始

理學博士一戸直藏譯

カヂヨリ數學史講義

下巻

現代之科學社藏版
株式會社大鐙閣刊

カヂヨリ 數學史講義

下巻目次

カヂヨリ數學史講義下巻目次終

カヂヨリ數學史講義

理學博士　一戸直藏譯

第三編（續き）

ニユートンよりオイレルに至る

第十七世紀の初葉及び中葉に於いてフランスでは驚くべき程科學の進歩をなしたことは上に述べた如くである。アンリー第四世やルイス第十三世紀の御宇を標識する耐忍は強き人智の活動に伴はれた。人心の力に非常の信賴が置かれるやうになつた。デカルト、フエルマー、パスカルの叡智的の大勝利は數學に不滅の資を堆積させた。ルイス第十四世の御宇の初頃に此の如き光彩ある時代の夕陽の美しさが見受けられ、之に次いで精神的衰弱の夜が來つた。此の如くにルイス第十四世の御宇の中に大なる科學者の缺乏したのは、偉人が生

れなかつたと云ふ簡單な事實であるかも知らない。が、バックルによれば、それはルイス第十四世の御宇の政策を標識する保護主義、依賴及び服從の精神、耐忍の缺乏等に歸すべしとのことである。

フランスに大學者が缺けたので、ルイス第十四世は外國の偉人を招いで、其周圍に置いた。ロイメルはデンマルクより、フイゲンスは和蘭より、ドミシ・カッシニは伊太利より共に佛國に行いてルイス第十四世の朝廷を飾つた數學者及天文學者である。是等の人々はパリーに行く前に既に盛名を博した人々である。されば彼等がパリーで仕事をなしたと云ふ單純な理由で、其仕事がフランスに屬せないのは、デカルトの發見が和蘭に、ラグランジュの發見が獨逸に、オイレル及びポンセレの發見が露西亞に屬せざるが如くである。第十七世紀の終頃に科學界の偉才を見るには吾等はフランスを去つて他國へ行くを要する。

ルイス第十四世が佛國政府の司配を執つた頃に、チャーレス第二世がイギリスの王となつた。此頃イギリスは其商業を攬め航海を進歩させて物質的繁榮を增進させて居た。時に人智開發の强き運動が起つたが、王は大に之を保護したが、かくて詩の時代が忽ち科學及び哲學の時代に移つた。相續く二世紀間にイギリスはシエクスペーアを出し、又ニユートンを生んだ。

其頃獨逸は尙國民的墜落の有様に沈淪して居た。三十年戰爭は獨逸帝國を分離せしめ、人民を野蠻ならしめた。併し獨逸の歷史の此の如き最暗黑の時代が近代の最大天才の一人であるライブニッツを生んだ。

歷史を繙けば、過去の進歩の凡ての線が其處に收斂し、又其處から將來の進歩が發散するやうに見える焦點がある。數學史上ニユートン及びライブニッツの時代は此の如きものであつた。此時代に先んずる五十年間、偉大な數學者の多くは彼等の天才をば何れも一方向へ向け、其處にニユートンとライブニッツとが遂に微分學の發見をなすに至つた。カヴアリエリ、ロバルヴアル、フエルマー、デカルト、ワルリス其他は何れも此新たな幾何學に貢献した。彼等のなした進歩は大なるものであつた。彼等は微分解析法の發明に甚しく近接して居た。されば既に述べた如くラグランジュとラプラースとは彼等の國人であるフエルマーを微分學の發明者であると唱へた。故に微分學は數多の偉人の發見の

一列の大結果と言ふべきもので、個人的發見と言ふべきでない。實に大發見なるものは何れも未だ曾て一人の頭に突然沸いたものでない、さればニュートンの諸發見が世のはてまで、人類に勢力を及ぼすであらふが、さりとてポープの

　自然と自然の法則とが暗夜の中にかくされて居た
　神が言ふた「ニュートンあれ」。かくて凡てが明るくなつた。

と歌ふたのは、詩人的想像に過ぎぬと言はねばならない。

アイザーク・ニュートン（千六百四十二年—千七百二十七年）はガリレオが死んだと同じ年、にリンコルンシャイヤのウールスソルプで生れた。彼が生れたとき其體が至つて小さく虚弱で生存するかどうか氣配はれた。彼の母は早くから彼を田舍の學校へ入れ、十二才の時グランサムの公學校へ送つた。最初彼は勉强に甚だ冷淡で進歩も遲かつたらしい。然るに或日幼き彼は彼よりも上席であつた兒童に胃を烈しく蹴られたのに刺戟されて、夫よりは甚だ勤勉し彼の相手より學校で上席を占むるに至つた。夫より彼は益々進歩して遂に級中の首席を占めた。

グランサムでニュートンは機械の發明に趣味を現はした。彼は水時計、風車、乘手が自身で動かす車其他の玩具を作つた。彼が十五才になつた時、母は彼を郷里に呼び田圃の仕事を手傳はせやうとした、然るにニュートンは畑仕事を厭ひ甚しく學問好きなので、母は彼を再びグランサムへやつた。彼は十八歳の時まで其處に止り、それより（千六百六十年）ケムブリッヂのトリニチー・カレッヂに入學した。ニュートンが其天才を發揮したのはケムブリッヂへ來てからである。彼の直覺力の强かつたことは彼は古き幾何學の諸定理をば自明の理であるとしたことや、何等豫備的の勉强をなさずに、デカルトの幾何學に通曉するに至つたことで知れる。併し彼は其後、初等幾何學を輕んじたことは數學研究上間違であつたことを悟り、ペムバートンに其事を下のやうに語つた。ユークリッドの如き勝れた著者の著書にふさはしき充分の注意を拂ふて彼のエレメンツを讀むべかりしに、之を學ばずにデカルトの著述や其他の代數學的著者の書籍を學んだのは殘念であると。

デカルトの幾何學の外、ニュトンは、オートレッツトの Clavis, ケプレルの Optics

ヴィエタの數多の著書、シユウテンの Miscllanies、バルローの Lectures 及びワルリスの著述を學んだ。就中澤山の種類の多い暗示を以つて充ちたワルリスの著書 Arithmetic of Infinites をば特に喜んだ。ニユートンは幸にして先生として又堅き友として有名なバルローを得た、此人は千六百六十年にギリシャ語の敎授に選ばれ、千六百六十三年に數學の敎授となつた。バルローとワルリスの數學は、實にニユートンが是等の先生よりも高き學才を以て、より廣い分野へ乘り出した出發點であつた。

ワルリスは其縱坐標が $(1-x^2)$ の正の整數冪として表はされる曲線の面積決定をなすことが出來た。既に述べた如く、ワルリスは此の如く計算した諸曲線の面積から例へば圓の如き他の曲線の面積を挿入せんと企てたが、成功せなかつた。然るにニユートンは此問題を捕へて挿入を行ひ得たのみならず、二項定理を發見した。此定理は挿入法よりも曲線の面積決定をより容易に又直接に行はせる、蓋し縱坐標の二項式が分數冪となつても又は負數冪となつても、其二項式をば直に級數に展開することが出來る、依つて此級數の別々の項の求積をワルリスの方法で行ふことが出來る。ニユートンは指數を文字で表はすことを導いた。

面積決定についてのニユートンの研究は彼を忽ち他の最も深遠な發明に誘ふた。彼の語る所によれば、千六百六十五年と其翌年中に、彼は「流動の方法」に思ひつき、之を曲線の面積決定に應用した。併しニユートンは此發明を千六百六十九年まで友人の誰にも通せず、其年に De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas と題する小冊子をバルローに渡した。バルローは之をコリンスに送つたが、此人は非常に之を賞讃した。此著述中に流動の原理が明瞭に指摘されて居るが、只部分的に論せられて居る。横坐標が時に比例して一樣に增すものと想像し、曲線の面積をば縱坐標の比例で、連續した流れで增加する潛める量とニユートンはなした。此流れについて得た式をば彼は有限又は無限級數に展開し、之にワルリスの規則を應用した。バルローは此著述を公にせよと迫つたが、著者は之をせなかつた。若じ之が當時公にされて居たならば、ライブニツツとの間に爭をなすことが無かつたであらう。

長い間ニユートンの方法が友人や互に通信を交換した人々の外には知られて居らなかつた。千六百七十二年十二月十日附のコリンスに宛てた手紙の中に、彼は一例をあげて此發明の事實を表明し且つ言ふた。「これは一般法の一つの特別なもの否な系である。方法其ものは面倒な計算を用ゐずに、啻に幾何學的であらうが機械的であらうが任意の曲線に切線を引かしめることや、或は直線や曲線に關係した如何なることをも研究せしめるのみでなく、併かも、又曲線の曲り方、面積、長さ、重心其他に關する六ケしき諸問題を解かせ、尙又これはフッテンの極大極小の方法の如くに不虛根を含まない方程式と云ふやうな制限を受けない。私は此方法をば、方程式を無限級數に引き直ほして取扱ふ方法と聯結した。

この最後の言は千六百七十一年に彼の著はした Method of Fluxions に關するものである。彼は此著書で、彼の方法をば一つの獨立した計算法として又完全な系統として表はさうと勉めた。而して此小冊子は彼は出版せんと企てキンクハイセンの「代數學」の緒論として書かれたのであつた。然るに此新發見に就いて議論を生ずるのを恐れたのか、又は之れをより一層完成せんとの希望か、又は彼の物理學上の諸研究に此方法を専用せんとしたのか、彼をして此企てを放棄させた。

光學に關する二論文の外ニユートンの著述の凡てが友人の懇請に餘儀なくされ、自らの望みに反して出版されたやうである。光に關する彼の研究が嚴しく批評された、彼は千六百七十五年に自分の無思慮から之を公にし平和を失ふたことを悔ひて居る。

「流動の方法」はニユートンの羅甸文がらコルソンによつて英語に翻譯されて、千七百三十六年卽ち之が書かれてから六十五年後に公にされた。ニユートンは先づ第一に分數及び無理數を級數に展開することを說明し、夫から次ぎの二問題の解に進んだ。是等は微分學の大黒柱をなすものである。

（第一）書かれた空間の長さが連續的に（凡ての時間に）與へられて、提出された任意の時刻に於ける此運動の速度を見出すこと。

（第二）運動の速度が連續的に與へられて、提出された任意の時刻に書かれた

空間の長さを見出すこと。

其解に豫備としてニュートンは次のやうに述べた。「例へば方程式 $y=x^2$ に於いて若し y が任意の時刻に書かれた空間の長さを表はし、而して夫を他の空間 x が一樣な速度 $\dot{x}$ を以て増加することによつて測ることが出來又表はすことが出來るものとすれば $2x\dot{x}$ は y なる空間が時の同一の瞬間に書かれる速度を表はすことになる。又其逆も成立つ。」

「然るに茲では時をば一樣な軌跡的の運動に依つて説明し且つ測定し得ると云ふよりもより以上に考へる必要がなく、且つ又同じ種類の量及び是等の増減の速度のみが比較することが出來るが故に、次ぎに論ずる所に於いては、形式的に考へた時とは關係がない。さりながら余は提出された量が同じ種類のもので其一の量が一樣な流動で増加するものと想像し、殘りの凡ての量が此量に照らして測られること恰かも時に照らし得るが如くであると想像しやう。従つて類推の仕方によつて此の量が時なる名前を受くるも不適當ではなからう。」

ニュートンの此言葉の中に或人々のなした解析に運動てふ縁遠い觀念を導入したとの非難に對する滿足すべき答が含まれて居る。此の如くにしてニュートンが一樣な流動で増加するとした量は吾等が今日獨立變數と稱するものである。

ニュートンは續いて言ふ。「偖余が漸次に且つ限りなく増加するやうに考へる夫等の量をば今後は流體 Fluents or flowing quantities と呼び、是等をばアルファベットの最後の文字 v, x, y, z 等で表はし、又是等流體が其生む運動によつて増加される速度(之を流動 fluxions 又は簡單に速度と呼ぶ)をば同じ文字の上に・を附けた $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ で表はす。即ち v なる量の速度に $\dot{v}$ を、x y z の速度に夫れ〴〵 $\dot{v}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ なる記號を用ゐる。」此處で注意すべきことはニュートンが流動其ものを無限小とせざりしことである。彼が夫より進んで導入した術語「流動の能率」moments of fluxions が無限に小さな量である。「流動の方法」中に此の如く定義され又用ゐられた此能率こそライプニッツの「微分」differentials と其實質を等うするものである。ド・モルガンはニュートンとチエーンとを除けば千七百四年よりもより以前の凡ての英國の著者が流動なる語と $\dot{x}$ なる記號とを無

限に小さな加量の意味で用ゐたことから少からざる混雑が起つたことを指摘した。不思議なことには Commercium Epistolicum でさへも能率と流動とが同義のものゝ如く用ゐられて居る。

第一の問題を如何にして解くべきか數多の例を與へて之を示した後に、ニュートンは進んで其解法の證明を述べた。「流動の能率(即ち流動の無限小の部分の增加によつて時の無限小の部分中に流動が連續的に增加する)は流動の速度に比例するものである。されば任意の量例へば x の能率が x の速度 $\dot{x}$ と無限に小さな量 0 との積 $\dot{x}0$ に依つて表はさるゝならば、他の量 v, y, z の能率は $\dot{v}0, \dot{y}0, \dot{z}0$ で現はされる。蓋し $\dot{v}0, \dot{y}0, \dot{z}0$ 間の比は v, y, z 間の比に等しいからである。」

「さて $\dot{x}0, \dot{y}0$ の如き能率は、流量 x 及び y が無限に小なる時間中に受けた無限小の增量である故、x と y とは無限小の時の後には $x+\dot{x}0$, $y+\dot{y}0$ となる。從つて流量間の凡ての時刻に於ける關係を表はし得べき方程式は、x と y との間の如くに、$x+\dot{x}0$, $y+\dot{y}0$ 間の關係をも表はし得る。依つて x, y 間の方程式に是等の代りに $x+\dot{x}0$, $y+\dot{y}0$ を代入することが出來る。例へば任意の方程式 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$ が與へられたとし、x の代りに $x+\dot{x}0$, y の代りに $y+\dot{y}0$ を入れたものとすれば次式を得る。

$$\left.\begin{array}{l} x^3+3x^2\dot{x}0+3x\dot{x}0\dot{x}0+\dot{x}^3 0^3 \\ -ax^2-2ax\dot{x}0-a\dot{x}0\dot{x}0 \\ +axy+ay\dot{x}0+a\dot{x}0\dot{y}0 \\ \quad +ax\dot{y}0 \\ -y^3-3y^2\dot{y}0-3y\dot{y}0\dot{y}0-\dot{y}^3 0^3 \end{array}\right\}=0$$

然るに $x^3-ax^2+axy-y^3=0$ であるから、上式から之を削り、殘つた項を 0 で割れば次ぎの式を得る。

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-3y^2\dot{y}+3x\dot{x}\dot{x}0-a\dot{x}\dot{x}0+a\dot{x}\dot{y}0-3y\dot{y}\dot{y}0+\dot{x}^3 00-\dot{y}^3 00=0$$

然るに 0 は流量の能率を表はすやうに考へた無限に小さなものである故に、0 を以て乘けられて居る項は之が乘つて居ないものに比べると顧るに足らない。されば余は是等を棄てゝ例一に於ける如く遂に次ぎの式に達する。

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-3y^2\dot{y}=0」$$

此處でニユートンは微分を用ゐて居る。

第二の問題の解にはニユートン以後の有力な解析學者の巧妙を要した逆の作用を含んで居る爲めに、第一の問題に於けるよりもより大なる困難に會ふた。ニユートンは先づ第二の問題に證明を與へなかつた一つの規則を用ゐて解いた一つの特別な解法を與へた。

第二の問題の一般的解法にニユートンは流動に關して一様性を假定し然る後次ぎの三つの場合を考へた。(一)方程式が量の二流動と流體の一とを含む場合、(二)方程式が流動並びに流體共に二つを含む場合、(三)方程式が三又は三以上の流體と流動とを含む場合。第一の場合は最も簡單で、只 $\frac{dy}{dx}=f(x)$ の積分を要する、之にはニユートンの特別の解が應用される。第二の場合は第一階の微分方程式の一般的の解に劣らぬ複雜なものを要する。されば解析法に於ける此方面の完全な探索に如何程大なる努力が必要であつたかを知つて居る方は、よしニユートンは此問題の解をば無限級數の形で與へたからとて、之を蔑視しないと思ふ。ニユートンの第三の場合は部分微分方程式の解の部門に屬する。

彼は $2x=\dot{z}+xy=0$ なる方程式を取り、夫れの特別な積分を見出すことに成功をなた。

此教科書の殘りの部分で極大及び極小の決定、曲線の曲率半徑及び其他の幾何學の問題に彼の流動論を應用した。凡て是等の研究は千六百七十二年以前になされたものである。

玆に注意すべきは「流動の方法」並びに彼の De Analysi 及び凡てのより以前の論文中で、ニユートンの用ゐた方法は嚴密に微分的であつて、其實質がライプニッツの方法に於ける如きものであるとのことである。されば英國並びに歐洲大陸に於ける Calculus の本來の意想は微分に基するものであつた。流動的計算法の基本原理は Principia 中に記されて始めて世に公にされた。併し其特別な記號法は千六百九十三年にワルリスの「代數學」の第二卷中に公にされるまで、表はれなかつた。其「代數學」中の説明の實質はニユートン自身の書いたもので、微分に基いて居る。

Principia の第一版(千六百八十七年)中に於ける流動の記載は等しく微分に基い

しては居るが、第二版（千七百十三年）に於ける說明を見ると、其基礎は稍々變化されて居るが、充分明瞭に說明されてない。併し千七百四年の「曲線の求積」中には無限に小さな量が完全に無視されて居る。ニュートンが「流動の方法」中で、0なる量を含む項が、之を他の項と比べると無限に小さいとの理由で、是等を排棄したことは既に述べたが、此論法は間違ふて居る。蓋し0が量である以上は、よしや小なりとは言ふも、之を棄てるのは結果に何等の影響を與へないとは言はれない。ニュートンは之を感じたものと見え、「曲線の求積」中に「數學では最も微小の誤差とても無視せらるべきでない」と述べて居る。

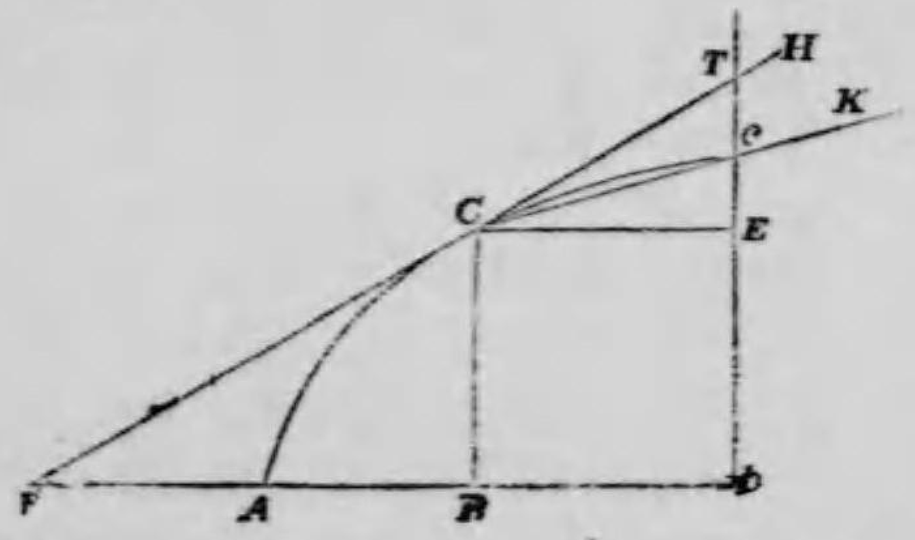
ニュートンのやり方とライプニッツのやり方との最先の差は、前者は速度或は流動なる觀念を保持し、無限に小さな加量をば夫を決定する手段として居るが、後者は無限に小さな加量其ものをば決定の目的として居るにある。要するに兩者の差は主として量を生ずる方法に於ける差に座する。

次ぎにニュートンが「曲線の求積」の緒言中に述べた流動或は歩度の方法の說明をあげやう。曰く「余は此處で數學的の量をば甚だ小さな部分から成立するものとしてゞなしに、一つの連續した運動によつて描かれるものと考へる。從つて線は各部分の附加によつてゞなしに、點の連續した運動によつて描かれる、卽ち生せられる。又圓は線の運動により、立體は面の運動により、角は邊の廻轉により、時間は連續的の流轉により、又其他の量も共に連續した運動によつて生せられる。そして是等の生成は實に物質の本性によるもので、日々物體の運動に見られる…………」

「流動は等しく且つ望む丈小さくなし得るものである。精密に言へば是等は最小生成加量の原的の比をなすものである。されど是等は是等に比例するが如き如何なる線によりても表はすことが出來る。」

ニュートンは丁度前の叙述をば切線の問題で例解して居る。今ABを橫坐標とし、BCを縱坐標とし、VCHを切線、Ecを縱坐標の加量とし之を延長したものがVHとTで會するものとし、且つCcをば曲線の加量とする。直線CcをK迄延長すると茲に三邊共に直線からなるCEc、一邊が曲線であるCEc、三邊共に直線であるCETの三角形が三つ出來る。此等の中で第一のものは明かに最小で、最後のも

のは最大である。　偖縦線 bc が BC なる位置まで動き、從つて點 c は正しく C と一致したものと想像すれば、CK 故に曲線 Cc は切線 CH と一致し、Ec は ET と絶對的に等しくなり、曲線を一邊とする消夫し去る三角形 CEc は、遂には三角形 CET と相似になる。　又消失して行く三邊 CE, Ec, Cc は三角形 CET の三邊 CE, ET, CT に比例するものとなる。



これ故に、線 AB, BC, AC の流動は、是等の消失する加量の最後の比を保つもの故、三角形 CET の三邊に比例する、從つてこれと相似である所の VBC なる三角形の三邊に比例する。　C と c とが或間隔丈相互から遠かつて居る間は、其隔りが如何に小さくとも CK なる線は切線 CH から小さな角丈隔つて居る。　然るに CK は CH と一致し、又線 CE, Ec, cC が是等の究竟比に到達して、點 C と c と精密に一致し、是等は一つで而かも同じものになる。　ニユートンは茲に於いて「數學では最小の誤差とても無視すべきでない」と附言した。　是は明かにライブニッツの要件の排斥である。

而して茲で無限に小さな量の説をば、ニユートンは彼自身が曾つて之を保持したことがないかのやうに思はれる仕方で排棄して居る。　さればニユートンの説は時を異にすると共に、異つて居たものと見える。　然るに上の樣に推理すると、微分のカリブヂスをば無難に免れ得るものゝ、シルラの危險が眼前に横はつて居る。（イタリヤのメッシナ海峽の岸を通過するものは海によれば渦卷カリブヂスに、また海をさけると陸上の六頭の怪物シルラに捕へられると云ふ）。　卽ちかく論ずると、吾等は一點は三角形と考へられ、或は三角形が一點中に内接されると信ずる要あるのみならず、實に三個の相似ならざる三角形が、是等が一つの且つ同じ一點で是等の究竟比に到達するときには相似で且つ等しくなると言はねばならない。

「曲線の求積」への緒言中で、x^n の流動は次ぎの如く決定された。　「x が流れて $x+0$ となる間に x^n は $(x+0)^n$ となる。　無限級數の方法で

$$(x+0)^n = x^n + n0x^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}0^2x^{n-2} + \cdots\cdots$$

故に x と x^n との加量の比は

$$0 : n0x^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}0^2x^{n-2}+\cdots\cdots=1 : nx^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}0x^{n-2}+\cdots\cdots$$

に等しい。借加量を消失させると、此比は $1 : nx^{n-1}$ となる。これ故に量 x の流動と量 x^n の流動とは $1 : nx^{n-1}$ なる比を有する。」

「直線又は曲線の流動は、其如何なる場合でも、又面、角其他の流動と等しく、今説明したと同様に、原始比或は究竟比の方法で求めることが出來る。然るに此方法で無限量の解析を設定し、有限量の原生的又は消失的の原始比或は究竟比を研究することは、古人の幾何學と調和するものである。かくて余は流動の方法では幾何學に無限に小さな量を導く必要のないことを示さうと勉めた。」微分を求める此方法は此題目と關連した凡ての困難を除き得たものでない。若し0が消失したとすれば、$0/0=nx^{n-1}$ となる、そこで吾等は今一段と此點を明かにする要がある。實にニユートン自らが陳述した通りの流動の方法は數多の困難に會ひ又非難をも受けた。ニユートンの賞讃者さへも究竟比のニユートンの説明に對して大に論議した。

所謂「極限の方法」はニユートンの創意の如く言はれるが、純粋な極限の方法は彼れが微分學を建設することには適用されなかつた。ニユートンは Principia 中に極限に關する若干の原理を述べて居り、是等は微分法に應用し得べきものではあるが、彼の之を述べた目的は夫れでなかつた。彼の述べた極限の方法の基礎は次ぎのものである。

「若干の量及び是等の量の比が任意の有限の時間中に漸次等しきものに收斂するものとし、且つ其時間の盡きる以前に一つの量が他量へ任意の與へられた差よりも、より近く接近するならば是等は結局の所、等しきものとなる。」

此命題や之に續いて述べてあるものが、其意義不明瞭であるが、ニユートンは是等で、變數と其極限とが結局一致して等しきものになると敎えたらしい。併し現今學者の一致する極限の理論についての最も明瞭な敍述によれば、變數は吾等の欲する丈如何程でも極限に近接せしめ得るものであるが、現實に其極限に達するものでない。

ニユートンの Principia の題を其儘長く書けば、Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica である。此書はエドムンド・ハリーが費用を出して千六百八十七年に

印刷された。其第二版は數多の變化と改良とを加へ、コーツの序を附して千七百十三年に公にされた。此版は數ケ月中に賣盡されたがアムステルダムでなされた僞版が需用を充たした。ニユートンの生きて居る間に出た最後の版であつた第三版は千七百二十六年にヘンリー・ペムバートンによつて出された。Principia は三編から成立ち、第一及び第二編は大部分を占めて、物理學の數學的原理即ち運動及び力の法則、條件等を論じて居る。第三編に論じたものは、前なる兩編で說明した原理から推論された宇宙の構造である。而して此不朽の著述に一貫した原理は萬有引力の原理である。第一編は千六百八十六年四月二十八日に書きあげられ、第二編は夫れより僅か三ケ月の短日月中に終了を告げたが、第三編は九ケ月乃至十ケ月を費やして成つた。而かも此著述は、其實ニユートンが物理學について書かんとして而かも遂に之を完了し得なかつた一層大なる著書の筋書であつた。

萬有引力の法則は第一編に說かれてあり、其發見こそニユートンをば崇拜の的たらしめるものである。今萬有引力の發見の徑路を記さう。フーク、フイながンス、ハリー、レン、ニユートン其他の人々が、其當時、若しケプレルの第三法則が眞理であれば當時其法則の絕對的精確が尙疑はれて居た〕、地球と太陽系の他の天體との間の引力は距離の自乘に逆比例するであらうと考へて居た。然るに此推量の正しいか或は然らずして正しくないかの證明は缺けて居た。千六百六十六年にニユートンは、若し g は地球の表面に於ける重力の加速度を表はし、r は地球の半徑を、又 R は地球から月までの距離を、T が月の週轉の週期を、又 a は地球の赤道に於ける一度を表はすものとすれば、此法則が正しければ

$$g\frac{r^2}{R^2} = 4\pi^2\frac{R}{T^2},\quad \text{or}\quad g = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 180\,a$$

が成立つとのことに歸着するやうな推理を行ふた。ニユートンが當時用ゐ得た與件は $R=60.4r$, $T=2,360,628$ 秒, $a=60$ 哩であつて、a が六十九哩半であることが知られなかつた。

a の値が此やうに間違ふて居たので、計算した g の値が實測し得た値よりも、より小さなものとなつた。それで引力が距離の自乘に逆比すとの法則が正しくないやうに見えた。それでニユートンは其計算を其儘にして止めた。然るに

千六百八十四年に偶然ローヤル・ソサイエチーの集會の節ジエーン・ペカールが子午線の弧を測定し地球の半徑の一層精密な値を求め得たことを知つた。底で、ニユートンはaの修正された値を用ゐた所が、gの値として、實測の値と相應したものを得た、此の如くにして自乘逆比の法則の正しきことが檢定された。Principia中の一つの系に於いてニユートンは此計算に用ゐた遠心力に關する法則についてはフイゲンスに負ふことを承認して居る。

