經濟統計

George R Davies 著

郭 垣 譯

重慶三友書店發行

原著者序

統計方法之被應用於特別研究範圍，（如人口學，教育學與經濟學），近幾年來，進展頗速。故吾人欲使複雜之特殊方法與解釋，不生乖錯，統計原理之研究，必須限於某一特別研究之範圍。本教科書之纂述，蓋專爲有經濟學興趣者。

統計學教員所遇之普通困難，即缺乏實習工作之設備。本書今擬應此需要而供給以例題，圖形與資料，皆可供學生自己工作；此外於每章之末，並附以有關之練習題。練習題或許過多，教員可應其需要者而選擇之。較長之題、應再劃分而令班中學生分作之。表與習題如感不足，可從『現代商業調查』(Survey of Current Business)，『勞動評論月刊』(the Monthly Labor Review) 與『美國統計撮要』(the Statistical Abstract of the United States) 諸書中之資料補充之。

本書所包括之諸題目，最大限度或能在大學班內一學期授完。故或以省去數題目爲適宜；譬如四分位之插補法，物價指數之理論，拋物線式之長期趨勢，季節變動以及較複雜

之相關方法，固皆可略而弗授也。

本書所示之資料，幾全部由統計實習室與教室中之經驗而聚積。關於大銀行與大商店統計部基本理論之需要，本書尤特別注意。最近若干處理商業晴雨之進步方法，皆已敍及；他如物價理論與生產指數，已予以着重也。

此書蓋爲作者於 1920 年至 1921 年間在普靈斯吞大學(Princeton University) 之大學統計班上之講稿。此科目之大體內容，皆根據威廉姆斯教授(ProfessorWilliams)於前一年所授者；威氏現已去哈佛大學任教矣！著者對於威廉姆斯教授之實習計畫與其他無數有價值之啓示，表示謝忱。普大菲特教授(F. A. Fatter)與甘末爾教授 (W. Kemmerer)對於作者之關懷與鼓勵，更爲作者所感謝。作者尤應感謝康奈爾大學(Cornell)威爾阜克斯教授(Prof. W. F Willcox)，以承其將原稿讀閱一過，並予以有價值之修正。巴布生氏(Mr. Roger W. Babson)，郝武德教授(Prof.Stanley E. Howard)，勞動統計局，國民銀行，全國經濟研究局 (National Bureau of Ecenomic Research)，全國工業會議局(National Industrial Conference Board)，經濟統計評論 (Review of Economic Statistcs)與北達科塔大學季刊(the Quarterly Journal of the University of North Dakota) 允許著者重印其資料，尤爲作者所感謝者也。

喬治，戴維斯·(Geore R. Davies.)

譯者序

經濟統計一書，不僅在國內出版界中罕覯，卽在科學發達之歐美諸國，亦寥寥可數。近數年來，吾國積極從事於國民經濟建設；對於應用科學之需要，頗爲迫切；統計學亦其一也。惟國人對於統計學之研究，方在啓蒙階段；統計學之出版物較其他出版物，尤爲貧乏。故在需要應用科學如是迫切之今日，吾人對於統計學之研究，實有其刻不容緩者在。譯者有鑒於是，因特迻譯戴維斯教授(Prof.George R. Davics)之經濟統計緒論(Intoduction to Economic Statistics)一書，以介紹於國人。原書在美國出版界中佔有相當地位，各統計學者於著述中常引用之，蓋亦名著也。不佞此譯，雖不敢期對中國學術界有若何之貢獻；惟以之供研究諸君之參考，倘不失爲一有價值之出版物也。

據著者自序，原書係美國普靈斯吞大學之教本。惜以其選材偏重美國與出版較早，該書是否堪爲中國大學教本，倘不無疑問。但教者如以個人之經驗與學識，對原書稍加增刪，用爲教本，亦未爲不可也。

譯者迻譯此書，始終遵守『信』『達』『雅』之翻譯原

則，並努力減少讀者讀閱譯本之困難；書中用淺顯之語體文，盡避免冗長之文句也。譯名從衆，且附原名，以資參考。

民國二十六年春於故都

後記：斯書原爲譯者在故都民國大學教授統計學及任職母校北大時所譯，今翻舊篋，重爲訂正，以之付梓，於茲戰時學術空氣消沉之際，或不無意義也。

民國三十二年秋譯者於陪都。

經濟統計

目次

第二章 離中趨勢的種類和測定

目次

第五章　時間數列

第六章　相關

第一章 製表

『統計學』一詞，當其用以表示一研究科目時，係包含某種方法之闡明；而此方法則用以表示與解釋某一問題之數目狀態者。故統計學，與其謂爲材料之科學，毋寧謂爲原理與方法之科學之爲愈。在原理方面，無論應用於生物學，人口統計學，教育學或經濟學，皆無大異。但各部科學所採之詳細統計方法，近年來已漸專門化，使吾人再不能抽象地研究之。本編之應用範圍，主要部份係普通經濟統計。（註一）以下吾人將示以組織材料，計算指數，應用指數，測量趨勢與測量相關等等之方法。

調查表 統計工作通常始以編製調查表；在表中填入所需要之材料。此類表格或爲問題式，或僅爲記載之格式，

〔註一〕 吾人在此應注意者，經濟統計與商業（或營業）統計不同。前者研究一般市場情形，後者則研究特別商業組織之活動，而爲會計學之附屬物。商業統計隨組織不同而大異，故難將其歸納於通則。其所有問題，大部分包含『對於特種情況統計方法之應用。』欲詳知此二者區別，可參看："The Scope of Business Statistics" by R.P. Falkner, in the Quarterly Publications of the American Statistical Association, June, 1618, P.P 4—9.

因應用之工作不同而異，故亦殊難創設多少製表規則也。然細經驗所示，於製表前，吾人必須審愼工作。第一，吾人必須盡力決定：所需要者爲何種材料。如表格係採疑問式，吾人務須以最大之注意，使其不含混，而使回答者易於瞭解。有時在表中不同地方，用兩種方法問一個問題，以避免錯誤；如詢問人之年齡，兼詢其誕生年月是。

在調查表編製以後，統計者即開始組織材料·如是可得一結論，而以簡單形式顯示之。對此，彼將應用製表之程序。欲解釋此程序，最好舉示一例。吾人姑以愛爾特瑞對批發物價，工資與運輸之報告中（the Aldrich Report on "Wholesale Prices, Wages and Transportation"）所記載之某數種工資表爲例。（見Senate Report No.1 94,dated1893）此處所用之材料，可見於第四部第1463－1497頁，而係關於康奈梯卡特地方（Connecticut）之某一織呢工廠者，其組織號數爲86。在報告封面上所記載之工資記錄，時期約有半個世紀（即五十年），而終於一八九一年。內容包含每年一月與七月廠內所僱各級工人之每日工資。吾人製表時將僅選取一八七〇，一八八〇與一八九〇年七月中所付之工資。

原始表或普通目的表　將所選擇之工資調查表歷

錄爲原始表，最好用某種修正以校勘原本材料。吾人一觀察此工資調查表，即可看出：多數工資率係以五分之倍數（如5,10,15,20………譯者）表示之。然在理論上，吾人可假定：實際工資之經濟值必做成一連續數列，而非有一定則之組距。換言之，假如工資能以理論上的正確數值表示之，而工人之數目又甚多，則每人工資之差將爲最小之數。此種情形與測量一大組中之人身高度，正復相類。假如用最準確之儀器以測量之，所得結果將以百分之一吋或千分之一吋表示之。但爲實際應用計，吾人求到四分之一吋即爲準確。同樣，當僱主給與工資時，彼亦根據五分之倍數，或於較大工資中則以二十五分($,25)之倍數爲之。據彼意見或目的，對於勞動之市場價值，作如是估計，即已十分準確。在大多數工人之工資給付中，或能發現例外。在此情形下，一，二分之差異即能產生顯著之結果也。

連續數列與非連續數列 一量度數列或價值數列，其出現係有一定距離者（其距離或大或小），是爲非連續數列。有時，一個數列在原來性質上就是非連續的，譬如以花瓣來分類之花或擲骰子所得出之點。然有時，一數列在理論上爲連續的；後經以改造，則變爲非連續的；如人身高度

之量到四分之一吋，或工資之以五分之倍數表示者是。吾人所錄之工資率數列，除少數例外外，皆爲組距五分之非連續數列，而如下表所示。

第 一 表

幾特選年度七月中的一康奈梯卡特織呢工廠之工資

業　　務	1870		1880		1891	
	人數	工資	人數	工資	人數	工資
除頽者…………	1*	$.80	11*	$.80	14*	$1.10
	2*	.85	8*	.85		
淨梳毛機者……	1	.70	4	1.15	1	1.10
	2	1.10			1	1.15
	1	1.25			1	1.20
					2	1.25
照料梳毛機者…	1	.55	2	.60	1	.75
	2	.60	2	.65	1	.85
	3	.65			1	.90
	1	.80			1	1.00
木匠…………	1	2.75	1	2.75	1	2.75
衣服觀察員……			1	1.60	1	1.90
筘內拖曳者……	1*	1.25	1*	1.90	1*	1.75
			1*	1.95	1*	1.85
					4*	1.90
管料衣服者……			2	1.50	1	1.25
			2	1.55	2	1.60
					1	1.65

第一表（續）

業務	1870		1880		1891	
	人數	工資	人數	工資	人數	工資
					3	1.75
染色者	2	1.35	3	1.25	1	1.15
	1	1.50	5	1.30	13	1.25
					1	1.40
					2	1.50
伕夫	1	1.50			3	1.50
工頭除類者					1	2.25
漂布者	4	$1.10	2	$1.05	2	$1.05
	8	1.15	4	1.20	4	1.10
	2	1.25	1	1.25	3	1.15
	1	1.35			8	1.25
	2	1.50			1	1.50
向內傳遞者	2*	.40	2*	.40	5*	.50
通線具者					1	1.50
安放織機者	2	1.50	3	1.95	1	2.00
	1	1.10			2	2.10
	1	1.15			4	2.20
機械師	1	2.75	1	3.00	1	2.75
機師助手	1	1.75			1	2.10
號碼縫綴者					3*	.90
管理者——機房	1	3.50	1	3.25	1	4.00
管理者——染房	1	3.75	1	3.25	1	4.25
管理者—製成部	1	2.50	1	3.00	1	3.50
管理者—添貨部	1	2.75	1	2.50	1	2.50
管理者—紡織部	1	2.75	1	3.00	1	2.75

第一表(續)

業務	1870		1880		1891	
	人數	工資	人數	工資	人數	工資
管理者—經緯部	1	2.25	1	2.25	1	2.50
管理者——織部	1	3.00	1	3.00	8	3.00
補綴者	1	.75	2	.70		
	1	.80	8	.75		
買賣舊貨者	1	1.50	1	1.85	2	1.75
	1	1.75	1	1.50		
縫綴者			10	1.25	1*	1.90
					2*	1.65
剪裁者	1	1.15	6	1.25	8	1.35
	1	1.40				
	1	1.50				
分類者	2	2.00	2	1.80	2	1.70
	1	2.75	1	2.75	1	2.75
加染斑點者	1*	1.35	1*	.90	2*	.80
			2*	.95	2*	.85
紡績者	3	1.75	1	1.50	4	1.25
	7	1.80			7	1.30
纏線者	5*	1.35	5*	.65	9*	.75
			4*	.70	14*	.80
服聯畜者	1	1.50	1	1.50	1	1.60
絞絨繩者			7*	.90	4*	.90
計時者	1	1.50	1	1.50	1	1.30
					1	1.35
					1	1.40
總工	4*	1.05	79	1.20	2*	1.30

第一表（續）

	1870		1880		1891	
	人數	工資	人數	工資	人數	工資
雜務	3*	1.10	10*	1.40	8*	1.35
	19	1.30	2*	1.45	89	1.70
	5	1.35			60	1.75
花樣織工					3	1.25
					2	1.35
					4	1.50
					1	1.75
					1	2.00
捲呢者	1*	1.00	6*	.95	12*	1.15
			8*	1.00	17*	1.20
毛線搬運者	1	1.25	1	1.75	1	1.85
總數…………	108		213		361	

---

*女工

吾人爲分組起見，最好將工資數列變爲有一定組距之非連續數列。吾人旣不能使五分組距再爲縮小，故必須修正如六角七（67C）一元二角八（$1.28）之工資率，使其皆變爲五分之倍數。

如工人數目無多，此等數值可塡入鄰近之五分組距中：如$.67，卽塡入$.65之一組中，$1·28卽塡入$1.30之一組中。但因所賺不同工資率之工人數目過大，如是辦法，

殊失準確。因此，吾人將應用一普通數學方法，使現賺不同工資率工人分爲兩組，一組之值較高，一組之值較低，但總合之，其所得平均工資仍如前。其程序可解釋如下：

$$\text{每日賺 \$.67 的工人共15人}=\begin{cases}\text{每日賺 \$.65者9人}\\ \quad + \\ \text{每日賺 \$.70者6人}\end{cases}$$

此結果係取十五個工人之$\frac{3}{5}$與$\frac{2}{5}$而得。此結果中較大者，以五之倍數表示其工資率，即使\$.67寫成\$.65；較小者則寫成 \$.70。然其平均工資並未變化，蓋以

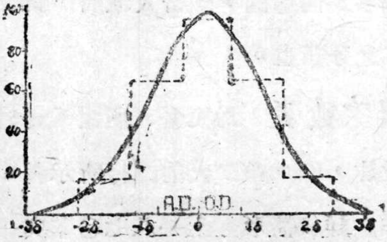
$$15\times\$.67=9\times\$.65+6\times\$.70$$

用上述方法，所有不規則之工資率，皆可使其等於五分之倍數。如遇有分數時，當然應取其相近之整數值，經過如是修正後，則吾人工資調查表，即以第一表之形態出現，可視爲原始表或普通目的表(Primary or general Purpose table)之例。

次數曲線　吾人即將討論之製表問題，其眼前目的即在顯示上述工資之次數分配情形，次數分配觀念有一簡明之理論根據，故吾人最好稍一談及此問題之理論部份。

假如吾人取一個二項式之二方。如 $a^2+2ab+b^2$，即得三組數值，如其字母與其指數所表示之者；此三組之次數，則

以其係數，1：2：1表示之。假如此二項式非二方的，而爲四方的，吾人將得五組數值，係數則爲1：4：6：4：1此類次數如繪成圖形，則如第一圖，而以虛線表示之。如吾人不取四次方的二項式，而取千次方或百萬次方，則此方塊的次數多邊形，將不復出現，而爲近似一滑勻的鐘形，如第一圖實線所示者。此種理論的次數分配，或相近於此的次數分配，常見於自然現象與夫社會現象中；並稱機律(Laws of Chance)是也。如一樹之葉的長度，一組人之身高，公司之純收益百分數或一物價指數與經常物價之差，如將其適當分類與畫圖，皆爲近似鐘形次數曲線之圖形也。欲知一材料中



第一圖·常態次數曲綫（實線）與根據二項式的四次方而作的圖形（虛線）。橫綫之單位爲標準差（由平均數量起，即由○量起），四分位差與平均差。

之曲線是否其原來性質即爲鐘形的，吾人必須確知：第一，此材料包含相當大的項目，第二，其範圍與數目適宜於分類。試舉例如次：假如量一百人之高度，單位用尺，結果只能有二組或三組。如此量度之單位，使爲 .01吋，則組數大增，必無散亂不整齊之弊。今吾人使量度之單位爲吋，則此次數之數列將如下述（諸組係從60吋量到73吋）：1：2：4：7：10：14：16：16：12：8：5：3：1：1。此類次數如繪成圖形，將得近似鐘形之曲線圖。故吾人欲將工資材料製表，必須事前予以適當之分類也。

計數片與次數表 爲使吾人所選工資材料之分類簡易，乃書一計數片，而如第二表前二行所示者。此處所示，僅爲一八九一年之詳細情形，至一八七〇年與一八八〇年之材料則留與學生諸君自作。在研究項目之單獨填畫時，吾人通用習見之『四與橫畫』計數法，如𝍸=5。(four and cross method of tallying) 但在項目有一部分已分組之情形下（此處示例即如此），此法則不適用。在此情形下，工資錄所示之工人數目記於計數片中之適當行上，其程序頗似會計學上之分錄帳轉入總帳者。每一記載與另一記載用一橫線隔開；然後，將各行結果總加之，得數記於記載組之五分

行下。如此依大小而排列之價值數列，即稱爲「行列」(Array)。

第二表

康奈梯卡特棊鐵呢工廠之工資，一八九一年七月

每日工資($)	計數(工人數)	次數組 五分組	十五分組	廿五分組	五十分組	≤
.40						
.45						
.50	5-	5	g			5
.55						5
.60				5		5
.65			0			5
.70					42	5
.75	1-9-	-10				15
.80	2-14-	16	29			31
.85	1-2-	3		37		34
.90	1.3-4-	8				42
.95			10			42
1.00	1.1.	2				44
1.05	2.	2				46
1.10	14-1.4-	19	38	58		65
1.15	1-1-3-12	17				82
1.20	1-17.	18			117	100
1.25	2-1-13-3-2-4-3	28	56			128
1.30	7-1-2-	10				138

第 二 表(續)

每日工資($)	計數(工人數)	次數組				
		五分組	十五分組	廿五分組	五十分組	≤
1.35	8-1-8-2-	19		59		157
1.40	1-1-	2	21			159
1.45						159
1.50	2-3-1-1-4-	11				170
1.55			14			170
1.60	2-1-	3		106		173
1.65	1-	1				174
1.70	2-89-	91	159		180	265
1.75	1-3-2-60-1-	67				332
1.80						332
1.85	1-1-	2	7	74		334
1.90	1-4-	5				339
1.95						339
2.00	1-1-	2	2			341
2.05						341
2.10	2-1-	3		9		344
2.15			7			344
2.20	4-	4			10	348
2.25	1-	1				349
2.30			1			349
2.35				1		349
2.40						349
2.45			2			349
2.50	1-1-	2				351

第二表（續）

每日工資($)	計數(工人數)	次數組				
		五分組	十五分組	廿五分組	五十分組	≦
2.55						351
2.60			0	2		351
2.65						351
2.70					6	351
2.75	1-1-1-1-	4	4			355
2.80						355
2.85				4		355
2.90						355
2.95						355
3.00	3-	3				358
3.05			3			358
3.10				3		358
3.15						358
3.20			0		3	358
3.25						358
3.30						358
3.35			0	0		358
3.40						358
3.45						358
3.50	1-	1	1			359
3.55						359
3.60				1		359
3.65			0			359

第二表（續）

每日工資($)	計數(工人數)	次數組				
		五分組	十五分組	廿五分組	五十分組	≤
3.70					1	359
3.75						359
3.80			0			359
3.85				0		359
3.90						359
3.95			1			359
4.00	1-	1				360
4.05						360
4.10			0	1		360
4.15						360
4.20					2	360
4.25	1-	1	1			361
				1		
總數		361	361	361	361	

吾人如觀察五分組之次數，能發現大概近似之理論次數曲線（即鐘形曲線）。吾人再進一步，更試較大組，看看能否得到一特異之結果。以十五分，二十五分，五十分爲組距來分組，如第二表各該行所示。此諸組係將五分次數相加而得，其上下限皆用橫條線劃分之。以尺度不同，此諸組顯有

出入；但此處所選之安排方法，使有一定規則，各組回到零點，係最自然者。吾人試比較各組，知二十五分組與五十分組所給之滑匀（曲線）結果，最合吾人之理想。以較大組距來分類殊無定限，故吾人之次數分類不能再行擴大也。

溯源表或特別目的表　第三表係以五十分爲組距之次數表。在此表中，諸組以上下限表示之，如 $.50 到 $.95 爲一組是。

第三表　康奈梯卡特某織呢工廠之工資表

每日工資($)	工人數目與依每日工資爲標準之百分數(七月)					
	1860		1880		1891	
	數目	百分數	數目	百分數	數目	百分數
0-.45	2	1.8	2	0.9	0	0
.50-.95	18	16.7	58	27.2	42	11.6
1.00-1.45	54	50.0	126	59.2	117	32.4
1.50-1.95	22	20.4	17	8.0	180	49.8
2.00-2.45	3	2.8	1	0.5	10	2.8
2.50-2.95	6	5.6	3	1.4	6	1.7
3.00-3.45	1	0.9	6	2.8	3	0.8
3.50-3.95	2	1.8	0	0	1	0.3
4.00-4.45	0	0	0	0	2	0.6
總數	108	100	213	100	361	100

各組如是排列，則組中值爲整數；各組之值即可以各該組之組中值代表之。於是，二十五分組次數表可以四分之一

圖爲組距而製表；惟通常方法，則祇書其極限，而如第三表所示。

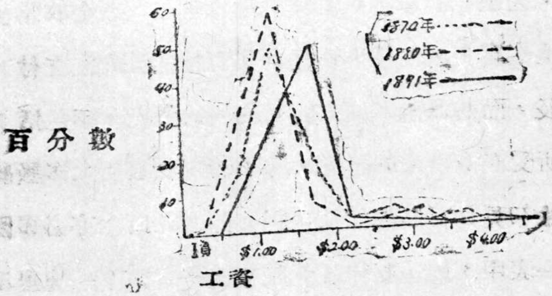
第一表係將吾人研究之材料，全盤的詳細寫出，形式亦頗有序；以第三表與第一表比較，前者可稱爲溯源表(derived table)或特別目的表。其目的僅在呈現工資調查表之某種特徵，故無需如第一表之詳緻。其性質爲歸納的，將原來材料縮製爲簡短的形式；事實上能縮簡至何種程度，即縮簡至何種程度也。

繪製此表，需要精慮與技巧。在標題處應用括弧制，最爲明顯——方括弧愈大，其所指示者則愈小。何種再分類之項目作標題，何種再分類之項目記於左方之底頁，通常皆依圖紙之地位大小而定。至於詳細之安排，則須視表之性質如何耳。如在人口清查表中，現在時期 (Current date) 記於左方之第一行中，此蓋由於其性質之重要；然而，如是辦法，適與通常記年之方法相反。在此類表中，總數亦記於頂上之顯明處，適在項目下。在一精微之表中，百分數諸行置於一處，或在一分表中，以期易於比較。標題下之附屬項目，應依合理次序而排列之；或依其大小，如在次數組中是；或依時期之先後，如在連續的工資分配表中是；或依地理上之

次序，如在各州之人口淸查表中是；或依發生之先後，或僅依字母之次序。

百分數各行數值之計算方法，係用總數除每一組次數。如用計算尺或透線圖 (String chart) 計算，將得十分準確之數值。以去小數點之不準確，故各百分數相加結果，不一定恰等一百。如欲使其恰等一百，可調整其小數點之增減。譬如 7.55 可寫做 7.6 亦可寫做 7.5 而看何者能使總數得一百；7.56 如無更好寫法，亦可寫作 7.5。小數位數愈多，所得結果愈準確。不過，就一般通例言之，特別目的表，無需過度之準確。在此類表中，小數點位數要少，或逕取銷之，並避免分數，而大數目尤要整數。

次數多邊圖　　康奈梯卡特某織呢工廠之工資



第二圖：　次數多邊圖

第三表百分數各行數值可繪製一次數多邊形，如第二圖

。此處所用非絕對數，而爲百分數，蓋如是，可使三多邊圖同立於一條線上，以便比較。繪製此圖時，代表百分數之各點置於各組中點上。後將諸點聯接之，諸不同之線卽代表各年工資之分配情形。吾人由此圖可看出最大，最小與平均工資係出現於 1891 年。每一年之材料亦可繪製成『矩形直方圖』(rectangular histogram)，如次章所述者（第三圖，直線）。次數多邊形與矩形直方圖皆爲近似之次數曲線。

製表之困難　吾人於製表問題結束前，猶應提出幾點建議，以供參考。在本章『製表』中，『工資』一詞之疑義已被愛爾特瑞報告所解決。但吾人如實際工作，關於工資與薪金之區別，或工資與佣金及其他直接，間接收入之區別，必多疑惑，而感處置爲難。由經濟理論言之，薪金故常被認爲工資。但事實上，對較負責任者與有技能工人之支付，訂約期限較長，而將其劃入薪金範疇內。此類支付不包括工資內，以其所受直接供求的影響，殊不若工資也。大多數統計單位，無論初見如何精確簡明，但實際應用時，亦必多困難。譬如在一表中，應包括何種資料乎？一本書？一塊農田？一事件？或一噸哩（Ton-mile）乎？吾人所選擇之任何單位，皆須予以謹慎之判斷與考察。

其次，另一難題亦會發生。以一定之單位搜集資料，並在一相當時期內比較之，或從各種不同的暫時環境內比較之。然而，『單位』之定義，因時而異，亦因地而異；估計次數之標準或有變遷，而以境況變化，比較或亦有所未能。在吾人對於康奈梯卡持工廠之研究中，吾人顯已假定：在研究期間，分類之根據在本質上無變化。惟吾人對於工資水準變化之解釋，亦可改正，所根據之事實爲：工作之程序已變，工作日已縮短，童工立法影響一般職員，女工的比例數已由28%減到 19%，後又增到 32%，或者，生活費已低降。故在比較研究中，吾人對於環境與所用之單位，應十分注意也。

最愚笨之統計家亦會發現許多製表工作之簡便法。最常用之方法，卽將原始資料記在 3×5 或 4×6 之卡片上。例如，吾人欲將一大學之學生分類，或依其入學成績，或依其班次，或依其所參加之團體，或依其所讀之學位。每個學生皆予以一帶有號數之卡片，上塡所需要之資料。然後，將卡片分類(依所需要之資料而分類)，於是，小計(sub_total)可以決定，或資料可以列表。假如，此類工作，範圍浩繁，則製表機(a tabulating Machine)尙矣。此類製表機能自動地

將『特別卡片』計數和分類。此處所謂『特別卡片』係指用有栓的壓穿器所記載需要資料於其上的卡片。大規模商店用此機器者，日漸增多；至如人口調查大規模之製表工作，固大部使用機器也。

研究工作 統計學著作者對於製表問題，討論甚多。下面所介紹之德氏論文（Day's article）殊有價值，學者可參看之。此論文與其他同類題目之有價值論文，皆被重印於塞克里斯梯讀本中（Secristes "Readings"）。該書第四章又特別提到工資製表問題。盧哥（Rugg）教科書第七章對於次數曲綫，有一精審之敍述。關於機器製表，紐約製表機器公司(the Tabulating Machine Company, of New York)之宣傳品中描敍甚詳，可資參考也。

參考書

Bailey and Cummings ; Statistics, Chapters I-V.

