漢 譯
郝爾 愛特
# 高等代數學

譯 者
李 士 奇

北平科學社印行
1935

# 原序大意

一. 本書爲前著初級代數之續，首數章於比，比例，變法及級數以更詳盡之研究，並加入若干不便初學之定理及例題.

二. 本書根據教學經驗，使正文與例題並重，皆求其精深詳盡，敘述透澈.

三. 吾人之目的爲於本書內討論所有重要部分，但爲篇貿所限，後數章僅能示其綱要，而指出重要專著，以備有志深究者之參考.

四. 排列與組合一章採用温特渥茲教授選擇與機會書內之証法，以著者年來教授之經驗，此實較通常所用者便於初學.

五. 級數之收歛與放散之研究向爲初學者所苦，本書於此特增篇幅，力求詳盡，並增入極限值與消失分數兩章以使其有趣而易解.

六. 本書級數求和法一章，特重逐差法之重要應用，第 395，396 兩節有限逐差公式之証法著者自信爲獨創，由此可推出若干向爲他書忽略極饒興趣之各種級數.

七. 無行列式及其運用之知識於立體解析幾何之學習殊爲困難，故於本書第三十三章與以初步之討論，以爲學者應用及深造之準備.

八. 末章含方程式論一書內所有適於初學極有用之命題，第三十五章內之重要部分可提至較難之數節之前讀之.

九. 本書各章幾乎皆能獨立，故可依教者之指導變其順序. 其標以星號＊者可於再讀時讀之.

十. 書後雜題三百爲三版時加入，大半選自英國奬學金考試用題及上議院公報，足以例釋各重要主題並代表英國各重要大學及高等文官考試之試題.

# 譯者敘

年來不重外文，而有志於數學之友好，多以完善之漢文本大代數見問，惟此種書極少，雖有數種類皆失之淺簡不足以滿有志於此者之慾望，於是乃決定譯述本書以應急需，本書爲英國劍橋大學名教授郝爾愛特二氏所著，其包羅之豐富，選材之精審，例証之週密，命題之切當，大非他書所及；定能滿足同好，斷無疑義，惜譯者學識淺陋，又成於疾病倉促之中，遺誤之處，自所難免，尚望明達不棄，有以教之，以備次版更正爲幸.

安平李世奇廿三年冬於北平，

# 目　　錄

## 第一章　比　　　　頁


可通約量與不可通約量．……………………………………………… 2
優比與劣比 ……………………………………………………… 3
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}$ ……………………………… 4
$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}$ 之值在分數 $\frac{a_1}{b_1}$，$\cdots\frac{a_n}{b_n}$ 之最大者與
　　最小者之間 ……………………………………………………… 6
十字乘法 ………………………………………………………… 8
三一次方程式消去法 ……………………………………………… 9
習題 I ……………………………………………………………… 10


## 第二章　比例


定義與命題 ……………………………………………………… 13
代數定義與幾何定義之比較 ……………………………………… 16
不可通約量之情形 ………………………………………………… 17
習題 II ……………………………………………………………… 19


## 第三章　變法


設 $A\propto B$，則 $A=mB$ ……………………………………………… 21
反變法 ……………………………………………………………… 22
合變法 ……………………………………………………………… 23
設當 $c$ 爲常量時 $A\propto B$，$B$ 爲常量時 $A\propto C$，則 $A=mBC$ ……… 23
示例．合變例題 …………………………………………………… 24
習題 III ……………………………………………………………… 26

## 第四章 等差級數

等差級數 $n$ 項之和 …… 28
基本公式 …… 29
等差中項插入法 …… 31
習題 IV. a. …… 31
$dn^2+(2a-d)n-2s=0$ 之根之研究 …… 33
習題 IV. b. …… 35

## 第五章 等比級數

等比中項插入法 …… 38
等比級數之 $n$ 項和 …… 39
等比無窮級數之和 …… 40
習題 V. a. …… 41
化循環小數法則之証明 …… 43
等差等比級數之 $n$ 項和 …… 44
習題 V. b. …… 45

## 第六章 調和級數. 關於級數之定理.

成 $H.P.$ 諸量之倒數成 $A.P.$ …… 47
調和中項 …… 48
關於 $A.M.$, $G.M.$, $H.M.$ 之公式 …… 49
級數問題解之暗示 …… 49
自然數之平方和 …… 50
自然數之立方和 …… 51
符號 $\Sigma$ …… 52

習題 VI. a. ........ 52
正方底角錐體彈積之彈數 ........ 54
正三角形底角錐體彈積之彈數 ........ 54
矩形底角錐體之彈數 ........ 54
不完全角錐體之彈數 ........ 55
習題 VI. b. ........ 56

## 第七章　記數法

各種記數法之說明 ........ 57
習題 VII. a. ........ 59
以指定進法表一整數 ........ 59
以指定進法表一求分數 ........ 61
一數與其數字和之差可爲 $r-1$ 除盡. ........ 62
棄九法之証明 ........ 63
可爲 $r+1$ 整除之核驗. ........ 64
習題 VII. b. ........ 65

## 第八章　不盡根與虛量

$\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ 分母之有理化. ........ 67
$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ 因子之有理化. ........ 68
$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 之平方根 ........ 69
$a+\sqrt{b}$ 之立方根 ........ 70
習題 VIII. a. ........ 72
虛量 ........ 74
$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$ ........ 75
設 $a+ib=0$, 則 $a=0$, $b=0$ ........ 75

設 $a+ib=c+id$，則 $a=c$，$b=d$ ………… 75
積之虛數率等於虛數率之積 ………… 77
$a+ib$ 之平方根 ………… 77
$i$ 之乘羃 ………… 79
1 之立方根；$1+\omega+\omega^2=0$ ………… 79
$\omega$ 之乘羃 ………… 80
習題 VIII. b. ………… 81

## 第九章　二次方程式論

一二次方程式之根數不能不多於二 ………… 83
實根，等根及虛根之條件 ………… 84
根之和$=-\frac{b}{a}$，根之積$=\frac{c}{a}$ ………… 85
當根爲已知時方程式之求法 ………… 86
二次方程式之根 (1) 大小等而符號異，(2) 互爲倒數之條件. ………… 88
習題 IX. a. ………… 88
$x$ 爲實數値時 $ax^2+bx+c$ 一般與 $a$ 同號：例外. ………… 90
習題 IX. b. ………… 92
函數，變數，及有理整函數之定義 ………… 93
$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ 可析爲二一次因子之條件 ………… 94
$ax^2+bx+c=0$ 與 $a'x^2+b'x+c'=0$ 可有一公根之條件 ………… 95
習題 IX. c. ………… 96

## 第十章 雜方程式


含一未知量之方程式 …… 97
倒數方程式 …… 100
習題 X.a. …… 101
含二未知量之方程式 …… 103
齊次方程式 …… 104
習題 X.b. …… 106
含數未知量之方程式 …… 107
習題 X.c. …… 109
無定方程式；簡易數字例題. …… 111
習題 X.d. …… 113


## 第十一章 排列及組合


基本命題 …… 115
$n$ 物每次取 $r$ 之排列數 …… 115
$n$ 物每次取 $r$ 之組合數 …… 117
$n$ 物每次取 $r$ 之組合數等於 $n$ 每次取 $n-r$ 之組合數 …… 119
$m+n+p+$……物分爲含 $m$, $n$, $p$,……等組之分法之數 …… 120
習題 XI. a. …… 122
名辭'相似'及'不相似'之解釋 …… 124
當 $n$ 物中 $p$ 爲第一類相似物，$q$ 爲第二類相似物，等等時 $n$ 次全取之排列數 …… 125
$n$ 物當每物可可以重取時每次 $r$ 之排列數 …… 126
$n$ 物組合之全數 …… 127
求 $r$ 爲任何值時 ${}^nC_r$ 之值最大 …… 127

$n$ 物每次取 $r$ 組合數公式之直接證明 ………… 128
$p+q+r+$ ……物中 $p$ 爲一類相似物，$q$ 爲第二類相似物時選取法之全數． ………… 129
習題 XXI.b. ………… 131

## 第十二章 數學歸納法

證法之說明 ………… 133
$x+a$ 形式之二項因子之積 ………… 134
習題 XII ………… 135

## 第十三章 二項式定理．正整指數

$(x+a)^n$ 當 $n$ 爲正整數時之展開式 ………… 137
展開式之通項 ………… 139
展開式可照首項爲 $I$ 之情形展開之 ………… 140
二項式定理之第二證明 ………… 141
習題 XIII. a. ………… 142
距首尾等遠二項之係數相等 ………… 143
最大項之決定 ………… 143
係數之和 ………… 146
諸奇數項係數之和等於諸偶數項係數之和 ………… 145
多項式之展開式 ………… 146
習題 XIII. b. ………… 147

## 第十四章 二項式定理．任何指數．

任何指數二項式定理尤勒氏之証明 ………… 150
$(1+x)^n$ 之展開式之通項 ………… 153
習題 XIV. a. ………… 155
$(1+x)^n$ 之展開式僅當 $x<1$ 時有算術的意義 ………… 155

$(x+y)^n$ 之式永可用二項式定理展開之……157
$(1-x)^{-n}$ 之展開式之通項……157
$(1-x)^{-n}$ 之展開式之特殊情形……158
由二項式定理求得之近似值……159
習題 XIV.$b$.……161
$(1+x)^n$ 之展開式之絕對值最大項……162
$n$ 字母所成 $r$ 次齊積之數……164
多項式展開式內之項數……165
$n$ 物每次取 $r$ 准重複時組合之數……166
習題 XIV. c.……167

## 第十五章 多項式定理

$(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^p$ 當 $p$ 爲正整數時展開式內之通項……170
$(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^n$ 當 $n$ 爲有理量時展開式內之通項……171
習題 XV……173

## 第十六章 對數

定義．$N=a^{\log_a N}$……175
基本命題……176
習題 XVI. a.……178
常用對數……179
指標心算決定法……180
常用對數之利益……181
永使假數爲正之利益……182
已知一切數以 $a$ 爲底之對數．求以 $b$ 爲底之對數……183

$\log_a b \times \log_b a = 1$ ………… 183
習題 XVI.b. ………… 185

## 第十七章 指數級數與對數級數

$a^x$ 之展開式. 級數 $e$ ………… 187
當 $n$ 爲無限大時, $e$ 爲 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 之極限 ………… 188
$\log_e(1+x)$ 之展開式 ………… 191
對數表之作法 ………… 192
使 $\log_e(n+1)-\log_e n$ 迅速收歛之級數 ………… 194
爲不可通約量 ………… 195
習題 XVII. ………… 195

## 第十八章 利息與年金

已知款照單利計算之利息及本利和 ………… 198
已知款照單利計算之折扣與現值 ………… 198
已知款照複利計算之利息及本利和 ………… 199
虛年利率與實年利率 ………… 200
每剎那計利複利之情形 ………… 200
已知款照複利計算之現值與折扣 ………… 201
習題 XIII. a. ………… 202
年金, 定義 ………… 202
照單利計算未付年金之本利和 ………… 203
照複利計算未付年金之本利和 ………… 203
年金照複利計算之現值 ………… 204
現值係數 ………… 204
待付年金照複利計算之現值 ………… 205

續租 $n$ 年之租金 …… 206
習題 XVIII. b. …… 206

## 第十九章　不等式

基本命題 …… 208
二正量間之等差中項大於其等比中項 …… 209
設二量之和爲已知，則其積以二量相等時爲最大；其積爲已知則其和以二量相等時爲最小. …… 210
數正量之等差中項大於其等比中項 …… 211
已知 $a, b, c,$ ………之和，求 $a^m b^n c^p$ 之最大值 …… 212
極大與極小之簡易情形 …… 212
習題 XIX. a. …… 213
若干正量 $m$ 次羃之等差中項捨 $m$ 在 0 與 1 間之值外大於其等差中項之 $m$ 次羃, …… 214
設 $a$ 及 $b$ 爲正整數，且 $a>b$，則 $\left(1+\frac{x}{a}\right)^a>\left(1+\frac{x}{b}\right)^b$ …… 216
設 $1>x>y>0$ 則 $\sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}}>\sqrt[y]{\frac{1+y}{1-y}}$ …… 217
$a^a b^b>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$ …… 217
習題 XIX. b. …… 218

## 第二十章　極限值與消失分數

極限之定義 …… 220
$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+$……當 $x=0$ 時之極限爲 $a_0$ …… 222
由使 $x$ 爲充分之小，可使級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+$……之任一項與其後諸項和之比爲適意之大；又由使 $x$ 爲充分之大，可使任一項與其前諸項之比爲適意之大 …… 222

消失分數極限決定法 …………………………………… 224
解聯立方程式時幾種特殊情形之討論 …………………… 226
解二次方程式時之特殊情形 ……………………………… 227
習題 XX ……………………………………………………… 228

## 第二十一章　級數之收歛與發散

正負項互現之情形 …………………………………………… 230
設 $Lim \frac{u_n}{u_{n-1}}$ 小於 1，則此級數爲斂級數 ………… 232
$\Sigma u_n$ 與助級數 $\Sigma v_n$ 之比較 ……………………………… 234
助級數 $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+$ ……………………………… 235
二項式，指數及對數級數之收歛性之測定 ………………… 237
$\frac{\log n}{n}$ 及 $nx^n$ 當 $n$ 爲無限大時之極限 ………………… 238
無限個因子之極 ……………………………………………… 238
習題XXI．a． ………………………………………………… 241
設 $\frac{u_n}{u_{n-1}}>\frac{v_n}{v_{n-1}}$，則 $v$ 級數爲收歛時，$u$ 級數亦爲收歛 …… 243
設 $Lim\left\{n\left(\frac{u}{u_{n-1}}-1\right)\right\}>1$，則此級數爲收歛 ………… 244
設 $Lim\left(n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)>1$，則此級數爲收歛 ………… 245
級數 $\Sigma\phi(n)$ 與級數 $\Sigma a^n\phi(n)$ 之比較 ……………………… 247
助級數 $\Sigma\frac{1}{n(\log n)^p}$ ……………………………………… 248
設 $Lim\left[\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}\log n\right]>1$，則此級數爲收歛 …… 248

二無窮級數之積 …… 249
習題 XXI. b. …… 252

## 第二十二章　不定係數

設方程式 $f(x)=0$ 有 $n$ 以上之根，則此方程式爲恆等式 …… 254
無窮級數不定係數原理之證明 …… 254
習題 XXII. a. …… 256
無窮級數不定係數原理之證明 …… 257
習題 XXII. b. …… 260

## 第二十三章　部分分數

析有理分數爲部分分數 …… 261
部分分數於展開一有理分式時之用途 …… 265
習題 XXIII …… 265

## 第二十四章　循環級數

關係式 …… 267
循環級數之和 …… 269
母函數 …… 269
習題 XXIV …… 272

## 第二十五章　輾轉分數

化一分數爲輾轉分數 …… 273
諸近値較輾轉分數之値大小互現 …… 275
連續近値之構成定律 …… 275
$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$ …… 276
習題 XXV. a. …… 277

諸近値漸近於其連續分數 …… 278
以任何近値為其連續分數時差誤之極限 …… 279
每近値較分母小於其分母之分數近於其連續分數 …… 280
$\frac{pp'}{qq'}>$ 或 $<x^2$，各視 $\frac{p}{q}$ 之 $>$ 或 $<\frac{p'}{q'}$ …… 281
習題 XXV b. …… 281

## 第二十六章 一次無定方程式

$ax-by=c$ 之解法 …… 284
已知一解答，求一般解答 …… 286
$ax+by=c$ 之解法 …… 286
已知一解答求一般解答 …… 287
$ax+by=c$ 之解答之數 …… 287
$ax+by+cz=d$，$a'x+b'y+c'z=d'$ 之解法 …… 289
習題 XXVI …… 290

## 第二十七章 循環連續分數

數字例題 …… 292
一週期連續分數等於一二次不盡根 …… 293
習題 XXVII. a. …… 294
化一二次不盡根為連續分數 …… 295
商之循環 …… 296
每週期終於部分商 $2a_1$ …… 297
與首末兩端等距之每二部分商相等 …… 298
週期之倒第二近値 …… 299
習題 XXVII. b. …… 301

## 第二十八章 二次無定方程式

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 之解法……303
方程式 $x^2-Ny^2=1$ 永爲能解……304
$x^2-Ny^2=-1$ 之解法……305
$x^2-Ny^2=1$ 之一般解答……306
$x^2-n^2y^2=a$ 之解法……308
*Diophantine* 氏問題……309
習題 XXVIII……311

## 第二十九章　級數求和法

前述方法提要……312
$u_n$ 爲成 $A.P.$ $n$ 因子之積……314
$u_n$ 爲成 $A.P.$ $n$ 因子之積之倒數……316
以減求和法……318
以若干階乘之和表 $u_n$……318
多角數及擬形數……319
*Pascal* 氏三角形……320
習題 XXIX. a.……321
逐差法……322
此法僅用於當 $u_n$ 爲 $n$ 之有理整函數時……326
設 $a_n$ 爲 $n$ 之有理整函數，則級數 $\Sigma a_n x^n$ 爲循環級數……327
循環級數此外之各種情形……329
習題XXIX. b.……332
各種求和法……334
級數 $1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots n^r$ 之和……336
*Bernoulli* 氏數……337
習題XXIX. c.……338

## 第三十章　數論

若干原則之說明 ………………………………………… 341
質數之個數無限 ………………………………………… 342
無僅能表質數之有理代數公式 ………………………… 342
一數僅能由一法析為質因數之積 ……………………… 342
一已知整數約數之個數 ………………………………… 343
析一整數為二因數之析法之數 ………………………… 343
一已知整數約數之和 …………………………………… 344
$\underline{|n}$ 內所含質因數之最高次羃 ………………………… 345
$r$ 連續數之積可為 $\underline{|r}$ 約盡 ……………………………… 345
*Fermat* 氏定理 $N^{p-1}-1=M(p)$, $p$ 為質數，$N$ 與 $p$ 為
互質數 …………………………………………………… 347
習題 XXX. a. …………………………………………… 348
一致定義 ………………………………………………… 350
設 $a$ 與 $b$ 互質，則 $a, 2a, 3a, \cdots\cdots(b-1)a$ 除以 $b$ 時餘不
同餘數 …………………………………………………… 350
$\phi(abcd\cdots\cdots)=\phi(a)\phi(b)\phi(c)\phi(d)$ …………………… 352
$\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$ …………………… 352
*Wilson* 氏定理：$1+\underline{|p-1}=M(p)$, $p$ 為質數 ………… 354
獨用於質數之性質 ……………………………………… 354
*Wilson* 氏定理（第二証明） …………………………… 355
用歸納法證明 …………………………………………… 356
習題 XXX.b. …………………………………………… 357

## 第三十一章　輾轉分數通論

連續近值構成法 ………………………………………… 359
設 $Lim\ \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}>0$，則 $\frac{b_1}{a_1+}\ \frac{b_2}{a_2+}$ ……有一限定值………… 362

設 $a_n\neq 1+b_n$，則 $\frac{b_1}{a_1-}\ \frac{b_2}{a_2-}$ 之諸近值爲依數字遞

升之正眞分數 …… 363
近值當 $a_n$、$b_n$ 爲常量時之一般值 …… 364
能求得近值一般值之情形 …… 365
設 $\frac{b_n}{a_n}<1$，則 $\frac{b_1}{a_1+}\ \frac{b_2}{a_2+}$ …… 爲不可通約量 …… 366
習題 XXXI.a. …… 367
級數表以輾轉分數 …… 369
變一輾轉分數爲他一輾轉分數 …… 371
習題 XXXI.b. …… 372

## 第三十二章　適遇法

定義及說明，簡單事件 …… 373
習題 XXXII.a. …… 376
複合事件 …… 377
二獨立事件皆發生之適遇量爲 $pp'$ …… 378
此公式亦適用相依事件 …… 379
一事件能於相斥方法中發生之機會 …… 381
習題 XXXII.b. …… 383
一事件於 $n$ 試驗中洽發生 $r$ 次之機會 …… 385
可期值及可能值 …… 386
"點之問題" …… 388
習題 XXXII.c. …… 389
反適遇量 …… 391
*Bernoulli* 氏定理之說明 …… 392
公式 $Q_r=\frac{p_rP_r}{\Sigma(pP)}$ 之証明 …… 392
共因證言 …… 396

傳述證言 ………………………… 398
習題 XXXII. d. ………………………… 399
位證適過法．幾何法 ………………………… 401
雜例 ………………………… 402
習題 XXXII. c. ………………………… 405

## 第三十三章　行列式

二齊次一次方程式之消去式 ………………………… 409
三齊次一次方程式之消去式 ………………………… 410
行列互換後行列式之值不變 ………………………… 410
二次行列式之展開 ………………………… 411
行列式之符號因其相隣二行或二列之互換而變更 ………………………… 412
設二行或二列恒等則此行列式為零 ………………………… 412
一行或一列之公因子可以提出置於行列式之外 ………………………… 412
各元為若干項所成情形 ………………………… 413
行列式由行或列化簡之變形 ………………………… 414
行列式之積 ………………………… 417
習題 XXXIII. a. ………………………… 419
於解聯立方程式之應用 ………………………… 422
四次行列式 ………………………… 423
任何次行列式 ………………………… 423
符號 $\Sigma\pm a_1b_2c_3d_4$ ………………………… 425
習題 XXXIII. b. ………………………… 427

## 第三十四章　各色定理及例題

代數基本定律之復習 ………………………… 429
$f(x)$除以 $x-a$ 時餘$f(a)$ ………………………… 432
$f(x)$除以 $x-a$ 時之商 ………………………… 433

分離係數法 …… 434
*Horner* 氏綜合除法 …… 434
對稱函數及輪換函數 …… 435
解恆等式之例題 …… 437
常用公式表 …… 438
習題 XXXIV.a. …… 438
由 $1$ 之立方根之性質証明恆等式 …… 440
$a^3+b^3+c^3-3abc$ 之一次因子 …… 441
$a^n+b^n+c^n$ 當 $a+b+c=0$ 時之值 …… 442
習題 XXXIV.b. …… 442
消去法 …… 444
對稱函數消去法 …… 444
*Euler* 氏消去法 …… 445
*Sylvester* 氏解析法 …… 446
*Bezout* 氏法 …… 446
消去法雜例 …… 447
習題 XXXIV.c. …… 449

## 第三十五章　方程式論

任一 $n$ 次方程式有 $n$ 根，且僅有 $n$ 根 …… 452
根與係數間之關係 …… 452
解方程式，僅此關係不能足用 …… 454
於不知條件下解方程式 …… 454
根之對稱函數之簡易情形 …… 455
習題 XXXV.a. …… 456
虛根及己盡根成對發現 …… 457
含不根之方程式之解法及作成 …… 458
*Descartes* 氏符號法則 …… 459

習題 XXXV. b. ······ 460

$f(x+h)$ 之値. 誘導函數. ······ 462

用 *Horner* 氏法計算 $f(x+h)$ ······ 463

$f(x)$ 漸變其値 ······ 464

設 $f(a)$ 及 $f(b)$ 異號，則 $f(x)=0$ 有一根在 $a$ 與 $b$ 之間 ······ 464

一奇次方程式有一實根 ······ 465

末項爲負之偶次方程式有二實根 ······ 495

設 $f(x)=0$ 有 $r$ 根等於 $a$，則 $f'(x)=0$ 有 $r-1$ 根等於 $a$ ······ 466

等根鑑定法 ······ 467

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+$ ······ 498

根之指定乘冪之和 ······ 468

習題 XXXV. *c*. ······ 470

方程式之變形 ······ 471

根與 $f(x)=0$ 之根異號之方程式 ······ 471

根爲 $f(x)=0$ 之根之倍數之方程式 ······ 472

根爲 $f(x)=0$ 之根之倒數之方程式 ······ 472

倒數方程式之研究 ······ 473

根爲 $f(x)=0$ 之根之平方之方程式 ······ 475

根爲 $f(x)=0$ 之根加 $h$ 之方程式 ······ 475

一指定項之取消 ······ 476

根爲 $f(x)=0$ 之根之函數之方程式 ······ 477

習題 XXXV. d. ······ 478

三次方程式 *cardan* 氏解法 ······ 480

解答之研究 ······ 481

不可析情形下之三角術解法 ······ 482

四次方程式. *Ferrari* 氏解法 ………… 483
*Descartes* 氏解法 ………… 484
不定倍數法 ………… 486
三次鑑定方程式；其根皆實 ………… 486
$\frac{x}{a+\lambda}+\frac{y}{b+\lambda}+\frac{z}{c+\lambda}=1$，等三聯立方程式之解法 ………… 487
習題 XXXV. *e*. ………… 488
雜題 ………… 490
答案 ………… 525

# 高等代數學

## 第一章

## 比

1. **定義** **比** 爲一量對他一同類量所負之關係，此關係成於考驗一量爲他量之幾倍或幾分之幾.

$A$ 對 $B$ 之比常寫爲 $A:B$. $A,B$ 二量稱爲比之項. 首項稱爲**前項**，次項稱爲**後項**.

2. 求 $A$ 爲 $B$ 之幾倍或幾分之幾，爲以 $B$ 除 $A$；故比 $A:B$ 可度以分數 $\frac{A}{B}$，此常被選爲最適當之表示法.

欲比較二量，此二量須表以同單位. 如 £2 與 15s 之比須度以分數 $\frac{2\times 20}{15}$ 或 $\frac{8}{3}$.

註. 比表一量含他一量之倍數，由是凡比皆爲不名量.

因由分數定律

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$$

於 $ma:mb$；即比之前後項乘或除以同量，比之值依然不

4. 二或二以上諸比之大小可由先化其爲同分母之同値分數然後比較之．如設 $a:b$ 及 $x:y$ 爲二比．茲 $\frac{a}{b}=\frac{ay}{by}$，及 $\frac{x}{y}=\frac{bx}{by}$；故 $a:b$ 之大於，等於，或小於 $x:y$ 全視 $ay$ 之大於，等於，或小於 $bx$．

5. 二分數之比可表以二整數之比．如 $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ 可表以 $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ 或 $\frac{ad}{bc}$；由是等於 $ad:bc$．

6. 設比之一項或二項爲不盡根，則不能求出二整數以洽表其比．如比 $\sqrt{2}:1$ 不能洽表以任何二整數．

7. **定義．** 設任二量之比能洽表以二整數之比，則二量稱爲**可通約量**；反之則稱爲**不可通約量**．

雖不能求出二整數以洽表二不可通約量之比，但永可求出二整數，使其比與所求者之差小至適意之程度．

如 $$\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{2.236067\cdots\cdots}{4}=.559016\cdots\cdots$$

故 $$\frac{\sqrt{5}}{4}>\frac{559016}{1000000}\text{ 而 }<\frac{559017}{1000000}；$$

由是 $559016:1000000$ 及 $\sqrt{5}:4$ 二比間之差小於 $.000001$．由再多增小數位，可至更近之近似値．

8. **定義．** 諸比可由乘其同値分數；或由諸前項相乘爲新前項，後項相乘爲新後項以複合之；

例． 求複合之比，由三比

$$2a:3b,\quad 6b:5c^2,\quad c:a$$

所求比$=\frac{2a}{3b}\times\frac{6ab}{5c^2}\times\frac{c}{a}$

$=\frac{4a}{5c}$

9．定義．$a:b$ 與其自身複合之比 $a^2:b^2$ 稱爲 $a:b$ 之平方比．同理，$a^3:b^3$ 稱爲 $a:b$ 之立方比．又 $a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}$ 稱爲 $a:b$ 之方根比．

例．(1) $2a:3b$ 之平方比爲 $4a^2:9b^2$．

(2) 49:25 之方根比爲 7:5．

(3) $2x:1$ 之立方比爲 $8x^3:1$．

10．定義 視比之前項之大於，小於，或等於其後項稱之爲優比，劣比，或等比．

11．設加同量於比之兩項，原比爲優比則因之減小，劣比則因之增大．

使$\frac{a}{b}$爲此比，又使$\frac{a+x}{b+x}$爲兩項各加 $x$ 所成之新比．

茲$\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$

式內 $a-b$ 之爲正或負，全視 $a$ 之大於，或小於 $b$．

$\therefore$ 設$a>b$， $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$；

$a<b$． $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$；

此即証明本命題．

同法能証設於比之兩項各減以同量，原比爲優比則增大，爲劣比則減小．

12．當二比或多比相等時，則由代之以簡單符號可證明甚多有用之命題．

以下重要定理之証明可說明處理之方法.

