中學各科綱要叢書

代　數

仲光然編

商務印書館發行

中學各科綱要叢書

代　數

仲光然編

商務印書館發行

編 輯 大 意

1. 本書之目的,在使讀者於短少時期內,將代數復習而整理之,以便應付專門以上各學校入學試驗及高等檢定試驗等之用.

2. 本書內容以簡潔明瞭爲主旨,故主要事項雖網羅殆盡,而枝節事項則從略.

3. 本書依據一定之標準及系統,綜合而整理之,以便推考及合理的記憶,且有應用方面的效果.

4. 讀本書時,希望注意下列各項:

A. 列舉各類代表問題,乃在試驗讀者之實力.

B. 例解乃示模範,着眼點則記述一般事項,供集中要點之一助.

C. 了解例題後,卽可領會其後問題之種類及其解法.

D. 每讀完一章,須將例題之種類及解法整理而記憶之.

E. 通讀全書後,須牢記內容之大綱,且須通讀數次爲妙.

F. 問題稍困難時,可參考教科書而研究之.

G. 答案部對於較難之問題,附記有暗示或略解.

目次

代數

第一章 數及代數式

- 數
  - 實數
    - 有理數
      - 整數 (包含 0)
      - 分數 (包含小數)
    - 無理數
  - 虛數

平方之不能爲正亦不能爲 0 的數,稱爲虛數, 如 $\sqrt{-3}$ 等是, 虛數的一般形狀爲 $a+b\sqrt{-1}$, 即 $a+bi$ (b 不爲 0).

對於虛數而言,平方之爲正或爲 0 的數,稱爲實數.

非整數,亦非分數,若用小數只可表示其近似值,且可近似至非常之近,這種數稱爲無理數,如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\pi=3.141592\cdots\cdots$等.

- 代數式
  - 有理式
    - 整式
    - 分式
  - 無理式

用運算記號 (加,減,乘,除,冪,開方), 括弧等結合數字及文字後所得的東西,稱爲代數式, 簡稱爲式.

式中的文字,不含加,減,乘以外的運算,則此式稱爲整式; 式中若有文字或整式 (含有文字的整式) 的除法而不含開方運算,則此式稱爲分式.

整式及分式都稱爲有理式,非整式亦非分式的式,稱爲無理式.

例如 $\frac{1}{2}ax^2$, $\sqrt{3}a^2-5m(b+c)$ 等都是整式, $\frac{ax+by}{a^2+b^2}$ 爲分式, $ax-\sqrt{a^2+b^2}$ 爲無理式.

若式中只某文字爲重, 則把某文字以外的文字都作數字看待, 然後照上

述的規則命名之.

例如 $\frac{x-a}{b}+\frac{y-b}{a}$, 就 x, y 言之,則爲整式,就 a, b 言之,則爲分式;又 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{ax+by}$, 就 a, b 言之爲分式,就 x, y 言之爲無理式.

第二章　剩餘定理

〔定理〕

以 $x-a$ 除 x 的有理整式 P，其剩餘等於以 a($x-a=0$ 的根) 代式中 x 所得之値.

〔定理〕

以 $ax-b$ 除 x 的有理式 P，其剩餘等於以 $\frac{b}{a}$($ax-b=0$ 的根) 代式中 x 所得之値.

〔系〕

$x-a$ 能整除 x 的有理整式 P 的充要條件，爲以 a 代式中之 x 所得之値爲 0.

(例 1)　若 x^3+ax^2+bx-2 以 $x-2$ 除之而能整除，以 $x-3$ 除之剩餘爲 4，求 a, b 之値.

〔着眼點〕 x 的有理整式 x^3+ax^2+bx-2 爲 x 的一次式 $x-2$ 整除，及以 $x-3$ 除之，則剩餘爲 4，故知宜應用剩餘定理.

〔解〕 因 $x-2$ 能整除 x^3+ax^2+bx-2，故以 $x=2$ 代入必爲 0，又以 $x-3$ 除之，剩餘爲 4，故以 $x=3$ 代入必爲 4. 卽

$$8+4a+2b-2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

及

$$27+9a+3b-2=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

簡化 (1) 得 $2a+b=-3$；簡化 (2)，得 $3a+b=-7$.

故
$$a=-4,\quad b=5.$$

〔類題〕

1. 若 $2x-3,\ 3x+1$ 都能整除 $ax^3+bx^2+32x+15$，求 $a,\ b$ 之值.

2. 若 $x-a,\ x-2a$ 都能整除 x^3-[illegible]x^2+2x+8，求 a 之值.

3. 若 $x-4,\ x+1$ 都能整除 px^2+qx+r，求 $p:q:r$ 的連比.

4. 若 $x^4+px^2+qx+a^2$ 能爲 x^2-1 所整除，則亦能爲 x^2-a^2 所整除，試證之.

(例 2) 有 x 的二次整式，若以 $x-1$ 除之，能整除；以 $x-2$ 除之，剩餘爲 1；以 $x-3$ 除之，剩餘爲 6；求此二次式.

〔着眼點〕 設其二次式爲 ax^2+bx+c，然後求 $a,\ b,\ c$；作關於 $a,\ b,\ c$ 的三個方程式卽可.

〔解〕 設所求的二次式爲 ax^2+bx+c，則依剩餘定理得：

$$\begin{cases} a+b+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 4a+2b+c=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ 9a+3b+c=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

解 (1), (2), (3)，得 $a=2,\ b=-5,\ c=3.$

故所求的二次式爲 $2x^2-5x+3.$

〔類題〕

1. 有一 x 的三次式，以 $x-2,\ x-1,\ x+1,\ x+2$ 除之，其剩餘各爲 $7,\ -4,\ -2,\ -1$；求此式.

2. 有一 x 的整式，若以 $x-2$ 除之，其剩餘爲 5，以 $x-3$ 除之，其剩餘爲 9，問以 $(x-2)(x-3)$ 除之，其剩餘爲多少？

(例 3) 若 $x^2-(p+q)x+pq$ 能整除 $x^3+(p-q)x^2-3q^2x+2p^2q$，則 $p=q$ 或 $2p+3q=0$，試證之.

〔着眼點〕 (1) 實行除算，求剩餘爲 0 的充要條件.

或 (2) 因除數能分解爲一次因子，故可用剩餘定理.

〔解〕 能爲 $x^2-(p+q)x+pq$ 所整除，卽爲 $(x-p)(x-q)$ 所整除，故能爲 $x-p,\ x-q$ 所整除，由剩餘定理，原式之 x 以 p 代入，或以 q 代入皆爲 0. 卽

$$p^3+(p-q)p^2-3q^2p+2p^2q=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$q^3+(p-q)q^2-3q^3+2p^2q=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

自 (1)，得 $$2p^3+p^2q-3pq^2=0,$$

即 $$p(2p^2+pq-3q^2)=0,$$

即 $$p(2p+3q)(p-q)=0.$$

$$\therefore\quad p=0,\ 2p+3q=0,\ \text{或}\ p-q=0.$$

自 (2)，得 $$pq^2-3q^3+2p^2q=0,$$

即 $$q(pq-3q^2+2p^2)=0,$$

即 $$q(2p+3q)(p-q)=0.$$

$$\therefore\quad q=0,\ 2p+3q=0,\ \text{或}\ p-q=0.$$

若 p, q 中有一爲 0 (如 $q=0$)，

∴所設之式一爲 x^3+px^2，即 $x^2(x+p)$；

一爲 x^2-px，即 $x(x-p)$.

不能整除，故得 $p=q$，或 $2p+3q=0$.

〔類題〕

1. a, b, c 爲實數，若 $x^3-3b^2x+2c^3$ 能爲 $x-a$, $x-b$ 所整除，則 $a=b=c$，或 $a=-2b=-2c$，試證之.

2. $x^n+py^n+qz^n$，若有 $x^2-(ay+bz)x+abyz$ 的因子，則有下面的關係式，試證之：

$$\frac{p}{a^n}+\frac{q}{b^n}+1=0.$$

3. x^3+ax^2+bx+c 及 x^2+bx+c 皆能爲 $x+h$ 所整除，則 $(a-1)^2-b(a-1)+c=0$，試證之.

(例 4) $nx^{n+1}-nx^n+x^n+1$ 能爲 $(x-1)^2$ 所整除，試證之（設 n 爲正整數).

〔着眼點〕 (1) $(x-1)^2=(x-1)(x-1)$，故以 $x-1$ 除之，所得的商，再證能爲 $x-1$ 所整除.

(2) 已知有 $x-1$ 的因子，因子分解之.

(3) 再證 $x-1$ 外之因子能爲 $x-1$ 整除.

〔解〕 $nx^{n+1}-nx^n-x^n+1$

$$=nx^n(x-1)-(x^n-1)$$

$$=nx^n(x-1)-(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+x+1)$$

$$=(x-1)\{nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+x+1)\}$$

$nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+x+1)$ 中之 x 以 1 代入,得

$$n-(1+1+1+\cdots\cdots+1+1)=n-n=0.$$

故 $nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+x+1)$ 能爲 $x-1$ 整除,又括弧外有 $x-1$ 因子,故原式能爲 $(x-1)^2$ 整除.

〔類題〕

1. l, m, n 爲正整數時,

$$n(x^l-1)(x^m-1)-2l(x^m-1)(x^n-1)+m(x^n-1)(x^l-1)$$

能爲 $(x-1)^3$ 整除,試證之.

2. $x^{n+1}-px^n-p^nx+p^{n+1}$ 能爲 $(x-p)^2$ 整除,試證之.

(例 **5**) 一 x 的有理整式,以 $x-1$ 除之,剩餘爲 4, 更以 $x-2$ 除其所得之商,剩餘爲 3, 試求原式以 $x-2$ 及 $(x-1)(x-2)$ 除之的剩餘.

〔着眼點〕 用 被除數＝商×除數＋剩餘 的關係式,譯題意,將原式表出之.

〔解〕 設 x 的有理整式爲 P, 以 $x-1$ 除之, 其商爲 Q, 再以 $x-2$ 除 Q, 其商爲 Q'; 則

$$P=(x-1)Q+4,\quad Q=(x-2)Q'+3.$$

$$\therefore\quad P=(x-1)\{(x-2)Q'+3\}+4$$

$$=(x-1)(x-2)Q'+3x+1.$$

由剩餘定理,知以 $x-2$ 除之,其剩餘爲 7; 以 $(x-1)(x-2)$ 除之,其剩餘爲 $3x+1$.

〔類題〕

1. 有一 x 的有理整式, 以 $x-a$ 除之,其剩餘爲 p, 更以 $x-b$ 除其商, 剩餘爲 q, 更以 $x-c$ 除其第二次所得之商, 剩餘爲 r; 試求原式以 $x^2-(a+b)x+ab$ 及 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$ 除之的剩餘 (a, b, c 互爲素整數).

2. 有一 x 的有理整式,以 $x-3$ 除之,其剩餘爲 -1; 以 $x-4$ 除之,其剩餘爲 2; 求以 $x^2-7x+12$ 除之的剩餘.

3. 有一 x 的三次式,以 $2x-3$ 除之,剩餘爲 -3; 以 $2x^2-5x+3$ 除之,得商爲 $3x+4$, 剩餘爲不含 x; 求此三次式.

(例 **6**) 有一五位整數,以 9 除之所得其剩餘,等於以 9 除數字之和所

得的剩餘,試證之.

〔着眼點〕 (1) 以 9 除, $9=10-1$, 注意此二點.

(2) 五位整數(五位以上同樣).

例如
$$23547=20000+3000+500+40+7$$
$$=2\times10^4+3\times10^3+5\times10^2+4\times10+7.$$

故若以 x 代 10, 則爲

$$23547=2x^4+3x^3+5x^2+4x+7.$$

〔解〕 以 x 表 10; a, b, c, d, e 表 0 或任意之基數(惟 a 不可爲 0), 則五位之整數可以

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

表之.

此式以 $x-1$ 除之, 所得的剩餘爲 $a+b+c+d+e$, 故五位之整數以 9 除之所得的剩餘, 等於以 9 除各數字之和所得的剩餘.

〔試題〕

1. n 爲正整數時, $9\times(81)^n+1$ 能爲 10 整除, 試證之.

2. 有一五位整數, 奇數位數字的和與偶數位數字的和, 其差若能爲 11 整除, 則原數亦能爲 11 整除, 試證之.

3. $7^{2n+1}+1$ 能爲 8 整除, $5^{2n}-1$ 能爲 24 整除, 試證之 (n 爲正整數).

第三章　未定係數與完全平方式及完全立方式

〔定理〕

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n.$$

x 任爲何值常能成立之充要條件爲

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\cdots\cdots,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ a_n=b_n.$$

〔證〕 將上式之右邊移至左邊，則爲

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots\cdots$$
$$+(a_{n-1}-b_{n-1})x+a_n-b_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

x 任爲何值常能成立，故設 $x=0$，則

$$a_n-b_n=0,\qquad\therefore\quad a_n=b_n.$$

在 (1) 式中，若 $a_n-b_n=0$，則 (1) 式成爲

$$\{(a_0-b_0)x^{n-1}+(a_1-b_1)x^{n-2}+\cdots\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})\}x=0\cdots\cdots(2)$$

此 (2) 式 x 之値爲 2 時，爲 3 時亦非成立不可，

$$\therefore\quad(a_0-b_0)x^{n-1}+(a_1-b_1)x^{n-2}+\cdots\cdots$$
$$+(a_{n-2}-b_{n-2})x+(a_{n-1}-b_{n-1})=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此 (3) 式 $x=0$ 時非成立不可，

$$a_{n-1}-b_{n-1}=0,\qquad\therefore\quad a_{n-1}=b_{n-1}.$$

依此理推之欲 (1) 式成立，x 各冪的係數及絕對項必須爲 0，故欲原式成立之必要條件，爲

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\cdots\cdots,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ a_n=b_n.$$

逆言之，若此條件成立，則 x 任爲何值，

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

與

$$b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

常相等,故又爲充分條件.

(例 1)　$x^4+3x^3+px^2+qx+r$, 若爲 x^3+2x^2+x+2 整除, 則 p, q, r 之値如何?

〔着眼點〕 (1)　雖云整除,因除式爲三次式,故不能應用剩餘定理.

(2)　用係數比較.

〔解〕 第一式 x 之四次式,能以第二式 x 之三次式整除,故其商必爲 x 之一次式,且商之 x 的係數必爲 1, 故其商爲 $x+a$ 之形. 卽

$$x^4+3x^3+px^2+qx+r=(x+a)(x^3+2x^2+x+2),$$

卽

$$x^4+3x^3+px^2+qx+r=x^4+(2+a)x^3+(1+2a)x^2+(2+a)x+2a.$$

此式爲恒等式,故兩邊 x 同冪的係數各相等,

$3=2+a$ ……………………(1)　　$p=1+2a$ ……………………(2)

$q=2+a$ ……………………(3)　　$r=2a$ ……………………(4)

此四式爲 a, p, q, r 的四元一次方程式,解之得

$$p=3,\quad q=3,\quad r=2.$$

〔附言〕 如此例,比較恒等式兩邊 x (或其他某文字) 各冪之係數,求尙未決定之係數的方法,稱爲未定係數法.

〔類題〕

1.　Ax^4+Bx^3+1 能爲 $(x-1)^2$ 整除,求 A 及 B 之値.

2.　$(x^2+x+2)(x^2-2x+1)-(ax^2+bx+c)=x^4-x^3+x+1$, 若爲 x 的恒等式,則 a, b, c 之値如何?

3.　$y^2+5xy+mx^2+x+y-2$, 若能分解爲兩個 x 的一次因子,則 m 之値須如何?

4.　$x^3=A(x-1)(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)+D$, 欲使成立,則 A, B, C, D 之値如何 (A, B, C, D 爲不含 x 的數字)?

5.　x^4+1 以 x^2+ax+b 除之,求其商及剩餘; 若能整除,則 a, b 之値如何 (a, b 爲實數)?

6.　x 之二次三項式 $x^2-2px+24a^2$, 若能分解爲二個一次因子 $(x-ma), (x-na)$, 則 p 之値須如何 (m, n 爲正整數)?

（例 2） m 爲何值時，$6x^2+mxy-3y^2+3x+10y-3$ 能分解爲兩個 x, y 的一次因子.

〔着眼點〕 x, y 之一次式,其一般形雖爲 $ax+by+c$，本題着手時,先括出 x^2 之係數 6，則

$$原式=6(x+py+q)(x+p'y+q'),$$

然後應用未定係數法爲是.

〔解〕 設 $6x^2+mxy-3y^2+3x+10y-3=6(x+py+q)(x+p'y+q')$.

展開右邊,則

右邊 $=6x^2+6(p+p')xy+6pp'y^2+6(q+q')x+6(pq'+p'q)y+6qq'$.

因此式爲恒等式,

$$\therefore\quad 6(p+p')=m,\ 6pp'=-3,\ 6(q+q')=3,$$
$$6(pq'+p'q)=10,\ 6qq'=-3.$$

q 與 q' 設想隨便那一個較大都可，今設 $q \geqq q'$，則自第三及第五式，得 $q=1$, $q'=-\frac{1}{2}$；以之代入第四式，則得 $-3p+6p'=10$，自此式與第四式，

$$p=-3,\ p'=\frac{1}{6};\ 或\ p=-\frac{1}{3},\ p'=\frac{3}{2}.$$

故自第一式,得

$$m=6\left(-3+\frac{1}{6}\right)=-17,$$

或

$$m=6\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)=7.$$

答：$m=-17$ 或 7.

〔類題〕

1. k 取如何數值,則 $x^2-y^2+3x-7y+k$ 可分爲二個一次因子.

2. $x^2+y^2-1+k(x^2+2axy-y^2)$ 若能分解爲二個 x, y 之一次因子，則 a, k 之間有何關係?

（例 3） $4x^4-Ax^3+Bx^2-40x+16$ 若爲完全平方式,則 A, B 之值如何?

〔着眼點〕 所設之式爲 x 的四次式,且初項爲 $4x^4$，故其完全平方式必爲 $(2x^2+ax+b)^2$，然後用未定係數法.

〔解〕 設 $4x^4-Ax^3+Bx^2-40x+16=(2x^2+ax+b)^2$.

展開右邊,則

$$右邊=4x^4+4ax^3+(4b+a^2)x^2+2abx+b^2.$$

故　$4a=-A \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$　　$4b+a^2=B \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

　　$2ab=-40 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$　　$b^2=16 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

自 (4) 式，　　$b=\pm 4.$

若 $b=4$，則自 (3) 式得 $a=-5$；自 (1) 式得 $A=20$；自 (2) 式得 $B=41$.

若 $b=-4$，則自 (3) 式得 $a=5$；自 (1) 式得 $A=-20$；自 (2) 式得 $B=9$.

〔練題〕

1.　$x^4+6x^3+7x^2+px+q$ 若爲完全平方式，則 p, q 之值如何？

2.　$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 若爲完全平方式，則 a, b, c, d 間有下面的關係式，試證之：

$$a^3+8c=4ab,\quad c^2=a^2d.$$

3.　ax^3+bx^2+cx+d 若爲完全立方式，則 $b^2=3ac$, $c^2=3bd$；試證之.

4.　ax^3+bx^2+cx+d 爲 x 的完全立方式，則 $\frac{bc}{ad}$ 之值如何（設 $a\neq 0$, $d\neq 0$）？

5.　$4x^4-260x^3+4273x^2-1560x+144$ 爲完全平方式，試證之；又 $x=26$ 時，求此式之平方根.

6.　$x^6-8x^5+ax^4+bx^3+cx^2-44x+4$ 若爲完全平方式，則 a, b, c 之值如何？

〔注意〕　關於完全平方式，以後在一元二次方程式根之判別式處，尚有說明.

第四章　因子分解

因子分解基本公式

1. $ma + mb + mc + \cdots\cdots = m(a + b + c + \cdots\cdots)$.

2. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

4. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$.

5. $$\begin{cases} x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b), \\ acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d). \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} ax^2 + bx + c = a\left\{x + \dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}\left\{x + \dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}, \\ ax^2 + 2b'x + c = a\left\{x + \dfrac{b' + \sqrt{b'^2 - ac}}{a}\right\}\left\{x + \dfrac{b' - \sqrt{b'^2 - ac}}{a}\right\}. \end{cases}$$

7. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

8. $$\begin{cases} a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3, \\ a^3 \pm 3ab(a \pm b) \pm b^3 = (a \pm b)^3. \end{cases}$$

9. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

10. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

因子分解之方針

第一　若有公因子,先將此公因子括出（公式 1).

第二　所設之式若爲某文字(或某式)的二次式,則常能分解爲此文字(或此式)的二個一次因子.

若用公式 (2), (3), (4), (5) 感到困難,則可用公式 (6).

第三　所設之式若爲某文字（或某式）的三次式,則用公式 (7), (8), (9).

第四　原式爲某文字(或某式)的高次式，則用剩餘定理，或未定係數法，有時可分解之.

公式 **1.**　$ma+mb+mc+\cdots\cdots=m(a+b+c+\cdots\cdots)$.

(例)　$(a-2b)a^3-(b-2a)b^3$ 分解爲因子.

〔着眼點〕　(1)　不去括弧，則無公因子，先撤去括弧.

2)　適當組合之，使得公因子

〔解〕　$(a-2b)a^3-(b-2a)b^3$

$$=a^4-2a^3b-b^4+2ab^3$$

$$=a^4-b^4-2a^3b+2ab^3$$

$$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)-2ab(a^2-b^2)$$

$$=(a^2-b^2)(a^2+b^2-2ab)$$

$$=(a+b)(a-b)^3.$$

〔類題〕

1.　$ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$ 分解爲因子.

2.　$n^2x-xy-n^4y+2n^2y^2-y^3$ 分解爲因子.

3.　$(x-1\ (x-2)^2-(x-1)^3$ 分解爲因子.

公式 **2.**　$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

公式 **3.**　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(例)　$(1-a^2)(1-b^2)-4ab$ 分解爲因子.

〔着眼點〕　(1)　非撤去括弧不可.

(2)　$1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab$ 式中有平方項，且有兩對同符號之項，故想法湊成爲和或差的平方.

〔解〕　$(1-a^2)(1-b^2)-4ab=1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab$

$$=(a^2b^2+1-2ab)-(a^2+b^2+2ab)$$

$$=(ab-1)^2-(a+b)^2$$

$$=(ab-1+a+b)(ab-1-a-b).$$

〔試題〕　次諸式，分解爲因子：

1.　$4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$.

2.　$x^3(x+2y)-y^3(2x+y)$.

3.　$a^4+a^2b^2+b^4$.

4. $9a^4+4b^4+11a^2b^2$.

公式 4. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$.

(例) $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$ 分解爲因子.

〔着眼點〕 (1) 自公式 (4), 可得下之二公式:

$$a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc=(a+b-c)^2,$$

$$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc=(a-b-c)^2.$$

(2) 注意上二式中,都有平方項三項, 積之兩倍的項, 至少有一個正項.

(3) 此三公式,在展開三數和之平方時,極爲重要.

〔解〕 $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$

$$=-\{(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2)-4b^2c^2\}$$

$$=-\{(a^2-b^2-c^2)^2-(2bc)^2\}$$

$$=-\{a^2-b^2-c^2+2bc\}\{a^2-b^2-c^2-2bc\}$$

$$=-\{a^2-(b-c)^2\}\{a^2-(b+c)^2\}$$

$$=-\{(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)\}$$

$$=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

〔類題〕

1. a, b, c 若爲三角形的三邊, 則 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2<0$, 試證之.

2. $a^4+2a^2b^2+4b^4$ 分解爲因子.

公式 5. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$,

$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$.

(例 1) 次諸式,分解爲因子:

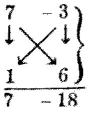
(1) $7x^2+39x-18$.

(2) $(a^2-b^2)x^2+4abxy-(a^2-b^2)y^2$.

(3) $2x^2-5x-5xy-5y+2y^2-25$.

〔着眼點〕 (1), (2), (3) 都是 x 的二次式,故常能分解爲因子.

〔解〕 (1)



$7\times6+(-3)\times1=39$. ∴ $7x^2+39x-18=(7x-3)(x+6)$.

(x^2 係數)　(常數項)　　　　(xy 之係數)

$$\begin{tikzcd} a-b \arrow[d] \arrow[dr] & a+b \arrow[d] \arrow[dl] \\ a+b & -(a-b) \\ a^2-b^2 & -(a^2-b^2) \end{tikzcd} \quad (a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$$

$$\therefore \quad (a^2-b^2)x^2+4abxy-(a^2-b^2)y^2$$

$$=\{(a-b)x+(a+b)y\}\{(a+b)x-(a-b)y\}.$$

所設之式依 x 而整理之,

$$\text{所設之式}=2x^2-5(y+1)x+2y^2-5y-25$$

$$=2x^2-5(y+1)x+(y-5)(2y+5).$$

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[dr] & -(y-5) \arrow[dl] \\ 1 & -(2y+5) \end{tikzcd} \quad -(2y+5)\times 2-(y-5)\times 1=-5y-5=-5(y+1)$$

$\therefore$　原式 $=\{2x-(y-5)\}\{x-(2y+5)\}=(2x-y+5)(x-2y-5).$

〔類題〕 次諸式,分解為因子:

1. $6x^2-13x+6.$
2. $x^2-z(a+b)x-ab(a-z)(b+z).$
3. $(a^2-4b^2)x^2+2(a^3+2b^3)xy+(a^4-b^4)y^2.$
4. $x^4(1-x)^2-2x^2(1+x^2)+(1+x)^2.$
5. $2x^2-5xy+2y^2-5(x+y)-25.$

〔例 2〕 次諸式,分解為因子:

(1) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2.$

(2) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2).$

〔着眼點〕 (1) 式為 a^2 的二次式, (2) 式為 x 的二次式.

〔解〕 (1)　所設之式 $=(a^2)^2-2(b^2+c^2)a^2+(b^4-2b^2c^2+c^4)$

$$=(a^2)^2-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$$

$$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$$

$$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c).$$

$$\because \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & -(b-c)^2 \arrow[dl] \\ 1 & -(b+c)^2 \end{tikzcd} \quad -(b+c)^2-(b-c)^2=-2b^2-2c^2=-2(b^2+c^2).$$

(2) 所設之式$=(z-y)x^2+(y^2-z^2)x+yz^2-y^2z$

$$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz(z-y)$$

$$=(z-y)\{x^2-(z+y)x+yz\}$$

$$=(z-y)(x-y)(x-z)$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x).$$

〔類題〕 次諸式,分解爲因子:

1. $(b^2+c^2)^2+(ab+ac)^2+(ab-ac)^2+a^4.$
2. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc.$
3. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y).$

(例 3) 次二式,分解爲因子:

(1) $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16.$

(2) $(x^2-8x+12)(x^2-7x+12)-6x^2.$

〔着眼點〕 (1) 式中若設 $x^2+3x=y$, 則(括弧部分爲 y 的二次式,加一 -16 仍爲 y 的二次式,故可分解爲因子;(2) 式中將適當數項設爲 y, 使成爲 x, y 的二次式而分解之.

〔解〕 (1) 設 $x^2+3x=y$, 則

所設之式$=(y-2)(y+4)-16$

$$=y^2+2y-24$$

$$=(y+6)(y-4).$$

以 y 之値代入,則爲

$$(x^2+3x+6)(x^2+3x-4)$$

$$=(x^2+3x+6)(x+4)(x-1).$$

(2) 設 $x^2+12=y$, 則

所設之式$=(y-8x)(y-7x)-6x^2$

$$=y^2-15xy+56x^2-6x^2$$

$$=y^2-15xy+50x^2$$

$$=(y-5x)(y-10x).$$

以 y 之値代入,則爲

$$(x^2-5x+12)(x^2-10x+12)$$

$$=(x^2-5x+12)(x-5+\sqrt{13})(x-5-\sqrt{13}).$$

〔習題〕 次諸式,分解爲因子:

1. $(2x^2-x-21)(2x^2-x-15)-91.$

2. $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)-3y^4.$

3. $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7)+16.$

公式 6. $$ax^2+bx+c=a\left\{x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\},$$

$$ax^2+2b'x+c=a\left\{x+\frac{b'+\sqrt{b'^2-ac}}{a}\right\}\left\{x+\frac{b'-\sqrt{b'^2-ac}}{a}\right\}.$$

前述之二次三項式因子分解法,用觀察分解,甚爲便利,惟有時不易觀察,實行困難,有時竟不可能,在此種情形時,則用下法爲便:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \qquad (a\neq 0)$$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

故欲將 ax^2+bx+c 分解爲因子,先求 $ax^2+bx+c=0$ 之二根 α, β, 即

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

然後可得 $$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

(例 1) $12x^2-37x-144$ 分解爲因子.

〔解〕 使 $12x^2-37x-144=0$, 求二根;則

$$x=\frac{37\pm\sqrt{37^2+4\times 12\times 144}}{2\times 12}=\frac{37\pm\sqrt{8281}}{24}$$

$$=\frac{37\pm 91}{24}=\frac{128}{24} \text{ 或 } -\frac{54}{24}$$

$$=\frac{16}{3} \text{ 或 } -\frac{9}{4}.$$

$$\therefore\ 12x^2-37x-144=12\left(x-\frac{16}{3}\right)\left(x+\frac{9}{4}\right)=3\left(x-\frac{16}{3}\right)\cdot 4\left(x+\frac{9}{4}\right)$$

$$=(3x-16)(4x+9) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{答}$$

(例 2) $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$ 分解爲因子.

〔着眼點〕 原式看爲 x 的二次式,依 x 的降冪排列之,用一般二次式的分解法分解之.

〔解〕 $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$

$$=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}+xyz$$

$$=(y+z)x^2+(y^2+3yz+z^2)x+yz(y+z).$$

作方程式 $(y+z)x^2+(y^2+3yz+z^2)x+yz(y+z)=0.$

解之,得 $x=\dfrac{-(y^2+3yz+z^2)\pm\sqrt{(y^2+3yz+z^2)^2-4yz(y+z)^2}}{2(y+z)}.$

根號內之式設爲 D, 則

$$D=y^4+2y^3z+3y^2z^2+2yz^3+z^4$$

$$=(y^2+yz+z^2)^2. \qquad \text{(用開平方方法)}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-(y^2+3yz+z^2)\pm(y^2+yz+z^2)}{2(y+z)}$$

$$=-\frac{yz}{y+z} \quad \text{或} \quad -(y+z).$$

$$\therefore \quad \text{原式}=(y+z)\left\{x-\left(-\frac{yz}{y+z}\right)\right\}\{x-(-\overline{y+z})\}$$

$$=(y+z)\left\{\frac{xy+xz+yz}{y+z}\right\}(x+y+z)$$

$$=(x+y+z)(xy+xz+yz).$$

〔類題〕 次諸式,分解爲因子:

1. $x^2+30x-1296.$
2. $18a^2+21ax-9x^2.$
3. $4a^2-151ab+1365b^2.$
4. $x^2-6x+2.$
5. $2x^2-3y^2-5xy+x+11y-6.$
6. $x^2-y^2-3z^2-2xz+4yz.$

公式 7 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$

(例) $a^3-b^3-b(a^2-b^2)+b(a-b)^2$ 分解爲因子.

〔着眼點〕 a^3-b^3, a^2-b^2, $(a-b)^2$ 皆有一公共因子 $(a-b)$.

〔解〕 原式 $=(a-b)(a^2+ab+b^2)-b(a+b)(a-b)+b(a-b)^2$

$$=(a-b)\{a^2+ab+b^2-b(a+b)+b(a-b)\}$$

$$=(a-b)(a^2+ab+b^2-ab-b^2+ab-b^2)$$

$$=(a-b)(a^2+ab-b^2).$$

〔類題〕 次諸式,分解爲因子:

1. $ax^2-a^3-a^2b+ab^2+b^3-bx^2$.

2. $(x+a)^3+(x+b)^3-(2x+a+b)^3$.

3. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

4. $x(x^2-1)-y(y^2-1)+xy(x-y)$.

公式 8. $a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$,

$a^3\pm3ab(a\pm b)\pm b^3=(a\pm b)^3$.

此公式又用於展開之用,其重要較在因子分解時,有過無不及.

公式 9. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

此公式於因子分解,或問題證明時,極爲重要.

〔例 1〕 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 分解爲因子.

〔着眼點〕 (1) a^3+b^3 雖能因子分解,但分解後,與其他兩項不能得公共因子.

