三角術 ABC

陳家謨著

世界書局印行

三角術ABC

平裝五角 精裝六角

(外埠酌加郵費匯費)

著作者 陳家讓
出版者 ABC叢書社
印刷者 世界書局
發行者 世界書局

發行所 上海各省世界書局

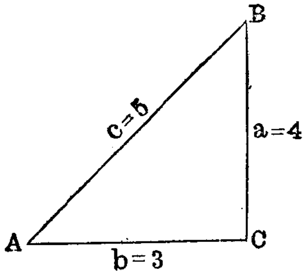
中華民國二十年五月初版
中華民國二十年十一月再版

目　次

三角術ABC

第一章　勾股與三角

欲研究平面三角術，請先言勾股，勾股名義肇見於周髀算經：『其曰折矩以爲勾廣三，股修四，經隅五者』著其名也。又曰偃矩以望高，覆矩以測深，臥矩以知遠者致其用也。可知周髀以矩數原始，已開勾股之門。西法的直角三角形，就是中法的勾股。銳鈍二三角形，雖不可直接以勾股法求之，然可分作二直角三角形，勾準股的方法以解之。現在以八線解三角形，其理完全根據於圓內正方形兩對角線所成的矩形，



$3^2+4^2=5^2$即$c^2=a^2+b^2$

對於兩邊所成矩形之倍。詳思其旨，卽直角三角形勾股平方之和，等於弦的平方。是以勾股概三角可也，以三角證勾股亦可也。勾股與三角不同的地方，爲勾股祇論邊而不論角，三角則兼而用之。梅文鼎先生之論三角形曰，『勾股雖不能備三角之形，而能兼三角之理，三角不能出勾股之外，而能盡勾股之用，一而二，二而一者也』。勾股與三角的關係，盡乎此矣。

欲明白三角形的方法，必先詳知三角形，兩直線不能成形，成形者，必有三直線始可，而三線相遇，則有三角，故三角形爲形的開始。

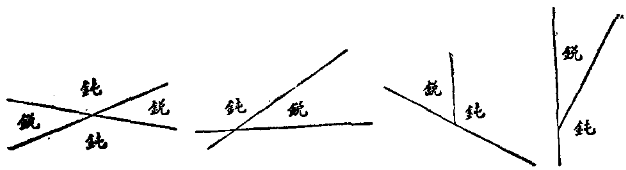
多線皆可成形，析之皆可成三角，至三角則無可分析，故三角形能詳諸形之理。

在形學中，凡可算者，爲有法的形；不可算者，爲無法的形。三角者，爲有法的形。不論長短斜正，皆可以求其數，故曰有法。若無法之形，分析之成三角則可量，故三角形者，爲量法的祖宗。

三角法所以異於勾股者，以其用角也。故先論角

，兩線相遇則成角（平行兩直線，不能作角，線既平行，則雖引而長之至於無窮，終無相交之理，線既不能相交，則角亦無由生，故作角者，必兩線相交，必不可平行也）。

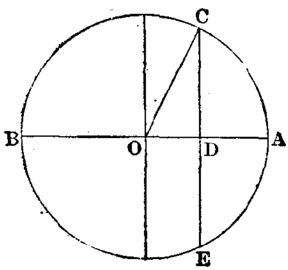
角有三類，一直角 Right angle ，一銳角 Acute angle ，一鈍角 Obtuse angle 。



如上圖以兩線相交，則一爲銳角，一爲鈍角，凡銳角必小於直角，凡鈍角必大於直角。直角祇一種，銳角鈍角則有多種。

角在小形與在大形相同，故無丈尺可言，必量之以對角的弧，量弧之法，即以角的端爲弧心，用規作圓，圓周分三百六十度，乃視本角所對的弧於全圓三百六十度中，得幾何度分，其弧分所對，正得九十度

者，爲直角（九十度爲全圜四分之一，謂之象限）。若所對弧分，不滿九十度者，爲銳角（自八十九度以至一度皆爲銳角），若對弧分，在九十度以上者，謂之鈍角（自九十一度至一百七十九度爲鈍角）。

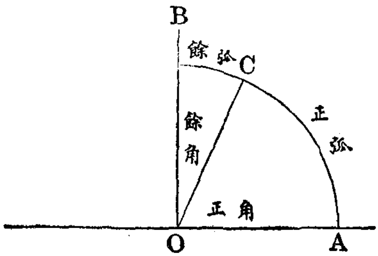


有弧則有矢，弧矢爲古人割圜的方法，如圖以CE直線割平圜則成弧矢形，所割CAE圜分如弓形，古謂之弧背，弧背半之，則爲半弧背（如CA）。

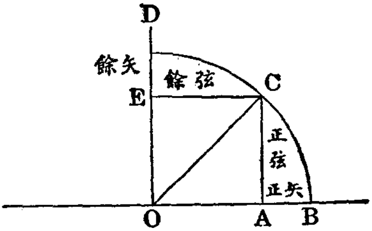
割圜直線，如弓的弦，謂之通弦（如圖CO），通弦在古時稱爲半弧弦，今曰正弦（如圖CD）。

正弦以十字截半徑，成矢（如圖OA橫半徑，爲

C 正弦所截成ＤＡ矢），謂之正矢。全徑內減去正矢，餘謂之大矢，（如圖ＯＡ全徑減去ＤＡ正矢，餘ＢＤ爲大矢）。弧，矢，弦等等，已如上述，玆特將正弧餘弧正角餘角等述之。



所用的弧度爲正角，自象限減正弧爲餘弧（如圖ＢＡ象限內，減ＣＡ正弧，則其餘ＣＢ爲餘弧）。正弧所對的角爲正角，餘弧所對的角爲餘角，此爲一定不易的理（如圖正弧ＣＡ所對ＣＯＡ角爲正角，餘弧ＢＣ所對ＣＯＢ角爲餘角）。此外如正弦，餘弦，正矢，餘矢等等，可述之如下：



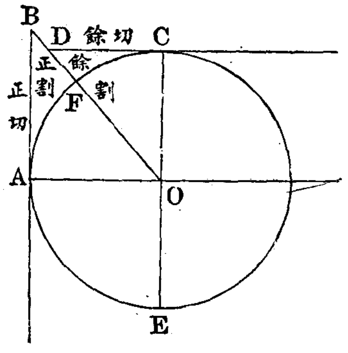
有正弧正角，卽有正弦（如圖CA）和正矢（如圖AB）；有餘弧餘角，亦卽有餘弦（如圖CE），和餘矢（如圖ED）。

正弦正矢餘弦餘矢，皆爲CB弧所有，亦卽COB角所有（如圖DC爲餘弧，CB爲正弧）。自一度至八十九度，並得爲CB，並得爲正弧。正餘弧矢盡於此矣。

反之，若用CD爲正弧，則CB反爲餘弧，而角的正餘，亦準此而變易地位。

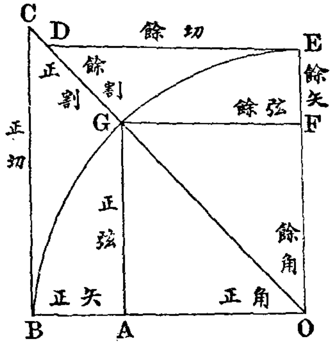
每一弧一角，各有正弦餘弦，正矢餘矢，已成四線於半圓內，（前人用勾股割圓就是此法）。再引半徑，透於平面之外，與切圓直線相遇，爲割線切線，

而各有正餘，復成四線（正割，正切，餘割，餘切，復成倒順二勾股），共成八線，故稱爲割圓八線。



如圖CEA平圓，切BA直線於A，又引OF半徑，透出於圓周外，使兩線相遇於B，則BA爲FA弧的正切線，而BO爲FA弧的正割線，亦卽爲FOA角的正割線。又以平圓切CD直線於C，與FO透出線相遇於D，則CD爲FA弧的餘切線，亦卽爲FAO角的餘切線，而DO爲FA弧的餘割線，亦卽爲OFA角的餘割線。

凡用一角，即對一弧，即有八線（正弦 sin ，餘弦cos ，正割 sec，餘割 csc，正切 tan ，餘切 cot ，正矢 vers ，餘矢 covers），弧亦然，凡一弧的八線，即成倒順四勾股，角亦然。



如圖EB象限共九十度，EOB 爲九十度十字直角。任分GB爲正弧，GOB 爲直角，則GE爲餘弧，GOE 爲餘角。

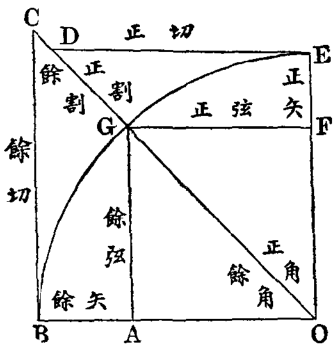
正弦 sin——GA 與 OF　　正切 tan——CB

餘弦 cos——GF 與 AO　　餘切 cot——DE

正矢 vers ——AB　　　　正割 sec——CO

餘矢 covers——EF　　　餘割 csc——DO

以上八線爲ＧＢ弧所用，亦卽爲ＧＯＢ角所用（自一度以至八十九度並同）。若用ＧＥ弧，亦同爲八線，但以餘爲正，以正爲餘（見下圖）。



由上二圖以觀之，可知弧的變化，卽角的變化，角的變化，亦卽線的變化。由勾股而三角，由三角而八線，由八線而變化之，神妙靈巧的推算，於是乎生（如測量天文等，均以三角爲根據，可知八線應用的

範圍，實包羅天地）。

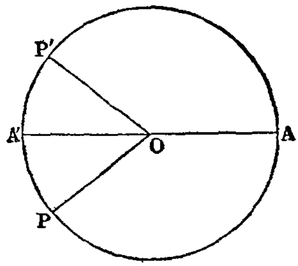
第二章　角的度量

平面三角術的目的，爲「研究解平三角形」的方法。平面三角形，由三邊及三角而成，此六件中，已知一邊及任意兩件，在一定的界線以內，即可求得其餘三件，此種解法，即稱爲解三角形。然欲達此目的，則凡關於角度的函數，均須考察。

在幾何學上所論的角，均小於兩直角，在三角術上，角度的任何大小正負皆可應用。

試設OA爲固定的一直線，OP直線與OA相合，以O爲中心，以時針反對的方向廻轉，經若干時後，則成∠AOP，當OP與OA′相合時，則其所成的角，等於兩直角。如OP再以同方向廻轉與OA相合，則成四直角，OP常以同方向廻轉不止，則每轉一週，增加四直角，故因P點停止位置的不同，可得任意度的角，稱爲正角 Positive angle, OP 線與時針同方

向廻轉所成的角，皆稱爲負角 Negative angle 。

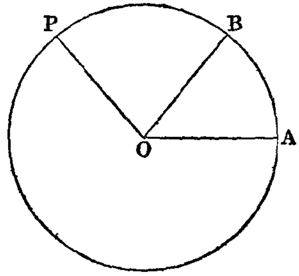


ＯＰ線爲廻轉線的終位，則此線自ＯＡ廻轉至ＯＰ，因廻轉方向及週數的不同，作成無窮個數角，其中任意兩角的差，皆等於正四直角或負四直角的倍數。凡同以ＯＡ，ＯＰ爲界的角，稱爲同界角。

角的正負，已如上述，茲特將角的數量述之。先任意定一角爲單位，以此單位角與他角相較，以觀他角含此單位角的幾倍。通常所用的單位角，常以一直角爲標準。然以一直角爲單位，則凡角之小於一直角者，皆須以分數表之。爲便利起見，取一直角的$\frac{1}{90}$

稱爲一度，一度的$\frac{1}{60}$，稱爲一分，一分的$\frac{1}{60}$，稱爲一秒。小於一秒者，則以小數計之，度秒各有簡號，譬如有2度3分4秒的角，則以 $2°3'4''$ 表之，卽此角等於一直角的$\frac{2}{90}+\frac{3}{90\cdot60}+\frac{4}{90\cdot60\cdot60}$倍，此法稱爲六十進法。

計量角度，在實用上，多用六十進法，然在理論上，則常用別種單位，較爲便利。在以O爲圓心的任意圓內，取AB弧的長，等於半徑，則AOB角的大小，常有一定，此角卽謂之半徑角，或弧度角的單位。無論何角，皆可以半徑角的比表之，此爲角的弧度。



