算學小叢書

微積學發凡

鄭太朴著

商務印書館發行

中華民國二十二年四月初版
中華民國二十三年九月三版

(52274·4)

算學小叢書 微積學發凡一册
每册定價大洋肆角
外埠酌加運費匯費

著作者 鄭太朴
發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

微積學發凡

目　　錄

微積學發凡

第一章　基本概念

第一節　史的概觀

微積算法亦稱"極微算法"，近代數學中之重要部分也．溯其來源，微分法實濫觴於切線，極端值等問題；蓋自解析方法用入幾何學後，曲線之研究漸廣，於是由此引入微分算法，亦學術進化自然之道．法人范蘇(*Fermat*, 1601－1665)於十七世紀之初，已能解決若干簡單函數之極端值問題，其理與今日微分算法中所論者無異，可謂斯學之先聲。惟微分法正式成立，則賴英人牛頓 (*Newton* 1643－1727)及德人萊伯尼茲(*Leibnitz* 1646－1716)，而萊氏之力尤多．故今日言微分法之創始者，端推二氏．

牛萊二氏雖生同世，其創此法亦相去不遠，然實各有匠心，初未相剿襲．牛氏法初名"流動算法"，

多由研究力學問題得之.所謂流動者,亦卽是速度.然今日所用"微分"等名稱及其符號,則均係萊氏所創.又,牛氏於微分法亦僅創其概念,萊氏則幷作爲運算規例。故微分法至萊氏而有系統.

微分法初時流行頗遲,致疑及誤解者尤多.牛頓本身於其名著 *Philosophiae naturalis principia mathematica* 中亦曾未一用之.經德人柏諾理昆仲(*Jakob und Johaun Bernoulli*,1654—1705,1667—1748)及歐拉(*L. Euler*, 1707—1783) 之研究,始稍稍進步.法人拉格浪(*Lagrange* 1736—1813)欲純自代數學出發樹立微分法,尤於此多供獻.然用極限方法以從事,當以亞倫伯(*D' Alembert* 1717—1783 法人)爲首;而根據此概念,爲微分法樹確實之基礎,使其得究竟成立者,則法人考喜 (*Cauchy*, 1789—1857)也.

積分算法之歷史,較微分法爲久.就原理而論,古時求曲線形面積及體積之法,已屬於此.降及近世,可謂積分法之先驅者,有意人加佛里(*B. Cava-*

lieri 1598－1647)，法人巴司卡(*B. Pascal*, 1623－1662)，英人華里士 (*Wallis*, 1616－1703) 等．簡單函數之積分，范蘇亦已能求之．惟至萊伯尼兹，積分法始成爲系統．今日所用積分之符號，亦尙萊氏之舊，故謂積分學亦創於萊氏，實無不可．萊氏後積分法之究竟成立，亦賴考喜．惟德人黎孟(*Riemaun* 1826－1866)於此亦多供獻．

前世紀末，賴德人談德金(*Dedekind*, 1831－1916)，桓司德拉 (*Weierstrass* 1815－1897)，康鐸 (*G. Cantor* 1845－1918) 等之力，數目概念已大較前爲嚴明．故微積算法之基礎，今已可謂確立，不復有可疑處．輓近來"量論" (*Mengenlehre*) 於此頗有新創，則又爲微積算法樹新基礎矣．

然欲明微積算法，則無理數，極限值等基本概念須先瞭然而後可，故今略論之．

第二節　談德金氏之"切"

一切整數 (0 亦在內) 并一切分數總謂之"有理

數".今試設想用一有理數 r 為出發,將一切有理數分作上下二類,上類中一切數均大於 r,下類中一切數均小於 r.如是,則下類中一切數均小於上類中一切數,上類中一切數均大於下類中一切數.倘將 r 本身歸入下類,則 r 即為下類中之最大數;因下類中一切數均小於 r 也.反之,若將 r 歸入上類,可知 r 亦即為上類中之最小數.因而此有理數 r 於此分法方面占有特別地位,倘非為上類中之最小數,則即為下類中之最大數.

然用一有理數 r 為出發,此殊不必要.今試設想隨意將一切有理數分成為上下二類,下類中一切數小於上類中一切數,上類中一切數大於下類中一切數,則可分三事論之:

1. 若非下類中有一最大數,則上類中有一最小數,二者任居其一,但不相幷.

2. 上類中既無最小數,下類中亦無最大數.

3. 上類中既有最小數,下類中幷有最大數.

以上三事中第 3 事不能成立;蓋若上類中有

最小數 a，下類中幷有一最大數 b，則 $\frac{a+b}{2}$ 一有理數既可屬於上類，亦可屬於下類，若屬於上類，則因 $\frac{a+b}{2}<a$，a 卽不能爲上類中之最小數，若屬於下類，b 亦卽不能爲下類中之最大數。故知同時上類中有最小數，下類中有最大數，此不可能之事也。因而以上三事中，祇有第1第2二事能成立。

第1事之可成立，前已舉例示及且亦不難直接知之。至第2事之亦能成立，讀者或尙致疑，則先可證明之。

試一研究2之平方根 $\sqrt{2}$，卽不難見此非有理數也。蓋如不然，則可設

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}, \text{ 卽 } 2=\frac{m^2}{n^2} \quad \text{或} \quad 2n^2=m^2,$$

於此 m 與 n 爲二無有公因子之互質整數。因偶數之平方仍爲偶數，奇數之平方亦仍爲奇數，故由 $2n^2=m^2$ 可知 m 必爲偶數。今如 $m=2m^1$，於此 m^1 爲整數，則按前式得

$$4m^{12}=2n^2, \quad \text{卽} \quad 2m^{12}=n^2,$$

由此復可知 n 亦爲偶數，此卽與所設 m, n 爲二互

質數不合.故知$\sqrt{2}$不能以分數式表之,卽非爲有理數也.

今將一切有理數分爲二類,凡平方大於 2 之正有理數概屬上類,其餘一切有理數,則歸入下類,如是,則下類中一切數均小於上類中一切數,上類中一切數均大於下類中一切數.然於此上類中旣無最小數,下類中亦無最大數,與前所云之第 2 事合.蓋如 r 爲下類中任何一正有理數,則 r^2 旣不能大於 2,亦不能等於 2,故必 $r^2<2$.今若 h 爲一正有理數,而

$$h<1,\ \text{并}\ h<\frac{2-r^2}{2r+1},$$

則 $(r+h)^2=r^2+2rh+h^2<r^2+h(2r+1)<2$. 此於 r 爲下類中任何正有理數均合用,故下類中無有最大數.仿此,倘 r 爲上類中任何一數,則 $r>0$, $r^2>2$,故若 h 爲一正有理數小於$\frac{r^2-2}{2r}$者,卽可得

$$(r-h)^2=r^2-2rh+h^2>r^2-2rh>2.$$

此於 r 爲上類中任何數均合,因而上類中無有最小數.從可知第 2 事實能成立.

於第1事中，下類中之最大數或上類中之最小數占有一特別地位，非其他有理數所能有者，蓋此有理數乃是上下二類之界限也.第2事中，幷無此種占有特別地位之有理數存在；然既將一切有理數分爲上下二類，則二類中間當必有一"物"爲之界，如上例中爲二類之界者，實卽2之平方根$\sqrt{2}$.

用談德金 (*Dedekind*) 所創語，將一切有理數分成上下二類，有以前所云屬性者，謂之"於有理數區域內作一切"，或簡稱作一"切".倘名下類爲甲類，上類爲乙類，則可用符號 (甲|乙) 以表所作之"切"。

由以前所云，可知"切"有二種.第一種"切"內上下二類之界，亦爲一有理數.第二種"切"內上下二類之界，幷非有理數.倘吾人否認有理數以外可尙有數目，則亦可簡單云第二種"切"之二類間無有界.然類於$\sqrt{2}$之符號，運算時極多遇見，若不視之爲數目，則至簡單之二次方程已不能解.故今可將數目概念稍加擴充，第二種"切"內上下二類

之界亦視之爲數目;以與有理數別,此種數目名之曰"無理數"。

如是,則可知於有理數區域內作一"切"時,此"切"決定一數目,可爲有理數或無理數。若爲無理數,則此數小於上類中之一切有理數,而大於下類中之一切有理數。

以上所明無理數之概念,係談德金所創。此種詮釋法,自倘可有討論處;惟初學者得此,或已足略明無理數之性質,故不再廣論。

第三節　實數略論

有理數方面所有概念,亦多可擴充至無理數方面。今如 α 爲一無理數;由一"切"所決定者,則可觀其切之上下二類。倘 0 在其下類中,則可云 α 爲"正無理數";反之,若 0 在上類中,則 α 卽爲"負無理數"。寫法作:$\alpha>0$ 或 $\alpha<0$。

有二無理數 α,β 於此,倘決定此二數之"切"爲同者,則稱此二數爲相同之數或相等之數,寫作

$\alpha=\beta$.倘決定α之切與決定β之切異,則α不能與β相等.於此分二事論之.第一,有一有理數r,在α切中居於上類內而在β切中則居於下類,如是則必$\alpha<r<\beta$,故可云"α小於β",寫作$\alpha<\beta$.反之,若r在α切中居於下類內而在β切中則居於上類,則必$\beta<r<\alpha$,於是可云"α大於β",寫作$\alpha>\beta$.至此有理數r之存在,自不待言.蓋如無有此項有理數r,則α切中上類之數於β切中仍均在上類,α切中下類之數於β切中亦均在下類,是$\alpha\beta$二切相同,即違所設.從可知設α,β為二無理數,則祇有三種可能性:$\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$,或$\alpha>\beta$.

今設(甲|乙)為一切,決定一無理數α;於此,甲為下類,乙為上類,0則在下類中,試設想將下類中自0以下之數目一齊捨去不用,則仍為一"切",其所決定之數目α亦不受影響,蓋用切以決定數目,所用者為上下類之界.如是所得之切,試再設想將其上下類中之一切數,均倒之為倒數(如a倒之成$\frac{1}{a}$),同時并將下類與上類及數目之次序亦

倒之，則得一新切，名爲原切(甲|乙)之“倒切”，用符號可作

$$\left(\frac{1}{乙}\middle|\frac{1}{甲}\right).$$

此新切所決定者爲一新數目 β，卽名之曰原來數 α 之“倒數”，亦可寫作

$$\frac{1}{\alpha}.$$

此外，有理數方面之其他概念及算法亦均可用切擴充至無理數方面，今姑從略.

無理數與有理數，合之總稱爲“實數”. 於此，有數則定理須一述之.

定理 1. 設 α 與 β 爲二實數，$\alpha<\beta$，則 α 與 β 之間尙有無盡多有理數存在，卽是，有無盡多有理數 $r_1, r_2, r_3\cdots\cdots$ 能滿足以下之條件者：

$$\alpha<r_1<r_2<r_3<\cdots\cdots<\beta.$$

［證］ 如 α 與 β 俱爲有理數，則可有一有理數 $r=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 存在於其間. 如 α 與 β 俱爲無理數，則因 $\alpha<\beta$，可有一有理數 r 於 α 切中居於上類於

β 切中則居於下類者，是卽 $\alpha<r<\beta$ 也（此數 r 必存在，前已言之）。如 α 與 β 二者中一爲無理數一爲有理數，例如 α 爲有理，β 爲無理，則按所設 $\alpha<\beta$，卽是 α 在 β 切之下類中，該下類中旣無最大數，故必有一有理數 r 大於 α 者在內，亦卽得 $\alpha<r<\beta$. 從可知無論如何 α 與 β 間必有一有理數存在。反覆用此論證，不難知 α 與 β 間可有無盡多有理數存在。

定理 2. 若 $\alpha<\beta$，$\beta<\gamma$，則必 $\alpha<\gamma$；於此，α，β，γ 爲任何三實數。

〔證〕 由定理 1.，知可有二有理數 a 與 b，能滿足以下條件者：$\alpha<a<\beta$， $\beta<b<\gamma$. 由此可見 a 在 β 之下類中，b 在 β 之上類中，故必 $a<b$. 然 b 在 γ 之下類中，故 a 亦在 γ 之下類中。a 旣同時在 α 之上類中及 γ 之下類中，是卽 $\alpha<\gamma$ 也。

定理 3. 設 a 與 b 爲二有理數，其差無限小，卽是，a 與 b 之差可小於一任何小之正數目 ε，則 a 與 b 間祇能有一數目存在。

［證］ 假如 a 與 b 間不止有一數目，則可取其二者,例如 α 與 β. 倘 $\alpha<\beta$, 則按定理 1 可有二有理數 a^1 與 b^1 在 α 與 β 之間. 由 $\alpha<a^1<b^1<\beta$, 及 $a<\alpha<\beta<b$, 可得 $a<a^1<b^1<b$, 此卽是 $b-a>b^1-a^1$. 今若取 $\varepsilon<b^1-a^1$,則卽違所設，a 與 b 之差不能小於一任何小之 ε 矣. 故知 a 與 b 間實不能有二數目.

定理 4. 任何一實數可使其處於二有理數之間，此二有理數之差小於一任何小之正數.

［證］ 設 $\overset{\alpha}{a}$ 爲一實數,則可任取二有理數 a 與 b,使 $\overset{\alpha}{a}$ 在其中間：$a<\overset{\alpha}{a}<b$ 倘 $\frac{1}{2}(a+b)$ 一數在 a 切之下類中,則可設 $a_1=\frac{1}{2}(a+b)$, $b_1=b$, 反之，若 $\frac{1}{2}(a+b)$ 在 a 切之上類，則設 $a_1=a$, $b_1=\frac{1}{2}(a+b)$. 如是，a 仍在 a_1 與 b_1 之間,然 a_1 與 b_1 之差，則較之 a 與 b 之差已小一半. a_1 與 b_1 方面仍可用此法,則得二新數目 a_2, b_2,其差又小於 a_1, b_1 之差一半.如是反覆至 n 次後,所得二數目 a_n,b_n,

之差爲

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a),$$

α 仍在其間.故若 n 相當大時,則 α 所處於其間之二有理數其差亦可小於一任何小之正數.

此處所用 $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots\cdots$, 可列之爲二列:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$$

$$b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$$

第一列中每一數目大於或等於在其前之數目，第二列則反是,每一數目小於或等於在其前之數目.此項數目列以後頗用及之.

第四節　極限值

除 0 外,任何一實數之號爲正爲負有定.今如 a 與 $(-a)$ 爲二相反之數，若不顧其號，則此二數可相等.爲表明此意,特另用一記號如下:

$$|a|=|-a|.$$

$|a|$ 名爲 a 之"絕對值",無論 a 爲正爲負,$|a|$ 概作爲正數.故如 a 爲正數,則 $|a|=a$,若 a 爲負數則其絕對值 $|a|$ 卽 a 之反數也.由此定義,不難見

$$|a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n|=|a_1|\cdot|a_2|\cdot|a_3|\cdots\cdots|a_n|,$$

$$|a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n|\leqq|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots\cdots+|a_n|.$$

又若 $|a|<b$, 則必 $-b<a<b$,

其理甚明,無待論證.同此,可知

若 $|a-b|<\varepsilon$, 則必 $b-\varepsilon<a<b+\varepsilon$,

蓋由 $|a-b|<\varepsilon$ 可得 $-\varepsilon<a-b<\varepsilon$,

因而 $b-\varepsilon<a<b+\varepsilon$.

絕對值之概念極簡單,然數學上頗多應用,故上略述之.今當進而論解析學上根本重要之概念.

設有一列實數

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots,$$

其數多至無盡,其構造亦有一定規律,則此列名謂一"無盡級數",或簡稱級數.其中各數名爲"項".例如自然數目 1,2,3,……爲一級數.又如

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\cdots$$

亦一級數也．如此二級數，其項全爲有理數者，幷可稱爲“有理級數”．

定義． 今設 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n, \cdots\cdots$ 爲一級數．倘有一數 a 存在，其與級數中項 a_n 之差（取其絕對值）$|a-a_n|$，隨項之指數 n 之增大而減小，俾末後 a 與級數中項 a 之差（其絕對值），可小於任何小之正數，則云 a 爲此級數之“極限值”，或云此級數向 a“收斂”，寫作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

由此定義，可知若 a 爲 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ 一級數之極限值，則因 a 與級數中項之差（其絕對值）末後可小於任何小之正數，故對於任何選出之小正數 ε，可求得一指數 n，凡第 n 項以下之項 a，均滿足此條件：$|a-a|<\varepsilon$．

如前所舉之例，即

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots \frac{n}{n+1}, \cdots\cdots,$$

一級數，不難知可以1爲極限值，蓋

$$1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1},$$

此差隨 n 之增大，末後可任何小也.

極限值之概念，於解析學上至爲重要，故今再加一詮釋.

設 a, b 爲二實數，$a<b$，則在 a 與 b 中間之一切實數，卽一切實數 x 之滿足此條件 $a<x<b$ 者，構成一區域，謂之一"段"，a 與 b 本身名爲此段之界，尋常不計入段內.段之符號寫作 (a, b).

設 ε 爲一正數，則由 $\alpha-\varepsilon$ 與 $\alpha+\varepsilon$ 所界之段 $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$，亦稱 α 之"附近".

又如一級數之一切項，除若干例外(其數須有盡)而外，均有某種屬性，則曰此級數中"幾於"一切項均有此屬性.

得此數用語，乃可將極限值之概念再詮之如下:

設 a_0, a_1, a_2, ……爲一級數，α 爲一數目，倘 α 之任何小"附近"內，"幾於"該級數之一切項均在內，則 α 爲該級數之極限值.

[附註]此處所用"幾於"一語,係德人考佛來夫斯基G.(Kowalewski)所特創,雖不甚流行,但有時用之頗覺便利,故特採取。

此二定義之語法雖不同,實則內容全相同,非是極限值之定義有二也。

讀者旣明極限值之概念,則不難知第三節末所云之二列數目

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots,$$

倘將其增成爲二級數時,其共同極限値卽爲 a; 蓋 b_n 與 a_n 之差可至任何小, a 介於其間, 卽 a 與 a_n 或 b_n 之差亦可至任何小也. 因此, 第三節中之定理 4 可改其形式作爲一新定理如下:

定理 1. 任何一實數可視爲一有理級數之極限值.

關於級數之收斂性,卽有否極限値,有一定理如下:

定理 2. 設 $c_0, c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots, c_n, \cdots\cdots$ 爲一級數,而如對於任何一正數 ε,可求得一項 c_n,在其後之一切項 c 與 c_n 均滿足以下條件:

$$|c_n - c| < \varepsilon,$$

則此級數卽收斂,然亦祇當如此纔收斂.

[證] 若 $c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots$ 收斂,則按定義其極限值 γ 與其項 c 之差自某項以下均可滿足以下條件:

$$|\gamma - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

今設 c_n 爲已滿足此條件之項, c_{n+i} 爲在其後之任何項,則

$$|\gamma - c_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{以及} |\gamma - c_{n+i}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

因 $c_n - c_{n+i} = (c_n - \gamma) + (\gamma - c_{n+i})$,而按前所云絕對值之理,又

$$|c_n - c_{n+i}| = |(c_n - \gamma) + (\gamma - c_{n+i})| \leqq |c_n - \gamma| + |\gamma - c_{n+i}|$$

故 $$|c_n - c_{n+i}| < \varepsilon.$$

從可知此條件於級數之收斂爲必要者. 然此條件實亦充分者,則可如是明之:按第三節定理 4,級數中各項 c 均可用有理數代之,得一有理級數

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n, \cdots\cdots,$$

於此任何二相當項滿足此條件

$$|a_n-c_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

今設 γ 爲此有理級數之極限值，則按定義，自某項以下之項 a 均可

$$|\gamma-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

今設 $$|\gamma-a_n|<\frac{\varepsilon}{2},$$

則因 $$|\gamma-c_n|=|(\gamma-a_n)+(a_n-c_n)|$$

$$\leqq|\gamma-a_n|+|a_n-c_n|,$$

故得 $$|\gamma-c_n|<\varepsilon.$$

是 γ 亦爲原級數之極限值也。因原級數 c_n 以後之項 c_{n+i} 均滿足此條件

$$|c_n-c_{n+i}|<\varepsilon,$$

而 $a_n-a_{n+i}=(a_n-c_n)+(c_n-c_{n+i})+(c_{n+i}-a_{n+i})$

故 $|a_n-a_{n+i}|\leqq|c_n-c_n|+|c_n-c_{n+i}|+|c_{n+i}-a_{n+i}|$

即 $$|a_n-a_{n+i}|<2\varepsilon.$$

於此 ε 爲一任何數，故可易以 $\frac{\varepsilon}{2}$，

俾 $$|a_n - a_{n+i}| < \varepsilon.$$

今於有理數區域內作一談德金"切"，其下類中之數，"幾於"級數 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ 中之一切項均較其大，即是，倘 r 爲下類中之一數，則自 a_n 以下一切項 a 均大於 r. 其餘有理數構成其上類。此切決定一數目 γ. 設如 a_n 爲下類中之數，則因 $|a_n - a_{n+i}| < \varepsilon$，即 $a_n - \varepsilon < a_{n+i} < a_n + \varepsilon$，故一切 a_{n+i} 均在 a_n 之"附近"，而因前所云之規定，故 $a_n + \varepsilon$ 在上類中，於是可知 γ 及"幾於"一切項 a 均在 $(a_n, a_n + \varepsilon)$ 段中，是即 γ 與"幾於"一切項 a 滿足以下條件

$$|\gamma - a| < \varepsilon.$$

由此可知 γ 爲 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 之極限值，按前所云，亦即原級數之極限值。定理 2 於是完全成立。

關於極限值間之關係及其算法，有數定理如下。又，爲簡單計，以後凡級數，如

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots,$$

簡寫之爲 $\{a_n\}$.

定理 3. $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 爲二級數. $\{a_n\}$ 之極限值爲 α, $\{b_n\}$ 之極限值爲 β. 若自某項以下,二級數之相當項均滿足以下條件:

$$a-b\geqq g,$$

於此 $g>2\varepsilon$ 爲一有盡之正數,則必 $\alpha>\beta$, 或云"α 大於 β","β 小於 α".

[證] 某項以下可同時 $|\alpha-a|<\varepsilon, |\beta-b|>\varepsilon$,

$$\text{卽} -\varepsilon<\alpha-a<\varepsilon, -\varepsilon<\beta-b<\varepsilon,$$

因 $\alpha-\beta=(\alpha-a)+(a-b)+(b-\beta)$,

卽得 $\qquad \alpha-\beta>g-2\varepsilon>0,$

故 $\qquad \alpha>\beta.$

定理 4. 設 $\{a_n\}$ 之極限值爲 α, $\{b_n\}$ 之極限值爲 β, $\{c_n\}$ 之極限值爲 γ, 則由 $\alpha>\beta$, $\beta>\gamma$, 必得 $\alpha>\gamma$.