(2) a^3+b^3 減一適當之式,作成 $(a+b)^3$ 與 c^3 結合,則此一部分可得一 $a+b+c$ 的因子.

〔解〕 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

〔類題〕 次諸式,分解爲因子:

1. $x^3+8y^3-125z^3+30xyz$.

2. $(x+z)^3+(z+x)^3+(x+y)^3-3(y+z)(z+x)(x+y)$.

〔例 2〕 $x+2y=3z$ 時, $x^3+8y^3-27z^3+18xyz$ 之值如何?

〔着眼點〕 三乘之項有三個,卽 x^3, y^3, z^3, 又有 xyz 之項,試利用公式 9.

〔解〕 $x^3+8y^3-27z^3+18xyz$

$$=(x+2y-3z)(x^2+4y^2+9z^2-2xy+3xz+6yz).$$

因 $$x+2y=3z,$$

$$\therefore\quad x+2y-3z=0.$$

故原式爲 0

〔類題〕

1. $x=5a-3b-c$, $y=5b-3c-a$, $z=5c-3a-b$ 時, $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 之數值,試以 a, b, c 表之,且其形須甚簡單.

2. $x=b-c$, $y=c-a$, $z=a-b$ 時, $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$, 試證之.

3. $(y-z)^3+(x-y)^3-3(y-z)(z-x)(x-y)$, 試簡化之.

4. $p=a^2-bc$, $q=b^2-ca$, $r=c^2-ab$ 時,

$p^3+q^3+r^3-3pqr=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$, 試證之.

應用剩餘定理或未定係數之法

(例) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 分解爲因子.

〔着眼點〕 (1) 設法括出公共因子.

(2) 欲速知公共因子之有無,以應用剩餘定理爲最便.

〔解 1〕 設 a 代 b, 則原式$=a^3(a-c)+a^3(c-a)+c^3(a-a)=0$.

故原式能爲 $a-b$ 整除, 同樣亦能爲 $b-c$, $c-a$ 整除, 故原式能爲 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 整除.

原式爲 a, b, c 的四次齊次式,故必等於三次齊次式 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 與一次齊次式 $la+mb+nc$ 之積 (l, m, n 爲未定係數). 故

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a)(la+mb+nc) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

自未定係數法,查 a^3b 項,

左邊爲 a^3b | 右邊自 $(a\underbrace{-b)(}b\underbrace{-c)(c-}a\underbrace{)(l}a+mb+nc)$ 爲 $-la^3b$.

$$\therefore \quad l=-1.$$

同樣可知　$m=n=-1$.

$$\therefore \quad 原式=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \cdots\cdots\cdots\cdots 答$$

〔解 2〕 決定係數 l, m, n 亦可用數值代入法.

因 (1) 式爲恆等式,故 $a=0$ 時,等式亦必成立,

$$b^3c-bc^3=(-b)(b-c)c(mb+nc),$$
$$bc(b^2-c^2)=-bc(b-c)(mb+nc).$$
$$\therefore \quad b+c=-(mb+nc).$$

設 $b=0$, 則　$c=-nc$, $\quad n=-1$.

同樣,得 $$l=-1,\quad m=-1.$$

$$\therefore\quad 原式=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

〔解 3〕 或在已知有 $a-b$ 因子之後,想法從各項括出公因子.

$$\begin{aligned}原式&=ab(a^2-b^2)-c(a^3-b^3)+c^3(a-b)\\&=(a-b)\{ab(a+b)-c(a^2+ab+b^2)+c^3\}\\&=(a-b)\{a^2(b-c)+a(b^2-bc)-(b^2c-c^3)\}\\&=(a-b)(b-c)\{a^2+ab-c(b+c)\}\\&=(a-b)(b-c)(a^2-c^2+ab-bc)\\&=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c).\end{aligned}$$

〔注意〕 a, b, c 的二次及三次齊次式,其一般形如次:

二次……$la^2+mb^2+nc^2+pab+qbc+rca,$

三次……$la^3+mb^3+nc^3+pa^2b+qa^2c+rb^2a+sb^2c$
$+tc^2a+uc^2b+vabc.$

〔類題〕 次諸式,分解爲因子:

1. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3.$
2. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$
3. $x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2).$
4. $(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5.$

第五章　倍數及約數

(例 1)　$(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280$, $3x^2+4x-7$, 試求其最大公約數 (G. C. M.) 及最小公倍數 (L. C. M.).

〔着眼點〕 (1)　欲求 G. C. M. 及 L. C. M. 或用因子分解,或用連除法.

(2)　第一式若留心其 x^2+7x 二項卽易因子分解.

〔解〕　設 $x^2+7x+6=y$, 則

$$
\begin{aligned}
(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280 &= y(y+6)-280\\
&=(y+20)(y-14)\cdots\cdots(y \text{ 再換爲 } x^2+7x+6)\\
&=(x^2+7x+26)(x^2+7x-8)\\
&=(x^2+7x+26)(x+8)(x-1),
\end{aligned}
$$

$$3x^2+4x-7=(3x+7)(x-1).$$

$$
\therefore\quad \left.\begin{aligned}
&\text{G. C. M.}=x-1,\\
&\text{L. C. M.}=(x-1)(x+8)(3x+7)(x^2+7x+26)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}
$$

〔類題〕　次諸式,求其 G. C. M. 或 L. C. M.

1.　$8x^3+1$, $16x^4+4x^2-2$. (G. C. M.)

2.　$a^3+3a^2b+2ab^2$, $a^4+4a^3b+3a^2b^2$. (G. C. M.)

3.　$x^3+3px^2-(1+3p)$, $px^3-3(1+3p)x+(3+8p)$. (G. C. M. 及 L. C. M.)

(例 2)　求次二式的 G. C. M.:

$$x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2,\ x^4-4x+3.$$

〔着眼點〕　因不易因子分解,故用連除法.

〔解〕

$$
\begin{array}{r|r|l}
x^4-4x+3 & x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2 & x-2 \\
 & x^5 \qquad\qquad -4x^2+3x & \\ \cline{2-2}
 & -2x^4-2x^3+12x^2-10x+2 & \\
 & -2x^4 \qquad\qquad +8x-6 & \\ \cline{2-2}
 & -2\,)\,-2x^3+12x^2-18x+8 & \\
 & x^3-6x^2+9x-4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|l}
x^3-6x^2+9x-4 & x^4 \qquad\qquad -4x+3 & x+6 \\
 & x^4-6x^3+9x^2-4x \qquad & \\ \cline{2-2}
 & 6x^3-9x^2 \qquad +3 & \\
 & 6x^3-36x^2+54x-24 & \\ \cline{2-2}
 & 27\,)\,27x^2-54x+27 &
\end{array}
$$

答: G. C. M.…………x^2-2x+1

$$
\begin{array}{r|r|l}
x^2-2x+1 & x^3-6x^2+9x-4 & x-4 \\
 & x^3-2x^2+x \qquad & \\ \cline{2-2}
 & -4x^2+8x-4 & \\
 & -4x^2+8x-4 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

〔定理〕

> 設 A, B 爲兩整式,若 B 能整除 A, 則 B 爲 A, B 的 G. C. M.
>
> 又設以 B 除 A, 其剩餘爲 R, 則 A, B 的 G. C. M. 等於 B, R 的 G. C. M.

〔證〕 B 若能整除 A, 則 B 爲 A, B 的 G. C. M., 其理甚明.

以 B 除 A, 設其商爲 Q, 則

$$A=QB+R \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

B 與 R 的 G. C. M. 設爲 G', 則自 (1) 知 G' 爲 A 的約數, 故 G' 爲 A, B 的公約數. A 與 B 的 G. C. M. 設爲 G, 則自 (1),

$$R=A-QB \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

因 G 爲 (2) 式右邊的約數, 故亦爲 R 的約數, 故 G 爲 B 與 R 的公約數. 故 G 與 G' 相等, 本定理成立, 故得法則如次:

〔法則〕

> 欲求 x 的二個有理整式 A, B 的 G. C. M. 其法:
>
> 以 B 除 A, 設其剩餘爲 R, 次以 R 除 B, 設其剩餘爲 R', 如此繼續行之, 至最後恰能除盡時的除數, 即爲欲求的 G. C. M.

〔定理〕

> 欲求 A, B, C 三式的 G. C. M., 先求其中任二式的 G. C. M., 以此 G. C. M. 與第三式再求其 G. C. M., 卽爲 A, B, C 三式的 G. C. M.
>
> 欲求 A, B, C 三式的 L. C. M., 先求其中任二式的 L. C. M. 以此 L. C. M. 與第三式再求其 L. C. M., 卽爲 A, B, C 三式的 L. C. M.

〔矯題〕 求次諸式的 G. C. M. 及 L. C. M.:

1. $x^4+3x^2+6x+35$, $x^3-4x^2+10x-7$.
2. $2x^3-ax^2-a^3$, $3x^4-5ax^3+a^2x^2+a^4$.
3. $\dfrac{6x^3+x^2+4x+4}{9x^3-x+2}$, 試簡化之.
4. 試求同時使 $2x^3-x^2+x-6$, $6x^3-9x^2+10x-15$ 爲零的 x 的値.

〔定理〕

> 設 A, B 爲二有理整式, 其 G. C. M. 爲 G, L. C. M. 爲 L, $\dfrac{A}{G}=a$, $\dfrac{B}{G}=b$, 則有下面的重要關係:
>
> 1. $A=Ga$, $B=Gb$ (因 G 爲 G. C. M. 故 a, b 無公約數).
> 2. $L=abG=aB=Ab$.
> 3. $A\cdot B=a\cdot b\cdot G^2=G\cdot L$.

(例 3) x^2+px+q 與 x^2+ax+b 的 G. C. M., 若爲 $x+k$, 則其 L. C. M. 必爲 $x^3+(p+a-k)x^2+(pa-k^2)x+k(p-k)(a-k)$, 試證之.

〔著眼點〕 (1) 欲證明的式內, 無文字 q, b.

(2) 求上定理中之 a, b 卽可不含 q, b.

〔解〕 以 $x+k$ 除 x^2+px+q, 得商 $x+p-k$;

以 $x+k$ 除 x^2+ax+b, 得商 $x+a-k$.

故所求的 L. C. M. $=(x+k)(x+p-k)(x+a-k)$

$$=x^3+(p+a-k)x^2+(pa-k^2)x+k(p-k)(a-k).$$

〔注意〕 求商 $x+p-k$ 時, 或行除法, 或用未定係數法.

〔類題〕

1. x^2+px+q, x^2+qx+p, 若有一次 G. C. M., 則其 L. C. M 爲 $x^3+(pq+p+q)x-pq$, 試證之.

2. x^2+mx+n, x^2+nx+m, 若有一次 G. C. M., 則其 L. C. M. 爲 $x^3+(m-n^2)x-mn$ 試證之.

(例 **4**) 有 x 的一個二次式及一個三次式,其 G. C. M 爲 $x-1$, 兩式的積爲 $x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1$, 求此二式.

〔着眼點〕 (1) $A\cdot B=a\cdot b\cdot G^2$, a, b 無公約數

(2) aG, bG 一爲二次,一爲三次,決定 a, b.

〔解〕 $(x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1)\div(x-1)^2=x^3+4x^2+4x+1$,

$$x^3+4x^2+4x+1=(x+1)(x^2-x+1+4x)$$
$$=(x+1)(x^2+3x+1).$$

故欲求之二式爲 $\left.\begin{array}{l}(x+1)(x-1)=x^2-1,\\(x^2+3x+1)(x-1)=x^3+2x^2-2x+1\end{array}\right\}$…………答

〔類題〕

1. 有次數相同的兩式,其 G. C. M. 爲 $x-1$, 其 L. C. M. 爲 $x^3-6x^2+11x-6$, 求此兩式.

2. 有兩式,其 G. C. M. 爲 x^2-1, 其 L. C. M. 爲 $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$, 求此兩式.

3. 有兩整式,其 G. C. M. 爲 $x+a$, 其 L. C. M. 爲 $x^3+(a+b-c)x^2-(ab-bc-ca)x-abc$, 求此兩整式.

(例 **5**) 二正整數之最大公約數與最小公倍數之和爲 56, 求此二數, 倘有幾組答,試盡求之.

〔着眼點〕 應用 $A=aG$, $B=bG$, $L=abG$ (a, b 無公約數)的關係.當心遺漏.

〔解〕 設二數爲 A, B $(A\leqq B)$, 最大公約數爲 G, 最小公倍數爲 L, $A=aG$, $B=bG$, 則 $L=a\cdot b\cdot G$ (a, b 無公約數).

$$G+L=G+Gab=G(1+ab).$$

故 $G(1+ab)=56$, $\therefore\ ab+1=\frac{56}{G}$ ……………… (1)

$\therefore$ G爲 56 的約數,即 $G=1, 2, 4, 7, 8, 14, 28$

以 G 之値順次代入 (1), 自其結果求出 a, b (a, b 無公約數),然後求 A, B, 則得:

G	1		2	4	7	8		14	28
ab	55		27	13	7	6		3	1
a	1	5	1	1	1	1	2	1	1
b	55	11	27	13	7	6	3	3	1
$A=aG$	1	5	2	4	7	8	16	14	28
$B=bG$	55	11	54	52	49	48	24	42	28

……答

〔類題〕

1. 有二正整數,其積爲 540, 若有 1 以外的公約數,求此二數,倘有幾組答,試盡求之.

2. 有二正整數,其和爲 128400, 其最大公約數爲 8025, 求此二數,倘有幾組答,試盡求之.

3. 某數與 6 的最小公倍數爲 96, 求此數.

〔例 6〕 $x^n - ax + b$ 與 $nx^{n-1} - a$, 若有公約數,

則 $\left(\frac{a}{n}\right)^n = \left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}$, 試證之.

設 n 爲大於 1 的整數, a 不爲零.

〔着眼點〕 (1) 求公約數. (2) 因子分解,不易用連除法.

(3) 用定理: A, B 的公約數亦爲 $pA \pm qB$ 的約數.

〔解〕 設 $x^n - ax + b = A$ …………(1) $nx^{n-1} - a = B$ …………(2)

則 $$An - Bx = (-na + a)x + bn.$$

∵ $n>1$, $a\neq0$, 故 $$= -a(n-1)\left\{x - \frac{bn}{a(n-1)}\right\}.$$

以公約數 $x - \frac{bn}{a(n-1)}$ 除 (2) 式,應能除盡.

故自剩餘定理得:

$$n\left\{\frac{bn}{a(n-1)}\right\}^{n-1} - a = 0.$$

因之，
$$\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}=\left(\frac{a}{n}\right)^{n}.$$

〔類題〕

1. x^2+ax+b, $x^2+a'x+b'$，若有一次公約數，則 $(a-a')(a'b-ab')=(b-b')^2$，試證之.

2. x^2+px+1，x^3+px^2+qx+1，若有一次公約數，則 $p(q-1)=(q-1)^2+1$，試證之.

第六章　恆等式

（例 1）　a, b, c 爲實數，且

$$3(bc+ca+ab)=(a+b+c)^2,$$

則 $a=b=c$，試證之.

〔着眼點〕　(1)　a, b, c 爲實數，故 a, b, c 所組成之式，其平方之和非零卽正.

(2)　欲證 $a=b=c$，祇須證 $a-b=0$, $b-c=0$ 卽可.參照 (1)，故祇須證 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ 卽可.

〔解〕　$3(bc+ca+ab)-(a+b+c)^2$

$$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因 a, b, c 爲實數，則欲使 (1) 式成立，必

$$(a-b)^2=0,\ (b-c)^2=0,\ (c-a)^2=0.$$

$$\therefore\quad a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0.$$

$$\therefore\quad a=b=c.$$

〔類題〕

1.　三角形三邊 a, b, c 間，若有 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 的關係，則此三角形爲正三角形，試證之.

2.　a, b, c 爲實數時，若

$$a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab=0,$$

則可推出何種事實？

3. x, y 爲不等於零的實數，且

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=4$，則 x, y 的絕對值，皆等於 1，試證之。

〔例 2〕 a, b, c, x, y, z 皆爲實數，且

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2,$$

則 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$，試證之。

〔着眼點〕 (1) 欲證 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$，祇須證 $ay-bx=0$, $bz-cy=0$, $cx-az=0$ 卽可。

(2) 自實數之條件，導出 $(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2=0$.

〔解〕 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$$=a^2x^2+\utilde{a^2y^2}+\overline{a^2z^2}+\utilde{b^2x^2}+b^2y^2+\underline{b^2z^2}+\overline{c^2x^2}+\underline{c^2y^2}+c^2z^2$$
$$-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+\utilde{2abxy}+\underline{2bcyz}+\overline{2cazx})$$
$$=(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)$$
$$+(c^2x^2-2cazx+a^2z^2).$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$$
$$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

故 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ 時，

$$(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因 a, b, c, x, y, z 爲實數，故

$$(ay-bx)^2\geqq 0,\ (bz-cy)^2\geqq 0,\ (cx-az)^2\geqq 0.$$

欲 (2) 式成立，必

$$ay-bx=0,\ bz-cy=0,\ cx-az=0.$$

故 $$ay=bx,\ bz=cy,\ cx=az.$$

若設 x, y, z 不爲零，以 xy, yz, zx 各除上三式的兩邊，得

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y},\quad \frac{b}{y}=\frac{c}{z},\quad \frac{c}{z}=\frac{a}{x}.$$

卽 $$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}.\quad (x, y, z\neq 0)$$

〔類題〕

1. a, b, c, d 爲實數，且

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2,$$

則 a, b, c, d 爲等比級數,試證之.

2. a, b, c 爲實數,且 $a^3+b^3+c^3=3abc$,

則 $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$, 試證之.

3. x, y, z 爲實數,且 $6(x^2+2y^2+3z^2)=(x+2y+3z)^2$,

則 $x=y=z$, 試證之.

4. $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$, 若 a, b, c, d 爲正的實數,

則 $a=b=c=d$, 試證之.

5. $(a^2+c^2)(b^2+d^2)+(ac-bd)^2=4abcd$, 若 a, b, c, d 爲正的實數,

則 $a=b=c=d$, 試證之.

(例 3) 若 $\dfrac{x}{q+r-p}=\dfrac{y}{r+p-q}=\dfrac{z}{p+q-r}$,

則 $(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z=0$, 試證之.

〔着眼點〕 記已知之比,其値爲 k, 則可消去 x, y, z.

〔解〕 設 $\dfrac{x}{q+r-p}=\dfrac{y}{r+p-q}=\dfrac{z}{p+q-r}=k$, 則

$$\left.\begin{aligned} x&=k(q+r-p)\\ y&=k(r+p-q)\\ z&=k(p+q-r)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

以 (1) 式代入欲證之式的左邊,則

$$\begin{aligned}&(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z\\ &=\{(q-r)(q+r-p)+(r-p)(r+p-q)+(p-q)(p+q-r)\}k\\ &=\{q^2-r^2-p(q-r)+r^2-p^2-q(r-p)+p^2-q^2-r(p-q)\}k\\ &=0\times k\\ &=0.\end{aligned}$$

〔類題〕

1. 若 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$,

則 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$, 試證之.

2. 若 $\dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$, $ax^2+by^2+cz^2=1$, $l^2+m^2+n^2=1$;

則 $(al^2+bm^2+cn^2)(x^2+y^2+z^2)=1$, 試證之.

3. 若 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$,

則 $\frac{x^3}{a^2}=\frac{y^3}{b^2}=\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$, 試證之.

〔例 4〕 若 $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$,

則 $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$, 試證之.

〔着眼點〕 設 $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)=abck$, 然後將 $y-z$, $z-x$, $x-y$ 之值以 k, a, b, c 表之,消去 x, y, z.

〔解〕 設 $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)=abck$, 則

$$y+z=bck\cdots\cdots(1)\qquad z+x=ack\cdots\cdots(2)\qquad x+y=abk\cdots\cdots(3)$$

(3)−(2), $y-z=a(b-c)k$.

(2)−(1), $x-y=c(a-b)k$.

(1)−(3), $z-x=b(c-a)k$.

$$\therefore\quad \frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{x-y}{c(a-b)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=k.$$

〔類題〕

1. 若 $a(by+cz-ax)=b(cz+ax-by)=c(ax+by-cz)$,

則 $\frac{y+z-x}{a}=\frac{z+x-y}{b}=\frac{x+y-z}{c}$, 試證之.

2. 若 $\frac{2y+2z-x}{a}=\frac{2z+2x-y}{b}=\frac{2x+2y-z}{c}$,

則 $\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c}$, 試證之.

3. 若 $\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}$,

則 $x+y+z=0$, 且各分式等於 $-\sqrt[3]{\frac{xyz}{(a-b)(b-c)(c-a)}}$, 試證之.

〔例 5〕 若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, 則 $a=-b$, 或 $b=-c$, 或 $c=-a$, 試證之.

〔着眼點〕 欲證 $a=-b$, 或 $b=-c$, 或 $c=-a$,

祇須證 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ 即可.

〔解〕
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

故
$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}\right)=0,$$

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0,$$

$$\frac{(a+b)\{c(b+c)+(ac+a^2)\}}{abc(a+b+c)}=0,$$

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)}=0.$$

$$\therefore\quad (a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

$$\therefore\quad a=-b, \text{ 或 } b=-c, \text{ 或 } c=-a$$

〔類題〕

1. 若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}=0$, 則 $b=a+c$ 或 $b(a+c)=2ac$, 試證之.

2. 若 $b^2-4ac=(a-c)^2$, 則 $c^2-4ab=(a-b)^2$ 或 $c^2+4ab=(a+b)^2$, 試證之.

3. 若 $\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}=1$, 則 $x=y+z$ 或 $y=z+x$ 或 $z=x+y$, 試證之.

4. $x^3+(p-q)x^2-3q^2x+2p^2q$, 若能爲 $x^2-(p+q)x+pq$ 所除,則 $p=q$ 或 $2p+3q=0$, 試證之.

(例 **6**) 若 $x=by+cz$, $y=cz+ax$, $z=ax+by$; 試證
$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1.$$

〔著眼點〕 (1) 結果之式內僅含 a, b, c.

(2) 所設之式爲 a, b, c 的聯立一次方程式.

(3) 故求出 a, b, c 的值,然後以 x, y, z 表出 $\frac{a}{1+a}, \frac{b}{1+b}, \frac{c}{1+c}$, 代入欲證之式中.

〔解〕 $x=by+cz\cdots\cdots(1)$ $\quad y=cz+ax\cdots\cdots(2)$ $\quad z=ax+by\cdots\cdots(3)$

(1)+(2)+(3), $\quad x+y+z=2(ax+by+cz)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4) − (1) × 2,　　$y+z-x=2ax$ ……………………(5)

(4) − (2) × 2,　　$x+z-y=2by$ ……………………(6)

(4) − (3) × 2,　　$x+y-z=2cz$ ……………………(7)

自 (5) $x \neq 0$ 時,　$a=\dfrac{y+z-x}{2x}$, $a+1=\dfrac{x+y+z}{2x}$.

$$\therefore \quad \frac{a}{a+1}=\frac{y+z-x}{x+y+z} \quad \cdots\cdots(8)$$

同樣, $y \neq 0$, $z \neq 0$ 時,　$\dfrac{b}{b+1}=\dfrac{x+z-y}{x+y+z}$ ……………………(9)

$$\frac{c}{c+1}=\frac{x+y-z}{x+y+z} \quad \cdots\cdots(10)$$

故
$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1.$$

(x, y, z 不為 0 時)

〔類題〕

1. 若 $x=by+cz+du$, $y=ax+cz+du$,
$z=ax+by+du$, $u=ax+by+cz$;

則 $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}+\dfrac{d}{d+1}=1$ 試證之.

2. 若 $x+\dfrac{1}{y}=a$, $y+\dfrac{1}{x}=b$, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=c$;

則 $a^2+b^2=abc$, 試證之.

3. 若 $a(y+z)=x$, $b(z+x)=y$, $c(x+y)=z$;

則 $\dfrac{x^2}{a(1-bc)}=\dfrac{y^2}{b(1-ca)}=\dfrac{z^2}{c(1-ab)}$, 試證之 ($x$, y, z, $x+y+z$ 俱不為零).

4. 若 $n=a^2-x^2=b^2-y^2=c^2-(x+y)^2$,

則 $(n-a^2-b^2+c^2)^2=4(n-a^2)(n-b^2)$, 試證之.

(例 7)　若 $abc=1$, 試證:

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2+\left(c-\frac{1}{c}\right)^2+8=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right).$$

〔着眼點〕 (1)　從 $abc=1$ 的關係着手非常不易,故先將右邊簡化之

(2)　應用假定,從左邊證右邊仍不容易,故將右邊簡化之,然後應用假

定,化成與左邊相同.

〔解〕 左邊 $=a^2+\dfrac{1}{a^2}+b^2+\dfrac{1}{b^2}+c^2+\dfrac{1}{c^2}+2,$

$$右邊=\frac{1}{abc}(a^2b^2c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2+1).$$

以 $abc=1$ 的關係代入,則

$$右邊=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+a^2+b^2+c^2+2.$$

〔類題〕

1. 若 $a+b+c=0$, 試證:

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9.$$

(a, b, c 不等,且俱不爲 0)

2. 若 $b^2=ac$, 試證:

$$(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)=a^4+b^4+c^4.$$

3. 若 $2s=a+b+c$, 試證:

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

4. 若 $xy+yz+zx=1$, 試證:

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

(例 8) a, b, c 爲不相等的三數, 若

$$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0,$$

則 $\dfrac{x-y}{a-b}=\dfrac{y-z}{b-c}=\dfrac{z-x}{c-a}$, 試證之.

〔着眼點〕 此題不易自假定導出終結,故將終結變形,導出假定,逆進而證之.

〔解〕 欲證 $\dfrac{x-y}{a-b}=\dfrac{y-z}{b-c}$, 因 $a\neq b$, $b\neq c$, 故祇須證次式卽可

$$(b-c)(x-y)=(a-b)(y-z),$$

卽
$$bx-c(x-y)=a(y-z)+bz.$$

卽祇須證 $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$ 卽可

依假定此式成立,故原式亦成立.

同樣,可證 $$\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}.$$

〔注意〕 用上法解得後,倒其順序,作爲解答亦可.

〔類題〕

1. x, y, z 爲不等的三數,且

$$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0,$$

則 $\frac{(cy-bz)}{y-z}=\frac{az-cx}{z-x}=\frac{bx-ay}{x-y}$, 試證之.

2. 若 $\frac{a}{b-c}, \frac{b}{c-a}, \frac{c}{a-b}$ 爲等差級數,則次之關係式必成立,試證之:

$$\frac{a^3-2b^3+c^3}{a^2-2b^2+c^2}=\frac{a+b+c}{2}$$

第七章　一次方程式

(例 1)　**解方程式**　$(a-4)(a-1)x=a-2(x+1)$.

〔着眼點〕　係數中含有文字,故解此方程時須加討論.

〔解〕

$$(a-4)(a-1)x=a-2(x+1),$$

$$\{(a^2-5a+4)+2\}x=a-2,$$

$$(a-2)(a-3)x=a-2.$$

故

$$\left.\begin{array}{lll} (a-2)(a-3)\neq 0 \text{ 時 } & x=\dfrac{1}{a-3} & \\ a=2 \text{ 時 } & 0x=0 & \text{爲不定} \\ a=3 \text{ 時 } & 0x=1 & \text{爲不能} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

〔注意〕　可不爲零之數除方程式的兩邊所得的方程式,與原方程式同値,以零除之即成爲無意義. 故實行除法時須注意之.

〔類題〕

1.　試解 $(x+a)^2-(x+b)^2=a^2+b^2$.

2.　設 $a+b=0$, 試解方程式:

$$(2a+b)(3x+a)+(a+2b)(3x+b)=2.$$

3.　試解 $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$.

(例 **2**)　下面的聯立方程式中,若 y 之値爲 x 的三倍,則 m 之値如何,又其時 x, y 之値如何?

$$(5m+11)x-(m+4)y+12=0,$$

$$(m+15)x+(2m-1)y-20=0.$$

〔着眼點〕　y 之値等於 x 的三倍,即 $y=3x$, 結果變成有三個所設方程式. 故本問變爲若有滿足於三方程式之根,則 m 之値須如何?

〔解〕

$$\begin{cases} (5m+11)x-(m+4)y+12=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (m+15)x+(2m-1)y-20=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ y=3x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

由 (1) 與 (3) 消去 y,

$$(2m-1)x+12=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$2m-1\neq 0$ (若 $2m-1=0$, 則 (4) 爲無根,卽 (1), (3) 無共有根,故與題意相背, $\therefore\ 2m-1\neq 0$),

$$x=-\frac{12}{2m-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4')$$

由 (2) 與 (3) 消去 y,

$$(7m+12)x-20=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$7m+12\neq 0, \quad \text{(與上同證)}$$

$$x=\frac{20}{7m+12} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5')$$

由 (4) 與 (5),

$$-\frac{12}{2m-1}=\frac{20}{7m+12} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

去分母而整理之,

$$-31m=31, \quad m=-1.$$

$m=-1$ 不使分母爲 0, 故爲 (6) 之根.

$$\therefore\quad x=4, \quad y=12.$$

〔類題〕

1. 聯立方程式 $2x-3y=11-4m$, $3x+2y=21-5m$ 之 x, y 之值, 若滿足於 $x+3y=20-7m$, 則 m 之值如何?

2. 聯立方程式 $2x-3y=11-4m$, $3x-2y=21-5m$ 之 x, y 之值, 若滿足於 $x+3y=10-m$, 則 m 之值如何?

3. 滿足於次二方程式 x, y 之值若相等,則 t 之值如何?

$$(5+t)x-(1-t)y=8+7t, \quad (1-t)x-(2+t)y=3(1+t).$$

(例 3)　**試解**

$$\left.\begin{aligned} ax+by+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ a'x+b'y+c'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{aligned}\right\}$$

(注意)　重要問題,故詳加討論之.

〔解〕

$$\begin{aligned} &(1)\times b', & ab'x+bb'y+cb'=0 \\ &(2)\times b, & -)\,a'bx+bb'y+c'b=0 \\ & & \hline (ab'-a'b)x+cb'-c'b=0 \cdots\cdots\cdots (3) \end{aligned}$$

今設 $b\neq 0$, 不論 b' 之值如何,

(1), (2) 聯立時之根與 (1), (3) 聯立時之根必全相同,故不必解 $\{(1), (2)\}$, 祇須解 $\{(1), (3)\}$ 卽可.

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ (ab'-a'b)x+cb'-c'b=0 \cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

(a) $ab'-a'b\neq 0$ 時,

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

以 (4) 代入 (1) 求 y, 則

$$y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(b) $ab'-a'b=0$ 時,

若 $bc'-b'c=0$, 則得 $\frac{a}{b}b'-a'=0$, $\frac{c}{b}b'-c'=0$; 以 a', c' 之值代入 $ca'-c'a$ 式中,則爲 0; 故 $ca'-c'a=0$, x, y 之值爲不定.

若 $bc'-b'c\neq 0$, 則爲不能.

以上乃設 $b\neq 0$, 若設 $b'\neq 0$ 亦得同樣之結果.

若不先假設 $b\neq 0$ 或 $b'\neq 0$ 而設 a, a' 中有一不爲 0, 則得

$$(ba'-b'a)y+(ca'-c'a)=0.$$

(a) $ab'-a'b\neq 0$ 時,得 (4), (5) 之答.

(b) $ab'-a'b=0$ 時,若 $ca'-c'a=0$, 則 $bc'-b'c=0$, 故爲不定.

若 $ca'-c'a\neq 0$, 則爲不能.

總之 (I) a, b, a', b' 祇須有一個不爲零.

(a) $ab'-a'b\neq 0$ 常有一組根.

(b) $ab'-a'b=0$, $bc'-b'c=0$, $ca'-c'a=0$ 不定.

(c) $ab'-a'b=0$, 而 $bc'-b'c$, $ca'-c'a$ 中祇須有一個不爲零, 則爲不能.

(II) a, b, a', b' 皆爲零.

(a) $c=0$, $c'=0$. 不定

(b) c, c' 祇須有一個不爲零. 不能

〔注意〕 方程式在不定或不能之情形總稱爲無確定之根.

〔類題〕

1. 聯立方程式 $\begin{cases} ax+by=5 \\ cx+dy=10 \end{cases}$ 若無確定之根，則 a, b, c, d 間有何關係?

2. 聯立方程式 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 若爲不定，則 $(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=(aa'+bb'+cc')^2$, 試證之.

