**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2020/2021**

# Algebraische Zahlentheorie

## Arbeitsblatt 22

### Aufgaben

Aufgabe 22.1. Es sei $R$ eine Dedekindbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G$. Es sei $S$ der ganze Abschluss von $R$ in $L$, sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $R$ mit der Faser $\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k\}$. Zeige, dass es einen natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \operatorname{Perm}(\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k)$$

gibt, und dass dessen Kern gleich $\bigcap_{j=1}^k G_{\mathfrak{q}_j}$ ist.

Aufgabe 22.2. Es sei $R$ eine Dedekindbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit einer kommutativen Galoisgruppe $G$. Es sei $S$ der ganze Abschluss von $R$ in $L$ und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $R$. Zeige, dass die Zerlegungsgruppen $G_{\mathfrak{q}}$ für alle Primideale $\mathfrak{q}$ aus $S$ oberhalb von $\mathfrak{p}$ übereinstimmen.

Aufgabe 22.3. Es sei $R$ eine Dedekindbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G$. Es sei $S$ der ganze Abschluss von $R$ in $L$, sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $R$ mit der Faser $\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k\}$. Zeige, dass der Divisor $\sum_{j=1}^k \mathfrak{q}_j$ unter der natürlichen Operation der Galoisgruppe auf der Divisorengruppe invariant ist.

Aufgabe 22.4. Es sei $G$ eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring $R$ als Gruppe von Ringautomorphismen und damit auf $\operatorname{Spek}(R)$ operiere. Es sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R)$. Zeige, dass der Stabilisator $G_{\mathfrak{p}}$ auf dem lokalen Ring $R_{\mathfrak{p}}$ und auf dem Restekörper $\kappa(\mathfrak{p})$ in natürlicher Weise operiert.

Aufgabe 22.5.*

Es sei $R$ ein Dedekindbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und sei $K \subseteq M$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G$. Es sei $T$ der ganze Abschluss von $R$ in $M$. Es sei $N \subseteq G$ ein Normalteiler von $G$ mit Restklassengruppe $H = G/N$ und es sei $S = T^N$ und $L = M^N$ der zugehörige Zwischenring bzw. Zwischenkörper, auf dem $H$ galoissch operiert mit Fixring $R$ bzw. Fixkörper $K$. Es sei $\mathfrak{r}$ ein Primideal von $T$ über $\mathfrak{q}$ in $S$. Zeige, dass zwischen den Zerlegungsgruppen ein natürlicher surjektiver Gruppenhomomorphismus

$$G_{\mathfrak{r}} \longrightarrow H_{\mathfrak{q}}$$

besteht, dessen Kern gleich $N \cap G_{\mathfrak{r}}$ ist.

Aufgabe 22.6. Es sei $R$ eine Dedekindbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung. Es sei $S$ der ganze Abschluss von $R$ in $L$, $\mathfrak{q}$ ein Primideal in $S$ und $Z_{\mathfrak{q}}$ der zugehörige Zerlegungskörper. Zeige, dass $K \subseteq Z_{\mathfrak{q}}$ galoissch ist.

Aufgabe 22.7. Es sei $R$ eine Dedekindbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung. Es sei $S$ der ganze Abschluss von $R$ in $L$, $\mathfrak{q}$ ein Primideal in $S$ und $Z_{\mathfrak{q}}$ der zugehörige Zerlegungskörper. Zeige, dass $K \subseteq Z_{\mathfrak{q}}$ galoissch ist.

Aufgabe 22.8. Es sei $R$ ein Dedekindbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G$. Es sei $S$ der ganze Abschluss von $R$ in $L$ und seien $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ Primideale von $S$ über $\mathfrak{p}$. Zeige, dass es ein natürliches kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathfrak{q}} & \longrightarrow & \operatorname{Gal}(\kappa(\mathfrak{q})|\kappa(\mathfrak{p})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{\mathfrak{q}'} & \longrightarrow & \operatorname{Gal}(\kappa(\mathfrak{q}')|\kappa(\mathfrak{p})) \end{array}$$

von Gruppenhomomorphismen gibt, wobei die vertikalen Abbildungen Isomorphismen sind.

