始

543

岩波講座
物理學及び化學

物理學 I. B.

# ヴェクトル及びテンソル解析

伊藤德之助

内交
7.6.21
帝國圖書館

岩波書店

物　理　學

I. B.

# 物理學に應用する數學

寺　澤　寛　一

# ヴェクトル及びテンソル解析

伊　藤　德　之　助

# 目　次

## 物理學に應用する數學

## ヴェクトル及びテンソル解析

# ヴェクトル及びテンソル解析

## 第一章

### ヴェクトルの合成

**1. ヴェクトル量とスカラー量** 物理學に於ける概念の中で長さ,溫度,質量,ポテンシャル等のやうに,適當な單位を定めれば,只その單位に對する比卽ち數値だけで定まる量を**スカラー量**といふ.

然し空間に於ける一點の位置は,解析幾何學で旣に知つてゐるやうに,座標軸上の三つの射影の値$(x,y,z)$の一組,或はその代りに原點とその點とを結びつける直線の方向,向き及び大いさによつて定められる.

スカラー量に對して**方向**及び**向き**(或は向きを區別した方向)と**大いさ**卽ち三つの値の一組$(x,y,z)$によつて定められる量を**ヴェクトル量**といふ. 力,速度,加速度,電氣力等は皆ヴェクトル量である.

**2. ヴェクトルの方程式** ヴェクトル量を表はすには肉太の文字$\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$等を用ひる.

ヴェクトルの方程式

$$\mathbf{a}=\mathbf{b} \qquad (2\cdot1)$$

は,二つのヴェクトル$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$とは,その方向,向き及び大いさが悉

く等しいことを表はすものである.

すべて方向,向き及び大いさの等しいヴェクトルは,その位置に拘らず等しいものと考へる. このやうなヴェクトルを**自由ヴェクトル**といふ. 然し剛體に作用する力の如きは,その作用する點の位置が變れば異つた影響を及ぼすものであるから,勝手に位置をかへてみることはできない. 從つてこれは自由ヴェクトルではなくして**束縛ヴェクトル**であるが,それも後に調べるヴェクトルの能率といふ概念をとり入れゝば,その他の事に就いては全く自由ヴェクトルと同等に扱へるので,今後殊更斷らない限り自由ヴェクトルについて研究する.

ヴェクトル $\mathbf{a}$ と大いさ及び方向が等しく,向きの反對なヴェクトルを $\mathbf{a}$ の**負ヴェクトル**といひ, $-\mathbf{a}$ で表はす.

**3. ヴェクトルの成分** ヴェクトル $\mathbf{a}$ を直交座標軸の上に射影して,その正射影 $a_x, a_y, a_z$ を $\mathbf{a}$ の成分といふ. 成分はスカラー量である. $\mathbf{a}$ の大いさを絕對値又は率といつて $|\mathbf{a}|$, もしくは $\mathbf{a}$ に相當する普通の書體 $a$ で表はせば,明かに

$$|\mathbf{a}|=a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (3\cdot1)$$

$\mathbf{a}$ と座標軸とのつくる角度の餘弦は,

$$\cos(\mathbf{a}, x)=\frac{a_x}{a},\ \cos(\mathbf{a}, y)=\frac{a_y}{a},\ \cos(\mathbf{a}, z)=\frac{a_z}{a} \qquad (3\cdot2)$$

である. これによつてヴェクトルはその三つの成分が與へられるか,又は絕對値と方向餘弦が與へられゝば,方向,向き,大いさが定まるもので,その逆の事も云へる.

**4. 單位ヴェクトル** 大いさが1に等しいヴェクトルを



**單位ヴェクトル**といふ. ヴェクトル $\mathbf{a}$ と方向,向きが等しい單位ヴェクトルを $\mathbf{a}_1$ で表はせば,

$$\mathbf{a}_1=\frac{\mathbf{a}}{a}. \qquad (4\cdot1)$$

單位ヴェクトルの成分は(3·2)により明かに方向餘弦に等しいことが知れる.

空間に於ける點の位置を示すには,定點からその點へ動徑ヴェクトル $\mathbf{r}$ をひけば,距離は $\mathbf{r}$ の大いさにより,方向,向きは $\mathbf{r}$ の單位ヴェクトルで示される. 動徑の單位ヴェクトルの成分は方向餘弦であるから,それを**方向ヴェクトル**と名付けることにする.

直交座標の座標軸の正の向きにひいた三つの互に直交する單位ヴェクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ で表はし,これを**基本ヴェクトル**といふ.

任意のヴェクトル $\mathbf{b}$ はそれと方向の等しい他のヴェクトル $\mathbf{a}$ に適當なスカラー量を乘じて得られる,

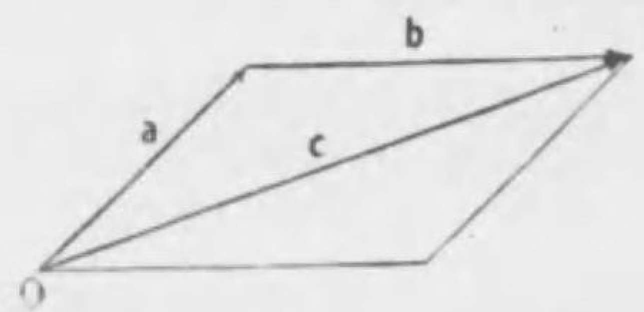
$$\mathbf{b}=s\mathbf{a}. \qquad (4\cdot2)$$

$s$ が正ならば $\mathbf{a}$ と同じ向き,負ならば反對の向きと考へればよい.

もし $s$ が只の數でなく元をもつ物理的の量ならば, $\mathbf{b}$ と $\mathbf{a}$ とは異ふ物理的の量である. 例へば $s$ を質量, $\mathbf{a}$ を速度とすれば $\mathbf{b}$ は運動量, $\mathbf{a}$ が加速度ならば $\mathbf{b}$ は力を表はすが,いづれも $\mathbf{b}$ と $\mathbf{a}$ とは同じ方向にある.

**5. ヴェクトルの合成** 二つの同種類のヴェクトル $\mathbf{a}$ と

**b** とを加へるには(第1圖), **a** の尖端から **b** をひき, **a** の尾端と **b** の末端とを結ぶヴェクトル **c** を作り, **c** を **a** と **b** との合成ヴェクトルといひ,




第 1 圖

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b} \qquad (5\cdot1)$$

で表はす. 従つて圖の上から明かに, **a** と **b** とを二邊とする平行四邊形を作れば, **c** は **b** と **a** との合成ヴェクトルである.

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}, \qquad (5\cdot2)$$

この式の意味は,ヴェクトルの和には**交換の法則**が成り立つことを示すのである.

更に **c** に他の同種類のヴェクトル **d** を加へれば,作圖上

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{c}+\mathbf{d}&=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{d}\\&=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{d})=(\mathbf{a}+\mathbf{d})+\mathbf{b},\end{aligned}\right\} \qquad (5\cdot3)$$

即ちヴェクトルの和には**結合の法則**も成立する.

**a** にその負ヴェクトル **−a** を加へれば,その合成ヴェクトルは零となる,

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0. \qquad (5\cdot4)$$

代數學と同様に,これは **a** から **a** を減ずることゝ見做せるから演算の記號+を省いてよい. 即ちヴェクトル **c** から **a** を減ずることは, **c** と **−a** との合成ヴェクトルを作ることで,ヴェクトル方程式に於いて符號を變へれば自由に他の邊に移項することができる. 従つて (5·1) は,

$$\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{a} \qquad (5\cdot5)$$

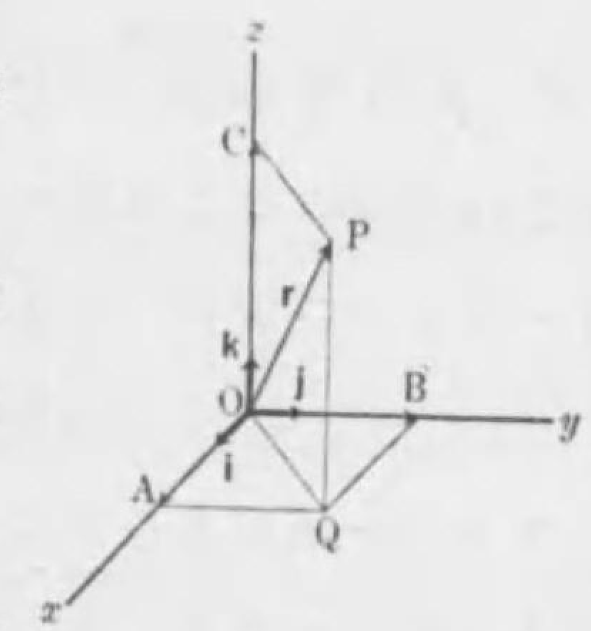


と同等であり,更に

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+(-\mathbf{c})=0 \qquad (5\cdot6)$$

と書けば,三つのヴェクトルの和が零となり,一つの三角形を形づくることを示す. 即ち三つのヴェクトルを一點に作用する三つの力と見做せば,力の釣合の條件を表はす"ラミ(Lami)の定理"を示すこととなる.

ヴェクトル合成の定理及び(4·2)式により,ヴェクトルの成分($x$, $y$, $z$)と基本ヴェクトルとを用ひてヴェクトルを表はすことができる. 第2圖により,




第 2 圖

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$$
$$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC}.$$
$$\therefore\quad \mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}. \qquad (5\cdot7)$$

二つのヴェクトル **a, b** を

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$$

とおけば,成分はスカラー量であるから夫々加へて,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_x+b_x)\mathbf{i}+(a_y+b_y)\mathbf{j}+(a_z+b_z)\mathbf{k}. \qquad (5\cdot8)$$

合成ヴェクトルは,各の成分の和を成分とするヴェクトルであつて,基本ヴェクトルは複素數に於ける虚數のやうに考へればよい.

# 第二章

## ヴェクトルの積

**6. スカラー積** 二つのヴェクトル$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$の絶對値の積に,その二つのつくる角の餘弦を乘じたものを,$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$との**スカラー積**といひ$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$で表はせば,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}), \qquad (6\cdot1)$$

スカラー積はその定義によりスカラー量で,一般に$\mathbf{a}$や$\mathbf{b}$と異ふ元の量である. $\mathbf{a}$を質點に作用する力,$\mathbf{b}$を變位とすれば,そのスカラー積は力のする仕事である.

こゝに用ひた記號はギッブス(Gibbs)の記號で,或は$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$又は$\mathbf{ab}$のやうな書き方もある.[1]

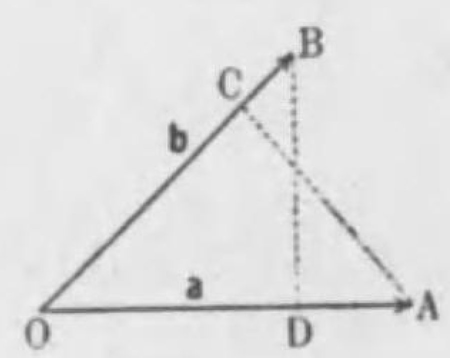
定義から直ちに

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}. \qquad (6\cdot2)$$

スカラー積は交換の法則に從ふ.

第3圖を見れば明かに

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\overline{OA}.\overline{OD}=\overline{OB}.\overline{OC},$$



第 3 圖

即ち$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$のスカラー積は,$\mathbf{b}$の方向に於ける$\mathbf{a}$の成分と$\mathbf{b}$との積若しくは$\mathbf{a}$の方向に於ける$\mathbf{b}$の成分と$\mathbf{a}$との積である.

(1) 括弧記號は紛らはしく,又$\mathbf{ab}$は'dyad'といふ量を表はすことに近時多く用ひられてゐるから,この講義にはギッブスの表し方による.



もし$\mathbf{a}$が$\mathbf{b}$に垂直ならば,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0. \qquad (6\cdot3)$$

又$\mathbf{a}$が$\mathbf{b}$に平行ならば,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab. \qquad (6\cdot4)$$

特に$\mathbf{a}=\mathbf{b}$ならば,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=a^2 \qquad (6\cdot5)$$

であるから,略して$\mathbf{a}^2$と書いて$\mathbf{a}$の"Norm"といふ. この關係によりヴェクトルの絶對値を求めるには,それを自乘して平方根をとればよい.

こゝに注意すべきは,$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$の時は$\mathbf{a}$が$\mathbf{b}$に垂直であることを示して零であるとは限らない. 只もし積の何れか一つのヴェクトル,例へば$\mathbf{b}$が如何なる任意のヴェクトルであつても,恆に

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$$

の關係が成立する時には,

$$\mathbf{a}\equiv0$$

である. さもなければ$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$とは垂直であることを意味してゐる.

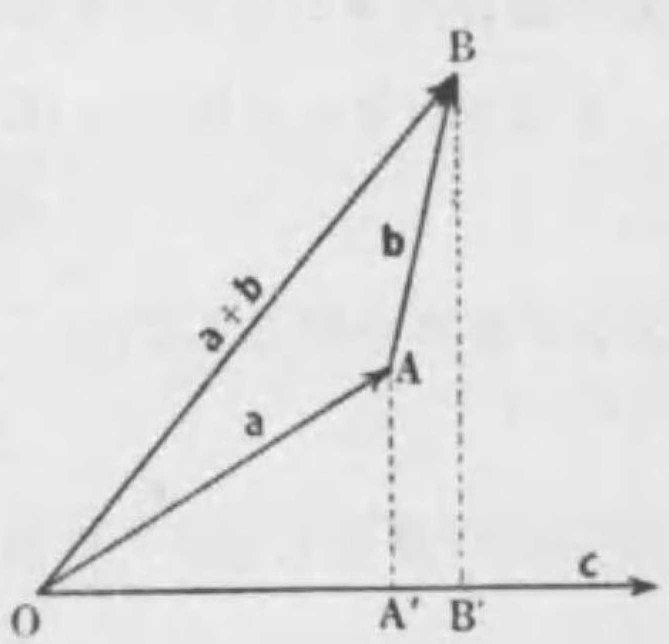
基本ヴェクトルは互に直交する單位ヴェクトルだから,

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1,\\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0.\end{array}\right\} \qquad (6\cdot6)$$

これは多く用ひられる重要な關係である.

