初等微分方程式

長沢亀之助編

初等微分積分學續編

初等微分積分學續編

初等

微分方程式

全

長澤龜之助

編纂

川北朝鄰

校閲

櫻井幸作
藤本曾登吉

校算

東京

數書閣

序

本書ハ高等數學ノ初歩教科書ノ第二着トシテ出版セル微分積分學ノ續編トシテ編述セルモノナリ.

本書ハ微分方程式初歩ノ概畧ヲ極メテ簡明ニ編述セムトノ目的ヨリ米人オスボルネ氏著ハス處ノ微分方程式問題ノ書ニ準據シ該書ノ問題ニジョンソン,ブール,等諸氏ノ書ヲ參酌シテ範式ノ説明ヲ加ヘ且學生ノ稍困難ヲ感ズル處ニハ例解ヲ付シ叉明白ナル場合ニハ説明ノミニテ例解ヲ畧セリ.

Linear differential equations ハ綫微分方程式ト譯セリコレ或ハ穩當ノ譯ニハアラズ他ニ適當ノ譯アラムト思ヘドモ考ヘ出サズ讀者若シ適當ノ譯ヲ指示セラルル

キハ余ノ幸ヒ甚ダシカラム(之ヲ一次微分方程式ト譯セムト思ヒシガ、Order ヲ次ト譯シ Degree ヲ乘ト譯セシヲ以テ甚ダ混雜ヲ生ズルノ恐アルニ見合セタリ).

余ハ續イテ初等力學ノ編纂ニ從事セムトス.

長澤龜之助識ス

明治二十七年八月

目次

第一編

定義及ビ原初式ヨリ微分方程式ノ誘求

第二編

二變數ノ一次一乘ノ微分方程式

第三編

適合微分方程式及ビ積分因子

第四編

三變數ノ一次一乘ノ微分方程式

第五編

二乘以上ノ一次微分方程式

第六編

單獨解法

第七編

綫微分方程式

第八編

高次微分方程式ノ特形

第九編

通同微分方程式

第十編

套言之英和對照

Auxiliary equations	副方程式
Complete primitive	原初式
Degree	乘
Differential equation	微分方程式
Exact „ „	適合微分方程式
Homogeneous equation	齊次方程式
Integrating Factor	積分因子
Linear equation	綫方程式
Order	次
Orthogonal trajectory	直角軌線
Simultaneous differential equation	通同微分方程式
Singular solution	單獨解法
Solution	解法
Variable perimeter	變常數

初等

微分方程式

第一編

定義及ビ原初式ヨリ微分方程式ノ誘求

1. 微分方程式　微分方程式トハ微分又ハ微係數ヲ含ム處ノ方程式ナリ.

解法　微分方程式ノ解法トハ微分又ハ微係數ヲ含マザル一ノ方程式ヲ求ムルコニシテ此後ノ方程式ハ微分法ヲ施シテ前ノ方程式ヲ得ル如キモノタル可シ.

次　微分方程式ノ次數トハ其含ム處ノ最高次ノ微係數ノ次數ニ同シ.

乘　微分方程式ノ乘數ハ方程式ヲ有理ニシテ且整ナル形ニ化シタルトキ最高次ノ微係數ノ最高器ノ乘數ニ同シ.

原初式　微分方程式ノ解法ニ於テハ一回以上積分ヲ施スノ必要アリ而シテ積分法一回ヲ施ス毎ニ一ツノ任意常數ヲ誘致ス可シ.

n 次ノ微分方程式ノ最モ一般ナル解法ヨリ得タル式ハ其乘數ノ如何ニ關セズ n 個ノ任意常數ヲ包含ス可シ. 此最モ一般ナル解法ヨリ得タル式ハ與ヘラレタル微分方程式ノ原初式ナリ.

2. 一次ノ微分方程式ヲ其原初式ヨリ誘求スルコ.

原初式ヲ微分セヨ,而シテ若シ任意常數ガ消失シタルトキハ其結果ハ所要ノ微分方程式ナリ. 若シ然ラザレバ此常數ヲ二ツノ方程式ヨリ消去スレバ所要ノ微分方程式ヲ得可シ.

例　$log(xy)+x=y+c$　ヨリ一次ノ微分方程式ヲ作レ但 c ハ任意

常數トシ又 $\frac{dy}{dx}=p$ ト記ス.

與ヘラレタル式ヲ微分スレバ

$$\frac{1}{xy}(y+xp)+1=p$$

即チ $$y(1+x)+px(1-y)=0.$$

問題 I. 次ノ各式ヲ原初式トセル微分方程式ヲ作レ但 c ハ任意常數トス.

1. $(1+x^2)(1+y^2)=cx^2.$

2. $\cos y=c\cos x.$

3. $y=ce^{-\tan^{-1}x}+\tan^{-1}x-1.$

4. $y=(cx+\log x+1)^{-1}.$

5. $y=cx+c-c^3.$

6. $(y+c)^2=4ax.$

7. $y^2\sin^2x+2cy+c^2=0.$

8. $c^{2y}+2cxe^y+c^2=0.$

---

3. 二次ノ微分方程式ヲ其原初式ヨリ誘求スルコ.

原初式ヲ二回微分シ之ト原初式トノ三ツノ方程式ヨリ二ツノ任意常數ヲ消去ス可シ.

問題 II. 次ノ各式ヲ原初式トセル二次ノ微分方程式ヲ作レ但 c_1 及ビ c_2 ハ任意常數トス.

1. $y=c_1\cos(ax+c_2).$

2. $y=c_1e^{ax}+c_2e^{-ax}.$

3. $y=(c_1+c_2x)e^{ax}$

4. $y=c_1x^3+\frac{c_2}{x}.$

5. $y=c_1\sin nx+c_2\cos nx+\frac{\cos ax}{n^2-a^2}.$

---

4. 前ノ方法ハ三次以上ノ微分方程式ヲ其原初式ヨリ誘求スルコニ擴張スルコヲ得可シ.

問題 III. **1, 2, 3** ノ各式ヨリ三次ノ微分方程式ヲ作リ又 **4, 5** ノ各式ヨリ四次ノ微分方程式ヲ作レ.

1. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}+c_3e^x.$

2. $ye^x=c_1e^{2x}+c_2\sin x\sqrt{2}+c_3\cos x\sqrt{2}.$

3. $y=\left(c_1+c_2x+\frac{x^2}{2}\right)e^x+c_3.$

4. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x+c_4.$

5. $x^3+a^4y=c_1e^{ax}+c_2e^{-ax}+c_3\sin ax+c_4\cos ax.$

第 二 編

二變數ノ一次一乘ノ微分方程式

5. 二變數ノ一次一乘ノ微分方程式ノ一般ノ形ハ

$$Mdx+Ndy=0$$

但MトNハ何レモx及ビyノ函數ナリ.

6. $XYdx+X'Y'dy=0$ ナル形.

但此X, X'ハxノミノ函數ニシテY, Y'ハyノミノ函數トス.

此場合ニ於テハdxノ係數ヲxノミノ函數トシ又dyノ係數ヲyノミノ函數トシテ積分ス可シ乃チ

$$\int\frac{X}{X'}dx+\int\frac{Y'}{Y}dy=c.$$

例　$(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$ ヲ解ケ.

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0,$$

即チ $$\int\frac{dx}{x}+\int dx+\int\frac{dy}{y}-\int dy=c.$$

即チ $$\log x+x+\log y-y=c;$$

故ニ $$\log(xy)+x-y=c.$$

問題 **IV.** 次ノ各方程式ヲ解ケ:

1. $(x^2-yx^2)\frac{dy}{dx}+y^2+xy^2=0.$

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}.$ 　　**3.** $a\left(x\frac{dy}{dx}+2y\right)=xy\frac{dy}{dx}.$

4. $(1+y^2)dx=(y+\sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dy.$

5. $\sin x\cos y\,dx=\cos x\sin y\,dy.$

6. $\sec^2x\tan y\,dx+\sec^2y\tan x\,dy=0.$

7. $\sec^2x\tan y\,dy+\sec^2y\tan x\,dx=0.$

8. $\frac{dy}{dx}+\frac{1+y+y^2}{1+x+x^2}=0.$

---

7. 齊次方程式

與ヘラレタル方程式ニ $y=vx$ ヲ代入スレバ以テ生ズル處ノvトxトノ方程式ハ前款ノ法ニ由テ解クコヲ得可シ.

例　$(y-x)dy+ydx=0$ ヲ解ケ.

$$y=vx$$

トスレバ $$dy=xdv+vdx,$$

故ニ $$(v-1)x^2dv+(v-1)vxdx+vxdx=0,$$

即チ $$(v-1)x^2dv+v^2xdx=0,$$

即チ $$\frac{v-1}{v^2}dv+\frac{dx}{x}=0,$$

依テ $$\int\frac{dv}{v}-\int\frac{dv}{v^2}+\int\frac{dx}{x}=\log c,$$

故ニ $$\log v+\frac{1}{v}+\log x=\log c,$$

即チ $$\log\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\log x=\log c,$$

$$\log y-\log c=-\frac{x}{y},$$

$$\frac{y}{c}=e^{-\frac{x}{y}},$$

$$\therefore\quad y=ce^{-\frac{x}{y}}$$

問題 **V.** 次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $(2\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0.$ 　　**2.** $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}.$

3. $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}.$ 　　**4.** $x\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}=y\cos\frac{y}{x}-x.$

5. $(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0.$

6. $(x+y)\dfrac{dy}{dx}=y-x.$

7. $x\cos\dfrac{y}{x}(ydx+xdy)=y\sin\dfrac{y}{x}(xdy-ydx).$

8. $x+y\dfrac{dy}{dx}=my.$ (1) $m<2$, (2) $m=2$, (3) $m>2$.

9. $[(x^2-y^2)\sin\alpha+2xy\cos\alpha-y\sqrt{x^2+y^2}]\dfrac{dy}{dx}$

$$=2xy\sin\alpha-(x^2-y^2)\cos\alpha+x\sqrt{x^2+y^2}.$$

---

8. $(ax+by+c)dx+(a'x+b'y+c')dy=0$ ナル形.

$x=x'+\alpha,\ y=y'+\beta$ ヲ代入スレバ

$$(ax'+by'+a\alpha+b\beta+c)dx'+(a'x'+b'y'+a'\alpha+b'\beta+c')dy'=0$$

是ニ於テ $a\alpha+b\beta+c=0.\ a'\alpha+b'\beta+c'=0$ ナル如ク α ト β トヲ決定スルトキハ該方程式ハ x', y' ノ齊次方程式トナル可シ.

9. 上ノ方法ハ $\dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}$ ナルトキハ失敗ス可シ. 此場合ニ於テハ $a'=ma,\ b'=mb$ トスレバ

$$[ax+by+c]dx+[m(ax+by)+c']dy=0$$

依テ $ax+by=z$ トスレバ x ト z 又ハ y ト z トノ新方程式ヲ得而シテ **6** 款ノ法ニ由テ之ヲ解クコヲ得可シ.

問題 **VI.** 次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $(3y-7x+7)dx+(7y-3x+3)dy=0.$

2. $(4x+2y-1)\dfrac{dy}{dy}+2x+y+1=0,$

3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{7y+x+2}{8x+5y+6}.$

4. $(2y+x+1)dx=(2x+4y+3)dy,$

5. $2x-y+1+(x+y-2)\dfrac{dy}{dx}=0.$

10. $\dfrac{dy}{dx}+Py=Q$ ナル形.

但 P, Q ハ x ノミノ函數トス.

