中等算學月刊

第四卷　第五期

要　目

中華民國二十五年五月出版

中等算學月刊社發行

中華民國郵政局特准掛號認為新聞紙類

中華民國內政部登記證警字佰壹肆貳號

本社代表人　本刊編輯主任　本刊發行人

陸子芬　劉正經　余介石

江蘇省立南京中學　武昌國立武漢大學　四川省立重慶大學

編輯：張伯康　江蘇省立南京中學
夏伯初　武昌省立武昌中學
龍季和　北平國立北京大學

經理：李修睦　南京市立第一中學
管公度　英國倫敦倫敦大學
魯大庸　四川省立重慶大學

特約發行

南京太平路中248號　中央書局　(電話：23638)

投稿規約

1. 本刊以供給中學師生補充算學教材，引起研究興趣爲宗旨，如蒙賜稿，至所歡迎.

2. 來稿以簡明淺易，能合中等算學程度爲宜。 如屬譯作，務請註明原文出處.

3. 來稿務宜謄正，萬勿過於潦草。 格式每頁二十五行，每行三十五字。繪圖請用黑色墨水，精確作好，以便製版.

4. 來稿內容，本刊有修正之權，其不願修改者，請於寄稿時聲明.

5. 來稿除寄稿時特別聲明並附足郵費外，概不退還.

6. 來稿登載後，酌贈本刊若干期，以答雅意，非敢言酬也.

7. 來稿請寄南京南捕廳鍾英中學本社，或武昌珞珈山武漢大學本社.

預定辦法

1. 定閱者請參閱本刊封面後幅內定價表，註明起訖期數將款項惠寄南京太平路中央書局，收到後卽發正式收據爲憑.本刊每期出版後，儘先發送不誤.

2. 定閱者須將通信處詳細註明，如中途改變地址，請卽來函通知該局，否則如有遺失，恕不負責.

武漢社址
武昌珞珈山
國立武漢大學

中等算學月刊

第四卷　第五期

南京社址
南京南捕廳
鍾英中學

目　次

中華民國二十五年五月號

*C423,1-25:3

中華書局出版

補習「算學」應備之參考書

增訂 **數學辭典**

布面精裝一冊 普及本二元五角

倪德基 酈祿琦編 陳潤泉增訂

本書內容：㈠辭典，㈡英漢名詞對照，㈢數學用略字及符號，㈣定理及公式，㈤數學用諸表，㈥度量衡及貨幣表，㈦外國數學家事略，㈧本國數學家事略。辭典之部，原約二十五萬言，復經重加增訂，材料加多，約三十萬言。舉凡算術、代數、幾何、解析幾何、微積分諸科之定義、定理、術語、公式及表，已搜羅殆盡。較之他書之東鱗西爪，缺而不全者，便利良多，洵為數學書中之寶鑑。

數學公式 王永吳 胡樹楷編

精裝 並裝各一冊 二元 一元五角

算學通論（中等算學研究會叢書） 余介石編著 八角

四位算學用表（附初等算學基本公式及法則） 余介石編 四角

五位算學用表（附中等算學基本公式） 余介石編 六角

▼算術

算術應用問題解法 許立紀編 六角五分

算術問題解法指導 匡文濤編 四角

中等英文商業算術（英文本） 英國蔡博敏編 一元六角

Middle School Arithmetic

中等英文商業算術答案（英文本） 英國蔡博敏編 二角五分

Answers for Middle School Arithmetic

▼代數

代數學問題解法指導 匡文濤編 四角

方程式論（算學叢書） Florian Cajori著 倪德基譯 一元二角

▼幾何

幾何作圖題解法及其原理（中等算學研究會叢書） Julius Petersen著 余介石譯 五角五分

平面幾何學問題解法指導 匡文濤編 四角

三S平面幾何學 仲光然 嚴幼芝 徐任吾譯 一元七角

Schultze-Sevenoak-Schuyler: Plane Geometry

三S平面幾何學習題詳解 朱文熊著 二冊 ㈠一元六角 ㈡二元二角

三S立體幾何學 仲光然 嚴幼芝 徐任吾譯 九角

Schultze-Sevenoak-Schuyler: Solid Geometry

立體幾何學問題解法指導 匡文濤編 二角五分

▼三角

平面三角法問題解法指導 匡文濤編 二角

▼分析

微分學 段子燮 何魯編著 一元

〔各級算學教科書詳見圖書目錄〕

歐几里得如何用他的圓規

余　介　石

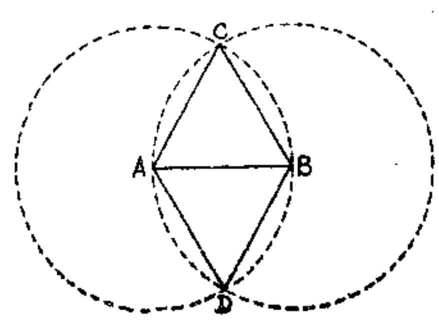
現在我們用圓規時，可以先張開圓規兩脚，就已知線段比定長度，再移圓規到他處作圓或弧，如三S幾何 §39 的簡易作圖題一，和溫德華士幾何命題二十六所述的作圖題，皆是如此。這樣就等於暗設圓規離開已知線段，移至他處時，其兩脚尖的距離，不至變動。我們的老前輩歐几里得先生，覺得如此做法，卽使事實上無甚防礙，理論上儘可不必多此一舉，加些不相干而非必需的暗設條件，總是不十分妥當的。

要知道這位老前輩如何用他的圓規，且看他所編述的幾何原本。

翻開他老先生的大作一看，第一命題（定理及作圖題在幾何原本中都叫做命題）所說的種種，和現在流行的幾何教本，眞有大大的不同。

第一命題　在已知線段上求作一等邊三角形．

設 AB 爲已知線段，以 A 爲心，AB 爲半徑作圓，再以 B 爲心，BA 爲半徑作圓，二者相交於 C 和 D，則 △ABC，△ABD 爲所求的三角形。



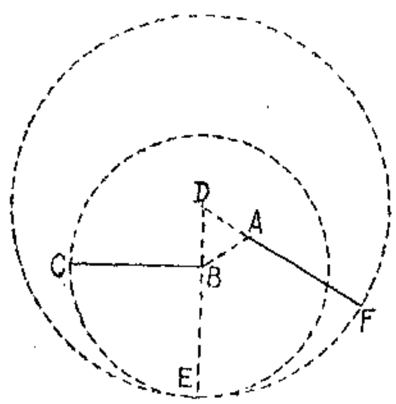
請再看第二命題，便知他用意所在：

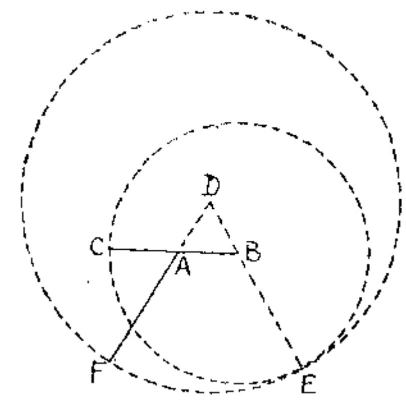
第二命題　求作一線段，以已知點爲端，而與已知線段等長。

設 A 爲已知點，BC 爲已知線段。以 B 爲心，BC 爲半徑作一圓。

(1)　若 A 點不在線段 BC 內，則聯結 AB，於其上作等邊三角形 ABD．又聯 DB 延長之，與所作圓交於 E．再以 D 爲心，DE 爲半徑作圓。最後聯結 DA，延長之交頃所作之圓於 F；如是則 AF 爲所求的綫段。

(2)　若 A 點在線段 BC 內，作法仍舊相同，兩圖均示於次：—





本來可以極簡單化的作圖，竟不惜費如許麻煩，他老先生眞可算是二十四分的謹愼，似乎無可再加疵議了。但是智者千慮，必有一失，我們何以知道第一命題內二圓必然相交呢？又何以知道第二命題內 DB 之延長線，必和首先所作的圓相交呢？這還不是暗設的事項麼？（可參看拙作'幾何證題法各論'文中第 2 節，該文載本刊四卷一期。）

× × × × × ×

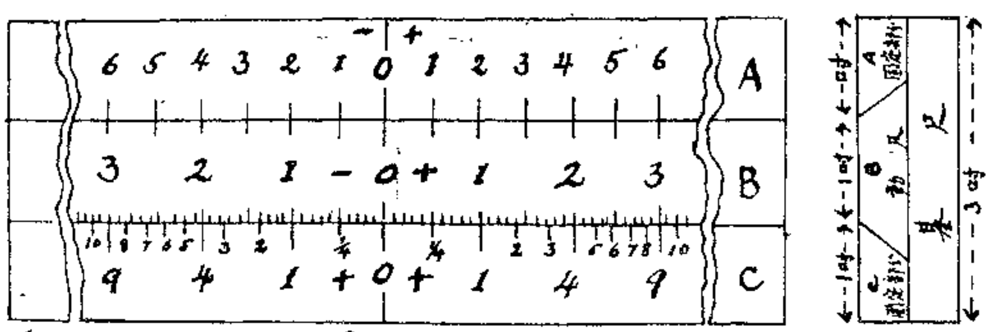
二次方程式計算尺

林同環譯

原文題為 A Slide Rule for Quadratic Equations, 載於1935年十一月號之 School Science and Mathematics 中, 著者 I. C. Barker, 合併聲明.——譯者.

此尺雖頗簡單，而能引起吾人對於二次方程式之興趣。 無論二次方程式是否有因數，僅須 x^2 之係數為1者，此尺皆可以最簡捷之法解答。若 x^2 之係數非1者，亦可求至最近一位小數為止。且可指明其根是否為虛數。此尺價廉而工省，故於手工班上或家庭之中皆可製造。 尺上之刻度數目，可於算學班上，由教員指導為之。

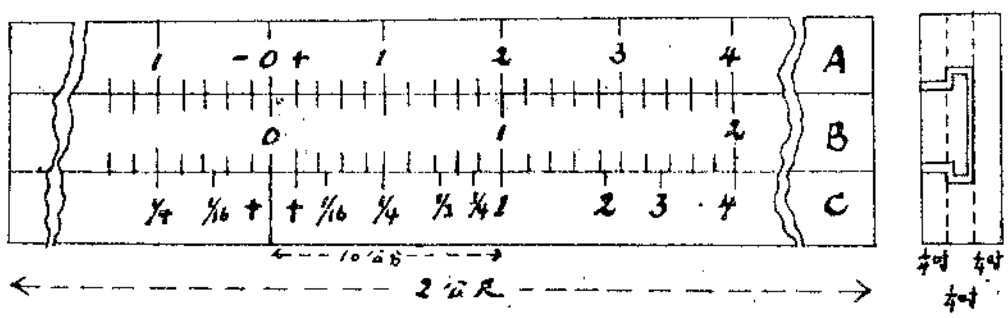
尺之組織係由一基尺及動尺所成。 基尺上刻有 A，C 兩標度，動尺上有 B 標度。設 B 之數為 N，則 A 為 2N，C 為 N^2。 至於尺之長短，闊狹，厚薄等，尤其是長短，則隨作者之意。 茲擬標準如圖:



此為製造此尺之最簡之法。 若有充分之時間，可依個人之意見，將其製成精緻，準確而堅固。

至於比例尺上之刻度數目，則因十進制易於刻畫，故以米制為最適宜。先取尺之中點，定之為0，於動尺 B 上，左右各刻十公分(10*cm.*)，右端為正數，左端為負數。(若將每粍之刻度亦畫出，則可得更準確之答案。)於 A 尺上刻 B 尺數之二倍。C尺

所刻之數，爲 B 尺數之平方。若使 C 尺上可有 1 至 100 之各數，及 1,4,9，等整平方，最好查平方根表，尋其方根，然後刻 C 尺上之數於其在動尺上之平方根之下。例如：在 C 尺上 2，刻在 B 尺之 1.4 之下，3 在 1.7 之下，5 在 2.2 之下。餘類推。動尺上若刻糎數，或五糎數，則更準確，但非必要。



此尺之用法如下：以 a 除二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，得 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$。移項得 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$。拉動尺 B，使其上之 0 在 A 尺上 x 係數之下。於此數之下，C 尺上之數，加以常數項之數。在 C 尺上之結果，所正對之動尺 B 上之數，即爲答數（0 之左右端各一答數）。例如：

(1)　求解方程式 $x^2+2x-8=0$。

　　移項得 $x^2+2x=8$。移動尺 B，使其上之 0，正對 A 尺之 2。於 C 尺上正對 0 之數爲 1；加常數 8 於上，$1+8=9$；正對 C 尺之兩個 9 數於動尺 B 上，可讀出答數爲 2 及 -4。

(2)　求解方程式 $x^2+x-1=0$。

　　移項得 $x^2+x=1$。移動尺 B，使其上之 0，對準 A 尺之 1，對 A 尺 1 處，直下至 C 尺爲 $\frac{1}{4}$，以常數項之 1 加於其上，$\frac{1}{4}+1=1\frac{1}{4}$；在 C 尺之 $1\frac{1}{4}$ 處，直上至動尺 B 處爲 0.6 及 -1.6 兩數，即爲此方程式之二根。

表演此計算尺，或示學生以用法時，最初宜用簡單而有因數且 x^2 之係數爲 1 之二次方程式。

此尺係藉完成平方而解答方程式。其原理如下：A 尺上之數爲 x 之係數，動

尺B為此係數之半，而C尺之數為 x 係數之半之平方。於此數藉心算加以常數項，然後計算尺於此和之平方根加上或減去 x 係數之半。故若以 a 為 x^2 係數，b 為 x 係數，c 為常數。則其結果為：

$$\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

此為解二次方程式之公式，故所得之數，即為此方程式之二根。

× × × × × ×

多項式定理

陸子芬

多項式定理在一般的初中代數教本中多講不到。在高中代數教本中，常寫如下式。

$$(a+b+c+\cdots)^n=\Sigma\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots}a^p b^q c^r\cdots,\ (p+q+r+\cdots=n).$$

要求某定項的係數，須先解一聯立不定方程式，再代入公式，求重複排列數的和，才能得出。因爲求法繁難，常爲學者所厭惡，現在述一簡便的推求法，雖初中同學亦極易了解；另述一藉組合數而得的公式，要求某項係數，可代入公式，直接計算，免去解不定方程式的麻煩，或可供高中同學的參考。

I. 二項式方數之展開式

要求二項式 $1+x$ 各項方數之展開式，可用分離係數法乘之如下：

$$\begin{array}{rl}
 & 1+1 \\
\times) & \underline{1+1\qquad} \\
 & 1+1 \\
 & \underline{\quad\ 1+1} \\
 & 1+2+1 \\
\times) & \underline{1+1\qquad\quad} \\
 & 1+2+1 \\
 & \underline{\quad\ 1+2+1} \\
 & 1+3+3+1 \\
\times) & \underline{1+1\qquad\qquad} \\
 & 1+3+3+1 \\
 & \underline{\quad\ 1+3+3+1} \\
 & 1+4+6+4+1
\end{array}$$

簡式

$$\begin{array}{l}
1+1 \\
\underline{\quad\ 1+1} \\
1+2+1 \\
\underline{\quad\ 1+2+1} \\
1+3+3+1 \\
\underline{\quad\ 1+3+3+1} \\
1+4+6+4+1
\end{array}$$

