范氏高等代數學

陳嶽生 譯

A Translation

from Henry B. Fine's

"College Algebra"

范氏高等代數學

陳 嶽 生 譯

A Translation

from Henry B. Fine's

"College Algebra"

開 明 書 店

范氏高等代數學

一九四九年九月初版

每册基價二〇・〇〇

編著者	Henry B. Fine
翻譯者	陳嶽生
發行者	上海福州路 開明書店 代表人范洗人
印刷者	開明書店

(322 P.) W　　范

原　　序

在本書裏面，著者把代數學上各種手續所根據的理論，加以啓發，雖努力求其儘量近於淺易和簡略，但亦不使其失卻聯繫和嚴正。就各種手續本身而論，則力圖其最可適合實際計算之目的。

凡是與中等及高等學校學生求學時所需要的代數學有關的，都包含在本書之內．這些不同的項目，其排列的次序，著者力使其合於邏輯上的聯繫．

在著者看來，本書似應分成兩編，第一編是預篇，專論代數學的數系，第二編是正篇，專論代數學的本身．

著者論數時所根據的，乃是純數 (cardinal number) 的概念，以及自然數紀 (natural scale) 中最先呈現的次序概念．採用這個講法的主張，是有理論方面的研討的，這種研討，這裏不必予以援引．但是著者憑着經驗深信，從教育的觀點看來，這也是最好的講法．舉個例來說，一個無理數的序次定義，即使給一個年輕的學生看了，他也會了解它的意義，然而無理數的其他任何實在的定義，必將過分抽象，以致程度很高的學生，也常常不能對於它有正確的了解．(前者指 Dedekind 的無理數理論而說，後者殆指 Cantor 的無理數理論而說——譯者．)

著者對於數的討論，也許要被認爲不必如此細到．但是數的討論，乃是代數學上的基本問題，一個頭腦清醒的寫作人，在論述這樣的基本問題時，決不可以把他的討論中應有的各點，略去不管，也決不可以對於需要證明的陳述，不予證明．著者希望，討論之中的各項細節，會引起思想豐富的學生們的興趣；但就一般學生而論，卻祇要他們從這討論，懂得實數的序次特徵，以及實數與實數之間相等與不等關係的序次特徵，此外又懂得，就實數與複數而論，其基本運算所

許設立的定義，都遵守對易 締結，以及分配三定律.

本書正篇開始時，著者察見，在以文字代數的代數學中，對易，締結以及分配各律，無異於基本運算的定義．這些代數的定義，都經詳細陳述，然後用演繹的方法，從這些定義．把代數學上各種手續的全部理論，以及實用方面的各條計算定則，都推導出來.

這一篇的內容，著者不打算詳細敍述．同一般通用教科書相比，就會覺得它有幾個特點．著者頗知留意，不要單單爲了標新立異的緣故，把業經公認爲適用的方法，摒除不用。但在爲了獲得邏輯上的相容起見，著者認爲通用的方法不適用之時，或在著者發見一個機會，可將一個問題予以簡化之時，著者立即捨棄這些方法，毫不猶豫．特殊方法，正文與習題中都不收。但從另外一方面說來，凡是代數學上的一般方法，著者常常設法使學生對於它們可到眞正精通的地步.

未定係數法乃是解析學上的一個主要探索法，這個方法，著者不將它擱在正篇的後半部，卻將它提得很前，而且此後遇有可以利用它的機會，就加以採用．這樣一來，各項目的排列，當然受到了影響．特別要提出來說的，就是著者在論述分式的一章中，順便研討了部分分式.在這地方講述部分分式，乃是很合邏輯的，且若處理適宜，還可以使學者對於代數學上的基本計算，得到最好的實習.

著者對於除法變換及其各推論，也予以非常的重視，而且緊接着除法變換，引入了效用宏大的綜合除法.

在論述方程式的最初幾章裏面，將見著者對於解方程式所根據的推理方法，有頗詳盡的討論；對於可以利用二次方程式得解的方程組，予以較通常更趨系統化的處理；而且對於二元一次及二次方程式的位跡，有頗細到的硏討.

指數是正整數時適用的二項定理，著者把它看成連乘法的特例.著者憑經驗深信，沒有別的更好的方法，可使學生懂得這個重要定理的意義．在論述分指數的一章裏面，引入了廣義二項定理的實用，但

是該定理本身的證明，以及凡與無窮級數有關的各項目，卻延擱到本書將近終了時再講。

在講述方程式論以及行列式的各章裏面，有與方程式諸根對稱函數有關的基本定理的證明，且有結式較重要各性質的討論。這兩個項目，本不屬於初等代數學（本書與初步代數學相較，固然好算是高等的，但若與代數學的高深理論相較，仍只好算是初等的，所以原著者這樣說——譯者），但就大學中繼續攻讀數學的學生們而論，卻是不可缺少的。論無窮級數的各章，以及論綿續函數各性質的本書最後一章，也都是為了這些學生們的需要而寫作的。

本書第一編所根據的，乃是韓彌登（Rowan Hamilton），格拉斯芒（Grassmann），赫莫茲（Helmholtz），得迪耿（Dedekind），以及康鐸（Georg Cantor）諸家的意見。但著者迄今未知，以前有什麼人也從著者所取的觀點，啓發序次數的學說，而且也講得這樣的詳細。

搜集代數本身方面的材料時，著者得益於許多代數書籍的啓示，尤以克斯律忒（Chrystal）氏代數學為最，著者特在這裏深致謝意。

本書的準備，歷時數年之久。從 1898 年起，每年承出版公司的好意，印行一本小册子，給普林斯登（Princeton）大學的一年級生參考，其中所載，乃是著者對於代數學上比較重要的各部分，在當時認為最合意的處理方法。著者得到同事愛生哈（Eisenhart）和吉勒庇（Gillespie）的幫助，每作一次新的試驗後，就努力把確被認為好的選入，而將確被認為不合意的剔去。因為這個緣故，本書有許多地方，曾經重寫過好幾次。此後的經驗，無疑地將使許多地方有更被改良的可能；不過著者抱有希望，就本書現在的內容而論，已足使人知道，若對於代數學上各項手續所據的推理方法，予以應有的研討，則代數學不但更可讓學生容易了解，而且更有動人的意味。

Henry B. Fine

普林斯登大學一九〇五年六月

譯　序

范氏高等代數學，其特點是立論力求謹嚴，立法力求有據，頗帶些幾何學的風味．著者在原序第一節中說："雖努力求其儘量近於淺易和簡略，但亦不使其失卻聯繫和嚴正．"又在原序第四節中說："一個頭腦清醒的寫作人，決不可以把他的討論中應有的各點，略去不管，也決不可以對於需要證明的陳述，不予證明．"這些話，的確能夠代表全書的作風，同時也可以對於教者和讀者，予以有力的啓示．而譯者也因爲這個緣故，在譯述本書時，不但力求行文的信達，而且力求用字的恰當．例如 given 與 known，一般都譯作已知，其實它們是有區別的．Given 的不一定是 known 的，known 的也不一定是 given 的．倘若遇見 a given known thing 或 a known given thing，而將它們都譯成"一個已知的已知的東西"和"一個已知的已知的東西"，豈不是一件笑話麼．所以譯者把 given 譯作已設的或所設的，而將 known 譯或已知的，這樣便沒有混淆了．(按 given 一字，編譯館本數學名詞不載，而科學名詞審查會本算學名詞作所設或所與．)

又如 Process 一字，編譯館本數學名詞作方法或步驟，科學名詞審查會本作過程，三個譯名都不妥．Process 的進行，可以有幾種方法，也可以分成幾個步驟．假如把"this process can be performed by three methods"，譯成"這個方法可以用三個方法來實行"，或把"this process can be completed in five steps，"譯成"這個步驟可以分五個步驟來完成，"似乎都有語病罷！過程二字，用在物理學上或化學上很相合，但是用在數學上則嫌未合．所以譯者就把 process 譯作手續，於是 reversible process 譯作可倒的手續，也就講得過去了．

再如 a polynomial in x 或 an equation in x，決不能譯成 x 的多項式或 x 的方程式，因爲原文用 in 字，是有把 x 看成主要變數或

主要未知數的意思，亦卽有 in powers of x 或 in terms of x 的意思. 須知 function of x 纔的確是 x "的"函數，而 equation of motion 纔的確是運動"的"方程式. 譯者起初擬將 a polynomial in x 譯成"以 x 爲變數的多項式，"而把 an equation in x 譯成"以 x 爲未知數的方程式"，後來又想到這樣譯法，仍嫌未妥，因爲除 x 外是可以還有其他變數或未知數的. 所以最後決定將前者譯做"由 x 構成的多項式"，而將後者譯做"由 x 構成的方程式"，因爲 a book in Chinese 是可以譯做"用中文寫成的書"的.

Degree 一字譯作次，於是 the degree of this equation is three 一語，當然譯作這個方程式的次是三. 這樣的譯法，也許有人要認爲生硬，因爲這句話的普通譯法，是"這個方程式的次數是三". 但"次數"兩字要同 number of times 相混淆，譯者卽爲免除這混淆起見，纔採用了上面的譯法. 同時，number of times 也不譯作次數，而譯作回數. Product 一字有人譯作乘積，譯者從前好像也這樣譯過，現在覺得這個譯名實嫌不妥. 單用積字，何嘗不可，卽使有時爲行文方便起見，也應該用相乘之積來代替. 一般人似乎都有一個習慣，覺得名詞非用兩個字來表示不可，其實未必盡然. 就數學名詞而論，商豈能作"除商"，和豈能作"加和"？他如方程式的"根"，行列式的"元"，我們也沒有方法用兩個字來表示啊！所以像 the product x^2yz，譯者就把它譯成積 x^2yz，看慣了讀慣了，也就覺得它順口了. 又如 value 一字，祇能譯作"値"，萬萬不能在它的前面隨便加個"數"，因爲"數値"是 numerical value，它的意義是同於 absolute value 的.

全書的譯文，像上述那樣的斟酌之處很多，恕譯者不能一一盡舉. 至於名詞方面，大都依照編譯館本數學名詞及審查會本科學名詞. 其有兩書都不見的，則參照綜合大辭典酌定. 不過有些名詞，各本的譯法都嫌不妥，譯者祇得另定，現在挑幾個比較重要而普通的，在這裏解釋一下.

Equivalent groups 編譯館本數學名詞作等濃羣，濃字的意義當然是濃度．按蕭君絳譯圓正造著羣論 23 頁有云："玆有甲乙兩集合，若對甲之各元素，可每使乙元素之一與之對應，反之，對乙之各元素，可每使甲元素之一與之對應時，則此兩集合，名曰具有同一之濃度，或曰同等．" 譯者以爲濃度的意義甚晦 且容易引起誤解，不如同等二字的意義明顯，且與 equivalent 一字的意義切近，所以把 equivalent groups 譯作同等羣．Equivalent 一字譯作同等後，equivalent equations 譯作同等方程式，也講得通．這個名詞，編譯館本作同值方程式，不知所同者何值，因爲方程式是沒有值的．據審查會本，equivalent equations 作同根方程式，而同值方程式乃是日文的譯名．根字亦不妥，因爲就聯立方程式而論，適合各方程式的諸未知數之值，通常叫做解 (solution)．

Associative law，編譯館本作結合律，審查會本作締合律，都不妥．結合乃是一般的 combination，兩個數相加也是結合，兩個數相乘也是結合，而所謂 associative law，其實只是結合手續進行時的步驟而已．與其用結合二字，毋寧用締合二字，但在用文字代數時，祇能締而不能合．所以譯者把 associative law 譯作締結律．

Graph 一字，自來就沒有適當的譯名．記得三十年前譯者初入商務書館編譯所時，曾向段育華先生建議，將此字音譯爲"格欄幅"，也曾流行過一時．後來究因生硬無義，漸漸被人摒棄．但審查會本作𦄵格，是否從"格欄幅"蛻化而來，不可查考．審查會本此字又作脈，而編譯館本也作脈，脈字的取義，據譯者猜度，大約是山脈的蜿蜒，或者是葉脈的分布，或者是脈絡的延伸．用脈字來譯 graph，在創始者以爲象形會意，兼而有之，可惜他是苦心空費了．因爲 graph 不必一定是一條連續的線，也可以是一個孤零零的點，也可以是幾個點，也可以是點與圈圈，也可以像一朵花，也可以像街道．這還是數學上各種函數的 graph．若在統計學上畫幾個圓或幾條線，或畫幾條柱子，幾

個扇形，也叫做脈，那眞是相去未免太遠了. 況且在現代生理研究方面，有所謂 graph of pulse, 乃是表示脈搏的 graph, 若照上述的譯法，豈不成了"脈的脈"麼？物理學名詞改訂本(現正在審查中，譯者亦列席發表意見)作標繪圖，甚好，因爲畫 graph 是要先定坐標的. 但在數學上，此名似嫌過於具體，所以譯者將 graph 譯作位跡，位是指 graph 在坐標系中的地位，而跡則可線可點，似乎差強人意罷！

Measure 一字作名詞解，一向也沒有恰當的譯名. 本書 26 面 § 80, 有 measure 的定義是: "If the magnitude contains the unit a certain number of times exactly, we call this number its measure". 接下去又有一句: "In particular, we call the measure of a line segment the length of the segment". 又據韋氏大學字典, measure 的解釋與這裏所舉定義相合的有, "An extent, degree, or quantity of something." 因此，譯者就把 measure 譯成含度.

Continuous function, 本來譯作連續函數, 審查會本作綿續函數，但編譯館本作連續函數. 譯者以爲函數的綿續，有嚴密的定義，與普通的連續不同，似應加以區別，所以採用綿續二字.

關於名詞譯文的話，就在此處打住. 關於全書的內容，固然也有可以評議的地方，但是大概說來，本書確好算是一本標準的教科書. 有些地方，譯者原擬加一些註解，但爲時間所限，祇能待諸來日. 全書譯文，倘有不到之處，尙希教者讀者，隨時賜教，俾可改進.

陳嶽生謹識

一九四九年於上海震旦女子文理學院

目　次

第一編　論數

I. 自然數——計數法，加法，及乘法 …… 1
II. 減法與負數 …… 16
III. 除法與分數 …… 27
IV. 無理數 …… 39
V. 虛數與複數 …… 70

第二編　代數

I. 初步討論 …… 79
II. 基本運算 …… 93
III. 一元一次方程式 …… 110
IV. 聯立一次方程式 …… 127
V. 除法變換 …… 155
VI. 有理整式的因子 …… 176
VII. 最高公因與最低公倍 …… 196
VIII. 有理分式 …… 213
IX. 對稱函數 …… 245
X. 二項定理 …… 252
XI. 開方 …… 260
XII. 無理函數，根式與分指數 …… 271
XIII. 二次方程式 …… 298
XIV. 二次方程式的討論．極大與極小 …… 304
XV. 可利用二次方程式得解的高次方程式 …… 309

XVI. 可以利用二次方程式得解的聯立方程式 …… 317
XVII. 不等式 …… 340
XVIII. 一次不定方程式 …… 342
XIX. 比與比例. 正反變 …… 347
XX. 等差級數 …… 354
XXI. 等比級數 …… 357
XXII. 調和級數 …… 362
XXIII. 階差法.高階算術級數.插入法 …… 364
XXIV. 對數 …… 374
XXV. 排列與組合 …… 393
XXVI. 多項定理 …… 408
XXVII. 幾率 …… 409
XXVIII. 數學歸納法 …… 424
XXIX. 方程式論 …… 425
XXX. 三次及四次一般方程式 …… 483
XXXI. 行列式與消去法 …… 492
XXXII. 無窮級數的收斂 …… 520
XXXIII. 關於無窮級數的運算 …… 539
XXXIV. 二項,指數,及對數級數 …… 553
XXXV. 循環級數 …… 560
XXXVI. 無窮積 …… 564
XXXVII. 連分數 …… 566
XXXVIII. 綿續函數的性質 …… 577
答案 …… 591

第一編 論 數

I. 自然數—計數法,加法,及乘法

物羣及羣之純數

物羣. 日常所見之物,不但是一個一個的,而且是合成一羣一羣 (groups) 或一集一集 (assemblages) 的.

一隻手的指頭,一隊牛,一個多角形的頂點,就是物羣的例子.

有某某數物,不將它們看成一個一個,而將它們當作整體,以別於他物 此時心目中卽認爲此數物組成一個羣因而全部成爲單個對象(a single object).

爲便利起見,組成一個羣的各物,叫做該羣的元(element).

同等羣. 一一對應. 由文字 ABC 與 DEF 組成的兩個羣,有如下的關係,卽這一個羣的各元同那一個羣的各元,可以一個配一個的配成一對一對. 例如 A 與 D, B 與 E, C 與 F, 都可以配成對.

兩個羣的所有各元,都能這樣的配對時,就說這兩個羣同等 (equivalent);將各元配對的手續,叫做使兩個羣發生一對一或一一對應 (one-to-one correspondence) 的關係.

3 **定理.** 兩個羣各與同一第三個羣同等，這兩個羣也同等.

因從假設，可使這兩個羣與第三個羣成一一對應. 但在每從這兩羣各取一元與第三羣的同一元配對時，也認這兩個元是一對，則此兩羣也成一一對應.

4 **純數.** 一切可以組成的物羣，都可歸入同等羣的各類. 已知的兩個羣是否屬於同類，視其是否可成一一對應而定.

例如由文字 $ABCD$ 與 $EFGH$ 所成的羣，屬於同一類，而 $ABCD$ 與 EFG 這兩個羣，就屬於異類.

一類中一切諸羣的公性，可以區別一類之羣與他類之羣的，卽是羣中物的個數(number of things)，或稱該羣的純數(cardinal number). 換句話說，

一羣中物的個數，或其純數，卽是該羣本身，以及凡可與該羣成一一對應的各羣所有的公性.

我們還可以這樣說："物羣的純數是羣的一種性質，若將羣內各物重行排列，或逐一換成他物，該性質不變"；或說："該性質與物之特徵及其在羣內的排列均無關係".

因將各物重行排列或逐一換成他物，不過是將該羣換成同等羣而已(§2). 而在此等變更發生於羣內時依舊不變的性質，非與物之特徵及其排列無關不可.

部分． 第一羣的元都是第二羣的，第二羣的元不都是第一羣的，則稱第一羣是第二羣的部分 (part)． 5

例如羣 ABC 是羣 $ABCD$ 的部分．

從這定義，立可推知：

若三個羣之中的第一羣是第二羣的部分，而第二羣是第三羣的部分，則第一羣又是第三羣的部分． 6

有窮羣與無窮羣． 一羣或一集，與其各部分均不同等者，我們說它是有窮的 (finite)；確可與其某部分同等者，說它是無窮的 (infinite)．* 7

例如羣 ABC 就是有窮的；因爲不能使它與 BC 或其他任何部分成一一對應．

但是寫不完的任何一列記號，例如寫不完的一列數字 1, 2, 3, 4, ……，就是一個無窮集．

在全集 1, 2, 3, 4,……與其從 2 起的部分之間，即

在　1, 2, 3, 4, 5,……　(a)

與　2, 3, 4, 5, 6,……　(b)

之間，可以建立一一對應的關係，祗要將 (a) 中的 1 與 (b) 中的 2，(a) 中的 2 與 (b) 中的 3，等等，都配成對——在 (a) 中每選一數字，在 (b) 中必有一個對應的數字．

純數的大與小． 命 M 與 N 表示兩個有窮羣．下列各款必有一款成立： 8

1. M 與 N 同等，
2. M 與 N 的某一部分同等，
3. N 與 M 的某一部分同等．

* 一個無窮羣——稱無窮集 infinite assemblage 的時候較多，它的各元當然不能夠一一數完．但若已有一條定律，藉此可以判斷一切所設物是否屬於這樣的集，則我們認爲它就有了定義．

就第一款而論，M 與 N 的純數（§ 4）相同，或相等；就第二款而論，M 的純數小於 N 的純數；就第三款而論，M 的純數大於 N 的純數。

例若 M 是文字羣 abc，而 N 是羣 $defg$，則 M 即與 N 的一部分如 def 同等。

因此，M 的純數小於 N 的純數，而 N 的純數則大於 M 的。

9 **注意．** 從§ 7 有窮羣的定義，可知此處所立"相等"，"大於"，以及"小於"各關係的定義，並無模稜兩可之處。

故據此定義，決不能謂 M 的純數同時等於且小於 N 的純數，因爲這就是說，M 與 N 又與 N 的一部分同等，於是從 § 3，N 與其一部分同等，最後從 § 7，N 是無窮羣，將與假設互相矛盾。

10 **系．** 若三個純數中的第一個小於第二個，第二個小於第三個，則第一個小於第三個。

因若命 M, N, P 表示任何三個物羣，其純數合於上開條件，則 M 與 N 的一部分同等，而 N 與 P 的一部分同等；故從 §§ 3, 6，M 與 P 的一部分同等。

11 **純數系．** 從祇含一個單元的羣開始，累次"加"上一件新物，即可得下面的純數系 (system of cardinal numbers)：

1. 祇有一個單元的羣，例如 | 的純數。
2. 在第一種羣內加一個單元而得的羣，例如 || 的純數。
3. 在第二種羣內加一個單元而得的羣，例如 ||| 的純數。
4. 照此遞加無盡。

這些依次相繼的純數，稱爲"一"，"二"，"三"，……，而用符號 1, 2, 3, … 來代表。

關於這個數系的幾句話. 任何有窮羣的純數,稱之爲有窮純數(finite cardinal),則關於上節所述的純數系,有下面幾句話可說. 12

第一. 凡純數在這系中的都是有窮的.

羣 | 是有窮的,因爲它沒有部分可與它同等(§ 7);以後的各羣都是有窮的,因爲加一個單元於有窮羣而得的羣,必定也是有窮的.* 例如 || 便是有窮羣,因爲 | 是有窮的;||| 也是有窮羣,因爲 || 是有窮的;其他依此類推.

第二. 凡有窮純數都在此系之中.

因由定義,凡有窮純數,都是有窮羣例如 M 的純數. 但我們可用短線 |||…| 作成一個羣,與任何已知有窮羣 M 同等,祇要使每一條短線 | 對應於 M 中的每一元就行. 而這一個由短線組成的羣,非有一條最後的短線不可,所以必在 § 11 的系內;因若不然,就要成爲永無盡止,於是它本身以及 M,就都要成爲無窮的了(§7).

第三. 這些純數之中沒有兩個相等.

這是從 § 8 的定義可以推知的. 因爲如上所示,|,||,|||,…各羣都是有窮的;而且每兩個羣之中,必有一個與其他一個的一部分同等.

---

*此可證明如下[康挪(G. Cantor)的證法]:

若 M 表示一個有窮羣,而 e 表示一個單元,則加 e 於 M 而得的羣 Me,也是有窮的.

命 $G\equiv H$ 表示 G 與 H 兩個羣同等.

若 Me 不是有窮的,則據 § 7,它非與它的某一部分同等不可.

命 P 表示這一部分,則有 $Me\equiv P$.

(1) 假定 P 不含 e.

命 f 表示 P 的元,該元與 Me 中的 e 配成一對,並用 P_1 代表 P 除去 f 後所餘的.

於是因 $Me\equiv P_1f$ 而 $e\equiv f$,故有 $M\equiv P_1$.

但這是不可能的,因爲 M 是有窮羣,而 P_1 是 M 的一部分(§ 7).

(2) 假定 P 含有 e.

P 中的 e 決不可與 Me 中的 e 配對,因若如是,則 P 除 e 後所餘的,亦即 M 的一部分,便將與 M 同等了.

但尚可以假定,P 中的 e 與 Me 中 e 以外的某元,例如 g 配對,而 Me 中的 e 則與 P 中的 f 配對.

在此假定之下,若 $Me\equiv P$ 仍得成立,則將 e, f, g 諸元重行組合,使 P 中的 e 與 Me 中的 e 配對,P 中的 f 與 Me 中的 g 配對時,這個關係仍能成立. 但是又要同剛纔所說的一樣,P 的一部分將與 M 同等. 因此,這個假設也是不可能的.

自然數紀．方程式與不等式

13 **自然數．** 符號 1, 2, 3,⋯——或其名稱"一","二","三",⋯——叫做正整數或自然數(natural numbers)．因此，

自然數就是純數的符號或記號．

14 **自然數紀．** 依照 § 11 中所示純數的次序，將代表純數的自然數排列起來，即得永無盡止的一列記號

1, 2, 3, 4, 5,⋯,

或"一","二","三","四","五",⋯⋯，這一列叫做自然數紀(natural scale)．

15 在這數紀中的每一個符號，指示數紀開首到該符號為止的一部分所有符號的個數．

例如 4 指示符號 1, 2, 3, 4 的個數．因為符號 1, 2, 3, 4 的個數，同於羣 |, ||, |||, |||| 的個數，而此數又同於末了一羣 |||| 中的短線條數（§ 8），就一般而論也是如此．

16 **數紀的序次特徵．** 自然數紀，就其本身來說，不過是不同的符號(different sign)的一個集，其中有一個開頭的符號，就是 1；這個的後面有一個確定的符號跟着，就是 2；這個的後面又有一個確定的符號跟着，就是 3；如是等等，無盡無止．

換言之，自然數紀只是不同的符號的一個集，此等符號按確定而已知的次序，一個跟着一個，其中有第一個符號，但是沒有末一個．

從這個觀點看來，自然數本只是次序的標識(marks of order)，這次序，即是讀出數紀時，各數按時刻先後出口的次序．

17 數紀，以及其他諸集其所設諸元按確定而已知的次序排列者，顯然有下列的公性：

1. 任何二元，其中必有一元"在前"，一元"在後"，此"在前"及"在後"二語，加於諸元的任何一對時，與加於其他任何一對時，意義相同.

2. 若已設諸元中的任何兩個，常可決定哪個在前，哪個在後.

3. 若 a, b, c 表示諸元中的任何三個，a 在 b 前，b 在 c 前，則 a 在 c 前.

所設的一集或已早具此等性質，或從我們自己選定的排列規則，使它具有此等性質. 就兩種情形而論，均稱此集爲序次系(ordinal system).

第一種的例子是：(1) 自然數紀的本身；(2) 在先後不同的時刻發生的一串事故；(3) 沿着水平線從左排到右的一列點. 第二種的例子是一羣人，依照姓名的文字次序而排列.

一個集又可以有"合同"(coincident) 元，例如一串事故裏面，也許有兩件或兩件以上是同時發生的.（又如一羣點子裏面，也許有兩點或兩點以上是合成一點的.） 18

這樣的一個集，若其非合同 (non-coincident) 元之間，仍有 1, 2, 3 的關係存在，則亦稱之爲序次集. 至於就合同元而論，則有下列的性質：

4. 若 a 合同於 b，而 b 合同於 c，則 a 合同於 c.

5. 若 a 合同於 b，而 b 在 c 前，則 a 在 c 前.

自然數憑其在數紀上的相對次序 (relative order in the scale)，可指示純數之間大於及小於的關係. 19

因在任何兩個所設純數中，其自然數在數紀上出現較遲的，較大.

又，"若三個純數中的第一個小於第二個，而第二個小於第三個，則第一個小於第三個" 這個關係，在數紀上是用"若 a 在 b 前，而 b 在 c 前，則 a 在 c 前"這個關係來代表的.

在實際上，簡直不再用其他任何方法來比較純數．我們不但不用§8的方法，直接比較物羣的純數，反而用適當的自然數來代表純數，再從這些自然數在數紀上出現的相對次序，決定哪個較大，哪個較小．這是不必加以思索的，因爲數紀給我們的印象非常深刻；任何兩個自然數被提出時，我們立刻可以辨認，哪個在前，哪個在後．例如有人同我們談起A與B兩城的人口，A城有120,000人，B城有125,000人，我們立刻可以斷定，B城人口多於A城，因爲我們知道125,000在數紀上出現遲於120,000.

20 **等式與不等式．** 在以下各節中，"數"的意思就是自然數(§13)；而文字a, b, c則表示任何自然數．

21 若欲指明a與b表示同一數，卽在自然數紀上"合同"，可用等式(equation)．

$$a=b, \text{ 讀作 "}a\text{ 等於 }b\text{".}$$

22 但若欲指明在自然數記上a在前而b在後，則可用下列不等式(inequalities)之一：

$$a<b, \text{ 讀作 "}a\text{ 小於 }b\text{";}$$

$$b>a, \text{ 讀作 "}b\text{ 大於 }a\text{".}$$

23 嚴格地講來，"等於"，"小於"，以及"大於"當然並不指a與b符號本身而說，只指它們所代表的純數而說．例如"a小於b"一語，不過是"a所代表的純數小於b所代表的純數"一語的省寫而已．

故不等式$a<b$的全部意義，對符號a與b的本身說，就是"在數紀上a在b前"．

24 **相等與不等定則．** 從§§17, 18以及上述的定義(§§21, 22)，立卽可以推得

1. 若$a=b$而$b=c$，則$a=c$．
2. 若$a<b$而$b<c$，則$a<c$．
3. 若$a=b$而$b<c$，則$a<c$．

計數法

算術 (arithmetic) 所講論的，本來就是存在於自然數之間的序次關係，以及自然數可藉以結合的幾種運算。 25

算術的運算，源出於計數(counting).

計數法. 要發見所設物羣的純數是什麼，我們就把這個羣的物數一數. 26

這個手續是大家知道的. 在這些物的一件上標明"一"，在另一件上標明"二"，順次標過去，直到各物標盡，並無餘留而止. 用此等語言符號"一"，"二"，…時要小心，依着它們在數紀上出現的次序，不可遺漏，但選擇各物本身，可依任何次序，祇要方便就行；手續完畢時最後用到的一個符號或標識，便是我們所要找尋的——物羣本身的純數的名稱. 因從數紀的序次特性，這末了一個符號所指示的，就是所已用過的符號全部的個數(§15)，所以就是物羣中所有的物數(§8).

因此，計數的手續，可以說是使待計數的羣，與自然數紀的一部分——卽從"一"起而止於計數時所用末了一數的部分——成一一對應(§2).

讀者注意，在計數時自然數有兩樁用處：(1) 將自然數的某一羣，在實行計數時祇當作籌碼看，(2) 用如此使用着的末了一個，來記錄計數的結果.

上面曾提及，選取各物本身的次序是無關緊要的. 此可證明之如下：

定理. 將有窮物羣計數，不論選物的次序如何，結果常相同. 27

譬如說，假定將某羣計數，選物按照一種次序 P 時，結果得 99，按照另一次序 Q 時，結果得 97.

於是依照次序 P 計數時最初 97 物所組成的羣,將與依照次序 Q 計數時的全羣同等,因從假設,兩羣的各元都會與自然數紀的最初 97 個數配對(§3).

但這是不可能的,因爲若眞如此,則此羣的一部分將與全羣同等;而從假設,此羣乃是有窮羣(§7).

28 **純數的另一定義.** 適纔所舉的定理,可以作爲根據,而設立有窮羣的純數的另一定義如下:

有窮物羣的純數,是此羣之性,因有此性,不論依何次序將此羣計數時,常得同一自然數.

若選取 § 16 中立有定義的自然數紀,爲論數的起點,則以此定義爲純數的定義,那是當然的.

加　法

29 **加法的定義.** 加 3 於 5, 是要找自然數紀上佔有 5 以後第三個位置的,是什麽數.

在數紀上, 從 6 起, 前進數點三個數, 6, 7, 8, 就可求得答數8.

這運算,用符號+來指示,讀作"加",寫成 $5+3=8$.

概言之,加 b 於 a, 是要找自然數紀上佔有 a 以後第 b 個位置的,是什麽數.

因爲數紀上沒有最後的符號,所以此數常可找到. 此數叫做 a 與 b 的和,可用 a 與 b 寫成式子 (expression) $a+b$ 來代表.

30 **注意.** 在數紀上前進計數以求 $a+b$, 或將含有 b 個物之羣的各元,一個一個加於含有 a 個物之羣,這兩種手續是逐步對應的. 因此,(1)實行第二種手續的結果,得含有 $a+b$ 個物之羣(§8),(2)若 a 與 b 都表示有窮純數,則 $a+b$ 也表示有窮純數. 參閱 § 12 註.

因 $a+1$, $a+2$,等等所表示的，乃是 a 以後的第一數、第二數,等等,所以 $a+1$, $a+2$,……所表示的，乃是數紀在 a 以後的部分. 31

因此, a 以後的任何所設數,可以寫成 $a+d$,式中 d 表示有窮自然數.

加法的手續. 將很大的數加起來,也用計數法,那是很費力的. 所以我們把較小諸數的和(加法表)記住，然後應用下面各節中所說明的所謂加法"定律",而從這些和導出大數的和來. 32

加法定律. 加法是"可對易"(commutative)及"可締結"(associative)的手續;換言之,這手續遵守下列二定律: 33

對易律. $a+b=b+a$, 34

加 b 於 a 的結果與加 a 於 b 的結果相同.

締結律. $a+(b+c)=(a+b)+c$, 35

先加 c 於 b,再加所得之和於 a,其結果,與先加 b 於 a,再加 c 於所得之和,是相同的.

注意. 實際演算時,$(a+b)+c$ 一式,常寫成 $a+b+c$ 一式,我們默認式子 $a+b+c$ 的意思,是加 b 於 a,再加 c 於所得的和. 36

此二律的證明. 這兩條定律可以證明如下: 37

第一. 對易律: $a+b=b+a$.

第一. 對易律: $a+b=b+a$.

先舉實例來證,例如 3+2 與 2+3,這兩個和是相等的.

因爲 3+2 所代表的數,可在自然數紀上先數去三個數,跟着再數去兩個數而求得. 這樣就有

已計數的羣	1, 2, 3, 4, 5,	(a)
籌碼	1, 2, 3, 1, 2.	(b)

但因 (a) 與 (b) 這兩個符號羣之間,有一一對應的關係,而一一對應關係都是可以互換的(reciprocal).(§2),故可交換 (a) 與 (b) 的任務;這就是說,使 (b) 成爲已計數的羣,(a) 即代表籌碼羣.

因此,求 $3+2$, 同於數一數符號羣

$$1,\ 2,\ 3,\quad 1,\ 2. \tag{b}$$

同樣,求 $2+3$, 同於數一數符號羣

$$1,\ 2,\quad 1,\ 2,\ 3. \tag{c}$$

但因 (b) 與 (c) 含有相同的符號,其不同處祇在於這些符號的排列,故將這兩羣計數的結果是相同的 (§ 27);這就是說,

$$3+2=2+3.$$

仿此,可證任何二自然數 a 與 b 遵守此律.

第二. 締結律: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

在 a 之後繼續數到第 b 個符號,即數到第 $a+b$ 個符號,此後再繼續數到第 c 個符號,即數到第 $(a+b)+c$ 個符號,此時我們已數過的符號共有 $b+c$ 個,因此數到了 a 以後的第 $(b+c)$ 個符號,即數到第 $a+(b+c)$ 個符號.

上舉證法,是同純數的概念有關係的. 不用這個概念,加法也可以有定義,加法定律也可以成立;如下面的註所示.

---

* 意大利數學家裴安諾 (Peano),曾不用純數的概念,而用一組公設 (postulates),予自然數系以定義. 這組公設可以照下面那樣敍述——其中"數"的意思就是自然數.

1. 符號 1 是一個數.
2. 每一數 a 的後面跟着其次的一個數——稱之爲 $a+$.
3. 這個數 $a+$ 永不是 1. 4. 若 $a+=b+$,則 $a=b$.
5. 每一個所設數 a 在敍列 (sequence) $1,\ 1+,\ (1+)+,\cdots$ 內.

這樣,數字 $2, 3, \cdots$ 就有了定義: $2=1+,\ 3=2+,\cdots$.

和 $a+b$ 的意思,就是由一串公式 $a+1=a+,\ a+2=(a+1)+,\cdots\cdots$ 所決定的一個數 (據 5).

方纔所寫的那一串公式,同於下列的一個公式

6. $a+(b+1)=(a+b)+1$

從 6, 用"數學歸納法" (mathematical induction),可導出加法定律:

7. $a+(b+c)=(a+b)+c$.　　8. $a+b=b+a$.

第一. 若 $c=k$ 時, 7 是眞確的,則 $c=k+1$ 時,7 仍眞確. 因從 6 與 7,

$$a+[b+(k+1)]=a+[(b+k)+1]=[a+(b+k)]+1$$
$$=[(a+b)+k]+1=(a+b)+(k+1).$$

但從 6, 當 $c=1$ 時, 7 是眞確的.

因此, $c=2$ 時, 7 是眞確的; ∴ $c=3$ 時, ∴…$c=$ 任何數時 (從 5), 7 總是眞確的.

第二. 先證明 8 的特例: 8′. $a+1=1+a$.

若 $a=k$ 時, 8′ 是眞確的,則 $(k+1)+1=(1+k)+1=1+(k+1)$,從 7.

因此,若 $a=k$ 時, 8′ 是眞確的,則 $a=k+1$ 時, 8′ 也是眞確的.

因從 $a=1$ 時, 8′ 是眞確的,所以 $a=2$ 時, 8′ 是眞確的, ∴ $a=3$ 時,….

最後,若 $b=k$ 時, 8 是眞確的,則 $b=k+1$ 時, 8 也是眞確的. 因從 7 與 8′,

$$a+(k+1)=(a+k)+1=1+(a+k)=1+(k+a)$$
$$=(1+k)+a=(k+1)+a.$$

因爲 $b=1$ 時, 8 是眞確的 (從 8′), 所以 $b=2$ 時, 8 也是眞確的, ∴ $b=3$ 時, ∴ ……

關於和的普遍定理. 累次應用此等定律（§§ 34, 35）可以證明 38

個數是有窮數的諸數相加時，不論其排列次序如何，不論其締結情形如何，其和常相同.

例如	$a+b+c+d=a+c+b+d$	
因	$a+b+c+d=a+(b+c)+d$	§ 35
	$=a+(c+b)+d$	§ 34
	$=a+c+b+d$	§ 35

和的相等與不等定則. 第一. 從和的定義（§ 29）及§ 24 的定則，卽得 39

1. 若 $a=b$, 則 $a+c=b+c$.
2. 若 $a<b$, 則 $a+c<b+c$.
3. 若 $a>b$, 則 $a+c>b+c$.

這裏的 1 顯然是眞確的，因若 $a=b$, 則 a 與 b 表示同一數.
3 可證明如下，2 的證明相仿.
若 $a>b$, 則可命 $a=b+d$（§ 31）
於是 $a+c=(b+d)+c=(b+c)+d$（§§ 34, 35），$\therefore a+c>b+c$.

第二. 從 1, 2, 3, 逆言之，得

4. 若 $a+c=b+c$, 則 $a=b$.
5. 若 $a+c<b+c$, 則 $a<b$.
6. 若 $a+c>b+c$, 則 $a>b$.

先證 4，其餘可用同樣的方法證明.
假定 4 不成立，則必有 $a<b$ 或 $a>b$；但若 $a<b$，則（從 2）應有 $a+c<b+c$；又若 $a>b$，則（從 3）應有 $a+c>b+c$. 這兩個結果是都和假設相矛盾的.

第三. 從 1, 2, 3 又可得

7. 若 $a=b$, 且 $c=d$, 則 $a+c=b+d$.
8. 若 $a<b$, 且 $c<d$, 則 $a+c<b+d$.
9. 若 $a>b$, 且 $c>d$, 則 $a+c>b+d$.

用 7 做例子來證明. 若 $a=b$，則（從 1）$a+c=b+c$；又若 $c=d$，則 $b+c=b+d$（從 1）. 因此，$a+c=b+d$.

乘法

40 **乘法的定義.** 用 b 乘(multiply) a, 是要找 b 個數的和, 這 b 個數個個是 a.

這個和叫做用 b 乘 a 而得的積,我們用 a 與 b 寫成式子 $a\times b$, 或 $a\cdot b$, 或單寫 ab 來表示.

因此,由定義,

41 $$ab=a+a+\cdots\ (\text{共有 } b \text{ 個 } a)$$

42 我們又稱 a 是被乘數 (multiplicand), b 是乘數 (multiplier), a 與 b 都是 ab 的因子 (factor).

43 **乘的手續.** 求積而用累次加法,那是不勝其煩的. 所以我們把較小諸數相乘之積(乘法表)記住,再根據加法定律,以及下面各節中所說明的乘法定律,而從此等積導出較大諸數之積.

44 **乘法的定律.** 乘法也是可對易可締結的,這和加法正相同;此外,乘法對於加法還可以分配(distributive). 這就是說,乘法遵守下列三定律:

45 **對易律.** $ab=ba$,

用 b 乘 a 的結果,同於用 a 乘 b.

例如, $2\cdot3=6$ 而 $3\cdot2=6$.

46 **締結律.** $a(bc)=(ab)c$,

用積 bc 乘 a 的結果,同於用 c 乘積 ab.

例如, $2(3\cdot4)=2\cdot12=24$, 而 $(2\cdot3)4=6\cdot4=24$.
實際上我們常寫 abc 以代 $(ab)c$. 與 § 36 比較.

47 **分配律.** $a(b+c)=ab+ac$,

先將 b 與 c 加起來,然後用所得之和乘 a, 其結果同於先

用 b 乘 a，用 c 乘 a，再將兩個積加起來。

例如，$3(4+5)=3\cdot 9=27$；而 $3\cdot 4+3\cdot 5=12+15=27$.

此等定律的證明． 這幾個定律可以證明如下： 48

第一． 分配律 $ab+ac=a(b+c)$. (1)

因 $ab+ac=(a+a+a\cdots$ 共 b 個 $a)+(a+a+\cdots$ 共 c 個 $a)$ § 41

$=a+a+a+\cdots$ 共 $(b+c)$ 個 $a=a(b+c)$. §§ 35, 41

因此 $a(b+c+\cdots)=ab+ac+\cdots$. (2)

例如 $a(b+c+d)=a(b+c)+ad=ab+ac+ad$. 從 (1) 及 § 25

又 $ac+bc=(a+b)c$. (3)

因 $ac+bc=(a+a+\cdots$ 共 c 個 $a)+(b+b+\cdots$ 共 c 個 $b)$

$=(a+b)+(a+b)+\cdots$ 共 c 個 $(a+b)=(a+b)c$. § 33

第二． 對易律： $ab=ba$.

$ab=(1+1\cdots$ 共 a 個 $1)b$

$=1\cdot b+1\cdot b+\cdots$ 共 a 個 $1\cdot b$ 從 (3)

$=b+b+\cdots$ 共 a 個 $b=ba$. § 41

第三． 締結律： $(ab)c=a(bc)$

$(ab)c=ab+ab+\cdots$ 共 c 個 ab

$=a(b+b+\cdots$ 共 c 個 $b)=a(bc)$. 從 (2) 及 § 41

關於積的普遍定理． 這幾個定律，可以推廣到因子個數是有窮數的任何一個積．因此， 49

因子個數是有窮數的一個積，與因子相乘的次序無關．

積的相等與不等定則． 這些定則開列如下： 50

1. 若 $a=b$，則 $ac=bc$.　4. 若 $ac=bc$，則 $a=b$.

2. 若 $a<b$，則 $ac<bc$.　5. 若 $ac<bc$，則 $a<b$.

3. 若 $a>b$，則 $ac>bc$.　6. 若 $ac>bc$，則 $a>b$.

定則 1 是很明顯的，因若 $a=b$，則 a 與 b 表示同一數．定則 3 可用下法證明，定則 2 的證法相彷．

若 $a>b$，命 $a=b+d$．於是 $ac=(b+d)c=bc+dc$，$\therefore ac>bc$．

定則 4, 5, 6 是 1, 2, 3 之逆，可用 § 39 的推理方法，從 1, 2, 3 推得．

從 1, 2, 3，用 § 39 的推理方法，可得

若 $a=b$ 而 $c=d$，則 $ac=bd$．

若 $a<b$ 而 $c<d$，則 $ac<bd$．

若 $a>b$ 而 $c>d$，則 $ac>bd$．

II. 減法與負數

完全數紀

51　**減法．** 從 5 減 3，是要找自然數紀上佔有 5 以前第三位的是何數．

在數紀上從 4 起，退後連數三個數：4, 3, 2，就求得了 2 這個數．

減法的運算用符號－指示，讀作"減"，寫成 $5-3=2$．

概言之，從 a 減 b，是找 b 以前佔有第 b 位的是什麼數．

從 a 減 b 而得的這個數，叫做剩餘 (remainder)，或差 (difference)，用 a 與 b 寫成式子 $a-b$ 來表示．我們又稱 a 是被減數(minuend)，b 是減數(subtrahend)．

52　**加法與減法是相反的運算．** 在 5 以前的第三個數，明明又是加上 3 可得 5 的那個數．

就一般而論，剩餘 $a-b$ 可以說是 a 以前的第 b 個數，也可以說是加上 b 後可得 a 的一個數，換言之，乃是由等式

53　$$(a-b)+b=a$$

決定的一個數．

又因我們說 7 佔據 4 以後的第三位，同於說 4 佔據 7 以前的第三位，所以有——

$$(a+b)-b=a.$$ 54

因 $a+b-b=a$（§54），故減法抵消了加法；又因 $a-b+b=a$（§53），故加法抵消了減法．所以我們說，加法與減法互爲反 (inverse) 運算． 55

完全數紀． 自然數紀不能充分適合減法的需要；因爲這數紀有一個第一數，1，而我們在退後計數時，是不能夠超過這數的． 56

例如在自然數紀上，從 2 減 4，決不可能．

但退後計數與向前計數一樣地自由，這乃是非常重要非常便利的一件事． 自然數紀本身，既然不過是按照確定次序而排列的一組符號，爲什麼不可以在這組符號之前，添放一組新的序次符號，而使數紀的退後得以擴張，這就沒有理由可說．

所以我們就繼續發明了下列各符號：0，放在 1 之前；-1，放在 之前；-2，放在 -1 前；如是等等．

這樣，我們就造成了一個完全數紀 (complete scale)；

$$\cdots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots,$$

這數紀既沒有第一個也沒有末了一個符號或"數"，故在這個數紀上計數，可以前進也可以退後，無論數到什麼地位．

注意，這數紀對於符號 0 是成對稱 (symmetry) 的． 例如 3 是在 0 後的第三個符號，而 -3 是在 0 前的第三個符號；其他各符號依此類推． 57

新數的意義． 這些新符號之一，即 0，可以說是也有純數的意義． 例如從 3 退後計數到 0，相當於從 3 物所組成的任何羣，一個一個地把各元取去，直到一切諸元(在此例是 3 個) 58

取盡而止. 於是 0 便成為所得無元之"羣"的純數. 因此,我們往往把 0 看成自然數之一.

但 $-1, -2, -3, \cdots$,並無純數的意義.

在另一方面講,這些新符號都有序次的特徵,一如自然數. 每一個新符號,在一個序次的系統中,佔有一個確定的地位,自然數紀也包括在這系統之內. 因為它有這一個地位,我們就可以認為它有正確的定義,正好比每一個自然數,我們也可以認為它的定義得自數紀上的地位. 符號 $-1, -2, -3, \cdots$,稱為數,我們以為理由就在於此.

59 **正與負.** 將新數 $-1, -2, -3, \cdots$ 當作一類,以別於舊的一類,就稱新數為負 (negative) 數,舊數為正 (positive) 數.

這兩種數以及 0, 叫做整數 (integers),以別於此後另行討論的別種數.

60 **代數上的相等與不等.** 命 a, b, c 表示完全數紀上的任何三個數. 因 a 在 b 前,或 a 與 b 合同,或 a 在 b 後,而可寫成 $a<b$, 或 $a=b$, 或 $a>b$.

61 因從定義,完全數紀是一個序次系(§17),所以§24 的定則,也適用於完全數紀. 因此,

$$若\ a<b,\ 且\ b<c,\ 則\ a<c.$$

62 當 $a<b$ 時,亦即在完全數紀上 a 在 b 前時,常說 a 在代數上小於 (algebraically less) b, 或說 b 在代數上大於 (algebraically greater) a.

注意,此處所謂"小於"及"大於",其意不過是在完全數紀上"在前"及"在後"罷了. 例如"-20 小於 -18"的意思,只是"-20 在 -18 之前".

63 **絕對值或數值.** 我們說 3 是 -3 的數值 (numerical value) 或其絕對值 (absolute value),而用記號 $|-3|$ 來代表,寫作 $|-3|=3$. 就任何負數而論,也是如此.

正數,或 0, 其數值就是該數的本身. 例如 $|3|=3$.

數值上的相等與不等. 完全數紀上的任何二數,例如 a 與 b,我們還可以說 a 在數值上 (numerically) 小於,等於,或大於 b,但要看 $|a|<,=,$ 或 $>|b|$ 而定. 64

例如,-1 雖在代數上小於 2,它在數值上却大於 2;又如 -3 在代數上大於 -7,但在數值上却小於 -7.

負數的運算

新運算. 我們還發明了種種運算,可使負數及 0 藉以互相結合,並與自然數結合,好比自然數本身藉加法,乘法,以及減法而互相結合一般. 65

這些運算也叫做加法,減法及乘法,與自然數的加法,減法及乘法相當,而指示的方法也彼此相同.

照 § 60 的例,用 a 表示完全數紀上的任何數,但仍用 a 與 b 表示自然數,則可立新運算的定義如下:

加法與減法的定義. 加法與減法有下列諸定義: 66

1. $a+b$ 的意思是 a 以後第 b 個數.

2. $a-b$ 的意思是 a 以前的第 b 個數.

3. $a+0$ 與 $a-0$ 的意思就是與 a 相同的數.

4. $a+(-b)$ 的意思就是與 $a-b$ 相同的數.

5. $a-(-b)$ 的意思就是與 $a+b$ 相同的數.

換言之,加一正數 b 於任何數 a,意義與前此相同,卽在數紀上前進計數,數過 b 個位置;從 a 減 b,意義也與前此相同,卽退後運數 b 個位置. 但是加或減一負數,却分別同於減或加絕對值相同的正數.

例如,從 1, $-3+2=-1$, 因 -1 是 -3 以後的第二個數.
　　從 2, 　$2-5=-3$, 因 -3 是 2 以前的第五個數.
　　從 4, 　$-5+(-2)=-5-2=-7$(從 2).
　　從 5, 　$-6-(-2)=-6+2=-4$(從 1).

67　**乘法的定義.** 有下列各條:

1. $0\cdot a$ 與 $a\cdot 0$ 意思都是 0.
2. $a(-b)$ 與 $(-a)b$ 的意思都是 $-ab$.
3. $(-a)(-b)$ 的意思是 ab.

換言之,兩個因子相乘之積,在沒有一個因子是 0 時,視兩因子有相同或相反的符號,而爲正或負數. 至於積的數值,則在任何情形之下,常爲因子數值之積.

例如,從 2, $3\times(-2)=-6$, 而 $-3\times 2=-6$.
　　從 3, $-3\times(-2)=6$.

68　**此等定義的來源與意味.** 讀者注意, §§66, 67 中的各條,既非假定,又非需要證明的定理,祇是我們所謂新運算的定義罷了.

除了 §40 所述自然數乘法的定義外,別無其他根據,而欲企圖證明 $2(-3)=-2\cdot 3$,那就是一件可笑的事情;很顯明的理由是,-3 並非自然數,"將 2 連取 -3 次"這句話,是毫無意義可言的.

我們爲什麼要發明這樣的運算呢? 目的無非要使我們在研究數與數之間的關係時,在研究四周世界中各物之間的關係時,也可以儘量利用負數.

須知這些新運算的發明,不但不出於武斷,反而是舊運算對於新數的自然的推廣.

論述自然數的加法時,我們曾先立它的定義,說它是一種

手續——前進計數——然後證明，這手續實行後的結果，有兩種性質，此二性質與相加各數之值無關，即：

$$1.\quad a+b=b+a.$$

$$2.\quad a+(b+c)=(a+b)+c.$$

同樣，我們還證明了積具有三種通性如下：

$$3.\quad ab=ba.$$

$$4.\quad a(bc)=(ab)c.$$

$$5.\quad a(b+c)=ab+ac.$$

用文字表示數的時候，1—5 諸性質事實上成為加法與減法的資用定義(working definition)；因為前進計數等等手續，在用文字表數時當然是不能實行的。

若新數的相當的運算，也可以合用，則 1—5 這幾個"定義"，顯然非適用於新數不可。所以§§66, 67 中所說的，不過是下面一個問題的解答：

要推廣加法，減法，以及乘法的意義，使完全數紀上任何數的和與積，可以有 1—5 諸性質，且使減法仍為加法的反運算。

因此，(1) 我們說正數 b 加於 a 的定義是前進計數，從 a 減 b，是退後計數，此時不過把加法與減法的舊定義，重複說了一遍。

(2) 從加法的這個定義，可得 $-b+b=0$。

但若對易律 $a+b=b+a$ 不可破壞，則不得不有 $-b+b=b+(-b)$，所以 $b+(-b)=0$；又因 $b-b=0$，故不得不有 $b+(-b)=b-b$。

從這關係就得到了定義 $a+(-b)=a-b$。

(3) 若這新的加法與減法，也像舊的一樣，是相反的運算，則又非有 $a-(-b)=a+b$ 不可（正與 § 66 所述相同）。

(4) 若欲保留加法與乘法之間的舊關係（§ 41），則如 § 67，2 所示，必有

$$(-a)b=-a+(-a)+\cdots\text{共 } b \text{ 個}=-a-a-\cdots\text{共 } b \text{ 個}=-ab.$$

(5) 若對易律 $ab=ba$ 也可以適用，則非有 $a(-b)=(-b)a=-ba=-ab$ 不可，一如 § 67，2 所示。

(6) 同樣，$0+0+\cdots$ 共 a 個$=0$，有了這個關係，再加上必須遵守對易律 $ab=ba$ 的一個條件，就使我們有 § 67, 1 的定義，即 $0\cdot a = a\cdot 0=0$.

(7) 最後，從 (6) 可得 $(-a)(-b+b)=-a\cdot 0=0$. 但若分配律也可以適用，則不得不有 $(-a)(-b+b)=(-a)(-b)-ab=0$. 又因 $ab-ab=0$，故得定義 $(-a)(-b)=ab$，如 § 67, 3 所示.

69 **適纔予以定義的運算，遵守對易，締結，及分配各律.** 這些新的運算，與其所從出的對易，締結，及分配各律，是完全一致的. 不過這一點尚待證明.

未證之前，先從加法與減法為前進與退後計數的定義，並由 §§ 37, 52 中的推理方法，得到下面三個關係：

$$\mathrm{a}+(b+c)=\mathrm{a}+b+c, \tag{1}$$

$$\mathrm{a}-(b+c)=\mathrm{a}-b-c, \tag{2}$$

$$\mathrm{a}+b-b=\mathrm{a}-b+b=\mathrm{a}. \tag{3}$$

I. **對易律.** $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

第一， $-a+b=b+(-a)$.

因若 $a>b$，則命 $a=d+b$. §§ 31, 34

於是 $-a+b=-(d+b)+b=-d-b+b=-d$; 由(2)與(3)

而 $b+(-a)=b-(b+d)$ § 66, 4

$=b-b-d=-d$. 由 (2)

當 $b>a$ 時，也可以照樣證明.

第二， $-a+(-b)=-b+(-a)$.

因 $-a+(-b)=-(a+b)=-(b+a)=-b+(-a)$， 從(2)及§ 66, 4

II. **締結律.** $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$.

第一， $a+[b+(-c)]=a+b+(-c)$.

因若 $b>c$，命 $b=d+c$. §§ 31, 34

於是　$a+[b+(-c)]=a+[d+c+(-c)]=a+d$,

而　$a+b+(-c)=a+d+c+(-c)=a+d$.　　從(3)及§6，4

當 $c>b$ 時，也可以照樣證明．

第二，　$a+[(-b)+c]=a+(-b)+c$.

此從 I 及方纔所證明的第一款，即可推得．

第三，　$a+[-b+(-c)]=a+(-b)+(-c)$.

此從 (2) 及 § 66，可得，因 $-b+(-c)=-(b+c)$.

III. 對易律，　ab＝ba.

第一，　$(-a)b=b(-a)$.

因　$(-a)b=-ab=-ba=b(-a)$.　　§ 45; § 67,2

第二，　$(-a)(-b)=(-b)(-a)$.

因　$(-a)(-b)=ab=ba=(-b)(-a)$　　§ 45; § 67,3

IV. 締結律．　a(bc)＝(ab)c.

第一，　$(-a)[(-b)(-c)]=[(-a)(-b)](-c)$.

因　$(-a)[(-b)(-c)]=(-a)\cdot bc=-abc$,　　§ 46; § 67, 2, 3

而　$[(-a)(-b)](-c)=ab\cdot(-c)=-abc$.　　§ 67, 2, 3

第二，　其他各款可用同法證明．

V. 分配律．　a(b＋c)＝ab＋ac.

第一，　$a[b+(-c)]=ab+a(-c)$.

因 $[b+(-c)]a=[b+(-c)]+[b+(-c)]+\cdots$共 a 個$[b+(-c)]$

$=b+b+\cdots$共 a 個 $b+(-c)+(-c)+\cdots$共 a 個 $(-c)$

$=ba+(-c)a$.　　§41；§67,2；II 及 III

因此　$a[b+(-c)]=ab+a(-c)$　　從 III

第二，　其他各款立可由此推得．

例如，　$(-a)[b+(-c)]=-a[b+(-c)]$

$=-[ab+a(-c)]=(-a)b+(-a)(-c)$.

70　**一般的結果.**　在§68中我們早已察及,定律$a+b=b+a$等等,在代數上同於加法及乘法的定義,即使文字a, b, c所表示的是自然數時,也是這樣.　現在,我們又已證明,這些定義適用於完全數紀上的一切諸數.

用此等定律,可改變文字式子的外形而不變其值,至於式中文字所表示的,是完全數紀上的何數,則可不問.

例如,不論 $, b, c, d$ 表示正整數或負整數,常有

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd.$$

71　**和的相等與不等定則.**　用相仿於§39的推理方法,可以證明:

若　　　　$a<, =, 或 >b$

則　　　　$a+c<, =, 或 >b+c;$

其逆也成立.

因此,對於正數及負數,下面的話都對:

72　等式或不等式兩邊加上或減去同數,等式仍是等式,不等號的指向不變.

73　**積的相等與不等定則.**　讀者注意,將任何兩數a與b的符號改換,則其在完全數紀上出現的次序也顛倒(§57).

例如,$-3<-2$,但$3>2$;$-5<2$.但$5>-2$.

從這件事實,以及§50的推理方法,立即可知:

若　　　　$a<, =, 或 >b,$

則　　　　$ac<, =, 或 >bc,$

但　　　　$a(-c)>, =, 或 <b(-c);$

其逆也成立.　因此

用同一正數或負數乘等式的兩端,仍得等式. 74

用同一正數乘不等式的兩端,不等號的指向不變.

用同一負數乘不等式的兩端,不等號的指向改變,從$<$變成$>$,或從$>$變成$<$.

從這些定則的第一條,以及0的乘法定義,即$a\cdot 0=0$,可得下列重要定理:

1. 若$a=b$,則$ac=bc$, 75
2. 若$ac=bc$,則$a=b$,除非$c=0$.

定理2的例外,應當細細地加以注意.
例如,從等式$2\cdot\ =3\cdot 0$,當然不能推得$2=3$.

等於零的積. 若一個積是0,它的因子之一必定是0. 76

例如,若$ab=0$,則或$a=0$,或$b=0$.

若$b=0$,則上式已證明.

若b不等於0,則$0\cdot b$亦等於0,

故有 $ab=0\cdot b$

所以 $a=0$,因b不等於0. §75, 2

積的數值. 兩個因子或兩個以上相乘之積,其數值就是各因子的數值之積. 77

例如,$|(-2)(-3)(-4)|=|-24|=24$;而$|-2|\cdot|-3|\cdot|-4|=24$.

和的數值. 二數和的數值,當二數之號相同時,是二數的數值和;但當二數之號相反時,就是二數的數值差(difference). 78

例,$|-3+(-5)|=|-8|=8$;而$|-3|+|-5|=3+5=8$.
但 $|2+(-5)|=|-3|=3$;而$|-5|-2=3$.

整數在量度上的用處

79　**量度.**　數,不但可以用來記錄,將不同之物所成之羣計數,得何結果,而且可以用來指示,將各種量(magnitude)如時間,直線,表面等等的一部分量度 (measuring),得何結果.

80　欲量度一個量,祇要把選作量度單位 (unit) 而有特定大小多寡的同種之量,與這待量度的量比較.

81　若這待量度的量恰恰含有這單位的若干倍數,此數即稱爲此量的含度 (measure).

一條線段 (line segment) 的含度,特稱爲它的長度 (length).

因此,量度一條線段,祇要把所選定的單位線段,例如長一呎的直尺,沿這線段接着放置,以求得可以放置的次數.

若此線段恰含有這直尺的三倍,我們就說它是三呎長,或說它的長度——即它的含度——是 3(呎)

82　自然數因在自然數紀上有相對的地位,故以自然數爲含度的量,就可用自然數指示其相對的大小,而自然數在量度方面的用處,當歸功於此.

83　**負數對於量度的應用.**　我們往往可以從某一個固定的"基點" (point of reference) 起,在反對"方向"內量度.

例如,時間,在基督誕生前與後若干年;經度,在格林尼治 (Greenwich) 東或西若干度;溫度,在零上或下若干度.

在兩個相反的方向內量度,祇要用正數與負數,來分別記錄所得的含度,則兩種量度就可以有很清楚的區別.

84　試察看下圖:

$$\begin{array}{cccccccccc} \cdots\cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4\cdots\cdots \\ \hline \cdots\cdots & P_{-4} & P_{-3} & P_{-2} & P_1 & O & P_1 & P_2 & P_3 & P_4\cdots\cdots \end{array}$$

在這圖中,固定的基點,或稱原點 (origin),是 O,單位是 OP_1,而 $P_2, P_3, \cdots P_{-1}, P_{-2}, \cdots$ 等點的地位,則使 $OP_1=P_1P_2=P_2P_3=\cdots=P_{-1}O=P_{-2}P_{-1}=\cdots$.

在此等點子的上方,按適當的次序寫着完全數紀上的數,0 在 O 的上方.

於是每一點 P 到 O 的距離,卽線段 OP 的長度,卽由該點上方所寫之數的數值來指示;而從 O 到 P 的方向,則由該數的符號來指示.

例如 P_{-3} 的上方是 -3,指示 P_{-3} 在 O 的左側,離 O 3 個單位.

其次,各點在線上出現的次序,卽由其對應數在數紀上出現的次序指示.

點與數. 因爲……, P_{-2}, P_{-1}, O, P_1, P_2, ……點系與……, $-2, -1, 0, 1, 2,$ ……數系,其間有一一對應的關係(§2), 85
所以兩系之一,可以用來代表他一系. 這樣的點,可以稱爲數的跡 (picture),此後將不時用及.

III. 除法與分數

除法看做累次減法

兩種除法. 在算術與代數上,有兩種運算都叫做除法 86
(division). 其中一種可以說是累次減法 (repeated subtraction),還有一種便是乘法的反運算. 兩種有合同的時候,此時稱之爲整除 (exact division).

關於累次減法的除法. 用 3 除 7,就除法的第一意義來 87
說,是要回答下面兩個問題:

1. 從 7 減去 3 的什麼倍數 (幾個 3),可得小於 3 的剩餘?

2. 剩餘是什麼?

將 3 從 7 裏面累次地減去，這兩個問題的答案就都可以求得． 依此，因 $7-3=4$ 而 $4-3=1$，故須將 3 連減兩次，換言之，須減去 3×2． 而剩餘則為 1．

這一種除法，可見是同於累次減法的． 它與減法的關係，同於乘法與加法的關係．

須注意 7, 3, 2, 1 四個數，由等式 $7=3\cdot 2+1$ 而得聯繫．所以一般地說來，若 a 與 b 是任何兩個自然數，則用 b 除 a，照現在所說的意義，就是求兩個自然數 q 與 r（其中之一也許是零），使下面的關係成立：

88 $$a=bq+r \text{ 而 } r<b.$$

89 我們將 a 叫做被除數(dividend)，b 叫做除數(divisor)，q 叫做商 (quotient)，而將 r 叫做剩餘 (remainder)．

90 注意． 已設 a 與 b 時，常可求得二數 q 與 r，適合 § 88．

若 $a<b$，則 $q=0$，$r=a$．

但若 $a\geqq b$，則從 §§ 31, 35，可將 $b+b+\cdots$ 之和，連加到恰等於 a，或再加一個 b 即大於 a 而止． 若 q 表示此和中 b 的個數，則從 § 41，便有 $a=bq$，或 $a=bq+r$，式中 $r<b$．

又，已設 a 與 b 時，適合 § 88 的二數 q 與 r，祇有一對．

因若有第二對，譬如說是 q', r'，則應有

$$bq+r=bq'+r'，\text{因而 } b(q-q')=r'-r.$$

但這是不可能的，因 $r'-r$ 在數值上應小於 b，而 $b(q-q')$ 不應在數值上小於 b．

91 整除． 若被除數 a 是除數 b 的倍數，例如 $a=12$ 而 $b=3$ 時，剩餘 r 是 0，於是我們就說 a 被 b 整除． 就這種情形而論，§ 88 的等式就變成 $a=bq$，或

92 $$qb=a.$$

因此，a 被 b 整除時，我們可以有下面的定義．商 q 是用 b 乘它可得 a 的一個數． 93

就這個情形而論，我們還可以用 $a \div b$ 來指示除法，且可用 a 與 b 寫成記號 $\frac{a}{b}$ 或 a/b，來表示商 q，寫成 $q=\frac{a}{b}$，意義與 $qb=a$ 相同． 94

關於整除的定理與公式

定理 1. 整除與乘法是相反的運算；即 95

$$a \div b \times b = a, \text{及 } a \times b \div b = a.$$

這兩個等式分別得自 §§ 93, 87 的定義．

定理 2. 若除法是可以整除的，則用同數乘被除數與除數，商不變． 96

因若 $a = qb$，則 $am = q \cdot bm$， §§ 50, 46

即若 $q = \frac{a}{b}$，則 $q = \frac{am}{bm}$． § 94

定理 3. 整除，像乘法一樣，對於加同減是可分配的；即 97

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \text{及 } \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

因若 $a = qc$，而 $b = q'c$，

則有 $a+b = qc + q'c = (q+q')c$． §§ 39, 47

因此 $\frac{a+b}{c} = q+q' = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}$． § 94

對於減法的可分配，也可以用相仿的方法證明．

例 $\frac{18}{3}+\frac{9}{3}=6+3=9$；又 $\frac{18+9}{3}=\frac{27}{3}=9$

商相加及相減的公式． 商相加及相減，有下面二公式： 98

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}; \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

因 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$. §§ 96, 97

仿此可證減法公式.

例 $\frac{18}{3}+\frac{10}{5}=6+2=8$; 又 $\frac{18\cdot 5+10\cdot 3}{3\cdot 5}=\frac{120}{15}=8$.

99 **商相乘的公式.** 這個公式是

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

因若 $a=qb$, 而 $c=q'd$, 則有 $ac=qq'\cdot bd$. §§ 50, 45, 46

因此 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=q\cdot q'=\frac{ac}{bd}$. § 94

例 $\frac{15}{3}\cdot\frac{6}{2}=5\cdot 3=15$; 又 $\frac{15\cdot 6}{3\cdot 2}=\frac{90}{6}=15$.

100 **兩商相除,恰好整除的公式.** 這個公式是

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

因若 $a=qb$, $c=q'd$, 又 $q=q''q'$,

則有 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=q\div q'=q''$; § 94

及 $\frac{ad}{bc}=\frac{qbd}{bq'd}=\frac{q}{q'}=q''$. §§ 96, 94

例 $\frac{24}{6}\div\frac{10}{5}=4\div 2=2$; 又 $\frac{24\cdot 5}{6\cdot 10}=\frac{120}{60}=2$.

101 **負數的整除.** §93 中所述商的定義,顯然對於負數也有意義,祇要被除數的數值恰好爲除數的數值所整除. 照 §94 的方法表示負數相除之商,可得下面的定理:

102 **定理 4.** 若 a 可被 b 整除,則

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

因若 $a=qb$，則有 $-a=(-q)b.$ §§ 73, 67

因此 $\frac{-a}{b}=-q=-\frac{a}{b}.$ § 94

其他兩式，證法相仿.

零對於整除的關係. 1. 當除數是 0 時，§ 93 中所述商的定義，就沒有意義. 103

因為不論 q 所表示的是什麼數，常有 $q\times 0=0$. 因此，(1) 一切數用 0 乘總得 ；而 (2) 沒有一數用 0 乘可得 a.

換言之，依照 § 93, 94, 記號 $0/0$ 可表示一切數，而 $a/0$ 不得表示任何數.

2. 但若被除數是 0，而除數是不等於 0 的某數 b，則 § 93 的定義仍有意義. 用記號 $0/b$ 表示的商，實在就是 0.

因為依照 § 94, $0/b$ 應當表示用 b 乘可得 0 的數；而 0 就是此數（並且祇有 0 是這樣的一個數），因為 $0\cdot b=0$.

分數. 除法看做乘法的反運算

在 § 86 中所述的第二種除法，乃是 § 93 中予以定義的整除之推廣. 實行這種除法時，須將分數引入數系. 這些新數，也要予以序次的定義，與 § 56 負數的定義相仿. 這樣的定義，有一個可以得自下面的定理：（定理中的 a, b, c, d 表示自然數.）

定理 5. a 可被 b 整除，而 c 可被 d 整除時，商 a/b 與 c/d 在自然數紀上出現的次序，同於積 ad 及 bc；即 104

$$\text{若 } ad<,\ =,\ \text{或} >bc, \text{ 則 } a/b<,\ =,\ \text{或} >c/d.$$

證

1. 因若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則 $\frac{a}{b}bd=\frac{c}{d}bd.$ § 50

但 $\frac{a}{b}b=a$，而 $\frac{c}{d}d=c.$ §§ 93, 94

因此 $ad=bc.$

用相仿的方法，可證

若 $a/b<c/d$，則 $ad<bc$；又若 $a/b>c/d$，則 $ad>bc$.