3. 聯立方程式

$$(2k+1)x+(4k+3)y=3k+1,$$
$$(k+2)x+(3k+4)y=1-k.$$

k 之值如何，則爲 (i) 不定，(ii) 不能.

〔例 4〕 試解 $x+y+z=0$ ……………………………………(1)

$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$ ……………………(2)

$bcx+cay+abz=1$ ……………………………………(3)

(a, b, c 各不相等)

〔着眼點〕 (1) (1), (2) 的常數項爲 0, 故求 $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ 後，可得 x, y, z 的連比.

(2) 設此值爲 k, 與 (3) 式可求 k.

〔解〕 $(1)\times(c+a)-(2)$,

$$\{c+a-(b+c)\}x+\{c+a-(a+b)\}z=0.$$

因 a, b, c 各不相等，

$$\therefore\quad \frac{x}{b-c}=\frac{z}{a-b}.$$

同樣 $$\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}.$$

設 $$\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=k,$$

則 $$x=k(b-c),\ y=k(c-a),\ z=k(a-b).$$

以之代入 (3), 則得

$$\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}k=1,$$

$$(a-b)(a-c)(b-c)k=1,\ k=\frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{(a-b)(a-c)},\ y=\frac{1}{(a-b)(c-b)},\ z=\frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

〔類題〕

1. 試解 $x+y+z=0,\ ax+by+cz=0,$

$bcx+cay+abz+(b-c)(c-a)(a-b)=0.$

2. 試解 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ ax+by+cz=0,\\ a^2x+b^2y+c^2z=1.\end{cases}$

3. 試解 $ax=by=cz=du,\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{m}.$

〔例 5〕 試解方程式

$$\frac{3}{z+x}+\frac{6}{x+y}+\frac{1}{y+z}=1\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{6}{z+x}+\frac{4}{x+y}-\frac{1}{y+z}=3\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{15}{z+x}-\frac{2}{x+y}-\frac{3}{y+z}=5\cdots\cdots(3)$$

〔着眼點〕 (1) 以 $\frac{1}{x+y},\ \frac{1}{y+z},\ \frac{1}{z+x}$ 作爲未知數看,則爲一次聯立方程式.

(2) 依普通方法求之卽可.

〔解〕 設 $\dfrac{1}{z+x}=X,\ \dfrac{1}{x+y}=Y,\ \dfrac{1}{y+z}=Z$; 則

$$3X+6Y+Z=1\cdots\cdots(4)$$

$$6X+4Y-Z=3\cdots\cdots(5)$$

$$15X-2Y-3Z=5\cdots\cdots(6)$$

解之,得 $X=\dfrac{1}{6},\ Y=\dfrac{1}{4},\ Z=-1.$

故 $z+x=6\cdots\cdots(7)$ $x+y=4\cdots\cdots(8)$ $y+z=-1\cdots\cdots(9)$

此三式各邊相加,得

$$2(x+y+z)=9,\quad\therefore\quad x+y+z=\frac{9}{2}\cdots\cdots(10)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(10)-(7), & y=-\frac{3}{2},\\ (10)-(8), & z=\frac{1}{2},\\ (10)-(9), & x=\frac{11}{2}\end{array}\right\}$$

〔類題〕

1. 試解 $\begin{cases}\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=3,\\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{z}=1,\\ \frac{2a}{x}-\frac{3b}{y}-\frac{c}{z}=-2.\end{cases}$

2. 試解 $\begin{cases}\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2a+b-c,\\ \frac{b}{x}+\frac{c}{y}+\frac{a}{z}=2b+c-a,\\ \frac{c}{x}+\frac{a}{y}+\frac{b}{z}=2c+a-b.\end{cases}$

3. 兩組聯立方程式:

$$\begin{cases}ax+by+cz=3,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6,\\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}-\frac{3}{z}=9;\end{cases}\qquad\begin{cases}ax-by+cz=1,\\ ax+by-cz=1,\\ \frac{5}{x}-\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=0.\end{cases}$$

若其根相同,則其根及 a, b, c 之值如何?

4. 試解 $\begin{cases}x+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=a,\\ y+\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=b,\\ z+\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=c.\end{cases}$

第八章　不等式

〔例 1〕 若 a, b 爲不相等的兩個正數,試證

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

〔着眼點〕 (1) 祇須證其差爲正卽可.

(2) 欲證其差爲正,須想法變爲 $a, b, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ 所成之式之平方之形.

〔解〕
$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b})$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0. \qquad (因\ a\neq b)$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

〔注意〕 上式爲重要的公式,屢屢用着.

〔類題〕

1. 不等於 1 的任意正數,與其逆數之和常較 2 大,試證之.

2. 若 a, b 爲不相等的兩個正數,則

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)>4.$$

3. 若 a, b, c, d 爲不相等的正數,則

$$\frac{a+b+c+d}{4}>\sqrt[4]{abcd}.$$

4. 若 a, b, c 爲正數,若非皆相等,則

$$(b+c)(c+a)(a+b)>8abc.$$

〔例 2〕 若 a, b, c 爲不相等的正數,則其相加平均 $\frac{a+b+c}{3}$ 大於相乘平均 $\sqrt[3]{abc}$.

〔著眼點〕 (1) 設 $\sqrt[3]{a}=x$, $\sqrt[3]{b}=y$, $\sqrt[3]{c}=z$, 則可避去根號.

(2) 因　不相等,故可化成 $x-y$, $y-z$, $z-x$ 之平方而行之.

〔解〕 設 $\sqrt[3]{a}=x$, $\sqrt[3]{b}=y$, $\sqrt[3]{c}=z$; 則

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

$$=\frac{1}{3}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$=\frac{1}{6}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}>0.$$

$$\therefore\quad \frac{a+b+c}{3}>\sqrt[3]{abc}.$$

〔類題〕

1. a, b, c 各爲正數,則 $a+b+c\geqq\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}$.

2. 試證 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

(a, b, c 爲正數)

3. a, b, c 若不皆相等,則

$$(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2>bc+ca+ab.$$

〔例 3〕 a 爲實數時, $\frac{1}{a^2+a+1}$ 與 a^2-a+1 那一個大?

〔著眼點〕 看其差的正負.

〔解〕 $$\frac{1}{a^2+a+1}-(a^2-a+1)=\frac{1-(a^4+a^2+1)}{a^2+a+1}$$

$$=\frac{-(a^4+a^2)}{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\leqq 0.$$

故 $a=0$ 時,爲相等;

$a\neq 0$ 時, $\frac{1}{a^2+a+1}<a^2-a+1$.

〔類題〕

1. a, b, x, y 皆爲不相等的實數,

則 $a^2+b^2=1$, $x^2+y^2=1$ 時,

$ax+by<1$, 試證之.

2. a, b 皆爲負數時,試比較 $\dfrac{3a-b}{a+b}$ 與 $\dfrac{4a+3b}{2a+5b}$ 之大小.

3. $x>1$ 時, $2x^4+1$ 與 $2x^3+x^2$ 那一個大?

4 x^3 與 x^2-x+1 那一個大?

(例 **4**) ax^2+bx+c, x 之値在什麼範圍中,其値爲正. (設 a, b, c 爲實數, $a\neq 0$, $b^2-4ac>0$)

〔着眼點〕 作一不等式,將一邊因子分解.

〔解〕 將 $ax^2+bx+c>0$ 解之卽可.

設 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β, 因 $b^2-4ac>0$ 故 α, β 爲不相等之兩實根,若 $\alpha>\beta$, 則

$$a(x-\alpha)(x-\beta)>0.$$

(a) $a>0$ 時.

欲二因子同符號,須

$\left.\begin{array}{ll} & x-\alpha>0 \\ \text{且} & x-\beta>0 \end{array}\right\}$ ∴ 同時滿足於左二式之 x, 其範圍爲 $x>\alpha$.

$\left.\begin{array}{ll} \text{或} & x-\alpha<0 \\ \text{且} & x-\beta<0 \end{array}\right\}$ ∴ 同時滿足於左二式之 x, 其範圍爲 $x<\beta$.

卽 x 之界限較二根內大者爲大,或較小者爲小.

(b) $a<0$ 時.

欲二因子異符號,須

$\left.\begin{array}{ll} & x-\alpha>0 \\ \text{且} & x-\beta<0 \end{array}\right\}$ ∴ 同時滿足於左二式之 x, 爲不可能.

$\left.\begin{array}{ll} \text{或} & x-\alpha<0 \\ \text{且} & x-\beta>0 \end{array}\right\}$ ∴ $\alpha>x>\beta$.

卽 x 之界限較二根內大者爲小,或較小者爲大.

〔類題〕

1. 試解 $3x^2+11x<4$.

2. 試解 $\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & ax+b>cx+d \quad (a\neq c) \\ \text{(ii)} & x^2+3x<28 \end{array}\right\}$

3. $x^2-5x+6>0$, 同時 $x^2-9x+8<0$, 求 x 的範圍.

4. $x^2-2x-4<0$, 同時 $(x+2)(x-1)(x-4)>0$, 求 x 的範圍.

(例 **5**)　x 及 a 皆爲實數,問 x 在什麽範圍內,

則 $\sqrt{\dfrac{(a^2+x^4)(2-x)}{3+x}}$ 爲實數.

〔着眼點〕 (1)　正,負二字,在實數範圍內方有意,故不等式中之數一切皆表實數,卽不明言,亦指實數.

(2)　因 x, a 爲實數,欲使證明之式爲實數,則根號內非正卽 0.

(3)　研究分數式之正負時,以同一式乘分母,分子,使分母化成平方之形.

(4)　不等式以同一負數乘之,則不等式之向須改變(除之亦同).

〔解〕　欲使
$$\frac{(a^2+x^4)(2-x)}{3+x}\geqq 0.$$

卽
$$\frac{(a^2+x^4)(2-x)(3+x)}{(3+x)^2}\geqq 0.$$

$$\because\quad (3+x)^2>0.$$

$$\therefore\quad (a^2+x^4)(2-x)(3+x)\geqq 0.$$

(*a*)　$a\neq 0$ 時, $a^2+x^4>0$, $(2-x)(3+x)\geqq 0$.

$$\therefore\quad (x-2)(x+3)\leqq 0.$$

故
$$2\geqq x\geqq -3.$$

但　$x+3\neq 0$ (因爲原式的分母).

故
$$2\geqq x>-3.$$

(*b*)　$a=0$ 時,

$$x^4(2-x)(3+x)\geqq 0.$$

由題意
$$3+x\neq 0.$$

故　$2\geqq x>-3$ 及 $x=0$.

答: $\begin{cases} a\neq 0 \text{ 時},\ 2\geqq x>-3; \\ a=0 \text{ 時},\ 2\geqq x>-3 \text{ 及 } x=0. \end{cases}$

〔習題〕

1.　求證適合於 $\dfrac{3x-2}{5x-4}<0$ 之 x, 無整數值.

2.　a, b 爲實數,若有 $2a^2-16\leqq\dfrac{8-b^2}{1-b^2}\leqq a^2+5a-12$ 的關係:

(i)　若 $a=2$, 則 b 之界限如何?

(ii)　若 $b=\sqrt{\frac{10}{13}}$, 則 a 之界限如何?

3.　$\sqrt{3-x}>x-1$, 求 x 的範圍.

(例 **6**)　二次方程式 $ax^2+bx+c=0$, 若其根爲虛根,則二次式 ax^2+bx+c 之值在 x 爲實數時,常與 a 同符號. (a, b, c 皆爲實數)

〔着眼點〕 (1)　因爲虛根,故 $b^2-4ac<0$.

(2)　化爲 a 與某正式之積,化成含有 x 的式的平方與常數的代數和.

〔解〕

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}.$$

$ax^2+bx+c=0$, 其根爲虛根,故 $b^2-4ac<0$, 故 x 爲任何實數時,

$$\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}>0.$$

故　ax^2+bx+c 與 a 恆爲同符號.

〔類題〕

1.　a, b, c 爲實數, $b^2-4ac=0$ 時, x 爲任何實數,常有 $a(ax^2+bx+c)\geqq 0$, 試證之.

2.　若 a, b, c 爲三角形之三邊,則二次三項式 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$ 之値, x 任爲何數常爲正,試證之.

3.　整式 $(x^2+ax+b)(x^2-2x+3)$ 若能爲 $x-\alpha$, $x-\beta$ 整除,則 x 若爲 α, β 之間之任意實數時,原式之符號如何?(α, β 爲不相等的實數)

4.　$2<a<5$ 時, $x^2-4ax+3a^2+7a-10$, x 任爲何數常爲正,試證之

5.　$(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)+20$, x 任爲何數常爲正,試證之.

(例 **7**)　四次式 $ax^4+hx^3+(2a+b)x^2+hx+a$ 欲使 x 任爲何値常爲正,試求其條件.

〔着眼點〕 原式首項與末項的係數相同, 及第二項與末二項係數亦同,故可應用倒數方程式之解法求之.

〔解〕　$x=0$ 時,欲原式爲正,則須 $a>0$, 此理甚明.

次就 $x\neq 0$ 時研究之.

$$ax^4+hx^3+(2a+b)x^2+hx+a$$

$$=x^2\left\{ax^2+\frac{a}{x^2}+\left(hx+\frac{h}{x}\right)+(2a+b)\right\}$$

$$=x^2\left\{a\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+h\left(x+\frac{1}{x}\right)+(2a+b)-2a\right\}$$

$$=x^2\left\{a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+h\left(x+\frac{1}{x}\right)+b\right\}.$$

設　$x+\frac{1}{x}=X$，則

$$=x^2\{aX^2+hX+b\}$$

$$=x^2a\left\{\left(X+\frac{h}{2a}\right)^2-\frac{h^2-4ab}{4a^2}\right\}>0.$$

對於 x 的任何值 (卽 X 的任何值)，欲使上式爲正，非 $h^2-4ab<0$ 不可．故須 $a>0$，且 $h^2-4ab<0$．

〔類題〕

1．二次三項式 ax^2+bx+c 欲使 x 任爲何值常爲正，須 $a>0$，且 $b^2-4ac<0$，試證之．

2．$x^2-(8m-2)x+(15m^2-2m-7)$ 欲使 x 任爲何值常爲正，則 m 之值須如何？

3．二次三項式 ax^2+2x+1 欲使 x 任爲何值常爲正，則 a 之值須如何？(a，x 俱爲實數)

第九章　一元二次方程式根之判別

解一元二次方程式　$ax^2+bx+c=0,\quad (a\neq 0)$

則得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

a, b, c 爲實數時，x 之値由根號內 b^2-4ac 之相異或爲實數，或爲虛數，可分次之三情形：

(1)　$b^2-4ac>0$　不相等實根.

(2)　$b^2-4ac=0$　相等實根（或稱等根）.

(3)　$b^2-4ac<0$　不相等虛根.

從 b^2-4ac 大於 0，或等於 0，或小於 0 可以判別二根之爲不等實根，或等根，或不等虛根，故此 b^2-4ac 稱爲一元二次方程式之判別式.

〔注意〕 (1)　$ax^2+2b'x+c=0$ 之判別式，可用 b'^2-ac 較爲便利.

(2)　a, b, c 爲有理數時，b^2-4ac 若爲完全平方數，則二根爲有理數，b^2-4ac 若非完全平方數，則二根爲無理數.

〔例 **1**〕　方程式 $ax^2+2bx+c=0$ 的根若爲不等實根，則方程式

$$(a+c)(ax^2+2bx+c)+2(b^2-ac)(x^2+1)=0,$$

決不有實根，試證之.

〔着眼點〕 (1)　作其判別式.

(2)　看是否二次方程式.

(3)　證其判別式爲負.

〔解〕

$$ax^2+2bx+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) 式的根爲不等實根，故判別式 $b^2-ac>0$.

$$(a+c)(ax^2+2bx+c)+2(b^2-ac)(x^2+1)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

整理之，則爲

$$\{(a+c)a+2(b^2-ac)\}x^2+2b(a+c)x+\{c(a+c)+2(b^2-ac)\}=0.$$

$$x^2 \text{的係數} = (a+c)a + 2(b^2-ac) = a^2+b^2+b^2-ac > 0.$$

故 (2) 爲二次方程式.

$$\text{判別式} = 4b^2(a+c)^2 - 4\{ac(a+c)^2 + 2(b^2-ac)(a+c)^2 + 4(b^2-ac)^2\}$$

$$= -4(b^2-ac)\{(a+c)^2 + 4(b^2-ac)\} < 0.$$

$$(\because \quad b^2-ac>0, \quad (a+c)^2 \geqq 0)$$

故 (2) 無實根.

(類題)

1. 二次方程式 $x^2+px+q=0$ 若有實根，則方程式 $x^2+px+q=k\left(x+\dfrac{p}{2}\right)$ 不論 k 之值爲何，必爲實根，試證之. (p, q, k 爲實數)

2. $(x-p)(x-q)=5$ 的根爲實根，試證之.

3. 二次方程式 $x^2+ax+b=0$ 的根若爲實根，則方程式

$$x^2+ax+b+(2x+a)(x+c)=0$$

的根亦爲實根，試證之. (a, b, c 爲實數)

(例 **2**) 二次方程式 $(b^2+d^2)x^2+2(ab+cd)x+a^2+c^2=0$ 的根若爲實數，則其根必相等，試證之. (a, b, c, d 爲實數)

〔着眼點〕 證判別式爲 0.

〔解〕 二根爲實數，故判別式不可爲負，故

$$(ab+cd)^2-(b^2+d^2)(a^2+c^2) \geqq 0.$$

$$\therefore \quad 2abcd - a^2d^2 - b^2c^2 \geqq 0,$$

$$-(ad-bc)^2 \geqq 0.$$

$(ad-bc)^2$ 非正卽零，故 $-(ad-bc)^2$ 非負卽零，故

$$-(ad-bc)^2 = 0.$$

卽判別式爲 0，故原方程式的根爲相等.

〔類題〕

1. 二次方程式 $2x^2+2(a+b)x+a^2+b^2=0$ 的根欲使其爲實根，則 $a=b$，試證之.

2. a, b, c 爲實數時，二次方程式

$$(b-c)^2x^2+2(c-a)(b-c)x+(b-c)^2-2(a-b)(c-a)=0$$

的根欲使其爲實根，則 $a=b$，試證之.

(例 3) 二次方程式 $x^2+(2p+1)x-p=0$ 欲使其根爲虛，則 p 之界限如何?

〔着眼點〕 (1) 欲使其根爲虛根的充要條件爲判別式<0.

(2) 故作含 p 的不等式,決定 p 的界限.

〔解〕 原方程式欲使其根爲虛根,必須判別式爲負,故

$$(2p+1)^2+4p<0,$$

$$4p^2+8p+1<0.$$

即 $$4\left(p-\frac{-2-\sqrt{3}}{2}\right)\left(p-\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)<0.$$

故 $$\frac{-2-\sqrt{3}}{2}<p<\frac{-2+\sqrt{3}}{2}.$$

〔類題〕

1. 方程式 $x^2-2(m-1)x+7-m=0$ 欲使其有實根,則 m 須有如何限制?

2. 二次方程式 $(k+3)x^2-4x+k=0$ 欲使其有實根,則 k 須有如何限制?

3. 求滿足於 $5x^2+9y^2+12xy+4x+4=0$, x, y 的實數.

〔例 4〕 a, b, c 爲不相等的實數時,

方程式 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$ 的根必非虛根.

〔着眼點〕 (1) a, b, c 爲實數,故含 a, b, c 的式的平方不能爲負.

(2) 原方程式去分母後所得的整方程式,判別式祇須論其不爲負數即可.

(3) a, b, c 爲不相等,故 $a-b\neq0$, $b-c\neq0$, $c-a\neq0$.

〔解〕 a, b, c 爲不相等的數, 故 $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ 無公因子,即 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 爲其分母的最小公倍數, 以此最小公倍數乘原方程式的兩邊,去其分母 (得同値方程式),

$$(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)=0.$$

整理之,

$$3x^2-2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0.$$

其判別式爲 $$\begin{aligned}&(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)\\&=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\\&=\tfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)\\&=\tfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}>0.\end{aligned}$$

a, b, c 爲不相等的實數，故 $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ 皆爲正，故無虛根.

〔類題〕

1. a, b, c 爲實數時，

$(a^2+b^2)x^2+b^2+c^2=2b(a+c)x$ 若有實根，必爲等根，試證之.

2. 二次方程式 $ax^2+b(2x+1)=0$ 若有虛根，則將二次方程式 $bx^2+(b-c)x-c-a+b=0$ 之根，判別之.

(例 5) p, q, r 爲有理數，且 p, q 爲不相等，則一元二次方程式 $(p-q+r)x^2+2rx+r=p-q$ 的二根爲不相等的有理數，試證之.

〔着眼點〕 二根爲有理數的條件，爲判別式是完全平方式.

〔解〕
$$(p-q+r)x^2+2rx-(p-q-r)=0.$$

其判別式爲
$$4\{r^2+(p-q+r)(p-q-r)\}=4(p-q)^2,$$

p, q, r 爲有理數，$p\neq q$，故二根爲不相等的有理數.

〔類題〕

1. p, r, k 爲有理數，$q=k+\frac{pr}{k}$ 時，二次方程式 $px^2+qx+r=0$ 的二根爲有理數，試證之.

2. 二次方程式 $(p+q+r)x^2-2(p+q)x+(p+q-r)=0$ 的根爲有理數，試證之.

3. p, q, r 爲有理數時，二次方程式 $pqr^2x^2+(3p^2r+q^2r)x+2q^2-p(6p+q)=0$ 的二根爲有理數，試證之.

(例 6) x 的二次式 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$ 若爲完全平方式，則 a, b, c 三數，其中有二數之和等於其他一數，試證之.（a, b, c 爲正之實數）

〔着眼點〕 (1) x 的二次式若爲完全平方式，則將原式等於零所得的二次方程式必爲等根.

(2) 判別式必爲零，故由判別式等於零後作出 a, b, c 的等式.

(3) a, b, c 三數，其中有二數之和等於其他一數，即 $a+b=c$, $a+c=b$, $b+c=a$ 中必有其一，故祇證 $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=0$ 即可.

〔解〕 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 的判別式設爲 0，得
$$(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=0.$$

故
$$(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)=0,$$
$$\{(b+c)^2-a^2\}\{(b-c)^2-a^2\}=0,$$

$$(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)=0.$$

∵ $(a+b+c)>0$, 故 $b+c-a$, $b-c+a$, $b-c-a$ 中必有一式爲 0, 故 a, b, c 內其中有二數之和等於其他一數.

〔類題〕

1. $(x+a)(x+b)+(x+a)(x+c)+(x+b)(x+c)$ 若爲完全平方, 則 $a=b=c$, 試證之.

2. $4x^2-10xy+10y^2+\lambda(3x^2-10xy+3y^2)$ 若爲完全平方, 則 λ 之値如何?

第十章　根與係數的關係

一元二次方程式根與係數的關係

一元二次方程式　$ax^2+bx+c=0.$　$(a\neq 0)$

其二根以 α, β 表之,則

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

故

$$\alpha+\beta=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$=\frac{c}{a}.$$

故可如次述之:

$ax^2+bx+c=0$ 與 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 爲同値,故 x^2 的係數若爲 1 時,

二根之和等於 x 的係數變其符號.

二根之積等於已知項.

故得次之定理.

〔定理〕

> $ax^2+bx+c=0$　　　$(a\neq 0)$
>
> 之二根,設爲 α, β, 則
>
> $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

〔注意〕 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 二根之差,自根之公式,知爲 $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$ 的絕對值,其理甚明.

〔例 1〕 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 二根之比若爲 $m:n$,

則 $(m+n)^2ac=mnb^2$, 試證之.

〔着眼點〕 (1) 設二根爲 α, β, 則自根與係數的關係,得含有 α, β 的二個等式.

(2) 二根之比爲 $m:n$, 故又得一等式.

(3) 共有三個等式,自此三式消去 α, β 即可.

〔解〕 設二根爲 α, β; 則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{m}{n}, \quad \therefore \quad \alpha=\frac{m}{n}\beta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

自 (1) 與 (3), 得 $\left(\dfrac{m}{n}+1\right)\beta=-\dfrac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$$\beta=-\frac{b}{a\left(\dfrac{m}{n}+1\right)}=\frac{-bn}{a(m+n)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

自 (2) 與 (3), $\dfrac{m}{n}\beta^2=\dfrac{c}{a}$,

$$\beta^2=\frac{cn}{am}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

自 (5) 與 (6), $\dfrac{b^2n}{a^2(m+n)^2}=\dfrac{cn}{am}$,

故得 $(m+n)^2ac=mnb^2$.

〔注意〕 設二根爲 $m\alpha$, $n\alpha(\alpha\neq 0)$ 解之亦可.

〔類題〕

1. $ax^2+bx+c=0$ 的一根若爲他一根的 m 倍,則 $mb^2=(m+1)^2ac$, 試證之.

2. $x^2+px+10=0$ 的二根之比若爲 5:3, 則 p 之值如何,計算至小數第二位.

3. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的一根若等於他一根的平方,則 $a^2c-3abc+ac^2+b^3=0$, 試證之.

〔例 2〕 二次方程式 $x^2+px+q=0$ 的二根之差若等於二次方程式 $x^2+qx+p=0$ 的二根之差,則 $p=q$ 或 $p+q=-4$, 試證之.

〔着眼點〕 (1) 根與係數之關係的問題.

(2) 求各方程式二根之差.

(3) 以之相等,可得所求之條件.

〔解〕 $x^2+px+q=0$ 的二根設爲 α, β,

$$\alpha\sim\beta=\sqrt{p^2-4q}.$$

故 $$(\alpha-\beta)^2=p^2-4q \cdots\cdots(1)$$

又 $x^2+qx+p=0$ 的二根設爲 α', β'; 則同樣可得

$$(\alpha'-\beta')^2=q^2-4p \cdots\cdots(2)$$

自 (1), (2),

$$p^2-4q=q^2-4p,$$

$$p^2-q^2+4p-4q=0,$$

$$(p+q)(p-q)+4(p-q)=0,$$

$$(p-q)(p+q+4)=0.$$

$$\therefore\quad p-q=0 \quad 或 \quad p+q+4=0.$$

故 $$p=q \quad 或 \quad p+q=-4.$$

〔類題〕

1. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根設爲 α, β, 又二次方程式 $a'x^2+2b'x+c'=0$ 的二根爲 $\alpha+k, \beta+k$; 則 $\frac{b'-ac}{a^2}=\frac{b'^2-a'c'}{a'^2}$,試證之.

2. $4x^2+12x+a=0$ 的二根之差若爲 2, 求二根及 a.

〔例 3〕 設方程式 $2x^2+6x-1=0$ 的二根爲 α, β; α, γ, β 及 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\beta}$ 各爲等差級數,求作以 γ, δ 爲二根的二次方程式.

〔着眼點〕 (1) $\alpha+\beta=-3, \quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$.

(2) α, γ, β 爲等差級數,故 $2\gamma=\alpha+\beta, \cdots\cdots$

(3) 以 γ, δ 爲二根的二次方程式,得

$$x^2-(\gamma+\delta)x+\gamma\delta=0.$$

〔解〕 $\alpha+\beta=-3 \cdots\cdots(1) \qquad \alpha\beta=-\frac{1}{2} \cdots\cdots(2)$

$$\alpha,\ \gamma,\ \beta \text{ 及 } \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\delta},\ \frac{1}{\beta} \text{ 皆爲 A. P.}$$

$$\therefore\quad 2\gamma=\alpha+\beta,\ \frac{2}{\delta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}.\quad \therefore\quad \gamma=\frac{\alpha+\beta}{2},\ \delta=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

$$\therefore\quad \gamma+\delta=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{7}{6},$$

$$\gamma\delta=\frac{\alpha+\beta}{2}\times\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\alpha\beta=-\frac{1}{2}.$$

故所求之方程式爲 $x^2+\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}=0$, 卽 $6x^2+7x-3=0$.

〔類題〕

1. 二次方程式 $3x^2+6x+2=0$ 的二根設爲 α, β, 求作以 $-\frac{\alpha^2}{\beta}$, $\frac{\beta^2}{\alpha}$ 爲根的方程式.

2. $2x^2+3x+4=0$ 的二根設爲 α, β, 試求 $(\alpha^2-2\beta+1)(\beta^2-2\alpha+1)$ 之値.

例 4) 有 $x^2+px+p^2=0$ 之形的二次方程式,今自其兩根各減同一數,以之爲二根作一方程式,若其形爲 $x^2+p^2x+p^3=0$, 求原方程式.

〔着眼點〕 (1) 欲求原方程式,祇須求 p 之値.

(2) 所求之方程式的二根設爲 α, β, 以等式表出根與係數的關係.

(3) 可見未知數的個數與方程式的個數相等,故 p 之値可求.

〔解〕 $x^2+px+p^2=0$ 的二根設爲 α, β; 則

$$\alpha+\beta=-p\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\qquad \alpha\beta=p^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 $x^2+p^2x+p^3=0$ 的二根爲 $\alpha-k$, $\beta-k$, $(k>0)$

$$\therefore\quad \alpha-k+\beta-k=-p^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$(\alpha-k)(\beta-k)=p^3\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

自 (1), (3), $\quad p^2-p=2k\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

自 (1), (2), (4),

$$p^3-p^2=pk+k^2,\quad \therefore\quad p(p^2-p)=pk+k^2\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

以 (5) 式代入 (6), $2pk=pk+k^2$. 但 $k\neq 0$, $\therefore\ p=k\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

自 (7) 與 (5), $\quad p^2=3p$, $p=k\neq 0$, $\therefore\ p=3$.

故其方程式爲 $\quad x^2+3x+9=0$.

〔類題〕

1. α, β 滿足於方程式 $\alpha\beta+\alpha+\beta-a=0$, $\alpha\beta-a(\alpha+\beta)+1=0$, 試以

α, β 爲根作一二次方程式；且 a 爲不等於 -1 之實數時,欲使二根爲正實根, a 之範圍如何?

2. 直角三角形之斜邊及其內切圓半徑設爲 a, r, 試以他二邊之長爲根作二次方程式, 此等三角形常能存在否?

例 5) 兩個二次方程式 $x^2+ax+bc=0$, $x^2+bx+ca=0$, 若有一根相同, 求以餘二根爲根之方程式.

〔着眼點〕 (1) 原二方程式之根設爲 a, h; a, k, 自根與係數之關係求 $h+k$ 及 hk.

(2) 代入 $x^2-(h+k)x+hk=0$ 即可.

〔解〕 $x^2+ax+bc=0$ 的二根設爲 α, h,

$x^2+bx+ca=0$ 的二根設爲 α, k;

則 $\alpha+h=-a$……………………(1)　$\alpha h=bc$……………………………(2)

$\alpha+k=-b$……………………(3)　$\alpha k=ca$……………………………(4)

(1)－(3), $h-k=-a+b$……………………………(5)

(2)÷(4), $\dfrac{h}{k}=\dfrac{b}{a}$, $\therefore\ h=\dfrac{b}{a}k$……………………………(6)

自 (5) 與 (6), $\dfrac{b}{a}k-k=-a+b$,

$$(b-a)k=(b-a)a.$$

但 $a \neq b$, $\therefore\ k=a$.

故自 (6), $h=\dfrac{b}{a}\times a$, $\therefore\ h=b$.

故 $h+k=a+b$, $hk=ab$.

故所求之方程式爲 $x^2-(a+b)x+ab=0$.

〔類題〕

1. 兩個方程式 $x^2+px+q=0$……(1), $x^2+qx+p=0$……(2), 若有一根相同, 不相同根中 (1) 式中的根若爲 (2) 式中的根之二倍, 求 p, q 之值.

2. 兩個二次方程式 $x^2+ax+b=0$ 及 $x^2+bx+a=0$, 若有一根相同, 則其他不相同的兩根之和爲 -1, 試證之. (a, b 爲不相等的已知數)

3. 兩個方程式 $3x^2-11x+p=0$, $5x^2-21x+3p=0$, 欲使有一根相

同,試定 p 之値,且求其相同之根.

(**例 6**) 有兩個 x 的二次方程式:

一爲 (1) $ax^2+bx+c=0.$

一爲 (2) $a(sx-q)^2-b(sx-q)(rx-q)+c(rx-p)^2=0.$

若設 (1) 式之根爲 $\alpha,\ \beta$;

則 (2) 式之根爲 $\dfrac{p\alpha+q}{r\alpha+s},\ \dfrac{p\beta+q}{r\beta+s}$, 試證之. (設 $r\neq0,\ ps-qr\neq0$)

〔着眼點〕 (1) 證 (2) 式之根爲 $x=\dfrac{p\alpha+q}{r\alpha+s}$ 及 $x=\dfrac{p\beta+q}{r\beta+s}$.