由是得

$$(1+x)^2=1+2x+x^2$$

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$$

$$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$$

由右列的簡式更可以看出 $1+x$ 各方數展開式中前後係數的關係，除首項及末項的係數常爲 1 外，其餘各項係數均由指數少 1 的 $1+x$ 的方數展開式中相當項與前一項兩係數相加而得。以下就 $(1+x)^n$ 當 $n=1,2,3,\cdots$ 等值時展開式的係數列爲一表，應用時異常便利。

$(1+x)^n$ 中	1,	x,	x^2,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6,	x^7,	x^8,	x^9,	x^{10},	$\cdots$ 之係數
$n=1$,	1	1										
$n=2$,	1	2	1									
$n=3$,	1	3	3	1								
$n=4$,	1	4	6	4	1							
$n=5$,	1	5	10	10	5	1						
$n=6$,	1	6	15	20	15	6	1					
$n=7$,	1	7	21	35	35	21	7	1				
$n=8$,	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
$n=9$,	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
$n=10$,	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	

例一． $(2x-3y)^6=(2x)^6\left(1-\dfrac{3y}{2x}\right)^6$

$$=(2x)^6\left[1-6\left(\frac{3y}{2x}\right)+15\left(\frac{3y}{2x}\right)^2-20\left(\frac{3y}{2x}\right)^3+15\left(\frac{3y}{2x}\right)^4\right.$$

$$\left.-6\left(\frac{3y}{2x}\right)^5+\left(\frac{3y}{2x}\right)^6\right]$$

$$=(2x)^6-6(2x)^5(3y)+15(2x)^4(3y)^2-20(2x)^3(3y)^3$$

$$+15(2x)^2(3y)^4-6(2x)(3y)^5+(3y)^6$$

$$=64x^6-576x^5y+2160x^4y^2-4320x^3y^3+4860x^2y^4$$

$$-2916xy^5+729y^6.$$

II. 多項式方數之展開式

多項式方數之展開式亦可做上法求之。如求三項式 $1+x+x^2$ 之各項方數，可用分離係數法簡乘如下：

$$\begin{array}{l}
1+1+1 \\
\quad 1+1+1 \\
\qquad 1+1+1 \\
\hline
1+2+3+2+1 \cdots\cdots (1+x+x^2)^2 \text{ 之各項係數} \\
\quad 1+2+3+2+1 \\
\qquad 1+2+3+2+1 \\
\hline
1+3+6+7+6+3+1 \cdots\cdots (1+x+x^2)^3 \text{ 之各項係數} \\
\quad 1+3+6+7+6+3+1 \\
\qquad 1+3+6+7+6+3+1 \\
\hline
1+4+10+16+19+16+10+4+1 \cdots (1+x+x^2)^4 \text{ 之各項係數}
\end{array}$$

由是得

$$(1+x+x^2)^2=1+2x+3x^2+2x^3+x^4$$

$$(1+x+x^2)^3=1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$$

$$(1+x+x^2)^4=1+4x+10x^2+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8.$$

今將 $(1+x+x^2)^n$ 當 $n=1,2,3,\cdots\cdots$ 等值，方數展開時各項係數列表於下：

$n=1$,	1	1	1						
$n=2$,	1	2	3	2	1				
$n=3$,	1	3	6	7	6	3	1		
$n=4$,	1	4	10	16	19	16	10	4	1

$n=5$,	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1						
$n=6$,	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1				
$n=7$,	1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	161	77	28	7	1		
$n=8$,	1	8	36	112	266	504	784	1016	1107	1016	784	504	266	112	36	8	1

可見$(1+x+x^2)^n$的展開式共有$2n+1$項；其各項係數係由指數少一的展開式中相當項與前面兩項一共三項係數相加而得；前面或後面所缺的項，係數均可寫為0. 細察展開式的各項係數，可見前後有對稱的形式，恰如二項式的展開式一樣。

再用分離係數乘法求四項式$1+x+x^2+x^3$的各項方數如下：

```
1 + 1 + 1 + 1
    1 + 1 + 1 + 1
        1 + 1 + 1 + 1
            1 + 1 + 1 + 1
-----------------------------
1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 ……………………(1+x+x²+x³)² 之各項係數
    1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1
        1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1
            1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1
-----------------------------------------
1 + 3 + 6 +10+12+12+10+ 6 + 3 + 1 …(1+x+x²+x³)³ 之各項係數
    1 + 3 + 6 +10+12+12+10+ 6 + 3 + 1
        1 + 3 + 6 +10+12+12+10+ 6 + 3 + 1
            1 + 3 + 6 +10+12+12+10+ 6 + 3 + 1
-----------------------------------------------------
1 + 4 +10+20+31+40+44+40+31+20+10+ 4 + 1
```

$(1+x+x^2+x^3)^4$之各項係數

由是得

$$(1+x+x^2+x^3)^2=1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6$$

$$(1+x+x^2+x^3)^3=1+3x+6x^2+10x^3+12x^4+12x^5+10x^6+6x^7+3x^8+x^9$$

$$(1+x+x^2+x^3)^4=1+4x+10x^2+20x^3+31x^4+40x^5+44x^6+40x^7+31x^8+20x^9+10x^{10}+4x^{11}+4x^{12}.$$

今將$(1+x+x^2+x^3)^n$的展開式中各項係數列表如下:

$n=1$,	1	1	1	1												
$n=2$,	1	2	3	4	3	2	1									
$n=3$,	1	3	6	10	12	12	10	6	3	1						
$n=4$,	1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1			
$n=5$,	1	5	15	35	65	101	135	155	155	135	101	65	35	15	5	1

可見$(1+x+x^2+x^3)^n$的展開式共有$3n+1$項，其各項係數亦可由指數少1的展開式中相當項與前面三項，共四項係數相加而得，係數前後列亦是對稱形.

照此推演，可得各多項式各次方數的展開式。

例二。 $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4=1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+56x^5+80x^6+104x^7+125x^8+140x^9+146x^{10}+140x^{11}+125x^{12}+104x^{13}+80x^{14}+56x^{15}+35x^{16}+20x^{17}+10x^{18}+4x^{19}+x^{20}$.

III。二項式定理

本節目的在求$(1+x)^n$展開式中各項係數與n之關係，進而求普通項x^r之係數，係數最大項之係數等。

$(1+x)^n=(1+x)(1+x)(1+x)\cdots\cdots(1+x)$共$n$個因式。

其常數項為在各因式中取1之連乘積故為1$(=C_0^n)$。

含x的項為在一因式中取x，餘因式中全取1之連乘積，因在n因式中取一x，共有C_1^n法，故x的係數為C_1^n。

含x^2的項為在二因式中取x，餘因式中全取1之連乘積，因在n因式中取二x，共有C_2^n法，故展開式中x^2的係數為C_2^n。

同理x^3的係數為C_3^n，x^4的係數為C_4^n，x^r的係數為C_r^n，x^n的係數為C_n^n。故

得二項式定理爲

$$(1+x)^n=C_0^n+C_1^n x+C_2^n x^2+C_3^n x^3+\cdots+C_r^n x^r+\cdots+C_n^n x^n$$

其普通項(卽第 $r+1$ 項)爲 $\quad C_r^n x^r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}x^r$.

因 $C_0^n=C_n^n,\ C_1^n=C_{n-1}^n,\ C_2^n=C_{n-2}^n,\cdots C_r^n=C_{n-r}^n$, 所以展開式中首末項的係數成一對對的相等。

又因 $C_1^n=\frac{n}{1}$

$$C_2^n=\frac{n(n-1)}{1\cdot2}=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}=C_1^n\cdot\frac{n-1}{2}$$

$$C_3^n=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}=\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{n-2}{3}=C_2^n\cdot\frac{n-2}{3}$$

… … … … … … … … … … … …

n 爲相當大時，$\frac{n-1}{2}$，$\frac{n-2}{3}$ 等常大於1. 於是 $(1+x)^n$ 的展開式中，自第一項起，係數逐漸的增大；再因首末項係數對對相等的原因，若自展開式的末項反回來數，係數亦是逐漸的增大；所以展開式的中部係數最大，分向前後兩端逐漸減小。

若 n 爲偶數，展開式項數 $n+1$ 爲一奇數，其中部僅有一項，卽第 $\frac{(n+1)+1}{2}=\frac{n}{2}+1$ 項 $C_{\frac{n}{2}}^n x^{\frac{n}{2}}$，其係數 $C_{\frac{n}{2}}^n$ 卽爲最大係數。

若 n 爲奇數，展開式項數 $n+1$ 爲一偶數，所以中部共有兩項，卽第 $\frac{n+1}{2}$ 項 $C_{\frac{n-1}{2}}^n x^{\frac{n-1}{2}}$ 及第 $\frac{n+3}{2}$ 項 $C_{\frac{n+1}{2}}^n x^{\frac{n+1}{2}}$，兩係數 $C_{\frac{n-1}{2}}^n$ 與 $C_{\frac{n+1}{2}}^n$ 相等，同爲最大係數。

例三。 求 $(1+x)^{12}$ 的展開式，普通項，最大係數項及其係數。

例四。 求 $(1+x)^{15}$ 的展開式，普通項，最大係數項及其係數。

Ⅲ. 多項式定理

(1)先利用二項式定理看三項式各方數的展開式：

$$(1+x+x^2)^2=[1+(x+x^2)]^2$$

$$=C_0^2+C_1^2(x+x^2)+C_2^2(x+x^2)^2$$

$$=C_0^2+C_1^2(C_0^1x+C_1^1x^2)+C_2^2[C_0^2x^2+C_1^2x^3+C_2^2x^4]$$

$$=C_0^2+C_1^2C_0^1x+(C_1^2C_1^1+C_2^2C_0^2)x^2+C_2^2C_1^2x^3+C_2^2C_2^2x^4.$$

$$(1+x+x^2)^3=[1+(x+x^2)]^3$$

$$=C_0^3+C_1^3(x+x^2)+C_2^3(x+x^2)^2+C_3^3(x+x^2)^3$$

$$=C_0^3+C_1^3C_0^1x+(C_1^3C_1^1+C_2^3C_0^2)x^2+(C_2^3C_1^2+C_3^3C_0^3)x^3$$

$$+(C_2^3C_2^2+C_3^3C_1^3)x^4+C_3^3C_2^3x^5+C_3^3C_3^3x^6.$$

$$(1+x+x^2)^4=[1+(x+x^2)]^4$$

$$=C_0^4+C_1^4(x+x^2)+C_2^4(x+x^2)^2+C_3^4(x+x^2)^3+C_4^4(x+x^2)^4$$

$$=C_0^4+C_1^4C_0^1x+(C_1^4C_1^1+C_2^4C_0^2)x^2+(C_2^4C_1^2+C_3^4C_0^3)x^3$$

$$+(C_2^4C_2^2+C_3^4C_1^3+C_4^4C_0^4)x^4+(C_3^4C_2^3+C_4^4C_1^4)x^5+(C_3^4C_3^3+C_4^4C_2^4)x^6$$

$$+C_4^4C_3^4x^7+C_4^4C_4^4x^8.$$

可見除第一項C的足數爲0外，其餘含x的各項的係數常爲兩C乘積的和，每兩C足數的和常與該項x的指數相等，且第一C的足數又與第二C的首數相等。如注意$(1+x+x^2)^4$的展開式中x^4的係數

$$C_2^4C_2^2+C_3^4C_1^3+C_4^4C_0^4,\quad (2+2=3+1=4+0=4)$$

更易明瞭。

再取三項式的n方展開如下：

$$(1+x+x^2)^n=[1+(x+x^2)]^n$$

$$=C_0^n+C_1^n(x+x^2)+C_2^n(x+x^2)^2+\cdots+C_r^n(x+x^2)^r+\cdots+C_n^n(x+x^2)^n$$

$$=C_0^n+C_1^nC_0^1x+(C_1^nC_1^1+C_2^nC_0^2)x^2+(C_2^nC_1^2+C_3^nC_0^3)x^3+\cdots$$

$$+(\cdots+C_{r-2}^nC_2^{r-2}+C_{r-1}^nC_1^{r-1}+C_r^nC_0^r)x^r+\cdots+C_n^nC_n^nx^{2n}.$$

其各項係數的構成，更與上述相合。

其普通項，即第 $r+1$ 項，當 $r\leqq n$ 時為

$$(C^n_r C^r_0+C^n_{r-1}C^{r-1}_1+C^n_{r-2}C^{r-2}_2+\cdots\cdots)\,x^r\,,$$

當 $r>n$ 時，設 $r=n+m,\ (m<n)$，則為

$$(C^n_n C^n_m+C^n_{n-1}C^{n-1}_{m+1}+C^n_{n-2}C^{n-2}_{m+2}+\cdots)\,x^r\,.$$

總之 $(1+x+x^2)^m$ 之展開式中第 $r+1$ 項為

$$\Sigma\, C^n_i C^i_j\, x^r\,,\quad i+j=r,\ 且\ n\geqq i\geqq j\geqq 0.$$

例五. 求 $(1+x+x^2)^5$ 展開式中 x^6 之係數

（解一）　照舊法解之，

$$(1+x+x^2)^5=\Sigma\frac{5!}{p!\,q!\,r!}\,x^{q+2r},$$

式中　　$p+q+r=5.$　(1)

要求 x^6 的係數，可命 $q+2r=6.$　(2)

解(1)，(2)二不定方程式，正整數解有三組

$$\alpha,\beta,\gamma=0,4,1;\quad 1,2,2;\quad 2,0,3.$$

所以 x^6 的係數為

$$\frac{5!}{0!\,4!\,1!}+\frac{5!}{1!\,2!\,2!}+\frac{5!}{2!\,0!\,3!}=5+30+10=45.$$

（解二）　x^6 在 $(1+x+x^2)^5$ 展開式之第 7 項，由節 II 表中，可見其係數為 45.

