Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 43

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 43.1. Bestimme

$$[-3,2]\cap\,]-2,3[\,.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 43.2.*

Es sei $[a,b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K und es seien $x,y \in [a,b]$. Zeige

$$|y-x| \leq b-a.$$

Aufgabe 43.3.*

Schreibe die Menge

$$]-3,-2[\,\cup\{7\}\cup\left([-\frac{5}{2},-\frac{1}{3}]\setminus\,]-\frac{4}{3},-1]\right)\cup[1,\frac{7}{3}]\cup[-\frac{1}{2},\frac{6}{5}[\,\cup(\,]-7,-6]\cap\mathbb{R}_+)$$

als eine Vereinigung von möglichst wenigen disjunkten Intervallen.

Aufgabe 43.4. Zeige, dass der Durchschnitt von zwei abgeschlossenen Intervallen in einem angeordneten Körper K wieder ein abgeschlossenes Intervall ist.

Aufgabe 43.5. Zeige, dass der Durchschnitt von einem abgeschlossenen und einem offenen Intervall in einem angeordneten Körper offen, abgeschlossen und halboffen sein kann.

Aufgabe 43.6. Es seien I_1, I_2 Intervalle in einem angeordneten Körper K mit $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Zeige, dass die Vereinigung $I_1 \cup I_2$ wieder ein Intervall ist.

Aufgabe 43.7. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $I \subseteq K$ ein Intervall mit den Intervallgrenzen $a < b$. Zeige, dass es in I eine rationale Zahl gibt.

Aufgabe 43.8. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $I \subseteq K$ ein Intervall mit den Intervallgrenzen $a < b$. Zeige, dass es in I unendlich viele rationale Zahlen gibt.

Aufgabe 43.9.*

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K. Beschreibe die Menge

$$M = \{x \in K \mid -x \in [a, b]\}$$

als ein Intervall.

Aufgabe 43.10.*

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K mit $0 \notin I$. Beschreibe die Menge

$$M = \left\{x \in K \mid x^{-1} \in [a, b]\right\}$$

als ein Intervall.

Aufgabe 43.11.*

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $a < b$ rationale Zahlen. Zeige, dass es eine bijektive streng wachsende Abbildung

$$[0, 1] \longrightarrow [a, b]$$

gibt, die rationale Zahlen in rationale Zahlen überführt.

Aufgabe 43.12. Es sei K ein angeordneter Körper und seien x, y verschiedene Punkte aus K. Zeige, dass es Intervalle I_1 und I_2 mit positiver Länge, mit $x \in I_1$, $y \in I_2$ und mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ gibt.

Aufgabe 43.13. Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper K, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen sind.

a)

$$|4x - 3| < |2x - 3| .$$

b)

$$\left| \frac{x-2}{3x-1} \right| \leq 1.$$

Aufgabe 43.14.*

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen x_1, x_2, x_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 43.15. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 7 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 43.16. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von $\frac{1}{2}$ zum Startwert $x_0 = 1$.

Aufgabe 43.17.*

(1) Bestimme die Glieder x_1, x_2 der Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{3}$ mit dem Startglied
$$x_0 = 1.$$
(2) Finde ganze Zahlen
$$a, b \neq 0$$
mit
$$\left| a + b\sqrt{3} \right| \leq \frac{1}{10}.$$

Aufgabe 43.18. Es sei $c \in K_+$ ein Element in einem angeordneten Körper K und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$ mit dem Startwert x_0. Für ein Folgenglied gelte $x_n = \sqrt{c}$. Zeige, dass auch für alle weiteren Glieder die Folge konstant gleich $\sqrt{c}$ ist.

Aufgabe 43.19. Was passiert beim babylonischen Wurzelziehen, wenn man die Quadratwurzel einer negativen Zahl $c \in K_-$ (mit einem positiven Startwert x_0) berechnen möchte?

Aufgabe 43.20. Was passiert beim babylonischen Wurzelziehen, wenn man mit einem negativen Startwert x_0 die Quadratwurzel von $c \in K_+$ berechnen möchte?

Aufgabe 43.21. Es sei

$$f(x) = x^2 + 4x - 3.$$

Es ist $f(-5) = 2 > 0$ und $f(-4) = -3 < 0$. Führe, ausgehend vom Intervall $[-5, -4]$, Intervallhalbierungen derart durch, dass der Wert der Funktion f an der linken Grenze des Intervalls positiv und an der rechten Grenze negativ ist, bis ein Intervall der Länge $\frac{1}{16}$ erreicht ist.

Aufgabe 43.22.*

Es sei $c \in K_+$ ein Element in einem angeordneten Körper K und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$ mit dem Startwert $x_0 \in K_+$. Es sei $u \in K_+$, $d = c \cdot u^2$, $y_0 = ux_0$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{d}$ mit dem Startwert y_0. Zeige

$$y_n = ux_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 43.23.*

Wir betrachten die Rekursionsvorschrift

$$x' = 2^{-1} \cdot \left(x + \frac{c}{x} \right)$$

des Heron-Verfahrens in $\mathbb{Z}/(5)$ für $c = 3$. Zeige, dass für sämtliche Startglieder $x_0 \neq 0$ stets eine nichtkonstante Folge entsteht.

Aufgabe 43.24.*

Wir betrachten die Rekursionsvorschrift

$$x' = 2^{-1} \cdot \left(x + \frac{c}{x} \right)$$

des Heron-Verfahrens in $\mathbb{Z}/(7)$ für $c = 3$. Zeige, dass für sämtliche Startglieder die entstehende Folge ab einer bestimmten Stelle nicht mehr definiert ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 43.25. (2 Punkte)

Zeige, dass der Durchschnitt von zwei offenen Intervallen in einem angeordneten Körper K wieder ein offenes Intervall ist.

Aufgabe 43.26. (3 Punkte)

Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper K, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung bilden.

$$|5x - 8| < |11x - 6| .$$

Aufgabe 43.27. (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 3 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 43.28. (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von $\frac{1}{3}$ zum Startwert $x_0 = 1$.

Aufgabe 43.29. (4 Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^2 + 4x - 3.$$

Es ist $f(0) = -3 < 0$ und $f(1) = 2 > 0$. Führe, ausgehend vom Intervall $[0, 1]$, Intervallhalbierungen derart durch, dass der Wert der Funktion f an der linken Grenze des Intervalls negativ und an der rechten Grenze positiv ist, bis ein Intervall der Länge $\frac{1}{16}$ erreicht ist.

Abbildungsverzeichnis