

Grundkurs Mathematik I

Vorlesung 23

Aus großer Macht folgt große
Verantwortung

Ben Parker

Die rationalen Zahlen

Eine Gleichung der Form

$$bx = a$$

mit fixierten ganzen Zahlen a, b besitzt innerhalb der ganzen Zahlen im Allgemeinen keine Lösung für x . Bei $b = 0$ und $a \neq 0$ gibt es auch keine Lösung innerhalb einer sinnvollen Zahlbereichserweiterung. Bei $b \neq 0$ gibt es hingegen innerhalb der rationalen Zahlen eine eindeutige Lösung, nämlich

$$x = \frac{a}{b}.$$

Wir führen nun die rationalen Zahlen, ausgehend von \mathbb{Z} ein, und zwar zunächst als Menge von Brüchen. Anschließend definieren wir eine Addition und eine Multiplikation auf dieser Menge und weisen, ebenfalls unter Bezug auf die ganzen Zahlen, die Gültigkeit der wichtigsten Rechengesetze nach.

Als eine Motivation für die folgende Gleichsetzung von unterschiedlichen Brüchen betrachten wir nochmal die Proportionalität. Zwei ganze Zahlen a und b definieren einen proportionalen Zusammenhang φ , der an der Stelle a den Wert b besitzt. Er besitzt dann an der Stelle na den Wert nb . Dieser Zusammenhang besteht unabhängig davon, ob er durch eine ganzzahlige Konstante c in der Form $\varphi(x) = cx$ beschrieben werden kann. Ein proportionaler Zusammenhang ist durch ein einziges von $(0, 0)$ verschiedenes Zahlenpaar eindeutig festgelegt. Daher bestimmen zwei ganzzahlige Paare (a, b) und (a', b') genau dann den gleichen Zusammenhang, wenn sie an der Stelle aa' , wo man die Werte unmittelbar vergleichen kann, den gleichen Wert besitzen. Die Werte sind an dieser Stelle ba' bzw. $b'a$, so dass genau im Fall

$$a'b = ab'$$

die beiden proportionalen Zusammenhänge als gleich zu betrachten sind. Dies ist eine Grundlage für die in der folgenden Definition auftretenden *Überkreuzregel*.



DEFINITION 23.1. Unter einer *rationalen Zahl* versteht man einen Ausdruck der Form

$$\frac{a}{b},$$

wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ sind, und wobei zwei Ausdrücke $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ genau dann als gleich betrachtet werden, wenn $ad = bc$ (in \mathbb{Z}) gilt. Die Menge aller rationalen Zahlen wird mit \mathbb{Q} bezeichnet.

Einen Ausdruck $\frac{a}{b}$ nennt man Bruch, wobei a der *Zähler* und b der *Nenner* des Bruches heißt. Eine rationale Zahl wird durch verschiedene Brüche beschrieben und kann mit unterschiedlichen Zählern und Nennern dargestellt werden, beispielsweise ist

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Man sagt auch, dass diese beiden Brüche gleichwertig sind. Für die rationale Zahl $\frac{a}{1}$ schreibt man einfach a . In diesem Sinne sind ganze Zahlen insbesondere auch rationale Zahlen. Insbesondere gibt es die Null $0 = \frac{0}{1}$ und die $1 = \frac{1}{1}$. Es gelten die folgenden Identitäten (dabei seien $c, d \neq 0$, ansonsten seien alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ beliebig).

(1)

$$\frac{1}{-1} = -1,$$

(2)

$$\frac{0}{c} = 0,$$

(3)

$$\frac{c}{c} = 1,$$

(4)

$$\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd}.$$

Die Begründung für die Richtigkeit dieser Regeln liegt in der Überkreuzregel. Die letzte Regel heißt *Erweiterungsregel* (wenn man sie von links nach rechts liest) bzw. *Kürzungsregel* (wenn man sie von rechts nach links liest). Der Wert eines Bruches (also die rationale Zahl, die durch den Bruch festgelegt ist) ändert sich also nicht, wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner mit der gleichen, von 0 verschiedenen ganzen Zahl multipliziert. Wegen

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

kann man jede rationale Zahl mit einem positiven Nenner schreiben. Zwei Brüche mit einem gemeinsamen Nenner, also von der Form $\frac{a}{r}$ und $\frac{c}{r}$, heißen *gleichnamig*. Zwei beliebige Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ kann man gleichnamig machen, indem man sie durch Erweiterung auf einen *Hauptnenner* bringt. Eine Möglichkeit ist, die beiden Nenner miteinander zu multiplizieren und zu den gleichwertigen Brüchen $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{cb}{bd}$ überzugehen. Statt mit bd kann man mit jedem gemeinsamen Vielfachen der Nenner arbeiten.