[證] 由 $\alpha>\beta$, 可知 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 自 n 項以下必

$$a_n-b_n\geqq g,$$

由 $\beta>\gamma$, 亦可知自 m 項以下必

$$b_m - c_m \geqq l,$$

於此 g, l 均爲正數.倘 m 大於 n, 則自 m 項以下同時有 $a_m - b_m \geqq g$, $b_m - c_m \geqq l$.

將此二式相加,卽知自 m 項以下:

$$a - c \geqq g + l > 0.$$

故按定理 3 知 $a > \gamma$.

補助定理. 一級數不能有二個不同之極限值.

[證] 設 $\{a_n\}$ 爲一級數,有二不同之極限值 α 與 α',而如 $\alpha < \alpha'$, 則按第三節定理 1 可有一有理數 c 在其間; $\alpha < c$, $c < \alpha'$.如是,必"幾於"該級數之一切項同時大於 c 又小於 c; 此不可能者,故知云該級數有二不同之極限值是誤.

定理 5. $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 爲二級數.$\{a_n\}$ 之極限值爲 α, $\{b_n\}$之極限值爲 β. 倘自某項以下,此二級數之一切相當項均滿足以下之條件:

$$|a - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

則 α 與 β 同,可寫作 $\alpha = \beta$.

[證] 自某項以下可同時

$$|a-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2},\ 卽\ -\frac{\varepsilon}{2}<a-\alpha<\frac{\varepsilon}{2}$$

以及$|a-b|<\frac{\varepsilon}{2}$, 卽 $-\frac{\varepsilon}{2}<a-b<\frac{\varepsilon}{2}$.

將此二者相加,卽知自某項以下必

$$-\varepsilon<\alpha-b<\varepsilon,$$

此卽是
$$|\alpha-b|<\varepsilon.$$

由此知α并爲$\{b_n\}$之極限值,一方面仿此又可知β爲$\{a_n\}$之極限值,而按前補助定理一級數不能有二不同之極限值,故必$\alpha=\beta$.

定理6. α爲$\{a_n\}$,β爲$\{b_n\}$,γ爲$\{c_n\}$之極限值.如$\alpha=\beta$, $\beta=\gamma$,則必$\alpha=\gamma$.

[證]　因$\alpha=\beta$,故自某項以下可

$$|a-b|<\frac{\varepsilon}{4},\ 卽\ -\frac{\varepsilon}{4}<a-b<\frac{\varepsilon}{4}.$$

仿此,自某項以下,因$\beta=\gamma$,亦可

$$-\frac{\varepsilon}{4}<b-c<\frac{\varepsilon}{4}.$$

故知某項以下二式相加時,必

$$-\frac{\varepsilon}{2}<a-c<\frac{\varepsilon}{2},$$

卽 $a=\gamma$ 之條件也.

極限值間之關係,得此數定理已甚明.而如尋常數目方面之"正""負"分別,亦可自定理 3 得之;蓋若設該定理中之 β 爲 0,則 $a>0$,亦卽可云"a 爲正極限值";反之,若設 a 爲 0,則 $\beta<0$,或可云"β 爲負極限值".

以後凡用極限值之符號 lim 時,其下所附之表明 $n\to\infty$ 亦概略去,俾書寫上較便利;例如 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\gamma$ 以後簡作 $lim\ c_n=\gamma$.

定理 7. 設 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 爲二級數,$lim\ a_n=a$, $lim\ b_n=\beta$. 倘將此二級數之相當項均加之,則得一新級數 $\{a_n+b_n\}$,其極限值爲 $a+\beta$. 用符號寫,卽:

$$lim\,(a_n+b_n)=lim\ a_n+lim\ b_n.$$

〔證〕 自某項以下可同時

$$|a-a|<\frac{\varepsilon}{2},\ 卽\ -\frac{\varepsilon}{2}<a-a<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|b-\beta|<\frac{\varepsilon}{2},\ 卽\ -\frac{\varepsilon}{2}<b-\beta<\frac{\varepsilon}{2},$$

將此二者相加,得

$$-\varepsilon<(a+b)-(\alpha+\beta)<\varepsilon,$$

此即 $\alpha+\beta$ 爲 $\{a_n+b_n\}$ 之極限值之條件也。

仿此，不難得

定理 8. $\lim(a_n-b_n)=\lim a_n-\lim b_n.$

定理 9. 倘 c 爲固定之數，則

$$\lim c\,a_n=c\lim a_n.$$

［證］ 設 $\lim a_n=a$，則自某項以下均可

$$|a-a|<\frac{\varepsilon}{|c|},$$

因而 $$|ca-ca|<\varepsilon.$$

定理 10. 將 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 之相當項均相乘，則得一新級數 $\{a_n b_n\}$. 倘 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 均有極限值，則 $\{a_n b_n\}$ 亦有極限值，而

$$\lim(a_n b_n)=\lim a_n\cdot\lim b_n$$

［證］ 設 $\{a_n\}$ 之極限值爲 α，$\{b_n\}$ 之極限值爲 β，則自某項以下可同時

$$|a-\alpha|<\varepsilon,\ |\beta-b|<\varepsilon.$$

但 $\alpha\beta-ab=(\alpha-a)\beta+(\beta-b)\alpha+(a-\alpha)(\beta-b)$

故自某項以下 $|\alpha\beta-ab|<\varepsilon(|\beta|+|\alpha|+\varepsilon)$.

ε 爲一任何小之數,故可使其滿足以下條件:

$$\varepsilon<1 \text{ 以及 } \varepsilon<\frac{\delta}{1+|\alpha|+|\beta|},$$

於此 δ 亦爲一任何小之數.如是則

$$|\alpha\beta-ab|<\delta,$$

因 δ 爲任何小之數,故此即 $lim(a_n b_n)=\alpha\beta$.

定理 11. 設 $\{a_n\}$ 爲一級數,其項無有等於 0 者,其極限值 $lim\, a_n$ 亦與 0 異,則 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 之極限值爲

$$lim\left|\frac{1}{a_n}\right|=\frac{1}{lim\, a_n}$$

[證] 設 $lim\, a_n=\alpha$,則自某項以下

$$|a-\alpha|<\varepsilon.$$

但 $$\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha-a}{a\alpha}\right|=\frac{|a-\alpha|}{|a\alpha|}$$

故某項以下: $$\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right|<\frac{\varepsilon}{|a\alpha|}.$$

因 ε 可任何小,而 $|a\alpha|$ 之值有盡,故此已可爲 $lim\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\alpha}$ 之條件.

由此二定理,卽可得

定理 12. 設 $\{a_n\}$ 之項無有爲 0 者，其極限值 $lim\ a_n$ 亦與 0 異，又如 $\{b_n\}$ 之極限值爲 $lim\ b_n$ 則 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 之極限值爲

$$lim\left(\frac{b_n}{a_n}\right)=\frac{lim\ b_n}{lim\ a_n}.$$

以上所得定理，自可推廣至任何多（其數爲有盡者）級數，并可將此項算法反覆應用任何次（其數亦有盡）。加，減，乘，除四者之結合，尋常亦稱爲"有理算法"。而如若干個數目 $x, y, z, \cdots\cdots$ 反覆用有理算法運算後所得之結果以符號 $R(x, y, z, \cdots\cdots)$ 表之，則前所得之理可總括之爲一定理如下：

定理 13. 設 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \cdots\cdots$ 爲若干級數，其極限值爲

$$lim\ a_n=\alpha,\ lim\ b_n=\beta,\ lim\ c_n=\gamma\cdots\cdots$$

則 $lim\ R(a_n, b_n, c_n, \cdots\cdots)=R(\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots)$。

第五節　叢聚值

前節所明極限值之概念，實可隸於一較廣概念

"叢聚值"之下,其定義如次:

定義. 設 $\{a_n\}$ 爲一級數,a 爲一數目.倘 a 之任何"附近"內,有該級數之無盡多項在,則 a 名爲 $\{a_n\}$ 之"叢聚值".

叢聚值之本身可屬於,但亦可不屬於其級數.例如

$$1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{16},\frac{11}{16},\cdots\cdots$$

一級數有二叢聚值,卽 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{2}{3}$ 是;$\frac{1}{2}$ 屬於級數內,$\frac{2}{3}$ 則不屬於此級數.

觀此叢聚值之定義,可知每一極限值是叢聚值,然叢聚值則不必爲極限值,故極限值之概念實可隸於叢聚值概念之下.

設 $\{a_n\}$ 爲一級數,其一切項均在一"段" (b,c) 內,則此級數謂之"有界級數".於此,有<u>桓司德拉</u>(*Weierstrass*)所證明之定理如下:

定理 1. 凡有界級數至少有一叢聚值.

[證] 今設 $\{a_n\}$ 爲一有界級數,則可有二數目

$b_1, d_1, \{a_n\}$ 之一切項均在 (b_1, d_1) 段內.用一數目 $c_1 = \frac{1}{2}(b_1 + d_1)$ 平分此段,則得二新段(b_1, c_1)及(c_1, d_1),此二段中至少必有一段含$\{a_n\}$之無盡多項在內.倘$(b_1\ c_1)$內有$\{a_n\}$之無盡多項,則再可仿前法將(b_1, c_1)平分爲二段,至少其一段中含$\{a_n\}$之無盡多項.此項分法可無限制反覆用之,則得一由"段"所成之級數,其中每一段等於其前一段之半.如第三節之末已提及,用此法可得二級數,爲段之界所成:

$$b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots, d_1, d_2, d_3, \cdots\cdots.$$

而前節中則已指出此二級數決定一共同之極限值 a.從可知 a 即是$\{a_n\}$之叢聚值,蓋 a 在一切段中,而此項段則均含$\{a_n\}$之無盡多項也。

倘一級數有數叢聚值,則其中之最大叢聚值,謂之該級數之"上極限",其最小叢聚值謂之"下極限".上極限之符號爲 *lim sup* (拉丁文 *limes superior* 之略),下極限則作 *lim inf* (*limes inferior* 之略).如前所舉之級數,其 *lim sup* 爲$\frac{2}{3}$,而 *lim*

inf 則爲 $\frac{1}{2}$.

若一級數有極限值，則此極限值同時卽爲其叢聚值，而此級數於此外亦不能再有其他叢聚值，不然，極限值之任何"附近"內不能"幾於"一切項均在其中矣。反之，若一有界級數祇有一叢聚值，則有無盡多項在此值之任何"附近"中，而此"附近"以外亦不能再有無盡多項存在，不然，此無盡多項仍爲一有界級數，按前定理1可再有一叢聚值，則此原級數不止有一叢聚值矣。故有界級數若祇有一叢聚值，則此叢聚值亦卽其極限值。因得一定理如下：

定理2. 有極限值之級數，以及祇有一叢聚值之有界級數，此二者實相同。

設 $\{a_n\}$ 爲一級數，其每一項大於或等於其前一項，卽是：
$$a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots\cdots,$$
則此級數謂之"向上"者。反之，若每一項小於或等於其前一項，則謂之"向下"者。如第三節末所示之二列，若增加之爲二級數，則第一級數向上，第二

級數向下．向上與向下之級數，總謂之“單調級數”．

今設 $\{a_n\}$ 爲一向上有限級數，則按定理 1 有一叢聚值 a. 此 a 必不能小於級數中之任何一項；蓋如級數中有一項 a_i 大於 a, $a<a_i$, 而如 r 爲一數小於 a, $r<a$, 則 (r, a_i) 中所有該級數之項，其數爲有盡者，是 a 非爲叢聚值矣．又若 $\{a_n\}$ 有二叢聚值，a 外尚有一 a'，而如 $a<a'$，則倘 s 爲一數，$a'<s$, (a, s) 中不能有 $\{a_n\}$ 之項在內，故 a' 決不能爲 $\{a_n\}$ 之叢聚值．如是，可知凡向上有界級數必有極限值，此極限值不能小於該級數之任何項．

仿此，可知凡向下有界級數亦必有極限值，此極限值不能大於該級數之任何項．因得

定理 3 凡單調有界級數必有極限值．

第六節 函數

數學中所用數量，有“常數”與“變數”之分．凡數量之值有定，非可任意使其取某值者，謂之常數；

例如 1, 2, 3 等是.反之,數量之值無定,可任意使其取某值者,謂之變數.(按尋常習慣,常數多用字母之開首或中間數字表之,如 a, b, c, r, s, 或 α, β, γ, 等;變數則多用字母之末數字表之,如 x, y, z, 或 ξ, η, ζ 等.)

變數所可取之值,自亦可加以限制,例如 x 所取之值,可以在 a 與 b 之間者爲限 (卽 x 所可取之一切值,均滿足此條件: $a<x<b$)。一變數所可取之一切值,構成一區域,謂之"變數區域".

今設 x 爲一變數, y 亦爲一變數,但 y 之值隨 x 之值而定,則 x 稱爲"自變數",而 y 稱爲"依變數". x 與 y 間之此項關係,亦曰"函數關係".尋常 y 之值若隨 x 而定,卽稱 y 爲 x 之"函數".用符號,寫作

$$y=f(x), \quad 或\ y=\varphi(x),$$

或不用 f, φ, 用其他字母亦可.例如一總和之值決定於其諸被加數,一乘積之值決定於其因子,故總和爲其被加數,乘積則爲因子之函數.又如一三角

形之形狀面積決定於其邊，是三角形之形狀面積爲其邊之函數也。

較廣，函數之定義可如下：

定義。 倘對於 x 之每一值，y 有一值與之相當，則 y 爲 x 之"函數"。

［附註］本書內所論，以"不二"的函數爲限，卽對於 x 之每一值祇有一 y 之值與之相當。

設 y 之值不止定於一自變數，幷爲若干其他自變數所定，則 y 爲"多變數之函數"。倘此項自變數爲 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$，可寫作，

$$y=f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n).$$

函數關係，尋常可用由自變數及依變數所成之方程表之。例如 $y=x^2$, $y=x^n$ (n 爲正整數) 均表 y 爲 x 之函數也。若函數與其自變數所成之方程，爲一代數式，卽是，其中僅用若干次（其數有盡）加，減，乘，除及乘方與開方（指數爲整常數），則此函數爲"代數函數"。代數函數中僅有加，減，乘，除，乘方者，是曰有理函數，其普通形式如次：

$$y=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n}$$

（按此爲單變數之函數。爲簡單計，舉例均以單變數之函數爲限。多變數函數從略）於此，a_0，a_1，$\cdots\cdots$，b_0，b_1，$\cdots\cdots$爲常數，m 及 n 均爲正整數。

若更簡單，上式中無有分母，作

$$y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots a_n,$$

則名爲"整有理函數"。

代數函數外，尙有所謂"超絕函數".例如 $y=sin\ x$，卽是一超絕函數也。

如 y 爲 x 之函數，其關係由一方程表之，而此方程已照 y 解出，則謂之"已展開之函數".反之，若此方程未照 y 解出，卽謂之"未展開函數"。例如 $y^2-x=0$ 一方程表 y 爲 x 之函數，但未照 y 解出，故此方程表未展開函數.若欲得已展開者，可照 y 解之，卽有 $y=\pm\sqrt{x}$，此卽已展開函數也.惟於此例中，將原函數展開後，所得者已非爲一函數，而爲 $y=+|\sqrt{x}|$ 及 $y=-|\sqrt{x}|$ 二函數矣。

第七節 連續性

設 $y=f(x)$ 爲一函數，$\{x_n\}$ 爲任何一級數，其極限值爲 $\lim x_n=a$。今使 $y=f(x)$ 中自變數 x 依次取級數中一切值，則 $f(x)$ 之值自亦成爲一級數〔$f(x_n)$ 表 $f(x)$ 中之 x 取 x_n 值〕

$$f(x_0)\,,\,f(x_1)\,,\,f(x_2)\,,\cdots\cdots$$

倘此由函數所成之級數亦有極限值，而

$$\lim f(x_n)=f(a),$$

則云"此函數於 $x=a$ 爲連續者"，於此自假定 $\{x_n\}$ 及 a 爲 x 所可取之值，而須注意者，則 $\{x_n\}$ 可爲一任何級數，祇須其極限值爲 a，卽應 $\lim f(x_n)=f(a)$。

此"連續"之概念，於高等數學上爲基本重要者，故今再稍換其形式加一詮釋如下：

設 $y=f(x)$ 爲一函數，(a,b) 爲 x 之變數區域．今使 x 取 (a,b) 中一值 x_0，則其函數亦取一值 $f(x_0)$。倘 x 之值稍變動，使其取 x_0+h，則 $f(x)$ 之值亦

相當的變爲$f(x_0+h)$.於此,若$|h|$逼近於0,而$|f(x_0+h)-f(x_0)|$亦逼近於0,則$f(x)$於$x=x_0$爲連續者.

粗言之,倘x之值變動極少,其所屬函數之值亦變動極少,則此函數於x之該值爲連續者.

倘一函數$y=f(x)$於x之某值無有以上所云屬性,則云此函數於x之該值爲"不連續"者.

例如$y=ax$(a爲常數)一函數於x之任何值均連續;蓋此函數之自變數x可取一切實數爲其值,而如α爲一任何實數,則可有級數其極限值爲α(參觀第四節定理1),倘x依次取該級數之一切值x_n,則此函數之相當值亦成爲一級數$\{a\,x_n\}$,而按第四節定理9 $lim\ (a\,x_n)=a\ lim\ x_n=a\,\alpha$,故此函數爲連續者.

讀者如已明"連續性"之概念,卽可知第四節定理13所明,實卽是云:凡整有理函數,於自變數之一切有盡值,均爲連續者.若將一有理函數之分母之根,不計在自變數區域以內,則幷可云:凡

有理函數，於自變數之區域內一切值，均為連續者。

〔附註〕倘 x 取某值時，其函數 y 無有相當值或成為無盡大，則該值為 x 所不可取者。此種值恆宜不計入 x 之區域內。

又如 $y=\sqrt{x}$, $y=\sin x$ 二函數，於 x 之區域內亦均連續．蓋如 a 為區域內任何一值，可得

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}},$$

$$\sin x-\sin a=2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2},$$

若 x 與 a 之差逼近於 0，即 $\lim x=a$，則 $\lim\sqrt{x}=\sqrt{a}$，而 $\lim \sin x=\sin a$．此外，如 $\cos x$, $tg\, x$ 等三角函數，以及其他超絕函數如 a^x（a 為正數）等於 x 之區域內亦均連續，讀者試自明之。

今如 $f(x)$ 為一函數．$\{x_n\}$ 為任何一級數，其極限值為 a（均為 x 所可取之值），則可分二事論之：

其一，$\{x_n\}$ 中任何項均小於 a: $x_n<a$。

其二，$\{x_n\}$ 中任何項均大於 a: $x_n>a$。

倘為第一事，而如 $\lim f(x_n)$ 存在，則照狄希雷

(*Dirichlet*) 之寫法,此極限值以$f(a-0)$表之.

倘爲第二事,而如 $lim\ f(x_n)$ 亦存在,則用 $f(a+0)$ 表之.

如 $f(x)$ 於 $x=a$ 爲連續者,則按前連續性定義,必

$$f(a-0)=f(a+0)=f(a),$$

蓋前固云 $\{x_n\}$ 可爲一任何級數,祇須 $lim\ x_n=a$,至 $\{x_n\}$ 之項均大於或小於 a 自可隨意也.

若祇能

$$f(a-0)=f(a)$$

或祇能 $$f(a+0)=f(a),$$

則可云$f(x)$於 $x=a$ 祇有"左方連續性"或"右方連續性",其餘一方爲不連續者.

倘$f(a-0)$及$f(a+0)$ 均與$f(a)$ 異,則$f(x)$ 於 $x=a$ 自爲兩方均不連續者矣.然此處所云不連續性,無論其爲一方者或兩方者,均有此屬性,卽是,$f(a-0)$或 $f(a+0)$ 雖不能等於 $f(a)$,惟倘有其值存在.此項不連續性,尋常稱爲"第一種不連續

性",以與以下所云之第二種不連續性相別.

所謂"第二種不連續性"者,即 $f(a-0)$ 或 $f(a+0)$ 簡直不存在,$f(x)$ 於此直無有極限值可言(一方或兩方均無有).

例如 $y=sin\dfrac{1}{x}$ 一函數於 $x\gtrless 0$ 均爲連續者,然於 x 逼近 0 則爲第二種不連續,蓋於此處 $sin\dfrac{1}{x}$ 直無意義可言也.

以上所云係單變數函數之連續性,多變數函數之連續性,其定義與前同.今述之如下:

倘 $f(x,y,z,\cdots\cdots)$ 爲一多變數函數,而如由(所取之值自假定其均在變數區域内)

$$lim\, x_n=a,\ lim\, y_n=\beta,\ lim\, z_n=\gamma,\cdots\cdots$$

可得 $lim\, f(x_n,\ y_n,\ z_n,\cdots\cdots)=f(a,\beta,\gamma,\cdots\cdots)$

則此函數於 $x=a,\ y=\beta,\ z=\gamma,\cdots\cdots$ 爲連續者.

關於連續函數,有數定理,須一述之.

今設 $f(x),g(x)\cdots\cdots u(x)$ 爲若干函數(其數自有盡),其自變數 x 有一共同區域.如第四節之末,

$R(x, y, z, \cdots\cdots)$ 表 $x, y, z\cdots\cdots$ 經數次有理算法後所得之結果，則不難得以下之定理：

定理 1. 設 $f(x), g(x)\cdots\cdots u(x)$ 爲若干函數，有一共同自變數區域，而如 $f(x), g(x)\cdots\cdots u(x)$ 於 $x=a$ 均連續，則 $R(f(x), g(x)\cdots\cdots u(x))$ 於 $x=a$ 亦連續。

於此，a 自爲共同區域內之值。此定理實卽是第四節之定理 13，可不須再證；但須注意者，於此已先假定於 $x=a$，R 可應用於 $f(x), g(x)\cdots\cdots u(x)$ 者。

定理 2. 設 $f(x)$ 於 (a, b) 段之全部爲連續者，而如 $f(a)>0$, $f(b)<0$，則必有一值 c 在 a 與 b 之間；於此 $f(c)=0$。〔此爲波氏定理 *Bolzano scher Satz*〕

［證］ 今將 (a, b) 段平分之，則得一值 $\frac{a+b}{2}$，於此，若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，則定理已證明；倘不然，可有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0 \text{ 或 } f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0.$$

倘爲第一事，可設 $a_1=a,\ b_1=\frac{a+b}{2}$，

倘爲第二事，則設 $a_1=\frac{a+b}{2},\ b_1=b$，

於是得

$$f(a_1)>0,\ f(b_1)<0.$$

將 $(a_1,\ b_1)$ 段仍平分之，則如前得一值 $\frac{a_1+b_1}{2}$，

於此，若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ 仍不爲 0，則可

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0 \text{ 或 } >0.$$

倘爲第一事，則設 $a_2=a_1,\ b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$；不然，可設

$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ b_2=b_1$. 如是，有

$$f(a_2)>0,\quad f(b_2)<0.$$

所得 $(a_2,\ b_2)$ 段仍可平分，如必要，可無限次繼續用此法，則得一列無限多之段：

$$(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ (a_3,\ b_3),\cdots\cdots,$$

於此，$f(x)$ 於一切段之左界 a_n 大於 0，於一切段之

右界 b_n 小於 0. 前已屢提及，此項段之界構成二單調有界級數，決定一共同極限值.