千八百七十二年までは個人の所有であつたが、其時所有者からケムブリッヂ大學に寄附したポルツマウス蒐集中のニユートンの手紙や原稿の澤山を天文學者のアダムスが檢閲した結果によれば、上記の計算に當つてニユートンの遭遇した難關は上述したものと異なることを指示するやうである。アダムスによれば、ニユートンの數學上の檢算は千六百六十六年に可なり完全なものであつたが、ニユートンは球狀の殼が其外方にある一點に及ぼす引力が如何なるものであるかを決定することが出來なかつた。彼のハリーに宛てた手紙が、地球が其質量の凡てが中心に於ける一點に全く凝集し盡したが如き引力を及ぼすものと想像せなかつたことを明かにして居る。であるから、彼は、よし大なる距離では自乘逆比の法則が可なり精密に近似數を與へるとしても、是等の數字によつて假定の重力の法則を檢算し得たとは言はれ得なかつた。ハリーが千六百八十四年にニユートンを訪ねた時に、彼はニユートンに、若し引力の法則が自乘逆比の法則であつたならば、惑星の軌道が如何なるものとなるかを決定することを乞ふた。所が、ニユートンは千六百七十九年にフークの爲めに類似の一問題を解いたことがあつたので、言下にそれは橢圓であると答へた。

ハリーの訪問後、ニユートンはペカールの得た地球の半徑に關する新たな値を採用して、以前の計算を再びやり直した。かくて彼は、若しも太陽系内の諸天體の間の距離が、是等の天體が點であると假定しても可い程に大なるものであれば、是等の運動が引力について假定した自乘逆比の法則に從ふて行はるゝものなるを證することが出來た。千六百八十五年に、彼は其密度が中心からの距離のみに關係するやうな一つの球が、其外方に位する一點に對して、恰かも球の全き質量が中心に凝集したが如き場合と同樣に引力を及ぼすとのことを證明

し得て、彼れの發見を完成することが出來た。

ボルツマウス蒐集中の公刊されざりしニユートンの草稿で、彼は流動及び流體の方法によつて、彼の月に關する計算をば Principia に與へたよりも一層高度の近似價まで行ふて居たが、併し彼は其結果を幾何學的に說明し得なかつたことを示す。尙其他其蒐集中の論文を見れば、ニユートンが Principia 中の結果の或者に到達した徑路を敎える。例へば第二編定理二十五の有名な作法は其本には證明を與へて居ないが、オックスフォードのデヴィド・グレゴリーに宛てた手紙の草稿中に二度も證明されて居る。

ニユートンの名聲の基づく所は主として Principia にあるが、ブルユースターは之をば「人智の記錄中の最も光輝あるページ」と呼んだ。吾等は更に一寸の間、萬有引力の勢力の下に惑星の行ふ運動の微妙な問題と力鬪したニユートンの繼續者中の偉大なるもの、ラプラースの見解を聞くことにする。「ニユートンは彼が其發見の名譽を負ふ原理の在在を充分に設立した、併し其原理の結果や利益の充分な開拓は此數學者の繼續者の仕事であつた。微分學が其始めて發見されたときは未だ不完全なもので、宇宙の學說が供給する如き六ケしき諸問題を完全に解くことを、彼に容さなかつた。されば彼は單にヒントを與へるのみに止まり、其ことは嚴正な解析を行ふて之を確めるまでは不確かなものと殘つた。是等の避け得ざる欠陷あるにも係らず、宇宙の系統に關する彼の發見の必要及其普遍性、物理學の最も趣味ある諸點、過ぐる世紀の大數學者等が、充分の嚴正を以て表はした、最も光彩を放てる諸發見の基礎となつた、深遠な獨創的見解の多數を包含する Principia は、人心の凡ての他の產物を越えて卓越したものである。」

ニユートンの Arithmetica Universalis は、彼がケムブリッヂの敎授であつた最初の九年間になした講義によるもので、之が書かれてから三十年以上經つて千七百七年にホイストンによつて公にされた。此書は方程式論に於ける新しく且つ必要な結果を包含して居る。根の羃の和の定理は人々の能く知る所である。ニユートンは實數の係數を有する方程式では虛根は常に對をなして存することを示した。虛根の數の下の極限と正及び負の根の數の上の極限とを決する彼規則は、彼の發明的天才を充分に表はして居る。此規則はデカルトのものゝ

如く、手早く行かないが而かも正負の根の數の極限については夫れと等しきか或は一般により一層近き極限を與へる。これが百五十年間も其證明を待つて居たが遂にシルヴエスターは著しく一般的の定理を設定し、ニュートンの規則が其特別の場合として夫れに含まるゝに至つた。

「流動の方法」中に數的方程式の根の近似値を求むるニュートンの方法がある。夫は單にヴイエタの方法を改良したものである。所が其本に「ニュートンの平行四邊形」と云ふものが掲げられて居る。これを用ゐて、ニュートンは $f(x,y)=0$ なる方程式から、變數 y に等しい x の羃數からなる級數を求めた。此規則の大に有効な點は夫れが級數の形狀を決定する點にある。即ち級數の指數の變化する法則が知られると、不定係數の方法を用ゐて級數の展開が出來る。

尙此規則は曲線の無限の枝や、複點に於ける曲線の形狀等を定めさせる。ニュートンは夫れに證明を與へず、又此規則を如何にして得たかさへも全く知らしめるものがないが、其證明は半世紀を經てケーストナー及び之と獨立にクレーマーによつて與へられた。

千七百四年に Opticks への附錄として Enumeratio linearum tertii ordinis と云ふのが公にされ、夫には曲線論に關する定理を載せて居る。ニュートンは三次曲線をば七十二種に分かち、更に是等をより大きな群となした。彼の註解者は是等に "Genera" 及び "Classes" なる名前を與へたが、前者の數は十四で後者の數は七(或は四)ある。彼は彼の分類の原理が要求する六種のものを見落したが、是等はスターリング、ムルドツク、クレーマー等によつて其後補充された。ニュートンは彼が「發散的抛物線」と名附けた五種類のものは、是等の投影に依つて有ゆる種類の三次曲線を與へるとの著しき定理を述べて居る。例の如く、此冊子には其證明がない。ニュートンが如何にして、此結果に到達したかは屢々學者の推考の的となつた。近來ボルツマウス蒐集中にニュートンの用ゐた解析や若干の定理が發見された爲めに、此事實も明かになり、之に關するニュートンの自筆の四原稿に關する記事がロウス・ボールによつて Transactions of the London Mathematical Society, Vol. XX pp. 104—143 中に與へられた。茲に趣味あることはニュートンが三次曲線の分類に關する研究をば最初は代數學的に試みたが、夫れが甚だ難

遊であるので、此問題をば改めて幾何學的に討究し、而して最後に再び解析法に歸へつたことである。

ニユートンは科學の他の方面でも繼續せる研究をなしたが、茲には單に其事實を記するしか餘白を有せない。彼は光學に關する實驗を永く行ふたのみならず、光の微分子說の創立者である。彼がローヤル・ソサイエチーに提出した光學に關する論文の最後のものは千六百八十七年に於ける"Fits"の說に關するものである。彼は光の分解を行ひ、又虹の現象を說明した。反射望遠鏡や六分儀(其後フイラデルフイヤのトーマス・ゴッドフリーやジョン・ハッドリーによつて再發明された)を發明した。彼は空氣中に於ける音の速度に關する理論的の式を導き、化學、電氣學、磁氣學、及び冷却の法則に關する實驗を行ひ、又地質學に關する考察をもなした。

千六百九十二年に次ぐ二年間のニユートンは不眠症と神經衰弱とを患ふた。或人はニユートンは一時精神錯亂を來したとも考へて居る。彼が精神の平靜に復した後も大發見の時は既に過ぎて居た。彼は提出された問題を研究はしたが、自ら問題を考へて新たな研究の步を辿らなかつた。彼の病後になした研究中最も注意すべきものはフラムステードの觀測に基いて月の運動の理論を檢算したことである。千六百九十五年に彼は造幣局の監督に任せられ、千六百九十九年に其長に任せられ、其位置を死する時まで保つた。彼の身體はウェストミンスター・アベーに埋められ、千七百三十一年には其處に立派な紀念碑が建てられた。

吾等は、これから微積分學の第二の而かも獨立發明者であるライブニッツについて述べることにする。ゴットフリード・ウイルヘルム・ライブニッツ(千六百四十六年—千七百十六年)はライブツイヒに生れた。文明國の何れの史上でも、獨逸に於ける第十七世紀の中頃程に科學的又は文學的事業に不向きな時代がない。然るに獨逸の歷史の此最暗黑の時代に然らざれば到底受け得ざりし敎育をば此若き天才に受け得せしめた、幸ひな境遇が、奇妙にも編まれた。彼は其幼時、當時存在した最上の敎化と接することを得た。齡十五年の時、彼はライブツイヒの大學に入學した。彼の主な研究は法律であつたが、彼は凡ての學問を

熱心に學んだ。獨逸に於ける大學教育は其頃は甚だ程度の低いものであつた。高等數學は全然敎えられて居なかつた。或はジョン・クーンとか申す先生がユークリッドのエレメンツを講義したが、甚だ不分明でライブニッツの外何人も之を解し得なかつたと云ふ。其後はエナの大學に半年程入學し、哲學者であり數學で地方で名のあつたエルハード・ワイゲルの講義をきいた。

千六百六十六年にライブニッツは De Arte Combinatoria なる敎科書を著はしたが、これは數學の初歩以上に亘らないものであつた。其時代に彼の書いた他の論文は純正哲學的のものか、法律的のものであつた。幸なる機會が來て、ライブニッツは外國に行くことになつた。千六百七十二年に彼はボイネブルグ男爵に依つて、政治上の用務を帶びてパリーに送られることになつた。彼は其土地で當時最も有名な學者と相知るを得たが、フイゲンスは是等の中の一人であつた。フイゲンスはライブニッツに振子の振動に關する己が著書を贈つた、これが若き獨逸人をば高等數學の研究に誘ふた。千六百七十三年に、ライブニッツはロンドンに行き一月より三月まで滯在した。彼は其土地で偶然數學者ペルと交ることになり、其人に自分の發見した、數の級數をば其差を用ゐて加へ合せる方法を説明した。所がペルは之と似た公式が千六百七十年に既にムートンによつて公にされたことを告げ、且つライブニッツに拋物線の長さを求める方法に關するマルカトールの著述を見よとの注意を與へた。ロンドンにある際、彼はローヤル・ソサイエチーに彼の發明した計算器を提出した、此器械はパスカルのものに似て居るが、夫よりも一層有効で且つ完全なものである。パリーに歸へつた後、彼は數學を一層秩序正しく勉强する餘暇を得た。玆に於いて彼は不撓の精神を以て高等數學に關する己が無學を恢復せんと勉めた。此時フイゲンスは彼の主な先生であつた。

かくて彼はデカルト、ファアブリ、セント・ヴインセント、パスカル等の幾何學書を研究した。かくて無限級數を丁寧に學んだ結果として圓周と直徑との比についてジームス・グレゴリーの以前に發見した次ぎの式を發見した。

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots$$

此優雅な級數は双曲線に就いてマルカトールの與へたものと同じ方法で發

見されたものであつた。フイゲンスは之を見て大に喜び、彼をして更に新たな研究をなさしめた。ライプニッツは曲線の求積に關する細かき研究をなし始めた、そして其爲めに高等數學と親炙するやうになつた。ライプニッツの論文中に、彼が千六百七十六年にパリーを去る前に書いた求積に關する一原稿がある。而かも夫は彼が公にしたことのないものである。其原稿中のより多く要用な部分が其後 Acta Eruditorun に公にされた研究中に編入された。

デカルト流の幾何學の研究中にライプニッツの注意が早くも切線の直接及び逆の問題に向けられた。直接の問題はデカルトによつて、最も簡單な曲線丈について解かれたが、逆の問題の方はデカルトの解析法の力を超越したものである。ライプニッツは任意の曲線に對して、兩方の問題の研究をなした。此際彼は彼が Triangulum characteristicum と呼んだもの、卽ち切線と一致する曲線の無限に小さな部分及び縱坐標並びに橫坐標の差の三邊から成立する無限に小さな三角形を作つた。曲線は茲では多邊形であると考へられた。此三角形は切線、切點の縱線、次切線とで出來た三角形、並びに縱線、法線、次法線とで出來た三角形と相似である。これはイギリスでバルローによつて、始めて用ゐられたが、併しライプニッツによつて再發見されたらしい。夫れからライプニッツは切線の直接及び逆の問題の間に存する關係を觀察した。彼は又後者が曲線の求積に變化され得るとの事を見出した。凡て是等の結果は千六百七十三年に書かれたライプニッツの原稿中に含まれて居る。求積を實行するのに彼の用ゐた一法は次の如きものであつた。次切線 p と要素 a（卽ち橫坐標の無限小の部分）とでなる直四邊形が縱坐標 y と其坐標の要素 l とで出來た直四邊形に等しい、卽ち式で表はせば $pa=yl$. 然るに零から始めた是等の多くの直四邊形の和は縱坐標の正方形の半分に等しい直三角形を與へる。かくてカヴアリエリの記號法を用ゐて、彼は

$$\text{omn. } pa = \text{omn. } yl = \frac{y^2}{2}$$（omn. は omnia の略で凡ての意味す）

を得た。然るに $y = \text{omn. } l$

故に

$$\text{omn. } \overline{\text{omn. } l}\,\frac{l}{a} = \frac{\overline{\text{omn. } l}^2}{2a}.$$

此方程式は、ライプニッツが新たな記號を始めて導き入れたのは茲であつた

點から、別して趣味あるものである。彼は言ふ、「omn. の代りに∫と書き、例へば omn. l を $\int l$ と記し、凡ての l の和を表はすのが都合がよからう」と、かくて彼は上の方程式を書き更へて次ぎの如くした。

$$\int \frac{\overline{l^2}}{2a} = \int \overline{\int \overline{l} \frac{l}{a}}$$

是から彼は最も簡單な積分例へば次の如きものを導き出した。

$$\int x = \frac{x^2}{2}, \quad \int \overline{x+y} = \int x + \int y$$

和の記號∫が次數を高くする故に、ライブニッツは反對の計算法卽ち差の計算法が次數を低くするであらうことを結論した。かくて若し $\int l = ya$ であるならば、然るときには $l = \frac{ya}{d}$ である。d なる記號は始めライブニッツによつて分母に置かれた、蓋し或項の次數を低めるごとが通常の計算では割り算で生せられるからであつた。上記の事實を與へた草稿には千六百七十五年十月二十九日と日附がある。されば此日こそは實は新たなる計算法の此記號が存在し始めて、其後これが微積分學の迅速な發達と完全な開展に大に貢獻するに至つた記念すべき日である。

ライブニッツは進んで彼の新らしき微積分學をば當時切線の逆問題の名の下に包括されて居た若干の問題の解決に應用した。かくて彼は三次の拋物線が「次法線が縱線に逆比するが如き曲線を求む」と云ふ問題の解であることを見出した。彼は此解の正しいことをば、かくして得た曲線にスルッエの切線の方法を應用し、逆に推理して、元の假設に到達する道をとつて、なし遂げた。第三の問題の解中で、彼は彼の記號 $\frac{x}{d}$ をば、今日普通に行はれて居る記號 dx に更へた。是等の研究中に「ライブニッツは何處にも dx, dy の意味を說明せず、只一度ノートの餘白に dx と $\frac{x}{d}$ とが同じて x の無限小の差と書いたものが見出されたのみであつた。彼は又微分なる語を用ゐず、常に差と稱した。其後十年を經て、彼は Acta Eruditorum の中に是等の記號のより充分な說明を與へた。彼が主たる目的として進んだのは、或式の前に∫或は d が置かれると、其式が如何なる變化を受くるかを決定せんことであつた。

所でライブニッツが此際 $dx\,dy$ が $d(xy)$ と、又 $\frac{dx}{dy}$ が $d\frac{x}{y}$ と同じものであるかを決するまでに著しき考慮をなしたと云ふことを知らば、始めて微分學の初步

と苦闘をなしつゝある學生にとりて、或は一種の慰籍であるかも知れない。彼は是等の問題を考へた後、原稿の一の終りに、是等に對して正しき値を與へることが出來なかつたが兩方のものが等しくないと結論した。其後十日を經た千六百七十五年十一月二十一日と日附を與へた一草稿中に、彼は方程式 $ydx = dxy - xdy$ を見出し $d(xy)$ に對して彼が凡ての曲線に就いて正しきことを觀察した式を與いた。彼は又一つの微分方程式から dx を消去して、之が獨り dy のみを含むものと化し、かくして考慮に上つて居る問題の解を導き出だす方法にも成功した。「見よ、切線の逆方法の諸問題が解かれるか或は少くとも求積の問題に直される最も優雅な一方法！」。かくて彼は切線の逆問題が求積によつて解くことが出來る、或は換言すれば、之が積分學で解かれることを明瞭に知つた。

半ケ年の中に、彼は又切線の直接問題も亦彼の新計算法の力で打勝つことが出來、それによればデカルトの解よりもより一般的解が求められることを發見した。彼はデカルトが解なしに殘した此種類に屬する凡ての特別な問題を殘らず解き了つた。併し茲にはド・ボーヌがデカルトに提出した有名な一問題丈を記して置く。「縱線と次切線との比が、一つの與へられた直線と、曲線の頂點から軸へ與へられた傾きをなすやうに引かれた直線と曲線との間に含まれる縱線の一部との比と等しきやうな曲線を求む。」

以上はライプニッツがパリー滯在中に新たな計算法の開展に寄與した進歩の大要である。かくて彼は千六百七十六年十月にパリーを出發する前に既に微積分學の最も主要なる規則と公式とを有して居た。

パリーから彼はロンドン、アムステルダムを經て、ハンノヴァーに歸へつた。ロンドンで彼はコリンスに會し、己が科學的通信の一部を示した。此事については吾等は後に又述べることゝする。アムステルダムではスルツエと數學を論議したが、彼の切線を引く方法が唯にスルツエのなした凡てを成功し得したのみならず、而かも亦己が方法が三個の變數に擴張することが出來る故に、面に接する平面をも見出すことが出來、加ふるに無理數も分數も此方法の直接應用を妨げないが爲めに、スルツエのよりも、より多くを成就し得ることを知つて滿足を感じ得た。

千六百七十七年七月十一日と記入した一論文中に、ライプニッツは和、積、商、羃及び根の微分法に關して正しき規則を載せて居る。尤も彼は千六百七十六年十一月に既に若干の負及び分數の羃の微分を與へて居るが、是等の中には誤りがある。$d\sqrt{x}$ に對して、$\frac{1}{\sqrt{x}}$ と誤れるものを書き、又他の場所では之に $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ を書いて居る。又 $d\frac{1}{x^3}$ に對しては或所で、$-\frac{2}{x^2}$ を與へ、夫れから數行下に $-\frac{3}{x^4}$ なる正しき値を與へて居る。

千六百八十二年にベルリンで通例 Leipzig Acts の名で知られて居る Acta Eruditorum と題する雜誌が創刊された。これは千六百六十五年に創刊された佛蘭西の Journal des Savans を一部分模したもので、獨逸に於ける文學及び科學の評論を公にした。ライプニッツは之に屢々寄稿した。ライプニッツと共にパリーで數學を學び且つ彼の新計算法を熟知して居たチルンハウセンは此雜誌に求積に關する一論文を公にした。

其內容は主として彼がライプニッツと此問題に就いて論議したときに、ライプニッツが彼に報じた問題に關したものであつた。チルンハウセンが微分學の記號と規則とをば自分自らのものと主張し、之を公にしたかも知れぬと云ふことを憂ひて、ライプニッツは遂に彼の發明の結果を公にすることに決心した。

千六百八十四年卽ち新計算法がライプニッツの頭に始めて宿つた後九年、ニユートンが始めて流動を論じた後十九年、ニユートンの Principia が出版される三年以前に、ライプニッツは Acta Eruditorum で微分學に關する彼の最初の論文を公にした。併し彼は此時彼の寳を凡て世に與へることを欲せず、其發見中の最も不分明で、最も解し難き部分を撰んだ。唯六頁の新時機を劃した論文の題は "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractus nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus" であつた。

計算の諸規則は此論文中に證明なしに簡單に記されたのみで、又 dx, dy の意味も明かにされて居ない。是から彼は此物について一定した觀念を有せなかつたことを推量することが出來る。dx, dy は有限であるか微分量であるか。彼は最初にはこれを有限と取つたらしい。蓋し彼は「吾等は勝手に撰んだ任意の線を dx と呼ぶ。すると y と次切線との間の比と、等しき比をば dx に對して有す

る如き線をば y の差である dy と呼ぶ」との文句を見るからである。ライプニッツはそれから此論文に光線が二つの屈折率を異にする媒質を通過する際、如何なる道をとれば一點から他の一點へ最も早く到達し得るかと云ふ問題を微分學を用ゐて解き、然る後ド・ボーヌの問題の解をば數言で記述して、此編を閉ぢた。

それから二年後(千六百八十六年)にライプニッツは同じ雜誌に積分學の初步を含んだ一論文を公にした。其處では dx, dy が無限に小なるものとせられて居る。彼は彼の記號を用ゐて曲線の性質をば充分に方程式で表はすことが出來ることを示した。例へば

$$y=\sqrt{2x-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

なる方程式はサイクロイドを指示する。

ライプニッツの大發明がかく Acta Eruditorum 中の彼の論文で公にせられたが、それは數學者の多數には殆んど感動を與へなかつた。獨逸ではチルンハウセンの外は此新計算法を理解せず、彼も亦之に一向關係しなかつた。蓋しライプニッツの敍述は微積分學をば廣く理解せしめる爲めには餘りに短かく且つ簡單であつた。然るに其必要を認め、之を學ばんとした最初の人は二人の外國人で、一人はスコットランドのジョン・クレーグ今一人は瑞西のジームス・ベルヌーリであつた。

ベルヌーリは千六百八十七年に一書をライプニッツに送り、新解析法の奥義を敎えられんことを乞ふた。然るに當時ライプニッツは外國に旅行して居た爲めに、其手紙は千七百九十年まで答へられなかつた。併しベルヌーリは其間に勉勵して師なしに微分學の秘密を知り得た。彼と彼の兄弟のジョンとは非凡の數學者であつた。彼等は此新科學の研究に全力を盡し、ライプニッツをして、此學が彼のものである如く、又彼等のものであると言はしめた程に、之を進歩させた。

ライプニッツは此等の人々や其他の數學者と廣く文通をなした。ジョン・ベルヌーリに宛てた一書中に就中積分學が積分を或基本的の約し得ない形ちに直ほすことに依りて改良されることを指示した。對數式の積分は其時研究された。ライプニッツの書物は多くの革新や、其後卓越せる方法となつたものゝ

先見などが含まれて居る。例へば彼は變數通徑を使用し始め、位置の解析法の基礎を据え、一次方程式の一組から未知量を消去する際起る式を簡單にすることを試みたときに行列式の觀念を始めて導びき入れた。彼は積分をより容易に行ひ得るやうに或分數を若干の分數の和として表はす考案をなした。彼は連續の原理を明瞭に假定した。彼は特異解法 Singular solution の最初の例を與へ、又二論文を書き(其一つに始めて坐標及び坐標軸なる語が見えた)包括線の理論に基を置いた。彼は吻接曲線 Osculating curves について書いたが、其論文には吻接圓は必然四つの連續した點で曲線を切るべしと云ふ誤りを含んで居る。此誤りに就いてはジョン・ベルヌーリが之を指摘したが、彼は之を承認しなかつた。一つの變數の二函數の積の n 次の微係數に關する彼の定理は有名なものである。力學に關する彼の數多の論文中の或者は價値あるものであるが、他のものには若干の重大な誤を含んで居る。

吾等は更に進んで微積分學の開展を追跡する前に、イギリスの數學者と大陸の數學者との間に、微積分學の發明について長く續いた好ましからぬ爭論の歷史を大略記することゝする。此問題と言ふのは要するに、ライプニッツはニュートンと獨立に夫を發明したか、將た彼は剽竊者であるかと言ふにある。

先づ玆では此爭論に加はつた兩派の人々の間に取換はされ文通から始めることゝしやう。ニュートンは千六百六十六年に彼の流動の記號を用ゐ出し、千六百六十九年にバルローはコリンスにニュートンの小册子 De Analysi per Equationes, etc を送つた。

ライプニッツがロンドンへ滯在したのは千六百七十三年の一月十一日から三月までゝあつた。彼は他の人から受けた科學上の通信を書留める慣習を有して居た。千八百九十年にゲルハルトはハンノヴアーの圖書館で此の旅行中にライプニッツの書いた記錄の原稿の一葉を發見した。化學、力學、磁氣學、植物學、解剖學、醫學、雜事の諸欄には廣く記錄をなして居るが、數學に關する記事が甚だ少ない。幾何學の欄には只一項丈記されて居るが、之によれば彼はバルローの講義を讀んだものと思はれる。ニュートンは獨り光學の部に記されて居る。明かに彼はロンドン滯在中に流動の方法の知識を得たものでない、彼の敵も亦

其然ることを主張はしなかつた。

ニユートン、コリンス其他の千六百七十六年までに書いた數多の手紙は、ニユートンが其方程式から無理數を除き去る必要なしに、切線を引くことを得る一つの方法を發明したことを述べて居る。ライブニッツは千六百七十四年に當時ローヤル、ソサイエチーの書記であつたオルデンブルグに、自分は甚だ普遍的な解析法を發明し、之を用ゐて級數によつて圓の面積を求めるのに甚だ必要な諸定理を見出したことを通告した。オルデンブルグは之に答へて、ニユートン及びジームス・グレゴリーも亦圓の求積までをなし得る求積の方法を發明したことを告げた。ライブニッツは底で彼に是等の方法を報知されんことを乞ふた。茲に於いてオルデンブルグとコリンスとの請求に應じ、ニユートンはオルデンブルグに千六百七十六年六月十三日附及び同年十月二十四日附の有名な手紙を書いた。

其第一の手紙は二項式定理や、無限級數及び求積に關する他の事項を澤山に記して居るが、流動の方法に就いては直接に記して居ない。ライブニッツは、ニユートンのなしたものを賞讃し、更に一層穿つた說明を乞ふた。ニユートンは第二の手紙で、自分が二項定理を如何にして發見しか其徑路を述べ、且つ又彼の流動及び流體の方法をば、之を說いた文章の文字をアルファベットの順序に列べた隱語を用ゐて、報道した。即ちニユートンは切線を引く自分の方法について

6a cc d æ 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x

と言ふた。元の通りに直すと"Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, et vice versa."(決して左樣多くの流體を包含せない任意の與へられた方程式から、流動を見出すこと及び其逆)となる。此隱語は確かにライブニッツに何等のヒントも與へなかつた。ライブニッツはコリンスに返事をかいて、何事隱さうとする所なく、微分學の原理、記號及び應用を說明した。

オルデンブルグの死亡は此文通に終りをなさしめた。其後千六百八十四年まで何等の事件もなかつたが、其年にライブニッツが Acta Eruditorum で微分學に關する彼の第一の論文を發表した。かくてニユートンの發明の先占權は凡

ての人々に承認されねばならないと同時に、ライプニッツが微積分學の効能を充分に世に明かにした人であることも納得せねばならないのであつた。蓋しニュートンの發明が秘密にされて只若干の友人のみに報せられて居た間に既に大陸ではライプニッツの微積分學が廣がつて居たのであつた。當時までは兩方の偉大な科學者間に爭ふ氣がなかつた。ニュートンはPrincipia第一版の第二編定理七の系の中にオルテンブルグとの文通で知つたライプニッツの發明について、甚だ好き言葉を載せて居る。曰く、

「余とかの最も優れた幾何學者ライプニッツとの間に十年以前に取り交はした文通で、自分は極大及び極小を決定すること、切線を引くこと、其の他之に類することをなし得る方法を發明したことを表明し、又此文章(Data æquatione………前に記せるもの)の文字を置き換へた文字で隱して送つたが、此偉人は彼も亦同じ種類の方法に思ひ附ひたことを返事し、且つ彼の方法を通信したが、之を見ると、余の方法とは言葉と記號との外、殆んど差のないものであつた」。

