攸縣龍毓峻編

應用力學

應用力學

攸縣龍毓峻編

叙言

昔光緒戊申與球始監督湖南高等實業學堂置土木科適龍君鐵原自東遊返國聘之主講席以應用力學為工程入門功夫每週課四小時以一學期竟其動力靜力原理兩部以為是學之階梯諸生受其業於工程治理如庖丁宰牛迎刃而解世知龍君之善教而不知其所以使人豁然之故焉蓋近世治專門科學者於本國文字少所研究遂譯東籍尤多害意龍君以雅達之筆述艱深之理不為和文所拘束此其特長也至其公式之簡明繪圖之精審雖有所取材而口講指畫於粉條黑版間使諸生無所疑義而後止此又其用功之勤而推理之審也力學專門之書編著絕

少龍君講義譯自東人市川忠一之原本加以訂正國家方振興工業機械土木造船諸學皆以此為入門工夫而一切工科又皆需用於機械則以此為一切工科入門功夫亦奚不可興球方擬請設工業教科書編譯局保龍君判行是書以為之先并為本學堂課本所取資因識其緣起於此世有編湖南工業近世史者則此書之成又其進步之徵兆也已

宣統二年十二月朔長沙曹典球序

序例

一　是編係余承乏湖南高等實業學堂土木科時取日本市川忠一所編工業力學間參以他家學說及所得諸師承者輯為講義題曰應用力學但求適用不務高深於初學者不無小補云耳

二　工業家言我國向無一定譯語本編取日譯可仍者仍之其字義與漢文不洽者姑以己意改之均注以英文原名庶閱者有所參攷

三　本編演例頗多所設問題均取適用但使練習純熟自能化腐為奇至問題原為初學者練習而設宜示答案殊非所宜故編末不復附錄

四　我國度量衡向因用途地方而異其制近雖有意制定亦尚未能劃一故本編比較表中姑且從省至必欲研究各種之異同則有杜亞泉君所編之中外度量衡比較表在

應用力學

目次

應用力學

Applicable Mechanics

緒論

Introduction

一 力學(Mechanics)

力學之定義　力學（一名重學）者研究力之運動及于物質若物體之結果之學科換言之即研究關于物質若物體之平衡與運動之學科也

力學分為三種曰動學（Kinematics）曰靜力學（Statics）曰動力學（Kinetics）

動學者凡物質若物體不問其原因如何單研究其運動之學科也

靜力學者研究物質若物體靜止之狀態（即平衡）之學科也

動力學者研究力與運動之關係之學科也

二 物質及物體(Matter and Body)

凡五官所接可知其所在者皆謂之物質即凡占有空間之萬物也

凡物質限于若干之量者謂之物体

物体有三種能保持一定之形狀而不易于變化者曰固体(Solid)金類石類木類是具有一定之容積與表面從其容器之形狀常保其平均之態者曰液体(Liquid)水酒油等是無一定之容積與表面非密閉器中則相反撥逸散彌漫空間者曰氣体(Gas)空氣蒸氣等是然是三種非絶對不變者也苟溫度有昇降乃循環變化而無止極故名之曰物体之三態

三 質點(Particle)

任意之物体無限小之一分子曰物質点或單曰質点

四 基本單位(Foundamental unit)

凡數量必有相當之單位今一物質若物体當其運動時若欲考究其故則必有其相當之時間距離質量且必依乎一定之力由是不可不先定其值而單位之用生焉

力學上使用之單位其數不尠主要不外三種即時間單位空間單位物質單位是也此三種謂之基本單位

五 (第一) 時間單位(Unit of Time)

以晝夜平均地球一週太陽之數為日謂之平均太陽日二十四分一日謂之時六十分一時謂之分六十分一分謂之秒學術上一般以秒為單位

六 (第二) 空間單位(Unit of Space)

以幾何學上之線面体為長單位面積單位立積單位而此

等總名曰空間單位然面積立積皆以長為標準故長為面積立積之基礎

a 長單位 (Unit of Length)

英國以碼 (yard) 為單位其原器為亞鉛錫銅一種之合金造成藏于倫敦大藏省

法國以米突 (metre) 為單位其原器為白金伊利麦姆 (Iridium) 一種之合金造成藏于巴里萬國米突同盟度量衡局其長約地球子午線四千萬分之一弱

日本以尺為單位其原器構造同法國藏于農商務省商工局

補助單位　英國補助單位為哩 (mile) (千七百六十碼) 鎖 (Chain) (二十二碼) 呎 (Foot) (三分之一碼) 吋 (Inch) (三十六分之一碼) 法國補助單位為基羅米突 (Kilometre) (千米突) 黑托米突 (Hectometre) (百米突) 德卡米突 (Dekametre) (十米突) 德西米突 (Decimetre) (十分之一米突) 仙梯米突 (Centimetre) (百分之一米突) 密利米突 (milimetre) (千分之一米突)

日本補助單位為里 (三十六町即一萬二千九百六十尺) 町 (六十間即三百六十尺) 間 (六尺) 寸 (十分之一尺) 分 (百分之一尺)

今將英法日三國尺度列表如下

英法日尺度比較表

英			法			日	
碼(yd)	呎(ft)	吋(in)	米(m)	糎(Cm)	粍(mm)	尺	寸
1	3	36	·914	91·438	914·383	3·018	30·175
·333	1	12	·305	30·479	304·794	1·006	10.058
1·094	3·281	39·371	1	100	1000	3·300	33.000
·331	·994	11·934	·303	30·303	303·030	1	10

其二

英		法		日	
哩	呎	粁(Km)	米	里	尺
1	5280	1·609	1609·315	·409	5311
·621	3281	1	1000	·255	3300
2·440	12885	3.927	3927·300	1	12960

英國尺度補助單位表

哩	鎖(Ch)	碼	呎
1	80	1760.	5280
	1	22	66
		1	3

英國水上測量用海里(浬)(Nantical)尋(Fathom)

浬 ═══ 6080 呎

尋 ═══ 6 呎

哩＝浬×1.1515＝基米×0.6214

浬＝哩×0.8684＝基米×0.5396

基米＝哩×1.6093＝浬×1.8531

6　面積單位(Unit of Area)

面積之單位卽以單位長爲邊所作正方形之面積

面積單位各國異制亦猶長單位也

英國以卯克 (Acre) 爲地積單位一卯克等于十平方鎖卽四千八百四十平方碼

法國以阿 (Are) 爲地積單位一阿等于百平方米阿之百倍曰黑克特阿 (Hectare) 一萬阿爲一平方基米

日本以坪 (道路宅地等用之) 步 (耕地山林等用之) 爲單位皆等于六尺平方卽三十六平方尺而步之外更有補助單位畝 (三十步) 段 (十畝) 町 (十段) 等廣面積測量用之

英	法	日
平方吋	平方仙米	平方寸
1	6.451	.703
.15	1	.109
1.423	9.183	1

英	法	日
平方呎	平方米	平方尺
1	.0929	1.012
10.764	1	10.890
.988	0.918	1

英	法	日
平方哩	平方基米	平方里
1	2.59	.168
.386	1	.065
5.955	15.423	1

1平方哩＝640卯克

1卯克＝40.467阿＝1224.13坪

＝4段24.13步

1阿＝·02471 耶克＝30·24坪
＝1·25畝

C. 立積單位(Unit of Volume)

立積之单位即以单位長為邊所作立方形之立積

英之立積单位為立方呎法之立積单位為立方米立方仙米日之立積单位為立方坪立方尺立方寸詳見卷末表

至用于量液体者别有名稱英國用加倫(Gallon)法國用利突(Litre)日本用升

英法日立積比較表

英	法	日
立方吋	立方仙米	立方寸
1	16·386	·589
·061	1	·036
1·695	27·826	1

英	法	日
立方呎	立方米	立方尺
1	·0283	1·0176
35·317	1	35·937
·983	·0278	1

英法日液体容積比較表

英	法	日
加倫(Gal.)	利突(Lit.)	升
1	4·543	2·519
·220	1	·554
·397	1·804	1

1英加倫＝1·201 美加倫＝277·463立方吋

1美加倫＝·833英加倫＝231立方吋

1利突＝1000立方仙米

1升＝64.827立方寸

英國容積有用噸(Ton)者一噸之容積凡四十二立方呎計船舶載貨用之謂之船積噸(Shipping Ton)非衡重之噸也

七　(第三)　物質單位(Unit of mass)

一物質中所含有物質之量曰其物體之質量

英國以磅(Pound)為單位法國以基羅格蘭即法里(Kilogramme)為單位日本以貫為單位而學術上一般使用之質量單位為法衡格蘭(Gramme)即基羅格千分之一也一格蘭之質量即攝氏四度蒸溜水一立方仙米中所含有之質量故一基格即攝氏四度蒸溜水一利突之質量也

以上所述之外尚有補助單位用以計大此者若英國之噸(Ton)本(Hundred weight)及法國之法噸(Tonne)等是也

英法日衡量比較表

英	法	日
磅(lb)	基羅格蘭(kg)	貫
1	·454	·120
2·205	1	·266
8·267	3·750	1

1噸＝2240磅

1本＝$\frac{1}{20}$噸＝112磅（本之記號通例用 Cwt）

1法噸＝1000基格

1噸＝1.076048法噸

1噸＝270.946貫(約271貫)

＝1016.048基格(約1016基格)

1法噸＝266.667貫＝2204.621磅

以上所述尺度面積立積衡量不過大概耳至其詳細列表附于卷末

八 密度及比重（Density & Specific Gravity）

一物体中物質聚合之度曰其物体之密度測定此密度其法二

（第一） 以任意單位立積（或一立方呎若一立方仙米）中質量定之

（第二） 以物体任意立積中質量與他物体等立積中質量相比定之

二者中以第二為上普通以水為標準物今舉一例以說明之定空間單位為一呎質量單位為一磅而其密度為五則

（第一） 其物体一立方呎中含有五磅之物質

（第二） 其物体一立方呎中含有水一立方呎中物質之五倍但水一立方呎中質量約千箱斯即62.5磅故所述

物體一立方呎中質量約五千翁斯即312·5磅也由此可知二法之迥然不同矣更以仙米及格蘭為單位再為說明則

（第一）　其物体一立方仙米中含有五格蘭之物質

（第二）　其物体一立方仙米中含有水一立方仙米中物質之五倍

凡測定物体密度以第二法為常其密度之比曰比重一般以水為標準物今就各種物質之比重列表如下

名稱	比重	名稱	比重
阿尔密鈕 Aluminum（鑄）	2·6	金	19·3
仝上（鍛）	2·7	白金	21·5
仝上（青銅）	7·8	白松	0·43
亞鉛（鑄）	6·9	赤松	0·58
仝上（板）	7·2	白樫（美產）	0·78
鑄鐵	7·15	赤樫（仝上）	0·85
鍛鐵	7·7	耐火石	1·8
鋼鐵	7·9	砂石	2·5
錫	7·4	花崗石	2·6
真鍮（鑄）	8·1	膠泥	1·7
仝上（板）	8·4	混凝土 Concrete	1·9
仝上（線）	8·6	塞門德（波特蘭產） Cement	3·1
尼克尔 Nickel（鑄）	8·3	冰	0·92
仝上（板）	8·7	酒精(0°C)	0·79

名稱	比重	名稱	比重
銅(鑄)	8·6	亞麻仁油	0·94
仝上(板)	8·8	海水(0°C)	1·026
仝上(線)	8·9	水銀(0°C)	13·59
砲金	8·7	蒸氣(一氣壓)	0·00061
銀	10·5	空氣(0°C)	0·00129
鉛	11·4	酸素	0·00143

九　F.P.S.制單位(Unit for F.P.S)

英國學術上以呎磅秒為測定數量之單位曰F.P.S.制故呎為長單位磅為質量單位秒為時間單位其面積單位為平方呎立積單位為立方呎不言可知

十　C.G.S.制單位(Unit for C.G.S.)

法國及歐洲大陸學術上以仙米格蘭秒為測定數量單位曰C.G.S.制故仙米為長單位格蘭為質量單位秒為時間單位其面積單位為平方仙米立積單位為立方仙米不言可知

近日英國學術上亦盛採用C.G.S制以米突及格蘭均以十進便于計祘也

第一編

動學

Kinematics

第一章　運動 (*Motion*)

第一節　運動及靜止 (*Motion & best*)

定義　凡物質若物體在空間不絶變化其位置時名其位置之變化曰運動反是物質若物體在空間絶不變化其位置時名之曰靜止

第二節　運動之種類 (*Kind of motion*)

凡觀察物質若物體之運動其速度有疾徐其路徑有曲直狀態萬千頗難一一為之區別然大別可分為三種即平面運動球面運動螺旋運動是也

〔第一〕　平面運動 (*Plane motion*)

定義　物體中之各點皆運動于互相平行之一平面上者曰平面運動

平面運動又分為直線運動及圓運動二種

直線運動 (*Straight line motion*)

定義　物體中之各點皆向同一之方向運動唯距離對于時間而變化者曰直線運動

(B)　圓運動 (*Circular motion*)

定義　物体中之各点皆以其物体之内部若外部之一定軸為中心常取同一之距离而廻轉運動者曰圓運動

〔第二〕　球面運動(Spherical Motion)

定義　物体中之各点皆以一点為中心常取同一之距离運動于一平面以外之空間者曰球面運動　球面運動範圍極小本書畧而不論

〔第三〕　螺旋運動(Screw motion)

定義　物体中之各点附于一定軸而廻轉且同時平行其軸而為直線状之運動者曰螺旋運動

第三節　路程(Path)

凡物体若質点在空間運動時不問其方向如何必有通過之路徑不問其為直線曲線皆曰路程

第四節　速轉位及速度(Speed, displacement & Velocity)

定義　運動之物体若質点在任意之時間内對于他静止之一点變化其位置時不問其方向如何其動体若動点對于所經過路程單位時間内之運動曰速

定義　運動之物体若質点不問其經過路程之如何對于他静止之一点取任意一定之方向而變化其位置時曰其動体若動点之轉位

定義　運動之物体若質点在任意一定之時間内為轉位時對于其轉位之運動曰速度　速者但表其量速度則併及

其路程之方向也

第五節 速度之種類 (*Kind of Velocity*)

〔第一〕 等速度及變速度 (*Uniform velocity & variable velocity*)

定義 物体若質點常于同一之極小時間向一定之方向通過同一之距離時其速度曰等速度反是物体若質點各瞬間所通過之距離不同時其速度曰變速度

〔第二〕 平均速度 (*Mean velocity*)

定義 物体若質點以變速度通過一距離之際若細分之而求其平均之值可視與以等速度而運動之結果同此平均之值曰平均速度

〔第三〕 加速度等加速度及變加速度 (*Acceleration, uniform acceleration & variable acceleration*)

定義 在某時刻之速度與前在某時刻之速度之差曰此時間之加速度若于極小時間速度之變化常相等時曰等加速度反是曰變加速度

第二章 直線運動 (*Straight line motion*)

第六節 等速度變速度及平均速度 (*Uniform velocity, variable velocity & mean velocity*)

今有等速度之物体于 t 秒時間運動一定之距離 S 呎則此物體之速度 V 可運算如下式

$$V=\frac{S}{t}\text{------------------------}(1)$$

物体以等速度運動故其各秒之速度相等即表其物体一秒時間運動之速度也如距离未知速度及時間已知而求其距离S時則

$$S=Vt\text{------------------------}(2)$$

如時間未知速度及距离已知而求其時間t時則

$$t=\frac{S}{V}\text{------------------------}(3)$$

例一　有某物体以一時間２０哩之等速度運動時其物体三秒時間所通過距离幾何　　答８８呎

〔解〕　味題意係求距离S故公式二適用即

$$S=Vt=\frac{20^{哩}\times5280^{呎}}{60\times60}\times3^{秒}=88^{呎}$$

變速度之計算與等速度比則難易迴乎不同因其每瞬間速度有變化也若欲求其變速度之值則必分其速度為極小部分因其極小可視與等速度等而公式(1)適用矣今命極小變速度為V'極小距离為ΔS極小時間為Δt則

$$V'=\frac{\Delta S}{\Delta t}\text{------------------------}(4)$$

有一物体于五秒間以變速度通過１００呎之距离其第

一秒15呎第二秒20呎第三秒25呎第四秒30呎第五秒10呎又有一每秒間以20呎等速度運動之物体于此其5秒間所通過之距離20呎X5秒＝100呎即與前物体運動之距離相等故雖以變速度運動之物体若細分之而求其平均速度即可視與以等速度運動之物体等

第七節　速度之單位(unit of velocity)

凡物体若質點于單位時間運動單位距離之速度為單位速度在英國日呎秒略記為ft/sec.或呎/秒例如有物体一秒間運動7呎之距離則此物体之速度為7呎/秒又有物体7秒間運動21呎之距離則此物体之速度為$\frac{21}{7}=3$即3呎/秒

雖然速度單位非可以呎秒式括之者也或因計算之便宜上有用呎分及哩時者故速度單位可任意自造要之一依所定單位時間單位距離為準

例一　由北京至漢口之普通火車為一時間18哩之速度其呎秒式如何　　答26呎秒强

〔解〕　$\frac{18\times5280}{60\times60}=26$秒强

例二　有甲乙二物体皆以等速度運動甲四秒間三十六呎乙一分間六十碼兩速度之比如何　　答3：1

〔解〕　$\frac{36}{4}=9$呎秒(甲之速度)

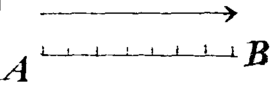
$$\frac{60\times3}{1\times60}=3\ (\text{乙之速度})$$

$$\therefore\quad \frac{\text{甲之速度}}{\text{乙之速度}}=\frac{9}{3}=\frac{3}{1}$$

第八節 速度作圖法(Graphical rapresentation of Velocity)

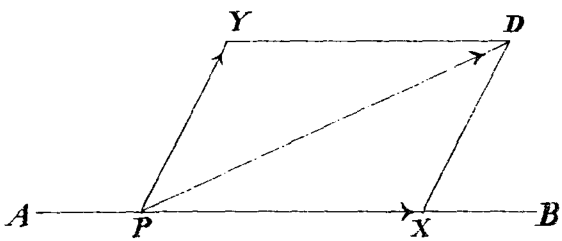
今有一物体以8呎秒之速度為直線運動若欲以圖表示之則以A為運動之起点AB為運動之方向附以矢頭AB之長為其一秒間之距离(以任意之尺度定之)如下畫以$\frac{1'}{8}$為單位速度則8呎秒之長為一吋是也

第一圖



第九節 速度之合成(Compocition of velocity)

第二圖



今有一物体由A向B運動之際若不受他力之作用則其方向絕不變動不待論矣然使此物体達于AB線上任意一点P時忽受不同在一線上（如PY之方向）他力之作用則此物体運動之方向必變而出于AB線外然其方向既非PX亦非PY（如上圖）却于此二速度之方向外更新取一方向若PD于某瞬間之後其物体運動至D換言之即此物体新變為PD之速度也故加他速度于一速度而別新變為一速度求此新速度法曰速度之合成其新速度曰合成速度(Resultant of velocity)

欲求此合成速度則必依乎下記速度之平行四邊形之定理

定理　由一點引二直線以直線之方向及長表示二速度之方向及量而作一以此二直線為隣邊之平行四邊形由其點所引之對角線即所求合成速度之方向及量也

例四　一商船以一時間11·842浬之速度由正東向正西航海時忽遇速度一秒間12呎之暴風一秒之後該船之位置及其速度如何（但風之方向由正北向正南作用）

答　船之位置　D點

船之速度　23·324呎秒

〔解〕　味題意則船行之方向與風之方向互為直角用前圖則$Y\hat{P}X$為九十度PX為船行之方向PY為風之方向而速度之量則

$$PX=\frac{11\cdot842\times6080}{60\times60}$$

$$=20\text{呎秒}$$

$$PY=12\text{呎秒}$$

其合成速度之量即PD對角線之長

$$PD=\sqrt{\overline{PX}^2+\overline{PY}^2}=\sqrt{\overline{20}^2+\overline{12}^2}$$

$$=\sqrt{544}$$

$$=23\cdot324\text{呎秒}$$

而該船一秒後所在之位置即PD對角線之一端D

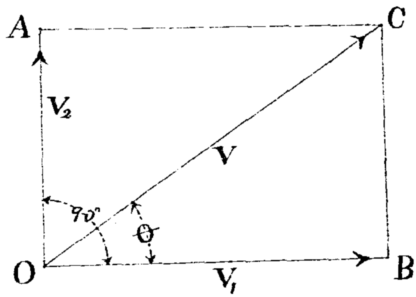
第十節 速度之分解(Resolution of Velocity)

合成速度之反面凡一物体以二速度所生之結果與其以一速度所生之結果相等則此二速度爲其一速度之分速度(Component of Velocity)求此二速度之法曰速度之分解但二速度中必知其一速度之方向及量或一速度之方向及他速度之量或二速度之方向或二速度之量乃能求之耳

分速度之方向互爲直角時特曰直角分速度(Rectangular Component of Velocity)

今將直角分速度及合成速度之關係畧述如下

第三圖



如圖OB OA二分速度各命為V_1 V_2而合成速度OC命為V OC OB所夾之角命為θ用三角術証之則

$$\frac{CB}{OC}=\sin\theta \qquad CB=OC\ \sin\theta$$

$$CB=V_2 \qquad OC=V$$

$$\therefore V_2=V_1\ \sin\theta \text{ ------------ } (1)$$

$$\frac{OB}{OC}=\cos\theta \qquad OB=OC.\cos\theta$$

$$OB=V_1 \qquad OC=V$$

$$\therefore V_1=V.\cos\theta \text{ ------------ } (2)$$

又二速度互為直角故平行四邊形為矩形即

$$V^2=V_1^2+V_2^2$$

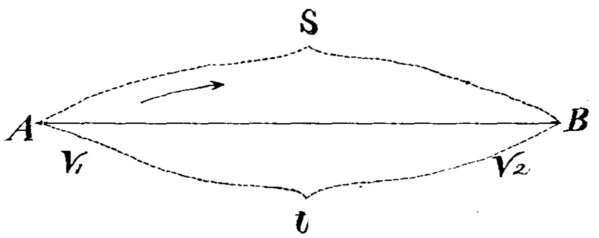
$$\therefore V=\sqrt{V_1^2+V_2^2} \text{ ------------ } (3)$$

由上三式即可求出V_1 V_2之值也

第十一節 加速度(Accleration)

有一物体于此最初之速度為十呎秒最終之速度為十五呎秒若是則此加速度比前增加用代數正號(+)而其值為5故此加速度為(+5)呎秒又如最初之速度為20呎秒最終之速度為15呎秒若是則此加速度比前減少用代數負號(−)而其值為5故此加速度為(−5)呎秒

第四圖



今有一物体于此如第四圖由A点向B点運動經過t秒時間之後恰至于B試命最初在A点時之速為V_1(V_1曰初速度)最終在B点時之速度為V_2(V_2曰終速度)AB之距离為S則V_2-V_1為在A点時與在B点時速度之變化即加速度也命此加速度為a則

$$a=\frac{V_2-V_1}{t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

若a為既知數而時間t未知則

$$t=\frac{V_2-V_1}{a}\text{------------------------------}(2)$$

由公式2而得

$$V_2=V_1+at\text{------------------------------}(3)$$

次欲求S距離之值則不可不先求其一秒間之平均速度今命此平均速度為Vm則

$$Vm=\frac{V_1+(V_1+a)+(V_1+2a)+(V_1+3a)+(V_1+4a)+\cdots+(V_1+ta)}{t+1}$$

$$=\frac{V_1(t+1)+a\frac{t^2+t}{2}}{t+1}=\frac{(V_1+\frac{at}{2})(t+1)}{t+1}$$

$$=V_1+\frac{at}{2}=V_1+\frac{V_2-V_1}{2}$$

$$=\frac{V_2+V_1}{2}\text{------------------------------}(4)$$

由是則 $S=\frac{V_2+V_1}{2}t$------------------------------(5)

