Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 9

> Ich will jeden Spieler jeden Tag ein bisschen besser machen.
>
> Jürgen Klinsmann

Basiswechsel

Wir wissen bereits, dass in einem endlichdimensionalen Vektorraum je zwei Basen die gleiche Länge haben, also die gleiche Anzahl von Basisvektoren besitzen. Jeder Vektor besitzt bezüglich einer jeden Basis eindeutig bestimmte Koordinaten (oder Koeffizienten). Wie verhalten sich diese Koordinaten zu zwei Basen untereinander? Dies beantwortet die folgende Aussage.

Lemma 9.1. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ zwei Basen von V. Es sei*

$$v_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} w_i$$

mit den Koeffizienten $c_{ij} \in K$, die wir zur $n \times n$-Matrix

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} = (c_{ij})_{ij}$$

zusammenfassen. Dann hat ein Vektor u, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ besitzt, bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$u = \sum_{j=1}^n s_j v_j = \sum_{j=1}^n s_j \left(\sum_{i=1}^n c_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n s_j c_{ij} \right) w_i$$

und der Definition der Matrizenmultiplikation. □

Wenn wir die zu einer Basis $\mathfrak{v}$ gehörende bijektive Abbildung (siehe Bemerkung 7.12)

$$\Psi_{\mathfrak{v}} \colon\, K^n \longrightarrow V$$

betrachten, so kann man die vorstehende Aussage auch so ausdrücken, dass das Dreieck

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}} & K^n \\ & \Psi_{\mathfrak{v}} \searrow & \downarrow \Psi_{\mathfrak{w}} \\ & & V \end{array}$$

kommutiert.[1]

Definition 9.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ zwei Basen von V. Es sei

$$v_j \,=\, \sum_{i=1}^{n} c_{ij} w_i$$

mit den Koeffizienten $c_{ij} \in K$. Dann nennt man die $n \times n$-Matrix

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} \,=\, (c_{ij})_{ij}$$

die *Übergangsmatrix* zum Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{w}$.

Statt Übergangsmatrix sagt man auch *Transformationsmatrix*.

Bemerkung 9.3. In der j-ten Spalte der Transformationsmatrix $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}$ stehen die Koordinaten von v_j bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$. Der Vektor v_j hat bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten e_j, und wenn man die Matrix auf e_j anwendet, erhält man die j-te Spalte der Matrix, und diese ist eben das Koordinatentupel von v_j in der Basis $\mathfrak{w}$. Bei einem eindimensionalen Raum mit

$$v \,=\, cw$$

ist $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} = c = \frac{v}{w}$, wobei der Bruch in der Tat wohldefiniert ist und wodurch man sich die Reihenfolge der Basen in dieser Schreibweise merken kann. Eine weitere Beziehung ist

$$\mathfrak{v} \,=\, (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}})^{\text{tr}} \mathfrak{w},$$

wobei hier die Matrix aber nicht auf ein n-Tupel aus K, sondern auf ein n-Tupel aus V angewendet wird und sich ein neues n-Tupel aus V ergibt. Dies könnte man als Argument dafür ansehen, die Übergangsmatrix direkt als ihre Transponierte anzusetzen, doch betrachtet man das in Lemma 9.1 beschriebene Transformationsverhalten als ausschlaggebend.

Wenn

$$V \,=\, K^n$$

[1] Die Kommutativität eines solchen Pfeil- bzw. Abbildungsdiagramms besagt einfach, dass die zusammengesetzen Abbildungen übereinstimmen, wenn ihre Definitionsmengen und ihre Wertemengen übereinstimmen. In diesem Fall heißt es einfach nur $\Psi_{\mathfrak{v}} = \Psi_{\mathfrak{w}} \circ M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}$.

und $\mathfrak{e}$ die Standardbasis davon ist und $\mathfrak{v}$ eine weitere Basis, so erhält man die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{e}}$ von $\mathfrak{e}$ nach $\mathfrak{v}$, indem man e_j als Linearkombination der Basisvektoren $v_1, \ldots, v_n$ ausdrückt und die entsprechenden Tupel als Spalten nimmt. Dagegen besteht $M_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{v}}$ einfach aus den $v_1, \ldots, v_n$ als Spalten geschrieben.