2. 但從上述各理逆推，即得

$$若\ ad=bc，則\ a/b=c/d.$$

倘若不然，則應或有 $a/b<c/d$，因而 $ad<bc$；或有 $a/b>c/d$，因而 $ad>bc$. 這都是與假設相矛盾的.

用同樣的方法，可證

$$若\ ad<bc，則\ a/b<c/d；又若\ ad>bc，則\ a/b>c/d.$$

105 **擴大序次數系.** 不問 a, b, c, d 的所指定之值，是否可使 b 整除 a，d 整除 c，ad 與 bc 在數紀上的相對次序，是一定可以知道的.

因此，可取任何二自然數，a 及 b，其中 b 不是 0，而用它們寫成記號 $\dfrac{a}{b}$，或 a/b.

若 b 可整除 a，則如前命 a/b 表示一個自然數，此數是用 b 除 a 的商；但若不可整除，暫時把 a/b 當做一個新的記號，讀作"b 分之 a"，它與除法的關係，尚待決定（§122）.

於是假定，所有 a/b，c/d，等等記號，都照下面的規則排列：若 ad 在 bc 前，或與 bc 合同，或在 bc 後，則 a/b 在 c/d 前 或與 c/d 合同，或在 c/d 後，這麼一來，這些記號便都有了序次的特徵，像表示自然數的記號一樣.

或如前採用符號 $<, =, >$，以代"在前"，"合同"，"在後"，而

106 在 $ad<, =$ 或 $>bc$ 時，命 $a/b<, =,$ 或 $>c/d$.

例如，$4/5$ 在 $7/8$ 前，即 $4/5<7/8$，因 $4\cdot8<7\cdot5$. 又，$2/3$ 在 0 與 1 之間，即 $0<2/3<1$. 因 $0\cdot3<2\cdot1$，從而 $0/1<2/3$；$2\cdot1<1\cdot3$，從而 $2/3<1/1$.

107 對於可表示自然數的記號 a/b 等等，上述規則可定其在數紀上的適當地位；對於其餘各記號，這規則可定其在數紀上相鄰數 (consecutive number) 之間的地位.

注意. 任何一個特殊記號 a/b, 要決定它在數紀上居何地位,可將 化成 $=bq+r$, 式中 $r<b$(§88). 若 $r=0$, 以致 $a=bq$, 則上述規則使 a/b 與 q 合同. 但若 r 不是 0 則據此規則, a/b 在 q 與 $q+1$ 之間. 108

有上述定義的各記號 a/b 等,其所組成的全集,乃是一個序次系,正像自然數紀一樣而自然數系則爲此新系的一部分. 109

因爲 §§ 17, 18 所述,一個序次系的一切性質,這個新系都有.

例若 $a/b<c/d$, 而 $c/d<e/f$, 則 $a/b<e/f$.

因若 $a/b<c/d$, 而 $c/d<e/f$,

則有 $ad<bc$, 及 $cf<ed$. §106

第一不等式的兩邊,分別乘以第二不等式的對應兩邊,則有

$adcf<bced$. §50

因此 $af<be$, §50

所以 $a/b<e/f$. §106

分數. 當 a/b 不表示一個自然數時,我們叫它做分數 (fraction); a 叫做它的分子 (numerator), b 叫做它的分母 (denominator), a 與 b 總稱爲它的兩項 (term). 因此, 110

分數是一個有 a/b 形式的記號,在包括自然數的序次系中,有一定的地位,從這地位,它就有了定義.

故從序次的觀點看來,我們稱分數爲數,是不無正當理由的.*

* § 106 的規則,可以用來使有 1/0, 2/0 等等形式的記號,在序次上也得到定義.

照這規則, 1/0 應在一切數 a/b(分母 b 不是 0)之後. 因 $1\cdot b>a\cdot 0$, 從而 $1/0>a/b$.

又 1/0, 2/0, 等等,應在這個序次系中占同一地位. 因 $1\cdot 0=2\cdot 0$, 從而 $1/0=2/0$.

但是這規則不能使記號 0/0 得確定的地位. 因爲不論 a 與 b 之值是什麼,既然 $0\cdot b=a\cdot 0$, 即應有 $0/0=a/b$.

111　**負分數．** 我們還可以作成，分子與分母都是，或其中一個是負數的分數，例如 $\frac{-a}{b}$，$\frac{a}{-b}$，$\frac{-a}{-b}$，而在序次上予以定義如下：

1. $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$；$\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$；$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$．

2. 凡是負分數都應在 0 之前．

3. 負分數排列彼此相對（及與負整數相對）的次序，應依照下列規則：

$$\text{若}\ -ad<,=,\text{或}>-bc,\ \text{則}\ -\frac{a}{b}<,=,\text{或}>-\frac{c}{d}.$$

112　**有理數系．** 為使整數以及分數，有別於尚待討論的別種數起見，我們稱整數以及分數為有理數（rational number），而這些數全部所組成的系統，稱為有理數系（rational system）．

這個數系有一個重要性質，不屬於它的部分——整數系．此性質可敍述如下：

113　有理數系是稠密的（dense）；換言之，在每兩個不等有理數之間，必有其他有理數．

設 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 是任何兩個分數，而 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，則分數 $\frac{bc+ad}{2bd}$ 即在 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 之間．此可證明如下：

因 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，故有 $ad<bc$．

1. 若將 ad 加於 $ad<bc$ 的兩邊，則從 §§ 39, 59, 106，應有 $2ad<bc+ad$，
$\therefore a(2bd)<b(bc+ad)$，$\therefore \frac{a}{b}<\frac{bc+ad}{2bd}$．

2. 若將 bc 加於 $ad<bc$ 的兩邊，則與 1 相仿，應有
$bc+ad<2bc$，$\therefore (bc+ad)d<c(2bd)$，$\therefore \frac{bc+ad}{2bd}<\frac{c}{d}$．

例　在 $\frac{3}{4}$ 與 $\frac{5}{6}$ 之間，就有 $\frac{4\cdot 5+3\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{38}{48}=\frac{19}{24}$．

因此,講到有理數時,切不可說比所設數"大或小的鄰接數"這類的話;因爲沒有這樣的數存在. 每一個整數確有一個鄰接的整數,但在任何有理數及所指定的鄰接有理數之間,必定還有其他有理數. 114

分數的運算. 在§§ 98—102 中已經證明,若 a, b, c, d 表示正或負的整數,而 a/b 及 c/d 也都表示整數,則有 115

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. 2. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. 4. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$,當$\frac{ad}{bc}$爲整數時.

但等式 1, 2, 3, 4 的右邊,即在 a/b 與 c/d 不是整數時,也有意義. 它們都是,確定的,且在 §§ 110, 111 中已予以定義的,那種分數.

因此,從 1, 2, 3, 4, 立即可得加,減,乘,除的推廣的意義;這四種運算經推廣之後,可以應用於分數. 現在將這推廣的意義順次敍述如下:

所謂兩個分數 a/b 與 c/d 之和,就是分數 $(ad+bc)/bd$. 116

所謂從分數 a/b 減去分數 c/d 所得之差,就是分數$\frac{ad-bc}{bd}$. 117

所謂兩個分數 a/b 與 c/d 相乘之積,就是分數 ac/bd. 118

所謂分數 a/b 除以分數 c/d 所得之商,就是分數 ad/bc. 119

讀者注意,這些定義同於初等算術中的分數計算定則.

四種廣義的運算,也遵守對易,締結,以及分配三律. 120

例如, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$. §§118, 69

121 **相等與不等定則.** §§ 71, 73 的定則,也適用於這些運算.

例若 $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$, 則$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

因若 $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$, 則 $aedf=cebf$. §§ 118,106,111

因此 $ad=cb$, 從而得$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. §§ 73,106,111

122 **分數當做商的定義.** 分數 a/b, 現在可以說是用 b 乘它而得 a 的一個數,這就是說,它是一個數,由下列等式予以定義:

123
$$\frac{a}{b}\cdot b=a.$$

因 $\frac{a}{b}\cdot b=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{1}=\frac{ab}{1\cdot b}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{b}=a.$ §§ 106, 111, 118

124 **除法看做乘法的反運算.** 從 §§ 118, 119, 可得

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\ \text{及}\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b};$$

換言之,乘法與除法,照 §§ 118, 116 的定義,是相反的運算.與 § 55 比較.

因從 §§ 118, 119 及 §§ 106, 111 ,可得

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{cdc}{bcd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{dc}{cd}=\frac{a}{b};$$
$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\div\frac{c}{d}=\frac{acd}{bdc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{cd}{dc}=\frac{a}{b}.$$

因此,現在的這一種除法,可以說它是乘法的反運算;換言之,

125 用 c/d 除 a/b, 是找一個數,此數用 c/d 乘,得 a/b.

將分數引入數系後,這樣的數已常可求得,除非除數 c/d 是 0.

這是算術與代數上除法的普遍定義，又是整除的推廣(§93).

約分．不可約分數． 若一個分數的分母與分子有公因子(common factor)，則可將此公因子除去，不變分數之值．這個手續叫做約分(reduction of a fraction). 126

因 $am\cdot b=a\cdot bm$, 從而 $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$. §106

所有這樣的公因子都經除去後，我們說這分數約到最低項(in its lowest terms)，或說它已成為不可約(irreducible)分數，或最簡分數．

定義． 若 a/b 是不可約分數，而 a'/b' 是其他任何分數，等於 a/b, 則 a' 與 b' 分別是 a 與 b 的等倍數. 127

因 $a'/b'=a/b$, 所以 $a'b=ab'$, a 是 $a'b$ 的一個因子.
但從假設，a 與 b 是沒有公因子的．因此，a 非為 a' 的因子不可，§492, 1.
於是有 $a'=ma$, 式中 m 是一個整數.
將 ma 代替 $a'b=ab'$ 中的 a', 得 $mab=ab'$, 所以 $b'=mb$, §50.

系． 若兩個不可約分數相等，它們的分子必相等，分母亦必相等. 128

分數在量度上的用處

用分數表長度． §81 中長度的定義，祇適用於恰含單位線段 s 若干倍的一線段 S. 129

但是卽使 S 不恰含 s 若干倍，它仍舊可以與 s 有公度(commensurable)；這就是說，它可以恰含 s 的一半，三分之一，或其他可分部分(aliquot part)的若干倍．此時，給予長度的定義如下：

若所設線段恰含有單位線段 b 分之一的 a 倍，則其長度是分數 a/b. 130

例若 S 恰含有 s 的 10 分之一 7 倍，則 S 的長度(用 s 做單位)便是 7/10.

131 **注意.** 若照此定義而用 s 做單位時，S 的長度是 a/b，則凡有 ma/mb 形式的分數，都是 S 的長度.

因若 S 恰含有 s 的 b 分之一 a 倍，則必含有 s 的 mb 分之一恰好 ma 倍.

132 分數在量度上之所以有用處，其理由同於整數，即：分數憑着它們在有理數系中的相對地位，可指示用它們表示長度的各線段之相對大小.

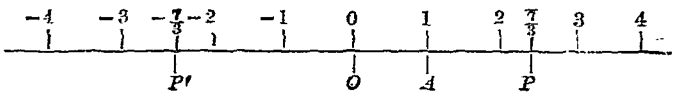
因若 a/b 與 c/d 是用 s 做單位時 S 與 T 的長度，則 ad/bd 與 bc/bd 也是（§131）；這就是說，s 的 bd 分之一，在 S 中恰含 ad 倍，在 T 中恰含 bc 倍.

因此　　若 $ad <, =,$ 或 $> bc$，則 S $<, =,$ 或 $>$ T，

即　　若 $a/b <, =,$ 或 $> c/d$，則 S $<, =,$ 或 $>$ T.　　§106

133 **注意.** 我們不言而知，這裏的長度定義，同於初等算術裏的分數定義，而較大或較小的分數，其在算術裏的定義，也就是對應於較大或較小線段或別種量的分數.

134 **有理數的跡.** 分數，以及整數，都可以在一條無限長的直線上，用點來示跡（§85）.



例如欲作 7/3 的跡 P，與 1 的跡 A 相仿，則須從原點 O 起，向右將單位 OA 的三分之一，連截取七次，即得.

O 點以左的對應點 P' 便是 $-7/3$ 的跡(picture).

任何已設正或負的分數，都可以用同法求其跡.

135 所有這樣的點，都在這條線上，其排列的次序，對應於其所示跡的有理數. 因此，我們往往可說，一個有理數在別個有理數之左或右，或在其他二有理數之間.

IV. 無理數

初步討論

定理. 積 aa 用 a^2 代表讀作"a 平方";積 aaa 用 a^3 代表,讀作"a 立方";積 $aaa\cdots$ 共 n 個因子,用 a^n 代表,讀作"a n 次冪"或"a n 次方"(簡稱"a n 方"). 136

在記號 a^2, a^3, a^n 中, 2, 3, n 各數叫做指數 (exponent); a 本身叫做底 (base).

從 a 求 a^2,叫做將 a 自乘 (squaring a);求 a^3, 叫做將 a 三乘 (cubing a);求 a^n,叫做將 a 累乘到 n 次冪(raising a to the nth power).

將所設數累乘到所設冪,這運算叫做乘方 (involution).

根與對數. 若假定 a 是有理數,而 n 是正整數,則 a^n 也是有理數. 稱此數爲 b, 則有 137

$$a^n=b.$$

從這等式產生兩個新問題:

第一. 指定 n 及 b 的值,然後求 a.

第二. 指定 a 及 b 的值,然後求 n.

例如, (1) 命 $n=2$, $b=9$. 這等式就成爲

$$a^2=9,$$

而我們求得 $a=3$ 或 -3; 因爲 3^2 及 $(-3)^2$ 都是 9.

又如, (2) 命 $a=2$, $b=8$. 這等式就成爲

$$2^n=8,$$

而我們求得 $n=3$; 因爲 $2^3=8$.

當 $a^n=b$ 時, 138

1. a 叫做 b 的 n 次根,用 n 與 b 寫成記號 $\sqrt[n]{b}$ 來表示; 在 $n=2$ 時,用較簡單的記號 $\sqrt{b}$,讀作"b 的平方根".

2. n 叫做以 a 爲底 b 的對數 (logarithm of b to the base a),用 a 與 b 寫成記號 $\log_a b$ 來表示.

例如，$3^2=9$ 又 $(-3)^2$ 9，所以 3 與 -3 都是 9 的平方根，都可以寫成 $\sqrt{9}$；但須依照 § 139 的規定．

又如，2 是以 3 爲底 9 的對數；即，$2=\log_3 9$，因 $3^2=9$．

139 **注意．** 我們可以不用記號 $\sqrt{9}$ 代表 9 的兩個平方根，而用 $\sqrt{9}$ 代表正平方根 3，用 $-\sqrt{9}$ 代表負平方根 -3．這便是初等代數上代表平方根常用的方法，而我們也遵照這個規定．

140 **開方及求對數．** 已設 n 與 b，求 $\sqrt[n]{b}$，這運算叫做求 b 的 n 次根(extracting the nth root of b)，或稱開方(evolution)．

已設 a 與 b，求 $\log_a b$，這運算叫做求以 a 爲底 b 的對數．

這兩種運算，都是乘方的反運算(§§ 55, 124)．

141 **注意．** 乘方有兩種反運算，而加與減祇各有一種，其理由可見之於比較下列三個等式：

$$1.\ a+b=c. \qquad 2.\ ab=c. \qquad 3.\ a^b=c.$$

因 $a+b=b+a$，而 $ab=ba$，所以就 1 及 2 而論，"已設 c 與 b 求 a"，與"已設 c 與 a 求 b"，這兩個問題是同樣的．

但因 a^b 不等於 b^a，故就 3 而論，"已設 c 與 b 求 a"，與"已設 c 與 a 求 b"，這兩個問題是完全兩樣的．

142 **需要新數．** 這兩種運算，以後要細細地加以研究；因在代數上，其重要僅次於四種基本運算．不過目下有一點，我們得先行考慮，這就是：實行這兩種運算，必須將數系再加推廣．

其實我們一望即知，$\sqrt[n]{a}$ 表示有理數，祇有幾個特例．

取最簡單的例子來說，$\sqrt{-1}$ 及 $\sqrt{2}$ 就都不能表示有理數．因爲

1．既然每一個有理數的平方是正數，則平方是 -1 的有理數就不存在．因此，$\sqrt{-1}$ 不能表示有理數．

2．平方是 2 的有理數，是不存在的．因爲 2 顯然不是任何整數的平方，而且我們可以用下述方法證明，2 決非任何分數的平方．

假定 p/q 是一個不可約分數,且

$$(p/q)^2=2, \text{ 或 } p^2/q^2=2/1.$$

但因 p^2/q^2 也是不可約分數(§492, 2),故從 §128,及上式,將有 $p^2=2$. 這是不可能的,因為 p 是一個整數.

所以 $\sqrt{2}$ 不能表示有理數.

用同樣方法可以證明,若 a/b 是不可約分數,則 $\sqrt[n]{a/b}$ 不能表示有理數,除非 a 與 b 都是整數的 n 次冪.

若再創造兩類新數,則在數系中的這個缺陷,就可以得到補救. 這兩類新數是:無理數(irrational number),例如 $\sqrt{2}$ 便是;虛數(imaginary number),例如 $\sqrt{-1}$ 便是.

我們現在先講無理數,再在下章中講虛數.

無理數的序次定義

在本章中,文字 a, b, c 等等表示任何有理數,不問是正的還是負的,整數還是分數.

有理數系的通性. 由有理數組成的數系,具下列各性: **143**

1. 它是一個序次系.

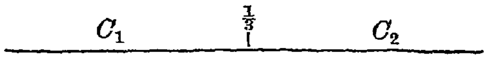
2. 它是稠密的;即在本系每兩個不等數 a 與 b 之間,還有本系的其他各數.

3. 本系各數的和,差,積,以及商,本身都是本系的數,但用 0 除而得之商,不在本系之內.

由下面的定義,我們還要創造一個更加推廣的數系,這數系也具有上述三個性質,而且將有理數系包括在內.

數系的第一種區分法. 1. 數 $\frac{1}{3}$ 可將有理數系的其餘各數,區分為兩類: **144**

一類包含所有各有理數,在 $\frac{1}{3}$ 前(小於 $\frac{1}{3}$)的;還有一類包含所有各有理數,在 $\frac{1}{3}$ 後(大於 $\frac{1}{3}$)的. 這兩類,分別稱之為 C_1 與 C_2.



附圖中,在點 $\frac{1}{3}$ 以左的半條線,含有類 C_1 中一切諸數的點跡(point picture),而以右的半條線,則含有類 C_2 中一切諸數的點跡(§ 134).

從 §§ 109, 111, 113,立可推得

1. C_1 中的每一數在 C_2 中的每一數之前.
2. C_1 中沒有末一數, C_2 中沒有第一數.

若 C_1 中有末一數,則在此數與 1/3 間就有別的數(§ 113),這是不可能的,因從假設,凡有理數小於 1/3 的已都包含在 C_1 中了.

145 2. 我們可以不照上法將有理數系分成三部分 $C_1, \frac{1}{3}, C_2$,而將 $\frac{1}{3}$ 附於 C_1,組成新類 C_1'(由 C_1 與 $\frac{1}{3}$ 拼起來的),然後說:

數 $\frac{1}{3}$ 區分整個有理數系成兩部分, C_1' 與 C_2,以致:

1. C_1' 中的每一數在 C_2 中的每一數之前.
2. C_1' 中有末一數,即 $\frac{1}{3}$,但 C_2 中沒有第一數.

146 3. 還可以將 $\frac{1}{3}$ 附於 C_2,組成新類 C_2',然後說:

數 $\frac{1}{3}$ 區分整個有理數系成兩部分, C_1 與 C_2',以致:

1. C_1 中的每一數在 C_2' 中的每一數之前.
2. C_1 中沒有末一數,但在 C_2' 中有第一數,即 $\frac{1}{3}$.

每一個有理數,顯然都可以照樣把有理數系分成兩類.

147 逆言之,倘若我們能夠不論用什麼方法,將整個有理數系區分成兩部分, B_1 與 B_2,而可使 B_1 中的每一數,在 B_2 中的每

一數之前，且可使 B_1 中有末一數，或 B_2 中有第一數，則此區分之法，卽使這末一數或第一數，有別於其他一切諸數，且就這個意義而論，已使此數有了定義.

例如指定負的有理數屬於 B_1，其餘的有理數屬於 B_2，則在 B_1 中就沒有末一數，但在 B_2 中卻有第一數 0. 零稱為 B_2 中的第一數時，與其他一切諸數都有區別，正和用記號 0 代表它時一樣.

注意. B_1 中有末一數，同時 B_2 中又有第一數，這顯然是不可能的. 因為若有此二數，則其間必尚有其他有理數（§ 113），但從假設，凡有理數不屬於 B_1 卽屬於 B_2. 148

數系的第二種區分法. 我們還可以用別的種種方法，把整個有理數系分成兩部分：一部分是 A_2，其中沒有末一數；還有一部分是 A_2，其中沒有第一數. 149

例如平方是 2 的有理數是不存在的（§ 142），所以一切有理數，其平方不小於 2，卽大於 2.

命 A_2 包含平方大於 2 的一切正有理數，而命 A_1 包含其他一切有理數，則

1. A_1 中的每一數在 A_2 中的每一數之前.

命 a_1 是 A_1 中的任何數，而 a_2 是 A_2 中的任何數.
若 a_1 是負的或是 0，則顯然 $a_1<a_2$；又若 a_1 是正的，則 $a_1^2<a_2^2$，故 $a_1<a_2$.

2. 在 A_1 中沒有末一數，在 A_2 中沒有第一數.

因為任何正有理數 a_1 其平方小於 2 的，業經指定後，常可求得一較大的有理數，其平方也小於 2 [§ 133, 2(3)]；因此，不能指定一數是 A_1 中的末一數. 仿此可證不能指定一個有理數是 A_2 中的第一數.

新數 $a=\sqrt{2}$. 所以 A_1 與 A_2 這兩類數，其間的關係完全同於 § 144 所述，實施對應於 $\frac{1}{3}$ 的區分時所得的兩類，C_1 與 C_2. 150

但是,可以說它對應於區分 A_1, A_2 的,或說它從這區分而得定義的有理數,却並不存在.

因為一切有理數既然不屬於 A_1,卽屬於 A_2,則在 A_1 與 A_2 之間,卽不會有有理數存在,也像 $\frac{1}{3}$ 在 C_1 與 C_2 之間一樣.

又因 A_1 中沒有末一數,而在 A_2 中沒有第一數,所以决沒有一個有理數,可以對應於這個區分,好像 $\frac{1}{3}$ 對應於 § 145 所述的區分 C_1' 與 C_2,或對應於 § 146 所述的區分 C_1 與 C_2' 一般. (與 §147 比較.)

因此,A_1, A_2 這個區分,使一個新創的序次數有了地位,這個數,應該在 A_1 中的一切數之後,而在 A_2 中的一切數之前.

這樣的一個數是我們所發明的. 目前,可以用文字 a 代表它;以後,關於 a 的乘法有了定義時,就要見到 $a^2=2$,因而可用較有意義的記號 $\sqrt{2}$ 來代替 a (§182).

151 於是我們就可以立一個定義,說這新數 a,是在平方小於2的一切正有理數,及平方大於 2 的一切正有理數之間的一個數.

這個定義,也可以用下面的公式表示:

$$a_1 < \mathbf{a} < a_2,$$

式中 a_1 與 a_2 分別表示 A_1 與 A_2 中任何數,而 < 的意思仍是"在前".

152 **注意.** 這個定義,與 §§ 56, 110 所述負數與分數的定義,是一個樣子的. 記號 a 正像負數與分數一樣,在包括自然數的序次記號系中,也有確定的地位,它的定義即從這地位得來. 所以它的確也應當叫做數.

發明這種數以及其他相仿的新數,其理由同於發明負數及分數. 我們研究已有各數之間的關係,以及四周世界中的事物的時候,這些數是很有用處的.*

---

*從序次的觀點看來,可以發明不止一個數,譬如說兩個,a 與 b,對應於區分 A_1, A_2,而由公式 $a_1 < \mathbf{a} < \mathbf{b} < a_2$ 在序次上立其定義,這是不會有非議的.

但有另外的理由,不容我們發明一個以上的這種數對應於區分 A_1, A_2. 參閱第 67 面,小註 (3).

一般的無理數. 實數系. 適纔所討論的有理數系的特殊區分,不過是無窮個數性質相彷的可能區分法之一例。 153

對於每一個這種區分法,可以發明一個新數,而且可以在與有理數系中各數相對的序次上,設立它的定義,正和§151中設立 $a=\sqrt{2}$ 的定義一樣.

為使這些新數有別於有理數起見,特稱之為無理數(irrational numbers 或 irrationals).

又,為使有理數與無理數有別於尙待討論的虛數起見,特稱之為實數(real numbers).

最後,包含一切有理數與無理數的數系,稱之為實數系(system of real numbers 或 real system).

因此,用 a 表示任何無理數,可得 a 的一般定義如下:

不論何時,若已有一定律,藉以指定一切所設有理數,祇屬於兩類 A_1, A_2 中的一類,以致 (1) A_1 中每一數在 A_2 中每一數之前,且 (2) A_1 中無末一數而 A_2 中無第一數,則無理數 a 便有了定義,其定義是: a 就是介於 A_1 中一切數及 A_2 中一切數之間的一個數. 154

這定義還暗暗指着二事: 兩類 A_1 與 A_2 中都有數; A_1 與 A_2 合併起來就是整個有理數系.

無理數 a 在 0 之前,是負的;在 0 之後,是正的. 155

實數系是序次系. 組成實數系的各數,是按照確定而已知的次序排列的(§17). 因為每一個無理數的定義,指示着它對於一切有理數的地位;而從任何兩個所設無理數的定義,我們可以立卽推出,它們彼此相對有什麼地位. 156

設命 a 與 b 表示任何兩個所設無理數；則

1. 若在 a 前的每一數都在 b 前，而在 a 後的每一數都在 b 後，則 a 與 b 兩數所占，與有理數系各數相對的地位，是相同的. 故由無理數的定義（§154），a 與 b 表示同一數. 此可用下面的公式指示：

$$a=b.$$

2. 若在 a 以後的各有理數之中，有在 b 前的，則 a 本身必亦在 b 前（卽 b 在 a 後）. 此可用下面的公式指示：

$$a<b \text{ 或 } b>a.$$

3. 若在 a 以前的各有理數之中，有在 b 後的，則 a 本身必亦在 b 後（卽 b 在 a 前）. 此可用下面的公式指示：

$$a>b \text{ 或 } b<a.$$

157 由此可見，任何兩個不同的實數已設時，立刻可以推斷其中何數在前，何數在後；又，關於三個所設實數 a, b, c，常可得下面各結論：

若 $a=b$ 而 $b=c$，則 $a=c$.

若 $a>b$ 而 $b>c$，則 $a>c$.

若 $a<b$ 而 $b<c$，則 $a<c$.

158 **實數系是稠密的.** 不但在任何兩個不等有理數之間，有其他有理數（§113），卽在任何兩個不等無理數之間，乃至一個有理數與一個無理數之間，也有其他有理數（§156）. 所以實數系是稠密的.

159 **實數系是綿續的.** 實數系除具有 §143 所述有理數系

的第一第二兩種性質外,尙具不屬於有理數系的性質,卽:

若整個實數系區分成兩部分, R_1 與 R_2, 以致 R_1 中的每一數在 R_2 中的每一數前,則或在 R_1 中有末一數,或在 R_2 中有第一數,但兩種情形不能同時成立.

因在區分實數系成 R_1 與 R_2 兩部分時,也將有理數系區分成兩部分, A_1 與 A_2, 其中一部分含有 R_1 中的一切有理數,另一部分含有 R_2 中的一切有理數.

凡有理數不屬於 A_1 卽屬於 A_2, 而 A_1 中的每一有理數在 A_2 中每一有理數之前.

設 **a** 是由區分 A_1, A_2 而得定義的數(§§ 147, 154).

則 **a** 或爲有理數——卽爲 A_1 中的末一數或 A_2 中的第一數(§ 147)——或爲無理數在 A_1 與 A_2 之間,此時 A_1 中無末一數, A_2 中無第一數.

1. **a** 若是 A_1 中的末一數,則也是 R_1 中的末一數;因 R_1 中若有任何數在 **a** 之後,則此數與 **a** 之間,卽在 A_1 中 **a** 以後,將有其他有理數,這是不可能的.

2. 同樣可證, **a** 若是 A_2 中的第一數,也是 R_2 中的第一數.

3. **a** 若是無理數,則由假設,必定不屬於 R_1 卽屬於 R_2. 它若屬於 R_1, 就是 R_1 的末一數;因若 R_1 中有任何數在 **a** 之後,則在此數與 **a** 之間,卽在 A_1 中 **a** 以後,將有其他有理數(§ 158),這是不可能的. 同樣可證, **a** 若屬於 R_2, 就是 R_2 中的第一數.

最後,決不能在 R_1 中有末一數且在 R_2 中有第一數;因若能,則此兩數之間將有其他有理數 (§158),卽有旣不屬於 A_1 又不屬於 A_2 的有理數,這是不可能的.

爲了表示實數系旣稠密而又具有適纔所說的性質,我們就說實數系是綿續的 (continuous).

定理. 不論何時,若已有一定律,可藉以區分整個實數系成兩部分, R_1 與 R_2, 使 R_1 中的每一數在 R_2 中的每一數前,則一個實數 **a**, 或爲有理數,或爲無理數,便有了定義;此數 **a**, 不是 R_1 中的末一數,就是 R_2 中的第一數. **160**

這定理,可從 §§ 147, 159 直接推得.

無理數的近似值

161 已設一個無理數 a, 其定義如 § 154 所述. 由下面所說明的方法,可求得一對有理數,一個比 a 大,一個比 a 小;這兩數的差,可以隨意使它小到無論多少小的程度. 這兩個有理數,叫做 a 的近似值 (approximate value).

設 a 是無理數 $\sqrt{2}$, 此數在平方小於 2 的一切正有理數,及平方大於 2 的一切正有理數之間.

1. 由於順次地計算 1, 2, 3,……的平方,直算到一個大於 2 的平方而止,即可求得一對相鄰整數, a 就在這兩數之間.

就 $\sqrt{2}$ 而論,立刻知道 $1^2<2$, 而 $2^2>2$.

因此, a 在 1 與 2 之間,或 $1<a<2$.

2. 於是再順次地計算 1.1^2, 1.2^2,……直算到一個大於 2 的平方而止,即可求得一對相鄰分位數(consecutive tenths), a 就在這兩數之間.

依此而得 $1.4^2<2$ 及 $1.5^2>2$; 因 $1.4^2=1.96$, $1.5^2=2.25$.

因此 a 在 1.4 與 1.5 之間,或 $1.4<a<1.5$.

3. 由相仿的手續,可以順次求得

$1.41<a<1.42$, $1.414<a<1.415$, 等等,永無盡止.

4. 命 a_1 表示所得 1.4, 1.41, 1.414,……這一列數的第 n 個數,而 a_2 表示所得 1.5, 1.42, 1.415,……這一列數的第 n 個數,

則 $$a_1<a<a_2 \text{ 而 } a_2-a_1=\frac{1}{10^n}.$$

選擇 n, 使它大到充分大的程度,即可使 $1/10^n$ 小到比任意指定無論多少小的任何正數,譬如說 δ, 還要小.

5. 1.4, 1.41, 1.414,……稱為 $a=\sqrt{2}$ 的近似值,求到第一位,第二位,第三位,……小數.

上述的手續,可以適用於任何所設無理數 a; 因為這手續不過要試一試,究竟哪些個有理數比 a 小,哪些個比 a 大;而從 § 154 所述 a 的定義,這種試驗是總可以實行的. 所以我們有下面的定理:

命 a 表示任何所設無理數. 若有任何正數 δ 業經指定, 不論它是多少小, 常可求得兩個有理數 a_1, a_2, 合下列條件, 即 162

$$a_1 < a < a_2 \text{ 與 } a_2 - a_1 < \delta.$$

這個定理, 就有理數而論, 顯然也得成立.

若 a 表示所說有理數, 而 $a_1 = a - 1/10^n$, $a_2 = a + 1/10^n$ 則就有 $a_1 < a < a_2$, 且可任意使 $a_2 - a_1 = 2/10^n$ 小到無論多少小的程度, 祇要使 n 充分大好了.

加法, 減法, 乘法, 除法

§ 143 中所述有理數系的第三種性質, 尙待給予實數系. 要達到這個目的, 須先證明下面的定理:

定理. 設 A_1 與 A_2 是有理數的兩類, 合下列條件: 163

1. A_1 中的每一數小於 A_2 中的每一數;
2. A_1 中無末一數, A_2 中無第一數;
3. 在 A_1 中可求得一數 a_1, 在 A_2 中可求得一數 a_2, 使

$$a_2 - a_1 < \delta,$$

δ 是可以指定的, 無論多少小的任何正數.

這樣, 便可斷定 A_1 與 A_2 之間有一個數而祇有一個數.

從 1 與 2, 可知至少有一個這樣的數 (§ 154).

從 3, 可知不能有一個以上的這樣的數.

假定 A_1 中的一切 a_1 與 A_2 中的一切 a_2 之間, 有兩個有理數 d 與 d', 如下圖所示:

$$\underline{\quad a_1 \qquad d \qquad d' \qquad a_2 \quad}$$

則就每一對 a_1, a_2 而論, 應有

$$a_2 > d', \text{ 及 } -a_1 > -d, \qquad §§ 73, 121$$

所以

$$a_2 - a_1 > d' - d, \qquad §§ 39, 121$$

這是不可能的, 因爲與 3 相矛盾.

在每一對 a_1 與 a_2 之間,也不能有兩個無理數或一個有理數與一個無理數;因爲在這兩個數之間,將有兩個有理數也在每一對 a_1 與 a_2 之間(§158),這方纔已經證明是不可能的.

164 **注意.** 這定理與 §154 的無理數定義,其不同之處在於下述的一點,即本定理的假設中,並未提到一切有理數不在 A_1 中即在 A_2 中.

165 **加法.** 命 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 表示任何兩個所設實數,有理或無理,且命 a_1, a_2, b_1, b_2, 表示任何有理數,適合條件

$$a_1<\mathbf{a}<a_2 \text{ 及 } b_1<\mathbf{b}<b_2. \qquad (1)$$

注意,由 a_1 或 b_1 表示的一類數,沒有末一個,而由 a_2 或 b_2 表示的一類數,沒有第一個;又,若任意指定一個不論多少小的正數 δ, 常可選得 a_1, a_2 及 b_1, b_2(§162),使

$$a_2-a_1<\delta \text{ 及 } b_2-b_1<\delta. \qquad (2)$$

若 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 都是有理數,譬如說 $\mathbf{a}=\alpha$, 而 $\mathbf{b}=\beta$, 則可用 §116 的規則,求得它們的和 $\alpha+\beta$;故從(1),根據 §121, 得

$$a_1+b_1<\alpha+\beta<a_2+b_2.$$

又,不論 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 是有理數或不是,從(1),據 §121, 可得

$$a_1+b_1<a_2+b_2. \qquad (3)$$

這樣看來,不問 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 有一個是或兩個都是無理數,它們的和因此可得定義如下:

166 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的和,寫作 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, 它的意義就是一個數,該數在一切數 a_1+b_1 與一切數 a_2+b_2 之間. 換言之,該數定義之設立,用公式

$$a_1+b_1<\mathbf{a}+\mathbf{b}<a_2+b_2,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 表示任何有理數,適合條件

$$a_1<\mathbf{a}<a_2 \text{ 及 } b_1<\mathbf{b}<b_2.$$

要辯明這是一個確當的定義，必須證明 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 這樣的一個數有一個而祇有一個. 這是可以根據 § 163 來證明的;因爲

1. 每一個 a_1+b_1 小於每一個 a_2+b_2.

2. 沒有末一個 a_1+b_1,也沒有第一個 a_2+b_2.

例如，$a_1'+b_1'$ 決不能是末一個 a_1+b_1;因爲既然沒有末一個 a_1，沒有末一個 b_1，就可以選得 a_1 與 b_1，使 $a_1>a_1'$ 及 $b_1>b_1'$，於是就有 $a_1+b_1>a_1'+b_1'$.

3. 若有不論多少小的任何正有理數 δ 業經指定,則可選得 a_1, a_2, b_1, b_2，使

$$a_2-a_1<\delta/2 \text{ 及 } b_2-b_1<\delta/2, \qquad \S\ 162$$

因而

$$(a_2+b_2)-(a_1+b_1)<\delta. \qquad \S\ 121$$

$-\mathbf{a}$ 的定義. 命 $\mathbf{a}, a_1, a_2$ 的意義同於 § 165 所述. 當 $\mathbf{a}$ 是無理數時，仿照 § 165，可得 $-\mathbf{a}$ 的定義如下: 167

記號 $-\mathbf{a}$ 的意思是一個數,其定義之設立,用公式 168

$$-a_2<-\mathbf{a}<-a_1,$$

式中 a_1, a_2 表示任何有理數,適合條件

$$a_1<\mathbf{a}<a_2.$$

從 § 163 可知,像 $-\mathbf{a}$ 這樣的數有一個而祇有一個;因爲

1. 每一數 $-a_2$ 小於每一數 $-a_1$，因 $a_1<a_2$. §§ 73, 111

2. 沒有末一個 $-a_2$ 也沒有第一個 $-a_1$. 因若有末一個 $-a_2$，則將有第一個 a_2; 但這樣的數是沒有的. 同樣可證沒有第一個 $-a_1$.

3. 常可選擇 a_1, a_2，適合條件

$$-a_1-(-a_2)=a_2-a_1<\delta. \qquad \S\ 162$$

減法. 從 $\mathbf{a}$ 減 $\mathbf{b}$，寫成 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$，其結果就是數 $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$; 即 169

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

$\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$本身的意義,從 §§ 166, 168 可以知道.

根據 §§ 166, 168, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 的定義也可以用下面的公式來設立:

$$a_1-b_2<\mathbf{a}-\mathbf{b}<a_2-b_1,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 表示任何有理數,適合條件

$$a_1<\mathbf{a}<a_2 \text{ 及 } b_1<\mathbf{b}<b_2.$$

170 **乘法，兩個因子都是正的．** 設 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 是任何兩個所設正數，而 a_1, a_2, b_1, b_2 是任何正有理數，適合條件

$$a_1<\mathbf{a}<a_2 \text{ 及 } b_1<\mathbf{b}<b_2. \tag{1}$$

若 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 是有理數，譬如說 $\mathbf{a}=\alpha$, $\mathbf{b}=\beta$，則從(1)及 § 121，得

$$a_1b_1<\alpha\beta<a_2b_2,$$

而在一切情形之下，常有

$$a_1b_1<a_2b_2. \tag{2}$$

因此，當 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 二數有一個是或都是無理數時，可立其積的定義如下：

171 兩個整數 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的積，寫成 $\mathbf{ab}$，它的意思是指一個數，該數在一切數 a_1b_1 及一切數 a_2b_2 之間．換言之，$\mathbf{ab}$ 這個數，其定義之設立，用公式

$$a_1b_1<\mathbf{ab}<a_2b_2,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 表示任何正有理數，適合條件

$$a_1<\mathbf{a}<a_2 \text{ 及 } b_1<\mathbf{b}<b_2.$$

從§ 163 推斷，像 $\mathbf{ab}$ 這樣的數有一個而祇有一個；因為

1. 每一個 a_1b_1 小於每一個 a_2b_2.
2. 沒有末一個 a_1b_1，也沒有第一個 a_2b_2.（與§166, 2 的證明比較）
3. 已設無論多少小的任何正有理數 δ 時，常可選得 a_1, a_2, b_1, b_2，使

$$a_2b_2-a_1b_1<\delta.$$

因 $$a_2b_2-a_1b_1=a_2(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1),$$

而於選取 a_1, a_2, b_1, b_2 時，又可使其適合條件

$$b_2-b_1<\delta/2a_2 \text{ 及 } a_2-a_1<\delta/2b_1, \tag{1}$$

所以 $$a_2(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1)<\delta. \tag{2}$$

這樣選取 a_1, a_2, b_1, b_2，可以照下面的方法：

先在 b_2 這一類數裏面取一個特殊的數，譬如說是 b_2'，然後再選取 a_1, a_2，使

$$a_2-a_1<\delta/2b_2'. \tag{3}$$

其次,用所選得的 a_2, 再選取 b_1, b_2, 使

$$b_2-b_1<\delta/2a_2. \qquad \text{適合 (1)}$$

因爲 $b_1<b_2'$, 所以 $\delta/2b_2'<\delta/2b_1$, 於是從 (3) 即得

$$a_2-a_1<\delta/2b_1. \qquad \text{適合 (1)}$$

乘法,一個因子是或兩個因子都是負數或 0. 設 a 與 b 表示任何兩個所設正數. 則 172

1. a(−b) 及 (−a) b 的意思是 −ab.
2. (−a)(−b) 的意思是 ab.
3. a·0 及 0·a 的意思是 0.

1/a 的定義. 設 a 是任何所設正數,而 a_1, a_2 是任何正有理數,適合條件 173

$$a_1<a<a_2.$$

當 a 是無數理時,照 § 165 的樣,可立 1/a 的定義如下:

記號 1/a 的意思是一個數,其定義之設立用公式 174

$$1/a_2<1/a<1/a_1,$$

式中 a_1, a_2 表示任何正有理數,適合條件

$$a_1<a<a_2.$$

從 § 163 可知,像 1/a 這樣的數有一個而祇有一個;因爲

1. 每一個 $1/a_2$ 小於每一個 $1/a_1$ (§ 106).
2. 沒有末一個 $1/a_2$, 也沒有第一個 $1/a_1$. (與 § 168, 2 的證明比較)
3. 已設無論多少小的正有理數 δ 時,常可選得 a_1, a_2, 使

$$1/a_1-1/a_2<\delta.$$

因 $$1/a_1-1/a_2<\delta, \text{若 } a_2-a_1<\delta\cdot a_1a_2. \qquad \text{§§ 106, 117}$$

但若 a_1' 表示 a_1 這一類數中的特殊一個,則可選取 a_1, a_2, 使 $a_1>a_1'$ 及 $a_2-a_1<\delta a_1'^2$, 於是 $a_2-a_1<\delta a_1a_2$.

1/(−a) 的定義. 設 a 表示任何所設正數. 則 1/(−a) 的意思就是 −1/a. 175

176 **除法.** 用b除a而得的商(b不是0),意思就是數$a\cdot 1/b$,即

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}.$$

$a\cdot 1/b$ 的意義,從以前各定義即可知道.

當a與b是正數時,根據§§ 171, 174, a/b 的定義還可以用下面的公式來設立:

$$a_1/b_2<a/b<a_2/b_1,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 表示任何正有理數,適合條件

$$a_1<a<a_2 \text{ 及 } b_1<b<b_2.$$

177 **對易,締結,及分配各律.** 方纔已立定義的各運算,都是有理數對應運算的推廣. 減法仍是加法的反運算,而除法是乘法的反運算. 此外,加法與乘法仍遵守對易,締結,及分配各律.

例若a,b,c是任何三個正數,其定義之設立,如§170所述,用公式

$$a_1<a<a_2,\quad b_1<b<b_2,\quad c_1<c<c_2,$$

則有

$$a(b+c)=ab+ac.$$

因爲由§§ 166, 171, $a(b+c)$ 及 $ab+ac$ 的定義得自公式

$$a_1(b_1+c_1)<a(b+c)<a_2(b_2+c_2), \tag{1}$$

$$a_1b_1+a_1c_1<ab+ac<a_2b_2+a_2c_2. \tag{2}$$

又因 $a_1(b_1+c_1)=a_1b_1+a_1c_1$ 而 $a_2(b_2+c_2)=a_2b_2+a_2c_2$ (§120),所以用(1)與(2)來設立定義的數,是相同的.

178 **的等與不等定則.** 以前所述的相等與不等定則,也適用於方纔已立定義的和與積,即:

若 $a<, =,$ 或 $>b,$

則 $a+c<, =,$ 或 $>b+c;$

又 $ac<, =,$ 或 $>bc,$ 若 $c>0,$

但 $ac<, =,$ 或 $<bc.$ 若 $c<0.$

例如"若 $a<b$，則 $a+c<b+c$"可以證明如下：

命 d 與 $d+\alpha$ 是 a 與 b 之間的任何兩個有理數，並選取 c_1，使 $c_1<c<c_1+\alpha$.

則因 $a<d$ 及 $c<c_1+\alpha$，故有 $a+c<d+c_1+\alpha$， (1)

又因 $d+\alpha<b$ 且 $c_1<c$，故有 $d+\alpha+c_1<b+c$（§166）. (2)

從 (1) 與 (2)，即得 $a+c<b+c$（§157）.

"若 $a<b$ 而 $c>0$，則 $ac<bc$"可用相仿的方法證明.

但就此例而論，我們選取 c_1 使 $c_1<c<c_1(1+\alpha/d)$.

從這些定則，一如 §39 所述，可得：若 $a<b$ 而 $c<d$，則 $a+c<b+d$，等等；又如 §50 所述，當 a, b, c, d 是正數時，可得：若 $a<b$ 而 $c<d$ 則 $ac<bd$，等等. 179

論近似值. 1. 已設立無理數減法的定義後（§169），即可將 §162 的定理敍述如下： 180

已設任何無理數 a，且已指定無論多少小的任何正有理數 δ 後，常可求得有理數 a_1 與 a_2，其與 a 之差小於 δ.

因從 §162，可求得 a_1 與 a_2，使 $a_1<a<a_2$ 及 $a_2-a_1<\delta$.

但從 $a<a_2$，並據 §178，可知 $a-a_1<a_2-a_1$，所以 $a-a_1<\delta$.

同樣，因 $-a<-a_1$，故可證 $a_2-a<\delta$.

例如（§161），$\sqrt{2}-1.41<.01$ 而 $1.42-\sqrt{2}<.01$.

這樣的 a_1 或 a_2，我們說它代表 a 的近似值，誤差不超過 δ.

2. 又在實際計算上，用無理數近似值的時候，比用無理數本身多. 若 a_1 與 b_1 分別是 a 與 b 的近似值，則 a_1+b_1 就是 $a+b$ 的近似值. 但若欲確保 a_1+b_1 的誤差不超過 δ，則必須選擇 a_1 與 b_1，使它們的誤差各不超過 $\delta/2$. 這是從 §166 的證明可以推知的. 求 $a-b$, ab, 以及 a/b 的近似值，使其誤差不超過 δ，也有相仿的定則，這些定則可以從 §§168, 171, 174 推出.

乘方與開方

181 **冪.** 無理數的冪，即 $aa, aaa, \cdots$ 等積，也用 $a^2, a^3, \cdots$ 來代表，正與有理數的冪一樣.

182 **根.** 任何所設正數 b 的 m 次根，寫作 $\sqrt[m]{b}$，它的意思是一個正數，該數定義之設立，用公式 $(\sqrt[m]{b})^m = b$.

為辨明這個定義之確當起見，必須證明適合這定義的數，實際上有一個而祇有一個存在. 我們完成這件工作如下:

183 **定理.** 實數系含有一切正實數 b 的 m 次根.

1. 若 b 是一個有理數的 m 次冪，則此定理顯然是可成立的.

例如 $b=8/27=(2/3)^3$，則 $\sqrt[3]{b}=2/3$.

2. 若 b 不是一個有理數的 m 次冪，則其 m 次根是一個實數 a，該數在 m 次冪小於 b 的一切正有理數 a_1，及 m 次冪大於 b 的一切正有理數 a_2 之間. (與 §151 比較)

從 §154 可知，這樣的數 a 有一個而祇有一個，因 (1) 每一個有理數不是一個 a_1 就是一個 a_2，(2) 每一個 a_1 小於每一個 a_2，且 (3) 沒有末一個 a_1，沒有第一個 a_2.

(3) 可以證明如下:

假定有一個末一個 a_1，稱之為 p. 因 $p^m<b$，故在 p^m 與 b 之間有其他有理數. 設其中一個是 $p^m+\delta$. 我們祇須證明，可以求得一個有理數 $q>p$，適合條件 $q^m<p^m+\delta$，或 $q^m-p^m<\delta$；因為倘若如此，即有 $p^m<q^m<b$，而 p 並非末一個 a_1.

但 $q^m-p^m=(q-p)(q^{m-1}+q^{m-2}p+\cdots\cdots+qp^{m-2}+p^{m-1})$ §303

$\therefore \quad <(q-p)ma_2'^{m-1}$， 若 a_2' 是任何特殊的 a_2，

$\therefore \quad <\delta$， 若 $q=p+\delta/ma_2'^{m-1}$.

同樣可證沒有第一個 a_2.

這一條成立以後，就可以立即證明 $a=\sqrt[m]{b}$.

因爲既然有 $a_1<a<a_2$, 就應有 $a_1^m<a^m<a_2^m$. §§ 171, 181
但 b 是介於一切 a_1^m 及一切 a_2^m 之間唯一的數.
因此, $a^m=b$, 即 $a=\sqrt[m]{b}$.

相等與不等定則. 設 a 與 b 表示任何正實數,而 m 表 184
示任何正整數 則有:

若 $$a<,=,\text{或}>b,$$

則 $$a^m<,=,\text{或}>b^m, \tag{1}$$

而 $$\sqrt[m]{a}<,=,\text{或}>\sqrt[m]{b}. \tag{2}$$

累次地利用 § 179 ,便可證明(1).
例如 $a<b$, 則 $a\cdot a<b\cdot b$, 即 $a^2<b^2$; 其餘依此類推.
(2) 可從(1)導出. 例如 $a=b$, 則 $\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b}$; 因若 $\sqrt[m]{a}<$ 或 $>\sqrt[m]{b}$, 則應有 $a<$ 或 $>b$, 便與假設相矛盾了.

指數定則. 設 a 與 b 表示任何兩個實數,而 m 與 n 表 185
示任何兩個正整數. 則有

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$. 2. $(a^m)^n=a^{mn}$.

3. $(ab)^m=a^mb^m$.

例如 $a^3\cdot a^2=aaa\cdot aa=aaaaa=a^5=a^{3+2}$ § 177
$(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^{2+2+2}=a^{2\cdot 3}$ 由 1
$(ab)^3=ab\cdot ab\cdot ab=aaa\cdot bbb=a^3\cdot b^3$ § 177
當 m 與 n 是其他正整數時,也可以這樣證明.

關於根的一個定理. 設 a 與 b 表示任何正實數,而 m 表 186
示任何正整數. 則有

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}.$$

因 $(\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{a})^m\cdot(\sqrt[m]{b})^m=ab$ §§ 182, 185, 3
且 $(\sqrt[m]{ab})^m=ab$. § 182
因此 $(\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{ab})^m$
而 $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$ § 184, (2)

變數與極限

187 **變數.** 永無盡止的一列數,例如

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \cdots,$$

叫做數的不盡敍列(never-ending sequence of numbers),其中各數叫做項(term),每一項有一個指標,例如 a_3 的 3,指明它在敍列中的地位. 若有一個不盡敍列,其中每一個特殊項 a_n 之值,均因指標 n 之已設,而亦成為已知,或可計算出來,則我們就說,這敍列是已知的、或所設的.

我們往往有機會要討論到某些變數(variable),這些變數的各值,假定它們歷經這樣的一個所設不盡敍列.

例如 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ 就是這樣的一個所設不盡敍列;又如 x 就是這樣的一個變數,倘若我們假定它的各值歷經這個敍列,換言之,它的各值順次是 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$.

188 **極限.** 當 x 歷經敍列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$ 時,其值趨近於 1,在這樣的情形之下,若指定一個無論多少小的正數 δ,則 $1-x$ 的差終究要變成且永遠 (become and remain) 小於 δ. 例如在 x 已到敍列的第 100 項後,$1-x$ 就永遠小於 0.01.

遇有這種情形時,我們說 x 歷經敍列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$,趨近於 1 而以 1 為極限. 一般地說來,

189 變數 x,假定其值歷經一個所設不盡敍列,若其與一數 a 的差 $a-x$,在數值上終究變成且永遠小於所可指定的一切正數 δ,則稱 x 趨近於 a 而以 a 為極限.

有須注意的是,$a-x$ 變成小於 δ 一個條件是不夠的;必須適合另一條件永遠小於 δ,a 纔是 x 的極限.

例如 x 歷經敍列 $\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \cdots$, $1-x$ 的差會變成小於所可指定的一切 δ,但並不永遠小於 δ,故 x 不趨近於 1 而以 1 為極限.

在特殊情形下,$a-x$ 也許變成 0;換言之,x 也許到達它的極限 a.

指示 x 趨近於其極限 a, 可寫成 $x \doteq a$, 讀作"x 趨近於 a 190
而以 a 爲極限", 或寫成 $\lim x = a$, 讀作"x 的極限是 a".

變數 x 是否趨近於極限,全看假定其各值所歷經的敍列 191
特徵而定.

例如 x 歷經敍列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ 時,它是有極限的;若歷經敍列 1, 2, 3, 4, …, 或敍列 1, 2, 1, 2, …, 則明明不趨近於極限.

因此,下列二定理是很重要的:

定理 1. 變數 x 若繼續增大, 但又永遠小於某一所設數 192
c, 則趨近於一個極限. 此極限或是 c, 或是小於 c 的數.

因從假設,有永不能被 x 超過的各數. 凡此等數,指定其屬於一類 R_2, 其他一切數,終究會給 x 超過的,指定其屬於另一類 R_1.

這樣,就把整個實數系區分成兩部分, R_1 與 R_2, 彼此的關係是: R_1 中每一數小於 R_2 中每一數.

R_1 中顯然無末一數. 因此,從 § 160, R_2 中有第一數. 稱此數是 a. x 在增大時,即趨近於 a 而以 a 爲極限.

因爲不論 δ 是多少小,祇要是正的, $a-\delta$ 就屬於 R_1 類,終究要被 x 超過. 因此, x 終究要永遠在 $a-\delta$ 與 a 之間,因而它與 a 的差就小於 δ.

同樣可證

變數 x 若繼續減小, 但又永遠大於某一所設數 c, 則趨近 193
於一個極限. 此極限或是 c, 或是大於 c 的數.

194 **正則敍列.** 變數也有不必繼續增大或繼續減小,而仍可趨近於一個極限的。

例如:歷經敍列 $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$,雖時而增大,時而減小,但仍趨近於 0 而以 0 爲極限.

現在就要證明, x 是否趨近於一個極限,看它所歷經的敍列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, 有無下列定義中所述的特徵而定:

195 已設敍列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$;若每有一個所可指定的正的備驗數 (test number) δ, 就可以求得此敍列的對應項 a_k,該項與其後每一項在數值上的差小於 δ, 則稱此敍列爲**正則** (regular) 敍列。

1. 例如 § 161 中的敍列 1.4, 1.41, 1.414, ⋯ (1) 就是正則敍列.

因爲第一項 1.4 與其後每一項的差小於 $1/10$;第二項 1.41 與其後每一項的差小於 $1/10^2$;第 n 項與其後每一項的差小於 $1/10^n$.

須知不論 δ 小到什麼程度,我們總可以給予 n 一值,使 $1/10^n$ 比 δ 更小;若 k 表示 n 的此值,則 1.4, 1.41, ⋯的第 k 項,與其後每一項的差就小於 δ.

例如指定 δ 之值是 $1/500000$, 就有 $1/10^6<\delta$, 所以 1.4, 1.41, ⋯的第六項,與其後每一項的差小於 δ 的此值.

2. 下列各敍列也都是正則敍列:

$$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots, \quad (2) \qquad \frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{9}{8},\frac{17}{16},\cdots, \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots, \quad (4) \qquad 2,\ 1,\ 1,\ 1,\cdots. \quad (5)$$

有須注意的是,在 (2) 中逐項增大,在 (3) 中逐項減小,在 (4) 中忽大忽小.

有時候我們會遇見像 ( ) 那樣的正則敍列,其在某項以後的一切諸項都相同. 歷經這樣一個敍列的變數,顯然終究要變成常數 (constant),即到達它的極限.

3. 下列各敍列都是不正則敍列:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad (6) \qquad \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots. \quad (7)$$

因在 (6) 中，一項與其後各項的差，可以變成無限大；而在 (7) 中，這個差常常是 $\frac{1}{6}$ 所以不比所可指定的一切 δ 小，例如不比 $\frac{1}{7}$ 小．

正則敘列的公式． 1． 正則敘列的 a_k 項與其以後每一項 a_p 之間的關係，可用下面的公式來表示（§63）： 196

$$\text{凡 } p>k \text{ 時，} \qquad |a_p-a_k|<\delta. \tag{1}$$

2． 又因 a_p 各項之中，也許會有 $>a_k$ 的，這些項必在 a_k 與 $a_k+\delta$ 之間，而 $<a_k$ 的各項必在 $a_k-\delta$ 與 a_k 之間，故又可寫出下面的公式：

$$\text{凡 } p>k \text{ 時，} \qquad a_k-\delta<a_p<a_k+\delta. \tag{2}$$

3． 從 (2) 可知，若 a_p 各項中有小於 a_k 的，有大於 a_k 的，則其中兩項之差可以超過 δ 而不能超過 2δ．

但是我們常可找到一項 a_l，該項與其後每一項在數值上的差小於 $\delta/2$． 於是在 a_l 以後的每兩項之差，數值上就小於 $2(\delta/2)$，即 δ；換言之，此等項每兩項之間的關係，可用下面的公式表示：

$$\text{凡 } p>q>l \text{ 時，} \qquad |a_p-a_q|<\delta. \tag{3}$$

定理 2． 變數 x，若其所歷經的敘列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，是一個正則敘列，則必趨近於一個極限． 197

因有若干數，當 x 歷經敘列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, (1) 之際，終究要永遠讓 x 居於它們的右側．

(1) 例若 δ 有 a_k 有上述的意義，則 x 在到達 a_k 一值之後，就永遠在 $a_k-\delta$ 的右側．　§196 (2)

指定所有這種數屬於一類 R_1，而指定其他諸數，即 x 不會永遠在它們右側的一切數，屬於另一類 R_2．

這樣,就把整個實數系分成兩部分,R_1, R_2, 其彼此間的關係是: R_1 中的每一數小於 R_2 中的每一數. 但從 §160, 對應於這個區分,有一個確定的數 a 存在.

例若有敍列 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$, 則負有理數組成 R_1, 而 0 與正有理數組成 R_2; a 本身就是 0.

x 在歷經敍列 (1) 之際,必趨近於此數 a 而以 a 爲極限.

因若指定無論多少小的正備驗數 δ, 則因 (1) 是正則敍列,故可求得一項 a_m, 據 §196 (3), 適合條件

$$凡\ p>q>m\ 時, \quad |a_p-a_q|<\delta/2. \qquad (2)$$

但因 $a-\delta/2$ 屬於 R_1, x 的一切諸值在某一值之後的,必都在 $a-\delta/2$ 的右側. 且因 $a+\delta/2$ 屬於 R_2, 故在這諸值之中,必有在 a_m 後居於 $a+\delta/2$ 左側的;因若不然, x 終究要永遠在它的右側,則 $a+\delta/2$ 就要屬於 R_1 了.

例若敍列是 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$, 而 $\delta=\frac{1}{10}$, 則 x 在第四項 $\frac{1}{16}$ 以後的一切諸值,就在 $a-\delta/2$ 與 $a+\delta/2$ 之間,即在 $-\frac{1}{20}$ 與 $\frac{1}{20}$ 之間.

設 $a_{q'}$ 表示這樣的一個值. 則有

$$a-\delta/2<a_{q'}<a+\delta/2,$$

即

$$|a-a_{q'}|<\delta/2. \qquad (3)$$

從 (2) 與 (3), 因 $q'>m$, 故從 §§78, 178, 得

$$凡\ p>q'\ 時, \quad |a-a_p|<\delta.$$

換言之, x 到達 $a_{q'}$ 一值後, $a-x$ 的差在數值上小於 δ.

所以 x 趨近於 a 而以 a 爲極限 (§189).

198 逆言之,若 x 趨近於一個極限 a, 則假定其各值所歷經的敍列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 必定是正則敍列.

因為 $a-x$ 的差，既然終究要變成且永遠在數值上小於所可指定的一切正數 δ（§189），則必可選得 a_k，使

$$\text{凡 } p>k \text{ 時，}\quad |a-a_k|<\delta/2 \text{ 及 } |a-a_p|<\delta/2;$$

因而 $$\text{凡 } p>k \text{ 時，}\quad |a_p-a_k|<\delta.$$

因此從 §196(1)，敍列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是正則敍列.

§§197, 198，可以合併如下：

一個變數趨近於極限的充要條件(sufficient and necessary)是，假定其各值所歷經的敍列是一個正則敍列. 199

關於極限的幾個重要定理

在論述以下各定理時，a 與 b 表示所設實數，x 與 y 表示變數，其值均經假定歷經所設不盡敍列者.

極限 0. 從 §189 的定義，立即可知 200

1. 變數 x 若終究變成且永遠在數值上小於所可指定的一切正數 δ，則 x 趨近於 0 而以 0 為極限；其逆亦成立.

2. 若 x 趨近於 a 而以 a 為極限，則 $a-x$ 趨近於 0 而以 0 為極限；其逆亦成立.

例如，x 若歷經敍列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$，則趨近於極限 0；又如 x 若歷經敍列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$，則 $1-x$ 趨近於極限 0.

極限是 0 的變數叫做微數或無窮小數(infinitesimal).

定理 1. 若 $x \doteq 0$ 而 $y \doteq 0$，且 A 與 B 當 x 與 y 變的時候，永遠在數值上小於某定數 c，則 $Ax+By \doteq 0$. 201

設指定不論多少小的任何正數 δ.

因 $x \doteq 0$，所以 x 終究要永遠在數值上 $<\delta/2c$. §200, 1

因 $y \doteq 0$，故 y 終究要永遠在數值上 $< \delta/2c$.　　§ 200, 1

因此，$Ax+By$ 終究要永遠在數值上 $<2c\frac{\delta}{2c}$，$\therefore <\delta$，因而趨向 0 而以 0 爲極限.　　§ 200, 1

例若 $x \doteq 0$，$y \doteq 0$，則 $(xy-3)x+2y \doteq 0$.

202 注意. 這定理，可以立即推廣到，變數個數是任何有窮數的例子.

例若 $x \doteq 0$，$y \doteq 0$，及 $z \doteq 0$，則 $Ax+By+Cz \doteq 0$.

203 **定理 2.** 趨近於極限的諸變數，其和，其差，其積，其商就是這些極限的和，差，積，商；換言之，若 x 與 y 分別趨近於極限 a 與 b，則

1. $x+y \doteq a+b$.　　3. $xy \doteq ab$

2. $x-y \doteq a-b$.　　4. $x/y \doteq a/b$，除非 $b=0$.

因既有 $a-x \doteq 0$ 及 $b-y \doteq 0$（§ 200），則從 § 201，應有

$$A(a-x)+B(b-y) \doteq 0. \quad (1)$$

從 (1) 即可導出公式 1, 2, 3, 4. 依此當有

1. $a+b-(x+y)=(a-x)+(b-y)\ \therefore \doteq 0$,　　由 (1)

即 $x+y \doteq a+b$.　　§ 200, 2

2. $a-b-(x-y)=(a-x)-(b-y)\ \therefore \doteq 0$,　　由 (1)

即 $x-y \doteq a-b$.　　§ 200, 2

3. $ab-xy=(a-x)b+(b-y)x\ \therefore \doteq 0$,　　由 (1)

即 $xy \doteq ab$.　　§ 200, 2

4. $\frac{a}{b}-\frac{x}{y}=\left(\frac{a}{b}-\frac{x}{b}\right)+\left(\frac{x}{b}-\frac{x}{y}\right)=(a-x)\frac{1}{b}-(b-y)\frac{x}{by}\ \therefore \doteq 0$，由 (1)

即 $x/y \doteq a/b$.　　§ 200, 2

204 **系.** 若 $x \doteq a$，則 $x^n \doteq a^n$.

205 **定理 3.** 趨近於一個極限的變數，其 n 次根的極限是該極限的 n 次根；即——

$$若\ x \doteq a，則\ \sqrt[n]{x} \doteq \sqrt[n]{a}.$$

1. 當 $a=0$ 時. 指定任何正數 δ.

因 $x \doteq 0$, x 終究要永遠在數值上 $<\delta^n$. § 200,1

因此 $\sqrt[n]{x}$ 終究要永遠在數值上 $<\delta$. § 184

所以 $\sqrt[n]{x} \doteq 0$. § 200,1

2. 當 a 不是 0 時. 從下文 § 308 可知, $x-a$ 常可被 $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}$ 恰好整除, 且可知道當 $x \doteq a$ 時, 商 Q 不趨近於極限 0.

故從 § 203 (1), 且使 $A=1/Q$, $B=0$, 即得

$$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}=(x-a)/Q \doteq 0, \text{ 即 } \sqrt[n]{x} \doteq \sqrt[n]{a}. \quad § 200, 2$$

無理數與量度的關係

與單位無公度的線段之長度. 若一線段 S 與單位線段 s 無公度 (incommensurable);——即若可以證明, s 的可分部, 無論多少小, 沒有可被 S 恰好包含若干倍的, 例如當 S 與 s 是同一正方形的對角線與一邊時——則 § 130 的長度定義即不適用於 S. 206

但此時却有一個確定的無理數 a, 對於 S 有下述的關係:

與單位 s 是有公度的各線段, 分屬於不同的兩類, 一類都小於 S, 還有一類都大於 S.

表示這些線段長度的有理數 (§ 130), 也屬於對應的兩類, 這兩類, 稱之爲 A_1 與 A_2. 一切正有理數不屬於 A_1 即屬於 A_2, A_1 中的每一數在 A_2 中的每一數前, 且在 A_1 中無末一數, 在 A_2 中無第一數.*

這樣, 就有一個確定的無理數 a, 介於 A_1 中的一切數及 A_2 中的一切數之間. 此數 a 稱之爲 S 的長度. 所以就有下面的定義:

*因若在 A_1 中有末一數, 則在與 s 有公度而小於 S 的諸線段中, 亦將有一條最長的, 譬如說 S′.

但這樣的線段是不存在的. 因爲依照下面小註中所述亞氏公理 (Axiom of Archimedes), 將可求得 s 的可分部比 S−S′ 小; s 的這一部分與 S′ 的和便將是與 s 有公度的, 且要小於 S 而大於 S′ 了.

207　與單位線段 s 無公度的任何線段 S，其長度是一個無理數 a，該數在表示小於 S 各線段長度的一切有理數，及表示大於 S 各線段長度的一切有理數之間.

例如 $\sqrt{2}$ 即是以邊爲單位的正方形對角線長度.

208　用 s 爲單位時若 S 的長度是 a，則可寫出 S＝as，不問 a 是有理數或無理數.

209　**實數的跡.**　如 § 134 中附圖所示，取任何直線，在線上取一定點 O 作爲原點；又取適當的單位 s，供量度長度之用.　從線上任何點 P 到 O 的距離，就是以 s 爲單位時線段 OP 的長度（§130, 207）.

線上有一點 P，其到 O 的距離是所設數 a 的數值時，即選取該 P 點爲 a 的跡，P 點在 O 之右或左，視 a 是正的或負的而定.

若 a 是有理數，則常眞可以作得 P（134）.　但若 a 是無理數，往往不能作得 P.　若然，則可假定 P 點存在，換言之，假定在這線上，有一個單獨的點 P，居於凡可爲小於 a 的有理數之跡的諸點，及凡可爲大於 a 的有理數之跡的諸點之間.*

---

*這裏並不是討論幾何公理的地方；但可提一提下列各公理，因爲它們同現在所討論的量度方法有關係.

1.　亞氏公理.　若 s 與 S 表示兩條線段，而 s＜S，則常可找到一個整數 m，可使 $ms > S$.

2.　連續公理.　若將一條直線的一切諸點分成兩類 R_1 與 R_2，以致 R_1 中的每一點在 R_2 中每一點之左，則或在 R_1 中有末一點，或在 R_2 中有第一點.

(1) 假定凡線段都可量度，則亞氏公理即包括在此假定之內.　因用 s 量度 S 的第一步，就是找一個整數 m，可使 $(m-1)s < S < ms$.

(2) 公理 1 與 2，使我們能夠證明 § 209 中的假定，即每有一個所設無理數 a，就有一個對應點 P 存在.

