審定

新課程標準世界中學教本

初級中學學生用

薛氏

初中代數

上冊

編著者 薛天遊

校訂者 王剛森 駱師曾

世界書局印行

世界

中華民國二十三年八月十六日教育部審定執照教字第三十四號
中華民國二十三年十一月六日內政部註册執照第三九一八號

編輯大意

1.本書完全依照教育部最近頒布的初中算學課程標準編輯的.

2.編者根據教授算學的經驗,覺得初中學生學算術後,對於數字問題的計算,雖有相當的把握,可是要他們普遍化,自創一個解決一切同類問題的辦法,那就難了.譬如說:「某人今年15歲幾年後18歲?」,就是程度最差的學生,也能回答.如再問「這個人幾年後 x 歲?」,就沒有幾個人能回答得正確,所以編者在這種地方,加入許多口答的問題,希望教師在教室內多發口問,練習學生的思考,使漸能代數化.

3.學習算學,最好每次上課時或上課後,有相當數的練習題來做,爲數不必太多.本書習題次數頗多,而每次問題數適中,務使學生多有練習的機會,而免不能全做之弊.

4.初中代數中,除方程外,最重要的爲整式和分式

的基本運算.而分式的四則和化簡,須應用最高公因式與最低公倍式.這兩種的計算,一般須應用析因式法.故本書對於整式的四則,乘法公式,及析因式法,材料和習題特多,使學者對於初等代數運算,有穩固的基礎.

5.很忽促的編成這本書,錯漏的地方,在所不免.希望用此書的教師,盡量的加以糾正,這是編者十分感激的!

22年3月薛天遊

目 次

第一編 緒論

第二編 整式四則

第三編 一次方程

第四編　整式(續)

第五編　分式

第一編　緒論

第一章　定義與記號

1. 用於算術的數的記號　數的記號用於算術的,就是數字.現在世界各國通用的數字,是阿拉伯數字,卽 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 是.

2. 用於代數學的數的記號　用了上節的十個數字,就可以把事物的大小多寡輕重,精密的表示出來,可是表示以後,牠的量就完全確定,不能再有變更.譬如說 1 枝筆,2 本書;筆的數量是一,決不是二或其他;書的數量是二,決不是一或三和其他.假如一個量,在問題沒有解決以前,不能確定,或者要代表任意一個數量,就不能應用上面的十個數字,要另外用一種相當的記號,來代表這未定或任意的數量.在代數學內,就用英文字母來表示,有時英文字母不夠用,再借用希臘字母來表示.譬如某人有 x 隻牛;一塊長方形的

木板,長 l 公尺,寬 b 公尺.這裏的 x, l, 與 b, 都是代表一個數.數雖沒有確定,可是在繼續討論的時候,就有一個假定的根據.所以數的記號,用於代數學的,比較算術爲廣.

用於代數學的主要記號

3. 加號 + 讀作"**加**",例如 $2+5$, 讀作 2 加 5, 就是在 2 上加一個 5. 又如 $x+y$, 讀作 x 加 y, 就是在 x 上加 y. 意義和算術相同.

4. 減號 − 讀作"**減**",例如 $5-2$, 讀作 5 減 2, 就是從 5 減去 2. 又如 $x-y$, 讀作 x 減 y, 就是從 x 上減去 y. 意義和算術相同.

5. 乘號 × 讀作"**乘以**"或單作"**乘**",例如 2×5, 讀作 2 乘以 5, 就是用 5 乘 2, 又如 $x\times y$, 讀作 x 乘以 y, 就是用 y 乘 x. 意義和算術相同.

乘號有時用一點來代,如 $2\cdot5$, 就是 2×5; $x\cdot y$, 就是 $x\times y$.

文字與文字,或文字與數字的積,中間的乘號,往往省略.如 $2x$ 就是 $2\times x$, $5xy$ 就是 $5\times x\times y$.

6. 除號 ÷ 讀作"**除以**"或作"**被…除**",例如 $5\div2$,

讀作5除以2,就是用2除5.又如$x\div y$,讀作x除以y,就是用y除x.意義和算術相同.

除號有時用一橫線——或一斜線/來代表,如$\frac{5}{2}$就是$5\div 2$. x/y就是$x\div y$.

7.等號 $=$ 讀作"**等於**",放在兩數或兩式的中間.表示牠們相等.例如$2+5=7$,表示$2+5$與7是相等的數,又如$x+y=10$.表示$x+y$與10也是相等的數.

8.不等號 $\neq$ 讀作"**不等於**",例如$2+5\neq 6$.

$>$ 讀作"**大於**",例如$5>2$.

$<$ 讀作"**小於**",例如$2<5$.

$\ngtr$ 讀作"**不大於**",例如$x\ngtr 5$,表示x所代表的數,不大於5,即或等於5,或小於5.

$\nless$ 讀作"**不小於**",例如$a\nless 5$.

9.代表文字的記號 $\because$ 讀作"**因**",$\therefore$ 讀作"**故**",例如$\because x=2$, $\therefore 3x=6$;即因$x=2$,故$3x=6$.

10.連續號 …… 讀作"**等等**",例如$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$讀作$a$附一,$a$附二,$a$附三等等.又如$a', a'', a''', \cdots\cdots$讀作$a$第一,$a$第二,$a$第三等等.

11.括號 括號的種類有四,即**括線**——,**圓括**( ),**方括**〔 〕,**曲括**{ },無論那種括號,都是表示在括號

範圍以內的,應當先計算.例如 $(a-b)\times c$,就是先從 a 減去 b,而後拿 c 乘所得的結果.

圓括,方括,曲括前後的乘號,可以省去.例如 $(a+b)c$ 就是 $(a+b)\times c$.

問　　題

〔本書所列問題,專供教師在教室內令學生口答,同時要全班學生注意這結果,至於筆答的問題,改稱習題.〕

1. 哥哥 18 歲,弟弟 15 歲,哥哥比弟弟大幾歲? 哥哥 m 歲,弟弟 n 歲,哥哥比弟弟大幾歲?

2. 甲有洋 35 元,乙有洋 18 元,乙增加多少元,可以和甲所有的相等? 甲有洋 x 元,乙比甲少,祇有洋 y 元,乙增加多少,可以和甲所有的相等?

3. 一星期是七天,12 個星期是幾天? n 個星期是幾天?

4. 兩根電桿的距離是 60 公尺,10 根電桿的距離是多少公尺? 21 根電桿的距離是多少公尺? p 根電桿的距離是多少公尺?

5. 正方形每邊 8 公分,面積是多少? 每邊 12 公

分,面積是多少? 每邊 37.29 公分,面積怎樣算法? 每邊 h 公分,面積又是怎樣?

6. 長方形長 5 公尺,寬 3 公尺,周圍多少,面積又多少? 假如長 6 公尺,寬 2 公尺,周圍和面積又怎樣?

7. 長方形長 x 公尺,寬 y 公尺,周圍和面積多少?

8. 某人做一件事,8 天做完,平均一天做多少? 假如 x 天做完,平均一天做多少?

12. 代數學的目的 在討論代數學的目的以前,先研究下列的問題:

兩數的和是 75,大數是小數的四倍,這兩個數各是多少?

設小數是 x,那末大數應該是 $4x$,根據題義,得

$$x+4x=75.$$

上式叫做**方程**,x 叫做方程的**未知數**.

因 $$x+4x=75,$$

卽 $$5x=75,$$

$\therefore$ $$x=15.$$

又 $$4x=4\times15=60.$$

故大數是 60,小數是 15.

看了上面的例,知道利用了文字,可使演算簡單明

瞭,並且解決了一個問題,其餘同類的問題,也可類推.代數學的最後目的,就是利用文字和代數上各種基本運算,來解決一切方程.換句話說,就是求出方程內未知數的價值.

因子,冪,係數

13.因子 幾個數連乘,得一個連乘積,這幾個數中的任意一個,叫做這連乘積的**因子**.

例如 $3bc$, 就是 $3\times b\times c$. 這裏的 $3, b, c$ 都是 $3bc$ 的因子.又如 $x(y+z)$, 這裏 x 和 $y+z$ 是 $x(y+z)$ 的因子.

14.冪 兩個 3 連乘,寫作 3^2, 三個 3 連乘,寫作 3^3, 角上的數字 2 和 3, 叫做**指數**.

例如 $$2\times2\times2\times2\times2=2^5=32,$$

32 叫做 2 的第五冪,又叫 2 的五次方. 5 是 2 的指數. 2 是 32 的**五次根**.

又如 $$3\times3=3^2=9.$$

9 是 3 的第二冪,或是 3 的二次方,又叫**平方**.反過來說, 3 是 9 的二次根,又叫**平方根**.

又如 $$4\times4\times4=4^3=64.$$

64 是 4 的第三冪,或是 4 的三次方,又叫**立方**.反過來

說，4是64的三次根，又叫**立方根**.

15.根號 4的三次方是64，反過來說，64的三次根是4，表示前一句的算式是：

$$4^3=64.$$

表示後一句的算式是：

$$\sqrt[3]{64}=4.$$

$\sqrt{}$ 叫做**根號**.根號角上的3字，叫做**根指數**.根指數是2時，可以略去不寫.

問題

1. 2的第七冪是多少？
2. 81是3的幾次方？
3. 10的立方是多少？ 100000是10的幾次方？
4. 什麼數的三次方是27？ 是125？
5. x的第四冪是怎樣？ 立方是怎樣？
6. b^7是b的七次方，b是b^7的什麼？
7. 假如x是y的立方根，那末y是x的什麼？
8. $3^4=$？ $\sqrt{81}=$？ $\sqrt[5]{32}=$？
9. 在$3x^2yz$中，有那幾個因子？
10. $x+y+z$是不是等於xyz？ 爲什麼？ 怎樣可

以證明!

16.係數 在 $3a$ 中, 3 是 a 的係數,同時又可說 a 是 3 的係數.在 $5ab$ 中, 5 是 ab 的係數, a 是 $5b$ 的係數, b 是 $5a$ 的係數, $5a$ 是 b 的係數, $5b$ 是 a 的係數, ab 是 5 的係數.故一數是幾個因子的連乘積時,任意一部分的連乘積,稱爲餘下因子連乘積的係數.可是平常單指數字是係數.

例如 $5abx$ 中,用 x 做主體,那末 $5ab$ 是 x 的係數. 5 是 abx 的數字係數.在 $(a-b)x$ 中, x 的係數是 $a-b$. 數字係數是 1 時,可略去不寫.如 ax 就是 $1ax$.

代 數 式

17.代數式 將文字或數字與文字,使用加減乘除冪根所得的式,叫做**代數式**,或單作**式**.

例如 ab, $3a+2b-4c$, $xy+\frac{z}{c}$, $a^2+\sqrt{b}$, 等都是代數式.

18.項 代數式中用加減號隔離的各部分,叫做**項**.

例如代數式 $a+b^2c-(b+c)d$ 中, 有 $a, b^2c, -(b+c)d$ 三項.

19.單項式 祇含一項的代數式,叫做**單項式**.

例如 $x, 5ab, 2cd\times 7ab, \frac{3a}{4b}$ 等都是單項式.

20.多項式 含有兩項以上的代數式,叫做**多項式**.

例如 $x+y+z$, $a^2-2ab+b^2$ 等都是多項式.

含兩項的多項式,特稱**二項式**.含三項的特稱**三項式**.

例如 $2m-3n$ 是二項式, $x+y-z$ 是三項式.

21.正負項 多項式的各項,前面有加號的,叫做**正項**.前面有減號的,叫做**負項**.若第一項是正項,那末前面的加號,可略去不用.

22.同類項 設有兩項 $5x^2y$ 和 $3x^2y$, 除數字係數外,其他部分完全相同的,叫做**同類項**.

例如 $5x^2yz, 7x^2yz, x^2yz$ 是同類項, a^2b 和 $3ab^2$ 不是同類項.

23.項的次數 abc 項中含 a, b, c 三個文字的因子,這叫三次項. a^2bc^2 項中含 a, a, b, c, c 五個文字的因子,這叫五次項.

同理知 $3x^2yz$ 是四次項, $5abxyz$ 是五次項, 7 是零次項.

24.多項式的次數 在 $x^3+x^2y^2+2y$ 多項式中,第一項的次數是三,第二項的次數是四,第三項的次數是

一,這式就叫四次多項式,或單稱四次式.所以多項式的次數,是用式中最高次項的次數做標準的.

例如$a^3x^3-2ax^2+5$有六次式,x^6-1+y^8是八次式.

25.多項式的排列 將多項式的各項,根據一特別文字的冪次而排列,叫做多項式的整列.冪次自大而小的叫做**降冪序**,自小而大的叫做**升冪序**.

例如 $3ax^4+2a^2x^3-5x^2+a^3x-7$ 是 x 的降冪序. $8b-ay+aby^2-y^3$ 是 y 的升冪序.

26.作代數式的方法 作代數式沒有一定的方法.但用實在的例子比較,就很容易把要求的代數式寫出.譬如說 x 比 y 大多少? 這一個問題,初學代數的人,似覺難解.可是說10比7大多少? 就毫不思索的,知道是3.這3是10減7的結果.因此10比7大$10-7$,所以x比y大$x-y$.再舉幾個例子如下:

例 1. 某甲今年16歲,x 年前幾歲,y 年後幾歲?

〔答〕x 年前$16-x$歲,y年後$16+y$歲.

例 2. 什麼數比30小c?

〔答〕先想什麼數比30小5? 顯見是25,就是$30-5$.所以比30小c的數是$30-c$.

例 3. 設橘 x 枚的價值是 b 元,問橘 y 枚的價值

多少?

〔答〕因一枚的價值是$\frac{b}{x}$元,故y枚的價值是$y\times\frac{b}{x}$元.

例 4. x立方的5倍,加$3c$與a減b的積.將所得的結果,再用兩倍d的平方與f的和乘,試作代數式?

〔答〕$[5x^3+3c(a-b)](2d^2+f)$.

習題一

1. 甲在x年前是13歲,今年幾歲? 乙在y年後是25歲,今年幾歲?

2. 甲x年後的年齡,是乙y年前年齡的兩倍.若乙今年c歲,那末甲今年幾歲?

3. 分50爲三部分,一部分是x,一部分是17,還有一部分是多少?

4. 某甲做一件事,y天可以完成,平均一天做多少? 三天做多少?

5. 三數相乘的積是120,已知一數是x,一數是5,還有一數是多少?

6. 鉛筆每枝價m分,橡皮每塊價n分.今買鉛筆p枝,橡皮q塊,費銀多少元?

7.　甲等酒 7 斤,每斤兩管同角.乙等酒 5 斤,每斤價銀 b 角.把兩種酒混合,問每斤的價應多少?

8.　把全班兩管同時開放 6滿.鐘,盆裏邊 7 人,尙餘 1 人,問學生數是多少? 設每邊 x 人,尙餘 y 人,則學生數又多少?

9.　單用熱水管注水入浴盆,30 分鐘可滿.單放冷水管,20 分鐘可滿.設兩管同時開放 6 分鐘,盆裏有多少水? 同時開放 x 分鐘,盆裏有多少水?

10.　某人每小時行 u 里, t 小時走幾里? s 里的路程,要走幾小時?

11.　甲有銀 p 元,乙銀比甲多 5 元,丙銀等於乙銀的兩倍少 q 元.甲乙丙三人共有銀多少?

12.　三個連續奇數,最大的是 x,還有兩個是多少?

13.　長方形長 x 公尺,寬 y 公尺.現在把長減去 2 公尺,寬減去 3 公尺,問面積減去多少?

14.　鐘面短針走 5 分鐘,長針走 60 分鐘.現在長針走 x 分鐘,問短針走幾分鐘?

15.　兔與犬賽跑,兔走 5 步時,犬走 4 步.兔走 x 步時,犬走幾步?

16.　兔走 9 步的距離,等於犬走 7 步的距離.犬走

1 步的距離,等於兎走幾步的距離?

17. a 的立方,加 a 平方和 b 相乘積的 3 倍,加 a 乘 b 平方的 3 倍,再加 b 的立方.用代數式表示.

18. 本銀100元,年利率七厘(即7/100),一年後利息是多少?

19. 本銀 p 圓,年利率 r 厘,一年後利息是多少? t 年後利息是多少?

20. 一所房屋,寬比長少 l 公尺,高又比寬少 f 公尺.設高是 h 公尺,問長寬各多少? 房屋的容積是多少?

27.代數式的數值 已知代數式中各個文字的數值,就可以求出代數式的值.

例 1. 設 $a=5$,求 $2a^2$ 的值.

$$2a^2=2\times5^2=2\times25=50.$$

例 2. 設 $a=2, b=3, c=4$,求 $3a^2bc^3$ 的值.

$$3a^2bc^3=3\times2^2\times3\times4^3=3\times4\times3\times64=2304.$$

求多項式的數值時,應注意先乘除後加減的規則.

例 3. 設 $a=4, b=3$,求 $a^2-2ab+b^2$ 的值.

$$a^2-2ab+b^2=4^2-2\times4\times3+3^2$$
$$=16-24+9=25-24=1.$$

習　題　二

設 $a=5, b=4, c=3$, 求下列各式的值:

1. $8ab$.　　2. ac^2.　　3. $3b^2c$.

4. $2a^2bc$.　　5. b^3c^2.　　6. $6a-5b$.

7. $\frac{1}{3}a^2bc$.　　8. $\frac{1}{2}ab^2c^3$.　　9. $(a+b+c)^2$.

10. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

11. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

12. a^3-b^3.

設 $a=\frac{3}{4}, b=\frac{2}{3}, c=\frac{1}{2}$, 求下列各式的數值:

13. $\frac{1-a}{1+a}+\frac{1-b}{1+b}+\frac{1-c}{1+c}$.

14. $32a^2-4abc$.

15. $a^2-b^2, (a+b)(a-b)$.

16. $(a+b)^3, a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

第二章　正負數

圖　　解

28.線分　直線的一部分,叫做**線分**.限制線分的兩

點,一點叫**原點**,卽**起點**;一點叫**終點**,從原點到終點的方向,是**線分的方向**.從原點到終點的距離,是**線分的長度**.知道線分的原點和終點,便可知道線分的長度和方向.要完全知道一線分的情形,必須知道線分的長度和方向二種.

如圖一,A是線分的原點,B是線分的終點,這線分用$\overline{AB}$來代表.同樣$\overline{BA}$代表用B做原點A做終點的線分.

圖　一

29.等線分　在一根直線上,長度相等,方向相同的兩線分,叫做**等線分**.如圖一中,AB和CD等長,所以

$$\overline{AB}=\overline{CD}$$

同直線上的兩個等線分,可以使原點和原點,終點和終點相合,這樣兩線分完全相合.

30.反線分　同直線上,兩個長度相等方向相反的線分,叫做**反線分**.如$\overline{AB}$和$\overline{BA}$, $\overline{AB}$和$\overline{DC}$都是反線分.兩個反線分也可以完全相合,不過須用原點和終點,終點和原點相合.

31.線分和　同直線上的兩個線分,若第一線分的

終點與第二線分的原點相合,那末用第一線分的原點做原點,第二線分的終點做終點的線分,是兩線分的線分和.

如圖一兩線分 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$,第二線分的原點與第一線分的終點相合.故兩線分的線分和爲 $\overline{AC}$, 原點是第一線分的原點,終點是第二線分的終點.同理,知道 $\overline{BC}$ 與 CA 的線分和爲 $\overline{BA}$.

設一直線上的兩個線分,不相連接,其線分和可以在這直線上移動線分,使一原點和他一終點相合求得.

32.定理 同直線上兩線分的線分和,與線分的次序沒有關係.

這定理可以分兩種情形說明:

(1)如圖二, $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 是同向而首尾相接的兩個線分,牠們的線分和是 $\overline{AC}$. 若

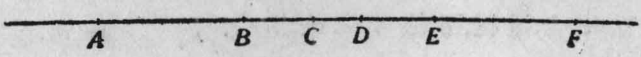


圖 二

$$\overline{EF}=\overline{AB},\ \overline{DE}=\overline{BC},$$

則 $\overline{DF}$ 是 $\overline{DE}$ 與 $\overline{EF}$ 的線分和,也就是 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AB}$ 的線分和.但 $\overline{AC}$ 與 $\overline{DF}$ 方向相同,長度相等,故

$$\overline{AC}=\overline{DF}.$$

即 $$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{DE}+\overline{EF}=\overline{BC}+\overline{AB}.$$

(2) 如圖三,線分 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 方向相反,則牠們的線分和是 $\overline{AC}$. 若

$$\overline{DE}=\overline{BC},\ \overline{EF}=\overline{AB},$$

則 $\overline{DF}$ 是 $\overline{DE}$ 與 $\overline{EF}$ 的線分和,也就是 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AB}$ 的線分和.但 $\overline{DF}$ 與 $\overline{AC}$, 方向相同,長度相等,故

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{BC}+\overline{AB}.$$

圖 三

正 負 數

33.性質相反的量 某甲獲利20元,某乙損失20元同一20元而性質相反.向東行40公里,和向西行40公里,同一40公里而性質相反.溫度在零上 8 度,或在零下 8 度,同一與零相隔 8 度而性質相反.這兩種性質相反的量,用正負來分別.如獲利是正量,那末損失便是負量.如損失是正量,那末獲利便是負量.那個應當正,那個應當負,並沒有一定的規則.完全要看討論問題時,用那一方面做標準而定.

34. 凡是數的前面有加號者是**正數**,有減號者是**負數**.正數負數總稱爲**代數數**.不論正負,祇問數值的大小者叫**絕對值**.

例如　+3, +5是正數, −3, −5是負數. +3的絕對值是3, −3的絕對值也是3.凡正數前面的加號,單獨用時或在首項時,往往略去.

問　　題

1.　+5是表示前進五尺, −6表示什麼?

2.　+200表示某人的負債, −300表示什麼?

3.　+7表示向右走七步, −8表示什麼?

4.　−2表示物體縮短的公分數, +4表示什麼?

5.　+100表示人口生產數, −50表示什麼?

35. **用線分代數**　數有大小正負,與線分之有長短方向相似.故數的問題,往往可以用線分來代表.凡是方向向右的線分,代表正數,方向向左的線分,代表負數.

如圖四, 0 是原點.從原點向右作一直線,再取定長

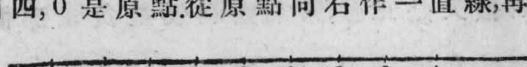


圖　四

的線分做單位,從原點向右量,所得各點,順次的定為 $+1, +2, +3, \cdots\cdots$,將這線向左引長,用同一單位,從原點向左量,所得各點,順次的定為 $-1, -2, -3, \cdots\cdots$,則一切正數負數,都在這直線上.所以這直線,可以叫做**數尺**.

36.符號＋及－的兩種意義 例如 $(+3)+(+5)$,圓括外面的＋號,表示運算,叫做**運算符號**,算術和代數都要用的.圓括裏面的＋號,表示數的性質,叫做**性質符號**,算術裏是不用的.表示運算符號時,讀作加或減,表示性質符號時,讀作正或負.例如 $(+3)+(-2)$,讀作正三加負二.$(-2)-(-4)$,讀作負二減負四.

37.代數數的加減法 代數數的加減法,如用人在這數尺上行動來譬喻,很易明瞭.人面向右向左,表示加法減法.人的前進或後退,表示正數或負數.

例如 $(+5)+(+2)$,就是人立在數尺 $+5$ 的地位,面向右,前進兩單位,到 $+7$.故得

$$(+5)+(+2)=+7.$$

$(+5)+(-2)$,就是人立在數尺 $+5$ 的地位,面向右,退後兩單位到 $+3$.故得

$$(+5)+(-2)=+3.$$

$(-5)+(+2)$,就是人立在數尺 -5 的地位,面向右,前進兩單位,到 -3 的地位.故得

$$(-5)+(+2)=-3.$$

$(-5)+(-2)$,就是人立在數尺 -5 的地位,面向右,退後兩單位,到 -7 的地位.故得

$$(-5)+(-2)=-7.$$

根據上面四個例子,可以得到代數數加法的規則:

(1)兩個正數相加,結果是兩數絕對值的和,前面附正號.

(2)兩個負數相加,結果是兩數絕對值的和,前面附負號.

(3)一個正數和一個負數相加,結果是兩數絕對值的差,前面附絕對值大的符號.

例如 $(+5)-(+2)$,就是人立在數尺 $+5$ 的地位,面向左,前進兩單位,到 $+3$ 的地位.故得

$$(+5)-(+2)=+3.$$

$(-5)-(-2)$,就是人立在數尺 -5 的地位,面向左,退後兩單位,到 -3.故得

$$(-5)-(-2)=-3.$$

$(+5)-(-2)$,就是人立在數尺 $+5$ 的地位,面向左,

退後兩單位,到 $+7$.故得

$$(+5)-(-2)=+7.$$

$(-5)-(+2)$,就是人立在數尺 -5 的地位,面向左,前進兩單位,到 -7.故得

$$(-5)-(+2)=-7.$$

根據上面四個例子,可以得到減法的規則:

(1)減一個正數,與加一個絕對值相等的負數相同.

(2)減一個負數,與加一個絕對值相等的正數相同.

38.加法運算律 從上節規則,可得到二個定律如下:

1.**加法交換律** 兩數相加,牠們的和,不因相加的次序而改變.

$$a+b=b+a.$$

例如 $$3+5=5+3,$$

$$2+(-4)=-4+2.$$

2.**加法組合律** 兩個以上的數相加,不論怎樣分羣組合,牠們的和,總是不變.

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c).$$

例如 $4+(-3)+5$,先將 4 與 -3 相加得 1,再加 5 得 6.或先將 -3 與 5 相加得 2,再加 4 也得 6.

習 題 三

計算下列各題的結果:

1. $(+4)+(+3)+(-6)+(+5)$.

2. $(-7)+(-4)+(+10)$.

3. $(+10)-(+8)+(-4)+(+7)$.

4. $(-16)+(+14)-(-8)-(+6)$.

5. $15-(-13)+(+12)-(+36)$.

6. $-17+(+19)+(-15)-(-11)$.

7. $123-(+18)-(-78)+(-14)$.

8. $-97+(-13)+(+45)-(-73)-(+25)$.

39.去括號法 根據代數數加減法的規則,得到下列兩種去括號的法則:

(1)括號前有加號時,把這加號和括號除去,括號裏面各項的記號不變.如括號中第一項前面,沒有正負號,就是表示正的,應當添一個加號.

例如 $7+(5+3-4+9)=7+5+3-4+9$,

$$11+(-4+8-7)=11-4+8-7.$$

(2)括號前有減號時,把這減號和括號除去,括號裏面各項的記號一律改變,就是加號改爲減號,減號改

爲加號.

例如 $5-(16+17-45+3)=5-16-17+45-3,$

$$13-(-4+7-9+13)=13+4-7+9-13.$$

40.代數數的乘法 在算術上乘法爲加法的簡便法,例如 5×3,就是三個 5 連加的意義,所以結果是 15. 代數學上的乘法,可是除了這種情形,還有負數乘正數,正數乘負數,負數乘負數的幾種.現在分別的說明如下.

-5×3,就是連加三個 -5 的意義,所以

$$\begin{aligned}-5\times3&=-5+(-5)+(-5)\\&=-5-5-5\\&=-15.\end{aligned}$$

$5\times(-3)$,就是連減三個 $+5$ 的意義,所以

$$\begin{aligned}5\times(-3)&=-(+5)-(+5)-(+5)\\&=-5-5-5.\\&=-15.\end{aligned}$$

$(-5)\times(-3)$,就是連減三個 -5 的意義,所以

$$\begin{aligned}(-5)\times(-3)&=-(-5)-(-5)-(-5)\\&=5+5+5\\&=15.\end{aligned}$$

根據上面四個例子,得到下列代數數乘法的規則:

同號兩數的積,等於兩數絕對值的積,前面附正號.

異號兩數的積,等於兩數絕對值的積,前面附負號.

設有兩個以上的代數數連乘時,須先求出各因子絕對值的積,其正負號要看負因子的多少而定.

例如 $(-3)\times(-2)\times(-4)\times(+5)$

$$=(+6)\times(-4)\times(+5)$$

$$=(-24)\times(+5)$$

$$=-120.$$

$$(-2)\times(+7)\times(-3)\times(+8)$$

$$=(-14)\times(-3)\times(+8)$$

$$=(+42)\times(+8)$$

$$=336.$$

所以負因子數是雙數時,積是正.單數時,積是負.沒有負因子時,積也是正.

根據上面的規則,我們可以推到負數的冪.

例如 $(-2)^5=-32,\ (-2)^6=64.$

在 $(-1)^n$ 中,若 n 是雙數,則結果是 $+1$; 若 n 是單數,則結果是 -1.

41.零的乘法 用任何數去乘零,結果總是零,所以

幾個因子連乘結果是零的時候,至少有一個因子是零.