(2) (2) 式之根不含 $a,\ b,\ c$ 而含 $\alpha,\ \beta$.

〔解〕 自 (1), $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ ………………………(1)

自 (2), $(sx-q)^2-\dfrac{b}{a}(sx-q)(rx-p)+\dfrac{c}{a}(rx-p)^2=0.$

以 (1) 之關係代入,則

$$(sx-q)^2+(\alpha+\beta)(sx-q)(rx-p)+\alpha\beta(rx-p)^2=0,$$

$$\{(sx-q)+\alpha(rx-p)\}\{(sx-q)+\beta(rx-p)\}=0,$$

$$\{(r\alpha+s)x-(p\alpha+q)\}\{(r\beta+s)x-(p\beta+q)\}=0.$$

$$\therefore\quad (r\alpha+s)x=p\alpha+q.\qquad\bigg|\qquad (r\beta+s)x=p\beta+q.$$

$$r\alpha+s\neq0,\ \therefore\ x=\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}.\qquad\bigg|\qquad r\beta+s\neq0,\ \therefore\ x=\frac{p\beta+q}{r\beta+s}.$$

〔類題〕

1. 二次方程式 $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ 的二根欲爲二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根之平方,其充要條件試求之.

2. $x^2+ax+b=0$ 的二根設爲 $\alpha,\ \beta$, $x^2-a^2x+a^2b=0$ 的二根,試以 $\alpha,\ \beta$ 表之.

第十一章　一元二次方程式根之大小,正負

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根設爲 α, β.

(1)　α, β 皆爲正的條件:爲

$$b^2-4ac\geqq 0,\quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}>0,\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}>0.$$

(2)　α, β 皆爲負的條件:爲

$$b^2-4ac\geqq 0,\quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}<0,\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}>0.$$

(3)　α, β 爲異符號的條件:爲

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}<0.$$

(4)　α, β 爲異符號,且絕對值相等的條件:爲

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}<0,\quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=0 \text{ 卽 } b=0.$$

〔注意〕 (3), (4) 之情形 $-4ac>0$, 故 $b^2-4ac>0$ 甚明.

〔例 **1**〕 $x^2-(2m+1)x+m-5=0$ 的二根欲皆爲正,則 m 之界限當如何?

〔着眼點〕 用上表中的條件.

〔解〕 $x^2-(2m+1)x+m-5=0$ 欲二根俱爲正.

判別式$=(2m+1)^2-4(m-5)\geqq 0$.　$\therefore$　$4m^2+21\geqq 0$.

m 爲實數値時,　　$4m^2+21>0$.

二根之和$=2m+1>0$,　　$\therefore$　$m>-\frac{1}{2}$……………………(1)

二根之積$=m-5>0$,　　$\therefore$　$m>5$ ……………………(2)

自 (1), (2),　　$m>5$.

〔類題〕

1. $x^2+2(m-2)x+m+4=0$ 的二根若俱爲正,則 m 之界限如何?

2. $3(x-1)(x-a)=x(7-a^2)$ 的二根若絕對值相等,符號相反;則 a 之值如何?且求 x 之值.

3. a, b, c 爲不相等且正之實數值時,方程式 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$ 有正之實根,試證之.

4. 方程式 $(k-2)x^2+(2k-1)x-k+5=0$ 的二根若爲異符號,求 k 值的界限.

(例 2) 二次式 x^2+px+q 當 $x=a$ 與 $x=b$ 時所得的數值,若符號不同,則二次方程式 $x^2+px+q=0$ 的二根爲不相等的實數,又其中一根在 a, b 之間,試證之.(p, q, a, b 爲實數)

〔著眼點〕 (1) 在 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 之式中,若 α, β 爲實數,則 x 以大於 α, β 或小於 α, β 之數值代入,則其式之值爲正,以 α, β 之間之數值代入,則爲負.

(2) 欲證有不相等的實根,祇須證判別式爲正.

〔解〕 判別式 p^2-4q 爲正,何則,若不爲正,則

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

不論 x 之值如何,此式之值爲正或爲 0,與假設相反.

故原方程式有不等之實根.設二根爲 α, β,則

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta).$$

以 a 代入,若 $\qquad a^2+pa+q=(a-\alpha)(a-\beta)>0,$

則以 b 代入 $\qquad b^2+pb+q=(b-\alpha)(b-\beta)<0.$

故 a 較二根爲大,或較二根爲小;

　b 在 α, β 之間.

又若 $\qquad a^2+pa+q=(a-\alpha)(a-\beta)<0,$

則 $\qquad b^2+pb+q=(b-\alpha)(b-\beta)>0.$

故 a 在 α, β 之間;

　b 較二根爲大,或較二根爲小.

〔類題〕

1. 方程式 $x^2+px+q=0$ 之一根若較一已知數 a 大,他根較 a 小,試

a, p, q 間須有何種關係?

2. m 若爲實數,則方程式 $(x-1+m)(x-1)=1$ 之一根較 1 大,他一根較 1 小,試證之.

3. $x=\alpha$ 時, x^2+ax+b 之值若爲負數,則 $x^2+ax+b=0$ 有不相等的二實根,試證之;又此兩根與 α, 試比較其大小. (a, b, α 爲實數)

(**例 3**) k 爲實數時,若方程式 $x^2-(3k-2)x+2k^2-k-3=0$ 之兩根在 1 與 4 之間,求 k 之範圍.

〔著眼點〕 (1) 爲實根之條件.

(2) 1, 4 皆不在兩根之間.

〔解〕 判別式 $=(3k-2)^2-4(2k^2-k-3)$

$$=k^2-8k+16=(k-4)^2>0.$$

故有不相等的實根,設二根爲 α, β, 且 $\alpha>\beta$; 則

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(3k-2)x+2k^2-k-3.$$

1 若在二根之外,則

$$(1-\alpha)(1-\beta)=1-(3k-2)+2k^2-k-3>0,$$

$$k(k-2)>0,\quad \therefore\ k>2\ \text{或}\ k<0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

4 若在二根之外,則以 4 代入,

$$16-4(3k-2)+2k^2-k-3>0,$$

$$(2k-7)(k-3)>0,$$

$$k>\frac{7}{2}\ \text{或}\ k<3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) 組合之,得以下四組:

$$(a)\ \begin{cases}k>2,\\ k>\dfrac{7}{2}.\end{cases}\qquad (b)\ \begin{cases}k>2,\\ k<3.\end{cases}\qquad (c)\ \begin{cases}k<0,\\ k>\dfrac{7}{2}.\end{cases}\qquad (d)\ \begin{cases}k<0,\\ k<3.\end{cases}$$

$$\therefore\ k>\frac{7}{2}.\qquad \therefore\ 3>k>2.\qquad \text{無}\qquad \therefore\ k<0\cdots\cdots\text{答}$$

〔**類題**〕

1. 未解方程式之前, $x^2-2x-2=0$ 之根,試與 3 比較其大小.

2. 二次方程式 $2x^2+3x+$[illegible]$m=0$ 之兩根若皆小於 1, 則 m 之值如何?

3. 若二次方程式 $x^2+px+q=0$ 的二根皆爲實數, 且 $p+2<0$,

$p+q+1>0$, 則二根皆大於 1, 試證之.

〔整理〕 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根設爲 α, β, 在未解方程式之前, α, β 與其他已知數 m 比較,上面研究之結果,今整理之如次:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

以 m 代入,

$$am^2+bm+c=a(m-\alpha)(m-\beta)$$

(1) m 在 α, β 之外的條件:

1. α, β 爲不相等實根.

即 $$b^2-4ac>0\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{I})$$

2. $(m-\alpha)(m-\beta)>0$.

即 $a(m-\alpha)(m-\beta)=am^2+bm+c$ 與 a 之同符號 $\cdots\cdots(\text{II})$

又此時,

(a) m 若較 α, β 中大者更大,則

$$m>\frac{\alpha+\beta}{2},\quad 即\quad m>-\frac{b}{2a}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{III})$$

(b) m 若較 α, β 中小者更小,則

$$m<\frac{\alpha+\beta}{2},\quad 即\quad m<-\frac{b}{2a}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{III})$$

(2) m 在 α, β 之間的條件:

$(m-\alpha)(m-\beta)<0$, 即 $a(m-\alpha)(m-\beta)=am^2+bm+c$ 與 a 爲異符號.

〔注意〕 因爲所比較的是數之大小,故 α, β, m 當然皆爲實數.

第十二章　一元高次方程式

〔例 1〕 試解　$x^4-10x^2+9=0.$

〔着眼點〕 設 $x^2=y$, 則得一一元二次方程式,故必能解.

〔解〕

$$(x^2)^2-10x^2+9=0.$$

設

$$x^2=y.$$

$$y^2-10y+9=0,\quad \therefore\quad (y-9)(y-1)=0.$$

$$\therefore\quad y=9\quad \text{或}\quad y=1.$$

$$\begin{array}{l|l} y=9\ \text{時} & y=1\ \text{時} \\ x^2=9\quad \therefore\quad x=\pm 3. & x^2=1,\quad \therefore\quad x=\pm 1. \end{array}$$

〔類題〕

1. 試解　$a^2x^4-(a^4+1)x^2+a^2=0.$

2. 試解　$2x^4-3x^2+1=0.$

〔例 2〕 試解　$(x^2-3x)^2+4x^2-12x-21=0.$

〔着眼點〕 $4x^2-12x=4(x^2-3x)$, 故爲準二次方程式.

〔解〕 原式寫成　$(x^2-3x)^2+4(x^2-3x)-21=0.$

設

$$x^2-3x=y,\quad \text{則}\quad y^2+4y-21=0.$$

$$y=3\quad \text{或}\quad -7.$$

$$\begin{array}{l|l} y=3\ \text{時} & y=-7\ \text{時} \\ x^2-3x-3=0, & x^2-3x+7=0. \\ \therefore\quad x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}. & x=\dfrac{3\pm\sqrt{-19}}{2}. \end{array}$$

〔類題〕

1 試解　$(x^2-2ax)^2-8a^4=7a^2x(x-2a).$

2. 試解　$(x^2-x)(x^2-x-14)+24=0.$

3. 試解　$\left(x+\dfrac{4}{x}\right)^2-9\left(x+\dfrac{4}{x}\right)+20=0.$

(例 3) 試解 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44.$

〔着眼點〕 將二個因子適當結合,俾可置換.

〔解〕
$$(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44,$$
$$\{(x+2)(x-4)\}\{(x+3)(x-5)\}=44,$$
$$(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)=44.$$

設 $x^2-2x=y$, 則
$$(y-8)(y-15)-44=0.$$

解之,得 $y=19$ 或 $4.$
$$\therefore\quad x^2-2x=19, \qquad x^2-2x=4,$$
$$x=1\pm2\sqrt{5}. \qquad x=1\pm\sqrt{5}.$$

〔類題〕

1. 試解 $(x-p)(x+p)(x+3p)(x+5p)=p^4.$
2. 試解 $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504.$

(例 4) 試解 $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0.$

〔着眼點〕 (1) 留意係數,知爲倒數方程式.

(2) 以中央項 x^2 除兩邊 可適用準二次方程式解法.

〔解〕 $x\neq0$, 故以 x^2 除兩邊, 得
$$6x^2+5x-38+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0,$$
$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0.$$

設 $x+\frac{1}{x}=y$, 則 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$
$$6(y^2-2)+5y-38=0,$$
$$6y^2+5y-50=0.$$
$$y=\frac{5}{2} \quad 或 \quad y=-\frac{10}{3}.$$
$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}. \qquad x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}.$$

解之,得 $x=2$ 或 $\frac{1}{2}.$ 解之,得 $x=-3$ 或 $-\frac{1}{3}.$

〔注意〕 根中每二根互爲倒數,故稱倒數方程式.

解三次倒數方程式

$$ax^3+bx^2+bx+a=0,$$

則 $a(x^3+1)+bx(x+1)=0$，然後因子分解.

〔類題〕

1. 試解　$4x^4-4x^3-7x^2-4x+4=0.$
2. 試解　$8x^4-42x^3+29x^2+42x+8=0.$
3. 試解　$2x^3-7x^2+7x-2=0.$
4. 試解　$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-2=0.$

〔例 5〕 試解　$x^3=1.$

〔着眼點〕 (1)　$x^3-1=0$，1 爲 1^3.

(2)　用公式 a^3-b^3.

〔解〕

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

$$x-1=0 \quad 或 \quad x^2+x+1=0.$$

$$\therefore\quad x=1. \quad\Big|\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

〔注意〕 (1)　設　$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega$，則

$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

(2)　解 $ax^3=b$ 時，若利用上例，甚爲便利.

$$\frac{a}{b}x^3=1,\ \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}x\right)^3=1.\ \ \therefore\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}}x=1,\ \omega,\ 或\ \omega^2.$$

故

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{a}},\ \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\omega\ \ 或\ \ \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\omega^2.$$

〔類題〕 試解次諸方程式：

1. $(x+2)^3+27=0.$　　　　2. $8x^3=27$

〔例 6〕 試解　$2x^3+7x^2-14x+5=0.$

〔着眼點〕 既非準二次，又非倒數方程式，故祇能用因子分解. 因子分解時，可試用剩餘定理.

〔解〕 原方程式的右邊設 $x=1$，知爲 0，故 $x-1$ 是一因子.

$$(x-1)(2x^2+9x-5)=0.$$

$$x-1=0 \quad 或 \quad 2x^2+9x-5=0.$$

$$\therefore \quad x=1. \quad \Big| \quad \therefore \quad x=\frac{1}{2} \ 或 \ -5.$$

〔類題〕

1.　試解　$x^3+x^2+3x-18=0.$

2.　試解　$2x^3-7x^2-14x-5=0.$

〔例 7〕　試解　$x(x-1)(x-2)=6\cdot5\cdot4.$

〔着眼點〕　左邊爲連續三數 $x,\ x-1,\ x-2$ 之積，右邊爲連續三數 4, 5, 6 之積，$x=6$ 滿足於方程式，故由剩餘定理，知 $x-6$ 爲一因子.

〔解〕
$$x(x-1)(x-2)-6\cdot5\cdot4=0.$$

左邊能爲 $x-6$ 整除，故爲

$$(x-6)(x^2+3x+20)=0.$$

$$x-6=0 \quad 或 \quad x^2+3x+20=0.$$

$$\therefore \quad x=6. \quad \Big| \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{-71}}{2}$$

〔練習〕

1.　試解　$(x-2)(x-5)(x-7)=8\cdot5\ 3.$

2.　試解　$x(x+1)(x+2)=60.$

3.　試解　$x(x-1)(x-2)=p(p-1)(p-2).$

〔整理〕　一元高次方程式之解法，大別之可分爲幾種，學者試自己整理之.

第十三章　分數方程式

（例 1）　試解　$\frac{x^2-11x}{x^2-1}+2+\frac{5}{x-1}=0$.

〔着眼點〕　分數方程式,有應特別注意之點,故須慎重行之.

〔解 1〕　以分母之 L. C. M 乘兩邊,

$$x^2-11x+2(x^2-1)+5(x+1)=0.$$

整理之,

$$3(x^2-2x+1)=0.$$

$$\therefore\quad x=1 \text{ 或 } 1.$$

此值使原方程式中分母爲 0, 故無根.　　答: 無根.

〔解 2〕　$\frac{x^2-11x}{x^2-1}+2+\frac{5}{x-1}=0$.

通分而整理之,則爲

$$\frac{3(x-1)^2}{x^2-1}=0.$$

化爲既約分數,則爲

$$\frac{3(x-1)}{x+1}=0.$$

使分子等於零,

$$x-1=0,\quad\therefore\quad x=1.$$

答: 1.

〔注意〕　(1)　同一問題而得相異之答,何故乎?

在〔解 1〕, 因使分母爲 0, 故原式中的一部分 $\frac{5}{x-1}$ 爲 $\frac{5}{0}$ 成爲無意義, 故理應稱之爲無根, 因之所求得之值, 必須查驗是否使原式爲無意義, 故此查驗手續亦爲解法中重要部分.

在〔解 2〕, 以原方程式各項集於一邊,化成既約分數, 使分子爲 0 之 x

之値,稱爲原分數方程式的根,乃數學上一種規約.

(2) 方程式之兩邊以含有未知數的式乘之,通常增出根,此所增之根即以所乘之式等於零的方程式之根.

在〔解 1〕中去分母時,以較 L. C. M. 爲高次之式乘之,故增加了與方程式無關之根,生出錯誤結果.

(例 2) 試解 $\dfrac{3x+7}{x-3}=2x-7+\dfrac{2(1-x^2)}{3-x}$.

〔着眼點〕 分母之 L. C. M. 並非 $(x-3)(3-x)$.

〔解〕 以分母之 L. C. M. $x-3$ 乘兩邊,

$$3x+7=(2x-7)(x-3)-2(1-x^2).$$

整理之,

$$x^2-4x+3=0.$$

$$x=3 \text{ 或 } 1.$$

$x=3$ 使原式中分母爲 0, 故非根.

$x=1$ 使原式中分母不爲 0, 故爲根.

〔類題〕

1. 試解 $\dfrac{1-3x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}+3=0$.

2. 試解 $\dfrac{2x^2}{x^2-4}-\dfrac{x}{2-x}=\dfrac{x}{x+2}+1$

3. 試解 $\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{3}{2x-x^2}=\dfrac{20}{x^2-4}$.

(例 3) 試解 $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+5}{x+7}=\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+5}$.

〔着眼點〕 (1) 以分母之 L. C. M. 乘兩邊,即生四次式,計算困難,故須想特別方法,以免除之.

(2) 分子之次數若等於或高於分母之次數時,宜行除算.

如 $\dfrac{x-1}{x+1}=1+\dfrac{-2}{x+1}$, 如此則左右兩邊之 1, 可以消減.

〔解〕 各分數實行除算,則得

$$1+\frac{-2}{x+1}+1+\frac{-2}{x+7}=1+\frac{-2}{x+3}+1+\frac{-2}{x+5},$$

$$\frac{-2}{x+1}+\frac{-2}{x+7}=\frac{-2}{x+3}+\frac{-2}{x+5}.$$

以 -2 除之,

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}.$$

欲使分子簡單則移項,

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7},$$

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+5)(x+7)}.$$

以 2 除之,再去分母,

$$x^2+12x+35=x^2+4x+3.$$

$$8x=-32, \quad \therefore \quad x=-4.$$

此值不使分母爲 0, 故 $x=-4$ 卽爲所求之根.

〔習題〕

1. 試解 $\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x-9}=\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-10}.$

2. 試解 $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{2x-3}{x+2}-\dfrac{3x-7}{x-2}=0.$

3. 試解 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-10a}=\dfrac{1}{x-4a}+\dfrac{1}{x-7a}$

4. 試解 $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}+3=0.$

(例 4)　**試解** $\dfrac{1}{x+a+b}+\dfrac{1}{x-a+b}+\dfrac{1}{x+a-b}+\dfrac{1}{x-a-b}=0.$

〔着眼點〕 (1)　**不卽以分母之 L. C. M. 乘之.**

(2)　**適當結合之,使分子中生出公共因子.**

〔解〕

$$\left(\frac{1}{x+a+b}+\frac{1}{x-a-b}\right)+\left(\frac{1}{x-a+b}+\frac{1}{x+a-b}\right)=0,$$

$$\frac{2x}{x^2-(a+b)^2}+\frac{2x}{x^2-(a-b)^2}=0,$$

$$2x\left\{\frac{1}{x^2-(a+b)^2}+\frac{1}{x^2-(a-b)^2}\right\}=0.$$

$$2x=0 \quad \text{或} \quad \frac{1}{x^2-(a+b)^2}+\frac{1}{x^2-(a-b)^2}=0.$$

$\therefore \quad x=0.$ | $\therefore \quad 2x^2-2(a^2+b^2)=0.$

$\therefore \quad x=\pm\sqrt{a^2+b^2}.$

$x=0$ 時,若 $a+b\neq 0$,$a-b\neq 0$,從而 $a^2-b^2\neq 0$,則原方程式中分母不爲 0.

$x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$ 時,若 $ab\neq 0$, 則原方程式分母不爲 0.

$$答:\begin{cases}a^2-b^2\neq 0 \text{ 時, } x=0;\\ ab\neq 0 \text{ 時, } x=\pm\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$$

〔類題〕

1. 試解 $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{4}{x+5}-\dfrac{5}{x+6}$.

2. 試解 $\dfrac{1}{x-a-b}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$.

3. 試解 $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{x-b}$.

第十四章　無理式

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\cdots\cdots(2)$$

$$\sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n\cdots\cdots(3)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}\cdots\cdots(4)$$

$$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}\cdots\cdots(5)$$

(a, b 爲正數)

(例 1)　a, b 爲正數, n 爲正整數, $a<b$ 時,

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ 與 $\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}$ 二者孰大.

〔着眼點〕　根指數相等時,祇須比較根號內數之大小卽可.

〔解〕

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}\cdots\cdots(1)$$

$$\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}\cdots\cdots(2)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\left(1-\frac{a}{b}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^n\left(\frac{b-a}{b}\right)>0\cdots\cdots(3)$$

自 (1), (2), (3), 知　$\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}>\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

〔類題〕

1.　$2\sqrt{5}$, $4\sqrt{2}$, $3\sqrt[3]{5}$, 試依大小之順序排列之.

2. $\sqrt[15]{14}$, $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[10]{6}$, 試依大小之順序排列之.

(例 **2**) 試簡化 $7\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{128}$.

〔着眼點〕 根號內化爲素因數, 務必括出根號外邊, 看出其是否同類根數.

〔解〕 原式$=7\sqrt[3]{2\times3^3}+3\sqrt[3]{2^4}-7\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2^7}$

$$=7\times3\sqrt[3]{2}+3\times2\sqrt[3]{2}-7\sqrt[3]{2}-5\times4\sqrt[3]{2}$$

$$=(21+6-7-20)\sqrt[3]{2}$$

$$=0.$$

〔類題〕 次諸式,試簡化之:

1. $3\sqrt{45}-2\sqrt{20}+7\sqrt{5}$.

2. $2\sqrt[3]{192}+3\sqrt[3]{375}-3\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{1029}$.

(例 **3**) $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, 試簡化之.

〔着眼點〕 分母中之平方根欲化爲有理數,用

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2,$$

$$\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}.$$

〔解〕 原式

$$=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})-(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-\{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{2\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{3}.$$

〔類題〕

1. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, 試簡化之.

2. $\dfrac{4\sqrt{2}-3}{7+5\sqrt{2}}+\dfrac{8\sqrt{3}+10}{5-3\sqrt{3}}$, 試簡化之.

3. $\dfrac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$, 試簡化之.

4. $\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$，試簡化之

(例 4) a, b 爲有理數，x, y 爲非完全平方之有理正數時，若 $a+\sqrt{x}=b+\sqrt{y}$，則 $a=b$，$x=y$，試證之．

〔解〕
$$a+\sqrt{x}=b+\sqrt{y},$$
$$a-b+\sqrt{x}=\sqrt{y}.$$

兩邊各自平方後移項，則

$$2(a-b)\sqrt{x}=y-x-(a-b)^2.$$

$\sqrt{x}$ 爲無理數，故左邊爲無理數或爲零，右邊爲有理數，左右兩邊相等之充要條件，爲

$$a=b.$$

故
$$\sqrt{x}=\sqrt{y},\ 即\quad x=y.$$
$$\therefore\quad \begin{cases} a=b, \\ x=y. \end{cases}$$

〔練題〕

1. x, y 爲有理數，$x\sqrt{3}+y\sqrt{5}=0$ 時，$x=0$，$y=0$；試證之．

2. a, b 爲有理數，$1+\sqrt{5}$，$a+b\sqrt{5}$，$16+8\sqrt{5}$ 爲等比級數時，求 a, b 之值．

3. 次之 (a)，(b) 中 a, b, c, d 爲有理數，x 非有理數，$a\neq 0$，$c\neq 0$，$d\neq 0$．

(a) $\frac{ax+b}{cx+d}$ 爲有理數時 則 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，試證之．

(b) $\frac{ax}{cx+d}$ 是否爲有理數，試討論之．

(例 5) 試求 $43-15\sqrt{8}$ 之平方根（以二有理數平方根之差答之）．

〔著眼點〕 得 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 形狀之答即可．

〔解〕 設 $43-15\sqrt{8}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$．（$x, y$ 爲有理數）

$$43-15\sqrt{8}=x+y-2\sqrt{xy}.$$

$\therefore\quad x+y=43$ ………………(1)　　$15\sqrt{8}=2\sqrt{xy}$ ………………(2)

自 (1)，(2)，　$x=25,\ y=18$ 或 $x=18,\ y=25$

故平方根爲　$\sqrt{25}-\sqrt{18}$ 或 $\sqrt{18}-\sqrt{25}$

即　　$5-3\sqrt{2}$　　$-(5-3\sqrt{2})$.

〔注意〕 (1)　求 $\sqrt{43-15\sqrt{8}}$ 時,則依根號之規約, $43-15\sqrt{8}$ 之平方根(有正負二個)中僅取其正者.

$$5-3\sqrt{2}=5-3\times1.414=5-4.242>0.$$

$$\therefore\quad 取\ 5-3\sqrt{2}\ 而棄\ -(5-3\sqrt{2}).$$

(2)　有兩重根號其形如 $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ 者,往往由觀察可求. 即內側根號前若有 2, 則 b 分為 x, y 二因子, $x+y=a$, 則 $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$, 在此時須留意根號之規約,使 $\sqrt{x}\sim\sqrt{y}$ 之値爲正.

〔類題〕

1.　$\sqrt{1+x^2+\sqrt{1+x^2+x^4}}$, 試簡化之.

2.　$\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}+\dfrac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}+\dfrac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$, 試簡化之.

3.　$x=\sqrt{3+\sqrt{5}}$, $y=\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 時,求次式之値,至小數第三位.

$$\frac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{1-\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}}.$$

4.　$\dfrac{1}{\sqrt{16+6\sqrt{7}}}+\dfrac{1}{\sqrt{16-6\sqrt{7}}}$, 試簡化之.

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ (<u>a, b 若皆爲負則不成立</u>)……………………(1)

$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (<u>若僅 b 爲負則不成立</u>)……………………(2)

$(\sqrt{a})^2=a$ ……………………………………………………(3)

$\sqrt{a^2}$ 常爲正 $\therefore\ \left\{\begin{array}{l} a>0\ 時,\ \sqrt{a^2}=a \\ a<0\ 時,\ \sqrt{a^2}=-a \end{array}\right\}$……………………(4)

〔注意〕 (1)　a, b 皆爲負時,設 $a=-a'$, $b=-b'$ (a', b' 爲正).

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\sqrt{b}&=\sqrt{-a'}\sqrt{-b'}\\&=\sqrt{-1}\sqrt{a'}\sqrt{-1}\sqrt{b'}\\&=(\sqrt{-1})^2\sqrt{a'}\sqrt{b'}\\&=-\sqrt{a'b'}.\end{aligned}$$

而　　$ab=(-a')(-b')=a'b'$. 故 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$.

故公式 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, 須確知 a, b 非皆爲負,然後可用,須注意之.

(2)　若僅 b 爲負,設 $b=-b'(b'>0)$.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b'}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b'}\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{\sqrt{b'}(\sqrt{-1})^2}=\frac{\sqrt{a}}{-\sqrt{b'}}\times\sqrt{-1}$$

$$=-\sqrt{\frac{a}{b'}}\times\sqrt{-1}=-\sqrt{\frac{a}{b'}\times(-1)}=-\sqrt{\frac{a}{-b'}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

本公式 b 不爲零不必言矣,同時 b 之正負故亦不可不注意.

(例 **6**)　$x=b\sqrt{2a-b^2}$ 時,試計算 $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ 之值.

〔着眼點〕 (1)　先將分母有理化之後代入.

(2)　於是得一 $\sqrt{a+x}$, $\sqrt{a-x}$ 之積, $a+x$, $a-x$ 的正負須充分注意之.

〔解〕　$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}$$

$$=\frac{2a+2\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}}{2x}$$

$$=\frac{a+\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}}{x}.$$

若 a, b, x 皆表實數,則 $x=b\sqrt{2a-b^2}$ 時,須 $2a\geqq b^2\geqq 0$,故 $(a+x)+(a-x)=2a\geqq 0$, 因之 $a+x$, $a-x$ 必不同時爲負.

故原式 $=\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2(2a-b^2)}}{b\sqrt{2a-b^2}}$

$$=\frac{a+\sqrt{(a-b^2)^2}}{b\sqrt{2a-b^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(P)$$

(**1**)　$a-b^2\geqq 0$ 時, $\sqrt{(a-b^2)^2}=a-b^2$.

故 (P) 式 $=\dfrac{a+a-b^2}{b\sqrt{2a-b^2}}=\dfrac{2a-b^2}{b\sqrt{2a-b^2}}=\dfrac{\sqrt{2a-b^2}}{b}$.

(**2**)　$a-b^2<0$ 時, $\sqrt{(a-b^2)^2}=b^2-a$.

故 (P) 式$=\dfrac{a+b^2-a}{b\sqrt{2a-b^2}}=\dfrac{b^2}{b\sqrt{2a-b^2}}=\dfrac{b}{\sqrt{2a-b^2}}=\dfrac{b\sqrt{2a-b^2}}{2a-b^2}.$

故所求之答：

$a \geqq b^2$ 時,爲　$\dfrac{\sqrt{2a-b^2}}{b}.$

$2a>b^2>a$ 時,爲　$\dfrac{b\sqrt{2a-b^2}}{2a-b^2}.$

〔類題〕

1.　$x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ 時,求 $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ 之值.（a, b 表實數）

2.　$2x=a+\dfrac{1}{a}$, $2y=b+\dfrac{1}{b}$ 時,次式之值如何：

$$xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}.$$

（例 7）　x, y 爲實數時,試簡化次式：

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}.$$

〔着眼點〕　(1)　$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 之形,若祇分母爲負則如何？須注意之.

(2)　須分次四情形而分別計算之.

1.　$x+y>0$,　$x-y>0$.

2.　$x+y>0$,　$x-y<0$.

3.　$x+y<0$,　$x-y>0$.

4.　$x+y<0$,　$x-y<0$.

〔解〕　(1)　$x+y>0$, $x-y>0$ 之情形.

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}.$$

(2)　$x+y>0$, $x-y<0$ 之情形.

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$$

$$=\frac{-(x+y)+(x-y)}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=\frac{-2y}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{-2y\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}.$$

(3)　$x+y<0$, $x-y>0$ 之情形.

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}-\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}=\frac{x+y-(x-y)}{\sqrt{x-y}\sqrt{x+y}}$$

$$=\frac{2u}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{2y\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}.$$

(4)　$x+y<0$, $x-y<0$ 之情形.

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$$

$$=\frac{x+y+x-y}{-\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=\frac{2x}{-\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{-2x\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}.$$

〔注意〕 $x+y=0$, $x-y=0$ 時,原式的分母爲 0, 故問題不能成立. 故在此等問題中,雖不明言,暗中亦有 $x+y\neq0$, $x-y\neq0$ 之假定.

〔類題〕

1.　$x=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ 時,求次式之值: (設 $ab<0$)

$$\frac{2a\sqrt{x^2+1}}{(a-b)(x+\sqrt{x^2+1})}.$$

2.　$a=\sqrt{x+y}$, $b=\sqrt{x-y}$,試簡化次式:

$$\left\{\frac{ab^2-a}{ab+1}+a\right\}\div\left\{\frac{a^2b+b}{ab+1}-b\right\}.$$

第十五章　無理方程式

〔定理〕

方程式兩邊平方之所得的方程式與原方程式不同値

$A=B$ 時,兩邊平方之,得 $A^2=B^2$. $\therefore\ A^2-B^2=0$.

$$\therefore\quad (A+B)(A-B)=0.\quad \therefore\quad A=-B \text{ 或 } A=B.$$

$A=-B$ 中之根稱爲客根.

一般言之, 一方程式的兩邊幾次平方或立方之後所得的方程式之根, 必須代入原方程式而試之,是否爲原方程式之根.

〔例 1〕 試解方程式 $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}=1$.

〔着眼點〕 (1) 若有兩個根號,則分居兩邊後而平方.