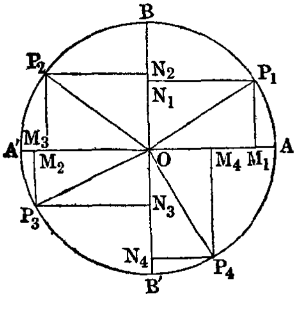
第三章　三角函數

角的度量，旣已說明，本節進而作三角函數的解釋。

設一直線自OA廻轉至OP，成∠AOP，以A表之，作B′OB直線，與A′OA正交，更設OA，OB的方向爲正，OA′OB′的方向爲負，若OP線依正方向廻轉，則得三角函數的定義，玆述之如下：

OP線在OA上的投影，與OP線的比，爲A角的餘弦，以cos A表之。

OP線在OB上的投影，與OP線的比，爲A角的正弦，以sin A表之。



OP線在OA上的投影，除OB上的投影，爲A角的正切，以tan A表之。

OP 線在OB上的投影，除OA上的投影，爲A角的餘切，以 cot A 表之。

以OP線在OA上的投影，除OP線，爲A角的正割，以 sec A 表之。

以OP線在OB上的投影，除OP線，爲A角的餘割，以 csc A 表之。

如以方程式表之，則

$$\cos A=\frac{OM}{OP},\ \sin A=\frac{ON}{OP},\ \tan A=\frac{ON}{OM},$$

$$\cot A=\frac{OM}{ON},\ \sec A=\frac{OP}{OM},\ \csc A=\frac{OP}{ON}.$$

各線正負，均須注意。OP線常爲正，OM，ON因A角的大小，而正負不定。然ON與MP常同號而相等，故可寫爲

$$\sin A=\frac{MP}{OP},\ \tan A=\frac{MP}{OM},$$

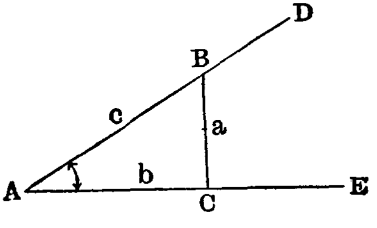
$$\cot A=\frac{OM}{MP},\ \csc A=\frac{OP}{MP}.$$

圖中，P有 P_1, P_2, P_3, P_4 四位置，故A亦有 $AOP_1, AOP_2, AOP_3, AOP_4$ 四角。

上列的六式，稱爲三角函數，或稱爲三角各線的比 Trigonometrical Ratios or Circular functions， 其值關於角的大小，不關於 OP 的長短。

凡相似的三角形，其相當兩邊的比必相等。故不論 OP 的長短如 A 角同，則其函數必同。故 A 角或以度數表之，或以弧度計，均無不可，平時常以 A,B,C ……表度數，α, β, γ ……表弧度，如 sin A ，卽表 A 角度的正弦。 sin α 表 α 弧度角度的正弦。在平面三角術中除以上的各式以外，尙有正矢餘矢兩式，其定義爲

Vers A＝1－cos A，　Covers A＝1－sin A 。至於銳角的三角函數，更可解釋之如下：



設A角界線上有一點B，作BC垂線，則由ABC三角形（直角三角形）得三角函數的定義：

$$(1)\ \sin A=\frac{對邊}{弦}=\frac{a}{c}\qquad(4)\ \csc A=\frac{弦}{對邊}=\frac{c}{a}$$

$$(2)\ \cos A=\frac{倚邊}{弦}=\frac{b}{c}\qquad(5)\ \sec A=\frac{弦}{倚邊}=\frac{c}{b}$$

$$(3)\ \tan A=\frac{對邊}{倚邊}=\frac{a}{b}\qquad(6)\ \cot A=\frac{倚邊}{對邊}=\frac{b}{a}$$

在上列的六式中，(4)(5)(6)等，適與(1)(2)(3)等式相反，故便於記憶。

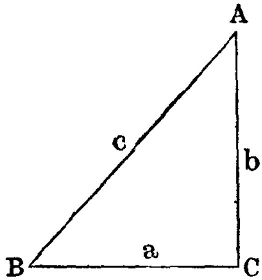
以上六式，爲平面三角術中的基本公式，其重要可知，如以(1)與(4),(2)與(5),(3)與(6)等式倒轉之，則得下列的變化：

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\csc A};\quad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sec A};\quad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\cot};\quad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\tan A}.$$

如用三角函數的公式(1)至(6)表銳角 B，其結果如下：



$\sin B=\frac{b}{c}$; $\csc B=\frac{c}{b}$;

$\cos B=\frac{a}{c}$; $\sec B=\frac{c}{a}$;

$\tan B=\frac{b}{a}$; $\cot B=\frac{a}{b}$;

以銳角 B 所得的六式，與銳角 A 所得的六角相較，則得下列的結果：

$\sin A=\cos B$； $\csc A=\sec B$；

$\cos A=\sin B$； $\sec A=\csc B$；

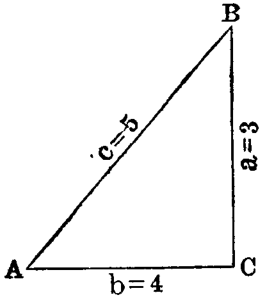
$\tan A=\cot B$； $\cot A=\tan B$。

因 $A+B=90^\circ$，故上列的結果，可得下列的定理：

銳角的函數與補角的函數相等。舉例以證明之：

例題：如 $a=3, b=4, c=5$，試計算直角三角形中

A角及B角的函數並比較之。



解法　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

用三角函數公式(1)至(6)，則得下列的結果。

$\sin A=\frac{3}{5}$；　　$\sin B=\frac{4}{5}$；

$\cos A=\frac{4}{5}$；　　$\cos B=\frac{3}{5}$；

$\tan A=\frac{3}{4}$；　　$\tan B=\frac{4}{3}$；

$\csc A=\frac{5}{3}$；　　$\csc B=\frac{5}{4}$；

$\sec A=\frac{5}{4}$；　　$\sec B=\frac{5}{3}$；

$\cot A=\frac{4}{3}$；　　$\cot B=\frac{3}{4}$；

將 sin A 與 cos B, cos A 與 sin B, tan A 與 cot B, c A 與 sec B, sec A 與 csc B, cot A 與 tan B 等比較之，則得下列的結果，與函數的定理相符。

$$\sin A=\frac{3}{5};\qquad \cos B=\frac{3}{5};$$

$$\cos A=\frac{4}{5};\qquad \sin B=\frac{4}{5};$$

$$\tan A=\frac{3}{4};\qquad \cot B=\frac{3}{4};$$

$$\csc A=\frac{5}{3};\qquad \sec B=\frac{5}{3};$$

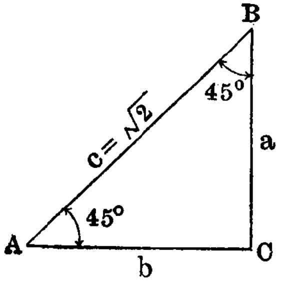
$$\sec A=\frac{5}{4};\qquad \csc B=\frac{5}{4};$$

$$\tan A=\frac{4}{3};\qquad \cot B=\frac{4}{3}.$$

第四章　45°,30°及60°的函數

三角術的基本公式，已如上述，茲特將45°,30°,以及 60° 的三角函數述之。因此三者，在平面三角術中佔重要的地位也。

(a) 45° 的三角函數的求法：



先作二等邊三角形（或稱爲等腰三角形）。如圖所示三角形ＡＢＣ中，$\angle A=\angle B=45°$（準幾何學中的定理）。

設 $a=1$，$b=1$，則

$c=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

依函數的基本公式，則得

$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$；　　$\csc 45°=\sqrt{2}$；

$\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$；　　$\sec 45°=\sqrt{2}$；

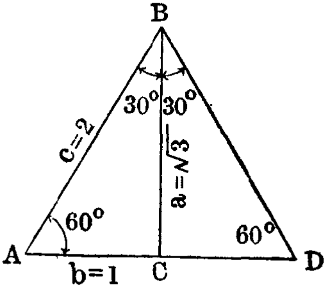
$\tan 45°=1$；　　$\cot 45°=1$．

(b) 30° 與 60° 的三角函數的求法：

先作一等邊三角形，如圖ＡＢＤ，自Ｂ作一垂直線ＢＣ，遇ＡＤ於Ｃ，則在三角形ＡＢＣ中，

$\angle A=60°$，$\angle ABC=30°$

$b=1$，則



$c = AB = AD = 2AC = 2b = 2$,

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

$\therefore \sin 60° = \sqrt{\frac{3}{2}}$;　　$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

$\cos 60° = \frac{1}{2}$;　　$\sec 60° = 2$;

$\tan 60° = \sqrt{3}$;　　$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

同理在同樣的三角形中，可得 30° 的三角函數：

$\sin 30° = \frac{1}{2}$;　　$\csc 30° = 2$;

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;　　$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$;　　$\cot 30° = \sqrt{3}$。

將以上所求的 45°,30° 以及 60° 的三角函數的結

果，匯集起來，則得下表：

角	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}=.50$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=.71+$	$\frac{\sqrt{3}}{2}=.86+$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}=.86+$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=7.1+$	$\frac{1}{2}=.50$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}=.57+$	1	$\sqrt{3}=1.73+$

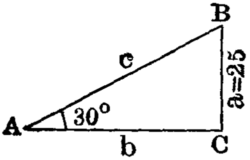
將上表中的 $\sin 30°$ 的函數值倒轉來，即得 $\csc 30°$ 的函數值；$\cos 30°$ 的函數值倒轉來，即得 $\sec 30°$ 的函數值；$\tan 30°$ 函數值倒轉來，即得 $\cot 30°$ 的函數值。故從上列的函數的值，可以推知其餘的函數值。

第五章　直角三角形的解法

一個三角形，有三條邊，三隻角，共計有六部分，直角三角形也是如此。在此六部分，如已知兩角一邊，可求其餘各部分，如已知一角一邊，以求其餘各部分，茲舉例如下：

例題：　已知 $A=30°, a=25$，求 c 的值，更求

B 與 b 的值：



依函數的公式，則得

$\sin A=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$（檢上表）

$\frac{1}{2}=\frac{25}{c}$，　$=c\,50$；

$$B=90^\circ-30^\circ=60^\circ$$

$$\tan A=\tan 3\ \ ^\circ=\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{b}{25},$$

$$\therefore b=25\sqrt{3}\ .$$

直角三角形解法的例，已如上述，玆乃將解直角三角形的手續說明之。

(1)依題意作一正確的圖，

(2)將已知的部份，一一注明於圖的各部份，

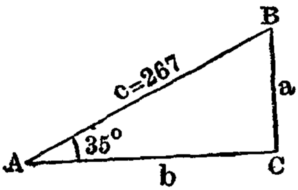
(3)依函數的公式(　)至(6)，以求各未知的部份，

(4)校正所求的答數是否準確，可以下式證之，即

$c^2=a^2+b^2$ 或 $a^2=c^2-b^2$

玆更舉例如下，以資佐證：

例題：已知 $A=35°$, $c=267$，試解此三角形的各部份的值，幷求此直角三角形的面積。



(1)作一準確的圖，如△ABC，註明其已知部份，及未知的各部份。

(2) $B=90°-A=90°-35°=55°.$

(3)求 a 的值，用公式(1)則得

$$\sin A=\frac{a}{c},$$

$\sin A=\sin 30°=.5736$（從表中檢得），$C=$

$c=267,$

$\therefore\ .5736=\dfrac{a}{267}$，故 $a=153.1.$

$$\begin{array}{r}
\sin 35°=.5736 \\
267 \\
\hline
40152 \\
34416 \\
11472 \\
\hline
a=153.1512
\end{array}$$