スカラー積が配分の法則に従ふことは第4圖により，

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\overline{OB'}.\overline{OC}$$
$$=(\overline{OA'}+\overline{A'B'})\overline{OC}$$
$$=\overline{OA'}.\overline{OC}+\overline{A'B'}.\overline{OC}.$$
$$\therefore (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}. \qquad (6\cdot7)$$



第 4 圖

この結果は直ちに數箇のヴェクトルの和に擴張できる，

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\cdots\cdots)\cdot\mathbf{e}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{e}+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6\cdot8)$$

**a** と **b** の直角成分を夫々 $(a_x, a_y, a_z)$, $(b_x, b_y, b_z)$ とすれば，(6·6) 及び (6·8) により，

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})$$
$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (6\cdot9)$$

スカラー積は,各の相應する成分の積の和である．

**7. ヴェクトル積**　二つのヴェクトル **a**, **b** を二邊とする平行四邊形の面積に等しい大いさで，**a** と **b** とを含む平面に垂直の方向に,向きは螺旋を **a** から **b** へ向けて廻した時に螺旋の進む向きにあるヴェクトルを，**a** と **b** との**ヴェクトル積**と稱へる．

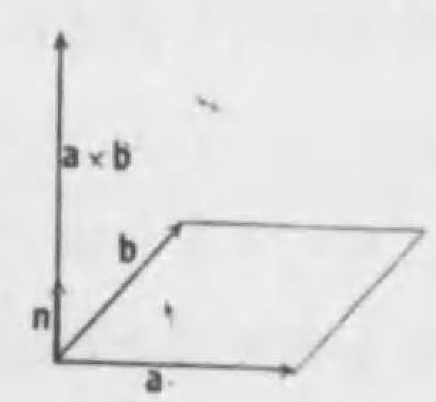
**n** を **ab** の面に垂直な單位ヴェクトル,向きは上に述べたやうにとれば，**a** と **b** とのヴェクトル積 **a**×**b** は

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{n}ab\sin\theta. \qquad (7\cdot1)$$

ヴェクトル積を [**a**, **b**] で表はすこともあるが,こゝにはギッブ



スの記號を用ひる．



第 5 圖

面積はこのやうにして,それに垂直な方向のヴェクトルによつて表はせるから,ヴェクトル量として扱へる．それには或る軸に沿つた向きを豫め規約しなければならない．この區別の仕方は便宜上のもので,量そのものには本質的に向きの區別はない．量それ自身に向きの區別のある力,速度等を**極性ヴェクトル**といひ,面積や次に調べる力の能率等のやうに廻轉軸によつて向きの規約を設けるものは**軸性ヴェクトル**といふ．

軸性ヴェクトルは軸に平行な面について對稱であるが,極性ヴェクトルは軸に垂直な面を對稱面とする．然しこのやうな區別は三次元の空間に於いては殆ど必要がない．

**r** を原點から力 **K** の作用點にひいた動徑ヴェクトルとすれば,原點に對する力の**能率**[1] は **r**×**K** である．

一直線を軸として廻轉速度 **w** で廻る剛體の一點の位置を,廻轉軸上の點から **r** で表はせば軸からの距離 $p$ は

$$p=r\sin(\mathbf{w},\mathbf{r}),$$

よつてその點に於ける速度 **v** の大いさは

$$|\mathbf{v}|=pw=rw\sin(\mathbf{w},\mathbf{r}).$$

廻轉する向きと **v** の向きとの關係が螺旋の廻轉とその進む向

(1) 直線に關する能率はスカラー量で,點に關する能率のその點を過ぎる直線の方向の成分である．拙著 'ベクトル解析' (1929), 53 頁參照．

きとに同じ關係にとれば,

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}\times\mathbf{r}. \tag{7·2}$$

ヴェクトル積の定義によつて明かに,もし $\mathbf{b}$ から $\mathbf{a}$ の方に螺旋を廻せばその進む向きは反對になるから,

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}. \tag{7·3}$$

卽ち交換の法則に從はない.

もし $\mathbf{a}$ が $\mathbf{b}$ に平行ならば, $\sin\theta=0$ であるから,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0; \tag{7·4}$$

よつて當然

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0. \tag{7·5}$$

基本ヴェクトルは互に垂直であるから, (7·1), (7·3) 及び (7·5) により次の重要な關係が求まる.

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{j}\times\mathbf{k}&=\mathbf{i}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j},\\
\mathbf{k}\times\mathbf{i}&=\mathbf{j}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k},\\
\mathbf{i}\times\mathbf{j}&=\mathbf{k}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i},\\
\mathbf{i}\times\mathbf{i}&=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{7·6}$$

ヴェクトル積は配分の法則に從ふ,卽ち

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}. \tag{7·7}$$

證明[1]. 靜水中に沈めた多面體例へば小さい三稜體は各面に作用する靜水壓で釣合つてゐる. 三角形の邊を順次 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, -(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, 他の稜を $\mathbf{c}$ とする三稜體の側面の面積は

$$\mathrm{ABB'A'}=\mathbf{a}\times\mathbf{c},\quad \mathrm{BCC'B'}=\mathbf{b}\times\mathbf{c},$$

$$\mathrm{CAA'C'}=-(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c},\quad \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\times\mathbf{b},\quad \mathrm{A'B'C'}=-\frac{1}{2}\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

---

(1) 幾何學的の證明は,例へば S. Valentiner, *Vektoranalysis* (3. Aufl., 1923), p. 29 參照.

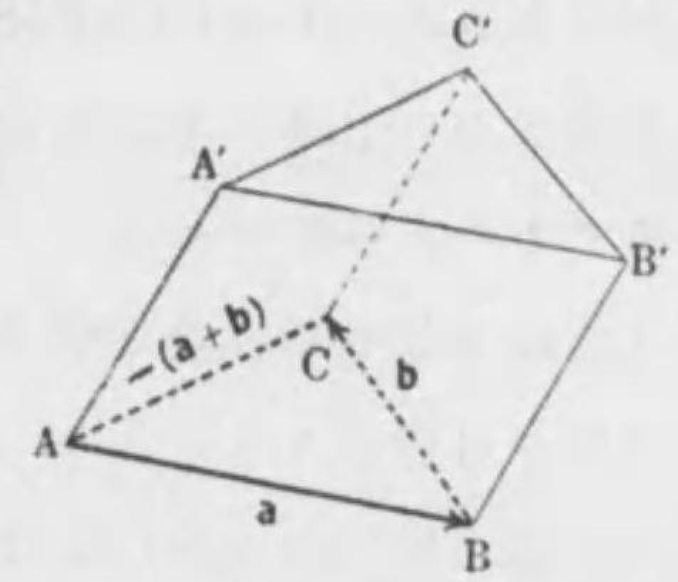


極めて小さい三稜體の面に働く壓力は等しいから,各面に作用する力は面積に比例し,その全力は零である. 故に

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}-(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}$$
$$+\frac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-\frac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0,$$

卽ち

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}.$$




第 6 圖

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ を直角成分にわけ,(7·6) 及び (7·7) を用ひれば,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})\\
&=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{7·8}$$

形式上これを行列式の形にして,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{7·9}$$

とした方が記憶に便利である.

ヴェクトル積の絕對値は (7·8) と (6·6) により,

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2}. \tag{7·10}$$

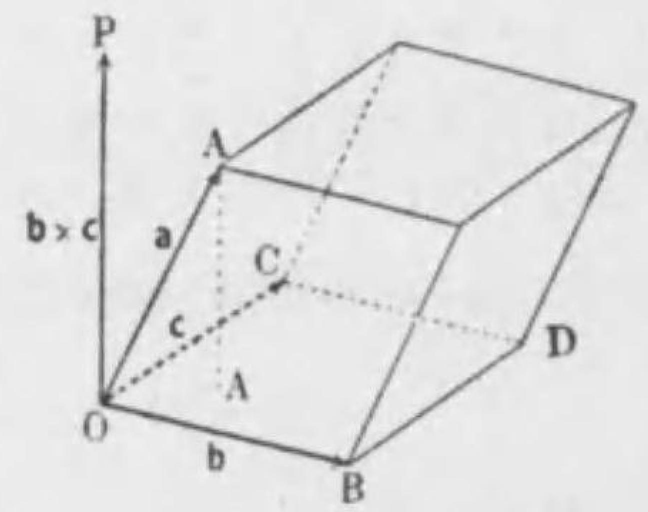
**8. 擬似スカラー** 三つのヴェクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の積[1] $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 或は $[\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c})]$ はヴェクトル $\mathbf{a}$ とヴェクトル $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ とのスカラー積で一種のスカラー量である.

このスカラー量は $\mathbf{a}$ を流體の速度とすれば,單位時間に面積

---

(1) 三つのヴェクトルについて六種の積ができる. その中四種は意義がある. 拙著, 54 頁參照.

$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$を過ぎつて流れる流體の量卽ち流束を示し,$\mathbf{a}$が力ならば力束を示すものと解釋できる.



第 7 圖

或は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を三邊とする平行六面體の容積とも見られる. 第7圖に於いて$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$は底面OBDCの面積であるから,それに垂直なヴェクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で表はせば, $\mathbf{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とのスカラー積はAから底面に樹てた垂線の長さと底面積との積で平行六面體の容積である.

(6·10) 及び (7·9) を用ひて計算すれば,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}=a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}+a_y\begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{8·1}$$

行列式の性質により,その任意の二列を互に入れ換へれば符號が變るが,同時に第一列を第二列に,第二列を第三列に,第三列を第一列に移すやうに, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の順を保つて順次に置き換へても變りはない,卽ち

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})&=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \\ &=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} \\ &=-\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=-\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})=\text{etc}. \end{aligned}\right\} \tag{8·2}$$



從つてこの積は項の輪廻順$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \cdots\cdots)$さへ元通りならば, ・と×とを勝手に入れかへてもよいから,單に $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$ として表はしておくが便利である. 括弧の中の文字の順によつて符號が變るだけで,輪廻順さへ保つてゐれば變りない.

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=-[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{b}]=[\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]=\text{etc}. \tag{8·3}$$

これはスカラー量ではあるけれども,座標系を正系(右手系)から負系(左手系)に變へるときには,前の軸に對する公式と同じ公式がそのまゝ成立するためには符號を變へる必要のあるやうなスカラー量で**擬似スカラー量**といはれるものの一種である. 容積磁氣ポテンシャル等はこの種の量である.

$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$ の中何れか二つが等しいか平行ならば零である.

$$[\mathbf{a}\;s\mathbf{a}\;\mathbf{b}]=(\mathbf{a}\times s\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0. \tag{8·4}$$

三つのヴェクトルが同一平面内に横たはれば,その圍む平行六面體の體積は零であるから,何れの二つも平行でない場合に於いて,三つが共面でない爲めには必ず

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\neq 0 \tag{8·5}$$

でなければならない.

この積が配分の法則に從ふことは,行列式の性質から直ちに求まる.

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}+\mathbf{d}]=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}], \tag{8·6}$$

$$[a\mathbf{a}, b\mathbf{b}, c\mathbf{c}]=abc[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$$

$$=[b\mathbf{a}, c\mathbf{b}, a\mathbf{c}]=[c\mathbf{a}, a\mathbf{b}, b\mathbf{c}]=\text{etc}. \tag{8·7}$$

## 9. 積の公式

$$
\begin{aligned}
\text{(i)}\quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})^{(1)} &= \mathbf{a}\times[(b_y c_z - b_z c_y)\mathbf{i} + (b_z c_x - b_x c_z)\mathbf{j} + (b_x c^y - b_y c_x)\mathbf{k}] \\
&= [b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_y b_y + a_z b_z)]\mathbf{i} + \cdots\cdot \\
&= [b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) \\
&\qquad - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)]\mathbf{i} + \cdots\cdot \\
&= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\
&\qquad - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)(c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}) \\
&= \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}). \qquad (9\cdot1)
\end{aligned}
$$

このヴェクトルは $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ とを含む面内にあつて $\mathbf{a}$ に垂直である.

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)}\quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})^{(2)} &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) \\
&= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}). \qquad (9\cdot2)
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\text{(iii)}\quad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})^{(3)} &= \mathbf{c}[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}] - \mathbf{d}[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] \\
&= \mathbf{b}[\mathbf{c}\,\mathbf{d}\,\mathbf{a}] - \mathbf{a}[\mathbf{c}\,\mathbf{d}\,\mathbf{b}].
\end{aligned}
\right\} \qquad (9\cdot3)
$$

---

(1) [a[b c]]; 他の證明法は拙著, 61-63 頁參照.

(2) ([a b], [c d]).

(3) [[a b], [c d]].



# 第三章

# ヴェクトルの微分と積分

## 10. ヴェクトルの微分

ヴェクトル $\mathbf{v}$ がスカラー自變數 $t$ の函數であれば, $t$ が $t_1$ 及び $t_2$ の値をとるときの $\mathbf{v}$ を夫々 $\mathbf{v}(t_1)$, $\mathbf{v}(t_2)$ で表はし, $t_2$ が限りなく $t_1$ に接近した極限に於いて,

$$\lim_{t_2-t_1=0}\frac{\mathbf{v}(t_2)-\mathbf{v}(t_1)}{t_2-t_1}$$

が有限な値をとれば,これを $t$ に關する $\mathbf{v}$ の第一階微係數と名付けて, $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$ で表はす.

從つて普通の微分と同樣に,次の關係が容易に求まる:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\ldots.)=\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\ldots., \qquad (10\cdot1)$$

$$\frac{d}{dt}(u\mathbf{v})=\frac{du}{dt}\mathbf{v}+u\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \qquad (10\cdot2)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=\frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \qquad (10\cdot3)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,; \qquad (10\cdot4)$$

更に高階の微係數も直ちに求まる.

$$\frac{d^n}{dt^n}(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\ldots.)=\frac{d^n\mathbf{u}}{dt^n}+\frac{d^n\mathbf{v}}{dt^n}+\ldots., \qquad (10\cdot5)$$

$$\frac{d^n}{dt^n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=\frac{d^n\mathbf{u}}{dt^n}\cdot\mathbf{v}+n\frac{d^{n-1}\mathbf{u}}{dt^{n-1}}\cdot\mathbf{v}+\ldots.+\mathbf{u}\cdot\frac{d^n\mathbf{v}}{dt^n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i\mathbf{u}}{dt^i}\cdot\frac{d^{n-i}\mathbf{v}}{dt^{n-i}},\tag{10·6}$$

$$\frac{d^n}{dt^n}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i\mathbf{u}}{dt^i}\times\frac{d^{n-i}\mathbf{v}}{dt^{n-i}}.\tag{10·7}$$

例 1．時刻 $t$ に於ける質點の位置は,原點からひいた動徑 $\mathbf{r}$ で定まる．質點の速度 $\mathbf{v}$ 及び加速度 $\mathbf{a}$ は夫々

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt},\tag{10·8}$$

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.\tag{10·9}$$

例 2．前例で $\mathbf{r}$ を成分にわければ,

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

座標軸は靜止してゐるとすれば,基本ヴェクトルを時間について微分したものは零であるから,

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k}.\tag{10·10}$$

速度の大いさ即ち速さは

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.\tag{10·11}$$

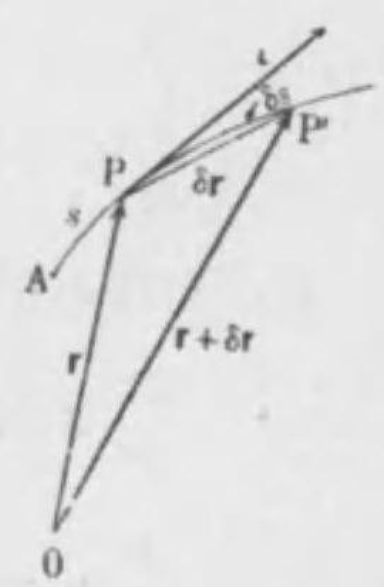
加速度は

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}.\tag{10·12}$$

例 3．質點の畫く曲線上の任意の點Aから,曲線に沿つて測つた弧の長さを $s$ とすれば,$\mathbf{r}$ は $s$ の函數と見られるから,

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Pに極めて接近した點P′の位置は $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$,弧 $\widehat{PP'}$ は $\delta s$ であるから，P′が限りなくPに接近した極限に於いては,割線PP′はPに於ける曲線の切線と一致し,$\delta\mathbf{r}$ と $\delta s$ との大いさの比は




第 8 圖



1になる．即ち $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ はPに於ける切線の方向の單位ヴェクトル $\mathbf{t}$ を表はす．

$$\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}.\tag{10·13}$$

Pに於ける質點の速さ $v$ は $\frac{ds}{dt}$ であるから,

$$\mathbf{v}=v\mathbf{t},\tag{10·14}$$

即ち速度は切線の方向にある大いさ $v$ のヴェクトルである．

## 11. ヴェクトルの積分

極めて小さいヴェクトル $\delta\mathbf{r}$ をヴェクトルの合成によつて加へ合せた和 $\sum\delta\mathbf{r}$ に於いて，$\delta\mathbf{r}$ の大いさが限りなく小さくなつたときの極限値を

$$\int d\mathbf{r}=\lim_{\delta r\to 0}\sum\delta\mathbf{r}\tag{11·1}$$

で表はし,これをヴェクトルの積分といふ．

$\mathbf{r}$ がもし $t$ の函數ならば,

$$\int\mathbf{r}(t)dt=\lim_{\delta t\to 0}\sum\mathbf{r}(t)\delta t.\tag{11·2}$$

微分方程式

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\mathbf{r}\tag{11·3}$$

は兩邊に $dt$ を乘じて積分すれば,

$$\mathbf{s}=\int d\mathbf{s}=\int\mathbf{r}\,dt.$$

然し一定のヴェクトルは微分すれば零になるから，$t$ に無關係なヴェクトル $\mathbf{c}$ を $\mathbf{s}$ に加へても微分方程式を滿足する．

$$\mathbf{s}=\int\mathbf{r}\,dt+\mathbf{c}.\tag{11·4}$$

$\mathbf{c}$ は積分したために生じる積分常數で,問題によつて與へられた最初の狀態或は幾何學的の關係によつて定まる.