今命此共同極限值爲 c，則因 $f(x)$ 在段之全部爲連續者，故由

$$lim\ b_n=c,\quad lim\ a_n=c$$

可得

$$lim f(b_n)=f(c),\quad lim\ f(a_n)=f(c).$$

但如前所云，$f(x)$ 於一切段之左界大於 0，故必 $lim f(a_n)=f(c)>0$ 或等於 0，同時又可知 $f(c)$ 必 <0 或等於 0，因而祗有 $f(c)=0$.

由此定理，可得一新定理如下：

定理 3. 設 $f(x)$ 爲一函數於 (a, b) 段之全部均連續者，而

$$f(a)=A,\quad f(b)=B,\quad A\gtrless B;$$

又設 C 爲 A 與 B 間之任何數，則 a 與 b 之間亦必有一數 c，於此

$$f(c)=C$$

［證］ 今試作一函數 $\varphi(x)=f(x)-C$，則不難

知此 $\varphi(x)$ 於 (a, b) 段之全部均連續。倘 $A<B$，則 $\varphi(a)=f(a)-C<0$，$\varphi(b)=f(b)-C>0$（此處姑用 $A<B$，若 $A>B$，則反之可矣），故按定理 2 必有一 c 在 a 與 b 間，於此 $\varphi(c)=0$，即 $f(c)=C$.

定理 4.——康鐸氏"均齊連續性"定理. 設 $f(x)$ 於 (a, b) 段之全部（a 與 b 二界計入）均連續，則對於任何一正數 ε，可將 (a, b) 段如是分割成若干小段（其數有盡），俾 x 取同一小段中任何二值 α, β 時，$|f(\alpha)-f(\beta)|<\varepsilon$.

［證］ 蓋如不然，則可將 (a, b) 平分之，得一值 $c=\frac{1}{2}(a+b)$。如是，(a, c) 與 (c, b) 二半段中必有其一，其性質與 (a, b) 相同，即，不能用上定理者。此半段 (a, c) 或 (c, b) 與 (a, b) 性質同者，可命之爲 (a_1, b_1)。將 (a_1, b_1) 仍平分之，則所得二半段中亦必有一不能用上定理，此段以 (a_2, b_2) 表之。無限次繼續用此法，則如前所示，可得一列段 (a, b)，(a_1, b_1)，(a_2, b_2)，……，其數多至無限，而於任何大之 n，(a_n, b_n) 中可有二值 α, β，於此，$|f(\alpha)-f$

$(\beta)|$ 不小於 ε. 但如前所明

$$lim\ a_n = lim\ b_n = \gamma;$$

照所設, $f(x)$ 於 $x=\gamma$ 爲連續者, 故可有一正數 δ, 祇須 $|x-\gamma|<\delta$ 時, 即 $|f(x)-f(\gamma)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 今如取充分大之 n, 俾 a_n 及 b_n 與 γ 之差小於 δ, 而 (a_n, b_n) 在 $(\gamma-\delta, \gamma+\delta)$ 段內; 設 α, β 爲 (a_n, b_n) 內之二值, 則

$$|f(\alpha)-f(\gamma)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(\beta)-f(\gamma)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因而得

$$|f(\alpha)-f(\beta)|<\varepsilon.$$

從可知以上之定理并無誤, 若假定其不能用時, 必致得矛盾. 此定理爲德國數學家康鐸(*G. Cantor*)所證明, 名爲"均齊連續性定理" (*Satz von der gleichmässigen Stetigkeit*). 所謂均齊連續者, 其意義如下: $f(x)$ 於 (a, b) 之全部均連續; 設如對於任何一正數 ε, 可有一正數 δ, 祇須 $|\alpha-\beta|<\delta$ 時〔α 與 β 均爲 (a,b) 內任何之數〕, 即 $|f(\alpha)-f(\beta)|<\varepsilon$, 則云 $f(x)$ 於 (a, b) 段內爲"均齊連續"者. 此均齊

連續之屬性已包含於定理4中，極爲易見。試設想將(a, b)分成爲n小段，(a, c_1) (c_1, c_2) ······ (c_{n-1}, b)，x取同一小段中二值α, β時，$|f(\alpha)-f(\beta)|<\frac{\varepsilon}{2}$。今設$\delta$爲一正數，其值小於一切小段二界之差。試於$(a, b)$中任取二數$\alpha, \beta$，而$|\alpha-\beta|<\delta$，則$\alpha, \beta$或則在同一小段內，或則在相接之二小段內，因而無論如何$|f(\alpha)-f(\beta)|<\varepsilon$也。

定理5. 凡在一全段內連續之函數，其值於此段內均小於一固定之數。

［證］ 設如$f(x)$於(a, b)內均連續（界亦計入），則按定理4，可將(a, b)如是分成爲n小段，俾α, β爲同一小段中二值時，$|f(\alpha)-f(\beta)|<\varepsilon$，即$|f(\alpha)|<|f(\beta)|+\varepsilon$。

由此，可知$f(x)$於第一小段(a, c_1)內，均滿足以下條件：

$$|f(x)|<|f(a)|+\varepsilon;$$

於第二小段(c_1, c_2)內，均

$$|f(x)|<|f(c_1)|+\varepsilon,$$

因而知 $f(x)$ 於 (c_1, c_2) 內,均

$$|f(x)| < |f(a)| + 2\varepsilon.$$

仿此,不難知 $f(x)$ 於第 n 小段內即末小段內,均

$$|f(x)| < |f(a)| + n\varepsilon.$$

從可知 $f(x)$ 之值於 (a, b) 全段不能超過 $|f(a)| + n\varepsilon$,故可有一數大於一切 $f(x)$.

定理 6.——桓氏定理. 倘 $f(x)$ 於 (a, b) 之全部(界亦計入)均連續,則 $f(x)$ 所取之值中有一最大者以及一最小者.

[證] 今將 (a, b) 平分成二小段,(a, c),(c, b),則此二小段中必有其一有此屬性:(a, b) 中無有一函數值 $f(x)$ 能超過該小段中之一切函數值者.蓋如不然,則 (a, b) 中可有一值 x_1,$f(x)$ 於 (a, c) 中均 $f(x) < f(x_1)$,又可有一值 x_2 在 (a, b) 中,俾 $f(x)$ 於 (c, b) 中均 $f(x) < f(x_2)$.如是,則 $f(x_1)$ 與 $f(x_2)$ 二值中之一大於 (a, b) 中一切函數值矣,此則不可能者.具此屬性之段,今以 (a_1, b_1) 表之.仿前,(a_1, b_1) 中亦必有一小段 (a_2, b_2) 具上述之屬

性者，等等．如前已屢說及，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 有一共同極限值；今以 γ 表之．事實上，$f(\gamma)$ 即是定理中所云之最大值．蓋如 x_0 爲 (a, b) 中任何一值，則

(a_1, b_1) 內可有一值 x_1，於此 $f(x_1) \geqq f(x_0)$，

(a_2, b_2) ,, x_2, ,, $f(x_2) \geqq f(x_1)$，

(a_3, b_3) ,, x_3, ,, $f(x_3) \geqq f(x_2)$，

等等．因 $f(x)$ 於 (a, b) 之全部均連續，故由

$$lim\ x_n = \gamma，可得\ lim\ f(x_n) = f(\gamma).$$

由前，已知 $\{f(x_n)\}$ 爲一向上級數，故必

$$f(\gamma) \geqq f(x_0).$$

最小值之存在，其證無多異，可不贅．

以上定理爲德國數學家桓司德拉所證明，故稱桓氏定理．

今設 $f(x)$ 爲一函數．倘 x 之值增加，$f(x)$ 之值亦增加，則此函數謂之"向上"者；反之，若 x 之值增加，而 $f(x)$ 之值減小，則謂之"向下"者．此二種函數，總謂之"單調函數"．

設如 $f(x)$ 於 (a, b) 之全部均連續，則按桓氏定

理 $f(x)$ 之值有一最小者 m，及一最大者 M. 而按定理 3，又可知 m 與 M 間之一切值，$f(x)$ 均取之。今設 $y=f(x)$，而 $f(x)$ 於 (a, b) 內無有重複之值，即是，倘 c 與 c' 爲 (a, b) 內二值，$c \neq c'$，則亦必 $f(c) \neq f(c')$. 如是，即可將 $y=f(x)$ 一方程按 x 解之，得一 $x=\varphi(y)$ 形式之方程. 今若視 $x=\varphi(y)$ 爲函數(視 x 爲 y 之函數)，則得一新函數，名爲原函數 $f(x)$ 之倒.於此有一定理如下:

定理 7. 一連續函數之倒函數亦連續. 凡可倒之函數必爲單調者，反之，單調連續函數亦均可倒。(此定理自須在以前所設假定下用之)

［證］ 今設 $lim\ y_n=y_0$，$x_n=\varphi(y_n)$. 因 x_1，x_2，x_3，……一級數在 (a, b) 內，故其叢聚值(參觀第五節定理 1)亦在 (a, b) 內.今如 x'_0 爲其一叢聚值，則可於 x_1，x_2，x_3，…… 內取出一部分項構成一新級數 x'_1，x'_2，x'_3，……以此 x'_0 爲極限值(按此項"部分級數" 必存在，後當補證之). 因原函數 $f(x)$ 於 (a, b) 內連續，故由 $lim\ x'_n=x'_0$，可得

$$\lim f(x'_n)=\lim y'_n=f(x'_0).$$

此處 $y'_1, y'_2, y'_3,\cdots\cdots$ 亦爲原級數 $y_1, y_2, y_3\cdots\cdots$ 之部分級數,故其極限值 $\lim y'_n$ 即爲 $\lim y_n$. 因而知 $f(x'_0)=y_0$, 而 $x'_0=\varphi(y_0)$. 從此可見 $\varphi(y_1)$, $\varphi(y_2)$, $\varphi(y_3)$, $\cdots\cdots$ 一級數祇有一叢聚值 $\varphi(y_0)$, 故按第五節定理 2 $\lim \varphi(y_n)=\varphi(y_0)$. 此即倒函數之連續性.

今如 x_2 爲 x_1 與 x_3 間之值,則 $f(x_2)$ 亦必在 $f(x_1)$ 與 $f(x_3)$ 之間.蓋如不然,假使 $f(x_1)$ 與 $f(x_3)$ 均大於或小於 $f(x_2)$, 則可有一數 X 同時處於 $f(x_1)$ 與 $f(x_2)$ 以及 $f(x_3)$ 與 $f(x_2)$ 之間.如是, x_1 與 x_2 之間可有一數 x', 於此 $f(x')=X$, 而 x_2 與 x_3 之間亦有一數 x'', 於此 $f(x'')=X$ (見定理 3), 然前曾假定 $f(x)$ 不取重複值,故此不可能,而 $f(x_2)$ 在 $f(x_1)$ 與 $f(x_3)$ 之間.由此,已可見 $f(x)$ 實爲一單調函數.反之,亦不難見凡單調連續函數亦均可倒.

以上證內曾用此定理:設 γ 爲 $\{x_n\}$ 之一叢聚值,則可自 $\{x_n\}$ 內取其一部分項(其數自無盡)構成一

新級數 $\{x'_n\}$，以 γ 爲極限值.此定理本甚明，爲謹嚴計，補證之如下：γ 既爲 $\{x_n\}$ 之叢聚值，故 γ 之任何"附近"內有 $\{x_n\}$ 之無盡多項在.今設 x'_1 爲 $\{x_n\}$ 中在 $(\gamma-1,\gamma+1)$ 內之第一項，x'_2 爲 $\{x_n\}$ 中在 $(\gamma-\frac{1}{2},\ \gamma+\frac{1}{2})$ 內而繼於 x'_1 後之第一項，x'_3 爲 $\{x_n\}$ 中在 $(\gamma-\frac{1}{3},\ \gamma+\frac{1}{3})$ 內而繼於 x'_2 後之第一項，等等，則可知 $x'_1, x'_2, x'_3, \cdots\cdots$ 爲 $\{x_n\}$ 中一部分項所成之新級數.因

$$\gamma-\frac{1}{n}<x'_n<\gamma+\frac{1}{n}$$

故

$$\lim x'_n=\gamma.$$

由此定理 7，便可知三角函數之倒如 $arc\ sin\ y$，$arc\ cos\ y$ 等，在相當區域內亦均連續.（惟原函數 sin，cos 等之區域須加以限制，使合於以前之假設）

今如 $z=f(y)$，而 $y=g(x)$，則 z 自亦爲 x 之函數（名爲"復合函數"）：$z=\varphi(x)$.有定理如下：

定理 8. 設 $y=g(x)$ 於 x 連續，$z=f(y)$ 於 $y=y(x)$ 亦連續，則 $z=\varphi(x)$ 於 x 亦連續.

蓋由 $\lim x_n=x$，可得 $\lim g(x_n)=y$，而由此復可得 $\lim f(g(x_n))=\lim\varphi(x_n)=f(y)=\varphi(x)$，是卽 $\varphi(x)$ 於 x 亦連續.

多變數函數方面之理與前無多異，而論證已較繁，故且從略.

第八節　數目及函數之圖表法

用直線上之點以表實數，頗有易見之便，故數學上多用之. 然直線上之點恰與實數區域內之數一一相當，俾每一點有一數目，反之，亦每一數目有一點，此則幷非自明之理，寧視爲吾人之假設可耳. 關於此方面之討論，姑付闕如；蓋此事牽及數理哲學範圍，頗不易論列，而圖表法於本書內亦不過偶用爲資助，藉使讀者稍易了解，初不欲用之於論證，故亦無須嚴爲深究也.

如圖所示，於直線上取一點 O，又於其右取一點

E. 今命 O 點所表者爲實數0 (零), 而 E 所表者則爲實數1. 又, 實數方面之大小關係, 於直線上如是定之: 設 P, Q 爲直線上二不同之點, Q 在 P 之右, P 在 Q 之左, 則 Q 所表之實數 q 大於 P 所表之 p, P 所表之實數小於 Q 所表者, 而 $q:p=\overline{OQ}:\overline{OP}$. 經此三種規定, 用直線上點以表實數之法已完全成立. 蓋如 p 爲一實數, 欲知其直線上位置在何處, 則按前大小之規定, 可知 p 在直線上之代表點 P, 其與 O 之距離 $\overline{OP}$, 與 $\overline{OE}$ 相比必等於 p 與1相比也. 反之, P 爲直線上任何一點, 則由 $\overline{OP}:\overline{OE}=x:1$, 不難知 P 所表之 x 爲何數也. 若 p 爲一有理數, 則直線上之代表點 P 不難求得, 若 p 爲無理數, 並難用幾何作法以作之者, 則雖按以前之假定, 直線上亦必有點與之相當, 然欲求其恰當位置, 多有不可能者矣.

今如 A, B 爲直線上二點, 則決定二線段 $\overline{AB}$ 及

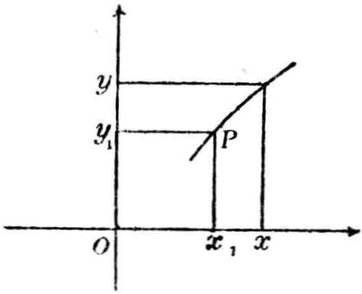
$\overline{BA}$，此二者之長短相同，而方向則恰相反。倘 $\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}$，則 $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$.而如 $\overline{OA}:\overline{OE}=a:1$，$\overline{OB}:\overline{OE}=b:1$，又設 $\overline{OE}=1$，則卽得 $\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{AB}=b-a$. 仿此，若 A, B, C 爲任何三點，$\overline{AB}=b-a$，$\overline{BC}=c-b$，則因 $\overline{CA}=a-c$，可得

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$$

若 $B=C$，$\overline{BC}=0$，卽有 $\overline{AB}+\overline{BA}=0$，或 $\overline{AB}=-\overline{BA}$. 從可知方向不同之線段，以算式表之時，其號正負相反。前所用之直線，若規定其向右之方向爲正，則向左之方向爲負矣。

叢聚值之概念，於直線上尤易明白，讀者試自爲圖表之。

今試取二直線，以某種角度相交（此處爲簡便計，以直角相交）。此二直線，今均視之爲"實數線"（其上之點表實數），而其交點，以 O 表之，卽作爲二實數線之公共"零點"（其所表之實數爲 0）. 又規定橫直線向右之方向爲正，縱直線則以向上之方向爲正，如圖中矢鏃所示。如是，則橫線上 O 以右之



點表正實數，其左方之點表負實數，而縱線上則以在 O 之上或下別所表之數爲正或負．至所表實數之大小次序，一如前所云．此二直線上之單位點(表實數 1 之點)，亦可規定其與 O 之距離相等．

設如 $y=f(x)$ 爲一函數，則 x 取其區域內一實數 x_1 時，y 卽取一相當之實數 y_1. 今試求 x_1 之代表點於橫直線上，y_1 之代表點於縱直線上，由 x_1 之代表點作一直線與縱線平行，由 y_1 之代表點作一直線與橫線平行，則此二線有一交點 P(自亦祇有此一點)．今使 x 連續的變動其值（如連續的增加)，而如此函數 $y=f(x)$於 x 之此項值爲連續者，則 y 之值自亦連續的變動，蓋按前節連續性定義，

x 變動甚少時，y 之值亦變動甚少也。如此，則 x 與 y 之代表點在橫線及縱線上繼續向一方向移動，因而此交點 P 亦於此二直線所決定之平向內移動，而其軌跡則成為一線（直線或曲線）。倘 $y=f(x)$ 於 x 之某值為不連續，而其不連續性為第一種者，則 x 自左向右與自右向左移動至此點時，y 所取之值 $f(x-0)$ 與 $f(x+0)$ 不同或均與 $f(x)$ 異，於此，x 雖變動甚少，而 y 之變動不能亦相當的少，因而 P 所留之軌跡至此不能再連續而斷矣。

P 之軌迹（普通為一曲線），其形狀與位置，自為 $y=f(x)$ 所決定，故卽可視為此函數之代表。例如 $y=+\sqrt{a^2-x^2}$〔x 之區域以 $(-a, a)$ 一段為限，二界亦計入〕之代表，乃是一半圓，其半徑為 a 也。

讀者如已習過解析幾何學，則以上所云自甚明白。用曲線以表函數，於函數之屬性極為易見，如以前所云曲線之斷處亦卽是函數之不連續處，用此圖表法，則一函數之不連續處自一望可見矣。又如前節中之波氏定理（定理 2）用此圖表法亦易見；

蓋如一曲線無有斷處，則自横直線之上面至其下面，中間必有一點與横直線相交，於此 $y=0$ 也．(然須注意，本書內所云函數，對於 x 之一值亦祇有一 y 之值與之相當．)

仿前法，倘用三互相垂直之直線，則二自變數之函數 $z=f(x,y)$ 亦倘可作其幾何的圖解，於此，所得者非若前爲平面內之曲線，而爲空間內之曲面(或平面)矣．其詳姑從略．

第二章　微分算法

第一節　引申與微分

$y=f(x)$ 爲一函數。今使自變數之值 x 稍增加或減小成爲 $x+\triangle x$ ($\triangle x$ 可正或負)，則函數值亦相當的有增加或減小成爲 $y+\triangle y=f(x+\triangle x)$，而 $\triangle y=f(x+\triangle x)-f(x)$。$\triangle x$ 與 $\triangle y$ 之商，

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x},$$

名爲"差商"。

今設 $\{\triangle x_n\}$ 爲任何一級數，但 $lim\ \triangle x_n=0$. 倘 $\triangle x$ 依次遍取 $\{\triangle x_n\}$ 之一切項，而如 $x+\triangle x$ 均爲 x 區域內之值，則 $\triangle y$ 亦成爲一級數 $\{\triangle y_n\}$。其差商於是亦成爲一級數：

$$\frac{\triangle y_1}{\triangle x_1},\ \frac{\triangle y_2}{\triangle x_2},\ \frac{\triangle y_3}{\triangle x_3},\cdots\cdots$$

若無論 $\{\triangle x_n\}$ 爲何級數，祗須 $lim\ \triangle x_n=0$，此差商級數 $\left\{\frac{\triangle y_n}{\triangle x_n}\right\}$ 恆有極限值，且均相同，則此極限

値名爲 $y=f(x)$ 於 x 之"引申"(*Derivierte*),以 y' 或 $f'(x)$ 表之:

$$\lim_{\Delta x_n\to 0}\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}=y'=f'(x).$$

此符號 $f'(x)$ 爲法人拉格浪(*Lagrange*)所創用.

倘 $\{\Delta x_n\}$ 之項均小於 0,但 $\lim \Delta x_n=0$,而如 $f'(x)$ 存在,則可云 $f'(x)$ 爲"左方引申".反之,若 $\{\Delta x_n\}$ 之項均大於 0,但 $\lim \Delta x_n=0$,而 $f'(x)$ 亦存在,則此 $f'(x)$ 亦可云"右方引申".按前定義此左右方二引申必相等而後可.