然るに此文句に關して「ニュートンは、ド・モルガンが言ふた如くに「第一に明白な而かも見え透いた意味を否認し、第二に夫をばPrincipiaの第三版から省く」程に弱かつた。大陸では微積分學はライプニッツや彼の補佐たりし兩ベルヌーリ及びマルクイス・ド・ロスピタルの力で大なる進歩をなしだ。千六百九十五年にワルリスは手紙で彼のニュートンの流動の方法がライプニッツのCalculus Differentialisの名の下に非常な評判で和蘭で行はれて居るとの事をニュートンに報じた。さればワルリスは己が著者の一冊の序文中にCalculus Differentialisはオルテンブルグの手紙でライプニッツに通信されたニュートンの流動の方法であると記して居るのも不思議でない。千六百九十六年にActa Eruditorumはワルリスの此著の批評を載せ、讀者に、前に引用した系でニュートン自身がライプニッツの獨立發見を承諾して居ることを回想させて居る。

十五年間ライプニッツは事件なしに彼の微積分學の發明者であるとの名譽を保つた。然るに千六百九十九年に、瑞西人ファト・ド・デュイリエーはローヤル・ソサイエチーに一つの數學の論文を提出し、其中に微積分學がニュートンの始めて發明したものであると信ずることを表明し、且つ第二の發明者たるライプ

ニッツがニユートンから何物をか借りたか如何はニユートンの手紙や原稿を見た人々の判斷に委せるとの事を附加へた。之は剽竊てふことを始めて諷刺したものであつた。事實を言へば英國の數學者等は其前からライブニッツに對して面白からぬ疑心をかけて居たらしい。ライブニッツが千六百七十六年に二度目にロンドンに行いた時にコリンスの示した書籍の中で、ニユートンのAnalysis per aequationes………を見たであらうとは彼等の長く抱いた考へであつた。但し此論文には流動の方法の應用を載せて居るが、其方法其ものゝ系統的說明がない。而して一方に於いてはライブニッツは確かに少くも此小冊子の一部分を讀んだ。彼はロンドン滯在中にコリンスの示した手紙や論文中の彼に面白く思はれた事項のノートを取つた。

千八百四十九年中にゲルハルトがハンノヴアーの圖書館で此ノトトを發見したが、之は二枚に亘つたもので、ノートは凡て甚だ簡單なものではあるが、獨りDe resolutione aequationum affectarum 丈は殆ど完全な寫しである。此部分は明かに彼にとつて新しきものであつた。よしライブニッツはニユートンの全冊子を讀了したとしても他の部分は彼に特に感銘を與へるものがなかつたに相違ない。之から考へると彼は微積分學について何物をも得たとは思はれない。夫より以前に、彼自身の計算法によつて彼はロンドンで知つたものよりも、既により大なる進歩をなして居たのであつた。數學上、彼の思想に大なる感動を與へたものゝなかつたことは、彼が和蘭へ歸へる途上、力學上の問題について長き問答を作つたことからも察せられる。

デユイリエーの諷刺は不和の火蓋を切つて、其後一世紀の間此火を消すことが六ケしかつた。ライブニッツはニユートンの先占權には一向抗らうとしなかつた、自らはニユートンが彼の系中にライブニッツの單獨發明を承諾したので滿足して居たのであるが、茲に於いて始めて爭論に顏を出した。彼はActa Eruditorumで激昂した答辯を發表しローヤル・ソサイエチーが彼に不正なことをしたのをつぶやいた。

事件はそれから暫時其儘になつて居た。千七百四年に「曲線の求積」が出でて、始めて流動の方法及び其記號の正式の說明が世に公にされた。其翌年Acta

Eruditorum の中に、此著書の批評が現はれニユートンはライブニッツの差の代りに流動を用ゐ又常に用ゐたとの好ましからぬ言葉があつた。之を見たニユートンの友人等は、之はニユートンに剽竊の責を轉嫁するものであるとしたが、ライブニッツは其意味の然らざることを力説した。オックスフォードの天文學教授ケイルは判斷と云ふよりも非常な熱心でニユートンを辯護し、千七百八年の Philosophical Transactions 中に掲げた一論文で、彼はニユートンが流動方法の第一發見者であること、又「此同一の計算法が、其名と記號の法式とを變化してライブニッツによつて公にされた」ことを記した。

ライブニッツはローヤル・ソサイエチーの書記に此逆待をつぶやき、ケイルをして詐僞呼はりを撤回するやうに仲裁を請ふた。然るにケイルは攻撃を止めざるのみならず、彼はニユートンとローヤル・ソサイエチーとの承認を以て、己が言明を説明し之を維持した。かくて彼は之れを長い手紙で敢てした。ライブニッツは事茲に至つては攻撃は益々公になつて來たことを痛嘆し、ローヤル・ソサイエチーとニユートン自身とに其公平なる判斷をすることを乞ふた。底でローヤル・ソサイエチーは委員を任命し、證據書類を蒐集した、是等は主にニユートン、ライブニッツ、ワルリス、コリンス其他の間に往復した手紙であつた。かくて千七百十二年に Commercium Epistolicum と呼ばれる報告書が現はれ、更に夫が千七百二十五年にはケイルの附加せる記録を加へて再び出版された。

此報告書に於ける最後の結論はニユートンが第一發明者であつたと云ふにある。併し夫は目的點でなしに、問題は却てライブニッツがニユートンの方法を剽竊したか如何である。委員會は形式的にライブニッツに剽竊者であるとの彼等の信念を斷定せんとはせず、却つて其書き物を通じて、積極的に之を斷定するよりもライブニッツの有罪なるを證明せんとの態度を取つて居る。ライブニッツはローヤル・ソサイエチーの議事に對しては僅かに私の手紙中に此やうに薄弱な議論には答へざるべしとの旨を述べて、非難をなして居る。ジョン・ベルヌーリはライブニッツに手紙を送り、夫が其後無名の小冊子として現はれたが、其主張はニユートンの友人等がライブニッツに對して公平を缺いたと同樣に、ニユートンに對して不公平なものであつた。ケイルは之に答へた、されば

其當時ニュートンとライブニッツとは第三者に宛てた手紙で互に責め合ふて居たらしい。

千七百十六年四月九日にコンチに宛てた手紙の中に、ライブニッツは再びニュートンは今こそ之を破棄せんとして居るが、系の中にライブニッツの發見を承認した旨を語り、且つ次の如く述べた。自分は常にニュートンを信じた。然るに彼は其虛僞であることを知つて居る筈である此批難をば一向看過して居るのを見て、彼を疑ひ始めたのも自然のことであると。ニュートンは此手紙に答へなかつた。但し彼の友人等に或覺書を回覽させた、これが千七百十六年十一月十四日にライブニッツの死んだとの報を受けると直き後に公にされた。ニュートンの此論文中に問題となつて居る系について次ぎの如き說明をなして居る。「彼（ライブニッツ）は原理の余の著述中で自分は彼をば余と獨立して Calculus differentialis の發明をなしたの承認したと言ひ、且つ又此發明を余自らに屬せしめるのが、余の其處に認めた所に反するものと言ふて居るが、併し彼の文句中には自分は其積りで言ふた一語をも見ない。」かくて千七百二十六年の Principia の第三版は、ニュートンは此系を省いて其代りにライブニッツの名の表はれない他のものを入れた。

國民的慢心と黨派心とが、イギリスでは長い間公平な說の採用を妨げたが、今日では一般にライブニッツが實際獨立の發明者であつたことを認めて居る。ライブニッツが獨立發明者であつたことを明かにする最も有力な證據はゲルハルトの編輯し且つ出版したライブニッツの數學論文集で（全六冊 Berlin, 1849–1866）之れは彼自身の頭に微積分の規則が漸次自然的の開展をなし來つたことを指示して居る。ド・モルガンは言ふた。「此爭論の全部を通じて、流動又は微分の知識と流動又は微分の計算法の知識、卽ち一般的規則を有する消化された方法との間の混雜を見る。

此爭論の爲めにイギリスと大陸との數學者とが長い間疎絕したのは如何にも殘念なことである。爲めに科學上の問題について思想の交換てふことが絕對に止んだ。イギリス側はニュートンの方法に固執し、殆んど千八百二十年頃までは、最も多くの場合に大陸で成された數學上の大發見をも知らずに居た。

かくて科學的利益てふ點から見て損失を受けたのは殆んど全く大英國の側であつた。若し些少なりと、此爭論が數學の進步を助けたと言ひ得べくんば、夫は挑戰的の問題を出して兩方の側が其敵を苦しめんと企てたもの丶結果丈である。

挑戰問題を出し、之を繰返へすの習慣は此頃ライブニッツによつて開始された。併し是等は始めの頃では必ずしも挑戰としてゞはなしに、新らしき微積分學の演習としてゞあつた。是等は例へば彼が千六百八十七年にデカルト流の幾何學者に提出し、ジームス・ベルヌーリ、彼自身及びジョン・ベルヌーリに依つて解かれた等時曲線（球が其上を一様な速度で落下するやうな曲線）の問題の如きである。ジームス・ベルヌーリはライブツィヒの Journal で、其兩端から自由に垂れられた一様な重さの鎖によつて生せられる曲線（カテナリー）を求むとの問題を提出した。此問題はフイゲンス、ライブニッツ及び彼自身によつて解かれた。千六百九十七年にジョン・ベルヌーリは歐洲の有力な數學者に、物體が一點から他の一點へ出來得る丈最も短かい時間中に落ち行く爲めに其物體の沿ふて進むべき曲線を求むと云ふ六ケしい問題を提出した。ライブニッツは之を問題を受取つた日に解いた。ニユートン、ロスピタールと兩ベルヌーリも亦解を與へた。ニユートンの解は Philosophical Transactions 中に匿名で現はれたが、ジョン・ベルヌーリは其非凡を認めた。正放射線 Orthogonal trajectories（知れた規則に從つて描かれた一系の曲線が與へられて、直角に凡て是等を切るやうな曲線）の問題は長い間 Acta Eruditorum の上に提出されて居たが、最初には數學者の注意を引かなかつた。之が千七百十六年にライブニッツによつて、イギリス側の數學者の脉を探る爲に再び提出された。

是こそイギリスを狙ふて挑戰的に提出された最初の問題と考へ得られる。ニユートンは造幣局の晝間の仕事で疲勞して歸へつたが、此挑戰問題の手に入つた其晩に之を解いた。彼の解が公にされた通りでは、實際の解と云ふよりも研究の大體の案であつた、其爲めに價値なきものとしてベルヌーリに批評された。ブルーク・テーロルは夫の防禦を企てたが、甚だ非難すべき言辭を弄するに止まつた。ベルヌーリは此の不作法には負けずに、意地惡い答を與へた。夫よ

り間もなく、テーロルは大陸の數學者に、英國に於ける只二三の幾何學者にのみ知られて、恐らく彼等の敵の力では協ふまいと思はれた複雜した形の流動の積分に關する問題を提出した。併し此撰擇は下手であつた。蓋しベルヌーリは之や之と類似した積分の方法を既に長い以前に說明したのであつた。されば之は却てライブニッツの繼承者等の巧者なことを示し彼等の勝利を增すに過ぎなかつた。最後の而かも最も拙い挑戰はケイルによつて提出されたものであつた。其問題は、速度の自乘に比例するやうな抵抗を及ぼす媒質中で、彈丸の描く道を求むと言ふことであつた。豫め自分自身が其問題を解き得るや否やを確かめずに、ケイルは、大膽にも解を出すやうにとベルヌーリに挑戰したのであつた。相手方は甚だ短時間内に、啻に速度の自乘に比例する場合のみに限らず抵抗が任意の羃である場合さへも解いた。尙ベルヌーリは敵の弱きを感じてロンドンに居る信じ得べき一數學者へ向けて、若しケイルが該問題を解き得るならば、其解を送つて吳れよと再三要求したが、ケイルは遂に答をなさなかつた。底でベルヌーリは彼を罵り、彼に勝ち誇つた。

ニュートン及びライブニッツによつて與へられた儘では、微積分學の基礎的原理の說明は明瞭と嚴正とを缺いて居る。其爲めに之は四方から反對を受けた。千六百九十四年に和蘭のベルナルド・ニューウエンチトは高次の微分の存在を否定し無限に小さな量を無視する習慣を攻擊した。是等の非難をば、ライブニッツは滿足に解決することが出來なかつた。彼の答辯中に彼は $\frac{dy}{dx}$ の値は幾何學では有限量の比として表はすことが出來ると言ふたが dx, dy の意義については、ライブニッツはよろめいた。或時は是等は彼の書き物の中で、有限線の如くに表はれて居るかと思ふと又他の所で無限に小さな量と呼ばれて居り又再び指示し難き量と言はれて居る。其最後の呼び方でライブニッツはニュートンと最も近接した。

イギリスでは、流動の原理が有力な純正哲學者バルクレーによりて大膽に攻擊された。彼は非常な鋭どさを以て、就中、彼が「死せる量の幽靈」と稱した、絕對的に消失する項の間に、有限の比が存在すると想像する基礎觀念が、不合理で不可解ものであると非難した。ジユリンは之に答へたが、非難を殘りなく解き去る

ことが出來なかつた。**バルクレー**は其後**ラザル・カルノー**によつて再び示されたこと、卽ち正しき答は「誤差の補償」によつて達せられ」ることを指摘した第一の人であつた。彼の攻擊が良き結果を齎らさない譯ではなかつた、卽ち夫が刺戟となつて**マクラウラン**が「流動に關する」研究をなすに至つた。フランスでは**ミケル・ロール**は微分學を排し**ヴアリニヨン**と此問題について議論をなした。

大陸に於ける微積分學の發達に最も貢献した學者の中に兩**ベルヌーリ**を擧げねばならない。是等の人々と**オイレル**とは瑞西のバセルをば大數學者の搖籃として有名にした。**ベルヌーリ**家は一世紀間に數學で頭角を現はした八人を出した。今其系圖を次ぎに示さう。

Nicolaus Bernoulli, (父)

- Jacob, 1654–1705
- Nicolaus
  - Nicolaus, 1687–1759
- Johann, 1667–1748
  - Nicolaus, 1695–1726
  - Daniel, 1700–1782
  - Johann, 1710–1790
    - Daniel
    - Johann 1744–1807
    - Jacob, 1758–1789

此人々の中で最も有名なのは二人の兄弟**ヤコブ**卽ち**ジームス**と**ヨハン**卽ち**ジヨン**と**ジヨン**の子息の**ダニエール**とである。**ジームス**と**ジヨン**とは**ライブニツツ**の忠實な友人で、彼と相携へて研究をなした。**ジームス・ベルヌーリ**(千六百五十四年—千七百五年)はバセルに生れた。微積分學に趣味を感じ、敎師の助を全くからないで微積分學を學修した。千六百八十七年より死するまでバセルの大學で數學敎授の椅子を占めた。彼は**ライブニツツ**の提出した等時曲線の問題に解を答へた第一の人であつた。千六百九十年 Acta Eruditorum で公にされた彼の解中に、始めて積分 integral なる語が見受けられる。**ライブニツツ**は積分學をば從來 calculus summatorius と呼び來つたが、千六百九十六年に之を calculus integralis と呼ぶことに、**ジヨン・ベルヌーリ**と相談した。

ジームスはカテナリーの問題を提出し、かくて此曲線の**ライブニツツ**の作法の正しきことを證明し、且つ(一)糸の密度の變化する場合、(二)糸が延びる場合、(三)糸の各點が、定まつた中心に向ふ力に作用される場合を考へて、是等の複雜な問題を解いた。是等の問題に對して彼は說明なしに、答丈を公にしたが彼の兄弟

のジヨンは是等に理論を附け加へた。彼はまた一端で固定され、他の一端に重さを加へて曲げられた、彈性的の板又は棒が示す曲線卽ち彈性曲線の形狀を決定した。彼は又撓む直四邊形の皿に液體を充たし相對する二邊を水平に支へたものゝ形ち"lintearia"と、風で孕んだ直四邊形の帆の形ち"volaria"とを決定した。彼は等斜螺線及び對數螺線を研究し、後者が條件の多樣なものゝ下にも生ずることを見て特に滿足した。

千六百九十六年に等周曲線の有名な問題を提出し、千七百一年に自分の解を發表した。彼は Ars Conjectandi に關する一著書を公にした、これは公算論を研究したもので、今日ベルヌーリの定理と稱せられる研究や所謂ベルヌーリ數を包含して居る。後者は事實に於いては $(e^x-1)^{-1}$ の展開式中の $x^n/n!$ の係數である。彼の全集は三冊として一冊は千七百十三年に、又他の二冊は千七百四十四年に印刷された。

ジヨン・ベルヌーリ(千六百六十七年—千七百四十八年)は彼の兄弟に從つて數學を學び始めた。其後彼はフランスに行き、マレブランシユ、カツシニ、ド・ラ ヒル、ウアリニヨン・ロスピタールと交際した。十年間彼はグロニンゲンで數學の講座を擔任したが、其後兄に續いでバセルの教授となつた。彼は其時代に於ける最も熱心な教師であると共に、最も獨創的の研究者の一人であつた。彼は殆んど凡ての歐洲の學會の會員であつた。彼の論戰は彼の發見の如くに數多い、彼は友情に厚い人であつたが、而かも彼の嫌厭を受けるや、彼は自分の兄弟であらうが、子であらうが頓着なしに、不公平な、野蠻な、粗暴な取扱をなした。彼は等周曲線の問題について兄ジームスと烈しい爭論をしたことがあつた。ジームスは數多の似而非論をなしたことについて彼を責めた。兄の死後自らの解の間違ふて居る一題をば兄の解を變形したもので更へやうとしたこともあつた。ジヨンはライブニッツ、オイレルの功績を賞したが、ニユートンの功績には盲目であつた。彼は自分の努力で積分學を大に進歩させた。彼の發見中には指數計算法、最速落下の線及び之と密度の變化する層を光線が通過する際にとる道との見事な關係等がある。彼は三角法を解析的の方法で論じ、カウスチック曲線や放射線を研究した。彼は若干回バリーの科學學士院から賞を受けた。

彼の子供のニコラスとダニエルとは共に聖彼得堡のアカデミーで數學の教授に任せられた。前者は間もなく若死した、後者は千七百三十三年にバセルに歸へつて實驗物理學の教授となつた。彼の最初の數學的出版物はリツカチによつて提出された微分方程式の解であつた。彼は水力學に關する著述をなした。公算論に關する彼の研究は其大膽なると獨創的なるとで著しい。彼は數學的公算論よりも道德的期待の方が吾等の普通概念と一致して、より良き結果を與ふべしと其理論を提出した。彼の道德的期待論は古典的になつたが何人も曾つて之を利用したことがない。彼は公算論を保險に應用し、人間の生涯の各年齢のものが痘瘡の爲めに死亡する率を決定し、生れた人間の與へられた數の中で、與へられた年齢の人間が幾人生存するか其割合を決定し、又種痘を受けたものが如何程生命を長くするかを決定することを試みた。

ヨハン・ベルヌーリ(千七百十年に生れた)は彼の父の跡を襲ふて、バセルの大學の數學教授となつた。彼はパリーの科學學士院から三つの賞即ち卷轆轤、光線の傳達、磁石に關して賞を受けた。ニコラス・ベルヌーリ(千六百八十七年に生れた)は一時ガリレオが曾つて從事したパデュアに於ける數學教授となつた。ヨハン・ベルヌーリ(千七百四十四年に生れた)は十九才の時にベルリンで帝室天文學者に任せられ、其後アカデミーの數學部の長に任せられた。彼の弟のヤコブは、彼の伯父が以前に從事したバセルの實驗物理學の講座を擔任し、其後聖彼得堡のアカデミーの數學教授に任せられた。

是からニユートン、ライブニッツ及び兩大ベルヌーリの時代に於ける若干の數學者に就いて述べやう。ギラウム・フランソア・アントアヌ・ロスピタール(千六百六十一年―千七百四年)はジヨン・ベルヌーリの弟子で、ライブニッツやベルヌーリの提出した競技問題に加はつたことは既に述べた如くである。彼は千六百九十六年にライブニッツの微積分學の教科書を書いて數學者の一般に此學を普及することに有力な貢献をなした。此教科書が始めて一分數の分母と分子とが同時に零に傾く際に其分數のとる極限値を見出す方法を載せて居る。

フランスに於ける微積分學の他の一熱心家はピエール・ヴアリニヨン(千六百五十四年―千七百二十二年)であつた。ヨセフ・サウリン(千六百五十九年―千七

百三十七年)は代數學的曲線の複點に於ける切線を如何に決定すべきかに就いてと云ふ微妙な問題を論じた。フランソア・ニコル(千六百八十三年―千七百五十八年)は千七百十七年に始めて有限差に關する最初の組織立つた本を書き、其中に趣味ある級數の多數の和を求める方法を記して居る。彼は又ルーレット就中球の外擺線と其長さを求める方法を論じた。有限差に趣味を持つた他の人はピエール・ライモンド・ド・モンモル(千六百七十八年―千七百十九年)であつた。公算論に關する彼の主な書物が、彼の一層卓越した繼續者ド・モアブルを刺戟した。

ジエン・パウル・ド・グア(千七百十三年―千七百八十五年)は今日一般に敎科書に與へられて居るデカルトの符號の規則の證明をなした。此巧者な幾何學者は千七百四十年に解析幾何學に關する一敎科書を書いたが其主な目的は、曲線に關する最多數の研究が、微積分學を用ゐてすると同樣に容易に、デカルトの幾何學を以てしてもなし得ることを示さんとするにあつた。彼は凡ての次の曲線の切線、漸近線や各種の特異點を如何にして求むべきかを說き、且つ投影法を用ゐて此等の點の若干が無限の外にも存することを證した。

古人の方法に執著した一數學者はフィリップ・ド・ラヒル(千六百四十年―千七百十八年)で、デザルグの弟子である。圓錐曲線に關する彼の著述は純粹に綜合的で古人の敎科書と異なる點は、デザルグやパスカルがなしたと同樣に、圓の性質から圓錐曲線の性質を導びき出したことにある。彼の革新は近世綜合幾何學と密接な關係を有して居る。彼はルーレットや、圖示法や、外擺線や、コンコイドや、不可思議な方形配數等に關して書いた。ミケル・ロール(千六百五十二年―千七百十九年)は彼の名を負ふ一定理の著者である。

イタリヤの數學者の中で、リカチとファグナノとの名を逸してはならない。カウント・リカチ(千六百七十六年―千七百五十四年)は千七百二十四年に Acta Eruditorum で發表したリカチの微分方程式と稱せられる問題と關聯して最も良く其名を知られて居る。彼は此微分方程式の若干の特別の場合に面白き解を得た。

カウント・ド・ファグナノ(千六百八十二年―千七百六十六年)は有力な一幾何學

者であつた。彼は

$$\pi=2i\log\frac{1-i}{1+i}$$

なる公式を發見し、之が**オイレル**が虛の指數と對數とを用ゐる先驅となつた。楕圓と双曲線との長さに關する研究は楕圓函數論の出發點となつた。彼は、例へば、其差が一直線で表されるやうな楕圓の二つの弧が無數の仕方で見出し得られることを證明した。

獨逸で**ライブニッツ**の同時代の人で注意すべき唯一の數學者は**エーレンフリード・ワルテル・チルンハウセン**(千六百五十一年—千七百八年)で、反射のカウスチック曲線を發見し、金屬の反射鏡や大きな焦がすガラスについて實驗し、且つ彼の名を有する方程式を變化する一方法を研究した。古人と同樣に、彼は最も簡單な方法が最も正しきものであることを信じ、其結論として、曲線の性質に關する研究で、微積分學は用ゐざる方がよいと言ふた。

ライブニッツの死後、獨逸では記すべき數學者は一人もなかつた。ハルレの教授の**クリスチアン・ウオルフ**(千六百七十九年—千七百五十四年)は自ら**ライブニッツ**の繼續者たるを以て任じて居たが、併し彼は、**ライブニッツ**の巧妙な創意をば詐學的の煩瑣哲學にした丈のことである。且つ**ユークリッド**の體裁で文藝復興以後に發展した算術、代數學及び解析法のエレメンツを著したが、勿論只其外形丈で、是等の眞髓を穿つて居ない。

大英國で**ニユートン**と同時代で又直接の繼續者であつた人々に、功績の著しいのがある。卽ち**コーツ**、**テーロル**、**マクラウラン**、**ド・モアブル**等である。傳へらるゝ所によれば**ローチャー・コーツ**(千六百八十二年—千七百十六年)の死んだ時**ニユートン**は「若し**コーツ**が尙生き永へるならば、吾等は彼によつて學ぶことが出來たらうのに」と嘆聲を放つたそうである。**コーツ**が**ニユートン**の第二版の出版を企てたのは**ベントレー**の乞ひによつた。**コーツ**の數學論文は彼の死後トリニチ・カレッヂの教授の彼の位置を引ついだ**ロバート・スミス**によつて公にされた。Harmonia Mensurarum と云ふ著述の題は其中にある次ぎの定理によつて回想される。「若し固定點Oを通る凡ての動徑の上に、OR の逆數が OR_1, OR_2, … OR_n の逆數の和に等しいやうな具合に、R 點を取るならば、R の軌跡は一直線

となる。」此著述によつて流體の計算法が對數や圓の性質を應用した點で進歩を受けた。又 x^n-1 の因數を求めることに關係した三角形の一定理はコーツの發明したものである。

ニュートンの崇拜者中の最たるものはテーロルとマクラウランとである。イギリスと大陸の數學者との爭論は、彼等をば海峡の彼方に居る數學の偉才等と獨立して研究せしめた。ブルーク・テーロル(千六百八十五年—千七百三十一年)は各方面の學問に趣味を有し、其生涯の後半期中には生として宗教上及び哲學上の冥想に從事した。彼の主な著述 Methodus incrementorum directa et inversa (London, 1715—1717) は今日有限差 "Finite differences" と稱せられる新しき部門を數學に加へた。彼は之の數多の必要な應用をなし、別して彼によつて始めて力學上の原理に整へられた、振動する絃の運動の形ちの研究に之を用ゐた。

此著述中に又「テーロルの定理」が含まれて居る、而かも此定理の有用なものであることは、ラグランジュが五十年以後に其偉力を指摘するまで、解析學者に認められなかつた。彼のなした此定理の證明は收斂の問題を考へて居ない、從つて全く價値なきものである。而かも之の嚴正な證明が一世紀より後にカウシーによつて與へられた。テーロルの著述に濛氣差についての正しき説明の最初のものが含まれて居る。彼は又投影法に關する著述をなした、併し之には亦彼の他の著述と同様に、説明の不充分と不明瞭との缺點が免れない。齡二十三年の時に、彼は千七百十四年に發表された振動の中心の問題の著しき解を與へた。然るに彼の發明の先占權をば、ジョン・ベルヌーリは不正に論議した。

コリン・マクラウラン(千六百九十八年—千七百四十六年)は齡十九の時に競爭試驗の結果アベルデーンの數學教授に選ばれ、又千七百二十五年にはジームス・グレゴリーに次いでエヂンバラ大學の教授となつた。彼はニュートンと親しき交りをなし、ニュートンの發見に勵まされて、千七百十九年に彼の名の下に知られて居る圓錐曲線を生成する新奇なる方法を載せて居た Geometria Organica を公表した。千七百二十年に出した第二の小册子 De Linearum geometricarum Proprietatibus は其證明の優雅なので著名である。それは二つの定理の上に築かれ、其第一のものはコーツの定理で、第二の定理は彼の定理である。「若し任意の點O

を通して一線を引き、之が曲線と n 個の點で會合したものとし、是等の點で曲線に切線を引いたものとし、又O點を通して任意の他の線を引いて、此線が曲線を R_1, R_2, R_3……で切り、更に r_1, r_2, r_3……で n 個の切線を切るものとすれば、$\Sigma\frac{1}{OR}=\Sigma\frac{1}{Or}$ なる關係が成立する。

是等の二定理はニユートンの定理の綜合である。マクラウランは是等をば二次及び三次の曲線の議論に利用したが、夫は「若し四邊形が其頂點と二つの對邊の會合する兩點とを共に三次の一曲線上に有するならば、二つの相對する頂點に引いた切線が此曲線の上で互に切り合ふ」といふ著しき定理で、絶頂に達して居る。

