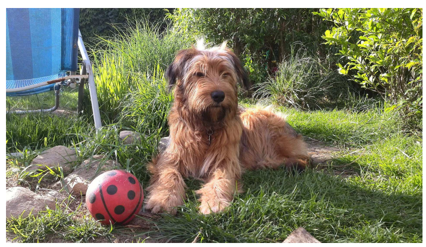
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Mathematik für Anwender I

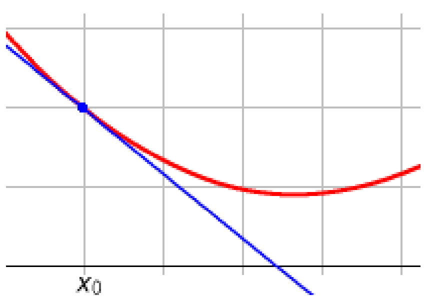
Vorlesung 14

> Aus so krummem Holze, als woraus der Mensch gemacht ist, kann nichts ganz Gerades gezimmert werden.
>
> Immanuel Kant



Auch mit dem Ball spielt sie gern.

Differenzierbarkeit



In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge ist. Wir wollen erklären, wann eine solche Funktion in einem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist. Die intuitive Idee ist dabei, für einen weiteren Punkt $x \in D$ die *Sekante* durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ des Funktionsgraphen zu ziehen und dann „x gegen a laufen zu lassen“. Wenn sich dieser Grenzwertprozess sinnvoll durchführen lässt, so wird aus den Sekanten eine Tangente. Dieser Grenzwertprozess wird über den Begriff des Grenzwertes einer Funktion präzise gefasst, den wir im Anschluss an die Stetigkeit eingeführt haben.

Definition 14.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und

$$f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu $x \in D$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von f zu a und x.

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graph durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Für $x = a$ ist dieser Quotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für $x \to a$ existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der *Tangente* an f im Punkt $(a, f(a))$ (oder an der Stelle a).

Definition 14.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und

$$f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* in a ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f in a, geschrieben

$$f'(a) .$$

Die Ableitung in einem Punkt a ist, falls sie existiert, ein Element in $\mathbb{R}$. Häufig nimmt man die Differenz $h := x - a$ als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt h gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

Die Bedingung $x \in D \setminus \{a\}$ wird dann zu $a + h \in D$, $h \neq 0$. Wenn die Funktion f einen eindimensionalen Bewegungsvorgang beschreibt, also eine von der Zeit abhängige Bewegung auf einer Strecke, so ist der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die (effektive) Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten a und x und $f'(a)$ ist die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt a.

Beispiel 14.3. Es seien $s, c \in \mathbb{R}$ und sei

$$\alpha \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto sx + c,$$

eine affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ betrachtet man

$$\frac{(sx + c) - (sa + c)}{x - a} = \frac{s(x - a)}{x - a} = s.$$

Dies ist konstant gleich s, so dass der Limes für x gegen a existiert und gleich s ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich s. Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

Beispiel 14.4. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2.$$

Der Differenzenquotient zu a und $a+h$ ist

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ &= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} \\ &= \frac{2ah+h^2}{h} \\ &= 2a+h. \end{aligned}$$

Der Limes davon für h gegen 0 ist $2a$. Die Ableitung von f in a ist daher $f'(a) = 2a$.

Lineare Approximierbarkeit

Wir besprechen eine zur Differenzierbarkeit äquivalente Eigenschaft, die lineare Approximierbarkeit. Diese Formulierung ist in dreifacher Hinsicht wichtig: Sie erlaubt vergleichsweise einfache Beweise für Rechenregeln für differenzierbare Funktionen, sie liefert ein Modell für Approximierbarkeit durch Polynome von höherem Grad (quadratische Approximation, Taylor-Entwicklung) und sie erlaubt eine Verallgemeinerung auf die höherdimensionale Situation (im zweiten Semester).

Satz 14.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist f in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ und eine Funktion

$$r\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s \cdot (x-a) + r(x)(x-a).$$

Beweis. Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a\,, \\ 0 \text{ für } x = a\,, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} r(x) \;=\; \lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - s \right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist. Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = s + r(x)\,.$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \to a$ existieren. □

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(a) + f'(a)(x - a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Die durch $f(a)$ gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen.