用公式(2)求 b，則得

$$\cos A=\frac{b}{c},$$

$$\cos A=\cos 30°=\frac{b}{267},$$

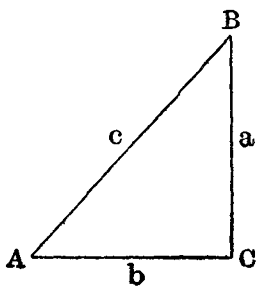
檢表，得$\cos 30°=.8192$，故 $.8192=\dfrac{b}{267}$，

$$\therefore b=.8192\times 267=218.7.$$

(4)直角三角形的面積，依計算的公式，爲$\dfrac{ab}{2}$，將ab的值代入上式，則得

$$\frac{ab}{2}=\frac{153.1\times 218.7}{2}=16.741.$$

從上述的例題中，可以求出三個新的公式：



$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \therefore a=c\sin A;$$

$$\cos A=\frac{b}{c},\quad \therefore b=c\cos A;$$

$$\tan A=\frac{a}{b},\quad \therefore a=b\tan A.$$

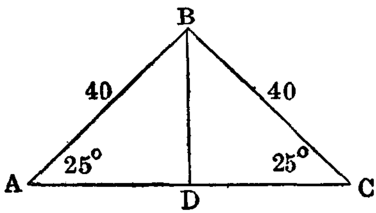
茲將上列的結果，用文字說明之：

(1)銳角的對邊＝弦×正弦的角度。

(2)銳角的隣邊＝弦×餘弦的角度。

(3)銳角的對邊＝隣邊×正切的角度。

至於二等邊三角形的解法，可先將四等邊三角形，分為兩個直角三角形，再依解直角三角形的方法以解之，茲舉例如下：



例題：如圖所示，其二等邊各等於 40 sin ∠A，∠C＝25°試解三角形，並求其面積。

解法：$B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-50^\circ=130^\circ$。

自B作一直線BD垂直於AC，

$$AD=AB\ \cos A$$

$$=40\ \cos 25^\circ$$

$$=40\times .9063\ (\text{檢表})$$

$$=36.25.$$

$$\therefore AC = 2AD = 72.50\,.$$

欲求此三角形的面積，須先得BD的值。

$$BD = AB\sin A = 40.\sin 25^\circ$$

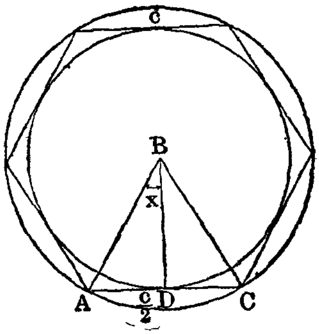
$$=40\times .4226\ (\text{檢表})\ = 16.9.$$

校正：　$BD = AD\tan 25^\circ = 36.25\times .4663$

$$=16.9.$$

$$\therefore \text{面積} = \frac{1}{2}AC\times BD = 612.6\ \text{方寸}.$$

此外如規則多邊形的解法 Solution of regular polygone，亦應用直角三角形的解法以解之。如下圖所示



，R 爲外圓的半徑，r 爲內圓的半徑，B 爲內外二圓共有的圓心。依幾何學的定理；

$$\angle ABC = \frac{360^\circ}{n},$$

c＝規則多邊形的一

邊的長，

n＝規則多邊形的邊數，

$\angle x=\frac{180^\circ}{n}$，

$AD=\frac{c}{2}$＝多邊形的一邊的一半，

$AB=R$＝外圓的半徑，

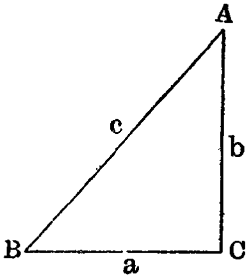
$BD=r$＝內圓的半徑，

$p=nc$＝多邊形的周圍，

$\frac{pr}{2}$＝多邊形的面積。

第六章　直角三角形的對數解法

設C爲直角，常爲 90°, 如知另一邊及任意一件，即可解此三角形。



1. 知 a,b 兩邊，則由 $\tan A=\frac{a}{b}$ 可得A，而 $B=90^\circ-A$.

$c=a\csc A$，

以對數式表之爲

$L\tan A=10+\log a-\log b$,

$$\log c = \log a - L\sin A + 10 .$$

2. 知 c,a 兩邊，則 A 可由 $\sin A = \frac{a}{c}$ 而求得。

$B = 90° - A, b = c\cos A$ 或 $b^2 = c^2 - a^2$,

以對數式表之爲

$$L\sin A = 10 + \log a - \log c,$$

$$\log b = \log c + L\cos A - 10,$$

或 $\log b = \frac{1}{2}\log(c+a) + \frac{1}{2}\log(c-a)$.

3. 知 c 邊及 A 角，則 $B = 90° - A$, $a = c\sin A$,

$b = c\cos A$, 或 $b^2 = c^2 - a^2$, 其對數式爲

$$\log a = \log c + L\sin A - 10,$$

$$\log b = \log c \; L\cos A - 10,$$

或 $\log b = \frac{1}{2}\log(c+a) + \frac{1}{2}\log(c-a)$.

4. 知 a 邊及 A 角，則 $B = 90° - A, c = a\csc A$,

$b = c\cos A$, 或 $b^2 = c^2 - a^2$ 其對數式爲

$$\log c = \log a - L\sin A + 10,$$

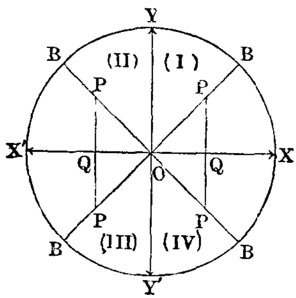
$$\log b = \log c + L\cos A - 10,$$

或 $\log b = \frac{1}{2}\log(c+a) + \frac{1}{2}\log(c-a)$.

上述諸例的解法，有時不便，如(2)的A近於90°時，由 $\sin A=\frac{a}{c}$ 所得的值，不甚精密，故宜另用他法以求之。

第七章　任何角的三角函數

三角的基本函數，已如上所述，茲更述任何角的三角函數如下。



上列圖中，任何象限內，∠XOB的函數爲

$$\sin XOB=\frac{QP}{OP}=\frac{\text{ordinate}}{\text{hypotenuse}};$$

$$\csc XOB=\frac{OP}{QP}=\frac{\text{hypotenuse}}{\text{ordinate}};$$

$$\cos XOB=\frac{OQ}{OP}=\frac{\text{abscissa}}{\text{hypotenuse}};$$

$$\sec XOB=\frac{OP}{OQ}=\frac{\text{hypotenuse}}{\text{abscissa}};$$

$$\tan XOB=\frac{QP}{OQ}=\frac{\text{ordinate}}{\text{abscissa}};$$

$$\cot XOB=\frac{OQ}{QP}=\frac{\text{abscissa}}{\text{ordinate}}.$$

$$\operatorname{vers} XOB=1-\cos XOB;$$

$$\operatorname{covers} XOB=1-\sin XOB.$$

三角函數的代數符號，為

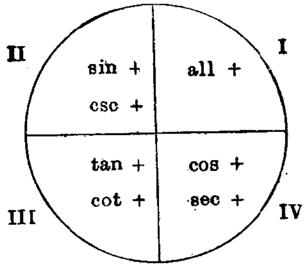
(1)在第一象限內，所有的各函數，均為正號。

(2)在第二象限內，sin 與 csc 為正號；其餘為負號。

(3)在第三象限內，tan 與 cot 為正號；其餘為負號。

(4)在第四象限內，sec 與 cos 為正號；其餘為負號。

茲將其結果，註於下列的圖中。

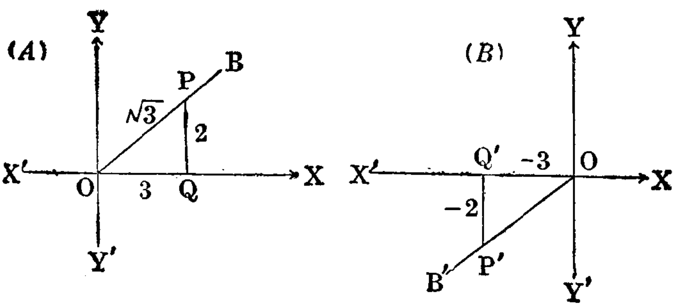


從上列的說明，有下列的說明，以便於記憶：

(1) sin 與 csc 的符號相同；

(2) cos 與 sec 的符號相同；

(3) tan 與 cot 的符號相同。



茲更舉例如下，以證明上述的三角函數的代數符號。

如上圖(a)，設已 $\tan X=\frac{2}{3}$，則

$$\tan X=\frac{2}{3}=\frac{-2}{-3}=\frac{\text{ordinate}}{\text{abscissa}}.$$

如(2,3)均為正數，則$\angle$XOB 在第一象限內；如(−2−3) 均為負數，則$\angle$XOB在第二象限內。

茲先求(A)圖中的三角函數：

$OP=\sqrt{\overline{OQ}^2+\overline{QP}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$,此數常為正號。

$$\sin XOB=\frac{2}{\sqrt{13}};\qquad \csc XOB=\frac{\sqrt{13}}{2};$$

$$\cos XOB=\frac{3}{\sqrt{13}};\qquad \cos XOB=\frac{\sqrt{13}}{3};$$

$$\tan XOB=\frac{2}{3};\qquad \cot XOB=\frac{3}{2}.$$

同理，從(B)圖中求三角的函數：

$$\sin X'OB'=-\frac{2}{\sqrt{13}};\qquad \csc X'OB'=-\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\cos X'OB' = -\frac{3}{\sqrt{13}}; \qquad \sec X'OB = -\frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\tan X'OB' = \frac{2}{3}; \qquad \cot X'OB' = \frac{3}{2}.$$

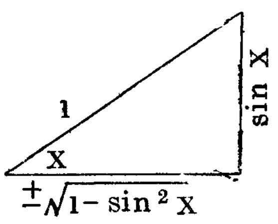
可知上列算式的結果，與前述的代數符號相吻合，茲將上列的算式合併書之：

$$\sin x = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}; \qquad \csc x = \pm\frac{\sqrt{13}}{2};$$

$$\cos x = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}; \qquad \sec x = \pm\frac{\sqrt{13}}{2};$$

$$\tan x = \frac{2}{3}; \qquad \cot x = \frac{3}{2}.$$

在上述的各式中，足以證明三角函數的代數符號的正確。茲更述從一函數中，可以推算其餘的各函數。



例題：

設知 $\sin x$，試推算其餘的五函數。

解法： 因 $\sin x = \frac{\sin x}{1}$

$$= \frac{\text{ordinate}}{\text{hypotenuse}},$$

$$\text{Abscissa} = \pm\sqrt{(\text{hypotenuse})^2 - (\text{ordinate})^2}$$

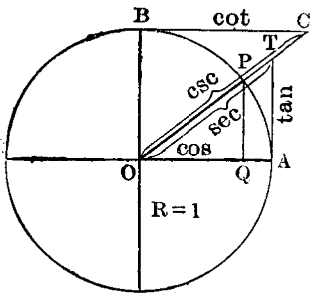
$$= \pm\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

依前面的說明，則得

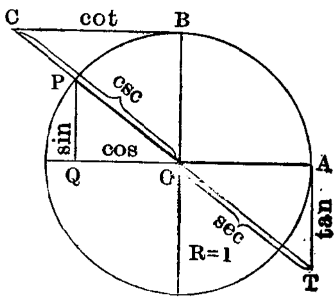
$\sin x = \sin x$；　　$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$；

$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$；　$\sec x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$；

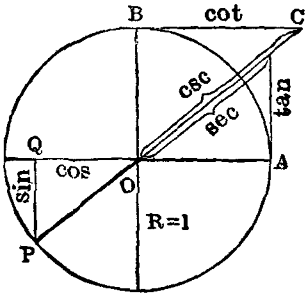
$\tan x = \pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$；　$\cot x = \pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$.