彼は等邊六邊形に關するパスカルの定理を獨立に導いた。次ぎのものは此定理を彼が擴張したものである。「若し多邊形が、其邊の各が一定點を通過するやうに動き、其頂點が一つを除き夫れ〳〵に m, n, p…… 次の曲線を畫くならば自由な一頂點は $2mnp$…… 次の曲線上を動く、若し又定點が一直線上を動く場合には最後の曲線の次數は mnp…… となる。」

マクラウランは垂足曲線について書いた。又彼は一代數學書の著者である。流動に關する彼の教科書の目的は、流動の學説をば古人のなせる方法に從つて幾何學的證明の上に築くことであつた。かくて彼はバルクレーのなした如き此流動論が間違つた推理に立つと云ふやうな攻擊に對しては、嚴正な説明で答へた。彼の流動論に始めて極大と極小とを區別する正しき方法が載せてあり又之を複點の理論に應用して居る。マクラウランの定理は以前ジームス・スターリングによつて與へられたもので、其實テーロルの定理の一つの特別の場合である。流動論の著述の附錄として、幾何學的、力學的及び天文學的の諸問題の解が載せてあり、彼は此等に古人の方法をば最上の巧みさを以て應用して居る。之を見たクレーラウをして、遂に地球の形狀の問題をば純幾何學によつて討究せしむるに至つた。マクラウランの是等の解はラグランジユの非常な賞讚を博した。

マクラウランは廻轉橢圓體の引力を研究し、且つ重力の作用の下に一つの軸の周りに一樣に廻轉する均質の液體が廻轉橢圓體の形狀を占むることを研究

した。ニュートンは此定理を説明なしに與へた。マクラウランが天才なるにも拘らず、大英國に於ける數學の發達に對する彼の影響は好ましからぬものであつた。蓋し彼の例に倣ふて、其同國人をば解析法を無視させ、大陸に於ける高等解析の驚くべき進歩に無頓着ならしめたからである。

我等はこれからアブラハム・ド・モアブル(千六百六十七年―千七百五十四年)について記さうと思ふ。此人はフランス血統の人であるが、齡十八の時にナントの勅令の癈止で佛國を去らねばならないやうになつた。彼はロンドンに移住し、其處で數學を學んだ。彼は八十七の高齡まで生存し、殆んど昏睡狀態で世を去つた。彼の生活費は其晩年には偶然的の勝負事や公算論に關する他の問題を解くことで、之を彼はセント・マルチン小路の一居酒屋で行ふて居た。彼の死する少しく前に、彼は毎日十分乃至二十分間より長く眠る必要があると述べて居た。そして二十三時間以上眠り通した翌日に、正しく二十四時間眠り、かくて睡眠中に世を去つた。ド・モアブルはニュートンやハリーと親しき交りをなした。

數學者としての彼の力は幾何學的と云ふよりも寧ろ解析的であつた。彼は彼の名を負ふ定理を發見し、又扇形の乘除に關する定理をば圓から双曲線に擴張して、高等三角法に革新を與へた。公算論に關する彼の研究はラプラースを除く凡ての他の數學者のなしたものを遙かに超越して居る。彼の主な貢献は競技の繼續時間や、循環級數の理論、スターリングの定理を用ゐてベルヌーリの定理の價値を擴張したこと等であつた。又彼れの主な著述は千七百十六年の Doctrine of Chances, 千七百三十年の Miscellanea Analytica 及び Philosophical Transactions 中の論文である。

オイレル、ラグランジユ、ラプラース

千七百三十年より千八百二十年に至る九十年間に、佛蘭西人と瑞西人とが最も光彩のある成功を以て數學を研究した。これ以前の時代中に著名な學者のかくも多數を示したものがない。此時代に瑞西はオイレルを、佛蘭西はラグランジユ、ラプラース、ルジャンドル及びモンジユを生じた。かくてルイス第十四

世の時代を標示した佛蘭西數學の凡庸が、今や凡ての歴史中で最も光輝ある時代の一を以て繼がれた。反對に英吉利と獨逸とは佛蘭西の衰微時代に**ニュートン**や**ライブニッツ**を產したが、今や大數學者と誇り得べき人物を有せない。かくて佛蘭西は專ら數學の笏を振ふた。英吉利と獨逸とは不幸にして獨創的研究の方針をば惡く撰んだ。前者は古代の幾何學的方法に餘りに偏心し、後者は何等價値あるものを生せかんだ折衷主義をとつた。

オイレル、ラグランジュ、ラプラースの勞力は高等解析の方面に向けられ、之を彼等は驚嘆すべき程度まで發展させた。彼等によつて解析法は完全に幾何學から離された。前の時代には獨り英國のみでなしに、或範圍までは大陸でも亦幾何學的の衣を着けた問題の解が流行して計算の結果が通常幾何學的の形に直された。然るに今や變化が起つた。**オイレル**は解析的微積分學をば幾何學の束縛から解放し一つの獨立した科學として之を樹立した。**ラグランジュ**と**ラプラース**とは此分離に用心深く執着した。**ニュートン**や**ライブニッツ**に据えられた高等解析法と力學との廣い土臺の上に、**オイレル**は無双の優れた天才を以て偉大なる建築をなした。

後世の解析學者の採つた大思想で**オイレル**の暗示を與へなかつたか、又は自ら其發明者でなかつたものが稀れである。**ラグランジュ**の方は恐らく彼の如くに發明力が豊かでなかつたらうが、併しより含蓄のある才能とより深遠な推理とを以て微積分學を開展し、解析力學をば吾等が現今有する如き形となした。**ラプラース**は萬有引力の理論の完成に微積分學を力學に應用し、かくて**ニュートン**の事業を擴張し且つ補足して太陽系の解析的研究をなした。彼は亦公算論に關する新時機を劃する著述をなした。此時代に創始せられた解析學の分科には**オイレル**と**ラグランジュ**との Calculus of variations, **ラプラース**と**ルジャンドル**との Spherical harmonics, **ルジャンドル**の Elliptic integrals がある。

此時代に於ける解析の進歩を**ガウス、カウシー**及び今代の數學者のなした進歩と比較すれば、兩者の間に著大な差を認める。前者には形式上の進歩を見るのみである。計算の結果に殆ど無言の信頼を拂ふて彼等は其嚴正な證明を發見せんとしなかつた。かくて彼等は一般的の問題に到達したが、是等の或者は

其後になつて獨り特別な場合にのみ正しきことを證明された。獨逸に於ける折衷主義は此傾向を極端までに至らしめ、彼等は形式主義を崇拜し、公式の實際の內容に注意を拂はなかつた。然るに最近に至りては問題の形式上の議論が巧妙になると共に、甚だ必要な證明の嚴正が加はつた。此の如く嚴正になつたことを示す好例は無限級數の現今の用ゐ方をばオイレルやラグランジュの著述と比較することである。

此時代の偉人等によつてなされた幾何學の放逐は永久には繼續せなかつた。此時代の終る前に佛蘭西に新たな幾何學派が現はれた。ラグランジュは彼の Mécanique analytique 中に一つの圖をも入れなかつたが、而かも彼の死する十三年前にモンジュはかの新機軸を劃した Geometric descriptive を公にした。

レオナルド・オイレル（千七百七年―千七百八十三年）はバセルに生れ、牧師であつた彼の父は最初彼に數學を授けた。其後彼はバセルの大學に入つたが、ジームス・ベルヌーリの愛弟子の一人となつた。齡十九の時に、船の操帆法に關する論文を作り、佛蘭西の科學學士院から二等賞を受けた。ジョン・ベルヌーリの二子ダニエルとニコラウスとが露西亞に行いて後、カザリイン第二世を說いて千七百二十七年に彼等の友人であるオイレルを聖彼得堡に招聘させた。ダニエルが其處で千七百三十三年に數學敎授に任せられたのは既に記した如くである。千七百三十五年に學士院で天文學上の一問題を提出したが、之を解くのに數多の大數學者等が數ケ月を要したが、オイレルは己が發見した改良された方法を用ゐて僅かに三日間に之を解いた。然るに此勤勉は彼を熱病に罹らせ、彼は爲めに其右眼を失ふに至つた。然るに彼のよりも一層優れた方法を用ゐてガウスは同じ問題をば只一時間中に解き得た。アンネ第一世の專政主義が、優さしきオイレルをば公けの事件から身を引いて專ら科學に全時間を献げるに至らしめた。千七百四十七年にフレデリック大王は彼をベルリンに招聘したが、普魯亞の女王は彼を厚遇し、かくて偉大な學者が何故にかくも怯懦で控へ目であるかに驚いた。之に對して、彼は無邪氣に「陛下、これ私は、言ふ人が絞刑に處せられる國から來た爲めであります」と答へた。千七百六十六年に、彼はカザリイン第二世の招聘に應じて聖彼得堡に行かんとし、辛ふじて許可を得、ベルリン

を去つた。彼は聖彼得堡に歸へるや否や盲目となつた、併し彼は尚十七年間も彼の獨創的研究を續け、彼の死する日までに至つた。彼は彼の一僕に Anleitung zur Algebra (1770) を口授した、此書は純粹に初等のものであるが、基本的の方法をば嚴正な基礎の上に置かうとした最も古き試みの一として功勞のあるものである。

オイレルは數多の著書をなしたが、次ぎに記すものは其の主なものである。Introductio in analysin infinitorum (1748) は解析數學に革命を起した一著述で、それまでは此の學科をかくも一般的で且つ組織的に說いたものがなかつた。Institutiones calculi differentialis (1755) と Institutiones calculi integralis (1768—1770) とは其時代の微積分學に關する最も完全で而かも精確な著述であつて、獨り當時其學問について知られて居た凡ての事項の梗概を藏するのみならず、更に彼自身の獨創的研究の結果であるベータ函數、ガンマ函數や其他のものを載せて居る。Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes (1744) は稀に見る數學的天才を發揮した、數多の事項を包含したもので、其中に變數法に關する研究がある。此學問は其後**ラグランジュ**によつて改良されたものであるが、**オイレル**は等周曲線、抵抗媒質中に於ける最短時落下曲線及び測地學の理論(これらは其以前に兩**ベルヌーリ**其他の注意を引いた問題であつた)を研究する際之を發明するに至つたものである。Theoria motuum planetarum et cometarum (1744), Theoria motus lunæ (1753), Theoria motus lunæ (1772) は天文學に關する彼の主な著述である。Ses lettres à une princesse d'Allemagne sur quelques sujet de Physique et de Philosophie (1770) は大に社會の歡迎を受けた著述であつた。

吾等は之から進んで**オイレル**の主な改良と發明とを記載することゝする。彼は三角法を解析法の一部として論じ、現今廣く行はれて居る三角函數の略符を導びき(**トーマス・シムプソン**も英國で同時に之をなした)、且つ三角形の三つの角をば A, B, C で表はし、又是等に對する邊を a, b, c で表はす簡單な方法を採つて公式を簡單にし得た。彼は三角函數と指數函數との間の關係を指摘した。千七百三十七年の彼の一論文中で、吾等は始めて 3.14159…… を表はす記號として π を用ゐたのを見る。

「彼は空間に於ける坐標の変換に關する規則を設定し、平面曲線や第二階の面の解析法を論じた。三個の變數を有する二次方程式を論じ夫で表はされる面を分類することを始めてなしたのも彼である。卽ち圓錐曲線の分類に用ゐたと類似の規則によつて彼は五種のものを得た。一次方程式の一系を解く消去法(これはベツウによつても獨立に發見された)及び對稱的函數の消去法等は彼の發明したものである。彼は $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ と假定するによつて、四次方程式を解く方法を考案した、蓋し之れは代數方程式の一般的の解を得んとの希望の下に行はれた。更に一層大なるは對數に關する彼の研究である。ライブニツツとジヨン・ベルヌーリとが曾つて一つの負數が對數を有するかを議論したことがある。ベルヌーリは $(-a)^2=(+a)^2$ である故 $log(-a)^2=log(+a)^2$、卽ち $2\,log(-a)=2\,log(+a)$ ∴ $log(-a)=log(+a)$ であると主張した。然るにオイレルは a は其實無限數の對數を有するもので、若し a が負數であれば是等對數の凡てが虛數となり、又 a が正數であれば一つの外他の凡てが虛數であることを證明し、かくて $log(-a)^2$ と $log(+a)^2$ とが等しくなり得るが、$log(-a)$ と $log(+a)$ とが等しくないことを説明した。」

無限級數の問題は彼によつて新たな生命を與へられた。所謂オイレル積分の展開によつて定積分の理論の生れたのは、彼の級數に關する研究に負ふものである。彼は發散的級數を用ゐざるべしと屢々讀者に警告したにも係らず、自分自身は甚だ不注意であつた。無限級數が今日受けて居るやうな嚴格な取扱方は其當時は夢想だにされなかつた。收歛級數が如何にして成立つかに就いて、明瞭な考がなかつた。ライブニツツも兩ベルヌーリも共に $\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots\cdots$ と云ふ式の正しいか如何について疑を抱かなかつた。ダイド・グランチは此式から $\frac{1}{2}=0+0+0+\cdots\cdots$ と云ふ結論さへもなした。

ライブニツツは級數の取扱ひ方について純正哲學的證明法を提出したが、これは兩ベルヌーリやオイレルの心をまでも司配した。其推理の傾向は今日は甚しく不合理と見える結果をさへも成立させんとする。此の如く級數の取扱ひ方の粗雜であつたことは、實例から最も能く知られる。オイレルが發散級數を用ゐるなと警告した其論文中に左の如きものがある。

$$n+n^2+\cdots\cdots=\frac{n}{1-n},\quad 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\frac{n}{n-1}$$

$$\therefore\ \cdots\cdots\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1+n+n^2+\cdots\cdots=0$$

又**オイレル**は躊躇する所なく $1-3+5-7+\cdots\cdots=0$ と書いたが、兩**ベルヌーリ**の甥の**ニコラス**の外に此の如き結果に反對する人はなかつた。而かも奇なることには、**オイレル**は**ニコラス**を說いて自分の誤まつた結果に改心させた。

オイレルが確信を以つて $\sin\phi-2\sin 2\phi+3\sin 3\phi-4\sin 4\phi+\cdots\cdots=0$ と書いたとは今日信じ難い所であるが、斯の如き實例は其時代に於ける解析法の或部分が尙科學的基礎を缺いて居たことを明示する。**オイレル**が負及び分數の指數を有する場合に對する二項公式の證明は尙近來の敎科書にも記されて居るのを見るが、間違ふたものである。**オイレル**が hypergeometric series と呼んだものは其の和が第二階の一次微分方程式の積分に屬することを彼によつて指示されたが、**ガウス**は其後此級數の文字に特別の價を當てると、當時知られて居た殆んど凡ての函數を表はし得るものであることを指摘した著しきものである。

彼は Institutiones calculi differentialis の始めの數章で差の計算法を論じ、然る後それから微分學を導いた。彼は同次函數に關する**オイレル**の定理を設定し、又**ニユートン**、**ライブニッツ**、兩**ベルヌーリ**等の注意する所となつたが而かも尙進步せなかつた微分方程式論に、大に貢献した。**クレーラウ**、**フォンテーヌ**、**オイレル**は同じ時代に積分可能に關する規則を論じたが、**オイレル**は之に加ふるに之を用ゐて如何にして積分因數を決定すべきかを論じた。此等の規則の基づく原理は曖昧な點を可なり含んで居る。橢圓積分に關する加法定理は始めて**オイレル**の指摘したものである。

彼は連續分數に關する新たな計算法を發明し、之を不定方程式 $ax+by=c$ の解に用ゐた。然るに彼の與へた此方程式の解は其實質に於いては千年以前に印度人によつて與へられたものと同じである。彼は $n=5$ のときの $2^{2^n}+1$ の因數を與へて、此式が**フェルマー**の想像した如くに常に素數を現はすものでないことを指摘した。彼は「フェルマーの定理」に始めて證明を與へ、更に $4n+1$ なる形の素數は何れも一つ而かも唯一つの仕方で二つの平方數の和として表はさ

れると云ふフェルマーの第二の定理をも證明した。又 $x^n+y^n=z^n$ が、n が 2 よりもより大なる場合には整數的の解を有せないと云ふフェルマーの第三定理はオイレルによつて $n=3$ のときに正しいと證明された。

オイレルは四つの定理を發見したが、是等を綜合すると、ルジャンドルによつて獨立に發見された Quadric reciprocity の大法則となる。彼は多面體の項點、面及び邊の數の間に存する關係を示した有名な定理を表明し且つ之を證明した。併し此はデカルトに既に知られて居たらしい。オイレルは公算論にも留意し若干の六ケしい問題を解いた。

解析力學に關するオイレルの貢献は矢張り要用なものである。ホキエヌルは言ふた。「解析法に、今日其誇りとなつて居る一般性と對稱性を與へるのに、最も貢献をなした人は、矢張り力學をば解析的になした人である。それはオイレを意味する。」オイレルは一定點の周りに物體のする廻轉の理論や、自由な物體の運動に關する一般的の方程式や、水力學の一般的の方程式等を設定した。彼は樣々な機會に彼の心に浮んだ力學上の問題の數多の數と種類とを解いた。

例へば彼はヴァルジルの詩を讀んで「錨が下りた猛進して居る船が止つた」との句に至ると、此の如き場合に船が如何なる運動をするだらうかを研究せずに措かなかつた。ダニエル・ベルヌーリと殆ど同じ頃に、彼は「面積保存の原理」を公にしてマウペルチュイの提出した「最小作用」の原理を保護した。彼は又潮汐や音についても著述をなした。

天文學はオイレルによつて任意の常數の變化の方法を得た。此方法を用ゐて彼は攝動の問題を研究し、二個の惑星の場合に離心率、交點其他の長年變化を說明した。「三體問題」に近似的の解を與へて月の運動の理論に成功した最初の一人は彼であつた。彼は月の表の計算に對して嚴正な基礎を据えた。月の運動に關する是等の研究で彼は二個の賞を與へられたが、而かも是等は彼が盲目となつた時代に其子息等と二人の弟子の助力を得てなされたものである。

彼の論文の多數は聖彼得堡の學士院の又ベルリンの學士院の出版物中に收められて居る。千七百二十八年から千七百八十三年までの彼得堡の出版物は主として彼の論文から成つて居る。若し彼の全集を出版することゝすれば四

つ折の一萬六千頁を要すると言はれて居る。

彼の研究法は先づ一つの特別の問題に全力を集注し、かくて後其問題から生れて來る凡ての問題を別々に解決することであつた。而かも特別の問題に適當な方法を當嵌める彼の巧妙なるには何人も及ぶ所でなかつた。オイレルの如くかく書き又出版する習慣を他の數學者は長く眞似ることは六ケしい。蓋しかくすれば材料は忽ち手のつけやうがない程に多くなつて仕舞う。此點は彼の繼承者のラグランジュと全く反對である。ラグランジュの方はオイレルと異り、特別な實際的問題よりも寧ろ一般的で抽象的である問題を捕へた。かくてラグランジュの書き物はオイレルが長く物語つたものをば縮めて約說して居る。

ジアン・ル・ロン・ダラムベル（千七百十七年—千七百八十三年）は未だ幼兒であつた時に、巴里のノートル・ダムに近い聖ジアン・ル・ロン寺院側の小路に母の爲に棄てられた。一人の貧しい硝子屋の妻が彼を拾ふて養育した。傳ふる所によれば、彼が天才を發揮し始むるや、母は彼を迎へんとしたが、彼は「あなたは私の繼母に過ぎない、私の母は硝子屋の妻である」と答へたと云ふ。彼の父は收入をあげて彼を勉强させた。彼は最初法律を學んだが、數學に對する愛着心が强く、間もなく法律の勉强をやめた。數學者としての名聲が高く遂に齡二十四の時に學士院の會員とせられた。

千七百四十三年に彼は彼の名を有する原理即ち「加へられた力が有効な力と等價である」と云ふ一般的な原理の上に築かれた、Traite de dynamique を公にした。ダラムベルの此原理は彼よりも前にフォンテーヌによつて、又或る程度まではジヨン・ベルヌーリやニユートンによつても認められて居たらしい。併しダラムベルは之に明瞭な數學的形式を與へ且つ其原理の數多の應用を說いた。之は運動の法則を、之に關する推理をば解析的の言葉で、最も一般的の形で表はすことが出來るやうにする。

ダラムベルは千七百四十四年に之を流體の平衡と運動とに關する敎科書に又千七百四十六年にはベルリンの學士院から賞を得た風の原因に關する著述中に應用した。是等兩著述と千七百四十七年になした振動する絃の有名な問

題の研究中に、彼は部分微分方程式と遭遇した。かくて彼は此の如き微分方程式の研究の開拓者の一人となつた。彼は弦の振動に關する問題から出た $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ と云ふ方程式の一般的の解として次の式を與へた。

$$y=f(x+at)+\phi(x-at)$$

かくて、若しも y が $x=0$ と $x=l$ とであるとき消えるものならば、此の如き任意の函數は唯一つであることを示した。ダニエル・ベルヌーリはテーロルの與へた特別な積分から出發し、此微分方程式が

$$y=\alpha\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi t}{l}+\beta\sin\frac{2\pi x}{l}\cdot\cos\frac{2\pi t}{l}+\cdots\cdots$$

なる形ちの三角級數で滿足されることを示し、且つ此式が最も一般的の解であると主張した。オイレルは之の一般性を拒んだ、蓋し其論據とする所は、若し一般的のものであれば、此級數は變數の任意の函數を表はすと云ふにある。而かも是等の疑はフーリエーによつて消された。ラクランジユは上の級數の和を見出さんと勉めたが、ダラムベルは此式が發散的級數であるが爲めに、然することが宜しくないことを明にした。

彼の原理の助をかりてダラムベルの到達し得た最も美しい結果は優れた學者の頭をも惑はした歲差の問題の解決である。彼は千七百四十七年にクレーラウが送つたと同日に、佛蘭西の學士院に三體問題の解を送つた。此問題は數學者に普く趣味を感ぜしめた問題となり、彼等は競ふて他の人の解よりも優れたものを出さんと勉めた。二つの物體が、夫等の間の距離の自乘に逆比するやうな力を互に及ぼし合ふて居る場合に、是等の運動が如何になるかを決する問題は、ニユートンによつて完全に解かれた。「三體問題」は三つの物體が引力の此法則に從ふて互に作用し合ふ場合に三つの物體の運動が如何になるかを問ふのである。

今日に至るまでの所、此問題の完全な解は解析法を超越して居る。運動の一般的な微分方程式はラプラースによつて表明されたが、其方程式の積分を得るのは困難である。從來提出された「解」は是等三體中の一は太陽で地球の周を廻る月の場合か、或は一惑星が太陽と他の惑星との影響を受けて行ふ運動を求める特別な場合に於ける、近似價を得る簡便法に過ぎない。

負量の意義、微積分學の基礎、公算論の議論中には數學の哲學に就いて考を進めたものがある。併し彼の批評は必ずしも常に適切なものでなかつた。千七百五十四年に彼は佛蘭西の學士院の永久書記に任ぜられた。彼は其晩年には彼と**チテロー**とが企てた百科全書の大著に主に力を注いだ。千七百六十二年に**カザリイン**第二世が王子の教育を依賴したが、彼は之を謝絕した。又**フレデリツク**大王が强えて彼に**ベルリン**に來るやうにと招いだが、彼は一寸**ベルリン**に行いた丈で、其處に永住することを謝絕した。

アレクシス・クラウド・クレーラウ(千七百十三年―千七百六十五年)は神童であつた。彼は齡只十年にして**ロスピタール**の微積分學及び圓錐曲線法に關する著書を讀んだ。千七百三十一年に彼が齡十六の時に其原稿を完成して居た著書Recherches sur les courbes ā double courbureを公にした、これは非常に優雅な著述で科學學士院は爲に丁年未滿の彼を其會員とした。千七百三十一年に、**ニユートン**の表明した凡ての三次曲線は五つの發散的拋物線の何れかの投影であると云ふ定理の證明を與へた。**クレーラウ**は**モウペルチユイ**の知遇を得、彼が子午線の一度の長さを測定する爲めに**ラプランド**へ旅行した際に伴はれて行つた。其頃地球の形狀が相調和せざる議論の問題となつた。**ニユートン**と**フイゲンス**とは學說上から地球の兩極が扁平であることを結論した。千七百十三年頃**ドミニコ・カツシニ**は**ダンキルク**から**ペルピグナン**までに達する弧を測定し、其結果として、地球が其兩極に於いて細長くなつて居ると論じた。

かく〳〵も兩立せざる二結論を決する爲めに、今一度地球の測量を行ふことゝなつた。**モウペルチユイ**はかくて**ラプランド**での測定により地球が兩極に於いて細長くなつて居るとの**カツシニ**の說を破り**ニユートン**の說の正しいことを證した爲めに「地球を扁平にした人」と云ふ稱號を得た。遠征から歸へつて、千七百四十三年に、**クレーラウ**は**マクラウラン**の均質な楕圓體に關する結果に基づいて研究した一著述Théorie de la figure de la Terreを公にした。此著述中に**クレーラウ**の定理と呼ばれるもの、卽ち地球の楕率を表はす分數(d)と極に於ける重力の增加を表はす分數(w)との和が、力の單位を赤道に於ける重力で表はした場合に、赤道に於ける遠心力(C)の$\frac{5}{2}$倍である(卽ち$d+w=\frac{5}{2}C$)と云ふ、有名な定理

を包含して居る。此定理は地球の相次ぐ各層の密度の法則に關する假説には關係のないもので、これはクレーラウの研究の最も多くのものを包容するものである。トドハンターは曰く「地球の形狀に就いては、何人もクレーラウの如く多くの研究をなし得なかつた。此問題は、其形式こそ異なれ、今日も尙ほ其實質に於いてはクレーラウが殘したと同じ有樣で存在して居る。ラプラースのなした解析の結果はクレーラウの獨創力から出た理論を飾つたが併し理論其ものを變せない。

千七百五十二年に彼は聖彼得堡の學士院から Theorie de la Lune と云ふ論文によつて賞與を受けた。此論文は月の運動に始めて近代の解析法を應用したもので、其中に月の近點の運動の說明を含んで居る。ニュートンによつて說明せられずに殘つて居た此運動が、最初の程は、彼にニュートンの法則で說明し得ないらしく見えたので引力について新たな假說を提出せんとした。が、要心の爲めに計算をば高次の近似價まで進めて見た所が、其結果は觀測と一致するとの結論になつた。月の運動は同じ時頃にオイレルやダラムベルによつて研究された。クレーラウは當時太陽の近傍へ歸來すると期待されて居たハリーの彗星が千七百五十九年四月十三日に太陽に最も接近すべしと豫言したが、これは一ケ月遲過ぎるものであつた。第一階で而かも一次よりも高次の微分方程式に特異解を檢出した最初の人は彼であつた。

科學上の仕事でクレーラウはダラムベルとは、親しいと云ふよりは却つて互に敵視した有樣であつた。クレーラウは交際社會の寵兒であつたが、其處に花を咲かせんとの野心の爲めに、晚年には科學上の著述をなし得なくなつた。

ヨハン・ハインリツヒ・ラムベルト(千七百二十八年—千七百七十七年)はアルサスのシユールハウゼンで生れた貧しき裁縫師の子であつた。父の仕事を手傳ひながら他人の助けをからずに、彼は非常な勉强をなし初等數學の知識を得た。齡三十の時に、彼は或瑞西人の家庭敎師となり、勉强の餘暇を得るやうになつた。彼は己が生徒を伴ふて歐羅巴を旅行した間に、彼は主な數學者と相知るを得た。千七百六十四年に彼はベルリンに居を定め、其處で學士院の會員に擧げられオイレルやラグランジュと交ることを得た。彼は少し許りの年金を受け、又其

後「ベルリン暦」の記者となつた。彼の學問について多方面であつたことはライプニツツを回想せしめる。彼の「宇宙論に關する手紙」の中で、彼は星辰系に關する著しい豫言をなした。

數學で彼は數多の發見をなしたが、夫等は彼と同時代の大學者によつて擴張されて、其爲めに光を失はしめられた。彼の純正數學に關する最初の研究は $x^m+px=q$ なる方程式の根を無限級數に展開したことであつた。$ax^r+bx^s=d$ なる形ちの各の方程式が二つの仕方で方程式 $x^m+px=q$ に直ほすことが出來る故に結果として生じて來る二つの級數の一或は他のものは收斂級數で x の値を與へるものであることを見出した。ラムベルトの結果はオイレルを刺戟して四項からなる方程式に此方法を擴張させ、又別してラグランジユをして、ラグランジユの級數と稱せられるもので、方程式 $a-x+\phi(x)=0$ の根の函數を表はすことが出來ることを研究せしめた。