$t$ について $a$ から $b$ 迄積分すれば定積分を得る. $t=a$ に於ける $\mathbf{s}$ を $\mathbf{s}_1$, $t=b$ に於ける値を $\mathbf{s}_2$ とすれば,

$$\int_a^b \mathbf{r}\,dt = \Big|\,\mathbf{s}\,\Big|_a^b = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1. \tag{11·5}$$

猶ほ前章に於ける微分の公式から,普通の微分と同樣な多くの公式が導かれる.

## 12. 廻轉する座標系

二つの座標系 $S_1$ と $S_2$ とを考へる. $S_1$ 系は固定し, $S_2$ 系は $S_1$ 系に於ける一點 O の周りを廻轉する. その廻轉速度を $\mathbf{w}$ で表はす.

任意の點 P に O からひいた動徑を $\mathbf{r}$ とする. いま圖を $S_1$ 系について畫けば,短い時間 $\delta t$ の間に P は R に移る.

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (\delta\mathbf{r})_1,$$

添字 1 は $S_1$ 系に對する變位を表はすものとする.

然るに初め P に位置を占めてゐて $S_2$ 系とともに動く點は, $\delta t$ 時間內に Q に移るから, (7·2) により

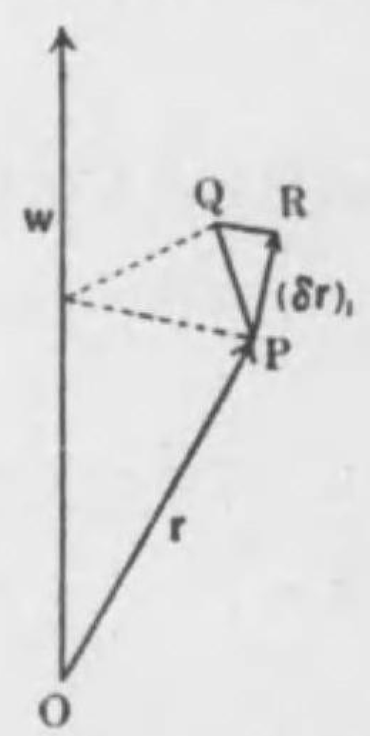
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \delta t\,\mathbf{w}\times\mathbf{r}.$$

よつて $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ は $S_2$ 系に關する變位で,

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = (\delta\mathbf{r})_2.$$

ところがヴェクトルの合成により,

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QR}}.$$



第 9 圖

卽ち



$$(\delta\mathbf{r})_1 = \delta t\,\mathbf{w}\times\mathbf{r} + (\delta\mathbf{r})_2.$$

兩邊を $\delta t$ で割り, $\delta t$ を限りなく小さくした極限では,

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_2 + \mathbf{w}\times\mathbf{r}, \tag{12·1}$$

これによつて $S_1$ 系, $S_2$ 系相互の關係が求まる.

例. P 點の加速度は, (12·1) 式を微分すれば求まる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 = \left(\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}\right)_1 &= \left(\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}\right)_2 + \mathbf{w}\times\mathbf{v}_1 \\
&= \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}\times\mathbf{r})\right)_2 + \mathbf{w}\times(\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}\times\mathbf{r}) \\
&= \left(\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}\right)_2 + \left(\frac{d\mathbf{w}}{dt}\right)_2 \times\mathbf{r} + \mathbf{w}\times\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_2 + \mathbf{w}\times\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

然るに (12·1) により,

$$\left(\frac{d\mathbf{w}}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\mathbf{w}}{dt}\right)_2 + \mathbf{w}\times\mathbf{w} = \left(\frac{d\mathbf{w}}{dt}\right)_2, \tag{12·2}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}\right) = \mathbf{a}_2.$$

$$\therefore\quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{w}\times\mathbf{v}_2 + \frac{d\mathbf{w}}{dt}\times\mathbf{r} + \mathbf{w}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{r}). \tag{12·3}$$

これを**コリオリス**(Coriolis)**の定理**といふ.

もし $S_2$ 系が一定の廻轉速度で廻つてゐるならば,右邊の第三項は零である. 兩邊に質點 $m$ を乘じて,移項すれば,

$$m\mathbf{a}_2 = m\mathbf{a}_1 - 2m\mathbf{w}\times\mathbf{v}_2 - m\mathbf{w}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{r}). \tag{12·4}$$

右邊の第一項は有效力,第二項はコリオリスの力,第三項は廻轉する座標によつて生ずる見掛けの遠心力を表はしてゐる.

# 第四章

## ヴェクトルの場

**13. 場**　荷電體の存在する周圍の空間には電氣作用が現はれる．その空間を電場といひ,電場内のすべての點に於いて電氣的の量は或る一定の値をとるが如く,すべての點で,或る物理的の量(溫度,重力,ポテンシャル等)が一定の値をとる區域をその量の**場**といふ．場の理論は物理學で重要な問題である．

原點からひいた動徑 $\mathbf{r}$ のあらゆる値に應じて,卽ち $r$ の點函數としてスカラー量 $V$ が與へられる區域は,そのスカラー量の場である．

$$V=f(\mathbf{r}). \tag{13·1}$$

もし又 $\mathbf{r}$ の點函數としてヴェクトル量 $\mathbf{K}$ が定まるならば,

$$\mathbf{K}=f(\mathbf{r}). \tag{13·2}$$

その區域はヴェクトル量の場である．

點函數が一價連續ならば,場の内の任意の點を過つて,函數の値の等しい點の軌跡を畫くことができる．その軌跡は一つの曲面であつて,**等價面**又は**準面**といふ．函數が一價ならば,一つの點で二つの準面が交錯することはない．氣壓の等しい點を連ねた等壓面,氣溫の等しい點の軌跡卽ち等溫面或は等ポテンシャル面等はこの準面である．

點函數 $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}(x,y,z)$ の函數であるから,もし $x$ が $x+\delta x$ に變



り, $y, z$ が變らないときの $\mathbf{K}$ の增し當を $\delta_x\mathbf{K}$ とし, $\delta x$ が零に近づいた極限に於いて,

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta_x\mathbf{K}}{\delta x} \tag{13·3}$$

が有限な一定の値をとるならば,これを $x$ に關する偏微分係數といふ．$y$ や $z$ についても同樣に考へる．更に高階のものについても普通の微分と同樣に考へられるから,

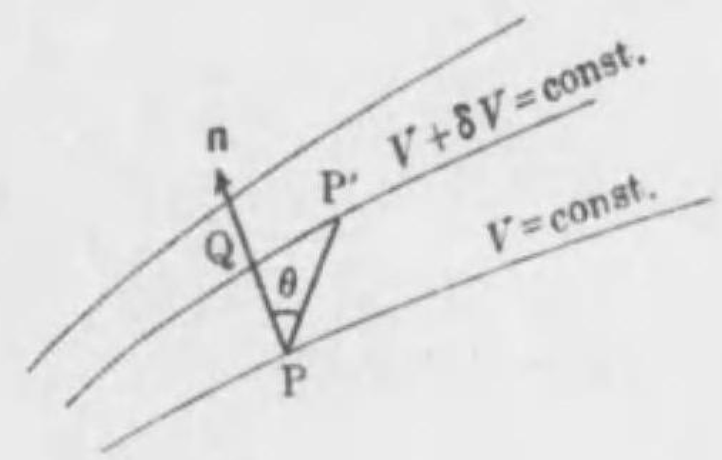
$$\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial y\partial x} \tag{13·4}$$

となり,微分する順序に關係はない．

**14. 勾配**　スカラー點函數 $V$ は點 P の近傍では一樣な連續函數とする．P に近い點 P′ に於ける函數の値を $V+\delta V$ として, P と P′ の距離 $\delta s$ が限りなく零に近づいた極限に於いて, $\delta V/\delta s$ の極限値が有限ならば,これを P に於いて P′ の方向にとつた**方向微係數**といふ．

$$\frac{\partial V}{\partial s}=\lim_{\delta s\to 0}\frac{\delta V}{\delta s}. \tag{14·1}$$

いま P 及び P′ を過ぎり夫夫 $V$ 及び $V+\delta V$ が一定である點の軌跡卽ち二つの準面を畫く．$V$ の値が一定である準面に, P に於いて函數の値が增す向きに立てた**法線**が P′ に於ける準面をきる點を Q とし, $PQ=\delta n$ とおけば,




第 10 圖

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\lim_{\delta n\to 0}\frac{\delta V}{\delta n} \tag{14·2}$$

はPに於ける準面に垂直な方向の$V$の方向微係數である.

任意の方向にとつた$\delta s$と法線との間の角$\widehat{P'PQ}=\theta$とおけば,

$$\frac{\partial V}{\partial s}=\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial s}=\lim\frac{\delta V}{\delta n}\frac{\delta n}{\delta s}=\frac{\partial V}{\partial n}\cos\theta. \tag{14·3}$$

$\theta$が零の時,卽ち法線の方向に於ける方向微係數は,他の何れの方向に於けるものよりも絕對値が大きい.

$V$が增す向きにとつたPに於ける單位法線を$\mathbf{n}$とすれば,$\frac{\partial V}{\partial n}\mathbf{n}$は函數の値の變化が最大の方向,向き及び大いさを示すヴェクトルで,これを$V$の**勾配**又は**增加率**といひ$\nabla V$又は grad $V$ (gradient の略)とかく.

$$\nabla V=\frac{\partial V}{\partial n}\mathbf{n}, \tag{14·4}$$

或は

$$\mathbf{n}\cdot\nabla V=\frac{\partial V}{\partial n}. \tag{14·5}$$

單位法線ヴェクトルの成分卽ちその方向餘弦を$(\lambda,\mu,\nu)$とすれば,

$$\begin{aligned}\nabla V&=\frac{\partial V}{\partial n}\lambda+\frac{\partial V}{\partial n}\mu\mathbf{j}+\frac{\partial V}{\partial n}\nu\mathbf{k}\\&=\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{14·6}$$

これを形式的に

$$\nabla V=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$

の形に纏めれば,



$$\nabla\equiv\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{14·7}$$

で表はされる微分記號が$V$に作用するものと見做すことができる. $\nabla$はヴェクトルの性質をもつ演算の記號で,これを**ハミルトン** (Hamilton) **記號**[1]といふ.

ポテンシャルをもつ力$\mathbf{K}$は,

$$\mathbf{K}=-\nabla V \tag{14·8}$$

で定まる. 力は等ポテンシャル面の法線の方向に,$V$の減ずる向きに向つて,大いさはヴェクトル$\nabla V$の絕對値に等しい.

$$|\mathbf{K}|=|\nabla V|. \tag{14·9}$$

熱は温度$\theta$の減少する割合が最大の方向に向つて流れるから,等方質の物質では熱の流の强さ$\mathbf{q}$は

$$\mathbf{q}=-k\nabla\theta \tag{14·10}$$

で表はせる. $k$は傳導率で,これは**フーリエ** (Fourier) の法則を示す.

$V$の全微分は

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz=(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k})\cdot\nabla V,$$

卽ち$d\mathbf{r}$と$\nabla V$とのスカラー積である.

$$dV=d\mathbf{r}\cdot\nabla V \tag{14·11}$$

で$d\mathbf{r}$の方向に於ける$V$の增し高を示す.

同樣に$d\mathbf{r}$の方向に於けるヴェクトル函數$\mathbf{K}$の增し高は

$$d\mathbf{K}=(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{K} \tag{14·12}$$

---

[1] $\nabla$はナブラ,アトレッド又はデル等とも呼ぶ.

である.

$\nabla$ は微分記號で普通の微分記號 $d$ と同様に,その直後におかれた函數に作用するものとすれば,次の公式は簡單に證明できる.

$$\nabla(U+V+\cdots)=\nabla U+\nabla V+\cdots, \qquad (14\cdot13)$$

$$\nabla(UV)=V\nabla U+U\nabla V. \qquad (14\cdot14)$$

次の例は計算する時に必要である.

例 1.　$r=\text{const.}$ の面は原點を中心とする球面であるから,球面上の任意の點に於ける法線は,その點の動徑の單位ヴェクトルである.

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{n},$$

$$\mathbf{r}=r\mathbf{r}_1.$$

よつて,

$$\nabla r^m=\frac{\partial r^m}{\partial n}\mathbf{n}=\frac{\partial r^m}{\partial r}\mathbf{r}_1=mr^{m-1}\mathbf{r}_1=mr^{m-2}\mathbf{r}. \qquad (14\cdot15)$$

例 2.　$\mathbf{a}$ が一定のヴェクトルならば,

$$\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{r}=\mathbf{a}, \qquad (14\cdot16)$$

$$\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{r}=a. \qquad (14\cdot17)$$

**15. 時間に關する微分**　時刻 $t$ に於いて $\mathbf{r}$ の點にある運動してゐる物體の性質を表はす函數を $\varphi$(ヴェクトルもしくはスカラー)とする.　例へば $\varphi$ は流體内の一點に於ける速度とか密度,運動體による電場の强さとかを表はす.

運動體の速度が $\mathbf{v}$ ならば, $dt$ 時間内には $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ の點に移り $d\mathbf{r}=\mathbf{v}dt$ であるから,その變位によつて $\varphi$ の値にどれだけの變化が起るかといふ問題が起る.

物體が $d\mathbf{r}$ だけ變位したために起る $\varphi$ の變りは(14·11)もしくは(14·12)により,

$$d\mathbf{r}\cdot\nabla\varphi=dt\,\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi.$$

然るに $r$ の點に於いて $dt$ 時間内の $\varphi$ の局部的變化は,

$$dt\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{r=\text{const.}}$$

であるから, $\varphi$ の全體の變化はこの二つの變化の和で,

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt+dt\,\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi.$$

兩邊を $dt$ で割れば,

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi. \qquad (15\cdot1)$$

この式の左邊は運動體による個々の變化の割合を示し,右邊の第一項は局部的の變化,第二項は定常の變化の割合である.

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla \qquad (15\cdot2)$$

は運動體に關し,時間微分をとるときの演算の記號である.

もし $\mathbf{v}$ の直角成分を $u, v, w$ と書けば,

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (15\cdot3)$$

例へば流體の速度を $\mathbf{v}$ とすれば加速度は

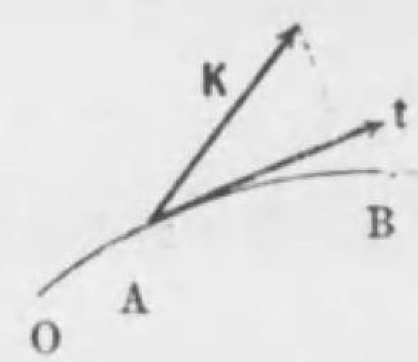
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$$

で求まる.

**16. 線積分**　曲線上の定點 O から曲線に沿つて測つた弧の長さを $s$ とし,ヴェクトル函數 $\mathbf{K}$ は $s$ の一價有限連續な正規

函數とする.

曲線の切線の方向に於けるKの成分$K_t$, 即ち曲線の單位切線ヴェクトルtとKとのスカラー積を,曲線上の二點A, Bの間について積分する. $a$, $b$を夫々弧$\overset{\frown}{OA}$, $\overset{\frown}{OB}$の長さとすれば,



第 11 圖

$$\int_a^b K_t\,ds=\int_a^b \mathbf{K}\cdot\mathbf{t}\,ds.$$

然るに(10·12)により, $\mathbf{t}=\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$であるから,

$$\int_a^b \mathbf{K}\cdot\mathbf{t}\,ds=\int_{(A)}^{(B)}\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}^{(1)}. \qquad (16·2)$$

これをAからB迄の間に於けるKの(切線)**線積分**といふ.

もしBからAに向けて積分すれば,切線は $-\mathbf{t}$ であるから,明かに

$$\int_{(B)}^{(A)}\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}=-\int_{(A)}^{(B)}\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}. \qquad (16·3)$$

Kの成分を$(X, Y, Z)$とすれば,

$$\int\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}=\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz). \qquad (16·4)$$

線積分は,Kが力ならば力のする仕事,電場の强さならば電動力を示す.

