸上之射影稱爲**次切距**及**次法距**.

2. 求習題 1 中 (a), (b), (d) 及 (e) 之次切距及次法距.

答. (a) $-\frac{10}{9}, \frac{9}{10}$; (b) $-18, 2$; (d) $-\frac{2}{3}, 6$; (e) $\frac{5}{3}, -\frac{3}{5}$.

3. 求習題 1 中 (a), (b), (d) 及 (e) 之切線及法線長度.

答. (a) $\frac{1}{9}\sqrt{181}$, $\frac{1}{10}\sqrt{181}$; (b) $6\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$;

(d) $\frac{2}{3}\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$; (e) $\frac{1}{3}\sqrt{34}$, $\frac{1}{5}\sqrt{34}$.

4. 求下列各二次曲線之次切距及次法距。

(a) 橢圓, (b) 雙曲線, (c) 拋物線。

答. (a) $\frac{a^2-x_1{}^2}{x_1}, -\frac{b^2}{a^2}x_1$; (b) $\frac{a^2-x_1{}^2}{x_1}, \frac{b^2}{a^2}x_1$; (c) $-2x_1, p$.

5. 示明應用次切距或次法距如何可作一拋物線之切線.

6. 拋物線上一點 P_1 及在 P_1 之切線法線與軸之交點均與焦點等距離.

7. 示明應用習題 6 如何可作一拋物線之切線

8. 圓之法線經過中心.

9. 若橢圓之法線經過中心,此橢圓卽爲一圓.

10. 自拋物線之切線至焦點之距離等於切點上法線長度之半.

11. 求下列各二次曲線頂點上之切線方程式 (a) 拋物線; (b) 橢圓; (c) 雙曲線.

12. 求等軸雙曲線上一點 P_1 之次法距. 答. x_1.

13. 在等軸雙曲線上一點 P_1 其法線長度等於自原點至 P_1 之距離.

86. 自曲線外之一點至曲線上之切線.

例 1. 求拋物線 $y^2=4x$ 之切線方程式,此切線經過 $P_2(-3,-2)$.

解 設經過 P_2 之直線而切於拋物線之切點爲 $P_1(x_1, y_1)$. 則從定理 III 切線方程式爲

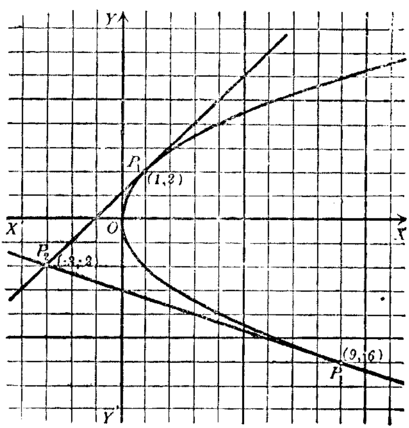
(1) $$y_1y=2x+2x_1.$$

因 P_2 在此切線上 (§ 27 系),

(2) $$-2y_1=-6+2x_1;$$

又因 P_1 在拋物線上,

(3) $$y_1^2=4x_1.$$



切點 P_1 之坐標須適合於(2)及(3), 解之,得 P_1 爲(1, 2)或(9, -6).

若 (1, 2) 爲切點,則從 (1), 切線方程式爲

$$2y=2x+2,$$

或 $$x-y+1=0.$$

若 (9 -6) 爲切點,則切線方程式爲

$$-6y=2x+18,$$

或
$$x-3y+9=0.$$

此法可述之於下之

規則. 求經過曲線 C 外一點 $P_2(x_2, y_2)$ 而切於 C 之切線方程式.

第一步. 設 $P_1(x_1, y_1)$ 為一切線之切點,求切 C 於 P_1 之切線方程式.

第二步. 寫 (x_2, y_2) 適合於第一步結果及 (x_1, y_1) 適合於 C 之方程式之條件,解此二方程式得 x_1 及 y_1.

第三步. 以第二步所得之值代入第一步結果卽得所求方程式.

習　　題

1. 求下列諸曲線在指定各點之切線方程式,並作其圖象.

(a) $x^2+y^2=25$, $(7, -1)$. 　　答. $3x-4y=25$, $4x+3y=25$.

(b) $y^2=4x$, $(-1, 0)$. 　　答. $y=x+1$, $y+x+1=0$.

(c) $16x^2+25y^2=400$, $(3, -4)$. 　　答. $y+4=0$, $3x-2y=17$.

(d) $8y=x^3$, $(2, 0)$. 　　答. $y=0$, $27x-8y-54=0$.

(e) $x^2+16y^2-100=0$, $(1, 2)$. 　　答. 無.

(f) $2xy+y^2=8$, $(-8, 8)$. 　　答. $2x+3y-8=0$, $4x+3y+8=0$.

(g) $y^2+4x-6y=0$, $(-\frac{3}{2}, -1)$. 　　答. $2x-3y=0$, $2x-y+2=0$.

(h) $x^2+4y=0$, $(0, -6)$. 　　答. 無.

(i) $x^2-3y^2+2x+19=0$, $(-1, 2)$. 　　答. $x+3y-5=0$, $x-3y+7=0$.

(j) $y^2=x^3$, $(\frac{4}{3}, 0)$. 　　答. $y=0$, $3x-y-4=0$, $3x+y-4=0$.

2. 在習題 1 中 (a), (b), (c), (f), (g) 及 (i), 求切點聯線之方程式.

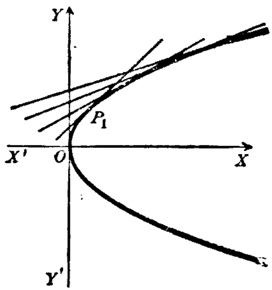
答. (a) $7x-y=25$; (b) $x=1$; (c) $12x-25y=100$;
(f) $x=1$; (g) $x-2y=0$; ( ) $y=6$.

87. 二次曲線上切線及法線之性質.

定理 V. 若一點在拋物線 $y^2=2px$ 上移動而至無窮遠, 則該點上之切線與 X 軸漸趨平行.

證 在 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線方程式為 (§ 85 定理 III)

$$y_1y=px+px_1.$$



其斜率為 (§ 42 系 I)

$$m=\frac{p}{y_1}.$$

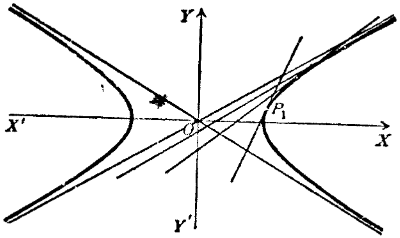
若 P_1 漸至無窮遠，y_1 變為無窮大，因此 m 接近於零，即此切線與 X 軸漸趨平行. *Q. E. D.*

定理 VI. 若一點在雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上移動而至無窮遠，則該點上之切線與漸近線漸趨重合.

證 在 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線方程式為 (§ 85 定理 III)

(1) $$b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2.$$

其斜率為 (§ 42 系 I) $$m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$



若 P_1 漸至無窮遠，則 x_1 及 y_1 變為無窮大，而 m 為不定式 $\frac{\infty}{\infty}$.

但因 P_1 在雙曲線上，

$$b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2.$$

全式除以 $a^2y_1^2$，移項，開平方，

$$\frac{b\,x_1}{a\,y_1}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{y_1^2}+1}.$$

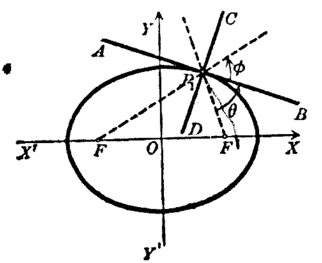
乘以 $\frac{b}{a}$， $$m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2}{y_1^2}+1}.$$

從 m 之形式知 y_1 變爲無窮大時 m 接近於 $\pm\frac{b}{a}$, 卽接近於漸近線之斜率 [§ 76 (5)] 爲極限. (1) 之截距爲 $\frac{a^2}{x_1}$ 及 $-\frac{b^2}{y_1}$. 因其極限爲零,故切線之極限位置必經過原點, 因此在 P_1 之切線與漸近線漸趨重合.　*Q. E. D.*

此二定理示明拋物線與雙曲線之右支有重要區別.

定理 VII. 橢圓之切線及法線各平分切點上二焦半徑所成之外角及內角.*

證　聯橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上一點 $P_1(x_1, y_1)$ 及焦點 $F'(c, 0)$ (§ 75 定理 V) 之直線方程式爲 (§ 47 定理 VII)



$$y_1x+(c-x_1)y-cy_1=0,$$

又 P_1F 之方程式爲

$$y_1x-(c+x_1)y+cy_1=0.$$

切線 AB 之方程式爲 (§ 85 定理 III)

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2.$$

吾人將證 AB 與 P_1F' 之交角 θ 等於 P_1F 與 AB 之交角 ϕ.

從 § 50 定理 X

$$\tan\theta=\frac{a^2y_1{}^2-b^2cx_1+b^2x_1{}^2}{b^2x_1y_1+a^2cy_1-a^2x_1y_1}=\frac{(a^2y_1{}^2+b^2x_1{}^2)-b^2cx_1}{a^2cy_1-(a^2-b^2)x_1y_1}.$$

但 P_1 在橢圓上,

$$a^2y_1{}^2+b^2x_1{}^2=a^2b^2,$$

又 (§ 75 定理 V)　$$a^2-b^2=c^2.$$

因此　$$\tan\theta=\frac{a^2b^2-b^2cx_1}{a^2cy_1-c^2x_1y_1}=\frac{b^2(a^2-cx_1)}{cy_1(a^2-cx_1)}=\frac{b^2}{cy_1}.$$

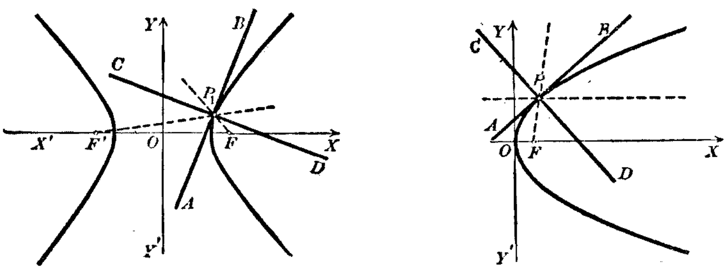
* 此定理應用於 "Whispering galleries".

同樣 $$\tan\phi=\frac{-b^2cx_1-b^2x_1^2-a^2y_1^2}{b^2x_1y_1-a^2cy_1-a^2x_1y_1}=\frac{(b^2x_1^2+a^2y_1^2)+b^2cx_1}{a^2cy_1+(a^2-b^2)x_1y_1}$$
$$=\frac{a^2b^2+b^2cx_1}{a^2cy_1+c^2x_1y_1}=\frac{b^2}{cy_1}.$$

故 $\tan\theta=\tan\phi$；因 θ 及 ϕ 均小於 π，$\theta=\phi$. 卽 AB 平分 FP_1 及 $F'P_1$ 之外角而 CD 平分內角， *Q. E. D.*

同理可證下之定理.

定理 VIII. 雙曲線之切線及法線各平分切點上二焦半徑所成之內角及外角.



定理 IX. 拋物線之切線及法線各平分切點上之焦半徑與平行於坐標軸之直線所成之內角及外角.*

由於此類定理，可藉直尺及圓規作一二次曲線之切線及法線.

作法 在橢圓或雙曲線上任一點作切線及法線，祇須聯該點與二焦點之二直線，再作其交角之平分線. 在拋物線上任一點作切線及法線，則自該點聯焦點及作平行於坐標軸之直線，再作此二線交角之平分線.

一曲線與第二曲線之交角，卽爲自二曲線交點上所作第一曲線之切線與第二曲線之切線所成之交角.

* 此定理應用於光線反射.

定理 X.　共焦橢圓及雙曲線相交成直角.

證　設

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \text{及}\ \frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1$$

為一橢圓及一雙曲線而有相同焦點. 則

$$(3)\qquad a^2-b^2=a'^2+b'^2.$$

因若焦點為 $(\pm c, o)$, 則在橢圓, $c^2=a^2-b^2$. 在雙曲線 $c^2=a'^2+b'^2$ (§ 75 定理 V 及 VI)

切 (2) 於 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線方程式為 (§ 85 規則)

$$(4)\qquad \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \ \text{及}\ \frac{x_1x}{a'^2}-\frac{y_1y}{b'^2}=1.$$

今須證 (4) 之直線互相垂直, 即 (§ 42 系 III)

$$(5)\qquad \frac{x_1^2}{a^2a'^2}-\frac{y_1^2}{b^2b'^2}=0.$$

因 P_1 在 (2) 之曲線上, 故得

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \ \text{及}\ \frac{x_1^2}{a'^2}-\frac{y_1^2}{b_1^2}=1.$$

將此二方程式相減, 得

$$(6)\qquad \frac{(a^2-a'^2)x_1^2}{a^2a'^2}-\frac{(b^2+b'^2)y_1^2}{b^2b'^2}=0.$$

但從 (3)　$$a^2-a'^2=b^2+b'^2.$$

因此 (6) 可化成 (5) 而 (4) 之二直線互相垂直.　*Q. E. D.*

同理可證

定理 XI.　二拋物線有相同焦點及軸, 但以相反方向伸張, 此二拋物線相交成直角.

因此在 § 82 (例 4 及習題 6) 中, 共焦曲線系之任二曲線相交成直角.

習 題

1. 橢圓及輔圓（§ 82 總習題 9）之切線，若切點之橫坐標相同，必交於 X 軸。

2. 雙曲線上切線之切點為切線與漸近線交點之中點。

3. 自拋物線之焦點至切線上所作垂線之垂足在該拋物線頂點之切線上。

4. 自有心二次曲線之焦點至切線上所作垂線之垂足在輔圓上（§ 82 總習題 9）。

5. 自拋物線之準線上一點至拋物線上之二切線互相垂直。

6. 過拋物線之焦點作一弦，自此弦之二端作切線，此二切線互相垂直。

7. 自拋物線之焦點至切線所作之垂線交準線於一點，此點之縱坐標與切點之縱坐標相同。

8. 如何應用習題 7 以作拋物線之切線。

9. 自有心二次曲線之焦點至一切線之垂線交中心與切點之聯線於相當準線上。

10. 拋物線之一切線與第二切線之交角等於第一切點上焦半徑與第二切點上焦半徑交角之半。

11. 自有心二次曲線之切線至二焦點距離之積為一常數。

12. 在任何二次曲線中，自正焦弦（經過焦點而垂直於主軸之弦）之二端作二切線，此二切線經過準線與主軸之交點。

13. 自拋物線正焦弦之二端作二切線，證此二切線互相垂直。

14. 以習題 13 之二切線為軸，其拋物線之方程式為

$$x^2-2xy+y^2-2\sqrt{2}\,p(x+y)+2p^2=0$$

或（與 § 9 比較）

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\sqrt{p\sqrt{2}}.$$

15 雙曲線之切線與漸近線成一三角形．此三角形之面積為一常數。

16. 自雙曲線上一點，作平行於漸近線之二直線，此二直線與二漸近線所成平行四邊形之面積為一常數．

88. 切曲線於原點之切線． 若一曲線經過原點，在原點上之切線方程式甚易求得．

例 1. 求切曲線 $C: x^3-4x-2y=0$ 於原點之切線方程式．

解 先求在原點 $P_1(0, 0)$ 之切線斜率．

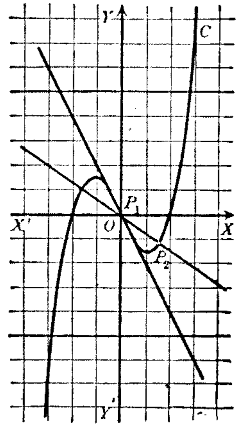
設 $P_2(0+h, 0+k)$ 為 C 上第二點．則由 P_1 及 P_2 在 C 上之條件得—

方程式，

$$h^3-4h-2k=0,$$

因此割線 P_1P_2 之斜率爲 [§ 83 (1)]

$$m=\frac{k}{h}=-2+\frac{1}{2}h^2.$$



若 P_2 接近於 P_1，h 及 k 均接近於零，切線之斜率爲 m 之極限卽 -2.

因此切線方程式爲 (§ 29 定理 I)

$$y=-2x,$$

或
$$2x+y=0.$$

此須注意者卽命方程式 C 之一次項爲零時，可得所求切線之方程式.

若一曲線經過原點，其方程式之常數項必爲零 (§ 35 定理 VI)，故方程式之形式爲

$$Ax+By+Cx^2+Dxy+Ey^2+Fx^3+\cdots\cdots=0,$$

式中小點指 x 及 y 之三次或高於三次之各項.

定理 XII. 若曲線 C 之方程式照 x 及 y 之昇冪序排列爲

$$Ax+By+Cx^2+Dxy+Ey^2+Fx^3+\cdots\cdots=0,$$

則切 C 於原點之切線方程式爲

$$Ax+By=0.$$

卽切 C 於原點之切線方程式，可使 x 及 y 之一次項爲零時得之.

證　$P_1(0,0)$ 在 C 上. 設 $P_2(h,k)$ 爲 C 上第二點，則 (§ 27 系)

$$Ah+Bk+Ch^2+Dhk+Ek^2+Fh^3+\cdots\cdots=0.$$

移含有 h 之各項，分解因式

$$k(B+Ek+\cdots\cdots)=-h(A+Ch+Dk+Fh^2+\cdots\cdots),$$

$$\therefore \quad \frac{k}{h} = -\frac{A + Ch + Dk + Fh^2 + \cdots\cdots}{B + Ek + \cdots\cdots}.$$

若 P_2 接近於 P_1，則切線之斜率，即 $\frac{k}{h}$ 之極限為 $-\frac{A}{B}$.

因此切線之方程式為 (§ 45 定理 V)

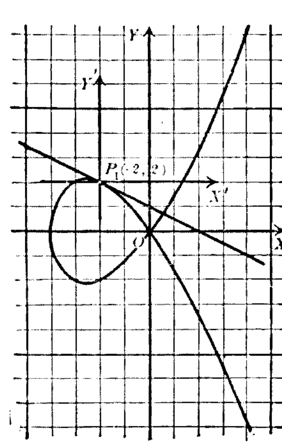
$$y = -\frac{A}{B}x,$$

或
$$Ax + By = 0. \qquad Q.\ E.\ D.$$

若 $A=0$ 及 $B=0$，則命方程式之最低次項爲零時所得之方程式爲切 C 於原點之二個或二個以上之切線．例如 C 之方程式爲 $x^2 - y^2 + x^3 = 0$，則 $x^2 - y^2 = 0$ 爲切 C 於原點之二個切線 [§ 84 習題 3 (h)].

89. 求切線方程式之第二法． 切曲線 C 於 P_1 之切線方程式可從下法求之．將軸移動，使 P_1 爲新原點 (§ 66 定理 I)，得 C 之新方程式．再從定理 XII 求切線之新方程式．以軸移回原處，切線之新方程式即可變爲原坐標之方程式．

例 1. 求切曲線 C: $4x^2 - 2y^2 + x^3 = 0$ 於 C 上一點 $P_1(-2, 2)$ 之切線方程式．



解 命 (§ 66 定理 I)

$$x = x' - 2, \quad y = y' + 2.$$

方程式 C 變爲

$$4(x' - 2)^2 + 2(y' + 2)^2 + (x' - 2)^3 = 0.$$

因祇用一次項，不必去括弧，可從括弧取出之，故切線方程式爲

$$4(-4x') - 2 \cdot 4y' + 12x' = 0,$$

或
$$x' + 2y' = 0.$$

變回原軸，命

$$x' = x + 2,\ \ y' = y - 2.$$

得
$$x + 2y - 2 = 0.$$

此卽所求切 C 於 P_1 之切線方程式.

習　　題

1. 求切下列諸曲線於原點之切線方程式

(a) $x^2+2xy+y^2-6x+8y=0$.

(b) $xy-y^2+x-3y=0$.

(c) $x^2+4xy-3x+4y=0$.

(d) $y=x^3-2x^2+x$.

(e) $x^3+y^2+x-y=0$.

(f) $x^3+x^2-3xy-4y^2=0$.

2. 用 § 89 方法,求切下列諸曲線於指定各點上之切線方程式.

(a) $9x^2-y^2+2x-4=0$, $(2,\ 6)$. 答. $19x-6y-2=0$.

(b) $x^2+4xy+6y-7=0$, $(-1,\ 3)$. 答. $5x+y+2=0$.

(c) $xy+6x-4y-6=0$, $(2,\ 3)$. 答. $9x-2y-12=0$.

(d) $y^2+\ \ x+2y+8=0$, $(-4,\ 2)$. 答. $2x+3y+2=0$.

(e) $y^2=x^3+8$, $(2,\ 4)$ 答. $3x-2y+2=0$.

(f) $y=x^4-3x^3-5x^2+4x+4$, $(0,\ 4)$. 答. $y=4x+4$.

3. 求軌跡 $xy+4y-2x=0$ 與 $x^2+4xy+x+3y=0$ 在原點上之交角. 答. $\frac{\pi}{4}$

4 求直線 $2x-3y-9=0$ 與軌跡 $xy+6x-4y-19=0$ 在一點 $(3,-1)$ 上之交角.

答. $\frac{3\pi}{4}$.

總　習　題

1. 求下列諸曲線在指定各點上之切線及法線方程式.

(a) $x^2+4xy-4x-10y+7=0$, $(3,\ -2)$.

(b) $xy-4x+3y-4=0$, $(-1, 4)$.

(c) $xy+y^2+2x+2y=0$, $(-3,\ 3)$.

(d) $y^2+4x+6y-27=0$, $(5,\ -7)$.

(e) $x^2+3xy+y^2-10y-1=0$, $(2,\ 3)$.

(f) $x^2-8x+3y-14=0$, $(1,\ 7)$.

2. 求平行於直線 $4x-9y-36=0$ 而切於橢圓 $x^2+9y^2-4x+9y=0$ 之切線方程式.

3. 在拋物線 $y^2=2px$ 上一點所作切線之長等於切點橫坐標之四倍,此點之位置若何?

4. 作拋物線之正焦弦.此弦二端所作切線之長若何? 以此長表示 § 87 習題 14 之拋物線方程式.

5. 在拋物線 $y^2=2px$ 上何點,其法線之長等於 (a) 次切距之二倍? (b) 次切距與次法距之差?

6. 經過橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上一點及與此點橫坐標相同之輔圓上一點各作一法線,問其次法距之比若何?

7. 在雙曲線上何點,其次切距等於次法距?

8. 等軸雙曲線上一點之縱坐標,及自該縱坐標之垂足至輔圓上所作切線之長等距.

9. 拋物線之切線交準線及正焦弦之延線於二點,此二點與焦點等距.

10. 有心二次曲線之半共軛軸,爲自中心至切線之距離與切點上法線長度之比例中項.

11. 求橢圓上之點,在此點上之切線長度與法線長度相等.

12. 等軸雙曲線上任一點爲經過該點所作法線在二軸間之中點.

13. 經過橢圓短軸上一已知點及二焦點作一圓,聯此已知點與圓及橢圓之交點.求證此聯線爲橢圓之法線.

14. 自一所設點至 (a) 橢圓,(b) 雙曲線,(c) 拋物線可作若干法線?

第十章

直線與二次曲線之關係．二次式理論之應用

90. 一直線與一二次曲線之關係位置． 若已知一直線及一二次曲線，則

(a) 直線為二次曲線之割線，

(b) 直線為二次曲線之切線，或

(c) 直線與二次曲線不相遇．

直線及二次曲線之方程式各為一次及二次，解聯立方程式（§37 規則），即得交點之坐標．其解法祇須消去 y* 而整列之，得式

(1) $$Ax^2+Bx+C=0.$$

命 x_1 及 x_2 為二根，判別式 B^2-4AC 為 $\triangle$．上列三種關係，可以解析法述之：

(a) 若 $\triangle$ 為正，此直線為割線．

因 x_1 及 x_2 為不相等之二實數（§ 3 定理 II），此二實數即為二交點之橫坐標，故不等．

(b) 若 $\triangle$ 為零，此直線為切線．

因 $x_1=x_2$ 故二交點重合．

(c) 若 $\triangle$ 為負，此直線與二次曲線不相遇．

因 x_1 及 x_2 為虛數，故無交點（§ 37）．

---

* 若一方程式無 y 則可解 x．但吾人目的，不需全解．

若 $A=0$, (1) 之一根爲無窮大 (§ 8 定理 IV), 因此一交點在"無窮遠".

若 $A=0$ 及 $B=0$, (1) 之二根均爲無窮大, 故此直線"切於無窮遠".

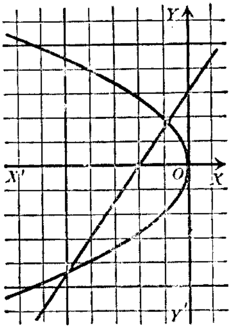
若 $A=0$, $B=0$ 及 $C=0$, (1) 可爲 x 之任何值所適合,故方程式有無限個根.即直線上任一點均在二次曲線上,亦即此曲線爲變態曲線,其圖象含有一組直線,而所設直線爲其中之一.

解聯立方程式時, 若消去 x 或較 y 爲簡易, 則(1)爲 y 之二次式. 其討論與上同.

若一方程式不含 y, 則須消去 x, 反之亦然.

例 1. 決定直線 $3x-2y+6=0$ 及拋物線 $y^2+4x=0$ 之關係位置.

解 消去 x 較易,從直線方程式求 x, 得



$$x=\frac{2y-6}{3}.$$

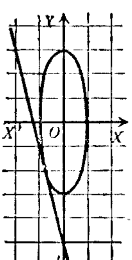
代入 $y^2+4x=0$, 得

$$3y^2+8y-24=0.$$

此二次式之判別式爲

$$\triangle=8^2-4\cdot3(-24)=352.$$

因 $\triangle$ 爲正, 此直線爲割線.



例 2. 決定直線 $4x+y+5=0$ 及橢圓 $9x^2+y^2=9$ 之關係位置.

解 消去 y 較易, 從第一方程式得

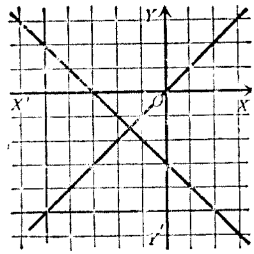
$$y=-(4x+5).$$

代入第二式並整列之,得

$$25x^2+40x+16=0.$$

判別式爲 $\triangle=40^2-4\cdot25\cdot16=0$. 故此直線爲切線.

例 3. 決定軌跡 $x^2-y^2+3x-3y=0$ 及 $x-y=0$ 之關係位置.



解 消去 y，得

$$x^2 - x^2 + 3x - 3x = 0,$$

或 $$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0.$$

因不論 x 爲任何値，此方程式恆能正確，故直線上任何點均在二次曲線上．二次曲線之方程式可寫爲 $(x-y)(x+y+3)=0$．此方程式之軌跡爲（§ 32 定理）變態曲線即一對直線

$$x - y = 0, \quad x + y + 3 = 0.$$

其一即爲所設直線．

習　　題

1. 決定下列諸方程式所表諸軌跡之關係位置，並描其軌跡．

(a) $x+y+1=0,\ x^2=4y$. 答． 切線．

(b) $x-2y+20=0,\ x^2+y^2=16$. 答． 不相交．

(c) $y^2-4x=0,\ 2x+3y-8=0$. 答． 割線．

(d) $x^2+y^2-x-2y=0,\ x+2y=5$. 答． 切線．

(e) $2xy-3x-y=0,\ y+3x-6=0$. 答． 切線．

(f) $x^2+y^2-6x-8y=0,\ x-2y=6$. 答． 割線．

(g) $4x^2+y^2-16x=0,\ x+y-8=0$. 答． 不相交．

(h) $x^2+y^2-8x-6=0,\ x+8=0$. 答． 不相交．

(i) $8x^2-6y^2+16x-32=0,\ 2x-3y=0$. 答． 割線．

(j) $x^2+xy+2x+y=0,\ 2x+y+4=0$. 答． 切線．

(k) $x^2+2xy+y^2+4x-4y=0,\ x+y=1$. 答． 割線，一交點在無窮遠．

(l) $4x^2-y^2+4x+1=0,\ 2x-y+1=0$. 答． 直線爲二次曲線之一部．

(m) $x^2+4xy+y^2+4x-6y=0,\ 2x-3y=0$. 答． 切線．

(n) $x^2-4y^2+8y-20=0,\ x-2y+2=0$. 答． 切於無窮遠之切線．

(o) $x^2-6xy+9y^2+x-3y-2=0,\ x-3y=1$. 答． 直線爲二次曲線之一部．

(p) $6x^2-5xy-6y^2=18,\ 2x-3y=0$. 答． 切於無窮遠之切線．

2. 在習題 1 中 (c)，(f) 及 (i) 之二次曲線，若以所設直線爲其弦，求諸弦中點之坐標．

答．(c) $\left(\frac{17}{2}, -3\right)$; (f) $\left(\frac{26}{5}, -\frac{2}{5}\right)$; (i) $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$.

3. 決定拋物線 $y=Ax^2+Bx+C$ 及直線 $y=0$ 之關係位置，以此解釋 § 3 定理 II 之幾何意義．作其圖象若

(a) $A=\frac{1}{4}, B=-1, C=0$;　(b) $A=\frac{1}{4}, B=C=0$;　(c) $A=\frac{1}{4}, B=1, C=0$.

91　直線系與二次曲線及直線與二次曲線系之關係位置． 已知直線系（卽含有參數 k 之一次方程式）及一二次曲線，從此直線系與二次曲線相交，相切或不相遇之關係而決定 k 之値如下：

從直線系及二次曲線之方程式，視其以何種爲簡便而消去 x 或 y，其結果爲下列任一種形式：

$$(1)\qquad Ay^2+By+C=0 \text{ 或 } Ax^2+Bx+C=0.$$

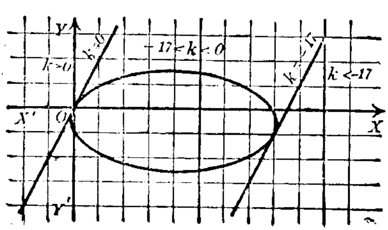
普遍言之，判別式 $\triangle$ 爲 k 之二次式．k 之値可從 $\triangle$ 爲正，負或零及前節之結果，而決定之（§ 7 定理 III）．

因二次曲線系（卽含有參數 k 之二次方程式之軌跡）與直線相交，相切或不相遇之關係，亦可以同樣手續分二次曲線系爲三類．如有 k 之値使方程式無軌跡者應除外．

例 1．若直線 $y=2x+k$ 與橢圓 $x^2+4y^2-8x+4y=0$ 相交，相切或不相遇．求 k 之値．

解　以第一式代入第二方程式消去 y，得

$$17x^2+16kx+4k^2+4k=0.$$



此二次式之判別式為

$$\triangle=(16k)^2-4\cdot17(4k^2+4k)=-16(k^2+17k).$$

從 § 90, (a), (b) 及 (c),

(a) 若 $-16(k^2+17k)>0$, 此直線為割線；

(b) 若 $-16(k^2+17k)=0$, 此直線為切線；

(c) 若 $-16(k^2+17k)<0$, 此直線與橢圓不相遇.

應用 § 7 定理 III 於二次式 $-16(k^2+17k)$.

因 $\triangle=(-16\cdot17)^2$ 為正, $A=-16$, 其根為 0 及 -17,

(a) 若 $-17<k<0$ 二次式 $-16(k^2+17k)>0$;

(b) 若 $k=0$ 或 -17, 二次式 $-16(k^2+17k)=0$;

(c) 若 $k<-17$ 或 $k>0$, 二次式 $-16(k^2+17k)<0$.

因此

(a) 若 $-17<k<0$, 此直線為割線.

(b) 若 $k=0$ 或 -17, 此直線為切線.

(c) 若 $k<-17$ 或 $k>0$, 此直線與橢圓不相遇.

此直線系表一組平行線. 圖示二切線,並指明 k 為各種數值時之直線位置.

習　　題

1. 決定 k 之值，而使下列諸方程式之軌跡 (a) 相交，(b) 相切，(c) 不相遇. 每種作一圖.

(a) $y=kx-1,\ x^2=4y$. 答. (a) $k>1$ 或 $k<-1$; (b) $k=\pm1$; (c) $-1<k<1$.

(b) $x+2y=k,\ x^2+y^2=5$ 答. (a) $-5<k<5$; (b) $k=\pm5$; (c) $k>5$ 或 $k<-5$.

(c) $x^2+y^2=k,\ 3x-4y+10=0$. 答. (a) $k>4$; (b) $k=4$; (c) $0\leqq k<4$.

(d) $y=kx+2,\ x^2-8y=0$. 答. (a) k 之任何值.

(e) $x^2+y^2-2kx=0,\ y=x.$ 答. (a) k 除 0 外之任何值; (b) $k=0$.

(f) $4x^2-y^2=16,\ y=kx.$ 答. (a) $-2<k<2$; (b) $k=\pm 2$; (c) $k>2$ 或 $k<-2$.

(g) $y^2=2kx,\ x-2y+2=0$ 答. (a) $k>1$ 或 $k<0$; (b) $k=0$ 或 1; (c) $0<k<1$.

(h) $x^2+4y^2-8x=0,\ y=kx+2-4k.$ 答. (a) k 除 0 外之任何值; (b) $k=0$.

(i) $xy=k,\ 2x+y+4=0$ 答. (a) $k<2$; (b) $k=2$; (c) $k>2$.

(j) $xy+y^2-4x+8y=0,\ x-2y+k=0$

答. (a) $k>48$ 或 $k<0$; (b) $k=0$ 或 48; (c) $48>k>0$.

(k) $4x^2+y^2-6x+6y=0,\ y=kx+1-k.$

答. (a) $k>1$ 或 $k<-\frac{19}{11}$; (b) $k=1$ 或 $-\frac{19}{11}$; (c) $-\frac{19}{11}<k<1$.

2. 決定 k 之值,而使下列諸方程式之軌跡相切,並作其圖象.

(a) $x^2-4y+16=0,\ y=k.$ 答, $k=4$.

(b) $9x^2+16y^2=144\ \ y-x=k.$ 答. $k=\pm 5$.

(c) $4xy+y^2+16=0,\ x=k.$ 答. $k=\pm 2$.

(d) $x^2+4xy+y^2=k,\ y=2x+1.$ 答. $k=-\frac{3}{13}$.

(e) $x^2+2xy+y^2+8x-6y=0,\ 4x-3y=k.$ 答. $k=0$.

(f) $x^2+2xy-4x+2y=0,\ 2x-y+k-3=0.$ 答. $k=3$ 或 13.

92. 二次曲線之切線. 若前節中 (1) 之判別式為零,則直線與二次曲線相切. 使判別式等於零時所得之方程式,稱為**相切條件**. 因此欲求一直線與二次曲線之相切條件, 可將二方程式消去 x 或 y, 再命所得二次式之判別式等於零.

如 § 91 例 1, 相切條件為 $\triangle=-16(k^2+17k)=0$.

例 1. 求直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 及拋物線 $y^2=2px$ 之相切條件.

解 從第一方程式求 x, 代入第二式消去 x, 得

$$by^2+2apy-2abp=0.$$

此二次式之判別式為

$$\triangle=(2ap)^2-4b(-2abp)=4ap(ap+2b^2).$$

因此相切條件為

$$4ap(ap+2b^2)=0,\text{ 或 } ap(ap+2b^2)=0.$$

規則. 求切於已知二次曲線及適合於第二條件之切線方程式.

第一步. 寫適合於第二條件之直線系方程式.

第二步. 從第一步所得之方程式及已知二次曲線，求相切條件之方程式.

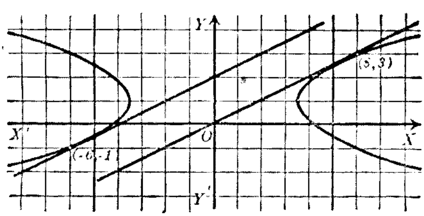
第三步. 解第二步所得之方程式，求直線系中參數之値，以實數值代入直線系方程式，即得所求方程式.

例 2. 求直線方程式，其斜率為 $\frac{1}{2}$，且與雙曲線 $x^2-6y^2+12y-18=0$ 相切，並求其切點.

解　第一步. 直線系

(1) $$y=\tfrac{1}{2}x+k$$

之斜率為 $\frac{1}{2}$ (§ 29 定理 I).



第二步. 解 (1) 求 x，代入所設方程式，

(2) $$y^2+(4k-6)y+9-2k^2=0.$$

因此相切條件為

$$(4k-6)^2-4(9-2k^2)=0.$$

第三步. 解此方程式，　　$k=0$ 或 2.

代入 (1)，得所求方程式

(3) $$x-2y=0,\ x-2y+4=0$$

求切點,祇須將 k 之每一數值代入 (2), 化為 § 3 (7) 之第二種形式, 卽

若 $k=0$, (2) 化為 $(y-3)^2=0$; $\therefore\ y=3$;

若 $k=2$, (2) 化為 $(y+1)^2=0$; $\therefore\ y=-1$.

因此 3 及 -1 為切點之縱坐標. 再從 (1)

若 $k=0$, 及 $y=3$, 得 $x=6$;

若 $k=2$, 及 $y=-1$, 得 $x=-6$.

因此, 若 $k=0$, 切點為 $(6, 3)$;

若 $k=2$, 切點為 $(-6, -1)$.

切點亦可從 (3) 中之任一方程式及所設方程式求之.

習 題

1. 決定下列諸方程式所表軌跡之相切條件.

(a) $4x^2+y^2-4x-8=0,\ y=2x+k$. 答. $k^2+2k-17=0$.

(b) $xy+x-6=0,\ x=ky+5$. 答. $k^2+14k+25=0$.

(c) $x^2-y^2=a^2,\ y=kx$. 答. $k=\pm 1$.

(d) $x^2+y^2=r^2,\ 4y-3x=4k$. 答. $16k^2=25r^2$.

(e) $x^2+y^2=r^2,\ y=mx+b$. 答. $(2mb)^2-4(1+m^2)(b^2-r^2)=0$.

(f)* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1$. 答. $\dfrac{a^2}{\alpha^2}+\dfrac{b^2}{\beta^2}=1$.

(g)* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1$. 答. $\dfrac{a^2}{\alpha^2}-\dfrac{b^2}{\beta^2}=1$.

(h)* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ y=mx+\beta$. 答. $a^2m^2+b^2-\beta^2=0$.

(i)* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ y=mx+\beta$. 答. $a^2m^2-b^2-\beta^2=0$.

(j)* $x^2+y^2=r^2,\ x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$. 答. $p^2-r^2=0$.

(k)* $2xy=a^2,\ \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1$. 答. $\alpha\beta=2a^2$.

(l)* $x^2+y^2=r^2,\ Ax+By=1$. 答. $A^2r^2+B^2r^2=1$.

* 此類習題之常數, 不假定為零。

2. 求切於下列諸曲線及適合於指定條件之切線方程式，並求其切點．作其圖象，以驗其切點坐標之近似值．

(a) $y^2=4x$, 斜率 $=\frac{1}{2}$.　答．$x-2y+4=0$

(b) $x^2+y^2=16$, 斜率 $=-\frac{4}{3}$.　答．$4x+3y\pm 20=0$.

(c) $9x^2+16y^2=144$, 斜率 $=-\frac{1}{4}$.　答．$x+4y\pm 4\sqrt{10}=0$.

(d) $x^2-4y^2=36$, 垂直於 $6x-4y+9=0$.　答．$2x+3y\pm 3\sqrt{7}=0$.

(e) $x^2+2y^2-x+y=0$　斜率 $=-1$.　答．$x+y=1$, $2x+2y+1=0$.

(f) $x^2=4y$, 經過 $(0,-1)$.　答．$y=\pm x-1$.

(g) $x^2=8y$, 經過 $(0, 2)$.　答．無．

(h) $4x^2-y^2=16$, 斜率 $=2$.　答．$y=2x$.

(i) $xy+y^2-4x+8y=0$, 平行於 $2x-4y=7$.　答．$x=2y$, $x-2y+48=0$.

(j) $4x^2+y^2-6x+6y=0$ 經過 $(1, 1)$.　答．$x-y=0$　$19x+11y-30=0$,

(k) $x^2+2xy+y^2+8x-6y=0$, 斜率 $=\frac{4}{3}$.　答．$4x-3y=0$.

(l) $x^2+2xy-4x+2y=0$, 斜率 $=2$.　答．$y=2x$, $2x-y+10=0$.

(m) $y^2=2px$, 斜率 $=m$.　答．$y=mx+\frac{p}{2m}$.

(n) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, 斜率 $=m$.　答．$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

(o) $2xy=a^2$, 斜率 $=m$.　答．$y=mx\pm a\sqrt{-2m}$.

3. 求下列二次曲線之最高點及最低點．

(a) $x^2+6xy+9y^2-6x=0$.　答．最高點 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) $x^2-2xy-4x-4y-8=0$.　答．$(0,-2)$, $(-4,-6)$.

(c) $x^2-y^2-4x+8y-16=0$　答．無．

提示．求水平切線之切點．

93. 以斜率表切線． 前節所述以所設斜率求一切線之方法，今可應用於普遍方程式而求得以斜率表切線之公式．

定理 I. 以斜率 m 表拋物線 $y^2=2px$ 之切線方程式為

$$y=mx+\frac{p}{2m}. \tag{1}$$

證　從 $y=mx+k$ 及 $y^2=2px$, 消去 x, 得

$$my^2-2py+2pk=0.$$

因此相切條件爲

$$\triangle = (-2p)^2 - 4m(2pk) = 0.$$

故

$$k = \frac{p}{2m}.$$

代入 $y = mx + k$ 卽得 (I). *Q. E. D.*

同樣可證

定理 II. 以斜率 m 所表之切線方程式於

圓	$x^2 + y^2 = r^2$	爲	$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$;
橢圓	$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$	爲	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$;
雙曲線	$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	爲	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

習 題

1. 求下列各對二次曲線之公切線方程式，每種作一圖.

   (a) $y^2 = 5x$, $9x^2 + 9y^2 = 16$. 答. $9x \pm 12y + 20 = 0$

   (b) $9x^2 + 16y^2 = 144$, $7x^2 - 32y^2 = 224$. 答. $\pm x - y \pm 5 = 0$.

   (c) $x^2 + y^2 = 49$, $x^2 + y^2 - 20y + 90 = 0$.

   答. $\pm 4x - 3y + 35 = 0$, $\pm 3x - 4y + 35 = 0$.

提示. 以斜率表每一二次曲線之切線方程式，於是使二直線重合 (§ 42 定理 III) 以決定斜率之值.

2. 自 $P_1(x_1, y_1)$ 可作二切線，一切線或無切線至軌跡

   (a) $y^2 = 2px$ 須視 $y_1^2 - 2px_1$ 爲正，零或負而決定.

   (b) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 須視 $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2$ 爲正，零或負而決定.

   (c) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$，須視 $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 - a^2b^2$ 爲負，零或正而決定.

3. 互相垂直二切線至

   (a) 一拋物線交於準線.

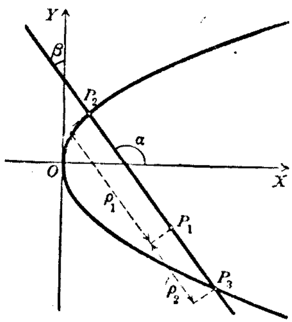
   (b) 一橢圓交於圓 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

   (c) 一雙曲線交於圓 $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

94. ρ 之方程式. 下節中吾人假定所設直線爲參數式（§ 55 定理 XV），

(1) $$\begin{cases} x = x_1 + \rho\cos\alpha, \\ y = y_1 + \rho\cos\beta. \end{cases}$$

須牢記此方程式之幾何意義．若一直線經過 $P_1(x_1, y_1)$，其方向餘弦爲 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ [或斜率 $m = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$，由 § 19 (I)] 則此直線爲已知．一點 (x, y) 或 $(x_1 + \rho\cos\alpha, y_1 + \rho\cos\beta)$ 爲直線上之一點，而自 P_1 至此點之有向距離爲變數 ρ.



設二次曲線爲拋物線

(2) $$y^2 - 2px = 0.$$

若 (1) 上之點 $(x_1 + \rho\cos\alpha, y_1 + \rho\cos\beta)$ 在 (2) 上，則（§ 27 系）

$$(y_1 + \rho\cos\beta)^2 - 2p(x_1 + \rho\cos\alpha) = 0,$$

或

(3) $$\cos^2\beta \cdot \rho^2 + (2y_1\cos\beta - 2p\cos\alpha)\rho + (y_1^2 - 2px_1) = 0.$$

此方程式稱爲拋物線之 **ρ 之方程式.** 其根 ρ_1 及 ρ_2 爲自 P_1 至直線與拋物線交點之有向長度 P_1P_2 及 P_1P_3.

ρ 爲自 P_1 至一點 $(x_1 + \rho\cos\alpha, y_1 + \rho\cos\beta)$ 之距離；當 ρ 適合於方程式 (3) 時，此點 $(x_1 + \rho\cos\alpha, y_1 + \rho\cos\beta)$ 在拋物線上．

因此得

定理 III. 自 $P_1(x_1, y_1)$ 至直線

$$x = x_1 + \rho\cos\alpha, \quad y = y_1 + \rho\cos\beta$$

及拋物線 $y^2 = 2px$ 交點之有向距離爲 ρ 之方程式

(III) $$\cos^2\beta \cdot \rho^2 + (2y_1\cos\beta - 2p\cos\alpha)\rho + (y_1^2 - 2px_1) = 0$$

之二根.

任何二次曲線所有 ρ 之方程式之二根,爲自一點 P_1 至直線與二次曲線交點之距離，而此直線經過 P_1, 其方向角爲 α 及 β. 定理 III 之證法甚爲普遍,今述之以

規則. 求任何二次曲線之 ρ 之方程式.

在二次曲線之方程式中以 $x_1+\rho\cos\alpha$ 代 x, 及 $y_1+\rho\cos\beta$ 代 y, 將結果依 ρ 之次數而整列.

爲便於參考計,

下列定理,可用此規則證之.

定理 IV. 有心二次曲線 $b^2x^2\pm a^2y^2-a^2b^2=0$ 之 ρ 之方程式爲

$$\text{(IV)}\qquad (b^2\cos^2\alpha\pm a^2\cos^2\beta)\rho^2+(2b^2x_1\cos\alpha\pm 2a^2y_1\cos\beta)\rho + (b^2x_1^2\pm a^2y_1^2-a^2b^2)=0.$$

定理 V. 軌跡

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

之 ρ 之方程式爲

$$\text{(V)}\qquad (A\cos^2\alpha+B\cos\alpha\cos\beta+C\cos^2\beta)\rho^2 + [(2Ax_1+By_1+D)\cos\alpha+(Bx_1+2Cy_1+E)\cos\beta]\rho + (Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F)=0^*.$$

直線 (1) 與二次曲線之關係位置全恃 ρ 之方程式中判別式而定. 因 ρ 之方程式之二根爲不相等二實數，相等二實數或虛數 (§ 3 定理 II). 故

* 應注意者, ρ^2 之係數可以 $\cos\alpha$ 代 x 及 $\cos\beta$ 代 y 於所設方程式之二次項中. 常數項可以 x_1 代 x 及 y_1 代 y 於全式. 比較括弧中 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ 之係數與 § 71 定理 VII 之 (6) 及 (7).

此直線與二次曲線相交，相切或不相遇．

習　　題

1. 求下列諸二次曲線之 ρ 之方程式．

(a) $xy=8$.

(b) $x^2+y^2=9$.

(c) $8x^2-y^2=16$.

(d) $x^2-y^2+4x-6y=0$.

(e) $2x^2+xy+8x-4y=0$.

(f) $x^2+2xy+y^2-4x=0$.

(g) $xy+4x-8y-3=0$.

(h) $x^2+4xy+y^2-3x=0$.

2. ρ 之方程式中，係數及根應如何說明

(a) 若 $P_1(x_1, y_1)$ 在二次曲線上？

(b) 若直線切二次曲線於 P_1？

(c) 若直線遇二次曲線於無窮遠？

(d) 若 P_1 爲此直線所成弦之中點？

3. 決定下列諸直線及二次曲線之關係位置，並作其圖象．

(a) $y^2-4x+4=0$　$\begin{cases} x=3+\frac{3}{5}\rho, \\ y=-2+\frac{4}{5}\rho. \end{cases}$　答．割線．

(b) $4xy+3y^2-4x+4y-16=0$　$\begin{cases} x=2-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\rho, \\ y=1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}\rho. \end{cases}$　答．切線．

(c) $4x^2+9y^2-40x-72y+100=0$　$\begin{cases} x=-2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\rho, \\ y=-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\rho. \end{cases}$　答．不相遇．

(d) $3x^2+xy-4y^2-x+y=0$　$\begin{cases} x=3-\frac{4}{5}\rho, \\ y=-2+\frac{3}{5}\rho. \end{cases}$

答．直線爲二次曲線之一部．

(e) $4x^2-9y^2=36$.　$\begin{cases} x=2-\frac{3}{5}\rho, \\ y=3+\frac{4}{5}\rho. \end{cases}$

答．割線交點之一在無窮遠．

95. 切線． 吾人將明示用 ρ 之方程式如何可求一二次曲線之切線方程式．今論切拋物線 $y^2-2px=0$ 於 $P_1(x_1, y_1)$ 之切線方程式．設

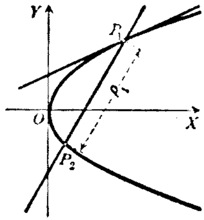
(1)　$$x=x_1+\rho\cos\alpha,\quad y=y_1+\rho\cos\beta$$

爲經過 P_1 之割線而交拋物線於 P_2. ρ 之方程式中其一根爲 $\rho_1 = P_1P_2$, 另一根爲 $\rho_2 = 0$. 因此 § 94 (III) 化爲(§ 4, 第一款)

$$\cos^2\beta\cdot\rho^2 + (2y_1\cos\beta - 2p\cos\alpha)\rho = 0.$$

[或從 § 27 系，常數項爲零].

若 P_2 接近於 P_1, 此直線變爲切線 (§ 83).



又因 ρ_1 變爲零, 必得 (§ 4 第三款)

(2)　　$$2y_1\cos\beta - 2p\cos\alpha = 0.$$

此爲 (1) 切於拋物線之條件. 解 (1) 求 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$, 代入 (2) 得

$$2y_1y - 2px - 2y_1^2 + 2px_1 = 0.$$

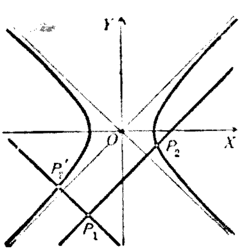
但因 $y_1^2 = 2px_1$ 故

$$y_1y - p(x + x_1) = 0.$$

此爲 § 85 定理 III 所設之形式.

96. 漸近方向及漸近線.　若 ρ 之方程式中, ρ^2 之係數爲零, 則一根爲無窮大 (§ 8 定理 IV); 因此一直線與二次曲線之一交點與 P_1 有無窮遠之距離. 此直線之方向稱爲**漸近方向**.

定理 VI.　雙曲線之漸近方向平行於漸近線, 拋物線則平行於軸, 而橢圓則無漸近方向.



證　在雙曲線之 ρ 之方程式中, 命 ρ^2 之係數爲零 [§ 94, (IV)], 得

$$b^2\cos^2\alpha - a^2\cos^2\beta = 0.$$

$$\therefore\ m = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \pm\frac{b}{a}.$$

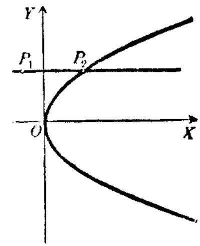
故漸近方向之斜率與漸近線同 [§ 76 (5)].

同樣於拋物線 $m=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=0$, 故其漸近方向平行於軸。

於橢圓 $m=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{-1}$, 卽漸近方向之斜率爲虛數， 故無漸近方向。 *Q. E. D.*

系. 一直線如有二次曲線之漸近方向，則在平面上有限部分，該直線祇交二次曲線於一點.

若 ρ 之方程式所有二根均變爲無窮大，此直線可謂"切二次曲線於無窮遠"並名此直線爲**漸近線**. 用此定義及 § 76 定義，得



定理 VII. 雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 之漸近線方程式爲

$$b^2x^2-a^2y^2=0.$$

證 雙曲線之 ρ 之方程式中 [§ 94 (IV)], 二根可變爲無窮大，若 (§ 8 定理 IV)

$$b^2\cos^2\alpha-a^2\cos^2\beta=0 \text{ 及 } 2b^2x_1\cos\alpha-2a^2y_1\cos\beta=0.$$

從第一方程式， $$\cos\beta=\pm\frac{b}{a}\cos\alpha.$$

代入第二式得 $bx_1\mp ay_1=0$ 此爲 P_1 在漸近線上之條件. 但此又爲 P_1 在二直線 $bx\mp ay=0$ 或 $b^2x^2-a^2y^2=0$ 中任一直線之條件. 故此方程式卽爲漸近線之方程式. *Q. E. D.*

上列證法，可述於下之

規則. 求任何雙曲線之漸近線方程式.

第一步. 求 ρ 之方程式 (§ 94 規則).

第二步. 命 ρ^2 及 ρ 之係數爲零.

第三步． 從所得方程式消去 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ 並去 x_1 及 y_1 之添數．

習　　題

1. 自指定各點至下列諸二次曲線作切線，求切線方程式．（不論 P_1 在或不在二次曲線上，§ 95 之方法恆可用之）．

(a) $xy=16$, $(4, 4)$.　　　答　$x+y=8$.

(b) $x^2+2xy=4$, $(2,0)$　　　答．$x+y=2$.

(c) $x^2=4y$, $(0, -1)$.　　　答．$x^2-(y+1)^2=0$, 或 $x=\pm(y+1)$.

(d) $x^2-3y^2+2x+19=0$, $(-1, 2)$.　　　答．$(x+3y-5)(x-3y+7)=0$.

2. 決定下列諸二次曲線所有漸近方向之斜率．

(a) $x^2-xy-6y^2-8x=0$.　　　答．$\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$.

(b) $xy-y^2+4x-6=0$.　　　答．0, 1.

(c) $x^2+4xy+4y^2-2x=0$.　　　答．$-\frac{1}{2}$.

(d) $4x^2+xy+y^2-3=0$.　　　答．無．

(e) $9x^2-6xy+y^2-2y+5=0$.　　　答．3.

(f) $x^2+5xy+4y^2=10$.　　　答　$-\frac{1}{4}$, -1.

(g) $xy+Dx+Ey+F=0$.　　　答．$0, \infty$.