因 a 區分有理數系成兩部分，這兩部分可分別稱之爲 B 與 C.　對應於這兩部分內各數的點，分別稱之爲 B 類點與 C 類點.　現在要證明在這線上有一

逆言之．已設 P 點時，祇少可以求得 a 的近似值，祇要量 OP，並視 P 在 O 之左或右，加上符號＋或－好了． 210

例若 P 在 O 之右，而可沿着 OP 將 s 接連放下五次，再沿着餘下的部分將 s 的十分之一接連放下七次，又沿着餘下的部分將 s 的百分之一接連放下六次，則 5.76 就是 a 的值求到第二位小數．

這樣，在一切實數與線上一切點之間，就有一一對應的關係建立起來（§2）；且若 a 與 b 表示任何兩個實數，而 P 與 Q 是它們的對應點，則因 a 小於或大於 b，P 就在 Q 之左或右． 211

例若 a 與 b 是正的而 a<b，且若 c 表示介於 a 和 b 之間的一個實數，而 R 是對應點，則從 §206，就有

$$OP<OR \text{ 及 } OR<OQ，\text{因而 } OP<OQ.$$

個確定點 P，把一切 B 類點與一切 C 類點區分開來．

先指定 B 類點及其一切中間點屬於 R_1 類，並指定這些點右側的一切點屬於 R_2 類，又設 P 表示根據 2 而從現在這個區分得有定義的一點．

其次指定 C 類點及其一切中間點屬於 S_2 類，並指定這些點左側的一切點屬於 S_1 類，又設 Q 表示根據 2 而從現在這個區分得有定義的一點．

P 與 Q 兩點非合同不可．因若不然，則可命 PQ 表示 P 與 Q 之間的線段．由 1，可找到一個整數 m，使

$$m\cdot PQ>s，\text{因而 } PQ>s/m.$$

但這是不可能的．因從 B 可選得一數 b，且從 C 可選得一數 c，使 $c-b<1/m$．若 L 與 M 分別是 b 與 c 的對應點，則有

$$LM<s/m，\text{及 } PQ<LM，\text{因而 } PQ<s/m.$$

依照 §209 對應於 a 的就是這一點，P 亦即 Q．

(3) 最後還得注意，對應於 2 的是 §160 所述實數系的性質，對應於 1 的是下述的性質：

若 a 與 b 是任何兩個實數，則常可求得一個整數 m，使 mb>a.

因從 §§168, 176, 178，可以選得一個整數 m，使 m>a/b，因而 mb>a．

因爲實數系有這個性質，故就 §174 所述有理數系的那種區分法而言，對應於某一特殊區分，不能發明不止一個無理數．

因若一切有理數不是一個 a_1 便是一個 a_2，且就每一對 a_1, a_2 而論 a_1<b<c<a_2，則從 §168 及 §163 之證，應有 c－b<a_2-a_1．

但我們不可能找到一個整數 m，使 m(c－b)>δ，δ 是所可指定的無論多少小的正數．

因爲倘若可能，便要有 c－b>δ/m；這是不可能的，因爲 c－b<a_2-a_1，而我們可以選取 a_2, a_1，使 $a_2-a_1<\delta/m$．

212 **定理.** 若以T爲單位時S的長度是a，而以s爲單位時T的長度是b，則以s爲單位時S的長度是ab.

1. 當a與b是有理數時.

命 $\mathbf{a}=a/b$, $\mathbf{b}=c/d$, 式中 a, b, c, d 表示整數.

因 **S** 包含 **T** 的 b 分之一 a 倍（§130），故 $b\mathbf{S}$ 包含 **T** 的本身 a 倍，即

$$b\mathbf{S}=a\mathbf{T}. \tag{1}$$

同樣，
$$d\mathbf{T}=c\mathbf{s}. \tag{2}$$

但從(1)與(2)，立即可得

$$bd\mathbf{S}=ad\mathbf{T}, \text{ 及 } ad\mathbf{T}=ac\mathbf{s},$$

所以
$$bd\mathbf{S}=ac\mathbf{s}.$$

即，以s爲單位時 **S** 的長度是 $\frac{ac}{bd}$，即 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$. §130

2. 當a與b有一個是或兩個都是無理數時.

命 $\mathbf{S}_1$ 與 $\mathbf{S}_2$ 表示與 **T** 有公度的任何線段，適合條件

$$\mathbf{S}_1<\mathbf{S}<\mathbf{S}_2,$$

且命 a_1, a_2 是以 **T** 爲單位時 $\mathbf{S}_1$ 與 $\mathbf{S}_2$ 的長度，因而有

$$\mathbf{S}_1=a_1\mathbf{T} \text{ 及 } \mathbf{S}_2=a_2\mathbf{T}, \text{ 式中 } a_1<\mathbf{a}<a_2. \quad §20$$

同樣，命 $\mathbf{T}_1$ 與 $\mathbf{T}_2$ 表示與s有公度的任何線段，適合條件

$$\mathbf{T}_1<\mathbf{T}<\mathbf{T}_2,$$

且命 b_1, b_2 是以s爲單位時 $\mathbf{T}_1$ 與 $\mathbf{T}_2$ 的長度，因而有

$$\mathbf{T}_1=b_1\mathbf{s} \text{ 及 } \mathbf{T}_2=b_2\mathbf{s}, \text{ 式中 } b_1<\mathbf{b}<b_2.$$

於是因 $\mathbf{S}_1=a_1\mathbf{T}$, $\mathbf{T}>\mathbf{T}_1$, 及 $\mathbf{T}_1=b_1\mathbf{s}$,

故從本定理第1款，
$$\mathbf{S}_1>a_1b_1\mathbf{s}.$$

同樣可得
$$\mathbf{S}_2<a_2b_2\mathbf{s}.$$

因此
$$a_1b_1\mathbf{s}<\mathbf{S}_1<\mathbf{S}<\mathbf{S}_2<a_2b_2\mathbf{s},$$

所以
$$a_1b_1\mathbf{s}<\mathbf{S}<a_2b_2\mathbf{s}.$$

這樣，已經證明凡 a_1b_1 與 a_2b_2 各數，都分別是以s爲單位時，小於及大於s各線段的長度. 所以介於凡 a_1b_1 與 a_2b_2 各數之間的一個數 **ab**（§171），就是以s爲單位時 **S** 本身的長度（§207）.

系．若以 s 爲單位時 S 與 T 的長度分別是 a 與 b，則以 T 爲單位時 S 的長度是 a/b． 213

因設以 T 爲單位時 S 的長度是 x，

則因以 s 爲單位時 T 的長度是 b，故以 s 爲單位時 S 的長度便是 xb § 212．

但由假設，以 s 爲單位時 S 的長度是 a．

因此 $xb=a$，

所以 $x=a/b$．

綿續變數．我們最熟識的直覺(intuition)，其中之一便是對於連續運動(continuous motion)的直覺． 214

假定 P 點沿着 OAB 線從 A 到 B 作連續運動(不跳躍)；且命 a, x, 及 b 分別表示 OA, OP, 及 OB 的長度，O 是原點．

依照 § 209 的假定，在 a 與 b 之間每有一數，線段 AB 上卽有一點，P 從 A 動到 B 時，當然非歷經所有這些點不可．因此我們可以說，當 P 從 A 到 B 作連續運動時，x 的値從 a 增大；歷經一切中間値而到 b，或說，x 從 a 綿續地變到 b．

x 的這種變更，眞要予以追蹤，當然是不可能的，因爲它的每一個所設值，都沒有緊跟着的鄰接(next)值．若欲在數學上作關於 x 的推理，則非以下列定義爲滿意不可：(1) x 可以有 a 與 b 之間的任何所設值；(2) 設 p 與 q 表示此等值的任何兩個而 $p<q$，則 x 必先有 p 值，後有 q 值．此外還有一句話可說，即在祇予 x 以第一種性質時，往往稱 x 是一個綿續變數(continuous variable)．

比．設 M 與 N 表示任何兩個同種之量．所謂以 N 爲單位時 M 的含度或 M 對於 N 的比(ratio)，意思就是 §§ 81, 130, 207 中所述，當 M 與 N 表示線段時，作爲長度定義的那個數． 215

因此，§§ 212, 213 所述關於長度的定理，適用於任何同種量的比或含度. 下述一定理，尤屬應用最廣：

216 若用同一單位時 M 與 N 的含度分別是 a 與 b，則 M 對於 N 的比是 a/b.

V. 虛數與複數

純虛數

217 實數系是不包含負數的偶次根的；因為一切實數的偶次冪都是正數. 例如 -1 的平方根，卽不在實數系內.

為解除這困難起見，我們發明了一個新的符號系，叫做虛數 (imaginary number) 或複數 (complex number).

218 這些新符號裏面最簡單的一個是 i，叫做虛數的單位. 用這單位與實數 a，構成符號如 ai，然後依照其"係數" a 在實數系中發生的次序，將它們順次排列. 這樣，就得到一個新的綿續序次"數"系 叫做純虛數 (pure imaginaries) 系.

依照實數系的發展過程，可先作完全虛數組如下：

$$\cdots, -3i, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i \cdots;$$

然後加入有分數係數的虛數，擴大而成為稠密系；最後加入係數是無理數的虛數，成為綿續系.

這裏的 $2i$ 不過是新數之一的名稱. 它的唯一的性質，就是在這新的序次系中有一個確定的地位. 但在已立乘法定義之後，就可以知道 $2i$ 又代表 $2\times i$ 或 $i\times 2$ 而得的積. 凡純虛數都可作如是觀.

我們給 $0\cdot i$ 特別立了一個定義，即 $0\cdot i$ 是 0. 因此，常寫 0 以代 $0i$.

有須注意的是，實數系與純虛數系公有的數，祇有一個 0

對於這些新數，我們發明了也叫做加法與乘法的運算。 219
這兩種運算定義的設立，用下列等式：

1. $ai+bi=(a+b)i$.　　2. $a\cdot bi=bi\cdot a=abi$.

3. $ai\cdot bi=-ab$.

因此，從 3，兩個純虛數 ai 與 bi 相乘，其積就是實數 $-ab$，將 ai 與 bi 的係數相乘，改變積的符號，便得。

冪的定義，仿照 § 136 來設立。 例如 $(ai)^2=ai\cdot ai$.

純虛數系包含着實數系中一切負數的平方根，即： 220

$$\sqrt{-1}=i \text{ 及 } \sqrt{-a^2}=ai.$$

因　$i^2=i\cdot i=1i\cdot 1i=-1$.　§ 219,3

所以 i 是 -1 的平方根（§ 138）。 這根用 $\sqrt{-1}$ 來指示，因而有 $i=\sqrt{-1}$.
同樣，可證 $-i$ 也是 -1 的平方根。 這個根用 $-\sqrt{-1}$ 來指示。
又因 $(ai)^2=ai\cdot ai=-a^2$，故有 $ai=\sqrt{-a^2}$.

複　數

為了要有一個包含負數較高偶次根的數系，我們又發明了複數 (complex number)。 這複數就是像 $a+bi$ 這般的式子，用符號＋連結一個實數 a 與一個純虛數 bi，便得。 複數往往被稱為虛數。 221

在複數加法的定義尚未設立之前，$+bi$ 暫看做一個單獨的記號，而符號＋不過是這記號的一部分。

因 $a=a+0i$ 而 $bi=0+bi$，實數與純虛數包括在複數之內。 222

223　複數,是可以看做可照下面的方法排成橫行與縱行的,凡有同一 b 的各數 $a+bi$ 都排在同一橫行內,其次序從左到右依照 a 的次序;凡有同一 a 的各數都排在同一縱行內,其次序從下到上依照 b 的次序. 任何一個特殊的複數,在這個"二維序次排列" (two-dimensional ordinal arrangement) 中有確定的地位,我們可以把它的定義,看做就是用這地位來設立的.

在 § 238 中,就要說明一個方法,對於 a 和 b 的一切值,指示如此排列的複數之跡. 現在把 a 與 b 有整值時的排列寫在下面:

...	. .	. .	.	. .	. .	...
...	$-2+2i$	$-1+2i$	$2i$	$1+2i$	$2+2i$	...
...	$-2+i$	$-1+i$	i	$1+i$	$2+i$	...
...	-2	-1	0	1	2	...
...	$-2-i$	$-1-i$	$-i$	$1-i$	$2-i$	...
...	$-2-2i$	$-1-2i$	$-2i$	$1-2i$	$2-2i$	...
...	. .	. .	.	. .	. .	...

這個排列也可以說是由橫行(或縱行)組成的序次系 (§ 17), 每一行本身,又是一個有 $+bi$ 形式的符號所組成的序次系.

224　**相等的定義.** 兩個複數在上述二維序次排列中佔同一地位,就說它們相等. 因此

225　若 $a+bi=c+di$, 則 $a=c$, $b=d$;其逆亦成立. 這定理有一個特例如下:若 $a+bi=0$, 則 $a=0$ 而 $b=0$; 其逆亦成立.

兩個不等的複數,如 $2+3i$ 與 $3+i$, 不能說其中哪一個較大,哪一個較小,——即哪一個在前,哪一個在後——因為複數所組成的不是一個簡單的序次系.

226　**加法,減法,乘法,的定義.** 兩個複數 $a+bi$ 與 $c+di$ 的和,差,及積的意思,就是成為下列各等式第二端(右端)的複數:

3 月

$$1.\quad (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$
$$2.\quad (a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$
$$3.\quad (a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

依照 1 與 2, 加法與減法是相反的運算. 1 有一個特例如下:
$(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=a+bi$;這就是說,依照定義 1, $a+bi$ 是 a 與 bi 的和.

這些定義與對易,締結,及分配各律都不衝突. 在實際上,就是把這些定律與以前所立各定義聯合起來,方纔得到這些定義的.

例如
$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= (a+bi)c+(a+bi)di\\ &=ac+bi\cdot c+a\cdot di+bi\cdot di\\ &=(ac-bd)+(ad+bc)i,\ \text{因}\ i^2=-1.\end{aligned}$$

系. 一個因子等於零時,積等於零. 227

因　$(a+bi)(0+0i)=(a\cdot 0-b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 0)i=0.$

除法. 用 $c+di$ 除 $a+bi$ 時所得之商,其定義是一個複 228
數,該複數用 $c+di$ 乘,得 $a+bi$. 當 $c+di$ 不是 0 時,這樣的數有一個而祗有一個,它就是下列等式的第二端:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

但在 $c+di$ 是 0 時,沒有可決定的商存在.

上列等式的右端,用 $c+di$ 乘它,即得 $a+bi$, 這是可以利用 § 226, 很容易核驗的.

至於怎樣會發見商是此數,其過程如下:

設有一數存在,該數乘以 $c+di$ 即得 $a+bi$, 則可命此數是 $x+iy$.

於是
$$(x+yi)(c+di)=a+bi. \qquad (1)$$
$$(cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi. \qquad (2)$$
因而
$$cx-dy=a,\quad dx+cy=b. \qquad (3)\ \S\ 225$$

解這一對方程式求 x 與 y, 即得
$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2},\ \text{除非}\ c^2+d^2=0. \qquad (4)$$

又因適合 (3) 的 x 與 y 之值，祗有 (4) 這一對，所以祗有 $x+yi$ 一個對應數，乘以 $c+di$ 可得 $a+bi$.

從 (4) 顯然可知，$c^2+d^2=0$ 時，上述商的定義就沒有意義．但若 $c^2+d^2=0$，則必有 $c=0$ 及 $d=$ ，因若不然，便將有一個正數等於 0 了．但若 $c=0$，且 $d=0$，則除數 $c+di$ 是 0．

229 **對易，締結，及分配各律．** 適纔設立定義的各運算，顯然包括實數的對應運算．正與實數的運算一樣，它們也遵守對易，締結，以及分配各律．

例如 $(a+a'i)(b+b'i)=ab-a'b'+(ab'+a'b)i$, (1)

而 $(b+b'i)(a+a'i)=ba-b'a'+(ba'+b'a)i$. (2)

但 (1) 與 (2) 的第二端是相等的 (§ 177).

因此 $(a+a'i)(b+b'i)=(b+b'i)(a+a'i)$.

其餘各定律，也可以仿此證明其成立．

230 **相等定則．** 設 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示任何複數．

1. 若 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, 則 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$.
2. 若 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$, 則 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.
3. 若 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, 則 $\mathbf{ac}=\mathbf{bc}$.
4. 若 $\mathbf{ac}=\mathbf{bc}$, 則 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, 除非 $\mathbf{c}=0$.

1．設 $\mathbf{a}=a+a'i$, $\mathbf{b}=b+b'i$, 而 $\mathbf{c}=c+c'i$.

若 $a+a'i=b+b'i$,

則 $a=b$, 而 $a'=b'$. § 225

因此 $a+c=b+c$ 而 $a'+c'=b'+c'$, § 178

所以 $(a+c)+(a'+c')i=(b+c)+(b'+c')i$, § 225

即 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$. § 226

2．若 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$,

則有 $\mathbf{a}+\mathbf{c}+(-\mathbf{c})=\mathbf{b}+\mathbf{c}+(-\mathbf{c})$, 從 1

所以 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

3 與 4．這兩條定則的證法，分別與 1 及 2 的證法相仿．

系. 若積等於零,則其因子之一非等於零不可. 231

用 §76 的推理方法,從 §230, 4 即可推得

複數的絕對值. 正實數$\sqrt{a^2+b^2}$叫做 $a+bi$ 的絕對值, 232
或數值,用 $|a+bi|$ 來代表. 因此,從定義,有

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

例如 $|2+i|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

當 $b=0$ 時,這個定義變成 §63 所述實數絕對值的定義. 這定義在幾何上的解釋,見 §239.

我們還可以說兩個複數之中,第一個在數值上小於,等於, 233
或大於第二個,若第一個的絕對值小於,等於,或大於第二個.

例如 $2+3i$ 在數值上大於 $3+i$.
因 $|2+3i|=\sqrt{13}$ 而 $|3+i|=\sqrt{10}$, $\sqrt{13}>\sqrt{10}$.

定理 1. 兩複數積的絕對值等於兩數絕對值的積. 234

設兩數是 $\mathbf{a}=a+a'i$ 與 $\mathbf{b}=b+b'i$.

因 $\mathbf{ab}=ab-a'b'+(ab'+a'b)i,$ §226

故有 $|\mathbf{ab}|=\sqrt{(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2}.$ §232

但在實行所指示的運算後,即知

$$(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2=(a^2+a'^2)(b^2+b'^2).$$

因此 $\sqrt{(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2}=\sqrt{a^2+a'^2}\cdot\sqrt{b^2+b'^2}$. §186

即 $|\mathbf{ab}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|.$

定理 2. 兩複數和的絕對值不能超過兩數絕對值的和. 235

用 §234 中同一記法,

則 $\sqrt{a^2+a'^2}+\sqrt{b^2+b'^2}\geqq\sqrt{(a+b)^2+(a'+b')^2}$, (1)

若 $a^2+a'^2+b^2+b'^2+2\sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)}$
$\geqq a^2+b^2+a'^2+b'^2+2(ab+a'b')$, §184

即若 $\sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)} \geqq ab+a'b'$, § 178

即若 $a^2b^2+a'^2b'^2+a^2b'^2+a'^2b^2 \geqq a^2b^2+a'^2b'^2+2aba'b'$, § 184

即若 $a^2b'^2+a'^2b^2 \geqq 2aba'b'$, § 178

即若 $(ab'-a'b)^2 \geqq 0$. (2) § 178

但 (2) 是常常眞確的,因爲凡實數的平方都是正數(或 0). 因此 (1) 也是常常眞確的——本定理於是得證.

例如 $|2+i|=\sqrt{5}$ 而 $|1+3i|=\sqrt{10}$.

但 $|(2+i)+(1+3i)|=5$, 而 $5<\sqrt{5}+\sqrt{10}$.

236 **冪與根.** 1. $a+bi$ 的 n 次冪,寫成 $(a+bi)^n$, 它的意思是 n 個因子的積,每個因子是 $a+bi$. 從 § 226, 3 可知,此積是一個複數,如 $c+di$.

照 § 185 的樣,可證這樣設立定義的複數之冪,也遵守指數定律.

2. 若 $(a+bi)^n=c+di$, 則稱 $a+bi$ 是 $c+di$ 的 n 次根,而可用 $\sqrt[n]{c+di}$ 來指示.

以後還要證明,凡所設複數 $c+di$ 都有 n 個這樣的 n 次根;換言之,要證明在複數系中有 n 個不同的數,其 n 次冪都等於 $c+di$.

例如,因 $(1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2})^2=1/2+2i/2-1/2=i$, 故 $1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}$ 一數是 i 的一個平方根,因而是 -1 的四次根. -1 的其他三個四次根是

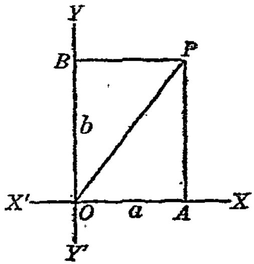
$$-1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2}.$$

237 **一般的結論.** 數系擴展至此,就沒有再加擴展之必要. 從 §§ 226, 236, 可知複數系已足適應四種基本運算及乘方開方的一切需要. 雖然還有其他關於數的運算在數學上有其地位——例如求所設數的對數 (§ 140),——但此等運算可許我們用無窮級數如 $u_1+u_2+\cdots$ 來設立定義,這級數的各項是複數;若這樣的級數有和可求,則此和也是一個複數.

複數的示跡法

複數可以用平面上的點來示跡，這些點就叫做各對應數的位跡 (graph). 238

作任何兩直線 $X'OX$, $Y'OY$，交於原點 O；並選定單位線段 s 供量度長度之用.



1. 每一個實數，a，用 $X'OX$ 上的 A 點來表示它的位跡，該點到 O 的距離，以 s 為單位時，就是 $|a|$ (§29)，A 在 O 之右或左，看 是正的或負的而定.

2. 每一個純虛數，bi，用 $Y'OY$ 上的 B 點來表示它的位跡，該點到 O 的距離，以 s 為單位時，就是 $|b|$，B 在 O 之上或下，看 b 是正的或負的而定.

3. 每一個複數，$a+bi$，用 P 點來表示它的位跡，該點可用下法作得：

照 1 與 2 的樣，求得 與 bi 的位跡 A 與 B. 然後過 A 與 B 引直線分別平行於 $Y'OY$ 及 $X'OX$. 此二線的交點 P 就是 $+bi$ 的位跡.

直線 $X'OX$ 叫做實數軸 (axis of real numbers)，$Y'OY$ 叫做純虛數軸 (axis of pure imaginaries).

用這個方法，我們就使複數系與平面上一切點所成之集，發生一一對應的關係(§2). 此外，複數系的二維序次特性(§223)，也有了完全的示跡法.

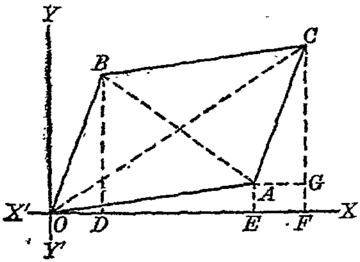
讀者注意，凡有同一純虛數部分的複數，其位跡都在 $X'OX$ 的同一平行線上，凡有同一實數部分的複數，其位跡都在 $Y'OY$ 的同一平行線上.

任何複數的絕對值，是它的位跡到原點的距離. 239

因在 §238 的圖中，OA 與 OB 的長度分別是 a 與 b，故 OP 的長度是 $\sqrt{a^2+b^2}$ 即 $|a+bi|$ (§232).

240 兩個複數 $\mathbf{a}=a+a'i$ 與 $\mathbf{b}=b+b'i$ 的和與積，其位跡可用下法求得:

先依前法分別作 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的位跡 A 與 B. 連結 OA 與 OB，完成平行四邊形 $OACB$. 於是 C 就是 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 的位跡.



因若引垂線 BD, AE, CF, AG, 則 a, a', b, b' 就分別是 OE, EA, OD, DB 的長度，而三角形 ODB 與 AGC 全等.

因此

$OF=OE+EF=OE+OD=a+b$ (在長度上)

且 $FC=FG+GC=EA+DB=\ '+b'$ (在長度上)

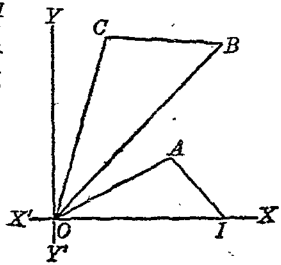
所以 C 是 $a+b+(\ '+b')i$ 即 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 的位跡(§226, 1).

當 O, A, B 在同一直線上時,在這線上從 A 起截取一段 AC，其長度及方向都同於 OB，即可求得 C.

因 $OC\leqq OA+AC$, 即 $\leqq OA+OB$, 故有 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leqq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$.

差 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 的位跡就是和 $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ 的位跡.

已設 A 與 B, 分別是 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的位跡. 且設 I 是 1 的位跡. 連結 OA, OB, IA, 並在 OB 上作三角形 OBC 相似於 OIA, 使OB 繞 O 旋轉到合於 OX 時, OC 可合於 OA, 則C 便是 $\mathbf{ab}$ 的位跡.



這個規則將在後面證明,到那時候還要推出商與冪的位跡作圖規則來.

當 $\mathbf{b}=i$ 時,將 OA 繞 O 依"反鐘向"旋轉 90°, 即得 OC.

241 從上所述,可知複數間的恆等關係 (identical relation), 可用以代表幾何定理. 換言之,複數可以表示實在事物之間的關係.

例如恆等式 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2=\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a})/2$ 即可代表"平行四邊形對角線互相平分"一定理；因 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$ 與 $\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a})/2$ 的位跡，就是 § 2.0 第一圖中 OC 與 AB 的中點.

第二編　代數

I. 初步討論

論用文字表數

常數與變數. 在代數上，往往用文字來表示隨便什麼數. 242
例如在公式 $ab=ba$ 中，文字 a 與 b 表示隨便什麼樣的兩個數，而公式的意義是，隨便什麼樣的第一數，乘以隨便什麼樣的第二數，所得之積，同於第二數乘以第一數.

在代數的許多討論之中，表示數的文字，例如 $x+b$ 一式中的 b 與 x，其間若予以下述的區別，則往往感到便利.

第一. 我們以為其中的一個，如 b，在討論開始時有一個隨意指定的特殊值，該值在全部討論之中始終不變. 這樣的一個文字，稱之為已知(known)文字或已知數，或常數 (constant).

第二. 另外一個，如 x，我們以為它在全部討論之中，可以自由取一切可能值，且可從任何一值變到任何他值. 這樣的一個文字，稱之為變數 (variable).

未知數. 但文字亦有用來表示特殊數，其值尚在待求中 243
的. 這樣的一個文字，稱之為未知(unknown)文字或未知數.

未知文字之值，不能也像常數或變數那樣隨意指定.

例如在方程式 (§326) $2x-5=0$ 中，x 是未知文字，其值，可以立即求得，是 $5/2$. 在 $2x-5$ 一式中，x 之值可以隨意指定，但在方程式 $2x-5=0$ 中，決不能使 x 有 $5/2$ 以外的他值.

244 **文字的選擇.** 單獨一個文字,不得在同時表示兩個不同的數 這便是選擇文字所受唯一必要的限制.

依照慣例,前面幾個文字,如 a, b, c 等等,常用來表示已知數或常數;後面幾個文字,如 x, y, z, 常用來表示未知數及變數.

除簡單的文字外,有時候還用加有上誌或下誌的文字;例如 a', a'', a''', 讀作"a 一撇","a 兩撇","a 三撇";又如 a_0, a_1, a_2, 讀作"a 零","a 一","a 二".

245 **論用文字的計算.** 用文字 a, b, c 等表數時,其由算術運算的結合,祇能指示其結果. 例如加 b 於 a, 祇能寫成式子 $a+b$, 所以就稱這式子是 a 與 b 的和. 又如 a 乘以 b 所得的積,就是 ab.

這樣得到的文字式子既然表的是數,我們就可以用算術的運算來計算它們. 不過在計算的時候,不能夠直接用各式之值,因爲值尚未設. 所以祇能用適當的符號,把各式連在一起,然後變換結果的形式而使它化簡,這變換,我們確知它不會影響到所得結果之值,不論此值是何值.

在 § 68 中已經見到,和與積形式上所可起的變換,不致使其值受影響的,盡在下列公式之中:

1. $a+b=b+a.$　　2. $a+(b+c)=(a+b)+c.$

3. $ab=ba.$　　4. $a(bc)=(ab)c.$

5. $a(b+c)=ab+ac.$

所以可說公式 1–5, 實際上就是結合文字式子時,所需要或所可用的加法及乘法的定義;就其他算術運算而論,也是如此.

例如將 $2x+3y$ 與 $4x+5y$ 加起來的意思，就是應用公式 1—⁻，並將所設各數加起來，求得 $2x+3y+(4x+5y)$ 一式所可化成的最簡形式.

故得

$$\begin{aligned} &2x+3y+(4x+5y)=2x+3y+4x+5y && \text{由 2}\\ &=2x+(3y+4x)+5y=2x+(4x+3y)+5y && \text{由 2 與 1}\\ &=2x+4x+3y+5y=(2x+4x)+(3y+5y) && \text{由 2}\\ &=(2+4)x+(3+5)y=6x+8y,\ \text{所求之和.} && \text{由 3 與 5} \end{aligned}$$

基本計算定則

依照適纔所說的話，加法，減法，乘法，除法，乘方，以及開方， 246
其在代數上的定義，可以認爲用下列定則與公式來設立，所以此等定則，稱爲基本計算定則.

在此諸公式中——這些公式對於本書第一編中所論各種之數都成立——文字 a, b, c 表示不論什麼有窮數的任何一個，而符號＝的意思是"所表之數同於".

加法. 加 b 於 a 的結果是式子 $a+b$. 此式叫做 a 與 b 的 247
和. a 及 b 有任何所設值時，此和有一值而祇有一值. 其特例是: $a+0=0+a=a$.

加法是可對易而且可締結的運算；即遵守下列兩定律 248
(§§ 34, 35):

$$a+b=b+a, \quad a+(b+c)=(a+b)+c$$

下列相等定則就和而論是眞確的 (§ 39): 249

若 $a=b$, 則 $a+c=b+c$.

若 $a+c=b+c$, 則 $a=b$.*

減法. 這是加法的反運算 (§ 55). 已設任何兩個數 250
a 與 b，常有一數而祇有一數，加 b 於此數可得 a. 此數稱爲

*後來就要得知，當 c 變成無窮大時，這條定則不成立.

從 a 減 b 而得的剩餘，用式子 $a-b$ 來表示. 因此，由定義，

$$(a-b)+b=a.$$

其特例是：$0-b$ 用 $-b$ 來表示.

251 **乘法.** a 乘以 b 的結果是式子 ab，叫做以 b 乘 a 而得的積. 此積在 a 及 b 有任何所設值時，有一值而祇有一值.

其特例是：$a\cdot 0=0\cdot a=0$，不論 a 有什麽有窮值.

當 b 是正整數時，$ab=a+a+\cdots$ 共 b 個 a.

252 乘法是可對易與可締結的運算，且對於加法是可分配的；換言之，乘法遵守下列三定律（§45—47）：

$$ab=ba,\quad a(bc)=(ab)c,\quad a(b+c)=ab+ac.$$

253 下列相等定則就積而論是眞確的（§§75, 76）：

若 $a=b$，則 $ac=bc$

若 $ac=bc$，則 $a=b$，除非 $c=0$.*

若 $ac=0$，則 $a=0$，或 $c=0$.

254 **除法.** 這是乘法的反運算（§124）. 已設任何兩個數 a 與 b；除 b 等於零外，常有一數而祇有一數，此數乘以 b 可得 a. 此數叫做以 b 除 a 而得的商，用式子 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 來表示. 因此，由定義，有

$$\left(\frac{a}{b}\right)b=a,\ \text{除}\ b=0\ \text{時外}.$$

255 **乘方.** 這就是累次乘法. 連乘積 $a\cdot a\cdots$ 到 n 個因子，用 a^n 來表示，稱之為 a 的 n 次冪.

*後來就要得知，當 c 變成無窮大時，這定則不成立.

在記號 a^n 中，n 叫做指數，a 叫做底。

乘方遵守下列三定律，這三定律叫做指數定律（§185）： 256

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ (a^m)^n = a^{mn},\ (ab)^n = a^n b^n.$$

下列相等定則就冪而論是真確的（§184）： 257

$$若\ a=b,\ 則\ a^n=b^n.$$

$$若\ a^2=b^2,\ 則\ a=b,\ 或\ a=-b.$$

第二條定則，以及這是特例的那條通則，將在後面證明。

開方. 這是乘方的反運算之一（§138, 140）。已設任 258
何正數 a，必有而祇有一個正數，其 n 次冪等於 a。此數叫做 a 的 n 次主根，用 $\sqrt[n]{a}$ 來表示，當 $n=2$ 時，用 $\sqrt{a}$ 表示。因此，由定義，由

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

但是這個正數，$\sqrt[n]{a}$，並不是 n 次冪等於 a 的唯一的數。後面就要講到，有 n 個不同的數，其 n 次冪等於 a；不但在 a 是正數時有 n 個，卽在 a 是隨便那一種數時，也有 n 個。

當 a 是正數而 n 是奇數時，$-a$ 的 n 次主根是 $-\sqrt[n]{a}$。

論以上各定則的可倒性. 適纔所列舉的各定則，其中一 259
部分為相等定則；其餘可以稱為結合定則。

有須注意者，凡是關於和的相等定則及結合定則，都是可倒的 (reversible)，但是關於積和冪的相等定則，並不完全可倒。

例如依照分配律，$a(b+c)=ab+ac$（這是結合定則之一），可將 $a(b+c)$ 換成 $ab+ac$，也可倒過來將 $ab+ac$ 換成 $a(b+c)$。

又若 $a=b$，則常可斷定 $a+c=b+c$；倒過來說，若 $a+c=b+c$，則 $a=b$.

但若 $a=b$，固然常可斷定 $ac=bc$；倒過來說，若 $ac=bc$，則祇在確知 c 不是 0 的時候，纔能斷定 $a=b$.

又從 $a=b$ 常可推得 $a^2=b^2$，但從 $a^2=b^2$，祇能推得不是 $a=b$，便是 $a=-b$.

260 **不等定則．** $a\neq b$ 的意思是"a 不等於 b".

兩個所設不等的實數，a 與 b，其中一個必在代數上較大，還有一個必在代數上較小（§62）.

設 a 是較大的一數而 b 是較小的一數；則可寫成

$$a>b \text{ 或 } b<a.$$

特例：a 為正數時寫成 $a>0$，a 為負數時寫成 $a<0$.

261 就任何所設實數 a, b, c 而論，可得下列各定則（§§178，184）：

1\. 若 $a=b$ 而 $b=c$，則 $a=c$.

若 $a=b$ 而 $b<c$，則 $a<c$.

若 $a<b$ 而 $b<c$，則 $a<c$.

2\. 若
$$a<,\ =,\ \text{或}>b,$$
則
$$a+c<,\ =,\ \text{或}>b+c,$$
且
$$ac<,\ =,\ \text{或}>bc,\ \text{若 } c>0;$$
但
$$ac>,\ =,\ \text{或}<bc,\ \text{若 } c<0.$$

3\. 當 a 與 b 是正數時，

若
$$a<,\ =,\ \text{或}>b,$$
則
$$a^n<,\ =,\ \text{或}>b^n;$$
且
$$\sqrt[n]{a}<,\ =,\ \text{或}>\sqrt[n]{b}.$$

前面早已指出過，定則 2 與 3 中單寫等號時，也適用於複數．又，若 $a=b$ 而 $b=c$，則 $a=c$ 一條，也適用於複數．這定則可以稱為相等通則(general rule of equality).

代數上常用的記號

在代數上，除以前各節中已經解釋過的記號外，下列各記號也不時用到： 262

1. 各種集合號，如前面用過的括號 ( )，以及 [ ] 與 { }. 指示其中所包括的式子，當做一個單獨文字看.

2. 雙號 $\pm$，讀作"加或減"或"正或負"，而 $\mp$ 讀作"減或加"或"負或正".

例如在 $a\pm b\mp c$ 一式的意思，就是 $a+b-c$ 或 $a-b+c$，上號與上號同讀，下號與下號同讀.

3. 記號 $\therefore$ 代表因此或所以.

4. 記號 $\cdots$ 代表等等.

5. 又，$\because$ 代表因為；$\ngtr$ 代表不大於；$\nless$ 代表不小於；$\gtrless$ 代表大於或小於.

代數式

用剛纔說過的各種運算，將文字或將文字與數結合而成的式子，叫做**代數式**(algebraic expression). 263

注意. 包括在這種式子內的運算次數，也許是有限的 (limited)，例如在 $1+x+x^2$ 中便是；也許是無限的 (unlimited)，例如 $1+x+x^2+\cdots$ 一式，假定是繼續無盡的，則其中的運算次數即屬無限. 第一種代數式叫做有窮式 (finite expression) 第二種叫做無窮式 (infinite expression). 目下我們祇講論有窮式. 264

依照慣例，因所討論的變數（或未知數）在式中所處地位之不同，而將代數式分成兩類如下： 265

一式中所指示的除法，若無用其中有變數的式子來除的，此式稱為**整式** (integral expression)；若有，此式稱為**分式** (factional expression). 266

例若 x 與 y 是變數，而 c, b, c 是常數，

則　　　ax^2+bx+c 及 $\frac{y}{b}+\sqrt{x}$ 是整式，

但　　　$y+\frac{1}{x}$ 及 $\frac{2+x}{1-x}$ 是分式.

267　一式中所指示的根，若無屬於有變數的另一式子的，此式叫做**有理式** (rational expressional)；若有，叫做**無理式** (irrational expression).

例如 $a+\sqrt{b}\,x$ 是有理式，但 $\sqrt{y}+\sqrt{y-x}$ 是無理式.

268　注意. 1. 應用這些名詞來稱呼一個式子的時候，我們假定這式子已化成最簡形式. 例如 $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ 是有理式，因為它可以化成 $x+y$.

2. 整式，有理式等等名詞，與其所稱呼的式子的數值無關.

例如 $x+2$ 雖然是有理整式，但祇在 x 本身表示整數時，方纔表示整數. x 之值是分數時，它的值也是分數；x 之值是無理數時，它的值也是無理數.

269　一個代數式 A，若由 + 號或 − 號連結若干部分而成，則每一部分連同前面緊接着的符號，叫做 A 的**項**(term).

例如代數式

$$a+a^2c-(b+c)+[d+e]-\{f+g\}+\overline{h+i}\left.\begin{matrix}+j\\+k\end{matrix}\right|-\frac{l+m}{n+p}$$

的各項就是 $a, a^2c, -(b+c)$ 等等，其中有本身包含不止一項的，都用括弧或其他集合號指示明白(§262, 1).

270　整式因其項數之不同，而有**單項式** (monomial)，**二項式** (binomial)，**三項式** (trinomial)之別；二項以上者通稱為**多項式** (polynomial).

271　在任何單項式中，常數因子之積叫做變數因子之積的**係數**(coefficient).

例如在 $4ab^2x^3y^4$ 中，$4ab^2$ 是 x^3y^4 的係數.

任何一個因子，也可以叫做其餘各因子之積的係數.

在一切單項式中，係數應當先寫．若係數是1，可以不寫．例如 x^2y 的係數是1

除係數外，其餘全相同的各項，叫做同類項(like terms)． 272

例如 $-2x^2y$ 與 bx^2y 是同類項．

單項式之次 (degree)，是式內所含正在討論中的各變數的指數和． 273

例若 x 與 y 是變數，則 $4ab^2x^3y^4$ 是七次式；x^3 是三次式；b 是零次式(參閱 § 595)．

多項式之次，是式內最高次一項或幾項之次；任何整式之次；是該整式所可化成的最簡多項式之次． 274

例如 $ax^3+bx^2y+cy^3+dx^2+ey+f$ 是三次式；$(x-1)(x-2)$ 是二次式．

為求方便起見，多項式的各項往往依照次的高低，順序排列，排成遞降序 (descending) 或遞昇序(ascending)． 若有幾個同次項，則此等同次項再依照某一變數之次的高低，順序排列． 275

§ 274 中所舉多項式的例子，便是這樣排列的．

多項式的各項都有同次時，這多項式叫做**齊次** (homogeneous) 式． 276

例如 $5x^3-2x^2y+xy^2+y^3$ 就是齊次式．

單變數多項式． 祇含一個變數如 x 的有理整式，特別重要． 其在代數上的地位，同於整數在算術上的地位． 實在說來，我們將要發覺，這些式子有許多性質，的確與整數的性質互相類似． 它們常可化成含有 x 的多項式，即化成下列各形式之一： 277

$$a_0x+a_1,\ a_0x^2+a_1x+a_2,\ a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,\ \cdots,$$

或說化成下面的一般形式：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

其中 n 表示此式之次,小點一排所表示的,是使全式有 $n+1$ 項時尚需增補的各項.

係數 $a_0, a_1, \cdots\cdots$ 表示常數,這些常數可以是任何一種數.就特別的情形來說,除 a_0 外,其餘各係數隨便哪個可以等於零,此時的多項式就叫做不完全(incomplete)多項式.

注意,在每一項中,a 的下誌與 x 的指數和,就是多項式之次.

例如在 $5x^6-x^3+2x^2+x-3$ 一式中,即有 $n=6$, $a_0=5$, $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=-1$, $a_4=2$, $a_5=1$, $a_6=-3$.

278 **函數.** 代數式如 $x+2$,或含有兩變數的 x^2+y,其本身顯然也是一個變數. $x+2$ 叫做 x 的函數(function),因為它的數值看 x 的數值而定,即對應於 x 的每一數值,$x+2$ 有一個確定的數值.

同樣的理由,x^2+y 叫做 x 與 y 的函數,而且一般地說來,凡代數式都可以叫做其中所含各變數的函數.

279 前此剛剛講過的 所謂由 x 或 x 與 y 或其他若干變數構成的整式或分式,有理式或無理式,也可以叫做 x 或 x 與 y 或其他若干變數的整函數,分函數,有理函數,或無理函數.

280 x 的所設函數,往往用記號 $f(x)$ 來代表,讀作"x 的函數".當 $x=0, 1, b$ 時函數的對應值,用 $f(0)$, $f(1)$, $f(b)$ 來代表.

例如 $f(x)=x+2$, 則 $f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(b)=b+2$. 一般地說來,若 $f(x)$ 代表 x 的任何所設函數,則 $f(b)$ 所代表的,就是在式中以 b 代 x 的結果.

所論及的 x 的函數不止一個時,可用 $f(x)$ 代表其中的一個,而用相仿的記號如 $F(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ 代表其他各函數.

兩變數 x 與 y 的函數,也可以照樣用記號 $f(x, y)$ 等等來代表.

習題一

1. $x^2yz^3+2x^5y^4z^6+3x^7y^2z^8$ 一式，就 x, y, z 分別而論，是幾次式？就 y 與 z 聯合而論，是幾次式？就 x, y, z 聯合而論，是幾次式？
2. $(x+1)(2x^2+3)(x^4-7)$ 是幾次式？
3. 已設 $3x^7+x^6-4x^4+x^3-12$；依照 §277 的記法，$n, a_0, a_1, \cdots$ 各有何值？
4. 若 $f(x)=2x^3-x^2+3$，求 $f(0), f(-1), f(3), f(8)$.
5. 若 $f(x)=(x^2-3x+2)/(2x+5)$，求 $f(0), f(-2), f(6)$.
6. 若 $f(x)=x+\sqrt{x}+3$，求 $f(1), f(4), f(5)$.
7. 若 $f(x)=2x+3$，則 $f(x-2)$ 是什麼？$f(x^2+1)$ 是什麼？
8. 若 $f(x, y)=x^3+x-y+8$，求下列各值：

$$f(0,0),\ f(1,0),\ f(0,1),\ f(1,1),\ f(-2,-3).$$

恆等式

若 A 所表示的一式完全同於 B，或由 §§ 247－258 的計算定則，可以變換成 B，則稱 A 恆等於 B. 281

記法 $A\equiv B$ 的意思就是"A 恆等於 B".

例如　$x(x+2)+4$ 恆等於 $x^2+2(x+2)$.

因　$x(x+2)+4\equiv(x^2+2x)+4$

$$\equiv x^2+(2x+4)\equiv x^2+2(x+2). \qquad §§\ 248, 252$$

$A\equiv B$ 叫做恆等式 (identical equation 或 identity).

因此

一個恆等式 $A\equiv B$ 是一句話，說第一個式子 A，可用計算定則變換成 B. 282

就特別的情形來說，恆等式如 283

$$3-8+2\equiv4+7-14,$$

其中不含文字，叫做數字恆等式 (numerical identity).

在§282中,隱含着下面的定理.

284 **定理.** 由 x 構成的兩個多項式若恆等,則兩式的對應係數相等;即

若 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$,

則 $$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots,\ a_n=b_n.$$

因這些係數如果不等,則兩多項式照它們現在的形式來看,顯然是不同的,所以決不能用計算定則使第一式變換成第二式.

例若 $x^2+3x-3\equiv 2x^2+bx+c$,則 $a=2$, $b=3$, $c=-3$.

若係數 a_0, a_1, $\cdots$, b_0, b_1, $\cdots$不是常數,而表示不含 x 的代數式,則從恆等式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots$,可知 $a_0\equiv b_0$, $a_1\equiv b_1$, $\cdots$, 換言之,對應係數 a_0 與 b_0 等等所表示的代數式恆等.

285 若兩個恆等多項式的各項,是二個變數或幾個變數之冪的積,其係數是常數,則對應項的係數也相等.

例若 $a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+\cdots$

$$\equiv a'+b'x+c'y+d'x^2+e'xy+f'y^2+\cdots,$$

則 $$a=a',\ b=b',\ c=c',\ d=d',\ e=e',\ f=f',\cdots.$$

286 **恆等式的性質.** 在代數的計算上,常常利用下列各定理:

定理 1. 若 $A\equiv B$,則 $B\equiv A$.

A 變換成 B 所經的手續,是可倒的,因為祇用到結合定則(§259). 但是倒過來的手續,就把 B 變換成了 A.

例如§281中所舉之例,即可倒過來變換,

因 $$x^2+2(x+2)\equiv x^2+(2x+4)$$

$$\equiv(x^2+2x)+4\equiv x(x+2)+4. \qquad \S\S\ 248,\ 252$$

定理 2. 若 $A\equiv C$ 而 $B\equiv C$,則 $A\equiv B$.

因既有 $B\equiv C$, 即有 $C\equiv B$. 由定理 1

因此 $A\equiv C$ 而 $C\equiv B$, 所以 $A\equiv B$.

例如因　$x(x+2)+4\equiv x^2+2x+4$,　§§ 248, 252

且因　$x^2+2(x+2)\equiv x^2+2x+4$,　§§ 248, 252

故有　$x(x+2)+4\equiv x^2+2(x+2)$.

定理 3. 恆等式,若其兩端加以同一運算,仍是恆等式.

此定理從相等定則即可推得(§§ 249, 253, 257).

例若 $A\equiv B$, 則 $A+C\equiv B+C$; 其餘類推.

論恒等式的證明方法 已設兩個代數式 A 與 B, 要證明 $A\equiv B$, 不必當眞把 A 變換成 B. 若能將 A 與 B 化成同一形式 C, 如 § 286, 2, 所示, 就夠了. 287

下面的定理,使我們又有一個很有用的方法.

若從假定的恆等式, $A\equiv B$, 經可倒的手續可以導出一個已知的恆等式, $C\equiv D$, 則所假定的恆等式 $A\equiv B$ 是眞確的. 288

因手續旣屬可倒,則 $A\equiv B$ 可從 $C\equiv D$ 導出. 因 $C\equiv D$ 是眞確的,所以 $A\equiv B$ 也是眞確的.

例. 證明 $a+b-b$ 恆等於 a.

若假定　$a+b-b\equiv a$　(1)

則從而有　$[(a+b)-b]+b\equiv a+b$.　(2) § 249.

但 (2) 是一個已知的恆等式 (§ 250), 而 (1) 與 (2) 兩步手續是可倒的. 所以 (1) 是眞確的.

若從 $A\equiv B$ 到 $C\equiv D$ 的手續是不可倒的,則不能貿然斷定 $A\equiv B$.

例若假定　$x\equiv -x$　(1)

則從而有　$x^2\equiv(-x)^2$.　(2)

此處 (2) 是眞確的,但不可因此而就說 (1) 是眞確的,因爲從 (1) 這一步到 (2) 這一步,是不可倒的 (§ 259). 而且在實際上, (1) 是錯誤的.

恒等式與等式. 有須牢記者,恆等式重在形式的相同,不重在值的相等. 但下列定理,頗爲重要: 289

若 A 與 B 是有窮式而 $A\equiv B$, 則不論式中所含文字有何值, A 與 B 常有相等之值.

因由假設將 $a+b=b+a$ 等等定則，應用有限次數後，可將 A 變換成 B. 但 $a+b$ 與 $b+$ ，不論 a 與 b 有何值，總是相等的；其他依此可以類推.

這定理限於有窮式，其理由將在後面闡述.

逆言之，若 A 與 B 中各文字不論有何值，A 與 B 常有等值，則 $A\equiv B$. 這定理不久就要予以證明.

因此，就有窮式而論，常可用值相等的符號 $=$，代換形式相同的符號$\equiv$. 當 $A\equiv B$ 時，又可寫成 $A=B$. 以後往往這樣寫.

符號$=$的這種用法，與 § 325 中所述的用法，必須細細予以區別.

論逆命辭

290 所謂命辭(proposition)，常有下面的形式：

$$\text{若 } A,\ \text{則 } B, \tag{1}$$

或表示得更完全一些：若有某一陳述 A 是眞確的，則有其他某一陳述 B 也是眞確的.

例　　若一個幾何圖形是正方形，則此圖形是長方形.
　　若 $x=1$,　　　則 $x-1=0$.

291 將 (1) 的假設 A 與結論 B 交換，即得逆命辭 (converse proposition).

$$\text{若 } B,\ \text{則 } A.^* \tag{2}$$

例如上節所說兩個命辭的逆辭就是：

若一個幾何圖形是長方形，則此圖形是正方形.
若 $x-1=0$,　　　則 $x=1$.

292 一個眞確的命辭，其逆辭也許是錯誤的，如前節所舉第一個例便是.

---

*一個命辭若有兩個假設，如"若 A 與 B, 則 C", 就有兩個逆辭：即，若 C 與 B, 則 A, 及若 A 與 C 則 B. 照樣，若有三個假設，就有三個逆辭；諸如此類.

但在一個眞確的命辭"若 A, 則 B"之中,從假設 A 導出結論 B 的推理手續,倘然是可倒的,則其逆辭必常眞確;因爲將這手續倒過來,就可以從 B 導出 A, 換言之,可以證明若 B, 則 A. 293

先用可倒的手續證明一個命辭的逆辭,因而證明這個命辭,此法在代數上是常用的. §288 中已經有過此例.

命辭"若 A, 則 B"若是眞確的,則 A 叫做 B 的**充分條件** (sufficient condition),而 B 叫做 A 的**必要條件** (necessary condition). 294

例如命辭"若 $x=1$, 則 $(x-1)(x-2)=0$"是眞確的. 因此, $x=1$ 是 $(x-1)(x-2)=0$ 的充分條件,而 $(x-1)(x-2)=0$ 是 $x=1$ 的必要條件.

命辭"若 A,則 B"及其逆辭"若 B,則 A"同時都眞確,則稱 A 是 B 的**充要條件** (sufficient and necessary condition);交換過來說,也對. 295

例如 (1) 若 $x=1$, 則 $x-1=0$, 及 (2) 若 $x-1=0$, 則 $x=1$, 是都眞確的. 因此, $x=1$ 是 $x-1=0$ 的充要條件;交換過來說,也對.

II. 基本運算

加法與減法

和及剩餘. 設 A 與 B 表示任何兩個代數式. 所謂 A 與 B 的和,及所謂從 A 減 B 而得的剩餘,意思就是靠着 §§ 247–258 的計算定則, $A+B$ 與 $A-B$ 兩式所可化成的最簡形式. 296

幾個有用的公式. 實行此等簡化手續時,下列各公式甚有用處: 297

1. $a+b-c=a-c+b.$　　2. $a-(b+c)=a-b-c.$

3. $a+(b-c)=a+b-c.$　　4. $a-(b-c)=a-b+c.$

5. $a(b-c)=ab-ac.$

這些公式，可以說是推廣到減法的對易，締結，及分配各律.

靠着§249的定則，即

加同一式於兩式，若所得的結果相等，則此兩式相等，

可以證明1及2如下：

1.　$a+b-c=a-c+b.$

因加 c 於兩端的結果，都是 $a+b$.

這就是說，$[(a+b)-c]+c=a+b,$　　§250

及　$(a-c)+b+c=(a-c)+c+b=a+b.$　　§§248, 250

2.　$a-(b+c)=a-b-c.$

因將 $b+c$ 加於兩端，都得 a.

這就是說，$[a-(b+c)]+(b+c)=a,$　　§250

及　$a-b-c+(b+c)=a-b-c+c+b$

$=a-b+b=a.$　　§§248, 250

3, 4, 及5可以證明如下：

因　$b=(b-c)+c,$　　§250

故有

3.　$a+b-c=a+[(b-c)+c]-c$

$=a+(b-c)+c-c$　　§248

$=a+(b-c).$　　由1及§250

4.　$a-b+c=a-[(b-c)+c]+c$

$=a-(b-c)-c+c$　　由2

$=a-(b-c).$　　§250

5.　$ab-ac=a[(b-c)+c]-ac$

$=a(b-c)+ac-ac$　　§252

$=a(b-c).$　　由1及§250

讀者注意，從§248及公式1—4，可知接連的加法與減法，是可以依照隨便什麼次序的.

例如 $a-b+c-d+e=a+c-b-d+e$, 由1

$=a+c-(b+d)+e=a+c+e-(b+d)$, 由2及1

$=a+c+e-b-d$. 由2

符號定則. 下列"符號定則"乃是剛纔所證公式 3,4,5 的特例. 298

1. $a+(-c)=a-c$. 2. $a-(-c)=a+c$.

3. $a(-c)=-ac$. 4. $(-a)(-c)=ac$.

在 §297 的公式 3, 4, 5 中,使 $b=0$, 立即分別得到這裏的 1, 2, 3.

定則 4 可以證明如下:

$(-a)(-c)=(-a)(0-c)=(-a)0-(-a)c$ §297, 5

$=0-(-ac)=ac$. 由 2 與3

括號定則. 從 §248 的公式及 §297 的公式 2,3,4,可得下面的重要定則: 299

前面有+號的括號可以無條件拿掉;前面有-號的括號也可以拿掉,但是括號內各項的號必須改變.

依照同一定則,可以引入括號.

例如 $a+b-c-d+e=a+b-(c+d-e)$.

括號內又有括號的式子,欲予以簡化,可將上述定則順次應用於各個括號.

例如 $a-\{b-[c-(d-e)]\}=a-b+[c-(d-e)]$

$=a-b+c-(d-e)$

$=a-b+c-d+e$.

移去不止一個括號,次序當然可以隨意;但若從最外面的括號開始(如上舉之例),則可免改變任何符號在一次以上.

300　**整式加減定則．** 從 §§ 248, 252, 297，導出下列各定則：

兩同類項相加（或相減），先將其係數相加（或相減），然後將公共文字附於所得結果的後面．

兩個或不止兩個多項式相加，將其各項用原來的符號連起來，然後合併同類項，以求簡化．

從一個多項式減去另一多項式，變減式 (subtrahend) 各項之號，然後相加．

例 1. 將 $4ab^2$ 與 $-5ab^2$ 加起來；又從 $4ab^2$ 減去 $-5ab^2$.

依照定則，有　$4ab^2+(-5ab^2)=(4-5)ab^2=-ab^2$;　§ 297, 5

及　$4ab^2-(-5ab^2)=[4-(-5)]ab^2=9ab^2$.　§ 297, 5

例 2. 將 $x^3+ax^2y+2ab^3$ 與 bx^2y-5ab^3 加起來.

依照定則，有

$$\begin{aligned}&x^3+ax^2y+2ab^3+(bx^2y-5ab^3)\\ &=x^3+ax^2y+2ab^3+bx^2y-5ab^3 &&\text{§ 299}\\ &=x^3+ax^2y+bx^2y+2ab^3-5ab^3 &&\text{§ 248}\\ &=x^3+(a+b)x^2y-3ab^3. &&\text{§§ 252, 297, 5}\end{aligned}$$

例 3. 從 $a^3+a^2b+b^3$ 減去 $2a^2b-ab^2+b^3$.

依照定則，有

$$\begin{aligned}&a^3+a^2b+b^3-(2a^2b-ab^2+b^3)\\ &=a^3+a^2b+b^3-2a^2b+ab^2-b^3 &&\text{§ 299}\\ &=a^3-a^2b+ab^2. &&\text{§§ 252, 297}\end{aligned}$$

待加（或待減）兩多項式中若有同類項，則宜將同類項排在同一縱行之內，再逐行相加（或相減），以求便利．

例 4. 將 $a^4+a^3b-2a^2b^2-b^4$ 與 $ab^3+3a^2b^2-a^3b$ 加起來，再從所得結果減去 $5a^2b^2-ab^3$.

依題意應有

$$\begin{array}{rrrrr}a^4 & +a^3b & -2a^2b^2 & & -b^4\\ & -a^3b & +3a^2b^2 & +ab^3 & \\ & & -5a^2b^2 & +ab^3 & \\ \hline a^4 & & -4a^2b^2 & +2ab^3 & -b^4\end{array}$$

習　題　二

1. 將 $4ax^2y$, $-6ax^2y$, $5bx^2y$, 及 $-3bx^2y$ 加起來.
2. 將 $7a^2+2a-b^2$, $3a+b^2-2a^2$, 及 $b^2-4a-4a^2$ 加起來.
3. 將 $3x^2-5x+6$, x^2+2x-8, 及 $-4x^2+3x-7$ 加起來.
4. 將 $4a^3+a^2b-5b^3$, $\frac{5}{3}a^3-6ab^2-a^2b$, $\frac{1}{3}a^3+10b^3$,
   及 $6b^3-15ab^2-4a^2b-10a^3$ 加起來.
5. 從 $3a+b-c$ 減 $4a-2b+6c$.
6. 從 x^3+6x^2+5 減 $2x^2-5x+7$.
7. 加何式於 a^3+5a^2b 可得 a^3+b^3 ?
8. 從 $x^3+y^3-6x+5y$ 減 $-2x^2-6x+7y-8$ 與 x^3+2x^2-5y+9 之和.
9. 簡化 $-(a+b)+\{-a-2a-b)\}-6(a-4b)$.
10. 簡化 $6x-\{4x+[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]-8\}$.
11. 簡化 $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$.
12. 從 $z-[3x+(y+5z)]$ 減 $x-(3y+2z)$.
13. 加何式於 x^2+8x+5 可得 x^3-7 ?
14. 加何式於 x^4-9x^2+3y 可得 y^2+x-7 ?

乘　法

積. 所謂兩個代數式 A 與 B 的積, 意思就是式子 AB 用計算定則所可化成的最簡形式. 301

簡化時,下列各定律與定則,尤屬重要:

1. 對易,締結,及分配各律.
2. 指數定律 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
3. 符號定則:

$$a(-b)=(-a)b=-ab; \quad (-a)(-b)=ab.$$

整式相乘的定則. 1. 求兩個多項式的積,將數字因子的積與文字因子的積相乘,再將同文字各冪的指數加起來,以 302

求簡化.

看兩單項式有同號或異號,而在所得結果前加上+或-號.

2. 一個多項式,乘以一個單項式,或另一多項式,用乘式各項遍乘被乘式各項,而將所得各結果加起來.

第一條定則可從對易律與締結律以及指數定律推得. 第二條定則可從分配律推得;例如

$$(a+b+c)(m+n)=(a+b+c)m+(a+b+c)n$$
$$=am+bm+cm+an+bn+cn.$$

第一條定則也適用於不止兩個多項式相乘之積. 這些單項式中-號的個數若是奇數,則積的號是-;否則是+.

不止兩個多項式相乘,可累次應用第二條定則.

例 1. 求 $-4a^2b^2x^3$, $2bx^4$, 以及 $-3a^3x$ 的積.

我們當有 $-4a^2b^2x^3\cdot 2bx^4\cdot(-3a^3x)=24a^2b^2x^3bx^4a^3x=24a^5b^3x^8$.

例 2. 求 $a-2b$ 與 $ab-b^2+a^2$ 之積.

為便利起見,將兩個因子都照 a 的降冪序排列 而選擇比較簡單的一個因子,作為乘式. 這樣就有

$$(a^2+ab-b^2)(a-2b)=a^3+a^2b-ab^2-2a^2b-2ab^2+2b^3$$
$$=a^3-a^2b-3ab^2+2b^3.$$

303 就任何一個文字(或一組文字)而論,積之次是各因子就該文字(或該組文字)而論之次的和.

任何積中的最高次項是各因子中最高次項的積. 據此及 § 302, 1, 即得上述決定積之次的方法.

例如 x^2+1 與 x^3-1 分別是二次式與三次式,而其積 $(x^2+1)(x^3-1)$ 即 $x^5+x^3-x^2-1$ 是五次式.

兩個因子都是齊次式(§276)時,積也是齊次式. 304

因若每一因子的各項有同次,則以此一因子的一項乘彼一因子的一項,所得各積亦有同次. 所以這些積加起來的和是齊次式.

計算時的排列法. 若兩個因子都是由 x 或其他任何單個文字構成的多項式,或任何兩個文字的齊次函數,則計算時的排列方法,以照下例為便: 305

例 1. 以 $x-3+x^2$ 乘 $2x^3-x^2+5$.

$$\begin{array}{rrrrrr}
2x^3 & -x^2 & & +5 & & \\
 & x^2 & +x & -3 & & \\
\hline
2x^5 & -x^4 & & +5x^2 & & \\
 & 2x^4 & -x^3 & & +5x & \\
 & & -6x^3 & +3x^2 & & -15 \\
\hline
2x^5 & +x^4 & -7x^3 & +8x^2 & +5x & -15
\end{array}$$

兩個因子都照 x 的降冪(或昇冪)序排列,乘式寫在被乘式的下面.

然後在各縱行內寫"部分積",對應於乘式的諸項,寫的時候使同類項即同次項在同一縱行內.

最後將這些同類項逐行加起來.

例 2. 以 $2y+x$ 乘 x^2-y^2+2xy.

$$\begin{array}{rrrr}
x^2 & +2xy & -y^2 & \\
x & +2y & & \\
\hline
x^3 & -2x^2y & -xy^2 & \\
 & 2x^2y & +4xy^2 & -2y^3 \\
\hline
x^3 & +4x^2y & +3xy^2 & -2y^3
\end{array}$$

就此例而論,兩個因子都是 x 與 y 的齊次函數.

兩式都照 x 的降冪序排列(就 y 說,是昇冪序),然後實行乘法如例 1.

分離係數. §305 用例子說明的排列方法,從其中各項所處的地位,即足以推知 x 的冪是幾次. 利用這一點,可將 x 省去,單寫係數,以減少計算的手續. 所設多項式的各項有數字係數時,是應當這樣辦的. 306

若兩個因子中有一個是或兩個都是不完全多項式,則必須留心,凡是缺少的項非用係數 0 補上不可.

例. 以 x^3+3x^2-2 乘 x^3-3x^2+2.

$$\begin{array}{r}
1-3+0+2 \\
1+3+0-2 \\
\hline
1-3+0-2 \\
3-9+0+6 \\
-2+6-0-4 \\
\hline
1+0-9+0+12-0-4
\end{array}$$

排列仍照 §305 例1的樣,但祇寫係數,並用0填補缺項.

對應於乘式0項的部分積,省去不寫. 在最後結果中,插入 x 的適當冪——從 x^6 開始,因爲兩因子之次的和是六——即得所求之積 $x^6-9x^4+12x^2-4$.

因結果 $1+0-9+0+12-0-4$ 共有七項,故由此亦可知積是六次式(§277).

這個方法叫做分離係數法(method of detached coefficients),不但適用於由單個文字構成的兩多項式,——兩式都照該文字的降冪或昇冪序排列,——且可適用於由兩個文字構成的兩個齊次式. 因爲這樣的兩個多項式,若照一個文字的降冪序排列,同時就排成另一文字的昇冪序,所以從任何一個係數所處的地位,便可知道該係數後是這兩個文字的幾次冪.

307 **從分離係數法導出來的公式.** 先看下面兩個例:

例 1. 證明恆等式

$$(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=a^5-b^5.$$

$$\begin{array}{r}
1+1+1+1+1 \\
1-1 \\
\hline
1+1+1+1+1 \\
-1-1-1-1-1 \\
\hline
1+0+0+0+0-1
\end{array}$$

用分離係數法,實行第一端所指示的乘法,因而得積的係數,照 a 的降冪序及 b 的昇冪序排列.

積是五次式,這是可以預先知道的;從結果的項數,六,也可知道. 因此,積是

$$a^5+0\cdot a^4b+0\cdot a^3b^2+0\cdot a^2b^3+0\cdot ab^4-b^5, \text{ 即 } a^5-b^5.$$

例 2. 證明下列二恆等式:

$$(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3. \qquad (1)$$

$$(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)=a^4-b^4. \qquad (2)$$

完全照例 1 的樣,應有

$1-1+1$ (1)	$1-1+1-1$ (2)
$1+1$	$1+1$
$1-1+1$	$1-1+1-1$
$\quad 1-1+1$	$\quad 1-1+1-1$
$1+0+0+1$, 即 a^3+b^3.	$1+0+0+0-1$, 即 a^4-b^4.

應用這兩個例所用的方法,可以證明下列各恆等式(此二例是這些恆等式的特例):

n 是正整數時, 308

$$(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b)=a^n-b^n.$$

n 是正奇數時, 309

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})(a+b)=a^n+b^n.$$

n 是正偶數時, 310

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})(a+b)=a^n-b^n.$$

二項式的冪. 由於累次乘法,可計算 $a+b$ 的各次冪. 311
計算時,用分離係數法,可以很快地得到結果.

因爲乘式的係數總是 $1+1$, 所以每乘一次,只須表明部分積及其和. 例如

(1)	$1+1$	即 $a+b$	
	$\quad 1+1$		
(2)	$1+2+1$	即 $a^2+2ab+b^2$	$=(a+b)^2$.
	$\quad 1+2+1$		
(3)	$1+3+3+1$	即 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$=(a+b)^3$.
	$\quad 1+3+3+1$		
(4)	$1+4+6+4+1$	即 $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	$=(a+b)^4$.

有須注意者,每次乘時,第二部分積的係數,就是第一部分積的係數,向右移過一位. 因此,將這兩個部分積的係數相加

而得較高一次冪的係數時，無異在應用着下面的定則：

312　早已求得的某次冪中任何一個係數，加前一個係數，其和就是較高一次冪中的對應係數．

較高一次冪的全部係數，除第一個與末一個外，都可用這定則求得；第一個與末一個係數都是 1．

例如，(4) 的係數對應於 (3) 中 3，3，1 的，是 $3+1=4$，$3+3=6$，及 $1+3=4$．

應用上述定則於 (4)，即得 $4+1=5$，$6+4=10$，$4+6=10$，及 $1+4=5$．此因

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

累次應用這個定則，顯然可以求得 $a+b$ 的 n 次冪，n 是任何所設正整數．

習題．求 $(a+b)^6$，$(a+b)^7$，$(a+b)^8$．

313　**兩個一次二項因子的積．**　讀者應當養成一種習慣，將兩個一次二項因子的積，用視察法 (inspection) 寫出來，卽一看就寫出來．　這種積的標準形式如下：

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \qquad (1)$$

$$(a_0x+a_1)(b_0x+b_1)=a_0b_0x^2+(a_0b_1+a_1b_0)x+a_1b_1 \qquad (2)$$

在積 (1) 中，x 的係數及末一項，分別是 a 與 b 的和與積．

在積 (2) 中，第一項的係數及末一項，分別是兩個因子第一項係數的積及末一項的積．　中間一項的係數是"交叉積" a_0b_1 與 a_1b_0．

例 1．求 $(x+5)(x-8)$．

$$(x+5)(x-8)=x^2+(5-8)x-40=x^2-3x-40.$$

例 2．求 $(x+3y)(x+10y)$．

$$(x+3y)(x+10y)=x^2+(3+10)xy+30y^2=x^2+13xy+30y^2.$$

例 3. 求 $(2x+3)(4x+7)$.

$$(2x+3)(4x+7)=2\cdot4x^2+(2\cdot7+3\cdot4)x+3\cdot7=8x^2+26x+21.$$

習題. 用上述方法求下列各積:

$$(x-10)(x-15),\ (3a+4b)(5a-6b),\ (7x-y)(5x-3y).$$

由 x 構成的任何兩個多項式之積. 先將下面的積考察一下: 314

$$(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)(b_0x^2+b_1x+b_2)$$
$$=a_0b_0x^5+(a_0b_1+a_1b_0)x^4+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^3$$
$$+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^2+(a_2b_2+a_3b_1)x+a_3b_2.$$

積是由 x 構成的多項式,它的次是兩個因子的次之和. 其每一項的係數,可用下述定則求得 其中 a_h 表示 a_0, a_1, a_2, a_3 諸數之一,b_k 表示 b_0, b_1, b_2 諸數之一. 求該項的次與積的次之差;求所有各積 a_hb_k, 其中 $h+k$ 等於此差的,加起來.

例如,求 x^2 的係數,先求差 $5-2=3$, 然後求得 a_1b_2, a_2b_1, a_3b_0,加起來,這些就是所有各積 a_hb_k, 其中 $h+k=3$ 的.

任何兩個由 x 構成的多項式,如 $a_0x^m+\cdots+a_m$ 與 $b_0x^n+\cdots+b_n$, 相乘時,都可以應用這定則. 兩因子有數字係數時,從這定則也可以懂得,積的任何一個特殊係數怎樣求得.

例 1. 求下面一個積中 x^{100} 的係數:

$(a_0x^{75}+a_1x^{74}+\cdots+a_{74}x+a_{75})(b_0x^{60}+b_1x^{59}+\cdots+b_{59}x+b_{60})$.

積的次是 $75+60=135$; 而 $135-100=35$.

因此, x^{100} 的係數是 $a_0b_{35}+a_1b_{34}+\cdots+a_{34}b_1+a_{35}b_0$.

同法可得, x^{35} 的係數是 $a_{40}b_{60}+a_{41}b_{59}+\cdots+a_{74}b_{26}+a_{75}b_{25}$.

例 2. 求下面一個積中 x^3 的係數:

$$(3x^4-2x^3+x^2-8x+7)(2x^3+5x^2+6x-3).$$

所求係數是 $(-2)(-3)+1\cdot6+(-8)5+7\cdot2$, 或 -14.

習題 1. 求例1之積中 x^{110} 及 x^{23} 的係數.