先ツ $$\frac{dy}{dx}+Py=0$$

$\dfrac{dy}{dx}+Py=0$

ナル形ヲ積分セムトスルニ

$$\frac{dy}{y}=-Pdx,$$

是ニ由テ $$\log y=\log c-\int Pdx,$$

即チ $$y=ce^{-\int Pdx}.$$

上式ヲ $$c=e^{\int Pdx}y$$

ト記スレバ微分法ニ由テ

$$e^{\int Pdx}(dy+Pydx)=0,$$

是ニ由テ $$\frac{dy}{dx}+Py=Q$$

ヲ解クニハ $$e^{\int Pdx}(dy+Pydx)=Qe^{\int Pdx}dx,$$

積分スレバ $$e^{\int Pdx}y=\int Qe^{\int Pdx}dx+c,$$

即チ $$y=e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}dx+c\right).$$

問題 **VII.** 次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $x\dfrac{dy}{dx}-ay=x+1.$

2. $x(1-x^2)dy+(2x^2-1)ydx=ax^3dx.$

3. $(1-x^2)^2\dfrac{dy}{dx}+y\sqrt{1-x^2}=x+\sqrt{1-x^2}.$

4. $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x.$

5. $(1+y^2)dx=(\tan^{-1}y-x)dy.$

6. $\sqrt{a^2+x^2}\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=x+y.$

7. $(1+x^2)dy+\left(xy-\frac{1}{x}\right)dx=0.$

8. $\frac{dy}{dx}+y\frac{d\varphi}{dx}=\varphi\frac{d\varphi}{dx}.$ 但φハxノミノ函數トス.

---

11. $\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$ ナル形.

y^n ニテ除スレバ $$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{1-n}=Q,$$

故ニ $$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)Py^{1-n}=(1-n)Q$$

$z=y^{1-n}$ トスレバ $$dz=(1-n)y^{-n}dy$$

依テ $$\frac{dz}{dx}+(1-n)Pz=(1-n)Q$$

是レ前款ノ法ニ由テ解クコヲ得可シ.

問題 **VIII.** 次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=axy^2.$

2. $3y^2\frac{dy}{dx}-ay^3=x+1.$

3. $\frac{dy}{dx}=2xy(ax^2y^2-1).$

4. $\frac{dy}{dx}(x^2y^3+xy)=1.$

5. $\frac{dy}{dx}+y\cos x=y^n\sin 2x.$

6. $(y\log x-1)ydx=xdy.$

7. $ax^2y^ndy+ydx=2xdy.$

8. $y-\cos x\frac{dy}{dx}=y^2\cos x(1-\sin x).$

9. $y\frac{dy}{dx}+by^2=a\cos x$

第 三 編

適合微分方程式及ビ積分因子

12. $Mdx+Ndy$ ハ $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ (1) ナルトキニ適合微分式ナリ.

如何トナレバuヲx, yノ函數トスルトキハ微分積分學上册**122**款ニ由テ

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

故ニ $$M=\frac{\partial u}{\partial x},\quad N=\frac{\partial u}{\partial y}$$

ナルトキ即チ $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

ナルトキニハ $Mdx+Ndy$ ハ適合微分式ナル可シ.

サテxニ關セル微係數ハMナル處ノ函數ノ最モ一般ナル形ハ

$$u=\int Mdx+Y \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

但$\int Mdx$ハyヲ常數ト見テ積分シ又Yハxヲ含マザレトモyハ之ヲ含有シ得ル量ナリ.

又yニ關セルuノ微係數ハNナルヲ以テ

$$N=\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx+\frac{dY}{dy},$$

即チ $$\frac{dY}{dy}=N-\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx,$$

故ニ $$Y=\int\left\{N-\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx\right\}dy,$$

之ヲ(2)ニ代入スレバ

$$u=\int Mdx+\int\left\{N-\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx\right\}dy=c,$$

或ハ又 $$u=\int \mathrm{N}dy+\int\left\{\mathrm{M}-\frac{\partial}{\partial x}\int \mathrm{N}dy\right\}dx=c.$$

但xニ關シテ積分スルキハyハ常數ト見做シ而シテyニ關シテ積分スルキハxハ常數ト見做ス可シ.

問題 IX. 次ノ微分方程式ヲ解ケ但(1)ナル要件ヲ適用スルヿヲ要ス:

1. $(x^3+3xy^2)dx+(y^3+3x^2y)dy=0.$

2. $(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0.$

3. $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0.$ **4.** $\frac{2xdx}{y^3}+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\right)dy=0.$

5. $xdx+ydy+\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0.$

6. $\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{dy}{y}=0.$

7. $\left(x+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)dx+\left(y-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right)dy=0.$

8. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$

9. $e^x(x^2+y^2+2x)dx+2ye^xdy=0.$

10. $(mdx+ndy)\sin(mx+ny)=(ndx+mdy)\cos(nx+my).$

11. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0.$

12. $\frac{x^a dy-ayx^{a-1}dx}{by^2-gx^{2a}}=-x^{a-1}dx.$

(1) $g>0$, (2) $g<0$ 及ヒ $=-k$, (3) $g=0$, (4) $a=0$, (5) $b=0$.

---

13. $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy$ ガ適合微分式ナラザルキハ之ニ積分因子ト稱スルモノヲ乘ジテ適合微分式トナシ得ルヿアル可シ. 次ニ其二三ノ場合ヲ示ス.

14. $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy$ ガ齊次ナルキハ $\frac{1}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}$ ハ一ノ積分因子ナリ.

如何トナレバ $$\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=$$
$$\frac{1}{2}\left\{(\mathrm{M}x+\mathrm{N}y)\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)+(\mathrm{M}x-\mathrm{N}y)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\right\}$$

然ルニ $$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=d\log(xy),\quad \frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=d\log\left(\frac{x}{y}\right)$$

ナルヲ以テ $$\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=$$
$$\frac{1}{2}\left\{(\mathrm{M}x+\mathrm{N}y)d\log xy+(\mathrm{M}x-\mathrm{N}y)d\log\frac{x}{y}\right\}$$

故ニ $$\frac{\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\frac{1}{2}d\log xy+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{M}x-\mathrm{N}y}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}d\log\frac{x}{y}\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots(1)$$

第此二邊ハ $\frac{\mathrm{M}x-\mathrm{N}y}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}$ ガ $\log\frac{x}{y}$ ノ函數ナルキハ適合微分式ナリ故ニ $\frac{\mathrm{M}x-\mathrm{N}y}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}$ ガ $\frac{x}{y}$ ノ函數ナルキ依テ $\mathrm{M}x-\mathrm{N}y$ 及ヒ $\mathrm{M}x+\mathrm{N}y$ ノ各ガ齊次ナルキ適合微分式ナリ.

故ニ $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy$ ガ齊次ナルキハ該式ノ第一編モ亦適合微分式ニシテ $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy$ ノ積分因子ハ $\frac{1}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}$ ナリ.

15. 上ノ場合ハ $\mathrm{M}x+\mathrm{N}y=0$ ナルキ失敗ス可シ然レモ此場合ニ於テハ $\mathrm{N}dy=-\mathrm{M}dx$, $\mathrm{N}y=-\mathrm{M}x$ ナルヲ以テ $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ コレヨリ $y=cx$ ヲ得.

例 $(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$ ノ積分因子ハ $\frac{1}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$ ナリ.

依テ $$\frac{(x^2+2xy-y^2)dx}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}+\frac{(y^2+2xy-x^2)dy}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}=0.$$

故ニ $$\int \mathrm{M}dx=\int\frac{(x^2+2xy-y^2)dx}{(x+y)(x^2+y^2)}$$
$$=-\int\frac{dx}{x+y}+\int\frac{2xdx}{x^2+y^2}=-\log(x+y)+\log(x^2+y^2)$$

又 $\mathrm{N}-\frac{\partial}{\partial y}\int \mathrm{M}dx=0$ ナルヿヲ知ル,

故ニ所要ノ原初式ハ $log(x^2+y^2)=log(x+y)+log\,c$

即チ $x^2+y^2=c(x+y)$ ナリ.

問題 **X.** 積分因子ヲ用ヒテ次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+2\left(\frac{dx}{y}-\frac{dy}{x}\right)=0.$

2. $(x^2y^2+xy^3)dx-(x^3y+x^2y^2)dy=0.$

3. $x^3dx+(3x^2y+2y^3)dy=0.$

4. $(x\sqrt{x^2+y^2}-x^2)\,dy+(xy-y\sqrt{x^2+y^2})dx=0.$

---

16. $f_1(xy)ydx+f_2(xy)xdy=0$ ノ積分因子ハ $\frac{1}{xy\{f_1(xy)-f_2(xy)\}}$ ナリ.

如何トナレハ $\frac{Mdx+Ndy}{Mx-Ny}=\frac{1}{2}\left\{\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}d\,log\,(xy)+d\,log\frac{x}{y}\right\}$

ナルヲ以テ $\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}$ ガ $log\,xy$ ノ函數ナル𪜈故ニ xy ノ函數ナル𪜈該式ハ適合微分式トナル故ニ若シ $M=f_1(xy)y$, $N=f_2(xy)x$ ナル𪜈ハ

$$\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}=\frac{f_1(xy)+f_2(xy)}{f_1(xy)-f_2(xy)},$$

依テ題言ノ如シ.

17. 上ノ塲合ハ $Mx-Ny=0$ ナル𪜈失敗ス可シ然レ𪜈其塲合ニ於テ原初式ハ $xy=c$ ナリ.

18. 所題ノ式ヲ解ク他ノ一法ハ $xy=v$ トシ x ト v 又ハ y ト v トノ方程式ヲ求ムレバ二變數ヲ分離スルヿヲ得可シ.

問題 **XI.** 積分因子ヲ用ヒテ次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $(1+xy)ydx+(1-xy)xdy=0.$

2. $(x^2y^2+xy)ydx+(x^2y^2-1)xdy=0.$

3. $(x^3y^3+1)(xdy+ydx)+(x^2y^2+xy)(ydx-xdy)=0.$

4. $(\sqrt{xy}-1)xdy-(\sqrt{xy}+1)ydx=0.$

5. $(y+y\sqrt{xy})dx+(x+x\sqrt{xy})dy=0.$

6. $e^{xy}(x^2y^2+xy)(xdy+ydx)+ydx-xdy=0.$

7. $xy[1+cot(xy)](xdy+ydx)+xdy-ydx=0.$

---

19. $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\varphi(x)$ ナル𪜈ハ積分因子ハ $e^{\int\phi(x)dx}$ ナリ.

如何トナレバ $Mdx+Ndy=0$ ノ積分因子ヲ μ トスル𪜈ハ $\mu Mdx+\mu Ndy=0$ ハ適合微分式ナルヲ以テ

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu M)}{\partial y},$$

是ニ由テ
$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x}=M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}$$

然ルニ μ ガ x ノミノ函數ナル𪜈ハ $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ ナルヲ以テ

$$N\mu'+\mu\frac{\partial N}{\partial x}=\mu\frac{\partial M}{\partial y},$$

$$\therefore\quad \frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N},$$

此第二邊ガ x ノ函數即チ $\varphi(x)$ ニ等シキ𪜈ハ

$$log\,\mu=\int\varphi(x)dx,$$

故ニ
$$\mu=e^{\int\phi(x)dx}$$
ナリ.

20. 或ハ又
$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\psi(y)$$

ナル𪜈ハ積分因子ハ $e^{\int\psi(y)dy}$ ナリ.

問題 **XII.** 積分因子ヲ用ヒテ次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0.$

2. $(3x^2-y^2)\frac{dy}{dx}=2xy.$

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$

4. $[(1-y)\sqrt{1-x^2}-xy]dx+[1-x^2-x\sqrt{1-x^2}]dy=0.$

5. $(\cos x+2y\sec y\sec^2 2x)dx+(\tan 2x\sec y-\sin x\tan y)dy=0.$

6. $\sin(3x-2y)(2dx-dy)+\sin(x-2y)dy=0.$

第四編

三變數ノ一次一乘ノ微分方程式

21. 三變數ノ一次一乘ノ微分方程式ノ一般ノ形ハ

$$\mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy+\mathrm{R}dz=0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (1)$$

但 P, Q, R ハ何レモ x, y, z ノ函數ナリ.

22. (1)ニ於テ變數ヲ分離シ得ルトキハ各項別別ニ積分ス可シ.