Bowley, Arthur L, : Elements of Statistics, ChaP IV.

Day, E. E. : "Standardization of the Construction of Statistical tables",Quarterly Publications of the American Statistical Association, March, 1920, P.P.59-66.

Koren, John ; A History of Statistics.

Rugg, H. O., : Statistical methods applied to Education, Chapter VII.

Secrist, Horace ; Readings and Problems in Statistical Methods, Chapter I.V.

Secrist, Horace ; An Introduction to Statistical Methods, Chapter I-V.

Yule G. U. ; An Introduction to the theory of Statistics, Chapter VI.

練習題

（1－7題所引資料皆係國內罕見之西文著作，故未譯出；因即譯出對學者亦無補也）

第8題：從特別選擇的一組學生中（100多），計算他們所讀學位的平均數，並將這些學位分類，製表，然後繪一次數多邊形(a Frequency Polygon)。

第九題：擲兩枚銅元，共擲二十五次，記載每次投擲所得陽面的次數，將此結果分類，製表，並劃一次數多邊形。擲四枚銅元，共擲五十次，作同樣記載與工作。此例所解釋者爲何種原理。

第二章　離中趨勢的種類和測定

算術平均數　在一已知行列之次數分配呈現一適宜形式後，其第二步工作，卽求一簡單數字，將此資料歸納之，以便比較與敍述。吾人將敍述之兩種現象，卽爲『模範工資』（亦稱平均平資）與『各數值與此模範工資距離之程度』——亦卽離中之程度。就工資一例而言，測量離中趨勢之根據，最普通者卽爲算術平均數。在第一章工資列中，求其算術平均數殊爲方便，卽以各該組次數乘各組工資（以五分爲組距之各組）。各乘積之總合，再以工人總數除之。於是，卽可得出算術平均數。彼係五分組距各組值之加權平均數，蓋以諸組值皆各具次數，而顯示其各自之重要性。吾人於是可知：在統計資料中，有時必須求加權平均數；此蓋因各組之權數，卽表示其各異之重要性也。但在此例中，加權量僅爲原來工資之總合。加權平均數之公式爲：

$$\frac{\Sigma FV}{N}$$

卽各次數乘各該組值之和，再以總項數除之。下述之第四表，係根據第二表而得。吾人藉可瞭解求 1891 年平均工資之

程序

第四表　工資與其平均數

（一八九一年七月，康奈梯卡特某織呢工廠）

簡單工資 (1)	工人數 (2)	總額（即(1)×(2)） (3)
$ .50	5	$ 2.50
.75	10	7.50
.80	16	12.80
.85	3	2.55
.90	8	7.20
1.00	2	2.00
1.05	2	2.10
1.10	19	20.90
1.15	17	19.55
1.20	18	21.60
1.25	28	35.00
1.30	10	13.00
1.35	19	25.65
1.40	2	2.80
1.50	11	16.50
1.60	3	4.80
1.65	1	1.65
1.70	91	154.70
1.75	67	117.25
1.85	2	3.70
1.90	5	9.50
2.00	2	4.00
2.10	3	6.30

第四表　工資與其平均數　（續）

（一八九一年七月，康余梯卡特某織呢工廠）

簡單工資	工人數	總數（卽(1)乘(2)）
2.20	4	8.80
2.25	1	2.25
2.50	2	5.00
2.75	4	11.00
3.00	3	9.00
3.50	1	3.50
4.00	1	4.00
4,25	1	4.25
總數	361	$541.35
平均數		1.49958
		$1.50

衆數　除算術平均數(the Arithmetic mean)外，統計學家尤用其他平均數，以歸納行列而測定離中趨勢。衆數(The Mode)卽其一也。當次數分配狀況接近理論的次數曲綫時，衆數始能應用。彼係在最多次數的那一個變量的數值。在常態曲綫上彼與算術平均數合而爲一。在次數分配圖上，吾人極易找出衆數；此數值卽在底橫線上直對最高曲綫之一點。（可看第二十八頁第三圖）

有的次數曲綫，雖接近理論的次數曲綫；但此曲綫之一端較另一端爲長。遇此情形，則衆數更爲有用。上述之曲綫

被稱爲偏態曲綫。前章所研究之工資資料，其曲線稍偏右方，故有時可出現第二個小衆數。但在原來之五分組距之次數中，不能給吾人一滑勻曲綫，因而亦不能得一準確之衆數也。不過，如曲綫偏態程度甚大，寧捨算術平均數而用衆數。（註二）譬如在工資行列中，包含少數之巨額薪金在內。如算術平均數，彼落於薪金與工資之間，其落點之次數則很少。反之，衆數所在之地位即給付某額工資或薪金之最多人數的地位也。衆數不受曲線極端偏態之影響；換言之，彼即不受少數項目之巨額薪金影響也。

衆數之決定 在不規則之次數分配中，吾人可擴大各組,以求近似之衆數,今以 1391 年工資資料爲例。此例所取各組之組距爲二十五分；可見之於第五表第三行。第一行，與第二行之資料爲第三行之根據；此皆見於第二表。此數列之後部已被取消,因其不能影響衆數之地位也。第四行與以後各行組距皆爲二十五分,惟各組之起止數值不同。在每一移組中

（註二）　甚爲偏右之次數曲線，如將其移至半對數紙上，有時即變爲常態的（鐘形曲線）。所謂半對數紙者，即底線爲對數尺度也。當此情形，此次數分配，根據幾何平均數則爲常態的，而非根據算術平均數也。

，衆數卽落於次數最多之一組；換言之，卽落於以下各組中：

$ 1.50——$ 1.70
1.55—— 1.75
1.60—— 1.80
1.65—— 1.85
1.70—— 1.90

在此五組中，$1.70共見二次，其他皆見一次；故吾人可視爲$1.70爲衆數。假如以五分爲組距，吾人可見：衆數亦爲$1.70；用五十分爲組距，亦得同樣之結果。就一般狀況言之，此法僅能適用於最大之組，而此類組距又可適用於次數分類中。如組距最小，則將得一相異結果矣。

第五表 衆數

康奈梯卡特織呢工廠 1891 年七月之工資

V.	F.	以二十五分爲組距之各組					總計
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$.4	0		5				5
.45	0			5			5
.50	5				5		5
.55	0					5	5
.60	0	5					5
.65	0		10				10
.70	0			26			26
.75	10				29		29
.80	16					37	37

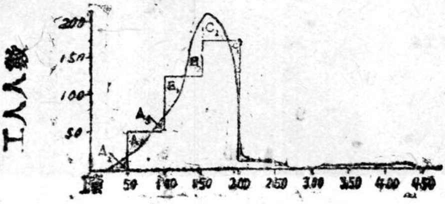
（續）第五表

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
.85	3	37					37
.90	8		29				29
.95	0			15			15
1.00	2				31		31
1.05	2					40	40
1.10	19	58					58
1.15	17		84				84
1.20	18			92			92
1.25	28				92		92
1.30	10					77	77
1.35	19	59					59
1.40	2		42				42
1.45	0			32			32
1.50	11				16		16
1.55	0					15	15
1.60	3	106M					106
1.65	1		162M				162
1.70	91			162M			162M
1.75	67				161M		161
1.80	0					165M	165
1.85	2	74					74
1.90	5		9				9
1.95	0			9			9
2.00	2				10		10
2.05	0					5	5

（續）第 五 表

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
2.10	3	9					9
2.15	0		8				8
2.20	4			8			8
2.25	1				5		5
2.30	0					5	5
2.35	0						1
2.40	0						
2.45	0						
etc.							

將此方法應用於上述工資，頗有疑義。在衆數 $1.70左右，仍有較多之次數。後者可被視爲第二個衆數，惟統計資料所含數量衆多，則衆數將只有一個也。吾人於是可解釋：一方法之使用，或應用於不規則之次數上，或應用於組數甚少而大之資料中。在此，吾人須知：資料愈有限，所得之結果，愈不可靠也。



第三圖： 一八九一年，康奈梯卡特織呢工廠工資（以五十分爲組距）的矩形直方圖，（直綫）和修勻次數曲線（虛線）。

用此方法，可決定一近似值之衆數；除此之外，用修勻次數曲綫方法，亦可找出衆數。此法可用第三圖解釋。次數起初用矩形直方圖 (rectangular histogram) 來表示。畫此直方形時，在理論上，縱綫應畫在兩相鄰組中間的那一點上；譬如，此線平分第一組和第二組，而落在 .475。從圖中，吾人很顯然地能看出：衆數係在 \$1.50——\$1.95 這一組中；惟其究在此組何處，尚須吾人精確決定。吾人欲達此目的，可將組距分爲兩部分，使其與相鄰之次數成反比例。於是其組限可視爲 \$1.475 與 \$1.975，而如圖所示。此種除法可用幾何方法計算，亦可如下計算：

$$\$\,1.475+\frac{10}{117+10}\times\$\,.50=\$\,1.51$$

將此寫成公式，如下：

$$M=L_1+\frac{F_a}{F_m+F_a}\times C$$

此處

M＝衆數

L_1＝衆數組之下限

F_m 和 F_n＝鄰近衆數組之次數（組數或二，或三，或四，）

C＝組距

將次數修勻 在衆數已決定後，此直方形卽可被修勻而成一次數曲線。繪製此曲線之目的在使其爲近似理想之鐘形曲線。但每一次數所佔之面積，仍保持其原來之大小，而如原來之矩形圖內所示者。故在繪製圖形時，使$A_1=A_2+A_3$，$B_1=B_2$與$C_1=C_2$。此曲線在衆數處達於最高頂，但此高度，就其需要面積而言，僅爲一種估計。經過如是繪製程序後，此曲線卽呈現一種經濟値分配之估計，而此經濟値，亦卽吾人所研究之工資也。然而，資料之不規則性甚大，故衆數距離模範値（卽算術平均數）亦甚遠也。

中位數 表示一已知行列之另一常用方式卽爲中位數爲一行列中居中項目之數値。求項數所在之公式爲$\frac{n+1}{2}$至中位數之値可用次數表累積次數行求得之。譬如在一八九一年之工資材料中，中位數所在項數爲181，而其値用累積次數行求之，卽得 $1.70，換言之，卽第181項，落於 $1.70 組內也。有時，中位數所在項數有小數，而落於兩次數中間，在此情形下，中位數卽不能準確求得也。試設中位數所

在項數爲 174.5 ，在此情形下，中位數即將落於 $1.65 至 $1.70 之範圍內（參看第五表）。

三種平均數之比較　就理論方面言之，在具有組距甚小之次數曲線內，中位數之值由一垂直線之底表示，此線則將曲線面積平分。反之，算術平均數雖亦可用垂直線表示，而其位置所在，將平衡兩邊之分量，而如一天秤中間之秤桿然。當偏度有規則性時（即偏態不甚時），此三種平均數位置所在之次序爲：衆數→中位數→算術平均數，其彼此相距，大致構成2:1之比率。在常態曲線中，此三者則合而爲一（註三）。

利用算術平均數，中位數和衆數爲平均數可以下表解釋之；此表爲美國教育局所發表而重印於一九二一年一月號之勞動評論月刊。在此表中，最多次數之薪金一詞，即衆數之謂也。

一九一九年——一九二〇年美國大學與學院（非全體，乃選樣）所支付之薪金表

公共機關

職別	人數	最少薪金	最多薪金	平均薪金	中位數薪金	最多次數之薪金
校長	77	$2,500	$12,500	$6,647	$6,000	$6,000
教務長	367	1,200	10,000	3,819	3,500	3,000

教授	2,460	300	10,000	3,126	3,000	3,000
副教授	822	300	4,000	2,514	2,500	3,000
助教授	1,705	500	4,000	2,053	2,000	1,800
導師	2,138	300	3,100	1,552	1,500	1,500
助教	855	75	2,500	801	750	1,200

四分位差 吾人現在所討論之平均數係用以測量次數分佈（dispersion）之根據；就此三種平均數觀之，最常用者仍爲算術平均數。最簡單之分佈測量法即爲與中位數有關之方法，而被稱爲四分位差。(The Quartile Deviation, 亦即其他書中所謂之 Semi-Interquartile Range——譯者）。其結果先由計算一行列中之第一四分位數（The First quartile）與第三四分位數（The third quartile）而得。所謂分位數亦包括中位數，蓋以其分一行列爲四部分也。求第一四分位數所在項數，可用 $\frac{n+1}{4}$ 之公式，求第三四分位數所在項數可

（註三） 除此三種平均數外，尤有兩種平均數，一即爲幾何平均數。其算法係將各數之對數平均，而非各數本身之平均。它是各數相乘積之n次方根。(即n個數值相乘積，再開n次方）在求物價之平均季節變動時，有些統計學家頗擁護此法，吾人姑舍『加權』而不談，只就物價之平均言之，則幾何平均數最佳，以其所量者爲比例而非絕對值也。另外一種平均數，即爲倒數平均數，用處不廣。譬如a, b, 二數之倒數平均數之公式即爲 $\frac{2ab}{a+b}$。在數學上，如已知兩相等距離之速率，則用上述方法求平均航行速率。就一般講來，它可被視爲：一數列各數倒數之算術平均數的倒數。

用 $\frac{3(n+1)}{4}$ 公式。此二項數之數值藉次數表而決定；其方法恰如中位數之決定。第二四分位數當然與中位數合而爲一。四分位數範圍或距離即爲第三四分位數減去第一四分位數之數值，而四分位差，則爲此兩分位數距離之半。吾人觀第一圖，即知用此方法所求之四分位差即爲中位數與其相鄰分位數之平均距離（從底綫量起。）在一八九一年之工資資料中，第一四分位所在項數爲 90.5,項，其值爲 $1.20；第三四分位數在 271.5 項，其值爲 $1.75 故四分位數距離爲 $.55，而四分位數則爲 $.28 其意義即爲：有一半工人所得工資在中位數 ± .28 之範圍內；易言之，亦即在 $1.20與 $1.75 範圍內。（註四）

爲比較目的，四分位差應變成百分數；其方法即用一行列內之代表值或模範值除之。因四分位差係就中位數而言，故用中位數作此行列內之模範值最爲合理。但習慣上，則以二個四分位數（第一和第三四分位數）之中間點爲標準，即二者相加而以二除之所得的平均數。在一完全規則之曲綫中，此值當然與中位數合而爲一。選擇此中點爲標準之理由，蓋以此爲測量四分位差之起點也。其公式爲 $\frac{Q_3+Q_1}{2}$（即第

〔註四〕 四分位差亦被稱爲一次數分配之機誤(The Probable error of a frequency distribution.)

三四分位數加上第一四分位數，而以2除之。）計算四分位差之公式爲 $\frac{Q_3-Q_1}{2}$。用前者除後者，卽得 $\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$，從此公式中所求得之數值卽爲四分位差係數(The Coefficient of quartile deviation)而此公式亦稱四分位差係數的計算式。

插補法 在四分位差問題結束前，吾人尤應敍及在各組距間決定各分位點之插補方法。(A Method of locating them by interpolation)。今姑應用 1891 年之工資資料以解釋此法。在事實上，以五分爲組距，卽能得出精確之分位點數值。如一行列，其組距甚大而所含組數爲少，最宜應用此法。今吾人欲知 1891 年工資資料之分位點之最精確之數值，可用如下方法以尋求之。

吾人先假定此數值可插補於原來次數分組各項中間之任何一點，故吾人應視此數列，係連續的，而非斷續的，在工資給付情形下，吾人對於工資應依其理論的經濟價值而處理。實際次數(卽工人數)應被視爲『指示比例數』(Considered as indicating Proportional Numbers)，此數如複比一樣，可無限增加。原來非連續之五分組，今則視爲有一連續之組距；譬如，五十分之工資係表示在 $.475 和 $.525 限度內之一種經濟值。在此限度內之次數，吾人姑假定其距離相等。

當插補時，吾人決定第一四分位數，用 $\frac{n}{4}$ 公式，而不用以前之 $\frac{n+1}{4}$ 公式。第二及第三四分位數則各該公式乘以 2 與 3。（卽：決定第二四分位數——中位數之公式爲 $\frac{n}{4} \times 2$ 第三四分位數爲 $\frac{n}{4} \times 3$,——譯者）。在此情形中，所以去掉公式中之1者$\left(卽\frac{n}{4}而非\frac{n+1}{4}\right)$，其理由係在吾人已假定：此數列爲連續數列，其單位殊小，無足輕重也。其項目假定有十萬組，百萬組；換言之，此數列可以無限地再分也。決定分位數所在項後，吾人再看其落於何組。其次，吾人再找此分位數落於組內何點；卽組內之分數，於是，其相當值卽可決定矣。此種計算程序，同於在對數表內或其他表內之插補法。

在一八九一年之工資例中，第一四分位數之所在項數，已被決定爲第 $90^{1}/_{4}$ 項。此項落於在理論上有 $1.175 下限及 $1.225 上限之一組內。其前一組之最後一項爲第八十二項；故此分位數應在其組內之十八項中，補塡 $8\,^{1}/_{4}$ 項於上組。此種補塡爲 $8\,^{1}/_{4} \div 18$, 卽 .46 組距。此 .46 組距則爲該組距 $.05 之 $.023；將此數値加到此組之下限，卽得第一四分位數爲 $1.198。此數値僅念到「分」（卽 $1.19），

數與前法所求者相同也。

此種計算程序可歸納如下：

$$Q=L_1+\frac{I}{F_1}.C$$

此處：

Q＝分位數之數值

L_1＝分位數所在組之下限

I ＝分位數所在項減去前一組之最末項

F ＝分位數所在組之次數

C ＝分位數所在組之組距

四分位數離中趨勢 (Quartile Dispersion) 吾人如找出四分位數與所支付之最高及最低工資，雖不再計算準確之離中程度，然於一次數分配，亦能得一最清晰之概念。

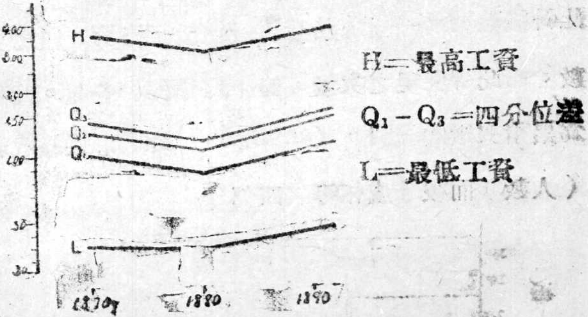
第六表 康奈梯卡特織呢廠每日工資之範圍

——連續與非連續行列——

工資行列	1870		1880		1891	
	非連續	連續	非連續	連續	非連續	連續
最 低	$ .40	$ .38	$ .40	$ .38	$ .50	$ .48
第一四分位數	1.10	1.09	.95	.93	1.20	1.20
第二四分位數	1.30	1.30	1.20	1.19	1.70	1.68
第三四分位數	1.50	1.51	1.25	1.24	1.75	1.73
最 高	3.75	3.78	3.25	3.23	4.25	4.28
四 分 位 差	.20	.21	.15	.16	.28	.27
四分位差係數	51%	16%	14%	14%	19%	18%

第六表將一八七〇年。一八八〇年與一八九一年工資資料中之最低工資，最高工資，四分位數，四分位差與四位差係數皆寫出。此表所包含之數值爲用插補方法所求之數值；惟此種計算方法，除此處舉例爲例外外，頗無足取也。

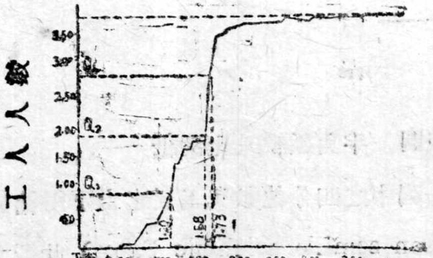
第四圖　康奈梯古特某織呢工廠，1870—1891年
工資之範圍與趨勢



第四圖　半對數紙或比例紙

第四圖係將非連續數列中之四分位數與工資之上下限繪於一種半對數紙上。(Upon semi-logarithmic Paper) 此紙之縱方面尺度 (The Vertical scale)，與計算尺之尺度相同；各時期之比例變化可用聯接各數值之線的傾斜度數而比較之。欲期完全，此種圖形應至少表示每年之資料。如其能表示十分位數(decile) 尤佳。

累積次數曲線　呈現一行列之最簡便方法，同時，用圖形來決定分位數，即如第五圖爲示者。吾人繪製此種圖形，先假定此乃數值之連續數列，並假定用插補法以求四分位數。次數之點繪(are plotted)係根據原來五分組距資料之總和行 (the Summation Column，即累積次數）。爲便於解釋，虛綫係代表非連續數列者。穿過每一組距畫一斜綫，此斜綫始於前一組之累積次數總數而終於本組之累積次數總數。如此所表現之次數，即平均分配於各組。此種圖形即稱爲累積次數曲綫圖。(an Ogive) 此圖形縱綫代表整個行列（人數）而被分成相等之四部分；



一八九一年康奈梯卡特某織呢廠之工資

第五圖　累積次數曲綫圖

橫綫係從四分位數分割點畫起，直至其與累積次數曲綫相交爲止。從交點向底綫畫垂直綫。在地平綫上的每一垂直線之底，即表示四分位數之數值。求十分位數可將地平線分成十

份，其繪製程序同前。此種繪圖程序（在入片的或斷面紙上）通常爲求四分位數或十分位數之最方便之方法。（註五）

平均差與標準差　吾人現在將研究較通用之離中趨勢的數學尺度或測量——平均差與平均方差。前者在應用於經濟資料方面，頗爲著名；後者雖爲數學家所偏嗜，惟其主要統計上用處係在與測量相關之資料上。此問題，吾人於後將討論之。

平均差與標準差所包含之原理，可用一簡單例子以解釋之。假設，今有四工人，其每日工資爲 $2.00，$6.00, $7.00 與 $9.00。此四人之平均工資爲 $6.00。第一人所賺之工資 $2.00，與此平均工資相差 $4.00；第二人所賺工資爲平均工資；第三人與平均工資相差 $1.00，第四人相差 $2.00。此四人所賺工資與平均平資共差 $8.00，每人之平均相差則爲 $2.00；而此 $2.00，卽所謂平均差（A.D.）也。此平

〔註五〕最近統計學界又介紹一種更爲複雜之累積次數曲線，以試驗一次數分配之規則性。此種曲線係畫於所謂『機誤紙』上，(Probability Paper) 並根據總合的（或累積的）百分數次數而繪製。機誤紙縱行尺度係漸進的，故子常態曲線而變一直線，橫穿此紙。此分配與常態分配之差，可以此直線與此分配相比較。此紙紐約 CodeX Book Company與其他統計材料出版家皆有出售。

均差可視爲測量工資分佈之尺度。（註六）標準差（5）之計算，係將各離中差自乘方而相加；次將此乘方總和平均，然後求此結果之平方根。平均差與標準差用平均工資除之，則得各該差之係數。其計算程序可如下述：

平均差		標準差		
V	D	V	D	σ^2
$2	$4	$2	$-4	16
6	0	6	0	0
7	1	7	1	1
9	3	9	8	9
4) 24	4) 8	4) 24	0	4) 26
A=6	A.D.=2	A=6		$\sigma^2=6.5$
				$\sigma^2=2.55$

$$\text{Coef}=\frac{2}{6}=33\%$$

$$\text{COef.}=\frac{2.55}{6}=43\%$$

關於平均差之實際應用可見 Dewing 所著『公司理財』三卷（"Corporation Finance, Vol. III.），在該著作中，作者曾言：公司生產直接消費之不昂貴必需品之獲利，最有規則性；但其生產昂貴之間接消費物之獲利，則殊少規則性。彼以金鋼石競賽公司 (the Diamond Match Company) 與美國火車頭公司(The American Locomotive Company) 爲此

兩種形態公司之代表，計算此兩公司純所得之平均差。前者平均差係數爲 7.1%，而後者爲 50%。其離中趨勢亦可用標準差來測量；惟在此不分組離中差之數目甚少之情形下，決不能應用四分位差也。

四分位差，平均差與標準差決不能得到相同之結果，而如第一圖(第8頁)之測量"次數曲線之遞進之較大部分者"。在有規則性之次數分配中，無論用何種測量離中趨勢之尺度，其可比較之點，固皆相同。在不規則之次數分配中，包含少數之極端項目（或極大或極小），如用標準差以測量其離中趨勢，必得一特別偏大之結果；此蓋以各離中差自乘方之程序更使各極端數值增加其極端性也。

簡便法 求平均差或離中差之工作[illegible]麻煩；如平均數爲分數時，此麻煩之感更甚。[illegible]一平均數無需過分準確，因在計算中，由於[illegible]生之錯誤，殊爲微小故也。求標準差，吾人可用簡法。[illegible]此計算程序中，吾人先假設一平均數，然後再求修正值。求修正值的方法可用上述四項工資爲例。吾人姑假定其平均工資爲 $7，而此假定平均數係用爲計算離中差之根據者。在此處，此假定並不見佳；彼亦可假定爲 $6.75。各項與此假定平均數[illegible]