（解三）　照本節定理 $(1+x+x^2)^5$ 中 x^6 之係數為

$$C^5_5 C^5_1+C^5_4 C^4_2+C^5_3 C^3_3=5+30+10=45.$$

（解三之解釋）　$(1+x+x^2)^5$ 可寫為連乘式

$$(1+x+x^2)^5=(1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2),$$

其展開式中每項係數均可寫為兩 C 乘積的和，第一 C 係指在諸 $(1+x+x^2)$ 中取 $(x+x^2)$ 的方法，第二 C 係指在諸 $(x+x^2)$ 中取 x^2 的方法。 如 x^6 之係數的一部為 $C^5_4 C^4_2$，意即 x^6 可照下法構成：先在 5 個 $(1+x+x^2)$ 中取 4 個 $(x+x^2)$，共有 C^5_4 法；次

在4個$(x+x^2)$中取2個x^2，共有C_2^4法。如此於5因式中，共取1個1，2個x，2個x^2，相乘得$1\cdot(x)^2(x^2)^2=x^6$，共有$C_4^5\cdot C_2^4$法，故$C_4^5\cdot C_2^4$爲展開式中x^6之係數的一部。做此，可得

$$C_5^5\,C_1^5,\qquad C_4^5\,C_2^4,\qquad C_3^5\,C_3^3$$

各爲 $1^0\cdot(x)^4\cdot(x^2)^1,\quad 1^1\cdot(x)^2(x^2)^2,\quad 1^2\cdot(x)^0\cdot(x^2)^3=x^6$

的係數，所以x^6的係數爲$C_5^5C_1^5+C_4^5C_2^4+C_3^5C_3^3$。

x^6的係數的每項，相乘兩C的足數和常得於x^6的指數6，亦可解釋如下：x^6之係數的一部爲$C_4^5C_2^4$，而C_4^5表示自5因式中取4個$(x+x^2)$的方法；此四式乘積之最低次式爲4次式x^4，又C_2^4表示自4個$(x+x^2)$中取2個x^2的方法，則乘積之次數應較前多2，故爲$(4+2=)$ 6次式x^6。

$(1+x+x^2)^n$的展開式共有$2n+1$項，由節II，知其首末項的係數一對對的相等，且愈近中部，係數愈大，所以第$n+1$項含x^n的項爲其最大係數項，其最大係數爲

$$C_n^nC_0^n+C_{n-1}^nC_1^{n-1}+C_{n-2}^nC_2^{n-2}+\cdots\cdots+C_{\frac{n}{2}}^n\,C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}},\ (n\text{ 爲偶數})。$$

或

$$C_n^nC_0^n+C_{n-1}^nC_1^{n-1}+C_{n-2}^nC_2^{n-2}+\cdots\cdots+C_{\frac{n+1}{2}}^n\,C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}},\ (n\text{ 爲奇數})。$$

(2)再看四項式各方數的展開式：

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+x^3)^2&=C_0^2+C_1^2(x+x^2+x^3)+C_2^2(x+x^2+x^3)^2\\&=C_0^2+C_1^2[C_0^1x+C_1^1(x^2+x^3)]+C_2^2[C_0^2x^2+C_1^2x(x^2+x^3)+C_2^2(x^2+x^3)^2]\\&=C_0^2+C_1^2C_0^1x+(C_1^2C_1^1C_0^1+C_2^2C_0^2)x^2+(C_1^2C_1^1C_1^1+C_2^2C_1^2C_0^1)x^3\\&\quad+(C_2^2C_1^2C_1^1+C_2^2C_2^2C_0^2)x^4+C_2^2C_2^2C_1^2x^5+C_2^2C_2^2C_2^2x^6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+x^3)^3&=C_0^3+C_1^3(x+x^2+x^3)+C_2^3(x+x^2+x^3)^2+C_3^3(x+x^2+x^3)^3\\&=C_0^3+C_1^3[C_0^1x+C_1^1(x^2+x^3)]+C_2^3[C_0^2x^2+C_1^2x(x^2+x^3)+C_2^2(x^2+x^3)^2]\end{aligned}$$

$$+C^3_3[C^3_0x^3+C^3_1x^2(x^2+x^3)+C^3_2x(x^2+x^3)^2+C^3_3(x^2+x^3)^3]$$

$$=C^3_0+C^3_1C^1_0x+(C^3_1C^1_1C^1_0+C^3_2C^2_0)x^2+(C^3_1C^1_1C^1_1+C^3_2C^2_1C^1_0+C^3_3C^3_0)x^3$$

$$+(C^3_2C^2_1C^1_1+C^3_2C^2_2C^2_0+C^3_3C^3_1C^1_0)x^4+(C^3_2C^2_2C^2_1+C^3_3C^3_1C^1_1+C^3_3C^3_2C^2_0)x^5$$

$$+(C^3_2C^2_2C^2_2+C^3_3C^3_2C^2_1+C^3_3C^3_3C^3_0)x^6+(C^3_3C^3_2C^2_2+C^3_3C^3_3C^3_1)x^7$$

$$+C^3_3C^3_3C^3_2x^8+C^3_3C^3_3C^3_3x^9.$$

由此類推，可得$(1+x+x^2+x^3)^n$的展開式：

$$(1+x+x^2+x^3)^n=C^n_0+C^n_1C^1_0x+(C^n_1C^1_1C^1_0+C^n_2C^2_0)x^2+(C^n_1C^1_1C^1_1+C^n_2C^2_1C^1_0$$
$$+C^n_3C^3_0)x^3+\cdots\cdots+C^n_nC^n_nC^n_{n-1}x^{3n-1}+C^n_nC^n_nC^n_nx^{3n}.$$

可見在$(1+x+x^2+x^3)^n$的展開式中，各項的係數常為三 C 乘積(如僅有一 C，或兩 C，可乘以等於 1 的 C^0_0, C^1_0, C^2_0 等)的和，每三 C 的足數和常等於該項 x 的指數，且第一 C 的足數與第二 C 的首數相相等，第二 C 的足數又與第三 C 的首數相等．其普通項，卽第 $r+1$ 項爲

$$\Sigma C^n_iC^i_jC^j_kx^r,\quad i+j+k=r,\text{ 且 }n\geqq i\geqq j\geqq k\geqq 0.$$

其最大係數項當 n 爲偶數時，僅有一項，卽第 $\frac{3n}{2}+1$ 項，當 n 爲奇數時有兩項，卽第$\frac{3n+1}{2}$項及第$\frac{3n+3}{2}$項。

(3)由此可推知在$(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m)^n$的展開式中，各項的係數常爲 m 個 C 乘積的和，每項 m 個 C 的足數和常等於該項 x 的指數，且前一 C 的係數常與相連後一 C 的首數相等，如此連貫下去。

例六。 求$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4$展開式中 x^3, x^7, x^{17} 的係數，及最大係數項的係數。

x^3 的係數爲 $C^4_3C^3_0+C^4_2C^2_1C^1_0+C^4_1C^1_1C^1_1C^1_0=4+12+4=20$。

x^7 的係數爲 $C^4_4C^4_3C^3_0+C^4_4C^4_2C^2_1C^1_0+C^4_4C^4_1C^1_1C^1_1C^1_0+C^4_3C^3_3C^3_1C^1_0$

$$+C^4_3C^3_2C^2_2C^2_0+C^4_3C^3_2C^2_1C^1_1C^1_0+C^4_3C^3_1C^1_1C^1_1C^1_1+C^4_2C^2_2C^2_2C^2_1C^1_0+C^4_2C^2_2C^2_1C^1_1C^1_1$$

$$=4+12+4+12+12+24+12+12+12=104.$$

x^{17} 的係數爲 $C^4_4C^4_4C^4_4C^4_4C^4_1+C^4_4C^4_4C^4_4C^4_3C^3_2+C^4_4C^4_4C^4_3C^3_3C^3_3$

$$=4+12+4=20.$$

因展開式共有 21 項，故最大係數項爲第 11 項，卽含 x^{n} 之項，其係數爲

$$C^4_4C^4_4C^4_2+C^4_4C^4_4C^4_1C^1_1+C^4_4C^4_3C^3_3+C^4_4C^4_3C^3_2C^2_1+C^4_4C^4_3C^3_1C^1_1C^1_1+C^4_4C^4_2C^2_2C^2_2$$

$(x^2x^2x^3x^3)$ $(x^2x^2x^2x^4)$ $(xx^3x^3x^3)$ $(xx^2x^3x^4)$ $(xx^2x^2x^5)$ (xxx^4x^4)

$$+C^4_4C^4_2C^2_2C^2_1C^1_1+C^4_3C^3_3C^3_3C^3_1+C^4_3C^3_3C^3_2C^2_2+C^4_3C^3_3C^3_2C^2_1C^1_1+C^4_3C^3_2C^2_2C^2_2C^2_1+C^4_2C^2_2C^2_2C^2_2C^2_2$$

(xxx^3x^5) $(1\cdot x^3x^3x^4)$ $(1\cdot x^2x^4x^4)$ $(1\cdot x^2x^3x^5)$ $(1\cdot xx^4x^5)$ $(1\cdot 1\cdot x^5x^5)$

$$=6+4+4+24+12+6+12+12+12+24+24+6=146.$$

係數各項下面括弧中所記乃 x^{10} 在 $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4$ 展開式中之各不同構成法。

（待　　續）

× × × × × ×

複虛數的幾種幾何應用

L. L. Smail 原著* 黃祖瑜譯

許多教授高等代數的教員們，很想在代數學以外，尋出一點複虛數的應用。有些教科書上，也曾講過，複虛數在物理學和電氣工程上，用處很大，但是太高深了，不能使中學生有深刻的了解。因此，作者在這篇裏，敘述複虛數的幾項簡單幾何應用，以為教授複虛數時的補充材料。這幾種應用，異常簡單，不過把初等解析幾何和向量分析上的方法，應用到簡單幾何命題的證明上罷了。

在下面圖形裏，大寫字母，表示各點的位置；後面括號裏的文字，表示和這點相對應的複虛數。

我們將要應用下面兩條極易證明的公式；

二點 $P_1\{z_1\}$ 和 $P_2\{z_2\}$ 間的距離，是

$$P_1P_2=|z_1-z_2|. \tag{1}$$

一線段的端點是 $P_1\{z_1\}$ 和 $P_2\{z_2\}$，其上一點 $P\{z\}$ 分線段為比 $P_1P/PP_2=\lambda$ 時，則

$$z=(z_1+\lambda z_2)/(1+\lambda). \tag{2}$$

若 $P\{z\}$ 是中點，卽 $\lambda=1$，則

$$z=\tfrac{1}{2}(z_1+z_2). \tag{2'}$$

若 $P\{z\}$ 是三等分點，卽 $\lambda=2$，則

$$z=\tfrac{1}{3}(z_1+2z_2). \tag{2''}$$

複虛數的幾何應用，可從下面幾條定理的証明裏看出。

定理 I. 一直角三角形斜邊上的中點，和三頂點的距離相等。

---

* L. L. Smail, *Some geometric applications of complex numbers*, 見 1920 年之 *American Mathematical Monthly*, vol. 3.6

證。將三角形放成圖 1 的形式。設點 A 和點 B 所對應的數是 a 和 bi，則應用公式(2′)，知 C 點所對應的數是 $\frac{1}{2}(a+bi)$. 自公式(1)，得

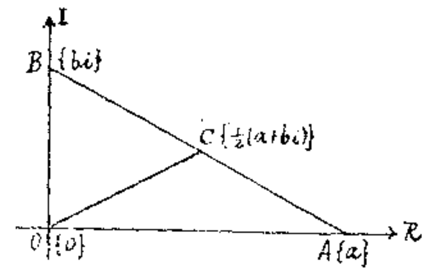


圖 1

$$OC=\left|\tfrac{1}{2}(a+bi)-0\right|=\tfrac{1}{2}\left|a+bi\right|=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$AB=\left|a-bi\right|=\sqrt{a^2+b^2},$$

故 $$OC=\tfrac{1}{2}AB=BC=CA.$$

下二命題裏，取一任意三角形，放成圖 2 和圖 3 的形式，且設頂點 A 和 B 所對應的數是 a 和 $b+b'i$。

定理Ⅱ.　聯一三角形兩邊中點的線段，等於第三邊的一半，且平行於第三邊。

證。應用公式(2′)，點 C 和點 D 所對應的數是 $\frac{1}{2}(b+b'i)$ 和 $\frac{1}{2}(a+b+b'i)$。更自公式(1)，得

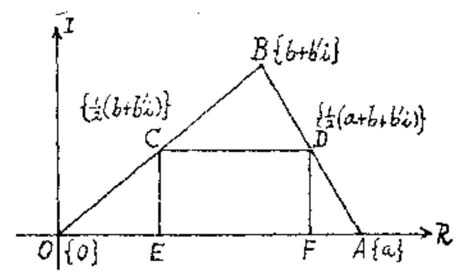


圖 2

$$CD=\left|\tfrac{1}{2}(b+b'i)-\tfrac{1}{2}(a+b+b'i)\right|=\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}OA.$$

若 CE 和 DF 都垂直於 OA，則 CE 的長，等於和點 C 相對應的數裏 i 的係數，DF 亦然。故 $CE=\frac{1}{2}b'=DF$，於是 CD 平行於 OA.

定理Ⅲ.　一三角形的三條中線會於一點，這點和頂點間的距離，等於頂點到對邊距離的三分之二。

證。在圖 3 裏，設 $P_1\{z_1\}$ 是 OD 線上的三等分點，牠和 O 點間的距離，是牠和 D 點間距離的二倍；更設 $P_2\{z_2\}$ 和 $P_3\{z_3\}$ 是 AC 和 BE 線上的對應點。自公式(2′)得

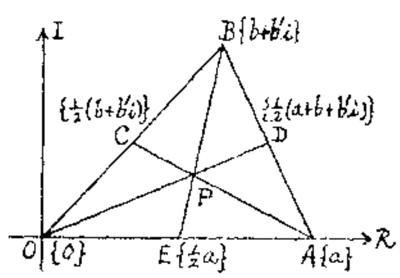


圖 3

$$z_1=\tfrac{1}{3}[0+2\cdot\tfrac{1}{2}(a+b+b'i)]=\tfrac{1}{3}(a+b+b'i),$$

$$z_2=\tfrac{1}{3}[(b+b'i)+2\cdot\tfrac{1}{2}a]=\tfrac{1}{3}(a+b+b'i),$$

$$z_3=\tfrac{1}{3}[a+2\cdot\tfrac{1}{2}(b+b'i)]=\tfrac{1}{3}(a+b+b'i).$$

因 $z_1=z_2=z_3$，故 P_1，P_2 和 P_3 三點重合，本定理也就証明了。

下四命題裏，取一任意四邊形，放成圖 4—6 的形式，設頂點 A，B，C 所對應的數是 a，$b+b'i$ 和 $c+c'i$。在圖裏，許多點所對應的數，可從公式(2')求得。

定理Ⅳ． 一任意四邊形兩對對邊中點的聯線，互相平分。

證． 設 $P_1\{z_1\}$ 和 $P_2\{z_2\}$ 各是 DF 和 EG 的中點(圖 4)，則得

$$z_1=\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(c+c'i)+\tfrac{1}{2}(a+b+b'i)]$$

$$=\tfrac{1}{4}(a+b+c+b'i+c'i),$$

$$z_2=\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}(b+c+b'i+c'i)]$$

$$=\tfrac{1}{4}(a+b+c+b'i+c'i),$$

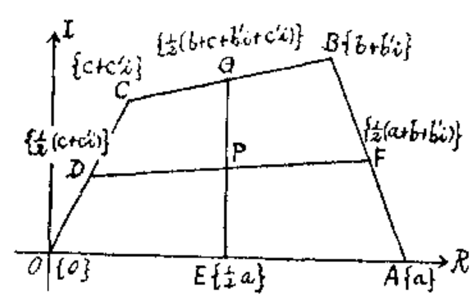


圖 4

因 $z_1=z_2$，故 P_1 和 P_2 二點重合，本定理於是證明。

定理Ⅴ． 一任意四邊形二對角綫中點聯綫的中點，也就是這四邊形二對對邊中點聯線的交點。

證． 設 $R\{z_3\}$ 是二對角線中點聯綫的中點，則

$$z_3=\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(b+b'i)+\tfrac{1}{2}(a+c+c'i)]$$

$$=\tfrac{1}{4}(a+b+c+b'i+c'i).$$

因 z_3 和上定理裏 z_1 和 z_2 的値一樣，故得本定理的結論。

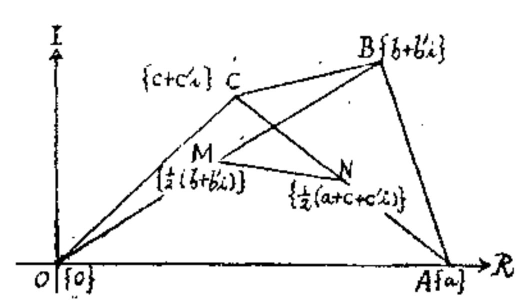


圖 5

定理Ⅵ． 順次聯結一任意四邊形諸隣邊的中點，則圍成一平行四邊形。

證． 自圖 6，應用公式(1)，得

$\mathrm{DE}=\left|\frac{1}{2}(c+c'i)-\frac{1}{2}a\right|=\frac{1}{2}\left|c-a+c'i\right|,$