3. 決定習題 2 中方程式之軌跡是否屬於橢圓，雙曲線或拋物線類．

4. 求下列諸雙曲線之漸近線方程式．

(a) $xy-y^2+2x=0$.　　　答．$y+2=0$, $x-y+2=0$.

(b) $2x^2-xy-4=0$.　　　答．$x=0$, $2x-y=0$.

(c) $x^2-6xy+8y^2=10$.　　　答．$x-4y=0$, $x-2y=0$.

(d) $xy-4x-3y=0$.　　　答．$x=3$, $y=4$.

(e) $2x^2-7xy+3y^2=14$.　　　答．$2x-y=0$, $x-3y=0$.

(f) $x^2-4y^2+2x+8y=0$.　　　答．$x-2y+3=0$, $x+2y-1=0$

5. 求習題 2 中雙曲線 (a), (b), (f) 及 (g) 之漸近線方程式．

答．(a) $75x-25y+296=0$, $50x+25y-184=0$;

(b) $y+4=0$, $x-y+4=0$;

(f) $x+4y=0$, $x+y=0$;

(g) $x+E=0$, $y+D=0$.

6. 證拋物線無漸近線．

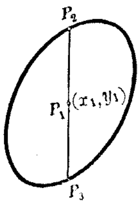
7. 證軌跡 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 之漸近方向可由軌跡 $Ax^2+Bxy+Cy^2$

$=0$ 決定之.

8. 用習題 7，證普遍二次方程式之軌跡爲雙曲線類，拋物線類或橢圓類，全視 $\triangle=B^2-4AC$ 爲正，零或負而決定.

9. 表明用習題 7 及 8，如何決定拋物線之軸之方向.

97. 中心. 此節問題，專論軌跡



(1) $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

有無對稱中心，若有中心，將如何決定之. 卽吾人須求一點 $P_1(x_1, y_1)$，此點爲 (1) 諸弦之中點.

若 P_1 爲直線

$$x=x_1+\rho\cos\alpha_1,\quad y=y_1+\rho\cos\beta$$

所成弦 P_2P_3 之中點，則 ρ 之方程式中，其二根須相等，符號相反. 因此 § 94 (V) 中 ρ 之係數必爲零 (§ 4 第二款).

(2) $$\therefore\ (2Ax_1+By_1+D)\cos\alpha+(Bx_1+2Cy_1+E)\cos\beta=0.$$

若 P_1 爲任何弦之中點，$\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ 之一切值可適合於 (2).

因 $\cos\beta=0$ 及 $\cos\alpha=0$，可得

(3) $$2Ax_1+By_1+D=0,\quad Bx_1+2Cy_1+E=0,$$

如 $P_1(x_1, y_1)$ 能適合 (3) 必能適合 (2).

解 (3) 得一組 x_1 及 y_1 之值 (§ 43 定理 IV)，卽 (1) 之軌跡可有一中心.

若 $$\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C},\ 或\ \triangle=B^2-4AC=0,$$

設 $\triangle=0$，則 (1) 無中心，但 $\frac{B}{2C}=\frac{D}{E}$，則直線 $2Ax+By+D=0$ 上任何點皆可爲中心.

因此得

定理 VIII. 若軌跡

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

之 $\triangle=B^2-4AC$ 不爲零,此軌跡有一對稱中心.若 $\triangle=0$,無中心.又若 $\frac{B}{2C}=\frac{D}{E}$,則一直線上之任何點皆可爲中心.

系. 中心爲二直線

$$2Ax+By+D=0,\quad Bx+2Cy+E=0$$

之交點.

若軌跡爲橢圓類或雙曲線類(§ 80),必有一中心.若爲拋物線類,則無中心,除非爲變態曲線.又若爲二平行線(變態拋物線),則其中間之一平行線上任何點皆爲中心.

在數值問題中,其中心求法與上同,先求(3)之方程式而後解之.

習 題

1. 求下列諸二次曲線之中心.

(a) $x^2+xy-4=0$. 答. $(0, 0)$.

(b) $x^2-2xy+y^2-4x=0$. 答. 無.

(c) $xy-2y^2+4x-4y=0$. 答. $(-12, -4)$.

(d) $x^2-8xy+16y^2+2x-8y-3=0$. 答. 直線 $x-4y+1=0$ 上任何一點.

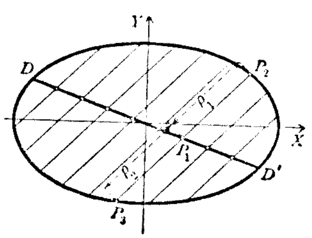
(e) $x^2+4xy+y^2-8x=0$. 答. $(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$.

(f) $4x^2+12xy+9y^2-2x+6=0$. 答. 無.

(g) $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y-8=0$. 答. 直線 $2x+3y-1=0$ 上任何一點.

2. 若普遍二次方程式之係數除 B 外皆爲常數,當 B 變化而使 B^2-4AC 接近於零時,此軌跡之中心將如何?

98. 直徑. 曲線中一組平行弦之中點所成之軌跡,稱爲此曲線之直徑.



今論橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 及方向角爲 α 及 β 之平行線系.平行線系中一直線,經過 $P_1(x_1, y_1)$,其參數方程式爲

$$x=x_1+\rho\cos\alpha,\quad y=y_1+\rho\cos\beta.$$

若 P_1 爲弦之中點，則在 ρ 之方程式中 [§ 94, (IV)]．$\rho_1 = P_1P_2$ 及 $\rho_2 = P_1P_3$必相等而符號相反．因此 (§ 4 第二款)

$$2\,b^2x_1 \cos\alpha + 2\,a^2y_1 \cos\beta = 0.$$

全式除以 $2\cos\alpha$ 命 $m = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ (§ 94), 得

$$b^2x_1 + a^2my_1 = 0,$$

此係 (x_1, y_1) 爲弦之中點之條件，而 m 爲弦之斜率．

但此條件又爲 P_1 應在直線

$$DD' : b^2x + a^2my = 0$$

之上．

因此得

定理 IX. 橢圓 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 中諸弦之斜率爲 m，平分此諸弦之直徑爲

(IX) $$\boldsymbol{b^2x + a^2my = 0.}$$

此理由可應用於任何二次曲線，故得下之

規則. 二次曲線中，平行弦之斜率爲 m，求平分諸弦之直徑方程式.

第一步． 求 ρ 之方程式 (§ 94 規則).

第二步． 命 ρ 之係數爲零

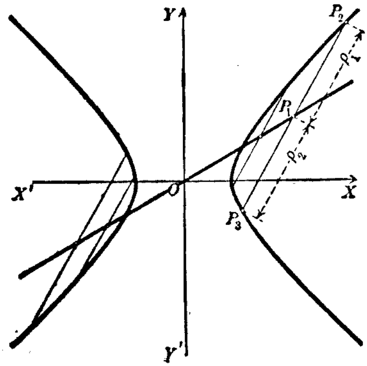
第三步． 各以 x 及 y 代 x_1 及 y_1，又以 m 代 $\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ 卽得所求方程式.

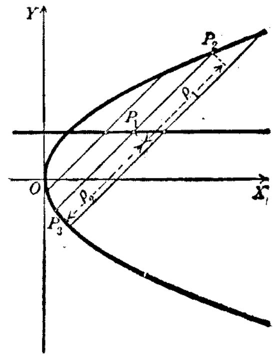
用此法可證

定理X. 若平行弦之斜率爲 m，平分諸弦之直徑方程式於

雙曲線 $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ 爲 $\boldsymbol{b^2x - a^2my = 0;}$

拋物線 $y^2 = 2px$ 爲 $\boldsymbol{my = p.}$





系. 拋物線之一切直徑平行於其軸,任何平行於軸之直線皆爲直徑.

定理 XI. 在軌跡

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

中,平行弦之斜率爲 m,平分此諸弦之直徑爲

$$\text{(XI)}\qquad 2Ax+By+D+m(Bx+2Cy+E)=0$$

系 若軌跡有中心,其直徑必經過中心.反之,任何經過中心之直線皆爲直徑

提示. 應用 § 97 系及 § 54 定理 XIII.

習 題

1. 求下列諸二次曲線之直徑方程式,此直徑平分以 m 爲斜率之諸弦.

(a) $x^2-4y^2=16$,	$m=2$.	答. $x-8y=0$.
(b) $y^2=4x$,	$m=-\frac{1}{2}$.	答. $y+4=0$.
(c) $xy=6$,	$m=3$.	答. $y+3x=0$.
(d) $x^2-xy-8=0$,	$m=1$.	答. $x-y=0$.
(e) $x^2-4y^2+4x-16=0$,	$m=-1$.	答. $x+4y+2=0$.
(f) $xy+2y^2-4x-2y+6=0$,	$m=\frac{2}{3}$.	答. $2x+11y-16=0$.

2. 求下列諸二次曲線之直徑方程式,此直徑經過指定之各點.

(a) $4x^2+9y^2=36$, 經過 (3, 2).　答．$2x-3y=0$.

(b) $y^2=4x$, 經過 (2, 1).　答．$y=1$.

(c) $xy=8$, 經過 (−2, 3).　答．$3x+2y=0$.

(d) $x^2-4y+6=0$, 經過 (3, −4).　答．$x=3$.

(e) $xy-y^2+2x-4=0$, 經過 (5, 2).　答．$4x-9y-2=0$.

3. 若 $B^2-4AC=0$, 求 (XI) 之斜率. 應用 § 96 習題 8 及 9, 如何解釋此結果?

4. (XI) 之斜率 m' 與 m 有何關係存在?　答．$2Cmm'+B(m+m')+2A=0$

5. 習題 4 之結果將如何，若二次曲線為

(a) 橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$?　答．$mm'=-\frac{b^2}{a^2}$.

(b) 雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$?　答．$mm'=\frac{b^2}{a^2}$.

(c) 拋物線 $y^2=2px$?　答．$m'=0$.

6. 用習題 5, 討論一組平行弦與平分此平行弦之直徑之關係方向.

7. 求下列諸二次曲線中弦之方程式，此弦平分於指定之各點:

(a) $x^2+y^2=25$, 平分於 (2, 1).　答．$2x+y-5=0$.

(b) $4x^2-y^2=9$, 平分於 (4, 2).　答．$8x-y-30=0$.

(c) $xy=4$, 平分於 (5, 3).　答．$3x+5y-30=0$.

(d) $x^2-xy-8=0$, 平分於 (4, 0).　答．$2x-y-8=0$.

99. 有心二次曲線之共軛徑.　在有心二次曲線之平行弦中，有一弦經過中心，故為直徑 (定理 XI 之系). 此直徑與平分諸平行弦之直徑稱為**共軛徑**.

橢圓

設 m 為橢圓

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

中直徑之斜率，從定理 IX, 共軛徑之斜率為 (§ 42 系 I)

$$m'=-\frac{b^2}{a^2m}.$$

$$\therefore\ mm'=-\frac{b^2}{a^2}.$$

雙曲線

設 m 為雙曲線

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

中直徑之斜率，從定理 X, 共軛徑之斜率為 (§ 42 系 I)

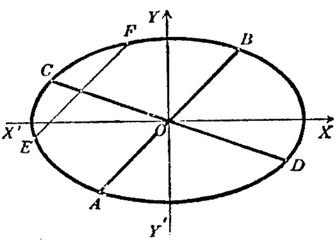
$$m'=\frac{b^2}{a^2m}.$$

$$\therefore\ mm'=\frac{b^2}{a^2}.$$

因此得

定理 XII 若 m 及 m' 爲橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 中共軛徑之斜率，則

$$\text{(XII)} \qquad mm'=-\frac{b^2}{a^2}.$$



系. 橢圓之共軛徑在不同象限中.

因 m 及 m' 之乘積爲負，故異號.

橢圓直徑或共軛徑之長度卽爲該直線與橢圓二交點間之距離.

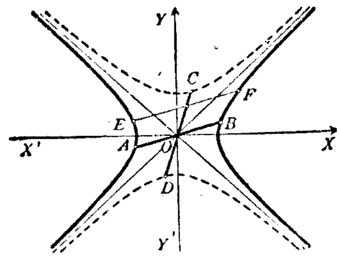
作法 欲作直徑 AB 之共軛徑，祇須作一弦 EF 平行於 AB，再作平分 EF 弦之直徑 CD.

定理 XIV. 設一點 $P_1(x_1, y_1)$ 在

因此得

定理 XIII 若 m 及 m' 爲雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 中共軛徑之斜率，則

$$\text{(XIII)} \qquad mm'=\frac{b^2}{a^2}.$$



系. 雙曲線之共軛徑在同一象限中，但在漸近線之兩旁.

因 m 及 m' 之乘積爲正，故同號. 若一斜率之絕對值小於 $\frac{b}{a}$，則其餘一個之絕對值大於 $\frac{b}{a}$. 此 $\frac{b}{a}$ 卽爲漸近線之斜率 [§ 76, (5)].

雙曲線之共軛徑如不交雙曲線，其長度卽爲該直線與共軛雙曲線二交點間之距離 (§ 76).

作法 欲作直徑 AB 之共軛徑，祇須作一弦 EF 平行於 AB，再作平分 EF 弦之直徑 CD.

定理 XV. 設一點 $P_1(x_1, y_1)$ 在

橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上，經過 P_1 所作直徑之共軛徑方程式為

(XIV)　$\boldsymbol{b^2x_1x+a^2y_1y=0}$.

證　經過 P_1 之直徑亦經過原點(§ 98 系)，因此其斜率為(§ 22 定理 V) $m=\frac{y_1}{x_1}$. 從(XII)其共軛徑之斜率為 $m'=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. 一直線經過原點，斜率為 m'，其方程式為(§ 45 定理 V)

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x,$$

此式可化成(XIV)之形式．Q. E. D.

系．(XIV) 與橢圓之交點為 $\left(-\frac{ay_1}{b},\frac{bx_1}{a}\right)$ 及 $\left(\frac{ay_1}{b},-\frac{bx_1}{a}\right)$.

此交點用 § 37 規則求之．

雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上，經過 P_1 所作直徑之共軛徑方程式為

(XV)　$\boldsymbol{b^2x_1x-a^2y_1y=0}$.

證　經過 P_1 之直徑亦經過原點(§ 98 系)因此其斜率為(§ 22 定理 V) $m=\frac{y_1}{x_1}$. 從(XIII,)其共軛徑之斜率為 $m'=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. 一直線經過原點，斜率為 m'，其方程式為(§ 45 定理 V)

$$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x,$$

此式可化成(XV)之形式．Q. E. D.

系．(XV) 與雙曲線之交點為 $\left(\frac{ay_1}{b},\frac{bx_1}{a}\right)$ 及 $\left(\frac{-ay_1}{b},-\frac{bx_1}{a}\right)$.

此交點用 § 37 規則求之．

習　　題

1. 等軸雙曲線 $2xy=a^2$ 共軛徑之斜率有何關係？　答．$m+m'=0$.
2. (a) 橢圓，(b) 雙曲線中，直徑二端之切線平行於共軛徑．
3. 拋物線直徑一端之切線平行於此直徑所平分之諸弦．
4. 橢圓之二個共軛半直徑平方之和等於 a^2+b^2.

提示．設 $P_1(x_1, y_1)$ 為橢圓上之一點．求自中心至 P_1 及自中心至定理 XIV 系中一點距離之平方，相加，再應用 § 27 系．

5. 雙曲線之二個共軛半直徑平方之差等於 a^2-b^2.

提示．參觀習題 4 之提示．

6. 二共軛徑之交角為 $\sin^{-1}\frac{ab}{a'b'}$，其中 a' 及 b' 為共軛半直徑之長度．

7. 等軸雙曲線二個共軛徑之長度相等.

8. 等軸雙曲線二個共軛徑與漸近線成等角.

9. 雙曲線二共軛徑端點之聯線平行於一漸近線,且被他一漸近線所平分.

10. (a) 橢圓,(b) 雙曲線上任一點之焦半徑 (§ 79 習題 8 及 9) 之乘積等於自該點所作直徑之共軛半直徑之平方.

11. 若橢圓與雙曲線共軸,則雙曲線之漸近線即爲橢圓之共軛徑.

12. 試證習題 11 中二共軛徑相等.

總習題

1. 求下列諸軌跡之相切條件:

(a) $y^2=2px$ 及 $Ax+By+C=0$.

(b) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 及 $Ax+By+C=0$.

(c) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 及 $Ax+By+C=0$.

2. 在任一二次曲線上求一點,使此點上之切線與二軸成等角.此解法何時爲不可能?

3. 在橢圓上求一點,使此點上之切線平行於二軸正方向端點之聯線.

4. 自拋物線之焦點作切線上之垂線,此垂線交經過切點之直徑於準線上.

5. 自有心二次曲線之一焦點,作直徑上之垂線,此垂線交該直徑之共軛徑於於準線上.

6. 拋物線中一弦二端上之切線,交於平分該弦之直徑上.

7. 以共軛徑爲坐標軸求 (a) 橢圓,(b) 雙曲線之方程式 (參看 § 71 總習題 10).

8. 設二次方程式所化成 ρ 之方程式爲已知,則直線,二次曲線及一點 P_1 之關係位置應如何說明.

(a) 若常數項爲零?

(b) 若 ρ 之係數爲零?

(c) 若 ρ^2 之係數爲零?

(d) 若 ρ 之係數及常數項爲零?

(e) 若 ρ^2 及 ρ 之係數爲零?

(f) 若 ρ^2 及 ρ 之係數及常數項爲零?

(g) 若 判別式爲正,負或零?

9. 雙曲線共軛徑端點之切線交於漸近線上.

10. (a) 橢圓 (b) 雙曲線中,共軛徑端點之切線成一平行四邊形,其面積爲 $4ab$. 即此面積等於以二軸爲邊所成矩形之面積.

11. 習題 10 中,外切於橢圓之平行四邊形,其對角線即爲共軛徑.

12. 自 (a) 橢圓,(b) 雙曲線上一點至直徑之兩端作弦,此二弦平行於二共軛徑.

13. 以拋物線之焦弦爲直徑,作一圓 則準線切於此圓.

14. 以拋物線之焦半徑爲直徑,作一圓,則頂點上之切線亦切於此圓.

第 十 一 章

軌 跡. 參 數 方 程 式

100. 解析幾何學之第一基本問題 (§ 28) 在求所設軌跡之方程式. 本章先論可以 § 28 規則解決之諸問題，其所用之直角坐標或極坐標，則視以何種爲簡便而決定之. 其次再論二種軌跡問題，此二種非上列規則所能解者，且爲初等解析幾何學中之重要軌跡.

習 題

每一習題之軌跡須作出，並於求得方程式之後加以討論.

1. 三角形底邊之長度及位置一定，求頂點之軌跡，若
   (*a*) 其餘二邊之和爲一常數. 答. 橢圓.
   (*b*) 其餘二邊之差爲一常數. 答. 雙曲線.
   (*c*) 一底角爲另一底角之兩倍. 答. 雙曲線.
   (*d*) 二底角之和爲一常數. 答. 圓.
   (*e*) 二底角之差爲一常數. 答. 二次曲線.
   (*f*) 二底角正切之積爲一常數. 答. 二次曲線.
   (*g*) 二邊之積等於底邊一半之平方. 答. 雙紐線 (§ 61 例 2).
   (*h*) 一邊上之中線爲定長. 答. 圓.
2. 求一點之軌跡，此點與 (*a*) 正方形之邊，(*b*) 正方形之頂點，所成距離平方之和爲一常數.
   答. 每種爲一圓.
3. 一點與一定點及一定直線距離平方之比爲一常數，求此點之軌跡. 答. 圓.
4. 求一點之軌跡，已知自定點 $P_1(x_1, y_1)$ 及定直線 $Ax+By+C=0$ 至此點距離之比等於常數 k.

答.
$$(A^2+B^2-k^2A^2)x^2-2k^2ABxy+(A^2+B^2-k^2B^2)y^2$$
$$-2(A^2x_1+B^2x_1+k^2AC)x-2(A^2y_1+B^2y_1+k^2BC)y$$
$$+(x_1^2+y_1^2)(A^2+B^2)-k^2C^2=0.$$

5. 求一點之軌跡,已知自定直線及定點至此點距離平方之比等於常數 k.

答. $x^2-k^2(x-p)^2-k^2y^2=0$, 若定直線爲 Y 軸而 X 軸經過定點,自定直線至定點之距離爲 p.

6. 求一點之軌跡. 若

(a) 其動徑與動角成比例. 答. 阿基米德 Archimedes 螺線, $\rho=a\theta$.

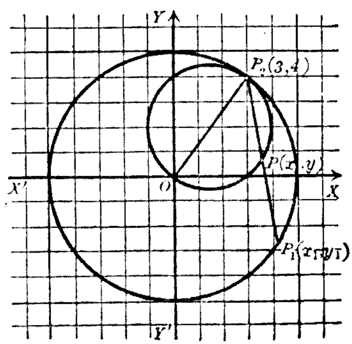
(b) 其動徑與動角成反比例. 答. 雙曲螺線, $\rho\theta=a$.

(c) 其動徑之對數與動角成比例. 答. 對數螺線, $\log\rho=a\theta$.

(d) 其動徑之平方與動角成反比例. 答. 連鎖螺線, $\rho^2\theta=a^2$.

101. 所設曲線及作圖所得之軌跡. 諸重要軌跡,如一點之軌跡,可由一已知曲線作圖而得之.其方法示於下例.

例 1. 自圓 $x^2+y^2=25$ 上一點 $P_2(3, 4)$ 作圓中諸弦,求此諸弦中點之軌跡.



解 設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲圓上任何點,則軌跡上一點 $P(x, y)$ 可由平分 P_1P_2 而得之.從 § 23 系,

$$x=\tfrac{1}{2}(x_1+3),\quad y=\tfrac{1}{2}(y_1+4).$$

(1) $\therefore\ x_1=2x-3,\quad y_1=2y-4.$

因 P_1 在圓上 (§ 27 系),

$$x_1^2+y_1^2=25.$$

以 (1) 代入

$$(2x-3)^2+(2y-4)^2=25,$$

或
$$x^2+y^2-3x-4y=0.$$

此方程式表示 $P(x,y)$ 適合於所設條件,故爲軌跡之方程式.此軌跡爲以 OP_2 作直徑之圓,此圓之中心爲 $(\frac{3}{2}, 2)$, 半徑爲 $\frac{5}{2}$ (§ 56 定理 I).

此法可述之以

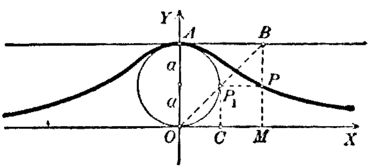
規則. 求自已知曲線及作圖所得軌跡之方程式.

第一步．　以所求曲線上一點 $P(x,y)$ 之坐標表所設曲線上一點 $P_1(x_1,y_1)$ 之坐標，求其代數式．

第二步．　以第一步結果代入所設曲線方程式中之坐標，簡化之，即得所求方程式．

若用極坐標，此規則仍可應用．

例 2.　**箕舌線**．　求 P 點之軌跡，其作圖如下：設 OA 為一圓 $x^2+y^2-2ay=0$ 之直徑，任意弦 OP_1 交 A 點上之切線於一點 B．過 P_1 及 B 各作 OX 及 OY 之平行線，其交點 P 在所求軌跡上．



解　第一步．　設 (x,y), (x_1,y_1) 各為 P 及 P_1 之坐標，從圖得

(1) $$y_1=y.$$

從相似三角形 OCP_1 及 P_1PB 得

(2) $$\frac{OC}{P_1P}=\frac{CP_1}{PB} \text{ 或 } \frac{x_1}{x-x_1}=\frac{y_1}{2a-y}.$$

因　$OC=x_1$, $P_1P=OM-OC=x-x_1$, $CP_1=y_1$, $PB=MB-MP=2a-y$.

解 (1) 及 (2) 求 x_1 及 y_1，得

(3) $$x_1=\frac{xy}{2a},\ y_1=y.$$

第二步．　以 (3) 代入所設圓之方程式 $x^2+y^2-2ay=0$，得

$$\frac{x^2y^2}{4a^2}+y^2-2ay=0,$$

或

(4) $$x^2y=4a^2(2a-y).$$

此方程式之軌跡稱為 Agnesi 箕舌線．

討論. (§ 36) 1. 此箕舌線不經過原點 (§ 35 定理 VI).

2. 此箕舌線關於 Y 軸爲對稱 (§ 34 定理 V).

3. Y 軸之截距爲 $2a$, 但此曲線不交 X 軸 (§ 35 規則).

4. 無 x 值須除去, 但 y 之值除 $0 \leqq y \leqq 2a$ 外應除去.

因解 (4), 求 x 及 y (§ 35 規則)

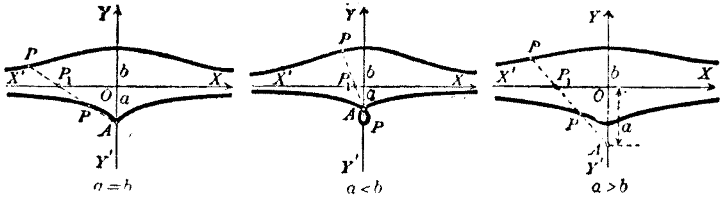
$$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}, \qquad x=\pm 2a\sqrt{\frac{2a-y}{y}}. \tag{5}$$

因此 x 爲任何值時, y 爲實數. 但若 $y>2a$ 或 $y<0$, 根號中之分式爲負, 故須除去.

5. 此箕舌線向左右無限伸張而漸漸接近於 X 軸.

因從方程式 (5) 之前一式, x 無限增加時, y 漸次減少而接近於零.

例 3. **蚌線.** 求一點 P 之軌跡, 其作圖如下: 過 Y 軸上一定點 A, 作一直線交 X 軸於 P_1 在此直線上, 取一點 P, 使 $P_1P=\pm b$, 其中 b 爲常數.



解 第一步. 用極坐標, 取 A 爲極, AY 爲極軸. 若 $AO=a$, 則 XX' 之方程式爲

$$\rho=a\sec\theta. \tag{6}$$

因垂直於極軸之直線方程式爲 (§ 63) $\rho A\cos\theta+C=0$, 或 $\rho=-\frac{C}{A}\sec\theta$, 在極軸上之截距爲 $-\frac{C}{A}$.

若 P 及 P_1 之坐標各爲 (ρ, θ) 及 (ρ_1, θ_1), 則在任一圖中, 由定義得

$$AP=AP_1\pm b.$$

$$\therefore\quad \theta_1=\theta,\ \rho_1=\rho\mp b.$$

第二步．　代入 (6) 得

(7) $$\rho=a\sec\theta\pm b.$$

此方程式之軌跡稱爲尼歌米德蚌線．因 a 大於，等於或小於 b 而有三種不同形式．

討論．(§ 61)　1. 在極軸 AY 上之截距爲 $a+b$ 及 $a-b$.

若 $a\sec\theta\pm b=0$，或 $\theta=\sec^{-1}\left(\pm\frac{b}{a}\right)$，極點在蚌線上．

2. 此蚌線關於極軸 AY 爲對稱．

因 $\sec(-\theta)=\sec\theta$（從 § 12, 4）.

3. 此蚌線依垂直於極軸之左右兩方向無限伸張．

若 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，$\sec\theta=\infty$ 因此 $\rho=\infty$.

4. 若變爲直角坐標，用 § 62,(2) 得

$$(x^2+y^2)(x-a)^2=b^2x^2.$$

今 A 爲原點，AY 爲 X 軸之正向．將軸平移至 O，並旋轉一角 $-\frac{\pi}{2}$．命 (§ 68 定理 III) $x=y'+a,\ y=-x'$，則得

(8) $$x^2y^2=(y+a)^2(b^2-y^2),$$

此爲蚌線以 OX 及 OY 爲二軸之方程式．

從 (8) 顯見此蚌線離原點漸遠而漸接近於 X 軸．

習　　題

1. 求一點之軌跡，此點之縱坐標爲圓 $x^2+y^2=64$ 上一點縱坐標之半．

答．橢圓 $x^2+4y^2=64$.

2. 求一點之軌跡，此點截去圓 $x^2+y^2=a^2$ 上縱坐標之一部份，此部份與縱坐標全長之比爲 $b:a$.　答．橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

3. 求一點之軌跡，此點分 (a) $x^2+y^2=r^2$, (b) $y^2=2px$, (c) $2xy=a^2$ 之縱坐標爲二份，其

比為 λ. 答. (a) $\lambda^2x^2+(1+\lambda)^2y^2=\lambda^2r^2$; (b) $(1+\lambda)^2y^2=2\lambda^2px$;

(c) $2(1+\lambda)xy=\lambda a^2$.

4. 經過 (a) 橢圓, (b) 拋物線, (c) 雙曲線上一定點 $P_2(x_2, y_2)$ 作諸弦,求此諸弦中點之軌跡. 答. 同類二次曲線,其常數 a, b 及 p 之值爲所設曲線中諸常數之半.

5. 自一點 (0, 4) 至雙曲線 $x^2-4y^2=16$ 作直線,再分此直線成 1:2 之比,求分點之軌跡. 答. $9x^2-36y^2+192y-272=0$.

6. 自二次曲線 [§ 73 (II)] 之焦點作直線,延長之,使與原線等長,求其端點之軌跡.

答. 二次曲線,其焦點及離心率與原二次曲線同,其準線爲 $x=-2p$.

7. 自定點 $P_2(x_2, y_2)$ 至 (a) 直線 $Ax+By+C=0$, (b) 拋物線 $y^2=2px$, (c) 有心二次曲線 $Ax^2+By^2+F=0$, 作直線,分此直線成 λ 之比,求分點之軌跡.

答. (a) 一直線,平行於所設直線.

(b) 一拋物線,其軸平行於所設拋物線之軸.

(c) 一有心二次曲線,其軸平行於所設二次曲線之軸.

8. 聯橢圓中一組共軛徑之端點,得諸弦,求此諸弦中點之軌跡.

答. $2b^2x^2+2a^2y^2=a^2b^2$.

9. 經過原點,作圓 $x^2+y^2+ax=0$ 之弦 OP_1, 延長之使 $P_1P=a$. 求 P 點之軌跡.

答. 心臟線 $\begin{cases}(x^2+y^2+ax)^2=a^2(x^2+y^2), \\ \text{或} \qquad \rho=a(1-\cos\theta).\end{cases}$

10. 圓 $x^2+y^2-2ax=0$ 之弦 OP_1 交直線 $x=2a$ 於一點 A. 在 OP_1 上取一點 P, 使 $OP=P_1A$. 求 P 點之軌跡. 答. 歧點蔓葉線 $\begin{cases}y^2(2a-x)=x^3, \\ \text{或} \qquad \rho=2a\sin\theta\tan\theta.\end{cases}$

11. 在習題 9 中,若 $P_1P=b$, 求 P 點之軌跡.

答. Pascal 蚶線 $\rho=b-a\cos\theta$. 因 $b \gtreqless a$, 此蚶線有三種不同形式.

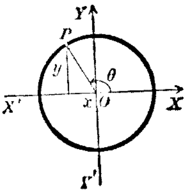
102. 曲線之參數方程式. § 55 方程式 (XV)

$$x=x_1+\rho\cos\alpha,\quad y=y_1+\rho\cos\beta,$$

稱爲直線之參數方程式. 因以一變數 ρ 可得直線上一點 (x, y) 坐標之值. 普遍言之. 若以一變數 ρ 可得曲線上任一點 (x, y) 坐標值之二方程式,此二方程式稱爲曲線之**參數方程式**.

例 1. 求圓之參數方程式, 其中心在原點, 半徑爲 r.

解 設 (x, y) 爲圓上任意點, 命 $\angle XOP$ 爲θ. 從圖得



(1) $$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$$

此卽所求方程式．此方程式有二性質，與 § 27 軌跡之方程式同．

1. 從軌跡上一點 P，得一相當之 θ 角因此(1)之 x 及 y 爲 P 點之坐標．

2. 從任何 θ 之值，可得(1)之 x 及 y，此 x 及 y 之值均爲實數．因此 $P(x, y)$ 在軌跡上．

一曲線之參數方程式，其參數之選擇方法甚多．故同一曲線其參數方程式有各種不同之形式．

如例 1 若選 P 之橫坐標之半爲參數，命之爲 t，則 $t=\frac{x}{2}$，從圖，$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$，因此參數方程式爲 $x=2t,\ y=\pm\sqrt{r^2-4t^2}$

規則． 已知參數方程式，描寫其圖象．

第一步　假定參數之值，從所設方程式計算 x 及 y 之相當值．

第二步．　以第一步之結果爲坐標，作各點位置．

第三步．　如所作諸點，足以決定軌跡之形象，則聯各點，畫一光滑曲線．

例 2.　畫曲線之圖象，其參數方程式爲

(2) $$x = at^2,\ y = a^2t^3.$$

解　取 $a=\frac{1}{2}$，則方程式(2)化爲

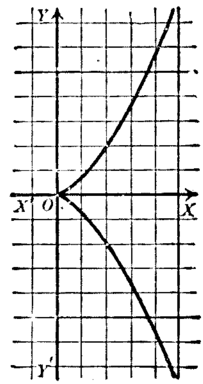
(3) $$x=\tfrac{1}{2}t^2,\ y=\tfrac{1}{4}t^3.$$

第一步．　假定 t 之值，從(3)計算 x 及 y．例如若 $t=2$，$x=\frac{1}{2}\cdot 2^2=2$，$y=\frac{1}{4}\cdot 2^3=2$．列於下頁之表．

第二步．　描寫各點位置．

第三步．　經過各點，畫一光滑曲線，如圖．

t	x	y
0	0	0
1	.5	.25
2	2	2
3	4.5	6.75
etc.	etc.	etc.
−1	.5	− .25
−2	2	−2
−3	4 5	−6.75
etc.	etc.	etc.



規則. 已知曲線之參數方程式,求其直角坐標系方程式.

從參數方程式,消去參數.

今以例證驗此規則.

在例 1 將方程式 (1) 平方, 相加, 得 (§ 12, 3,

$$x^2+y^2=r^2,$$

此爲所設軌跡之方程式 (§ 29, 系).

在例 2, 若將方程式 (2) 之第一式立方,第二式平方, 得

$$x^3=a^3t^6,\quad y^2=a^4t^6.$$

(4) $$\therefore\quad y^2=ax^3.$$

此爲半三次拋物線之方程式 (§ 83 例 2). 如證 (4) 爲例 2 中所得之曲線方程式, 吾人須證下列二事 (§ 27).

1. 曲線上任何點 $P_1(x_1, y_1)$ 之坐標適合於 (4).

若 $P_1(x_1, y_1)$ 在 (2) 上,則 (1, 例 1) 有一 t_1 之値使

(5) $$x_1=at_1^2,\quad y_1=a^2t_1^3.$$

(6) $$\therefore\quad x_1^3=a^3t_1^6,\quad y_1^2=a^4t_1^6.$$

(7) $$\therefore\quad y_1^2=ax_1^3.$$

因此 x_1 及 y_1 適合於(4).

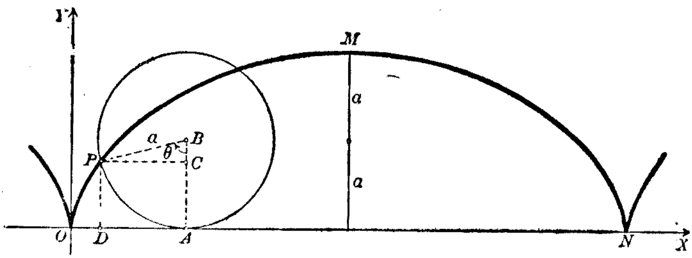
2. 若 x_1 及 y_1 適合於 (4), 則 $P_1(x_1, y_1)$ 在曲線上.

若 (7) 正確, 則從方程式 (5) 之第一式,得一 t_1 之値. 以 $x_1=at_1^2$ 代入 (7) 得 $y_1=a^2t_1^3$.

因此 x_1 及 y_1 即爲 (5) 而 P_1 在曲線上 (2, 例 1). 此證可應用於任何情形.

一曲線之參數方程式甚爲重要. 因有時以參數表一點之坐標而求一點之軌跡,較其他方法簡易而明顯.

例 3. **旋輪線.** 求一點 P 之軌跡之參數方程式, 此 P 點在沿 x 軸滾動之圓上.



解　取 O 爲原點,此點卽爲 P 在 x 軸上之切點. 設 a 爲圓之半徑,並指一變角 ABP 爲 θ, 則 (§ 10)

$$PC = a\sin\theta,\quad CB = a\cos\theta.$$

從定義　$$OA = AP\text{ 弧 } = a\theta.$$

因從弧度法定義,一圓之弧等於其半徑乘以其所對之角.

又從圖,若 (x, y) 爲 P 點之坐標,

則　$x = OD = OA - PC = a\theta - a\sin\theta,\ y = DP = AB - CB = a - a\cos\theta.$

$$\therefore \begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases} \tag{8}$$

此爲旋輪線之參數方程式.

討論.　1. 因若 $\theta = 0$, $x = y = 0$, 此旋輪線經過原點.

2. 此旋輪線對稱於 Y 軸 (§ 34 定理 IV 及 § 12, 4).

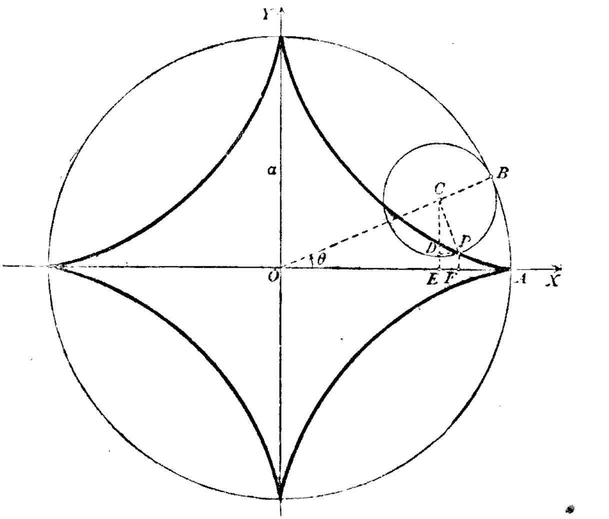
3. 在 X 軸上之截距爲 $2n\pi a$, 其中 n 爲任何正負整數或零.

因從方程式 (8) 之第二式, 若 $y=0$, $\cos\theta=1$. $\therefore\ \theta=2n\pi$; 再從(8)第一式 $x=a\cdot 2n\pi$.

4. 因 $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$，此旋輪線完全在二直線 $y=0$ 及 $y=2a$ 之間.

5. 此旋輪線向左右無限伸張，因以 $2n\pi+\theta$ 代 (8) 之 θ，y 不變而 x 增加 $2n\pi$，故此曲線含有等於 OMN 之各部 (與 § 38 例 2 比較).

例 4　**四歧點圓內旋輪線.**　一小圓在大圓內沿圓周滾動，而大圓半徑爲小圓半徑之四倍.在小圓上有一點 P，求 P 點軌跡之參數方程式.



解　以大圓中心爲原點，使 X 軸經過一點 A. 此 A 點卽爲小圓上 P 點切於大圓之切點. 命 $\angle AOB$ 爲 θ，則 $\angle BCP=4\theta$.

因從假設 PB 弧 $=AB$ 弧；又從 § 11 弧度法定義

$$PB\text{ 弧}=\frac{a}{4}\angle BCP,\quad AB\text{ 弧}=a\theta.\quad \therefore \frac{a}{4}\angle BCP=a\theta,\text{ 或 }\angle BCP=4\theta.$$

但
$$\angle OCE+\angle ECP+\angle PCB=\pi.$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{2}-\theta+\angle ECP+4\theta=\pi,$$

故 $$\angle ECP=\frac{\pi}{2}-3\theta.$$

於是 (§ 10) $$DC=CP\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)=\frac{a}{4}\sin 3\theta,$$ [從 § 12, 6]

$$DP=CP\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)=\frac{a}{4}\cos 3\theta,$$ [從 § 12, 6]

$$OE=OC\cos\theta=\frac{3a}{4}\cos\theta,$$

$$EC=OC\sin\theta=\frac{3a}{4}\sin\theta.$$

因此

(9) $$\begin{cases} x=OE+DP=\dfrac{3a}{4}\cos\theta+\dfrac{a}{4}\cos 3\theta. \\ y=EC-DC=\dfrac{3a}{4}\sin\theta-\dfrac{a}{4}\sin 3\theta. \end{cases}$$

但從 § 12 中之 8, 10, 14 及 3,

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,\ \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta.$$

代入 (9), 得

(10) $$x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta.$$

此卽爲**四歧點圓內旋輪線**之參數方程式.

討論. 1. 此四歧點圓內旋輪線不經過原點，因無 θ 之値可使 $\sin\theta=\cos\theta=0$.

2. 關於二軸及原點均爲對稱.

因若 $\theta=\theta_1$ 得曲線上一點 (x_1, y_1),

於是 $\theta=\pi-\theta_1$ 得曲線上一點 $(-x_1, y_1)$,

$\theta=\pi+\theta_1$ 得曲線上一點 $(-x_1, -y_1)$,

及 $\theta=2\pi-\theta_1$ 得曲線上一點 $(x_1, -y_1)$.

3. 二軸上之截距爲 $\pm a$.

因若 $\theta=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, 則 $x=0$ 及 $y=\pm a$ 或 $y=0, x=\pm a$.

4. x 及 y 之絕對値若大於 a, 曲線上無此點, 因 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 之絕對値不能大於 1.

5. 此四歧點圓內旋輪線爲一封閉曲線.

習　　題

1. 描寫並討論下列參數方程式,並求直角坐標系方程式以驗之.

(a) $x=\frac{2t-1}{t+2}, y=\frac{-t+3}{t+2}$.

(b) $x=4\cos\phi, y=2\sin\phi$.

(c) $x=4\sec\theta, y=4\tan\theta$.

(d) $x=t-3, y=\frac{1}{4}t^2$.

(e) $x=4t, y=\frac{2}{t}$.

(f) $x=3+2\cos\theta, y=2\sin\theta-1$.

(g) $x=t+4, y=\frac{1}{8}t^3$.

(h) $x=a\cos^3\theta, y=b\sin^3\theta$.

2. 求 (a) 四歧點圓內旋輪線 (例 4), (b) 旋輪線 (例 3) 之直角坐標系方程式.

答. (a) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; (b) $x=a\operatorname{vers}^{-1}\frac{y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}$, 其中 $\operatorname{vers}\theta=1-\cos\theta$,

或 $\theta=\operatorname{vers}^{-1}(1-\cos\theta)$.

3. 證分母相同之分式 $x=\frac{at+b}{ct+d}, y=\frac{et+f}{ct+d}$ 爲一直線之參數方程式. 解釋 t 之意義,若 (a) $c=d=1$, (b) $c=0$.

4. 若習題 3 中分式之分母不同,則該二分式爲等軸雙曲線或二垂直線之參數方程式.

5. 以離心角 ϕ 爲參數,求橢圓之參數方程式. 此離心角卽爲橢圓之長軸與輔圓上一點半徑之交角而此輔圓上之點與橢圓上一點有相同之橫坐標. 討論此方程式.

答. $x=a\cos\phi, y=b\sin\phi$.

提示. 應用 § 82, 總習題 10.

6. 若 $BQ=b$, 求半徑 BP (§ 102 例 3 之圖) 上一點 Q 之軌跡.

答. $\begin{cases} x=a\theta-b\sin\theta, \\ y=a-b\cos\theta. \end{cases}$ 視 b 大於或小於 a 而稱此軌跡爲長或短旋輪線.

7. 設一線環繞一圓,若將線拉緊,解開時求其端點之軌跡.

提示. 取圓之中心爲原點,使 X 軸經過 A 點,此 A 點卽爲線環繞時之端點. 若將線拉緊解開至 B, 設 $\angle AOB=\theta$.

答. 圓周漸伸線 $\begin{cases} x=r\cos\theta+r\theta\sin\theta, \\ y=r\sin\theta-r\theta\cos\theta. \end{cases}$

8. 一半徑 r 之圓在半徑 r' 之圓內沿其圓周滾動.求此動圓上一點之軌跡.

答.　圓內旋輪線 $\begin{cases} x=(r'-r)\cos\theta+r\cos\dfrac{r'-r}{r}\theta, \\ y=(r'-r)\sin\theta-r\sin\dfrac{r'-r}{r}\theta. \end{cases}$

θ 之選擇與例 4 同.

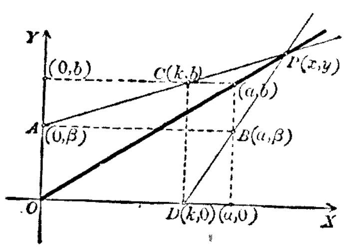
9. 一半徑 r 之圓在半徑 r' 之圓外沿其圓周滾動,求此動圓上一點之軌跡.

答.　圓外旋輪線 $\begin{cases} x=(r'+r)\cos\theta-r\cos\dfrac{r'+r}{r}\theta, \\ y=(r'+r)\sin\theta-r\sin\dfrac{r'+r}{r}\theta. \end{cases}$

θ 之選擇與例 4 同.

103.　曲線系交點之軌跡.　若二曲線系有同一參數,在參數爲同一數值時,此曲線系稱爲**對應曲線**.有許多軌跡爲曲線系交點之軌跡,其解法示之於下.

例 1.　一定直線 AB 平行於矩形之一邊,一動直線 CD 平行於他一邊.求 AC, BD 交點之軌跡.



解　以矩形之二邊爲軸,其二邊之長爲 a 及 b. 則其頂點爲 $(0,0)$ $(a,0)$, $(0,b)$ 及 (a,b).

若 $OA=\beta$ 及 $OD=k$. 則 A, B, C 及 D 之坐標各爲 $(0,\beta)$, (a,β), (k,b) 及 $(k,0)$. 因此 AC 及 BD 之方程式各爲 (§ 47 定理 VII)

(1)　$$(b-\beta)x-ky+\beta k=0.$$

(2)　$$\beta x+(k-a)y-\beta k=0$$

此二方程式表二直線系,且含有同一參數 k. 每一個 k 之值,得一組對應相交直線,其交點 $P(x,y)$ 在軌跡上.解 (1) 及 (2) 得 P 之坐標 (§ 37

規則)

$$(3)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{\alpha\beta k}{bk+\alpha\beta-ab}, \\ y=\dfrac{b\beta k}{bk+\alpha\beta-ab}. \end{cases}$$

此二方程式爲軌跡之參數方程式，其中以參數 k 表 x 及 y 之值. 此軌跡之方程式可將 k 消去而得之 (§ 102 例 2 之規則). 卽以 b 乘方程式 (3) 之第一式，a 乘第二式，相減得

$$(4)\qquad bx-ay=0.$$

此軌跡爲矩形之對角線，因此直線經過 $(0, 0)$ 及 (a, b) 二點 (§ 27 系)。

加 (1) 及 (2)，亦可得此方程式. 但若不易或不能消去其參數，則方程式 (3) 亦認爲滿足.

例 1 之解法可歸納成—

規則. 求二對應曲線系交點軌跡之方程式.

第一步. 以同一參數求二*曲線系所表軌跡之方程式.

第二步. 解曲線系方程式，以求參數所表之 x 及 y. 此卽爲軌跡之參數方程式.

第三步. 從參數方程式，求軌跡之方程式 (§ 102 例 2 規則).

若祇需要參數方程式，則第三步可略去.

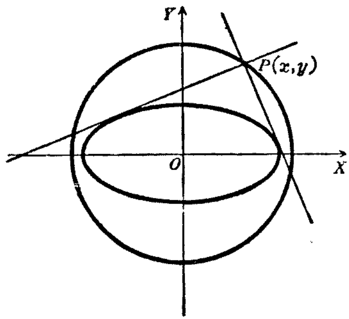
若祇需要直角坐標系方程式，則從第一步所得之方程式直接消去參數卽可. 因與從第二步所得之方程式消去參數，其結果相同.

例2. 橢圓 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ 之二切線互相垂直，求此二切線交點之軌跡.

解 第一步. 用斜率 t 所表之切線方程式爲 (§ 93 定理 II)

* 有時定義中祇含一曲線系，但經過軌跡諸點之第二曲線系常可求得.

(4) $$y = tx + \sqrt{a^2t^2 + b^2}.$$



垂直於(4)之切線,其斜率為(§22定理VI) $-\frac{1}{t}$; 因此其方程式為(§93定理II)

(5) $$y = -\frac{x}{t} + \sqrt{\frac{a^2}{t^2} + b^2}.$$

第二步. 因不需要參數方程式,此步可略去.

第三步. 從(4)及(5)消去 t, 可將該二式寫成下之形式

$$tx - y = -\sqrt{a^2t^2 + b^2},$$

$$x + ty = \sqrt{a^2 + b^2t^2}.$$

此二方程式平方之,得

$$t^2x^2 - 2\,txy + y^2 = a^2t^2 + b^2,$$

$$x^2 + 2\,txy + t^2y^2 = a^2 + b^2t^2.$$

相加, $$(1 + t^2)x^2 + (1 + t^2)y^2 = (1 + t^2)a^2 + (1 + t^2)b^2.$$

全式除以 $1 + t^2$ 得所求方程式

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

此軌跡為一圓,其中心即為橢圓之中心,其半徑為 $\sqrt{a^2 + b^2}$. 此圓稱為準圓.

習　題

1. (a) 拋物線, (b) 雙曲線 [§75 (VI)] 之二切線互相垂直, 求此二切線交點之軌跡.

答. (a) 準線; (b) $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

2. 自 (a) 橢圓, (b) 拋物線, (c) 雙曲線之焦點至切線作垂線, 求其垂足之軌跡.

答. (a) $x^2 + y^2 = a^2$; (b) $x = 0$; (c) $x^2 + y^2 = a^2$.

3. 二軸上各有一定點 A 及 B 且各有一動點 A' 及 B'，而 $OA'+OB'=OA+OB$. 求 AB' 及 $A'B$ 交點之軌跡. 答. $x+y=a+b$.

提示. 設 $OA=a$, $OB=b$ 及 $OA'=a+k$; 則 $OB'=b-k$.

4. 自等軸雙曲線之中心作切線上之垂線,求其垂足之軌跡.

答. 雙紐線（§ 61 例 2）$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

5. 自原點至圓 $x^2+y^2+2ax+a^2-b^2=0$ 之切線作垂線,求其垂足之軌跡.

答. 蚶線（§ 101 習題 11）$(x^2+y^2+ax)^2=b^2(x^2+y^2)$.

6. 在所設三角形中,作平行於底邊之一直線,成一梯形.求此梯形對角線交點之軌跡.

答. 三角形之中線.

7. 三角形中內接一矩形.求此矩形對角線交點之軌跡. 答. 底邊與高之中點之聯線.

8. 自橢圓之焦點作平行於共軛徑之二直線,求此二直線交點之軌跡. 答. 橢圓.

9. 自原點至拋物線 $y^2+4ax+4a^2=0$ 之切線作垂線,求垂足之軌跡.

答. 環索線 $y^2=x^2\dfrac{a+x}{a-x}$.

總 習 題

1. 求一圓中心之軌跡,此圓

(a) 有所設半徑及經過一已知點.

(b) 經過二已知點.

(c) 經過一已知點且切於一所設直線.

(d) 切於一所設圓及一所設直線.

(e) 切於一所設圓且經過一已知點.

2. 三角形之一邊固定,第二邊之長度一定,求第三邊中點之軌跡.

3. 一直線,長度不定,其兩端止於二直交線上.若此直線與直交線所成三角形之面積為一常數,求此直線中點之軌跡.

4. 一直線經過一定點 $P_1(x_1, y_1)$ 而止於二直交線上,求此直線中點之軌跡.

5. 一定直線之兩端各在一軸上移動,證 (a) 此直線上任一點之軌跡爲一橢圓; (b) 自原點至此直線作垂線,其垂足之軌跡爲四瓣玫瑰線 $\rho=a\sin 2\theta$.

6. 設 X 軸交圓 $x^2+y^2=a^2$ 於 A. 在圓上取一弧 AB, 此弧之長等於拋物線 $y^2=2px$ 上一點之橫坐標.聯半徑 OB, 延長之至一點 P 使 BP 等於該點之縱坐標.求證 P 點之軌跡爲拋物螺線 $(\rho-a)^2=2ap\theta$.

7. 自原點至拋物線 $y^2+8ax=0$ 之切線作垂線,其垂足之軌跡爲蔓葉線（§ 101 習題 10）.

8. 在 X 軸之負向線上有一定點 A, 經過 A 作一直線交 Y 軸於 B. 在 AB 上 B 點之兩方取 $BP=OB$. 求證 P 點之軌跡爲環索線 §103 習題 9).

9. 直角 ABC 之一邊經過一定點 D, 其第二邊上之一點 C 在定直線 EF 上移動, 自 D 至 EF 之距離等於 BC 之長, 求證 (a) BC 之中點描寫一蔓葉線 (§ 101 習題 10); (b) 頂點 B 描寫一環索線 (§ 103 習題 9).

第 十 二 章

普 遍 二 次 方 程 式

104. 若普遍二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

有一軌跡，此軌跡必為二次曲線或變態二次曲線（§ 80 定理 XIII）欲決定一軌跡之確實性質，須用坐標軸之變換以簡化方程式．此法頗繁，不便應用．本章目的在求簡便公式，以決定軌跡之確實性質．下列三式甚為重要．

$$\triangle=B^2-4AC,$$

$$H=A+C,$$

及

$$\Theta=4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FB^2.$$

105. **變態二次曲線之條件.**

導題 I. 若以坐標軸之變換而變換一二次方程式，則在及祇在原方程式之左端能分解因式時，新方程式之左端可分解因式．*

證 在坐標軸變換之方程式中［§ 68, (III)］，求新坐標或原坐標，所得方程式均為一次式．以此代入二次方程式中，若原方程式之左端可分解因式，則新方程式之左端亦能分解因式． *Q. E. D.*

* 若方程式之左端可寫為 x 及 y 一次式之二個因式相乘積（§ 9），則吾人稱此方程式之左端可分解因式．如 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 為可分解，而

$$x^2-y=(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})\text{ 為不可分解.}$$

導題 II. 在及祇在二次方程式之左端能分解因式時，其軌跡爲變態二次曲線.