相比較，而得一差數；將諸差數相加，得一代數和 −4，此 −4 之發生卽由於各差數之誤也。各差的代數和除以總項數，卽得修正値；所謂修正値者，其意蓋謂：將此數値加於假定平準數之上，而使其變爲眞正之平均數也。修正値找出後，自乘方；然後再由平均的平方差數(the average squared deviation)將其減去；再開方，卽得標準差。經過此種程序後，由於假定平均數而發生之錯誤，卽可消滅矣。其計算程序今示例如下：

$$
\begin{array}{rrrr}
V & D & D^2 & \\
2 & -5 & 25 & \\
6 & -1 & 1 & \\
A_x = 7 & 0 & 0 & \\
9 & 2 & 4 & \text{Coef.} = \dfrac{2.55}{6} \\
\hline
 & 4)\,\underline{-4} & 4)\,\underline{30} & = 43\% \\
 & K = -1 & 7.5 & \\
 & A_x = \underline{7} & K^2 = \underline{1} & \\
 & A = 6 & \sigma^2 = 6.50 & \\
 & & \sigma^2 = 2.55 &
\end{array}
$$

從次數表計算離中差　以前所討論之平均差與標準差問題，皆甚簡單，蓋以行列未被歸納爲次數組也。平均差與標準差如從次數表中計算，手續則較爲複雜，惟其原理則與前述固無二致也。吾人首應注意之點卽：各組中値須各乘以該組之次數，務使所有項目，皆被計及。其計算方法可

見第七表；此表仍以一八九一年之工資爲資料。（註四）

第七表　康奈狄卡特某織呢工廠一八九一年七月工資平均差及標準差

A.　　平均差

V	F.	FV	D	FD
$ .75	42	$31.50	$ .78	$32.76
1.25	117	146.25	.28	32.76
1.75	180	315.00	.22	39.60
2.25	10	22.50	.72	7.20
2.75	6	16.50	1.22	7.32
3.25	3	9.75	1.72	5.16
3.75	1	3.75	2.22	2.22
4.25	2	8.50	2.72	5.44
	361	)553.75		361)132.46
		A=1.53		A.D.=.367

$$\text{Coef}=\frac{.367}{1.53}=24\%$$

B.　　標準差　（假定平均數＝$1.75）

V	F	D	FD	FD²
$ .75	42	$-1.00	$-42.00	$42.00
1.25	117	-.50	-58.50	29.25
1.75	180	0	0	0
2.25	10	.50	5.00	2.50
2.75	6	1.00	6.00	6.00
3.25	3	1.50	4.50	6.75
3.75	1	2.00	2.00	4.00

4.25	2	2.50	5.00	12.50
	361		361)-78.00	361)103.00

$K = -.216$　　$.2853$

$A_x = 1.75$　　$K^2 = .0467$

$A = 1.534$　　$\sigma^2 = .2386$

$\sigma = .49$

$\text{Coef.} = \frac{.49}{1.53}\ 32\%$

此處之符號代表爲：

V　各組值（以組中値來代表）

F　次數

D　離中差

A　眞正平均數

A_x　假定平均數

K　修正値

Coef. 係數，（平均差係數或標準差係數）

A.D. 平均差

σ　標準差，

〔註五〕　還有種複雜的次數分配圖形，叫做羅倫茲曲線（the Lorenz Curve），可用第七表材料來描述它。這個圖形的繪製是根據 F 行和 F V 行，即在計算平均差的表中的 F 和 FV 行。將這兩行化成百分數，並相加而給如下結果：

各組的上限	F（Σ）	FV（Σ）
$ 1.00	21.6%	5.7%
1.50	44.0	32.1
2.00	93.9	89.0

公式 計算平均差和標準差的公式如下：

$$\text{A. D.} = \frac{\Sigma FD}{N}$$

（這裏的離中差統被視爲是正號的）

$$\text{S. D. } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma FD^2}{N} - K^2}$$

此處符號代表爲：

F　次數

D　離中差　（如果有修正值，便是從假定平均數量起的差數）

N　總項數

K　利用假定平均數手續中的修正值，即 $= \frac{\Sigma FD}{N}$

如果假定 O^2 作平均數，第二公式便變成：

$$\text{S. D.} = \sqrt{\frac{\Sigma FV^2}{N} - \left(\frac{\Sigma FV}{N}\right)^2}$$

在某種情形下，特別是用機器來計算時，此修正公式殊

2.50	96.7	93.1
3.00	98.3	96.1
3.50	99.2	97.8
4.00	99.4	98.5
4.50	100.0	100.0

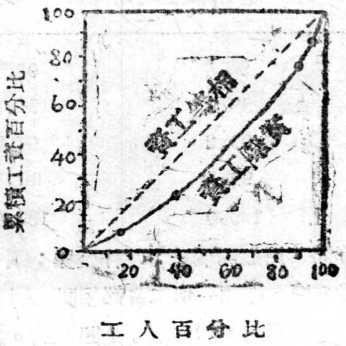
我們繪製圖形時，用這兩個總合行作坐標；頭一行作橫坐標，第二行作縱坐標。假如一切工資都相同，將劃成一個標直的對角線；如工資不同，這個線則是凹形的。以五分爲

爲有用。應用此公式，只須計算FV和FV²兩行卽妥。其運用可用第四表來解釋（見第二十三頁）。假使第一和第三行交叉相乘（the first and third Columns are multiplied across），將所得結果相加，共得$890.50。此卽爲 ΣFV^2。將此數値用N除，並減去平均數之平方，$\left(\frac{\Sigma FV}{N}\right)^2$，得$.213，其平方根爲$.47。此卽爲標準差；此數較用前法所求者爲準確，蓋以所取之組距爲小故也。在時間數列中無次數，用此修正公式，求標準差最爲有用。

結論　在第八表，對於康会梯卡特某織呢工廠的工資與離中趨勢，予以一總結。各種測量尺度，無非只爲解釋之用

組距將給示出：一個準確的代表圖形。比較各國財富的分配和所得的分配，常用這種曲線——羅倫茲曲線。

羅倫茲曲線



。在實際應用上，只用一種測量方法即可或爲四分位差，或爲平均差。吾人如比較其偏態，直接觀察次數多邊形即可。吾人此處之詳細研究，期對工資分佈情形，予以精密之描述耳。就整個觀之，其工資分配狀況在一八七〇年以後，較爲集中；惟以變動不大，尚難比較也。吾人在此應注意者，此曲線之相對偏態，變動甚少。因工資的離中趨勢之實質未變，故吾人可以平均工資作爲該廠各期間工資水準之指數也。

第八表　1870,1880和1891年之七月，康奈梯卡特某工廠之工資分佈情況（或離中趨勢）

測量尺度	絕對的			相對的		
(Measure)	1870年	1880年	1891年	1870年	1880年	1891年
四分位差	$.21	$.16	$.27	16%	14%	18%
平均差（*）	.45	.28	.37	31	22	24
平均差(離數)	.41	.24	.35	30	20	23
標準差（*）	.62	.50	.49	44	40	32
標準差(離數)	.61	.46	.47	44	38	31
偏態（*）	.71	.64	.55	114	128	113

*係從以五十分爲組距之資料而計算者；V＝組中值。

偏斜度的測量（或偏態）　根據前述，吾人已知：平均差用離中差的第一方，(the first power of the deviations) 標準差用離中差的第二方；如吾人依同樣方式而用離中差的第三方，即得偏態的測量尺度。惟如此之數學測量尺度在

講統計中殊少需要，吾人比較次數曲線之形態或觀察衆數與算術平均數或中位數之距離，可大概能決定偏態之相對程度。如確欲求得準確之偏態測量尺度，可用下式：

$$偏態（或坡斜度或偏斜度）=\sqrt[3]{\frac{\Sigma FD^3}{N}}$$

由此所計算偏態，用標準差除之，即得偏態係數。

圖書館工作 於平均數與離中趨勢，在數册著名教科書，如 Bowley 及 Yule 等著作，皆曾詳細討論。吾人下面所介紹之 Zizek 著作，對於平均數之探討，最爲完全。就圖解方面言之，Brinton 之工作貢獻殊大，而美國所出版與人口淸查有關之統計表册，亦頗重要，學者皆不宜忽視。Irving Fisher 與 J. A. Field（Field 之文可於 Secrist 之"Readings"一書中見之）皆曾爲文，詳細討論比例圖（Ratio Chart，或 Semi-logarithmic or arith-logpaper）。關於『機誤紙』(The Probability paper) 之用爲『表示或試驗次數曲線』之方法，Whipple 書中曾有解釋。K g氏著作中第 156 頁曾解釋羅倫茲曲線。

參考書

Bowley, Arthur L; Elements of Statistics Chapters V-VII.

Brinton, W. C. Graphic Methods for Presenting Facts.

Fisher, Irving, : "The Ratio Chart", Qnarterly publications of the American Statistical Association, June, 1917, PP. 577-601

King, W. I.: Elements of Statistical Method, Chapters XII-XIV.

Marshal, Wm. C,: Graphical Methods, Chapters I-III.

Secrist, Horace.: Readings and Problems in Statistical Methods PP. 282-305

Whipple, G. U: Vital Statistics, Chap. XII

Yule, G. U: An Introduction to the theory of Statistics, Chaps VIII and VIII.

Zizek, Franz: Statistical Averages.

練習題

1. 用五分的次數和組，試求 1870 與 1880 年之平均工資

2. 以二十五分爲組距，依第二十六頁所述方法，求 1870 年與 1880 年工資之衆數。

3. 以五十分爲組距，求 1870 年與 1880 年之衆數。

4. 以五十分的次數，藉用一數學公式，決定年 1870 與1880年工資衆數之位置。繪一矩形直方形圖並將其修勻。

5. 試解釋 3,4 兩題所求衆數，其值不相同之故。何種結果較爲切用？試解釋其所以然之故。

6. 以五分爲組距，用插補法求 1870 年與 1880 年工資賞

料中之四分位數所在項和四分位數之值。計算四分位差與其係數。

7. 畫 1870 年與 1880 年工資資料（五分次數）之累積次數曲線，並表示出其四分位數之價值。

8. 將第十五頁第三表之百分數次數總加起來，並繪在機誤紙上。

9. 以五十分爲組距，求 1870 年與 1830 年工資之平均差及其係數。

10. 以五十分爲組距，用簡便法，求 1870 年與 1880 年工資之標準差及其係數。

11. 用第九題之材料，畫 1870 年與 1830 年工資分配之羅倫茲曲線。利用第二十三頁第四表之材料，繪一同樣曲線——羅倫茲曲線。

12. 將標準差之修正式應用於 1870 年與 1880 年五分組之工資資料中。

13. 在某一時期，銀行貼現率如下：

銀行貼現率	日數
2.5	174
3	403
3.5	182

4	165
4.5	36
5	87
5.5	20
6	26
7	2

(a) 以日數當次數，計算平均貼現率

(b) 四分位數落於何組？（貼現率）

(c) 那一組貼現率可視爲衆數？並說明其原因。

（在此題中，無需用插補方法）

14. 求下列次數分配之平均差係數，標準差係數與偏態係數。用插補法，決定四分位數；然後再用累積次數曲線以校正之。

V	F
$1	1
2	3
3	2
4	2
5	1
6	1

15. 下表係表示十個城市從 1914 年十二月到 1920 年十二月一時期間生活費用之增加。將這些百分數歸納爲鄰近五之倍數之次數而求其平均差。（美國勞動統計局資料）

Boston	97.4
Buffalo	101.7
Chicago	93.3
Cleveland	101.0
Detroit	118.6
Los Angels	96.7
New York	101.4
Philadelphia	100.7
San Francesco	85.1
Seattle	94.1

16. 應用代數公式於以下之三時間數列而求其衆數，月份可被視爲組距，百分數被視爲次數。將每一數列繪圖並繪成一修勻曲線：

美國每月收穫穀物之百分數（農業部報告）

月份	麥	穀	棉
五　月	0.5	——	——
六　月	22.0	0.1	——
七　月	42.3	0.1	1.4
八　月	28.4	1.5	11.5
九　月	6.5	15.8	31.6
十　月	0.3	28.3	34.4
十一月	——	43.3	16.0
十二月	——	10.9	4.7
一月——四月	——	——	0.4

第三章　工資與物價指數

指數之性質　一大部分之統計工作係關於編製指數與解釋指數。所謂『指數』云者，係指一數目，爲比較目的而用以測量某種情況者——此數目或爲絕對的，或爲相對的。就集團的使用言之，此名詞係包含一列形成複比之指數。事實上，所有指數皆由於選樣程序而編製。吾人雖不能將任何大部分實際工資與物價，統加記載；但可藉助優良之選樣，以估計工資水準與物價水準之變動。在選樣時，雖不能精確決定所選擇資料之大小，惟根據經驗，亦可大概斷定。稻草能指示風向；同樣，一地生產品之價格亦常反映出整個世界市場之趨勢。然而，其中固無互相聯繫之一致。有些物價受供求之影響而變動甚速；且同起反響。有些物價則變動甚遲，且無規則性。至於工資，據一般觀察，皆認爲：其變動較緩。不過在工業中心，如新英格蘭，其工資市場之反應則較集中。吾人對於以一工廠工資爲全國工資指數一事，雖不無懷疑；但在比較上，如是之工資實際亦有幾分可靠性也。

工資指數　前章所述之平均工資，暫時可視其爲美國

工資水準之指數。依據此類諸指數，一八七〇年每日工資爲$1.38，至一八八〇年則降落至$1.21；惟至一八九一年又升至$1.50，如將此數目字另改成一種樣式，則此變動更易清楚顯出。因爲指數既以比例形態而被使用，故其可用某數乘之或除之，期適其需要。在上述列中，假如各工資皆被一八七〇年之工資，$1.38除之，吾人即可謂：此三種工資皆以一八七〇年爲基期，蓋該年之指數爲100也（註六）用數字表示，其結果爲100%惟在比例中，百分數符號固常略而不書。其指數可讀如下：

年次	工資
1870	100
1880	88
1891	109

實際工資指數　在工資水準變動之研究下，吾人應再考慮一重要之因素；即生活費（Cost of living）是也。生

〔註六〕以絕對數字中編製指數，其基期之選擇理論上以平均數爲最佳。其優點爲：（1）從此數值測量各項，其值最穩定；（2）每一指數在數列中能顯示彼之重要性。將此原則，應用如上述工資資料，則基期之數值，變爲平均工資之九十九分 (99c)，而其指數則變爲 101,89 與 110；每一數字皆表示平均數之百分數。

活費之變動與工人之福利成反比例。故實際工資係由物價除貨幣工資而得；此一名詞蓋表示工資之購買力也。測量工資與物價，無論用絕對數字或相對數字，惟其商數可視爲實際工資之指數，且可以縮減於任何理想之基期。如以指數而表示之工資與物價，有同一基期；於是，所求得之實際工資之指數亦以此基期爲基期也。

各種工資指數 吾人目前工資指數準確性之試驗及更進一步地研究，可藉助於完全工資資料之介紹。此類資料可從下列三來源中搜得：（1）郝烏德教授(Prof. Stanley E. Howard)所編：新英格蘭棉製造業工資之變動；（2）愛爾特瑞報告和（3）美京華盛頓勞工部勞工統計局所出版之諸刊物。第一類資料將麻色諸色州(Massachusetts)棉製造業，從一八六○年到一九一四年之每週工資編製一精審之指數。此類資料有一部分係取自愛爾特瑞報告，而用以前所闡明之製表與測量原理。第二類資料係根據各產業部門之工資，遍及全國各地域而編製一般工資指數，時期至一八九一年爲止。第三類資料係供給美國從一八四○年到一九二○年中間每小時工資之指數。每小時工資之作爲實際所得指數之根據，並不完全使人滿意，蓋以工作時間逐漸減少故也。然而

，此項減少已被超時多付，暇時工作給付與失定期僱用所抵銷。惟事實上，每時工資指數與每週工資指數很接近。如測量工資之循環變動，此兩種指數在實際上，則給與同樣之結果。

第九表之 1870 1880 與 1891 年工資指數係取自前所述之資料來源，與以前所算得之指數。用物價指數（其性質俟後討論）使名義工資(Nominal Wage)變爲實際工資。名義

第九表：1870 1880 1891 年七月之 名義工資指數與實際工資指數

資料來源	原始指數			計算指數		
	1870	1880	1891	1870	1880	1891
康奈梯卡特呢廠						
名義工資(平均數)	1.375	1.207	1.50	100	88	109
物價	1.470	1.09	.82			
實際工資	.935	1.11	1.83	100	118	196
莫色諸色州紗廠						
名義工資(基期1860年)	166	154	172	100	93	104
物價	140	105	79			
實際工資	118	147	217	100	125	184
美國愛爾特瑞報告						
名義工資(基期1860年)	167.1	143.0	168.6	100	86	101
物價（基期1860年）	144.4	104.9	94.4			
實際工資	116	136	179	100	118	154
美國勞動統計局						

名義工資(基期1913年)	67	60	69	100	90	103
物價(基期1913年)	147	109	82			
實際工資	46	55	84	100	121	185

工資與實際工資然後皆變為以 1870 年為基期之指數；經過此番變化後，此類指數卽可迅速而便比較矣。吾人於是又可看出：康奈梯卡特工廠之實際工資指數，雖所根據之資料不博，但與其他指數相較，固無多大顯著之差異也。

郝烏德教授研究結果與美國勞動統計局指數之更詳細陳述，可以第十表顯示之。如前表一樣，此表之實際工資指數亦係用批發物價而求得。莫色諸色州之物價指數僅為美國勞動統計局整個指數之特選指數 (adaption) 。莫色諸色州之實際工資指數，其基期由 1860 年變為 1913 年以便與美國全國各該指數相比較。此兩種指數，皆顯示出：實際工資在 1870 年與 1914 年間約增加二倍；但增加較多者則係 1890 年以前之事。

第十表　1870-1920 之工資與物價指數

年度	麻色諸色州			美國		
	工資(每週)	批發物價	實際工資	工資(每小時)	批發物價	實際工資
1870	166	140	50	67	147	46
1	177	130	58	68	136	50

2	183	135	58	69	141	49
3	178	134	56	69	140	49
4	163	128	54	67	133	50
5	150	120	53	67	125	54
6	145	110	55	64	116	55
7	142	108	55	61	113	54
8	145	98	63	60	102	59
9	144	94	65	59	98	60
1880	154	105	62	60	109	55
1	149	102	62	62	106	58
2	157	103	64	63	108	58
3	158	98	69	64	102	63
4	155	89	74	64	92	70
5	150	82	77	64	86	74
6	153	80	80	64	84	76
7	160	81	83	67	84	80
8	164	84	83	67	87	77
9	169	81	89	68	84	81
1890	173	80	91	69	81	85
1	172	79	92	69	82	84
2	172	75	97	69	76	91
3	180	75	102	69	77	90
4	168	68	104	67	69	97
5	165	66	105	68	70	97
6	175	64	116	69	66	105
7	174	64	116	69	67	103
8	171	66	110	69	69	100
9	164	72	97	70	74	95
1900	180	78	102	73	80	91

第十表（續）

年度	麻色諸色州			美國		
	工資（每週）	批發物價	實際工資	工資（每小時）	批發物價	實際工資
1901	190	77	104	74	79	94
2	191	80	101	77	85	91
3	197	81	103	80	85	94
4	196	80	103	80	86	93
5	200	82	103	82	85	96
6	216	87	105	85	88	97
7	240	92	111	89	94	95
8	228	87	111	89	91	98
9	211	90	99	90	97	93
1910	209	93	95	93	99	94
1	207	92	96	95	95	100
2	223	95	99	97	101	96
3	227	96	100	100	100	100
4	229	95	102	102	100	102
5	(1860基期)	(1860基期)		103	101	
6				111	124	
7				128	176	
8				162	196	
1919				184 (春)	212	
1920				234 (夏)	243	

批發物價與零售物價 **以批發物價測量生活費之**

變動，是否有效，不無問題。然而，吾人不幸，尚不能找到一充足的包含許多年之零售物價指數。因此吾人遂不得不用批發物價以替代矣。在此，有一鉄的事實爲吾人所不易忽視者，即批發物價之變動方向與零售物價同；且幾與其同時；惟其變動較趨極端耳。在一般適中循環變動過程中，批發物價與零售物價，密切平行，彼此固可相替。但當物價特別降低時，以批發物價代替零售物價，無疑問地，將抬高實際工資於事實之上。（即使實際工資之增高，名過其實。）從1890到 1900 年之經濟現象，即此情形，蓋在此世紀中，物價降落至最低點也。當時零售物價之顯著增高，必須予以糾正；其確切程度，雖不能決定，亦無妨也。從1914到1920年中間，物價激增，結果適相反。在此時期中，吾人可得到充足的生活費資料。第十一表之估計係用此類資料替代批發物價而得：並計算出實際工資。（註七）

〔註七〕 此處所研究之工資資料，吾人並無意使其爲實際工資之最後量度。其如此編製之主要目的，蓋意在解釋某種工作方法也，著者根據此類可利用資料之研究，認爲：此類工資資料尚可以之爲估計之根據。然而，其他研究，則意在表示十九世紀最後二十五年來實際工資之下降。美國經濟評論(The American Economic Review)1921 年九月號曾載

第十一表　美國1913—1920年之工資與生活費指數

（根據勞動統計局之資料而估計）

年度	工資	生活費	實際工資
1913	100	100	100
1914	102	100	102
1915	103	100	103
1916	111	110	101
1917	128	134	95
1918	162	154	105
1919	200	180	111
1920	225	211	107

生活費指數　生活費指數之計算，在理論上與事實上皆含有許多困難。第一，所用的單位在質上常互異而難於使之標準化。故在計算上，第一步應製一主要商品之選擇表。此類商品在數目上與其重要性上，必須足以代表普通勞工家庭所常購買之一切必需品。第二步，將代表商品所售賣之此類商品價格，予以表列。如此指數包含區域廣大，吾人必須

有此類有趣之研究。在此研究中，生活費假定由零售食品價格測定，但此測量不無疑問；因在農業恐慌期間，零售食品之價格與批發物價之上昇，同其迅速。此非常之上昇，影響實際工資之低下。此研究又用每時工資指數，意在表示此指數之上昇較勞動統計局所公佈之指數爲緩慢。此處所討論之資料不包含政府僱傭之工資。

從多數之地方選擇資料。於是，吾人可找出：每一商品在一定期間之一般平均價格。在某種情形下，譬如極端項目足致錯誤時，吾人最好用中位數代替算術平均數。因爲表列物價與搜集物價之工作需要專門精審之組織，故僅有少數機關以司其事。其中之一卽爲國家工業會議局(The National Industrial Conference Board.)（註八）另一機關卽爲麻色諸色州立法機關所設立之委員會。惟最著名而最有權威之工作，固爲勞動統計局之工作也。綜合平均物價而成一簡單指數之方法，可以勞動統計局之食料生活費解釋之。

〔註八〕國家工業會議局與製造家全國協會(the National Association of Manufacturers)及其他相似組織聯合。總部在紐約。彼刊行生活費增加指數，成績爲全國冠。此指數每月公佈一次，爲測量目前變動之最好資料來源。著者經過該局允許，將1920年之指數，重印於此。基期爲1914年七月；其數目字則表示增加之百分率。

月次(1920年)	生活費	食	住	衣	燃料與電力	其他
一月	90.2	97	43	170	49	77
二月	93.5	101	45	177	49	78
三月	94.8	100	49	177	49	83
四月	96.6	100	50	188	51	83
五月	101.6	111	51	187	55	83
六月	103.0	115	51	176	61	85

一個食料價格指數　在計算食料生活費指數時，美國勞動統計局曾列出二十二種食物，而如第十二表所示。此表之使用，始於一九一三年一月；至一九二一年一月，此表稍經修正，食物增加到四十三種之多。各種食物之價格係每月從國內所選擇之幾大城市而得。1913年與1920年之六月之平均物價皆見於第十二表。此外，特別研究所得而此處假定適用至1913年之每個勞工家庭消費量，亦載此表中。吾人從此表中，可計算出：食物生活費從戰前水準增加至1920年而達到最高峯。

七月	104.5	119	58	166	66	85
八月	103.2	119	58	155	69	85
九月	99.4	107	59	155	78	80
十月	97.3	103	59	148	83	90
十一月	93.1	93	66	128	100	92
十二月	90.0	93	66	105	100	92

在此諸指數中，只有住一項至1921年十月，又顯增高。其指數爲：在三月至六月期間爲百分之七十一；以後四個月間，則爲百分之六十九。燃料與電力及其他項目，在一月以後開始降落。食物從六月百分之四十五以後四個月中，則現增加之象。惟此變動在總數中，程度甚小。據此指數，戰後繁榮之極峯爲1920年七月。

第十二表　1920年六月之每個家庭食料生活費用表

（並與一九一三年之平均生活費比較之）

食料種類	(1) 消費量		(2) 1913 每位一單價	(3) 1913 費用	(4) 1920 六月每單位一價	(5) 1920 六月費用	(6) 比價	(7) 權數	(8) (6)乘(7)
腰肉排(牛)	32	磅	$.254	$8.128	$.461	$14.752	182%	38	6916%
圓燔肉(牛)	32	磅	.223	7.136	.426	13.632	191	33	6303
烤排骨(牛)	31	磅	.198	6.138	.348	10.788	176	28	4928
烤雛鷄	31	磅	.160	4.960	.278	8.618	174	23	4002
牛肉片	23	磅	.121	2.783	.190	4.370	157	13	2041
豬排骨	36	磅	.210	7.560	.408	14.688	194	35	6790
醃豬肉	17	磅	.270	4.590	.539	9.163	200	21	4200
火腿	22	磅	.269	5.918	.577	12.694	215	27	5805
豬油	34	磅	.158	5.372	.293	9.962	185	25	4625
母雞	23	磅	.213	4.899	.460	10.580	216	23	4968
鷄卵	61	打	.345	21.045	.536	32.696	155	98	15190
牛油	66	磅	.383	25.278	.672	44.352	175	117	20475
乾酪	12	磅	.221	2.652	.418	5.016	189	12	2268
牛乳	337	夸	.089	29.993	.162	54.594	182	139	25298
麵包	531	磅	.056	29.736	.118	62.658	211	138	29113
麵粉	264	磅	.033	8.712	.088	23.232	267	40	10680
研碎玉蜀黍	54	磅	.030	1.620	.069	3.726	230	8	1840
大米	35	磅	.087	3.045	.187	6.545	215	14	3010
番薯	704	磅	.017	11.968	.103	72.512	606	55	33330
糖	147	磅	.055	8.085	.267	39.249	485	38	18430
咖啡	40	磅	.298	11.920	.492	19.680	165	55	9075
茶	8	磅	.544	4.352	.741	5.923	136	20	2720