(2) 自解後所得的根,代入原方程式後決定.

〔解〕

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}=1,$$

$$\sqrt{x+1}=1+\sqrt{1-2x}.$$

兩邊平方之,

$$3x-1=2\sqrt{1-2x}.$$

再兩邊平方之

$$9x^2+2x-3=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm2\sqrt{7}}{9}.$$

(1) $x=\dfrac{-1+2\sqrt{7}}{9}$ **時,**

原方程式左邊$=\sqrt{\dfrac{-1+2\sqrt{7}}{9}+1}-\sqrt{1-\dfrac{-2+4\sqrt{7}}{9}}$

$$=\frac{\sqrt{7}+1}{3}-\frac{\sqrt{7}-2}{3}=1.$$

故爲根.

(2)　$x=\frac{-1-2\sqrt{7}}{9}$ 時,

原方程式左邊 $=\frac{\sqrt{7}-1}{3}-\frac{\sqrt{7}+2}{3}=-1.$

故非根.　　$\therefore\quad x=\frac{2\sqrt{7}-1}{9}$……答

〔習題〕　解次諸方程式:

1.　$\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+5}=\sqrt{2x-3}.$

2.　$\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}.$

3.　$\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-1}=0.$

〔例 2〕　試解　$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{4x-3}=0.$

〔着眼點〕　以四項分配成兩項一邊而平方之,分配時注意 $2x, x, 3x, 4x$, 使平方後可得簡單之結果,此一點,以後常有須記憶之.

〔解〕　原式移項之,

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}.$$

兩邊自乘而整理之,

$$\sqrt{2x+3}\sqrt{3x-5}=\sqrt{x+1}\sqrt{4x-3}.$$

兩邊再平方,後去括弧而整理之,

$$x^2-x-6=0.$$

$$x=3 \text{ 或 } -2.$$

(1)　$x=3$ 時,

$$\text{左邊}=\sqrt{6+3}-\sqrt{3+1}+\sqrt{9-5}-\sqrt{12-3}$$

$$=\sqrt{9}-\sqrt{4}+\sqrt{4}-\sqrt{9}=0.$$

$\therefore$　左邊=右邊,故 $x=3$ 爲根.

(2)　$x=-2$ 時,

$$\text{左邊}=\sqrt{-4+3}-\sqrt{-2+1}+\sqrt{-6-5}+\sqrt{-8-3}$$

$$=\sqrt{-1}-\sqrt{-1}+\sqrt{-11}-\sqrt{-11}=0.$$

$\therefore$　左邊=右邊,故 $x=-2$ 亦爲根.

故所求之根爲 $x=3$ 或 -2.

〔類題〕

1. $\sqrt{7x-4}-\sqrt{7x-5}=\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x-2}$.

2. $\sqrt{3ax-x^2}-\sqrt{x^2-3bx}=\sqrt{3x(a-b)}$.

3. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

(例 3) 試解 $3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0$.

〔着眼點〕 (1) 若將無理式單獨放在一邊,平方之,則得高次方程式 故不相宜.

(2) 根號內外都有 $3x^2-4x$.

(3) $3x^2-4x-10=3x^2-4x+5-15$.

又注意 $(\sqrt{3x^2-4x+5})^2=3x^2-4x+5$.

〔解〕 設 $\sqrt{3x^2-4x+5}=y$,

則原方程式爲 $y^2-15+2y=0$.

解之,得 $y=-5$ 或 3.

因 $\sqrt{A}$ 不爲負,故 $y=-5$ 棄之,僅取 $y=3$.

故 $3x^2-4x+5=9$.

解之, $x=-\frac{2}{3}$ 或 2.

〔注意〕 (1) 此種問題,y 之負値棄之不用.

(2) $\sqrt{A}=$ 正或 $\sqrt{A}=0$ 解之,不會生出客根,故如本問題之解法,得出根後,不必驗算.

〔類題〕 解次諸方程式:

1. $x^2-6x-2\sqrt{x^2-6x+33}=2$.

2. $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+1)$

3. $x^2-3x+1+4\sqrt{x^2-3x+6}=16$,

求至小數第二位

(例 4) 試解 $\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b+x}=\sqrt[3]{a-b}$.

〔着眼點〕 (1) 立方之使消去根號.

(2) 設法使立方後,同類項相消.

〔解〕 原式之兩邊立方之.

$$a+x-3\sqrt[3]{a+x}\sqrt[3]{b+x}(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b+x})-b-x=a-b,$$

$$3\sqrt[3]{a+x}\sqrt[3]{b+x}(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b+x})=0.$$

因 $$\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b+x}=\sqrt[3]{a-b},$$

故 $$\sqrt[3]{a+x}\sqrt[3]{b+x}\sqrt[3]{a-b}=0.$$

再立方之,

$$(a+x)(b+x)(a-b)=0.$$

(1) $a \neq b$ 時, $x=-a$ 或 $x=-b$.

$x=-a$ 時原式之左邊 $=\sqrt[3]{a-b}$.

∴ 左邊=右邊 ∴ $x=-a$ 爲根.

$x=-b$ 時,原式之左邊 $=\sqrt[3]{a-b}$.

∴ 左邊=右邊. ∴ $x=-b$ 爲根.

(2) $a=b$ 時, x 之値爲不定.

故 $a \neq b$ 時, $x=-a$ 或 $-b$; $a=b$ 時爲不定.

〔類題〕 試解次諸方程式:

1. $\sqrt[3]{x+37}-\sqrt[3]{x}=1.$

2. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{2x-3}.$

3. $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2.$

第十六章　二元二次聯立方程式

(例 1) 試解：

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\qquad x^2+y^2=ax-by\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

〔着眼點〕(1) 一式爲一次，一式爲二次的二元二次聯立方程式，爲二次聯立方程式中常能解得的第一形.

(2) (1) 式中分母 a, b 不爲零

〔解〕 自 (1)，
$$x=\frac{2ab+ay}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以 (3) 代入 (2)，

$$\frac{(2ab+ay)^2}{b^2}+y^2=\frac{a(2ab+ay)}{b}-by.$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2)y^2+(3a^2b+b^3)y+2a^2b^2=0,$$

$$\{(a^2+b^2)y+2a^2b\}(y+b)=0.$$

$$a^2+b^2\neq 0,\quad\therefore\quad y=-\frac{2a^2b}{a^2+b^2}\text{ 或 }y=-b.$$

$$y=-\frac{2a^2b}{a^2+b^2}\text{ 時，}$$

$$x=\frac{1}{b}\left(2ab-\frac{2a^3b}{a^2+b^2}\right)=\frac{2ab^2}{a^2+b^2}.$$

$$y=-b\text{ 時，}$$

$$x=\frac{2ab-ab}{b}=a.$$

$$\begin{cases}x=a,\\y=-b;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2},\\y=-\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}.\end{cases}$$

〔類題〕 解次諸方程式:

1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=\frac{ab}{a+b}.$

2. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ x^2+y^2=ax+by.$

3. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2,\ \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=a+b.$

(例 2) 試解 $2xy-13x-8y+49=0 \cdots\cdots(1)$

$3xy-9x-19y+77=0 \cdots\cdots(2)$

〔着眼點〕 消去二次項 xy, 得一 x, y 之一次方程式, 然後以 (例 1) 之方法解之.

〔解〕 $(1)\times 3-(2)\times 2,$

$$(-29+18)x+(-24+38)y+(147-154)=0,\ -21x+14y-7=0.$$

$$y=\frac{3x+1}{2} \cdots\cdots(3)$$

自 (1), (3), $x(3x+1)-13x-4(3x+1)+49=0,$

$$3x^2-24x+45=0.$$

$$3(x-3)(x-5)=0,\quad \therefore\quad x=3 \text{ 或 } 5.$$

$x=3$ 時自 (3), $y=\frac{9+1}{2}=5.$

$x=5$ 時自 (3), $y=\frac{15+1}{2}=8.$

答: $\left.\begin{matrix}x=3\\y=5\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=5\\y=8\end{matrix}\right\}$

〔類題〕 試解次諸聯立方程式:

1. $\left.\begin{matrix}\frac{x+y}{1-xy}=3\\ \frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{3}\end{matrix}\right\}$

2. $3x^2-6xy-7x+4y-4=0,\ 2xy-x^2+3x-y+1=0.$

3. $\left.\begin{matrix}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\\ (x-b)^2+(y-a)^2=r^2\end{matrix}\right\}$

(例 3) 試解次之聯立方程式:

$$x^2-3xy+2y^2=12\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+2xy-3y^2=32\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

〔着眼點〕 (1)　兩方程式中，含有未知數的項，爲二次齊次式，故消去已知項，則得一 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 形狀之方程式.

(2)　$Ax^2+Bxy+Cy^2$ 形狀之式，必能分解爲二個一次因子.

(3)　此種形狀之方程式，爲二次聯立方程式中常能解得的第二形.

〔解〕

$$\begin{array}{rl} & (1)\times 8\cdots\cdots 8x^2-24xy+16y^2=96 \\ -) & \underline{(2)\times 3\cdots\cdots 3x^2+\ 6xy-\ 9y^2=96} \\ & 5x^2-30xy+25y^2=0 \end{array}$$

以 5 除兩邊，　$x^2-6xy+5y^2=0.$

因子分解，　$(x-y)(x-5y)=9.$

故　$x-y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$　　$x-5y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

以此兩式與 (1) 式組合，

$$(A)\ \begin{cases} x-y=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\ x^2-3xy+2y^2=12\cdots\cdots(1) \end{cases}\qquad (B)\ \begin{cases} x-5y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4) \\ x^2-3xy+2y^2=12\ \cdots\cdots(1) \end{cases}$$

此 (A), (B) 兩組方程式皆爲第一形.

自 (A) 以 $x=y$ 代入 (1) 式，成爲 $0=12$ 爲不能.

自 (B) 以 $x=5y$ 代入 (1) 式，成爲 $y=\pm 1$.

故所求之根爲 $x=5,\ y=1$ 或 $x=-5,\ y=-1$.

〔類題〕 試解次諸方程式：

1.　$x^2-3xy-10y^2=32,\ x^2-xy-6y^2=24.$

2.　$2x^2+3xy-4y^2=-5,\ 5x^2-2xy+y^2=8.$

3.　$2x^2-xy+y^2=2y,\ 2x^2+4xy=6y.$

4.　$x^2+xy+y^2=13(x+y),\ x^2-xy+y^2=14(x-y).$

〔例 4〕 試解次之方程式：

$$x^2+y^2+3xy=5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x+y+2xy=-5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

〔着眼點〕 (1)　雖皆是二次，而非第二形.

(2)　第二式含 $x+y$, xy 兩種項. 第一式亦可改書之爲含 $x+y$, xy 的二次方程式.

(3)　已知二數之和及二數之積，此二數必可求得.

祇須作以此二數爲根之一元二次方程式,解之.

(4)　此爲二次聯立方程式中常能解得的第三形.

〔解〕 設　$x+y=z,\quad xy=w.$

(1) 式爲　$(x^2+2xy+y^2)+xy=5.$

故爲　$z^2+w=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2) 式爲　$z+2w=-5 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

此 (3), (4) 爲第一形,若求 z, w, 則

$$(a)\ \begin{cases} z=3, \\ w=-4. \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} z=-\dfrac{5}{2}, \\ w=-\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

(a)　$x+y=3,\quad xy=-4.$

由觀察,　$\begin{cases} x=4, \\ y=-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1, \\ y=4. \end{cases}$

(b)　$x+y=-\dfrac{5}{2},\quad xy=-\dfrac{5}{4}.$

作以此 x, y 之值爲二根之一元二次方程式:

$$z^2+\frac{5}{2}z-\frac{5}{4}=0.$$

解之,　$z=\dfrac{-5\pm\sqrt{45}}{4}.$

故　$\begin{cases} x=\dfrac{-5+\sqrt{45}}{4}, \\ y=\dfrac{-5-\sqrt{45}}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{-5-\sqrt{45}}{4}, \\ y=\dfrac{-5+\sqrt{45}}{4}. \end{cases}$

〔類題〕 試解次諸聯立方程式:

1. $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=3(xy+1), \\ 2(x^2+y^2)-xy=6(x+y)-4. \end{cases}$

2. $xy-(x+y)=7,\ xy(x+y)=120.$

3. $x^2+y^2=13,\ xy+y-x=-1.$

(例 5) 試解　$\left.\begin{aligned} x^2&=ax+by \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y^2&=ay+bx \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{aligned}\right\}$

〔着眼點〕 (1) 皆爲二次.

(2) 與前三形不同.

(3) (1), (2) 之右邊加之或減之,則得

$$a(x+y)+b(x+y) \text{ 或 } a(x-y)+b(x-y).$$

故若左邊亦生出同樣之因子,則甚佳妙.

(4) 因子分解後,若能得一次方程式,則成爲第一形.

〔解〕 (1) − (2),　$x^2-y^2=a(x-y)-b(x-y)$,

$$(x-y)\{(x+y)-(a-b)\}=0.$$

(i) $x-y=0$ 時,　$y=x$ ……………………………… (3)

自 (1), (3),　$x^2=ax+bx$,　$\therefore\ x=0$ 或 $x=a+b$.

(ii) $x+y=a-b$ 時,　$y=a\quad b-x$ ……………………………… (4)

自 (1), (4),　$x^2=ax+b(a-b-x)$.

$$\therefore\quad x^2-(a-b)x-b(a-b)=0.$$

$$x=\frac{a-b\pm\sqrt{(a-b)^2+4b(a-b)}}{2}$$

$$=\frac{a-b\pm\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2}.$$

故

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l}x=a+b\\ y=a+b\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a-b+\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2}\\[2ex] y=\dfrac{a-b-\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2}\end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a-b-\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2}\\[2ex] y=\dfrac{a-b+\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2}\end{array}\right\}.$$

〔類題〕

1. 試解 $\left.\begin{array}{l}x^2-3x-2y=0\\ y^2-3y-2x=0\end{array}\right\}$

2. 試解 $\left.\begin{array}{l}2x^2-\ \ 9xy-3y^2-6x+\ \ 6y+4=0\\ 2x^2+27xy+6y^2-6x-21y+4=0\end{array}\right\}$

3. 設二次方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 α, β.

若 α, β 滿足於聯立方程式 $\dfrac{\alpha^2}{\beta}=\alpha-1$, $\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\beta-1$, 試求 p, q 之値.

(例 6)　試解

$$\left.\begin{aligned} x(1+x)&=y(4+y)\cdots\cdots(1)\\ x+4y&=(x+y)^2\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}$$

〔着眼點〕 (1) 與前三形不同.

(2) (1) 式之括弧,試撤去後研究之.

(3) $x-4y=y^2-x^2$,

$x-4y=(y+x)(y-x)$.

(2) 式之右邊有 $x+y$ 因子.

與 (2) 兩邊相除,得一二次齊次式,故可依第二形之法解之.

〔解〕 自 (1), $x-4y=(y+x)(y-x)\cdots\cdots(3)$

(a) $x+y\neq 0$ 時.

(3) 與 (2) 邊邊相除, $\dfrac{x-4y}{x+4y}=\dfrac{(x+y)(y-x)}{(x+y)^2}$.

約分後去分母, $(x+y)(x-4y)=(y-x)(x+4y)\cdots\cdots(4)$

整理之, $8y^2-2x^2=0$. ∴ 得 $x=\pm 2y$.

故得次之二組方程式:

$$\left.\begin{aligned} x&=2y\\ x+4y&=(x+y)^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(A)\qquad \left.\begin{aligned} x&=-2y\\ x+4y&=(x+y)^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(B)$$

解 (A), 則 $6y=9y^2$, ∴ $y=0$ 或 $\dfrac{2}{3}$.

故 $y=0$ 時,得 $x=0$; $y=\dfrac{2}{3}$ 時,得 $x=\dfrac{4}{3}$.

解 (B), 則 $2y=y^2$, ∴ $y=0$ 或 2.

故得 $y=0$ 時, $x=0$; $y=2$ 時, $x=-4$.

$x=0$, $y=0$, 則與 $x+y\neq 0$ 相衝突,故棄之.

(b) $x+y=0$ 時, $x+4y=0\cdots\cdots(5)$　$x-4y=0\cdots\cdots(6)$

∴ $x=y=0$.

故
$$\left.\begin{aligned} x&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} x&=\frac{4}{3}\\ y&=\frac{2}{3}\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} x&=-4\\ y&=2\end{aligned}\right\}.$$

〔類題〕 試解次諸方程式:

1. $xy^2+x-3y=0$, $2x^2y-3x+2y=0$.

2. $xy(x+y)=30$, $x^3+y^3=35$.　**3.** $\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{xy}=2$, $xy-\dfrac{x}{y}=8$.

第十七章　多元高次聯立方程式

(例 1)　**試解**　$x-y+z=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x+2y-5z=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$x^2+y^2-2z^2-xy+3z=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

〔着眼點〕 (1), (2) 爲一次式，故以 z 作爲已知數看待，求 x, y 之值，代入 (3) 式.

〔解〕 自 (1), (2) 求 x, y,

$$(1)\times 2+(2)\cdots\cdots 3x-3z=6, \quad \therefore \quad x=2+z.$$

$$(2)-(1)\cdots\cdots\cdots 3y-6z=0, \quad \therefore \quad y=2z.$$

以上式代入 (3)，整理之，

$$z^2+3z-4=0, \quad \therefore \quad z=1 \text{ 或 } -4.$$

$$\begin{array}{rl|rl} & z=1, & & z=-4, \\ \text{則} & x=2+1=3, & \text{則} & x=2-4=-2, \\ & y=2\times 1=2. & & y=2\times(-4)=-8. \end{array}$$

故　　$(x=3,\ y=2,\ z=1),\ (x=-2,\ y=-8,\ z=-4).$

〔類題〕 試解次諸方程式:

1. $$\begin{cases} x^2-xy-7=0, \\ x+y+z=0, \\ 3x-2y+2z+2=0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0, \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} (b+c)x+(c-a)y-(a+b)z=0, \\ bx+(c-a)y-bz=0, \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2. \end{cases}$$

(例 **2**)　試解
$$\left.\begin{array}{lr} x+y-3z=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (1)\\ x^2+y^2+z^2=9-2z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (2)\\ yz+zx+xy=2z^2+3z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (3)\end{array}\right\}$$

〔着眼點〕 目的爲消去二個文字,自 (1) $x+y$ 可以 z 表之, (2) 式可作爲 $x+y$, xy, z 的式, (3) 式亦爲 $x+y$, xy, z 的式,故可以消去 x, y.

〔解〕 自 (1),　$x+y=7+3z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)'$

自 (2),　$(x+y)^2-2xy+z^2=9-2z \cdots\cdots\cdots\cdots(2)'$

自 (3),　$z(x+y)+xy=2z^2+3z \cdots\cdots\cdots\cdots(3)'$

$(2)'+(3)'\times 2$,　$(x+y)^2+2z(x+y)+z^2=4z^2+4z+9$.

以 $(1)'$ 代入,　$(7+3z)^2+2z(7+3z)+z^2=4z^2+4z+9$.

$$\therefore\quad 3z^2+13z+10=0.$$

$$\because\quad (3z+10)(z+1)=0.\quad \therefore\quad z=-\frac{10}{3} \text{ 或 } -1.$$

$z=-\dfrac{10}{3}$ 時.

自 $(1)'$, $x+y=-3$,

自 $(3)'$, $xy=\dfrac{20}{9}$.

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{4}{3}\\ y=-\dfrac{5}{3}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{5}{3}\\ y=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right\}.$$

$z=-1$ 時.

自 $(1)'$, $x+y=4$,

自 $(3)'$, $xy=3$.

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} x=1\\ y=3\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x=3\\ y=1\end{array}\right\}.$$

〔類題〕 試解次諸方程式:

1. $\begin{cases} x+y+z=6,\\ yz=7-x^2,\\ x^2+y^2+z^2=14\end{cases}$　　**2**. $\begin{cases} x+y+z=12,\\ xy+xz=35,\\ x^2+y^2+z^2=40.\end{cases}$

3. $(x-1)(y-1)=6$, $(y-2)(z-2)=3$, $(z-3)(x-3)=2$.

(例 **3**)　試解
$$\left.\begin{array}{lr} yz+5zx-5xy=11 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (1)\\ xy+3yz-3zx=11 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (2)\\ 2zx+xy-3yz=-10 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (3)\end{array}\right\}$$

〔着眼點〕 (1) 看作 xy, yz, zx 的一次方程式,先求 xy, yz, zx.

(2) 求得後,邊邊相乘,得 $x^2y^2z^2$, 再求 xyz.

〔解〕 (1), (2), (3) 看作 xy, yz, zx 的三元一次聯立方程式, 先求 xy, yz, zx.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{則得} & xy=2\cdots\cdots\cdots\cdots(4) \\ & yz=6\cdots\cdots\cdots\cdots(5) \\ & \underline{zx=3\cdots\cdots\cdots\cdots(6)} \\ \text{邊邊相乘,} & x^2y^2z^2=2\times6\times3 \\ & (xyz)^2=(2\times3)^2 \\ & xyz=\pm2\times3\cdots(7) \end{array}\right\} \text{故} \left.\begin{array}{l} (7)\div(4)\cdots z=\pm3 \\ (7)\div(5)\cdots x=\pm1 \\ (7)\div(6)\cdots y=\pm2 \end{array}\right\} \text{(複號順序相同}$$

〔注意〕 自 (4), (5), (6), 知各積爲正,故 x, y, z 爲同符號.

〔類題〕 試解次諸方程式:

1. $\begin{cases} yz+7zx-2xy=29, \\ 3yz-zx+4xy=-107, \\ -2yz+5zx-xy=95. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y+z=\dfrac{9}{x}, \\ z+x=\dfrac{8}{y}, \\ x+y=\dfrac{5}{z}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=2a^2+\dfrac{z^2}{2}, \\ y^2+z^2=2b^2+\dfrac{x^2}{2}, \\ z^2+x^2=2c^2+\dfrac{y^2}{2}. \end{cases}$

(例 4) 試解
$$\left.\begin{array}{l} (x+1)(y+1)=30\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (y+1)(z+1)=42\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ (z+1)(x+1)=35\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right\}$$

〔着眼點〕 左邊各積其因子祇有 $x+1$, $y+1$, $z+1$ 三種,故可歸入上述特別形.

$$\begin{cases} xy=a \\ yz=b \\ zx=c \end{cases} \quad \text{之一類中,常有一定方法可解.}$$

〔解〕 (1) × (2) × (3),

$$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=30\times42\times35=5^2\times6^2\times7^2.$$

$$\therefore \quad (x+1)(y+1)(z+1)=\pm 5\times 6\times 7.$$

(i) $(x+1)(y+1)(z+1)=5\times 6\times 7.$

自 (1), (2), (3),

$z+1=7, \quad \therefore \quad z=6;$

$x+1=5, \quad \therefore \quad x=4;$

$y+1=6, \quad \therefore \quad y=5.$

(ii) $(x+1)(y+1)(z+1)=-5\times 6\times 7.$

自 (1), (2), (3),

$z=-6,\ x=-4,\ y=-5$

〔類題〕 試解次諸方程式:

1. $\begin{cases} xy+x+y+3=0, \\ yz+y+z+7=0, \\ zx+z+x-11=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy+y+2x-6=0, \\ yz+2z+3y-18=0, \\ zx+3x+z-9=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+yz+zx+xy=12, \\ y\ \ +yz+zx+xy=15, \\ z\ \ +yz+zx+xy=20. \end{cases}$

〔例 5〕 試解

$$\left.\begin{array}{ll} x(x+2y+3z)=14\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (1) \\ y(x+2y+3z)=28\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (2) \\ z(x+2y+3z)=42\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (3) \end{array}\right\}$$

〔着眼點〕 (1) 括弧內之式相同.

(2) 邊邊相加則如何?

〔解〕 (1)+(2)×2+(3)×3, 則

$$x(x+2y+3z)+2y(x+2y+3z)+3z(x+2y+3z)=196.$$

$$\therefore \quad (x+2y+3z)^2=196.$$

$$x+2y+3z=\pm 14\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\div(4)\cdots\cdots x=\pm 1, \\ (2)\div(4)\cdots\cdots y=\pm 2 \\ (3)\div(4)\cdots\cdots z=\pm 3. \end{array}\right\}$$ （複號順字相同）

〔類題〕 試解次諸方程式:

1. $$\begin{cases} x(x+y+z)=a^2, \\ y(x+y+z)=b^2, \\ z(x+y+z)=c^2. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x(x+y+z)=12, \\ (2y+z)(x+y+z)=30 \\ (y+2z)(x+y+z)=42. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x^2+xy+xz=18, \\ y^2+yz+xy=-12, \\ z^2+zx+zy=30. \end{cases}$$

第十八章　比及比例

〔例 1〕 $\frac{8y-3x}{2x-y}=3$ 時,求 $\sqrt{x+y}:\sqrt{x-y}$ 之值.

〔着眼點〕 去假設之分母,則得一一次齊次等式. x, y 的一次齊次等式若有二個,則 x, y 之值可求.僅有一個,故 x, y 之值不能決定. 而 $x:y$ 之值則可求得,即 $x=ky$, 以此代入即可.

〔解〕 自 $\frac{8y-3x}{2x-y}=3$, 得 $y=\frac{9}{11}x$, 代入之,則

$$\sqrt{x+y}:\sqrt{x-y}=\sqrt{x+\frac{9}{11}x}:\sqrt{x-\frac{9}{11}x}$$

$$=\sqrt{\frac{20}{11}x}:\sqrt{\frac{2}{11}x}$$

$$=\sqrt{10}.$$

〔類題〕

1. $6x^2+4y^2=11xy$ 時,求 $x^2+3xy+y^2:x^2-3xy+y^2$ 之值.
2. $\frac{5x-8y}{x-3y}=-\frac{1}{9}$ 時,求 $\sqrt{13x+5y}:\sqrt{3x+8y}$ 之值.
3. $10x^2-23xy+12y^2=0$ 時,求 $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ 之值.

〔例 2〕 若 $a+3b+5c=0$, $2a+4b+7c=0$, 求次式之值:

$$\frac{a^2+5b^2-2c^2}{3a^2-2b^2+5c^2}.$$

〔着眼點〕 a, b, c 的一次齊次方程式,祇有二個,故 a, b, c 之值不能決定,而 $a:c$, $b:c$ 之值則可求得,即 $a=kc$, $b=k'c$, 以此代入即可.

〔解〕

$$a+3b+5c=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2a+4b+7c=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)×4−(2)×3，得 $a=-\frac{1}{2}c$ ……………………(3)

(1)×2−(2)，得 $b=-\frac{3}{2}c$ ……………………(4)

$$\therefore\quad \frac{a^2+5b^2-2c^2}{3a^2-2b^2+5c^2}=\frac{\frac{1}{4}c^2+\frac{45}{4}c^2-2c^2}{\frac{3}{4}c^2-\frac{18}{4}c^2+5c^2}=\frac{38c^2}{5c^2}=\frac{38}{5}$$

〔類題〕 若一元二次方程式

$$a(x+1)(x+2)+b(x+2)(x+3)+c(x+3)(x+1)=0$$

之二根一爲 0，一爲 1，則 $a:b:c$ 之值如何？

（例 3） 若 $a+b+c+d:a-b+c-d=a+b-c-d:a-b-c+d$；

則 $a:b=c:d$，試證之.

〔着眼點〕 (1) **假設爲一個比例式，由比例式之性質，外項之積等於內項之積，即得一等式.**

(2) 終結祇須證 $ad=bc$ 卽可.

〔解〕 自 $a+b+c+d:a-b+c-d=a+b-c-d:a-b-c+d$，

得 $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$.

$$\therefore\quad \{(a+d)+(b+c)\}\{(a+d)-(b+c)\}$$
$$=\{(a-d)-(b-c)\}\{(a-d)+(b-c)\}.$$
$$(a+d)^2-(b+c)^2=(a-d)^2-(b-c)^2.$$
$$a^2+2ad+d^2-b^2-2bc-c^2=a^2-2ad+d^2-b^2+2bc-c^2.$$
$$4ad=4bc.$$
$$ad=bc.$$

故 $a:b=c:d$.

〔類題〕

1. 若 $(3a+6b+c+2d)(3a-6b-c+2d)$

$$=(3a-6b+c-2d)(3a+6b-c-2d),$$

則 $a:b=c:d$.

2. 若 $(qrs+rsp+spq+pqr)^2=pqrs(p+q+r+s)^2$，

則 p, q, r, s 成比例，試證明之.

（例 4） 若 $a:b=c:d$，

則 $(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)=ad(a+b+c+d)^2$，試證之.

〔著眼點〕 終結爲 a, b, c, d 的四次齊次式，故設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，以 $a=bk$，$c=dk$ 代入，則兩邊僅有 b, d, k 可確定其爲恆等.

〔解〕 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，則 $a=bk$，$c=dk$. 故

$$\begin{aligned}
\text{左邊}&=(bk+b)(bk+dk)(b+d)(dk+d)\\
&=b(k+1)k(b+d)(b+d)d(k+1)\\
&=bdk(b+d)^2(k+1)^2.\\
\text{右邊}&=bk\cdot d(bk+b+dk+d)^2\\
&=bkd\{b(k+1)+d(k+1)\}^2\\
&=bdk(b+d)^2(k+1)^2.
\end{aligned}$$

故　左邊＝右邊.

〔類題〕 若 $a:b=c:d$，試證次諸式:

1. $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\frac{d^3}{b}}$.

2. $a^2+b^2+c^2+d^2:(a+b)^2+(c+d)^2$
$$=(a+c)^2+(b+d)^2:(a+b+c+d)^2.$$

例 5) 若 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$，則次式之值如何?

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}{(ax+by+cz)^2}.$$

〔著眼點〕 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$，則 $x=ak$，$y=bk$，$z=ck$，代入原分式中，即可求其值.

〔解〕 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$，$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$，代入原式.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{(a^2+b^2+c^2)(a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2)}{(a^2k+b^2k+c^2k)^2}\\
&=\frac{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)k^2}{(a^2+b^2+c^2)^2k^2}\\
&=1.
\end{aligned}$$

〔類題〕 若 $x:a=y:b=z:c$，試證次諸式:

1 $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^2}{a^2+b^2+c^2}$.

2. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{y-b}{y+b}-\frac{2(z^2-c^2)}{z^2+c^2}=\frac{8(x+y+z)^2(a+b+c)^2}{(x+y+z)^4-(a+b+c)^4}$.

(例 **6**) 若 $\frac{p}{a^2-bc}=\frac{q}{b^2-ca}=\frac{r}{c^2-ab}$,

則 $\frac{a}{p^2-qr}=\frac{b}{q^2-rp}=\frac{c}{r^2-pq}$, 試證之.

〔着眼點〕 (1) 假設之式,可使等 k 之形.

(2) p, q, r 以 a, b, c, k 表之,代入而求各式之值.

〔解〕 設 $\frac{p}{a^2-bc}=\frac{q}{b^2-ca}=\frac{r}{c^2-ab}=k$, 則

$$p=(a^2-bc)k,\ \ q=(b^2-ca)k,\ \ r=(c^2-ab)k$$

故 $$\begin{aligned}p^2-qr&=(a^2-bc)^2k^2-(b^2-ca)k\cdot(c^2-ab)k\\&=k^2(a^4-2a^2bc+b^2c^2-b^2c^2+c^3a+ab^3-a^2bc)\\&=k^2\{a(a^3+b^3+c^3-3abc)\}.\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}\frac{a}{p^2-qr}&=\frac{a}{k^2a(a^3+b^3+c^3-3abc)}\\&=\frac{1}{k^2(a^3+b^3+c^3-3abc)}.\end{aligned}$$

用同樣計算,

則 $\frac{b}{q^2-rp}$, $\frac{c}{r^2-pq}$ 亦等於 $\frac{1}{k(a^3+b^3+c^3-3abc)}$

故 $$\frac{a}{p^2-qr}=\frac{b}{q^2-rp}=\frac{c}{r^2-pq}.$$

〔類題〕 若 $\frac{cy+bz}{p}=\frac{az+cx}{q}=\frac{bx+ay}{r}$,

則 $\frac{bcx}{-ap+bq+cr}=\frac{cay}{ap-bq+cr}=\frac{abz}{ap+bq-cr}$, 試證之.

第十九章　變數法

〔定理〕

兩變數 x, y 若成比例 $(y\propto x)$. 則 $y=kx$ (k 爲常數). 其逆亦眞.