例　$\dfrac{dx}{x-a}+\dfrac{dy}{y-b}+\dfrac{dz}{z-c}=0$

ニ於テハ　$\log(x-a)+\log(y-b)+\log(z-c)=\log c'$

即チ　$(x-a)(y-b)(z-c)=c'$

23. (1)ガ單一ノ原初式ヨリ誘致セラレタル要件ヲ求ムルヿ次ノ如シ.

(1)ヨリ　$$dz=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}dx-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}dy \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)$$

然ルニ單一ナル原初式ガ成リ立ツトキハ z ハ x 及ビ y ノ函數ナルヲ以テ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (3)$$

然ルニ $\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}$ 及ビ $\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$ ハ一般ニ x, y, z ノ函數ニシテ z ハ又 x, y ノ函數ナルヲ以テ $\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}$ 及ビ $\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$ ハ x, y ノ函數ナリ.

依テ　$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$$

此 $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial z}{\partial x}$ ニ(3)ヨリ其價ヲ代入シテ且變化スレバ

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}\right)+\mathrm{Q}\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}\right)+\mathrm{R}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right)=0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (4)$$

此(4)ハ(1)ガ單一ノ原初式ヲ有スルヿノ要件ナリ.

24. (4)ナル要件ガ適當セラルル𪜈(1)ノ原初式ヲ求メムトスルニ若シ原初式ニ於テ z ヲ常數ト見テ微分スレバ $Pdx+Qdy=0$ 故ニ反對ニ $Pdx+Qdy=0$ ナル方程式アル𪜈 z ヲ常數ト見テ積分セムトスルニ積分因子ヲ μ トスレバ

$$\mu(Pdx+Qdy)=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy,$$

故ニ原初式ハ $\qquad V=\varphi(z) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5)$

依テ $\varphi(z)$ ヲ決定スレバ原初式ヲ知リ得タルナリ而シテコレ(5)ヲ x, y, z ニ就テ微分シ(1)ト比較シテ知リ得可シ.

例 $(x-3y-z)dx+(2y-3x)dy+(z-x)dz=0$

ニ於テ x ヲ常數ト見レバ

$$\int(2y-3x)dy+\int(z-x)dz=0$$

故ニ
$$y^2-3xy+\frac{1}{2}z^2-zx=\varphi(x)$$

之ヲ x, y, z ニ就テ微分スレバ

$$\left(-\frac{d\varphi(x)}{dx}-3y-z\right)dx+(2y-3x)dy+(z-x)dz=0,$$

之ヲ與ヘラレタル式ト比較スレバ

$$-\frac{d\varphi(x)}{dx}=x, \quad \text{即チ} \quad \varphi(x)=-\frac{1}{2}x^2,$$

故ニ所要ノ原初式ハ $x^2-6xy-2xz+2y^2+z^2=c.$

問題 **XIII.** (4)ナル要件ヲ適用シテ次ノ諸方程式ヲ解ケ:

1. $(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0.$

2. $yzdx+zxdy+xydz=0.$ **3.** $(y+z)dx+dy+dz=0.$

4. $ay^2z^2dx+bz^2x^2dy+cx^2y^2dz=0$

5. $zydx=zxdy+y^2dz.$ **6.** $(ydx+xdy)(a+z)=xydz.$

7. $(y+a)^2dx+zdy=(y+a)dz.$

8. $(y^2+yz)dx+(xz+z^2)dy+(y^2-xy)dz=0.$

9. $(2x^2+2xy+2xz^2+1)dx+dy+2zdz=0.$

第五編

二乘以上ノ一次微分方程式

25. 與ヘラレタル方程式ガ p 即チ $\dfrac{dy}{dx}$ ニ就テ解キ得可キ𪜈.

p ノ各價ニ對應シテ一乘ノ微分方程式アル可シ而シテ是等ノ一乘ノ各微分方程式ハ別別ニ之ヲ解クヿヲ得但任意常數ハ悉ク同一ノ字母ヲ用フ可シ.

此ノ如クシテ得タル各異ノ式ノ各項ヲ左邊ニ換置シテ之ヲ悉ク相乘シ其積ヲ零ニ等フスレバ原初式ヲ得可シ.

例 $p^2-5p+6=0$ ヲ解ケ:

$$p^2-5p+6=(p-2)(p-3)=0$$

$p-2=0$ ヨリ $\qquad y-2x+c=0,$

$p-3=0$ ヨリ $\qquad y-3x+c=0,$

$$\therefore \quad (y-2x+c)(y-3x+c)=0.$$

問題 **XIV.** 次ノ諸方程式ヲ解ケ:

1. $x^2p^2-a^2=0.$ **2.** $xp^2-a=0.$

3. $xp^2=1-x.$ **4.** $x^2p^2+3xyp+2y^2=0.$

5. $p(p+y)=x(x+y).$ **6.** $p^3+2xp^2-y^2p^2-2xy^2p=0.$

7. $p^3-(x^2+xy+y^2)p^2+(x^3y+x^2y^2+xy^2)p-x^3y^3=0.$

8. $p^2+2py\cot x=y^2.$

---

26. 與ヘラレタル方程式ガ y ニ就テ解キ得可キ𪜈.

p ヲ x, y ノ如ク變數ト見テ微分シ dy ニ pdx ヲ代入スレバ x ト p トノ一乘ノ微分方程式ヲ得可シ. 此方程式ヲ解キ其原初式ト與ヘラレタル方程式ヨリ p ヲ消去ス可シ.

例　$y=xp^2+2p$ ヲ解ケ:

之ヲ微分シテ $dy=pdx$ ヲ代入スレバ

$$pdx=p^2dx+2pxdp+2dp$$

即チ
$$(p-1)dx+2xdp=-\frac{2dp}{p}$$

即チ
$$(p-1)^2dx+2x(p-1)dp=\frac{2dp}{p}-2dp$$

之ヲ積分スレバ
$$(p-1)^2x=\log p^2-2p+c$$

之ト與ヘラレタル方程式ヨリ p ヲ消去スレバ所要ノ原初式ヲ得可シ.

問題 **XV.** 次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $x-yp=ap^2$.　　**2.** $(x+yp)^2=a^2(1+p^2)$.

3. $y=xp+p-p^2$.　　**4.** $(y-ap)^2=1+p^2$.

5. $y=ap+bp^2$.　　**6.** $x^2+y=p^2$.

7. $y^2=x^2(1+p^2)$.　　**8.** $y=p^2+2p^3$.

---

27. 與ヘラレタル方程式ガ x ニ就テ解キ得可キ片.

p ヲ x, y ノ如ク變數ト見テ微分シ $dx=\frac{dy}{p}$ ヲ代入スレバ y ト p トノ一乘ノ微分方程式ヲ得可シ. 此方程式ヲ解キ其原初式ト與ヘラレタル方程式ヨリ p ヲ消去ス可シ.

例　$p^2y+2px=y$ ヲ解ケ.

與ヘラレタル方程式ヨリ
$$2x=\frac{y}{p}-py,$$

之ヲ微分シテ $dx=\frac{dy}{p}$ ヲ代入スレバ
$$\frac{2dy}{p}=\frac{pdy-ydp}{p^2}-ydp-pdy,$$

之ヨリ
$$p(1+p^2)dy+y(1+p^2)dp=0,$$

即チ
$$pdy+ydp=0$$

ヲ得依テ
$$py=c^2, \qquad \therefore \quad p=c^2/y.$$

之ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入スレバ

$$2cx=y^2-c^2.$$

問題 **XVI.** 次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $x=p+\log p$.　　**2.** $p^2(x^2+2ax)=a^2$.

3. $x^2p^2=1+p^2$.　　**4.** $(x-ap)^2=1+p^2$.

5. $x=ap+bp^2$.　　**6.** $my-nxp=yp^2$

---

28. 與ヘラレタル方程式ガ x, y ニ就テ齊次ナル片.

$y=vx$ ヲ代入スル片ハ p ト v トノ方程式ヲ得可シ而シテ此方程式ヲ v ニ就テ解クヿヲ得バ與ヘラレタル方程式ハ **26, 27** 款ノ場合ニ屬スルモノトナル可シ.

然レ𪜈若シ p ニ就テ解クヿヲ得レバ $p=v+x\frac{dv}{dx}$ ヲ代入スレバ v ト x トノ一乘ノ微分方程式ヲ得可シ.

問題 **XVII.** 次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $xy^2(p^2+2)=2py^3+x^3$.　　**2.** $(2p+1)x^{\frac{1}{2}}y=x^{\frac{3}{2}}p^2+2y^{\frac{3}{2}}$.

3. $4x^2=3(3y-px)(y+px)$.

4. $ds=\left(\frac{y}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}dx+\left(\frac{x}{2y}\right)^{\frac{1}{2}}dy$.　　但 $ds=\sqrt{1+p^2}\,.\,dx$.

5. $(nx+py)^2=(1+p^2)(y^2+nx^2)$.

---

29. 「クレイロート」氏ノ方程式 $y=px+f(p)$.

之ヲ微分スレバ

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx},$$

即チ
$$\{x+f'(p)\}\frac{dp}{dx}=0,$$

此方程式ハ
$$x+f'(p)=0 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

或ハ
$$\frac{dp}{dx}=0 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

(2) ヨリ
$$p=c,$$

是ニ由テ之ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入スレバ

$$y=cx+f(c)$$

コレ所要ノ解法ニシテ(1)ハ次編ニ論ズル單獨解法ヲ與フ可シ.

問題 **XVIII.** 次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $y=px+\dfrac{m}{p}$. **2.** $y=px+p-p^3$.

3. $y^2-2pxy-1=p^2(1-x^2)$.

4. $y=2px+y^2p^3$. $y^2=y'$ トセヨ.

5. $ayp^2+(2x-b)p=y$. $y^2=y'$ トセヨ.

6. $x^2(y-px)=yp^2$. $y^2=y'$, $x^2=x'$ トセヨ.

7. $e^{3x}(p-1)+p^3e^{2y}=0$. $e^x=x'$, $e^y=y'$ トセヨ.

8. $(px-y)(py+x)=h^2p$. $y^2=y'$, $x^2=x'$ トセヨ.

第六編

單獨解法

30. 微分方程式ノ單獨解法トハ原初式中ニ包含セザル解法ナリ. 一乘ノ微分方程式ハ更ニ單獨解法ヲ有セザレドモ高乘ノ微分方程式ハ單獨解法ヲ有ス可シ而シテ此單獨解法ハ原初式ヨリ得ルコトアリ又ハ直接ニ微分方程式ヨリ得ルコトアリ.

31. $f(x,y,c)=0$ ヲ原初式トス.

c ノミヲ變數ト見テ微分スレバ $\dfrac{df}{dc}=0$ ヲ得而シテ此方程式ト與ヘラレタル微分方程式トヲ以テ c ヲ消去スルトキ其結果ガ與ヘラレタル微分方程式ニ適當スレバコレ單獨解法ナル可シ.

又 $f(x,y,p)=0$ ヲ與ヘラレタル微分方程式トス.

p ノミヲ變數ト見テ微分スレバ $\dfrac{df}{dp}=0$ ヲ得而シテ此方程式ト與ヘラレタル微分方程式トノ間ニ p ヲ消去スルトキ其結果ガ與ヘラレタル微分方程式ニ適當スレバコレ單獨解法ナル可シ.

問題 **XIX.** 次ノ各方程式ノ單獨解法ヲ與ヘラレタル方程式ヨリ直接ニ求メ又原初式ヲ作レ:

1. $y=px+\dfrac{m}{p}$. **2.** $y^2-2xyp+(1+x^2)p^2=1$.

3. $p^3-4xyp+8y^2=0$. $y=z^2$ トセヨ.

4. $y=(x-1)p-p^2$. **5.** $y(1+p^2)=2xp$.

6. $x^2p^2-2(xy-2)p+y^2=0$. **7.** $(y-xp)(mp-n)=mnp$.