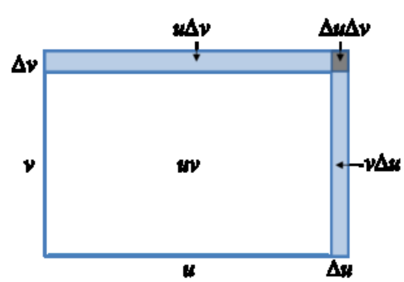
Korollar 14.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f \colon\, D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt a differenzierbar sei. Dann ist f stetig in a.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 14.5. □

Rechenregeln für differenzierbare Funktionen



Eine Veranschaulichung der Produktregel: Der Zuwachs eines Flächeninhalts entspricht der Summe der beiden Produkte aus Seitenlänge und Seitenlängezuwachs. Für den infinitesimalen Zuwachs ist das Produkt der beiden Seitenlängenzuwächse irrelevant.

Lemma 14.7. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen, die in a differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.

(1) *Die Summe $f + g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f+g)'(a) \, = \, f'(a) + g'(a).$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f \cdot g)'(a) \, = \, f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
(3) *Für $c \in \mathbb{R}$ ist auch cf in a differenzierbar mit*
$$(cf)'(a) \, = \, cf'(a).$$
(4) *Wenn g keine Nullstelle in a besitzt, so ist $1/g$ differenzierbar in a mit*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) \, = \, \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}.$$
(5) *Wenn g keine Nullstelle in a besitzt, so ist f/g differenzierbar in a mit*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) \, = \, \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Beweis. (1). Wir schreiben f bzw. g mit den in Satz 14.5 formulierten Objekten, also

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)\,.$$

Summieren ergibt

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (s + \tilde{s})(x-a) + (r + \tilde{r})(x)(x-a)\,.$$

Dabei ist die Summe $r + \tilde{r}$ wieder stetig in a mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von

$$f(x) \, = \, f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) \, = \, g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)$$

aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) \; &= \; (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a))(g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ &= \; f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ & \quad +(f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) \\ & \quad +s\tilde{r}(x)(x-a) + \tilde{s}r(x)(x-a) + r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 10.10 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für $x = a$. (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar ist mit Ableitung 0. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} \;=\; \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Da g nach Korollar 14.6 stetig in a ist, konvergiert für $x \to a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von g in a konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. (5) folgt aus (2) und (4). $\square$

Diese Rechenregeln heißen *Summenregel*, *Produktregel*, *Quotientenregel*. Die folgende Aussage heißt *Kettenregel*.

SATZ 14.8. *Es seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und seien*

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Es sei f in a differenzierbar und g sei in $b := f(a)$ differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

in a differenzierbar mit der Ableitung

$$(g \circ f)'(a) \;=\; g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Beweis. Aufgrund von Satz 14.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

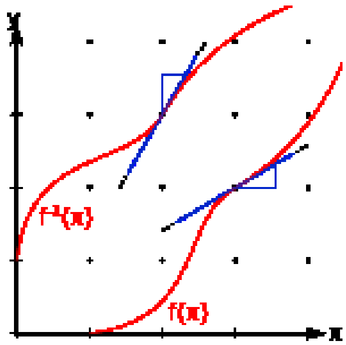
schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(f(x)) \;&=\; g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &=\; g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &\qquad + s(f(x))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &=\; g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) \\ &\qquad + (g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x)))(x-a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) \;:=\; g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in a mit dem Wert 0. $\square$



Eine Veranschaulichung für die Ableitung der Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion besitzt den an der Hauptdiagonalen gespiegelten Graphen und die Tangente wird mitgespiegelt.

Satz 14.9. *Es seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und sei*

$$f\colon D \longrightarrow E \subseteq \mathbb{R}$$

eine bijektive stetige Funktion mit der Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon E \longrightarrow D.$$

Es sei f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $b := f(a)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y-b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \to b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $E \setminus \{b\}$, die gegen b konvergiert. Nach Satz 11.7 ist f^{-1} stetig. Daher konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen a. Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle n. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert und die zweite Gleichheit auf Lemma 8.1 (5) beruht. □

Beispiel 14.10. Die Funktion

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$ (eingeschränkt auf $\mathbb{R}_+$). Deren Ableitung in einem Punkt a ist $f'(a) = 2a$. Nach Satz 14.9 gilt daher für

$$b \in \mathbb{R}_+$$

die Beziehung

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Im Nullpunkt ist f^{-1} nicht differenzierbar.

Die Funktion

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^3$ Deren Ableitung in a ist $f'(a) = 3a^2$, dies ist für $a \neq 0$ von 0 verschieden. Nach Satz 14.9 ist für $b \neq 0$ somit

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist f^{-1} nicht differenzierbar.

Die Ableitungsfunktion

Bisher haben wir nur von der Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt gesprochen. Jetzt lösen wir uns von dieser punktweisen Betrachtung.

Definition 14.11. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt $a \in I$ die Ableitung $f'(a)$ von f in a existiert. Die Abbildung

$$f'\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f'(x),$$

heißt die *Ableitung* (oder *Ableitungsfunktion*) von f.

Abbildungsverzeichnis