證　從坐標軸之變換，二次方程式可化爲下列任一種形式：

(1) $$Ax^2 + Cy^2 + F = 0,\quad Cy^2 + Dx = 0,\quad Cy^2 + F = 0.$$

式中 A, C 及 D 皆異於零 (§ 80 定理 XIII)

方程式 (1) 第一式之軌跡在及祇在 $F = 0$ 時爲變態曲線，第二式之軌跡決不爲變態曲線，第三式之軌跡恆爲變態曲線.* 因此在及祇在二次方程式能化爲下列任一種形式時，其軌跡爲變態曲線：

(2) $$Ax^2 + Cy^2 = 0,\quad Cy^2 + F = 0.$$

此二方程式可改寫爲

$$(\sqrt{A}\,x + \sqrt{-C}\,y)(\sqrt{A}\,x - \sqrt{-C}\,y) = 0,$$

$$(\sqrt{C}\,y + \sqrt{-F})(\sqrt{C}\,y - \sqrt{-F}) = 0.$$

故方程式 (1) 如可分解因式，其形式必爲 (2)，

因此在及祇在此簡單方程式能分解因式時，其軌跡爲變態曲線. 又從導題 I 任何二次方程式之軌跡亦然. *Q. E. D.*

今再視方程式

(3) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

中，能使其左端可分解因式之係數條件.

將 (3) 依之 x 降冪排列，得

(4) $$Ax^2 + (By + D)x + Cy^2 + Ey + F = 0.$$

---

* 若 C 與 F 同號，方程式 $Cy^2 + F = 0$ 無軌跡. 但因與方程式 $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ 有區別，吾入常稱爲變態曲線. 蓋 $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ 中，若 $F \neq 0$，且 A, C 及 F 同號時亦無軌跡 (§ 80)，而前一方程式已有變態拋物線之形式 (§ 80 定理 XIII)，後一方程式則爲有心二次曲線之形式.

解 x (若 A 不爲零), (4) 之左端可以化爲 §3, (6) 之形式, 即

(5)

$$A\left(x-\frac{-(By+D)+\sqrt{(B^2-4AC)y^2+(2BD-4AE)y+D^2-4AF}}{2A}\right)$$

$$\left(x-\frac{-(By+D)-\sqrt{(B^2-4AC)y^2+(2BD-4AE)y+D^2-4AF}}{2A}\right).$$

在及祇在根號中 y 之二次式可化爲 §3, (7) 之第二形式時, 上二因式均爲 x 及 y 之一次式, 故須

(6) $$(2BD-4AE)^2-4(B^2-4AC)(D^2-4AF)=0.$$

去括弧, 全式以 $-16A$ 除之, 得

(7) $$4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FB^2=0.$$

(7) 之左端稱爲 (3) 之判別式, 恆以 Θ 代之. 因此在及祇在判別式爲零時, (3) 之左端可分解因式 (§ 105 導題 I 底註). 於是從導題 II 得

定理 I. 二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

之軌跡, 在及祇在其判別式

$$\boldsymbol{\Theta=4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FB^2}$$

等於零時爲變態曲線.

習　　題

1. 若 $A=0$, 則 $\Theta=BDE-CD^2-FB^2$. 求證在及祇在 $\Theta=0$ 時

$$Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

之軌跡爲變態曲線.

提示. 將所設方程式依 y 之降冪排列.

2. 若 $A=C=0$, 則 $\Theta=DE-FB$, 全式以 B 除之, 而假定 B 不爲零, 求證在及祇在 $\Theta=0$

時，

$$Bxy+Dx+Ey+F=0$$

之軌跡爲變態曲線.

提示. 若所設方程式可分解因式，其因式之形式爲

$$(A'x+B')(C'y+D')=0.$$

否則其乘積須含 x^2 或 y^2.

將因式乘出，求得與原方程式有同一軌跡之條件，且消去 A' B' C' 及 D'.

3. 下列諸方程式之軌跡，是否爲變態曲線?

(a) $x^2-2xy+y^2-2y-1=0$. 答. 常態.

(b) $x^2+2xy+y^2+x+y-2=0$. 答. 變態.

(c) $x^2+y^2-4x+2y+5=0$. 答. 變態.

(d) $x^2+xy+y^2+2x+3y-3=0$. 答. 常態.

(e) $xy+x-y+7=0$. 答. 常態.

(f) $x^2+2xy-y+3=0$. 答. 常態.

(g) $xy+2x-y-2=0$. 答. 變態.

4. 求 k 之實數值，而使下列諸方程式爲變態曲線.

(a) $kx^2+(1-k)y^2-(2+k)=0$. 答. $0, 1, -2$.

(b) $x^2+(1+k)y^2-4kx-16=0$. 答. -1.

(c) $xy+k(x^2-y^2)=0$. 答. 一切值.

5. 若 § 105 方程式 (3) 無軌跡，求其各種可能情形.

提示. 求 x, 應用 § 7 定理 III. 假定 A 爲正，且須注意根號中 y 二次式之判別式爲 $-16A\Theta$. 答. $\Theta>0,\ \Delta<0$; $\Theta=\Delta=0,\ D^2-4AF<0$.

106. 曲線系之變態二次曲線. 設有二個變態或常態二次曲線，

$$C_1: A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

及

$$C_2: A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

則方程式

$$(1)\qquad A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1 +k(A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0,$$

或

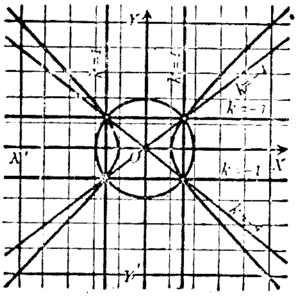
(2) $$(A_1+kA_2)x^2+(B_1+kB_2)xy+(C_1+kC_2)y^2$$
$$+(D_1+kD_2)x+(E_1+kE_2)y+(F_1+kF_2)=0,$$

表二次曲線系,式中 k 爲任意常數.

若 C_1 及 C_2 相交,此曲線系中諸曲線經過其交點.

證法與直線 (§ 54 定理 X III) 及圓 (§ 58 定理 IV) 之情形相同.

例 1. 求 k 之值,而使曲線系 $x^2+y^2-4+k(x^2-y^2-1)=0$. 爲變態曲線.



解 所設方程式可寫爲

(3) $$(1+k)x^2+(1-k)y^2-(4+k)=0$$

之形式,其判別式爲

$$\Theta=-4(1+k)(1-k)(4+k).$$

若(3)之軌跡爲變態曲線, 則(§ 105 定理 I)

$$\Theta=-4(1+k)(1-k)(4+k)=0.$$

$$\therefore\quad k=-1,\ 1,\text{ 或 }-4.$$

若 $k=-1$,　(3) 化爲 $2y^2-3=0$,　或 $y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

若 $k=1$,　(3) 化爲 $2x^2-5=0$,　或 $x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

若 $k=-4$,　(3) 化爲 $3x^2-5y^2=0$,　或 $y=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}\,x$.

每款爲一對直線之軌跡.

圖示圓 $x^2+y^2-4=0$, 雙曲線 $x^2-y^2-1=0$ 及三對直線.

定理 II. 任何二次曲線系之方程式, 如有 (1) 之形式, 至少有一個而至多有三個之變態二次曲線. 此變態曲線可由判別式 Θ 之根,即 k 之值,代入該曲線系之方程式而求得之.

證 (1)之判別式若等於零, 則爲 k 之三次方程式.

因 ⑧ 中每項爲方程式 (2) 之三個係數乘積．此乘積含有 k 之三次．

此三次方程式之根即爲使曲線系變爲變態曲線之 k 之值 (§ 105 定理 I).故 k 之值不能多於三個而使此軌跡爲變態曲線．

或有特殊情形，三次方程式之各項係數均爲零．如此，則 (2) 之軌跡在 k 爲任何值時均爲變態曲線 [見 § 105 習題 4 (c)].

二個或三個根可相等，因此 (1) 之軌跡可有二個或一個變態曲線．

二根或爲虛數，不可用．但至少有一實根，* 因此至少有一個 k 之實數值能使 (1) 之軌跡爲變態曲線． *Q. E. D.*

方程式 (1) 之曲線系，可照 C_1 及 C_2 公解之性質而分類．在代數學中，兩個二次方程式聯立，普遍言之，共有四組公解．因此可得下列五款：

1. 四組不同解答．
2. 二組相同，其餘二組不同．
3. 三組相同，第四組不同．
4. 二組相同，其餘二組亦同．
5. 四組皆同．

若四組解答皆爲實數，則上述五款有下述之幾何解釋．

1. C_1 及 C_2 有四交點，此曲線系之一切曲線均經過此四點．此款有三種變態曲線 [例 1 及習題 1 (a)].

2. C_1 及 C_2 切於一點及交於二點，此曲線系之一切曲線切於切點而經過二交點．此款有二種變態曲線 [習題 1 (b)].

3. C_1 及 C_2 切於一點及交於另一點，此曲線系之一切曲線均切於切點而經過一交點．此款祇有一種變態曲線 [習題 1 (c)].

4. C_1 及 C_2 切於二點，此曲線系之一切曲線均切於此二點．此款有二種變態曲線 [習題 1 (d)].

5. C_1 及 C_2 切於一點，此外無交點．此曲線系之一切曲線均切於此點，此款祇有一種變態曲線 [習題 1 (e)].

---

* 在代數學中，若方程式之係數爲實數，其虛根成對．故方程式之次數若爲奇數，至少有一實根．

習 題

1. 求 k 之值，而使下列曲線系變爲變態曲線，描寫 C_1, C_2 及變態曲線之圖象.

(a) $x^2+y^2-16+k(x^2+9y^2-36)=0.$ 答. $k=-1,\ -\frac{1}{9},\ -\frac{4}{9}.$

(b) $4x^2+y^2-16x+k(x^2+y^2-8x)=0.$ 答. $k=-2,\ -2,\ -1.$

(c) $x^2+2xy+2y^2+8x+8y+k(x^2+2y^2+8y)=0.$ 答. $k=-1,\ -1,\ -1.$

(d) $x^2+y^2-36+k(x^2+4y^2-36)=0.$ 答. $k=-1.\ -\frac{1}{4},\ -1.$

(e) $x^2+y^2-4x+k(4x^2+y^2-4x)=0.$ 答. $k=-1,\ -1,\ -1.$

2. 求習題 1 中 C_1 及 C_2 之交點.

答. (a) $(\frac{3}{2}\sqrt{6}\ \frac{1}{2}\sqrt{10})$, $(\frac{3}{2}\sqrt{6},\ -\frac{1}{2}\sqrt{10})$, $(-\frac{3}{2}\sqrt{6},\ \frac{1}{2}\sqrt{10})$, $(-\frac{3}{2}\sqrt{6},\ -\frac{1}{2}\sqrt{10})$.

(b) $(0,\ 0)$, $(0,\ 0)$, $(\frac{8}{3},\ \frac{8}{3}\sqrt{2})$, $(\frac{8}{3},\ -\frac{8}{3}\sqrt{2})$.

(c) $(0,\ -4)$, $(0,\ -4)$, $(0,\ -4)$, $(0,\ 0)$.

(d) $(6,\ 0)$, $(6,\ 0)$, $(-6,\ 0)$, $(-6,\ 0)$.

(e) $(0,\ 0)$ $(0,\ 0)$, $(0,\ 0)$, $(0,\ 0)$.

3. 討論下列二次曲線系.

(a) $x^2+y^2-16+k(x^2-4y^2+16)=0.$

(b) $x^2-2y+4+k(x^2+8y)=0.$

(c) $xy+8y+8+k(xy+8)=0.$

(d) $x^2+2y^2-8+k(x^2+y^2-4)=0.$

(e) $x^2+6y+9+k(x^2+6y)=0.$

(f) $y^2-4x+k(y^2+4x)=0.$

(g) $x^2-y^2+25+k(x^2+y^2)=0.$

(h) $x^2-y^2+k(x^2+y^2)=0.$

(i) $y^2-4x-16+k(x^2-y^2+8x+16)=0.$

(j) $x^2-y^2+k(x^2-4y^2-3)=0.$

107. 軸旋轉後之不變式.

導題 III. 若將二軸圍繞原點旋轉，而任一點之原坐標及新坐標各爲 (x, y) 及 (x', y')，則

$$x^2+y^2=x'^2+y'^2.$$

證　將軸轉過一 θ 角，命（§ 67 定理 II）

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{cases}$$

於是　$x^2+y^2 = (x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + (x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2$

$$= x'^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + y'^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= x'^2 + y'^2. \qquad [從 § 12\ 3]\quad Q.E.D.$$

此導題在幾何學中甚爲明顯，因 x^2+y^2 及 $x'^2+y'^2$ 各爲自一點至原點 [§ 21, (IV)] 用原坐標及新坐標所表距離之平方.

本章將論方程式

$$(2)\qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

若以 (1) 代入而不簡化其結果，則得下之形式

$$(3)\qquad A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0.$$

其常數項與上式相同（§ 71 定理 VI 系）.

再設二次曲線系方程式爲

$$(4)\qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F + k(x^2+y^2) = 0.$$

若將軸旋轉以 (1) 代入，此方程式化爲

$$(5)\qquad A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F + k(x'^2+y'^2) = 0.$$

因 (2) 之左端化爲 (3) 之左端，且由導題 III x^2+y^2 化爲 $x'^2+y'^2$.

命 (2), (3), (4) 及 (5) 之判別式各爲 Θ, Θ', Θ_1 及 Θ_1'. (4)之軌跡在及祇在（§ 104 定理 I）

$$\Theta_1 = 4(A+k)(C+k)F + BDE - (A+k)E^2 - (C+k)D^2 - FB^2 = 0,$$

或

$$(6)\qquad 4Fk^2 + (4AF + 4CF - E^2 - D^2)k + \Theta = 0^*$$

* 二次方程式可視爲有一無窮大根之三次方程式，其定理類似 § 8 定理 IV. $k=\infty$ 時，(4) 之軌跡爲 $x^2+y^2=0$，此卽爲二次曲線系之一變態曲線.

時爲變態曲線.

同樣, (5) 之軌跡爲變態曲線在及祇在

(7) $$4Fk^2+(4A'F+4C'F-E'^2-D'^2)k+\Theta'=0.$$

(6) 及 (7) 之根應相同.

因 (4) 及 (5) 爲同一二次曲線關於二組不同軸之方程式,故若一曲線爲變態曲線,則其餘一個亦然.

因 (6) 及 (7) 中 k^2 之係數相等,其餘各係數亦必相等, 故

(8) $$\Theta'=\Theta$$

及 $$4A'F+4C'F-E'^2-D'^2=4AF+4CF-E^2-D^2.$$

當軸變動時,含有 A, B, C, D, E 及 F 各係數之値若不變,則可稱爲普遍二次方程式在坐標變換時之**不變式**. 此定義吾人恆假定所得新坐標之方程式不以常數乘除而簡化. 若用新坐標之方程式簡化後而仍不變者稱爲**絕對不變式**. 因此從 (8) 得

定理 III. 二次方程式之判別式 Θ 在軸旋轉時爲不變式.

系. 此式 $\xi=4AF+4CF-E^2-D^2$ 在軸旋轉時爲不變式.

導題 IV. 將軸旋轉時,方程式

(9) $$Ax^2+Bxy+Cy^2+F=0$$

中含有 $A, B,$ 及 C 之不變式, 亦爲 (2) 之不變式.

證 以 (1) 代入 (9), 得

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+F=0,$$

式中 A', B' 及 C' 與 (3) 中者有同值.

因以 (1) 代入 $Ax^2+Bxy+Cy^2$ 祇得 x'^2, $x'y'$ 及 y'^2 之各項, 代入(2) 之 $Dx+Ey$, 祇得 x' 及 y' 之各項.

因此含有 A, B 及 C 之各式若爲 (9) 之不變式,必爲 (2) 之不變式.

Q. E. D.

定理 IV. 將軸旋轉時,二式

$$\triangle = B^2 - 4AC,\quad H = A + C$$

為二次方程式之不變式.

證　設曲線系

(10) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F + k(x^2 + y^2) = 0.$$

將軸旋轉,此方程式化為

(11) $$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + F + k(x'^2 + y'^2) = 0.$$

命 (10) 及 (11) 之判別式為 Θ_1 及 Θ_1', 則 (10) 之軌跡為變態曲線在及祇在

$$\Theta_1 = 4(A+k)(C+k)F - FB^2 = 0$$

或

(12) $$4k^2 + 4(A+C)k - (B^2 - 4AC) = 0.$$

同樣, (11) 之軌跡為變態曲線在及祇在

(13) $$\Theta_1' = 4k^2 + 4(A'+C')k - (B'^2 - 4A'C') = 0.$$

因 (10) 及 (11) 有同一軌跡. (12) 及 (13) 有同根,又因 (12) 及 (13) 中 k^2 之係數相等,其餘各係數亦必相等. 因此

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC,$$

及 $$A' + C' = A + C.$$ *Q. E. D.*

例 1.　將軸旋轉 $\frac{\pi}{4}$, 變換方程式 $x^2 + xy + x - 2y + 4 = 0$, 從所設及所求方程式計算 $\triangle$, H 及 Θ 之值.

解　在所設方程式中

$$A = 1,\ B = 1,\ C = 0,\ D = 1,\ E = -2,\ F = 4.$$

$$\therefore \quad H=1+0=1,\ \triangle=1^2-4\cdot1\cdot0=1,$$

$$\Theta=4\cdot1\cdot0\cdot4+1\cdot1(-2)-1(-2)^2-0\cdot1^2-4\cdot1^2=-10.$$

將軸旋轉命 (§ 67 定理 II)

$$x=x'\cos\frac{\pi}{4}-y'\sin\frac{\pi}{4}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=x'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

去括弧,但不去分母,得

(14) $$x'^2-x'y'-\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{3}{\sqrt{2}}y'+4=0.$$

此式中, $A=1,\ B=-1,\ C=0,\ D=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ E=-\frac{3}{\sqrt{2}}\ \ F=4.$

$$\therefore \quad \triangle=1,\ H=1,\ \Theta=-10$$

因此 $\triangle, H$ 及 Θ 之值不變.

若將 (14) 去分母得

$$\sqrt{2}\,x'^2-\sqrt{2}\,x'y'-x'-3y'+4\sqrt{2}=0.$$

從此方程式 $\triangle=2,\ H=\sqrt{2},\ \Theta=-20\sqrt{2}.$

因此 $\triangle, H$ 及 Θ 在軸旋轉時, 非絕對不變式.

定理 V. 在軸旋轉時,二式 $\frac{H^2}{\triangle}$ 及 $\frac{H^3}{\Theta}$ 爲二次方程式之絕對不變式.*

證 因 $\triangle, H$ 及 Θ 爲不變式,故原二式亦爲不變式. 今須證其爲絕對不變式, 當證其以常數 k 乘之, 其值亦不變. 以 k 乘

(15) $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

得

(16) $$kAx^2+kBxy+kCy^2+kDx+kEy+kF=0.$$

命 (16) 之不變式爲 $\triangle_k, H_k,$ 及 Θ_k. 則

* 待定理 VI 及 VII 證明後,此證法在軸平移時亦能適用.

(17) $$\triangle_k = k^2B^2 - 4\,kAkC = k^2(B^2 - 4\,AC) = k^2\triangle.$$

(18) $$H_k = kA + kC = k\,(A + C) = kH.$$

(19) $$\Theta_k = k^3(4\,ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2) = k^3\Theta.$$

以 (17) 除 (18) 之平方

$$\frac{\mathrm{H}_k{}^2}{\triangle_k} = \frac{\mathrm{H}^2}{\triangle}.$$

以 (19) 除 (18) 之立方

$$\frac{\mathrm{H}_k{}^3}{\Theta_k} = \frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}.$$

因此 $\dfrac{\mathrm{H}^2}{\triangle}$ 及 $\dfrac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$ 爲絕對不變式.　*Q. E. D.*

習　題

1. 計算 § 70 習題 2 中諸方程式及其答案之 $\dfrac{\mathrm{H}^2}{\triangle}$ 及 $\dfrac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$.

2. § 107, (3) 中 A', B' 及 C' 之値各爲 § 71, (4) 中 x'^2, $x'y'$ 及 y'^2 之係數，用 A, B 及 C 計算 $B'^2 - 4A'C'$ 及 $A' + C'$ 之値.

3. 將軸旋轉，證 $\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ 爲直線 $Ax + By + C = 0$ 之不變式.

4. 將軸旋轉，證 $\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ 爲直線 $Ax + By + C = 0$ 及一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之不變式.

5. 將軸旋轉，證 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 爲二點 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 之不變式.

6. 將軸旋轉，證 $\dfrac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}$ 爲二直線 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 及 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 之不變式.

7. 解釋習題 3 至 6 中不變式之幾何意義.

108. 軸平移後之不變式.

定理 VI. 將軸平移，二式

$$\triangle = B^2 - 4\,AC,\ \mathrm{H} = A + C$$

爲二次方程式之不變式.

證　若將軸平移,變換二次方程式,其係數 A, B 及 C 不變 (§ 71 定理 VII 之系 I). 因此含有此類文字之各式如 $\triangle$ 或 H, 均爲不變式.

Q. E. D.

導題 V.　若將軸平移至一點 (h, k), 任一點 P 之原坐標及新坐標各爲 (x, y) 及 $((x', y')$, 則

$$kx - hy = kx' - hy'.$$

證　將軸平移, 命 (§ 66 定理 I)

$$x = x' + h.\quad x = y' + k.$$

則
$$kx - hy = k(x' + h) - h(y' + k)$$
$$= kx' - hy'.$$
Q. E. D.

此導題在幾何學中甚爲明顯. $kx - hy$ 或 $kx' - hy'$ 爲三角形之面積, 其頂點爲 P 及新舊原點 [§ 24 VIII].

定理 VII.　方程式

(1)
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

若平移其軸, 而使

(2)
$$x = x' + h,\quad y = y' + k.$$

則其判別式 Θ 爲不變式.

證　設曲線系

(3)
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F + k'(kx - hy) = 0.$$

以 (2) 代入 (3),得

(4)
$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + D'x' + E'y' + F' + k'(kx' - hy') = 0.$$

方程式 (1) 可化爲下之形式 (§ 71 定理 VII 系 I)

(5)
$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

而 $kx - hy$ 化爲 $kx' - hy'$ (導題 V).

命 (1) 及 (5) 之判別式爲 Θ 及 Θ'; (3) 及 (4) 爲 Θ_1 及 Θ_1'. 若 (3) 之軌跡爲變態曲線 (§ 104 定理 I),

$$\Theta_1 = 4\,ACF + B(D+k'k)(E-k'h) - A(E-k'h)^2 - C(D+k'k)^2 - FB^2 = 0,$$

或

(6)　$(Bhk - Ah^2 - Ck^2)k'^2 + (BEk - BDh + 2\,AEh - 2\,CDk)k' + \Theta = 0.$

同樣, (4) 之軌跡爲變態曲線, 若

(7)　$(Bhk - Ah^2 - Ck^2)k'^2 + (BE'k - BD'h + 2\,AE'h - 2\,CD'k)k' + \Theta' = 0.$

因 (6) 及 (7) 同根, k'^2 之係數相等, 其餘係數必相等.

故　$$\Theta' = \Theta.$$　*Q. E. D.*

將軸旋轉及平移,其坐標必變換, 故定理 III, IV, VI 及 VII 可合成下之簡單定理.

定理 VIII.　若方程式

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

之坐標變換, 得新方程式

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

則　$$\triangle' = B'^2 - 4\,A'C' = B^2 - 4\,AC = \triangle,$$

$$\mathrm{H}' = A' + C' = A + C = \mathrm{H},$$

及　$$\Theta' = 4\,A'C'F' + B'D'E' - A'E'^2 - C'D'^2 - F'B'^2$$

$$= 4\,ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 = \Theta.$$

即坐標變換時,二次方程式之 $\triangle$, H 及 Θ 皆爲不變式.

習　　題

1. 計算 § 70 習題 1 中方程式及答案之 $\dfrac{\mathrm{H}^2}{\triangle}$ 及 $\dfrac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$.

2. 將軸平移，證 § 107 習題 4 至 6 之各式皆爲不變式，並用幾何意義解釋之.

3. 將軸平移並假定 $\triangle = \Theta = 0$，用直接代入法，證 ξ (§ 107 定理 III 之系) 爲不變式。

109. 二次方程式軌跡之性質. 由坐標之變換，方程式

(1) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

可化成* 下列任一種形式 (§ 80, 定理 XIII)

(I) $A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0$, 其中 $A' \neq 0$ 及 $C' \neq 0$;

(II) $C'y'^2 + D'x' = 0$, 其中 $C' \neq 0$ 及 $D' \neq 0$;

(III) $C'y'^2 + F' = 0$, 其中 $C' \neq 0$.

不變式之理論可使吾人決定原方程式可化爲何種形式，且不用變換坐標，而求其軌跡之正確性質.

若欲如此，須計算所設方程式 (1) 之 $\triangle$, H 及 Θ 之值. 今

(2) 由 (I), $\triangle' = -4A'C' \neq 0$, $\mathrm{H}' = A' + C'$, $\Theta' = 4A'C'F'$;

(3) 由 (II), $\triangle' = 0$, $\mathrm{H}' = C' \neq 0$, $\Theta' = -C'D'^2 \neq 0$;

(4) 由 (III), $\triangle' = 0$, $\mathrm{H}' = C' \neq 0$, $\Theta' = 0$.

但從定理 VIII, 在每一款中

(5) $$\triangle' = \triangle, \quad \mathrm{H}' = \mathrm{H}, \quad \Theta' = \Theta.$$

因此，若 $\triangle \neq 0$, (1) 可化爲 (I) 之形式;

若 $\triangle = 0$, 及 $\Theta \neq 0$, (1) 可化爲 (II) 之形式;

及 若 $\triangle = 0$, 及 $\Theta = 0$, (1) 可化爲 (III) 之形式.

上列三款，今分別論之.

第一款. $\triangle \neq 0$, 以 (2) 代入 (5), 得

(6) $$-4A'C' = \triangle,$$

(7) $$A' + C' = \mathrm{H},$$

* 化方程式時，不以常數乘除全式.

(8) $$4A'C'F'=\Theta.$$

橢圓類，$\triangle<0$.

從 (6)，若 $\triangle<0$, A' 及 C' 同號，此軌跡屬於橢圓類 (§ 80).

從 (8)，若 $\Theta\neq 0$，則 $F'\neq 0$，又若 H 及 Θ 異號時，此軌跡為橢圓，同號時無軌跡. 因從(7)，A' 及 C' 與 H 同號，從 (8) F' 與 Θ 同號.

從 (8)，若 $\Theta=0$，則 $F=0$，此軌跡為一點.

雙曲線類，$\triangle>0$.

從 (6)，若 $\triangle>0$, A' 及 C' 異號，此軌跡屬於雙曲線類 (§ 80).

從 (8)，若 $\Theta\neq 0$，則 $F'\neq 0$. 此軌跡為一雙曲線.

從 (8)，若 $\Theta=0$，則 $F=0$，此軌跡為相交二直線.

A', C' 及 F' 之值，可從 (6)，(7) 及 (8) 解得之.

第二款.　$\triangle=0$ 及 $\Theta\neq 0$. 此軌跡為拋物線 (§ 74).

以 (3) 代入 (5)，得 $C'=\mathrm{H}$ 及 $-C'D'^2=\Theta$，從此可求 C' 及 D' 之值。

第三款.　$\triangle=0$ 及 $\Theta=0$. 以 (4) 代入 (5) 得一方程式 $C'=\mathrm{H}$，此式不能用以比較 (III) 中 C' 及 F' 之符號. 但 $\xi=4AF+4CF-E^2-D^2$ 在軸旋轉時為不變式，且在 $\triangle=\Theta=0$ 時，ξ 在軸平移後亦不變.

因以 § 71 定理 VII (5) 中，D', E' 及 F' 之值代入

$$\xi'=4A'F'+4C'F'-E'^2-D'^2,$$

使 $A'=A$, $B'=B$, $C'=C$ (§ 71 定理 VII 系 I)，得

$$\xi'=(4CD-2BE)h+(4AE-2BD)k+\xi.$$

但若 $\triangle=\Theta=0$ 則從 § 104，(6) $2BD-4AE=0$. 全式乘以 B 再命 $B^2=4AC$ (從 $\triangle=0$ 得 $4ACD-2ABE=0$，或 $4CD-2BE=0$. 因此 $\xi'=\xi$.

從 (III) 得 $\xi'=4C'F'$，因此

$$4C'F'=\xi.$$

故 (§ 80 第二款)，若 $\xi<0$，此軌跡為二平行線;

若 $\xi=0$，此軌跡爲一直線；

若 $\xi>0$，無軌跡.

此節結果，可述之於

定理 IX. 方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

所表軌跡之性質，全視下列不變式之值：

$$\triangle=B^2-4AC,\quad \mathrm{H}=A+C,$$

$$\Theta=4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FB^2,$$

及
$$\xi=4AF+4CF-E^2-D^2.$$

今列成一表如下.

$\Theta\neq 0$ 二次曲線	$\triangle<0$	若 H 及 Θ 異號，橢圓. 若 H 及 Θ 同號，無軌跡.
	$\triangle=0$	拋物線
	$\triangle>0$	雙曲線
$\Theta=0$ 變態二次曲線	$\triangle<0$	一點
	$\triangle=0$	若 $\xi<0$，二平行線. 若 $\xi=0$，一直線. 若 $\xi>0$，無軌跡.
	$\triangle>0$	二相交直線.

習　題

1. 求下列諸軌跡之正確性質.

(a) $x^2+2xy+2y^2-6x-2y+9=0$. 答. 橢圓.

(b) $x^2-2xy+2y^2-4y+8=0$. 答. 無軌跡.

(c) $x^2+6xy+9y^2+2x-6y=0$. 答. 拋物線.

(d) $x^2-2xy-y^2+8x-6=0$. 答. 雙曲線.

(e) $4x^2+9y^2+4x+1=0$.　　答. 一點.

(f) $4x^2+4xy+y^2+4x+2y-48=0$.　　答. 二平行線.

(g) $4x^2-20xy+25y^2+12x-30y+9=0$.　　答. 一直線.

(h) $9x^2-12xy+4y^2-18x+12y+34=0$　　答. 無軌跡.

(i) $3x^2-10xy+7y^2+15x-7y-42=0$.　　答. 相交直線.

2 求下列諸二次曲線之 a^2, b^2 或 p 之值.

(a) $x^2-2xy+y^2-8x=0$.　　答. $p=\sqrt{2}$.

(b) $3x^2-10xy+3y^3-8=0$.　　答. $a^2=1$, $b^2=4$.

(c) $5x^2+2xy+5y^2-12x-12y=0$.　　答. $a^2=3$, $b^2=2$.

提示　計算所設方程式及 § 73 (III), § 74 (V) 與 (VI) 中一種之絕對不變式 $\frac{\mathrm{H}}{\triangle}$ 及 $\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$. 比較係數，解 a^2 及 b^2 或 p 之値。

3. 證 §109, (I) 中 A' 及 C' 爲二次式 $4x^2-4Hx-\triangle=0$ 之二根，且常爲實數. 何時可相等?

110. 相等二次曲線.　此節目的，在決定兩二次曲線之相等. 此二曲線之方程式爲已知. 如欲解此問題倘須應用更多之不變式定理.

定理 X.　常態有心二次曲線之方程式爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

其軸可以絕對不變式 $\frac{\mathrm{H}^2}{\triangle}$ 及 $\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$ 之値決定之.

證　有心二次曲線之方程式可化爲 [§ 75, (11)] 之形式，

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}=1.$$

此方程式之絕對不變式爲

$$\frac{\mathrm{H}'^2}{\triangle'}=\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2}{\frac{-4}{\alpha\beta}}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{-4\alpha\beta},\qquad \frac{\mathrm{H}'^3}{\Theta'}=\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^3}{\frac{-4}{\alpha\beta}}=\frac{(\alpha+\beta)^3}{-4\alpha^2\beta^2}.$$

因此 (§ 108 定理 VIII)

$$(1)\qquad \frac{(\alpha+\beta)^2}{-4\alpha\beta}=\frac{\mathrm{H}^2}{\triangle},\quad \frac{(\alpha+\beta)^3}{-4\alpha^2\beta^2}=\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta},$$

而 $\frac{\mathrm{H}^2}{\triangle}$ 及 $\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$ 爲已知．從此方程式可解 α 及 β，其軸之值可由 § 75 (11) 之 1 與 2 及軸之定義而決定之 (§ 75). *Q. E. D.*

方程式 (1) 可解之如下：

以第一式除第二式

$$(2)\qquad \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\triangle\mathrm{H}}{\Theta}.$$

以 (2) 除 (1) 之第一式

$$(3)\qquad \alpha+\beta=-\frac{4\mathrm{H}\Theta}{\triangle^2}.$$

以 (2) 除 (3)，
$$\alpha\beta=-\frac{4\Theta^2}{\triangle^3}.$$

於是由 § 3 定理 I, α 及 β 爲下列二次方程式之二根．

$$(4)\qquad x^2+\frac{4\mathrm{H}\Theta}{\triangle^2}x-\frac{4\Theta^2}{\triangle^3}=0 \text{ 或 } \triangle^3x^2+4\triangle\mathrm{H}\Theta x-4\Theta^2=0.$$

(4) 之根恆爲實數，因其判別式爲

$$\begin{aligned}(4\triangle\mathrm{H}\Theta)^2-4\triangle^3(-4\Theta^2)&=16\triangle^2\Theta^2(\mathrm{H}^2+\triangle)\\&=16\triangle^2\Theta^2(A^2+2AC+C^2+B^2-4AC)\\&=16\triangle^2\Theta^2[(A-C)^2+B^2],\end{aligned}$$

因係數 A, B, C, D, E 及 F 均爲實數，此式恆爲正．

定理 XI. 拋物線之方程式爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

其 p 之值，可以絕對不變式 $\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$ 之值決定之．

證 在拋物線 $y^2=2px$

中
$$\frac{\mathrm{H}'^3}{\Theta'}=\frac{1^3}{-4p^2}=-\frac{1}{4p^2}.$$

因此 (定理 VIII)

$$-\frac{1}{4p^2}=\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta},$$

故 $$p=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\Theta}{\mathrm{H}^3}}.\qquad Q.\ E.\ D.$$

因 p 常為實數，Θ 及 H 須異號．此可用 $\triangle=0$ 之條件從 Θ 及 H 之值證之．

定理 XII. 二個常態二次曲線

$$C\ :\ Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

及 $$C'\ :\ A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0$$

在及祇在 $$\frac{\mathrm{H}'^2}{\triangle'}=\frac{\mathrm{H}^2}{\triangle},\quad \frac{\mathrm{H}'^3}{\Theta'}=\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$$

時相等．

證　若此二個曲線為有心二次曲線，則在及祇在二軸相等時，二曲線相等．但 C 及 C' 之軸，各由 $\frac{\mathrm{H}^2}{\triangle}$ 與 $\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$ 及 $\frac{\mathrm{H}'^2}{\triangle'}$ 與 $\frac{\mathrm{H}'^3}{\Theta'}$ 決定之 (定理 X)．因此在及祇在

$$\frac{\mathrm{H}'^2}{\triangle'}=\frac{\mathrm{H}^2}{\triangle}\ \text{及}\ \frac{\mathrm{H}'^3}{\Theta'}=\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$$

時，二軸相等．

若 C 及 C' 為拋物線，則在及祇在有 p 之相同數值時，二曲線相等．即 (定理 XI) 在及祇在

$$\frac{\mathrm{H}'^3}{\Theta'}=\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$$

時相等．　　　　$Q.\ E.\ D.$

111. 五條件決定一二次曲線． 任何二次曲線之方程式有

(1) $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

之形式．若以第六個係數所表其餘五個之係數為已知，則此曲線可完全

決定.凡曲線所適合之幾何條件,可生一個或一個以上係數間之方程式.因此五條件可決定二次曲線之方程式.此軌跡或爲變態曲線,或無軌跡,若如此則五條件矛盾.

規則. 決定適合五條件之二次曲線方程式.

第一步. 假定二次曲線之方程式爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

第二步. 求各係數間之五個方程式,每一方程式表一所設條件.

第三步. 解聯立方程式,用第六個係數表其餘五個係數之值.

第四步. 以第三步之結果,代入第一步之方程式.全式以所餘之一個係數除之,即得所求方程式.

習 題

1. 證下列各對二次曲線相等,並決定其性質.

(a) $x^2-4y^2-2x-16y-14=0$, $3x^2+10xy+3y^2-2=0$.

(b) $9x^2+24xy+16y^2-80x+60y=0$, $x^2-2xy+y^2-4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y=0$.

(c) $x^2+y^2-2x-8y-8=0$, $x^2+y^2+6x-10y+9=0$.

(d) $2x^2+y^2-12x+10y+41=0$, $17x^2-12xy+22y^2-26=0$.

2. 求下列諸條件所決定之二次曲線方程式,並決定其性質.

(a) 經過 $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$, $(4,2)$, $(2,4)$. 答. $x^2-xy+y^2-2x-2y=0$.

(b) 經過 $(0,0)$, $(10,0)$, $(5,3)$ 並對稱於 X 軸. 答. $9x^2+25y^2-90x=0$

(c) 經過 $(-4,0)$, $(0,4)$, $(0,-4)$, $(5,6)$ 及 $\triangle=0$. 答. $y^2-4x-16=0$.

(d) 經過 $(0,5)$, $(5,0)$ 及對稱於二軸. 答. $x^2+y^2-25=0$.

(e) 經過 $(0,0)$, $(2,1)$, $(-2,4)$, $(-4,-2)$, $(2,-4)$ 答. $2x^2-3xy-2y^2=0$.

(f) 經過 $(0,2)$, $(-2,0)$, $(2,-8)$ 且對稱於原點. 答. $x^2+4xy+y^2-4=0$.

3. 經過四個所設點,普通言之,可作二個拋物線,試證之.

4. 求經過下列諸點之拋物線,並作其圖象.

(a) $(0,2)$, $(0,-2)$, $(4,0)$, $(-1,0)$. 答. $x^2\pm2xy+y^2-3x-4=0$.

(b) $(2,0)$, $(0,-8)$, $(-2,0)$, $(0,2)$. 答. $4x^2\pm4xy+y^2+6y-16=0$.

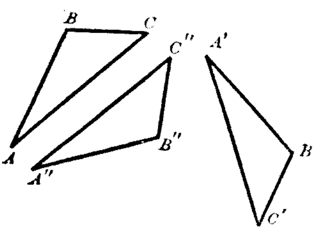
(c) $(0,1)$, $(0,-\frac{1}{2})$, $(2,0)$, $(-1,0)$. 答. $x^2\pm4xy+4y^2-x-2y-2=0$.

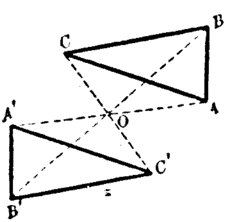
第 十 三 章

歐幾里得變換及相似二次曲線之應用

112. 用已知規律，將所設圖形換以第二圖形，此種運算稱爲**變換**．若變換時，第一圖形中各點換以第二圖形中各點則稱爲**點變換**．若以 $P'(x', y')$ 換 $P(x, y)$ 之點變換，用 x 及 y 表 x' 及 y' 或用 x' 及 y' 表 x 及 y 之方程式，稱爲**變換方程式**．本章將論一所設圖形換以一相等或相似圖形之變換．此種變換稱爲**歐幾里得變換**．因相等及相似圖形之性質在歐幾里得初等幾何學中已習讀之．

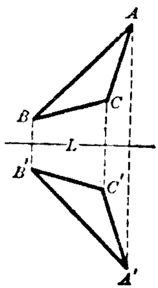
113. **相等圖形．** 二圖形之相當邊及相當角相等可使重合，則二圖形相等．在同一平面上之相等圖形，若各部之次序相同時稱爲**全等形**，相反時稱爲**對稱形**．如三角形 ABC 與 $A'B'C'$ 爲全等形，此二三角形與 $A''B''C''$ 爲對稱形，因前者各頂點間周圍之方向相同（與時針旋轉方向相同），後者相反．





平面幾何學中對稱圖形之解釋不與此相同．

吾人須注意二圖形關於一點或一直線對稱．從圖知二圖形若關於一點對稱爲全等形．若關於一直線對稱爲對稱形．



全等形與對稱形之區別爲：全等形

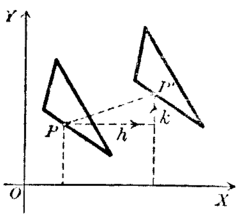
在平面上移動後可使重合．對稱形則須將一圖形從平面上取出反轉後始能重合．

114．平移． 若一圖形上之各點，依同方向同距離而移動，則此變換稱爲**平移**．因此若 P 點平移至 P' 則 PP' 在軸上之射影爲一常數．

定理 I． 以一有向長度平移，其在二軸上之射影各爲 h 及 k，則平移之方程式爲

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} x' = x + h, \\ y' = y + k. \end{cases}$$

證　從 § 20 定理 III，PP' 在二軸上之射影各爲



$$x' - x, \quad y' - y.$$

於是從假設

$$x' - x = h, \quad y' - y = k.$$

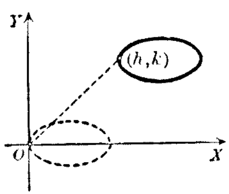
解 x' 及 y' 卽得 (I).　　　　$Q. E. D.$

若解 (I)，求 x 及 y，以此值代入曲線之方程式，卽得平移後之曲線方程式．

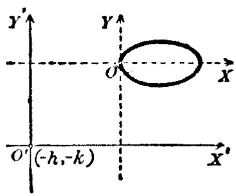
若 P 爲原點 $(0, 0)$ 則 P' 爲點 (h, k)．解 (I) 求 x 及 y，得

$$x = x' - h, \quad y = y' - k.$$

此二式可認爲將軸平移至新原點 $(-h, -k)$ 之平移公式 (§ 66 定理 I)．



(1)



(2)

新圖形與原軸之關係位置［圖 (1)］及原圖形與新軸之關係位置［圖 (2)］相同．
因此吾人可假定方程式 (1) 爲一圖形向一方平移或以軸向相反方向平移之方程式．

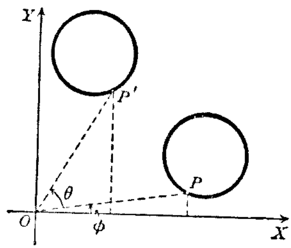
115．旋轉． 若各點圍繞一所設點 O 轉過一等角，則此變換稱爲

旋轉. O 稱爲**旋轉中心**. 若以 P 旋轉至 P', 則 $OP' = OP$.

定理 II. 圍繞原點旋轉一角 θ, 其旋轉方程式爲

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

證　設 P 點之極坐標爲 (ρ, ϕ), 則由定義 P' 之極坐標爲 $(\rho, \phi+\theta)$. 因此 (§ 62 定理 I)



$$x' = \rho\cos(\phi+\theta)$$

$$= \rho\cos\phi\cos\theta - \rho\sin\phi\sin\theta.$$

[§ 12, 10]

$$= x\cos\theta - y\sin\theta.$$

因 [§ 62, (I)]

$$x = \rho\cos\phi,\quad y = \rho\sin\phi.$$

同樣,

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \qquad Q.\ E.\ D.$$

若解 (II), 求 x 及 y, 得

$$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta = x'\cos(-\theta) - y'\sin(-\theta), \qquad [\text{從 § 12, 4}]$$

$$y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta = x'\sin(-\theta) + y'\cos(-\theta), \qquad [\text{從 § 12, 4}]$$

此可認爲 (§ 67 定理 II) 將軸轉過一角 $-\theta$ 之方程式, 因此吾人可假定方程式 (II) 爲一圖形向一方旋轉或將軸向相反方向旋轉之方程式. 此須用類似上列 (1), (2) 二圖之圖形表明之.

習　　題

1. 描寫下列諸曲線, 照所設有向長度之射影平移之, 並求曲線在新位置之方程式.

(a) $y^2 = 4x,\ h = -3,\ k = 2,$　　　答. $y^2 - 4x - 4y - 8 = 0,$

(b) $xy=6,\ h=2,\ k=-2.$ 答. $xy+2x-2y-2=0.$

(c) $x^2+9y^2=25,\ h=0,\ k=\frac{5}{3}.$ 答. $x^2+9y^2-30y=0.$

2. 描寫下列諸曲線,圍繞原點轉過一所設角,並求曲線在新位置之方程式.

(a) $xy=8,\ \theta=\frac{\pi}{4}.$ 答. $y^2-x^2=16.$

(b) $x^2+y^2-8x+12=0,\ \theta=\pi.$ 答. $x^2+y^2+8x+12=0$

(c) $x^2+4y^2-18x=0,\ \theta=-\frac{\pi}{2}.$ 答. $4x^2+y^2+18y=0.$

3. 平移一軌跡 $x^2+4y=0$ 其移動距離之射影為 $h=0,\ k=-4$, 再圍繞原點旋轉一角 $\frac{\pi}{2}$. 答. $y^2-4x+16=0.$

4. 將習題 3 中之曲線先旋轉一所設角而後平移之. 答. $y^2-4x+8y+16=0.$

5. 從方程式 (II) 證明旋轉後原點之位置不變,即原點為一定點.

6. 一直線,用 (1) 平移後,其位置不變,求此直線之方程式.

提示. 平移 $Ax+By+C=0$, 因二直線重合, 由 § 42 定理 III 決定 A, B 及 C 之値.

答. $kx-hy=0.$

7. 求圓之方程式, 此圓用 (II) 旋轉後, 其位置不變. 答. $x^2+y^2+F=0.$

8. 證明用 (II) 旋轉後,無一直線不變位置.

提示. 見習題 6 之提示, 並應用 § 43 定理 IV.

9. 用解析法證平移後,無一點不變位置,除非各點皆不變.

116. 置換. 若一圖形換以全等形,此種變換稱為**置換**.一圖形在平面上,可自一處遷移至他處 其遷移方法甚多.若以兩步置換將一圖形自第一位置移至第二同一位置,則此種置換可稱為**等效**.

導題 I. 置換與平移或旋轉而後平移等效.

證 設以圖形 F' 置換 F. 若 F 及 F' 之對應線互相平行, 且有相同方向, 則 F 可平移至 F'. 故此種置換與一平移等效.

若不如此, 則可以 F 旋轉至一位置 F'', 而使 F'' 及 F' 之對應線互相平行且有相同方向, 然後再以 F'' 平移至 F'. 故此種置換與旋轉而後平移等效. *Q. E. D.*

定理 III. 任何置換之方程式為

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + h, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + k. \end{cases}$$

式中 θ, h 及 k 皆爲任意常數.

證 設一圖形 F 置換以全等形 F',則由導題 I 此種置換與一平移等效,而此平移之方程式卽爲 (III) 之形式,惟其中 $\theta=0$ (§ 114 定理 I). 或亦與 F 旋轉至 F'' 而後以 F'' 平移至 F' 等效.

由定理 II, $x''=x\cos\theta-y\sin\theta,\quad y''=x\sin\theta+y\cos\theta,$

再由定理 I, $x'=x''+h,\quad y'=y''+k.$

以 x'' 及 y'' 之值代入方程式卽得 (III), *Q. E. D.*

若一點經變換後,位置不變,此點稱爲**不變點**或**定點**. 例如旋轉中心卽爲一定點.

定理 IV. 若置換不與平移等效,則有一定點.

證 一點 (x, y) 在 $x'=x$ 及 $y'=y$ 時,將爲一定點.以此代入(III)移項得

$$(1)\qquad \begin{cases} (1-\cos\theta)x+\sin\theta\cdot y=h, \\ -\sin\theta\cdot x+(1-\cos\theta)y=k. \end{cases}$$

此二方程式,普遍言之,可解得一組 x 及 y 之值 (§ 43 定理 IV), 因此可得一個及祇有一個定點.

但若 $$\frac{1-\cos\theta}{-\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta},$$

或簡化之 $$\cos\theta=1,$$

上二方程式無解,卽無定點. 若 $\cos\theta=1$, 則 $\sin\theta=0$ (§ 12, 3) 而方程式 (III) 可化爲 $x'=x+h,\quad y'=y+k,$

此卽爲平移之方程式。

因此有一定點，除非此置換爲一平移. *Q. E. D.*

(1)不能有無限組解答，除非 $h=k=0$. 因若

$$\frac{1-\cos\theta}{-\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{h}{k},$$

則 $\cos\theta=1$ 及 $\sin\theta=0$, 代入 (1) 得 $h=0$ 及 $k=0$. 在此情形任何點 (x, y) 皆爲定點，卽無置換.

定理 V. 任何置換，若不與平移等效，則與旋轉等效.

證 若此置換，不與平移等效，則有一定點 (定理 IV). 設此定點爲原點，則若 $x=0$ 及 $y=0$ 可得 $x'=0$, $y'=0$. 代入 (III) 得

$$h=0, \quad k=0.$$

此是原點爲定點之條件. 因此 h, k 之値，可使方程式 (III) 化爲 § 115, (II). 故此置換與旋轉等效. *Q. E. D.*

系 I. 任二全等形可由旋轉或平移使其重合.

系 II. 二全等形對應點聯線之垂直平分線均經過一點或互相平行.

因若用旋轉，可使二圖重合，其對應點聯線之垂直平分線均經過旋轉中心，又若用平移而使二圖重合，則其對應點聯線之垂直平分線均垂直於平移之方向.

習 題

1. 用解析法證經置換後，二直線之交角不變.

提示. 證 § 50 (X) 中 $\tan\theta$ 之値爲置換 (III) 之絕對不變式.

2. 用解析法證經置換後二點之距離不變.

提示. 證 § 21, (IV) 中 l 之値爲 (III) 之絕對不變式.

3. 以幾何方法證系 II 並從此推得定理 V.

4. 一圖形圍繞原點旋轉一角 π, 卽得該圖形關於原點之對稱圖形，試證之.

5. 求圍繞一點 (1, 4) 轉過一角 $\frac{\pi}{6}$ 之旋轉方程式.

答. $x'=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x-\frac{1}{2}y+3-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $y'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,y+\frac{7}{2}-2\sqrt{3}$.

6. 求圍繞一點 (3, −2) 轉過一角 $\frac{3\pi}{2}$ 之旋轉方程式.

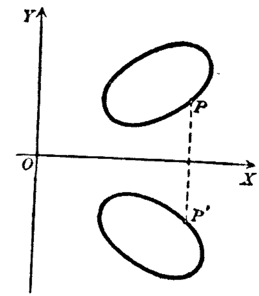
答. $x'=y+5$, $y'=-x+1$

7. 求圖繞一點 (x_1, y_1) 轉過一角 θ 之旋轉方程式。

答. $x' = (x - x_1)\cos\theta - (y - y_1)\sin\theta + x_1$,

$y' = (x - x_1)\sin\theta + (y - y_1)\cos\theta + y_1$.

117. 對於一直線之反映. 一圖形變換以對稱圖形（§ 113）稱爲**對稱變換**.最簡單之對稱變換爲**對於一直線之反映**，卽一點換以此點關於一直線之對稱點. 因此對於直線反映，卽爲一圖形換以該圖形關於一直線之對稱圖形。



定理 VI. 對於 X 軸反映之方程式爲

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y \end{cases}$$

118. 對稱變換.

導題 II. 對稱變換與對於任一直線之反映而後置換等效.

證 設一圖形 F 換以對稱圖形 F'. 若 F 對於一直線反映而成 F'', 則因 F' 及 F'' 均與 F 對稱, 故 F' 及 F'' 爲全等.

因 F' 及 F'' 之各部分均與 F 相等，故 F' 及 F'' 之各部分相等. 又 F' 及 F'' 之次序均與 F 相反，故 F' 及 F'' 之次序相同。

因此由置換可使 F'' 與 F' 重合, 卽 F 可對於一直線反映而後置換至 F'. *Q. E. D.*

定理 VII. 任何對稱變換之方程式其形式爲

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta + h, \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta + k. \end{cases}$$

式中 θ, h 及 k 皆爲常數

證 設任何圖形 F 換以對稱圖形 F'. 則由導題 II, 此變換與以 F 對

於 X 軸反映至 F''，再以 F'' 置換至 F' 等效.

由 (VI) $$x''=x \qquad y''=-y.$$

再由 § 116, (III)

$$x'=x''\cos\theta-y''\sin\theta+h \qquad y'=x''\sin\theta+y''\cos\theta+k.$$

以 x'' 及 y'' 代入此方程式卽得 (VII). *Q. E. D.*

定理 VIII. 一直線之方程式爲

$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0.$$

此直線可用 (VII) 變換爲另一直線，其方程式爲

$$x\cos(\theta-\omega)+y\sin(\theta-\omega)-[p+h\cos(\theta-\omega)+k\sin(\theta-\omega)]=0.$$

此定理證法祇須解 (VII) 求 x 及 y，代入所設方程式用 § 12 之 9 及 11 簡化之，去撇.

一直線經變換後仍爲其本身，則此直線稱爲**不變**.

定理 IX. 在對稱變換 (VII) 中，常有一直線不變，但若

$$h\cos\tfrac{1}{2}\theta+k\sin\tfrac{1}{2}\theta=0,$$

則垂直於該線之一切直線皆不變.

證 若定理 VIII 之直線重合，則 (§ 42 定理 III)

$$(1) \qquad \frac{\cos\omega}{\cos(\theta-\omega)}=\frac{\sin\omega}{\sin(\theta-\omega)}=\frac{p}{p+h\cos(\theta-\omega)+k\sin(\theta-\omega)}.$$

從前二比 $$\sin(\theta-\omega)\cos\omega-\cos(\theta-\omega)\sin\omega=0,$$

或 (§ 12, 9) $$\sin(\theta-2\omega)=0.$$

因此 $$\theta-2\omega=0 \text{ 或 } \pi.$$

$$\therefore \quad \omega=\tfrac{1}{2}\theta \text{ 或 } \omega=\tfrac{1}{2}\theta-\tfrac{1}{2}\pi.$$

第一款. $\omega=\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\pi$. 以此 ω 之值代入 (1) 之後二比，再由 § 12, 4 及 6, 簡化之，得

$$\frac{-\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}=\frac{p}{p-h\sin\frac{1}{2}\theta+k\cos\frac{1}{2}\theta}.$$

解 p,
$$p=\tfrac{1}{2}(h\sin\tfrac{1}{2}\theta-k\cos\tfrac{1}{2}\theta).$$

因此必有一對 ω 及 p 之值可使 (1) 正確，卽由 (VII) 之變換後常有一直線仍爲其本身.

第二款. $\omega=\frac{1}{2}\theta$. 以此 ω 之值代入 (1) 之後二比，得

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}=\frac{p}{p+h\cos\frac{1}{2}\theta+k\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

此二比之第一比值爲 1，但第二比值不能等於 1，除非

(2)
$$h\cos\tfrac{1}{2}\theta+k\sin\tfrac{1}{2}\theta=0.$$

若如此，則 p 可有任何數值. 因此，普遍言之，祇有一直線不變. 但若 (2) 亦爲適合，則一切平行線系皆不變.