設
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots,$$

則各比
$$=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$p$，$q$，$r$，$n$ 爲任何量.

設
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k;$$

則　$a=bk$，$c=dk$，$e=fk$，$\cdots$；

而　$pa^n=pb^nk^n$，$qc^n=qd^nk^n$，$re^n=rf^nk^n$，$\cdots$；

$$\therefore\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}=\frac{pb^nk^n+qd^nk^n+rf^nk^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}$$
$$=k^n;$$

$$\therefore\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots$$

由與 $p$，$q$，$r$，$n$ 以不同之值，此一般命題之若干特殊情形可以推出；此亦可用同法分別証明之．例如，

設
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$$

則各比$=\dfrac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}$；

此結果甚爲常用，故下說明當與以注意：

當一列分式相等時，則其中各分數皆等於所有分子之和除以所有分母之和.

例1.　設$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$，指明
$$\frac{a^3b+2c^2e-3ae^2f}{b^4+2d^2f-3bf^3}=\frac{ace}{bdf}$$

使
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k;$$

於是　$a=bk$，$c=dk$，$e=fk$.

$$\therefore \frac{a^3b+2c^2e-3ae^2f}{b^4+2d^2f-3bf^3}=\frac{b^4k^3+2d^2fk^3-3bf^3k^3}{b^4+2d^2f-3bf^3}$$

$$=k^3=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}$$

$$=\frac{ace}{bdf}.$$

例2. 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$，求証

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{x+y+z+a+b+c}.$$

使 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$，由是 $x=ak$，$y=bk$，$z=ck$；

於是 $$\frac{x^2+a^2}{x+a}=\frac{a^2k^2+a^2}{ak+a}=\frac{(k^2+1)a}{k+1};$$

$$\therefore \frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(k^2+1)a}{k+1}+\frac{(k^2+1)b}{k+1}+\frac{(k^2+1)c}{k+1}$$

$$=\frac{(k^2+1)(a+b+c)}{k+1}$$

$$=\frac{k^2(a+b+c)^2+(a+b+c)^2}{k(a+b+c)+a+b+c}$$

$$=\frac{(ka+kb+kc)^2+(a+b+c)^2}{(ka+kb+kc)+a+b+c}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{x+y+z+a+b+c}.$$

13. 設一方程式關於某量齊次，則可代之以與之成比例之任何他幾量．例如，方程式

$$lx^3y+mxy^2z+ny^2z^2=o$$

爲 $x$，$y$，$z$ 之齊次式．使 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 爲與之成比例之三量．

使 $k=\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$，由是 $x=\alpha k$，$y=\beta k$，$z=\gamma k$.

於是 $l\alpha^3\beta k^4+m\alpha\beta^2\gamma k^4+n\beta^2\gamma^2k^4=o$,

即 $l\alpha^3\beta+m\alpha\beta^2\gamma+n\beta^2\gamma^2=o$;

與原方程式同形，僅各以 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 易 $x$，$y$，$z$.

14．以下定理甚爲重要．

設 $\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$，$\frac{a_3}{b_3}$，………… $\frac{a_n}{b_n}$ 爲分母同號之諸不等分數，則分數

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}$$

之值居於諸不等分數中最大者及最小者之間．

設諸分數之分母皆爲正數．使 $\frac{a_r}{b_r}$ 爲最小分數，表之以 $k$，於是

$$\frac{a_r}{b_r}=k;\quad\therefore\ a_r=kb_r;$$

$$\frac{a_1}{b_1}>k;\qquad\therefore\ a_1>kb_1;$$

$$\frac{a_2}{b_2}>k;\qquad\therefore\ a_2>kb_2;$$

類 推；

由加法，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_n>(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)k;$$

$$\therefore\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}>k.\qquad\text{即}>\frac{a_r}{b_r}$$

同法証

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}<\frac{a_s}{b_s}$$

$\frac{a_s}{b_s}$ 爲巳知諸分數中之最大者．

如諸分數之分母皆爲負數亦可用同法証明．

15．12節所述一般原則之敍熟應用．在各門數學中皆有極大之價值，讀者可自由運用於任何可發生之特殊情形下，而無須引入其他之補助符號．

例1． 設 $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$

求証 $\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x\times y)}{2(ax+by+cz)}$

$$\text{各分數}=\frac{\text{分子和}}{\text{分母和}}$$

$$=\frac{x+y+z}{a+b+c}.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

以 $y+z$，$z+x$，$x+y$，分乘已知諸分數之分子分母，

$$\text{則各分數}=\frac{x(y+z)}{(y+z)(b+c-a)}=\frac{y(z+x)}{(z+x)(c+a-b)}$$

$$=\frac{z(x+y)}{(x+y)(a+b-c)}=\frac{\text{分子和}}{\text{分母和}}$$

$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2ax+2by+2cz}\cdots\cdots\cdots(2).$$

由(1)，(2) 得 $\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}$.

例 2．設 $\dfrac{x}{l(mb+nc-la)}=\dfrac{y}{m(nc+la-mb)}=\dfrac{z}{n(la+mb-nc)}$，

求証 $\dfrac{l}{x(by+cz-ax)}=\dfrac{m}{y(cz+ax-by)}=\dfrac{n}{z(ax+by-cz)}$.

証：$\dfrac{\frac{x}{l}}{mb+nc-la}=\dfrac{\frac{y}{m}}{nc+la-mb}=\dfrac{\frac{z}{n}}{la+mb-nc}$

$$=\frac{\frac{y}{m}+\frac{z}{n}}{2la}$$

$$=\text{二相似式};$$

$$\therefore\quad \frac{ny+mz}{a}=\frac{lz+nx}{b}=\frac{mx+ly}{c}.$$

第一分數之分子分母乘以 $x$，第二分數乘以 $y$，第三分數乘以
則得

$$\frac{nxy+mxz}{ax}=\frac{lyz+nxy}{by}=\frac{mxz+lyz}{cz}$$

$$=\frac{2lyz}{by+cz-ax}$$

=二相似式;

$$\therefore \frac{l}{x(by+cz-ax)}=\frac{m}{y(cz+ax-by)}=\frac{n}{z(ax+by-cz)}.$$

16. 設有二含三未知量之一次方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

此二式不能完全解出，但由寫之為

$$a_1\left(\frac{x}{z}\right)+b_1\left(\frac{y}{z}\right)+c_1=0,$$

$$b_2\left(\frac{x}{z}\right)+b_2\left(\frac{y}{z}\right)+c_2=0,$$

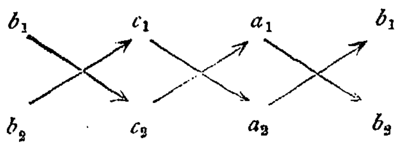
之形式，視 $\frac{x}{z}$ 及 $\frac{y}{z}$ 為未知量，用通常法解之，則得

$$\frac{x}{z}=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad \frac{y}{z}=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

或更為對稱，

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1} \cdots\cdots\cdots (3)$$

因知如遇類似 (1)，(2) 之兩方程式，吾人永可照下列法則用以上公式，以方程式之係數寫出 $x:y:z$ 之比. 從 $y$ 起依次寫 $x, y, z$ 之係數. 且如下圖重複之




乘箭形兩端之係數，切記所得之積由於向下之箭形者為正，向上者為負. 三結果

$$b_1c_2-b_2c_1,\quad c_1a_2-c_2a_1,\quad a_1b_2-a_2b_1$$

各與 $x$，$y$，$z$ 成比例.

此稱為十字乘法之法則.

例1. 由下方程式求 $x:y:z$ 之比.

$$7x=4y+8z,\quad 3z=12x+11y.$$

移項得 $7x-4y-8z=0$

$$12x+11y-3z=0.$$

寫各係數如下

$$\begin{array}{cccc} -4 & -8 & 7 & -4 \\ 11 & -3 & 12 & 11 \end{array}$$

由是得積

$$(-4)\times(-3)-11\times(-8),\ (-8)\times12-(-3)\times7,$$
$$7\times11-12\times(-4).$$

或 $$100,\ -75,\ 125;$$

$$\therefore \frac{x}{100}=\frac{y}{-75}=\frac{z}{125}.$$

即 $$\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{5}.$$

例2. 消去 $x$, $y$, $z$, 從方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

用十字乘法，由 (2), (3) 得.

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{z}{a_2b_3-a_3b_2};$$

以 $k$ 表各比，乘後代入 (1)，再除以 $k$. 得

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$$

此稱爲已知方程式之消去式.

例3. 解方程式

$$ax+by+cz=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$
$$x+y+z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$
$$bcx+cay+abz=(b-c)(c-a)(a-b)\cdots\cdots(3).$$

依十字乘法由 (1), (2) 得

$$\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=k,\quad \text{假定數};$$

$\therefore\ x=k(b-c),\ y=k(c-a),\ z=k(a-b).$

代入 (3),

$$k\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}=(b-c)(c-a)(a-b),$$
$$k\{-(b-c)(c-a)(a-b)\}=(b-c)(c-a)(a-b);$$
$$\therefore\ k=-1;$$

由是 $$x=c-b,\ y=a-c,\ z=b-a.$$

17. 設於 §16 內使 $z=1$, 則 (1),(2) 兩方程式變爲

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0.$$

(3)式變爲 $$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

或 $$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

故任何含未知數之二聯立一次方程式,可以十字乘法之法則解之.

例.解. $5x-3y-1=0,\ x+2y=12.$

移項 $$5x-3y-1=0,$$
$$x+2y-12=0;$$

$$\therefore\frac{x}{36+2}=\frac{y}{-1+60}=\frac{1}{10+3};$$

$$x=\frac{38}{13},\ y=\frac{59}{13}.$$

## 習題 I

1. 求以下合成之比:
   (1) $2a:3b$ 與 $9b^2:ab$ 之方根比.
   (2) $64:9$ 之方根比與 $27:56$.
   (3) $\frac{2a}{b}:\sqrt{\frac{6a^2}{b^2}}$之方根比與 $3ax:2by$
2. 設 $x+7:2(x+14)$ 爲 $5:8$ 之平方比, 求 $x$.
3. 求二數, 使其比爲 $7:12$, 其差爲 $275$.
4. 加何數於 $5:37$ 之各項使其等於 $1:3$?
5. 設 $x:y=3:4$. 求 $7x-4y:3x+y$ 之比.
6. 設 $15(2x^2-y^2)=7xy$, 求 $x:y$ 之比.

7.設 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f},$$

求證 $$\frac{2a^4b^2+3a^2e^2-5e^4f}{2b^6+3b^2f^2-5f^5}=\frac{a^4}{b^4}.$$

8.設 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$，求証 $\frac{a}{d}$ 等於

$$\sqrt{\frac{a^5+b^2c^2+a^3c^2}{b^4c+d^4+b^2cd^2}}.$$

9.設 $$\frac{x}{q+r-p}=\frac{y}{r+p-q}=\frac{z}{p+q-r},$$

指明 $$(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z=0.$$

10．設 $\frac{y}{x-z}=\frac{y+x}{z}=\frac{x}{y}$，求 $x:y:z$.之比.

11．設 $$\frac{y+z}{pb+qc}=\frac{z+x}{pc+qa}=\frac{x+y}{pa+qb},$$

指明 $$\frac{2(x+y+z)}{a+b+c}=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{bc+ca+ab}$$

12．設 $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

指明 $$\frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\frac{y^3+b^3}{y^2+b^2}+\frac{z^3+c^3}{z^2+c^2}=\frac{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}.$$

13．設 $$\frac{2y+2z-x}{a}=\frac{2z+2x-y}{b}=\frac{2x+2y-z}{c},$$

指明 $$\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c}.$$

14．設 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$,

指明 $$x:a=y:b=z:c.$$

15．設 $l(my+nz-lx)=m(nz+lx-my)=n(lx+my-nz)$,

求証 $$\frac{y+z-x}{l}=\frac{z+x-y}{m}=\frac{x+y-z}{n}$$

16．指明

$$ax+cy+bz=0,\ cx+by+az=0,\ bx+ay+cz=0,$$

之消去式爲 $a^3+b^3+c^3-3abc=0.$

17．消去 $x$，$y$，$z$ 從方程式

$$ax+hy+gz=0,\ hx+by+fz=0,\ gx+fy+cz=0.$$

18. 設 $x=cy+bz,\ y=az+cx,\ z=bx+ay,$

指明
$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}.$$

19. 已知 $a(y+z)=x,\ b(z+x)=y,\ c(x+y)=z,$

求証
$$bc+ca+ab+2abc=1.$$

解以下方程式:

20.
$$\begin{aligned}3x-4y+7z&=0,\\ 2x-y-2z&=0,\\ 3x^3-y^3+z^3&=18,\end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned}x+y&=z,\\ 3x-2y+17z&=0,\\ x^3+3y^3+2z^3&=167.\end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned}7yz+3zx&=4xy,\\ 21yz-3zx&=4xy,\\ x+2y+3z&=19.\end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned}3x^2-2y^2+5z^2&=0,\\ 7x^2-3y^2-15z^2&=0,\\ 5x-4y+7z&=6.\end{aligned}$$

24. 設
$$\frac{l}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{m}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\frac{n}{\sqrt{c}-\sqrt{a}}=0,$$
$$\frac{l}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{m}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{n}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=0,$$

指明
$$\frac{l}{(a-b)(c-\sqrt{ab})}=\frac{m}{(b-c)(a-\sqrt{bc})}=\frac{n}{(c-a)(b-\sqrt{ac})}.$$

解方程式:

25.
$$\begin{aligned}ax+by+cz&=0,\\ bcx+cay+abz&=0,\\ xyz+abc(a^3x+b^3y+c^3z)&=0.\end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned}ax+by+cz=a^2x+b^2y+c^2z&=0,\\ x+y+z+(b-c)(c-a)(a-b)&=0.\end{aligned}$$

27. 設 $a(y+z)=x,\ b(z+x)=y,\ c(x+y)=z,$

求証
$$\frac{x^2}{a(1-bc)}=\frac{y^2}{b(1-ca)}=\frac{z^2}{c(1-ab)}.$$

28. 設 $ax+hy+gz=0,\ hx+by+fz=0,\ gx+fy+cz=0,$

求証

(1) $\dfrac{x^2}{bc-f^2}=\dfrac{y^2}{ca-g^2}=\dfrac{z^2}{ab-h^2}.$

(2) $(bc-f^2)(ca-g^2)(ab-h^2)=(fg-ch)(gh-af)(hf-bg).$

# 第二章

## 比　例

18. **定義.** 設兩比相等則其所含之四量稱爲成**比例**. 設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $a$, $b$, $c$, $d$ 四量成比例. 意即 $a$ 比 $b$ 等於 $c$ 比 $d$, 此比例可寫作

$$a:b=c:d$$

或　　$a:b::c:d$.

$a$ 與 $d$ 稱爲外項, $b$ 與 $c$ 爲內項.

19. 設四量成比例, 則兩外項之積等於兩內項之積.

使 $a$, $b$, $c$, $d$ 爲比例項.

於是由定義　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\therefore \qquad ad=bc.$$

故設已知比例之三項, 則可由是求出第四項.

反之設 $a$, $b$, $c$, $d$, 四量中, $ad=bc$, 則 $a$, $b$, $c$, $d$ 四量爲比例之項; $a$ 與 $d$ 爲外項, $b$ 與 $c$ 爲內項; 反之亦可以 $a$, $d$ 爲內項, $b$, $c$ 爲外項.

20. **定義.** 若諸量中, 第一量比第二量, 等於第二量比第三量, 等於第三量比第四量, 類推; 則稱此諸量成**連比例**; 故 $a$, $b$, $c$, $d$, ……………… 爲連比例, 設

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

設 $a, b, c$ 三量成連比例．則

$$a:b=b:c$$

$$\therefore \quad ac=b^2 \qquad (\S 18)$$

於本情形下稱 $b$ 爲 $a, c$ 之比例中項．$c$ 爲 $a, b$ 之第三比例項．

21．設三量成連比例，則第一量與第三量之比，等於第一量與第二量之平方比．

使三量爲 $a, b$ 及 $c$；則 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$．

因 $$\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}$$

$$=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$$

則 $$a:c=a^2:b^2.$$

可知此命題同於尤氏幾何學卷 5 所下平方比之定義．

22．如 $a:b=c:d$，$e:f=g:h$，則 $ae:bf=cg:dh$．

因 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\quad \frac{e}{f}=\frac{g}{h};$$

$$\therefore \frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh},$$

或 $$ae:bf=cg:dh.$$

**推論**．設 $$a:b=c:d,$$

及 $$b:x=d:y,$$

則 $$a:x=c:y.$$

此爲幾何中名爲 *ex æquali* 之定理．

23．設 $a, b, c, d$ 四量成比例，則由分數性質可推出若干不同之命題．其結果甚爲有用．其中且有若干，常被引用其由幾何借來之名辭引用．

(1) 設 $a:b=c:d$，則 $b:a=d:c$.　　逆理 [*Invertendo*]

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$；$\therefore 1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}$；

則　$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$；

或　$b:a=d:c$.

(2) 設 $a:b=c:d$，則 $a:c=b:d$.　　互理 [*alternando*]

$\because ad=bc$；$\therefore \frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd}$；

則　$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；

或　$a:c=b:d$

(3) 設 $a:b=c:d$，則 $a+b:b=c+d:d$.　合理 [*Componendo*]

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$；　$\therefore \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$；

則　$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；

或　$a+b:b=c+d:d$.

(4) 設 $a:b=c:d$，則 $a-b:b=c-d:d$.　　分理 [*Dividendo*]

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\therefore \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$；

則　$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$；

或　$a-b:b=c-d:d$.

(5). 設 $a:b=c:d$，則 $a+b:a-b=c+d:c-d$.

從(3)　$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；

從(4)　$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$；

由除法　$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$；

或　$a+b:a-b=c+d:c-d$.

此命題常被引用爲 合理(*Componendo*) 及 分理 (*Dividendo*).
共他數命題，可用同法証明之.

24．前節諸結果為尤几利幾何卷五內若干命題之同值代數命題．讀者應熟習其述說方式．例如分理可引用如下：

設有四比例項，則其一項減第二項比第二項等於第三項減第四項比第四項．

25．茲比較比例之代數定義及尤几利氏所下之定義．

尤几利氏之定義如下：

設於四量中，取第一量及第三量之任何等倍數，又第二量及第四量之任何等倍數；若第三量之倍數之大於，等於，或小於第四量之倍數同於第一量之大於，等於，或小於第二量之倍數；則稱四量為比例項．

用代數符號，此定義可述之為：

設 $pc \gtreqless qd$ 各視 $pa \gtreqless qb$；$p, q$ 可為任何正整數，則 $a$，$b$，$c$，$d$ 四量成比例．

I．從比例之代數定義推出其幾何定義．

因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，由左右皆乘以 $\frac{p}{q}$，得

$$\frac{pa}{qb}=\frac{pc}{qd}.$$

此即證明本命題．

II．從比例之幾何定義推出其代數定義．

已知 $pc \gtreqless qd$ 各視 $pa \gtreqless qb$，求証

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

設 $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$，則其中之一必較大.

使 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$；則求其中間值某分數 $\frac{q}{p}$ 爲可能，$q$，$p$ 爲任何正整數.

故 $$\frac{a}{b} > \frac{q}{p} \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{c}{d} < \frac{q}{p} \cdots\cdots(2)$$

由 (1) $\quad pa > qb$

由 (2) $\quad pc < qd$；

此與題設相矛盾；即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$；此證明本命題.

26. 須注意比例之幾何定義爲對於有形之量如幾何表示之直線或面積，但不指出任何度量之單位. 故尤几利氏定義於可通約量及不可通約量同一適用；但其代數定義，因其假定 $a$ 爲 $b$ 之固定之幾倍或幾分之幾. 同於 $c$ 之於 $d$，故可謂其僅適用於可通約量. 但因二不可通約量之比永可使其與二整數之比之差小於任何可名言之量，故關於可通約量之證明，於不可通約量亦眞. 亦可如下節爲更一般之證明.

27. 設 $a$ 及 $b$ 爲不可通約之量：分 $b$ 爲 $m$ 等分，每分等於 $\beta$；由是 $b = m\beta$，$m$ 爲正整數. 又設 $a$ 內所含 $\beta$ 之數，多於 $n$ 而少於 $n+1$

於是 $$\frac{a}{b} > \frac{n\beta}{m\beta} \text{ 而} < \frac{(n+1)\beta}{m\beta},$$

即 $$\frac{a}{b} \text{ 在 } \frac{n}{m} \text{ 及 } \frac{n+1}{m} \text{ 之間；}$$

由是 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{n}{m}$ 之差爲小於 $\frac{1}{m}$ 之量. 又因能選取 $\beta$（通約之單位）爲

適意之小，以使 $m$ 爲適意之大．故可使 $\frac{1}{m}$ 小至適意之小，而其比表 $a$，$b$ 之比至適意精確程度之二整數即能由是求得之．

28．§23 內所證命題於解題時常爲有用．尤其由機巧運用合理及分理以解某種方程式時，更能化繁難爲簡易．

例 1．

設 $$(2ma+6mb+3nc+9nd)(2ma-6mb-3nc+9nd)$$
$$=(2ma-6mb+3nc-9nd)(2ma+6mb-3nc-9nd),$$

求證 $a$，$b$，$c$，$d$ 爲比例項．

已知 $$\frac{2ma+6mb+3nc+9nd}{2ma-6mb+3nc-9nd}=\frac{2ma+6mb-3nc-9nd}{2ma-6mb-3nc+9nd};$$

由合理及分理

$$\frac{2(2ma+3nc)}{2(6mb+9nd)}=\frac{2(2ma-3nc)}{2(6mb-9nd)}.$$

由互理 $$\frac{2ma+3nc}{2ma-3nc}=\frac{6mb+9nd}{6mb-9nd}.$$

又依合理及分理

$$\frac{4ma}{6nc}=\frac{12mb}{18nd};$$

由是 $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},$$

或 $$a:b=c:d,$$

例　2．解方程式

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2}$$

由分理及合理

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{4x+1}{4x-3};$$

$$\therefore \frac{x+1}{x-1}=\frac{16x^2+8x+1}{16x^2-24x+9}.$$

又由合理及分理

$$\frac{2x}{2}=\frac{32x^2-16x+10}{32x-8},$$

$$\therefore x=\frac{16x^2-8x+5}{16x-4};$$

由是 $$16x^2-4x=16x^2-8x+5;$$

$$\therefore x=\frac{5}{4}.$$

## 習　題　II

1．求 3，5，27 之第四比例項．

2．求下之比例中項．

(1) 6 與 24．　　　　(2) $360a^4$ 與 $250a^2b^2$．

3．求 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 及 $\frac{x}{y}$ 之第三比例項．

設 $a:b=c:d$，求證

4．$a^2c+ac^2:b^2d+bd^2=(a+c)^3:(b+d)^3$．

5．$pa^2+qb^2:pa^2-qb^2=pc^2+qd^2:pc^2-qd^2$．

6．$a-c:b-d=\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}$．

7．$\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\frac{d^3}{b}}$

設 $a$，$b$，$c$，$d$ 成連比例，求証

8．$a:b+d=c^3:c^2d+d^3$．

9．$2a+3d:3a-4d=2a^3+3b^3:3a^3:4b^3$．

10．$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$．

11．設 $b$ 爲 $a$，$c$ 之比例中項，求證．

$$\frac{a^2-b^2+c^2}{a^{-2}-b^{-2}+c^{-2}}=b^4.$$

12．設 $a:b=c:d$，及 $e:f=g:h$，求證

$$ae+bf:ae-bf=cg+dh:cg-dh.$$

解方程式：

13．$\frac{2x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2-x-1}=\frac{3x^3-x^2+5x-13}{3x^3-x^2-5x+13}$．

14．$\frac{3x^4+x^2-2x-3}{3x^4-x^2+2x+3}=\frac{5x^4+2x^2-7x+3}{5x^4-2x^2+7x-3}$．

15．$\frac{(m+n)x-(a-b)}{(m-n)x-(a+b)}=\frac{(m+n)x+a+c}{(m-n)x+a-c}$．

16．設 $a$，$b$，$c$，$d$ 爲四比例項，求證．

$$a+d=b+c+\frac{(a-b)(a-c)}{a}$$

17．設 $a$，$b$，$c$，$d$，$e$ 成連比例，求證

$$(ab+bc+cd+de)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)(b^2+c^2+d^2+e^2)$$

18. 設 $x-1$ 人 $x+1$ 日完成之工作，$x+2$ 人 $x-1$ 日完成之工作之比爲 9:10，求 $x$.

19. 求四比例項，設其兩外項之和爲 21，兩內項之和爲 19，各項平方之和爲 442.

20. 有二瓶滿貯以二種酒之混合液，設 $A$ 瓶中之混合比爲 2:7 $B$ 瓶中之混合比爲 1:5 問須從二瓶中各取若干，適能合成含一種酒二加侖及他種酒 9 加侖之混合液.

21. 設於滿貯葡萄酒之瓶中取出 9 加侖後滿之以水，又取出9 加侖再滿之以水，設此時瓶中酒與水之比爲 6:9. 問瓶之容量若干?

22. 設四正量成連比例，指明首末二量之差至少爲他二量差之三倍.

23. 英國人口於 1871 至 1881 年中增加 15.9%，設市民增加 18%，鄉民增加 4%，試求 1871 年市民及鄉民人口之比.

24. 某國茶之消耗量 5 倍於咖啡之消耗量. 如茶多消費 $a\%$；咖啡多消費 $b\%$；則消耗總量爲 $7c\%$，設茶消費 $b\%$ 咖啡消費 $a\%$；則總消費量增加 $3c\%$. 求 $a$，$b$ 之比.

25. 黃銅爲銅與鋅之合金；青銅爲銅 80%，鋅 4 %，錫 16 % 之合金. 某青銅及黃銅之鎔液中含銅 74%，鋅 16%，錫 10 %，求黃銅中所含銅與鋅之比.

26. 某舟子可於 84 分鐘逆水行某路程，此同路程如順水行駛則較在靜水中少用 9 分鐘；問順水究需若干分鐘?

# 第　三　章

## 因　變　法

29. **定義**　設 $A$, $B$ 二量，以 $B$ 變時，$A$ 亦依同比而變互相關係時，則謂 $A$ 量依 $B$ 量 **正變**

**註**　正字常被省略，謂 $A$ 依 $B$ 而變．

例如；某火車以等速度 60 分鐘各情形下行 40哩，30 分鐘行 20 哩，120 分鐘行 80 哩，類推；諸距離之增減之比同於其所行時間．此可謂如速度一定，則行程與時間成比例，或謂行程依時間而變．

30．變法常以符號 $\infty$ 表之；如 $A\infty B$ 即謂 $A$ 依 $B$ 而變．

31．設 $A$ 依 $B$ 而變，則 $A$ 等於 $B$ 乘以某常量．

因設 $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ……, $b$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, ……爲 $A$, $B$ 之諸相當值．

於是由定義，$\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}$；$\dfrac{a}{a_2}=\dfrac{b}{b_2}$；$\dfrac{a}{a_3}=\dfrac{b}{b_3}$；類推，

$$\therefore \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots，皆等於\frac{a}{b}．$$

故　$\dfrac{A之任一量}{B之相當量}$ 永遠同值．

則　$\dfrac{A}{B}=m$，　$m$爲一常量．

$$\therefore A=mB$$

設已知 $A, B$ 之任一對相當值，則能決定常數 $m$ 之值．例如，設 $B=12$ 時 $A=3$，

則 $$3=m\times 12;$$

$$\therefore\quad m=\tfrac{1}{4},$$

$$A=\tfrac{1}{4}B.$$

32. 定義 設 $A$ 量依 $B$ 量之倒數正變，則謂 $A$ 依 $B$ 反變．由是設 $A$ 因 $B$ 反變，則 $A=\dfrac{m}{B}$，$m$ 爲常數．

下例爲反變之說明：設有某工作，6 人作之用 8 小時，12 人用 4 小時，2人用 24 小時，類推．如此，顯然作工之人數增，則所用之時間依比例減少；反之亦然．

例一．$x$ 之立方根因 $y$ 之平方反變；$x=8$ 時 $y=3$．設 $y=1\tfrac{1}{2}$，求$x$．

由假設 $\sqrt[3]{x}=\dfrac{m}{y^2}$，$m$ 爲一常數．

使 $x=8$，$y=3$，得 $2=\dfrac{m}{9}$，

$$\therefore\quad m=18,$$

$$\sqrt[3]{x}=\frac{18}{y^2}$$

故由使 $y=\dfrac{3}{2}$ 則得 $x=512$．

例二．行星公轉一週所用之時間因其與太陽距離之立方而變；假定地球與金星距離太陽爲 $91\tfrac{1}{4}$，及 66 百萬英哩．求金星公轉所用之時間．

設 $P$ 爲公轉週期之日數；$D$ 爲距離之百萬哩數．

已知 $$P^2\propto D^3,$$

或 $$P^2=kD^3 \quad k\text{爲一常數}.$$

由地球 $$365\times 365=k\times 91\tfrac{1}{4}\times 91\tfrac{1}{4}\times 91\tfrac{1}{4},$$

得 $$k=\frac{4\times 4\times 4}{365};$$

$$\therefore\quad P^2=\frac{4\times 4\times 4}{365}D^3.$$

金星，　$P^2=\frac{4\times4\times4}{365}\times66\times66\times66$

故　$P=4\times66\times\sqrt{\frac{264}{365}}$

$=264\times\sqrt{.7233}$，近似值，

$=264\times.85$，

$=224.4$.