萊伯尼茲(*Leibniz*)名引申 $f'(x)$ 與 Δx 之乘積 $f'(x)\Delta x$ 爲 $f(x)$ 於 x 之"微分",而以 $df(x)$ 或 dy 表之:

$$dy=df(x)=f'(x)\Delta x.$$

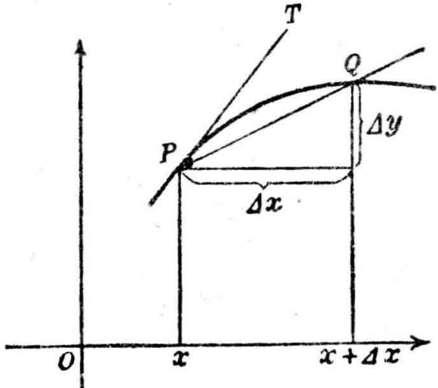
又爲雅觀計,此中之 Δx 亦寫之作 dx,視爲 x 之微分(按如 $f(x)=x$,則 $dy=\Delta x=dx$,故萊氏幷用入 dx 之符號).於是有 $df(x)=f'(x)dx$,或

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x),$$

因而引申 $f'(x)$ 可視爲二微分之商，故亦稱引申曰"微分商"。

倘一函數 $y=f(x)$ 於 x 之某值有 $f'(x)$ 存在，則云此函數於 x 之該值爲"可微分"者，不則謂之"不可微分"。核算一函數之引申或微分，總謂之"求微分"。

今試作其幾何圖解。如圖，$y=f(x)$ 之代表爲一



曲線。P 爲曲線上代表 x，$f(x)=y$ 之點，Q 則代表 $x+\triangle x$，$f(x+\triangle x)=y+\triangle y$ 之點。按三角學，可

知$\frac{\triangle y}{\triangle x}$等於 PQ 直線與橫實數線所作銳角之正切。今使 $\triangle x$ 之值繼續減小，則曲線上 Q 點卽向 P 點漸近，倘 $\triangle x$ 逼近於零，Q 亦卽逼近於 P，而 Q 與 P 幾相合爲一點。同時，PQ 直線之位置自亦漸移，至 Q 與 P 相合時，PQ 卽成爲 PT，而此 PT 直線，則卽是曲線在 P 點所有之切線也。因而知

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=f'(x)=\text{曲線上 } P \text{ 處切線與橫實數線所作角之正切。}$$

(按此處所云角，自指 P 處切線與橫實數線正方向間之角)。

由此可見求一函數之微分，與求其代表曲線上之切線，此二問題可相通。微分算法若何濫觴於幾何上之切線問題，觀此當能知一斑矣。

又如視 $y=f(x)$ 中之 x 爲時間，y 爲路程，則此函數可表物體在空間中之運動狀況，蓋所謂運動者，卽是空間中位置隨時間而變化之謂也。$\triangle x$ 爲時間之一片刻，$\triangle y$ 爲路之一小段，故 $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ 爲 $\triangle y$ 一小段上之速度。今使 $\triangle x$ 逼近於 0，則 $\triangle y$ 亦縮

成爲一點，因而$\frac{dy}{dx}=f'(x)$即爲當x時候該物體所有之速度，或云該物體在軌道上y點所有之速度．牛頓由力學入於微分算法，其關鍵蓋在此．

倘$y=f(x)$於x爲可微分者，則此函數於該值亦必連續，蓋

$$f(x+\triangle x)=f(x)+\triangle x\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x},$$

若 $lim\ \triangle x=0$，則

$$lim\, f(x+\triangle x)=f(x),$$

是卽於x有連續性也．

〔附註〕本書內雖亦偶用及無盡大∞，然不過視之爲一符號，不欲視爲數目，故不許取此爲極限值．若許$f'(x)$可取∞爲極限值，則一函數於某處雖爲可微分者，然於此不必亦連續．

然如一函數於x之某值爲連續者，則於此卻不必亦可微分，換言之，連續雖爲可微分之必要條件，然尙不充分，故僅有連續性，不必可微分也．最簡單之例，如

$$y=x\ sin\frac{1}{x}$$

一函數．此函數於$x=0$倘連續，蓋sin之值在-1

與 $+1$ 之間，若 $\lim x=0$，則 $\lim y=0=f(0)$。然此函數於 $x=0$ 無有引申可求，因

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\sin\frac{1}{\triangle x},$$

若 $\lim\triangle x=0$，則此 $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ 無有極限值可言，故此函數於 $x=0$ 雖尙連續，但無有引申。

又如 $y=+\sqrt{x}$ 於 $x=0$ 亦連續，然於此不可微分，因於 $x=0$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\sqrt{\triangle x}-\sqrt{0}}{\triangle x}=\frac{1}{\sqrt{\triangle x}}$$

故若 $\lim\triangle x=0$，卽無有極限值。

試求解於幾何上之"直覺"，則因曲線上可有點，於此曲線雖尙連續，但不能作其切線，故其函數於此雖連續然不可微分也。

雖然，一函數於 x 之區域內均連續，但有數處不可微分，則用以上之幾何直覺，尙不難得解。至若一函數於 x 之區域內均連續，但卻無有一處可微分，則直覺上難得其解，蓋一連續曲線無有一處有

切線，此不易明之事也。故桓司德拉(Weier strass)以前之數學家，大都以爲"凡連續函數必有引申"。最初發見此見解之誤者，爲桓司德拉氏，其著名之"桓氏函數"，即爲一無處可微分但於x區域內卻均連續的函數之好例。此種函數之例甚多，然其構造大都不甚簡單，故本書內不能論。

桓氏此種發見，實爲數學上莫大之供獻；蓋數學家中多有苟求便利，不問謹嚴，好用幾何直覺者，得此，足使人知直覺之不盡可靠，用解析方法所得者較足恃也。(然幾何的直覺亦自有其用處，要不可厚非。關於此，讀者可參觀法國名數學家潘加烈 H. Poincaré 所著之"科學之價值"一書第一章。)

由引申之概念，即不難得數基本規例如下：

1. 倘 $u=f(x)$，$v=g(x)$ 於x均有引申，則 $w=u+v$ 於x亦有引申，而

$$w'=u'+v'.$$

此規例不難知，蓋由

$$lim\frac{\triangle u}{\triangle x}=u',\quad lim\frac{\triangle v}{\triangle x}=v',\quad (lim\ \triangle x=0)$$

按第四節極限值相加之定理，得

$$lim\frac{\triangle u}{\triangle x}+lim\frac{\triangle v}{\triangle x}=lim\frac{\triangle u+\triangle v}{\triangle x}=lim\frac{\triangle w}{\triangle x}$$

$$=w'=u'+v'.$$

又，此規例不難擴充至任何多函數（但其數非無盡），如 $u=f(x)$，$v=g(x)$，$y=h(x)$，……爲若干函數，於 x 均有引申，則其和 $w=u+v+y+\cdots\cdots$ 於 x 亦有引申，而

$$w'=u'+v'+y'+\cdots\cdots$$

2. 倘 $u=f(x)$，$v=g(x)$於 x 均有引申，則 $w=u\cdot v$ 於 x 亦有引申，而

$$w'=u\cdot v'+v\cdot u'.$$

［證］ $\triangle w=(u+\triangle u)\ (v+\triangle v)-u\cdot v=u\cdot\triangle v+v\cdot\triangle w+\triangle u\cdot\triangle v$，故

$$\frac{\triangle w}{\triangle x}=u\frac{\triangle v}{\triangle x}+v\frac{\triangle u}{\triangle x}+\frac{\triangle u}{\triangle x}\cdot\frac{\triangle v}{\triangle x}\cdot\triangle x,$$

若 $lim\triangle x=0$，則此方程右端第三項等於 0，因而有 $w'=uv'+vu'$.

此規例亦可擴充至任何多函數：若 $w=u\cdot v\cdot y\cdots$

$\cdots z$，而如 u'，v'，……均存在，則

$$w' = u'\cdot v\cdot y\cdots\cdots z + u\cdot v'\cdot y\cdots\cdots z$$
$$+ u\cdot v\cdot y'\cdots\cdots z + \cdots\cdots + u\cdot v\cdot y\cdots\cdots z'.$$

3. 倘 $u=f(x)$，$v=g(x)$，於 x 均有引申，又於此 $v\neq 0$，則 $w=\dfrac{u}{v}$ 亦有引申，而

$$w' = \frac{v u' - u v'}{v^2}.$$

[證] $\triangle w = \dfrac{u+\triangle u}{v+\triangle v} - \dfrac{u}{v} = \dfrac{v\triangle u - u\triangle v}{v(v+\triangle v)}$.

因 $v\neq 0$，故祇須 $\triangle x$ 充分小，則 $\triangle v$ 亦充分小，因而 $v+\triangle v\neq 0$.於是可得：

$$\frac{\triangle w}{\triangle x} = \frac{v\dfrac{\triangle u}{\triangle x} - u\dfrac{\triangle v}{\triangle x}}{v\left(v+\dfrac{\triangle v}{\triangle x}\cdot\triangle x\right)},$$

若 $lim\,\triangle x=0$，則右端分母內第二項成 0，故得上所列之式.

4. 倘 $y=f(x)$ 於 x 有引申，$z=\varphi(y)$ 於 $y=f(x)$ 亦有引申，則複合函數 $z=\varphi(f(x))=F(x)$ 於 x 亦有引申，而

$$F'(x)=\varphi'(y)f'(x).$$

[證] 因 $z=\varphi(y)$於 y 有引申,故於 $lim\ \triangle y=0$,

$$\frac{\triangle z}{\triangle y}=\varphi'(y)\quad 或\ \triangle z=\varphi'(y)\triangle y.$$

因而得

$$\frac{\triangle z}{\triangle x}=\varphi'(y)\frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

照所設,$y=f(x)$於 x 亦有引申,故 $lim\triangle x=0$時,卽得 $F'(x)=\varphi'(y)f'(x)$.

此規例或倘有可詳爲討論處,今姑從略. 又,此規例可擴充之於任何多函數(其數亦有盡):

倘 $z=f(y)$, $y=g(u)$, $u=h(v)$,……

而如 $f'(y)$, $g'(u)$,……均存在,則

$$z'=f'(y)g'(u)h'(v)\cdots\cdots$$

5. 倘 $y=f(x)$於 x 有引申,且不等於 0, 而如此函數可倒,則其倒函數 $x=\varphi(y)$ 於 $y(=f(x))$ 亦有引申,而

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

［證］ $\dfrac{\varphi(y+\triangle y)-\varphi(y)}{\triangle y}=\dfrac{\triangle x}{\triangle y}=\dfrac{1}{\dfrac{\triangle y}{\triangle x}}.$

若 $lim\ \Delta y=0$，則按第一章第七節定理 7，得 $lim\ \triangle x=0$，故若 $f'(x)$ 存在且不等於 0，則卽得前式。

第二節 根本定理

設如 c 爲一常數，今視之爲一特例之函數，則此函數 $y=c$ 於自變數之任何值其值有定，故 Δy 恆等於 0，因而按引申之概念，常數之引申恆等於 0.

倘 $y=x$，則 $\triangle y$ 恆等於 $\triangle x$，故 x 之引申等於 1.

又如 a 爲一常數，則不難知

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x),$$

此可由前節基本規例 2 推得，然亦可直接由引申之概念得之，蓋（第一章第四節定理 9）

$$(a\cdot f(x))'=\frac{a\cdot f(x+\triangle x)-a\cdot f(x)}{\triangle x}$$

$$=a\cdot\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=a\cdot f'(x)$$

$$(lim\ \triangle x=0).$$

今有一重要定理如下：

定理 1.——老雷氏定理. 設 $f(x)$ 於 a 及 b 均連續，於 a, b 間之一切值均有引申．又，$f(a)=f(b)$，則有一值 c，在 a 與 b 之間，於此 $f'(c)=0$.

〔證〕 倘此函數為一常數，則其引申恆為 0，定理中所云者不待言可知，故於此此定理瑣屑不足道．緣此，可假定 $f(x)$ 非為一常數．

按所設，知 $f(x)$ 於 (a, b) 段之全部均連續，故由第一章第七節桓氏定理，可知 $f(x)$ 於 (a, b) 中有一最大值 M 以及一最小值 m.

今如 $f(c)=M$, $f(d)=m$，則按所設 $f(a)=f(b)$，不難知 c 與 d 二值中必有其一在 a 與 b 之中間，與 a 及 b 均異；蓋如不然，則無論 $c=a$, $d=b$, $(c=b$, $d=a)$ 或 $c=d=a$ $(c=d=b)$，均可得 $M=m$，而按最大值與最小值之意義，$f(x)$ 所取之值又不能在 M 及 m 以外，是卽 $f(x)$ 於 x 之任何值〔在 (a, b) 段內者〕其值固定，換言之，$f(x)$ 為一常數．此不獨違所設 $f(x)$ 非常數，且 $f(x)$ 既為常數，則

定理中所云無待言矣；故知 c,d 二值中必有其一與 a 及 b 均異。

今如 c 在 a,b 之間，則因 $f(c)=M$，故 $f(c+h)-f(c)$ 以及 $f(c-h)-f(c)$ 均爲負者［於此 h 爲一正數，$c+h$ 及 $c-h$ 均在 (a,b) 段內］。因而

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

不能取正值，故於 $lim\, h=0$，$f'(c)\leqq 0$. 仿此，又可知

$$\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$$

不能取負值，故 $f'(c)$ 又須 $\geqq 0$. 從可知

$$f'(c)=0.$$

若 d 在 a 與 b 之中間，則其論證亦同，因而該定理已證明。

此定理首見於法國數學家老雷 (*M. Rolle*, 1652 —1719) 氏之"代數學"中(其形式稍不同，意義亦較狹)，故即名之爲老雷氏定理。由此，即可得

定理 2.——考喜氏定理. $f(x)$ 與 $g(x)$ 於 a 及 b 均連續,於 a,b 間一切值均有引申.又,$g'(x)$ 於 a,b 間一切值均不等於 0, $g(b) \neq g(a)$, 則 a,b 之間必有一值 c,於此

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

[證] 今設

$$-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=k,$$

則不難知

$$\varphi(x)=f(x)+k\cdot g(x)$$

一函數於老雷氏定理中之一切條件均能滿足(參觀第一章第七節定理 1 及本章第一節規例 1),故可應用該定理於 $\varphi(x)$,知 a,b 間必有一值 c,於此

$$\varphi'(c)=f'(c)+k\cdot g'(c)=0.$$

因所設 $g'(c) \neq 0$,故可用此除即得定理中之式.

〔附註〕 此定理中最後二假設, 即 $g'(x)$ 無有爲 0 處以及 $g(b) \neq g(a)$,此二者實相同,後者可得自前者.其理見下.

此定理首爲法國數學家考喜 (*Cauchy*) 所證明,故稱考喜定理.若於此中設 $g(x)=x$, 則因 $g'(x)$

$=1$，卽得拉格浪（*Lagrange*）氏定理，或稱微分算法上之"平均值定理"：

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \quad (c\text{ 在 } a,b\text{ 間})$$

此平均值定理於微分算法上極重要，故亦有稱之爲"根本定理"者，然實爲考氏定理之特例，而他方面又老氏定理之結果也.

試應用此平均值定理於考喜定理中之 $g(x)$，則有

$$g(b)-g(a)=(b-a)g'(c) \quad (c\text{ 在 } a,b\text{ 間})$$

所以若 $g'(x)$ 於 a,b 間無有等於 0 處，則 $g(b)$ 自不能等於 $g(a)$，故該定理中最後二假設相同，後者可得自前者（按以上一切研究，自均假定 a 與 b 異，不則無有意義可言）.

前已知常數之引申恆爲 0，由平均值定理，則可知一函數 $f(x)$ 之引申恆爲 0 者，此函數亦必是一常數. 蓋如 a,b 爲任何二值（在其自變數區域內者），則因 $f'(x)$ 恆爲 0，故

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)=0,$$

卽是　　　　$f(b)=f(a)$.

此於任何二數均然,故 $f(x)$ 是常數.

倘 $f(x)$ 與 $g(x)$ 僅相差一常數,例如 $g(x)=f(x)+c$, 則因常數之引申恆爲 0, 故 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 相等.由以前,亦可知倘 $f'(x)=g'(x)$, 則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 衹相差一常數.蓋 $g'(x)-f'(x)$ 恆等於 0,按前所云卽知 $g(x)-f(x)$ 是一常數.

設如考喜定理中二函數於 $x=a$ 均等於 0, $f(a)=g(a)=0$,則可得:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\quad(c\text{ 在 }a\text{ 與 }x\text{ 之中間})$$

因 c 在 a 與 x 之中間, 故若 x 向 a 收斂,則 c 自亦向 a 收斂,於是有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

然 $f(x)$ 與 $g(x)$ 於 a 均連續,故由 $\lim x=a$, 可得 $\lim f(x)=f(a)$, $\lim g(x)=g(a)$, 因而

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

若 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 於 c 均連續,則可簡單設

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

此卽著名之"霍氏無定式規例"(*L' Hospitalsche Regel*),蓋 $f(x)$, $g(x)$ 於 $x=a$ 均成爲 0, $\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{0}$ 無有意義,按前規例卽可求其極限値也.倘 $f(x)$ 及 $g(x)$ 於 $x=a$ 均成爲無盡大 ∞,則此規例亦可用之.

倘若平均値定理內之函數 $f(x)$,其引申 $f'(x)$ 於 (a, b) 內均有盡,則可有一正數 M 如是大,俾 $|f'(x)|$ 於 (a,b) 均小於 M. 於是可得

$$|f(x_2)-f(x_1)|<M\cdot|x_2-x_1|,$$

於此,x_2 及 x_1 爲 (a, b) 內任何二數。此不等式名爲"李氏條件"(*Lipschitzsche Bedingung*),解析學中用之極多.

第三節　極端値問題

一函數 $f(x)$ 之引申 $f'(x)$ 仍爲一函數(倘 $f'(x)$ 爲常數,則爲一特例函數),故第一節中之微分求

法仍可應用於 $f'(x)$. 倘 $f'(x)$ 之引申存在，則此引申以 $f''(x)$ 表之，稱爲 $f(x)$ 之第二次引申. 其微分式如下：

$$d\,f'(x)=f''(x)\,dx.$$

但 $f'(x)=\dfrac{d\,f(x)}{dx}$, 故有 $dd\,f(x)=f''(x)\,dxdx$. 若 dd 以 d^2 表之，又視 dx 爲常數，因而 $dxdx=(dx)^2=dx^2$，則即得

$$d^2f(x)=f''(x)\,dx^2 \text{ 或 } \frac{d^2f(x)}{dx^2}=f''(x).$$

仿此，$f''(x)$ 之引申以 $f'''(x)$ 表之，稱爲 $f(x)$ 之第三次引申. 廣之，$f(x)$ 之第 n 次引申可以 $f^{(n)}(x)$ 表之，其微分式爲 $d^nf(x)=f^{(n)}(x)\,dx^n$，或

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n}=f^{(n)}(x).$$

例如 x^n (n 爲整正數) 之第一次引申按第一節規例 2 可得 nx^{n-1} (於規例 2 中設 $n=v=y=\cdots\cdots=x$ 即得)，若再將此規例應用於 x^{n-1}，求其引申，可得 $(n-1)\,x^{n-2}$；而因 n 爲一常數，於求微分時仍保存，故 nx^{n-1} 之引申爲 $n(n-1)\,x^{n-2}$，此即 x^n 之第

二次引申也。仿此，并可知 x^n 之第 n 次引申爲一常數，卽

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots2\cdot1=n!$$

一函數 $f(x)$ 於一段 $(a,\ b)$ 內所取之最大值及最小值，總謂之該函數之極端值．此極端值問題，亦爲發見微分算法之導源；今略論之．

設如 c 爲 a 與 b 中間之一值，於此 $f(x)$ 取極端值，則爲研究精密計，可將 $(a,\ b)$ 段如是縮小，俾 $f(x)$ 僅於 c 取極端值．於此，自亦先假定 (a,b) 內值均屬於 x 之區域內。倘 $f'(c)$ 存在，則如前節定理 1 之證內已指出，$f'(c)$ 必等於 0. 蓋如不然，若 $f'(c)>0$，則 x 與 c 之差充分小時，必

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0,$$

此卽 $f(x)-f(c)$ 與 $x-c$ 之號爲正爲負相同。因而 $(a,\ b)$ 內可有一值 $x_1<c$，於此 $f(x_1)<f(c)$，又可有一值 $x_2>c$，於此 $f(x_2)>f(c)$，是 $f(c)$ 非爲極端值矣．仿此，可知 $f'(c)$ 不能 <0. 故知若 $f(c)$ 爲極端值，則必 $f'(c)=0$. 然反之，由 $f'(c)=0$ 卻不能

斷定$f(c)$爲極端值.最簡單之例如$f(x)=x^3$之引申爲$3x^2$,於$x=0$,$3x^2$亦爲0,然x^3於$x=0$并非極端值,蓋任取一含有0之段,x^3於$x=0$決非極端值也.因而$f'(c)=0$雖爲$f(c)$爲極端值之必要條件,然非充分條件.

如前所明,若$f'(x_1)>0$,則x與x_1之差相當小時,$x-x_1$與$f(x)-f(x_1)$之號相同,故如$x>x_1$,卽$f(x)>f(x_1)$,若$x<x_1$,亦卽$f(x)<f(x_1)$.反之,倘$f'(x_1)<0$,則亦可知x與x_1之差相當小時,$x-x_1$與$f(x)-f(x_1)$之號恆相反,故由$x>x_1$,必得$f(x)<f(x_1)$,由$x<x_1$,必$f(x)>f(x_1)$.簡言之,亦可曰:若$f'(x_1)>0$,則$f(x)$於$x=x_1$爲增加的,若$f'(x_1)<0$,則$f(x)$於$x=x_1$爲減小的.