$\mathrm{GF}=\left|\frac{1}{2}(b+c+b'i+c'i)-\frac{1}{2}(a+b+b'i)\right|$

$\quad=\frac{1}{2}\left|c-a+c'i\right|;$

$\mathrm{EF}=\left|\frac{1}{2}(a+b+b'i)-\frac{1}{2}a\right|=\frac{1}{2}\left|b+b'i\right|,$

$\mathrm{DG}=\left|\frac{1}{2}(b+c+b'i+c'i)-\frac{1}{2}(c+c'i)\right|$

$\quad=\frac{1}{2}\left|b+b'i\right|.$

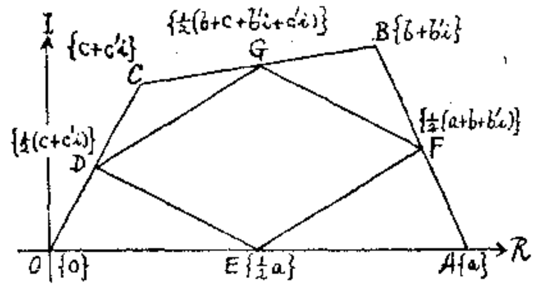


圖 6

故 DE＝GF，EF＝DG，DEFG 成功一個平行四邊形。

定理Ⅶ． 一任意四邊形四邊上平方的和，等於二對角線上平方的和，加二對角線中點聯線上平方的四倍。

証． 自圖5，應用公式(1)，得

$$\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CO}}^2$$

$$=|0-a|^2+|a-(b+b'i)|^2+|(b+b'i)-(c+c'i)|^2+|(c+c'i)-0|^2$$

$$=[a^2]+[(a-b)^2+b'^2]+[(b-c)^2+(b'-c')^2]+[c^2+c'^2]$$

$$=2a^2+2b^2+2c^2+2b'^2+2c'^2-2ab-2bc-2b'c'. \tag{3}$$

同理，

$$\overline{\mathrm{OB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2+4\,\overline{\mathrm{MN}}^2$$

$$=|0-(b+b'i)|^2+|(c+c'i)-a|^2+4\left|\tfrac{1}{2}(b+b'i)-\tfrac{1}{2}(a+c+c'i)\right|^2$$

$$=[b^2+b'^2]+[(c-a)^2+c'^2]+4[\tfrac{1}{4}(b-a-c)^2+\tfrac{1}{4}(b'-c')^2]$$

$$=2a^2+2b^2+2c^2+2b'^2+2c'^2-2ab-2bc-2b'c'. \tag{4}$$

自(3)和(4)，得本定理。

定理Ⅷ． 在一任意三角形 OAB 裏，從頂點 O 到對邊 AB 的中點，作一線 OC，更延長到任一點 D．三角形的兩邊也同時延長，使和 AD，BD 各相交於 E 和 F．

則 EF 平行於 AB.

證. 將三角形放成圖 7 的形式，設

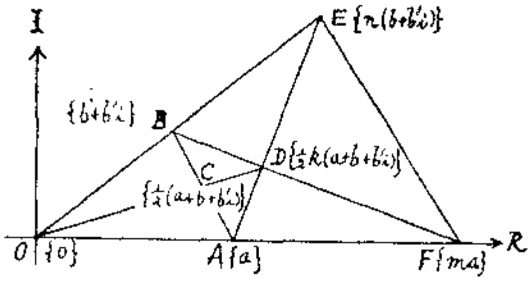


圖 7

$OF/OA=m$, $OE/OB=n$,

$OD/OC=k$, $AE/ED=\lambda$,

$BF/FD=\mu$,

則 F, E 和 D 三點所對應的數是

$$ma,\ n(b+b'i)\text{和}\ \tfrac{1}{2}k(a+b+b'i).$$

應用公式(2)，可知 E, F 二點所對應的複虛數是

$$\frac{a+\lambda\cdot\frac{1}{2}k(a+b+b'i)}{1+\lambda}\text{和}\frac{(b+b'i)+\mu\cdot\frac{1}{2}k(a+b+b'i)}{1+\mu}.$$

在方程式

$$\frac{a+\lambda\cdot\frac{1}{2}k(a+b+b'i)}{1+\lambda}=n(b+b'i), \tag{5}$$

$$\frac{(b+b'i)+\mu\cdot\frac{1}{2}k(a+b+b'i)}{1+\mu}=ma \tag{6}$$

裏，令實數部和虛數部各各相等，得

$$\frac{a+\lambda\cdot\frac{1}{2}k(a+b)}{1+\lambda}=nb,\quad \frac{\lambda\cdot\frac{1}{2}kb'}{1+\lambda}=nb', \tag{7}$$

$$\frac{b+\mu\cdot\frac{1}{2}k(a+b)}{1+\mu}=ma,\quad \frac{b'+\mu\cdot\frac{1}{2}kb'}{1+\mu}=0. \tag{8}$$

從方程式(7)裏，消去 λ，求出 n，從方程式(8)裏，消去 μ，求出 m，則得

$$n=k/(2-k),\quad m=k/(2-k),$$

故 $m=n$，即 $OF/OA=OE/OB$，於是 EF 平行於 AB.

定理 IX. OABC 為一平行四邊形，DE 是平行於 OA 的任一線段，作線 OD, AE 相交於 F 點，作線 CD, BE 相交於 G 點. 求證 FG 平行於 OC.

證. 將四邊形放成圖8的形式,設

$OF/FD=m$, $CG/GD=n$,

$AF/FE=\lambda$, $BG/GE=\mu$.

應用公式(2),可知 F,G 二點所對應的複虛數是:

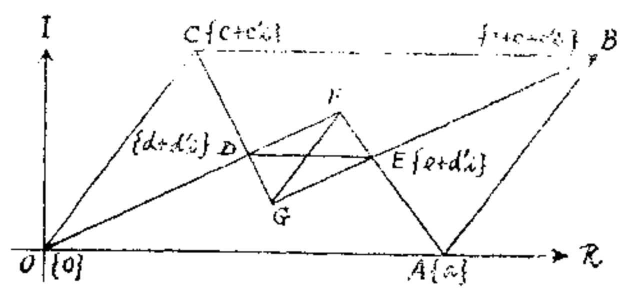


圖 8

$$\frac{0+m(d+d'i)}{1+m}=\frac{a+\lambda(e+d'i)}{1+\lambda}, \qquad (9)$$

和

$$\frac{(c+c'i)+n(d+d'i)}{1+n}=\frac{(a+c+c'i)+\mu(e+d'i)}{1+\mu}. \qquad (10)$$

在上方程式裏,命實數部和虛數部各各相等,得

$$\frac{md}{1+m}=\frac{a+\lambda e}{1+\lambda}, \quad \frac{md'}{1+m}=\frac{c+\lambda d'}{1+\lambda}, \qquad (11)$$

$$\frac{c+nd}{1+n}=\frac{a+c+\mu e}{1+\mu}, \quad \frac{c'+nd'}{1+n}=\frac{c'+\mu d'}{1+\mu}. \qquad (12)$$

從方程式(11)裏,消去λ,求出m,從方程式(12)裏,消去μ,求出n,則得

$$m=a/(d-e), \quad n=a/(d-e),$$

故 $m=n$, 即 $OF/FD=CG/GD$, 於是 FG 平行於 OC.

此外還有許多和這些類似的例題,不過從這一點,已能看到應用複虛數來証明幾何命題是一個可能的嘗試.

廿四年一月廿日　　譯於開封女師.

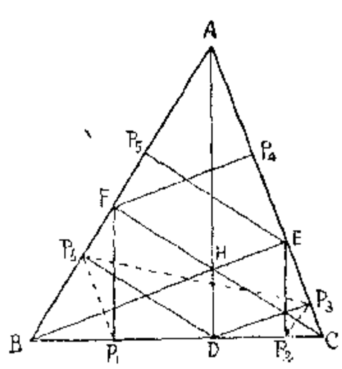
用初等幾何定理證Taylor氏圓之商榷

胡 思 齊

題文： 從 $\triangle ABC$ 的各頂點至對邊引垂線 AD, BE, CF。再從垂足 D, E, F，至他二邊各引垂線，則其六個垂足在同一圓周上。

第一種證法： 證其中四點在同一圓周上，用關於圓之定理。

甲： 證 $P_1P_2P_3P_6$ 四點共圓。



聯 $P_1P_2P_3P_6$ 成一四邊形

因 EDP_2P_3 四點及 $HDCE$ 四點各共一圓，

$\angle DP_3P_2 = \angle DEP_2 = \angle HDE = \angle HCE$,

$\therefore \angle HCE + \angle P_2P_3C = \angle DP_3P_2 + \angle P_2P_3C$

$= \hat{R}$.

即 $P_2P_3 \perp CF$，即 $P_2P_3 /\!/ AB$.

$$\underline{\therefore \angle CP_2P_3 = \angle B.} \qquad (1)$$

又因 FP_6P_1D 四點及 $FBDH$ 四點各共一圓，AP_6DP_3四點也共圓，故

$$\angle FBH = \angle FDH = \angle DFP_1 = \angle DP_6P_1,$$

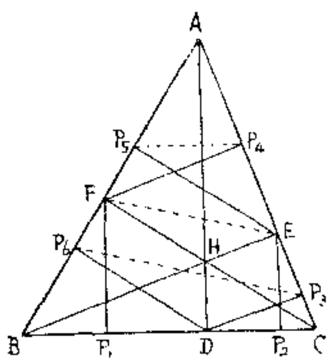
$$\angle HBD = \angle DAP_3 = \angle DP_6P_3.$$

$$\underline{\therefore \angle B = \angle P_1P_6P_3.} \qquad (2)$$

綜合(1),(2)得$\angle CP_2P_3 = \angle P_1P_6P_3$，即$\angle P_1P_2P_3 + \angle P_1P_6P_3 = 2\hat{R}$。

故 $P_1P_2P_3P_6$ 四點共圓。 同理 $P_2P_3P_4P_5$ 四點及 $P_1P_4P_5P_6$ 四點皆共圓。

乙： 證 $P_3P_4P_5P_6$ 四點共圓。



聯 P_4P_5, EF, P_3P_6 三直線，則因

$P_4P_5 \parallel BC$, $\underline{\therefore \angle AP_4P_5=\angle C}$. (3)

又因 $CF \parallel DP_6$, $AFHE$ 四點及 AP_6DP_3 四點各共一圓，

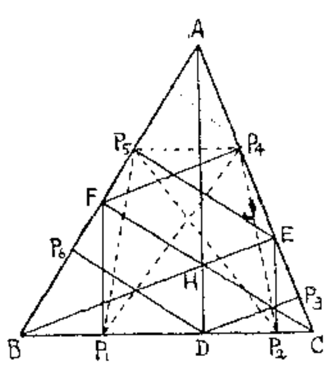
$\angle DP_6P_3=\angle DAP_3=\angle HAE=\angle HFE$,

$\therefore EF \parallel P_3P_6$, 即 $\angle BP_6P_3=\angle BFE=2\hat{R}-\angle C$, 即 $\underline{\angle P_5P_6P_3=\angle C}$. (4)

綜合(3),(4)得 $\angle AP_4P_5=\angle P_5P_6P_3$, 即 $\angle P_5P_6P_3+\angle P_3P_4P_5=2\hat{R}$.

故 $P_3P_4P_5P_6$ 四點共圓。 同理 $P_1P_2P_5P_6$ 四點及 $P_1P_2P_3P_4$ 四點皆共圓。

丙: 證 $P_1P_2P_4P_5$ 四點共圓。



聯 P_1P_4, P_2P_5, P_1P_5, P_2P_4, P_4P_5 五直線，

因 $P_4P_5 \parallel BC$, $\therefore \angle P_2P_5P_4=\angle P_1P_2P_5$.

而 BP_2EP_5 四點共圓，

$\therefore \angle P_1P_2P_5=\hat{R}-\angle EP_2P_5=\hat{R}-\angle EBP_5$

$=\angle A$.

$\underline{\therefore \angle P_2P_5P_4=\angle A}$. (5)

再因 CP_1FP_4 四點共圓，

$\underline{\therefore \angle P_2P_1P_4=\hat{R}-\angle P_4P_1F=\hat{R}-\angle P_4CF=\angle A}$. (6)

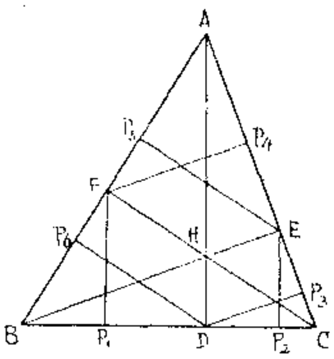
綜合(5),(6)得 $\angle P_2P_5P_4=\angle P_2P_1P_4$.