因第一款及第二款中 ω 之值相差 $\frac{\pi}{2}$，故不變之平行線系與一個不變直線垂直. *Q. E. D.*

定理 X. 若對稱變換之不變直線爲 X 軸，則變換方程式爲

(X)
$$\begin{cases} x'=x+h, \\ y'=-y. \end{cases}$$

證　若 X 軸爲不變直線，則因 $y=0$, x 爲任何數值時 $y'=0$. 以 $y=0$ 及 $y'=0$ 代入方程式 (VII) 之第二式，得

$$x\sin\theta+k=0.$$

在及祇在 $\sin\theta=0$ 及 $k=0$ 時，不論 x 爲任何數值，上式恆能正確. 若 $\sin\theta=0$ 則 $\cos\theta=\pm1$.

以 $k=0$, $\sin\theta=0$, 及 $\cos\theta=1$ 代入 (VII) 得 (X).

以 $k=0$, $\sin\theta=0$, 及 $\cos\theta=-1$ 代入 (VII) 得

$$x' = -x + h, \quad y' = y.$$

此變換使平行於 X 軸之一切直線皆不變．因若 $y=a$，則 $y'=a$，因此 X 軸並非爲唯一之不變直線，故此類應除外；卽若 X 軸爲定理 IX 中第一款之不變直線，方程式 (VII) 可化爲 (X)　　　$Q. E. D.$

系 I.　對稱變換與對於一直線反映，或對於一直線反映而後平移至平行者等效．

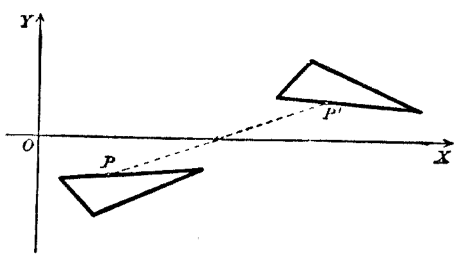
因若 $h=0$，方程式 (X) 化爲方程式 (VI)，

若 $h \neq 0$，方程式 (X) 與下列二變換等效

$$\begin{cases} x'' = x, \\ y'' = -y, \end{cases} \quad 及 \quad \begin{matrix} x' = x'' + h, \\ y' = y'', \end{matrix}$$

此卽對於 X 軸反映而後平移至與之平行．

系 II.　二對稱圖形對應點聯線之中點在一直線上．



因 (X) 爲對稱變換之方程式，$P'P'$ 之中點爲(§ 3)

$$[\tfrac{1}{2}(x+x'), \quad \tfrac{1}{2}(y+y')].$$

以 (X) 中 x' 及 y' 之值代入，上式可化爲 $(x+\frac{1}{2}h, 0)$ 此點在 X 軸上．

習　　題

1. 求下列諸曲線關於 X 軸對稱之曲線方程式，並作其圖象．

　(a) $y^2 - 4x = 0.$　　　(c) $x^2 + 4y^2 - 4x = 0.$

　(b) $x^2 + xy - 2y^2 = 0.$　　　(d) $x^3 - 8y = 0.$

2. 用解析法證二點間之距離不變，若 (a) 對於一直線反映，(b) 任何對稱變換.

3. 用解析法證一直線與他一直線交角之數值不變，若 (a) 對於一直線反映 b) 任何對稱變換，但此二款之符號均相反.

4. 求定理 IX 中所證之不變直線方程式.

5. 求對於 Y 軸反映之方程式.

6. 對於一直線反映後再對於垂直於該直線之直線反映，結果與旋轉一角 π 等效，試證之.

7. 一對稱變換 (VII)，普遍言之，無一定點，但若 $h(1+\cos\theta)+k\sin\theta=0$，則直線 $x(1-\cos\theta)-y\sin\theta=k$ 上任何點皆爲定點.

8. 若 $h(1+\cos\theta)+k\sin\theta=0$ 則 (VII) 爲對於一直線之反映.

9. 求對於直線 $3x+4y-10=0$ 之反映方程式.

答. $x'=\frac{7}{25}x-\frac{24}{25}y+\frac{12}{5},\ y'=-\frac{24}{25}x-\frac{7}{25}y+\frac{16}{5}$.

提示. 自直線至 $P(x, y)$ 及 $P'(x', y')$ 之距離 (§ 49 規則) 必相等而符號相反，PP' 之斜率 (§ 22 定理 V) 必等於所設直線斜率之負倒數 (§ 22 定理 VI). 從此二條件得二方程式. 解之，可用 x 及 y 表 x' 及 y' 之值.

10. 求對於直線 $5x-12y-27=0$ 之反映方程式

答. $x'=\frac{119}{169}x+\frac{120}{169}y+\frac{270}{169},\ y'=\frac{120}{169}x-\frac{119}{169}y-\frac{648}{169}$.

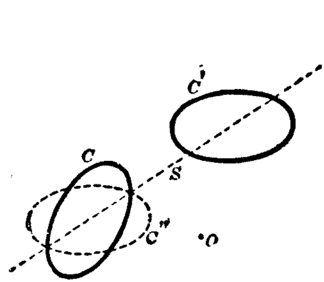
11. 求對於直線 $Ax+By+C=0$ 之反映方程式.

答. $x'=\frac{B^2-A^2}{A^2+B^2}x-\frac{2AB}{A^2+B^2}y-\frac{2AC}{A^2+B^2}$,

$y'=-\frac{2AB}{A^2+B^2}x-\frac{B^2-A^2}{A^2+B^2}y+\frac{2BC}{A^2+B^2}$.

119. 全等及對稱二次曲線. 兩二次曲線相等之條件在 § 110 定理 XII 中已知. 今將證

定理 XI. 二相等二次曲線爲全等及對稱.



證　因二次曲線關於主軸對稱(§ 72) 故對於軸之反映不變.

設 C 及 C' 爲兩全等二次曲線，假定 D 爲 C 變至 C' 之置換，則 C 可對於主

軸反映而後以置換 D 變至 C'，即 (§ 118 導題 II) 對稱變換．因此 C 及 C' 爲對稱．

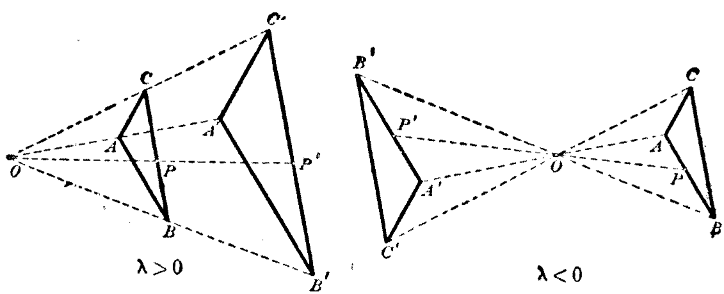
逆言之，設 C 及 C' 爲兩對稱二次曲線．假定 S 爲 C 變至 C' 之對稱變換，則 S 與以 C 對於主軸反映而後以置換 D 等效．因 C 對於主軸反映後不變，故可以置換 D 變至 C'，因此 C 及 C' 爲全等．

故二相等二次曲線爲全等及對稱． *Q. E D.*

圖中 C 可圍繞 O 點旋轉至 C'，或由一對稱變換 (§ 118 定理 X 系 I)，以 C 對於直線 S 反映至 C'' 而後依 S 之方向平移至 C'.

120. 同位相似變換． 設一定點 O，若一點 P 換以直線 OP 上一點 P' 而使

$$OP' = \lambda \cdot OP,$$



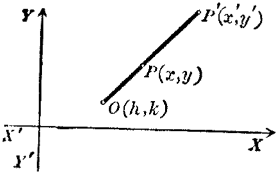
式中 λ 爲常數，則此變換稱爲**同位相似變換**．O 及 λ 各稱爲變換之中心及比．對應圖形稱爲**同位相似形**．用相似比 λ（即對應線之比）甚易證明二圖形相似．同位相似形且在相似位置．

定理 XII． 若中心爲 (h, k) 比爲 λ，則同位相似變換之方程式爲

$$\text{(XII)} \qquad \begin{cases} x' = \lambda x + h(1-\lambda), \\ y' = \lambda y + k(1-\lambda). \end{cases}$$

證 設 P 及 P' 爲二對應點，則由定義，

$$OP' = \lambda \cdot OP.$$



在 X 軸上之射影爲（§ 20定理 III）

$$x' - h = \lambda(x - h).$$

因此 $$x' = \lambda x + h(1 - \lambda).$$

同理 $$y' = \lambda y + k(1 - \lambda).$$ *Q. E. D.*

系. 若中心爲原點，比爲 λ，則同位相似變換之方程式爲

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y. \end{cases}$$

121. 相似變換. 若一圖形換以相似圖形，此種變換稱爲**相似變換**. 依對應圖形之**正**相似或**反**相似，即依相似圖形之對應部份之次序相同或相反而稱爲**正相似變換**或**反相似變換**.

若 F 及 F' 爲二相似圖形，其相似比爲 λ，則以任何點爲中心，比爲 λ，可使 F 同位相似變換至 F''，此 F'' 等於 F'. F'' 可置換或對稱變換至 F'，依 F' 及 F'' 爲全等或對稱，即依 F 及 F' 爲正相似或反相似而決定. 因此得

定理 XIII. 相似變換與一圖形以同位相似變換後依正相似或反相似而置換或對稱變換等效，其同位相似變換則以任何點爲中心，對應圖形之相似比爲比.

習　題

習題 1 至 4 及 5 至 10，均依次應用前題解之.

1. 正相似變換之方程式有下之形式

$$x' = \lambda(x \cos\theta - y \sin\theta + h), \quad y' = \lambda(x \sin\theta + y \cos\theta + k).$$

2. 正相似變換有一定點。

3. 若定點為原點，則正相似變換之方程式有下之形式

$$x'=\lambda(x\cos\theta-y\sin\theta),\quad y'=\lambda(x\sin\theta+y\cos\theta).$$

4. 正相似變換與用同一中心旋轉而後同位相似變換等效。

5. 反相似變換有下之形式

$$x'=\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta+h),\quad y'=\lambda(x\sin\theta-y\cos\theta+k).$$

6. 直線 $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$ 可用反相似變換變為直線

$$x\cos(\theta-\omega)+y\sin(\theta-\omega)-\lambda[p+h\cos(\theta-\omega)+k\sin(\theta-\omega)]=0.$$

7. 二垂直線

$$(1-\lambda)x\cos\tfrac{1}{2}\theta+(1-\lambda)y\sin\tfrac{1}{2}\theta-\lambda(h\cos\tfrac{1}{2}\theta+k\sin\tfrac{1}{2}\theta)=0$$

及

$$(1+\lambda)x\sin\tfrac{1}{2}\theta-(1+\lambda)y\cos\tfrac{1}{2}\theta-\lambda(h\sin\tfrac{1}{2}\theta-k\cos\tfrac{1}{2}\theta)=0$$

在反相似變換時不變。

8. 反相似變換有一定點。

9. 若以二不變直線為軸，則反相似變換方程式之形式為

$$x'=\lambda x,\quad y'=-\lambda y.$$

10. 反相似變換與對於一直線反映而後同位相似變換等效，其同位相似變換之中心在該直線上。

11. 二全等，對稱或相似曲線之方程式有相同次數。

12. 證一直線與他直線之交角，同位相似變換後，不變。

13. 證二點之距離，同位相似變換後，為原距離之 λ 倍。

14. 用習題 12 及 13 證同位相似變換即為相似變換。

15. 證一直線與他直線之交角，正相似變換後不變，但反相似變換後則反號。

122. 相似二次曲線. 吾人已知（§ 119 定理 XI）不需辨別二次曲線之全等及對稱，故不需辨別二次曲線為正相似及反相似。

定理 XIV. 若常態二次曲線

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

以原點為中心，λ 為比，同位相似變換，則同位相似曲線之方程式為

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+\lambda Dx+\lambda Ey+\lambda^2F=0$$

解變換方程式（§ 120 系）中之 x 及 y，代入所設方程式，化簡即可證明。

定理 XV. 若兩二次曲線 C 及 C' 爲同位相似變換，原點爲中心，λ 爲比，則

$$\text{(XV)}\qquad \frac{\mathrm{H}'^2}{\triangle'}=\frac{\mathrm{H}^2}{\triangle},\quad \frac{\mathrm{H}'^3}{\Theta'}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta},$$

式中 $\frac{\mathrm{H}'^2}{\triangle'}$ 與 $\frac{\mathrm{H}'^3}{\Theta'}$ 及 $\frac{\mathrm{H}^2}{\triangle}$ 與 $\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$ 各爲 C' 及 C 之絕對不變式.*

證　設 C 之方程式爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

由定理 XIV, C' 方程式之形式可書爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+\lambda Dx+\lambda Ey+\lambda^2F=0.$$

C' 之絕對不變式爲

$$\frac{\mathrm{H}'^2}{\triangle'}=\frac{(A+C)^2}{B^2-4AC}=\frac{\mathrm{H}^2}{\triangle},$$

$$\frac{\mathrm{H}'^3}{\Theta'}=\frac{(A+C)^3}{4AC\lambda^2F+B\lambda D\lambda E-A(\lambda E)^2-C(\lambda D)^2-\lambda^2FB^2}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}.\quad Q.E.D.$$

定理 XVI. 若二個常態二次曲線相似，則其絕對不變式及相似比 λ 適合於方程式 (XV). 反之，若兩二次曲線之絕對不變式適合於方程式 (XV) 之第一式，且從第二式所決定之 λ 爲實數，則 C 及 C' 爲以 λ 之比相似.

證　由 § 121 定理 XIII, 以原點爲中心，λ 爲比，C 可同位相似變換至 C'. 此卽以 C 變換至 C'', 而後以置換或對稱變換使 C'' 變至 C', 從定理 XV,

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{H}''^2}{\triangle''}=\frac{\mathrm{H}^2}{\triangle},\quad \frac{\mathrm{H}''^3}{\Theta''}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta};$$

* § 107 定理 V. $\triangle$, H 及 Θ 之値在 § 104 證明。

再由 § 110 定理 XII,

$$(2)\qquad \frac{H''^2}{\triangle''}=\frac{H'^2}{\triangle'},\quad \frac{H''^3}{\Theta''}=\frac{H'^3}{\Theta'}.$$

從方程式 (1) 及 (2) 可得方程式 (XV).

反之,若方程式 (XV) 可適合,第二式所決定 λ 之值爲實數,則 C 及 C' 相似. 因若 C 以原點爲中心,λ 爲比,* 同位相似變換至 C'',則由定理 XV,方程式 (1) 爲正確. 從 (1) 及 (XV) 得方程式 (2). 因此 (§ 110 定理 XII) C'' 及 C' 相等. 而 C'' 可用置換或對稱變換變至 C'. 故 C 可用同位相似變換而後置換或對稱變換至 C', 卽 (§ 121 定理 XIII) 用相似變換可使 C 變至 C'. 因此 C 及 C' 相似. *Q. E. D.*

系 I. 兩二次曲線可相似,若二次項之係數成比例,卽若

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

且方程式 (XV) 中第二式所決定 λ 之值爲實數.

若 r 爲其比值,則

$$A=rA',\ B=rB',\ C=rC'.$$

因此
$$\frac{H^2}{\triangle}=\frac{(rA'+rC')^2}{(rB')^2-4rA'rC'}=\frac{r^2(A'+C')^2}{r^2(B'^2-4A'C')}=\frac{H'^2}{\triangle'}.$$

故方程式 (XV) 中第一式可適合.

系 II. 任何二拋物線相似.

因若 C 及 C' 爲二拋物線,則 (§ 109 定理 IX)) $\triangle=0$ 及 $\triangle'=0$. 因此方程式 (XV) 中第一式可適合. 又因 $\triangle=0$, H 及 Θ 異號 (§ 11) 定理 XI) 且 H′ 及 Θ' 亦爲異號,故方程式 (XV) 中第二式之 λ 爲實數.

例 1. 證二次曲線 $x^2+2y^2=36$ 及 $3x^2+2xy+3y^2-6x-2y-5=0$

---

* 若從第二式所決定 λ 之值爲虛數,此證法不能繼續,因同位相似變換之比須爲實數.

此種情形可視二雙曲線 $4x^2-y^2=16$ 及 $-4x^2+y^2=4$, 其絕對不變式可適合於方程式 (XV); 但從第二式 $\lambda=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}$.

相似，並求其相似比．

解　計算所設方程式之絕對不變式，代入 (XV) 得

$$\frac{(6)^2}{-32}=\frac{(3)^2}{-8},\quad \frac{(6)^3}{-256}=\frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{(3)^3}{-288}.$$

解第二方程式，得 $\lambda=\pm\frac{1}{3}$．因此方程式 (XV) 之第一式可適合，且若 $\lambda=\pm\frac{1}{3}$，第二式亦可適合．故兩二次曲線相似，其相似比爲 $\pm\frac{1}{3}$．二重符號即示二曲線爲正相似或反相似．

習　　題

1. 證下列諸二次曲線相似，求每種之相似比，並作其圖象．

(a) $x^2-4y^2=1,\ 3x^2+4xy+4=0.$　答．$\lambda=\pm 2$.

(b) $x^2+4y=0,\ y^2-8x=0.$　答．$\lambda=\pm 2$

(c) $9x^2+y^2=9,\ x^2+9y^2-54y=0.$　答．$\lambda=\pm 3.$

(d) $16x^2+9y^2=144,\ 25x^2+14xy+25y^2=72.$　答．$\lambda=\pm\frac{1}{2}$．

(e) $x^2-y^2=a^2,\ 2xy=a'^2.$　答．$\lambda=\pm\frac{a'}{a}$．

(f) $y^2=2px,\ (x-h)^2=2p'(y-k).$　答．$\lambda=\pm\frac{p'}{p}$．

2. 證 § 82 例 1 中之橢圓相似．

3. 證不論 k 爲正或爲負，§ 82 例 2 中之雙曲線相似．

4. 軌跡 $Ax^2+Bxy+Cy^2=k$，普遍言之，爲相似雙曲線者，試證之．討論此敍述爲不正確之各種特例．

5. 任何同位相似變換與以原點爲中心之同位相似變換而後平移等效．

6. 用習題 4 證若兩二次曲線方程式中二次項之係數成比例，則兩曲線同位相似．

7. 以 $y^2=2px$ 變換爲 $y^2=2p'x$，求其同位相似變換之中心及比．

答．$(0,0),\ \lambda=\frac{p'}{p}$．

8. 以 $O(0,0)$ 爲中心，λ 爲比，同位相似變換後，再以 $O'(a,0)$ 爲中心，λ' 爲比，同位相似變換，其結果與以 OO' 上一點 $\left(\frac{a-a\lambda}{1-\lambda\lambda'},0\right)$ 爲中心，$\lambda\lambda'$ 爲比之同位相似變換等效．

9. 一圓可由兩次同位相似變換變爲另一圓，其同位相似變換之中心，卽圓之相似中心，在中心聯線上．

提示．取一圓之中心爲原點且使 X 軸經過第二圓之中心，以 § 120 XII 代入第一圓之

方程式.從其結果與第二圓重合,以決定 h, k 及 λ 之値.

10. 設三圓,一對圓之相似中心與第二對圓相似中心之聯線必經過第三對圓之相似中心.

提示. 應用習題 8.

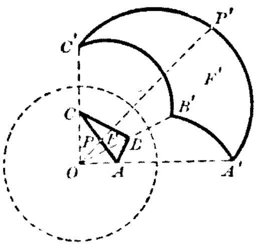
11. 三圓中兩兩之相似中心共六點,其中每三點成一直線,共在四直線上.

提示. 應用習題 10.

第十四章

反演變換

123. 定義. 設 O 爲已知點，P 爲圖形 F 上之任一點. 在 OP 上取一點 P' 使



$$OP' \cdot OP = 1.$$

若 P 在 F 上之各種不同位置時，P' 移動成一圖形 F'. 此種以 P' 換 P 之運算或變換稱爲**反演變換**，而 F 及 F' 稱爲**反演圖形**、O 稱爲**反演中心**或簡稱爲**反形**及**反心**.

此圖作法正確，並示三角形之反演圖形爲三曲線所包圍之部分，因此反演圖形之性質，普通言之，與相等或相似圖形迥異.

反演變換之二種重要性質，自定義中卽可得之.

1. 若 P 接近於原點，則 P_1 漸至無窮遠. 反之亦然.

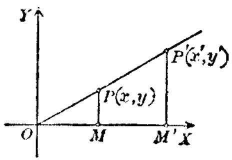
因 $OP' \cdot OP = 1$，若 OP 接近於零，則 OP' 必變爲無限大. 反之亦然.

2. 以 O 爲中心，單位半徑所作之圓上各點皆爲定點.

因若 $OP=1$，則從 $OP' \cdot OP = 1$ 得 $OP'=1$ 因此 P' 與 P 重合，卽 P 爲定點. 此於作反演圖形時，甚有用處. 因圖中交於圓上之各點皆爲反演圖形中之點.

124. 反演變換之方程式. 反演變換之方程式卽爲含二對應點 P 及 P' 坐標之方程式. 此二方程式須合二條件：

1. P 及 P' 在經過中心之直線上.



2. $OP' \cdot OP = 1$.

當三角形 OPM 及 $OP'M'$ 相似時，第一條件可適合．故

(1) $$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{OP}{OP'}.$$

全式以 OP'^2 除之，第二條件可寫為

(2) $$\frac{OP}{OP'} = \frac{1}{OP'^2} = \frac{1}{x'^2 + y'^2}.$$ [從 § 21, (IV)]

從 (1) 及 (2) $$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{x'^2 + y'^2}.$$

$$\therefore \quad x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

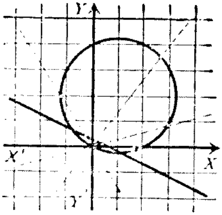
因此得

定理 I. 若以原點為反演中心，反演變換之方程式為

(I) $$\boldsymbol{x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.}$$

例 1. 求直線 $2x + 4y - 1 = 0$ 之反曲線．

解 以 (I) 中 x 及 y 之值代入所設方程式，得



$$\frac{2x'}{x'^2 + y'^2} + \frac{4y'}{x'^2 + y'^2} - 1 = 0.$$

化簡及去撇，得

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

此為圓之方程式，其中心為 $(1, 2)$ 半徑為 $\sqrt{5}$ (§ 56 定理 I)．圖中虛線上各點皆為反點．

例 2. 求直線 $Ax + By + C = 0$ 之反曲線．

解　以(I)中 x 及 y 之值代入所設方程式,得

$$\frac{Ax'}{x'^2+y'^2}+\frac{By'}{x'^2+y'^2}+C=0.$$

化簡及去撇,　　$Cx^2+Cy^2+Ax+By=0.$

此方程式之軌跡爲一圓(§ 56 定理 II),此圓經過原點(§ 35 定理 VI).若 $C=0$,此軌跡爲所設直線,因此

不經過原點之直線其反曲線爲一圓,經過原點之直線其反曲線不變(仍爲原直線).

例 3.　求圓 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 之反曲線.

解　以(I)代入,得

$$\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2)^2}+\frac{y'^2}{(x'^2+y'^2)^2}+\frac{Dx'}{x'^2+y'^2}+\frac{Ey'}{x'^2+y'^2}+F=0.$$

全式乘以 $x'^2+y'^2$ 且去撇,得

(3)　$$Fx^2+Fy^2+Dx+Ey+1=0.$$

此軌跡爲一圓(§ 56 定理II),若 $F=0$,(3)爲一次方程式,其軌跡爲一直線(§ 42 定理 II).因此

一圓之反曲線,普遍言之,仍爲一圓,但若此圓經過原點,其反曲線爲一直線.

習　題

1.　若以原點爲反心,求下列諸曲線之反曲線,並作每種之圖象.

(a) $2x=1$.

(b) $4y=1$.

(c) $x+y-1=0$.

(d) $x^2+y^2-4x=0$.

(e) $x^2+y^2=4$.

(f) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$.

(g) $x^2+y^2+4x-6y-4=0$.

(h) $3x-4y=0$.

(i) $x^2-y^2=0$.

(j) $4x-3y=1$.

(k) $x^2+y^2+2y=0$. (l) $y^2=4x$.

2. 求 $(0, 2)$, $(3, 0)$, $(3, 4)$, $(2, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$, $(a, 0)$ 及 $(0,b)$ 之反點．作上列各點及其反點之位置．

3. 用 (I) 證單位圓上各點皆爲定點．

4. 若一圓以原點爲反心之反曲線不變，求其方程式． 答． $x^2+y^2+Dx+Ey+1=0$.

5. 圓心之反點，普遍言之，不爲反圓之中心，試證之．

6. 在例 2 中所得之圓心，在自原點至所設直線所作之垂線上，試證之．

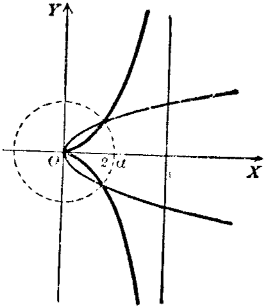
7. 若以圓心爲反心，此圓之反曲線爲一同心圓，試證之．

125. 錐線之反演變換． 此節將論錐線之反曲線，此類曲線已述於第十一章中．

定理 II. 若以拋物線之頂點爲反心，則拋物線之反曲線爲蔓葉線．

證 若拋物線之頂點爲原點，其方程式爲

$$y^2=2px.$$



於是從 § 124 (I)

$$\frac{y'^2}{(x'^2+y'^2)^2}=\frac{2px'}{x'^2+y'^2}.$$

化簡，去撇，

$$x^3=y^2\left(\frac{1}{2p}-x\right).$$

此爲歧點蔓葉線 (§ 101 習題 10). 若以 $2a$ 代 $\frac{1}{2p}$，即得普通所得之方程式，

$$x^3=y^2(2a-x). \tag{1}$$

Q. E. D.

普遍討論，(§ 36) 可得下列蔓葉線之性質．

1. 蔓葉線經過原點 (§ 35 定理 VI).

2. 關於 X 軸爲對稱 (§ 34 定理 V).

3. 在二軸上之截距爲零 (§ 35 規則).

4. 蔓葉線完全在 Y 軸及直線 $x=2a$ 之間.

因解 (1) 求 y,

(2) $$y=\pm\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}.$$

若 x 爲負,則分子爲負,分母爲正;若 $x>2a$,則分子爲正,分母爲負.此二種之分式爲負故 y 爲虛數.

5. 蔓葉線自 X 軸漸至無窮遠且接近於直線 $x=2a$.

若 x 接近於 $2a$, (2) 之分式漸漸增加而至無限.

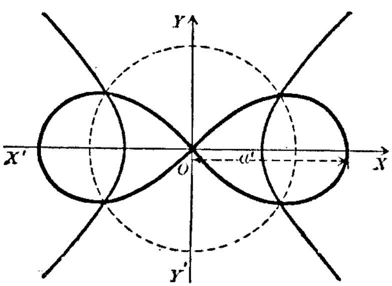
再以 (1) 變爲極坐標,得

$$\rho=2a\sin\theta\tan\theta.$$

此爲蔓葉線之極坐標方程式;因此,若 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$, $\rho=\infty$.

定理 III. 若以雙曲線之中心爲反心,等軸雙曲線之反形爲雙紐線.

證　等軸雙曲線之方程式爲 (§ 75 定理 VI)



$$x^2-y^2=a^2.$$

其反曲線方程式爲 [從 § 124 (I)]

$$\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2)^2}-\frac{y'^2}{(x'^2+y'^2)^2}=a^2.$$

化簡,去撇,

$$(x^2+y^2)^2=\frac{1}{a^2}(x^2-y^2).$$

此軌跡爲 Bernoulli 雙紐線 [§ 100 習題 1 (g)] 及 [§ 103 習題 4]. 以 a'^2 代 $\frac{1}{a^2}$ 得普通所設之方程式

(3) $$(x^2+y^2)^2=a'^2(x^2-y^2).\qquad Q.\ E.\ D.$$

雙紐線之極坐標方程式已在 § 61 例 2 中討論.從 (3) 知此雙紐線關於二軸及原點爲對稱 (§ 34 定理 V).

圖中 $a<1$, 及 $a'>1$. 若 $a=a'=1$, 此雙紐線與雙曲線之頂點相切. 若 $a>1$, 及 $a'<1$. 此二曲線不相交.

定理 IV. 若以雙曲線之一頂點爲反心,等軸雙曲線之反曲線爲環索線.

證 若原點在等軸雙曲線之右端頂點上,其方程式爲

$$x^2 - y^2 + 2\,ax = 0.$$

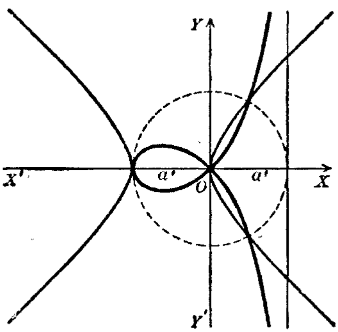
此從 $x^2 - y^2 = a^2$ 得之,祇須以 (§ 66 定理 I) $x = x' + a$, $y = y'$ 代入後,去撇.

從 § 124, (I), 反曲線爲

$$\frac{x'^2}{(x'^2+y'^2)^2} - \frac{y'^2}{(x'^2+y'^2)^2} + \frac{2ax'}{x'^2+y'^2} = 0.$$

化簡,去撇.

$$x(x^2+y^2) + \frac{1}{2a}(x^2-y^2) = 0.$$



此方程式之軌跡爲環索線(§ 103 習題 9). 以 a' 代 $\frac{1}{2a}$, 求 y^2, 得普通所得之方程式

$$y^2 = x^2\,\frac{a' + x}{a' - x}. \tag{4}$$

Q. E. D.

圖中 $a' = 2a = 1$. 若 $a' > 1$ 及 $2\,a < 1$. 則雙曲線之左支交環索線之環. 若 $a' < 1$ 及 $2a > 1$, 則雙曲線之左支與環索線不相交.

(4) 之普遍討論,得下列環索線之性質.

1. 此環索線經過原點 (§ 35 定理 VI).

2. 關於 X 軸爲對稱.

3 截距爲 $y = 0$ 或 0 及 $x = -a'$, 0 或 0. 因此環索線經過原點兩次.

4. 此環索線完全在 $x = a'$ 及 $x = -a'$ 之間.

因,解 (4), 求 y,

(5) $$y=\pm x\sqrt{\frac{a'+x}{a'-x}}=\pm\frac{x}{a'-x}\sqrt{a'^2-x^2}.$$

若 x 之值不在二根之間，根號中之二次式爲負（§ 7 定理 III）故 y 之值爲虛數。

5. 此環索線自 X 軸漸至無窮遠，且接近於 $x=a'$.

因從 5)，x 接近於 a' 時，y 變爲無限大。

定理 V. 若以二次曲線之焦點爲反心，則二次曲線之反曲線爲蚶線。

證　若焦點爲原點，二次曲線之方程式爲（§ 73 定理 II）

$$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0.$$

以 § 124 (I) 代入，反曲線之方程式爲

$$\frac{(1-e^2)x'^2}{(x'^2+y'^2)^2}+\frac{y'^2}{(x'^2+y'^2)^2}-\frac{2e^2px'}{x'^2+y'^2}-e^2p^2=0.$$

去分母，移項，去撇，

$$e^2p^2(x^2+y^2)^2+2e^2px(x^2+y^2)=(1-e^2)x^2+y^2.$$

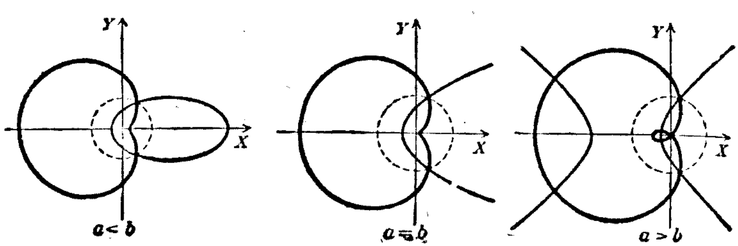
兩邊各加以 e^2x^2，再以 e^2p^2 除之，

$$\left(x^2+y^2+\frac{1}{p}x\right)^2=\frac{1}{e^2p^2}(x^2+y^2).$$

此方程式之軌跡爲蚶線（§ 101 習題 11）. 若命 $\frac{1}{p}=a$ 及 $\frac{1}{e^2p^2}=b^2$. 得普通所得之方程式

(6) $$(x^2+y^2+ax)^2=b^2(x^2+y^2).\qquad Q.\ E.\ D.$$

依照二次曲線之三種形式，a 小於，等於或大於 b 可得三種不同之蚶線。若 $a=b$，此蚶線



$a<b$　　$a=b$　　$a>b$

稱爲心臟線(§ 64, 例 2).

(6) 之普遍討論得下列蚶線之性質.

1. 蚶線經過原點(§ 35 定理 VI).

2. 關於 X 軸爲對稱(§ 34 定理 V).

3 其截距爲 $x=0, 0, -a-b, -a+b$ 及 $y=0, 0, b$ 及 $-b$. 因此蚶線經過原點兩次.

4. 蚶線爲封閉曲線.

因變換爲極坐標方程式,(6) 化爲(§ 62 定理 I)

$$(\rho^2+a\rho\cos\theta)^2=b^2\rho^2.$$

求 ρ

$$\rho=b-a\cos\theta.$$

因 $-1\leqq\cos\theta\leqq1$, ρ 不能變爲無窮大.

習 題

1. 作下列諸曲線,求其反曲線之方程式,並討論,描寫其軌跡.

(a) $y^2=x$, $y^2=8x$ $x^2=4y$.

(b) $x^2-y^2=4$, $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=\frac{1}{4}$, $2xy=1$.

(c) $x^2-y^2+\sqrt{2}x=0$, $x^2-y^2+x=0$, $x^2-y^2+4x=0$.

(d) $3x^2+4y^2-4x=4$, $y^2-4x=16$, $3x^2-y^2+16x+16=0$.

2. 求雙曲線 $3rx^2-ry^2+2x=0$ 之反曲線,並討論其性質.

答. Mac'aurin 分角線 $x(x^2+y^2)=\frac{r}{2}(y^2-3x^2)$.

3. 證 (a) 蔓葉線之反形爲拋物線;

(b) 雙紐線之反形爲等軸雙曲線;

(c) 環索線之反形爲等軸雙曲線;

(d) 若原點爲反心,蚶線之反形爲二次曲線.

4. 用解析法及幾何方法證若曲線 C 反演爲 C', 則 C' 反演爲 C.

5. 二次方程式之軌跡,普遍言之,其反曲線爲四次方程式.四次項中 x 及 y 之組織如何? 若所設軌跡經過原點,其反曲線方程式之次數如何?

126. 二圓之交角. 若自二圓之交點,作二半徑,則因自該點所作之切線各與二半徑垂直,其半徑之交角與切線之交角相等.圖中 θ 即爲二

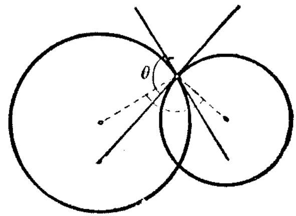
圓之交角.

定理 VI. 二相交圓

$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

及 $C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

之交角 θ, 有下之公式

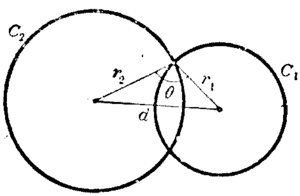


(VI) $$\cos\theta=\frac{D_1D_2+E_1E_2-2F_1-2F_2}{\sqrt{D_1^2+E_1^2-4F_1}\ \sqrt{D_2^2+E_2^2-4F_2}}.$$

證　從定義, θ 等於二圓交點上所作二半徑之交角. 因此從圖及 § 12, 17 得

(1) $$\cos\theta=\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2},$$

式中 r_1 及 r_2 各爲 C_1 及 C_2 之半徑, d 爲二圓中心聯線之長度. 從 § 56, 定理 I,



$$r_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{D_1^2+E_1^2-4F_1},$$

$$r_2=\tfrac{1}{2}\sqrt{D_2^2+E_2^2-4F_2},$$

而 C_1 及 C_2 之中心各爲

$$\left(-\frac{D_1}{2},-\frac{E_1}{2}\right)\text{ 及 }\left(-\frac{D_2}{2},-\frac{E_2}{2}\right).$$

因此 [由 § 21 (IV)]

$$d=\sqrt{\left(\frac{D_2}{2}-\frac{D_1}{2}\right)^2+\left(\frac{E_2}{2}-\frac{E_1}{2}\right)^2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{(D_2-D_1)^2+(E_2-E_1)^2}.$$

代入 (1) 化簡, 得 (VI). *Q. E. D.*

系. 若 $D_1D_2+E_1E_2-2F_1-2F_2=0$ 則 C_1 及 C_2 爲正交圓.

127. 反演變換後角不變.

定理 VII. 二圓之交角等於其反圓之交角.

證 設二圓之方程式為

$$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

及
$$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0,$$

則反圓之方程式各為 [§ 124, (3)]

$$C_1': x^2+y^2+\frac{D_1}{F_1}x+\frac{E_1}{F_1}y+\frac{1}{F_1}=0$$

及
$$C_2': x^2+y^2+\frac{D_2}{F_2}x+\frac{E_2}{F_2}y+\frac{1}{F_2}=0.$$

由定理 VI, C'_1 及 C'_2 之交角為

$$\cos\theta'=\frac{\frac{D_1D_2}{F_1F_2}+\frac{E_1E_2}{F_1F_2}-\frac{2}{F_1}-\frac{2}{F_2}}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{F_1}\right)^2+\left(\frac{E_1}{F_1}\right)^2-\frac{4}{F_1}}\sqrt{\left(\frac{D_2}{F_2}\right)^2+\left(\frac{E_2}{F_2}\right)^2-\frac{4}{F_2}}}$$

$$=\frac{D_1D_2+E_1E_2-2F_1-2F_2}{\sqrt{D_1^2+E_1^2-4F_1}\sqrt{D_2^2+E_2^2-4F_2}}$$

$$=\cos\theta$$

θ 即為 C_1 及 C_2 之交角.

因 θ' 及 θ 均小於 π, 故得 $\theta'=\theta$. *Q. E. D*

系. 二相交曲線之交角等於反曲線之交角.

作二圓,切二曲線於其交點.圓之反曲線亦必與二曲線之反曲線切於交點.二對曲線之交角各與二對切圓之交角相同。但二對切圓之交角相等,故原二曲線之交角與其反曲線之交角亦相等。

習 題

1. 求下列諸曲線之交角及其反曲線之交角,並證其反曲線之交角相等。

(a) $x-y=0,\ x+2y=0.$

(b) $x+3y-2=0\quad x-2y=0.$

(c) $x^2+y^2+4x-8y=0,\ x^2+y^2-4x=0.$

(d) $x^2+y^2-4x+12=0,\ x^2+y^2-8y=0.$

(e) $x^2+y^2-6x+4y=0,\ 6x-4y-1=0.$

2. § 124 習題 4 中所求得之諸圓，皆與圓 $x^2+y^2=1$ 正交.

3. 若 P 及 P' 爲二反點，求證經過 P 點且正交 $x^2+y^2=1$ 之諸圓必經過 P'.

4. 如何應用習題 3，以解釋反演變換？

5. 三直線成一三角形，若反心不在此三直線上，其反形爲何？

6. 三圓交於一點，若以此交點爲反心，其反形爲何？

7. 三圓交於一點，且彼此交於另三點.在此三點上.三圓兩兩交角之和爲二直角，試證之.

提示. 反演其圖形，以三圓之公共交點爲反心.

8. 三圓經過一點，求證如何可作四圓與此三所設圓相切.

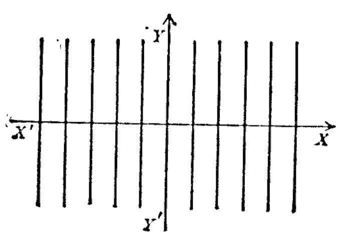
提示. 假定所求圓已作出.以公共點爲反心反其圖形，說明如何可作所求圓之反曲線.再用同一反心，求所作出圖形之反形.

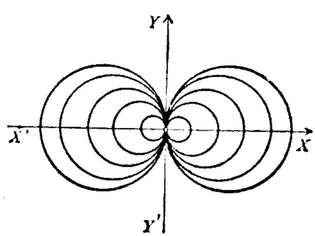
9. 一角反演變換後，其符號相反，試證之.

128. 直線系之反演變換.

定理 VII'. 平行線系之反曲線爲一組切圓系，其中心在垂直於平行線系之一直線上.

證　以平行線系之一直線爲 Y 軸.則平行線系之方程式爲 $x=a$, a 爲任意常數.其反曲線之方程式爲 [§ 124 (I)] $\dfrac{x'}{x'^2+y'^2}=a$, 或化簡，去撇.





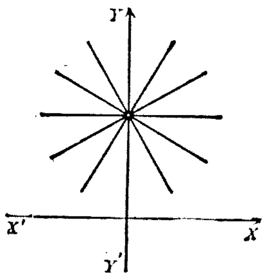
$x^2+y^2-\dfrac{1}{a}x=0$. 此爲圓系之方程式，其中心在 X 軸上，且彼此切於原點

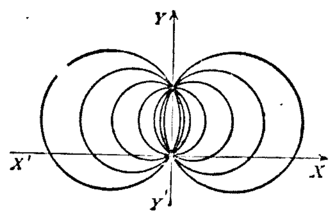
(§ 58 定理 VIII). *Q. E. D.*

定理 IX. 共點線之反曲線爲一圓系，此圓系中之圓，經過原點及諸直線所共點之反點.

證 設共點線之方程式爲 $y=mx+b$，其中 b 爲常數，m 爲變數. 從 § 124 定理 I，此直線系反曲線之方程式，化簡去撇後爲

$$x^2+y^2+\frac{m}{b}x-\frac{1}{b}y=0.$$





此爲圓系之方程式，此圓系之圓經過原點（§ 35 定理 VI）及 $\left(0, \frac{1}{b}\right)$ (§ 27 系)，而 $\left(0, \frac{1}{b}\right)$ 爲諸直線共點 $(0, b)$ 之反點. *Q. E. D.*

129. 同心圓之反演變換.

定理 X. 同心圓系之反曲線爲一圓系，此圓系有二限點，一爲原點，一爲同心圓中心之反點.

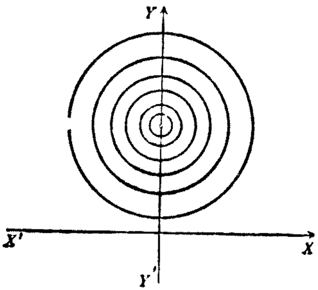
證 方程式

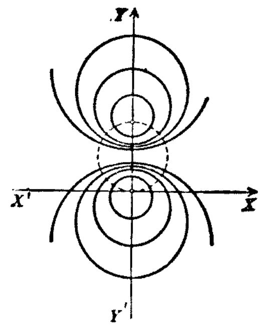
(1) $$x^2+y^2-2\beta y+\beta^2-r^2=0$$

表同心圓系，其中 β 爲常數，r 爲變數 (§ 29 定理 II).

(1) 之反曲線 [§ 124 例3, (3)] 爲

(2) $$x^2+y^2-\frac{2\beta}{\beta^2-r^2}y+\frac{1}{\beta^2-r^2}=0.$$





(2) 之軌跡爲一圓系，其中心在 Y 軸上(§ 56 定理 I 之系). 任一圓之半徑爲 (§ 56 定理 I)

$$r' = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{-2\beta}{\beta^2-r^2}\right)^2 - \frac{4}{\beta^2-r^2}} = \frac{r}{\beta^2-r^2}.$$

因此若 $r=0$, $r'=0$ 軌跡 (2) 爲一點圓 $\left(0, \dfrac{1}{\beta}\right)$, 此爲 (1) 中心 $(0,\beta)$ 之反點. 若 $r=\infty$, (2) 化爲 $x^2+y^2=0$, 其軌跡爲原點. 故 (2) 有二限點 [§ 58 定理 VII 系 III 第三款], 一在原點, 一在 (1) 中心之反點.

Q. E. D

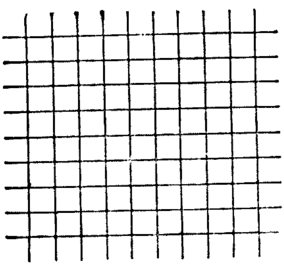
習　　題

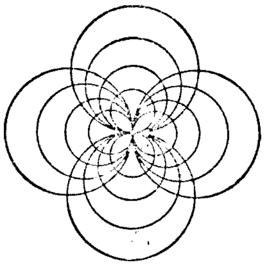
1. 證定理 IX 時，何以不使直線系經過原點?
2. 證定理 X 時，何以不將原點作爲圓系之中心?
3. 作直線系 $x=a$ 之諸直線及其反圖。
4. 作直線系 $y=mx+\frac{1}{4}$ 之諸直線及其反圖。
5. 作圓系 $x^2+y^2-3x+\frac{9}{4}-r^2=0$ 之諸圓及其反圖。
6. 若以諸切圓之切點爲反心，此切圓系之反曲線爲何?
7. 諸圓交於二點，若以其一點爲反心，此圓系之反曲線爲何?
8. 諸圓有二限點，若以其一點爲反心，此圓系之反曲線爲何?
9. 一點 $P_1(x_1, y_1)$ 可作爲點圓，其方程式爲 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=0$, 試證方程式

$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+k(x^2+y^2-1)=0$ 之圓系有二限點,即 P_1 及 P_1 之反點. 若 P_1 在 $x^2+y^2=1$ 之圓上,此圓系之性質如何?

10. 如何應用習題 9 以解釋反演變換?

130. 正交圓系 若一圓系中任一圓與他一圓系中任一圓正交(§58 定理 VII 系 III 第三款),則稱此二圓系正交. 由前數節所述可使吾人作此圓系.

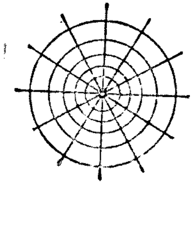


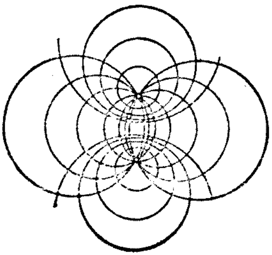


今設想二組平行線系,其中一組與第二組垂直. 若將此二組直線系反演變換,可得二組切圓系,其中心各在互相垂直之二直線上(§128 定理 VIII),因反演變換(§127 系)時,角之值不變,故此二切圓系正交. 因此得

定理 XI. 若二切圓系有同一切點,且其中心各在互相垂直之二直線上,此二圓系正交.

經過同一 P 點之諸直線與以 P 點爲同一圓心之諸圓相交成直角,此





理甚爲明顯.諸直線之反曲線爲經過原點及 P 之反點之圓系(§128 定理 IX),而同心圓系之反曲線爲以原點及 P 之反點爲二限點之圓系(§129 定理 X).因此得

定理 XII. 若一組圓系經過第二組圓系之二限點,此二組圓系正交.

總　習　題

1. 一方程式經反演變換後,其次數常加倍,試證之.若最高次項有 x^2+y^2 之因式,此說正確否?

2. 作一聯節 (linkage).其構造爲一可變動之菱形 $APBP'$ 及等長之二棒 OA 及 OB,此二棒圍繞定點 O 任意旋轉.若以 O 爲反心,且 $\overline{OA}^2-\overline{AP}^2$ 爲單位長,求證 P 及 P' 描寫相反曲線.

3. 若 P 爲習題 2 中菱形之一點且近於 O,再加一圍繞定點 O' 而可任意旋轉之棒 $O'P$.今使 P 點在 O 圓上移動,則 P' 將如何?此聯節稱爲 Peaucellier 之反演變換器.

4. 經過一定點如何可作四圓各與不相交二圓相切,試證之.

提示. 以定點爲反心,反其圖形.

5. 以適當之反心,反演 § 87 習題 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12 及 13 之曲線,得蔓葉線,雙紐線,環索線,心臟線及蚓線,求各曲線之性質.

6. 不用 § 127 之系,試證一直線與第二直線之交角經反演變換後等於其反圓之交角.

第十五章

極點及極線配極形

131. 關於圓之極點及極線. 設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲任何點. 所設圓 C 之方程式爲

(1) $$x^2+y^2=r^2,$$

則直線 L_1, 其方程式爲

(2) $$\boldsymbol{x_1x+y_1y=r^2},$$

稱爲 $P_1(x_1, y_1)$ 關於 C 圓之極線, 而 P_1 稱爲 L_1 之極點.

定理 I. 圓上一點之極線卽爲此點上圓之切線.

此定理可從定義證之, 且 (2) 與切線方程式之形式相同 (§ 85 定理 I).

定理 II. 一點 P_1 關於圓之極線垂直於經過 P_1 及圓心之聯線.

證 經過 P_1 及原點(卽圓心)之直線方程式爲 (§ 47 定理 VII)

$$y_1x-x_1y=0.$$

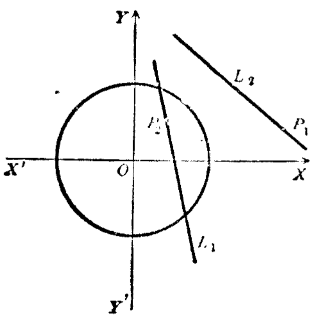
此直線與 P_1 之極線 (2) 垂直 (§ 42 系 III). *Q. E. D.*

系. 二點關於圓之二極線所成之交角, 等於此二點與圓心所聯二直線之交角.

定理 III. 所設直線上任一點之極線必經過此直線之極點.

證 設 L_1 爲所設直線, $P_1(x_1, y_1)$ 爲其極點. 則 L_1 之方程式爲

(3) $$x_1x+y_1y=r^2.$$



設 $P_2(x_2, y_2)$ 爲 L_1 上之任意點；則(§ 27 系)

(4) $$x_1x_2 + y_1y_2 = r^2.$$

P_2 之極線 L_2，其方程式爲

$$x_2x + y_2y = r^2.$$

若以 P_1 之坐標代方程式中之 x 及 y，即得方程式 (4)．故知此直線必經過 P_1．

系． 一直線上任二點之極線，其交點即爲該直線之極點．

定理 IV． 一直線經過一定點，此直線之極點必在該定點之極線上．

證　設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲所設點，其極線爲

(5) $$L_1: x_1x + y_1y = r^2.$$

設 $P_2(x_2, y_2)$ 爲經過 P_1 之直線 L_2 之極點．則 L_2 之方程式爲

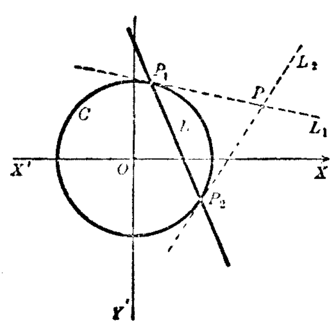
$$x_2x + y_2y = r^2.$$

因 L_2 經過 P_1，故得 (§ 27，系)

(6) $$x_2x_1 + y_2y_1 = r^2.$$

若以 P_2 之坐標代入 (5) 中之 x 及 y，即得方程式 (6)．故知 P_2 必在 L_1 之直線上．　　*Q. E. D.*

系．一點之極線即爲經過該點任二直線極點之聯線．



132. 極點與極線之作圖．

作圖 I　作圓外一點 P 之極線．

過 P 點作圓之二切線，二切點之聯線即爲 P 點之極線．

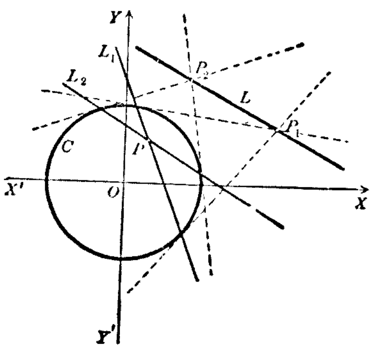
證 設 L_1 及 L_2 爲 C 之二切線，P_1 及 P_2 各爲其切點，則 P_1 及 P_2 之極線卽爲 L_1 及 L_2（定理 I）. 因 L_1 及 L_2 經過 P 點，故 P 之極線爲經過 P_1 及 P_2 之直線 L（定理 IV 之系）. *Q. E. D.*

下列作圖同樣證明.

作圖 II. 作與圓相交之直線 L 之極點.

在 L 與圓之交點上作切線，此二切線之交點卽爲 L 之極點（定理 III 之系）.

作圖 III. 作圓內一點 P 之極線.



作經過 P 點之二直線 L_1 及 L_2 之極點 P_1 及 P_2（作圖 II），則 P_1 及 P_2 之聯線卽爲 P 點之極線（定理 IV 之系）.

作圖 IV. 作與圓不相交之直線 L 之極點.

作 L 上任意二點 P_1 及 P_2 之極線 L_1 及 L_2（作圖 I）. L_1 及 L_2 之交點卽爲 L 之極點（定理 III 之系）.

習 題

1. 求下列諸點關於所設圓之極線方程式，並作其圖象.

(a) $(3, -4)$, $x^2+y^2=4$.

(b) $(-1, 2)$, $x^2+y^2=25$.

(c) $(7, -2)$, $x^2+y^2=9$.

(d) $(3, 4)$, $x^2+y^2=36$.

(e) $(5, 0)$, $x^2+y^2=49$.

(f) $(-3, 4)$, $x^2+y^2=25$.

2. 求下列諸直線關於所設圓之極點，並作其圖象.

(a) $3x+y=25$, $x^2+y^2=25$. 答. $(3, 1)$.

(b) $3x-2y=18$, $x^2+y^2=36$. 答. $(6, -4)$.

(c) $x-4y+8=0$, $x^2+y^2=16$. 答. $(-2, 8)$.

(d) $2x-y=64,\ x^2+y^2=64.$　答．$(2, -1)$.

(e) $x-3y+16=0,\ x^2+y^2=16.$　答．$(-1, 3)$.

(f) $x-3y=18,\ x^2+y^2=9.$　答．$(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

(g) $Ax+By+C=0,\ x^2+y^2=r^2.$　答．$\left(\frac{-Ar^2}{C}, -\frac{Br^2}{C}\right)$.

提示．設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲所設直線之極點，寫 P_1 關於所設圓之極線方程式．因此線與所設直線重合（§42 定理 III），從此決定 x_1 及 y_1．

3. 求自原點至 P_1 關於 $x^2+y^2=r^2$ 之極線之距離．　答．$\dfrac{r^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$.