もし曲線が閉ぢてゐるときに,曲線に沿つて一周してとつた線積分を$\oint$で表はせば, Kが一價函數ならば積分の値は零に

(1) 或は $\int(\mathbf{K}, d\mathbf{r})$ 又は $\int\mathbf{K}\,d\mathbf{r}$.



なる.

$$\oint\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}=\int_{(A)}^{(A)}=0. \qquad (16·5)$$

ヴェクトル函數Kがスカラー函數$V$の勾配で表はせれば,

$$\mathbf{K}=\nabla V.$$

よつて,

$$\int_{(A)}^{(B)}\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}=\int_{(A)}^{(B)}\nabla V\cdot d\mathbf{r}=\int_{(A)}^{(B)}dV=\Big|V\Big|_A^B=V_B-V_A, \qquad (16·6)$$

$V_A$, $V_B$は夫々A及びBに於ける$V$の値である.

もし曲線に沿ひ一周して線分すれば,

$$\oint\nabla V\cdot d\mathbf{r}=V_A-V_A=0. \qquad (16·7)$$

この定理の逆も正しい. 即ち曲線に沿つて一周してとつた線積分が零になるやうなヴェクトル函數は,或るスカラー函數の勾配として表はせる.

**17. 面積分**　曲面上のすべての點に於いてヴェクトル函數Hは有限連續な一定の値をとるものとする. 曲面にたてた單位法線ヴェクトルをn(その向きは閉ぢた曲面ならば外側に向ひ,閉ぢてゐなければ曲面の緣に沿つて時針と反對の向きに廻つて面積を測るとき螺旋の進む向きと同じに定める)とすれば, H·nは法線の方向に於けるHの成分$H_n$である.

曲面を無限に多くの微小な面の集合として,その微小面積を$\delta S$とすれば,

$$\int H_n\,dS=\int\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}\,dS=\lim\sum\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}\,\delta S \qquad (17·1)$$

を $\mathbf{H}$ の(法線)**面積分**といふ.

法線の方向餘弦即ち單位法線ヴェクトルの成分を $(\lambda, \mu, \nu)$, $\mathbf{H}$ の成分を $(H_x, H_y, H_z)$ とすれば,

$$\int \mathbf{n}\cdot\mathbf{H}\,dS=\int(\lambda H_x+\mu H_y+\nu H_z)dS$$

$$=\int\!\!\int(H_x dy\,dz+H_y dz\,dx+H_z dx\,dy). \quad (17\cdot2)$$

例へば流體の內部に流の線を考へる. 小さい面積 $\delta F$ を流の線に直角にとれば,その面を過ぎる線の數卽ち流束は,流の速度 $\mathbf{v}$ の大いさと $\delta F$ との積 $|\mathbf{v}|\delta F$ である. いま $\delta F$ に對して $\theta$ だけ傾いてゐる任意の方向の微小面積 $\delta S$ を, $\delta F$ を過ぎる流束が悉く過ぎるとすれば, $\delta F$ の法線は $\mathbf{v}$ の方向にあるから,

$$\delta F=\delta S\cos\theta=\delta S\cos(\mathbf{n},\mathbf{v}).$$

よつて,

$$|\mathbf{v}|\,\delta F=|\mathbf{v}|\,\delta S\cos(\mathbf{n},\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\delta S$$

である. 卽ち面積分は流體の中にとつた任意の表面を過ぎつて外側に向ふ流束である.

もし $\mathbf{H}$ を電氣變位 $\mathbf{D}$ とすれば $\int \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\,dS$ は表面を過ぎる電氣の力束を示す.

いまO點に單位質量もしくは單位荷電がある時に生じる力の場では,O點から $r$ の距離に於ける力 $\mathbf{K}$ は距離の自乘に反比例し,力の作用線は二點を結ぶ直線上にあるので,

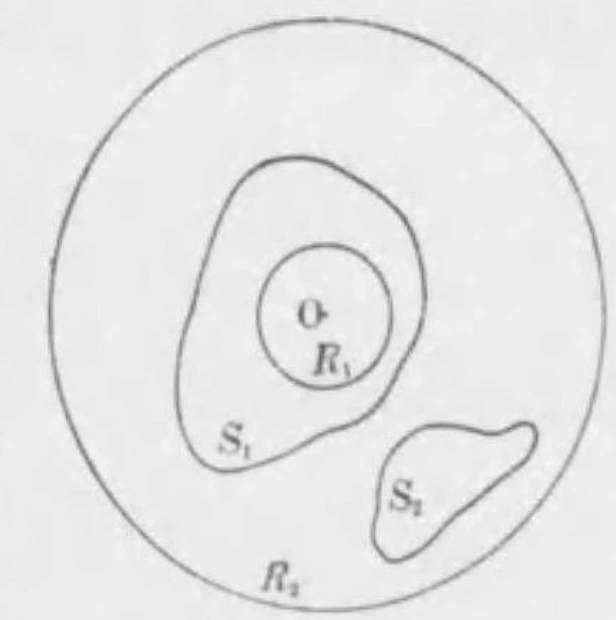
$$\mathbf{K}=\frac{\mathbf{r}_1}{\varepsilon r^2} \quad (17\cdot3)$$

で表はせる. $\varepsilon$ は萬有引力もしくは電媒恆數である.



Oを圍む閉表面 $S_1$ と,圍まない閉表面 $S_2$ とを考へる.

更にOを中心とする二つの同心球面半徑 $R_1, R_2$ をつくり, $R_2$ 面は $S_1$ 及び $S_2$ を包む程大きく, $R_1$ 面は何れの二つにも觸れない程小さいとする.




第 12 圖

$\mathbf{K}$ は $r$ の自乘に反比例し,球面の表面積は $r$ の自乘に比例するから,球面の全表面についてとつた $\mathbf{K}$ の面積分は,球面の半徑に拘らず一定である. 卽ち第一の球面 $R_1$ を過ぎる $\mathbf{K}$ の力線は悉く第二の球面 $R_2$ に達するから,その間に包まれる $S_1$ の面を同數の力線が過ぎらなければならない.

$$\int_{S_1}\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_1}{r^2}dS=\frac{1}{R_1{}^2}\int_{R_1}\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1\,dS=\frac{1}{R_1{}^2}\int_{R_1}dS=\frac{4\pi R_1{}^2}{R_1{}^2}=4\pi.$$

力線の數は $4\pi$ で,單位量からそれだけの力線が出るものと解釋する.

$R_1$ と $R_2$ との間には質量又は荷電が存在しないから,力線の數には增減がない. 從つて $S_2$ の內部では,表面を過ぎつて入りこむ力線と出るものとの數が等しくなければならない.

$$\int_{S_2}\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_1}{r^2}dS=0.$$

要するにO點を圍むか圍まないかによつて,この積分の値は $4\pi$ になるか零になる. これをガウス (Gauss) の力束又は立體角に關する定理[1] といふ.

[1] この積分がO點に於いて曲面 $S$ のつくる立體角と解釋できる. 拙著, 246 頁參照.

(14·15) により

$$\overset{*}{\nabla}\frac{1}{r}=-\frac{\mathbf{r}_1}{r^2}$$

であるから,この積分の別の形は,O點が曲面 $S$ の內にあるか外にあるかによつて

$$\int \mathbf{n}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dS=-4\pi,\ \text{又は}\ 0. \qquad (17\cdot4)$$

である. これはガウスの發散の定理(第**18**節)からもグリーンの定理(第**21**節)からも導かれる.

**18. 發散とガウスの定理** 閉曲面 $S$ に圍まれた空間 $T$ の中はヴェクトル $\mathbf{v}$ の場であるとする. 曲面の外側に向けてひいた單位法線ヴェクトルを $\mathbf{n}$ とし, $S$ の表面全部に亙つて $\mathbf{v}$ の面積分をつくる. いま $S$ を次第に小さくすれば $T$ は次第に小さくなる. その極限に於いて面積分と $T$ の容積 $\delta\tau$ との比を $\mathbf{v}$ の**發散**といつて,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=\lim_{\delta\tau\to 0}\frac{\int \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,dS}{\delta\tau} \qquad (18\cdot1)$$

で表はす.

いま $T$ を無限に小さい容積 $\delta\tau$ の集合と考へる. この小さい容積に眼をつければ,二つの隣り合ふ小容積の互に接する表面の法線は,互に反對の向きであるから,小容積の面積分を $T$ 全體について加へ合せれば,只 $S$ の表面に於ける面積分だけ殘ることになる. 容積分は全體について加へたものの和であるから, (18·1) は

$$\int \mathrm{div}\,\mathbf{v}\,d\tau=\int \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,dS. \qquad (18\cdot2)$$



左邊の容積分は $T$ 全體について積分し,右邊はその表面に於ける面積分で,これを**ガウスの定理**といふ.

微小な平行六面體, $\delta x, \delta y, \delta z$ を邊とするものについてこの定理を應用してみる. その容積 $\delta\tau$ は

$$\delta\tau=\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

點 $x$ を過ぎり $x$ 軸に垂直な面では, $\mathbf{n}$ は $-\mathbf{i}$ であるから,

$$-\int \mathbf{i}\cdot\mathbf{v}\,dS=-\int v_x\,dy\,dz=-v_x\delta y\delta z.$$

$x+\delta x$ を過ぎり $x$ 軸に垂直な面では, $\mathbf{v}$ の値は $\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\delta x$ で,法線 $\mathbf{n}$ は $\mathbf{i}$ に等しいから,

$$\int \mathbf{i}\cdot\mathbf{v}\,dS=\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x\right)\delta y\,\delta z.$$

故に $x$ 軸に垂直な平行六面體の二面について面積分の和は $\frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z$ である. 他に $y$ 軸及び $z$ 軸に垂直な面について同樣に計算されるので,平行六面體の全表面では

$$\int \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,dS=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta\tau.$$

容積分は

$$\int \mathrm{div}\,\mathbf{v}\,d\tau=\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,\delta\tau.$$

よつて,

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad (18\cdot3)$$

$$=\nabla\cdot\mathbf{v}. \qquad (18\cdot4)$$

$\mathbf{v}$ の發散は $\nabla$ と $\mathbf{v}$ とのスカラー積である.

磁場の強さを$\mathbf{H}$,電場の強さを$\mathbf{E}$とすれば,恒に

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=0.$$

荷電の存在しない點では

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0,$$

然し電氣密度$\rho$の點では

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho.$$

である.

もし全區域に亙つて到る處の點で發散が零になるならば,その區域を圍む表面を過ぎつて入りこむ力束と出るものと等しく,その區域内では力線が生じたり消えたりしない. 發散が正の點では力線を生じ,負の點では力線が終る. その點は涌き口(源)と排け口とに相當する.

發散が恒に零になるヴェクトルを**ソレノイド**狀又は**轉同的**ヴェクトルといひ,或るヴェクトルの轉同(次節)として表はせる(第**22**節參照).

例. 流體内に$S$をとれば,單位時間内に$S$を過ぎつて流れ出る流體の量$Q_1$は

$$Q_1=\int\mathbf{n}\cdot(\rho\mathbf{v})dS.$$

$\mathbf{v}$は流體の速度,$\rho$は密度である. $S$の内に含まれる流體の質量が單位時間に減る割合は

$$Q_2=-\frac{\partial}{\partial t}\int\rho d\tau=-\int\frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau.$$

この區域内には源もなく排け口もないならば,$Q_1$は$Q_2$に等しくなければならないから,$Q_1$をガウスの定理で容積分になほして,$Q_1$を$Q_2$に等しくおけば,



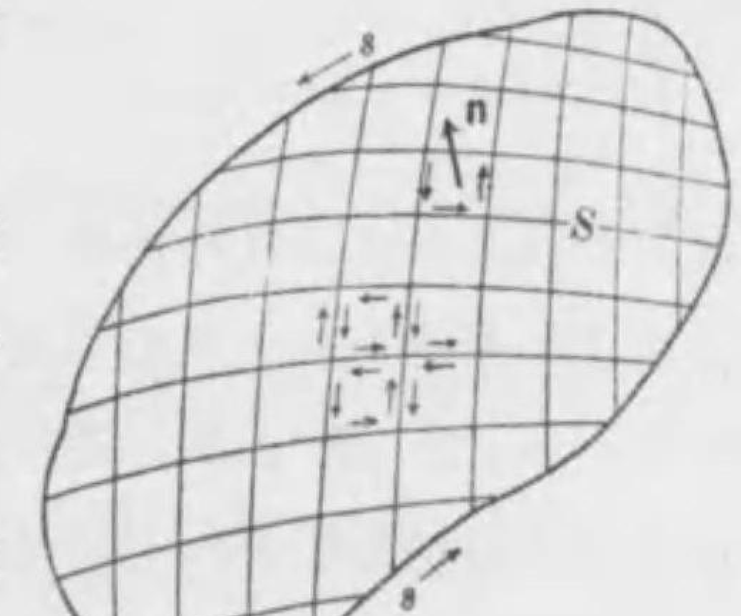
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0. \qquad (18\cdot5)$$

これをオイレル(Euler)の**連續の方程式**といひ,質量不變の原理を表はすものである.

## 19. 轉同とストークスの定理

任意の閉曲線$s$に沿つてヴェクトル$\mathbf{v}$の線積分をつくる. $s$を緣とする表面$S$の法線を$\mathbf{n}$とし,$s$に沿つて時針と反對に廻るときと同じ向きに螺旋を廻したとき,螺旋の進む向きに$\mathbf{n}$は向ふものとする.

$s$を次第に小さくすれば,表面$S$も小さくなる. 限りなく$s$を小さくした極限に於いて,線積分と表面積$\delta S$との比を$\mathbf{v}$の轉同の$\mathbf{n}$の方向の成分と定義する. $\mathbf{v}$の轉同を$\operatorname{rot}\mathbf{v}$,又は$\operatorname{curl}\mathbf{v}$と書けば,



第　13　圖

$$\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}=\lim_{\delta S\to 0}\frac{\oint\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}}{\delta S}. \qquad (19\cdot1)$$

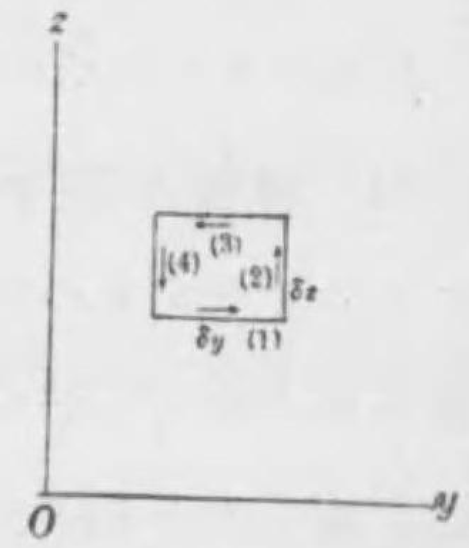
曲面$S$の全表面に亙つて$\operatorname{rot}\mathbf{v}$の面積分をつくるには,$S$を微小面積$\delta S$の集と考へて,その小面積に於ける面積分の和として求める. $\delta S$を圍む緣に沿つた線積分は,相隣る區域の緣の線積分をとる向きが反對で互に消し合ふから,$S$面全部の和では,只外緣$s$の上の線積分だけになる. その値は(19·1)の定義により,$\delta S$についてとつた$\operatorname{rot}\mathbf{v}$の法線成分の面積分の和,卽ち$S$面についてとつた面積分であるから,

$$\int \mathbf{n}\cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,dS=\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}. \qquad (19\cdot2)$$

これを**ストークス**(Stokes)**の定理**といふ．面積分は曲面Sについて,線積分はそれを圍む緣についてとるものとする．

rot$\mathbf{v}$の成分を$(w_x,\ w_y,\ w_z)$とすれば,(17·2)により

$$\iint(w_x\,dy\,dz+w_y\,dz\,dx+w_z\,dx\,dy)=\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}.$$




第 14 圖

計算を簡單にするために,極めて小さい面積$\delta S$の$x$軸に垂直な$yz$面上の射影を軸に平行な微小な四邊形にとつてみる．邊の長さを$\delta y$, $\delta z$とすれば,右邊の線積分は(1)の邊では切線の方向の$\mathbf{v}$の成分卽ち$v_y$と$\delta y$との積である．

$$\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}=v_y\delta y.$$

(3)の邊は(1)から$\delta z$だけ距るから, $\mathbf{v}$の値は$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\delta z$だけ加はる．その線積分は$\mathbf{v}$の$y$成分卽ち$v_y+\frac{\partial v_y}{\partial z}\delta z$の積分で,

$$\int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}=-\left(v_y+\frac{\partial v_y}{\partial z}\delta z\right)\delta y.$$

同樣にして(2)及び(4)の邊では夫々

$$\left(v_z+\frac{\partial v_z}{\partial y}\delta y\right)\delta z,\quad -v_z\delta z$$

であるから, $yz$軸上の四邊形ではこの四つの和で,

$$\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\delta y\,\delta z.$$



これは

$$\iint w_x\,dy\,dz=w_x\delta y\delta z$$

に等しいから,

$$w_x=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

となり,同樣にして$w_y$, $w_z$も求まる．

結局

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \qquad (19\cdot3)$$

$$=\nabla\times\mathbf{v} \qquad (19\cdot4)$$

$\mathbf{v}$の轉回は$\nabla$と$\mathbf{v}$とのヴェクトル積である．

完全な流體の速度を$\mathbf{v}$とすれば,渦の速度$\mathbf{w}$は

$$2\mathbf{w}=\nabla\times\mathbf{v} \qquad (19\cdot5)$$

である．

流體内の二點$A, B$を結ぶ任意の曲線に沿つて$\mathbf{v}$の線積分を流出量といひ$I(AB)$で表はせば,

$$I(AB)=\int_{(A)}^{(B)}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}. \qquad (19\cdot6)$$

閉曲線について一周してとつた流出量を環流の强さとすれば,

$$I(AA)=\oint\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}=\int\mathbf{n}\cdot\nabla\times\mathbf{v}\,dS=2\int\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}\,dS. \qquad (19\cdot7)$$

よつて,渦なしの運動では到る處

$$\mathbf{w}=0$$

であるから環流の強さは零になる.