故 $P_1P_2P_4P_5$ 四點共圓。 同理 $P_1P_3P_1P_6$ 四點及 $P_2P_3P_5P_6$ 四點皆共圓。

由上述甲，乙，丙三證中任擇二種聯絡，即可得其中五點在同一圓周上。 如由甲得 $P_1P_2P_3P_6$ 四點，而由乙得 $P_1P_2P_3P_4$ 四點，則可知 $P_1P_2P_3P_4P_6$ 五點共圓。至於餘一點不難依同理推証之。

第二種証法： 仍證四點共圓，但用比例及相似形之定理。

丁：　証 $P_1P_2P_3P_4$ 四點共圓。



$CP_1: CD=CF: CH$,

$CP_2: CD=CE: CA$,

$$\therefore CP_1\cdot CP_2=\frac{CE\cdot CF\cdot \overline{CD}^2}{CA\cdot CH}. \quad (7)$$

$CP_3: CE=CD: CB$,

$CP_4: CE=CF: CH$,

$$\therefore CP_3\cdot CP_4=\frac{\overline{CE}^2\cdot CF\cdot CD}{CB\cdot CH}. \quad (8)$$

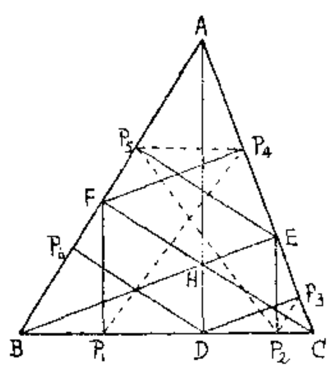
但 ABDE 四點共圓，

$$\therefore CD\cdot CB=CE\cdot CA,\ 卽\ \frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}. \quad (9)$$

由(7)，(8)，(9)，三式得 $\underline{CP_1\cdot CP_2=CP_3\cdot CP_4}$。

故 $P_1P_2P_3P_4$ 四點共圓。

戊：　證 $P_1P_2P_4P_5$ 四點共圓。



聯 P_1P_4，P_2P_3，P_2P_5，P_4P_5，四直線，做上法得

$$\frac{AP_4}{AP_5}=\frac{\dfrac{AE\cdot AF}{AB}}{\dfrac{AE\cdot AF}{AC}}=\frac{AC}{AB},$$

$$\therefore P_4P_5 /\!/ BC. \quad (10)$$

又因 $CP_1: CP_4=CP_3: CP_2$，　　（見證丁）

而 $P_2P_3 /\!/ AB$，　　（理同10）

$CP_3: CP_2=CA: CB$，

$\therefore CP_1: CP_4=CA: CB$；

卽 $CP_1\cdot CB=CP_4\cdot CA$。

故 ABP_1P_4 四點共圓，而得 $\angle CP_1P_4=\angle A$。

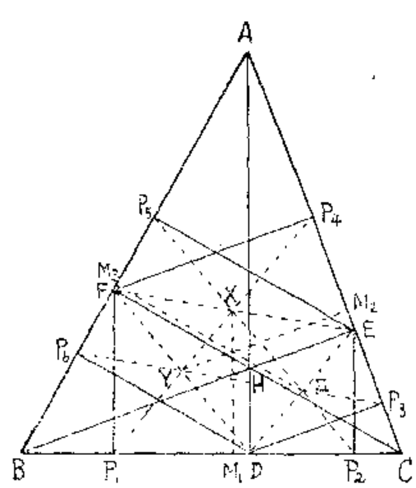
同理 ACP_2P_5 四點共圓，而得 $\angle BP_2P_5=\angle A$。 (11)

據(10)，(11)乃得 $\angle P_5P_4P_1=\angle CP_1P_4=\angle BP_2P_5$。

故 $P_1P_2P_4P_5$ 四點共圓。

將丁，戊二次結果組合之，得 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 五點同一圓。至於 P_6 可依同法証之。

第三種証法：因 P_1P_2，P_3P_4，P_5P_6 將爲此圓之弦，今證此三直線之垂直平分線交於一點，此點卽所欲證之圓之圓心。細察下圖，可知此三直線之垂直平分線必各過垂趾三角形 $\triangle DEF$ 三邊之中點[其理至簡]，如圖中之 M_1X，M_2Y，M_3Z 卽是。今如能證得下圖中 P_1YXP_4，P_2ZXP_5，P_3ZYP_6 各組四點均成直線，則所求證共點之三直線 M_1X，M_2Y，M_3Z 適爲 $\triangle XYZ$ 之三角平分線[其理亦至明]，而其共點之性可不待證矣。茲擬證 P_1YXP_4 四點共線。



聯 P_4X，XY 爲二直線，又聯 P_4P_5 一直線，則因 $P_4P_5 /\!/ BC$，$\therefore \angle AP_5P_4=\angle B$。(理見前證)

又 EP_4P_5F 四點共圓，其直徑爲 EF，卽 X 爲其圓心，

$\therefore \angle XEP_4=\angle XP_4E=\angle AP_5P_4=\angle B$。

由上述得 $\angle P_4XE=2\widehat{R}-2\angle B$。 (1')

因 $XY /\!/ DE$，

$\therefore \angle YXE=2\widehat{R}-\angle DEF$。

又 $AFHE$ 四點及 $DHEC$ 四點各共一圓，

$\therefore \angle DEF=\angle DEH+\angle FEH=\angle DCF+\angle FAD=2\widehat{R}-2\angle B$。

由上述得 $\angle YXE=2\widehat{R}-(2\widehat{R}-2\angle B)=2\angle B$。 (2')

綜合(1')，(2')得 $\angle P_4XE+\angle YXE=2\widehat{R}$。

故 P_4XY 三點共線。同理可證 P_1YX 三點亦共線；卽 P_1YXP_4 四點共線。

倣上法可再證 P_2ZXP_5，P_3XYP_6 二組亦共線。

今就 $\triangle P_1XP_2$ 觀之，M_1X 垂直平分 P_1P_2，可知其爲等腰三角形，故 M_1X 是 $\angle ZXY$ 之平分線，因而 M_2Y，M_3Z 乃爲 $\angle XYZ$，$\angle YZX$ 之平分線。是足表示 M_1X，M_2Y，M_3Z 必交於一點，而此題得證。

附註一：

在原題證得之後，忽起一種感覺。蓋在第一第二兩種證法中，每次就六點中證其四點共圓，而 ${}_6C_4=15$，應有十五種變化之證法。而以上所證僅有九種〔每種可推理得三種〕，於是尚有六種情形〔可合併爲二種〕仍待分別證明。茲以數字排列如下：

甲。	1 2 3 6，	2 3 4 5，	1 4 5 6。
乙。	1 2 5 6，	1 2 3 4，	3 4 5 6。
丙。	2 3 5 6，	1 2 4 5，	1 3 4 6。
？	1 2 4 6，	2 3 4 6，	2 4 5 6。
？	1 2 3 5，	1 3 4 5，	1 3 5 6。

以上所列最後二層中，如 1235 似不易直接證得，且係限定用初等幾何定理，則很難着手，特提出爲問題，希高明指示。

附註二。

此題證得之經過亦有足述者：思齊近在安徽省立滁州中學初中部任課，所用幾何教本係新亞出版，薛德炯先生所編者，此題見於該書複習題中。思齊初以爲用初等幾何定理〔尤其限制在圓之範圍中〕，無法證得。因近世幾何學中曾載此定理，而最近中等算學月刊三卷六期所載之證法（p.27），亦涉及三角函數及逆平行。但此題經解釋後，忽有初三同學馮君克潤得一證法（即第一種甲）；雖不甚完備，然至足以使人興奮。時適至春假，又有畢業同學陸君元九見獵心喜，對馮君之證法加以補充（即第一種乙），思齊乃繼續努力得草成如上稿，其中有 $P_4P_5 \parallel BC$ 之過程，尤不得不歸功於馮君克潤也，特誌之。

第五原則及其應用

湯璪眞

此地突然提出第五個原則，讀者諸君定會要莫明其妙，所以應當稍爲說明一下.

在本月刊第一卷第八期有一篇論文，叫作"祕訣的披露." 那裏面說的是擴大射影，同時提出了四個原則。現在所以提出第五個原則，其目的是在補充前面的四個原則。

讀者諸君也許把我那擴大射影完全忘却了。其實那東西倒是一個頂有趣味的玩藝兒。你若忘記了，我保證你有許多難題難作出來，而我呢看這種題非常容易。

因爲恐怕忘記的原故，現在再將擴大射影和那四個原則溫習一下。

擴大射影就是依據上面指出的論文中所述 π 變到 π' 之方法，將尋常初等幾何的點(左圖)，擴而大之一變而爲圓(右圖)：

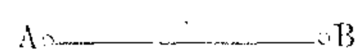
這個圓叫作那點的射影，詳細一點說，叫作擴大射影。照那論文中所說的擴大射影去推證，便知道有四個定理。

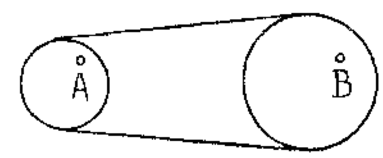
第一，一點 P 畫一條直綫(左圖)之時，P 的擴大射影 $\mathring{P}$ 一定畫一條擴大直線，換一句話，就是成爲切於兩直線的一羣圓，各圓心在同一直線上(右圖)：

這個定理成一個原則，是那時的第一原則；現在來一個專名，我叫他作直線原則。

第二，一點 P 畫一線分 $\overline{AB}$ (左圖)之時，P 的擴大射影 $\mathring{P}$ 一定成一條擴大線

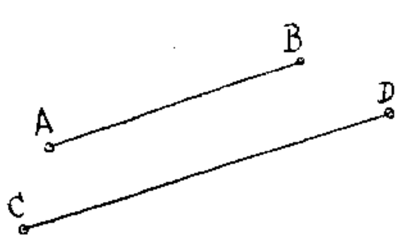
分 $\overset{\circ\!-\!-\!\circ}{A\,B}$ (右圖):

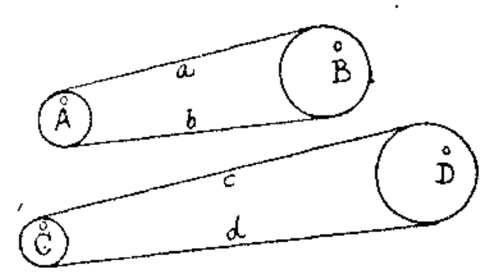




同時有一個不變性，就是 A，B 兩點的距離，一定等於 $\mathring{A}$，$\mathring{B}$ 兩圓的某條的公切線之長。這個定理成一個原則，是那時的第二原則，現在來一個專名，我叫他作距離原則或長度原則。

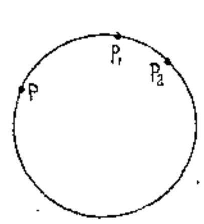
第三，一點 P 畫兩條平行線分 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ (左圖) 之時，P 的擴大射影 $\mathring{P}$ 一定成兩條平行的擴大線分 $\overset{\circ\!-\!-\!\circ}{A\,B}$ 與 $\overset{\circ\!-\!-\!\circ}{C\,D}$ (右圖)；詳細一點說，就是 $\mathring{A}$，$\mathring{B}$ 兩圓的某兩條公切線(指切於 AB 擴大直線上一切擴大點者)，必順次平行於 $\mathring{C}$，$\mathring{D}$ 兩圓的同樣兩條公切線(卽 $a /\!/ c$, $b /\!/ d$)。

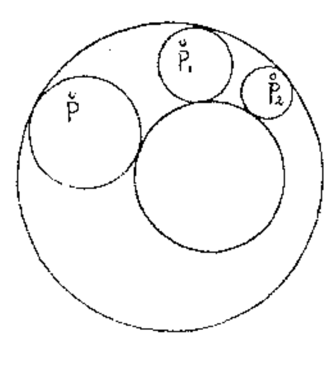




這個定理成一個原則，是那時的第三原則，現在來一個專名，我叫他作平行原則。

第四，一點 P 畫成一個平圓 (左圖) 之時，P 的擴大射影 $\mathring{P}$ 一定成切於某兩圓的一羣圓，其各圓心在同一橢圓上，簡單說就是 $\mathring{P}$ 畫成一個擴大的圓(右圖):



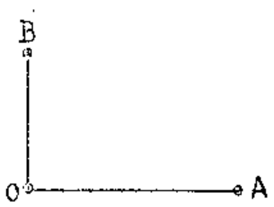


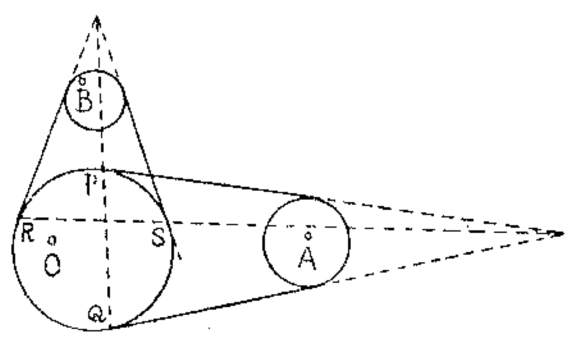
這個定理成一個原則，是那時的第四原則；現在來一個專名，我叫他作平圓原則。

現在該講到本題第五原則了。 假如再繼續用擴大射影的方法去推證，我們立即可以知道

第五，一點 P 畫一個直角 AOB (左圖)之時，P 點的擴大射影 $\overset{\circ}{P}$ 一定成一個圖形 (右圖)，其中 $\overset{\circ}{A}$ $\overset{\circ}{O}$ $\overset{\circ}{B}$ 三圓，恰好具下列的性質：

設 $\overset{\circ\!-\!-\!\circ}{OB}$ 擴大線分之兩公切線切 $\overset{\circ}{O}$ 於 P，Q 兩點；則 PQ 線與 $\overset{\circ\!-\!-\!\circ}{OB}$ 擴大線分之兩公切線必同交於一點.





這個定理成一個原則，便是現在所要提出的第五原則，也可以來一個專名，叫他作直角原則或垂直原則.

因爲兩線是互相垂直的，所以 $\overset{\circ\!-\!-\!\circ}{OB}$ 擴大線分之兩公切線切 $\overset{\circ}{O}$ 之兩點 R，S，與 $\overset{\circ\!-\!-\!\circ}{OA}$ 擴大線分兩公切線之交點，也同在一直線上。

所有以上的五個原則，我都沒有把證明寫出來。 然而我有一定的把握，知道都是對的。 武漢大學的高材生李森林君願意於最近的將來，受本月刊編輯劉乙閣兄的指導，把這五個原則詳細用初等幾何方法證明一下。 這是我非常贊成而感謝的，盼望他們早日成功。

現在我要講爲甚麼定下這五個原則了。 我們知道全部初等幾何，所講的無非是點，直線，圓，距離，平行，垂直這些東西。 有了擴大射影的定義，便知道點變成圓；有了擴大射影的五原則，便知道直線，圓，距離，平行，垂直這些東西，變成相應的新東西，即是說：應變成擴大直線，擴大圓，公切線之長，擴大平行，擴大垂直等等新觀念。 於是便知道由任何初等幾何的定理和作圖，可以推出一種新而且難的定

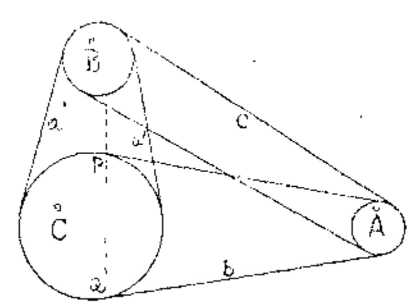
理和作圖。 所以我說，擴大射影的確是一個頂有趣味的玩藝兒。

關於直線，圓，距離，平行諸概念，在本月刊第一卷六，八兩期內，已經舉過不少的例了． 那時我對於垂直的擴大觀念，還不簡單。 李森林君和劉乙閣兄都在注意此事，他們也曾得到相當的成功，然而我覺得不如上述第五原則所說的那樣簡單。 所以我便先把這第五原則——垂直原則——寫下來，作爲補充以前四個原則之用。