故公轉之時間約為 $224\frac{1}{2}$日.

33. **定義** 設一量與其他數量之積正變，則稱此量與其他數量**合變**.

如當 $A=mBC$時，則 $A$ 因 $B,C$ 合變. 例如，利息因本銀時間及利率合變.

34. **定義** 設 $A$ 因$\frac{B}{C}$正變，則謂 $A$ 因 $B$ 正變而因 $C$ 反變.

35. **定義.** 設當 $C$ 為常量時，$A$ 因 $B$ 而變；$B$ 為常量時 $A$ 因 $C$ 而變；則當 $B,C$ 俱變時，$A$ 即因 $BC$ 而變.

$A$ 之變化，一部分因 $B$，一部分因 $C$，設 $B$ 及 $C$ 分開變化，且各影響於 $A$. 更以 $a$，$b$，$c$，表 $A$，$B$，$C$ 變化後之相當值.

1. 使 $C$ 為常量，而$B$ 變為 $b$，$A$ 亦必經一部分變化；假定此中間值為 $a'$，於此

$$\frac{A}{a'}=\frac{B}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

2. 使 $B$ 為常量，即仍保留其值 $b$，而 $C$ 變為 $c$，則 $A$ 必完成其變化，從中間值 $a'$ 變為其最後值 $a$，於此

$$\frac{a'}{a}=\frac{C}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從(1)及(2)　$\frac{A}{a'}\times\frac{a'}{a}=\frac{B}{b}\times\frac{C}{c}$；

即　$A=\frac{a}{bc}.BC$，

或　$A$ 因 $BC$ 而變.

36．下為前節所設定理之示例；

工作完成之量，人數已定，則因天數而正變；如天數已定，則因人數而正變；設天數及人數同為變量，則工作量因人數及天數之積而變．

又幾何學中三角形之面積其高為常量時因其底而變，又其底為常量時，依其高而變；如底及高皆為變量，則其面積依底高之積而變．

例．設正圓錐體之高為常量，則其體積因其底半徑之平方而變；如其底為常量則其體積依其高而變；設某正圓錐體之底之半徑為 7 呎，其高為 15 呎，其體積為 770 立方呎；求其體積為 132 立方呎，其底之半徑為 3 尺 之正圓錐體之高．

使 $h$ 及 $r$ 表高及底之半徑之呎數，$V$ 表體積之立方呎數．

於是 $V=mr^2h$，　$m$ 為某常數．

由假設，　$770=m\times 7^2\times 15$；

由是　$m=\dfrac{22}{21}$；

$$\therefore V=\frac{22}{21}r^2h.$$

以 $V=132$ 及 $r=3$ 代入得

$$132=\frac{22}{21}\times 9\times h;$$

由是　$h=14$；

故其高為 14 呎．

37．第 35 節之命題甚易推廣至 $A$ 因二以上之變量而變之情形．且知此種變量正變或反變均可．此原則甚為有趣，因其於自然科學內時常發現．例如由實驗所得之氣體定律，設體積 $v$ 為常數則其壓力因絕對溫度 $t$ 而變；及設溫度為常數，則因體積 $v$ 而反變．即

當 $v$ 為常數時，　$P\propto t$；

及 $t$ 爲常數時，$P \propto \frac{1}{v}$.

由此可推知如 $t$ 及 $v$ 皆爲變數，則得公式

$$p \propto \frac{t}{v} \text{或} \ pv = kt. \quad k \text{ 爲一常數.}$$

且由實際實驗，亦得知爲此種情形.

例. 鐵路旅行所需之時間，因行程正變，因速度反變；速度則因每里所用煤數之平方根正變，而因車之輛數反變. 設半時，帶車 18輛，行 25 哩用煤 10. $cwt$. 問 28 分鐘，帶車 16 輛行 21 哩須用煤若干?

使 $t$ 表所需之時數.
 $d$ 表距離之哩數.
 $v$ 表每小時速度之哩數.
 $q$ 表每哩用煤之 $cwt$ 數.
 $c$ 表車之輛數.

因 $$t \propto \frac{d}{v}$$

及 $$v \propto \frac{\sqrt{q}}{c}$$

由是 $$t \propto \frac{cd}{\sqrt{q}}$$

或 $$t = \frac{kcd}{\sqrt{q}}, \ k \text{ 爲常數,}$$

代入已知值，因 $q = \frac{10}{25}$，得

$$\frac{1}{2} = \frac{k \times 18 \times 25 \times 5}{\sqrt{10}}$$

即 $$k = \frac{\sqrt{10}}{125 \times 36}$$

故 $$t = \frac{\sqrt{10}.cd}{125 \times 36\sqrt{q}}$$

代入本問題第二部 $t$, $c$, $d$ 之已知值(得

$$\frac{28}{60} = \frac{\sqrt{10} \times 16 \times 21}{125 \times 36\sqrt{q}};$$

$$\sqrt{q} = \frac{\sqrt{10} \times 16 \times 21}{75 \times 28} = \frac{4}{25}\sqrt{10};$$

$$q = \frac{32}{125}$$

故所需煤量爲 $\frac{21 \times 32}{125} = 5\frac{47}{125} \ cwt.$

## 習　題　III

1．設 $x$ 因 $y$ 而變，$y=15$ 時 $x=8$，求 $y=10$ 時 $x$ 之值．

2．設 $P$ 因 $Q$ 反變，$Q=3$ 時 $P=7$，求 $P$ 當 $Q=2\frac{1}{3}$ 時之值．

3．設 $x$ 之平方因 $y$ 之立方正變，且 $y=4$ 時 $x=3$，設 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 求 $y$．

4．設 $A$ 因 $B,C$ 合變，$B=\frac{3}{5}$ 及 $C=\frac{10}{27}$ 時 $A=2$．求 $C$，當 $A=54$，$B=3$．時之值．

5．設 $A$ 因 $C$ 變，$B$ 亦因 $C$ 變，則 $A+B$ 及 $\sqrt{AB}$ 皆因 $C$ 而變．

6．設 $A$ 因 $BC$ 而變，則 $B$ 因 $\frac{C}{A}$ 反變，

7．$P$ 因 $Q$ 正變因 $R$ 反變，且當 $Q=\frac{3}{7}$ 及 $R=\frac{9}{14}$ 時 $P=\frac{2}{3}$ 求 $P=\sqrt{48}$，$R=\sqrt{75}$ 時 $Q$ 之值．

8．設 $x$ 因 $y$ 而變，求証 $x^2+y^2$ 因 $x^2-y^2$ 而變．

9．設 $y$ 因二量之和而變，且二量中，一因 $x$ 正變，一因 $x$ 反變，又 $x=4$ 時 $y=6$，$x=3$ 時 $y=3\frac{1}{3}$；求 $x$ $y$ 間之方程式．

10．設 $y$ 等於二量之和，其中一因 $x$ 正變，他因 $x$ 反變．且 $x=2$ 時 $y=19$，或 3．求 $y$ 表以 $x$ 之值．

11．設 $A$ 因 $B$ 之平方根正變，因 $C$ 之立方根反變．且於 $B=256$ $C=2$ 時 $A=3$，求 $B$ 當 $A=24$，及 $C=\frac{1}{2}$ 時之值．

12．已知 $x+y$ 因 $z+\frac{1}{z}$ 而變，及 $x-y$ 因 $z-\frac{1}{z}$ 而變，設當 $x=3$ 及 $y=1$ 時 $z=2$ 求 $x$，$z$ 間之關係．

13．設 $A$ 因 $B$ 及 $C$ 合變，同時 $B$ 因 $D^2$ 正變而因 $A$ 反變，指明 $A$ 因 $D$ 正變．

14．設 $y$ 因三量之和正變，此三量中：第一量爲常數，第二量因 $x$ 正變，第三量因 $x^2$ 正變；且 $x=1$ 時 $y=o$，$x=2$ 時 $y=1$．及 $x=3$ 時 $y=4$．求 $x=7$．時 $y$ 之值．

15．當物體由靜止降落時，其距出發點之距離因其降落時間之平方正變，設某物體於 5 秒鐘內，降落 $402\frac{1}{2}$ 呎．問 10 秒鐘內降落若干呎？又第 $\frac{1}{10}$ 秒鐘降落若干呎？

16. 已知球體積因球半徑之立方正變．又當半徑為 $3\frac{1}{2}$ 呎時，其體積為 $179\frac{2}{3}$ 立方呎；求半徑為 1 呎 9 吋 時之體積

17. 圓板之重量，如其厚為一定，則因其半徑之平方而變．如半徑為一定，則因其厚而變．如二圓板厚之比為 9:8．重量則前者為後者之二倍，求二盤半徑之比．

18. 某競賽會每日之競賽數，因從此競賽會之始及末之日數合變，所論之日在內．　某三連續日之競賽數為　6，5，及 3．問此三日為何日，又此會延至若干日？

19. 鑽石之價格因其重量之平方正變．今有嵌鑽石之金戒指三個其價值為 £$a$，£$b$，£$c$．其所嵌鑽石之重量為 3，4，5 *carats*．試指出　1 *carat* 鑽石之價值為

$$£\left(\frac{a+c}{2}-b\right),$$

每戒指之工費相等．

20. 二人所得之郵金與二人服務年數之平方成比例．一人服務較他人多 9 年，多得郵金 £50，設第一人較第二人多服務 $4\frac{1}{2}$ 年其所得郵金成 9:8 之比例．問二人服務年數及郵金各若干?

21. 行星對其衛星所施之引力，因行星之質量 $M$ 正變而因距離 $D$ 之平方反變；又衛星公轉所用時間之平方因距離正變而因引力反變．設 $m_1$，$d_1$．$t_1$，及 $m_2$，$d_2$，$t_2$ 為 $M, D, T$ 之兩組相當值.求證

$$\frac{m_1t_1^2}{m_2t_2^2}=\frac{d_1^3}{d_2^3}.$$

因此試求木星之衛星公轉之時間．設其距離比月球之距離為 35:31．又已知木星之質量 343 倍地球之質量，及月球之週期為 27.32 天．

22. 機關車所用煤量因其速度之平方正變．當每時行 16 哩時，所用煤量為每時 2 噸；設每噸之煤價為 10$s$，機器之其他消費每小時 11$s$.3$d$ 求 100 哩路程之最低費用．

# 第　四　章

## 等　差　級　數

38. **定義** 當諸量以公差遞增或遞減時則稱諸量爲**等差級數**

如下之每列各成一等差級數.

$3, 7, 11, 15, \cdots\cdots$

$8, 2, -4, -10, \cdots\cdots$

$a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots\cdots$

公差可由級數之任一項減去前一項求得之，上例中：第一之公差爲4，第二爲 $-6$，第三爲 $d$.

39. 設考驗級數.

$a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots\cdots$

可知級數任何項內 $d$ 之係數永較其所在之項數少一.

如　　第 3 項爲 $a+2d$

　　　第 6 項爲 $a+5d$

　　　第 20 項爲 $a+19d$

及一般，　第 $p$ 項爲 $a+(p-1)d$.

設 $n$ 爲項數，$l$ 爲末項，或 第 $n$ 項，

$$l=a+(n-1)d$$

40. 求等差級數內若干項之和.

使 $a$ 表首項，$d$ 表公差，$n$ 表項數．又使 $l$ 表末項，$s$ 表

所求之和；於是

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l;$$

反級數之順序，

$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

二級數相加，

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項.}$$

$$=n(a+l),$$

$$\therefore\ s=\frac{n}{2}(a+l)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1);$$

$$l=a+(n-1)d\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2);$$

$$\therefore\ s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

41．前節得 (1)，(2)，(3) 三重要公式；設其中任一公式內之任三字母爲已知時，則可以其他一字母表未知量．例如，(1) 內如代入 $s$，$n$，$l$ 之已知値則得求 $a$ 之方程式；他公式內亦同．但切須避免過於機械運用．此一般公式因以心智解簡單問題常較引用所請之公式爲佳．

例 1．求級數 $5\frac{1}{2}$，$6\frac{3}{4}$，$8\cdots\cdots$至 17 項之和．

此級數之公差爲 $1\frac{1}{4}$；故從 (3)

共和
$$=\frac{17}{2}\left\{2\times\frac{11}{2}+16\times1\tfrac{1}{4}\right\}$$

$$=\frac{17}{2}(11+20)$$

$$=\frac{17\times31}{2}$$

$$=263\tfrac{1}{2}.$$

例 2．設級數之首項爲 5，末項爲 45，和爲 400；求項數及公差．

設 $n$ 爲項數，於是從 (1)

$$400=\frac{n}{2}(5+45);$$

由是 $n=16$

設 $d$ 爲公差

$$45=\text{第16項}=5+15d$$

故　　$d=2\frac{2}{3}$.

42. 設已知等差級數之任兩項，則此級數可完全決定．因此已知條件能與二聯立方程式，解之可得級數之首項及公差也．

例．某等差級數之第 54 項及第 4 項爲 $-61$ 及 64；求第 23 項．

設 $a$ 爲首項，$d$ 爲公差，於是

$$-61=\text{第 54項}=a+53d$$

$$64=\text{第 4項}=a+3d$$

由是得　　$d=-\frac{5}{2}$，$a=71\frac{1}{2}$；

故其第 23 項$=a+22d=16\frac{1}{2}$.

43. **定義**　設三量成等差級數，則稱中量爲他二量之**等差中項**．

例如 $a$ 爲 $a-d$ 及 $a+d$ 之等差中項．

44. 求二已知量之等差中項．

使 $a$，$b$ 爲二量；$A$ 爲其等差中項．

於是，因 $a$，$A$，$b$ 爲 $A.\ P.$ 必得

$$b-A=A-a$$

因其皆等於公差

由是　　$$A=\frac{a+b}{2}$$

45. 於二已知量間永能插入任若干項以成一 $A.\ P.$ 由 §43 定義之引伸稱此插入諸項爲諸等差中項．

例．於 4 及 67 間插入 20 等差中項．

合首項及末項此級數之項數爲 22；由是求一項數 22，首項 4 及末項 67．之等差級數．

使 $d$ 爲公差；

於是 $67=\text{第 22 項}=4+21d$；

由是 $d=3$ 此級數爲 4，7，10，…………61，64，67；

而所求中項爲 7，10，13，……………58，61，64．

46．於二已知量間，插入已知數個等差中項．

使 $a$ 及 $b$ 爲二已知量，$n$ 爲插入之項數．

合二外項共項數共爲 $n+2$；於是求首項 $a$，末項 $b$ 之 $n+2$ 項之 $A.P.$．

使 $d$ 爲公差．

則 $$b=\text{第 } n+2 \text{ 項}$$
$$=a+(n+1)d;$$

故 $$d=\frac{b-a}{n+1}$$

而所求中項爲 $a+\frac{b-a}{n+1}$，$a+\frac{2(b-a)}{n+1}$，……………$a+\frac{n(b-a)}{n+1}$．

例1．成 $A.P.$ 三數之和爲 27，其平方和爲 293；求三數．使 $a$ 爲中數，$d$ 爲公差；則三數爲 $a-d$，$a$，$a+d$．

故 $$a-d+a+a+d=27;$$

由是 $a=9$，三數爲 $9-d$，9，$9+d$．

$$\therefore\quad (9-d)^2+81+(9+d)^2=293;$$
$$d=\pm 5;$$

而所求三數爲 4，9，14．

例2．求首項爲 $3n-1$ 之級數之首 $p$ 項和．

使 $n=1$ 及 $n=p$ 則得

首項$=2$，　末項$=3p-1$；

$$\therefore\quad \text{和}=\frac{p}{2}(2+3p-1)=\frac{p}{2}(3p+1).$$

## 習　題　IV.a.

1．求 $2, 3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2}$,……，至 20 項之和．

2．求 49，44，39……至 17 項之和．

3．求 $\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{7}{12}$，至 19 項之和．

4. 求 $3, \frac{7}{3}, 1\frac{2}{3}$, ……至$n$項之和.

5. 求 3.75, 3.5, 3.25, 至 16 項之和.

6. 求$-7\frac{1}{2}, -7, -6\frac{1}{2}$,…至 24 項之和.

7. 求 $1.3, -3.1, -7.5$,……至 10 項之和.

8. 求$\frac{6}{\sqrt{3}}, 3\sqrt{3}, \frac{12}{\sqrt{3}}$, ……至 50 項之和.

9. 求$\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}$ ,……至 25 項之和.

10. 求$a-3b, 2a-5b, 3a-7b$,……至 40 項之和.

11. 求 $2a-b, 4a-3b, 6a-5b$,……至$n$項之和.

12. $\frac{a+b}{2}, a, \frac{3a-b}{2}$.…………至 21 項之和.

13. 於 $\frac{1}{2}$ 及$-9\frac{3}{4}$ 間插入 19 個等差中項.

14. 於 $3\frac{1}{3}$ 及$-41\frac{1}{3}$ 間插入 17 個等差中項.

15. 於$-35x$ 及 $3x$ 間插入 18 個等差中項.

16. 於 $x^2$ 及 1 間插入 $x$ 個等差中項.

17. 求首 $n$ 個奇數之和.

18. $A.P.$ 之首項爲 2, 末項爲 29, 和爲 155; 求公差.

19. $A.P.$ 15 項之和爲 600, 公差爲 5, 求首項.

20. $A.P.$ 之第三項爲 18, 第七項爲 31; 求 17 項之和.

21. 成 $A.P.$ 三數之和爲 27, 積爲 504; 求三數.

22. 成 $A.P.$ 三數之和爲 12, 立方和爲 408; 求三數.

23. 某級數之第 $n$ 項爲 $4n+1$, 求 15 項之和.

24. 某級數之第 $p$ 項爲 $\frac{p}{7}+2$, 求 35 項之和.

25. 某級數之第$n$項爲 $\frac{n}{a}+b$, 求 $p$ 項之和.

26. 求級數 $\frac{2a^2-1}{a}, 4a-\frac{3}{a}, \frac{6a^2-5}{a}$,……之 $n$ 項之和.

47. 當一等差級數內之 $s, a, d$ 為已知，定 $n$ 之值時，得二次方程式．

$$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\};$$

如二根皆為正整數．則對相當各結果之解釋不感困難．如 $n$ 為負數時，則在某種情形下，亦能得一適當之解釋．

例． 級數 $-9, -6, -3, \cdots\cdots$ 若干項之和為 66?

於此 $\frac{n}{2}\{-18+(n-1)3\}=66;$

即 $n^2-7n-44=o,$

或 $(n-11)(n+4)=o;$

$\therefore\ n=11$，或$-4$．

設取此級數之 11 項，則得

$-9, -6, -3,\ 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21.$

共和為 66.

設從末項倒數四項， 共和亦為 66． 由是此負數解答雖不能與此問題以直然之答案，但亦能與一可解之意義．且共解答與正數解答有密切之關連．

48. 茲證明此種解釋在一般情形下亦為正確．

$n$ 之定值方程式為

$$dn^2+(2a-d)n-2s=o \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因於討論此方程式二根異號之情形下使表二根以 $n_1$ 及 $-n_2$ 此級相當 $n_1$ 之末項為

$$a+(n_1-1)d;$$

設從此項倒數，則共公差必表以 $-d$，而 $n_2$ 項之和為

$$\frac{n_2}{2}\{2(a+\overline{n-1}d)+(n_2-1)(-d)\},$$

茲指明共等於 $s$.

*H. H. A,*

此式$=\frac{n_2}{2}\{2a+(2n_1-n_2-1)d\}$

$=\frac{1}{2}\{2an_2+2n_1n_2d-n_2(n_2+1)d\}$

$=\frac{1}{2}\{2n_1n_2d-(dn_2^2-\overline{2a-d}.n_2)\}$

$=\frac{1}{2}(4s-2s)=s.$

因 $\because n$ 適合方程式 $dn_2^2+(2a-d)n-2s=o$，及 $-n_1n_2$ 爲二根之相乘積也．

49．當 $n$ 之値爲分數時，無相當此解答之確切項數．

例．級數 26，21，16……若干項之和爲 74?

於此 $$\frac{n}{2}\{52+(n-1)(-5)\}=74.$$

即 $$5n^2-57n+148=o,$$

或 $$(n-4)(5n-37)=o;$$

$$\therefore n=4 \text{ 或 } 7\frac{2}{5}.$$

故項數爲 4，又知 7 項之和大於 74，而 8 項之和小于 74．

50．茲更益以數例．

例1．二等差級數 $n$ 項和之比爲 $7n+1:4n+27$；求其第 11 項之比．

使二級數之首項及公差爲 $a_1,d_1$，及 $a_2,d_2$．

已知 $$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2}=\frac{7n+1}{4n+27}$$

茲求 $\frac{a_1+10d_1}{a_2+10d_2}$之値；故，由使 $n=21$ 得

$$\frac{2a_1+20d_1}{2a_2+20d_2}=\frac{148}{111}=\frac{4}{3},$$

故所求比爲 4:3．

例2．設首項爲 1,2,3,4,……,公差爲 1,3,5,7,……諸級數之 $n$ 項和爲 $S_1$，$S_2$，$S_3$，……$S_r$．求

$$S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_r \quad \text{之值}.$$

因知
$$S_1=\frac{n}{2}\{\,2+(n-1)\,\}=\frac{n(n+1)}{2},$$
$$S_2=\frac{n}{2}\{\,4+(n-1)3\,\}=\frac{n(3n+1)}{2}$$
$$S_3=\frac{n}{2}\{\,6+(n-1)5\,\}=\frac{n(5n+1)}{2},$$
$$Sp=\frac{n}{2}\{2p+(n-1)(2p-1)\,\}=\frac{n}{2}\{\,\overline{2p-1}\,n+1\,\};$$

∴所求和
$$=\frac{n}{2}\{\,(n+1)+(3n+1)+\cdots\cdots(\overline{2p-1.n}+1)\,\}$$
$$=\frac{n}{2}\{\,(n+3n+5n+\cdots 2\overline{p-1.n})+p\,\}$$
$$=\frac{n}{2}\{\,n(1+3+5+\cdots\overline{2p-1})+p\,\}$$
$$=\frac{n}{2}(np^2+p)$$
$$=\frac{np}{2}(np+1).$$

## 習　題　IV.b.

1．已知 $a=-2, d=4$ 及 $s=160$，求 $n$.

2．級數 12，16，20，…………中，若干項之和爲 208?

3．$A.P.$之第三項四倍其首項，其第六項爲 17；求此級數.

4．設 $A.P.$之第 2 項，第 31 項及末項爲 $7\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，及 $-6\frac{1}{2}$；求首項及項數.

5．$A.P.$ 之第 4 項，第 42 項及末項爲 0，−95，及 −125；求首項及項數.

6．某人分四十年償清其所負債務 £3600，各期償還之數適成一等差級數．設已償還 30 年後此人故去，尚有 $\frac{1}{3}$ 之債務未償，求其第一年償還若干?

7．設於和爲 $2\frac{1}{8}$之二數間插入偶數等差中項；此諸中項之和較其項數多一；問插入中項若干?

8．級數 2，5，8，……之 $n$ 項和爲 950：求 $n$.

9. 求級數 $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$ ……$n$ 項之和.

10. 設某級數 7 項和爲 49, 17 項和爲 289; 求 $n$ 項和.

11. 設 $A.P.$ 之第 $p$ 項, $q$, 項, $r$ 項爲 $a$, $b$, 及 $c$; 求證

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=o.$$

12. 設 $A.P.$ 之 $p$ 項和爲 $q$, $q$ 項和 $p$; 求 $p+q$ 項之和.

13. 成 $A.P.$ 四整數之和爲 24, 積爲 945; 求四數.

14. 分 20 爲成 $A.P.$ 之 4 部, 使首數及末數之積比第二數及第三數之積爲 2:3.

15. $A.P.$ 之第 $p$ 項爲 $q$, 第 $q$ 項爲 $p$; 求第 $m$ 項.

16. 級數 9, 12, 15……若干項之和爲 306?

17. 設 $A.P.$ $n$ 項之和爲 $2n+3n^2$, 求第 $r$ 項.

18. 設 $A.P.$ 之 $m$ 項和比 $n$ 項之和爲 $m^2$ 比 $n^2$; 求證第 $m$ 項比第 $n$ 項等於 $2m-1$ 比 $2n-1$.

19. 求證 $A.P.$ 內諸奇數項之和等於項數及中項之積.

20. 設 $s=n(5n-3)$ 被適合於 $n$ 之任何值; 求第 $p$ 項.

21. 某 $A.P.$ 之項數爲偶數, 其奇數項和爲 24, 偶數項之和爲 30. 又末項較首項大 $10\frac{1}{2}$; 求項數.

22. 今有成 $A.P.$ 之數兩組, 每組三項, 其和皆爲 15. 第一組之公差較第二組之公差大 1、第一組之積比第二組之積等於 7:8 求諸數.

33. 求 $x$, $y$ 之關係, 設欲於 $x$ 及 $2y$, 與 $2x$ 及 $y$ 間各插入 $n$ 中項. 而二者之第 $r$ 中項相同.

24. 設於 $A.P.$ 內 $p$ 項之和等於 $q$ 項之和, 求證 $p+q$ 項之和爲零.

# 第五章

## 等比級數

51. **定義.** 設諸量以常因子遞增或遞減,則謂其成**等比級數**. 如下數列卽各成一等比級數.

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \cdots\cdots\cdots$$

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots\cdots\cdots$$

此常因子又名爲公比，由任一項除以其前一項所得．上列中第一之公比爲 2；第二爲$-\frac{1}{3}$；第三爲$r$

52. 設考驗級數

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

則知任一項 $r$ 之指數較其所在之項數少一

如　　　第 3 項爲 $ar^2$;

　　　　第 6 項爲 $ar^5$;

　　　　第 20 項爲 $ar^{19}$;

及一般　第 $p$ 項爲$ar^{p-1}$

設 $n$ 表項數, $l$ 表末項或第 $n$ 項，則

$$l=ar^{n-1}$$

53. **定義.** 設三量成等比級數,則中量稱他二量之等比中項.

求二已知量間之等比中項.

使 $a,b$ 爲二已知量；$G$ 爲其等比中項.

於是因 $a$，$G$，$b$ 成 $G.P.$，

$$\frac{b}{G}=\frac{G}{a},$$

皆等於其公比；

$$\therefore G^2=ab$$

$$G=\sqrt{ab}.$$

54.　於二已知量間插入已知個等比中項.

使 $a$，$b$ 爲已知量，$n$ 爲中項之數.

則共爲 $n+2$ 項；於是求首項爲 $a$ 末項爲 $b$ 之 $n+2$ 項之等比級數.

使 $r$ 爲公比；

則
$$b=\text{第}\ (n+2)\ \text{項}$$
$$=ar^{n+1};$$

$$\therefore r^{n+1}=\frac{b}{a}$$

$$\therefore r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

故所求中項爲 $ar$，$ar^2$，$ar^3$，$\cdots\cdots ar^n$，$r$ 之値可由式(1)求得之.

例. 於 160 及 5 間插入 4 等比中項.

即求首項爲 160 第六項爲 5 之六項 $G.P$

使 $r$ 爲公比.

$$\text{於是}\ 5=\text{第六項},$$
$$=160r^5;$$

$$\therefore r^5=\frac{1}{32};$$

由是
$$r=\frac{1}{2};$$

而中項爲 80，40，20，10.