Beispiel 9.4. Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ die Standardbasis

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Basis

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Basisvektoren von $\mathfrak{v}$ lassen sich direkt mit der Standardbasis ausdrücken, nämlich

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher erhält man sofort

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel hat der Vektor, der bezüglich $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(4, -3)$ besitzt, bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{u}$ die Koordinaten

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ ist schwieriger zu bestimmen: Dazu müssen wir die Standardvektoren als Linearkombinationen von v_1 und v_2 ausdrücken. Eine direkte Rechnung (dahinter steckt das simultane Lösen von zwei linearen Gleichungssystemen) ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Lemma 9.5. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$, $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ Basen von V. Dann stehen die Übergangsmatrizen zueinander in der Beziehung*

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{u}} = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} \circ M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}.$$

Insbesondere ist

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} \circ M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = E_n.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 9.9. □

Summe von Untervektorräumen

Definition 9.6. Zu einem K-Vektorraum und einer Familie $U_1, \ldots, U_n \subseteq V$ von Untervektorräumen definiert man die *Summe dieser Untervektorräume* durch

$$U_1 + \cdots + U_n = \{u_1 + \cdots + u_n | \, u_i \in U_i\} .$$

Diese Summe ist stets wieder ein Untervektorraum. Bei

$$V = U_1 + \cdots + U_n$$

sagt man, dass V die Summe der Untervektorräume $U_1, \ldots, U_n$ ist. Der folgende Satz drückt eine wichtige Beziehung zwischen der Dimension der Summe von zwei Untervektorräumen und der Dimension ihres Durchschnitts aus.

Satz 9.7. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Dann ist*

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) .$$

Beweis. Es sei $w_1, \ldots, w_k$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$. Diese ergänzen wir gemäß Satz 8.12 einerseits zu einer Basis $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_n$ von U_1 und andererseits zu einer Basis $w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_m$ von U_2. Dann ist

$$w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$$

ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$. Wir behaupten, dass es sich sogar um eine Basis handelt. Sei dazu

$$a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k + b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n + c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m = 0.$$

Daraus ergibt sich, dass das Element

$$a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k + b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n = -c_1 v_1 - \cdots - c_m v_m$$

zu $U_1 \cap U_2$ gehört. Daraus folgt direkt $b_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und $c_j = 0$ für $j = 1, \ldots, m$. Somit ergibt sich dann auch $a_\ell = 0$ für alle ℓ. Also liegt lineare Unabhängigkeit vor. Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) &= k + k + n + m \\ &= k + n + k + m \\ &= \dim(U_1) + \dim(U_2) . \end{aligned}$$

□

Der Durchschnitt von zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ ist „im Normalfall“ eine Gerade, und die Ebene selbst, wenn zweimal die gleiche Ebene genommen wird, aber niemals nur ein Punkt. Diese Gesetzmäßigkeit kommt in der folgenden Aussage zum Ausdruck.

Korollar 9.8. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension n und es seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume der Dimension* $\dim(U_1) = n - k_1$ *bzw.* $\dim(U_2) = n - k_2$. *Dann ist*

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq n - k_1 - k_2.$$

Beweis. Nach Satz 9.7 ist

$$\begin{aligned}\dim(U_1 \cap U_2) &= \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2) \\ &= n - k_1 + n - k_2 - \dim(U_1 + U_2) \\ &\geq n - k_1 + n - k_2 - n \\ &= n - k_1 - k_2.\end{aligned}$$

□

Übrigens nennt man zu einem Untervektoraum $U \subseteq V$ die Differenz

$$\dim_K(V) - \dim_K(U)$$

auch die *Kodimension* von U in V. Mit diesem Begriff kann man die obige Aussage so formulieren, dass die Kodimension eines Durchschnitts von Untervektorräumen höchstens gleich der Summe der beiden Kodimensionen ist.