將公式(2) t之值代入則

$$S=\frac{V_2+V_1}{2}\cdot\frac{V_2-V_1}{a}=\frac{V_2^2-V_1^2}{2a}\text{----------}(6)$$

次將公式(3)V_2之值代入公式(5)則

$$S=\frac{2V_1+at}{2}t=V_1t+\frac{at^2}{2}\text{----------}(7)$$

以上諸公式不問加速度之正負皆可適用若物体最初在

A点為静止時則初速度$V_1=0$即

$$a=\frac{V_2}{t}\text{------------------}(1)$$

$$t=\frac{V_2}{a}\text{------------------}(2)$$

$$V_2=a\,t\text{------------------}(3)$$

$$V_m=\frac{V_2}{2}\text{------------------}(4)$$

$$S=\frac{V_2}{2}t\text{------------------}(5)$$

$$S=\frac{V_2^2}{2a}\text{------------------}(6)$$

$$S=\frac{at^2}{2}\text{------------------}(7)$$

例五　有動体其初速度25呎秒以1秒間5呎秒之加速度運動二秒半之終其所有速度如何

答37.5呎秒

〔解〕　味題意公式(3)可以適用即

$$V_2=V_1+a\,t$$

$$=25+5\times2\tfrac{1}{2}=37.5\text{呎秒}$$

例六　有一火車以1時間30哩之速度運動今欲停車于距停車場220呎之處用制動機(Break)由其時至火車全停時需幾何秒　　答10秒

〔解〕　味題意公式(5)可以適用然

$V_2=0$

故　$S=\frac{V_2+V_1}{2}t=\frac{V_1 t}{2}$

$2S=V_1 t \qquad \therefore t=\frac{2S}{V_1}$

而　$V_1=\frac{30\times5280}{60\times60}=44$ 呎秒

$\therefore t=\frac{2S}{V_1}=\frac{2\times220}{44}=10$ 秒

例七　有動体其初速度2·5呎秒3分之終其速度為7·5呎秒其間經過距離幾何碼　　答300碼

〔解〕　味題意公式(5)可以適用即

$S=\frac{V_2+V_1}{2}t=\frac{7.5+2.5}{2}\times180=900$ 呎

$=300$ 碼

以上皆專就等加速度言之至于變加速度若分其速度時間為極小部分則其結果可視與以等加速度所得之結果等今命其最小速度為ΔV最小時間為Δt變加速度為a'則

$a'=\frac{\Delta V}{\Delta t}$

加速度之合成及分解與前所揭速度之合成及分解同

第十二節　落体之速度(Velocity of Falling-body)

凡存在地球上之萬物無不受重力(Gravity)之作用若二物体同時由等高處落下不問質量之輕重如何必同時着

地然以吾輩所習見者則有前後遲速之分以空氣之抵抗故茲所謂落体假定無空氣之抵抗(即真空)而理論之者也通例以 g 為加速度之記號

落体之運動乃等加速度直線運動唯妙之一例即物体受重力之作用每秒以 g 為加速度也落下時加速度為正擲上時加速度為負

g 之值隨緯度而異今略舉各要地之值列表如下

地方	緯度	g 之值	
		F.P.S 制	C.G.S.制
赤道	0° 0′	32·091	978·10
巴里	48°50′	32·183	980·94
倫敦	51°29′	32·191	981·17
伯林	52°30′	32·194	981·25
極	90° 0′	32·255	983·11

普通運算用略近数32·2(F.P.S.制)及980(C.G.S.制)

今試假高處有一物体其物体雖對于地球常保守其靜止之狀態若一解其束縛(即除去其抵抗地球引力之力)即受重力之作用忽自由以某速度而墮于地試命其落下所費之時間為 t 其速度為 V 由高處至地之距离為 S 則前節之公式(3)可適用但

$$V_1=0,\quad V_2=V,\quad a=g$$

今以此值代入公式(3)則

$$V=0+gt$$

$$\therefore V=gt \quad t=\frac{V}{g} \text{-----------} (1)$$

同理由前節公式(7)而得次式即

$$S=\frac{gt^2}{2} \text{-----------} (2)$$

次V及S之關係如下即

$$S=\frac{V^2}{2g} \text{-----------} (3)$$

$$V=\sqrt{2gS} \text{-----------} (4)$$

然g之值既知代入上式可改為

$$V=\sqrt{2gS}=\sqrt{2\times 32.2\times S}$$

即

$$V=8.025\sqrt{S} \text{-----------} (5)$$

由以上所論則吾輩得知關于自由落体之事項如下

((一))　各秒終之速度為1、2、3、4、5、……t之比

((二))　通過各秒時間之路程為1、3、5、7、9、…………$(2t-1)$之比

((三))　各秒終之路程為1^2、2^2、3^2、4^2、5^2、………t^2之比

例八　有一物体由高處落下費時間10秒此落体最初之位置距地如何但所在地為巴里

答1609.15呎

〔解〕　味題意則公式(2)適用即

$$S=\frac{gt^2}{2}=\frac{32.183\times 10^2}{2}=1609.15\text{呎}$$

例九　前題物体之終速度如何

答321.83呎秒

〔解〕　用公式(1)則

$$V=gt=32.183\times 10$$
$$=321.83\text{呎秒}$$

例十　一物体由高49呎之處落下此物体之速度如何

答56.175呎秒

〔解〕　$V=\sqrt{2gS}=8.025\sqrt{S}$

然$S=49$将此代入上式則

$$V=8.025\sqrt{49}=8.025\times 7$$
$$=56.175\text{呎秒}$$

拋上之運動

落体之反對卽由下垂直向上拋時其加速度g為負今試假定有一垂直拋上之物体其初速度命為V_1于t秒之終其物体之速度因受重力之作用變為V_2其路程命為S則

$$V_2=V_1-gt \quad \text{(6)}$$

$$S=\frac{V_2^2-V_1^2}{-2g}=\frac{V_1^2-V_2^2}{2g} \quad \text{(7)}$$

$$V_2=\sqrt{V_1^2-2gS} \quad \text{(8)}$$

$$S=V_1t-\frac{gt^2}{2} \quad \text{(9)}$$

假令抛上之物体其終速度$V_2=0$（即物体抛上最後之高點）而其最大之路程命為$Smax$則

$$Smax=\frac{V_1^2-0}{2g}=\frac{V_1^2}{2g}\text{------(10)}$$

$$\left.\begin{array}{l}V_1=\sqrt{2gSmax}\\V_1=8.025\sqrt{Smax}\end{array}\right\}\text{------(11)}$$

次由公式6變化公式10則

$$Smax=\frac{gt^2}{2}\text{------(12)}$$

例十一　有一塔其垂直之高257.6呎今以161呎秒之初速度垂直將一物体抛上其物体恰至塔顶之速度如何又需時間幾何　　答96.6呎秒　2秒

〔解〕　$V_1=161$　　$S=257.6$

故

$$V_2=\sqrt{V_1^2-2gS}$$

$$=\sqrt{(161)^2-2\times32.2\times257.6}=96.6\text{呎秒}$$

次求時間由

$$V_2=V_1-gt$$

而得

$$t=\frac{V_1-V_2}{g}=\frac{16-966}{32.2}=2\text{秒}$$

例十二　有一物体以40呎秒之初速度垂直抛上時此物体所及最高距離幾何又需時間幾何但所在地為倫敦

答24.851呎　1.243秒

〔解〕 味題意公式(10)適用即

$$S_{max}=\frac{V_1^2}{2g}=\frac{40^2}{2\times 32.191}$$

$$=24.851 呎$$

次求時間則

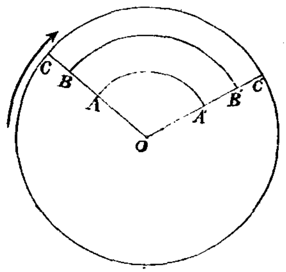
$$t=\frac{V}{g}=\frac{40}{32.191}=1.243 秒$$

第三章 圓運動(Circular Motion)

第十三節 線速度(Linear Velocity)

凡物体當其為直線運動時其各分子皆同若圓運動反是即其分子之運動各有不同也

第五圖



如上圖為一任意大之平圓板以O為中心取如矢所示之

方向廻轉今如圖以O為中心引任意之半徑OC于此半徑上任意取三分子順次命為A,B,C則此三點對于中心O常一定不變今試將此平圓板以任意之速度如矢之方向廻轉之假定C點至C′點之位置然後聯接C′O為直線則前之AB二點必在此C′O半徑上可知今命此二点為A′,B′而研究此三分子之運動則C點依于CC′弧B點依于BB′弧A點依于AA′弧而C,B,A三點同一時間內變為C′,B′,A′位置可知以A,B,C三點為同在一物体(即CO半徑)中之分子也而AA′,BB′,CC′三弧因其点對于中心距離之不同而異亦不待論今命C點至C′點之速度為V_C,B點至B′點之速度為V_B,A點至A′點之速度為V_A命時間為t則

$$V_C = \frac{\widehat{CC'}}{t}$$

$$V_B = \frac{\widehat{BB'}}{t}$$

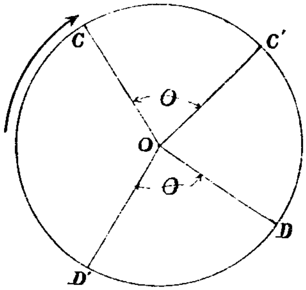
$$V_A = \frac{\widehat{AA'}}{t}$$

上式V_C之值大V_A之值小稱此V_C為在C點之線速度V_B為在B點之線速度V_A為在A點之線速度皆線速度也故同在一物体中各分子之線速度因其各分子之對于中心距离之不同而異其值即中心距离大者其線速度亦大中心距离小者其線速度亦小也

第十四節　角速度(*Angular velocity*)

物体為圓運動時測其速度之法線速度之外尚有一法即角速度是也

第六圖



上圖與前線速度同一性質由中心O取任意方向引二半徑OC.OD與圓周交于二点C.D今試將此平圓板以任意之速度如矢之方向迴轉之假定OC至OC′之位置則OD亦必同時而至OD′之位置而OC.OC′所作$C\hat{O}C'$與OD.OD′所作$D\hat{O}D'$之相等亦不待論今命此二角為θ則可由此θ之值以決定此平圓板之運動

測此θ角通例用弧度法(*Circular measure*)其角度以半徑等長之弧所對之中心角為單位據圖以說明之即如CC′弧之長若等于OC則此θ即為單位角也(DD′弧所對之θ亦然)此單位角曰弧度(*Radian*)

由此凡物体一秒間一弧度運動之速度為單位角速度畧為(弧度/秒)

有一圓如此命半徑為r則其圓周為$2\pi r$故$2\pi r/4$

不得不為四分圓對于中心直角之弧

以r除此弧所得弧度如下即

$$\frac{2\pi r}{4}\div r=\frac{2\pi r}{4}\times\frac{1}{r}=\frac{\pi}{2}\text{(弧度)}$$

而二直角之弧等于 $2\pi r/2$

$$\frac{2\pi r}{2}\div r=\frac{2\pi r}{2}\times\frac{1}{r}=\pi\text{(弧度)}$$

$$90^\circ=\frac{\pi}{2}\qquad 180^\circ=\pi$$

由此　$1^\circ=\frac{\pi}{180^\circ}$(弧度)

1 弧度 $=\frac{180^\circ}{\pi}$

$=57^\circ\!.29577951$

$=57^\circ\!.3$ 弱

然機械運動以每分間迴轉幾何為準若欲化為角速度則其換算如下

今命角速度為θ一分間之迴轉数為N則一迴轉三百六十度即2π弧度一分間之弧度為$2\pi N$故

$$\theta=\frac{2\pi N}{60}=0{\cdot}10472N\qquad(1)$$

第十五節　角速度及線速度之関係(Relation of Angular velocity to Linear)

如第六圖命OC半径為r其角速度命為θ圓周上一点C之線速度為v則此v為一秒間圓周上迴轉圓弧之長故

$$\theta = \frac{V}{r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$V = r\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

例十三　有一機輪一分間之迴轉數為２００其角速度如何　　答２０·９４４弧度秒

〔解〕　味題意公式(1)適用即

$$\theta = 0.10472N = 0.10472 \times 200$$

$$= 20.944 \text{ 弧度秒}$$

例十四　前題机輪之直径為一呎六吋其運動此輪之皮帯之線速度如何但假定皮帯極薄密着輪之圓周上且皮帯及机輪之間無摩擦者　　　答１５.７呎秒

〔解〕　$\theta = 20.944$

$$r = \frac{16''}{2} = 9''$$

$$\therefore r = \frac{9'}{12} = \frac{3}{4}$$

故　$V = \theta r = 20.944 \times \frac{3}{4}$

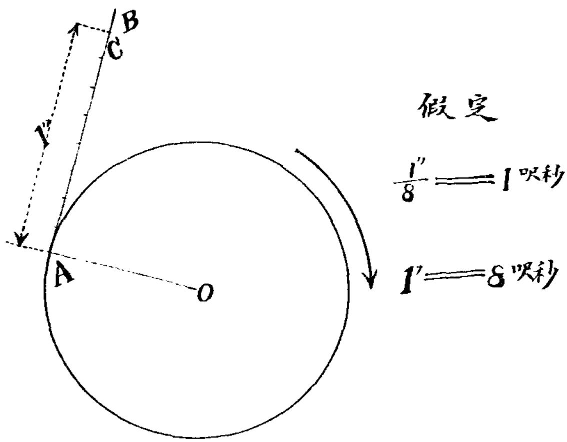
$$= 15.708 \text{ 呎秒}$$

第六節　速度作圖法（Graphical Representation Velocity）

如下圖Ｏ為中心ＯＡ為半徑如矢所示方向廻轉其速度為８呎秒則以圖表示此速度時由ＯＡ半径之一端Ａ（即圓周上一点Ａ）引切線ＡＢ以任意之縮呎由Ａ于ＡＢ上截Ｃ（如圖８呎秒等于１吋）則此ＡＣ之長即表示速度

者也

第七圖



圓運動之合成及分解與前所揭同從畧

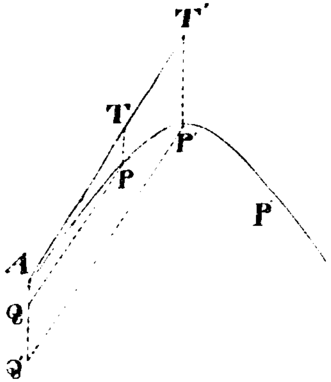
第四章　拋物線運動(Motion of Projectile)

第十七節　拋物線之路程(Path of Projectile)

定義　以一物体斜向拋射其物体在空間飛行之路程因受重力之作用而成拋物線形曰拋物運動

凡物体為拋物運動時拋射力及重力之外尚有一力即空氣抵抗力是也故實際拋物運動之路程為不規則之拋物線此章所論乃想像上之拋物即假定無空氣之抵抗而論之者也

第八節



今物体某秒間後其位置為P而其發射之方向為AT由P引此拋物線軸之平行線及AT交于T則此拋物線之一部分AP實為AT.TP二力之結果依牛頓氏運動第二則諸力同時作用于一物体時與諸力相繼作用之結果同故AP與以AT力運動物体至T後再以TP力運動物体至P同今假定（第一）以V呎秒之速度t秒後至T然後（第二）受重力之作用自由落下至P則

第一

$$AT=Vt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

第二

$$TP=\frac{gt^2}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

次將第一第二共通t之值消去則得

$$AT^2=\frac{2V^2}{g}TP \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

何則　$\overline{AT}^2 = V^2t^2 = V^2\frac{2}{g}TP$

故　$\overline{AT}^2 = \frac{2V^2}{g}TP$

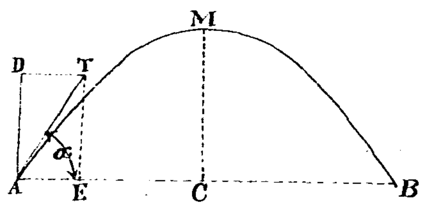
而　$AT = PQ \quad TP = AQ$

即　$\overline{PQ}^2 = \frac{2V^2}{g}AQ$ ------------------------ (4)

故無論P點在拋物線上之何處此二速度之關係常以此公式4而成立換言之二速度之關係常以公式4而成立者其路程為拋物線即$2V^2/g$為此二速度關係上之常數也

第十八節　最高距離(Maximum Height)

第　九　圖



最高距離者物体為拋物運動之際其物体距地平線之最大距離之謂也如上圖AB為地平線AMB為拋物線自AB二等分點C引垂線會拋物線于M則MC為最高距離命此為H命AT.AB所夾之角為α此α曰仰角(Ongle of Elevation)令物体以V呎秒之速度由拋射点A取AT之方向拋射此速度V可用直角分速度分解之即AD為垂直分速度AE為水平分速度欲求此二分速度之值則

$\frac{AD}{AT} = Sin\alpha$

$$\frac{AE}{AT}=\cos\alpha$$

故 $AD=AT\sin\alpha$

$AE=AT\cos\alpha$

然 $AT=V$

即 $AD=V\sin\alpha$

$AE=V\cos\alpha$

試但就此拋射之高而研究之則物体拋射向上所需者但垂直分速度而水平分速度無關係由是言之則拋物運動之最高距離恰與以垂直分速度AD將物体垂直拋上之最大距離同故第十二節公式10可以適用以H代 S_{max} 以$(V\cdot\sin\alpha)^2$代V^2則變為

$$H=\frac{(V\cdot\sin\alpha)^2}{2g}\text{..................}(5)$$

第十九節 飛行時間(Time of feight)

物体由拋射点A取AMB之路程為拋物運動其結果落于水平線上之一点B試命此所經過之時間為t則由A至M之時間與由M至B之時間等即物体由拋射点A至最高距離点M之時間為全体所需時間之二分之一即$(t/2)$而最高距離H與垂直分速度同則第十二節公式2適用以H代S以$(t/2)^2$代t^2則變為

$$H=\frac{g}{2}\times\frac{t^2}{4}=\frac{g}{8}t^2$$

然公式5 $H = \frac{(V_1 \sin\alpha)^2}{2g}$

則
$$\frac{(V_1 \sin\alpha)^2}{2g} = \frac{g}{8}t^2$$

故
$$t = \frac{2V_1 \sin\alpha}{g} \text{ -------------------- } (6)$$

此t曰抛物之飛行時間

第二十節　抛射距離(Range)

物体由抛射点A以α之仰角抛射t秒時後取AMB路程而達于由A之水平線上之一點B（用上図）與由A以水平分速度AE取ACB之路程t秒時後達于B之直線運動同今命此水平距离為R則以

$$AE = V_1 \cos\alpha$$

故　$R = V_1 \cos\alpha \cdot t$

以公式6代入則

$$R = \frac{V_1 \cos\alpha \times 2V_1 \sin\alpha}{g}$$

然　$2.\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

故
$$R = \frac{V_2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{V^2}{g}\sin 2\alpha \text{ ...... } (7)$$

此R曰抛射距离或單曰射距离

特別之條件

所謂特別之條件者論何為而得最大之拋射距離也

欲使R為極大則必使$\sin 2\alpha$為最大而後可何則公式7中V^2/g為定數而$\sin 2\alpha$與R為正比例也据三角法1為$\sin$最大之值即$\sin 90^\circ=1$今欲求$\sin 2\alpha$為最大之值亦使$\sin 2\alpha=1$而已据此即

$$\sin 2\alpha=90^\circ=1$$

故 $$2\alpha=90^\circ$$

$$\alpha=45^\circ$$

由此言之則欲得最大之拋射距離使仰角為四十五度而已

例十五　以1600呎秒之初速度發射彈丸時其彈丸達于水平面之最大拋射距離如何但$g=32$

答80000呎

〔解〕　味題意公式7適用而R為最大故$\sin 2\alpha=1$即特別之條件也

故 $$R=\frac{V^2}{g}\sin 2\alpha=\frac{\overline{1600}^2}{32}\times 1=80000\text{呎}$$

例十六　諸人為鬪毬游戲時有能拋毬垂直至五十碼之人今使此人任意拋之其能達之最大距離及其初速度如何但$g=32$　　答100碼　97·98呎秒

〔解〕　味題意宜先求垂直達五十碼之初速度故以公式5之H為最大可知適用即于

$$H=\frac{(V\sin\alpha)^2}{2g}$$

中以H為最大也然此式中$\sin^2\alpha$與H為正比例(此即抛物運動與抛上運動之關係也)故α亦為最大即

$$\sin\alpha=90^\circ=1$$

也以此式代入前式而化碼為呎則

$$50\times3=\frac{V^2\times1}{2\times32}$$

即　$$150=\frac{V^2}{64}$$

故　$$V^2=64\times150=9600$$

即　$$V=97.98\text{呎秒}$$

次水平最大距離公式7特別之條件適用即

$$R=\frac{V^2}{g}=\frac{9600}{32}=300\text{呎}$$

故　$$R=100\text{碼}$$

例十七　有速射砲以15°之仰角發射重量32磅之彈丸及于2500碼之距離其彈丸所納火藥之量幾何但彈丸之初勢與火藥量為正比例且火藥量等于彈丸之二分之一時其初速度為1600呎秒　　答3磅

〔解〕　味題意藥量等于彈量二分之一時彈丸之初速為1600呎秒故宜先求以此初速及15°之仰角發射所達之距離即

$$R=\frac{V^2}{g}\sin 2\alpha$$

然 $\alpha=15^\circ$

即 $2\alpha=30^\circ$

而 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

故 $R=\frac{V^2}{g}\times\frac{1}{2}=40000$ 呎

此乃火藥量16磅之拋射距离也然弾丸之初势與火藥量為正比例即發射距离與火藥量為正比例也依其比例以求之則

40000呎：16磅∷7500呎：x磅

故 $x=\frac{16\times 75}{400}=3$ 磅

第五章 单一弦運動(Sinple Harmonic Motion)

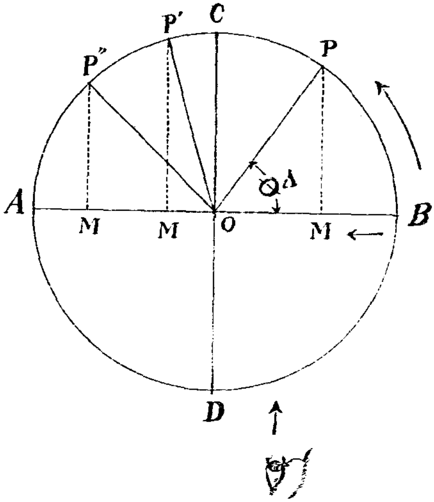
第二十一節 定義(Definition)

定義 一物体以等速度沿圓周上為圓運動之際由圓周之平面而觀察之與其物体在圓之直径上為往復直線運動等此運動曰单一弦運動

如下圖物体P由圓周上一點B以矢之方向運動經C, A, D復至于B由此圓周平面觀之與由B取BOA直径運動復由A經O至B等今試命物体為PP之AB上正射影為M則P之位置變為P'P''時皆有相當之M'M''之正射影故P在BCAD圓周上運動時由平面觀之與M之在BOA直

徑上往復運動等也

第十圖



單一弦運動爲振動運動之基礎彼波動(Wave Motion)振子(Pendulum)皆基于此也

物体P在圓周上一廻轉(即M在直徑上一往復)所需之時間曰週期(Period)OB之距離曰振幅(Ampeitude)OM曰某時刻之轉位研究之便宜上稱此BCADB圓曰母圓(Generating Circle)P點曰母点(Generoting Point)