Aufgabe 22.9. Bestimme für den Zahlbereich $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ den Zerlegungskörper und den Trägheitskörper für die Primideale oberhalb von $(2), (3), (5)$.

Aufgabe 22.10. Zeige, dass eine kubische Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ im Allgemeinen nicht galoissch ist, „obwohl“ die Körpererweiterungen $\mathbb{Z}/(p) \subseteq \kappa(\mathfrak{q})$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{q}$ des zugehörigen Zahlbereiches $S$ (mit $p \in \mathfrak{q}$) galoissch ist. Man folgere, dass in diesem Fall die Gruppenhomomorphismen aus Lemma 22.5 nicht surjektiv sind.

Aufgabe 22.11. Man gebe ein Beispiel für eine Galoiserweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ derart, dass nicht jeder Zwischenkörper der Erweiterung als Zerlegungskörper eines Primideals des zugehörigen Zahlbereichs auftritt.

Aufgabe 22.12. Wir betrachten die Galoiserweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}]$ mit der Galoisgruppe

$$G = \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2).$$

Bestimme die Zerlegungsgruppe und die Trägheitsgruppe für die Primideale im zugehörigen Zahlbereich oberhalb von (7).

Aufgabe 22.13. Es sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, die in $\mathbb{Q}$ keine dritte Wurzel besitzt, so dass $\mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$ eine Körpererweiterung vom Grad 3 ist. Zeige, dass das Polynom $X^3 - q$ in $L$ genau eine Nullstelle hat und dass diese Körpererweiterung nicht galoissch ist.

Aufgabe 22.14.*

Wir betrachten die Galoiserweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\zeta, \sqrt[3]{2}],$$

wobei $\zeta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die dritte Einheitswurzel bezeichnet. Man gebe Beispiele für Primzahlen $p \geq 5$ derart, dass darüber im zugehörigen Zahlbereich zwei bzw. drei bzw. sechs Primideale liegen.

Aufgabe 22.15.*

Wir betrachten die Galoiserweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\zeta, \sqrt[3]{2}],$$

wobei $\zeta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die dritte Einheitswurzel bezeichnet. Man gebe ein Beispiel für eine Primzahl derart, dass die Zerlegungsgruppen der Primideale im zugehörigen Zahlbereich verschieden sind.

Aufgabe 22.16. Bestimme für die reelle Quadratabbildung

$$\mathbb{R}[Y] \longrightarrow \mathbb{R}[X],\ Y \longmapsto X^2,$$

den Zerlegungskörper und den Trägheitskörper für die Primideale $\mathfrak{q}$ in $\mathbb{R}[X]$.

Aufgabe 22.17. Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit der Eigenschaft, dass

$$\mathbb{C}[Y] \longrightarrow \mathbb{C}[X],\ Y \longmapsto P,$$

eine Galoiserweiterung (im Funktionenkörper) ist. Zeige, dass die Zerlegungsgruppe zu einem Primideal $(X - a)$ bis auf endlich viele Ausnahmen trivial ist, und dass sie stets mit der Trägheitsgruppe übereinstimmt.