習題 2. 求例2之積中 x^6, x^5, x^4, x^2, 及 x 的係數.

315 **利用已知恒等式求積.** 下列各恆等式(或可稱公式)非常重要,應當留心記住.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \tag{1}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \tag{2}$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \tag{3}$$

此三式外,還可以加入 §§ 308, 309, 310 中的公式,以及下面的一個(§311):

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \tag{4}$$

因爲文字 a 與 b 可以換成隨便什麼代數式,所以利用這些公式,就有很簡單的方法,求得各種各樣不同的積. 看下面各例,自然明白.

例 1. 求 $(3x-5y)^2$.

$(3x-5y)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2=9x^2-30xy+25y^2$. 由 (2)

例 2. 求 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

$$\begin{aligned}(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)&=[(x^2+y^2)+xy][(x^2+y^2)-xy]\\&=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=x^4+x^2y^2+y^4.\end{aligned}$$ 由(3),(1)

例 3. 說明下面求積手續中的各步驟:

$$\begin{aligned}&(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)\\&=[x+(y+z)][x-(y+z)]\cdot[x+(y-z)][x-(y-z)]\\&=[x^2-(y+z)^2]\cdot[x^2-(y-z)^2]\\&=[(x^2-y^2-z^2)-2yz]\cdot[(x^2-y^2-z^2)+2yz]\\&=[x^2-(y^2+z^2)]^2-4y^2z^2\\&=x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2+z^2)^2-4y^2z^2\\&=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2.\end{aligned}$$

有須特加注意者，用這方法，可從 (1) 與 (4) 導出任何多項式的平方與立方。

例如

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2\,ab+2\,ac+2\,bc.$$
$$(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3\,a^2b+3\,b^2a+3\,b^2c+3\,c^2b+3\,c^2a+3\,a^2c+6\,abc.$$

推廣第一個例，可得下述定理：

任何多項式的平方，等於所有各項的平方之和，再加上每 316
兩項之積的兩倍.

習題 1.　求 $(a-b+2\,c-3\,d)^2$.

習題 2.　求 $(1+2\,x+3\,x^2)^2$.

習題 3.　求 $(x^3-x^2y+xy^2-y^3)^2$.

單項式的冪.　任何代數式 A 的 n 次冪，就是式子 A^n 用 317
計算定則所可化成的最簡形式。

從指數定律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 及 $(ab)^n=a^nb^n$，可導出下面的定則：

求單項式 A 的 n 次冪，求其數字係數的 n 次冪，再用 n 遍 318
乘各文字因子的指數.

若 A 有一號，則看 n 是偶數或奇數，而在所得結果前加上 + 號或 − 號.

例如，　$(-2ax^2y^7)^4=(-2)^4a^4x^8y^{28}=16a^4x^8y^{28}$.

因由累次應用定律 $(ab)^n=a^nb^n$，有

$$(-2ax^2y^7)^4=(-2)^4a^4(x^2)^4(y^7)^4,$$

而由累次應用定律 $(a^m)^n=a^{mn}$，即有

$$(-2)^4a^4(x^2)^4(x^7)^4=16a^4x^8y^{28}.$$

習題三

在下列各題中，用最敏捷的方法來乘．若能利用分離係數法，或 § 315 的恆等式，尤應儘量利用．

1. $3x^5-2x^4-x^3+7x^2-6x+5$ 乘以 x^2-3x+1．
2. $5x^3-3ax^2+2a^2x+a^3$ 乘以 $3x^2-ax-2a^2$．
3. $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$ 乘以 $x+y$．
4. $3x^3-2x^2+7$ 乘以 $2x^3-3x+5$．
5. $7x-2y$ 乘以 $4x-5y$，用觀察法．
6. $a^2-ax+bx-x^2$ 乘以 $b+x$．
7. $x^4-2x+5x^2-x^3$ 乘以 $3+x^2-x$．
8. $2x^n-3x^{n-2}+5x^{n-3}$ 乘以 $x^{n-2}-x^{n-3}$．
9. $a^2-ab+3b^2$ 乘以 $a^2+ab-3b^2$．
10. $x+3y-2z$ 乘以 $x-3y+2z$．
11. $x^2+xy+y^2+x-y+1$ 乘以 $x-y-1$．
12. $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab$ 乘以 $a+b-c$．
13. $3x-2y+5$ 乘以 $x-4y+6$．
14. $x+7y-3z$ 乘以 $2x+y-8z$．

求下列各積：

15. $(b+x)(b-x)(b^2+x^2)$．
16. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$．
17. $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$．
18. 作 x^2+x+1 一，二，三，四次冪的係數表．
19. 將 $a+b$ 各次冪的係數，繼續求到十次冪．
20. 求 $(4x-3y)^2$ 與 $(4x-3y)^3$．
21. 求 $(x+2y+3z-4u)^2$．
22. 求 $(x+2y+3z)^3$；及 $(x+2y-2z)^3$．
23. $(a+2b)^2$ 乘以 $(a-2b)^2$．
24. 求下面積中 x^{29} 及 x^{15} 的係數：

$$(a_0x^{27}+a_1x^{26}+\cdots+a_{26}x+a^{27})(b_0x^{19}+b_1x^{18}+\cdots+b_{18}x+b_{19})．$$

25. 求下面積中 x^6, x^8, 及 x^4 的係數:

$(2x^6-3x^5+4x^4-7x^3+2x-5)(3x^5-x^3+2x^2+3x-8)$.

26. 核驗下列各恆等式:

1. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(y+z)(z+x)(x+y)$.
2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.
3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.
4. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)$ $+3c^2(a+b)+6abc$

27. 簡化下列各冪:

$(2a^2x^3y^7)^5$, $(-x^5y^8z^9)^7$, $(a^2b^mc^3)^{2n}$, $(a^mb^nc^{2n})^n$.

28. 簡化下列各積:

$(-ab^2c^3)(a^3b)^2(-ac^3)^5$, $(-2x^2y^4)^3(ax^5y^{11})^2$.

除　法

商. 設 A 與 B 表示任何兩個代數式,其中 B 不等於 0. 319
所謂以 B 除 A 所得之商,意思就是分數 A/B 用計算定則所可化成的最簡形式.

公式. 將 A/B 簡化時,下列公式非常有用: 320

1. $$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}.$$

2. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$,當 $m>n$ 時; $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{1}{a^{n-m}}$,當 $n>m$ 時.

3. $\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{b}$, $\quad\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}$, $\quad\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$.

4. $$\frac{a+b}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}.$$

證明 1, 3, 及 4, 可用 § 253 的定則:

兩式乘以(不等於 0 的)任何第三式,若積相等,則此兩式相等.

因在 1 中,兩端都乘以 bc,積都是 ac. 列式如下:

$$\frac{ac}{bc}bc=ac;\ 及\ \frac{a}{b}bc=\frac{a}{b}b\cdot c=ac. \qquad §§\ 254,\ 252$$

又在 3 中,第一等式的兩端都乘以 b,積都是 $-a$;第二及第三等式的兩端都乘以 $-b$,積分別都是 a 與 $-a$. 現在就第一款列式如下:

$$\frac{-a}{b}b=-a;\ 而\ \left(-\frac{a}{b}\right)b=-\frac{a}{b}b=-a. \qquad §§\ 298,\ 254$$

最後,在 4 中,兩端都乘以 d,積都是 $a+b$. 列式如下:

$$\frac{a+b}{d}d=a+b;\ \left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}\right)d=\frac{a}{d}d+\frac{b}{d}d=a+b. \qquad §§\ 254,\ 252$$

公式 2 是公式 1 的特例. 現在就第一款列式如下:

若 $m>n$, $\qquad a^m=a^{m-n}\cdot a^n. \qquad$ § 256

因此 $\qquad \frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{m-n}\cdot a^n}{a^n}=a^{m-n}. \qquad$ 由 1

321 **簡化 A/B 的定則.** 由公式 1, 2, 及 3 (§ 320),可得簡化 A/B 的定則如下:

1. 分子與分母的一切公共因子都約去.

2. 分子與分母含有同文字 (或同式) 的不同冪時,約去較低冪,並從較高冪的指數減去較低冪的指數.

3. 看分子與分母有同號或異號,而在商之前加上 + 號或 − 號.

例如, $\frac{bca^5}{ca^2}=ba^{5-2}=ba^3$, 而 $\frac{a^2}{-a^7}=-\frac{1}{a^{7-2}}=-\frac{1}{a^5}$.

322 **用單項式除的定則.** 從除法的定義和 § 320, 4, 可以導出下列定則.

1. 用一多項式除另一多項式,將被除式寫在除式上方,成功一個分數,然後簡化.

2. 用單項式除多項式，將除式遍除被除式的各項，再將所得之商加起來.

例如，$-8a^3b^2c \div 6ab^6d = \frac{-8a^3b^2c}{6ab^6d} = -\frac{4a^2c}{3b^4d}$.（約去公因子 $2ab^2$，再應用符號定則）

又如，$(ax^3 - 4a^2x^2) \div ax = \frac{ax^3}{ax} - \frac{4a^2x^2}{ax} = x^2 - 4ax$.

但若 d 與 a 及 b 都無公因子，則我們以爲商的形式寫成 $(a+b)/d$，比 $a/d + b/d$ 簡單.

用多項式除多項式. 若 A 與 B 是有公因子的兩個多項式，則用 B 除 A 而得之商，就是 A/B 在約去這些公因子後，所可化成的式子. 323

例如，若 $A = x^2 - y^2$，$B = x^2 + 2xy + y^2$，則商就是 $(x-y)/(x+y)$.

因 $\frac{A}{B} = \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{x+y}$.

在另外一章中，要講述幾個方法，可藉以求得兩個多項式的公因子. 還有一種叫做長除法(long division)的手續，將在第五章中論述.

複式. 讀者注意，$a \div b \times c$ 一式的意思是 $\frac{a}{b}c$，但 $a \div bc$ 一式的意思，却像 $a \div (b \times c)$ 一樣，乃是 a/bc. 324

在論述分式的一章裏，就要講到所謂複式（complex expression），其中有指明的乘法及除法. 這裏要特別提出來說的有

$$a \times (b \times c \div d) = a \times b \times c \div d. \tag{1}$$

$$a \div (b \times c \div d) = a \div b \div c \times d. \tag{2}$$

在 (1) 式中，可見括號去掉時，括號內的 × 號與 ÷ 號不變；但在 (2) 式中，括號去掉時，括號內的 × 號變成 ÷ 號，÷ 號變成 × 號.

習題四

1. 用 $10\,ab^2c^2$ 除 $15\,a^3bc^2$.
2. 用 $-100\,ax^7z^9$ 除 $75x^2y^4z^{10}$.
3. 用 $28x^my^{m+n}$ 除 $-35x^{2m}y^n$.
4. 用 $-18\{a(b^2c)^2\}^3$ 除 $-54\{(ab^2)^2c\}^5$.
5. 用 x^2-y^2 除 x^2y-xy^2.
6. 用 $(x-y)(x^2-xy+y^2)$ 除 $(x^3-y^3)(x^3+y^3)$.
7. 簡化 $\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{(b-a)(c-b)^2(a-c)^3}$.
8. 簡化 $\dfrac{30\,a^2b^3c^4-25\,a^3b^2c^5+20\,a^4b^4c^7}{-5ab^2c^3}$.
9. 簡化 $\dfrac{3(x-y)^4-2(x-y)^3+5(x-y)^2}{(y-x)^2}$.
10. 簡化 $4\,a^7\times(3\,ab^3c^2)^2\div(abc)^2\div6\,bc$.
11. 簡化下式，(1) 照指明的次序，(2) 先去括號：

$$a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}.$$

12. 必須用何式乘 $2\,a(x^2y^3)^2$ 纔可以得到 $-4\,a^2(x^3y^2)^2$?

III. 一元一次方程式

條件方程式

325 $3\,x-4$ 與 $x+6$ 兩式，是不能恆等的（§ 281），所以並不在 x 有一切值時都有等值． 倘若問，“在 x 有什麼值（一個或幾個）時，這兩式的值相等?”，那麼這個問題可用下式來表示：

$$3\,x-4=x+6.$$

在此式中，假定 $3\,x-4$ 與 $x+6$ 有同值．

照上面那樣寫成的式子，叫做條件方程式 (conditional

equation)，因為它所陳述的乃是待"未知數" x 去適合的一個條件.

它使 x 受到了限制，祇許 x 有適合這個條件的值，而其本身，也祇在 $3x-4$ 與 $x+6$ 有同值時，纔得眞確.

同樣，$x+y=0$ 是有兩個未知數 x 與 y 的條件方程式，概言之，

若兩式 A 與 B 並不恆等，則 $A=B$ 就是**條件方程式**. 326
它的意思是："A 與 B 經假定有等值". 它並且限制 A 與 B 中代表變數的文字，祇許它們有可使此一假定眞確的各值.

條件方程式 $A=B$ 中的文字，其值受到這樣的限制的，叫做這個條件方程式的未知數或未知文字或元.

"條件方程式"往往簡稱"方程式"，以下卽用此簡稱.

若方程式中的文字都是未知數，例如 x, y, z，則此方程式 327
叫做**數字方程式**(numerical equation)；若此外尙有已知文字，例如 a, b, c，則此方程式叫做**文字方程式**(literal equation).

例如，$2x-3y=5$ 是數字方程式，但 $ax+by=c$ 是文字方程式. 文字方程式中的已知文字，其值不受限制.

若 A 與 B 就未知文字而論，都是有理整式，則 $A=B$ 叫 328
做**有理整方程式**. 但若 A 或 B 是無理式或分式，則 $A=B$ 叫做無理方程式或分方程式.

這個分類法與數字或已知文字無關. 因此，$\sqrt{2}x+y/b=c$ 是有理整方程式.

有理整方程式化成最簡形式時(§340)其各項之次最高 329
的，就是該**方程式的次**.

例如 $ax^2+bx=c$ 的次是二；$x^3z^2+y^4=b$ 的次是五. 判定方程式的次，與一切未知文字有關，但亦祇與這些文字有關.

330 方程式因次之不同，而有**一次方程式**(linear equation)，**二次方程式**(quadratic equation)，**三次方程式**(cubic equation)，**四次方程式**(biquadratic equation)等等的區別。一次方程式往往又稱**簡單方程式**(simple equation)。

331 方程式中僅有一個未知文字，例如 x，則 x 之值，其個數限於有窮數。我們說，x 的這些值適合此方程式，或說，是這方程式的解(solution)或根(root)。因此，

332 祇有一個元 x 的一個方程式，它的根是一個數或已知式，將此數或此式代替 x，可使方程式變成恆等式。

例如，1 與 -2 是方程式 $x^2+x=2$ 的根；因 $1^2+1\equiv 2$ 而 $(-2)^2+(-2)\equiv 2$。

又如，$a-b$ 是 $x+b=a$ 的根；因 $(a-b)+b\equiv a$。

333 **注意**. 1. 一個方程式也許會沒有根；因爲它所陳述的條件，也許沒有一個數可以適合。

例如，方程式 $x+2=x+3$，就沒有一個有窮數適合它。

2. 凡是有一個元 x 的方程式，倘若有根，則 x 祇是代表諸根中任何一根的記號。輪流將各根代替 x，可得若干眞恆等式。方程式本身，實在不過是代表這些眞恆等式的充恆等式(disguised identity)罷了。

例如，$x^2+x=2$ 不過是 $1^2+1\equiv 2$ 與 $(-2)^2+(-2)\equiv 2$ 兩恆等式的代表。

論解方程式

334 所謂解(solve)一個一元方程式，就是找它的一切諸根，或證明它沒有根。

這手續所根據的推理方法，可用下述各例來說明。

例1. 解方程式 $3x-4=x+6$。

先假定 x 有一值，在 x 有此值時，這方程式是眞確的。推理方法如下：

若	$3x-4=x+6$,	(1)
則	$3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4)$,	(2) § 249
即	$2x=10$,	(3) § 300
所以	$x=5$.	(4) § 253
因此，若	$3x-4=x+6$，則 $x=5$.	(a)

這樣證明的命辭 (a), 它所陳述的是,無論何時若 (1) 是眞確的,則必在 $x=5$ 時,換言之,祇有 5 能够是 (1) 的一個根;但此命辭並不說,5 是 (1) 的一個根. 後一個陳述應當是

若 $x=5$, 則 $3x-4=x+6$. (b)

(b) 與 (a) 並不相同,只是 (a) 的逆辭(§ 291).

將 5 代替 (1) 中的 x,即可證明 5 是 (1) 的根;因爲這樣一來,就得到眞恆等式 $3\cdot5-4\equiv5+6$.

不過這一步不是必要的,除非要核驗我們所作計算的準不準. 因若一個眞確的命辭,已用可倒的手續予以證明,則當可斷定,它的逆辭亦必眞確 (§ 293), 就 (a) 而論,便是如此,因從 (1) 導出 (4) 所用的手續,其各步都是可倒的,所以全部手續是可倒的. 現在逐步倒推如下:

若	$x=5$,	(4)
則	$2x=10$,	(3) § 253
即	$3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4)$,	(2) § 300
所以	$3x-4=x+6$.	(1) § 249

因此,用可倒的手續證明命辭 (a) 時,同時又證明了逆辭 (b),這就是說,不但證明了除 5 以外無他數能够是 (1) 的根,而且證明了 5 本身是 (1) 的根.

例 2. 解方程式 $x^2=9$.

若 $x^2=9$, (1)

則 $x=3$, (2) 或 $x=-3$, (3) § 257

因此, (1) 不能有 3 與 −3 以外的根.

但 3 與 −3 都是 (1) 的根,因爲方程式 (2) 與 (3) 從 (1) 導出的步驟是可倒的. 因此,從 (2) 可得 (1), 而從 (3) 也可以得 (1) (§ 257).

這些例題,說明了下面的一般原理: 335

由 x 構成的一個方程式,要找它的根,可先把它看成已知的恆等式,然後用計算定則,求得有 $x=c$ 這個形式的一切方程式,這些方程式,在此假定之下,是必然可以從它求得的.

這些方程式中的一個如 $x=c$, 其所經推出的手續,若在 x

的值是 c 時，是可倒的，則可立卽斷定，c 是它的一個根；而所用的手續，若其各步都是可倒的，就是可倒的.

336 事屬重要，切不可忘的是，僅用計算定則，從一個方程式推出了 x 的某一值，不足以證明它就是一個根. 要保證它是一個根，所用手續非是可倒的不可.

例如，從	$x-2=0,$	(1)	
可得	$(x-2)(x-3)=0,$	(2)	§ 253
因而有	$x=2$，或 $x=3$.	(3)	§ 253

但是我們決不能下謬誤的結論，說 3 是 (1) 的根. 因在 $x=3$ 時，不能够把手續倒過來，即不能用 $x-3$ 除 (2) 的兩端，因爲此時除式 $x-3$ 是 0.

在另一方面說，當 $x=2$ 時，就能够把手續倒過來，因爲此時 $x-3$ 不是 0 而是 -1；所以 2 是 (1) 的根.

變換定理

337 若將計算定則應用於一個方程式，不論怎樣應用，祇要用得不錯，像剛纔所說的一般，則此方程式所經的變換 (transformation)，就是合法的變換. 又若這個變換是可倒的，則可斷定這方程式的根並未因此而有改變. 因此有下面的定理：

338 **定理 1.** 一個方程式經過下列的變換，其根不變：

1. 將結合定則 (§259) 分別應用於各端.
2. 將任何式子，有一個有窮值的，加於兩端，或從兩端減去.
3. 將同一常數 (不是 0) 乘或除兩端.

因爲在這些變換之中，所牽涉到的計算定則，都是可倒的 (§253)。

2 與 3 又可證明如下：

若 A 與 B 是由 x 構成的式子，則方程式 $A=B$ 的根，乃是代替 A 與 B 中的 x 後，可使 $A\equiv B$ 的數（§332）.

但 x 的任何值，可使 $A\equiv B$ 且可使 C 之值是有窮數的，亦可使 $A+C\equiv B+C$，其逆也成立（§249）；因此 $A=B$ 的根同於 $A+C=B+C$ 的根.

又若 c 表示 0 以外的任何常數，則 x 的任何值，可使 $A\equiv B$ 的，亦可使 $cA\equiv cB$，其逆也成立（§253）；因此，$A=B$ 的根同於 $cA=cB$ 的根.

例如，在 §334 例 1 中，方程式

$$3x-4=x+6, \tag{1}$$

$$3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4), \tag{2}$$

$$2x=10, \tag{3}$$

$$x=5. \tag{4}$$

都有同一的根，即 5.

這裏 (2) 是經由變換 2 從 (1) 導出的，(3) 是經由變換 1 從 (2) 導出的，而 (4) 是經由變換 3 從 (3) 導出的.

系. **一個方程式經過下列各變換，其根不變：** 339

1. **將一項變更符號，從此一端移到他一端.**
2. **對消兩端中相同的項.**
3. **變更兩端中所有各項的符號.**

因為 3 無異於用 -1 乘兩端．而 1 與 2 則同於從方程式兩端，減去所移或所對消的項.

例若從	$x-a+b=\quad c+b$	(1)
的兩端減去	$\underline{\quad -a+b=-a+b\quad}$	
得	$x\qquad\quad = \quad c+a$	(2)

減的效用，是對消 (1) 的兩端中的 b，以及將 $-a$ 變更符號，從第一端移到第二端.

經由 §§338, 339 所述各種變換，凡是由 x 構成的有理整方程式，都可以不變其根而化成標準形式 340

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

方程式的次,須在化成這個形式時,始可予以判定. 由不止一元構成的有理整方程式,也是如此.

例如,$x^2+3x+5=x^2-4x+7$ 可以化成 $7x-2=0$. 所以它的次是一,不是二.

341 **定理 2.** 當 $A, B,$ 及 C 是整式時,方程式

$$AC=BC$$

的根同於兩方程式

$$A=B \text{ 及 } C=0.$$

因爲 x 的任何值,可使 $AC\equiv BC$ 的,必定可使 $A\equiv B$ 或 $C\equiv 0$;逆言之,x 的任何值,可使 $A\equiv B$ 或 $C\equiv 0$ 的,必可使 $AC\equiv BC$ (§§ 251, 253).

在此證中,假定 A, B, C 的值,就所論及的 x 各值而論,都是有窮數. 若 A, B, C 都是整式,像這裏所假定的一樣,則 A, B, C 的值常爲有窮數;但若 A, B, C 是分式,那就不一定如此.

這定理有一個特例,即若 A 與 C 是整式,則方程式 $AC=0$ 的根,同於兩方程式 $A=0$ 及 $C=0$.

例如方程式 $x^2=3x$ 的根,同於兩方程式 $x=3$ 及 $x=0$;即其根爲 3 與 0.

又如方程式 $(x-1)(x-2)=0$ 的根,同於兩方程式 $x-1=0$ 及 $x-2=0$;即其根爲 1 與 2.

342 因此,用同一整函數 C,乘整方程式 $A=B$ 的兩端,其結果是引入客根 (extraneous root),卽引入方程式 $C=0$ 的根. 逆言之,從整方程式 $AC=BC$ 的兩端,除去同一整因子 C,其結果是遺漏幾個根,卽遺漏 $C=0$ 的根.

從另一方面講,分方程式中的兩端,用所有分式的最低公分母乘,有時不引入客根.

例如有方程式 $1/x=1/(2x-1)$,若用 $x(2x-1)$ 乘其兩端,則得 $2x-1=x$,它的根是 1. 因爲 1 不是 $x(2x-1)=0$ 的根,所以並未引入客根.

系. 整方程式 $A^2=B^2$ 的根同於兩方程式 $A=B$ 及 $A=-B$. 343

因 $A^2=B^2$ 的根同於 $A^2-B^2=0$ (§ 339). 又因 $A^2-B^2\equiv(A-B)(A+B)$, 故方程式 $A^2-B^2=0$ 的根同於兩方程式 $A-B=0$ 及 $A+B=0$ (§ 341). 所以 $A^2=B^2$ 的根同於兩方程式 $A=B$ 及 $A=-B$ (§ 339).

例如方程式 $(2x-1)^2=(x-2)^2$ 的根, 同於兩方程式 $2x-1=x-2$ 及 $2x-1=-(x-2)$; 即其根爲 -1 與 1.

因此,將方程式 $A=B$ 的兩端自乘,其結果,是引入了客根,即引入方程式 $A=-B$ 的根. 逆言之,從 $A^2=B^2$ 導出單個方程式 $A=B$,其結果,是遺漏若干根,即遺漏方程式 $A=-B$ 的根. 344

因從 § 308, $A^n-B^n\equiv(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+B^{n-1})$,故由 § 343 的推理可知, $A^n=B^n$ 的根,就是 $A=B$ 及 $A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+B^{n-1}=0$ 兩方程式的根. 345

例如,因 $x^3-1\equiv(x-1)(x^2+x+1)$, 故方程式 $x^3=1$ 的根,同於兩方程式 $x=1$ 及 $x^2+x+1=0$ 所有的根.

剛纔所證明的各定理 (§§ 338—345), 亦適用於由不止一元構成的方程式,祗要將根字換成解 (§ 355). 346

例如, 由 § 339, 方程式 $x+2y-3=0$ (1) 與方程式 $x=-2y+3$ (2) 有同解,這就是說, x 與 y 所有各對之値適合 (1) 的,都適合 (2), 適合 (2) 的都適合 (1).

同等方程式. 兩個或不止兩個方程式,若其根(或解)全部相同,則稱爲同等方程式(equivalent equations). 347

例如方程式 $A=B$ 與 $A+C=B+C$ 是同等的 (§ 338). 又如方程式 $AC=BC$,與兩方程式 $A=B$ 及 $C=0$ 同等 (§ 341).

但 $x^2=9$ (1) 與 $x=3$ (2) 是不同等的,雖然都有根 3. 因爲 (1) 還有根 -3,此根非 (2) 所有.

一次方程式的解法

348 從§338, 339的變換定理，可立卽導出下面的定則，藉以求解由一元如x構成的一次方程式.

求解由x構成的一次方程式，將它化成$ax=b$的形式.於是

1. 若$a\neq 0$，這方程式有單根b/a.
2. 若$a=0$，而$b\neq 0$，這方程式沒有根.
3. 若$a=0$，且$b=0$，則此方程式是一個恆等式.

若此方程式有分數係數，則通常以先用這些分數的最低公分母，遍乘兩端各項為宜. 這手續叫做去方程式的分母(clearing the equation of fractions)或單稱去分母.

其次將含有未知數的各項移到第一端，將不含未知數的各項移到第二端，再合併兩端的各項. 這樣就把方程式化成$ax=b$的形式. 若欲核驗結果，可將該結果代替原方程式中的x.

例1. 解 $\frac{2x}{3}-\frac{x-2}{2}=\frac{x}{6}-(4-x)$.

去分母，用最低公分母6乘兩端.

則可得 $4x-3(x-2)=x-6(4-x)$，

即 $4x-3x+6=x-24+6x$.

移項合併， $-6x=-30$.

所以 $x=5$.

核驗. $\frac{2\cdot 5}{3}-\frac{5-2}{2}\equiv\frac{5}{6}-(4-5)$.

例2. 解 $mx+n=px+q$.

移項合併， $(m-p)x=q-n$.

因此，若$m\neq p$，此方程式有單根$(q-n)/(m-p)$.

若$m=p$，而$q\neq n$，此方程式無根.

若$m=p$，且$q=n$，則此方程式是恆等式，x的一切諸值都適合它.

例 3. 解 $(x+a)(x+b)=(x-a)^2$.

展開， $x^2+(a+b)x+ab=x^2-2ax+a^2$.

對消 x^2，移項合併，

則得 $(3a+b)x=a^2-ab$,

因而 $$x=\frac{a^2-ab}{3a+b}.$$

方程式的一個根，有時可用視察法求得． 此方程式若是一個一次方程式，則已完全得解，因除所得一根之外，不能再有他根． 349

例． 解 $(x-a)^2-(x-b)^2=(a-b)^2$.

這顯然是一個一次方程式，且在 $x=b$ 時，可化成恆等式 $(b-a)^2=(a-b)^2$. 因此，它的根是 b.

方程式有 $AB=0$ 的形式，其中 A 與 B 都是由 x 構成的一次整式，則由解 $A=0$ 與 $B=0$ 兩個一次方程式，即可求得這個方程式的根（§341）． 同樣，若 A, B, C 都是一次式，則 $ABC=0$, $AC=BC$, 以及 $A^2=B^2$ 的根，都可以由解一次方程式而求得（§341, 343）． 350

例 1. 解 $(x-2)(x+3)(2x-5)(3x+2)=0$.

此方程式與下列四個方程式同等（§317）：

$$x-2=0,\quad x+3=0,\quad 2x-5=0,\quad 3x+2=0.$$

因此，它的根是 2, -3, $5/2$, $-2/3$.

例 2. 解 $4x^2-5x=3x^2+7x$.

此方程式的根同於兩方程式

$$x=0 \text{ 與 } 4x-5=3x+7.$$

所以它的根是 0 和 12.

習 題 五

解下列各方程式：

1. $15-(7-5x)=2x+(5-3x)$.
2. $x(x+3)-4x(x-5)=3x(5-x)-16$.
3. $(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)=0$.

4. $x=1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}$.

5. $x-2[x-3(x+4)-5]=3\{2x-[x-8(x-4)]\}-2$.

6. $2\{3[4(5x-1)-8]-20\}-7=1$.

7. $\frac{1}{2}\{\frac{1}{3}[\frac{1}{4}(\frac{1}{5}x-1)-6]+4\}=1$.

8. $3-\frac{5-2x}{5}=4-\frac{4-7x}{10}+\frac{x+2}{2}$.

9. $\frac{3x-1}{3}+3=-\frac{x-4}{6}+\frac{3x+5}{4}-2\frac{1}{2}$.

10. $\frac{5x-.4}{.3}+\frac{1.3x-.05}{2}=\frac{13.95-8x}{1.2}$.

11. $3cx-5a+b-2c=6b-(a+3bx+2c)$.

12. $(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)+(a-b)(c-x)=1-x$.

13. $\frac{x+1}{a+1}+\frac{x}{a}=2$, 由觀察法.

14. $\frac{x+1}{a+b}+\frac{x-1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}$.

15. $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)x=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2x$.

16. $(2x-1)(3x-1)(4x+1)(5x+2)=0$.

17. $(x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9)$.

18. $(x+2)^3-(x-2)^3=32x+16$.

19. $[(a+b)x-c]^2=[(a-b)x+c]^2$.

20. $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0$.

問　題

351 **論解問題.** 下列各問題中所求的,乃是從所設的關係,即從所謂問題的條件,可使若干未知數與已知數,彼此發生聯繫者,導出各未知數之值.

解問題時,常用一文字如 x, 代表未知數中的一個. 於是根據所設條件,就可以用由 x 構成的式子,來表示其餘各未知

數,且可立一方程式,把這樣得到的各式;聯繫起來. 這一個方程式,無異於用代數記號來陳述的原問題. 解這方程式,求 x 之值. 若此問題有解,則其解就是這樣求得的 x 之值,以及其餘各未知數的對應值.

352 然而這樣求得的 x 之值,也許不是問題的合理之解. 因為問題也許對於未知數的特徵,加以限制,例如須為整數,但是將問題譯成的由 x 構成的方程式,對於 x 的值是沒有這個限制的.

故在由 x 構成的方程式得解之後,必須先注意所得的結果,是不是所要找的那種數,然後判定它是不是問題的解. 倘若不是所要找的那種數,就可以斷定原問題乃是一個不可能的問題.

例 1. 一個兩位數的數字和是 12. 顛倒數字次序所得之數,是原數的 4/7. 問這是什麼數?

這裏共有四個未知數,即十位數字,個位數字,所求數之值,數字次序顛倒後所得之數;然此四數,都可以用由十位數字或個位數字構成的式子表示出來.

命 $x=$十位數字.

則 $12-x=$個位數字,

$10x+(12-x)=$所求數之值,

$10(12-x)+x=$數字次序顛倒後所得之數之值.

由問題中所設其餘的條件,當有

$$10(12-x)+x=\frac{4}{7}[10x+(12-x)]. \qquad (1)$$

解此方程式,得 $x=8$,這是小於 10 的整數,所以是問題的合理之解. $12-x=4$,也是合理之解. 因此所求數是 84.

注意,問題稍加修改,便成為不可能的問題. 例若將"原數的 4/7"改為"原數的兩倍",則所立方程式便不是 (1),而是

$$10(12-x)+x=2[10x+(12-x)]. \qquad (2)$$

解 (2) 得 $x=32/9$，此數既是分數，就不是這個問題的合理之解。

353 待解的問題，若與某某量(例如時間)有關，則以代數方法陳述該問題時，所用文字及式子，其所代表的並非各量的本身，而是用某一個或某某幾個所設單位，表示各量含度之數。這一點，須牢記勿忘。還有一點也非留心不可，卽所有同種之量，不論已知或未知，其含度須用同一單位表示。

例 1. 水槽一隻，有進水管 A 及排水管 B，A 經 3 小時可將水槽灌滿，B 經 3 小時 40 分可將水排盡。若兩管齊開，則空槽水滿，須經多少時間?

命 x 表示所需小時數。

則 $1/x$ 是 A 與 B 齊開時，經過一小時灌入槽中之水，所占全槽的一部分。

但若單開 A 管，則一小時灌入的部分是 $1/3$。

又若單開 B 管(而槽中有水)，則一小時流出的部分是 $1/3\frac{2}{3}$ 即 $3/11$。

因此 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{3}{11}，即\ \frac{2}{33}.$$

於是 $$x=33/2\ 小時，即\ 16\ 小時\ 30\ 分.$$

例 2. 某船夫在河中划船，前進 2 哩，逆流需時 15 分，順流只需 10 分鐘。問水流的速率是多少? 又此船夫在靜水中划船的速率是多少?

命 $x=$ 水流速率每分鐘的哩數。

因划船速率在逆流時是每分鐘 $2/15$ 哩，故在靜水中是 $2/15+x$。

又因划船速率在順流時是每分鐘 $2/10$ 即 $1/5$ 哩，故在靜水中是 $1/5-x$。

因此 $$\frac{2}{15}+x=\frac{1}{5}-x,$$

從這方程式可得 $$x=\frac{1}{30}(每分鐘哩數),$$

及 $$\frac{2}{15}+x=\frac{1}{6}(每分鐘哩數).$$

例 3. 兩點鐘與三點鐘之間，鐘點上時針與分針指反對方向，在什麼時刻?

命 $x=$ 從兩點鐘到所求時刻所經的分鐘數。

分針既從 XII 開始轉動，則此時必已轉過 x 分格 (minute space).
時針從 II 開始轉動，即在分針前 10 分格，但其轉動速率祇有分針的 1/12.
故當分針轉到 XII 過 x 分格處時，時針轉到 XII 過 $10+x/12$ 分格處.
但由問題中所開的條件，此時分針應在時針前 30 分格.

因此 $$x=\left(10+\frac{x}{12}\right)+30,$$

解方程式 $$x=43\frac{7}{11}\text{分格}.$$

故兩針指反對方向的時刻，是兩點過 $43\frac{7}{11}$ 分，或 3 點缺 $16\frac{4}{11}$ 分.

有時陳述問題時，已知數用文字如 a, b, c 來表示. 此時 354
所得 x 之值，乃是由 a, b, c 構成的式子，此式在這些文字有某某值時，也許可以代表問題的合理之解，但在有其他之值時，也許不能.

下面的問題，即所謂郵差問題 (problem of couriers)，它的討論，就可以說明這一點.

例題. 有 A 與 B 兩郵差，同路同向而行，速率分別是每小時 m 與 n 哩. 今 B 在 A 前 d 哩. 兩人會走在一處麼? 若會，在什麼時候?

命 $x=$ 從現在起到兩人在一處時所經的小時數.

那個時候 A 已走過 mx 哩，B 已走過 nx 哩；且因 B 本在 A 前 d 哩，故有

$$mx=nx+d, \tag{1}$$

由此式可得 $$(m-n)x=d, \tag{2}$$

因而 $$x=\frac{d}{m-n}\text{小時 (從現在起所經過的)}. \tag{3}$$

1. 若 A 可追着 B，x 的此值非正不可；因從假設，d, m, n 都表示正數，故必須 $m>n$. 這個條件對應於下述顯明的事實，即 A 若欲追及 B，非比 B 走得快不可.

2. 若 $m<n$，則 x 的值是負的，似乎沒有意義；但若假定兩人在 $d/(n-m)$ 小時前，曾走在一處，就有意義了.

3. 若 $m=n$,那麼說句正當的話,不能從 (1) 導出 (3), 因爲這一步是用等於 0 的 $m-n$ 除兩端. 但若 m 比 n 略大一些,則不論 m 與 n 的差是怎樣微小,總可以從 (1) 導出 (3). 且若在 (3) 中,認 m 是變數,它在仍大於 n 時逐漸減小而趨近於 n, 則分數 $d/(m-n)$ 就成爲逐漸增大的變數,而且沒有限制 (§ 510). 這情形,與下述明題的事實對應,即 A 的速率超過 B 的速率愈少, A 追及 B 所需的時間愈長,若 A 的速率同於 B, A 就永遠不能追及 B.

4. 最後,若假定 $m=n$ 及 $d=0$, 則方程式 (1) 可爲 x 的一切值所適合. 這和下述明題的事實對應,即 A 與 B 的速率相等,現在一起走,永遠一起走.

習題六

1. 一個兩位數的數字和是 14. 數字次序顚倒,此數增加 18. 這是什麼數?

2. 用什麼數除 156, 可得商 11 及剩餘 2?

3. 兩數之差是 298. 若用較小數除較大數,商及剩餘都是 12. 這兩個是什麼數?

4. 一個兩位數的十位數字是個位數字的兩倍. 加 1 於十位數字,加 5 於個位數字,得一數;將數字次序顚倒,從十位數字減 1, 從個位數字減 5, 又得一數. 若前者是後者的三倍,則原數是什麼?

5. 從某數減 2,剩餘乘以 4,得一數;再取某數的兩倍,及比某數小一的另一數的一半,加起來,又得一數. 若二數相等,則原數是什麼?

6. 父親現在的年齡,四倍於其子;再過 20 年,二倍於其子. 現在父子各幾歲,從現在起幾年後,父親年齡三倍於其子?

7. 水槽一隻,開第一管進水, 3 小時滿,開第二管放水, 2 小時空,開第三管放水, 4 小時空. 三管齊開,水槽由滿而空,需多少時間?

8. A 與 B 能在 10 天內做完一件工作；但在第七天末，A 生起病來，由 B 獨作，再經 5 天完成．問各人獨作，各需幾天完成？

9. 在八九點鐘之間什麽時刻錶上兩針指同向？指反對方向？

10. 四點鐘後，錶上兩針在什麽時刻成功直角？

11. 有一隻指時不準的鐘，經察得每隔 66 分，時針與分針重疊一次．此鐘每小時差多少秒？

12. 四個人，A, B, C, D，分銀幣 1300 元，B 所分得的是 A 的 $\frac{2}{3}$，C 所分得的是 B 的 $\frac{2}{3}$，D 所分得的是 C 的 $\frac{2}{3}$．問各人分得多少？

13. 某人將其財產的 $\frac{1}{2}$ 又銀幣 1000 元給長子；餘款的 $\frac{1}{2}$ 又銀幣 1000 元給次子；二次所餘的 $\frac{1}{2}$ 又銀幣 1000 元給幼子．若尚餘銀幣 3500 元，則此人全部財產是銀幣多少元？

14. 正方形一個，若其每邊增加 2 呎，則其面積增加 100 方呎．問這正方形的面積是多少？

15. 旗竿頂上縛一繩，該繩比旗竿長 2 呎，拉直到地，離開旗竿脚 18 呎．問這旗竿長幾呎？

16. 錢袋內有一元幣若干個，有半元幣個數兩倍於一元幣，又有一角幣個數三倍於一元幣．若總值是 11.50 元，則三種銀幣各有幾個？

17. 某人投資銀幣 5000 元，一部分的利率是 6%，還有一部分的是 4%．若全部投資的平均利率是 $5\frac{1}{2}$%，則兩部分各是多少？

18. 每磅價銀幣 2 角與每磅價銀幣 3 角的咖啡，混合成每磅價 2 角 6 分的咖啡，應當怎樣混合？

19. 銀銅合金一磅，其中含銀 2 份，含銅 3 份．欲改變此合金的成份，使含銀 3 份，含銅 7 份，須再熔入銅多少？

20. 某液體一加侖,加一定量的水以後,其所含酒精是 30%;加兩倍那樣多的水,所含酒精是 20%. 問每次加水多少,原液體含酒精百分之幾?

21. 每小時行 45 哩的列車,上午 10 點鐘從甲站開往乙站;另有每小時行 50 哩的列車,上午十點半從乙站開往甲站. 若兩站相隔 90 哩,則在什麼時刻,離乙站多少路的地方交車?

22. 兩列車在前題所說的時刻開車,且在甲乙兩站間半路上交車. 若慢車的速率是快車的 $\frac{3}{5}$,求各列車的速率,及交車的時刻?

23. 一狐追一兔,兔在狐前的距離是 50 兔步. 若兔每跳 5 步,狐跳 4 步,而 2 狐步的長等於 3 兔步,則兔跳幾步後被狐追着?

24. 金 19 兩在水中祗重 18 兩,銀 10 兩在水中重 9 兩. 若有金銀合金 387 兩,在水中重 351 兩,則此合金含金與銀各幾兩?

25. 某人出外旅行,袋中帶了一筆錢. 他每日用去當日開始時所有的 $\frac{1}{2}$,再加銀幣 2 元. 到第三日末,所帶之錢用完. 問他帶銀幣多少?

26. 四角錐一個,底是正方形,四側的三角形,高都等於這正方形的一邊. 若邊與高都增加 3 吋,則此四角錐的表面積增加 117 方吋. 問它的表面積是多少?

27. 一個兩位數的兩個數字的和是 a. 數字次序顛倒,此數增加 b. 這是什麼數? 證明祗在 $9a \geqq b$,且 $9a+b$ 與 $9a-b$ 都被 18 整除時,所得之解方可合理.

28. 兩個人 A 與 B,現在分別是 a 歲與 b 歲. 會不會有一個時候,A 的年齡曾為或將為 B 年的 c 倍? 若有,什麼時候?

照 § 354,就 a, b, c 的不同各值,討論所得結果.

IV. 聯立一次方程式

聯立方程式

由兩未知文字如 x 與 y 構成的一個條件方程式，其中兩文字之值適合它的，有無數對．每一對都叫做這方程式的解．由不止二文字構成的一個方程式，也是如此． 355

例如，設有方程式 $2x+y=3$ (1)，則若予 x 以任何值，且予 y 以 $3-2x$ 的對應值，這兩個值就適合 (1)． 因在 (1) 中將任何數如 b 代 x，而以 $3-2b$ 代 y，即得眞恆等式 $2b+(3-2b)\equiv 3$．

因此，$x=0$, $y=3$; $x=1$, $y=1$; $x=2$, $y=-1$; ……都是 (1) 的解．

注意． 若所論及的未知數有兩個，如 x 與 y，而方程式祇有一個，如 $x=2$，則 x 祇可以有一值 2，而 y 可以有任何值；換言之，方程式 $x=2$ 此時有無數個解．未知數不止兩個，方程式祇有一個，其中祇含這些未知數的一個時，也是如此． 356

因此，當然要問個明白，x 與 y 之值有沒有幾對，可以適合由此二文字構成的兩個所設方程式． 這樣的一對一對，通常往往存在． 357

例如 $x=2$ 而 $y=-1$，這一對就可以適合方程式 $2x+y=3$ 與 $4x+3y=5$；因爲 $2\cdot 2+(-1)\equiv 3$，而 $4\cdot 2+3(-1)\equiv 5$．

聯立方程式． 兩個或不止兩個方程式，含有幾個未知文字，若假定每一未知文字，在一切方程式中都代表同一數，則此諸方程式叫做聯立方程式 (simultaneous equations) 或方程組 (system of equations)． 358

例如有方程式 $2x+y=3$ (1) 及 $4x+3y=5$，若假定 x 在 (1) 與 (2) 中代表同一數，y 也是如此，則 (1) 與 (2) 就是聯立的．

方程組中的方程式，不一定個個含有一切未知數． 例如 $x=2$, $y=3$，也是含有 x 與 y 的一對聯立方程式．

359 概言之，若有一組方程式，則僅在方程式的個數等於或少於未知文字的個數時，纔可以假定這組方程式是聯立的。

例如兩方程式 $x=2$ 與 $x=3$，就不得聯立，因為 x 在這兩個方程式中，必須表示不同的兩數。

360 一組聯立方程式的解，乃是諸未知數的任何一組值，可以適合該方程組所有各方程式者。

例如，$x=2$，$y=-1$ 便是方程組 $2x+y=3$，$4x+3y=5$ 的解。

361 解一組聯立方程式，乃是求所有的解，或證明無解。

362 這手續所根據的推理方法，與 §§ 334, 335 中所說明的相仿。

例如就由 x 與 y 構成的一對方程式而論，先假定 x 與 y 具有適合兩方程式之值。根據這假定，可把兩方程式看做恆等式，然後應用計算定則，把它們變換成一對或不止一對方程式，其形式都是 $x=a$，$y=b$。若導出一對如 $x=a$，$y=b$ 所經的手續，在 x，y 之值分別是 a 與 b 時，是可倒的，那麼就可以立刻斷定，a 與 b 是所求的一解；至於所經的手續，祇要各步可倒，就全部可倒。

以上所述種種，其牽涉到的新原理，祇有下面一個：

363 **代換原理**．——若假定了一切所設方程式，確可為未知數之值所適合，從而推知某一對式子 A 與 B 有同值，則其中一式可在任何一個方程式中代換他一式。

例. 解一對方程式 $2x+y=12,$ (1)

$$y=8. \qquad (2)$$

假定 x 與 y 眞有適合兩方程式之值,從這假定可知,既在 (2) 中 y 之値是 8,則在 (1) 中也必定是 8.

將此値,即 8,代 (1) 中的 y,得

$$2x+8=12, \qquad (3)$$

從 (3) 得

$$x=2. \qquad (4)$$

故若 (1), (2) 有解,此解便是 $x=2$, $y=8$.

逆言之, $x=2$, $y=8$ 乃是 (1), (2) 的解;但此逆辭是否眞確,要看從 (1), (2) 到 (4), (2) 的的手續是否可倒而定.

現在 (3) 可從 (4) 推得,而 (1) 可從 (3), (2) 推得,故逆辭是眞確的.

注意 1. 這個代換原理,乃是 §§ 249, 253, 257 的幾個相等定則,以及 § 261 的相等通則若 $a=b$, 且 $b=c$, 則 $a=c$, 等等的推論. 364

例如上面的代換,就可以證明不誤如下:

若 $y=8$, 則 $y+2x=8+2x$, 或 $2x+8=2x+y$ (§ 249).

又若 $2x+8=2x+y$ 及 $2x+y=12$, 則 $2x+8=12$ (§ 261).

注意 2. 這個原理,當然只在能夠假定所設方程式是聯立方程式之時,纔可以拿來應用. 365

例如, 從 $x=2$ 與 $x=3$, 就不能推得謬誤的結論 $2=3$,因爲不能假定 $x=2$, $x=3$ 是聯立方程式.

變換定理

照上面所述,將計算定則應用於一對方程式,不論怎樣應用,祇要用得不錯,就可以看做該一對方程式的合法的變換. 若此變換是可倒的,就可以斷定該一對方程式的解沒有改變. 366

因此有下面的定理,這定理也適用於不止二元的方程組.

定理 1. 一對方程式,分別經過 §§ 338, 339 所述的變換後,其解不變. 367

因爲各個方程式經過此等變換後，其解不變.

例如，方程組 $3x-2y=1$ 及 $y-2x=5$.

與 $3x-2y=1$ 及 $y=5+2x$ 有同解.

368 **定理 2.** 一對方程式

$$y=X,\ f(x,y)=0$$

與另一對

$$y=X,\ f(x,X)=0$$

有同解.

這裏 X 所表示的，乃是祇由 x 構成的任何式子（或一個常數），$f(x,y)$ 所表示的，乃是由 x 與 y 構成的任何式子，而 $f(x,X)$ 則爲以 X 代 $f(x,y)$ 中的 y 所得之結果（§ 280）.

這定理，不過是代換原理的特例.

例如，一對方程式 $y=x+2$ 及 $3x-2y=1$,

與另一對 $y=x+2$ 及 $3x-2(x+2)=1$ 有同解.

369 **定理 3.** 一對方程式

$$A=B, \qquad C=D$$

與另一對

$$A+C=B+D,\quad C=D$$

有同解.

因 $A=B$, $C=D$ 與 $A+C=B+C$, $C=D$ 有同解（§ 338），而 $A+C=B+C$, $C=D$ 與 $A+C=B+D$, $C=D$ 有同解（§ 363）.

例如，方程組 $x+y=5$ 與 $x-y=1$

之解同於 $x+y+(x-y)=5+1$ 與 $x-y=1$,

即同於 $2x=6$ 與 $x-y=1$.

370 **系.** 在尚未應用 § 369 的定理之前，可先用隨意取定的 0 以外的任何常數，乘所設兩方程式——即每一方程式的兩端，而不變其解.

若 k 與 l 是 0 以外的任何常數，則一對方程式

$$A=B, \qquad C=D$$

與另一對 $kA\pm lC=kB\pm lD,\ C=D$

有同解.

定理4. 若 A, B, 及 C 都是整式，則一對方程式 371

$$AB=0,\quad C=0$$

與兩對方程式

$$A=0,\ C=0 \text{ 及 } B=0,\ C=0$$

有同解．

因 $AB=0$ 與兩方程式 $A=0$ 及 $B=0$ 有同解(§341)．

因此，$AB=0$, $C=0$ 一對，與 $A=0$, $C=0$ 及 $B=0$, $C=0$ 兩對有同解．

例如， $xy=0$ 與 $x+y=2$ 的解

乃是 $x=0$ 與 $x+y=2$ 的解，

再加上 $y=0$ 與 $x+y=2$ 的解．

同等方程組． 兩個方程組若有同解，則稱為同等方程組． 372

例如，方程組 $x+2y=5$, $2x+y=4$, 與方程組 $3x+y=5$, $4x+3y=10$, 同等；兩組都有同一解 1, 2.

又如，$xy=0$, $x+y=2$ 一對，與 $x=0$, $x+y=2$ 及 $y=0$, $x+y=2$ 兩對同等．

消去法．二元一次方程組的解法

消去法． 從一對方程式消去一個元，如 x, 就是從這一對方程式，導出一個不含 x 的方程式． 373

現在就要闡述，怎樣從由二元 x 與 y 構成的一對一次方程式，消去 x 或 y，以及怎樣從這結果，導出這方程組的解．這些方法，比以前所講的用處更大．

代換法． 此法以§368的定理為根據． 374

例．解 $x+3y=3$, (1)

$3x+5y=1$. (2)

解(1)，求得由 y 構成的式子，表示 x， $x=3-3y$. (3)

以 $3-3y$ 代(2)中的 x， $3(3-3y)+5y=1$. (4)

解(4)， $y=2$. (5)

將2代(3)中的 y， $x=-3$. (6)

因此，(1) 與 (2) 的解就是 $x=-3$，$y=2$，而且這是唯一的解.

因由 §§ 367, 368，下列各對方程式有同解：(1), (2); (3), (2); (3), (4); (3), (5); (6), (5); 而 (6), (5) 的解是 $x=-3$, $y=2$.

從 § 362 可直接推得同一結論. 因爲從 (1), (2) 到 (5), (6) 的手續是可倒的.

核驗 $\quad -3+3\cdot 2\equiv 3, \quad (1) \qquad 3(-3)+5\cdot 2\equiv 1. \quad (2)$

就此例而論，(4) 就是用代換法消去 x 後得到的.

要從一對方程式，用代換法消去一個元如 x，可從兩方程式之一，求得由 x 以外其他文字(一個或不止一個)構成的式子來表示 x，再用這式子代換另一方程式中的 x.

375 下面例題，說明這個方法的一個特例，叫做**比較消去法**.

例. 解
$$x+5y=7, \tag{1}$$
$$x+6y=8. \tag{2}$$

解兩方程式 (1) 與 (2)，求得由 y 構成的式子，表示 x，

$x=7-5y, \quad (3) \qquad x=8-6y. \quad (4)$

用這兩個表示 x 的式子，構成方程式， $7-5y=8-6y. \quad (5)$

解 (5)， $y=1. \quad (6)$

以 1 代換 (3) 中的 y， $x=2. \quad (7)$

因此，(1), (2) 的解是 $x=2$, $y=1$.

376 **加減消去法.** 這個方法以 §§ 369, 370 的定理爲根據.

例. 解
$$2x-6y=7, \tag{1}$$
$$3x+4y=4. \tag{2}$$

用 3 乘 (1)， $6x-18y=21. \quad (3)$

用 2 乘 (2)， $\underline{6x+8y=8.} \quad (4)$

從 (3) 減 (4)， $-26y=13. \quad (5)$

解 (5) 得， $y=-\frac{1}{2}. \quad (6)$

以 $-\frac{1}{2}$ 代換 (1) 中的 y， $2x-6\left(-\frac{1}{2}\right)=7. \quad (7)$

解 (7) 得 $x=2. \quad (8)$

因此，(1), (2) 的解是 $x=2$, $y=-\frac{1}{2}$.

因由 §§ 367, 368, 370，可知下列各對方程式有同解：(1), (2)；(1), (5)；(1), (6)；(7), (6)；(8), (6)；而 (8), (6) 之解是 $x=2$, $y=-\frac{1}{2}$.

核驗 $2\cdot 2-6(-\frac{1}{2})\equiv 7$, (1) $3\cdot 2+4(-\frac{1}{2})\equiv 4$. (2)

就此例而論，x 是用減法消去的.

用加法消去 y，也可以從 (1), (2) 直接求得 x 的值. 其法如下：

用 2 乘 (1)，	$4x-12y=14$.	(9)
用 3 乘 (2)，	$\underline{9x+12y=12}$.	(10)
(9) 與 (10)，加起來	$13x\quad =26$.	(11)
解 (11) 即得	$x\quad =2$.	(12)

用加法或減法，從一對一次方程式消去一個元如 x，可用適宜的數乘兩方程式，使所得方程式中 x 的係數，在數值上相等. 於是再看這兩個係數有同號或異號，而決定用減法或加法.

例外. 設 $A=0$, $B=0$ 是由 x 與 y 構成的一對一次方程式，則從 §§ 374, 376，可知 $A=0$, $B=0$ 有一解而祇有一解，除非在消去 x 的時候，同時也消去了 y. 這個結果，在下面的兩種情形之下，是要發生的，但亦祇限於這兩種情形. 377

1. 若 A 與 B 二式間的關係是 $A\equiv kB$, k 是常數，則稱方程式 $A=0$ 與 $B=0$ 是不獨立的 (not independent).

若 $A\equiv kB$，則凡 $B=0$ 的解，顯然都是 $A=0$ 的解，交換過來說，也對，所以方程組 $A=0$, $B=0$ 有無窮多個解.

例若命 $A=2x+6y-10=0$ (1)，及 $B=x+3y-5=0$ (2)，則因 $A\equiv 2B$，所以 $A=0$ 與 $B=0$ 是不獨立的. 讀者注意，若用 2 乘 (2)，從 (1) 減去乘得的結果，則可消去 x，但同時 y 也要被消去.

2. 若 A 與 B 之間有關係 $A\equiv kB+l$, k 與 l 都是常數，l 不等於 0，則稱方程式 $A=0$ 與 $B=0$ 是不相容的 (not consistent).

在這個情形之下，方程組 $A=0, B=0$ 無解；因為 x, y 的任何值，可使 $B\equiv 0$ 的，祇能使 $A\equiv l$，不能使 $A\equiv 0$.

例若命 $A=2x+6y-9=0$ (3)，及 $B=x+3y-5=0$ (4)，則因 $A\equiv 2B+1$，故 $A=0$ 與 $B=0$ 是不相容的．若從 (3), (4) 消去 x，則必同時消去 y．

378 **求解的公式．** 任何一對由 x, y 構成的所設一次方程式，可以化成

$$ax+by=c, \qquad (1) \qquad a'x+b'y=c', \qquad (2)$$

的形式，其中 a, b, c, a', b', c' 表示已知的數或式．

由 § 377，方程組 (1), (2) 有一解而祇有一解，除非能求得一個常數 k，可使 $a'=ka$ 及 $b'=kb$，因而可使 $ab'-a'b=k(ab-ab)=0$．

欲求得此解，用減法將 y 與 x 分別消去（§ 376），結果是

$$(ab'-a'b)x=b'c-bc', \quad (3) \quad (ab'-a'b)y=ac'-a'c. \quad (4)$$

故若 $ab'-a'b\neq 0$，則 (1), (2) 的解是

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}, \qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}. \qquad (5)$$

這兩個公式改寫為

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{-1}{ab'-a'b}, \qquad (6)$$

更易於記憶．

若未曾先知方程組 (1), (2) 在 $ab'-a'b\neq 0$ 時有一解，則此處各步祇可證明：若方程組 (1), (2) 有解，則此解必是 (5)．

習題七

解下列由 x 與 y 構成的各對方程式：

1. $\begin{cases}x+y=62,\\ x-y=12.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}6x-5y=25,\\ 4x-3y=19.\end{cases}$ 3. $\begin{cases}45x-13y=161,\\ 18x+11y=32.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x-3=7-x,\\ 9x-3y-61=0.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}12x=9-10y,\\ 8y=7-9x.\end{cases}$ 6. $\begin{cases}2y-3x=0,\\ 5x-3y-2=0.\end{cases}$

7. $\begin{cases} x/.3+5y=3\frac{1}{2}, \\ 5x+3y=1.65 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10, \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} (x+2)(y+1)=(x-5)(y-1), \\ x(4+y)=-y(8-x). \end{cases}$ 10. $\begin{cases} ax+by=a^2+2a+b^2, \\ bx+ay=a^2+2b+b^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} ax+by=c, \\ px=qy. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2), \\ (a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2). \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y-x}{2}=5, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{9}=7. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{4}-\dfrac{x+2y-5}{6}=\dfrac{y-3}{4}-\dfrac{y+2x-5}{6}, \\ 5x-2y+6=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{c}, \\ \dfrac{x}{a'}-\dfrac{y}{b'}=\dfrac{1}{c'}. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1+x, \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1+y. \end{cases}$

17. 證明下列兩方程式是不相容的.

$$1\tfrac{1}{2}x-2\tfrac{1}{2}y=10,\quad 6x-10y=15.$$

18. 在15題中,指定 a, b, c, a', b', c' 之值,使兩方程式 (1) 不相容, (2) 不獨立.

可由解一次方程組而得解的非一次方程組

一對方程式,有時就 x 與 y 而論,雖不是一次的,但就 x 與 379
y 的某一對函數而論,却是一次的. 這時候,可以先解這對方程式,求這一對函數,然後從所得的結果,往往可以導出 x 與 y 之值.

例 1. 解 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{3y}=1,\quad \dfrac{9}{x}+\dfrac{10}{y}=5.$

兩方程式就 $1/x$ 與 $1/y$, 而論,都是一次的.

解這對方程式,求得 $1/x=1/3$, $1/y=1/5$. 因此, $x=3$, $y=5$.

例 2.　　解 $3x+\frac{y}{x}=6,\quad 7x-\frac{2y}{x}=1.$

以 x 與 y/x，爲二元而求解，得 $x=1,\ y/x=3$。因此，$x=1,\ y=3$.

380　設有一對方程式，可化成 $AB=0,\ A'B'=0$ 的形式，其中 A, B, A', B' 是由 x 與 y 構成的一次整式，則從 § 371 的定理，這對方程式的一切各解，可由解下列四對一次方程式而得：
$A=0,\ A'=0$; $A=0,\ B'=0$; $B=0,\ A'=0$; $B=0,\ B'=0$.

例．解
$$x^2-2xy=0,\tag{1}$$
$$(x+y-1)(2x+y-3)=0.\tag{2}$$

這一對與下列四對同等：
$$x=0,\qquad x+y-1=0,\tag{3}$$
$$x=0,\qquad 2x+y-3=0,\tag{4}$$
$$x-2y=0,\qquad x+y-1=0,\tag{5}$$
$$x-2y=0,\qquad 2x+y-3=0,\tag{6}$$

解 (3), (4), (5), (6) 這四對，可得 (1), (2) 的四解，即：$x,\ y=0,\ 1;\ 0,\ 3;\ 2/3,\ 1/3;\ 6/5,\ 3/5.$

381　概言之，若 $ABC\cdots$ 與 $A'\ B'\ C'\cdots$，分別是 m 個與 n 個因子的連乘積，這些因子都是由 x 與 y 構成的一次整式，則一對方程式 $ABC\cdots=0,\ A'\ B'\ C'\cdots=0$ 的所有各解，可由解 mn 對一次方程式而求得，這 mn 對方程式，是使兩個連乘積的每個因子等於 0，分別得 m 個與 n 個方程式，再將 m 個中的每一個，與 n 個中的每一個，配組而成的。

若如此所得各對一次方程式，都是既獨立而又相容，則可求得 mn 個解，這就是說，所設兩方程式解的個數，是它們的次的積。

習題八

解下列各對方程式：

1. $\frac{7}{2x}+\frac{1}{3y}=0,\quad \frac{3}{x}+\frac{14}{y}+3=0.$

2. $10x+\frac{6}{y}=5,\quad 15x+\frac{10}{y}=8.$

3. $\frac{y}{x}=\frac{2(3-y)}{x}+\frac{3}{2}$,　$\frac{y+3}{x}=\frac{3y-5}{x}+1$.

4. $xy=0$,　$(x+2y-1)(3x-y+2)=0$.

5. $xy-y=0$,　$3x-8y+5=0$.

6. $x(x-y)(x+y)=0$,　$x+2y-5=0$.

7. $(x-1)(y-2)=0$,　$(x-2)(y-3)=0$.

8. $y^2=(x-1)^2$,　$2x+3y-7=0$.

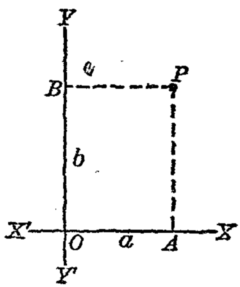
9. $(2x+y)^2=(x-3y+5)^2$,　$(x+y)^2=1$.

10. $(x-5y+3)(x+3y+5)=0$,　$(2x+y+5)(5x+2y-14)=0$.

二元一次方程式的位跡

x 與 y 一對值的位跡. 兩個變數如 x 與 y, 它們的各 382
對值,可以用平面上的各點來表示.

在平面上選定兩條定直線,作為基軸(axes of reference),如附圖中的 $X'OX$ 與 $Y'OY$,這兩線互相垂直,交於 O 點,叫做原點 (origin);再選擇適當的單位,用以量度長度.



這樣選定了以後, 所設的一對值 $x=a$, $y=b$, 就可以用下面的方法表示出來:

在 $X'OX$ 上, 看 a 是正的或負的, 而向右或向左,量出一段 OA, 它的長度是 $|a|$, 即 a 的數值.

照樣在 $Y'OY$ 上,看 b 是正的或負的,而向上或向下,量出一段 OB, 它的長度是 $|b|$.

於是過 A 與 B, 作兩線分別平行於 $Y'OY$ 及 $X'OX$. 這

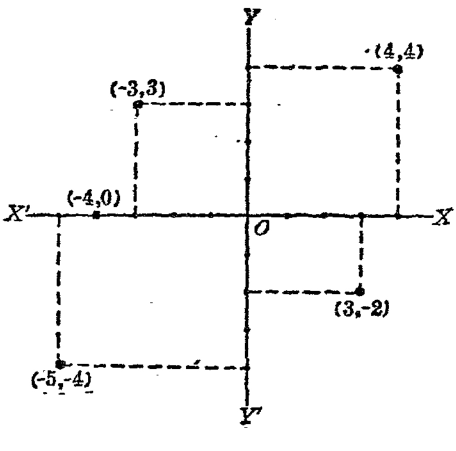
兩線的交點 P,就是表示 $x=a$, $y=b$ 一對值的位跡(graph).

$x=a$, $y=b$ 一對值及其位跡 P,都可以用記號 (a, b) 來表示.

數 a,或等線段 OA 與 BP 之一,叫做 P 的橫標(abscissa). 數 b,或等線段 OB 與 AP 之一,叫做 P 的縱標(ordinate). 橫標與縱標合稱 P 的坐標(coordinates).

$X'OX$ 又叫做 x 軸或橫軸,而 $Y'OY$ 又叫做 y 軸或縱軸.

讀者注意,這個方法使 x, y 的各對值,與平面上的各點成一一對應(§ 3);這就是說,每有一對值 (a, b),就有一點 P,每有一點 P,就有一對值 (a, b),這一對值,祇要分別量出 P 點到 $Y'OY$ 及 $X'OX$ 的距離,再加上適當的符號,就可以求得.



特別提出來說,(0,0) 的位跡是原點,$(a,0)$ 的位跡是 x 軸上的一點,而 $(0,b)$ 的位跡乃是 y 軸上的一點.

例. 求作(plot)下列各對值的位跡: (4, 4), (-3, 3), (-4, 0), (-5, -4), (3, -2).

照剛纔所述的方法,順次就各對值而作圖,即得它們的位跡,如附圖所示.

位跡的地位,與坐標的符號有何關係,這一點,須特加注意.

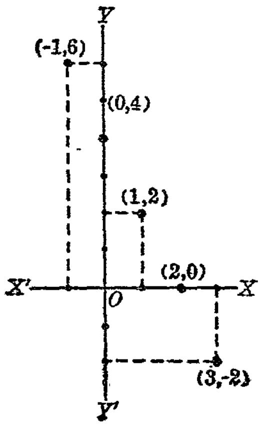
383 **由 x 與 y 構成的一個方程式的位跡.** 由 x 與 y 構成的所設方程式,通常總有無窮多個實解,若然,則通常總有一條確定的曲線,包含着所有各解的位跡,而別無他點. 這曲線,就叫做這方程式的位跡(graph of the equation).

但一個方程式的位跡，有時不止一條曲線. 還有要注意的，這裏所謂曲線，連直線也包括在內.

定理. 凡一次方程式，由 x 與 y 二文字或其中之一構成的，它的位跡是直線. 384

因爲這個緣故，所以一次方程式往往叫做直線方程式(linear equation).

讀者任意選擇一個一次方程式，求作它的幾個解的位跡，就會相信這個定理是眞確的.



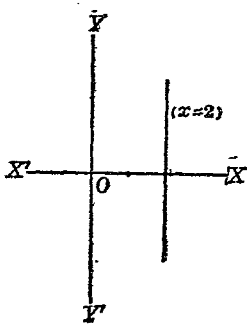
例若有方程式 $y=-2x+4$，
則在 $x=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$ 時
當有 $y=4, 2, 0, -2, \cdots\cdots$
求出 $(0,4), (1,2), (2,0), (3,-2)\cdots\cdots$ 這幾對值的位跡，如附圖所示，即見這些位跡都在同一直線上.

這定理可以用下面的推理方法來證明:

1. 方程式的形式是 $x=a$，或 $y=b$ 時.

例. 求 $x=2$ 的位跡.

這個方程式，爲 x 的值 2 及 y 的一切值所適合 (§ 356). 因此，它的位跡是 y 軸的平行線，離軸 2 單位而在軸的右側. 因爲這條線含有橫標是 2 的一切點，而祇含有這樣的點.



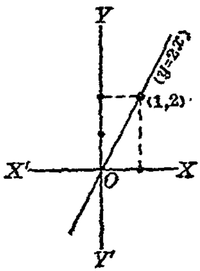
所以，概言之，$x=a$ 的位跡，乃是 y 軸的平行線，與 y 軸的距離是 $|a|$，並因 a 是正的或負的，而在軸的右側或左側. 照樣，$y=b$ 的位跡乃是 x 軸的平行線，與 x 軸的距離是 $|b|$，並因 b 是正的或負的，而在軸的上方或下方.

特別提出來說，$y=0$ 的位跡就是 x 軸，$x=0$ 的位跡就是 y 軸.

2.　方程式的形式是 $y=mx$ 時.

例.　求 $y=2x$ 的位跡.

這位跡是通過原點 $(0,0)$ 及點 $(1,2)$ 的直線;因爲此線含有縱標二倍於橫標的一切點,而祇含有這樣的點.



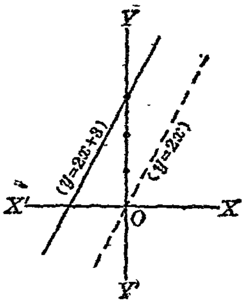
所以,概言之,$y=mx$ 的位跡,乃是通過原點及點 $(1,m)$ 的直線.

3.　方程式的形式是 $y=mx+c$ 時.

例.　求 $y=2x+3$ 的位跡.

若將 $y=2x$ 的位跡,每一點的縱標增加 3,則顯然就可得到這個方程式的位跡.　但這樣所得的結果,同於將直線 $y=2x$ 向上平行移動,直到此線與 y 軸的交點,移至原點上方 3 單位處而止.

所以,概言之,$y=mx+c$ 的位跡,是一條直線,平行於 $y=mx$ 的位跡,而與 y 軸相交於一點,該點到原點的距離是 $|c|$,且因 c 是正的或負的,而在原點的上方或下方.



385　**這條直線的作法.**　因爲一條直線的任何兩點,足以決定該直線;故任何方程式 $ax+by+c=0$ 的位跡,可照下例所示的方法求得.

