

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 11

Aufgaben

AUFGABE 11.1. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Zeige, dass zu elliptischen Funktionen f, g (bezüglich Γ) auch $f + g$ und $f \cdot g$ elliptisch sind.

AUFGABE 11.2. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Zeige, dass zu einer elliptischen Funktion $f \neq 0$ (bezüglich Γ) auch f^{-1} elliptisch ist.

AUFGABE 11.3. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Zeige, dass zu einer elliptischen Funktion f (bezüglich Γ) auch die Ableitung f' elliptisch ist.

AUFGABE 11.4. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Zeige, dass jede elliptische Funktion f (bezüglich Γ) eine eindeutige Zerlegung $f = g + h$ mit einer geraden elliptischen Funktion g und einer ungeraden elliptischen Funktion h besitzt.

AUFGABE 11.5. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für eine komplexe Zahl s mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ absolut konvergiert.

AUFGABE 11.6. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Zeige, dass die Familie

$$w^{-2}, w \in \Gamma'$$

nicht summierbar ist.

AUFGABE 11.7. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Zeige, dass die elliptische Funktion

$$f(z) = \sum_{v \in \Gamma} (z - v)^{-3}$$

ungerade ist.

AUFGABE 11.8. Es sei $\Gamma = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Zeige, dass die elliptische Funktion

$$f(z) = \sum_{v \in \Gamma} (z - v)^{-3}$$

in den Punkten $\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}$, eine Nullstelle besitzt, und dass dies innerhalb der halboffenen Gittermasche $\{sv_1 + tv_2 \mid 0 \leq s, t < 1\}$ die einzigen Nullstellen sind.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3