第七編

綫微分方程式

32. 綫微分方程式　微分方程式ガ y 及ビ y ノ累次微係數ニ就テ一乘ナルキハ之ヲ綫微分方程式ト云フ．依テ綫微分方程式ノ公式ハ

$$\frac{d^ny}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+X_{n-1}\frac{dy}{dx}+X_ny=X$$

但 $X_1, X_2,\cdots\cdots X_n$ 及ビ X ハ x ノミノ函數ナルカ又ハ常數ナリ．

33. $\frac{d^ny}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots\cdots+X_ny=0$ ニ適當スル y ノ n 個ノ價ヲ $y_1, y_2,\cdots\cdots y_n$ トス然ルキハ y ノ完全ノ價ハ

$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots\cdots+c_ny_n$ ナリ但 $c_1, c_2,\cdots\cdots c_n$ ハ任意常數トス．

如何トナレバ y ノ價ヲ所設ノ方程式ニ代入スレバ

$$c_1\left(\frac{d^ny_1}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+X_ny_1\right)$$

$$+c_2\left(\frac{d^ny_2}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+X_2\frac{p^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+X_ny_2\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+c_n\left(\frac{d^ny_n}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+X_ny_n\right)=0$$

而シテ此左邊ノ各項ハ $y_1, y_2,\cdots\cdots y_n$ ノ價ノ假設ヨリ零ニ等シ，依テ $c_1y_1+c_2y_2+\cdots\cdots+c_ny_n$ ハ所設ノ方程式ニ適當ス．

34. $\frac{d^ny}{dx_n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_ny=0$ ヲ解ク法．

與ヘラレタル方程式ガ一次ニシテ $\frac{dy}{dx}-my=0$ ナルキハ其解法ハ $y=ce^{mx}$ ナリ今之ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入シ ce^{mx} ナル公因子ヲ去ルキハ

$$m^n+a_1m^{n-1}+a_2m^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

之ヲ副方程式ト云フ．

此各根ハ $y=ce^{mx}$ ヲシテ與ヘラレタル方程式ニ適當スル如キ各異ノ價ヲ決定ス可シ．

35. 前款ノ(1)ノ根ハ悉ク實量ニシテ不等ナルキ之ヲ $m_1, m_2,\ldots m_n$ ニテ表ハスキハ

$$y=c_1e^{m_1x},\quad y=c_2e^{m_2x},\ldots\ldots y=ce^{m_nx}$$

依テ一般ノ解法ハ　$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\cdots\cdots+c_ne^{m_nx}$.

例　$\frac{d^2y}{dx^2}+12y=7\frac{dy}{dx}$ ヲ解ケ．

此副方程式ハ　$m^2-7m+12=0,\quad \therefore\ m=3,\ 4.$

依テ　$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}.$$

問題 **XX.** 次ノ各方程式ヲ解ケ：

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y.$　　**2.** $a\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}.$

3. $3\left(\frac{d^2y}{dx^2}+y\right)=10\frac{dy}{dx}.$　　**4.** $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}=y.$

5. $ab\left(y+\frac{d^2y}{dx^2}\right)=(a^2+b^2)\frac{dy}{dx}.$　　**6.** $\frac{d^3y}{dx^3}=4\frac{dy}{dx}.$

7. $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}.$　　**8.** $\frac{d^3y}{dx^3}=7\frac{dy}{dx}-6y.$

9. $\frac{d^4y}{dx^4}+27y=12\frac{d^2y}{dx^2}.$

10. $\frac{d^5y}{dx^5}-2(a^2+b^2)\frac{d^3y}{dx^3}+(a^2-b^2)^2\frac{dy}{dx}=0.$

---

36. **34** 款ノ(1)ノ根ガ不等ナレモ悉ク實數ナラザルキ例ヘバ一組ノ虚根 $a\pm b\sqrt{-1}$ ヲ有スルキハ y ノ完全ノ價ノ内之ニ對應スル項ハ次ノ如シ

$$Ce^{ax+b\sqrt{-1}}+C'e^{ax-b\sqrt{-1}}$$

$$=Ce^{ax}(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx)+C'e^{ax}(\cos bx-\sqrt{-1}\sin bx)$$

$$=(C+C')e^{ax}\cos bx+(C-C')\sqrt{-1}\sin bx$$

$$=e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx).$$

例 $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{dy}{dx}=0$ ヲ解ケ.

此副方程式ハ $m^3+2m=0$ $\therefore$ $m=0,\ \pm\sqrt{-2}$

依テ $y=c_1\sin x\sqrt{2}+c_2\cos x\sqrt{2}+c_3$

問題 **XXI.** 次ノ各方程式ヲ解ケ:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0.$ **2.** $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+13y=0.$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+b^2y=0.$ (1) $a>b$ ナル𪜈, (2) $a<b$ ナル𪜈.

4. $\frac{d^2y}{dx^2}-4ab\frac{dy}{dx}+(a^2+b^2)^2y=0.$

5. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\log a\frac{dy}{dx}+[1+(\log a)^2]y=0.$

6. $\frac{d^3y}{dx^3}=y.$ **7.** $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=3y.$

8. $\frac{d^4y}{dx^4}=y.$ **9.** $\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}-8y=0.$

10. $\frac{d^4y}{dx^4}+4a^4y=0.$ **11.** $\frac{d^6y}{dx^6}=y.$

12. $\frac{d^6y}{dx^6}=-y.$ **13.** $\frac{d^8y}{dx^8}=y.$

---

37. **34** 款ノ(1)ガ實又ハ虛ナル等根ヲ有スル𪜈例ヘバ $m_2=m_1$ ナル𪜈ハ一般ノ解法ニ於テ $c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$ ナル項ハ $(c_1+c_2)e^{m_1x}$ 即チ Ce^{mx} トナリ任意常數ノ數ハ一ツ減少ス可シ然ル𪜈ハ該解法ハ最早一般ナル能ハズ.

$m_2=m_1$ ナル𪜈一般ノ解法ヲ求メムニハ $m_2=m_1+h$ トシ h ハ微小ナル有窮量トス可シ, 然ル𪜈ハ

$$c_1e^{m_1x}+c_2e^{(m_1+h)x}=e^{m_1x}(c_1+c_2e^{hx})$$

$$=e^{m_1x}\left(c_1+c_2+c_2hx+c_2\frac{h^2x^2}{2!}+\cdots\cdots\right)$$

$$=e^{m_1x}\left(A+Bx+Bh\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots\right),$$

サテ h ガ限リナク減少スル𪜈上式ノ極限ハ $e^{m_1x}(A+Bx)$ コレ一般ノ解法ニ於テ $c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$ ニ代フ可キ式ナリ.

同樣ニ三等根ノ場合ニハ一般ノ解法ニ於テ $c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+c_3e^{m_3x}$ ニ代フ可キ式ハ $e^{m_1x}(A+Bx+Cx^2)$, 此 A, B, C ハ任意常數ナルヲ以テ前ト記法ヲ同一ニセムガ爲メ c_1, c_2, c_3 ト記シ且 r 等根アリトセバ $c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\cdots\cdots+c_re^{m_rx}$ ニ代フ可キ式ハ $e^{m_1x}(c_1+c_2x+\cdots\cdots+c_rx^{r-1})$ ナリ.

例 $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=0$ ヲ解ケ.

此副方程式ハ $m^3-m^2-m+1=0,$ $\therefore$ $m=-1,\ 1,\ 1.$

是ニ由テ -1 ナル根ニ對應シテハ c_1e^{-x},

又 1 ナル二等根ニ對應シテハ $(c_2+c_3x)e^{x}.$

依テ $y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{x}.$

問題 **XXII.** 次ノ方程式ヲ解ケ:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+a^2y=0.$ **2.** $\frac{d^2y}{dx^2}=0.$

3. $\frac{d^3y}{dx^3}=4\frac{d^2y}{dx^2}.$ **4.** $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0.$

5. $\frac{d^4y}{dx^4}+2n^2\frac{d^2y}{dx^2}+n^4y=0.$

6. $\frac{d^4y}{dx^4}-3\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0.$

7. $\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^3y}{dx^3}+14\frac{d^2y}{dx^2}-20\frac{dy}{dx}+25y=0.$ 此副方程式ノ左邊ハ完全ノ平方ナリ.

8. $\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=0.$

---

38. 常數ノ係數ヲ有シ右邊ハ零ニアラザル綫微分方程式ヲ解クニハ二ツノ法アリ.

第一法　變常數ノ法　第一ニ右邊ヲ零ト見テyノ完全ノ價ヲ決定シ第二ニ任意常數ヲ變常數ト見テ其式ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入シ第三ニハ與ヘラレタル方程式ニ適當スル如キ是等ノ變常數ヲ決定ス可シ，此法ハ次例ヨリ了知セヨ.

例　$\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=\cos ax$　ヲ解ケ.

コノ右邊ヲ零ト見タルトキノ一般ノ解法ハ

$$y=C_1\sin nx+C_2\cos nx\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(a)$$

之ヲ與ヘラレタル方程式ノ解法ト假定シ C_1, C_2 ハ變常數トス，然レモ C_1, C_2 ガ常數ナルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=C_1n\cos nx-C_2n\sin nx\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(b)$$

又 C_1, C_2 ヲ變數ト見レバ (a) ヨリ

$$\frac{dy}{dx}=C_1n\cos nx-C_2n\sin nx+\sin nx\frac{dC_1}{dx}+\cos nx\frac{dC_2}{dx}$$

ニシテコレ　$$\sin nx\frac{dC_1}{dx}+\cos nx\frac{dC_2}{dx}=0\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(c)$$

ナルトキハ前ト一致ス依テコレ(a)ニ附屬ス可キ要件ナリ.

サテ C_1, C_2 ヲ變數ト見テ(b)ヲ微分スレバ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-C_1n^2\sin nx-C_2n^2\cos nx+n\cos nx\frac{dC_1}{dx}-n\sin nx\frac{dC_2}{dx},$$

ココニ於テy及ビ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ノ價ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入スレバ

$$n\cos nx\frac{dC_1}{dx}-n\sin nx\frac{dC_2}{dx}=\cos ax\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(d)$$

(c) ト (d) ヨリ

$$\frac{dC_1}{dx}=\frac{1}{n}\cos ax\cos nx,\quad\frac{dC_2}{dx}=-\frac{1}{n}\cos ax\sin nx$$

故ニ　$$C_1=\frac{1}{2n}\left\{\frac{\sin(n+a)x}{n+a}+\frac{\sin(n-a)x}{n-a}\right\}+c_1,$$

及ビ　$$C_2=\frac{1}{2n}\left\{\frac{\cos(n+a)x}{n+a}+\frac{\cos(n-a)x}{n-a}\right\}+c_2.$$

之ヲ(a)ニ代入シ且變化スレバ

$$y=\frac{\cos ax}{n^2-a^2}+c_1\sin nx+c_2\cos nx\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad(e)$$

若シ $a=n$ ナルトキハ此解法ハ無効トナル然ルニ(e)ヲ變シテ

$$y=\frac{\cos ax-\cos nx}{n^2-a^2}+c_1\sin nx+c'_2\cos nx$$

トスレバ此第一項ハ不定式トナリ微分積分學上册 **81** 款ノ法ニ由テ次ノ結果ヲ得

$$y=\frac{x\sin nx}{2n}+c_1\sin nx+c'_2\cos nx.$$

第二法　與ヘラレタル方程式ヲ累次ニ微分シテ直接又ハ消去法ヲ行ヒ右邊ヲ零トセル高次ノ微分方程式ヲ得　而シテコレ **34** 乃至 **37** 款ノ法ニ由テ解クヿヲ得可シ但此結果ハ餘分ノ常數ヲ含ムヲ以テ此結果ガ與ヘラレタル微分方程式ニ適當スル如ク代入シテ餘分ノ常數ノ價ヲ決定ス可シ.

例　$\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=\cos nx$　ヲ解ケ.

與ヘラレタル方程式ヲ二回微分スレバ

$$\frac{d^4y}{dx^4}+n^2\frac{d^2y}{dx^2}=-n^2\cos nx,$$

是ニ由テ $\cos nx$ ヲ消去スレバ

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2n^2\frac{d^2y}{dx^2}+n^4y=0$$

ヲ得而シテ此一般ノ解法ハ

$$y=(A+Bx)\cos nx+(C+Dx)\sin nx,$$

之ヲ與ヘラレタル微分方程式ニ代入スレバ $B=0$ 及ビ $D=1/2n$ ヲ得.