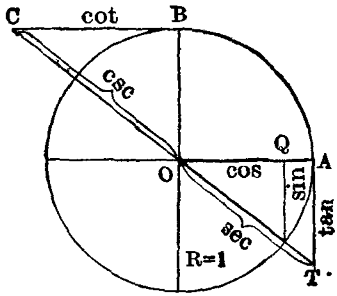
在第一象限的角



在第二象限的角



在第三象限的角



在第四象限的角

根據三角函數的公式，則得

$$\sin AOP = \frac{XP}{OP(=1)} = QP\text{；}$$

$$\cos AOP = \frac{OQ}{OP(=1)} = OQ\text{；}$$

$$\tan AOP = \frac{QP}{OQ} = \frac{AT}{OA(=1)} = AT\text{；}$$

$$\csc AOP = \frac{OP}{OQ} = \frac{OT}{OA(=1)} = OT\text{；}$$

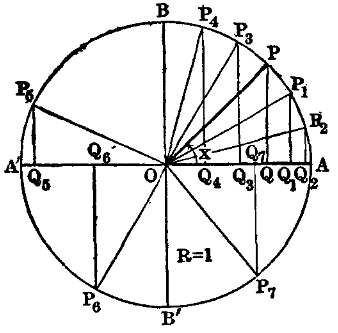
$$\sec AOP = \frac{OQ}{QP} = \frac{BC}{OB(=1)} = BC\text{；}$$

$$\cot AOP = \frac{OP}{QP} = \frac{OC}{OB(=1)} = OC\text{；}$$

第八章　函數的變更及角的旋轉

函數的變更與角的旋轉有密切的關係。如果角的大小不變，則函數亦不變，角變則函數亦因之而變更，這是一定的理由。茲將正弦，餘弦，正切，正割，餘割等等的變更，一一述之。

(a)正弦 Sine



如圖設 x 表示旋轉角 AOP，

如 x 的值減少，則正弦亦減少，經過 Q_1,P_1, $Q_2,P_2,Q_3,P_3,\cdots\cdots\cdots$ 等等，

如 x 的值以零爲限度，則正弦的值，亦以零爲限度。則

$$\sin 0^\circ = 0.$$

如 x 的值增加，則正弦的值亦增加，x 值自零度以至 90°爲限度，則正弦爲正，從零度起增加，其值爲 Q_3,P_3,Q_4,P_4 ····等等。如以 OB (=1)爲限度，則

$$\sin 90^\circ = 1.$$

如x的值增加，以90°到80°爲限度，則正弦爲正，自OB(=1)起漸漸減少，經過 Q_5, P_5 ……等等，並以零度爲限度，則

$$\sin 180^\circ = 1.$$

如x的值增加，以 180° 至 270° 爲限度，則正弦爲負，其數字的值增加，從零度徑過 Q_6 P_6 … 等等，並以 OB'(=1) 爲限度，則

$$\sin 270^\circ = 1.$$

如x值的增加，以 270° 至 300° 爲限度，則正弦爲負，其數字的值減少；從 OB'(=1) 經過 Q_7, P_7……等等，並以零度爲限度，則

$$\sin 360^\circ = 0.$$

(b)餘弦 Cosine

用上圖，可以觀察，如x的值減少，則餘弦增加，經過 OQ_1, OQ_2 ……等等，x以零度爲限度，餘弦以OA(=1)爲限度，則

$$\cos 0^\circ = 1.$$

如 x 的值增加，以 0° 至 90° 爲限度，則餘弦爲正，並從 OA (=1) 減少，經過 OQ_3, OQ_4……等等，以零爲限度，則

$$\cos 90^\circ = 0.$$

如 x 的值增加，以 90° 至 180° 爲限度，則餘弦爲負，數字的值增加，自零經過 OQ_5…… ……等等，以 O A'(=1)爲限度，則

$$\cos 180^\circ = 0.$$

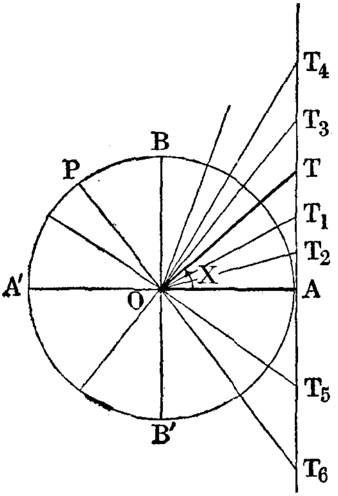
如 x 的值增加，以 180° 至 270° 爲限度，則餘弦爲負，數字的值減少，自零 OA'(=1)經過 OQ_6……，以零爲限度，則

$$\cos 270^\circ = 0.$$

如 x 的值增加，以 270　至 360° 爲限度，則餘弦爲正，從 O 經過 OQ_7……等等，漸漸增加，以 OA 爲限度，則

$$\cos 360^\circ = 1.$$

(c)正切 Tangent



設x表示旋轉角AOT。

如x的值減少，則正切的值減少，經過AT_1,AT_2,……等等，x的值以零爲限度，則正切亦以0爲限度，則

$$\tan 0°=0.$$

如x的值，以0°至90°爲限度，則正切爲正，以零爲限度，經過AT_3 AT_4,……等等，則

$$\tan 90°=+\infty.$$

設∠AOT以90°爲限度，則正切爲負，數字的值，增加至無限度，則

$$\tan 90°=-\infty.$$

從上列的兩個正切的結果，根據 x 的值增加或減少，以 90°為限度，一為 $+\infty$,一為 $-\infty$，上列的結果，可以寫成下列的方程式為

$$\tan 90°=\infty.$$

如 x 的值增加，以 90° 到 180° 為限度，則正切為負，自 $-\infty$ 經過 AT_6, AT_5……等等，則

$$\tan 180°=0.$$

如 x 的值增加，以 180° 至 270° 為限度，則正切為正，自零經過 AT_3, AT_4,……等等，以至於無限度，則

$$\tan 270°=\infty.$$

如 x 的值增加，以 270° 至 360° 為限度，則正切為負，自 $-\infty$ 經過 AT_6, AT_5……等等，以零為限度，則

$$\tan 360°=0.$$

(d)正割 Secant

用前圖，可以自圖中觀察，如 x 的值減少，則正

割亦減少，經過 $OT_1, OT_2\cdots\cdot$ 等等，以 $OA(=1)$ 為限度，則

$$\sec 0^\circ = 1.$$

如 x 的值增加，以 0° 至 90° 為限度，則正割為正，從 $OA(=1)$ 經過 $OT_3, OT_4\cdots\cdots$ 等等，以至於無限度，則

$$\sec 90^\circ = \infty.$$

如 x 的值增加，以 90° 至 180° 為限度，則正割為負，從 $-\infty$ 經過 $OT_6, OT_5, \cdots\cdot$ 等等，以負 $OA(=-1)$ 為限度，則

$$\sec 180^\circ = -1.$$

如 x 的值增加，以 180° 至 270° 度為限度，則正割為負，其數字值亦負，$OA(=-1)$ 增加，經過 $OT_3, OT_4,\cdots\cdots$ 等等，則

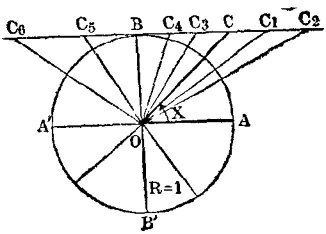
$$\sec 270^\circ = \infty.$$

如 x 的值增加，以 270° 至 360° 為限度，則正割為正，自 $+\infty$ 經過 $OT_6, OT_5\cdots\cdots$ 等等，以 $OA(=1)$

爲限度，則

$$\sec 360^\circ = 1.$$

(e)餘切 Cotangent



設 x 表示旋轉的角 AOC,

如 x 的值減少，則餘切增加，經過 B C_1 BC_2……等等。

如 x 的值以零爲限度，餘切增加無限度，則

$$\cot 0^\circ = \infty.$$

如 x 的值增加，以 0° 至 90° 爲限度，則餘切增加，自 $+\infty$ 經過 BC_3, BC_4,……等等，以零爲限度，則

$$\cot 90^\circ = 0.$$

如 x 的值增加，以 90° 到 180° 爲限度，則餘切爲負，自零經過 BC_5, BC_6……等等以至於無限度，則

$$\cot 180^\circ = \infty.$$

如 x 的值增加，以 180° 至 270° 爲限度，則餘

切爲正，自$+\infty$經過BC_3, BC_4……等等，以零爲限度，則

$$\cot 270^\circ = 0.$$

如x的值增加，以270°度至360°爲限度，則餘切爲負，自零起增加，經過BC_5, BC_6……等等，以至於無限度，則

$$\cot 360^\circ = \infty.$$

(f)餘割 Cosecant

用前圖，可以自圖中觀察，如x的值減少，則餘割的值增加，經過OC_1, OC_2……等等。如x的值以0爲限度，餘割的值爲無限度，則

$$\csc 0^\circ = \infty.$$

如x的值增加，以0°至90°爲限度，則餘割爲正，自$+\infty$經過OC_3, OC_4……等等，以$OB(=1)$爲限度，則

$$\csc 90^\circ = 1.$$

如x的值增加以，90°至180°爲限度，則餘割

爲正，自 OB(=1)經過 OC_5, OC_6 ……等等，則

$$\csc 180° = \infty.$$

如 x 的值增加，以 180° 至 270° 爲限度，則餘割爲負，自 $-\infty$ 經過 OC_3, OC_4 ……等等，以負 OB(=-1) 爲限度，則

$$\csc 270° = -1.$$

如 x 的值增加，以 270° 至 360° 爲限度，則餘弦爲負，自 OB(=-1) 增加，經過 OC_5, OC_6 ……等等，以至於無限度，則

$$\csc 360° = \infty$$

茲將上述的函數變更的結果，列表如下：

角度 / 函數	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	−1	0
cos	1	0	−1	0	1
tan	0	∞	0	∞	0
cot	∞	0	∞	0	∞

sec	1	∞	-1	∞	1
csc	∞	1	∞	-1	∞

第九章　三角函數的關係

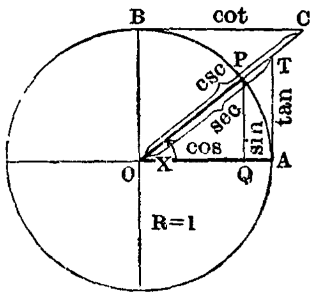
三角函數的關係，在第二節中，已詳爲介紹，如

$$\sin x=\frac{1}{\csc x},\qquad \csc x=\frac{1}{\sin x},$$

$$\cos x=\frac{1}{\sec x},\qquad \sec x=\frac{1}{\cos x},$$

$$\tan x=\frac{1}{\cot x},\qquad \cot x=\frac{1}{\tan x}.$$

茲作一單位圓，證明三角函數的關係。



直角三角形QPO

$$\tan x=\frac{QP}{OQ},$$

$$\cot x=\frac{OQ}{QP},$$

因爲 $QP=\sin x$，

$OQ=\cos x$.

則 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$， $\cot=\frac{\cos x}{\sin x}$。

在同樣的三角形中，

$\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2=\overline{OP}^2$,或

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$…………(1)

在△OAT中，$\overline{OA}^2+\overline{AT}^2=\overline{OT}^2$或

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$…………(2)

在△OCB中，$\overline{OB}^2+\overline{BC}^2=\overline{OC}^2$,或

$1+\cot^2 x=\csc^2 x$…………(3)

(1)(2)(3)各式解之，則得

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$，

$\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$,

$\sin x=\frac{1}{\csc x}$，

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$，

$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$,

$\tan^2 x=\sec^2 x-1$

$\tan x=\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$.

$$\tan x=\frac{1}{\cot x}.$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}.$$

$$\csc^2 x=1+\cot^2 x.$$

$$\csc x=\pm\sqrt{1+\cot^2 x}.$$

$$\csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

$$\sec^2 x=1+\tan^2 x.$$

$$\sec x=\pm\sqrt{1+\tan^2 x}.$$

$$\cot^2 x=\csc^2 x-1.$$

$$\cot x=\pm\sqrt{\csc^2 x-1}.$$

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}.$$

三角函數的關係，在上列各式中，已可以得其概況，茲列舉數例如下，以資佐證。

例題 1. 求 $\sin x$ 的五個函數

(I) $\sin x=\dfrac{1}{\csc x}$

(II) $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}.$

(III) $\sin x=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

(IV) $\sin x=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{\sec^2 x}}=\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$.

(V) $\sin x=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\dfrac{1}{\tan^2 x}}}=\dfrac{\tan x}{\pm\sqrt{\tan^2 x+1}}$.

例題 2. 求 cos x 的五個函數。

(I) $\cos x=\dfrac{1}{\sec x}$.

(II) $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$,

(III) $\cos x=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$.

(IV) $\cos x=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{\csc^2 x}}=\dfrac{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}{\csc x}$.

(V) $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\cot^2 x}}}=\dfrac{\cot x}{\pm\sqrt{\cot^2 x+1}}$.

例題 3. 求 tan x 的五個函數

(I) $\tan x=\dfrac{1}{\cot x}$.

(II) $\tan x=\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$.

(III) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$.

(IV) $\tan x=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$.

(V) $\tan x=\frac{1}{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}$.

例題 . 證明 $\sec x-\tan x\sin x=\cos x$.

運用上列的公式，則得

$$\sec x-\tan x\sin x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\sin x,$$

因 $(\sec x=\frac{1}{\cos x},\ \tan x=\frac{\sin x}{\cos x})$

$$=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x}{\cos x}$$

$$=\cos x.$$

例題 5. 證明 $\sin x(\sec x+\csc x)-\cos x(\sec x-\csc x)=\sec x\csc x$.