42.乘法運算律 從上節規則,可得到下列三個定律:

1.乘法交換律 兩數相乘,牠們的積,不因相乘的次序而改變.

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

例如 $3\times4=4\times3, 5\times(-2)=(-2)\times5.$

2.乘法組合律 兩個以上的數連乘,不論怎樣分羣組合,牠們的積,總是不變.

$$a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)c=a(b\cdot c).$$

例如 $3\times4\times(-2)$,若將3與4相乘得12,再乘-2得-24.如將4與-2相乘得-8,再乘3也得-24.

3.乘法分配律 一數與兩數和的積,等於這數與兩數分乘所得兩積的和.

$$a(b+c)=ab+ac.$$

例如 $3(a+b)=(a+b)+(a+b)+(a+b)=3a+3b.$

習 題 四

求下列各題的積:

1. $(+5)\times(+7)$.　　2. $(+12)\times(-7)$.

3. $(-6)\times(+9)$.　　4. $(-11)\times(-15)$.

5. $3\times7\times(-2)\times5$,　　6. $-4\times(-3)\times2\times(-8)$.

7. $-10\times(-4)\times5\times(-1)\times(-2)$.

8. $7\times(-3)\times0\times5$.　　9. $(-3)^3$.

10. $(-1)^{53}$.

去括號並求結果:

11. $16+[7-3\times(-4)+5\times(-2)-5]$.

12. $12+4\times(-2)-[6+(-3)(-2)-(-1)^4]$.

43.代數數的除法　除法是乘法的還原,因爲$(+3)\times(+6)=18$,所以$(+18)\div(+3)=+6$.同理得

$$(+18)\div(-3)=-6,$$

$$(-18)\div(+3)=-6,$$

$$(-18)\div(-3)=+6.$$

因此代數數除法的規則是:

同號兩數的商是正,異號兩數的商是負.

44.零的除法　根據除法的定義,得到

除數 × 商數 = 被除數.

被除數是零時,可得下列的法則:

(1)任何數(零不在其內)除零,商數是零.

$$\frac{0}{a}=0.$$

因為任何數乘零,積是零,所以

(2)零被零除,商數任意,或是不定.

因為無論什麼數乘零,不能得到一個數不等於零,所以

(3)一個不等於零的數被零除,是不可能的.

習　題　五

簡單下列各題:

1. $-10\div 2.$　　　　2. $14\div(-2).$

3. $-15\div(-3).$　　　　4. $45\div(-5)\div(-3)$

5. $-64\div 8\div(-2).$　　　　6. $124\div 2\div(-31).$

7. $-168\div(-2)\div(-3)\div(-7).$

8. $0\div(-4).$　　　　9. $-4(-3)+52\div(-4).$

10. $7(-5)+16\times(-2)\div(-4).$

11. $18\div(-3)\times 6+7-4(-2).$

12. $(-4)^3+(6)^2-(-2)^5.$

13. $(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5.$

14. $2(-3)^2(-1)+96\div(-4)\div(-2)-(-7).$

15. $5^2-4\div(-2)+(-3)^3(-1)\div 9.$

若$x=11$, $y=-9$,求以下各題的值:

16. x^2y.　　17. $2xy^2$.

18. y^3.　　19. x^3y.

20. x^2-y^2.　　21. $x^2+2xy+y^2$.

22. $x^2-2xy+y^2$.　　23. $(x+y)(x-y)$.

24. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.　　25. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.

26. 若$x=-7$,則$5x+44=2-x$,對不對?

27. 若$x=1$, $x=2$,或$x=3$,試驗$x^2-3x+2=0$,對不對?

28. 某人向東行35公里,向西行18公里,又向西行9公里,又向東行14公里,又向西行12公里,結果離出發點多遠? 什麼方向?

29. 紀元後1933年的若干年前,是紀元後1456年?若干年前,是紀元前357年?

30. 某人測量地面,測得某處四點,與海面比較的高度,爲$+30$, -18, $+9$, -5公尺,求這四點的平均高度.

第三章 簡單方程

45.等式 用等號放在兩個代數式的中間,表示牠們相等,叫做等式.例如$a+b=a+b$, $3x-2=7$,

等號前後的兩個代數式,叫做**等式的兩邊**,前面的叫左邊,後面的叫右邊.

46.恒等式與方程　用任何數值去代入等式中的文字,結果兩邊總是相等的,叫**恒等式**.例如 $x+2x=3x$,不問 x 是什麼數,總是對的.設等式中的文字,必定要用特別的數值代入,纔能相等,叫做**方程**.例如 $3x-2=7$,必定要 $x=3$,然後 $3x-2$ 才等於 7.

47.已知數與未知數　方程中所含的數,牠的值是已知或假定已知,都叫**已知數**.牠的值是未知,就叫**未知數**,又叫**元**.未知數的值,往往可以從已知數的關係求出.

代表已知數,常用英文字母前面的 a, b, c 等.代表未知數,常用英文字母後面的 x, y, z 等.例如 $ax+b=0$,x 表未知數,a 與 b 表已知數.

48.公理　定理無須證明的,叫做公理.

求出方程中未知數的值,叫做**解方程**.這求得的值,叫做**方程的根**.解方程應用的公理有四條:

1. 在方程的兩邊,加同數或相等數,結果仍相等.

2. 在方程的兩邊,減同數或相等數,結果仍相等.

3. 在方程的兩邊,乘同數或相等數,結果仍相等.

4. 在方程的兩邊,用同數或相等數(零除外)去除,結果仍相等.

49.四條公理的應用 解一個簡單的方程,應用這四條公理的一條或幾條,就可解出.

例 1. 解 $$x-3=5.$$

在方程的兩邊,應用公理 1,各加 3,得

$$x-3+3=5+3,$$

就是 $$x=8.$$

例 2. 解 $$x+7=16.$$

應用公理 2,在方程的兩邊,各減 7,得

$$x+7-7=16-7.$$

就是 $$x=9.$$

例 3. 解 $$\frac{x}{2}=4.$$

應用公理 3,在方程的兩邊,各乘 2,得

$$\frac{x}{2}\times 2=4\times 2,$$

就是 $$x=8.$$

例 4. 解 $$3x=27.$$

應用公理 4,在方程的兩邊,各用 3 去除,得

$$\frac{3x}{3}=\frac{27}{3},$$

就是 $x=9.$

例 5 解 $5x+7=2.$

先應用公理 2,在方程的兩邊,各減 7,得

$$5x=-5.$$

再應用公理 4,在方程的兩邊,各用 5 去除,得

$$x=-1.$$

50.移項 由第 49 節例 1,知道在方程的兩邊,各加 3,和把左邊的 -3,改成 $+3$ 移到右邊,結果完全相同.又如第 49 節例 2,在方程的兩邊各減 7,和把左邊的 $+7$,改成 -7 移到右邊,完全相同.所以爲簡便起見,方程一邊的任意一項,可以移到他一邊,祇要把記號改變,這種方法,叫做**移項**.

例如 $4x-3=2x+5.$

移項,得 $4x-2x=5+3.$

51.解簡單方程的法則:

1. 用移項法將含未知數的各項,移到方程的左邊,不含未知數的各項,移到方程的右邊.

2. 合併同類項,使結果簡單.

3. 用未知數的係數,除方程的兩邊.

例. 解 $-7x+21=27-9x,$

移項得 $-7x+9x=27-21.$

簡單, $2x=6.$

用 x 的係數 2 除兩邊,得

$$x=3.$$

52.檢算 將求得的根,代入原方程中的未知數檢驗兩邊是否相等,叫做檢算.

譬如上節的例,原方程是

$$-7x+21=27-9x.$$

用 3 代 x,得

$$-7\times3+21=27-9\times3,$$

即 $0=0.$

習題六

解下列方程,並檢算其結果:

1. $x-4=11.$
2. $2x+5=9.$
3. $5x-7=3.$
4. $7x+19=-2.$
5. $6x-3=9x+3.$
6. $8x-13=90-x.$
7. $3(3x-2)=21.$
8. $2(4x-35)=10.$
9. $8x+13=54-(5-5x).$
10. $10-x+(2x-3)-(3x+7)=12.$

11. $3x-(x+9)-(x-3)=14-x.$

12. $2x^2-2x-3=1-3x+2x^2.$

13. $7k-2=6k+8.$　　14. $2y-3=\frac{y}{2}+9.$

15. $5x+3-(2x-2)+(1-x)=54-6x.$

53.簡單應用題解法 已知一簡單方程,要求出牠的根的方法,上節已經說明.至於應用題的計算,須先根據相當條件,列出方程.現在先提出若干問題,使讀者練習怎樣能列出方程.

問 題

1. 比 a 大 6 是多少?
2. 比 b 小 9 是多少?
3. 比 $a+2b$ 大 3 是多少?
4. 比 x 小 y 是多少?
5. 17 的一部分是 9,那一部分是多少?
6. 12 的一部分是 x,那一部分是多少?
7. x 的一部分是 a,那一部分是多少?
8. 兩數的和是24,若一數是 y,那一數是多少?
9. 兩數的差是 7,若大數是 15,小數是多少?
10. 兩數的差是11,若大數是 x,小數是多少?

11. 兩數的差是 d,若小數是 a,大數是多少?

12. x 比 y 小多少?

13. 甲今年的歲數是 x, 3 年前與 5 年後的歲數各多少?

14. 乙的年齡是 b, x 年前與 y 年後的歲數各多少?

15. 若甲有銀 x 元,乙有銀 $2x-10$ 元,試用方程來表示:

(a) 甲乙共有銀200元.

(b) 甲乙有銀相等.

(c) 甲比乙少30元.

(d) 甲增20元,乙減20元,兩人所有相等.

16. 甲今年 $x+3$ 歲,乙今年 $y-2$ 歲,用方程來表示:

(a) 甲乙二人同歲數.

(b) 甲乙二人今年歲數的和是70.

(c) 10年後甲的歲數,等於 7 年前乙的歲數的兩倍.

(d) 8 年前甲的歲數的兩倍,等於 5 年後乙的歲數的三倍.

現在把解應用問題的法則,列在下面:

1. 將問題的內容,加以精密的研究.

2. 用文字代表題內的未知數.

3. 根據題中條件,列成方程.

4. 解方程.

5. 將所得的根,代入問題中的未知數,加以檢算.

例 1.　三數的和是54,第二數比第一數小 4,第三數比第一數大 7.求這三數.

解法　令第一數是 x, 那末第二數是 $x-4$, 第三數是 $x+7$. 根據題意,得方程:

$$x+x-4+x+7=54,$$

簡單得　$3x+3=54.$

移項,得　$3x=54-3=51.$

兩邊同用 3 除,得　$x=17.$

故　第一數 $=17$; 第二數 $=13$; 第三數 $=24$.

檢算:　$17+13+24=54.$

例 2.　某甲從 A 地到 B 地,騎馬去,步行回.設騎馬的速率每小時15里,步行的速率每小時 6 里,往返共費 7 小時;問 AB 的距離多少里?

解法　令 x 代表 AB 距離的里數,那末從 A 騎馬到 B, 應費 $\frac{x}{15}$ 小時,從 B 步行回 A, 應費 $\frac{x}{6}$ 小時;根據題意,

得方程

$$\frac{x}{15}+\frac{x}{6}=7.$$

兩邊各乘15,得

$$x+\frac{5x}{2}=105.$$

兩邊各乘 2,得

$$2x+5x=210,$$

故

$$x=30.$$

檢算　AB的距離是30里,騎馬費2小時,步行費 5 小時,故往返共需 7 小時.

習　題　七

解下列各問題,並檢算其結果.

1. 什麼數的三倍減40,等於原數加10?

2. 兩數的和是1046,差是790,求兩數.

3. 三數的和是54,第二數比第一數大 4,第三數比第二數小 2,求這三數.

4. 三個連續數的和是66,求三數.

5. 怎樣四個連續偶數的和是60?

6. 某數50倍大於60的數,等於某數10倍小於60

的數,求某數.

7. 父年是子年的 5 倍,6 年後是 3 倍,求父年與子年.

8. 甲年40,乙年28,幾年前甲年是乙年的兩倍?

9. 甲比乙大 7 歲,乙比丙大 5 歲,四年前三人年齡的和是50.求三人現在的歲數.

10. 某農夫的羊數,是鄰人羊數的 5 倍.賣去60隻後,所餘的羊數,卻與鄰人羊數相等,問農夫原有羊多少隻?

11. 初中一年級學生46人,互選級長,每票祇選一人.但知甲乙二人得票數相等,丙丁二人所得票數,各等於甲票數的三倍,戊所得票數比丁少 9.問各人所得的票數.

12. 甲有銀 183 元,乙有銀75元,甲把多少元給乙,則兩人所有的銀數相等?

13. 甲乙兩人,從同一地點同方向出發.設甲每小時行10里,乙每小時行 7 里,若干時後兩人相距18里?

14. 某人有五元鈔票與一元鈔票若干張,共值洋168 元.若一元鈔票的張數,是五元鈔票張數的兩倍.問兩種鈔票各若干張?

15. 作測驗題50條,做對一條得 2 分,做錯一條扣1 分.結果得61分,問做對幾條,做錯幾條?

16. 埃及的金字塔,比羅馬的聖彼得寺高 2 尺.美國的華盛頓碑比金字塔高 105 尺.巴黎的鐵塔比華盛頓碑高度的兩倍少 120 尺.若這四大建築高度的和是2443尺,問高度各若干尺?

第二編　整式四則

第一章　整式加法

54.整式　例如 $5ax, a^2-ab+b^2, \frac{x}{3}+\frac{2y}{5}$,這許多代數式中,沒有包含文字的除數或分母,這種式叫做**整式**.

又如 $\frac{a}{b}, \frac{x-a}{y}+x^2$ 等代數式,分母中含有文字,就不是整式,叫做**分式**.

本編所舉的代數式,都是整式.

55.單項式加法　幾個單項式相加的方法如下:

1.同類項各項的和,就是各係數的代數和,附以公共的文字因子.

例如　$7a^2b, -4a^2b, 3a^2b$ 三項相加,牠們係數的代數和是6,故結果是 $6a^2b$.

2.不同類項各項的和,就用任意次序將各項連成一多項式,並保留各項固有的符號.

例如 $4x, -3y, 7xy$ 三項相加,其和是 $4x-3y+7xy$.

3. 各項中有一部分是同類項時,該先將同類項合併,再照上條辦理.

例如
$$\begin{aligned}8(a+b)-7(a-b)+2(a+b)+5(a-b) &= 10(a+b)-2(a-b)\\ &= 10a+10b-2a+2b\\ &= 8a+12b.\end{aligned}$$

習 題 八

求下列各題的代數和:

1. $7abc-6abc+5abc-4abc$.
2. $10x+5x-19x+8x-2x$.
3. $xy-3xy-6xy+8xy$.
4. $4ab^2-2ab^2+9ab^2-8ab^2+17ab^2$.
5. $4y, -2c, +7x, -9d$.
6. $5ab, 6a^2b, -8ab^2$.
7. $3ab^2-5a^2b+7a^2b-ab^2$.
8. $-3(a-b), 4(a-b), 8(a-b)$.
9. $5(x+y)-(x-y)-3(x+y)-4(x-y)$.
10. $(c+2d)^2-3(c+2d)^2+5(c+2d)^2$.

56.多項式加法 先將幾個多項式,連續寫出,然後合併同類項.或將各同類項置於一行,在每行中求出各項的代數和.

例 1. 求 $3x-7y-6z$, $y-8x+2z$, $3z+2x-4y$ 的和.

$$3x-7y-6z+y-8x+2z+3z+2x-4y$$
$$=-3x-10y-z.$$

或

$$\begin{array}{r} 3x-\ 7y-6z \\ -8x+\ \ y+2z \\ 2x-\ 4y+3z \\ \hline -3x-10y-\ z \end{array}$$

例 2. 加下列各多項式: $a^2-4a+10$, $5a-6a^2+4$, $3a-16+2a^2$.

$$\begin{array}{lrr} & \text{加 法} & \text{檢算(設}a=1\text{)} \\ & a^2-4a+10 & 1-4+10=\ \ 7 \\ & -6a^2+5a+\ 4 & -6+5+\ 4=\ \ 3 \\ & 2a^2+3a-16 & 2+3-16=\underline{-11} \\ \text{和} & \overline{-3a^2+4a-\ 2} & -\ 1, \end{array}$$

但 $\quad -3a^2+4a-\ 2 \quad = \quad -3+4-\ 2=-\ 1$

從檢算的結果,就可知道上式運算的結果,大概沒有錯誤.

習　題　九

求下列各多項式的和,並檢算結果:

1. $x+2y+3z,\ 2x-4z+5y,\ 7z-4x-3y.$

2. $a-b+c,\ 3b-2a+4c,\ 7c-2b+3a.$

3. $9ab-4bc,\ 5bc+3ac,\ 7ac-8ab.$

4. $3a^2-5a+7,\ -2a^2-6+3a,\ 5a+a^2-4.$

5. $2c^3-5c^2d+6cd^2+d^3,\ c^3+6c^2d-5cd^2-2d^3,$

   $3c^3-c^2d-8cd^2+4d^3$

6. $3x^2+4x-5y,\ 5x^2+8y-7xy,\ 9x+5xy.$

7. $x^3-x^2+x-1,\ x^2-2x+3,\ 4x^3+7x-1.$

8. $2m^2-5mn+n^2, 5n^2+4mn-m^2, 3mn+n^2.$

9. $7y^3-3y^2+4y+2,\ 7-8y+5y^2-6y^3.$

10. $b+(x-y)-c,\ 3(x-y)+a+3c,\ 5b-2(x-y).$

11. $a+b-c,\ b+c-a, c+a-b.$

簡單下列多項式:

12. $x^2-2xy+y^2-5xy-4x^2-3y^2+7x^2+9xy-2y^2.$

13. $5a^2-b^2+4ab-7b^2+3a^2-8ab+9b^2-7ab.$

14. $10c^2-7bc+8b^2-2bc-6c^2+b^2+b^3-11c^2.$

15. 設$x=3a^2-6a+12,\ y=9a^2+12a-21,$

    $z=4a^2+2a-3$, 試證明 $x+y=3z.$

第二章　整式減法

57.單項式減法　根據第37節所述代數數的減法,得二單項式相減的法則如下:

變換減數的記號再與被減數相加.

例 1.　從 $7y$ 減 $3y$.

$$7y-(+3y)=7y-3y=4y.$$

例 2.　從 $7cx$ 減 $-3cx$.

$$7cx-(-3cx)=7cx+3cx=10cx.$$

例 3.　從 $8x$ 減 $-9y$.

$$8x-(-9y)=8x+9y.$$

例 4.　從 0 減 $-4c$.

$$0-(-4c)=0+4c=4c.$$

問　　題

在下列各題中,從第一單項式減去第二單項式:

1. $4x, 3x$.
2. $7a, -3a$.
3. $5by, -2by$.
4. $-8x^2, 6x^2$.
5. $-2a, -8a$.
6. $4a^2b, 3ab^2$.
7. $8xy, 0$.
8. $0, 8xy$.

58.多項式減法　多項式減多項式的運算方法,有下列兩種:

1. 將減數的多項式,用圓括號括出,前面加一減號,寫在被減數的後面.再根據第39節第(2)條,消去括號,合併同類項.

例　從 $2a^3-5a^2+7a-3$ 減 a^3-4a^2+6a-4.

$$2a^3-5a^2+7a-3-(a^3-4a^2+6a-4)$$
$$=2a^3-5a^2+7a-3-a^3+4a^2-6a+4$$
$$=a^3-a^2+a+1.$$

2. 將減數寫在被減數的下面,並注意同類項須列在一行,變換減數各項的記號,再相加.

例　從 $7x+8y-4z$ 減 $3x-5y+6$.

	演　算	檢算(設 $x=y=z=1$)
	$7x+8y-4z$	$7+8-4=11$
	$3x-5y\quad+6$	$3-5+6=4$
差	$4x+13y-4z-6$	7

但　$4x+13y-4z-6=4+13-4-6=7$

檢算減法結果,也可用加法還原,因

$$差+減數=被減數.$$

故　$4x+13y-4z-6+3x-5y+6=7x+8y-4z.$

習　題　十

從第一多項式,減去第二多項式:

1. $3x+5y-8z$, $2x-4y+5z$.

2. $ab+2bc-3ca$, $4bc+2ca-5ab$.

3. $m^2-7mn+9n^2$, $-3m^2-6mn+6n^2$.

4. $3x^3-2x^2+5x-6$, $4x^2-2x+3$.

5. $a+x-y$, $b-x+y$.

6. $7x+9y-3z$, $5x-2y+4z$.

7. $p^2+3pq-6q^2$加上什麼式,可以得到$3p^2-4pq+5q^2$?

8. $3abc+a^3-2b^3-3c^3$減$a^3+b^3+c^3-3abc$.

59.續去括號法　在第39節中,已經講過去括號的方法.假如代數式中括號重疊時,須用不同的括號分別內外.去括號時,最好由內而外,依次化去.

例 1.　化$a-\{b-[c-(d-e+f)-g]+h\}$爲簡式.

$$
\begin{aligned}
&a-\{b-[c-(d-e+f)-g]+h\}\\
&\qquad=a-\{b-[c-d+e-f-g]+h\}\\
&\qquad=a-\{b-c+d-e+f+g+h\}\\
&\qquad=a-b+c-d+e-f-g-h.
\end{aligned}
$$

例 2. 化 $7x-\{5y-[3z-(3x+z)]\}$ 爲簡式.

$$7x-\{5y-[3z-(3x+z)]\}$$
$$=7x-\{5y-[3z-3x-z]\}$$
$$=7x-\{5y-3z+3x+z\}$$
$$=7x-5y+3z-3x-z=4x-5y+2z.$$

習題十一

去括號並化成最簡式:

1. $a+2b-[c+a-(2b+3c)]+c.$

2. $x-\{y-z+[2x-(y+3z)+2y]\}.$

3. $5a-\{b-[3c-(2b-c)-4a]\}.$

4. $x-[y+z-x-(x+y)-z]-(2x+y-3z).$

第三章 整式乘法

60.乘法的指數定則 根據第14節的定義,知

$$a^2=aa,\ a^3=aaa,$$

故 $$a^2\cdot a^3=aa\cdot aaa=a^5=a^{2+3}.$$

設 m 與 n 代表兩個正整數,則

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n} \qquad (1)$$

又 $$(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^6=a^{2\times 3}$$

故 $$(a^m)^n=a^{mn} \tag{2}$$

又 $$(ab)^3=ab\cdot ab\cdot ab=a^3b^3.$$

故 $$(ab)^m=a^mb^m \tag{3}$$

61.單項式乘單項式

例 1. 求 $6a^2b$ 與 $5ab^2c^3$ 的積.

$$6a^2b\times 5ab^2c^3=6\times 5\times a^2\times a\times b\times b^2\times c^3=30a^3b^3c^3.$$

例 2. 求 $-11xyz$ 與 $4x^2y$ 的積.

$$-11xyz\times 4x^2y=-11\times 4\times x\times x^2\times y\times y\times z$$
$$=-44x^3y^2z.$$

故單項式相乘,祇須依照乘法記號法則,寫出各數字係數的積,與因子中一切文字.各文字的指數,卽該文字在各因子中指數的和.

問　題

說出下列各題的積:

1. $(12)(-8)$.
2. $(-7)(-15)$.
3. $(-5a)(9)$.
4. $(-3)(-5bc)$.
5. $(4c^2d)^3$.
6. $(-8xy^2)^2$.
7. $(8ab)(-3bc)$.
8. $(-2a^3b)(-5ab^4)$.
9. $(2abc)(3bc^2)(-4a^2b)$.

10. $(-x^2y)(5y^2z)(-4z^2x)$.

11. $(3amx^2)(2a^2m^3x)(-4mx^3)$.

12. $(-3xy^2z)(x^2yz)(-xyz^2)$.

62.單項式乘多項式 根據乘法分配律

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$$

知單項式乘多項式時,祇要用單項式乘多項式的各項,將所得的結果,依應附的記號,連續寫出.

例 1. 求 $4xy$ 與 $3x^2-7xy+5y^2$ 的積.

$$4xy(3x^2-7xy+5y^2)=12x^3y-28x^2y^2+20xy^3.$$

例 2. 化 $5a\{4a-2(3a-4b)+5(4a-3b)\}$ 為簡式.

$$5a\{4a-2(3a-4b)+5(4a-3b)\}$$
$$=5a\{4a-6a+8b+20a-15b\}$$
$$=5a(18a-7b)=90a^2-35ab.$$

習題十二

計算下面的乘法:

1. $7x$ 乘 x^2+3x+5.

2. $-4a^2$ 乘 $b^2c+abc-3ab^2$.

3. $3mx$ 乘 $my^2-mnx+5nx^2$.

4. $-27x^2$ 乘 $\frac{2}{9}ax+\frac{4}{9}bc-\frac{5}{9}cx^2$.

5. $2ab(3a^2-4\frac{1}{2}ab+3\frac{1}{2}b^2)$.

6. $x^4-2[3x(x^2-2)-2x^2(x+1)]$.

7. $-4x\{2x^2+3x[4(x-1)-5(x-2)]\}$.

8. $5y^3-\{3y^3-2y[4y(y+3)-5y(2y+6)]\}$.

63.多項式乘多項式 如 $(11+3)(7-4)$ 的結果是 14×3 卽 42.但是也可以用下列的方法來求:

$$(11+3)(7-4)=11(7-4)+3(7-4)$$
$$=77-44+21-12=98-56=42.$$

同樣可得

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

故得多項式乘多項式的法則:用乘數的各項,順次乘被乘數各項,再將所得各分積相加.

做乘法時,乘數與被乘數中的同文字,須依同次序整列,那末計算時便利得多.

例 1. 用 x^2-4x+3 乘 $3x^2+5x-8$.

$$\begin{array}{r}
3x^2+5x-8 \\
\underline{x^2-4x+3} \\
3x^4+5x^3-8x^2 \\
-12x^3-20x^2+32x \\
\underline{9x^2+15x-24} \\
3x^4-7x^3-19x^2+47x-24
\end{array}$$

例 2. 用$6+x^2-5x$乘$3x^3-5+x^2-2x$.

將乘數與被乘數,依x降冪序排列而後乘.

$$
\begin{array}{r}
3x^3+\ \ x^2-\ 2x-5\qquad\qquad\quad \\
x^2-\ 5x+6\qquad\qquad\quad \\
\hline
3x^5+\ \ x^4-\ 2x^3-\ 5x^2\qquad\qquad\qquad \\
-15x^4-\ 5x^3+10x^2+25x\qquad\quad \\
18x^3+\ 6x^2-12x-30 \\
\hline
3x^5-14x^4+11x^3+11x^2+13x-30
\end{array}
$$

64.等次式 多項式各項的次數相同,叫做等次式.

例如 $x^3+2x^2y+3xy^2+y^3$是三次等次式,a^4b-2ab^4是五次等次式.

關於等次式,有一重要性質,即:

任何兩個等次式的和,差,積,商,都是等次式.

如用x^2+xy+y^2乘$x^3+x^2y-y^3$,就可預知積中各項,都是五次.

習題十三

求下列各題的乘積:

1. $y+2$乘$y+5$.
2. $y+2$乘$y-5$.
3. $y-2$乘$y+5$.
4. $y-2$乘$y-5$.
5. $3x+4$乘$2x+3$.
6. $3x-4$乘$2x-3$.
7. $x+y$乘x^2-xy+y^2.
8. $x-y$乘x^2+xy+y^2.

9. x^2+xy+y^2 乘 x^2-xy+y^2.

10. $(5x+3y-2z)(10x-7y+5z)$.

11. $(ax+by+cz)(ax+by-cz)$.

12. $(x+y)^3$.

13. $(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)(x+y+z)$.

14. $(x^a-5)(x^a+4)$.

15. $(5x-4+7x^2+2x^3)(6x^2+x^3-3+2x)$.

65.數字乘法 兩數相乘,可當作多項式相乘的一種特例.例如

$$1933=1000+900+30+3=10^3+9\cdot10^2+3\cdot10+3.$$

設 $x=10$,則 $1933=x^3+9x^2+3x+3$.

例. 用 258 乘 314.

258 可以寫成 $2\cdot10^2+5\cdot10+8$,又 314 可以寫成 $3\cdot10^2+10+4$. 所以

$$258\times314=(2\cdot10^2+5\cdot10+8)(3\cdot10^2+10+4).$$

$$\begin{array}{r}
2\cdot10^2+\ 5\cdot10+\ 8\\
3\cdot10^2+\quad 10+\ 4\\
\hline
6\cdot10^4+15\cdot10^3+24\cdot10^2\qquad\qquad\qquad\\
2\cdot10^3+5\cdot10^2+\ 8\cdot10\qquad\\
8\cdot10^2+20\cdot10+32\\
\hline
6\cdot10^4+17\cdot10^3+37\cdot10^2+28\cdot10+32
\end{array}$$

故 $258\times 314=60000+17000+3700+280+32$

$=81012.$

第四章 整式除法

66.除法的指數定則 除法是乘法的還原,如 8 被 4 除,就是問 4 乘什麽數,可以得 8, 根據乘法的經驗,得 2. 又如 abx 被 ab 除,就是問 ab 乘什麽數,可以得 abx, 根據乘法的經驗得商數 x.