Aufgabe 22.18. Es sei $R$ ein Dedekindbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und sei $K \subseteq M$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G$. Es sei $T$ der ganze Abschluss von $R$ in $M$. Es sei $N \subseteq G$ ein Normalteiler von $G$ mit Restklassengruppe $H = G/N$ und es sei $S = T^N$ und $L = M^N$ der zugehörige Zwischenring bzw. Zwischenkörper, auf dem $H$ galoissch operiert mit Fixring $R$. Es sei $\mathfrak{r}$ ein Primideal von $T$ über $\mathfrak{q}$ in $S$ und $\mathfrak{p}$ in $R$. Zeige, dass ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathfrak{r}} & \longrightarrow & \operatorname{Gal}(\kappa(\mathfrak{r})|\kappa(\mathfrak{p})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\mathfrak{q}} & \longrightarrow & \operatorname{Gal}(\kappa(\mathfrak{q})|\kappa(\mathfrak{p})) \end{array}$$

von Gruppenhomomorphismen vorliegt, wobei die horizontalen Abbildungen von Lemma 22.5 herrühren (alle Erweiterungen der Restekörper seien separabel), die linke Abbildung von Aufgabe 22.5 herrührt und die rechte vertikale Abbildung durch die Körperkette

$$\kappa(\mathfrak{p}) \subseteq \kappa(\mathfrak{q}) \subseteq \kappa(\mathfrak{r})$$

gegeben ist.

Aufgabe 22.19. Bestimme für einen quadratischen Zahlbereich $\mathbb{Q} \subseteq R$, für welche Primzahlen $p$ das Artinsymbol $(p, Q(R)/\mathbb{Q})$ die Identität oder die Konjugation ist.

Aufgabe 22.20.*

Es sei $R = \mathbb{Z}[X]/(X^3 - 3X + 1)$. Bestätige für die Primzahlen

$$p = 2, 5, 7, 11, 13, 17,$$

dass in $R/(p) = \mathbb{Z}/(p)[X]/(X^3 - 3X + 1)$ eine der Beziehung

$$X^p = \begin{cases} X \\ X^2 - 2 \\ -X^2 - X + 2 \end{cases}$$

gilt. Wie sieht es bei $p = 3$ aus?

Aufgabe 22.21.*

Es sei $R = \mathbb{Z}[X]/(X^3 - 3X + 1)$. Es sei $p \neq 3$ eine Primzahl und $K$ eine Restekörper von $\mathbb{Z}/(p)[X]/(X^3 - 3X + 1)$. Zeige, dass in $K$ eine der Beziehung

$$X^p = \begin{cases} X \\ X^2 - 2 \\ -X^2 - X + 2 \end{cases}$$

gilt. Wie sieht es bei $p = 3$ aus?

Die Situation der beiden vorstehenden Aufgaben wird in Aufgabe 23.16 wieder aufgegriffen.

Aufgabe 22.22. Berechne die Potenzen $X^p$ in $\mathbb{Z}/(p)[X]/(X^3-2)$ für die Primzahlen

$$p = 2, 3, \ldots .$$

Gibt es da irgendeine Regelmäßigkeit?

Aufgabe 22.23.*

Es sei $\zeta$ eine primitive neunte Einheitswurzel in einem Körper $L$. Zeige, dass die Elemente

$$\zeta + \zeta^8, \zeta^2 + \zeta^7 \text{ und } \zeta^4 + \zeta^5$$

die Nullstellen des Polynoms $X^3 - 3X + 1$ sind.

Aufgabe 22.24. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq L$ eine Galoiserweiterung mit einer abelschen Galoisgruppe $G$ und es sei $S$ der zugehörige Zahlbereich. Es sei $N \subseteq G$ eine Untergruppe mit der Restklassengruppe $H = G/N$ und $R = S^N \subseteq K = L^N$. Es sei $p$ eine Primzahl und $\mathfrak{q}$ ein unverzweigtes Primideal von $S$ oberhalb von $(p)$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$. Zeige unter Verwendung des kommutativen Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathfrak{q}} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}\,(\kappa(\mathfrak{q})|\mathbb{Z}/(p)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}\,(\kappa(\mathfrak{p})|\mathbb{Z}/(p)) \end{array}$$

aus Aufgabe 22.18, dass das Artinsymbol $(p, L/\mathbb{Q})$ auf das Artinsymbol $(p, K/\mathbb{Q})$ abgebildet wird.

## Abbildungsverzeichnis