轉回が到る處零になるヴェクトルを**ラメラー狀**又は**非轉回的**ヴェクトルといひ,スカラー函數の勾配として表はせる[(22·5) 參照].

註. ヴェクトル微分記號$\nabla$を用ひると

$$\nabla V=\operatorname{grad} V,$$
$$\nabla\cdot\mathbf{v}=\operatorname{div}\mathbf{v},$$
$$\nabla\times\mathbf{v}=\operatorname{rot}\mathbf{v}$$

となつて統一されて種々都合がよい.

次の公式は證明する迄もなく簡單である.

$$\nabla\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\nabla\cdot\mathbf{u}+\nabla\cdot\mathbf{v}, \qquad (19\cdot8)$$

$$\nabla\times(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\nabla\times\mathbf{u}+\nabla\times\mathbf{v} \qquad (19\cdot9)$$

$$\nabla\cdot(u\mathbf{v})=(\nabla u)\cdot\mathbf{v}+u\nabla\cdot\mathbf{v}, \qquad (19\cdot10)^{(1)}$$

$$\nabla\times(u\mathbf{v})=(\nabla u)\times\mathbf{v}+u\nabla\times\mathbf{v}. \qquad (19\cdot11)^{(2)}$$

例 1. 動徑ヴェクトル $\mathbf{r}(x,y,z)$ の發散は計算に常に用ふ.

$$\nabla\cdot\mathbf{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3. \qquad (19\cdot12)$$

例 2.[(3)] 荷電を $e$, 電媒恆數を $\varepsilon$ とすれば電位 $V$ は

$$V=\sum\frac{e}{\varepsilon r}.$$

電場の強さ $\mathbf{E}$ は (14·14) を用ひて,

$$\mathbf{E}=-\nabla V=-\sum\frac{e}{\varepsilon}\nabla\frac{1}{r}$$
$$=\sum\frac{e\mathbf{r}}{\varepsilon r^3}.$$

(1) $\operatorname{div}(u\mathbf{v})=(\operatorname{grad}u,\mathbf{v})+u\operatorname{div}\mathbf{v}$.

(2) $\operatorname{rot}(u\mathbf{v})=[\operatorname{grad}u,\mathbf{v}]+u\operatorname{rot}\mathbf{v}$.

(3) '靜電氣學', 34-36 頁參照.



$$\therefore\ \nabla\cdot\mathbf{E}=\sum\frac{e}{\varepsilon}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)=\sum\frac{e}{\varepsilon}\left(\mathbf{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\mathbf{r}\right).$$

(14·15) 及び (19.12) により右邊は零になるから,

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0.$$

例 3.[(1)] 電氣變位を $\mathbf{D}$ とすれば,

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}.$$

(19·11) により,

$$\nabla\times\mathbf{D}=\nabla\times(\varepsilon\mathbf{E})$$
$$=\nabla\varepsilon\times\mathbf{E}+\varepsilon\nabla\times\mathbf{E}.$$

定常の磁場ならば $\nabla\times\mathbf{E}=0$ であるから,

$$\nabla\times\mathbf{D}=\nabla\varepsilon\times\mathbf{E}.$$

次の公式[(2)]も必要である.

$$\nabla\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot\nabla\times\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\nabla\times\mathbf{v} \qquad (19\cdot13)^{(3)}$$

$$\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}+\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{u}, \qquad (19\cdot14)^{(4)}$$

$$\nabla\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}+\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{u})+\mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{v}). \qquad (19\cdot15)$$

證明. 是等の證明の一つとしては,成分にわけて計算すれば足りる. 例へば (19·14) は,

$$\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\left(\sum\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$$
$$=\sum\mathbf{i}\times\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\right)$$
$$=\sum\left(\mathbf{i}\cdot\mathbf{v}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}-\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\mathbf{v}+\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\mathbf{u}-\mathbf{i}\cdot\mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\right)$$

(1) '靜電氣學', 108-109 頁參照.

(2) 是等の公式は暗記する必要はない. 拙著, 204 頁參照.

(3) $\operatorname{div}[\mathbf{u},\mathbf{v}]=(\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{u})-(\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{v})$.

(4) $\operatorname{rot}[\mathbf{u},\mathbf{v}]=(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{u}-(\mathbf{u},\nabla)\mathbf{v}+\mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v}-\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{u}$.

(5) $\operatorname{grad}(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{u}+(\mathbf{u},\nabla)\mathbf{v}+[\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{u}]+[\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{v}]$.

$$=\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}.$$

例. 剛體の廻轉速度を $\mathbf{w}$ とすれば,動徑 $\mathbf{r}$ の點に於ける速度は(7·2)により $\mathbf{w}\times\mathbf{r}$ であるから,剛體が全體として速度 $\mathbf{v}_0$ で進行運動をする時の速度は,

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{w}\times\mathbf{r} \qquad (19\cdot16)$$

$\mathbf{v}_0$ と $\mathbf{w}$ は剛體のすべての點で等しいから,$\nabla$ で微分したものは零になる. よつて,

$$\nabla\times\mathbf{v}=\nabla\times(\mathbf{w}\times\mathbf{r})$$
$$=\mathbf{w}\nabla\cdot\mathbf{r}-\mathbf{w}\cdot\nabla\mathbf{r}.$$

(14·16) 及び (19·12) により.

$$\nabla\cdot\mathbf{r}=3, \qquad \mathbf{w}\cdot\nabla\mathbf{r}=\mathbf{w}.$$

$$\therefore \qquad \nabla\times\mathbf{v}=2\mathbf{w}. \qquad (19\cdot17)$$

**20. ラプラース及びポアソンの方程式** スカラー函數 $V$ の勾配の發散をとれば

$$\nabla\cdot(\nabla V)\equiv\operatorname{div}\operatorname{grad}V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (20\cdot1)$$

である. $\nabla\cdot(\nabla V)$ は $(\nabla\cdot\nabla)V$ とみてよいから $\nabla^2 V$ と書ける.

今

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (20\cdot2)$$

を一つの微分記號とみて,これを**ラプラース**(Laplace)**の演算記號**といひ,時には $\Delta$ で表はす.

微分方程式

$$\nabla^2 V=0, \qquad (20\cdot3)$$

$$\nabla^2 V=-\rho \qquad (20\cdot4)$$

は理論物理學に屢々用ひられる方程式で,前者を**ラプラースの方程式**,後者を**ポアソン**(Poisson)**の方程式**といひ,ラプラースの方程式を滿足する函數を**調和函數**,有限な區域外にて零になるポアソンの方程式の解を $\rho$ の**ポテンシャル函數**といふ.



次に $V$ の勾配の發散をとれば恆に零である,

$$\nabla\times\nabla V\equiv\operatorname{rot}\operatorname{grad}V=0. \qquad (20\cdot5)$$

同樣にヴェクトルの轉回の發散も零である,

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{K})\equiv\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{K}=0. \qquad (20\cdot6)$$

この二つの恆等式は $\nabla$ をヴェクトルとして扱へば,(7·4) 及び (8·4) によつて明らかである.

是等は重要な意味を含んでゐる. 一般に轉回が零になるヴェクトル函數即ち非轉回的函數は或るスカラー函數の勾配で表はせるし,又發散が恆に零になる回轉的函數は或るヴェクトル函數の轉回として表はせる[(22·4)參照].

更にヴェクトル $\mathbf{K}$ の轉回の轉回をとれば,(9·1) により,

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{K})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{K})-\nabla^2\mathbf{K}. \qquad (20\cdot7)^{(1)}$$

例 1.

$$\nabla^2 r^m=\nabla\cdot\nabla r^m$$
$$=\nabla\cdot(mr^{m-2}\mathbf{r})=m(\mathbf{r}\cdot\nabla r^{m-2}+r^{m-2}\nabla\cdot\mathbf{r})$$
$$=m(m+1)r^{m-2} \qquad (20\cdot8)$$

もし $m=-1$ ならば

$$\nabla^2\frac{1}{r}=0, \qquad (20\cdot9)$$

即ち $1/r$ は調和函數である.

例 2. マックスウェル (Maxwell) の電磁場の方程式[2]

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

前者の轉回をとれば (20·7) により,左邊は

(1) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{K}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{K}-\nabla^2\mathbf{K}$. (2) '電磁氣學' の項參照.

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla\nabla\cdot\mathbf{E}-\nabla^2\mathbf{E}.$$

然るに $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ だから,

$$=-\nabla^2\mathbf{E}.$$

右邊は,第二の式をいれて,

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{H}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right).$$

$$\therefore\qquad \nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0.$$

ラプラース記號に倣つて,

$$\Diamond^2\equiv\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

をダラムベール (D'Alembert) 記號とすれば,

$$\Diamond^2\mathbf{E}=0;$$

同様に $$\Diamond^2\mathbf{H}=0.$$

**21. グリーンの定理** 二つのスカラー函數 $U,V$ 及びその誘導函數は,閉曲面 $S$ で圍まれた區域[1] $T$ の中では一様な連續函數であるとする.

公式 (19·10) 及び (20·1) により,

$$\nabla\cdot(U\nabla V)=\nabla U\cdot\nabla V+U\nabla^2 V$$

であるから, $T$ についてこの容積分をつくり左邊をガウスの發散の定理で面積分にすれば,

$$\int_{(S)}\mathbf{n}\cdot(U\nabla V)d\,S=\int_{(T)}\nabla U\cdot\nabla V d\tau+\int_{(T)}U\nabla^2 V d\tau.\qquad(21\cdot1)$$

$\mathbf{n}$ は $S$ の外側に向けてひいた單位法線である. 或は

$$\int\nabla U\cdot\nabla V d\tau=\int\mathbf{n}\cdot(U\nabla V)dS-\int U\nabla^2 V d\tau.\qquad(21\cdot2)$$

(1) この區域は單つ結びの區域である. 紙面の都合上數學的に嚴密に論ずる餘裕がないことを諒恕されたい.



$U$ と $V$ との關係が對稱的であるから互に入れ代へると,

$$\int\nabla U\cdot\nabla V d\tau=\int\mathbf{n}\cdot(V\nabla U)\,dS-\int V\nabla^2 U d\tau.\qquad(21\cdot3)$$

この二式の差をとれば,

$$\int\mathbf{n}\cdot(U\nabla V-V\nabla U)dS=\int(U\nabla^2 V-V\nabla^2 U)\,d\tau.\qquad(21\cdot4)$$

是等の公式を**グリーン** (Green) **の定理**といふ.

$\mathbf{n}$ は表面に於いて外方に向ふ法線であるから, (14·5) により

$$\mathbf{n}\cdot\nabla V=\frac{\partial V}{\partial n},\quad \mathbf{n}\cdot\nabla U=\frac{\partial U}{\partial n}.$$

よつて (21·4) 式は,

$$\int\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS=\int(U\nabla^2 V-V\nabla^2 U)\,d\tau.\qquad(21\cdot5)$$

もし $U=V$ ならば, (21·2) は

$$\int(\nabla U)^2 d\tau=\int\mathbf{n}\cdot(U\nabla U)dS-\int U\nabla^2 U d\tau.\qquad(21\cdot6)$$

次にもし $U$ が調和函數ならば, (20·3) により

$$\nabla^2 U=0$$

であるから, (21·3) 及び (21·4) は夫々

$$\int\mathbf{n}\cdot(U\nabla V)\,dS=\int\nabla U\cdot\nabla V d\tau,\qquad(21\cdot7)$$

$$\int\mathbf{n}\cdot(U\nabla V-V\nabla U)dS=\int U\nabla^2 V d\tau.\qquad(21\cdot8)$$

是等の公式は力學,流體力學許りでなく電磁氣學,ポテンシャル論其他に應用の廣いものである.

任意の一點 O に於ける函數 $V$ の値をこの定理によつて定め

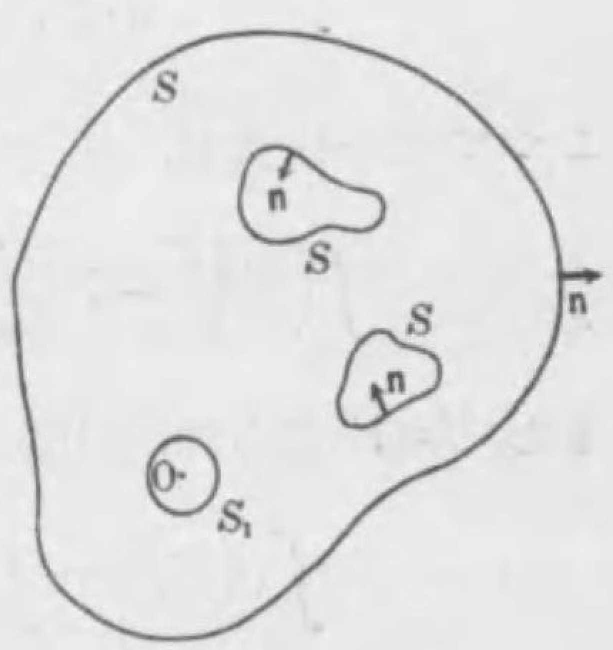
ることができる．O點から任意の點Pへの距離を $r$ として，

$$U\equiv\frac{1}{r}$$

とおけば，O點では $r$ が零となるから $U$ の特異點卽ち極點であるが，その他の點では $U$ は (20·9) により調和函數である．よつて (21·8) 式は，

$$\int \mathbf{n}\cdot\left(\frac{1}{r}\nabla V-V\nabla\frac{1}{r}\right)dS=\int\frac{1}{r}\nabla^2 V d\tau.$$

極點Oが區域内にあれば函數 $U$ はOで有限でないから假りにOの周圍を小さい半徑 $\varepsilon$ の球面 $S_1$ で圍み，$S_1$ と $S$ との間の區域について積分する．




第　15　圖

球面 $S_1$ 上では，O點からひいた單位動徑ヴェクトルと法線とは向きが反對であるから，

$$\mathbf{n}=-\mathbf{r}_1.$$

故に，

$$\int_{S_1}\mathbf{r}_1\cdot\left(V\nabla\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\nabla V\right)dS=\int_S \mathbf{n}\cdot\left(V\nabla\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\nabla V\right)dS+\int\frac{1}{r}\nabla^2 V d\tau.$$

ところが左邊の第一項は (14·15) により，

$$\int_{S_1}\mathbf{r}_1\cdot\left(V\nabla\frac{1}{r}\right)dS=\int V\frac{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1}{r^2}dS$$

$$=\int\frac{V}{r^2}dS$$



$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int V dS,$$

球面 $S_1$ を限りなく小さくした極限に於いて，

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{4\pi\varepsilon^2 V}{\varepsilon^2}\right)=V_0$$

となる．$V_0$ はOに於ける $V$ の値である．

左邊の第二項はその極限に於いて零になる．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_1}\frac{\mathbf{r}_1\cdot\nabla V}{r}dS=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)=0$$

右邊の面積分は球面 $S_1$ に無關係であり，容積分は $\varepsilon$ が零になつた極限に於いては $S$ で圍まれる全區域についてとつた積分であるから，結局

$$V_0=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\nabla^2 V d\tau+\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{n}\cdot\left(\frac{1}{r}\nabla V-V\nabla\frac{1}{r}\right)dS,\quad(21\cdot 9)$$

卽ち或る區域に於ける $\nabla^2 V$ と，それを圍む表面に於ける $V$ 及び $\dfrac{\partial V}{\partial n}$ とによつて，任意の點Oに於ける $V$ の値が定まる．

更にもし $V$ 自身が調和函數ならば，$\nabla^2 V$ は零であるから，

$$V_0=\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{n}\cdot\left(\frac{1}{r}\nabla V-V\nabla\frac{1}{r}\right)dS.\qquad(21\cdot 10)$$

**22. ヘルムホルツの定理**　任意のヴェクトル $\mathbf{E}$ は轉回的と非轉回的との二つの分ヴェクトルにわけることができて，その分け方は唯一通りしかない．これを**ヘルムホルツ** (Helmholtz) **の定理**といふ．卽ち

$$\mathbf{E}=-\nabla V+\nabla\times\mathbf{A}\qquad(22\cdot 1)$$

となる．$V$ と $\mathbf{A}$ とはグリーンの公式 (21·9) によつて定めるこ

とができる.