兩變數 x, y 若成反比例 $\left(y\propto\frac{1}{x}\right)$, 則 $y=\frac{k}{x}$ (k 爲常數). 其逆亦眞.

(例 **1**)　z 與 $u-v$ 成比例, u 與 x 成比例, v 與 x^2 成比例. $x=2$ 時, $z=48$; $x=5$ 時, $z=30$; 則 x 爲何値時, $z=0$.

〔着眼點〕 (1)　成比例之數,若用等式表之,則比例常數卽爲未定係數,故適用已知條件後,卽可求其比例常數.

(2)　自此卽可決定 x 之値.

〔解〕　$z=k(u-v)$, $u=k'x$, $v=k''x^2$ (k, k', k'' 爲常數).

$$\therefore\quad z=k(k'x-k''x^2)=kk'x-kk''x^2=Kx-K'x^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(因 k, k', k'' 爲常數,故 K, K' 亦爲常數)

$x=2$ 時, $z=48$, 故　　$48=2K-4K'$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$x=5$ 時, $z=30$, 故　　$30=5K-25K'$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

自 (2), (3),　　　$K=35,\quad K'=6.$

$\therefore$ (1) 成爲　　　$z=36x-6x^2.$

故使 z 爲零之 x 之値,卽 $36x-6x^2=0$ 方程式之根,解之,得 $x=6$ 或 0.

〔類題〕

1.　某處開會,全費用中之一部分一定不變,他一部分與出席人數成比例. 費用之十分之一由某人捐助,其餘由出席人均擔, 若出席人數爲 70 人時,一人須納費 2 元 5 角, 100 人時須納 1 元 9 角 8 分,問出席人 150 人時,每人須納費多少?

2. y 爲二數之和,一數與 x 成比例,他一數與 x 成反比例,若 $x=a$, 則 $y=na+b$; $x=b$, 則 $y=nb+a$, 問 x 爲何值時, $y=nab+1$.

3. 有甲,乙二數,甲與 x 成比例, 乙與 x 成反比例, 設甲,乙二數之和爲 y, $x=2$ 時, $y=7$, $x=1$ 時, $y=-1$, 則 $y=5x-\frac{6}{x}$, 試證之.

(例 **2**) 兩數之和爲 $z-30$, 一數與 t 成比例, 他一數與 t^2 成比例, 若 $t=3$, 則 $z=84$, $t=4$, 則 $z=110$, 求使 z 爲最小時, t 的實數值 及其時 z 之最小值.

〔着眼點〕 (1) 用比例常數,將所設關係以等式表之.

(2) 次用所設條件,決定比例常數.

(3) t 爲實數時,求 z 之最小值,故若得二次方程式,自判別式求之.

〔解〕 $\left.\begin{array}{l}\text{與 } t \text{ 成比例之一數設爲 } x\cdots\cdots x=kt \\ \text{與 } t^2 \text{ 成比例之一數設爲 } y\cdots\cdots y=mt^2\end{array}\right\}$ k, m 未知常數.

故 $$z-30=x+y.$$

$$z-30=kt+mt^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$t=3$ 時, $$z=84.$$

(1) 式變爲 $$84-30=3k+9m,$$

即 $$k+3m=18\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

次 $t=4$ 時, $$z=110.$$

(1) 式變爲 $$110-30=4k+16m,$$

即 $$k+4m=20\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

解 (2), (3), 得 $$k=12,\ m=2.$$

故 (1) 式變爲 $$z-30=12t-2t^2,$$

即 $$2t^2+12t-(z-30)=0.$$

t 爲實數,則判別式不能爲負,

即 $$6^2+2(z-30)\geq 0,$$

$$z\geq 12.$$

即 $z=12$ 爲 z 之最小值, 其時 t 之值爲 -3($z=12$ 時, 即判別式爲 0 時).

〔類題〕

1. 假定列車之速度與客車輛數之平方根成反比例. 今設僅一機關車

每時可行 60 哩,配客車 10 輛時每時可行 40 哩. 若列車每時須行 30 哩以上,此機關車至多可配客車幾輛?

2. 若 y 與 x 之平方成比例, z 與 x 之立方成比例. 若 $x=2$ 時, $y=3$, $z=2$, 則 x 若較 3 爲小時, y 不小於 z, 試證之.

〔定理〕

> 有三個變數 x, y, z, 若 y 爲一定時, z 與 x 成比例; x 爲一定時, z 與 y 成比例; 則 z 與積 yx 成比例, 即 $z=kxy$ (k 爲比例常數).
>
> 其逆亦眞.

〔系 1〕

> 有三個變數 x, y, z, 若 y 爲一定時, z 與 x 成比例; x 爲一定時, z 與 y 成反比例, 則 x, y 同爲變數時, z 與 $\frac{x}{y}$ 成比例, 即 $z=k\frac{x}{y}$ (k 爲比例常數).

〔系 2〕

> 有三個變數 x, y, z, 若 y 爲一定時, z 與 x 成反比例; x 爲一定時, z 與 y 成反比例, 則 x, y 同爲變數時, z 與 $\frac{1}{xy}$ 成比例, 即 $z=k\frac{1}{xy}$ (k 爲比例常數).

〔注意〕 變數 x, y, z 間, 若有以上的關係 (以上定理及系 1, 系 2), 則稱此三變數成複比例.

(例 3) 垂直吹向平面之風, 其壓力, 與平面之面積, 風速之自乘之積成比例. 若速度爲每秒一米之風, 垂直吹向一平方米之平面, 其壓力爲 80 克, 則速度爲每時 72 仟米之風, 垂直吹向 24 平方米之平面, 其壓力爲幾仟克?

〔着眼點〕 爲複比例問題, 比例常數 k 之値, 由上述條件可以決定, 然後求壓力.

〔解〕 壓力, 面積, 風速之數値, 設爲 P, a, v, 則

$$P=kav^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \quad (k\ 爲比例常數)$$

(1) 式中 $v=1$ 米, $a=1$ 平方米時, $P=80$ 克.

$$\therefore\quad 80=k\times1\times1^2, \qquad \therefore\quad k=80.$$

今設 $v=\dfrac{72000}{60\times60}=20$, $a=24$ 平方米時之壓力爲 P'; 則

$$P'=80\times24\times20^2=768000. \qquad \text{答: 768 仟克.}$$

〔類題〕 火車行駛時,所要之時間,與距離成比例,與速度成反比例. 其速度與走 1 哩所需石炭量之平方根成比例,與所牽客車輛數成反比例. 若客車20輛,速度爲每時 36 哩時,需石炭 900 磅,則客車 18 輛,在 45 分內走 30 哩需石炭多少磅?

(例 4) 若 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ 與 $x-y$ 成反比例,則 $(x+y)^2$ 與 x^2+y^2 成比例,試證之.

〔着眼點〕 (1) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ 與 $x-y$ 成反比例,故得 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{k}{x-y}$.

(2) 證 $(x+y)^2=$某常數 (x^2+y^2).

即 $$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=\text{某常數}.$$

〔解〕 $$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{k}{x-y}, \ (k\ \text{爲常數})$$

$$\frac{y-x}{xy}=\frac{k}{x-y}.$$

去分母, $$-(x-y)^2=kxy.$$

故 $$x^2-2xy+y^2=-kxy.$$

$$x^2+y^2=(2-k)xy.$$

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2-k}, \quad \therefore \ \frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2}{2-k}.$$

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}=\frac{2+2-k}{2-k}, \quad \therefore \ \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=\frac{4-k}{2-k}.$$

故 $(x+y)^2$ 與 x^2+y^2 成比例.

〔類題〕

1. 若 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ 與 $x-y$ 成反比例,則 x^2+y^2 與 xy 成比例,試證之.

2. x, y, z 爲三個變數,但其和爲一常數.

若 $(x-y+z)(x+y-z)$ 與 yz 成比例,則 $y+z-x$ 與 yz 亦成比例,試證之.

第二十章　等差級數(A. P.)

設初項爲 a, 公差爲 d, 項數爲 n, 末項爲 l, 總和爲 S, 則有次之關係:

$$l=a+(n-1)d,$$

$$S=\frac{n}{2}(a+l),$$

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.$$

每一式皆含有四個文字,故知其三個, 可求其餘一個. 又若有二文字 (或三文字)未知,而能作二個(或三個)關係式,則成爲聯立方程式,即可解得.

(例 1) 求 3 或 5 能整除小於 200 之一切整數之和.

〔着眼點〕 (1) 爲等差級數之和,故不外應用上述二個求和公式.

(2) 3 或 5 能整除之意義,切勿誤解.

〔解〕 設 3 能整除一切整數之和爲 S_1, 則

$$S_1=\frac{66(3+198)}{2}=6633,$$

5 能整除一切整數之和

$$S_2=\frac{39(5+195)}{2}=3900,$$

3 及 5 能整除一切整數之和

$$S_3=\frac{13(15+195)}{2}=1365.$$

所求之數　$S=S_1+S_2-S_3=6633+3900-1365=9168.$

〔類題〕

1. 三位之整數中,以 17 除之剩餘爲 2, 一切整數之總和爲多少?

2. 在 503 與 995 之間,爲 7 之倍數,而非 49 之倍數, 一切整數之總和爲多少?

3. 500 與 1000 間之整數中，3，7 皆不能整除一切整數之和，試求之。

4. 等差級數 2, 5, 8, ……, 200 及 2, 7, 12……, 202 中相同之項，其值爲多少；又此等項之和爲多少？

(例 **2**) 有項數爲 99 之 A. P.，最初 9 項之和爲 45，最終 9 項之和爲 450，求中央 9 項。

〔着眼點〕 (1) 中央一項爲第 50 項，求此項與前後四項之和即可。

(2) 欲知第 50 項，知 a, d 即可。

(3) 自二個已知條件解 a, d。

〔解〕 設初項爲 a，公差爲 d，則

$$\frac{9}{2}\{2a+(9-1)d\}=45, \quad \therefore \quad a+4d=5\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

末項 $=a+(99-1)d=a+98d$，故以末項作爲初項看，公差爲 $-d$，求 9 項之和，則爲

$$\frac{9}{2}\{2(a+98d)+(9-1)(-d)\}=450, \quad \therefore \quad a+94d=50\cdots\cdots(2)$$

自 (1), (2)，

$$a=3, \quad d=\frac{1}{2}.$$

此級數之中央項爲第 50 項，設其值爲 m，則

$$m=a+(50-1)d=\frac{55}{2}.$$

設中央 9 項之和爲 S，則

$$\begin{aligned}S&=(m-4d)+(m-3d)+(m-2d)+(m-d)+m\\&\quad+(m+d)+(m+2d)+(m+3d)+(m+4d)=9m\\&=9\times\frac{55}{2}=\frac{495}{2}.\end{aligned}$$

〔類題〕

1. 有一等差級數，最初 p 項之和若與最初 q 項之和相等，則自初項至第 $p+q$ 項諸項之和等於零，試證之。

2. 有奇數項數之等差級數，其中第奇數項諸項之和，與第偶數項諸項之和各爲 44 及 33，求其中央項及項數。

(例 **3**) 自 2 始之偶數，如次分羣：

$$(2, 4),\quad (6, 8, 10),\quad (12, 14, 16, 18),\cdots\cdots$$

求第 n 羣中諸數之總和.

〔着眼點〕(1) 各羣內之項數依次爲等差級數,故自始至第 $n-1$ 羣之項數可求.

(2) 第 $n-1$ 羣最後之項之數值可求,故可求得第 n 羣之初項.

(3) 第 n 羣之級數其項數爲 $n+1$, 公差爲 2, 故可得其和.

〔解〕自第一羣至第 $n-1$ 羣所有偶數之個數: 爲

$$2+3+4+\cdots\cdots+n=\frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

故第 $(n-1)$ 羣中最後之偶數,自 2 數之爲第 $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ 個.

其數值爲 $$\frac{(n-1)(n+2)}{2}\times 2=(n-1)(n+2).$$

故第 n 羣中最初之偶數爲 $(n-1)(n+2)+2=n^2+n$.

故第 n 羣中之偶數爲初項 n^2+n, 公差 2, 項數 $(n+1)$ 之 A. P. 設其總和爲 S, 則

$$S=\frac{(n+1)\{2(n^2+n)+2n\}}{2}=(n+1)(n^2+2n)$$
$$=n(n+1)(n+2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

〔類題〕

1. 自 1 始之正整數,如次分羣:

第一羣 1; 第二羣 2, 3; 第三羣 4, 5, 6;……

求第 n 羣內諸數之總和.

2. 自 1 始之奇數,如次分羣:

第一羣 1; 第二羣 3, 5; 第三羣 7, 9, 11; 第四羣 13, 15, 17, 19;……

第 n 羣內有 n 項,則第 n 羣內諸數之總和爲 n^3, 試證之.

(例 **4**) 不論 n 之值爲何,自初項始至第 n 項之和爲 n^2+1, 則其級數如何?

〔着眼點〕(1) 等差級數,等比級數,或其他級數,不能判斷.

(2) 最初 $n-1$ 項之和爲 $(n-1)^2+1$.

(3) 求第 n 項.

〔解〕 $$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=n^2+1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}=(n-1)^2+1$$

$$\therefore\quad a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1.\qquad n\geqq 2$$

$$\therefore\quad a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=7\cdots\cdots$$

又在 (1) 式,以 $n=1$ 代入,則 $S_1=a_1=1+1=2$.

故原級數爲 2, 3, 5, 7,……

故若除去初項,則爲等差級數 3, 5, 7,…….

〔類題〕

1. 最初 n 項之和爲 $4n^2$, 其級數如何?決定其級數,且書出其一般項.

2. 一等差級數,不論 n 之值如何,最初 n 項之和等於 $n(15+n)$, 求此級數之初項及公差.

(例 **5**) a^2, b^2, c^2 若爲 A. P.,

則 $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ 亦爲 A. P., 試證之.

〔着眼點〕 (1) 假設與終結皆爲 A. P., 故以等式表之.

(2) 項數祇有三項,故不必用公差,祇須將假設書作

$$2b^2=a^2+c^2\cdots\cdots(a)\quad 或\quad a^2-b^2=b^2-c^2\cdots\cdots(b)$$

(3) 終結爲 $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{2}{c+a}$ 或 $\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{1}{c+a}-\dfrac{1}{a+b}$.

用 (b) 好像較用 (a) 爲佳.

〔解〕 欲證 $$\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b},$$

祇須證 $\dfrac{(c+a)-(b+c)}{(b+c)(c+a)}=\dfrac{(a+b)-(c+a)}{(c+a)(a+b)}$, 即已充分 (Sufficient).

$$\frac{a-b}{(b+c)(c+a)}=\frac{b-c}{(c+a)(a+b)}.$$

$$\because\quad \frac{1}{c+a}\neq 0,\qquad \therefore\quad \frac{a-b}{b+c}=\frac{b-c}{a+b}.$$

$$(a-b)(a+b)=(b-c)(b+c).$$

$$a^2-b^2=b^2-c^2.$$

因 a^2, b^2, c^2 爲 A. P., 故 $a^2-b^2=b^2-c^2$.

故 $$\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}.$$

卽
$$\frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a},\ \frac{1}{a+b}\ 爲\ \text{A. P.}$$

〔注意〕 用此法證明，必須注視逆之成立與否. 欲證　式爲可，"祇須證某式卽已充分"，若不充分，卽不成立.

〔類題〕

1. 若 a, b, c 爲 A. P.，則 $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ 亦爲 A. P.，試證之.

2. 若 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 爲 A. P.，則 $(s-a)^2$, $(s-b)^2$, $(s-c)^2$ 亦爲 A. P.，試證之.

$$\left[s=\frac{1}{2}(a+b+c)\right]$$

第二十一章　等比級數(G. P.)

設初項爲 a, 公比爲 r, 項數爲 n, 末項爲 l, 總和爲 S, 則有次之關係:

$$l = ar^{n-1},$$

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}. \quad (r \doteqdot 1)$$

(例 1)　有一等比級數, 若第一項, 第二項, 第三項之和爲 26, 第一項, 第三項, 第五項之和爲 182, 則其初項及公比各爲多少?

〔着眼點〕　設初項爲 a, 公比爲 r, 則自題意得二個方程式, 故可求 a 與 r.

〔解〕　設初項爲 a, 公比爲 r, 則

$$a + ar + ar^2 = 26 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a + ar^2 + ar^4 = 182 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

a, r 都不爲 0.

$(2) \div (1) \cdots\cdots 1 - r + r^2 = 7.$

$$r^2 - r - 6 = 0, \quad \therefore \quad r = 3 \text{ 或 } -2.$$

故 $r = 3$ 時, $\quad a(1+3+9) = 26, \quad \therefore \quad a = 2.$

$r = -2$ 時, $\quad a(1-2+4) = 26, \quad \therefore \quad a = \frac{26}{3}.$

故所求之初項爲 2, 公比爲 3 及初項爲 $\frac{26}{3}$, 公比爲 -2.

〔類題〕

1.　有項數爲 7 的 G. P., 公比爲正數, 最初三項之和爲 26, 最後三項之和爲 2106, 求各項.

2.　有爲等比級數之三數, 其和爲 28, 平方之和爲 336, 求各數.

3.　有等比級數, 其第 n 項與第 $2n$ 項之和爲 l, 又第 $2n$ 項與第 $3n$ 項之和爲 m, 求其公比.

4．有爲等比級數之四數，其和爲 200，兩端之項之和爲 140，求此級數．

例 **2)**　求次之級數最初 n 項之和：

$$1,\ 2-r,\ 3-r+r^2,\ 4-r+r^2-r^3,\cdots\cdots$$

〔着眼點〕　(1)　全體觀之，不知其爲何種級數．

但其一部分如　$-r,\ -r+r^2,\ -r+r^2-r^3\cdots\cdots$

爲公比 $-r$ 的等比級數．

(2)　不以 $-r$ 作初項，而以 1 作初項亦可．

(3)　原級數看作 $1,\ 1+(1-r),\ 2+(1-r+r^2),\cdots\cdots$ 用適當之組合，可求其和．

〔解〕　所求之和設爲 S，則

$$S=1+(2-r)+(3-r+r^2)+(4-r+r^2-r^3)+\cdots\cdots+(\text{第 } n \text{ 項})$$
$$=1+\{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)\}$$
$$+\{(1-r)+(1-r+r^2)+(1-r+r^2-r^3)+\cdots\cdots+\text{第}(n-1)\text{項}\}.$$

(1)　$r+1\fallingdotseq 0$ 時，

$$S=1+\frac{(n-1)n}{2}+\left\{\frac{1-r^2}{1+r}+\frac{1+r^3}{1+r}+\frac{1-r^4}{1+r}+\cdots\cdots+\text{第}\ (n-1)\ \text{項}\right\}$$

$$=1+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n-1}{1+r}+\frac{1}{1+r}\{-r^2+r^3-r^4+\cdots\cdots+\text{第}\ (n-1)\ \text{項}\}$$

$$=1+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n-1}{1+r}-\frac{r^2+(-1)^n r^{n+1}}{(1+r)^2}\cdots\cdots\text{答}.$$

(2)　$r+1=0$，卽 $r=-1$ 時，

$$S=1+(2+1)+(3+1+1)+(4+1+1)+\cdots\cdots+(\text{第 } n \text{ 項})$$
$$=1+3+5+7+\cdots\cdots+(\text{第 } n \text{ 項})$$
$$=\frac{n}{2}\{2+(n-1)\times 2\}=n^2\cdots\cdots\text{答}.$$

〔類題〕

1．初項爲 a，公比爲 r 的等比級數，若以 S_n 表自第一項至第 n 項之和，則 $S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_n$ 之值如何？

2．$x=10$，$n=10$ 時，試計算次式之值：

$$(x^2-1)\left(\frac{1}{x^2}+1\right)+(x^3-1)\left(\frac{1}{x^2}+1\right)+\cdots\cdots+(x^n-1)\left(\frac{1}{x^n}+1\right).$$

3. 有一級數,其初項爲 1, 各偶數項等於其前項之 a 倍,各奇數項爲其前項之 b 倍,求此級數自初項至第 $2n$ 項之和.

(例 3) 自等比級數之初項至第 n 項之和爲 A, 至第 $2n$ 項之和爲 B, 至第 $3n$ 項之和爲 C, 則 $A^2+B^2=A(B+C)$, 試證之.

〔着眼點〕 (1) 設初項爲 a, 等比爲 r, 則 A, B, C 之值能以 a, r, n 表出.

(2) 以此等值分別代入左右而比較之.

〔解〕 設初項爲 a, 公比爲 r, 則 $r\fallingdotseq 1$ 時,

$$A=\frac{a(1-r^n)}{1-r},$$

$$B=\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}=\frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r}=A(1+r^n),$$

$$C=\frac{a(1-r^{3n})}{1-r}=A(1+r^n+r^{2n}).$$

$$\therefore\quad A^2+B^2=A^2+A^2(1+r^n)^2=A^2(2+2r^n+r^{2n}),$$

$$A(B+C)=A\{A(1+r^n)+A(1+r^n+r^{2n})\}=A^2(2+2r^n+r^{2n}),$$

$r=1$ 時,略之.

〔類題〕

1. 等比級數自初項至第 n 項之和設爲 A, 逆數之和爲 B, 又此 n 項之連乘積爲 P, 則 $P^2=\frac{A^n}{B^n}$, 試證之.

2. $S=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$,

$$S'=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}.$$

若爲二等比級數,則 $S=a_1a_nS'$, 試證之.

3. 有一等比級數,自初項至第 p 項,第 $2p$ 項,第 $3p$ 項之和各爲 x, y 及 z, 則 x, y, $y+z-x$ 亦爲等比級數,試證之.

4. 若 $a+b+c$, $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ 爲以公比爲 r 之 G. P. 則 $r^3+r^2+r=1$, 試證之.

(例 4) a, b, c 爲等比級數, 若 $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{b+c}{2}$, 則 $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$, 試證之.

〔着眼點〕 (1) 若 a, b, c 爲 G. P.,

則 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=k$,　∴　$b=ak$, $c=ak^2$; 或 $b^2=ac$.

(2) 以 x, y 之値代入終結,求左邊之値.

〔解〕 因 a, b, c 爲 G. P., 故

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{a}=k,\quad \therefore\quad b=ak,\ c=ak^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x=\frac{a+b}{2},\quad y=\frac{b+c}{2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 (1), (2) 代入欲證之式之左邊,則

$$\begin{aligned}\frac{a}{x}+\frac{c}{y}&=\frac{2a}{a+b}+\frac{2c}{b+c}\\&=\frac{2a}{a+ak}+\frac{2ak^2}{ak+ak^2}\\&=\frac{2}{1+k}+\frac{2k^2}{k(1+k)}\\&=\frac{2k+2k^2}{k(1+k)}\\&=\frac{2k(1+k)}{k(1+k)}\\&=2.\end{aligned}$$

〔類題〕

1. 若 x, y, z 爲 G. P., 則 x^2+y^2, $yx+yz$, y^2+z^2 亦爲 G. P., 試證之

2 若 l, m, n, r 爲 G. P., 試證:

$$(l+m+n+r)^2=(l+m)^2+(n+r)^2+2(m+n)^2.$$

〔例 5〕 有一無限等比級數,其總和爲 $\frac{3}{2}$, 若取去其第偶數各項,則其和變爲 $\frac{9}{8}$, 求原級數之初項及公比.

〔着眼點〕 無限等比級數之總和 $S=\frac{a}{1-r}$ $(|r|<1)$.

〔解〕 設無限等比級數之初項爲 a, 公比爲 r $(|r|<1)$, 則

$$\frac{a}{1-r}=\frac{3}{2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

取去偶數各項後之無限級數,其初項仍爲 a, 公比則爲 r^2. 故

$$\frac{a}{1-r^2}=\frac{9}{8}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$(1)\div(2)$, 得 $1+r=\frac{4}{3}$, $\therefore\ r=\frac{1}{3}$ (此數其絕對值小於 1, 故可採用爲無限等比級數之公比).

以此代入 (1), 則 $a=1$, 故初項爲 1, 公比爲 $\frac{1}{3}$.

〔類題〕

1. 求 $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\frac{2}{5^5}+\frac{3}{5^6}+\cdots\cdots$ 無限項之總和.

2. 有一無限等比級數,其總和爲 $\sqrt{3-\sqrt{5}}$, 其初項,第二項,第四項成等差級數,求其初項.

3. 有皮球若自地躍高之距離爲落下高度之 $\frac{8}{10}$, 則此球自高 a 米之處落下,至靜止爲止,所運動之距離共長多少?

4. 某人有法幣 a 元,經商時第一次,損失其所有額之 $\frac{1}{2}$, 第二次得利其第一次損失之 $\frac{1}{3}$, 第三次損失其第二次得利之 $\frac{1}{2}$, 第四次得利其第三次損失之 $\frac{1}{3}$, 若依上述狀態至無窮,則此人之所有法幣結果爲多少?

第二十二章　調和級數(H. P.)

〔例 1〕 a, b, c 若爲 H. P., 則 $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ 亦爲 H. P., 試證之.

〔着眼點〕 因逆數爲等差級數, 故以式表所設條件之方法有二, 可參照等差級數項下.

〔解〕 因 a, b, c 爲 H. P., 故

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}, \quad \therefore \quad \frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

欲證 $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ 爲 H. P., 祇須證次之等式即可.

$$\frac{c+a}{b}-\frac{b+c}{a}=\frac{a+b}{c}-\frac{c+a}{b}.$$

$$左邊=\frac{ac+a^2-b^2-bc}{ab}=\frac{(a-b)(a+b+c)}{ab} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$右邊=\frac{ab+b^2-c^2-ac}{bc}=\frac{(b-c)(b+c+a)}{bc}.$$

以 (1) 之關係代入, 則

$$=\frac{(a-b)(a+b+c)}{ab} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

〔類題〕

1. a, b, c 爲調和級數時, $\frac{a}{b+c-a}, \frac{b}{c+a-b}, \frac{c}{a+b-c}$ 亦爲調和級數, 試證之.

2. 不相等之三數 a, b, c 若爲 A. P., 且 a^2, b^2, c^2 爲 H. P., 則 $-\frac{a}{2}, b, c$ 爲 G. P., 試證之.

3. $a\ b, c, d$ 若爲調和級數, 則 $3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$, 試證之.

4. a, b, c 若爲調和級數,則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}=0$, 試證之.

(例 2) 調和級數之第 m 項若爲 α, 第 n 項若爲 β, 試求其第 $(m+n)$ 項.

〔着眼點〕 一切的調和級數問題,都變成逆數,作爲等差級數而解之.

〔解〕 調和級數取其逆數,則成等差級數,設此等差級數之初項爲 a, 公差爲 d, 則其第 m 項爲 $\frac{1}{\alpha}$, 第 n 項爲 $\frac{1}{\beta}$.

$$\therefore \quad \frac{1}{\alpha}=a+(m-1)d \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{\beta}=a+(n-1)d \cdots\cdots(2)$$

第 $(m+n)$ 項爲 $\quad a+(m+n-1)d \cdots\cdots(3)$

自 (1), (2) 求 a, d.

$$(1)-(2)\cdots\cdots\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=(m-n)d, \quad \therefore \quad d=\frac{\beta-\alpha}{(m-n)\alpha\beta}.$$

以此 d 之值代入 (1), 則

$$a=\frac{1}{\alpha}-(m-1)\frac{\beta-\alpha}{(m-n)\alpha\beta}$$

$$=\frac{m\alpha-n\beta+\beta-\alpha}{(m-n)\alpha\beta}.$$

$$\therefore \quad \text{第 } (m+n) \text{ 項爲 } \frac{m\alpha-n\beta+\beta-\alpha}{(m-n)\alpha\beta}+\frac{(m+n-1)(\beta-\alpha)}{(m-n)\alpha\beta}$$

$$=\frac{m\beta-n\alpha}{(m-n)\alpha\beta}.$$

故所求之 H. P. 之第 $(m+n)$ 項爲 $\frac{(m-n)\alpha\beta}{m\beta-n\alpha}$.

〔類題〕

1. 某調和級數之第二項及第四項,若各爲 $\frac{4}{5}$ 及 -4, 試求其第五項

2. 若 x, y, z 各爲某調和級數的第 p 項,第 q 項,第 r 項,則 $(q-r)yz+(r-p)zx+(p-q)xy=0$, 試證之.

第二十三章　雜級數

(例 **1**)　$S=x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots+nx^n$, 試簡化之.

若 $|x|<1$, 且 n 漸漸增大,則 S 如何?

〔着眼點〕 若係數相等,則爲等比級數,故以 S 爲未知數,設法使係數相等.

〔解〕
$$S=x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots+nx^n,$$
$$xS=x^2+2x^3+\cdots\cdots+(n-1)x^n+nx^{n+1},$$
$$(1-x)S=(x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n)-nx^{n+1}$$

$x\neq1$ 時,　$$=\frac{x(1-x^n)}{1-x}-nx^{n+1}=\frac{x-(1+n)x^{n+1}+nx^{n+2}}{1-x}.$$

$\therefore$ $x\neq1$ 時,　$S=\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$

$x=1$ 時,　$S=\dfrac{n(n+1)}{2}.$

$|x|<1$ 時,且 n 漸漸增大,則 S 漸漸與 $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ 相近.

〔類題〕

1. 次之級數,求其最初 n 項之和:

$$1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

2. 求 $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots+(2r+1)x^r+\cdots\cdots n$ 項之和.

3. 求次無限級數之總和:

$$0.3+0.33+0.333+\cdots\cdots$$

4. 次之級數,試求其自初項至第 n 項之和:

$1,\ 1+r,\ 1+r+r^2,\ 1+r+r^2+r^3,\cdots\cdots$　(r 不爲 0, 亦不爲 1)

5. 試計算次之級數,自初項至第 $(n+1)$ 項之和:

$$x^n,\ (a+b)x^{n-1},\ (a^2+2b)x^{n-2},\ (a^3+3b)x^{n-3},\cdots\cdots$$

(例 2)　試證 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

〔解〕　自恆等式　$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$,

得　$(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$.

以 1, 2, 3,……, n 代入上式中之 x, 則得

$$\begin{array}{l}2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1\\3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1\\4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\+)\ \underline{(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1}\\(n+1)^3-1=3(1^2+2\ +3^2+\cdots\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n\end{array}$$

設 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=S$, 則

$$(n+1)^3-1=3S+\frac{3n(n+1)}{2}+n.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 6S&=2(n+1)^3-3n(n+1)-2n-2\\&=(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}=(n+1)(2n^2+n)\\&=n(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

〔練題〕

$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+n^3$ 之和,試求之.

(例 3)　求 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots n$ 項之和.

〔着眼點〕　(1)　此種問題,須求其一般項,第 n 項爲 $n(n+1)$, 且須改作和之形,即 n^2+n.

(2)　即易看出爲自然數平方之和,與自然數之和.

〔解〕　因一般項爲 $n(n+1)=n^2+n$, 故

$$\begin{aligned}&2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)\\&=n^2+(n-1)^2+\cdots\cdots+2^2+1^2+n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{2n+1+3\}\\&=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

〔類題〕

1. 求 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots n$ 項之和.

2. 求 $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\cdots\cdots n$ 項之和.

3. 求 $1^2+5^2+9^2+13^2+\cdots\cdots$ 之 n 項之和.

〔例 4〕 求 $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ 之和.

〔着眼點〕 (1) 如例 (3) 求其一般項,而改作和之形.

(2) 設 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$, 而求 A, B, 則得 $A=1$, $B=-1$.

〔解〕 一般項爲 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\cdots\cdots-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

〔類題〕

$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots n$ 項之和.

第二十四章　對數

〔定義〕

a 爲不等於 1 之正數, $a^x=n$ 時,書作 $x=\log_a n$, x 稱爲以 a 爲底 n 之對數.

〔對數之性質〕

1.　自上定義,知 n 爲 0 或爲負時之對數 x 不存在.

2.　$\log_a 1=0$, 卽 $n=1$ 時, $x=0$.

3.　$\log_a a=1$, 卽 $n=a$ 時, $x=1$.

〔公式〕

1.　$\log_a mn=\log_a m+\log_a n$.

2.　$\log_a \frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$

3.　$\log_a n^m=m\log_a n$ 及 $\log_a \sqrt[m]{n}=\frac{1}{m}\log_a n$.

(例 1)　試證 $\log_a n=\frac{\log_b n}{\log_b a}$.

〔着眼點〕　改作冪指數,而解之.