今仍論以上之極端值$f(c)$.倘$f(x)$於$x=c$不僅有第一次引申,兼有第二次引申$f''(c)$,則可有三事,$f''(c)>0$,$f''(c)<0$,或$f''(c)=0$.倘$f''(c)>0$,則按前所云,知$f'(x)$於$x=c$爲增加的.若$f'(c)=0$,則x與c之差相當小時,由$x>c$,可得$f'(x)$

>0，由 $x<c$，可得 $f'(x)<0$. 由此即可知 $f(x)$ 於 $x=c$ 實爲極端值，且可知其爲最小值。蓋若 $x>c$，則由 $f'(x)>0$ 可知 $f(x)$ 於此爲增加的，即是，由 $x>c$，必得 $f(x)>f(c)$. 若 $x<c$，則 $f(x)$ 於此又爲減小的，故由 $x<c$，可得 $f(x)>f(c)$. 是即無論 x 大於或小於 c，$f(x)$ 均大於 $f(c)$，故 $f(c)$ 爲此附近內之最小值。若 $f''(c)<0$，而 $f'(c)=0$，則其關係恰相反，故於此 $f(c)$ 爲最大值。

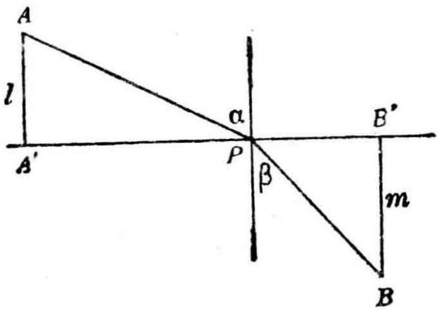
倘 $f'(c)=0$，$f''(c)$ 亦爲 0，則用以上之論證法即不能決定 $f(c)$ 是否爲極端值；於是須求 $f(x)$ 之第三次引申。若 $f'''(c)$ 存在，而大於 0，則按適纔所論，$f'(c)$ 爲 $f'(x)$ 之最小值，故於 $x\gtrless c$，$f'(x)$ 均 >0，是即無論 $x>$ 或 $<c$，$f(x)$ 於此均爲增加的，因而由 $x_1<c<x_2$，可得 $f(x_1)<f(c)<f(x_2)$，換言之，$f(c)$ 非爲極端值。同此理，可證明若 $f'''(c)<0$，$f(c)$ 亦非極端值。若 $f'''(c)=0$，則此問題又不能決，必須再藉高次引申之助。然其理與上所述者無多異，讀者不難自爲論證，故不再及。今將關於此之普通定

理列下：

今如$f'(c)=f''(c)=f'''(c)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(c)=0$，但$f^{(n)}(c)\neq 0$. 倘$n$爲一奇數，則$f(c)$非爲極端值，於此，$f(c)$隨$f^{(n)}(c)$之$>$或$<0$而爲增加的或減小的。倘$n$爲偶數，則於$f^{(n)}(c)<0$時$f(c)$爲最大值，於$f^{(n)}(c)>0$，$f(c)$爲最小值。

此普通定理之可靠甚爲明白，其證亦易用所謂"完全歸納法"(自n推至$n+1$)得之，讀者可自爲，今姑從略。

十七世紀之中，法人范蔴(*Fermat*)研究一問題，屬於此處所論極端值者。范氏先立一原則，以爲自然界之現象，多循最經濟之途進行，故如一光線自



一點至他點,其所用時間當爲最小者. 今設 $A'B'$ 線爲兩種不同傳光物之界,光線在 $A'B'$ 之上其速度爲 c_1, 在 $A'B'$ 之下爲 c_2. 光線自 A 至 B 中間經過 $A'B'$ 上一點 P. 照以上所立經濟原則, 此 P 點之位置必如是決定, 俾光線自 A 經 P 至 B 時, 其所用時間爲最小者;換言之,P 必如是決定,俾

$$\frac{AP}{c_1}+\frac{PB}{c_2}$$

取最小值. 今設 $AA'=l$, $A'P=x$, $A'B'=h$, $B'B=m$,則問題在於求

$$f(x)=\frac{1}{c_1}\sqrt{l^2+x^2}+\frac{1}{c_2}\sqrt{m^2+(h-x)^2}$$

一函數之最小值.

$f(x)$ 之引申,不難知其爲

$$f'(x)=\frac{x}{c_1\sqrt{l^2+x^2}}+\frac{x-h}{c_2\sqrt{m^2+(h-x)^2}}$$

(讀者可按第一節基本規例 1 及 4 自求之,以資練習). $f'(x)$ 於 $x=0$ 爲負者,於 $x=h$ 則爲正者, 而 $f'(x)$ 於 $(0, h)$ 之全部均連續,故按第一章第七節

波氏定理，必有一值在 0 與 h 之間，於此 $f'(x)$ 等於 0. 又不難見 x 之值自 0 增加至 h 時，$f'(x)$ 之值亦隨之恆增加．今如 $f'(x)$ 於 $x=x_0(0<x_0<h)$ 等於 0，則於 $x<x_0\ f'(x)<0$，於 $x>x_0\ f'(x)>0$，因而如前所明，x_0 實為 $f(x)$ 之最小值．如圖，可見

$$f'(x)=\frac{\sin\alpha}{c_1}-\frac{\sin\beta}{c_2},$$

故於 $x=x_0$ 得 $$\frac{\sin\alpha}{c_1}=\frac{\sin\beta}{c_2},$$

此即所謂折光定律也．

第四節　展函數為級數法

設 $f(x)$ 為一函數，其自變數之區域為 (a, b) 段．試將此段均分成為 n 小段，并設

$$\frac{b-a}{n}=h$$

則每小段二界之差均為 h. 今可作其函數值：

$f(a)$，$f(a+h)$，$f(a+2h)$，$f(a+3h)$，…………

$f(a+nh)=f(b)$．倘設 $f(a+h)-f(a)=\triangle f(a)$，

$f(a+2h)-f(a+h)=\triangle f(a+h)$, $f(a+3h)-f(a+2h)=\triangle f(a+2h)$,等等,則由原來$(n+1)$個函數值,可得 n 個差:

$$\triangle f(a),\ \triangle f(a+h),\ \triangle f(a+2h)\ \cdots\cdots\triangle f(a+\overline{n-1}h)$$

按以上 $\overline{n-1}$ 卽爲$(n-1)$.

仿此,倘設 $\triangle f(a+h)-\triangle f(a)=\triangle^2 f(a)$, $\triangle f(a+2h)-\triangle f(a+h)=\triangle^2 f(a+h)$,等等,則又可得一列差:

$$\triangle^2 f(a),\ \triangle^2 f(a+h),\ \triangle^2 f(a+2h),\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ \triangle^2 f(a+\overline{n-2}h)$$

繼續用此法,可將所得者匯列之如下:

$$\begin{array}{c}
f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h),\ f(a+3h),\cdots\cdots f(b)\\
\triangle f(a),\triangle f(a+h),\triangle f(a+2h),\cdots\cdots\triangle f(a+\overline{n-1}h)\\
\triangle^2 f(a),\ \triangle^2 f(a+h),\triangle^2 f(a+2h),\cdots\cdots\\
\triangle^3 f(a),\triangle^3 f(a+h),\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\triangle^{n-1} f(a),\ \triangle^{n-1} f(a+h)\\
\triangle^n f(a).
\end{array}$$

由以上，不難見

$$\triangle^2 f(a)=\triangle f(a+h)-\triangle f(a)$$

$$=f(a+2h)-f(a+h)-f(a+h)$$

$$=f(a+2h)-2f(a+h)+f(a),$$

$$\triangle^3 f(a)=f(a+3h)-3f(a+2h)+3f(a+h)$$

$-f(a)$，等等。

若應用代數學上"二項式係數"之符號，設

$$\binom{r}{k}=\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot k},$$

則卽可得一普通式如下：

$$\triangle^r f(a)=f(a+rh)-\binom{r}{1}f(a+\overline{r-1}h)$$

$$+\binom{r}{2}f(a+\overline{r-2}h)-\cdots+(-1)^r f(a).$$

其證不難用"完全歸納法"得之。蓋如假定此式於 k 已通用，則於 $k+1$ 亦必通用：因 $\triangle^{k+1}f(a)=\triangle^k f(a+h)-\triangle^k f(a)$，若於 k 已通用上式，卽可得

$$\triangle^{k+1}f(a)=f(a+\overline{k+1}h)-\binom{k}{1}f(a+kh)$$

$$+\binom{k}{2}f(a+\overline{k-1}h)$$

$$-\cdots+(-1)^k f(a+h)$$

$$-f(a+kh)+\binom{k}{1}f(a+\overline{k-1}h)$$

$$-\cdots+(-1)^{k+1}f((a).$$

由$\binom{k+1}{l}=\binom{k}{l}+\binom{k}{l-1}$，可知確是

$$\triangle^{k+1}f(a)=f(a+\overline{k+1}h)-\binom{k+1}{1}f(a+kh)$$

$$+\binom{k+1}{2}f(a+\overline{k-1}h)-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{k+1}f(a).$$

然前已知於 3 已通用，故於 4，於 5，等等均通用，既於 r 爲任何數均合，因而以上是一普通式。

由以前所列表，又不難見：

$$f(a+h)\ =f(a)+\triangle f(a),$$

$$f(a+2h)=f(a)+2\triangle f(a)+\triangle^2 f(a)\text{，等等。}$$

若用二項式係數，亦可得一普通式：

$$f(a+rh)=f(a)+\binom{r}{1}\triangle f(a)+\binom{r}{2}\triangle^2 f(a)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此式之可靠易見，讀者試任設 r 為何數，當不難證實．其證亦可用完全歸納法藉代數上二項式係數之理得之，但為避運算之煩，姑從略。

今如 $f(x)$ 於 (a, b) 中之一切值均有引申至 n 次，則按平均值定理（其條件均滿足）：

$\triangle^k f(a)=\triangle^{k-1} f(a+h)-\triangle^{k-1} f(a)=h\triangle^{k-1} f'(x_1)$，於此 x_1 為 a 與 $a+h$ 間之值．然

$$\triangle^{k-1} f(x)=\triangle^{k-2} f(x+h)-\triangle^{k-2} f(x),$$

卽 $$\triangle^{k-1} f'(x)=\triangle^{k-2} f'(x+h)-\triangle^{k-2} f'(x),$$

故 $$\triangle^{k-1} f'(x_1)=\triangle^{k-2} f'(x_1+h)-\triangle^{k-2} f'(x_1)$$

試再用平均值定理於此式，卽得

$$\triangle^{k-1} f'(x_1)=h\triangle^{k-2} f''(x_2)$$

因而 $$\triangle^k f(a)=h^2\triangle^{k-2} f''(x_2),$$

於此 x_2 為 x_1 與 x_1+h 間之值，亦卽 a 與 $a+2h$ 間之值．仿此方法，反覆應用平均值定理，可普通得

$$\triangle^k f(a)=h^k f^{(k)}(x_k) \qquad (a<x_k<a+kh)$$

將此值代入以上普通式(1)，卽有

$$f(b)=f(a)+\binom{n}{1}\triangle f(a)+\binom{n}{2}\triangle^2 f(a)+\cdots\cdots$$

$$=f(a)+\binom{n}{1}hf'(x_1)+\binom{n}{2}h^2f''(x_2)+\cdots\cdots$$

然

$$\binom{n}{r}h^r=\frac{nh(nh-h)(nh-2h)\cdots(nh-\overline{r-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot r}$$

$$=\frac{(b-a)^r}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right),$$

故如假定n可大於任何大之數（或云$n\to\infty$），即假定$f(x)$於(a,b)中一切引申均有，則於$n\to\infty$時，$\lim h=0$，$\lim rh=0$，因而$\lim x_r=a$

即 $$\lim\binom{n}{r}h^rf^{(r)}(x_r)=\frac{(b-a)^r}{r!}f^{(r)}(a)。$$

於是前式於$n\to\infty$時，成為

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots$$

或簡寫之作 $$f(b)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

(按尋常規定$0!=1$，又$f(x)$之0次引申即$f(x)$本身)。

第一章第四節中稱一列無盡多之數目，其構造有一定規律者，謂之一“級數”。倘用加號將其項連之，如

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots, \text{或} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

則得一"無盡級數之和",或"級數之和"。為簡便計,此"級數之和"亦稱為"級數",蓋用時有號為別,當不致相混也。如是,則以上所得者,乃是一級數,或云將 $f(b)$ 展成為一無盡級數。最初發見此展法者為英人泰羅(*Taylor*, 1685—1731),故此級數即名"泰氏級數"。

〔附註〕 本書內引申之值概限於有盡者,但用泰氏級數時,須加一條件,即,一切引申之值在 (a,b) 段內均小於一固定之正數。

第五節 多變數函數,未展開函數

為簡單計,多變數函數姑以二自變數者為限,其多於二自變數者不再論。

今設 $z=f(x,y)$ 為一二自變數之函數,x 之區域為 (a, b),y 之區域為 (c, d)。試使 y 取 (c, d) 內一固定值,x 於其區域內變動時,y 之值恆固定不變,則 z 可視為一單變數 x 之函數,因 y 於此無異於

一常數也.z視為單獨x之函數時,倘有引申存在,則此引申名為"偏引申",其符號作

$$z_x = f_x(x, y) \text{或} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

仿此,亦可使x取固定值,視z為單獨y之函數,則其偏引申作

$$f_y(x, y) \text{或} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

倘$f_x(x, y)$仍可求其x及y之偏引申,則有

$$f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y) \text{或} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

同此,$f_{yx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$或$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

之意義當不難解.其他更高次之引申亦可類推.

〔附註〕 第一節中曾指出,一單變數之函數$y=f(x)$倘於x之某值為可微分者,則此函數於x之該值亦必連續.此於二變數之函數$z=f(x, y)$即不能通用,z於x, y之某值,其偏引申可均存在,然於此z之本身卻可不連續,此則須注意者.

今試一研究此式:

$$\frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)}{hk} = (A).$$

倘設
$$\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}=\varphi(x),$$

則
$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=(A),$$

因而若 $\varphi(x)$ 於 x 之"附近"有引申，則可應用平均值定理，得

$$(A)=\varphi'(x_1)=\frac{f_x(x_1,y+k)-f_x(x_1,y)}{k},(x<x_1<x+h)$$

倘 $f_x(x_1,y)$ 於 y 之附近亦有引申，則上式仍可應用平均值定理，而有

$$(A)=\frac{f_x(x_1,y+k)-f_x(x_1,y)}{k}=f_{xy}(x_1,y_1),$$

於此 $x<x_1<x+h$, $y<y_1<y+k$.

仿此，若設

$$\psi(y)=\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

亦卽可得

$$(A)=\psi'(y_2)=f_{yx}(x_2,y_2)\begin{cases}x<x_2<x+h,\\ y<y_2<y+k.\end{cases}$$

若 $f_{xy}(x,y)$ 及 $f_{yx}(x,y)$ 於 x, y 爲連續者，則於 $\lim h=0$, $\lim k=0$，卽可得

$$\lim f_{xy}(x_1, y_1) = f_{xy}(x, y),$$

$$\lim f_{yx}(x_2, y_2) = f_{yx}(x, y).$$

因而有 $$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

或 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (z = f(x, y))$$

將以上結果總括之,可云:

倘 $f_{xy}(x, y)$ 及 $f_{yx}(x, y)$ 於 x, y 之附近存在,并於 x, y 爲連續者,則 $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

$f_x(x, y)$ 與 h 之乘積 $f_x(x, y)h$ 謂之 $f(x, y)$ 之"x 偏微分";仿此,$f_y(x, y)k$ 爲"y 偏微分"。此二偏微分之和,稱爲 $f(x, y)$ 之"全微分",以 $df(x, y)$ 表之:

$$df(x, y) = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k.$$

若仿第一節中之例,設 $h = dx$, $k = dy$ (其理由亦相同)則亦可寫作:

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy.$$

其高次微分,亦可仿此類推,例如

$$d^2 f(x, y) = f_{xx}dx^2 + f_{xy}dxdy + f_{yx}dydx + f_{yy}dy^2,$$

(以上爲簡便計,$f_x(x, y)$ 寫作 f_x)或若 $f_{xy} = f_{yx}$,即

$$d^2f(x,y)=f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2,$$

等等。

單變數函數方面之運算規例，均可無多變動擴充至此。又，單變數函數方面之平均值定理，極端值標準，以及級數展法等，於此均有相當者；今將平均值定理及泰氏級數之式列下，其證則從略，以免贅煩：

平均值定理. 倘 $f(x,y)$ 於 $(a,a+h;b,b+k)$ 內有連續的第一次引申，則

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)$$

$$=hf_x(x_1,y_1)+kf_y(x_1,y_1)\quad\begin{cases}a<x_1<a+h,\\ b<y_1<b+k.\end{cases}$$

泰羅級數. 倘 $f(x,y)$ 於 $(a,a+h;b,b+k)$ 中一切偏引申均有，且於此均連續，其值亦均小於一固定之數，則

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^nf(a,b)}{n!},$$

於此，已設 $h=dx$, $k=dy$.

第一章第六節中已提及未展開函數，即一方程 $F(x, y)=0$ 決定 y 爲 x 之函數，但未照 y 解出者。倘對於 x 之一值，y 有數値可取，則宜規定 y 於此中恆取一某種値，其餘不計入 y 之區域內。

設 $F(x, y)=0$ 爲一未展開函數。今姑視 $F(x, y)$ 爲一二自變數之函數，則可試求其偏引申 $F_x(x, y)$ 及 $F_y(x, y)$. 倘此二偏引申於 x, y 之某値及其附近均存在，且均連續，而如對於 $x+h, y+k$ 與之相當（二値均在以上所云該附近內），俾

$$F(x+h, y+k)=0,$$

則按平均値定理，有

$$F(x+h, y+k)-F(x, y)=h F_x(x_1, y_1)+k F_y(x_1, y_1)$$

$=0$，於此 $x<x_1<x+h$, $y<y_1<y+k$. 若 $F_y(x, y)$ 於此不等於 0，即可得

$$\frac{k}{h}=-\frac{F_x(x_1, y_1)}{F_y(x_1, y_1)}.$$

因 $F_x(x, y)$ 及 $F_y(x, y)$ 於該處連續，故於 $\lim h=0$, $\lim k=0$，有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,\ y)}{F_y(x,\ y)},$$

此卽未展開函數之微分求法也.

例如 $F(x,\ y)=a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$ ($a,\ b$ 爲常數, y 可規定其祇取正或負値), 則

$$F_x(x,\ y)=2b^2x,\quad F_y(x,\ y)=2a^2y,$$

故
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

若將 $F(x,\ y)$ 展開, 照 y 解出, 然後求之, 所得結果亦同, 讀者試自明之.

今如 $F(u,\ v)$ 爲一二自變數之函數, 其變數區域爲 $(\alpha,\ \beta;\ \gamma,\ \delta)$. 又, $f(x,\ y)$ 及 $g(x,\ y)$ 爲二二自變數之函數, 其變數區域相共, 爲 $(a,\ b;\ c,\ d)$. 當 $x,\ y$ 於其區域內變動時, $f(x,\ y)$ 與 $g(x,\ y)$ 恆滿足以下條件:

$$\alpha\leqq f(x,\ y)\leqq\beta;\qquad \gamma\leqq g(x,\ y)\leqq\delta,$$

則可設 $u=f(x,\ y)$, $v=g(x,\ y)$, $z=F(u,\ v)$, 俾 z 成爲一複合函數:

$$z=F(u,\ v)=F(f(x,\ y),\ g(x,\ y)),$$

其變數區域爲$(a, b; c, d)$.

關於此複合函數之連續性，其理與單變數函數方面者同，姑不再論．今試求其微分式．

倘 f_x, f_y, g_x, g_y 於 $(a, b; c, d)$ 內均存在，F_u, F_v 於$(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$內亦均存在，且均連續，則可求 z 之 x 及 y 偏引申．今設 x, y 及 $x+h, y$ 爲$(a, b; c, d)$內二對值，與此相當者爲

$u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$; $u+\triangle u=f(x+h, y)$,

$v+\triangle v=g(x+h, y)$; 以及 $z=F(u, v)$,

$z+\triangle z=F(u+\triangle u, v+\triangle v)$ 三對值．

但
$$\begin{aligned}\triangle z &= F(u+\triangle u, v+\triangle v)-F(u, v)\\ &=\{F(u+\triangle u, v)-F(u, v)\}\\ &\quad+\{F(u+\triangle u, v+\triangle v)-F(u+\triangle u, v)\},\end{aligned}$$

而按平均值定理(此處可以應用)：

$$F(u+\triangle u, v)-F(u, v)=\triangle u\, F_u(u_1, v),$$

$F(u+\triangle u, v+\triangle v)-F(u+\triangle u, v)=\triangle v\, F_v(u+\triangle u, v_1)$，於此，$u_1$ 及 v_1 滿足此條件：

$$u<u_1<u+\triangle u,\quad v<v_1<v+\triangle v.$$

故可得

$$\frac{\triangle z}{h}=\frac{\triangle u}{h}F_u(u_1, v)+\frac{\triangle v}{h}F_v(u+\triangle u, v_1).$$

今使 h 向 0 收斂，則

$$lim\frac{\triangle u}{h}=u_x=f_x,\quad lim\frac{\triangle v}{h}=v_x=g_x,$$

按假定，既 f_x, g_x 均存在，故於 $lim\ h=0$，亦必 $lim\ \triangle u=0$, $lim\ \triangle v=0$; 又按假定 F_u 及 F_v 均連續，故由 $lim\ \triangle u=0$, $lim\ \triangle v=0$，又可得

$$F_u(u_1, v)=F_u(u, v),$$

$$F_v(u+\triangle u, v_1)=F_v(u, v),$$

所以 $$\frac{\triangle z}{h}=f_xF_u+g_xF_v \quad (lim\ h=0)$$

或即是 $$z_x=F_x=f_xF_u+g_xF_v.$$

仿此，不難得：

$$z_y=F_y=f_yF_u+g_yF_v.$$

於是即可知 z 之微分 dz 爲

$$\begin{aligned}dz&=z_xd_x+z_ydy=\\&(F_uf_x+F_vg_x)dx+(F_uf_y+F_vg_y)dy\\&=F_u(f_xdx+f_ydy)+F_v(g_xdx+g_ydy),\end{aligned}$$

此中$f_x dx+f_y dy=du$, $g_x dx+g_y dy=dv$,故

$$dz=F_u du+F_v dv,$$

亦與以前之式合.

其他高次微分亦可類推,茲不再及.

第六節 雜例

1. 代數函數之微分求法. 試一論 $y=x^n$ 一函數. 設n為一正整數,則如第三節中已偶示及,可應用第一節之基本規例2,得$y'=nx^{n-1}$. 設n為一負整數,例如$n=-m$, 則$y=x^n=\dfrac{1}{x^m}$,因而按第一節基本規例2(常數之引申為0),亦得

$$y'=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}.$$

設$n=0$, 則0一數宜不計入x之區域, 於是y恆等於1,其引申恆等於0, 故亦可設$y'=nx^{n-1}=0$. $x^{-1}=\dfrac{0}{x}=0$. 又設n為任何一有理數$n=\dfrac{r}{s}$, 於此r及s均為整數,s為正者,則

$$y=x^n=\left(x^{\frac{1}{s}}\right)^r.$$(x之區域有時須加限制)

試設 $x^{\frac{1}{s}}=u$, 卽得 $y=u^r$, 因而

$$\frac{dy}{du}=ru^{r-1}$$

由 $x^{\frac{1}{s}}=u$, 復可得 $x=u^s$, 或 $x-u^s=0$. 應用未展開函數微分求法(見前節)卽得:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{su^{s-1}}.$$

按第一節基本規例 4:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{ru^{r-1}}{su^{s-1}}=n\frac{u^{r-1}}{u^{s-1}}$$

$$n\cdot u^{r-s}=n\cdot\left(x^{\frac{1}{s}}\right)^{r-s}=n\cdot x^{\frac{r-s}{s}}=nx^{\frac{r}{s}-1}=nx^{n-1}.$$

從可知 n 爲任何一有理數, x^n 之引伸恆爲 nx^{n-1}, 惟 x 之區域有時須加以限制.