**E** が (22·1) の形になるとすれば,その發散をとると (20·1) 及び (20·6) により,

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=-\nabla^2 V. \tag{2·22}$$

この方程式により,無限大の點では $V$ が零になるといふ條件をいれゝば $V$ は唯一に定まる.

積分する區域を限りなく大きな半徑 $R$ の球面の内部とし,その表面で内側に向つて法線をたてれば,(21·9) 式の **n** の代りに $-\mathbf{n}$ を置いて,

$$V=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\nabla^2 V d\tau-\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{R}\mathbf{n}\cdot\nabla V-\frac{V}{R^2}\right)dS.$$

$V$ が無限大の點では零になるとすれば右邊の終の項は零である. 且つガウスの發散の定理により,

$$\int\mathbf{n}\cdot\nabla V dS=-\int\nabla^2 V d\tau=\int\nabla\cdot\mathbf{E}d\tau.$$

であるから,第二項は $R$ が限りなく大きければ零である.

よつて,

$$V=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla^2 V}{r}d\tau=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla\cdot\mathbf{E}}{r}d\tau \tag{22·3}$$

として $V$ は唯一に定まる.

次に **E** の轉回をつくれば, (21·5) 及び (21·7) により,

$$\nabla\times\mathbf{E}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}.$$

こゝに **A** 自身が轉回的ヴェクトルであるといふ條件

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$$

を入れゝば, $V$ と同樣にして **A** が唯一に定まる.



$$\mathbf{A}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{r}d\tau. \tag{22·4}$$

このやうにして定めた **A** が轉回的であるといふことは證明できる.[1]

よつて任意のヴェクトルは一般に,

$$\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\,V+\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

といふ形における. 勿論 **E** 自身が轉回的ならば (22·2) により $V$ は零になるから,只

$$\mathbf{E}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \tag{22·5}$$

となり, **E** が非轉回的ならば **A** は零になるから,

$$\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\,V \tag{22·6}$$

となる. 是等は電磁氣學,流體力學に於いて大切な事柄である.

例へば完全な流體の速度 **v** は

$$\mathbf{v}=-\nabla\varphi+\nabla\times\mathbf{H}$$

とおける. $\varphi$ は速度のスカラーポテンシャル, **H** は速度のヴェクトルポテンシャルを表はす.

(1) 證明を省く. 拙著, 256-258 頁參照.

# 第五章

# 座標の變換

**23. 共變及び反變ヴェクトル** 任意の交る三直線を座標軸にとり,その方向の單位ヴェクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とする. 別の三直線を座標軸にして,單位ヴェクトルを $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ で表はせば,

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3, \\ \overline{\mathbf{e}}_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3, \\ \overline{\mathbf{e}}_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3, \end{aligned}\right\} \tag{23·1}$$

及び

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \beta_{11}\overline{\mathbf{e}}_1 + \beta_{12}\overline{\mathbf{e}}_2 + \beta_{13}\overline{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= \beta_{21}\overline{\mathbf{e}}_1 + \beta_{22}\overline{\mathbf{e}}_2 + \beta_{23}\overline{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= \beta_{31}\overline{\mathbf{e}}_1 + \beta_{32}\overline{\mathbf{e}}_2 + \beta_{33}\overline{\mathbf{e}}_3. \end{aligned}\right\} \tag{23·2}$$

(23·2) の關係を (23·1) に入れゝば 9箇の關係式が求まる.

$$\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31} = 1,$$

$$\alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32} = 0,$$

$$\alpha_{11}\beta_{13} + \alpha_{12}\beta_{23} + \alpha_{13}\beta_{33} = 0.$$

他に同様な 6 箇の式を得る. この 9 箇の式は,

$$\sum_{r=1}^{r=3} \alpha_{ir}\beta_{rk} = \delta_{ik}, \ (i, k = 1, 2, 3)$$



に纒められる. $\alpha$ と $\beta$ との添字に注意すれば,直ちに $\delta_{ik}$ は $i$ が $k$ に等しい時には1, 等しくなければ零になることがわかる.

$$\left.\begin{aligned} i \neq k \ \text{ならば},\ \delta_{ik} &= 0, \\ i = k \ \text{ならば},\ \delta_{ik} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{23·3}$$

猶ほ左邊の項 $\alpha_{ir}\beta_{rk}$ では,一項の中に添字 $r$ は二度現はれてゐて,それについて 1 から 3 迄の和をとる. 一つ項に同じ添字が二つある時には,その添字について和をつくるものと規約すれば,和の記號 $\sum$ を省いて便宜上次のやうに書く.

$$\alpha_{ir}\beta_{rk} = \delta_{ik}\left\{\begin{aligned} &= 0, \quad i \neq k. \\ &= 1, \quad i = k. \end{aligned}\right\} \tag{23·4}$$

(23·1) を (23·2) に入れゝば同様に,

$$\beta_{ir}\alpha_{rk} = \delta_{ik}$$

となるが,これは (23·4) から導くことのできるもので,別に新しい關係ではない.

(23·1) と (23·2) とは互に逆の變換である.

今ヴェクトル $\mathbf{a}$ をこの二つの座標軸について表はせば

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3, \tag{23·5}$$

$$\mathbf{a} = \overline{a}_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{a}_2\overline{\mathbf{e}}_2 + \overline{a}_3\overline{\mathbf{e}}_3. \tag{23·6}$$

これ等に (23·1) 及び (23·2) を入れゝば,この二つの座標軸に關する $\mathbf{a}$ の成分の間の關係が求まる; 即ち

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{11}\overline{a}_1 + \alpha_{21}\overline{a}_2 + \alpha_{31}\overline{a}_3 = \alpha_{i1}\overline{a}_i, \\ a_2 &= \alpha_{i2}\overline{a}_i, \\ a_3 &= \alpha_{i3}\overline{a}_i; \end{aligned}\right\} \tag{23·7}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}_1&=\beta_{11}a_1+\beta_{21}a_2+\beta_{31}a_3=\beta_{i1}a_i,\\ \bar{a}_2&=\beta_{i2}a_i,\\ \bar{a}_3&=\beta_{i3}a_i.\end{aligned}\right\} \tag{23·8}$$

このやうな關係で成分が變換されるヴェクトルを**反變ヴェクトル**と稱へる.

反變ヴェクトルの成分につける添字は上方に $a^i$ と書けば,この變換は

$$\left.\begin{aligned}a^i&=\alpha^i_k\bar{a}^k,\\ \bar{a}^i&=\beta^i_k a^k.\end{aligned}\right\}\ (i=1,2,3) \tag{23·9}$$

で表はせる.

然るに (23·1) 及び (23·2) は,

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}_i&=\beta^k_i\bar{\mathbf{e}}_k,\\ \bar{\mathbf{e}}_i&=\alpha^k_i\mathbf{e}_k.\end{aligned}\right\} \tag{23·10}$$

となるので, $\mathbf{a}$ は $\mathbf{e}$ に對して變換が反變になるといふことがわかる. $\mathbf{a}$ の成分の變換式の係數と, $\mathbf{e}$ の逆變換の式の係數とは一致するから, $a_i$ と $\mathbf{e}_i$ とは**反勾配**であるといへる.

然しスカラー函數の勾配の如きものは $\mathbf{e}$ と共變の變換をする**共變ヴェクトル**である. 共變ヴェクトルの成分につける添字は下方に書く. 卽ち成分 $q_i$ は,

$$\left.\begin{aligned}q_i&=\beta^k_i\bar{q}_k,\\ \bar{q}_i&=\alpha^k_i q_k.\end{aligned}\right\} \tag{23·11}$$

のやうに變換する. $q$ と $\mathbf{e}_i$ とは**共勾配**である.

共變及び反變ヴェクトルの區別は,三次元の空間に於ける問



題では左程重要な意義をもつてゐない. 殊に二つの直交座標系を用ひるならば, $\alpha$ 及び $\beta$ は座標軸間の方向餘弦であるから,

$$\alpha^i_k=\beta^k_i$$

となり. 全然區別がつかない. 然し相對論に於ける四時元世界以上の空間になると,その差違が著るしい意味を持つことになる[1].

---

(1) '相對性理論' の項參照.

# 第六章

## テンソルの場

**24. テンソル** $(A_x, A_y, A_z)$ を成分とするヴェクトル **A** に, 次の9箇のスカラー量の一組

$$\begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix} \tag{24·1}$$

を乘じてヴェクトル **B** を導く. その導き方は

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B}=&(t_{xx}A_x+t_{xy}A_y+t_{xz}A_z)\mathbf{i} \\ &+(t_{yx}A_x+t_{yy}A_y+t_{yz}A_z)\mathbf{j} \\ &+(t_{zx}A_x+t_{zy}A_y+t_{zz}A_z)\mathbf{k} \end{aligned}\right\} \tag{24·2}$$

であるとする. **B** は **A** の一次同次函數であるから,これを記號で

$$\mathbf{B}=(\tau)\mathbf{A} \tag{24·3}$$

の如く表はす.

$\tau$ は (24·1) で表はした9箇の成分をもつ量で,これを**非對稱的テンソル**又は**ディアテンソル**といふ. (24·3) 式はヴェクトルとディアテンソル $\tau$ との**テンソルヴェクトル積**略して**テンソル積**を表はすもので,その結果は **A** の一次函數であるヴェクトル **B** を導く.

然し物理學に於いて多く用ひられるものでは



$$t_{yz}=t_{zy},\ t_{zx}=t_{xz},\ t_{xy}=t_{yx}$$

となつて,獨立した6箇の量を成分とするもので,このやうなのを**對稱的**又は**直角テンソル**或は單に**テンソル**と云ふ. この章では特に斷らない限りこの對稱的テンソルのみを取り扱ふことにする.

卽ちテンソル $\tau$ の成分は

$$\tau=\tau(t_{xx},\ t_{yy},\ t_{zz},\ t_{yz},\ t_{zx},\ t_{xy}), \tag{24·4}$$

又は (24·1) と同じマトリックスの形にして,

$$\tau=\begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{yz} & t_{zz} \end{pmatrix} \tag{24·5}$$

である. このマトリックスの主對角線上の三項 $t_{xx}$, $t_{yy}$, $t_{zz}$ を第一種の成分,他の三項 $t_{yz}$, $t_{zx}$, $t_{xy}$ を第二種の成分といふ. テンソルは次節で調べるやうに特殊な方向を座標軸に擇べば,第二種の成分を悉く零にするやうな形にできる.

從つて,

$$\mathbf{B}=(\tau)\mathbf{A}$$

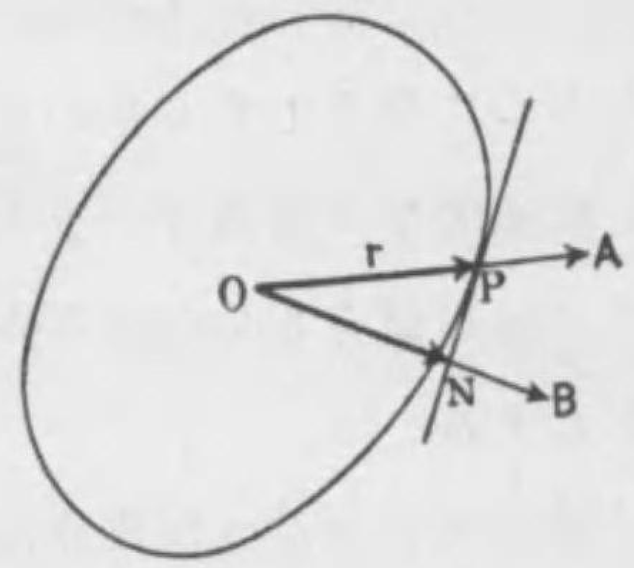
は次のやうな意味を表はす

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B}=&(t_{xx}A_x+t_{xy}A_y+t_{zx}A_z)\mathbf{i} \\ &+(t_{xy}A_x+t_{yy}A_y+t_{yz}A_z)\mathbf{j} \\ &+(t_{zx}A_x+t_{yz}A_y+t_{zz}A_z)\mathbf{k} \end{aligned}\right\} \tag{24·6}$$

**25. テンソル楕圓體** 原點Oを中心にして二次曲面

$$2\phi\equiv t_{xx}x^2+t_{yy}y^2+t_{zz}z^2+2\,t_{yz}yz+2\,t_{zx}zx+2t_{xy}xy-1=0 \tag{25·1}$$

を劃く．これを**テンソル楕圓體**といふ．



第　16　圖

O 點からヴェクトル **A** をひき,楕圓體との交點 P の位置を **r** $(x, y, z)$ とする．P 點を過ぎる切平面の方程式は,切平面上の流通座標を $(\xi, \eta, \zeta)$ とすれば,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x-\xi)+\frac{\partial\phi}{\partial y}(y-\eta)+\frac{\partial\phi}{\partial z}(z-\zeta)=0. \qquad (25\cdot2)$$

(25·1) は二次の同次函數であるから,オイレルの定理により

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}x+\frac{\partial\phi}{\partial y}y+\frac{\partial\phi}{\partial z}z=1. \qquad (25\cdot3)$$

これに (25·2) を代入すれば,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\xi+\frac{\partial\phi}{\partial y}\eta+\frac{\partial\phi}{\partial z}\zeta=1. \qquad (25\cdot4)$$

O 點から切平面に垂線 ON をたてる．その方向餘弦を $(l, m, n)$ として,

$$p=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}} \qquad (25\cdot5)$$

とおけば,

$$l=p\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad m=p\frac{\partial\phi}{\partial y},\quad n=p\frac{\partial\phi}{\partial z}. \qquad (25\cdot6)$$

(25·1) を $x$ について微分すれば,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=t_{xx}x+t_{xy}y+t_{xz}z. \qquad (25\cdot7)$$



**r** は **A** と同一線上にあるヴェクトルだから,

$$\mathbf{r}=s\mathbf{A} \qquad (25\cdot8)$$

とおくことができる．よつて (25·7) 式の $x, y, z$ の代りに **A** の成分を入れゝば,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=s(t_{xx}A_x+t_{xy}A_y+t_{xz}A_z)$$
$$=sB_x. \qquad (25\cdot9)$$

同様にして $B_y$, $B_z$ が求まるから,ヴェクトル **B** の方向,向きが (25·6) によつて定まる．

$$l:m:n=B_x:B_y:B_z, \qquad (25\cdot10)$$

卽ち **B** は ON と同じ方向―― **A** とテンソル楕圓體の交點に於ける切平面に中心からたてた垂線の方向にあることが知れる．

**B** の大いさは (25·9) 及び (25·5) により

$$sB=\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}=\frac{1}{p}. \qquad (25\cdot11)$$

(25·8) によつて,

$$B:A=\frac{1}{p}:r \qquad (25\cdot12)$$

で定まる．卽ちヴェクトル **B** は (25·12) と (25·10) とで唯一に定まる．

テンソル楕圓體の主軸の方向を $a, b, c$ とし,主軸を座標軸にした時と,任意の座標軸との間の方向餘弦を

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
| $\eta$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
| $\zeta$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ |

(25·13)

で表はす. $(\xi, \eta, \zeta)$ は楕圓體の主軸を座標軸にとつた時の一點の座標である.