總計	$215.980	$479.435	1000	222912%
		222%		222%

總合法　第十二表給出兩種標準算法。第一種算法是最簡單的算法，是爲總合法(The aggregate Method)其解釋可見表之前五行。其計算程序爲：先找出兩時期各類食料一年供給之總費用（第三行與第五行）。然後，1920 年六月之總費用($479.44)被除以 1913 年之總費用($215.89)。結果則表示出；如以 1913 年爲基期，即 100%，則 192年之生活費用爲 222%；即增加百分之一二二(122%)，其總數雖在事實上，尙不能代表每個家庭每年平均食料費用之三分之二，但就其增加之百分率言，如此之總額亦即足用。

比例開支法　第二方法，計算程序較爲複雜，吾人稱其爲：比例開支法(The proportional expenditure method)，可以表中（第十二表)第六，七和八行解釋之。用此方法，1920 年六月與 1913 年相比較之比價即被找出。經過如是計算程序後，所有之大小價格，皆置於同一基礎之上，蓋每個物價皆以 1913 年(100%)爲基期也。然後，比價用加權法平均，其計算程序，吾人於第二章敍述第四表時，曾爲解釋。第七行所顯示之權數蓋爲工人每年食物預算表中各

種食物重要性之量度或指鍼也。如解釋之，第一個權數係$215.89 除 $8.128 而得。其得數將近 3.8%；但在比例中，此小數點與百分數符號皆可去掉。（結果即爲38矣）同樣，第二權數33，係用 $215.89 除 $7.136 而得。其餘權數可類推。此工作之準確與否（即所得每種食物之權數）可用總數校正之；蓋用如此方法所計算出權數之總數幾近 1000 也。事實上，計算此類權數，無需過於準確；譬如將小數點算至第七位是。權數計算雖有相當錯誤，惟對於平均之權數固無若何之影響也。

兩種方法之比較 在此例中，吾人可看出：用比例開支法所得之結果與總用和法恰相等。但並不所有情形，完全如是。用此兩種方法計算，如有差異時，則吾人應取用比例開支法所得之結果。此法之優點蓋在常修改消費估計量(Consumption estimates)爲不可能也，如估計已失時效，則其不準確性，必大影響於用總合法所求得之結果也。但用比例開支法則異是。比例開支法之權數(Weights)係根據一特定時間之物價與消費量而求得；彼在一較長時期，固比較估計之消費量爲準確。因此，用此法所求得之結果，當較爲可靠。實際上，比例開支法之計算程序亦不如例題中之那樣麻

煩。權數一經得到，可被使用很長時期而無需改變；其次，找尋比價（或相對之價格）亦非一額外工作，蓋在任何情形下，皆甚需要此種比價以期便於比較也。

用總合法計算物價指數之公式爲：

$$P_n = \frac{\Sigma P_n q_x}{\Sigma P_o q_x}$$

此處各符號之代表爲：

P_n　調查年之物價指數
P_n　調査年之物價
q_x　一定期間之商品消費量（最好是基期）
P_o　基期之物價

簡言之，此種計算程序可視爲兩種平均物價之比價也——兩種物價皆以其消費量爲權數而計算之。

用比例開支法計算物價指數之公式爲：（註九）

$$P_o = \frac{S \frac{P_n}{P_o} \times P_x q_x}{\Sigma P_o q_x}$$

此種計算程序，可視爲：以某一特定期間之消費物值爲權數

〔註九〕　此公式並未言及將比例開支之權數，縮減爲百分數。如將其變爲百分數，固亦無影響於指數之價值；惟爲以後比較而言，此處所給與之公式固爲理想公式也。

之比價平均數；此處所謂特定期間，通常爲比較物價期間以前之期間。吾人對此兩公式應予注意者：其因子皆係個別的；實言之，即屬於同一商品之物價與量數（或權數）始能相乘。（註十）

吾人詳察此兩種公式，可瞭然：在第十二表中所得之兩種結果，何以相同。用字母下之X表示數量與權數所屬之年度，通常與用字母下之○表示之基年，皆屬同一之性質。於是，第二個公式之分子可變成第一個公式之形態；而其分母亦得相同之數值．但此處所直接應用至 1913 年之物量，僅爲解釋之簡單而予以選用。事實上，此量數係於 1913 年考

〔註十〕 有時，用倒數平均數以計算比價之平均數。此平均數之計算，蓋先取比價之倒數，次計算此類倒數之平均數，然後再取此平均數之倒數。吾人於此極易看出：取價比之倒數足使基期倒轉；換言之，即以後年度變爲基期而替代以前之年度。如用權數，最好根據以後年度之資料以求倒數平均數。取此平均數之倒數又使基期顚倒。但用普通直接方法所求得之指數，與用倒數平均數所求得之結果將不相同。此無論將權數移動到以後基期與否；或是否應用權數，皆係如此。算術平均數與倒數平均數之區別，可取一串物價之簡單平均數與其倒數平均數而比較之。倒數平均數則爲：可用一圓購買之每個商品數量之平均數的倒數也。(the reciprocal of the average of the quantities of each Commodity purchasable for one dollar.)

查而得，且直到 1921 年初始見應用。勞動統計局從 1913 到 1920 年所實際使用之估計消費量以及同期與 1921 年六月之每年零售食料價格，皆見於第十二表 A。吾人從此表中，可看出··此類估計又回到 1901 年也。

第十二表 A　美國 1913—1920 年與 1921 年六月之每一家庭每年消費量及特種食料之平均零售價

食料種類	1901 年之消費	平均零售價格								
		1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921 六月
牛腰肉排	70磅	$.254	$.259	$.257	$.273	$.315	$.389	$.417	$.347	$.400
牛圓檑肉	70磅	.223	.236	.230	.245	.290	.319	.389	.395	.356
牛烤排骨	70磅	.198	.204	.201	.212	.249	.307	.325	.332	.298
烤雛鷄	70磅	.160	.167	.161	.171	.209	.268	.270	.262	.216
牛肉片	70磅	.121	.126	.121	.128	.157	.206	.202	.183	.141
豬排骨	114磅	.210	.220	.203	.227	.319	.390	.423	.423	.341
醃豬肉	55磅	.270	.275	.269	.287	.410	.529	.554	.523	.429
火腿	55磅	.269	.273	.261	.294	.382	.479	.534	.555	.489
豬油	84磅	.158	.156	.148	.175	.276	.333	.369	.295	.162
母鷄	68磅	.213	.218	.208	.236	.286	.377	.411	.447	.386
鷄卵	85打	.345	.353	.341	.375	.481	.569	.628	.681	.350
牛油	117磅	.383	.362	.358	.394	.487	.577	.678	.701	.402
乾酪	16磅	.221	.229	.233	.258	.332	.359	.426	.416	.295
牛乳	355夸	.089	.089	.088	.091	.112	.139	.155	.167	.142
面包	225磅	.056	.063	.070	.073	.099	.098	.100	.115	.098
麵粉	454磅	.033	.034	.042	.044	.070	.067	.072	.081	.059
研碎玉蜀黍	227磅	.030	.032	.033	.034	.058	.068	.064	.065	.045
大米	25磅	.087	088	.091	.091	.104	.129	.151	.174	.088
蕃薯	882磅	.017	.016	.015	.027	.043	.032	.038	.063	.027
糖	269磅	.055	.059	.066	.080	.093	.097	.113	.194	.078
咖啡	47磅	.298	.297	.300	.299	.302	.305	.433	.470	.357
茶	11磅	.544	.546	.545	.546	.582	.648	.701	.733	.683

幾個限制或缺點 上述計算生活費變動之方法，顯有幾個限制或缺點。最顯然之事，不變動消費之假定，有時易使原料陷於不準確。如各種物價之升降不一，購買者將捨價昂者而以價廉者替代之。此事甚易爲也。其影響所及，一方面足使不均衡之物價變動程度適中；另一方面，可使預算中之材料（原料）互相交替。惟消費量之常改以及複雜之計算方法，需時費事；而似爲目前實際情形所難能。其次，消費量之修改，又引起另一問題。消費數量之變動或在一部分上稱生活舒服費用提高之反映（即奢侈品）；但此處所用之『生活費』一名詞，係指包含：『爲維持家庭之社會效能之必需品』而言。（those necessities which are required to maintain the social efficiency of the family)嚴格言之，測量如是費用之變動，應先決定蛋白質，碳水化物，油類與熱量之飲食單位（the dieticiars unit），並需要詳細之分析。故吾人一涉及生活費，即不得不回到吾人所實際使用之比較簡單方法也。用此類方法所求得之結果，當然永被認爲『近似的』，而非眞確的數值。

局部指數之聯合 測量整個生活費之變動，勞動統計局除食料以外，曾編製一包含數種商品之指數。將單個指

數合成一簡單之測量尺度係用比例開支法。1918 年之預算的研究供給現在所用之權數。1920 年六月之局部指數，權數以及尋找一簡單指數之方法，可以下表解釋之：

支出項目	一九二〇年六月之指數（基期1918年）	權數（預算表中之百分數）	展開 (2)×(3)
（1）	（2）	（3）	（4）
食	219.0	33.2	8365.80
衣	287.5	16.6	4772.50
住	134.9	13.4	1807.66
燃料電力	171.9	5.3	911.07
傢俱設備	292.7	5.1	1492.77
其　他	201.4	21.3	4289.82
		99.9	) 21639.62
			216.5

批發物價指數　總合法與比例開支法在理論上雖皆不完全，然事實上，一切物價指數所通用之方法則非此卽彼也（總合法與比例開支法）。如應用比例開支法於批發物價指數，其權數常使之反映所生產之比例價格，而非家庭之消費；但其主要原理則固相同也。勞動統計局應用此法，編製一精密之每月批發物價指數。表中之項目，所用之基期與其他工作詳目曾隨時改變，但各單個指數合成一簡單指數，則皆有相同之基期。在戰前之數年，人皆用 1890——99 年間

之平均數爲基期；而此時期，固爲物價非常低降之時期也。嗣後，則用 1913 年爲基期，因其足以代表戰前之經常情況也。1920 年一月之指數，係從 327 種物價之加權平均數而得。項目被分爲九類，每類又皆有其自己之指數。（註十一）此爲所公佈之批發物價最廣博之研究；惟爲商業使用計，此指數較晚三，二月，斯其弊端也。

〔註十一〕 1890 至 1920 年之每年分組指數，可見於 1921 年二月之勞動評論月刊（The Monthly Labour Review），第45頁。其最近之數目字如下：

美國勞動統計局之分組指數

（1913——1920；1920與1921年之九月）

時期	農產物	食料等	衣類	燃料電力	五金與五金生產物	木料與建築材料	化學器具與藥品	傢俱	其他
1913	100	100	100	100	100	100	100	100	100
4	103	103	98	96	87	97	101	99	99
5	105	104	100	93	97	94	114	99	99
6	122	126	128	119	148	101	159	115	120
7	189	176	181	175	208	124	198	144	155
8	220	189	239	163	181	151	221	196	193
9	234	210	261	173	161	192	179	236	217
1920	218	239	302	238	186	308	216	366	236
1920九月	210	223	278	284	192	318	222	371	239
1921九月	122	143	187	178	120	193	162	223	146

在使用最廣之商業批發物價指數中，白蘭斯萃特指數(Bradstreet's)卽其一也。此指數約包含一百種之重要物品，其價格皆係主要商業中心所習見之價格。彼每月發行，對於想熟知目前市場狀況之商人，頗爲有用。其計算係用總合法；故其結果只有貨幣之總合，但此貨幣之總合可使其變爲任何所需要之基年也。然而，此指數之缺點，厥爲缺乏一種固定之加權制度：不過，謹慎選擇商品之項目，與夫重要商品予以重述，亦可權爲補救此種缺點也。

譚氏(Dun)每月批發物價指數，或不如白蘭斯萃特指數之著名，惟其編製方法，則比較科學。此指數包含 300 種商品物價，而被分爲七類，最後合成一簡單指數，結果則以『圓』爲單位。價格依所估計之每人消費量而加權。權數之如何應用，不甚明顯。此蓋以一般原則：商店並不將其統計工作詳細公佈也。聯邦準備局已起始刊行一每月批發物價指數，約包含九十種商品。其編製此指數之主要目的，係爲國際比較；但其功用決不局限於擎。（註十二）巴布生統計所

〔註十二〕 聯邦準備局將其指數內所包含之資料分爲入口商品與出口商品，生產商品與消費商品，以及其他某種商品組類等等。此類指數係每月刊佈於聯邦準備報告中。（the Federal Reserve Bulletin）。

(the Babson Statistical Organization) 亦刊行一種測量批發價變動之指數。此指數每月刊行，包含十種基本商品；其根據之商品範圍雖狹，但亦有其特定之效用。在此，吾人可述及其他不甚完全之指數，其中有許多係每週刊佈。其中之一即爲編年記者 (The Annalist) 之每週批發食物價格指數，此指數係包含二十五種價格之加權平均數。許多物價指數或給與不同之結果，惟每一物價指數，皆有其自己之效用也。指數之目的永遠控制項目與加權之選擇。換言之，項目之多少與加權之採取何種方法，皆須視指數之目的爲何而定也。

爲比較以前所述之各種指數，今特給十三表；此表係表示 1913 年與 1920 年各月之數種批發物價指數。 1920 年之資料，殊爲有趣，以其包含戰時與戰後之最高物價也。(註十三)

第十三表　批發物價指數

時期	勞動統計局	白蘭斯萃特	譚氏	聯邦準備局	巴布生
1913	100	$9.2115	$120.8865	100	$1.26
1920					
一月	248	20.3638	247.394	242	3.30
二月	249	20.8690	253.748	242	3.14
三月	253	20.7950	253.016	248	3.59
四月	265	20.7124	257.901	263	3.61
五月	272	20.7341	263.332	264	3.66

第十三表(續)　　批發物價指數

時　期	勞動統計局	白蘭斯萃特	譚　氏	盟邦準備局	巴布生
六　月	269	19.8752	262.149	258	3.71
七　月	262	19.3528	260.414	250	3.60
八　月	250	18.8273	252.288	234	3.43
九　月	242	17.9746	248.257	226	3.39
十　月	225	16.9094	237.341	208	3.25
十一月	207	15.6750	227.188	190	2.98
十二月	189	13.6263	211.628	171	2.75

其他指數　除物價指數外，尤有許多其他指數以測量商業行爲之各種情況。投機與投資行爲而以股票價格指數測量之。以發行股票之公司，其狀況始終在繼續變動中，故優良之股票價格指數，殊難編製。現在所通用之指數，係根據紐約證券交易所公佈之標準股票。鐵路與工業股票，通常皆分別編製指數；但此二者可合編一混合指數。一般市場中之金融與生產行爲，可以各種資料量度之，如紐約證券交易所所成交之股票數目，紐約或全國之銀行清算額，銀行存款，流通之貨幣，金貨之流動，利率，銑鐵之生產，各大城市所允許興工之建築物，商業失敗之數目與程度以及貿易之差額

〔註十三〕　比較此類資料，吾人必須注意者：商業指數（白蘭斯萃特與譚氏之指數等）係根據每月一日之物價。

靜等。勞動情形以工資與僱傭資料測量之，最佳之示例即爲紐約工業委員之報告。零售交易可見之於百貨商店之報告中。呈現於金融新聞紙上之此類指數，大多數皆僅包含週期數目之陳述。其統計工作之某方面可於以後長期趨勢一章內再討論之。

參攷書

Barnett, George E.: ''Index Numbers of the Total Cost of Living'' Quarterly Journal of Economics, Feb, 1921PP, 240——263.

Bowley, Arthur L.: ''The Measurement of Changes in the Cost of Living'' (and discussion), Journal of the Royal Statistical Society, May, PP. 343——372.

Fisher, Irving: Stabilizing the Dollar, Chapters I—III,

Howard, Standley E.: The Movement of Wages in the Cotton Manufacturing Industry of New England

Meeker, Royal: ''Some Features of the Statisticaz Work of the Bureau of Labour Statistics.'' Quarterly Publications of the American Statistical Association, March, 1915, PP. 431——441.

Mitchell, Wesley C: IndeX Numbers of Wholesale Priees in the United States and Foreign Countries, ,Bulletin, No. 173 (whole number), Bureau of Labeur Statistice, July, 1915.

Secrist, Horace,: An Introdcution to Statistical Metho ds, Chapters IX and X.

Secrist, Horace: Readings of Problems in Statistical Methods Chapter VIII,

Stewart, Walter W,: "Prisegs during the war", Quarterly Publicatiengs of the American Statistical Association, September, 1920 PP. 305——313.

練　習　題

(1) 將第六十一頁所示之各指數（即第十一表）之基期，各縮減爲各該行列平均數。

(2) 將七十四頁所載白蘭斯萃特與巴布生之 1920 年批發物價指數，縮變爲以 1913 年爲基期之指數。用平均差係數之方法，比較此類指數與同表中（第十三表）之五月份指數之異點。

(3) (a)繪第五十七頁第十表之兩實際工資指數於半對數紙上 (the Semi—logarithmic Päper)。

(b)將第六十一頁第十一表之工資與生活費指數，繪於同一之圖上。

(4) 假定美洲對歐洲之商品價格之比例（其物價水準皆以 1913 年爲基期）爲測量歐洲通貨相對貶值之尺度，試根

據下面資料(聯邦準備報告， 1921 年十一月號)，找出 1921 年九月之此類通貨之理論價值。並將市場匯價 (the Market prices of Exchahge)表示爲理論價值之百分數。

國 別	1921年九月之批發物價指數	紐約匯價(電匯，平價之百分數)
美 國	142	——
英 國	191	76.5
法 國	344	37.7
意大利	580	21.8
德意志	1777	4.0
瑞 典	182	81.3
挪 威	287	48.0
丹 麥	224	55.9

（5）以下之表爲從英國‘‘Statist’’雜誌所得之 1920 年每月批發物價指數與紐約之每月平均英鎊匯價（電匯）。試用第七十四頁第十三表之聯邦準備局指數爲美國物價水準之測量尺度而找出每月用美國貨幣所表示之英鎊理論價值。（英美間之匯兌平價爲$4.8665)其次，試比較如是所得之結果與用繪圖方法（兩個數列皆被畫圖）所得之鎊匯費用（Cost of Sterling Exchange)。

1920	''Statist'' 指數 (1913年爲基期)	英鎊電匯價 (紐約)
一月	288	$ 3.68
二月	306	3.39
三月	307	3.72
四月	313	3.93
五月	305	3.85
六月	300	3.95
七月	299	3.86
八月	298	3.63
九月	292	3.52
十月	282	3.47
十一月	263	3.43
十二月	243	3.63

(6) 從第六十九頁第十二表A，以 1918 年爲基期，試求 1913 至 1920 年之各年間之食料生活費指數與 1921 年六月之指數。將以上所得結果，並同以下勞動統計局所發表之指數比較之：

年度	食料生活費指數
1913	100
1914	102
1915	101
1916	114
1917	146

1918	168
1919	186
1920	203
1921 年六月	144 *

* 根據四十三種物品。

(7) 從以下各平均物價，求與 1913 年相比較之比價（或價比），並應用所講述之加權方法，求此類比較之加權平均數。

品名	1913	1918	權數
大麥(桶)	$1.04	$2.31	4
穀（桶）	.71	1.84	10
棉（磅）	.13	.32	5
鉄（噸）	14.90	36.52	3
銅（磅）	.16	.25	1

(8) 根據以下五種食料價格與各種食料在家庭預算中之重要性，試求所給與兩時期間之食物生活費之增加量。

品名	1913年價格	1920年價格	重要性
牛肉(磅)	$0.22	$0.40	70
牛乳(夸)	.09	.17	140
麵包(磅)	.06	.12	140
牛油(磅)	.38	.70	115
糖（磅）	.06	.20	40

(9) 根據 1901 年之消費與 1913 年之物價，計算一組

此例開支之權數。將此權數應用於第六十四頁第十二表六行（Column 6）之比價上。

(10) 試根據下表，計算以 1913 年爲基期之農業實際工資指數。將此結果與美國之農業計時工資指數，同繪於一圖上(時期爲農業工資所給與之年度)而比較之。(此圖之基線將表示從 1875 到 1920 年之各年度。爲何如此？)

某一階級男性農工之每月工資（不給膳宿）

（見1920年七月與1921年三月之"Monthly Labor Review）

年度	工資	年度	工資
1875	19.87	1898	19.38
1879	16.42	1899	20.23
1882	18.94	1902	22.14
1885	17.97	1910	27.50
1888	18.24	1911	28.77
1890	18.33	1912	29.58
1892	18.60	1913	30.31
1893	19.10	1914	29.88
1894	17.74	1915	30.15
1895	17.69	1916	32.83
1917	40.43		
1918	48.80		
1919	56.29		
1920	64.[illegible]		

（11）勞動統計局找出美國各種商品從1913年增加（卽生活費增加）之情形如下：

消費項目	增加之百分率						
	1914年十二月	1915年十二月	1916年十二月	1917年十二月	1918年十二月	1919年十二月	1920年十二月
食	5.0	5.0	26.0	57.0	87.0	97.0	78.0
衣	1.0	4.7	20.0	49.1	105.3	168.7	158.5
住	0.0	1.5	2.3	.1	9.2	25.3	51.1
燃料電力	1.0	1.0	8.4	24.1	47.9	56.8	94.9
傢具設備	4.0	10.6	27.8	50.6	113.6	163.5	185.4
其他	3.0	7.4	13.3	40.5	65.8	93.2	108.2

利用第七十一頁之權數，求生活費之總增加量及其指數。將此結果與勞動評論月刊(the Monthly Labor Review)1921年十一月號第八十三頁所載之指數比較之。

（12）利用由地方所得之物價與地方購貨商店所製之目錄，試求兩時期間生活費之增加——最好以 1913 年或 1914 年與現時相比。求食料指數時，用第六十四頁第十二表所給與之比例支出加權法。其他各組項目，用以下所述之比例支出加權數；此加權資料係引自第一千五百號之麻色諸色州議會報告。所引用權數中的不能利用之項目或被取銷，或

數代替以其他項目。

男人衣服指數之加權

大衣 全套衣服 褲	39
鞋	15
帽	4
手套	6
短襪	4
汗衫	6
領扣	2
襯衣	6
睡衣	2
總數	84

女人衣服指數之加權

全套衣服 外套 街衣（Street Dress）	27
襯衣	5
馬甲或背心 寬衣（如日本之和服） 家常衣服 圍裙 睡衣 襯裙	18
鞋	12

手套	3
襪	2
緊身褡	4
帽	9
總數	80

住居指數

得到所需要兩時期之幾個代表住宅租金，而求其平均之增加百分率。

燃料指數之加權

煤	10
火油	1
瓦斯	2
電	2
	15

其他指數之加權

冰	15
車費	15
交際費	25
醫藥	25
保險	50
教堂	30
煙草等	20
讀物	10
家庭設備	45
會社費	25
總數	260

以下述之比例開支加權數，聯合各局部指數爲一個指數

食	43.1
住	17.7
衣	13.2
燃料電力	5.6
其　他	20.4

第四章　數量指數與其功用

價值指數與數量指數　研究市場情況之學者對於生產數量的變化，殊感興趣，蓋以此類與物價，工資及商業行爲是有關係故也。因而，現代統計學家之注意力亦轉於生產指數之發展方面。此類指數可區分爲二：（1）價值生產指數，係測量在一定期間所生產商品之金錢價值者；與（2）數量生產指數，係測量一定期間所生產之商品數量者，其單位或爲磅，或爲桶或爲碼等等。貿易數量指數(Index of the Physical volume of trade)與數量生產指數稍相近似。所謂貿易生產指數，係測量一定期間交易之商品單位總數量之指數也。因爲大部工業係有季節性，故生產指數，通常皆以一年爲時間之單位。（註十四）

價值生產指數只爲富有代表性之每年商品數額在平均時價之存貨，故無需詳細討論。求價值生產指數之程序，可以

〔註十四〕　最實際適用之生產指數之一種，需要每月與每週之資料，以改正季節變化。此種資料初用於與商業情況之測量有關之統計工作上；吾人於次章將見之。

第十四表及第十四表A之資料解釋之。以第十四表中之麥，棉，銑鉄與銅每年出產額乘以第十四表A之各該商品價値；所得之每年總數値，可暫視爲原料之價値生產指數，並可以縮變爲任何基期之指數，此種指數除利用其以計算數量指數與物價指數外，其本身上固無多大之效用也。

如某一年之總生產價値，以一完備之指數測量，其比較往年有增加之表示。很顯然地，此種增加如不歸之於商品產額之增加，卽應歸之於價格之增漲；或併此二因而兼之。因而，適宜之一般物價指數與數量生產指數，同年相乘，卽可得一價値生產指數。其基本原理可以下列之公式表示之：（註十五）

$$P_nQ_n=V_n$$

此處之符號代表爲；

P_n ＝某年之物價指數

Q_n ＝同年之數量生產指數

V_n ＝同年之價値生產指數

〔註十五〕 應用此式、最好將兩指數同縮變爲一個基期，但此亦並非在數學上非如此不可。所得指數之絕對値。並不重要；其重要者只爲彼此之比例耳。

此公式亦可寫如下式：

$$P_n = \frac{V_n}{Q_n} \quad 與 \quad Q_n = \frac{V_n}{P_n}$$

數量生產指數　計算數量生產指數之統計程序，可用第十四表中資料解釋之。將某一年之桶細，噸和磅總合時，吾人在表中殊難使此等單位相加。但吾人可使此等數目，變爲相對之數目，而合併爲一個指數；但此種程序將使桶，磅，細與噸間有一權數之比例。固然，吾人亦能將所有單位，皆變爲磅；然而，一磅銅應較重於一磅穀或一磅鉄（在價值上）蓋以其在市場之重要性較大也。在總數中，給每一生產項目以相當地位之簡單方法，可用一標準價值（A standard value）以測量之也。換言之，即吾人將「可用一標準價格購買之每個商品數量」，視爲數量之單位。每年之此類單位數目，可歸納之而成爲一數量生產指數。（註十六）用代數式表