DEFINITION 23.2. Ein Bruch a/b heißt *gekürzt*, wenn a und b teilerfremd sind.

Zu jeder rationalen Zahl gibt es eine gekürzte Darstellung. Wenn man den Nenner positiv wählt, ist diese Darstellung sogar eindeutig. Man erhält sie, indem man in einer beliebigen Darstellung durch den größten gemeinsamen Teiler des Zählers und des Nenners dividiert.

DEFINITION 23.3. Eine rationale Zahl der Form $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_+$, heißt *Stammbruch*.

Rechenoperationen auf den rationalen Zahlen

Eine über \mathbb{Z} formulierte Gleichung der Form

$$bx = a$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$ soll bei $b \neq 0$ eine eindeutige Lösung besitzen, nämlich $\frac{a}{b}$. Um dies formulieren zu können, müssen wir natürlich erstmal eine Multiplikation und eine Addition auf den rationalen Zahlen definieren. Bei gleichnamigen Nennern addiert man einfach die Zähler, auf diesen Fall kann die allgemeine Definition zurückgeführt werden. Mit diesem Übergang, endlich viele rationale Zahlen mit einem gemeinsamen Nenner zu schreiben, kann man häufig Rechnungen und auch theoretische Überlegungen vereinfachen.

DEFINITION 23.4. Die *Addition* der rationalen Zahlen $x = \frac{a}{b}$ und $y = \frac{c}{d}$ ist durch

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$

definiert.

Man addiert also zwei rationale Zahlen, indem man die Nenner gleichnamig macht. Diese Operation ist wohldefiniert! Was soll das bedeuten? Es gibt hier das folgende Problem, das gerne übersehen wird. Die beiden rationalen Zahlen x und y , die miteinander addiert werden sollen, besitzen unterschiedliche Darstellungen als Brüche, beispielsweise ist

$$x = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

und

$$y = \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}.$$

In der Definition der Addition kann man mit einer beliebigen Bruchdarstellung arbeiten. Dann ergibt sich einerseits, wenn man jeweils die erste Darstellung nimmt, die Summe

$$\frac{ad + bc}{bd}$$

und andererseits, wenn man jeweils die zweite Darstellung nimmt, die Summe

$$\frac{a'd' + b'c'}{b'd'}.$$

Es ist nicht unmittelbar klar, dass hier die gleiche rationale Zahl steht. Wegen $ab' = a'b$ und $cd' = c'd$ ist aber nach Erweitern mit $b'd'$ und Kürzen durch bd

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{adb'd' + bcb'd'}{bdb'd'} = \frac{a'dbd' + bc'b'd}{bdb'd'} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'},$$

so dass das Ergebnis als rationale Zahl wohldefiniert ist. Nach der Definition nimmt man für den Nenner das Produkt der beiden Nenner. Man kann aber genauso gut ein beliebiges gemeinsames Vielfaches der beiden Nenner und die entsprechende Erweiterung nehmen. Bei gleichem Nenner ist insbesondere

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{r} = \frac{a+b}{r}.$$

DEFINITION 23.5. Die *Multiplikation* von rationalen Zahlen $x = \frac{a}{b}$ und $y = \frac{c}{d}$ ist durch

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

definiert.

Auch hier muss man die Wohldefiniertheit der Verknüpfung nachweisen, siehe Aufgabe 23.9.

BEMERKUNG 23.6. Die Addition von rationalen Zahlen kann man über die Proportionalitäten begründen. Es sei ein proportionaler Zusammenhang φ durch

$$\varphi(a) = b$$

und ein weiterer (gleichskaliger) proportionaler Zusammenhang durch

$$\psi(a') = b'$$

gegeben. Beispielsweise seien (vergleiche Bemerkung 22.10) die Übernachtungskosten dadurch beschrieben, dass 7 Tage (und Nächte) 320 Euro kosten und die Verpflegungskosten dadurch beschrieben, dass 10 Tage 258 Euro kosten. Wie kann man die beiden Zusammenhänge sinnvoll addieren, also wie viel kostet Übernachtung und Verpflegung zusammen in einem bestimmten Zeitabschnitt? Die beiden Einzelangaben kann man nur dann sinnvoll miteinander verarbeiten, wenn sie sich auf die gleiche Taganzahl beziehen. Dies kann man erreichen, indem man zum Produkt der beiden Tageanzahlen übergeht. Die Übernachtungskosten sind für 70 Tage gleich $320 \cdot 10 = 3200$ und die Verpflegungskosten sind für 70 Tage gleich $258 \cdot 7 = 1806$, die Gesamtkosten für 70 Tage sind also 5006 Euro.