凡被除數所含因子,必分含於除數及商數中,故被除數所含因子,不見於除數中的,必盡見於商數中.

例如 $abc\div ab=c,\ abbx\div ab=bx,$

$56abc\div(-4a)=-14bc.$

除式可以用分數式來代表,例如

$$a^5\div a^3=\frac{a^5}{a^3}=\frac{aaaaa}{aaa}=aa=a^2=a^{5-3}.$$

$$x^4\div x=\frac{x^4}{x}=\frac{xxxx}{x}=xxx=x^3=x^{4-1}.$$

設 m 與 n 代表兩個任意正整數,而 m 大於 n, 則得

$$a^m\div a^n=a^{m-n}.$$

這叫**除法的指數定則**.

67.單項式除單項式 根據除法的符號法則,

$$ab \div (+a) = b, \qquad -ab \div (+a) = -b,$$

$$ab \div (-a) = -b. \quad -ab \div (-a) = b.$$

和除法的指數定則,得單項式的除法如下例:

例 1. $18xy^2 \div 2x$.

$$18xy^2 \div 2x = \frac{18xy^2}{2x} = 9y^2.$$

例 2. $35a^2b^2c^2 \div (-14a^2bc)$.

$$35a^2b^2c^2 \div (-14a^2bc) = \frac{35a^2b^2c^2}{-14a^2bc} = \frac{-5bc}{2}.$$

例 3. $-42p^2qr \div 6pq$.

$$-42p^2qr \div 6pq = \frac{-42p^2qr}{6pq} = -7pr.$$

例 4. $-5a^3b^3c^2 \div (-35a^2b^2c)$.

$$-15a^3b^3c^2 \div (-35a^2b^2c) = \frac{-15a^3b^3c^2}{-35a^2b^2c} = \frac{3abc}{7}.$$

問 題

求下列各題用後式除前式的商:

1. $21xy^4, 3xy^2$. 2. $-45c^3, 15c^2$.

3. $18m^2n^4, -6mn^2$. 4. $-121p^2q, -11p$.

5. $-25by^3, -5by$. 6. $52a^2m^3, -13a^2m$.

7. $13xy^2, 39x^2y$. 8. $28a^4g, 14a^3g^2$.

9. $-a^4bc^2,\ -a^5b^2c.$ 10. $15x^2z^3,\ -75xy.$

11. $-8m^3n^5p,\ -m^4p^2.$ 12. $-abcd,\ -ef.$

13. $a^x,\ a^y.$ 14. $27x^ay^b\ \ -3x^cy^{b-d}.$

68.單項式除多項式 除法既然是乘法的還原,故乘法的分配律,也可適用於除法.

因 $a(b+c-d)=ab+ac-ad,$

故 $(ab+ac-ad)\div a=b+c-d$

$$=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}-\frac{ad}{a}.$$

所以單項式除多項式的法則是:

將單項式除多項式的各項,再把各部分的商數連寫卽得.

例 1) 用 $3a^2c$ 除 $9a^4b^2c-6a^3bc^2+12a^2c^2$.

$$(9a^4b^2c-6a^3bc^2+12a^2c^2)\div 3a^2c$$

$$=\frac{9a^4b^2c}{3a^2c}-\frac{6a^3bc^2}{3a^2c}+\frac{12a^2c^2}{3a^2c}$$

$$=3a^2b^2-2abc+4c.$$

例 2) 用 $-3lmn$ 除 $6l^2mn-9lm^2n+15lmn^2$.

$$(6l^2mn-9lm^2n+15lmn^2)\div(-3lmn)$$

$$=\frac{6l^2mn}{-3lmn}-\frac{9lm^2n}{-3lmn}+\frac{15lmn^2}{-3lmn}$$

$$=-2l+3m-5n.$$

習題十四

求下列各題用單項式除多項式的商:

1. $25x^2y+30xy^2, -5xy$. 2. $21x^3y^5-28x^5y^3, 7x^3y^3$.

3. $bx^4-cx^3+dx^2, -x^2$. 4. $a^3-5a^2b+ab^2, -a$.

5. $12x^2y-20x^2y^2+24xy^3-4x^3y, 4xy$.

6. $16a^5b^4c^8-24a^6b^5c^7+32a^7b^6c^5, 8a^5b^4c^3$.

7. $4(a+b)+c(a+b), a+b$.

8. $5a(7y^2-x)-4x(7y^2-x), 7y^2-x$.

9. $3(x+y)^4-2(x+y)^3+(x+y)^2, (x+y)^2$.

10. $21(x-y)^7-35(x-y)^6, -7(x-y)^5$.

11. $5x^a-2x^{a+3}+4x^{a+2}+7x^2, x^2$.

12. $6x^{2c-3}-15x^{3c+1}-21x^{3c-5}, -3x^{2c-1}$.

69. 多項式除多項式 下例表示多項式除多項式的方法.

例如 $(5x^2+5x-25x^3-1)\div(5x^2-1)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-25x^3 & +5x^2 & +5x & -1 & 5x^2-1 \\
\cline{5-5}
-25x^3 & & +5x & & -5x+1 \\
\cline{1-4}
& 5x^2 & & -1 & \\
& 5x^2 & & -1 & \\
\cline{2-4}
& & & 0 &
\end{array}
$$

答商是 $-5x+1$.

多項式除多項式的法則如下:

(1)將除數與被除數,依某公共文字的升冪或降冪排列.

(2)用除數的第一項,除被除數的第一項,所得的商是所求商數的第一項.

(3)用商的第一項乘除數,所得的積寫在被除數下面,做減法,得第一次餘數.

(4)再用除數的第一項,除第一次餘數的第一項,得商數的第二項.

(5)用商數的第二項乘除數,所得的積寫在第一次餘數的下面,再做減法,得第二次餘數.

(6)照第四條的方法,繼續進行,到沒有餘數爲止,或者到餘數第一項的次數,小於除數第一項時爲止.

假如沒有餘數,得

$$\frac{\text{被除數}}{\text{除數}}=\text{商數}.$$

假如有餘數,得

$$\frac{\text{被除數}}{\text{除數}}=\text{商數}+\frac{\text{餘數}}{\text{除數}}.$$

上式相當於算術中 7 除 24,得 $\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$.

而 $$\frac{24}{7}=3+\frac{3}{7}.$$

例 1. 用 $6-5x+x^2$ 除 $38x+2x^4-7x^2-24-7x^3$.

解法　將除數與被除數,依照 x 的降冪序排列後再除.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\text{被除數}\ 2x^4 & -\ 7x^3 & -\ 7x^2 & +38x & -24 & x^2-5x+6\ \text{除數} \\
2x^4 & -10x^3 & +12x^2 & & & \overline{2x^2+3x-4}\ \text{商數} \\
\hline
& 3x^3 & -19x^2 & +38x & & \\
& 3x^3 & -15x^2 & +18x & & \\
\hline
& & -\ 4x^2 & +20x & -24 & \\
& & -\ 4x^2 & +20x & -24 & \\
\hline
& & & & 0 &
\end{array}
$$

檢算　令 $x=1$,則被除數 $=2$, 除數 $=2$, 商 $=1$, 但 $2\div2=1$,故演算大概無誤.

檢算的時候,文字的數值,可以任意決定.但是使除數爲零的數,須避免的.

例 2. 用 $4x^2+y^2-4xy$ 除 $8xy^2+8x^3-7y^3-12x^2y$.

解法　將被除數與除數,依照 x 的降冪序排列後再除.

$$
\begin{array}{rl|ll}
\text{被除數} & 8x^3-12x^2y+8xy^2-7y^3 & 4x^2-4xy+y^2 & \text{除數} \\
 & 8x^3-\ \ 8x^2y+2xy^2 & 2x-\ \ y & \text{商數} \\ \hline
 & -\ 4x^2y+6xy^2-7y^3 & & \\
 & -\ 4x^2y+4xy^2-\ \ y^3 & & \\ \hline
 & 2xy^2-6y^3 & \text{餘數} &
\end{array}
$$

例 3. 用 $x-a$ 除 x^3-a^3.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 \qquad\qquad -a^3 & x-a \\
x^3-ax^2 & x^2+ax+a^2 \\ \hline
\quad ax^2 & \\
\quad ax^2-a^2x & \\ \hline
\qquad a^2x-a^3 & \\
\qquad a^2x-a^3 & \\ \hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

例 4. 用 $1+2x-3x^2$ 除 $5x^3-3x^4-4x^2+1+x$. 依 x 的升冪序排列.

$$
\begin{array}{l|l}
1+\ x-4x^2+5x^3-3x^4 & 1+2x-3x^2 \\
1+2x-3x^2 & 1-\ x+\ x^2 \\ \hline
\quad -\ x-\ x^2+5x^3 & \\
\quad -\ x-2x^2+3x^3 & \\ \hline
\qquad x^2+2x^3-3x^4 & \\
\qquad x^2+2x^3-3x^4 & \\ \hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

70.不能整除時商數餘數的變化 多項式除多項式,如能除盡,那末排列的次序,不論是升冪或降冪,都沒有關係.凡是能除盡的,叫做**整除**.假如不能整除,那末排成升冪和降冪時所得的商數和餘數,就不能相同.

(1)除數與被除數,依文字的降冪序排列時,所得的商也是降冪序,項數有限,而最後餘數的次數,低於除數的次數.

(2)若依文字的升冪序排列時,商數的項數,可以任意增加,餘數的次數,可以任意加高.

但下列的關係式:

被除數 = 除數 × 商數 + 餘數.

在二種情形都能適用.

例. 用 x^2-x+1 除 $2x^3-7x^2+8x+4$.

$$
\begin{array}{rr|l}
\text{被除數} & 2x^3-7x^2+8x+4 & x^2-x+1 \;\text{除數} \\
\cline{3-3}
 & 2x^3-2x^2+2x & 2x-5 \quad\;\; \text{商數} \\
\cline{2-2}
 & -5x^2+6x+4 & \\
 & -5x^2+5x-5 & \\
\cline{2-2}
 & x+9 \;\text{餘數} &
\end{array}
$$

如用 x 的升冪序排列,則得

$$
\begin{array}{l|l}
\text{被除數}\ 4+8x-\ 7x^2+\ 2x^3 & 1-\ x+x^2\ \text{除數} \\
\quad 4-4x+\ 4x^2 & \overline{4+12x+x^2}\ \text{商數} \\
\hline
\quad\quad 12x-11x^2+\ 2x^3 & \\
\quad\quad 12x-12x^2+12x^3 & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad x^2-10x^3 & \\
\quad\quad\quad\quad x^2-\ x^3+x^4 & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad -\ 9x^3-x^4\ \text{餘數} &
\end{array}
$$

兩個結果,顯然不同.

但 $2x^3-7x^2+8x+4=(x^2-x+1)(2x-5)+x+9$,

$2x^3-7x^2+8x+4=(1-x+x^2)(4+12x+x^2)-9x^3-x^4$

都能適合上列的關係式.

習題十五

√ 1. $x-3$ 除 x^2-5x+6.

√ 2. $x-7$ 除 $x^3-15x^2+65x-63$.

√ 3. $x+y$ 除 $x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$.

√ 4. $5x^2-1$ 除 $5x^2+5x-25x^3-1$.

√ 5. $2x-3$ 除 $37x-24+6x^3-23x^2$.

√ 6. $10-7a+3a^2$ 除 $15a^3-56a^2+99a-70$.

√ 7. $a+b+c$ 除 $a^2+2ab+b^2-c^2$.

8. $a-3$ 除 $a^4+9a^2+15-11a-7a^3$.

9. $6-13y+y^2$除$9+30y+71y^3+28y^4-5y^7$.

10. $9m^4+6m^2n^2+4n^4$ 除 $27m^6-8n^6$.

11. $x+y$ 除 x^3+y^3.

12. $x+y$ 除 x^5+y^5.

13. $x+y$除x^4+y^4.

14. $x-y$ 除 x^3-y^3.

15. $x-y$ 除 x^4+y^4.

16. $x-y$ 除 x^5-y^5.

17. $x-y$ 除 x^4+y^4.

18. $x+y$ 除 x^4-y^4.

第三編 一次方程

第一章 一元一次方程

71.一元一次方程 方程內各項所含未知數的次數,不超過一者,叫做**一次方程**.一次方程所含的未知數,祇有一種者,叫做**一元一次方程**.

例如 $2x+3y=5,\ 4x-5y=6z-7,\ 3x-5=10$

等都是一次方程.不過第一個是二元一次方程,第二個是三元一次方程,第三個是一元一次方程.

72.一元一次方程的標準式 含一個未知數的一次方程,不論原式是怎樣,總可以化成

$$ax+b=0.$$

這種形式,x 代表未知數,a 與 b 代表已知數.移項後,得

$$ax=-b.$$

若 a 不等於零,用 a 除兩邊,得

$$x=-\frac{b}{a}.$$

$-\frac{b}{a}$叫做適合這方程的根.

例如 方程 $5x-3x+12=4x-2$, 移項化簡以後,得 $2x=14$. x 的係數 2, 相當於標準式中的 a. 14相當於 $-b$. 故 $x=\frac{14}{2}=7$.

因此得到下列解一元一次方程的法則:

法則 將含未知數的各項,移到左邊.不含未知數的各項,移到右邊.兩邊化簡後,若未知數的係數不是零,那末這方程有一個解法,就是將未知數的係數除方程的兩邊.

73.若方程的係數,是分數時,就有兩種解法:

(1)不去分母,用分數加減法做.

例 解 $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=\frac{x}{6}+6.$

移項,得$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-\frac{x}{6}=6.$

即 $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)x=6,$

通分,得 $\frac{x}{4}=6,$

故 $x=24.$

(2) 用各分母的最小公倍數,乘方程的兩邊,使所有的分數,完全化成整數.

在上題中,用各分母的最小公倍數12,乘方程的兩邊,得

$$6x-4x+3x=2x+72.$$

移項化簡,得

$$3x=72,$$

$$\therefore \quad x=24.$$

74. 方程內如含有括號時,應當先將括號解去,照第72節的法則做.

例1. 解 $5(2x-3)-4(5x-7)=3(6-x)+2.$

先去兩邊的括號,得

$$10x-15-20x+28=18-3x+2.$$

移項, $10x-20x+3x=18+2+15-28.$

即 $-7x=7.$

$$\therefore \quad x=-1.$$

驗算 $5\{2(-1)-3\}-4\{5(-1)-7\}=3\{6-(-1)\}+2,$

$$5(-5)-4(-12)=3\times7+2,$$

$$-25+48=23,$$

$$23=23.$$

等式的兩邊都等於23,故 -1 是適合這方程的根.

例2. 解 $5x-\{8x-3(12-x)\}=6.$

去括號,

$$5x-\{8x-36+3x\}=6,$$

$$5x-8x+36-3x=6.$$

移項,得

$$5x-8x-3x=6-36,$$

即 $$-6x=-30,$$

$\therefore$ $$x=5.$$

75. 如方程中的係數為小數時,解法和前例相同.

例 解 $1.25x-8.4+.73x=11.4.$

移項,得

$$1.25x+.73x=11.4+8.4.$$

即 $$1.98x=19.8.$$

$\therefore$ $$x=10.$$

習題十六

解下列方程:

1. $6x-5+2x=8x+2-7x.$ x=1.

2. $2(3x+3)+4(2-x)=-5x.$ x=-2,

3. $3x+2(x-1)=8+2x-5(x+2)$. $\therefore x=2\frac{1}{2}$

4. $\frac{9-x}{3}-\frac{3x+2}{7}=\frac{5x}{2}-\frac{99}{14}$.

5. $\frac{1}{5}(x+2)-\frac{2}{3}(x-1)=2$.

6. $(y-3)(y-4)=(y+1)(y+2)$.

7. $(3y+5)(4y+7)-(2y+3)(6y+11)-2=0$.

8. $1.35x-9.3x+2.4+8.4x-.01x=1+.99x-.25$.

9. $a+2b-a(3-x)+5x=7+2ax-9(2+x)$.

10. $\frac{x+a}{b}-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}+\frac{b-x}{a}=0$.

76.應用問題 在第53節中,已經把一次方程的應用問題解法,詳細說明.現在再舉幾個例題於下:

例 1. 某數的五分之一,四分之一,與三分之一的和,比這數的一半大51;求某數.

解法 令 x 代表某數,得方程

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+51.$$

將分母的最小公倍數60乘兩邊,

$$12x+15x+20x=30x+3060.$$

移項化簡,得 $17x=3060$,

$\therefore$ $x=180$.

檢算　180的五分之一是36,四分之一是45,三分之一是60,三個數相加是141.180的二分之一是90.而141比90大51.故180是滿足題意的答數.

例2.　某校學生人數的三倍,超過1000的數,等於1000超過學生人數的數.求這校的學生人數.

解法　令x代表某校學生人數,那末牠的三倍超過1000的數是$3x-1000$.而1000超過牠的數,是$1000-x$,這兩個數相等,故得

$$3x-1000=1000-x.$$

移項　$$3x+x=1000+1000.$$

即　$$4x=2000.$$

$\therefore$　$$x=500.$$

檢算　學生人數的三倍,就是1500.而1500超過1000的數與1000超過500的數,都是500.

77.負根的解釋

例1.　父親今年47歲,兒子今年19歲.幾年後父親的年齡,是兒子的三倍?

解法　假定是x年後,那末父親的年齡是$47+x$,兒子的年齡是$19+x$.根據題意,得方程

$$47+x=3(19+x).$$

去括號,得

$$47+x=57+3x.$$

移項,得 $$2x=-10.$$

$$\therefore \qquad x=-5.$$

根據負數的定義, -5 年後,就是 5 年前. 5 年前父親的年齡是 42,兒子的年齡是 14,而 42 是 14 的三倍.故本題的負根,是有意義的,就是說這問題是可能的.

例 2. 雞蛋每個價 80 文,鴨蛋每個價 90 文.現在用錢 1320 文,買蛋 14 個.問兩種蛋各多少個?

解法 令 x 代表雞蛋數,那末鴨蛋數是 $14-x$,因此得方程

$$80x+90(14-x)=1320.$$

去括號,

$$80x+1260-90x=1320.$$

移項並簡單,

$$-10x=60.$$

$$\therefore \qquad x=-6.$$

雞蛋買 -6 個是沒有意義可解釋的,所以這問題是不可能.

78.分數根的解釋 在應用問題中,求得的答數是

分數時,有時不合事實,這問題是不可能的.

例 某中學初中二年級人數的四倍減18與兩倍加59相等,求人數.

解法 令 x 代表人數,得方程

$$4x-18=2x+59.$$

移項,
$$4x-2x=59+18.$$

即
$$2x=77.$$

$$\therefore \quad x=38\frac{1}{2}.$$

因人數不能有分數,故這問題是不可能.

習題十七

1. 什麼數比牠的五分之四大七?

2. 三個連續整數的和是465. 求中間的整數.

3. 哥哥今年19歲,弟弟今年5歲.幾年後哥哥年齡是弟弟年齡的兩倍? 14年后

4. 今年父親43歲,長子15歲,次子11歲,幾年後父親年齡是兩子年齡的和的兩倍?

5. 甲有銀若干圓,乙所有的銀數,是甲的五分之四多三元,丙所有的銀數,是甲的五分之三少三元.但知三人共有銀240圓,問三人各有多少?

6. 白糖每斤價三角六分,紅糖每斤價二角四分.二十八斤糖共費銀八元一角六分,問白糖紅糖各買若干斤?

7. 上等茶葉每斤四元八角,中等茶葉每斤一元六角.現在用銀二十元零八角,買茶葉十五斤,問上等中等茶葉各買若干斤?

8. 某人從家到某地,先步行全路程的五分之三,再騎馬走全路程的三分之一;如此還有二公里的路程.問從家到某地的距離共有多少公里?

9. 兩汽車相距150公里,相向而行,牠們的速率是每小時40公里與35公里.幾小時後,牠們的距離,還是150公里?

10. 假如12個雞蛋的價值比8角1分所少的值,等於15個雞蛋的價值比8角1分所多的值.求雞蛋每個的價值.

11. 驅逐艦追趕敵軍的輸送艦,每小時驅逐艦行24海里,輸送艦行16海里.假如兩艦相距28海里,問幾小時後可以追到?

12. 正方形田的面積,與長方形田的面積相等.長方形的長比正方形的一邊大40尺.長方形的寬比正

方形的一邊少30尺.問這兩塊田各有若干畝?(一畝$=6000$方尺)

13. 某團體有會員34人,中間男子人數是女子人數的$\frac{4}{5}$,而女子人數又比童子人數的兩倍多一人.問男女及童子各有若干人?

14. 某人出外遊歷,自上海到南京,用去所帶旅費的$\frac{1}{4}$,到南京後,在友人處借得銀40元.從南京到北平,用去所有的$\frac{3}{5}$.但知道這人從上海到北平,共用80元,問在上海出發時,帶多少旅費?

15. 一個男孩的哥哥弟弟人數,和姊姊妹妹人數相等.可是他的姊姊說,她的哥哥弟弟人數等於她的姊姊妹妹人數的兩倍.問這家庭中有幾個男孩,幾個女孩?

16. 某童在銀行儲銀4元,以後每星期再儲6角.他的哥哥儲銀12元,以後每星期取2角.幾個星期後,兩人所儲的銀相等?

第二章 二元一次聯立方程

79.含兩個未知數的一次方程 設有甲乙兩數,和

是18,問兩數怎樣?

令 x 代表甲數,y 代表乙數,依照題目的條件,應得方程

$$x+y=18. \tag{1}$$

在上列方程中,假定 x 是 1,則 y 是 17; x 是 2, y 是 16; x 是 3, y 是 15.同樣,任意假定 x 一個值,同時得到一個 y 的相當值.如 $x=50$, 則 $y=-32$. 因方程(1)可改爲

$$y=18-x.$$

x 數值改變時, y 的數值也同時改變,故滿足這方程中 x 與 y 的數,有無窮對數,例如

$$\begin{array}{lllllllll} x & 1, & 2, & 3, & 4, \cdots\cdots & -1, & -2, & -3, & \cdots\cdots \\ y & 17, & 16, & 15, & 14, \cdots\cdots & 19, & 20, & 21, & \cdots\cdots \end{array}$$

因此可得下列的判斷:

一個方程含有兩個未知數時,這方程祇能確定未知數相互的關係,不能絕對確定牠們的數值.

80.變數 一次方程含一個未知數時,如

$$3x-18=0,$$

未知數 x,祇限於一個一定的數值,就是 6.

若一次方程含有兩個未知數,如

$$x+y=18,$$

那末 x 與 y 的值,便不能絕對確定.且一個未知數的值,發生改變時,另一個未知數的值也隨着改變,所以這裏的 x 與 y 叫做**變數**.

81.聯立方程 設有方程

$$x-y=2 \tag{2}$$

滿足這方程中變數的值,有無窮對數,如

x	3,	4,	5,	……	10,	……	1,	0,	……
y	1,	2,	3,	……	8,	……	-1,	-2,	……

這無窮對數中,有一對 $x=10$, $y=8$, 也可滿足第 79 節中方程(1).假如這兩方程

$$x+y=18 \tag{1}$$

$$x-y=2 \tag{2}$$

中的 x 與 y, 是專指 $x=10$, $y=8$ 成立的,那末這兩方程中的變數,有共通的性質.這樣兩個方程,叫做**聯立方程**.

因(1)(2)兩方程,都是一次,各含兩個變數,故稱為二元一次聯立方程.

82.矛盾方程 設有兩個方程

$$x+y=8 \tag{1}$$

$$x+y=9 \qquad (2)$$

滿足(1)式的各對數值是:

x 1, 2, 3, …… −1, −2, −3, ……

y 7, 6, 5, …… 9, 10, 11, ……

滿足(2)式的各對數值是:

x 1, 2, 3, …… −1, −2, −3, ……

y 8, 7, 6, …… 10, 11, 12, ……

在這兩組數值中間,無論如何,不能找到一對相同的.就是(1)(2)兩方程中的變數 x 與 y,沒有共通性.這樣兩個方程,叫做**矛盾方程**,又叫**不聯立方程**.例如

$$x+y=15 \qquad (3)$$

$$2x+2y=31 \qquad (4)$$

也是矛盾方程.因為(3)式兩邊各乘 2,得

$$2x+2y=30 \qquad (5)$$

方程(4)與(5),顯見不能同時成立,因為 $2x+2y$ 若等於30,便不能又等於31.

83.從屬方程 設有兩方程

$$x+2y=5 \qquad (1)$$

$$2x+4y=10 \qquad (2)$$

能滿足(1)式的數值,都能滿足(2)式.能滿足(2)式的

數值,也都能滿足(1)式.就是(1)式兩邊各用 2 來乘時,兩個方程便成一個.有這種情形的兩個方程,不是互相獨立,叫做**從屬方程**.

84.解二元一次聯立方程 衹有一個含二元的一次方程,在第79節中已經說明,不能確定二元的數值.假如有兩個這種方程,互相聯立,既不是矛盾,又不是從屬,那就可以想法將兩方程合併,得到一個衹含一元的一次方程.這種方法叫做**消去法**.消去法又可分三種,就是**加減法**,**代入法**,**比較法**.現在逐一說明於下:

85.加減法 用加法或減法來消去二元中間的一個,因此把這一組聯立方程,完全解決.

例 1. 解 $\begin{cases} 5x+3y=1 & (1) \\ 4x-\ \ y=-6 & (2) \end{cases}$

解法 先消去 y. 將(2)式兩邊各乘 3,得

$$12x-3y=-18 \qquad (3)$$

在(1)和(3)中,y 的係數,數值相同,記號相反.相加後 y 的係數,便等於零.

(1) + (3) $\qquad 17x=-17,$

$\therefore \qquad x=-1.$

現在再消去 x. 將(1)式乘 4,減去(2)式乘 5,得

$$17y=34,$$

$$\therefore \qquad y=2.$$

得到 $x=-1$ 後,若不用消去法,就把 x 的值代入(1)式或(2)式來計算 y 的值也可.例如代入(1)式

$$-5+3y=1,$$

即 $$3y=6,$$

$$\therefore \qquad y=2.$$

檢算 用 -1 代 x,2 代 y,則(1)(2)兩式,變成恆等式 $-5+6=1$,與 $-4-2=-6$.

例 2. 解
$$\begin{cases}\dfrac{x+2}{6}+\dfrac{2y-7}{3}=3,\\[2ex]\dfrac{3x+2}{4}-\dfrac{y+1}{2}=5.\end{cases}$$

將第一個方程全體乘 6,第二個方程全體乘 4,並化為簡單,得

$$\begin{cases}x+4y=30 & (1)\\3x-2y=20 & (2)\end{cases}$$

(2) × 2 $$6x-4y=40 \qquad (3)$$

(1) + (3) $$7x=70,$$

$$\therefore \qquad x=10,$$

將 $x=10$ 代入(1)式,得

$$10+4y=30,$$

即 $$4y=20,$$

∴ $$y=5.$$

檢算　用 $x=10$, $y=5$ 代入原來兩個方程,得恆等式如次:

$$\begin{cases}\frac{12}{6}+\frac{3}{3}=3,\\ \frac{32}{4}-\frac{6}{2}=5.\end{cases}$$

從上面兩個例,可以得到加減消去法的法則如下:

把兩個方程,各用相當的數來乘,使兩元中間的一個,有絕對值相等的係數.

假如這兩個絕對值相等的係數,記號相反,那末將所得的兩個方程相加,否則相減.

所謂用相當的數來乘,就是選擇最小的數值.先求出某元兩個係數的最小公倍數,再用這兩個係數去除,得到的商,就是相當的乘數.如解下列聯立方程:

$$\begin{cases}6x+2y=17,\\ 5x-3y=\ 9.\end{cases}$$

x 的兩個係數的最小公倍數是30,要消去 x 元相當的乘數是 5 與 6. y 的兩個係數的最小公倍數是

6，要消去 y 元相當的乘數是 3 與 2. 這題以消去 y 爲便，因爲乘數比較小些.

有時可先將兩個方程相加或相減，再做加減消去法，可以使解法更簡.

例 1. 解 $\begin{cases} 53x+\quad y=160 & (1) \\ x+53y=\ 56 & (2) \end{cases}$

根據前例，知要消去 y，非將(1)式乘53不可. 這樣所得方程的係數太大，演算時頗覺不便. 要消去 x，也是這樣.