〔註十六〕　吾人亦可將物價與商品數量之相乘積，視爲數量之單位（physical units）。而表示如下：

令P＝每磅之價（以圓表示）

N＝某一生產額之磅數

於是，I/P＝一圓錢可購買之磅數。（新的數量單位）

而N÷I/P＝np，在生產額中新數量單位之數。

之，其程序如下：

$$Q_n = \Sigma P_m q_n$$

吾人一談及完全指數，此公式卽等於將原來表中之數量平均，並以標準價格（Pm）而加權也。

第十四表

1870—1920年，美國特種商品之生產

年度	大麥 （百萬桶）	穀 （百萬桶）	棉 （百萬綑）	銑鐵 （百萬噸）	鋼 （百萬磅）
1870	236	1,094	4.352	1.665	28
1	231	992	2.974	1.707	29
2	250	1,093	3.931	2.549	28
3	281	932	4.170	2.561	35
4	308	850	3.833	2.401	39
5	292	1,321	4.632	2.024	40
6	289	1,284	4.474	1.869	43
7	364	1,343	4.774	2.067	47
8	420	1,388	5.074	2.301	48
9	449	1,548	5.755	2.742	52
1880	499	1,717	6.606	3.835	60
1	383	1,195	5.456	4.144	72
2	504	1,617	6.950	4.623	91
3	421	1,551	5.713	4.596	116
4	513	1,796	5.682	4.098	146
5	357	1,936	6.576	4.045	166
6	457	1,665	6.505	5.683	158

第十四表（續）

年度	大麥 (百萬桶)	穀 (百萬桶)	棉 (百萬綑)	銑鐵 (百萬噸)	銅 (百萬磅)
7	456	1,456	7.047	6.417	181
8	416	1,988	6.938	6.490	226
9	491	2,113	7.473	7.604	227
1890	402	1,490	8.653	9.203	260
1	612	2,060	9.035	8.280	284
2	516	1,628	6.700	9.157	345
3	396	1,619	7.493	7.125	329
4	460	1.213	9,901	6.658	354
5	467	2.151	7.161	9.446	381
6	428	2,284	8.533	8.623	460
7	530	1,903	10.898	9.653	494
8	675	1,[illegible]24	11.189	11.774	527
9	547	2,078	9.393	13.621	569
1900	522	2,105	10.102	13.789	606
1	748	1,523	8.583	16.878	602
2	670	2,524	10.588	17.821	660
3	638	2,244	9.820	18.009	698
4	552	2,467	13.451	16.497	813
5	693	2,708	10.495	22.992	889
6	735	2,927	12.983	25.307	918
7	634	2,592	11.058	25.781	869
8	665	2,669	13.086	15.936	943
9	737	2,772	10.073	25.795	1,093
1910	635	2,886	11.568	27.304	1,080
1	621	2,531	15.553	23.650	1,097

第十四表（續）

年度	大麥 (百萬桶)	穀 (百萬桶)	棉 (百萬綑)	銑鐵 (百萬噸)	銅 (百萬磅)
2	730	3,125	13.489	29.727	1,243
3	763	2,447	13.983	30.966	1,224
4	891	2,673	15.906	23.332	1,150
5	1,026	2,995	11.068	29.916	1,388
6	636	2,567	11.364	39.435	1,928
7	637	3,065	11.302	38.621	1,890
8	921	2,503	12.041	39.055	1,994
9	941	2,917	11.421	31.015	1,289
1920	787	3,232	13.366	36.415	1,345

* 此表與下表係經原著者許可而轉載自巴布生之''Business Barometers''但稍加修正。

第十四表 A

1870—1920年美國特種商品之平均價

（東方市場）

年度	大麥 （每桶）	穀 （每桶）	棉 （每綑）	銑鐵 （每噸）	銅 （每磅）
1870	1.30	1.02	119.50	33.23	0.211
1	1.60	.77	84.50	35.08	.241
2	1.62	.70	110.50	48.94	.355
3	2.76	.63	100.50	42.79	.280
4	1.39	.86	89.50	30.19	.229
5	1.33	.84	77.00	25.53	.226
6	1.35	.628	64.50	20.75	.210
7	1.33	.593	59.00	19.25	.190

第十四表A（續）

年度	大麥（每桶）	穀（每桶）	棉（每綑）	銑鐵（每噸）	銅（每磅）
8	1.24	.535	56.00	17.05	.165
9	1.24	.47	54.00	22.82	.186
1880	1.30	.55	57.50	29.86	.214
1	1.30	.62	60.00	22.54	.181
2	1.32	.77	57.50	23.20	.191
3	1.17	.64	59.00	19.62	.165
4	1.00	.615	54.50	16.80	.110
5	.94	.51	52.00	15.20	.108
6	.888	.52	46.00	16.77	.110
7	.88	.488	51.00	20.05	.138
8	.94	.593	50.00	16.82	.167
9	.91	.438	53.00	14.35	.134
1890	.92	.485	55.00	15.10	.156
1	1.05	.675	43.00	13 78	.127
2	.908	.54	38.50	12.74	.115
3	.739	.499	42.50	11.42	.107
4	.611	.509	34.50	9.93	.095
5	.669	.477	37.00	10.86	.105
6	.781	.340	39.50	10.29	.109
7	.954	.319	35.00	9.42	.113
8	.952	.376	29.50	9.46	.120
9	.794	.413	34.00	16.58	.177
1900	.804	.453	46.00	17.04	.166
1	.803	.567	43.50	13.61	.161
2	.836	.684	45.00	20.00	.116
3	.858	.572	55.50	17.08	.132

第十四表A（續）

年度	大麥（每桶）	穀（每桶）	棉（每綑）	銑鐵（每噸）	銅（每磅）
4	1.107	.594	58.50	12.73	.128
5	1.028	.593	49.00	15.57	.156
6	.865	.590	57.50	16.70	.193
7	.963	.640	60.50	23.10	.200
8	1.049	.786	53.00	15.54	.132
9	1.263	.767	63.00	16.12	.131
1910	1.118	.668	75.50	15.16	.129
1	.963	.711	65.00	13.67	.125
2	1.091	.711	57.50	14.93	.164
3	1.041	.711	64.00	14.90	.155
4	1.094	.793	55.50	13.41	.133
5	1.291	.837	50.50	13.58	.174
6	1.468	.929	72.00	18.67	.272
7	2.346	1.776	117.50	40.07	.272
8	2.31	1.841	158.50	36.52	.247
9	2.34	1.771	161.50	32.16	.192
1920	2.65	1.669	173.00	44.03	.175

標準價格　「標準價格」一詞係指一商品在研究期間之代表價格。因標準價格被當作權數使用，故無需很準確地決定它。但從「差誤理論」(the theory of errors)之觀點言之，所謂標準價格即爲數量指數的數列所依據之整個時期的平均價格。因此，在物價急劇變動時期，如所用之期間，甚

短不同，則其所得之結果，亦必互異。此雖似乎不很規律，然亦爲不可避免之事實；蓋以總合數量之觀念(The concept of aggregate quantity)需要一倘刮價值之單位，質言之，卽一圓之價值也。(a dollar's worth)。圓價值不穩定，故數量之單位，亦不穩定。惟事實上，此種不穩定性常無關緊要也。

將上述原理應用於第十四表資料上，吾人只須按表中所列每種商品之標準價格卽足。然後再選擇距大戰二十餘年前之一時期，作此物價之基期；其所以如斯選擇者，一爲免除戰時物價之極端變動，一則着重所研究半世紀之後半部，而非前半部。（註十七）所取之平均數皆爲近似值，並用以下資料而稍加修正：

麥（每桶）	$1·04
穀（每桶）	·64
棉（每綑）	56·00
銑鉄（每噸）	16·00
銅（每磅）	.16

應用此類物價時，吾人必須切記：事實上，此類物價卽爲權數，故可以複比率(multiple ratio)視之。因此，它們可再變爲較方便之式樣如次：13：8：700．200:2。

美國之數量生產 標準價格旣經決定後，每年之生

產項目被乘以各該權數。每年得二小計（卽小總數—sub-total），一爲農產物的，一爲礦物的。此類小計組成兩個暫時之指數數列。完全指數則係以1913年爲基期之指數。其次，如各種統計研究所顯示者，礦產指數與製造品指數很接近。如用一適宜的加權數，吾人可將農產物與礦物的指數合併之，而使其包含製造品之價值。吾人根據總合價值之比較與經驗，可將所需要之農產物權數，假定爲6，而礦產物的權數，假定爲4；在理論上製造品卽被包含於後者（礦產物）之中矣。此種加權與合併之程序，殊爲粗糙，不能給以十分準確之結果。惟在此例中，吾人工作根據之五種商品，就生產方面言之，皆很可靠，而富於代表性。根據此五種商品所編製之指數，可以斯圖瓦特氏(Stewart1890-1920)及得氏(Day, 1899-1920)之數量指數校正之。其結果，變成指數式樣，卽如第十五表。

〔註十七〕 因移動比價，在理論上，最好將所研究之半世紀，至少應再分爲三時期，卽1870—1896.1896—1914,1914—1920三時期，並求得每期所使用之加權數。在重複年，用簡單之整理基期法，可將諸指數併爲一起。惟用此方法，所得到之少許準確程度，固無足輕重。此蓋以在任何情形下，由此類貧乏資料中所得到之結果，固只能被視爲相近似，而不能談到十分準確也。

第十五表

美國之數量生產指數（或物量生產指數）

1870—1930

年度	農產物	礦產物	普通	
			總合	每人
1870	38	5	25	61
1	33	5	22	53
2	38	7	25	60
3	36	7	24	56
4	34	6	23	52
5	45	6	29	64
6	44	5	28	60
7	48	6	31	65
8	51	6	33	67
9	57	8	37	73
1880	63	10	42	81
1	47	11	33	61
2	62	13	42	78
3	56	13	39	69
4	64	13	43	76
5	63	13	43	74
6	61	17	43	72
7	57	19	42	69
8	67	20	48	77
9	73	23	53	83
1890	69	27	46	71
1	78	26	57	86

第十五表（續）

年度	農產物	礦產物	普通	
			總合	每人
1892	62	29	49	72
3	59	24	45	66
4	58	24	44	63
5	72	31	55	77
6	76	31	58	79
7	76	34	59	79
8	81	39	65	85
9	77	45	64	83
1900	78	46	65	83
1	71	51	63	78
2	92	57	78	95
3	84	58	74	88
4	92	57	78	91
5	97	74	88	100
6	107	80	96	108
7	98	80	88	97
8	100	59	83	90
9	99	85	93	99
1910	100	88	96	100
1	100	90	92	95
2	[illegible]2	98	106	108
3	100	100	100	100
4	112	81	100	98
5	115	101	109	106

第十五表（續）

年度	農產物	礦產物	普通	
			總合	每人
6	94	136	110	106
7	104	133	115	109
8	102	137	116	108
9	111	102	107	99
1920	115	110	113	103

物價指數　吾人依據本章所討論之原則，最好將物價指數之理論，（註十八）重新溫習一過。欲使物價指數理論正確，其公式必須如下：

$$P_n = \frac{V_n}{Q_n}$$

〔註十八〕　在此書中所討論之物價與物量指數理論，皆使用同一之項目表，惟期間則有不同。如項目之數目或性質，有變動，譬如勞動統計局之零售食料物價指數，其項目即從二十二增至四十三；在此情形下，吾人即假定一新的數列開始，並用調整新基期之方法，而使其與原來指數相聯繫；調整新基期之標的，即在使此類指數在兩重複期間相一致。由於表中商品繼續移動之理論上困難，此處並未提及，以其在目前中之實際價值殊小故也。惟欲使生產指數準確，必擴大產業之研究範圍。運費與船運噸數爲產業範圍擴張之反映，故常用以量度生產。

各指數無論皆使之變成同一之基期，或僅以金圓價值而表示，此公式統屬有效。用前所討論之公式，上述公式亦可寫成：

$$P_n=\frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma P_m q_m}$$

直接用此公式作基期所編製之諸指數，與用平均物價作分母所得到之諸指數，同得一相近似之平均指數。但如價值指數與數量指數，在起初皆使其變爲同一之基期，則物價指數之基期，亦爲該基期。

爲與比例開支法相比較起見，此公式之分子，用 Pm 先除之，後乘之，而修正如下式：

$$P_n=\frac{\Sigma\frac{P_n}{P_m}\times P_m q_n}{WP_m q_n}$$

如是寫成之公式，蓋表示其比價係根據標準物價與夫此類比價平均之權數，係包含『以標準價格之每圓價值單位』所量度的物量。簡言之，此公式即表示以貨幣（或金圓）價值爲權數之比價。在實際工作上，吾人當然選用以前簡單之公式，後者之公式只爲比較與解釋之用而設。此種編製物價指數之方法，在整個期間，需要一標準化之數量單位；故此

方法，亦可稱爲：標準數量之方法。

一個近似的方法 用數量爲權數來平均物價之方法，提示一尋求物價指數之近似法；吾人可再敍述，以資比較。此近似法不用比價，而用實價；其加權方法則用所研究期間的生產，消費或交易之平均物量（q_m）。此法相似於求數量指數所用之方法。其公式爲

$$Pn = \Sigma P_n q_m$$

如此所得到之指數行列，可使其變換爲任何所需要之基期。此公式固屬便利，惟在理論上仍有牽強之處，故其結果，亦不甚可靠。彼不能應下述公式之測驗：

$$PnQn = Vn$$

理論上的困難 吾人如從另一角來討論問題，或許發現一些編製物價指數時理論上的困難。第一，今假定：吾人只研究一種商品，其價值在某一定年爲 $4；次年爲 $5。吾人如以第一年爲基期，則第二年之物價指數爲125。如以第二年爲基期，則第一年之物價指數爲 80 ；此二結果係相適應的，蓋以 80% 與 125% 相乘，適等於 1，或指數 80 之倒數即爲指數 125 故也。

其次，吾人討論同樣之問題，而以二種商品爲例，其數量與價格如下：

第一年

	(q)	(P)	(V)
A 商品	10 磅	每磅 $4	=$40
B 商品	3 桶	每桶 $7	= 21
價值指數			61

第二年

	(q)	(P)	(V)
A 商品	12 磅	每磅 $5	=$60
B 商品	2 桶	每桶 6	= 12
價值指數			72

在此例中，吾人計算數量時，不用平均價作標準價，而根據通常習慣，只取基期之物價。如以第一年爲基期，並以基年（基期）之價格爲求數量單位（即貨幣價值）之標準，吾人即得：價值與數量指數皆爲61，物價指數（即 V÷Q ）爲 100；實際上，基期之物價指數必爲 100，而爲必然之邏輯。在第二年，V=72，Q=62；最後一數值（即 62）之由來，蓋係以第一年之物價乘第二年之物量而得。於是，第二年之物價指數爲 72%÷62%，或116%（此就與第一年之 100% 相比較而言）。

現在，吾人再倒個計算，卽以第二年爲基年，而以其物價爲標準價。於是，以第二年之價值指數等於其數量指數，故第二年之物價指數爲 100。至於第一年，其價值指數仍同前，而爲 61；第一年之數量指數，係以第二年之物價乘第一年之各該商品之數量而得，而爲 68。於是，第一年之物價指數將爲 61%÷68%，或 90%。

用兩個不同的基期所得到之二種結果，是否一致？吾人能任用一種物價指數乎？此答案如爲肯定的，則此二指數，116% 與 90% 之相乘積，應爲一個單位（卽等於 1）。但事實上，其相乘積則爲 104%。另一試驗爲：指數 90% 之倒數必等於 116%；惟實際上，90%之倒數則爲 111%。

此種不一致之發生，很顯然地由於數量單位之不標準化。今吾人假設應用標準數量法，卽得以下二年之各該指數：

$$P_1=\frac{61}{65}=94 \qquad P_2=\frac{72}{67}=107.$$

如以第一年爲基期，吾人卽得第二年之指數爲 114；假如以第二年爲基期，所得之第一年指數，必與第二年相適應。在此，吾人可看出：用如是方法所求得之第二年指數，介於以前所求出之兩指數 116 與 111 之間。

裴雪氏之指數 用各種標準物價以測量數量，常發生不一致之弊；利用標準數量法可避免此弊。裴雪教授(Professor Fisher)另外提議一解決方法；此方法，裴雪氏認爲最合理想。其方法蓋包含尋求兩個相適應指數(如116與111)之幾何平均數。用裴雪方法所求出之結果爲114，此結果與用標準數量法所求者相同；惟在一般情形下，此兩種結果幾乎相等，並非絕對完全相等也。後者之方法，其優點在能於需要之期間，而給一相適應之指數數列；此數列又可任意變爲所需要的基期之指數。統計學權威者皆承認裴雪教授之解決，在理論上爲最好。惟其公式在普通使用上，比較複雜，斷不適用。 今寫其公式如下：

$$Pn=\sqrt{\frac{\leqq P_n q_n}{\leqq P_o q_n}\times\frac{\leqq P_n q_o}{\leqq P_o q_o}}$$

在此公式中，標明之字母O與n，係表示基年與調查年。此公式之發展，將來再詳爲解釋。其數量指數之公式(Cn)，將物價指數公式中之P與P，互易其地位即得。

在此吾人所應留意者：再深爲探討編製物價指數與數量指數之理論問題，必無益。目前問題之關鍵，應着重材料之充足與可靠，而方法之選用，則在其次。就一般通例言之，

方法之選擇並不包含嚴重錯誤之危險；但如材料不正確與不充足，則工作必難期圓滿。然而，於計劃工作與計算結果中，對於問題之理論的瞭解，亦有其實際價值也。

數量理論指數 吾人可根據貨幣數量說，將物價與生產指數，應用於一般商業變動之情況上。簡單的貨幣數量說爲：物價(P)之變動與流通之貨幣數量(M)及其流通率(R)成正比例；而與貿易數量(N)成反比例。用代數式表出則如下：

$$P=\frac{MR}{N}$$

此公式再可使之詳細，而將流通媒介分爲貨幣與信用，每種流通媒介皆各根據其平均流通率而研究之。但以求得流通率之準確資料甚難，故此處不再使此公式更趨詳細也。吾人尤應注意者，即貨幣數量說之理論，是否健全有效，尙多聚訟。惟此種辯論與此問題之統計方面，尙無所礙。彼所討論者只爲用公式所表示之均衡狀態中的變動由來。

爲使用此公式,吾人可再引一些資料。甘末爾教授(Prof. Kemmerer)在高昂物價與通貨緊縮(High Prices and Deflation)之研究一文中，曾論到流通之交易媒介(M)之價值；

甘氏於此文中曾估計戰時流通之貨幣與銀行信用之流通數量。截至 1920 年止，其估計如次：

年　次	流通額（單位百萬元）	
	貨　幣	銀行存款（短期）
1913	3,300	12,678
1914	3,505	13,430
1915	3,632	14,411
1916	4,159	17,840
1917	4,914	21,273
1918	5,579	23,771
1919	5,793	27,928
1920	6,060	30,300

在吾人將貨幣與存款併合為一個流通媒介的簡單指數時，吾人必須用 2 乘存款；蓋因以支票形式流通之存款，其流通較貨幣速於二倍也。用加法所得到之指數，可使其基期縮變爲 1913 年。數量生產指數可代替交易數量之價值。此所以如此者蓋假定：交易數額與生產數額相平行也。至於物價指數之價值，可用美國勞動統計局之批發物價指數。

用交換公式表示，吾人則得通貨流通率之指數如下：

$$R=\frac{PN}{M}$$

此指數當然不能正確表示通貨流通率之百分率[illegible]（[illegible] percentage changes)；所以如此者，蓋因生產額代替貿易額）部交易額），而將商品流通率之變動取消也。但其應由於貨幣流通之增減的記錄，而表示商業行爲之變動。此貨幣流通之增減與商品流通之變動，有直接之關聯。進一步言之，此指數應表示：消費市場之相對的行爲。因此，足以增加通貨與證券流通之投機騷動，將不被記錄。故在事實上，此指數之差能準確表示每年商業行爲之變動，吾人從圖形中可顯然看到。1914 年之凋敝，1917 年之戰時情況，1919 年之暫時暴跌以及 1920 年之極端繁榮，皆可被表示出也。

填入適所討論之交換公式中的諸指數，如下所示。惟綜合觀之，此諸指數呈現商業一般活動之略圖。物價與購買力（MR，需求）呈正比例之變動，而與生產（N，供給）係反比例之變動。吾人在此應注意者：此處所用R與N之價值，皆只爲近似值。牠們在 1914 與 1915 年或顯得過高，在 1916 年或顯得過低。

年次	(P)	(M)	(R)	(N)
1913	100	100	100	100
1914	100	106	94	100
1915	101	113	97	109
1916	124	130	98	110

年次	(P)	(M)	(R)	(N)
1917	176	165	128	115
1918	196	185	123	116
1919	212	214	106	107
1920	243	132	118	113

此交換公式之完全統計的證實，將需要更豐富之資料與更廣博之計算。最困難之點則在貿易數量指數(N)之編製。就理論上言之，此應包括在一定期間所交易之一切財富與勞役；而此一切財富與勞役，係以『根據整個計算期間之平均價』的貨幣價值之數量單位而測量。因 MR 等於同量貨物以時價交易的價值，故此交換公式，可用標準數量法，而將其變爲物價指數之公式：

$$P_n = \frac{MR}{N} = \frac{\Sigma P_m q_n}{\Sigma P_m q_n}$$

在實際工作上，吾人當然要用選樣程序，並藉助於各種綜合數量之方法。如是所得之物價指數，因在公式中所表示之數量，爲貿易數量，而非生產或消費數量，故與一般物價指數稍有不同也。凡富於投機性之商品，因而亦應重重加權也。

學者欲深究數量說與交換公式之統計的證實，可參攷甘末爾所著之貨幣，信用工具與一般物價之關係 (Kemmerer: Money and credit Instruments in their Relation to General Prices)，費雪教授所著之貨幣購買力(Fisher：The Purchasing Power of money)與金氏(King)在銀行家統計協會(1920)所出版之每週服務(Weeky Service)上所發表之論文。

國民所得之測量 吾人至此爲止，所討論之生產指數，主要方面係在其與物價指數有關之使用方面。但生產指數於其表示全國民所得之變動中，亦有其重要性在。所謂國民所得蓋包括『經濟物，勞役與財產收益』之一切消費值，以及商品儲藏之增加，財產之擴充的總和。此種觀念與私人所計算之綜合所得稍異，蓋以後者包括資本換算價值之增加(increases in capitalized values)，而土地其最著者也。

當生產指數表示國民所得之變動時，如不輔以一年或一年以上之總所得估計，則此指數只爲一種比例。對此方面，曾有少數研究之嘗試，惟最完全與最權威之研究，則係經濟研究國民局(the National Bureau of Economic Research)之所爲。此局係私人組織，1920年立案，目的在用統計方法，研究與公共福利有關之問題。此局受由十九人組成之董事會統制；此十九人代表各種不同方面之利益與觀點。主要人員有密其爾(Wesley C. Mitchell)，金氏(Willford I. King)，馬皋萊(Frederick R. Macauley)與克奧斯(Cswald W. Knauth)等人。此組織近曾發表一種專門論文，將 1909 到 1618 年間每年國民所得，作一估計。此論文殊值吾人詳愼之研究，蓋不僅其結論佳，而亦爲最精美之應用統計方法之實例也。所得之估計，係根據兩個截然不同之資源；一爲生產來源，一爲收入之所得。兩種結果，幾完全一致；最顯著之區別，係在 1913 年，只差百分之六點九（6.9%）。其結果被平均，求出最終之估計數；此估計數再以 1913 年之物價而表示之。經過此種程序後，即得指數如下；在此吾人所應注意者，1913 年之所得爲三百四十四億金元。

年次	指數
1909	88
1910	94
1911	92
1912	97
1913	100
1914	96
1915	102
1916	118
1917	119
1918	113

所得之分配　經濟研究國民局，根據大部分之所得

稅收入，又作一1918年個人所得分配之研究。該年總所得經查出後約爲五百八十億金圓，所得者之數目爲三千七百六十萬，但關於在兩項目中之活動服役者不在此限。（註十九）平均所得爲 $1,543；衆數（卽最普通的所得——譯者）爲$957；三個四分位數爲：$833（第一個四分位數，或下四分位數），$1,140（第二個四分位數，卽中位數）和$1,574（第三個四分位數，或上四分位數）；歸納之，其分配可如下表：

美國一九一八年國民所得次數分配表

所得組	百分數
$400以下	2.84
400－800	19.51
800－1200	32.16
1200－1600	21.53
1600－2000	9.88
2000－2400	4.64
2400－2800	2.63
2800－3200	1.61
3200－3600	1.07
3600－4000	.74
4000以上	3.39
	100.00

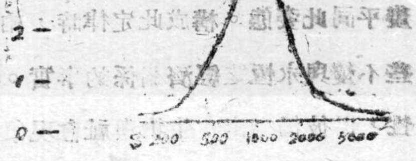
〔註十九〕如一切皆包括在內，平均所得則變爲 $1490.

