Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 6

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1. Entwerfe einen Termstammbamm für den Term

$$f\alpha\alpha gx\alpha c_2 f\beta gy\alpha c_1 gfz\beta gc_1 fc_1$$

wie in Beispiel 6.7.

Aufgabe 6.2. Wir betrachten die arithmetische Grundtermmenge, die aus den Konstanten 0 und 1, den Variablen x_n, $n \in \mathbb{N}$, dem einstelligen Funktionssymbol N und den beiden zweistelligen Funktionssymbolen α und μ besteht. Entscheide, ob die folgenden Wörter über diesem Termalphabet Terme sind oder nicht.

(1) $NNNNNNN01$,
(2) $NNNNNNx_1NNNNNNNNNNNNx_2$,
(3) $\alpha NNNNNN0NNNNNNNNNNNN1$,
(4) $NNN\mu NNN\mu 0NNNNNNNNNNNN1$,
(5) $\mu\alpha\mu\alpha\mu\alpha 0101010$,
(6) $\alpha\alpha\alpha Nx_1Nx_2x_3x_4x_3$.

Schreibe diejenigen Wörter, die Terme sind, mit Klammern, $'$, $+$ und $\cdot$.

Aufgabe 6.3.*

Es seien x, y, z, w Variablen und V ein zweistelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Wörter sind Terme?

(1) $VxyzVVw$,
(2) $VVxyVzw$,
(3) $VVxyzVw$,
(4) $VxVyVzw$,
(5) $xVyVzVw$,
(6) $VVVxyzw$,
(7) $VxyVVzw$,
(8) $VVxVyzw$,
(9) $VxyVzw$,
(10) $VxVyzVw$,
(11) $VxVVyzw$,

(12) $VxyVzVw$.

Aufgabe 6.4. Erläutere den Unterschied zwischen $G = (V, K, F_n, n \in \mathbb{N}_+)$ und $A = V \cup K \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} F_n$ in Definition 6.6.

Aufgabe 6.5. Es sei K eine Konstantenmenge, V eine Variablenmenge und F eine Menge aus Funktionssymbolen (mit einer gewissen Stelligkeit). Es sei

$$A = H \cup V \cup F$$

das zugehörige Alphabet. Es sei vorausgesetzt, dass dieses Alphabet nicht leer sei. Zeige, dass es nichtleere Wörter über A gibt, die keine Terme sind.

Aufgabe 6.6. Es sei G eine Grundtermmenge und $t \in T(G)$ ein G-Term. Es sei u das am weitesten links stehende Symbol von t und v das am weitesten rechts stehende Symbol von t. Zeige die folgenden Eigenschaften.

(1) Wenn u eine Variable oder eine Konstante ist, so ist $t = u$.
(2) v ist eine Variable oder eine Konstante.
(3) Wenn t_1 und t_2 Terme sind, so ist t_1t_2 kein Term.

Aufgabe 6.7. Es sei G eine Grundtermmenge und t ein G-Term. Es sei n die Gesamtzahl der Variablen und Konstanten in t, wobei mehrfaches Vorkommen auch mehrfach gezählt wird. Es sei k die Summe über alle Stelligkeiten der in t vorkommenden Funktionssymbole, wobei wiederum mehrfach auftretende Symbole auch mehrfach gezählt werden.

(1) Bestimme n und k im Term

$$ggxyhfxfzgyfy\,,$$

wobei f einstellig, g zweistellig und h dreistellig sei.
(2) Es sei t weder eine Variable noch eine Konstante. Zeige $k \geq n$.
(3) Zeige, dass die Differenz $n - k$ beliebig groß sein kann.

Aufgabe 6.8. Diskutiere, ob es sich bei

$$n!,\ \binom{n}{k},\ \pi,\ e^u, x^y,\ 5^x,\ \sqrt{x},\ \heartsuit$$

um Terme handelt.

Aufgabe 6.9. Es sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und x, y, z Variablen. Formuliere das Kommutativgesetz als eine Allaussage mit Hilfe der Identität von zwei Termen.

Aufgabe 6.10. Es sei K ein Körper und $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Variablenmenge. Eine Grundtermmenge G sei durch K als Konstantenmenge, V als Variablenmenge und den beiden zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ festgelegt. In welcher Beziehung steht die Termmenge $T(G)$ zum Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Aufgabe 6.11. Es sei T die Termmenge zur Konstantenmenge $\{0, 1\}$, zur Variablenmenge x_i, $i \in I$ und zur zweistelligen Funktionssymbolmenge $\{+, \cdot\}$. Definiere eine natürliche Abbildung von T in den Polynomring $\mathbb{Z}[x_i : i \in I]$. Ist diese Abbildung injektiv? Ist sie surjektiv? Was ist das Bild?

Aufgabe 6.12. Für Punkte A, B, C in der Ebene bedeute $R(A, B, C)$ die Rechtwinkligkeit des durch A, B, C gegebenen Dreiecks an der Ecke A und $S(A, B, C)$ die pythagoreische Längenbeziehung. Betrachte die beiden formalen Aussagen

$$\forall A \forall B \forall C (R(A, B, C) \longrightarrow S(A, B, C))$$

und

$$\forall A \forall B \forall C R(A, B, C) \longrightarrow \forall A \forall B \forall C S(A, B, C)\,.$$

Welche ist (sind) eine Formalisierung des Satzes von Pythagoras, welche ist (sind) wahr?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.13. (2 Punkte)

Eine Grundtermmenge sei durch die Variablenmenge $V = \{x, y, z\}$, eine Konstantenmenge $K = \{c_1, c_2\}$, die einstelligen Funktionssymbole $F_1 = \{f, g\}$ und die zweistelligen Funktionssymbole $F_2 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ gegeben. Entwerfe einen Termstammbaum für den Term

$$g f \beta \beta \alpha f x y \gamma c_1 z g g c_2\,.$$

Aufgabe 6.14. (2 Punkte)

Es sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und x, y, z Variablen. Formuliere das Assoziativgesetz als eine Allaussage mit Hilfe der Identität von zwei Termen.

Aufgabe 6.15. (3 Punkte)

Eine Grundtermmenge G sei durch eine einelementige Konstantenmenge $K = \{c\}$, eine leere Variablenmenge und eine einelementige einstellige Funktionssymbolmenge

$$F_1 = \{f\}$$

gegeben. Zeige durch Induktion, dass es eine bijektive Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow T(G)$$

mit $\varphi(0) = c$ und $\varphi(n+1) = f\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 6.16. (5 Punkte)

Zeige, dass es kein gleichseitiges Dreieck gibt, dessen sämtliche Ecken rationale Koordinaten besitzen.

Tipp: Verwende, dass $\sqrt{3}$ irrational ist und den Satz des Pythagoras.