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta, \\ y&=\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta, \\ z&=\alpha_3\xi+\beta_3\eta+\gamma_3\zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (25\cdot14)$$

これを最初の式に入れゝば,楕圓體の方程式は

$$t_{xx}(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta)^2+\ldots\ldots+2t_{yz}(\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta)$$
$$(\alpha_3\xi+\beta_3\eta+\gamma_3\zeta)+\ldots\ldots=1.$$

楕圓體の方程式は主軸の方向を座標軸にして表はせば,只 $\xi^2, \eta^2, \zeta^2$ の項だけで他の項は零になるから單に

$$t_a\xi^2+t_b\eta^2+t_c\zeta^2=1 \qquad (25\cdot15)$$

といふ形になる. こゝに

$$\left.\begin{aligned} t_a&=t_{xx}\alpha_1^2+t_{yy}\alpha_2^2+t_{zz}\alpha_3^2+2t_{yz}\alpha_2\alpha_3+2t_{zx}\alpha_3\alpha_1 \\ &\quad+2t_{xy}\alpha_1\alpha_2, \\ t_b&=t_{xx}\beta_1^2+t_{yy}\beta_2^2+t_{zz}\beta_3^2+2t_{yz}\beta_2\beta_3+2t_{zx}\beta_3\beta_1 \\ &\quad+2t_{xy}\beta_1\beta_2, \\ t_c&=t_{xx}\gamma_1^2+t_{yy}\gamma_2^2+t_{zz}\gamma_3^2+2t_{yz}\gamma_2\gamma_3+2t_{zx}\gamma_3\gamma_1 \\ &\quad+2t_{xy}\gamma_1\gamma_2. \end{aligned}\right\} \qquad (25\cdot16)$$



$(t_a, t_b, t_c)$ はテンソル $\tau$ の $a, b, c$ の方向の成分で,これをテンソルの**主要素**といふ.

一般にテンソルはその主要素によつて,

$$\tau=\begin{pmatrix} t_a & 0 & 0 \\ 0 & t_b & 0 \\ 0 & 0 & t_c \end{pmatrix} \qquad (25\cdot17)$$

で表はせる.

楕圓體の主半徑を $a, b, c$ とすれば楕圓體の方程式は

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1 \qquad (25\cdot18)$$

であるから, (25·15) と比較すれば,

$$t_a=\frac{1}{a^2}, \quad t_b=\frac{1}{b^2}, \quad t_c=\frac{1}{c^2}. \qquad (25\cdot19)$$

テンソルの主要素はその楕圓體の主半徑の自乘の逆數に等しい値をとる.

例へば等方質の內では電氣變位 **D** は

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$$

で **E** と同じ方向であるが結晶體の內では結晶軸の方向の成分は,

$$D_a=\varepsilon_a E_a, \quad D_b=\varepsilon_b E_b, \quad D_c=\varepsilon_c E_c$$

となり, **D** は **E** とテンソル $\varepsilon$ との積として

$$\mathbf{D}=(\varepsilon)\mathbf{E}$$

であつて,軸の方向を除いては **E** と同じ方向には起らない.

彈性體や流體內に於ける歪及び歪力,結晶體に於ける電氣及

び熱の傳導,光の傳播などを始めとしてテンソルの研究は極めて必要である.

**26. 座標の變換**　ヴェクトル $(\tau)\mathsf{A}$ と $\mathsf{A}$ とのスカラー積をつくる.

$$\mathsf{A}\cdot(\tau)\mathsf{A}=t_{xx}A_x^2+t_{yy}A_y^2+t_{zz}A_z^2+2t_{yz}A_yA_z$$
$$+2t_{zx}A_zA_x+2t_{xy}A_xA_y\,. \qquad (26\cdot1)$$

いま二つの座標系 $(x, y, z)$ と $(\xi, \eta, \zeta)$ との間の方向比を

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
| $\eta$ | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\mu_3$ |
| $\zeta$ | $\nu_1$ | $\nu_2$ | $\nu_3$ |

(26·2)

とすれば,

$$\left.\begin{aligned} A_x&=\lambda_1A_\xi+\mu_1A_\eta+\nu_1A_\zeta\,,\\ A_y&=\lambda_2A_\xi+\mu_2A_\eta+\nu_2A_\zeta\,,\\ A_z&=\lambda_3A_\xi+\mu_3A_\eta+\nu_3A_\zeta\,. \end{aligned}\right\} \qquad (26\cdot3)$$

よつて,

$$\mathsf{A}\cdot(\tau)\mathsf{A}=t_{\xi\xi}A_\xi^2+t_{\eta\eta}A_\eta^2+t_{\zeta\zeta}A_\zeta^2+2t_{\eta\zeta}A_\eta A_\zeta$$
$$+2t_{\zeta\xi}A_\zeta A_\xi+2t_{\xi\eta}A_\xi A_\eta \qquad (26\cdot4)$$

とおけば,

$$\left.\begin{aligned} t_{\xi\xi}&=\lambda_1^2t_{xx}+\lambda_2^2t_{yy}+\lambda_3^2t_{zz}+2\lambda_2\lambda_3t_{yz}\\ &\quad+2\lambda_3\lambda_1t_{zx}+2\lambda_1\lambda_2t_{xy}\,,\\ t_{\eta\zeta}&=\mu_1\nu_1t_{xx}+\mu_2\nu_2t_{yy}+\mu_3\nu_3t_{zz}+(\mu_2\nu_3+\mu_3\nu_2)t_{yz}\\ &\quad+(\mu_3\nu_1+\mu_1\nu_3)t_{zx}+(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)t_{xy}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (26\cdot5)$$



其他同様な4箇の關係が求まる. $(\xi, \eta, \zeta)$ が直交座標系ならば,

$$\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2=\lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2=1,$$
$$\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=\cdots\cdots=0$$

であるから, $t_{\xi\xi}$ $t_{\eta\eta}$ $t_{\zeta\zeta}$ を加へて,

$$S_1=t_{\xi\xi}+t_{\eta\eta}+t_{\zeta\zeta}=t_{xx}+t_{yy}+t_{zz}, \qquad (26\cdot6)$$

即ち座標の變換に際して第一種のテンソル成分の和は不變であることがわかる.

同様にして,

$$S_2=\begin{vmatrix} t_{yy} & t_{yz}\\ t_{yz} & t_{zz}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t_{zz} & t_{zx}\\ t_{zx} & t_{xx}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} t_{xx} & t_{xy}\\ t_{xy} & t_{yy}\end{vmatrix}, \qquad (26\cdot7)$$

及び

$$S_3=\begin{vmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{zx}\\ t_{xy} & t_{yy} & t_{yz}\\ t_{zx} & t_{yz} & {}_{zz}\end{vmatrix} \qquad (26\cdot8)$$

も不變であることが證明される.

$S_1$ をテンソルの第一スカラー, $S_2$ を第二スカラー, $S_3$ を第三スカラーといひ,これは $t$ に關する三次方程式

$$\begin{vmatrix} t_{xx}-t & t_{xy} & t_{zx}\\ t_{xy} & t_{yy}-t & t_{yz}\\ t_{zx} & t_{yz} & t_{zz}-t\end{vmatrix}=0$$

を $t$ について展開したものゝ係數と絶對項とになる. 即ち,

$$t^3-S_1t^2+S_2t-S_3=0. \qquad (26\cdot9)$$

これは**ハミルトン**(Hamilton)**の方程式**で,その三根は悉く實數であるか,一つは實數で他の二は共軛な虛根である. その値はテンソル楕圓體の主軸にのみ關係するものであるから,$t$の函數$S$が座標軸の變換には無關係な不變量になることは明らかである.

### 27. 逆テンソルと單位テンソル

テンソル式

$$\mathbf{B}=(\tau)\mathbf{A} \tag{27·1}$$

を逆に,$\mathbf{B}$で$\mathbf{A}$を表はせば,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}=&(s_{xx}B_x+s_{xy}B_y+s_{xz}B_z)\mathbf{i}\\&+(s_{xy}B_x+s_{yy}B_y+s_{yz}B_z)\mathbf{j}\\&+(s_{zx}B_x+s_{yz}B_y+s_{zz}B_z)\mathbf{k},\end{aligned} \tag{27·2}$$

或は

$$\mathbf{A}=(\sigma)\mathbf{B} \tag{27·3}$$

となる. テンソル$\sigma$は$s$を成分とするテンソルで,$\tau$の**逆テンソル**といひ,

$$\sigma=\tau^{-1} \tag{27·4}$$

で表はすとすれば, (27·3) は

$$\mathbf{A}=(\tau^{-1})\mathbf{B}. \tag{27·5}$$

$\tau$の主要素によつて (27·1) を表はせば,

$$B_a=t_aA_a,\quad B_b=t_bA_b,\quad B_c=t_cA_c$$

であるから,

$$A_a=\frac{1}{t_a}B_a=s_aB\ ,\cdots,$$



即ち

$$s_a=\frac{1}{t_a},\quad s_b=\frac{1}{t_b},\quad s_c=\frac{1}{t_c}. \tag{27·6}$$

よつて$\tau$の楕圓體と$\tau^{-1}$の楕圓體との主軸の方向は一致し,主半徑の値は逆數になる.

逆テンソルの楕圓體の方程式は

$$2\psi\equiv\frac{\xi^2}{t_a}+\frac{\eta^2}{t_b}+\frac{\zeta^2}{t_c}-1=0 \tag{27·7}$$

である.

テンソルとヴェクトルとの積が恆にもとのヴェクトルに等しい時,

$$\mathbf{A}=(I)\mathbf{A} \tag{27·8}$$

になるやうなテンソルを**單位テンソル**といふ.

單位テンソルはヴェクトルに作用して方向を變へないから,その楕圓體は球であり,又その値も變へないから半徑1でなければならない,よつて

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \tag{27·9}$$

從つて單位テンソルはその逆テンソルに等しい.

$$I=I^{-1}. \tag{27·10}$$

以上研究したテンソルは配分の法則に從ふことは容易く證明できる.

$$\tau(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=(\tau)\mathbf{A}\pm(\tau)\mathbf{B}, \tag{27·11}$$

$$(\tau+\rho)\mathbf{A}=(\tau)\mathbf{A}+(\rho)\mathbf{A}. \qquad (27\cdot12)$$

スカラー量 $m(=m'm'')$ について,

$$(m\tau)\mathbf{A}=\tau(m\mathbf{A})=(m'\tau)(m''\mathbf{A}). \qquad (27\cdot13)$$

**28. テンソルの内積**　いまヴェクトル

$$\mathbf{B}=(\tau)\mathbf{A}$$

と他のヴェクトル $\mathbf{C}$ とのスカラー積をつくる.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}&=C_xB_x+C_yB_y+C_zB_z\\ &=C_x(t_{xx}A_x+t_{xy}A_y+t_{xz}A_z)\\ &+C_y(t_{xy}A_x+t_{yy}A_y+t_{yz}A_z)\\ &+C_z(t_{zx}A_x+t_{yz}A_y+t_{zz}A_z).\end{aligned}$$

これを書き換へれば,

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}=&t_{xx}A_xC_x+t_{yy}A_yC_y+t_{zz}A_zC_z\\ &+t_{yz}(A_yC_z+A_zC_y)+t_{zx}(A_zC_x+A_xC_z)\\ &+t_{xy}(A_xC_y+A_yC_x). \qquad (28\cdot1)\end{aligned}$$

いま二つのテンソル $\tau$ と $\rho$ の成分によつて,

$$\tau_{xx}\rho_{xx}+\tau_{yy}\rho_{yy}+\tau_{zz}\rho_{zz}+2\tau_{yz}\rho_{yz}+2\tau_{zx}\rho_{zx}+2\tau_{xy}\rho_{xy} \quad (28\cdot2)$$

をつくり,これをテンソル $\tau$ と $\rho$ との**内積**と名付けて $\tau\cdot\rho$ 又は $(\tau,\rho)$ で表はし, (28·1) と比較してみると,それは二つのテンソルの内積と見做せる. 即ち

$$A_xC_x,\ A_yC_y,\ A_zC_z,\ \frac{1}{2}(A_yC_z+A_zC_y),\ \frac{1}{2}(A_zC_x+A_xC_z),$$
$$\frac{1}{2}(A_xC_y+A_yC_x) \qquad (28\cdot3)$$

を成分とするテンソルと $\tau$ との内積である.



故に (28·3) を成分とするものを一つのテンソルとして, $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ とのテンソルと名付け $\mathrm{tens}(\mathbf{A},\mathbf{C})$ 又は $\mathrm{tens}\,\mathbf{AC}$ と書くとすれば, (28·1) は

$$\mathbf{C}\cdot(\tau)\mathbf{A}=(\tau)\cdot\mathrm{tens}(\mathbf{A},\mathbf{C}). \qquad (28\cdot4)$$

テンソル楕圓體の方程式 (25·1) と

$$(A_xx+A_yy+A_zz)(C_xx+C_yy+C_zz)=1 \qquad (28\cdot5)$$

とを比較してみると,この式は $\mathrm{tens}(\mathbf{A},\mathbf{C})$ の楕圓體に相當する. 然しこれは楕圓體ではなくてその崩れた形で,

$$\left.\begin{aligned}A_xx+A_yy+A_zz=0,\\ C_xx+C_yy+C_zz=0\end{aligned}\right. \qquad (28\cdot6)$$

を漸近面とする圓壔體であつて,圓壔の主軸は原點を過ぎつて $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ とを含む面に垂直であることが知れる.

よつて $\mathrm{tens}(\mathbf{A},\mathbf{C})$ の主軸の方向は簡單に定まる. 假りに $z$ 軸を $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ とを含む面に垂直にとれば, $A_z$ 及び $C_z$ はともに零であるからその二つを含む項は零である. 次に $x$ 軸を $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ とのつくる角の二等分線の方向にとれば,直ちに $A_xC_y+A_yC_x$ は零になることが知れる. このやうに軸をとれば $\mathrm{tens}(\mathbf{A},\mathbf{C})$ の第二種の成分は悉く零で第一種成分だけが殘る. 即ちこのテンソルの主軸の一つは $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ の面に垂直,他の二轉は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ とのつくる內角及び外角の二等分線の方向にある.

$\mathrm{tens}(\mathbf{A},\mathbf{C})$ の主軸を $a, b, c$ とすれば,

$$\mathrm{tens}(\mathbf{A},\mathbf{C})=\begin{pmatrix}A_aC_a & 0 & 0\\ 0 & A_bC_b & 0\\ 0 & 0 & A_cC_c\end{pmatrix}. \qquad (28\cdot7)$$

よつて (28·5) は

$$A_a C_a \xi^2 + A_b C_b \eta^2 = 1 \tag{28·8}$$

即ち圓壔で, $\xi^2$ と $\eta^2$ の係數の符號が同じか異ふかによつて,楕圓壔もしくは双曲線壔になる.