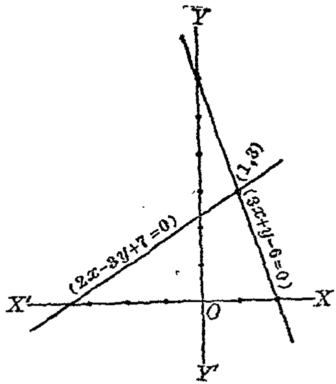
例.　求作 $3x+y-6=0$ 的位跡.

第一,$y=0$ 時,$x=2$.　第二,$x=0$ 時,$y=6$.

因此,只須求作 $(2,0)$ 與 $(0,6)$ 兩點,即直線與兩軸的交點,且作通過這兩點的直線(參閱 § 386 附圖).

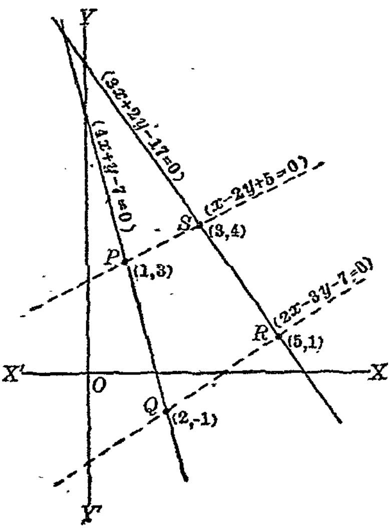
若方程式有 $x=a$, $y=b$, $y=mx$ 三種形式之一,則此法無效.　此時可用 § 384, 1 與 2 所講的方法作圖.

一對聯立一次方程式的圖解. 一對聯立方程式的位跡, 386
是兩條直線,若兩直線相交於一點,那麼這一點,也祇有這一點,就是兩方程式的圖解 (graphic solution),或解的位跡 (graph of a solution).



例如, $2x-3y+7=0$ (1), 及 $3x+y-6=0$(2)的解是 $x=1, y=3$. 又如附圖所示, (1) 與 (2)的位跡相交於點(1, 3).

若所設方程式是不相容的 (§377,2),則其位跡無公共點,即兩線平行;若所設方程式是不獨立的 (§377,1),則其位跡的一切點都是公共點,即兩線合一. 387



例如方程式 $y=2x$, $y=2x+3$ 是不相容的,故此二方程式的位跡是平行線 (§ 384, 3).

又如方程式 $y=2x$, $3y=6x$ 是不獨立的,所以它們的位跡相同.

形式是 $AB=0$ 的方程式,其位跡乃是 $A=0$, $B=0$, 兩方程式的位跡; 因爲 $AB=0$ 的解,乃是 $A=0$ 及 $B=0$ 的解 (§§ 341, 346). 388

例. 求方程式

$$(4x+y-7)(3x+2y-17)=0, \qquad (1)$$

$$(x-2y+5)(2x-3y-7)=0, \qquad (2)$$

的位跡,並求其圖解.

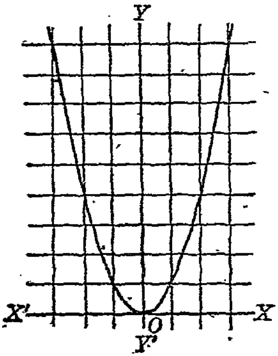
(1) 的位跡是 PQ 及 RS 兩直線，這兩線分別是 $4x+y-7=0$ 及 $3x+y-17=0$ 的位跡。

(2) 的位跡是 PS 及 QR 兩直線，這兩線分別是 $x-2y+5=0$ 及 $2x-3y-7=0$ 的位跡。

PQ, RS 一對與 PS, QR 一對的交點，即 $(1,3)$, $(2,-1)$, $(5,1)$, $(3,4)$，就是 (1), (2) 之解的位跡。

389 **由 x 與 y 構成的高次方程式的位跡.** 求作高次方程式的位跡，先求該方程式的若干解，作這些解的位跡，然後用手描出一條曲線，通過這樣作得的一切各點。儘量使各解(即各點)充分"接近"，即可儘量使所得的曲線，與方程式真正的位跡，相差非常微細。

作這種位跡時，宜用畫有小方格的紙，如附圖所示。



例. 求 $y=x^2$ 的位跡.

在 $x=0, 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots$ 時

當有 $y=0, 1, 4, 9, 16, \cdots\cdots$

又在 $x=-1, -2, -3, -4, \cdots\cdots$ 時

當有 $y=1, 4, 9, 16, \cdots\cdots$

取方格的一邊做長度單位，作 $(0,0)$ $(1,1)$ $(2,4)\cdots\cdots(-1,1)$ $(-2,4)\cdots\cdots$ 的位跡. 有了幾點之後，如附圖所示的曲線，除在 $x=-1$, 到 $x=+1$ 之間的一段外，其餘各部分就可以見其大概.

這曲線全部在 x 軸的上方，向上伸展到無窮遠處；又，關於 y 軸成對稱，對應於 y 的同一值，有 $x=a$ 及 $x=-a$.

在 $x=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \cdots\cdots$ 時

當有 $y=\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots$

求這幾對值的對應點，即見此方程式的位跡與 x 軸相切.

習題九

1. 求作 x 與 y 下列各對值的位跡：

$$(0,0),\ (5,0),\ (0,-7),\ (6,2),\ (-7,-1),\ (-4,3),\ (5,-9).$$

2. 求下列各方程式的位跡：

$$x=0,\ y=0,\ 2y+7=0,\ 3y+x=0,\ x+y+5=0,$$
$$7x+3y-18=0,\ 3x-4y=24.$$

3. 求下列各方程式的位跡：

$$xy=0,\ (x+y-3)(x-2y)=0,\ x^2-1=0,\ x^2=4y^2,\ x^2+y^2=0.$$

4. 用圖解法求下列各對方程式的解，並用代數解法核驗答數．

$$(1)\ \begin{cases} x+y-3=0, \\ x-2y=0. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 3y+2x+19=0, \\ 2y-3x+4=0. \end{cases}$$

5. 照前題的樣，解下列各對：

$$(1)\ \begin{cases} (x-4y+6)(x+3y+6)=0, \\ (3x+2y-10)(2x-y+5)=0. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} (y-x-2)x=0, \\ (y-x+2)y=0. \end{cases}$$

6. 求下列兩方程式的位跡：

$$y=-(x-1)^2, \qquad y=x^3.$$

有不止二元的一次方程組

n 個 n 元一次方程式的解法． 由三個元構成的一對方程式，通常可有無窮多個解． 390

例如，$x=2z$，$y=z+1$ 這一對，就有無窮多個解；因若指定 z 有任何值，如 b，而使 x 與 y 分別等於 $2b$ 及 $b+1$，則兩方程式都得適合．

但是三個三元一次方程式，通常祇有一解，此解可照下例所說明的方法求得． 391

例． 解方程組

$$3x-2y+4z=13, \qquad (1)$$
$$2x+5y-3z=-9, \qquad (2)$$
$$6x+3y+2z=7. \qquad (3)$$

從這三個方程式取出兩對，從各對消去 z，其續手如下：

用 3 乘 (1)，	$9x-6y+12z=39$	(4)
用 4 乘 (2)，	$8x+20y-12z=-36$	(5)
相加，	$17x+14y=3$	(6)
又，寫 (1)，	$3x-2y+4z=13$	(7)
用 2 乘 (3)，	$12x+6y+4z=14$	(8)
從 (8) 減 (7)，	$9x+8y=1$	(9)

從 (6)，(9) 消去 y，手續如下：

用 4 乘 (6)，	$68x+56y=12$	(10)
用 7 乘 (9)，	$63x+56y=7$	(11)
從 (10) 減 (11)，	$5x=5$	(12)
因此	$x=1.$	
將 $x=1$ 代入 (9)，求得	$y=-1.$	
將 $x=1, y=-1$ 代入 (1)，求得	$z=2.$	

故(§362) 若 (1)，(2)，(3) 有解，此解就是 $x=1, y=-1, z=2$. 但從 (1)，(2)，(3) 導出 $x=1, y=-1, z=2$，所經的手續是可倒的． 實際上，確可逐步倒推回去． 因此，$x=1, y=-1, z=2$ 是 (1)，(2)，(3) 的解．

$x=1, y=-1, z=2$ 是 (1)，(2)，(3) 的解，可以證明如下：

從 §368，顯然可知 $x=1, y=-1, z=2$ 是 (12)，(9)，(1) 的解． 所以祇須證明方程組 (12)，(9)，(1) 與所設方程組 (1)，(2)，(3) 有同解．

設將方程式 (1)，(2)，(3) 的已知項都移到第一端，而得：

$$A=0,\ (1)\qquad B=0,\ (2)\qquad C=0.\ (3)$$

則從導出 (9)，與 (12) 所經的手續，可知方程式 (1)，(9)，(12) 可以寫成：

$$A=0,\ (1)\quad -A+2C=0,\ (9)\quad 19A+16B-14C=0.\ (12)$$

x, y, z 的任何一組值，可以使 $A\equiv 0, B\equiv 0, C\equiv 0$ 的，明明也可以使 $A\equiv 0$，$A+2C\equiv 0$，$19A+16B-14C\equiv 0$.

逆言之，若 $A\equiv 0$，且 $-A+2C\equiv 0$，則 $C\equiv 0$；又若 $19A+16B-14C\equiv 0$ 則 $B\equiv 0$.

因此，方程組 (1)，(2)，(3) 與 (1)，(9)，(12) 有同解，此解就是 $x=1$，$y=-1, z=2$.

就方纔所講述的解法而論，是先從三個由三元 x, y, z 構成的方程式，導出兩個由兩元 x, y 構成的方程式，然後從這個方程組，再導出一個由一元 x 構成的方程式. 392

概言之，若原設有 n 個 n 元一次方程式，則此種步驟經過 $n-1$ 回以後，總可以得到一個由一元如 x 構成的方程式，其形式是 $ax-b=0$.

於是，若非 $a=0$，這方程組就有一解而祇有一解，此一解之中，x 的值是 b/a，而其他各未知數之值，則在實行消去手續時所得各方程式中，累次代換，卽可求得. 這一點，常可照前例的樣證明.

在另一方面說，若 $a=0$，則通常此方程式組當 $b=0$ 時，有無窮多個解，當 $b\neq 0$ 時，無解. 此在 § 394 中，將予以證明.

解一次方程組，在論述行列式 (determinant) 的一章裏，還要講一種便當得多的方法. 但有時候也可用特別的方法，省去不少勞力. 393

例. 解
$$x+y+z=8, \qquad (1)$$
$$x+y+u=12, \qquad (2)$$
$$x+z+u=14, \qquad (3)$$
$$y+z+u=14, \qquad (4)$$
將 (1), (2), (3), (4) 相加，$3x+3y+3z+3u=48$.
因此
$$x+y+z+u=16. \qquad (5)$$
從 (5) 輪流減 (4), (3), (2), (1)，即得 $x=2, y=2, z=4, u=8$.

例外. 設 $A=0, B=0, C=0$ 是一次方程組，它們的三個元是 x, y, z，且照 § 392 的樣命 $ax-b=0$ 表示消去 y 與 z 後所得的方程式. 394

1. 若 $a=0$ 且 $b=0$，則 A, B, C 三函數之一，可用其他二函數所構成的式子來表示，如 $A\equiv kB+lC$，其中 k 與 l 是常數. 此時就說方程式 $A=0, B=0, C=0$ 是不獨立的.

從恆等式 $A\equiv kB+lC$ 可知，$B=0, C=0$ 的每一解是 $A=0$ 的解。因此，若 $B=0$ 與 $C=0$ 是相容的（§377, 2），則三方程式 $A=0, B=0, C=0$ 就有無窮多個解。

例如有方程組

$$A=3x-2y+4z-13=0, \tag{1}$$

$$B=2x+5y-3z+9=0, \tag{2}$$

$$C=7x+8y-2z+5=0. \tag{3}$$

從 (1) 與 (2) 消去 z，

$$3A+4B\equiv 17x+14y-3=0. \tag{4}$$

從 (1) 與 (3) 消去 z，

$$A+2C\equiv 17x+14y-3=0. \tag{5}$$

從 (4) 與 (5) 消去 y，

$$2A+4B-2C\equiv 0\cdot x-0=0. \tag{6}$$

這裏的最後一個方程式 $ax-b=0$，其形式是 $0\cdot x-0=0$，而且在導出這方程式的手續中，知道 A, B, C 三式之間，有恆等式 $2A+4B-2C\equiv 0$，即 $C\equiv A+2B$ 所表示的關係。

再察看 (1), (2), (3)，則知用 2 乘 B 後，將所得結果加於 A，確可得 C。因此，方程組 (1), (2), (3) 有無窮多個解。

2. 若 $a=0$ 而 $b\neq 0$，則將見函數 A, B, C 之一，可用其他二函數所構成的式子來表示，如

$$A\equiv kB+lC+m,$$

其中 k, l, m 是常數，m 不等於 0。此時就說方程式 $A=0, B=0, C=0$ 是不相容的。

從恆等式 $A\equiv kB+lC+m$ 可知，$A=0, B=0, C=0$ 無解。因為 x, y, z 的任何值，可使 $B\equiv 0, C\equiv 0$ 的，將使 $A\equiv m$，而不能使 $A\equiv 0$。

例如有方程組

$$A=3x-2y+4z-13=0, \tag{1}$$

$$B=2x+5y-3z+9=0, \tag{2}$$

$$C=7x+8y-2z+6=0. \tag{3}$$

照前例,消去 z 與 y,得

$$2A+4B-2C\equiv 0\cdot x-2=0.$$

因此,最後的一個方程式 $ax-b=0$,其形式是 $0\cdot x-2=0$,而 A, B, C 則爲恆等式 $C\equiv A+2B+1$ 所聯繫. 察看 (1), (2), (3) 即知確有此關係存在.

因此,方程組 (1), (2), (3) 無解.

一次方程組通論. 從以前各項討論,可得結論如下: 395

n 元一次方程式 m 個所成的方程組,通常當 $m=n$ 時有一解,$m<n$ 時有無窮多個解,$m>n$ 時無解.

此定則若遇例外,則有兩個或不止兩個方程式,其間有 §§ 377, 394 所述,那樣的恆等式所表示的關係.

特別提出來說,由二元 x, y 構成的一次方程式三個,$A=0$, $B=0$, $C=0$ 所成的一組,祇在 A,B,C 有恆等式如 $A\equiv kB+lC$ 所表示的關係,而 $B=0$, $C=0$ 是相容的方程式之時,方纔有解.

例如,方程組 $x-y=1$ (1), $x+y=7$ (2), $3x-y=10$ (3) 無解;因 (1),(2) 之解 $x=4$, $y=3$, 不適合 (3).

又如,方程組 $x-y=1$ (1), $x+y=7$ (2), $3x-y=9$ (4) 有解; 因 $x=4$, $y=3$ 適合 (4). 但讀者須注意, $3x-y-9\equiv 2(x-y-1)+(x+y-7)$.

讀者若作 (1), (2), (4) 的位跡,將見三直線交於一點.

習題十

解下列各方程組:

1. $\begin{cases} x+y=11, \\ y+z=13, \\ z+x=12. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=4, \\ x+3y+7z=13. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+2y-3z=3, \\ 3x-5y+7z=19, \\ 5x-8y-11z=-13. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 5x-2y=-33, \\ x+y-7z=13, \\ x+3y=-10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y-4z=11, \\ 2x-3y=0, \\ y-4z=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-5=2(x-2), \\ (x+1)(y-1)=(x+2)(y-2)+5, \\ 2x+3y+z=6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{6}{z}=9, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}=5, \\ \dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{z}=4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y+z+u=4, \\ x+z+u=3, \\ x+y+u=1, \\ x+y+z=10. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x-3z+u=9, \\ 5y+z-4u=17, \\ 3y+u=12, \\ x+2y+3u=8. \end{cases}$

10. $\begin{cases} cx+by=l, \\ by+az=m, \\ az+cx=n. \end{cases}$

11. $\begin{cases} lx=my=nz, \\ ax+by+cz=d. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x=3y=6z, \\ (x+2y+z-16)(3x-2y+20)=0. \end{cases}$

證明下列兩組方程式都是不獨立的，且求各組中方程式藉以聯繫的恆等式：

13. $\begin{cases} x-y=3, \\ y-z=-5, \\ z-x=2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x-8y+7z=10, \\ 2x+5y-3z=12, \\ 16x+9y-z=80. \end{cases}$

問　題

396　解下列各問題，可以用一次方程組，其未知數有兩個或不止兩個，如 $x, y, \cdots$．採用幾個未知文字，爲最相宜，要看問題的條件而定．但在已選定題中的未知數，用 $x, y, \cdots$ 代表它們，且用這些文字所構成的式子，表示其餘各未知數(倘若有的話)之後，當可從問題中尙未用及的條件，列出獨立而相容的方程式，聯繫 $x, y, \cdots$ 等文字，方程式的個數，同於所選文字 $x, y, \cdots$ 的個數．方程式的個數若大於此數，則問題無解；若小於

此數,則有無窮多個解(§395).

§352 中曾說,問題的性質對於未知數的特徵,也許要加以限制,下面的問題也有同樣的情形.

例1. 有一個三位數,其第二位數字等於第一第三的和,第二第三位數字的和是8,若第一第三位數字交換,則原數增加99. 求這數.

命 x=百位數字,y= 十位數字,z=個位數.

則原數是 $100x+10y+z$.

但由問題中的各條件,當有

$$x+z=y, \tag{1}$$

$$y+z=8, \tag{2}$$

$$100z+10y+x=100x+10y+z+99. \tag{3}$$

解(1),(2),(3),求得 $x=2,\ y=5,\ z=3$.

因此,原數是 253.

例2. 某人步行了一段距離後,休息 30 分鐘,繼續再按原速率的 $\frac{7}{8}$ 步行,到目的地,總計行畢全程 20 哩,共費 6 小時. 假定他按原速率多走 4 哩後,再行休息如前,則行畢全程,祇需 $5\frac{6}{7}$ 小時. 問他的原速率是多少? 他在休息前走多少路.

命 x=原速率每小時哩數,且命 y=休息前所走的哩數.

用 x 與 y 所構成的式子,表示(1)實際所費的,(2)假定所費的時間,則有

$$\frac{y}{x}+\frac{1}{2}+\frac{20-y}{\frac{7x}{8}}=6, \quad (1) \qquad \frac{y+4}{x}+\frac{1}{2}+\frac{16-y}{\frac{7x}{8}}=5\frac{6}{7}. \quad (2)$$

解(1),(2)以求 $\frac{y}{x}$ 和 $\frac{1}{x}$,得 $\frac{y}{x}=\frac{3}{2},\ \frac{1}{x}=\frac{1}{4}$.

因此 $$x=4,\ y=6.$$

例3. 瓶兩隻,A 與 B,各盛有攙水的酒精. 從 A 瓶取 3 份,從 B 瓶取 2

份，混合，其所含酒精是 40%；從 A 取 1 份，從 B 取 2 份，混合，則含酒精 32%．求 A, B 中的酒精百分數．

命 x 與 y 分別表示 A 與 B 中的酒精百分數．

則由所設條件，應有

$$\frac{3x}{5}+\frac{2y}{5}=\frac{40}{100}, \qquad (1) \qquad \frac{x}{3}+\frac{2y}{3}=\frac{32}{100}. \qquad (2)$$

解 (1), (2)，求得 $x=\frac{52}{100}$ 即 52%，及 $y=\frac{22}{100}$ 即 22%．

習題十一

1．有三個數，它們的和是 20，第一數加兩倍第二數再加三倍第三數等於 44
14，第一第二之和的兩倍加第三的四倍等於 -14．求這三數．

2．三數之和是 51．第一數用第二數除，商是 2，剩餘是 5．第二數用第三數除，商是 3，剩餘是 2．求這三數．

3．求一個二位數，合下列條件：(1) 十位數字的三倍加個位數字的兩倍等於 37；(2) 數字次序顛倒，原數減少 9．

4．A 負債銀幣 5000 元，B 負債銀幣 3000 元．A 除自有的錢以外，若再有 B 所有的 $\frac{2}{3}$，就可以清償債務；B 除自有的錢以外，若再有 A 所有的 $\frac{1}{2}$，則還債祇缺 100 元．問二人各有銀幣幾元？

5．從下開各項，求 A, B, C 三人的財富：A 與 B 共有 p 銀元；B 與 C 共有 q 銀元；C 與 A 共有 r 銀元．p, q, r 必須適合什麼條件，所得之解纔是合理的？

6．錢一筆，按單利生息，2 年滿本利和是 2556.05 銀元，4 年滿本利和是 2767.10 銀元．這筆錢有多少？利率是多少？

某人投資，照票面購入 4% 債券，又照市價 110 銀元購入 5% 債券，所收券息一年共 650 銀元．若 4% 債券照市價 80 購入，5% 債券仍照市價 110 購入，則券息可多 100 銀元．求投資總額．

8．從下開各項求某長方形的面積：長加 6 吋，闊加 6 吋，長變爲闊的 $\frac{3}{2}$，而面積增加 84 方吋．

A 將等於 B 所有的錢給 B；然後 B 將等於 A 剩下的錢給 A；最後 A 將等於 B 剩下的錢給 B. 此時 A 有 16 銀元，B 有 24 銀元. 問二人原有銀元各多少?

10. A 與 B 共作一事，$5\frac{1}{7}$ 天可成；A 與 C 合作，$4\frac{4}{5}$ 天可成. 現該事由三人合作 2 天，A 退出，再由 B 與 C 合作 $1\frac{9}{17}$ 天完成. 問各人分別獨作，各需幾天完成?

11. 兩點各按不變的速率，在 150 呎長的圓周上移動，方向相反時，每 5 秒相遇一次；方向相同時，每 25 秒相遇一次. 求各點的速率.

12. 貨車兩列，分別長 240 碼與 200 碼，相對行駛時，彼此完全經過需 25 秒，同向行駛時，快車完全越過慢車需 $3\frac{3}{4}$ 分. 問兩列車的速率每小時各幾哩?

13. 汽船兩艘，A 與 B，往來於相距 200 哩的 C 與 D 兩城之間. B 從 C 開行 1 小時後，A 也從 C 開行，經 2 小時追及 B，到 D 城後停船 4 小時，開回時，在離 D 10 哩處遇 B. A 與 B 的速率各是多少?

14. 舉行半哩賽跑時，A 到終點，B 落後 20 碼，C 落後 30 碼. 問 B 到終點時，C 落後幾碼?

15. A 與 B 作 440 碼賽跑. 第一次，A 讓 B 先跑 20 碼，比 B 早到 2 秒. 第二次，A 讓 B 早跑 4 秒，A 到終點時 B 落後 6 碼. 問 A 與 B 的速率各是多少?

16. 旅客二人，共有行李 500 磅. 一人付重量逾額費 1.25 銀元，另一人付 1.75 銀元. 若行李是一人所帶的，就得付 4 銀元. 問單身旅客准帶免費行李多少重?

17. 合金三種，成分如下：A，金 5 份（以重量計），銀 2 份，鉛 1 份；B，金 2 份，銀 5 份，鉛 1 份；C，金 3 份，銀 1 份，鉛 4 份. 若欲造成另一種合金 9 兩，其金銀鉛含量（重量）相同，則須分別取 A, B, C 幾兩熔合?

18. 有銀銅合金兩種，A 與 B. A 5 份 B 3 份所成的合金，含銀 52%. A 5 份 B 11 份所成的合金含銀 42%. 求 A 與 B 的含銀百分數.

. 一人打靶，在離靶500碼處發鎗，$\frac{2}{5}$秒後聽見鎗彈着靶。另一人在離靶600碼，離打靶者210碼處，先聽見鎗聲，$2\frac{1}{10}$秒後又聽見鎗彈着靶聲。求聲音與鎗彈的速度，假定兩速度都始終不變。

20. 水槽一隻，有進水管A與B，放水管C。槽滿時，若三管齊開，經3小時水放完；若祇開A與C，經1小時放完；若祇開B與C，經45分放完。若A管進水每分鐘比B管多100加侖，則水槽的容量是多少？各管中每分鐘流過的水多少？

未定係數法

397 現在要講一講關於代數主題的一兩個簡單問題。

這些問題所問的是，所論變數的特殊函數，能不能化成指定的形式？若能，則化成後的係數是什麼？

下面的例題，可以說明這種問題的解法。

例. x^2+4x+6一式，能不能化成由$x+1$構成的二次多項式？若能，則化成後的係數是什麼？

所可化成的多項式，其最普通的形式是$a(x+1)^2+b(x+1)+c$其中a, b, c是常數。

因此，若能化成，則必有

$$x^2+4x+6 \equiv a(x+1)^2+b(x+1)+c \tag{1}$$

即

$$x^2+4x+6 \equiv ax^2+(2a+b)x+(a+b+c). \tag{2}$$

由§284可知，祇在(2)中x同次冪的係數相等時，即在$a=1$，$2a+b=4$，$a+b+c=6$時，(2)纔是，因此(1)纔是恆等式。解此三方程式，求得

$$a=1,\ b=2,\ c=3.$$

因此

$$x^2+4x+6 \equiv (x+1)^2+2(x+1)+3.$$

讀者注意，我們先使所設的式子恆等於待求的式子，其中含有未定(undetermined)係數；然後設立幾個方程式.要使這假定的恆等式眞確，這些未定係數，非適合這所設方程組不可.解這方程組，就得到各係數之值.

下面的一種問題，與方纔所說的相彷而較為普遍. 398

先有若干條件，然後問，是否有適合這些條件而有特定形式的某函數存在？ 若有，它的各項的係數是什麼？

要解這樣的問題，可作一個含有未定係數的式子，使它具有問題中所指定的形式. 這些未定係數就是問題的未知數，而其所必須適合的方程組，則由所設條件產生. 若此方程組有一個解，則可得適合所設條件的一個函數；若方程組無解，就沒有這樣的函數存在；若方程組有無窮多個解，則原問題是個不定的問題，因為有無窮多個函數，可以適合所設條件. 至於所討論的函數，這裏假定它是一個有窮式(§264).

例. 倘若辦得到，試求由 x 構成的二次多項式，該式之值，在 $x=1$ 及 $x=3$ 時是 0，在 $x=4$ 時是 6.

所求的多項式，其形式必然是 ax^2+bx+c. 而由問題中所設條件，有

$$a+b+c=0,\quad 9a+3b+c=0,\quad 16a+4b+c=6.$$

解這方程組，求 a, b, c 得 $a=2,\ b=-8,\ c=6$.

因此，所求的多項式是 $2x^2-8x+6$.

如果原問題所求的，是一個適合所設條件的一次多項式，則必無解；是一個三次多項式，則必有無窮多個解.

399 以上各節中所說明的方法，叫做未定係數法 (method of undetermined coefficients)，乃是代數上一個主要的研究方法，此後用到它的機會是很多的。

習題十二

1. 將 $3x^3-x^2+2x-5$ 寫成由 $x-2$ 構成的多項式。

2. 將 $4x^2+8x+7$ 寫成由 $2x+3$ 構成的多項式。

3. 求 $f(x)=ax^2+bx+c$，須有

$$f(-1)=11,\ f(1)=-5,\ f(5)=6.$$

4. 求 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，須有

$$f(0)=5,\ f(-1)=1,\ f(1)=9,\ f(2)=31.$$

5. 求 $f(x,y)=ax+by+c$，須有

$$f(0,0)=4,\ f(4,4)=0,\ f(1,0)=6.$$

6. 求一次方程式 $ax+by+1=0$，它的兩個解是 $x=3,\ y=1$ 及 $x=4,\ y=-1$。

7. 能不能找到一個一次方程式 $ax+by+c=0$，它的三個解是 $x=3,\ y=1;\ x=4,\ y=-1;\ x=1,\ y=1$？

8. 求一個一次方程式，它的位跡是通過 $(2,3)$，$(-4,5)$ 兩點的直線。

9. 決定 c 的值，可使 $3x+y+c=0$ 的位跡通過點 $(-2,3)$ 者。

10. 求兩個一次方程式，$ax+by+1=0$ (1)，$a'x+b'y+1=0$ (2)，使 (1) 與 (2) 的公解是 $x=2,\ y=3$，(1) 的解是 $x=7,\ y=5$，(2) 的解是 $x=3,\ y=7$。作此二方程式的位跡。

11. 求方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$，它的根是 -2, 1 及 3。

12. 求方程式 $x^2+bxy+cx+dy=0$，其解是 $x=1,\ y=0;\ x=2,\ y=1;\ x=-2,\ y=1$。

13. 將 $3x+2y-3$ 寫成下面的形式：

$$a(x+y-1)+b(2x-y+2)+c(x+2y-3),$$

式中 a, b, 及 c 都是常數。

V. 除法變換

一般的方法

初步討論. 在§319中,已有A被B除的商的定義,即分數A/B由計算定則所可化成的最簡形式. 400

現在要講一個一般的方法,可在A與B都是同文字如x所構成的多項式,而A的次不小於B之時,求得有前述定義的商。

1. 此時有B是A之因子的可能,換言之,A可化成

$$A \equiv QB \tag{1}$$

的形式,其中Q是x的整函數.

於是就有 $$\frac{A}{B} \equiv Q,$$

這就是說,A被B除的商是整函數Q;我們又說,A可被B整除.

例若,$A=x^3+4x^2-2x-5$ 而 $B=x^2+3x-5$,則將見 $x^3+4x^2-2x-5=(x+1)(x^2+3x-5)$,這就是形式如(1)的恆等式,$Q$是$x+1$.

因此 $$\frac{A}{B}=\frac{x^3+4x^2-2x-5}{x^2+3x-5}=x+1.$$

2. 通常B往往不是A的因子. 若然,即不能將A化成QB;但如§401所示,A可以化成

$$A \equiv QB+R \tag{2}$$

的形式,其中Q與R都是x的整函數,而R的次小於B.

此時便有 $$\frac{A}{B} \equiv Q+\frac{R}{B},$$

這就是說，A 被 B 除的商，是整函數 Q，以及分子的次較低於分母的分式 R/B，兩者的和.

就此種情形而論，Q 叫做整商部分(integral part of the quotient)，R 叫做剩餘.

例若 $A=x^3+2x^2+3x+3$ 而 $B=x^2+2x+2$，就可以立即將 A 化成 (2) 的形式 寫做

$$x^3+2x^2+3x+3=x(x^2+2x+2)+(x+3),$$

其中 Q 是 x，R 是 $x+3$，它的次低於 B.

因此 $$\frac{A}{B}=\frac{x^3+2x^2+3x+3}{x^2+2x+2}=x+\frac{x+3}{x^2+2x+2}.$$

401 **除法變換.** 現在尚待說明，怎樣可將 A 化成 $QB+R$ 的形式，其中 R 的次低於 B，或 R 是 0. 欲達到這個目的，通常所用的手續叫做除法變換(division transformation)，或"長除法"(long division).

先看下例.

設 $A=2x^4+3x^3+4x^2+x-2$, $B=x^2-x+1$.

這裏 B 是二次式，而所求的整函數 Q，須使從 A 減 QB 而得的剩餘 R，是一次式，或 0；因若求得這樣的函數 Q，就有

$$A-QB\equiv R, \text{ 因而 } A\equiv QB+R.$$

A 既然是四次式，R 的次又不可大於一，則從 A 減去 QB 後，A 的最先三項必須消去. 故得下面求 Q 的方法.

$$\begin{array}{rrl}
 & A=2x^4+3x^3+4x^2+x-2 & \big|\ x^2-x+1=B \\
 & 2x^2B=2x^4-2x^3+2x^2 \qquad\quad & \big|\ 2x^2+5x+7=Q \\
A-2x^2B= & 5x^3+2x^2+x-2 & \qquad\qquad (1) \\
5xB= & 5x^3-5x^2+5x & \\
A-(2x^2+5x)B= & 7x^2-4x-2 & \qquad\qquad (2) \\
7B= & 7x^2-7x+7 & \\
A-(2x^2+5x+7)B= & 3x-9=R & \qquad\qquad (3)
\end{array}$$

若將 B 與某式相乘之積，其領先(leading term)項同於 A 的領先項者，從 A 減去，則 A 的領先項顯然可以消去．這個積，最簡單的是 $2x^2B$，乘式 $2x^2$，是用 B 的領先項 x^2 除 A 的領先項 $2x^4$ 而得到的．

從 A 減 $2x^2B$，如上式所示，有

$$A-2x^2B=5x^3+2x^2+x-2. \tag{1}$$

用相仿的手續消去所得剩餘 (1) 的領先項，就無異消去了 A 的第二項．用 x^2 除 $5x^3$，得商 $5x$；用 $5x$ 乘 B，從 (1) 減去所得之積，就有

$$A-(2x^2+5x)B=7x^2-4x-2. \tag{2}$$

最後，從 (2) 減去 $7B$，消去剩餘 (2) 的領先項，就無異消去了 A 的第三項；乘數 7，是用 x^2 除 $7x^2$ 而得到的．結果是

$$A-(2x^2+5x+7)B=3x-9. \tag{3}$$

剩餘 (3) 是一次式，從 A 減去 $(2x^2+5x+7)B$，便得。

因此，所求的多項式 Q 與 R，乃是

$$Q=2x^2+5x+7 \quad 與 \quad R=3x-9.$$

將恆等式 (3) 寫成

$$A=(2x^2+5x+7)B+(3x-9),$$

就是將 A 化成 $QB+R$ 的形式，其中 R 的次小於 B.

故當 A 與 B 已設之時，可得下列求 Q 與 R 的定則：

將 A 與 B 都照 x 的降冪序排列．

用 B 的領先項除 A 的領先項；所得之商就是 Q 的第一項．

用 Q 的第一項乘 B，從 A 減所得之積．

對於所得的剩餘,行相仿的手續,即用 B 的領先項除它的領先項,等等.

繼續求到得一較 B 低次的剩餘而止. 此時已求得 Q 的一切各項,而最後的剩餘是 $A-QB$,即 R.

計算時,常照前例排列. 若照乘法的樣用分離係數法,則更為簡省.

例。 已設 $A=2x^5-6x^4+7x^3+8x^2-19x+20$, 及 $B=x^2-3x+4$; 求 Q 與 R.

$$\begin{array}{l|l}
2-6+7+8-19+20 & 1-3+4 \\
\underline{2-6+8} & \overline{2+0-1+5} \\
\quad -1+8-19 & \\
\quad \underline{-1+3-4} & \text{因此 } Q=2x^3-x+5 \\
\qquad 5-15+20 & \text{而 } R=0. \\
\qquad \underline{5-15+20} &
\end{array}$$

讀者注意,這裏的第一剩餘,未將 $-1+8-19+20$ 全寫出來,祇寫了下一次減法所要用到的一部分, $-1+8-19$;又 Q 的第二係數是 0,因為第一次減法,已消去了 A 的最先兩項.

習題. 設 $A=x^4+2x^3+3x^2+2x+4$, $B=x^2+2x$, 求 Q 與 R.

402　**對於這個方法應加的注意.** 1. 在此除法變換手續中,每一個中間剩餘,無異一個新的被除式;又若 R_1 表示任何一個中間剩餘, Q_1 表示 Q 的已得部分,而 Q_2 是 Q 的其餘部分,則有

$$A\equiv Q_1B+R_1 \text{ 而 } R_1\equiv Q_2B+R.$$

2. 求得 Q 與 R 所經的手續,本非用 B 除 A 的除法,只是包括乘法與減法的初步運算,其目的,在於將 A 化成 $A\equiv QB+R$ 的形式. 直到從恆等式 $A\equiv QB+R$,得恆等式 $A/B\equiv Q+\dfrac{R}{B}$ 時,真正的除法方纔發生.

但在習慣上，求得 Q 與 R 所經的運算，常叫做"除法"，而 Q 亦叫做"商"，卽使在 R 不等於 0 時，也不叫做"整商部分"；此後，便要遵照這習慣. 不過這樣一來，"用 B 除 A"的意思，就不是 § 254 中所說的，求一個用 B 乘可得 A 的式子，而是下述的兩件事情，第一，須用何式乘 B，從 A 減去所得之積，始可得較 B 低次的剩餘；第二，剩餘是什麼？與 § 87 比較.

3. 整式 A 化成整式 $QB+R$ 所經的各步，不論 x 有何值，都可以實施. 因此，在 x 有一切之值，卽使其值可使 B 等於 0 時，A 與 $QB+R$ 都有同值. 但在另一方面說，A/B 或 $Q+R/B$，當 $B=0$ 時，却是沒有意義的.

例若 $A=x^2+x+1$ 而 $B=x-1$，

則由 § 401，求得 $$x^2+x+1=(x+2)(x-1)+3, \tag{1}$$

因而 $$\frac{x^2+x+1}{x-1}=x+2+\frac{3}{x-1}. \tag{2}$$

就此例而論，$x=1$ 時，$B=0$. 將 1 代 (1) 與 (2) 中的 x，得 $3=3$，這是眞確的，但 $\frac{3}{0}=3+\frac{3}{0}$，這是沒有意義的.

4. 從 A 到 $QB+R$ 的變換，有一無二，這就是說，祇有一對整函數 Q 與 R 存在（其中 R 的次低於 B），可使

$$A\equiv QB+R.$$

因若有第二對存在，譬如說是 Q' 與 R'，則應有

$$QB+R\equiv Q'B+R', \text{ 因而 } (Q-Q')B\equiv R'-R.$$

但這是不可能的，因 $R'-R$ 的次低於 B，而 $(Q-Q')B$ 的次並不低於 B.

用常數乘被除式或除式所生的效果. 下面的定理，此後頗有用處. 403

1. 若用任何常數，如 c，乘被除式，則商及剩餘同時也被 c 乘.

因若 $A\equiv QB+R$，則 $cA\equiv cQ\cdot B+cR$.

2. 若用 c 乘除式，則商被 c 除，但剩餘不變.

因若　　　　$A\equiv QB+R$，則 $A\equiv\frac{Q}{c}\cdot cB+R$.

3. 若用 c 乘被除式兼乘除式，則剩餘被 c 乘，而商則不變.

因若　　　　$A\equiv QB+R$，則 $cA\equiv Q\cdot cB+cR$.

4. 若在除法變換的任何階段上，用 c 乘中間剩餘或除式，則最後的剩餘倘有改變，也不過是被 c 乘而已.

這從 1 與 2 及 § 402, 1 可以推知.

讀者最後用實在的計算，核驗上述各定理. 現在舉例核驗定理 2 如下.

命 $A=4x^2+6x+1$，先用 $B=2x-1$ 除，再用 $2B=4x-2$ 除.

$$\begin{array}{r|l} 4+6+1 & 2-1 \\ \underline{4-2} & \overline{2+4} \\ 8+1 & \\ \underline{8-4} & \\ 5 & \end{array} \quad \therefore\ Q=2x+4,\ R=5. \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 4+6+1 & 4-2 \\ \underline{3-2} & \overline{1+2} \\ 8+1 & \\ \underline{8-4} & \\ 5 & \end{array} \quad \therefore\ Q=x+2,\ R=5.$$

404 **除法利用未定係數法.** 當 A 與 B 已設時，也可以用未定係數法求 Q 與 R.

例. $A=2x^4+3x^3+4x^2+x-2$ 用 $B=x^2-x+1$ 來除.

因 A 是四次式，而 B 是二次式，故預知 Q 是二次式，而 R 最高是一次式

因此，設　　　　$Q=c_0x^2+c_1x+c_2$，$R=d_0x+d_1$，

其中各係數 c_0, c_1, c_2, d_0, d_1，其待求之值，須使

$$2x^4+3x^3+4x^2+x-2\equiv(c_0x^2+c_1x+c_2)(x^2-x+1)+d_0x+d_1$$

$$\equiv c_0x^4+\left.\begin{array}{r}-c_0\\+c_1\end{array}\right| x^3+\left.\begin{array}{r}c_0\\-c_1\\+c_2\end{array}\right| x^2+\left.\begin{array}{r}c_1\\-c_2\\+d_0\end{array}\right| x+\left.\begin{array}{r}c_2\\+d_1\end{array}\right| \qquad (1)$$

但若欲使 (1) 成爲恆等式,則必須有 (§ 284),

$$\begin{array}{rll}
c_0= & 2. & \\
-c_0+c_1= & 3, & \therefore\ c_1=3+c_0\qquad\ =3+2\quad\ =5. \\
c_0-c_1+c_2= & 4, & \therefore\ c_2=4-c_0+c_1=4-2+5=7. \\
c_1-c_2+d_0= & 1, & \therefore\ d_0=1-c_1+c_2=1-5+7=3. \\
c_2+d_1= & -2, & \therefore\ d_1=-2-c_2\qquad=-2-7\quad=-9.
\end{array}$$

因此, $Q=2x^2+5x+7$, $R=3x-9$ (參閱 § 401).

習題. $6x^5+13x^4-12x^3-11x^2+11x-2$ 用 $2x^2+x-2$ 除.

整除法. 設 A 與 B 是 x 所構成且有文字係數的多項 405
式,而 B 是 m 次式. 若 A 可被 B 整除,則剩餘 R 非恆等於 0 不可,所以 R 的係數必須都等於 0. 又因 R 是 $m-1$ 次式,故應有 m 個係數 (§ 277),這些係數明明都是 A 與 B 各係數的函數. 因此,

多項式 A 若可被 m 次多項式 B 整除,則 A 與 B 的係數必須適合 m 個條件.

現在用下面的例題來說明.

例. a 與 b 有何值時, x^3+3x^2+bx+2 可被 x^2+ax+1 整除?

依題列式,有

$$\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2+bx\qquad\qquad +2 & x^2+ax+1 \\
\underline{x^3+ax^2+x\qquad\qquad\qquad} & x+(3-a) \\
(3-a)x^2+(b-1)x\quad +2 & \\
\underline{(3-a)x^2+(3a-a^2)x+(3-a)} & \\
\quad(b-1-3a+a^2)x+(a-1) &
\end{array}$$

因此, a 與 b 必須適合兩條件

$b-1-3a+a^2=0$, $a-1=0$; 由此得 $a=1$ 及 $b=3$.

習題. 決定 l 與 m 之值,使 $2x^3+3x^2+lx+m$ 可被 x^2+x-6 整除.

被除式與除式都照 x 的昇冪序排列. 設 A 與 B 分別是 406
被除式與除式,都照 x 的昇冪序排列,並假定 A 的開始一項的

次不低於 B 的開始一項，則用 § 401 所述消去領先項的手續，可以求得一個由 B 構成的整式，來表示 A．若 A 可被 B 整除，則所得之結果，與 A 及 B 都照降冪序排列時所得的相同；但若 A 不能被 B 整除，則結果就完全不同．看下例就可以明白．

$$\begin{array}{l|l}
1+3x+3x^2+x^3 & 1+x \\
\underline{1+x} & 1+2x+x^2 \\
\quad 2x+3x^2 & \\
\quad \underline{2x+2x^2} & \qquad (1) \\
\qquad x^2+x^3 & \\
\qquad \underline{x^2+x^3} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
1-2x+x^2 & 1+x \\
\underline{1+x} & 1-3x+4x^2 \\
-3x+x^2 & \\
\underline{-3x-3x^2} & \qquad (2) \\
\quad 4x^2 & \\
\quad \underline{4x^2+4x^3} & \\
\qquad -4x^3 &
\end{array}$$

從上面的計算及 § 401，可知

$$1+3x+3x^2+x^3=(1+2x+x^2)(1+x) \tag{1}$$

$$1-2x+x^2 \qquad =(1-3x+4x^2)(1+x)-4x^3. \tag{2}$$

結果 (1) 與所設被除式及除式都照降冪序排列時所得的相同．若除法是可以整除的，像這裏的 (1) 那樣，則從 § 402, 4 可知，兩個結果常相同．

但結果 (2)．則與 $1-2x+x^2$ 及 $1+x$ 照 x 的降冪序排列時所得的，完全不同．若照降冪序排序，應有

$$x^2-2x+1=(x-3)(x+1)+4. \tag{3}$$

(2) 與 (3) 都是眞恆等式，但由兩式所得，$x+1$ 所構成的式子，用來表示 x^2-2x+1 的，却各不相同，因而 x^2-2x+1 被 $x+1$ 除的商，也得用不同的式子，表示如下：

$$\frac{1-2x+x^2}{1+x}=1-3x+4x^2-\frac{4x^3}{1+x},$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x+1}= \qquad x-3 \quad +\frac{4}{x+1}.$$

407　讀者注意 照昇冪序排列時，各次剩餘的領先項的次逐漸增加，且除可以整除外，這手續沒有天然的終點．經過充分多

的步驟後，整商部分可以成爲項數隨意多的高次多項式．因此，

若 A 與 B 是多項式，都照 x 的昇冪序排列，A 不能被 B 整除，A 的開始一項的次不低於 B 的開始一項，則可將 A 被 B 除的商，化成下面的形式

$$\frac{A}{B}\equiv Q'+\frac{R'}{B},$$

其中 Q' 與 R' 都是整函數，照 x 的昇冪序排列，Q' 的末項含有 x 的高次冪，可以隨意高到多少次，而 R' 的開始一項，含有更高次冪．

若 Q' 中的項數是 n，則 Q' 叫做 A 被 B 除到 n 項的商，而 R' 是對應的剩餘．

若 x 的值很小(小到什麽程度，下文就要說明)，則使 n 充分大時，就可使 R'/B 的值小到隨意多少小的程度；換言之，可以求得一個多項式 Q'，它的值與 A/B 之差，小到隨意多少小的程度．因爲這樣，多項式 Q' 有時叫做分式 A/B 的近似整式(approximate integral expression)．

例如 1 用 $1-x$ "除"到 n "步"，即得

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}.$$

若予 x 以數值上小於 1 的任何值，則可選擇 n，使 $1+x+\cdots\cdots+x^{n-1}$ 與 $1/(1-x)$ 之差，小到隨意多少小的程度．例若 $x=1/3$，則 $x^3/(1-x)=1/18$，所以 $1+x+x^2$ 與 $1/(1-x)$ 的差祇有 $1/18$．同樣，$1+x+x^2+x^3$ 與 $1/(1-x)$ 的差，祇有 $1/54$；四項以上類推．

用未定係數法求商到 n 項． 下面的例可以說明此法． **408**

例． 求商 $\dfrac{3-x}{1-x+2x^2}$ 到四項．

設 $$\frac{3-x}{1-x+2x^2}\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots. \qquad (1)$$

用 $1-x+2x^2$ 乘兩端,合併同類項,就有

$$3-x\equiv a_0+\begin{array}{c|c|c|l} a_1 & a_2 & a_3 & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \\ & +2a_0 & +2a_1 & \end{array}$$

$$3-x\equiv a_0+\left.\begin{matrix}a_1\\-a_0\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}a_2\\-a_1\\+2a_0\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}a_3\\-a_2\\+2a_1\end{matrix}\right|x^3+\cdots \tag{2}$$

但欲使 (2) 成爲恆等式 必須有 (§ 284),

$$a_0=3,$$

$$a_1-a_0=-1, \quad \therefore \quad a_1=-1+a_0=2.$$

$$a_2-a_1+2a_0=0, \quad \therefore \quad a_2=a_1-2a_0=-4.$$

$$a_3-a_2+2a_1=0, \quad \therefore \quad a_3=a_2-2a_1=-8.$$

因此, $(3-x)/(1-x+2x^2)=3+2x-4x^2-8x^3+\cdots.$

習題. 求 $\dfrac{2+x+3x^2}{1+x-x^2}$ 到五項.

409 **含有不止一變數的多項式.** 設有兩多項式 A 與 B, 含有不止一個變數. 除非就某一變數而論 A 的次低於 B, A 就有可被 B 整除的可能,換言之,使 $A/B\equiv Q$ 的整函數 Q, 有存在的可能. 先將 A 與 B 照各變數之一的降冪序排列,然後應用 § 401 的方法,就可以發見有無這樣的函數存在,若有, Q 也順便可以求得.

例. $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 用 $x+y+z$ 來除.

$$\begin{array}{l|l}
x^3-3yz\cdot x+(y^3+z^3) & x+(y+z) \\
\underline{x^3+(y+z)x^2} & \overline{x^2-(y+z)x+(y^2-yz+z^2)} \\
\quad -(y+z)x^2-3yz\cdot x & \\
\quad \underline{-(y+z)x^2-(y+z)^2x} & \\
\qquad\quad (y^2-yz+z^2)x+(y^3+z^3) & \\
\qquad\quad \underline{(y^2-yz+z^2)x+(y^3+z^3)} &
\end{array}$$

因此, $(x^3+y^3+z^3-3xyz)/(x+y+z)=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$

習題. $2x^2+5xy+3y^2+7x+11y-4$ 用 $x+y+4$ 除.

若 A 不能被 B 整除,則用這個方法可得一式以表示 A/B, 其形式是 $A/B\equiv Q+R/B$, 其中 Q 與 R 就排列的文字而論是

整式，而 R 就這個文字說，它的次低於 B. 但此式的形式，要看所選排列的文字是哪一個而定.

例. $4x^2+6xy+y^2$ 用 $2x+y$ 除.

(1) 選 x 做排列的文字，有

$$\begin{array}{r|l} 4x^2+6xy+\ y^2 & 2x+y \\ \underline{4x^2+2xy\qquad} & \overline{2x+2y} \\ 4xy+\ y^2 & \\ \underline{4xy+2y^2} & \\ -\ y^2 & \end{array}$$

因此

$$\frac{4x^2+6xy+y^2}{2x+y}=2x+2y-\frac{y^2}{2x+y}.$$

(2) 選 y 做排列的文字，有

$$\begin{array}{r|l} y^2+6yx+4x^2 & y+2x \\ \underline{y^2+2yx\qquad} & \overline{y+4x} \\ 4yx+4x^2 & \\ \underline{4yx+8x^2} & \\ -4x^2 & \end{array}$$

因此

$$\frac{y^2+6yx+4x^2}{y+2x}=y+4x-\frac{4x^2}{y+2x}.$$

習題十三

1. 用 § 401 的方法及分離係數法，將

$$6x^4-7x^3-3x^2+24x-20 \text{ 用 } 3x^2+x-6 \text{ 除.}$$

2. 又 $3x^4-2x^3-32x^2+66x-35$ 用 x^2+2x-7除.

3. 又 $2x^5-5x^4+13x^3-15x^2+22x$ 用 x^2-2x+4 除.

4. 又 $4x^7-3x^5+19x^4+2x^3+4x^2-4x+7$ 用 x^3-x+5 除.

5. 用 § 404 的未定係數法 將

$$2x^3-3x^2+x-5 \text{ 用 } x^2-3x+2 \text{ 除.}$$

6. 又 $2x^5-3x^4+x^2-5$ 用 x^3-3x+2 除.

7. 設 $A=3x^3-5x^2-7x+12$, $B=3x^2+x-5$, 將 A 化成 $A\equiv QB+R$ 的形式，其中 R 的次低於 B. 又將 A/B 的對應式寫出來.

8. 決定 a 與 b 之值，使 $x^4+ax^3+x^2+bx+1$ 可被 x^2-2x+1 整除.

9. a 與 b 有何值時，$\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+ax+b}{x^2+3x+5}$ 可化成整式.

10. $x^6+x^5+x^3+x+1+2(x^4+x^2)$ 用 x^2+x+1 除.

11. $2x^2+5xy-3y^2-5x+13y-12$ 用 $x+3y-4$ 除.

12. $2a^2-b^2-6c^2-ab+ac+5bc$ 用 $2a+b-3c$ 除.

13. $a^2(b+c)+b^2(c+a)-c^2(a+b)+abc$ 用 $ab+bc+ca$ 除.

14. $x^4+(a-3)x^3+(4-a)x^2-2ax+8a$ 用 x^2-3x+4 除.

15. $8x^3-27y^3$ 用 $2x-3y$除,用分離係數法.

16. 又用同法,將 $x^4-4xy^3+3y^4$ 用 $x-y$ 除.

17. 又用同法,將 $6a^5+a^4b-a^3b^2+11a^2b^3-5ab^4+4b^5$ 用 $2a^2-ab+b^2$ 除.

18. 被除式是 $2x^3+xy^2+y^3$,除式是 $2x+y$,求 Q 與 R,先取 x,次取 y,做"排列的文字".

19. 被除式是 $1-3x+5x^2$,除式是 $1+x+3x^2$,照 x 的昇羃序排列,求商到三項,並求剩除.

20. 被除式是 $1+x+3x^2$, 除式是 $1-3x+5x^2$, 照前題樣,求商及剩除.

21. 用未定係數法 (§ 408), 求商 $\frac{1}{1-2x}$ 到四項.

22. 又用同法求商 $(2+3x+4x^2)/(1-x+2x^2)$ 到四項.

綜合除法及剩餘定理

410 **綜合除法.** 若除式有 $x-b$ 的形式,卽一次二項式,其領先係數是 1, 則 § 401 所述的除法變換,實施時有一個非常簡便的方法,現在就要將此法加以說明.

試一察 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 被 $x-b$ 除得的結果.

$$
\begin{array}{l|l}
a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 & x-b \\
\underline{a_0x^3-a_0bx^2} & \overline{a_0x^2+(a_0b+a_1)x+(a_0b^2+a_1b+a_2)} \\
(a_0b+a_1)x^2+a_2x & \\
\underline{(a_0b+a_1)x^2-(a_0b^2+a_1b)x} & \\
\qquad (a_0b^2+a_1b+a_2)x+a_3 & \\
\qquad \underline{(a_0b^2+a_1b+a_2)x-(a_0b^3+a_1b^2+a_2b)} & \\
\qquad\qquad a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=R &
\end{array}
$$

Q 與 R 的係數是

a_0, a_0b+a_1, $a_0b^2+a_1b+a_2$, $a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3$.

讀者注意，這些係數中的第一個，是被除式領先項的係數，而其餘則可由下面的定則，逐項遞次求得：

用 b 乘上一次所得的係數，加被除式未用過的次一係數.

例如 $$a_0b^2+a_1b+a_2=(a_0b+a_1)b+a_2,$$
而 $$a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=(a_0b^2+a_1b+a_2)b+a_3.$$

不論被除式是幾次式，這定則常可應用．因爲除式領先項的係數既然是 1，則 Q 的每一個新係數，必常同於上次所得剩餘的領先項係數．所以正像該係數一樣，用 b 乘 Q 的前一係數，再加被除式的次一未用係數，卽可求得．據同一理由，若用 b 乘 Q 的末一係數，再加被除式的末一係數，就得 R.

因此，若除式的形式是 $x-b$，而被除式的形式是 a_0x^n+ 411
$a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，則可求得 Q 與 R，如下式所示，式中 $c_0, c_1, \cdots c_{n-1}$ 表示 Q 的係數.

$$\begin{array}{cccccc|l}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \underline{b} \\
\underline{\quad} & \underline{c_0b} & \underline{c_1b} & \underline{\cdots} & \underline{c_{n-2}b} & \underline{c_{n-1}b} & \\
c_0 & c_1 & c_2 & & c_{n-1}, & R &
\end{array}$$

先按原來排好的次序，寫下被除式的係數，再在其右側寫 b.

在 a_0 的下方寫 c_0，這係數，已知其等於 a_0.

然後用 b 乘 c_0，將所得之積 c_0b 寫在 a_1 的下方，加起來，得 c_1.

同樣，用 b 乘 c_1，將所得之積 c_1b 寫在 a_2 的下方，加起來，得 c_2.

這樣繼續進行，乘與加相間，直到全部係數 $a_0, a_1, \cdots a_n$ 用盡而止.

例. $3x^4-5x^3-4x^2+3x-2$ 用 $x-2$ 除.

依法應有

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -5 & -4 & +3 & -2 & \underline{2} \\ & 6 & 2 & -4 & -2 & \\ \hline 3 & 1 & -2 & -1, & -4 & \end{array}$$

因此 $Q=3x^3+x^2-2x-1$ 而 $R=-4$.

這一個非常簡便的方法，叫做綜合除法 (synthetic division). 讀者應養成習慣，遇見除式有 $x-b$ 的形式時，就用這個方法.

412 對於此法應加的注意. 1. 用綜合除法時，若被除式是不完全多項式，則必須留心把所缺 x 的各冪，用係數 0 補上.

2. 因 $x+b=x-(-b)$，故若除式有 $x+b$ 的形式時，也可以用綜合除法，但須在計算時，將 b 換成 $-b$.

例 1. x^4-1 用 $x+1$ 除.

這裏 $x+1=x-(-1)$，而用 $x-(-1)$ 除，則應有

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +0 & +0 & +0 & -1 & \underline{-1} \\ & -1 & +1 & -1 & +1 & \\ \hline 1 & -1 & +1 & -1, & 0 & \end{array}$$

因此　　$Q=x^3-x^2+x-1$，而 $R=0$.

3. 若除式是形式如 $ax-\beta$ 的二項式 則寫成:

$$a(x-\beta/a).$$

於是把 $x-\beta/a$ 當作除式，用綜合除法來除.

設 Q 與 R 是所得的商與剩餘，則對應於除式 $ax-\beta$ 的商與剩餘，就是 Q/a 與 R (§403, 2).

例 2. $3x^3-11x^2+18x-3$ 用 $3x-2$ 除.

這裏 $3x-2=3(x-\frac{2}{3})$，而用 $x-\frac{2}{3}$ 除，則應有

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -11 & +18 & -3 & \underline{2/3} \\ & 2 & -6 & 8 & \\ \hline 3 & -9 & 12, & 5 & \end{array}$$

因此，所求的商是 $\frac{3x^2-9x+12}{3}$，即 x^2-3x+4，而剩餘是5．

習題1．$5x^5-x^3+x+2$ 用 $x-3$ 除．

習題2．$x^3+6x^2+11x+6$ 用 $x+3$ 除．

習題3．$2x^3-3x^2+8x-12$ 用 $2x-3$ 除．

剩餘定理． 由 x 構成的多項式，爲 $x-b$ 所除時，所得的剩餘，等於在被除式內用 b 代 x 而得的結果；故若 $f(x)$ 表示被除式，則 $f(b)$ 就是剩餘． 413

在 § 410 中，已有這定理的證明；因在該節中已知，若用 $x-b$ 除 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$，則有剩餘 $a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3$，而且推廣說來，若用 $x-b$ 除 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，則剩餘必定是 $a_0b^n+a_1b^{n-1}+\cdots+a_n$，卽 $f(b)$．

這定理也可以證明如下：

若 $f(x)$ 是被除式，$x-b$ 是除式，$\phi(x)$ 是商，而 R 是剩餘，則從 § 401，

$$f(x)\equiv\phi(x)(x-b)+R,$$

其中 R 的次低於 $x-b$，所以 R 不含 x，不論 x 有何值，它的值是始終如一的．

這個恆等式的兩端，不論 x 有何值，常有同值．就特別的情形說，當 $x=b$ 時，兩端之值也相同．因此

$$f(b)\equiv\phi(b)(b-b)+R.$$

但 $b-b=0$；且因 $\phi(x)$ 是整式，$\phi(b)$ 是有窮的．

因此 $\phi(b)(b-b)=0$，於是

$$f(b)=R.$$

下面的例題，旣可以說明剩餘定理的眞確，又可以說明當 b 及 $f(x)$ 的係數都是所設數時，計算 $f(b)$ 之值通常所用最簡單的方法，就是用綜合除法以 $x-b$ 除 $f(x)$——所得剩餘就是 $f(b)$． 414

例. 求 $x=4$ 時, $f(x)=5x^4-12x^3-20x^2-43x+6$ 之值.

1. 用直接代換法,有

$f(4)=5\cdot4^4-12\cdot4^3-20\cdot4^2-43\cdot4+6=1280-768-320-172+6=26.$

2. 用綜合除法,有

$$\begin{array}{rrrrr|l} 5 & -12 & -20 & -43 & +6 & \underline{4} \\ & 20 & 32 & 48 & 20 & \\ \hline 5 & 8 & 12 & 5, & 26=f(4). & \end{array}$$

習題. 已設 $f(x)=3x^4-x^3+5x^2-8x+4$, 用綜合除法求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(4)$, $f(-2/3)$.

415 系 1. 若 $f(x)$ 在 $x=b$ 時等於零,則 $f(x)$ 可被 $x-b$ 整除,逆言之也成立.

因由 §413, $f(b)$ 是 $f(x)$ 爲 $x-b$ 所除時的剩餘,而剩餘是 0 時卽 $f(x)$ 被 $x-b$ 整除.

例如, $f(x)=x^3-3x^2+2$ 在 $x=1$ 時等於零,因爲 $f(1)=1-3+2=0$. 因此, $f(x)$ 被 $x-1$ 整除, 這是可以用實際的除法來核驗的.

又如, $f(x)=x^n-b^n$ 可被 $x-b$ 整除,因爲 $f(b)=b^n-b^n=0$.

例題. 若 x^3+3x^2-m 被 $x-2$ 整除, m 必須有何值?

我們應有 $2^3+3\cdot2^2-m=0$, 即 $m=20$.

習題. 證明若 n 是奇數,則 x^n+b^n 能被 $x+b$ 整除;若 n 是偶數,則不能.

416 系 2. 含兩變數或不止兩變數的整函數,若變數之中有兩個如 x 與 y, 經假定相等,則此函數卽可被這兩變數的差,如 $x-y$ 整除.

因這函數可以化成由 x 構成的多項式,其係數中含有其他變數. 由假設,當 $x=y$ 時,這多項式等於零. 所以它可被 $x-y$ 整除(§415).

例如, $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ 當 $x=y$ 時等於零;因用 y 代 x,可得

$$y^2(y-z)+y^2(z-y)+z^2(y-y)\equiv0.$$

因此，$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ 可被 $x-y$ 整除.

我們可用實際的除法核驗如下：

$$
\begin{array}{r|l}
(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+(y^2z-z^2y) & x-y \\ \cline{2-2}
\underline{(y-z)x^2-(y^2-yz)x\qquad\qquad\qquad} & (y-z)x-(yz-z^2) \\
-(yz-z^2)x+(y^2z-z^2y) & \\
\underline{-(yz-z^2)x+(y^2z-z^2y)} &
\end{array}
$$

習題. 證明 $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ 可被 $x-y$, $y-z$ 及 $z-x$ 整除.

定理. 多項式 $f(x)$，若在 $x=a$ 時，且在 $x=b$ 時等於零， 417
則可被 $(x-a)(x-b)$ 整除.

因爲既然由假設 $f(a)=0$，則 $f(x)$ 可被 $x-a$ 整除（§415），又若商是 $\phi_1(x)$，則應有

$$f(x)\equiv(x-a)\phi_1(x),\text{ 其中 }\phi_1(x)\text{ 是整式.} \qquad (1)$$

若在 (1) 中使 $x=b$，則有

$$f(b)=(b-a)\phi_1(b). \qquad (2)$$

但由假設 $f(b)=0$，而 $b-a\neq0$.

又據 §253，積的因子有一個等於零，積也等於零，故從 (2) 可知 $\phi_1(b)=0$.

但若 $\phi_1(b)=0$，則 $\phi_1(x)$ 可被 $x-b$ 整除（§415），故若商是 $\phi_2(x)$，則有

$$\phi_1(x)\equiv(x-b)\phi_2(x),\text{ 其中 }\phi_2(x)\text{ 是整式.} \qquad (3)$$

以此式代 (1) 中的 $\phi_1(x)$，得

$$f(x)\equiv(x-a)(x-b)\cdot\phi_2(x), \qquad (4)$$

此式證明 $f(x)$ 可被 $(x-a)(x-b)$ 整除.

依此推廣，可證普遍定理：

$f(x)$ 若在 $x=a, b, c, \cdots$ 時等於零，則可被 $(x-a)(x-b)$ 418
$(x-c)\cdots$ 整除.

例如，$2x^3+3x^2-2x-3$ 在 $x=1$, -1 時等於零，因 $2+3-2-3=0$ 而 $-2+3+2-3=0$.

因此，$2x^3+3x^2-2x-3$ 可被 $(x-1)(x+1)$ 即 (x^2-1) 整除，這是可用實際除法核驗的.

例 1. 求一個二次多項式 $f(x)$，其值在 $x=2, 3$ 時是 0，在 $x=4$ 時是 6.

因 $f(x)$ 是二次的，且可被 $(x-2)(x-3)$ 整除（§417），故可將它寫成 $f(x)=a_0(x-2)(x-3)$ 的形式，其中 a_0 是常數.

又因 $f(4)=6$，故有 $6=a_0(4-2)(4-3)$，由此可得 $a_0=3$.

因此，$f(x)=3(x-2)(x-3)=3x^2-15x+18$.

例 2. 求一個三次多項式 $f(x)$，其值在 $x=2, 3$ 時是零，在 $x=1$ 時是 6，而在 $x=4$ 時是 18.

照前例推理，有 $f(x)=(a_0x+a_1)(x-2)(x-3)$，其中 a_0, a_1 是常數.

又因 $f(1)=6$, $f(4)=18$，故有

$$6=(a_0+a_1)(1-2)(1-3)，\text{即 } a_0+a_1=3, \tag{1}$$

$$18=(4a_0+a_1)(4-2)(4-3)，\text{即 } 4a_0+a_1=9. \tag{2}$$

解 (1) 與 (2)，得 $a_0=2$, $a_1=1$.

因此，$f(x)=(2x+1)(x-2)(x-3)=2x^3-9x^2+7x+6$.

419 **定理.** x 之值，可使 n 次多項式 $f(x)$ 等於零的，不能超過 n 個.

因若有 x 的不止 n 個值，可使 $f(x)$ 等於零，則由 §418，當有形式如 $x-a$ 的因子不止 n 個的連乘積，可以整除 $f(x)$，但這是不可能的，因為這個連乘積的次超過 n，與假設相矛盾.

420 **定理.** 若有一個多項式 $f(x)$，已知它的次不能超過 n，而又有不止 n 個 x 的值，可使它等於零，則可斷定它的係數全是 0.

因若係數不全是零，則從 §419，決不能有 x 的不止 n 個值，可使 $f(x)$ 等於零.

這種多項式，說它是恆等於零的(vanishes identically).

421 **定理.** 有 n 次多項式兩個，$f(x)$ 與 $\phi(x)$，若有不止 n 個 x 的值，可使兩多項式等值，則其對應係數相等.

設　$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$

及　$\phi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$;

又設　$\psi(x)=f(x)-\phi(x)$

$$=(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots+(a_n-b_n).$$

則不論何時,祇要$f(x)$ 與 $\phi(x)$ 有同值, $\psi(x)$ 就等於零.但由假設, x 的值有不止 n 個,可使$f(x)$ 與 $\phi(x)$ 有同值.

因此,不超過 n 次的多項式 $\psi(x)=(a_0-b_0)x^n+\cdots+(a_n-b_n)$,有 x 的不止 n 個值可使它等於零. 故從 § 420, 其係數都是 0.

所以　$a_0-b_0=0$,　$a_1-b_1=0$,　$\cdots$,　$a_n-b_n=0$,

從而　$a_0=b_0$,　$a_1=b_1$,　$\cdots$,　$a_n=b_n$,

這就是說, $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 的對應係數相等.

例如, $f(x)=2x^2+bx+5$ 與 $\phi(x)=ax^2+3x+c$, 若在 $x=2, 4, 6$ 時有等值,則非有 $a=2, b=3$ 及 $c=5$ 不可.

習 題 十 四

將下列各題都用綜合除法:

1. $(x^4-3x^3-x^2-11x-4)\div(x-4)$.
2. $(5x^5-6x^4-8x^3+7x^2+6x+3)\div(x-3)$
3. $(3x^4+x^2-1)\div(x+2)$.
4. $(3x^3+16x^2-13x-6)\div(3x+1)$.
5. $(3x^3-6x^2+x+2)\div(3x-1)$.
6. $\{x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc\}\div(x-a)$.
7. $(2x^4-x^3y-7x^2y^2+7xy^3-10y^4)\div(x-2y)$.
8. 已設 $f(x)=2x^3-5x+3$, 用 § 414 的方法,求
   $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(-1)$, $f(-3)$, $f(-6)$.
9. 根據剩餘定理,決定 m 之值, 使 $x^3+mx^2-20x+6$ 可被 $x-3$ 整除.
10. 照前題樣,決定 l 與 m之值,使 $2x^3-x^2+lx+m$ 可被 $(x+2)(x-4)$ 整除.

11. 根據 § 416, 證明 $3bm+am-2an-6bn$ 可被 $m-2n$ 整除,又可被 $a+3b$ 整除.

12. 由 §§ 416, 417, 證明 $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ 可被 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 整除.

13. 求 x 的三次整函數,該函數在 $x=1, 4, -2$ 時等於零,在 $x=2$ 時其值是 -16.

14. 求 x 的三次整函數,其值在 $x=2, 3$ 時是 0,在 $x=0$ 時是 6,在 $x=1$ 時是 12.

15. 證明 x 不能有四個值可使 $2x^3-ax+1$ 與 x^3+5x+2 有等值.

多項式變數的變換

422 設 A 與 B 是 x 所構成的兩多項式, A 的次高於 B.

以 B 除 A, 設商是 Q, 剩餘是 R;則

$$A\equiv QB+R. \tag{1}$$

若 Q 的次不低於 B, 則以 B 除 Q, 設商是 Q_1, 剩餘是 R_1;則

$$Q\equiv Q_1B+R_1. \tag{2}$$

同樣,若 Q_1 的次仍不低於 B, 則以 B 除 Q_1, 設商是 Q_2, 剩餘是 R_2;則

$$Q_1\equiv Q_2B+R_2. \tag{3}$$

假定 Q_2 的次低於 B. 於是就有

$$\begin{aligned} A&\equiv QB+R && \text{由 (1)}\\ &\equiv\{Q_1B+R_1\}B+R && \text{由 (2)}\\ &\equiv\{(Q_2B+R_2)B+R_1\}B+R && \text{由 (3)}\\ &\equiv Q_2B^3+R_2B^2+R_1B+R, \end{aligned}$$

其中 Q_2, R_2, R_1, R 各係數都比 B 的次低.