瀛機上連接桿(Conecting Rod)之運動即此單一弦運動唯妙之一例也

第二十二節　母點之位置(Position of Penerating Point)

母点在母圓之圓周上廻轉卽母点之AB上正射影M在AOB直徑上往復運動時少就其母点及M点位置之關係研究之如下

今如畫母点P及中心O作半徑OP命此OP.OB所作之角爲θ振幅OB爲a BM距離爲S則

$$S = OB - OM$$

然 $\frac{OM}{OP} = \cos\theta$

故 $OM = OP\cos\theta$

又 $OP = OB = a$

故 $OM = a\cos\theta$

以此式代入上式則

$$S = a - a\cos\theta$$

故 $S = a(1-\cos\theta)$ ---------------------- (1)

θ角特別之條件

(第一) $\theta = 0^\circ$ 卽$\cos\theta = 1$

此時OP合于OB卽M合于B則S不得不等于零今以$\cos\theta$之值代入公式(1)則

$$S = a(1-\cos\theta) = a(1-1) = 0$$

(第二) $\theta = 60^\circ$ 卽$\cos\theta = 1/2$

此時M在OB之正中故S不得不等于振幅OB之二分之一今以$\cos\theta$之值代入公式(1)則

$$S = a(1-\cos\theta) = a\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a$$

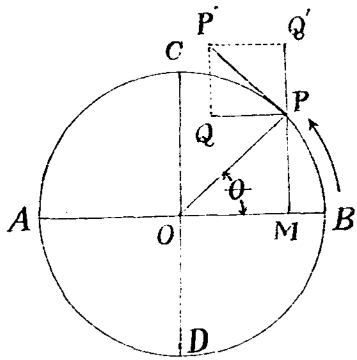
(第三)　$\theta=90^\circ$　即$\cos\theta=0$

此時OP合于OC即M合于O而S乃不得不等于振幅OB今以$\cos\theta$之值代入公式(1)則

$$S=a(1-\cos\theta)=a(1-0)=a$$

第二十三節　線速度及角速度(Linear and Angular Velocity)

第十一圖



于單一弦運動母点在母圓之圓周上運動之際其任意一点之線速度如下

如上圖母点由母圓之圓周上一点B取矢之方向運動經過某瞬間之後其位置為P今命此P之AB上正射影為M PO, BO所作之角為θ其由P所引之切線PP'即表示母点由B至P瞬間之速度者也然後将此速度直角分解之得水平分速度PQ垂直分速度PQ'其水平分速度PQ即示

M点之速度者也命母点之速度為V M点之速度為V'則

$$\frac{V'}{V}=\frac{PQ}{PP'}$$

$$V'=V\frac{PQ}{PP'}$$

然 $$\frac{PQ}{PP'}=Sin\theta$$

將此代入上式則

$$V'=V\,Sin\theta \quad \text{------------} (2)$$

由此而得V'及V之比即

$$\frac{V'}{V}=Sin\,\theta \quad \text{------------} (3)$$

可知M点之速度及母点速度之比與θ之正弦為正比例也

于単一弦運動母点在母圓之圓周上運動之際其任意一点之角速度如下

今命週期為T振幅為a母点之線速度為V則母点以T秒間一週母圓即

$$VT=2\pi a$$

故 $$V=\frac{2\pi a}{T}=\frac{2\pi}{T}a \quad \text{------------} (A)$$

而$2\pi=360°$今命母点之角速度為ϕ則

$$\phi=\frac{2\pi}{T}$$

以此值代入A式則

$$V=\frac{2\pi}{T}a=\phi a$$

又角速度ϕ及θ角之關係如下即

$$\theta=\phi t$$

以此θ之值及前V之值代入公式2,3則

$$V'=\phi a\,Sin\phi t \text{------------------}(4)$$

$$\frac{V'}{V}=Sin\phi t \text{------------------}(5)$$

第二十四節　週期及加速度之關係(Relation of Period to Acceleration)

命週期為T振幅為a母點P之線速度為V因

$$V.T=2\pi a$$

故　$$T=\frac{2\pi a}{V}\text{------------------}(6)$$

今就M點之加速度而研究之則此加速度即母点P加速度之水平分加速度也而母点之加速度為V^2/a(詳第二編遠心力)由是M之加速度如下即

$$M之加速度=\frac{OM}{OP}\cdot\frac{V^2}{a}$$

然　$$OP=a$$

故　$$M之加速度=\frac{V^2}{a^2}OM$$

詳言之則M之加速度取O之方向進行而其值由M点在AB直徑上某時刻之位置而異即M点之值與由O至M之

距離為正比例換言之一質点以任意之加速度沿某直線為運動時其方向若向直線中之一定点且其加速度之值與由其点之距離為比例則其質点之運動為單一弦運動也

此定義亦適用于曲線即若一質点沿某曲線以任意之加速度(沿曲線之各点)為運動時其加速度之值與曲線上之一定点至其質点之距離(沿曲線計之)為比例則此質点之運動為單弦運動振子之運動(詳第三編動力學)是也

今以F為其向定点進行之加速度則由前式而得

$$F=\frac{V^2}{a^2}$$

將此值代入公式6則

$$T=\frac{2\pi a}{V}=2\pi\frac{a}{V}=\frac{2\pi}{VF}\cdots\cdots(7)$$

此即週期及加速度之關係也

由以上所述更得一定義如下

一質点若以如上所述之加速度為運動時其質点以單一弦運動在與振幅無関係之週期内對于O点而振動即不問其質点以何距離始為運動而其質点由始点通過O点而至終点與由終点通過O点復至始点所需時間相等換言之其質点運動之時間所謂等時運動(Isochronous motion)者也

例十八　用下之條件求其母圓之直徑

$$\left.\begin{aligned} S &= 0.402\text{呎} \\ \theta &= 30^\circ \end{aligned}\right\}$$　　答6呎

〔解〕　用公式(1) $S=a(1-\cos\theta)$ 而變化之即

$$a=\frac{S}{1-\cos\theta}=\frac{0.402}{0.134}=3\text{呎}$$

今命母圓之直徑為D則

$$D=2a=2\times3=6\text{呎}$$

例十九　週期2·5秒振幅2呎其母点之線速度如何　答5·02呎秒

〔解〕　用公式(6) $T=2\pi\,a/V$ 而變化之則

$$V=\frac{2\pi a}{T}=\frac{2\times3.1416\times2}{2.5}=5.02\text{呎秒}$$

例二十　前題母点之角速度如何　　答2·51 弧度

〔解〕　用公式(B)或用第三章第十五節公式(2)而變θ為φ變r為a則

$$\phi=\frac{V}{a}=\frac{5.02}{2}=2.51\text{弧度}$$

一編終

第二編

靜力學

(Statics)

第一章 力之平衡 (Equilibrium of Forces)

第二十五節 力 (Force)

定義 作用于一靜止之物体而運動之或與以欲為運動之勢者及作用于一運動之物体而靜止之或與以欲為靜止之勢者謂之力又凡變化運動者亦力之作用也

凡測力有重要之條件三

〔第一〕 着力点 (Point of Application)

凡力之作用及于物体必于一点此点曰着力点

〔第二〕 方向 (Direction)

即力之作用之方向也

〔第三〕 量 (Magnitude)

即力之大小也以力之单位計算之

凡力之作用及于物体雖種種不同要之由力學上之觀察不過三種即

〔第一〕 壓力 (Pressure)

壓力者力之作用壓迫他物体之謂也如抛球推車等類是

〔第二〕 張力 (Tension)

張力者力之作用牽引他物体之謂也如人力車火車等之作用是

〔第三〕 重力(Gravity)

重力者地球引力之作用常使物体墜下之謂也凡地球上存在之萬物無不受重力之作用

所謂力之平衡云者諸力同時作用于一物体互相消滅之謂也換言之即物体同時受諸力之作用仍保持其常態(靜止者仍靜止運動者仍以前之速度運動)與未受諸力之作用同之謂也

第二十六節 力之單位(Unit of Force)

測定力之大小單位有二種即

〔第一〕 絕對制單位(Absolute Unit)

絕對制單位者力之作用于單位時間內生單位速度于單位質量之謂也

英國以一秒間生一呎秒之加速度于質量一磅之物体之力為單位力曰磅達爾(Poundal)

法國以一秒間生一仙米秒之加速度于質量一格蘭之物体之力為單位力曰代因(Dyne)

〔第二〕 重力制單位(Gravitation Unit)

重力制單位者地球引力作用于單位質量之力之謂也故即以重量單位為重力單位

英國以磅為重力單位法國以格蘭為重力單位

力之畫示法與速度同先求其着力点次辨其方向最後計其力之量

例二十一　以長$1'3''$之直線表示五磅之力則長$2'$之直線表示之力幾何　　答8磅

〔解〕　$1'3''=15''$　　$2'=24''$

故　$\frac{5}{15}\times 24=8$磅

例二十二　長$1''$之直線表示70磅之力今欲表示一噸之力需長若干　　答$2'8''$

〔解〕　1噸$=2240$磅

故　$\frac{2240}{70}=32''=2'8''$

第二十七節　力之合成(Composition of Forces)

力之合成法與前編所述速度合成法同理即由二力而得其一新力也此新力曰合成力(Resultant Force)或單曰合力他二力曰分解力(Component Force)或單曰分力

作用于一物体之二力若同在一直線上者得二定理如下

定理一　二力方向相同則其合力等于二力之和其方向亦同

定理二　二力方向反對則其合力等于二力之差其方向

與大者同

第二十八節　力之平行四邊形(Parallelogram of Forces)

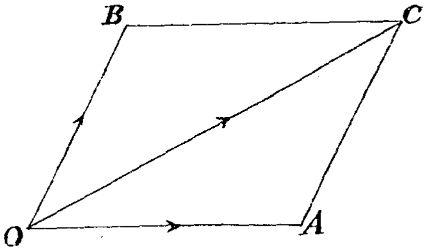
力之平行四邊形全與速度之平行四边形同今述其定理如下

定理　二力作用于一点時由其点引二直線表示其方向及量以此二直線為隣边作一平行四边形則由着力点所引之對角線即表示此二力之合力者也對角線之長及方向即合力之量及方向也

求合力之畫法有三種述之如下

第一法

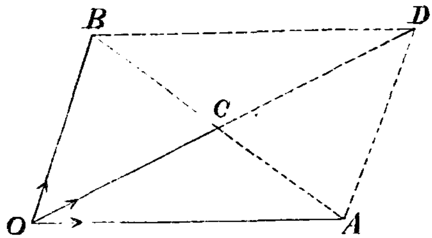
第十二圖



以O表示其着力点OA,OB表示二力之方向及量次由A,B引OA,OB之平行線交于一点C而成一平行四边形OACB由O所引之對角線OC即OA,OB之合力也

第二法

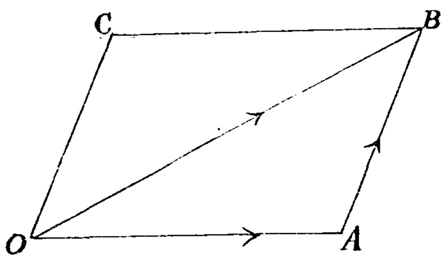
第十三圖



取O為着力点引二力OA.OB連AB直線而取其正中点C連OC直線則此OC之方向即合力之方向OC之長即合力之量之半試引AD.BD作OADB平行四邊形据幾何定理平行四邊形之對角線互兩平分故OC等于OD之半

第三法

第十四圖

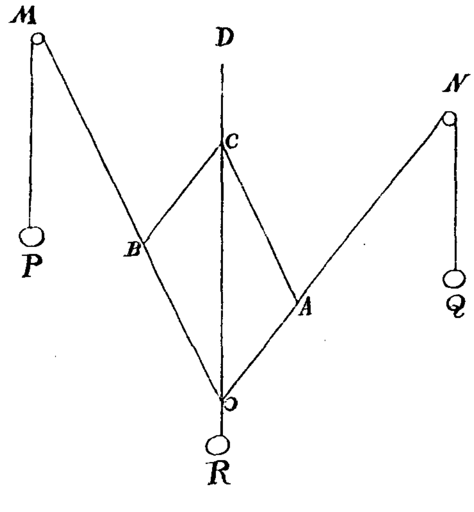


由着力点O引第一力OA次由A引第二力AB連OB直線則此OB即合力也

試引OABC平行四邊形其時OC等于ABＣ之方向及量故OB為合力也

以實驗証明此平行四邊形之理則有格拉威散德之機械(Gravesande's Apperatus)

第十五圖

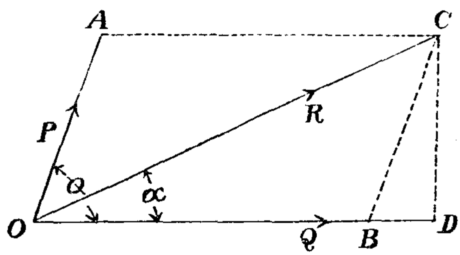


如圖乃畧示其机械之組織者也圖中OA,OB,AC,BC,DCO各直線所示乃薄竹片若木片所作之平行四邊形及其對角線也其各角点皆作螺鋑能自由運動且由A,B以細絲通過N,M小滑車贅以QP二重量而懸R重量于O若P

Q, R之重量恰與OA, OB, OC之長爲比例則此三重量相平衡而OC垂直即OC平行MP, NQ換言之即OA, OB, OC三力平衡也由是則OA, OB之合力不得不爲OC即OC與CO方向反對而量相等也

次述合力及分力之關係

第十六圖



如圖作用一点之二力OA, OB所夾之角命爲θ以OA, OB爲二隣邊作四邊形$OBCA$由O引對角線OC命此OC與底邊OB所夾之角爲α據三角術于三角形OBC中

$$\overline{OC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{OC}^2 - 2BC \cdot OB \cdot \cos C\hat{B}O$$

命圖中$OC = R$, $BC = OA = P$, $OB = Q$

將此代入上式則

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos O\hat{B}C$$

然$O\hat{B}C$為鈍角則

$$\cos O\hat{B}C = \cos(180^\circ - \theta)$$

故 $$\cos O\hat{B}C = -\cos\theta$$

以此式代入上式則

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$

故 $$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta} \cdots\cdots\cdots (1)$$

次如圖將OB引長由C引垂線交于D于三角形OCD中

$$\frac{CD}{OC} = \frac{CD}{R} = \sin\alpha$$

又于三角形CBD中$C\hat{B}D = \theta$

故 $$\frac{CD}{CB} = \frac{CD}{P} = \sin\theta$$

由此兩式則

$$CD = R\sin\alpha = P\sin\theta$$

故 $$\sin\alpha = \frac{P\sin\theta}{R} \cdots\cdots\cdots (2)$$

θ角特別之條件三即

〔第一〕 $\theta = 0$

則OA, OB不得不合為一直線而$\cos\theta = 1$以此代入公式1則

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ} = \sqrt{(P+Q)^2}$$

故　$R = P + Q$

即合力 R 等于 P, Q 二力之和也

次 $\theta = 0$ 則 $\sin\theta$ 亦不得不等于 0 以此代入公式 2 則

$$\sin\alpha = \frac{P\sin\theta}{R}$$

$$= \frac{P\times 0}{R}$$

$$= 0$$

〔第二〕　$\theta = 90^\circ$

則 OA, OB 不得不互為垂直線而 $\cos\theta = 0$ 將此式代入公式 1 則

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\times 0}$$

故　$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$

即合力 R 為 P Q 二力所作矩形之對角線也

次 $\theta = 90^\circ$ 則 $\sin\theta$ 不得不等于 1 以此代入公式 2 則

$$\sin\alpha = \frac{P\sin\theta}{R}$$

$$= \frac{P\times 1}{R}$$

$$= \frac{P}{R}$$

〔第三〕 $\theta = 180^\circ$

則OA,OB不得不各取正相反對之方向而成一直線而$\cos\theta = -1$將此式代入公式I則

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \times -1}$$
$$= \sqrt{(P-Q)^2}$$

故 $R = P - Q$ 或$Q - P$

即合力R等于P Q二力之差也

次$\theta = 180^\circ$則$\sin\theta$不得不等于0以此代入公式2則

$$\sin\alpha = \frac{P\sin\theta}{R}$$

$$= \frac{P \times 0}{R} = 0$$

就此三條而攷究之則合力由于θ之大小而消長即θ小者合力大θ大者合力小換言之即θ之餘絃大合力因之而大餘絃小合力因之而小也

例二十三 3磅及5磅之二張力以60°之角同作用于一物体之一点其合力之量若干 答7磅

〔解〕 $\cos\theta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

故 $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$

$$= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \times 3 \times 5 \times \tfrac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{49}\text{磅} = 7\text{磅}$$

例二十四　１２磅及３５磅之二張力互相垂直作用于一物体之一點其合力之量若干　　答　３７磅

〔解〕　$\cos\theta = \cos 90^\circ = 0$

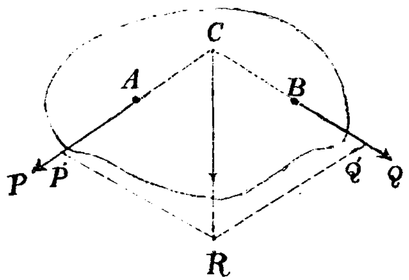
故　$R = \sqrt{P^2+Q^2}$

$= \sqrt{\overline{12}^2+\overline{35}^2}$

$= \sqrt{1369} = 37$磅

若諸力非同作用于一点者亦可求得其合力

第十七圖

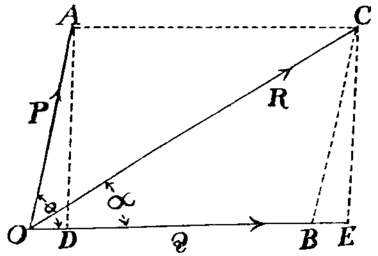


如﹝？﹞P之着力点為A Q之着力点為B今欲求此B Q之合力R則将P A，Q B引長交于一点C然後由C于C P上截P A等長点P′C Q上截Q B等長点Q′以C P′，C Q′為二隣邊作平行四邊形C P′R Q′由C所引對角線C R之長及其方向即P Q之合力而着力点在通過C R之無限直線上

第二十九節　力之分解(Resolution of Forces)

力之分解法亦與前編速度分解法同

第十八圖



如圖O為着力点OC為合力OA,OB為二分力以次命為R,P,Q,P Q夾角命為θ R Q夾角命為α由A,C引OB垂直線與OB,OB之引長線交于D,E則二分力之關係如下

于三角形AOD中

$$AD = P.\sin\theta$$

于三角形COE中

$$CE = R.\sin\alpha$$

然 $$AD = CE$$

故 $$P.\sin\theta = R\sin\alpha$$

即 $$P = \frac{R\sin\alpha}{\sin\theta} \qquad (1)$$

而 $$Q = R.\cos\alpha - P\cos\theta$$

由三角術求之則

$$Q = R\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} \qquad (2)$$

$\theta\alpha$特別之條件

〔第一〕 $\theta=90^\circ$

則二分力不得不互為垂直而

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta&=\sin 90^\circ=1\\ \sin(\theta-\alpha)&=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha\end{aligned}\right\}$$

以此代入公式1.2則

$$P=R\sin\alpha \text{------------------} (1)$$

$$Q=R\cos\alpha \text{------------------} (2)$$

〔第二〕 $\alpha=\theta/2$

則四邊形不得不為菱形即二分力相等而

$$\sin(\theta-\alpha)=\sin\frac{\theta}{2}=\sin\alpha$$

以此代入公式1.2則

$$P=R\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}$$

$$=R\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin 2\frac{\theta}{2}}$$

$$=R\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=R\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$Q=R\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}$$

故 $P=Q$

例二十五 有AB二力以60°之角作用于一物体生21磅之合力AB二力之值若干但A大于B且A及合力作15°之角　答 $A=17.14$磅 $B=6.25$磅

〔解〕味題意 $\theta=60^\circ$ $\alpha=15^\circ$

先求A之值則公式2適用即

$$Q=R\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}$$

故 $$A=21\times\frac{\sin(60^\circ-15^\circ)}{\sin 60^\circ}$$

$$=21\times\frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}$$

然 $$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

故 $$A=21\times\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=17.14\text{磅}$$

次求B之值則公式1適用即

$$P=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

故 $$B=21\times\frac{\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$$

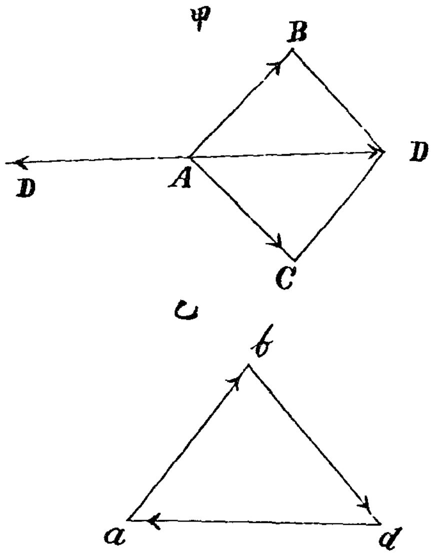
然由表而得

$$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

故　$B = 21 \times \dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6.25$ 磅

第十三節　力之三角形 (Triangle of Forces)

第十九圖



如甲圖由平行四邊形之理則 AD 為 AB, AC 之合力今引長 DA 至等距為点 D' 據力之合成定理2則 $AD \sim AD' = 0$ 即 AD', AD 二力平衡可知

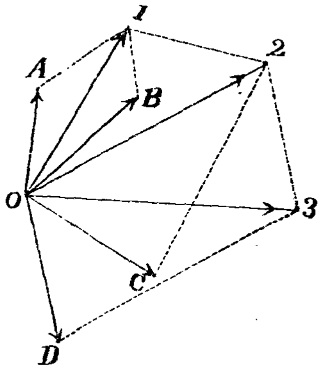
如乙圖 ab, bd 為二分力則 ad 為其合力可知以甲圖 BD 固等于 AC 也今反 ad 方向為 da 則 ab, bd, da

三力不得不平衡由是得一定理如下

定理　作用于一点之三力相平衡時引平行三力之直線作一三角形則此三角形之三邊順次與其平行之力為比例

第三十一節　二力以上之合成(Composition of more than two forces)

第二十圖

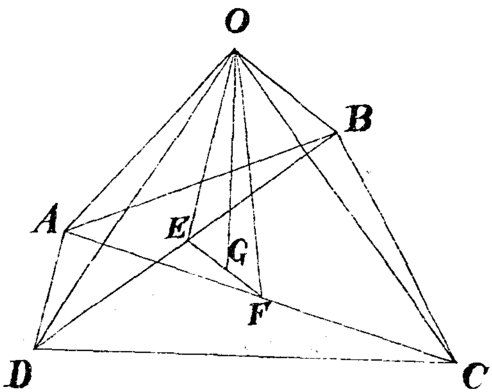


如圖OA,OB,OC,OD四力同作用于一点O欲求其合力則用前平行四邊形之定理先求得OA,OB合力O1,次求得O1、OC合力O2最終求得O2,OD合力O3,O3即此四力之合力也如此類推任分力幾何亦可得其合力矣

例二十六　如下圖ABCD為一不規則之四邊形O為形外之任意一点今由O取OA,OB,OC,OD四力作用于

各角点則其合力等于OG之四倍試証其理(但G為AC BD二對角線正中点所連結直線之正中点)