現在拿幾個初等幾何裏面與垂直有關的定理擴大起來，作爲應用。

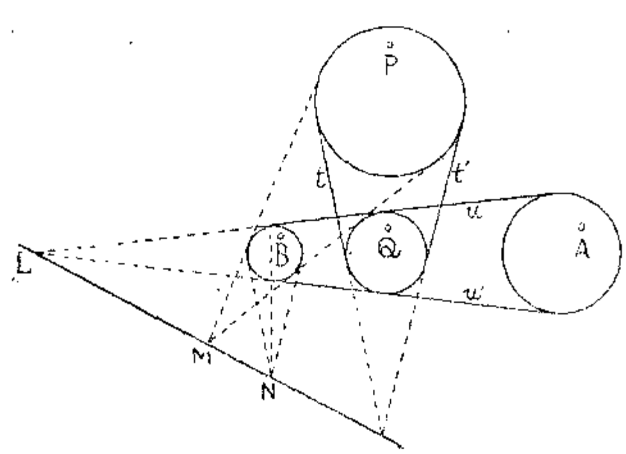
(1) 初等幾何定理： 直角三角形斜邊平方等於其他兩邊平方之和。

擴大結果：設 $\mathring{A},\mathring{C}$ 兩圓之外公切線切 $\mathring{C}$ 圓於 P，Q 二點，若 PQ 線與 $\mathring{B},\mathring{C}$ 兩圓之外公切線 a,a' 能同交於一點，則 $\mathring{A},\mathring{B}$ 兩圓之外公切線之長之平方，必等於 $\mathring{A},\mathring{C}$ 兩圓外公切線長之平方，加 $\mathring{B},\mathring{C}$ 兩圓外公切線長之平方；換句話說，在右圖中如有 a,a'，PQ 三線共點的關係時，則必有 $a^2+b^2=c^2$ 的關係。



(2) 初等幾何作圖： 求過一點 P 作已知線 AB 垂直線。

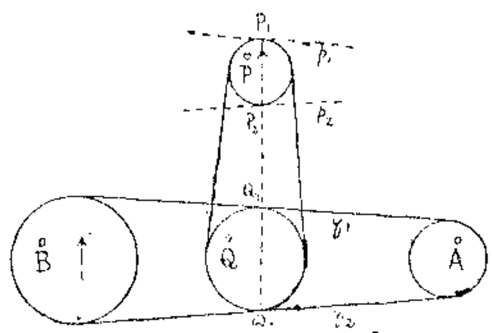
擴大結果： 求過 $\mathring{P}$ 圓作已知擴大線 $\mathring{A}\mathring{B}$ 之擴大垂直綫。 換言之，即求作 $\mathring{P}$ 圓之兩切線 t,t 令其與 $\mathring{A},\mathring{B}$ 兩已知圓之外公切線 u,u，同切於一圓 $\mathring{Q}$，且令 $\mathring{Q}$ 圓與 u,u' 二線相切之點所連成之直線與 t,t' 二線同交於一點。



作法一： 命 u,u' 之交點爲 L，又命 $\mathring{P}$ 圓與 $\mathring{B}$ 圓（或 $\mathring{A}$ 圓）之外公切線交於 M，作一線通過 $\mathring{B}$ 圓（或 $\mathring{A}$ 圓）與 u，u' 二線之切點，而交 LM 線於 N。過 N 作

$\mathring{B}$圓（或$\mathring{A}$圓）之兩切線，然後作$\mathring{P}$圓之切線t, t'與之平行，則t, t'即爲所求作之切線。 作$\mathring{Q}$圓切於t, t', u, u'四線，則$\mathring{P}\mathring{Q}$即爲所求作之擴大垂直線。

作法二： 作$\mathring{P}$圓二切線r_1, r_2，令其順次平行於$\overline{\mathring{A}\mathring{B}}$擴大線分之二切線$q_1, q_2$，且令$\mathring{P}$圓上兩切點$r_1, r_2$與$\mathring{A}$圓（或$\mathring{B}$圓）上二相應切點連成相同之方向。次作$P_1, P_2$線交$q_1, q_2$於$Q_1, Q_2$，然後作$\mathring{Q}$圓切$q_1, q_2$於$Q_1, Q_2$兩點，則$\mathring{P}\mathring{Q}$擴大線即爲所求作之擴大垂直線。 此法較前法簡單，且易直觀。



(3) 初等幾何定理： 平行線與同一線相交者，必在同一平面上。

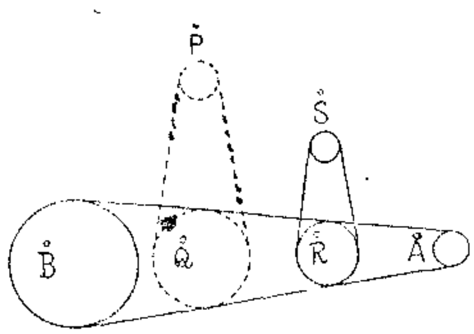
擴大結果： 擴大平行綫與同一擴大線相交者，必在同一 x 上。

此 x 可對應於初等幾何而定其義。 設有一擴大線，交於一固定擴大線而平行運動時，則其軌跡名之曰擴大平面。 於是上述之 x 可改爲擴大平面。 但有一可注意之事，即在同一平面上，有無數個擴大平面。

(4) 初等幾何作圖： 求於一平面內過已知直線上一點作該直線之垂線。

擴大結果： 求於一擴大平面內，過已知擴大直線上之一擴大點，作其一擴大垂直線。

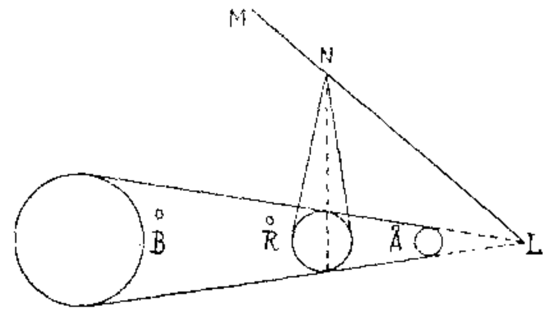
作法一。 設已知擴大線爲$\mathring{A}\mathring{B}$，$\mathring{R}$爲其上一擴大點。 於所設擴大平面內任取此擴大直線外之一適宜擴大點$\mathring{P}$，依(2)中作法，過$\mathring{P}$作$\mathring{A}\mathring{B}$擴大線之擴大垂直線$\mathring{P}\mathring{Q}$。 再過$\mathring{R}$作$\mathring{P}\mathring{Q}$之擴大平行線$\mathring{R}\mathring{S}$，則$\mathring{R}\mathring{S}$即爲所求作之擴大垂直線。



本作法中，$\mathring{P}$之位置可以任意選取。

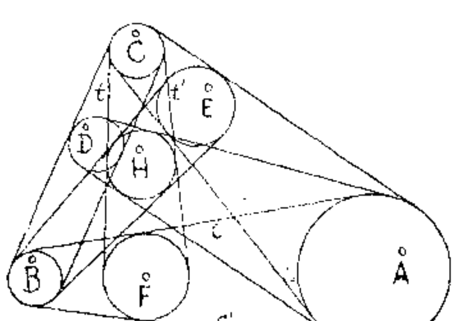
若選擇得宜，則作圖可以化簡如次：

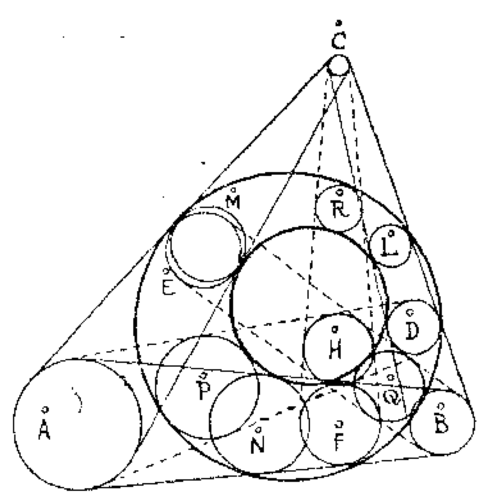
作法二。設 $\mathring{A}$，$\mathring{B}$，$\mathring{R}$ 如前。因擴大平面之決定，須一擴大線及一擴大點（半徑為零時則為尋常點），而本題中之擴大平面為已知，故可假定其為 $\mathring{A}\mathring{B}$ 擴大線及一尋常點 M 所決定。設 L 為 $\mathring{A}$，$\mathring{B}$ 兩圓公切線之交點，連結 LM。再連結 $\mathring{R}$ 圓上兩切點為一直線，交 LM 於 N。今卽以此 N 代上法中之 $\mathring{P}$，則見擴大線 $\mathring{R}$N 卽為所求之擴大垂直線。



(5) 初等幾何定理：自三角形頂點向對邊所作之三垂線，必交於一點。

擴大結果：自擴大三角形三擴大頂點向其相對之擴大邊所作之三擴大垂線，必交於一擴大點．換言之，卽假設有可作公切線之 $\mathring{A}$，$\mathring{B}$，$\mathring{C}$ 三圓，依(2)之作圖法，作 $\mathring{C}$ 圓之兩切線，使其與 $\mathring{A}$，$\mathring{B}$ 二圓之兩外公切線共四線同切於一圓 $\mathring{F}$，且使 $\mathring{F}$ 與 $\mathring{A}$，$\mathring{B}$ 公切線之切點連結線，與所作 $\mathring{C}$ 之兩切線同交於一點。依同法作 $\mathring{D}$，$\mathring{E}$ 二圓，如圖中所示，則 $\mathring{A}$，$\mathring{D}$；$\mathring{B}$，$\mathring{E}$ 及 $\mathring{C}$，$\mathring{F}$ 兩兩之外公切線共六線，切於同一圓 $\mathring{H}$。





(6) 初等幾何九點圓定理：自三角形三頂點向對邊作垂線所得之三垂足，三邊之中點，及垂心與三頂點連結線之中點，總計九點，同在一圓周上．

擴大結果：九圓定理．擴大三角形三擴大頂點向其相對擴大邊作三擴大垂

線所得之三擴大垂足，三擴大邊之三擴大中點，及擴大垂心與三擴大頂點連結（擴大）線上之三擴大中點，總計九擴大點，其所決定之九圓，必同切於兩圓（圖見上頁）.

初等幾何： 反映法(Inversion)。 設有一定點 O 及一變點 P。 另作一變點 P′，使 O，P，P′ 共一直線，且令 OP.OP′ 爲一定數，此種作法，名曰反映法。 P 點畫成一圖形時，P′ 點相應畫成另一圖形，此二圖形互爲反映形。

關於反映之定理及應用甚多，茲舉其一二。（一）直線反映成過 O 點之圓。（二）過 O 點之圓反映成直線.（三）不過 O 點之圓反映成其他一圓。（四）正交之直線或圓，仍變成正交。

擴大結果： 擴大反映法。 設有一定圓 $\overset{\circ}{O}$ 及一變圓 $\overset{\circ}{P}$，另作一變圓 $\overset{\circ}{P}'$，令 $\overset{\circ}{O}$，$\overset{\circ}{P}$，$\overset{\circ}{P}'$ 三圓切於兩直線，其中心亦在一直線上，且令 $\overset{\circ}{O}$，$\overset{\circ}{P}$ 兩圓之某公切線之長，與 $\overset{\circ}{O}$，$\overset{\circ}{P}'$ 兩圓同種公切線之長，相乘成一定數，此種作法，名曰擴大反映法。 同上理更有所謂擴大反映形。

關於擴大反映之定理及應用甚多，茲舉其一二。（一）直線與擴大直線，均反映成切於 $\overset{\circ}{O}$ 圓之擴大圓.（二）切於 $\overset{\circ}{O}$ 圓之擴大圓，反映成直綫或擴大直綫。（三）圓與不切於 $\overset{\circ}{O}$ 圓之擴大圓，反映成其他擴大圓。（四）正交性不變。

×　×　×　×　×　×

茲收到：

重慶大學補助月刊費　國幣貳百元正

程道彌　彭少如
陸子芬　徐子豪
胡術五　陳伯琴
黃禹敫　余介石
諸先生合捐國幣陸拾元正

特此誌謝！　中等算學月刊社謹啓。

算學週遊記

Helen Abbot Merrill 著 范寄萍譯

（九） π 之求法

超越數 π 在一千多年以前已經引起了算學家的注意。在量圓的面積或圓周的長度的時候，因為構成圓周的曲線，却是最難度量的東西，所以極感困難。很早的時候，便已發現了圓周的長和直徑有一種關係，就是直徑增長二倍或三倍時，圓周之長亦隨着增加同樣的倍數。所以發生一個問題："圓周和直徑的關係究竟如何呢？"換句話說，"圓周與直徑之比值，等於什麼常數呢？"

取一個圓，使之沿着紙上的直線滾動，可以得到大略的觀念。只要在圓周上做一記號，等這記號兩次接觸着紙面，便精確的去量這兩點中間的距離，量得的寸數，拿直徑的寸數去除，便可得到這數的近似值。而且不論圓周的大小，結果都差不多。鍋蓋和圓瓶，都可用來做工具，或者用一段細紙條圍繞圓周而代替滾動的動作，也無不可。

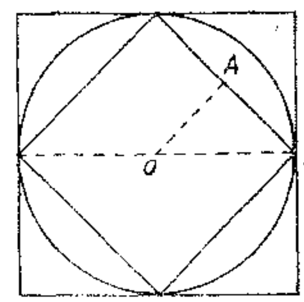
這種量法，自然很粗，但是比較以前的求法，要精確得多。例如蘇羅門廟內的大盤，據說直徑是 10 肘，圓周却是 30 肘。

紀元前 1700 年以前，埃及人求得的值，是 $(\frac{16}{9})^2=3.160\cdots$。

紀元後第二世紀，有名的天文學家多祿某(Ptolemy)求得的值是 $3\frac{17}{120}$。

時間愈向後推進，所求出的值愈較精確。亞幾默德(Archimedes)計算的方法特別有趣，讀者想必樂意模仿他底求法來計算此值。但要記着亞幾默德的時代，沒有像現在這樣利用圖形計算數值的方法。然他却竟然求得了此值在 $3\frac{10}{70}$ 與 $3\frac{10}{71}$ 卽 3.1428 與 3.1408 之間，這是多麼值得驚讚的一件事！

取一個直徑為 1 的圓，作牠底內接和外切正多邊形。用 C 表示圓周的長，p 表小多邊形的周界，P 表大多邊形的周界，這樣便知 $p<C<P$. 在多邊形為正方形時，



我們要量 p 和 P 的長，很是容易，因為

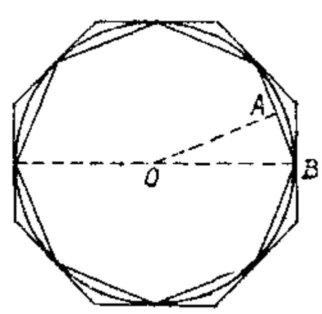
$$AO^2+AB^2=OB^2=\tfrac{1}{4};$$

但 $AO=AB$，故 $AB^2=\tfrac{1}{8}$，而 $AB=\tfrac{1}{4}\sqrt{2}$.

由是 $p=8AB=2\sqrt{2}=2.828\cdots\cdots$，$P=4$.