得此式, 幷藉第一節中諸基本規例之助, 一切代數函數之引申已均不難求得. 例如

$$y=(a^2x^2+x^4)\sqrt{a^2-x^2}$$

一函數, 可應用第一節基本規例 2, 設

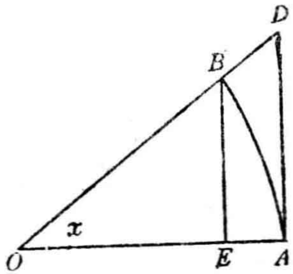
$$u=a^2x^2+x^4,\quad v=\sqrt{a^2-x^2}\text{ 或 }v^2=a^2-x^2,$$

則有
$$\frac{du}{dx}=2a^2x+4x^3,$$
$$\frac{dv}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$
因而
$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{a^2-x^2}\,(2a^2x+4x^3)-\frac{(a^2x^2+x^4)\,x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=\frac{(2a^4+a^2x^2-5x^4)\,x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

又如　$y=a+b\sqrt{x}+\frac{c}{\sqrt{x}}+\frac{g}{x}$

一函數(a, b, c, g 爲常數),可寫作
$$y=a+bx^{\frac{1}{2}}+cx^{-\frac{1}{2}}+gx^{-1},$$
故卽易知
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}cx^{-\frac{3}{2}}-gx^{-2}$$
$$=\frac{1}{2}b\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\frac{c}{x\sqrt{x}}-\frac{g}{x^2}.$$

2. 三角函數之微分求法． 如圖,倘 AB 爲一單位圓(其半徑等於 1 者)之弧,其所函角爲 x(此處角以弧度計),則不難知:
$$BE=\sin x,\ AD=\operatorname{tg} x,\ OE=\cos x.$$



OEB 三角形之面積,按初等幾何學,爲

$$\frac{OE\cdot EB}{2}=\frac{\cos x\cdot \sin x}{2};$$

仿此,ODA 三角形之面積爲

$$\frac{OA\cdot AD}{2}=\frac{1\cdot tg\, x}{2}=\frac{tg\, x}{2}.$$

又按初等幾何學,知 OAB 扇形之面積爲

$$\frac{1\cdot AB}{2}=\frac{x}{2}.$$

如圖所示,此三形面積之大小關係爲

$OEB<OAB<OAD$,因而得

$$\frac{\cos x\ \sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{tg\, x}{2}.$$

因 $tg\, x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$,故有

$$\cos x \sin x < \quad x \quad < \frac{\sin x}{\cos x}$$

或 $$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

由此可得 $$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

今使 $\lim x = 0$，則 $\cos x$ 及 $\frac{1}{\cos x}$ 均向 1 收斂，$\frac{\sin x}{x}$ 在其間亦必向 1 收斂，故

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

得此式，卽易求三角函數之微分。

由 $\sin(x+\triangle x) = \sin x \cos\triangle x + \cos x \sin\triangle x$，

得 $$\frac{\sin(x+\triangle x) - \sin x}{\triangle x} = \cos x \frac{\sin\triangle x}{\triangle x} - \sin x \frac{1-\cos\triangle x}{\triangle x}.$$

但 $$\frac{1-\cos\triangle x}{\triangle x} = \frac{(1-\cos\triangle x)(1+\cos\triangle x)}{\triangle x(1+\cos\triangle x)}$$

$$= \frac{1-\cos^2\triangle x}{\triangle x(1+\cos\triangle x)} = \frac{\sin^2\triangle x \cdot \triangle x}{\triangle x^2(1+\cos\triangle x)}$$

$$= \left(\frac{\sin\triangle x}{\triangle x}\right)^2 \cdot \frac{\triangle x}{1+\cos\triangle x}$$

故於 $lim\triangle x=0$,

$$lim\frac{1-cos\triangle x}{\triangle x}=0.$$

由此,即可知於 $lim\triangle x=0$:

$$lim\frac{sin(x+\triangle x)-sin\,x}{\triangle x}=\frac{d\,sin\,x}{dx}=cos\,x.$$

仿此,由 $cos(x+\triangle x)=cos\,x\;cos\triangle x-sin\,x\;sin\triangle x$ 不難得

$$\frac{cos(x+\triangle x)-cos\,x}{\triangle x}=-sin\,x\frac{sin\triangle x}{\triangle x}$$

$$-cos\;x\frac{1-cos\triangle x}{\triangle x},$$

因而 $$\frac{d\,cos\,x}{dx}=-sin\,x.$$

因 $tg\,x=\frac{sin\,x}{cos\,x}$, $cotg\,x=\frac{cos\,x}{sin\,x}$, 故應用第一節中基本規例 3,即得

$$\frac{d\,tg\,x}{dx}=\frac{cos\,x(sin\,x)'-sin(cos\,x)'}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x},$$

$$\frac{d\,ctg\,x}{dx}=\frac{sin\,x(cos\,x)'-(sin)'cos\,x}{sin^2x}=-\frac{1}{sin^2x}.$$

由以上諸式,倒三角函數 $arc\,sin\,x$, $arc\;cos\,x$ 等

之引申亦已不難推得，但倒函數方面有條件，須注意及之耳．今如

$$y=arc\ \cos x \qquad (-1\leqq x\leqq 1)$$

則 $$x=\cos y \qquad (0\leqq y\leqq \pi)$$

故 $$\frac{dx}{dy}=-\sin y.$$

於 $0<y<\pi$，卽 $-1<x<1$，按第一節基本規例 5，可知

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$$

（因 $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$）．仿此，有以下諸式：

$$\frac{d\,arc\,\sin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1);$$

$$\frac{d\,arc\ tg\,x}{dx}=\frac{1}{1+x^2};$$

$$\frac{d\,arc\ ctg\,x}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

3. 指數及對數函數之微分求法。 今設 $h\neq 0$ 爲一數，$1+h>0$，則不難見：

$$(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h.$$

姑假定此式不僅於 2 可用,且已至 n 可用:

$$(1+h)^n>1+nh,$$

則用 $1+h$ 乘此式之兩端時,即得

$$(1+h)^{n+1}>(1+nh)(1+h).$$

但 $(1+nh)(1+h)=1+(n+1)h+nh^2>1+(n+1)h$.

故 $$(1+h)^{n+1}>1+(n+1)h.$$

從可知以上之式若於 n 通用,則於 $n+1$ 亦必通用.但已知此式於 2 通用,故於 3,於 4,於 5, 等等均通用.因此,n 為任何一整正數 $\geqq 2$ 時,可用以下之普通式:

$$(1+h)^n>1+nh \qquad \begin{cases}1+h>0\\ h\neq 0\end{cases}$$

今於上式中設 $h=\frac{1}{n^2-1}$,則得

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}.$$

但 $$\frac{n}{n^2-1}>\frac{n}{n^2}=n,$$

故 $$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{1}{n} \text{ 或 } \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}>\frac{n+1}{n}.$$

因 $$\frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}=\frac{n^n}{(n-1)^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n},$$

卽可得 $$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

或 $$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

由此可知

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^4,\cdots$$

一級數爲單調向下者，且爲一有界級數，故按第一章第五節定理 3 必有極限值

$$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

存在.

又試於 $(1+h)^n>1+nh$ 中設 $h=-\frac{1}{n^2}$，卽有

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n}$$

或 $$\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}}>\frac{n-1}{n}.$$

因而可得

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n1-}$$

即 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

由此可見

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\cdots\cdots$$

一級數為單調向上者.然此級數亦為有界者,且其極限值亦與前向下級數者同,蓋

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}},$$

而 $lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\ (n\to\infty)$, 故

$$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

此二級數之共同極限值,以 l 表之:

$$lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e,$$

而於任何正整數 $n\geqq2$, 恆有(參觀前章第五節)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

e 之近似值,以六位小數寫之,有

$$e=2,718281.$$

倘以此 e 爲底作對數,所得者以別於尋常對數,稱爲"自然對數"或"納氏對數"(*Neper scher Logarithmus*)以符號 ln 表之(ln 爲拉丁語自然對數之二冠首字)。

今設 $a>0$,則 a^x 名爲"指數函數"。此函數之連續性易知,今試求其微分。

a^x 之差商,可知爲

$$\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

若 $lim\,\Delta x=0$,則 $lim\,a^{\Delta x}=1$,或亦可云:

$a^{\Delta x}=1+k\,(k\neq 0)$,於 $lim\,\Delta x=0$ 卽有 $lim\,k=0$.

試將 $a^{\Delta x}=1+k$ 之左右端作其自然對數,卽有

$$\Delta x\,ln\,a=ln(1+k),$$

或
$$\Delta x=\frac{ln(1+k)}{ln\,a}.$$

因可得
$$\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{k\,ln\,a}{ln(1+k)}=\frac{ln\,a}{ln\left\{(1+k)^{\frac{1}{k}}\right\}}.$$

於 $lim\,\Delta x=0$,卽有 $lim\,k=0$,而

$$lim(1+k)^{\frac{1}{k}}=e \qquad (k\to 0)$$

然 $ln\, e=1$,故

$$\lim \frac{a^{\triangle x}-1}{\triangle x}=ln\, a \qquad (\triangle x\to 0)$$

從可知 a^x 之引申為

$$\frac{da^x}{dx}=a^x ln\, a.$$

於上式中設 $a=e$,則 $ln\, e=1$,因而

$$\frac{de^x}{dx}=e^x,$$

此即 e^x 之引申仍為 e^x.

$ln\, x$ 之差商為

$$\frac{ln(x+\triangle x)-ln\, x}{\triangle x}=\frac{ln\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)}{\triangle x}$$

$$=\frac{1}{x}ln\left\{\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)^{\frac{x}{\triangle x}}\right\}$$

於此 $x>0$,$|\triangle x|<x$. 倘 $\lim \triangle x=0$,則

$$\lim\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)^{\frac{x}{\triangle x}}=e,$$

故有 $$\frac{d\, ln\, x}{dx}=\frac{1}{x} \qquad (x>0)$$

若欲求任何底對數 $\log x$ 之微分，則因

$$\log x = M \ln x \quad (M\text{ 爲對數率})$$

即可得
$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{M}{x}.$$

前已論及 x^n (n 爲有理數)之引申恆爲 nx^{n-1}，得上式，則并可擴充此式至 n 爲任何實數，於 n 爲無理數時亦尙可用.今設 α 爲無理數，而

$$y = x^\alpha, \qquad (x > 0),$$

則可寫作 $y = e^{\alpha \ln x}$.

今於此中設 $w = \alpha \ln x$，則 $y = e^w$，而

$$\frac{dy}{dw} = e^w, \qquad \frac{dw}{dx} = \alpha \frac{1}{x},$$

因而
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = e^w \cdot \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha\, e^{\alpha \ln x}}{x}$$

$$= \frac{\alpha}{x} \cdot y = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

4. 數種超絕函數之級數. 於第四節之泰氏級數內設 $a=0$, $b=x$，即得所謂麥氏級數(*Maclaurinsche Reihe*)：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

今設 $f(x)=e^x$，則 $f(x)$ 之一切引申均等於 e^x 本身，而一切 $f^{(n)}(0)=e^0$ 均等於 1，故有

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

或詳寫之作

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

e 之值用此式至易計算．

$\sin x$ 之第一次引申爲 $\cos x$，第二次爲 $(-\sin x)$，等等，其一切引申反覆於 $\pm\cos x$ 間 $\pm\sin x$ 之間，故可得一公式如下：

$$\frac{d^n\sin x}{dx^n}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

此式不難證明，其可靠亦至易見．仿此，$\cos x$ 之引伸，亦有一公式：

$$\frac{d^n\cos x}{dx^n}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

今於麥氏級數中設 $f(x)=\sin x$，即可得

$$\sin x=\sin 0\frac{\pi}{2}+\frac{x}{1!}\sin 1\frac{\pi}{2}+\frac{x^2}{2!}\sin 2\frac{\pi}{2}$$

$$+\frac{x^3}{3!}\sin 3\frac{\pi}{2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$$

仿此，如於麥氏式中設$f(x)=\cos x$，并有

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$$

又如設$f(x)=ln(1+x)$，則$f'(x)=\frac{1}{1+x}$ $=(1+x)^{-1}$，$f''(x)=-1\cdot(1+x)^{-2}$，等等，廣之，不難見$\frac{d^n ln(1+x)}{dx^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$，因而$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.故於$-1<x\leqq 1$

得
$$ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}.$$

其他三角函數，倒三角函數等亦均可仿此展爲級數，茲不廣論。而如圓周率π等之值，亦卽可於此計算之。

第三章　積分算法

第一節　積分之概念

今設$f(x)$爲一函數,於(a, b)段之全部均連續。試將(a, b)分割成爲t個小段:(a, x_1),(x_1, x_2),……(x_{t-1}, b),則$f(x)$於任何小段內亦均連續.按第一章第七節<u>桓氏</u>定理,$f(x)$於任何小段內有一最大值M及一最小值m爲明白計$f(x)$於(x_{i-1}, x_i)小段內所取之最大值以M_i表之,其於此小段中所取之最小值,亦卽表之以m_i.又,以上將(a, b)分成爲t個小段,此分割法可用T表之。

今試作以下各乘積:

$$M_1(x_1-a), M_2(x_2-x_1), \cdots\cdots M_i(x_i-x_{i-1}), \cdots\cdots M_t(b-x_{t-1}),$$

并作其和,而以$\overset{b}{\underset{a}{S}}(T)$表之:

$$\overset{b}{\underset{a}{S}}(T)=M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$M_t(b-x_{t-1})$.

倘設 $a=x_0$, $b=x_t$,則幷可簡寫作:

$$\overset{b}{\underset{a}{S}}(T)=\sum_{i=1}^{t} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

仿此,幷作諸 $m_i(x_i-x_{i-1})$,而以 $\overset{b}{\underset{a}{s}}(T)$ 表其和:

$$\overset{b}{\underset{a}{s}}(T)=\sum_{i=1}^{t} m_i(x_i-x_{i-1}).$$

試取任何一小段 (x_{i-1}, x_i),再分割之成爲二段,例如 (x_{i-1}, x_l), (x_l, x_i), 則此二段中 $f(x)$ 之最大值 M_l, $M_{l'}$ 決不能大於 M_i,蓋此二小段包在 (x_{i-1}, x_i) 中也.但

$M_i(x_i-x_{i-1})=M_i(x_l-x_{i-1})+M_i(x_i-x_l)$,而 $M_i(x_l-x_{i-1})\geqq M_l(x_l-x_{i-1})$, $M_i(x_i-x_l)\geqq M_{l'}(x_i-x_l)$,故

$$M_i(x_i-x_{i-1})\geqq M_l(x_l-x_{i-1})+M_{l'}(x_i-x_l).$$

從可知若將原來分割法 T 所得小段再加以分割,則 $\overset{b}{\underset{a}{S}}$ 之值必減小或仍舊,但不能增加.仿此,亦不

難知將 T 之小段再加分割時，$\overset{b}{\underset{a}{s}}$ 之值必增大或仍舊，但不能減小。

今將 T 之小段加以分割，則得一新分割法，名之爲 T_1，如上所云，必有

$$\overset{b}{\underset{a}{S}}(T_1) \leqq \overset{b}{\underset{a}{S}}(T); \quad \overset{b}{\underset{a}{s}}(T) \leqq \overset{b}{\underset{a}{s}}(T_1).$$

由 T_1 所得小段仍可再分割，并可無限制應用此法，則得二級數：

$$\overset{b}{\underset{a}{S}}(T),\ \overset{b}{\underset{a}{S}}(T_1),\ \overset{b}{\underset{a}{S}}(T_2),\cdots\cdots,$$

$$\overset{b}{\underset{a}{s}}(T),\ \overset{b}{\underset{a}{s}}(T_1),\ \overset{b}{\underset{a}{s}}(T_2),\cdots\cdots,$$

此中第一級數爲向下者，第二級數則向上。而按定義，又可知倘 M 爲 $f(x)$ 於 (a, b) 中之最大值，m 爲其最小值，則以上二級數之一切項，均在 $m(b-a)$ 與 $M(b-a)$ 之中間：

$$m(b-a) \leqq \overset{b}{\underset{a}{S}}(T_n) \leqq M(b-a),$$

$$m(b-a)\leqq \overset{b}{\underset{a}{S}}(T_n)\leqq M(b-a),$$

故按第一章第五節此二級數均有界，因而均有極限值。

此二級數相當項之差，為

$$\overset{b}{\underset{a}{S}}(T_n)-\overset{b}{\underset{a}{s}}(T_n)=\sum_i M_i-m_i(x_i-x_{i-1}).$$

按第一章第七節康氏均齊連續性定理，可知將(a,b)分割成為小段時，祇須此項小段之"長"[小段$(x_{i-1},\ x_i)$之"長"，卽其二界之差：x_i-x_{i-1}，或$|x_{i-1}-x_i|$.]相當小，M_i-m_i之值便可任意小於一正數ε，故於n充分大時，二級數相當項之差

$$\sum_i M_i-m_i(x_i-x_{i-1})<\varepsilon\cdot(b-a).$$

然(a,b)之長有盡，n則可大於任何大之數，因而小段$(x_{i-1},\ x_i)$之長，末後必小於任何小之數，與0相逼近。緣此，二級數相當項之差，末後向0收斂，按之第一章第四節定理5，卽是此二級數之極限值相同；今以J表之，則有：

$$\lim S_a^b(T_n)=\lim s_a^b(T_n)=J \quad (n\to\infty)$$

而按第一章第五節所云，可知於 n 爲任何數，必得

$$s_a^b(T_n)\leqq J\leqq S_a^b(T_n).$$

又不難知：

$$(b-a)m\leqq J\leqq(b-a)M.$$

以上以 T 爲出發，將 (a, b) 先分成爲 t 小段，然後據此再加分割，所得極限值爲 J. 今試另用一分割法 T' 爲出發，將 (a, b) 分成爲 t' 小段。T' 之小段，其界與 T 小段之界於是參差相間，有時 T 小段中含有 T' 小段之界，有時亦可 T' 小段中含 T 小段之界。今將 T 及 T' 二分割視爲一分割，名之爲 T^*，則按前所明理，因 T^* 之小段較原來 T 及 T' 者已增加，故必

$$S_a^b(T^*)\leqq S_a^b(T),\ S_a^b(T^*)\leqq S_a^b(T');$$

$$s_a^b(T^*)\geqq s_a^b(T),\ s_a^b(T^*)\geqq s_a^b(T').$$

由此,卽可見:

$$\overset{b}{\underset{a}{s}}(T') < \overset{b}{\underset{a}{S}}(T),\quad \overset{b}{\underset{a}{s}}(T) < \overset{b}{\underset{a}{S}}(T').$$

此二不等式於任何 T_n 及 T'_n 均可用，故如以 T' 爲出發之極限值爲 J', 則旣可得 $J' \leqq J$, 又可得 $J \leqq J'$, 因而祇有 $J = J'$.

從此可知以何種分割法爲出發，於所得結果之極限值全無關係，因而用以出發之分割及其級數可以隨意選擇,祇須小段之長向 0 收斂,卽得同一之極限值. 此極限值 J 名爲 $f(x)$ 自 a 至 b 之"積分",用萊伯尼茲所創符號,寫之作

$$J = \int_a^b f(x)\,dx.$$

此寫法內之 dx, 乃是逼近於 0 的小段之長，其意義與前章所云 x 之微分相同. 惟以上之論證,全爲獨立者,與前章之微分算法，初若無甚相關；實則殊不然. 今當示其關係如下.

由以前之定義，不難知設 c 爲 a 與 b 中間之數，$a<c<b$，則必

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

（參觀第一章第四節極限值相加之定理）。又按定義，亦可知

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx, \qquad (2)$$

蓋 $(b-a)$ 既爲正則 $(a-b)$ 必爲負，一切小段之關係亦如之，故一切 (x_i-x_{i-1}) 亦均成負，而函數值則并不以此受影響，所以結果得一負極限值（參觀第一章第四節定理 9）。

因 $f(x)$ 於 (a, b) 之全部均連續，故 $(b-a)f(x)$ 一函數亦於 (a, b) 之全部均連續。於 (a, b) 中一值，$(b-a)f(x)$ 之值爲 $m(b-a)$，又於此中之一值，$(b-a)f(x)$ 取 $M(b-a)$ 爲值。但如前所云

$$m(b-a)\leqq J\leqq M(b-a),$$

故按第一章第七節定理,(a, b)中必有一值ξ,於此

$$J=(b-a)f(\xi). \tag{3}$$

今設x爲(a, b)中任何一值,則可有

$$J_1=\int_a^x f(x)\,dx.$$

試使x稍變動,成爲$x+h$,[$x+h$在(a, b)內]

并設
$$J_2=\int_a^{x+h} f(x)\,dx.$$

按前(1)所明,即有

$$J_2-J_1=\triangle J=\int_x^{x+h} f(x)\,dx.$$

又按式(3)之理,可知有一值ξ'在x與$x+h$之間,於此

$$\triangle J=h\,f(\xi'),$$

即
$$\frac{\triangle J}{h}=f(\xi').$$

若h向0收斂,則$\triangle J$自亦向0收斂,此由定義

或式(2)可知．然他方面，h 向 0 收斂時，$f(\xi')$ 卽向 $f(x)$ 收斂，故有

$$\lim \frac{\triangle J}{h} = f(x) \qquad (h \to 0)$$

a 係固定不動，而 x 可任意變動，故 a 於 J_1 之關係爲一常數，而 x 則決定 J_1 之值，因而 J_1 爲 x 之函數，可寫作 $J_1 = J(x)$．按前章引申之概念，可知 $\lim \frac{\triangle J}{h}$ 實卽是 $J(x)$ 於 x 之引申：

$$\frac{dJ(x)}{dx} = f(x),$$

或

$$dJ(x) = d\int_a^x f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

此式於 x 爲 $(a,\ b)$ 中任何值自均可用，故得此結果：倘 $f(x)$ 於 $(a,\ b)$ 段有積分，則此積分之引申於此 $(a,\ b)$ 段卽爲 $f(x)$ 本身．由此可見求一函數之積分，卽是求一函數，其引申爲此已知函數本身者；換言之，積分乃是與微分相反之算法，微分在求已知函數之引申，積分則求已知引申之原來函

數也.此所以積分算法之歷史雖遠爲久,而其成立則與微分法相連帶.觀上式,亦直接可見微分號與積分號適相消,$f(x)dx$ 前加以積分號 $\int_a^x$,又加以微分號 d,則二者相抵消,所得仍爲 $f(x)dx$.