第二十一畵



〔解〕 先于畵上引AC,BD二對角線次由其正中点EF連為一直線取正中点G依平行四边形定理

$$OA,OC\text{之合力}=2OF$$

$$OB,OD\text{之合力}=2OE$$

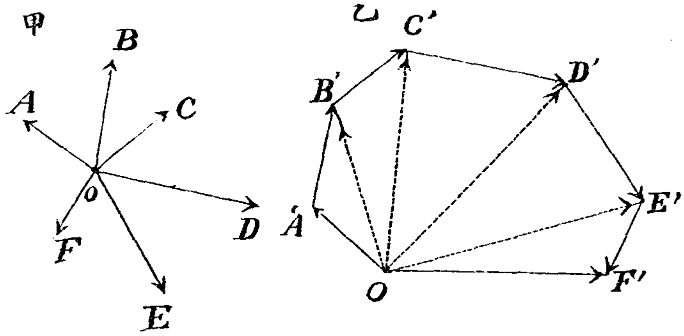
同理 OE,OF之合力$=2OG$

將上式二倍之則

$$2OE,2OF\text{之合力}=4OG$$

第三十二節　力之多角形 (Polygon of Forces)

第二十二圖



上節所述雖可求得多力之合力然為法過繁此節所述多角形則最簡単之法也如圖甲 OA, OB, OC, OD, OE, OF 六力同作用于 O 點則于他處任取一点 O' 由 O' 引 $O'A'$ 使平行且等于 OA 由 A' 引 $A'B'$ 使平行且等于 OB 由 B' 引 $B'C'$ 使平行且等于 OC 由 C' 引 $C'D'$ 使平行且等于 OD 由 D' 引 $D'E'$ 使平行且等于 OE 由 E' 引 $E'F'$ 使平行且等于 OF 連結 $F'O'$ 為直線則 $O'F'$ 為六力之合力

今試由 O' 引 $O'B'$, $O'C'$, $O'D'$, $O'E'$ 四直線据上三角形法 $O'A'$, $A'B'$ 之合力為 $O'B'$, $O'B'$, $B'C'$ 之合力為 $O'C'$, $O'C'$, $C'D'$ 之合力為 $C'D'$, $O'D'$, $D'E'$ 之合力為 $O'E'$, 而 $C'E'$, $E'F'$ 之合力為 $O'F'$ 故 $O'A'$, $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$ 之合力為 $O'F'$ 即 OA, OB, OC, OD, OE, OF 之合力為 $O'F'$ 也由是用多角形法

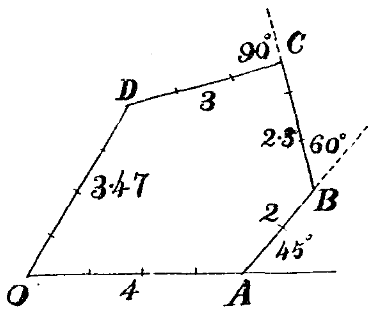
以求多力之合力乃以諸力順次頭尾相接之後（用固有之方向及量）其最初最終両点相結之直線即合力之量其方向乃與諸力循環之方向反對也

由上所述而得一平衡定理如下

定理　作用于一点之諸力若順次取之連結成一多角形而各边能順次代表各力之方向及量者則諸力恆互相平衡

例二十七　有四力于此順次以$45°$,$60°$,$90°$之角作用于一点且其值順次為4,2,2·5,3磅達爾試用多角形求其合力之值若干　　答3·4 7磅達爾

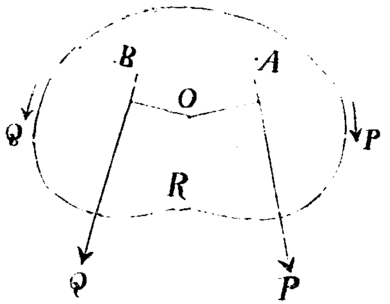
第二十三圖



〔解〕　先以任意同縮尺表各力之量最初引O A線由A引與O A引長線作$45°$之角B C由C引與B C引長線作$90°$之角C D然後連結O D以諸力同縮尺量之故恰得3·4 7之數也

第三十三節 力之能率(Moment of Force)

第二十四圖



如圖試命有一無重量之R物体于此以O為定軸可任意左右迴轉今加以P力于O之右則此物体必如P力所示方向迴轉可知此迴轉之度依乎P力之大小固不待論且視乎其力作用之方向及定軸之位置而異即R物体迴轉之度視P力之大小及其與定軸O之距離(即P之垂直線OA之長)而定換言之即R物体迴轉之度視P力之大小與OA相乘積而定也此相乘積曰力之能率其與定軸之距離曰此力之臂(Arm)今命M為力之能率則P力之能率可以公式表之即

$$M = P \times OA$$

同理左方Q之能率為

$$M = Q \times OB$$

然能率以正負別之何則PQ二力迴轉之方向相反也力學上以如時針迴轉之方向為正反是為負如圖P正而Q負故在P則

$$M=P\times OA$$

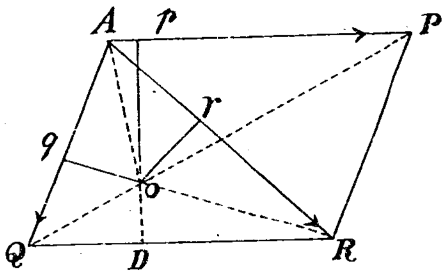
在Q則

$$M=-Q\times OB$$

次述關于能率之二定則于下

第一定則 同在一平面上之二力同作用于一点或方向相會者對于任意一点上二力能率之代數和等于其合力之能率 茲試以圖及式證之

第二十五圖



如圖PQ二力同作用于A用平行四邊形之理得合力R取任意一点O由O引Op, Oq, Or三直線垂直于PQR則

P對于O之能率$=AP\times Op$

Q〃〃〃〃〃〃$=AQ\times Oq$

R〃〃〃〃〃〃$=AR\times Or$

次依其正負據定則列式則

$$+AP\times Op-AQ\times Oq=AR\times Or \quad (A)$$

欲證明此式必由O引四直線至各角頂點更引長pO交QR于D則

$$Op=pD-OD \text{------------} (1)$$

$$AP=QR \text{------------} (2)$$

此二式相乘則

$$Ap\times Op=pD\times QR-OD\times QR \text{---} (3)$$

以2除之則

$$\frac{Ap\times Op}{2}=\frac{pD\times QR-OD\times QR}{2}$$

即 $\triangle AOP=\triangle AQR-\triangle QOR$

如當將上式後節変化則

$$\triangle AOP=\triangle QOA+\triangle AOR \text{------------} (4)$$

即 $AP\times Op=AQ\times Oq+AR\times Or$ -----(5)

于是 $AP\times Op-AQ\times Oq=AR\times Or$ ----(6)

假令任意点O在R合力上則上式中之Or不得不等于零故

$$AP\times Op-AQ\times Oq=0$$

由是得第二定則如下

第二定則　同在一平面上之二力同作用于一点或方向相會者對于任意一点二力能率之代数和若等于零則其二力相平衡依此定則又得一逆定理如下即

二力作用于一物体相平衡者則其二力對于任意点能率之代数和等于零

非但二力為然也即二力以上亦莫不然依此又得二定則如下

（第一）　在一平面上之諸力作用于一点或方向相會者對于任意一点上諸力能率之代数和等于其合力之能率

（第二）　在一平面上之諸力作用于一点或方向相會者若相平衡則對于任意点上諸力能率之代数和等于零

例二十八　有一槓桿于此其兩端懸以2磅及6磅之A B兩重錘距A錘1·5呎許為支点則錘平衡問此槓桿全長若干　　答2呎

〔解〕　味題意第二定則適用因A B二錘平衡故對于支点上二力之能率之代数和等于零今命支点為C,A,B二力之着力点為D E而B力之能率為正A力之能率為負

則　$-A\times DC+B\times EC=0$

即　$A\times DC=B\times EC$

然　$A=2$　$B=6$　$DC=1\cdot5$呎$=18$吋

将此代入上式則

$$2\times 18 = 6\times EC$$

故 $$EC = \frac{36}{6} = 6$$

今命槓桿之長為L則

$$L = DC + EC = 24' = 2\text{呎}$$

例二十九　有兩端支持之AB梁于此其全長五呎今于距一呎処C懸以一百八十磅之R重量問A及B所受力各若干　　答 A144磅　B36磅

本題第二定則適用而

$$CB = AB - AC = 5 - 1 = 4$$

先就A点索諸力之能率則

$$-B\times AB + R\times 1 + A\times 0 = 0$$

故 $$-B\times AB + R\times 1 = 0$$

即 $$5B = 180$$

故 $$B = 36\text{磅}$$

更就B点索諸力之能率則

$$+A\times AB - R\times 4 + B\times 0 = 0$$

故 $$+A\times AB - R\times 4 = 0$$

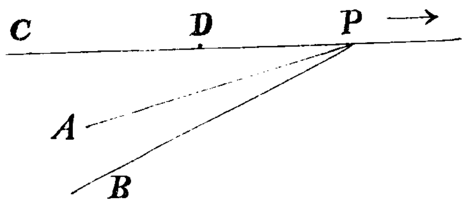
即 $$5A = 720$$

故 $$A = 144\text{磅}$$

第三十四節　平行力及其中心(Parallel Forces its Centre)

定義　作用于一物体之諸力若其方向互相平行時諸力曰平行力

第二十六圖



如圖 AB 為定点 CD 為定直線（無限）于 CD 引長線上任意取一点 P 連結 AP, BP 假令 P 点沿 CD 無限直線上如矢之方向移動則 P 漸推漸遠而 APC, BPC 二角亦從 P 点之遠而小其極 P 至無限距離時此二角遂等于零而 CD, AP, BP 三直線必相平行

如上所論則平行力者與作用于一点之諸力同故前所論之結果可直取應用也

欲論平行力則必先述其三要件則

（第一）　二平行力合力之方向

命二平行力為 P Q 合力為 R 則 R 平行 P Q 何則據上所論述則 P Q R 三力于無限距離相會者也二力同方向者合力亦同二力反方向者合力從其大者

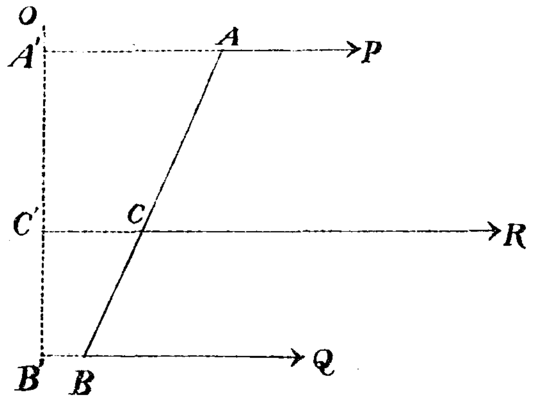
（第二）　二平行力合力之量

二力同方向者合力等于二力之和反方向者合力等于二力之差

（第三） 二平行力合力之位置

求合力之位置宜用前節所述能率定則

第二十七圖

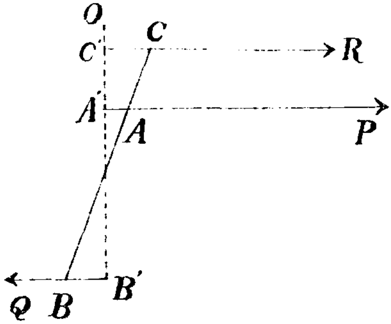


如圖P Q二力同方向作用于二点A B取任意一点O由O引二力之垂線交二力（或其引長線）于A' B'且交合力R于C'則$P.OA'+Q.OB'=R.OC'=(P+Q)OC'$據此則合力在二力之間接近大者

如下圖P Q二力反方向作用于二点A B取任意一点O由O引二力之垂線交二力于A' B'且交合力R于C'則

$$P.OA'\sim Q.OB'=R.OC'=(P\sim Q)OC'$$

第二十八圖



據此則合力在二力之外接近大者　今試命O点在R上

則　　$OC=0$

故　　$P.OA'-Q.OB'=0$

即　　$\frac{OA'}{OB'}=\frac{Q}{P}$

更命O点在B点上則

$P.AB=R.BC$

或　　$BC=\frac{P}{R}AB=\frac{P}{P\pm Q}AB$ ....!!

此式應用時多最為要式也

平行力之中心(Centre of Parallel Forces)

定義　平行力合力之着力点曰平行力之中心

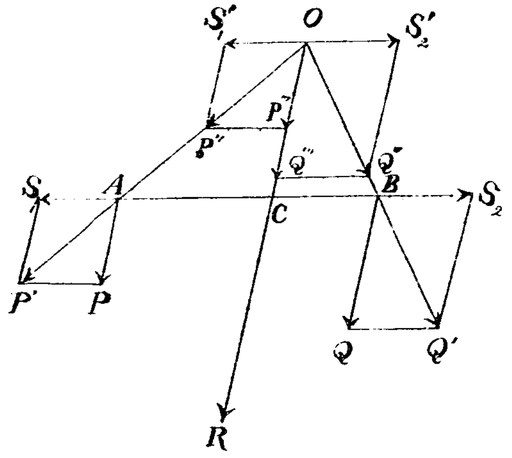
平行力之着力点及其量若一定不変縦令其方向如何変

化其中心決無变動此平行力之特別性質也

上所述之理不但二平行力為然即多數之平行力作用于一物体時其中心亦同此理

第三十五節 平行力之合成(Composition of Parallel Forces)

第二十九圖

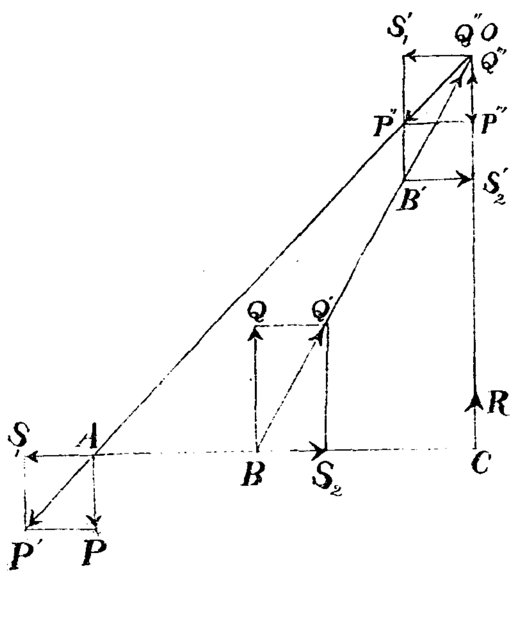


如圖 P Q 二力同方向平行作用于 A B 欲求其合力則引長 BA 至 S_1 引長 AB 至 S_2 $AS_1=BS_2$ 據平衡定理則 AS_1 BS_2 二力同在一直線上方向正反對且相等故互相打消無作用乃據平行四邊形之定理求得 AP, AS_1 之合力 P', BQ, BS_2 之合力 Q' 則 P' Q' 二力之作用與 P Q 等然後引長 $P'A$

$Q'B$ 會于 O 由 O 于 OA 上截 AP' 等距離点 P'' OB 上截 BQ' 等距離点 Q'' 以 OP'' OQ'' 為平行四邊形之對角線作與前兩四邊形平行之兩平行四邊形 $OS_1'P''P_1''$ $OS_2'Q''Q_1''$ 則 O, P_1'', Q_1'' 同在一直線上而 OP_1'', OQ_1'' 即代表 AP, BQ 者也復引長 OQ_1'' 交 AB 于 C 此 C 即 P Q 合力 R 之着力点 R 之方向即 OC 引長之方向 R 之量即 P Q 之和也

次述 P Q 二力方向相反者

第三十圖



如圖P Q二力反方向作用于AB（Q大于P）欲求其合力則引長BA至S_1引長AB至S_2使$S_1=S_2$同前理二力互打消無作用乃以平行四邊形定理求得$APAS_1$之合力P'.BQ.BS_2之合力Q'則P',Q'二力之作用與P,Q等然後引長$P'A$,BQ'會于O（此就PQ不等而言若相等永無相會之日所謂偶力是也詳第三十七節）由O于OA上截AP'等距離点P'' OQ上截BQ'等距離点B'以OP'',$B'O$為平行四邊形之對角線作與前兩平行四邊形平行之兩平行四邊形$OS'_1P''P'''$,$OS'_1B'S'_2$而O命為Q''則$OP'''S'_2$同在一直線上而$OP'''S'_2Q''$即代表P,Q者也復引長OS'_2交AB引長線于C（此為Q大于P之時若P大于Q則當交于BA引長線上也）此C即P,Q合力R之着力點R之方向與Q等（P大者與P等）即在CO線上R之量即P,Q之差也

上所述作圖法也若欲以式表之則P Q外須知AB.AC或AB.CB或AC.CB之關係今兩相似形OAC.$AP'P$或OBC.$BQ'Q$中

$$AS_1=BS_2=PP'=QQ'$$

$$S_2Q'=BQ$$

試命此為S則

$$P':P:S=OA:OC:CA$$

或

$$Q':Q:S=OB:OC:CB$$

故 $\frac{OC}{AC}=\frac{P}{S}$ $\frac{OC}{BC}=\frac{Q}{S}$

以後者除前者則

$$\frac{BC}{AC}=\frac{P}{Q}$$

便宜命 AB 爲 a AC 爲 a_1 BC 爲 a_2 則

$$\frac{BC}{AC}=\frac{a\mp a_1}{a_1}=\frac{a}{a_1}\mp 1$$

故 $\frac{a}{a_1}\mp 1=\frac{P}{Q}$

而 $\frac{a}{a_1}=\frac{P}{Q}+1=\frac{P+Q}{Q}$

或 $\frac{a}{a_1}=1-\frac{P}{Q}=\frac{Q-P}{Q}$

或 $\frac{a}{a_1}=\frac{P}{Q}-1=\frac{P-Q}{Q}$

然上三局 $P+Q$, $P\sim Q$ 皆爲合力 R

故 $\frac{a}{a_1}=\frac{R}{Q}$

$\therefore$ $a_1=a\frac{Q}{R}$ .... (1)

同理

$$a_2 = a\frac{P}{R} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由此二式推演之則

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{Q}{P} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

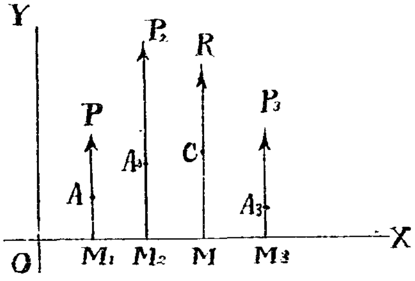
由上三式則合力R之着力点易求而得也更由上所論述得一定理如下

定理 二平行力合力之量等于其二平行力之代数和其着力点在二力之着力点所連結之直線或其引長線上以其二力逆比之内分点或外分点

第三十六節 二平行力以上之合成(Composition of more than two Parallel Forces)

二平行力之合成既如上之所述今更就多数平行力少研究之

第三十一圖



如圖P_1 P_2 P_3…………之諸平行力各作用于$A_1A_2A_3$……
……諸点先依前法求得P_1 P_2之合力R_1及其着力点C_1次求得R_1 P_3之合力R_2及其着力点C_2（R_1 C_1圖中未載R_2C_2即圖中RC也）以次求R_{n-3} P_{n-1}之合力R_{n-2}及其着力点C_{n-2}然後得最後R_{n-2} P_n之合力R及其着力點C矣此C即nP合力之中心也次示求C点位置之公式

如圖于諸力外引諸力之平行及垂直線YO, XO交于一点O則A_1 A_2 A_3…………等之位置可由此XO YO二軸而定（據解析幾何坐標）今各点至YO之距離命為$x_1x_2x_3$
………至xO之距離命為y_1 y_2 y_3………C点至YO XO之距離命為x, y然後引長諸力交XO于一点$M_1M_2M_3$……
…而RC之引長線亦交XO于M據平行力第一要件則

$$R=P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_n \text{-------------}(A)$$

欲定此R着力点C則必用能率之第一定則先求各力之臂則

$$\left.\begin{array}{l} \text{由}R\text{至}YO\text{之距離}=R\text{之臂}=OM=x \\ \text{〃}P_1\cdots\cdots\cdots\cdots=P_1\cdots\cdot=OM_1=x_1 \\ \text{〃}P_2\cdots\cdots\cdots\cdots=P_2\cdots\cdot=OM_2=x_2 \\ \text{〃}P_3\cdots\cdots\cdots\cdots=P_3\cdots\cdot=OM_3=x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots=\cdots=\cdots \\ \text{〃}P_n\cdots\cdots\cdots\cdots=P_n\cdots\cdot=OM_n=x_n \end{array}\right\} \text{------}(B)$$

而對于O点諸力之能率之和不得不等于對于O点R之

能率即

$$R \times OM = P_1 \times OM_1 + P_2 \times OM_2 + P_3 \times OM_3 + \cdots\cdots (C)$$

以B式之值代入C式則

$$Rx = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \cdots\cdots$$

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \cdots\cdots}{R}$$

故 $$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \cdots\cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots\cdots} \cdots\cdots (1)$$

假定諸力平行xO則同前理

$$y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \cdots\cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots\cdots} \cdots\cdots (2)$$

由此二式可求出C之位置今更命x y為X, Y則

$$X = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}$$

$$Y = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}$$

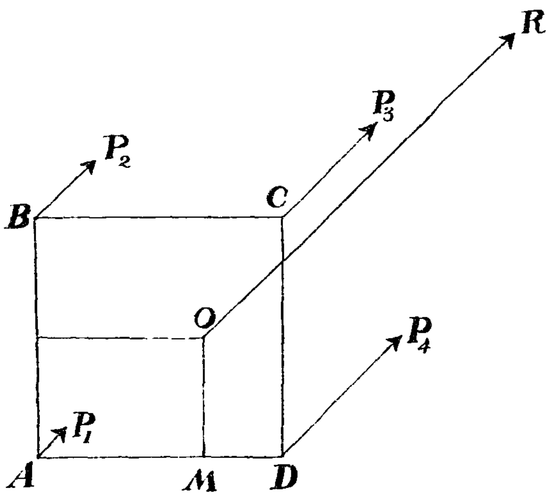
若諸力中有方向正反對者則其力率為負而R等于ΣP即R等于其正數和及負數和之差也其方向則從其各和之大者即正數和大R為正負數和大R為負也如諸力在XY之他象限中其正負如解析幾何之例

例三十　有正方形ABCD于此于其四角點順次與以1磅2磅3磅4磅之P_1 P_2 P_3 P_4四平行力其諸平行力中心

之位置及其合力之值如何

〔解〕

第三十二圖



如圖以AD, AB為XY軸則

$$x=\frac{1\times 0+2\times 0+3\times AD+4\times AD}{1+2+3+4}$$

$$y=\frac{1\times 0+2\times AB+3\times AB+4\times 0}{1+2+3+4}$$

$$\therefore \quad x=\frac{7}{10}AD$$

$$y = \frac{1}{2} AB$$

即

$$AM = \frac{7}{10} AD$$

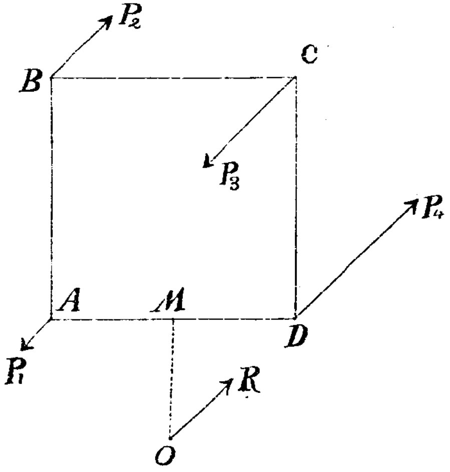
$$OM = \frac{1}{2} AB$$

今命合力為R則

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 10\text{磅}$$

例三十一 前題P_1 P_3如與P_2 P_4反向其合力及其着力点如何

〔解〕 第三十三圖



如圖以AD,AB為X Y軸則

$$x=\frac{-1\times 0+2\times 0-3\times AD+4\times AD}{-1+2-3+4}$$

$$=\frac{1}{2}AD$$

$$y=\frac{-1\times 0+2\times AB-3\times AB+4\times 0}{-1+2-3+4}$$

$$=-\frac{1}{2}AB$$

即

$$AM=\frac{1}{2}AD$$

$$OM=-\frac{1}{2}AB$$

命合力為R則

$$R=-1+2-3+4=2\text{磅}$$

第三十七節　偶力(Couple)