4. 由習題 3，證 (a) 若 P_1 接近於原點，其極線漸至無窮遠；(b) 若 P_1 漸至無窮遠，其極線漸近於原點．

5. 由習題 2 (g)，證明若一直線漸至無窮遠，其極點漸近於原點，又若一直線接近於原點，其極點漸至無窮遠．

6. 求 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 聯線之極點，並證此點爲 P_1 及 P_2 之二極線之交點．

答．$\left(\dfrac{(y_2-y_1)r^2}{x_1y_2-x_2y_1}, \dfrac{(x_1-x_2)r^2}{x_1y_2-x_2y_1}\right)$.

7. 求所設二直線 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 及 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 交點之極線，並證此線經過所設二直線之極點．　答．$(B_1C_2-B_2C_1)x+(C_1A_2-C_2A_1)y=(A_1B_2-A_2B_1)r^2$.

8. 若直線 $y-y_1=m(x-x_1)$ 圍繞 P_1 旋轉，其極點之軌跡爲 P_1 之極線．

9. 自圓之中心至任意一點及至該點之極線有二距離．求證圓之半徑爲此二距離之比例中項．

133. 關於圓之配極形． 以一直線關於圓之極點代換該直線．此種變換稱爲關於圓之**配極形**．其解析法可從下之定理求之．

定理 V． 直線

$$Ax+By+C=0$$

關於圓

$$x^2+y^2=r^2$$

之極點爲

$$\left(-\frac{Ar^2}{C}, -\frac{Br^2}{C}\right).$$

證 設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲所設直線之極點，則 P_1 之極線爲

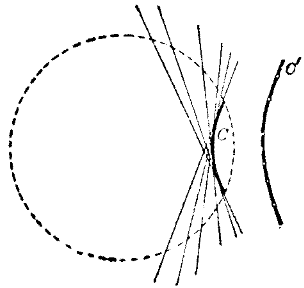
$$x_1x+y_1y-r^2=0.$$

由 § 42 定理 III,

$$\frac{x_1}{A}=\frac{y_1}{B}=\frac{-r^2}{C}.$$

$$\therefore\quad x_1=-\frac{Ar^2}{C},\ y_1=-\frac{Br^2}{C}.$$

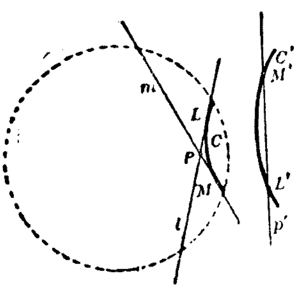
Q. E. D.



自一曲線 C 上各點所作諸切線,其極點之軌跡 C' 稱為 C 之**配極形**.

定理 VI. 若 C' 為曲線 C 之配極形,則 C 為 C' 之配極形.

證 設 l 及 m 切 C 於 L 及 M, M' 及 L' 各為 m 及 l 之極點,則由定義 L' 及 M' 為 C' 上之二點.



設 p' 為經過 L' 及 M' 之一直線. 則 p' 之極點為 P, 此 P 點卽為 l 及 m 交點 (§ 131 定理 III 之系).

若 L' 沿 C' 移動至漸與 M' 重合,則p' 之極限位置卽為 C' 上 M' 點之切線. 但當 L 漸近於 M 時, l 必漸近於 m, 而 P 之極限位置卽為 M 點. 因此 M 點為自 C' 上 M' 點所作切線之極點. 故 C 為 C' 之配極形. *Q. E. D.*

自 C 求 C' 之方程式可照下例得之.

例 1. 求抛物線 $y^2=4x$ 關於圓 $x^2+y^2=4$ 之配極形.

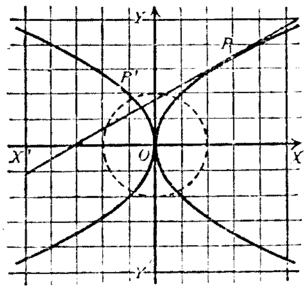
解 設 $P_1(x_1, y_1)$ 為抛物線上之任意點. 則

(1) $$y_1^2=4x_1.$$

切抛物線於 P_1 之切線方程式為 (§ 85 定理 III)

$$y_1y=2(x+x_1)\ 或$$

(2) $$2x - y_1y + 2x_1 = 0.$$



由定理 V, (2) 之極點為 $P'(x', y')$. 其坐標為

$$x' = -\frac{4}{x_1}, \quad y' = \frac{2y_1}{x_1}.$$

因此 $$x_1 = -\frac{4}{x'}, \quad y_1 = -\frac{2y'}{x'}.$$

代入 (1) $$y'^2 = -4x'.$$

此即為 P 軌跡之方程式.即為所設拋物線之配極形.此配極形亦為拋物線,與原拋物線相同,惟此曲線向左伸張.

上列方法簡述如次：自所設曲線上任一點 P_1 作切線，求此切線之極點 P', 以 x' 及 y' 表 x_1 及 y_1 之值，代入所設方程式.

習　　題

1. 求下列諸圓關於圓 $x^2+y^2=4$ 之配極形.
   (a) $x^2+y^2-4x=0$.　　答. $y^2+4x=4$.
   (b) $x^2+y^2-2x-3=0$.　　答. $3x^2+4y^2+8x-16=0$.
   (c) $x^2+y^2-6x+5=0$.　　答. $5x^2-4y^2-24x+16=0$.
2. 求下列諸曲線關於所設圓之配極形.
   (a) $x^2+4y^2=16$, $x^2+y^2=1$.　　答. $16x^2+4y^2=1$.
   (b) $y^2=2x-6$, $x^2+y^2=9$.　　答. $6x^2-y^2-18x=0$.
   (c) $4x^2+y^2=8x$, $x^2+y^2=4$.　　答. $y^2+2x-4=0$.
3. 應用定理 VI, 求習題 1 及 2 答案中諸曲線之配極形，藉以證驗習題 1 及 2 之結果.
4. 等軸雙曲線 $2xy=9$ 關於圓 $x^2+y^2=9$ 之配極形即為其本身，試證之.
5. 軌跡 $x^2-y^2=a^2$ 關於圓 $x^2+y^2=a^2$ 之配極形即為其本身.試證之.

134　關於二次方程式軌跡之極點與極線.　設 $P_1(x_1, y_1)$ 為任意點，再設二次方程式為

(1) $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

則直線 L_1, 其方程式與切線形式相同, 如 (§ 85 定理 II)

(2) $$Ax_1x+B\frac{y_1x+x_1y}{2}+Cy_1y+D\frac{x+x_1}{2}+E\frac{y+y_1}{2}+F=0,$$

稱爲 P_1 關於軌跡 (1) 之極線. P_1 稱爲 L_1 之極點.

此後如言極點極線,若不特別說明時,均指關於軌跡(1)之極點及極線.

下列定理均爲普遍定理,用本節中 (1) 及 (2) 證之,其證法與用於 § 131 中 (1) 及 (2) 之方法相同.

定理 VII. (定理 I 之推廣) 在軌跡 (1) 上任一點之極線爲該點上之切線.

定理 VIII. (定理 III 及 IV 之推廣) 所設直線上任一點之極線經過該直線之極點. 反之, 經過一所設點之直線, 其極點在該點之極線上.

系 I. 一直線之極點爲該直線上任二點之極線交點.

系 II. 一點之極線爲經過該點任二直線之極點聯線.

用以證明作圖時之定理今已推廣至 (1) 之軌跡, 故 § 132 之作圖可使吾人作出關於 (1) 之極點極線.

一點關於二次曲線之極線, 其方向述於下之

定理 IX 自 P_1 作一二次曲線之直徑. 在此直徑與二次曲線之交點作一切線, 則 P_1 關於二次曲線之極線必平行於此切線.

證 依二次曲線之爲有心曲線或拋物線而分其證法爲二款.

第一款. 有心二次曲線. 若中心爲原點, 其方程式爲

$$Ax^2+Cy^2+F=0.$$

P_1 之極線方程式爲

(3) $$Ax_1x+Cy_1y+F=0.$$

設經過 P_1 之直徑交二次曲線於 P_2, 則在 P_2 之切線方程式為

(4) $$Ax_2x + Cy_2y + F = 0.$$

因 P_1 及 P_2 在過原點之直線上 (§ 98, 系)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2},$$

因此直線 (3) 及 (4) 互相平行 (§ 42 系 II).

第二款. 拋物線. 其方程式為 $y^2 = 2px$.

P_1 之極線方程式為

(5) $$y_1y = p(x + x_1).$$

設過 P_1 之直徑交拋物線於 P_2, 則在 P_2 之切線方程式為

(6) $$y_2y = p(x + x_2).$$

因 (§ 98 定理 X) $y_1 = y_2$ 直線 (5) 及 (6) 互相平行. *Q. E. D.*

習　　題

1. 求下列各點關於所設曲線之極線方程式,並作其圖象.

(a) (3, 4), $9x^2 + 4y^2 = 36$.

(b) (2, −1), $16x^2 - y^2 = 64$.

(c) (3, 6), $x^2 + 4y = 0$.

(d) (2, −4), $xy - 16 = 0$.

(e) (−1, 3), $x^2 + xy - 6y + 4 = 0$.

(f) (4, 5), $xy + 4x - 6y - 8 = 0$.

(g) (2, −6), $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$.

(h) (3, 2), $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 12 = 0$.

2. 求下列各直線關於所設曲線之極線,並作其圖象.

(a) $9x + 4y = 36$, $9x^2 + y^2 = 36$.　答. (1, 4).

(b) $2x - 3y + 4 = 0$, $y^2 = 4x$.　答. (2, −3).

(c) $x - 2y = 16$, $xy = 8$.　答. (−2, 1).

(d) $14x + y = 8$, $4x^2 - y^2 = 16$.　答. (7, −2).

(e) $2x - y + 13 = 0$, $x^2 + 4y = 16$.　答. (−4, −5).

(f) $x + 4 = 0$, $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 4 = 0$.　答. (0,0).

(g) $11x + 2y + 18 = 0$, $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 18x + 24y - 12 = 0$.　答. (0, −2).

3. 自一點 (8, 4) 作橢圓 $x^2 + 4y^2 = 16$ 之切線,求切點聯線之方程式. 答. $x + 2y - 2 = 0$.

4. 自雙曲線 $16x^2-y^2=64$ 與直線 $8x+3y+32=0$ 之交點，作雙曲線之切線，求二切線交點之坐標。 答. $(-1, 6)$.

5. 若一點向有心二次曲線之中心移動，則此點關於該二次曲線之極線將如何？若此點移至無窮遠，則如何？

6. 二次曲線之焦點關於此二次曲線之極線即爲其對應準線。

7. 二次曲線準線上之任一點，其極線必經過該二次曲線之對應焦點

8. 一點關於共軛雙曲線之極線互相平行。

9. 橢圓之一焦點關於其長軸上輔圓之極線即爲該橢圓之對應準線。

10. 一點關於一所設二次曲線有一極線。若此點在其極線上，則其軌跡爲何？

11. 在拋物線之直徑上取一點，此點關於拋物線之極線與直徑相交。此交點與該點間之距離爲直徑與拋物線之交點所二等分。

135. 關於任何二次方程式軌跡之配極形. 設

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1}$$

爲一二次方程式。再設 C 爲一曲線，C' 爲曲線 C 上諸切線關於 (1) 之極點所成之軌跡。則 C' 稱爲 C 關於 (1) 之**配極形**。

定理 X. (定理 VI 之推廣) 若 C' 爲 C 關於(1)之配極形，則 C 爲 C' 之配極形。

證法與 § 133 定理 VI 之證法同。因證明該定理所用之關於圓之極點極線諸定理已推廣至軌跡 (1)。

系. C 之配極形爲曲線 C'，其切線爲 C 上諸點之極線。

曲線 C 關於 (1) 之配極形，可視爲下列二種情形之一：

1. C 上諸切線極點之軌跡。

2. 一曲線，其切線爲 C 上諸點之極線。

在任一情形中，可知一圖中之一點對應於他圖中之一直線，反之亦然。以 C' 代 C 之變換，稱爲關於 (1) 之**配極形**。

由解析法，關於 (1) 之配極形，可用下之方程式定其意義。

$$Ax_1x+B\frac{(y_1x+x_1y)}{2}+Cy_1y+D\frac{(x+x_1)}{2}+E\frac{(y+y_1)}{2}+F=0. \tag{2}$$

第一，(2) 之軌跡使吾人卽得 $P_1(x_1, y_1)$ 之極線.

第二，任一直線

(3) $$A'x+B'y+C'=0$$

之極點，可從 (2) 求之如下：設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲 (3) 之極點. 則因 (2) 及 (3) 皆爲 P_1 之極線方程式，其軌跡重合，因此 (§ 42 定理 III)

$$\frac{Ax_1+\frac{B}{2}y_1+\frac{D}{2}}{A'}=\frac{\frac{B}{2}x_1+Cy_1+\frac{E}{2}}{B'}=\frac{\frac{D}{2}x_1+\frac{E}{2}y_1+F}{C'}.$$

上列方程式，普遍言之，可解得 x_1 及 y_1 (§ 43 定理 IV).

所設曲線之配極形方程式，其求法示之於下例.

例 1.　求橢圓

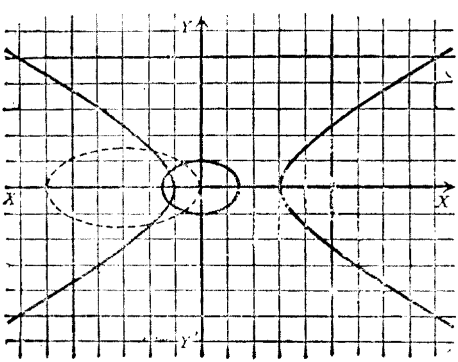
$$C: 4x^2+9y^2-1=0$$

關於橢圓

(4) $$x^2+4y^2+2x=0$$

之配極形方程式.

解　設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲 C 上之任一點，則



(5)　$4x_1^2+9y_1^2-1=0.$

切 C 於 P_1 之切線方程式爲 (§ 85 定理 III)

(6)　$4x_1x+9y_1y-1=0.$

設 $P'(x', y')$ 爲 (6) 關於 (4) 之極點. P' 之極線方程式爲

(7)　$(x'+1)x+4y'y+x'=0.$

因(6)及(7)有同一軌跡(§ 42 定理 III),

$$\frac{4x_1}{x'+1}=\frac{9y_1}{4y'}=\frac{-1}{x'}.$$

解 x_1 及 y_1 得

$$x_1=-\frac{x'+1}{4x'},\quad y_1=-\frac{4y'}{9x'}.$$

代入(5),得所求方程式

$$4\left(-\frac{x'+1}{4x'}\right)^2+9\left(-\frac{4y'}{9x'}\right)^2-1=0.$$

化簡,去撇,得

$$27x^2-64y^2-18x-9=0.$$

此軌跡爲雙曲線.

圖中取三格爲一單位.

習 題

1. 求下列第一曲線關於第二曲線之配極形,並作每種之圖象.

(a) $y^2-4x=0,\ x^2+4y=0$. 答. $xy-2=0$.

(b) $x^2+y^2=1,\ x^2-y^2=4$. 答. $x^2+y^2=16$.

(c) $x^2+4y^2=4,\ 4x^2+y^2=4$. 答. $64x^2+y^2=16$.

(d) $x^2-4y^2=16,\ x^2+4y^2=2x$. 答. $15x^2-64y^2-32x+16=0$.

(e) $xy-4=0,\ x^2-y^2=16$. 答. $xy+16=0$.

(f) $8y-x^3=0,\ x^2-y^2=4$. 答. $2x^3=27y$.

2. 以習題1中之答案證驗答案中諸曲線之配極形即爲所設曲線.

3. 證明下列任一曲線關於他一曲線之配極形即爲其本身.

(a) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,\ b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

(b) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,\ b^2x^2-a^2y^2=-a^2b^2$.

(c) $y^2-2px=0,\ y^2+2px=0$.

4. 若第一三角形之頂點爲第二三角形各邊之極點,則第二三角形之頂點爲第一三角形各邊之極點.

一三角形之頂點爲他三角形各邊之極點，此二三角形稱爲共軛三角形．若一三角形之頂點爲其對邊之極點，則稱爲自共軛三角形．

5. 證明 (2, 1), (4, 4), 及 (3, 2) 爲關於雙曲線 $x^2-y^2=4$ 之自共軛三角形頂點．

6. 已知一頂點，如何可作關於一所設曲線之自共軛三角形．有幾個可作？

7. 示明下列各條敍述中之圖象，其配極形可有一對應之敍述．

(*a*) 二點決定一直線．	二直線決定其交點．
(*b*) 三點在一直線上．	三直線共點．
(*c*) 三點爲一三角形之頂點．	三直線成一三角形．
(*d*) n 點爲一多邊形之頂點．	n 直線成一多邊形．
(*e*) 無限個點在一曲線上．	無限條直線切於一曲線．
(*f*) 一直線交一曲線於 n 點．	過一點之 n 直線切於一曲線．
(*g*) 一曲線經過一點二次．	一曲線切於一直線二次．
(*h*) 一二次曲線．	一二次曲線．
(*i*) 經過五點，可作一二次曲線．	可作一二次曲線切於五直線．
(*j*) 普遍言之，兩二次曲線交於四點．	普遍言之，兩二次曲線有四個公切線．

136. 一圓關於一圓之配極形． 二圓 C 及 C_1 之方程式可寫爲

$$C\ : x^2+y^2=r^2$$

及
$$C_1 : x^2+y^2+Dx+F=0,$$

取 C 之中心爲原點，C 及 C_1 之中心聯線爲 X 軸．今求 C 關於 C_1 之配極形．

設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲 C 上之任一點，則 (§ 27, 系)

(1)
$$x_1^2+y_1^2=r^2,$$

切 C 於 P_1 之切線方程式爲 (§ 85 定理 I)

(2)
$$x_1x+y_1y-r^2=0.$$

設 $P'(x', y')$ 爲(2) 關於 C_1 之極點；則 P' 之極線爲

$$x'x+y'y+D\frac{x+x'}{2}+F=0$$

或

(3) $$\left(x'+\frac{D}{2}\right)x+y'y+\frac{D}{2}x'+F=0.$$

因 (2) 及 (3) 有同一軌跡 (§ 42 定理 III),

$$\frac{x_1}{x'+\frac{D}{2}}=\frac{y_1}{y'}=\frac{-r^2}{\frac{D}{2}x'+F}.$$

解 x_1 及 y_1, 得

$$x_1=-\frac{r^2(2x'+D)}{Dx'+2F},\quad y_1=-\frac{2r^2y'}{Dx'+2F}.$$

代入 (1) 化簡, 去撇, 得 C' 之方程式

$$C':(4r^2-D^2)x^2+4r^2y^2+4D(r^2-F)x+(r^2D^2-4F^2)=0.$$

C' 之判別式為 (§ 105)

$$\Theta'=16r^2(4r^2-D^2)(r^2D^2-4F^2)-64r^2D^2(r^2-F)^2=-16r^4(D^2-4F)^2.$$

因 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2-4F}$ 為 C_1 之半徑 (§ 56 定理 I), 故若 C 及 C_1 之半徑不等於零, Θ' 亦不等於零. 因此 (§ 105 定理 I)

定理 XI. 圓 $C:x^2+y^2=r^2$ 關於圓 $C_1:x^2+y^2+Dx+F=0$ 之配極形爲常態二次曲線 C', 其方程式爲

(XI) $$(4r^2-D^2)x^2+4r^2y^2+4D(r^2-F)x+(r^2D^2-4F^2)=0.$$

二次曲線 C' 之性質全視

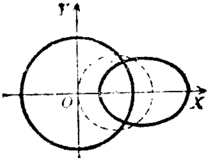
$$\triangle'=-4\cdot4r^2(4r^2-D^2)$$

之符號. 上式中

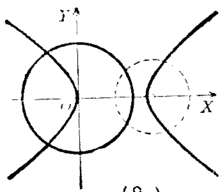
若 $4r^2-D^2>0$ 或 $r^2>\frac{D^2}{4}$ 則 $\triangle'<0$;

若 $4r^2-D^2<0$ 或 $r^2<\frac{D^2}{4}$ 則 $\triangle'>0$;

若 $4r^2-D^2=0$ 或 $r^2=\frac{D^2}{4}$, 則 $\triangle'=0$.



(1)



(2)

因此 (§ 109 定理 IX),

若 $r^2>\frac{D^2}{4}$, 二次曲線 C' 爲一橢圓;

若 $r^2<\frac{D^2}{4}$, 二次曲線 C' 爲一雙曲線;

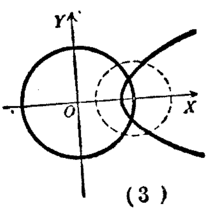
若 $r^2=\frac{D^2}{4}$, 二次曲線 C' 爲一拋物線.

但 $\frac{D^2}{4}$ 爲自原點至 C_1 中心 $\left(-\frac{D}{2}, 0\right)$ (§ 56 定理 I) 距離之平方, 故

若 $r^2>\frac{D^2}{4}$, C_1 之中心在 C 內;

若 $r^2<\frac{D^2}{4}$, C_1 之中心在 C 外;

及　若 $r^2=\frac{D^2}{4}$, C_1 之中心在 C 上.



(3)

因此得

定理 XII. C 圓關於 C_1 圓之配極形爲橢圓, 雙曲線或拋物線, 須視 C_1 之中心在 C 圓之內, 在 C 圓之外或在 C 圓之上而定.

習　　題

1. 求圓 $x^2+y^2=4$ 關於下列各所設圓之配極形, 並作其圖象.

(a) $x^2+y^2-4x-5=0$.　　答. $4y^2-36x-9=0$.

(b) $x^2+y^2-2x-3=0$.　　答. $3x^2+4y^2-14x-5=0$.

(c) $x^2+y^2-6x=0$.　　答. $5x^2-4y^2+24x-36=0$.

2. 證明 C_1 之中心 (定理 XI) 爲 (XI) 之焦點, 其對應準線爲 C 圓中心關於 C_1 之極線.

提示. 移動原點至 C_1 之中心, 變換 (XI), 與 § 73 (II) 比較, 求其焦點與準線, 再變換爲原坐標之方程式.

3. 設二點 P_1 及 P_2 關於 C_1 圓之極線各爲 L_1 及 L_2, 則 $\frac{l_1}{d_1}=\frac{l_2}{d_2}$ 其中 l_1 及 l_2 爲自 C_1 之圓心至 P_1 及 P_2 之距離, d_1 及 d_2 爲自 L_2 及 L_1 各至 P_1 及 P_2 之距離.

提示. C_1 之中心可取爲原點, 應用 § 21 (IV) 及 § 49 規則.

4. 用習題 3 及二次曲線之定義 (§ 72) 證定理 XII 及習題 2.

提示. 設習題 3 中之 P_2 為 C 圓中心.

5. C 圓之二切線 L_1 及 L_2 (§ 132 圖) 與其交點之極線 L 相交成等角.若求此圖形為關於 C_1 圓之配極形,其對應定理為何?

提示. C 之配極形為一二次曲線,其焦點為 C_1 之中心.(習題 2). L_1 及 L_2 對應於二次曲線上之二點,與 C 圓之切點對應於切二次曲線於該二切點之切線. L 對應於二切線之交點.自焦點至切點及切線之交點,作二直線,再應用 § 131 定理 II 之系.

答. 若作二次曲線之二切線,則焦點與二切線交點之聯線等分二切點上所作二焦半徑之交角.

6. 自下列左方諸定理藉關於圓之配極形之方法求出右方諸對應定理.

(a) 一圓之切線與切點上之半徑垂直.	自焦點至二次曲線上一點之直線與自焦點至一點上切線與準線交點之聯線互相垂直.
(b) 一圓上二切線之交角為圓心與二切線交點之聯線所等分.	一直線交二次曲線於二點,此二點上所作二焦半徑之交角為焦點及該直線與準線交點之聯線所等分.
(c) 圓之二切線,其交角若一定,則交點之軌跡為一同心圓.	二次曲線之弦,若在焦點上張一等角,則切於同焦點同準線之另一二次曲線.

137. 異素射影變換. 作一圖中之諸點,對應於他圖中之諸直線.此種變換稱為**異素射影變換**.關於二次曲線之配極形為最重要之異素射影變換.若能求得

1. 一所設點之對應直線方程式,

2 一所設直線之對應點之坐標,

則異素射影變換可完全決定.

吾人可用下之方程式以定異素射影變換之意義.

$$(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)x + (a_2x_1 + b_2y_1 + c_2)y + (a_3x_1 + b_3y_1 + c_3) = 0, \tag{1}$$

此方程式為 x 與 y 及 x_1 與 y_1 之一次式.

軌跡 (1) 為所設點 $P_1(x_1, y_1)$ 之對應直線.

今求所設直線

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

之對應點. 設 $P_1(x_1, y_1)$ 卽爲此所求點, 則 P_1 之對應直線方程式當爲 (1). 因此 (1) 及 (2) 有同一軌跡, 故

$$\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{A}=\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2}{B}=\frac{a_3x_1+b_3y_1+c_3}{C}. \tag{3}$$

上方程式通常可解得 x_1 及 y_1.

就所設點與其對應直線之關係而言: (1) 括弧中可爲 x_1 及 y_1 之高次式, 但括弧中若不爲一次式, 則方程式 (3) 中可求多於一組之 x_1 及 y_1 之解答. 因此一所設直線之對應點不止一個.

普遍言之, P_1 不在 (1) 之軌跡上. 若 P_1 在 (1) 之軌跡上, 其條件當爲 (§ 27, 系)

$$(a_1x_1+b_1y_1+c_1)x_1+(a_2x_1+b_2y_1+c_2)y_1+(a_3x_1+b_3y_1+c_3)=0,$$

或
$$a_1x_1^2+(b_1+a_2)x_1y_1+b_2y_1^2+(c_1+a_3)x_1+(c_2+b_3)y_1+c_3=0.$$

此亦爲 P_1 須在軌跡

$$a_1x^2+(b_1+a_2)xy+b_2y^2+(c_1+a_3)x+(c_2+b_3)y+c_3=0 \tag{4}$$

上之條件.

在此情形中, 二次曲線已涉及異素射影變換之理論. 今得

定理 XIII. 若一點在其異素射影變換之直線 (1) 上, 其軌跡爲方程式 (4) 之二次曲線或變態二次曲線.

所應注意者, 普遍言之, 此種有異素射影關係之 (1) 非爲關於曲線 (4) 之配極形, 因 (1) 並非爲 $P_1(x_1, y_1)$ 關於 (4) 之極線方程式.

但若假定 $b_1=a_2$, $c_1=a_3$ 及 $c_2=b_3$, 則 (4) 化爲

$$a_1x^2+2a_2xy+b_2y^2+2a_3x+2b_3y+c_3=0, \tag{5}$$

而 (1) 化爲

$$(a_1x_1+a_2y_1+a_3)x+(a_2x_1+b_2y_1+b_3)y+(a_3x_1+b_3y_1+c_3)=0,$$

或

$$(6) \qquad a_1x_1x + a_2(y_1x + x_1y) + b_2y_1y + a_3(x + x_1) + b_3(y + y_1) + c_3 = 0.$$

軌跡 (6) 爲 $P_1(x_1, y_1)$ 關於 (5) 之極線，因此得

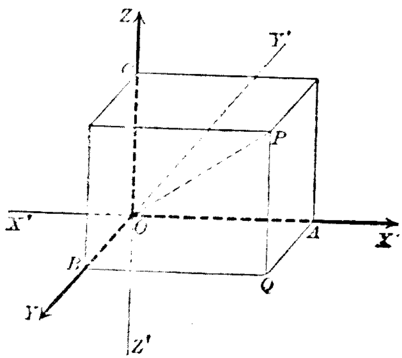
定理 XIV. 若 $b_1 = a_2$, $c_1 = a_3$ 及 $c_2 = b_3$，則有異素射影關係之 (1) 即爲關於軌跡 (5) 之配極形.

第十六章

空間之笛卡兒坐標

138. 笛卡兒坐標. 平面解析幾何學中，用一對實數 (x, y) 決定平面上一點(§ 17). 立體解析幾何學則以三個實數 x, y 及 z 決定空間之一點. 其決定方法述之如下:

設有三個互相垂直之平面，其交線為 XX', YY' 及 ZZ'. 此三直線亦互相垂直. 三平面稱為**坐標面**. 以 XY 平面，YZ 平面及 ZX 平面區別之. 其交線稱為**坐標軸**，以箭頭指示正方向.* 三坐標面之公共交點稱為**原點**.



設 P 為空間之任一點. 經過 P 點作三平面平行於坐標面，交軸於 A, B 及 C 三點，可得三數值 $OA = x$, $OB = y$, 及 $OC = z$. 稱為 P 點之**直角坐標**.

空間任一點 P, 決定三個數值即 P 點之坐標. 反之，三實數 x, y 及 z 可定空間一點 P 之位置，其坐標為 x, y 及 z. 因若取 $OA = x$, $OB = y$, 及

---

* XX' 及 ZZ' 假定在此紙之平面上，XX' 之正向向右，ZZ' 之正向向上，YY' 則假定為垂直於紙之平面，其正向為紙之前方，即自紙之平面向讀者之方向.

$OC=z$, 經過 A, B 及 C 作三平面, 各平行於坐標面, 此三平面可交於一點 P. 因此

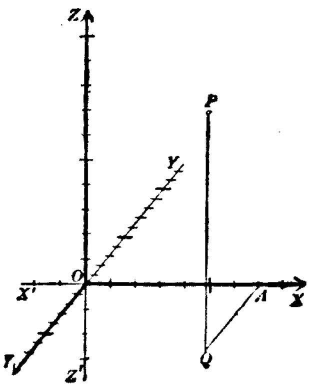
任意一點可決定三實數. 反之, 三實數可決定一點.

P 點之坐標可寫為(x, y, z), 此記號 $P(x, y, z)$讀作"一點 P, 其坐標為 x, y 及 z".

坐標面分空間為八分, 稱為**卦限**, 記作 $O-XYZ$, $O-X'YZ$ 等等. 任一卦限內一點坐標之符號可決定於下之

規則. x 為正為負須視 P 點在 YZ 平面之右或左.
y 為正為負須視 P 點在 ZX 平面之前或後.
z 為正為負須視 P 點在 XY 平面之上或下.

若坐標面不互相垂直, 吾人可用一種**斜角坐標**. 在斜角坐標系中, 一點之坐標為自坐標面至一點而平行於軸之距離以代垂直距離. 此後常用直角坐標系.



空間一點, 求其位置時, 在 XX' 及 ZZ' 二軸上, 每格用等長單位, 惟 YY' 軸上每格單位略短. 例如作一點 $(7, 6, 10)$ 可在 OX 上取 $OA=7$, 作 AQ 平行於 OY, 取其長等於 OY 上之 6 單位. 再作 QP 平行於 OZ 使等於 OZ 上 10 單位之長.

習 題

1. 原點之坐標為何?
2. 描寫下列各點位置.
   (a) $(8, 0, 2)$, $(-3, 4, 7)$, $(0, 0, 5)$.
   (b) $(4, -3, 6)$, $(-4, 6, 0)$, $(0, 8, 0)$.
   (c) $(10, 3, -4)$, $(-4, 0, 0)$, $(0, 8, 4)$.

(d) (3, −4, −8), (−5, −6, 4), (8, 6, 0).

(e) (−4, −8, −6), (3, 0, 7), (6, −4, 2).

(f) (−6, 4, −4), (0, −4, 6), (9, 7, −2).

3. 若 (1) $x=0$, (2) $y=0$, (3) $z=0$, 此點在何處移動?

4. 若 (1) $x=0$ 及 $y=0$; (2) $y=0$ 及 $z=0$; (3) $z=0$ 及 $x=0$, 此點在何處移動?

5. 證明二點 (x, y, z) 及 $(-x, y, z)$ 關於 YZ 平面為對稱; (x, y, z) 及 $(x, -y, z)$ 關於 ZX 平面為對稱; (x, y, z) 及 $(x, y, -z)$ 關於 XY 平面為對稱.

6. 證明 (x, y, z) 及 $(-x, -y, z)$ 關於 ZZ' 為對稱; (x, y, z) 及 $(x, -y, -z)$ 關於 XX' 為對稱; (x, y, z) 及 $(-x, y, -z)$ 關於 YY' 為對稱; (x, y, z) 及 $(-x, -y, -z)$ 關於原點為對稱.

7. 若 $P(x, y, z)$ 在 XY 平面上, z 之值為何? 若 P 在 YZ 平面上, x 之值為何? 若 P 在 ZX 平面上, y 之值為何?

8. 若 $P(x, y, z)$ 在 X 軸上, y 及 z 之值為何? 若 P 在 Y 軸上, x 及 z 之值為何? 若 P 在 Z 軸上, x 及 y 之值為何?

9. 一長方六面體在卦限 $O-XYZ$ 中, 其三面合於三坐標面, 若三邊之長度為 a, b, c 其各頂點之坐標為何?

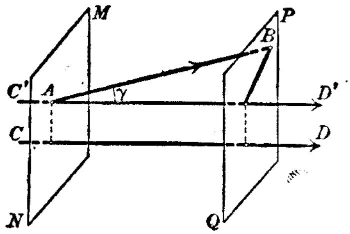
139. 正射影. 推廣第二章之第一射影定理, 吾人可定二方向直線**在空間之交角**. 若此二方向直線不相交, 吾人可作二相交之方向直線 (§ 19) 與原二方向直線直平行, 其交角卽等於原二方向直線之交角.

在空間, 一點至一直線, 或一有向長度 AB 至一方向直線上之正射影, 其定義與平面中者相同. 一點至一直線之射影, 可視為經過此點之平面垂直於該直線之垂足. 因二平行面各處距離相等, 故一有向長度 AB 在二個同向平行線上之射影相等.

定理 I. 第一射影定理. 若 A 及 B 為一方向直線上之二點, 此方向直線與另一方向直線 CD 之交角為 γ, 則

(I) $$AB \text{ 在 } CD \text{ 上之射影} = AB\cos\gamma.$$

證　過 A 作 $C'D'$ 平行於 CD. 由定義, AB 及 $C'D'$ 之交角等於 γ. 因 $C'D'$ 與 AB 相交故可應用平面中之第一射影定理 (§ 20 定理 II), 因此



得

$$AB \text{ 在 } C'D' \text{ 上之射影} = AB\cos\gamma.$$

因 AB 在 CD 上之射影等於 AB 在 $C'D'$ 上之射影,故得 (1). Q. E. D.

定理 II. 第二射影定理. 若在空間折線之方向自第一點依次至末一點,則各線分在任何方向線上射影之代數和等於閉線之射影.

不論折線在空間或在平面上,定理 XI (§ 25) 之證法仍適用.

系 I. 自原點至任意點 P 之聯線在各軸上之射影即為 P 點之坐標.

因 OP 在 OX 上之射影 (§ 138 之圖) 等於 OA, AQ 及 QP 射影之和,而 OA, AQ 及 QP 各等於 x, 0 及 0 [從 (I)]. 同樣可得在 OY 及 OZ 之射影.

系 II. 設二點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2, z_2)$,則

$$\boldsymbol{x_2 - x_1 = P_1P_2} \textbf{ 在 } \boldsymbol{XX'} \text{ 上之射影},$$

$$\boldsymbol{y_2 - y_1 = P_1P_2} \textbf{ 在 } \boldsymbol{YY'} \text{ 上之射影},$$

$$\boldsymbol{z_2 - z_1 = P_1P_2} \textbf{ 在 } \boldsymbol{ZZ'} \text{ 上之射影}.$$

因若求 P_1OP_2 及 P_1P_2 在 XX' 上之射影,得

$$P_1O \text{ 之射影} + OP_2 \text{ 之射影} = P_1P_2 \text{ 之射影}.$$

但從系 I,

$$P_1O \text{ 之射影} = -x_1, \quad OP_2 \text{ 之射影} = x_2.$$

$$\therefore \quad x_2 - x_1 = P_1P_2 \text{ 在 } XX' \text{ 上之射影}.$$

同樣,其餘公式亦可證得.

系 III. 若多邊形之各邊有環繞周圍之方向,則各邊在任何方向線上射影之和為零.

習　　題

1. 下列各點爲三角形之頂點，求三角形各邊在各軸上之射影，並用系 III 證驗各結果。

(a) $(-3, 4, -8)$, $(5, -6, 4)$, $(8, 6, 0)$.

(b) $(-4, -8, -6)$, $(3, 0, 7)$, $(6, 4, -2)$.

(c) $(10, 3, -4)$, $(-4, 0, 2)$, $(0, 8, 4)$.

(d) $(-6, 4, -4)$, $(0, -4, 6)$, $(9, 7, -2)$.

2. 若 P_1P_2 在軸上之射影各爲 $3, -2$ 及 7，而 P_1 之坐標爲 $(-4, 3, 2)$，求 P_2 之坐標。

答。 $(-1, 1, 9)$.

3. 連續聯接 $(6, 0, 0)$, $(0, 4, 3)$, $(-4, 0, 0)$ 及 $(0, 0, 8)$ 諸點，得一折線。求各線分在 (a) X 軸，(b) Y 軸，(c) Z 軸上射影之和。再求封閉線在各軸上之射影。用定理 II 證驗此結果，並作其圖象。

4. 連續聯接 $(6, 8, -3)$, $(0, 0, -3)$, $(0, 0, 6)$, $(-8, 0, 2)$ 及 $(-8, 4, 0)$ 諸點得一折線，求各線分在 (a) X 軸，(b) Y 軸，(c) Z 軸上射影之和，再求封閉線在各軸上之射影。用定理 II 證驗此結果，並作其圖象。

5. 求自原點至習題 1 中諸點所聯直線在各軸上之射影。

6. 求自原點至下列諸點聯線與各軸之交角。

(a) $(8, 6, 0)$. 答。 $\cos^{-1}\frac{4}{5}, \cos^{-1}\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2}$.

(b) $(2, -1, -2)$. 答。 $\cos^{-1}\frac{2}{3}, \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right), \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$.

7. 自原點至 $P(x, y, z)$ 之聯線，其長爲 ρ，與軸之交角各爲 α, β 及 γ. 求二式以表此線在軸上之射影。

8. 自原點至 $P(x, y, z)$ 聯一直線，若此直線與軸之交角各爲 α, β 及 γ. 求 P 點之坐標在此直線上之射影。 答。 $x\cos\alpha, y\cos\beta, z\cos\gamma$.

140. 一直線之方向餘弦. 一方向直線與坐標軸之交角 α, β 及 γ，稱爲此直線之**方向角**.

若此直線不與軸相交，則由定義（§ 139），α, β 及 γ 爲經過原點而與所設直線平行且同向之直線與各軸之交角。

一直線方向角之餘弦稱爲此直線之**方向餘弦**。

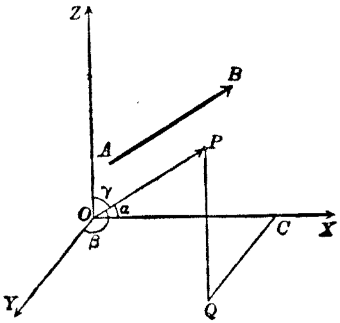
若將直線反向，其方向餘弦變號。

因一直線反向後，使 α, β 及 γ 各變為 (§ 19) $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$ 及 $\pi-\gamma$，而 (§ 12, 5) $\cos(\pi-x)=-\cos x$.

定理 III. 若 α, β 及 γ 為一直線之方向角，則

(III) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

即一直線方向餘弦平方之和為 1.



證　設 AB 為一直線，其方向角為 α, β 及 γ. 經過 O 作 OP 平行於 AB，並使 $OP=\rho$. 從定義 (§ 139)，$\angle XOP=\alpha$，$\angle YOP=\beta$，$\angle ZOP=\gamma$. 求 OP 在軸上之射影，由 § 139 系 I 及定理 I 得

(1) $$x=\rho\cos\alpha,\ y=\rho\cos\beta,\ z=\rho\cos\gamma.$$

求 OP 及 $OCQP$ 在 OP 上之射影，得 (定理 I 及 II)

(2) $$\rho=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

以 (1) 代入 (2)，全式除以 ρ 即得 (III).　　Q. E. D

系. 若 $\dfrac{\cos\alpha}{a}=\dfrac{\cos\beta}{b}=\dfrac{\cos\gamma}{c}$，則

$$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\qquad \cos\beta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

即若一直線之方向餘弦與三數值成比例時，每一方向餘弦各等於一數除以三數平方和之平方根所得之商.

因若 r 指所設比之公共比值，則

(3) $$\cos\alpha=ar,\quad \cos\beta=br,\quad \cos\gamma=cr.$$

平方，相加，應用 (III),

$$1=r^2(a^2+b^2+c^2),$$

$$\therefore \quad r = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

代入 (3)，即可得 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 及 $\cos\gamma$ 之值。

若一直線交 XY 平面，依 $\cos\gamma$ 為正為負 而定此直線之方向為向上或向下。

若一直線平行於 XY 平面，$\cos\gamma=0$，依 $\cos\beta$ 為正為負，而定此直線之方向為向 ZX 平面之前或後。

若此直線平行於 X 軸，$\cos\beta=\cos\gamma=0$，依 $\cos\alpha=1$ 或 -1，而定此直線與 X 軸同向或反向。

此類解釋可使吾人選擇系中根式之符號，此後直線之正方向概預先假定。

141　長度.

定理 IV. 聯兩點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，其長度 l 為

$$\text{(IV)} \qquad l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

證　設直線 P_1P_2 之方向角為 α, β 及 γ.

求 P_1P_2 在軸上之射影得 (§ 139 定理 I 及系 II)

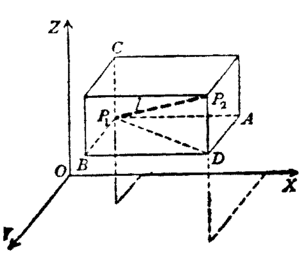
$$(1) \qquad l\cos\alpha=x_2-x_1,\quad l\cos\beta=y_2-y_1,\quad l\cos\gamma=z_2-z_1.$$

平方，相加，

$$l^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$
$$=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2.$$

應用 § 140 (III)，求平方根，即得 (IV).　　*Q. E. D.*

系. 自 P_1 至 P_2 所聯直線之方向餘弦與 P_1P_2 在軸上之射影成比例.



因從 (1)　$\dfrac{\cos\alpha}{x_2-x_1}=\dfrac{\cos\beta}{y_2-y_1}=\dfrac{\cos\gamma}{z_2-z_1}$,

因每一比值等於 $\dfrac{1}{l}$，其分母為 P_1P_2 在軸上之射影 (§ 139 系 II).

若經過 P_1 及 P_2 作平行於各坐標面之平面，成一長方六面體，其邊平行於軸，其長之絕對值等於 P_1P_2 在軸上之射影。P_1P_2 為長方六面體之對角線，因此 l^2 等於三邊平方之和，由此得求 (IV) 之第二法。

習　題

1. 求一直線之長度及其方向餘弦，此直線自

(a) $P_1(4, 3, -2)$ 至 $P_2(-2, 1, -5)$. 　　答. $7, -\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}$.

(b) $P_1(4, 7, -2)$ 至 $P_2(3, 5, -4)$. 　　答. $3, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$.

(c) $P_1(3, -8, 6)$ 至 $P_2(6, -4, 6)$. 　　答. $5, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0$.

2. 求一向上直線之方向餘弦，若其方向餘弦與 (a) 3, 6 及 2；(b) 2, 1 及 -4；(c) 1, -2 及 3 成比例.

答. (a) $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}$；(b) $\frac{2}{\pm\sqrt{21}}, \frac{1}{\pm\sqrt{21}}, \frac{-4}{\pm\sqrt{21}}$；(c) $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$.

3. 下列諸點爲三角形之頂點，求三角形各邊之長度及其方向餘弦，且用 § 139 定理 I 求各邊在軸上之射影，並以 § 13[illegible] 系 III 證驗之.

(a) $(0, 0, 3), (4, 0, 0), (8, 0, 0)$.

(b) $(3, 2, 0), (-2, 5, 7), (1, -3, -5)$.

(c) $(-4, 0, 6), (8, 2, -1), (2, 4, 6)$.

(d) $(3, -3, -3), (4, 2, 7), (-1, -2, -5)$.

4. 一直線經過 O 點，其正向部分應在何種卦限內 ($O-XYZ$, $O-X'YZ$ 等)，若

(a) $\cos\alpha>0, \cos\beta>0, \cos\gamma>0$?

(b) $\cos\alpha>0, \cos\beta>0, \cos\gamma<0$?

(c) $\cos\alpha>0, \cos\beta<0, \cos\gamma<0$?

(d) $\cos\alpha>0, \cos\beta<0, \cos\gamma>0$?

(e) $\cos\alpha<0, \cos\beta>0, \cos\gamma>0$?

(f) $\cos\alpha<0, \cos\beta<0, \cos\gamma>0$?

(g) $\cos\alpha<0, \cos\beta<0, \cos\gamma<0$?

(h) $\cos\alpha<0, \cos\beta>0, \cos\gamma<0$?

5. 一直線之方向若何，若 $\cos\alpha=0$? $\cos\beta=0$? $\cos\gamma=0$? $\cos\alpha=\cos\beta=0$? $\cos\beta=\cos\gamma=0$? $\cos\gamma=\cos\alpha=0$?

6. 自原點至 $P_1(5, -7, 6)$ 作一直線，求此直線在他一直線上之射影，已知他一直線之方向餘弦爲 $\frac{6}{7}$, $-\frac{3}{7}$ 及 $\frac{2}{7}$. 　　答. 9.

提示. OP 在任何直線上之射影等於以 P 之坐標所成之折線在該直線上之射影.

7. 自原點至 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 作一直線，求此線在方向角爲 α, β 及 γ 之直線上之射影.

答. $x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma$.

8. 求證三點 $(-3, 2, -7)$, $(2, 2, -3)$ 及 $(-3, 6, -2)$ 爲等腰三角形之頂點.

9. 求證三點 $(4, 3, -4)$, $(-2, 9, -4)$ 及 $(-2, 3, 2)$ 爲等邊三角形之頂點.

10. 求證 $(-4, 0, 2)$, $(-1, 3\sqrt{3}, 2)$, $(2, 0, 2)$ 及 $(-1, \sqrt{3}, 2+2\sqrt{6})$ 爲正四面體之頂點.

11. 若 P_1 及 P_2 在 XY 平面上，公式 IV 將如何？若在平行於 XY 平面之平面上則如何？

12. 自 (, -8, 6) 及 (-2, 4, -3) 至 (12, -24, 18) 所聯直線之方向餘弦相同，試證之．此三點位置如何？

13. 用方向餘弦求證三點 (3, -2, 7), (6, 4, -2) 及 (5, 2, 1) 在一直線上．

14. 一直線之方向餘弦為何，若此直線平行於 X 軸？平行於 Y 軸？平行於 Z 軸？

15. 一直線之一個方向餘弦之值為何，若此直線平行於 XY 平面？YZ 平面？ZX 平面？其餘二個方向餘弦，有何關係存在？

16. 證明一點 (-1, -2, -1) 在 (4, -7, 3) 及 (-6, 3, -5) 之聯線上，且與此二點等距離．

17. 一直線之二個方向角為 $\frac{\pi}{3}$ 及 $\frac{\pi}{4}$，第三個方向角為何？　　答．$\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

18. 一直線與三軸之傾角相等，求其方向角．　　答．$\alpha=\beta=\gamma=\cos^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

19. 求一直線之長度，此直線在軸上之射影各為

(a) 6, -3 及 2.　　答．7.

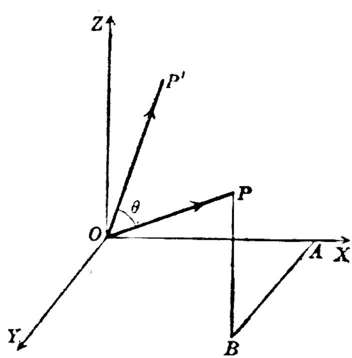
(b) 12, 4 及 -3.　　答．13.

(c) -2, -1 及 2.　　答．3.

142. 二方向線之交角．

定理 V. 若 α, β, γ 及 α', β', γ' 為二方向線之方向角，則二線之交角為

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'. \tag{V}$$



證　作 OP 及 OP' 平行於所設直線，且使 $OP=\rho$，則從 § 139 定義

$$\angle POP'=\theta.$$

求 OP 及 $OABP$ 在 OP' 上之射影，從 § 139 定理 I 及定理 II，得

$$\rho\cos\theta=x\cos\alpha'+y\cos\beta'+z\cos\gamma'. \tag{1}$$

求 OP 在軸上之射影 (§139 系 I 及定理 I)，

$$x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\cos\beta,\quad z=\rho\cos\gamma. \tag{2}$$

以 (2) 代入 (1)，全式除以 ρ 即得 (V).　　*Q. E. D.*

定理 VI. 若 α, β, γ 及 α', β', γ' 爲二直線之方向角，則此二直線

(a) 互相平行且有同方向* 在及祇在

$$\alpha=\alpha',\ \beta=\beta',\ \gamma=\gamma';$$

(b) 互相垂直† 在及祇在

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0.$$

即二直線在及祇在方向角相等時，平行且同向；方向餘弦乘積之和爲零時，垂直.

證 在及祇在二直線之方向角相等時，此二直線可同時與自原點所作之一直線平行且有同方向.

自 (V) 若二直線互相垂直，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 則 $\cos\theta=0$. 其逆理亦成立. *Q. E. D.*

系. 若一直線之方向餘弦與 a, b, c 及 a', b', c' 成比例，則此二直線互相平行及垂直之條件各爲

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'},\quad aa'+bb'+cc'=0.$$

143. 分點.

定理 VII. 一點 $P(x, y, z)$ 分 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之聯線爲兩分，其兩分之比爲

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda,$$

則分點之坐標爲

$$\text{(VII)}\qquad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

---

* 在及祇在二直線之方向角互爲補角時，此二直線互相平行，惟方向相反.

† 當二直線之交角爲 $\frac{\pi}{2}$ 時，此二直線可稱爲互相垂直，惟此二直線不一定相交。

證法與 § 23 定理 VII 同。

系. 聯 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之直線，其中點 $P(x, y, z)$ 之坐標為

$$x=\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\ z=\tfrac{1}{2}(z_1+z_2).$$

習　題

1. 求二直線之交角，其方向餘弦各為

(a) $\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7}$ 及 $\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}$. 　　答. $\frac{\pi}{2}$.

(b) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 及 $-\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}$. 　　答. $\cos^{-1}\frac{14}{39}$.

(c) $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ 及 $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}$. 　　答. $\cos^{-1}\left(-\frac{4}{21}\right)$.

2. 三直線之方向餘弦各為 $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}$; $-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}$; 及 $-\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$. 證此三直線互相垂直。

3. 試證聯接下列各組點之二直線互相平行或垂直。

(a) (3, 2, 7), (1, 4, 6) 及 (7, −5, 9), (5, −3, 8).

(b) (13, 4, 9), (1, 7, 13) 及 (7, 16, −6), (3, 4, −9).

(c) (−6, 4, −3), (1, 2, 7) 及 (8, −5, 10), (1, 5, −7, 20).

4. 一點分下列二點聯線成所設比，求分點之坐標。

(a) (3, 4, 2), (7, −6, 4), 　$\lambda=\frac{1}{2}$. 　　答. $\left(\frac{13}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

(b) (−1, 4, −6), (2, 3, −7), 　$\lambda=-3$. 　　答. $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{15}{2}\right)$.

(c) (8, 4, 2), (3, 9, 6), 　$\lambda=-\frac{1}{3}$. 　　答. $\left(\frac{21}{3}, \frac{3}{2}, 0\right)$.

(d) (7, 3, 9), (2, 1, 2), 　$\lambda=4$. 　　答. $\left(3, \frac{7}{5}, \frac{17}{5}\right)$.

5. 求證 (7, 3, 4), (1, 0, 6) 及 (4, 5, −2) 為直角三角形之頂點。

6. 求證 (−6, 3, 2), (3, −2, 4), (5, 7, 3) 及 (−13, 17, −1) 為一梯形之頂點。

7. 求證 (3, 7, 2), (4, 3, 1), (1, 6, 3) 及 (2, 2, 2) 為一平行四邊形之頂點。

8. 求證 (6, 7, 3), (3, 11, 1), (0, 3, 4) 及 (−3, 7, 2) 為一矩形之頂點。

9. 求證 (6, −6, 0), (3, −4, 4), (2, −9, 2) 及 (−1, −7, 6) 為一菱形之頂點。

10. 求證 (7, 2, 4), (4, −4, 2), (9, −1, 10) 及 (6, −7, 8) 為一正方形之頂點。

11. 求證下列各點在一直線上，並求第三點分第一，第二兩點聯線之比值。

(a) (4, 12, 3), (3, 6, 4) 及 (2, −1, 5). 答. −2.

(b) (4, −5, −12), (−2, 4, 6) 及 (2, −2, −6). 答. $\frac{1}{2}$.

(c) (−3, 4, 2), (7, −2, 6) 及 (2, 1, 4). 答. 1.

12. 三角形之頂點為 (3, 4, −2), (7, 0, 8) 及 (−5, 4, 6), 求此三角形中線之長度。

答. $\sqrt{113}, \sqrt{89}, 2\sqrt{29}$.

13. 下列諸點為四邊形之頂點，求證此四邊形對邊中點之聯線互相平分。

(a) (8, 4, 2), (0, 2, 5), (−3, 2, 4) 及 (8, 0, −6).

(b) (0, 0, 9), (2, 6, 8), (−8, 0, 4) 及 (0, −8, 6).

(c) $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$.

14. 試證依次聯接任意四邊形各邊之中點，成一平行四邊形。

15. 聯接 $P_1(3, 2, -6)$ 及 $P_2(-3, 5, -4)$. 求 P_1P_2 在一向上直線上之射影。已知此向上直線之方向餘弦與 2, 1 及 −2 成比例。 答. $4\frac{1}{3}$.

16. 求自 $P_1(6, 3, 2)$ 至 $P_2(4, 2, 0)$ 之聯線在自 $P_3(7, -6, 0)$ 至 $P_4(-5, -2, 3)$ 聯線上之射影。 答. $\frac{14}{13}$.

17. 三角形之頂點為 (3, 6, −2), (7, −4, 3) 及 (−1, 4, −7). 求此三角形三中線交點之坐標。 答. (3, 2, −2).

18. 設三角形之頂點為 P_1, P_2 及 P_3, 求此三角形三中線交點之坐標。

答. $[\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3), \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)]$.

19. 聯接四面體各對稜之中點得三直線。試證此三直線經過一點，且為該點所平分。

20. 自四面體之各頂點至各對面中線之交點聯得四直線，求證此四直線交於一點，且自頂點至此交點之距離為全長之四分之三(四面體之重心)。

第十七章

面，曲線及方程式

144. 空間之軌跡. 在立體幾何學中須論二種軌跡:

1. 在空間適合於一個所設條件之一點,其軌跡常爲一面.