千七百六十一年にラムベルトは π が無理數であることを證明した一論文をベルリンの學士院に送つた。此證明はルジヤンドルの Géometrie の附記四の中に收められ、其處では更に π^2 までも擴張されて居る。三角法の中に今日 Sinh x, cosh x,……の記號で表はした雙曲線函數を導入するに至つたのも、ラムベルトの天才による。彼の著述 Freye Perspective (1759, 1773) 中には圖形幾何學の研究を含み、彼をしてモンジユの先驅者たる名譽を負はしめた。

彗星軌道の計算を簡單にせんとの彼の努力中に、圓錐曲線に關する若干の著しき定理を幾何學的に導き得た。其例は、次の如きものである。若し長徑を共有する二つの橢圓で二つの弧を取り、是等を結ぶ弦が相等しく、且つ夫れ〴〵の弧の兩端と焦點とを結ぶ動徑の和が矢張り相等しくなるやうにすれば、此等の弧と二つの動徑とで出來た兩方の扇形の比は兩橢圓の周の平方根の比に等しい。

ジヨン・ランデン（千七百十九年―千七百九十年）は英國の一數學者で、其人の書き物がオイレル、ラグランジユ、ルジヤンドル等の研究の出發點となつた。ランデンの主な發見は千七百五十五年の一論文中に含まれたもので雙曲線の各の弧は橢圓の二つの弧を用ゐて容易に其長を決定することが出來ると云ふので

あつた。又彼の"residual analysis"中で純正哲學的難關を明かにせんと勉めた。ラグランジュの Calcul des Fonctions は此着想に基づいたものである。彼は又三次方程式の根に關する代數式が微分及び積分學を應用して得られることを示した。而かも先見の明のある此學者の時の大部分は實社會の仕事に費されて居たのであつた。

エチエーヌ・ベッウ(千七百三十年―千七百八十三年)は佛蘭西の人で、通俗な數學教科書の著者であつた。其一著書 Théorie générale des Equations Algebriques (1779) の中に、一次方程式の一組に於ける消去法を記したが(これはオイレルによつても發明された)、此方法は實は千七百六十四年に出した彼の一論文で始めて公にされたものである。其處では行列式を用ゐて居るが、而かも其理論に立ち入つて居ない。合成式の次數に關する美しい一定理は彼の名で知られて居る。

ルイス・アルボガスト(千七百五十九年―千八百三年)はアルサスの人で、ストラスブルグの數學教授であつた。彼の主な著述 Calcul des Derivations (1800) は、彼の名で知られて居る方法、卽ち式が複雜して居る場合に、夫の展開式の相次ぐ係數をば相互から導き來ることを記して居る。ド・モルガンは此導來法の眞の性質は積分を伴ふ微分法であることを指摘した。此本に量の記號と分離して、始めて運算の記號が記されて居る。$\frac{dy}{dx}$ の代りに D_xy と云ふ記法を考案したのも彼である。

マリア・ゲータナ・アグネシ(千七百十八年―千七百九十九年)はミランの人で、語學者、數學者、及び哲學者として秀で、彼女の父の病中には、父に代つてボロニャ大學で數學教授の椅子を占めた。千七百四十八年に、此婦人は Instituzioni Analitiche を公にしたが、之は千八百一年に英語に翻譯された。"witch of Agnesi," or "Versiera" と云ふのは一つの平面曲線で、$x=0$ なる一直線と $\left(\frac{y}{c}\right)^2+1=\frac{c}{x}$ なる三次曲線とを含むものである。

ヨセフ・ルイス・ラグランジュ(千七百三十六年―千八百十三年)は凡ての時代を通じた最大數學者の一人で、チュリンに生れてパリーで死んだ。彼は佛蘭西系の人で、父はサルヂニャの陸軍の金庫を管理した人で、一度は富有であつたが、投機で其財產を全く失ふた。ラグランジュは父の此損失を彼に取つて幸運であ

つたと言ふて居た、蓋し然らざりしならば、彼は數學を一生の仕事として撰ばなかつたと思はれるからとの理由からであつた。チユリンの大學にある間に彼の天才は未だ其眞相を示さず、ジセロやヴアルジルが、アルキメデスやニユートンよりも彼の心を引いた。併し間もなく彼は古人の幾何學を賞讃するに至り、更にハリーの小冊子を熟讀するや、解析的の方法に其熱心を昂起し、遂に此方面を開拓して不朽の名譽を得るに至つた。

かくて彼は數學の研究に身を委ね、齢十七の時、チユリンの王立陸軍士官學校の數學の敎授となつた。助力又は指導もなしに彼は黽勉した結果、二ヶ年の後、當時の大數學者と肩を比べるに至つた。彼は己が生徒の力をかり一つの會を組織したが、夫が其後發達してチユリンの學士院となつた。其會の會報の最初の五卷は彼の早き頃の論文の大部分を藏して居る。齢十九の時、彼はオイレルに現今變數法 Calculus of Variations として知られる等周問題を取扱ふ一方法を報じた。之を見たオイレルは非常に感心し、此問題に關する自分の研究を公にすることを一時見合せることゝし、若きラグランジュが其間に研究を完了し其發表をなし得るやうにと好意を表した。ラグランジュはオイレルが變數法の創立に對して貢献したのと同じだけ矢張り成功して居たのであつた。所で此の學問がオイレルの手から出た所では解析的の基礎を欠いて居たのであつたが、ラグランジュは之を補うた。即ち彼の先輩が變數法を築いた幾何學的考察から此の學問の原理を分離した。オイレルは決定せらるべき曲線の兩端即ち此の積分の極限を固定せるものと假定したが、ラグランジュは此の制限を取除き且つ曲線の凡ての坐標が同時に變化し得るやうになした。オイレルは千七百六十六年に此の學問に變數法なる名を與へ、且つラグランジュによりて指示された方向に沿うて此の學を改良することに大いに盡した。

チユリンでラグランジュの注意を引いた他の問題は音の傳達であつた。Miscellanea Taurinensia 中に含まれて居る此の問題に關する彼の論文で若き此の數學者はニユートンの批評者として、又オイレル及びダラムベルとの間の仲介者として現はれた。一直線上にある分子のみを考へて、彼は此の問題をば振動する弦の運動を表はす部分微分方程式と同じものに直した。此方程式の一般積

分はダラムベルによりて二つの勝手な函數を含むものと發見され、かくて今や問題は一つの勝手な函數が非連續的なものであり得べきかの議論となつた。ダラムベルはオイレル、ダニエール・ベルヌーリに反對して之に對して否と主張したが、終りにラグランジユは時間 t に於ける弦の一點の位置を決定する爲めに其問題を論じて弦の原始的位置は連續的のものでなければならないと主張した。かくてラグランジユは此問題をば肯定的のものと決定した。

九年の間切磋勉勵の結果としてラグランジユは齡二十六年のときに歐羅巴に於ける名聲の絶頂に達した。然るに彼の烈しい勉強はさらでだに强壯でなかつた彼の身體をば著しく弱くし、彼の醫師は强いて休息と運動とをとらしめたけれども、彼の神經系は以後其の調子を充分に恢復せずして彼は絶えず幽鬱病の發作に襲はれた。

千七百六十四年にフランスの學士院は月の天平動の理論をば懸賞の題目として提出した。此問題は何故に月が只僅ばかりの變化丈で常に地球へ同じ面を向けるかを萬有引力の原理の下に説明するを要求するのである。ラグランは此賞をかち得た。此成功は學士院をして更に木星の四衛星の理論卽ち以前クレーラウ、ダラムベル、及びオイレルによりて解かれた三體問題よりも遙かに困難な六體問題を懸賞として提出せしむるに至つた。ラグランジユは是等の困難に打勝つた併し時間が短い爲めに此問題を充分に論ずることが出來なかつた。二十四年を經て此問題はラプラースによりて完成された。ラグランジユの其後の天文學上の研究は彗星の攝動(千七百七十八年及び千七百八十三年)ケプレルの問題、及び三體問題を解く一新法とであつた。

數學の大家と親交をなし得ばとの熱望を抱いてラグランジユはバリーに旅行し、其處でクレーラウ、ダラムベル、コンドルセ、アツベ・マリー其他の人々と談り大に愉快を得た。彼は其夏ロンドンへ旅行せんと企てたが、バリーである晩餐の後烈しい病氣に冒されてチユリンへ歸らざるを得なかつた。千七百六十六年にオイレルはベルリンを去つてセントペートルスブルグに行いたが、其去るに臨んで自分の位置を繼續するに足る學者はラグランジユのみであると彼を推薦した。ダラムベルも亦同じやうに彼をすゝめた。茲に於いてフレデリツ

ク大王はチユリンに使者を送つて、「歐羅巴の最大の王」は彼の朝廷に「最大の數學者」なる彼を招聘せんとする希望を告げた。 かくてラグランジユはベルリンへ行き、其處に二十年間止つた。 彼の仲間が何れも結婚して居るのを見、且つ彼等の奥さん達から結婚すれば始めて幸福なものであると說得されて彼も亦結婚をなした。 併し此の聯合が幸運なものでなく、間もなく彼の妻は死んだ。 フレデリック大王は彼を大に尊敬し、且つ屢々彼に生活を完全に規則正しくすることの効能を說いた。 之がラグランジユをして規則正しき習慣を養成せしめた。 彼は以後經驗の教える所によりて精神の幽鬱に陷らずしてなし得る以上に日々研究をなさなかつた。 彼は其論文をば書き始める前に充分に其考を鍊り、かくて之を書けば唯一つの修正だにすることがなかつた。

ベルリンに於ける二十年間に、彼はベルリン學士院の記事に數多の論文を續けさまに掲げ、且つ Mécanique Analytique と題する新機軸を發揮せる著述を公にした。 彼は方程式の解に關する研究で代數學を進歩させた。 代數的方程式を直接に解くのに二つの方法があり、それは代入の方法と組合の方法とである。 前者はフエラリ、ヴイエタ、チルンハウゼン、オイレル、ベツウ及びラグランジユによりて發展され、又後者はフアンデルモンド及びラグランジユによりて開拓された。

代入の方法では方程式の原形を變化して、其根の決定が一層簡單な函數(分解式)に屬するやうにする。 組合せの方法では此方程式の未知の根のある簡單な組合せ(型)の代りに輔助量を代入し、かくて與へられた方程式の係數の助けによりて是等の量に對して輔助方程式分解式が求められる。 ラグランジユは方程式のあらゆる既知の代數學的解法をば、其の根が求めらるゝ原方程式の根の一次函數である如きより低次の方程式の作法及び解法に歸着する一樣な原理に統一した。 彼は五次方程式は此方法によりては解くことが出來ない、蓋しかくすれば其の分解式は六次式となるからであることを示した。 彼の方程式に關する研究は彼がベルリンを去つた後まで續けられた。 Résolution des équations numériques (1798) なる論文で彼は連續分數によりて數方程式の實根に漸近する方法を述べた。 又其論文中には他の結果の數多ある中にも各の方程式が一つ

の根を有せざるべからずと云ふ定理の證明を含有して居る—此の定理は此論文の前には自明の理の如くに考へられたものであつた。此の定理の他の證明はアルガン及びガウスによりて與へられた。上記の著述への附記に、ラグランジュは任意の二項方程式の完全な代數學的方程式を成就するのにフェルマーの定理及びガウスのある注意とを用ゐた。

ベルリンにある間にラグランジュは數論に關する數多の論文を公にした。千七百六十九年に、彼は二次の不定方程式の整數の解を得たが、これは印度の循環法に似たものである。千七百七十一年に、彼は英國のジョン・ウイルソンと云ふ人によつて始めて言ひ出され、其後ワリングが Meditationes Algebraicæ 中に之を紹介したウイルソンの定理を始めて證明した。千七百七十五年に彼は如何なる條件の下に ±2 と ±5 とが (−1 と ±3 とはオイレルに論せられた)奇素數 p の二次剩餘或は非剩餘であるかを研究した。又千七百七十年には各々の整數は四つ又は四つ以下の平方數の和であるとのメツィリアクの定理を證明した。彼はフェルマーの $x^n+y^n=z^n$ に關する定理を n が 4 であるときについて證明し、又 $x^2+y^2=z^2$ であるならば xy は平方數でないと云ふフェルマーの定理をも證明した。

千七百七十三年に出した角錐に關する論文中にラグランジュは第三階の行列式を存分に利用し、其中で一行列式の平方は矢張り一つの行列式であると云ふことを證明した。併し彼は行列式の研究と銘を打つて直接に研究したことがない　さりながら他の研究の間に偶然今日行列式間の關係として知られて居る若干の恒等式を見出した。

ラグランジュは微分方程式についても數多のものを書いた。此部分はオイレル、ダラムベル、クレーラウ、ラグランジュ、ラプラース等の數學の最大學者によつて考究されたが、而かも此は數學の他の部分よりもより一層一定の方法や原理の組織的應用を許さない。ラグランジュは Calcul des Fonctions (Leçons 14–17) で特異解に關する規則を述べたが、夫は正しくはなかつた。但し此の如き解の幾何學的意義を始めて闡明したのは彼であつた。彼は二つの變數を有する第九階の全微分方程式に關するオイレルの研究を一般的のものとなした。又第一

階の部分微分方程式の解を與へ (Berlin Memoirs, 1772 & 1774)、是等の解をば任意の數の變數を有する方程式まで擴張し (Berlin Memoirs, 1779 & 1785) て、是等の特異解について記して居る。第二階の部分微分方程式に關する研究は**ダラムベル**、**オイレル**、**ラグランジュ**等によつてなされたが、此ことは既に**ダラムベル**の記事中に述べた通りである。

ベルリンにある時、彼は其最大著述 Mécanique Analytique (Paris, 1788) を書いた。彼は假速度の原理から力學の全系統を**サー・ウイリアム・ハミルトン**が「科學詩の一種」との適評を下した程優稚に又調和的に述べた。此著は解析的統一の最も良き例である、幾何學的の圖は何處にも全く挿入されて居ない。力學の二部分、靜力學と動力學とが各が初めの四編に相類似した有樣で論せられ、共に原理の歷史的感展を論じた一章を冠して居る。**ラグランジュ**は最小作用の原理を組織的に述べた。運動の方程式は其元來の形ちに於ては其系統の異なる分子 m 或は dm の座標 x, y, z を含んで居る。然るに x, y, z は一般に獨立なものでない、**ラグランジュ**は是等の代りに任意の變數 ξ, ψ, ϕ を採用し、是等によつて時刻 t に於ける點の位置を定めることゝした。是等のものは獨立なものと取ることが出來る。かくて運動の方程式は次の形の如きものとなる。

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\xi'} - \frac{dT}{d\xi} + \Xi = 0.$$

若し $\Xi, \Psi, \Phi, \ldots\ldots$ 等が一つの而かも同じ函數Vの ξ, ψ, ϕ に就いてとつた部分微係數であるならば、此方程式は次の如き形となる。

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\xi'} - \frac{dT}{d\xi} + \frac{dV}{d\xi} = 0$$

これは**ラグランジュ**の運動方程式の形ちである。力學が四元の幾何學として考へることが出來るとの注意は**ラグランジュ**に基して居る。又力學に**ポテンチアル**を導入したのも彼である。**ラグランジュ**は己が著述 Mécanique Analytique を**パリー**で出版せんことを熱望した。著書は千七百八十六年に既に印刷し得るやうに用意されて居たが、千七百八十八年まで發行者を見出すことが出來なかつた。其年に漸く發行したが、後數年にして尙賣れ殘つた分は彼自身買取ると云ふ條件で公けにされた。**ルジャンドル**は之を出版した。

フレデリツク大王の死後、科學者は最早獨逸では尊敬されなくなつた。ラグランジユはルイス第十六世の招聘に應じてパリーに移つた。佛蘭西の皇后は彼を厚遇し、彼の爲に住所をルーブルに賣ふた。然るに彼は長く續いた憂鬱病に罹かり數學に關する趣味を全く失ふた。爲めに二十五年の歲月を費さして大成し、漸く印刷を了したMécanique Analytiqueさへも二ヶ年間開かずに彼の机上に置かれた。其後彼はラヴオアジエーの感化を受けて化學に趣味を持ち始めたが、此學問は彼には代數學の如くに平易なものであつた。佛國革命の大變動は彼を再び振起させた。此頃天文學者ルモンネエーの若き學才のある娘が弧獨なラグランジユと交り遂に彼と結婚した。此結婚後彼は死するまで幸ひであつた。

彼は單位を天然に有する度量衡の制度を設定する委員の一人となつた。ラグランジユは千七百八十八年にロンドンで出たトーマス・ウイリアムスの一著書から其一般的概念を得た十進法を烈しく好んだ。ラグランジユは甚だ溫厚であつた爲めに一般の人々から尊敬を受け、ヤゴビ黨がラヴオアジエー、ラプラース其他の人々を排斥した後にも、尙度量衡の委員の長とせられて居た。併しラグランジユはラヴオアジエーの運命を見て警戒を加へ、ベルリンに歸らんとした。然るに千七百九十五年にパリーに師範學校が設立され、彼は勸められて其敎授の一員となつた。而かも彼は算術や代數學の基礎を若き生徒等に敎示する時もなく、間もなく其學校は閉鎖された。オイレルの代數學を增補したのは此頃からであつた。

千七百九十七年にÉcole Polytechniqueが設立されラグランジユも、亦其敎授の一人となつた。此學校の最も早き時代の勝利はラグランジユを解析法に復歸させたことであつた。彼の數學的活動が爆發した。彼はThéorie des fonctions analytiques (1797), Leçons sur le calcul des fonctions (1801), Résolution des equations numeriques (1798)を公にし千八百十年にはMécanique Analytiqueの訂正をなし始めたが其完成を見ずして死んだ。

Théorie des fonctionsは千七百七十二年の彼の論文に其胚子を有するもので、其目的とする所は、微積分の原理をば極限とか微分とか云ふ困難な觀念に立脚せ

すに而かも堅實な基礎の上に築かんとのことであつた。ジョン・ランデンの剩餘計算法も同一の目的を有するものであつたが、彼は之を知らなかつた。ラグランジュはテーロルの定理(此定理の有力なことを始めて指摘したのは彼であつた)を簡單な代數學を用ゐて證明し、然る後微積分學を殘らず此定理から開展して行かうとした。

當時微積分學の原理は是非通過せねばならない困まつた哲學的の難關を有して居た。ライブニッツの微分は滿足し得るやうな哲學上の根據をもつて居ない。オイレルの微分學中に、微分が絶對的の零として論せられて居る。ニュートンの極限比では、其大さを見出すことが出來ない比である、何となれば是等が捕へられて等式と直された瞬時には、最早や弦でも弧でもないからである。弦と弧がニュートンによつて、是等が消失して居る間にも、消失した後にも等しいものとせられなかつた、只之が消失する瞬時にのみ是等が等しいと考へられた。ラグランジュは言ふた、「其方法は量をば、言はゞ、量であるのを止めると云ふ狀態に考へる大さな不便がある、蓋し二つの量が有限である間は是等の比を能く意識することが出來るが、二つの量が同時に消失し去つた場合には其比が明瞭な精密な觀念を與へない」。ダラムベルの極限の方法は究竟比の方法と殆んど同じである。ダラムベルは變數は實際其極限に到達したものと敎へて居る。

ラグランジュが微積分學をば哲學的の難關から救ひ出さうとしたときは、實はカリブヂスの渦卷を避け得たが、其實シルラの危險に瀕して居たのであつた。彼がオイレルから引續いた當時の代數學は無限に關する誤れる見解の上に建てられて居た。無限級數の正しき理論が其時には設定されて居なかつた。ラグランジュはxに照らした$f(x)$の微係數をば$f(x+h)$をテーロルの定理で展開したときのhの係數と定義し、かくて極限などに全く引照せぬやうにと提議したのである。然るに彼は其收斂するや否やを決定せずして、無限級數を用ゐた、されば$f(x+h)$が常にhの昇羃級數として展開されるとの彼の證明は重大な缺點を含んで居る。

ラグランジュの微積分學を論ずる方法は最初の頃は大に稱讃を博したが、其

缺點は其實致命的のものであつた爲めに彼の方法も今日は概して捨てられたやうなものである。彼は其方法で彼自ら創めた記號を使用したが不便なものであるので、彼自らも自著 Mécanique の第二版で之を捨てゝ微分を用ゐた。かくて Théorie des fonctions の主たる目的が達せられなかつたが、其の副たる結果は甚だ大なるものであつた。夫は函數をば幾何學上又は力學上の考察から離して考へる純粹に抽象的の方法を取つたことである。高等解析の其後の開拓に、函數が主たる觀念となつた、されば、ラグランジュの此著述はカウシー、リーマン、ワイエルストラス其他によつて開拓された函數論の出發點であつたと考へられる。

無限級數の取扱でラグランジュは其早き時代の書き物中にはニコラウス・ベルヌーリ及びダラムベルを除く凡ての當時の數學者に共通な怠慢を表はして居る。併しより後の論文中にはより嚴正に之を論ずる曉光を示めした。即ち Calcul de fonctions 中にはテーロルの定理の極限に關する定理を與へて居る。ラグランジュの數學研究は玆に記したものゝ外尙ほ公算論、有限差、連續分數、橢圓積分等に關するものにも及んだ。彼の偉大な綜合力と抽象力とが至る所に表はれて居る。其點に就いては彼に匹敵する人を見ないが、而かも彼と同時代の人であるラプラースは其實際的の才能に於いては之を凌駕するものがあつた。ラグランジュは彼の一般的結果の應用をば他の人々に殘した、されば、ラプラースの最も主な研究の若干就中音の速度及び月の長期加速度に關する研究の如きはラグランジュの著作中に暗々裏に含まれて居た。

ラグランジュは非常に温和な人で常に議論を避け又談話をするのさへ極めて小心であつた。彼の言ひ出しの語は "Je ne sais pas" であるのが普通であつた。彼は其肖像を取られるのを厭ふたので、彼の肖像として傳へられたものが何れも學士院の集會の節に彼の知らぬ間に他の方がスケッチしたものであつた。

ピエール・シヨン・ラプラース（千七百四十九年―千八百二十七年）はノルマンヂーのボーモン・アン・オージュで生れた。彼の幼年時代のことは餘り知られて居ない。名聲の上つた後、彼は貧しく過した幼年時代のことを語るのを厭ふた。彼の父は小さな農夫であつた。彼の才能を認めた彼の富んだ隣人等は彼を助

けて學問をさせた。彼は通學生として**ボーモン**の陸軍士官學校に入學し、其後若くして其學校の數學の先生となつた。十八のとき彼は**パリー**に行き當時盛名を博して居た**ダラムベル**に紹介狀を携へて行つた。紹介狀が一向**ダラムベル**の注意を引かなかつた。併し若き**ラプラース**は之に屈せず、力學の原理について一つの手紙を此大幾何學者に書き送つた。所が**ダラムベル**は「君は紹介者を要しない。君は君自ら紹介した、私は君を助けやう」と答を送つた。**ダラムベル**は彼を紹介して**パリー**の陸軍士官學校の數學敎授となした。かくて彼の將來は安固になり、遂に彼の深遠な研究を始めて、佛蘭西の**ニユートン**の稱を受くるに至つた。

解析法に驚くべき程通曉した**ラプラース**は、天體に萬有引力の法則を、應用する未決の諸問題を研究し出した。其後の十五ヶ年間に天文學に關する彼の獨創的研究の大部分が現はれた。千七百八十四年に、彼は**ベツウ**に次いで砲兵隊の試驗官となり、其翌年學士院の會員となつた。彼は又**ビユロー・デ・ロンギチユード**の長となつた。彼は十進法の採用を助力し、又**ラグランジユ**と共に師範學校で數學を敎えた。

佛蘭西革命の間に凡てのものゝ改良に對する叫びが暦法にまでも及んだので、**ラプラース**は千二百五十年を以て始まる紀元を採用せんことを提言した。蓋し其年に彼の計算によれば地球の軌道の長軸が分點線と直角となつたからであつた。そして年は春分を以て始まり、標準子午線は百分法で**パリー**の東方一八五・三〇度から起すことゝした、蓋し此子午線で彼の提出した紀元の始めが夜半に遭遇するからであつた。併し革命論者は之を排して、新紀元の出發點を佛共和國の始めと一致するやうにした。

ラプラースは最も聰明な又深遠な科學者として全歐洲に其名を轟かしたのは當然のことであるが、彼は獨り科學上の名譽のみを以て滿足せず、政治上にも容喙したのは寧ろ彼にとつて不幸であつた。**ナポレオン**が皇帝となつた後に**ラプラース**は熱心に主張した共和政治の主義を突然棄てゝ、皇帝に忠勤を盡した。**ナポレオン**は彼に報ゆるに内務大臣の位置を以てした、併し六ヶ月の後其不適任の爲めに彼を其職から止めさせ、而かも彼の復讐を防ぐ爲めに彼を元老

院の議員となし其他種々の名譽を與へた。さりながらラプラースは千八百十四年には彼の保護者の退位を發言しブールボン家に忠勤を盡すことになり、侯爵とされた。かくも彼の性格の卑賤なりしことは彼の書き物からも分かる。Système du monde の第一版は五百の評議員會に献せられた。Mécanique Céleste の第三冊に序して此本の中に含まれて居る凡ての眞理中で最も尊いものは歐洲の平和建設者に彼の表はした感謝と忠勤とであると言ふて居るにも係はらず而かも退位以後に出版された Théorie analytique des probabilités の版からは元來附いて居た皇帝への献呈文を取去つて仕舞うた。

此の如くラプラースは政治上では事大主義であつたが、宗教と科學とに於いては、よし自らの信念が他の人々に如何に厭はれても、其信念を匿くすやうなことはなかつた。數學と天文學とでは彼の天才は類少ない光彩を放つて居る。彼は科學界に Mécanique Céleste, Exposition du systéme du monde, Théorie analytique des probabilités の三著述を與へ、又佛國學士院に數多の論文を寄せた。

吾等は之から彼の天文學上の研究を簡單に紹介する。千七百七十三年に彼は惑星の平均距離が不變であるか或は小さな週期性の變化をなして居るものであることを證明した論文を出した。此論文は太陽系の安定を確立するのに最初の而かも最も必要な一歩であつた。ニュートンやオイレルに太陽系に於ける力のやうに、其數が多く、其位置が變化し、其強さが相異るものに於いて、其系統の安定の條件が永遠に保持されて居ると云ふことは疑はしく思はれた。ニュートンは異なる天體の相互引力に由來する狂ひを直す爲めに折り〱神の手が介在せねばならないと云ふ考を以て居た。

今述べたラプラースの論文はラグランジュとラプラースとが其後惑星軌道の各要素の變化の極限に關して深遠な研究を發表し、交る〱他の研究よりもの卓越な結果を得、或は又他のものゝ研究を補充し合うた引續きの論文の最初であつた。ラプラースのこの論文は木星及び土星の理論の討究から發達したものである。是等の惑星の行動はオイレルやラグランジュによつて研究せられたが、滿足な説明を與へられなかつた。觀測は吾が月及び木星の平均運動に規則立つた加速度の存在を表現し、且つ土星の平均運動にも同樣奇妙な減少を示

した。　これによれば土星が遂には太陽系を脱し去り、又木星は太陽に落込むことになり、月が地球に落下するに至るが如き鹽梅になつて居る。　**ラプラース**は千七百八十四―八十六年の論文で、遂に是等の變化は通常の週期的攝動の一種で引力の法則に司配されるものであることを證明し得た。　かく有力な攝動の原因は二惑星の平均運動の通約し得ることにある。

木星系の研究中に**ラプラース**は各衛星の質量を決定し、且つ是等の運動の間に**ラプラース**の法則として知られる甚だ著しい簡單な關係を發見した。　是等は千七百八十八年及び千七百八十九年の論文で完結せられたが、是等の論文は他のものと一所に Mémoirs par divers savans 中に發表された。　千七百八十七年は**ラプラース**が月の加速度が地球軌道の離心率に於ける長期の變化に由來することを示したので記念される。　此發見で太陽系の安定に關して、存在した凡ての疑念を晴らし得たのであつた。　萬有引力の法則が正しくして、之によつて太陽系の凡ての運動を説明し得ることが確立された。