第三十五節所述二平行力方向相反者欲求其合力之着力点其公式為

$$AC=\frac{Q}{P\sim Q}AB$$

如P Q二力暫至相等則R亦從而小至若P等于Q則R等于零此不待論矣今試假定R等于零則

$$AC=\frac{Q}{O}AB$$

$$\therefore AC=\infty$$

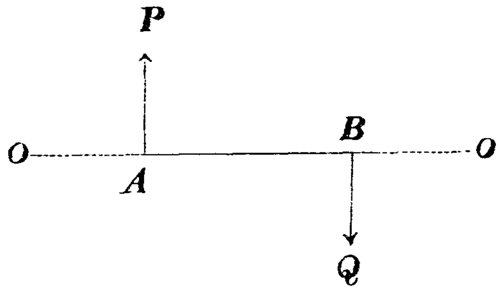
即AC之距离為無限大換言之則P Q二力相等時其合力R不在有限距离之内也此P Q名曰偶力

定義　偶力者方向相反量相等且不同在一直線中之二平行力之謂也

由是知偶力者實平行力之特種也而偶力間之垂線距离曰偶力之臂偶力之一及此臂之相乘積曰偶力之能率今更述定理于下

定理　同在一平面上之二力若為偶力者其對于任意一点二力能率之代數和必相等

第三十四畵



如畵對于O点P Q之能率為

$P.OA$　　　$Q.OB$

對于O'点P, Q之能率為

$$P.O'A \qquad Q.O'B$$

對于O点能率之代数和為

$$\begin{aligned} P.OA-Q.OB &= P(OA-OB) \\ &= Q(OA-OB) \\ &= P.AB \\ &= Q.AB \end{aligned}$$

對于O'点能率之代数和為

$$\begin{aligned} Q.O'B-P.O'A &= P(O'B-O'A) \\ &= Q(O'B-O'A) \\ &= P.AB \\ &= Q.AB \end{aligned}$$

第三十八節　偶力之能率(Moment of Couple)

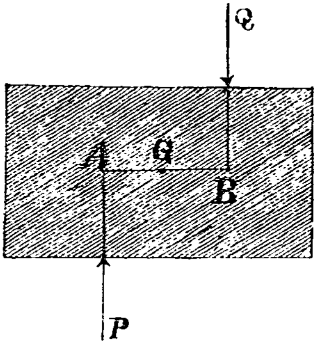
偶力作用于一物体其結果使物体不為直線運動而對于其重心或其定軸(可任意廻轉者)而為圓運動無合力明甚如時計巻發條之鍵等類是故無論其偶力與定軸点之位置如何定偶力常有一定之能率

偶力之能率依其物体廻轉之方向而有正負即時計廻轉之方向為正反是為負也

今就上所論述為一例如下

P Q為定偶力G為物体之重心或定軸不関G点之位置如何其能力M常相等

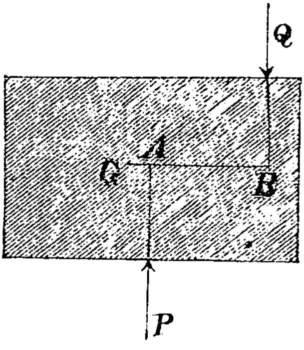
第三十五圖



如圖G點在P Q之間則

$$M = P.AG + Q.GB = P.AB$$

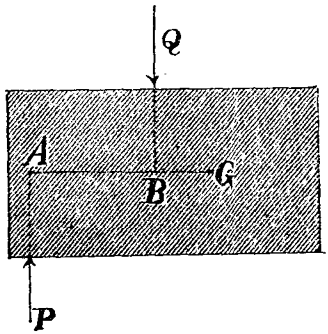
第三十六圖



如圖G點在P之外側則

$$
\begin{aligned}
M &= Q.GB - P.GA \\
&= P(GB - GA) \\
&= P.AB
\end{aligned}
$$

第三十七畫



如畫G点在Q之外側則

$$
\begin{aligned}
M &= P.AG - Q.BG \\
&= P(AG - BG) \\
&= P.AB
\end{aligned}
$$

如畫(三十八) G点在P上則P之力率等于零故

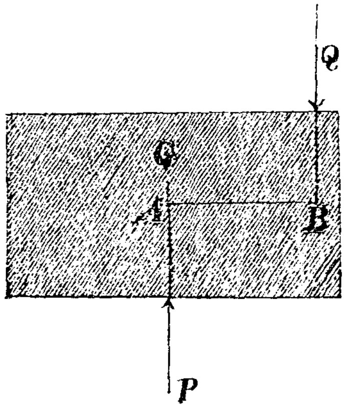
$$M = Q.GB = P.AB$$

同理G点若在Q上則Q之力率等于零故

$$M = P.AG = P.AB$$

由是更得一定理如下

第三十八圖



定理　同一偶力對于其同平面內任意一点之能率乃定數也

偶力平衡之要件

偶力之作用既如上所述不為直線運動而對于物体之重心若定軸為圓運動故無合力然則無論加以何等單一之力其不得平衡也可知今試更加一與前偶力反向之第二偶力而使其能率與前等則兩偶力之能率之代数和等于零而物体因而平衡

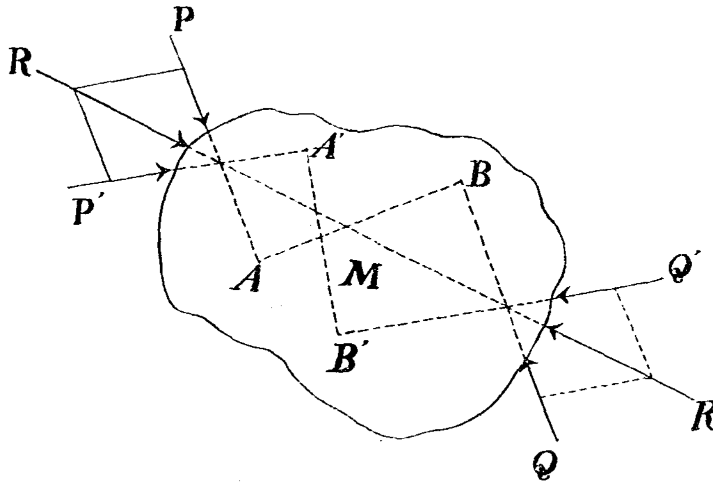
如下圖

P.Q偶力之能率$=-P.AB$

$P'Q'$〃〃〃〃〃$=P.A'B'$

$P.A'B'-P.AB=0$

第三十九圖



今試于兩偶力中各取一力而求其合力則PP'之合力為R QQ'之合力為R'而R等于R'且同在一直線上故RR'之合力等于零換言之即$PQP'Q'$四力之合力等于零也由是言之欲使偶力平衡則更加一方向相反能率相等之第二偶力可矣

第三十九節　力之平衡之條件(Condition of Equilibrium of forces)

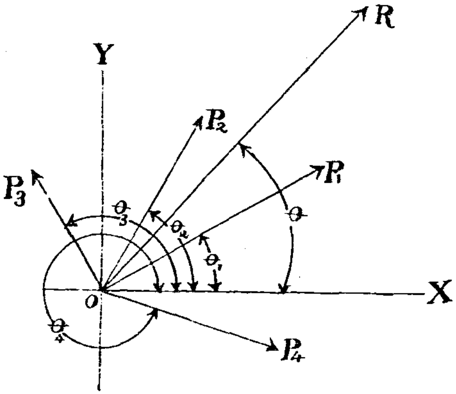
由以上所論述關于力之諸理而綜合之則無論力之多寡不外二種即

(1)　同在一平面上之諸力同作用于一点或方向相

會于一点者

（2）　同在一平面上之諸力非同作用于一点或非方向相會者

第四十圖



今就此二者用解析式更研究之如下

如圖P_1 P_2 P_3 P_4諸力同作用于一点O或方向相會于一点O由O任意引直角縱橫軸YO, XO此XO軸與P_1 P_2 P_3 P_4所夾之角順次命為θ_1 θ_2 θ_3 θ_4諸力由兩軸分解其在XO軸上諸分力順次命為x_1 x_2 x_3 x_4在YO軸上諸分力順次命為y_1 y_2 y_3 y_4此四力之合力命為R R與XO所夾之角命為θ XO軸上之分力命為x YO軸上之分力命為y則

$$\left.\begin{array}{l} P_1\text{之分力}x_1 = P_1 \cos\theta_1 \\ P_2\text{之分力}x_2 = P_2 \cos\theta_2 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} P_3\text{之分力}x_3=P_3\cos\theta_3 \\ P_4\text{之分力}x_4=P_4\cos\theta_4 \\ R\text{之分力}x=R\cos\theta \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1\text{之分力}y_1=P_1\sin\theta_1 \\ P_2\text{之分力}y_2=P_2\sin\theta_2 \\ P_3\text{之分力}y_3=P_3\sin\theta_3 \\ P_4\text{之分力}y_4=P_4\sin\theta_4 \\ R\text{之分力}y=R\sin\theta \end{array}\right\}$$

(XO軸上之諸分力曰水平分力YO軸上之諸分力曰垂直分力)

則
$$R=+P_1+P_2+P_3+P_4$$
$$x=+x_1+x_2+x_3+x_4$$
$$y=+y_1+y_2+y_3+y_4$$

從可知如當$x_1x_2x_4$為正x_3為負$y_1y_2y_3$為正y_4為正xy為正則x等于諸分力x之代數和y等于諸分力y之代數和也由是則

$$R\cos\theta=x$$
$$=P_1\cos\theta_1+P_2\cos\theta_2+P_3\cos\theta_3+P_4\cos\theta_4$$
$$R\sin\theta=y$$
$$=P_1\sin\theta_1+P_2\sin\theta_2+P_3\sin\theta_3+P_4\sin\theta_4$$

若$P_1P_2P_3P_4$之和等于零則R亦等于零而xy之等于零亦不待論矣然則$x_1x_2x_3x_4$及$y_1y_2y_3y_4$之代數和亦必等于

零矣何則x,y固等于諸力之分力x_1,x_2,x_3,x_4·y_1,y_2,y_3,y_4之代數和也

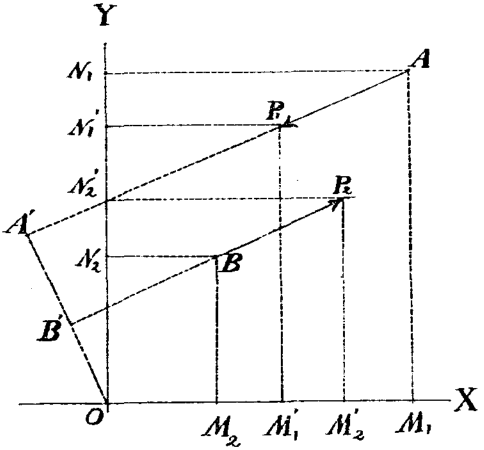
如上所述即P_1 P_2 P_3 P_4四力平衡更由式以演之則

$$R=\sqrt{x^2+y^2}$$

今x y皆等于零故

$$R=\sqrt{x^2+y^2}=0$$

第四十一圖



上所論述但能應用于第一種何則今如第四十一圖二相等之平行力P_1,P_2反向作用于A,B由A,P_1,B,P_2各點引垂線于X O,Y O二軸其垂足各為M_1,M_1',M_2,M_2',N_1,N_1',N_2,N_2'據幾何理

平行等長直線之正射影相等故$M_1M_1'=M_2M_2'$，$N_1N_1'=N_2N_2'$今命M_1M_1'為x_1，M_2M_2'為x_2，N_1N_1'為y_1，N_2N_2'為y_2而x_1y_1為負x_2，y_2為正則

$$x_2-x_1=0\ ,\ y_2-y_1=0$$

試更于図中引長AP_1，P_2B復由O引此二直線之垂線交P_2B，AP_1二直線之引長線上于一点B'，A'則P_1P_2能率之和等于$P_1\cdot A'B'$或$P_2\cdot A'B'$能率既大于零則不平衡可知（偶力不平衡）故欲知一平面上非作用于一点諸力之平衡與否已求得各分力之和等于零後更須求其能率之和等于零與否也由是得平衡力之三條件如下

〔第一〕　諸力之水平分力之代数和等于零

〔第二〕　諸力之垂直分力之代数和等于零

〔第三〕　對于任意一点諸力能率之代数和等于零

諸力同作于一点或方向相會者(一)(二)兩條件已足非是則須更求合于第三條件與否也

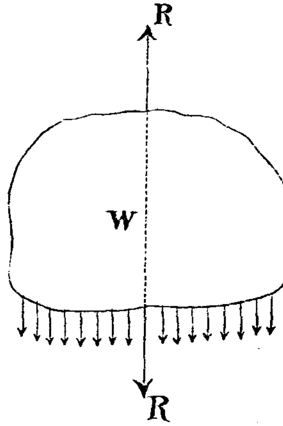
第二章　重心（Centre of gravity）

第四十節　重力（Gravity）

凡地球存在之萬物無一不受地球之引力（即重力）而其引力之大小與其物体之質量為正比例即就一物体而論其各部分所受之引力各與其質量為正比例故物体所有之重量即重力也地球引力之作用皆向地心則及于一物体各部分諸引力之方向非平行可知然地球半径甚大命二物体

相距一哩其及于此二物体兩力方向所夾之角不過一分餘二物体距離愈近則其方向夾角愈小即視為平行亦無大謬故力學上于近距離二物体所受之重力皆假定為平行線也

第四十二圖



如圖用細繩繫W重量而懸之若此W靜懸不動則其平衡可知即由繩之關係引而上之R與由地球之關係引而下之R相等也今試分此W為$w_1\,w_2\,w_3$………w_n多數之小部分則對于此$w_1\,w_2\,w_3$………w_n諸部分之引力必各有$r_1\,r_2\,r_3$………r_n可知而R與W為正比例今$w_1\,w_2\,w_3$………w_n之和為W故$r_1\,r_2\,r_3$………r_n之和亦必為R矣更就此兩R論之夫此兩力平衡則必同在一直線上此直線必通過物体中之一定

点即此物体之重心也若諸重力之量及其着力点位置不變則任如何廻轉之不過但変諸力之方向至于各分子則毫無影響也由是得一定理如下

定理　重心為物体之一定点使物体支持于此一点則任如何変更其方向常得保其平衡

第四十一節　求重心法

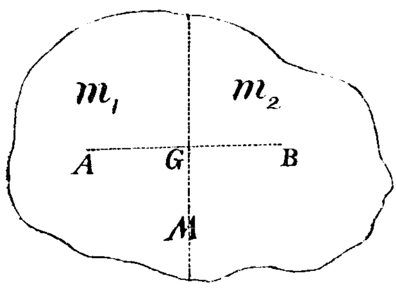
凡諸物体重心之位置因其形狀而異不能執一法以求之今述其最要之三條件如下

（第一）　若重心在二三線中之各線或二三面中之各面者則其重心在各線之交截點或各面之交截線

（第二）　若一直線截一平面或一平面截一立体為両相等形者則其重心在其直線或平面中

（第三）　若一物体各部分之重心已知者則可推得其全体之重心

第四十三圖



如圖分M物体為m_1m_2二部分而m_1m_2各為其質量之代表A,B為其二部分之重心用前平行力之定理可求得M重心G之位置何則$A\ B$為m_1m_2之重心即為其二力之着力點如前節所述假定m_1m_2為平行力則此合力之着力点G必在$A\ B$間m_1m_2逆比之內分点也由是凡一物体全体之重心及一部分之重心已知者亦可求得他部分之重心矣

各部同厚之平板其重心在通過兩面間中央之一平面中而其位置則視其週邊之形狀而異若畧其厚薄及週邊而研究之但一幾何學上之等勢形平面而已（等勢形者規則正密度等其通過中心或中心軸之点或直線或平面二等分其全体者也）茲先就等勢形論之以次及不規則之形体

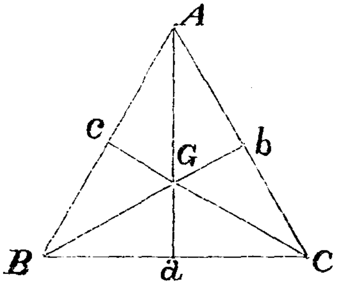
（1）　直線(*Straight line*)

直線之重心在其線之正中点因其点二等分其直線也

（2）　正三角形(*Equilateral Triangle*)

正三角形之重心在其中心

第四十四圖

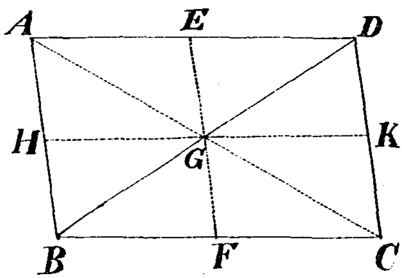


如圖A B C為正三角形由A B C三角点引對边之垂線Aa Bb Cc交于一点G Aa Bb Cc皆為等分此三角形之直線則重心在此三直線上可知而交点為中心故G点即重心也

(3) 平行四边形 (*Parallelogram*)

平行四边形之重心在其中心

第四十五圖



如圖引兩對角線A C B D復由兩對边之正中点各結直線E F H K則此四直線必共交于中心点G而此四直線皆為等分此四边形A B C D之直線故G即為重心也正方形矩形菱形正多角形同

(4) 圓周 (*Circumference*)

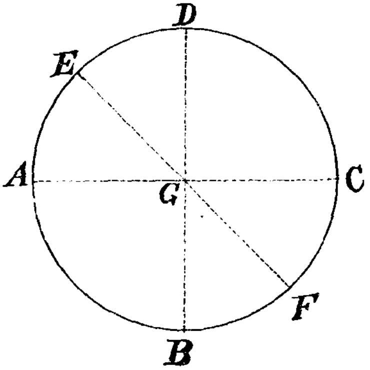
圓周之重心在此圓周所作圓之中心

二等分圓周為圓周上相對之二点在此圓周所作圓之直徑上而直徑皆交于圓之中心G故G即重心也等幅圓輪同

（5） 平圓板（Circular Disc）

平圓板之重心在其中心

第四十六圖

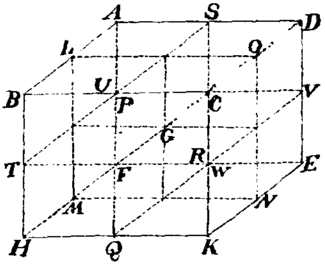


如圖ABCD為圓引AC,BD,EF各直徑交于中心G然各直徑皆二等分圓之直線故G即重心也

（6） 平行面体（Parallelopiped）

平行面体之重心在其中心

第四十七圖



如圖$ABCDEFHK$為平行体LN, TV, PR三平面之交截点G為中心此三平面皆為等分平形面体之平面故G即重心也正多角体同

(7) 球面(*Spherical Surface*)

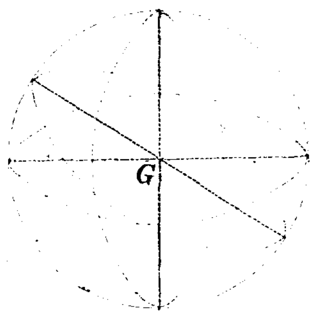
球面之重心在此球面所作球之中心

二等分球面為一圓周而各圓周所作圓皆通過此球面所作球之中心G故G即重心也

(8) 球(*Sphere*)

球之重心在其中心

第四十八圖



如圖二等分球之各平面圓皆交截于中心G故G即球之重心也

(9) 直角壔及圓壔(*Right Prism & Cylinder*)

直角壔及圓壔之重心在其中心

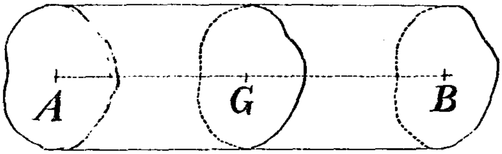
正多角形及圓之重心在其中心已如前所述故直角壔及

圓壔之重心在其頂面中心及底面中心所結直線可知今于兩間中央以平行平面截之為二其兩部相等亦不待論而此平面及前直線必交截于中心点G故G即重心也

(10) 不規則之壔体

不規則壔体之重心在其兩底面重心点所結直線之中心

第四十九圖



既曰壔体則兩底面平行且與側面為直角而側面線亦皆為直線可知故無論于何處截一兩底面之平行面則其形狀必全等于兩底面其重心之位置亦必與兩底面等且與兩底面之重心同在一直線上故此体之重心在其兩底面重心点所結直線之中点G也

(11) 不同在一直線上三質点

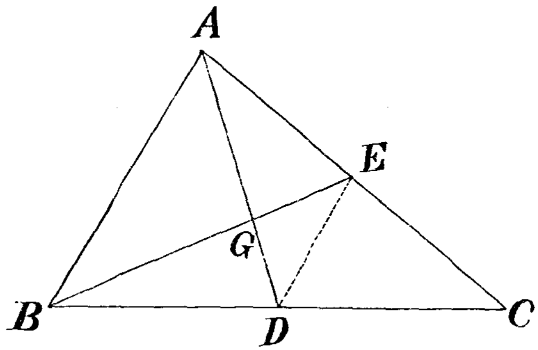
如下圖結此三質点為三角形ABC由A引直線至BC中点D由B引直線至AC中点E A,B,C為相等之質点命為m則依能述平行力中心法可得G之位置即在B之m與在C之m等于在D之兩m而在D之兩m與在A之m等于在G之三m故

$$\frac{AG}{DG}=\frac{2m}{m}=2$$

∴ $DG=\frac{2}{3}DA$

或 $AG=\frac{2}{3}AD$

第五十圖



更由幾何學証明之結 DE 直線 DE 平行 AB 故三角形 ABG, DEG 為相似形

即 $AB:DE=AG:DG=BG:EG$

然 ABC, DEC 亦為相似三角形即

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{CD}=2$$

故 $$\frac{AG}{DG}=\frac{BG}{EG}=2$$

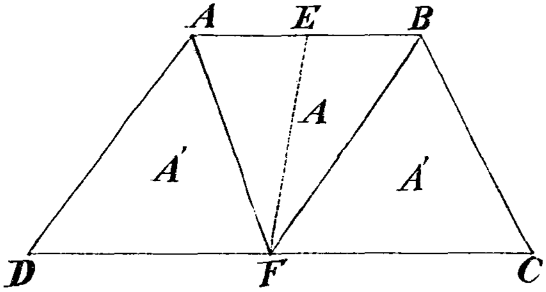
即 $AG=\frac{2}{3}AD$ $BG=\frac{2}{3}BE$,

$DG=\frac{1}{3}AD$ $EG=\frac{1}{3}BE$

由是則此與有面積之三角形同

(12) 梯形(*Trapezoid*)

第五十一圖



如圖$ABCD$為梯形由DC中点F引二直線至A,B分全形為三角形三復由F引直線至AB中点E命AB為a DC為b兩三角形ADF.BCF同底等高故面積相等今命此面積皆為A'三角形ABF面積為A以此三角形皆同高故以底為比例即

$$\frac{A'}{A}=\frac{\frac{1}{2}b}{a}=\frac{b}{2a}$$

前項所述三質点之重心與有面積之三角形同則三角形ABF上

A,B,F之各質点為$\frac{1}{3}A$

三角形ADF上

A, D, F之各質点為$\frac{1}{3}A'$

三角形BCF上

B, C, F之各質点為$\frac{1}{3}A'$

AB為兩形之共通F為三形之共通故

A, B二質点皆為$\frac{1}{3}(A'+A)$

F質点為$\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}A'+\frac{1}{3}A'=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}A'$