解證 $\sin x(\sec x+\csc x)-\cos x(\sec x-\csc x)$

$$=\sin x(\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x})-\cos x(\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x})$$

(因 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$， $\csc x=\frac{1}{\sin x}$)

$$=\frac{\sin x}{\cos x}+1-1+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x}=\frac{1}{\cos x\sin x}$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}=\sec x\csc x.$$

第十章　和角較角的函數

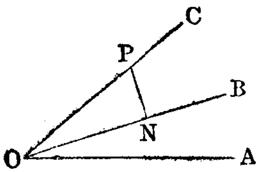
以兩角的函數，表示其和角及較角的函數的公式。

設AOB角等於A，與A相倚的BOC角爲B，則AOC角等於A+B。於OC線上取一點P，作OB的垂線PN，則ON在OB線上爲正，在OB的引長線上爲負。NP的正負，以對於OB的方位而定，而NP的正方向（NP爲正，PN爲負）與OA成$90°+A$角，故$ON=OP\cos B$ $NP=OP\sin B$，因ON爲OP在OB上的投影。

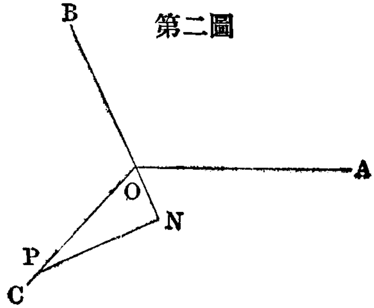
下列第一圖的A，B，俱小於正90°的正角，第二圖A，B，皆在90°與180°之間，第三圖A在180°

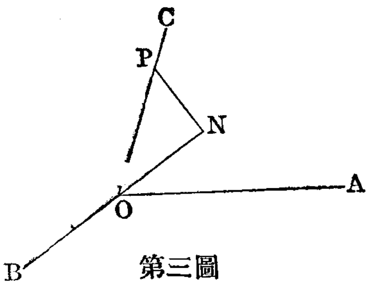
與 270° 之間，B 在 −90° 與 −180° 之間，而第一第二兩圖皆正，第三圖 NP 爲負。

第一圖



第二圖





第三圖

依投影的定理，OP 在 OA 上的投影，等於 ON 及 NP 在 OA 上的投影的和，或

$$OP\cos(A+B)=ON\cos A+NP\cos(A+90°)$$
$$=OP\cos A\cos B+OP\sin B\cos(A+90°).$$

故 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B\cdots(1)$

作OA的垂線，投ONP三角形各邊的影於垂線上，則有

$$OP\sin(A+B)=ON\sin A+NP\sin(A+90°)$$
$$=OP\sin A\cos B+OP\sin(A+90°)\sin B,$$

故 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B\cdots(2)$

於(1)(2)以$-B$代B,則有

$$\cos(A-B)=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$$

及 $\sin(A-B)=\sin A\cos(-B)-\cos A\sin(-B)$

故 $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B\cdots(3)$

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B\cdots(4)$

(3)(4)可直由作B角於負方向而得。

(1)(2)稱爲和角的公式，(3)(4)稱爲較角的公式，於

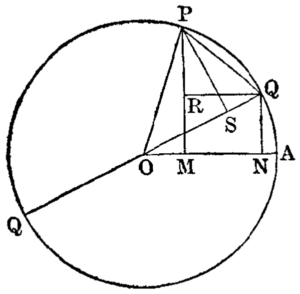
(1),以 $A+90^\circ$ 代 A,則有

$$\cos(90^\circ+A+B)=\cos(90^\circ+A)\cos B-\sin(90^\circ+A)\sin B$$

或 $$-\sin(A+B)=-\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

此卽(2),再於(2),以 $90^\circ+A$ 代 A,則得(1),且由(1)(2)(3)(4)中任意一式，均可推得餘三式。

Cauchy 氏和較角公式的證明



以O爲心作圓，作 OP,OQ 兩半徑，與 OA 成 A, B 兩角，連 P,Q 復作 PM, QN 兩垂線，又作 QR 平行 OA,則有

$$\overline{PQ}^2=\overline{QR}^2+\overline{RP}^2$$

$$=(ON-OM)^2+(PM-QN)^2$$

$$=OA^2\{(\cos B-\cos A)^2+(\sin A-\sin B)^2\}$$

$$=2OA^2(1-\cos A\cos B-\sin A\sin B)$$

作垂線 P S,則有

$$PQ^2=QS,OQ=2OA(OA-OS)$$

$$=2OA^2\{1-\cos(A-B)\}$$

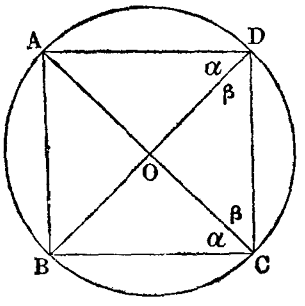
改B爲－B,則得(1),改B爲90°－B,則得(2),改B爲90°＋B,則得(4)。

希臘的三角術上發明和角公式者，爲 Ptolemy 氏的定理，特述之如下：

設 ABCD 爲圓內切四邊形，則有 AB,CD＋AD,BC＝AC,BD,若命圓徑爲 1,則任意弦 AB 等於 AOB 半角之正弦，且爲 AOB 角之半，等於 ACB 角、今說明 $\sin(\alpha\pm\beta)$ 及 $\cos(\alpha\pm\beta)$ 的式，皆包括於 Ptolemy氏的定理。

(1)設 B D 爲圓的直徑，簡稱爲圓徑，

$ADB=\alpha$, $BDC=\beta$, 則



$ABD=\frac{1}{2}\pi-\alpha$，

$DBC=\frac{1}{2}\pi-\beta$，

$AC=\sin(\alpha+\beta)$，

$AD=\sin x$，

$CD=\cos\beta$, 則此定理，

同於下式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

(2)設 C D 爲圓徑，命 $BCA=\alpha$, $ACD=\beta$，

則 $AD=\sin(\alpha+\beta)$，而此定理，與下式同。

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

(3)以 BD 爲圓徑，以 $ADB=\alpha$, $CBD=\beta$,則

$ADC=\frac{1}{2}\pi+\alpha-\beta$, 故 $AC=\cos(\alpha-\beta)$，故此定理，合於下式，

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

(4)以 CD 爲圓徑，以 $BCD=\alpha$,$ADC=\beta$,則

$BCA=\alpha+\beta-\frac{1}{2}\pi$,$AB=-\cos(\alpha+\beta)$,故定此理

，同於

$$-\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta.$$

正餘弦和較的式

將上節的(1)(2)(3)(4)加減之，得

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$$

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$$

命 $A+B=C, A-B=D$，則 $A=\frac{1}{2}(C+D), B=\frac{1}{2}(C-D)$，故

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{1}{2}(C+D)\cos\frac{1}{2}(C-D)\cdots(5)$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{1}{2}(C+D)\sin\frac{1}{2}(C-D)\cdots(6)$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{1}{2}(C+D)\cos\frac{1}{2}(C-D)\cdots(7)$$

$$\cos D-\cos C=2\sin\frac{1}{2}(C+D)\sin\frac{1}{2}(C-D)\cdots(8)$$

(5)(6)(7)(8)，B以兩函數的乘積，表示兩角正餘弦的和或較的式，更以術語解釋之。

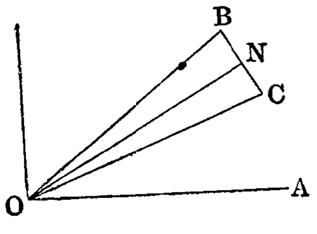
兩正弦的和，等於半和角的正弦乘半較角的餘弦的二倍。

兩正弦的較，等於半和角的餘弦乘半較角的正弦的二倍。

兩餘弦的和，等於半和角的餘弦乘半較角的餘弦的二倍。

兩餘弦的較，等於半和角的正弦乘半較角的正弦的二倍。

以上諸式，更以投影法證明之。



命 BOC＝C,COA＝D, OB＝OC, 作 ON 垂線，則N為BC的中點，且

$$NOA=\frac{1}{2}(C+D),$$

$NOB=NOC=\frac{1}{2}(C-D)$,OB, OC在OA上的投影的和，等於 ON,NB,ON,NC, 在OA上的投影的和，且

NB,NC 的投影等長而反號，是以 OB,OC 在 OA 上的投影，等於 ON 投影的兩倍，故

$$OB\cos C + OC\cos D = 2\,ON\cos\frac{1}{2}(C+D).$$

因　$$ON = OB\cos\frac{1}{2}(C-D),$$

即　$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{1}{2}(C-D)\cos\frac{1}{2}(C-D)\cdots(7)$$

投諸線的影於 OA 的垂線上，則有

$$OB\sin C + OC\sin D = 2ON\sin\frac{1}{2}(C-D),$$

故　$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{1}{2}(C+D)\cos\frac{1}{2}(C+D)\cdots(5)$$

又 OC 在 OA 上的投影，等於 BN 投影的兩倍與 OB 投影的和，即

$$OC\cos D = OB\cos C + 2\,BN\sin\frac{1}{2}(C+D).$$

故　$$\cos D - \cos C = 2\sin\frac{1}{2}(C+D)\sin\frac{1}{2}(C-D)\cdots(8)$$

作諸線的投影於 OA 的垂線上，則有

$$OC\sin D = OB\sin C - 2\,BN\cos\frac{1}{2}(C+D),$$

即　$$\sin C - \sin D = 2\sin\frac{1}{2}(C-D)\cos\frac{1}{2}(C+D)\cdots(6)$$

和角較角的正切餘切

以各角的正切餘切，表示其和角較角的正切餘切的公式。

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\cos B}$$

將分子分母以 $\cos A\cos B$ 除之，則得

$$\tan(A+B)=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin A}{\cos B}}.$$

因 $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\tan A$, $\dfrac{\sin B}{\cos B}=\tan B$, 則得

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

$$\cot(A+B)=\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B},$$

將分子分母以 $\sin A\sin B$ 除之，則得

$$\cot(A+B)=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}$$

$$=\frac{\frac{\cos A}{\sin A}\cdot\frac{\cos B}{\sin A}-1}{\frac{\cos A}{\sin B}+\frac{\cos A}{\sin A}},$$

因 $\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A$， $\frac{\cos A}{\sin B}=\cot B$，則得

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A},$$

準同樣的公式，則得

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B},$$

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

將上列的合併起來，則得

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B.$$

$$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B.$$

$$\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}.$$

$$\cot(A\pm B)=\frac{\cot A\cot B\mp1}{\cot B\pm\cos A}.$$

第十一章　二倍角的三角函數

(a) 求 $\sin 2A$ 的公式：

從 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos B\sin B$,

使B等於A,則

$$\sin(A+A)=\sin A\cos A+\cos A\sin A,$$

$\therefore \sin 2A=2\sin A\cos A$.

(b) 求 $\cos 2A$ 的公式：

從 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$,

以B等於A,則

$$\cos(A+A)=\cos A\cos A-\sin A\sin A,$$

$\therefore \cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$.

因 $\cos^2 A=1-\sin^2 A$,則

$\therefore \cos 2A=1-2\sin^2 A$.

或因 $\sin^2 A=1-\cos^2 A$,則

$\therefore \cos 2A=2\cos^2 A-1$.