千七百九十六年に**ラプラース**は Exposition du système du monde を公にしたが、此書は數學抜きの通俗な天文書籍で、此學の發展史の大要を以て終を告げて居る。　此書中に彼は始めて彼の有名な星雲假説を述べた。　似よつた説は其以前千七百五十五年に**カント**によつて又**スヱデンボルグ**によつて提出されたが**ラプラース**は之を知らなかつたらしい。

ラプラースは避け得ない與件の外は一切觀測に訴へず、太陽系の供する凡ての力學上の問題をば完全に解析的に解した一著述をなさんとの考を抱いた。　其結果として生れたものは Mécanique Céleste であつて、**ニユートン**、**クレーラウ**、**ダランベル**、**オイレル**、**ラグランジュ**及び**ラプラース**自身が天體力學上になした凡ての發見を包含する組織的の大著である。　此著述の第一卷と第二卷とは千七百九十九年に出版され、第三卷は千八百二年に、第四卷は千八百五年に公にされた。　第五卷は分本で、第十一編と第十二編とが千八百二十三年に、第十三編より第十五編までは千八百二十四年に、第十六編は千八百二十五年に公にされた。

第一卷と第二卷とは天體の運動と、天體の形狀に關する一般的の理論を述べたものであり、第三卷と第四卷とは天體運動の特別な理論を述べたもので、就中

彗星や、吾等の月や、他の衛星の運動を論じて居る。第五卷は天體力學の簡單な歴史を以て卷を開き、附錄として著者自らのなした其後の研究を集錄して居る。此著述は彼の繼續者が只僅かの補充をなし得るに過ぎなかつた程に大作で又完全なものである。此著書の大部分はカール・ブルクハードによつて獨逸語に譯され千八百年から千八百二年までにベルリンで出版された。ナサニエル・ボーヂッチは千八百二十九年から千八百三十九年までの間に廣汎な註解を附した英譯を出版した。

Mécanique Céleste は讀み易い本でない。そして其理由は概して此學問の六ヶしいと云ふよりも寧ろ説明の不充分な爲めである。推理の複雜した連鎖をも省いて屢々何等の説明をも與へて居ない。此著書の原稿を印刷する爲めに彼を助けて校閲したビオが、曾つてラプラースが之を書いてから餘り間もない一句の説明をラプラースに乞ふた所が、彼が「……ことが見易いことである」と無造作に書き流した推理を回想するのにラプラース自らも一時間も費したとのことである。此著述はラプラースの研究を發表した要用な著書であるが、勿論彼の先人の研究をも澤山に包含して居る。即ち一世紀間の忍耐深き勞力の結果の綜合である。然るにラプラースは屢々引用して居た原著者を適當に承認して置くことを怠つた爲めに、讀者をして往々先人の發見した定理と公式とをばラプラースの發見と誤解せしめる虞がある。

傳ふる所によれば、ラプラースが Mécanique Céleste の一部をナポレオンに献呈した時にナポレオンは彼に「君は宇宙の系統に關して此大著を書いたが、而かも其中に造物主について全く記して居ないとの話だが」と物語つた。之に對してラプラースは卒直に「私はそんな假説を必要と思ひませぬ」と答へたそうである。ニユートンは引力の法則を用ゐて天體の力學に關する凡ての疑問を説明することが出來ず、かくて太陽系が安定であることを證し得ない、寧ろ之が不安定なものであらうとの考を抱きつゝ、神が秩序を回復する爲めに折り〳〵其手をのべるのであらうとの説をなした。然るにラプラースは引力の法則で太陽系は安定であることを證明し得た、されば其點に於いては神の力を煩はす必要がなかつた譯である。

是から吾等は進んで一層適切に純正數學に屬する方面の彼の研究を紹介しやう。是等の中で最も著しいのは公算論である。ラプラースは他の何人よりも此問題を最も進歩させた。彼は數多の論文を引續いて出版したが、是等の主な結果は Théorie analytique des probabilités (1812) 中に集錄された。千八百二十年の第三版は諸論と他の二篇とから成立つて居る。此緒論は Essai philosophique sur les probabilités と云ふ題で別册として出版されたもので、公算論の原理を應用とをば解析的の公式を利用せずに、立派に熟練な解說をなした本である、第一編は第二編に說いた公算論に應用した函數を導き出した理論を說いたものである。

ラプラースは公算論の著書中に定積分の近似價を求める彼の方法を說いた。一次微分方程式の解が彼によつて定積分の問題に引き直された。尙此著述で最も主要な部分の一は最小二乘法に公算論を應用したもので、之れによつて觀測から最も確からしい結果或は最も便利な結果を求め得ることが證明されて居る。最小二乘法の原理に關して印刷された最初の記事はルジャンドルの千八百六年に與へたもので、それには證明がない。ガウスは此方法を尙より早くから用ゐて居たが、千八百九年まで之を發表せなかつた。誤差の確からしさの法則を始めて印刷したものゝ中に與へたものは千八百八年にロバート・アドレーンが自分の出して居た雜誌 Analyst で發表したもので、此の法則の證明は其後ガウス、アイヴォリー、ハーシエル、ハーゲン其他によつて與へられた。併し凡て此等の證明は若干の難すべき點を有するが、ラプラースの證明は、恐らく最も滿足すべきものであらう。

ラプラースの公算論は甚だ讀みにくい、就中最小二乘法を論じた部分に於いて然りである。解析的運算は明瞭に述べられて居らず、尙又誤りもないではない。ド・モルガンの曰く「何人も解析的運算の結果を正しく與へるのに、彼程確かな人がないと同時に、其正しき結果が基づく種々の小さな考察を指示するのに不注意なること、彼の如きも亦ない」。

橢圓體の引力に關するラプラースの論文中で、最も主なものは千七百八十五年に出版されたもので、其大部分は Mécanique Céleste の第三卷に載せられて居る。之は任意の橢圓體の上にか或は其外に位する一點に、其橢圓體の及ぼす引力の

一般的問題を充分に論じたものである。球函數 Spherical harmonics 或は所謂「ラプラースの係數」は引力の理論、電氣學、磁氣學にとりて有力な解析の機關である。二元に對する球函數の理論は其以前にルジャンドルの論じた所であるが、ラプラースは之を適當に認めるのを怠つた。其爲めに彼等の間には面白からぬ感情があつた。

ポテンチアル函數Vはラプラースの屢々用ゐたもので、部分微分方程式 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ を滿足するものである。此式はラプラースの方程式と稱せられ最初、彼が此式が極坐標で表はされた時に示す一層複雜した形で與へたものである。併しポテンチアルの觀念はラプラースによつて解析に導入されたものではなく、其の功勞はラグランジュに歸する。

尙ラプラースの小さな發見の中には、二次、三次及び四次の方程式を解く彼の方法、微分方程式の特異解に關する研究、有限差及び行列式に關する研究、ファンデルモンドが特別な場合に對して既に與へたことのある行列式に展開の定理を設定したこと、第二階の一次方程式の完全積分の決定等がある。Mécanique Cé-leste の中で、彼は函數を級數に展開するラグランジュの定理を擴張したもので普通ラプラースの定理として知られるものがある。

ラプラースの物理學上の研究は甚だ廣汎なものであるが、茲には瓦斯中の音の速度に關するニュートンの公式をば、收縮の熱と稀薄化の冷却とに起因する彈性の變化を勘定に入れて彼の修正したこと、潮汐に關する關する彼の研究、毛細管の理論的研究、濛氣差の說明、晴雨計による高さの測定に關する公式を列擧する。

ラプラースの書き物は優雅と對稱との缺乏に於いてラグランジュの書き物と著しい反對を示して居る。ラプラースは數學をば物理學的問題の解決の道具と考へた。眞の結果が得られると、彼は其解析の道行を說明したり、其著作を研磨して、其數學を美化することを努めなかつた。晩年には主にアルキュイユの一別莊に退隱し、死に至るまで研究を續けた。彼はオイレルを非常に賞讃し、屢々言ふた。「オイレルを讀め、オイレルを讀め、彼は吾等凡ての先生である。」

アブニ・テオフイル・ファンデルモンド（千七百三十五年－千七百九十六年）は靑

年時代にはパリーで音樂を研究し、凡ての技術は一つの普遍的な法則に立脚するものであつて、此法則によつて何人も數學の助けをかりて作曲家となることが出來るものと主張した。彼は行列式の理論を始めて連續した論理的のものと組立てたので、此理論の創立者とも考へられる。方程式を解くのに、組合せの方法を考へ出したのは彼とラグランジュとである。

アドリアン・マリー・ルジャンドル(千七百五十二年―千八百三十三年)はパリーのマザリン・カレッヂで教育を受け、其處でアッベ・マリーについて數學を學んだ。彼は數學の才能があつたので、パリーの陸軍士官學校の數學教授となつた。其學校に居る間に抵抗を與へる媒質中で彈丸の描く道に關する論文を作つたが、夫はベルリンの學士院から賞を受けた。千七百八十年に高等數學の研究に一層時を献げ得るやうにする爲めに其職を退き、公けの事業に關する若干の委員會の委員となつた。千七百九十五年に師範學校の教授に選ばれ、其後又政府の若干の用を務めた。彼の温厚であつたのと、ラプラースが彼に對して親切でなかつたのとの爲めに、彼の天才と相應した位置が餘り彼に與へられなかつた。

○解析學者としては彼は**ラプラース**と**ラグランジュ**とにのみ次ぐ人で、主として、橢圓積分、數論、橢圓體の引力及び最小二乘法等に重要な貢献をなし、數學を進歩させた。**ルジャンドル**の著書の最も重なものは千八百二十五年及び其翌年に二冊として出版された Fonctions elliptiques である。彼は**オイレル**、**ランデン**、**ラグランジュ**等が殘した此學問を引續き四十年間研究し進歩させた唯一の人で、後に**ヤコビ**と**エーベル**とが其の研究をなし、立派な發見を加ふるに至つた。**ルジャンドル**は此題目に一つの獨立せる科學の有すべき聯絡と排列とを與へた。xに於ける四次の多項式の平方根に屬する一つの積分を以つて出發し、此の如き積分は其の根數をば $\Delta(\phi)=\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$ なる形式で表はせば $F(\phi)$, $E(\phi)$, $\pi(\phi)$ なる形で示される三つの典型的形式に戻され得るものであることを證明した。彼は又種々なる振幅及び曲率の橢圓について其の弧を計算するに必要な表の大著を企てた、かくてこれを用ゐて數多の微分を積分する手段を供給した。

橢圓函數に關する彼の研究の早き部分を含む出版物は彼の著 Calcul integral で三冊より成立するもの(千八百十一年、千八百十六年、千八百十七年)であるが、同

書中には彼のオイレル積分と名附けた定積分の二種類を充分に論じて居る。彼は又pの値が一と二との間にある場合の $\log\Gamma(p)$ 値を表にした。

最も早き時代の研究の一は廻轉橢圓體の引力であつて、それがルジャンドルに彼の名を冠せられて居る P_n 函數を暗示した。彼の此論文は千七百八十三年にフランスの學士院へ提出された。マクラウラン及びラグランジュの研究では廻轉橢圓體によりて引かれる點が其橢圓體の表面上或は其内部にあるものと考へられたが、ルジャンドルは任意の外部に存在する點に及ぼす廻轉橢圓體の作用を決定する爲めには、該點を通過し與へられた廻轉橢圓體と同じ焦點を有する他の廻轉橢圓體を考ふれば宜しいことを明かにした。橢圓體に關する他の論文は其後に現はれた。

ルジャンドルが絶えず新たな快心を以て任へた二つの家神は橢圓函數論と數論とであつた。後者に關する彼の研究と數多の散在する彼の先輩等が同じ題目について與へた理論とは彼によりて出來得る秩序的に綜合せられて、四折りの二大冊となりて Théorie des nombres, 1830 の名の下に公にせられた。此の著述の公表以前にルジャンドルは屢々豫報的論文を刊行したが、其の奥の院は自乘逆比の定理である、此の定理は以前證明なしにオイレルによりて不明瞭に與へられたものであるが、ルジャンドルに至りて始めて明瞭に提出され且つ一部分だけ證明された。

測地學上グリーニチとパリーとを連絡する委員の一人として仕事をして居る際ルジャンドルはフランス國内の凡べての三角形を計算した。是が恰かも平面三角形に於けるが如くに角に或修正を施して球面三角形を處理し且つ最小二乘法を用ゐて測地學曲線に關する公式と定理との樹立の機會を彼に與へ、ルジャンドルによりて是等が千八百六年に證明なしに始めて述べられた。

ルジャンドルは千七百九十四年に Elements des Géométrie を書いたが、此の書は大に流行し、大陸及び北米合衆國でユークリッドの著述の代りとして採用された。ユークリッドの此大競爭者は版を重ねること數多く、其後なる版には三角術の初歩及びπ及びπ^2の無理なることの一證明を含んで居る。ルジャンドルは平行線の問題に對して大なる注意を向けた。Elements の前なる版では「平行

公理」の正しいことをば直接感覺に訴へた。併し其後此「公理」を證明せんと企てた、而かも彼の多くの證明も彼自身を滿足させ得なかつた。學士院の記事の第十二卷に此問題の解決に對する彼の最後の試みを記した一論文がある。空間が無限なるものであると假定して彼は一つの三角形の三つの角の和が二直角を超過することが不可能であることを滿足に證明した。更に又若し角の和が二直角であるやうな任意の三角形が空間に存するならば凡べての三角形にとりても矢張り同じでなければならないと證明し得たが、而かも其後なる一段にて此和が二直角よりもより小なるものであり得ないと云ふことを證明する所で彼の證明は必然失敗した。若し三つの角の和が常に二直角に等しいと云ふことが承認せらる可くんば、其時こそ平行線の理論が嚴格に推論し得られる筈である。

ヨセフ・フーリエー（千七百六十八年—千八百三十年）は中央フランスのアウクセールで生れ、齡八年のとき孤兒となつた。友人の力によりて當時聖路加の寺院の僧侶等によりて指導されて居た彼の郷里の陸軍學校に入學することを得た。彼は其處で學問を學んだが、就中數學に於いて驚くべき成功をなした。彼は砲兵にならんと欲したが、其の門閥が低い（裁縫屋の子）ので其志願が次の如くに答へられた、「フーリエーは貴族でないから、假令彼は第二のニュートンであらうとも砲兵となることが出來ない」。彼は間もなく士官學校に於る數學講座に任用された。齡二十年のときに彼はニュートンの漸近法を改良した數方程式の解法に關する彼の論文を科學々士院の前で讀む爲めにパリーに行いた。此青年時代の研究が其後も彼の心を離れず、彼は之に關してポリテクニック學校で講義をなし、又ナイル河畔で此問題を開拓し、且つ此題目は彼の死が其出版に先んじたとき印刷の進行中であつた Analyse des equationes determines (1831) なる著述の一部をなして居る。此著書中に二つの撰ばれた極限の間に於ける實根の數に關する「フーリエーの定理」が記されて居る。ブダンは此結果を千八百七年に早くも之を公にして居るが、而かもブダンの公表以前にフーリエーがそれを建設したものとの證據がある。併し是等の花々しき結果も千八百三十五年に公けにされたスツルムの定理によりて其光彩を蔽はれた。

フーリエーは革命を進めることについて彼の本國で大に盡した。佛國革命の下に美術と科學とは一時榮える如く見えた。度量衡の改良は大なる考の下に企てられた。千七百九十五年に師範學校が創立されフーリエーは其最初の學生となつたが今や其講師となつた。彼の見事な成功は彼をしてポリテクニック學校に於ける一講座をかち得しめた。而かも彼は其後此位置を辭してモンジュ及びベルソレと共にナポレオンに從うて埃及遠征に出かけた。ナポレオンは埃及に學院を創設しフーリエーは其幹事となつた。埃及で彼は獨り科學上の仕事に從事するのみでなしに、大切な行政上の要務をも行うた。フランスに歸へつて後十四年間はグレノーブルで知事となつた。此時代に彼は固體中に於ける熱の傳達に關する大著述をなし、千八百二十二年に La Théorie Analytique de la chaleur なる表題で之を公表した。此著作は數學的物理學の史上一時機を劃する。「フーリエー級數」は其眼目をなして居る。此研究によりて一つの長き爭論は終を告げ、又任意の勝手な函數が一つの三角級數によりて表はされるとの事實が確定された。此大發見の最初の發表は千八百七年にフランス學士院の前で彼によりてなされた。三角級數 $\sum_{n=0}^{n=\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ は若し係數が $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(x)\sin nx\,dx$ で b_n も同じやうな積分に等しいならば x の各の値で $\phi(x)$ なる函數を表はすものである。フーリエーの解析に於ける弱點は此三角級數が實際函數の値へ收斂するものであることを一般的に證明し損じた所にある。千八百二十七年にフーリエーはラプラースを次いでポリテクニック學校の評議員會長となつた。

次ぎに近世幾何學の起源について述べる前に、簡單に高等解析法の大英國への移入徑路を記載することゝしやう。此は第十九世紀の最初四半期中に起つた所である。大英國が大陸に於いて科學が著しき進歩をなして居るのに比べて其の國內に於ける同じ學の甚だ進歩の後れて居るのを悲しむに至つた。千八百十三年に「解析學會」がケムブリッヂに創立された。此はジオルジ・ピーコック、ジョン・ハーシエル、チャーレス・バッベージ及び少數の他のケムブリッヂ學生等によりて、諷刺的に言明された如く、ニュートン式の點式に對抗して、微分に於けるライブニッツ式の記號即ち純正なDイズムの原理を開發するのを目的とし

て成立したものであつた。流れの記號$\dot{y}$を排斥して$\frac{dy}{dx}$なる記號をケムブリッヂに移植するに至つて彼の爭は終を告げた。此はニュートン式記號よりもライブニッツ式記號が優れたものであると云ふのではなしに、英國の學生等に大陸に於ける諸發見の莫大な書庫を此記號法の採用が開くことになつたと言ふ點で大なる進歩であつた。サー・ウィリアム・トムソン、テート及び若干の近代の著者は兩方の記號を共に用ゐるのを便利とした。ハーシェル、ピーコック及びバッベージは千八百十六年にラクロアの微積分學に關するフランス語の著述を英譯し、千八百二十年には之に二冊の例題集を添加した。ラクロアの著書は其時代に於いて微積分に關する最も行き亘つた最良の書であつた。解析學會の三人の創立者の一人なるピーコックは其後純正數學に關して最も多くの仕事をなした。バッベージはパスカルのに勝れる計算器の發明によりて有名になつた。併し此器械は政府との間の誤解の爲めと更に之を製作する爲めの費用を得ることが出來なかつたので遂に完成されなかつた。ジョン・ハーシェルは著名な天文者であるが、數學的解析法の新たな應用に關して彼のローヤル・ソサイエチイーに提出せる諸論又及び光學、氣象學、數學の歴史について百科全書へ寄せた諸篇で其の熟練した手腕を揮うた。

ジオルジ・ピーコック(千七百九十一年—千八百五十八年)はケムブリッヂのトリニチー・カレッヂで教育を受け、其處のローンデアン教授となり、後エリーの學長となつた。主な出版物は千八百三十年と千八百四十二年とに出版されたAlgebra及びReport on Recent Progress in Analysisとであり、後者は大英科學奬勵會の各冊に刊行された科學進歩の梗概の數多の報告の最初のものである。彼は代數學の基本原理を眞面目に研究し、且つ其純正な記號的特性を認めた最初の一人であつた。彼は稍々不完全たるを免れないが「等價な形式の永久性の原理」を開拓した。其は算術的代數學の記號に關する規則は矢張り記號的代數學にも應用されるものと假定して居る。此時頃グレゴリーは「記號的代數學の眞の性質に就いて」てふ一論文を書き、交換法則と分配法則とを明瞭にした。是等の法則は永き以前に微積分法に於ける記號的方法の發明者によりて注目されたものである。commutative及びdistributiveなる名稱を導いたのはセルヴォアが千八百十三

年になした所である。ビーコックの代數學の基礎に關する研究はド・モルガン及びハンケルによりて著しく進められた。

ジームス・アイヴオリー(千七百六十五年―千八百四十二年)はスコットランドの數學者で千八百四年より始め十二年間マルローの(今はサンドハルストにある)王立陸軍士官學校で數學教授となつた。彼は主として自修した數學者であり、而かも解析學會の創立以前に於いて大陸の數學に通じて居た大英國中恐らく唯一の學者であつた。一つの均質な廻轉楕圓體が外部の一點に及ぼす引力の問題が一つの關係せる廻轉楕圓體の內部に位する對應點に及ぼす引力を求むるてふより簡單な問題に直されると云ふ彼の論文(Phil. Tran., 1809)は大切なものである。これは卽ち「アイヴォリーの定理」として知られて居るものである。彼はラプラースの最小二乘法の解法に不適當に酷な批評を與へ且つ確からしさの理に依らずして其の原理の三つの證明を與へて居るが、而かも是等は滿足てふ點から遠く離れて居る。

近世幾何學の起源

デカルトの研究及び微分學の發明によりて、幾何學の解析的研究が一世紀程の間に非常に開展した。デザルグ、パスカル、ド・ラヒル、ニュートン及びマクラウランに依つて綜合的研究法の復活に對する努力があつたにも係はらず、解析的方法が殆んど爭ふべからざる優越を逞うした。綜合幾何學を再び戰場に持ち來たし、新たなる進歩を開拓するに至つた功勞は、モンジュの天才に由る。彼の著書 Géométrie descriptive は近世幾何學の驚くべき發展の始めを示すものである。

作圖幾何學の二つの主なる問題の一つ、卽ち幾何學的の大さを作圖に依つて表はすと云ふ問題は、モンジュの時代以前に非常な完全な域に達して居た。他の問題卽ち一平面內の作圖に依つて空間內の形狀に關する問題を解く問題は、彼の時代以前に著しき注意を受けた。彼よりも先輩で最も著名な學者は、此の方面では、フランスの人であるフレッツェル(千六百八十二年―千七百七十三年)であつた。併し作圖幾何學を數學の一分科として創立し、夫れに幾何學的一般性

と優雅とを寄與したのはモンジュの功績である。以前特別な且つ不確かな仕方で論せられた凡べての問題が今や少數の一般的原理の下に論せらるゝに至つた。彼は投影の軸として地平面及び垂直面の會合線を採つた。又一つの平面を此の軸卽ち基線の周りに於ける他の平面に廻轉することに依つて多くの利益を收めた。

カスパル・モンジュ(千七百四十六年—千八百十八年)はボーヌで生れた。彼の此の市の設計圖は或技師の注意を喚起し、彼はメッェールの工業學校の一位置を與へらるゝに至つた。彼が家柄が低い爲めに、陸軍に於ける官吏となることが出來なかつたが、測量と圖畫を敎授する學校の附屬に入ることを許された。築城の設計に關したすべての作業が算術の長い運算で行はれて居たことを見たモンジュは其の代りに幾何學的の一法を考へた。司令官は始めには之を見向きもせなかつたが、之を採用すると時間が非常に節約される。そこで一度それが試驗されるや否や、直ちに採用されるに至つた。モンジュは是等の方法を一層開拓し、かくて彼の作圖幾何學を創立した。其の時代には佛國の陸軍の諸學校の間に烈しい競爭のあつた爲めに、彼の新しき方法をは自分の居る學校の外他の學校に用ゐしめることが出來なかつた。千七百六十八年に彼はメッェールの數學の敎授となつた。

千七百八十年に彼は彼の學生の二人卽ちラクロア及びガイヴエルノンと話をした間に、彼は次の言葉を發した。「私が玆で計算に依つて爲し得たものをば、定規とコンパスとを用ゐてもやはり凡べて解くことが出來る。併し私は是等の秘密を君等に明かすことを許されて居ない」と。然るにラクロアはその秘密と云ふのが如何なるものなるかを自ら吟味せんと企て、種々の方法を發見してそれを千七百九十五年に公にした。此方法は同じ年にモンジュ自身によつても公表された。併しモンジュの最初の發表は彼が其の敎授に選ばれた師範學校でなした講義を速記者の記したものであつたが、其後それが改訂されて Journal des ecoles normales に掲載された。次の版は千七百九十八年より六年にかけて現はれた。師範學校が僅かに四箇月の短かき存在の後に、千七百九十五年に閉鎖された。同年にポリテクニックスクールが開かれ、その學校の開設に關して

は、モンジュが盛に盡力した。彼はその學校で作圖幾何學を教授し、ナポレオンに從つて埃及の遠征に出發するまで之を續けた。彼は埃及の學院の始めの總長であつた。モンジュはナポレオンの熱心な崇拜者であつた。その理由で彼のすべての名譽がルイス第十八世によつて剝奪された。この事件とポリテクニックの解散は激しく彼の心を刺戟し、彼は其後此屈辱の下に長く生存し居なかつた。

モンジュの數多の論文は決して作圖幾何學に限られて居なかつた。彼の解析的の諸發見もそれに劣らず注意すべきものである。彼は解析幾何學に線の方程式の組織立つた用法を導いた。彼は(以前レン及びオイレルによつて研究された)二次の表面に關し大切な貢獻をなし、且つ表面の理論と部分微分方程式の積分との間に一の隱れた關係を發見し、かくて兩方の問題に對して新たな光明を與へた。彼は曲線の曲率の微分を見出し、曲率の一般論を確立し、之を楕圓體に應用した。彼は虛數が輔助の量の中に含まれて居る時にも其解の正しさが害されざることを發見した。モンジュは千七百八十六年に Statics を、千八百五年に Applications de l'algebre à la géometrie を其後 Application de l'analyse à la géométrie を出版した。是等の最後の二つの書中に、彼の種々の論文の大部分が收められて居る。

モンジュは人を感化する力のある教師であり、彼の周圍に多數の學生を引き附けた。その中にチュパン、セルヴォア、ブリアンコン、ハチェット、ビオ及びポンセン等がある。

シャーレ・チュパン(千七百八十四年—千八百七十三年)は長年の間、巴里のコンセルヴアトアル・デ・ザール・エ・メチーエの重學の教授で、千八百十三年に Developments de géométrie に關する重要な一著述を公にし、其の中に面の一點の共軛切線と指示線の觀念を導いた。其論文は又チュパンの定理として知られた定理をも含んでゐる。二次の面と作圖幾何學とはモンジュが羅馬及び埃及に向つて出發した後に、ポリテクニックスクールで作圖幾何學の教授となつたジエン・ニコラス・ピエール・ハチェット(千七百六十九年—千八百三十四年)によつて盛に研究された。彼は千八百二十二年に Traité de géométrie descriptive を出版した、

既に述べた如く、フランスの技術學校で發達した作圖幾何學がドイツに技術學校の設立せらるゝと共に其處に移植された。カルルスルーへの一敎授なるゲー・シュライベルはそれに關する一著述を千八百二十八年及び其翌年中に公にしてモンジュの幾何學をば始めてドイツに擴めた。北米合衆國に於いては、嘗てパリーのポリテクニック・スクールで學んだクラウド・クローツエが千八百十六年に作圖幾何學をばウエスト・ポイントの士官學校に移植し、此の問題に關する最初の英語の著述を書いた。

ラザール・ニコラス・マルギュリット・カルノ（千七百五十三年―千八百二十三年）はブルガンヂーのノレイで生れ、郷里で敎育された。彼は陸軍に入つたが、數學的研究を續け、千七百八十四年に機械に關する一著述をなし、其の中に運動エネルギーは物體の衝突中に失はれるものであると云ふ最も早き證明を與へた。革命の起るや、彼は政治界に身を投じ、歐洲の同盟軍が千七百九十三年に百萬の軍隊をフランスに向けた時に、此の大敵に當る十四の軍隊を組織する大事業が彼によつて行はれた。彼は千七百九十六年にナポレオンのクーデターに反對した爲めに、流罪に處せられた。彼はゼネヴアに行き、其處で千七百九十七年に、今日も尚屢々引用せらるる Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitesimal と題する一書を出版した。彼は自らをば「諸々の王と兩立せざる敵」と宣言した。ロシヤの役の後に、其の帝國の爲めにではなしに、フランスの爲めに戰ふこととなつた。革命後、彼は流罪に處せられ、マグデブルグで死んだ。千八百三年の彼の Géométrie de position と千八百六年の彼の横斷線 Transversals に關する論文とは、近世幾何學に於る彼の主なる貢獻である。モンジュが主に三元幾何學に努力をして居る間に、カルノは二元の幾何學に執着した。幾何學に於る負の符號の意味を説明せんとする彼の努力によつて、彼は一種の位置の幾何學を創立した。併し其は現今の Geometrie der Lage とは異るものである。彼は形狀の投影的性質に關する一般的定理の一組を發見した、それをポンセレ、チヤスレ及びその他の學者が大いに發展させた。