Für eine entsprechende Interpretation der Multiplikation von rationalen Zahlen muss man die Hintereinanderschaltung von proportionalen Zusammenhängen wie in Bemerkung 22.11 betrachten.

Die Addition und die Multiplikation von rationalen Zahlen erfüllen weitere wichtige algebraische Eigenschaften. Letztlich werden diese auf die entsprechenden Gesetzmäßigkeiten von \mathbb{Z} zurückgeführt.

SATZ 23.7. *Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} erfüllen die folgenden Eigenschaften.*

- (1) *Die Addition ist eine kommutative assoziative Verknüpfung mit 0 als neutralem Element. Zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ gibt es ein $y \in \mathbb{Q}$ mit*

$$x + y = 0.$$

- (2) *Die Multiplikation ist eine kommutative assoziative Verknüpfung mit 1 als neutralem Element. Zu jedem $z \in \mathbb{Q}$, $z \neq 0$, gibt es ein $w \in \mathbb{Q}$ mit*

$$z \cdot w = 1.$$

- (3) *Es gilt das Distributivgesetz.*

Beweis. (1) Die Kommutativität der Addition folgt unmittelbar aus der Definition und der Kommutativität der ganzzahligen Addition und der ganzzahligen Multiplikation. Zum Nachweis der Assoziativität können wir annehmen, dass alle drei beteiligten rationalen Zahlen den gleichen Nenner haben. Sei also

$$x = \frac{a}{r}, y = \frac{b}{r}, z = \frac{c}{r}.$$

Dann ist

$$(x + y) + z = \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right) + \frac{c}{r} = \frac{a+b}{r} + \frac{c}{r} = \frac{a+b+c}{r} = x + (y + z).$$

Ferner ist

$$0 + \frac{a}{b} = \frac{0}{b} + \frac{a}{b} = \frac{0+a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Zu $x = \frac{a}{b}$ betrachtet man $y = \frac{-a}{b}$. Dann ist

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a - a}{b} = \frac{0}{b} = 0.$$

- (2) Die Kommutativität und die Assoziativität der Multiplikation ergeben sich unmittelbar aus der Definition und den entsprechenden Eigenschaften der ganzzahligen Verknüpfungen. Die $1 = \frac{1}{1}$ hat die Eigenschaft

$$1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b},$$

es ist also das neutrale Element der Multiplikation. Zu einer rationalen Zahl $z \neq 0$ ist $z = \frac{a}{b}$ mit $a, b \neq 0$ (also sowohl der Zähler als auch der Nenner sind von 0 verschieden) ist auch der umgedrehte Bruch

$$z = \frac{b}{a}$$

eine rationale Zahl, und es gilt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

- (3) Zum Nachweis des Distributivgesetzes sei

$$x = \frac{a}{r}, y = \frac{b}{r}, z = \frac{c}{r}.$$

Damit ist unter Verwendung des Distributivgesetzes der ganzen Zahlen

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= \frac{a}{r} \cdot \left(\frac{b}{r} + \frac{c}{r} \right) \\ &= \frac{a}{r} \cdot \frac{b+c}{r} \\ &= \frac{a(b+c)}{r^2} \\ &= \frac{ab+ac}{r^2} \\ &= \frac{ab}{r^2} + \frac{ac}{r^2} \\ &= \frac{a}{r} \cdot \frac{b}{r} + \frac{a}{r} \cdot \frac{c}{r} \\ &= x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

□

Man nennt $\frac{-a}{b}$ die *negative rationale Zahl* zu $\frac{a}{b}$ und man nennt bei $a, b \neq 0$ die Zahl $\frac{b}{a}$ die *inverse rationale Zahl* zu $\frac{a}{b}$.

Körper

Wir erfassen die algebraischen Eigenschaften, die für die rationalen Zahlen gelten, mit einem eigenen Begriff.

DEFINITION 23.8. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

- (1) Axiome der Addition
 - (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
 - (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
 - (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
 - (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.
- (2) Axiome der Multiplikation
 - (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
 - (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
 - (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
 - (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.
- (3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Da wir den Ringbegriff schon haben, kann man auch die folgende kürzere Definition geben.

DEFINITION 23.9. Ein kommutativer Ring R heißt *Körper*, wenn $R \neq 0$ ist und wenn jedes von 0 verschiedene Element ein multiplikatives Inverses besitzt.