Korollar 9.9. *Es sei ein homogenes lineares Gleichungssystem aus k Gleichungen in n Variablen gegeben. Dann ist die Dimension des Lösungsraumes des Systems mindestens gleich $n - k$.*

Beweis. Der Lösungsraum einer linearen Gleichung in n Variablen besitzt die Dimension $n - 1$ oder n. Der Lösungsraum des Systems ist der Durchschnitt der Lösungsräume der einzelnen Gleichungen. Daher folgt die Aussage durch mehrfache Anwendung von Korollar 9.8 auf die einzelnen Lösungsräume. □

Direkte Summe

Definition 9.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $U_1, \ldots, U_m$ eine Familie von Untervektorräumen von V. Man sagt, dass V die *direkte Summe* der U_i ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Jeder Vektor $v \in V$ besitzt eine Darstellung
$$v = u_1 + u_2 + \cdots + u_m$$
mit $u_i \in U_i$.

(2) $U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = 0$ für alle i.

Wenn die Summe der U_i direkt ist, schreiben wir statt $U_1 + \cdots + U_m$ auch $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$. Bei zwei Untervektorräumen $U_1, U_2 \subseteq V$ bedeutet die zweite Bedingung einfach $U_1 \cap U_2 = 0$.

Beispiel 9.11. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Es sei

$$\{1, \ldots, n\} = I_1 \uplus \ldots \uplus I_k$$

eine disjunkte Zerlegung der Indexmenge. Es seien

$$U_j = \langle v_i,\, i \in I_j \rangle$$

die durch die Teilfamilien erzeugten Untervektorräume. Dann ist

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k .$$

Der Extremfall $I_j = \{j\}$ ergibt die direkte Summe

$$V = Kv_1 \oplus \cdots \oplus Kv_n$$

mit eindimensionalen Untervektorräumen.

Lemma 9.12. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gibt es einen Untervektorraum $W \subseteq V$ derart, dass eine direkte Summenzerlegung*

$$V = U \oplus W$$

vorliegt.

Beweis. Es sei $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von U. Diese können wir nach Satz 8.12 zu einer Basis $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ von V ergänzen. Dann erfüllt

$$W = \langle v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle$$

die gewünschten Eigenschaften. □

In der vorstehenden Aussage heißt W ein *direktes Komplement* zu U (in V). Es gibt im Allgemeinen viele verschiedene direkte Komplemente.

Direkte Summe und Produkt

Wir erinnern daran, dass man zu einer Familie M_i, $i \in I$, von Mengen M_i die Produktmenge $\prod_{i \in I} M_i$ definieren kann. Wenn alle $M_i = V_i$ Vektorräume über einem Körper K sind, so handelt es sich hierbei mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation wieder um einen K-Vektorraum. Man spricht dann vom *direkten Produkt der Vektorräume.* Wenn es sich immer um den gleichen Raum handelt, $M_i = V$, so schreibt man dafür auch V^I. Das ist einfach der Abbildungsraum $\operatorname{Abb}(I, V)$.

Den Vektorraum V_j findet man im direkten Produkt als Untervektorraum wieder, und zwar als die Menge der Tupel

$$(x_i)_{i \in I} \text{ mit } x_i = 0 \text{ für alle } i \neq j\,.$$

Die Menge all dieser, jeweils an nur einer Stelle von 0 verschiedenen, Tupel erzeugt einen Untervektorraum, der bei unendlichem I nicht das ganze direkte Produkt ist.

Definition 9.13. Es sei I eine Menge und K ein Körper. Zu jedem $i \in I$ sei ein K-Vektorraum V_i gegeben. Dann nennt man die Menge

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = \{(v_i)_{i \in I} | \, v_i \in V_i, \, v_i \neq 0 \text{ für nur endlich viele } i\}$$

die *direkte Summe* der V_i.

Wenn es sich stets um den gleichen Vektorraum handelt, so schreibt man für diese direkte Summe $V^{(I)}$. Es ist also

$$V^{(I)} \subseteq V^I$$

ein Untervektorraum. Bei endlichem I gibt es keinen Unterschied, für unendliche Indexmengen ist die Inklusion aber echt. Beispielsweise ist $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Folgenraum, dagegen besteht $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ nur aus der Menge aller Folgen, für die nur endlich viele Glieder von 0 verschieden sind. Der Polynomring $K[X]$ ist in diesem Sinne die direkte Summe aus den KX^n, $n \in \mathbb{N}$. Jeder K-Vektorraum mit einer Basis v_i, $i \in I$, ist „isomorph“ zur direkten Summe $\bigoplus_{i \in I} Kv_i$.