55．求等比級數若干項之和．

使 $a$ 爲首項，$r$ 爲公比，$n$ 爲項數，$s$ 爲所求之和．於是

$$s=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1};$$

以 $r$ 乘各項，

$$rs=ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-2}ar^{n-1}+ar^n.$$

由減法　$rs-s=ar^n-a$；

$$\therefore (r-1)s=a(r^n-1);$$

$$\therefore\ s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

變分子，分母之符號，

$$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

注意．　以上求 $s$ 之二公式，以均能記憶爲宜；(2) 式可用於 $r$ 爲大於 1 之正整數 外之任何情形．

因 $ar^{n-1}=l$，故公式 (1) 可寫爲

$$s=\frac{rl-a}{r-1};$$

此公式有時有用．

例．求級數 $\frac{2}{3},-1,\frac{3}{2},\cdots\cdots$ 至 7 項之和．

其公比 $=-\frac{3}{2}$；故從公式 (2)

共和

$$=\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^7\right\}}{1+\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left\{1+\frac{2187}{128}\right\}}{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2315}{128}\times\frac{2}{5}$$

$$=\frac{463}{96}.$$

56. 觀察級數 $1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\cdots\cdots\cdots\cdots$

共 $n$ 項之和
$$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$
$$=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

由上知此級數無論取若干項，共和永小於 2．又知由使 $n$ 爲充分之大量可使分數$\frac{1}{2^{n-1}}$小至適意之小．

下節討論更爲一般之情形．

57．從 55 節知 $$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$
$$=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r},$$

設 $r$ 爲眞分數；於是 $n$ 之値愈大則 $r^n$ 之値愈小，$\frac{ar^n}{1-r}$之値亦愈小．故由使 $n$ 爲充分之大量，可使此級數 $n$ 項之和與$\frac{a}{1-r}$之差小至所意欲之程度．

此結論常述爲：等比級數無窮項之和爲$\frac{a}{1-r}$；或更簡之爲：無窮項之和爲$\frac{a}{1-r}$.

例1．求和爲 19，積爲 216．成 $G.P.$ 之三數，

表三數以$\frac{a}{r}$，$a$，$ar$；於是$\frac{a}{r}\times a\times ar=216$；故$a=6$，而三數爲$\frac{6}{r}$,6,6$r$.

$$\therefore \frac{6}{r}+6+6r=19;$$

$$\therefore 6-13r+6r^2=0;$$

由是　　　$r=\frac{3}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$

故三數爲 4，6，9.

例 2. 某 $G.P.$ 無窮項之和爲 15，其平方和爲 45；求此級數.

使 $a$ 表首項，$r$ 表公比；於是無窮項之和爲 $\frac{a}{1-r}$；其平方和爲 $\frac{a^2}{1-r^2}$

故　　　$\frac{a}{1-r}=15$ ……………………(1)；

$\frac{a^2}{1-r^2}=45$ ……………………(2)；

以(1)除(2)　　　$\frac{a}{1+r}=3$. ……………………(3).

又從(1)及(3)　　　$\frac{1+r}{1-r}=5$;

由是 $r=\frac{2}{3}$，故 $a=5$.

而所求級數爲 $5, \frac{10}{3}, \frac{20}{3}$, ……………

## 習　題　V. a.

1. 求 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$, ……………………至 7 項之和.
2. 求 $-2, 2\frac{1}{2}, -3\frac{1}{8}$, ……………………至 6 項之和.
3. 求 $\frac{3}{4}$ $1\frac{1}{2}$, 3, ……………………至 8 項之和
4. 求 2，−4，8，……………………至 10 項之和.
5. 求 16.2，5.4，1.8，……………………至 7 項之和.
6. 求 1，5，25，……………………至 $p$ 項之和.
7. 求 3. −4，$\frac{16}{3}$，……………………至 $2n$ 項之和.
8. 求 1，$\sqrt{3}$，3，……………………至 12 項之和.
9. 求 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-2$, $\frac{8}{\sqrt{2}}$ ……………………至 7 項之和.

10．求 $-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{4}$，……………至 7 項之和．

11．於 $2\frac{1}{4}$ 及 $\frac{4}{9}$ 間插入 3 等比中項．

12．於 $3\frac{5}{9}$ 及 $40\frac{1}{2}$ 間插入 5 等比中項．

13．於 14 及 $-\frac{7}{64}$ 間插入 6 等比中項．

求下列級數無窮項之和：

14．$\frac{8}{5}$，$-1$，$\frac{5}{8}$，…………………

15．$\cdot 45$，$\cdot 015$，$\cdot 0005$，……………

16．1.665，$-1.11$，.74，…………

17．$3^{-1}$，$3^{-2}$，$3^{-3}$，……………

18 3，$\sqrt{3}$，1，……………

19．7，$\sqrt{42}$，6，………………

20．某 G. P. 前 6 項之和 9 倍前 3 項之和；求公比．

21．某 G. P. 之第 5 項爲 81，第 2 項爲 24；求此級數．

22．公比爲 3 之 G. P. 之和爲 728，末項爲 486；求首項．

23．某 G. P. 之首項爲 7．末項爲 448，和爲 889；求公比．

24 成 G. P. 之三數之和爲 38，積爲 1728；求三數．

25 成 G. P. 三數之連乘積爲 216，兩兩之積之和爲 156；，求三數

26．設 $S_p$ 表級數 $1+r^p+ \quad +r^{2p}+$…………無窮項之和，$s_p$ 表級數 $1-r^p+r^{2p}-$……無窮項之和．求証

$$S_p+s_p=2S_{2p}.$$

27．設某 G. P. 之第 $p$，$q$，$r$ 項爲 $a$，$b$，$c$；求証

$$a^{q-r}\,b^{r-p}\,c^{p-q}=1.$$

28 某 G. P. 無窮項之和爲 4，其立方和爲 192；求此級數．

58．循環小數供無窮等比級數以良好之示例．

例題．求 $.4\dot{2}\dot{3}$ 之值．

$$\cdot 4\dot{2}\dot{3}=.4232323\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\cdots\cdots\cdots;$$

即，
$$.4\dot{2}\dot{3}=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots\cdots\right)$$
$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}$$
$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\cdot\frac{100}{99}$$
$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{990}$$
$$=\frac{419}{990},$$

此與用算術法則求出之值相同.

59. 變任何循環為普通分數之一般法則，可由上節所用方法証明；但如下法進行較易.

求循環小數之值.

使 $P$ 表不循環之數字，設其數為 $p$ 個； 使 $Q$ 表含 $q$ 數字之循環節； $D$ 表此循環小數之值. 於是.

$$D=.PQQQ\cdots\cdots\cdots\cdots;$$
$$\therefore\ 10^p\times D=P.QQQ\cdots\cdots\cdots\cdots;$$
$$10^{p+q}\times D=PQ.QQQ\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

由減法，
$$(10^{p+q}-10^p)D=PQ-P;$$

即
$$10^p(10^q-1)D=PQ-P;$$
$$\therefore D=\frac{PQ-P}{(10^q-1)10^p}$$

玆 $10^q-1$ 為含 $q$ 九之數；故其分母為 $q$ 九隨以 $p$ 零. 故得化循環小數為普通分數之法則如下：

以含不循環及循環數字之整數，減去含不循環數字之整數為分子以循環數字數之 9 隨以不循環數字數之零為分母.

6). 求級數.

$$a,\ (a+d)r,\ (a+2d)r^2,\ (a+3d)r^3,\cdots\cdots$$

$n$ 項之和.此級數內各項,爲等差及等比兩級數相當項之積.

表其和以 $S$;於是

$$S=a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}d)r^{n-1};$$

$$\therefore rS=\qquad ar+(a+d)r^2+\cdots\cdots+(a+\overline{n-2}d)r^{n-1}+(a+\overline{n-1}d)r^n$$

由減法,

$$S(1-r)=a+(dr+dr^2+\cdots\cdots+dr^{n-1})(a+\overline{n-1}d)r^n$$

$$=a+\frac{dr(1-r^{n-1})}{1-r}-(a+\overline{n-1}d)r^n;$$

$$\therefore\quad S=\frac{a}{1-r}+\frac{dr(1-r^{n-1})}{(1-r)^2}-\frac{(a+n-1d)r^n}{1-r}$$

推論. 寫 $S$ 爲

$$\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}-\frac{dr^n}{(1-r)^2}-\frac{(a+\overline{n-1}d)r^n}{1-r}$$

之形式於是設 $r<1$,取充分之大量爲 $n$,可使 $r^n$ 小至適意之程度.在此種情形下.所有含 $r^n$ 之項,皆小至可以省略,而得 $\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$ 以代此無窮級數之和,此點將於第二十章中再論之.

求此類無窮級數之和,常以用下例方法爲最佳.

例1. 設 $x<1$,求級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots \text{至無窮項之和}.$$

使
$$S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots;$$

$$\therefore xS=\qquad x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots;$$

$$\therefore S(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x};$$

$$\therefore S=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

例 2. 求級數 $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\cdots\cdots$ 至 $n$ 項之和.

使 $$S=1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-2}{5^{n-1}};$$

$$\therefore \frac{1}{5}S=\frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-5}{5^{n-1}}+\frac{3n-2}{5^n};$$

$$\therefore \frac{4}{5}S=1+\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\cdots\cdots+\frac{3}{5^{n-1}}\right)-\frac{3n-2}{5^n}$$

$$=1+\frac{3}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{5^{n-2}}\right)-\frac{3n-2}{5^n}$$

$$=1+\frac{3}{5}\cdot\frac{1-\frac{1}{5^{n-1}}}{1-\frac{1}{5}}-\frac{3n-2}{5^n}$$

$$=1+\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)-\frac{3n-2}{5^n}$$

$$=\frac{7}{4}-\frac{12n+7}{4.5^n};$$

$$\therefore S=\frac{35}{16}-\frac{12n+7}{16.5^{n-1}}.$$

## 習 題 V.b.

1. 求級數 $1+2a+3a^2+4a^3+\cdots\cdots$ 至 $n$ 項之和.

2. 求級數 $1+\frac{3}{4}+\frac{7}{16}+\frac{15}{64}\ \frac{31}{256}+\cdots\cdots$ 無窮項之和.

3. 求級數 $1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots$ 無窮項之和;設 $x<1$.

4. 求級數 $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots\cdots$ 至 $n$ 項之和.

5. 求級數 $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots\cdots$ 無窮項之和.

6. 求級數 $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$ 無窮項之和,設 $x<1$.

7. 求證首項爲 $a$ 第三項爲 $b$ 之 G. P. 之第 $(n+1)$ 項等於首項爲 $a$ 第 5 項爲 $b$ 之 G. P. 之第 $(2n+1)$ 項.

8. 設首項爲 $a$ 公比爲 $r$ 之 G. P. $2n$ 項之和,等於首項爲 $b$ 公比爲 $r^2$ 之 G. P. $n$ 項之和,求證 $b$ 等於第一級數首兩項之和.

9. 求下列無窮級數.

$1+(1+b)r+(1+b+b^2)r^2+(1+b+b^2+b^3)r^3+\cdots\cdots\cdots$

之和，$r$ 及 $b$ 為眞分數.

10. 某成 $G.P.$ 三數之和為 70；設二外項各乘以 4,中項各乘以 5，則諸積成 $A.P.$，求三數.

11. 某 $G.P.$ 首二項之和為 5；又每項 3 倍其後諸項之和；求此級數.

求以下各級數之和：

12. $x+a,\ x^2+2a,\ x^3+3a,\cdots\cdots$至 $n$ 項.

13 $x(x+y)+x^2(x^2+y^2)+x^3(x^3+y^3)\cdots\cdots$至 $n$ 項.

14. $a+\frac{1}{3},3a-\frac{1}{6},5a+\frac{1}{12}+\cdots\cdots$至 $2p$ 項.

15. $\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\frac{2}{3^5}+\frac{3}{3^6}+\cdots\cdots$至無窮.

16. $\frac{4}{7}-\frac{5}{7^2}+\frac{4}{7^3}-\frac{5}{7^4}+\frac{4}{7^5}-\frac{5}{7^6}+\cdots\cdots$至無窮.

17. 設 $a,b,c,d$ 成 $G.P.$ 求證

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2.$$

18. 設 $a,b$ 間之等差中項二倍其等比中項；指明

$$a:b=2+\sqrt{3}:2-\sqrt{3}.$$

19. 求第 $r$ 項為 $(2r+1)2^r$ 之級數之 $n$ 項和.

20. 設某級數首項為一,其偶數項為其前一項之 $a$ 倍；奇數項為其前一項之 $b$ 倍；求此級數 $2n$ 項之和.

21. 設 $S_n$ 表首項為 $a$,公比為 $r$ 之 $G.P.$ 之 $n$ 項和，求 $S_1$, $S_3$, $S_5$, ………$S_{2n-1}$, 之和.

22. 設,$S_1,S_2,S_3\cdots S_p$表首項為1,2,3,……$p$;公比為$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ……$\frac{1}{p+1}$之無窮級數之和；求證$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_p=\frac{p}{2}(p+3)$.

23. 設 $r<1$, 且為正數, $m$ 為正整數,求證.

$$(2m+1)r^m(1-r)<1-r^{2m+1}.$$

由是指明當 $n$ 為無限大時, $nr^n$ 為無限小,

# 第　六　章

## 調和級數　關於此級數之定理

61．**定義**．$a, b, c$ 三量稱爲成**調和級數**．$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$．

任若干量被稱爲成調和級數，設其每三連續量成調和級數．

62．成調和級數諸量之倒數成等差級數．

設 $a, b, c$ 成調和級數，由定義，

$$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c};$$

$$\therefore\ a(b-c)=c(a-b),$$

除各項以 $abc$，

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a},$$

本命題由是證明．

63．調和性質因在幾何學，音學及代數學上之重要，大多使吾人深感興趣；本命題不過僅其中之一．無一般公式以求成調和級數之任若干量之和；調和級數之問題，一般皆先顚倒其各項，再利用其相當 $A.\ P.$ 之性質以解決之．

64．求二已知量間之調和中項．

使 $a,b$ 為二已知量，$H$ 為其調和中項，

於是 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{H}$，$\frac{1}{b}$ 成 $A$，$P$．；

$$\therefore \frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H},$$

$$\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

$$H=\frac{3ab}{a+b}.$$

例．於7及 $\frac{1}{6}$ 間插入40 個調和中項．

於此 6 為以 $\frac{1}{7}$ 為首項之 $A$．$P$．之第 42 項；使 $d$ 為公差，於是

$$6=\frac{1}{7}+41d;\quad d=\frac{1}{7}.$$

故其等差中項為 $\frac{2}{7}$，$\frac{3}{7}$，………$\frac{41}{7}$；由是其調和中項為 $3\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{3}$，………$\frac{7}{41}$．

65．設 $A$，$G$，$H$ 為 $a,b$ 間之等差，等比及調和中項，前已證明

$$A=\frac{a+b}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$G=\sqrt{ab}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$H=\frac{2ab}{a+b}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由是 $$AH=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2;$$

即，$G$ 為$AH$ 間之等比中項．

由此結果知

$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2}}\right)^2;$$

設 $a,b$ 爲正量，則此亦爲正；由是知任何二正量之等差中項，大於其等比中項.

又由方程式 $G^2=AH$，知 $G$ 爲 $A$，$H$ 之中間值；且已証明 $A>G$，故 $G>H$；則任何二正量間之等差，等比及調和中項，成遞減之順序.

66　級數雜題與吾人以運用技巧及機智之機會，問題之解决常由某種特殊方法，敏速成就．學者將知下列提示之有用．

1．設 $A.P.$ 之所用項加以或減以同量，其結果仍成 $A.P$，其公差與前同．[§38.]

2．設 $A.P.$ 之所有項乘以或除以同量，其結果仍成 $A.P$，但公差與前不同.

3．設 $G.P.$ 之所有項，如乘以同量，或除以同量，則仍爲 $G.P$，且與原 $G.P.$ 同公比．[§51]

4．設 $a,b,c,d,\cdots$ 成 $G.P.$ 則亦成分比例因由定義得

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots=\frac{1}{r}.$$

反之，成連分數之諸量亦可表以 $x,xr,xr^2,\cdots\cdots\cdots\cdots$

例 1．設 $a^2,b^2,c^2$ 成 $A.P.$；指明 $b+c,c+a,a+b$，成 $H.P.$

由加 $ab+ac+bc$ 於各項，知

$$a^2+ab+ac+bc,b^2+ba+bc+ac,c^2+ca+cb+ab\text{ 亦成 }A.P.$$

即　$(a+b)(a+c),(b+c)(b+a),(c+a)(c+b)$ 成 $A.P.$

故除各項以 $(a+b)(b+c)(c+a)$，得

$$\frac{1}{b+c},\quad\frac{1}{c+a},\quad\frac{1}{a+b}\text{ 成 }A.P.$$

則　　$b+c,c+a,a+b$ 成 $H.P.$

$H.H.A.$

例 2. 設 $l$ 爲某 $A.P.$ 之末項，$d$ 爲其公差，$s$ 爲其 $n$ 項和，且以方程式 $8ds=(d+2l)^2$ 相關係，求証 $d=2a$.

因已知關係於任若干項皆眞，使 $n=1$；於是

$$a=l=s,$$

故由代入法，　　$8ad=(d+2a)^2$，

或　　$-p)a2A)^2=0$；

$$\therefore d=2a.$$

例 3. 設某 $A.P.$ 之第 $p,q,r,s$ 項成 $G.P.$，指明 $p-q, q-r$, $-s$ 亦成 $G.P.$

用常用表示法，得

$$\frac{a+(p-1)d}{a+(q-1)d}=\frac{a+(q-1)d}{a+(r-1)d}=\frac{a+(r-1)d}{a+(s-1)d}\qquad[\S 66.(4)];$$

∴各項

$$=\frac{\{a+(p-1)d\}-\{a+(q-1)d\}}{\{a+(q-1)d\}-\{a+(r-1)d\}}$$

$$=\frac{\{a+(q-1)d\}-\{a+(r-1)d\}}{\{a+(r-1)d\}-\{a+(s-1)d\}}$$

$$=\frac{p-q}{q-r}=\frac{q-r}{r-s}.$$

故 $p-q, q-r, r-s$ 成 $G.P.$

67. 1,2,3,……諸數常被指爲自然數，其第 $n$ 項爲 $n$，其前 $n$ 項之和爲 $\frac{n}{2}(n+1)$.

68. 求首 $n$ 自然數之平方和.

使此和表以 $S$；於是

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2.$$

已知　　$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$；

以 $n-1$ 代 $n$，

$$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-1)^2-3(n-1)+1;$$

同法，$(n-2)^3-(n-3)^3=3(n-2)^2-3(n-2)+1$；

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3^3-2^3=3.3^2-3.3+1;$$

$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1;$$

$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1.$$

故由加法，

$$n^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-3(1+2+3\cdots+n)+n$$
$$=3\ S-\frac{3n(n+1)}{2}+n.$$

$$\therefore 3S=n^3-n+\frac{3n(n+1)}{2}$$
$$=n(n+1)(n-1+\tfrac{3}{2});$$
$$\therefore S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

69．求首 $n$ 自然數之立方和．

使其和表以 $S$；於是

$$S=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3.$$

已知　$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$；

$$(n-1)^4-(n-2)^4=4(n-1)^3-6(n-1)^2+4(n-1)-1;$$
$$(n-2)^4-(n-3)^4=4(n-2)^3-6(n-2)^2+4(n-2)-1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1;$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1;$$
$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1.$$

故，由加法，

$$n^4=4S-C(1^2+2^2+\cdots+n^2)+4(1+2+\cdots+n)-n;$$
$$\therefore 4S=n^4+n+6(1^2+2^2+\cdots+n^2)-4(1+2+\cdots+n)$$
$$=n^4+n+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$
$$=n(n+1)(n^2-n+1+2n+1-2)$$
$$=n(n+1)(n^2+n);$$
$$\therefore S=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

故首 $n$ 自然數之立方和，等於首 $n$ 自然數和之平方．

本節及前兩節之公式，可用以求級數

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots\cdots$$

之平方和及立方和．

70．於表示適証結果時，以引入一新符號爲宜；此符號讀者將常見於高級數學中，茲案級數

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots+n \text{ 以 } \Sigma n;$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 \text{ 以 } \Sigma n^2;$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3 \text{ 以 } \Sigma n^3;$$

$\Sigma$ 置於某項之前，卽表示以此項爲範式之所有項之和．

例1．求級數 $1.2+2.3+3.4\cdots\cdots$ 至 $n$ 項之和．

其第 $n$ 項$=n(n+1)=n^2+n$；由寫各項以相似之形式可得兩列，一含首 $n$ 自然數，一含其平方數．

$$\begin{aligned}\therefore \text{其和}&=\Sigma n^2+\Sigma n\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.\end{aligned}$$

例2．求 $n$ 項爲 $2^{n-1}+8n^3-6n^2$ 之級數之 $n$ 項和．

使 $S$ 表其和，於是

$$\begin{aligned}S&=\Sigma 2^{n-1}+8\Sigma n^3-6\Sigma n^2\\&=\frac{2^n-1}{2-1}+\frac{8n^2(n+1)^2}{4}-\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=2^n-1+n(n+1)\{2n(n+1)-(2n+1)\}\\&=2^n-1+n(n+1)(2n^2-1).\end{aligned}$$

## 習 題 VI.a.

1． 求以下各級數之第四項：

(1) $2,\ 2\frac{1}{4},\ 3\frac{1}{3},\cdots\cdots$

(2) $2,\ 2\frac{1}{2},\ 3,\cdots\cdots$

(3) $2,\ 2\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{3}.\cdots\cdots$

2． 於 5 及 11 間插入二調和中項．

3． 於$\frac{2}{3}$及$\frac{2}{13}$間插入四調和中項．

4．設 12 及 $9\frac{3}{5}$ 爲二數間之等比及調和中項；求二數．

5．設二量間之調和中項比等比中項爲 12 比 13；求証此二量之比爲 4 比 9．

6．設 $a$，$b$，$c$ 成 $H.P.$ 指明

$$a:a-b=a+c:a-c.$$

7．設某 $H.P.$ 之第 $m$ 項爲 $n$，第 $n$ 項爲 $m$；求証其第 $m+n$ 項等於 $\frac{mn}{m+n}$．

8．設某 $H.P.$ 之第 $p,q,r$ 項爲 $a,b,c$；求証

$$(q-r)bc+(r-p)ca+(p-q)ab=o.$$

9．設 $b$ 爲 $a,c$ 間之調和中項，求証

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

求級數之 $n$ 項和，設其第 $n$ 項爲

10．$3n^2-n$．　11．$n^3+\frac{3}{2}n$．　12．$n(n+2)$．

13．$n^2(2n+3)$．　14．$3^n-2^n$．　15．$3(4^n-2n^2)-4n^3$．

16．設某 $A.P.$ 之第 $(m+1)$，$(n+1)$ 及 $(r+1)$ 成 $G.P.$ 及 $m$，$n$，$r$ 成 $H.P.$；指明 $A.P.$ 之公差比首項爲 $-\frac{2}{n}$．

17．設 $l,m,n$ 爲成 $G.P.$ 之三數，求証第 $l,m,n$ 項成 $H.P.$ 之 $A.P.$ 之首項比公差等於 $m+1$ 比 1．

18．設某級數 $n$ 項之和爲 $a+bn+cn^2$；求第 $n$ 項及此級數之性質．

19．求級數 $n$ 項之和，設其第 $n$ 項爲

$$4n(n^2+1)-(6n^2+1).$$

20．設於任二量間，插入二等差中項 $A_1$，$A_2$；二等比中項 $G_1$，$G_2$；二調和中項 $H_1$，$H_2$；試指明 $G_1G_2:H_1H_2=A_1+A_2:H_1+H_2$

21．設 $p$ 爲二數間 $n$ 等差中項之第一中項，$q$ 爲 $n$ 調和中項之第一中項；求証 $q$ 值不能在 $p$ 及 $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2p$ 之間．

22．求某 $A.P.$ 諸項之立方和；且指明其能爲諸項之和除盡．

## 彈 積

71．求底爲正方形之完全角錐體彈積之彈數．

設底之每邊含子彈 $n$ 粒；則底層之彈數爲 $n^2$，上一層爲 $(n-1)^2$，再上一層爲 $(n-2)^2$；類推；至其頂則爲一粒．

$$\therefore S=n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+1$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad [\S 68.]$$

72．求底爲正三角形之完全角錐體彈積之彈數．

設底之每邊含 $n$ 彈數；則最下層之彈數爲

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+1;$$

即 $$\frac{n(n+1)}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2}(n^2+n).$$

於上結果內，以 $n-1$，$n-2$，……．代 $n$，則得第 $2,3,\cdots\cdots$層之彈數

$$\therefore S=\frac{1}{2}(\Sigma n^2+\Sigma n)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

73．求底爲矩形之完全角錐體彈積之彈數．

使 $m$ 及 $n$ 表底之長邊及短邊之彈數；

其最上層爲含 $m-(n-1)$，或 $m-n+1$ 彈之一行．

下一層之彈數爲 $2(m-n+2)$；

再下一層之彈數爲 $3(m-n+3)$；

類推；

最下層之彈數爲 $n(m-n+n)$．

$$\therefore S=(m-n+1)+2(m-n+2)+3(m-n+3)+\cdots+n(m-n+n)$$
$$=(m-n)(1+2+3+\cdots+n)+(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$
$$=\frac{(m-n)n(+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)}{6}\{3(m-n)+2n+1\}$$
$$=\frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$$

74．求不完全角錐體彈積之彈數，設其底層爲矩形．

使 $a$ 及 $b$ 表頂層二邊之彈數，$n$ 表層數，則

頂層之彈數爲 $ab$；

次層之彈數爲 $(a+1)(b+1)$；

又次層之彈數爲 $(a+2)(b+2)$；

類推；

其最下層之彈數爲 $a(+\overline{n-1})(b+\overline{n-1})$．

或
$$ab+(a+b)(n-1)+(n-1)^2$$
$$\therefore S=abn+(a+b)\Sigma(n-1)+\Sigma(n-1)^2$$
$$=abn+\frac{(n-1)n(a+b)}{2}+\frac{(n-1)n(2\overline{n-1}+1)}{6}$$
$$=\frac{n}{6}\{6ab+3(a+b)(n-1)+(n-1)(2n-1)\}.$$

75．解決數字習題以用下法較易，

例．求 16 層不完全正方形彈積之彈數，設其上層每邊爲 12粒．

設於上層置以底邊爲 11 之正方形之彈積，則得一、27層之完全彈積；

此完全彈積之彈數$=\frac{27\times85\times55}{6}=6930$；　　[§71.]

後置彈積之彈數　$=\frac{11\times12\times23}{6}=506$；

$\therefore$不完全彈積之彈數$=6424$．

## 習　題　VI. b.

求以下各彈積之彈數：

1. 每底邊含 15 彈之正方形彈積.

2. 每底邊 18 彈之三角形彈積.

3. 底之長及寬含 50 粒及 28 粒之矩形彈積.

4. 底層每邊 25 粒，上層每邊 14 粒之不完全正三角形彈積.

5. 27 層每底邊為 40 粒之不完全正方形彈積.

6. 一完全矩形彈積之彈數為 24395；設底邊之寬為 34 粒. 求底長邊之彈數若干.

7. 正方彈積，頂層之彈數為 169，底層為 1089； 此彈積有彈數若干？

8. 求完全矩形彈積之彈數，設其層數為 15， 底之長邊為 20粒.

9. 求不完全矩形彈積之彈數，設其上層長短邊之彈數為 11 及 18，及底層短邊為 30.

10. 問用彈若干，適能補足上層之長邊之彈數為15，短邊為 6 之不完全矩形彈積？

11. 三角形彈積之彈數較同層數之正方形彈積彈數之半多 150；求三角形彈積底層之彈數.

12. 求不完全正方形彈積之彈數；設其最頂層之彈數較底層少1005粒.

13. 求證正方形彈積之彈數，為二倍其層數之三角形彈積彈數之四分之一.

14. 設三角彈積與二倍其層數之正方彈積，彈數之比為13比 175. 求二彈積之彈數各若干？

15. 重16 *lb*三角形彈積之彈為 £51 ；設每*cwt* 鐵之價值為 10*s* 6*d*，求最下層之彈數.