而 $2.828<C<4$。

平分內接正方形各邊所張的弧，再作兩個正八邊形，一個內接於圓；一個外切於圓，如是則 C 顯然在兩者之間。牠們的周界，易由三角法求得。例如求內接正八邊形之 p，則因 $\angle BOA=360^\circ\times\frac{1}{16}=22^\circ30'$，在此三角形中已知一銳角及一邊 OB，可求得 AB；p 是 16AB，自易求得。這種工作固然耗時，但我們毫無困難地可以算出當邊數加倍時 p 和 P 的連續值。下表所示，乃邊數為 4，8，16，…，512 時 p 與 P 的值，至小數五位止：



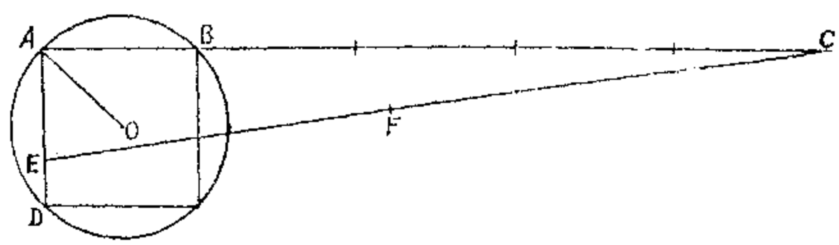
邊數	p	P	邊數	p	P
4	4.00000	2.82843	64	3.14412	3.14033
8	3.31371	3.06147	128	3.14222	3.14128
16	3.18260	3.12145	256	3.14175	3.14151
32	3.15172	3.13655	512	3.14163	3.14157

如果記得 C 在 p 與 P 之間，要求其近似值準到二位小數，只要分圓弧四次，便可達到目的。當然繼續下去，所得的值愈為正確。亞幾默德用笨拙的符號而獲得驚人的近似值，也不外是這種方法。因直徑為 1，所以這個比的近似值是 3.1416。

一種新的數發見之時，總有好幾個不同的命名。這個比值從前有些人稱之為 c，是由圓 circle 或圓周 circumference 第一個字母而來。又有人稱之為 p，也是由周界 perimeter 而來。十七世紀中有人開始稱之為 π，現在一般都通用。π 是希臘文字母之一，和拉丁文的 p 字相當。

還有許多比較簡單而且有趣的求法，分述如下：

以O爲圓心，1爲半徑作一圓，並作其內接正方形，則$AB=\sqrt{2}$. 延長AB到C，

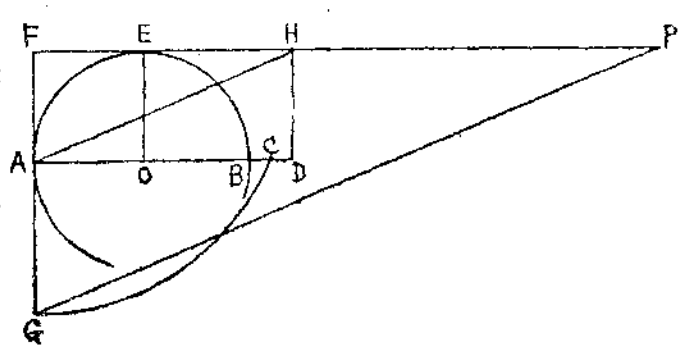


使 $BC=4AB$，則 $AC=5\sqrt{2}$. 在 AD 上取 $AE=AO=1$，連 EC，於其上取 $CF=4$. 由 $EC^2=EA^2+AC^2=1+50=51$，知 $EC=\sqrt{51}=7\cdot141428\cdots$，因之

$$EF=\sqrt{51}-4=3\cdot141428\cdots,$$

和π的精確値相差，比$\cdot000165$還小。

又有一種簡便作圖法，可求得更近似的π値。作直徑爲1之圓，令 AB 爲任意一直徑；過中心 O 作半徑 $OE\perp AB$，於 A，E 各作切線，相交於 F. 延長 AB，並取 $BC=\frac{1}{10}$，$BD=\frac{2}{10}$. 過 D 作 $DH\perp FE$，垂足爲 H. 連 AH，以 F 爲中心，FC 爲半徑作弧截 FA 之延長線於 G. 過 G 作線平行 AH 而與 FH 之延長線交於 P，則 GP 即爲所求π之近似値。



由作圖知

$$AH^2=AF^2+FH^2=\left(\tfrac{5}{10}\right)^2+\left(\tfrac{12}{10}\right)^2=\tfrac{169}{100},\qquad\therefore\quad AH=\tfrac{13}{10}.$$

又 $$FG^2=FC^2=FA^2+AC^2=\left(\tfrac{5}{10}\right)^2+\left(\tfrac{11}{10}\right)^2=\tfrac{146}{100},\quad\therefore\quad FG=\tfrac{1}{10}\sqrt{146}.$$

今 $$GP/AH=FG/FA,\ 而\ FA=\tfrac{1}{2},$$

$$\therefore\quad GP=AH\cdot FG/FA=\tfrac{13}{10}\times\tfrac{1}{10}\sqrt{146}\div\tfrac{1}{2}=\tfrac{13}{50}\sqrt{146}=3\cdot14159\cdots,$$

顯然與π很爲接近。

我們用直尺和圓規，可以作出長度爲$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$等的線段；用一種精巧儀器，如積分器(integrator)，也可以測出π的長。

因爲需要不同，所採用的π値，亦隨之稍異。在初學計算中，取$\pi=\frac{22}{7}$已經很

好。比較精確的數值，是 3·1416。其實 π 的數值，已經有人計算到幾百位小數，對於任何精細的計算，都能應付裕如。Ludolph van Ceulen 曾經算到 35 位小數，至今還刻在 Leyden 地方他的墓碑上。 在德文書中有時可以看到稱 π 為"Ludolph number." 還有一位英國人，名叫 William Shanks,他曾算到了 707 位小數。

從前的人以為如此繼續求下去，π 值終久要循環而可用分數去表示，所以不惜耗時費力，做這種冗長乏味的計算。 直至不久的過去，才證明了 π 是無理數，雖然你不難打破 Shanks 的紀錄而求到 1000 位小數，可是決得不到循環的現象。

有些人還不知道這種事實，依舊興高彩烈地去尋求 π 的精確值。 替他們起個綽號，叫做 "circle squarers"，因為如果一旦得着 π 的真值，圓周之長和圓的面積便可精確求得，而古代幾何三大問題之一，"求作一正方，使與已知圓等積"便可以迎刃而解了！

有些英法文，很可幫助記住 π 的數值。最簡單的文句，是"Yes, I have a number"；每字中字母的個數，順次恰是 3，1，4，1，6。 又有較長些的文句，可以指示 π 的十二位小數值：

"See, I have a rhyme assisting
My feeble brain, it tasks ofttimes resisting."

還有一段法文韻文，可以指示 π 的三十位小數值：

"Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, sublime ingénieur,
Que de ton jugement plut sonder la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages."

除却量圓以外，還聽到 π 在他處的用途嗎？ 橢圓面積，球，圓錐及圓柱的體積，都要有 π 在內。但是 π 在幾何的範圍以外，算學另一分枝——解析——上，却佔着重要的地位。例如無窮級數

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$$

的和是 $\frac{1}{4}\pi$，又

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots$$

的和是 $\frac{1}{6}\pi^2$.

在或然率裏，π 也有重要的用途。假如你翻開大英百科全書，就可以看到在或然率這一項下，π 這符號頻頻出現，這是多麼令人驚奇的事實呵！

英國著名算學家 De Morgan，有一次對他的朋友解釋一個算學公式。這公式表示一羣人中的一些人在若干年後還能生存的或然率，必在兩個定數的中間。這位朋友發現了式內有 π 這個符號，便問什麼意思。De Morgan 回答說，普通的定義是圓周和直徑的比値。他的朋友非常驚訝，以爲 π 和若干年後生存的人數，居然會有關係，不消說 De Morgan 一定是錯了。

根據或然率論中含有 π 的一個公式，也可以粗略地決定 π 的數値。在一張大紙或地上，畫相距 k 單位長的許多平行線，再取長度爲 l $(l<k)$ 的小杖，任意丟在那些線上。繼續地做下去，記下試驗的次數和這杖橫過一線的次數。那麼小杖橫過一線的或然率 p，爲

$$p=\frac{\text{小杖橫過一線的次數}}{\text{試驗的次數}}=\frac{2l}{k\pi}.$$

如果試驗很多次，得到 p 值以後，由這公式便能計算 π 值。好些人做過這種試驗，其中一人做了 1120 次，求得的 π 値是 3·1417。試驗次數更多，結果當然更精確。

最後再說一個計算 π 値的公式。任意寫出兩數，他們爲互質的或然率是 $6/\pi^2$. 這就是說，大約九次中有六次是互質的。再要精確點，大約 987 次中有 600 次是互質的。某次，五十個學生做這個試驗，每人很快的不假思索地寫下五對數，最後發現其中有 154 對是互質的數，即 $6/\pi^2=154/250$。由此得 $\pi=3·12$，與真值相近似。這法較上法簡單得多。

問題欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，以供讀者之研究，藉收觀摩之效．凡本刊讀者，均可提出問題，及解決本欄內所提出之問題． 無論出題或解題，概依收到之先後，次第編號發表． 數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登． 茲將投稿規約列下，幸讀者注意焉：

1. 來函務請書明姓名住址，以便有必要時可通信問答．
2. 提出問題如有出處者，請於題末示知出處所在．
3. 提出人對於所提問題，如已有解答者，請將解答一併惠下．
4. 提出問題如過於簡易，或涉近嬉戲者，本欄恕不發表，當於通訊欄內奉答，必要時或函覆．
5. 解題答案，請照本欄樣式書寫，萬勿過於潦草．
6. 所用圖形，請用黑色墨汁精確作好，附帶寄下．
7. 來函請寄武昌珞珈山國立武漢大學劉乙閣教授收．

問題已解決者

41·1 求證 $\sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}}+\sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}=2$.

證(江蘇南通中學胡壽秋)． 設

$$\sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}}=x+\sqrt{y},\cdots(1)\quad 則\quad \sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}=x-\sqrt{y}.\cdots\cdots(2)$$

兩式相乘得 $x^2-y=\frac{2}{3}$. 又將(1)式兩端立方之，等置其有理部分，得 $x^3+3xy=2$. 消去 y 得 $2x^3-x-1=(x-1)(2x^2+2x+1)=0$. 由是得 $x=1$，而題式之值爲2.

又證(武昌第二女子中學陸麗)． 題式左端之值，等於

$$\sqrt[3]{\frac{54+30\sqrt{3}}{27}}+\sqrt[3]{\frac{54-30\sqrt{3}}{27}}=\frac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{(3+\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(3-\sqrt{3})^3}\right\}=2.$$

(本題解者尚有江蘇南通中學嚴志達，河南洛陽初中張靜庵，江蘇碭山合義祥衣

莊文成宣，武昌高級中學程賓葉，廣東陸地測量局陸世桐，無錫熙春街胡次旦，山西太谷銘賢中學李世義，南京中學張慶澍，李鑄，番禺八桂中學梁憲釗諸君。)

41·2 求$\frac{1}{1!}+\frac{10}{2!}+\frac{110}{3!}+\cdots\cdots$之和。

解(南通中學嚴志達)。除第一項外，以後各項均合次式(n 爲次數)

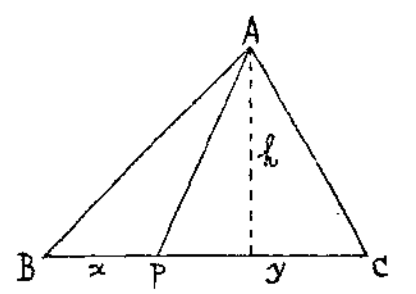
$$u_n=\frac{10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10}{n!}=\frac{10(10^{n-1}-1)}{9(n!)}=\frac{1}{9}\cdot\frac{10^n}{n!}-\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{n!}$$

$$\therefore\quad S=1(\text{題中第一項})+\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}-\frac{10}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=1+\frac{1}{9}(e^{10}-1)-\frac{10}{9}(e-1)=\frac{1}{9}e^{10}-\frac{10}{9}e+2.$$

(本題解者尙有無錫胡次旦君)。

41·3 求自三角形之任一頂點至對邊作一線，分其面積爲 A_1，A_2 二部分，使有$\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}=\frac{1}{a}$之關係，式中 a 爲已知面積。



解(武昌第二女子中學陸麗)。設 AP 爲合於條件之線，h 爲 BC 邊上之高，$BP=x$，及 $PC=y=BC-x$。將已知面積 a 變爲同高之三角形，設其底長爲 a'，卽 $a=\frac{1}{2}ha'$，則由題意

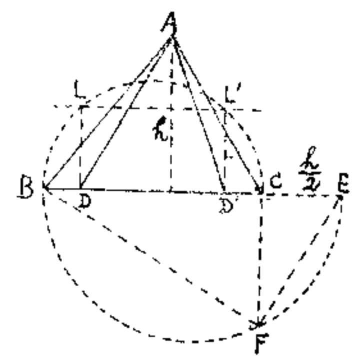
$$\frac{1}{\frac{1}{2}hx}+\frac{1}{\frac{1}{2}h(BC-x)}=\frac{1}{\frac{1}{2}ha'},\text{解之得}\quad x=\frac{BC\pm\sqrt{BC(BC-4a')}}{2},$$

而 x 爲可作。隨 $a'<$，$=$或$>\frac{1}{4}BC$，本題有二解，一解或無解。作圖從略。

又解(南通中學嚴志達) 設 $a=l^2$ 爲已知面積，l 爲已知長。又設高爲 h，底爲 b，若 AD 爲所求之線；$BD=x$，$DC=y$，則 $x+y=b$，而

$$\frac{1}{\frac{1}{2}hx}+\frac{1}{\frac{1}{2}hy}=\frac{1}{l^2}.\ \text{由是}\ \frac{b}{xy}=\frac{1}{2}\frac{h}{l^2},\text{而}\ xy=\frac{2l^2b}{h},\text{因得作法如次:}$$

延長 BC 至 E，使 $CE=\frac{1}{2}h$。以 BE，BC 爲直徑各作半圓，分居 BC 之兩側。

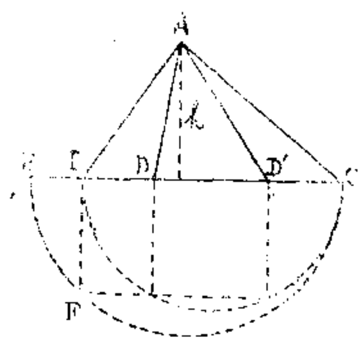


自C作BE之垂線交下方半圓於F，則因

$$\frac{BC}{CE}=\frac{BF^2}{EF^2}=\frac{2b}{h}，故\ xy=l^2\frac{BF^2}{EF^2}$$

而$\sqrt{xy}$爲可作。次作BC之平行線，距離等於$\sqrt{xy}$，此線交以BC爲直徑之半圓於L,L′兩點。自L,L′各向BC作垂線，設其垂足分別爲D,D′，則AD,AD′均爲所求之線。證明從略。

又解（廣東陸地測量局陸世桐） 延長BC作$\triangle ABE=a$，幷設AD爲所求之直線，則由圖有



$$\frac{1}{\triangle ABD}+\frac{1}{\triangle ACD}=\frac{1}{\triangle ABE},$$

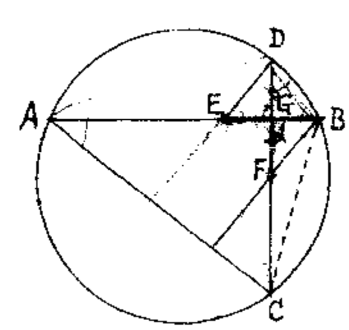
即 $$\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC}=\frac{1}{BE};$$

$$\therefore\ BD\cdot DC=BE(BD+DC)=BE\cdot BC.$$

以EC爲直徑作半圓，自B作BF⊥EC；再以BC爲直徑於同側作半圓；自F作線平行BC，交此半圓於二點。由此二點各向BC作垂線，令其垂足爲D,D′，則AD,AD′皆爲所求之線。證明從略。

（本題解者尚有武昌文華中學劉聲烈，山西銘賢中學李世義，江都楊承祉諸君。）

41·4 AB,CD爲圓內正交二弦，自D,B各向AC直線作垂線，交AB於E,CD於F，求證DE=BF。



證（南京吳詠懷） 設AB,CD交於G. 由圖顯見F爲△ABC之垂心，故知FG=GD,而直三角形DGE≅BGF,因之DE=BF(證訖)。

（本題解者尚有山西銘賢學校孫善，

四川省立奉節中學王雨生，南通中學嚴志達，蕪湖廣益中學黃麗生，陶後晁，武昌文華中學劉聲烈，江都楊承祉，廈門鼓浪嶼陳紹德，番禺八桂中學梁憲釗，南京中學李鑄，及廣東陸地測量局陸世桐諸君。）

41•5　設 $17A=\pi$，求 $\cos A$ 之値。

編者按此題計算甚冗長，不便登載，在 Hobson 之三角法（商務書館有龔文凱譯本）第 113 頁上有求 $\sin(\pi/17)$ 之法，得値爲

$$\frac{1}{8}\sqrt{\left\{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right\}}.$$

由此可求 $\cos(\pi/17)$ 之値。　山西銘賢學校李世義及南通中嚴志達兩君投稿亦皆云然。

14•6　求證 $\sin 18^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots\cdots}}}}$.