〔解〕　設 $\log_a n=x$, $\log_b n=y$, $\log_b a=z$,

然後證 $x=\frac{y}{z}$, 卽 $xz=y$.

$$\left.\begin{aligned} n&=a^x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ n&=b^y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ a&=b^z\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$$

自 (1), (2),　$a^x=b^y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

以 (3) 代入 (4),　$b^{zx}=b^y$,　$\therefore$　$xz=y$,　$x=\frac{y}{z}$.

$$\therefore \quad \log_a n=\frac{\log_b n}{\log_b a}.$$

〔類題〕

1. 試證 $\log_a b\times\log_b a=1$.

2. 求 $\log_a b\times\log_b c\times\log_c a$ 之值.

3. 試證 $(\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)-\log_2\sqrt[4]{32}=0$.

〔例 2〕 知 $\log 2=0.301030$, $\log 3=0.477121$, 試決定 $5^{17}\times 9^{18}$ 之積爲幾位之整數?

〔着眼點〕 由常用對數指標之法則,卽眞數之位數較指標大 1.

〔解〕 設原式爲 P, 則 $P=5^{17}\times 9^{18}$.

$$\begin{aligned}\therefore \quad \log P&=17\log 5+18\log 9\\&=17(\log 10-\log 2)+18\times 2\log 3\\&=17(1-0.301030)+36\times 0.477121\\&=29.055746.\end{aligned}$$

故 P 爲30 位之整數.

〔類題〕

(1) 求 $\left(\frac{81}{80}\right)^{2000}$ 整數部分之位數.

(2) $\left(\frac{5}{6}\right)^{1000}$ 小數點至有效數字間, 0 之個數.

(知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$)

〔例 3〕 $(1.08)^x$ 之整數部分,若爲二位數,則 x 之値如何?(設 x 爲正整數,知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$)

〔着眼點〕 (1) $\log(1.08)^x$, 卽 $x\log 1.08$ 在 2 與 1 之間,決定 x 之値.

(2) $\log 1.08$ 可變爲小數.

〔解〕 $\log(1.08)^x=x\log 1.08=x\{\log 108-2\}$.

$$\begin{aligned}\log 108=\log(2^2\times 3^3)&=2\log 2+3\log 3\\&=2\times 0.30103+3\times 0.47712=2.03342.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \log(1.08)^x=0.03342x.$$

整數部分爲二位數,故 $2>\log(1.08)^x>1$

$$\therefore \quad 2>0.03342x>1.$$

$$59.\cdots\cdots > x > 29.\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad 59 \geqq x \geqq 30.$$

〔類題〕

1. 設 x 爲正整數,若 1.35^x 之整數部分爲 5 位數,則 x 之最大及最小值如何?(知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$)

2. 若 $3\times3^2\times3^3\times3^4\times\cdots\cdots$恰超過 1,000,000,000, 則須乘至 3 之幾羃爲止.(知 $\log 3=0.47712$)

(例 **4**) 試化 $\log\frac{28}{15}-2\log\frac{3}{14}+3\log\frac{6}{7}$ 爲最簡之式,且求其值.(知 $\log 2=0.30103$)

〔着眼點〕 用公式化成積,然後利用約分.

〔解〕 $$原式=\log\left\{\frac{28}{15}\div\left(\frac{3}{14}\right)^2\times\left(\frac{6}{7}\right)^3\right\}$$

$$=\log\left(\frac{28}{15}\times\frac{14^2}{3^2}\times\frac{6^3}{7^3}\right)=\log\frac{2^7}{5}=\log\frac{2^8}{10}$$

$$=8\log 2-\log 10$$

$$=8\times0.30103-1=1.40824.$$

卽 $\quad$ 原式 $=1.40824.$

〔類題〕 知 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$, $\log 7=0\ 8451$, 求次諸式之値:

1. $\log(3\div\sqrt[3]{225}\times\sqrt{12}).$

2. $\frac{1}{2}\log 20449+\log\frac{4}{7}-\log\frac{13}{35}+\log\frac{5}{11}.$

3. $\log\sqrt{54}-\log\left(\frac{7.2}{27}\right)^2+\log\frac{8}{3}\sqrt{0.6}-2\log 15.$

第二十五章　指數方程式及對數方程式

(例 **1**)　試解次方程式：(知 $\log 2=0.301$)

$$5^{7-3x}=2^{x+4}.$$

〔着眼點〕　取兩邊之對數.

〔解〕　$(7-3x)\log 5=(x+4)\log 2.$

$$(7-3x)\log\frac{10}{2}=(x+4)\log 2.$$

$$(7-3x)(1-\log 2)=(x+4)\log 2.$$

就 x 而整理之，

$$(2\log 2-3)x=11\log 2-7.$$

$$x=\frac{11\times 0.301-7}{2\times 0.301-3}=1.538.$$

〔類題〕

1.　試解 $5^{2x}-10\times 5^{x}+21=0.$

(知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$, $\log 7=0.84510$)

2.　試解 $7^{5-3x}-5^{x+1}=0$. (根之值小數第五位，四捨五入)

(知 $\log 7=0.84510$, $\log 5=0.69897$)

3.　試解 $5^{-x}=\dfrac{106-5^{x+2}}{24}$ 根之值，求至小數第三位.

(知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$)

4.　試解次之聯立方程式：

$$2^{x+y}=9\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\qquad 3^{x-y}=4\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

求至小數第三位. (知 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$)

(例 **2**)　試解 $\log(x^3-1)-\log(x-1)=1.$

〔着眼點〕　化作 $\log A=\log B$ 之形，取兩邊之眞數 $A=B$ 而解之.

〔解〕 $\log(x^3-1)-\log(x-1)=1$ ……………………………………(1)

$$\log\frac{x^3-1}{x-1}=\log 10,\quad \therefore\quad \frac{x^3-1}{x-1}=10.$$

$x-1$ 爲 (1) 式之眞數,故不能爲 0.

$$\therefore\quad x^2+x+1=10.$$

解之,得
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}.$$

此兩値中, $\frac{-1-\sqrt{37}}{2}$ 使 (1) 式之眞數爲負, $\frac{-1+\sqrt{37}}{2}$ 不使 (1) 式之任何眞數爲 0 或爲負.

故所求之値爲 $\frac{-1+\sqrt{37}}{2}$.

〔類題〕

1. 試解 $2\log(3x-1)+\log(x+1)=0$.

2. 試解 $\left.\begin{aligned}&\log(x-y)+\log(7x-8y)=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\&\log(x^3+y^3)-\log(x^2-xy+y^2)=1 \cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}$

答　　案

P. 4　1. $a=\frac{22}{21},\ b=-\frac{207}{7}$.

2. 2.

3. $1:-3:-4$.

4. 所設之式能爲 $x-1$ 及 $x+1$ 整除,故由剩餘定理,

$$1+p+q+a^2=0,\ 1+p-q+a^2=0.$$

自此導出　$p=-(1+a^2),\ q=0$.

P. 4　1. x^3+2x^2-2x-5,

設所求之三次式爲 ax^3+bx^2+cx+d.

2. 設 $A=Q(x-2)(x-3)+ax+b$, 以 $x=2$ 及 $x=3$ 代之, 求 a, b. $4x-3$.

P. 5　1. 以 $x=a$ 及 b 代入所設之式,

$$a^3-3b^2a+2c^3=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$b^3-3b^3+2c^3=0,$$

$$-2b^3+2c^3=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

自 (2), 得 $b=c\cdots\cdots(A)$ 或 $b^2+bc+c^2=0\cdots\cdots(B)$

(B) 左邊爲 $\left(b+\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2$, 故 $b=c=0$. 代入 (1), 故得 $a=b=c=0$. $b=c$ 時代入 (1), 得 $(a-b)^2(a+2b)=0$, $\therefore$ $a=b$ 或 $a=-2b$, 故 $a=b=c$ 或 $a=-2b=-2c$.

2. $x^2-(ay+bz)+abyz=(x-ay)(x-bz)$.

以 ay, bz 代入所設之式之 x 中,求出 y^n, 相等之,作等式.

3. 以 h 代入所設之式之 x 中

$$-k^3+ah^2-bh+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$h^2-bh+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$(1)-(2)$, $-y^3+(a-1)h^2=0$, $\therefore\ h=(a-1)$. 以此代入 (2),

$(a-b)^2-(a-1)b+c=0$.

P. 6 **1.** $x^l-1=(x-1)(x^{l-1}+x^{l-2}+\cdots\cdots+x+1)$.

$x^{l-1}+x^{l-2}+\cdots\cdots+x+1$. 若 $x=1$, 則爲

$$1+1+\cdots\cdots+1=l.$$

因之所設之式在 $(x-1)(x-1)$ 以外之因子中,若 $x=1$, 則爲 $nlm-2lmn+mnl=0$.

$\therefore$ 能以 $(x-1)(x-1)(x-1)$ 整除.

2. 所設之式 $=x^n(x-p)-p^n(x-p)=(x-p)(x^n-p^n)$.

x^n-p^n 式中 $x=p$ 時爲 0.

$\therefore$ 有 $x-p$ 之因子,故能以 $(x-p)^2$ 整除.

P. 6 **1.** 設原式爲 A, $A=B(x-a)+p$,

$$B=B'(x-b)+q,$$

$$B'=B''(x-c)+r.$$

$$\begin{aligned}A&=[\{B''(x-c)+r\}(x-b)+q](x-a)+p\\&=B''(x-c)(x-b)(x-a)+r(x-b)(x-a)+q(x-a)+p.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\\=(x-a)(x-b)(x-c).\end{aligned}$$

故所求之答爲:

(1) $q(x-a)+p$. (2) $r(x-b)(x-a)+q(x-a)+p$.

2. $3x-10$.

3. 設所求之三次式爲 p,

$$p=(2x^2-5x+3)(3x+4)+n.$$

自其他一條件決定 n, $n=-3$.

P. 7 **1.** $9\times(81)^n+1=9\times(9^2)^n+1=9^{2n+1}+1$.

$10=9+1$, 此數字 9, 看作與剩餘定理中 x 相當.

2. 若以 x 表 10, 則 5 位整數可以 $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ 表之. $(a\neq0)$

$(a+c+e)\sim(b+d+f)$ 爲 11 之倍數.

$11=10+1,\quad 10+1=x+1.$

3. $8=7+1$, 故 $7^{2n+1}+1$ 能爲 $7+1$ 所整除.

又 $24=5^2-1$, $5^{2n}-1=(5^2)^n-1$.

P. 9　1. $A=3$, $B=-4$.

2. $a=1$, $b=-4$, $c=1$.

3 自恆等式,得 $a+p=5$, $ap=m$, $aq+bp=1$, $b+q=1$, $bq=-2$. 因之得 $a=2$, $p=3$ 或 $a=3$, $p=2$, 故 $m=ap=6$.

4. $A=1$, $B=6$, $C=7$, $D=1$.

5. 商 $=x^2-ax+(a^2-b)$.

剩餘 $=(2ab-a^3)x+1+b^2-a^2b$.

$a=\pm\sqrt{2}$, $b=1$.

6 $p=7$ 或 5.

P. 10　1. $k=-10$.

2. 所設之式設爲 $(px+qy-1)(p'x+q'y+1)$, 得

$$(1+a^2)k^2=1.$$

P. 11　1 $p=-6$, $q=1$.

2 所設之式設爲 $(x^2+px+q)^2$, 比較係數, 作出等式, 消去 p, q.

3. 設 $ax^3+bx^2+cx+d=(x+p)(ax^2+qx+r)$.

由比較係數消去 p, q, r.

4 $b^2=3ac$, $c^2=3bd$, $\quad\therefore\ \dfrac{bc}{ad}=9$.

5. 整式之平方根爲 $\pm(2x^2-65x+12)$。

於此設 $x=26$, 則爲 ±326.

6. $a=-6$, $b=92$, $c=105$.

或 $a=38$, $b=-92$, $c=137$.

P. 13　1 $(ay+bx)(ax+by)$.

2. $(x^2-y)(x-x^2y+y^2)$

3 $-(x-1)(2x-3)$.

P. 13　1 $(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$.

2. $(x+y)^3(x-y)$.

3. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

P. 14 4. $(3a^2+ab+2b^2)(3a^2-ab+2b^2)$.

P. 14 1. 三角形二邊之和大於餘一邊,故自前例知爲負.

2. $(a^2+\sqrt{2}ab+2b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+2b^2)$.

P. 15 1. $(2x-3)(3x-2)$.

2. $\{x+b(a-z)\}\{x-a(b+z)\}$.

3. $\{(a-2b)x+(a^2+b^2)y\}\{(a+2b)x+(a^2-b^2)y\}$.

4. $(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2-2x-1)$.

5. $2x^2-5xy+y^2$, 等於 $(2x-y)(x-2y)$.

$$(2x-y-5)(x-2y-5).$$

P. 16 1. $(a^2+b^2+c^2)^2$.

2. 就 a 而整理,然後解之, $(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

3. 就 x 而整理,然後解之, $(x-y)(x-z)(y-z)$.

P. 17 1. 設 $2x^2-x=y$ 而解之,

$$(2x^2-x-8)(8x+7)(x-4).$$

2. $(x^2+5xy+3y^2)(x^2+5xy+7y^2)$.

P. 18 1. $(x-24)(x+54)$.

2. $(6a+9x)(3a-x)$.

3. $(4a-91b)(a-15b)$.

4. $(x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7})$.

5. $(2x+y-3)(x-3y+2)$.

6. $(x-y+z)(x+y-3z)$.

P. 19 1. $(a-b)(x+a+b)(x-a-b)$.

2. 以 $2x+a+b=(x+a)+(x+b)$, 然後應用 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, 或以 $(x+b)^3-(2x+a+b)^3$ 用公式 7 解之, $-3(x+a)(x+b)(2x+a+b)$.

3. 作爲 $\{(a+b+c)^3-a^3\}-(b^3+c^3)$ 而解之,

$$3(b+c)(a+b)(a+c).$$

4. 先括出公因子 $x-y$ 而解之.

$$(x-y)(x+y+1)(x+y-1).$$

P. 19 **1.** $(x+2y-5z)(x^2+4y^2+25z^2-2xy+5xz-10yz).$

2. $2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$

P. 20 **1.** $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$
$$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}.$$

然後以 x, y, z 之值代入之,則得

$$52(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

2. $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$

$$x+y+z=b-c+c-a+a-b=0.$$
$$\therefore\quad x^3+y^3+z^3-3xyz=0.$$

3. 加 $(z-x)^3$ 於 $(y-z)^3+(x-y)^3-3(y-z)(z-x)(x-y)$, 則爲 0, 故所設之式 $=-(z-x)^3$ 或 $(x-z)^3$.

4. 左邊 $=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-pr-qr)$

$$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(a+b+c)^2$$
$$\times(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2$$
$$=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

P. 21 **1.** $24abc.$

2. $(a+b)(b+c)(c+a).$

3. $-(x-y)(y-z)(z-x)(yz+zx+xy).$

4. $5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).$

P. 22 **1.** $2x+1.$

2. $a(a+b).$

3. G. C. M. $=x-1.$

L. C. M. $=(x-1)\{x^2+(1+3p)x+(1+3p)\}$

$$\times\{px^2+px-(3+8p)\}.$$

P. 24 **1.** G. C. M. $=x^2-3x+7.$

L. C. M. $=x^5-x^4+3x^3+3x^2+29x-35.$

2. G. C. M. $=x-a.$

L. C. M $=12x^6+4ax^5-8a^3x^3+6a^4x^2+2a^5x+2a^6$.

3. $\dfrac{3x^2-4x+2}{2x^2+7}$.

4. $\dfrac{3}{2}$.

P. 25 **1.** 有一次 G. C. M., 故 $p \neq q$, 二式之差爲 $(p-q)(x-1)$, 故 G. C. M. 爲 $x-1$.

祇須證 $$(x^2+px-q)(x^2+qx+p)$$
$$=\{x^3+(pq+p+q)x-pq\}(x-1)$$

卽可.

2. 與 (1) 同樣.

P. 25 **1.** x^2-3x+2, x^2-4x+3.

2. $(x^2-1)(x+2)$, $(x^2-1)(x+3)$,

或 (x^2-1), $(x^2-1)(x+2)(x+3)$.

3. $(x+a)(x+b)$, $(x+a)(x+b)(x-c)$,

或 $(x+a)$, $(x+a)(x+b)(x-c)$;

$(x+a)(x-c)$, $(x+a)(x+b)$.

P. 26 **1.** 做前例,設 $a'b'g^2=540=2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, 自 $g=2, 3, 6$ 及 a', b' 無公因子,決定 a', b'.

2, 270; 10, 54; 3, 180; 9, 60; 12, 45;

15, 36; 6, 90; 18, 30.

2. 設二數爲 a, b, $a=8025a'$, $b=8025b'$, 則 $a'+b'=16$, a', b' 無公因子,決定 a', b'.

8025, 120375; 24075, 104325;

40125, 88275; 56175, 72225.

3. L. C. M. $=96=a'\times 6$, $\therefore$ $a'=16$.

$b=gb'=6$, a', b' 無公因子,故 $b'=1$ 或 3, $\therefore$ 16, 6; 48, 6.

P. 27 **1.** 二式相減,知 $(a-a')x+(b-b')$ 爲 G. C. M. 又自(第一式 $\times b'$ − (第二式) $\times b$, 得 $(b'-b)x^2+(ab'-a'b)x$, 知 $(b'-b)x+(ab'-a'b)$ 爲公約數.

$$\therefore \quad \frac{a-a'}{b'-b}=\frac{b-b'}{ab'-a'b}.$$

2. 與上題同樣可解.

P. 28 1. 自 $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$. 應用實數條件, $a=b=c$.

2. 將式之兩邊 2 倍之,湊成平方之形,再自 a, b, c 爲實數之條件,得 $a+b+c=0$.

P. 29 3. 去分母, 然後自 $(xy-1)^2+(x-y)^2=0$ 及 x, y 爲非零之實數的條件,證 $x=y=1$.

P. 29 1. 移項, $(b^2-ac)^2+(c^2-bd)^2+(ad-bc)^2=0$.

$\therefore \quad b^2=ac,\ c^2=bd,\ ad=bc.$

$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, 即 a b, c, d 爲 G. P.

P. 30 2. 自所設之式, $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$.

$a+b+c\neq 0, \quad \therefore \quad a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0.$

因之, $a=b,\ b=c,\ c=a.$

$\therefore \quad (a-b)(a+b+c)=0,\ a^2-b^2+ca-bc=0,$

$a^2-bc=b^2-ca.$

同樣, $b^2-ca=c^2-ab.$

3. $2(x-y)^2+6(y-z)^2+3(x-z)^2=0. \quad \therefore \quad x=y=z.$

4. 自所設之式, $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0.$

$a^2-b^2=0,\ c^2-d^2=0,\ ab-cd=0.$

因之, $a=\pm b,\ c=\pm d,\ a^2=c^2.$

故 $a=b=c$, 注意 a, b, c 爲同符號.

5. 化成平方之和,得

$ab=cd\cdots\cdots(1) \quad ad=cb\cdots\cdots(2) \quad ac=bd\cdots\cdots(3)$

自 (1), (2), $ab\cdot cb=cd\cdot ad,$

$ac\neq 0, \quad b^2=d^2.$

b, d 皆爲正, $\therefore \quad b=d.$

同樣 得 $a=b=c=d$

P. 30 1. 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=K$，消去 x, y, z.

故
$$\frac{ax}{a^2}=\frac{by}{b^2}=\frac{cz}{c^2}=\frac{x^2}{ax}=\frac{y^2}{by}=\frac{z^2}{cz},$$
$$\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz},$$

去分母.

2. 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=K$，以 x, y, z 代入欲證之式之左邊，計算之則爲 1.

P. 31 3. 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=K$，消去 x, y, z，左右兩邊之值各自求出，而比較之.

P. 31 1. 設 $a(by+cz-ax)=b(cz+ax-by)$
$$=c(ax+by-cz)=abcK,$$

則 $abc\neq0$，
$$by+cz-ax=bcK \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$cz+ax-by=acK \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$+)\ ax+by-cz=abK \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$
$$ax+by+cz=K(ab+bc+ca) \cdots\cdots(4)$$

(4) − (1)，
$$x=\frac{K(ab+ca)}{2a}=\frac{K(b+c)}{2}.$$

同樣，得
$$y=\frac{K(a+c)}{2},$$
$$z=\frac{K(a+b)}{2}.$$

因之計算各邊之值.

2. 以所設之式爲 K，則

$-x+2y+2z=aK$，$2x-y+2z=bK$，$2x+2y-z=cK$

因之，得 $qx=(2b+2c-a)K$，$qy=(2c+2a-b)K$
$$qz=(2a+2b-c)K.$$

3. $\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}$ 時，各分數 $=\frac{A_1+A_2+A_3}{B_1+B_2+B_3}$.

應用此理，得 $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}$,

以此值爲 K 而計算之.

P. 32　1.　$\frac{1}{a}+\frac{1}{c-b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}=0.$

$$\frac{a+c-b}{a(c-b)}+\frac{a+c-b}{c(a-b)}=0.$$

$$(a+c-b)\frac{ac-bc+ac-ab}{ac(a-b)(c-b)}=0.$$

∴　$a+c=b$ 或 $2ac=b(a+c)$.

2.　自假定，導出 $c=-(a+b)$ 或 $c=b-a$，然後平方而變形之，或代入而證之.

3.　$\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+1+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}-1+\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}-1=0.$

$$\frac{(y+z)^2-x^2}{2yz}+\frac{(z-x)^2-y^2}{2zx}+\frac{(x-y)^2-z^2}{2xy}=0.$$

$$(y+z-x)\left\{\frac{x+y+z}{2yz}+\frac{z-x-y}{2zx}-\frac{x-y+z}{2xy}\right\}=0.$$

通分而簡化之，導出 $(y+z-x)$, $(x-y+z)$, $(x+y-z)$ 爲 0.

4.　所設之式能爲 $x-p$ 及 $x-q$ 所整除，故由剩餘定理，得

$$p^3+(p-q)p^2-3q^2p+2p^2q=0,$$
$$q^3+(p-q)q^2-3q^3+2p^2q=0.$$

邊邊相減，導出　$(p-q)^2(2p+3q)=0$

P. 33　1.　自假定，以 a, b, c 爲未知數，x, y, z 爲已知數解之，代入左邊.（倣前例）

2.　以 a, b, c 之值分別代入兩邊，而求其值.

3.　求 a, b, c 之值，代入原式

4.　消去 n, c.

P. 34　1.　簡化左邊，則爲

$$\frac{a^3+b^3+c^3-(b+c)a^2-(c+a)b^2-(a+b)c^2+3abc}{abc}.$$

$a+b+c=0$ 時，

$$-(b+c)=a,\quad -(c+a)=b,\quad -(a+b)=c.$$

故所設之式,

$$左邊=\frac{2(a^3+b^3+c^3)+3abc}{abc}$$

$$=\frac{2(a^3+b^3+c^3-3abc)+9abc}{abc}$$

$$=\frac{2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+9abc}{abc}$$

$$=\frac{9abc}{abc}=9. \quad [用\ a+b+c=0]$$

2. $左邊=(\overline{a+c}+b)(\overline{a+c}-b)(a^2-b^2+c^2)$

$$=\{(a+c)^2-b^2\}(a^2-b^2+c^2).$$

以 $b^2=ac$ 代入,導出右邊.

3. $左邊=\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}\right)+\left(\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}\right).$

以 $2s=a+b+c$ 代入,再變形之.

4. 左邊通分,則

$$分子=xyz(xy+yz+zx)-(xy+yz+zx)(x+y+z)$$
$$+3xyz+(x+y+z).$$

P. 35 1. 做前例,將終結簡化之.

2. 去分母,將終結簡化之,則

$$a^3-2b^3+c^3-a^2(b+c)+2b^2(a+c)-c^2(a+b)=0.$$

自假定導出之.

P. 36 **1.** 若 $a\neq b$, 則 $x=\frac{b^2}{a-b}.$

$a=b=0$, 不定;

$a=b\neq 0$, 不能.

2. 化爲 $(a+b)x=2-2(a+b)^2$, 因 $a+b=0$, 不能.

3. 整理之,則爲

$$3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)x=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

a, b, c 爲實數,而有不相等時,得 $x=\frac{a+b+c}{3}$,

a, b, c 爲實數,而 $a=b=c$ 時,爲不定.

P. 37　1. 自始二式，求 x, y 代入第三式，

$$m=2.$$

2. 自 (1), (2),　$x=\dfrac{41-7m}{5}$,　$y=\dfrac{9+2m}{5}$.

以此代入 (3),　$m=-\dfrac{9}{2}$.

3 以條件 $x=y$ 作爲 (3) 式，則以 (1), (2), (3) 聯立而解之，

$$t=-\frac{5}{4} \text{ 或 } -\frac{4}{5}.$$

P. 39　1. 欲使無根，　$ad-bc=0$.

2. 不定時，　$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$.

卽　$ab'-a'b=0,\ bc'-b'c=0,\ ca'-c'a=0 \cdots\cdots\cdots(1)$

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2\\&=(a^2b'^2-2aa'bb'+a'^2b^2)+(b^2c'^2-2bb'cc'+b'^2c^2)\\&\quad+(c^2a'^2-2cc'aa'+c'^2a^2)\\&=(ab'-a'b)^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2\\&=0.\quad[\text{自 (1) 式}]\end{aligned}$$

3. 消去 y，則

$$2(k+1)(k-1)x=(13k+1)(k+1).$$

$k=-1$ 時，不定；

$k=1$ 時，不能.

P. 40　1. $x=b-c,\ y=c-a,\ z=a-b$.

a, b, c 中有任何二數相等時爲不定.

2. $x=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$　$y=\dfrac{1}{(a-b)(c-b)}$,　$z=\dfrac{1}{(b-c)(a-c)}$

3. 設 $ax=by=cz=du=K$.

$$x=\frac{K}{a},\ y=\frac{K}{b}\ \ z=\frac{K}{c},\ u=\frac{K}{d}.$$

但　$abcd\neq0$.

以上四式代入第二式，

$$K=m(a+b+c+d).$$

$$\therefore\quad x=\frac{m(a+b+c+d)}{a},\ y=\frac{m(a+b+c+d)}{b}.$$

以下略之.

P. 41 1. $x=a,\ y=b,\ z=c.$

2. $x=\frac{1}{2},\ y=1,\ z=-1.$

3. 自

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=3\cdots\cdots(1)\\ ax-by+cz&=1\cdots\cdots(2)\\ ax+by-cz&=1\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{1}{x}=a,\ \frac{1}{y}=b,\ \frac{1}{z}=c.$$

以此等値代入其餘三方程式而解之,

$$a=\frac{9}{11},\ b=\frac{126}{11},\ c=-\frac{69}{11}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{11}{9},\ y=\frac{11}{126},\ z=-\frac{11}{69}.$$

P. 42 1. 設不等於 1 之任意正數爲 x, 則

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}>0.$$

分母分子皆正.

2. $$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-4=\frac{(a-b)^2}{ab}.$$

$a,\ b$ 爲不相等之數時,此値爲正.

3. $$\left.\begin{aligned}\frac{a+b}{2}&>\sqrt{ab}\\ \frac{c+d}{2}&>\sqrt{cd}\end{aligned}\right\}.$$

$$\therefore\quad \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}>\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}>\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}.$$

4. $a,\ b,\ c$ 皆爲正. 故

$$\frac{b+c}{2}\geqq\sqrt{ab},\quad \frac{c+a}{2}\geqq\sqrt{ca},\quad \frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}.$$

至少有一個等號不成立,

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{8}>\sqrt{a^2b^2c^2}=abc,$$

自此可證.

P. 43 1. a, b, c 皆爲正. 故

$$\frac{b+c}{2}\geqq\sqrt{bc},\quad \frac{c+a}{2}\geqq\sqrt{ca},\quad \frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}.$$

$$\therefore\quad \frac{2(a+b+c)}{2}\geqq\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}.$$

2. 應用 $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{2}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{ab}},\quad \dfrac{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{2}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{bc}},\quad \dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}{2}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{ac}}.$

3. 應用 $\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2\geqq bc,\quad \left(\dfrac{c+a}{2}\right)^2\geqq ca,\quad \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geqq ab.$

P. 43 1. 自所設條件,利用差之平方.

$$a^2+b^2+x^2+y^2-2ax-2by=2-2ax-2by.$$

$$(a-x)^2+(b-y)^2=2\{1-(ax+by)\}>0.$$

$$\therefore\quad ax+by<1.$$

P. 44 2. $\dfrac{3a-b}{a+b}-\dfrac{4a+3b}{2a+5b}=\dfrac{2(a+4b)(a-b)}{(a+b)(2a+5b)}.$

$a+b$, $2a+5b$ 皆爲負,故分母爲正.

$$a+4b<0.$$

∴ $a<b$ 時, $\dfrac{3a-b}{a+b}>\dfrac{4a+3b}{2a+5b}$;

$a=b$ 時, 相等;

$a>b$ 時, $\dfrac{3a-b}{a+b}<\dfrac{4a+3b}{2a+5b}.$

3. $(2x^4+1)-(2x^3+x^2)=(x-1)^2\{x^2+(x+1)^2\}>0.$

4. $x^3-(x^2-x+1)=(x-1)(x^2+1).$

$x>1$ 時,前者大; $x=1$ 時,相等;

$x<1$ 時,後者大.

P. 44 1. $4>x>\dfrac{1}{3}.$

2. (1) $a>c$ 時, $x>\dfrac{d-b}{a-c},$

$a<c$ 時，　　$x<\frac{d-b}{a-c}$.

(ii)　$-7<x<4$.

3.　$1<x<2$ 或 $3<x<8$.

4.　自　式，　　$1-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}+1$…………………………(1)

自後式，　　$-2<x<1$ 或 $x>4$…………………………(2)

自 (1), (2),　　$1-\sqrt{5}<x<1$.

P. 45　**1.**　$\frac{4}{5}>x>\frac{2}{3}$,　∴ 無 x 整數値.

2.　(i)　$-8\leqq\frac{8+b^2}{1-b^2}\leqq 2$.

$1-b^2>0$ 時，去分母，

$$-8+8b^2\leqq 8+b^2\leqq 2-2b^2.$$

$b^2\leqq\frac{16}{7}$, 且 $b^2\leqq -2$ 無實設值.

$1-b^2<0$ 時，去分母 ………………………………………(1)

$$-8+8b^2\geqq 8+b^2\geqq 2-2b^2.$$

$$b^2\geqq\frac{16}{7}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\quad 且\quad b^2\geqq -2\cdots\cdots\cdots(3)$$

自 (1), (2), (3),　　$b^2\geqq\frac{16}{7}$.

$$\therefore\quad b\geqq\frac{4}{\sqrt{7}}\ \text{或}\ b\leqq-\frac{4}{\sqrt{7}}.$$

(ii)　以 b 之値代入，則

$$2a^2-16\leqq 38\leqq a^2+5a-12.$$

$$a^2\leqq 27,\ 3\sqrt{3}\geqq a\geqq -3\sqrt{3}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

且　$a^2+5a-50\geqq 0$,　∴　$(a+10)(a-5)\geqq 0$

∴　$a\geqq 0$ 或 $a\leqq -10$…………………………(2)

故　　$3\sqrt{3}\geqq a\geqq 5$ 或 $-10\geqq a\geqq 3\sqrt{3}$.

P. 46　**3.**　$3-x\geqq 0$ ………………………………………………………(1)

$x-1>0$ 時，兩邊平方之，

$3-x>x^2-2x+1$.　∴　$2>x>-1$

與 $x-1>0$ 聯立而解之，得 $2>x>1$ ……………………(2)

$x-1=0$ 及 $x-1<0$ 時，常能成立 ……………………(3)

∵ 同時滿足於 (1), (2), (3) 之 x，其範圍爲

$$2>x.$$

P. 46　**1.**　$a(ax^2+bx+c)=a^2\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$

$$=a^2\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

對於 x 之實數值，常爲正.

2.　x^2 之係數爲正，而

$(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$

$$=(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(b-a-c).$$

因 a, b, c 爲三角形之邊，故 $b-a-c$ 爲負，其他之因子皆爲正，所設之式，對於 x 之任何值皆爲正.

3　$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$ ……………………………(1)

$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$ ……………………………(2)

x 在 α, β 之間時，(2) 式爲負.

$$\therefore\quad (x^2+ax+b)(x^2-2x+3)<3.$$

4.　因 x^2 之係數爲正，

故若 $(2a)^2-(3a^2+7a-10)<0$ 即可，

用 $2<a<5$ 而證之.