CD二質点皆為$\frac{1}{3}A'$

然在A之$\frac{1}{3}(A+A')$與在B之$\frac{1}{3}(A+A')$等于在E之$\frac{2}{3}(A+A')$在C, D之$\frac{1}{3}A'$與在F之$\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}A'$等于在$F$之$\frac{1}{3}A+\frac{4}{3}A'$而

$$\frac{2}{3}(A+A')+\frac{1}{3}A+\frac{4}{3}A'=A+2A'$$

今命重心点為G（在EF上）依平行力能率之理則對于E点之能率

$$EG(A+2A')=EF\frac{1}{3}(A+4A')$$

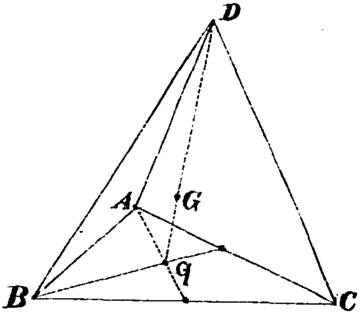
故 $$EG=\frac{A+4A'}{3(A+2A')}EF$$

（13） 不同在一平面上四等質点

如圖結四質点為三角錐形$ABCD$, ABC為底命各質点之量為m底面ABC之重心為g依第十一項則g之質量為$3m$結Dg直線則在D之m與在g之$3m$等于四質点重心G之$4m$而對于D之能率為

$$DG\cdot 4m=Dg\cdot 3m$$

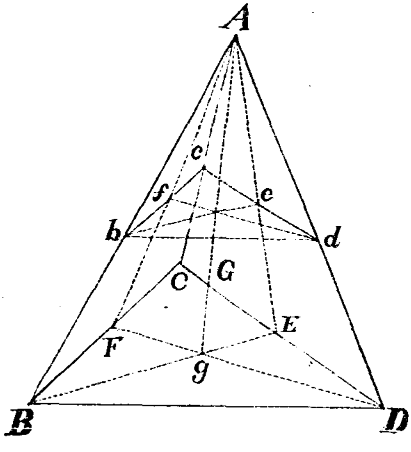
第五十二圖



故
$$DG = \frac{3m}{4m} \cdot Dg = \frac{3}{4} \cdot Dg$$

(14) 三角錐体(Triangular Pyramid)

第五十三圖



如圖$ABCD$為三角錐体于体中任取一平行BCD底面之截面bcd則此截面三角形bcd之各边與BCD底面之各边平行次取DC之中点E結AE BE而得一通過AB及E之截面ABE同時三角形bcd亦被截于b. e然

$$ce : CE = Ae : AE$$

$$ed : ED = Ae : AE$$

故 $$ed : ED = ce : CE$$

而 $$ED = CE$$

故 $$ed = ce$$

即e為cd之中点同理通過AD及BC中点F之截面亦截bc中点f此be, df之交点即ABE. ADF. bcd三截面之交点即此点在ABE.ADF二截面之交線Ag上故此錐体中與底面BCD平行之無数截面之重心皆在此Ag線上同理以他面為底由其底之重心及對角点所結之直線皆交此Ag于一点G而此G之位置與前項同即

$$AG = \frac{3}{4}Ag$$

多角錐体及圓錐体之重心與此同理亦在頂点及底面重心所結直線上由頂点距$\frac{3}{4}$之点

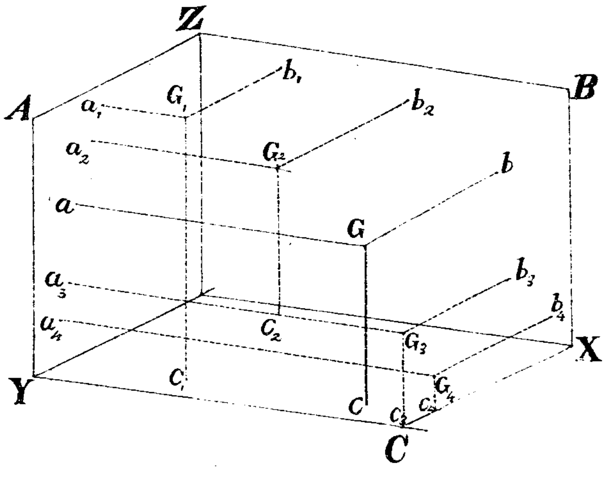
（15） 不規則体

如圖設互為直角之三平面$OZAY$ $OZBX$ $OXCY$ OZ, OY, OX為三平面之截線O為其交截点G_1, G_2, G_3······

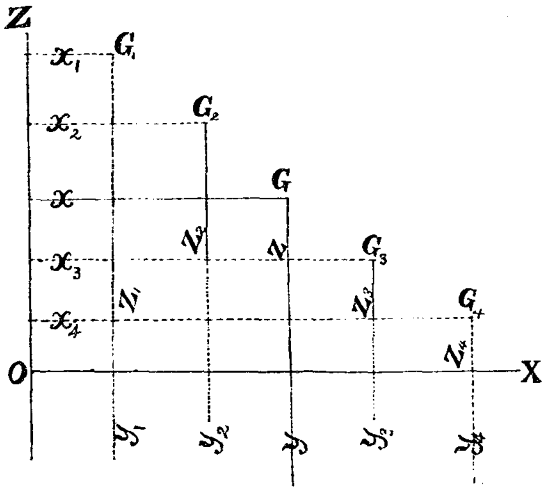
……為不規則体各部之重心G_1a_1、G_2a_2、G_3a_3…………即x_1、x_2、x_3…………為G_1、G_2、G_3…………至A面之距離（即X軸上之正射影）G_1b_1、G_2b_2、G_3b_3…………即y_1、y_2、y_3…………為G_1、G_2、G_3…………至B面之距離（即Y軸上之正射影）G_1c_1、G_2c_2、G_3c_3…………即Z_1、Z_2、Z_3…………為G_1、G_2、G_3……………至C面之距離（即Z軸上之正射影）今命其全体之重心為G由G至三面之距離為X、Y、Z又命各部分之重量為w_1、w_2、w_3…………全体之重量為W則

$$W=w_1+w_2+w_3+\cdots\cdots$$

第五十四圖



第五十五圖



由是 $W \cdot X = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \cdots\cdots$

$W \cdot Y = w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 + \cdots\cdots$

$W \cdot Z = w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3 + \cdots\cdots$

$$X = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \cdots\cdots}{W} = \frac{\Sigma w x}{W}$$

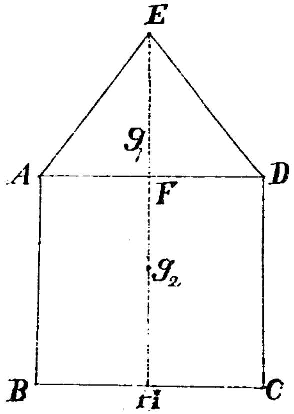
$$Y = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 + \cdots\cdots}{W} = \frac{\Sigma w x}{W}$$

$$Z = \frac{w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3 + \cdots\cdots}{W} = \frac{\Sigma w z}{W}$$

既得X,Y,Z之值則G之位置定矣

例三十四　有一正方形上連正三角形之平面求重

第五十六圖



如圖ABCD為正方形ADE為AD上所連之正

形命正方形一邊之長為S正三角形之重心為g_1正方

重心為g_2全面積之重心為G據幾何理g_1g_2因在由E

AB,DC之平行線EFH上又

正方形ABCD之面積$=S^2$

正三角形ADE之面積$=\frac{1}{2}AD\,EF=S$

故

ABCDE之全面積$=S^2+S^2\sqrt{3}/4=S^2(1+$

以g_1,g_2為S^2,$S^2\sqrt{3}/4$之着力点而求其合力對于F點之能率則

$$FG\,(1+\sqrt{3}/4)\,S^2=Fg_2\times S^2-Fg_1\times S^2\sqrt{3}/4$$

然 $Fg_2 = \frac{1}{2}S,\quad Fg_1 = \frac{1}{3} \times S\frac{\sqrt{3}}{2}$

以此代入上式則

$$FG\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{2}S - \frac{S\sqrt{3}}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

即

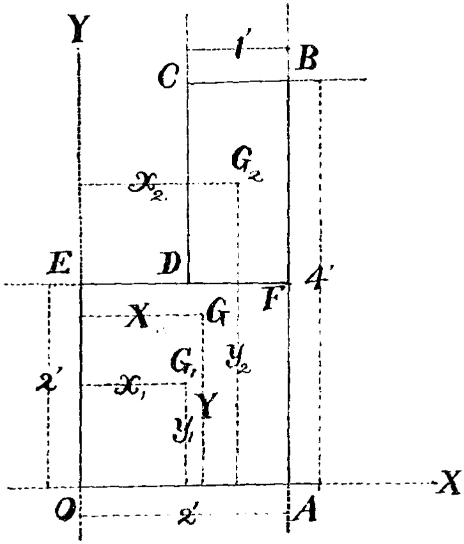
$$FG\left(\frac{4+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{2}S - \frac{1}{8}S = \frac{3}{8}S$$

$\therefore$

$$FG = \frac{3}{2(4+\sqrt{3})}S$$

例三十五 如下圖所示之平面求重心

第五十七圖



〔解〕 引長ED交AB于F分此平面為$OAFE$正方形及$DFBC$矩形二平面此二平面之重心各在中心可知命此二重心為G_1,G_2全面之重心為G應用第十五項之方法可求得G之位置試就AO,EO上設XO,YO之二直角軸命G_1,G_2至Y軸之距離為x_1,x_2 G_1,G_2至X軸之距離為y_1,y_2 G至Y,X之距離命為X,Y以面積代量命$OAEF$之面積為a_1 $DFBC$之面積為a_2全面積為A則

$$X=\frac{\Sigma ax}{A}$$

$$Y=\frac{\Sigma ay}{A}$$

$$X=\frac{a_1x_1+a_2x_2}{a_1+a_2}$$

$$=\frac{(2\times2)\times1+(2\times1)\times1\frac{1}{2}}{2\times2+2\times1}$$

$$=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}'=1'\,4''$$

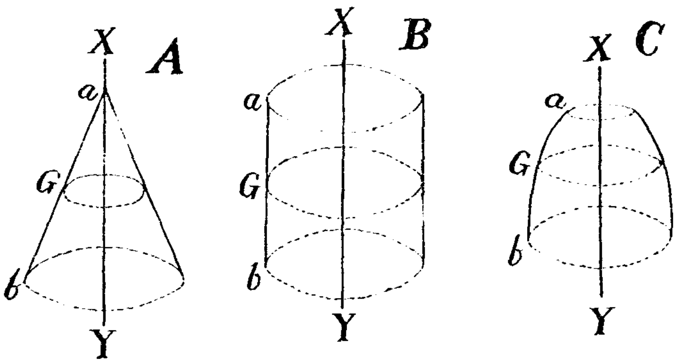
$$Y=\frac{a_1y_1+a_2y_2}{a_1+a_2}$$

$$=\frac{(2\times2)\times1+(2\times1)\times3}{2\times2+2\times1}$$

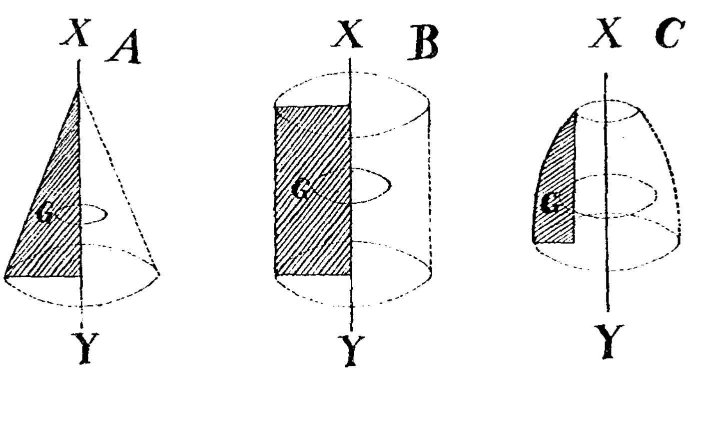
$$=\frac{10}{6}=1\frac{2}{3}'=1'\,8''$$

第四十二節　加尔代納斯之定理(Theorems of Guldinus)

第五十八圖



第五十九圖



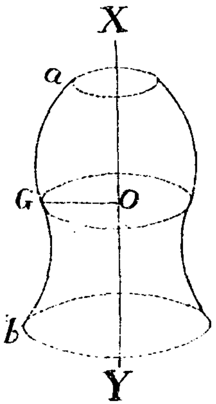
以一軸線XY為中心以任意之直線（五十八圖A,B）若曲線（五十八圖C）a b迴轉運動時各應其線之形狀而成一種之面如圓錐体之面（五十八圖A）円壔体之面（五十八圖B）球面（五十八圖C）由是同理以任意之平面a b以XY為中心軸迴轉運動時亦各應其面之形狀而成一種之立体如五十九圖A,B,C是由是得二定理如下

定理一　以一軸為中心迴轉任意之直線若曲線所生之表面積等于其直線若曲線之重心所畫圓周與其直線若曲線之長之相乘積

定理二　以一軸為中心迴轉任意之平面形所生之体積等于其平面之重心所畫圓周與其平面形面積之相乘積

玆先解釋第一定理

第六十圖



如圖XY為中心軸ab為曲線G為曲線ab之重心由G引XY垂線GO今假定

S＝曲線ab迴轉所生之表面積

L＝曲線ab之長

X＝重心G迴轉所生圓周之半徑（即GO）

依定理則

$$S=2\pi X\times L=2\pi LX \cdots\cdots\cdots (1)$$

欲証明此定理取曲線ab一極小部分命此極小部分之長為l其重心至XY軸之距離為x則此迴轉所生之表面可視為圓壔形命其表面積為s則

$$s=2\pi lx$$

然曲線ab無數小部分之總和等于曲線ab即LX等于代数和lx故各極小部分迴轉所生表面積之總和等于曲線ab迴轉所生之表面積即

$$S=\Sigma s=\Sigma 2\pi lx=2\pi\Sigma lx$$
$$=2\pi LX$$

次解釋第二定理

命平面形之面積為A此平面形以XY為軸迴轉所生之体積為V其平面形重心G至XY軸之距離為X則

$$V=2\pi X\times A=2\pi XA \cdots\cdots\cdots (2)$$

同前法取平面形中一極小部分命為a其重心至XY軸之距離為x其迴轉所生之体積為v則

$$v=2\pi ax$$

$$V=\Sigma v=\Sigma 2\pi ax$$

$$=2\pi\Sigma ax=2\pi AX$$

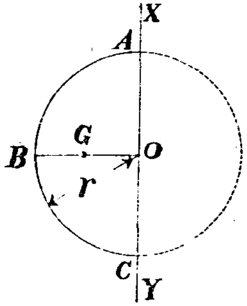
由是應用此二定理而得關于重心之條件二即

〔第一〕　已知面積若体積則可得原直線若平面之重心之位置

〔第二〕　已知直線曲線若平面之重心之位置則可得迴轉所生之面積若体積

例三十六　求半圓形圓弧之重心

第六十一圖



〔解〕　如圖ABC為半圓形之圓弧r為半径今通過直径AC引XY軸則此ABC弧迴轉所生之表面積

$$S=2\pi LX$$

而S為球面積L為半圓周故

$$S=4\pi r^2 \qquad L=\pi r$$

以此代入上式則

$$4\pi r^2 = 2\pi X \pi r$$

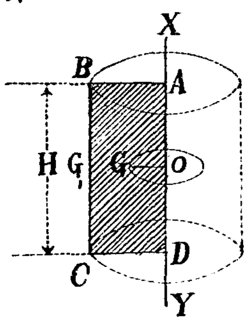
$$\therefore \quad X = \frac{2}{\pi} r$$

即

$$GO = \frac{2}{\pi} r$$

例三十七　有矩形ABCD之面其重心為G問此面迴轉所生圓壔之体積及其表面積如何（但以矩形之長辺為軸）

第六十二圖



（解）　矩形之重心G在其中心由G引XY垂線GO命矩形之長辺為H此矩形面迴轉所生圓壔之半径為r則

$$AD = BC = H$$

$$AB = CD = r$$

$$GO = \frac{1}{2} r$$

故重心G迴轉所畫圓周之長為

$$2\pi\times\frac{1}{2}r=\pi r$$

又此矩形之面積為

$$AB\times BC=r\cdot H$$

故体積可由公式2求出即

$$V=\pi r\cdot rH=\pi r^2H$$

次求表面積命BC之重心為G_1則G_1至XY軸之距離等于r其表面積可由公式1求出即

$$S=2\pi rH$$

第三編

動力學

(Kinetics)

第一章　力及運動(Forse and Motion)

第四十三節　質量及運動量(Mass and Momentum)

定義　一物体中所含有物質之量曰其物体之質量

定義　物体之運動量云者運動物体之質量及其速度之相乘積之謂也例如有一運動之物体其質量為20磅速度為3呎秒其運動量即$20\times3=60$

由是一般命物体之質量為m速度為v則

$$運動量=mv$$

例三十八　有一噸及半噸之打樁機二具落下距離各為6呎及9呎問其運動量之比如何　　答5:3

〔解〕　先求兩錘落下之速度則自由落体公式適用今命第一速度為V_1第二速度為V_2則

$$V_1=\sqrt{2gS}=8.025\sqrt{S}$$
$$=8.025\sqrt{6}$$
$$=20\text{(弱)}$$
$$V_2=\sqrt{2gS}=8.025\sqrt{S}$$
$$=8.025\sqrt{9}$$

$$=24\text{(強)}$$

命運動量為$M_1 M_2$則

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{mV_1}{m'V_2}$$

$$=\frac{2240\times20}{1120\times24}=\frac{5}{3}$$

第四十四節 絶對制單位與重力制單位之關係(Relation of Absolute Unit to Gravitational Unit)

絶對制單位與重力制單位具詳既見前編茲但就其關係稍研究之絶对制单位為磅達尔今有質量2磅之物体生加速度1呎秒之力然力与加速度質量之相乘積為正比例故其力為2磅達尔由是求一般有質量m之物体生加速度a呎秒之力F可得一式如下即

$$F=m\cdot a\text{磅達尔}$$

在重力制單位乃及于質量1磅之物体之地球引力即質量一磅之物体生加速度g呎/秒之力也兩單位之関係如下

$$g\text{磅達尔}=1\text{磅}$$

$$1\text{磅達尔}=\frac{1}{g}\text{磅}$$

由是得兩單位之式如下即

$$F=m\cdot a\text{磅達尔}$$

$$F=\frac{m\cdot a}{g}\text{磅}$$

研究力與加速度之関係則前所應用之質量單位可如下

故定之

本節所述力與加速度質量之相乘積為正比例但物体無不受地球引力命M為質量W為重量g為地球引力則

$$W=M\cdot g$$

$$M=\frac{W}{g}$$

以此代入($F=m\cdot a$)式則

$$F=\frac{W\cdot a}{g}$$

第四十五節　牛頓氏運動第一則(Newton's First law of Motion)

凡靜止之物体不加以外力則永靜止運動之物体不加以外力則永為等速度直綫運動

凡地球上萬物之運動有與以障礙而增減其速度之力三(第一)地球引力(第二)摩擦力(第三)空氣抵抗力無論何種物体何種運動無不受此三力之作用故此第一則之實例無從發見也此法則一曰慣性之原則

第四十六節　牛頓氏運動第二則(Newton's Second law of Motion)

凡運動量之变化與其变化原因之力為比例其方向等于其力之運動之方向如加下力于一物体其運動量等于其質量及加速度之相乘積命質量為m加速度為V則$m\cdot V$為運動量而此運動量與其原因之力下為正比例即

$$F=m\cdot V$$

今有一質量m磅之物体以V_1之速度運動時其運動量為$m\cdot V_1$可知試更加以一外力t秒後其速度变為V_2斯時之運動量為$m\cdot V_2$則此物体運動量之变化為

$$m\cdot V_2-m\cdot V_1$$

今由V_1变V_2之力為F則F与$m\cdot V_2-m\cdot V_1$為正比例故若有二物体于此質量等者其速度与力為比例速度等者其質量与力為比例由是一般F,F'二力作用于質量m,m'二物体之结果由V_1,V_1'变為V_2,V_2'則此二物体運動量之变化為

$$m\cdot V_2-m\cdot V_1=m(V_2-V_1)$$

$$m'\cdot V_2'-m'\cdot V_1'=m'(V_2'-V_1')$$

而其力与運動量為正比例故

$$\frac{F}{F'}=\frac{m(V_2-V_1)}{m'(V_2'-V_1')}$$

又其運動之变化起于同時今命其時間為t則

$$\frac{F}{F'}=\frac{m\left(\frac{V_2-V_1}{t}\right)}{m'\left(\frac{V_2'-V_1'}{t}\right)}$$

命此二物体加速度為a a'則

$$a=\frac{V_2-V_1}{t}\,,\qquad a'=\frac{V_2'-V_1'}{t}$$

以此代入上式則

$$\frac{F}{F'}=\frac{m\cdot a}{m'\cdot a'},$$

上式但就絶對制單位言之若更以重力制単位表之則

$$F=\frac{w\cdot a}{g}$$

此法則為明示吾輩以力及運動之原則也

第四十七節　牛頓氏運動第三則 (Newton's Third law of Motion)

動及反動相等其方向相反又二物体互相運動者其同時所生之運動量相等而方向正反對

牛頓氏更依此法則舉三例即

〔第一〕　人若以指壓石則石亦同時壓人指

〔第二〕　以物結石塊使馬曳之則馬亦被石塊向其反對之方牽引

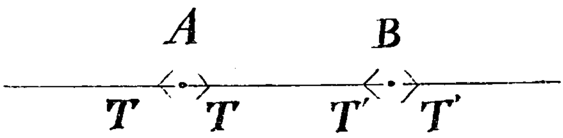
〔第三〕　一物体與他物体衝突其物体之運動量因而変化則他物体亦向反對之方向等変化其運動量

應力 (Stress)

量相等方向相反組織而成之力曰應力今若以一力運動于極堅硬之固体上有時或與未加此力以前同其位置及狀態即固体起反動之抗力打消其作用之故也若抗力弱者則物体受此力之影響或変其狀態曰應力変形 (Strain) 此牛頓氏運動第三則即明示應力之原則者也

一應力之二分力使其分子間相壓迫者曰壓力相分離者曰張力

第六十三圖



如圖以T T'二等力反向作用于棒或絲A B之兩端則此棒或絲中各点所受之力皆相等今就一点而研究之其時絲之位置恰靜止故

$$T-T'=0 \quad 或 \quad T=T' \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

假令絲或運動而生加速度則此式不能應用命A B間絲之質量為m加速度為a則

$$T-T'=ma \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然絲之質量比他物体不啻微塵故通常假定為無質量即m等于零以此代入2式可变為1式即

$$T-T'=m \times a=0$$

$$T-T'=0 \quad 或 \quad T=T'$$

二物体之質量若不同則大物体之運動小于小物体之運動命大物体之質量為M速度為V小物体之質量為m速度為v因原動反動二運動量相等故

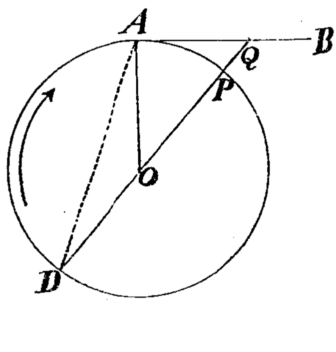
$$MV = mv$$

今M大于m則V小于v可知更舉實例以明之彈丸發射時彈丸以非常之速度辭去炮身而炮身反動力退却之距离寔微小不足與彈丸比其故以彈丸之質量亦微小不足與炮身比也

第四十八節 求心力及遠心力(Centripetal Force and Centrifugal Force)