美國一九一八年所得收入者與國民所得之累積百分數表

所得收入者	總合所得
10	2.7
20	7.2
30	12.5
40	18.7
50	26.9
60	33.6
70	42.2
80	52.5
90	65.2
99	86.2
100	100.0

第一表可以繪一次數曲線圖，而將最後一組(即 $4,000 以上)取消之；如正確表示之，此組應包括幾百萬圓之所得。(註二十)第二表可畫成一羅倫之曲線(a Lorenz Carve)，以

〔註二十〕 如果所得之次數分配表。被畫於半數紙上，以所得收入者的數目，畫於縱方的算術尺度上。以所得數值的大小畫於地平線上（或橫線上）之對數尺度上，由是遂得一種近似規則性的次數曲線。此曲線表示一種分配形態；吾人如取與幾何平均數相差之比率爲測量離中趨勢之標準，而不用與算術平均數相差之各值，則此次數分配爲對稱的。在如是次數分配中，中位數與第一四分位數和第三四分位數之幾何。平均數相近似，而不與其算術平均數相近似。



第一行作基線，縱線與橫線並被畫成相等。從左向右所畫之上行對角線(相等分配線)將作一比較之根據。其次，第二表用減去總合所得之非累積百分數法，可將其更簡單繪圖，並以基線上之連續縱的方塊代表之；此縱的方塊即測量所得收入者之百分之十的連續各組也。

栢萊透定律　如果次數分配表中的百分數用反的次序總計之，並在複對數紙上繪縱形圖，各百分數皆對着各組之下限；結果所繪成之圖，即解釋所謂：『所得分配之柏萊透定律』也。(the so Called Pareto's Law of Income distribution)此定律之概要為：在衆數以上之所得分配曲線，如用對數畫出，即幾成一直線　將羅倫茲曲線轉繪於複數紙上，亦可得同樣之結果；或者，吾人更可簡單地將原來的次數曲線(即次數非用百分數表示，而以其原數目表示之——譯者)繪於同一之對數紙上，柏萊透定律對於所得資料之次數曲線的應用，頗值吾人之注意。惟此曲線以普通形態劃出，則顯極端向右偏之象——最初兩章所研究之工資資料，亦幾乎同此姿態。構成此定律時，柏萊透氏認為已發現一種有些不變與永恆之經濟關係的事實。彼雖無疑於此定律之不變性，但彼仍指出：生物與社會現象中蘊育有統計規則性之極

繼趨勢者。

其他各國之所得　經濟研究國民局又曾估計1914年其他數國之每人所得額。此類估計係根據英國著名學者斯坦普爵士(Sir Josiah Stamp)以前之研究。此局之資料給出如下之比率：

美國	100%
奧大利亞	79
英國	78
加拿大	58
法國	55
德國	44
意大利	33
奧匈	30
西班牙	16
日本	9

財產之分配　與所得分配關係最切之問題即財產權之分配。就美國而言，此問題之最著名研究係金教授(Prof. W. I. King)於1915年所發表之論著。1910年之總財富，據估計，約爲二千億金圓，而其所有權之分配可以得曲線表示之。最富的百分之二的家庭，擁有過百分之五十的財產。（即美國總家庭中，有百分之二的家庭，所擁有之財產，估全國財產百分之五十以上——譯者）但此類估計所根據

之資料，多不準確；其次，復以財產之取得與分散率，亦缺之認識，故其結果之意義更爲晦澀矣！

參 攷 書

National Bureau of Economic Research; Income in the united States, Voe. I.

Day, Edmund E; "An IndeX of the Physical Volume of Production," Review of Economic Statistics, Septber, 1920—Jan, 1921.

Fisher Irving; "The Best Form of IndeX Numbers" (and discussion), Quarterly publications of the American Statistical Association, March, 1921 pp. 533—511.

Fisher, Irving: The Purchasing Power of money

Hoffman, F.L.; "The Economic Progress of the United States During the last Saevnty-five years." Quarterly Publications of the American Associations, December, 1914, pp. 294—318. For further data on the same topic, see AppendiX III.

Ingalls, W. R; "Labor the Holder of the Nation's Wealth and Income," The Annalist, september 13, 20 and 27, 1920.

King, W. I.; Wealth and Income of the People of the United States.

Meeker, Royal; "On the best form of Index Numbers" Quarterly publications of the American Statistical Association sept, 1921, pp. 909—915.

Stewart, Walker W：“An index Number of Production” (and discussion), American Economic Review. March, 1921, pp. 57—81.

Walsh, C. M：The Measurement of General Exchange value.

Working, Hoobrook：“What is to be the Future Price Level?”The Annalist, June 27, 1921, p. 686

線習題

1. 從第十四表與第十四表A（第89,90頁及第92頁）算出：(a) 穀物價值生產指數與(b) 礦物價值生產指數。將各指數縮變爲以1913年爲基期之指數。

2. 用美國礦物生產指數之各相當項，除第一題所求得之礦物價值生產指數之各項。試解釋其結果。

3. 用穀物生產指數之各相當項，除第一題所求得之穀物價值生產指數之各項，試解釋其結果。

4. 將前題所求得之指數與美國批發物價指數，繪於半對數紙上。並解釋兩趨勢之差異。

紐約聯邦準備會銀行每月評論給出美國最近幾年來十大穀物價值如下（該價值係根據平均價——標準價）：

年次	價值（單位百萬美圓）
1910	5,873
1911	5,491
1912	6,549
1913	5,750
1914	6,397
1915	6,831
1916	5,907
1917	6,507
1918	6,418
1919	6,626
1920	7,284
1921	6,118

從上述資料，求出農產物指數(以1913年爲基期)，並用繪圖法將此農產物指數與由三種主要穀物所計算出之指數(第96頁之第十五表)相比較。

6. 從以下所給之穀物與物價資料，求出1914年之數量生產指數，價值生產指數與物價指數。每種指數以1913年爲基期而表示之。(在此假定：1913年之物價代表某一定期間之平均價。)

年次	麥		五穀		棉花	
	桶	價格	桶	價格	綑	價格
1913	760	$1.05	2450	$0.72	14	$61.00
1914	890	1.10	2670	.80	16	53.00

根據下面資料，以 1900 年爲基期，用交換公式（數量說）求以下四項之諸指數：

年次：	1900	1910
物價指數	80	100
流通之貨幣	2.2	3（單位十億）
能開支票之銀行存款	9.4	14.25（單位十億）
數量生產	20.0	30.00（單位十億）

8。將1890--1920年之美國批發物價指數與從下面資料中所求得之每人流通(以 1913 年爲基期)之同樣指數 (a similar index of per capita circulation) 同繪於半對數紙上。

1890	$22.82	1905	$31.08
	23.45		32.32
	24.60		32.22
	24.06		34.72
	24.56		34.93
1895	23.24	1910	34.33
	21.44		34.20
	22.92		34.34
	25.19		34.56
	25.62		34.35
1920	26.93	1915	35.44
	27.98		39.29
	28.43		45.74
	29.42		50.81
	30.77		54.33
		1920	57.04

9. 以下所示 1913 至 1920 年之美國二數量生產指數，係選自(a)得氏(Day)與(b)斯圖瓦特氏(Stewart)之廣博研究中。用在貨幣數量說討論中所記錄之物價與流通之交易媒介，求 1913—1920 之兩個 R（通貨流通率）指數；並將此二指數與適所述資料中之相當指數(R)比較之。

年次	(A)	(B)
1913	100	100
4	98	100
5	105	111
6	111	116
7	114	123
8	113	124
9	106	119
1920	111	122

第五章　時間數列

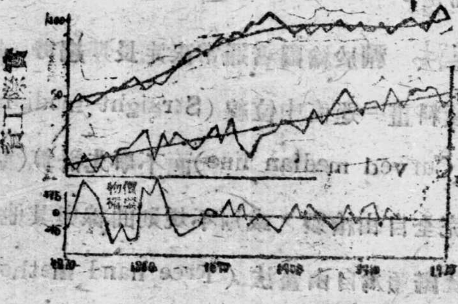
長期趨勢之性質　解釋諸指數之時間數列，通常需要決定其長期趨勢。所謂長期趨勢云者，即為諸指數之溯源數列(a derived Series of Index Numbers)，此數列追蹤一定項目之一般過程，但減少或消滅其變動之因素。吾人最好用圖示法以認識長期趨勢之重要性。觀察如此圖形，吾人將看出：長期趨勢或異於直線，或異於曲線。此長期趨勢之是否畫為直線或曲線，一部恃於資料之性質，另一部則視吾人研究之目的而定。

自由畫法　精於繪圖者通常決定長期趨勢，祗用繪圖法，經過其資料畫一逕直中位線(Straight median line)或曲形中位線(Curved median line)而不事先計算(註二十一)。此類工作完全自由繪製，或用不規則曲線與其他畫圖材料，但此二者統歸類為自由畫法(Free hand method)。此法可應用於多種圖形而皆感滿意；學者應常加練習，期能善用

〔註二十一〕　如果一長期趨勢需要根據幾何平均數而繪圖，此資料可繪於半對數紙上。

，在實際工作中，雖應用更精愼之方法，但長期趨勢之自由畫法之練習，亦大有匡助。彼能有助於某問題上需要之估價；苟無此法，則最佳之數學方法亦會錯誤應用。

吾人可以實際工資指數圖形爲長期趨勢自由畫法之例。下述之第六圖是也。在此題中，以在計算時，生活費被代替以批發物價，而引起不準確，故決定其長期趨勢，不能應用更準確之方法。如前所述，1890—1900 年間實際工資之高漲有過大失實之處，吾人對此懷疑，不爲無因。故繪此長期趨勢時，必須將此過甚之高漲，予以折扣。否則，彼即與通常原則：『在長期趨勢線之上下差數應均衡』有違也。



第六圖　長期趨勢與循環變動。上線係美國計時之實際工資指數（見第十表）與其長期趨勢；中間線係每人生產指數（見第十五表）與其長期趨勢；下線係批發物價之循環變動（見第九圖）。

半平均數法 經過一相當長之數列，畫一長期趨勢之直綫時，自由畫法可藉助於簡單之計算，而求其改進，數列之平均數可定繪於中間之縱綫上（縱坐標），然後，用觀察法，經過此點，畫一長期趨勢之直綫。正號與負號之差數必須相等。或者，更好的辦法，將此數列分爲相等之二部分，每一部分取一平均數。此二平均數各畫於各該半數列之中間綫綫上，經過此二點，引一長期趨勢直綫。如此數列所包含之項目爲奇數，中間項和時間單位可在兩部分中間而分開。第六圖所繪之每人生產之長期趨勢，卽用半平均數法也。在一長的數列中，用如是方法所求得之長期趨勢與由將來卽將討論之最小二乘方法所求者幾完全相同。

移動平均數法 在用數學方法所求出之長期趨勢中，最易爲人所領悟者或爲移動平均數法。移動平均數之計算程序，在原理上，殊爲簡單；但在實際計算上則常苦手續麻煩，卽使用機器，亦有此感。據此方法，數列中任何期間之長期趨勢之位置，其求得方法可將集中該期間之諸項目平均之卽得。在平均時，究竟包含若干項目（卽若干項目而一平均），必須根據資料之性質而決定。如此數列表現爲相當長之循環變動，卽取該期之項目而平均，此循環變動就成一平勻之

閒形。如吾人研究幾年來之每月資料，此每月資料中又具有季節變動時，則十二個月移動平均數法尙矣！（註二十二），

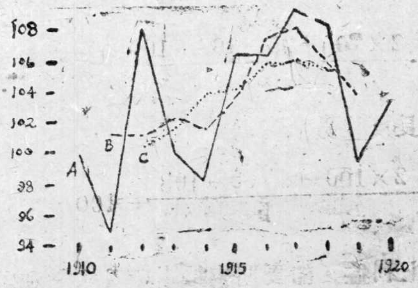
移動平均數之計算方法，可以下表解釋之：

年次	每人生產	三年之移動平均數	五年之移動平均數
1910	100		
1	95	101	
2	108	101	100
3	100	102	101
4	98	101	104
5	106	103	104
6	106	107	105
7	109	108	106
8	108	105	105
9	99	103	
1920	103		

解釋上表：三年移動平均數之第一數值（101），係將每人生產行中之第一，第二與第三之三項目平均而得（100，95與108相加而平均））。第二數值（101），係將每人生產行中之第二，第三及第四之三項目平均而得（即95，108與100相加而平均）。得數皆以整數表出之，並寫在與被平均三項目之

〔註二十二〕 在每次計算時，十二個月移動平均數集中在第六月與第七月之間。欲使如是所得之長期趨勢落於原來項目所落之同一縱線上，必須再用二個月移動平均數法以修正之。原來項目之參數可迅速而得。

中間地位，其餘可類推。五年移動平均數除一次將五年項目平均不同外，其計算程序皆與三年移動平均數法相同。在實際上，此工作可縮簡，即在找出第一組項目之總數後，藉此再求第二組之總數。其詳細方法爲：將『所欲包括之次一項』與『將去掉之一項』的差額加於第一組之總數上。如前五項之總數爲 501（其平均數爲100）；欲得從第二項至第六項之第二組的總數，則第六項(106)將加於第二組中，而第一項(100)將被去掉；換言之，此二項(第六項與第一項)之差數6將被加上。於是新的總數爲501十6，或 507（其平均數爲01)，其餘總數與其平均數之求法可類推。（註二十三）



〔註二十三〕 數學家有時欲用一種更複雜形式之移動平均數，稱爲累進之算術平均數。除用權數計算平均數外，餘悉與前所解釋之移動平均數相同。權數係從二項式定理而得，故爲理論分配曲線之次數。譬如，取五年之累進算術平均數時。利用如次之權數，即1：4：6：4：1，將五項之每組平均。同樣，七年之累進算術平均數，其權數則爲1：6：15：20：15：6：1。（參看Slichter：Elementary Mathematical Analysis,P,194.)

第七圖：移動平均數．A.1910—1920年每人生產
指數，B.每人生產指數之三年移動平均數
C.每人生產指數之五年移動平均數。

此二種移動平均數與根據其所計算出之指數，皆被繪於第七圖。吾人從此圖中可看出：移動平均數所包括之期間愈長久，則其長期趨勢將愈修勻。此方法亦有其缺點在。從一定項目數列所得出之移動平均數始終較其數列爲短，其次，移動平均數所包括之期間愈長久，則移動平均數愈簡短。然而，吾人在求平均數時可重複極端之項目，而補救在長期趨勢中所缺少之項目。譬如在上述之移動平均數中，求 1911 年之長期趨勢項目 (a trend item) 可用如下方法：

$$\frac{2\times100+95+108+100}{5}=101$$

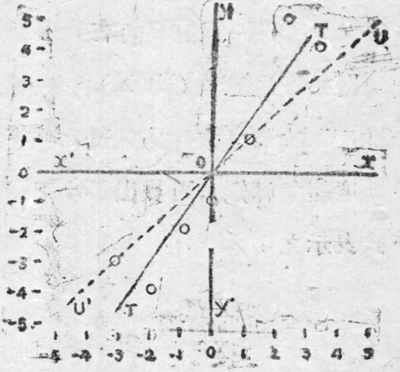
而 1910 年之長期趨勢項目爲：

$$\frac{2\times100+2\times95+108}{5}=100$$

此法有其數學上利益，卽長期趨勢諸項目之總和能等於原資料之總和——此種事實，可利用之以校正計算之差誤也。吾人亦可利用其以求現期諸指數數列之現在長期趨勢項。

最小二乘方線　假如一直線之長期趨勢，被應用於某一數列之上，最滿意之數學的長期趨勢線，厥爲最小二乘方線，(line of least Square) 此名詞之由來，蓋以原資料

中各項目與此綫之差數之平方，根據縱綫而測量，則永遠爲最小。吾人對於最小二乘方綫應完全瞭解；蓋其效用不僅爲一



第八圖：直線之長期趨勢　TT' 爲七點之最小二乘方線。　UU' 爲單位斜度線。

長期趨勢，且可以爲計算相關之主要方法的根據。今解釋之如下：

今設爲指數 Y（見下述）求一直綫之長期趨勢；且令 Y 之平均數等於零。此資料被繪於坐標紙上，如第八圖；X 與 Y 之尺度取相同之單位。諸項目(Y)之平均數令落於 X 軸上，其中間項畫於Y軸上。假如吾人認爲每一項目與X軸之距離代表對彼綫所施之力量，則此諸力量之總轉矩（Total moments）將以諸xy之總和表示之。此總數可與穿過同一坐標之線的轉矩總數而比較之；而且，其與X軸和Y軸在交點處構成四十五度角。（註二十四）如此之一直線，即被稱爲有一單位之斜度；換言之，即每一單位X向右升一單位，而Y亦隨之而變也。其斜度亦可用其角（UOX）之切綫等於1而表示之也。其諸XY之總和，當等於X之平方的總和。吾人比較原資料之轉矩與單位斜度綫之轉矩，可找出最小二乘方綫之斜度；此斜度可用下式表示之；

$$S = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$

此處：

S＝最小二乘方綫之斜度，或其角度之切綫

X＝與中間坐標有關之諸項目之位置•

Y＝題示之諸項目•

資料(Y)，其轉矩(XY)，單位斜度綫之轉矩（X^2）與所求出之最小二乘方綫，皆見下表：

〔註二十四〕 如果X與Y之尺度不同。則此角度將不同於是。

Y	X	X^2	XY	長期趨勢
—3	—3	9	9	—4.5
—4	—2	4	8	—3
—2	—1	1	2	—1.5
—1	0	0	0	0
1	1	1	1	1.5
5	2	4	10	3
4	3	9	12	4.5
A=O		28	)42	
			S=1.5	

最後一行，標題爲長期趨勢；據此繪圖，即能得出最小二乘方綫。此行之計算程序如次；在正號方向中，從中間縱坐標(O)算起，每一連續縱坐標即依次加一斜度(S=1.5)；在負號方向中，則每一連續縱坐標，即依次減一斜度。

此處Y之諸項平均數所以取零者，蓋爲簡便故；此種計算程序稍加修正，可應用於任何數値。惟與項目相呼應之時期或其他數目，不能被使用，而代替以集中數列中點之X尺度。於是，求出各數量之平均數；據此平均數，在正的方向中，每一連續縱坐標，加一斜度；在反的方向中，則每一連續縱坐標，即從此平均數中依次減一斜度。此法可依下例解釋之；彼與前例相同，惟平均數則爲100耳。Y之增加數値在≤XY中已不見，因其正負號之數値適相抵銷也。

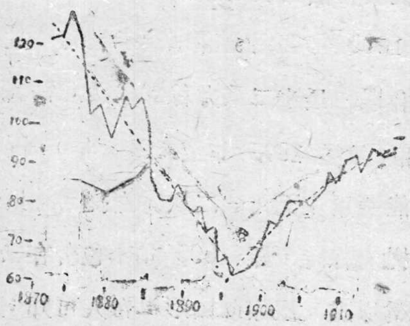
年度	Y	X	X^2	XY	長期趨勢
1900	97	—3	9	—291	95.5
1901	96	—2	4	—192	97
1902	98	—1	1	—98	98.5
1903	99	0	0	0	100(平均數)
1904	101	1	1	101	101.5
1905	105	2	4	210	103
1906	104	3	9	312	104.5
	7) 700		28	) 42	
	A=100			S=1.5	

吾人應注意下述：(1)，如縱坐標爲偶數，則Y軸必介於兩中間縱坐標之間，亦即在—0·5與0.5之間。橫綫上之正號方向諸數值（或尺度）將爲0.5,1.5,2.5等等，橫綫上之負號尺度則爲—0·5,—1·5,—2.5等等。(2)有時，S之數值（即斜度之數值）爲負的，此蓋表示最小二乘方線之向下斜度也。(3)最小二乘方線之位置，用與Y軸相合之時期表示之，此Y軸又假定其爲起點或原點；而Y之數值並以平均數與斜度表示之。在上述之一例中，原點爲1903年，而長期趨勢之公式則爲

$$Y = 100 + 1.5X \quad (\text{註三十五})$$

拋物線式之長期趨勢 曲線配合題目之廣博研究將使學者超過普通統計工作之範圍。吾人對此問題，不再深

對研究，惟用一簡單方法，以拋物線調整一曲線。



第九圖：美國批發物價指數(見第十表)與其長期趨勢：變爲金幣根據之1870—1880年間之指數

〔註二十五〕 曾有人提議：最小二乘方法可應用之以求物價指數（見1921年八月號之Quarterly Journal of Economics, 第 67 頁）。商品之銷售量可被視爲Y之數值，而畫於坐標紙上。所購買之單位數可被視爲X之值。從軸之交點向X與Y各值所決定之點所畫之底角切線即代表物價。商品之平均價可被視爲最小二乘方線之坡斜度；此坡斜度被X與Y之諸坐標值所決定。並以軸之交點爲原點（Y＝SX）。在此情形下，所有XY之值當皆爲正號的。爲各期之比較便利計，此法應用「金圓價值」爲數量之單位。此方法之有效與否，不無疑問；蓋以其所用物價之加權方法係於求平均數程序中而將其數量自乘方。有人對此方法辯護，謂最小二乘方之使用係根據差誤之理論（Theory of errors），惟差誤之理論只於決定諸數之平均數時而應用；此種辯護，殊難令人心折也。

調整一拋物線之方法，可應用美國勞動統計局 1896 至 1915年間之批發物價指數而解釋之，如第九圖是。此圖亦包含 1870 至 1895 年間用金幣來表示之同一批發物價指數；此指數被配合以一最小二乘方線。但於此吾人可容易看出：對於以下指數(即從 1895 年至 1910 年)，同樣之長期趨勢直線，即不能適用；而用一二次方之拋物線則較近似。

在配合拋物線時，雖 1895 年不包含在結果以內，但吾人仍以該年爲原點。觀察此圖形，吾人可知：如將此長期趨勢展至1895年，則該年之長期趨勢值將爲 64 。決定此長期趨勢之其他二點，亦可同樣得到，一點約在於數列之當中，另一點則在於數列之末端。吾人取 1905 年爲88 ($X=10$)而 1915 年爲 102($X=20$)。於是遂得X與Y之各坐標值如下：

如 $X=0$, 則 $Y=64$.
” $X=10$, ” $Y=88$
” $X=20$ ” $Y=102$

二次方拋物線之公式爲：

$$Y=a+bX+CX^2$$

如上述X與Y之坐標值當相繼代入此式中，吾人遂得以下結果：

$$64=a$$

$$88=a+10b+100c$$

$$102=a+20b+400c$$

解此三公式，得三常數之値如下：

$$a=64 \qquad b=2.9 \qquad C=-.05$$

將此諸數値，代入原來公式中，即得出所需要之長期趨勢公式：

$$Y=64+2.9X-.05X^2$$

從此公式中，代替以X之坐標値，即能求出長期趨勢中每一項目之數値。

因長期趨勢係用以爲測量變動之根據，故常需要計算原來資料與此長期趨勢綫之差數。在實際上，將長期趨勢中之各項目與在原來資料中之各相當項目，相減即可。如此長期趨勢綫繪得精確，則正負差數將相等；換言之，其總合即等於零也。惟使用拋物線，將發生此錯誤，蓋以決定曲線之原來諸點僅用觀察法而定繪故也。欲去此錯誤，需要一種修正，其法爲：求出各差數之總合，(ΣD) 再用總項數除之；加此結果$\left(\frac{\Sigma D}{N}\right)$於每一長期趨勢項目之上；並從每一差數中減此結果$\left(\frac{\Sigma D}{N}\right)$。在長期趨勢公式中，即對於a之數値僅加一修正數$\left(\frac{\Sigma D}{N}\right)$而已。然在相關工作中，修正數可用他法以求之，且顯非常容易，俟後討論之。吾人或用圖示法，或用計算

相關係數法，事前常須求出標準差。如用圖示法，差數則縮變爲標準差之倍數，而作爲一比較之單位。第十六表係表示適纔所討論之長期趨勢與修正數之求法，並將差數縮爲標準差之倍數。第十圖與第十一圖則表示物價循環變動與用相同方法所求之其他循環變動之比較。

在需要複曲線之處，可使用拋物線，而加 dX^3 或 eX^4 於公式之上。對於增加之每項，用觀察法可定繪一增加之點，如是所配合之長期趨勢更爲適宜。不過，此類公式之解法和應用則殊爲麻煩需時耳。但在實際工作時，學者可尋其簡捷之法，對原式加以修正而期適合其目的。吾人用簡單之實驗

第十六表　美國1896-1915年批發物價之長期趨勢及循環變動之求法

（根據勞動統計局指數）

長期趨勢之公式：$Y=64+2.9X-.05X^2$　原點：1895

修正後之公式：$Y=63.825+2.9X-.05X^2$

年次	物價指數	X	長期趨勢 Y	D	集中之D（即修正後之D）	D^2	循環變動 D/σ（註二十六）
1896	66	1	66.85	—.85	—.68	.4624	—.33
7	67	2	69.60	—2.60	—2.42	5.8564	—1.17
8	69	3	72.25	—3.25	—3.08	9.4864	—1.49
9	74	4	74.80	—.80	—.62	.3844	—.30
1900	80	5	77.25	2.75	—2.92	8.5264	1.41

第十六表 （續）

1	79	6	79.60	—.60	—.42	.1764		—.20
2	85	7	81.85	3.15	3.32	11.0224		1.60
3	85	8	84.00	1.00	1.18	1.3924		.57
4	86	9	86.05	—.05	.12	.1044		.06
5	85	10	88.00	—3.00	—2.82	7.9524		—1.36
6	88	11	89.85	—1.85	—1.68	2.8224		—.81
7	94	12	91.60	2.40	2.58	6.6564		1.25
8	91	13	93.25	—2.25	—2.08	4.3264		—1.00
9	97	14	94.80	2.20	2.38	5.6644		1.25
1910	99	15	96.25	2.75	2.92	8.5264		1.41
1	95	16	97.60	—2.60	—2.42	5.8564		—1.17
2	101	17	98.85	2.15	2.32	5.3824		1.12
3	100	18	100.00	0	.18	.0324		.09
4	100	19	101.05	—1.05	—.88	.7744		—.43
5	101	20	102.00	—1.00	—.82	.6724		—.40
			16.40	17.92		20(85.988		8.66
			—19.90	—17.92				—8.66
			20)—3.50	0				0

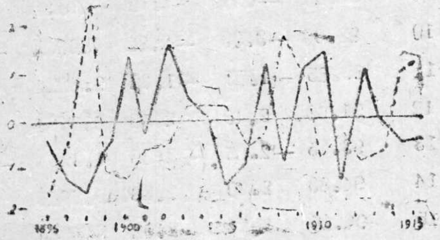
K=—.175

$\sigma^2=4.2994$

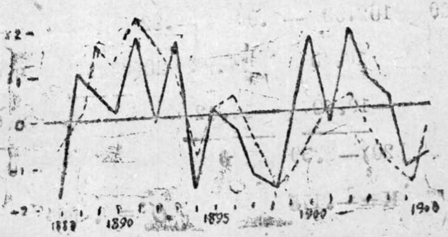
$\sigma=2.07$

〔註二十六〕 從平均數或長期趨勢所取之任何一羣差數，彼意在測量循環變動者，通常以循環變動表示之。彼無需變爲標準差之單位。有時，吾人不能發現完全之循環變動，但亦可用同樣之表示。