如一動點與一定點有所設距離,其軌跡爲一球面.一動點與二定點有等距離,其軌跡爲一平面,此平面垂直於二定點之聯線於其中點.

2. 在空間適合於二個所設條件*之一點,其軌跡常爲一曲線.因適合於任一個條件之一點之軌跡爲一面,而同時適合於二個條件之諸點必在二面上,即在二面所交之曲線上.

如一動點與一定點 P_1 之距離爲 r,且與二定點 P_2 及 P_3 之距離相等,此動點之軌跡爲一圓.此圓爲一球面與一平面之交線;而球面以 P_1 爲中心,r 爲半徑,平面則垂直於 P_2P_3 之中點.

此二種軌跡須謹慎區別之.

145. 面之方程式. 第一基本問題. 若設一面上任意點 P 之坐標爲 (x, y, z),則從其軌跡爲一面之條件,可得一含有 x, y 及 z 三變數之方程式.

一面之方程式爲含有坐標 x, y 及 z 之方程式,而

1. 在面上各點之坐標必適合於方程式.

2. 凡坐標能適合於方程式之各點均在面上.

---

* 條件個數,須妥爲計算,若一點與三定點 P_1, P_2 及 P_3 等距,則此點適合於二個條件,即與 P_1, P_2 等距及與 P_2, P_3 等距.

若將面定爲適合於一條件之軌跡，其方程式可用類似 § 28 之規則求之.

例 1. 求一點之軌跡，此點與 $P_1(3, 0, -2)$ 之距離恆爲 4.

解 設 $P(x, y, z)$ 爲軌跡上之一點，所設條件可寫爲

$$P_1P = 4.$$

從 § 141 (IV) $\quad P_1P = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2}$

$$\therefore \quad \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2} = 4.$$

化簡，得所求方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z - 3 = 0.$$

欲知此式即爲軌跡之方程式，須用 § 27 及 § 28 例一之方法證驗之.

習 題

1. 求一點軌跡之方程式，已知此點
   (a) 在 XY 平面上方 3 單位.
   (b) 在 YZ 平面右方 4 單位.
   (c) 在 XY 平面下方 5 單位.
   (d) 在 ZX 平面後方 10 單位.
   (e) 在 YZ 平面左方 7 單位.
   (f) 在 ZX 平面前方 2 單位.
2. 求一平面之方程式，此平面平行於
   (a) XY 平面，且在其上方 4 單位.
   (b) XY 平面，且在其下方 5 單位.
   (c) ZX 平面，且在其前方 3 單位.
   (d) YZ 平面，且在其左方 7 單位.
   (e) ZX 平面，且在其後方 2 單位.
   (f) YZ 平面，且在其右方 4 單位.
3. 求一球面之方程式，其中心爲
   (a) (3, 0, 4) 半徑爲 5. 答. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8z = 0.$

(*b*) $(-3, 2, 1)$ 半徑爲 4. 答. $x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z-2=0$.

(*c*) $(6, 4, 0)$ 半徑爲 7. 答. $x^2+y^2+z^2-12x-8y+3=0$.

(*d*) (α, β, γ) 半徑爲 r.

答. $x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2=0$.

4. 坐標面之方程式爲何?

5. 一平面之方程式爲何種形式，若此平面平行於 XY 平面? YZ 平面? ZX 平面?

6. 求一點軌跡之方程式，此點與下列二點等距

(*a*) $(3, 2, -1)$ 及 $(4, -3, 0)$. 答. $2x-10y+2z-11=0$.

(*b*) $(4, -3, 6)$ 及 $(2, -4, 2)$. 答. $4x+2y+8z-37=0$.

(*c*) $(1, 3, 2)$ 及 $(4, -1, 1)$. 答. $3x-4y-z-2=0$.

(*d*) $(4, -6, -8)$ 及 $(-2, 7, 9)$. 答. $6x-13y-17z+9=0$.

7. 四面體之四頂點爲 $(5, 4, 0)$, $(2, -5, -4)$, $(1, 7, -5)$ 及 $(-4, 3, 4)$ 自四面體各稜之中點作垂直於各稜之六個平面，求此六個平面之方程式，並證諸平面均經過一點 $(-1, 1, -2)$.

8. 長方六面體之一頂點在原點，三稜合於坐標軸，另一頂點爲 $(3, 5, 7)$. 求此六面體各面之方程式.

9. 一球面之中心爲 $(6, 2, 3)$，且經過原點，求其方程式。

答. $x^2+y^2+z^2-12x-4y-6z=0$.

10. 一點與 $(2, 6, 8)$ 之距離爲與 $(4, -2, 4)$ 之距離之三倍. 求此點軌跡之方程式，並與習題 3 (*d*) 之答案比較而決定此軌跡之性質.

11. 一點與 $(1, 3, -2)$ 及 $(6, -4, 2)$ 二點距離平方之和爲 50. 求此點軌跡之方程式，並用習題 3 (*d*) 之答案比較而決定此軌跡之性質.

146. 平行於坐標面之平面. 吾人甚易證明

定理 I. 若一平面

平行於 XY 平面，其方程式之形式爲 $z=$ 常數;

平行於 YZ 平面，其方程式之形式爲 $x=$ 常數;

平行於 ZX 平面，其方程式之形式爲 $y=$ 常數.

147. 曲線之方程式. 第一基本問題. 若 (x, y, z) 爲所設曲線上任一點 P 之坐標，則從其軌跡爲一曲線之二個條件，可得二個含有變數 x, y 及 z 之方程式.

曲線之方程式爲含有坐標 x, y 及 z 之二個方程式，而

1. 曲線上任一點之坐標必適合於二方程式.

2. 凡坐標能適合於二方程式之各點均在曲線上.

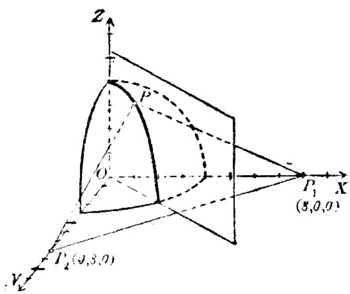
若一曲線定爲適合於二個條件之軌跡，從每一條件，可用類似於 § 28 規則以求一面之方程式，此二面之方程式卽爲曲線之方程式.

例 1. 求一點之軌跡，此點自原點之距離爲 4，且與二點 $P_1(8, 0, 0)$ 及 $P_2(0, 8, 0)$ 等距.

解 第一步. 設 $P(x, y, z)$ 爲軌跡上任一點.

第二步. 所設條件爲

(1) $$PO = 4, \quad PP_1 = PP_2.$$



第三步. 從 § 141 (IV),

$$PO = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$PP_1 = \sqrt{(x-8)^2 + y^2 + z^2},$$

$$PP_2 = \sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2}.$$

代入 (1)，得

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4, \quad \sqrt{(x-8)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2}.$$

平方，化簡，得所求方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x - y = 0.$$

此二方程式須用 § 27 例 1 相同之方法證驗之.

例 2. 一圓在 XY 平面上，其中心爲原點，半徑爲 5，求其方程式.

解 在平面幾何學中圓之方程式爲 (§ 29 系)

(2) $$x^2 + y^2 = 25.$$

若認此爲立體幾何學之問題，則須二個方程式，而使在圓上任一點 $P(x, y, z)$ 之坐標能適合之. 因 P 點在 XY 平面上，

(3)
$$z=0.$$

因此 (2) 及 (3) 表 P 點在 XY 平面及所設圓上. 故圓之方程式爲

$$x^2+y^2=25,\quad z=0.$$

例 2 中所述之情形甚普遍,因此

若一曲線在 XY 平面上之方程式爲已知,則此曲線在空間之方程式爲所設方程式與 $z=0$.

在其餘二坐標面之曲線方程式,其敍述相同.

從 § 146 定理 I, 得

定理 II. 一直線平行於

X 軸,其方程式之形式爲 $y=$ 常數, $z=$ 常數;

Y 軸,其方程式之形式爲 $z=$ 常數, $x=$ 常數;

Z 軸,其方程式之形式爲 $x=$ 常數, $y=$ 常數.

習　　題

1. 求一點軌跡之方程式,此點

(a) 在 XY 平面上方 3 單位,且在 YZ 平面右方 4 單位.

(b) 在 YZ 平面左方 5 單位,且在 ZX 平面前方 2 單位.

(c) 在 ZX 平面後方 4 單位,且在 YZ 平面左方 7 單位.

(d) 在 XY 平面下方 9 單位,且在 YZ 平面右方 4 單位.

2. 求一直線之方程式,此直線

(a) 在 XY 平面上方 5 單位,且在 ZX 平面前方 2 單位.

(b) 在 YZ 平面左方 2 單位,且在 XY 平面下方 8 單位.

(c) 在 YZ 平面右方 3 單位,且與 Z 軸之距離爲 5 單位.

(d) 與 X 軸之距離爲 13 單位,且在 ZX 平面後方 5 單位.

(e) 平行於 Y 軸且經過 $(3, 7, -5)$.

(f) 平行於 Z 軸且經過 $(-4, 7, 6)$.

3. 求一點軌跡之方程式,此點

(a) 在 XY 平面上方 5 單位，且與 $(3, 7, 1)$ 之距離為 3 單位。

答．$z=5$, $x^2+y^2+z^2-6x-14y-2z+50=0$.

(b) 與 $(3, 7, 6)$ 之距離為 2 單位，與 $(2, 5, 4)$ 之距離為 4 單位。

答．$x^2+y^2+z^2-6x-14y-12z+90=0$,

$x^2+y^2+z^2-4x-10y-8z+29=0$.

(c) 與原點之距離為 5 單位，且與 $(3, 7, 2)$ 及 $(-3, -7, -2)$ 等距。

答．$x^2+y^2+z^2-25=0$, $3x+7y+2z=0$.

(d) 與 $(3, 5, -4)$ 及 $(-7, 1, 6)$ 等距，且與 $(4, -6, 3)$ 及 $(-2, 8, 5)$ 等距。

答．$5x+2y-5z+11=0$, $3x-7y-z+8=0$.

(e) 與 $(2, 3, 7)$, $(3, -4, 6)$ 及 $(4, 3, -2)$ 等距。

答．$2x-14y-2z+1=0$, $x+7y-8z+16=0$.

4. 一長方六面體三稜之長為 a, b 及 c，若三面與坐標面重合，而一頂點在 (a) $O-XYZ$, (b) $O-XY'Z$, (c) $O-X'Y'Z$ 卦限中，其三稜之方程式為何？

5. 坐標軸之方程式為何？

6. 下列諸方程式為在一坐標面上之曲線方程式．若在空間，其方程式為何？

(a) $y^2=4x$.　　(e) $x^2+4z+6x=0$.

(b) $x^2+z^2=16$.　　(f) $y^2-z^2-4y=0$.

(c) $8x^2-y^2=64$.　　(g) $yz^2+z^2-6y=0$.

(d) $4z^2+9y^2=36$.　　(h) $z^2-4x^2-8z=0$.

7. 求一點軌跡之方程式，此點與 $(6, 4, 3)$ 及 $(6, 4, 9)$ 二點等距，與 $(-5, 8, 3)$ 及 $(-5, 0, 3)$ 二點亦等距，並決定此軌跡之性質。　答．$z=6$, $y=4$.

8. 求一點軌跡之方程式，此點與 $(3, 7, -4)$, $(-5, 7, -4)$ 及 $(-5, 1, -4)$ 等距，並決定此軌跡之性質　答．$x=-1$, $y=4$.

148. 一方程式之軌跡．第二基本問題． 一方程式中三變數（可缺少一個或二個）表空間一點之坐標，**此方程式之軌跡為一面**．此面經過且祇能經過其坐標所適合於此方程式之諸點．

面上任一點之坐標可求得如下：

解方程式，求一變數如 z．假定一組 x 及 y 之值，而計算 z 之值。

取一薄板為 XY 平面，以針立在平面上所假定之各點 (x, y)，使針之長為 z，在針端張一薄橡皮膜，此即為面之模形。

第二基本問題為作一軌跡，為避免機械上之困難，在空間常擱除不用。

149. 二方程式之軌跡. 第二基本問題. 二方程式中之三變數表空間一點之坐標,此二方程式之軌跡爲一曲線,此曲線經過且祇能經過其坐標所能適合於二方程式之諸點.

曲線上任一點之坐標可求得如下:

解方程式,用變數 z 表二變數 x 及 y, 假定 z 爲各數值,再計算 x 及 y 之相當值.

150. 討論曲線方程式. 第三基本問題. 初等解析幾何學中,曲線之討論限於平行於任一坐標面之平面上之曲線.此曲線爲一面與平行於一坐標面之平面相交之交線.決定其性質之方法有如下例.

例 1. 一面之方程式爲 $y^2+z^2=4x$. 試決定平面 $z=4$ 與此面相交所得曲線之性質.

解　從定義,曲線之方程式爲

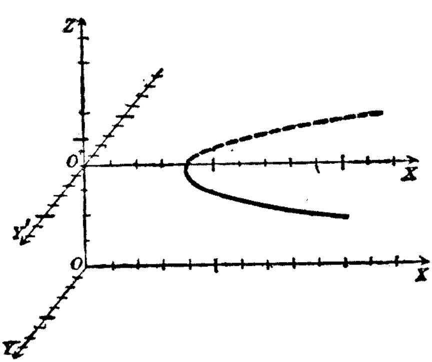
(1) $$y^2+z^2=4x,\quad z=4.$$

以第二式代入第一式消去 z, 得

(2) $$y^2-4x+16=0,\quad z=4.$$

方程式 (2) 卽爲曲線之方程式.

因每組 (x, y, z) 之值若適合於方程式 (1),亦必適合於方程式(2).反之亦然.



若在平面 $z=4$ 上取 $O'X'$ 及 $O'Y'$ 爲二軸,此二軸卽爲 $z=4$ 之平面

與 ZX 平面及 YZ 平面之交線. 關於此二軸之曲線方程式爲方程式 (2) 之第一式, 即

$$y^2-4x+16=0. \tag{3}$$

因方程式 (2) 之第二式爲在 X', O' 及 Y' 平面諸點所適合, 其第一式則爲在該平面上曲線 (3) 之任何點所適合, 而任一點之前二坐標 x 及 y 關於 $O'X'$, $O'Y$ 及 $O'Z$ 與 $O'X$, OY 及 OZ 二組軸均相同.

(3) 之軌跡爲一拋物線 (§ 81 規則), 其頂點在平面 $z=4$ 上時爲 $(4, 0)$ 之一點而 $p=2$.

例 1 所用之方法可使吾人述之於下列規則.

規則. 決定一曲線之性質, 此曲線爲平行於坐標面之一平面交所設面之交線.

第一步. 從一面與一平面之方程式, 消去平面方程式中之一元, 所得結果即爲曲線之方程式, 此曲線以所設平面與其餘二坐標面之交線爲其二軸.

第二步. 用平面解析幾何學中之方法, 決定第一步所得曲線之性質.

習 題

1. 決定下列諸曲線之性質, 並作其軌跡.

(a) $x^2-4y^2=8z$, $z=8$.

(b) $x^2+9y^2=9z^2$, $z=2$.

(c) $x^2-4y^2=4z$, $y=-2$.

(d) $x^2+y^2+z^2=25$, $x=3$.

(e) $x^2+4y^2+9z^2=36$, $y=1$.

(f) $x^2-4y^2+z^2=25$, $x=-3$.

(g) $x^2-y^2-4z^2+6x=0$, $x=2$.

(h) $y^2+z^2-4x+8=0$, $y=4$.

2. 作下列諸面與坐標面相交之曲線.

(a) $x^2+4y^2+16z^2=64$.

(b) $x^2+4y^2-16z^2=64$.

(c) $x^2-4y^2-16z^2=64$.

(d) $x^2+9y^2=10z$.

(e) $x^2-9y^2=10z$.

(f) $x^2+4y^2-16z^2=0$.

3. 證明習題 2 中諸面與平行於坐標面之平行面系相交成相似二次曲線. 在何種情形時,

此敍述應加變更？

4. 決定一面 $x^2+y^2+4z^2=64$ 及平面 $z=k$ 交線之性質．此曲線將如何變化，若 k 自 0 增加至 4？自 -4 至 0？從此所得面之形狀為如何？

5. 決定一面 $4x-2y=4$ 與平面 $y=k$ 之交線及與平面 $z=k'$ 之交線之性質．當 k 或 k' 變化時，此交線將如何變更？從此所得面之形狀為如何？

151. 討論面之方程式．第三基本習題．

定理 III． 一代數方程式無常數項，其軌跡必經過原點．

證法與 § 35 定理 VI 相仿．

定理 IV． 若改變方程式中一變數之符號，此方程式之軌跡不變，則此軌跡關於該變數所定之坐標面為對稱．

若改變方程式中二變數之符號，此方程式之軌跡不變，則此軌跡關於第三變數所定之軸為對稱．

若改變方程式中三變數之符號，此方程式之軌跡不變，則此軌跡關於原點為對稱．

證法與 § 34 定理 IV 相仿．

規則． 求一面在坐標軸上之截距．

命每二變數為零，求第三變數之實數值．

一面與坐標面相交之曲線稱為坐標面之**追跡**．從 § 150 規則第一步可知．

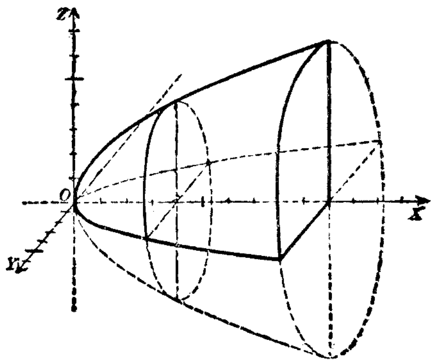
一面之追跡方程式可依次以 $x=0$，$y=0$ 及 $z=0$ 代入面之方程式求得之．

由此方法吾人可決定面之性質．

一面之普通形象可從一組平行於坐標面之平行面系所交之曲線**決定**之（§ 150 規則），此亦可使吾人決定此面為封閉或無限伸張．

例 1. 討論方程式 $y^2+z^2=4x$．

解 1. 因方程式中無常數項，此面經過原點.



2. 此面對稱於 XY 平面，ZX 平面及 X 軸.

因改變 z 或 y, 或並變 z 及 y 之符號，所設方程式之軌跡不變.

3. 此面祇交軸於原點.

4. 其追跡各為點圓 $y^2+z^2=0$, 拋物線 $z^2=4x$ 及 $y^2=4x$.

5. 此面交平面 $x=k$ 於曲線 (§ 150 規則)

$$y^2+z^2=4k.$$

此曲線為一圓，其中心為原點，即在 X 軸上. 若 $k>0$, 其半徑為 $2\sqrt{k}$, 若 $k<0$ 則無軌跡. 故此面完全在 YZ 平面之右方.

若 k 自 0 增至無窮大，此圓半徑亦自 0 增至無窮大，而平面 $x=k$ 自 YZ 平面漸次離遠.

各平行於 XY 或 ZX 平面之二平面 $z=k$ 或 $y=k'$ 與所設面之交線為 (§ 150 規則) 拋物線，其方程式為 (與 § 150 例 1 比較)

$$y^2=4x-k^2 \text{ 或 } z^2=4x-k'^2.$$

此二拋物線有同一之 p 值，即 $p=2$. 當 k 或 k' 之絕對值增加時，拋物線之頂點自 YZ 或 ZX 平面漸次離遠.

習 題

1. 討論下列諸方程式之軌跡.

(a) $x^2+z^2=4x$.

(b) $x^2+y^2+4z^2=16$.

(c) $x^2+y^2-4z^2=16$.

(d) $6x+4y+3z=12$.

(e) $3x+2y+z=12.$　　(h) $x^2+y^2-z^2+2xy=0.$

(f) $x^2+y^2-z^2=0.$　　(i) $x+y-6z=6.$

(g) $x^2-y^2-z^2=9.$　　(j) $y^2+z^2=25.$

2. 以坐標面上之追跡及與平行於一坐標面之一組平行面系所交之交線證 $Ax+By+Cz+D=0$ 之軌跡爲一平面.

3. 求一點軌跡之方程式，此點與 $(2, 0, 0)$ 點及 YZ 平面等距，並討論此軌跡.

答. $y^2+z^2-4x+4=0.$

4. 求一點軌跡之方程式，此點與 $(0, 0, 3)$ 點之距離爲與 XY 平面距離之兩倍，並討論此軌跡.

答. $x^2+y^2-3z^2-6z+9=0.$

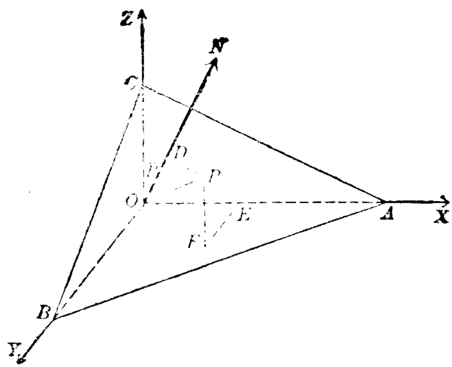
5. 求一點軌跡之方程式，此點與 $(0, 4, 0)$ 點之距離爲與 ZX 平面距離之五分之三，並討論此軌跡.

答. $25x^2+16y^2+25z^2-200y+400=0.$

第　十　八　章

平面及三元一次普遍方程式

152. 平面方程式之法線式. 設 ABC 爲任意平面，ON 爲自原點至平面 ABC 所作之垂線，其垂足爲 D. 假定 ON 之正方向爲自 O 至 N，即自原點至平面. 並命有向長度 OD 爲 p，ON 之方向角 (§ 140) 爲 α, β 及



γ，則任一平面之位置可由所設 p, α, β 及 γ 之正數值決定之.

反之，一所設平面決定一組 p, α, β 及 γ 之正數值. 若 $p=0$，以上所定 ON 之方向無意義. 吾人恆假定 ON 之向上方向爲正，因 $\gamma<\frac{\pi}{2}$，故 $\cos\gamma>0$. 若此平面經過 OZ，則 ON 在 XY 平面上，而 $\cos\gamma=0$；在此情形，吾人假定 ON 之方向可使 $\beta<\frac{\pi}{2}$，因此 $\cos\beta>0$. 再若此平面合於 YZ 平面，則 ON 之正方向與 OX 同.

定理 I. 法線式. 一平面之方程式爲

(I) $$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

式中 p 爲自原點至平面之垂直距離,而 α β 及 γ 爲該垂線之方向餘弦.

證　設 $P(x, y, z)$ 爲所設平面 ABC 上之任意點. 求 $OEFP$ 及 OP 在直線 ON 上之射影. 從 § 139 定理 II 得

$$OE\text{之射影} + EF\text{之射影} + FP\text{之射影} = OP\text{之射影}.$$

再從 § 139 定理 I 及 § 20 定義,得

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

移項,即得 (I). **Q. E. D.**

系.　一平面之方程式爲 x, y 及 z 之一次方程式.

153.　一次普遍方程式, $Ax+By+Cz+D=0$.

定理 II.　(系之逆定理)　x, y 及 z 之普遍一次方程式

$$\text{(II)}\qquad Ax+By+Cz+D=0$$

之軌跡爲一平面.

證　此定理之證明可將 (II) 乘以適當常數而得 (I). 欲決定此特定常數 可以 k 乘 (II) 得

$$\text{(1)}\qquad kAx+kBy+kCz+kD=0.$$

比較 (1) 及 (I) 之相當係數而得

$$\text{(2)}\qquad kA=\cos\alpha,\quad kB=\cos\beta,\quad kC=\cos\gamma,\quad kD=-p.$$

將 (2) 之前三式平方相加,

$$k^2(A^2+B^2+C^2)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad [\S\ 140, \text{(III)}].$$

$$\text{(3)}\qquad \therefore\quad k=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

從方程式 (2) 之後一式,知根式之符號須與 D 相反方可使 p 爲正.

若 $D=0$, 則 $p=0$; 從方程式 (2) 之第三式因 $p=0$ 時 $\cos\gamma>0$, 故根式之符號須與 C 相同. 又若 $D=0$ 及 $C=0$ 則 $p=0$ 及 $\cos\gamma=0$; 因 $p=0$ 及 $\cos\gamma=0$ 時 $\cos\beta>0$, 故根式

之符號須與 B 相同.

以 (3) 代入 (2), 得

$$(4)\qquad \begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & \cos\beta=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\[2ex] \cos\gamma=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & p=\dfrac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{cases}$$

吾人從此已決定 α, β, γ 及 p 之值而使 (I) 及 (II) 有同一軌跡. 故(II)之軌跡為一平面. *Q. E. D.*

系 I. 平面 (II) 上所作法線之方向餘弦各為 A, B 及 C 除以 $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. 其根式之符號與 D 相反; 若 $D=0$, 則與 C 相同; 若 $C=D=0$, 則與 B 相同; 若 $B=C=D=0$, 則與 A 相同.

系 II. 化平面之方程式為法線式祇須全式除以 $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, 其根式之符號如系 I 所規定.

系 III. 二平面之方程式為

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0$$

在及祇在 x, y 及 z 之係數成比例, 即

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$$

時, 此二平面互相平行.

因從系 I, 平面 (II) 之法線, 其方向餘弦與 A, B 及 C 成比例, 在及祇在二法線平行時, 二平面亦平行 (§ 142 系).

系 IV. 在及祇在

$$AA'+BB'+CC'=0$$

時, 二平面互相垂直.

此可從系 I 用 § 142 之系得之，因在及祇在二平面之法線互相垂直時，二平面亦垂直。

系 V. 一平面之方程式爲

$Ax+By+D=0$，其平面垂直於 XY 平面；

$By+Cz+D=0$，其平面垂直於 YZ 平面；

$Ax+Cz+D=0$，其平面垂直於 ZX 平面。

卽方程式中若缺一變數，其平面垂直於含有其他二變數之坐標面。

從系 IV，此諸平面各垂直於平面 $z=0$，$x=0$ 及 $y=0$。

系 VI. 一平面之方程式爲

$Ax+D=0$，其平面垂直於 x 軸；

$By+D=0$，其平面垂直於 y 軸；

$Cz+D=0$，其平面垂直於 z 軸。

卽方程式中若缺二變數，其平面卽垂直於相當於第三變數之軸上。

因從系 I 至平面上所作法線之二個方向餘弦爲零，故此法線平行於一軸，而平面垂直於該軸。

習　　題

1. 求下列諸平面在軸上之截距及坐標面上之追跡，並作其圖象。

(a) $2x+3y+4z-24=0$.　　(e) $5x-7y-35=0$.

(b) $7x-3y+z-21=0$.　　(f) $4x+3z+36=0$.

(c) $9x-7y+9z+63=0$.　　(g) $5y-8z-40=0$.

(d) $6x+4y-z+12=0$.　　(h) $3x+5z+45=0$

2. 求平面之方程式並畫其追跡以作其圖象，已知

(a) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$, $p=6$.　　答. $\sqrt{2}\,x+y+z-12=0$.

(b) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$, $\beta=\frac{3\pi}{4}$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$, $p=8$.　　答. $x+\sqrt{2}\,y-z+16=0$.

(c) $\frac{\cos\alpha}{6}=\frac{\cos\beta}{-2}=\frac{\cos\gamma}{3}$, $p=4$.　　答. $6x-2y+3z-28=0$.

(d) $\frac{\cos\alpha}{-2}=\frac{\cos\beta}{-1}=\frac{\cos\gamma}{-2}$, $p=2$.　　答. $2x+y+2z+6=0$.

3. 求一平面之方程式,已知自原點至此平面所作垂線之垂足爲點

(a) $(-3, 2, 6)$.　　答. $3x-2y-6z+49=0$.

(b) $(4, 3, -12)$.　　答. $4x+3y-12z-169=0$.

(c) $(2, 2, -1)$.　　答. $2x+2y-z-9=0$.

4. 化下列諸方程式爲法線式,並求 α, β, γ 及 p.

(a) $6x-3y+2z-7=0$.　　答. $\cos^{-1}\frac{6}{7}$, $\cos^{-1}(-\frac{3}{7})$, $\cos^{-1}\frac{2}{7}$, 1.

(b) $x-\sqrt{2}\,y+z+8=0$.　　答. $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$, 4.

(c) $2x-2y-z+12=0$.　　答. $\cos^{-1}(-\frac{2}{3})$, $\cos^{-1}\frac{2}{3}$, $\cos^{-1}\frac{1}{3}$, 4.

(d) $y-z+10=0$.　　答. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$, $5\sqrt{2}$.

(e) $3x+2y-6z=0$.　　答. $\cos^{-1}(-\frac{3}{7})$, $\cos^{-1}(-\frac{2}{7})$, $\cos^{-1}\frac{6}{7}$, 0.

5. 求自原點至平面 $12x-4y+3z-39=0$ 之距離.　　答. 3.

6. 求二平行面 $6x-2y-3z-63=0$ 及 $6x+2y-3z+49=0$ 間之距離.　答. 16.

7. 平面 (I) 之位置將如何,若

(a) $\cos\alpha=0$?　　(c) $\cos\gamma=0$?　　(e) $\cos\beta=\cos\gamma=0$?

(b) $\cos\beta=0$?　　(d) $\cos\alpha=\cos\beta=0$?　　(f) $\cos\gamma=\cos\alpha=0$?

8. 平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 在坐標面上之追跡方程式爲何?

9. 求證下列各組平面互相垂直或平行.

(a) $\begin{cases}2x+5y-6z+8=0,\\ 6x+15y-18z-5=0.\end{cases}$　　(c) $\begin{cases}6x-3y+2z-7=0,\\ 3x+2y-6z+28=0.\end{cases}$

(b) $\begin{cases}3x-5y-4z+7=0,\\ 6x+2y+2z-7=0.\end{cases}$　　(d) $\begin{cases}14x-7y-21z-50=0,\\ 2x-y-3z+12=0.\end{cases}$

10. α, β, γ 及 p 應爲何值方使軌跡 (I) 平行於 XY 平面? YZ 平面? ZX 平面? 重合於上列任一平面?

11. α, β, γ 及 p 應爲何値方使軌跡 (I) 經過 X 軸? Y 軸? Z 軸?

12. 證明三平面交點之坐標可從解聯立方程式求 x, y 及 z 之値而求得之.

13. 求三平面 $x+2y+z=0$, $x-2y-8=0$ 及 $x+y+z-3=0$ 交點之坐標.

答. $(2, -3, 4)$.

14. 證平面 $x+2y-2z-9=0$ 經過三平面 $x+y+z-1=0$, $x-y-z-1=0$ 及 $2x+3y-8=0$ 之交點.

15. 證四平面 $x+y+2z-2=0$, $x+y-2z+2=0$, $x-y+8=0$ 及 $3x-y-2z+18=0$

經過同一點.

16. 證平面 $2x-y+z+3=0$, $x-y+4z=0$, $3x+y-2z+8=0$, $4x-2y+2z-5=0$, $9x+3y-6z-7=0$ 及 $7x-7y+28z-6=0$ 圍成一平行六面體.

17. 證平面 $6x-3y+2z=4$, $3x+2y-6z=10$, $2x+6y+3z=9$, $3x+2y-6z=0$, $12x+36y+18z-11=0$, 及 $12x-6y+4z-17=0$ 圍成一長方六面體.

18. 證平面 $x+2y-z=0$, $y+7z-2=0$, $x-2y-z-4=0$, $2x+y-8=0$ 及 $3x+3y-z-8=0$ 圍成一四稜錐體.

19. 若二平面之追跡為平行線,則二平面平行.從此以求二面平行之條件.

154　三個條件決定一平面.

若在方程式

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

中用第四個係數所表之三個係數為已知,則此平面完全決定.因以三個係數之值代入 (1), 全式可以第四個係數除之.從適合於平面之三條件,可得含有係數之三方程式.解聯立方程式得用一個係數表其餘三個係數之值,因此三個條件常可決定一平面,其方程式之求法與 § 44 規則相仿,惟第一步中用方程式 (1).

如求一平面之方程式,此平面經過三點,可照 § 44 例1 求之.第一步則用方程式 (1),在第二步得含有 A, B, C 及 D 之三方程式.解此三方程式,用第四個係數表其餘三個係數之值.

例 1. 求一平面之方程式,此平面經過 $P_1(2, -7, \frac{3}{2})$ 且平行於平面 $21x-12y+28z-84=0$.

解　設所求平面之方程式為

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{2}$$

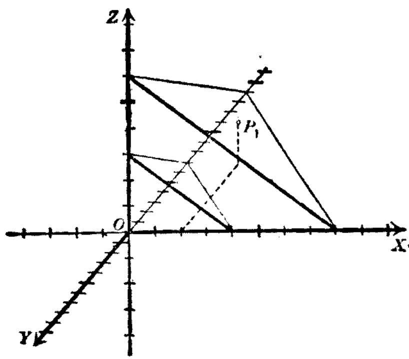
因 P_1 在 (2) 上,

$$2A-7B+\tfrac{3}{2}C+D=0. \tag{3}$$

又因 (2) 平行於所設平面 (§ 153 系 III),

$$\frac{A}{21}=\frac{B}{-12}=\frac{C}{28}. \tag{4}$$

解 (3) 及 (4), 用 C 表 A, B 及 D 之值得



$$A=\tfrac{3}{4}\,C,\ \ B=-\tfrac{3}{7}\,C,\ \ D=-6\,C.$$

代入 (2), 得

$$\tfrac{4}{3}\,Cx-\tfrac{3}{7}\,Cy+Cz-6\,C=0.$$

去分母, 全式除以 C,

$$21\,x-12\,y+28\,z-168=0.$$

習 題

1. 一平面經過三點 $(2,3,0)$, $(-2,-3,4)$ 及 $(0,6,0)$, 求其方程式.

答. $3x+2y+6z-12=0.$

2. 一平面經過三點 $(1,1,-1)$, $(-2,-2,2)$ 及 $(1,-1,2)$, 求其方程式.

答. $x-3y-2z=0.$

3. 一平面經過一點 $(3,-3,2)$ 且平行於平面 $3x-y+z-6=0$, 求其方程式.

答. $3x-y+z-14=0$

4. 一平面經過二點 $(0,3,0)$ 及 $(4,0,0)$ 且與平面 $4x-6y-z=12$ 垂直, 求其方程式.

答. $3x+4y-12z-12=0.$

5. 一平面經過一點 $(0,0,4)$ 且與二平面 $2x-3y=5$ 及 $x-4z=3$ 垂直, 求其方程式.

答. $12x+8y+3z-12=0.$

6. 一平面在軸上之截距為 3, 5 及 4, 求其方程式.

答. $20x+12y+15z-60=0.$

7. 一平面經過一點 $(2, -1, 6)$ 且平行於一平面 $x-2y-3z+4=0$，求其方程式。

答．$x-2y-3z+14=0$.

8. 一平面經過二點 $(2, -1, 6)$ 及 $(1, -2, 4)$ 且與平面 $x-2y-2z+9=0$ 垂直，求其方程式。　答．$2x+4y-3z+18=0$.

9. 求一平面之方程式，其截距為 $-1, -1$ 及 4.　答．$4x+4y-z+4=0$.

10. 求一平面之方程式，此平面經過一點 $(4, -2, 0)$ 且與平面 $x+y-z=0$ 及 $2x-4y+z=5$ 垂直.　答．$x+y+2z-2=0$.

11. 求證四點 $(2, -3, 4)$, $(1, 0, 2)$, $(2, -1, 2)$ 及 $(1, -1, 3)$ 在一平面上.

12. 求證四點 $(1, 0, -1)$, $(3, 4, -3)$, $(8, -2, 6)$ 及 $(2, 2, -2)$ 在一平面上.

13. 求一平面之方程式，此平面垂直於二點 $(3, 4, -1)$ 及 $(5, 2, 7)$ 之聯線於其中點.

答．$x-y+4z-13=0$.

14. 四面體之頂點為 $(0, 3, 1)$, $(2, -7, 1)$, $(0, 5, -4)$ 及 $(2, 0, 1)$，求其各面之方程式.

答．$25x+5y+2z=17$, $5x-2z=8$, $z=1$, $15x+10y+4z=34$.

15. 一平行六面體三面之方程式為 $x-4y=3$, $2x-y+z=3$ 及 $3x+y-2z=0$，一頂點為 $(3, 7, -2)$，其餘三面之方程式為何?

答．$x-4y+25=0$, $2x-y+z+3=0$, $3x+y-2z=20$.

16. 求一平面之方程式，其截距為 a, b, c.　答．$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

17. 習題 16 中平面之追跡方程式為何? 此類方程式，如何可由平面解析幾何中預計得之?

18. 求一平面之方程式，此平面經過 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 且與平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 平行.　答．$A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0$.

19. 求一平面之方程式，此平面經過原點及 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，且與平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 垂直.　答．$(B_1z_1-C_1y_1)x+(C_1x_1-A_1z_1)y+(A_1y_1-B_1x_1)z=0$.

155. 用截距求平面之方程式.

定理 III. 若 a, b 及 c 各為平面在 X, Y 及 Z 三軸上之截距，則此平面之方程式為

$$\text{(III)}\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

證　從定理 II，任何平面之方程式可寫為

$$(1)\qquad Ax+By+Cz+D=0.$$

用 § 151 規則，得

$$a=-\frac{D}{A},\quad b=-\frac{D}{B},\quad c=-\frac{D}{C}.$$

因此

$$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}.$$

代入 (1), 全式除以 $-D$, 移項, 即得 (III).　　*Q. E. D.*

方程式 (III 應與 § 46 VI) 比較.

156. 自平面至一點之距離. 任一垂直於平面之直線其正向與自原點至平面所作垂線之方向相同 (§ 152). 因此自一平面至一點 P_1 之距離爲正或爲負, 依照 P_1 及原點在平面之兩旁或否而決定.

若此平面經過原點, 則自平面至 P_1 距離之符號須用 § 152 中特殊情形決定之.

定理 IV. 自平面

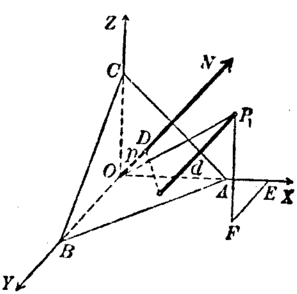
$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

至一點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 之距離 d 爲

(IV) $$\boldsymbol{d=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p}.$$

證　求 OP_1 在 ON 上之射影, 得 $p+d$.

求 OE, EF 及 FP_1 在 ON 上之射影, 各得 $x_1\cos\alpha$, $y_1\cos\beta$ 及 $z_1\cos\gamma$ (§ 139 定理 I).



於是從 § 139 定理 II,

$$p+d=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma.$$

$$\therefore\ d=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p.$$

Q. E. D.

從定理 IV 即得下之

規則. 求自一所設平面至一所設點之距離.

第一步. 化平面之方程式爲法線式 (§ 153 系 II).

第二步．以所設點之坐標，代入方程式之左端，其結果卽爲所求之距離．

157．二平面之交角． 相交二平面所成二面角之平面角等於此二平面上二法線正方向之交角．此角稱爲**二平面之交角．**

定理 V． 二平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

之交角 θ 爲

$$\text{(V)}\qquad \cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\times\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

根式符號之選擇與 § 153 系 I 同．

證　從定義，二平面之交角爲其法線之交角．

再從 § 153 (4)，此二平面上法線之方向餘弦爲

$$\cos\alpha_1=\frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\quad \cos\alpha_2=\frac{A_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\cos\beta_1=\frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\quad \cos\beta_2=\frac{B_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\cos\gamma_1=\frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\quad \cos\gamma_2=\frac{C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

從 § 142 (V) 得

$$\cos\theta=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

以法線之方向餘弦之值代入，卽得 (V)．　*Q. E. D.*

習　題

1．求自平面

(a) $6x-3y+2z-10=0$ 至一點 $(4, 2, 10)$ 之距離．　答．4.

(b) $x+2y-2z-12=0$ 至一點 $(1, -2, 3)$ 之距離。 答。 -7.

(c) $4x+3y+12z+6=0$ 至一點 $(9, -1, 0)$ 之距離。 答。 -3.

(d) $2x-5y+3z-4=0$ 至一點 $(-2, 1, 7)$ 之距離。 答。 $\frac{4}{19}\sqrt{38}$.

2. 原點與一點 $(3, 5, -2)$ 是否在平面 $7x-y-3z+6=0$ 之同旁? 答。 是。

3. 求自平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 至一點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 之距離。

答。 $\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

4. 求一點之軌跡,此點與二平面 $2x-y-2z-3=0$ 及 $6x-3y+2z+4=0$ 等距。

答。 $32x-16y-8z-9=0$.

5. 四面體之四頂點為 $(0, 3, 1)$, $(2, -7, 1)$, $(0, 5, -4)$ 及 $(2, 0, 1)$, 求自第一頂點所作高之長度。 答。 $\frac{10}{29}\sqrt{29}$.

6. 四面體之三頂點為 $(3, 4, 0)$, $(4, -1, 0)$, $(1, 2, 0)$ 及 $(6, -1, 4)$ 求其體積。

答。 8.

7. 求下列各組平面之交角。

(a) $2x+y-2z-9=0$, $x-2y+2z=0$. 答。 $\cos^{-1}(-\frac{4}{9})$.

(b) $x+y-4z=0$, $3y-3z+7=0$. 答。 $\cos^{-1}\frac{5}{6}$.

(c) $4x+2y+4z-7=0$, $3x-4y=0$. 答。 $\cos^{-1}\left(-\frac{2}{15}\right)$.

(d) $2x-y+z=7$, $x+y+2z=11$. 答。 $\frac{\pi}{3}$.

8. 證 (V) 所表之角為不含原點之二平面所交之角。

9. 三平面 $x+y+z=2$, $x-y-2z=4$, 及 $2x+y-z=2$ 成一三面角,求含有原點之三面角之頂點及二面角。 答。 $(4, -4, 2)$, $\cos^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$.

10. 一平面經過二點 $(0, -1, 0)$ 及 $(0, 0, -1)$ 且與平面 $y+z=7$ 所成之交角為 $\frac{2\pi}{3}$, 求其方程式。 答。 $\pm\sqrt{6}\,x+y+z+1=0$.

11. 求一點之軌跡,此點與平面 $3x-6y-2z=0$ 之距離為與平面 $2x-y+2z=9$ 距離之 3 倍。 答。 $17x-13y+12z-63=0$.

158. 平面系. 因決定一平面須有三條件,故一平面之方程式若適合於二條件,普遍言之,必有一任意常數.此種方程式可表一平面系.

平面系可用以求適合於三條件之平面方程式,有如直線系可用以求適合於二條件之直線方程式 (§ 51 規則).

定理 VI. 平行於所設平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

之平面系爲

(VI) $$\boldsymbol{Ax+By+Cz+k=0},$$

式中 k 爲任意常數.

提示. 用 § 153 系 (III) 證明 (VI) 所表之一切方程式皆與所設平面平行，及平行於所設平面之任何平面皆可以 (VI) 表之，再以 (VI) 經過所設點 P_1 之條件，求 k 之值.

定理 VII. 經過二所設平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

交線之平面系爲

(VII) $$\boldsymbol{A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}.$$

式中 k 爲任意常數。

提示. 證明 (VII) 經過所設平面交線上之任一點，再以 (VII) 經過不在交線上任一點之條件，求 k 之值。

定理 VIII. 若定理 VII 中二平面之方程式皆爲法線式，則 $-k$ 爲二平面至 (VII) 平面上任何點距離之比.

提示. 設 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 爲平面

$$x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1+k(x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-p_2)=0$$

之上任一點，則

$$x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\beta_1+z_1\cos\gamma_1-p_1+k(x_1\cos\alpha_2+y_1\cos\beta_2+z_1\cos\gamma_2-p_2)=0.$$

求 k 之值，並用 § 156 定理 IV 解釋其結果

系. 二所設平面交角之平分面，其方程式可從加減二所設平面方程式之法線式得之.

依 k 之之值爲正或爲負，平面 (VII) 位於二所設相交平面之外角或內角 (§ 54 定理 XIV 系後之說明).

適合於一個條件之平面系方程式有二個任意常數. 此種最重要之平面系之一述於下之定理.

定理 IX. 經過一所設點 $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 之平面系方程式爲

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{IX}$$

證　因 P_1 之坐標可適合於 (IX), 故方程式 (IX) 爲經過 P_1 之平面方程式.

若任何平面之方程式爲

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

此平面經過 P_1, 則

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$

相減得 (IX). 因此 (IX) 表經過 P_1 之一切平面.　　*Q. E. D.*

方程式 (IX) 含有二個任意常數, 即任二係數與第三係數之比.

習　　題

1　決定 k 之值而使平面 $x+ky-2z-9=0$

(a) 經過一點 $(5,\ -4,\ -6)$.　　答. 2.

(b) 平行於平面 $6x-2y-12z=7$.　　答. $-\frac{1}{3}$.

(c) 垂直於平面 $2x-4y+z=3$.　　答. 0.

(d) 與原點之距離爲 3 單位.　　答. ± 2.

(e) 與平面 $2x-2y+z=0$ 所成之交角爲 $\frac{\pi}{3}$.　　答. $-\frac{2}{7}\sqrt{35}$.

2. 求一平面之方程式, 此平面經過 $(3,\ 2,\ -1)$ 一點, 且與平面 $7x-y+z=14$ 平行.

答. $7x-y+z-18=0$.

3. 求一平面之方程式, 此平面經過二平面 $2x+y-4=0$ 及 $y+2z=0$ 之交線且 (a) 經過一點 $(2,\ -1,\ 1)$; (b) 垂直於平面 $3x+2y-3z=6$.

答. (a) $x+y+z-2=0$; (b) $2x+3y+4z-4=0$.

4. 求一平面之方程式, 此平面平分二平面 $2x-y+2z=0$ 及 $x+2y-2z=6$ 之交角.

答. $3\ \ +y-6=0$, $x-3y+4z+6=0$.

5. 求一平面之方程式，此平面經過二平面 $2x+y-z=4$ 及 $x-y+2z=0$ 之交線，且與坐標面垂直。　　答。 $5x+y=8,\ 3x+z=4,\ 3y-5z=4.$

6. 求一平面之方程式，此平面平分二平面 $6x-2y-3z=0$ 及 $4x+3y-13z=10$ 之交角，並用 (V) 證驗之。

7. 求一平面之方程式，此平面經過二平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 及 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 之交線及原點。　答。 $(A_1D_2-A_2D_1)x+(B_1D_2-A_2D_1)y+(C_1D_2-C_2D_1)z=0.$

8. 求一平面之方程式，此平面平分二平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 及 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 之交角。　答。 $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\dfrac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$

9. 求一平面之方程式，此平面經過二平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 及 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 之交線，且與坐標面垂直。

答。 $$(A_1B_2-A_2B_1)y-(C_1A_2-C_2A_1)z+A_1D_2-A_2D_1=0,$$
$$(A_1B_2-A_2B_1)x-(B_1C_2-B_2C_1)z-(B_1D_2-B_2D_1)=0,$$
$$(C_1A_2-C_2A_1)x-(B_1C_2-B_2C_1)y+C_1D_2-C_2D_1=0.$$

10 求一平面之方程式，此平面經過 $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 且垂直於二平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\ 及\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

答。 $(B_1C_2-B_2C_1)(x-x_1)+(C_1A_2-C_2A_1)(y-y_1)+(A_1B_2-A_2B_1)(z-z_1)=0.$

第十九章

空間之直線

159. 直線之普遍方程式. 一直線可視爲二平面之交線. 二平面方程式之聯立卽爲交線之方程式. 因此得 (§ 152 系)

定理 I. 一直線之方程式爲 x, y 及 z 之一次式.

反之, 兩個一次方程式之軌跡爲一直線, 除非此二方程式之軌跡爲二平行面. 因此從 § 153 系 III 得

定理 II. 兩個一次方程式

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

之軌跡爲一直線, 除非 x, y 及 z 之係數成比例.

已知直線上二點之坐標可畫一直線. 此二點在坐標面上者最易求得, 祇須命一變數爲零, 解方程式, 求其餘二變數. 若一直線祇交一坐標面, 則用此方法祇求得一點. 畫此直線時, 可自該點作一直線, 平行於垂直該坐標面之軸.

當一直線之方向餘弦爲已知時, 該直線之方向亦可知. 其求法如下例.

例 1. 求一直線之方向餘弦, 其方程式爲

$$3x + 2y - z - 1 = 0, \quad 2x - y + 2z - 3 = 0.$$

解 設此直線之方向餘弦爲 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

含有此直線之二平面, 其法線之方向餘弦各爲 (§ 153 系 I)

$$\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}} \text{ 及 } \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}.$$

因二平面之交線與其法線垂直，故得（§ 142 定理 VI）

$$\frac{3}{\sqrt{14}}\cos\alpha+\frac{2}{\sqrt{14}}\cos\beta-\frac{1}{\sqrt{14}}\cos\gamma=0,\quad \frac{2}{3}\cos\alpha-\frac{1}{3}\cos\beta+\frac{2}{3}\cos\gamma=0.$$

用 $\cos\alpha$ 表 $\cos\beta$ 及 $\cos\gamma$，解之，得

$$\cos\beta=-\frac{8}{3}\cos\alpha,\quad \cos\gamma=-\frac{7}{3}\cos\alpha,$$

因此

$$\cos\alpha=-\frac{3\cos\beta}{8}=-\frac{3\cos\gamma}{7}.$$

以分子之小公倍 3 除全式，得

$$\frac{\cos\alpha}{3}=\frac{\cos\beta}{-8}=\frac{\cos\gamma}{-7}.$$

再由 § 140 系，

$$\cos\alpha=\frac{3}{\pm\sqrt{122}},\quad \cos\beta=\frac{-8}{\pm\sqrt{122}},\quad \cos\gamma=\frac{-7}{\pm\sqrt{122}}.$$

此直線之方向將向下或向上，全視根式之符號爲正或爲負而定。

此法甚普遍並可列成下之

規則．一直線之方程式爲已知，求其方向餘弦．

第一步．求含有此直線之二平面上所作法線之方向餘弦（§ 153 系 I）．

第二步．求所設直線垂直於第一步中法線之條件（§ 142 定理 VI），並用一個方向餘弦表其餘二個方向餘弦之值．

第三步．表第二步之結果爲一連比，並應用 § 140 系．

例 2．求一直線之方向餘弦，其方程式爲

$$4x+3z-10=0,\quad 4x-2y+z-1=0.$$

解　第一步．所設平面上法線之方向餘弦爲

$$\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \text{ 及 } \frac{4}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}.$$

第二步. 若此直線之方向餘為 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 及 $\cos\gamma$.

則 $\frac{4}{5}\cos\alpha+\frac{3}{5}\cos\gamma=0$, $\frac{4}{\sqrt{29}}\cos\alpha-\frac{2}{\sqrt{29}}\cos\beta+\frac{3}{\sqrt{29}}\cos\gamma=0$,

因此 $$\cos\gamma=-\frac{4}{3}\cos\alpha,\quad \cos\beta=0.$$

第三步. 從上方程式 $\frac{\cos\alpha}{3}=\frac{\cos\gamma}{-4}$, $\cos\beta=0$, 因此 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 及 $\cos\gamma$ 與 3, 0 及 -4 成比例. 故(§ 140 系)

$$\cos\alpha=\pm\tfrac{3}{5},\quad \cos\beta=0,\quad \cos\gamma=\mp\tfrac{4}{5}.$$

用上面符號,此直線向下;用下面符號,此直線向上.

定理 III. 若 α, β 及 γ 為直線(II)之方向餘弦,則

$$\frac{\cos\alpha}{B_1C_2-B_2C_1}=\frac{\cos\beta}{C_1A_2-C_2A_1}=\frac{\cos\gamma}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

此式可用上述規則證得,但不用第三步之後一部分.

習 題

1. 求下列諸直線穿過坐標面之諸點,並作其直線.

(a) $2x+y-z=2$, $x-y+2z=4$. (c) $x+2y=3$, $2x-4y=7$.

(b) $4x+3y-6z=12$, $4x-3y=2$. (d) $y+z=4$, $x-y+2z=10$.

2. 求下列諸直線之方向餘弦.

(a) $2x-y+2z=0$, $x+2y-2z=4$. 答. $\pm\frac{2}{65}\sqrt{65}$, $\mp\frac{6}{65}\sqrt{65}$, $\mp\frac{1}{13}\sqrt{65}$

(b) $x+y+z=5$, $x-y+z=3$. 答. $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 0, $\mp\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(c) $3x+2y-z=4$, $x-2y-2z=5$. 答. $\pm\frac{6}{25}\sqrt{5}$, $\mp\frac{1}{5}\sqrt{5}$, $\pm\frac{8}{25}\sqrt{5}$.

(d) $x+y-3z=6$, $2x-y+3z=3$. 答. 0, $\pm\frac{3}{10}\sqrt{10}$, $\pm\frac{1}{10}\sqrt{10}$.

(e) $x+y=6,\ 2x-3z=5.$　　答. $\pm\frac{3}{22}\sqrt{22},\ \mp\frac{3}{22}\sqrt{22},\ \pm\frac{1}{11}\sqrt{22}.$

(f) $y+3z=4,\ 3y-5z=1.$　　答. $\pm1,\ 0,\ 0.$

(g) $2x-3y+z=0,\ 2x-3y-2z=6.$　　答. $\pm\frac{3}{13}\sqrt{13},\ \pm\frac{2}{13}\sqrt{13},\ 0.$

(h) $5x-14z-7=0,\ 2x+7z=19.$　　答. $0,\ \pm1,\ 0.$

3. 證明下列諸組直線互相平行,並作其直線.

(a) $2y+z=0,\ 3y-4z=7$ 及 $5y-2z=8,\ 4y+11z=44.$

(b) $x+2y-z=7,\ y+z-2x=6$ 及 $3x+6y-3z=8,\ 2x-y-z=0.$

(c) $3x+z=4,\ y+2z=9$ 及 $6x-y=7,\ 3y+6z=1.$

4. 證明下列諸組直線交於一點,且互相垂直.

(a) $x+2y=1,\ 2y-z=1$ 及 $x-y=1,\ x-2z=3.$

(b) $4x+y-3z+24=0,\ z=5$ 及 $x+y+3=0,\ x+2=0.$

(c) $3x+y-z=1,\ 2x-z=2$ 及 $2x-y+2z=4,\ x-y+2z=3.$

5. 求下列諸直線之交角,假定諸直線之方向爲向上或向 ZX 平面之前.