推廣說來，若已設多項式 A 與 B，A 的次高於 B，則照前法繼續推求，直到求得一商，它的次低於 B 而止，就有

$$A\equiv Q_{r-1}B^{r}+R_{r-1}B^{r-1}+\cdots+R_1B+R$$

其中 $R, R_1, \cdots, R_{r-1}, Q_{r-1}$ 是遞次所得的剩餘，以及最後的商，它們的次都低於 B.

例. 將 $x^5-4x^4+3x^3-x^2+x+4$ 化成由 x^2+x+1 構成的多項式，其係數的次小於二.

用分離係數法，計算如下：

$$\begin{array}{l|l|l}
1-4+3-1+1+4 & 1+1+1 & \\
\underline{1+1+1} & 1-5+7-3 & 1+1+1 \\
-5+2-1 & \underline{1+1+1} & 1-6 \qquad \therefore\ Q_1=x-6 \\
\underline{-5-5-5} & -6+6-3 & \\
\quad 7+4+1 & \underline{-6-6-6} & \\
\quad \underline{7+7+7} & \qquad 12+3 \qquad \therefore\ R_1=12x+3 & \\
\qquad -3-6+4 & & \\
\qquad \underline{-3-3-3} & & \\
\qquad\quad -3+7 \qquad \therefore\ R=-3x+7. & &
\end{array}$$

因此 $x^5-4x^4+3x^3-x^2+x+4$

$$\equiv(x-6)(x^2+x+1)^2+(12x+3)(x^2+x+1)-(3x-7).$$

此法的特例，是將任何多項式由 x 構成的，化為由 $x-b$ 構成的多項式，其係數都是常數. 423

例. 將 $2x^3-x^2+4x-5$ 化為由 $x-2$ 構成的多項式.

各次剩餘及最後之商，可用綜合除法推求如下：

$$\begin{array}{cccc|l}
2 & -1 & +4 & -5 & \underline{2} \\
 & \underline{\quad 4} & \underline{\quad 6} & \underline{\ 20} & \\
2 & +3 & +10, & 15 & \qquad \therefore\ R=15 \\
 & \underline{\quad 4} & \underline{\ 14} & & \\
2 & +7, & 24 & & \qquad \therefore\ R_1=24 \\
 & \underline{\quad 4} & & & \\
2, & 11 & & & \qquad \therefore\ R_2=11 \text{ 和 } Q_2=2.
\end{array}$$

因此，$2x^3-x^2+4x-5\equiv2(x-2)^3+11(x-2)^2+24(x-2)+15.$

習題十五

1. 用§422的方法,以含有 x^2+1 的諸項,表示 x^4+x^3-1.
2. 又以含有 $2x^2+1$ 的諸項,表示 $4x^4+2x^3+4x^2+x+6$.
3. 又以含有 x^3-x^2+x+3 的諸項,表示 $2x^7-3x^6+2x^5+5x^4-x^2+6$.
4. 又以含有 x^2+xy+y^2 的諸項,表示 $x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5$.
5. 用§423的方法,以含有 $x-3$ 的諸項,表示 $2x^3-8x^2+x+6$.
6. 又以含有 $x+2$ 的諸項,表示 $x^5+3x^4-6x^3+2x^2-3x+7$.
7. 又以含有 $x+3$ 的諸項,表示 x^3+9x^2+27x.
8. 又以含有 $x+1$ 的諸項,表示 x^3+3x^2+x-1.

VI. 有理整式的因子

初步討論

424 **因子.** 設 A 是一個或不止一個變數的有理整函數.這些變數的任何有理整函數,可以整除 A 的,就是 A 的因子.

因此,所設函數 F,可以成為 A 的因子的充要條件是:

1. 就 A 中的變數而論, F 是有理整式.
2. A 可化成 $A\equiv GF$ 的形式,其中 G 也是整式.

例1. 因 $2x^2-2xy=2x(x-y)$, 故 x 與 $x-y$ 都是 $2x^2-2xy$ 的因子.

例2. 因 $3x^2-2y^2=(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y)(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)$,所以 $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y$ 與 $\sqrt{3}x-\sqrt{2}y$ 都是 $3x^2-2y^2$ 的因子.

例3. 雖然 $x-y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, 我們不說 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 與 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 是 $x-y$ 的因子,因為就 x 與 y 來說,它們都不是有理式.

注意1. 因子的各係數不必都是整數或有理數,隨便哪一種數或式子,都可以. 在例2中,係數就都是無理數. 425

含有不止一個文字的多項式,如 $x^2-y=(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$,若看成 x 與 y 兩個變數的函數,則 $x+\sqrt{y}$ 與 $x-\sqrt{y}$ 不能算是 x^2-y 的因子;但若看成 x 一個變數的函數,則 $x+\sqrt{y}$ 與 $x-\sqrt{y}$ 就是它的因子. 其他式子含有不止一個文字的,也都可以作如是觀.

注意2. 除在專論有整係數的函數時以外,通常不把"數字因子",如例1中的2,列入所設整函數 A 的因子之中;因爲如上所述,係數既然不必是整數,那麼祇要是個數(或常數),不問是什麼數,都可以說它可以整除 A,而是 A 的因子. 426

故若 F 是 A 的因子,而 c 是任何常數(不是0),則 cF 也是 A 的因子;但 F 與 cF,在實際上看成同一因子,祇把其中的一個,歸入 A 的因子之列.

例如在例1中,說 $2x$ 與 $x-y$ 是因子,或說 $-2x$ 與 $-x$ 是因子,都不錯.

定理. 若 F 是 B 的因子,而 B 是 A 的因子,則 F 是 A 的因子. 427

因由 §424, A 與 B 都可化成下面的形式:

$$A\equiv GB \quad 及 \quad B\equiv HF,$$

其中 G 與 H 都是整式.

因此 $$A\equiv G\cdot HF\equiv GH\cdot F,$$

卽 F 是 A 的因子(§424).

質函數與合函數. 一個整函數,也許除本身(或一個常數)外,沒有其他因子. 這樣的函數叫做質(prime)函數或質式. 但若有其他因子,就叫做合成(composite)函數或合成式. 428

例如,$x+y^2$ 與 $x-2y$ 是質式,但 x^2-y^2 是合式.

n 次合成函數 A,是不少於兩個不多於 n 個質函數,B, C,…的連乘積. 這些質函數叫做 A 的質因子. 429

430　此後將假定

1. 任何所設函數 A 祇有一組質因子.

2. A 的其他一切因子都是這些質因子的積.

3. 這些質因子中也許有兩個或不止兩個相等,但是將 A 寫成它的不同各質因子之冪的連乘積,祇有一個寫法.

當 A 是單變數函數時,這些定理(2與3是1的系)的證明見 §§ 484, 485. 就一般的情形論,這些定理也可以證明.

例. 因 $x^3y^3-2x^2y^4=xxyyy(x-2y)$, 故 $x^3y^3-2x^2y^4$ 的質因子,是 $x, x, y, y, y, x-2y$. 它的其他因子,如 x^2, xy, 等等,就是這些因子兩個或不止兩個的連乘積. 它的不同質因子是 $x, y, x-2y$. 它祇能用一個方法,寫成這些因子之冪的連乘積,就是: $x^2y^3(x-2y)$.

431　析因子. 將所設函數 A 完全析因子 (factoring completely),就是"將它析成質因子的連乘積"換言之,將它化成 $A\equiv B\cdot C\cdot D\cdots$ 的形式,其中 $B, C, D, \cdots$ 是質函數.

但是通常並不打算一下子就把這些因子都找出來. 首先總是將 A 析成兩個因子的積,如 FG, 其次再析 F 與 G, 這樣繼續進行,直到各質因子都經析出而止. 在這手續之中,卽使是第一步,也可以叫做將 A"析因子".

析因子與乘法是互相顚倒的手續. 乘法通常包含兩步: (1) 分配律的運用若干次,凡 $(a+b)c$ 都換成 $ac+bc$ 的形式; (2) 將所得結果中的同類項合併. 這手續顚倒過來,就必須 (1) 將所合併的各項拆開——析因子時感到困難的就是這一步——且須 (2) 應用分配律,將 $ac+bc$ 都換成 $(a+b)c$ 的形式.

切勿假定,凡是合成函數,都可以眞把它們的因子析出來. 例如 $x^5+ax^3+bx^2+cx+d$, 雖可證明它是合成函數,但也可以證明它的因子不能夠用代數方法求得,換言之,不能將各種代數運算,運用有窮次數而求得.

各項有公因子的式子

各項都有單項或多項公因子的式子，將它析因子，祇要應用分配律： 432

$$ab+ac+ad+\cdots=a(b+c+d+\cdots).$$

例 1. 將 $2a^2c+2abc+4ac^2-6acd$ 析因子.

各項都有因子 $2ac$. "析出"這因子，就有

$$2a^2c+2abc+4ac^2-6acd=2ac(a+b+2c-3d).$$

例 2. 將 $a(c-d)+b(d-c)$ 析因子.

兩項都有因子 $c-d$. 析出這因子，得

$$a(c-d)+b(d-c)=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d).$$

像這樣的因子，應當在起初時析出.

有些式子，外表雖非如此，但若將含有公因子的各項合併，却可以化成這樣的式子. 433

例 1. 將 $ac+bd+ad+bc$ 析因子.

合併 ac 與 ad，又 bc 與 bd，即得 $a(c+d)+b(c+d)$，這是一個二項式，其二項都有公因子 $c+d$.

因此 $$ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d).$$

讀者注意，應用此法將原式分成若干組時，各組非有相同的項數不可.

例 2. 將 $a^2+ab-bd-ad+ac-cd$.

此式可分成兩組，每組三項，或分成三組，每組兩項. 諸項之中，有四項含 a，即 a^2，ab，$-ad$，ac，其餘二項含 d，即 $-bd$，$-cd$. 欲得同項數的組，可將 $-ad$ 一項與含 d 的兩項合併. 這樣便有

$$\begin{aligned}a^2+ab+ac-ad-bd-cd&=a(a+b+c)-d(a+b+c)\\&=(a-d)(a+b+c).\end{aligned}$$

習題十六

將下列各式析因子:

1. $6x^4y^3z^2-12x^2y^4z+8x^2y^3$.
2. $2n^2+(n-3)n$.
3. $ab-a+b-1$.
4. $mx-nx-mn+n^2$.
5. $3xy-2x-12y+8$.
6. $10xy+5y^2+6x+3y$.
7. $x^3y^2-x^2y^3+2x^2y-2xy^2$.
8. $x^4+x^3+x^2+x$.
9. $ac+bd-(bc+ad)$.
10. $a^2c-abd-abc+a^2d$.
11. $ad+ce+bd+ae+cd+be$.
12. $a^2+cd-ab-bd+ac+ad$.

利用已知恆等式析因子

434 在第二章中,曾導出幾個特殊積的公式,如$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. 若所設函數A,可以化成這些特殊積的形式之一,就可以立即寫出它的因子來. 以下各節所述,就是這種析因子法.

435 **完全平方三項式.** 有 $a^2\pm2ab+b^2$ 形式之一的,叫做完全平方三項式. 這樣的式子,可用下列各式析因子:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2.$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)=(a-b)^2.$$

讀者注意,在完全平方三項式中(排列次序不錯時),中項是首末兩項平方根積的二倍,並注意,用中項的符號,連結首末兩項的平方主根,就得兩個相等的因子.

所謂將這完全平方式開平方,就是求這兩個相等的因子之一.

例 1. 將 $9x^2-12xy+4y^2$ 析因子.

這是一個完全平方式,因為 $12xy=2\sqrt{9x^2}\cdot\sqrt{4y^2}$.

又因$\sqrt{9x^2}=3x$, $\sqrt{4y^2}=2y$, 而中項的符號是$-$,故得

$$9x^2-12xy+4y^2=(3x-2y)(3x-2y)=(3x-2y)^2.$$

例 2. 將 $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ 析因子.

此式可以化成三項平方式,祇要將各項分組如下:

$$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=(a+b+c)^2.$$

習題. 將下列各式析因子:

1. $x^2+14x+49$.
2. $9-6a+a^2$.
3. $9x^2y^2+30xy+25$.
4. $x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9$.
5. $64a^8-48a^4+9$.
6. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.

二平方差. 這種式子或是可以化成這種式子的式子,可用下面的公式析因子: 436

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

例如,
$$x^2-y^2-z^2+2yz=x^2-(y^2-2yz+z^2)$$
$$=x^2-(y-z)^2$$
$$=(x+y-z)(x-y+z).$$

有一個很巧妙的方法,可將三項式化成二平方差,其法是在三項的一項上,加一個適當的式子,將這三項式變成完全平方式,然後從所得的平方式,再減去這所加的.

例如,
$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy).$$

習題. 將下列各式析因子:

1. x^4-y^6.
2. $6a^3-6ab^2$.
3. $12a^3x^3-75axy^2$.
4. $25x^{2n}-49x^{2m}$.
5. $36x^4-1$.
6. $x^4-3x^2y^2+y^4$.

二平方和. 利用虛數單位 $i=\sqrt{-1}$ (§§ 218, 220),二平方和 a^2+b^2 可以化成二平方差,然後根據 § 436 析因子,所得的因子是複數. 437

因為既然 $i^2=-1$,就有 $b^2=-(-b^2)=-(ib)^2$.

因此 $$a^2+b^2=a^2-(ib)^2=(a+ib)(a-ib).$$

§§ 219, 220 中已講過，平常的各條計算定則，i 是都遵守的。在用到 i 時祇要記住，$i^2=-1$.

438 **任何兩個同次冪的和與差.** §§ 308, 309, 310 中，曾證明

第一．不論 n 是奇數或偶數，

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}). \quad (1)$$

第二．當 n 是偶數時，

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}). \quad (2)$$

第三．當 n 是奇數時，

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}). \quad (3)$$

因此有下列各定理：

1. a^n-b^n 常可被 $a-b$ 整除.

2. a^n-b^n 在 n 是偶數時可被 $a+b$ 整除.

3. a^n+b^n 在 n 是奇數時可被 $a+b$ 整除.

4. 在這三種情形之下，商的各項（除符號外）有下列各形式：

$$a^{n-1}\quad a^{n-2}b\cdots\cdots ab^{n-2}\quad b^{n-1},$$

各項的符號，在 $a-b$ 是除式時，都是＋，在 $a+b$ 是除式時，＋與－相間.

例．1. $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

2. $x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$.

3. $$\begin{aligned}8a^3+27b^3c^3&=(2a)^3+(3bc)^3\\&=(2a+3bc)[(2a)^2-(2a)(3bc)+(3bc)^2]\\&=(2a+3bc)(4a^2-6abc+9b^2c^2).\end{aligned}$$

習題．將下列各式析因子：

1. $64x^3-125y^3$.　　2. $27x^3+1$.　　3. $16x^4-81y^4$.

439 **當 n 是合成數時.** 下列各定理，是 § 438，(1)，(2)，(3) 及 § 436 的直接推論.

1. 若 n 是任何整數 p 的倍數，則 a^n-b^n 可被 a^p-b^p 整除.

例如，
$$x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3$$
$$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4).$$

2. 若n是任何整數p的偶倍數，則a^n-b^n可被a^p+b^p整除．

例如，
$$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$$
$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3).$$

3. 若n是任何整數p的奇倍數，則a^n+b^n可被a^p+b^p整除，不論n本身是奇數或偶數．

例如，
$$x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3$$
$$=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4).$$

4. 若n是2的冪，則累次應用§436中所述的方法，可以將a^n+b^n析成二次因子的連乘積．

例如，
$$x^8+y^8=x^8+2x^4y^4+y^8-2x^4y^4$$
$$=(x^4+y^4)^2-2x^4y^4$$
$$=(x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2)(x^4+y^4-\sqrt{2}x^2y^2).$$

又，
$$x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2=x^4+2x^2y^2+y^4-(2-\sqrt{2})x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-(2-\sqrt{2})x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}xy)(x^2+y^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}xy),$$

其他照此類推．

因爲這些"二次"因子的每一個，可由§444析成兩個一次因子（虛數），故若n是2的冪，則a^n+b^n的完全析因子是常常可能的．

當n是合成數時，最好先將a^n+b^n或a^n-b^n，析成兩個因子，儘量使它們的次相近．這樣得到的因子，其中至少有一個常可再析因子．

例如，x^6-y^6的析因子，照2的方法最好．再析，便得
$$x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

習題．將下列各式析因子：

1. x^4+y^4.　　2. x^8-y^8.　　3. x^9+y^9.

440　若 m 與 n 是同一整數 p 的倍數，則 §§ 438, 439 的定理，也可以應用於形式如 $a^m \pm b^m$ 的式子．

例如，
$$x^6-y^{15}=(x^2)^3-(y^5)^3$$
$$=(x^2-y^5)(x^4+x^2y^5+y^{10}).$$

習題十七

將下列各式析因子，在不引入無理係數或虛係數的條件下，儘量析到可析的地步．

1. $4x^3y-20x^2y^2+25xy^3$.　　2. $28tx^2-63ty^2$.
3. $x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$.
4. $(7a^2+2b^2)^2-(2a^2+7b^2)^2$.
5. $(7x^2+4x-3)^2-(x^2+4x+3)^2$.　　6. $4(1-b^2-ab)-a^2$.
7. x^4+x^2+1.　　8. $a^4-6a^2b^2+b^4$.
9. a^4+4a^2+16.　　10. $9x^4+15x^2y^2+16y^4$.
11. $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.
12. $576x^6y^3-9y^{15}$.　　13. x^9-y^9.　　14. $x^{12}-y^{12}$.
15. $x^{10}+y^{10}$.　　16. x^5-32.　　17. x^7+y^{14}.

分組析因子法

441　由 x 構成的多項式，其各項有時可以分成若干組，各組都有一個公因子，如 F．這個公因子 F，就是全式的因子．與 § 433 比較．

例 1. 將 x^3+3x^2-2x-6 析因子．

注意，後面兩個係數是前面兩個的等倍數，故有
$$x^3+3x^2-2x-6=x^2(x+3)-2(x+3)$$
$$=(x^2-2)(x+3)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3).$$

例 2. 將 x^3+2x^2+2x+1 析因子.

合併係數相同的各項,就有

$$\begin{aligned}x^3+2x^2+2x+1&=x^3+1+2x(x+1)\\&=(x^2-x+1)(x+1)+2x(x+1)\\&=(x^2-x+1+2x)(x+1)=(x^2+x+1)(x+1).\end{aligned}$$

有時候先將所設各項中的一項(或不止一項)分成兩項,就可以析得因子.

例 3. 將 x^3+4x^2+5x+6 析因子.

將第二,三項分開,得

$$\begin{aligned}x^3+4x^2+5x+6&=x^3+3x^2+x^2+3x+2x+6\\&=x^2(x+3)+x(x+3)+2(x+3)\\&=(x^2+x+2)(x+3).\end{aligned}$$

再看下例.

例 4. 將 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ 析因子.

將第三項分開,得

$$\begin{aligned}x^4+2x^3+3x^2+2x+1&=x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1\\&=(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1\\&=(x^2+x+1)^2.\end{aligned}$$

習題十八

將下列各式析因子:

1. x^4-x^3+x-1.
2. $x^5-x^3-8x^2+8$.
3. x^4-2x^3+2x-1.
4. $x^3-7x^2-4x+28$.
5. $x^6-x^4y^2-x^2y^4+y^6$.
6. x^3+2x^2+3x+2.
7. $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1$.
8. $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$.

二次式的析因子法

二次式 x^2+px+q,由視察法析因子. 若 p 與 q 是整 442
數,則此式有時候有析因子的可能.

既然 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$,

則若能求得二數,a 與 b,適合 $a+b=p$ 及 $ab=q$ 的條件,就可以求得 x^2+px+q 的兩個因子.

這樣的兩個數，是常常存在的（§444），雖然難得是有理數．但若是有理數，就必定是整數（§454），而且可由視察法求得．現在舉例說明如下：

例1．將 $x^2+13x+42$ 析因子．

所要找的是兩個整數，a 與 b，它們的積是 42，和是 13．因爲 ab 與 $a+b$ 都是正的．所以 a 與 b 也都是正的．因此，在積是 42 的各對正數中，即在 42 與 1，21 與 2，14 與 3，7 與 6 各對中，我們找到 7 與 6 乃是所求的一對，因爲 $7+6=13$．

因此 $$x^2+13x+42=(x+7)(x+6).$$

例2．將 $x^2-13x+22$ 析因子．

就此例說，a 與 b 必須都是負的；因爲它們的積是正數，和是負數．因此，照前例挑選積是 22 的一對負數，選得 -11 與 -2；因 $-11-2=-13$．

因此 $$x^2-13x+22=(x-11)(x-2).$$

例3．將 $x^2-9x-22$ 析因子．

就這個例說，因 ab 是負的，a 與 b 必有異號；又因 $a+b$ 是負的，數值上較大的一個必是負的．因此，寫下 $-22=-22\times1=-11\times2$，照前面的樣試驗，求得 $a=-11$ 及 $b=2$；因 $-11+2=-9$．

因此 $$x^2-9x-22=(x-11)(x+2).$$

習題．將下列各式析因子：

1．x^2+3x+2．　　2．$x^2-16x+15$．　　3．$x^2-4x-12$．

4．x^2+x-30．　　5．$x^2+20x+96$．　　6．$x^2-21x+80$．

443　**二次式 ax^2+bx+c 由視察法析因子．** 若 a, b, c 是整數，則此式有時候有析因子的可能．

用 a 乘再用 a 除，可將 ax^2+bx+c 化成 $[(ax)^2+b(ax)+ac]/a$ 的形式，於是用方纔所說的方法，即找尋二整數，其積是 ac，其和是 b，而將括號中由 ax 構成的二次式析因子．

例1．將 $2x^2+7x+3$ 析因子．

用 2 乘又用 2 除，便有

$$2x^2+7x+3=\frac{(2x)^2+7(2x)+6}{2}$$

$$=\frac{(2x+6)(2x+1)}{2}=(x+3)(2x+1).$$

例 2. 將 $abx^2+(a^2+b^2)x+ab$ 析因子.

用 ab 乘又用 ab 除,便有

$$abx^2+(a^2+b^2)x+ab=\frac{(abx)^2+(a^2+b^2)\cdot abx+a^2b^2}{ab}$$
$$=\frac{(abx+a^2)(abx+b^2)}{ab}$$
$$=(bx+a)(ax+b).$$

例 3. 將 $16x^2+72x-63$ 析因子.

就此例而說,無須用 16 乘與除,因有

$$16x^2+72x-63=(4x)^2+18(4x)-63$$
$$=(4x+21)(4x-3).$$

習題. 將下列各式析因子.

1. $6x^2-13x+6$.
2. $5x^2+14x-3$.
3. $14x^2+x-3$.
4. $18x^2+21x+5$.
5. $49x^2+105x+44$.
6. $abx^2-(ac-b^2)x-bc$.

二次式 x^2+px+q 或 ax^2+bx+c,由配方法析因子. **444**
以上所述的方法,祇能應用於特別的情形,下面所講乃是通法.

因 $$(x+\frac{p}{2})^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

故將$\frac{p^2}{4}$即 x 係數之半的平方,加於 x^2+px,就可以造成完全平方.

這個手續,叫做將 x^2+px 配方.

1. 若加 $p^2/4$ 而又減 $p^2/4$,則 x^2+px+q 之值不變.這樣,就可以把此式變成二平方差,而照 §436 析因子. 如下所示便是:

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right). \quad (1)$$

2. 因 $$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

故在 (1) 中以 b/a 代 p, 以 c/a 代 q, 便可析得此式的因子. 簡化所得結果,有

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).\quad(2)$$

例 1. 將 x^2-6x+2 析因子.

如法當有
$$\begin{aligned}x^2-6x+2&=x^2-6x+3^2-3^2+2\\&=(x-3)^2-7\\&=(x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7}).\end{aligned}$$

例 2. 將 $x^2+8x+20$ 析因子.

如法當有
$$\begin{aligned}x^2+8x+20&=x^2+8x+4^2-4^2+20\\&=(x+4)^2+4\\&=(x+4)^2-4i^2\\&=(x+4+2i)(x+3-2i).\end{aligned}$$

就此題而說,我們先求得二平方和 $(x+4)^2+4$, 然後再以 $-4i^2$ 代 4 ,而將此和化成二平方差 (§ 437). 兩個因子都是虛的.

例 3. 將 $3x^2-5x+1$ 析因子.

如法當有
$$\begin{aligned}3x^2-5x+1&=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right]\\&=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\right]\\&=3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right]\\&=3\left(x-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right).\end{aligned}$$

習題. 將下列各式析因子:

1. $x^2+10x+23$.　　　　2. $x^2-10x+24$.

3. $x^2-12x+45$.　　　　4. x^2+x+1.

5. $2x^2+3x+2$.　　　　6. $x^2-4ax-4b^2+8ab$.

二變數的二次齊次函數. §§ 442–444 的方法,也可以應 445
用於形式如

$$ax^2+bxy+cy^2$$

的二次函數.

例 1. 將 $x^2-8xy+14y^2$ 析因子.

如法有 $$x^2-8xy+14y^2=x^2-8xy+16y^2-2y^2$$
$$=(x-4y)^2-2y^2$$
$$=[x-(4+\sqrt{2})y][x-(4-\sqrt{2})y].$$

習題. 將下列各式析因子.

1. $x^2+5xy+4y^2$.　　　x^2-xy+y^2.

二變數的二次非齊次函數. 這樣的函數,通常總是質函 446
數. 但若是合成函數,就可以析因子,如下例所示.

例. 將 $A=x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$ 析因子.

A 若是合成函數,則必是兩個一次多項式的積. 又,A 的二次項 $x^2+2xy-8y^2$, 必定是此二多項式中一次項的積.

由視察法可得, $x^2+2xy-8y^2=(x+4y)(x-2y)$.

因此,若 A 是合成函數,則必有二數 l 與 m, 適合下面的條件:

$$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$$
$$\equiv(x+4y+l)(x-2y+m)$$
$$\equiv x^2+2xy-8y^2+(l+m)x+(4m-2l)y+lm. \qquad (1)$$

但欲使 (1) 是恆等式,必須有 (§ 285),

$$l+m=2\ (2),\quad -2l+4m=14\ (3);\quad lm=-3\ (4).$$

從 (2) 與 (3), 得 $l=-1$, $m=3$. 此二值適合 (4);因 $-1\cdot3=-3$.

所以 $$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x+4y-1)(x-2y+3).$$

注意. 從此例可知,這種合成函數是不很普通的. 若在 A 中將末一項 -3 換成任何別的數,即使其餘各項照舊, A 也變成了質函數; 因為此時 $l=-1$, $m=3$ 就不能適合 (4) 了.

這個方法,也可以應用於三變數二次齊次函數.

例如，將 $x^2+2xy-8y^2+2xz+14yz-3z^2$ 析因子，即得

$$x^2+2xy-8y^2+2xz+14yz-3z^2\equiv(x+4y+lz)(x-2y+mz).$$

照前例推求，也得 $l=-1$, $m=3$.

習題 1. 將 $2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2$ 析因子.

習題 2. 證明 $x^2-y^2+2x+y-1$ 是質函數.

447 **n 次多項式.** 前已證明，凡二次多項式如 $a_0x^2+a_1x+a_2$，乃是兩個一次因子的積. 其實由 x 構成的不論多少次的多項式，也是一次因子的積，不過沒有找尋這些因子的通法而已；換言之，我們有

定理. 凡由 x 構成的 n 次多項式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

都是 n 個一次因子的積；這就是說，有 n 個二項式，$x-\beta_1$，$x-\beta_2$, $\cdots$, $x-\beta_n$，可使

$$f(x)\equiv a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n).$$

這定理的證明在後面.

448 **系.** 由 x 與 y 構成的 n 次齊次多項式，是 n 個由 x 與 y 構成的一次齊次因子的積.

例如，齊次多項式 $a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3$，可從 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 導出，祇要將 x 換做 x/y，再用 y^3 乘所得的結果.

但由 § 447, $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3\equiv a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)$，故若在此恆等式中，以 x/y 代 x，然後用 y^3 乘兩端，即得

$$a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3\equiv a_0(x-\beta_1y)(x-\beta_2y)(x-\beta_3y).$$

習題十九

將下列各式析因子：

1. $x^2-14x+48$.
2. $x^2-21x-120$.
3. $5x^2-53x-22$.
4. $16x^2+64x+63$.
5. $54x^2-21x+2$.
6. $12x^2+20xy-8y^2$.

7. x^4-13x^2+36.　　8. $x^3y-3x^2y^2-18xy^3$.

9. x^2-3x+3.　　10. $3x^2+2x-3$.

11. $x^2-4xy-2y^2$.　　12. $x^2-6ax-9b^2-18ab$.

13. $abx^2-(a^2+b^2)x-(a^2-b^2)$.　　14. $x^2+bd+dx+bx+cx^2+cdx$.

15. $x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$.　　16. $x^2+3xy+2y^2+3zx+5yz+2z^2$.

剩餘定理及綜合除法的應用

利用剩餘定理求因子. 設 $f(x)$ 是由 x 構成的多項式. 449
由 § 415 的剩餘定理,若 b 是一數,可使 $f(b)=0$, 則 $x-b$ 就是 $f(x)$ 的一個因子. 這樣的數 b, 有時可用視察法求得.

例. 將 $f(x)=x^3-5x+4$ 析因子.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +0 & -5 & +4 & \underline{1} \\ & 1 & 1 & -4 & \\ \hline 1 & 1 & -4, & 0 & \end{array}$$

因 $f(1)=1-5+4=0$, 故 $x-1$ 是 $f(x)$ 的因子.
用 $x-1$ 除 $f(x)$, 得商 x^2+x-4.
因此　　$f(x)=(x-1)(x^2+x-4)$.

注意. 若 $f(x)$ 諸係數的代數和是零,像本例一樣,則 $x-1$ 是 $f(x)$ 的因子.

有整係數的多項式. 有整係數的多項式 $f(x)$, 也許有一次因子其係數也是整數的,故若欲將它析因子,最好先找一找它的一次因子. 這些因子,常可依賴下面 §§ 451, 452 的原理而得. 450

有整係數的多項式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 可以有形式如 $x-b$ 的因子, b 是整數. 若有,則 b 必是 $f(x)$ 的常數項 a_n 的因子. 現在就 $n=3$ 的特例證明如下: 451

設 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$. 若 $x-b$ 可以成為 $f(x)$ 的因子,則由 § 415, b 的值必須使

$$f(b)=a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3\equiv 0.$$

因而須使　　$$(a_0b^2+a_1b+a_2)b\equiv -a_3.$$

既然 $a_0b^2+a_1b+a_2$ 表示整數, b 就非為 a_3 的因子不可,

因此，凡是像 $x-b$ 這樣的因子，都可照下例所示的方法求得．

例．將 $f(x)=3x^5-3x^4-13x^3-11x^2-10x-6$ 析因子．

常數項 -6 的因子是 ± 1, ± 2, ± 3, ± 6，若 $x-b$ 要做 $f(x)$ 的因子，則 b 之值必須是這些值中之一．現在用綜合除法，把 b 所可有的各值試一下：

3	-3	-13	-11	-10	-6	$\lfloor -1$
	-3	$+6$	$+7$	$+4$	$+6$	
3	-6	-7	-4	-6,	0	$\lfloor -1$
	-3	$+9$	-2	$+6$		
3	-9	$+2$	-6,	0		$\lfloor 3$
	9	0	$+6$			
3	0	2,	0			

因 $f(1)\neq 0$，$x-1$ 不是因子．故開始試 $x-(-1)$ 即 $x+1$．試的結果，$x+1$ 確可整除 $f(x)$，得商 $Q_1=3x^4-6x^3-7x^2-4x-6$，剩餘是 0．因此，$x+1$ 是 $f(x)$ 的一個因子，而 Q_1 是其餘各因子的積．

其次須將 Q_1 析因子．再試 $x+1$，也可以整除，商是

$$Q_2=3x^3-9x^2+2x-6.$$

Q_2 的常數項也是 -6，將 Q_2 析因子，陸續試 $x+1$, $x-2$, $x+2$，所得剩餘都不是 0．因此，這些都不是因子．但試到 $x-3$ 時，即知其可以整除 Q_2，得商 $Q_3=3x^2+2$．所以

$$f(x)=(x+1)^2(x-3)(3x^2+2).$$

452　有整係數的多項式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$；可以有形式如 $\alpha x-\beta$ 的因子，其中 α, β 表示沒有公因子的二整數．若有，α 必定是 a_0 的因子，β 必定是 a_n 的因子．§451 的定理，包括在本定理之中．現在就 $n=3$ 的特例證明如下：

設 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$．若 $\alpha x-\beta$，或 $\alpha(x-\beta/\alpha)$，要做 $f(x)$ 的因子，則由 §415，必須有

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=a_0\frac{\beta^3}{\alpha^3}+a_1\frac{\beta^2}{\alpha^2}+a_2\frac{\beta}{\alpha}+a_3\equiv 0,$$

即須有 $$a_0\beta^3+a_1\beta^2\alpha+a_2\beta\alpha^2+a_3\alpha^3\equiv 0. \tag{1}$$

從 (1) 得 $$a_0\beta^3\equiv-(a_1\beta^2+a_2\beta\alpha+a_3\alpha^2)\alpha. \tag{2}$$

因 $a_1\beta^2+a_2\beta\alpha+a_3\alpha^2$ 是整數，故 α 是 $a_0\beta^3$ 的因子．但 α 與 β^3 沒有公因子 (§492, 2)．因此，α 是 a_0 的因子 (§492, 1)．

又從 (1) $$(a_0\beta^2+a_1\beta\alpha+a_2\alpha^2)\beta\equiv-a_3\alpha^3, \tag{3}$$

由此式，推理如前，即可斷定 β 是 a_3 的因子．

因此,凡是像 $\alpha x-\beta$ 這樣的因子,都可以照下例所示的方法求得.

例. 將 $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$ 析因子.

若 $\alpha x-\beta$ 要做 $f(x)$ 的因子,則 α 須有 ±1, ±2, ±3, ±6 諸值之一,而 β 須有 ±1, ±2 諸值之一;因而 β/α 須有 ±1, ±2, $\pm1/2$, $\pm1/3$, $\pm2/3$, $\pm1/6$, 諸值之一.

用綜合除法以 $x-\beta/\alpha$ 除 $f(x)$, 就可以試一試 β/α 有哪一個值時, $\alpha x-\beta$ 是 $f(x)$ 的因子. 若可以整除,而 Q 是商,則 $\alpha x-\beta$ 是 $f(x)$ 的因子,而 Q/α 是其餘各因子的積 (§ 412, 3).

順次試 $x-1$, $x+1$, $x-2$, $x+2$, 沒有一個可以整除 $f(x)$. 但 $x+1/2$ 可以整除,商是 $Q_1=6x^3+2x^2+2x-4$. 因此, $2x+1$ 是 $f(x)$ 的一個因子,而其餘各因子的積是 $Q_1/2=3x^3+x^2+x-2$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6 & +5 & +3 & -3 & -2 & -1/2 \\
 & -3 & -1 & -1 & 2 & \\
\hline
6 & +2 & +2 & -4, & 0 & \\
3 & +1 & +1 & -2 & & 2/3 \\
 & 2 & +2 & +2 & & \\
\hline
3 & +3 & +3, & 0 & & \\
1 & +1 & +1 & & &
\end{array}
$$

其次將 $Q_1/2$ 析因子. 若 $\alpha x-\beta$ 可以成爲因子,則 β/α 須有 ±1, ±2, $\pm1/3$, $\pm2/3$ 諸值之一. 但已知 $x-1$, $x+1$, $x-2$, $x+2$, 都不是因子,因爲它們都不是 $f(x)$ 的因子. 試 $x-1/3$, $x+1/3$, 發見它們都不能整除 $Q_1/2$; 但 $x-2/3$ 能整除,商是 $Q_2=3x^2+3x+3$. 因此, $3x-2$ 是 $Q_1/2$ 的因子,而其餘各因子的積是 $Q_2/3=x^2+x+1$. 所以

$$f(x)=(2x+1)(3x-2)(x^2+x+1).$$

注意. 用 $x-b$ 或 $x-\beta/\alpha$ 除,在尚未除畢前,往往已可知道是否能整除. 453

例如下面的計算,已足以顯示 $x-2$ 不能整除 $5x^3-4x^2+x+8$; 因爲"除數" 2, 最後所得 Q 的係數 6, 以及被除式的未用係數 1 與 8, 都是正的,則 Q 的其餘各係數以及 R, 也必定是正的. 換言之, R 決不能是 0.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5 & -4 & +1 & +8 & 2 \\
 & 10 & & & \\
\hline
5 & 6 & & &
\end{array}
$$

又從下面的計算,也可以斷定 $x-1/3$ 不會整除 $3x^3+x^2+x-2$. 因此後計算所得之數,即 $2\cdot1/3$ 或 $2/3$, 是一個分數,這分數將使 Q 的其餘各係數以及 R 都是分數,所以 R 決不能是 0.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3 & +1 & +1 & -2 & 1/3 \\
 & 1 & & & \\
\hline
3 & 2 & & &
\end{array}
$$

454　從 § 452 可知，多項式 $f(x)=x^n+\cdots+a_n$，其領先係數是1，其餘各係數都是整數的，決不能在 x 之值是分數時等於零.

因若 $f(\beta/\alpha)=0$，則 $f(x)$ 必可被 $\alpha x-\beta$ 整除，因而 α 必是1的因子，這就祇在 $\alpha=\pm 1$ 時纔成.

455　**多項式析因子與解方程式.**　從 § 350 可知，將 $f(x)$ 析成它的一次因子的連乘積，這個問題，與解方程式 $f(x)=0$ 實屬大同小異.

例 1.　解方程式 $f(x)=2x^4+x^3-17x^2-16x+12=0$.

由 § 452，得 $f(x)=(2x-1)(x+2)^2(x-3)$.

因此，方程式 $f(x)=0$ 與下列四方程式同等：

$$2x-1=0,\qquad x+2=0,\qquad x+2=0,\qquad x-3=0.$$

所以 $f(x)=0$ 的根是 $1/2$，-2，-2，及 3.

例 2.　解 $x^3+3x^2=10x+24$.

移項，　$x^3+3x^2-10x-24=0$.

析因子，　$(x+2)(x-3)(x+4)=0$.

因此，所求的根是 -2，3 和 -4.

習題二十

將下列各式析因子：

1. x^3-7x+6.
2. $x^3+6x^2+11x+6$.
3. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.
4. x^4-2x^2+3x-2.
5. $6x^3-13x^2-14x-3$.
6. $2x^3-5x^2y-2xy^2+2y^3$.
7. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5$.
8. $4x^6-41x^4+46x^2-9$.
9. $6x^5+19x^4+22x^3+23x^2+16x+4$.
10. $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4$.

解下列各方程式：

11. $x^2-4x-12=0$.
12. $6x^2-7x+2=0$.
13. $x^2-5x=14$.
14. $x^2+6x=2$.
15. $x^3-9x^2+26x=24$.
16. $x^4+2x^3-4x^2-2x+3=0$.
17. $x^3-1=0$.
18. $10x^3-9x^2-3x+2=0$

習題二十一

下列各式，可用本章中所述各法析因子．不引入無理係數或虛係數，儘量析到可析的地步．

1. $6xy+15x-4y-10$.
2. $a^2bc-ac^2d-ab^2d+bcd^2$.
3. $a^3(a-b)+b^3(b-a)$.
4. a^5-81ab^4.
5. $a^4b-a^2b^3+a^3b^2-ab^4$.
6. $3abx^2-6axy+bxy-2y^2$.
7. $3x^6-192y^6$.
8. $(x^2+x)^3-8$.
9. $64x^6y^3-y^{15}$.
10. $x^2-(a-b)x-ab$.
11. $x^{2n}-3x^n-18$.
12. $x-x^2+42$.
13. $3x^4+3x^3-24x-24$.
14. $x^5-9x^3+8x^2-72$.
15. $2xc-a^2+x^2-2ab+c^2-b^2$.
16. $x^2(x^2-20)+64$.
17. $a^2-2ab+b^2-5a+5b+6$.
18. $x^4-10x^2y^2+9y^4$.
19. $6x^2-7xy-5y^2-4x-2y$.
20. $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$.
21. $4(xz+uy)^2-(x^2-y^2+z^2-u^2)^2$.
22. $14x^2+19x-3$.
23. $1+19y-66y^2$.
24. $xy^3+55x^2y^2+204x^3y$.
25. $a^4-18a^2b^2c^2+81b^4c^4$.
26. $(x^2-7x)^2+6x^2-42x$.
27. $8(x+y)^3-27(x-y)^3$.
28. $(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$.
29. $x^2+a^2-bx-ab+2ax$.
30. $x^5-y^5-(x-y)^5$.
31. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$.
32. b^4+b^2+1.
33. $2x^2+7xy+3y^2+9x+2y-5$.
34. a^4+4.
35. $x^2-xy-2y^2+4xz-5yz+3z^2$.
36. $4a^4+3a^2b^2+9b^4$.
37. $x^2-8ax-40ab-25b^2$.
38. x^8+x^4+1.
39. $(x^2+2x-1)^2-(x^2-2x+1)^2$.
40. $(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.
41. $x^3-ax^2-b^2x+ab^2$.
42. $x^4+bx^3-a^3x-a^3b$.
43. $a^2-9b^2+12bc-4c^2$.
44. $8a^3+12a^2+6a+1$.
45. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.
46. $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.
47. $4x^5+4x^4-37x^3-37x^2+9x+9$.
48. x^4-4x+3.
49. $x^2+5ax+6a^2-ab-b^2$.
50. $15x^3+29x^2-8x-12$.
51. $abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc$.
52. $2x^3-ax^2+5a^2x-2a^3$.

53. $(a-b)x^2+2ax+(a+b)$.　　54. $x^{15}-y^{15}$.

55. $x^4-6x^3+7x^2+6x-8$.　　56. $4x^3-3x-1$.

57. $3x^5-10x^4-8x^3-3x^2+10x+8$.

58. $5x^4+24x^3-15x^2-118x+24$.

59. $a^2bc+ac^2+acd-abd-cd-d^2$.

60. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$.

VII. 最高公因與最低公倍

最高公因

456 **最高公因.** 設 $A, B, \cdots$ 是一個或不止一個變數,如 x 或 x 與 y 的有理整函數.

$A, B, \cdots$ 若無公因子,則稱爲互質(prime to one another);但若有,則必有最高次的一個. 這一個,叫做這些函數的最高公因(highest common factor),略號是 H. C. F.

例如, x^2+y^2 與 $x+y$ 是互質的.

但 $4xyz^5$, $8xz^4$, 以及 $4x^2yz^3$ 則有公因子 $x, z, z^2, z^3, xz, xz^2, xz^3$, 而最高公因是 xz^3.

457 **注意.** 1. 公共數字因子,此處不計.

2. 兩個或不止兩個互質的函數,有時說它們的 H. C. F. 是 1.

3. A 與 B 的 H. C. F. 的數值,不一定是 A 與 B 數值的最大公約. 例如, $(2x+1)x$ 與 $(x-1)x$ 的 H. C. F. 是 x. 但在 $x=4$ 時, $(2x+1)x$ 與 $(x-1)x$ 的值是 36 與 12, 而 36 與 12 的最大公約是 12, 不是 4.

458 **定理 1.** $A, B, \cdots$ 的 H. C. F., 是 $A, B, \cdots$ 所有一切不同公共質因子,累乘到它在任一函數中所呈最低冪的連乘積.

若假定函數 $A, B, \cdots$ 的每一個,都是用它的質因子連乘積

來表示的,而且假定(照 §430),如此表示之法,每一個函數祇有一種,則立卽可以推得此定理.

例如, xyz^5, xz^4 以及 x^2yz^3 的一切不同公共質因子,是 x 與 z, 而 x 與 z 在此三式中的最低冪是 x 與 z^3. 因此, H. C. F. 是 xz^3.

讀者注意,一個所設函數,果眞有不止一個方法,可用它的質因子連乘積來表示,則根據上述定理而得的結果,也將有不止一個,各與表示 $A, B\cdots$ 的各個方法對應,因而就要有不止一個最高公因可求了.

定理1的應用. 所設各函數若均可完全析因子,則可根據 §458 的定理,將它們的 H. C. F. 立卽寫下來. 459

例. 求 $x^5y^2-6x^4y^3+9x^3y^4$ 與 $x^4y-9x^2y^3$ 的 H. C. F.

析因子,有 $$x^5y^2-6x^4y^3+9x^3y^4=x^3y^2(x-3y)^2$$

及 $$x^4y-9x^2y^3=x^2y(x-3y)(x+3y).$$

因此, H. C. F. 是 $x^2y(x-3y)$.

習題. 求下列各組函數的 H. C. F.

1. $2x^4y^2z^5$, $3x^5y^3z$, 及 $4x^3y^4$.
2. x^2-y^2, $x^2+2xy+y^2$ 及 x^3+y^3.
3. x^2-x-6, x^2+6x+8, 及 x^2+5x+6.
4. $x^3-6x^2+11x-6$ 及 $2x^3-9x^2+7x+6$.

函數 $A, B, \cdots$ 之一的質因子已知時,可用除法或根據剩餘定理試一試,有沒有哪幾個是其餘一切函數的因子. 於是就可以根據 §458 的定理,求得 H. C. F. 460

例 1 求 $f(x)=x^2-3x+2$ 及 $\phi(x)=x^4-3x^3+5x^2-8x+5$ 的 H. C. F.

由觀察得 $f(x)=(x-1)(x-2)$. 在 $\phi(x)$ 中試命 $x=1$, $x=2$, 則知 $\phi(1)=0$, 但 $\phi(2)\neq 0$. 因此, H. C. F. 是 $x-1$.

例 2. 求 $f(x)=x^2+4x+4$ 及 $\phi(x)=x^4+5x^3+9x^2+8x+4$ 的 H. C. F.

因 $f(x)=(x+2)^2$, 所以不但要得知 $x+2$ 是不是 $\phi(x)$ 的因子,而且要得知這因子, $\phi(x)$ 有一個還是兩個. 用 $x+2$ 除 $\phi(x)$ (綜合除法),得 $Q_1=x^3$

$+3x^2+3x+2$ 及 $R_1=0$；用 $x+2$ 除 Q_1，得 $Q_2=x^2+x+1$ 及 $R_2=0$。因此，$f(x)$ 與 $\phi(x)$ 的 H. C. F. 是 $(x+2)^2$。

習題．求下列各組多項式的 H. C. F.

1. x^2+x-6 及 $2x^3+7x^2+4x+3$。
2. x^2+5x+6 及 $x^4+6x^3+13x^2+16y+12$。
3. $(x-1)^2(x-3)^3(3x+1)^2$ 及 $x^4-5x^3+x^2+21x-18$。

461 **定理2.** 設 A 與 B 是兩個所設整函數，而 M 與 N 是任何兩個整函數或常數，則 A 與 B 的公因子都是 $MA+NB$ 的因子．

因若命 F 表示 A 與 B 的公因子，

則 $$A\equiv GF \text{ 而 } B\equiv HF,$$

其中 $$G \text{ 與 } H \text{ 都是整式．}$$

因此 $$MA+NB\equiv M\cdot GF+N\cdot HF\equiv(MG+NH)F,$$

其中 $$MG+NH \text{ 是整式．}$$

所以 F 是 $MA+NB$ 的因子（§424）．

462 **定理2的應用．** 由 x 構成的兩個同次多項式，要找它們的 H. C. F.，這一個問題，可以利用這個定理，化成一個較低次多項式的析因子問題．

例一．求 $A=x^2+2x-4$ 及 $B=x^2+x-3$ 的 H. C. F.

從 A 減 B，得 $A-B=x-1$．

因此，據 §461，$x-1$ 是 A 與 B 所有唯一可能的公因子．

但因 A 不在 $x=1$ 時等於零，故 $x-1$ 不是 A 的因子．

所以 A 與 B 是互質的．

例2．求 $A=2x^3-3x^2-3x+2$ 與 $B=3x^3-2x^2-7x-2$ 的 H. C. F.

1．用適當的數乘 A 及 B，使其領先項相同，即用3乘 A，用2乘 B．然後從 $3A$ 減 $2B$，得

$$3A-2B=-5x^2+5x+10=-5(x^2-x-2)=-5(x+1)(x-2).$$

因此，A 與 B 所有可能的公因子，只是 $x+1$ 與 $x-2$。

由剩餘定理，得知兩個都是 A 同 B 的因子.

因此，A 與 B 的 H. C. F. 是 $(x+1)(x-2)$

2. 或將 A 與 B，加起來，得

$$A+B=5x^3-5x^2-10x=5x(x^2-x-2)=5x(x+1)(x-2).$$

我們立刻可以知道，x 不是 A 或 B 的因子，所以只須試 $x+1$ 與 $x-2$.

習題. 求下列各組多項式的 H. C. F.

1. $x^4-x^3+3x^2-4x-12$ 與 $x^4-x^3+2x^2+3x-22$.
2. $6x^3+25x^2+5x+4$ 與 $4x^3+15x^2-2x+8$.

定理 3. 設 A, B, Q, R 四個整函數，其間有關係 $A\equiv QB+R$，則 A 和 B 的公因子同於 B 和 R 的公因子. 463

已設 $$A\equiv QB+R, \quad (1)$$

從而有 $$A-QB\equiv R. \quad (2)$$

由 §461，從 (2) 可知凡 A 與 B 的公因子，都是 R 的因子，所以是 B 與 R 的公因子.

逆言之，從 (1)，據 §461，凡 B 與 R 的公因子，都是 A 的因子，所以是 A 與 B 的公因子.

因此，A 和 B 的公因子，同於 B 和 R 的公因子.

由 x 構成的二多項式，其 $H.\ C.\ F.$ 的一般求法. 由 x 構成的一個多項式，若用另一個來除，則被除式，除式，商，以及剩餘，其間有關係 $A\equiv QB+R$。 因此，從 § 463 可知， 464

被除式與除式的公因子，常同於除式與剩餘的公因子.

利用此理，由 x 構成的任何兩個多項式，其 H. C. F. 常可求得. 所用方法，與算術上二整數的最大公約求法相仿. 若 A 與 B 代表所設多項式，又若二式不同次時，假定 A 高於 B，則 A 與 B 的 H. C. F. 可照下列定則推求.

465 **定則.** 用 B 除 A, 設商是 q, 剩餘是 R_1.

再用 R_1 除 B, 設商是 q_1, 剩餘是 R_2.

再用 R_2 除 R_1, 如是繼續用新得的剩餘,除前次的剩餘,直到得一剩餘,其中不含 x 而止.

此最後的剩餘若不是 0, 則 A 與 B 沒有公因子. 若是 0, 則最後的除數就是 A 與 B 的 H. C. F.

為求確定起見,假定最後的剩餘是 R_3. 於是因 (1) $R_3=c$, c 是常數而非 0, 或 (2) $R_3=0$, 而有

$$
\begin{array}{llcll}
(1) & A\equiv qB+R_1 & \text{或} & (2) & A\equiv qB+R_1 \\
 & B\equiv q_1R_1+R_2 & & & B\equiv q_1R_1+R_2 \\
 & R_1\equiv q_2R_2+c & & & R_1\equiv q_2R_2
\end{array}
$$

(1) 此時 A 與 B 無公因子.

因據 §463, 從恆等式 (1) 可知, A 和 B 的公因子,同於 B 和 R_1 的; B 和 R_1 的同於 R_1 和 R_2 的; R_1 和 R_2 的同於 R_2 和 c 的.

因此, A 與 B, B 與 R_1, R_1 與 R_2, R_2 與 c 各對函數,都有相同的公因子.

但 c 是常數(非 0),故 R_2 與 c 沒有公因子. 因此, A 與 B 也沒有.

(2) 此時 R_2 就是 A 與 B 的 H. C. F.

因為既然 $R_1\equiv q_2R_2$, 則 R_2 所有的因子,都是 R_1 與 R_2 的公因子,而 R_2 本身就是最高次的公因子.

但 R_1 和 R_2 的公因子同於 A 和 B 的,所以 R_1 和 R_2 的最高次公因子, 也就是 A 和 B 的最高次公因子. 因此, R_2 是 A 與 B 的 H. C. F.

例 1. 求 x^2+x+1 與 x^3+x^2+2x+3 的 H. C. F.

將除式寫在被除式的左邊，依照上述定則，當有

$$B=x^2+x+1 \mid x^3+x^2+2x+3 \mid \underline{x}=q$$
$$\underline{x^3+x^2+x\quad}$$
$$R_1=x+3 \mid x^2+x+1 \mid \underline{x-2}=q_1$$
$$\underline{x^2+3x\quad}$$
$$-2x+1$$
$$\underline{-2x-6}$$
$$R_2=\quad 7$$

因最後剩餘 R_2 不是 0，故 x^2+x+1 與 x^3+x^2+2x+3 無公因子.

例 2. 求 x^3+x^2+2x+2 與 x^3+2x^2+3x+2 的 H. C. F.

照例 1 的樣，有

$$B=x^3+x^2+2x+2 \mid x^3+2x^2+3x+2 \mid \underline{1}$$
$$\underline{x^3+x^2+2x+2}$$
$$R_1=x^2+x \mid x^3+x^2+2x+2 \mid \underline{x}$$
$$\underline{x^3+x^2\quad}$$
$$R_2=2x+2 \mid x^2+x \mid \underline{x/2}$$
$$\underline{x^2+x}$$
$$R_3=\quad 0$$

用 R_2 可以整除，R_3 是 0. 因此，去掉 R_2 的數字因子 2，得H. C. F.$=x+1$.

兩個整函數若有公因子，則必有一個最高次的公因子，這 466
個定理，就單變數函數而論，已初次獲得眞正的證明；因在 §§ 463, 465 中，並未像 § 458 那樣，假定一個整函數祇能用一個方法，寫成它的質因子的連乘積.

讀者注意，在 § 465 的證裏面，可見

1. 在 $A, B, R_1, R_2, \cdots$ 這一串函數之中，每相鄰兩個的 467
H. C. F. 同於 A 和 B 的 H. C. F.

2. 凡 A 與 B 的公因子都是 A 與 B 的 H. C. F. 的因子.

前述方法的減省. 1. A 與 B 的質因子，若有一望而知 468

的,先行析去,然後再求遺留兩式的 H. C. F. 這樣得到的結果,用起初除去而為 A 與 B 所同有的因子乘,就得 A 與 B 的 H. C. F. (§458).

在 $A, B, R_1, R_2, \cdots\cdots$ 一串函數中,任何兩個相鄰的函數,都可以用同法化簡,因為它們的 H. C. F. 都同於 A 和 B 的 H. C. F. (§467).

例如,$A=x^4+x^3+2x^2+2x$ 及 $B=x^4+2x^3+3x^2+2x$, 顯然有公因子 x. 除去 x, 得 x^3+x^2+2x+2 及 x^3+2x^2+3x+2, 它們的 H. C. F. 方纔已經求得,是 $x+1$ (參閱 §465, 例 2). 因此,A 與 B 的 H. C. F. 是 $x(x+1)$.

又如在例 2 中,x 是 R_1 的因子,而非 B 的因子,所以決不能是 B 與 R_1 的 H. C. F. 的因子,因而不是 A 與 B 的 H. C. F. 的因子. 因此,可將 R_1 的這個因子 x 去掉,而用餘下的因子 $x+1$ 除 B, 藉以減少除的次數.

2. 在隨便哪一次的除法中,可以用一個數字因子,乘或除被除式或除式或中間剩餘;因為這麽一來,此後的剩餘最多祇是多了或少了一個數字因子(§403),所以 H. C. F. 絲毫不會受到影響. 當所設係數是有理數時,這樣的一乘或一除,可免得到分係數.

3. 計算時宜用分離係數法.

例 1. 求 $A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 $B=2x^3+5x^2-x-1$ 的 H. C. F. 以 2 乘 A, 用分離係數法,就有

```
2+5-1-1|2+6+ 4+ 6+2|1
        2+5- 1- 1
          1+ 5+ 7+2
          2
        2+10+14+4|1
        2+ 5- 1-1
         5|5+15+5
            1+ 3+1|2+5-1-1|2-1
                   2+6+2
                    -1-3-1
                    -1-3-1
```

因此,A 與 B 的 H. C. F. 是 x^2+3x+1.

上面的計算，還可以緊縮如下：

$$
\begin{array}{r|r|l}
2+5-1-1 & 2+6+4+6+2 & 1+1 \\
2+6+2 & 2+5-1-1 & \\
\hline
-1-3-1 & 1+5+7+2 & \\
-1-3-1 & 2+10+14+4 & \\
 & 2+5-1-1 & \\
\hline
 & 5+15+5 & \\
 & 1+3+1 & 2-1
\end{array}
$$

習題． 求 $2x^4+3x^3+4x^2+2x+1$ 與 $2x^4-x^3+2x^2+1$ 的 H. C. F..

定理． 若 A 與 B 的係數是有理數，則其 H. C. F. 的係數也是有理數；又若 A 與 B 的係數是實數，則其 H. C. F. 的係數也是實數． 469

A 與 B 的 H. C. F. 是可以用 §465 的方法求得的． 因此，它的係數，都是 A 與 B 中各係數的有理結合，所以當這些係數是有理數時，也是有理數，是實數時，也是實數．

這定理有很重要的推論，其中幾個，在後面就要見到． 應用這個定理，往往可將找尋 H. C. F. 的工作縮短．

例． 求 x^2-2 與 x^3+x^2-5x+6 的 H. C. F.

此二多項式若非互質，則其 H. C. F. 必就是 x^2-2 本身；因為 x^2-2 的因子，即 $x+\sqrt{2}$ 與 $x-\sqrt{2}$，既然都有無理係數，就都不能是 H. C. F.

但是經過試探之後，得知 x^3+x^2-5x+6 不能被 x^2-2 整除． 因此，這兩個多項式是互質的．

不止兩個由 x 構成的多項式的 *H. C. F.* 此可由下面的定則求得． 470

先求其中兩個多項式的 H. C. F.，其次求所得結果與第三個多項式的 H. C. F.，三個以上，繼續照此推求． 最後所得結果，便是所求的 H. C. F.

例如，D_1 是 A 與 B 的 H. C. F.，而 D_2 是 D_1 與 C 的 H. C. F.，則 D_2 就是 A, B, 及 C 的 H. C. F.

因爲(1)，D_2 是 D_1 與 C 的因子，而 D_1 是 A 與 B 的因子。因此，由§427，D_2 是 A, B，及 C 的因子。

又因(2)，凡 A, B，及 C 的公因子，都是 D_1 及 C 的公因子，所以是 D_2 的因子（§467）。因此，D_2 是 A, B，及 C 的最高公因。

從§458，可得同一結論。

例. 求 $A=x^4+x^3-x^2+x-2$，$B=2x^4+5x^3-2x^2-7x+2$，及 $C=3x^4-x^3-x^2-2$ 的 H. C. F.

由§465，求得 A 與 B 的 H. C. F. 是 $D_1=x^2+x-2$；又求得 D_1 與 C 的 H. C. F. 是 $x-1$.

因此，A, B 及 C 的 H. C. F. 是 $x-1$.

471 **由不止一變數構成的多項式的 *H. C. F.*** 這樣的兩個多項式，要找它們的 H. C. F.，這一個廣義的問題，是太複雜了，這裏不能夠予以討論。但是兩變數如 x 與 y 的兩個齊次函數，它們的 H. C. F.，却可依照§465中的定則求得。

習題二十二

求下列各組多項式的 H. C. F.

1. $10x^3y^2z^5$, $4x^5yz^3$, $6x^4y^3z^5$, 及 $8x^4y^4z^4u$.
2. $(a+b)^2(a-b)$, $(a+b)(a-b)^2$, 及 a^3b-ab^3.
3. y^4+y^2+1 及 y^2-y+1.
4. a^2-1, a^2+2a+1, 及 a^3+1.
5. x^3-1 及 x^3+ax^2-ax-1.
6. x^4-y^4, x^6+y^6, 及 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
7. x^2+5x+6, x^2+x-2, 及 $x^2-14x-32$.
8. $(x-1)(x-2)$ 及 $5x^4-15x^3+8x^2+6x-4$.
9. x^3-1 及 x^3-4x^2-4x-5.
10. $(x^2-1)^2(x+1)^2$ 及 $(x^3+5x^2+7x+3)(x^2-6x-7)$.
11. $(x-1)^2(x-2)^2$ 及 $(x^2-3x+2)(2x^3-5x^2+5x-6)$
12. $2x^3-3x^2-11x+6$ 及 $4x^3+3x^2-9x+2$.
13. x^3-2x^2-2x-3 及 $2x^3+x^2+x-1$.

14. $3x^3+2x^2-19x+6$ 及 $2x^3+x^2-13x+6$.

15. $x^4-x^3-3x^2+x+2$ 及 $2x^4+3x^3-x^2-3x-1$.

16. $3x^3-13x^2+23x-21$ 及 $6x^3+x^2-44x+21$.

17. $3x^3+8x^2-4x-15$ 及 $6x^4+10x^3-3x^2-2x+5$.

18. $6x^5+7x^4-9x^3-7x^2+3x$ 及 $6x^5+7x^4+3x^3+7x^2-3x$.

19. $6x^4-3x^3+7x^2+x-3$ 及 $2x^4+3x^3+7x^2+3x+9$.

20. $6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1$ 及 $4x^4+2x^3-18x^2+3x-5$.

21. $x^5-x^3-4x^2-3x-2$ 及 $5x^4-3x^2-8x-3$.

22. $3x^3-x^2-12x+4$, x^3-2x^2-5x+6, 及 $7x^3+19x^2+8x-4$.

23. $x^3+ax^2-3x-3a$, x^3-x^2-3x+3, 及 x^3+x^2-3x-3.

24. $7x^4y-6x^3y^2-18x^2y^3+4xy^4$ 及 $14x^3y-19x^2y^2-32xy^3+28y^4$.

25. $x(x-1)(x^3+4x^2+4x+3)$ 及 $(x-1)(x+3)(12x^3+x^2+x-1)$.

26. $4x^3-8x^2-3x+9$ 及 $(2x^2-x-3)(2x^2-7x+6)$.

最低公倍

最低公倍. 兩個或不止兩個整函數 $A, B, \cdots\cdots$ 的公倍 (common multiple), 乃是一個整函數, 可被函數 $A, B, \cdots$ 之中的每一個整除. 472

在此等公倍之中, 有一個最低次的, 叫做 $A, B, \cdots$ 的最低公倍 (lowest common multiple), 略號 L. C. M.

定理 1. 兩個或不止兩個整函數 $A, B, \cdots$ 的 L. C. M., 是 $A, B, \cdots$ 所有一切不同質因子, 累乘到它在任一函數中所呈最高冪的連乘積. 473

整函數 $A, B, \cdots$ 的公倍, 必須含有 $A, B, \cdots$ 之中任何一個的每一個質因子, 其個數至少等於該函數所含的個數, 因此就含有定理中所說的各因子. 而最低次的公倍, 即 L. C. M., 就是除此以外不再含有其他因子的一個.

這裏，像前面一樣，我們略去了數字因子，而且假定，一個整函數，祇可以用一個方法，寫成它的不同質因子的連乘積.

474 **用視察法求 L. C. M.** 若能將 $A, B, \cdots$ 析成質因子連乘積，就可以應用上述定理，立刻求得它們的 L. C. M.

例 1. 求 $3x^5y^2z$, xy^4z^3 及 $2x^2z^6$ 的 L. C. M.

這裏的不同質因子，各累乘到它在任何一函數中所呈的最高羃，乃是 x^5, y^4, z^6.

因此，L. C. M. 是 $x^5y^4z^6$.

例 2. 求 $x^2y^2-4xy^2+4y^2$ 與 x^2y-4y 的 L. C. M.

析因子，得 $x^2y^2-4xy^2+4y^2=y^2(x-2)^2$ 及 $x^2y-4y=y(x-2)(x+2)$.

因此，L. C. M. 是 $y^2(x-2)^2(x+2)$.

475 **定理 2.** 兩個整函數 A 與 B 的 L. C. M.，等於兩函數的積爲其 H. C. F. 所除而得的商.

若命 D 表示 A 與 B 的 H. C. F.，而命 A_1 與 B_1 表示用 D 除 A 及 B 所得的商，則

$$A\equiv A_1D \text{ 而 } B\equiv B_1D.$$

於是，若命 M 表示 A 與 B 的 L. C. M.，就有

$$M\equiv A_1B_1D\equiv AB/D.$$

因爲 A 與 B 的公倍，必須含有 (1) A 與 B 的一切公共質因子的積，就是 D, (2) A 所有而 B 所無的一切質因子的積，就是 A_1, (3) B 所有而 A 所無的一切質因子的積，就是 B_1；而最低公倍除此以外不再含有別的因子.

476 系. 兩個整函數 A 與 B 之積，等於它們的 L. C. M. 與 H. C. F. 之積.

477 **由 x 構成的二多項式，其 L. C. M. 的一般求法.** 從 §§ 465, 475 可知，這樣的兩個多項式，A 與 B，其 L. C. M. 常可由下面的定則求得：

求 A 與 B 的 L. C. M.，可用 A 與 B 的 H. C. F. 除 A，再用 B 乘所得結果.

讀者注意,這樣的手續,同於用 A 中所有 B 中所無的一切質因子乘 B.

例. 求 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 $2x^3+5x^2-x-1$ 的 L. C. M.
由 § 465, 求得 H. C. F. $=x^2+3x+1$.
又 $$(2x^3+5x^2-x-1)/(x^2+3x+1)=2x-1.$$
因此, L. C.M. 是 $$(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1).$$

不止兩個由 x 構成的多項式的 L. C. M. 此可由下面的定則求得. 478

先求諸多項式中兩個的 L. C. M., 再求所得結果與第三多項式的 L. C. M., 三個以上照樣繼續推求. 最後的結果是所求的 L. C. M.

因每一步手續,同於用所得 L. C. M. 中所無,其次一函數中所有的一切質因子,乘所得 L. C. M., 所以這條定則可以成立.

例. 求 $A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$, $B=2x^3+5x^2-x-1$, 及 $C=2x^3-3x^2+2x-3$ 的 L. C. M.
如 § 477 例題所示,已知 A 與 B 的 L. C. M. 是
$$M_1=(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1).$$
所以祇須再求 M_1 與 C 的 L. C. M.
由除法求得 $2x-1$ 與 C 是互質的, 而由 § 465, 求得 C 與 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 的 H. C. F. 是 x^2+1.
又 $$C/(x^2+1)=2x-3.$$
因此, M_1 與 C 的,也就是 A, B, C 的 L. C. M., 是
$$M=(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1)(2x-3).$$
讀者注意,在求 M_1 與 C 的 H. C. F. 之前,並未將 M_1 的因子乘起來.

習題二十三

求下列各組多項式的 L. C. M.

1. $3x-1$, $9x^2-1$, 及 $9x^2+1$.
2. $(a+b)(a^5-b^5)$, 及 $(a-b)(a^5+b^5)$.

3. a^3+a^2+a, a^5-a^3, 及 a^6-a^8.

4. $(x^3-y^3)(x-y)^3$, $(x^4-y^4)(x-y)^2$, 及 $(x^2-y^2)^2$.

5. x^2-3x+2, x^2-5x+6, 及 x^2-4x+3.

6. $x^2-(y+z)^2$, $y^2-(z+x)^2$, 及 $z^2-(x+y)^2$.

7. $2x^2+3xy-9y^2$, $3x^2+8xy-3y^2$, 及 $6x^2-11xy+3y^2$.

8. x^3+x^2+x+1, 及 x^3-x^2+x-1.

9. $2a^2x+2x^2y+3y^2x+3a^2y$, 及 $(2x^2-3a^2)y+(2a^2-3y^2)x$.

10. $8x^3-18xy^2$, $8x^3+8x^2y-6xy^2$, 及 $8x^2-2xy-15y^2$.

11. x^3+y^3, x^3-y^3, 及 $x^4+x^2y^2+y^4$.

12. x^6-1, $3x^3-5x^2-3x+5$, 及 x^4-1.

13. $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$, 及 $6x^2+5x-6$.

14. x^2-4a^2, $x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3$, 及 $x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3$.

15. x^2+2x, $x^2+bx+2x+2b$, 及 $x^3+ax^2-b^2x-ab^2$.

16. $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)$, 及 $(x^2+5x+6)(2x^2-3x-5)$.

17. $(x^3-8)(27x^3+1)$, 及 $(2x^3+5x^2+10x+4)(x^3-x^2-x-2)$.

18. $x^3-6x^2+11x-6$, $2x^3-7x^2+7x-2$, 及 $2x^3+x^2-13x+6$.

19. x^4+5x^2+4x+5, $2x^4-x^3+10x^2+4x+5$, 及
$2x^4+x^3+7x^2+3x+3$.

20. $2x^4-x^3+2x^2+3x-2$, $2x^4+3x^3-4x^2+13x-6$, 及
$x^4+3x^3+x^2+5x+6$.

論單變數函數的質因子與不可約因子

在下述各定理中，A 與 B 表示由 x 構成的多項式.

479 **基本定理.** 若 A 與 B 互質，則可求得兩個整函數 M 與 N，使

$$MA+NB\equiv 1.$$

因若應用 § 465 的方法於 A 及 B，則所得最後的剩餘必是一個常數 c（不是0）.