現將 (1) 式減 (2) 式，得

$$52x-52y=104,$$

卽 $$x-y=2 \qquad (3)$$

(2) − (3) $$54y=54,$$

∴ $$y=1.$$

用 $y=1$ 代入 (1) 式，得

$$53x+1=160,$$

卽 $$53x=159,$$

∴ $$x=3.$$

例 2. 解 $\begin{cases} 73x+15y=395 & (1) \\ 15x+73y=221 & (2) \end{cases}$

(1) + (2) $\qquad 88x+88y=616.$

用88除, $\qquad x+y=7 \qquad (3)$

(1) − (2) $\qquad 58x-58y=174.$

用58除, $\qquad x-y=3 \qquad (4)$

(3) + (4) $\qquad 2x=10,$

$\therefore \qquad x=5.$

(3) − (4) $\qquad 2y=4,$

$\therefore \qquad y=2.$

這種方法,在係數有特殊情形時,方可應用.

習題十八

解下列各組聯立方程:

√1. $\begin{cases}3x+y=7,\\5x-y=9.\end{cases}$ √2. $\begin{cases}7x+4y=3,\\3x+4y=-1.\end{cases}$

√3. $\begin{cases}6a-b=16,\\2a+3b=-8.\end{cases}$ √4. $\begin{cases}10h-k=-3,\\12h+12k=102.\end{cases}$

√5. $\begin{cases}12n-2m=18,\\3m=18n+10.\end{cases}$ √6. $\begin{cases}5x-4y=7,\\7x+3y=70.\end{cases}$

√7. $\begin{cases}6x-13y=-1,\\5x-12y=-2.\end{cases}$ 8. $\begin{cases}x+103y=211,\\103x+y=517.\end{cases}$

9. $\begin{cases}7x+y=265,\\ 3x-5y=5.\end{cases}$ 10. $\begin{cases}57x+33y=162,\\ 33x+57y=18.\end{cases}$

先去分數,再解方程:

11. $\begin{cases}\dfrac{2x}{3}-\dfrac{5y}{4}=3,\\ \dfrac{7x}{4}-\dfrac{5y}{3}=\dfrac{43}{3}.\end{cases}$ 12. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{4}-\dfrac{7x-5y}{11}=3,\\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{2y}{7}=-1.\end{cases}$

86.代入法

例. 解 $\begin{cases}10x+3y=17 & (1)\\ 5x-4y=14 & (2)\end{cases}$

從(1),得 $3y=17-10x,$

卽 $y=\dfrac{17-10x}{3}.\qquad(3)$

代入(2), $5x-4\left(\dfrac{17-10x}{3}\right)=14.$

通分,並去分母,得

$$15x-68+40x=42,$$

卽 $55x=110,$

$\therefore$ $x=2.$

代入(3),得 $y=-1.$

故代入消去法的法則爲

選擇一個係數比較簡單的方程,假定一個變數是

已知數,而解別個變數.

用所得的值,代入那一個方程,求出第一變數的值.

再用第一變數的值,代入含兩個變數的最簡單方程,求出第二變數的值.

87.比較法 這種方法,是代入法的變相.

例. 解 $\begin{cases} 12x+7y=176 & (1) \\ 3y-19x=3 & (2) \end{cases}$

從(1) $$7y=176-12x,$$

即 $$y=\frac{176-12x}{7} \qquad (3)$$

從(2), $$3y=3+19x,$$

即 $$y=\frac{3+19x}{3}. \qquad (4)$$

從(3)與(4),得

$$\frac{176-12x}{7}=\frac{3+19x}{3}.$$

兩邊用21乘,得

$$528-36x=21+133x.$$

移項合併,得

$$169x=507,$$

$\therefore$ $$x=3$$

將 $x=3$ 代入(4)式,得

$$y=20.$$

88.解文字係數的聯立方程 係數是文字時,可假定這種文字是已知數,仍用消去法來解.

例. 解 $\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$

(1) × b',得 $ab'x+bb'y=b'c$ (3)

(2) × b,得 $a'bx+bb'y=bc'$ (4)

(3) − (4), $(ab'-a'b)x=b'c-bc'$.

$$\therefore \qquad x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}.$$

(1) × a'. $aa'x+a'by=a'c$ (5)

(2) × a, $aa'x+ab'y=ac'$ (6)

(6) − (5), $(ab'-a'b)y=ac'-a'c$.

$$\therefore \qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

89.解變數在分母中的聯立方程 變數在分母中時,假如兩個方程中,相當的分母相同,往往可以不去分母,而把方程解得.

例 1. 解 $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=7 & (1) \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=2 & (2) \end{cases}$

(2) × 2, $\frac{6}{x}-\frac{4}{y}=4$ (3)

(1) + (3) $\frac{11}{x}=11,$

即 $11x=11,$

∴ $x=1.$

代入(1)式 $5+\frac{4}{y}=7,$

即 $\frac{4}{y}=2,$

∴ $y=2.$

例 2. 解 $\begin{cases}\frac{5}{x-2}+\frac{3}{y-3}=8 & (1)\\ \frac{4}{x-2}-\frac{2}{y-3}=2 & (2)\end{cases}$

先假定$x-2$與$y-3$是兩個變量,求出牠們的值,再求x與y的值.

(1) × 2, $\frac{10}{x-2}+\frac{6}{y-3}=16$ (3)

(2) × 3 $\frac{12}{x-2}-\frac{6}{y-3}=6$ (4)

(3) + (4) $\frac{22}{x-2}=22.$

即 $x-2=1,$

∴ $x=3.$

代入(1)式,得

$$5+\frac{3}{y-3}=8,$$

即

$$\frac{3}{y-3}=3,$$

$$y-3=1,$$

$\therefore$ $$y=4.$$

習 題 十 九

用代入法解下列聯立方程:

1. $\begin{cases}2x-3y=3,\\5x+2y=17.\end{cases}$

2. $\begin{cases}7x-y=16,\\2x+6y=36.\end{cases}$

3. $\begin{cases}3x-7y=42,\\7x+2y=43.\end{cases}$

4. $\begin{cases}14m-2n=1,\\n-6m=0.\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{3x}{10}+5y=13,\\2x-\dfrac{4-7y}{2}=25.\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{8x}{3}-\dfrac{59}{6}=\dfrac{3y}{2},\\\dfrac{3x}{4}=-2y-\dfrac{9}{2}.\end{cases}$

用比較法解下列聯立方程:

7. $\begin{cases}9x-4y=-17,\\5x+3y=1.\end{cases}$

8. $\begin{cases}3m+5n=6,\\10n-4m=-8.\end{cases}$

9. $\begin{cases} x-\frac{1}{3}(y-3)=5x-3, \\ 2y+\frac{1}{3}(2x-5)=\frac{1}{6}(21y+37). \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{1}{3}(x+5)-\frac{1}{2}(y+5)=y, \\ \frac{1}{2}(13-x)+9=5y+x. \end{cases}$

用任何方法解下列聯立方程:

11. $\begin{cases} 2x+ay=b, \\ 3x-by=c. \end{cases}$

12. $\begin{cases} ax+by=a^2+b^2, \\ ax-by=a^2-b^2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} a^2+ax+y=0, \\ b^2+bx+y=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+dy=3, \\ d(x-3)-y=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{5}{6}, \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{2}{15}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{a+b}{x}+\frac{a-b}{y}=a-b, \\ \frac{a+b}{x}-\frac{a-b}{y}=a+b. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{5}{x+2}+\frac{10}{y-2}=-1, \\ \frac{3}{x+2}-\frac{2}{y-2}=1. \end{cases}$

90. 含兩個變數的應用問題 解含兩個變數的應用問題,與解含一個變數的應用問題,具有同一原理,就是將問題中的兩個條件,用兩個方程來表示.假如不用 x 和 y 來表示變數,也可用代表未知量的英文字的第一個字母.如 l 代表長度, b 代表寬, d 代表距離, t 代表時間, w 代表重量等等,但普通以用 x 與 y 爲便.

例 1. 二數的和是45,差是15,求兩數.

解法 令 x 與 y 代表兩數,則得方程

$$\begin{cases} x+y=45 \\ x-y=15 \end{cases}$$

用加減法解,得 $x=30, y=15.$

例 2. 有一分數,若分母加一,分子減一,則分數的值是 $\frac{1}{2}$.若分母減 2, 分子加 2, 則分數的值是 1. 求這分數.

解法 令 x 代表所求分數的分母, y 代表所求分數的分子,則得

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{x+1}=\dfrac{1}{2} & (1) \\ \dfrac{y+2}{x-2}=1 & (2) \end{cases}$$

將(1)式全體用$x+1$乘,得

$$y-1=\frac{x+1}{2}.$$

兩邊乘 2,並簡單,得

$$x-2y=-3 \qquad (3)$$

將(2)式兩邊用$x-2$乘並簡單,得

$$x-y=4 \qquad (4)$$

解(3)與(4)兩個聯立方程,得

$$x=11,\ y=7.$$

例 3. 有一宗款項,依單利息計算,4 年後本利總數是2480元,5 年後本利總數是 2600 元. 問本銀及利率各多少?

解法 令 $x=$ 本銀圓數,

$$\frac{y}{100}=\text{利率}.$$

因 本利和＝本銀＋本銀×利率×時期,

故 4 年後本利總數$=x+x\times\frac{y}{100}\times4$,

5 年後本利總數$=x+x\times\frac{y}{100}\times5$.

因此得方程如下:

$$\begin{cases} x+\dfrac{4xy}{100}=2480 & (1) \\ x+\dfrac{5xy}{100}=2600 & (2) \end{cases}$$

(1) × 25,得 $25x+xy=62000.$ (3)

(2) × 20,得 $20x+xy=52000.$ (4)

(3) − (4), $5x=10000,$

$\therefore$ $x=2000.$

代入 (1) 式,得 $y=6.$

故本銀是2000圓,利率是6%.

例 4. 有長方形地一塊,設長減 2 丈,闊加 3 丈,則面積增加17方丈,設長減10丈,闊加20丈,則面積不變.問這塊地原來的面積是多少?

解法 設地的長是 x 丈,闊是 y 丈,則得方程

$$\begin{cases}(x-2)(y+3)=xy+17 & (1)\\(x-10)(y+20)=xy & (2)\end{cases}$$

去括號並簡單,得

$$3x-2y=23 \qquad (3)$$

$$20x-10y=200 \qquad (4)$$

解 (3) 與 (4),得

$$x=17,\ y=14.$$

故所求的面積是 17×14 即 238 方丈.

檢算 將 $x=17$, $y=14$, 代入 (1) (2) 兩式,得恆等式

$$15\times17=238+17=255,$$

$$7\times34=238.$$

習題二十

1. 兩數的和是4,差是10,求兩數.

2. 兩數的和是32,差的兩倍比小數大四,求兩數

3. 雞三隻鴨五隻的價值是七元三角二分,雞四隻鴨四隻的價值是七元二角.問雞鴨每隻價多少?

4. 某人用銀七元,買米四斗,小麥六斗,又用銀六元九角,買米三斗,小麥九斗,問米麥每斗價多少?

5. 七年前父年是子年的十四倍,四年後父年是子年的三倍.求父子現在的年齡.

6. 哥哥一年後的歲數,是弟弟五年前歲數的兩倍.弟弟十年後的歲數,是哥哥十四年前歲數的三倍求兄弟二人現在的年齡.

7. 有一分數,設分子加5,分母減5,牠的值是1,若分母加4,牠的值是$\frac{1}{3}$.求這分數.

8. 有一分數,設分子兩倍減3,分母加1,牠的值是$\frac{1}{2}$.若分子加4,用12減分母做分母,牠的值是1.求這分數.

9. 有一兩位數,數字的和是15.這數加9,則兩位數字對調.求這數.

10. 某數兩位的和是9,用兩位的和除這數,所得的商,等於個位數減2.求這數.

11. 資本5000元,一部分照利率4%借給人,其餘的照6%借出.若照4%借出的五年內所得的利息,比照6%借出的三年內所得的利息多126元.求兩部分的元數.

12. 某人投資生息,一部分利率是4%,又一部分利率是7%,每年進款是145元.若利率各減$\frac{1}{2}$%,則每年進款是132元5角.問兩部分本金各多少?

13. 甲數被乙數除,得商數5餘數1.若用乙數的三倍,除甲數的兩倍,得商數3餘數11.求這兩數.

14. 甲給20元與乙,則甲所有銀兩倍於乙,若乙給5元與甲,則乙所有銀是甲的五分之一.問甲乙各有銀多少?

15. 把許多桃子,分給兒童.設每人5隻,可多10隻.每人6隻,就少4隻.求兒童數和桃子數.

16. 兩所房屋,相距45公尺.一人立在兩所房屋間,離第一所房屋的距離的三倍,適等於離第二所房屋

的距離的三十倍.求這人與各房屋的距離.

17. 舟在靜水中行,每時走12里.現在從 A 點順流而下到 B 點,共費 7 小時.再從 B 點逆流而上到 C 點,共費 5 小時,設 C 點在 A 點下流36里,求 AB 的距離和水流的速度.

18. AB 相距 c 里,船由 A 至 B,順流而下,費 a 小時到達.由 B 至 A,逆流而上,費 b 小時到達.求船在靜水中的速度和水流的速度.

19. 甲乙二人,合做一工程,四天完工.現在兩人合做三天後,甲因事停工,乙一人繼續做三天完工.問甲乙獨做,各需多少天?

20. 有一長方形,其面積和長加10尺寬減 6 尺的面積相等.和長加 4 尺寬減 3 尺的面積也相等.求這長方形的面積.

21. 有一長方形,設長加 5 尺,寬減 3 尺,那末面積減10方尺.長減 3 尺,寬加 5 尺,那末面積加126方尺.求這長方形的長,寬,和面積.

22. 載客的火車,每秒鐘行66尺.載貨的火車,每秒鐘行44尺.現在兩車在平行軌道上遇着,經 15 秒鐘,才互相過完.但知貨車的長是客車的兩倍,求各車的長

度.

23. 假如甲給10元與乙,則乙較甲多 h 元,若乙給 k 元與甲,則甲有乙的兩倍.問甲乙各有若干元?

24. 有書兩册,共值 d 元.若第一册較第二册多值 c 分,問兩書各值多少?

91.三元一次聯立方程的解法 一次方程中含有三個變數的,必須有互相獨立的三個方程,纔可得一組的解答.

解法仍用消去法爲便.

例 解
$$\begin{cases} x+2y+3z=10 & (1) \\ 2x-3y-\ \ z=-1 & (2) \\ 3x+\ \ y-2z=9 & (3) \end{cases}$$

先從(1)(2)兩式,消去 x.

(1)× 2,得 $2x+4y+\ 6z=20$ (4)

(4)−(2),得 $7y+\ 7z=21$,

即 $y+\ z=3$ (5)

再從(1)(3)兩式,消去 x.

(1)× 3,得 $3x+6y+\ 9z=30$ (6)

(6)−(3),得 $5y+11z=21$ (7)

(5)× 5,得 $5y+\ 5z+15$ (8)

(7) − (8),得　　　　　$6z=6$,

∴　　　　　　　　　　$z=1$.

代入 (5) 式,得　　　　$y=2$.

將 $y=2$, $z=1$, 代入 (1) 式,得

$$x=3.$$

由上例得解三元一次聯立方程的法則如下:

從三個方程中,揀出兩個,先消去係數最簡單的一個變數,得到一個含兩個變數的方程.

再從兩個方程中的一個,和第三個方程,再消去這變數,又得到一個含兩個變數的方程.

解所得的兩個二元一次聯立方程.

用所得的兩個變數的值,代入最簡單的原方程中,求出第三變數的值.

92. 聯立方程含四元或四元以上時,解法都和上節所講原理相同,不過比較繁複,現暫置不論,下例是一個特殊三元一次聯立方程的解法.

例　解
$$\begin{cases} x+y=7 & (1)\\ y+z=2 & (2)\\ z+x=1 & (3)\end{cases}$$

把三個方程相加,得

$$2x+2y+2z=10,$$

即　$$x+y+z=5 \qquad (4)$$

(4) − (2),得　$$x=3,$$

(4) − (3),得　$$y=4,$$

(4) − (1),得　$$z=-2.$$

習題二十一

1. 解 $\begin{cases} m+4n-5p=22, \\ 4m-8n+4p=4, \\ 7m-10n+8p=6. \end{cases}$

2. 解 $\begin{cases} 3x-y+z=4, \\ 5x+y+3z=5, \\ 2x-3y+4z=20. \end{cases}$

3. 解 $\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ bx+ay=2ab, \\ cx+az=2ac. \end{cases}$

4. 解 $\begin{cases} y+z-x=2a, \\ z+x-y=2b, \\ x+y-z=2c. \end{cases}$

5. 一個三位數,三個數字的和是15.牠的單位數

字,比十位數字大 5.若這數加 396,結果就把各數字的次序倒置,求這數.

6. 十元五元一元的鈔票共值 133 元.十元與五元鈔票張數的和,是一元票數的六倍,而五元鈔票張數,比十元一元票數的和少一.問三種鈔票各幾張?

第三章 方程的圖解法

93.實數系與直線 在第35節中,已經說過,一切正數負數,都可以用一直線上的點來代表.反過來說,直線上面任意一點,可以代表一個正數或負數.因此數的變化,可用點的地位的移動來表示,這就是代數和圖形發生關係的起點.

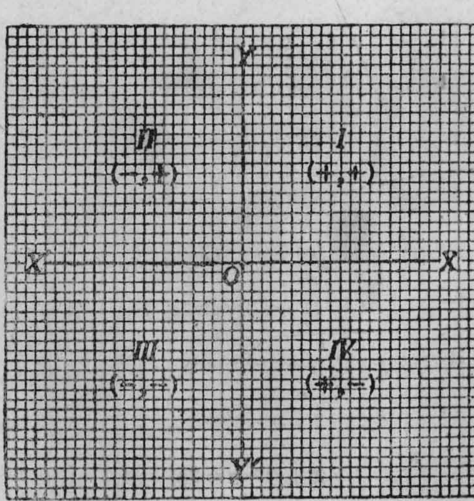


圖 五

94.點的坐標 從平面上任取一點 0,叫原點.經過 0 點,作一水平線 $X'X$,

叫X軸.再作一垂直線$Y'Y$,叫Y軸.把這平面分成四部分,叫做象限.從右上角數起,依着與時鐘針旋轉相反的方向,稱爲第一,第二,第三,第四象限.

現在任意選擇一兩長度做單位,在X軸與Y軸上量.在X軸上,原點的右邊是正,左邊是負.在Y軸上,原點的上邊是正,下邊是負.如從原點起,在X軸上向右量三個單位而得的一點,是代表X軸上的$+3$.

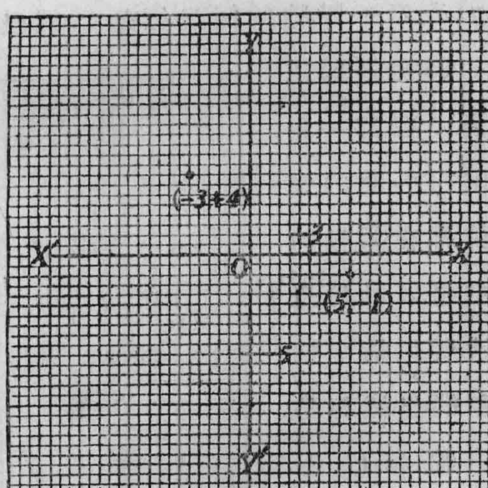


圖 六

從原點起,在Y軸上向下量五個單位而得的一點,是代表Y軸上的-5.如這點不在軸上,那末牠的地位的確定,必需兩個條件:一個是這點和Y軸的距離,叫做橫距,用x表示;一個是這點和X軸的距離,叫做縱距,用y表示.這兩個距離確定後,這一點的位置,就完全決定.這兩個數叫做這點的坐標.橫距或x叫做橫

坐標,縱距或 y 叫做**縱坐標**.設有一點,位置在 Y 軸左邊三個單位,所以橫坐標是 -3,在 X 軸上面四個單位,所以縱坐標是 $+4$.這點的坐標寫做 $(-3,4)$.同樣 $(5,-1)$ 表示一點,牠的橫坐標是 5,縱坐標是 -1. (x,y) 表示一點,牠的橫坐標是 x,縱坐標是 y.

95.坐標的正負 在第一象限內各點的地位,都在 Y 軸的右邊,X 軸的上邊,所以橫坐標和縱坐標都是正號.如 $(1,3)$,$(2,4)$ 二點,都在第一象限內.在

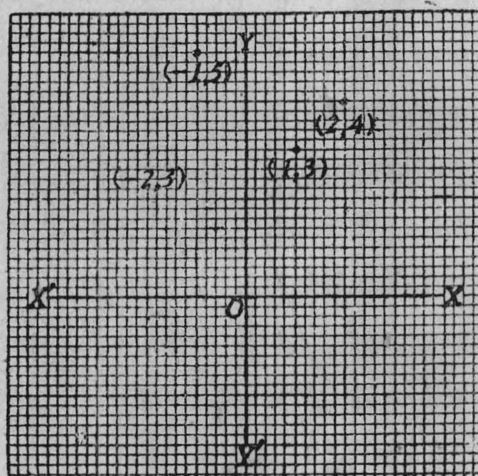


圖 七

第二象限內各點的地位,都在 Y 軸的左邊,X 軸的上邊,所以橫坐標是負,縱坐標是正.如 $(-2,3)$,$(-1,5)$,二點,都在第二象限內.同理,知在第三象限內各點的坐標,其橫坐標與縱坐標都是負的.在第四象限內各點的坐標,其橫坐標為正,縱坐標為負.

96.點和坐標的互求 知道一點的坐標,就可以畫出牠的地位.圖上定了一點,也可以用實際的量法,求出牠的坐標.

假如已知一點的坐標,要求出這點的位置.可先在X軸上取M點,令OM的長,表示已知的橫坐標.照橫坐標數的正負號,定M在O點的右邊或左邊.再從M畫Y軸的垂線,照縱坐標數的正負號,定這垂線的上下方向.在這垂線上取P點,令MP的長,表示已知的縱坐標.那末P點就是所求的一點.

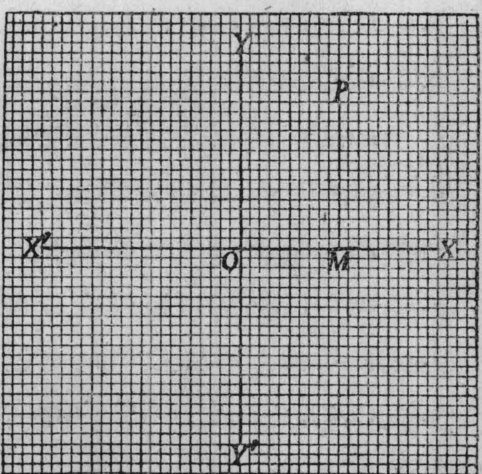


圖 八

設已知圖上一點P,要求出牠的坐標.可先從P點作X軸的垂線,與X軸相交於M點.量MP的長度,是這點的縱坐標.縱坐標的正負號,由MP線在X軸的上面或下面而定.再量OM的長度,是這點的橫坐標.

橫坐標的正負號,由 M 點在原點 O 的右邊或左邊而定.

問　　題

1. 原點的坐標是怎樣?
2. 凡是橫坐標是正的點,在那幾個象限內?
3. 凡是縱坐標是負的點,在那幾個象限內?
4. $(4,0)$ $(-3,0)$ 這兩點在什麼軸上.
5. 在 X 軸上的點,坐標有什麼特殊情形?
6. $(0,5)$, $(0,-4)$ 這兩點在什麼軸上?
7. 在 Y 軸上的點,牠們的坐標有什麼特殊情形?
8. $(5,3)$, $(-5,9)$, $(-5,-8)$, $(8,-1)$ 四點,各在第幾象限中?

習題二十二

用1公分的長做單位,定下列各點:

1. $(4,3)$.
2. $(-3,-5)$.
3. $(2,-1)$.
4. $(-2,3)$.
5. $(\frac{1}{2},-3)$.
6. $(-\frac{1}{2},3)$
7. $(0,-2)$.
8. $(4,0)$.

9. $(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$、 10. $(-1, \frac{3}{2})$.

11. 已知正方形的三個頂點是 (0, 3), (5, 3), (0, −2), 求第四角頂點的坐標.

12. 已知長方形的三個頂點是 (−3, 2), (4, 2), (−3, −2), 求第四角頂點的坐標.

用 x 代表橫坐標, y 代表縱坐標,將下列各題中的條件,列成方程:

13. 一點的縱坐標是橫坐標的三倍減 5.

14. 一點的橫坐標的兩倍,與縱坐標的五倍的和是 19.

15. 一點的縱坐標比橫坐標的三分之一少 2.

用 2, 1, 0, −1, −2 代下列各方程中的 x, 再求 y 的相當值,將 x, y 各對的數值做坐標定各點,並注意各點的關係.

16. $3x-2y=0$.

17. $2x+3y=10$.

18. $5x-4y-7=0$.

方程的作圖

97.一次方程的圖形 設有方程

$$y=3x-5.$$

根據第80節,知滿足上列方程中 x 與 y 的值,有無窮對的數.用這無窮對的數做坐標,可得無窮個點.這連接許多點所成的線,叫做這方程的圖形.一次方程的圖形,是一直線(證從略).所以依淺近幾何原理,祇須求出兩點,便能把直線完全確定.

例 1. 作

$$y=2x$$

的圖形.

解. 若

$x=0$, 則 $y=0$.

$x=3$, 則 $y=6$.

在圖上定兩點 $(0, 0)$ 與 $(3, 6)$, 作一直線,經過這兩點.

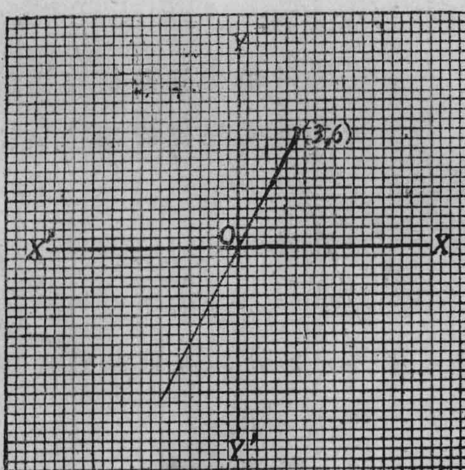


圖 九

這直線便是所求的圖形.

例 2. 作 $y=3x-5$ 的圖形.

解. 若 $x=0$, 則 $y=-5$.

$y=0$, 則 $x=5/3$.

作一直線,經過(0, −5)與(5/3, 0)兩點,這直線就是所求的圖形.

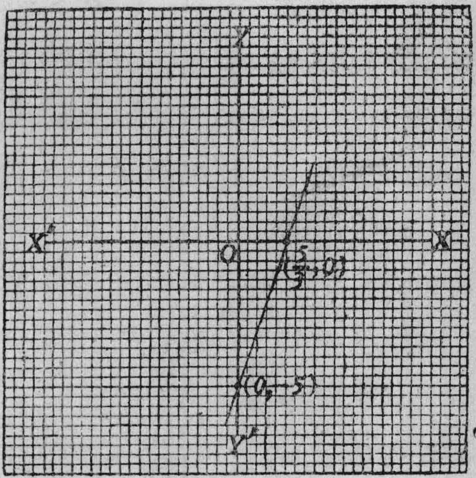


圖 十

例 3. 作

$$y=3$$

的圖形.

解 方程中不含 x,就是 x 是任何數值時,y 總是等於 3.

如 $x=0$, $y=3$.

$x=4$, $y=3$.

作 AB 直線,經過(0, 3), (4, 3)這兩點.這線就是所求的圖形.

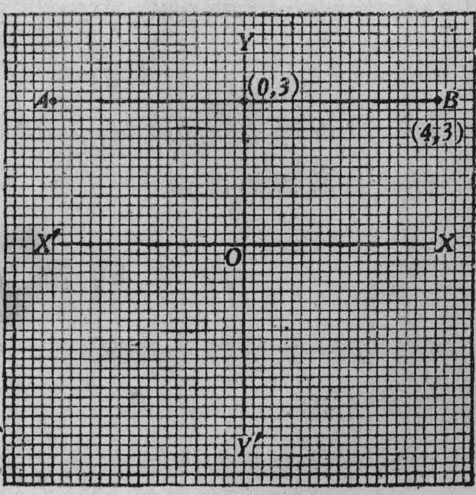


圖 十 一

如圖直線 AB,任何延長,與

X 軸不相交.就是 AB 與 X 軸平行.

例 4. 作

$$x=-5$$

的圖形.