由牛頓氏運動第一則言之凡動体非加以他之外力則其運動永無止期且始終取一定方向為等速度運動然則如圓運動者必有牽引使向中心之一力可知今試取一細繩一端縛以小石一端繞指上在空中水平迴轉之則覺有一種之力及于指端吾輩就此稍研究之

第六十四圖



如前有物体以O為中心以矢之方向為圓運動某時後運動至A若此時失去向中心牽引之力則此物体必取A点切線AB之方向進行為直線運動假定此物体為V呎秒之等速度運動就其最小時間之運動而觀察之命其小時間為ϕ即物体以V呎秒之等速度于ϕ時間内由A至P（ϕ為極小時間故弧AP距離亦極小圖中為說明之便廓大之）則

$$弧AP=V\cdot\phi \text{------------------}(A)$$

結PO延長交圓周于D則PD為直径更延長OP交切線AB于Q而ϕ時間極小故謂AQ等于弧AP亦無不可然使物体運動至A時失去牽引向中心之力則物体不在圓周上運動弧AP而在AB切線上運動直線AQ由是以α為牽引向中心之力之加速度則QP距離易知即

$$QP=\frac{\alpha\cdot\phi^2}{2} \text{------------------------------}(B)$$

故圓運動AP之結果与由A直線運動至Q後更以一力由Q直線運動至P之結果同據幾何理

$$QD:AQ=AQ:QP$$

即　$QD\cdot QP=\overline{AQ}^2$

然　$QD=QP+PD$

即　$(QP+PD)QP=\overline{AQ}^2$

故　$\overline{QP}^2+PD\cdot QP=\overline{AQ}^2$

由假定$AQ=AP$

故　$\overline{QP}^2+PD\cdot QP=\overline{AP}^2$

然$\overline{QP}^2$比$\overline{AP}^2$極微故即棄去$\overline{QP}^2$亦無不可故

$$PD \cdot QP = \overline{AP}^2 \text{-------------------------} (1)$$

命半径為r則

$$PD = 2r \text{-------------------------} (C)$$

由是以(A)(B)(C)三式代入(1)式則

$$2r \times \frac{a\phi_2}{2} = V^2\phi^2$$

即

$$ar = V^2$$

$\therefore$

$$a = \frac{V^2}{r} \text{-------------------------} (2)$$

故吾輩由2式可知出物体為圓運動之際牽引向中心之力之加速度也名此2式曰半徑狀之加速度又V為圓運動之等速度故V可視為綫速度由第一編所述角速度及綫速度之関係

$$\theta = \frac{V}{r} \quad V = \theta r$$

以此值代入上式則

$$a = \frac{\theta^2 r^2}{r} = \theta^2 r \text{-------------------------} (3)$$

今命質量m物体生每秒a呎秒加速度之力為F以絶對制單位測之則

$$F = m \cdot a \text{磅達尔}$$

以2.3式中a之值代入上式則

$$\left.\begin{aligned} F&=m\cdot a=m\frac{V^2}{r}\text{磅達爾} \\ \text{或}\quad F&=m\cdot a=m\cdot\theta^2 r\text{磅達爾} \end{aligned}\right\}\text{------------}(4)$$

又以重力制單位測之則

$$\left.\begin{aligned} F&=\frac{W}{g}a=\frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{r}\text{磅} \\ \text{或}\quad F&=\frac{W}{g}\cdot a=\frac{W}{g}\cdot\theta^2 r\text{磅} \end{aligned}\right\}\text{------------}(5)$$

此牽引向中心之力曰求心力縳小石于細繩迴轉之其時係之抵抗力即此求心力也然依牛頓氏運動第三則既有牽引小石向中心之力則必有反動力可知此反動力曰遠心力即遠心力者小石為圓運動時常欲使其逸去之力也而此求心力與遠心力之相等不言可知故上式F之值為求心力及遠心力之公共

次物体以C為中心以等速度為圓運動者其要件如下所假定時可求得求心力與前項諸式同

F＝遠心力若求心力(磅)

W＝物体之重量(磅)

r＝物体之重心至中心点之距离即半径(呎)

V＝物体所有之等速度(呎秒)

N＝物体每分間之迴轉数

g＝重力之加速度＝32.2(呎秒)

令
$$V=\frac{2\pi rN}{60}$$
故
$$V^2=\frac{4\pi^2r^2N^2}{3600}=\frac{\pi^2r^2N^2}{900}$$
以此V^2之值代入5式中上式則
$$F=\frac{W}{g}\frac{V^2}{r}=\frac{W\pi^2r^2N^2}{900gr}$$
然　$\pi^2=9.8696$　　$900g=28980$

故　$F=0.0003406WrN^2$ ………… (6)

就此式而言則既知其物体之量迴轉数及圓運動之半徑後可求得其遠心力及求心力矣

例三十八　有物体質量7磅以21呎秒之等速度為圓運動其半徑為十呎則遠心力幾何　　答441磅達尔

〔解〕　已知質量速度及半徑故公式4上式適用即
$$F=m\frac{V^2}{r}=7\times\frac{\overline{21}^2}{10}=441\text{磅達尔}$$

例三十九　有一物体其重量5磅以42呎秒之等速度為直徑14碼之圓運動其求心力如下所旁各地之值如何

1　柏林　　　　　答 1　13.05磅

2　赤道　　　　　　 2　13.07磅

3　極地　　　　　　 3　13.03磅

〔解〕 $r=\frac{14\times3}{2}=21$呎

用公式5上式則

1. $F=\frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{r}=\frac{5\times\overline{42}^2}{32\cdot194\times21}=13\cdot05$磅

2. $F=\frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{r}=\frac{5\times\overline{42}^2}{32\cdot091\times21}=13\cdot07$磅

3. $F=\frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{r}=\frac{5\times\overline{42}^2}{32\cdot255\times21}=13\cdot03$磅

例四十　有一機關車于此其重量40噸今此機關車以一時三十哩之速度在半徑1/4哩之弧狀軌条上進行時其軌条因機関車遠心力之故所受壓力幾何（但此机関車為單独机関車）　答4081·15磅

〔解〕已知之件為

$W=40\times2240=89600$磅

$r=\frac{1\times5280}{4}=1320$呎

$V=\frac{30\times5280}{60\times60}=44$呎秒

故公式5之上式適用即

$F=\frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{r}=\frac{89600\times\overline{44}^2}{32\cdot2\times1320}$

$=4081\cdot15$磅

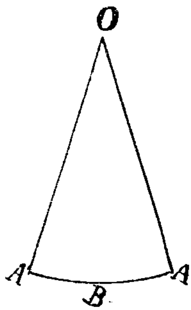
即軌条因機関車遠心力之故所受壓力約1.82噸也

第四十九節　振子(Pendulum)

〔第一〕　單一振子(Simple Pendulum)

定義　于不伸縮且無重量之線之一端贅以重質点懸他端于任意之一定点曰單一振子

第六十五圖

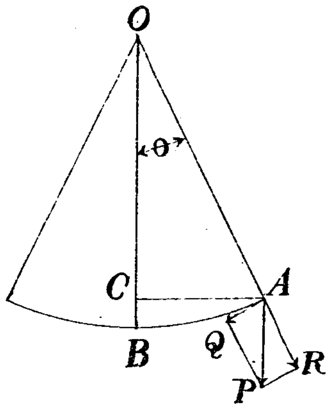


如圖O為任意之一定点OB為線B為重質点今取B引上至A而放之則B受重力之作用生加速度乃于ABA'弧上往復運動就此運動以研究之則由A放之之時因重力作用故速度漸次增加及達于B而速度為最大次由B于AB弧反側漸向上方運動而此時之加速度漸次減少及達于A之同高点A'而速度等于零復受重力而取A'BA弧運動

物体由A經B至A'運動曰振動由A至A'復反至A所需時間曰週期或曰二重振動時間而名由A至A'或由A'至A

所需時間曰單一振動時間BA或BA'曰振幅

第六十六圖



更就振動時間而研究之如圖O為振子之懸点OB為係A点為某時刻質点之位置則此時質点之重力必向下垂直運動换言之卽作用于質点之重力必于圖中所示AP之方向運動由是可分解此力為係之方向運動之一力R及AB切綫運動之一力Q然R之分力不过但有緊張係之作用而Q則使質点生加速度運動者也今命質点之質量為m則其重量為$m\cdot g$命其使質点運動之分力AQ為q由A引OB垂直线AC則

$$AQ=\frac{AC}{AO}\cdot AP$$

然 $AQ=q \qquad AP=m\cdot g$

以此代入上式更命$\angle BOA$為θ則

$$q=\frac{AC}{AO}m\cdot g \quad 或 \quad q=m\cdot g\sin\theta$$

如此θ角極小即振幅極小時則AC殆與弧AB等此際命絲長為l可變上式而為下式即

$$AC=AB. \qquad OB=OA=l$$

$$q=\frac{AB}{l}m\cdot g$$

由此若命q所生之加速為a則

$$a=g\cdot\sin\theta=\frac{AB}{l}\cdot g$$

而此值與由B之距离為正比例即θ不超過三度時與B殆為正比例

由是吾輩得知由q分力所生質点之加速度之條件四即（1）不関重量之如何（2）與振幅為正比例（3）與絲之長為逆比例（4）與g之值為正比例

今命週期為T以

$$\theta=wt \qquad w=\frac{2\pi}{T}$$

$$L\cos\theta=AB=L\cdot\theta$$

故 $a=g\cdot\sin\theta$

$$=\frac{V^2}{L}\cdot\cos\theta$$

$$=\omega^2 L\cdot\cos\theta=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot L\cdot\theta$$

然運動範圍極小時 $\sin\theta=\theta$ 故

$$g=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot L$$

即 $$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\text{------------------}(1)$$

故振動時間雖以θ之大小即振幅之大小而異然θ為5°至10°之間迨不關振幅之大小而以等時振動曰振子之等時性

吾輩于此乃得知週期之條件四即（1）不關重量之大小（2）不關振幅之大小而為等時振動（3）與條長之平方根為正比例（4）與g之平方根為逆比例

例四十一　在倫敦单一振子之週期為一秒其振子之長如何又单一振動時間為一秒時其長如何

答$\begin{cases}9.7848\text{吋}\\39.1392\text{吋}\end{cases}$

〔解〕 $$l=\frac{gT^2}{4\pi^2}=\frac{32.191\times1^2}{4\pi^2}$$

$$=0.8154\text{呎}=9.7848\text{吋}$$

此乃二重振動時間之長也若為單一振動時間則

$$l=\frac{gT^2}{\pi^2}=3.2616\text{呎}=39.1392\text{吋}$$

例四十二　有單一振子于此在甲地每分間六十回振動在乙地每分間六十五回振動問甲乙両地g值之比如何

答$1:1.173$

〔解〕　週期與絲長之平方根為正比例而振動數與週期為逆比例故振動數與振子長之平方根為逆比例今命甲乙両地之週期為T, T' g之值為g, g'則

$$T:T'=\frac{1}{60}:\frac{1}{65}$$

故

$$T^2:T'^2=4225:3600$$

又

$$T:\sqrt{\frac{1}{g}}=T':\sqrt{\frac{1}{g'}}$$

故

$$T^2:T'^2=g':g$$

即

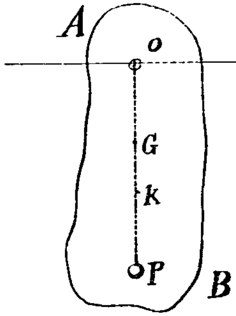
$$3600:4225=g:g'$$

$$=1:1.173$$

〔第二〕　合成振子(Compound Pendulum)

定義　對于一定軸可為運動之物体曰合成振子

第六十七圖



如圖 AB 爲合成振子 O 爲定軸今取一端結重錘之絲繫于 O 軸任意伸縮其絲可使此重錘与合成振子爲同等之振動若固着其上者然試假此際重錘之位置爲 P 則此 P 曰振動心而懸絲處即定軸 O 曰懸心

試更以 P 懸于軸則此時錘之位置必在 O 而仍爲同等之振動故振動心及懸心可互換者也由是則 OP 爲相當單一振子之長可知矣

命 G 爲 AB 之重心 OG 之長爲 R OK 爲 AB 对于定軸 O 之環動半徑（環動半徑詳後）命爲 k 週期爲 T 則

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{k^2}{R}} \qquad l=\frac{k^2}{R}\cdot g$$

振動心又名撞心因加打擊于此点時于上方軸上毫無影響也

第二章 動力及抵抗(Effort and Resistance)

第五十節 交換性及不交換性抵抗(Reversible and Irreversible Resistance)

凡物体運動時必有爲他物所障碍以防其運動者名之曰抵抗例如以手牽引他重物体時手覺有一種之力阻其牽引者即抵抗也故此時欲重物体之運動則必求手之力大于其抵抗此力曰動力

欲就動力及抵抗之関係而說明之以手舉物体則其物体之重量即地球引力爲抵抗力而手力爲動力又如機械之運轉蒸汽入氣筩内運動唧子推及于機械則蒸汽之膨漲力爲動力而機械間引起之摩擦爲抵抗也然動力及抵抗力以比較而得非定名也如卷發條時手爲動力發條之弹力爲抵抗力但時針運行時発條之弹力爲動力而機械之摩擦爲抵抗力又如用手舉物時手爲動力重力爲抵抗力但應用于水車時則重力又爲純然之動力矣故世間一切諸力皆非絶對抵抗力因名曰交換性抵抗而摩擦則爲絶對抵抗力名曰不交換性抵抗

第五十一節 摩擦(Friction)

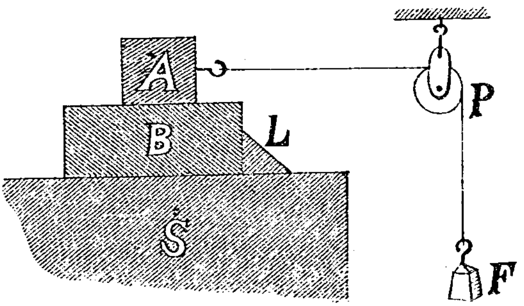
定義 二物体互接觸相壓上物体運動時所生下物体之抵抗曰摩擦

摩擦者抵抗物体之運動而爲之障碍之力之謂也如上節所述與動力之作用爲絶對抵抗力由吾輩之實驗摩擦力因

二物体間接觸面之狀况如何而異即接觸面粗鬆者摩擦力大接觸面平滑者摩擦力小故一般機械運動時常注油于各接触面使之滑摩擦力因而减小則動力不至空費不然則摩擦力之作用或摩損接触面或發热使其運動不完全而机械乃大受損害然摩擦亦非绝对有害者也如汽車電車脚踏車等運動時欲其于極小時間内停止不能不借重于摩擦制動机即以制動机壓其動輪使其動輪迴轉方向反对之摩擦力而停止其運動也

今加動力于静止物体上之物体而牵引之其下物体之抵抗力（即摩擦）在外力未曾加入以前為零次第增加其值至已達其定限而動力仍有餘勢其物体乃始為運動此定限摩擦曰極限摩擦故動力非過極限摩擦者其動力為摩擦抵抗所打消而失其作用然此極限摩擦因其物体重量于接触面所生反動力及其接触面之性質而異

第六十八圖



如畵載A.B二物体于S上以細繩結A穿過P之小滑車下贅以F之重錘如此時F之力恰將使A物体運動則此F動力之量恰等于AB間接觸面之極限摩擦可知（但此時命細繩及小滑車為無摩擦力）如是則摩擦力之量亦可以磅表之若此時F小于極限摩擦則A物体仍前靜止而摩擦之抵抗亦小于極限摩擦與F等若F等于極限摩擦則實際之抵抗亦為極限靜止摩擦若F大于極限摩擦則摩擦之抵抗力薄而A物体因以其抵抗所餘之動力為運動

若一物体運動時其諸外力及抵抗相平衡者其物体以等速度運動故F若與AB間極限運動摩擦相等則其速度為等速度F若超過AB間極限運動摩擦則物体以其超過之餘力生加速度由是則比較運動之二物体間實際摩擦抵抗等于其二物体極限運動之摩擦且恰等于維持二物体比較速度相等之F力

如畵若S之水平面全無摩擦者則B及于L耳（此L耳常等于AB間之實際摩擦抵抗）之壓力等于A物体越B物体運動之長極限摩擦故其壓力等于F或大于F或小于F若A靜止時則其壓力等于F且小于極限摩擦若殆與相等

定義　極限摩擦與直壓力之比曰摩擦係數

今命極限摩擦為F直壓力為R摩擦係數為$\mathcal{M}$則

$$\mathcal{M}=F/R$$

或

$$F = \mathcal{M} \cdot R$$

今如前圖命F力為十磅且恰与AB間之極限摩擦平衡A之重量為五十磅則AB之摩擦係數如下式即

$$\mathcal{M} = \frac{F}{R} = \frac{10}{50} = 0 \cdot 2$$

摩擦係數一般以小数若分數表之然在鉄道列車及滊机等直壓力以噸為単位者其摩擦曰每噸若干磅或以若干度若干分表之曰摩擦角(摩擦角詳後)

考倫(Coulomb)摩擦之三法則

〔第一〕 二物体間接触面一定者其摩擦与両者間所生直壓力為正比例

〔第二〕 二物体間所起之摩擦与其接触面之廣狭無関係

〔第三〕 運動摩擦小于静止摩擦且与其速度之大小無関係

一及二為静止摩擦之法則三為運動摩擦之法則

摩擦係數因物体之性而異即同一物質而有粗滑汚潔燥濕之不同故摩擦係數者与両物体間接触面之性質及狀況相関係者也性質者物質之或為金属或為木材等之謂也狀況者其物体之滞滑汚潔燥濕給油或不給油之謂也

法摩林将軍(Gen'l Morin)實驗各種材料得一表如下

法國摩林将軍之實驗表

材料	記事	係數	摩擦角
樫之上置樫	樫之纖維與運動方向平行	·48	25°38′
鍛鉄之上置鍛鉄	鍛鉄之纖維與運動方向平行	·14	7°58′
鑄鉄之上置鋼鉄		·20	11°19′
真鍮之上置鋼鉄		·15	8°32′
鑄鉄之上置真鍮		·22	12°25′
普通錬瓦之上置普通錬瓦		·64	32°38′
白松之上置白松	兩面完全乾燥且其纖維與運動方向平行	·4	21°48′

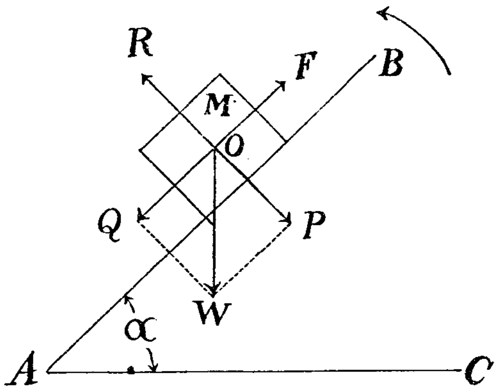
次土木學士連尼(Rennie)由實驗測得次第增加壓力漸至摩損之極限時各乾燥材料表面上之摩擦係數其結果列表于下

壓力 磅/□″	鍛鉄上載鍛鉄	鑄鉄上載鍛鉄	鑄鉄上載鋼鉄	鑄鉄上載真鍮
32·5	0·140	0·174	0·166	0·157
186	0·250	0·275	0·300	0·225
224	0·271	0·292	0·333	0·219
336	0·312	0·333	0·347	0·215
448	0·376	0·365	0·354	0·208
560	0·409	0·367	0·358	0·233
672	....	0·376	0·403	0·233
709	....	0·434	....	0·234
784	....	....	....	0·232
821	....	....	....	0·273

由此表推之則摩擦係数之与直壓力成正比例從可知矣

摩擦角(Angle of Friction)

第六十九図



如図AB之斜面对于AC之水平面漸次以矢之方向傾斜時遂使載于AB上之M物体始勝其静止摩擦由斜面滑下命此時AB AC所夹之角為α則此α即摩擦角亦曰休息角今就此M物体与斜面AB間之摩擦而研究之命M物体之重量為W次M物体向A滑下時必有反向作用之F抵抗力即摩擦力可知又命M物体及AB面間所起直壓力之反動力為R如此三力平衡則M物体静止今分解W一為平行AB之OQ一為垂直AB之OP則

$$\widehat{WOP}=\alpha$$

$$OQ = W\cdot\sin\alpha, \quad OP = W\cdot\cos\alpha$$

就此諸力之方向言之R為正則$W\cos\alpha$為負又F為正則$W\sin\alpha$為負故

$$R - W\cdot\cos\alpha = 0 \quad \therefore R = W\cdot\cos\alpha \cdots\cdots(1)$$

$$F - W\cdot\sin\alpha = 0 \quad \therefore F = W\cdot\sin\alpha \cdots\cdots(2)$$

以(1)式除(2)式則

$$\frac{F}{R} = \frac{W\cdot\sin\alpha}{W\cdot\cos\alpha} = \tan\alpha$$

然摩擦係數 $\mu = F/R$ 故

$$\mu = \tan\alpha$$

由是摩擦係數等于摩擦角之正切故摩擦係數有時亦可以若干度若干分表之也

第三章 工及勢(Work & Energy)

第五十二節 工(Work)

定義 加一力于物体之一定点而移動其着力点之位置時曰其力施工

換言之即工者反對其物体之抵抗力而移動之之謂也

凡測工以其力及物体運動距离之相乘積表示之為通例今有F力作用于一物体運動S呎之距离則其工W如下即

$$W = F\cdot S$$

次力及運動之方向不一致者命力為F運動距离為S工

為W F及S作用角為θ則使此物体運動之分力為$F\cdot Cos\theta$

故
$$W=F\cdot Cos\theta\cdot S.$$

又物体運動所經過路程為曲線者則當求力之作用線上曲線之正射影今命此正射影為S'則

$$W=F\cdot S'$$

工之单位(Unit of Work)

英製舉重量一磅之物体于一呎之高之工為單位工曰呎磅然便宜上或以舉重量一噸之物体于一呎之高之工為單位曰呎噸或以舉重量一噸之物体于一吋之高之工為單位曰吋噸法製舉重量一基格之物体于一仙米之高之工為單位曰基格米

工之绝对单位英製為呎磅達尔法製為耳尔格(Erg)耳尔格者抗一代因之力運動一仙米之謂也

有効工及無効工(Useful Work & Lost Work)

凡机械等施工時不能全得其功用其一部或為摩擦抵抗故歸于消耗此消耗之工曰無効工反是抵抗所餘之他部分有功用者曰有効工例如以唧筒吸水其唧子運動時為摩擦抵抗消耗之工為無効工其有効工即所輸水之重及其揚水高之相乘積也但所施之全工等于有効工及無効工之和

本節工之計算擬下所列二項中第一項其第二項詳後

(1) 動力及抵抗力相平衡者(此時物体或靜止或以等速度運動)

(2) 動力及抵抗力不相平衡者(此時物体以某加速度運動)