證（江都楊承祉）設 $x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots}}}}$，則 $x=\sqrt{2-\sqrt{2+x}}$，解之得 $x=-1,\ 2,\ -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1),\ -\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$。因 $\sin 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$，故本題得證。

（本題解者尙有南通中學嚴志達君。）

提　出　之　問　題

45•1　只用圓規，求作已知三線段之第四比例項（山西銘賢學校李世義提）。

45•2　求作一直線 (a) 平行於一已知直線，(b) 垂直於一已知直線，使其平分一已知三角形之面積（廈門鼓浪嶼陳紹德提）。

45•3　設 I, H 爲 $\triangle ABC$ 之內心及垂心，R, r 爲其外接圓及內切圓半徑，r_2, r_3 爲對 B, C 兩角之傍切圓半徑，T 爲其面積，又設 K 爲 $\triangle BHC$ 之外心，求證 $IK^2=(R+r)^2+r^2-2T^2/r_2r_3$（前人提）。

45•4　用上題中記號，並設 r_1 爲對 A 角之傍切圓半徑，試證若 $\triangle ABC$ 之外心及內心聯線切於對 A 角之傍切圓，則有 $T(r_2-r_3)=r_1r_2r_3(1-2r/R)^{\frac{1}{2}}$（前人提）。

讀者通訊

河南開封張質奇君來函：前在友處見首都國立□□大學教員孫□□君印發「敬告□□□□□」一書，內有指責余介石先生編高中代數各點，鄙意認爲頗有可以討論之處。特將管見所及，函達貴社，並請登載貴刊，俾衆討論爲感。

(I)孫君原書 $p.9$ 謂"…關於組織次序者，則如中華書局出版之高中代數學。在第五十八頁'式的整除性'一章中，忽插入整係數方程式之有理根一段。第一百五十三頁'二次方程式'一章中，又無端插入高次方程式 $f(x)=0$ 之變易及其重根一段。此種組織，殆爲任何國代數教科書中所不經見…"

奇曾採用余君書二次，友人中採用此書者亦不少，故該書二十三年一月甫發行，至十月已四版。就各方實際教學經驗所及，該二段在教學上，尚無不便之處。且按教育部二十一年頒布之高中課程標準(商務版)算學科 $pp.6-7$，(五)高次方程一段下所列(1)一元二次方程項內，載有'方程式之變易'一節。余君書之編制，與上述部頒標準頗合，似不可謂'無端插入。'此書之論重根，係視爲方程式變易之一應用，前後銜接，尚覺自然，亦無牽強湊合之病。

至於'式的整除性'一章，插入整係數方程式之有理根一段，查原書§36所述，乃此種方程式有理根分子分母與方程式首末二係數之關係，而爲整數可除性之一應用，絕非突然插入。且此種方程式有無有理根之問題，亦即此種有理整式是否爲不可約式(見§35)之問題。其前後相銜接，用意甚明顯。在他一方面，又爲對有理係數多次式實施因式定理之一指導。余君書 $pp.38-39$ 之§25，述因式定理時，曾明白指出。奇授是書至此節時，學生頗能領悟其編制上之前後呼應，而毫不感覺有生硬凌亂之處，亦足爲是書編制尚佳之一明証。

至於孫君指是書組織殆爲任何國代數教科書所不經見，似不成爲缺乏組織系統之一理由。且孫君亦自言"各國教育制度不同，國民性亦異，其學科教材之選擇，表示思想之方式，自不一致"。今我國之教育制度，學科教材之選擇，既經教部頒布，凡不與部令相背者，自無不合，未可以個人之主觀，強立部令以外之標準也。

(II)孫君原書 $pp.9-10$ 謂"…其尤令人駭異者，中華出版之書，尚有不少錯

誤在內，茲略舉如左。

(一)原書(二百三十九頁)極限之定義，'如變數 x 的變值，與一定數 a 的差，可到小任何程度，並且自此以後永遠如此，我們便說變數 x 以定數 a 爲極限'云云。按：一定數 a 的差之下，如不加'其絕對值'四字，絕不可通。

(二)原書(二百七十頁)共軛雜數之定義，'兩個雜數有相同的虛實部，但聯接他們的號不同，叫做共軛雜數'云云。此與言'兩數相等但其號相反'者，犯同一錯誤。

(三)原書(三百三十三頁)'無窮項級數的總和，我們是不能求得的，但是可視總和爲項數 n 的函數 $f(n)$，因爲總和的值是隨着項數決定的，如極限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 存在，我們便叫這極限值爲和，實在就是和的極限'云云。按：無窮項級數和之定義應爲'無窮項級數的最初 n 項之和 S_n 爲項數 n 的函數，因爲 S_n 的值是隨着項數決定的。$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，我們便叫這極限值爲這級數的和'。原文誤。

(四)原書(三百四十六頁)'無窮連級數的和如能趨于一極限，便叫做斂性無窮連級數，簡稱爲斂級數。和的極限值，便叫做和'云云。按斂級數之定義應爲'設 S_n 表級數最初 n 項之和。如 n 無限增大，S_n 趨近于一有限數值，則這級數叫做斂性級數'。原書誤。

(五)原書(二百九十頁) $k=10\times(10^h-1)$式中 h 爲正數，則 k 亦爲正數。書中並無證明。(讀者可參閱余書一百六十三頁)。

(六)原書(四百四十頁)'設 k_1, k_2, k_3, k_4，不盡爲零…'云云。若 k_1, k_2, k_3, k_4，皆爲零，該書並無下文，則定理本身尚未充分證明，該書謂定理中的'條件是充足的'，當有脫誤。

此等錯誤，熟習代數者，類能知之，……"

奇意孫君所指出各節，似未可謂爲錯誤。

(一)數學中「差」字之義，係指自大量減去小量而言，否則「差」字有二意義，本身上卽含混。例如各種解析幾何學內雙曲綫之定義中，所謂一動點至二定點距離之差卽是，否則只可得雙曲線之一枝，而不能得其全部矣。故鄙意如言'自變值減去定值的差'或'自定值減去變值的差'，可指爲「絕不可通」。否則「絕對值」三字

加亦可，不加亦可。又查易俊元譯梧兹二氏高等混合算學上卷(商務版) $p.104$§53之極限定義，亦為'當一變數依一定變化之律，漸次接近於一常數，其變數值與常數間之差，小至任何可名之數量時，此常數名為該變數之極限'，亦未加絕對值字樣，梧兹 Woods 氏乃美國麻省理工大學名教授，當不至犯'絕不可通'之病也。

(二)按余君書 $p.141$ 之 §71，謂雜數為'用加減號聯實虛數兩部所成的數'，其用意顯係視聯接之號，可加可減，換言之，即不以此加減號為實虛部之性質號。故共軛雜數之定義，毫無錯誤。且鄙意以為余君之說法，實較便利。如視加減號為性質號(即正負號)，而限定以加號聯虛實部，則凡雜數 $a-bi$ 應書成 $a+(-b)i$ 之形，未免太板滯矣。

但鄙意以為共軛雜數之定義，如改為'二雜數之實部相同，而虛部僅異號者'，似更確切。因余君於共軛雜數下，雖即舉出 $A+Bi$, $A-Bi$ 之形式，但恐初學猶誤解 $-A+Bi$ 亦為 $A+Bi$ 之共軛雜數也。

(三)按余君書既明言'無窮項級數的總和，我們是不能求得的'；又謂'可視總和為項數 n 的函數'，則所謂總和之指'最初 n 項之和'，甚為顯然。孫君所舉定義，措辭雖異，然未見有意義上不同之處。謂余君原文有誤，不知何所指。

(四)余君書中'無窮連級數的和'一語中，顯係脫去一'總'字。其無誤之理由同上節。

(五)孫君之證如何，奇因未購得孫君大著，無由揣知。但奇認為 h 為正數時，10^h 之大於 1，對高中學生殆無證明之必要。尤以該節所論，重在作圖，又非定理，不證自無不可。因高中數學中不能一一予以嚴格之證明甚多，不僅此一處也。奇在三四年前曾採用何魯先生編之高中代數(商務版)，其書 $p.136$ 所論，亦為指數函數。對於 $a>1$ 時之討論中，有如'h 為正，$a^h>1$，故 a^h-1 亦為正'等語，亦未嘗舉出 $a^h>1$ 之理由。何先生不特為我國數學名家，且為先進之數學教育家，有關於數學教育之偉論多篇迭在科學雜誌發表，其見解定不至有誤也。

(六)余君此節所論，似本 Fine: College Algebra pp.512 至 513 之 §924，該書於 §924 之末，曾述明'……If the minors of all the elements of D are zero, it can be proved that $f(x)=0$ and $\varphi(x)=0$ have more than one common root'，亦

未列證明。 余君書中所論，爲二個二次方程式，較 Fine 書中更爲簡單；如 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$，極易見 $f(x)\equiv cF(x)$。 更未可謂略去此種細節，而即指爲‘令人駭異之錯誤’，(下略)。

[答]先生忠於學術，又富研究精神，極爲可佩。 余先生刻遠在四川重慶大學任教，郵件往還，極爲遲滯，恐勞先生盼念，特先將尊示載入月刊，以供大衆討論，並就鄙見稍加補充如次：

(I)關於編制問題，尊見極是。 且無論何種編制方法，各人見解决不能一致。一二人主觀認爲不便，不能强他人相從。 惟揣孫先生該文用意，似在爲其所著之教科書作辯護，並非責難余先生，強其相從。 查該文 $p.10$ 有“余之舉此，初非與該書編者或出版書局爲難也。 亦曰教科書之有是等錯誤者，□□□□□□□時，可以熟視不睹，而准予審定，並由教育部通令全國學校採用。 而余書是無此等錯誤者，則可由□□□任加評語，顛倒黑白，而不予□□，並不得爲各學校所採用耳”一段可以見之。

(II)先生所提各節，理由皆甚充足。 茲再略伸管見，以作高論之註脚，尚希有以教之。

(一)查 Osgood: Introduction to Calculus p.7 謂 “Again, by the difference of two numbers, we often mean the value of the larger less the smaller,” 所謂 difference 之義，與先生不謀而合。 Osgood 爲有名之數學巨子，固可信任其不致開‘絕不可通’之惡例也。

(二)雜數之定義，據 Hawkes 著 Advanced algebra p.178 之定義爲 “…An expression which consists of a real number connected with an imaginary number by a + or − sign”，亦與余先生者相同。 至於先生所示修正之定義，自較明確。 然余先生書 $p.141$ 既言‘用加減號聯實虛數二部…’，又一般通例，均書雜數爲 $a+bi$ 之形，而鮮有作 $bi+a$ 者，(此種寫法，並非絕不可通，不過較少見) 故初學或可不至誤會。然無論如何，先生之建議，確甚有價值，余先生當樂於擇善而從也。

(三)余先生書既言‘總和爲項數 n 的函數’，則所謂‘總和’，指有限項而言，殆

無疑義。 然究與前一語中「總和」二字相重，文字上宜稍修正。 鄙意擬向余先生建議，改‘無窮項級數的總和’一語爲‘無窮連級數全部的和’，或其他類似之句語，不知尊意認爲妥適否？

(四)當係脫落一‘總’字。此外余先生書中 $p.13$ 乘除公律‘$C=0$’一句中，脫落一‘C’字，$p.101$ 末行表中之 -3 應作 3，已一併告余先生，請其通知出版家改正矣。

(五)茲查孫先生書 $pp.163-164$ 原文如下：

“定理　設 a 大於 1，則 $\sqrt[n]{a}$ 隨 n 增加而減小，若 n 無限增大，$\sqrt[n]{a}$ 趨近於 1；設 a 小於 1 而大於零，則 $\sqrt[n]{a}$ 隨 n 增大而增大，若 n 無限增大，$\sqrt[n]{a}$ 趨近於 1。

1° $a>1$，則有 $a^{n+1}>a^n$。 兩端各開 $n(n+1)$ 次方，得 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n+1]{a}$；故 $\sqrt[n]{a}$ 隨 n 增大而減小。 且 $\sqrt[n]{a}$ 常大於 1，若 $\sqrt[n]{a}<1$，則有 $a<1^n$，卽 $a<1$，是與所設不合矣。……”

其中證明 $10^h>1$ 者，似爲 $p.164$ 中之‘且 $\sqrt[n]{a}$ 常大於 1…是與所設不合矣’數語，不特與 $p.163$ 所論無關，且此一段之論證，亦不需用 $p.163$ 所述之理。故以準確之文字表之，當曰‘可參閱余書一百六十四頁’。然苟一細究余先生書之內容，則頗易明孫先生之所論，並不足以證余先生書中之所略。余先生書中於 §148 論指數函數之前一節，曾略述無理指數之意義，因言函數時，自變數 x 爲連續，其值應能爲無理數，是以 h 之値亦可爲無理數。孫先生所著，全書絕未提及無理指數一字，安能證明 h 爲無理數時 $10^h>1$ 乎？ 如欲證明此理，必先確定無理指數之意義及其性質，余先生書僅於 §147 略述其意，而未證者，卽以此種論理稍細密，不宜語之高中學生也。 何先生爲我國著名學者，據先生所示，其著作中亦將此項證明略去。 余先生書出較後，取法名家著述，斷不能責爲不合也。 故此項證明之略而不論，不特非‘令人駭異之錯誤’，而孫先生欲引其書以作證明，反不免爲一種誤解矣。

(六)余先生書所論不過爲薛氏消去法之一例，並非欲樹立一普遍之定理。 其對微屑細節，自無列舉之必要。 如欲就普遍之定理而加以論述，其非高中生所能了解，亦與上同。　　(謨)