16. 設取 *n*層完全正方形彈積之彈，築一同層數之三角形彈積；指明所餘之子彈，適足築另一三角形彈積，並求其一邊之彈數.

# 第七章

## 進位法

76. 算術中習見之常用數，皆表以 10 之乘冪之倍數；

例如 $$25=2\times10+5;$$

$$4705=4\times10^3+7\times10^2+0\times10+5.$$

此種表數法稱爲**常用或十進法**．十稱爲此進法之**基數**．其所用符號爲九數字及零．

同理，10 外任何數皆可作爲進位法之基數；如以 7 爲基數，則 2453 所表之數爲 $2\times7^3+4\times7^2+5\times7+3$；在此種進法內，不能有大於 6 之數字．

又如進位法之根爲 $r$，則上數 2453 代表 $2\times r^3+4\times r^2+5\times r+3$．一般言之，設進位法之基數爲 $r$；$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 爲由個位起之數字；則由此作成之數可表以

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+a_{n-2}r^{n-2}+\cdots\cdots+a_2r^2+a_1r+a_0,$$

係數 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots\cdots\cdots a_0$ 爲小於 $r$ 之整數，其第一後之任一或一以上皆可爲零．

故此進位法中所用數字，爲由 0 至 $r-1$ 之 $r$ 個數字．

77. 名詞二進法，三進法，四進法，五進法，六進法，七進法，八進法，九進法，十進法，十一進法，十二進法，爲表示以二，三，………十二爲基數之進位法．

於十一進法，十二進法，………內需要符號以表大於九之數字．基數大於十二之進位法甚屬少見；必需時可以 $e, t$ 及 $T$ 爲表十，十一，及十二．之數字．

10 在任何進位法中非表十，乃表其基數自身之符號，此點甚值注意．

78．算術常用算法，可以任何進位法施行；但須切記基數連續乘器不復爲十之乘器；進位數之決定亦除以所用進法之基數而非以十除．

例 1．用八進法從 530225 減 371532．且乘其差以 27．

$$\begin{array}{r} 530225 \\ 371532 \\ \hline 136473 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 136473 \\ 27 \\ \hline 1226235 \\ 275166\phantom{0} \\ \hline 4200115 \end{array}$$

註．於減法之第一數字後，因不能從 2 減 3，故加 8；故由10減 3，餘 7；又由 10 減 6 餘 4；由 8 減 2 餘 6；餘類推．

又乘以 7 得

$$3\times 7=\text{二十一}=2\times 8+5;$$

故進 2 餘 5．

其次　　$7\times 7+2=\text{五十一}=6\times 8+3;$

進 6 餘 3；餘類推，迄乘法完成止．

相加

$$3+6=\text{九}=1\times 8+1;$$

於是進 1 餘 1．

同法　　$2+6+1=\text{九}=1\times 8+1;$

及　　$6+1+1=\text{八}=1\times 8+0;$

例．2．用 12 進法除 $15et20$ 以 9．

$$\begin{array}{r} 9\underline{)15et20} \\ 1ee96\cdots 6. \end{array}$$

註．因 $15=1\times T+5=\text{十七}=1\times 9+8,$

故商 1 餘 8．

又 $8\times T+e=\text{一百零七}=e\times 9+8;$

故商 $e$ 餘 8；餘類推．

例3. 用七進法求 44264 之平方根.

```
         ·  ·  ·
         442641(546.
         34
     134|1026
        | 602
    1416|12441
        |12441
```

## 習　題　VII.a.

1. 用五進法求 23241, 4032, 300421 之和.
2. 求九進數 303478, 150732, 264305 之和.
3. 用八進法由 3673124 減 1732765.
4. 用八進法由 3$te$756 取 2$e$46$t$2.
5. 用六進法除 1131315及 235143 之差以 4.
6. 用七進法乘 6431 以 35.
7. 求九進數 4585, 3483 之積.
8. 用七進法除 102432 以 36.
9. 用三進法減 121012 從 11022201, 且除其結果以 1201.
10. 用五進法求 300114 之平方根.
11. 用十一進法求 $tttt$ 之平方根.
12. 用七進法求 2541 及 3102 之 $G.C.M$.
13. 用七進法除 14332215 以 6541,
14. 用八進法從 10305 301 減 20404020, 且求其結果之平方根.
15. 用十二進法求 $eet$001 之平方根.
16. 以下爲六進數, 勿化爲十進數, 以常用法則求:

    (1) 31141 及 3102 之 $G.C.M$.

    (2) 23,24,30,32,40,41,43,50 之 $L.C.M$.

79. 用任何指定進法表已知整數.

使 $N$ 爲已知數, $r$ 爲指定進法之基數.

使 $a_0$, $a_1$, $a_2$,……$a_n$ 爲表 $N$ 從個位起所用之數字; 於是

$$N=a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_2r^2+a_1r+a_0.$$

茲求 $a_0$, $a_1$, $a_2$, $\cdots a_n$ 之値.

除 $N$ 以 $r$，則除數爲 $a_0$，商爲

$$a_nr^{n-1}+a_{n-1}r^{n-2}+\cdots\cdots+a_2r+a_1.$$

設此商除以 $r$，則除數爲 $a_1$；

設次商………………………… $a_2$；

依此進行，至不能再商止.

故所有 $a_0, a_1$, $a_2\cdots\cdots\cdots a_n$ 之値.皆可由陸續除以指定進法之基數決定.

例1. 以七進法表十進數 5213.

$$\begin{array}{r l}
7\underline{)5213} & \\
7\underline{)744} & \cdots\cdots 5\\
7\underline{)106} & \cdots\cdots 2\\
7\underline{)15} & \cdots\cdots 1\\
2 & \cdots\cdots 1
\end{array}$$

故 $5213=2\times7^4+1\times7^3+1\times7^2+2\times7+5$；

而所求數爲 21125.

例2. 化七進數 21125 爲十一進數，

$$\begin{array}{r l}
e\underline{)21125} & \\
e\underline{)1244} & \cdots\cdots t\\
e\underline{)61} & \cdots\cdots 0\\
3 & \cdots\cdots t
\end{array}$$

故所求數爲 $3t0t$.

註. 在演算之第一層

$$21=2\times7+1=\text{十五}=1\times e+4.$$

故以 $e$ 除，商 1 餘 4.

其次 $4\times7+1=$ 二十九 $=2\times e+7$.

故商 2 餘 7；依此類推.

例3. 用十進位法化十二進數 7215 爲十進數；再以十二進法化之以証其確否.

由十進法

$$\begin{array}{r}
7215\\
12\\
\hline
86\\
12\\
\hline
1033\\
12\\
\hline
12401
\end{array}$$

由十二進法.

$$\begin{array}{r l}
t\underline{)7215} & \\
t\underline{)874} & \cdots\cdots 1\\
t\underline{)t4} & \cdots\cdots 0\\
t\underline{)10} & \cdots\cdots 4\\
1 & \cdots\cdots 2
\end{array}$$

故二法皆得 12401.

註. 十二進數 7215 表十進數 $7\times12^3+2\times12^2+1\times12+5$，寫此式爲 $[\{(7\times12+2)\}\times12+1]\times12+5$ 之形式，最易計算；由是以 12 乘 7，於其積加 2；又以 12 乘 86 於其積加 1；又以 12 乘 1033 於其積加 5.

80．以前討論僅關於整數，但分數亦可以任何進位法表之；如

$.25$ 於十進法表 $\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2}$；

$.25$ 於六進法表 $\frac{2}{6}+\frac{5}{6^2}$；

$.25$ 於 $r$ 進法表 $\frac{2}{r}+\frac{5}{r^2}$．

以類似常用十進分數之形式所表之分數，稱爲**基分數**．其點稱爲**基點**．在 $r$ 進法此種分數之一般之總式爲；

$$\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r^2}+\frac{b_3}{r^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$b_1$，$b_2$，$b_3$，……，爲小於 $r$ 之整數，其中之任一或一以上可以爲零．

81．用任何進法表已知基分數．

設 $F$ 爲已知分數，$r$ 爲指定進法之基數．

使 $b_1$，$b_2$，$b_3$……爲由左起所求諸數字；於是

$$F=\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r^2}+\frac{b_3}{r^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

茲求 $b_1$，$b_2$，$b_3$…………之值．

以 $r$ 乘方程式之左右；得

$$rF=b_1+\frac{b_2}{r}+\frac{b_3}{r^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

故 $b_1$ 等於 $rF$ 之整數部分；設表其分數部份以 $F_1$；則得

$$F_1=\frac{b_2}{r}+\frac{b_3}{r^2}+\cdots\cdots\cdots$$

再乘以 $r$；則如前，$b_2$ 爲 $F_1$ 之整數部份；同法陸續乘以 $r$，則各數字皆可求得，而此分數即可表以指定之進法．

設陸續乘以 $r$，所得任一積皆為整數則演算即止於此步，而已知分數可表以限定數數字，但設乘積無一為整數，則此演算永無終結．於此種情形下則數字循環，成類似循環小數之基分數．

例1．表 $\frac{13}{16}$ 以六進法之基分數，

$$\frac{13}{16}\times 6=\frac{13\times 3}{8}=4+\frac{7}{8};$$

$$\frac{7}{8}\times 6=\frac{7\times 3}{4}=5+\frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{4}\times 6=\frac{1\times 3}{2}=1+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\times 6=3.$$

$$\therefore\text{所求分數}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{3}{6^4}$$

$$=.4513.$$

例 2．變八進數 16064.24 為五進數．

整數部分及小數部分必須分別處理之．

$$\begin{array}{r|l}
5 & 16064 \\
\hline
5 & 2644\cdots 0 \\
\hline
5 & 440\cdots 4 \\
\hline
5 & 71\cdots 3 \\
\hline
5 & 13\cdots 2 \\
\hline
 & 2\cdots 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
.24 \\
5 \\
\hline
1.44 \\
5 \\
\hline
2.64 \\
5 \\
\hline
4.04 \\
5 \\
\hline
0.24
\end{array}$$

小數部分於此後循環，故所求數為 $212340.\dot{1}24\dot{0}$

82．於以 $r$ 為基數之任何進位法內，任何整數之數字和除以 $r-1$ 與此數除以 $r-1$ 所得之餘數相等．

使 $N$ 表此數，$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 為由個位起之數字，$S$ 表此數所含數字之和，於是

$$N=a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}r^{n-1}+a_nr^n;$$

$$S=a_0+a_1+a_2\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$$

$$\therefore N-S=a_1(r-1)+a_2(r^2-1)+\cdots\cdots+a_{n-1}(r^{n-1}-1)+a_n(r^n-1).$$

茲右方各項皆除以 $r-1$;

$$\therefore \qquad \frac{N-S}{r-1}=\text{整數};$$

即 $$\frac{N}{r-1}=I+\frac{S}{r-1},$$

$I$ 爲某整數; 而本命題由是証明.

因此知 $r$ 進法之某數, 設其數字之和能被 $r-1$ 除盡, 則某數亦可被 $r-1$ 除盡.

83. 由上命題知設使 $r=10$, 則某數除以 9 與其數字和除以 9 所得之除數相等. 考験乘法確否之"棄 9 法"倒即基於此種性質.

此法則可如下說明:

使 $9a+b$ 及 $9c+d$ 表二數, $P$ 表其積; 於是

$$P=81ac+9bc+9ad+bd.$$

故 $\frac{p}{9}$ 之除數與 $\frac{bd}{9}$ 之除數相等; 由是 $p$ 所含數字和除以 9 所得之除數, 與 $bd$ 所含數字和除以 9 所得之除數相等. 設試驗結果與此種情形不同, 則此乘法之演算必不正確. 演算時 $bd$ 可由二數之數字和相乘而得.

例. 31256 及 8427 之積能否爲 263395312?

被乘數, 乘數及積之數字和爲 17,21, 及 34; 又此三數之數字和爲 8,3 及 7, 由是 $bd=8\times3=24$, 其數字和爲 6; 故得 6 及 7 二不同除數, 故此乘法演算爲不正確.

84. 設 $N$ 表 $r$ 進法之任一數, $D$ 表其奇位數字和與偶位數字和之差, 設其爲正數; 於是則 $N-D$ 或 $N+D$ 爲 $r-1$ 之倍數.

使 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots\cdots a_n$ 表從個位起之數字；於是

$$N = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots\cdots\cdots + a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n.$$

$$\therefore N - a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \cdots\cdots = a_1(r+1) + a_2(r^2-1) + a_3(r^3+1) + \cdots;$$

依 $n$ 爲奇數或偶數，其末項爲 $a_n(r^n+1)$ 或 $a_n(r^n-1)$. 故右方各項皆可以 $r+1$ 除盡；由是

$$\frac{N-(a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots\cdots\cdots)}{r+1} = \text{整數}.$$

因 $$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots\cdots\cdots = \pm D.$$

$$\therefore \frac{N \mp D}{r+1} \text{ 爲整數};$$

本命題由是証明.

推論. 設奇位數字和等於偶位數字和，則 $D=O$，而 $N$ 可爲 $r+1$ 除盡.

例 1. 求証 4.41 於基數大於 4 之任何進法中皆爲完全平方數.

使 $r$ 爲基數；於是

$$4.41 = 4 + \frac{4}{r} + \frac{1}{r^2} = \left(2 + \frac{1}{r}\right)^2;$$

故已知數爲 2.1 之平方.

例 2. 以何進位法表十進數 2.4375 以 2.13?

使 $r$ 爲進法；於是

$$2 + \frac{1}{r} + \frac{3}{r^2} = 2.4375 = 2\frac{7}{16},$$

由是 $$7r^2 - 16r - 48 = 0;$$
$$(7r+12)(r-4) = 0.$$

故其基數爲 4.

有時用以下方法最佳.

例 3. 以何進法表九進數 25607 以 101215?

因新數表現較原數爲大，所求進法必小於9，又必大於 5；故所求進法必爲 6,7 或 8；由試驗知其爲 7.

例4.　用十二進法求矩形立體之高，設其體積爲 364 立方呎，1048 立方吋，其底面積爲 46 平方呎 8 平方吋.

其體積爲 $364\frac{1048}{1728}$立方呎，表以十二進法則爲 264.734 立方呎.

底面積爲 46 $\frac{8}{144}$方吋表以十二進法則爲 3*t*.08. 方吋.

於是用十二進位法以 3*t*.08 除 264.734.

```
3t08)26473.4(7
      22t48
      36274
      36274
```

故其高爲 7 呎 11 吋.

## 習　　題　　VII. b.

1. 以七進法表 4954.
2. 以五進法表 624.
3. 以二進法表 206.
4. 以三進法表 1458.
5. 以九之羃數表 5381.
6. 變四進數 212231 爲五進數.
7. 以 10 之羃數表十二進數 398*e*.
8. 變十二進數 6*t*12 爲十一進數.
9. 變六進數 213014 爲九進數.
10. 變九進數 23861 爲八進位數.
11. 變九進數 400803 爲五進位數.
12. 以 12 之羃數表七進數 20665152.
13. 變十二進數 *ttee* 爲常用進數.
14. 表$\frac{3}{10}$以七進法之恭分數.
15. 變十進數 17.15625 爲十二進數.
16. 變三進數 200.211 爲九進數.
17. 變十二進數 71.03 爲八進數.
18. 以十最進簡分數表七進分數 $\frac{1552}{2626}$.
19. 求七進數 $.\dot{4}$ 及 $.\dot{4}\dot{2}$ 之十進法之値.
20. 於何進法內十進數182　表以 222?
21. 於何進法內十進分數$\frac{25}{128}$ 表以 .0302.

22. 求 554 表 24 之平方之進法基數.

23. 於何進法內以 1746335 表 511197?

24. 求進法基數,設其所表 479,698,907 三數成等差級數.

25. 在何種進位法中，基分數 .16,.20,.28 成等比級數.

26. 六進數 212542 以何進法表之爲 17486.

27. 指明 148.84 在基數大於八之任何進法內皆爲完全平方數.

28. 指明 1234321 在大基數於4 之任何進法內皆爲完全平方;且其平方根永表以相同四數字.

29. 求証 1.331 在大基數於三之任何進法內皆爲完全立方.

30. 在 1,2,4,8,16,……磅之砝碼中;何者可用以權一噸之重量?

31. 求必須用 1, 3, 9, 27, 81, ……磅砝碼中之何者以權萬磅之重，除某進法爲必需外，每種砝碼只准用一.

32. 指明 1367631在基數大於七之任何進法內皆爲完全立方數.

33. 求証設十進數之末三數字所成數可以 8 除盡，則此數能爲8除盡.

34. 求証 $s$ 進數 $rrrr$ 之平方爲 $rrrq0001$; $q$, $r$, $s$ 爲任意之三連續數.

35. 設使任一數 $N$ 爲 $r$ 進一數， $N'$ 爲任意顚倒 $N$ 內數字次序所成之數. 求証 $N$ 及 $N'$ 之差，能被 $r-1$ 除盡.

35. 設一數含有偶數個數字，且距端相等遠之數字皆相等，則此數可以 $r+1$ 除盡.

37. 設於常進法內 $S_1$ 爲數 $N$ 之數字和，$3S_2$ 爲數 $3N$ 之數字和. 求証 $S_1$ 與 $S_2$ 之差，爲 3 之倍數.

38. 求証於常進法內任寫三數字,復依次重複之,所成之任何數爲 7,11 及 13 之倍數.

39. 奇基數進法之任何數如爲奇數，則其數字和爲奇數; 爲偶數則其數字和爲偶數.

40. 設 $n$爲奇數,任意寫$n$ 數字,復依次重複之,所成之十進數,指明其可以此 $n$ 數字所成之數除盡; 亦可以 9090……9091 含 $n-1$數字之數除盡.

# 第　八　章

## 不　盡　根　及　虛　量

85．初級代數 §272 曾證明形為 $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ 之任何分式之分母，皆能由以其共軛式乘分子，分母以使之有理化．

同法，形為 $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ 之分式之含三不盡根之分母，亦可由兩步演算使之有理化．

因，先以 $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}$ 乘分子，分母；化分母為$(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-(\sqrt{d})^2$ 或 $b+c-d+2\sqrt{bc}$，再以$(b+c-d)-2\sqrt{bc}$ 乘分母，分子；則分母化為有理式$(b+c-d)^2-4bc$．

例．　化簡　$\dfrac{12}{3+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$．

原式

$$=\frac{12(3-\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{(3+\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{12(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{6+6\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{2}$$

$$=1+\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}.$$

86. 求有理化任何已知二項不盡根之因式.

情形 I. 設已知不盡根爲 $\sqrt[p]{a}-\sqrt[q]{b}$.

使 $\sqrt[p]{a}=x, \sqrt[q]{b}=y$ 及 $n$ 爲 $p$ 及 $q$ 之 $L.C.M$. 則 $x^n$ 及 $y^n$ 皆爲有理;茲 $x^n-y^n$ 不論 $n$ 爲何值皆可以 $x-y$ 除盡,及

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}x^{n-3}y^2+\cdots\cdots+y^{n-1})$$

故所求有理化因式爲

$$x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+y^{n-1}.$$

及有理積爲 $x^n-y^n$.

情形 II. 設已知不盡根爲 $\sqrt[p]{a}+\sqrt[q]{b}$.

使 $x, y$ 及 $n$ 之意義如前;於是

(1) 設 $n$ 爲偶數,則 $x^n-y^n$ 可以 $x+y$ 除盡,及

$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1})$$

故其有理化因子爲

$$x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots\cdots\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1}.$$

其有理積爲 $x^n-y^n$.

(2) 設 $n$ 爲奇數,則 $x^n+y^n$ 可以 $x+y$ 除盡.

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1}).$$

故有理化因子爲

$$x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots\cdots\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1}.$$

其有理積爲 $x^n+y^n$.

例 1. 求有理化 $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$ 之因子.

使 $x=3^{\frac{1}{2}}, y=5^{\frac{1}{3}}$;於是 $x^6$ 及 $y^6$ 皆爲有理,又

$$x^6-y^6=(x+y)(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5);$$

以 $3^{\frac{1}{2}}$ 及 $5^{\frac{1}{3}}$ 代 $x$ 及 $y$,則所求因子爲

$$3^{\frac{5}{2}}-3^{\frac{4}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{3}{2}}\cdot5^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{2}{2}}\cdot5^{\frac{3}{3}}+3^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{4}{3}}-5^{\frac{5}{3}},$$

或 $$3^{\frac{5}{2}}-9\cdot5^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{3}{2}}\cdot5^{\frac{2}{3}}-15+3^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{4}{3}}-5^{\frac{5}{3}};$$

其有理積爲 $3^{\frac{6}{2}}-5^{\frac{6}{3}}=3^3-5^2=2$.

例2. 以有理分母之同值分數表$\left(5^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{1}{8}}\right)\div\left(5^{\frac{1}{2}}-9^{\frac{1}{8}}\right)$

有理化分母 $5^{\frac{1}{2}}-9^{\frac{1}{4}}$，使 $5^{\frac{1}{2}}=x$，$3^{\frac{1}{4}}=y$；於是
因 $x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$

故所求因子爲 $5^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{2}{2}}.3^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{2}{4}}+3^{\frac{3}{4}}$；

其有理分母爲 $5^{\frac{4}{2}}-3^{\frac{4}{4}}=5^2-3=22$

$$\therefore \text{原式} =\frac{\left(5^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{4}}\right)\left(5^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{2}{2}}.3^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{2}{4}}+3^{\frac{3}{4}}\right)}{22}$$

$$=\frac{5^{\frac{4}{2}}+2.5^{\frac{3}{2}}.3^{\frac{1}{4}}+2.5^{\frac{2}{2}}.3^{\frac{2}{4}}+2\ 5^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{3}{4}}+3^{\frac{4}{4}}}{22}$$

$$=\frac{14+5^{\frac{3}{2}}.3^{\frac{1}{4}}+5.3^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{3}{4}}}{11}.$$

87. 初等代數第 277 節曾指示如何求二次二項不盡根之方平根. 有時可求含二或二以上不盡根之式，如 $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 之平方根.

假定 $\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$；

$\therefore a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$.

於是設 $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}, 2\sqrt{xz}=\sqrt{c}, 2\sqrt{yx}=\sqrt{d}$，

同時又設如是求得 $x, y, z$之值從適合$x+y+z=a$則得所求之根.

例. 求 $21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}$ 之平方根.

假定 $\sqrt{21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$；

$\therefore 21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}$.

$$2\sqrt{xy}=8\sqrt{3}, 2\sqrt{xz}=4\sqrt{15}, 2\sqrt{yz}=4\sqrt{5}:$$

由乘法使 $xyz=240$；即 $\sqrt{xyz}=4\sqrt{15}$；

由是得 $\sqrt{x}=2\sqrt{3}, \sqrt{y}=2, \sqrt{z}=\sqrt{5}$.

又因諸值適合方程式 $x+y+z=21$，故所求之平方根爲 $2\sqrt{3}+2-\sqrt{5}$.

88. 設 $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}$，則 $\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y}$.

因由立方之得

$$a+\sqrt{b}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}.$$

相等有理及無理部分，得

$$a=x^3+3xy,\quad \sqrt{b}=3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y};$$

$$\therefore a-\sqrt{b}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y};$$

則 $$\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y}.$$

同法，利用第十三章之二項式定理可証明：設

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}，則 \sqrt[n]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y}.$$

$n$ 爲任何正整數.

89. 用下列方法，有時可求得 $a\pm\sqrt{b}$同形式之立方根.

設 $$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y};$$

於是 $$\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y}.$$

$$\therefore \sqrt[3]{a^2-b}=x^2-y \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又，如上節，

$$a=x^3+3xy \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$x$ 及 $y$ 之值，已由 (1)，(2) 兩式決定.

(1) 式內設 $\sqrt[3]{a^2-b}=c$；於是由代 (2) 內之 $y$ 得

$$a=x^3+3x(x^2-c);$$

卽 $$4x^3-3cx=a.$$

設於此方程式可由試驗決定 $x$ 之值，則可從 $y=x^2-c$求出 $y$ 之值

注意. 吾人不可如求平方根然假定立方根爲 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$，因設由此假定，乘立方時將得

$$a+\sqrt{b}=x\sqrt{x}+3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}+y\sqrt{y},$$

因右方皆爲無理項，由是不能相等其有理及無理部分.

例題．求 $72-32\sqrt{5}$ 之立方根．

假定 $\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}=x-\sqrt{y}$;

於是 $\sqrt[3]{72+32\sqrt{5}}=x+\sqrt{y}$.

由乘法 $\sqrt[3]{5184-1024\times 5}=x^2-y$;

即 $4=x^2-y$ ……………………(1).

又 $72-32\sqrt{5}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y}$;

由是 $72=x^3+3xy$ ……………………(2).

由(1)及(2) $72=x^3+3x(x^2-4)$;

即 $x^3-3x=18$.

由實驗知 $x=3$;故 $y=5$，而所求立方根爲 $3-\sqrt{5}$.

90．設求立方根之二項式含二二次不盡根，可進行如下：

例題．求 $9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$ 之立方根．

$$\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}=\sqrt[3]{3\sqrt{3}\left(3+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}$$
$$=\sqrt{3}\sqrt[3]{3+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}.$$

用上節方法進行，得

$$\sqrt[3]{3+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}=1+\sqrt{\frac{2}{3}};$$

所求立方根 $$=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

91．幾個較難之不盡根例題．

例1．以理有分母之分數表 $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$.

原式 $$=\frac{4}{3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1}$$
$$=\frac{4\left(3^{\frac{1}{3}}+1\right)}{\left(3^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1\right)}$$
$$=\frac{4\left(3^{\frac{1}{3}}+1\right)}{3+1}=3^{\frac{1}{3}}+1$$

例2．求 $\frac{3}{2}(x-1)+\sqrt{2x^2-7x-4}$ 之平方根．

原式 $=\frac{1}{2}\{3x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-4)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(2x+1)+(x-4)+2\sqrt{(2x+1)(x-4)}\}$，

故由觀察知其平方根為

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-4}).$$

例3．已知 $\sqrt{5}=2.23607$，求

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}$$ 之值．

乘分子，分母以 $\sqrt{2}$，

$$\text{原式}=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2+3-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=.44721.$$

## 習題 VIII.a.

以有理分母之同值分數表：

1. $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.　　2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}$.　　4. $\frac{2\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}-\sqrt{2a}+\sqrt{a+1}}$.

5. $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{10}-\sqrt{5}}$.　　6. $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

求下列諸式為有理因子：

7. $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$.　　8. $\sqrt[6]{5}+\sqrt[3]{2}$.　　9. $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{4}}$.

10. $\sqrt[3]{3}-1$.　　11. $2+\sqrt[4]{7}$.　　12. $\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3}$.

以有理分母之分數表:

13. $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}$.　14. $\frac{\sqrt[6]{9}-\sqrt[6]{8}}{\sqrt[6]{9}+\sqrt[6]{8}}$.　15. $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$.

16. $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}+\sqrt[6]{9}}$.　17. $\frac{\sqrt{8}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}-\sqrt[3]{4}}$.　18. $\frac{\sqrt[6]{27}}{3-\sqrt[6]{9}}$.

求以下各式之平方根:

19. $16-2\sqrt{20}-2\sqrt{28}+2\sqrt{35}$.　20. $24+4\sqrt{15}-4\sqrt{21}-2\sqrt{35}$.

21. $6+\sqrt{12}-\sqrt{24}-\sqrt{8}$.　22. $5-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{6}$.

23. $a+3b+4+4\sqrt{a}-4\sqrt{3b}-2\sqrt{3ab}$.

24. $21+3\sqrt{8}-6\sqrt{3}-6\sqrt{7}-\sqrt{24}-\sqrt{56}+2\sqrt{21}$.

求以下各式之立方根:

25. $10+6\sqrt{3}$.　26. $38+17\sqrt{5}$.　27. $99-70\sqrt{2}$.

28. $38\sqrt{14}-100\sqrt{2}$.　29. $54\sqrt{3}+41\sqrt{5}$.　30. $135\sqrt{3}-87\sqrt{6}$.

求以下各式之平方根:

31. $a+x+\sqrt{2ax+x^2}$.　32. $2a-\sqrt{3a^2-2ab-b^2}$.

33. $1+a^2+(1+a^2+a^4)^{\frac{1}{2}}$.　34. $1+(1-a^2)^{\frac{1}{2}}$.