，可估計公式中之各項。原點之位置可隨意變化，以適合某種需要。如斜體英文字 f 形之複曲線，吾人可用公式中 X 之奇數方以求之，並取接近原來數列之中間處為原點。吾人



第十圖：批發物價（實線）與紐約洲監獄記錄（虛線）之循環變動。



第十一圖：美國批發物價（實線）與結婚率（虛線）之循環變動。

此二圖皆經過允許而轉載自 'The Quarterly Journal of the university of North Dakota' 1922 年一月號。

如稍加技巧，則亦可配合正弦之曲線(Sine Curve)與其他長期趨勢線（註二十七）。

分析之商業晴雨表 當每月資料用爲商業情況之指數或晴雨表時，吾人於長期趨勢中卻遇一較爲複雜之問題。因此類指數皆通常認爲商業活動之嚮導，故其解釋頗爲重要。其使用之困難蓋在於其所受影響之複雜性。爲分析便利計，吾人可將此類影響分爲：（1）季節變動(Seasonal variation)，普通由於氣候對工業之影響，如穀物變動與利率之增高是。(2) 循環變動，以數年爲一期（或一距離），蘊含工業之盛衰起伏；(3) 長期趨勢 (Secular trend) 或逐漸變動(gradual Change)，大多數皆由於逐漸增長之活動，如生產之增加是。其他影響，皆可歸納於上述三類之中；惟有些影

〔註二十七〕 在一指數數列之長期趨勢，依幾乎一定之比例，而爲增減時，可配合一指數曲綫（An exponential Curve）如下。（指數曲線之公式爲 $Y=ad^x$ ——譯者）先求出原來資料中各項之對數，將此諸對數繪於圖紙上，隨用半平均數法（Semi-average）或最小二乘方綫，構製一長期趨勢之直綫。從圖上察閱長期趨勢各項目；因其皆爲對數，必故須再找其眞數（卽利用對數表，找各對數之反對數Anti-log）。此諸數値卽所求長期趨勢之諸項目。在長的數列中，吾人可將原來諸項分爲組（如十年一計法），對於各組之平均數而配合曲線。

響必須多少被視爲偶然的；其究歸何類，則迄無定則耳！

季節變動之測量 分析每月商業盛衰狀況之最滿意的方法，第一步厥爲季節變動指數之計算，然後根據長期趨勢之資料指數中，逐月減去此季節變動指數。其結果，即爲循環變動之指數。據前所述，十二個月移動平均數法，有時假定：其所測量之資料係與季節變動不同。但如此消滅法（a method of elimination），其所消除之影響，在時間上，只限於一年。故欲準確地以數年爲期而測量季節變動，非藉助其他方法不可。第十七表所解釋者係此類方法中之最簡單方法，此法被視爲在一時期內有效之方法；其次，在此時期中之循環變動影響爲適中並平均分配於一長期趨勢直線上。

平均數法 第十七表之問題與解答，係求1909到1913之五年間利率之季節變動。每月利率，第一步被縱行與橫行而平均，以求每年平均數與每月平均數。此程序可被稱爲平均數法。

如利率在所研究之期間，每年皆無變動，吾人將每月平均數變爲其每年平均數之百分數已足。其結果即構成一季節變動指數。但其中如有長期活動，必須從一指數中以取消之。如吾人之研究期間，取一世紀（即百年）之四分之三或二

第十七表

美國1909-1913年間短期放款之每月平均利率與其季節變動

月	年次 1909	1910	1911	1912	1913	每月平均	長期趨勢	季節指數	D (%)
一月	4.5	4.8	4.3	4.0	5.0	4.52	4.702	96	—4
二月	3.7	4.5	4.0	3.7	5.0	4.18	4.721	89	—11
三月	3.7	4.7	4.0	4.1	5.6	4.42	4.740	93	—7
四月	3.8	4.8	3.6	4.4	5.7	4.46	4.759	94	—6
五月	3.8	4.8	3.6	4.1	5.4	4.34	4.778	91	—9
六月	3.9	4.9	3.6	4.0	5.9	4.46	4.797	93	—7
七月	3.6	5.2	3.9	4.5	6.0	4.64	4.816	97	—3
八月	4.4	5.7	4.4	5.2	6.0	5.14	4.835	106	6
九月	4.6	5.8	4.5	5.8	6.0	5.34	4.854	110	10
十月	5.4	5.8	4.5	6.0	5.8	5.50	4.873	113	13
十一月	5.5	5.7	4.0	6.0	5.7	5.38	4.892	110	10
十二月	5.7	4.5	4.5	6.0	5.8	5.30	4.911	108	8
平均	4.38	5.10	4.07	4.82	5.66	4.807	4.807	100	0

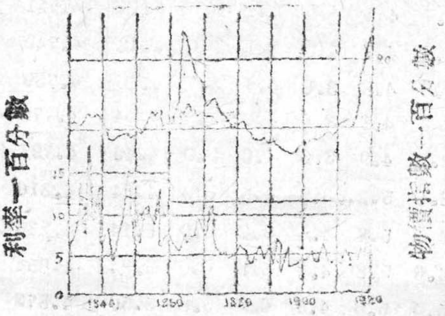
長期趨勢——最小二乘方線

年次	每年平均	X	X^2	轉矩
1909	4.38	—2	4	—8.76
1910	5.10	—1	1	—5.10
1911	4.07	0	0	0
1912	4.82	1	1	4.82
1913	5.66	2	4	11.32
			10	2.28

S=2.28÷10=.228(每年)

S÷12=.019(每月)

勢之一（即七十五年或五十年），則將發現一低降之利率長期趨勢，如第十二圖是。但此處所研究之五年期間，適爲一例外。吾人用最小二乘方綫之方法，可得每月之斜度爲+0。019。應用此斜度於每月平均數之上，可構造一每年之長期趨勢，以六月與七月二項目之中間數爲原點。在此，吾人應



第十二圖：美國之商標據平均利率（下綫）與批發物價指數（上綫）之比較。

選自紐約準備金銀行之每月評論(Monthly Review)

注意者：斜度之一半，必須加於平均數之上，以求得七月之長期趨勢項；同時，斜度之一半，必須從平均數中減去，以求得六月之長期趨勢項。求其餘之長期趨勢項，悉如前述而應用斜度焉。

至此，或由於以下事實而引起混淆不清之難題；即斜度

從五年之每年平均數算起，但應用於與每月資料比較之長期趨勢構製上。吾人於此所能顯然看到者：在此情形中，從每月平均數所求得之斜度，必受季節變動之影響。吾人欲保留此種影響而取消長期趨勢之影響。吾人從每月資料中繼續取六十項目，當亦能得到長期趨勢，但此方法需時麻煩，殊不必需。故吾人可從五年之每年平均數而計算此長期趨勢，並將其應用於一綫之構造上；此綫之構造，其意厥在從每月平均數中消去長期趨勢之影響也。用長期趨勢依次除每月平均數，即完成此種消滅長期趨勢影響之程序。如有必要，則將其商書化爲其共通平均數（即諸商數之平均數）之百分數。其結果即爲一季節變動之指數，從此可直接算出每月百分數之離中差也。（註二十八）

〔註二十八〕　另外一種平均數法，在理論上較爲可取，惟需要更繁重之計算；其法可簡述如下：第一步先求出經過各年之數列中的每月資料的十二個月移動平均數。次用兩個月的移動平均數，以修正之，使其與原來數列之坐標相適合。吾人遂得：原來每月項目對各該修正之移動平均數之比率。諸一月份中之比率之中位數，即作爲一月之季節變動指數，其他月份之指數，亦用同法求得之。然後將其結果變爲其共通平均數之百分數。（參考 Jordan：Business Forecasing, p·212.）

季節變動指數之應用 季節變動指數之應用，前曾提及，今敍述如次。整個研究期間之長期趨勢被求出——在此情形中，所求出之最小二乘方綫可伸展之——而其資料，（即每月之項目）依次皆變爲長期趨勢之百分數。從如此所求出之每月項減去各該月之季節變動指數。餘數即假定其作爲測量循環變動者，並可被視爲距離橫軸上下之差數而被繪圖。吾人加以謹慎，可將季節變動指數應用於其他年度（即非季節變動指數計算所根據之年度）；惟至此吾人所不應忽略者，即：季節變動指數之計算所根據之經常年度愈長，（多），則其應用於其他年度之上亦愈安全也。

環比法 波遜斯教授（Professor Perosns）曾發明一較複雜而更準確之測量季節變動法；此法最初之應用見於早期之經濟統計評論（the R view of Economric Statistics）上。吾人可用比較簡單之形式，將此法在第十七表A解釋之。此十七表A蓋根據第十七表之資料也。簡述之，此法主要程序即求所謂『環比』（Link—relatives）也；換言之，亦即求每月爲前一月之百分數也。從每月數列中，選一中位數環比，並以每月平均數之形式而表列之（註二十九）。從十二

起始，作爲基期（即取十二月爲 100%），各平均數繼續相乘，結果產生一模範年中 (Atypical year) 從一月到十二月之一指數數列。如最後之第十二月項（即第十一月與第十二月數之相乘積 ）不等於 100% ，而與基期之十二月不一致則個中差誤顯受長期趨勢之影響。如此種差數程度不大，可將其攤分於一年中；換言之，即從一月之指數中，減去差誤數之十二分之一，二月之指數減去差誤數十二分之二，餘類推（註三十）其結果即爲修正之指數。各修正項然後再變爲數列平均數之百分數。在實際計算時，小數可算至一位以上，而不可如表所示。

此法之優點在於以下事實：吾人如取環比與運用各月之中位數作每月之平均數，則循環變動與偶然變動之影響，皆變爲最小。長期趨勢之影響，亦用修正程序而消去。如此所求得之指數在美國聯邦準備金制度建立以前之期間，應爲準

〔註二十九〕欲得最佳之結果，中位數應根據比較此處更多之年次。

〔註三十〕 更準確之方法，即用幾何均數法攤分此差誤數；即用最終十二月指數（寫成小數）之十二次方根除一月之指數；用最終十二月指數之十二次方根之平方除二月之指數；用最終十二月指數之十二次方根之三方，除三月之指數，餘類推。

穩。蓋以當時之季節變動之影響已減少也。（註三十一）

第十七表A

每月利率之環比（參看第十七表）

月	年					每月平均（中位數）	指數	修正後之指數	集中之指數	D (%)
	1909	1910	1911	1912	1913					
一月	84	84	96	89	88	89	89	88	90	—4
二月	82	94	93	93	100	93	93	81	89	—11
三月	100	104	100	111	112	104	86	84	91	—9
四月	103	102	90	107	102	102	88	85	92	—8
五月	100	100	100	93	95	100	88	84	91	—9
六月	103	102	100	98	109	102	90	85	93	—7
七月	92	106	103	112	102	106	95	93	98	—2
八月	122	110	113	115	100	113	107	101	110	10
九月	105	102	102	112	100	102	109	103	112	12
十月	117	100	100	103	97	100	109	102	111	11
十一月	102	98	89	100	98	98	107	100	108	8
十二月	104	79	112	100	102	102	109	100	109	9

* 所謂集中之指數者，即爲十二個月平均數之百分數是也。

商業循環 美國經濟統計評論在適所論及之分析中，

〔註三十一〕學者如欲更深探討利率之季節變動問題，可參考甘末爾（E. W. Kemmerer）所著『美國貨幣與資本相對需要之季節變動』（1910年，全國貨幣委員會）。並參閱：1922年二月一日，紐約聯邦準備金銀行之每月評論。

於通用商業指數之循環變動。已作一廣博之研究，彼用縮討論適用描述之程序，測量季節變動之影響後，即根據最小二乘方綫而決定其循環變動。然後將十二個主要商業指數合成三個混合指數，以之測量投機活動，商業活動及銀行信用之緊縮情形。1903年到 1913 年期間之此三種合成指數圖，今複製於此。（第十三圖）此圖很清楚地表示：商業循環之一般階段，從投機活動之活躍（此表示從恐慌期間之覺醒——復興），中經增大生產時期，而轉入銀行信用緊縮時期；此銀行信用緊縮，即另一恐慌之先聲。用以構製此圖形之各種商業指數數列在解釋中而表示之。在此吾人應敍及者，紐約銀行放款指出循環投機方面的最高點，紐約以外之銀行放款則與商業行爲較爲接近。爲實際目的計，商業循環一般狀況之測量必須輔以那些表示特別工業地位的諸指數，如所顯示之商品生產與現存是。紐約聯邦準備金銀行與其他機關，皆已適合此種需要矣！

有數種在性質上多心理成分而少經濟成分之現象，其變動趨勢表示與商業循環有相爲符合之情形；惟其相一致的程度有大，有小而已。漢生教授（Prof. A. H. Hansen）近曾用統計表示出：在1898年以前，物價之長期趨勢是下降的，工

人之罷工隨恐慌之程度而增加；惟自 1893 年以後，工人之罷工則隨經濟之繁榮而增加（見1921年十二月號美國經濟評論「Amercian Economic Review, PP.617—621）。巴布生氏(Mr. Roger Babson)亦會研究出教堂增加與商業循環之關係；即愈在恐慌期間，宗教之行為愈活動。失業，失敗，自殺與罪惡等等亦常因恐慌程度之加深而增加。反之，移居，結婚率，浪費等則隨經濟之繁榮而增加。（參攷本書第十圖與第十一圖）。

吾人如取統計方法應用於預測商業循環變動之一例，可簡述每年晴雨表與商業指數綫（Anualist Barometer and Business Index line）焉。此指數以圖表形式並加說明而每週發表於『年歷記者』(The Annalist)報之上；此為紐約最著名之金融報紙。此指數蓋取材於前述之經濟統計評論（Review of Economic Statistics）。彼係商品價格，利率，銑鐵生產，紐約銀行清算，紐約以外之銀行清算之離中差(deviations from Normal)的加權平均數的倒數(The reciprocal of a Weighted arerage)。因此類資料數列，當其直接編製時，係測量商業循環之後期情況，故其凋敝低降在股票漲價之前，並能預測股票之漲價，而肇第二個循環之端。吾人

如取此合併數列之離中差的倒數時，則可直接爲此預測，而不經相反之方向也。比較預測之指數與以前各年之股票變動，則以前各年之變動必其業成所決定之以後諸年情況之一預測也。此指數之編製與使用之詳細敍述，可見於1921年三月二十八日及十月二十四日之『年歷記者】新聞紙中。

第十三圖：1903年到14年一般商業情況之指數

A. 投機：（此處所謂投機、蓋指證券之買賣也——譯者）紐約銀行清算，工業股票之平均價，鐵路股票之平均價與鐵路債券之平均價。

B. 商業：紐約以外美國其他各地之銀行清算，白蘭特斯特(Bradstreet)批發物價指數，美國勞動統計局之批發物價指數及銑鐵生產指數。

C. 金融：紐約城60到90天及4到6個月的商業票據之利率，紐約城清算銀行之放款與存款。

（此圖經主編者允許，由經濟統計評論轉載）

學者如更欲深究商業循環統計，可參看前所述及之經濟統計評論所刊佈之資料。此外，尤應熟讀米其爾（Wesley G. Mitchell)名著：商業循環(Business Cycles) 及卓爾丹最近所著之商業預測 (Jordan : Business Forecasting)。學者如欲研究循環之原因，應參閱莫爾 (H.L. Moore)之有興趣而頗專門化之著作（參攷其經濟循環及經濟學雜誌季刊，1921年二月號，八月號及十月號各期）。莫爾教授曾發現出：雨量之多寡循環變動與商業之循環變動間，有某種關係存焉；每個循環期間，約各爲八年。雨量豐富之年普通亦即穀物豐收之年，而有降低一般物價之趨勢；隨即繼以旱年，而物價水準則有增高之趨勢。此種相關情形，在英國之物價似比較美國更爲顯然，氣候循環在某幾國家中，表現爲同期之象，而與晴雨氣壓循環有關，後者或有其天文上之原因也。但以此問題殊有興趣而在理論上又極有價值，其所顯示之相關以太不規則，故無多大之實際價值也。

參　攷　書

Babson, Roger W. Business Barometers

Davies, G.R.: "Social Aspects of the Business Cycle
Quarterly Journal of the University of North
Dakota. January, 1922

Hurlin, Ralph G.: "The Long-time Trend of prices in-the United States'' The Annalist, July 4,1924.

Jordan, D F ; Business Forecasting

Kemmerer, E.W. ; High Prices and Deflation

Mitchell. Wesley C. : Business Cycles

Moore, Henry L : Economic Cycls ; Their Law and Cause

Peddle, John B : The Constuction of Graphical Charts, Chapter VI.

Persons, W.W : "Construction of a Business Barometer Based upon Annual Data'' American Economic Review, December. 1916. PP. 739—769.

Piatt, Andrew A : National Monetary Commission

Tingley, Richard H : "Anothev Yardstick of Banking Conditions'' The Annalist, Nobember 28,1921. P511.

練習題

1. 將 1870 年至 1920 年之麥價與麥之生產（見本書第十四表及第十四表A ）繪圖，並用自由畫法，對於每一數列，各畫一長期趨勢。（或長期趨勢綫）

2. 利用第一題所述方法及第十四表與第十四表A 之資料，畫穀之生產與穀價之長期趨勢綫。

3. 將 1870 年至 1920 年，穀物生產數量指數（見

本書第十五表）繪圖，並用觀察法，引一直綫形之長期趨勢。

4. 根據第三題資料，用半平均數法，畫一長期趨勢曲線（或一直綫形之長期趨勢）。

5. 將 1890 年至1918年每人生產額(Per Capita production)，求出五年移動平均數。將所得結果繪於17"X22"尺寸交叉紙上，(Cross section Paper)在此紙上，並畫一長期趨勢；然後由圖測量各移出平均數與此長期趨勢之差。

6. 將前題所得之差數，繪於橫軸上。求出平均差(The average deviation)，並在圖上，指出正差與負差。

7. 計算以下物價指數之長期趨勢直線(最小二乘方綫）並繪圖。

年次	價格（三種物品）
1897	85
1898	70
1899	90
1900	130
1901	125

8. 根據下述之銑鐵價格與生產資料，求出每年之長期趨勢線直（最小二乘方線）：

銑鉄之生產與價格

（生產之單位1000噸）

月份	1909		1910		1911		1912		1913	
	噸	圓	噸	圓	噸	圓	噸	圓	噸	圓
一月	1,707	16.25	2,608	17.25	1,759	14.25	2,057	12.75	2,795	16.95
二月	1,707	16.13	2,397	17.06	1,794	14.25	2,100	13.31	2,586	16.69
三月	1,862	15.05	2,617	16.30	2,188	14.25	2,405	13.50	2,763	16.31
四月	1,738	14.25	2,483	15.37	2,065	14.25	2,375	13.75	2,752	15.65
五月	1,833	14.50	2,390	15.00	1,803	13.95	2,572	14.15	2,822	14.94
六月	1,930	14.70	2,265	14.85	1,787	13.44	2,440	14.25	2,628	14.06
七月	2,103	15.75	2,148	14.75	1,793	13.25	2,410	14.70	2,560	13.75
八月	2,248	16.38	2,106	14.31	1,926	13.45	2,512	15.06	2,543	14.06
九月	2,385	17.35	2,056	14.25	1,977	13.31	2,463	15.87	2,505	14.52
十月	2,599	17.88	2,093	14.25	2,102	13.25	2,689	16.50	2,546	14.36
十一月	2,547	17.75	1,909	14.25	1,909	13.20	2,630	17.25	2,233	13.87
十二月	2,635	17.45	1,777	14.25	2,043	13.19	2,782	17.[illegible]5	1,983	19.95
總計	25,410		26,855		23,329		29,383		30,722	
平均		16.12		15.16		13.67		14.93		14.90

9. 根據第十五表 1870 年至 1919 美國每人生產額之資料，求出每十年之平均指數。用所求得之五年平均數，繪製一最小二乘方線。將原來資料與所求出之長期趨勢線

圖。

10. 求出1870年至1914年美國鐵與鋼之五年平均生產指數（見第十四表），將此諸平均數繪圖，並用一條二次方之拋物線配合之。

11. 根據第137頁第十七表之季節變動指數與資料，求出1909年到1913年之利率循環指數，並將其繪圖。

12. 根據下述資料，試用

（A）平均數法與

（B）環比法

求出商品出口之季節變動指數：

美國1909年至1913年之商品出口

（單位百萬圓）

	1909	1910	1911	1912	1913
一　月…　…　…　…　…	157	144	197	202	227
二　月…　…　…　…　…	126	125	176	199	194
三　月…　…　…　…　…	139	144	162	205	187
四　月…　…　…　…　…	125	133	153	179	200
五　月…　…　…　…　…	123	134	153	175	[illegible]
六　月…　…　…　…　…	117	123	142	138	163
七　月…　…　…　…　…	109	115	128	149	161
八　月…　…　…　…　…	110	135	144	168	188
九　月…　…　…　…　…	154	169	196	200	218
十　月…　…　…　…　…	201	208	210	255	272
十一月…　…　…　…　…	194	207	202	278	[illegible]
十二月…　…　…　…　…	172	229	225	250	233

（1908年十二月爲170）

13. 下表所示美國 1909 年至 1913 每月一日之麥價資料，係選自農業部所出版之年鑑中。試用環比法求出季節變動指數：

	1909	1910	1911	1912	1913
一　月一日	93.5	103.4	88.6	88.0	76.2
二　月一日	95.2	105.0	89.8	90.4	79.9
三　月一日	103.9	105.1	85.4	90.7	80.6
四　月一日	107.0	104.5	83.8	92.5	79.1
五　月一日	115.9	99.9	84.6	99.7	80.9
六　月一日	123.5	97.6	86.3	102.8	82.7
七　月一日	120.8	95.3	84.3	99.0	81.4
八　月一日	107.1	98.9	82.7	89.7	77.1
九　月一日	95.2	95.8	84.8	85.8	77.1
十　月一日	94.6	93.7	88.4	83.4	77.9
十一月一日	99.9	90.5	91.5	83.8	77.0
十二月一日	98.6	88.3	87.4	76.0	79.9

（1908年十二月一日爲92.2）

（單位每桶若干分）

14。根據下述 1969 至 1918 年美國麥價（每桶若干分(，用平均數法，求出一季節變動指數：

每年平均數		每月平均數	
1909	101.3	一 月一日	109.4
1910	96.5	二 月一日	115.2
1	86.9	三 月一日	115.2
2	87.4	四 月一日	116.4
3	78.4	五 月一日	125.6
4	88.4	六 月一日	126.0
5	105.2	七 月一日	117.7
9	125.9	八 月一日	117.9
7	200.8	九 月一日	117.4
1918	204.3	十 月一日	116.5
		十一月一日	119.7
		十二月一日	118.6

15. 利用第十三題資料，根據最小二乘方線而測量，試求出 1909 年到 1913 年之麥價循環變動，並將其繪圖。

16. 從金融雜誌與其他來源中，尋求近期中之每月與每週之物價。將所得資料繪圖並繪製長期趨勢。根據這些指數與其他可用之資料，在承認有季節變動之前提下，試作一最近期間之商情預測。

第六章　相關

相關之意義　商業循環變動之研究引起彼此關係之測量與分類問題。此類關係可以各種不同之形式與程度而被發現之。譬如，建築許可證及銑鐵生產之循環變動，即有密切之關係存焉。其次，股票價格與商品價格之變動，亦形成相似之波動，但後者則較遲數月耳。反之，商品價格之變動與商業盛衰之消長，則表示背道而馳之相關——此起彼伏；彼伏此起。所有如此之兩種資料的關係，即被稱爲相關。當兩個循環變動，表示一致時，其相關即稱爲正的相關，兩個循環變動不相吻合時，即爲負的相關。在兩個循環變動不在同時變動者，後者即表示一定期間之『遲滯』或『落後』（註三十二）。相關含有基本關係之概念：一個現象影響另一現象，或爲另一現象所影響；或兩個現象同受一種因素之影響。此種原理並不限於時間數列。譬如，吾人亦可比較某一公司之收益與其宣傳能力間之關係。不過，無論在何種情形下，其原理固終無二致，而所用之方法亦完全相同。

繪圖法　吾人研究幾種現象之相關，通常總須先[illegible]何

精密之方法，而用前所述之繪製循環變動圖亦足。兩個時間數列，縮變爲標準差之循環變動並繪於相等的橫線尺度上；將其重疊而比較之，即可得有良好之結果。欲增加此比較之效率，可置圖於透明之物體上。前後移動此重疊的循環變動圖，即可準確決定某一循環變動之落後期間。其相關，或爲正，或爲負，或高，或低，或適中；而此兩種現象是否有落後者，或一致；亦可決定之也。經濟統計評論研究1903到1914年間二十四個商業指數數列之相關時，即採用斯法也。

同時差距法 (Method of Concurrent Deviations)——一般人通常希望以數學方法，準確地測量相關。當相關資料用以維護某一學說時，此更爲重要也。欲得精確之結果，吾人

〔註三十二〕 所謂『遲滯』或『落後』（lag）亦常用以表示：一種數列較另一數列之較小的變動程度。譬如，零售物價之變動常較遲於批發物價，此種變動之落後情形，時間未必若何之長久，而其程度或甚大。惟在計算相關時，只將時間一因素算入，至其程度之大小則無與焉。在有『遲滯』或『落後』情形之資料中，落後較晚之數列統被視爲向後移動延遲之時間，然後吾人再比較其相當項。惟落後時間之長度，殊難決定，必須估計之，相關即係根據此種估計而計算。在最顯著相關所求得之『延遲時間』，吾人即假定其爲準確者。吾人決定此『遲滯』或『延遲』期間時，當注意兩數列之原因關係也。