今若假定，照 §465 的樣，c 是第三個剩除，且用該節所用的各項記法，則有

$$
\begin{array}{llll}
1. & A\equiv qB+R_1, \quad \text{因而有} & 4. & R_1\equiv A-qB, \\
2. & B\equiv q_1R_1+R_2, & 5. & R_2\equiv B-q_1R_1, \\
3. & R_1\equiv q_2R_2+c, & 6. & c\equiv R_1-q_2R_2.
\end{array}
$$

將 5 式中 R_2 之值代入 6 式，合併有 R_1 的各項，再將 4 式中 R_1 之值代入所得結果，分別合併有 A 與有 B 的各項，得

$$
\begin{aligned}
c &\equiv R_1-q_2R_2 \\
&\equiv (1+q_1q_2)R_1-q_2B \\
&\equiv (1+q_1q_2)A-(q+q_2+qq_1q_2)B.
\end{aligned}
$$

用 c 除最後一個恆等式的兩端，而用 M 與 N 分別代表 $(1+q_1q_2)/c$ 與 $-(q+q_2+qq_1q_2)/c$，即得

$$1\equiv MA+NB,$$

其中 M 與 N 都是整函數，因爲 c 是常數．

剩除常數 c 在第三次除法以前或以後得到時，本定理也可以照樣證明．

逆定理． 若 $MA+NB\equiv 1$，其中 M 與 N 是整函數，則 A 與 B 互質． 480

因若 A 與 B 有公因子，則此公因子必是 $MA+NB$ 的因子（§461），因而是 1 的因子，這是不可能的．

下列各定理，是方纔所述基本定理的幾個比較重要的推論．

定理 1． 若 A 與 B 互質，而積 AC 可被 B 整除，則 C 可被 B 整除． 481

因 A 既然與 B 互質，則據 §479，可以求得 M 與 N，使

$$MA+NB\equiv 1.$$

因而

$$M\cdot AC+NC\cdot B\equiv C.$$

但 B 是 AC 與 B 的的公因子，因此也是 C 的因子（§461）．

定理 2． 若 A 與 B 互質，又與 C 互質，則 A 與積 BC 互質． 482

因爲 A 既然與 B 互質，則據 § 479，可以求得 M 與 N，使

$$MA+NB\equiv 1,$$

因而有
$$MC\cdot A+N\cdot BC\equiv C.$$

因此，若 A 與 BC 有公因子，則據 § 461，該公因子亦必爲 C 所含有． 但這是不可能的，因爲 A 與 C 是互質的．

483 **系．** 若 A 與 B, C, D 等函數之中的每一個都是互質的，則 A 與積 $B\cdot C\cdot D\cdots$ 也是互質的．

因爲適纔已證，A 與 BC 互質．

既然 A 與 BC 互質，又與 D 互質，則 A 必與積 BCD 互質；以下可照此繼續推證．

484 **定理 3.** 合成函數有一組而祇有一組質因子．

命 P 表示所設函數，它的次是 n．

若 P 是合成函數，則 P 必有因子，譬如說是 A． 若 A 也是合成函數，則 A 也有因子，譬如說是 B． 這樣繼續下去，終必尋得一個質函數；因爲函數 $P, A, B,\cdots$ 的次，從有窮數 n 開始，逐一降低，終必降到 1 而止．

命 F 表示這個最後尋得的質函數． 這是 P 的質因子之一（§ 427），因而有 $P\equiv FM$，其中 M 是整式．

同樣，若 M 是合成函數，則必有質函數 F' 存在，致使 $M\equiv F'M'$，因而便有 $P=FF'M'$，其中 M' 是整式．

這樣繼續下去，可得一串函數 $F, F', F'',\cdots$，其個數不超過 n，且有

$$P\equiv F\cdot F'\cdot F''\cdots.$$

因此，P 至少有一組質因子．

其次要證明，這樣的質因子，P 祇有一組． 今試假定

$$P\equiv F\cdot F'\cdot F''\cdots\equiv G\cdot G'\cdot G''\cdots$$

其中 $G, G', G'',\cdots$ 也都表示質函數．

則 G 決不能與 $F, F', F'',\cdots$ 全體互質，因若如此，G 便與它們的積 P 互質（§ 483），因而就不成其爲 P 的因子了．

所以 G 必與 $F, F', F''\cdots$ 之中的一個不互質，假定與 F 不互質． 於是 G 與 F 有一個公因子． 但 G 與 F 是質函數，兩個質函數決不能含有 x 的公因子，除非就是它們本身． 因此，G 與 F 至多在數字因子方面有差別，故可假定 $G\equiv cF$，c 是常數．

將 G 的此值代入恆等式 $FF'F''\cdots\equiv GG'G''\cdots$ 中，而用 F 除兩端，即得

$$F'F''\cdots\equiv cG'G''\cdots,$$

從這個式子，照上面的推理方法，又可以假定 G' 與 $F',F'',\cdots$ 諸函數之一，至多在數字因子方面有差別.

這樣繼續下去，終究可以斷定，函數 $G,G',G'',\cdots$ 這一組，與 $F,F',F'',\cdots$ 這一組，至多在數字因子方面，或在排列次序方面，有所不同.

系. 一個合成函數，祇能用一個方法，寫成它的不同各質因子之羃的連乘積. 485

從恆等式 $P\equiv F\cdot F'\cdot F''\cdots$，立即可以推得本系，祇要把積 $F\cdot F'\cdot F''\cdots$ 中各組相等的因子，換成各該因子的對應羃，就行.

不可約因子. 係數都是有理數的整函數，它的所謂不可約 (irreducible) 因子，通常指係數都是有理數的最低次因子而說. 486

例如 $(x-1)(x^2-2)$ 的質因子是 $x-1$, $x-\sqrt{2}$, $x+\sqrt{2}$，而不可約因子是 $x-1$ 與 x^2-2.

從方纔所證的定理以及 §469 的定理可知， 487

係數都是有理數的可約整函數，祇能用一個方法寫成它的不同不可約因子之羃的連乘積.

數論一斑

關於整數，也有像方纔所證明的各定理. 488

在討論整數的性質時，也用 a, b, 等等文字代表整數，或正或負都可以(但不是 0)，而所謂 a 的因子，乃是可以整除 a 的一個數.

一個數，除本身及 1 之外別無其他因子，就叫做質數 (prime number). 489

490 若 a 與 b 二整數除 1 外無公因子，就說 a 與 b 互質.

491 **定理.** 若 a 與 b 互質，則常可求得二整數 m 與 n，使

$$ma+nb=1.$$

因 a 既然與 b 互質，則應用最大公約數通常的求法，必可求得最後的剩餘 1. 於是照 § 479 的推理方法，即可導出本定理.

今試命 $a=325$, $b=116$. 應用求 G. C. D. 的方法，有

$$\begin{array}{rl}
116\,|\,325\,\underline{|\,2} & \\
\overline{232} & \\
r_1=93\,|\,116\,\underline{|\,1} & \text{即 } 325=2\cdot116+93\text{，或 }93=325-2\cdot116 \quad (1) \\
\overline{93} & \\
r_2=23\,|\,93\,\underline{|\,4} & 116=1\cdot93+23\text{，或 }23=116-1\cdot93 \quad (2) \\
\overline{92} & \\
r_3=1 & 93=4\cdot23+1\text{，或 }1=93-4\cdot23 \quad (3)
\end{array}$$

因此，從 (3) 起，先將 (2) 所示 23 之值代入，再將 (1) 所示 93 之值代入，便得

$$\begin{aligned}1&=93-4\cdot23\\&=5\cdot93-4\cdot116\\&=5\cdot325-14\cdot116.\end{aligned}$$

所以 $$5\cdot325+(-14)\cdot116=1.$$

因此，我們已求得兩個整數，$m=5$ 及 $n=-14$，可使

$$m\cdot325+n\cdot116=1.$$

就其他各對互質數而論，也可以照樣推算.

習題. 求整數 m 與 n，使 $223\,m+125\,n=1$.

492 **系.** 從這基本定理，可以導出關於整數的定理，與 §§ 481–485 中所導出的關於整函數的各定理相仿，所用推理方法也相同. 特別提出來說，我們可以證明

1. 若 a 與 b 互質，而積 ac 可被 b 整除，則 c 可被 b 整除.

2. 若 a 與 b 互質，與 c 互質，則 a 與 bc 互質.

3. 一個合成數，可以用一個而祇可以用一個方法，寫成它的不同各質因子之冪的連乘積.

VIII. 有理分式

約　分

分式. 設 A 與 B 表示任何兩個代數式,其中 B 不等於 0. A 被 B 除的商,寫成 A/B 的形式,叫做分式; A 叫做分子, B 叫做分母, A 與 B 合稱爲分數的兩個項. 493

A 與 B 都是有理式時, A/B 叫做**有理分式** (rational fraction). 494

A 與 B 都是整式時, A/B 叫做**簡分式**(simple fraction); 但若 A 或 B 是分式, A/B 就叫做**繁分式**(complex fraction). 495

簡分式因其分子的次是否低於分母,而有**眞分式** (proper fraction) 與**假分式**(impropor fraction) 之別. 496

例如, $\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 與 $\frac{2x^2-3}{x^3+1}$ 是眞分式, $\frac{2x^2+1}{x^2+1}$ 與 $\frac{x^3-3}{x^2+1}$ 是假分式.

兩項都是單變數函數的假分式,可以化成一個整式與一個眞分式的和(§400). 此和稱爲**帶分式** (mixed fraction). 497

例如, $\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2-\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{x^3-3}{x^2+1}=x-\frac{x+3}{x^2+1}$.

分式在形式上可有的變換. 分式在形式上的變換,以下面的定理爲依據(§ 320 ,1 498

一個分式,它的分子與分母被同一式(非 0)乘或除,其值不變.

特別提出來說,分子與分母的號,可以同時改變而不變分式之值,因爲這樣的改變,無異於用 -1 乘分子與分母. 但是單變分子或分母的號,就要改變分式本身的號 (§ 320, 3).

若分子或分母是多項式，則變號時須將所有各項的號改變.

例如，
$$\frac{a+b-c}{a-b+c}=\frac{c-a-b}{b-c-a}=-\frac{c-a-b}{a-b+c}=-\frac{a+b-c}{b-c-a}.$$

若分子與分母有一個是或兩個都是幾個因子的積，則可將個數是偶數的因子變號，不致改變分式之號；若變號的因子，個數是奇數，則分式之號也改變.

例如，
$$\frac{(a-b)(c-d)}{(e-f)(g-h)}=\frac{(b-a)(c-d)}{(e-f)(h-g)}=-\frac{(b-a)(d-c)}{(f-e)(g-h)}.$$

499 **約分.** 將一個分式約分或簡化，是將它的分子與分母的一切公因子"對消"，這樣的形式變換，是不改變分式之值的(§498).

經過這種變換後的分式，叫做最簡分式，或不可約分式或最低項分式.

求分子與分母的公因子，或證明它們沒有，可用第七章所述各法. 公共單項因子，以及可用視察法或剩餘定理找得的其他公共因子，最好先找出來. 各種特別的方法都不適用時，可用§465的通法.

下列各例，可以說明分式簡化(約分)的各法.

例1. 簡化 $(aec-ade)/(bde-ebc)$.

我們有
$$\frac{aec-ade}{bde-ebc}=\frac{ae(c-d)}{be(d-c)}=-\frac{a(c-d)}{b(c-d)}=-\frac{a}{b}.$$

例2. 簡化 $(x^3+x^2+x+6)/(x^2+3x+2)$.

由視察，分母的因子是 $x+1$ 與 $x+2$. 因此，若分子與分母有公因子，這公因子必是這兩個中的一個. 用綜合除法試探，得知分子不能被$x+1$整除，但可被 $x+2$ 整除，商是 x^2-x+3.

因此
$$\frac{x^3+x^2+x+6}{x^2+3x+2}=\frac{x^2-x+3}{x+1}.$$

例 3. 簡化 $(x^3+7x+10)/(x^3+5x+6)$.

從分子減分母，有

$$x^3+7x+10-(x^3+5x+6)=2(x+2).$$

因此，若分子分母有公因子，則此公因子必是 $x+2$ (§ 461). 但分子在 $x=-2$ 時不等於零. 因此，由 § 415，原分式已是最簡分式.

例 4. 簡化 $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

就此例而論，可能有的公因子是 $a-b$, $b-c$, $c-a$. 在分子中使 $a=b$，得 $b^2(b-c)+b^2(c-b)$，即 0. 因此，據 § 417，分子可被 $a-b$ 整除. 用同法可證，$b-c$ 與 $c-a$ 也能整除分子.

所以分子可被分母整除. 分子與分母都是三次式(就 a, b, c 而論)，它們的商必定是一個常數. 又因分子與分母都照 a 的降冪序排列時，含有 a^2 的一項，在分子與分母中分別是 $a^2(b-c)$ 與 $-a^2(b-c)$，故知這個常數必是 -1.

因此，所設分式等於 -1.

例 5. 簡化 $(2x^3+13x^2-6x+7)/(2x^4+5x^3+8x^2-2x+5)$.

由 § 465，求得分子與分母的 H. C. F. 是 $2x^2-x+1$. 用 $2x^2-x+1$ 除分子與分母，得

$$\frac{2x^3+13x^2-6x+7}{2x^4+5x^3+8x^2-2x+5}=\frac{x+7}{x^2+3x+5}.$$

習 題 二 十 四

將下列各分式化成最簡分式(約分)：

1. $\dfrac{x^5y^3-4x^3y^5}{x^3y^2-2x^2y^3}$.

2. $\dfrac{(x^6-y^6)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^4-y^4)}$.

3. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+2x-63}$.

4. $\dfrac{3x^2-8x-3}{3x^2+7x+2}$.

5. $\dfrac{3x^2-18bx+27b^2}{2x^2-18b^2}$.

6. $\dfrac{5x^2+6ax+a^2}{5x^2+2ax-3a^2}$.

7. $\dfrac{(x^2-25)(x^2-8x+15)}{(x^2-9)(x^2-7x+10)}$.

8. $\dfrac{15x^2-46x+35}{10x^2-29x+21}$.

9. $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}$.

0. $\dfrac{x^2-y^2+z^2+2xz}{x^2+y^2-z^2+2xy}$.

11. $\dfrac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{1-x^2}$.

12. $\dfrac{2mx-my-12nx+6ny}{6mx-3my-2nx+ny}$.

13. $\dfrac{2x^3+7x^2-7x-12}{2x^3+3x^2-14x-15}$.

14. $\dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{2x^3-13x^2+17x+12}$.

15. $\dfrac{x^4+x^3+5x^2+4x+4}{2x^4+2x^3+14x^2+12x+12}$.

16. $\dfrac{x^3-2x^2-x-6}{x^4+3x^3+8x^2+8x+8}$.

17. $\dfrac{(x^2+c^2)^2-4b^2x^2}{x^4+4bx^3+4b^2x^2-c^4}$.

18. $\dfrac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

分式的運算

500 **最低公母.** 分式相加或相減，須先化成有公分母的等值分式.

所設各分母的最低公倍，明明就是最低次的公分母，所以又叫做所設分式的最低公母(lowest common denominator)，略號是 L. C. D. 將所設分式化成有最低公母的等值分式，叫做通分.

例. 將 $\dfrac{a}{bc}$, $\dfrac{b}{ca}$, 及 $\dfrac{c}{ab}$ 通分.

所設分式的 L. C. D. 是 abc.

將 $\dfrac{a}{bc}$ 化成有分母 abc 的等值分式，須用 a 乘它的兩項.

同樣，b/ca 的兩項須用 b 乘，c/ab 的兩項須用 c 乘.

於是有
$$\frac{a}{bc}=\frac{a^2}{abc},\quad \frac{b}{ca}=\frac{b^2}{abc},\quad \frac{c}{ab}=\frac{c^2}{abc}.$$

501 將所設分式通分，先求最低公母.

然後將各分式的分母，換成這最低公母，且用各分母中所引入的新因子，乘各該分式的分子.

加法與減法　分母相同的分式，其加法與減法已包括在 502
§320, 4 的公式之中，卽

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a+b-c}{d}.$$

因此，求兩個或不止兩個分式的代數和，

在必要時，先通分．

用所設分式前的加減號，將通分後所得分式的分子連起來，一總寫在公分母的上方．

最後，約分．

分式中有一個或不止一個換成整式時，也可以適用這定則；因為整式可以看做分母是 1 的分式．

所設分式最好先約分，除非所對消的因子，也在別的最簡分式的分母中呈現．

選公分母時要留意，所選定的當眞是最低公母．　初學的人，往往將祇在符號上不同的因子，如 $a-b$ 與 $b-a$，當做不同的因子，都引入最低公母．　這種錯誤，應當竭力避免．

有時候將所設分式一對一對地結合起來，較為簡便．

例 1.　簡化 $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{2b}{a^2-b^2}$.

最低公母是 a^2-b^2，故有

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a-b+a+b-2b}{a^2-b^2}=\frac{2a-2b}{a^2-b^2}=\frac{2}{a+b}.$$

讀者注意，所得代數和經約分後，它的分母就只是最低公母的一個因子．

例 2.　簡化　$x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$.

因第一個分母是 1，而第二個分母是 $-(x-1)$，所以最低公母是 x^2-1，於是就有

$$x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}=\frac{x^3-x}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^3-x+x+1-x^3+3x-1}{x^2-1}=\frac{3x}{x^2-1}.$$

例 3.　簡化　$\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$.

就此例而論，將所設分數一對一對結合起來，較為簡便．這樣就有

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-(x-\ \ )}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4}.$$

$$\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}=2\,\frac{x-1-(x+1)}{x^2-1}=-\frac{4}{x^2-1}.$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-1}=4\,\frac{x^2-1-(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{12}{x^4-5x^2+4}.$$

例 4.　簡化　$\frac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}$.

據 § 415 剩餘定理，求得 $x-1$ 是第一分式分子與分母的公因子但非第二分母的因子．所以將第一分式兩項中的因子 $x-1$ 對消，得 $(x+1)/(x^3+x^2+2x)$．

由 § 465，x^3+x^2+2x 與 $2x^3+x^2+3x-2$ 的 H. C. F. 是 x^2+x+2；而 $x^3+x^2+2x=(x^2+x+2)x$，$2x^3+x^2+3x-2=(2x-1)(x^2+x+2)$．

在尚未通分以前，先查看 $2x-1$ 是不是 $2x^2+3x-2$ 的因子．查看之後，知道它是因子，所以將第二分式兩項中這個因子對消，而簡化第二分式為 $(x+2)/(x^2+x+2)$．

因此　$$\frac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}=\frac{x+1}{x(x^2+x+2)}+\frac{x+2}{x^2+x+2}$$

$$=\frac{x+1+x^2+2x}{x^3+x^2+2x}=\frac{x^2+3x+1}{x^3+x^2+2x}.$$

503　**乘法．**　兩個或不止兩個分式相乘之積，可以應用下面的定理求得．

兩個或不止兩個分式之積是一個分式，它的分子是所設分式各分子的積，它的分母是所設各分母的積.

這就是 $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

因每一端用 bd 乘，積都是 ac (參閱 § 253). 列式表明如下：

$$\frac{ac}{bd}bd=ac;\ 而\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot bd=\frac{a}{b}b\cdot\frac{c}{d}d=ac. \qquad §§ 252,254.$$

特別提出來說，用整式乘分式，乘它的分子，就成.

分式 ac/bd 的分子分母中所指示的乘法未實行前，應當先約分.

例 1. 用 $(x+1)/(x-1)$ 乘 $(x^3-1)/(x^3+1)$.

我們有 $$\frac{x^3-1}{x^3+1}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x^3-1)(x+1)}{(x^3+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

例 2. $1-(x-2)/(x^2+x-2)$ 用 $(x+2)/x$ 乘.

我們有 $$\left(1-\frac{x-2}{x^2+x-2}\right)\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{x^2}{x^2+x-2}\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{x}{x-1}.$$

乘方. 從 § 503，導出下面的定則： 504

將分式累乘到任何次冪，分別將分子與分母累乘到該次冪.

這就是 $$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

因 $$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots 共\ n\ 個因子=\frac{a\cdot a\cdots 到\ n\ 因子}{b\cdot b\cdots 到\ n\ 因子}=\frac{a^n}{b^n}.$$

例. 求 $-ab^2c^3/efg^4$ 的立方.

我們有 $$\left(-\frac{ab^2c^3}{efg^4}\right)^3=-\frac{a^3b^6c^9}{e^3f^3g^{12}}.$$

除法. 將分式 a/b 顛到過來，就是將它的分子與分母交換. 這樣得到的分式 b/a，叫做 a/b 的反商(reciprocal). 505

一個分式用另一分式除,祇要用除式的反商乘被除式.

這就是 $$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

因兩端用 c/d 乘,都得 a/b (參閱 § 253). 列式表明如下:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b};\quad \frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}.\qquad \S\S\ 252,\ 254,\ 503.$$

特別提出來說,用整式除分式,乘它的分母,就成.

例 1. $(x^2-xy+y^2)/(x^2-y^2)$ 用 $(x^4+x^2y^2+y^4)/(x^4-y^4)$ 除.

我們有 $$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\div\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4-y^4}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^4-y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$$
$$=\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

例 2. $(x^2+5x+6)/(x+1)$ 用 x^2+6x+8 除.

我們有 $$\frac{x^2+5x+6}{x+1}\div(x^2+6x+8)=\frac{x^2+5x+6}{(x+1)(x^2+6x+8)}$$
$$=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+4)}=\frac{x+3}{x^2+5x+4}.$$

506 **一般有理式. 繁分式與連分式.** 兩個分式的和,差,積,以及商,都是分式,這是已經證明的了. 由此可知,凡有理式(§ 267)都可以化為有理簡分式.

所設有理式,化成最簡的形式,以用何法為最好,並無一般的定則. 在化的時候,祇要免去不必要的步驟,那就是了. 尤其要注意的是,能約分就得先約分,分子與分子或分母與分母的乘法,留在最後實行.

507 如前所述(§ 495),分式 A/B,當 A 或 B 有一個是或兩個都是分式時,叫做繁分式.

將繁分式 A/B 簡化，有時宜照§505的定則，先用 B 除 A，有時宜先用 A 與 B 中所有分式的最低公母，乘 A 及 B. 不論用何方法，最好先將 A 與 B，分別簡化.

例 1. 簡化 $\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)\Big/\left(\frac{a-b}{a+b}+1\right)$.

我們有
$$\frac{\frac{a+b}{a-b}+1}{\frac{a-b}{a+b}+1}=\frac{\frac{a+b+a-b}{a-b}}{\frac{a-b+a+b}{a+b}}=\frac{\frac{2a}{a-b}}{\frac{2a}{a+b}}$$
$$=\frac{2a}{a-b}\cdot\frac{a+b}{2a}=\frac{a+b}{a-b}.$$

讀者注意；繁分式的兩項是簡分式時，兩分子或兩分母的公因子，是可以對消的. 例如在上面的第三式中，就可以對消 $2a$.

例 2. 簡化 $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)\Big/\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$.

此題可照前例的樣簡化；但有較簡便的方法，是先用 $(a+b)(a-b)$ 乘兩項. 這樣可得
$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{a(a-b)+b(a+b)}=\frac{a^2+ab-ba+b^2}{a^2-ab+ba+b^2}=1.$$

例 3. 簡化 $\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}}$.

從下面向上簡化，有
$$\frac{a}{b+\frac{c}{d+\frac{e}{f}}}=\frac{a}{b+\frac{cf}{df+e}}=\frac{a(df+e)}{b(df+e)+cf}=\frac{adf+ae}{bdf+be+cf}.$$

像例 3 那樣的繁分式，又叫做連分式 (continued fraction).

習題二十五

簡化下列各式：

1. $\dfrac{1}{2a-3b}+\dfrac{1}{2a+3b}-\dfrac{6b}{4a^2-9b^2}$.

2. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^3+1}$.

3. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}$.

4. $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{x+2}{(2-x)(x-3)}+\dfrac{x+3}{(3-x)(1-x)}$.

5. $\dfrac{1}{x+b}-\dfrac{1}{x+c}+\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-c}$.

6. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

7. $\dfrac{yz(x+a)}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{zx(y+a)}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{xy(z+a)}{(z-x)(z-y)}$.

8. $x+\dfrac{1}{3-2x}-\dfrac{8x^4-33x}{8x^3-27}-\dfrac{2x+6}{4x^2+6x+9}$.

9. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)^2-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)$.

10. $\dfrac{(a+b)^3-c^3}{a+b-c}+\dfrac{(b+c)^3-a^3}{b+c-a}+\dfrac{(c+a)^3-b^3}{c+a-b}$.

11. $\dfrac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+6}-\dfrac{3x^2-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$.

12. $\dfrac{1}{x^4-4x^2-x+2}-\dfrac{1}{2x^4-3x^3-5x^2+7x-2}+\dfrac{1}{2x^4+3x^3-2x^2-2x+1}$.

13. $\left(a^4-\dfrac{1}{a^4}\right)\div\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$.　　14. $\left(\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}\right)(a^4+a^3)$.

15. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}\cdot\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\div\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}$.

16. $\dfrac{1}{x}-\left\{1-\left[\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)}\right)\right]\right\}$.

17. $\dfrac{ax+x^2}{2b-cx}\cdot\dfrac{2bx^2-cx^3}{(a+x)^2}$.　　18. $(x^2-y^2-z^2+2yz)\div\dfrac{x-y+z}{x-y-z}$.

19. $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$.

20. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}}\div\dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+z}}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}}$.　　21. $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}\div\dfrac{\dfrac{1}{a^4}-\dfrac{1}{b^4}}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2}$.

22. $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$.　　23. $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$.

不定形

極限. 假定變數 x 之值,順次是 $1/2, 3/4, 7/8, 15/16$, 等等沒有盡止;則 x 明明逐漸趨近於 1,且在這樣的情形之下,$1-x$ 終究要變成而且永遠小於凡可指定的無論多少小的正數. 此時我們就說, x 歷經不盡敍列 $1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \cdots$, 趨近於 1 而以 1 為極限. 508

概言之,若 x 是一個變數,其值經假定歷經所設不盡敍列,又若有一數 a, 其與 x 的差 $a-x$, 終究要變成而且永遠在數值上小於凡可指定的正數,則謂 x 趨近於 a 而以 a 為極限.

x 趨近於 a 而以 a 為極限,用 $x \doteq a$ 或 $a=\lim x$ 來指示.

這裏變數的意義,與 § 242 中所說的,稍有不同,即多少受到了一些限制.
上述的那種變數,是否趨近於極限,要看所假定的其值所歷經的敍列而定.

例若所歷經的敍列是 1, 2, 1, 2,……, 則此變數就不會趨近於極限.

關於變數與極限的比較詳盡的討論,見 §§ 187—205, 讀者最好參閱這幾節,至少也應參閱一部分.

509 **關於極限的定理.** 在§203中已證明,若變數 x 與 y 趨近於極限,則其和,差,積,以及商,也趨近於極限,且

$$\lim (x+y)=\lim x+\lim y.$$
$$\lim (x-y)=\lim x-\lim y.$$
$$\lim xy=\lim x\cdot\lim y.$$
$$\lim \frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y},\text{除非}\lim y=0.$$

從這些定理可知,若 $F(x)$ 表示 x 的任何函數,而 $F(a)$ 是此函數在 $x=a$ 時之值,則當 x 趨近於 a 而以 a 爲極限時,$F(x)$ 趨近於 $F(a)$ 而以 $F(a)$ 爲極限. 這就是,

$$\lim_{x\doteq a} F(x)=F(a),$$

式中 $\lim\limits_{x\doteq a} F(x)$ 讀作"x 趨近於 a 時 $F(x)$ 的極限".

例如, $\lim\limits_{x\doteq a}(2x^2-3x+1)=2a^2-\ a+1.$

510 **無窮.** x 的值,若使它歷經不盡敍列 1, 2, 3, 4, …, 則 x 顯然要終究變成而且永遠大於凡可指定之數.

一個變數 x,若終究變成而且永遠在數值上大於所可指定之數,就說它趨向無窮(infinity).

無窮一語,用記號∞來代表,而 x 趨向無窮,則用 $x\doteq\infty$ 或 $\lim x=\infty$ 來指示.

511 **注意.** 照上面那樣設立定義的∞,決非一個確定的數,凡是關於數的計算定則,概不適用於∞. 這一點很重要,下面就要舉例說明.

"x 趨向無窮" 一語，只是 "x 是一個變數，該變數終究要變成而且永遠在數值上大於凡可指定之數" 一語的省略.

又，$\lim x=\infty$ 中的 lim，並無 § 508 中所述極限的確定意義.

定理. 已設任何分式，其分子是常數，其分母是變數. 若分母趨近於 0 而以 0 爲極限，則分式趨向∞；若分母趨向∞，則分式趨近於 0 而以 0 爲極限. 512

試一考 $1/x$.

若 x 歷經級列 1, .1, .01, .001, …而趨近於 0, 則 $1/x$ 就歷經級列 1, 10, 100, 1000, …因而趨向∞.

若 x 歷經級列 1, 10, 100, 1000,…而趨向∞，則 $1/x$ 就歷經級列 1, .1, .01, .001,…,因而趨近於 0 而以 0 爲極限.

推廣到一般情形，也是這樣.

不定形. 形式如 $f(x)/\phi(x)$ 的有理分式，除 $\phi(x)=0$ 外，不論 x 有何所設之值，常有確定之值. 當 $\phi(x)=0$ 時，此分式的形式或爲不定形(indeterminate form) 0/0，或爲 $a/0$，這在算術上是沒有意義的 (§ 103). 然在代數上，則以分別指定其意義爲宜. 513

不定形 0/0. 分式 $(x^2-1)/(x-1)$ 在 $x=1$ 時，有 0/0 的形式， 514

須知除 $x=1$ 外，x^2-1 常可用 $x-1$ 除，而有

$$(x^2-1)/(x-1)=x+1.$$

不論 x 與 1 的差是多少小，上式總得成立. 因此，若不使 x 當眞等於 1，而使它趨近於 1 爲極限，則就有

$$\lim (x^2-1)/(x-1)=\lim (x+1)=2.$$

這樣看來，計算定則雖不能使 $(x^2-1)/(x-1)$ 在 $x=1$ 時

有何意義,卻可使我們證明,當 x 趨近於極限 1 時,這個分式趨近於 2 而以 2 爲極限.

在 § 509 中已講過,若 $F(x)$ 代表一個有理函數,而 $F(a)$ 是有意義的,則 $F(a)=\lim\limits_{x \doteq a} F(x)$. 故若計算定則不能使 $F(a)$ 有意義,像上舉之例一樣,則可指定 $F(a)$ 之值是 $\lim\limits_{x \doteq a} F(x)$;換言之,使公式 $F(a)=\lim\limits_{x \doteq a} F(x)$ 成爲 $F(a)$ 的定義.

所以在 $x=1$ 時,$(x^2-1)/(x-1)$ 之值,我們說它是 2. 於是在 x 有一切值時,值 1 包括在內,$(x^2-1)/(x-1)=x+1$ 常得成立.

同理,凡可寫成形式如 $(x-a)f(x)/(x-a)\phi(x)$ 的分式,其中 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 是整式,且不能被 $x-a$ 整除,則可指定此分式在 $x=a$ 時,有值 $f(a)/\phi(a)$,因而在 x 有一切值時,值 a 包括在內,常有

$$\frac{(x-a)f(x)}{(x-a)\phi(x)}=\frac{f(x)}{\phi(x)}.$$

515 **形式 $a/0$.** 分式 $1/x$ 當 $x=0$ 時,有形式 $1/0$.

1 雖不能用 0 除,但可用與零相差無論多小的 x 之值來除. 又,在 § 512 中已講過,若 x 趨近於 0 而以 0 爲極限,則 $1/x$ 就趨向 ∞.

故 $1/0$,可指定其"值"是 ∞. 推廣言之,$a\neq 0$ 時的 $a/0$,也可指定其"值"是 ∞,寫成

$$\frac{a}{0}=\infty.$$

同理,凡分式有形式

$$f(x)/(x-a)\phi(x)$$

的,其中 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 是整式,而 $f(x)$ 不能被 $x-a$ 整除,則在 $x=a$ 時,指定其"值"是 ∞;我們的意思,是說使 x 趨近

於 a 而以 a 爲極限時，這分式就趨向∞．

關於分式之值的兩個結論． 從 §§514, 515，可得有關於形式如 $f(x)/\phi(x)$ 的簡分式的兩個結論如下： 516

1. $f(x)/\phi(x)$ 若是最簡分式，則在 x 有祇可使其分子等於零的各值時，等於零，而在 x 有祇可使其分母等於零的各值時，變成無窮．在 x 有其他有窮值時，此分式之值既非 0 而又非∞。

2. 但若 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 有公因子 $x-a$，$f(x)$ 中有此因子 m 個，$\phi(x)$ 中有此因子 n 個，則 $f(x)/\phi(x)$ 在 $x=a$ 而 $m>n$ 時等於零，在 $m<n$ 時變成無窮，在 $m=n$ 時其值非 0 又非∞．

例如 $x=2$ 時，有

$$\frac{x-2}{x+1}=0,\ \frac{x+1}{x-2}=\infty,\ \frac{(x-2)^3}{x(x-2)}=0,\ \frac{(x-2)}{x(x-2)^2}=\infty,\ \frac{(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{1}{2}.$$

形式 ∞/∞， 當 x 無限增加即 $x\doteq\infty$ 時，$f(x)/\phi(x)$ 之值趨近於什麼極限，這往往是非常重要的問題． 517

試一考下面各例．

在 § 512 中已講過，在 $x\doteq\infty$ 時，$1/x,\ 1/x^2,\cdots\doteq 0$．

因此，若 $x\doteq\infty$，則

$$\frac{x^2-x+3}{2x^2+x-4}=\frac{1-1/x+3/x^2}{2+1/x-4/x^2}\doteq 1/2, \tag{1}$$

$$\frac{x+2}{x^2+x+5}=\frac{1+2/x}{x+1+5/x}\doteq 0, \tag{2}$$

$$\frac{x^2+x-7}{2x+3}=\frac{x+1-7/x}{2+3/x}\doteq\infty. \tag{3}$$

概言之，當 $x\doteq\infty$ 時，分式

$$(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m)/(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n)$$

趨近於極限 a_0/b_0，若分子與分母同次，如 (1)；趨近於極限 0，若分母的次較高，如 (2)；變成無窮，若分子的次較高，如 (3)．

在各種情形之下,所得結果都叫做"$x=\infty$ 時分式之值",即分式在有不定形 ∞/∞ 時之值.

518 **形式 $0\cdot\infty$ 與 $\infty-\infty$** x 的有理函數,在 x 有某一特殊值時,也許成為不定形 $0\cdot\infty$ 或 $\infty-\infty$. 但此時可將它化成上面所論各形式之一,即 $0/0$, $a/0$, 或 ∞/∞.

1. 例如 $(x^2-1)\cdot\frac{1}{x-1}$ 在 $x=1$ 時有形式 $0\cdot\infty$. 但除在 $x=1$ 時外,常有 $(x^2-1)\cdot\frac{1}{x-1}\equiv\frac{x^2-1}{x-1}$, 因而有

$$\lim_{x\doteq 1}\left[(x^2-1)\cdot\frac{1}{x-1}\right]=\lim_{x\doteq 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\doteq 1}(x+1)=2.$$

因此,在 $x=1$ 時,我們指定所設函數之值是 2.

2. 又如, $\frac{1}{x}-\frac{2}{x(x+2)}$ 當 $x=0$ 時有形式 $\infty-\infty$. 但除在 $x=0$ 時外,常有 $\frac{1}{x}-\frac{2}{x(x+2)}\equiv\frac{x}{x(x+2)}$,因而有

$$\lim_{x\doteq 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(x+2)}\right]=\lim_{x\doteq 0}\frac{x}{x(x+2)}=\lim_{x\doteq 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}.$$

因此,在 $x=0$ 時,指定所設函數之值是 $1/2$.

519 **一般的結論.** 故若一個所設單變數函數如 $F(x)$, 在 $x=a$ 時呈不定形,則可

將所設函數化到最簡形式,然後求,使 x 趨近於 a 而以 a 為極限時,此函數之值趨近於什麼極限. 此極限,就叫做 $x=a$ 時此函數的值.

520 **注意.** 此法祇限於單變數函數,如 $F(x)$. 此法之所以能產生確定的結果,其理由如下: $\lim\limits_{x\doteq a}F(x)$ 之值,祇看 a 之值而定,與 x 趨近於 a 時所可有的各值無關;但不止一個變數的函數,卻不一定是這樣的.

今試假定有不相關的變數 x 與 y，看一看分式 x/y 在 $x=0$ 且 $y=0$ 時的情形是怎樣的.

當 $x \doteq 0$, $y \doteq 0$ 時，x/y 若趨近於任何極限，則該極限之值，要看 x 與 y 所歷經的敍列而定.

設有敍列

$$1/2,\ 1/3,\ 1/4, \cdots\cdots (1);\quad \text{及}\ 1/2^2,\ 1/3^2,\ 1/4^2 \cdots\cdots (2),$$

則一個變數若歷經此二敍列的任一個，它的極限就是 0 .

若 x 歷經敍列 (1) 而 y 歷經敍列 (2)，則 x/y 就要歷經敍列 2, 3, 4,……而趨向 ∞. 但若 x 歷經 (2) 而 y 歷經 (1)，則 x/y 就歷經敍列 1/2, 1/3, 1/4,……而趨近於 0.

故若 x 與 y 是不相關的變數，則在 $x=0$ 而且 $y=0$ 時，就把 x/y 看成絕對不定式. 推而廣之，也是如此.

無窮與計算定則的關係. 文字之值，連無窮也包括在內， 521
則 §§ 249, 251, 253 的定則，必須修訂如下:

1.　　$a \cdot 0 = 0$,　　　除非 $a=\infty$.

2.　若　$ac=bc$,　則 $a=b$,　除非 $c=0$ 或 ∞ .

3.　若　$a+c=b+c$,　則 $a=b$,　除非 $c=\infty$.

應用這些定則解方程式時，切勿忘卻這幾種例外的情形.

例如，積 $\frac{1}{x^2-1} \cdot x-1$，在 $x=1$ 時，其第二個因子 $x-1$ 是 0；但其第一個因子 $1/(x^2-1)$ 是 ∞，所以此積在 $x=1$ 時並非 0. 據 § 518，其值為 1/2.

方程式的無窮根. 方程式 $x+2=x+3$，以及其他一次 522
方程式，可以化成 $0 \cdot x=b$ 這個形式的，我們一向說它們沒有根. 但有時不這樣說，而說它們的根是 ∞ .

因為不論 a 是多少小，若不眞正是 0, $ax=b$ 就有根 b/a. 現在若使 b 不變且不等於 0，並使 a 趨近於 0 而以 0 為極限，則 b/a 就要趨向 ∞ (§ 512). 換句話說，當 $ax=b$ 趨近於形式 $0x=b$ 時，它的根 b/a 趨向 ∞ . 所以在 $ax=b$ 有形式

$0x=b$ 時,說它有根∞,這是與§515中所說明的慣例,很相符合的。

讀者注意,將 $x+2=x+3$ 看做根是∞的眞方程式,並不會因此而得謬誤的結論 $2=3$. 因爲既然 $x=\infty$,則從兩端減去 x 後所得的,就不能推斷它是眞正的等式(§521,3).

523 **聯立方程式的無窮解.** 不相容的一次方程組,前此常說它沒有解(§377, 2; §374, 2). 但有時不這樣說,而說它的解是無窮. 因爲從這樣的方程組,由消去法常可得一個方程式,其形式是 $0x=b$, 且由§522, 這方程式的根是∞.

例如一對不相容的方程式 $y-x=0$ (1), $y-x=1$ (2), 可以說是有無窮解.

讀者注意, (1), (2) 乃是 $m \doteq 1$ 時下面一對

$$y-mx=0\ (3),\quad y-x=1\ (2)$$

所趨近的形式. (3), (2) 這一對的解是

$$x=1/(m-1),\quad y=m/(m-1).$$

而在 $m \doteq 1$ 時, $1/(m-1)$ 及 $m/(m-1)$, 都趨向無窮.

用§§386, 387的方法,也可以說明聯立方程式的無窮解. 因在 $m \doteq 1$ 時, (3)的位跡趨近於同(2)的位跡平行,而兩線的交點則在平面上移向無窮遠處.

習題二十六

指定下列各式的適當之值:

1. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$, 在 $x=2$ 時. 2. $\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-2x+1}$, 在 $x=1$ 時.

3. $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$, 在 $x=1$ 時. 4. $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-(a+b)x+ab}$, 在 $x=a$ 時.

5. $\dfrac{(3x+1)(x+2)^2}{(x^2-4)(x^2+3x+2)}$, 在 $x=-2$ 時.

6. $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$, 在 $x=1$ 時.

7. $\frac{3x^2-x+5}{2x^2+6x-7}$, $\frac{x^2+1}{x}$, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{(2x^2+1)(x^3-5)}{(x^4+1)(x-6)}$, 在 $x=\infty$ 時.

8. $\frac{x-1}{x^2-9}-\frac{x-2}{x(x-3)}$, 在 $x=3$ 時.

9. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x(x-1)}$, 在 $x=1$ 時.

10. $\dfrac{x^2+\frac{x+1}{x-2}}{x^2+\frac{x-1}{x-2}}$, 在 $x=2$ 時.

11. $\dfrac{\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x+1}}{\frac{3x+1}{x^2+1}}$, 在 $x=\infty$ 時.

分方程式

論解分方程式. 任何所設分方程式,用其中所有各分式的最低公母 D,乘它的兩端,就可以變換成整方程式. 這個手續,叫做去分母. 524

從 §§ 341, 342 可知,這樣導出的整方程式,有所設方程式所有一切諸根,若此外尚有他根,則必是方程式 $D=0$ 的根,故可立即檢出,剔去.

例 1. 解 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+13}{x(x-1)}=0$. (1)

用 $D=x(x-1)$ 乘,去分母,得

$$3(x-1)+6x-(x+13)=0 \quad (2)$$

解 (2), $x=2$. (3)

因 2 不是 $D=x(x-1)=0$ 的根,所以是 (1) 的根,而且 (1) 祇有這個根.

例 2. 解方程式 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+5}{x(x-1)}=0$. (1)

去分母, $3(x-1)+6x-(x+5)=0$. (2)

解 (2), $x=1$. (3)

因 1 是 $D=x(x-1)=0$ 的根，所以不是(1)的根． 當 $x=1$ 時，(1)的第一端有形式 $3+6, 0-6/0$；而由 § 518，求得其值實在是 8，並非 0．

因此，(1) 沒有根．

上例所說明的方法，可以總括起來，成為下面的定則：

525 解分方程式，先用所有各分式的最低公母 D 乘兩端，去分母．

然後解所得整方程式．

這個方程式的根，就是所設方程式的根，但若有可使 D 等於零的，須剔去．

526 **注意．** 這定則，也可以另行敘述如下：

將所設方程式所有各項都移到第一端，合併成一項．

若所得方程式是 $N/D=0$，則 $N=0$ 就是去分母後所得的整方程式．

1. 若 N/D 是最簡分式，則 $N/D=0$ 與 $N=0$ 的根相同；因為最簡分式祇在分子等於零時等於零 (§ 516)．

例如，在 § 524 例 1 中，

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+13}{x(x-1)}=\frac{8(x-2)}{x(x-1)}=\frac{N}{D}.$$

這裏的 N/D 是最簡分式，所以 $N/D=0$ 的根同於 $N=0$ 的，即 2．

2. 若 N/D 不是最簡分式，則 $N=0$ 的根，其中有不是 $N/D=0$ 的根，即可使 N 與 D 的公因子等於零的根．

例如在 § 524 例 2 中，

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+5}{x(x-1)}=\frac{8(x-1)}{x(x-1)}=\frac{N}{D}.$$

這裏的 N/D 不是最簡分式，而 $N=0$ 的根，即 1，並非 $N/D=0$ 的根；因在 $x=1$ 時，$N/D=8$ (§ 514)．

1 顯然是一般的情形，而 2 是例外．

今試再察看方程式 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x+a}{x(x-1)}=0$．

就此方程式而論，$N/D=[8x-(a+3)]/x(x-1)$，此式除在 $a=5$ 或 $a=-3$ 時外，常是最簡分式．

3. 切勿從方纔所說的推斷，以爲 $N=0$ 的根若又是 $D=0$ 的根，就決不適合所設方程式。

例如有方程式 $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x(x-1)}=0$。

這裏的 $N/D=(x-1)^2/x(x-1)$，而由 § 516，此式在 $x=1$ 時等於零。但須注意，$N=(x-1)^2=0$ 所含根 1 的個數，多於 $D=x(x-1)=0$ 所含此根的個數。

應用 § 525 的定則時，須要小心，勿在所選最低公母中，引入額外的因子。 527

方程式中若有非最簡分式，應當先約分，除非所要對消的因子，也在其他分母中呈現。

去分母前，最好將有幾個分式合併起來，或將有幾個分式化成帶分式。

例 1. 解 $\frac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}-\frac{x^2}{6x-2x^2}=\frac{11}{5}$.

這裏的第一分式，其兩項有公因子 $x-5$，第二分式的兩項，有公因子 x。對消這些因子，得

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{x}{6-2x}=\frac{11}{5}，或 \frac{x-1}{x-3}+\frac{x}{2(x-3)}=\frac{11}{5}.$$

去分母，　$10x-10+5x=22x-66$。

解方程式，　$x=8$.

例 2. 解 $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+6}{x+7}=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+5}{x+6}$.

將各分式化成帶分式，再行簡化，便有

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}.$$

移項，使兩端成爲兩分式之差，

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}.$$

分別合併兩端，得

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x^2+13x+42}.$$

去分母，　　$x^2+13x+42=x^2+5x+6.$

解方程式，　　$x=-9/2.$

所設方程式先去分母，也可以得解，但比現在這個方法要繁得多.

528　**聯立方程式.**　解聯立分方程式的通法，是先去分母，然後求所得整方程組的解(倘若可能).　這樣求得的解，便是所設方程組的解，但其中若有可使所設方程式中的分母等於零的，須剔去(§371).

若方程式有§379所述的形式，或可以化成那樣的形式，則應當用該節所說明的方法求解.

例1.　解下面一對方程式，求 x 與 y:

$$\frac{x-1}{y-2}-\frac{x-3}{y-4}=0,\ \frac{1}{xy-2x}+\frac{1}{4y-2y^2}-\frac{2}{xy}=0.$$

將兩方程式去分母，簡化，得

$$x-y+1=0,\ x+2y-8=0.$$

解這對方程式，　　$x=2,\ y=3$

因在 $x=2,\ y=3$ 時，所設方程式中的分母都不等於 0，所以這兩個方程式的解就是 $x=2$ 與 $y=3$.

例2.　解下列方程組，求 x, y, 及 z:

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6},\ \frac{yz}{y+z}=-\frac{3}{2};\ 2(z+x)+xz=0.$$

這兩個方程式可以化成下面的形式(§379):

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{2}{3},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}.$$

解這方程組，求得 $1/x=1/2,\ 1/y=1/3,\ 1/z=-1.$

因此，所求之解是 $x=2,\ y=3,\ z=-1.$

習題二十七

解下列方程式求 x:

1. $\frac{6x-1}{3x+2}-\frac{4x-7}{2x-5}=0.$

2. $\frac{6x}{5x-1}-\frac{8}{3-15x}=\frac{1}{6}.$

3. $\frac{4}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{4}{x^2-6x+8}.$

4. $\frac{3}{2x+3}+\frac{1}{x-5}-\frac{8}{2x^2-7x-15}=0.$

5. $\frac{1}{(x+1)(x-3)}+\frac{2}{(x-3)(x+2)}+\frac{3}{(x+2)(x+1)}=0.$

6. $\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+4x-5}+\frac{3}{x^2+6x+5}=0.$

7. $\frac{x+1}{3x+1}+\frac{2x}{5-6x}=\frac{5}{5+9x-18x^2}.$

8. $\frac{x+a}{b(x+b)}+\frac{x+b}{a(x+a)}=\frac{a+b}{ab}.$

9. $\frac{x^3+1}{x+1}-\frac{x^3-1}{x-1}=20.$

10. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4}+\frac{x-1}{x^2+3x-4}=0.$

11. $\frac{x-8}{x-3}-\frac{x-9}{x-4}=\frac{x+7}{x+8}-\frac{x+2}{x+3}.$

12. $\frac{x+7}{x+6}+\frac{x+9}{x+8}=\frac{x+10}{x+9}+\frac{x+6}{x+5}.$

13. $\frac{x^3+2}{x-2}-\frac{x^3-2}{x+2}-\frac{15}{x^2-4}=4x.$

14. $\frac{1}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}+\frac{3x^2+x}{1-x^4}=0.$

15. $\frac{3}{x^3-8}+\frac{2x+5}{2x^2+4x+8}-\frac{1}{x-2}=0.$

16. $\frac{ax+c}{x-p}+\frac{bx+d}{x-q}=a+b.$

17. $\dfrac{x^2+7x-8}{x-1}+\dfrac{x^2+x+3}{x+2}+\dfrac{2x^2-x+7}{x+3}=4x.$

18. $\dfrac{x^2-ax+2bx-2ab}{x-a}+\dfrac{b^2-x^2}{x-2b}+\dfrac{3c^2}{x-2c}=0.$

19. $\dfrac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)}+\dfrac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=3.$

20. $\dfrac{3x+2}{x^2+x}-\dfrac{x-5}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x^2-x}=0.$

21. $\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x+6}{x^2-4}=0.$

解下列方程組，求 x 與 y，或 x, y，及 z.

22. $\begin{cases}\dfrac{3x+y-1}{x-y+2}=\dfrac{6}{7}, \\ \dfrac{x+9}{y+4}=\dfrac{x+3}{y+3}.\end{cases}$

23. $\begin{cases}\dfrac{y-2}{x-3}+\dfrac{x-y}{x^2-9}=\dfrac{y-4}{x+3}, \\ \dfrac{2}{x^2-2x}+\dfrac{3}{xy-2y}+\dfrac{9}{xy}=0.\end{cases}$

24. $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=a, \\ \dfrac{yz}{y+z}=b, \\ \dfrac{zx}{z+x}=c.\end{cases}$

25. $\begin{cases}\dfrac{2}{x+2y}+2y+2z=3, \\ \dfrac{y+z}{2}-\dfrac{5}{z-3x}=\dfrac{7}{2}, \\ \dfrac{4}{z-3x}-\dfrac{2}{x+2y}=-1.\end{cases}$

部分分式

529 從 §506 可知，凡單變數如 x 的有理函數，都能夠化成整函數，或眞分式，或整函數與眞分式之和的形式.

這種化法，有時候爲達到某種目的起見，還要更進一步，卽將已設眞分式 A/B，再化成一組最簡單的分式之和. 求這組分式的方法，依據下列各定理，其中 A, B, P, Q 等文字所表示的，都是 x 的有理整函數.

定理 1. 兩個眞分式 A/B 與 C/D 的和與差，也是眞分式. 530

因 $$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD\pm BC}{BD}.$$

既然 A 的次低於 B，AD 的次必低於 BD.

既然 C 的次低於 D，BC 的次必低於 BD.

因此，$AD\pm BC$ 的次低於 BD.

定理 2. 設 I 與 I' 表示整函數，而 A/B 與 A'/B' 表示眞分式. 531

若 $I+A/B\equiv I'+A'/B'$，則 $I\equiv I'$，而 $A/B\equiv A'/B'$.

因由假設，$I-I'\equiv A'/B'-A/B$.

但 $I-I'$ 所表示的是一個整函數（或 0）．而由 §530，可知 $A'/B'-A/B$ 所表示的是一個眞分式（或 0）.

所以，一個整函數既然不能等於一個眞分式，就應當有

$$I-I'\equiv 0 \text{ 及 } A'/B'-A/B\equiv 0,$$

即 $$I\equiv I, \text{ 及 } A/B\equiv A'/B'.$$

定理 3. 設 A/PQ 所表示的是一個眞分式，其分母已析成兩個互質因子的積. 532

這分式能夠化成兩個眞分式的和，這兩個眞分式有形式 B/P 與 C/Q.

因 Q 既然與 P 互質，則據 §479，可求得兩個整函數 M 與 N，使

$$1\equiv MQ+NP, \text{因而使 } A\equiv AMQ+ANP.$$

因此 $$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{AMQ+ANP}{PQ}\equiv\frac{AM}{P}+\frac{AN}{Q}. \tag{1}$$

若 AM/P 與 AN/Q 都是眞分式，本定理早已得證.

若 AM/P 與 AN/Q 不是眞分式,則可將它們化成整函數與眞分式的和,設化得之結果是

$$\frac{AM}{P}\equiv I+\frac{B}{P} \text{ 與 } \frac{AN}{Q}\equiv K+\frac{C}{Q}. \qquad (2)$$

將表示$\frac{AM}{P}$與$\frac{AN}{Q}$的這兩個式子,代入 (1),就有

$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}+I+K. \qquad (3)$$

但因 A/PQ, B/P, C/Q 都是眞分式,故從 (3),據§§ 530, 531,可知 $I+K\equiv 0$;於是就有

$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q},$$

如所欲證.

533 注意. 分式 A/PQ 所能化成,像 $B/P+C/Q$ 這樣的和,祇有一種.

因若有 $$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}\equiv\frac{B'}{P}+\frac{C'}{Q}. \qquad (1)$$

其中 B'/P 與 C'/Q 也是眞分式,則便有

$$\frac{B-B'}{P}\equiv\frac{C'-C}{Q}, \text{ 因而有 } \frac{(B-B')Q}{P}\equiv C'-C. \qquad (2)$$

但 (2) 是不可能的,除非 $B-B'\equiv 0$, 且 $C'-C\equiv 0$. 因若不然,則 (2) 的意思是說 $(B-B')Q$ 可被 P 整除,但 P 是不能整除 $(B-B')Q$ 的,因為 Q 與 P 互質,而 $B-B'$ 的次低於 P (§ 481).

534 **部分分式.** 適纔已經證明存在的分式 B/P 與 C/Q,叫做 A/PQ 的部分分式(partial fractions)。

將形式如 A/BQ 的所設分式,析成它的部分分式,無需實行 § 532 所指示的手續;我們可以應用 § 397 的未定係數法,如下例所示.

例. 將 $(2x^2+1)/(x^3-1)$ 析成兩個部分分式之和.

這是一個眞分式,它的分母是兩個互質因子 $x-1$ 與 x^2+x+1 的積.

因此,據 § 532, $(2x^2+1)/(x^3-1)$ 等於兩個眞分式的和;這兩個分式的分母分別是 $x-1$ 與 x^2+x+1. 第一分式的分子必定是一個常數,第二個的分子必定是一個式子,它的次最多是一. 因此,必定有

$$\frac{2x^2+1}{x^3-1}\equiv\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}. \tag{1}$$

其中 a, b, 及 c 都是常數.

求 a, b, c, 可先將 (1) 去分母.

我們得 $$2x^2+1\equiv a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1),$$

即 $$2x^2+1\equiv(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c). \tag{2}$$

因 (2) 是恆等式, x 的同次冪係數必相等 (§ 284).

因此 $$a+b=2,\ a-b+c=0,\ a-c=1, \tag{3}$$

解 (3), $$a=1,\ b=1,\ c=0.$$

所以 $$\frac{2x^2+1}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2+x+1}.$$

習題. 將 $(5x+1)/(x^4+x^3+x^2-x)$ 析成兩個部分分式的和.

關於部分分式的一般定理. 從 § 532 的定理,可得下面的結論: 535

1. 設 A/PQR 表示一個眞分式,其分母的三個因子是互質的. 這個分式可以化成三個分式之和,形式如

$$\frac{A}{PQR}\equiv\frac{B}{P}+\frac{D}{Q}+\frac{E}{R},$$

其中 B/P, D/Q, 及 E/R 都表示眞分式.

因 P 旣與 QR 互質(§ 482),則 A/PQR 就是兩個眞分式的和,形式如 $B/P+C/QR$ (§ 532);又, Q 旣與 R 互質,則 C/QR 也是兩個眞分式的和,形式如 $D/Q+E/R$(§ 532),

分母是不論多少個彼此都互質的因子之積時,也如此。

2. 設有形式如 A/PQ^3 的眞分式,其中 P 與 Q 是互質的. 由 § 532 ,這分式能析成下面的和:

$$\frac{A}{PQ^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q^3}.$$

§ 532 的定理,是不能應用於分式 C/Q^3 的,因爲 Q, Q, Q 這三個因子,並不互質.

但因 C 的次比 Q^3 低,故由 § 422, C 可以化成由 Q 構成的多項式,其形式如

$$C \equiv C_1Q^2+C_2Q+C_3,$$

其中 C_1, C_2, C_3 的次都比 Q 低.

用 Q^3 除這恆等式的兩端,得

$$\frac{C}{Q^3} \equiv \frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3}.$$

因此,所設分式能夠化成下面的和:

$$\frac{A}{PQ^3} \equiv \frac{B}{P}+\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3},$$

其中 B 的次低於 P, 而 C_1, C_2, C_3 的次都低於 Q.

推廣言之,一個因子例如 Q, 在分母中呈現無論多少次時都可以實行這樣的變換.

所以有下面的定理:

假定有一個所設眞分式,其分母的互質因子已被析出,有的呈現一回,有的呈現不止一回.

這分式本身,於是就能析成部分分式之和,其形式祇有一種. 在這個和裏面, (1) 對應於每一個祇呈現一回的因子 P, 有一個形式如 B/P 的分式; (2) 對應於每一個呈現 r 回的因子 Q, 有一組分式共 r 個,其形式如 $C_1/Q+C_2/Q^2+\cdots+C_r/Q^r$, 其中 $C_1, C_2, \cdots, C_r$ 的次都低於 Q.

536 **最簡部分分式.** 凡有實係數而由 x 構成的多項式,都可以證明它是若干因子的積,因子的形式是 $x-a$ 與 x^2+px+q, 其中 a, p, q 是實數,但 x^2+px+q 的因子,其係數是虛數.

又從 §§ 469, 532 可知,若所設眞分式的分子,及其分母

所已析成的因子，都有實係數，則對應部分分式的分子，也有實係數。因此，由 § 534，

凡眞分式，其分子與分母都有實係數的，等於部分分數的確定的和，這些部分分式，對於其分母的因子 $x-a$ 及 x^2+px+q，有關係如下：

1. 每有一個祇呈現一回的因子 $x-a$，就有一個分式，其形式如 $A/(x-a)$，其中 A 是實常數。

2. 每有一個呈現 r 回的因子 $x-a$，就有一組共 r 個分式，其形式如

$$A_1/(x-a)+A_2/(x-a)^2+\cdots+A_r/(x-a)^r,$$

其中 $A_1, A_2, \cdots A_r$ 是實常數。

3. 每有一個祇呈現一回的因子 x^2+px+q，就有一個分式，其形式如 $(Dx+E)/(x^2+px+q)$，其中 D 與 E 是實常數.

4. 每有一個呈現 r 回的因子 x^2+px+q，就有一組共 r 個分式，其形式如

$$(D_1x+E_1)/(x^2+px+q)+\cdots+(D_rx+E_r)/(x^2+px+q)^r,$$

其中 $D_1, E_1, D_2, E_2, \cdots D_r, E_r$ 表示實常數。

這裏所說的分式，通常叫做所設分式的最簡部分分式. 537
這些分式，最好用未定係數法求得.

例 1. 將 $\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 析成最簡部分分式.

由 § 536，有

$$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \quad (1)$$

其中 A, B, C 是常數：

將 (1) 去分母，得

$$x^2+x-3\equiv A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)+C(x-1)(x-2). \quad (2)$$

將 (2) 的第二端，照 x 的降冪序排列，而使兩端 x 同次冪的係數相等，就可以求得 A, B, C；但因 A, B, C 是常數，故用下面的方法也可以求得，此法比較簡便一些，

在 (2) 中，命 $x=1$，就有 $-1=A(-1)(-2)$，$\therefore A=-1/2$；

其次　　命 $x=2$，就有 $3=B(-1)\cdot 1$，　$\therefore B=-3$；

最後　　命 $x=3$，就有 $9=C\cdot 2\cdot 1$，　$\therefore C=9/2$.

因此 $$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x-2}+\frac{9}{2(x-3)}.$$

例 2.　　將 $\dfrac{x+1}{x(x-1)^3}$ 析成最簡部分分式.

由 § 536，有 $$\frac{x+1}{x(x-1)^3}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3},$$

因而有 $$x+1\equiv A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx. \tag{1}$$

在 (1) 中，命 $x=0$，就有 $1=A(-1)^3$，　$\therefore A=-1$；

其次　　命 $x=1$，就有 $2=D$，　$\therefore D=2$.

將 A 與 D 的此二值代入 (1)，並將所得兩項 $-(x-1)^3$ 與 $2x$，移到第一端，再行簡化，便有

$$x^3-3x^2+2x\equiv Bx(x-1)^2+Cx(x-1). \tag{2}$$

用 $x(x-1)$ 除 (2) 的兩端，得

$$x-2\equiv B(x-1)+C. \tag{3}$$

使 (3) 中 x 同次冪的係數相等，有

$1=B$ 及 $-2=-B+C$，　$\therefore B=1$ 而 $C=-1$.

因此 $$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

或將 (1) 照 x 的降冪排列，得

$$x+1\equiv(A+B)x^3-(3A+2B-C)x^2+(3A+B-C+D)x-A.$$

使 x 同次冪的係數相等，有

$$A+B=0,\ 3A+2B-C=0,\ 3A+B-C+D=1,\ -A=1.$$

解這方程組，也求得

$$A=-1,\ B=1,\ C=-1,\ D=2.$$

例 3.　　將 $\dfrac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}$ 析成最簡部分分式.

x^2-x+1 的因子是虛數，(§ 536)，故有

$$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}\equiv\frac{Ax+B}{(x^2-x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{E}{x-3},$$

其中 A, B, C, D, E 都是常數.

去分母，

$$5x^2-4x+16\equiv(Ax+B)(x-3)$$
$$+(Cx+D)(x^2-x+1)(x-3)+E(x^2-x+1)^2. \qquad (1)$$

將 (1) 照 x 的降冪序排列，然後使其同次冪的係數相等，就可以求得 A, B, C, D, E；但下面的方法比較簡單些．

在 (1) 中，命 $x=3$，就有 $49=49E$，$\therefore E=1$．

將 E 的此值代入 (1)，將所得的一項 $(x^2-x+1)^2$ 移到第一端，簡化，用 $x-3$ 除兩端，得

$$-(x^3+x^2+x+5)\equiv Ax+B+(Cx+D)(x^2-x+1). \qquad (2)$$

其次用 x^2-x+1 除 (2) 的兩端，得

$$-x-2-\frac{2x+3}{x^2-x+1}\equiv\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+Cx+D. \qquad (3)$$

據 § 531，(3) 中分式部分恆等，整式部分恆等．

因此，　$-x-2\equiv Cx+D$，　所以 $C=-1$，$D=-2$，

而　　$-2x-3\equiv Ax+B$，　所以 $A=-2$，$B=-3$．

所以　$$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}\equiv-\frac{2x+3}{(x^2-x+1)^2}-\frac{x+2}{x^2-x+1}+\frac{1}{x-3}.$$

所設分式的分母，有形式 $(x-a)^r$ 時，最好先將分子化成由 $x-a$ 構成的多項式 (§ 423)．同樣，分母有 $(x^2+px+q)^r$ 的形式，而 x^2+px+q 有虛因子時，可以將分子化成由 x^2+px+q 構成的多項式． 538

例．將 $\dfrac{x^4+x^3-8x^2+6x-32}{(x-2)^5}$ 析成最簡部分分式．

由 § 423，求得

$$x^4+x^3-8x^2+6x-32=(x-2)^4+9(x-2)^3+22(x-2)^2+18(x-2)-28.$$

用 $(x-2)^5$ 除兩端，便有

$$\frac{x^4+x^3-8x^2+6x-32}{(x-2)^5}=\frac{1}{x-2}+\frac{9}{(x-2)^2}+\frac{22}{(x-2)^3}+\frac{18}{(x-2)^4}-\frac{28}{(x-2)^5}.$$

若所設分式是帶分式，則可以先將它化成整式與分式之和，然後將分式析成部分分式． 539

例．將 $\dfrac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}$ 析成部分分式．

第一步　$$\frac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}=x+2+\frac{7x-11}{x^2-4x-5}$$
$$=x+2+\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)};$$

第二步　$$\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)}=\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x-5}.$$

習題二十八

將下列各分式析成部分分式，其分母的係數是實數：

1. $\dfrac{2x+11}{(x-2)(x+3)}$.　　2. $\dfrac{6x-1}{(2x+1)(3x-1)}$.

3. $\dfrac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.　　4. $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$.

5. $\dfrac{x^2+2}{1+x^3}$.　　6. $\dfrac{8x+2}{x-x^3}$.

7. $\dfrac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$.　　8. $\dfrac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}$.

9. $\dfrac{x-1}{2x^3-5x^2-12x}$.　　10. $\dfrac{6}{2x^4-x^2-1}$.

11. $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-5}{(x+3)^5}$.　　12. $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

13. $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}$.　　14. $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x^2+1)}$.

15. $\dfrac{2x^5-x+1}{(x^2+x+1)^3}$.　　16. $\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}$.

17. $\dfrac{3x^2-x+2}{(x^2+2)(x^2-x-2)}$.　　18. $\dfrac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

19. $\dfrac{2x^2-3x-2}{x(x-1)^2(x+3)^3}$.　　20. $\dfrac{x^3+x+3}{x^4+x^2+1}$.

IX. 對稱函數

絕對對稱與輪旋對稱

絕對對稱. 在 $x^2+y^2+z^2$ 一式中,文字 x, y, z 有下述的相互關係,即若將其中任何兩個交換,則可得一個恆等於原式的式子,如 $y^2+x^2+z^2$ (交換 x 與 y),或 $z^2+y^2+x^2$,或 $x^2+z^2+y^2$. 為指明這種性質起見,我們說,$x^2+y^2+z^2$ 關於 x, y, z 成絕對對稱 (absolute symmetry),或說關於 x, y, z 是對稱的 (symmetric). 540

概言之,某函數中的一組文字,每兩個互相交換後,若可得一個恆等於該函數的函數,我們就說這函數,關於這組文字是對稱的.

例如. $(xy+xz+yz)/(x+y)(x+z)(y+z)$ 關於 x, y, z 是對稱函數.

$a+b+c$ 及 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 關於 a, b, c 是對稱函數.

但 $x+y-z$ 就不是對稱函數;因若交換 y 與 z,得 $x+z-y$,不恆等於 $x+y-z$.

像 $2xy$, $3yz$, 及 $4xz$ 這樣的項,叫做關於變數 x, y, z 的同型項,因為它們的變數部分,即 xy, yz, 及 xz,可由交換 x, y, z 三文字中的一對而彼此互易. 推而廣之,也是如此. 541

若干文字如 x, y, z 等等的整函數,其關於這些文字成對稱的主要條件是,凡同型項的係數都相等. 542

這條件暗中包含着下面的一句話,即一個對稱函數若含有屬於某型的項一個,必含有屬於該型的一切諸項;換言之,將各文字實行一切可能的交換,因而從所設屬於某型的一項所可導出的一切諸項,這函數都有.

例如,$ax^2+by^2+cz^2$ 若可成為對稱函數,則必有 $a=b=c$.

又如,x, y, z 的一個對稱函數若含有 x^2y 一項,則必含有 $x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$ 所有各項.

543 關於所設一組文字成對稱的,所設某次函數,其一般形式可以根據上述定理推知.

例如, 關於 x, y, z, u 的一次對稱函數,其一般形式是 $a(x+y+z+u)+b$,其中 a 與 b 是常數.

又如關於 x, y, z 的一,二,三次齊次對稱函數,其一般形式是

1. $a(x+y+z)$. 2. $a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+xz+yz)$.

3. $a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+cxyz$.

544 **對稱函數的記法.** 記號 Σx^2 的意思,是有同型如 x^2 的一切諸項之和;這就是說,若所論及的文字是 x, y, z, 則 $\Sigma x^2=x^2+y^2+z^2$. 仿此,$\Sigma x^2y=x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$;諸如此類.

從任何所設對稱函數的各項中,每一型選出一項,加起來,而在和的前面寫上記號 Σ, 就可以代表這函數.

例如,
$$\Sigma(2x-x^3y^2)=2x+2y+2z-x^3y^2-y^3x^2-x^3z^2-z^3x^2-y^3z^2-z^3y^2.$$

545 對稱函數全部寫出來時,其各項最好依照一定的法則排列. 如下列各例所示,乃是對稱整函數的一種很方便的排列方法.

假定所論及的文字是 a, b, c, d, 而所謂這些文字的正常次序,經公認爲 a, b, c, d.

則 Σab 與 Σabc 應當寫成下面的樣子:

$\Sigma ab=ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $\Sigma abc=abc+abd+acd+bcd$.

讀者注意,在每一項中,各文字都照正常次序書寫.

在書寫 Σab 時,順次取 a, b, c 爲第一個文字,再接寫其後的文字. Σabc 的各項,也是照這個方法寫出來的.

Σa^mb^n 的各項,當 $m\neq n$ 時,可照下例排列:

$$\Sigma a^2b^3=a^2b^3+b^2a^3+a^2c^3+c^2a^3+\cdots+c^2d^3+d^2c^3.$$

讀者注意,指數的次序保持不變;在指數的下方,寫 Σab 第一項的文字, ab 與 ba 兩種次序都有,其餘依此類推.

仿此可寫

$$\Sigma a^2b^3c^4=a^2b^3c^4+a^2c^3b^4+b^2c^3a^4+b^2a^3c^4+c^2a^3b^4+c^2b^3a^4$$

$$+(\text{從 }\Sigma abc\text{ 其餘各項照樣導出的諸項}).$$

關於對稱的一般定理. 從第540節的定義可知,對稱函數經由計算定則而變換形式時,仍舊是對稱函數. 特別要說的是, 546

兩個對稱函數的和,差,積,以及商,也是對稱函數.

根據這條定理,用代數運算來結合對稱函數時,不必當眞實行運算,也可以得到結合後的結果. 所必要的,只是計算那結果之中同型項的係數而已.

例 1. 求 $\Sigma(a)^2=(a+b+c+\cdots)^2$.