35 設 $a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $b=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 求 $7a^2+11ab-7b^2$ 之值.

36. 設 $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, 求 $3x^2-5xy+3y^2$之值.

求以下各式之值:

37. $\frac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2}-\sqrt{38+5\sqrt{3}}}$.　38. $\sqrt{\frac{6+2\sqrt{3}}{33-19\sqrt{3}}}$.

39. $(28-10\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}-(7+4\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}$.

40. $(26+15\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}-(26+15\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}$.

41. 已知$\sqrt{5}=2.23607$ 求以下各式之值:

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

42. 除 $x^3+1+3x\sqrt[3]{2}$ 以 $x-1+\sqrt[3]{2}$.

43. 求 $9ab^2+(b^2+24a^2)\sqrt{b^2-3a^2}$ 之立方根.

44. 求$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$之值, 設 $2x=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$.

## 虛量

92. 雖由符號法則知負數不能有實平方根，但以$\sqrt{-a}$，$\sqrt{-1}$形式之符號所表之虛量則於研究數學時，時常發現；且用之可得極有價值之結果．故茲說明對此種根量應視爲如何之性質．

當根號下之數爲負量時，不可再視符號$\sqrt{\ }$爲可能之算術施算符號；僅可如$\sqrt{a}$視爲順從$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$之關係之符號；故規定$\sqrt{-a}$爲$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a$，且承認由此假定所引出之一切意義．

將知此定義可使虛量歸入常用代數法則領域之內；且用之所得之結果，與實量所得者同一正確可靠．

93. 由定義$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$.

$$\therefore\ \sqrt{a}.\sqrt{-1}\times\sqrt{a}.\sqrt{-1}=a(-1);$$

即
$$(\sqrt{a}.\sqrt{-1})^2=-a.$$

故$\sqrt{a}.\sqrt{-1}$之積可視爲同值於虛量$\sqrt{-a}$.

94. 以某式置$\sqrt{-1}$之前以表該式之虛量性質，一般甚爲便利；例如

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4\times(-1)}=2\sqrt{-1}.$$

$$\sqrt{-7a^2}=\sqrt{7a2\times(-1)}=a\sqrt{7}\sqrt{-1}.$$

95. 吾人應永遠注意，設無相反之說明則根號前應取正號．但在虛量運用中，有一應注意之要點．

因 $(-a)\times(-b)=ab$,

取其平方根，則

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\pm\sqrt{ab}$$

故求$\sqrt{-a}$及$\sqrt{-b}$之積時似$\sqrt{ab}$之前設＋號或－號均可，但此非事實，因

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}.\sqrt{-1}\times\sqrt{b}.\sqrt{-1}$$
$$=\sqrt{ab}\,(\sqrt{-1})^2$$
$$=-\sqrt{ab}.$$

96. "虛式"之名詞,通常用於一切非完全實數之式. 如$a+b\sqrt{-1}$可作爲一切虛式之範式.式內 $a$ 及 $b$ 爲實數,但不必爲有理數.

97. 關於虛量可用組合定律,此定律已証明能用於其他不盡根量.

例1 $a+b\sqrt{-1}\pm(c+d\sqrt{-1})=a\pm c+(b\pm d)\sqrt{-1}$.

例2. $a+b\sqrt{-1}$ 及 $c+d\sqrt{-1}$ 之積.

$$=(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})$$
$$=ac-bd+(bc+ad)\sqrt{-1}.$$

98. 設 $a+b\sqrt{-1}=0$, 則 $a=0, b=o$.

因,設 $a+b\sqrt{-1}=o$.

於是 $b\sqrt{-1}=-a$;

$$\therefore -b^2=a^2;$$

$$\therefore a^2+b^2=o.$$

茲 $a^2$ 及 $b^2$ 皆爲正量，故捨 $a^2$ 及 $b^2$ 皆爲零，其和不能爲零;故 $a=o$, $b=o$.

99. 設 $a+b\sqrt{-1}=c+d\sqrt{-1}$, 則 $a=c$, $b=d$.

因，移項得 $a-c+(b-d)\sqrt{-1}=o$;

由上節知 $a-c=o$, $b-d=o$;

即 $a=c$ , $b=d$.

故知二虛式相等之必需，及充足條件爲實數部分相等及虛數部分相等.

100. 定義. 設二虛式僅虛數部分之符號不同，則稱二虛式爲共軛.

如 $a-b\sqrt{-1}$ 與 $a+b\sqrt{-1}$ 共軛.

同樣 $\sqrt{2}+3\sqrt{-1}$ 與 $\sqrt{2}-3\sqrt{-1}$ 共軛.

101. 二共軛虛式之和或積皆爲實量.

因　$a+b\sqrt{-1}+a-b\sqrt{-1}=2a.$

又　$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2-(-b^2)$

$$=a^2+b^2.$$

102. 定義. $a^2+b^2$ 之正數平方根稱爲二共軛式 $a+b\sqrt{-1}$ 及 $a-b\sqrt{-1}$ 之虛數率.

103. 二虛式相乘積之虛數率，爲二虛式虛數率之相乘積.

使此二虛式爲 $a+b\sqrt{-1}$ 及 $c+d\sqrt{-1}$.

則其積$=ac-bd+(ad+bc)\sqrt{-1}$，仍一虛式，其虛數率

$$=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$$

$$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$$

$$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2};$$

本命題由是証明.

104. 設分母爲 $a+b\sqrt{-1}$ 之形式，則可以其共軛式 $a-b\sqrt{-1}$ 乘其分子，分母使之化爲有理式.

例如

$$\frac{c+d\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}=\frac{(c+d\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})}{(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})}$$

$$=\frac{ac+bd+(ad-bc)\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}\sqrt{-1}.$$

故由參照 §97知二虛式之和，差，積，或商於各情形皆爲一類似之虛式.

105．求 $a+b\sqrt{-1}$ 之平方根．

假定 $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}$,

式內 $x$ 及 $y$ 爲實量.

由平方，得，$a+b\sqrt{-1}=x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}$;

於是相等實數及虛數部分，

$$x^2-y^2=a\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$2xy=b\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

$$\therefore (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$$

$$=a^2+b^2;$$

$$\therefore x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3),$$

由(1)及(3)，得

$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},\quad y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2};$$

$$x=\pm\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}},\ y=\pm\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

由是得所求之平方根.

因 $x$ 及 $y$ 爲實量，故 $x^2+y^2$ 爲正量，故(3) 內 $\sqrt{a^2+b^2}$ 之前必須置以正號.

又從 (2)知 $xy$ 之積必與 $b$ 同號；故設 $b$ 爲正，則 $x,y$ 必同號，爲負數則 $x,y$ 異號.

例 1. 求 $-7-24\sqrt{-1}$ 之平方根.

假定 $\sqrt{-7-24\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}$;

於是 $-7-24\sqrt{-1}=x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}$;

$$\therefore x^2-y^2=-7\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$2xy=-24.$$

$$\therefore (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$$
$$=49+576$$
$$=625;$$

$$\therefore x^2+y^2=25\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

由(1)及(2), $x^2=9, y^2=16$;

$$x=\pm 3,\ y=\pm 4.$$

因 $xy$ 之積爲負量，故必取

$$x=3,\ y=-4;\ 或\ x=-3,\ y=4.$$

故其根爲 $3-4\sqrt{-1}$ 及 $-3+4\sqrt{-1}$;

則 $\sqrt{-7-24\sqrt{-1}}=\pm(3-4\sqrt{-1})$.

例 2. 求 $\sqrt[4]{64a^4}$ 之值.

$$\sqrt[4]{-64a^4}=\sqrt{\pm 8a^2\sqrt{-1}}$$
$$=2a\sqrt{2}\sqrt{\pm\sqrt{-1}}.$$

餘爲求 $\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$ 之值.

假定 $\sqrt{+\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}$;

則 $+\sqrt{-1}=x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}$;

$$\therefore x^2-y^2=0\ 及\ 2xy=1;$$

由是 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 或 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\therefore \sqrt{+\sqrt{-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1}).$$

同理 $\sqrt{-\sqrt{-1}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{-1})$

$$\therefore \sqrt{\pm\sqrt{-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\sqrt{-1});$$

最後 $\sqrt[4]{-64a^4}=\pm 2a(1\pm\sqrt{-1})$.

106，符號$\sqrt{-1}$常以字母 $i$ 表之．但迨讀者已稍熟習虛量之運算止，仍以保留符號$\sqrt{-1}$爲宜．注意$\sqrt{-1}$或 $i$ 之連續乘冪甚爲有用；例如

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1}, \qquad i=i;$$
$$(\sqrt{-1})^2=-1, \qquad i^2=-1;$$
$$(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}, \qquad i^3=-i;$$
$$(\sqrt{-1})^4=1, \qquad i^4=1.$$

因每一乘冪皆由以$\sqrt{-1}$或 $i$ 乘前一乘冪所得，故知其結果此循環．

107．習見虛數性質之研究．

設　　$x=\sqrt[3]{1}$；則 $x^3=1$，或 $x^3-1=0$；

則　　$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

$\therefore$　　$x-1=0$，或 $x^2+x+1=0$；

由是　　$x=1$，或 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$；

由實際乘方知各值之立方皆等於 1．故一有三立方根，

$$1,\quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

其中之二爲虛式．

使以 $\alpha$ 及 $\beta$ 表之；於是因其爲方程式

$$x^2+x+1=0,$$

之根故其積爲一；

即　　$\alpha\beta=1$；

$$\therefore \alpha^3\beta=a^2;$$

即　　$\beta=\alpha^2$，　　因 $\alpha^3=1$．

同法可指明　　$\alpha=\beta^2$．

108．因每虛根皆爲他虛根之平方，故常以 $1,\omega,\omega^2$，表 1 之三立方根．

$\omega$ 亦適合方程式 $x^2+x+1=o$;

$$\therefore 1+\omega+\omega^2=o;$$

即 1 之三立方根之和爲零.

又 $\qquad \omega.\omega^2=\omega^3=1$;

由是:(1)二虛根之積爲 1.

(2)$\omega^3$ 之任何整數乘冪爲 1.

109, $\omega$ 之連續正整數乘冪爲 $1,\omega$, 及 $\omega^2$;因設 $n$ 爲 3 之倍數,則必可寫爲 $3m$; $\omega^n=\omega^{3m}=1$.

設 $n$ 不爲 3 之倍數則必爲 $3m+1$, 或 $3m+2$.

設 $n=3m+1$, $\quad \omega^n=\omega^{3m+1}=\omega^{3m}.\omega=\omega$.

設 $n=3m+2$, $\omega^n=\omega^{3m+2}=\omega^{3m}.\omega^2=\omega^2$.

110. 茲觀察任何量皆有三立方根，其中之二爲虛量. 因 $a^3$之立方根即 $a^3\times 1$ 之立方根, 故爲 $a,a\omega,a\omega^2$. 同理 9之立方根爲 $\sqrt[3]{9}$, $\omega\sqrt[3]{9},\omega^2\sqrt[3]{9}$,其中$\sqrt[3]{9}$可用常用算術法則求得. 又除另有說明外,$\sqrt[3]{a}$ 永表 $a$ 之算術立方根.

例1. 化$\dfrac{(2+3\sqrt{-1})^2}{2+\sqrt{-1}}$ 爲 $A+B\sqrt{-1}$ 之形式.

原式
$$=\frac{4-9+12\sqrt{-1}}{2+\sqrt{-1}}$$
$$\frac{(-5+12\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1})}{(2+\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1})}$$
$$=\frac{-10+12+29\sqrt{-1}}{4+1}$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{29}{5}\sqrt{-1};$$

此即屬於所求之形式.

例2. 析 $x^3+y^3$ 分三一次因子.

因 $\qquad x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

因 $\qquad \therefore x^3+y^3=(x+y)(x-\omega y)(x+\omega^2 y)$;

$$\omega+\omega^2=-1, \text{ 及 } \omega^3=1.$$

例 3. 指明

$$(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

相乘 $a+\omega b+\omega^2c$ 及 $a+\omega^2b+\omega c$,

$b^2$ 及 $c^2$ 之係數為 $\omega^3$, 或1;

$bc$ 之係數 $=\omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega=-1$;

$ca$ 及 $ab$ 之係數 $=\omega^2+\omega=-1$;

$$\therefore (a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

例 4. 指明

$$(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=o.$$

因 $1+\omega+\omega^2=o$, 則得

$$\begin{aligned}(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3&=(-2\omega^2)^3-(-2\omega)^3\\&=-8\omega^6+8\omega^3\\&=-8+8\\&=0.\end{aligned}$$

## 四習題 VIII.b.

1. 乘 $2\sqrt{-3}+3\sqrt{-2}$ 以 $4\sqrt{-3}-5\sqrt{-2}$.
2. 乘 $3\sqrt{-7}-5\sqrt{-2}$ 以 $3\sqrt{-7}+5\sqrt{-2}$.
3. 乘 $e^{\sqrt{-1}}+e^{-\sqrt{-1}}$ 以 $e^{\sqrt{-1}}-e^{-\sqrt{-1}}$.
4. 乘 $x-\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$ 以 $x-\dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}$.

變以下分母為有理數:

5. $\dfrac{1}{3-\sqrt{-2}}$. 6. $\dfrac{3\sqrt{-2}+2\sqrt{-5}}{3\sqrt{-2}-2\sqrt{-5}}$.

7. $\dfrac{3+2\sqrt{-1}}{2-5\sqrt{-1}}+\dfrac{3-2\sqrt{-1}}{2+5\sqrt{-1}}$. 8. $\dfrac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}}-\dfrac{a-x\sqrt{-1}}{a+x\sqrt{-1}}$.

9. $\dfrac{(x+\sqrt{-1})^2}{x-\sqrt{-1}}-\dfrac{(x-\sqrt{-1})^2}{x+\sqrt{-1}}$. 10. $\dfrac{(a+\sqrt{-1})^3-(a-\sqrt{-1})^3}{(a+\sqrt{-1})^2-(a-\sqrt{-1})^2}$.

11. 設 $n$ 為正整數求 $(-\sqrt{-1})^{4n+3}$ 之值
12. 求 $\sqrt{9+40\sqrt{-1}}+\sqrt{9-40\sqrt{-1}}$ 之平方.

*H.H.A.*

求以下各式之平方根：

13. $-5+12\sqrt{-1}$. 14. $-11-60\sqrt{-1}$. 15. $-47+8\sqrt{-3}$

16. $-8\sqrt{-1}$. 17. $a^2-1+2a\sqrt{-1}$.

18. $4ab-2(a^2-b^2)\sqrt{-1}$.

化以下各式爲 $A+iB$ 之形式.

19. $\dfrac{3+5i}{2-3i}$. 20. $\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$. 21. $\dfrac{1+i}{1-i}$.

22. $\dfrac{(1+i)^2}{3-i}$. 23. $\dfrac{(a+ib)^2}{a-ib}-\dfrac{(a-ib)^2}{a+ib}$.

設 $1,\omega,\omega^2$ 爲一之三立方根，求証

24. $(1+\omega^2)^4=\omega$. 25. $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$.

26. $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9$.

27. $(2+5\omega+2\omega^2)^6=(2+2\omega+5\omega^2)^6=729$.

28. $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)\cdots$至 $2n$ 因子$=2^{2n}$.

29. 求証

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$$

30. 設 $x=a+b$, $y=a\omega+b\omega^2$, $z=a\omega^2+b\omega$,

指明

(1) $xyz=a^3+b^3$.

(2) $x^2+y^2+z^2=6ab$.

(3) $x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3)$.

31. 設 $ax+cy+bz=X$, $cx+by+az=Y$, $bx+ay+cz=Z$,

指明 $(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$

$$=X^2+Y^2+Z^2-YZ-XZ-XY$$

# 第　九　章

## 二　次　方　程　式　論

111. 經適當之變形後，任何二次方程式，可寫爲

$$ax^2+bx+c=o \cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

之形式，此方程式之解答爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

茲證明關於所有以(1)爲範式之方程式之根及係數之重要命題.

112. 一二次方程式，不能有二以上之根.

因，設其可能，使方程式 $ax^2+bx+c=o$ 有三不同根 $\alpha, \beta$ 及 $\gamma$. 於是因每値必適合此方程式，得

$$a\alpha^2+b\alpha+c=o \cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$a\beta^2+b\beta+c=o \cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=o \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

(1)減(2)，

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=o$$

由假設 $\alpha-\beta\neq o$，除以 $\alpha-\beta$；則

$$a(\alpha+\beta)+b=o.$$

同法由(2)及(3)，得

$$a(\beta-\gamma)+b=o;$$

∴由減法　$a(\alpha-\gamma)=o;$

此爲不可能，因由假設知 $\alpha$ 不爲零亦不等於 $\gamma$. 故一二次方程式不能有三不同之根.

113. 使 §111,(2)內之二根表以 $\alpha$ 及 $\beta$，由是

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

於是得以下結果:

(1) 設 $b^2-4ac$(根號下之量)為正，則 $\alpha$ 及 $\beta$ 為不等之二實量.

(2) 設 $b^2-4ac$ 為零，則 $\alpha$ 及 $\beta$ 為相等之二實根，皆化為 $-\frac{b}{2a}$.

(3) 設 $b^2-4ac$ 為負數，則 $\alpha$ 及 $\beta$ 為不等之二虛根.

(4) 設 $b^2-4ac$ 為完全平方，則 $\alpha$ 及 $\beta$ 為不等之二有理根.

用此試驗，則任何二次方程式之根，不待解出即可決定其性質.

例 1. 指明 $x$ 之任何實值不能適合方程式

$$2x^2-6x+7=o$$

於此 $a=2$; $b=-6, c=7$;

$$\therefore b^2-4ac=(-6)^2-4.2.7=-20.$$

故二根皆為虛根.

例2. 設方程式 $x^2+2(k+2)x+9k=o$ 有等根．求 $k$ 等根之條件為

$$(k+2)^2=9k,$$
$$k^2-5k+4=o,$$
$$(k-4)(k-1)=o;$$
$$\therefore k=4,\ 或\ k=1.$$

例3. 指明方程式

$$x^2-2px+p^2+2pr-r^2=0$$

之根為有理; 設 $(-2p)^2-4(p^2-q^2+2qr-r^2)$ 為完全平方，則二根為有理根. 但此式可變為 $4(q^2-2qr+r^2)$，或 $4(q-r)^2$; 故二根為有理數.

114. 因 $\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

由加法得

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由乘法得

$$\alpha\beta=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}$$

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

由寫方程式爲形式

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=o,$$

則此結果亦可述之如下：

於首項係數爲一之二次方程式內

($i$) 二根之和等於 $x$ 之係數，但變其符號.

($ii$) 二根之積等於第三項.

註. 任何方程式內不含未知數之項常被稱爲常數項

115. 因 $-\frac{b}{a}=\alpha+\beta$, 及 $\frac{c}{a}=\alpha\beta$,

故方程式 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=o$ 可寫爲

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=o\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

故任何二次方程式，亦可表以形式

$$x^2-(\text{根之和})x+\text{根之積}=o\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2);$$

又從(1)得

$$(x-\alpha)(x-\beta)=o\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

故以已知根構成方程式甚爲易易.

例1. 求根爲 3 及 $-2$ 之方程式.

此方程式爲　$(x-3)(x+2)=o$

或　$x^2-x-6=o.$

當根爲無理，則用下法較易.

例 2. 求根為 $2+\sqrt{3}$ 及 $2-\sqrt{3}$ 之方程式.

已知 根之和 $=4$,

根之積 $=1$;

$\therefore$此方程式為 $x^2-4x+1=o$.

116. 用類似上節例題 1 之方法可以三或三以上之根構成一方程式.

例1. 求根為 $2, -3$, 及 $\frac{7}{5}$ 之方程式:

所求方程式必適合於以下各假定:

$$x-2=o,\ x+3=o,\ x-\frac{7}{5}=o.$$

故此方程式必為

$$(x-2)(x+3)\left(x-\frac{7}{5}\right)=o;$$

即 $$(x-2)(x+3)(5x-7)=o,$$

或 $$5x^3-2x^2-37x+42=o.$$

例2. 求根為 $o, \pm a, \frac{c}{b}$ 之方程式.

此方程式必適合於

$$x=o, x=a, x=-a, x=\frac{c}{b};$$

故此方程式為

$$x(x+a)(x-a)\left(x-\frac{c}{b}\right)=o;$$

即 $$x(x^2-a^2)(bx-c)=o;$$

或 $$bx^4-cx^3-a^2bx^2+a^2cx=o.$$

117. 第 114 節之結果甚為重要，用之一般足以解決關於二次方程式根之問題. 在此類問題中，根永不被單獨重視. 但利用由係數所表示之根之和與根之積之關係.

例1. 設 $\alpha$ 及 $\beta$ 為方程式 $x^2-px+q=o$ 之根; 求 (1) $\alpha^2+\beta^2$, (2) $\alpha^3+\beta^3$ 之值.

已知

$$\alpha+\beta=p,$$
$$\alpha\beta=q.$$
$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$p^2-2q.$$

又，$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$

$$=p\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$$

$$=p(p^2-3q).$$

例3．設$\alpha,\beta$爲方程式 $lx^2+mx+n=o$,之根，求根爲$\frac{\alpha}{\beta}$，$\frac{\beta}{\alpha}$之方程式．

已知　根之和$=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$,

根之積$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1$;

∴由 §115 知所求方程式爲

$$x^2-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)x+1=o,$$

$$\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=o.$$

同上例題$\alpha^2+\beta^2=\frac{m^2-2nl}{l^2}$，$\alpha\beta=\frac{n}{l}$.

∴所求方程式爲$\frac{n}{l}x^2-\frac{m^2-2nl}{l^2}x+\frac{n}{l}=o$.

或　$nlx^2-(m^2-2nl)x+nl=o$,

例3．設 $x=\frac{3+5\sqrt{-1}}{2}$，求 $2x^3+2x^2-7x+72$ 之値．並指明以 $\frac{3-5\sqrt{-1}}{2}$ 代 $x$，此式之値仍不變．

求以 $\frac{3\pm5\sqrt{-1}}{2}$ 爲根之方程式．

根之和　$=3$;

根之積　$=\frac{17}{2}$;

故此方程式爲 $2x^2-6x+17=o$.

∴ $2x^2-6x+17$爲一二次式，此式可由 $\frac{3\pm5\sqrt{-1}}{2}$中之任一爲零．

茲　$2x^3+2x^2-7x+72=x(2x^2-6x+17)+4(2x^2-6x+17)+4$

$$=x\times o+4\times o+4$$

$$=4;$$

此爲已知式在各種假定下之數字値．

118. 求方程式 $ax^2+bx+c=o$ 二根之條件.

(1)大小同而符號異;(2)互相倒數.

因設二根之和爲零，則二根同量而異號，故所需之條件爲

$$-\frac{b}{a}=o, \text{ 或 } b=o.$$

又設二根之積爲 1，則二根互相倒數. 故必

$$\frac{c}{a}=1, \text{ 或 } c=a.$$

第一結果常見於解析幾何內，第二則爲用於任何次方程式較一般條件中之特殊情形.

例. 求 $ax^2+bx+c=o$ 之根可爲 (1)皆爲正根;(2)異號而負者較大之條件.

已知　$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$.

(1)設二根皆正，則 $\alpha\beta$ 爲正量，而 $c$ 及 $a$ 同號.

又因 $\alpha+\beta$ 爲正數，$\frac{b}{a}$ 爲負數，故 $b$ 及 $a$ 異號.

故所求條件爲 $a,c$ 同號，而與 $b$ 之符號相反.

(2)設二根異號則 $\alpha\beta$ 爲負，而 $c$ 與 $a$ 異號.

又因 $\alpha+\beta$ 之符號同於較大根之符號負號，故 $\frac{b}{a}$ 爲正；而 $b$ 與 $a$ 同號.

故所求之條件爲 $a,b$ 同號而與 $c$ 之符號相反.

## 習　題　IX. a.

求方程式，設其根爲

1. $-\frac{4}{5}, \frac{3}{7}$.　2. $\frac{m}{n}, \frac{n}{m}$.　3. $\frac{p-q}{p+q}, -\frac{p+q}{p-q}$.

4. $7\pm2\sqrt{5}$.　5. $\pm2\sqrt{3}-5$.　6. $-p\pm2\sqrt{2q}$.

7. $-3\pm5i$. 8. $-a\pm ib$. 9. $\pm i(a-b)$.

10. $-3,\frac{2}{3},\frac{1}{2}$. 11. $\frac{a}{2},o,-\frac{2}{a}$. 12. $2\pm\sqrt{3},4$.

13. 求証以下各方程式之根爲實量:

(1) $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2=0$,

(2) $(a-b+c)x^2+4(a-b)x+(a-b-c)=o$.

14. 設方程式 $x^2-15-m(2x-8)=o$ 有等根，求 $m$ 之值.

15. $m$ 爲何值，則方程式

$$x^2-2x(1+3m)+7(3+2m)=0$$

有等根.

16. $m$ 爲何值，則方程式

$$\frac{x^2-bx}{ax-c}=\frac{m-1}{m+1}$$

之根同量異號.

17. 求證以下方程式之根爲有理:

(1) $(a+c-b)x^2+2cx+(b+c-a)=o$,

(2) $abc^2x^2+3a^2cx+b^2cx-6a^2-ab+2b^2=o$.

設$\alpha,\beta$ 爲方程式 $ax^2+bx+c=o$ 之根，求以下之各值:

18. $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ 19. $\alpha^4\beta^7+\alpha^7\beta^4$. 20. $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$.

求下各式之值.

21. $x^3+x^2-x+22$,設$x=1+2i$.

22. $x^3-3x^2-8x+15$, 設 $x=3+i$.

23. $x^3-ax^2+2a^2x+4a^3$, 設$\frac{x}{a}=1-\sqrt{-3}$.

24. 設$\alpha,\beta$爲方程式$x^2+px+q=o$之根,求以$(\alpha-\beta)^2$及$(\alpha+\beta)^2$爲根之方程式.

25. 求證$(x-a)(x-b)=h^2$之根永爲實根.

26. 設 $x_1,x_2$ 爲 $ax^2+bx+c=o$ 之根，求下式之値:

(1) $(ax_1+b)^{-2}+(ax_2+b)^{-2}$,

(2) $(ax_1+b)^{-3}+(ax_2+b)^{-3}$.

27. 求$ax^2+bx=o$ 之一根爲他根 $n$ 倍之條件.

28. 設$\alpha,\beta$ 爲 $ax^2+bx+c=o$ 之根,求根爲$\alpha^2+\beta^2$及$\alpha^{-2}+\beta^{-2}$之方程式.

29. 求根爲

$$2x^2+2(m+n)x+m^2+n^2=o.$$

之二根和及二根差之平方之方程式.

30. 討論方程式 $px^2+qx+r=o$之根 之符號.

119. 下列說明 §113 所證結果之應用

例.設$x$ 爲實值,求證$\dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$能有 2 與 6 間外之任何值.

使已知式表以 $y$, 即

$$\frac{x^2+2x-11}{2(x-3)}=y;.$$

於是相乘且移項,得

$$x^2+2x(1-y)+6y-11=o.$$

此爲二次方程式,欲 $x$ 可有實值, 必$4(1-y)^2-4(6y-11)$之值爲正; 或除以四,化簡後之 $y^2-8y+12$ 爲正; 即$(y-6)(y-2)$必爲正. 故此積之二因子必同正,或同爲負,前情形內 $y$大於 6,後情形內 $y$ 小於 2. 故 $y$ 不能在 2 與 6 間,但可有其他之任何值.

由此例知二次式 $y^2-8y+12$ 於$y$ 不爲其相當二次方程式 $y^2-8y+12=o$ 二根間之值時爲正.

此爲下節所研究之一般命題中之特殊情形.

120. 捨 $ax^2+bx+c=o$ 之二根爲不等之實根,而 $x$ 爲二根間之一值外, 不論 $x$ 爲任何值, $(ax^2+bx+c)$ 皆與 $a$ 同號.

情形 1. 設方程式 $ax^2+bx+c=o$ 之根爲實根; 表之以 $\alpha$及 $\beta$ 且使 $\alpha$ 爲較大.