故ニ　$$y=A\cos nx+\left(C+\frac{x}{2n}\right)\sin nx$$

ニシテコレ第一法ノ例ノ終リノ結果ト符合ス.

問題 **XXIII.**　次ノ各方程式ヲ解ケ:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=x.$

2. $\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=a.$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y=x+1.$

4. $\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=e^x.$

5. $\frac{d^4y}{dx^4}-a^4y=x^3.$

6. $\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=1+x+x^2.$

7. $\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+a^2y=e^x,$ 又 $a=1$ ナル片.

8. $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=e^{nx}$ 又 $n=2$ 或ハ $n=3$ ナル片

9. $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=xe^{nx}.$

10. $\frac{d^2y}{dx^2}-9\frac{dy}{dx}+20y=x^2e^{3x}.$

11. $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=x\sin^2x.$

12. $\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}+y=x^2\cos ax,$ 又 $a=1$ ナル片.

13. $\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{dy}{dx}+4y=e^x\cos x.$

---

39. $(a+bx)^n\frac{d^ny}{dx^n}+A_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+A_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx}+A_ny=X$

ヲ解ク法ハ次ノ如シ但 $A_1, A_2, A_3,\ldots\ldots,A_n$ ハ常數ニシテ X ハ x ノミノ函數トス.

$a+bx=e^t$ トシ自變數ヲ x ヨリ t ニ變換スレハ常數係數ヲモツ新微分方程式ヲ得而シテコレ前款ノ法ニ由テ解ク丁ヲ得可シ.

例 $(a+bx)^2\frac{d^2y}{dx^2}+b(a+bx)\frac{dy}{dx}+b^2y=0.$

$a+bx=e^t$ トスレハ

$$\frac{dy}{dx}=be^{-t}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=b^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

之ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入スレハ

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

然ルニ此解法ハ問題 **XXI** ノ **1** ニ由テ

$$y=c_1\sin t+c_2\cos t$$

故ニ之ニ $t=\log(a+bx)$ ヲ代入スレハ

$$y=c_1\sin\log(a+bx)+c_2\cos\log(a+bx).$$

問題 **XXIV.** 次ノ各方程式ヲ解ク:

1. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=3y.$

2. $(x+a)^2\frac{d^2y}{dx^2}-4(x+a)\frac{dy}{dx}+6y=x.$

3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+2y=x\log x.$

4. $(2x-1)^3\frac{d^3y}{dx^3}+(2x-1)\frac{dy}{dx}-2y=0.$

5. $16(x+1)^4\frac{d^4y}{dx^4}+96(x+1)^3\frac{d^3y}{dx^3}+104(x+1)^2\frac{d^2y}{dx^2}+8(x+1)\frac{dy}{dx}+y=x^2+4x+3.$

6. $x^4\frac{d^4y}{dx^4}+6x^3\frac{d^3y}{dx^3}+9x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=(1+\log x)^2.$

7. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-(2m-1)x\frac{dy}{dx}+(m^2+n^2)y=n^2x^m\log x.$

第　八　編

高次微分方程式ノ特形

40. $\dfrac{d^ny}{dx^n}=X$ ナル式，但 X ハ x ノミノ函數トス．

y ノ式ハ X ヲ x ニ就テ累次 n 回微分シテ之ヲ得可シ．或ハ **38** 款ニ由テ之ヲ解ク可シ．

問題 **XXV.** 次ノ方程式ヲ解ケ：

1. $x\dfrac{d^3y}{dx^3}=2.$

2. $\dfrac{d^4y}{dx^4}=\dfrac{1}{(x+a)^2}.$

3. $\dfrac{d^ny}{dx^n}=x^m.$

4. $\dfrac{d^4y}{dx^4}=x\cos x.$

5. $e^x\dfrac{d^4y}{dx^4}+4\cos x=0.$

6. $\dfrac{d^ny}{dx^n}=xe^x.$

7. $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\sin^3x.$

---

41. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=Y$ ナル式，但 Y ハ y ノミノ函數トス．

兩邊ニ $2\dfrac{dy}{dx}$ ヲ乘シテ積分スレバ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2\int Y\,dy+c_1,\qquad \therefore\ x=\int\frac{dy}{(2\int Y dy+c_1)^{\frac{1}{2}}}+c_2$$

問題 **XXVI.** 次ノ各方程式ヲ解ケ：

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=a^2y.$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-a^2y.$

3. $y^3\dfrac{d^2y}{dx^2}=a.$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^{ny}.$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{\sqrt{ay}}.$

42. 與ヘラレタル方程式ガ直接ニ y ヲ含有セザル𛄌．

與ヘラレタル方程式ノ最低次ノ微係數ヲ z トス可シ然ル𛄌ハ他ノ微係數ハ x ニ就テ z ノ累次微係數ニ等シキヲ以テ與ヘラレタル方程式ヨリ低次ナル z ト x トノ新微分方程式ヲ得可シ．

問題 **XXVII.** 次ノ各方程式ヲ解ケ：

1. $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=0.$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=a^2+b^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

3. $\dfrac{dy}{dx}-x\dfrac{d^2y}{dx^2}=f\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right).$

4. $a^2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2=1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

5. $a^2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3.$

6. $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0.$

7. $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}=2.$

8. $2x\dfrac{d^3y}{dx^3}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2-a^2.$

9. $\dfrac{d^3y}{dx^3}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(1-\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)\left[1+\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$

10. $\dfrac{d^3y}{dx^3}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3=1.$

---

43. 與ヘラレタル方程式ガ直接ニ x ヲ含有セザル𛄌

$\dfrac{dy}{dx}=z$ トスレバ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=z\dfrac{dz}{dy}$，$\dfrac{d^3y}{dx^3}=z^2\dfrac{d^2z}{dy^2}+z\left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2$，等ナルヲ以テ自變數ヲ x ヨリ y ニ變ズレバ與ヘラレタル方程式ヨリモ低次ナル z ト y トノ新微分方程式ヲ得可シ．

問題 **XXVIII.** 次ノ各方程式ヲ解ケ：

1. $y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1.$

2. $y(1-\log y)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(1+\log y)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0.$

3. $y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left[\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+a^2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

4. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-y\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy}{dx}\cdot f\left[\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-1}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}\right].$

5. $y\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=y^2\log y.$

第九編

通同微分方程式

44. 一次ノ通同微分方程式.

$n+1$ 個ノ變數ヲ含ム處ノ n 個ノ方程式アルキ其一ヲ撰ムデ自變數トシ必要丈ケ若干回微分シ因變數ノ一ト其微係數ヲ除クノ外,他ヲ悉ク消去スレバ以テ得タル處ノ二變數ノ微分方程式ハ前諸法ニ由テ之ヲ解ク可シ而シテ其原初式ト與ヘラレタル方程式ヨリ他ノ因變數ノ價ヲ求メ得可シ. 一般ノ解法ハ n 個ノ任意常數ヲ含ム處ノ n 方程式ヨリ成ル可シ.

一般ニ與ヘラレタル方程式ヲ累次ニ $n-1$ 回微分スレバ n^2 個ノ方程式ヲ得而シテ是ニ由テ $n-1$ 個ノ變數ト $n(n-1)$ 個ノ微係數ヲ消去スルコヲ得可シ. 消去法ノ簡便法ハ與フル處ノ方程式ニ於テ推考ス可シ.

例 $\frac{dx}{dt}+4x+\frac{y}{4}=0,\ \frac{dy}{dt}+3y-x=0$ ヲ解ケ.

第二ノ式ヲ微分スレバ

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}=0$$

之ト與ヘラレタル二式ヨリ x, $\frac{dx}{dt}$ ヲ消去スレバ

$$\frac{d^2y}{dt^2}+7\frac{dy}{dt}+12\frac{1}{4}y=0$$

此方程式ハ **27** 款ニ由テ解ケバ

$$y=(c_1+c_2t)e^{-\frac{7t}{2}}$$

依テ $$\frac{dy}{dt}=-\frac{7}{2}\left(c_1-\frac{2}{7}c_2+c_2t\right)e^{-\frac{7t}{2}}$$

依テ與ヘラレタル第二ノ式ヨリ

$$x=(c_2-\tfrac{1}{2}c_1-\tfrac{1}{2}c_2t)e^{-\frac{7}{2}t}.$$

問題 **XXIX.** 次ノ各通同方程式ヲ解ケ:

1. $-dx=\frac{dy}{3y+4z}=\frac{dz}{2y+5z}.$

2. $\frac{dx}{y-7x}=\frac{-dy}{2x+5y}=dt.$

3. $\begin{cases} a\frac{dz}{dx}+n^2y=e^x, \\ \frac{dy}{dx}+az=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}+5x+y=e^t, \\ \frac{dy}{dt}+3y-x=e^{2t}. \end{cases}$

5. $\frac{dx}{2y-5x+e^t}=\frac{dy}{x-6y+e^{2t}}=dt.$

6. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt}+9\frac{dy}{dt}+44x+49y=t, \\ 3\frac{dx}{dt}+7\frac{dy}{dt}+34x+38y=e^t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt}+9\frac{dy}{dt}+11x+31y=e^t, \\ 3\frac{dx}{dt}+7\frac{dy}{dt}+8x+24y=e^{2t}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt}+9\frac{dy}{dt}+2x+31y=e^t, \\ 3\frac{dx}{dt}+7\frac{dy}{dt}+x+24y=3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}+\frac{2}{t}(x-y)=1, \\ \frac{dy}{dt}+\frac{1}{t}(x+5y)=t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} tdx=(t-2x)dt, \\ tdy=(tx+ty+2x-t)dt \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=ny-mz, \\ \frac{dy}{dt}=lz-nx, \\ \frac{dz}{dt}=mx-ly. \end{cases}$

12. $\begin{cases} lt\frac{dx}{dt}=mn(y-z), \\ mt\frac{dy}{dt}=nl(z-x), \\ nt\frac{dz}{dt}=lm(x-y). \end{cases}$

45. 二次以上ノ通同微分方程式.

與ヘラレタル方程式チ必要丈ケ若干回微分シ因變數ノ一ト其微係數チ除クノ外,他チ悉ク消去スレバ以テ得タル處ノ二變數ノ微分方程式ハ適當ノ方法ニテ之チ解ク可シ而シテ其原初式ト與ヘラレタル方程式ヨリ他ノ因變數ノ價チ求ムルコチ得ルナリ.

一般ノ解法ノ中ニ含有セラルル任意常數ノ數ハ與ヘラレタル各方程式ノ微係數ノ最高次數ノ和ニ等シカル可シ.

例 $\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=0,\ \ \frac{d^2y}{dt^2}-n^2x=0$ チ解ケ.

此第一式ハ **36** 款ニ由テ解ケバ

$$x=c_1\sin nt+c_2\cos nt,$$

依テ $$\frac{d^2y}{dt^2}=n^2c_1\sin nt+n^2c_2\cos nt,$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dt}=c_4-nc_1\cos nt+nc_2\sin nt,$$

即チ $$y=c_3+c_4t-c_1\sin nt-c_2\cos nt,$$
$$=c_3+c_4t-x.$$

問題 **XXX.** 次ノ各通同方程式チ解ケ:

1. $$\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}-3x-4y+3=0,\\ \frac{d^2y}{dt^2}+x+y+5=0,\end{cases}$$

2. $$\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}-3x-4y+3=0,\\ \frac{d^2y}{dt^2}+x-8y+5=0.\end{cases}$$

3. $$\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}+n^2y=0,\\ \frac{d^2y}{dt^2}-n^2x=0.\end{cases}$$

4. $$\begin{cases}2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dz}{dx}-4y=2x,\\ 2\frac{dy}{dx}+4\frac{dz}{dx}-3z=0.\end{cases}$$

5. $$\begin{cases}\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{d^2z}{dx^2}+(5-n^2)\frac{dy}{dx}+2(1-n^2)z=0,\\ \frac{d^3z}{dx^3}+4\frac{d^2y}{dx^2}+(5-n^2)\frac{dz}{dx}+2(1-n^2)y=0.\end{cases}$$

6. $$\begin{cases}\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^3z}{dx^3}+4\frac{d^2y}{dx^2}-y=0,\\ \frac{d^4z}{dx^4}-4\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{d^2z}{dx^2}-z=0.\end{cases}$$

第　十　編

幾何學的ノ應用

46. $p=\frac{dy}{dx},\ \ q=\frac{d^2y}{dx^2}$ トスレバ

次切線 $=\frac{y}{p}$　　　次法線 $=py,$

法線 $=y\sqrt{1+p^2}$　　　$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+p^2},$

x ノ軸ニ於ケル切線ノ截部 $\mathrm{X}=x-\frac{y}{p},$

y ノ軸ニ於ケル切線ノ截部 $\mathrm{Y}=y-px,$

曲率半徑 $=\mp\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$

是等ノ結果ハ微分積分學第十四,十六編ニ詳カナリ.