所求的結果,明明是一個二次齊次對稱函數,其各項所屬之型有 a^2 及 $2ab$ 兩種.

因此, $$(\Sigma a)^2=\Sigma a^2+2\,\Sigma ab.$$

例 2. 求 $\Sigma x^2\cdot\Sigma x=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$.

這一個積,明明是屬於 x^3 及 x^2y 兩種型的各項和.

因此, $\Sigma x^2\cdot\Sigma x=\Sigma x^3+\Sigma x^2y=x^3+y^3+z^3$

$$+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y.$$

例 3. 求 $(\Sigma x)^3=(x+y+z)^3$.

所求的結果,乃是關於 x, y, z 的三次齊次對稱式. 故必有 (§543),

$$(x+y+z)^3=a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+cxyz.$$

求常數 a, b, c, 之值,可指定任何三組 x, y, z 之值,得含有 a, b, c 的三個方程式,再解這方程組.

例如使 $x=1$, $y=0$, $z=0$, 就有 $1=a$. (1)

又如使 $x=1$, $y=1$, $z=0$, 就有 $8=2a+2b$. (2)

最後使 $x=1$, $y=1$, $z=1$, 就有 $27=3a+6b+c$. (3)

解 (1), (2), (3), 得 $a=1$, $b=3$, $c=6$.

因此 $$(\Sigma x)^3=\Sigma x^3+3\,\Sigma x^2y+6\,\Sigma xyz.$$

547 **輪旋對稱.** 在 $x^2y+y^2z+z^2x$ 一式中,文字 x,y,z 有下述的相互關係,即若將x換成y,y換成z,z換成x,則可得一個恆等於原式的式子,$y^2z+z^2x+x^2y$. 爲指明這種性質起見,我們說,$x^2y+y^2z+z^2x$ 關於文字 x,y,z,依照次序 x,y,z,是輪旋對稱的(cyclo-symmetric),或輪旋的(cyclic).

概言之,一式中的一組文字,依照所設次序排列,其第一個換成第二個,第二個換成第三個,如是遞次代換,直到末一個換成第一個而止,此時若可得一個恆等於該式的式子,我們就說此式關於這組文字依所設次序是輪旋對稱的或輪旋的.

上述文字的交換方法,叫做輪換(cyclic interchange).

548 讀者注意,$x^2y+y^2z+z^2x$ 的各項,其排列次序就是輪旋的;這就是說,當 x 換成 y,y 換成 z,z 換成 x 時,第一項就變成第二項,第二項就變成第三項,末一項就變成第一項. 輪旋式不時可以遇到,若將它們照輪旋次序排列,計算起來就方便得多.

549 凡對稱函數明明都是輪旋函數,但輪旋式未必都是對稱的.

例如,$x^2y+y^2z+z^2x$ 雖然是輪旋的,但並不是對稱的. 若 x 與 y 交換,它的值就要改變. 要使它成功對稱式,必須加上 $y^2x+z^2y+x^2z$ 三項.

550 如上例所示,一個輪旋函數,通常並不含有屬於所設某型的一切諸項,但其所含屬於此型之項,係數必相同.

551 **定理.** 兩個輪旋函數的和,差,積,商,也都是輪旋的.

此定理可逕從輪旋對稱的定義推得.

例. 求積 $(x^2y+y^2z+z^2x)(x+y+z)$.

此積明明是輪旋的而非對稱的. 此外,其所含各項,祇屬於三型,即 x^3y, x^2y^2, x^2yz.

因此,所求之積是

$$x^3y+y^3z+z^3x+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2yz+y^2zx+z^2xy.$$

習題二十九

1. 關於哪幾個文字，$x^4-2y^4+z^4+4(x^3-y^3)(y^3-z^3)(x^2+z^2)$ 是對稱的.

2. 將下列 a, b, c 的對稱函數完全寫出來：

$$\Sigma a^2b^2,\ \Sigma a^3b^4,\ \Sigma a^2,\ b,\ \Sigma a^2b^3c^5,\ \Sigma a^2b^2c^4,$$

$$\Sigma(a+b)c,\ \Sigma(a+b^2)c^3,\ \Sigma(a+2b+3c).$$

3. 證明 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 關於 a, b, c 是輪旋的，但非對稱的；又證明 $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ 是對稱的.

4. $(a-b)^2(b-c)^2(c-d)^2(d-a)^2$ 關於 a, b, c, d 是不是對稱的?

5. 將下列各組式子，照輪旋次序排列：

$$y^2-x^2,\ z^2-y^2,\ x^2-z^2;\quad a^2bc,\ abd^2,\ ac^2d,\ b^2cd;$$

$$(a-c)(b-a),\ (a-c)(c-b),\ (a-b)(b-c).$$

6. 完全寫出 a, b, c, d 的輪旋函數，其第一項是

$ab^3c^2,\ a(b-c),\ (b+2c)(a+d),\ a^2(a-b)(a-c).$

7. 證明下列恆等式的眞確：

$$\Sigma a^3\cdot\Sigma a=\Sigma a^4+\Sigma a^3b;\ \Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\Sigma abc.$$

對稱函數與輪旋函數的析因子

依據剩餘定理，及方纔所說明的原理，往往可用比較簡省 552
的方法，將複雜的對稱函數或輪旋函數析因子.

例 1. 將 $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ 析因子.

這函數在 $y=z$ 時等於零，因

$$x^3(z-z)+z^3(z-x)+z^3(x-z)\equiv 0.$$

因此，這函數可被 $y-z$ 整除 (§ 416)；據同一理由，此函數可被 $z-x$ 及 $x-y$ 整除，所以可被 $(y-z)(y-x)(x-y)$ 整除.

被除式與除式，都是輪旋的，且是齊次的，前者是四次式，後者是三次式.因此，商必定是一次齊次輪旋式，故其形式當是 $k(x+y+z)$，其中 k 是常數.

因此，　$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

$$\equiv k(x+y+z)(y-z)(z-x)(x-y). \qquad (1)$$

求 k，可指定 x, y, z 的任何一組值，不致使 k 的係數等於零者．

今設命 $x=2, y=1, z=0$，則有 $6=-6k$，即 $k=-1$．

或將 (1) 的兩端，排成 x 的降冪序，而使 x 同次冪的係數相等，也可以求 k．照這樣排列，左端有 x^3 的一項是 $x^3(y-z)$，右端有 x^3 的一項是 $-kx^3(y-z)$，由此也可得 $k=-1$．所以

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)\equiv-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z).$$

例 2．將 $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ 析因子．

這函數在 $x=-y$ 時等於零，因爲

$$(-y+y+z)^5+y^5-{}^5-z^5\equiv 0.$$

因此，這函數可被 $x+y$ 整除；據同理，此函數可被 $y+z$ 及 $z+x$ 整除，因而可被 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 整除．

因被除式與除式，分別是五次與三次的齊次輪旋式，故商必定有形式 $k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)$ § 543)．

因此　　$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

$$\equiv(x+y)(y+z)(z+x)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)].$$

使 $x=1, y=1, z=0$，得 $15=2k+l$；

又使 $x=2, y=1, z=0$，得 $35=5k+2l$．

解這方程組，求得 $k=5, l=5$，故有

$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

$$=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx).$$

例 3．將 $(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$ 析因子．

這函數在 $x=0$ 時等於零，因 $(y+z)^3-(y+z)^3-(z-y)^3-(y-z)^3\equiv 0$．

因此，這函數可被 $x-0$ 即 x 整除；據同理，可被 y 與 z，因而被 xyz 整除．

因被除式與除式都是三次式，故商必是常數 k．因此

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3\equiv kxyz.$$

但 $x=1, y=1, z=1$，求得 $k=24$，因而有

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3=24xyz.$$

方纔所說明的方法，有時可以用來簡化輪旋分式． 553

例．簡化$\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$．

此式關於 a, b, c 是輪旋的．

最低公母是 $(b-c)(c-a)(a-b)$．

通分後，得第一個分子 $-a^3(b-c)$．　因此，由輪旋對稱，可知第二第三個分子是 $-b^3(c-a)$ 及 $-c^3(a-b)$．

將這三個分子加起來，析因子（§ 552，例 1），得

$$(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b).$$

因此，所設之式化成 $a+b+c$．

習　題　三　十

將下列各式析因子：

1. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$．
2. $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$．
3. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$．
4. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$．
5. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$．
6. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$．
7. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$．
8. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$．
9. $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$．
10. $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$．
11. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$．
12. $x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$．

簡化下列各分式：

13. $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$．
14. $\dfrac{x+a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{x+c}{(c-a)(c-b)}$．

15. $\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

16. $\dfrac{(b+c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c+a)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(a+b)^2}{(c-a)(c-b)}$.

17. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

X. 二項定理

554 **連乘積的組成.** 欲得連乘積

$$(a+b+c+d)(e+f+g)(h+k),$$

可用 $e+f+g$ 的每一項乘 $a+b+c+d$ 的每一項,再用 $h+k$ 的每一項遍乘所得各積,最後將末次乘得的各積加起來.

因此,若從所設三個因子,各選一項相乘,則必可得積的一項. 又若按一切可能的選法,從三個所設因子各選一項相乘,則必盡得積的一切諸項.

例如,從第一因子選 b,從第二因子選 g,從第三因子選 k,就得到積的一項 bgk;諸如此類.

因從 $a+b+c+d$ 選一項,有四個選法,從 $e+f+g$ 選一項有三個選法,從 $h+k$ 選一項有兩個選法,故完全積的項數是 $4\cdot3\cdot2=24$. 所以,概言之,

隨便多少個多項式相乘之積,是從每一個因子選取一項相乘,所可得的一切諸積之和.

若第一個因子有 m 項,第二個有 n 項,第三個有 p 項,如是等等,則完全積的項數——若有同類項,則在尚未合併以前——是 $mnp\cdots$.

據此定理，有時可以核驗乘法的準與不準．同類項已經合併的一個積，若其各項都是同號且無數字係數的各項之和，就可以應用這個定理來核驗，因爲這樣的一個積，其數字係數和等於未合併時的總項數． 555

例如，積 $(a+b+c)(a+b+c)$，據此定理，應當有 $3\cdot 3$ 即 9 項．但 $(a+b+c)(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$，其係數和是 $1+1+1+2+2+2=9$，即未合併時的總項數是 9．由此可知沒有乘錯．

又如積 $(a+b)(a+b)(a+b)$ 應當有 $2\cdot 2\cdot 2$ 即 8 項．但此積經簡化後是 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，其係數和是 $1+3+3+1=8$，即未合併時的總項數是 8．所以這個積也是對的．

用前一章的方法計算對稱函數時，應當記住這個定理． 556

讀者當已證明，$\Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\Sigma abc$（第 249 面題 7）．

要試探這個公式的對不對，假定所論及的文字祇有 a, b, c．

於是 Σab 有 3 項，Σa 有 3 項，Σa^2b 有 6 項、Σabc 有 1 項；$3\cdot 3=6+3\cdot 1$，所以這個公式不錯．

二項一次因子的積． 應用 § 554 的定理，隨便多少個形如 $x+b$ 的一次因子連乘積，可由視察而求得．例如， 557

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$$
$$=x^3+(b_1+b_2+b_3)x^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)x+b_1b_2b_3.$$

因爲，從每個因子選取 x，就有 x^3 這一項．

按照一切可能的選法，從兩個因子選 x，從第三個選 b，就有 b_1x^2, b_2x^2, b_3x^2 三項．

按照一切可能的選法，從一個因子選 x，從其餘兩個選 b，就有 $b_1b_2x, b_1b_3x, b_2b_3x$ 三項．

從每個因子選 b，就有 $b_1b_2b_3$ 一項．

讀者注意，積的同類項合併後，如上式所示，x^2 的係數是三文字 b_1, b_2, b_3 的和，x 的係數是此三文字中每兩個相乘之

積的和,而最後一項是全體三文字相乘之積.

因此,這些係數都是 b_1, b_2, b_3, 的對稱函數;這是應該如此的,因為 $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 本來關於 b_1, b_2, b_3 成對稱.

還待注意,既然 $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 關於 b_1, b_2, b_3 成對稱,我們祇須求得屬於 x^3, b_1x^2, b_1b_2x, $b_1b_2b_3$ 一型的一項,再將屬於這三型的一切諸項全寫出來,就可以得到所求之積.

558 據同一理由,可以證明一般公式

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)\cdots(x+b_n)$$
$$=x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\cdots+B_n,$$

其中
$$\begin{aligned}
B_1&=\Sigma b_1 &&=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n,\\
B_2&=\Sigma b_1b_2 &&=b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_2b_3+\cdots+b_{n-1}b_n,\\
B_3&=\Sigma b_1b_2b_3 &&=b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+\cdots+b_{n-2}b_{n-1}b_n,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot &&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
B_n&= &&b_1b_2b_3\cdots b_n;
\end{aligned}$$

換言之, B_1 與 B_n 分別是全體文字 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 的和與積,而中間各係數是: B_2, 這些文字中每兩個相乘之積的和; B_3, 每三個文字相乘之積的和;如是等等.

因此,若從三個因子選取 b, 而從其餘各因子選取 x, 就得積的一項(同類項未合併時的). 按照一切可能的方法選取,就得 $b_1b_2b_3x^{n-3}$, $b_1b_2b_4x^{n-3}, \cdots$ 各項,其和就是 B_3x^{n-3}.

讀者注意,如上所示,係數

$$B_1, B_2, \cdots, B_n$$

都是文字 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 的對稱函數.

559 用同樣的推理方法,還可推得

$$(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\cdots(x-b_n)$$
$$=x^n-B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^nB_n,$$

其中 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 的意義,與 § 558 中所說的相同,而各項前的

符號則為＋與－相間，最後一項即 $(-1)^nB_n$ 的符號，當 n 是偶數時是＋，n 是奇數時是－．

在 § 558 的公式中，祇要將全體文字 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 的符號改變，就得到這個公式。 因為這樣一改變之後，凡由個數是偶數的 b 相乘之積加成的 B，都不會變號，凡由個數是奇數的 b 相乘之積加成的 B，纔會變號．

習題． 用§§557—559 的方法，求下列各積：

1．$(x+1)(x+2)(x+3)$．　2．$(x+2)(x-3)(x+4)$．

3．$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$．　4．$(x-y)(x+2y)(x-3y)(x+4y)$

在 $\Sigma b_1, \Sigma b_1 b_2, \cdots$ 諸和中的項數． 設 $n_1, n_2, \cdots$ 分別是 $\Sigma b_1, \Sigma b_1 b_2, \cdots$ 中的項數． **560**

1． 因 $\Sigma b_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$，故顯然有 $n_1 = n$.

2． 若 n 個文字 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 的每一個，用其餘 $n-1$ 個文字的每一個乘，則一共可得 $n(n-1)$ 個積． 但這 $n(n-1)$ 個積，乃是 $\Sigma b_1 b_2$ 的各項，每一項取兩個． 因此，在 $\Sigma b_1 b_2$ 中的項數 n_2，是 $n(n-1)/2$，即

$$n_2 = n_1 \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

今試察看下列各積：

$b_1b_2, b_1b_3, \cdots, b_1b_n; b_2b_1, b_2b_3, \cdots, b_2b_n; b_nb_1, b_nb_2, \cdots, b_nb_{n-1}$.

這些積共有 n 組，每組共有 $n-1$ 個，因此總數是 $n(n-1)$．

但積 b_1b_2 有兩個，一個的形式是 b_1b_2，還有一個的形式是 b_2b_1；其他各積，也是這樣．

3． 又若 $\Sigma b_1 b_2$ 中的 n_2 項，每項用它所不含的其餘 $n-2$ 個文字的每一個乘，則一共可得 $n_2(n-2)$ 個積．但這 $n_2(n-2)$ 個積，乃是 $\Sigma b_1 b_2 b_3$ 的各項，每一項取三個． 因此，在 $\Sigma b_1 b_2 b_3$ 中的項數 n_3，是 $n_2(n-2)/3$，即

$$n_3 = n_2 \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

今試察看下列各積：

$b_1b_2b_3,\ b_1b_2b_4,\cdots,\ b_1b_2b_n;\ b_1b_3b_2,\ b_1b_3b_4,\cdots,\ b_1b_3b_n;$

$\cdots;\ b_{n-1}b_nb_1,\ b_{n-1}b_nb_2,\cdots,\ b_{n-1}b_nb_{n-2}.$

這些積共有 n_2 組，每組有 $n-2$ 個，因此共有 $n_2(n-2)$ 個.

但積 $b_1b_2b_3$ 呈現三次，即有三種形式，$b_1b_2\cdot b_3$, $b_1b_3\cdot b_2$, $b_2b_3\cdot b_1$. 三個文字相乘，先乘兩個，再用第三個乘，本有三種乘法. 所以 $\Sigma b_1b_2b_3$ 的各項，照樣在這裏都呈現三次，每次對應於一種乘法.

4. 由同一推理方法，可證

$$n_4=n_3\frac{n-3}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4},$$

推而廣之，可證

$$n_r=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\text{共 } r \text{ 個因子}}{1\cdot2\cdot3\cdots r}.$$

例如從四文字 b_1, b_2, b_3, b_4，取每一個，每兩個，每三個，每四個，選法的個數是 $n_1=4$, $n_2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6$, $n_3=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4$, $n_4=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1$.

561 **二項定理.** 若在§558的公式，即

$$(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n)=x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\cdots+B_n$$

中，將 n 個不同的文字 $b_1, b_2,\cdots b_n$，都換成同一文字 b，而將 x 換成 a，則公式左端變做 $(a+b)^n$.

又因 B_1 的 n 項，每一項變成 b，而 B_2 的 n_2 項，每一項變成 b^2，如是等等，所以有(§560)，

$$B_1=nb,\ B_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot2}b^2,\ \ B_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}b^3,\cdots.$$

於是這公式就變成下面的形式：

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots,$$

其中

1. 右邊的項數是 $n+1$.

2. a 的指數逐項減一, b 的指數逐項加一,每一項中兩指數的和是 n.

3. 第一項的係數是 1, 第二項的係數是 n, 其餘各項的係數可由下面的定則求得:

任何一項的係數,用該項中 a 的指數乘,再用該項中 b 的指數加 1 之和除;所得結果就是次一項的係數.

這個公式就是所謂二項定理(binomial theorem),右邊的式子,叫做 $(a+b)^n$ 由此定理展開而得的展式(expansion).

例.
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+\frac{3\cdot2}{1\cdot2}ab^2+\frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3}b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

因 $a+b$ 是關於 a 與 b 的對稱式,故從 §542 可知,在 562
$(a+b)^n$ 的展式中,屬於同型的各項,例如含有 a^n 與 b^n 的, $a^{n-1}b$ 與 ab^{n-1} 的各項等等,其係數必相同. 這些同係數的項,就是第一項與末一項,第二項與末第二項;概言之,從展式的頭與尾向中間數過去,位次相同的兩項,其係數也相同.

因此,末一項是 b^n; 末第二項是 nab^{n-1}, 如是等等. 又因項數是 $n+1$, 故當 n 是偶數時,有一個中央項, n 是奇數時,有兩個,這兩個中央項屬於同型,其係數相同. 更從方纔所述,可知在一或二中央項兩側的各項,依相反的次序,排成係數相同的各對.

各項的係數,先向中央項逐項增大,然後逐項減小,所以中 563
央係數(一個或兩個)最大.

這是可從 §561, 3 的係數定則推得的,因在中央項左側的各項,其中 a 的指數比 b 的指數加 1 大,而在右側的各項,其中 a 的指數比 b 的指數加 1 小.

564 將上開公式中的 b 變號,再行簡化,就得

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots,$$

其中含 b 的奇次冪各項有 $-$ 號,含 b 的偶次冪各項有 $+$ 號.

例. 求 $(2x-y^3)^6$ 的展式.

在公式中,以 $2x$ 代 a, y^3 代 b, 再據 §562, 推知前三項與後三項的係數. 按相反的次序逐一相等,就有

$$\begin{aligned}(2x-y^3)^6&=(2x)^6-6(2x)^5y^3+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}(2x)^4(y^3)^2-\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}(2x)^3(y^3)^3+\cdots\\&=(2x)^6-6(2x)^5y^3+15(2x)^4(y^3)^2-20(2x)^3(y^3)^3\\&\qquad+15(2x)^2(y^3)^4-6(2x)(y^3)^5+(y^3)^6\\&=64x^6-192x^5y^3+240x^4y^6-160x^3y^9+60x^2y^{12}-12xy^{15}+y^{18}.\end{aligned}$$

565 **通項.** 從§561可知, $(a+b)^n$ 的展式中第 $(r+1)$ 項是

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\text{共 } r \text{ 個因子}}{1\cdot2\cdot3\cdots r}a^{n-r}b^r.$$

當 r 是奇數時,在前面加上負號,這就是 $(a-b)^n$ 展式中的第 $(r+1)$ 項.

例 1. 求 $(x-y)^{16}$ 的展式中第八項.

這裏的 $n=16$, $r+1=8$. 即 $r=7$. 因此,所求項是

$$-\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^9y^7=-11440\,x^9y^7.$$

例 2. 在 $(x^3+1/x)^{12}$ 的展式中,有沒有含 x^{20} 的項? 若有,求此項.

設此項是第 $(r+1)$ 項. 則因 $n=12$, $a=x^3$, 而 $b=1/x$, 故必有

$$a^{n-r}b^r=(x^3)^{12-r}/x^r=x^{36-4r}=x^{20}.$$

要適合這個條件,須有 $36-4r=20$, 即 $r=4$.

因此,第五項含有 x^{20}, 代入公式,求得此須是 $\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{20}=495x^{20}$.

習題三十一

用二項定理展開下列各式:

1. $(3x+2y)^3$.　　2. $(a-b)^8$.　　3. $(1+2x^2)^7$.

4. $(2+1/x)^4$.　　5. $(x-3/x)^6$.　　6. $(x/y-y/x)^5$.

7. $(1-x+2x^2)^4$.　　8. $(a^2+ax-x^2)^3$.

9. 求 $(1+x/2)^{11}$ 的展式中第六項.

10. 求 $(3a-4b)^{12}$ 的展式中第八項.

11. 求 $(a^2-2bc)^{10}$ 的展式中的中央項.

12. 求 $(1-x)^9$ 的展式中兩個中央項.

13. 求 $(1+x)^8$ 的展式中 x^5 的係數.

14. 求 $(3-2x)^7$ 的展式中 x^4 的係數.

15. 求 $(1-x^2)^6$ 的展式中 x^8 的係數.

16. 求 $(1+2x)^9+(1-2x)^{11}$ 的展式中 x^8 的係數.

17. 求 $(x+1/x)^{12}$ 的展式中的常數項.

18. 求 $(2x-1/x)^{15}$ 的展式中 x^7 的係數.

19. 求 $(x+2y)(x-3y)(x-5y)$, 用觀察法.

20. 求 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$, 用觀察法.

21. 下面的積有幾項?

$$(a+b+c+d)(f+g+h)(k+l)(m+n+p+q)$$

22. 求下列各積中的係數和:

1. $(1+x^2+x^3+x^4)^3$.　　2. $(1+2x+x^2)^2(1+x+2x^3)^2$.

23. 下列四文字 a, b, c, d 的對稱函數,展開後的係數和是多少?

1. $\Sigma\ ^2\cdot\Sigma a$.　　2. $\Sigma a^3\cdot\Sigma abc$.　　3. $\Sigma ab\cdot\Sigma abc$.

24. 證明 $(a+b)^n$ 的展式,其係數和是 2^n.

25. 證明 $(a-b)^n$ 的展式中,正係數的和與負係數的和在數值上相等.

XI. 開 方

566 **完全冪.** 已設有理函數 P. P 可能是一個完全 n 次冪：換言之,可能有第二個有理函數 Q 存在,使 $P=Q^n$. 倘然有,這個有理函數 Q,就是 P 的 n 次根.

在本章裏面,所研討的問題是：已設有理函數 P,要決定 P 是不是一個完全 n 次冪,倘若是的,求它的 n 次根 Q. 但 n 則經假定是所設正整數.

567 **單項式的 n 次根.** 設 P 是一個有理單項式,已化成最簡形式. 若 P 是完全 n 次冪,則 P 的 n 次根可由下面的定則求得.

用 n 除 P 中各文字因子的指數,而用 P 中數字係數的 n 次主根,乘所得結果.

這定則,可逕從 § 318 的乘方定則推得.

據該節,$(a^k b^l / c^m)^n = a^{kn} b^{ln} / c^{mn}$. 因此,$a^k b^l / c^m$ 是 $a^{kn} b^{ln} / c^{mn}$ 的 n 次根 (§ 566). 這根,用 n 除 $a^{kn} b^{ln} / c^{mn}$ 中的各指數,就可以求得.

568 這樣得到的根,叫做 P 的 n 次主根(與 § 258 比較). 通常說到 P 的 n 次根時,或用記號 $\sqrt[n]{P}$ 來表示時,所指的就是這主根.

例. 求 $-8a^3b^6/27x^3y^9$ 的立方根.

依照定則,有 $$\sqrt[3]{\frac{-8a^3b^6}{27x^3y^9}}=-\frac{2ab^2}{3xy^3}.$$

習題. 求下列各根：

1. $\sqrt{\dfrac{64a^4b^6}{100c^8d^{12}}}$.　　2. $\sqrt[4]{81x^4y^8z^{12}}$.　　3. $\sqrt[5]{\dfrac{32x^{15}y^{35}}{a^5z^{25}}}$.

569 **多項式的根.** 試研討下列各例；

例 1. 決定 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 是不是完全平方,若是,求其平方根.

若此式是一個完全平方，則其平方根顯然必有 $2x^2+px+q$ 的形式，其中 p 與 q 是常數．所以必定有

$$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9\equiv(2x^2+px+q)^2$$
$$\equiv 4x^4+4px^3+(p^2+4q)x^2+2pqx+q^2,$$

而由 § 284，p 與 q 必須適合下列各方程式：

$$4p=-4\ (1),\quad p^2+4q=13\ (2),\quad 2pq=-6\ (3),\quad q^2=9\ (4).$$

從 (1) 與 (2)，求得 $p=-1$, $q=3$，而 p 與 q 的這兩個値，也適合 (3) 與 (4)；因爲 $2(-1)3=-6$，而 $3^2=9$．

因此，$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 是一個完全平方，而 $2x^2-x+3$ 是它的平方根．

例 2．求 $x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$ 的立方根．

若此式是一個完全立方，則其立方根必有 x^2+px+q 的形式．

所以必定有

$$x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27\equiv(x^2+px+q)^3$$
$$\equiv x^6+3px^5+3(p^2+q)x^4+(p^3+6pq)x^3$$
$$+3(p^2q+q^2)x^2+3pq^2x+q^3,$$

而由 § 284，p 與 q 必須適合下列六方程式：

$$3p=6\ (1),\qquad 3(p^2+q)=21\ (2),\ \cdots\qquad q^3=27\ (6).$$

從 (1) 與 (2)，得 $p=2$, $q=3$，而 p 與 q 的此二値，也適合其餘四個方程式 (3) ⋯ (6)．

因此，$x^6+6x^5+\cdots+54x+27$ 是一個完全立方，其立方根是 x^2+2x+3．

用這兩個例所說明的方法，常可決定一個由 x 構成的所設多項式，是不是完全 n 次冪．若是，常可求得它的 n 次根．

設有多項式 $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$．若此式是一個完全 n 次冪，則 m 必是 n 的倍數，而有 $m=kn$, k 是整數．它的 n 次根，必有形式如 $ax^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_k$，其中 a 是 a_0 的 n 次主根，而 $A_1,\cdots,A_k$ 是未知常數．這個根，就叫做所設多項式的 n 次主根．

決定 $a_0x^m+\cdots+a_m$ 是否有這樣的一個根，若有，求這個根，要解決這個問題，常使

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m\equiv(ax^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_k)^n,$$

而將右端先化成由 x 構成的多項式，然後使兩端 x 同次冪的係數相等，得含有 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 等元的方程式 nk 個. 這方程組的最初 k 個，可使我們求得 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的一組值；若 $a_0x^m+\cdots+a_n$ 可以成爲完全 n 次冪，則此一組值非適合其餘各方程式不可.

習題. 求 $8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1$ 的立方根.

570 **多項式的平方根.** 若多項式 P 是一個完全平方，則其平方根也可以用下面的方法求得.

命 P 表示由 x 構成的偶次多項式，照 x 的降冪序排列，如前節所示.

今試假定 P 是完全平方，並假定 $a, b, c, \cdots$ 就是它的平方根各項，且照 x 的降冪序排列，則當有 $P\equiv(a+b+c+\cdots)^2$.

現在的問題是，已知 P，求 $a, b, c, \cdots$.

須知不論 $a, b, c, \cdots$ 有何值，常有

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b,$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c,\\(a+b+c+d)^2&=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c\\&\quad+[2(a+b+c)+d]d,\end{aligned}$$

如是等等. 從這些關係看來，左邊每添一個新文字，右邊就加上一組新的項，這一組的構成，由於舊文字和的兩倍加新文字，再用新文字乘所得結果.

既然由假設，$P\equiv(a+b+c+\cdots)^2$，則就應該有

$$\begin{aligned}P\equiv a^2+(2a+b)b&+[2(a+b)+c]c\\&+[2(a+b+c)+d]d+\cdots,\end{aligned}$$

其中右端各組的領先項，卽 $a^2, 2ab, 2ac, 2ad, \cdots$，比其後各項都有 x 較高次的冪。

從這恆等式，可求得 $a, b, c \cdots$ 如下：

1. a 明明是 P 的領先項的平方根。

2. 從 P 減 a^2. 因剩餘 R_1 的領先項必須等於 $2ab$，所以用 $2a$ 除這一項，就可以求得 b.

3. 已得 b 之後，構成 $(2a+b)b$，從 R_1 減去。 因剩餘 R_2 的領先項必須等於 $2ac$，所以用 $2a$ 除這一項，就可以求得 c.

4. 照樣繼續下去，直到求得比 a 較低次的剩餘而止。

若這最後的剩餘是 0，P 就是一個完全平方，其平方根是 $a+b+c+\cdots$，恰與我們的假定相符。

若這最後的剩餘不是 0，P 就不是一個完全平方，但是我們已將 P 化成

$$P \equiv (a+b+c+\cdots)^2+R$$

的形式，卽化成一個完全平方，與比 a 較低次的一個整函式之和。方纔所說的計算，可照下例所示的樣子安排。

例. 求 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 的平方根.

$$\begin{array}{rl|l}
 & P=4x^4-4x^3+13x^2-6x+9 & \underline{2x^2-x+3=a+b+c} \\
 & a^2=4x^4 & \\
\cline{2-2}
2a+b=4x^2-x & -4x^3+13x^2-6x+9=R_1=P-a^2 & \\
 & -4x^3+\quad x^2 \qquad\quad =(2a+b)b & \\
\cline{2-2}
2(a+b)+c=4x^2-2x+3 & 12x^2-6x+9=R_2=P-(a+b)^2 & \\
 & 12x^2-6x+9=[2(a+b)+c]c & \\
\cline{2-2}
 & 0 \quad =R=P-(a+b+c)^2 &
\end{array}$$

因最後的剩餘是 0，所以 P 是一個完全平方，其平方根是 $2x^2-x+3$。 與 § 569 例 1 比較。

讀者注意，新剩餘 $R_1, R_2, \cdots$ 每求得一個，就用 $2a$ 除它的領先項，因而得到根的次一項。 然後在這剩餘的左邊，寫根的

已得部份的兩倍,再加根的新項. 用根的新項乘這個和,將結果從這新剩餘減去,就得其次一個剩餘.

習題. 求 $25x^4-40x^3+46x^2-24x+9$ 的平方根.

571 含有不止一個文字的多項式 P,若是一個完全平方,也可以應用此法求其平方根. 先將 P 照諸文字之一的降冪序排列,各項的係數中含有其餘各文字,然後照§570 的方法計算. 前節中的 x,在這裏就是排成降冪序的那一個文字.

572 **近似平方根.** 一個多項式,照 x 的昇冪序排列時,也可以應用上述的方法. 但此時 $a, b, c, \cdots$ 也照 x 的昇冪序排列,而各剩餘的次,一個比一個增加. 因此,據 §570,4,若 P 不是一個完全平方而含有常數項,則可化成

$$P\equiv(a+b+c+\cdots)^2+R'$$

的形式,即化成一個完全平方與一個多項式 R' 的和,R' 的最低次項,可以使它高到隨意多少次.

當 x 的值很小時,可使 R' 之值小到隨意多少小的程度,祇要將計算的步驟充分推進. 因此,就這種情形而論,$a+b$, $a+b+c,\cdots$,叫做 P 的近似平方根,求到兩項,三項,等等.

這些近似平方根,用 §569 的方法來推求,比較便捷.

例. 求 $1+x$ 的平方根到四項.

由 §569,可寫 $\sqrt{1+x}\equiv1+px+qx^2+rx^3+\cdots$.

兩端自乘, $1+x\equiv1+2px+(p^2+2q)x^2+2(pq+r)x^3+\cdots$

因此,由§284, $2p=1,\ p^2+2q=0,\ pq+r=0,$

解方程式, $p=1/2,\ q=-1/8,\ r=1/16.$

故所求的結果是 $1+x/2-x^2/8+x^3/16$.

學者試用 §§570, 571 的方法,將這結果核對一下.

習題. 求 $4-x+x^2$ 的平方根到三項.

數的平方根． 從§570 的公式,又可導出平常所用數的 573
平方根求法．

例． 求 53361 的平方根．

設 a 是祇有一位有效數字,而平方小於 53361 的最大整數． 它的有效數字,就是根的最先一位數字,它的其餘各數字都是 0． 求 a 可照下法:

因為 a 的末尾每有一個 0, a^2 的末尾就有兩個 0,所以將 53361 分成兩位一節,從右到左,可分多少節,就分多少節,這樣就有: 5'33'61．

對應於 61與33 這兩節, a 的末尾需有兩個0,對應於5這一節, a 的第一位數字應該是 2, 因為 2 是平方小於 5 的最大整數． 因此, $a=200$．

已經求得 a 之後,其次的手續,與推求多項式平方根的手續很相同． 在下面左方的算草中,指示得很明白,其中 b 表示根的第二位數字乘 10, c 表示根的個位數字． 右方的算草,乃是平常實用的簡略算草．

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+b+c \\
5'33'61 & \underline{200+30+1} \\
\underline{4\ 00\ 00} & =a^2 \\
2a=400 & 1\ 33\ 61=R_1 \\
2a+b=430 & \underline{1\ 29\ 00}=(2a+b)b \\
2(a+b)=460 & 4\ 61=R_2 \\
2(a+b)+c=461 & \underline{4\ 61}=[2(a+b)+c]c \\
 & 0\ =R
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
5'33'61 & \underline{231} \\
4 & \\
43 & 1\ 33 \\
 & \underline{1\ 29} \\
461 & 461 \\
 & \underline{461} \\
 & 0
\end{array}
$$

先將 a^2 減去,然後用 $2a$ 除 R_1,求得 b 的有效數字,其次從 R_1 減去 $(2a+b)b$, 求得 R_2, 最後用 $2(a+b)$ 除 R_2, 求得 c.

完成此手續的最簡方法,如右方簡略算草所示,是省去最後的 0 不寫,而每次祇移下一節． 每得一個新剩餘後,在它的左邊寫根的已得部分的兩倍,作為"試除數",用這試除數除這新剩餘,得根的次一位數字,將這數字附加在試除數的尾後,得完全除數． 然後用根的新數字,乘這完全除數,減去,得次一個剩餘． 在這手續中的任何一步上,若試除所得根的新數字太大,以致完全除數與新數字的積,大於其所從減去的剩餘,則將該數字減1後,再試．

574 **數字近似平方根.** 不是完全平方之數，它的平方根的近似值，也可以用適纔所說明的方法求得.

例. 求 7.342 的平方根的近似值，準確到第三位小數.

```
      7.34'20'00 | 2.709
      4
47   | 334
     | 329
5409 | 5 20 00
     | 4 86 81
         33 19
```

因此

$$\sqrt{7.342}=2.709.$$

此數的平方根每有一位小數，此數顯然必須有兩位小數. 因此，將小數部分從小數點起，向右每兩位分成一節. 整數部分則從小數點起向左分節，如 § 573 所述.

讀者注意，小數位數是奇數的小數，決不能是一個完全平方.

575 **多項式的立方根.** 若多項式 P 是一個完全立方，則找尋 P 的立方根也有一個專法，其法與上述平方根的求法相仿.

命 P 表示由 x 構成的多項式，照 x 的降冪序排列，它的次是 3 的倍數.

今試假定，P 是一個完全立方，並假定 $a, b, c, \cdots$ 所表示的，乃是它的立方根各項，都照 x 的降冪序排列，則當有 $P\equiv(a+b+c+\cdots)^3$.

現在的問題是，已知 P，求 $a, b, c, \cdots$.

須知不論 $a, b, c, \cdots$ 有何值，常有

$$(a+b)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b,$$

$$(a+b+c)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$$
$$+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c,$$

如是等等. 從這些關係看來，左邊每添一個新文字，右邊就加上一組新的項，這一組的構成，由於舊文字和平方的三倍，加舊文字和與新文字之積的三倍，加新文字的平方，再用新文字乘所得結果.

既然由假設，$P\equiv(a+b+c+\cdots)^3$，則就應該有

$$P\equiv a^3+(3a^2+3ab+b^2)b+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c+\cdots,$$

其中右端各組的領先項，即 a^3, $3a^2b$, $3a^2c$, $\cdots$，比其後各項，都有 a 較高次的冪.

從這個等式，可求得 $a, b, c, \cdots$ 如下：

1. a 明明是 P 的領先項的平方根.

2. 從 P 減 a^3. 因剩餘 R_1 的領先項必須等於 $3a^2b$，所以用 $3a^2$ 除這一項，就可以求得 b.

3. 已得 b 之後，構成 $(3a^2+3ab+b^2)b$，從 R_1 減去. 因剩餘 R_2 的領先項必須等於 $3a^2c$，所以用 $3a^2$ 除這一項，就可以求得 c.

4. 照樣繼續下去，直到求得比 a 較低次的剩餘而止.

若這最後的剩餘是 0，P 就是一個完全立方，其立方根是 $a+b+c+\cdots$，恰與我們的假定相符.

若這最後的剩餘不是 0，P 就不是一個完全立方；但是我們已將 P 化成

$$P\equiv(a+b+c+\cdots)^3+R$$

的形式，其中 R 的次低於 a^2.

計算起來，可以開列式子，如下例所示.

例. 求 $x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$ 的立方根.

$$\begin{array}{rr|l}
 & & \underline{x^2+2x+3} \\
3a^2=3x^4 & & x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 \\
 & & \underline{x^6} \\
3(x^2)^2= & 3x^4 & 6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27=R_1 \\
3x^2\cdot 2x+(2x)^2= & \underline{6x^3+4x^2} & \\
 & 3x^4+6x^3+4x^2 & \underline{6x^5+12x^4+9x^3} \\
(x^2+2x)^2= & 3x^4+12x^3+12x^2 & 9x^4+36x^3+63x^2+54x+27=R_2 \\
3(x^2+2x)3+3^2= & \underline{9x^2+18x+9} & \\
 & 3x^4+12x^3+21x^2+18x+9 & \underline{9x^4+36x^3+63x^2+54x+27} \\
 & & 0 \quad =R
\end{array}$$

因爲最後的剩餘是 0, $x^6+6x^5+\cdots+54x+27$ 是一個完全立方，其立方根是 x^2+2x+3. 與 § 569 例 2 比較.

讀者注意，新剩餘 $R_1, R_2, \cdots$ 每求得一個，就用 $3a^2$ 除它的領先項，因而得到根的次一項. 然後在這剩餘的左邊，寫根的已得部分平方的三倍，加該部分與新項之積的三倍，再加新項的平方. 用根的新項乘這個和，將結果從這新剩餘減去，就得其次一個剩餘.

576　含有不止一個文字的多項式，若是一個完全立方，也可以應用此法求其立方根（參照 § 571）.

照 x 的昇羃序排列的多項式，若不缺常數項，也可以應用此法求其立方根. 若這多項式不是完全立方，這樣就求得了它的近似立方根（參照 § 572）.

577　**數的立方根.** 用 § 575 的公式，也可以求得一個數的立方根.

例. 求 12487168 的立方根.

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+b+c \\
N=12'487'168 & \underline{200+30+2}=232 \\
 & \underline{8\ 000\ 000} \\
3a^2=120000 & 4\ 487\ 168 \quad =R_1=N-a^3 \\
3ab=\ \ 18000 & \\
b^2=\ \ \ \ \ 900 & \\
\overline{138900} & \underline{4\ 167\ 000} \quad =(3a^2+3ab+b^2)b \\
3(a+b)^2=158700 & 320\ 168 \quad =R_2=N-(a+b)^3 \\
3(a+b)c=\ \ \ 1380 & \\
c^2=\ \ \ \ \ \ 4 & \\
\overline{160084} & \underline{320\ 168} \quad =[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c \\
 & \qquad 0 \qquad =R=N-(a+b+c)^3.
\end{array}
$$

先將 N 每三位分成一節，從右向左（若 N 中有小數，再從小數點起向右），這樣就有 12'487'168. 分節後，就可以求得祇有一位有效數字而立方小於 N 的最大整數 a. 對應於 168 及 487 兩節，a 的末尾須有兩個 0，對應於其餘一

節 12，a 的第一位數字應當是 2，因爲 2 是立方小於 12 的最大整數．因此，$a=200$．

其餘各步計算，上面的算草中指示得很詳盡．

讀者注意，用根的已得部分平方的三倍除新剩餘，就得根的次一位新數字．根的各位數字，除第一位外，都是這樣得來的．在上面的算草中，易見用 $3a^2$ 除 R_1 而得 b 的有效數字，用 $3(a+b)^2$ 除 R_2 而得 c 的有效數字．若所得有效數字太大，則減 1 後再試．

求立方根的算草，也可以寫得簡略一些，像開平方一樣．

不是完全立方的數，也可用此法求其立方根(參照 § 574)．

多項式的高次根． 一個多項式若是一個完全四次冪，則求其平方根的平方根，就得到它的四次根．一個多項式若是一個完全六次冪，則求其平方根的立方根，就得到它的六次根． 578

仿照 §§ 570, 575 的方法，也可以特立專法，以求多項式的隨便多少次根．但因有 § 569 的通法，所以這些專法無創立的必要．我們在 §§ 570, 575 中講述開平方與開立方的專法，也不過因爲它們有歷史上的地位，且與數的開平方開立方有關係而已．

習題三十二

簡化下列各式：

1. $\sqrt[3]{-\dfrac{27x^6y^{15}}{125a^9z^{12}}}$．　2. $\sqrt{\dfrac{529a^4b^6}{625c^2d^8}}$．　3. $\sqrt[6]{(x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4)^3}$．

用 § 569，或 § 570 的方法，求下列各式的平方根：

4. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$．
5. $x^2-2x^4+6x^3-6x+x^6+9$．
6. $4x^6+12x^5y+9x^4y^2-4x^3y^3-6x^2y^4+y^6$．
7. $4x^2-20x+13+30/x+9/x^2$．

8. $49-84x-34x^2+60x^3+25x^4$.

9. $x^8+2x^7-x^6-x^4-6x^3+5x^2-4x+4$.

10. $(x^2+1)^2-4x(x^2-1)$.

11. $4x^4+9x^2y^2-12x^3y+16x^2-24xy+16$.

12. $x^2/y^2+y^2/x^2+2+2x^2+2y^2+x^2y^2$.

求下列各式的近似平方根到四項:

13. $1-2x$.　　　　14. $4-x+3x^2$.

用§569或§575的方法,求下例各式的立方根:

15. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$.

16. $27x^{12}+27x^{10}-18x^8-17x^6+6x^4+3x^2-1$.

17. $8x^6-36ax^5+90a^2x^4-135a^3x^3+135a^4x^2-81a^5x+27a^6$.

18. $x^3/y^3+y^3/x^3+3x^2/y^2+3y^2/x^2+6x/y+6y/x+7$.

19. 求 $1-x+x^2$ 的近似立方根到三項.

20. 由§569或578,求

$$x^8-4x^7+10x^6-16x^5+19x^4-16x^3+10x^2-4x+1$$

的四次根.

21. 由§569,求

$$x^{10}+5x^9+15x^8+30x^7+45x^6+51x^5+45x^4+30x^3+15x^2+5x+1$$

的五次根.

22. 使 $x^4+6x^3+11x^2+ax+b$ 成爲完全平方,須指定 a 與 b 有何值?

求下列各數的平方根:

23. .27889.　　24. 2313.61.　　25. 583.2225.

26. 4149369.　　27. .00320356.　　28. 9.024016.

求下列各數的近似平方根準確到小數第三位:

29. 2.　　30. 55.5.　　31. 234.561.

求下各數的立方根:

32. 1860867.　　33. 167284.151.　　34. 1036.433728.

XII. 無理函數,根式與分指數

根式的化法

主根. 在以下各節中,文字 $a, b, \cdots$ 表示正數,或經假定有正值的代數式. 579

又,$\sqrt[n]{a}$ 表示 a 的 n 次主根,即一個正數,其 n 次冪是 a;換言之,就是用公式 $(\sqrt[n]{a})^n=a$ 來設立定義的正數.

當 n 是奇數時,$\sqrt[n]{-a}$ 表示 $-a$ 的 n 次主根,即 $-\sqrt[n]{a}$.

在用到根字的時候,即指主根而說.

注意. 這是對於根字用法所加的限制;因爲任何數其 n 次冪等於 a 的,就是 a 的 n 次根,而這樣的數常有 n 個,往後便要予以證明. 580

例如, $2^2=4$, $(-2)^2=4$, 所以 2 與 -2 都是 4 的平方根. 但 $\sqrt{4}$ 所表示的是主根 2, 還有一個根 -2, 是用 $-\sqrt{4}$ 來表示的.

當 n 是奇數而 a 是實數時, a 的 n 次根有一個是實數, 與 a 同號, 其餘各根都是虛數.

當 n 是偶數而 a 是正數時, a 的 n 次根有兩個是實數, 在數值上相等, 但其符號相反, 其餘各根都是虛數.

當 n 是偶數而 a 是負數時, a 的 n 次根都是虛數.

在高等數學中, $\sqrt[n]{a}$ 通常表示 a 的任何一個 n 次根, 並不像這裏所規定的一樣, 祇表示主根.

根式. 任何式子如 $\sqrt[n]{a}$ 或 $b\sqrt[n]{a}$ 的,叫做根式(radical); 581
n 叫做根指數(index),a 叫做被開方式或被開方數(radicand),b 叫做根式的係數.

當 a 與 b 都是有理數或有理式時,$b\sqrt[n]{a}$ 叫做簡根式.

例如 $5\sqrt[3]{4}$ 是一個簡根式, 其根指數是 3, 被開方數是 4, 係數是 5.

582 **根式計算公式.** 關於根式的計算定則,以下列各公式為根據,其中 m, n, p 都指示整數.

$$1.\quad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

$$2.\quad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

$$3.\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$4.\quad (\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.$$

$$5.\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

要特加注意的是,由 1,一個根式的根指數及被開方式的指數,用同一整數乘,或對消它們的任何公因子,根式之值不變;例如 $\sqrt[9]{a^6}=\sqrt[3]{a^2}$. 這條定則,與簡化分式的定則,顯然互相類似.

這些公式,根據定義 $(\sqrt[n]{a})^n=a$,指數定律 $(a^m)^n=a^{mn}$, $(ab)^n=a^nb^n$,以及 § 261_2 3 的相等定則,即

兩正數若其任何同次冪相等,便相等,

就可以證明. 現在證明如下:

1. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$,因其 np 次冪相等.

即因 $(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}$; 而 $(\sqrt[n]{a^m})^{n\cdot p}=(a^m)^p=a^{mp}$.

2. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$,因其 n 次冪相等.

即因 $(\sqrt[n]{ab})^n=ab$; 而 $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab$.

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,因其 n 次冪相等.

即因 $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n=\frac{a}{b}$; 而 $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$.

4. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$,因其 n 次冪相等.

即因 $(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$; 而 $[(\sqrt[n]{a})^m]^n=[(\sqrt[n]{a})^n]^m=a^m$.

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, 因其 mn 次冪相等.

即因 $(\sqrt[mn]{a})^{mn}=a$; 而 $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=(\sqrt[n]{a})^{n}=a$.

下列各例,可示這些公式的用處:

1. $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$.　　2. $\sqrt{8ab^3}=\sqrt{4b^2}\cdot\sqrt{2ab}=2b\sqrt{2ab}$.

3. $\sqrt[3]{\dfrac{3c}{d^3e^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3c}}{\sqrt[3]{d^3e^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3c}}{de^2}$.　　4. $\sqrt[5]{\sqrt{32x^{15}y^5}}=\sqrt[10]{32x^{15}y^5}=\sqrt{2x^3y}$

5. $(\sqrt[3]{2xy^2})^2=\sqrt[3]{(2xy^2)^2}=\sqrt[3]{4x^2y^4}=y\sqrt[3]{4x^2y}$.

論根式的簡化. 根式中的被開方式,若是所可寫成的最簡整式,則此根式即被認爲有最簡形式. 因此,簡化根式就有下列各條定則,這些定則都是方纔所述各公式的直接推論. 583

1. 若被開方式是一個冪,它的指數與根指數有一個公因子,則將指數與根指數中的這個公因子對消.

例. $\sqrt[9]{27x^3y^6}=\sqrt[9]{(3xy^2)^3}=\sqrt[3]{3xy^2}$.

2. 若被開方式有一個因子是一個冪,它的指數可被根指數整除,則用根指數除這指數,而將除過後的這個因子,從根號內移出.

例. $\sqrt[4]{16x^7y^9}=\sqrt[4]{2^4x^4x^3y^8y}=2xy^2\sqrt[4]{x^3y}$.

3. 若被開方式是一個分式,則用適當的最簡式,乘分子及分母,使分母恰可被移出根號.

例. $\sqrt[3]{\dfrac{xy}{2z^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4xyz}{8z^3}}=\dfrac{1}{2z}\sqrt[3]{4xyz}$.

同類根式. 根式化成最簡形式時,祇有係數不相同,就叫做同類根式 (similar radicals). 584

例如, $\sqrt{4x^3y}$ 與 $\sqrt{81x^5y^3}$ 是同類根式; 因它們的最簡形式,即 $2x\sqrt{xy}$ 與 $9x^2y\sqrt{xy}$, 祇有係數不相同.

585 **論根式的係數移入根號.** 因爲 $b\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b^n a}$,所以一個根式的係數,用根指數乘其指數後,就得移入根號.

習題三十三

將下列各根式化成最簡式:

1. $\sqrt{18}$.　2. $\sqrt{588}$.　3. $\sqrt[3]{-27^2}$.　4. $\sqrt[3]{-1000}$.

5. $\sqrt{3/2}$.　6. $\sqrt[3]{3/2}$.　7. $\sqrt[3]{3/4}$.　8. $\sqrt[5]{3/16}$.

✓9. $\sqrt[5]{25a^5b^{10}c^{15}d^6}$.　10. $\sqrt[6]{128a^2b^4c^8}$.　11. $\sqrt[12]{8x^6y^9z^{15}}$.

12. $\sqrt[2n]{25a^2b^4c^6}$.　13. $\sqrt[3n]{a^nb^{2n}c^{3n}}$.　14. $\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{3n+2}c^{4n}}$.

15. $\sqrt{x^2y^2-x^2z^2}$.　16. $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}$.

17. $\sqrt[3]{x^6-x^3y^3}$.　18. $\sqrt[4]{a^4b^4-2a^3b^5+a^2b^6}$.

19. $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{32ab^2}}$.　20. $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$.　21. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{9(x+1)^2}}$.

22. $\sqrt[3]{1-\dfrac{a^3}{b^3}}$.　23. $\sqrt[3]{\dfrac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}}$.　24. $\sqrt{\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{2ax}{b^2}+\dfrac{1}{b}}$.

將下列各根式的係數移入根號:

25. $3a\sqrt{3a}$.　26. $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$.　27. $3ax\sqrt[3]{1/27a^3x^3}$.

證明下列各組根式是同類根式:

28. $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, 及 $\sqrt{1/8}$.　29. $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{192}$, 及 $\sqrt[3]{8/9}$.

30. $\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)}$ 與 $\sqrt{x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4}$.

根式的運算

586 **加法與減法.** 有下面的定則:

兩個或不止兩個根式的代數和,要化成最簡形式,先將各根式簡化,然後合併各同類根式,所謂合併同類根式,卽求這些根式係數的代數和,作爲新係數.

例．將 $\sqrt{16a^2b}$，$-\sqrt{9a^2b}$，$3\sqrt{2}$，以及 $-2\sqrt{1/2}$ 加起來．

如題應有 $\sqrt{16a^2b}-\sqrt{9a^2b}+3\sqrt{2}-2\sqrt{1/2}$

$$=4a\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{2}-\sqrt{2}=a\sqrt{b}+2\sqrt{2}.$$

注意，兩個非同類根式的和，不能化成一個根式．

例如，決不能有 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}$，除非在 x 或 y 是零的時候；因兩端自乘，就有 $x+y+2\sqrt{xy}=x+y$，$\therefore 2\sqrt{xy}=0$，$\therefore xy=0$．$\therefore$ 或 $x=0$，或 $y=0$．

根指數不同的根式化爲根指數相同的根式． 從公式 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$ 可知，兩個或不止兩個根指數不同的根式，常可化爲根指數相同的等值根式． 這相同的根指數，通常是各根指數的最小公倍數，叫做最小公根指數 (least common index)． 587

例．將 $\sqrt[6]{a^5}$ 與 $\sqrt[8]{b^3}$ 化成有最小公根指數的根式．

所設根指數 6 與 8 的最小公倍數是 24．因而得 $\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[24]{a^{20}}$ 及 $\sqrt[8]{b^3}=\sqrt[24]{b^9}$．

根式的比較． 要比較兩個根式的大小，必須先將它們化成有公根指數的等值根式． 588

例 1．比較 $\sqrt[15]{16}$，$\sqrt[10]{6}$，及 $\sqrt[6]{3}$．

所設根指數，15，10，6 的最小公倍數是 30；因而有

$$\sqrt[15]{16}=\sqrt[30]{16^2}=\sqrt[30]{256};\quad \sqrt[10]{6}=\sqrt[30]{6^3}=\sqrt[30]{216};\quad \sqrt[6]{3}=\sqrt[30]{3^5}=\sqrt[30]{243}.$$

因 $256>243>216$，所以 $\sqrt[15]{16}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[10]{6}$．

例 2．比較 $2\sqrt{3}$ 與 $\sqrt[3]{41}$．

將第一根式的係數移入根號 §585)，再將兩根式的根指數化到公根指數 6，得

$$2\sqrt{3}=\sqrt{12}=\sqrt[6]{12^3}=\sqrt[6]{1728};\quad \sqrt[3]{41}=\sqrt[6]{41^2}=\sqrt[6]{1681}.$$

因 $1728>1681$，所以 $2\sqrt{3}>\sqrt[3]{41}$

乘法與除法． 從公式 589

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ \text{及}\ \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}$$

可導出下面的定則：

一根式被另一根式乘或除，若必須化成有最小公根指數的等值根式，則先行如法化成．然後分別求係數及被開方式的積或商．

例 1．$4\sqrt{xy}$ 用 $2\sqrt[3]{x^2y^2}$ 乘．

依照定則有 $4\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt[3]{x^2y^2}=8\sqrt[6]{x^3y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^4}=8\sqrt[6]{x^7y^7}=8xy\sqrt[6]{xy}$.

例 2．$6\sqrt{xy}$ 用 $2\sqrt[4]{xy}$ 除．

依照定則有 $6\sqrt{xy}/2\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{x^2y^2}/\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{xy}$.

590 **乘方．** 從公式

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m} \text{ 及 } \sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m},$$

可導出下面的定則：

形式如 $\sqrt[n]{a^q}$ 的根式累乘到 m 次冪，若 m 與根指數 n 有公因子，對消它，然後用 m 的其餘的因子，乘被開方式的指數．

例．累乘 $2\sqrt[6]{xy^2}$ 到 9 次冪．

依照定則有

$$(2\sqrt[6]{xy^2})^9=2^9(\sqrt[6]{xy^2})^9=128(\sqrt{xy^2})^3=128\sqrt{x^3y^6}=128xy^3\sqrt{x}.$$

591 **開方．** 從公式

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \text{ 及 } \sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$$

可導出下面的定則：

形式如 $\sqrt[n]{a^q}$ 的根式，求其 m 次根，若 m 與被開方式的指數 q 有公因子，對消它，然後用 m 的其餘的因子，乘根指數．

例 1．求 $\sqrt[5]{x^2y^4}$ 的六次根．

依照定則有 $\sqrt[6]{\sqrt[5]{x^2y^4}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{xy^2}}=\sqrt[15]{xy^2}$.

例 2．求 $(54a\sqrt{b})^3$ 的立方根．

依照定則有 $\sqrt[3]{54a\sqrt{b}}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2a\sqrt{b}}=3\sqrt[3]{\sqrt{4a^2b}}=3\sqrt[6]{4a^2b}.$

簡根多項式． 所謂簡根多項式 (simple radical expression) 的意思，乃是祇含有簡根式的多項式． 例如$\sqrt{a}+\sqrt{b}$就是一個簡根多項式． 這樣的式子，其所含分式的分母中若無根式，就叫做簡根整式． 592

由方纔所立的定則，簡根整式的和，差，積，以及冪，都能化成簡根式的代數和． 在 §607 中，還要證明商也能夠這樣變換． 但簡根多項式的根，如$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$，通常不能化成簡根多項式．

例 1. $3\sqrt{6}+2\sqrt{5}$ 用 $2\sqrt{3}-\sqrt{10}$ 乘．

$$(3\sqrt{6}+2\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{10})=6\sqrt{18}+4\sqrt{15}-3\sqrt{60}-2\sqrt{50}$$
$$=8\sqrt{2}-2\sqrt{15}.$$

例 2. 將 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ 自乘．

$$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2=2+2\sqrt{2}\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}=2+4\sqrt[6]{2}+2\sqrt[3]{2}.$$

習題三十四

將下列各組根式化成有最小公根指數的根：

1. $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[10]{3}$, 及 $\sqrt[15]{3}$　　2. $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{2a^3b^2}$, 及 $\sqrt[6]{7b^5}$.

比較下列各根式：

3. $8\sqrt{2}$ 與 $2\sqrt[3]{3}$.　　4. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, 及 $\sqrt[4]{5}$.

將下列各式化成最簡形式的簡根式：

5. $\sqrt{35}\div\sqrt{7/5}$.　　6. $10\div\sqrt{5}$.　　7. $4\div\sqrt[3]{2}$.

8. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$.　　9. $\sqrt[3]{60}\cdot\sqrt[3]{90}\cdot\sqrt[3]{15}$.　　10. $2\sqrt{3}\div3\sqrt{2}$.

11. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$.　　12. $\sqrt[6]{3}\div\sqrt[4]{5}$.　　13. $2\sqrt{35}\cdot\sqrt{65}\div\sqrt{91}$.

14. $\sqrt{a^3b^5c^7}\cdot\sqrt[3]{a^2b^4c^8}$.　　15. $\sqrt[20]{a}\cdot\sqrt[15]{a}$

16. $\sqrt{a^3b^3}\div\sqrt[6]{a^5b^5}$.　　17. $\sqrt[3]{a^2bc^2}\cdot\sqrt[3]{ab^2c^4}$.

18. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$.　　19. $\sqrt[6]{a/b}\div\sqrt[9]{a/b}$.

20. $\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{ab^6}\div(\sqrt[10]{a^7b^9}\cdot\sqrt[15]{a^{12}b^{14}})$.

21. $(\sqrt{12})^3$.　　22. $(\sqrt[3]{a^2})^6$.　　23. $(2\sqrt[3]{xy^2z^3})^6$.

24. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}$.　　25. $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$.　　26. $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^3b^6/c^9}}$.

27. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}$.　　28. $\sqrt{2\sqrt{2}}$.　　29. $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$.

30. $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}$.　　31. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}}$.　　32. $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mnp}$.

將下列各式儘量簡化：

33. $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{147}$.　　34. $\sqrt{125}+\sqrt{175}-\sqrt{28}+\sqrt{1/20}$

35. $\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{1/2}$.　　36. $\sqrt{a/bc}+\sqrt{b/ca}+\sqrt{c/ab}$.

37. $\sqrt{50}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}$.　　38. $\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt{a^2c}-\sqrt{b^2c}$.

39. $\sqrt{ax^3+6ax^2+9ax}-\sqrt{ax^3-4a^2x^2+4a^3x}$.

40. $(x+y)\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}-(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2-y^2}}$.

41. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}$.　　42. $(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{14})\div\sqrt{2}$.

43. $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{15})$.　　44. $\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

45. $(1+\sqrt{3})^3$.　　46. $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)$.

分指數與負指數

593 根式的計算，利用所謂分指數(fractional exponent)，往往大感便利．

到現在為止，a^n 一式，祇限於 n 表示正整數時，纔有意義．關於這種式子的計算定則，即

$$1.\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n},\qquad 2.\quad (a^m)^n=a^{mn},$$
$$3.\quad (ab)^n=a^nb^n,$$

也在代數上最簡單的定則之列． 所以當然要追問，若 n 不是正整數，能不能找到 a^n 的有用的意義，與這些定則相符合．

定義 $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$. 取 $a^{\frac{1}{2}}$ 爲例. 倘若可能，我們要找一個意義，給予這個記號，這意義與定則 1, 2, 3 相符合. 594

要與 1 符合，必須有

$$(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a,$$

卽 $a^{\frac{1}{2}}$ 的意義，必須是 $\sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$.

這兩個意義之中，選取比較簡單的一個，卽以 $\sqrt{a}$ 爲 $a^{\frac{1}{2}}$ 的定義.

這樣看來，要使 $a^{\frac{1}{2}}$ 去適合的條件，其中的一個已足以指定了它的意義.

依同樣的理由，可立 $a^{\frac{1}{3}}$ 的定義是 $\sqrt[3]{a}$，$a^{\frac{2}{3}}$ 的定義是 $\sqrt[3]{a^2}$，推而廣之，$a^{\frac{p}{q}}$ 的定義是 $\sqrt[q]{a^p}$，卽 a^p 的 q 次主根.

讀者注意，因 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[qm]{a^{pm}}=a^{\frac{pm}{qm}}$，所以 p/q 換成一個等值分數時，$a^{\frac{p}{q}}$ 之值不變.

例如，$a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{6}{9}}$；又如 $a^2=a^{\frac{4}{2}}=a^{\frac{6}{3}}$.

定義 $a^0=1$. 仿照前節，仍使 a^0 符合定則 1，須有 595

$$a^0a^m=a^{0+m}=a^m,$$

因而須有 $$a^0=a^m/a^m=1.$$

所以可立 a^0 的定義是 1.

定義 $a^{-s}=1/a^s$. 使 a^{-s} 與定則 1 相符，須有(§595) 596

$$a^{-s}\cdot a^s=a^{-s+s}=a^0=1,$$

因而有 $$a^{-s}=1/a^s.$$

所以可立 a^{-s} 的定義是 $1/a^s$.

例如，由定義，$a^{-3}=1/a^3$，$a^{-\frac{5}{6}}=1/a^{\frac{5}{6}}=1/\sqrt[6]{a^5}$.

尙待證明的是，這個求得的 $a^{\frac{p}{q}}$，a^0，以及 a^{-s} 的意義，與指數定則完全相符合.

定理 1. 定律 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，在 m 與 n 有一切有理值時，都得成立. 597

命 p, q, r, s 表示任何正整數. 於是

1. 當 $m=p/q$ 而 $n=r/s$ 時,據 §582,應有

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}$$
$$=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

2. 當 $m=-p/q$ 而 $n=-r/s$ 時,由 1 款,應有

$$a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}=a^{-\frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{s}\right)}$$

3. 當 $m=p/q$ 而 $n=-r/s$, 且 $p/q>r/s$ 時,有

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}/\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}/\sqrt[qs]{a^{qr}}$$
$$=\sqrt[qs]{a^{ps-qr}}=a^{\frac{ps-qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{s}\right)}.$$

4. 當 $m=p/q$ 而 $n=-r/s$, 且 $p/q<r/s$ 時,由 3 款,應有

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}=a^{\frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{s}\right)}.$$

598 **定理 2.** 定律 $(a^m)^n=a^{mn}$, 在 m 與 n 有一切有理值時,都得成立.

命 m 表示任何有理數. 於是

1. 當 n 是正整數時,由 §597,有

$$(a^m)^n=a^m\cdot a^m\cdots\text{共 } n \text{ 個因子}=a^{m+m+\cdots\text{共 } n \text{ 項}}=a^{mn}.$$

2. 當 $n=p/q$, 而 p 與 q 是正整數時,由 1 款,有

$$(a^m)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(a^m)^p}=\sqrt[q]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{q}}=a^{m\cdot\frac{p}{q}}.$$

3. 當 $n=-s$, 而 s 是任何正有理數時,由 1,2 款,有

$$(a^m)^{-s}=\frac{1}{(a^m)^s}=\frac{1}{a^{ms}}=a^{-ms}=a^{m(-s)}.$$

定理 3. 定律 $(ab)^n=a^nb^n$，在 n 有一切有理值時，都得成立． 599

1. 命 $n=p/q$，其中 p 與 q 是正整數． 於是

$$(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^p}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{p}{q}}.$$

2. 命 $n=-s$，s 是任何正有理數，則由 1 款，

$$(ab)^{-s}=\frac{1}{(ab)^s}=\frac{1}{a^sb^s}=a^{-s}b^{-s}.$$

應用. 下列各例，可以說明分指數與負指數的應用． 採用這種記法時，繁複的根式計算，往往因此而趨於簡便． 600

例 1. 簡化 $\sqrt{a/\sqrt[3]{a}}$.

如法當有 $\sqrt{a/\sqrt[3]{a}}=(aa^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}.$

例 2. 簡化 $\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}$.

如法當有

$$\sqrt[4]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}$$
$$=a^{\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{a^5b^3}.$$

例 3. 展開 $\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}\right)^3$.

如法當有

$$\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}\right)^3=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3+3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}\left(y^{-\frac{2}{3}}\right)^2+\left(y^{-\frac{2}{3}}\right)^3$$
$$=x^2+3x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+y^{-2}.$$

例 4. $x-y$ 用 $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ 除.

照 § 101 的樣開列算式，有

$$\begin{array}{l|l}
x-y & x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \\ \cline{2-2}
\underline{x+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}} & x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}} \\
-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y & \\
\underline{-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y} &
\end{array}$$

因此，商是 $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$.

習題三十五

不用根號，將下列各式寫成最簡形式：

1. $\sqrt[12]{a^8}$.　　2. $\sqrt{c^{\frac{4}{3}}}$　　3. $a^{\frac{8}{5}}/\sqrt[3]{a^{\frac{6}{5}}}$.　　4. $b\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[8]{b^5}$.

不用負指數或分指數，表示下列各式：

5. $a^{\frac{14}{21}}$.　　6. $c^{-1.5}$　　7. $\left(d^{\frac{2}{3}}\right)^{-6}$.　　8. $\left(e^{-3\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{7}}$.

用正指數而不用根號，表示下列各式：

9. $a^{-1}/b^{-3}c^{-2}$.　　10. $x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{y^{-3}}$.

11. $(1/\sqrt{x^{-5}})^{-4}$.　　12. $x^{-2}\sqrt{y^{-3}}/y^{-2}\sqrt{x^{-3}}$.

將下列各式寫成沒有分母的最簡形式：

13. $\dfrac{a}{bc}-\dfrac{b^{-1}}{c^{-2}}-\dfrac{a^{-1}(b^{-1}+c^{-1})}{a^{-2}(b+c)}+\dfrac{b+c}{b^{-1}+c^{-1}}$.

將下列各式化成最簡指數式：

14. $(3\frac{1}{8})^{\frac{3}{2}}$.　　15. $81^{\frac{3}{4}}$.　　16 $(-27)^{\frac{2}{3}}$.

17. $8^{-\frac{5}{3}}$.　　18. $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{5}{6}}$.　　19. $a^{\frac{2}{5}}a^{-\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{15}}$.

20. $(a^{\frac{3}{2}}b)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}$.　　21. $ab^{-2}/a^{-3}b$.　　22. $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{9}}$.

23. $(a^{-1}b^{-2}c^3)^{-2}$.　　24. $(-32a^{10})^{\frac{3}{5}}$.　　25. $(-a^6b^{-9})^{-\frac{2}{3}}$.

26. $b^{-\frac{1}{3}}\sqrt[12]{b^{-5}}\div b^{-1}\sqrt{b^{-1}}$.　　27. $(a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{bc^5})^{\frac{2}{3}}$.

28. $(8a^{-15}/\sqrt{125a^3})^{-\frac{2}{3}}$.　　29. $\sqrt{a^{\frac{2}{3}}(bc^{-1})^{-2}}$.

30. $\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt[4]{a^3}}$.　　31. $\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}}\Big/\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\cdot\sqrt[3]{a}}$.

32. $[(x^x)^x]^x$.　　33. $\left(x^{x^2+xy}y^{y^2+xy}\right)^{\frac{xy}{x+y}}$.

34. $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})/(x^{-\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}})$.

35. $x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$ 用 $x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$ 乘.

36. a^2-b^3 用 $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}$ 除.

37. 展開$(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}})^4$.　　38. 簡化$[(e^x+e^{-x})^2-4]^{\frac{1}{2}}$.

39. 求 $x^2+4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+4xy+6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+12y^2+9x^{-1}y^3$ 的平方根.

40. 求 $x^3+3x^2+6x+7+6x^{-1}+3x^{-2}+x^{-3}$ 的立方根.