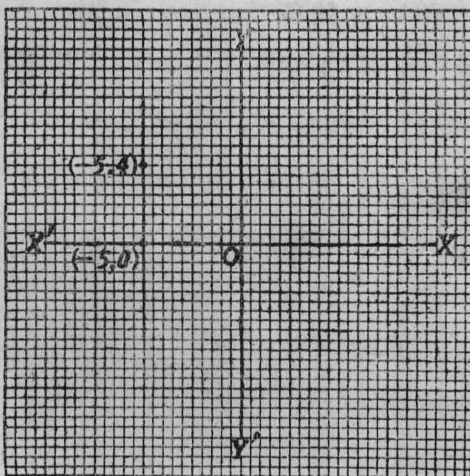


圖 十 二

解. 方程中不含 y, 就是 y 是任何數值時, x 總是等於 -5.

如
$$x=-5,\ y=0.$$
$$x=-5,\ y=4.$$

作一直線經過 $(-5,0)$, $(-5,4)$ 這兩點.這線與 Y 軸平行,就是所求的圖形.

方程的圖解

98.一元一次方程的圖解 一元一次方程最簡單的標準式是:

$$ax+b=0 \tag{1}$$

式中祇含一個變數 x, 也可用下列圖解法求牠的根設

$$y=ax+b \tag{2}$$

則(2)式的軌跡是一直線,而(1)式是(2)式的特殊情形,即當(2)式內的 y 等於零時,x 的相應值,為滿足(1)式的根.所以要解方程(1),祇要求出代表(2)式軌跡的直線上一點,牠的縱坐標是零.換一句話說,祇要求出代表(2)式軌跡的直線,與 X 軸的相交點.這交點的橫坐標,就是(1)式的根.

例. 圖解

$$3x+5=0.$$

解. 設

$$y=3x+5.$$

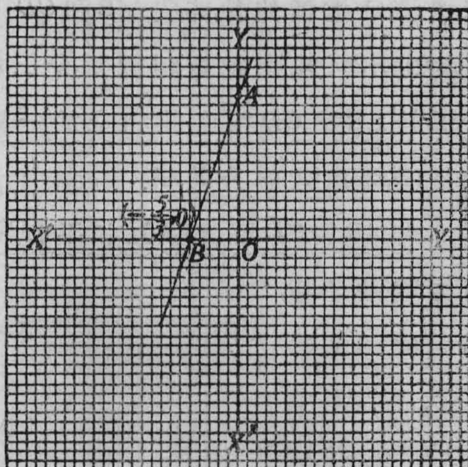


圖 十 三

求出牠的圖形是直線,如圖 AB. B 點是直線與 X 軸的交點.量 B 點的橫坐標,得 $-\frac{5}{3}$,這就是所求的根.

99.二元一次聯立方程的圖解 設有兩個二元一次聯立方程

$$\begin{cases} ax+by=p & (1) \\ cx+dy=q & (2) \end{cases}$$

設(1)式的軌跡是 AB 直線,(2)式的軌跡是 CD 直線,那末 AB 線上各點的坐標,都能滿足方程(1), CD 線上各點的坐標,都能滿足方程(2).可是要解聯立方程,就是要找出一對 x 與 y 的數值,能夠同時滿足兩個方程.要滿足這種條件,非得 AB 和 CD 兩條直線有一個公共點不可.現在把這種圖解,分三種情形說明.

1. 若 AB 與 CD 兩直線相交於一點,則交點的坐標,就是(1),(2)兩式的公共根.

2. 若 AB 與 CD 兩直線互相平行,沒有交點,則(1),(2)兩方程是矛盾,不能得到解答.

3. 若 AB 與 CD 兩直線完全相合,則(1),(2)兩方程是不獨立的,就是(1),(2)兩式,實在是一個方程.

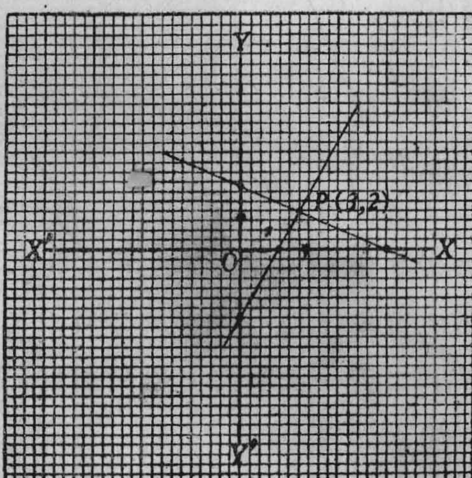


圖 十 四

例 1. 圖解聯立方程

$$\begin{cases} 4x+9y=30 & (1) \\ 9x-5y=17 & (2) \end{cases}$$

解　方程(1)的軌跡,是經過$(0,\frac{10}{3})$, $(7\frac{1}{2},0)$的直線.方程(2)的軌跡是經過$(0,-\frac{17}{5})$, $(\frac{17}{9},0)$的直線.

這兩直線相交於P.量P點的坐標,得$(3,2)$.故所求聯立方程的解答,是

$$x=3,\ y=2.$$

例 2.　圖解聯立方程

$$\begin{cases} 5x-3y=4 & (1) \\ -10x+6y=6 & (2) \end{cases}$$

解　方程(1)的軌跡,是經過$(0,-\frac{4}{3})$, $(\frac{4}{5},0)$兩點的直線.又方程(2)的軌跡,是經過$(0,1)$, $(-\frac{3}{5},0)$兩點的直線.這兩線是平行線,不能相交,故(1),(2)兩

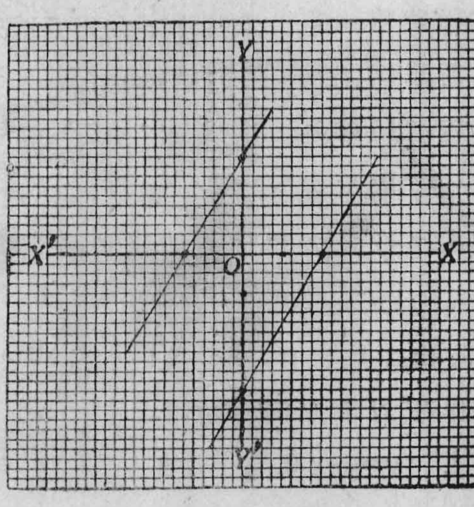


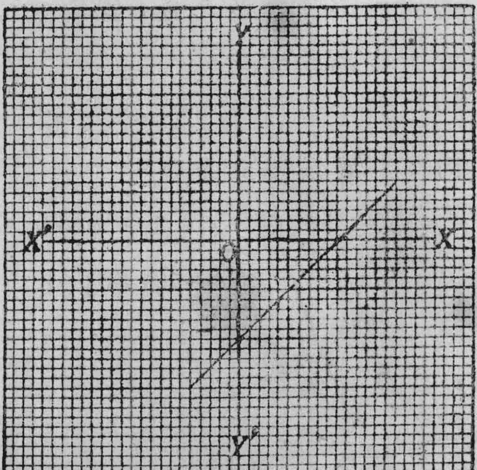
圖 十 五

式是矛盾方程,不能解答.

例 3. 圖解聯立方程

$$\begin{cases} 7x+y=7y+x+12 & (1) \\ x-y=2 & (2) \end{cases}$$

解 (1)(2)兩式的軌跡,都是經過 $(0,-2)$, $(2,0)$ 兩點的直線.但是初等幾何學上說明,過兩點祇能畫一直線,所以(1)(2)兩方程的軌跡,是同一直線,故這兩式是從屬方程,牠們的根是不定的.



圖十六

習題二十三

作下列各方程的圖形:

1. $y=4x+3$.

2. $y=10-3x$.

圖解下列方程:

3. $3x-15=0.$　　4. $7x+4=0.$

5. $\begin{cases}5x+3y=19,\\2x+y=7.\end{cases}$　　6. $\begin{cases}4x+y=14,\\3x-2y=16.\end{cases}$

7. $\begin{cases}4x+3y=18,\\6x-7y=4.\end{cases}$　　8. $\begin{cases}2x+y=0,\\4(x+5)=3y.\end{cases}$

9. $\begin{cases}5(x-3)+9(y+2)=11,\\4x+21y=12-6x+3y.\end{cases}$

10. $\begin{cases}3(2-3x)+2(5y-4)=7,\\\frac{1}{2}(9x+9)=5y.\end{cases}$

第四編　整式(續)

第一章　乘除法公式

100. 特殊積　兩多項式相乘的結果,有時可以列成公式,使讀者容易記憶.將來如有類似的問題,就可以代入相當的公式內,直接把乘積寫出.現在舉幾個最重要的公式於下,讀者應特別注意:

101. 兩數和的平方

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)\\&=a(a+b)+b(a+b)\\&=a^2+ab+ab+b^2\\&=a^2+2ab+b^2 \qquad (1)\end{aligned}$$

兩數和的平方,等於兩數的平方和,加兩數相乘積的兩倍.

例 1.　求 $(m+2n)^2$ 的結果.

與公式 (1) 比較,知 m 相當於公式中的 a,$2n$ 相當於

公式中的 b,故得

$$(m+2n)^2=m^2+2\cdot m\cdot 2n+(2n)^2$$
$$=m^2+4mn+4n^2.$$

例 2. 求 $(3x+5y)^2$ 的結果.

$$(3x+5y)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2$$
$$=9x^2+30xy+25y^2.$$

問　　題

口述下列的結果:

1. $(x+3y)^2$.
2. $(a+7b)^2$.
3. $(5x+z)^2$.
4. $(9+2r)^2$.
5. $(3a+8b)^2$.
6. $(7p+2q)^2$. =14p+8pq+4q

102. 兩數差的平方

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)$$
$$=a(a-b)-b(a-b)$$
$$=a^2-ab-ab+b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2. \qquad (2)$$

兩數差的平方,等於兩數的平方和,減兩數相乘積的兩倍.

例 1. 求 $(p-2q)^2$ 的結果.

與公式(2)比較,p 相當於公式中的 a,$2q$ 相當於公式中的 b,故得

$$(p-2q)^2=p^2-2\cdot p\cdot 2q+(2q)^2=p^2-4pq+4q^2.$$

例 2. 求 $(5a-7b)^2$ 的結果.

$$(5a-7b)^2=25a^2-70ab+49b^2.$$

問 題

口述下列的結果:

1. $(2c-d)^2$.
2. $(m-4n)^2$.
3. $(9-5x)^2$.
4. $(7p-2q)^2$.
5. $(5a-3b)^2$.
6. $(5ab-3cd)^2$.

103. (1),(2) **兩式的推廣**

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$
$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+(-c)^2+2ab+2a(-c)+2b(-c)$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc.$$

例 1. 求 $(a+2b+3c)^2$ 的結果.

$$(a+2b+3c)^2$$
$$=a^2+(2b)^2+(3c)^2+2a\cdot 2b+2a\cdot 3c+2\cdot 2b\cdot 3c$$
$$=a^2+4b^2+9c^2+4ab+6ac+12bc.$$

例 2. 求 $(2x-3y-5z)^2$ 的結果.

$$
\begin{aligned}
(2x-3y-5z)^2 &= (2x)^2+(-3y)^2+(-5z)^2 \\
&\quad +2\cdot 2x(-3y)+2\cdot 2x(-5z) \\
&\quad +2(-3y)(-5z) \\
&= 4x^2+9y^2+25z^2-12xy-20xz+30yz.
\end{aligned}
$$

習題二十四

用觀察法寫出下列各題的結果:

1. $(7x+8y)^2$. $=14x+56xy+16y$
2. $(3c-7d)^2$.
3. $(a+b+c+d)^2$.
4. $(2p+3q-r)^2$.
5. $(4m+5r-2n)^2$.
6. $(3x-7y-6z)^2$.

104. 兩數和差的積

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= a(a-b)+b(a-b) \\
&= a^2-ab+ab-b^2 \\
&= a^2-b^2. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

兩數和差的積,等於兩數的平方差.

例 1. 求 $(2m+3n)(2m-3n)$ 的結果.

$$
\begin{aligned}
(2m+3n)(2m-3n) &= (2m)^2-(3n)^2 \\
&= 4m^2-9n^2.
\end{aligned}
$$

例 2. 求 $(a+b+c-d)(a+b-c+d)$ 的結果.

$$(a+b+c-d)(a+b-c+d)$$
$$=[(a+b)+(c-d)][(a+b)-(c-d)]$$
$$=(a+b)^2-(c-d)^2$$
$$=a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2.$$

例 3. 求 $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ 的結果.

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$
$$=[(a^2+b^2)+ab][a^2+b^2)-ab]$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$$
$$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$$
$$=a^4+a^2b^2+b^4.$$

例 4. 求 $\dfrac{m^2n^2-1}{mn-1}$ 的結果.

因 $m^2n^2-1=(mn-1)(mn+1)$,

故 $\dfrac{m^2n^2-1}{mn-1}=mn+1.$

問 題

口述下列各題的結果:

1. $(4xy+3)(4xy-3)$.
2. $(x+y+1)(x+y-1)$.
3. $(p^2qr^3+s)(p^2qr^3-s)$.
4. $(x+y+z)(x-y+z)$.
5. 99×101.
6. 62×58.

7. $(a^2-b^2c^2)\div(a+bc)$.

8. $(x^2+2xy+y^2-1)\div(x+y-1)$.

105. 兩個二項式 $x+a,x+b$ 的積.

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)&=x(x+b)+a(x+b)\\&=x^2+bx+ax+ab\\&=x^2+(a+b)x+ab.\qquad(4)\end{aligned}$$

兩個二項式相乘,積的首項是兩式首項的積,積的末項是兩式末項的積,積的中項是兩式首末兩項交叉積的代數和.

公式(4)中,a 和 b 可以代表任意的正負是,因 a 與 b 的正負不同,可分成四種情形如下:

1. 設 a 與 b 都是正,例如

$$\begin{aligned}(x+3)(x+4)&=x^2+(3+4)x+3\times4\\&=x^2+7x+12.\end{aligned}$$

那末積的中項末項都是正,中項係數的絕對值,是原二式末項絕對值的和.

2. 設 a 與 b 都是負,例如

$$\begin{aligned}(x-3)(x-4)&=x^2+(-3-4)x+(-3)(-4)\\&=x^2-7x+12.\end{aligned}$$

那末積的末項是正,中項可以中項係數的絕對值,是

原二式末項絕對值的和.

3. 設 a 與 b 一個是正,一個是負,而正的絕對值大,例如

$$(x+5)(x-2)=x^2+(5-2)x+5(-2)$$
$$=x^2+3x-10.$$

那末積的末項是負,中項是正,中項係數的絕對值,是原二式末項絕對值的差.

4. 設 與 b,一個是正,一個是負,而負的絕對值大,例如

$$(x+2)(x-5)=x^2+(2-5)x+2(-5)$$
$$=x^2-3x-10.$$

那末積的末項,中項都是負.中項係數的絕對值,是原二式末項絕對值的差.

第三,四兩節,總括起來說:中項的記號,與原二式末項中絕對值大的相同.

問　　題

口述下列各題的積:

1. $(x+c)(x+d)$.　$x+c$　$x+d$　2. $(x+a)(x-b)$.

3. $(y+11)(y+5)$.　x^2　4. $(c-3)(c-9)$.

$x^2+xc+xa+cd=x^2+x(c+d)+$

5. $(x-9)(x+11)$.

6. $(x-7)(x+5)$.

7. $(y^2+4)(y^2-3)$.

8. $(xy-10)(xy+5)$.

106. 兩個二項式$ax+b$, $cx+d$的積

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d) &= ax(cx+d)+b(cx+d)\\ &= acx^2+adx+bcx+bd\\ &= acx^2+(ad+bc)x+bd. \qquad (5)\end{aligned}$$

(5) 式也可記作

$$\begin{array}{c} ax \; + \; b \\ \vert \times \vert \\ \underline{cx \; + \; d} \end{array} \quad (\times$$

$$acx^2+\left(\begin{array}{c} a \; + \; b \\ \times \\ c \; + \; d \end{array}\right)x+bd=acx^2+(ad+bc)x+bd.$$

積的首項,是原二式首項的積.積的末項是原二式末項的積.積的中項,是原二式首末兩項交叉積的代數和.

例 1. 求 $(2x+5)(3x-4)$ 的結果.

$$\begin{aligned}(2x+5)(3x-4) &= 6x^2+15x-8x-20\\ &= 6x^2+7x-20.\end{aligned}$$

例 2. 求 $(5cy^2+7z)(3cy^2-8z)$ 的結果.

$$(5cy^2+7z)(3cy^2-8z)$$
$$=15c^2y^4+21cy^2z-40cy^2z-56z^2$$
$$=15c^2y^4-19cy^2z-56z^2.$$

問題

口述下列各題的積:

1. $(2x+5)(x+3)$.
2. $(4x+1)(7x-3)$.
3. $(3x-2)(2x-3)$.
4. $(7x-8)(8x+7)$.
5. $(2xy+3z)(5xy-6z)$.
6. $(3ab+7cd)(4ab-5cd)$.

習題二十五

用觀察法寫出下列各題的結果:

1. $(5y+7a)(5y-7a)$.
2. $(9cd^2f+2e)(9cd^2f-2e)$.
3. $(7+10xyz)(10xyz-7)$.
4. $(\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}n)(\frac{1}{2}m-\frac{1}{3}n)$.
5. $(-3x+4y)(-3x-4y)$.
6. $(a+b+c)(a-b-c)$.

7. $(x-2)(x+2)(x^2+4)$.

8. $(m^2-49)\div(m+7)$.

9. $(y^6-1)\div(y^3-1)$.

10. $(2+3x)(3-5x)$.

11. $(7cd+3xy)(4xy+5cd)$.

12. $(5ax-7b)(2ax+5b)$.

107. 除法公式一 實行除法,得

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2 \qquad (6)$$

兩數的差除兩數的立方差,所得的商,等於兩數的平方和加兩數的積.

(6)式又可寫作

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

例 1. 求 $(8d^3-1)\div(2d-1)$ 的結果.

$$\frac{8d^3-1}{2d-1}=[(2d)^3-1^3]\div(2d-1)$$

$$=(2d)^2+1\times 2d+1^2=4d^2+2d+1.$$

例 2. 求 $[(a+b)^3-a^3]\div b$ 的結果.

$$\frac{(a+b)^3-a^3}{b}=\frac{(a+b)^3-a^3}{(a+b)-a}$$

$$=(a+b)^2+a(a+b)+a^2$$

$$=3a^2+3ab+b^2.$$

問　題

口述下列各題的結果:

1. $(x^3-y^3)\div(x-y)$.

2. $(a^3-1)\div(a-1)$.

3. $(y^3-64)\div(y-4)$.

4. $(x^6-8)\div(x^2-2)$.

5. $(125-b^3)\div(5-b)$.

6. $(8c^3-27)\div(2c-3)$.

108. 除法公式二　實行除法,得

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2 \qquad (7)$$

兩數的和除兩數的立方和,所得的商,等於兩數的平方和減兩數的積.

(7)式又可寫作:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

例 1.　求 $(1+y^3)\div(1+y)$ 的結果.

$$\begin{aligned}(1+y^3)\div(1+y)&=(1^3+y^3)\div(1+y)\\&=1^2-1\cdot y+y^2\\&=1-y+y^2.\end{aligned}$$

例 2.　求 $(p^3q^3+125x^3)\div(pq+5x)$ 的結果.

$$
\begin{aligned}
&(p^3q^3+125x^3)\div(pq+5x)\\
&\quad=[(pq)^3+(5x)^3]\div(pq+5x)\\
&\quad=(pq)^2-(pq)(5x)+(5x)^2\\
&\quad=p^2q^2-5pqx+25x^2.
\end{aligned}
$$

問　　題

口述下列各題的結果:

1. $(p^3+27)\div(p+3)$.
2. $(8+c^3d^6)\div(cd^2+2)$.
3. $(m^9+27n^6)\div(m^3+3n^2)$.
4. $(1+27r^3s^3)\div(1+3rs)$.
5. $(8+27t^3)\div(3t+2)$.
6. $(1+64x^3y^6)\div(1+4xy^2)$.
7. $(a^3+27)\div(a^2-3a+9)$.

習題二十六

參照公式(6),(7)寫出下列各題的結果:

1. $(x^3+8y^3)\div(x+2y)$.
2. $(a^9+27)\div(a^3+3)$.
3. $(a^{12}-x^6y^6)\div(a^4-x^2y^2)$.

4. $(343x^3+1000y^3)\div(7x+10y)$.

5. $(1-64x^3y^6z^9)\div(1-4xy^2z^3)$.

6. $(a^{15}+b^6c^9)\div(a^5+b^2c^3)$.

7. $(x^3y^3+1)\div(x^2y^2-xy+1)$.

8. $(p^3q^6-27c^9)\div(p^2q^4+3pq^2c^3+9c^6)$,

109. 兩數和的立方 實行乘法,得

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (8)$$

例 1. 求 $(c+2d)^3$ 的結果.

$$(c+2d)^3=c^3+3c^2(2d)+3c(2d)^2+(2d)^3$$
$$=c^3+6c^2d+12cd^2+8d^3.$$

例 2. 求 $(2m+3n)^3$ 的結果.

$$(2m+3n)^3=(2m)^3+3(2m)^2(3n)+3(2m)(3n)^2$$
$$+(3n)^3$$
$$=8m^3+36m^2n+54mn^2+27n^3.$$

110. 兩數差的立方 實行乘法,得

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \qquad (9)$$

例 1. 求 $(2x-3y)^3$ 的結果.

$$(2x-3y)^3$$
$$=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3$$
$$=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3.$$

例 2. 求 $(5cd-m^2n)^3$ 的結果.

$$(5cd-m^2n)^3$$
$$=(5cd)^3-3(5cd)^2(m^2n)+3(5cd)(m^2n)^2-(m^2n)^3$$
$$=125c^3d^3-75c^2d^2m^2n+15cdm^4n^2-m^6n^3.$$

習題二十七

用觀察法寫出下列各題的結果:

1. $(3a-5b)^3$.
2. $(2+3xy)^3$.
3. $(p^2q+5c)^3$.
4. $(c^2d-pq^2)^3$.
5. $(mn+2rs)^3$.
6. $(4x^2y-3xy^2)^3$.

第二章 析因式法

111. 定義 把一個多項式,分析成幾個因子的積,叫做**析因式法**.

析因式法,是乘法的還原,學者對於上一章有充分練習,那末析因式時就比較容易.

112. 單項式的因子 單項式的因子,可用觀察法求得,例如 $18xy^2$ 的因子是 $2, 3, 3, x, y, y$.

113. 多項式的因子,分析的方法很多,大概可分三種.

一 簡單析因式法

114. 單項公因子

$$ax-bx+cx=x(a-b+c).$$

式中各項,有一個公共的因子.將這因子括出,用牠除原式,得第二因子.

例 1. 析 $a^3b+2a^2b^2+3ab^3$ 的因式.

$$a^3b+2a^2b^2+3ab^3=ab(a^2+2ab+3b^2).$$

例 2. 析 $-18x^2y^2+9x^3y-6xy^4$ 的因式.

$$-18x^2y^2+9x^3y-6xy^4=-3xy(6xy-3x^2+2y^3).$$

例 3. 析 $(x-y)^2-7(x-y)$ 的因式.

各項都含有 $x-y$ 一因子,所以把牠提出來,再用 $x-y$ 除各項,得第二個因子.

$$\begin{aligned}(x-y)^2-7(x-y)&=(x-y)\{(x-y)-7\}\\&=(x-y)(x-y-7).\end{aligned}$$

例 4. 析 $(a+b)x-(a+b)y+(a+b)$ 的因式.

$$\begin{aligned}&(a+b)x-(a+b)y+(a+b)\\&\qquad=(a+b)(x-y+1).\end{aligned}$$

上例第二個因子中有 1 的一項,初學的人往往容易漏去,應當注意.

習題二十八

把下列各式析因式:

1. $3x-15x^2+27x^3$.

2. $8p^2r-4pr^2+12p^2r^2$.

3. $3m^2-5mn+2mn^2$.

4. $3a^5b^3c^7d^4-12a^4b^2c^5d^3$.

5. $18a^2b^5-21a^5b^2+15a^{10}b^4-3a^4b^9$.

6. $(c+d)^3y+(c+d)^2z+(c+d)$.

7. $(x+y)(a+b)+(x+y)(a-b)$.

8. $(x+y)^3-3xy(x+y)$.

9. $ax^2(y-z)+3x(z-y)$.

   [注意 $z-y=-(y-z)$]

10. $3ab(c-d)-9b^2(d-c)$.

11. $a^{x+1}-a^{x+3}+a^{2x-5}$.

12. $x^{a-1}y^{2a-3}+3x^{2a-1}y^{a-3}-15x^4y^a$.

115. 分羣分析法 一個多項式中各項並沒有公因子,可是分成若干組後,每組析因式,便能找出一個二項或二項以上的公因子.這種方法,要比上節求單項因子難些,學者須多做習題,方能熟習.

$$ma-na+mb-nb$$
$$=(m-n)a+(m-n)b$$
$$=(m-n)(a+b).$$

例 1.　把 $2x^3-5x^2+4x-10$ 析因式.

$$2x^3-5x^2+4x-10$$
$$=(2x^3-5x^2)+(4x-10)$$
$$=x^2(2x-5)+2(2x-5)$$
$$=(2x-5)(x^2+2).$$

例 2.　把 $2x^5-2x^4+x^3-x^2+3x-3$ 析因式.

$$2x^5-2x^4+x^3-x^2+3x-3$$
$$=(2x^5-2x^4)+(x^3-x^2)+(3x-3)$$
$$=2x^4(x-1)+x^2(x-1)+3(x-1)$$
$$=(x-1)(2x^4+x^2+3).$$

例 3.　把 $12a^2-3ab-4ax^2+bx^2$ 析因式.

$$12a^2-3ab-4ax^2+bx^2$$
$$=(12a^2-3ab)-(4ax^2-bx^2)$$
$$=3a(4a-b)-x^2(4a-b)$$
$$=(4a-b)(3a-x^2).$$

例 4.　把 $2ax^3y+6ax^2+4ax^2y+3x^2y^3+9xy^2+6xy^3$ 析因式.

$$2ax^3y+6ax^2+4ax^2y+3x^2y^3+9xy^2+6xy^3$$

$$=(2ax^3y+3x^2y^3)+(4ax^2y+6xy^3)+(6ax^2+9xy^2)$$

$$=x^2y(2ax+3y^2)+2xy(2ax+3y^2)+3x(2ax+3y^2)$$

$$=(2ax+3y^2)(x^2y+2xy+3x)$$

$$=x(2ax+3y^2)(xy+2y+3).$$

例 5. 把 $a^3y-a^2x(1+y)+ax^2(1+xy)-x^4$ 析因式.

$$a^3y-a^2x(1+y)+ax^2(1+xy)-x^4$$

$$=a^3y-a^2x-a^2xy+ax^2+ax^3y-x^4$$

$$=(a^3y-a^2xy+ax^3y)-(a^2x-ax^2+x^4)$$

$$=ay(a^2-ax+x^3)-x(a^2-ax+x^3)$$

$$=(a^2-ax+x^3)(ay-x).$$

習題二十九

把下列各式析因式:

1. $ac-bd+ad-bc.$

2. $ma+mb-mc+na+nb-nc.$

3. $x^3+3ax^2+x+3a.$　　4. $x^3-x^2+x-1.$

5. $abc-b^2c+a^2cd-abcd.$　　6. $abxy+abc+cxy+c^2.$

7. $ax-bx+cy+by-ay-cx.$

8. $xy(1+z^2)+z(x^2+y^2).$

9. $ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd.$

10. $2x+(x^2-4)a-2a^2x.$

11. $2x^5+2x^4-7x^3-7x^2+x+1.$

12. $x^4+x^3+2x^2+x+1.$

13. $28ay+35ac-4y-5c.$

14. $7px-77qx-cp+11cq.$

15. $cg+2ch+ck-gx-2hx-kx.$

16. $-2ac+6by+4acx-12bxy.$

17. $8acxy-20bx^2y-6abc^2+15b^2cx.$

18. $x^5-x^4-x^3+7x^2-7x-7.$

19. $15x^3y+21x^3-6x^2y-10xy^3-14xy^2+4y^3.$

20. $7a^3-5a^2b+21ab^2-15b^3.$

21. $3xy-3x^2+6ay-6ax.$

22. $24ax^2-bx(32x-18a+24b).$

23. $x^{3a}-3x^{2a}-x^a+3.$

24. $x^{3a-2}+2x^{a+1}-15x^{2a-3}-10+10x^{2a-3}.$

二 應用公式析因式法

116. 完全平方的公式 倒寫第101,102兩節的公式,便得

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \qquad (1)$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \qquad (2)$$

上兩式的左邊的式子,叫做三項的**完全平方式**.一個三項式,是不是完全平方,應當注意這三項中各項的獨立性,和三項的相關性.

凡是一個三項式中,有兩項可以獨立開方,譬如$4x^2$, $9y^2$, c^4等,牠們的平方根是$2x, 3y, c^2$.而第三項是兩項平方根相乘積的兩倍,那末這三項式是完全平方.