問　題　**XXXI.**

1. 曲線アリ其次切線ハ横線ノ n 倍ナルトキ此曲線チ求メヨ.

2. 曲線アリ其次法線ハ常數ニシテ $2a$ ニ等シキトキ此曲線チ求メヨ.

3. 曲線アリ其法線ハ縦線ノ平方ニ等シキ此曲線チ求メヨ.

4. $s=mx^2$ ナル曲線チ求メヨ.

5. $s^2=y^2-a^2$ ナル曲線チ求メヨ.

直角軌線　直角軌線トハ曲線ノ一列チ直角ニ截ル處ノ曲線ナリ.

$$\varphi(x,\ y,\ c)=0\quad\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\quad(1)$$

ナル方程式ニテ表ハセル曲線ノ一列ノ直角軌線チ求メムトス但 c ハ變常數ナリ.

(1)ヲ微分スレバ

$$\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy=0$$

是ニ由テ一列ノ諸曲線ニ於テハ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{d\varphi}{dx}\div\frac{d\varphi}{dy},$$

此價ヲ m トシ軌線ニ於ケル $\frac{dy}{dx}$ ノ對應セル價ヲ m' トスルバ解析幾何學53款系2ニ由テ $m'=-\frac{1}{m}$ ナルユエ軌線ノ $\frac{dy}{dx}$ ノ價ハ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\varphi}{dy}\div\frac{d\varphi}{dx},$$

即チ

$$\frac{d\varphi}{dy}dx-\frac{d\varphi}{dx}dy=0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

コレ c ノ如何ナル價ニ於テモ眞ナリ,

是ニ由テ(1)ト(2)トヲ以テ c ヲ消去スレバ直角軌線ノ微分方程式ヲ得可シ.

次ノ各曲線ノ直角軌線ヲ求メヨ(6乃至12):

6. $y=mx$, m ハ變常數.

7. $y^2=2ax-x^2$, a ハ變常數.

8. $y^2=4ax$, a ハ變常數.

9. $xy=k^2$, k ハ變常數.

10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, b ハ變常數.

11. $x^2+m^2y^2=m^2a^2$, a ハ變常數.

12. $\frac{x^2}{b^2+k^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, b ハ變常數.

次ノ三題ニ於テハ單獨解法ヲ要ム:

13. 曲線アリ其切線ノ x 及ビ y ノ軸ニ於ケル截部ノ和ハ常數 a ニ等シキ時此曲線ヲ求メヨ.

14. 曲線アリ其切線ノ x 及ビ y ノ軸ニ夾マレタル部分ハ常數 a ニ等シキ時此曲線ヲ求メヨ.

15. 曲線アリ其切線ト x 及ビ y ノ軸ニテ作爲セル直三角形ノ面積ハ常數 a^2 ニ等シキ時此曲線ヲ求メヨ.

次ノ諸題ハ二次ノ微分方程式ノ解法ヲ要スルモノナリ:

16. 曲線アリ其或定點ヨリ測リタル弧ノ長サガ x ノ軸ニ於ケル切線ノ截部ニ等シキ時此曲線ヲ求メヨ.

17. 曲線アリ其曲率半徑ハ法線ノ立方ノ n 倍ナル時此曲線ヲ求メヨ.

18. 曲線アリ其曲率半徑ハ法線ニ等シトス而シテ(第一)曲率半徑ト法線ト同方向ナル時,(第二)此二ツガ反對ノ方向ナル時,此曲線ヲ求メヨ.

19. 曲線アリ其曲率半徑ハ法線ノ二倍ニ等シトス而シテ(第一)此二ツガ同ジ方向ナル時,(第二)此二ツガ反對ノ方向ナル時,此曲線ヲ求メヨ.

答

問題 I. **1.** $(x^2+1)pxy=y^2+1.$ **2.** $\tan x=p\tan y.$

3. $(1+x^2)p+y=\tan^{-1}x.$ **4.** $(y\log x-1)y=px.$

5. $y=px+p-p^3.$ **6.** $xp^2=a.$ **7.** $p^2+2py\cot x=y^2.$

8. $x^2p^2=1+p^2$

問題 II. **1.** $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0.$ **2.** $\dfrac{d^2y}{dx^2}-a^2y=0.$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2a\dfrac{dy}{dx}+a^2y=0.$ **4.** $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}=3y.$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+n^2y=\cos ax.$

問題 III. **1.** $\dfrac{d^3y}{dx^3}=7\dfrac{dy}{dx}-6y.$ **2.** $\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=3y.$

3. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-2\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=e^x.$ **4.** $\dfrac{d^4y}{dx^4}-3\dfrac{d^3y}{dx^3}+3\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}=0.$

5. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-a^4y=x^3.$

問題 IV. **1.** $\dfrac{x+y}{xy}+\log\dfrac{y}{x}=c.$ **2.** $(1+x^2)(1+y^2)=cx^2.$

3. $x^2y=ce^{\frac{y}{a}}.$ **4.** $\log[(y+\sqrt{1+y^2})\sqrt{1+y^2}]=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c.$

5. $\cos y=c\cos x.$ **6.** $\tan x\tan y=c.$

7. $\sin^2x+\sin^2y=c.$ **8.** $xy-1=c(x+y+1).$

問題 V. **1.** $y=ce^{-\sqrt{\frac{x}{y}}}.$ **2.** $y=ce^{\frac{y}{x}}.$ **3.** $x^2=c^2+2cy.$

4. $x=ce^{-\sin\frac{y}{x}}.$ **5.** $(y+x)^2(y+2x)^3=c.$

6. $\log(x^2+y^2)=2\tan^{-1}\dfrac{x}{y}+c.$ **7.** $xy\cos\dfrac{y}{x}=c.$

8. (1) $\log(x^2-mxy+y^2)+\dfrac{2m}{\sqrt{4-m^2}}\tan^{-1}\dfrac{2y-mx}{x\sqrt{4-m^2}}=c.$

(2) $x-y=ce^{\frac{x}{y-x}}$ (3) $\dfrac{(2y-mx+x\sqrt{m^2-4})^{m-\sqrt{m^2-4}}}{(2y-mx-x\sqrt{m^2-4})^{m+\sqrt{m^2-4}}}=c.$

9. $y\sin\alpha-x\cos\alpha+\sqrt{x^2+y^2}=c(x^2+y^2).$

問題 VI. **1.** $(y-x+1)^2(y+x-1)^5=c.$

2. $x+2y+\log(2x+y-1)=c.$ **3.** $x+5y+2=c(x-y+2)^4.$

4. $4x-8y=\log(4x+8y+5)+c$

5. $\log[2(3x-1)^2+(3y-5)^2]-\sqrt{2}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{2}(3x-1)}{3y-5}=c.$

問題 VII. **1.** $y=cx^a+\dfrac{x}{1-a}-\dfrac{1}{a}.$ **2.** $y=ax+cx\sqrt{1-x^2}.$

3. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+ce^{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}.$ **4.** $y=\sin x-1+ce^{-\sin x}.$

5. $x=\tan^{-1}y-1+ce^{-\tan^{-1}y}.$

6. $(x+\sqrt{a^2+x^2})y=a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2})+c.$

7. $y\sqrt{1+x^2}=\log\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+c.$ **8.** $y=ce^{-\varphi}+\varphi-1.$

問題 VIII. **1.** $y=(c\sqrt{1-x^2}-a)^{-1}.$ **2.** $y^3=ce^{ax}-\dfrac{x+1}{a}-\dfrac{1}{a^2}.$

3. $y=\left[ce^{2x^2}+\dfrac{a}{2}(2x^2+1)\right]^{-\frac{1}{2}}.$ **4.** $x=\dfrac{e^{\frac{y^2}{2}}}{(2-y^2)e^{\frac{y^2}{2}}+c}.$

5. $y^{-n+1}=ce^{(n-1)\sin x}+2\sin x+\dfrac{2}{n-1}.$ **6.** $y=(cx+\log x+1)^{-1}.$

7. $x=\dfrac{(n+2)y^2}{ay^{n+2}+c}.$ **8.** $y=\dfrac{\tan x+\sec x}{\sin x+c}.$

9. $(4b^2+1)y^2=2a(\sin x+2b\cos x)+ce^{-2bx}.$

問題 IX.　**1.** $x^4+6x^2y^2+y^4=c.$　**2.** $x^3-6x^2y-6xy^2+y^3=c.$

3. $x^2-y^2=cx.$　**4.** $x^2-y^2=cy^3.$　**5.** $x^2+y^2+2\tan^{-1}\frac{y}{x}=c.$

6. $y^2=c^2-2cx.$　**7.** $x^2+y^2+2\sin^{-1}\frac{x}{y}=c.$　**8.** $x+ye^{\frac{x}{y}}=c.$

9. $e^x(x^2+y^2)=c.$　**10.** $\cos(mx+ny)+\sin(nx+my)=c.$

11. $\sqrt{1+x^2+y^2}+\tan^{-1}\frac{x}{y}=c.$　**12.** (1) $\log\frac{x^a\sqrt{g}+y\sqrt{b}}{x^a\sqrt{g}-y\sqrt{b}}=\frac{2x^a\sqrt{bg}}{a}+c.$

(2) $\tan^{-1}\frac{y\sqrt{b}}{x^a\sqrt{k}}+\frac{x^a\sqrt{bk}}{a}=c.$　(3) $x^a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{by}\right)=c.$

(4) $\frac{\sqrt{g}+y\sqrt{b}}{\sqrt{g}-y\sqrt{b}}=cx^{2\sqrt{bg}}.$　(5) $\frac{x^a}{a}-\frac{y}{yx^2}=c.$

問題 X.　**1.** $x^2-y^2+xy=c.$　**2.** $y=cx.$

3. $x^2+2y^2=c\sqrt{x^2+y^2}.$　**4.** $y=cx.$

問題 XI.　**1.** $x=cye^{\frac{1}{xy}}.$　**2.** $y=ce^{xy}.$

3. $xy-\frac{1}{xy}=\log cy^2.$　**4.** $\frac{2}{\sqrt{xy}}=\log\frac{cx}{y}.$　**5.** $xy=c.$

6. $xye^{xy}=\log\frac{cy}{x}.$　**7.** $xy+\log\sin(xy)=\log\frac{cx}{y}.$

問題 XII.　**1.** $e^x(x^2+y^2)=c.$　**2.** $x^2-y^2=cy^3.$

3. $x^2-y^2=cx.$　**4.** $y\sqrt{1-x^2}+x(1-y)=c.$

5. $\sin x\cos y+y\tan 2x=c.$　**6.** $\sin^2 x\sin 2(x-y)=c.$

問題 XIII.　**1.** $yz+zx+xy=c.$　**2.** $xyz=c.$

3. $e^x(y+z)=c.$　**4.** $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=c'.$　**5.** $z=ce^{\frac{x}{y}}.$

6. $xy=c(a+z).$　**7.** $x=\frac{z}{y+a}+c.$　**8.** $y(x+z)=c(y+z).$

9. $e^{x^2}(x+y+z^2)=c.$

問題 XIV.　**1.** $(y+c)^2=a^2(\log x)^2.$　**2.** $(y+c)^2=4ax.$

3. $(y+c)^2=(\sqrt{x-x^2}+\sin^{-1}\sqrt{x})^2.$　**4.** $(xy+c)(x^2y+c)=0.$

5. $(x^2-2y+c)[e^x(x+y-1)+c]=0.$

6. $(y+c)(y+x^2+c)(xy+cy+1)=0.$

7. $(x^3-3y+c)(e^{\frac{x^2}{2}}+cy)(xy+cy+1)=0.$

8. $y^2\sin^2 x+2cy+c^2=0.$

問題 XV.　**1.** $x=\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}(c+a\sin^{-1}p)$ ト與ヘラレタル方程式ヨリ p ヲ消去セヨ.