(a) $x+y-z=0,\ y+z=0$ 及 $x-y=1,\ x-3y+z=0.$　　答. $\frac{\pi}{3}.$

(b) $x+2y+2z=1,\ x-2z=1$ 及 $4x+3y-z+1=0,\ 2x+3y=0.$

答. $\cos^{-1}\frac{16}{21}.$

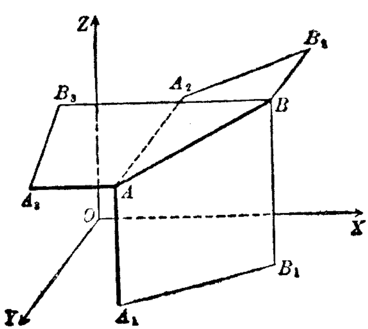
(c) $x-2y+z=2,\ 2y-z=1$ 及 $x-2y+z=2,\ x-2y+2z=4.$　答. $\cos^{-1}\frac{1}{6}.$

6. 求經過直線

$$x+y-z=0,\quad 2x-y+3z=5$$

且垂直於坐標面之平面方程式.　　答. $3x+2z=5,\ 3y-5z+5=0,\ 5x+2y=5.$

7. 用解析法證二平面 $x-2y-z=3$ 及 $2x-4y-2z=5$ 與平面 $x+y-3z=0$ 之交線互相平行.



8. 一平面與二平行平面相交,其交線互相平行,用解析法證驗之.

160. 一直線之射影面.

經過一直線而垂直於三坐標面之三平面稱爲此直線之射影面.

若一直線垂直於一坐標面,含有此直線之任何平面亦必垂直於該坐標面.在此情形,祇得二射影面,即經過該直線而垂直於其餘二坐標面

之平面.

若此直線平行於一坐標面,則二射影面重合.

從 § 158 定理 VII, 經過直線

(1) $$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

之平面,其方程式之形式爲

(2) $$(A_1+kA_2)x+(B_1+kB_2)y+(C_1+kC_2)z+(D_1+kD_2)=0.$$

若 (2) 與 XY 平面, $z=0$ 垂直,則 (§ 153 系 IV) $C_1+kC_2=0$, 因此 $k=-\frac{C_1}{C_2}$, 代入 (2) 化簡,得

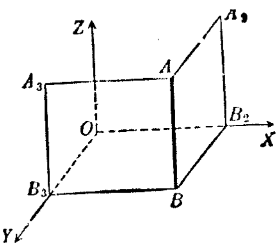
(3) $$(C_1A_2-C_2A_1)x-(B_1C_2-B_2C_1)y+C_1D_2-C_2D_1=0.$$

同樣, 若 (2) 垂直於 YZ 或 ZX 平面, 其方程式可化爲

(4) $$(A_1B_2-A_2B_1)y-(C_1A_2-C_2A_1)z+A_1D_2-A_2D_1=0,$$

(5) $$(A_1B_2-A_2B_1)x-(B_1C_2-B_2C_1)z-(B_1D_2-B_2D_1)=0.$$

方程式 (3), (4) 及 (5) 爲直線 (1) 之射影面之方程式. 任二方程式可用爲該直線之方程式.



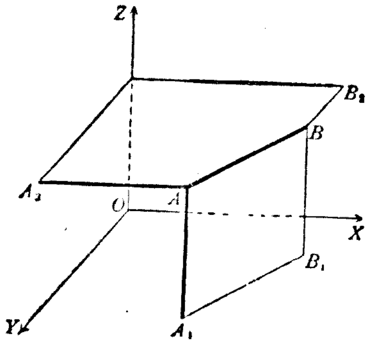
若 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$, 卽若該直線不平行於 XY 平面 (定理 III), 方程式 (5) 及 (4) 可寫作下之形式

$$x=mz+a, \quad y=nz+b.$$

若 $A_1B_2-A_2B_1=0$ 及 $B_1C_2-B_2C_1\neq 0$ 卽若該直線平行於 XY 平面但不平行於 Y 軸,方程式 (5) 及 (3) 可寫作下之形式

$$z=a, \quad y=mx+b.$$

若 $A_1B_2-A_2B_1=0$ 及 $B_1C_2-B_2C_1=0$, 卽若該直線平行於 Y 軸,方程式 (4) 及 (3) 可寫作下之形式



$$z=a,\quad x=b.$$

因此得

定理 IV. 一直線穿過 XY 平面，或平行於 XY 平面而不平行於 Y 軸，或平行於 Y 軸，其方程式可寫作下列各種形式：

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} x=mz+a, \\ y=nz+b, \end{cases}\qquad \begin{cases} z=a, \\ y=mx+b, \end{cases}\qquad \begin{cases} z=a, \\ x=b. \end{cases}$$

求一所設直線之射影面方程式，可先假定經過一所設直線之平面系（§ 158 定理 III），再以此平面垂直於任一坐標面之條件以決定參數 k 之值．此類方程式亦可從直線方程式中消去 z, x 及 y 而得之．

化所設直線之方程式為 (IV) 之形式，吾人恆用 z 表 x 及 y 之值以解方程式．若 x 及 y 無此種解答（§ 43 定理 IV），則解 y 及 z. 若 y 及 z 又無此種解答，則解 z 及 x.

習　題

1. 求下列諸直線之射影面之方程式．

(a) $2x+y-z=0,\ x-y+2z=3.$　答．$5x+y=3,\ 3x+z=3,\ 3y-5z+6=0.$

(b) $x+y+z=6,\ x-y-2z=2.$　答．$3x+y=14,\ 2x-z=8,\ 2y+3z=4.$

(c) $2x+y-z=1,\ x-y+z=2.$　答．$x=1,\ y-z+1=0.$

(d) $x+y-4z=1,\ 2x+2y+z=0.$　答．$9x+9y=1,\ 9z+2=0.$

(e) $2y+3z=6,\ 2y-3z=18.$　答．$y=6,\ z=-2.$

(f) $2x-y+z=0,\ 4x+3y+2z=6.$ 答. $5y=6,\ 10x+5z=6.$

(g) $x+z=1,\ x-z=3.$ 答. $x=2,\ z=-1.$

2. 化下列諸直線方程式爲 (IV) 中之一種形式,並作其直線.

(a) $x+y-2z=0,\ x-y+z=4.$ 答. $x=\frac{1}{2}z+2,\ y=\frac{3}{2}z-2.$

(b) $x+2y-z=2,\ 2x+4y+2z=5.$ 答. $z=\frac{1}{4},\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{8}.$

(c) $x-2y+z=4,\ x+2y-z=6.$ 答. $x=5,\ y=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}.$

(d) $x+3z=6,\ 2x+5z=8$ 答. $z=4,\ x=-6.$

(e) $x+2y-2z=2,\ 2x+y-4z=1.$ 答. $x=2z,\ y=1.$

(f) $x-y+z=3\ \ 3x-3y+2z=6.$ 答. $z=3,\ y=x.$

3. 決定方程式 (IV) 中第一直線交 XY 平面,第二直線交 YZ 平面,第三直線交 ZX 平面之交點,再求與每一直線之方向餘弦成比例之數値,以此二種解釋方程式 (IV) 中常數之幾何意義.

4. 方程式 (IV) 中每一方程式之軌跡爲一平面,用此諸平面之追跡,以解釋方程式中常數之幾何意義.

5. 證明空間之一直線,須用四個條件決定之.試將其方程式之求法,列成一規則.

6. 求一直線之方程式,此直線經過 $(-2,2,1)$ 及 $(-8,5,-2)$ 二點.

答. $x=2z-4,\ y=\quad z+3.$

7. 求直線 $x=z+2,\ y=2z-4$ 在平面 $x+y-z=0$ 上之射影方程式.

答. $x=\dfrac{1}{5}z+\dfrac{14}{5},\ y=\dfrac{4}{5}z-\dfrac{14}{5}.$

8. 求直線 $z=2,\ y=x-2$ 在平面 $x-2y-3z=4$ 上之射影方程式.

答. $x=-5z+4,\ y=-4z.$

9. 證明一直線之方程式,可寫作下列任一種形式:

$$\begin{cases} y=mx+a, \\ z=nx+b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a, \\ z=my+b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a, \\ y=b, \end{cases}$$

依照此直線穿過 YZ 平面,平行於 YZ 平面,或平行於 Z 軸而決定.

10. 證明一直線 $x=mz+a,\ y=nz+b$ 交另一直線 $x=m'z+a',\ y=n'z+b'$ 之條件,爲

$$\frac{a-a'}{m-m'}=\frac{b-b'}{n-n'}.$$

161. 直線方程式之各種形式.

定理 V. 參數式. 一直線經過一所設點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,其方向角爲 α,β 及 γ,在此直線上任一點 $P(x,y,z)$,之坐標爲

(V) $$x = x_1 + \rho\cos\alpha,\ y = y_1 + \rho\cos\beta,\ z = z_1 + \rho\cos\gamma.$$

式中 ρ 表有向變距 P_1P.

證 P_1P 在軸上之射影各爲 (§ 139 系 II)

$$x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1,$$

或 (§ 139 定理 I)

$$\rho\cos\alpha,\ \rho\cos\beta,\ \rho\cos\gamma.$$

因此 $$x - x_1 = \rho\cos\alpha,\ y - y_1 = \rho\cos\beta,\ z - z_1 = \rho\cos\gamma.$$

解 x, y 及 z 卽得 (V) *Q. E. D.*

定理 VI. 對稱式. 一直線經過一點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 方向角爲 α, β 及 γ. 其方程式之形式爲

(VI) $$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

提示. 解方程式 (V), 求 ρ, 使各式相等, 消去 ρ.

系. 若 $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c}$, 則一直線之對稱方程式爲

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

定理 VII. 二點式. 一直線經過 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 其方程式爲

(VII) $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

證 直線 (VI) 經過 P_1. 若此直線經過 P_2, 則

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_2 - y_1}{\cos\beta} = \frac{z_2 - z_1}{\cos\gamma}.$$

以此方程式除 (VI), 卽得 (VII). *Q. E. D.*

方程式 (VI) 及 (VII) 均含有三個方程式，即任二比值相等，可得一方程式。此類方程式中少一變數，故均為不同形式之射影面方程式 (§ 153 系 V)。三方程式中之任二個皆有獨立性，故可用作直線方程式，惟因對稱關係，三方程式全用之。

習　題

1. 求直線之方程式，已知此類直線經過下列各點，簡化之使成 (IV) 之形式 (§ 160 定理 IV)，並作其直線。

(a) (3, 2, −1), (2, −3, 4).　答。 $x=-\frac{1}{5}z+\frac{14}{5}$, $y=-z+1$.

(b) (1, 6, 3) (3, 2, 3).*　答。 $z=3$, $y=-2x+8$.

(c) (1, −4, 2), (3, 0, 3).　答。 $x=2z-3$, $y=4z-12$.

(d) (2, −2, −1), (3, 1, −1).　答。 $z=-1$, $y=3x-8$.

( ) (2, 3, 5), (2, −7, 5).　答。 $z=5$, $x=2$.

2. 若 $z_1=z_2$，一直線方程式之二點式，可化為 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, $z=z_1$，試證之。又若 $y_1=y_2$ 或 $x_1=x_2$ 則如何？

3. 若 $x_1=x_2$ 及 $y_1=y_2$，一直線方程式之二點式為何？若 $y_1=y_2$ 及 $z_1=z_2$ 則如何？若 $z_1=z_2$ 及 $x_1=x_2$ 則如何？

4. 下列各點是否在一直線上？

(a) (3, 2, −4), (5, 4, −6) 及 (9, 8, −10).　答。是。

(b) (3, 0, 1), (0, −3, 2) 及 (6, 3, 0).　答。是。

(c) (2, 5, 7), (−3, 8, 1) 及 (0, 0, 3).　答。否。

5. 三點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 及 $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 須在一直線上之條件為 $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$，試證之。

6. 一直線經過一點 (2, −1, −3)，方向餘弦與 3, 2 及 7 成比例，求其方程式，並化為 (IV) 之形式 (§ 160 定理 IV).　答。 $x=\frac{3}{7}z+\frac{23}{7}$, $y=\frac{2}{7}z-\frac{1}{7}$.

7. 一直線經過一點 (0, −3, 2) 且與二點 (3, 4, 7) 及 (2, 7, 5) 之聯線平行，求其方程式。

答。 $\frac{x}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$.

---

* 從 (VII), $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-6}{2-6}=\frac{z-3}{3-3}$. 若 $z-3$ 不等於 0，則後一比值為無窮大。若 $z-3=0$，則後一比值可等於任何值，亦可等於前二比值。因此直線方程式化為 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-6}{-4}$, $z=3$. 即若二點在平面 $z=3$ 上，則此二點之聯線亦在該平面上，幾何學中此意義甚為明顯也。

8. 證明直線 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{4}$ 及 $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+3}{-4}$ 互相並行.

9. 一直線經過一點 $(-2, 4, 0)$, 且與直線 $\frac{x}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}$ 平行, 求其方程式, 並化爲 (IV) 之形式 (§ 160 定理 IV). 答. $x=-4z-2,\ y=-3z+4$.

10. 證明二直線 $\frac{x+2}{6}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{2}$ 及 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{6}=\frac{z+3}{3}$ 互相垂直.

11. 若二直線 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-1}$ 及 $\frac{x+2}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z}{1}$ 均有向上之方向,求其交角.

答. $\frac{2\pi}{3}$.

12. 一直線經過一點 $(2, -3, 4)$, 其方向餘弦與 1, -2 及 2 成比例, 求此直線之參數方程式. 答. $x=2+\frac{1}{3}\rho,\ y=-3-\frac{2}{3}\rho,\ z=4+\frac{2}{3}\rho$.

13. 作二直線,其參數方程式爲

(a) $x=2+\frac{2}{3}\rho,\ y=4-\frac{1}{3}\rho,\ z=6+\frac{2}{3}\rho$.

(b) $x=-3-\frac{2}{7}\rho,\ y=6-\frac{6}{7}\rho,\ z=4+\frac{3}{7}\rho$.

14. 一直線 $x=2-\frac{3}{13}\rho,\ y=4+\frac{12}{13}\rho,\ z=-3+\frac{4}{13}\rho$ 與平面 $4x-y-2z=6$ 相交, 求在此直線上自一點 $(2, 4, -3)$ 至交點之距離. 答. $1\frac{5}{8}$.

15. 若 $\cos\gamma=0$ 則直線之對稱方程式化爲 $\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta},\ z=z_1$, 試證之.若 $\cos\alpha=0$ 或 $\cos\beta=0$, 則如何?

16. 若 $\cos\gamma=\cos\alpha=0$, 則直線之對稱方程式化爲 $z=z_1,\ x=x_1$ 試證之.若 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 則如何? 若 $\cos\beta=\cos\gamma=0$ 則如何?

17. 化下列諸直線方程式爲對稱式:

(a) $x-2y+z=8,\ 2x-3y=13$. 答. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

(b) $4x-5y+3z=3,\ 4x-5y+z+9=0$. 答. $\frac{x}{5}=\frac{y-3}{4},\ z=6$.

(c) $2x+z+5=0,\ x+3z-5=0$. 答. $z=3,\quad x=-4$.

(d) $x+2y+6z=5,\ 3x-2y-10z=7$. 答. $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z}{2}$.

(e) $3x-y-2z=0,\ 6x-3y-4z+9=0$. 答. $\frac{x-3}{2}=\frac{z}{3},\ y=9$.

(f) $3x-4y=7,\ x+3y=11$. 答. $x=5,\ y=2$.

(g) $2x+y+2z=7,\ x+3y+6z=11$. 答. $\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1},\ x=2$.

(h) $2x-3y+z=4,\ 4x-6y-z=5$. 答. $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2},\ z=1$.

(i) $3z+y=1,\ 4z-3y=10$. 答. $y=-2,\ z=1$.

(j) $x=mz+a,\ y=nz+b.$ 答. $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z}{1}.$

提示. 先假定直線方程式中一變數之值,解其餘二變數即得直線上一點之坐標.在答案中,此點即爲該直線穿過 XY 平面之交點;若直線平行於 XY 平面,則此點爲該直線穿過 YZ 平面之交點,若直線平行於 Y 軸,則此點爲該線穿過 ZX 平面之交點.

用 § 159 規則,求直線之方向餘弦(或用 § 159 定理 III 求與方向餘弦成比例之數値),再代入直線之對稱方程式(或代入定理 VI 之系中所設形式).

若有一個或二個方向餘弦爲零,此直線之對稱方程式有如習題 15 及 16 之形式.

18. 一直線經過一點 $(2,0,-2)$ 且與二直線 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$ 及 $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ 垂直,求其方程式. 答. $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-5}.$

19. 一直線經過一點 $(3,-1,2)$ 且與二直線 $x=2z-1,\ y=z+3$ 及 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ 垂直,求其方程式. 答. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-2}{4}.$

20. 求一直線之方程式,此直線經過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 且平行於

(a) $\frac{x-x_2}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{c}.$ 答. $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}.$

(b) $x=mz+a,\ y=nz+b.$ 答. $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{1}.$

(c) $z=a,\ y=mx+b.$ 答. $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m},\ z=z_1.$

(d) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

答. $\frac{x-x_1}{B_1C_2-B_2C_1}=\frac{y-y_1}{C_1A_2-A_2C_1}=\frac{z-z_1}{A_1B_2-A_2B_1}.$

21. 求一直線之方程式,此直線經過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 且垂直於二直線

$$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2} \text{ 及 } \frac{x-x_3}{a_3}=\frac{y-y_3}{b_3}=\frac{z-z_3}{c_3}.$$

答. $\frac{x-x_1}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y-y_1}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{z-z_1}{a_2b_3-a_3b_2}.$

162. 一直線與一平面之關係位置. 若直線方程式爲 § 169 中 (II) 之形式,則從 § 158 (VII) 其軌跡爲所設平面時,可求得 k 之數値,此 k 之値,可使此直線在所設平面上.

若直線方程式有 (IV) 之形式,則以 (IV) 中已得二變數之値代入平面方程式,視其結果在第三變數爲任何數値時,是否正確.如確能適合,此

直線必在平面上.

若直線方程式有 (V). (VI) 或 (VII) 之形式,可用類似方法解決之.

定理 VIII. 有方向角 α, β 及 γ 之直線與平面 $Ax+By+Cz+D=0$,

(a) 當及祇當

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0$$

時互相平行;

(b) 當及祇當

$$\frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\cos\beta}=\frac{C}{\cos\gamma}$$

時互相垂直.

證　至平面所作法線之方向餘弦為 (§ 153 系 I)

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

當及祇當一直線垂直於此平面之法線,* 卽 (§ 142 定理 VI)

$$\frac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

時,該直線平行於此平面.將上式之根號除去,卽得平行之條件.

當及祇當一直線平行於此平面之法線,卽 (§ 142 定理 VI)

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

時,該直線垂直於此平面.將上三式各除以 A, B 及 C,倒轉後卽得垂直之條件.　*Q. E. D.*

* 一直線垂直於平面之法線,在特殊情形時,此直線可在平面上.

163. 三個一次方程式解答之幾何解釋. 同時在三平面上一點之坐標,可適合於三平面之方程式,因此三平面之每一公共點,相當於三方程式之一組公解.今將三平面之關係位置與三方程式之公解個數,分為二列對照:

平面之位置	方程式公解個數
成一三面角	一組公解
成一稜柱面†	無公解.
經過同一直線‡	單獨無限解§
三平行面‡	無公解.
三重合平面.	雙重無限解‖

若三平面成一三面角,以三方程式聯立可得其交點.

若三平面成一稜柱面,其交線互相平行.此種情形是否如是,可由 § 159 定理 III 及 § 140 系決定之.

若三平面經過同一直線,則二平面之交線在第三平面上.此情形是否如是,可由 § 162 之方法決定之.解方程式時,命一變數為 k, 從二方程式求其餘二變數. k 為任何值時,此結果恆為所求解.

三平面互相平行與否,可由 § 153 系 III 決定之.

若三平面重合,則三方程式之係數成比例.解方程式時,命二變數等於 k_1 及 k_2, 從一方程式求其餘變數. k_1 及 k_2 為任何數值時,此結果恆為所求解.

習題

1. 證明直線 $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z}{3}$ 平行於平面 $4x+2y+2z=9$.

2. 證明直線 $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{7}$ 垂直於平面 $3x+2y+7z=8$.

3. 證明直線 $x=z-4$, $y=2z-3$ 在 $2x-3y+4z-1=0$ 之平面上.

---

† 在特殊情形時,二平面可平行.

‡ 在特殊情形時,二平面可重合.

§ 解答中有一任意常數.

‖ 解答中有二任意常數.

4. 證明直線 $x=-2+\frac{2}{3}\rho,\ y=-\frac{2}{3}\rho,\ z=6+\frac{1}{3}\rho$, 在 $x-2y-6z+38=0$ 之平面上.

5. 求下列諸平面交點之坐標,並決定諸平面之關係位置.

(a) $2x+y-2z=11,\ x-y+z=0,\ x+2y-z=7.$

答. $(3,\ 1,\ -2)$; 平面成一三面角.

(b) $2x+4y+2z=3,\ 3x+3y+z=0,\ 3x-6y-5z=8.$

答. 無; 平面成一稜柱面.

(c) $x-y-3z=1,\ x+y+z=2,\ 3x-y-5z=4.$

答. $(\frac{3}{2}+k,\ \frac{1}{2}-2k,\ k)$; 平面經過一直線.

(d) $3x-y+5z=0,\ 21x-7y+35z=8,\ 2y-10z-6x=4.$

答. 無; 平面平行.

(e) $2x-3y+4z=3,\ 6y-4x-8z+6=0,\ 6x-9y+12z=9.$

答. $[k_1,\ k_2,\ \frac{1}{4}(3-2k_1+3k_2)]$; 平面疊合.

6. 證明直線 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{4}$ 在 $2x+2y-z+3=0$ 之平面上.

7. 求一直線之方程式,此直線經過一點 $(3,\ 2,\ -6)$ 且垂直於平面 $4x-y+3z=5$.

答. $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+6}{3}$.

8. 求一直線之方程式,此直線經過一點 $(4,\ -6,\ 2)$ 且垂直於平面 $x+2y-3z=8$.

答. $\frac{x-4}{1}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-2}{-3}$.

9. 求一直線之方程式,此直線經過一點 $(-2,\ 3,\ 2)$ 且平行於二平面 $3x-y+z=0$ 及 $x-z=0$.

答. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-2}{1}$.

10. 求一平面之方程式,此平面經過一點 $(1,\ 3,\ -2)$ 且垂直於直線 $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{5}=\frac{z}{-1}$.

答. $2x+5y-z=19$.

11. 求一平面之方程式,此平面經過一點 $(2,\ -2,\ 0)$ 且垂直於直線 $z=3,\ y=2x-4$.

答. $x+2y+2=0$.

12. 求一平面之方程式,此平面經過一直線 $x+2z=4,\ y-z=8$, 且平行於直線 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-7}{4}$.

答. $x+10y-8z-84=0$.

13. 求一平面之方程式, 此平面經過一點 $(3,\ 6,\ -12)$ 且平行於直線 $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$ 及 $\frac{x-4}{2}=\frac{z-2}{4},\ y=3$.

答. $2x+3y-z=36$.

14. 求一直線之方程式，此直線經過一點 (3, 1, −2) 且與平面 $2x-y-5z=6$ 垂直。

答。 $x=-\frac{2}{5}z+\frac{11}{5},\ y=\frac{1}{5}z+\frac{7}{5}$.

15. 證明直線 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-2}$ 及 $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$ 相交，並求由此相交二直線所決定平面之方程式。

答。 $14x-4y+13z=32$.

16. 一直線 $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{1}$ 及一點 (0, 3, −4) 決定一平面，求此平面之方程式。

答。 $x+2y+2z+2=0$.

17. 二平行線 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$ 及 $\frac{x-3}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-1}{1}$ 決定一平面，求此平面之方程式。

答。 $8x+y-26z+6=0$.

18. 求一直線之方程式，此直線經過一點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 且與平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 垂直。

答。 $\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$.

19. 求一平面之方程式，此平面經過一點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 且垂直於直線 $\frac{x-x_2}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{c}$

答。 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

20. 求直線 $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ 及平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 之交角 θ。

答。 $\sin\theta=\frac{Aa+Bb+Cc}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

提示。 一直線與一平面之交角，卽爲此直線與其在平面上射影所交之銳角。此角等於 $\frac{\pi}{2}$ 加上或減去此直線與平面上法線之交角。

21. 求一平面之方程式，此平面經過 $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 且平行於二直線 $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ 及 $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$.

答。 $(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_3)+(c_1a_2-a_2c_1)(y-y_3)+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_3)=0$.

22. 求一平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 須與直線 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ 平行之條件。

答。 $A_1(B_2C_3-B_3C_2)+B_1(C_2A_3-C_3A_2)+C_1(A_2B_3-A_3B_2)=0$.

23. 一點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 及直線 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 決定一平面，求此平面之方程式。

答。 $(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$
$=(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$

24. 二相交直線 $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ 及 $\frac{x-x_1}{a_2}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{c_2}$ 決定一平面，求此平

面之方程式．　答．$(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_1)+(c_1a_2-c_2a_1)(y-y_1)+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_1)=0.$

25．二平行線 $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ 及 $\frac{x-x_2}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{c}$ 決定一平面，求此平面之方程式．

答．
$$[(y_1-y_2)c-(z_1-z_2)b]x+[(z_1-z_2)a-(x_1-x_2)c]y$$
$$+[(x_1-x_2)b-(y_1-y_2)a]z+(y_1z_2-y_2z_1)a$$
$$+(z_1x_2-z_2x_1)b+(x_1y_2-x_2y_1)c=0\ .$$

26．求直線 $x=mz+a,\ y=nz+b$ 須在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上之條件．

答．$Aa+Bb+D=0,\ Am+Bn+C=0.$

27．求一平面之方程式，此平面過經直線 $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ 且平行於直線 $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$．答．$(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_1)+(c_1a_2-c_2a_1)(y-y_1)+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_1)=0.$

第　二　十　章

特　殊　曲　面

164. 本章將論球面，柱面，錐面*(初等幾何學中所論之表面)及圍繞一坐標軸，迴轉一曲線或移動一直線所成之表面.

165　**球面**

定理 I.　一球面之中心爲一點 (α, β, γ)，半徑爲 r，其方程式爲

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2, \text{或}$$

(I)　$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2=0.$$

證　設 $P(x, y, z)$ 爲球面上一點，命球面之中心爲 C. 則從定義 $PC=r$. 以 § 141 (IV) 所表 PC 之值代入，平方之卽得 (I).　　*Q. E. D.*

定理 II.　方程式

(II)　$$x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+K=0$$

之軌跡，可決定如下：

(*a*) 當 $G^2+H^2+I^2-4K>0$ 時，其軌跡爲一球面．此球面之中心爲 $\left(-\frac{G}{2}, -\frac{H}{2}, -\frac{I}{2}\right)$ 及半徑爲 $r=\frac{1}{2}\sqrt{G^2+H^2+I^2-4K}$.

(*b*) 當 $G^2+H^2+I^2-4K=0$ 時，其軌跡爲點球† $\left(-\frac{G}{2}, -\frac{H}{2}, -\frac{I}{2}\right)$.

(*c*) 當 $G^2+H^2+I^2-4K<0$ 時，無軌跡.

---

* 在解析幾何學中球面，柱面及錐面，常用以指明球，柱及錐之表面與初等幾何學中之二次曲面，並非指表面所包圍之立體部分.

† 卽一點或一球面，其半徑爲零.

證　比較 (II) 及 (I), 得

$$-2\alpha=G,\ -2\beta=H,\ -2\gamma=I,\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2=K,$$

因此

$$\alpha=-\frac{G}{2},\ \beta=-\frac{H}{2},\ \gamma=-\frac{I}{2},\ r=\tfrac{1}{2}\sqrt{G^2+H^2+I^2-4K}.$$

故若 $G^2+H^2+I^2-4K>0$,此軌跡為一球面.

在 $G^2+H^2+I^2-4K\gtreqless 0$ 時,決定軌跡 (II) 之普通形狀, 可以一平面 $z=k$ 交之, 其交線之方程式為 (§ 150 規則)

(1)
$$x^2+y^2+Gx+Hy+k^2+Ik+K=0.$$

(1) 之判別式為 (§ 56)

$$\Theta=G^2+H^2-4k^2-4Ik-4K$$
$$=-4k^2-4Ik+G^2+H^2-4K.$$

此為 k 之二次式,其判別式為 (§ 3)

$$\triangle=16I^2+16G^2+16H^2-64K$$
$$=16(G^2+H^2+I^2-4K).$$

討論 (1) 之軌跡, 可藉Θ之符號而別為三款 (§ 56 定理 I).

(a) 若 $G^2+H^2+I^2-4K>0$, 當 k 之值在 Θ 二根之間時, Θ 為正數 (§ 7 定理 III), 此軌跡被平面 $z=k$ 所交成之交線 (1) 為一圓. 故方程式 (II) 有一軌跡.

(b) 若 $G^2+H^2+I^2-4K=0$, k 為任何實數值而不為 Θ 之根時, Θ 為負數 (§ 7 定理 III), 但若 k 為 Θ 之根時, 因 Θ 之根為相等二實數 (§ 3 定理 II), 軌跡 (1) 為一點圓. 又因祇有一平面 $z=k$ 與軌跡 (II) 相交, 而交線為一點圓, 故此軌跡為一點, 即可視為一球面, 其半徑為零.

(c) 若 $G^2+H^2+I^2-4K<0$, k 為任何實數值時, Θ 為負數 (§ 7 定理

III). 因此不論 k 爲何值, (1) 無軌跡, 故 (II) 無軌跡. *Q. E. D.*

定理 III. 普偏三元二次方程式

$$\text{(III)} \quad Ax^2+By^2+Cz^2+Dyz+Ezx+Fxy+Gx+Hy+Iz+K=0$$

當及祇當 $A=B=C$, $D=E=F=0$ 及 $\dfrac{G^2+H^2+I^2-4AK}{A^2}$ 爲正時, 其軌跡爲一球面.

比較 (III) 及 (II) 即可證明.

習 題

1. 求一球面之方程式, 其中心爲一點

(a) $(a, 0, 0)$, 且半徑爲 a. 答. $x^2+y^2+z^2-2ax=0$.

(b) $(0, \beta, 0)$, 且半徑爲 β, 答. $x^2+y^2+z^2-2\beta y=0$.

(c) $(0, 0, \gamma)$ 且半徑爲 γ, 答. $x^2+y^2+z^2-2\gamma z=0$.

2. 決定下列諸方程式軌跡之性質, 若軌跡爲球面, 求其中心與半徑, 若軌跡爲點球, 求此點之坐標.

(a) $x^2+y^2+z^2-6x+4z=0$. (c) $x^2+y^2+z^2+4x-z+7=0$.

(b) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-5=0$. (d) $x^2+y^2+z^2-12x+6y+4z=0$.

3. (II) 之中心在何處, 若

(a) $G=0$? (b) $H=0$? (c) $I=0$? (d) $G=H=0$? (e) $H=I=0$? (f) $I=G=0$?

4. 求證一球面可由四個條件決定之, 試述求其方程式之規則.

5. 求一球面之方程式, 此球面

(a) 有一中心 $(3, 0, -2)$ 且經過 $(1, 6, -5)$.

答. $x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$.

(b) 經過諸點 $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(4, 0, 0)$ 及 $(0, 0, -6)$.

答. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z=0$.

(c) 有一中心在 Y 軸上, 且經過二點 $(0, 2, 2)$ 及 $(4, 0, 0)$.

答. $x^2+y^2+z^2+4y-16=0$.

(d) 經過諸點 $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ 及 $(1, 0, 1)$ 又半徑爲 11.

答. $x^2+y^2+z^2-14x-14y-14z+26=0$.

(e) 以 $(4, -6, 5)$ 及 $(2, 0, 2)$ 之聯線爲直徑.

答. $x^2+y^2+z^2-6x+6y-7z+18=0$.

6. 設二球面 $S_1: x^2+y^2+z^2+G_1x+H_1y+I_1z+K_1=0$ 及 $S_2: x^2+y^2+z^2+G_2x+H_2y+I_2z+K_2=0$；求證軌跡

$S_k: x^2+y^2+z^2+G_1x+H_1y+I_1z+K_1+k(x^2+y^2+z^2+G_2x+H_2y+I_2z+K_2)=0.$

在 k 不等於 -1 時爲一圓．若 $k=-1$，此軌跡爲一平面，稱爲 S_1 及 S_2 之根面．

7. 習題 6 中球面 S_k 之中心在 S_1 及 S_2 之中心聯線上，且分此聯線爲兩分，其兩分之比等於 k.

8. S_1 及 S_2 之根面方程式（習題 6）爲

$$(G_1-G_2)x+(H_1-H_2)y+(I_1-I_2)z+(K_1-K_2)=0.$$

9. 二球面之根面垂直於其中心之聯線．

10. 三球面中兩兩之根面相交於一直線，此直線垂直於中心所決定之平面．此直線稱爲球面之根軸．

11. 四球面中兩兩之根面，相交於一點，此點稱爲球面之根心．

12. 若兩球面 S_1 及 S_2（習題 6）相交，則 S_k 爲經過其交圓之一切球面．

13. 若二球面 S_1 及 S_2（習題 6）相切，則 S_k 爲切 S_1 及 S_2 於其切點之一切球面．

14. 球面 S_k 之方程式（習題 6）可寫作

$$x^2+y^2+z^2+k'x+K=0$$

之形式，其中 k' 爲任意常數，而 X 軸選爲中心聯線，YZ 平面爲 S_1 及 S_2 之根面．

15. 求證習題 14 中之球面系，其中心在 X 軸上，且

(a) 若 $K<0$ 時，經過一圓 $y^2+z^2+K=0,\ x=0$.

(b) 若 $K=0$ 時，相切於原點．

(c) 若 $K>0$ 時，與球面 $x^2+y^2+z^2=K$ 正交．

16. 自一定點至一球面作一割線，此割線與球外部分之積爲一常數．

17. 自一點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 至球面 $x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+K=0$ 作一切線，求切線長度之平方．　　答．$x_1^2+y_1^2+z_1^2+Gx_1+Hy_1+Iz_1+K$.

18. 求證空間之反演變換方程式（§ 124）爲

$$x=\frac{x'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad y=\frac{y'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad z=\frac{z'}{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

19. 求證不經過原點之平面，其反圖爲一球面．若此平面經過原點，其反圖不變，即爲其本身．

20. 求證不經過原點之一球面，其反圖仍爲一球面．若此球面經過原點，其反圖爲一平面．

166. 柱面

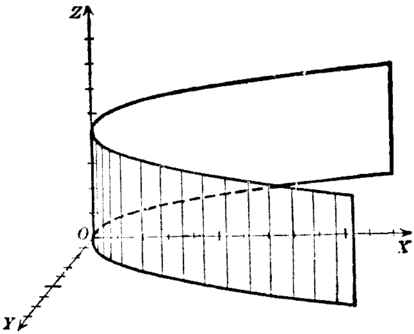
例一． 決定軌跡 $y^2=4x$ 之性質．

解 此面與一平行於 YZ 之平面，卽 $x=k$ 之平面之交線，爲 (§ 150 規則)

(1) $x=k,\ y=\pm 2\sqrt{k}$,

此直線平行於 Z 軸(§ 147 定理 II).

若 $k>0$, 方程式(1)之軌跡爲一組直線；若 $k=0$, 爲一單獨直線(Z 軸)；又若 $k<0$, 方程式 (1) 無軌跡.



同理，與一平行於 ZX 平面，卽 $y=k$,之平面之交線爲一直線．其方程式爲 (§ 150 規則)

$$x=\tfrac{1}{4}k^2,\ \ y=k,$$

此直線平行於 Z 軸.

再由一平行於 XY 平面之平面，其交線爲拋物線

$$z=k,\ \ y^2=4x.$$

k 爲各種値時，此拋物線恆相等，且互疊合.

因此柱面素線，顯然平行於Z軸，且交 XY 平面內之拋物線

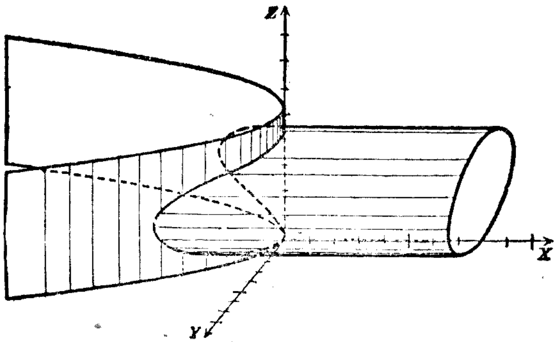
$$y^2=4x,\ \ z=0.$$

從例一知含有三變數 x, y 及 z 中，任意二變數之方程式，其軌跡與平行於二坐標面之平面之交線爲直線，此直線平行於一軸，又與平行於第三坐標面之平面之交線爲相等曲線．如此之面，卽爲柱面，因此

定理 IV. 一方程式中缺一變數，其軌跡爲一柱面，此柱面之素線，平行於所缺變數所表之一軸.

167. 一曲線之射影柱面. 一柱面之素線，交一所設曲線，且平行於一坐標軸，此柱面稱爲該曲線之**射影柱面**．其方程式可從曲線方程式中

三變數 x, y 及 z，依次消去一個而得之．例如消去一變數 z，其結果爲一柱面方程式（定理 IV），因能適合於曲線原二方程式之 x, y 及 z 之值，亦必能適合於從該二方程式消去一變數後之方程式，故此柱面必經過原曲線。



任二射影柱面之方程式，可用作曲線之方程式．*

圖示一曲線，其方程式爲

$$2y^2+z^2+4x=4z, \quad y^2+3z^2-8x=12z.$$

依次消去 x, y 及 z，得射影柱面方程式

$$y^2+z^2=4z, \quad z^2-4x=4z, \quad y^2+4x=0.$$

圖示上列第一，第三兩柱面．

若一曲線在平行於一坐標面之平面上，則二射影柱面與曲線之平面全部，或一部重合．

一直線之射影柱面爲平面．用射影柱面或平面表一直線方程式，已見於 § 160 定理 IV．

168　錐面

* 普徧言之，曲線方程式可以任何二個同値方程式代之；卽此二方程式能及祇能爲適合於曲線方程式之 x, y 及 z 之值所適合。

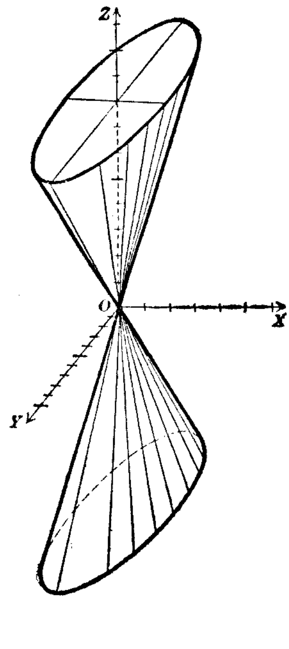
例一. 決定方程式 $16x^2+y^2-z^2=0$ 所表軌跡之性質.

解 設 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 爲曲線 C 上之一點，此曲線爲所設軌跡與一平面之交線，例如 $z=k$，則

$$16x_1^2+y_1^2-z_1^2=0,\ z_1=k. \tag{1}$$

此面經過原點 O (§ 151 定理 III). 吾人將證直線 OP_1 全在曲面上，OP_1 之方向餘弦爲 (§ 141 及 § 140 之系) $\frac{x_1}{\rho_1}, \frac{y_1}{\rho_1}$ 及 $\frac{z_1}{\rho_1}$，其中 $\rho_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2=OP_1^2$. 因此 OP_1 上任一點之坐標爲 (§ 161 定理 V)

$$x=\frac{x_1}{\rho_1}\rho,\quad y=\frac{y_1}{\rho_1}\rho,\quad z=\frac{z_1}{\rho_1}\rho.$$



以此 x, y, z 之值代入所設方程式，得

$$16\frac{x_1^2\rho^2}{\rho_1^2}+\frac{y_1^2\rho^2}{\rho_1^2}-\frac{z_1^2\rho^2}{\rho_1^2}=0. \tag{2}$$

ρ 爲任何數值時，此式恆正確，因此 $\frac{\rho^2}{\rho_1^2}$ 乘 (1) 卽得此式. 因此 OP_1 上任何點均在曲面上，卽此直線全在曲面上，故此面爲一錐面，其頂點爲原點.

例一解法中，主要部分卽以 $\frac{\rho}{\rho_1}$ 之冪乘方程式 (1) 卽可得 (2). 在面之方程式爲 x, y 及 z 之齊次式*時，此法恆用之，因此得

定理 V. 有變數 x, y 及 z 之齊次方程式，其軌跡爲以原點爲頂點之一錐面.

* 一方程式之各項次數相同時，稱爲齊次方程式.

習　題

1. 決定下列軌跡之性質討論並作圖.

(a) $x^2+y^2=36$.

(b) $x^2+y^2=z^2$.

(c) $y^2+4z^2=0$.

(d) $x^2-z^2=16$.

(e) $x^2-y^2+36z^2=0$.

(f) $y^2-16x^2+4z^2=0$.

(g) $x^2+16y^2-4x=0$.

(h) $x^2+yz=0$.

2. 求柱面之方程式,已知其下列之準曲線方程式,且其素線平行於一坐標軸.

(a) $y^2+z^2-4y=0,\ x=0$.

(b) $z^2+2x=8,\ y=0$.

(c) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,\ z=0$.

(d) $y^2-2pz=0,\ x=0$.

3. 求下列諸曲線之射影柱面方程式,並作此二柱面相交之曲線.

(a) $x^2+y^2+z^2=25,\ x^2+4y^2-z^2=0$.

(b) $x^2+4y^2-z^2=16,\ 4x^2+y^2+z^2=16$.

(c) $x^2+y^2=4z,\ x^2-y^2=8z$.

(d) $x^2+2y^2+4z^2=32,\ x^2+4y^2=4z$.

(e) $y^2+zx=0,\ y^2+2x+y-z=0$.

4. 討論下列諸軌跡.

(a) $x^2+y^2=z^2\tan^2\gamma$.

(b) $y^2+z^2=x^2\tan^2\alpha$.

(c) $z^2+x^2=y^2\tan^2\beta$.

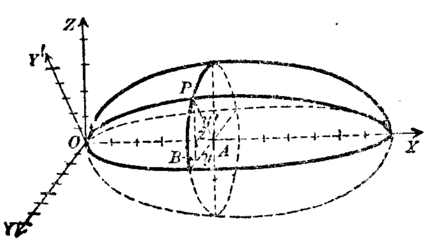
(d) $x^2+y^2=r^2$.

(e) $y^2+z^2=r^2$.

(f) $z^2+x^2=r^2$.

169. 迴轉曲面. 以一曲線圍繞其平面上之一直線,迴轉成一曲面,稱爲迴轉曲面.

例一. 以橢圓 $x^2+4y^2-12x=0,\ z=0$ 圍繞 X 軸迴轉成一曲面,求此曲面之方程式.



解　設 $P(x, y, z)$ 爲曲面上一點.經過 P 及 OX 作一平面,此平面交曲面於一橢圓.在此平面上作 OY' 垂直於 OX,以 OX 及 OY' 爲軸,橢圓之方程式爲

(1) $$x^2+4y'^2-12x=0.$$

但從直角三角形 PAB 得 $y'^2=y^2+z^2$.

代入 (1),得

(2) $$x^2+4y^2+4z^2-12x=0.$$

此方程式表曲面上任一點必須適合之關係，且易證明凡坐標能適合於方程式 (2) 之諸點均在曲面上.故此方程式即為曲面方程式.

上述解法可使吾人得下之

規則. 以坐標面上一曲線圍繞該坐標面上之一軸迴轉，求其迴轉曲面之方程式.

以迴轉軸上一變數外之其餘二變數平方，相加，再求其平方根，以此平方根代入曲線方程式中，即得此二變數之一.

若一曲面與平行於一坐標面之諸平面相交，其交線為一圓，則此曲面為迴轉曲面，其迴轉軸即為垂直於圓截面之坐標軸.由此吾人恆可用以決定所設曲面是否為以一坐標軸作迴轉軸之迴轉曲面.

170. 直紋曲面. 一直線移動* 成一曲面，稱為**直紋曲面**.若直線方程式中有一任意常數，則此方程式即為構成直紋曲面之一組直線系.從直線方程式消去參數，其結果即為直紋曲面之方程式.

若 (x_1, y_1, z_1) 在參數有一值能適合於所設方程式時，則亦能適合於消去參數後之方程式，即在此直線系內每一直線上任一點之坐標適合於該曲面方程式.

柱面及錐面為最簡單之直紋曲面.

例一. 求為一直線所構成之曲面方程式，已知該直線之方程式為

$$x+y=kz,\quad x-y=\frac{1}{k}z.$$

* 此移動直線稱為母線.

解 將二直線方程式相乘,消去 k, 得

(1) $$x^2 - y^2 = z^2$$

此爲錐面之方程式(§ 168 定理 V), 其頂點爲原點, 因與平面 $x = k$ 之交線爲圓,故此曲面爲迴轉錐面,而以 X 軸爲其迴轉軸.

k 爲任何數值時,所設直線恆在曲面 (1) 上. 今證驗如下:

解方程式, 用 z 表 x 及 y, 得

$$x = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)z, \quad y = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right)z.$$

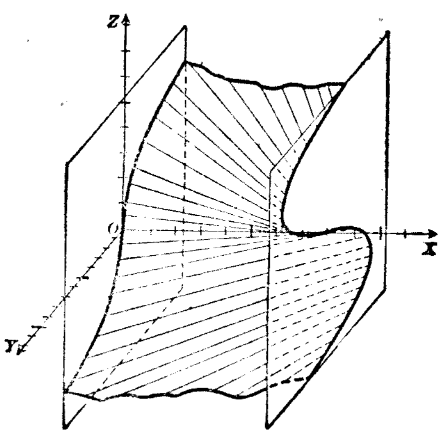
代入 (1), 得

$$\frac{1}{4}\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 z^2 - \frac{1}{4}\left(k - \frac{1}{k}\right)^2 z^2 = z^2.$$

去括弧,化簡,即知此方程式在 k 及 z 爲任何值時,恆能正確. 直線系中任何直線上之一點, 因其坐標適合於 (1), 故必在 (1) 上.

例二. 決定曲面 $z^3 - 3zx + 8y = 0$ 之性質.

解 此曲面與平面 $z = k$ 之交線爲一直線 (§ 150 規則)



$$k^3-3kx+8y=0,\quad z=k.$$

當 k 變化時，此直線構成圖中之直紋曲面．其作法可求此曲面與平面 $x=0$ 及 $x=8$ 之交線，其交線之方程式各爲

$$x=0,\ 8y+z^3=0 \text{ 及 } x=8,\ 8y-24z+z^3=0.$$

在此二曲線上聯接有相同 z 值之二點，得諸直線，此諸直線卽爲構成曲面之列線．

習　　題

1. 下列諸曲線圍繞指定之軸迴轉，求迴轉曲面之方程式，並作其圖象．

(a) $y^2=4x-16$, X 軸．　答． $y^2+z^2=4x-16$

(b) $x^2+4y^2=16$, Y 軸．　答． $x^2+4y^2+z^2=16$.

(c) $x^2=4z$, Z 軸．　答． $x^2+y^2=4z$.

(d) $x^2-y^2=16$, Y 軸．　答． $x^2-y^2+z^2=16$.

(e) $x^2-y^2=16$, X 軸．　答． $x^2-y^2-z^2=16$.

(f) $y^2+z^2=25$, Z 軸．　答． $x^2+y^2+z^2=25$.

(g) $y^2=2pz$, Z 軸．　答． 迴轉拋物面，$x^2+y^2=2pz$.

(h) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, X 軸．　答． 迴轉橢面．$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$.

(i) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, Y 軸．　答． 迴轉單葉雙曲面，$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$.

(j) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, X 軸．　答． 迴轉雙葉雙曲面，$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$.

2. 證明下列諸軌跡或爲迴轉曲面，或爲直紋曲面，其母線平行於一坐標面．描寫並討論其圖象．

(a) $y^2+z^2=4x$.　　(e) $4x^2+4y^2-z^2=16$.

(b) $x^2-4y^2+z^2=0$.　　(f) $x^2y-z^2=0$.

(c) $z^2-zx+y=0$.　　(g) $x^2+z^2=4$.

(d) $x^2y+xz=y$.　　(h) $(x^2+z^2)y=4a^2(2a-y)$.

3. 圍繞一圓之直徑迴轉該圓成一球面，用解析法證驗之．

4. 圍繞 X 軸迴轉 § 58 定理 VIII 中之圓系，可得 § 165 習題 15 之球面系，試證之．

5. 圍繞 Y 軸迴轉一圓 $x^2+y^2-2ax+a^2-r^2=0$ 得一迴轉曲面，求其方程式．當 $a>r$

$a=r$ 及 $a<r$ 時，討論此曲面。

答。$(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2=4a^2(x^2+z^2)$. 當 $a>r$ 時，此曲面稱爲環形圓紋曲面。

6. 求諸直紋曲面之方程式，並討論之，已知其母線爲下列之諸直線系。

(a) $x+y=k,\ k(x-y)=a^2$.　答。$x^2-y^2=a^2$.

(b) $4x-2y=kz,\ k(4x+2y)=z$.　答。$16x^2-4y^2=z^2$.

(c) $x-2y=4kz,\ k(x-2y)=4$.　答。$x^2-4y^2=16z$.

(d) $x+ky+4z=4k,\ kx-y-4kz=4$.　答。$x^2+y^2-16z=16$.

7. 一錐面之頂點爲原點，其素線交圓 $x^2+y^2=16,\ z=2$ 於一點，求其方程式。

答。$x^2+y^2-4z^2=0$.

8. 一迴轉錐面，以坐標軸爲其迴轉軸，其素線與迴轉軸之交角爲 ϕ. 求其方程式。

答。$y^2+z^2=x^2\tan^2\phi$; $z^2+x^2=y^2\tan^2\phi$; $x^2+y^2=z^2\tan^2\phi$.

9. 一迴轉柱面以坐標軸爲其迴轉軸，其半徑爲 r, 求其方程式。

答。$y^2+z^2=r^2$; $z^2+x^2=r^2$; $x^2+y^2=r^2$.

第二十一章

坐標之變換,各種坐標系

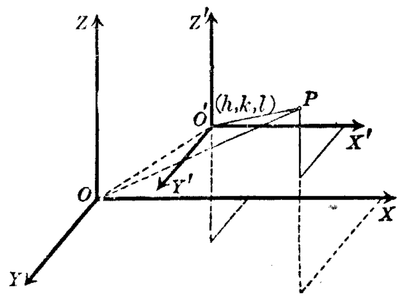
171. 軸之平移.

定理 I. 一組軸平行移動至新原點 $O'(h,k,l)$,其方程式爲

(I) $$x=x'+h,\quad y=y'+k,\quad z=z'+l.$$

證 設一點之坐標,在軸平移之前後,各爲 (x,y,z) 及 (x',y',z'). 求 OP 及 $OO'P$ 在每一軸上之射影 (§ 139 定理 II),得方程式 (I)

Q. E. D.



172. 軸之旋轉.

定理 II. 若 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$; $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ 及 $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$ 各爲三個互相垂直之直線 OX', OY' 及 OZ' 之方向角,今將軸旋轉至 $O-X'Y'Z'$,則其方程式爲

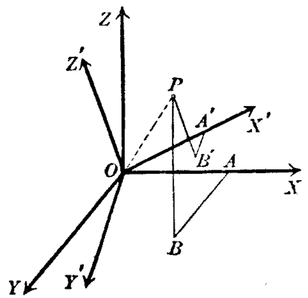
(II) $$\begin{cases} x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3,\\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3,\\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3.^{*}\end{cases}$$

* 從 § 140 定理 III 及 § 142 定理 VI,知 OX', OY' 及 OZ' 之方向餘弦適合於六個方程式,

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1,\qquad \cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0,$$
$$\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1,\qquad \cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0,$$
$$\cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1,\qquad \cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1=0.$$

因此在 (II) 之九個常數中,祇有三個爲獨立.

證　設 P 之坐標在軸旋轉之前後各爲 (x, y, z) 及 (x', y', z')，求 OP 及 $OA'B'P$ 在 OX, OY 及 OZ 軸上之射影，從 §139 系 I 及定理 I 與 II，卽得方程式(11)



Q. E. D.

定理 III.　坐標變換後方程式之次數仍不變.

提示.　證明應用定理 I 及 II 可以變換坐標，故變爲新坐標時，其次數不能增高，但亦不能減低.

習　　題

1.　將軸平移，使原點移至 $(2, -1, -1)$ 點，變換方程式 $x^2+y^2-4x+2y-4z+1=0$.

答.　$x^2+y^2-4z=0$.

2.　將軸旋轉，使其軸之方向餘弦各爲 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$. 變換方程式 $5x^2+8y^2+5z^2-4yz+8zx+4xy-4x+2y+4z=0$.　答.　$3x^2+3y^2=2z$.

3.　立一規則，藉此可從 (a) 軸之平移，(b) 軸之旋轉，以簡化一所設方程式. 普徧言之，坐標變換時，一所設方程式可除去若干項?

4.　圍繞 (a) Z 軸，(b) X 軸，(c) Y 軸，將軸旋轉一角 θ，求其方程式.

答.　(a) $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \\ z = z'. \end{cases}$

5　將軸平移或圍繞一坐標軸旋轉，簡化下列諸方程式.

(a) $x^2+y^2-z^2-6x-8y+10z=0$,　答.　$x^2+y^2-z^2=0$.

(b) $3x^2-8xy-3y^2-5z^2+5=0$.　答.　$x^2-y^2+z^2=1$.

(c) $y^2+4z^2-16x-6y+16z+9=0$.　答.　$y^2+4z^2=16x$.

(d) $2x^2-5y^2-5z^2-6yz=0$.　答.　$x^2-4y^2-z^2=0$.

(e) $9x^2-25y^2+16z^2-24zx-80x-60z=0$.　答.　$x^2-y^2=4z$.

6.　將坐標變換，$Ax+By+Cz+D=0$ 可化爲 $x=0$ 之形式，試證之.

提示.　將軸平移可除去常數項，圍繞 Y 軸旋轉時可除去 z 項 圍繞 Z 軸旋轉可除去 y 項.

7.　將軸旋轉，方程式 $Ax^2+By^2+Cz^2+Fxy+K=0$ 中之 xy 項恆可除去，試證之.

8.　將軸旋轉，方程式 $Ax^2+By^2+Cz^2+Dyz+K=0$ 中之 yz 項恆可除去，試證之.