例如 $4x^2+12xy+9y^2$是完全平方,因爲$12xy$是$4x^2$的平方根$2x$和$9y^2$的平方根$3y$相乘積的兩倍.

已知一個完全平方的三項式的兩項,要求出第三項的方法,叫做**配方**.配方的條件,有下列兩種:

1. 如(1)(2)兩式中,已知a^2和b^2,第三項是a^2的平方根a和b^2的平方根b的相乘積的兩倍,就是$2ab$.牠的記號可正可負.例如$4x^2+25y^2$,配上$\pm 20xy$,便成完全平方.因$20xy$是$4x^2$的平方根$2x$和$25y^2$的平方根$5y$的相乘積的兩倍.

2. 如(1)式中,已知a^2和$2ab$,那末第三項便是將a^2的平方根除$2ab$.再把所得的商折半,折半後再平方.因此

$$\frac{2ab}{a}=2b,$$

$$\frac{2b}{2}=b.$$

b^2 就是配成完全平方的所求項.例如 x^2+6x, 配上 $\left(\frac{6x}{x\cdot2}\right)^2$ 或 9 便成完全平方. x^4+7x^2, 配上 $\left(\frac{7x^2}{x^2\cdot2}\right)^2$ 或 $\frac{49}{4}$ 也成完全平方.

配方在代數學上應用很廣,學者應當練習純熟.

問　題

1. 下列幾個三項式,是不是完全平方?

(a) $8x^2+40xy+25y^2$.

(b) $9c^2-24cd+16d^2$.

(c) $16p^4+24pq+9q^4$.

(d) $4a^2-20ab+25b$.

(e) $9x^2+6x+2$.

(f) $100m^2n^4-60lmn^2+9l^2$.

2. 將下列各式配成完全平方:

(a) $4x^2+(\ 28xy^2\ )+49y^4$.

(b) $25-(\ 10c^2\ )+c^4$.

(c) $c^4+10c^2+($ 25 $)$.

(d) $x^2-14xy+($ $49y^2$ $)$.

(e) $y^2+5y+($ $\frac{5}{2}$ $)^2$.

(f) $(\quad)+18cy+36y^2$.

應用公式(1),(2)析因式法.

例 1. 把 $4a^2-12ab+9b^2$ 析因式.

應用公式(2),知上題的 $2a$,相當於公式中的 a,$3b$ 相當於公式中的 b.

$$\begin{aligned}&4a^2-12ab+9b^2\\&=(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2\\&=(2a-3b)^2.\end{aligned}$$

有時多項式的項數,不止三項,可是分成三組後,就可化作三項的完全平方式.

例 2. 把 $a^2+2ab+b^2+2a+2b+1$ 析因式.

$$\begin{aligned}&a^2+2ab+b^2+2a+2b+1\\&=(a^2+2ab+b^2)+(2a+2b)+1\\&=(a+b)^2+2(a+b)+1\\&=(a+b+1)^2.\end{aligned}$$

例 3. 把 $x^2+4y^2+c^2-4xy-2cx+4cy$ 析因式.

$$x^2+4y^2+c^2-4xy-2cx+4cy$$
$$=(x^2-4xy+4y^2)-(2cx-4cy)+c^2$$
$$=(x-2y)^2-2(x-2y)c+c^2$$
$$=(x-2y-c)^2.$$

做析因式的題目時,第一應當注意這多項式中各項,有沒有單項的公因子.

習 題 三 十

做析因式的题目時应当注意这多项式中各项有没有单项因子.

把下列各式析因式:

1. $c^2-6cd+9d^2.$ 2. $4x^2+36x+81.$

3. $81a^2b^2-126abc+49c^2.$

4. $144+72x^2y^3+9x^4y^6.$ 5. $y^2+y+\frac{1}{4}.$

6. $27b^3-36b^2+12b.$ 7. $\frac{x^2}{9}-4x+36.$

8. $(x+5)^2+6(x+5)+9.$

9. $m^2n^2+18mnx^2+81x^4.$

10. $169a^4-156a^2xy^2+36x^2y^4.$

11. $x^6-8x^3+16.$ 12. $x^{2a}+6x^a+9.$

13. $a^2-2ab+b^2+2a-2b+1.$

14. $x^2+9y^2-2x-6y+6xy+1.$

117. 兩數的平方差 倒寫第104節的公式,得

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \tag{3}$$

兩數的平方差,可析成兩個因子,一個是兩數的和,一個是兩數的差.

例 1. 把 $4x^2-9y^2$ 析因式.

$$4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2$$
$$=(2x+3y)(2x-3y).$$

例 2. 把 $1-49c^2d^4$ 析因式.

$$1-49c^2d^4=1^2-(7cd^2)^2$$
$$=(1+7cd^2)(1-7cd^2).$$

例 3. 把 a^4-16b^4 析因式.

$$a^4-16b^4=(a^2)^2-(4b^2)^2$$
$$=(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)$$
$$=(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2).$$

例 4. 把 $3ab^2-12ac^4$ 析因式.

$$3ab^2-12ac^4=3a(b^2-4c^4)$$
$$=3a(b-2c^2)(b+2c^2).$$

例 5. 把 $36-(x-y)^2$ 析因式.

$$36-(x-y)^2=6^2-(x-y)^2$$
$$=\{(6+(x-y)\}\{6-(x-y)\}.$$

有時一個四項或六項的多項式,也可以化成兩個平方的差.

例 6. 把 $a^2+2ab+b^2-c^2$ 析因式.

$$a^2+2ab+b^2-c^2=(a+b)^2-c^2$$
$$=(a+b+c)(a+b-c).$$

例 7. 把 $a^2+b^2-c^2-4d^2-2ab+4cd$ 析因式.

$$a^2+b^2-c^2-4d^2-2ab+4cd$$
$$=(a^2-2ab+b^2)-(c^2-4cd+4d^2)$$
$$=(a-b)^2-(c-2d)^2$$
$$=(a-b+c-2d)(a-b-c+2d).$$

有時一個多項式,可用配方法,化成兩個平方的差.

例 8. 把 $x^4+x^2y^2+y^4$ 析因式.

$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

習題三十一

把下列各式析因式:

1. c^2-1.
2. x^2-25.
3. $1-c^2d^2$.
4. $25-4y^2$.

5. a^2-100b^2.　　6. $49p^2-36q^2$.

7. $3xy^2-27x^3$.　　8. $a^3c-16ac^3$.

9. a^8-b^8.　　10. x^4-81y^4.

11. $x^2y^2-\frac{1}{4}z^2$.　　12. $\frac{1}{9}m^2-\frac{1}{16}n^4$.

13. $(a+b)^2-1$.　　14. $25-(c-d)^2$.

15. $16y^2-(h-2k)^2$.　　16. $(5x+3y)^2-(4x-7y)^2$.

17. $x^2-a^2+y^2-2xy$.　　18. $25-b^2-c^2-2bc$.

19. $x^2-6x+9-4y^2$.　　20. $4bc+1-4c^2-b^2$.

21. $x^2-a^2+y^2-4-2xy+4a$.

22. $4k^2-12hk-16a^2+8ab+9h^2-b^2$.

23. $4bd+4c^2-4d^2-4c-b^2+1$.

24. $25x^2-20x+4-4y^2-9a^2-12ay$.

25. x^4+x^2+1.　　26. x^4+4x^2+16.

27. $4x^4+8x^2y^2+9y^4$.　　28. $16y^4-9y^2+1$.

29. $4a^4+1$.　　30. y^8+64.

118. x^2+px+q 三項式的因子　倒寫第105節的公式,得

$$x^2+px+q=(x+a)(x+b) \qquad (4)$$

這裏　　$a+b=p,\ ab=q.$

兩個因子的第一項都是 x; 兩個因子第二項的積,是三項式的第三項;兩個因子第二項的和,是三項式中 x 項的係數.

例 1.　析 $x^2+11x+24$ 的因式.

因　$$3+8=11,\ 3\times8=24,$$

故　$$x^2+11x+24=(x+3)(x+8).$$

例 2.　析 $x^2-7x+12$ 的因式.

因　$$(-3)+(-4)=-7,\ (-3)(-4)=12,$$

故　$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4).$$

例 3.　析 $x^2+5x-14$ 的因式.

因　$$7+(-2)=5,\ 7\times(-2)=-14.$$

故　$$x^2+5x-14=(x+7)(x-2).$$

例 4.　析 $x^2-3x-28$ 的因式.

因　$$4+(-7)=-3,\ 4(-7)=-28,$$

故　$$x^2-3x-28=(x+4)(x-7).$$

例 5.　析 $a^2x^2-12abxy+35b^2y^2$ 的因式.

因 $$a^2x^2-12abxy+35b^2y^2=(ax)^2-12by\cdot ax+35b^2y^2,$$

而　$$-5by+(-7by)=-12by,$$

$$(-5by)(-7by)=35b^2y^2,$$

故 $$a^2x^2-12abxy+35b^2y^2=(ax-5by)(ax-7by).$$

例 6. 析 $(x^2+4x)^2-3(x^2+4x)-18$ 的因式.

因 $\quad -6+3=-3,\ -6\times 3=-18,$

故
$$\begin{aligned}&(x^2+4x)^2-3(x^2+4x)-18\\&=(x^2+4x+3)(x^2+4x-6)\\&=(x+1)(x+3)(x^2+4x-6).\end{aligned}$$

習題三十二

析下列各式的因式:

1. $x^2+14x+45.$ 2. $y^2-13y+22.$

3. $a^2-5a-36.$ 4. $a^2+5a-36.$

5. $x^2-18x+17.$ 6. $6-5x-x^2.$

第六題中 $6-5x-x^2$ 可寫作 $-(x^2+5x-6).$

7. $-x^2+3x+40.$ 8. $6+x-x^2.$

9. $24-5x-x^2.$ 10. $27+x^2-12x.$

11. $x^2-5ax+4a^2.$ 12. $y^2+7ay-30a^2.$

13. $a^2-35ab-200b^2.$ 14. $y^3-3y^2-28y.$

15. $(x^2+2)^2-7(x^2+2)+12.$

16. $9ax^4y^6+a^2x^8-22y^{12}.$

17. $(x^2+3x)^2-16(x^2+3x)-36.$

18. $a^2+4ab+4b^2-3a-6b-4.$

119. 普通二次三項式px^2+qx+r的因子　倒寫第106節的公式,得

$$px^2+qx+r=(ax+b)(cx+d) \qquad (5)$$

這裏　　　　$ac=p,\ bd=r,\ ad+bc=q.$

要求普通二次三項式的因子,有三種方法.

1. **觀察法**　根據第106節所述的交叉乘法,一方面將三項式中第一項和末項(排成標準式時的次序)的係數各分成兩個因子,一方面注意末項係數的記號,再用各種組合法實驗其結果,至於首項係數帶負號時,可用負括號使變做正號.

例 1.　析 $8x^2-2x-21$ 的因式.　因末項是負,故知兩個因子的末項,是一正一負.

現在　　$8=1\times8=2\times4,\ 21=1\times21=3\times7.$

如照1×8和1×21, 1×8和3×7, 2×4和1×21, 三對組合,則首項係數是1, 3, 2, 末項係數是168, 56, 84, 顯見不合用,故應當討論的,祇有下列四對:

$$(2x+3)(4x-7), \qquad (2x-3)(4x+7)$$

$$(2x+7)(4x-3), \qquad (2x-7)(4x+3)$$

第一對與題相合,故

$$8x^2-2x-21=(2x+3)(4x-7).$$

例 2. 析 $2x^2+9x-200$ 的因式.

$2=1\times 2,$

$200=1\times 200=2\times 100=4\times 50=5\times 40=8\times 25=10\times 20.$

從觀察得到 $2=1\times 2$, $200=8\times 25$ 這一對是合用的,

故 $$2x^2+9x-200=(x-8)(2x+25)$$

2. **分羣法** 設有三項式 px^2+qx+r, 先找出積是 pr, 和是 q 的兩個數,再把 qx 一項分成兩項,各用找出的一數做係數,那末就可用分羣分析法析因式.

例 1. 析 $8x^2-2x-21$ 的因式.

因 $8\times 21=168=1\times 168=2\times 84=3\times 56=4\times 42=6\times 28$
$=12\times 14,$

上式中可以找出 12 與 -14 兩數,其積等於 $8\times(-21)$, 其和等於 -2.

$$\begin{aligned}8x^2-2x-21&=8x^2+12x-14x-21\\&=(8x^2+12x)-(14x+21)\\&=4x(2x+3)-7(2x+3)\\&=(4x-7)(2x+3).\end{aligned}$$

例 2. 析 $2x^2-9x-200$ 的因式.

因 $$2\times200=400$$

$$=1\times400=4\times100$$

$$=5\times80=8\times50$$

$$=10\times40=16\times25=20\times20,$$

上式中可以找出 16 與 -25, 其積等於 $2\times(-200)$, 其和等於 -9.

$$\begin{aligned}2x^2-9x-200&=2x^2+16x-25x-200\\&=(2x^2+16x)-(25x+200)\\&=2x(x+8)-25(x+8)\\&=(x+8)(2x-25).\end{aligned}$$

3. **配方法** 設三項式是 ax^2+bx+c, 先將三項式的全體用 x^2 的係數 a 去除,把結果寫在括號內,號外再用 a 乘,如

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

再在括號內用配方法,加減 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$,如

不懂

$$\begin{aligned}a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)&=a\left\{\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right\}\\&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right\}\\&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}\end{aligned}$$

倘 $\sqrt{b^2-4ac}$ 可開盡,就可利用兩平方差的公式來求牠的因子.

例 1.　析 $8x^2-2x-21$ 的因式.

因 $b^2-4ac=(-2)^2-4\times8(-21)=676$, 而 676 的方根是 26,故這三項式有兩個因式.要求出這兩個因式有兩種方法,一種是將上面的公式再進一步研究,即

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

現在用例題和公式比較,則得

$$a=8, b=-2, c=-21.$$

$$\therefore\quad 8x^2-2x-21=8\left(x+\frac{-2+26}{16}\right)\left(x+\frac{-2-26}{16}\right)$$

$$=8\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right)$$

$$=(2x+3)(4x-7).$$

結果與用觀察法或分羣法完全相同.

一種是將原題依着配方的方法順次演算,情形與計算公式相同.

例 2.　析 $2x^2-9x-200$ 的因式.

$$2x^2-9x-200=2\left(x^2-\frac{9}{2}x-100\right)$$

$$=2\left\{x^2-\frac{9}{2}x+\left(\frac{9}{4}\right)^2-\left(\frac{9}{4}\right)^2-100\right\}$$

$$=2\left\{\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{1681}{16}\right\}=2\left\{\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\left(\frac{41}{4}\right)^2\right\}$$

$$=2\left(x-\frac{9}{4}+\frac{41}{4}\right)\left(x-\frac{9}{4}-\frac{41}{4}\right)$$

$$=2(x+8)\left(x-\frac{25}{2}\right)=(x+8)(2x-25).$$

習題三十三

析下列各式的因式:

1. $2x^2+9x+7.$
2. $2x^2-7x+3.$
3. $3y^2+11y+6.$
4. $9x^2-15x+4.$
5. $2x^2-x-3.$
6. $3x^4+17x^2-6.$
7. $3x^2+5xy-2y^2.$
8. $18x^2+71x-4.$
9. $3x^2-11x-20.$
10. $6x^2+23x-55.$
11. $6x^6+23x^3+21.$
12. $42x^2-9x-6.$
13. $12a^2+33ab-9b^2.$
14. $35x^2y+22xy^2+3y^3.$
15. $21x^4-x^2-2.$
16. $2-9x-26x^2.$
17. $35(x+2)^2-39(x+2)-36.$
18. $9(y+a)^2-6y-6a-8.$

19. $49c^2d^2-21abcd+2a^2b^2$.

20. $5x^4+18x^2y^2+16y^4$.

120. 立方差的公式 第107節的公式,是

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad (6)$$

例 1. 析 a^3-8b^3 的因式.

$$a^3-8b^3=a^3-(2b)^3=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2).$$

例 2. 析 $k^{12}-y^3$ 的因式.

$$k^{12}-y^3=(k^4)^3-y^3=(k^4-y)(k^8+k^4y+y^2).$$

例 3. 析 $(x+1)^3-y^3$ 的因式.

$$(x+1)^3-y^3=(x+1-y)\{(x+1)^2+(x+1)y+y^2\}$$
$$=(x-y+1)(x^2+2x+1+xy+y+y^2).$$

例 4. 析 x^3+3x^2+3x-7 的因式.

因 $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$,

故 $x^3+3x^2+3x-7=x^3+3x^2+3x+1-8$

$$=(x+1)^3-2^3$$
$$=(x+1-2)\{(x+1)^2+2(x+1)+4\}$$
$$=(x+1)(x^2+4x+7).$$

習題三十四

析下例各式的因式:

1. $a^3b^3-c^3$.
2. x^3-27.
3. $64a^3-27b^3$.
4. $5x^3-40$.
5. $8a^6-b^3$.
6. $c^{15}-d^9$.
7. $8a^{12}-27b^{15}$.
8. $216-8y^3$.
9. $(a+b)^3-c^3$.
10. $1-(x-2)^3$.
11. $(2x-y)^3-(x-2y)^3$.
12. $125(a+2b)^3-8(a-2b)^3$.
13. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-c^3$.
14. $x^3+3x^2+3x-26$.

121. 立方和的公式.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad (7)$$

例 1. 析 $8x^3+27y^3$ 的因式.

$$8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3$$
$$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2).$$

例 2. 析 $(a+1)^3+(b+1)^3$ 的因式.

$$(a+1)^3+(b+1)^3$$
$$=\{(a+1)+(b+1)\}\{(a+1)^2-(a+1)(b+1)+(b+1)^2\}$$
$$=(a+b+2)(a^2+2a-ab-a-b+b^2+2b+1)$$

例 3. 析 x^3+3x^2+3x+9 的因式.

$$
\begin{aligned}
x^3+3x^2+3x+9 &= x^3+3x^2+3x+1+8 \\
&= (x+1)^3+8=(x+1)^3+(2)^3 \\
&= (x+1+2)(x^2+2x+1-2x-2+4) \\
&= (x+3)(x^2+3).
\end{aligned}
$$

習題三十五

析下列各式的因式:

1. $8y^3+1.$
2. $27a^3+64b^3.$
3. $a^3b^3+8c^3.$
4. $a^3+b^9.$
5. $5a^3b+40b^4.$
6. $125+x^9.$
7. $(a+b)^3+8c^3.$
8. $1+(x-3)^3.$
9. $(x+2y)^3+(2x+y)^3.$
10. $x^3+6x^2+12x+16.$

三 用文字試代法析因式

122. 設有代數式

$$x^3-8x+7,$$

用 1 代 x,代數式的值是零,那末 $x-1$ 是這式的一個因子.現在用 $x-1$ 去除這代數式,得 $x^2+x-7.$

故 $$x^3-8x+7=(x-1)(x^2+x-7).$$

例 1. 析 x^3-7x+6 的因式.

用 1 代 x,代數式的值是零.

用 $x-1$ 除這代數式,商數是 x^2+x-6.

故
$$x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3).$$

例 2. 析 $x^3-3x^2-10x+24$ 的因式.

因 $24=1\times2\times2\times2\times3$,故原式若有一次因子,則此因子,必是

$$x\pm1, x\pm2, x\pm3, x\pm4, x\pm6, x\pm8,$$
$$x\pm12, x\pm24,$$

中間的一個.

現在用 ±1, ±2, 等數來代 x, 知道當 -3 代 x 時,代數式的值是零,故 $x-(-3)$ 即 $x+3$ 是原式一個因子.

$$x^3-3x^2-10x+24=(x+3)(x^2-6x+8)$$
$$=(x+3)(x-2)(x-4).$$

習題三十六

析下列各式的因式:

1. x^3-14x^2+8x+5.　　2. x^4-9x^2-x+3.

3. y^4-y^2+y+1.　　4. $x^3-6x^2+12x-7$.

第三章 用析因式法解一元二次方程

123. 一元二次方程 凡含一個未知數的方程,各項次數最高是二次的,叫做**一元二次方程.**

例如
$$x^2=9,$$
$$3x^2=5.$$
$$x^2+2x-3=0,$$
$$2x^2-x-3=0,$$

等,都是一元二次方程.

一元二次方程的標準式,是

$$ax^2+bx+c=0,$$

這裏 a, b, c 都是已知數,也就是各項的係數. ax^2 稱二次項, bx 稱一次項, c 稱常數項.

124. 公理 幾個因子連乘時,牠們的積是零,那末至少有一個因子是零.

這條定理,在第 41 節中已經說過.例如 $abc=0$ 時, a, b, c 中至少有一個是零,或 $a=0$, 或 $b=0$, 或 $c=0$. 又如

$$(x+3)(x-5)(x-1)=0,$$

那末 $x+3=0$, 或 $x-5=0$, 或 $x-1=0$, 而三個中任意一個成立,便可使原方程成立.

125. 用析因式法解一元二次方程 設有方程

$$x^2-5x=-6.$$

將方程的各項,全部移到左邊,得

$$x^2-5x+6=0.$$

把左邊的代數式析因式,

$$(x-2)(x-3)=0.$$

根據上節的公理,要使上式成立,那末 $x-2$ 與 $x-3$ 兩個因子中,至少有一個等於零.

設 $x-2=0$, 則 $x=2$.

$x-3=0$, 則 $x=3$.

這裏 $x=2$ 或 3, 就是 $x^2-5x=-6$ 的兩根.

用 2 或 3 代入原方程中的 x, 得

$$2^2-5\times2=-6,$$

即 $-6=-6$;

與 $3^2-5\times3=-6$,

即 $-6=-6$

兩個恆等式.

根據上例,得到用析因式法解一元二次方程的法則如下:

1. 將方程加以整理,就是去分母和括號.把所有各

項,移到方程的左邊,令右邊是零.

2. 將左邊的代數式析因式,變成兩個一次式的積.假如沒有因子,那末這方程就不能用析因式法來解.

3. 把兩個因子各等於零,使成兩個一元一次方程.

4. 解這兩個一元一次方程,所得的兩個根,就是這二次方程的根.

5. 凡二次方程都有兩個根.

例 1. 解 $\dfrac{(x+1)(x+9)}{x-1}=4x-3.$

兩邊同用 $x-1$ 來乘,得

$$(x+1)(x+9)=(x-1)(4x-3).$$

去括號, $x^2+10x+9=4x^2-7x+3.$

移項並簡單,

$$-3x^2+17x+6=0.$$

用 -1 乘方程的兩邊,

$$3x^2-17x-6=0.$$

析因式 $(x-6)(3x+1)=0.$

設 $x-6=0$, 則 $x=6.$

設 $3x+1=0$, 則 $x=-\dfrac{1}{3}.$

檢算

若 $$x=6,$$

則 $$\frac{(6+1)(6+9)}{6-1}=4\times6-3,$$

$$\frac{7\times15}{5}=21,$$

$$21=21.$$

若 $$x=-\frac{1}{3},$$

則 $$\frac{\left(-\frac{1}{3}+1\right)\left(-\frac{1}{3}+9\right)}{-\frac{1}{3}-1}=-\frac{4}{3}-3,$$

$$\frac{\frac{2}{3}\times\frac{26}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{13}{3},$$

$$\frac{13}{3}=\frac{13}{3}.$$

例 2. 解 $(2x-1)^2+9=6(2x-1)$.

去括號 $4x^2-4x+1+9=12x-6$.

移項並簡單 $x^2-4x+4=0$.

析因式 $$(x-2)^2=0.$$

$\therefore$ $$x=2.$$

這裏兩個根相同.

習題三十七

用析因式法解下列各方程,並檢算結果:

1. $x^2-9x+18=0.$
2. $x^2+7x=30.$
3. $x^2+5x=7x+3.$
4. $5x^2-4x-1=0$
5. $6x^2+7x-3=0.$
6. $12-2x^2-5x=0.$
7. $3x^2=5x+28.$
8. $34x-x^2-225=0.$
9. $32=10x+3x^2.$
10. $6(9x^2-x)=55(x^2-1).$
11. $x^2+7x=3x^2.$
12. $x^2-3ax+2a^2=0.$
13. $x^2-ax-bx=-ab.$
14. $ax^2+bx=0.$

第四章　簡易不等式

126. 不等數　兩數的絕對值相等,記號又相同,這兩數是相等.假如有一種不同,不論是絕對值或記號,或兩種都不同,那末這兩數不相等.如 $+5$ 與 -5,絕對值雖等,記號不同,故不相等.$+8$ 與 $+6$,記號雖同,絕對值不等,也不相等. $+8$ 與 -5,絕對值不等,記號又不同,當然不相等.兩數不相等時,用不等號表示如下:

$$5>-5,\ 8>6,\ -3<2.$$

上式讀做5大於 -5,或 -5 小於5等.

設 $a>b$, 就是 a 大於 b 的意義.

127. 決定數的大小 決定兩數的大小,普通用兩數的差做標準.因爲大數減小數的差是正數,小數減大數的差是負數,所以

若 $a-b>0$, 則 $a>b$.

若 $a-b<0$, 則 $a<b$.

128. 關於不等數的公理

(1) 不等數加等數,和仍不等,原來大的和仍大.

例如 $7>4$, 則 $7+2>4+2$, 卽 $9>6$.

注意 $>$ 改成 $<$, 或 $<$ 改成 $>$, 叫做**不等號改向**.

(2) 從不等數減等數,差也不等,不等號的向不改.

例如 $7>4$, 則 $7-3>4-3$, 卽 $4>1$.

(3) 從等數減不等數,差也不等,減數大的,差數反小.

例如 $4>1$, 則 $7-4<7-1$, 卽 $3<6$.

(4) 用同一正數乘不等數,積仍不等,不等號的向不改.

例如 $5>2$, 則 $5\times3>2\times3$, 卽 $15>6$.

(5) 用同一正數除不等數,商仍不等,不等號的向不改.

例如 $15>6$, 則 $\frac{15}{3}>\frac{6}{3}$, 卽 $5>2$.

129. 不等式 表示兩個代數式不等的式,叫做**不等式**.

例如 $(x-y)^2>0,\ x+5>6,$

都是不等式.

凡不等式中,所含的文字,除了某種特別情形以外,其餘用任何數代文字,都能滿足這不等式的,叫做**絕對不等式**.例如 $(x-y)^2>0$, 除 $x=y$ 以外,無論什麼數(除零)的平方,總是一個正數,就是大於零.

又如 $x+5>6$, x 的數值等於 1 或小於 1 時,都不能使這不等式滿足,只有 x 大於 1 是可以的.這種不等式叫做**條件不等式**.

關於不等式的性質,也有類似上節所述三條公理

(1) 在不等式的兩邊加同數或減去同數,不等號的向不變.

若 $A>B$, 則 $A+C>B+C,\ A-C>B-C.$

證 因 $A>B$, 故 $A-B>0.$

而 $(A+C)-(B+C)=A-B,$

$\therefore\qquad A+C>B+C.$

又 $(A-C)-(B-C)=A-B,$

$\therefore\qquad A-C>B-C.$

(2) 用同一正數乘或除不等式的兩邊,不等號的向不變.

若 $A>B$, $m>0$, 則 $mA>mB$, $\frac{A}{m}>\frac{B}{m}$.

證 因 $A>B$, 故 $A-B>0$,

但 $m>0$, 故 $m(A-B)>0$,

卽 $$mA-mB>0.$$

故 $$mA>mB.$$

同樣可以證明 $\frac{A}{m}>\frac{B}{m}$.

(3) 用同一負數乘或除不等式的兩邊,則不等號改向.

若 $A>B$, $m<0$, 則 $mA<mB$, $\frac{A}{m}<\frac{B}{m}$.

證 因 $A>B$, 故 $A-B>0$.

但 $m<0$, m 爲負數,而 $A-B$ 爲正數,故

$$m(A-B)<0,$$

卽 $$mA-mB<0,$$

$\therefore$ $$mA<mB.$$

同樣可以證明 $\frac{A}{m}<\frac{B}{m}$.

130 不等式的移項 根據上節第一條公理,知在

不等式

$$A-B>D-C$$

中,兩邊各加 $B+C$,得

$$A+C>D+B.$$

這結果和將 C 改變記號從右邊移至左邊,B 改變記號從左邊移至右邊相同,所以不等式與方程同有移項的可能性.

131. 解一次條件不等式 條件不等式與方程相似,也有一次二次等的分別,所不同的,就是不等式中所含的元,祇有數值的界限,而沒有確定的數值.求出這數值的界限,叫做**解不等式**.