(c) 求 $\tan 2A$的公式：

從 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$,

以B等於A則得

$$\tan(A+A)=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan A},$$

$$\therefore \tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.$$

從 $\sin 2A=2\sin A\cos A$,

以 A 代 2A,或以$\frac{A}{2}$代 A,則得

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

從 $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$,

以 A 代 2A,或以$\frac{A}{2}$代 A,則得

$$\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2},$$

或 $\tan 2A=\frac{{}^{\backprime}\tan A}{1-\tan^2 A}$,

以 A 代 2A,或以$\frac{A}{2}$代 A,則得

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}},$$

$$2\sin^2 A=1-\cos^2 A,$$

$$2\cos^2 A=1+\cos^2 A,$$

從上列兩式中,解 s'n A 及 cos A 則得

$$\sin A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2A}{2}},$$

$$\cos A = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2A}{2}}.$$

以 A 代 2A,或以$\frac{A}{2}$代 A,則得

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}},$$

因此可得 $\tan\frac{A}{2}$的公式

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}},$$

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}.$$

以$\sqrt{1+\cos A}$乘右項,則得

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A};$$

以$\sqrt{1-\cos A}$乘右項,則得

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{\sin A}.$$

因此可得 $\cot\frac{A}{2}$ 的公式

$$\cot\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}.$$

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{\sin A}.$$

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1-\cos A}.$$

第十二章　三倍角及三角和的函數

1. 三倍角的函數：

(a) $\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x$

$$=\sin x(1-2\sin^2 x)+\cos x\cdot 2\sin x\cos x$$

$$=\sin x(1-2\sin^2 x)+2\sin x(1-\sin^2 x)$$

$$=3\sin x-4\sin^3 x.$$

(b) $\cos 3x=\cos(x+2x)=\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x$

$$=\cos x(2\cos^2 x-1)-\sin x\cdot 2\sin x\cos x$$

$$=\cos x(2\cos^2 x-1)-2\cos x(1-\cos^2 x)$$

$$=4\cos^3 x-3\cos x.$$

(c) $\tan 3x = \tan(x+2x) = \dfrac{\tan x + \tan^2 x}{1 - \tan x \tan 2x}$

$$= \frac{\tan x + \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}{1 - \tan x^2 \cdot \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}} = \frac{\tan x(1-\tan^2 x) + 2\tan x}{(1-\tan^2 x) - 2\tan^2 x}$$

$$= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}.$$

2. 三角和的函數：

三角和的函數，可以下列的方程式表之。

$$\sin(A+B+C) = \sin(A+B)\cos C + \cos(A+B)\sin C$$

$$= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)\cos C + (\cos A \cos B$$

$$- \sin A \sin B)\sin C.$$

又

$$\cos(A+B+C) = \cos(A+B)\cos C - \sin(A+B)\sin C$$

$$= (\cos A \cos B - \sin A \sin B)\cos C$$

$$-(\sin A \cos B + \cos A \sin B)\sin C$$

故

$$\sin(A+B+C) = \sin A \cos B \cos C,$$

$$+ \sin B \cos C \cos A$$

$$+\sin C\cos A\cos B$$

$$-\sin A\sin B\sin C\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

$$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C$$

$$-\cos A\sin B\sin C$$

$$-\cos B\sin C\sin A$$

$$-\cos C\sin A\sin B\ \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

改寫(A) B)爲

$$\sin(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C(\tan A+\tan B$$

$$+\tan C-\tan A\tan B\tan C)$$

$$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C(1-\tan B\tan C$$

$$-\tan C\tan A-\tan A\tan B)$$

相除得

$$\tan(A+B+C)$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}\ (C)$$

同法得

$$\cot(A+B+C)$$

$$=\frac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot B\cot C+\cot C+\cot A+\cot A\cot B-1}\text{(D)}$$

第十三章　三角的恆等式

三角的恆等式，與代數學的恆等式的性質相同，茲將三角恆等式的解法，列舉之如下：

(a)將倍角的函數化簡，

(b)將式中所有的函數，先化成正弦及餘弦，

(c)將式中的帶根式及分數化簡，

(d)依前節所述的公式，將式中的各函數，一一化之，即得。

茲舉數例如下，以資佐證：

例題 1.　證明下列的恆等式：

$$1+\tan 2x\tan x=\sec 2x$$

解法　因 $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$，$\sec 2x=\frac{1}{\cos 2x}$

$$=\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x}.$$

第一步解法　$1+\frac{2\tan x}{1-\tan x}=\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x}$,

$$\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x};$$

第二步解法 $$\frac{\dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$\frac{\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x};$$

第三步解法 $$\frac{\cos^2 x+\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x},$$

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

$$\therefore 1=1.$$

例題 2. 證明下列的恆等式：

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$$

解法 因 $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y,$$

則 $$\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y},$$

$$\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}},$$

$$\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}$$

$$\therefore\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y},$$

$$=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y},$$

$$\therefore\quad 1=1.$$

第十四章 三角函數的圖解

算術及代數學中有圖解法，三角術中也有圖解法。茲將三角函數中的圖解法，一一述之。

I. 使y等於所解的函數；

II. 假定變數的值，代數函數中，以求y的值；

III. 將已求的各值，（如 x,y,的值）置於圖中，則得各點；

IV. 將圖中各點連綫之，則得一曲線，此曲線卽爲函數的圖解。

三角函數的解法步驟，已如上述，玆舉例並列 x y 值表如下：

x		y	x		y
0°	0	0	0°	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	.50	−30°	$-\frac{\pi}{6}$	−.50
60°	$\frac{\pi}{3}$	.86	−60°	$-\frac{\pi}{3}$	−.86
90°	$\frac{\pi}{2}$	1.00	−90°	$-\frac{\pi}{2}$	−1.00
120°	$\frac{2\pi}{3}$	.86	−120°	$-\frac{2\pi}{3}$	−.86
150°	$\frac{5\pi}{6}$	.50	−150°	$-\frac{5\pi}{6}$	−.50
180°	π	0	−180°	$-\pi$	0

註 $\pi = 180°$

210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\ .50$	$-210°$	$-\frac{7\pi}{6}$	$+\ .50$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\ .86$	$-240°$	$-\frac{4\pi}{3}$	$+\ .86$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1.00	$-270°$	$-\frac{3\pi}{2}$	$+1.00$
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\ .86$	$-300°$	$-\frac{5\pi}{3}$	$+\ .86$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\ .50$	$-330°$	$-\frac{11\pi}{6}$	$+\ .50$
360°	2π	0	$-360°$	$-\ 2\pi$	0

例題 1. 求 $\sin x$ 的圖解

圖解　設 $y=\sin x$

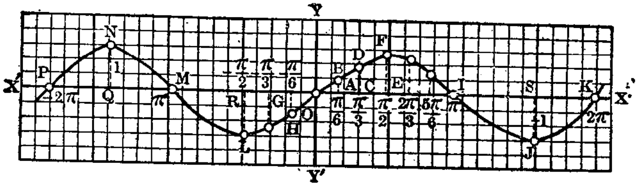
設 $x=0, y=0$，

$x=\frac{\pi}{6}$，$y=.50=AS$；

$x=\frac{\pi}{3}$，$y=.86=CD$；

$x=\frac{\pi}{2}$，$y=1.00$

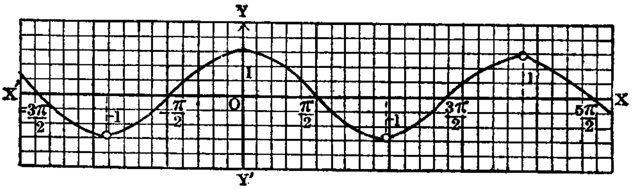
$x=\frac{\pi}{6}$；$y=-..0=GH$，……



例題 2. 求 cos x 的圖解。

解法　　設 y＝cos x，

依上例的解法，可得 cos x 的圖解。



例題 3. 求 tan x 的圖解。

解法　　設 y＝tan x，

解之則得 tan x 的圖解。

tan x 的圖解，有下列的說明：

x＝arc zero＝zero，　　y＝zero＝zero，

x＝arc AB＝OA，　　y＝AM＝AB，

$x = \text{arc } AC = OC$,

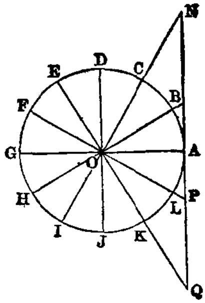
$y = AN = AB$,

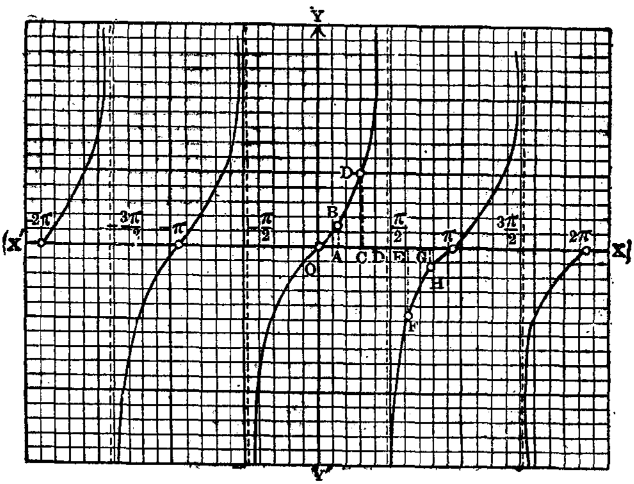
$x = \text{arc } AD = OD$,

$y = \infty = \infty$,

$x = \text{arc } AE = OE$,

$y = AQ = EF$。



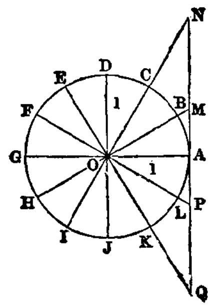


例題4 求sec x的圖解。

解法　　設$y=\sec x$，

解之，則得$\sec x$的圖解。

$\sec x$的圖解，有下列的說明：



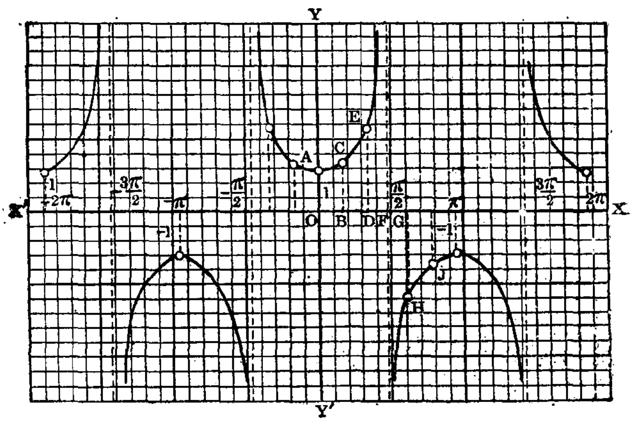
$x=\text{arc zero}=\text{zero}$．

$y=OA=OA$，

$x=\text{arc }AB=OB$，

$y=OM=BC$，

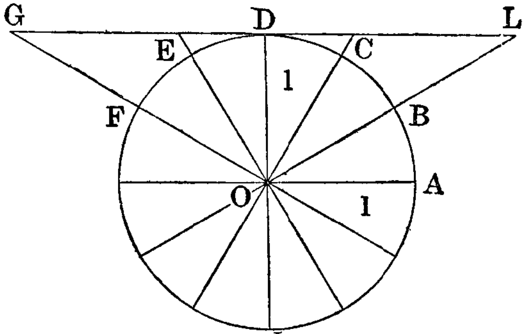
$x=\text{arc }AB=OD$，　　$y=ON=DE$，

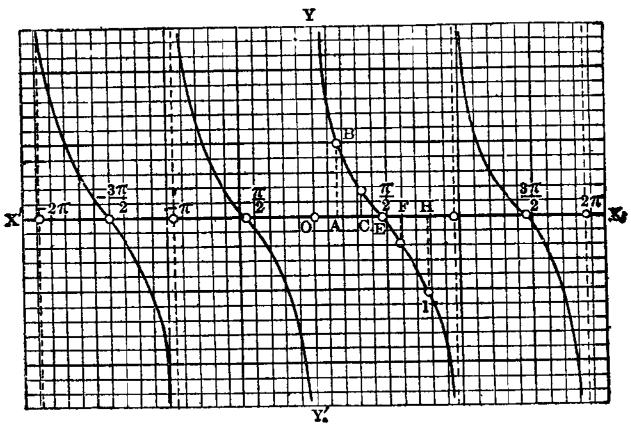


$x = \text{arc AD} = OF$，　　　$y = \infty = \infty$，

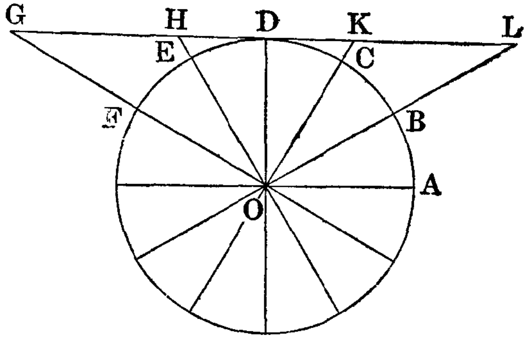
$x = \text{arc AE} = OG$，　　　$y = OA = GH$。

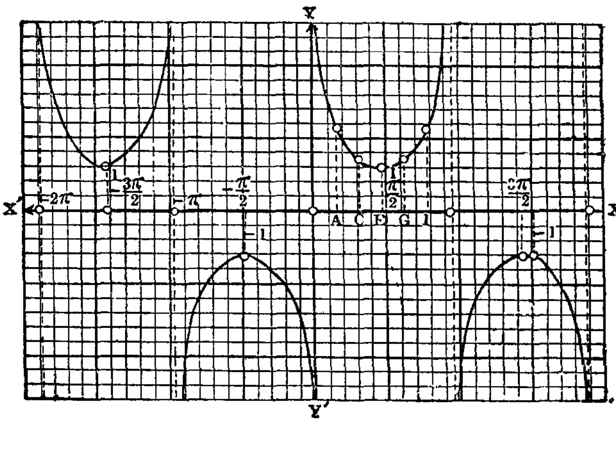
例題5. 求餘切的曲線 Cotangent curve,





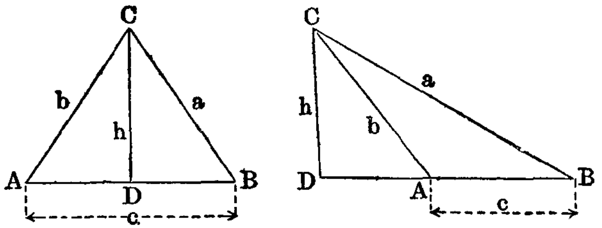
例題 6. 求餘割的曲線 Cosecant curve





第十五章　正弦餘弦及正切的定律

(a 正弦定律 Law of sines.