今如 $F(x)$ 爲一函數,其引申 $F'(x)=f(x)$,則按以上所云根本關係,可寫作

$$F(x)=\int f(x)\,dx.$$

此寫法內 $\int$ 號之上下端未加以數目,所以示 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 之積分,然未說明在何段內也.試於 $F(x)$ 上任加一常數 C, $F(x)+C$,則其引申仍爲 $f(x)$,故 $f(x)$ 之積分實不止一 $F(x)$,凡於 $F(x)$ 上加以常數所得之函數,均可爲 $f(x)$ 之積分.因此,前式須改作

$$F(x)=\int f(x)\,dx+C.$$

此積分不過是一種表明,其值全無定,故名之爲"無定積分".但以前所明之積分,其值則有定,故即稱"有定積分",以與此別.

將積分視爲微分之反，固可大得省便，蓋微分法方面所得結果，直接卽可應用於此。惟根本問題，則仍未能解決：今有一函數$f(x)$於此，於(a, b)內均連續，則按前所云於此段有積分，而按微分與積分之關係，亦不難求得一函數$F(x)$，其引申$F'(x)$於(a, b)內均爲$f(x)$. 然$f(x)$自a至b之積分，$\int_a^b f(x)\,dx$，其值爲何，則由此關係尙不能定。此問題但亦不難解決，今示之如下.

試將(a, b)分爲若干小段：(a, x_1)，(x_1, x_2)，(x_2, x_3)，……(x_{n-1}, b)，并作

$$F(a),\ F(x_1),\ F(x_2),\ \cdots\cdots F(b).$$

按前章微分算法上之平均値定理（此處按所設可用），有：

$$F(x_1)-F(a)=(x_1-a)f(x'_1)\quad (a<x'_1<x_1)$$

$$F(x_2)-F(x_1)=(x_2-x_1)f(x'_2)\quad (x_1<x'_2<x_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(b)-F(x_{n-1})=(b-x_{n-1})f(x'_n)\quad (x_{n-1}<x'_n<b)$$

將此項式左右端均加之，可得

$$F(b)-F(a)=(x_1-a)f(x'_1)+(x_2-x_1)f(x'_2)+\cdots\cdots$$

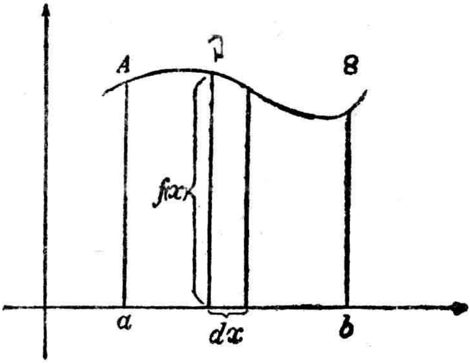
若使 n 大於任何大之數，則此項小段之長可向 0 收斂，因而按積分之定義，上式之右端即爲 $\int_a^b f(x)dx$，而其左端則仍不受影響，故有：

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

得此式，以上之問題卽解決，若能求得一函數之無定積分時，其有定積分（倘存在）卽可由此推算。此式亦稱爲積分算法上之根本式，蓋以前雖知微分與積分之關係，然無定積分與有定積分之間，仍有未能相通處，得此式方能解除也。

上來所用論證法，明 $f(x)$ 於 (a, b) 內連續時，卽有積分可求，實爲法人考喜 (*Cauchy*) 所首創，故以上之積分概念，亦卽稱爲考氏積分定義。德人黎孟 (*Riemann*) 曾將積分之概念擴充，可無須假定 $f(x)$

之連續性.晚近來法人雷伯玖(*Lebesgue*)等應用量論(*Mengenlehre*)上之概念,又將積分之定義加以新詮.此方面新思潮至今已種色甚多,本書姑不及.



倘用幾何圖解,以曲線表函數$f(x)$,則$f(x)$自a至b之積分卽爲圖中$a\,b\,B\,A$之面積;其理觀圖甚明,可不贅述;此所以求一曲線平面形之面積問題,可與求一積分之理相通也.(按圖中爲明顯計,將dx表作甚長之小段,實則此dx之長逼近於0,因而$f(x)dx$爲一面積逼近於0之"平方形",$a\,b$ BA面積卽由無盡多此項平方形相加而成,與積

分之定義相合.)

第二節 數種積分法

視積分爲微分之反，有若干無定積分式，卽可直接自微分算法之結果得之.今列數式於下：

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\,(n\neq -1),$$

倘 $n=-1$，則 $\int x^{-1}dx=\int\frac{dx}{x}=ln\,x+C\ (x>0)$；

$$\int sin\,x\,dx=-cos\,x+C,$$

$$\int cos\,x\,dx=sin\,x+C,$$

$$\int\frac{dx}{cos^2x}=tg\,x+C,$$

$$\int\frac{dx}{sin^2x}=-cotg\,x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc\,sin\,x+C$$

$$=-arc\,cos\,x+C,$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=arc\,tg\,x+C$$

$$=-arc\,ctg\,x+C;$$

$$\int a^x \ln a\,dx = a^x + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

等等．但應用上式時，有時 x 之値須加以限制，一如前章所云．C 爲任意常數．

又如 $u(x)$，$v(x)$，$w(x)$，……爲若干 x 之函數，則按微分法，卽可知

$$\int [u(x)+v(x)+\cdots]dx = \int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx + \cdots$$

各積分自可任意加常數．倘 C 爲一常數，則亦

$$\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx.$$

求函數之積分，初無一定方法，有時可按定義直接求之，尋常則多視爲微分之反，然普通終須將所欲求之函數加以相當之變化運算，方能推求，如以上所列之現成式，事實上頗少遇見耳．故積分算法理雖無多難，然實際運算上卻頗須機巧；較難之函數，每多不易求，有時雖老師宿儒對之亦無法也．今將常用數種積分法略示於下，以見一斑；至於相機運用，隨宜變化，是在學者之敏巧矣．

1. 對數積分法. 今設 $f(x)$ 爲一函數於 x 之某區域內爲正者,則 $ln\ f(x)$ 於此區域內均有定.設 $y=ln\ f(x)$,幷設 $u=f(x)$,則 $y=ln\ u$,因而

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{u},\quad \frac{du}{dx}=f'(x)$$

卽
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

或
$$\frac{d\ ln\ f(x)}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

本此關係,凡作 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 形式之函數,其積分必爲對數;蓋由上式:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{d\ f(x)}{f(x)}=ln\ f(x)+C.$$

若 $f(x)$ 有負值,此式亦尙可用,但 ln 下之 $f(x)$ 須取其絕對值;故可廣之作

$$\int\frac{d\ f(x)}{f(x)}=ln\ |f(x)|+C.$$

緣此,一函數 $\varphi(x)$ 倘能設法變化之使成爲 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 形式,則其積分卽直接可得.例如

$$\int tg\,x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int-\frac{d\cos x}{\cos x}$$

$$=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-ln\,|\cos x|+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d\,tg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}}$$

$$=ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C;$$

$$\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}dx$$

$$=2\int\frac{d\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}}=2ln\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)+C$$

$$=ln(e^x+e^{-x}+2)+C.$$

2. 代入法. 有時於所欲求其積分之函數內，設 $x=\varphi(t)$ 用入一新自變數 t，亦能使積分易求。示數例如下：

試設 $x=at$，則 $dx=a\,dt$，因而

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}arc\ tg\ t+C$$

$$=\frac{1}{a}arc\ tg\frac{x}{a}+C.$$

倘設 $x=\frac{a}{t}$，則 $dx=-\frac{dt}{at^2}$，故

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\mp\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pm\frac{1}{a}arc\cos t+C$$

$$=\pm\frac{1}{a}arc\ \cos\frac{a}{x}+C.$$

又如

$$\int\frac{dx}{x^2+ax+b}$$

一積分，倘其中 $b>\frac{1}{4}a^2$，則可設 $x+\frac{1}{2}a=t\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}$，$dx=\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}\,dt$，而

$$x^2+ax+b=(x+\frac{1}{2}a)^2+(b-\frac{1}{4}a^2)=(b-\frac{1}{4}a^2)(1+t^2)$$，因之即有

$$\int\frac{dx}{x^2+ax+b}=\int\frac{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}dt}{(b-\frac{1}{4}a^2)(1+t^2)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}\int\frac{dt}{(1+t^2)}=\frac{1}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}\,arc\,tg\,t+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}arc\,tg\frac{x+\frac{1}{2}a}{\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}}+C.$$

若此積分內 $b<\frac{1}{4}a^2$，則設 $x+\frac{1}{2}a=$

$t\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b}$，於是可得

$$\int\frac{dx}{x^2+ax+b}=\frac{1}{c}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2c}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2c}\int\frac{dt}{t+1}$$

$$=\frac{1}{2c}\,ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\qquad(c=\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b})$$

卽 $$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b}}\,ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b}}{x+\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b}}\right|+C.$$

〔附註〕 以上一積分內因 a 與 b 二常數間之關係不同，所得結果之形式遂異，似頗可怪；然此因限於實數區域所致，若應用"幻數"，則不難證明以上二結果相同。

倘設 $x=ctg\,t$，并假定 $sin\,t>0$，則

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{dt}{sin\,t}=ln\,ctg\,\frac{t}{2}+C$$

$$=ln\frac{1+cos\,t}{sin\,t}+C=ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

代入法目的無非在用入新變數，使所求之積分相當變化，成爲已知之式．以上不過略示其例，應用上宜如何代入新變數，自隨積分之形式，每事須相機變化，非有定式可泥拘也．

3. 偏積分法． 倘 u 及 v 爲二 x 之函數，則按第二章第一節基本規例 2，有

$$d(uv)=udv+vdu,$$

因而
$$uv=\int udv+\int vdu,$$

或
$$\int udv=uv-\int vdu.$$

此式有時可用以求函數之積分，而此方法則名爲"偏積分法"．示數例如下：

設 $u=\sqrt{1-x^2}$, $v=x$, 則 $du=-\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$,

故可得
$$\int\sqrt{1-x^2}dx=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

此中右端第二積分可化爲二積分：

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=arc\ sin\ x-\int\sqrt{1-x^2}dx,$$

因而得

$$2\int\sqrt{1-x^2}dx=x\sqrt{1-x^2}+arc\ sin\ x$$

或 $$\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+arc\ sin\ x)+C.$$

設 $u=cos\ x$, $v=sin\ x$，則

$$\int cos\ x\ d\ sin\ x=cos\ x\ sin\ x+\int sin\ x^2dx.$$

因 $\int cos\ x\ d\ sin\ x=\int cos^2x\ dx$, $\int sin^2x\ dx=\int dx-\int cos^2x\ dx$，故得

$$2\int cos^2x\ dx=cos\ x\ sin\ x+x+C$$

即 $$\int cos^2dx=\frac{1}{2}(x+sin\ x\ cos\ x)+C.$$

仿此，可得 $\int sin^2x\ dx=\frac{1}{2}(x-sin\ x\ cos\ x)+C.$

設 $u=arc\ tg\ x$, $v=x$，即得

$$\int arc\ tg\ x\ dx=x\ arc\ tg\ x-\int\frac{xdx}{1+x^2}$$

$$=x\ arc\ tg\ x-ln\sqrt{1+x^2}+C.$$

又，用此偏積分法於 sin^nx (n 爲正整數)，并可求

得 π 之值.其法如下:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x)$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\ dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,$$

因而 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\ dx.$$

反覆用此法,結果可知倘 n 爲偶數,則最後得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2},$$

倘 n 爲奇數,卽有 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx=1,$$

故 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ \ dx=\begin{cases}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdots\cdots n}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ 爲偶數})\\[2ex] \dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdots n} & (n\text{ 爲奇數})\end{cases}$$

然 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx$$

$$<\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}x\,dx,$$

或卽是

$$\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{\pi}{2}$$

$$<\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)},$$

因而得

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}.$$

若 n 可大於任何大之數，卽 $n\to\infty$，則$\frac{2n}{2n+1}$向 1 收斂，故可有

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots$$

此卽是華里士(*Walliss*)式，用此亦可求 π 之值.

除上述積分法外，尙有其他方法，惟其理每須涉及其他範圍（如無盡級數論及高等代數等），故不

能及．苟能善於運用，即此數法已頗足應付尋常所遇之積分矣（以上三種方法，以代入法爲應用最廣，然亦全恃機巧）．

第三節　積分概念之推廣

第一節之考氏積分定義，曾假定 $f(x)$ 於 (a, b) 中均連續．實則此連續之條件，殊無必要，祇須較簡單之假定已可證明積分之存在．此問題姑不深論，今但略將積分之概念，稍加推廣如下．

設 $f(x)$ 於 (a, b) 段之 b 值不連續，其餘均連續者，則可取 x 作一積分：

$$\int_a^x f(x)\,dx \qquad (a<x<b)$$

倘 x 向 b 收斂，而以上之積分存在，即

$$lim\int_a^x f(x)\,dx \qquad (x\to b)$$

存在，則此極限積分亦即表之爲

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

廣之，若 (a, b) 內有若干值（其數有盡），於此 $f(x)$ 不連續，則以上之法仍可用，蓋可將 (a, b) 分割成爲若干小段，使此項不連續值爲小段之界，然後於一一小段仿前作其積分，按第一節式(1)，若每小段之極限積分存在，即有

$$\lim \sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

今設 $f(x)$ 於 (a, b) 內爲一"有限函數"，即是，可有一值 G 存在，俾 $|f(x)|$ 於 (a,b) 內恆 $<G$ 者．又，$f(x)$ 於 b 爲不連續．試作一級數 $\{x_n\}$，其極限值爲 b，其項則均在 (a, b) 內．按第一節式(1)，倘 x_n 及 x_m 爲任何二項，有

$$\int_a^{x_n} f(x)\,dx - \int_a^{x_m} f(x)\,dx = \int_{x_m}^{x_n} f(x)\,dx.$$

因 $|f(x)|$ 恆 $<G$，故恆

$$\int_{x_m}^{x_n} f(x)\,dx < G\cdot|x_m - x_n|\cdot$$

按第一章第四節定理，卽可知

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx,\quad \int_a^{x_2} f(x)\,dx,\quad \int_a^{x_3} f(x)\,dx,\cdots\cdots$$

一級數有極限值，因而

$$\lim\int_a^{x_n} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (x_n\to b)$$

存在。此種論證自可推廣至 (a, b) 內有任何多（其數有盡）不連續値之函數 $f(x)$。故可云：

倘 $f(x)$ 於 (a, b) 內爲"有限"者，則 (a, b) 內雖有若干不連續値（其數有盡），其積分

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

恆存在。

有定積分中，又常有作以下形式者：

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

其意義謂積分之界可向上大至任何大之數，或向下小至任何小之數，或二者幷．較正確，當如下寫之：

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = lim\int_a^{x} f(x)\,dx \qquad (x\to\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = lim\int_x^{a} f(x)\,dx \qquad (x\to-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = lim\int_x^{y} f(x)\,dx \qquad \begin{Bmatrix} x\to-\infty \\ y\to+\infty \end{Bmatrix}.$$

關於此種積分，有常應用之理數則如下：

1. 倘

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx \text{ 存在，則} \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ 亦存在.}$$

蓋如設 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\{|f(x)|+f(x)\}$，$\psi(x)=\frac{1}{2}$

$|f(x)|-f(x)\}$

則

$$0 \leqq \varphi(x) \leqq |f(x)|, \quad 0 \leqq \psi(x) \leqq |f(x)|.$$

故如 $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ 存在，

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx \text{ 及 } \int_a^\infty \psi(x)\,dx$$

亦均存在．然 $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$，即

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\int_a^\infty \varphi(x)\,dx-\int_a^\infty \psi(x)\,dx,$$

故 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 亦存在．

2. 倘 x 大於任何大之數時，

$$\lim x^p f(x) \qquad (p>0)$$

存在(其值有盡)，且與 0 異，而於 $x \geqq a$，$f(x)$ 均連續，則

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

於 $p>1$ 時存在。

試研究

$$\int_a^x \frac{dx}{x^p}=\frac{x^{1-p}}{1-p}-\frac{a^{1-p}}{1-p}$$

一積分.倘 $p<1$,則 x^{1-p} 隨 x 之增大而增加其值,故於任何大之 $x\,(x\to\infty)$,x^{1-p} 亦可任何大,無有極限值可言. 倘 $p=1$, 則此積分等於 $ln\ x-la$, 於 $x\to\infty$ 亦無極限值.然如 $p>1$,則此積分於 $x\to\infty$ 其極限值爲 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$.

今如 $x\to\infty$,而

$$lim\ x^p f(x)=A, \qquad (p>1)$$

則 $$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=A\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p},$$

前旣明 $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ 存在,故 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 亦存在.

此外雖尚有其他標準，今不具述.

如設 $x=-u$，則按第一節式(2)

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx=-\int_{+\infty}^{-a} f(-u)\,du=\int_{-a}^{+\infty} f(-u)\,du,$$

又因 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

故以前所示三式，祇須論其第一式已足.

以上所論二種積分，亦稱爲"非正則"積分，今各示一例於下：

例 1: $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 一積分，按上所論，

須視爲 $\int_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 於 $a\to1$

之極限值，蓋此處 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 於 $x=1$ 其值不存在也.然於 $a<1$，

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=2(1-\sqrt{1-a}),$$

故 $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{a\to 1}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=2.$$

例 2: $$\Gamma(u)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx \qquad (n>1)$$

一積分，名爲歐拉(*Euler*)氏第二種積分，或名"Γ函數"(Γ爲希臘文字母，讀如 *gama*)。

按前章第六節 4,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots,$$

故於任何 $x>0$,

$$e^x>\frac{x^k}{k!} \qquad (k=1,2,3,\cdots\cdots)$$

祇須 $k>n$，即有

$$e^{-x}x^{n-1}<\frac{k!}{x^l} \qquad (l=k-n+1)$$

此處 l 自可大於 1，而 $e^{-x}x^{n-1}$ 於 $x\geqq 0$ 亦均連續，

故按前 2, 可知

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

亦存在.

用偏積分法, 可知

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = -\left(e^{-x}x^{n-1}\right)_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-2}dx,$$

此中 $-\left(e^{-x}x^{n-1}\right)_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\{-(e^{-x}x^{n-1})\} + (e^0\cdot 0) = 0$

(見第一節根本式).

按 $\Gamma(n)$ 之定義, 有

$$\Gamma(n-1) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-2}dx,$$

故得 $$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1).$$

如 n 爲一正整數, 則反覆用此法時, 可得

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\cdots\cdots\Gamma(1).$$

然按定義,

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=-\lim_{x\to\infty} e^{-x}+e^0=\mathbf{1},$$

故卽有

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

第四節 二重積分

設 $f(x, y)$ 爲一二變數之函數，其區域爲 $(a, b; c, d)$，則可仿第一節之法，將 (a, b) 及 (c, d) 各分割成爲小段。如 (a, b) 之小段爲 (a, x_1)，(x_1, x_2)，…等等，(c, d) 之小段爲 (c, y_1)，(y_1, y_2)，…等等；又，x'_i 爲 (x_{i-1}, x_i) 中一值，y'_l 爲 (y_{l-1}, y_l) 中一值，則可作以下之式：

$$\sum_{i,l}(x_i-x_{i-1})(y_l-y_{l-1})f(x'_i, y'_l),$$

於此 i 及 l 各不相關的偏取一切數，如其分割所定者（以上爲便利計，并設 $a=x_o$，$b=x_n$，$c=y_o$，$d=y_m$）若 (x_{i-1}, x_i) 及 (y_{l-1}, y_l) 之長向 0 收斂，此式恆有一相同之極限值，則此極限值名爲 $f(x, y)$

於$(a, b; c, d)$之積分，以

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dxdy$$

表之，於此，R 卽爲 $(a, b; c, d)$ 之簡寫法，所以明此積分之界．此種積分稱爲"二重積分"，所與第一節中之積分不同者，僅在多一變數，其理幷無多異．不難由第一節推及，故可勿深論。

此定義所明者，亦爲有定積分．仿第一節，倘有一函數 $F(x, y)$ 於$(a, b; c, d)$內之一切値有 F_x 及 F_{xy} 存在，而

$$F_{xy}=f(x, y),$$

則 $F(x, y)$ 爲 $f(x, y)$ 之無定積分［$f(x, y)$ 於此自假定有積分可求者］。蓋若 $F(x, y)$ 爲一積分，則凡作以下形式之函數

$$F(x, y)+\varphi(x)+\psi(y)$$

［$\varphi(x)$於(a, b)內可微分］均是 $f(x, y)$ 之積分，此與第一節中無定積分下可隨加常數之理同，惟此處可隨意加單變數之函數耳．

無定積分與有定積分之間亦有一根本式，今列之於下,其證姑從略：

$$\iint\limits_{R} f(x, y)\,dxdy = F(a, c) - F(b, c) - F(a, d) + F(b, d).$$

[R 爲 $(a, b; c, d)$ 之簡寫]

第一節之積分,用幾何圖解時,乃是一面積；此處之積分,倘用幾何圖解,不難知其爲空間中曲面所界之體積也。

今如 $f(x, y)$ 於 $(a, b; c, d)$ 有積分，$f(x, y)$ 於此幷連續,則不難知

$$\varphi(y) = \int_{a}^{b} f(x, y)\,dx$$

於 (c, d) 內亦連續。蓋因

$$\varphi(y) - \varphi(y_n) = \int_{a}^{b} \{f(x, y) - f(x, y_n)\}\,dx,$$

按第一節式(3),可知 (a, b) 內有一值 c',於此

$$\varphi(y) - \varphi(y_n) = (b-a)\{f(c', y) - f(c', y_n)\}.$$

若 $\lim y_n=y$, 則上式卽向 0 收斂,是卽 $\varphi(y)$ 之連續性.