姑藉助於用於生物統計之數學方法焉。

吾人爲介紹測量相關之數學方法，姑取一簡單之公式；比較短期變動時，選用此式最佳。此種公式即所謂『同時差距法』之顯示也。吾人可以之應用於美國實際工資與每人生產短期變動之比較。吾人藉助於兩個數列之圖解，最易決定此種變動（參考第六圖）。譬如在任何一年內，其線做成一拱角形，（Λ）則此變動在指數上被記爲正號；（＋）；如此角度成V字形，，則記以負號（一）。如果不成角度，該年表示爲中立的，即爲零年（O）。有時，從圖上不易決定角度究屬何類；遇此問題，必須再向原資料中求解決也。

在兩個數列的差數（或差距 deviations）皆被記錄後，然後將各差數逐項交叉(across)比較之。在某一年中，如兩種指數皆表示正的變動，即認爲此二[illegible]動係一致的；如一正一負，則表示此二種變動係不一致的。在某一年中之兩種變動或一種變動如係 O，則各加一半於一致與不一致之上（One half is added to both the agreements and disagreements)。當相加手續完成後，所得到的兩指數中之較大者即表示同時差距數 (the Number of Concurrences)，在公式中以C 代表之。用此公式所求得之係數，其爲正爲負皆決定

於變動之共同性(the Nature of Concurrences)。如其一致，係數之符號即爲正的；不一致，係數之符號即爲負的。如此測量之相關(R)，其公式如下：

$$R = \pm\sqrt{\frac{2C-N}{N}}$$

在前所述及工資與生產指數中，不同之總數爲33.5，而比較數則爲49。故此公式變爲：

$$R = -\sqrt{\frac{67-49}{49}} = -.61.$$

此公式與下述之公式頗多相似，故其來源，無關緊要。係數之重要性亦將於下節見之也。

皮爾生法 (The Pearson Method) 吾人現在討論應用於直線相關之最滿意之方法；即所謂皮爾生相關係數（"r"）是也。所謂直線相關者，即將兩種現象畫圖，則其逼近爲直線，而非曲線。此種理論並不及於分開的兩數列之長期趨勢。而祇應用於『以x和y畫圖之兩種循環變動』所構成之長期趨勢。欲解釋此方法，最好用縮變爲標準差單位之兩種循環變動或差數。以下一表係給出如此之二數列；並示學者

求此二數列相關之程序。兩種循環變動再被當作坐標而畫圖；圖見第159頁第十四圖。

物價(X)與就業狀況(Y)之相關

1920年1月至1921年1月間之

循環變動，單位爲標準差

	X	Y	X^2	XY
	.75	.59	.5625	.4425
	.94	.85	.8836	.7990
	.91	.51	.8281	.4641
	.88	1.10	.7744	.9680
	.89	.68	.7921	.6052
	.57	.51	.3249	.2907
	.37	.34	.1369	.1258
	.18	.42	.0324	.0756
	—.14	—.09	.0196	.0126
	—.53	—.34	.2809	.1802
	—.98	—.59	.9604	.5782
	—1.74	—1.27	3.0276	2.2098
	—2.10	—2.71	4.4100	5.6910
總計	O	O	13.0384	12.4427

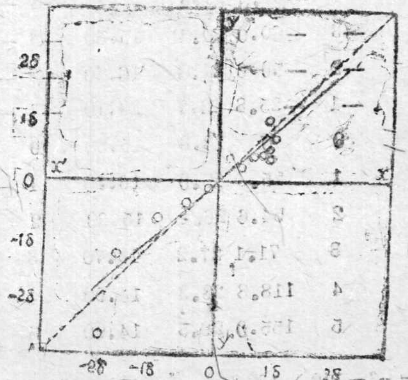
$$r = \frac{12.4427}{13.0334} = .96$$

因兩種數列所用之單位，皆係標準差，故以自乘方之循環變動(the Cycles squared) 測量，兩軸上之伸展長度必須相等。如一數列中之每一差數（或差距）必伴以另一數列中之相等差數，則此諸點被繪圖時，必須落於一對角線上；此對角線從左到右而向上行，且成一 45 度角。如正號差數之發生，必伴以相等之負號差數，則諸點將落於『從左到右，而向下行且成一 45 度角』之對角線上。在第一種情形下，如經過諸點畫一最小二乘方線，必具有 $+1$ 之斜度 (Slope)，而第二種情形，則有 -1 之斜度。如將此諸點故意畫於二軸上之某一地點，則得一中立之結果也。（ 即非 -1，亦非 $+1$，而爲零）最小二乘方線之斜度（在 x 軸上，其角度之切線）故被視爲相關之量度。其基本公式爲：

$$r = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$

在普通工作中，欲測量循環變動，必須求出每一數列之長期趨勢。如差數係從每一數列之平均數算起，則此二線之

一般方向及形狀將是相反的。此蓋等於假定以一橫的長期趨勢線作爲測量之基礎。在某種情形下，則需要如此之比較。不過，普通則以：(a) 用消除循環變動法測量兩個長期趨勢或(c) 從長期趨勢中，求出循環變動爲宜。就此二者比較之，後者爲人所習用，蓋以二循環變動之比較常寓有濃厚之興趣故也。



第十四圖：以各該數列之標準差爲單位所表示之物價循環變動(X)與就業狀況循環變動之相關；最小乘方線（實線）及一斜度線（虛線）圖。

從需要求出長期趨勢之資料，計算相關係數，可以第十八表解釋之。

第十八表

美國年1903至1913年每年銑鐵產額及其平均價之相關（從最小二乘方線所測量之循環變動）

年次	生產額（百萬噸）	X	XY	長期趨勢	價格（每噸）	X	XY	長期趨勢
1903	18.0	—5	—90.0	18.2	$17.10	—5	—85.5	16.8
4	16.5	—4	—66.0	19.3	12.70	—4	—50.8	16.6
5	23.0	—3	—69.0	20.4	15.60	—3	—46.8	16.4
6	25.3	—2	—50.6	21.6	16.70	—2	—33.4	16.3
7	25.8	—1	—25.8	22.7	23.10	—1	—23.1	16.1
8	15.9	0	0	23.8	15.50	0	0	16.0
9	25.8	1	25.8	25.0	16.10	1	16.1	15.8
1910	27.3	2	54.6	26.1	15.20	2	30.4	15.6
1	23.7	3	71.1	27.2	13.70	3	41.1	15.5
2	29.7	4	118.8	28.3	14.90	4	59.6	15.3
3	31.0	5	155.0	29.5	14.90	5	74.5	15.2

262.0　$\Sigma x^2=110$) 123.9　　175.50 $\Sigma x'=110$) -17.9

A=23.8　　S=1.13　　A=16.0　　S=.16

* 如果用一方法找出循環變動，彼稍不能使之集中，此時則無需加以修正。求標準差時，應用簡便法而求其修正數（根據不正確平均數所發生之修正數）。Σ xY 亦可加以修正，如第十九表所示。求長期趨勢所得之xy乘積與求相關係數時所得之xy乘積不同，學者應予以謹審之區別焉。今爲簡便計，後者用小寫字母代表之。

第十八表（續）

年次	生產之循環變動 X	X^2	價格之循環變動 Y	Y^2	XY
1903	—.2	.04	.3	.09	—.06
4	—2.8	7.84	—3.9	15.21	10.92
5	2.6	6.76	—.8	.64	—2.08
6	3.7	13.69	.4	.16	1.48
7	3.1	9.61	7.0	49.00	21.70
8	—7.9	62.41	—.5	.25	3.95
9	.8	.64	.3	.09	.24
1910	1.2	1.44	—.4	.16	—.48
1	—3.5	12.25	—1.8	3.24	6.30
2	1.4	1.96	—.4	.16	—.56
3	1.5	2.25	—.3	.09	—.45
	14.3	11) 118.89	8.0	11) 69.09	40.96
	—14.4	$\sigma^2=10.808$ $\sigma=3.29$	—8.1	$\sigma^2=6.281$ $\sigma=2.51$	

$$r=\frac{\Sigma XY}{N\sigma_1\sigma_2}=\frac{40.96}{11\times3.29\times2.51}=.45$$

$$p.E=\frac{.6745(1-r^2)}{\sqrt{N}}=\frac{.6745(1-.20)}{3.32}=.16$$

求長期趨勢的程序，前已述及；故此表中之計算工作大部皆已自加說明，而極易爲人所瞭解。不過，在此表中並未用標準差爲單位，以表示循環變動；從頭到尾，皆係用原來

之單位。惟事實上，將標準差一（σ_1）及標準差二（σ_2）代入求相關係數（r）之公式之分母中，蓋已將其單位變爲標準差之單位矣。但必須用一數量代替 ΣX^2，此（即ΣX^2）在適所述之公式中，亦用標準差而表示之也。所需要之代替數即N吾人如回憶在標準差數列中 $\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}}=\sigma=1$，即可瞭然矣。所以，$\Sigma X^2$必須等於N。應用於前述相關問題之最小二乘方公式可變爲皮爾生相關公式，如次：

$$r=\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$ （X與Y皆用其標準差之單位而表示之）

$$=\frac{\Sigma XY}{N\sigma_1\sigma_2}$$ （在此式中，X與Y皆用原來之單位而表示之）

$$=\frac{\Sigma XY}{\sqrt{\Sigma X^2\Sigma Y^2}}$$ （$N\sigma_1\sigma_2$可變爲$\sqrt{\Sigma X^2\Sigma Y^2}$

（註三十三）

機誤 吾人可看出：第十八表前一部只記載求兩個數列長期趨勢（最小二乘方線）之程序。此種數目字之正確性，殊成疑問。表中後一部份所示之生產與價格之循環變動，係用通常所習用之方法；即從原來數列之相當項減去長期趨勢項。然後再求各循環變動數列中之標準差與XY之總和。於是再應用皮爾生公式，求出相關係數爲 .45（r）。吾人覺

此結果，應當再加上所謂之『機誤』(Probable error)；其符號代表爲P.E.；此處之所謂差誤(error)，係於在最小二乘方理論中所闡明，只爲偏離，分岐之意。機誤公式蓋表示從•45相關係數中之四分位差；而此四分位差則係受機會定律之影響也。故機誤之意義即相關係數價值(r)之差誤機會的範圍；吾人因是可用其以測驗相關程度之大小。根據吾人之經驗，過去統計學家假定：如機誤程度之高，等於相關係數

〔註三十三〕根據標準差之定義

$$\sigma_1^2=\frac{\Sigma X^2}{N}\text{與}\sigma_2^2=\frac{\Sigma Y^2}{N}\text{即}$$

$$\sigma_1=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}}\text{，}\sigma_2=\sqrt{\frac{\Sigma Y^2}{N}}$$

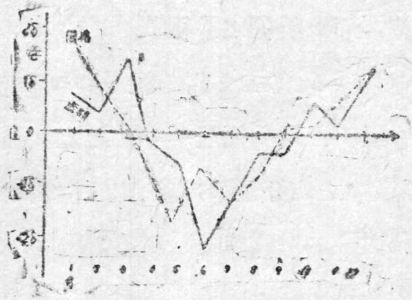
$$\sigma_1\times\sigma_2=\sqrt{\frac{\Sigma X^2.\Sigma y^2}{N^2}}$$

$$=\frac{1}{N}\sqrt{\Sigma X^2.\Sigma Y^2}$$

$$\therefore N\sigma_1\sigma_2=N\times\frac{1}{N}\sqrt{\Sigma X^2.\Sigma Y^2}$$

$$=\sqrt{\Sigma X^2.MY^2}$$

譯者自註

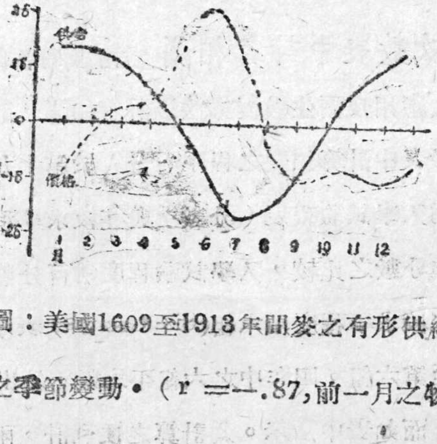


第十五圖：美國1908年銑鐵生產與價格之季節變動
單位標準差，從最小二乘方線所測量(r=·68)

之三分之一，則此相關頗不可靠；假如機誤尚不足相關係數之五分之一，則相關之表示殊爲顯然也。在此限度內，吾人可視爲有暫時之相關。

產額與價格之關係 從第十八表所得之結果，吾人可看出；鐵工業生產之與需求及價格之關係。當價格高漲，生產亦隨之而激增。吾人如利用每月資料，於某幾年內，更可看出：生產與價格之密切關係（見第十五圖）。在大部製造業中，俱係此種情形；上所述，不過其中之一例耳。但在農業上，生產之完成受季節變動之影響，其產額與價格之同時變動則呈相反之關係。此種事實可間接地用第十六圖表示之。世界麥產大約有百分之七十五於六，七，八月收穫之，

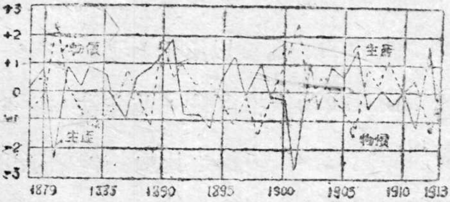
結果則伴以麥價之慘跌。大多數穀物通常有數月皆陷非常價低之慘境中。此種事實可以第十七圖表示之；在此圖中，農業生產係相對其後來價格而繪，並非當年之平均價也。穀物循環變動與製造業循環變動之比較頗能顯示出：前者對於後者在一二年內能發生一種正的影響也；但其彼此之關係則不甚規則耳（註三十四）。



第十六圖：美國1609至1913年間麥之有形供給與價格之季節變動。（r ＝－.87,前一月之物價）

資料見本章練習題第八題。

〔註三十四〕H.L.Moore於其所著："Economic Cycels"中曾找出八年期間穀物循環變動與一般物價循環變動，有一正的相關，惟前者較後者落後四年耳。



第十七圖：穀物數量生產指數與穀物價格指數之修正數值之比較——其長期趨勢已被消除，兩數列皆以相同單位表示之。

從次數表中計算相關 當兩數列各自列爲一次數表時，吾人應用皮爾生教授方法以計算相關，則稍感困難。此種由次數表中計算相關之程序，吾人於第十九表中解釋之，其資料爲入學試驗程度（分數）與在校求學程度（分數）之四年平均分數之比較，入學試驗程度用百分數表示之，其組距爲5；在校求學程度用六組(Six Groups)表示之，從第一組起，直至第六組。四年中之六組平均數，給出每組四分之一的結果，而如表中所示。爲計算之便利計，兩數列之離中差皆以『級』(Step or unit interval)表示之，集中於零(O)的新尺度（即 70 與3 ,），即假定其平均數。兩數列之次數總合寫於相當之坐標點上，每一數列之次數則寫於表中右面與下面（F行與F排）。

第十九表 入學程度與在校程度之相關表

在校程度——四之平均數年

入學試驗分數	D	4$\frac{3}{4}$	4$\frac{1}{2}$	4$\frac{1}{4}$	4	4$\frac{3}{4}$	3$\frac{1}{2}$	3$\frac{1}{4}$	3	2$\frac{3}{4}$	2$\frac{1}{2}$	2$\frac{1}{4}$	2	1$\frac{3}{4}$	1$\frac{1}{2}$	F	FD	FD^2
		6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7			
90	4										1					1	4	16
85	3										1	1	1	1		4	12	36
80	2						1	1		1		2	1		1	7	14	28
75	1			1	1	1		3	2			2				10	10	10
70	0	1			4	4	2	2	1	1		1	1			17	0	0
65	-1		2	2	2	1		2					1			10	-10	10
60	-2	1			1			1								3	—6	12
加[illegible]平均數	F=	2	2	3	8	6	3	9	3	2	2	6	4	1	1			
	FD=	—12	-10	-12	-24	-12	-3	0	3	4	6	24	20	6	7			
	FD^2=	72	50	48	72	24	3	0	3	8	18	96	100	36	49			

=52) 4 112

K=.461 2.154

K^2= .213

$\sigma^2=1.941$

$\sigma=1.39$

=−3

K=−.058

=579

(÷N)11.135 $\Sigma XY=148$

K^2= .003

$\sigma^2=11.432$

$\sigma=3.34$

$$r=\frac{\Sigma XY-NK_1K_2}{N\sigma_1\sigma_2}$$

$$=\left(\frac{\Sigma XY}{N}-K_1K_2\right)\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}=\left[2.846-(-.027)\right]\frac{1}{1.39\times3.34}=.62;\ P.E=.06$$

吾人如參考：用簡便法求標準差之程序，關於此表中之初步計算工作，卽可迅速瞭然矣。用簡便法先求出各數列之標準差。求ΣXY之手續比較麻煩，蓋以表中在坐標點上之各數列次數皆須記入也。各次數皆用各該坐標值乘之，然後再將各乘積總計之。今爲解釋明晰計，前三行之次數所得結果如下：

F	X	Y	FXY
1	—6	0	0
1	—6	—2	12
2	—5	—1	10
1	—4	1	—4
2	—4	—1	8

繼續此種計算，吾人遂得ΣXY之總值爲148。

因各數列之離中差係根據假定平均數而計算，故正號離中差之總數並不等於負號離中差之總數。所以對ΣXY之值，必須予以一修正，而如用簡便法求標準差之計算修正值然。應用於求標準差之修正值（與K_1卽K_2）只爲ΣFD÷N 吾人於是可知：ΣXY之值將以兩修正值之相乘積而增加也。在坐標軸上之兩轉矩（Moments）的修正總數，故可如下表示之：

$$\Sigma XY-NK_1K_2$$

在其他方面，此處求相關係數之公式，悉如前述。但爲方便計，將其寫成一修正式樣，而如第十九表之下脚所示。（註三十五）將此公式應用於所討論之資料，得出相關係數之值（r）爲 .62±.06；蓋爲一顯著之相關也。

級差法　皮爾生相關方法有一修正式。通常被稱爲級差法，(The Method of Rank-differences)，吾人應注意焉。此方法之優點厥在簡單；對於只求相近數值之比較，更應適用。吾人根據 1860 年美國二十九州之工業與文化程度（即受教育情況）之等級比較，故應用此方法而於第二十表中解釋之。此處所顯示之等級排列係根據 1860 年之人口清查。在排列如是等級時，有時發現困難。果有此情形，則將發生問題諸項目之平均等級應用於每一項目之上。譬如，第二項與第三項恰巧相等，則每一項目皆使其等於 $2\frac{1}{2}$；假如第二項，第三項及第四項恰巧相等，則每一項皆被列爲第三級。當等級排列被製表以後(即第二十表)，再求各州兩級之差

（註三十五〕在離中差根據各數列平均數算起之相關中，其相關係數可直接從原來諸項求得之；此可用第十九表所示之公式。兩種數列皆假定其平均數爲 0，各項皆被視爲：離中正差或正號的離中差。標準差則用本書前所述之修正式求得之。

數。次將各差數自乘方而總計之。表中下脚所示之公式，即從最後討論中所選擇之一種也。用此公式，吾人找出兩數列之相關係數爲.60.在經濟現象與社會現象間常存有許多有趣之相關；上之所述蓋一例也。

第二十表　1860年美國各州工業與文化程度等級的相關

州名（從原名）	工業的等級（每平方哩之資本）	當地白人之文化程度的等級	D	D^2
Alabama	24	23	1	1
Arkansas	29	24	5	25
Connecticut	3	2	1	1
Delaware	8	21	13	169
Florida	28	22	6	36
Georgia	23	27	4	16
Illinois	16	14	2	4
Indiana	14	17	3	6
Iowa	26	13	13	169
Kentucky	15	25	10	100
Louisiana	25	18	7	49
Maine	12	5	7	49
Maryland	9	15	6	36
Massachusetts	2	1	1	1
Michigan	17	9	8	64
Mississippi	27	16	11	121

州名（從原名）	工業的等級（每平方哩之資本）	當地白人之文化程度的等級	D	D2
Missouri	19	19	0	0
New Hampshire	7	6	1	1
New Jersey	4	11	7	49
New york	6	7	1	1
North Carolina	22	29	7	49
Ohio	10	12	2	4
Pennsylvavia	5	10	5	25
Rhode Island	1	8	7	49
South Carolina	21	20	1	1
Tennessee	18	28	10	100
Vermont	11	3	8	64
Virginia	13	26	13	169
Wisconsin	20	4	16	256
				1618

$$r=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}=1-\frac{6\times1618}{29\times840}=.60$$

$$P.E.=.10$$

結論 本章目的蓋爲對於已知測量相關之簡單方法之學者而設。相關之整個理論，異常複雜，在緒論性質之書籍中殊難包括。然而，吾人應注意者對於此處所闡明之諸方法，其應用應有一淸晰之鑑別。在敍述原因相關之結論中，吾人

應永不能只根據數學的程序。其資料搜集之方法與夫所欲測量之準確性，固皆應予以謹慎之檢查也。此種注意允宜應用於統計方法之整個園地。此類方法於解釋物質的，生物的及社會的諸現象中，堪稱有價值之工具；然而，其使用如不經過充分的理智的指導，則此類方法或許爲錯誤之源藪也。

參考書

Bowley. Arthur I; Elements of Statistics (4th Edition) Part II. Chapters VI-IX

Jevons. W. Stanley: the Principles of Science

King. W. I: "The Correlation of Historic Economic Variables" Quarterly Publications of the American Statistical Association. December. 1917 .PP.347-853

persons. W. W: "The Correlation of Economic Statistics" Quarterly Publications of the American Statistical Association. December. 1910.PP. 287—322

Secrist. Horace: Readings and Problems in Statistical Methods, Chapter X.

West, Carl S.: Introduction to Mathematical Statistics

Yule, G.U: An Introduction to the Theory of Statistics, Chapters IX-XII.

練習題

1. 在兩相同的橫線尺度及,,其縱線尺度能使離差應用於相同的測量平均數,,之交叉紙上，繪製由前章（第五章）第一題及第二題所得之生產與價格的循環變動圖。用同樣方法繪製由第十二圖（本書第138頁）所得之利率及第六圖所示之物價循環之變動圖。在透明紙上，謄錄此類循環變動。試述兩種穀物之生產與價格的相關（物價落後一年）及利率與物價循環變動之相關。

2. 用同時差距法，測量以下事實之相關：（見本書第十表，第十一表及第十五表）(a) 批發物價與每人生產額（物價落後一年）；(b)批發物價與實際工資。

3. 根據第五章（前一章）練習題第八題之表與由該題所得之最小二乘方綫，用皮爾生相關係數公式(r)測量每年鉄產與鉄價之相關。

4. 根據本書第十一表資料，用皮爾生公式，求1913年至 1920 年間之實際工資與生活費之相關。測量每一數列之離中差（假定有一橫線長期趨勢）。

4，將第4題所得之各離中差變爲各該數列之標準差單位，將由是所得之二組離中差（以標準差爲單位的，於坐標而

繪圖。計算圖中諸點之最小二乘方線，並試證：此最小二乘方線之斜度與相關係數相等。

6. 根據下列指數，用皮爾生公式(r)求其相關；離中差應根據平均數而無需求長期趨勢。並述其結果之重要性。

年次	物價	失業
1912	110	70
1913	100	120
1914	90	140
1915	90	100
1916	110	70

7. 由下面資料，試求美國出口商品經常季節變動指數與紐約鎊匯價格指數之皮爾生相關係數(r)：

月份	出口	鎊價
一月	110	100
二月	95	108
三月	99	109
四月	90	115
五月	87	116
六月	80	120
七月	78	119
八月	85	106
九月	98	74
十月	125	70
十一月	123	80
十二月	130	83

8. (a)試求美國麥價及麥之有形供給(根據1909-1918年資料)之季節變動指數的皮爾生相關係數；(b)如前所述，求皮爾生相關係數，但假定供給之變動較麥價之變動落後一年。

月份	麥之有形供給	麥價（每月一日）
一月	139	97
二月	130	100
三月	122	101
四月	112	101
五月	89	103
六月	69	106
七月	52	104
八月	60	100
九月	77	97
十月	99	97
十一月	118	98
十二月	133	96

9. 下述相關表係表示某一班學生之入學試驗組（縱的尺度）與在校攻讀組（橫的尺度）。試求其相關係數及機誤(P.E.)

V	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1				2		1		2		
2					1	1	1	1		
3		1		1	4	2		3	1	1
4	1	1		2	1	1	1	1		
5	1	3	2		1		2			

10. 以下之相關表係將六十九種重要商品之幾近百分之二十五而分類；此種分類蓋依據1920年五月及1921年五月（見 1921 年八月號之Monthly Labor Review第 84-85頁）之物價指數（以1913年爲100）。兩時期之物價變化皆甚均勻。試求其相關係數（r）。

11. 下表係一等級表：(a) 1880 年各州每 1000 人口中所生之名人；(b) 1890 年每一平方哩之人口；(c) 1890 年之城市人口百分比。試用級差法(the Method of rank-differences)測量此三數列之相關。

	(a)	(b)	(c)
Alabama	23	24	25.5
Arkansas	29	28	28
Connecticut	4	4	3
Delaware	8	9	11
Florida	28	29	20
Georgia	26	22	23
Illinois	16	10	10
Indiana	15	11	17
Iowa	19	20	19
Kentucky	18	12	21
Louisiana	25	26	18
Maine	5	27	9
Maryland	10	7	8
Massachusetts	2	2	2
Michigan	17	18.5	14
Mississippi	27	25	29
Missouri	21	16	16

	(a)	(b)	(c)
New Hampshire	3	14	6
New Jersey	11	3	5
New york	7	5	4
North Carolina	22	21	27
Ohio	9	8	12
Pennsylvania	12	6	7
Rhode Island	6	1	1
South Carolina	20	17	25.5
Tennessee	24	13	24
Vermont	1	18.5	13
Virginia	13	15	22
Wisconsin	14	23	15

（完）