2. $x=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(c+\frac{a}{p}+a\tan^{-1}p\right)$ ト與ヘラレタル方程式ヨリ p ヲ消去セヨ.　**3.** $y=cx+c-c^2.$

4. $x=a\log(ay\pm\sqrt{a^2+y^2-1})+\log(y\mp\sqrt{a^2+y^2-1})+c.$

5. $x\pm\sqrt{a^2+4by}=a\log(a\pm\sqrt{a^2+4by})+c.$

6. $c(2y\pm x\sqrt{x^2+y})^{\sqrt{17}}=\frac{\pm4\sqrt{x^2+y}-x(\sqrt{17}-1)}{\pm4\sqrt{x^2+y}+x(\sqrt{17}+1)}.$

7. $\left[y\sqrt{y^2-x^2}-x^2\log\frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}\right]^2=(y^2+x^2\log cx^2)^2.$

8. $4(x+c)^3+(x+c)^2-18y(x+c)-27y^2-4y=0.$

問題 XVI.　**1.** $x+1=\pm\sqrt{2y+c}+\log(\pm\sqrt{2y+c}-1).$

2. $e^{\frac{2y}{a}}+2ce^{\frac{y}{a}}(x+a)+a^2c^2=0.$　**3.** $e^{2y}+2cxe^y+c^2=0.$

4. $2y+c=\frac{ax^2\pm x\sqrt{a^2+x^2-1}}{a^2-1}+\log(x\pm\sqrt{a^2+x^2-1}).$

5. $b^2(6y+c)^2+(6abx+a^3)(6y+c)-3a^2x^2-16bx^3=0.$

6. $c(nx^2+2y^2\pm x\sqrt{n^2x^2+4my^2})^n=[(2m-n)x\pm\sqrt{n^2x^2+4my^2}]^{2m}.$

問題 XVII.　**1.** $(x^2-y^2+c)(x^2-y^2+cx^4)=0.$

2. $(\sqrt{x}-\sqrt{y}+c)(\sqrt{x}-\sqrt{y}+cx)=0.$

3. $x^4+2cx\sqrt{3y^2-x^2}-c^2=0.$　**4.** $(y-x)^{1\pm\sqrt{2}}=c(\sqrt{y}+\sqrt{x})^2.$

5. $x^{2k}-2cx^{k-1}\sqrt{y^2+nx^2}+nc^2=0.$　但 $k=\sqrt{\frac{n-1}{n}}.$

問題 XVIII. **1.** $y=cx+\dfrac{m}{c}$. **2.** $y=cx+c-c^3$.

3. $(y-cx)^2=1+c^2$. **4.** $y^2=cx+\dfrac{c^3}{8}$. **5.** $4y^2=2c(2x-b)+ac^2$.

6. $y^2=cx^2+c^2$. **7.** $e^y=ce^x+c^3$. **8.** $y^2-cx^2=-\dfrac{ch^2}{c+1}$.

問題 XIX. **1.** 原初式 $y=cx+\dfrac{m}{c}$, 單獨解法 $y^2=4mx$.

2. 原初式 $(y-cx)^2=1-c^2$, 單獨解法 $y^2-x^2=1$.

3. 原初式 $y=c(x-c)^2$, 單獨解法 $y=4x^3/27$.

4. 原初式 $y=c(x-1)-c^2$, 單獨解法 $4y=(x-1)^2$.

5. 原初式 $y^2-2cx+c^2=0$, 單獨解法 $y^2=x^2$.

6. 原初式 $(y-cx)^2=-4c$, 單獨解法 $xy=1$.

7. 原初式 $(y-cx)(mc-n)=mnc$, 單獨解法 $\left(\dfrac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\pm\left(\dfrac{y}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1$.

問題 XX. **1.** $y=c_1e^{ax}+c_2e^{-ax}$. **2.** $y=c_1e^{\frac{x}{a}}+c_2$.

3. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{\frac{x}{3}}$. **4.** $ye^{2x}=c_1e^{x\sqrt{5}}+c_2e^{-x\sqrt{5}}$. **5.** $y=c_1e^{\frac{ax}{b}}+c_2e^{\frac{bx}{a}}$.

6. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3$. **7.** $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}+c_3$

8. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}+c_3e^{x}$.

9. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+c_3e^{x\sqrt{3}}+c_4e^{-x\sqrt{3}}$.

10. $y=c_1e^{(a-b)x}+c_2e^{(b-a)x}+c_3e^{(a+b)x}+c_4e^{-(a+b)x}+c_5$.

問題 XXI. **1.** $y=c_1\sin x+c_2\cos x$. **2.** $y=e^{3x}(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)$.

3. $a>b$ ナル𪜈 $y=e^{ax}(c_1e^{x\sqrt{(a^2-b^2)}}+c_2e^{-x\sqrt{(a^2-b^2)}})$.

$a<b$ ナル𪜈 $y=e^{ax}(c_1\sin x\sqrt{b^2-a^2}+c_2\cos x\sqrt{b^2-a^2})$.

4. $y=e^{2abx}[c_1\sin(a^2-b^2)x+c^2\cos(a^2-b^2)x]$

5. $y=a^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$.

6. $y=c_1e^{x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(c_2\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}+c_3\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

7. $ye^{x}=c_1e^{2x}+c_2\sin x\sqrt{2}+c_3\cos x\sqrt{2}$.

8. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\sin x+c_4\cos x$.

9. $y=c_1e^{x\sqrt{2}}+c_2e^{-x\sqrt{2}}+c_3\sin 2x+c_4\cos 2x$.

10. $y=e^{ax}(c_1\sin ax+c_2\cos ax)+e^{-ax}(c_3\sin ax+c_4\cos ax)$.

11. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+\left(c_3e^{\frac{x}{2}}+c_4e^{-\frac{x}{2}}\right)\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}+\left(c_5e^{\frac{x}{2}}+c_6e^{-\frac{x}{2}}\right)\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

12. $y=c_1\sin x+c_2\cos x+e^{\frac{x\sqrt{3}}{2}}\left(c_3\sin\dfrac{x}{2}+c_4\cos\dfrac{x}{2}\right)+e^{-\frac{x\sqrt{3}}{2}}\left(c_5\sin\dfrac{x}{2}+c_6\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

13. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\sin x+c_4\cos x+e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_5\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}+c_6\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_7\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}+c_8\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

問題 XXII. **1.** $y=(c_1+c_2x)e^{ax}$. **2.** $y=c_1+c_2x$.

3. $y=c_1e^{4x}+c_2+c_3x$. **4.** $y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{2x}$.

5. $y=(c_1+c_2x)\cos nx+(c_3+c_4x)\sin nx$.

6. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{x}+c_4$.

7. $y=e^{x}[(c_1+c_2x)\sin 2x+(c_3+c_4x)\cos 2x]$.

8. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots\cdots+c_{n-2}x^{n-3}+c_{n-1}\sin x+c_n\cos x$.

問題 XXIII. **1.** $y=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}+\dfrac{12x+7}{144}$.

2. $y=c_1\sin x+c_2\cos x+(c_3+c_4x)e^{x}+a$.

3. $y=c_1e^{ax}+c_2e^{-ax}-\dfrac{x+1}{a^2}$. **4.** $y=\left(c_1+c_2x+\dfrac{x^2}{2}\right)e^{x}+c_3$.

5. $y=c_1e^{ax}+c_2e^{-ax}+c_3\sin ax+c_4\cos ax-\dfrac{x^3}{a^4}$.

6. $y=c_1\sin nx+c_2\cos nx+\dfrac{1+x+x^2}{n^2}-\dfrac{2}{n^4}$.

7. $y=(c_1+c_2x)e^{ax}+\dfrac{e^{x}}{(a-1)^2}$. $a=1$ ナル𪜈 $y=\left(c_1+c_2x+\dfrac{x^2}{2}\right)e^{x}$.

8. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\dfrac{e^{nx}}{n^2-5n+6}$. $n=2$ ナル𪜈 $y=(c_1-x)e^{2x}+c_2e^{3x}$,

$n=3$ ナル𪜈 $y=c_1e^{2x}+(c_2+x)e^{3x}$.

9. $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+\dfrac{xe^{nx}}{n^2-3n+2}-\dfrac{(2n-3)e^{nx}}{(n^2-3n+2)^2}.$

10. $y=c_1e^{4x}+c_2e^{5x}+\dfrac{2x^2+6x+7}{4}e^{3x}.$

11. $y=\left(c_1-\dfrac{x^2}{16}\right)\sin 2x+\left(c_2-\dfrac{x}{32}\right)\cos 2x+\dfrac{x}{8}.$

12. $y=(c_1+c^2x)\sin x+(c_3+c_4x)\cos x$

$+\left[\dfrac{x^2}{(a^2-1)^2}-\dfrac{4(5a^2+1)}{(a^2-1)^4}\right]\cos ax-\dfrac{8ax}{(a^2-1)^3}\sin ax$

$a=1$ ナルキ $y=\left(c_1+c_2x+\dfrac{x^3}{12}\right)\sin x+\left(c_3+c_4x-\dfrac{x^4}{48}+\dfrac{3x^2}{16}\right)\cos x.$

13. $y=c_1e^{-2x}+\left(c_2-\dfrac{x}{20}\right)e^{x}\cos x+\left(c_3+\dfrac{3x}{20}\right)e^{x}\sin x.$

問題 XXIV. **1.** $y=c_1x^3+\dfrac{c_2}{x}.$

2. $y=c_1(x+a)^2+c_2(x+a)^3+\dfrac{3x+2a}{6}.$

3. $y=x(c_1\sin\log x+c_2\cos\log x+\log x).$

4. $y=(2x-1)\left[c_1+c_2(2x-1)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c_3(2x-1)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right].$

5. $y=[c_1+c_2\log(x+1)]\sqrt{x+1}+\dfrac{c_3+c_4\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{x^2+52x+51}{225}.$

6. $y=(c_1+c_2\log x)\sin\log x+(c_3+c_4\log x)\cos\log x+(\log x)^2+2\log x-3.$

7. $y=x^m(c_1\sin\log x^n+c_2\cos\log x^n+\log x).$

問題 XXV. **1.** $y=c_1+c_2x+c_3x^2+x^2\log x.$

2. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3-(x+a)^2\log\sqrt{x+a}.$

3. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots\cdots+c_nx^{n-1}+\dfrac{\lfloor m\, x^{m+n}}{\lfloor m+n}.$

4. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+x\cos x-4\sin x.$

5. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+e^{-x}\cos x.$

6. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots\cdots\cdots+c_nx^{n-1}+(x-n)e^{x}.$

7. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+\dfrac{7\cos x}{9}-\dfrac{\cos^3x}{27}.$

問題 XXVI. **1.** $ax=\log(y+\sqrt{y^2+c_1})+c_2$ 或ハ $y=c_1'e^{ax}+c_2'e^{-ax}.$

2. $ax=\sin^{-1}\dfrac{y}{c_1}+c_2$ 或ハ $y=c_1\sin(ax+c_2).$

3. $(c_1x+c_2)^2=-a+c_1y^2.$

4. $x\sqrt{2n}=c\log\dfrac{\sqrt{c_1^2e^{ny}+1}-1}{\sqrt{c_1^2e^{ny}+1}+1}+c_2.$ **5.** $3x=2a^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}-2c_1)(y^{\frac{1}{2}}+c_1)^{\frac{1}{2}}+c_2.$