(a)　　　　　　(b)

正弦定律爲『三角形的邊，各與其對角的正弦成正比例』：

作一垂線 CD $(=h)$，在 AB 邊或 AB 的引長邊上，用直角三角形 ACD,

(A) $\sin A=\dfrac{h}{b}$;

在(b)圖中 $\sin A=\sin(180^\circ-A)=\sin CAD=\dfrac{h}{b}$.

用直角三角形 BCD

(B) $\sin B=\frac{h}{a}$.

以(B)除(A),則得$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}$.

(C) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin b}$.

同理

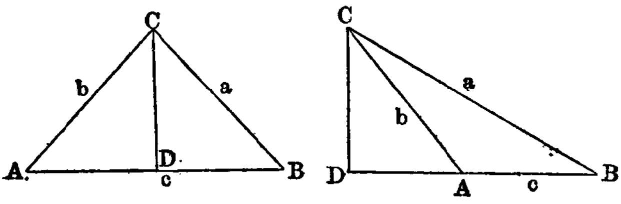
(D) $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

(E $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$

將(C),(D),(E)合併書之，則正弦的定律

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

(b 餘弦的定律 Law of cosines.



(a)　　　(b)

在上列的(a)圖中，A 為銳角，則根據幾何學的定

理，可得下列的方程式：

$$\overline{CB}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2AB\times AD$$

或　$a^2=b^2+c^2=2\times c\times AD.$

但　$AD=b\cos A,$

$\therefore$　$a^2=b^2+c^2=2bc\cos A.$

在上列的(b)圖中，A 爲鈍角，則根據幾何學的定理，可得下列的方程式：

$$CB^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2+2AB\times AD,$$

或　$a^2=b^2+c^2=2\times c\times AD,$

但　$AD=b\cos DAC$

$$=b\cos(180^\circ-A)$$

$$=-b\cos A,$$

$\therefore$　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

同理　$b^2=a^2+c^2=2ac\cos B.$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$

$2s-2c=a+b+c-2c.$

(B)　$2(s-c)=a+b-c,$

同理 $2(s-b)=a-b+c$。

(C) $2(s-b)=a-b+c$;

(D) $2(s-a)=-a+b+c$。

從 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$.

以 A 代 $2x$,以$\frac{1}{2}$A 代 x,則得

(E) $2\sin^2\frac{1}{2}A=1-\cos A$;

(F) $2\cos^2\frac{1}{2}A=1+\cos A$。

以餘弦定律的公式代之，則得

(G) $$2\sin^2\frac{1}{2}A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$=\frac{c^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$=\frac{2(s-c)\,2(s-b)}{2bc} \quad \text{(B), (C)}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

同理 $$2\cos^2\frac{1}{2}A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$=\frac{2s\cdot 2(s-a)}{2bc}.$$

$$\therefore \quad \cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

解 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

則得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

解 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

則得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

解 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

則得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

(c) 正切定律 Law of tangents

從正弦定律

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

依比例的加減法解之，則得

(A) $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}.$$

(B) $$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$$

從(A)(B)兩式中，則得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$$

同理 $$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+C)}{\tan\frac{1}{2}(A-C)};$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)}.$$

$$\therefore\quad \tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{1}{2}(A+B).$$

第十六章　半角的正弦餘弦及正切

從幾何學中，得

(A) $2s=a+b+c$,

如每邊減以 $2c$,

因　$\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

同理　則得

$$\sin\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

$$\cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$

$$\tan\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}};$$

$$\sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

$$\cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

$$\tan\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

在習慣上，均常用

$$\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\,(s-a)}}.$$

帶根項的分子分母，以 (s—a) 乘之，則得

$$\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)(s-a)}{s\,(s-a)^2}}$$

$$=\frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)s(\,-c)}{s}}.$$

使 r=帶根式項，

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

則得 $\tan\frac{1}{2}A=\frac{r}{s-a}$，

$$\tan\frac{1}{2}B=\frac{r}{s-b},$$

$$\tan\frac{1}{2}C=\frac{s}{s-c}.$$

第十七章 斜三角形的解法

斜三角形的解法，有下面的四種情形：

I. 知二角及二角頂點間的邊，

II. 知二邊及他的夾角，

III. 知二邊及他的一對角，

IV. 知三邊。

茲將此四種情形，分別說明之。

(I) 設已知部分爲 a, B, C.

則未知部分爲 A, b, c.

解法先求 $A=180^\circ-(B+C)$…………(1)

次從正弦法則

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}\text{ 及 }c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

∴ $\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$ (2)

及 $\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$ (3)

(II) 設已知部分爲 a, b, c.

則未知部分爲 A, B, C.

解法先從 $\frac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\frac{1}{2}C$………(1)

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}$$

$$\cot\frac{1}{2}C\ (\text{公式}29)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{2}(A+B)\text{及}\frac{1}{2}(A-B)\text{得}A,B.$$

$$C=\frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}(\text{公式}26)\cdots\cdots(3)$$

(III) 已知部分若為　　a, b, A.

則未知部分為　　B, C, c.

解法

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$C=180°-(A+B)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

在這種情形中，就 1)式而論，從正弦反求其角度，通常可得兩值，但從題目性質上的不同，有時這兩值均可採用，有時祇能採取其中的一值；有時兩值都不能採，茲詳細討論之如下：

(a)如 $A>90°$

(1) $a<b$ 或 $a=b$, 則 $A<B$ 或 $A=B$. 而二角A,B, 都是鈍角，故問題爲不可能。

(2) $a>b$ 時則 $A>B$ 而B的值只能採取鈍角，故祇有一個答數。

(b)如 $A=90°$

(1) $a<b$ 或 $a=b$ 時，則 $A<B$ 或 $A=B$, 故問題爲不可能。

(2) $a>b$ 時，則 $A>B$, 故B的值只能採取銳角。故祇有一個答數。

(c)如 $A<90°$

(1) $a>b$ 或 $a=b$ 時，則 $A>B$ 或 $A=B$, 故B的值祇能採取鈍角，故只有一個答數。

(2) $a<b$ 時，則 $A<B$, 故B爲鈍爲銳均可，雖然在此時又因(1)右邊的值的不同，再要用下面的討論。

(甲)如 $b\sin A<a$ 時，

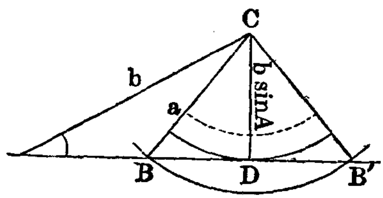
在這種情形之下，則B的二值，均可採用，且C及c的值亦從而各有兩個數，故有兩個答數。

(乙)如 $b\sin A=a$,

在這種情形之下，B 的值爲直角，故祇有一個答數。

(丙)如 $b\sin A>a$，

在這種情形之下，$\frac{b\sin A}{a}>1$，B 值不能求得，故此問題爲不可能。



IV. 若已知部分爲　　a, b, c.

則未知部分爲　　A, B, C.

解法用公式　$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$,

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

用對數計算可得$\frac{A}{2}$，$\frac{B}{2}$，$\frac{C}{2}$，從而得 A B,C.

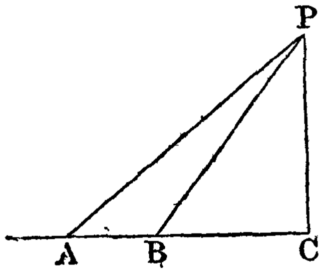
第十八章　三角法的實用

應用三角形的解法，以求高低及距離的方法，茲特略舉數例如下：

自視點至高於水平線的物的直線，與水平線所成的角，稱為仰角 Angle of elevation。

自視點至低於水平線的物的直線，與水平線所成的角，稱為俯角 Angle of depression。

例如有能見而不能到的一點，試運用三角形的解法，以求其高度。



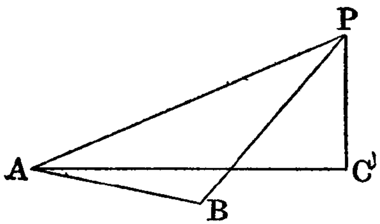
設 P 為能見而不能到的一點，C 為地平線上 P 點的投影，則 PC＝高＝h, 於地平線上任取 AB 距離＝a, 且與 C 點成一直線，以 α 為在

A 的仰角，β 爲在 B 的仰角，則

$$a = AC - BC = h(\cot\alpha - \cot\beta),$$

故 $$h = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},$$

如 ABC 不能成一直線，則於任意方向取 AB 距離以求之。



以 α 爲在 A 的仰角，再以 $\angle PAB=\gamma$, $\angle PBA=\delta$, 則得

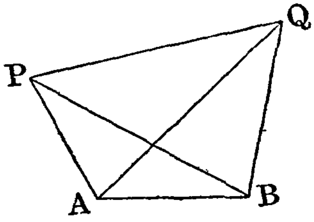
$$PA = AB\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}，及$$

$$h = AP\sin\alpha，$$

故 $$h = a\frac{\sin\alpha\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}.$$

例如求能見不能到的兩點間的距離。

設 P,Q 爲能見不能到的兩點，取任意距離 AB=



a,惟必須在 A,B 兩處，各能望見 P,Q,在 A 處測定 $\angle PAQ=\alpha$,$\angle QAB=\beta$,$\angle PAB=\gamma$, PAQ 及 QAB 兩角，不在同一平面內，在B處再測定$\angle PBA=\delta$, $\angle QBA=\varepsilon$,則於 ABP 及 ABQ 兩三角形內，有

$$AP=a\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}，AQ=a\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\beta+\varepsilon)}.$$

故 AP,AQ 可由下兩式而得

$$\log AP=\log a+\log\sin\delta-\log\sin(\gamma+\delta)$$

$$\log AQ=\log a+\log\sin\varepsilon-\log\sin(\beta+\varepsilon)$$

PAQ 三角形內，AP,AQ 及 PAQ 角，均已求得，故可由下列兩式，求得 APQ 及 AQP 兩角。

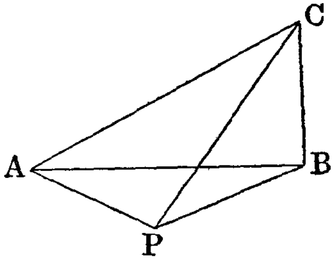
$$\log\tan\frac{1}{2}(APQ-AQP)$$

$$\log\cot\frac{1}{2}\alpha+\log(AQ-AP)-\log(AQ+AP),$$

$$APQ+AQP=180^\circ-\alpha.$$

波色那氏((Pothenot)的問題。

與 ABC 三角形同一平面內有一點 P,已知 APC 與 BPC 兩角,試測定 P 點。



設$\angle APC=\alpha$,$\angle BPC=\beta$,及$\angle PAC=x$,$\angle PBC=y$,則欲測定 P 點,祇須求得 x, y. 因 PA 與 PB,可由 PAC 及 PBC 兩三角形解之而得。

$$x+y=2\pi-\alpha-\beta-C.$$

又 $$\frac{b\sin x}{\sin\alpha}=\frac{a\sin y}{\sin\beta}=PC.$$

設 ϕ 為補助角,且以

$$\tan\phi=\frac{a\sin\alpha}{b\sin\beta},$$

則得 $\dfrac{\sin x}{\sin y}=\tan\phi$,

故 $\dfrac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\tan(\phi-45^\circ)$,

即 $\tan\dfrac{1}{2}(x-y)=\tan\dfrac{1}{2}(x+y)\tan(\phi-45^\circ)$

$$=\tan(45^\circ-\phi)\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta+C)$$

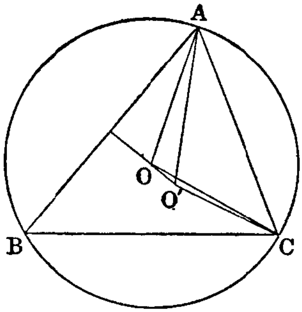
如此求得 $x-y$, 且 $x+y$ 既已知，故 $x-y$ 易於求得。

例題 1. 在同一水平面內的 A B,C, 三處，仰視某山巔的仰角，皆等於 α 試證此山的高，等於$\frac{1}{2}a\tan\alpha\csc A$. 又如在 C 的仰角，微有錯誤 n,試證此山的眞正高度約等於$\frac{1}{2}\cdot\dfrac{a\tan\alpha}{\sin A}\left(1+\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}\cdot\dfrac{\sin n}{\sin 2\alpha}\right)$.