もし $\mathbf{C}$ と $\mathbf{A}$ とが同じヴェクトルならば, (28·1) は

$$t_{xx}A_x^2 + t_{yy}A_y^2 + t_{zz}A_z^2 + 2t_{yz}A_yA_z + 2t_{zx}A_zA_x + 2t_{xy}A_xA_y$$

であるから, tens $(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ を略して tens $\mathbf{A}^2$ とも書く. 即ち

$$\mathbf{A}\cdot(\tau)\mathbf{A} = (\tau)\cdot \mathrm{tens}\,\mathbf{A}^2. \tag{28·9}$$

$\mathbf{A}$ はその單位ヴェクトル $\mathbf{a}$ とその絶對値とによつて

$$\mathbf{A} = A\mathbf{a}$$

とおけるから,

$$\mathbf{A}\cdot(\tau)\mathbf{A} = A\mathbf{a}\cdot(\tau)A\mathbf{a} = A^2\mathbf{a}\cdot(\tau)\mathbf{a} = A^2(\tau)\cdot\mathrm{tens}\,\mathbf{a}^2. \tag{28·10}$$

$\mathbf{a}$ の成分即ち方向餘弦を $(l, m, n)$ とすれば, tens $\mathbf{a}^2$ は

$$(l^2, m^2, n^2, mn, nl, lm) \tag{28·11}$$

を成分とすることが (28·3) で知れるから,

$$\mathrm{tens}\,\mathbf{A}^2 = A^2\,\mathrm{tens}\,\mathbf{a}^2 \tag{28·12}$$

であつて單位ヴェクトルのテンソルで表はせる.

この節の應用の一例として剛體の廻轉運動に例を藉りる, 廻轉速度 $\mathbf{w}$ と速度との關係は (7·2) により

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r}.$$

密度を $\rho$ とすれば, $\mathbf{r}$ の點に於ける小容積 $\delta\tau$ のもつ運動のエネルギーは

$$\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\delta\tau = \frac{1}{2}\rho(\mathbf{w}\times\mathbf{r})^2\delta\tau$$



であるから,剛體全部の廻轉運動のエネルギー $T$ は,これを剛體全部について積分して,

$$T = \frac{1}{2}\int\rho(\mathbf{w}\times\mathbf{r})^2 d\tau. \tag{28·13}$$

然るに (9·2) により,

$$(\mathbf{w}\times\mathbf{r})^2 = \mathbf{w}^2\mathbf{r}^2 - (\mathbf{w}\cdot\mathbf{r})^2$$

であるから, (28·13) を直交座標の成分で表はして,

$$\begin{aligned} 2T &= \int\rho[\mathbf{w}^2\mathbf{r}^2 - (\mathbf{w}\cdot\mathbf{r})^2]d\tau \\ &= k_{xx}w_x^2 + k_{yy}w_y^2 + k_{zz}w_z^2 + 2k_{yz}w_yw_z + 2k_{zx}w_zw_x + 2k_{xy}w_xw_y \end{aligned}$$

とおけば,

$$2T = (\kappa)\cdot\mathrm{tens}\,\mathbf{w}^2 \tag{28·14}$$

となる. こゝに $\kappa$ は $(k_{xx}, \cdots\cdots, k_{yz}, \cdots\cdots)$ を成分とするテンソルで, $k$ の値は

$$\left.\begin{aligned} k_{xx} &= \int\rho(x^2+y^2)\,d\tau, \;\ldots\ldots, \\ k_{yz} &= -\int\rho yz\,d\tau, \ldots\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{28·15}$$

即ち慣性能率と慣性乘積の符號を變へたものである. この $\kappa$ を**慣性テンソル**といふ.

**29. 歪**　ヴェクトル $\mathbf{s}$ の直角成分 $(s_x, s_y, s_z)$ を微分して,

$$\frac{\partial s_x}{\partial x},\ \frac{\partial s_y}{\partial y},\ \frac{\partial s_z}{\partial z},\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_z}{\partial y}+\frac{\partial s_y}{\partial z}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_x}{\partial z}+\frac{\partial s_z}{\partial x}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}+\frac{\partial s_x}{\partial y}\right) \tag{29·1}$$

を成分とするテンソルを考へる. このテンソルをガンス

(Gans) は $\mathbf{s}$ の變形と名付けて def $\mathbf{s}$ で表はした.[1] この概念は弾性力學,流體力學或は電磁氣學の研究に役立つ.

いま弾性體が外力の作用によつて變位したとする. 弾性體の中の極めて近い二點 P, Q に眼を著けて $\overrightarrow{PQ}=\delta\mathbf{r}$ とすれば, Q の變位 $\mathbf{s}+\delta\mathbf{s}$ と P の變位 $\mathbf{s}$ との差は (14·12) により,

$$\delta\mathbf{s}=\delta\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{s} \tag{29·2}$$

である. もし物體が全部剛體として變位するならば, (19·16) と (19·17) とを併せて考へれば,

$$\delta\mathbf{s}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{s}\times\delta\mathbf{r} \tag{29·3}$$

になるわけであるが,弾性體では外力によつて起る全體としての變位 $\delta\mathbf{s}_1$ と,内部の各點相互の關係的位置の變位 $\delta\mathbf{s}_2$ とが一緒に起るものと考へられる. $\delta\mathbf{s}_1$ は (29·3) によつて與へられるもので,

$$\delta\mathbf{s}=\delta\mathbf{s}_1+\delta\mathbf{s}_2,$$

即ち $\delta\mathbf{s}_2$ は (29·2) と (29·3) との差でこれによつて歪の狀態がわかる. 略して $\delta\mathbf{s}$ と書けば,

$$\delta\mathbf{s}=\delta\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{s}+\frac{1}{2}\delta\mathbf{r}\times\operatorname{rot}\mathbf{s}. \tag{29·4}$$

これを成分にわけて,

$$\left.\begin{aligned}
\delta s_x&=\frac{\partial s_x}{\partial x}\delta x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_x}{\partial y}+\frac{\partial s_y}{\partial x}\right)\delta y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_x}{\partial z}+\frac{\partial s_z}{\partial x}\right)\delta z,\\
\delta s_y&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_y}{\partial x}+\frac{\partial s_x}{\partial y}\right)\delta x+\frac{\partial s_y}{\partial y}\delta y+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta s_y}{\partial z}+\frac{\partial s_z}{\partial y}\right)\delta z,\\
\delta s_z&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_z}{\partial x}+\frac{\partial s_x}{\partial z}\right)\delta x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_z}{\partial y}+\frac{\partial s_y}{\partial z}\right)\delta y+\frac{\partial s_z}{\partial z}\delta z.
\end{aligned}\right\} \tag{29·5}$$

(1) R. Gans, *Einführung in die Vektoranalysis*, (5. Aufl., 1923), p. 79.



(29·1) と比べてみれば $\delta\mathbf{s}$ はテンソル def $\mathbf{s}$ と $\delta\mathbf{r}$ との積であることが知れる.

$$\delta\mathbf{s}=(\operatorname{def}\mathbf{s})\,\delta\mathbf{r}. \tag{29·6}$$

變位した後に於けるQのPに對する位置 $\delta\mathbf{r}'$ は,

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{r}'&=\delta\mathbf{r}+\delta\mathbf{s}\\&=\delta\mathbf{r}+(\operatorname{def}\mathbf{s})\,\delta\mathbf{r}.\end{aligned}$$

PQ の距離の變化は,第二階以上の小さい量を無視して,

$$\begin{aligned}|\delta\mathbf{r}'|-|\delta\mathbf{r}|&=\sqrt{(\delta\mathbf{r}+(\operatorname{def}\mathbf{s})\,\delta\mathbf{r})^2}-|\delta\mathbf{r}|\\&=\sqrt{(\delta\mathbf{r})^2+2\delta\mathbf{r}\cdot(\operatorname{def}\mathbf{s})\delta\mathbf{r}}-\delta r\\&=\frac{\delta\mathbf{r}\cdot(\operatorname{def})\mathbf{s}\,\delta\mathbf{r}}{\delta r}.\end{aligned}$$

然るに,

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{r}\cdot(\operatorname{def}\mathbf{s})\,\delta\mathbf{r}&=(\operatorname{def}\mathbf{s})\cdot\operatorname{tens}(\delta\mathbf{r})^2\\&=(\delta\mathbf{r})^2(\operatorname{def}\mathbf{s})\cdot\operatorname{tens}\mathbf{s}_1^{\,2}.\end{aligned}$$

$\mathbf{s}_1$ は P から Q に向けた單位ヴェクトルで, P に對する Q の方向を定めることができる. その方向の長さ 1 のものゝ延びる割合は,

$$\frac{\delta r'-\delta r}{\delta r}=\operatorname{def}\mathbf{s}\cdot\operatorname{tens}\mathbf{s}_1^{\,2} \tag{29·7}$$

で與へられる. テンソル def $\mathbf{s}$ の楕圓體は所謂歪楕圓體でこれによつて任意の點に於ける歪の狀況が知れる.

**30. テンソル解析の別法** テンソルの研究の方法にギッブスの創案にかゝる他の方法がある. この方法が遙に簡明であるけれど,本邦ではこれを用ひる人が多くないのでこゝに

は只その概念だけ説明するに止める(拙著參照).

二つのヴェクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ とを單に並べておいた $\mathbf{ab}$(或は $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$)を一つの積とみてこれをヴェクトルの**不定積**又は**ディヤード**と名付ける. ディヤードの和を**ディヤディク**又は**アッフィノール**といつてギリシア文字 $\phi$ で表はす.

$$\phi=\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2+\ldots\ldots \qquad (30\cdot1)$$

$\phi$ とヴェクトル $\mathbf{r}$ との積は次のやうに定義される.

$$\phi\cdot\mathbf{r}=\mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{r})+\mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{r})+\ldots\ldots, \qquad (30\cdot2)$$

$$\mathbf{r}\cdot\phi=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1+(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2+\ldots\ldots \qquad (30\cdot3)$$

これを $\phi$ と $\mathbf{r}$ との**內積**といひヴェクトルであることは明かである. しかも $\phi$ を前に置いた時と,後に置いた時とでは一般に等しくなく,その二つは互に共軛な $\mathbf{r}$ のヴェクトル一次函數である.

$\phi$ を形づくるディヤードの前項と後項とを入れかへた

$$\phi_c=\mathbf{b}_1\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2+\ldots\ldots \qquad (30\cdot4)$$

を $\phi$ の**共軛なディヤディク**といつて,添字 $c$ をつけて表はせば,明らかに

$$\phi\cdot\mathbf{r}=\mathbf{r}\cdot\phi_c. \qquad (30\cdot5)$$

$\phi$ とヴェクトルとの內積は配分の法則に從ふ.

$$\phi\cdot(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)=\phi\cdot\mathbf{r}_1+\phi\cdot\mathbf{r}_2, \qquad (30\cdot6)$$

$$(\phi+\psi)\cdot\mathbf{r}=\phi\cdot\mathbf{r}+\psi\cdot\mathbf{r}. \qquad (30\cdot7)$$

基本ヴェクトルから二つ宛とつて不定積をつくれば,

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{ii} & \mathbf{ij} & \mathbf{ik}\\ \mathbf{ji} & \mathbf{jj} & \mathbf{jk}\\ \mathbf{ki} & \mathbf{kj} & \mathbf{kk}\end{array} \qquad (30\cdot8)$$



なる9箇の獨立したディヤードができる.

(30·1) の $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ 等を成分に分解して形式的の積をつくり,類似の項を集めれば,9箇の基本ディヤードによつて,

$$\begin{aligned}\phi=&\varphi_{xx}\mathbf{ii}+\varphi_{xy}\mathbf{ij}+\varphi_{xz}\mathbf{ik}\\ &+\varphi_{yz}\mathbf{ji}+\varphi_{yy}\mathbf{jj}+\varphi_{yz}\mathbf{jk}\\ &+\varphi_{zx}\mathbf{ki}+\varphi_{zy}\mathbf{kj}+\varphi_{zz}\mathbf{kk}.\end{aligned} \qquad (30\cdot9)$$

となる. この9箇の係數 $\varphi_{rs}$ は $\phi$ の成分であつて,ディアテンソル $\varphi$ の成分と考へられる. 卽ち $\phi$ と $\mathbf{r}$ との內積は $\mathbf{r}$ の一次函數で,ディアテンソル $\varphi$ と $\mathbf{r}$ とのテンソル積に等しいことは明かである.

$$\phi\cdot\mathbf{r}=(\varphi)\mathbf{r}. \qquad (30\cdot10)$$

もし $\varphi_{rs}=\varphi_{sr}$ ならば,

$$\phi=\phi_c$$

となり,**自己共軛**又は**對稱的ディヤディク**でその成分はテンソルの成分である.

更に $\varphi_{rs}=-\varphi_{sr}$ ならば,

$$\phi=-\phi_c$$

となる. これは**反自己共軛**又は**反稱的ディヤディク**といふ.

一般にディヤディク $\phi$(從つてディアテンソル)は對稱的の部分と反稱的の部分との和にわけることができる.

$$\phi'=\frac{1}{2}(\phi+\phi_c), \qquad (30\cdot11)$$

$$\phi''=\frac{1}{2}(\phi-\phi_c) \qquad (30\cdot12)$$

とおけば,

$$\phi=\phi'+\phi''.$$

$\phi'$を成分にわけて書いてみれば,

$$\begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \frac{\varphi_{xy}+\varphi_{yx}}{2} & \frac{\varphi_{xz}+\varphi_{zx}}{2} \\ \frac{\varphi_{yx}+\varphi_{xy}}{2} & \varphi_{yy} & \frac{\varphi_{yz}+\varphi_{zy}}{2} \\ \frac{\varphi_{zx}+\varphi_{xz}}{2} & \frac{\varphi_{zy}+\varphi_{yz}}{2} & \varphi_{zz} \end{pmatrix}$$

であつて對稱的であるが,$\phi''$は

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\varphi_{xy}-\varphi_{yx}}{2} & \frac{\varphi_{xz}-\varphi_{zx}}{2} \\ \frac{\varphi_{yx}-\varphi_{xy}}{2} & 0 & \frac{\varphi_{yz}-\varphi_{zy}}{2} \\ \frac{\varphi_{zx}-\varphi_{xz}}{2} & \frac{\varphi_{zy}-\varphi_{yz}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

で反稱的である.

單位テンソルに相當する單位ディヤディク又は還元因子は

$$I=\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk} \qquad (30{\cdot}13)$$

であつて,その成分は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

從つて,

$$I{\cdot}\mathbf{r}=\mathbf{r}.$$



例へば$\mathbf{v}$を速度として,

$$\phi=I+\frac{\beta-1}{v^2}\mathbf{vv}$$

は特殊相對論に於けるローレンツ-アインシュタイン(Lorentz-Einstein)の變換を示すディヤディクである.

$\mathbf{v}$に平行なヴェクトル$\mathbf{u}=s\mathbf{v}$を作用させれば,

$$\begin{aligned}\phi{\cdot}\mathbf{u}&=I{\cdot}\mathbf{u}+\frac{\beta-1}{v^2}\mathbf{v}(\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{u})\\ &=\mathbf{u}+\frac{\beta-1}{v^2}\mathbf{v}(\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{u})\\ &=s\mathbf{v}+s(\beta-1)\mathbf{v}\\ &=s\beta\mathbf{v}=\beta\mathbf{u}.\end{aligned}$$

$\mathbf{v}$に平行な$\mathbf{u}$には方向に變りなく只長さが$\beta$だけ延びることになる.

(附記) 既に豫定の紙數を超過したので,四次元時空に於けるヴェクトルやテンソルの解析には少しも觸れないことについて讀者の諒承を乞ふ.

昭和七年六月十日印刷
昭和七年六月十五日發行

岩波講座
**物理學及び化學**（增訂版）
第十三回配本 2
（物理學第七回）

編輯兼發行者　岩波茂雄
東京市神田區一橋通町
印刷者　島連太郎
東京市神田區美土代町
印刷所　三秀舍
東京市神田區美土代町

發行所
**岩波書店**
東京市神田區一橋通町

# 終