問題 XXVII. **1.** $y=c_1\log x+c_2$ **2.** $b^2y=\log\sec[ab(x+c_1)]+c_2.$

3. $y=\dfrac{c_1x^2}{2}+xf(c_1)+c_2.$ **4.** $\dfrac{2y}{a}=c_1e^{\frac{x}{a}}+c_1^{-1}e^{-\frac{x}{a}}+c_2.$

5. $(x+c_1)^2+(y+c_2)^2=a^2.$ **6.** $y=c_1x+(c_1^2+1)\log(x-c_1)+c_2.$

7. $y=c_1\sin^{-1}x+(\sin^{-1}x)^2+c_2.$ **8.** $y=\dfrac{4}{15c_1}(x+c_1^2a^2)^{\frac{5}{2}}+c_2x+c_3.$

9. $12y=w^3+c_1w-6w\log w+c_2.$ 但 $w=x+c_3$

10. $2y\sqrt{c_1}=w\sqrt{w^2+c_1^2}+c_1^2\log(w+\sqrt{w^2+c_1^2})+c_2,$ 但 $w=x+c_3.$

問題 XXVIII. **1.** $y^2=x^2+c_1x+c_2.$ **2.** $\log y-1=(c_1x+c_2)^{-1}.$

3. $c_1y=c_2e^{c_1x}-\sqrt{1+a^2c_1^2}.$ **4.** $c_1x=\log[c_1y+f(c_1)]+c_2.$

5. $\log y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}.$

問題 XXIX. **1.** $\begin{cases} y=-2c_1e^{-x}+c_2e^{-7x}, \\ z=c_1e^{-x}+c_2e^{-7x}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x=e^{-6t}[(c_1+c_2)\sin t+(c_2-c_1)\cos t], \\ y=e^{-6t}(c_1\sin t+c_2\cos t). \end{cases}$

3. $\begin{cases} y=c_1e^{nx}+c_2e^{-nx}+\dfrac{e^{x}}{n^2-1}, \\ az=-nc_1e^{nx}+nc_2e^{-nx}-\dfrac{e^{x}}{n^2-1}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=(c_1+c_2t)e^{-4t}-\dfrac{e^{2t}}{36}+\dfrac{4e^{t}}{25}. \\ y=-(c_1+c_2+c_2t)e^{-4t}+\dfrac{7e^{2t}}{36}+\dfrac{e^{t}}{25}. \end{cases}$

5. $x=2c_1e^{-4t}-c_2e^{-7t}+\dfrac{e^{2t}}{27}+\dfrac{7e^{t}}{40},\quad y=c_1e^{-4t}+c_2e^{-7t}+\dfrac{7e^{2t}}{54}+\dfrac{e^{t}}{40}.$

6. $$\begin{cases} x=c_1e^{-t}+c_2e^{-6t}-\dfrac{29e^t}{7}+\dfrac{19t}{3}-\dfrac{56}{9}, \\ y=-c_1e^{-t}+4c_2e^{-6t}+\dfrac{24e^t}{7}-\dfrac{17t}{3}+\dfrac{55}{9}. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x=(c_1+c_2t)e^{-4t}-\dfrac{49e^{2t}}{36}+\dfrac{31e^t}{25}, \\ y=-(c_1+c_2+c_2t)e^{-4t}+\dfrac{19e^{2t}}{36}-\dfrac{11e^t}{25}. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x=(c_1\sin t+c_2\cos t)e^{-4t}+\dfrac{31e^t}{26}-\dfrac{93}{17}, \\ y=[(c_2-c_1)\sin t-(c_2+c_1)\cos t]e^{-4t}-\dfrac{2e^t}{13}-\dfrac{6}{17}. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} x=c_1t^{-4}+2c_2t^{-3}+\dfrac{3t}{10}+\dfrac{t^2}{15}, \\ y=-c_1t^{-4}-c_2t^{-3}-\dfrac{t}{20}+\dfrac{2t^2}{15}. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} x=c_1t^{-2}+\dfrac{t}{3}, \\ y=c_2e^t-c_1t^{-2}-\dfrac{t}{3}. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} x=a_1\sin kt+a_2\cos kt+a_3, \\ y=b_1\sin kt+b_2\cos kt+b_3, \qquad 但 \quad k^2=l^2+m^2+n^2. \\ z=c_1\sin kt+c_2\cos kt+c_3. \end{cases}$$

任意常數ハ次ノ方程式ニテ連結セラル

$$\frac{mc_1-nb_1}{a_2}=\frac{na_1-lc_1}{b_2}=\frac{lb_1-ma_1}{c_2}=k,$$

$$la_1+mb_1+nc_1=0, \quad \frac{a_3}{l}=\frac{b_3}{m}=\frac{c_3}{n}.$$

12. $$\begin{cases} x=a_1\sin(k\log t)+a_2\cos(k\log t)+a_3, \\ y=b_1\sin(k\log t)+b_2\cos(k\log t)+b_3, \qquad 但 \quad k^2=l^2+m^2+n^2. \\ z=c_1\sin(k\log t)+c_2\cos(k\log t)+c_3. \end{cases}$$

任意常數ハ次ノ方程式ニテ連結セラル

$$\frac{mn(c_1-b_1)}{la_2}=\frac{nl(a_1-c_1)}{mb_2}=\frac{lm(b_1-a_1)}{nc_2}=k,$$

$$l^2a_1+m^2b_1+n^2c_1=0, \qquad a_3=b_3=c_3.$$

問題 **XXX.** **1.** $$\begin{cases} x=(c_1+c_2t)e^t+(c_3+c_4t)e^{-t}-23, \\ -2y=(c_1-c_2+c_2t)e^t+(c_3+c_4+c_4t)e^{-t}-36. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x=4c_1e^{2t}+4c_2e^{-2t}+c_3e^{t\sqrt7}+c_4e^{-t\sqrt7}+\frac17, \\ y=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+c_3e^{t\sqrt7}+c_4e^{-t\sqrt7}+\frac{9}{14}. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x=e^{\frac{nt}{\sqrt2}}\left(c_1\sin\dfrac{nt}{\sqrt2}+c_2\cos\dfrac{nt}{\sqrt2}\right)+e^{-\frac{nt}{\sqrt2}}\left(c_3\sin\dfrac{nt}{\sqrt2}+c_4\cos\dfrac{nt}{\sqrt2}\right), \\ y=e^{\frac{nt}{\sqrt2}}\left(c_2\sin\dfrac{nt}{\sqrt2}-c_1\cos\dfrac{nt}{\sqrt2}\right)+e^{-\frac{nt}{\sqrt2}}\left(-c_4\sin\dfrac{nt}{\sqrt2}+c_3\cos\dfrac{nt}{\sqrt2}\right). \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} y=(c_1+c_2x)e^x+3c_3e^{-\frac{3x}{2}}-\dfrac{x}{2}, \\ z=2(3c_2-c_1-c_2x)e^x-c_3e^{-\frac{3x}{2}}-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

5. $y=u+v,\ z=-u+v.$

但 $u=c_1e^{2x}+(c_2e^{nx}+c_3e^{-nx})e^x,\ v=c_4e^{-2x}+(c_5e^{nx}+c_6e^{-nx})e^{-x}.$

6. $y=u+v,\ z=u-v.$

但 $u=(c_1+c_2x+c_3e^{x\sqrt2}+c_4e^{-x\sqrt2})e^x,\ v=(c_5+c_6x+c_7e^{x\sqrt2}+c_8e^{-x\sqrt2})e^{-x}.$

題問 **XXXI.** **1.** $x=cy^n.$ **2.** $y^2=4ax+c$, 抛物線.

3. $\pm(x+c)=\log(y+\sqrt{y^2-1})$, 或ハ $y=\frac12(e^{x+c}+e^{-x-c})$, 懸鏈線.

4. $4my+c=2mx\sqrt{4m^2x^2-1}+\log(2mx-\sqrt{4m^2x^2-1}).$

5. $\pm(x+c)=a\log(y+\sqrt{y^2-a^2})$, 或ハ $\pm(x+c)=a\log\dfrac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}.$

コレヨリ $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x+c}{a}}+e^{-\frac{x+c}{a}}\right)$, 懸鏈線.

6. $x^2+y^2=c^2$, 圓. **7.** $x^2+y^2-2cy=0$, 圓.

8. $2x^2+y^2=2c^2$, 楕圓. **9.** $x^2-y^2=c^2$, 等邊雙曲線.

10. $y^2+x^2=a^2\log x^2+c.$ **11.** $y=cx^{m2}.$

12. $\dfrac{x^2}{h^2-c^2}-\dfrac{y^2}{c^2}=1$, 楕圓又ハ雙曲線. **13.** $x^{\frac12}+y^{\frac12}=a^{\frac12}$, 抛物線.

14. $x^{\frac23}+y^{\frac23}=a^{\frac23}$, 內擺線. **15.** $2xy=a^2$, 等邊雙曲線.

16. $c^2y^2-\log y^2=4c(x+c').$

17. $cy^2-\frac{c^2}{n}(x+c')^2=1.$ $n>0$ ナルトキハ雙曲線, $n<0$ ナルトキハ楕圓或ハ雙曲線

18. 第一 $(x+c')^2+y^2=c^2$, 圓,

第二 $\pm(x+c')=c\log(y+\sqrt{y^2-c^2})$,

或ハ $\pm(x+c')=c\log\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}$.

コレヨリ $y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x+c'}{c}}+e^{-\frac{x+c'}{c}}\right)$, 懸鏈線.

19. 第一 $x+c'=c\,vers^{-1}\frac{y}{c}-\sqrt{2cy-y^2}$, 擺線.

第二 $(x+c')^2=2cy-c^2$, 拋物線.

明治二十七年十月廿五日印刷
明治二十七年十月三十日發行

微分方程式奥付

定價金貳拾五錢

編纂者 福岡縣士族 長澤龜之助 東京市小石川區小日向水道町七十三番地

發行者 東京府平民 中野義房 東京市麹町區飯田町六丁目二番地

印刷者 杉原辨次郎 京橋區元數寄屋町四丁目二番地

印刷所 杉原活版所 京橋區元數寄屋町四丁目二番地

發行所 東京市麹町區飯田町六丁目二番地 數書閣

17. $cy^2-\frac{c^2}{n}(x+c')^2=1$. $n>0$ ナルトキハ雙曲線, $n<0$ ナルトキハ橢圓或ハ雙曲線

18. 第一 $(x+c')^2+y^2=c^2$, 圓,

第二 $\pm(x+c')=c\log(y+\sqrt{y^2-c^2})$,

或ハ $\pm(x+c')=c\log\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}$.

コレヨリ $y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x+c'}{c}}+e^{-\frac{x+c'}{c}}\right)$, 懸鏈線

19. 第一 $x+c'=c\,vers^{-1}\frac{y}{c}-\sqrt{2cy-y^2}$, 擺線

第二 $(x+c')^2=2cy-c^2$, 拋物線

明治二十七年十月廿五日印刷
明治二十七年十月三十日發行

微分方程式奥付

定價金貳拾五錢

編纂者 福岡縣士族 長澤龜之助
東京市小石川區小日向水道町七十三番地

發行者 東京府平民 中野義房
東京市麹町區飯田町六丁目二番地

印刷者 杉原辨次郎
東京京橋區元數寄屋町四丁目二番地

印刷所 杉原活版所
東京京橋區元數寄屋町四丁目二番地

發行所 東京市麹町區飯田町六丁目二番地
數書閣

發兌元　東京市麴町區飯田町六丁目二番地　數書閣

東京大賣捌　東京市日本橋區通三丁目　丸善株式會社書店
東京市神田區裏神保町　明法堂

關西大賣捌　大坂市東區北久太郎町四丁目　柳原喜兵衛
大坂市東區北久寶寺町四丁目　三木佐助

賣捌　各府縣書肆

初等微分方程式

長沢　亀之助／編

初等微分方程式

長沢亀之助編

初等微分積分学續編