Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 12

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 12.1. Zeige, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind. Wie sehen die inversen Matrizen zu den Elementarmatrizen aus?

Übungsaufgaben

AUFGABE 12.2. Zeige, dass eine invertierbare Matrix M weder eine Nullzeile noch eine Nullspalte besitzt.

AUFGABE 12.3. Es sei M eine $n \times n$-Matrix derart, dass es $n \times n$-Matrizen A, B mit $M \circ A = E_n$ und mit $B \circ M = E_n$ gibt. Zeige $A = B$ und dass M invertierbar ist.

AUFGABE 12.4. Es seien M und N invertierbare $n \times n$-Matrizen. Zeige, dass auch $M \circ N$ invertierbar ist, und dass

$$(M \circ N)^{-1} = N^{-1} \circ M^{-1}$$

gilt.

AUFGABE 12.5.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.

AUFGABE 12.6. Es sei K ein Körper und M eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Zeige, dass die Multiplikation mit $m \times m$-Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung haben.

(1) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.
(2) $(S_k(s)) \circ M =$ Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.
(3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile ($i \neq j$).

AUFGABE 12.7. Beschreibe die Wirkungsweise, wenn man eine Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts multipliziert.

AUFGABE 12.8.*

(1) Überführe die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in ein lineares Gleichungssystem.

(2) Löse dieses lineare Gleichungssystem.

Aufgabe 12.9.*

Es seien $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ Matrizen über einem Körper K mit

$$A \circ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige direkt, dass dann auch

$$M \circ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 12.10. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.11.*

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.12. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.13. Bestimme die inverse Matrix zur komplexen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+3\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 5-4\mathrm{i} & 6-2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.14.*

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} & 6-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 + 72\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 12.15. Führe für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & -4 \\ 9 & 17 & -2 \end{pmatrix}$$

das Invertierungsverfahren durch bis sich herausstellt, dass die Matrix nicht invertierbar ist.

AUFGABE 12.16.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} .$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

AUFGABE 12.17. Bestimme explizit den Spaltenrang und den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Beschreibe lineare Abhängigkeiten (falls solche existieren) zwischen den Zeilen als auch zwischen den Spalten der Matrix.

AUFGABE 12.18. Zeige, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen der Spaltenrang nicht ändert.

AUFGABE 12.19. Es sei M eine $m \times n$-Matrix und $\varphi \colon K^n \to K^m$ die zugehörige lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn es eine $n \times m$-Matrix A mit $M \circ A = E_m$ gibt.

AUFGABE 12.20. Es sei B eine $n \times p$-Matrix und A eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass für den Spaltenrang die Abschätzung

$$\operatorname{rang} A \circ B \leq \min\,(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B,)$$

gilt.

AUFGABE 12.21. Es sei M eine $m \times n$-Matrix und A eine invertierbare $m \times m$-Matrix. Zeige, dass für den Spaltenrang die Gleichung

$$\operatorname{rang} A \circ M = \operatorname{rang} M$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.22. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.23. (4 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zur komplexen Matrix
$$M = \begin{pmatrix} 5+8\mathrm{i} & 3-7\mathrm{i} \\ 2-9\mathrm{i} & 4-5\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.24. (4 Punkte)

Es sei
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$
Finde Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 12.25. (3 Punkte)

Zeige, dass die Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & k \\ -k & k+1 & 0 & 0 \\ k+1 & -(k+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
für jedes $k \in K$ zu sich selbst invers ist.

Aufgabe 12.26. (3 Punkte)

Führe das Invertierungsverfahren für die Matrix
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
unter der Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ durch.

Aufgabe 12.27. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei $\varphi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass
$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M$$
gilt.