Ein Körper ist also insbesondere ein kommutativer Ring. Jede Eigenschaft, die in einem kommutativen Ring gilt, gilt auch in einem Körper (aber nicht umgekehrt).

Die beiden wichtigsten Körper für uns sind der Körper der rationalen Zahlen und der Körper der reellen Zahlen, der Körper mit zwei Elementen wurde in Beispiel 11.4 besprochen. Zu einem Element $x \in K$ bezeichnet man, wie in jedem kommutativen Ring, dasjenige Element, das mit x addiert die 0 ergibt, als das Negative von x , geschrieben $-x$. Zu einem Element $x \in K$, $x \neq 0$, bezeichnet man dasjenige Element, das mit x multipliziert die 1 ergibt, als das Inverse von x , geschrieben x^{-1} .

BEMERKUNG 23.10. In einem Körper K wird für beliebige Elemente $x, y \in K$ mit $y \neq 0$, die *Bruchschreibweise*

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$$

verwendet. Es handelt sich also um eine Abkürzung für das Produkt von x mit dem inversen Element von y . Die Zahl $\frac{x}{y}$ ist das eindeutig bestimmte Element, das mit y multipliziert das Element x ergibt. Diese Schreibweise passt mit der Bruchschreibweise für rationale Zahlen zusammen, da ja

$$\frac{a}{b} \cdot b = \frac{ab}{b} = a$$

ist.

Die Berechnung von

$$\frac{x}{y} = x : y$$

nennt man *Division*, wobei x der *Dividend* und y der *Divisor* der Division heißt, das Ergebnis heißt *Quotient*.

BEMERKUNG 23.11. In einem Körper K ist wie in jedem kommutativen Ring die additive Struktur $(K, 0, +)$ eine kommutative Gruppe. Insbesondere besitzt in jedem Körper eine Gleichung der Form

$$a + x = b$$

mit $a, b \in K$ eine eindeutige Lösung, nämlich

$$b - a = b + (-a),$$

wie sich direkt aus Lemma 19.8 ergibt. Darüberhinaus ist zu jedem Körper K die multiplikative Struktur, wenn man die 0 herausnimmt, also $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine kommutative Gruppe. Dies bedeutet wiederum, dass eine Gleichung der Form

$$c \cdot x = d$$

mit $c, d \neq 0$ eine eindeutige Lösung in K besitzt, nämlich

$$dc^{-1} = \frac{d}{c}.$$

Die folgende Eigenschaft heißt die *Nichtnullteilereigenschaft* eines Körpers. Sie gilt auch für \mathbb{Z} , im Allgemeinen aber nicht für jeden kommutativen Ring, siehe Aufgabe 19.4.

LEMMA 23.12. *Es sei K ein Körper. Aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 23.25. □

In einem Körper K kann man die Potenzschreibweise erweitern. Zu $x \in K$, $x \neq 0$, und einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ versteht man, wie in jedem kommutativen Ring, unter x^n das n -fache Produkt von x mit sich selbst (n

Faktoren). Für negatives $n \in \mathbb{Z}_-$ schreibt man $n = -k$ mit $k \in \mathbb{N}_+$ und setzt

$$x^n := (x^{-1})^k = (x^{-1})^{-n} = (x^{-n})^{-1}.$$

Für diese Potenzen gelten die folgenden *Potenzgesetze*, die die Potenzgesetze für positive Exponenten, die in jedem kommutativen Ring gelten, wesentlich erweitern.

LEMMA 23.13. *Es sei K ein Körper und seien $a, b \neq 0$ Elemente aus K . Dann gelten die folgenden Potenzgesetze für $m, n \in \mathbb{Z}$.*

(1) *Es ist*

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

(2) *Es ist $a^{-n} = (a^{-1})^n$ das inverse Element zu a^n .*

(3)

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

(4)

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(5)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Beweis. (1) folgt aus Aufgabe 19.11, da $K \setminus \{0\}$ eine Gruppe ist. (2). Bei $n \in \mathbb{N}$ ist die linke Gleichheit eine Definition und die Behauptung folgt aus

$$(a^{-1})^n \cdot a^n = (a^{-1}a)^n = 1.$$

Daraus folgt auch die Aussage für negatives n . Für (3), (4), (5) siehe Aufgabe 23.32. \square



Auch bei der Nummerierung von Häusern ergeben sich mit rationalen Zahlen neue Möglichkeiten.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = FractionStrips.PNG , Autor = Benutzer Zapotz auf Commons, Lizenz = PD	2
Quelle = Half-integer house.jpg , Autor = Stuart Chalmers, Lizenz = CC-by-sa 2.0	9