Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 13

Übungsaufgaben

Aufgabe 13.1. Zeige, dass in einem Peano-Halbring die Addition assoziativ ist.

Aufgabe 13.2. Zeige, dass in einem Peano-Halbring die Multiplikation kommutativ und assoziativ ist und dass 1 das neutrale Element ist.

Aufgabe 13.3.*

Man gebe ein Beispiel für einen kommutativen Halbring, der kein Peano-Halbring ist.

Aufgabe 13.4. Zeige, dass in einem Peano-Halbring die Ordnungsrelation mit der Addition und der Multiplikation verträglich ist.

Aufgabe 13.5. Zeige, dass in einem Peano-Halbring der Ausdruck

$$\forall x \forall y \, (x \leq y \wedge y \leq x + 1 \rightarrow (y = x \vee y = x + 1))$$

gilt.

Aufgabe 13.6. Zeige, dass in einem Peano-Halbring das *Lemma von Bezout* in der Form gilt, dass es zu zwei teilerfremden (das ist zu definieren) Elementen x, y Elemente a, b mit

$$ax + by = 1$$

gibt.

Aufgabe 13.7. Zeige, dass in einer Struktur, die die Peano-Axiome für den Nachfolger erfüllt, die Aussage

$$\forall x \, (x = 0 \vee x = N0 \vee \exists y \, (NNy = x))$$

gilt.

Aufgabe 13.8.*
Zeige, dass die Vorgängereigenschaft

$$\forall x\,(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Ny))$$

aus der Menge der Peano-Axiome für den Nachfolger folgt.

Aufgabe 13.9. Zeige, dass die Vorgängereigenschaft

$$\forall x\,(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = y + 1))$$

aus der Menge der erststufigen Peano-Axiome ableitbar ist.

Aufgabe 13.10. Zeige, dass die Division mit Rest aus der Menge der erststufigen Peano-Axiome ableitbar ist.

Aufgabe 13.11. Es sei

$$M = \mathbb{Q}_{\geq 0}$$

die Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen mit der 0 und der Abbildung

$$N(x) = x + 1.$$

Welche der Peano-Axiome für den Nachfolger gelten für M, welche nicht?

Aufgabe 13.12. Es sei M die disjunkte Vereinigung aus zwei Kopien von $\mathbb{N}$ zusammen mit dem ausgezeichneten Element $0 = 0_1$ (aus der ersten Kopie) und der Abbildung N, die auf beiden Kopien die übliche Nachfolgerabbildung ist. Welche der Peano-Axiome für den Nachfolger gelten für M, welche nicht?

Aufgabe 13.13. Es sei M die disjunkte Vereinigung aus $\mathbb{N}$ und aus $\mathbb{Z}$.[1] Wir definieren auf M eine Nachfolgerfunktion, die auf den beiden Bestandteilen durch den üblichen Nachfolger gegeben ist (also durch $+1$), und wir betrachten die $0 \in \mathbb{N}$ als die Null von M.

a) Zeige, dass M die ersten beiden Axiome aus den erststufigen Peano-Axiomen für die Nachfolgerfunktion erfüllt.

b) Zeige, dass es keine Addition auf M gibt, die mit den Additionen auf $\mathbb{N}$ und auf $\mathbb{Z}$ übereinstimmt und für die die Abziehregel gilt.

c) Gilt das erststufige Induktionsaxiom (formuliert für die Nachfolgerfunktion)?[2]

---

[1] Dabei muss man darauf achten, die Elemente aus $\mathbb{N}$ nicht mit denen aus $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ zu verwechseln. Beispielsweise kann man die Elemente einerseits mit 5 und andererseits mit $5_{\mathbb{Z}}$ bezeichnen.

[2] Diese Aufgabe ist wohl schwierig.

Aufgabe 13.14. Zeige, dass in der arithmetischen Sprache erster Stufe mit den Konstanten $0, 1$, dem Nachfolgersymbol N und den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ nur abzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ „adressierbar" sind und dass daher das zweitstufige Induktionsaxiom der Dedekind-Peano-Axiome nicht in dieser Sprache formulierbar ist.

Aufgabe 13.15. Zeige, dass man für jede Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}$ die arithmetische Sprache erster Stufe um ein einstelliges Relationssymbol R_T und die erststufigen Peano-Axiome um geeignete Axiome ergänzen kann, derart, dass diese neue Axiomatik in der Standardinterpretation $\mathbb{N}$ genau dann gilt, wenn R_T als T interpretiert wird. Man folgere daraus, dass mit überabzählbar vielen Relationssymbolen alle Teilmengen der natürlichen Zahlen „adressierbar" sind.

(Dies bedeutet aber weder, dass für jede Struktur einer solchen Axiomatik jede Teilmenge adressierbar ist, noch, dass das zweitstufige Induktionsaxiom, das eine Aussage über alle Teilmengen macht, erststufig formulierbar ist).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.16. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{N}$ ein Peano-Dedekind-Modell der natürlichen Zahlen und M ein Peano-Halbring. Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow M$$

mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(n') = \varphi(n) + 1$ gibt. Zeige ferner, dass φ injektiv ist und die Addition und die Multiplikation respektiert.

Aufgabe 13.17. (4 Punkte)

Zeige, dass in einem Peano-Halbring das Distributivgesetz gilt.

Aufgabe 13.18. (3 Punkte)

Zeige, dass in einem Peano-Halbring die Kürzungseigenschaft gilt, d.h. dass aus $xz = yz$ mit $z \neq 0$ die Gleichheit $x = y$ folgt.

Aufgabe 13.19. (3 Punkte)

Zeige, dass $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $0, 1$ und der natürlichen Addition und Multiplikation die ersten sechs Peano-Axiome erfüllt, aber nicht das Induktionsaxiom.