ジエン・ヴィクトル・ポンセレ（千七百八八十年―千八百六十七年）はメッツの生れで、露西亞の役に從軍しクラスノアの戰場で戰死者として捨てられたが、生きて

サラトフに捕虜となつた。其處ですべて書籍を奪れたので、以前メッツの中學校やポリテクニックスクールでモンジュ、カルノ、ブレアンコンの著述を特別に學んだ記憶に依つて、數學を其の初步から學び始めた。かくて彼は獨創的研究に從ふことになり、其の方面で有名になつた。牢屋にある間に、彼は數學に對して恰もバンヤンが文學上でなしたと同じことをなした。卽ち現今に至るまで大なる價値を有するものとして繼續した一著述をなした。彼は千八百十四年にフランスに歸り、千八百二十二年に上に述べた著述卽ち Traité des propriétés projectives des figures を出版した。此本の中で彼は圖形の投影によつて、而かも變化せずに殘る圖形の性質を研究した。此投影はモンジュのなした如く、一定した方向の互ひに平行する直線によつてなされずに、而かも中心的投影法によつてなされた。かくの如くにして、彼以前にデサルグ、パスカル、ニユートン及びラムベルト等によりて用ゐられた透視畫法が彼によつて有効な幾何學的方法となつた。同樣に彼はド・ラヒル、セルヴォア及びゲルゴンヌの或想意を規則だつた方法に仕上げた、卽ち逆對極線 reciprocal polars の方法である。又此方法の結果として對應の法則 Law of duality を發見したのも彼である。尤もゲルゴンヌも此原理を獨立に發見した。ポンセレは應用力學に關しても數多の著述をなした。千八百三十八年に理科大學は彼を力學の講座を擔任せしむるに至つた。

フランスに於いてモンジュの學派が近世幾何學を創立しつゝありし間に、イギリスに於いてはロバルト・シムソン（千六百八十七年―千七百六十八年）及びマツセウ・ステワルド（千七百十七年―千七百八十五年）によつてギリシャ幾何學の復興に對する努力がなされた。ステワルドはシムソン及びマクラウランの弟子で、マクラウランに次いでエヂンバルクの敎授となつた。第十八世紀の間に彼とマクラウランとは大英國に於ける唯一の偉大なる數學者であつた。併し彼の天才は當時イギリスに流行した高等解析を蔑視する流儀の爲めに其の方針を誤られた。千七百六十一年に出した物理學及び數學に關する四つの論文中に、彼は困難な天文學上の問題の解決に幾何學を應用した。而かも是れ等の解が大陸に於てはより大なる成功を以て解析的に得られて居たのである。千七百四十六年に彼は General Theorems を公にし又千七百六十三年に Propositiones

Geometricæ more veterum demonstratæを著はした。前なる著述には六十九個の定理を載せて居るが唯その五個だけは證明を與へられて居る。之れは圓及び直線に關して數多の趣味ある新しい結果を與へた。ステワルドはギオヴアンニ・セヴア(千六百四十八年―千七百三十七年)の發見せる横斷線に關する若干の定理を擴張した。セヴアはイタリアの人で、千六百七十八年にメジオラニで、現今彼の名前の下に知られて居る定理を載せて居る一著述を公けにした。

第四編　今代の數學

此世紀に於ける程に數學がより以前にかくも熱心に且つ之に沿ふ成功を奏して研究された時代はない。以前の時代に於けるが如くに、其の進歩が一つの國或は二つの國に制限されなかつた。前代の間にはフランス人及びスヱッル人が獨り進歩の炬火を運んだが、彼等が今代に於いても矢張り大なる成巧を以て數學を進歩させた而かも其の間に他の國々からも熱心なる研究者の大なる軍隊が表面に現はれて來た。ドイツは長き睡眠から醒めて、ガウス、ヤコビやチリクレ及び一層今代の學者の一群を送り出し、大英國はドモルガン、ブール、ハミルトン及び現今尚生存しつゝある學者を生じ、ロシアも亦ロバチウースキーを戰場に送り、ノルヴエーはエーベルを、イタリアはクレモナを、ハンガリがボルヤイ兩氏を、アメリカ合衆國はベンジヤミン・ピーアルスを出した。

今代の研究者の生産力は偉大なものであつた。ケイリー教授は言うた「近世數學の大なる範圍の概念を與へるのが困難である。此處にいふ範圍なる言葉

は普通の意味のものでない、之によりて私は單に物體のなき平野の如き變化なき單調の廣がりを意味するのでなくして、而かも始めに遠方に見られた美しき地方の一部而かも其處に小山あり、谷あり、流あり、岩石あり、大木あり、花のある處で、之をば詳細に踏査し研究せる其全範圍を意味するのである。數學者にとつては、彼の學問に於いては、他の學問に於いて見ることの出來ない一つの誇がある。即ち各時代の功業が永遠に其學問の資となり、新たなる發見が古き研究を破ることが稀れで、又如何なるものも失はれ又は疎んせらるゝことのないことが彼等に喜びとされる所である。

若し近代に於ける數學上の或る擴張の效能が何處に存するかと問るゝならば、勿論現在に於いては如何にして是等を普通生活の問題或は物理學的科學の問題に適用し得るやうになし得るかが困難であると承認せねばならぬ。然るに吾等が之を爲し得ざるの故を以てかゝる研究の探求を非難する論點となすべきではない。第一に是等の抽象的開展が、力學的の技術に、物理學上の科學に、或は又數學の他の部分に何時、如何なる時に應用さるるに至るか分らない。例へば今日實地機械師に廣く用ゐらるゝ圖法靜力學の全問題はスタウドの位置の幾何學に立脚して居る。ハミルトンの「變化する作用の原理」は天文學に利用せられ、複素數、一般積分及び積分に關する一般的定理が電氣學及び力學の研究に利益を與へて居る。スポチスウードが言ふやうに「斯の如き研究の效能は決して過少に視るべきものでない、のみならず、豫め想像の出來るものでもない。例へば何人が形狀のカルキユラス或は代入の理論が通常方程式に關して大なる光明」を投ずるに至ることを豫想し得たであらう。又エーベルの函數と超越楕圓的超越數 hyperelliptic transcendents が曲線の性質に關して吾々に告ぐることがあるといふこと、或は運算のカルキユラスが地球の形に對する知識を得るのに補助を與へるに至つたのを何人が思ひ得たであらう。實用的應用の望のなき場合でさへも、高等數學の研究の大切なる第二の理由は數學が詩及び音樂の如くに、それ自身の爲めに開拓を要することである。

近代數學の大なる特性は、其統一的傾向である。近代は孤立せる定理に對しては、未だ發見されざる空想的の惑星から分離された隕石の如くに、思想の思ひ

かけざる新しい範圍を暗示するものとしての外には、大なる價値を置かない。すべての眞の科學に於けるが如く、數學では、如何なる問題もそれ自身を單獨に考へない、却つて常に他のものへ關係せるものとして、又は他のものから發達せるものとして之を講究する。　連續の觀念の發達は、近世研究に於いて主なる部分を占領して居る。　幾何學に於いては連續の原理、對應の觀念、及び投影の理論は近代の根本的觀念を形成して居る。　連續が平面上に於ける無限の所にある「圓」上の點に關して最も著しくそれ自らを主張して居る。　代數學に於いては近代の觀念が第一次の變形 Transformations 及び不變數 Invariants の理論に於いて、又均質及び對稱の價値の認識に於いて能く表はれて居る。

第一章　綜合幾何學

幾何學及び解析法の間の爭論が十八世紀の終り及び十九世紀の始めに起つたものであるが、今は終を告げた。　而かも何れの側でも勝利を得たといふのではない。　是等の何れをも征服せずして、却つて其の兩方を競立せしめ、一方の勢力を他のものに消化せしめることによつて最大の勢力が得られたのである。ラグランジュは彼の解析力學に於いてすべての圖形を避け得たことを誇りとしたが、彼の時代の以後になつて、力學は幾何學から大なる助力を受けた。

近世綜合幾何學は同じ時頃に數多の研究者によつて發見された。　之れは數多の定理、系、ポリズムス及び問題で成立する恐しい地獄を通過するに當つて、アリアドネーの糸の如くに學生を指導するのに役立つべき一般的方法に對する渇望の結果と見ることが出來る。　綜合幾何學は初めモンジュ、カルノ及びポンセレによつてフランスで研究せられ、夫よりドイツ及びスエッルではモエビウス、スタイネルの力によつて効果を收め、遂にはフランスではチャスレにより、ドイツではフォン・スタウド、イタリアではクレモナの力によりて、非常に完全な域に到達した。

アウグスツス・フエルチナンド・モエビウス(千七百九十年—千八百六十八年)はプルシヤのシュールフォルタの生れである、彼はゲッチンゲンでガウスの下で研究し、更にライプチッヒ及びハルレで勉强した。　彼は千八百十五年にライプチッヒで講

師となり、翌年天文學の助教授となり、千八百四十四年に教授となり、其位置を死するまで占めて居た。彼の研究の最も重要なるものは、幾何學に關したものであつた。是等はクレールの雜誌及び千八百二十七年にライプチッヒで出版されたDer Barycentrische Calcul と題する彼の有名な著述に載せられて居る。名の示す如く、此の計算法は重心の性質に基くものである。例へばSがA、B、C、Dといふそれ〴〵の點に置かれた錘りa、b、c、dの重心であるといふことが、方程式

$$(a+b+c+d)\times S=aA+bB+cC+dD$$

によつて表はされる。彼のカルキユラスは四重代數學の端緒であり、グラスマンの不思議な系統の胚子を含んで居る。例へば線の切片を表はす場合に、此著書では文字の順序即ちAB、BAを以て正負の區別を統一的に表はした。同樣に三角形、三角四面體に對しても同樣な區別をなした。三つの重さα、β、γに對して、其等の平面上の任意の第四の點Mが是等の重心となる得るやうに何時でもα、β、γの位置A、B、Cを與へることが出來るといふ注意がモエビウスを導いて坐標の新たなる系統を考へしめた。即ち其の坐標に於いては、一點の位置が一の方程式で表はされ、一つの線の位置は坐標そのものによつて表はされるものである。此計算法によりて、彼は代數學を用ゐて主として不變數の特性を表はす數多の幾何學的定理を發見した。例へば、非調和の關係に關する定理の如きそれである。モエビウスは又靜力學及び天文學に關しても著述をなした。彼は三角形の邊或は角をして百八十度を超過せしむることによりて球面三角法を一般的なものにした。

ヤコブ・スタイネル(千七百九十六年—千八百六十三年)即ち「ユークリッド時代以後、最大な幾何學者」と云はれる彼はベルンのユーツェンドルフで生れ、齡十四年まで讀書を學ばなかつた。十八年の齡のときにベスタロッチェの弟子となつた。其後彼はハイデルベルヒ及びベルリンで勉强した。クレールが千八百二十六年に彼の名前を冠する數學の有名なる雜誌を創刊した時に、スタイネルとエーベルとは其の重要な寄稿者となつた。千八百三十二年にスタイネルは彼のSystematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander を公にして、其中で空間の世界に於ける最も多くの種々なる現象は相互に關係して居

るものであるといふ機構を發見した。ヤコビ及其他の勢力によつて、千八百三十四年に幾何學の講座がベルリン大學に彼の爲めに開設せられた。彼は此位置を其後長き年月の病氣の爲めに起つた彼の死の時まで占めて居た。前に述べた著書で、對應の原理が先づ第一に導かれた。此著書とフォン・スタウドの著書とが、今日綜合幾何學が有して居る形式の基礎をなしたものである。彼は曾に二次の曲線及び二次の表面の理論を完成し得たのみならず、更により高次の曲線及びより高次の面の理論に對して大なる進歩を與へた。彼の力によつて、綜合幾何學は大なる進歩をなした。新なる發見は引續いて迅速に發見され、彼は是等の證明を記載する時をすら持たなかつた程である。クレールの雜誌に載せた「代數學的曲線の一般的特性」に關する論文中に、彼は證明なしに數多の定理を與へて居る。是等はヘッセイによつて「フェルマーの定理の如く現代及將來の人々にとつての謎」といはれた。是等の若干の解析的證明は、其後他の學者によつて與へられた。併しながらクレモナが最後に是等全部を一つの綜合的方法によつて證明し得た。スタイネルは第三階の表面の二つの主な特性を綜合的に發見した。即ち之れが二十七の直線を有すること、及び其頂點に二重點を有し且つ與へられた面のヘッセ線を其邊とする五邊形を含むことを發見した。第一の性質は英國でケイリー及びサルモンによつて稍々早く解析的に發見され、又第二のものはシルヴエスターに依つて發見された。此問題に關するスタイネルの著書は、ジュリユーテル、アウグスト、クレモナ及びスツルムの爲した重要な研究の出發點であつた。スタイネルは綜合法によつて極大極小に關しての研究をなし、其結果として當時全く變數法の解析的の力をも超越した問題の解法にも成功し得た。彼は hexegrammum mysticum を統一し、又マルフアッチの問題をも統一した。マルフアッチは千八百三年に三つの邊を有する角壔から三つの圓壔的の穴を截り、圓壔と角壔とが同じ高さを有し、且つ圓壔の容積を極大になるやうになす問題を提出した。此問題が他のもの、即ち今日一般にマルフアッチの問題として知られる、一つの三角形の内に三つの圓を内接せしめ、各の圓が三角形の二邊及び他の二つの圓に切するやうにするといふ問題に直される。マツフアッチは解析的の解法を與へた、併しスタイネルは證明なしに一つ

の作圖法を與へ、三十二の解のあることを注意し、且つ三つの直線をば三つの圓を以つて置換へることによつて、此問題を一般的になし、且つ三元の空間に於ける之に類する問題をも解いた。　此一般問題がシエルバツハ（千八百九年―千八百九十二年）及びケイリーによつて解析的に解かれ、又クレブツシユによつて楕圓函數論の加法定理の助けによつて解かれた。

スタイネルの研究は綜合幾何學に限られて居る。　彼はラグランジユが幾何學を嫌つたと同じ樣に、やはり解析法を嫌つた。　スタイネルの全集は千八百八十八年と其翌年とに出版された。

ミキル・チヤスレ（千七百九十三年―千八百八十年）はエペルノンで生れ、千八百十二年にパリーのポリテクニック・スクールに入學し、其後商業に從事したが、間もなく全時間を科學的研究に捧ぐるに至つた、千八百四十一年に、彼はポリテクニック・スクールで測地學及機械學の敎授となつた、其後パリー大學の高等幾何學の敎授となつた。　彼は幾何學上の問題に關する大なる著述をなした。　千八百三十七年に彼は彼の有名な著述Aperçu historique sur l'origine et le developement des méthodes en geometrie を出版し、其中に幾何學の歷史を載せ、又附錄として「科學上の二個の一般的の原理」に關する敎科書を與へた。　此著書は現今でも尙ほ標準的の歷史的記錄である。　附錄には homgraphy (collineation) 及び duality (reciprocity) の一般論を載せて居る。　對應なる名がヨセフ・シアッ・ゲルゴンヌ（千七百七十一年―千八百五十九年）に依る。　チヤスレは非調和比なる言葉を採用したが、これはドイッ語のドッペル・フェルハルトニス又クリフオルドのクロス・レシオに相當する。　チヤスレ及びスタイネルは各獨立して近世綜合幾何學或は投影幾何學を研究した。　チヤスレの數多の獨創的論文は其後ポリテクニック・スクールの報告中に出版された　彼は其中にニユートンの方法と異つた三次の曲線の研究を與へて居る。卽ち凡べての他のものが、それから投影によつて生せらるゝと云ふ五つの曲線が一つの中心に照らして對稱的であるといふことを示した。　千八百六十四年に彼はコムテ・ランデュ中に數多の論文を發表し、其の中で、彼は彼の發見した特質の方法及び對應の原理によつて數多の問題を解いた。　例へば彼は一平面上に於ける二曲線の會合の數多のものを決定し得た。　又特質の方法は計數幾何學

enumerative geometry の基礎を含んで居る。對應の原理の應用はケイリー、ブリル、ツエウテン、シュワルツ、ハルフエン(千八百四十四年—千八百八十九年)及び他の人々によつて擴張された。チヤスレの是等の原理の充分なる價値は千八百七十九年にハンブルグのヘルマン・シューベルトに依つて Kalkül der Abzählenden Geometrie の出版まで認らるゝに至らなかつた。此著述には計數幾何學の問題、即ち與へられたる定義に從ふ何程多數の幾何學的圖形が條件の充分な數を滿足するかを決定する問題について充分な議論を載せて居る。シューベルトは彼の計數幾何學を n 元の空間に擴張した。

無限に遠き像的の球圓の仕方によつて、圖形の非投影的性質を投影的幾何學に導いたのはチヤスレの功勞である。千八百四十六年に其の外部の點に對して一つの楕圓體の及ぼす引力の六つかしき問題をば綜合幾何學によつて彼の完全に解いたものは甚だ注意するに足りる。此問題が千八百三十五年に解析的にポアッソンによつて成功された。チヤスレ及びスタイネルの奮闘は綜合幾何學をば解析法の側に於ける重要な位置まで之を持來した。

カール・ゲオルグ・クリスチヤン・フオン・スタウド(千七百九十八年—千八百六十七年)はタウベルのロッテンブルグで生れた。そしてその晩年にはエルランゲンの教授であつた。彼の大著述は千八百四十七年にニュールンベルヒで出版された所の Geometrie der Lage 及び Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856-1860 とである。彼は代數的公式からも又度量衡的の關係からも離れて、特にスタイネル及びチヤスレの非調和比から材料をとり位置の幾何學を樹立した。此の學はすべての測定から離れたそれ自身で完全な科學である。彼の圖形の投影的性質は何等測定に關係を有せぬ。從つてそれを用ゐずして是等を確立し得るものであるといふことを明かにした。彼は自ら夫れを Würfe と呼べる彼の理論に於いて、更に、點の位置を定むるものとしての幾何學上に關する數の幾何學的定義を與へた。彼の著バァイトレーゲは投影幾何學に於ける虛の點、線、及び面の完全にして、且つ一般的な理論を始めて記載したものである。一の虛なる點の表現は此點を通る實線の上に兩方共に存する一定の方向をもてる捲込みの組合せに求められる。純粹に投影的であると共に、彼の方法は現實の點と線とによつて

解析幾何學上の虛量を表はす問題と密に關係して居る。之はマクスミリエン・マリーによつて組織的に企てられたが、併しその方法は全く異つたやり方をとつて居る。其後(千八百九十三年)アメリカのラウドも獨立した研究を爲した。フオン・スタウドの位置の幾何學は長い間人々の注意を引かなかつた。その理由は蓋し餘りに要點のみを記しただけであつたからであらう。クルマンが此の問題の研究に對する刺戟を與へ、已が著書、作圖靜力學をばフオン・スタウドの著述の上に築き上げた。其後フオン、スタウドの仕事の說明者が現はれた、卽ちストラスブルグのテオードル・レエが千八百六十八年に Geometrie der Lage を著はした。

綜合幾何學はローマ大學の敎授ルイギ・クレモナに依つて研究され、大なる進步を來した。Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane なる書籍に於いて彼は一樣な方法によつて數多の新しき結果を開拓し且つ其以前に解析法によつて到達し得たるすべての重要なる結果を綜合的に證明した。彼の書き物はクルツェによつてドイツ語に飜譯された。曲線の變形の理論及び曲線上の點の對應の理論が彼によつて三元の空間へ擴張された。第一階の面、第二階の面、第三階の空間曲線及び面の一般的理論は彼によりて最も注意された所である。

チューリッヒの工藝學校の敎授なるカール・クルマンが千八百六十四年に作圖靜力學に關する新機軸を發揮せる著述を公けにし、此の研究法をば解析的靜力學の有力な對手となした。クルマンの前にクーシネリは作圖計算法に留意したが、彼は投影幾何學を利用して近世幾何學を用ゐなかつた。クルマンは解析的力學が高等解析法に對して有すると同じ關係をば、作圖計算法が新たなる幾何學に對して有するやうな具合に保持し、かくて作圖計算法をば對稱的完全なものとして築き上げることを始めて企てたのであつた。彼は力と糸の多邊形との間の關係を表はす爲めに、逆數圖形の極の理論を用ゐた。彼は二つの圖形の平面を去ることなしに此關係を導き出した。併し若し多邊形が空間に於ける線の投影として考へられるならば、是等の線が"Nullsystem"の逆數要素として取扱ふことが出來る　此のことは千八百六十四年にクラーク・マックスウェルの行ひ且つ更にクルモナに依つて改良された所である。此の作圖計算法は彈性

線の連續的架徑の問題にモールの應用した所である。更にヘンリー・テー・エッチイは彼が反動多邊形と稱せるものを用ゐて、凝集せる重荷の下に、橋梁の受くる歪の極大量に關する問題を作圖的に解いた。尙千八百七十四年には、パリーのマウリス・レヴィーは標準的の著述 La Statique graphique を公けにした。

フランスでモンジュによつて科學に直され、且つ彼の相續者なるハチエット、デュパン、オリフィーア、グールネリー等に依つて開拓された作圖幾何學は、速かに他の國々の學者によつても研究された。フランスの學者が主として面及び面の曲率の理論に注意し、ドイツ及びスヰッツルの學者即ちシュライベル、ポールケ、シュレシンゲル及び就中フイドラーは投影幾何學と作圖幾何學とを一體となした。イタリヤのベラヴィチスはやはり同樣な研究法を採つた。濃淡及び影の理論は初めて上に述べたフランスの諸學者によつて研究され、ドイツに於いてはブルメステルによつて最も充分に研究された。

現世紀の間に甚だ著しき統一が企てられ、數學の最も古き部門の二つ、即ち初等代數學と初等幾何學との眞の根本に觸るゝに至つた。代數學では運算の諸則が擴張され、幾何學では公理が其の根本まで搜索せられ、かくてユークリッドの公理によつて定義された空間が、唯一の可能な衝突せざる空間でなきことを結論せらるゝに至つた。ユークリッドは彼の第一卷定理二十七に於いて「若し一直線が他の二つの直線と交はり、其同位角が互に等しくなるならば、此等の二直線は互に平行する」といふことを證明した。各の他の場合に於いて、是等の二直線が平行でないことを證明し得ざりし爲め、彼は一般に第十二の公理と稱せられ、又或人々によりて第十一の公理とせらるゝものに於いて之を眞理と假定した。然るに此所謂公理は公理でない。ユークリッドの假定を證明せんと數世紀の間、悲慘な而も結果なき研究の後に、數多の數學者の心に平行公理を假定することなしに一種の幾何學を創立し得られるかも知れないといふ大膽な觀念が浮んだ。ルジャンドルが嚴正な證明によつて、此公理を設定せんと企てつゝありし間に、ロバチユースキーは此の公理の矛盾を假定せる著書を公けにした。之れは根本的觀念に於ける不明瞭を闡明せんとして企てられた一種の論文の最初のものであり、かくて幾何學の範圍が之れによりて大に擴張さるゝに

至つた。

ニコラウス・イヴウアノウィチ・ロバチユースキー(千七百九十三年—千八百五十六年)はロシアのマカリエフで生れ、カザンで勉強し千八百二十七年より千八百四十六年までカザン大學の教授及び總長であつた。幾何學の根本に於ける彼の見解が、カザンの物理學及び數學の教授會に於ける談話中に初めて公けにされ、千八百二十九年に、初めてカザンのメッセンジャル紙上に印刷され、その後“New Elements of Geometry, with a complete theory of Parallels” の表題で、Gelehrte Schriften der Universrtäts Kasan, 1836–1838 に發表された。之れはロシア語で書かれたから、外國人に知られず且つ又其の本國でさへも、注意を惹かなかつた。千八百四十年に彼はベルリンで其の研究の概要を出版した。彼の稱する如く、ロバチユースキーは想像的幾何學を建設した。之れはクレフオードによりて、「全く單純な、惡しき假定を有せざる純なユークリッド」と稱せられたものである。此の幾何學の著しき點は、一點を通して一平面上に其の何れも此の與へられた平面上に與へられた一直線を切らないやうな無數の線を引くことが出來るといふことである。之に似た幾何學の一系統がホンガリーのボルヤイ兩氏によつても單獨に創立され、彼等によつて絶對的幾何學と稱せられた。

ウオルフガング・ボルヤイ・ボルヤ(千七百七十五年—千八百五十六年)はトランルヴァニアのスツエクレルランドに生れた。エーナで學び、更にゲッチンゲンに行き、當時十九才なるガウスと親密になつた。ガウスは常に言うた、「數學の哲理に關する彼の見解を充分に理解し得た唯一の人はボルヤイであつた」と。ボルヤイはマロス・ヴァサルヘリーの大學の教授となり、四十七年の間學生を教授し、トランシルヴァニヤの現在の教授の大多數が彼の學生であつた。此の著しき天才の最初の出版物は戯曲及び詩であつた。彼は古き時代の農夫の衣服をまとい、其の私的生活ならびに考へる型式が共に誠に獨創的であつた。彼は非常に温順なる人であつた。彼は常に言うた、「自分の墓場に記念碑を建てる必要がない、只三つの林檎の記念の爲めに一本の林檎の樹を植えよ。その二つの林檎はエブとバリーのもので、是等のものは共に地球をば地獄に化したものであり、今一つの林檎はニユートンのもので地球を再び天體の群に擧げたものである」と。彼

の息子のヨハン・ボルヤイ(千八百二年—千八百六十年)は軍隊で教育され、深遠な數學者、偉大なヴァイオリン奏者、且つ巧みな劍士として有名であつた。彼は嘗て十三人の士官から挑戰を受けた。但し其の際各試合の後に彼はヴァイオリンの一曲を奏しても宜敷しいとの條件を附せられたが、彼は斯くして十三人の人々に勝つことを得た。

ウォルフガング・ボルヤイの主な數學的著述は Temtamen juventutem studiosam in elementa matheseos puræ......introducendi, (1832–1833) の表題の下に二冊に分けて出版された。其本の附錄には、彼の子息ヨハンの書いた空間の「絕對的科學」と題する一編があり、その二十六頁がヨハン・ボルヤイの名を不朽になしたものである。彼は其の外に何物をも公けにしなかつたが、千頁以上の原稿を殘した。之等は有力な數學者によつて讀まれると云ふ幸運を有たなかつた。彼の父はホンガリーで、自分の子の仕事の功績を眞に認め得た唯一の人であつたらしい。三十五年の間、此の附錄もロバチェースキーの研究も共に同樣に殆んど顧みる人がなかつた。が、遂にギエセン大學のバルツアールが千八百六十七年に此の驚くべき研究に注意し始めた。ヨハン・ボルヤイの「空間の絕對科學」及びロバチェースキーの「平行線の理論に關する幾何學的研究」(千八百四十年)はテキサス大學のジオルジ・ブルース・ハルステッドが千八百九十一年に之を英譯したので英語を讀む人に容易に接し得らるゝことになつた。

普遍的幾何學に留意したのは、獨トロシヤ及びホンガリーの數學者のみでなかつた。テンタミンの一部がガウスに達した時に、ドイツ數學者のネストルともいふべきガウスが之を見て自分が長き以前に之を企てゝ而かもそれを仕上げせずに居つたものが充分に其處に論せられて居るのを見出した。千七百九十二年にガウスは早くも此の方面の研究をなし始めた。千七百九十九年に書いた彼の手紙は彼がユークリッドの系統の眞實なることを演繹的に證明せんと企てたことを示して居る。然るに其次ぎの三十年間の或場合に於いて、彼はロバチェースキーとボルヤイとの到達せし結論を得た。千八百二十九年に彼はベッセルに手紙を書き、「吾々が幾何學を先天的に完全なものと見出し得ぬとの確信が若し可能のものとすれば一層より確實になつた」といふことを表明

