Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 33

Übungsaufgaben

Aufgabe 33.1.*
Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 33.2.*
Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 33.3. Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im K^3, wobei K den Körper mit fünf Elementen bezeichnet.

Aufgabe 33.4. Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

im K^3, wobei K den Körper mit sieben Elementen bezeichnet.

Aufgabe 33.5. Es sei K ein Körper. Zeige, dass das Kreuzprodukt auf dem K^3 bilinear ist.

AUFGABE 33.6. Zeige, dass für das Kreuzprodukt für Vektoren $x, y, z \in K^3$ die Beziehung

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0$$

gilt.

AUFGABE 33.7.*

Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Zeige, dass eine Vektorfamilie $u_1, \ldots, u_n \in V$ genau dann eine Orthonormalbasis von V ist, wenn die zugehörige lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V,\ e_i \longmapsto u_i,$$

eine Isometrie zwischen $\mathbb{R}^n$ und V ist.

AUFGABE 33.8. Seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) φ ist eine Isometrie.
(2) Für jede Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, von V ist $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, Teil einer Orthonormalbasis von W.
(3) Es gibt eine Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, von V derart, dass $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, Teil einer Orthonormalbasis von W ist.

AUFGABE 33.9.*

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass die Determinante von φ gleich 1 oder -1 ist. Ferner besitze φ die Eigenschaft, dass zueinander orthogonale Vektoren stets auf orthogonale Vektoren abgebildet werden. Zeige, dass φ eine Isometrie ist.

AUFGABE 33.10. Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, die keine Isometrie ist, für die aber für alle $u, v \in V$ die Beziehung

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0$$

gilt.

Aufgabe 33.11. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass φ flächentreu, aber keine Isometrie ist.

Aufgabe 33.12. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge $\mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren Matrizen eine Gruppe ist. Zeige ferner, dass diese Gruppe bei $n \geq 2$ nicht kommutativ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 33.13. (2 Punkte)

Es sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei u_i, $i \in I$, eine Orthonormalbasis von V. Zeige, dass für Vektoren $v = \sum_{i \in I} a_i u_i$ und $w = \sum_{i \in I} b_i u_i$ die Gleichheit

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} a_i b_i$$

gilt.

Aufgabe 33.14. (2 Punkte)

Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

im K^3, wobei K den Körper mit sieben Elementen bezeichnet.

Aufgabe 33.15. (3 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeige, dass die Menge der Isometrien auf V eine Gruppe unter der Hintereinanderschaltung von Abbildungen bildet.

Aufgabe 33.16. (2 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine eigentliche Isometrie. Es sei vorausgesetzt, dass f trigonalisierbar ist. Zeige, dass dann f sogar diagonalisierbar ist.

Aufgabe 33.17. (3 Punkte)

Es seien V, W komplexe Vektorräume mit Skalarprodukten und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Isometrie bezüglich der gegebenen komplexen Skalarprodukte ist, wenn φ eine Isometrie bezüglich der zugehörigen reellen Skalarprodukte ist.