例 1. 解 $$7x-4>6x+8.$$

移項得 $$7x-6x>4+8,$$

$\therefore$ $$x>12.$$

例 2. 解 $$3x+\frac{1}{3}<5-\frac{x}{4}.$$

用 12 乘不等式的兩邊,得

$$36x+4<60-3x,$$

移項 $$36x+3x<60-4,$$

即 $$39x<56.$$

用 39 除不等式兩邊,得

$$x<\frac{56}{39}.$$

習題三十八

解下列不等式:

1. $4x-3>6-5x.$
2. $7x+\frac{1}{3}<8x-\frac{1}{4}.$
3. $5x-8>7x+2.$
4. $y-\frac{3}{7}>\frac{5}{6}y+3.$
5. $\frac{3x}{8}-\frac{2x-1}{2}>\frac{3x+1}{6}-\frac{1}{4}.$
6. 若 $a\neq b$, 證 $a^2+b^2>2ab.$
7. 若 a, b 是兩個同號不等數,試證 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$

第五章　最高公因式與最低公倍式

132. 公因子　一數 A 可以被一數 B 除盡,則 B 是 A 的因子.例如 5 可以除盡 20, 故 5 是 20 的因子.同理 $x-y$ 可以除盡 x^2-y^2, 故 $x-y$ 是 x^2-y^2 的因子.假如一數 H 同時可以除盡兩數 A 與 B, 則 H 是 A 與 B 的**公因子**.如 7 是 35 與 56 的公因子, $x-y$ 是 x^2-y^2 與 x^3-y^3 的公因子.

一個代數式F,同時可以除盡兩個代數式A與B,則F叫做A與B的**公因式**.

133. 最大公因數與最高公因式 在算術中,數的因子,又叫因數.如 2 是 24 與 36 的公因數,可是 4, 6, 12 等也是 24 與 36 的公因數, 12 稱爲 24 與 36 的**最大公因數**.

在代數學上,式的因子,又叫因式,如 $3x^2y^3$ 與 $6x^3y^2$ 的公因式是 $3, 3x, x^2, y, y^2, xy^2, x^2y, x^2y^2, 3x^2y^2$ 等.其中次數最高的是 $3x^2y^2$, 所以 $3x^2y^2$ 叫做 $3x^2y^3$ 與 $6x^3y^2$ 的**最高公因式**.

最高公因式的名詞,英文原名是 *Highest Common Factor*, 故平常用 $H.C.F.$ 來代表.

134. 求最高公因式的第一法——觀察法 凡求單項式或多項式容易析因式的最高公因式,都可以用這方法.

例如 求 $24a^5b^3c^2$ 與 $16a^3b^2c^4$ 的 $H.C.F.$

先求 24 與 16 的最大公因數是 8, 次看二式公有的文字是 a, b, c, 能夠除盡二式的, a 的最高冪是 a^3, b 的最高冪是 b^2, c 的最高冪是 c^2. 故所求的 $H.C.F.$ 是 $8a^3b^2c^2$.

注意　第一式中有a^5,第二式中有a^3,取冪次最低的a^3做所求的最高公因式的一部分.第一式中有b^3,第二式中有b^2,取冪次最低的b^2做所求的$H.C.F.$的一部分.同理取c^2做$H.C.F.$的冪部分.

因此得求單項式或多項式容易析因式的最高公因式的法則如下:

如果是多項式,該先析成最低的因式.最高公因式的數字係數,是諸式中數字係數的最大公因數.最高公因式的文字因式,是諸式中共有因式,牠的冪次是在各式中最低的一個.

例 1.　求60, 504, 1188的最大公因數.

先將三數析因數:

$$60=2\times2\times3\times5=2^2\times3\times5,$$

$$504=2\times2\times2\times3\times3\times7=2^3\times3^2\times7,$$

$$1188=2\times2\times3\times3\times3\times11=2^2\times3^3\times11,$$

故　最大公因數$=2^2\times3=12$.

例 2.　求$42a^5b^4c^3d^2$, $84a^2b^3c^4d^5$, 及$21a^6b^2cd^4$的最高公因式.

因42, 84, 21的最大公因數是21. 故

$$H.C.F.=21a^2b^2cd^2.$$

例 3. 求 $2c^3+12c^2+18c$ 及 c^3-2c^2-15c 的 $H.C.F.$

$$2c^3+12c^2+18c=2c(c^2+6c+9)=2c(c+3)^2$$

$$c^3-2c^2-15c=c(c^2-2c-15)=c(c+3)(c-5).$$

故 $H.C.F.=c(c+3).$

例 4. 求 $8-y^3, y^2-4,$ 及 $4y^2-4y^3+y^4$ 的 $H.C.F.$

$$8-y^3=(2-y)(4+2y+y^2),$$

$$y^2-4=(y-2)(y+2)=-(2-y)(y+2),$$

$$4y^2-4y^3+y^4=y^2(4-4y+y^2)=y^2(2-y)^2.$$

故 $H.C.F.=2-y.$

習題三十九

求下列各題的最高公因式:(或最大因數)

1. $64, 96, 256.$　　2. $125, 225, 575.$

3. $32x^4yz^2, 48x^3y^4z^5.$

4. $18a^5b^4c^3, 32a^3bcd^4, 24ab^3c^5d^2.$

5. $27x^4y^5z^3, 54x^3y^4z^2, 81x^2y^2z^2.$

6. $(a+b)^2,\ a^3+b^3.$　　7. $9y^2-4,\ 6y+4.$

8. $x^2+3x-10,\ x^2+6x+5,\ x^2+10x+25.$

9. $x^4+x^2+1,\ x^3-1.$

10. $x^4-2x^2+1, x^2-2x+1.$

11. $ab+3b+ac+3c,\ 2ab+6b-2ac-6c.$

12. $32-x^5,\ x^2y-4y,\ x^2-4x+4.$

13. $8a^2b^3c-16a^3b^2c^2,\ 6a^3bc^2+3ab^3c.$

14. $(a+b)^2-(c+d)^2,\ (a+c)^2-(b+d)^2,\ (a+d)^2-(b+c)^2.$

15. $x^2-(y-z)^2,\ (x+y)^2-z^2.$

16. $3a^3+2a^2-a,\ 5a^4+3a^3-2a^2.$

17. $a^2-b^2,\ a^3-b^3,\ a^4-b^4.$

18. $x^3+y^3,\ x^2-y^2,\ x^2-7xy-8y^2.$

135. 公倍數與公倍式　設 30 是 5 的倍數,也是 6 的倍數,則 30 稱爲 5 與 6 的**公倍數**.

$40x^3y^3$ 是 $5x^2y$ 的倍式,也是 $8xy^3$ 的倍式,故 $40x^3y^3$ 稱爲 $5x^2y$ 與 $8xy^3$ 的公倍式.

又 x^2-y^2 是 $x-y$ 的倍式,也是 $x+y$ 的倍式,故 x^2-y^2 也稱爲 $x-y$ 與 $x+y$ 的公倍式.

136. 最小公倍數與最低公倍式　30 是 6 與 15 的公倍數,可是 60, 90, 120 等也是 6 與 15 的公倍數.這幾個公倍數中間,30 是最小,故 30 稱爲 6 與 15 的**最小公倍數**.

x^2-y^2 是 $x-y$ 與 $x+y$ 的公倍式,可是 x^4-y^4, x^6-y^6, 等也是 $x-y$ 與 $x+y$ 的公倍式.這幾個公倍式中間,

x^2-y^2 的次數最低,故 x^2-y^2 稱為 $x-y$ 與 $x+y$ 的**最低公倍式**.

最低公倍式的名詞,英文原名是 *Lowest Common Multiple*, 故平常用 *L. C. M.* 代表.

137. 求最低公倍式的第一法——觀察法 凡求單項式或多項式容易析因式的最低公倍式,都可以用這方法.

例如 求 $42a^5b^4$ 與 $30a^2b^5$ 的 *L. C. M.*

先求出 42 與 30 的最小公倍數 210. 次注意要做二式的倍式, a 的冪次至少是 5, b 的冪次至少也是 5. 所以要求的 *L. C. M.* 是 $210a^5b^5$.

現在把求單項式或多項式容易析因式的最低公倍式的法則列下:

把幾個數字係數的最小公倍數,做最低公倍式的數字係數.原式中所含不同的文字因式,做最低公倍式的因式,牠的冪次,是各式中最高的一個.

例 1. 求 356, 184, 272 的 *L. C. M.*

先將三數析因數:

$$356=2\times2\times89=2^2\times89,$$

$$184=2\times2\times2\times23=2^3\times23,$$

$$272=2\times2\times2\times2\times17=2^4\times17.$$

故 $L.C.M.=2^4\times89\times23\times17=556784.$

例 2. 求 $24x^3y^2, 36x^4yz$ 與 $54x^2y^2z^2$ 的 $L.C.M.$

$$24x^3y^2=2^3\cdot3\cdot x^3\cdot y^2,$$

$$36x^4yz=2^2\cdot3^2\cdot x^4\cdot y\cdot z,$$

$$54x^2y^2z^2=2\cdot3^3\cdot x^2\cdot y^2\cdot z^2.$$

$\therefore\quad L.C.M.=2^3\cdot3^3\cdot x^4\cdot y^2\cdot z^2=216x^4y^2z^2.$

例 3. 求 x^2-3x+2, x^2+2x-3 及 x^2+x-6 的 $L.C.M.$

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2),$$

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3),$$

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3),$$

$\therefore\quad L.C.M.=(x-1)(x-2)(x+3).$

42
30
1260

習 題 四 十

1. 求 216, 474, 56 的最小公倍數.

2. 求 174, 485, 4611, 5141 的最小公倍數.

求下列各題的 $L.C.M.$:

3. $30ax^2y, 125x^4y^3, 80a^3x^2y^2.$

4. $19pq^2, 38p^3q, 57p^2q^3.$

5. $x-y, x^2-y^2, x^3-y^3.$

6. $x^2+2xy+y^2,\ x^3+y^3,\ x^4-y^4.$

7. $x^2-15x+50,\ x^2-4x-5,\ x^2-9x-10.$

8. $8a^3b^3c-12a^2b^2c^3,\ 6ab^4c+4ab^3c^2.$

9. $x^3+3x^2y-xy^2-3y^3,\ x^3-3x^2y-xy^2+3y^3.$

10. $x^2-25,\ x^3-125,\ x+5.$

11. $(x+y)^2-2,\ (x+y+z)^2,\ x+y-z.$

12. $y^3-2a^2y+ay^2,\ 2a^3+3a^2y+ay^2,\ a^4y-ay^4.$

13. $x^3-2x^2-2x-1,\ x^3-1,\ x^2+6x-7.$

14. $x^2+7x+12,\ x^2+6x+8,\ x^2+5x+6.$

15. $2x^3-2x,\ 3x^4+15x^3-18x^2,\ x^2-36.$

138. 求最高公因式的第二法——輾轉相除法

在初中算術教本上,已經講過,要求兩數的最大公因數,可用輾轉相除法.代數學上求最高公因式,也能應用這方法.

例如　求 $6x^3-17x^2+17x-5$ 與 $3x^2-7x+5$ 的 $H.C.F.$

用第二式除第一式:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3-17x^2+17x-5 & 3x^2-7x+5 \\
\cline{2-2}
6x^3-14x^2+10x & 2x-1 \\
\cline{1-1}
-3x^2+7x-5 & \\
-3x^2+7x-5 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

因此得　第一式 $=(3x^2-7x+5)(2x-1)$,

第二式 $=3x^2-7x+5$.

故這二式的 $H.C.F.$, 顯見是 $3x^2-7x+5$.

兩個整式 A, B, 若 B 能除盡 A, 則 B 就是 A 與 B 的最高公因式.

又例如求 $2x^3+13x^2+15x-20$ 與 x^2+5x+4 的最高公因式.

如上例先用除法:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+13x^2+15x-20 & x^2+5x+4 \\
2x^3+10x^2+8x & \overline{2x+3} \\
\hline
3x^2+\ \ 7x-20 & \\
3x^2+15x+12 & \\
\hline
-\ \ 8x-32 & \text{餘}
\end{array}
$$

除法既不能盡,故 x^2+5x+4 不是兩式的 $H.C.F.$

令　$A=2x^3+13x^2+15x-20$, $B=x^2+5x+4$,

$Q_1=2x+3$, $R_1=-8x-32=-8(x+4)$.

根據除法定則,應得

$$A=BQ_1+R_1,$$

即　$$A-BQ_1=R_1.$$

假如 A 與 B 有公因式,那末這公因式能夠除盡 A,

除盡B,除盡BQ_1,因此能除盡$A-BQ_1$,即R_1.故A與B的公因式也就是R的因式.換句話說:

A與B的最高公因式,必是R_1的因式,也就是B與R_1的最高公因式.

所以原意要求

$$A=2x^3+13x^2+15x-20,$$

$$B=x^2+5x+4$$

的$H.C.F.$,現在可以改成求

$$B=x^2+5x+4,\ R_1=-8(x+4).$$

的$H.C.F.$.

還有一事應注意的,就是R_1裏有一個因子8,這個因子在B式中卻沒有,所以8決不是B和R_1的公因子.所以不妨把8暫時撇開,祇求$x+4$和B式的$H.C.F.$因此可以下一個總結,就是

用輾轉相除法來求$H.C.F.$時,不問那一次的被除數,除數或餘數,如有單項因式,應當把牠提出來,這單項因式若不是原來兩式的公因式,就可以撇開不問.輾轉相除時,假如被除數首項的係數,不是餘數首項係數的倍數,也可以用一個相當的數乘被除數的全體,祇要這相當數不是除數的因數,那末被除數上雖

然乘了這個數,可是公因數並沒有增加.

現在拿 R_1 除 B:

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+5x+4 & x+4 \\
\cline{2-2}
x^2+4x & x+1 \\
\cline{1-1}
x+4 & \\
x+4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

故 $x+4$ 是 B 與 R_1 的 $H.C.F.$ 也就是 A 與 B 的 $H.C.F.$

倘 R_1 除 B 仍不能盡,得商 Q_2, 餘 R_2.則再進一步求 R_1 與 R_2 的 $H.C.F.$ 依此繼續計算,到除盡爲止.最後一次的除數,就是 A 與 B 的 $H.C.F.$

現在把這個例題演算的全部分,用分離係數法寫出來:

$$
\begin{array}{c|ccc|cccc|c}
1 & 1 & 5 & 4 & 2 & 13 & 15 & -20 & 2 \\
 & 1 & 4 & & 2 & 10 & 8 & & \\
\hline
1 & & 1 & 4 & & 3 & 7 & -20 & 3 \\
 & & 1 & 4 & & 3 & 15 & 12 & \\
\cline{3-4}\cline{6-8}
 & & & 0 & & -8 & \boxed{-8} & -32 & \\
 & & & & & & 1 & 4 &
\end{array}
$$

故 $\qquad H.C.F.=x+4.$

例 1. 求 $x^5-x^3+3x^2-2x+3$ 及 $x^4+x^3-2x^2+x+3$ 的 $H.C.F.$

$$
\begin{array}{r|rrrrr|rrrrrr|l}
1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\
 & 1 & 0 & -2 & 3 & & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & & \\
\hline
1 & & 1 & 0 & -2 & 3 & & -1 & 1 & 2 & -5 & 3 & -1 \\
 & & 1 & 0 & -2 & 3 & & -1 & -1 & 2 & -1 & -3 & \\
\cline{3-6}\cline{8-12}
 & & & & & 0 & & 2 & 2 & 0 & -4 & 6 & \\
\cline{9-12}
 & & & & & & & & 1 & 0 & -2 & 3 &
\end{array}
$$

$\therefore \qquad H.C.F.=x^3-2x+3.$

例 2. 求 $16a^3+12a^2-40a$ 與 $24a^4+42a^3-18a^2-90a$ 的 $H.C.F.$

先把單項因式析出,

$$16a^3+12a^2-40a=4a(4a^2+3a-10)$$

$$24a^4+42a^3-18a^2-90a=6a(4a^3+7a^2-3a-15)$$

$4a$ 與 $6a$ 的 $H.C.F.$ 是 $2a$

再用輾轉相除法求 $4a^2+3a-10$ 與 $4a^3+7a^2-3a-15$ 的 $H.C.F.$

$$
\begin{array}{r|rrr|rrrr|l}
1 & 4 & 3 & -10 & 4 & 7 & -3 & -15 & 1 \\
 & 4 & -5 & & 4 & 3 & -10 & & \\
\hline
2 & & 8 & -10 & & 4 & 7 & -15 & 1 \\
 & & 8 & -10 & & 4 & 3 & -10 & \\
\cline{3-4}\cline{6-8}
 & & & 0 & & & 4 & -5 &
\end{array}
$$

$H.C.F.=4a-5.$

故所求的 $H.C.F.=2a(4a-5)$.

例 3. 求 $x^3+4x^2y-8xy^2+24y^3$ 及 $x^5-x^4y+8x^2y^3-8xy^4$ 的 $H.C.F.$

$$x^5-x^4y+8x^2y^3-8xy^4=x(x^4-x^3y+8xy^3-8y^4).$$

第二式能用 x 除盡,第一式卻不能,所以這 x 可以不計.

$$\begin{array}{r|r|r|r}
x & x^3+4x^2y-8xy^2+24y^3 & x^4-x^3y+8xy^3-8y^4 & x \\
 & x^3-2x^2y+4xy^2 & x^4+4x^3y-8x^2y^2+24xy^3 & \\ \hline
6y & 6x^2y-12xy^2+24y^3 & -5x^3y+8x^2y^2-16xy^3-8y^4 & -5y \\
 & 6x^2y-12xy^2+24y^3 & -5x^3y-20x^2y^2+40xy^3-120y^4 & \\ \hline
 & 0 & 28y^2 \;\big|\; 28x^2y^2-56xy^3+112y^4 & \\ \hline
 & & x^2-2xy+4y^2 &
\end{array}$$

$$\therefore \qquad H.C.F.=x^2-2xy+4y^2.$$

〔註〕求三式的 $H.C.F.$,可先求二式的 $H.C.F.$,再用這 $H.C.F.$ 和第三式求 $H.C.F.$

習題四十一

用輾轉相除法,求下列各題的 $H.C.F.$

1. x^3+2x-3, x^3+3x^2-2x-2.
2. $3x^3-x^2-2x-16$, $2x^3-2x^2-3x-2$.
3. $x^3+7x^2+17x+15$, $x^3+8x^2+19x+12$.
4. $2x^3-3x^2-11x+6$, $4x^3+3x^2-9x+2$.

5. $3x^3+8x^2-4x-15,\ 6x^4+10x^3-3x^2-2x+5.$

6. $35x^3+47x^2+13x+1,\ 42x^4+41x^3-9x^2-9x-1.$

139. 求最低公倍式的第二法 設有A, B二式:

$$A=32a^2bx^3y^2,\ B=16ab^3x^2y^3.$$

牠們的$H.C.F.$是$16abx^2y^2$, $L.C.M.$是$32a^2b^3x^3y^3$.

現在令

$$H.C.F.=F=16abx^2y^2,$$

$$L.C.M.=L=32a^2b^3x^3y^3.$$

可得一種特殊關係,即

$$F\cdot L=512a^3b^4x^5y^5,$$

$$A\cdot B=512a^3b^4x^5y^5$$

因此 $$A\cdot B=F\cdot L.$$

兩個代數式的積,等於牠們的最高公因式乘最低公倍式.

又 $$L=\frac{A\cdot B}{F}=\frac{A}{F}\cdot B.$$

用二式的最高公因式除任意一式,將所得的商乘又一式,即得最低公倍式.

例 1. 求 $A=6a^4-17a^3+14a^2-3a$ 與 $B=2a^4+3a^3-9a^2$ 的$L.C.M.$

$A=a(6a^3-17a^2+14a-3)$, $B=a^2(2a^2+3a-9)$.

1	2	3	−9	6	−17	14	−3	3
	2	−3		6	9	−27		
3		6	−9		−26	41	−3	−13
		6	−9		−26	−39	117	
			0		40	80	−120	
						2	−3	

故　　　　$H.C.F.=a(2a-3).$

$$L.C.M.=\frac{A\cdot B}{H.C.F.}$$

$$=\frac{(2a^4+3a^3-9a^2)}{a(2a-3)}(6a^4-17a^3+14a^2-3a)$$

$$=a(a+3)(6a^4-17a^3+14a^2-3a)$$

$$=a^2(a+3)(2a-3)(a-1)(3a-1).$$

例 2.　求 $A=x^3+7x^2-6x-2$, 與

$B=2x^3-4x^2+5x-3$ 的 $L.C.M.$

	1	7	−6	−2	2	−4	5	−3	2
−1	18	126	−108	−36	2	14	−12	−4	
	18	−17	−1			−18	17	1	−18
		143	−107	−36		−18	18		
−143		2574	−1926	−648			−1	1	−1
		2574	−2431	−143			−1	1	
		505	505	−505				0	
			1	−1					

故　　　　$H.C.F.=x-1.$

$$L.C.M.=\frac{A\cdot B}{H.C.F.}$$

$$=\frac{(x^3+7x^2-6x-2)}{x-1}(2x^3-4x^2+5x-3)$$

$$=(x-1)(x^2+8x+2)(2x^2-2x+3).$$

〔註〕 求三式的 $L.C.M.$ 可先求二式的 $L.C.M$，再用這 $L.C.M.$ 和第三式求 $L.C.M.$

習題四十二

求下列各題的 $L.C.M.$:

1. $x^3+2x-3,\ x^3+4x^2-5.$

2. $x^3-7x-6,\ x^3+8x^2+17x+10.$

3. $x^3+6x^2+11x+6,\ 2x^3+9x^3+7x-6.$

4. $2x^4-x^3+2x^2+3x-2,\ 2x^4+3x^3-4x^2+13x-6.$

5. $x^4+a^2x^2+a^4,\ x^4+ax^3+a^3x+a^4.$

第五編　分式

第一章　分式通性

140. 分式　用整式 B 除整式 A, 把商寫作$\frac{A}{B}$.這式叫做**分式**. A 稱**分子**, B 稱**分母**,總稱為分式的**項**.

141. 分式的變化　設有分式 A/B, 牠的值是 q.

$$\frac{A}{B}=q,$$

則　$$A=Bq,$$

兩邊用 m 乘　$$Am=Bmq,$$

即　$$\frac{Am}{Bm}=q,$$

故　$$\frac{Am}{Bm}=\frac{A}{B}.$$

分式的分子分母,用同一數(零除外)來乘或除,分式的值不變.

例如　$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc},$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a/c}{b/c}.$$

142. 分式的記號 記號有三種,即分子的記號,分母的記號,和分式的記號.

如 $-\frac{+a}{-b}$,分子的記號是正,分母和分式的記號都是負.

分式中三個記號,同時改變兩個,與不變同.

$$-\frac{+a}{-b}=-\frac{-a}{+b}=+\frac{-a}{-b}=+\frac{+a}{+b}=\frac{a}{b}.$$

$$-\frac{+a}{+b}=+\frac{-a}{+b}=+\frac{+a}{-b}=-\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

143. 約分 分式的分子分母,如有公因式時,可根據第141節的方法,用分式兩項的最高公因式同時除分子分母.這種方法叫做**約分**.約分後,分子分母不再有公因式.沒有公因式的分式,叫做**最低分式**.

約分的法則 設分式的兩項是單項式,或多項式容易析因式的,可用直觀法去分子分母相同的因式.若分式的兩項是不容易析因式的多項式,當用輾轉相除法,先求出牠們的 $H.C.F.$,再用這 $H.C.F.$ 除分子與分母.

注意 分子分母沒有析因式時,切不可約分.做約

分時,不要忘記這是用同數來除分子分母的一種變化,並不是將分子分母相同的項消去.假如約分後,分母的因式,完全約盡,這就表示分母是 1,這 1 可以不寫.反過來說,分子的因式完全約盡,那末這 1 字必須寫出.

例 1. 約$\frac{24a^3b^2c}{72a^2bc^2}$爲最低分式.

$$\frac{24a^3b^2c}{72a^2bc^2}=\frac{24\cdot b^3b^2c}{3\times 24\cdot a^2bc^2}=\frac{ab}{3c}.$$

例 2. 約$\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$爲最低分式.

$$\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}.$$

例 3. 約$\frac{a^2-7a+12}{a^2-2a-3}$爲最低分式.

$$\frac{a^2-7a+12}{a^2-2a-3}=\frac{(a-3)(a-4)}{(a-3)(a+1)}=\frac{a-4}{a+1}.$$

例 4. 約$\frac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2-x+3}$爲最低分式.

$$\frac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+1)}=\frac{1}{x+1}.$$

習題四十三

寫出以下各分式的其他三種記號的變化:

1. $\dfrac{-a}{b}$.

解. $\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{-a}{-b}$.

2. $\dfrac{x}{x-y}$.

3. $\dfrac{a+3}{a-4}$.

4. $-\dfrac{c^2-d}{c+d}$.

5. $\dfrac{x^2-5x+3}{x^2+7x+8}$.

約下列各分式:

6. $\dfrac{15xy^2}{18x^2y}$.

7. $\dfrac{b^2-by}{b^2-y^2}$.

8. $38x^3y^5z^4/57x^2y^4z^6$.

9. $(c^2-cd)/(d^2-c^2)$.

10. $(1-x^4)/(1-x^6)$.

11. $(x^2-9x+20)/(x^2-3x-10)$.

12. $(x^3-y^3)(x^2-xy+y^2)/(x^3+y^3)(x^2+xy+y^2)$.

13. $\{(a+b)^2-c^2\}/(a^2+ab+ac)$.

14. $(x^3+x^2+x+1)/(x^4-1)$.

15. $(x^2+3x-28)/(x^2-x-12)$.

16. $(-x^2+8x-12)/(x^2-4x+4)$.

初學代數時,對於約分常會發生許多離奇的錯誤.現在舉幾個常見的例子在下面,學者應當特別注意:

1. $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}=a+b$. 試問 a^2+b^2 是不是等於 $(a+b)^2$?

再問 $(a^2+2ab+b^2)/(a+b)$ 等於什麼?

2. $\frac{a^2-c}{b^2-c}=\frac{a^2}{b^2}$. 約是除,不是減.從 a^2-c^2 變成 a^2, 這是被什麼數除後得到的結果?

3. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)-4}{x-1}=(x-2)(x-3)-4$. 在這分式中,分子還沒有析成因式,學者不要以爲前面有三個因子連乘就算因式.要知因式是用整個式子析成的.

要免除這一類的錯誤,祇要學者常常注意下列二點:

(1)要做約分,應當先把分子分母析成因式.

(2)約分是將分子分母用同一數或代數式來除.

144. 通分　根據第141節所述分式的變化,分式的分子分母,可用同一數來乘,得到一個等值的分式.

例如　要把分式 $\frac{xy}{ab}$ 的分母,化做 ab^2c, 因

$$ab^2c\div ab=bc,$$

故將 bc 乘分式的兩項,得

$$\frac{xy}{ab}=\frac{xy\cdot bc}{ab\cdot bc}=\frac{bcxy}{ab^2c}.$$

例 1.　化 $\frac{x}{bc}$, $\frac{y}{ca}$, $\frac{z}{ab}$ 爲同分母的分式.

解
$$\frac{x}{bc}=\frac{x}{bc}\cdot\frac{a}{a}=\frac{ax}{abc}.$$
$$\frac{y}{ca}=\frac{y}{ca}\cdot\frac{b}{b}=\frac{by}{abc}.$$
$$\frac{z}{ab}=\frac{z}{ab}\cdot\frac{c}{c}=\frac{cz}{abc}.$$

將分母不同的幾個分式,化做分母相同的等值分式,叫做**通分**.通分的法則如下:

求出各分母的最低公倍式,用這最低公倍式做各分式的公分母.用原分母除公分母,將所得的商乘原分子做新分子.

例 2. 把 $\frac{5x}{3a^2b}$, $\frac{7y}{6b^2c}$, $\frac{5z}{9c^2a}$ 通分.

分母 $3a^2b, 6b^2c, 9c^2a$ 的 $L.C.M.$ 是 $18a^2b^2c^2$. 用各分母除公分母所得的商是 $6bc^2, 3ca^2, 2ab^2$.

故
$$\frac{5x}{3a^2b}=\frac{5x}{3a^2b}\cdot\frac{6bc^2}{6bc^2}=\frac{30bc^2x}{18a^2b^2c^2}.$$
$$\frac{7y}{6b^2c}=\frac{7y}{6b^2c}\cdot\frac{3ca^2}{3ca^2}=\frac{21a^2cy}{18a^2b^2c^2}.$$
$$\frac{5z}{9c^2a}=\frac{5z}{9c^2a}\cdot\frac{2ab^2}{2ab^2}=\frac{10ab^2z}{18a^2b^2c^2}.$$

例 3. 把 $\frac{1}{x^2+3x+2}$, $\frac{1}{x^2+4x+3}$, a 通分.

凡整式可以當作分母是 1 的分式.

現在分母的$L.C.M.$是$(x+1)(x+2)(x+3)$.故得

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{x+3}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

$$a=\frac{a(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

例 4.　把$\frac{1}{(x-y)(x-z)}$, $\frac{1}{(y-z)(y-x)}$, $\frac{1}{(z-x)(z-y)}$通分.