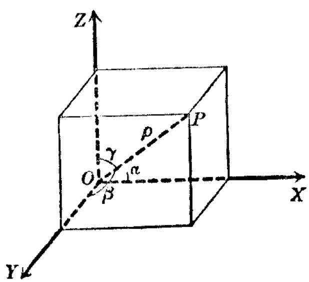
9. 在§172之圖中 OX, OY 及 OZ 關於 OX', OY' 及 OZ' 之方向餘弦爲何?此方向餘弦能適合於六個何種方程式?

10. 習題9中所得之六個方程式與§172定理II附註中之六個方程式同値,試證之.

11. 若 (x, y, z) 及 (x', y', z') 各爲軸旋轉前後一點之坐標,試證

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2.$$

173. 極坐標系. 自原點至一點 P 所作之直線 OP, 稱爲 P 之**動徑**. 任一點 P 決定四個數値,即動徑 ρ 及 OP 之方向角 α, β 及 γ, 此即爲 P 點之**極坐標**.



因 α 　及 γ 適合於§140 (III), 故此類數値並非完全獨立. 若有二個已知,其餘一個即可求得. 但以對稱關係,三個全用之.

反之,任何一組能適合於§140 (III) 之 ρ, α, β 及 γ 之値,可決定一點之位置,此點之極坐標即爲 ρ, α 　β 及 γ.

求 OP 在每一軸上之射影,從§139系I及定理I可得

定理IV. 自直角坐標系變爲極坐標系,其變換方程式爲

$$\text{(IV)}\qquad x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\cos\beta,\quad z=\rho\cos\gamma.$$

從§141定理IV, 得

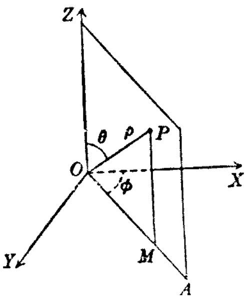
$$\text{(1)}\qquad \rho^2=x^2+y^2+z^2,$$

此即用 x, y 及 z 表動徑之値,

174. 球面坐標系. 任一點 P 決定三數値,即動徑 ρ, 動徑與 Z 軸之交角 θ 及動徑在 XY 平面上之射影與 X 軸之交角 ϕ. 此類數値稱爲 P 點之**球面坐標**. θ 稱爲**餘緯度**, ϕ 稱爲**經度**.

反之,已知 ρ, θ 及 ϕ 可決定一點 P, 其球面坐標爲 (ρ, θ, ϕ).

求 OP 在 OA 上之射影, 得



$$OM=\rho\sin\theta,$$

再求 OP 及 OMP 在每一軸上之射影，得

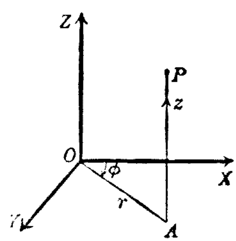
定理 V. 自直角坐標系變為球面坐標系，其變換方程式，為

(V)　$x=\rho\sin\theta\cos\phi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\phi,$

$$z=\rho\cos\theta.$$

自球面坐標系變為直角坐標系，其變換方程式可從 (V) 解 ρ,θ 及 ϕ 得之.

175. 圓柱坐標系. 任一點 $P(x,y,z)$ 決定三個數值，即此點自 XY 平面之距離 z，及此點在 XY 平面上射影 $(x,y,0)$ 之極坐標 (r,ϕ). 此三數值稱為 P 點之**圓柱坐標**. 反之 r,ϕ 及 z 三個數值，可決定一點之位置，該點之圓柱坐標為 (r,ϕ,z). 從 § 62 定理 I，得



定理 VI. 自直角坐標系變為圓柱坐標系，其變換方程式為

(VI)　$$x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi,\quad z=z.$$

自圓柱坐標系變換為直角坐標系之變換方程式，可解 (VI) 中之 r,ϕ 及 z 而得之.

習　　題

1. "方程式之軌跡"為何意義，若此方程式中之坐標為極坐標 ρ,α,β 及 γ? 球面坐標 ρ,θ 及 ϕ? 圓柱坐標 r,ϕ 及 z?

2. 若以 $-\rho$ 代換方程式中之 ρ，或以 $\pi-\alpha,\pi-\beta$ 及 $\pi-\gamma$ 代換 α,β 及 γ，祗變其方程式之形式，則此極坐標方程式之軌跡，關於極點或一坐標面為對稱，試證之. 在何種情形下，可使其軌跡關於直角坐標軸中之一軸為對稱?

3. 求一規則，藉此決定一球面坐標，或圓柱坐標方程式之軌跡，關於原點，直角坐標軸中之一軸，及一坐標面爲對稱？

4. 若一曲面之極坐標方程式，球面坐標方程式，或圓柱坐標方程式爲已知，如何可求此曲面在直角坐標軸上之截距？

5. 變換下列方程式爲極坐標方程式。

(a) $x^2+y^2+z^2=25$. 答. $\rho=5$.

(b) $x^2+y^2-z^2=0$. 答. $\gamma=\frac{\pi}{4}$.

(c) $2x^2-y^2-z^2=0$. 答. $\alpha=\cos^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

6. 變換下列方程式爲球面坐標方程式。

(a) $x^2+y^2+z^2=16$. 答. $\rho=4$.

(b) $2x+3y=0$. 答. $\phi=\tan^{-1}(-\frac{2}{3})$.

(c) $3x^2+3y^2=7z^2$. 答. $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{21}$.

7. 變換下列方程式爲圓柱坐標方程式。

(a) $5x-y=0$. 答. $\phi=\tan^{-1}5$.

(b) $x^2+y^2=4$. 答. $r=2$.

8. 求下列軌跡之極坐標方程式。

(a) 一球面，其中心爲極點。

(b) 一迴轉錐面，其軸爲一坐標軸。

答. (a) $\rho=$ 常數；(b) $\alpha=$ 常數，$\beta=$ 常數，或 $\gamma=$ 常數。

9. 求下列軌跡之球面坐標方程式。

(a) 一球面，其中心爲原點。

(b) 經過 Z 軸之一平面。

(c) 一迴轉錐面，以 Z 軸爲其軸。

答. (a) $\rho=$ 常數；(b) $\phi=$ 常數；(c) $\theta=$ 常數。

10. 求下列軌跡之圓柱坐標方程式。

(a) 平行於 XY 平面之一平面.

(b) 經過 Z 軸之一平面。

(c) 一迴轉柱面，以 Z 軸爲其軸。

答. (a) $z=$ 常數；(b) $\phi=$ 常數；(c) $r=$ 常數。

11. 在直角坐標系，一點可由三個互相垂直平面之交點決定之（§ 138）. 求證

(a) 在極坐標系，一點可視爲由一球面及有一公共素線之三迴轉錐面相交之交點。

(b) 在球面坐標系，一點可視爲由互相正交之一球面，一平面及一迴轉錐面相交之交點。

(c) 在圓柱坐標系，一點可視爲由互相正交之二平面及一迴轉錐面相交之交點。

12. 二點之極坐標爲 $(\rho_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 及 $(\rho_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$，求證其距離之平方爲

$$r^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2).$$

13. 求一平面之普遍極坐標方程式．　答．　$\rho(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) + D = 0.$

14. 求一球面之普遍極坐標方程式．　答．　$\rho^2 + \rho(G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma) + K = 0.$

第二十二章

二次錐面及三元二次方程式

176. 二次錐面. 二次方程式之普偏形式爲

(1) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy + Gx + Hy + Iz + K = 0.$

其軌跡稱爲**二次錐面**.

定理 I. 二次錐面與一平面之交線爲一二次曲線, 或變態二次曲線.

證 用坐標之變換, 任一平面可取爲 XY 平面, $z = 0$, 二次錐面關於任何一組軸之方程式爲 (1) (§ 172 定理 III), 其相交所成之曲線關於該平面上之軸之方程式爲 (§ 150 規則)

$$Ax^2 + Fxy + By^2 + Gx + Hy + K = 0.$$

此軌跡爲一二次曲線或一變態二次曲線 (§ 80 定理 XIII). *Q. E. D.*

系. 一平面與一迴轉錐面相交, 若此平面割迴轉錐面所有之素線, 則此交線爲一橢圓, 若平行於二素線, 則爲一雙曲線 (在頂點兩方割一部分素線), 若平行於一素線, 則爲一拋物線(在頂點之一方割其餘之素線).

定理 II. 二次錐面與一組平行平面系之交線爲相似二次曲線.

證 用坐標之變換, 平行平面系中之一平面可取爲 XY 平面, 因此得平行平面系之方程式爲 $z = k$, 交二次錐面之方程式爲 (1) (§ 172 定理 III), 故平面 $z = k$ 交二次錐面之交線爲 (§ 150 規則)

(2) $Ax^2 + Fxy + By^2 + (Ek + G)x + (Dk + H)y + Ck^2 + Ik + K = 0.$

k 爲各種不同數値時,此方程式表相似二次曲線系* (§ 122 定理 XVI 之系 I). *Q. E. D.*

177. 三元二次普偏方程式之簡化. 將軸旋轉變換方程式(1)(§ 172 定理 II), 新軸之選擇可使 yz, zx 及 xy 除去. 因此 (1) 化爲

$$A'x^2+B'y^2+C'z^2+G'x+H'y+I'z+K'=0.$$

再將軸平移變換此方程式 (§ 171 定理 I), 新軸之選擇可使新方程式有下列任一種形式

$$A''x^2+B''y^2+C''z^2+K''=0, \text{ 或} \tag{1}$$

$$A''x^2+B''y^2+I''z=0. \tag{2}$$

若 (1) 及 (2) 之係數均不爲零, 則 (1) 及 (2) 可改寫爲

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz \tag{4}$$

下節將討論此類方程式之軌跡,+ 此軌跡稱爲有**心二次曲面**, 或**無心二次曲面**.

若 (1) 或 (2) 中有一個或多個係數爲零, 此軌跡稱爲**變態二次曲面**.

若 $K''=0$, (1) 之軌跡爲一錐面 (§ 168 定理 V), 但若 A'', B'' 及 C'' 之符號相同時, 此軌跡爲一點, 即原點,

若係數 A'', B'' 及 C'' 有一個爲零, 此軌跡爲一柱面 (§ 166 定理 IV), 其素線平行於一軸,

* 若 k 爲二種不同數値時, (2) 之不變式各爲 (§ 108 定理 VIII) $\triangle$, H, Θ 及 $\triangle'$, H$'$, Θ'. 則因二次曲線相似, $\frac{\mathrm{H}'^3}{\Theta'}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\mathrm{H}^3}{\Theta}$ 中 λ 之値須爲實數.

因 k 爲各種値時, $\triangle$ 有同號, 故一切交線均屬同類. 若交線爲橢圓, H 及 Θ 異號 (§ 109 定理 IX), 而 λ 爲實數, 若交線爲拋物線時亦然 (§ 110 定理 XI). 若交線爲雙曲線, 則 k 之數値在一定限界內時, 此雙曲線相似, 在限界外之其餘數値時, 其交線亦相似(比較 § 122 習題3).

+ 此方程式必有一軌跡, 除非(3)之係數全爲負數, 則無軌跡。

其準曲線爲橢圓式，或雙曲式之二次曲線（§ 80）．若 $K''=0$，此軌跡爲一對相交平面或一直線．

若係數 A''，B'' 及 C'' 有二個爲零，此軌跡爲一對平行平面（若 $K''=0$ 二平面重合）或無軌跡．

若（2）之係數有一個爲零，此軌跡爲一柱面（§ 166 定理 IV），其準曲線爲一拋物線，或變態有心二次曲線．

若有二個係數爲零，此軌跡爲一對重合平面．（A'' 及 B'' 不能同時爲零，否則方程式不爲二次式）．

習 題

1. 作出並論下列諸方程式之軌跡．

(a) $9x^2-36y^2+4z^2=0$.

(b) $16x^2-4y^2-z^2=0$.

(c) $4x^2+z^2-16==0$.

(d) $y^2-9z^2+36=0$.

(e) $4y^2-25=0$.

(f) $3y^2+7z^2=0$.

(g) $8y^2+25z=0$.

(h) $z^2+16=0$.

2. 討論方程式 $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=0$ 之軌跡．(a) 若符號全同；(b) 若二個符號爲正．何時可使此軌跡爲圍繞 X 軸，Y 軸，Z 軸之迴轉錐面？

3. 應用定理 I 以幾何方法，證明割柱面所有素線之諸平面與此柱面之交線爲同類二次曲線．凡證橢圓在一平面上之正射影仍爲橢圓；雙曲線仍爲雙曲線；拋物線仍爲拋物線．

4. 應用射影柱面，如何可求一曲線在坐標面上射影之方程式．

5. 藉決定錐面 $x^2+y^2=\tan^2\gamma\cdot z^2$ 及平面 $x=\tan\beta\cdot z+b$ 交線之性質，以證定理 I 之系．

6. 將軸圍繞 OY 旋轉一角 θ，變換方程式 $x^2+y^2=\tan^2\gamma\cdot z^2$，然後就 $\theta \gtreqless \gamma$ 之情形，討論與平面 $z'=k$ 之交線，藉此以證定理 I 之系．

178. 橢面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 若 § 177 中（3）之係數全爲正數，其軌跡稱爲橢面．方程式之討論，可得下列之性質：

1. 此橢面關於坐標面，坐標軸及原點爲對稱（§ 151 定理 IV）．用以關於對稱之平面，稱爲橢面之**主徑面**．

2. 在軸上之截距各爲（§ 151 規則）

$$x = \pm a, \quad y = \pm b \quad z = \pm c.$$

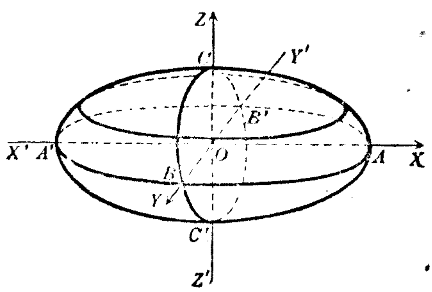
線分 $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, $CC' = 2c$, 稱為橢面之軸.

3. 在主徑面上之追跡為橢圓 $ABA'B'$, $BCB'C'$ 及 $ACA'C'$, 其方程式為 (§ 151)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4. 平行於 XY 平面, $z = k$, 與橢面相交之曲線, 其方程式為 (§ 150 規則)

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}, \text{ 或 } \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - k^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - k^2)} = 1.$$



此方程式之軌跡為一橢圓, k 為任何值時, 諸橢圓皆相似. 若 k 之值自 0 增至 c, 或自 0 減至 $-c$, 此平面自 XY 平面漸次離遠, 使橢圓之軸自 $2a$ 及 $2b$ 各減小至 0, 而此軌跡變為變態橢圓 (§ 80). 若 $k > c$, 或 $k < -c$, 則無軌跡. 故橢面完全在二平面 $z = \pm c$ 之間.

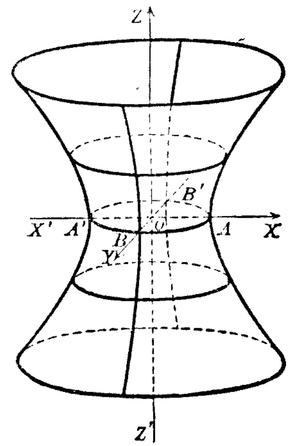
同樣, 平行於 YZ 及 ZX 平面之交線均為相似橢圓, 當此平面漸次離遠時, 橢圓之軸逐漸減小, 而此橢面完全在平面 $x = \pm a$ 及 $y = \pm b$ 之間, 故此橢面為一封閉曲面.

若 $a = b$, 在 $-c < k < c$ 時, (1) 之交線為一圓, 故此軌跡為以 Z 軸為軸之迴轉橢面. 若 $b = c$ 或 $c = a$, 則為以 X 或 Y 軸為軸之迴轉橢面.

若 $a = b = c$, 方程式化為 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 此橢面為一球面.

179. 單葉雙曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 若 §177 中 (3) 之係數，二個為正，一個為負，此軌跡稱為**單葉雙曲面**. 今設方程式為

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



此方程式之討論，可得下列之性質.

1. 此雙曲面關於坐標面，坐標軸及原點為對稱 (§151 定理 IV).

2. 在 X 及 Y 軸上之截距，各為 (§151 規則)

$$x=\pm a,\quad y=\pm b.$$

但不與 Z 軸相交.

3. 在坐標面上之追跡為 (§151) 二次曲線

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

第一式為橢圓，其軸為 $AA'=2a$ 及 $BB'=2b$，其餘二式為雙曲線，其貫軸各為 BB' 及 AA'.

4. 平行於 XY 平面之平面，$z=k$，交此雙曲面成一曲線，其方程式為 (§150規則)

(2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2},\ \text{或}\ \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2+k^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2+k^2)}=1.$$

此方程式之軌跡為一橢圓. 若 k 自 0 增至 ∞，或自 0 減至 $-\infty$，此平面自 XY 平面漸次離遠，而橢圓之二軸各自 $2a$ 及 $2b$ 無限增加. 故此曲

面自 XY 平面及 Z 軸向外無限伸張.

同様,與平面 $x=k'$ 及 $y=k''$ 之交線均爲雙曲線.當 k' 及 k'' 之絕對値增加時,雙曲線之二軸漸漸減小,若 $k'=\pm a$,或 $k''=\pm b$,此雙曲線變態而爲二相交直線.當 k' 及 k'' 所增加之値過此點時,雙曲線之貫軸及共軛軸之方向互換,而二軸之長度無限增加.

諸平行平面與雙曲面所交之二系雙曲線,在坐標面上之正射影爲 § 82 例二之雙曲線系形式.

吾人稱 (1) 爲"在 Z 軸上"之單葉雙曲面.

方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

各爲在 Y 軸及 X 軸上之單葉雙曲面之方程式.

若 $a=b$,交線 (2) 爲一圓,故雙曲面 (1) 爲以 Z 軸爲軸之迴轉曲面.若 $a=c$,及 $b=c$,雙曲面 (3) 亦各爲迴轉雙曲面.

180. 雙葉雙曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 若 § 177 (3),祇有一個係數爲正,此軌跡稱爲**雙葉雙曲面**.今設方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

1. 此雙曲面關於坐標面,坐標軸及原點爲對稱 (§ 151 定理 IV).

2. 在 X 軸上之截距爲 $x=\pm a$,但與 Y 軸及 Z 軸不相交.

3. 在 XY 及 XZ 平面 (§ 151) 上之追跡,各爲雙曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

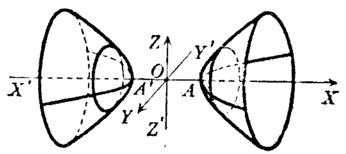
此二雙曲線有同一貫軸 $AA'=2a$,但不與 YZ 平面相交.

4. 平行於 YZ 平面之平面,$x=k$,與此雙葉雙曲面相交.其交線之方

程式為(§ 150 規則)

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}-1,\ 或\ \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(k^2-a^2)}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(k^2-a^2)}=1.$$

若 $-a<k<a$, 此方程式無軌跡. 若 $k=\pm a$, 則軌跡為變態橢圓, 當 k 之値自 a 增加至 ∞, 或自 $-a$ 減小至 $-\infty$, 此軌跡為橢圓, 其二軸無限增加. 故此曲面含有兩葉, 自 YZ 平面及 X 軸漸次離遠, 以至無窮.



同樣, 平行於 XY 及 ZX 平面之一切平面, 與此曲面相交之曲線, 均為雙曲線. 當此平面自坐標面漸次離遠時, 雙曲線之軸無限增加.

(1) 可稱為"在 X 軸上"之雙葉雙曲面.

方程式

(2) $$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\qquad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

各為在 Y 軸及 Z 軸上之雙葉雙曲面之方程式.

若 $b=c$, $c=a$, 或 $a=b$, 雙曲面 (1) 及 (2) 各為迴轉雙曲面.

所應注意者 § 177 (3) 中, 若左端各項均為正, 其軌跡為一橢面. 若祇有一項為負, 其軌跡為單葉雙曲面. 若二項為負, 其軌跡為雙葉雙曲面. 若左端各項均為負, 則無軌跡. 若此軌跡為一雙曲面其軸相當於其與其餘二項符號相反之一項.

習　　題

1. 討論並作出下列諸方程式之軌跡.

(a) $4x^2+9y^2+16z^2=144$.

(b) $4x^2+9y^2-16z^2=144$.

(c) $4x^2-9y^2-16z^2=144$.

(d) $x^2+16y^2+z^2=64$.

(e) $9x^2-y^2+9z^2=36$.

(f) $z^2-4x^2-4y^2=16$.

(g) $16x^2+y^2+16z^2=64$.

(h) $x^2+y^2-z^2=25$.

2. k 或 k' 應爲何值，可使單葉雙曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，或雙葉雙曲面 $\frac{-x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，與平面 $x=k$ 或 $y=k'$ 之交線爲相似雙曲線？

3. 用解析法證任何平面與一橢面之交線爲橢圓類之二次曲線。

4. 用解析法證：(a) 單葉雙曲面，(b) 雙葉雙曲面與經過該雙曲面所在軸之平面相交成一雙曲線。

5. 求證 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=(Ax+By+Cz)^2$ 爲一錐面方程式，其頂點爲原點，且經過橢面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 及平面 $Ax+By+Cz=1$ 之交線。

6. 求證 $x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0$ 爲一錐面方程式，其頂點爲原點，且經過橢面及球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 之交線。

7. 在習題 6 中，若 $a>b>c$ 及 $r=b$，求證一錐面變態而爲一對平面，而此對平面與橢面之交線皆爲一圓。若 $r=a$ 或 $r=c$，錐面之性質各如何？

8. 求平面之方程式，此類平面與橢面 $9x^2+25y^2+169z^2=1$ 之交線爲圓。

答．$4x=\pm 12z+k$.

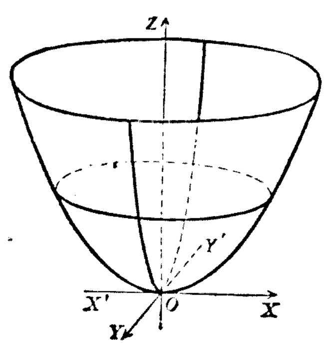
9. 求一錐面之方程式，此錐面之頂點爲原點，且經過球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 與 (a) 單葉雙曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，或 (b) 雙葉雙曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 之交線。r 應爲何值，可使此錐面變態而爲一對平面，而此對平面與雙曲面之交線爲圓？

答．(a) $x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)=0$，若 $a>b$，$r=a$。

(b) $x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)-y^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{r^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)=0$；$r$ 無實數。

10. 求二平面系之方程式，此平面系與 (a) 橢面，(b) 單葉雙曲面，(c) 雙葉雙曲面之交線爲圓。

181. 橢圓拋物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz$. 若 § 177 (4) 中 y^2 之係數爲正，則其軌跡稱爲**橢圓拋物面**。討論其方程式，可得下列之性質。



1. 橢圓拋物面關於 YZ, ZX 平面及 Z 軸爲對稱 (§ 151 定理 IV).

2. 此軌跡經過原點(§ 151 定理 III)，但

不再與軸相交（§ 151 規則）.

3. 在坐標面上之追跡（§ 151）各爲二次曲線

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,\quad \frac{x^2}{a^2}=2\,cz,\quad \frac{y^2}{b^2}=2\,cz.$$

其中第一式爲變態橢圓（§ 80），其餘二式爲拋物線.

4. 平行於 XY 平面之平面，$z=k$，交此拋物面得一曲線，其方程式爲（§ 150 規則）

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\,ck,\ \text{或}\ \frac{x^2}{2\,a^2ck}+\frac{y^2}{2\,b^2ck}=1.$$

若 c 與 k 同號，此曲線爲橢圓，c 與 k 異號則無軌跡. 因此若 c 爲正，此曲面完全在 XY 平面之上. 若 k 自 0 增加至 ∞，則此平面自 XY 平面漸次移遠，而橢圓之二軸逐漸增加以至無窮. 故此曲面自 XY 平面及 Z 軸向外無限伸張.

同樣，平行於 YZ 及 ZX 平面之平面，與此拋物面之交線爲拋物線. 當平面自坐標面漸次移遠時，拋物線之頂點亦自 XY 平面漸次離遠.

下二方程式

$$\text{(1)}\qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2\,ax,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=2\,by$$

之軌跡各爲在 X 軸及 Y 軸上之橢圓拋物面.

若 $a=b$，以上所論之第一曲面爲以 Z 軸爲軸之迴轉拋物面；又若 $b=c$ 及 $a=c$，則 (1) 之拋物面各爲以 X 軸及 Y 軸爲軸之迴轉曲面.

橢圓拋物面之軸，相當於其方程式之一次項，從該項之正或負，以決定此曲面在軸之正向或負向.

182. 雙曲拋物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2\,cz$. 若 § 177 (4) 中 y^2 之係數爲負，此

軌跡稱為雙曲拋物面.

1. 此雙曲拋物面關於 YZ 與 ZX 平面及 Z 軸為對稱(§151 定理 IV).

2. 此曲面經過原點(§151 定理 III),但不與軸再相交(§151 規則).

3. 在坐標面上之追跡(§151)各為二次曲線

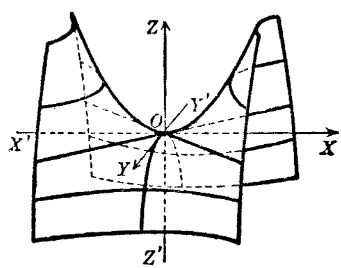
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,\quad \frac{x^2}{a^2}=2cz,\quad -\frac{y^2}{b^2}=2cz.$$

其中第一式為變態雙曲線(§80),其餘二式為拋物線.

4. 平行於 XY 平面之平面,$z=k$,交此拋物面得一曲線.其方程式為(§150 規則)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2ck,\ \text{或}\ \frac{x^2}{2a^2ck}-\frac{y^2}{2b^2ck}=1.$$

此軌跡為一雙曲線.若 c 為正數,雙曲線之貫軸平行於 X 軸或 Y 軸,全視 k 之值為正或為負而決定.若 k 自 0 增加至 ∞,或自 0 減少至 $-\infty$,此平面自 XY 平面漸次離遠,而雙曲線之二軸無限增加.故此曲面自 XY 平面及 Z 軸向外無限伸張,其形類似馬鞍.



同樣,平行於其餘二坐標之平面,與此拋物面之交線為拋物線,當平面自坐標面漸次離遠時,拋物線頂點亦自 XY 平面漸次離遠.

下二方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=2by,\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=2ax$$

之軌跡各為在 Y 軸及 X 軸上之雙曲拋物面.

雙曲拋物面之軸相當於其方程式之一次項.

習 題

1. 討論並作出下列諸軌跡.

(a) $y+z^2=4x$.

(b) $y^2-z^2=4x$.

(c) $9z^2-4x^2=288y$.

(d) $16x^2+z^2=64y$.

2. 平行於一坐標面之諸平面與 (a) 橢圓拋物面, (b) 雙曲拋物面相交所成拋物線系之拋物線均相等.

3. 用解析法證平行於 (a) 橢圓拋物面, (b) 雙曲拋物面所在之軸之任何平面, 交該面成一拋物線.

4. 用解析法證不平行於橢圓拋物面所在之軸之任何平面交該曲面成一橢圓.

5. 用解析法證不平行於雙曲拋物面所在之軸之任何平面交該曲面成一雙曲線.

6. 求一錐面之方程式, 此錐面之頂點爲原點, 且經過拋物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 及球面 $x^2+y^2+z^2=2rz$ 之交線.

答. $x^2\left(\frac{r}{a^2}-c\right)+y^2\left(\frac{r}{b^2}-c\right)-cz^2=0$.

7. 用習題 6, 求與拋物面相交成圓之二組平面系之方程式.

183. 直母線. 單葉雙曲面之方程式 (§ 179) 可寫爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}.$$

此方程式爲自直線系方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

消去 k 後之結果.

此雙曲面爲直紋曲面 (§ 170). 方程式 (1) 亦爲自直線系方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

消去 k 後之結果, 故此雙曲面可視爲二種直紋曲面.

同樣, 雙曲拋物面含有二組直線系

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2ck,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{k}$$

及

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=kz,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2c}{k}.$$

此類直線稱爲曲面之**直母線**.因此得

定理 III. 單葉雙曲面及雙曲拋物面有二種直母線系,卽此每一曲面可視爲二種直紋曲面.

總　習　題

1. 作下列諸曲面,並將第一軌跡被第二軌跡所交之部分畫以陰影.

(a) $x^2+4y^2+9z^2=36$, $x^2+y^2+z^2=16$.

(b) $x^2+y^2+z^2=64$, $x^2+y^2-8x=0$.

(c) $4x^2+y^2-4z=0$, $x^2+4y^2-z^2=0$.

2. 試作下列各面所包圍之立體 (a) $x^2+y^2=a^2$, $z=mx$, $z=0$; (b) $x^2+y^2=az$, $x^2+y^2=2ax$, $z=0$.

3. 試證 (a) 雙曲拋物面, (b) 單葉雙曲面之二個直母線經過曲面上之每一點.

4. 若一平面經過二次錐面之一個直母線,證此平面必經過第二個直母線,而此二個直母線不屬於同系.

5. 單葉雙曲面之方程式 (§ 179) 可寫爲 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$. 用 § 183 方程式 (1) 之化法處理此方程式,可得在此曲面上之二組直線系方程式.證此直線系與以前所得者相同.

6. 一二次錐面通常可經過任何九點,試證之.

7. 若 $a>b>c$, 軌跡

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1$$

之性質爲何? 若 $\lambda>a^2$? 若 $a^2>\lambda>b^2$? 若 $b^2>\lambda>c^2$? 若 $\lambda<c^2$? 則其性質又若何?

8. 試證習題 7 中二次錐面系之追跡爲共焦二次曲線.

9. 試證雙曲拋物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 之任一直母線平行於 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ 中之一平面.

10. 求證 (a) 單葉雙曲面, (b) 雙曲拋物面之直母線在主徑面上之射影切於該曲面在主徑面上之追跡.

11. 經過單葉雙曲面之中心及一母線之平面，交該曲面於另一母線，而此母線與第一母線平行.

12. 一橢圓二軸之長度不定，試示如何移動此橢圓而成一有心二次曲面.

13. 試示如何移動一拋物線而成一拋物面.

第二十三章

一直線與二次錐面之關係.二次式理論之應用

184. ρ 之方程式. 一直線與二次錐面之關係位置. 今設一二次方程式，其軌跡爲一變態或常態二次曲面，再設一直線其參數方程式爲(§ 161 定理 V)

(1) $$x=x_1+\rho\cos\alpha,\ y=y_1+\rho\cos\beta,\ z=z_1+\rho\cos\gamma.$$

若此 x, y 及 z 之值適合於二次錐面之方程式，則直線 (1) 上之一點 $P(x, y, z)$ 亦必在二次錐面之上. 以 (1) 代入二次錐面之方程式, 依 ρ 之降冪排列,得

(2) $$A\rho^2+B\rho+C=0.$$

此方程式之二根爲自 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 至該直線與二次錐面交點之有向距離.二次式(2)稱爲所設二次錐面之 **ρ 之方程式**(與 § 94 比較).今得下之

規則. 求任何二次錐面之 ρ 之方程式.

以(1)中 x, y 及 z 之值代入二次錐面之方程式,依 ρ 之降冪序排列之.

命 (2) 之判別式 B^2-4AC 爲$\triangle$, 從 § 3 定理 II 知

(a) 若 $\triangle$ 爲正數,此直線割二次錐面.

(b) 若 $\triangle$ 爲零,此直線切二次錐面.

(c) 若 $\triangle$ 爲負數.此直線不與二次錐面相遇.

若 $C=0$, (2) 之一根爲零 (§ 4 第一款) 因此 P_1 在二次錐面上.

若 $B=0$, (2) 之二根數値相等，符號相反 (§ 4 第二款)，P_1 爲 (1) 所成弦之中點.

若 $A=0$, (2) 之一根爲無限大 (§ 8 定理 IV)，此直線與二次錐面交於無窮遠.

若 $B=C=0$ 二根均爲零（§ 4 第三款），此直線切二次錐面於 P_1.

若 $A=B=0$，二根均爲無限大，此直線切二次錐面於無窮遠.

若 $A=B=C=0$ 任何數均爲 (2) 之根，因此直線上之任何點均在二次錐面上（與 § 90 比較）.

習　　題

1. 決定下列諸直線及二次錐面之關係位置.

(a) $x=-6+\frac{2}{3}\rho$, $y=6-\frac{2}{3}\rho$, $z=3-\frac{1}{3}\rho$, $x^2+y^2+4z^2=16$.　　答. 割線.

(b) $x=\frac{6}{7}\rho$, $y=9+\frac{3}{7}\rho$, $z=1-\frac{2}{7}\rho$, $y^2+4z^2=8x$.　　答. 不相遇.

(c) $x=4-\frac{2}{3}\rho$, $y=-2+\frac{2}{3}\rho$, $z=5+\frac{1}{3}\rho$, $x^2+y^2+z^2=36$.　　答. 切線.

(d) $x=3+\frac{1}{3}\sqrt{3}\rho$, $y=\frac{5}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3}\rho$, $z=-2-\frac{1}{3}\sqrt{3}\rho$, $x^2-z^2=2y$.

答. 直線在二次錐面上.

(e) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{6}$, $x^2+4y^2-z^2-4x=0$.　　答. 割線.

(f) $\frac{x-1}{9}=\frac{y}{6}=\frac{z+1}{-5}$, $x^2+4y^2-9z^2=36$.　　答. 割線，一交點在無窮遠.

2. 求直線 $x=2+\rho\cos\alpha$, $y=1+\rho\cos\beta$, $z=-1+\rho\cos\gamma$ 須與拋物面 $x^2-y^2+3z=0$ 相切之條件.　　答. $4\cos\alpha-2\cos\beta-3\cos\gamma=0$.

3. 直線 $x=x_1+\frac{2}{3}\rho$, $y=y_1-\frac{1}{3}\rho$, $z=z_1-\frac{2}{3}\rho$ 與雙曲面 $x^2-y^2+4z^2=16$ 相交成一弦，求 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 須爲該弦中點之條件.　　答. $2x_1+y_1-8z_1=0$.

185. 切面. 今設橢圓拋物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz \tag{1}$$

及直線

$$x=x_1+\rho\cos\alpha,\quad y=y_1+\rho\cos\beta,\quad z=z_1+\rho\cos\gamma. \tag{2}$$

以 (2) 代入 (1)，得 ρ 之方程式（§ 184）

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}\right)\rho^2+2\left(\frac{x_1\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_1\cos\beta}{b^2}-c\cos\gamma\right)\rho+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-2cz_1=0. \tag{3}$$

若 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 在 (1) 上，且 (2) 切 (1) 於 P_1，則 (3) 之二根必均爲零，因此 (§ 4 第三款)

(4) $$\frac{x_1\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_1\cos\beta}{b^2}-c\cos\gamma=0,\quad \frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}-2cz_1=0.$$

解 (2) 求方向餘弦，得

(5) $$\cos\alpha=\frac{x-x_1}{\rho},\quad \cos\beta=\frac{y-y_1}{\rho},\quad \cos\gamma=\frac{z-z_1}{\rho}.$$

以 (5) 代入(4)中之第一式，得

(6) $$\frac{x_1(x-x_1)}{a^2\rho}+\frac{y(y-y_1)}{b^2\rho}=\frac{c(z-z_1)}{\rho}.$$

此爲 $P(x, y, z)$ 點應在切 (1) 於 P_1 之直線上之條件。

藉方程式 (4) 之第二式簡化 (6)，得

(7) $$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=c(z+z_1).$$

此爲一平面方程式 (§ 153 定理 II)．因此切 (1) 於 P_1 之諸直線在一平面上，此平面稱爲**切面**．

切面方程式之求法可述之於下之

規則．求一平面之方程式，此平面切一二次錐面，其切點在一所設點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$．

第一步．求 ρ 之方程式，命 ρ 之係數及常數項爲零．

第二步．解直線之參數方程式，求其方向餘弦，用以代入第一步所得第一方程式．

第三步．用第一步所得之第二方程式簡化第二步所得之方程式，其結果即爲所求方程式．

從此規則可得

定理 I. 一平面切有心二次曲面 $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$ 於 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 其方程式爲

$$\pm\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}\pm\frac{z_1z}{c^2}=1;$$

切無心二次曲面 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 於 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 其方程式爲

$$\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}=c(z+z_1).$$

定理 II. 求切任何二次錐面於 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 之平面方程式,可以 x_1x, y_1y 及 z_1z 代換 x^2, y^2 及 z^2; $\frac{1}{2}(y_1x+x_1y)$, $\frac{1}{2}(z_1y+y_1z)$ 及 $\frac{1}{2}(x_1z+z_1x)$ 代換 xy, yz 及 zx, 並以 $\frac{1}{2}(x+x_1)$, $\frac{1}{2}(y+y_1)$ 及 $\frac{1}{2}(z+z_1)$ 代換 x, y 及 z 於二次錐面之方程式中求得之.

186. 極面. 若 P_1 爲二次錐面上之一點, 則在 P_1 之切面方程式可從定理 II 求之. 若 P_1 不在二次錐面上, 則從定理 II 所求得之平面, 稱爲 P_1 之**極面**, 而 P_1 稱爲該平面之**極點**.

在特殊情形時, 二次錐面上一點之極面, 卽爲切二次錐面於該點之切面, 而切面之極點卽爲切點.

187. 外切錐面. 經過所設二次錐面外之一點作諸直線, 與曲面相切, 此諸直線所成之錐面, 稱爲**外切**於二次錐面.

例一. 求一錐面之方程式. 此錐面之頂點爲 $P_1(4, -2, 4)$, 且外切於橢面 $x^2+3y^2+3z^2=9$.

解　經過 P_1 所作任何直線之參數方程式爲 (§ 161 定理 V)

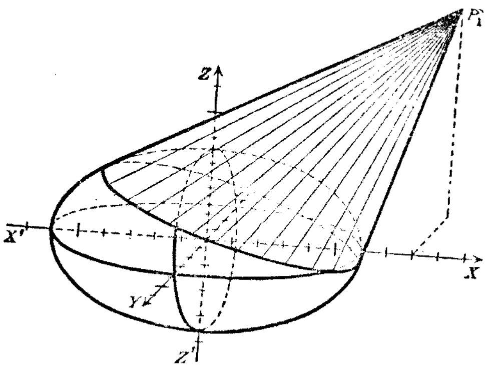
(1)　　$x=4+\rho\cos\alpha,\quad y=-2+\rho\cos\beta,\quad z=4+\rho\cos\gamma:$

以 x, y 及 z 之値代入橢面方程式，得 ρ 之方程式

(2) $(\cos^2\alpha + 3\cos^2\beta + 3\cos^2\gamma)\rho^2 + (8\cos\alpha - 12\cos\beta + 24\cos\gamma)\rho + 67 = 0.$

若(1)切於橢面，則 [§ 184 (b)]

(3) $(8\cos\alpha - 12\cos\beta + 24\cos\gamma)^2 - 4\cdot 67(\cos^2\alpha + 3\cos^2\beta + 3\cos^2\gamma) = 0.$



解 (1) 求方向餘弦，代入 (3)，全式乘以 ρ^2，得

(4) $$[8(x-4) - 12(y+2) + 24(z-4)]^2 - 268[(x-4)^2 + 3(y+2)^2 + 3(z-4)^2] = 0.$$

此卽爲 $P(x, y, z)$ 點須在經過 P_1 而切於橢面之直線上之條件．因此(4)爲所求錐面之方程式．

(4) 之軌跡爲一錐面其頂點爲 P_1，祇須以原點移至 P_1 並應用 168 定理 V 卽可知之．

作此圖形時，每一軸上取二格作一單位．

例一所用之解法，述之於下列

規則． 求一錐面之方程式，其頂點爲 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，且外切於一所設二次錐面．

第一步　求 ρ 之方程式，並命其判別式爲零．

第二步. 從經過一點 P_1 之直線參數方程式求方向餘弦,用以代入第一步之結果,即得所求方程式.

習 題

1. 經過直紋二次曲面上任何一點,有二直母線,此二直母線所決定之平面,即爲該點上之切面,試證之.

2. 經過直紋二次曲面上一個直母線之平面,切二次錐面於該直母線上之一點.試證之.

3. 用解析法證切於錐面之任何平面必經過其頂點.

4. 一所設平面上任一點之極面,經過該平面之極點,試證之.

5. 經過一所設點之任何平面之極點,必在該點之極面上,試證之.

6. 一錐面外切於一二次錐面,其所切曲線在錐面頂點之極面上,試證之,

7. 說明如何可作 (a) 在二次錐面外任一點之極面,(b) 與二次錐面相交之平面之極點,(c) 在二次錐面內任一點之極面.(d) 與二次錐面不相交平面之極點.

8. 證明一點 P_1 關於球面之極面與自中心至 P_1 之聯線垂直.

9. 用解析法證明一點 P_1 關於有心二次曲面之極面,在 P_1 漸近於中心時,自中心漸次離遠,並證明其逆理.

10. 證明任二點至球面中心之距離,與每點至他一點之極面所作之距離成比例.

11. 證明關於二次曲線之"配極曲線"及"配極形"之意義,如何可推廣應用於關於二次錐面之"配極曲面"及"配極形".

12. 一錐面或一柱面關於球面之配極形爲何?關於一平面曲線之配極形爲何?

13. 推廣 § 135 習題 7 關於二次錐面之配極形.

14. 證明自原點至切橢面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 於 P_1 之平面上之距離 p, 可從 $\frac{1}{p^2}=\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}$ 得之.

15. 若 $A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2=D^2$, 平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 與橢面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相切,試證之.

16. 互相垂直之三平面切於一橢面,此三平面交點之軌跡,爲一半徑等於 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 之球面.

提示. 從習題 15, 得三個切面方程式.將此三方程式平方後相加,再用此三平面互相垂直之條件.

17. 若 $A^2a^2c\pm B^2b^2c=2\,CD$, 則平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 切拋物面 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2\,cz$, 試

證之.

18. 互相垂直之三平面切於一拋物面，此三平面交點之軌跡為一平面，試證之.

一平面切一曲面，在切點所作垂直於平面之直線，稱為在該點上曲面之**法線**.

19. 求經過每一二次錐面上一點 P_1 之法線方程式.

20. 若經過橢面上一點 P_1 之法線，交主徑面於 A, B 及 C, 則 P_1A, P_1B 及 P_1C 為一定比.

21. 求外切於拋物面之錐面方程式，其頂點為 $P_1(x_1, y_1, z_1)$.

22. 求外切於橢面之柱面方程式，已知此柱面素線之方向角為 α, β 及 γ.

188. 漸近方向及錐面. 在任何二次錐面之 ρ 之方程式中，若 ρ^2 之係數為零，則一根為無限大(§8 定理 IV)而直線交二次錐面於一點，此點與 P_1 之距離為無限遠. 如此直線之方向稱為**漸近線方向**. 可知一直線如有二次錐面之漸近方向，此直線與二次錐面於有限空間祇交於一點.

以 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 及 $\cos\gamma$ 代二次錐面方程式中二次項之 x, y 及 z (與§94 定理V之附註比較)，即成 ρ^2 之係數，此甚易證明. 因此常態二次曲面

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz$$

之漸近方向之方向餘弦，各適合於方程式

$$(1)\qquad \pm\frac{\cos^2\alpha}{a^2}\pm\frac{\cos^2\beta}{b^2}\pm\frac{\cos^2\gamma}{c^2}=0,\quad \frac{\cos^2\alpha}{a^2}\pm\frac{\cos^2\beta}{b^2}=0.$$

上列方程式中，以各種符號配合，得諸方程式，今設想適合於此所得諸方程式之實數，得

定理 III. 雙曲面及雙曲拋物面有無限個漸近線方向，橢圓拋物面祇有一個，而橢面則無漸近方向.

經過一所設點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 而有二次錐面之漸近方向之直線,恆能成一錐面.關於單葉雙曲面

(2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其錐面方程式可求之如下.一漸近方向之方向餘弦適合於方程式

(3) $$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}-\frac{\cos^2\gamma}{c^2}=0.$$ [從 (1)]

若經過 P_1 之直線方程式為

(4) $$x=x_1+\rho\cos\alpha,\quad y=y_1+\rho\cos\beta,\quad z=z_1+\rho\cos\gamma,$$

則

(5) $$\cos\alpha=\frac{x-x_1}{\rho},\quad \cos\beta=\frac{y-y_1}{\rho},\quad \cos\gamma=\frac{z-z_1}{\rho}.$$

代入 (3) 以 ρ^2 乘之,得

(6) $$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}-\frac{(z-z_1)^2}{c^2}=0.$$

此即為 $P(x, y, z)$ 點應在經過 P_1 而有 (2) 之漸近方向之直線上之條件. 因此 (6) 為一錐面之方程式, 其頂點為 P_1, 其素線有 (2) 之漸近方向.

(6) 為錐面之程式,可以原點平移至 P_1 而證驗之.

今得普徧之

規則. 求一二次錐面之漸近方向所成之頂點為所設點之錐面方程式.

在 ρ 之方程式中,命 ρ^2 之係數為零,從直線之參數方程式求其方向餘弦,以此方向餘弦代入之.

若 ρ 之方程式中，ρ^2 及 ρ 之係數均為零，則二根均為無窮大* (§ 8 定理 IV) 此直線稱為**漸近線**.

設 P_1 為不在雙曲面 (2) 上之一點，若直線 (4) 為一漸近線，吾人可求 α, β 及 γ 應適合之條件.

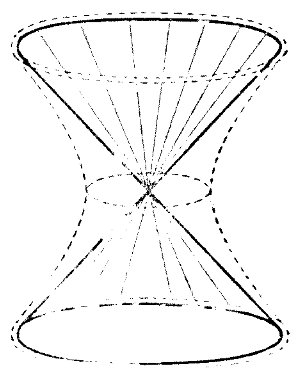
雙曲面之 ρ 之方程式，為

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}-\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)\rho^2+2\left(\frac{x_1\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_1\cos\beta}{b^2}-\frac{z_1\cos\gamma}{c^2}\right)\rho$$
$$+\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=0.$$

若 (4) 為一漸近線，則從定義

$$(7)\qquad \frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}-\frac{\cos^2\gamma}{c^2}=0,\quad \frac{x_1\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_1\cos\beta}{b^2}-\frac{z_1\cos\gamma}{c^2}=0.$$

此二式即為 α, β 及 γ 應適合之條件. 解方程式 (7)，用 $\cos\gamma$ 表 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$，得二組解答，此二組解答為不相等之實數，相等實數或虛數，從此吾人可決定 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 及 $\cos\gamma$ 成比例之二組數值. 故有二個，一個或無漸近線可經過 P_1.



但若 $x_1=y_1=z_1=0$，即若 P_1 為雙曲面之中心，則 α, β 及 γ 為任何數值時，方程式 (7) 之第二式恆能真確；又因方程式 (7) 之第一式與 (3) 全同，故知由漸近方向所成之錐面，其頂點為中心 (0, 0, 0) 其素線均為漸近線. 此錐面稱為**漸近錐面**. 從 (6) 此錐面之方程式為

* 假定常數項不為零，若常數項為零，則 P_1 在二次曲面上. 又若 ρ^2 及 ρ 之係數均為零，則 ρ 任何數均為根，而此直線完全在二次錐面上。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

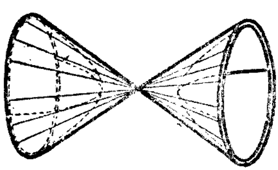
因此得

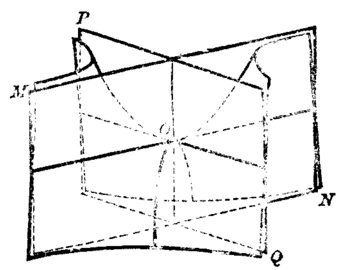
定理 IV. 單葉雙曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 之漸近錐面方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

圖中顯示雙曲面 (2) 及其漸近錐面，此錐面完全在曲面中．當雙曲面漸至無窮遠時，與漸近錐面愈為接近，有如雙曲線漸趨近其於漸近線然(§ 76 定理 IX).

同樣吾人可證下之定理.





定理 V. 雙葉雙曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 之漸近錐面方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

雙曲拋物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 之漸近錐面方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

後一錐面可變為變態曲面，即一對相交平面.

習　　題

1. 一平面若垂直於雙曲拋物面之軸,必與曲面相交成一雙曲線,此雙曲線之漸近線卽為該平面與漸近錐面之交線,試證之.

2. 一平面若經過雙曲面之軸,必與曲面相交成一雙曲線,此雙曲線之漸近線卽為該平面與漸近錐面之交線,試證之.

提示. 圍繞雙曲面之軸,將軸旋轉.

3. 證明任何二次錐面之漸近方向,可由一方程式之軌跡決定之,此方程式卽由二次錐面方程式之二次項為零時得之.

4 證明經過單葉雙曲面之中心及一母線之平面與漸近錐面相切.

5 雙曲面有一漸近錐面,證明平行於該錐面素線之平面,交雙曲面成一拋物線.

6. 證明與雙曲面之漸近錐面相切之平面,交雙曲面於二平行線.

7. 證明雙曲面之任一漸近線平行於漸近錐面之一素線,且在切錐面於該素線之平面上.

8. 用習題 7,試示如何可作一雙曲面之漸近線,而此漸近線經過中心外之任何一點 P_1. 再示依照 P_1 在漸近錐面之外,漸近錐面之上,或漸近錐面之內,而有經過 P_1 之二個,一個或無漸近線.

9. 證明雙曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 及 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 有同一漸近錐面,此二曲面關係於此一錐面之位置如何?

10 證明雙曲拋物面之二漸近線,經過不在漸近錐面上之任何點,且每一直線平行於組成錐面之二平面之一.

189. 中心. 若 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 為二次錐面中經過 P_1 諸弦之中點,則 P_1 稱為二次錐面之對稱中心. 因 P_1 須為各弦之中點,故 ρ 之方程式中,其二根之數值相等,符號相反,因此 (§4 第二款) ρ 之係數應等於零. 在 ρ 之二次方程式中,ρ 之係數為

$$(2Ax_1+Fy_1+Ez_1+G)\cos\alpha$$
$$+(Fx_1+2By_1+Dz_1+H)\cos\beta+(Ex_1+Dy_1+2Cz_1+I)\cos\gamma.$$

經過 P_1 之一切直線均使此式為零,卽 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 及 $\cos\gamma$ 為任何數值時,此式之值應為零. 故祇有括弧中各式為零. 令命括弧中各式等於零,解 x_1, y_1 及 z_1,卽得中心之坐標.

由 § 163 之討論，知一二次錐面可有一個中心，無中心，或在一直線或一平面上之諸點皆爲中心.

190. 徑面. 二次錐面中一組平行弦中點之軌跡爲一平面，此平面稱爲**徑面.**

今設想橢面

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

及一組平行直線

$$(2)\qquad x=x_1+\rho\cos\alpha,\quad y=y_1+\rho\cos\beta,\quad z=z_1+\rho\cos\gamma.$$

若 x_1, y_1, z_1 爲任意數，而 α, β 及 γ 爲常數，此類方程式表一組平行線.

(1) 之 ρ 之方程式爲

$$(3)\qquad \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)\rho^2+2\left(\frac{x_1\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_1\cos\beta}{b^2}+\frac{z_1\cos\gamma}{c^2}\right)\rho$$
$$+\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=0.$$

若直線 (2) 爲 (1) 之弦，而 P_1 爲其中點，則 (3) 之二根，數值應相等，符號應相反；因此 (§ 4 第二款)

$$(4)\qquad \frac{x_1\cos\alpha}{a^2}+\frac{y_1\cos\beta}{b^2}+\frac{z_1\cos\gamma}{c^2}=0.$$

此係 P_1 須爲弦之中點之條件.

但 (4) 又爲 P_1 須在平面

$$\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}=0$$

上之條件. 故此即爲諸弦中點軌跡之方程式，而弦之方向角爲 α, β 及 γ.

以同法施之於其餘之二次錐面，得

定理 VI. 諸平行弦之方向角為 α, β 及 γ，平分此諸弦之徑面方程式，於有心二次曲面 $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$ 中為

$$\pm\frac{x\cos\alpha}{a^2}\pm\frac{y\cos\beta}{b^2}\pm\frac{z\cos\gamma}{c^2}=0;$$

於無心二次曲面 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 中為

$$\frac{x\cos\alpha}{a^2}\pm\frac{y\cos\beta}{b^2}=c\cos\gamma.$$

習　題

1. 用幾何方法決定每種二次錐面及變態二次曲面之中心之個數．

2. 普偏二次方程式所表軌跡之諸弦，其方向角為 α, β 及 γ．求平分此諸弦之徑面方程式，若二次錐面有一中心，從此方程式之形式，證此徑面經過該中心．

3. 經過有心二次錐面之中心，或平行於拋物面之軸所作之任何平面，即為徑面，試證之．並求此徑面所平分諸弦之方向餘弦．

4. 二徑面之交線稱為直徑．證明一有心二次曲面有三個直徑，任二直徑之平面，二等分平行於第三直徑之諸弦，此三直徑稱為共軛徑，任二直徑之平面可稱為與第三直徑共軛．

5. 求一平面之方程式，此平面二等分 (a) 一有心二次曲面，(b) 一拋物面之平行弦，此平行弦平行於經過二次錐面上一點 P_1 之直徑．

6. 在二次錐面直徑之兩端，作切於曲面之二平面，此兩平面平行於共軛徑面．

7. 一橢面之三個共軛半直徑在每一軸上射影，其射影平方之和為一常數．

提示．設 P_1, P_2 及 P_3 為三個共軛徑之端點，求此三點在橢面上之條件．再求任何二點在一平面上，而此平面共軛於經過第三點之直徑之另一條件，再證

$$\frac{x_1}{a},\ \frac{y_1}{b},\ \frac{z_1}{c},\ \frac{x_2}{a},\ \frac{y_2}{b},\ \frac{z_2}{c}\ 及\ \frac{x_3}{a},\ \frac{y_3}{b},\ \frac{z_3}{c}$$

為三個互相垂直直線之方向餘弦，又若以此三直線為軸，則

$$\frac{x_1}{a},\ \frac{x_2}{a},\ \frac{x_3}{a},\ \frac{y_1}{b},\ \frac{y_2}{b},\ \frac{y_3}{b}\ 及\ \frac{z_1}{c},\ \frac{z_2}{c},\ \frac{z_3}{c}$$

亦爲三直線之方向餘弦,再應用 § 140 定理 III.

8. 用習題 7, 證明橢面之三個共軛半直徑,其平方之和等於 $a^2+b^2+c^2$.

索　　引

(以中文筆畫多寡爲序,末附數字表頁數)