5.　原式 $=(x^2-3x-10)(x^2-3x-18)+20$

$=(x^2-3x)^2-28(x^2-3x)+180+20$

$=(x^2-3x-14)^2+4>0.$

P. 47　**1.**　$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}>0.$

$a>0$ 時，　$\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2>\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$

左邊對於 x 之實數值，爲 0 或爲正.

$$\therefore\quad b^2-4ac<0.$$

其次 $a>0$ 時，$\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2$ 常爲正，

故 $\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 不一定是負.

$$\therefore \quad a>0, \quad 且 \quad b^2-4ac<0.$$

2. $(8m-2)^2-4(15m^2-2m-7)<0, \quad \therefore \quad 2<m<4.$

3. $y=ax^2+2x+1=a\left\{\left(x+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right\}$

$$=a\left\{\left(x+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1-a}{a^2}\right\}.$$

$\left(x+\frac{1}{a}\right)^2\geqq 0$, 且其値因 x 之絕對値充分增大,可增加至非常之大,

故 $\left\{\left(x+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1-a}{a^2}\right\}$ 之値,因 x 絕對値之充分增大,可使其爲正.在此時 y 與 a 爲同符號. 但 y 不論 x 之値如何,常爲正.

故 $a>0$.

其次, $x=-\frac{1}{a}$ 時, $y=a\left(-\frac{1-a}{a^2}\right)$.

但不論 x 之値如何, $y>0$,

且 $a>0$.

$\therefore \quad -\frac{1-a}{a^2}>0$, 而 $a^2>0$, $\therefore \quad 1-a<0$.

P. 49 **1.** 自第一式,得 $p^2-4q\geqq 0$, 撤去第二式之括弧,整理之,證判別式 $\leqq 0$.

2. 與 1. 同樣.

3 同前.

P. 49 **1.** 判別式 $-(a-b)^2\geqq 0$. $\therefore \quad a-b=0 \quad \therefore \quad a=b$.

2. 判別式 $-(b-c)^2(a-b)^2\leqq 0$

x^2 之係數 $b-c\neq 0$, $\therefore \quad a=b$

P. 50 **1.** $m\leqq -2$ 或 $m\geqq 3$.

2 $1\geqq k\geqq -4$.

3 就 x 而整理之.

x 爲實數,　∴ $-(3y-4)^2 \geqq 0$.

但 y 爲實數,故 $(3y-4)^2 \geqq 0$.

$$\therefore \quad 3y-4=0, \quad y=\frac{4}{3}.$$

此時 (1) 之判別式爲零.

故 $$x=-\frac{2(3y+1)}{5}, \quad \therefore \ x=-2, \ y=\frac{4}{3}.$$

P. 51　1. 證判別式爲 0.

2. 判別式爲 $4(ab-b^2)+(b-c)^2$.

$a=b=c$ 時,爲等根;不然則爲實根.

P. 51　1. 判別式 $q^2-4pr=\left(k+\frac{pr}{k}\right)^2-4pr=\left(k-\frac{pr}{k}\right)^2$.

2. 判別式 r^2 爲完全平方數.

3. 化判別式爲完全平方之形.

P. 52　1. 判別式 $=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$.

$$a-b=0, \ b-c=0, \ c-a=0. \quad \therefore \ a=b=c.$$

2. $\lambda=-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}\right.$ 或 $\left.-\frac{5}{4}\right)$.

P. 54　1. 同前例.

2. ±6.532.

3. 以 $\alpha+\alpha^2=-\frac{b}{a}$ 立方之,然後以 $\alpha\times\alpha^2=\frac{c}{a}$ 代入.

P. 55　1. 注意 α, β 之差與 $\alpha+k$, $\beta+k$ 之差爲相等, 以二方程式二根之差等置之.

2. $a=5$. 二根爲 $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{2}$.

P. 56　1. $3x^2-18x+2=0$.

2. 16.

P. 56　1. 自 $\alpha\beta+\alpha+\beta-a=0$, $\alpha\beta-a(\alpha+\beta)+1=0$ 消去 $\alpha\beta$, 則得

$$(a+1)(\alpha+\beta-1)=0.$$

故 $a+1\neq0$ 時, $\alpha+\beta=1$.

從而 $\alpha\beta=a-1$, 故所求之方程式爲 $x^2-x+a-1=0$.

又 $a+1=0$ 時, $a+\beta$, $a\beta$ 爲不定.

故所求之方程式爲 $x^2+px+q=0$ 之形, 而 p, q 爲不定

$x^2-x+a-1=0$ 之二根欲爲實根.

$1-4(a-1)\geqq 0$, 欲二根皆爲正,則 $a-1>0$.

自此求 a 之範圍.　　答: $1<a\leqq\frac{5}{4}$.

P. 57　2.　$x^2-(a+2r)x+2r(a+r)=0$.

又此方程式之根欲爲實根,

則須 $a>2(1+\sqrt{2})r$.

故並非一定能存在.

P. 57　1.　相同的　根設爲 a, 其他二根爲 2β, β,

$$p=-\frac{1}{3},\quad q=-\frac{2}{3}.$$

2.　相同的　根設爲 a, 代入所設之兩方程式,邊邊相減,

$(a-b)a=a-b$, $a=b$ 時,欲祇有一根相等爲不可能.

故 $a-b\fallingdotseq 0$, 因之 $a=1$ 爲相同的一根

自 $x^2+ax+b=0$, 得不相同的一根爲 b,

自 $x^2+bx+a=0$, 得不相同的一根爲 a.

故不相同的兩根之和爲 $a+b$,

但 $x=1$ 爲根,

故 $1+a+b=0$,　$\therefore\ a+b=-1$.

3.　相同的一根設爲 a, 與前間同樣, 得 $a=3$, 以此代入第一方程式:

$$27-33+p=0,\quad p=6.$$

P. 58　1.　$b^2=ac$.

2.　$a^2+a\beta$, $a\beta+\beta^2$.

P. 60　1.　判別式 $=m^2-5m\geqq 0$,　$\therefore\ m(m-5)\geqq 0$.

$$\therefore\quad m\leqq 0 \text{ 或 } m\geqq 5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

二根之和 $=2(m-2)<0$,　$\therefore\quad m<2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

二根之積　　$m>-4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

同時滿足於 (1), (2), (3) 式 m 之範圍爲

$$-4<m\leqq 0.$$

2. 欲兩根絕對值相等,符號相反,

$$a^2-3a-10=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\quad a<0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

自 (1), $(a-5)(a+2)=0,\quad \therefore\quad a=5$ 或 $-2.$

滿足於 (2) 式,則 $a=-2.$

此時原方程式爲 $3x^2-6=0,\ x^2=2.$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{2}.$$

3. 去分母而整理之,

$$3x^2-2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$D=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}>0,$$

故 (1) 有不相等的兩實根,設其兩根爲 $\alpha,\ \beta$; 則

$$\alpha+\beta=\frac{2(a+b+c)}{3}>0,\ \alpha+\beta=\frac{bc+ca+ab}{3}>0.$$

$a,\ b,\ c$ 爲不相等之數,故不使原方程式分母爲零,故爲正之實根.

4. 判別式 $=(2k-1)^2+4(k-2)(k-5)\geqq 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$$\frac{5-k}{k-2}<0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) 同時成立 k 之界限.

自 (1), $8\left\{(k-2)^2+\frac{9}{8}\right\}>0.$

故不論 k 爲任何値都可.

自 (2), $(k-5)(k-2)>0,\quad \therefore\ k>5$ 或 $k<2.$

P. 60 1. 如前例,判別式爲正,

$$\therefore\quad a^2+pa+q<0.$$

P. 61 2. $(x-1+m)(x-1)=1.$

故 $x^2+(m-2)x-m=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

設 (1) 之左邊爲 $f(x)$, 則

$$f(1)=1+(m-2)-m=1+m-2-m=-1<0.$$

∴ 在二根之間.

3. a 在二根之間.

P. 61 **1.** 設 $x^2-2x-2=0$ 之左邊爲 $f(x)$, 則

$$f(3)=9-6-2=1>0.$$

故 3 較二根皆大,或較二根皆小.

二根和之半 $=1<3$.

故 3 較二根中大者更大.

2. $2x^2+3x+5m=0$ 之根欲使皆較 1 爲小,

則先須判別式 $=9-40m\geqq0$, $\therefore\ \frac{9}{40}\geqq m$ ……………(1)

設 (1) 式爲成立,再設其時之二根爲 α, β; 則

$$2x^2+3x+5m=2(x-\alpha)(x-\beta).$$

故欲使 $\alpha<1,\ \beta<1$ 或 $\alpha>1,\ \beta>1$.

$$2\times1^2+3\times1+5m=2(1-\alpha)(1-\beta)>0.$$

故 $5+5m>0$, $\therefore\ m>-1$ ……………………(2)

在 (1), (2) 兩條件之下, α, β 爲實數皆較 1 小,或皆較 1 大.

但自根與係數之關係, $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}<1+1$,

故 $\alpha>1,\ \beta>1$ 爲不可能.

故自 (1), (2), 得 m 之界限: 爲

$$-1<m\leqq\frac{90}{4}.$$

3. 設 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 α, β; 則

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=q.$$

$$p+q+1>0,\quad \therefore\quad -(\alpha+\beta)+\alpha\beta+1>0.$$

$$\therefore\ \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0.\quad \therefore\ (\alpha-1)(\beta-1)>0.$$

$$\therefore\ \left.\begin{matrix}\alpha>1\\ \beta>1\end{matrix}\right\}\ 或\ \left.\begin{matrix}\alpha<1\\ \beta<1\end{matrix}\right\}.$$

但 $p+2<0$, $\therefore\ -(\alpha+\beta)+2<0$, $\therefore\ 2<\alpha+\beta$.

故 $\alpha>1,\quad \beta>1.$

卽二根皆較 1 爲大.

P. 63 **1.** $\pm a,\ \pm\frac{1}{a}$. **2.** $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

P. 63　1.　$4a,\ -2a,\ a,\ a.$　　2.　$2,\ -1,\ 4,$

3.　$2,\ 2,\ 1,\ 4.$

P. 64　1.　$-2p\pm\sqrt{5p^2+\sqrt{2p^4+15p^2}},$

$-2p\pm\sqrt{5p^2-\sqrt{2p^4+15p^2}}.$

2.　$-7,\ -2,\ 3,\ 8.$

P. 65　1.　$2,\ \frac{1}{2},\ \frac{-3\pm\sqrt{-7}}{4}.$

2.　以 x^2 除之，

$$8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-42\left(x-\frac{1}{x}\right)+29=0.$$

設 $\left(x-\frac{1}{x}\right)=y$，則爲 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2.$

$$4,\ -\frac{1}{4},\ 2,\ -\frac{1}{2}.$$

3.　$x=1,\ x=\frac{1}{2},\ x=2.$

4.　$\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2}-1,\ -\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}-1.$

P. 65　1.　$5,\ -3\omega-2,\ -3\omega^2-2.$

2.　$\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\omega,\ \frac{3}{2}\omega^2.$

P. 66　1.　$2,\ \frac{-3\pm3\sqrt{3}}{2}.$

2.　$-1,\ 5,\ -\frac{1}{2}.$

P. 66　1.　$10,\ 2\pm\sqrt{-15}.$

2.　3 或 $-3\pm\sqrt{-11}.$

3.　$p,\ \frac{3-p\pm\sqrt{1+6p-3p^2}}{2}.$

P. 68　1.　$-\frac{1}{3}.$

2.　無根.

3.　$6,\ \frac{1}{4}.$

P. 69 1. $\frac{13}{2}$.

2. $4,\ \frac{3}{2}$.

3. $\frac{11}{2}a$; $a=0$ 時,爲不定.

4. a, b, c 俱不爲 0 時,即 $abc\neq0$ 時, $x=0$.

a, b, c 中任何兩個不相等時,

$$x=\frac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}.$$

P. 70 1. $-1,\ -\frac{9}{2}$.

2. $a+b=0$ 時,爲不定;

$a+b\neq0$ 時, $x=a$.

3. $a+b=0$ 時, $x=0$;

$a+b\neq0$ 時, $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$ 或 $a+b$.

P. 71 1. 自大至小之順序爲 $4\sqrt{2},\ 2\sqrt{5},\ 3\sqrt[3]{3}$.

P. 72 2. $\sqrt[5]{5},\ \sqrt[10]{6},\ \sqrt[15]{14}$.

P. 72 1. $12\sqrt{5}$.

2. 0.

P. 72 1. $\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{2}$.

2. $-(43\sqrt{2}+35\sqrt{3})$.

3. $\frac{29}{2}$.

P. 73 4. $\sqrt[3]{3}-1$. 有立方根號之式,有理化時,用

$$(\sqrt[3]{A}\pm\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}\mp\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2})=A-B.$$

P. 73 1. 先化作 $x=-y\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, 然後應用前例之理.

2. $(a+b\sqrt{5})^2=(1+\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})$.

$\therefore\quad (a^2+5b^2)+2ab\sqrt{5}=56+24\sqrt{5}$.

$\therefore\quad a^2+5b^2=56,\ ab=12$.

解之,得 $a=\pm 6$, $b=\pm 2$, 複號同順序

3. (a) 設 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=K$. (K 爲有理數)

去分母,就 x 整理之,則

$$(a-cK)x=dK-b.$$

左邊爲無理數或爲零,右邊爲有理數,

$a-cK=0$, $dK-b=0$. c, d 不爲 0,

$$K=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

(b) 設 $\dfrac{ax}{cx+d}=K$.

若 K 爲有理數,則

$$(a-cK)x=dK.$$

$$\therefore\quad a-cK=0,\qquad dK=0.$$

$$K=0,\quad \therefore\quad a=0.$$

與 $a\neq 0$ 之假設相反. ∴ K 不爲有理數

P. 74 1. 原式 $=\sqrt{\dfrac{2(1+x^2)+2\sqrt{(1+x+x^2)(1-x+x^2)}}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{1+x+x^2}{2}}+\sqrt{\frac{1-x+x^2}{2}}.$$

2. $2(\sqrt{6}+\sqrt{5})$.

3. $2\sqrt{5}=4.472$.

4. 3.

P. 76 1. $b>1$ 時,爲 b; $b=1$ 時,爲 1;

$1>b>-1$ 時,爲 $\dfrac{1}{b}$; $b=-1$ 時,爲 1;

$b<-1$ 時,爲 b.

2. 若 $a>\dfrac{1}{2}$, $b>\dfrac{1}{2}$, 或 $a<\dfrac{1}{a}$, $b<\dfrac{1}{b}$; 則爲

$$\frac{a^2+b^2}{2ab}.$$

若 $a=\frac{1}{a}$, $b=\frac{1}{b}$, 則爲 $\frac{a(b^2+1)}{2b}$ 或 $\frac{b(a^2+1)}{2b}$.

P. 77 1. $a+b>0$ 時,爲 1;

$a+b<0$ 時,爲 $\frac{a}{b}$.

2. 原式 $=\frac{a+b}{a-b}=\frac{x+\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}}{y}$.

$x+y$, $x-y$ 之正負不可知,故不能作 $\sqrt{x^2-y^2}$.

P. 79 1. 無根.

2. $x=2$

3. $3,\ -\frac{5}{3}$.

P. 80 1. 1.

2. $x=0,\ 3a,\ 3b$.

此三根中 $x=3a$; 祇 $a=0$ 或 $a=b$ 時,爲根

$x=0,\ 3b$ 在任何時都爲根.

3. 1.

P. 80 1. $8,\ -2$.

2. $1,\ \frac{1}{2}$.

3. $3.79,\ -0.79$.

P. 81 1. $27,\ -64$.

2. $1,\ 2,\ \frac{3}{2}$.

3. $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$.

P. 83 1. $x=y=\frac{ab}{a+b}$.

2. $a,\ b;\ \frac{2ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{2a^2b}{a^2+b^2}$.

3 $a,\ b;\ \frac{a(3b-a)}{a+b},\ \frac{b(3a-b)}{a+b}$.

P. 83 1. $-1,\ -2;\ 1,\ \frac{1}{2}$

2. 0, 1; $\frac{7}{5}$, $-\frac{9}{5}$.

3. $a\neq b$ 時, $x=y=\frac{a+b\pm\sqrt{2r^2-(a-b)^2}}{2}$.

$a=b$ 時,爲不定.

P. 84 1. ±6, ∓2.

2. $\pm\frac{27}{\sqrt{386}}, \pm\frac{41}{\sqrt{386}}$; ±1, ∓1.

3. 0, 0; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ $\frac{12}{11}$, $\frac{16}{11}$.

4. 以 $14(x-y)$ 乘第一式,以 $13(x+y)$ 乘第二式.

但以含有未知數之式 {例如 $14(x-y)$} 乘之,

則方程式增加客根,其所增者,即以此式爲 0 之方程式之根 {$x=y$}, 故解得之根是否爲原方程式之根, 須代入而判定之.

P. 85 1. 設 $x+y=A$, $x-y=B$; 則

$$\begin{cases} A^2+2A-3=5B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2A^2-6A+4=5B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(2) − (1), 得 $A^2-8A+7=0$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$$

2. 5, 3; 3, 5; $\frac{-15\pm\sqrt{257}}{2}$, $\frac{-15\pm\sqrt{257}}{2}$. (複號同順序)

3. −2, 3; $\frac{+3\pm\sqrt{17}}{2}$, $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. (複號同順序)

設 $x-y=A$, $xy=B$.

P. 86 1. 0, 0; 5, 5; 2, −1; −1, 2.

2. 1, 0; 2, 0; $\frac{1}{2}$, 1; 1, −1.

3. 二式邊邊相減,邊邊相加,導出

$$p^2-2q=0,\ \frac{p(p^2-3q)}{q}=p+2.$$

$$p=-1,\quad q=\frac{1}{2}.$$

P. 87 1. $0,\ ;\ \pm\sqrt{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$ (複號同順序)

$\pm\frac{\sqrt{-7}}{2},\ \mp\sqrt{-7}.$ (複號同順序)

2. $3,\ 2;\ 2,\ 3;\ 3\omega,\ 2\omega;\ 2\omega,\ 3\omega;\ 3\omega^2,\ 2\omega^2;\ 2\omega^2,\ 3\omega^2.$

3. $2,\ 2+\sqrt{5};\ 2,\ 2-\sqrt{5};\ -2,\ -2+\sqrt{5};\ -2,\ -2-\sqrt{5}.$

✓ **P. 88** 1. $\frac{1\pm\sqrt{85}}{3},\ \frac{7\pm\sqrt{85}}{12},\ \frac{-11\mp\sqrt{85}}{12}.$

2. $a,\ b,\ c;\ \frac{1}{3}(2b+2c-a),$

$$\frac{1}{3}(2c+2a-b),\quad \frac{1}{3}(2a+2b-c).$$

3. 自 (1), (2) 求 x, y, z 之比.

設 $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=K.$$

以 x, y, z 之值代入 (3),

$$K=\pm1,\quad (a,\ b,\ c),\quad (-a,\ -b,\ -c).$$

P. 89 1. $2,\ 3,\ 1;\ 2,\ 1,\ 3;\ 1,\ 3,\ 2;\ 1,\ 2,\ 3.$

2 $x=5$ 時, $y+z=7,\ y^2+z^2=15$ 解之卽可;

$x=7$ 時, $y+z=5,\ 2y^2+z^2=-9$ 解之卽可.

3. 自 (1), (3) 求 y, z 之值, 代入 (2) 消去 y, z.

$x=4$ 或 1, 但 1不適於方程式. 4, 3, 5

P. 90 1. $zx=7,\ yz=-28,\ xy=-4.$

故 $xyz=\pm28$, 自此求 x, y, z.

2. $3,\ 2,\ 1;\ -3,\ -2,\ -1.$

3. $x=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2},$

$y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2},$

$z=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$

P. 91　1. 化爲 $xy+x+y+3=0$, $(x+1)(y+1)=-2$.

$1, -2, 5;\ -3, 0, -7.$

2. (1), (2), (3) 各化爲

$$(x+1)(y+2)=8,$$
$$(y+2)(z+3)=24;$$
$$(z+3)(x+1)=12$$
$$\therefore\quad (x+1)(y+2)(z+3)=\pm 3\times 8\times 2.$$

3. (1) 式爲 $(x+z)(x+y)=12$, 其他二式其形亦同,

求出 $(x+y)$, $(y+z)$, $(z+x)$ 然後求 x, y, z.

$$1,\ 2,\ 3;\ -1,\ -2,\ -3.$$

P. 92　1. $1, 2, 3;\ 1, 3, 2;\ 2, 3, 1;\ 2, 1, 3.$

2. 作 $(1)\times 3+(2)+(3)$,

求得 $x+y+z=\pm 6$ 而解之.

3 $3, -2, 5;\ -3, 2, -5.$

P. 93　1. $-\dfrac{60}{11}$ 或 -11, 若有一 x, y 之二次齊次的等式, 必可得一個 $\dfrac{x}{y}$ 的二次方程式,故必可求得 $\dfrac{x}{y}$ 之值.

2 $\dfrac{7}{5}$

3. $\dfrac{19}{7}$ 或 $\dfrac{61}{21}$.

P. 94　1. $\dfrac{a}{12}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{-12}$, $\dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{c}{-6}$.

2. 自假設, $(pq-rs)(qr-sp)(rp-qs)=0$.

自此,得 $\dfrac{p}{r}=\dfrac{s}{q}$ 或 $\dfrac{p}{r}=\dfrac{q}{s}$ 或 $\dfrac{p}{s}=\dfrac{q}{r}$.

P. 95　1. 設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=K$, 以 $a=bK$, $c=dK$ 代入.

2. 同據.

P. 96　設 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=K$.

以 $x=aK$, $y=bK$, $z=cK$ 代入.

P. 96 設 $\frac{cy+bz}{p}=\frac{az+cx}{q}=\frac{bx+ay}{r}=K$.

$cy+bz=pK,\ az+cx=qK,\ bx+ay=rK.$

$$\left.\begin{aligned}-acy-abz&=-apK\\ abz+bcx&=bqK\\ bcx+acy&=crK\end{aligned}\right\}.\quad \therefore\quad (-ap+bq+cr)K=2bcx$$

$$\therefore\quad \frac{bcx}{-ap+bq+cr}=\frac{K}{2}.$$

同樣,其他二式亦爲 $\frac{K}{2}$, 故三式相等.

P. 97 **1.** 解 $\left.\begin{aligned}175&=c+70K\\ 220&=c+100K\end{aligned}\right\},\ K=\frac{3}{2},\ c=70.$

$$70+\frac{3}{2}\times150=295,$$

$$295\text{ 元}\times0.9\div150=1.77\text{ 元}.$$

P. 98 **2.** $y=px+\frac{q}{x}$. (p, q 爲常數)

若 $x=a$, 則 $na+b=pa+\frac{q}{a}$ ……………………(1)

若 $x=b$, 則 $nb+a=pb+\frac{q}{b}$ ……………………(2)

解 (1), (2), $p=n,\quad q=ab.$

$$\therefore\quad y=nx+\frac{ab}{x}.$$

$y=nab+1$ 時,

$nab+1=nx+\frac{ab}{x}$, 自此得 $x=\frac{1}{n}$ 或 ab.

3 $y=5x-\frac{6}{x}.$

P. 98 **1.** $k=2\sqrt{10}.$

$$22.5\geqq x.$$

滿足於此式之 x 最大正數值爲 22.

22 輛.

P. 99　2.　$y-z=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3=\frac{x^2}{4}(3-x)$. 在此式中,

$$x^2\geqq 0,\ x<3,\quad 故\quad 3-x>0.$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{4}(3-x)\geqq 0,\quad \therefore\quad y-z\geqq 0,\ y\geqq x.$$

P. 100　若設速度爲 v 哩,距離 d 哩,所要時間 t,走一哩所要之石炭 p 磅,車輛數 n,則

$$t=K\frac{nd}{\sqrt{p}}.\ (K\ 爲常數)$$

$$K=\frac{1}{144},\ 750\ 磅.$$

P. 100　1.　導出 $x^2+y^2=$常數$\times xy$.

2　由題意,　$(x-y+z)(x+y-z)=kyz$······················(1)

或作　$\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}=kyz$.

$$x^2-(y-z)^2=kyz,\ (y-z)^2-x^2=-kyz.$$

加 $4yz$ 於兩邊,則爲 $(y+z)^2-x^2=(4-k)yz$,

$$(y+z+x)(y+z-x)=(4-k)yz.$$

但 $x+y+z$ 爲一定,又 $4-k$ 亦爲一定

故 $y+z-x$ 與 yz 成比例.

P. 101　1.　$a=104,\ d=17,\ l=938,\quad \therefore\quad S=28938.$

2　7 之倍數, $a=504,\ d=7,\ l=994,\ n=71,\ S=53179.$

又 49 之倍數, $a'=539,\ d'=49,\ l'=980,\ n'=10.$

$$\therefore\quad S'=7595,\quad S-S'=45584.$$

P. 102　3.　能以 3 整除之數之和,

$$S_3=\frac{167(501+999)}{2}=125250.$$

能以 7 整除之數之和,

$$S_7=\frac{71(504+994)}{2}=53179.$$

能以 21 整除之數之和,

$$S_{21}=\frac{24(504+987)}{2}=17892.$$

自 500 至 1000 整數之總和,

$$S=\frac{501(500+1000)}{2}=375750.$$

所求之和 $=S-(S_3+S_7-S_{21})=215213.$

4. 14 項, 1379.

P. 102 1. 自所設條件,若 $p \doteqdot q$, 則得 $2a+(p+q-1)=0.$

以此代入 $p+q$ 項之和之式中即可.

2. 自所設條件,得 $n\{a+(n-1)d\}=44\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$(n-1)\{a+(n-1)d\}=33\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$\therefore\quad n=4$, 中央項 $=11.$

P. 103 1. $\frac{n(n^2+1)}{2}.$

2. $n^3.$

P. 104 1. 初項爲 4, 公差爲 8 之 A. P. 一般項 $=4(2n-1).$

2. 初項 17, 公差 2.

P. 106 1. $\begin{cases} a+ar+ar^2=26 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ ar^4+ar^5+ar^6=2106 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(2)\div(1)$, $r^4=81$, $r=3$. $\therefore\quad a=2.$

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458.

2. 4, 8, 16.

3. $r^n-\frac{m}{l}.$

故 r 之實數值.

n 奇數時, $r=\sqrt[n]{\frac{m}{l}}.$

n 偶數,且若 $\frac{m}{l}>0$, 則 $r-\pm\sqrt[n]{\frac{m}{l}}.$

若 $\frac{m}{l}<0$, 則無實數值.

P. 107 4. 135, 45, 15, 5; 或 5, 15, 45, 135.

P. 107 1. $r \doteqdot 1$ 時, $a\left\{\frac{n}{1-r}-\frac{r(1-r^n)}{(1-r)^2}\right\}.$

$r=1$ 時，　$\frac{n(n+1)}{n}a.$

2.　$原式=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\cdots\cdots+\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)$

$$=(x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n)-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^n}\right)$$

$$=11111111100-0.0011111111$$

$$=11111111099.9888888889.$$

P. 108　3.　$(1+a)\frac{1-a^nb^n}{1-ab}.$

P. 108　1.　設初項爲 a，公比爲 r，則

$$B=\frac{A}{a^2r^{n-1}}.$$

$$\therefore\quad \frac{A^n}{B^n}=a^{2n}r^{n(n-1)},\quad p^2=a^{2n}r^{n(n-1)}.$$

2.　$S'=\frac{S}{a_1{}^2r^{n-1}}.$

$$\therefore\quad S=a_1{}^2r^{n-1}S'=a_1a_1r^{n-1}S'=a_1a_nS'.$$

4.　設公比爲 r，則

$$\begin{array}{rl} & b+c-a=(a+b+c)r \\ & c+a-b=(a+b+c)r^2 \\ +\;) & a+b-c=(a+b+c)r^3 \\ \hline & a+b+c=(a+b+c)(r+r^2+r^3) \end{array}$$

若 $a+b+c\neq 0$，則 $r+r^2+r^3=1.$

P. 110　1.　$\frac{13}{24}.$

2.　$r=1,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

但 $|r|$ 須較 1 爲小，故 1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 不適於問題.

初項 $=\sqrt{2}.$

3.　$9a$ 米.

4.　$\frac{3}{5}a$ 元.

P. 112 1. $-1.$

P. 113 1. $\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}.$

2. $x\neq 1$ 時，$S=\frac{1+x-(2n+1)x^n+(2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}.$

$x=1$ 時，$S=n^2.$

3. $\frac{1}{27}\left(9n-1+\frac{1}{10^n}\right).$

4. $\frac{r^n-(n+1)r+n}{(1+r)^2}.$

5.
$$\begin{aligned}S&=x^n+(a+b)x^{n-1}+(a^2+2b)x^{n-2}+(a^3+3b)x^{n-3}\\&\quad+\cdots\cdots+(a^n+nb)\\&=(x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\cdots\cdots+a^n)\\&\quad+(bx^{n-1}+2bx^{n-2}+\cdots\cdots+nb)\\&=S_1+S_2.\end{aligned}$$

則 $x\neq a$ 時，

$$\begin{aligned}S_1&=x^n+ax^{n-1}+\cdots\cdots+a^n\\&=\frac{x^n\left\{1-\left(\frac{a}{x}\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{a}{x}}=\frac{x^{n+1}-a^{n+1}}{x-a}.\end{aligned}$$

$x\neq 1$ 時，

$$S_2=bx^{n-1}+2bx^{n-2}+3bx^{n-3}+\cdots\cdots+nb.$$

$$\frac{1}{x}S_2=bx^{n-2}+2bx^{n-3}+\cdots\cdots+(n-1)b+\frac{nb}{x}.$$

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{x}\right)S_2&=bx^{n-1}+bx^{n-2}+bx^{n-3}+\cdots\cdots+b-\frac{nb}{x}\\&=b(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+1)-\frac{nb}{x}\\&=b\times\frac{x^n-1}{x-1}-\frac{nb}{x}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad S_2=\frac{bx(x^n-1)}{(x-1)^2}-\frac{nb}{x-1}=\frac{b\{x^{n+1}-(n+1)x+n\}}{(x-1)^2}.$$

$\therefore$ $x\neq a$, $x\neq 1$ 時，

$$S=\frac{x^{n+1}-a^{n+1}}{x-a}+\frac{b\{x^{n+1}-(n+1)x+n\}}{(x-1)^2}.$$

$x\neq a$, $x=1$ 時,

$$S=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}+\frac{1}{2}n(n+1)b.$$

$x=a$, $x\neq 1$ 時,

$$S=(n+1)a^n+\frac{b\{a^{n+1}-(n+1)a+n\}}{(a-1)^2}.$$

$x=a=1$ 時,

$$S=\frac{(n+1)(2+nb)}{2}.$$

P. 114　應用 $(x+1)^4-x^4=4x^3+6x^2+4x+1$, 仿前例之法.

P. 115　1.　$\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

2.　第 r 項 $=\frac{r(r+1)}{2}=\frac{r^2}{2}+\frac{r}{2}$.

和 $=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

3.　1, 5,9, 13 爲公差 4 之 A. P.

故一般項,第 r 項 $=1+(r-1)\times 4=4r-3$.

所求之和 $=\frac{n}{3}(16n^2-12n-1)$.

P. 117　1.　$\frac{n}{2n+1}$.

2.　1

3.　$\log_4 3=\frac{1}{2}\log_2 3$,　$\log_8 3=\frac{1}{3}\log_2 3$,

$\log_3 2=\frac{1}{\log_2 3}$,　$\log_9 2=\frac{1}{\log_2 9}=\frac{1}{2\log_2 3}$,

$\sqrt[4]{32}=2^{\frac{5}{4}}$,　$\therefore$　$\log_2\sqrt[4]{32}=\frac{5}{4}$.

原式 $=0$.

P. 117　(1), 11, (2) 79.

P. 118　1.　最小爲 10000, 最大爲 100000.

2. 6 乘冪.

P. 118 1. 2.1898.

2. 2.

3. 0.

P. 119 1. $x=0.682$, 1.209.

2. 0.4420.

3. 0.861, -0.887.

4. $x=2.215$, $y=0.955$.

P. 120 1. $\dfrac{-1+\sqrt{21}}{6}$.

2. $x=7$, $y=3$.