例四十三 用平削機械削鑄鉄板其速度每分12呎秒今鑄鉄之抵抗力2000磅則機械所施工幾何

答 24000

解 味題意動力及抵抗力平衡故每分之工

$$W=2000\times12=24000\text{呎磅}$$

例四十四 于水平軌条上運轉重量六噸之車輛其摩擦抵抗等于車輛重量$1/20$今以等速度半哩間運轉此車輪其工幾何　答 1774080呎磅

解 摩擦抵抗力$=6\times\frac{1}{20}=\frac{3}{10}\times2240$

$$=672\text{磅}$$

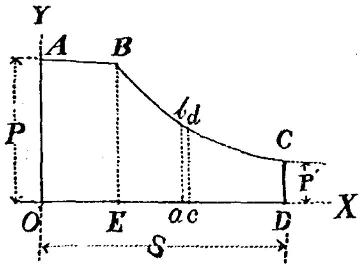
$$S=\frac{1}{2}\times5280=2640\text{磅}$$

$$\therefore\quad W=672\times2640=1774080\text{呎磅}$$

第五十三節 工之作圖法(Graphical Representation of works)

如以前所述工者力及距离之相乘積也而此二者皆可以直線表示之故工者可以面積表示之者也一般表距离以横軸表力以縦軸故力右一定者其工之圖為矩形然實際力多変化今舉一例以説明之

第七十圖



如圖即表示汽機汽筩內之蒸汽一衝程間所施工之理論上之圖也取OX, OY之直交軸于OX上取衝程之距離S OY上取汽壓力P然最初運動之力P（即OA）最後乃变爲P'（即CD）而其距離爲S則P力運動S距離間所施工可以如圖之OABCDE之面積表示之何則如圖P在OE間所施工爲矩形OABE之面積次于ED間取任意二点a, c由此二点引OA DC平行線与BC曲線交于b, d但此際ab, cd二線之距離極小換言之即取a, c二点时其二点間之距離甚近也然ab及cd爲P力進行至oa及oc距離时之变力今ab, cd極接近則此二線長之差極微于是bd殆爲直線与ac平行即謂abdc爲小矩形亦無不可故ac極小距離間所施之工即可以此小矩形abdc之面積表示之今命小矩形面積爲Δa_1, Δa_2, Δa_3………其平均面積爲Δa EBCD之全面積爲A則

$$A = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \cdots\cdots = \Sigma \Delta a$$

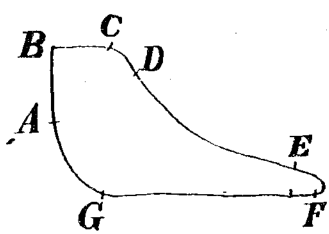
而ED距離所施之工恰等于無数小矩形面積之和故可以EBCD之面積表示之也

約言之則(A)OE間所施工為矩形OABE之面積(B)ED間所施工為曲線形EBCD之面積而全体距離OE加ED即S間所施工為(A)(B)之和即等于OABE+EBCD等于OABCDE之全面積圖中上部之曲線ABC曰抵抗曲線(Curve of Resistance)

然在實際因于汽箭内若外之種種障礙其形乃與上圖異即下汽力指示圖是也

汽力指示圖

第七十一圖



今就此圖簡單說明之A為給汽点滑動弁對于蒸汽開始之点也垂直線AB為給汽線B即表示汽箭内蒸汽之最大壓力者也水平線BC為汽線由B至C皆能保其最大壓力自C点起蒸汽漸為弁所遮閉至D点全然閉止故此D点為遮汽点自D点起蒸汽既全然閉止故一定量之蒸汽殆以波以尔之法則(P·V=K K=定數)之関係而為膨脹作

用遂至于E此DE曲線為膨漲線殆与双曲像同E点為放流点即自此点始放流也直至G点迄此EG線為放流線而FG特曰背壓線在凝縮汽机曰真空線自G点蒸汽始壓縮次第上升至A点而止此GA為壓縮像

如上所述将汽力指示函ABCDEFG作成後測其面積則汽筩内蒸汽所施工幾何可計算而得矣故吾人以此為基可發見汽機之馬力所謂実馬力即指示馬力是也

第五十四節 勢(Energy)

定義 勢者施工之能力之謂也

例如固体若液体在高処时有落下之能力火藥爆裂时有發射彈丸及破裂岩石之能力石炭燒时有發生汽罐内蒸汽運轉汽機之能力凡施工之原因莫不歸于勢或曰施工或曰加勢皆同一事実也故勢之単位与工之単位同

勢分二種(第一)活勢(第二)潜勢

〔第一〕 活勢(Kinetic Energy)

活勢(一曰運動勢)者動体所具有之勢之謂也若与以抵抗則必施相當之工彼發射之弾丸具有活勢者也于何見之若遇軍艦等之抵抗即施其破壞之工故彈丸當未遇軍艦等抵抗之前己具有破壞軍艦等之勢也

将質量m之物体以V速度垂直拋上时与第一編所論落体速度同即物体抵抗自身之重量W(即重力mg)而上升故

$$V^2=2gh \qquad \therefore \qquad \frac{V^2}{2g}=h$$

即其物体能達h之高也今將後式之兩面各乘以物体之重量若重力時則

$$\frac{1}{2}mV^2=mgh \qquad 若 \qquad \frac{WV^2}{2g}=Wh$$

前第五十二節所述工為力與距離之相乘積則上式之後節為物体抛上至h高之所施工即其物体由活勢所施工也故上二式之前節皆表示其物体之活勢者也

次負量m之物体受F之力其速度由V_1变為V_2命其F力作用之時間為t其物体所運動之距離為S則

$$F=\frac{m(V_2-V_1)}{t} \qquad S=\frac{V_2+V_1}{2}t$$

以此二式相乘而变其前後之位置則

$$\tfrac{1}{2}mV_2^2-\tfrac{1}{2}mV_1^2=F\cdot S$$

即後節為表示F力之所施工其結果变$\frac{1}{2}mV_1^2$活勢之量為$\frac{1}{2}mV_2^2$活勢之量也故上式可如下所云即一力作用于一物体時其活勢之变化等于其力所施工之量又將上式变為

$$\tfrac{1}{2}mV_2^2=\tfrac{1}{2}mV_1^2+F\cdot S$$

時可如下所云即某時之活勢等于加其作用之力所施工于最初之活勢若此際F力與運動方向相反時則F抵抗其運動而減其活勢之量故此時與前式正負恰相反則

$$\frac{1}{2}mV_2^2=\frac{1}{2}mV_1^2-F\cdot S$$

即某時刻之活勢等于由最初之活勢減去具作用之力所施工

例四十五　有13噸之重砲于此今此砲一度發放其退卻之速度為10呎秒依四噸之等摩擦力而靜止其砲之退卻距离幾何（但单位為噸呎秒）　　答5·046呎

〔解〕依題意命所求距离為x勝摩擦抵抗之力為$4g$所施工為W則

$$650=4gx$$

$$\therefore\quad x=\frac{650}{4g}=5\cdot046\text{呎}$$

（第二）潛勢(Potential Energy)

凡物体虽在靜止之时視具位置如何亦有施工之能力例如山巔靜止之石塊試一動之即展轉落下施若干之工又如火藥及石炭亦皆有施工之能力凡此皆曰潛勢（一曰位置勢）

例如靜止一質量m之物体由地上h之高處而撥動之則具所施工為mgh或Wh故在h高處之質量m之物体為有mgh或Wh之潛勢也以此与前例照对則活勢变為潛勢或潛勢变為活勢也

勢之不減之原則

凡諸物体互相動時其勢由甲物体移于乙物体或活勢变為潛勢然諸物体勢之總和常相等即得失互相打消而勢仍無加減也若畧摩擦及其他抵抗力則其原則為

活勢之所得＝潛勢之所失

即宇宙間諸物之勢皆不滅也

第五十五節　馬力(Horse Power)

工之公式為 $(W=F\cdot S)$ 是工者力及距離之相乘積也故工與距離為正比例又距離為速度與時間之相乘積故距離又與時間為正比例綜論之即工者與運動時間為正比例也例如有同等之甲乙二機械甲之運動時多于乙則甲所施工大于乙可知若二機械大小不等大機械于 x 時間所施工之量在小機械于大于 x 時間內施工亦可與大機械之量等由是單以呎磅表工之量尚嫌不足而大機械與小機械所施工之比更難判明則不可不使時間有一定之制限明矣

通常以分為時間單位單位時間內所施工曰工程而工程之單位曰馬力即一馬力者每分間施33000呎磅之工者也馬力之文字用HP或IP法德皆以每秒75米基格為一馬力

例四十六　有排水汽機由深百呎之處一晝夜間排出之量為4257噸問此汽機馬力幾何

〔解〕　汽機一晝夜之工為

$$4257\times2240\times100\text{ 呎磅}$$

一分間之工爲

$$\frac{4257\times2240\times100}{60\times24}=473\times1400$$

$$\therefore\quad HP=\frac{473\times1400}{33000}=20\frac{1}{15}$$

例四十七　有一汽机左之諸項已知之时其馬力若干

P＝每平方吋之汽壓力（磅）

S＝唧子之衝程（呎）

A＝唧子之面積（平方吋）

N＝每分間之迴轉数

〔解〕　凡汽机其迴轉数即曲柄之迴轉数也曲柄一迴轉即唧子一往復（二重衝程）故曲柄一迴轉所施之工爲$(P\times A)2S$然曲柄一分間N迴轉故一分間之工程爲$P\cdot A\cdot 2S\cdot N$爲便宜故命$2S$爲L則

$$P\cdot A\cdot 2S\cdot N=PALN$$

$$\therefore\quad HP=\frac{PALN}{33000}$$

第四章　工之原則(Principle of work)

第五十六節　機械(machine)

定義　凡加若干之勢于一物体必施同量之工曰工之原則以式表之即

所加之勢＝所施之工

據前章勢不減之法則可適用于機械例如舉一物体于S呎高命所需動力為E其物体之抵抗力為R若兩力相平衡則$(E\cdot S=R\cdot S)$然實除所加之勢不能悉為有効之工或一部分為摩擦及振動之故空發热及音響而為無効工即其勢之一部分変形為热及音響也故在動力及抵抗力相平衡時則

所加之勢＝所施之工＝有効工＋無効工

凡研究機械之運動不可不知左記之三要件即

〔第一〕 力比(Force Ratio)

力比者機械運動之際所起力之增減之度即抵抗力及動力之比之謂也今命抵抗力為Q動力為P即

$$力比=\frac{Q}{P}$$

〔第二〕 速比(Velocity Ratio)

速比者動力及抵抗力速度之平均即抵抗力之速度及動力之速度之比之謂也今命抵抗力之速度為v動力之速度為V即

$$速比=\frac{v}{V}$$

〔第三〕 効率(Efficiency)

効率者勢之消耗之度即有効工及所加勢之比之謂也即

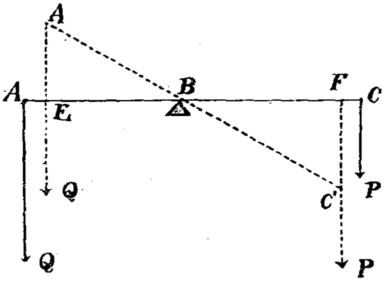
効率＝有効工/所加之勢

以下五節姑就動力及抵抗力平衡而與摩擦等無効工之簡単机械論之

所謂簡単机械即(1)槓桿(2)斜面(3)輪軸(4)滑車(5)螺旋究之後三者亦不過槓桿斜面之変形而已

第五十七節　槓桿(Lever)

第七十二図



如図 B 為 AC 棒之支点 AB, BC 曰臂二臂在一直線上者曰直槓桿反是曰曲槓桿如図乃直槓桿也

今欲高舉懸于 A 之 Q 物体則必加 P 力于 C 若抵抗力 Q 与動力 P 平衡則當 P 力引 C 端向下至 C' 位置时 Q 力亦同时随 A 端向上至 A' 位置命此两端之距离為 FC', EA' 依工之原則則所加之功為 $P\times FC'$ 所施之工為 $Q\times EA'$（實際支点 B 上生摩擦等之無効工今假定為所施工皆有効者論述之下四節同）故

$$P\times FC' = Q\times EA'$$

今便宜命FC'為a EA為b則

$$\frac{FC'}{EA'}=\frac{a}{b}$$

即 $$P\cdot a=Q\cdot b$$

$\therefore$ $$力比=\frac{Q}{P}=\frac{a}{b}$$

次同時間中二速度之比等于其二距离之比故

$$速比=\frac{EA'}{FC'}=\frac{b}{a}$$

次動率為有効工及所加之勢之比故

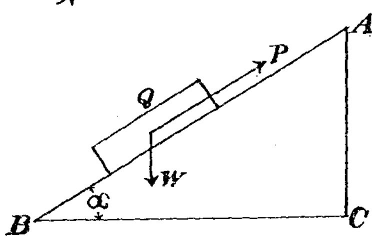
$$効率=\frac{Q\cdot EA}{P\cdot FC}=\frac{Q\cdot b}{P\cdot a}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$$

即假定所施工皆為有効之時其効率等于一故

$$効率=力比\times速比$$

第五十八節 斜面(Inclined Plane)

第七十三圖



如圖BC為水平面AB為斜面Q物体在B点欲牽之至A点則須水平由B運動至C後始由C垂直運動至A力費而事难不得不作一適宜之AB斜面使事半功倍也

今命Q之重量為W所加之力為P且命P平行斜面AB而斜面上光滑無摩擦者則所加之势為P·BA而所施之工為W·CA更命斜度為α則

$$P \cdot BA = W \cdot CA$$

故 $$力比=\frac{W}{P}=\frac{BA}{CA}=\operatorname{cosec}\alpha$$

∴ $$力比=\frac{1}{\sin\alpha}$$

次 $$速比=\frac{CA}{BA}=\sin\alpha$$

故 $$效率=力比\times速比=\frac{1}{\sin\alpha}\times\sin\alpha=1$$

次更就P力平行水平面BC論之則

$$P \cdot BC = W \cdot CA$$

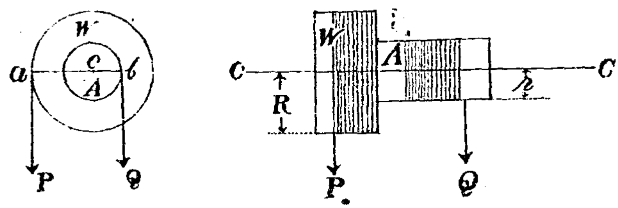
故 $$力比=\frac{W}{P}=\frac{BC}{CA}=\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

$$速比=\frac{CA}{BC}=\tan\alpha$$

$$效率=力比\times速比=\frac{1}{\tan\alpha}\times\tan\alpha=1$$

第五十九節 輪及軸(Wheel & Axle)

第七十四圖



如圖W為輪A為軸兩相固定以公共之$C\ C$定軸迴轉輪及軸上卷以繩P端吐伸則Q端卷縮用以起Q重者也

、輪及軸即槓桿之變形較普通槓桿用力小而成功大今命P為動力Q為抵抗力輪之半徑為R軸之半徑為r就正面圖觀之則$R=ac$, $r=bc$ P力作用于W輪一迴轉時其作用之距離即為W圓周之長即$2\pi R$同理Q力作用于A軸一迴轉之距離為$2\pi r$故所加之勢為$P\cdot 2\pi R$有效工為$Q\cdot 2\pi r$即

$$P\cdot 2\pi R = Q\cdot 2\pi r$$

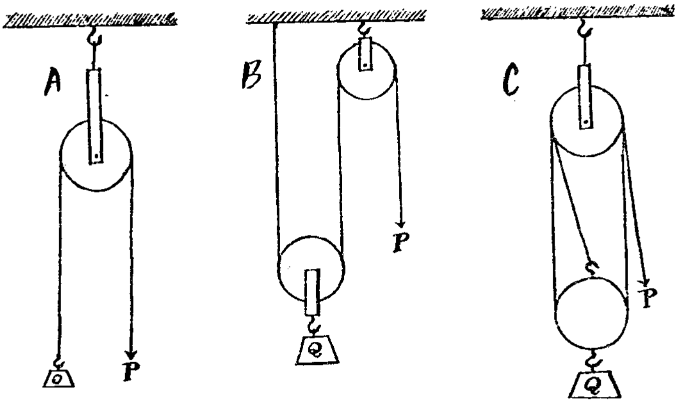
$$\therefore \quad 力比 = \frac{Q}{P} = \frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{R}{r}$$

$$速比 = \frac{r}{R}$$

$$効率 = 力比 \times 速比 = \frac{R}{r} \times \frac{r}{R} = 1$$

第六十節　滑車(Pulley)

第七十五圖



如圖各輪皆可就其中心軸迴轉而輪之周作溝嵌以繩亦起重之器械也

滑車種類甚多今但舉三者示例A為定滑車其軸之位置不變者也B及C為動滑車滑車迴轉時其軸同時上昇或下降者也今假定動力P向下引牽距離為a, Q之上昇距離為b實驗上

A圖　$b=a$

B圖　$b=\frac{1}{2}a$

C圖　$b=\frac{1}{3}a$

是知b之值與Q力所懸繩之數為反比例也今以

$$P\cdot a=Q\cdot b$$

A圖　力比$=\frac{Q}{P}=\frac{a}{b}=1$

速比$=\frac{b}{a}=1$

効率$=$力比$\times$速比$=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$

B圖　力比$=\frac{Q}{P}=\frac{a}{b}=2$

速比$=\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$

効率$=$力比$\times$速比$=2\times\frac{1}{2}=1$

C圖　力比$=\frac{Q}{P}=\frac{a}{b}=3$

速比$=\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$

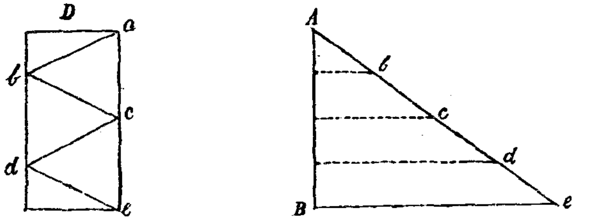
効率$=$力比$\times$速比$=3\times\frac{1}{3}=1$

由是則力比与Q力所懸繩之數為正比例也

第六十一節　螺旋(Screw)

螺旋者即斜面之特種也如圖以紙作三角形 ABC 以之卷于D圓筒上則其斜邊在筒如蛇成一種曲線 $abcde$

第七十六圖

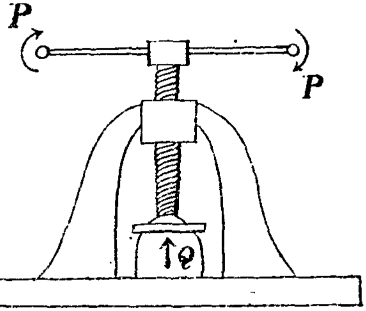


此曲綫曰螺絲(Screw thread)依此曲綫之迹作一凸出之線即為螺旋

螺絲種類甚夥有山形者有圓形者有方形者兩兩螺絲中心間之距離如圖 ac. ce, bd 曰節(Pitch)

螺旋不能獨用必有一嵌合之物其構造凹凸恰與相反者始得其用故別為牡螺旋(Male Screw)牝螺旋(Female Screw)

第七十七圖



如圖為螺旋壓迫機即應用螺旋為壓縮物体之用者也就其運動而研究之則上部把手一回轉时螺旋之前進若後退皆為一節今命把手端至螺旋中心之距离為R把手受P之力回轉螺旋亦同时一回轉且同时降下一節命其一節之距离為p其下物体之抵抗力為Q則所加之势為$2P\cdot2\pi R$(此就两把手者而言若一把手者則所加之势為$P\cdot2\pi R$也)所施之工為$Q\cdot p$故

$$2P\cdot2\pi R=Q\cdot p$$

$$\therefore \quad \text{力比}=\frac{Q}{P}=\frac{2\pi R}{p}$$

$$\text{速比}=\frac{p}{2\pi R}$$

$$\text{効率}=\text{力比}\times\text{速比}=\frac{2\pi R}{p}\times\frac{p}{2\pi R}=1$$

例四十八　有一两把手之螺旋壓迫機于此其各把手之長皆為十六吋而螺旋一節之長為二分之一吋今与各把手以十磅之動力則其抵抗力若干

答4021磅(約)

〔解〕 $2P\cdot2\pi R=Qp$

$$Q=\frac{2P\cdot2\pi R}{p}$$

第六十二節 硬固体之直線及円運動(Straight Line & Circular Motion of Rigid Bodies)

本節專研究動力及抵抗力不平衡者

〔第一〕 硬固体之直線運動

有A物体于此受動力之作用而生抵抗力Q而A物体之重為P故運動X距离時所加之勢為P·X所施之工為Q·X若此時P.Q平衡則($P·X=Q·X$)而其物体以等速度運動若P大于Q則($P·X-Q·X$)為正而其物体乃以此($P·X-Q·X$)之餘勢為加速度運動(即正加速度運動)若P小于Q($P·X-Q·X$)為負而其物体以此($P·X-Q·X$)為減速度運動(即負加速度運動)

凡欲測定一動体之勢如前所述用自由落体之公式兩方乘以重量W即

$$W·h=\frac{W·V^2}{2g}$$

今重量W之物体以V_1呎秒之速度為直線運動之際忽受他外力之作用其速度变為V_2呎秒則物体先时所有之活勢為$W V_2^2/2g$ 故其活勢之变化為

$$\frac{WV_2^2}{2g}-\frac{WV_1^2}{2g}=\frac{W}{2g}(V_2^2-V_1^2)$$

就此活勢之变而研究之

(I) $V_2>V_1$ 則活勢增加為正

附 録 貳

表

1 英式尺度表

吋 (in.)	呎 (ft.)	碼 (yd.)	Pole (R.)	Furlong (fur.)	哩 (mi.)
1	0.0833	0.0277	0.00505	0.00013	0.000016
12	1	0.3333	0.06061	0.0015	0.00019
36	3	1	0.18182	0.0046	0.00057
198	$16\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	1	0.025	0.0031
7920	660	220	40	1	0.125
63360	5280	1760	320	8	1

一哩＝８０鎖

１鎖＝１００節＝６６呎

１節＝7.9２吋

2 英式面積表

平方吋	平方呎	平方碼	平方 Pole	Rood (R.)	畝克 (A.)	平方哩
1	0.00694	0.00077	0.000026	----	----	----
144	1	0.11111	0.00367	0.000092	0.000023	----
1296	9	1	0.0331	0.00083	0.00021	----
39204	$272\frac{1}{4}$	$30\frac{1}{4}$	1	0.025	0.00625	0.0000098
1568160	10890	1210	40	1	0.25	0.00039
6272640	43560	4840	160	4	1	0.00156
4014489600	27878400	3097600	102400	2560	640	1

１畝克＝１０平方鎖

１平方鎖＝１６平方Pole

3 英式立積表

立方吋	立方呎	立方碼
1	0.00058	0.0000214
1728	1	0.027
46656	27	

4 英式容量表

Pint (Pt.)	Quart (qt.)	加倫 (gal.)	Peck (pk.)	Bushel (bu.)	Quarter	立方吋
1	0.5	0.125	0.0625	0.01563	0.0019531	34.663
2	1	0.25	0.125	0.0313	0.00391	69.366
8	4	1	0.5	0.125	0.01563	277.463
16	8	2	1	0.25	0.0313	554.926
64	32	8	4	1	0.125	2219.704
512	256	64	32	8	1	17757.632

5 英式衡量表

翁斯 (oz)	磅 (lb.)	Stone (st.)	Quarter	本 (Cwt.)	噸 (T.)
1	0.0625	0.0045	0.0022	0.00056	0.00003
16	1	0.0714	0.0357	0.00893	0.00045
224	14	1		0.125	0.00625
448	28	2	1	0.25	0.0125
1792	112	8	4	1	0.05
35840	2240	160	80	20	1

6 美式 美式与英式大畧相同今取其不同者别係令于下

1加倫＝0.8325英加倫＝231立方吋

1英加倫＝1.20114美加倫