し更に、又、「若し數が單に吾等の心の産物であるならば、空間は又吾等の心の外にある一つの實在を有し、それに就いて吾等は先天的にその法則を充分に豫見し能はざるものである」と述べて居る。實に非「ユークリット幾何學」なる言葉はガウスの用ゐ始めたものである。近頃ミランのジェシュイット教父ゲロニモ・サツキリは千七百三十三年に、既に平行角に關するロバチユースキーの原理を發見して居たといふことが發見された。且つ又ハルステッドは千七百六十六年に、ランベルトが「平行線に就いて」といふ論文を書き、それが千七百八十六年に Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik に出版されたことを指摘した。之に依れば、(第一)、面—圓 surface-spheries に於ける平行公理の失敗が、角の和が二直角よりもより大なりといふ幾何學を與へる。(第二)、角の和が二直角よりもより小なりといふ幾何學を直覺的ならしむる爲めには、虛球 (pseudo-sphere) の助けを要する。(第三)、角の和が二直角と異なる空間に於ては絕對的寸法(ボルヤイの言ふ長さの自然的單位)がある。

千八百五十四年にガウスは彼の學生なるリーマンから驚くべき論文について聞かされた。此の論文でリーマンは更に歩を進めて、n 次に擴張されたる大いさの觀念を開拓し、且つ各の線が各の他のものによつて測定されると云ふ假定の下に、n 元の多樣によつて爲し得らるべき測定的關係を論じた。リーマンは此觀念を空間に應用した。彼は「境界なきこと」と、「無限なる範圍」との間に區別すべきことを敎へた。彼に從つて、吾々は空間についてより一層普遍的な觀念即ち非ユークリッド的空間の觀念を得た。然るに經驗によつて吾等の物理的空間が、よし正確でなくてと、少くとも高き近似の度に於いて、ユークリッド的空間であることを知る。リーマンの深遠な論文が、千八百六十七年に初めてゲッチンゲンの報告書に現はれた。此の研究の出でぬ前に、n 元の觀念がラグランジユ、プルユケル及びグラスマンに依つて樣々なる見解の下に養はされて居た。リーマンの論文と同じ時頃に、他の論文がヘルムホルツ及びベルトラミによつて書かれた。是等のものは過激な經驗學派を打つて論理派の示した勝利を充分に表はして居る。此の時代は實に此問題に對する活潑な論議の端緒となつた。若干の數學者—例へば、ベラヴイッチスの如き—は非ユークリッド幾何學及

びn元の空間に對して、何等大なる思想を見出さずして、之を巨大な諷刺又は數學の死せる生長と見た。ヘルムホルツの論文は「幾何學の根本に横はる諸々の事實」と題せられ、リーマンの觀念の數多のものを包容して居る。ヘルムホルツは此問題を講演並びに種々の雜誌によつて普及した。

ユーゲニオ・ベルトラミは千八百三十五年にイタリヤのクレモナで生れ、今はローマ大學の教授であるが、Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea (Giorn. di Matem., 6)と題する論文を書いた。之れは解析的である(從つて若し綜合法と解析法との間の區別を嚴格に守るならば他の場所で話すべきものかも知れぬ)彼は其の結果として、非ユークリッド幾何學の定理が、一定負曲率の表面上にその實現を見出すといふ、美しく且つ驚くべき結論に到達した。彼は又一定正曲率の表面を研究し、一定正曲率の空間が一定負曲率の空間中に包含せられるといふ趣味ある定理を以て終つて居る。ベルトラミ、ヘルムホルツ、リーマンの是等の研究が、一定曲率の表面上に、吾等は三種の幾何學、即ち一定負曲率の表面上に於ける非ユークリッド幾何學、一定正曲率の表面上に於ける球面幾何學、及び零曲率の面上に於るユークリッド幾何學を有し得るといふ結論に於いて絕頂に達して居る。此等三種の幾何學は互に矛盾するものでなしに、幾何學的三位一體の一系統の各々の枝である。超越空間の觀念が、イギリスでは、クリッフォードによつて巧に説明され、又普及された。

ウイリアム・キングドン・クリッフォード(千八百四十五年―千八百七十九年)はエクセッタで生れ、ケンブリッヂで教育を受け、千八百七十一年より死するまで、ロンドン大學の應用數學の教授であつた。彼が若死した爲め、その始めた種々な研究が不完全な儘に殘された。是等の中、On Classification of Loci, Theory of Graphs 等がある。その外、On the Canonical Form and Disection of a Rieman's Surface, 又 Biquaternions 及び Elements of Dynamic に關する未完の原稿等を書いた。曲線及び表面の對極線の理論は、彼及びレエによつて擴張された。彼の千八百七十八年の軌跡の分類は曲線の一般的研究の一つであつた。主として投影的の方向に於いてn元の空間の研究をなしたものゝ緒論であつた。此の研究は其後バデュアのウエロネス、チュリンのセグレ、ネープルスのベルチニ、アッシリ、デル・ベッツオ等に依

つて繼續された。

非ユークリッド幾何學に關するベルトラミの研究に次いで、千八百七十一年にフェリックス・クラインの大切な研究が出た。之は千八百五十九年のケイリーの五次方程式に關する第六の論文に立脚したものである。圖形の測定的特性が、投影又は線的變化に依つて變化せぬやうに表はし得ざるやが、チャスレ、ホンセレ及びラグエール(千八百三十四年―千八百八十六年)に依つて、特別な投影法を用ゐて解かれた。併し二點間の距離をばその二點を結ぶ直線が基本的四分によつて分割された非調和比の對數に、任意の常數を乘けたものと定義を下して、一般的の解法を與へるのがケイリーの仕事として殘つたものである。此の觀念を擴張して、クラインは平行定理から投影幾何學の獨立を證し、且つ適當に距離の測定の規則を撰擇して投影幾何學から球面幾何學、ユークリッド幾何學、及び疑似球面幾何學、卽ち彼の名稱によればそれ〴〵に楕圓幾何學、拋物線幾何學、双曲線幾何學を導き出した。此の暗示に富める研究は數多の學者、就中ネーブルスのバッタグリ、チュリンのオヴキジオ、ピザのバオリス、アッシリ、ケイリー、ミュンヘンのリンデマン、ゲッチンゲンのシェリング、チュビンゲンのスタール、クラーク大學のストーリー、ウュルツブルグのフォス、コックス、ブッフハイム等に依つて繼續された。n元の幾何學は主に測定的の方面に於いてジョンス・ホプキンス大學のサイモン・ニューコンム、ベルンのシュレフリ、カリフォルニア大學のストリングハム、ミュンスターのキリング、ジョンス・ホプキンス大學のクレイグ、ボンのリプシッツ等の學者に依つて研究された。ヘース及びキリングはかくの如き空間に於ける運動學及び力學を研究した。n元の空間に於ける規則正しき立體はストリングハム、ネブラスカ大學のテーヴイス、ベルリンのホッペ及び其他の學者に依つて研究された。ストリングハムは四元の空間に於ける規則正しき立體を吾々の空間に投影したものゝ圖を與へ、又シュレーゲルはかくの如き投影の模型を作つた。是等はダルムスタットのブリルによりて公にされた模型の一組中の最も奇怪なるものである。若し、第四元が存在するならば、吾々の不可能と考へる或種の運動が生起し得べきものであるといふ事實が指摘された。かくの如くにして、ニューコンムは、例へば密閉せる物質の殼をば延

ばし又は割くことなしに、單に曲り方を變へて其內側を表へと裏返へしすることの可能なるを證明した。又クラインは、結び目が物を縛し得ざることの可能を指摘し、ヴエロネスは又物體を壁を破らずして、密閉せる部屋より移すことの出來ることを證し、ビーアルスは四元空間に於ける物體は同時に二つの軸の周りに廻轉し得ること、或は又物體が其元の一つを失はずしては廻轉することの出來ないものであることを證した。

第二章　解析幾何學

前章に於いて、綜合幾何學の迅速な進歩を一瞥せんと勉めた。超越空間に關しては、吾等はやはり解析的方面の著述をも記した。近世綜合的幾何學と近世解析的幾何學とが、共通點を數多有して居り、共通名稱「投影幾何學」の下に括られ得るかも知れぬ。各々の研究法が、夫れ／＼他の研究方法よりも優れた點を有して居る。空間中に存在するものとして圖形を連續的に觀察することが前者の研究に非常な魔力を加へる。併しながら後者は或程度までよく確定されたおきまりの徑路が、夫れ自から思想を驅け拔き、それによつて獨創的研究を助くるといふ點に長所を持つて居る。ドイツに於てスタイネルとフォン・スタウドが、綜合的幾何學を開拓せし間に、プルユケルは近世解析幾何學の基礎を据へた。

ユリウス・プルユケル（千八百一年－千八百六十八年）はプルシャのエルベルフェルドで生れた。ボン、ベルリン、ハイデルベルグで研究した後に、彼はパリーに行き、モンジュ及び其の弟子等の講義を暫しの間聽いた。千八百二十六年と千八百三十六年の間に、彼は引續いてボン、ベルリン及びハルレで職を奉じた。彼はそれよりボンで物理學の教授となつた。千八百四十六年までの彼の獨創的研究は幾何學に關したものであつた。千八百二十八年と千八百三十一年に、彼は Analytisch-Geometrische Entwicklungen を二冊となして出版した。此書籍の中に、彼は省略記號を採用し（之は彼の以前にボビリエーが一層制限された仕方で用ゐたものである）之によりて代數學的消去法の長き計算をば幾何學的考察によつて避けることを得た。第二卷中には對應の原理が解析的に表はされて居る。彼の研究では彼の坐標の系統によつて對應及び等次の原理が自ら已に表はれて

居た。 彼によつて用ゐられた一様な系統或は三線系統は、モエビウスの坐標と全く同じものである。 解析的運算と幾何學的作圖の同定の中に、プルユケルは彼の證明法の本源を求めた。 彼の System der Analytischen Geometrie, 1835 は無限に位する、諸點の性質に基ける、第三階の平面曲線の完全な分類を含んで居る。 又 Theorie der Algebraischen Curven, 1839 は第四階の曲線の計數の外に、プルユケルの方程式として知らるゝ平面曲線の通常の特異性の間の解析的關係を與へて居り、それによつて彼は「ポンセレのパラドックス」を説明することが出來た。 ケイリーは言うた、此等の關係の發見は、「近世幾何學の全き題目の中で、比較を要せぬ程最も大切なものである」。 然るに、ドイツではプルユケルの研究が好意を以て迎へられなかつた、却つて彼の方法がスタイネル及びポンセレの綜合的方法と比較して見て、不生産的のものであると表明された！ ヤユビと彼との關係が充分親密な間接ではなかつた。 スタイネルはあるとき、若しプルユケルが寄稿を續けるならば、自分はクレールの雜誌に書くのを止めると言うた。 其結果としてプルユケルの研究の大部分は、外國の雜誌で發表され、彼の業蹟は彼の本國に於けるよりもフランス及びイギリスで一層知らるゝやうになつた。 尚又プルユケルに對し、物理學の講座を擔任して居ながら物理學者でないといふ批難も加へられた。 玆に於いて彼は數學を棄て、殆んど二十年の間、彼の精力を物理學に注ぐに至つた。 彼はかくしてフレネルの波面、磁氣學、分光學的分析に關する要用な發見をなし得た。 然るに彼の晩年に當つて彼は最初の嗜好たる數學に歸へり、かくて又新たなる發見を加ふるに至つた。 空間をば線の集合と考へることによつて、彼は空間の幾何學を新たに始めた。 直線を四つの勝手な變數を含む曲線と考へて、空間中の線の全系統を求め得た。 かくて此等の線を一つの簡單な關係によつて連絡し、線の「複系」"Complex" を得た。 更に此等を二重の關係と連絡して線の「適合」"Congruency" を得た。 彼の此の問題に關する最初の研究は、千八百六十五年にローヤル・ソサイエチィーに提出され、更に其問題に關する引續きの研究は、千八百六十八年に、Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement と題せられ、フエリクス・クラインは彼の遺著として之を出版した。 プルッケルの解析がラグランジユ、ヤコビ、ヘツヒ及び

クレブッシュの著述中に見る如き優雅を缺いて居る。長年の間、彼は幾何學の進歩と接せなかつた、從つて彼の晩年の數多の研究が、他の學者が旣に一層一般的に論じたものをもやつて居る傾向がある。それにも係はらず、此著述は嶄新で、而かも獨創的の思想に富んで居る。二次の複量の理論は、プルユケルによつて未完の儘殘されたが、それがフェリクス・クラインによつて繼續せられ、彼によつて彼の先生の想意が著しく擴張され且つ補充された。

ルドウイヒ・オットー・ヘッセ（千八百一年—千八百七十四年）はケエニヒスベルグで生れ、その鄕里の大學でベッセル、ヤコビ、リシエロ及びノイマン等の敎育を受けた。彼は千八百四十年に學位を受けて其大學の講師となり、千八百四十五年に助敎授となつた。其時代の彼の弟子の中には、デュレージ、ノイマン、クレブッシュ、キルヒホッフ等があつた。彼のキニヒスベルグの時代は、ヘッセにとつて最も活動の時代であつた。各々の新しき發見が彼の熱心を喚起し、更に大なる業蹟をなさしめた。彼の最も早き時代の研究は、第二階の表面に關したもので、一部分綜合的のものであつた。彼は九つの點が與へられた時に、かくの如き表面の第十番目の任意の點を求むといふ問題を解いた。圓錐曲線に關する類似の問題はパスカルによつて等邊六邊形を用ゐて解かれた。此時代の數學者に向けられた一つの困難な問題は消去法の問題であつた。プルユケルは、解析幾何學に於ける彼の特別な方法の主な利益は、代數學的消去法を避け得ることにあるとした。然るにヘッセは行列式を用ゐると、代數學的消去法が非常に容易になることを明かにした。彼は此方面の研究に於いて千八百四十年に消去法の一方法を公けにした。シルヴェスターによつて先んぜられては居るが、ヘッセは代數學上の進歩を第三階の曲線の解析的研究に應用した。彼は一次の置換法によつて、三變數を有する三次の形式をば唯四つの項を有する形式に直し、ヘッセの行列式と稱せられる三次の形式の第二次微分係數を有する要用な行列式に到達した。此のヘッセ行列式はケイリーによつて初めて研究された不變數の理論に大切なものとなつて居る。ヘッセはかくて、彼の行列式は、各々の曲線に對して、其曲線の二重點が、他の曲線即ちヘッセ曲線上の點となる如き他の曲線を表はすものであるといふことを明かにした。尙表面に對しても同樣な

結果を得た。(クレール雜誌、千八百四十四年)第三階の曲線に關する最も重要な定理の多くのものは、ヘッセの努力による結果である。彼は第十四階の曲線をも決定した。その曲線は第四階の一曲線の二十八個の複切線の五十六個の切點を通過するものである。此問題に關して彼がクレールの雜誌で千八百五十五年に公けにした大論文は、スタイネルが同じ問題に就いて試みた一論文の公けにされたと同じ時に發表された。ヘッセのケェニヒスブルグに於ける收入は彼のいや增す評判と相伴はなかつた。彼は辛うじて自らと家族とを支へ得たばかりである。されば千八百五十五年に彼はハルレに於けるより一層安樂な位置を承認し、更に其翌年ハイデルベルグに轉じた。その所に彼は千八百六十八年まで止り、それよりミュンヘンの工業學校の敎授となつた。ハイデルベルグにある間に、彼は彼の以前の研究を訂正し、又增補し、千八百六十一年に Vorlesungen über die Analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Flächen 2 Ordnung の題の下に之を公けにした。續いて一層初步的の著述をも出した。又その土地にありし間に、彼の所謂「ユーベルトラーグングス」原理なるものを大成した。之によれば一平面上の各點に對して、一直線上の點の一對が相應するものであり、かくて此平面の投影幾何學をば其直線上の點の幾何學に引直すことが出來る。

プルユケル及びヘッセの研究は英國でケイリー、サルモン及びシルヴェスターによつて繼續された。茲で先づ記しおくべきことはイギリスに於ける解析幾何學の早き著者の中に、ジェームス・ブース(千八百六年—千八百七十八年)といふ學者がありて Treatise on Some New Geometrical Methods を著はし、又ジェームス・マツクラフ(千八百九年—千八百四十六年)なるダブリンの物理學敎授で、二次曲線の理論に關する價値ある發見をなした人のあつたことである。幾何學の發達に關する此等の人々の影響は、數ふるに足らない、蓋し其の當時異なる國民間の科學的研究結果の交換が、期待され得る程に完全なものではなかつたからである。此の事實の說明として、フランスのチャスレは以前ドイツでスタイネルによつて解かれた問題に熱注し、又スタイネルが殆んど五年以前にケイリー、シルヴェスター及びサルモンによつて與へられた研究を公けにしたといふことでも分かる。千八百四十九年に、ケイリーとサルモンとは三次の表面上に直線を

決定し、其の主な性質を研究し、同時にシルヴェスターは千八百五十一年にかゝる表面の五面體を發見した。ケイリーはフルユケルの方程式をより高次の特異性の曲線までに擴張した。ケイリー自身の研究と、エルランゲンのノエテルの研究及びパリーのポリテクニック・スクールのハルフエン(千八百四十四年―千八百八十九年)パリーのド・ラ・クールルネリーの研究、チュビンゲンのブリル等の研究が、一曲線の各々の高次の特異點が簡單な特異點の若干數に相當するものであると云ふ結論に達した―即ちノード、普通のカスプ、二重切線及び曲率變遷點等の總合である。シルヴェスターは四階の一曲線である「捩れたデカルド曲線」を研究した。サルモンは數多の優れた教科書を引續いて出版し、代數學的及び幾何學的の新たな方法の知識を普及することに非常に貢献をなした。卽ち彼の著はした著書中には、次の如きものが有る。Conic Sections, Modern Higher Algebra, Higher Plane Curves, Geomtry of Three Dimensions 是等はチューリッヒのポリテクニクムのウィルヘルム・フイードラーが增補をした意譯に依つて、獨逸の學生に讀まれるやうになつて居る。

解析幾何學的の範圍に於いて次ぎの偉大な學者はクレブッシュ氏である。

ルドルフ・フリードリッヒ・アルフレッド・クレブッシュ(千八百三十三年―千八百七十二年)はプルシアのケェニヒスベルグで生れ、其土地の大學でヘッセ、リシエロ、ノイマンに就いて學んだ、千八百五十八年から千八百六十三年まで、カルルスルーへの工科大學の理論機械學の講座を擔任した。サルモンの著述を研究して、彼は遂に代數學及び幾何學を學ぶやうになつた。千八百六十三年にギエセンの大學に位置を得て彼はポール・コルダン(今エルランゲンに居る)と共に研究に從事した。千八百六十八年に、クレブッシュはゲッチンゲンに行き、其處に留つて、同地で死んだ。彼の引續いて研究した題目は、數學的物理學、變數法、及び第一階の微分方程式論、曲線及び表面の一般的理論、エーベルの函數及び幾何學に於ける其用法、不變數の理論、及び「面の投影法」Flächenabbildung である。彼はシルヴェスター及びスタイネルに依つて唱道された五面體に關する定理を證明した。又代數學的曲線の分類に關する基本的原理として、「不備」"deficiency" の規則正しき使用を爲した。此の不備てふ觀念は彼以前にエーベル及びリーマンに依

つて知られたるものであつた。彼が研究を始めた頃に、クレブッシュは、楕圓函數がマルファアチの問題を解くのに利用して大變有利なる事實を證明した。其論文の中に、含まれた觀念即ち幾何學の研究に高次の超越數を使用することが、彼の最大なる發見に彼を誘ふに至つた。彼は嘗にエーベルの函數論を幾何學に應用したばかりで無しに、更にエーベルの函數を研究するのに、逆に幾何學を役立たせた。

クレブッシュは行列式を豊富に使用した。曲線及び表面の彼の研究は、四つの引續いた點に於いて一つの表面と會合する線へ接觸點の決定を以て始められた。サルモンは是等の點が(11n−24)次の一つの誘導された表面と此表面との會合に存在すと云ふ事實を證明した。然るに彼の解法は餘り都合の好い形式をなしたものでは無かつた。之に關してクレブッシュのなした研究は解析法の最も美しき一片である。

一つの表面を他の表面の上へ現はすこと(Flächenabbildung)即ち是等の物が(一、一)對應を有すると云ふやうにすることが、初めてクレブッシュに依つて、充分に實現せられた所である。一平面の上に球を現はすことはトリメウス、ゲラル・マルカトール、ランベルト、ガウス、ラグランジュ等の注意を引いた古い問題である。是等が地圖の作製に有用なことは明かである。ガウスは其性質により容易に到達せんとの目的の下に一つの表面を他の表面の上に現はすことを初めて行うた人である。ブルユケル、チャスレ、ケイリー等は、かくの如くにして平面上に二次の表面の幾何學を現はし得た。更にクレブッシュ及びクレモナは三次の面の幾何學を設立することが出來た。其他の表面は近世の學者、就中エルランゲンのノエテル、アルメンナント、フェリックス・クライン、コルンドエルフェル、カボラリ、コペンハーゲンのツウテン等に依つて、同じ仕方で研究された。未だ一部分だけしか、解決されて居ない一つの根本的な問題は如何なる表面が一つの與へられた表面の上で(一、一)的對應を以て表はすことが出來るかてふことである。これ及び曲線に關する之に似寄つた問題がクレブッシュに依つて研究された。表面の間の高次の對應はケイリー或はノエテルに依つて研究された。表面の理論は又バリーに於けるソルボンヌの教授ヨセフ・アルフレッド・セレー(千

八百十九年—千八百八十五年)に依りても研究された。其他尚ほバリーのジアン・ガストン・タルブー、ダブリンのジョン・ケーゼー(千八百九十一年に死す)ダブリンのロバルツ、ブレスラウのジユレーテル(千八百二十九年—千八百九十二年)等も矢張り之を研究した。第四階の面がクレメンに依つて研究され、又フレネルの波面はハミルトンに依つて研究されたが、クンメルの四次の面の一種の特別な場合であつて、十六の典型的の點と十六の特異切面とを有するものである。

微分學はラグランジユ、オイレル及びバリーのミユーニエー(千七百五十四年—千七百九十三年)に依つて表面の曲率を計る尺度の決定に初めて應用された。續いてモンジユ及びチユバンの研究が現はれた、而かも是等のものが更にガウスの著述に依つて光彩を失ふに至つた。ガウスは幾何學者等に新たな並樹街道を拓いたとも云ふべき一つの新しい方法で、此六ケしい問題を論じた。彼の研究方法は千八百二十七年に公けにされた Disquisitiones generales circa superficies curvas 及び千八百四十三年と千八百四十六年とに公けにされた著書 Untersuchungen über gegenstände der höheren Geodäsie との中に記載せられて居る。彼は一點に於ける曲率の尺度をば其點に於ける二つの主な曲率半徑の積の逆數であると定義を下した。此の定義からして、グライフスワルドの敎授ヨハン・アウグスト・グルネル(千七百九十七年—千八百七十二年)の定理が生れて來た。其定理といふのは、一つの點を通じて引いた凡べての直角な切口の曲率の半徑の算術的平均が、其點に於いて其表面が持つて居るものと同じ曲率の尺度を持つて居る一つの球の半徑であると云ふのである。曲率の公式をガウスが誘導した方法はギエセンのハインリッヒ・リヒルド・バルチエル(千八百十八年—千八百八十七年)に依り、行列式を使用して簡單になされた。ガウスは、一つの表面が他の表面の上へ展開されるものであるならば曲率の半徑の尺度は各々の點で變化しないで其儘殘ると云ふことを明かにした。對應する點に於いて同じ曲率を有して居る二つの表面が其の中の一つが他のもの丶上へ、其の捲きをほどき得べきかと云ふ問題が、其曲率が一定である場合に限り、ミンチングによりて然りとの解答を與へられた。曲率の變化する場合は困難であるが而かもミンチング、バリーのボリテクニック學校のリオビユ(千八百六年—千八百八十二年)、バリーのボン

ネ(千八百九十二年に死す)等に依つて研究された。ガウスの曲率の尺度は曲面座標の函數として表はされ、それは微分不變數、或は微分變數の研究に刺戟を與へた。是等の問題はヤコビ、ノイマン、サー・ジームス・コックル、ハルフエン等に依つて研究せられ、且つベルトラミ、リー其他に依つて一般的理論に仕上げられた。ベルトラミは、又曲率の尺度と幾何學的公理の間の關係をも明かにした。

種々な研究が「位置解析法」"Analysis situs なる題の下に研究された。此の題目はライプニッツに依つて初めて研究せられ、其後ガウスによりて取扱はれ、彼の結びの理論は、近頃リスチング、シモニー、チンゲルテー及び其他に依つて彼等の地形學の研究に用ゐられた。テートはウイリアム・トムソンの渦動原子の理論によりて結びの研究をなすに至つた。リーマンの手腕によりて、位置解析法は微分的の捩の數多の組合せに依つて生起される變形の下に、而かも尚ほ變化せずに殘る物の決定を目的とするやうに發展させられた。彼の仕事の繼續中にミュンヘンのウオルター・デックは、三元の空間に關する位置解析法を書いた。未だ記さない幾何學的の著述の内で、今ミュンヘンに居るフエルヂナンド・リンデマンに依つて出版されたアルフレッド・クレブッシュの Vorlesungen über Geometrie と、フロストの Solid Geometry, ジュレージの Ebene Curven dritter Ordnung が參照に供せらるべきものである。)

第三章　代數學

近代に於ける代數學の進歩は三つの主要な題目の下に考へることが出來る、卽ち基本的法則の研究と新代數學の誕生、方程式論の發達及び近世高等代數學と稱せられるものゝ發達とである。

我々は既に代數學の根本的法則と關係してジオルジ・ピーコック及びグレゴリーに就いて述べた。併しド・モルガンが此方面に於いて非常に澤山の研究をなした。

アウグスツス・ド・モルガン(千八百六年—千八百七十一年)はマヅラ(マドラスの)に於て生れ、ケムブリッヂのトリニチー・カレッチで敎育を受けた。英國國敎の敎理に對して彼の抱いた疑が彼をしてM.A.の學位を受け、フエローとなること

を妨げた。千八百二十八年に、彼は新たに創立されたロンドン大學の教授となり、其處で、千八百三十一年から千八百三十五年までの期間、卽ち五ヶ年を除いて、千八百六十七年に至るまで教育をなした。ド・モルガンは一種獨特な、又男らしい人格者であつて、教師として甚だ優れた人であつた。彼の獨創的著述の値は吾等の數學的知識を充分綿密な論理的根據の上に立つて論じた所にあり、數學的智能其ものを增したといふのが、それに劣ると言ふもてよい。彼は自分が教育を受けたときに數學に於いて嚴密な論理の缺けて居ることを痛切に感じた。彼は或時に言うた、「數學者は論理學者が數學に向つて拂ふ位しか、論理學に對しても注意を拂はぬ。精密科學の二つの眼目は、數學と論理學とである。然るに數學的宗派は論理學の眼を拔き取り、論理學的宗派は數學の眼を拔き去つて、各の連中は共に二つの眼を以てするよりも一つの眼を以てする方が一層明かに見ることが出來る所以だと信じて居る」と。ド・モルガン自身は兩方の眼を以て觀察した人であつて、彼は論理學を數學的に解析し、又數學の法則、記號及び計算の論理學的解析を研究した。彼は斯くして Formal Logic ならびに Double Algebra を著はした。從つて彼は一方に純正哲學者なるサー・ウイリアム・ハミルトンとも深く交つた。彼の同時代の人でド・モルガン程に數學の歷史を深く讀破した人は甚だ少ないであらう。如何なる題目も彼にとつては平凡にして彼の注意を惹くに足らないと云ふやうなことは無かつた。されば彼は「コッカーの算術」の著者と圓の平方化の著述に關しても、矢張り微分學の發明の歷史について考究したと同樣に微細な事項までも深く研究したのである。彼の書いた多くの論說はペンニー及びイギリス百科全書の處々に見受けられる。千八百四十二年に彼の著はした Differential Calculus は尙今日でさへも標準的の著述であり、著者の獨創的研究に係はる多くの項目を含んで居る。「エンサイクロペーヂア・メトロポリタナ」の爲めに彼は函數論(記號的推理法の原理を記載して居る)に關係したもの及び確からしさの理論について書いた。千八百七十二年に著はした彼の Budget of Paradoxes と云ふ著述は有名なものである。其他彼は「代數學の基礎に就いて」と云ふ論文を屢々發表した。是等はケムブリッヂのフィロソフィカル・ソサイエ