因$x-z=-(z-x)$, $y-x=-(x-y)$, $z-y=-(y-z)$,故各分母的$L.C.M.$是$(x-y)(y-z)(z-x)$.所以

$$\frac{1}{(x-y)(x-z)}=\frac{-1}{(x-y)(z-x)}=\frac{-(y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)},$$

$$\frac{1}{(y-z)(y-x)}=\frac{-1}{(y-z)(x-y)}=\frac{-(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)},$$

$$\frac{1}{(z-x)(z-y)}=\frac{-1}{(z-x)(y-z)}=\frac{-(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)},$$

習題四十四

把下列各題中的分式通分:

1. $\frac{1}{4a}$, $\frac{5}{12ab}$, $\frac{7}{18bc}$.

2. $\frac{1}{3x}$, $\frac{5}{7x^2}$, $\frac{8}{9x^3}$.

3. $\frac{1}{x+2},\ \frac{3}{x^2-4},\ \frac{5}{4x+8}.$

4. $\frac{a}{a-b},\ \frac{b}{b-a},\ \frac{1}{a^2-b^2}.$

5. $\frac{3b}{2cd^3},\ \frac{9a}{4cde},\ \frac{7ab}{5cde^2}.$

6. $\frac{2x+3}{x^2-1},\ \frac{7x-4}{x^2-3x+2}.$

7. $\frac{x+3}{x^2-3x+2},\ \frac{x+2}{x^2-4x+3},\ \frac{x+1}{x^2-5x+6}.$

8. $\frac{1}{(a-b)(b-c)},\ \frac{1}{(b-c)(c-a)},\ \frac{1}{(c-a)(a-b)}.$

9. $\frac{1}{(a-b)(a-c)},\ \frac{1}{(b-c)(b-a)},\ \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$

10. $\frac{1}{x^2+xy+y^2},\ \frac{b}{x^2-xy+y^2}.$

第二章　分式的加減乘除

分式的加減法

145. 同分母的加減法　在算術上,已知兩個分母相同的分式相加或相減時,祇須把分子相加或相減做新分子,原分母做分母.如

$$\frac{1}{13}+\frac{7}{13}-\frac{4}{13}=\frac{1+7-4}{13}=\frac{4}{13}.$$

代數上的分式,假如分母相同時,牠們的加減法,也是如此.就是求出分子的代數和或差做新分子,原分母做新分母.

例 1. 求$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-\frac{d}{a}$的結果.

解 $$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-\frac{d}{a}=\frac{b+c-d}{a}.$$

例 2. 求$\frac{am+bn}{2mn}-\frac{am-bn}{2mn}$的結果.

解 $$\frac{am+bn}{2mn}-\frac{am-bn}{2mn}$$

$$=\frac{(am+bn)-(am-bn)}{2mn}$$

$$=\frac{2bn}{2mn}$$

$$=\frac{b}{m}.$$

注意 分式的分子,若爲多項式時,那末分式前的記號,與分子各項都有關係,初學的人,往往容易發生下列的錯誤:

$$\frac{a}{b}-\frac{c+d}{b}=\frac{a-c+d}{b}.$$

要知分式中的橫線,不但用來分別分子分母,還帶有括線的意義.

146. 異分母的加減法 如分式的分母不同,那末應當先用通分法,將各分式化做同分母的等值分式,然後加減.

例 1. 求$\frac{2}{3x}-\frac{5}{6x^2}+\frac{3}{4x}$的結果.

各分母的 $L.C.M.$ 是 $12x^2$, 故

$$\frac{2}{3x}-\frac{5}{6x^2}+\frac{3}{4x}=\frac{8x}{12x^2}-\frac{10}{12x^2}+\frac{9x}{12x^2}$$

$$=\frac{8x-10+9x}{12x^2}$$

$$=\frac{17x-10}{12x^2}.$$

例 2. 求$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$的結果.

各分母的 $L.C.M.$ 是 $(a-b)(a+b)$, 故

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}-\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}-\frac{2ab}{(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2-2ab}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2-2ab}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

例 3. 求 $x+2-\dfrac{x-2}{x^3-3x-2}$.

因 $x^3-3x-2=(x-2)(x^2+2x+1)$.

故 $\dfrac{x-2}{x^3-3x-2}=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$.

現在分母的最小公倍式,是 x^2+2x+1,

$$故\ x+2-\frac{x-2}{x^3-3x-2}=x+2-\frac{1}{x^2+2x+1}$$

$$=\frac{(x+2)(x^2+2x+1)}{x^2+2x+1}-\frac{1}{x^2+2x+1}$$

$$=\frac{x^3+4x^2+5x+2-1}{x^2+2x+1}$$

$$=\frac{x^3+4x^2+5x+1}{x^2+2x+1}$$

例 4. 求 $\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{2a}{a^2+x^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+x^4}$ 的結果.

上例如逐項相加,則較為簡單.

$$原式=\frac{a+x}{a^2-x^2}+\frac{a-x}{a^2-x^2}+\frac{2a}{a^2+x^2}+\frac{4a^3}{a^4+x^4}$$

$$=\frac{2a}{a^2-x^2}+\frac{2a}{a^2+x^2}+\frac{4a^3}{a^4+x^4}$$

$$=\frac{2a(a^2+x^2)}{a^4-x^4}+\frac{2a(a^2-x^2)}{a^4-x^4}+\frac{4a^3}{a^4+x^4}$$

$$=\frac{4a^3}{a^4-x^4}+\frac{4a^3}{a^4+x^4}$$

$$=\frac{4a^3(a^4+x^4)}{a^8-x^8}+\frac{4a^3(a^4-x^4)}{a^8-x^8}=\frac{8a^7}{a^8-x^8}.$$

例 5.　求$\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$的結果.

各分母的 $L.C.M.$ 是 $(a-b)(b-c)(c-a)$.

$$\text{原式}=\frac{-1}{(a-b)(c-a)}-\frac{1}{(b-c)(a-b)}-\frac{1}{(c-a)(b-c)}$$

$$=\frac{-(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}-\frac{c-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$-\frac{a-b}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{-b+c-c+a-a+b}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

若 a, b, c 的數值,沒有二個相同的,則結果是 0.

習題四十五

求下列各題的結果:

1. $\dfrac{x+2y}{3z}+\dfrac{2x+y}{3z}$.　　2. $\dfrac{a^2-ab}{a+b}+\dfrac{3ab+b^2}{a+b}$.

3. $\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}$.　　4. $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{2b}{a^2-b^2}$.

5. $\dfrac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}-\dfrac{2a+b}{2a-b}$.　　6. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{a+3}+\dfrac{1}{a+1}$.

7. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2+x+1}{x+1}+\dfrac{2x}{1-x^2}$.

8. $\dfrac{1}{x^2-7x+12}-\dfrac{1}{x^2-8x+15}+\dfrac{1}{x^2-9x+20}$.

9. $\dfrac{2y+z}{x^2}+\dfrac{3}{y-z}-\dfrac{x^2+y^2}{xy^2-xz^2}$.

10. $\dfrac{3x}{6x^2-x-1}+\dfrac{7x}{8x^2+2x-3}-\dfrac{5x}{12x^2+13x+3}$.

11. $\dfrac{x^2+4x+5}{x^3+1}+\dfrac{3x^2+1}{x^2-x+1}-3$.

12. $\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{2}{1+y^2}+\dfrac{4}{1+y^4}$.

13. $\dfrac{2a+y}{(x-a)(a-b)}+\dfrac{a+b+y}{(x-b)(b-a)}-\dfrac{x+y-a}{(x-a)(x-b)}$.

14. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

分式的乘除法

147. 分式的乘法

設 $$\frac{a}{b}=x,\ \frac{c}{d}=y,$$

則 $$a=bx,\ c=dy,$$

故 $$\begin{aligned} ac&=bxdy\\ &=bdxy, \end{aligned}$$

用bd除兩邊,得

$$x\cdot y=\frac{ac}{bd},$$

卽 $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

同理得 $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

幾個分式相乘,將分子連乘的積做分子,分母連乘的積做分母,而後將分式約做最低.

例 1. 求$\frac{3ab}{4cd}\times\frac{8ac}{9bd}\times\frac{7d^3}{4a^2}$的結果.

$$原式=\frac{3ab\cdot 8ac\cdot 7d^3}{4cd\cdot 9bd\cdot 4a^2}$$

$$=\frac{7d}{6}.$$

例 2. 簡單 $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\cdot\frac{x+2}{x+3}\cdot\frac{2x^3-18x}{x^2+4x+4}.$

先將各分式的分子分母析成因式,而後約去牠們的公因式.

$$原式=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-3)}\cdot\frac{x+2}{x+3}\cdot\frac{2x(x+3)(x-3)}{(x+2)^2}$$

$$=2x.$$

例 3.　求$\left(\dfrac{6m-9}{2m-3}+2m\right)\left(2m-9+\dfrac{36}{2m+3}\right)$的結果.

這例的因子是一個多項分式,應當先做加減,化成一個分式,而後與他式乘除.但是各單項分式的四則,如$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}+\dfrac{e}{f}\div\dfrac{g}{h}-\dfrac{m}{n}$當然還是先乘除,後加減.

$$原式=\left(\frac{4m^2-6m+6m-9}{2m-3}\right)\left(\frac{4m^2-12m-27+36}{2m+3}\right)$$

$$=\frac{(2m-3)(2m+3)}{2m-3}\times\frac{(2m-3)^2}{2m+3}$$

$$=(2m-3)^2.$$

148. 分式的除法　設用分式$\dfrac{a}{b}$除代數式P,

令　$$\frac{a}{b}=x,$$

則　$$a=bx.$$

故　$$P\div\frac{a}{b}=\frac{P}{x}=\frac{Pb}{bx}=\frac{Pb}{a}=P\times\frac{b}{a}.$$

即用$\dfrac{a}{b}$去除,等於用$\dfrac{b}{a}$去乘.

用分式除某式,只要把分式的分子分母對調,而後做乘法.

例 1.　求$\dfrac{4x^2c^2}{9a^3}\div\dfrac{10x^3c}{27a^2}$的結果.

$$\frac{4x^2c^2}{9a^3}\div\frac{10x^3c}{27a^2}=\frac{4x^2c^2}{9a^3}\times\frac{27a^2}{10x^3c}$$

$$=\frac{6c}{5ax}.$$

例 2. 簡單 $\frac{3a(a-b)}{b(a+b)}\div\frac{a^2-b^2}{ab}$.

$$\frac{3a(a-b)}{b(a+b)}\div\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{3a(a-b)}{b(a+b)}\times\frac{ab}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{3a^2}{(a+b)^2}.$$

例 3. 求 $\frac{8xy}{3}\div 4y$ 的結果.

$$\frac{8xy}{3}\div 4y=\frac{8xy}{3}\times\frac{1}{4y}$$

$$=\frac{2x}{3}.$$

149. 倒數 例如

$$x\times\frac{1}{x}=1,\quad \frac{b}{a}\times\frac{a}{b}=1.$$

凡兩個數相乘的積是 1,那末兩個數互爲倒數,又叫逆數.

例如 3 的倒數是 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$的倒數是 4, $-m$ 的倒數是 $-\frac{1}{m}$, $\frac{a-b}{a+b}$ 的倒數是 $\frac{a+b}{a-b}$.

習題四十六

簡約下列各式:

1. $\frac{x^2}{yz}\times\frac{y^2}{zx}\times\frac{z^2}{xy}$.

2. $\frac{m^3-n^3}{m^3+n^3}\times\frac{(m+n)^2}{m^2-n^2}$.

3. $\frac{(4ax)^2}{225c^4}\times\frac{(5ac^2)^3}{(2x^2)^3}\times\frac{(-x)^5}{c^4}$.

4. $\left(x^2-2x+4-\frac{16}{x+2}\right)\cdot\frac{x^2-4}{3}$.

5. $\left(a^2+a+\frac{ab}{a+b}\right)\left(b^2+b-\frac{ab}{a-b}\right)$.

6. $\frac{x^2-xy}{x^2+y^2}\times\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)$.

7. $\frac{4a^2-4ab-3b^2}{8a^3x}\div\left(a-\frac{9b^2}{4a}\right)$.

8. $\frac{18}{(2x)^3}\div\frac{15}{4x^3}\times\frac{45}{6x^2}$.

9. $\frac{6a-3}{5x}\div\frac{2a-1}{15bx^3}\div cx$.

10. $\frac{y^2-y-30}{y^2-36}\times\frac{y^2-y-2}{y^2+3y-10}\div\frac{y^2+y}{y^2+6y}$.

11. $\frac{9x^2+6xy-8y^2}{2x+y}\div(3x-2y)^2\div\left(2-\frac{x-2y}{2x+y}\right)$.

12. $\left(\frac{3a^4-75a^2}{3a-7}\right)\left(6a-\frac{7}{a}-11\right)\div\left(2+\frac{5}{a^2}+\frac{11}{a}\right)$.

13. $\left(\frac{a}{bc}-\frac{b}{ac}-\frac{c}{ab}-\frac{2}{a}\right)\left(1-\frac{2c}{a+b+c}\right)$.

14. $\left(6x-11-\frac{7}{x}\right)(3x^3-75x)\div\left(\frac{5}{x^2}+\frac{11}{x}+2\right)$.

15. $\left(x^2-y^2+\frac{4xy(x+y)}{x-y}\right)\div\left(\frac{y^2+x(x+2y)}{2x^2-3xy+y^2}\right)$.

150. 疊分式 一個分式,牠的分子含有分式,或是分母含有分式,或是分子分母都含有分式的,叫做**疊分式**.化疊分式的方法,祇要把分子分母分別化做簡單的分子,然後依分式的除法計算.

例 1. 簡約 $\dfrac{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}}{\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}}$

用分母的 $L.\ C.\ M.\ (a-x)(a+x)$ 乘原式的兩項,得

$$\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(a+x)^2+(a-x)^2}=\frac{a^2+2ax+x^2-a^2+2ax-x^2}{a^2+2ax+x^2+a^2-2ax+x^2}$$

$$=\frac{4ax}{2a^2+2x^2}=\frac{2ax}{a^2+x^2}.$$

例 2. 簡約 $\dfrac{a^2-a-\dfrac{1-a}{1+a}}{a+\dfrac{1}{a+1}}$.

用 $a+1$ 乘分式的兩項,得

$$\frac{(a^2-a)(a+1)-(1-a)}{a(a+1)+1}=\frac{a(a-1)(a+1)+(a-1)}{a^2+a+1}$$

$$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$$

$$=a-1.$$

例 3. 簡約 $3-\cfrac{1}{1-\cfrac{4}{6+\cfrac{3}{7-\cfrac{2}{5}}}}$.

原式 $=3-\cfrac{1}{1-\cfrac{4}{6+\cfrac{3}{\frac{33}{5}}}}=3-\cfrac{1}{1-\cfrac{4}{6+\cfrac{5}{11}}}$

$=3-\cfrac{1}{1-\cfrac{4}{\frac{71}{11}}}=3-\cfrac{1}{1-\frac{44}{71}}=3-\cfrac{1}{\frac{27}{71}}$

$=3-\frac{71}{27}=\frac{10}{27}$.

注意 如分式的分子分母都是一個分式,那末化做簡單的分式時,祇要注意下列的法則:

(1)分子的分子與分母的分母相乘做分子.

(2)分子的分母與分母的分子相乘做分母.

例如 $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{ad}{bc}$.

例 4. 簡約 $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\div\dfrac{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}$.

$$\text{原式}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\div\frac{\frac{b^4-a^4}{a^4b^4}}{\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\div\frac{\frac{-(a^4-b^4)}{a^4b^4}}{\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\div\frac{-(a^4-b^4)a^2b^2}{a^4b^4(a+b)^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\times\frac{-a^2b^2(a+b)^2}{a^4-b^4}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}\times\frac{-a^2b^2(a+b)^2}{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}$$

$$=-\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}.$$

習題四十七

簡約下列各疊分數:

1. $1-\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5-\cfrac{6}{7}}}.$

2. $\dfrac{\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}}{\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1-x}{x}}.$

3. $\dfrac{x^2+5x+\dfrac{2-8x}{x}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}.$

4. $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y}}}.$

5. $\dfrac{\dfrac{x^2}{y^2}+1+\dfrac{y^2}{x^2}}{1-\dfrac{x^2+y^2}{xy}}.$

6. $\dfrac{\dfrac{1}{a^2-ab}-\dfrac{1}{ab-b^2}}{\dfrac{1}{a^2+ab}+\dfrac{1}{ab+b^2}}.$

7. $\dfrac{z+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{x}}}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}.$

8. $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}.$

9. $\dfrac{\dfrac{xy+1}{y}}{x+\cfrac{1}{\cfrac{yz+1}{z}}}-\dfrac{1}{y(x+xyz+z)}.$

10. $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+1}{\dfrac{a-b}{a+b}-1}\div\dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+1}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-1}.$

151. 分式的數值　設有兩個代數式

$$A=x^2-x-6,$$

$$B=x^2+3x+2.$$

則$\frac{A}{B}$的數值,隨 x 的值而改變.現在假定 x 取 -3 -2, $-1, 0, 1, 2, 3$ 等值,而計算$\frac{A}{B}$的數值.

(1)令 $x=-3$, $\frac{A}{B}=\frac{(-3)^2-(-3)-6}{(-3)^2+3(-3)+2}$

$$=\frac{6}{2}=3.$$

(2)令 $x=-2$, $\frac{A}{B}=\frac{(-2)^2-(-2)-6}{(-2)^2+3(-2)+2}$

$$=\frac{0}{0}.$$

(3)令 $x=-1$, $\frac{A}{B}=\frac{(-1)^2-(-1)-6}{(-1)^2+3(-1)+2}$

$$=\frac{-4}{0}.$$

(4)令 $x=0$, $\frac{A}{B}=\frac{-6}{2}=-3.$

(5)令 $x=1$, $\frac{A}{B}=\frac{1^2-1-6}{1^2+3\times1+2}=\frac{-6}{6}=-1.$

(6)令 $x=2$, $\frac{A}{B}=\frac{2^2-2-6}{2^2+3\times2+2}=\frac{-4}{12}$

$$=-\frac{1}{3}.$$

(7)令 $x=3$, $\frac{A}{B}=\frac{3^2-3-6}{3^2+3\times3+2}=\frac{0}{20}=0.$

在上面七種情形中,除第二第三外,其餘五種,$\frac{A}{B}$都有一定的數值.

第二種的結果是$\frac{0}{0}$,叫做**不定式**.因為隨便什麼數做商,都合於乘零得零的條件.

第三種的結果,是$-\frac{4}{0}$,在算學上找不到一個相當的數,因為無論什麼數乘0,不能等於一個普通數的.

現在把A,B,兩式析成因式,則得

$$A=(x-3)(x+2),$$

$$B=(x+1)(x+2).$$

故$\frac{A}{B}$除了$x+2=0$,就是$x=-2$以外,都可以約成$\frac{x-3}{x+1}$,並且再用$-3,-1,0,1,2,3$等值代x,所得的結果,當然和前面所得相同.

令$\frac{x-3}{x+1}=c$,則

$x=-3$時,$c=\frac{-3-3}{-3+1}=\frac{-6}{-2}=3.$

$x=-1$時,$c=\frac{-1-3}{-1+1}=-\frac{4}{0}.$

$x=0$ 時,$c=\frac{-3}{1}=-3,$

$x=1$　時, $c=\dfrac{1-3}{1+1}=\dfrac{-2}{2}=-1.$

$x=2$　時, $c=\dfrac{2-3}{2+1}=-\dfrac{1}{3}.$

$x=3$　時, $c=\dfrac{3-3}{3+1}=\dfrac{0}{4}=0.$

當 $x=-2$ 時,則 c 的值變做一定,即

$$\frac{-2-3}{-2+1}=\frac{-5}{-1}=5.$$

但是 $x=-2$ 時, $\dfrac{A}{B}$ 的值是一個 $\dfrac{0}{0}$ 的不定式,並不等於 5. 可是從實際計算,設定 x 不等於 -2 不過愈近於 -2, 則 $\dfrac{A}{B}$ 的值便愈近於 5. 所以用 5 來做 $x=-2$ 時 $\dfrac{A}{B}$ 的數值,也未嘗不可.

現在把分式的數值的變化,歸納起來,得到下列四點.

1. 分式的分子與分母的值都不是零,分式的值是一定值.

2. 分子是零,分母不是零,分式的值是零.

3. 分母是零,分子不是零,這分式沒有值.

4. 分母分子同時是零,這分式的值不定.假如這分式的兩項有公因式,那末約分後再定牠的值.

習題四十八

1. 設 $x=3,4$, 求 $\dfrac{x^2+7x+6}{x^2-4x+9}$ 的值.

2. 設 $x=2$, 求 $\dfrac{x^2+6x-16}{x^2+5x-9}$ 的值.

3. 設 $x=2, y=-1$, 求 $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+5xy+6y^2}$ 的值.

4. 設 $x=-1$, 求 $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x+3}$ 的值.

5. 設 $a=10, b=-2$, 求 $\dfrac{a^2+6ab+5b^2}{a^2+3ab-10b^2}$ 的值.

第三章 分式方程

152. 解分式方程 凡分母中含有未知數的方程,叫做分式方程.下例表明分式方程的一般解法:

例 1. 解 $\dfrac{5x-3}{x-2}-\dfrac{5x+9}{x-1}=0$.

先把左邊兩分式通分,得

$$\frac{(5x-3)(x-1)-(5x+9)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=0.$$

要使一個分式的值等於零,必須使分子是零,而分母不是零.現在令分子等於零,而求出 x 的值,

$$(5x-3)(x-1)-(5x+9)(x-2)=0,$$

即 $$-8x+3+x+18=0,$$

故 $$x=3.$$

當 $x=3$ 時,分子等於零,分母不等於零,故 3 是這方程式的根.

根據上題解法,可以得到解分式方程的法則如下:

把方程內各項通分,並移到左邊,令右邊是零.解分子是零的方程便得.但所得的根,若同時能使公分母也等於零的就不合.

例 2. 解 $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{2x-1}{2x+1}=\dfrac{8}{4x^2-1}$.

通分得 $$\frac{(2x+1)^2-(2x-1)^2-8}{4x^2-1}=0,$$

令 $$(2x+1)^2-(2x-1)^2-8=0,$$

即 $$4x^2+4x+1-4x^2+4x-1-8=0,$$

∴ $$x=1.$$

當 $x=1$ 時,分母 $4x^2-1$ 不等於零,故 1 確是該方程的根.

例 3. 解 $\dfrac{2x+5}{2x-1}-\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{-15}{(2x-1)(x-2)}$.

通分得

$$\frac{(2x+5)(x-2)-(x+3)(2x-1)+15}{(2x-1)(x-2)}=0.$$

令分子等於零,就是

$$(2x+5)(x-2)-(x+3)(2x-1)+15=0,$$

即
$$2x^2+x-10-2x^2-5x+3+15=0,$$

$$-4x+8=0,$$

$$\therefore \qquad x=2.$$

當 $x=2$ 時,分母 $(2x-1)(x-2)$ 是零,故 2 不能做原方程的根.因此這方程沒有根.

試將 2 代入原方程中的 x,得

$$\frac{9}{3}-\frac{5}{0}=\frac{-15}{0},$$

這就顯而易見是沒有意義的.

習題四十九

解下列各方程:

1. $\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{1}{2x+1}.$

2. $\dfrac{7}{x+2}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{10}{x}.$

3. $\dfrac{4x}{x+1}-3=\dfrac{x}{x-2}.$

4. $\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{x}-\dfrac{7}{2}.$

5. $\dfrac{(3x+2)(2x-5)}{(6x-1)(5x+2)}=\dfrac{1}{5}.$

6. $\dfrac{3x-9}{3x-5}-2=\dfrac{3x-5}{8-3x}.$

7. $\dfrac{3}{2y+1}-\dfrac{1+2y}{2y-1}=\dfrac{4y^2}{1-4y^2}.$

8. $\dfrac{12}{x^2-4}=\dfrac{7}{x+2}+\dfrac{3}{x-2}.$

9. $\dfrac{x-8}{x-10}-\dfrac{x-5}{x-7}=\dfrac{x-7}{x-9}-\dfrac{x-4}{x-6}.$

上題把等式兩邊分開通分,比較簡單些.

10. $\dfrac{8x+7}{5x+4}=2-\dfrac{2x}{5x+1}.$

153. 有文字係數的分式方程 解法與數字係數的完全相同.

例 解 $\dfrac{x+a}{x-b}+\dfrac{x+b}{x-a}=2.$

通分,得

$$\frac{(x+a)(x-a)+(x+b)(x-b)-2(x-a)(x-b)}{(x-b)(x-a)}=0.$$

令分子等於 0,

$$x^2-a^2+x^2-b^2-2x^2+2ax+2bx-2ab=0.$$

$$2(a+b)x=a^2+2ab+b^2.$$

$$\therefore \quad x=\frac{a+b}{2}.$$

當 $x=\frac{a+b}{2}$ 時,分母 $(x-b)(x-a)$ 的值不等於零,故 $\frac{a+b}{2}$ 是原方程的一根.

154. 應用問題

例 1. 兩數的和是96,用小數除大數,得商3,餘6,求這兩個數.

解 令 $x=$ 小數,則 $96-x=$ 大數.

因 $$\frac{被除數}{除數}=商數+\frac{餘數}{除數},$$

故得方程

$$\frac{96-x}{x}=3+\frac{6}{x}.$$

通分得 $\frac{96-x-3x-6}{x}=0,$

令分子等於0,得

$$4x=90.$$

$$\therefore \quad x=22.5.$$

故所求的兩數是22.5與73.5.

例 2. 一件事,甲需三天做完,乙需五天做完,丙需六天做完.三個人合做,幾天做完?

解 令 x 代表三人合做所要的日數,則得方程

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}.$$

通分得

$$\frac{10x+6x+5x-30}{30x}=0.$$

令分子等於 0,得

$$21x=30.$$

$$\therefore \qquad x=1\frac{3}{7}.$$

故三人合做,需$1\frac{3}{7}$日做完.

例 3. 有布三種,每尺的價值,甲種比乙種貴 2 分,乙種比丙種貴 3 分.現在甲種值銀 6 元,丙種值銀 3 元,乙種值銀 9 元.但知乙種尺數,與甲丙二種總尺數相等,問每種每尺的價值各多少?

解 設乙種每尺價 x 分,那末甲種每尺 $x+2$ 分,丙種每尺 $x-3$ 分,根據題意,得方程

$$\frac{600}{x+2}+\frac{300}{x-3}=\frac{900}{x}.$$

用300除方程兩邊,得

$$\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-3}=\frac{3}{x}.$$

通分,

$$\frac{2(x-3)x+(x+2)x-3(x+2)(x-3)}{x(x+2)(x-3)}=0.$$

令分子等於 0,

$$2x^2-6x+x^2+2x-3x^2+3x+18=0.$$

$$\therefore \qquad x=18.$$

故甲種每尺二角,乙種每尺一角八分,丙種每尺一角五分.

習題五十

解下列方程:

1. $\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a-b}{x}.$

2. $\dfrac{2x+3}{3(x+1)}-\dfrac{8x+2}{5(x-1)}+\dfrac{14x^2+2x-5}{15x^2-15}=0.$

3. $\dfrac{x+a}{bx}-\dfrac{2x-3b}{ax}=\dfrac{2a}{x}+\dfrac{2}{a}-\dfrac{5}{b}.$

4. $\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\dfrac{ax+b}{px+q}.$

5. 兩數的和是81,小數和大數的比是$\dfrac{2}{7}$,求這兩數.

6. 兩數的差是32,用小數除大數,所得的商,等於用小數除10所得的商加 3,求這兩數.

7. 甲乙丙三人合做一件事,要12天完畢.假如各人獨做,那末乙所需的天數是甲的一倍半,丙是甲的

兩倍.問三人獨做各需幾天?

8. 一件事,甲獨做10天成功,乙獨做12天成功.現在甲乙合作,再由丙相助,四天成功.問丙一人獨做要幾天?

9. 甲乙共做一事,20天做成;甲丙合做,15天做成;若乙丙合做,祗需12天.問三人合做,需幾天可做成?

10. 水從甲管流入池中,3小時可滿;從乙管流入,4小時可滿;從丙管流出,6小時放盡.問三管同流,這池隔多少時可滿?

11. 甲做一件事,需 c 日做成.乙做這件事,需 d 日做成.問兩人合作,幾日可成?

12. 酒三種,上等酒共值七元,中等酒十元,下等酒三元.但知上等酒比中等酒每斤貴一角,下等酒比中等酒每斤賤一角,而中等酒的斤數,與上下兩等酒的總斤數相等.問三種酒每斤的價各多少?