於是 $$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

茲設 $x$ 大於 $\alpha$,則 $x-\alpha$ 及 $x-\beta$ 皆爲正量;設 $x$ 小於 $\beta$,則 $x-\alpha$ 及 $x-\beta$ 皆爲負量;故於各種情形下 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 皆爲正量;而 $ax^2+bx+c$ 與 $a$ 同號,但如 $x$ 爲 $\alpha$ 及 $\beta$ 間之一值,$(x-\alpha)(x-\beta)$ 爲負,則 $ax^2+bx+c$ 之符號適與 $a$ 之符號相反.

情形 II. 設 $\alpha$ 與 $\beta$ 相等,於是

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2,$$

皆爲正量於 $x$ 之任何實値 $(x-\alpha)^2$;故 $ax^2+bx+c$ 與 $a$ 同號.

情形 III. 設 $ax^2+bx+c=o$ 之根之爲虛根.於是

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$$

但 $b^2-4ac$ 爲負數,因根爲虛根;故 $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ 爲正量,而

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

於 $x$ 之所有實値,皆爲正量;故 $ax^2+bx+c$ 與 $a$ 同號.此卽確立本命題.

121. 由前節知設 $b^2-4ac$ 爲負數或零,則不拘 $x$ 爲任何實數値,$ax^2+bx+c$ 永遠與 $a$ 同號;且次式之爲正或負,全視 $a$ 之爲正或負.

反之,如欲使 $ax^2+bx+c$ 可永爲正量,必 $b^2-4ac$ 爲負量或零,$a$ 亦必爲正量;及欲使 $ax^2+bx+c$ 可永爲負量,必 $b^2-4ac$ 爲負量或零,而 $a$ 必爲負量.

例．求

$$\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}$$

可爲一切値時，$a$ 必處其間之兩極限，$x$ 爲任何實量．

使 $$\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}=y;$$

於是 $(a-5y)x^2-7x(1-y)+(5-ay)=o.$

爲使從此二次方程式求得 $x$ 之値爲實量，則

$49(1-y)^2-4(a-5y)(5-ay)$必爲正量．

卽 $(49-20a)y^2+2(2a^2+1)y+(49-20a)$必爲正量．

故 $(2a^2+1)^2-(49-20a)^2$必爲負量或零，$49-20a$ 則必爲正量．

而 $(2a^2+1)^2-(49-20a)^2$之爲負量或零，須視

$2(a^2-10a+25)\times2(a^2+10a-24)$之爲負量或零．

卽視 $4(a-5)^2(a+12)(a-2)$之爲負量或零．

此式當 $a$ 値在 2 及 $-12$ 之間時爲負量，$49-20a$ 亦因此 $a$ 之諸値爲正；此式當 $a=5,-12$，或 2 時爲零，但當 $a=5$ 時 $49-20a$ 爲負．故所求之極限値爲 2 及 $-12$，$a$ 爲其間之任一値．

## 習　　題 IXb.

1．求 $n$ 必處其間之兩極限値，爲使方程式

$$2ax(ax+nc)+(n^2-2)c^2=o$$

之根爲實根．

2．設 $x$ 爲實量，求證 $\frac{x}{x^2-5x+9}$之値，必在1 與$-\frac{1}{11}$之間．

3．求證無論 $x$ 爲任何實量，$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 因 $x$ 之所有値皆處於 3 及 $\frac{1}{3}$ 之間．

4．設 $x$ 爲實量，求證 $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$無値在 5 與 9 之間．

5．求根爲 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-b}}$ 之方程式．

6．設$\alpha$及 $\beta$ 爲方程式 $x^2-px+q=o$之根，求下式之値：

(1) $\alpha^2(\alpha^2\beta^{-1}-\beta)+\beta^2(\beta^2\alpha^{-1}-\alpha)$,

(2) $(\alpha-p)^{-4}+(\beta-p)^{-4}$;

7. 設 $lx^2+nx+n=0$ 內二根之比爲 $p:q$ 求証

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0.$$

8. 設 $x$ 爲實量 $\frac{(x+m)^2-4mn}{2(x-n)}$ 許可 $2n$ 及 $2m$ 間外之任何值.

9. 設方程式 $ax^2+2bx+c=0$ 之根爲 $\alpha$ 及 $\beta$, $Ax^2+2Bx+C=0$ 之根爲 $\alpha a+\delta$ 及 $\beta+\delta$. 求証

$$\frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{B^2-AC}{A^2}.$$

10. 指明 $\frac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ 可爲任何值, 設 $x$ 爲實量, 及 $P$ 爲 1 與 7 間之任一值.

11. 設 $x$ 爲實量, 求 $\frac{x+2}{2x^2+3x+6}$ 之最大值.

12. 指明設 $x$ 爲實量, 則 $(x^2-bc)(2x-b-c)^{-1}$ 無在 $b$ 與 $c$ 間之實量.

13. 設 $ax^2+2bx+c=0$ 之二根存在且不相等, 則

$$(a+c)(ax^2+2bx+c)=2(ac-b^2)(x^2+1)$$

之根不能存在. 反之亦然.

14. 指明當 $x$ 爲實量時, 設 $a^2-b^2$ 與 $c^2-d^2$ 同號, 則 $\frac{(ax-b)(dx-c)}{(bx-a)(cx-d)}$ 能爲任何值.

*122. 茲以若干之定理及例題結束本章, 爲方便計, 引入一種爲讀者習數學時常見之術語及符號.

**定義.** 任一含 $x$ 且其值因 $x$ 之值而定之式稱爲 $x$ 之函數. $x$ 之函數常表以符號 $f(x)$, $F(x)$, 或 $\varphi(x)$.

故方程式 $y=f(x)$ 之意義, 等於謂 $x$ 之值之任何變化, 結果必使 $y$ 生相應之變化; 反之亦然. $x$ 及 $y$ 稱爲變量, 再別之則爲自變量及因變量.

自變量之值爲吾人選定之任一量．因變量之相當值則可於已知自變量已知之值時立刻決定．

*123．形爲

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n.$$

之式，$n$ 爲正整數，且係數 $p_0$，$p_1$，$p_2$，$\cdots\cdots\cdots\cdots p_n$ 不含 $x$．稱爲 $x$ 之 **有理整數代函數**．本章所注意，只限於此種函數．

*124．設函數內無高於一次之變量，則稱此函數爲一次函數．如$ax+b$ 即 $x$ 之一次函數．一函數稱爲二次函數，設其內不含高於二次之變量，如$ax^2+bx+c$ 爲 $x$ 之二次函數．三次，四次，$\cdots\cdots\cdots$之函數；卽其中變量之最高次數爲三，四，$\cdots\cdots\cdots$如上節之式則爲 $x$ 之 $n$ 次函數．

*125．符號 $f(x,y)$ 表含二變數 $x$ 及 $y$ 之函數．如 $ax+by+$，及 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 即爲 $x$，$y$ 之一次及二次函數．

方程式 $f(x)=0$，$f(x,y)=0$，依函數$f(x)$，$f(x,y)$之爲一次，二次，$\cdots\cdots\cdots$稱爲一次方程式，二次方程式，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

*126．在 §120 曾證明 $ax^2+bx+c$ 可化爲$a(x-\alpha)(x-\beta)$ 之形式，$\alpha$ 及 $\beta$ 爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根．

故當方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲有理根．即 $b^2-4ac$爲完全平方時，$ax^2+bx+c$可析爲二一次有理因子．

*127．求 $x$，$y$ 之二次函數可析爲二一次因子之條件

表此函數以$f$ $(x,y)$ 於此

$$f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+C.$$

依 $x$ 之降冪寫此式，且使之等於零；如

$$ax^2+2x(hy+g)+by^2+2fy+c=0.$$

解此 $x$ 之二次方程式，得

$$x=\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a},$$

或 $ax+hy+g=\pm\sqrt{y^2(h^2-ab)+2y(hg-af)+(g^2-ac)}.$

茲爲使 $f(x,y)$ 可爲形如 $px+qy+r$ 二一次因子之積，根號下之量必完全平方；故

$$(hg-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac).$$

移項且除以 $a$，得

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0;$$

此即爲所求之條件.

本命題在解析幾何中極爲重要.

*128. 求二方程式

$$ax^2+bx+c=0,\ a'x^2+b'x+c'=0$$

有一公根之條件.

設此二方程式皆能爲 $x=\alpha$ 所滿足. 於是

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0,$$

$$a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0;$$

∴ 由十字乘法.

$$\frac{\alpha^2}{bc'-b'c}=\frac{\alpha}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}$$

消去 $\alpha$，平方連比中第二比，且使之等於他二比之積；如

$$\frac{\alpha^2}{(ca'-c'a)^2}=\frac{\alpha^2}{(bc'-b'c)}\cdot\frac{1}{(ab'-a'b)};$$

$$\therefore\ (ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b),$$

此即爲所求之條件.

此爲兩二次函數 $ax^2+bxy+cy^2$ 及 $a'x^2+b'xy+c'y^2$ 可有一公一次因子之條件，其証明甚爲易易.

## 習 題 IX c.

1. $m$ 爲何值，則 $y^2+2xy+2x+my-3$ 可析爲二有理因子？

2. 求 $m$ 使 $2x^2+mxy+3y^2-5y-2$ 爲二一次因子之積之值.

3. 指明 $A(x^2-y^2)-xy(B-C)$ 永可析爲二實一次因子.

4. 設方程式

$$x^2+px+q=0,\quad x^2+p'x+q'=0$$

有一公根，指明其必等於

$$\frac{pq'-p'q}{q-q'} \text{或} \frac{q-q'}{p'-p}.$$

5. 求二式

$$lx^2+mxy+ny^2,\ l'x^2+m'xy+n'y^2$$

有一次公因子之條件.

6. 設 $3x^2+2Pxy+2y^2+2ax-4y+1$ 可析爲二一次因子，求證 $P$ 必爲方程式 $P^2+4aP+2a^2+6=0$ 之一根.

7. 求 $ax^2+2hxy+by^2$ 及 $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ 能爲形如 $y-mx$，$my+x$ 之一次因式除盡之條件.

8. 指明方程式 $x^2-3xy+2y^2-2x-3y-35=0$ 內，因 $x$ 爲任一實值，$y$ 有一實值. 又因 $y$ 之任一實值，$x$ 亦有一實值.

9. 設 $x$ 及 $y$ 爲以方程式

$$9x^2+2xy+y^2-92x-20y+244=0$$

相關之實量，則 $x$ 之值在 3 與 6 之間，$y$ 之值在 1 與 10 之間.

10. 設 $(ax^2+bx+c)y+a'x^2+b'x+c'=0$，求 $x$ 能爲 $y$ 之有理函數之條件.

# 第十章

## 雜方程式

129. 本章從事於幾種雜方程式之討論，其中若干可以常用解二次方程式之法則解出，但其他則需要某種特殊之方法.

例 1. 解 $8x^{\frac{3}{2n}}-8x^{-\frac{3}{2n}}=63$.

乘以 $x^{\frac{3}{2n}}$ 且移項；則

$$8x^{\frac{3}{n}}-63x^{\frac{3}{2n}}-8=0;$$

$$\left(x^{\frac{3}{2n}}-8\right)\left(8x^{\frac{3}{2n}}+1\right)=0;$$

$$x^{\frac{3}{2n}}=8,\text{或}-\frac{1}{8};$$

$$x=(2^3)^{\frac{2n}{3}},\text{或}\left(-\frac{1}{2^3}\right)^{\frac{2n}{3}};$$

$$\therefore x=2^{2n},\text{或}\frac{1}{2^{2n}}.$$

例 2. 解 $2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}$.

使 $\sqrt{\frac{x}{a}}=y$；則 $\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{1}{y}$;

$$\therefore 2y+\frac{3}{y}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b};$$

$$2aby^2-6a^2y-b^2y+3ab=0;$$

$$(2ay-b)(by-3a)=0;$$

$$y=\frac{b}{2a},\text{ 或 }\frac{3a}{b};$$

$$\therefore \frac{x}{a}=\frac{b^2}{4a^2},\text{ 或 }\frac{9a^2}{b^2};$$

則 $x=\frac{b^2}{4a}$，或 $\frac{9a^3}{b^2}$;

例 3.解 $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504.$

分乘得 $(x^2-x-20)(x^2-x-42)=504;$

列上式爲 $x^2-x$ 之二次方程式，得

$$(x^2-x)^2-62(x^2-x)+336=0:$$

$$\therefore\ (x^2-x-6)(x^2-x-56)=0;$$

$$\therefore\ x^2-x-6=0,\text{或 } x^2-x-56=0;$$

由是 $x=3,-2,\ 8,\ -7.$

130．任一可變形爲

$$ax^2+bx+c+p\sqrt{ax^2+bx+c}=q$$

之方程式可解之如下．使 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$，得

$$y^2+py-q=0$$

使 $\alpha$ 及 $\beta$ 爲此方程式之根，由是

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\alpha\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\beta;$$

由此二方程式可得 $x$ 之四值．

如根號前未標明符號，通常卽示意爲正號；故設 $\alpha$ 及 $\beta$ 皆爲正，則所有 $x$ 之四值皆適合原方程式；但設 $\alpha$ 或 $\beta$ 爲負則由所得二次方程式求得之根不適合原方程式，而適合方程式

$$ax^2+bx+c-p\sqrt{ax^2+bx+c}=q.$$

例．解 $x^2-5x+2\sqrt{x^2-5x+3}=12.$

兩方加 3；得

$$x^2-5x+3+2\sqrt{x^2-5x+3}=15$$

使 $\sqrt{x^2-5x+3}=y$，得 $y^2+2y-15=0$；由是 $y=3$，或 $-5$．

故 $\sqrt{x^2-5x+3}=+3$，或 $\sqrt{x^2-5x+3}=-5$．

平方且解所得二次方程式，從第一得 $x=6$，或 $-1$；從第二得 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{113}}{2}$．第一對值適合已知方程式，第二對值適合方程式

$$x^2-5x-2\sqrt{x^2-5x+3}=12.$$

131．於根號方程式消根之前，須考驗有無任何可用除法消去之公因子．

例． 解 $\sqrt{x^2-7ax+10a^2}-\sqrt{x^2+ax-6a^2}=x-2a.$

析因子．得$\sqrt{(x-2a)(x-5a)}-\sqrt{(x-2a)(x+3a)}=x-2a.$

茲因子$\sqrt{x-2a}$能由各項消去；

$$\therefore \sqrt{x-5a}-\sqrt{x+3a}=\sqrt{x-2a};$$

$$x-5a+x+3a-2\sqrt{(x-5a)(x+3a)}=x-2a;$$

$$x=2\sqrt{x^2-2ax-15a^2};$$

$$3x^2-8ax-60a^2=0;$$

$$(x-6a)(3x+10a)=0;$$

$$x=6a,\ \text{或}-\frac{10a}{3}.$$

又由使因子$\sqrt{x-2a}=o$ ，得 $x=2a$

由試驗知 $x=6a$ 不適合此方程式：故其根爲$-\dfrac{10a}{3}$及 $2a$．

讀者可比較初級代數 §281 節之類似問題．

132．以下方法有時有用．

例． 解$\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$………………(1)

作恆等式 $(3x^2-4x+34)-(3x^2-4x-11)=45$………………(2)

以(1)之各項除(2)之相當項；得

$$\sqrt{3x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11}=5.\ \cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)爲恆等式，故 $x$ 之一切值皆眞，(1)爲方程式故僅於 $x$ 之某幾值爲眞；故方程式(3)亦僅於此 $x$ 之幾值爲眞．

退事用加法由(1)及(3)得

$$\sqrt{3x^2-4x+34}=7;$$

$$\text{由是}\ x=3\ \text{或}-\frac{5}{3}.$$

133．解形爲

$$ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \pm bx + a = o$$

之方程式，其中距兩端等距各項之係數相等，可依二次方程式之解法．又因以$\frac{1}{x}$代 $x$，原方程式不變，稱此種方程式爲倒數方程式．

關於倒數方程式更完全之討論，學者可參考§§568－570．

例．　解 $12x^4-56x^3+89x^2-56x+12=o$.

除以 $x^2$，　$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-56\left(x+\frac{1}{x}\right)+89=0.$

使　$x+\frac{1}{x}=z$；則　$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$；

$$\therefore 12(z^2-2)-56z+89=0;$$

由是得　$z=\frac{5}{2}$，或$\frac{13}{6}$．

$$\therefore x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}，\text{或}\ \frac{13}{6}.$$

解此方程式得 $x=2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$．

134．以下雖非倒數方程式，但可以同法解之．

例．　解　$6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0$.

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x-\frac{1}{x}\right)+12=0;$$

由是　$6\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-25\left(x-\frac{1}{x}\right)+24=0$:

$$\therefore 2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0，\text{或}\ 3\left(x-\frac{1}{x}\right)-8=0;$$

由是得　$x=2, -\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{3}$.

135．常由觀察已知二次方程式之一根時，則他根常可利用 §114 所証二次方程式之根之性質立刻求得之

例．解方程式$(1-a^2)(x+a)-2a(1-x^2)=0$.

此爲二次方程式，其一根顯然爲 $a$.

又因此方程式可寫爲

$$2ax^2+(1-a^2)x-a(1+a^2)=0$$

因此二根之積爲$-\frac{1+a^2}{2}$；故他一根爲$-\frac{1+a^2}{2a}$.

## 習 題 X. a.

[當有一根適合此方程式之變形時，則學生須考驗各解答所用根項前符號之特殊排列.]

解以下方程式：

1. $x^{-2}-2x^{-1}=8$.
2. $9+x^{-4}=10x^{-2}$.
3. $2\sqrt{x}+2x^{-\frac{1}{2}}=5$.
4. $6x^{\frac{2}{4}}=7x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{4}}$.
5. $x^{\frac{2}{n}}+6=5x^{\frac{1}{n}}$.
6. $3x^{\frac{1}{2n}}-x^{\frac{1}{n}}+2=0$.
7. $5\sqrt{\frac{3}{x}}+7\sqrt{\frac{x}{3}}=22\frac{2}{3}$.
8. $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{1}{3}$.
9. $6\sqrt{x}=5x^{-\frac{1}{2}}-13$.
10. $1+8x^{\frac{6}{5}}+9\sqrt[5]{x^3}=0$.
11. $3^{2x}+9=10\cdot3^x$.
12. $5(5^x+5^{-x})=26$.
13. $2^{2x+8}+1=32\cdot2^x$.
14. $2^{2x+3}-57=65(2^x-1)$.
15. $\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^x}}=2$.
16. $\frac{3}{\sqrt{2x}}-\frac{\sqrt{2x}}{5}=5\frac{9}{10}$.
17. $(x-7)(x-3)(x+5)(x+1)=1680$.
18. $(x+9)(x-3)(x-7)(x+5)=385$.
19. $x(2x+1)(x-2)(2x-3)=63$.
20. $(2x-7)(x^2-9)(2x+5)=91$.
21. $x^2+2\sqrt{x^2+6x}=24-6x$.
22. $3x^2-4x+\sqrt{3x^2-4x-6}=18$.
23. $3x^2-7+3\sqrt{3x^2-16x+21}=16x$.
24. $8+9\sqrt{(3x-1)(x-2)}=3x^2-7x$.
25. $\frac{3x-2}{2}+\sqrt{2x^2-5x+3}=\frac{(x+1)^2}{3}$.

26. $7x-\frac{\sqrt{3x^2-8x+1}}{x}\left(\frac{8}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^2$.

27. $\sqrt{4x^2-7x-15}-\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{x^2-9}$.

28. $\sqrt{2x^2-9x+4}+3\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^2+21x-11}$.

29. $\sqrt{2x^2+5x-7}+\sqrt{3(x^2-7x+6)}-\sqrt{7x^2-6x-1}=0$.

30. $\sqrt{a^2+2ax-3x^2}-\sqrt{a^2+ax-6x^2}=\sqrt{2a^2+3ax-9x^2}$.

31. $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$.

32. $\sqrt{3x^2-2x+9}+\sqrt{3x^2-2x-4}=13$.

33. $\sqrt{2x^2-7x+1}-\sqrt{2x^2-9x+4}=1$.

34. $\sqrt{3x^2-7x-30}-\sqrt{2x^2-7x-5}=x-5$.

35. $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$.

36. $x^4+\frac{8}{9}x^2+1=3x^3+3x$ 　　37. $x^4+1-3(x^3+x)=2x^2$.

38. $10(x^4+1)-63x(x^2-1)+52x^2=0$.

39. $\frac{x+\sqrt{12a-x}}{x-\sqrt{12a-x}}=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$. 　　40. $\frac{a+2x+\sqrt{a^2-4x^2}}{a+2x-\sqrt{a^2-4x^2}}=\frac{5x}{a}$.

41. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8x\sqrt{x^2-3x+2}$.

42. $\sqrt{x^2+x}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3-x}}=\frac{5}{2}$. 　　43. $\frac{x^3+1}{x^2-1}=x+\sqrt{\frac{6}{x}}$.

44. $2^{x^2}\cdot 2^{2x}=8:1$. 　　45. $a^{2x}(a^3+1)=(a^{3x}+a^x)a$.

46. $\frac{8\sqrt{x}-5}{3x-7}=\frac{\sqrt{3x-7}}{x-5}$. 　　47. $\frac{18(7x-3)}{2x+1}=\frac{250\sqrt{2x+1}}{3\sqrt{7x-3}}$.

48. $(a+x)^{\frac{2}{3}}+4(a-x)^{\frac{2}{3}}=5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$.

49. $\sqrt{x^2+ax-1}-\sqrt{x^2+bx-1}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

50. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=98$.

51. $x^4-2x^3+x=380$. 　　52. $27x^3+21x+8=0$,

136. 含二未知量之聯立方程式之研究.

例 1. 解 $x+2+y+3+\sqrt{(x+2)(y+3)}=39.$

$$(x+2)^2+(y+3)^2+(x+2)(y+3)=741.$$

使 $x+2=u, y+3=v$; 於是

$$u+v+\sqrt{uv}=39\cdots\cdots(1),$$

$$u^2+v^2+uv=741\cdots\cdots(2),$$

以(1)除(2)得

$$u+v-\sqrt{uv}=19\cdots\cdots(3).$$

由(1)及(3), $u+v=29$;

$$\sqrt{uv}=10,$$

$$uv=100;$$

故 $u=25$, 或 4; $v=4$, 或 25;

由是 $x=23$, 或 2; $y=1$, 或 22.

例 2 解 $x^4+y^4=82\cdots\cdots(1).$

$$x-y=2\cdots\cdots(2).$$

使 $x=u+v$, 及 $y=u-v$;

於是由(2)得 $v=1$.

代入(1) $(u+1)^4+(u-1)^4=82$;

$$\therefore 2(u^4+6u^2+1)=82;$$

$$u^4+6u^2-40=0;$$

由是 $u^2=4$, 或 $-10$;

$$u=\pm2, \text{或} \pm\sqrt{-10}.$$

故 $x=3, -1, 1\pm\sqrt{-10}$;

$$y=1, -3, -1\pm\sqrt{-10}.$$

例 3. 解 $\dfrac{2x+y}{3x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}=2\tfrac{8}{15}\cdots\cdots(1),$

$$7x+5y=29\cdots\cdots(2).$$

從(1) $15(2x^2+3xy+y^2-3x^2+4xy-y^2)=38(3x^2+2xy-y^2)$;

$$\therefore 129x^2-29xy-38y^2=0;$$

$$\therefore (3x-2y)(43x+19y)=0.$$

故 $3x=2y\cdots\cdots(3),$

或 $43x=-19y\cdots\cdots(4).$

從(3)
$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{7x+5y}{29}$$
$$=1，由方程式(2).$$
$$\therefore x=2,\ y=3.$$

又從(4).
$$\frac{x}{19}=\frac{y}{-43}=\frac{7x+5y}{-82}$$
$$=-\frac{29}{82}，從(2)，$$
$$\therefore x=-\frac{551}{82},\ y=\frac{1247}{82}.$$

故
$$x=2,\ y=3;\ 或\ x=-\frac{551}{82},\ y=\frac{1247}{82}.$$

例 4.　解
$$4x^3+3x^2y+y^3=8,$$
$$2x^3-2x^2y+xy^2=1.$$

使 $y=mx$，且代入二方程式. 得
$$x^3(4+3m+m^3)=8\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$
$$x^3(2-2m+m^2)=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$
$$\therefore \frac{4+3m+m^3}{2-2m+m^2}=8;$$
$$m^3-8m^2+19m-12=0;$$

即
$$(m-1)(m-3)(m-4)=0;$$
$$\therefore m=1，或\ 3，或\ 4.$$

(*i*) 取 $m=1$，代入 (1)或(2).

從 (2)，
$$x^3=1;\ \therefore x=1;$$

及
$$y=mx=x=1.$$

(*ii*) 取 $m=3$，代入 (2);

故
$$5x^3=1;\ \therefore x=\sqrt[3]{\frac{1}{5}};$$

及
$$y=mx=3x=3\sqrt[3]{\frac{1}{5}}.$$

(*iii*) 取 $m=4$；得
$$10x^3=1;\ \therefore x=\sqrt[3]{\frac{1}{10}};$$

及
$$y=mx=4x=4\sqrt[3]{\frac{1}{10}}.$$

故其完全解答爲

$$x=1,\ \sqrt[3]{\frac{1}{5}},\ \sqrt[3]{\frac{1}{10}}.$$

$$y=1,3\sqrt[3]{\frac{1}{5}},\ 4\sqrt[3]{\frac{1}{10}}.$$

註．以上解法亦可由於同次之二齊次方程式

例 5．解 $31x^2y^2-7y^4-112xy+64=0$ ……………………………(1),

$$x^2-7xy+4y^2+8=0 \quad\text{……………………………(2).}$$

從 (2) 得 $-8=x^2-7xy+4y^2$；代入 (1),

$$31x^2y^2-7y^4+14xy(x^2-7xy+4y^2)+(x^2-7xy+5y^2)^2=0,$$

$$\therefore\ 31x^2y^2-7y^4+(x^2-7xy+4y^2)(14xy+x^2-7xy+4y^2)=0;$$

$$\therefore 31x^2y^2-7y^4+(x^2+4y^2)^2-(7xy)^2=0;$$

$$x^4-10x^2y^2+9y^4=0 \quad\text{……………………………(3).}$$

即 $\therefore(x^2-y^2)(x^2-9y^2)=0$;

故 $x=\pm y$, 或 $x=\pm3y$.

陸續取各結果代入 (2)．得

$$x=y=\pm2;$$

$$x=-y=\pm\sqrt{-\frac{2}{3}};$$

$$x=\pm3,\ y=\pm1;$$

$$x=\pm3\sqrt{-\frac{4}{17}},\ y=\mp\sqrt{-\frac{4}{17}}.$$

註．由觀察可知 (3) 爲齊次；以一方程式與他方程式經適當之組合以化爲齊次式之方法，爲極有價值之方法．此在解析幾何中尤爲有用．

例 6．解 $(x+y)^{\frac{2}{3}}+2(x-y)^{\frac{2}{3}}=3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}$ ……………………(1).

$$3x-2y=13 \quad\text{……………………………(2).}$$

除 (1) 各項以 $(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}$, 或 $(x+y)^{\frac{1}{3}}(x-y)^{\frac{1}{3}}$;

$$\therefore\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}+2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{1}{3}}=3.$$

此為 $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}$ 之二次方程式，由之甚易求解

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}=2 \text{ 或 } 1;\ \text{由是}\frac{x+y}{x-y}=8 \text{ 或 } 1;$$

$$\therefore 7x=9y,\ \text{或}\ y=0.$$

結合此式與 2，得

$$x=9,\ y=7;\ \text{或}\ x=\frac{13}{3},\ y=0.$$

## 習 題. X.b.

解以下各方程式:

1. $3x-2y=7$, $xy=20$.
2. $5x-y=3$, $y^2-6x^2=25$.
3. $4x-3y=1$, $12xy+13y^2=25$.
4. $x^4+x^2y^2+y^4=931$, $x^2-xy+y^2=19$.
5. $x^2+xy+y^2=84$, $x-\sqrt{xy}+y=6$.
6. $x+\sqrt{xy}+y=65$, $x^2+xy+y^2=2275$.
7. $x+y=7+\sqrt{xy}$, $x^2+y^2=133-xy$.
8. $3x^2-5y^2=7$, $3xy-4y^2=2$.
9. $5y^2-7x^2=17$, $5xy-6x^2=6$.
10. $3x^2+165=16xy$, $7xy+3y^2=132$.
11. $3x^2+xy+y^2=15$, $31xy-2x^2-5y^2=45$.
12. $x^2+y^2-3=3xy$, $2x^2-6+y^2=0$.
13. $x^4+y^4=706$, $x+y=8$.
14. $x^4+y^4=272$, $x-y=2$.
15. $x^5-y^5=992$, $x-y=2$.
16. $x+\frac{4}{y}=1$, $y+\frac{4}{x}=25$.
17. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{9}{2}$, $\frac{3}{x+y}=1$.
18. $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=5$. $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{5}{6}$.
19. $x+y=1072$, $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=16$.
20. $xy^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=20$, $x^{\frac{3}{2}}+yx^{\frac{3}{2}}=65$.
21. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=$, $6(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})=5$.