設 O 爲山巔的投影，在 ABC 平面內，以山高$=h$, 則 $h=OA\tan\alpha=OB\tan\alpha=OC\tan\alpha$, 則 O 即 ABC 三角形外切圓的心，故得

$$OA=\frac{1}{2}a\cos A,$$

即 $h=\dfrac{1}{2}a\tan\alpha\cos A$.



又設在C的仰角，等於$\alpha+n$，且以O'爲山巔的投影，在AB兩處的仰角旣相等，則OO'必正交AB. 若以$h+x$代此山巔的眞正高度，由幾何學原理可得，$O'A=OA+OC\cos C, O'C=OC-OC'\cos(A-B)$.

如OO'甚小，則其平方可以略去，故有

$$h+x=O'A\tan\alpha=O'C\tan(\alpha+n)$$

$$=(OA+OO'\cos C)\tan\alpha$$

$$=\{OC-OO'\cos(A-B)\}\tan(\alpha+n)$$

但 $\tan(\alpha+n)$畧等於 $\tan\alpha+\sec^2\alpha\sin n$

故得$x=OO'\cos C\tan\alpha$

$$=OO'\cos(A-B)\tan\alpha+OC\sec^2\alpha\sin n$$

消去OO'而得

$$x\cos(A-B)\tan\alpha=\cos C\tan\alpha(OC\sec^2\alpha\sin n-x).$$

故 $2x\sin A\sin B=OC\sec^2\alpha\cos C\sin n$,

是以$h+x=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\tan\alpha}{\sin A}(1+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}\cdot\frac{\sin n}{\sin 2\alpha})$.

例題2. 如已量得三角形的三邊，如 $a=5,b=4,c=6$, 但覺 C 微有錯誤，試考查何角能最精密測定之。

設 C 的真值等於 $6+x$, 以 $A+yA,B+yB,C+yC$ 為此三角形的三角，yA,yB,yC 與 x 互有關係。

假定 x 甚微，其平方可以略去，則得

$$\cos A+yA)=\frac{16+(6+x)^2-25}{2\cdot4(6+x)}=\frac{27+12x}{48(1+\frac{1}{6}x)}$$

$$=\frac{27}{48}(1+\frac{12}{27}x-\frac{1}{6}x)=\frac{27}{48}(1+\frac{5}{18}x),$$

故 $$\sin A\cdot yA=-\frac{5}{32}x.$$

又 $$\cos B+yB)=\frac{25+(6+x)^2-16}{2\cdot5(6+x)}=\frac{3}{4}(1+\frac{x}{10}),$$

故 $$\sin B\cdot yB=-\frac{3}{40}x.$$

又 $$\cos(C+yC)=\frac{25+(16-16+x)}{2\cdot5\cdot4}=\frac{1}{8}(1-\frac{12x}{5}),$$

故 $\sin C \cdot yC = \frac{3}{10}x.$

既有 $\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{4} = \frac{\sin C}{6}.$

是以 $24 \cdot yA = 40 \cdot yB = 5 \cdot yC.$

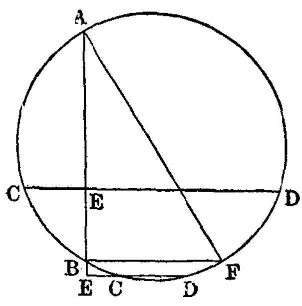
如此 yB 旣小於 yA 及 yC，

故 B 角能測定最精密。

第十九章　三角公式的幾何證法

三角法中的公式，大半皆可以用幾何法證明之。兹略舉數例如下：

I. 證 $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$



設 AB, CD 爲正交的兩弦，命 $ADE = A$, $BDE = B$,

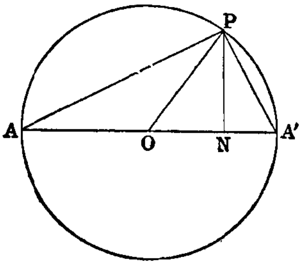
因 $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ 故得

$$\frac{\frac{AE \pm EB}{ED}}{1 - \frac{AE}{ED} \cdot \frac{EB}{ED}} = \frac{AE \pm EB}{ED \mp EC}$$

$$=\frac{AB}{BF},$$

即 $\dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} = \tan(A \pm B).$

II. 證 $\sin 2A = 2\sin A\cos A$, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$.



設 AOA′ 爲圓徑，命 $PAA' = A$, 則 $POA' = 2A$, 作 PN 垂線，是以

$$\sin 2A = \frac{PN}{OP}.$$

今 $PN \cdot AA' = 2\triangle APA'$

$$= AP \cdot PA'$$

故 $\sin 2A = \dfrac{AP \cdot A'P}{OP \cdot AA'} = \dfrac{AA'^2 \sin A \cos A}{OP \cdot AA'}$

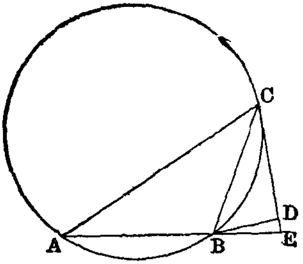
$$= 2\sin A\cos A.$$

又 $\cos 2A = \dfrac{ON}{OP} = \dfrac{AN^2 - A'N^2}{2AA' \cdot OP} = \dfrac{AP^2 - A'P^2}{AA'^2}$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A.$$

III. 證 $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$,

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$



設 CAB＝ACB＝A, 引長 AB 遇 C 點的切線於 E, 作 BD 正交 CE, 則 BED＝3A, 或 180°－3A.

今 $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{\triangle ACE}{\triangle BCE}$

$$=\frac{AC^2}{BC^2}=4\cos^2 A,$$

故 $\dfrac{AB}{BE}=4\cos^2 A-1=3-4\sin^2 A,$

因而得

$$\sin 3A=\frac{BD}{BE}=\frac{BD}{AB}\cdot\frac{AB}{BE}=3\sin A-4\sin^3 A.$$

又 $\cos 3A=\mp\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{DC}{BE}-\dfrac{EC}{BE}=\dfrac{DC}{BC}\cdot\dfrac{BC}{BE}-\dfrac{AC}{AB}$

$$=\cos A(4\sin^2 A-1)-2\cos A=4\cos^3 A$$

$$-3\cos A.$$

從上述的三例中，已可知用幾何證明三角上的公式的方法，以限於篇幅，不能多舉，學者如能將幾何學的原理與三角術的公式，融會而貫通之，當不難收舉一反三的效用。

第二十章　三角術的方程式

三角術方程式解法的步驟：

1. 將方程式中的分數，以及帶根式等，先化之使其成爲最簡單的方程式。

2. 將方程式的函數，一概先化成 sin 及 cos.

3. 解方程式中的分數式及帶根式。

4. 將方程式中所有的函數，一概化爲簡單的函數。

5. 用解代數學中的方程式的解法解之。

三角術的方程式解法的步驟，已如上述，茲舉例如下，以資佐證。

I.　試解下列的方程

$$\cos 2x \sec x+\sec x+1=0.$$

因 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$,

$$(\cos^2 x-\sin^2 x)\sec x+\sec x+1=0$$

因 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$,

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}+1=0,$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x+1+\cos x=0.$$

因 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$,

$$\cos^2 x-1+\cos^2 x+1+\cos x=0;$$

$$2\cos^2 x+\cos x=0,$$

$$\cos x(2\cos x+1)=0,$$

$$\cos=0,\quad x=\cos 0=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}.$$

$$2\cos x+1=0,\quad \cos x=-\frac{1}{2},$$

$$x=\cos-1\left(-\frac{1}{2}\right)=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}。$$

II. 試解下列的方程式：

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+1=0.$$

因 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$,

$$2-2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x+1=0,$$

$$2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x-3=0$$

上列的方程式，用因子分解法解之及二次方程式的解法均可得同樣的結果，茲先用因子分解法解之。

$$2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x-3=0,$$

$$(\cos x-\sqrt{3})(2\cos x+\sqrt{3})=0,$$

$$\cos x-\sqrt{3}=0,\ \cos x=\sqrt{3};$$

$$2\cos x+\sqrt{3}=0,\ \cos x=-\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

用二次方程式的解法解之。

$$2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x-3=0,$$

用二次方程式的公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

在上列的方程式中

$a=2,\ b=-\sqrt{3},\ c=-3,$

將 a,b,c 各值，代入公式中，則得

$$x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\times2\times(-3)}}{2\times2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+24}}{4}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{27}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{9\times3}}{4}=\frac{\sqrt{3}\pm3\sqrt{3}}{4}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad x_2=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{4}=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=-\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

因 cos 的值不能大於 1, $\cos x=\sqrt{3}$ 的值，不能應用，故因 $\cos x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ 的值。

$$\therefore\quad x=\cos^{-1}\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=2n\pi\pm\frac{5\pi}{6}.$$

III. 試解下列的方程組的 x 與 y

$x\sin A+y\sin B=a$ ………………………………(1)

$$x\cos A+y\cos B=b \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$(1)\times\cos A \qquad x\sin A\cos A+y\sin B\cos A=a\cos A \quad (3)$$

$$(2)\times\sin A \qquad x\sin A\cos A+y\cos B\sin A=b\sin A \quad (4)$$

$$(3)\times 4\,y\ (\sin B\cos A-\cos B\sin A)=a\cos A-b\sin A \quad (5)$$

$$\therefore\quad y=\frac{a\cos A-b\sin A}{\sin(B-A)},$$

$$x=\frac{b\sin B-a\cos B}{\sin(B-A)}.$$

附錄 三角術的重要公式

1. $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}}$.

2. $\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}}$.

3. $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}}$.

4. $\csc A=\frac{c}{a}=\frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite side}}$.

5. $\sec A=\frac{c}{b}=\frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent side}}$.

6. $\cot A = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{adjacent side}}{\text{cpposite side}}$.

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

8. $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$.

9. $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

10. $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

11. $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$.

12. $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot B - \cot A}$.

13. $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$.

14. $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

15. $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$.

16. $\cot(A-B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$.

17. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

18 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

19. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

20. $\cot 2x = \dfrac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$.

21. $\sin\dfrac{1}{2}A = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$.

22. $\cos\dfrac{1}{2}A = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$.

23. $\tan\dfrac{1}{2}A = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$.

24. $\cot\dfrac{1}{2}A = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}$.

25. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{1}{2}(A+B)\cos\dfrac{1}{2}(A-B)$.

26. $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{1}{2}(A+B)\sin\dfrac{1}{2}(A-B)$.

27. $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{1}{2}(A+B)\cos\dfrac{1}{2}(A-B)$.

28. $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{1}{2}(A+B)\sin\dfrac{1}{2}(A-B)$.

29. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \dfrac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$.

30. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

31. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

32. $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$.

33. $\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$.

34. $\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$.

35. $\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

36. $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

37. $\tan\frac{1}{2}A=\frac{r}{s-a}$.