按第一節,可求 $\varphi(y)$ 於 (c, d) 之積分:

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy.$$

設 $y_1, y_2, y_3, \cdots y_{n-1}$ 爲 c 與 d 中間之若干值,并命 $c=y_0$, $d=y_n$, 則按第一節式(1)

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy = \sum_i \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi(y)\,dy.$$

又按第一節(3),可知

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi(y)\,dy = (y_i - y_{i-1})\,\varphi(y'_i),$$

於此 $y_{i-1} < y'_i < y_i$, 因而

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy = \sum_i (y_i - y_{i-1})\,\varphi(y'_i).$$

然
$$\varphi(y'_i)=\int_a^b f(x,\ y'_i)\,dx,$$

故得:

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy=\sum_i (y_i-y_{i-1})\int_a^b f(x,\ y'_i)\,dx$$

$$=\int_a^b \sum_i (y_i-y_{i-1})\,f(x,y'_i)\,dx$$

如將$(a,\ b)$分爲若干小段,設 $a=x_0$, $b=x_n$, x_1, x_2,…爲$(a,\ b)$間之值,則按第一節式(1):

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy=\sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sum_i (y_i-y_{i-1})\,f(x,\ y'_i)\,dx$$

$$=\sum_k (x_k-x_{k-1})\sum_i (y_i-y_{i-1})\,f(x'_i,\ y'_i)$$

於此 $x_{i-1}<x'_i<x_i$[見第一節(3)],或

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy=\sum_{k,i} (x_k-x_{k-1})\,(y_i-y_{i-1})\,f(x'_i,\ y'_i).$$

若 $lim(x_k-x_{k-1})=0$, $lim(y_i-y_{i-1})=0$，則按定義此式之右端即 $f(x, y)$ 於 $(a, b; c, d)$ 之積分，因而

$$\int_c^d \varphi(y)dy=\iint_R f(x, y)dxdy,$$

此即是：

$$\iint_R f(x, y)dxdy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)dx\right]dy.$$

同此理，亦可知

$$\iint_R f(x, y)dxdy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx.$$

因而得

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)dx\right]dy.$$

觀此式，可見求一二重積分，即是依次求二簡單積分也．第三節之推廣，自亦可及於此．

例：倘視 x 爲常數，則

$$\int_0^y e^{-xy}dy=-\frac{e^{-xy}}{x}+\frac{1}{x}\quad(x>0)$$

故於 $y\to\infty$,有 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}dy=\frac{1}{x}$.

因此,可得

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx\,dy$$

$$=\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx\Big]dy.$$

但 $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-xy}\cos x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}(e^{-xy}\cos x)=1,$ $(y>0)$

$\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-xy}\sin x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}(e^{-xy}\sin x)=0,$

故用偏積分法,可得

$$\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx=1-y\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\,dx$$

$$=1-y^2\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx.$$

由此知 $$(1+y^2)\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx=1,$$

或 $$\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx=\frac{1}{1+y^2}.$$

因而有: $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}=\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{2}.$$

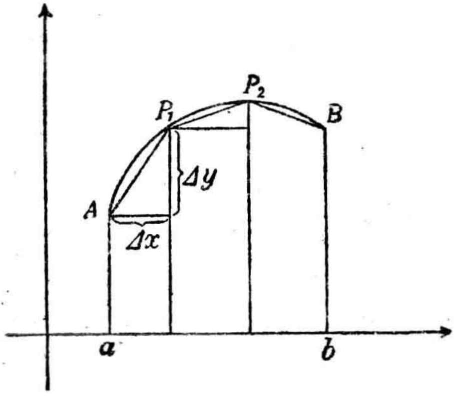
此積分名爲狄希雷(*Dirichlet*)氏積分. 以上之法容有不謹嚴處,茲爲示例用之,故未深論.

積分學之內容至廣,難以詳述.本書不過欲使讀者略識其根本原理之梗概,故卽止於此.

微積算法應用示例

數學中應用之廣，以微積算法爲最；除數學本身內不計外，上至天文物理，下至工藝建築，蓋莫不有賴於此(按"微分方程論"亦可視爲"廣積分學")．今將其幾何上，物理上及尋常工藝上之應用，各示一二粗淺之例於下，聊助讀書之興．至此方面所可發生之問題，如第一章第八節之首所提及者，概不論列．

1. 曲線之長． 曲線之"長"，其定義至不易作；



今姑粗言之如下：

如圖中 AB 爲曲線之一段，名爲一"弧"。試於此弧上任取若干點，每二點以直線連之，則得若干"弦"。倘所取之點，其數大於任何大之數，則各弦之長，亦可小於任何小之數。自 A 至 B 一切弦長之總和，倘此項弦之長均向 0 收斂，名爲 AB 弧之長。

此曲線所代表之函數如爲 $y=f(x)$，則此弧所表者爲

$$y=f(x),\quad a\leqq x\leqq b.$$

今假定 $y=f(x)$ 於 (a, b) 段之全部均有微分可求。如圖，可見任何一弦之長，按初等幾何學上勾股形定理，爲 $\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}$. 若弦之長向 0 收斂，則 $\triangle x$ 與 $\triangle y$ 亦向 0 收斂；因此函數於 (a, b) 段有微分，故如此弦之長爲 ds，則得

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

然此項弦之長向 0 收斂時，與其所函弧之差亦可不再計，故 ds 亦即可視爲此項弦所函"微弧"

之長.

試將(a,b)分割成爲n小段,幷設$a=x_0, b=x_n$, $y_i=f(x_i)$,而一研究以下之式:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}=l$$

按所設,$f(x)$於(a,b)內一切值爲可微分者,故可應用微分算法上之平均值定理,卽有

$$y_i-y_{i-1}=(x_i-x_{i-1})\,f'(x'_i)\quad x_{i-1}<x'_i<x_i.$$

因而上式可改作

$$l=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[(x_i-x_{i-1})\,f'(x'_i)]^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+[f'(x'_i)]^2}.$$

今再假定$\sqrt{1+[f'(x)]^2}$於(a,b)有積分可求(此祇須假定$f'(x)$有積分可求便得).試將n大至任何大之數$(n\to\infty)$,(x_i-x_{i-1})向0收斂,則按有定積分之定義,上式卽成爲一積分:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

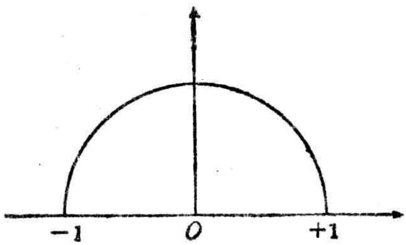
然他方面又不難見 l 即爲一切向 0 收斂之弦之總和，故按前弧長之定義，l 即爲 AB 弧之長也．因而有

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=\int_a^b\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_a^b ds,$$

或亦可云：弧之長等於"微弧"之積分．

例 1: $y=\sqrt{1-x^2}\,(-1\leqq x\leqq+1)$ 之代表曲線爲一半圓，其心在 0 點，其半徑之長爲 1.此處

$$dy=-\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad ds=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$



故如圖，此曲線之長爲

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

然此爲一非正則積分，須視爲一極限值：

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\int_{a}^{b}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad\begin{Bmatrix}a\to-1\\ b\to+1\end{Bmatrix}$$

此極限值之存在，不難知之.故由

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos b+\arccos a,$$

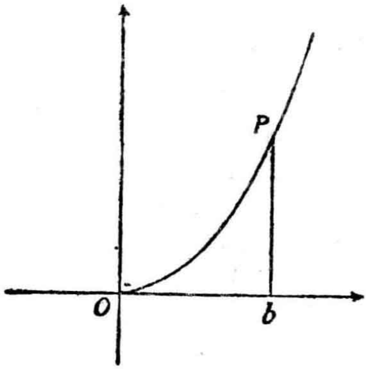
可得 $$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\substack{b\to+1\\ a\to-1}}(-\arccos b+\arccos a)$$

$$=\pi.$$

從可知半徑爲 1 之半圓，其長爲 π.

例 2: $y=\frac{1}{2a}x^2$ 表一曲線，卽所謂拋物線者，於此

$$ds = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,dx,$$



故由 0 至 P 之弧，其長爲

$$l(b) = \int_0^b \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

用偏積分法，有

$$\int\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,dx = x\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} - \int\frac{\frac{x^2}{a^2}dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}$$

$$= x\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} - \int\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,dx + \int\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}},$$

因而 $2\int\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,dx=x\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}.$

若設 $\frac{x}{a}=t$,則

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}=a\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=a\,ln(t+\sqrt{1+t^2}).$$

故結果可得

$$l(b)=\frac{b\sqrt{b^2+a^2}}{2a}+\frac{a}{2}ln\frac{b+\sqrt{b^2+a^2}}{a}.$$

2. 面積及體積. 第三章第一節中已提及 $f(x)$ 自 a 至 b 之積分,以幾何解之,即是曲線之一段與橫直線及 a, b 處二垂直線所界之面積. 何謂曲線所界形之面積,此容須另加定義; 惟其根本思想,亦與前節所明曲線長之定義相彷,故不再贅,視爲已經解釋者.今示一二例,明如何用積分法以計算此項面積.

例 1: 試計算前節例 1 內半圓及橫直線所界半圓形之面積. 此處 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,故此面積爲

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}dx.$$

第三章第二節 3 內已求得

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+arc\,sin\,x)+C,$$

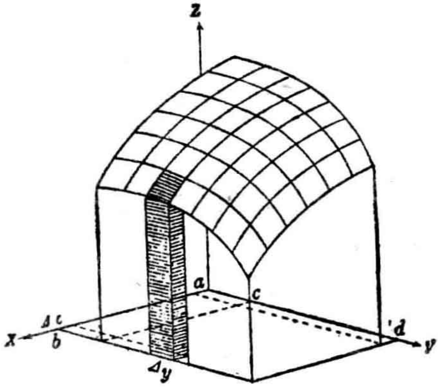
故卽有 $$\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

例 2: 前節例 2 內 ObP 形之面積,尤爲易求,

蓋此處$f(x)=\frac{1}{2a}x^2$,故其面積爲

$$\frac{1}{2a}\int_0^b x^2dx=\frac{1}{2a}\ \frac{b^3}{3}.$$

曲面所界立體之體積其定義亦可從略。第一章第八節之末已說及,倘用三互相垂直之數目線,則二自變數之函數 $z=f(x,y)$,其空間中之代表尋常爲一曲面,如圖所示。圖中所作一棱柱體,其積可近似的以 $\triangle x\triangle y\cdot z$ 表之,於此 z 爲其高。若 $\triangle x$



及 $\triangle y$ 均向 0 收斂，則此棱柱體之眞體積與 $\triangle x \triangle y \cdot z$ 相差亦甚少。由此曲面 xy 平面，及由 xy 平面至此曲面四角之垂直線所作四平面所界之體積，係此種向 0 收斂之棱柱體體積之總和，按二重積分之定義，不難知此體積爲

$$\iint\limits_{R} z\,dx\,dy = \iint\limits_{R} f(x,\,y)\,dx\,dy.$$

例： $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 表空間中一半球面，其心在 0 點，半徑之長爲 1.此處 x 與 y 之區域，須有一限制，即 x 與 y 之値，恆滿足以下條件：

$$x^2+y^2\leqq 1.$$

倘 x 之區域爲 $(-1,\ +1)$,則 y 之區域爲

$$-\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}.$$

因而此處 R 爲 $(-1, +1; -\sqrt{1-x^2},\ +\sqrt{1-x^2})$.

由此半球面及 xy 平面所界之體積,因而爲

$$V=\iint_R \sqrt{1-x^2-y^2}\ dxdy.$$

按第三章第四節,可知

$$V=\int_{-1}^{+1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}dy\right]dx.$$

若視 x 爲常數,則

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}dy=\frac{1}{2}\pi(1-x^2).$$

$$V=\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}(1-x^2)\,dx=\frac{\pi}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{3}\pi.$$

3. 擺錘之研究． 第二章第一節中已提及，倘 s 爲 t 之函數，而視 s 爲路程，t 爲時間，則此函數關係表物體在空間中之運動，而 $\frac{ds}{dt}$ 表此物體在某時間或軌道上某點之速度．倘此物體之運動爲等速的，則其速度初不隨時間而變更，換言之，此速度與時間無關，并非時間之函數，而是一常數．因而等速運動可以此式表之：

$$\frac{ds}{dt}=c \qquad (c\text{ 爲常數}).$$

反之，若爲一不等速運動，則其速度隨時間而異，故爲時間之函數。因而

$$\frac{ds}{dt}=\varphi(t)$$

表不等速運動．

此處速度既爲 t 之函數 $\varphi(t)$，可假定其并爲可微分者，如是，則其引申 $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ 所表者卽是所謂“加速”；因 $d\varphi(t)$ 表一點與他點間速度之微差，dt 則表此二點之時間之微差，其比卽是由一點至他

點之"加速"率也.倘此運動之加速率爲等的(或云等加速運動),則與時間無關,乃是一常數;因而等加速運動可以

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=c' \qquad (c'\text{ 爲常數})$$

表之.但 $\varphi(t)=\frac{ds}{dt}$,故亦可寫作

$$\frac{d^2s}{dt^2}=c'.$$

從可知表物體運動之函數,其第一次引申爲速度,第二次引申則爲加速也。

今用一線,懸一有重量之小球(例如一小鐵球),如鐘錘之狀,能自由擺動者.此小球之質量,名爲 m,線之長則爲 l,但假定線之質量甚小,對於球之質量,可略之勿計。試將小球撥動之,則卽往返搖擺,一時不能自已.今幷假定此小球幷不受邊旁其他影響,故其搖擺祇在一平面內.如圖,OM 爲其搖擺所至之一位置,MN 表其重力.按力學上原則,此 MN 重力可劈爲互相垂直之二力,其一與

OM 同方向，其一垂直於此，如圖中之 MB 及 MD 是.力學上以"質量乘加速"爲力之定義，故如物體之向地加速以 g 表之，則有

$$MN=-mg.$$

(此處 mg 前加一負號較爲便利)

按三角學，卽可知

$$MD=MN\cdot\sin\varphi=-mg\cdot\sin\varphi.$$

今名 AM 弧爲 s，則照前之所云，可知此搖擺運動之加速爲 $\frac{d^2s}{dt^2}$ (t 爲時間). 此加速與 m 之乘積 $m\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$，不難知卽爲 MD，故得

$$m\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\sin\varphi.$$

然 $s=l\cdot\varphi$，而 l 爲一常數，φ 則爲 t 之函數，所以 $\frac{d^2s}{dt^2}=l\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}$，而有

$$l\cdot m\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-mg\cdot\sin\varphi,$$

或　　$$l\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-g\cdot \sin\varphi.$$

為便利計，可暫設$\frac{d\varphi}{dt}=v$,則上式成為

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{g}{l}\cdot \sin\varphi.$$

今將此式之右端乘以$d\varphi$,左端則乘以與此相等之$v\cdot dt$,卽得

$$v\cdot dv=-\frac{g}{l}\cdot \sin\varphi\, d\varphi.$$

此式右端之$\frac{g}{l}$為一常數與φ無關,故將此式之兩端求其積分,便有:

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{g}{l}\cos\varphi+C,$$

於此C為一隨意常數.仍將v之值代入,得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{g}{l}\cos\varphi+C.$$

今設φ_0為OM所能有之最大角度,則小球至此角度時,必須返回,因而恰當至此角度時,其速度為0,卽$\frac{d\varphi}{dt}=0$,故上式中設$\varphi=\varphi_0$時,可得

$$0=\frac{g}{l}\cos\varphi_0+C,$$

或即是 $$C=-\frac{g}{l}\cos\varphi_0,$$

C 之值於是完全決定，非爲一隨意之常數矣。

將 C 之此值代入原來式中，即有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{g}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0). \quad (1)$$

因 $\cos\varphi_0=\cos(-\varphi_0)$，故可知若此小球擺至 φ_0 時返回，則他方面擺至 $(-\varphi_0)$ 時亦必返回；換言之，OM 與 OA 間之最大角，無論在 OA 之右或左均相同，因而此小球搖擺於 $(-\varphi_0)$ 與 φ_0 之間。

倘於 $\varphi=0$（即當小球於圖中 OA 位置時），其速度爲 v_0；

$$\frac{d\varphi}{dt}=v_0 \qquad (於\ \varphi=0),$$

則將此值代入前所得之式 (1) 時，可得

$$\frac{1}{2}v_0^2=\frac{g}{l}(1-\cos\varphi_0),$$

或 $$v_0^2=\frac{2g}{l}(1-\cos\varphi_0),$$

因而有 $\cos\varphi_0 = 1 - \frac{v_0{}^2 l}{2g}$。

由此式，可知若 $v_0{}^2 l < 2g$，則 $|\varphi_0| < \frac{\pi}{2}$；若 $v_0{}^2 l > 2g$，但 $< 4g$，則 $|\varphi_0| > \frac{\pi}{2}$；倘若 $v_0{}^2 l > 4g$，則 $1 - \frac{v_0{}^2 l}{2g} < -1$，然 cos 之值決不能小於 -1，故此 φ_0 事實上不能存在。是卽倘 $v_0{}^2 l > 4g$，則此小球將作環繞運動，并不搖擺於兩角度間矣，因此處無有最大角可言也。倘用小球之質量 m 乘 $\frac{v_0{}^2 l}{2g}$ 之分子并分母，則此式之值仍不變。力學上名 $m\,v_0{}^2 l$ 爲此小球之離心力，而 $2g\,m$ 則如前所云卽其重力之二倍。故以上所云者，亦可如是述之：倘小球在 OA 位置之離心力小於其重力之二倍，則其運動搖擺於二角度間，此角度小於九十度。倘小球於 OA 之離心力大於其重力之二倍，但小於其重力之四倍，則其運動仍爲搖擺者，惟此小球能超出經過 0 之地平線以上。若於 OA 之離心力大於其重力之四倍，則其運動不再搖擺往返於兩角度間，而成爲環繞

運動．此種事實，經驗上自極易知，惟此處則純藉數學理論推得．以上所云之最大角度，亦謂之"振幅"，而此搖擺運動，則稱為"振動"．

由式(1)，可得

$$dt=\sqrt{\frac{l}{2g}}\ \frac{d\varphi}{\pm\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}},$$

即是 $$t=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\frac{d\varphi}{\pm\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}+C, \qquad (2)$$

於此 C 為一隨意常數，而積分內根號前之正負號則當如是選擇用之，務使 t 不取負值．此式將時間 t 視為振動所至角度之函數，故由已知之角度，可計算其時間(時間自須定一起點，由此起點計之)．今如欲知自 $\varphi=0$ 至 $\varphi=\varphi_0$ 之擺動須費若干時間，則由上式，倘設此所需之時間為 T，即可得

$$T=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} \qquad (2a)$$

按第三章第三節，可知此為一"非正則"積分，須視為一其他積分之極限值，然其極限值之存在，則不

難見，故為簡便計，可即用此計算。

第二章第六節 4 中曾表明 cos 可展為一級數；故

$$\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\cdots\cdots,$$

$$\cos\varphi_0=1-\frac{\varphi_0{}^2}{2!}+\frac{\varphi_0{}^4}{4!}-\cdots\cdots$$

倘此振動之振幅異常小，則以上二級數，自第三項以下均可略去不計，因其值甚小。於是可設

$$\cos\varphi-\cos\varphi_0=\frac{\varphi_0{}^2-\varphi^2}{2},$$

而式 (2a) 成為

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0{}^2-\varphi^2}}.$$

此式右端之積分，不難求得為

$$\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0{}^2-\varphi^2}}=arc\ sin\frac{\varphi_0}{\varphi_0}-arc\ sin\ 0$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

故有 $$T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

由 $(-\varphi_0)$ 至 φ_0 謂之一全振動，故 T 乃是一半振動所需時間也.

又若取 (2) 之無定積分，并仍假定爲極小之振幅，則得

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}arc\ sin\frac{\varphi}{\varphi_0}+C,$$

於此 C 爲一隨意常數. 今可如是計算時間，以 $\varphi=\varphi_0$ 爲時間之起點，即是：於 $\varphi=\varphi_0, t=0$，則卽得

$$0=\sqrt{\frac{l}{g}}arc\ sin\frac{\varphi_0}{\varphi_0}+C.$$

因而

$$C=-\sqrt{\frac{l}{g}}arc\ sin\ 1=-\sqrt{\frac{l}{g}}\ \frac{\pi}{2}.$$

將此值代入上所得式，有

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\left[arc\ sin\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)-\frac{\pi}{2}\right].$$

由此，并不難得：

$$\varphi=\varphi_0 sin\left(\frac{\pi}{2}+t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)=\varphi_0 cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

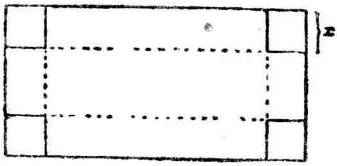
故如規定時間之計算以 $\varphi=\varphi_0$ 處爲起點，則用上二式，由已知之時間，可推算擺動所至之角度；

由已知之角度，亦可推算其時間．惟此處係以極小之振幅爲出發，若振幅大，上二式卽不能用．振幅較大之振動，其問題不能如上之簡單，今不再論．

由以上式所能計算者，爲其近似值．然前面研究中，並未將空中空氣之抵抗力及懸線處之摩擦力等計入，故實際上所差尚多．本書內舉此例，不過略欲使讀者粗知微積分於物理問題上之應用而已，故此方面之種種問題，概不深及，卽以此爲止．

4. 極端值之實用． 極端值問題，於日常生活上亦多遇見．今示一實用之例如下：

有鐵片一方，其長 8 尺，寬 4 尺．今欲於其四角各裁去一小方塊，然後按圖中虛線折之，使成一立方器．今所欲知者，則此所裁去之小方塊，其邊當如何長，俾所得之器，有最大之體積．



今命所欲裁去之方塊，其邊長爲 x，則所得之器，其體積 V 爲

$$V=(8-2x)(4-2x)x$$
$$=4x^3-24x^2+32x,$$

乃是 x 之函數.試求其引申，得

$$\frac{dV}{dx}=12x^2-48x+32.$$

按第二章第三節所云，此式須等於 0，故有

$$12x^2-48x+32=0.$$

解此方程，可得

$$x=2\pm 2\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

此處 $x=2+2\sqrt{\frac{1}{3}}$ 一根不能用，蓋鐵片之寬衹有 4 尺，x 決不能超過 2 尺也.其可研究者爲 $x=2-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 一根.試求 V 之第二次引申，得

$$\frac{d^2V}{dx^2}=24x-48.$$

於此中設 $x=2-\frac{2}{\sqrt{3}}$，則得一負值。按第二章第三節，可知此處確是一最大值。因而欲使所得之器有最大之體積，則所裁去之方塊，其邊宜長 $2-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 尺。讀者可試證實此結果。