22. $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4$,
$x^2-y^2=9$.

23. $y+\sqrt{x^2-1}=2$,
$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{y}$.

24. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{10}{3}$,
$x+y=10$.

25. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{17}{4}$
$x^2+y^2=706$.

26. $x^2+4y^2-15x=10(3y-8)$, $xy=6$.

27. $x^2y^2+400=41xy$, $y^2=5xy-4x^2$.

28. $4x^2+5y=6+20xy-25y^2+2x$, $7x-11y=17$.

29. $9x^2+23x-12=12xy-4y^2+22y$, $x^2-xy=18$.

30. $(x^2-y^2)(x-y)=16xy$, $(x^4-y^4)(x^2-y^2)=640x^2y^2$.

31. $2x^2-xy+y^2=2y$, $2x^2+4xy=5y$.

32. $\dfrac{x^3+y^3}{(x+y)^2}+\dfrac{x^3-y^3}{(x-y)^2}=\dfrac{43x}{8}$, $5x-7y=4$.

33. $y(y^2-3xy-x^2)+24=0$, $x(y^2-4xy+2x^2)+8=0$.

34. $3x^3-8xy^2+y^3+21=0$, $x^2(y-x)=1$.

35. $y^2(4x^2-108)=x(x^3-9y^3)$, $2x^2+9xy+y^2=108$.

36. $6x^4+x^2y^2+16=2x(12x+y^3)$, $x^2+xy-y^2=4$.

37. $x(a+x)=y(b+y)$, $ax+by=(x+y)^2$.

38. $xy+ab=2ax$, $x^2y^2+a^2b^2=2b^2y^2$.

39. $\dfrac{x-a}{a^2}+\dfrac{y-b}{b^2}=\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{y-a}-\dfrac{1}{a-b}=0$.

40. $bx^3=10a^2bx+3a^3y$, $ay^3=10ab^2y+3b^3x$.

41. $2a\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)+4a^2=4x^2+\dfrac{xy}{2a}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$.

137. 含三或三以上未知之方程式，僅於特殊情形時能解出．以下爲數極有用之解法．

例 1．解 $x+y+z=13$……………………………………………(1)，

$x^2+y^2+z^2=65$……………………………………………(2)，

$xy=10$……………………………………………(3)，

由(2)與(3)，　$(x+y)^2+z^2=85$.

以 $u$ 代 $x+y$，於是此方程式變爲

$$u^2+z^2=85.$$

又從 (1), $u+z=13$;

由是得 $u=7$ 或 $6$; $z=6$ 或 $7$.

故得
$$\left.\begin{aligned}x+y&=7,\\ xy&=10\end{aligned}\right\}\text{ 及 }\left.\begin{aligned}x+y&=6,\\ xy&=10\end{aligned}\right\}$$

故其解答爲
$$\left.\begin{aligned}&x=5,\ \text{或 }2,\\ &y=2,\ \text{或 }5,\\ &z=6;\end{aligned}\right\}\text{ 或 }\left.\begin{aligned}&x=3\pm\sqrt{-1},\\ &y=3\mp\sqrt{-1},\\ &z=7.\end{aligned}\right\}$$

例 2. 解
$$(x+y)(x+z)=30,$$
$$(y+z)(y+x)=15,$$
$$(z+x)(z+y)=18.$$

以 $u$, $v$, $w$ 代 $y+z$, $z+x$, $x+y$ 於是
$$vw=30,\quad wu=15,\quad uv=18 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

相乘得
$$u^2v^2w^2=30\times15\times18=15^2\times6^2;$$
$$uvw=\pm90,$$

以 (1) 內各等式代入得
$$u=3,\ v=6,\ w=5;\ \text{或 } v=-3,\ v=-6,\ w=-5;$$
$$\therefore \left.\begin{aligned}y+z&=3,\\ z+x&=6,\\ x+y&=5;\end{aligned}\right\}\text{ 或 }\left.\begin{aligned}y+z&=-3,\\ z+x&=-6,\\ x+y&=-5,\end{aligned}\right\}$$

故 $x=4$, $y=1$, $z=2$; 或 $x=-4$, $y=-1$, $z=-2$.

例 3. 解
$$y^2+yz+z^2=49 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$z^2+zx+x^2=19 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$x^2+xy+y^2=39 \cdots\cdots\cdots\cdots (\ )$$

從 (1) 減 (2)
$$y^2-x^2+z(y-x)=30;$$

即
$$(y-x)(x+y+z)=30 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

從 (1) 減 (3)
$$(z-x)(x+y+z)=10 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

故以 (5) 除 (4)
$$\frac{y-x}{z-x}=3;$$

由是
$$y=3z-2x.$$

代入(3)，得

$$x^2-3xz+3z^2=13.$$

由(2)，　　$x^2+xz+z^2=19.$

如 §136，例 4 解二齊次式，得

$$x=\pm 2,\ z=\pm 3;\ \text{由是}\ y=\pm 5;$$

或　　$x=\pm\dfrac{11}{\sqrt{7}},\ z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{7}}$；由是 $y=\pm\dfrac{19}{\sqrt{7}}$.

例 4.　解 $x^2-yz=a^2,\ y^2-zx=b^2,\ z^2-xy=c^2$.

以 $y,\ z,\ x$ 分乘三方程式，且相加；於是

$$c^2x+a^2y+b^2z=o \quad\cdots\cdots(1).$$

以 $z,\ x,\ y$ 分乘三式且相加；於是

$$b^2x+c^2y+a^2z=o \quad\cdots\cdots(2).$$

由(1)及(2)，用十字乘法，得

$$\frac{x}{a^4-b^2c^2}=\frac{y}{b^4-c^2a^2}=\frac{z}{c^4-a^2b^2}=k,\text{假定設}.$$

代入任一已知方程式；則

$$k^2(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)=1;$$

$$\therefore\ \frac{x}{a^4-b^2c^2}=\frac{y}{b^4-c^2a^2}=\frac{z}{c^4-a^2b^2}=\pm\frac{1}{\sqrt{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}}.$$

## 習　題 X. c.

解以下方程式：

1. $9x+y-8z=0,$
   $4x-8y+7z=0,$
   $yz+zx+xy=47.$

2. $3x+y-2z=0,$
   $4x-y-3z=0,$
   $x^3+y^3+z^3=467.$

3. $x-y-z=2,$
   $x^2+y^2-z^2=22,$
   $xy=5,$

4. $x+2y-z=11,$
   $x^2-4y^2+z^2=37,$
   $xz=24.$

5. $x^2+y^2-z^2=21,$
   $3xz+3yz-2xy=18,$
   $x+y-z=5.$

6. $x^2+xy+xz=18,$
   $y^2+yz+yx+12=0,$
   $z^2+zx+zy=30.$

7. $x^2+2xy+3xz=50,$
   $2y^2+3yz+yx=10,$
   $3z^2+zx+2zy=10.$

8. $(y-z)(z+x)=22,$
   $(z+x)(x-y)=33,$
   $(x-y)(y-z)=6.$

9. $x^2y^2z^2u=12$, $x^2y^2zu^2=8$, $x^2yz^2u^2=1$, $3xy^2z^2u^2=4$.

10. $x^2y^3z=12$, $x^3yz^3=54$, $x^7y^3z^2=72$.

11. $xy+x+y=23$,
$xz+x+z=41$,
$yz+y+z=27$.

12. $2xy-4x+y=17$,
$3yz+y-6z=52$,
$6xz+3z+2x=29$,

13. $xz+y=7z$, $yz+x=8z$, $x+y+z=12$.

14. $x^3+y^3+z^3=a^3$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=a$.

15. $x^2+y^2+z^2=yz+zx+xy=a^2$, $3x-y+z=a\sqrt{3}$.

16. $x^2+y^2+z^2=21a^2$, $yz+zx-xy=6a^2$, $3x+y-2z=3a$.

## 無定方程式

138. 設以下爲待解之問題.

某人以 £491 買牛馬若干；設馬每匹價 £23，牛每頭價 £16，問買牛馬各若干?

使 $x$, $y$ 爲馬數及牛數，於是

$$23x+16y=461.$$

於此僅有含二未知數之一方程式，顯然由與 $x$ 一任意之值卽能得 $y$ 之相當值．故第一見到者，卽此方程式有無限解答．但由問題之性質知 $x$ 及 $y$ 必爲正整量．有此限制，解答之數始爲有限．

設未知量之數多於獨立方程式之數，則其解答爲無限，而稱此方程式爲無定方程式．本章僅討論極簡單之方程式，集注意於未知量之正整值，由限制能以極簡單之形式表其解答．

不定方程式之一般理論，將見於第二十六章中。

例 1. 求 $7x+12y=220$ 之正整數解答.

遍除以最小之係數7;於是

$$x+y+\frac{5}{7}y=31+\frac{3}{7};$$

$$\therefore x+y+\frac{5y-3}{7}=31\cdots\cdots(1)$$

因 $x$ 及 $y$ 爲整數,故必

$$\frac{5y-3}{7}=\text{整數};$$

由是 $$\frac{15y-9}{7}=\text{整數}$$

卽, $$2y-1+\frac{y-2}{7}=\text{整數};$$

由是 $$\frac{y-2}{7}=\text{整數}=P\ \text{假定值}$$

或 $$\therefore y-2=7p,$$

$$y=7p+2\cdots\cdots(2)$$

代此 $y$ 之值入 (1),

$$x+7p+2+5p+1=31;$$

卽 $$x=28-12p\cdots\cdots(3)$$

設於此結果內使 $p$ 爲任何整值. 則得 $x$ 及 $y$ 之相當整值;但設 $p>2$, 由 (3) 知 $x$ 爲負, 又設 $p$ 爲負整數, 則 $y$ 亦爲負, 故僅於 $p=0$, 1, 2 時,始能得 $x$, $y$ 之正整值.

其完全解答如下列:

$$\left.\begin{array}{llll} p=0, & 1, & 2, \\ x=28, & 16, & 4, \\ y=2, & 9, & 16, \end{array}\right\}$$

註. 已得$\frac{5y-3}{7}$=整數, 復乘之以 3, 以使 $y$ 之係數較 7 之倍數差 1. 在用符號以表此整數之前, 此同法常永被運用.

例 2. 求 $14x-11y=29$ 之正整數解答$\cdots\cdots(1)$

除以最小係數 11; 得

$$x+\frac{3x}{11}-y=2+\frac{7}{11};$$

$$\therefore \frac{3x-7}{11}=2-x+y=\text{整數};$$

故 $\dfrac{12x-28}{11}$=整數；

則 $x-2+\dfrac{x-6}{11}$=整數；

即 $\therefore \dfrac{x-6}{11}$=整數=$p$ 假定值；

$$\left.\begin{array}{l}\therefore x=11p+6.\\ \text{又由 (1)}\quad y=14p+5.\end{array}\right\}$$

此稱爲此方程式之一般解答，且由使 $p$ 爲任一正整值或零卽得 $x$ 及 $y$ 之正整值，故得

$$\left.\begin{array}{l}p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots\\ x=6,\ 17,28,39,\cdots\cdots\\ y=5,\ 19,33,47,\cdots\cdots\end{array}\right\}$$

其解答之數爲無限.

例 3. 以半克郎 *half-crown* 及福勞音 *blori* 兩種銀幣，償 £ 5 可有幾種償法.

使 $x$ 爲半克郎數，$y$ 爲福勞音數，於是

$$5x+4y=200;$$

$$\therefore x+y+\frac{x}{4}=50;$$

$$\therefore \frac{x}{4}=\text{整數}=p\ \text{假定值};$$

$$\therefore\ x=4p,$$

$$y=50-5p.$$

解答由指定 $p$ 之值爲 1,2,3⋯⋯⋯9 求得；故償法之數爲 9.但亦可皆償以半克郎或福勞音，則 $p$ 之值可爲 0 或 10. 設 $p=0$,則 $x=0$，償還之全部爲半克勞音，設 $p=10$，則 $y=0$. 則償還之全部皆爲福勞音. 故設 $x$ 及 $y$ 之值可爲零，則有 11 種償法.

例 4. 43 人之會費爲 5 鎊 14 先令 6 待姆；設男子每人付 5 先令，女子每人付 2 先令 6 待姆，兒童每人付 1 先令，問男，女，兒童各幾人.

使 $x$，$y$，$z$，表男，女及兒童之人數，由是得

$$x+y+z=43\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$10x+5y+2z=229$$

消 $z$，得 $8x+3y=143.$

此方程式之一般解答爲

$$x=3p+1,$$

$$y=45-8p,$$

代入得 (1),

$$z=5p-3$$

於此 $p$ 不能爲負或零,但可爲 1 至 5 之正整值,由是

$$p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5;$$
$$x=4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16;$$
$$y=37,29,\ 21,\ 13,\ 5;$$
$$z=2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22.$$

## 習　題 X. d.

求正整數解答:

1. $3x+8y=103$.　2. $5x+2y=53$.　3. $7x+12y=152$.

4. $13x+11y=414$.　5. $23x+25y=915$.　6. $41x+47y=2191$.

求正整數之一般解答,及 $x$, $y$ 適合此方程式之最小值:

7. $5x-7y=3$.　8. $6x-13y=1$.　9. $8x-21y=33$.

10. $17y-13x=0$.　11. $19y-23x=7$.　12. $77y-30x=295$.

13. 某農夫以 £752 購牛及馬;設馬每匹價 £37,牛每頭價 £23,問牛馬各購若干?

14. 以先令及六辨士二種幣償還5磅,問並零數解答共有幾種償法?

15. 分 81 爲二部,使一爲 8 之倍數,一爲 5 之倍數.

16. 求最簡之方法,設僅有金泥 (*guineas*) 之人償僅有半克郎之人 10 先令 6 待姆.

17. 求某數,設其除以 39 則餘 16,除以 56,則餘 27. 問此種數可有幾個?

18. 設償還 £1.6*s*.6*d*,僅有半克郎之錢幣;問至須還福勞音若干?僅能易以半克郎?

19. 分 136 爲二數,使其一除以 5 餘 2,他除以 8 餘 3.

20. 余買羊,猪,牛共 40 頭,計買羊用 £4,猪用 £2,牛用 £17;設共用 £301,問三種各買若干?

21. 余袋內有薩瓦林,半克郎或先令共27 枚,值 £5. 0*s*. 6*d*;問余有每種錢幣各若干?

# 第十一章

## 排列與組合

139. 由取若干物中之幾或全數所成之每排，稱爲一**排列**．

由取若干物中之幾或全數所成之每組或選擇，稱爲一**組合**，

如由字母 $a$，$b$，$c$，$d$ 中每次取二所成排列之數爲 12，即

$ab$，$ac$，$ad$，$bc$，$bd$，$cd$，

$ba$，$ca$，$da$，$cb$，$db$，$dc$．

由字母 $a$，$b$，$c$，$d$，中每次取二所成組合之數爲 6，即

$ab$，$ac$，$ad$，$bc$，$bd$，$cd$．

每組合皆表一二字母之不同選擇．

故知組合之作成僅注意每組合所含物之數排列之作成，則並須注意作成每排之物之順序．例如，由四字母 $a$，$b$，$c$，$d$ 作一三字母之選擇，如 $abc$，此僅一組合而可有以下之排列法：

$abc$，$acb$，$bca$，$bac$，$cab$，$cba$．

由是作成六不同之排列．

140．於討論本章之一般命題前，茲解釋一重要原則，且以數字例題說明之．

設一運算能由 $m$ 法施行，及（當其已由其中之任一法施行時）一第二運算於是能由 $n$ 法施行；則二運算能由 $m\times n$ 法施行．

設第一運算由任一法施行，則能以之與施行第二運算之 $n$ 法中任一法聯合；故對第一運算中之一法，施行二運算已有 $n$ 法；且相當施行第一運算 $m$ 法中之每法皆有 $n$ 法施行此二運算，故施行二運算之方法之全數為 $m\times n$ 之積．

例 1．有汽船 10 隻往來於利物浦及都伯林間，問某人可由幾法搭船從利物浦至都伯林，於返回時搭不同船隻，第一去時可由十法；每法又皆有九返法，（因不准乘同船返回）．故往返法之總數為 $10\times 9$ 或90．

此原理甚易推廣至二以上能由已知數法施行之演算．

例題 2． 三旅客止於有四旅館之鎮市．設在不同旅館住宿，問可有幾種住法?

第一旅客可有四旅館供其選擇．迨其由任一法選定後，第二旅客可由三法選擇．故首二人選擇之數為 $4\times 3$；至第三人則僅有二旅館供其選擇；故所求住法之數為 $4\times 3\times 2$ 或 24．

141．求 $n$ 不同物每次取 $r$ 之排列數．

此與求以 $n$ 不同物件，置 $r$ 處之置法之數相同．

此第一處可有 $n$ 置法．因可取 $n$ 物中之任一物迨其已以其中之任一方法置後．

第二處可有 $n-1$ 置法，又因第一處之每置法能與第二處之每置法聯合；故首二處置法之總數爲 $n(n-1)$之積．又第一，二處以任一法安置後，第三處可有 $n-2$ 置法．同理此首三處置法之總數爲 $n(n-1)(n-2)$ 之積．

如是進行每新置一處即添入一新因子，至任何地步因子之數同於已置處之數，故 $r$ 處置法之總數等於

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\text{至 } r \text{ 因子}.$$

其第 $r$ 因子爲

$$n-(r-1)，\text{或 } n-r+1.$$

故 $n$ 物每次取 $r$ 所能成排列之數爲

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-r+1).$$

推論．$n$ 物每次取全數所能成排列之數爲

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 因子}.$$

或 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots3.2.1.$

此積常表以符號$\underline{|n}$，讀作"$n$ 之階乘"但有時以 $n!$表 $\underline{|n}$.

142．此後以符號 $^nPr$ 表 $n$ 物每次取 $r$ 所能排列之數．由是

$$^nPr=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-r+1);$$

又 $^nP_n=\underline{|n}$

於解數字問題時，符號 $^nPr$ 右下角之尾數永表所用公式內因子之數目．

143．$n$ 物每次取 $r$ 所能成排列之數，亦可由下法求得，

使 $^nPr$ 表 $n$ 物每次取 $r$ 所能成排列之數．

設作成所有 $n$ 物每次取 $r-1$ 之排列；則其數爲 ${}^nP_{r-1}$.

於其中每排列益以餘 $n-r+1$ 物中之一、如是每次得一 $n$ 物每次取 $r$ 所成之排列；故 $n$ 物每次取 $r$ 所成排列之總數爲 ${}^nP_{r-1}\times(n-r+1)$；卽

$${}^nP_r={}^nP_{r-1}\times(n-r+1)$$

由易 $r$ 以 $r-1$ 於此公式內，得

$${}^nP_{r-1}={}^nP_{r-2}\times(n-n+2),$$

同法，

$${}^nP_{r-2}={}^nP_{r-3}\times(n-r+3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}^nP_3={}^nP_2\times(n-2),$$

$${}^nP_2={}^nP_1\times(n-1),$$

$${}^nP_1=n.$$

相乘各直列，後由每方消去公因子，得

$${}^nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1),$$

例 1. 四人入一有六座位之車輛，問能有幾種坐法？

第一人之坐法有 6；於是第二人有 5；第 3 人有 4；第四人有 3；又每法可與其他之每法聯合，故所求答數爲 $6\times5\times4\times3=360$.

例 2. 以 1,2,3,…9 中之六數字能成若干不同之數？

此爲求 9 物每次取 6 所能成排列之數.

$$\begin{aligned}\therefore\text{所求結果}&={}^9P_6\\&=9\times8\times7\times6\times5\times4\\&=60480.\end{aligned}$$

144. 求 $n$ 不同物每次取 $r$ 所能成組合之數.

使 ${}^nC_r$ 表所求組合之數.

於是每組合含 $r$ 不同物，且可自由 $\underline{|r}$ 法排列.［§142］

故 $^nC_r\times\underline{|r}$ 等於 $n$ 物每次取 $r$ 所成排列之數;

則
$$^nC_r\times\underline{|r}={}^nP_r.$$
$$=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1);$$

$$\therefore\ {}^nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\text{......................}(1)$$

推論．公式 $^nC_r$; 亦可寫以不同之形式，因設分子，分母同乘 $\underline{|n-r}$，則得

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times\underline{|n-r}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}$$

此分子含由 1 至 $n$ 所有自然數之積．

$$\therefore\ {}^nC_r=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}$$

求 $^nC_r$ 之二公式以皆能記憶爲宜，(1)用於所有求數字結果之情形．(2)用於得代數結果已足之情形．

註．設於公式(2)內使 $r=n$，則得

$$^nC_n=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\ \underline{|o}}=\frac{1}{\underline{|o}};$$

但 $^nC_n=1$，故設此公式於 $r=n$ 時亦眞，則符號 $\underline{|o}$ 必視爲等於 1．

例．由 12 本書選擇 5 本，能有幾法，(1) 每次必含指定之一本，(2)每次不含此指定之一本．

(1) 因每次必含指定之一本，故可於 11 本中選擇 4 本，
故取法之數 $={}^{11}C_4$

$$=\frac{11\times10\times9\times8}{1\times2\times3\times4}$$
$$=330.$$

(2) 因每次皆不含此指定之一本，故可於所除 11 本中選取5本．

故取法之數$={}^{11}C_5$

$$=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4\times5}$$

$$=462.$$

145．$n$ 物每次取 $r$ 所成組合之數等於 $n$ 物每次取 $n-r$ 所成組合之數．

於作成所有 $n$ 物每次取 $r$ 之組合時，每取一組，卽除一相當之 $n-r$ 物之組．卽 $n$ 物每次取 $r$ 所成組合之數等於 $n$ 物每次取 $n-r$ 所成組合之數．　　$\therefore {}^nC_r={}^nC_{n-r}$.

本命題亦可証之如下：

$${}^nC_{n-r}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\;\underline{|n-(n-r)}}$$

$$=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\;\underline{|r}}$$

$$={}^nC_r.$$

此種組合稱爲補組合．

以上所証結果之用途，能用以化簡算術之演算．

例．於 14 人中選 11 人，可有幾種選法？

所求數$={}^{14}C_{11}$

$$={}^{14}C_3$$

$$=\frac{14\times13\times12}{1\times2\times3}$$

$$=364.$$

設用公式 ${}^{14}C_{11}$，必導出分子，分母各含 11 因子之公式．

146．求分 $m+n$ 物爲含 $m$ 物及 $n$ 物之二組之可能分法之數．

此顯然等於 $m+n$ 物每次取 $m$ 物所成組合之數，因每取一含 $m$ 物之組即餘一含 $n$ 物之組也．

$$\text{故所求數}=\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\ \underline{|n}}$$

註．設 $n=m$，則二組相等，此情形下其不同分法之數爲 $\dfrac{\underline{|2m}}{\underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|2}}$ 因二組任一可能之交換法，皆不能得一新分配也．

147．求分 $m+n\ p$ 物爲含 $m$，$n$，及 $p$ 物三組之可能分法之數．

先分之爲含 $m$ 及 $n+p$ 物之二組，其可能分法之數爲

$$\frac{\underline{|m+p+n}}{\underline{|m}\ \underline{|n+p}}$$

又分 $n+p$ 物爲含 $n$，及 $p$ 物二組之可能分法之數爲

$$\frac{\underline{|n+p}}{\underline{|n}\ \underline{|p}}$$

故分 $m+n+p$ 物爲含 $m$，$n$，$p$ 物三組之不同分法之數爲

$$\frac{\underline{|m+n+p}}{\underline{|m}\ \underline{|n+p}}\times\frac{\underline{|n+p}}{\underline{|n}\ \underline{|p}}，\text{或}\frac{\underline{|m+n+p}}{\underline{|m}\ \underline{|n}\ \underline{|p}}$$

註．設使 $m=n=p$，則得 $\dfrac{\underline{|3m}}{\underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|m}}$，但此公式認此三組於任一分法中所有能發現之可能順序皆爲不同．又因相當每分法有 $\underline{|3}$，此種順序，故分爲三等組之可能不同方法之數爲 $\dfrac{\underline{|3m}}{\underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|3}}$

例．分 15 新兵三等組之分法之數爲

$\dfrac{\underline{|15}}{\underline{|5}\ \underline{|5}\ \underline{|5}\ \underline{|3}}$；而將其編入三不同聯隊，每聯隊 5 人之可能派法之數則爲 $\dfrac{\underline{|15}}{\underline{|5}\ \underline{|5}\ \underline{|5}}$

148．於以下例題，須注意排列公式必依題意爲適當之選擇後，適可應用．

例 1．由 7 英國人 4 美國人組成六人之委員會，問能有幾種組織法，設(1)會內恰含二美國人，(2)會內至少有二美國人．

(1) 茲選 2 美人及 4 英人．

美人可能選取法之數爲 ${}^4C_2$；英人可能選取法之數爲 ${}^7C_4$．

故所求數爲 ${}^4C_2\times{}^7C_4$

$$=\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\times\frac{7}{\underline{|4}\,\underline{|3}}$$

$$=\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|3}}=210.$$

(2) 此會可含 2，3，或 4 美人．

盡取所有作成二美人及 4 英人之組之適當組合又 3 美人及 3 英人者，最後 4 美人 2 英人之組者．

此三結果之和即所求之答數；故所求組織法之數．

$$={}^4C_2\times{}^7C_4+{}^4C_3\times{}^7C_3+{}^4C_4\times{}^7C_2$$

$$=\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\times\frac{\underline{|7}}{\underline{|4}\,\underline{|3}}+\frac{\underline{|4}}{\underline{|3}}\times\frac{\underline{|7}}{\underline{|3}\,\underline{|4}}+1\times\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|5}}$$

$$=210+140+21=371.$$

此例題中，僅用適當之組合公式．因會員間可能排列之次序與本問題並無關係．

例 2 由 7 子音 4 母音能拚成若干含 3 字音及 2 母音之字．

3 子音選取法之數爲 ${}^7C_3$，2 母音選取法之數爲 ${}^4C_2$；又因第一內每組可與第二內每組結合，故含 3 子音 2 母音之組合數爲 ${}^7C_3\times{}^4C_2$．

又每一組含 5 字母，其間可由 $\underline{|5}$ 法排列，故．

所求之字數 $={}^7C_3\times{}^4C_2\times\underline{|5}$

$$=\frac{\underline{|7}}{\underline{|3}\,\underline{|4}}\times\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\times\underline{|5}$$

$$=5\times\underline{|7}$$

$$=25200.$$

例 3. 用 *article* 內所含字母能排成若干母音居偶數地位之字?

於此置 3 母音於 3 選定位置，置 4 子音於 4 所餘位置．第一可有 $\underline{|3}$ 作法，第二有 $\underline{|4}$ 作法，故

$$\text{所求數} = \underline{|3} \times \underline{|4}$$

$$= 144.$$

於本題內，可即刻運用排列公式，因由題意知僅有一法選取母音及僅有一法選取子音也．

## 習　題 XI a.

1. 由 *courage* 所含字母能由幾法選出一母音及一子音?

2. 今有經學獎金候選者 8 人，數學者 7 人，自然科學者 4 人；問獎金能有幾種給法?

3. 求 $^8P_7$，$^{26}P_5$，$^{24}C_4$，$^{19}C_{14}$ 之值．

4. *equation* 所含字母可成若干 5字母之不同排列?

5. 設四倍 $n$ 物 3 個一組所成排列之數，等於 5 倍 $n-1$ 物 3 個一組所成排列之數，求 $n$．

6. *triangle* 所含字母能成排列若干? 又能成首為 $t$ 末為 $e$ 之排列若干?

7. 於 3,4,7,5,8,1 內取 4 數字，能有若干選取法?又用此中 4 數字能成數若干?

8. 設 $^{2n}C_3 : {}^nC_2 = 44:3$，求 $n$．

9. 5 鈴一組搖法之變換可有幾種?

10. 7 鈴一組搖法之變換可有幾種設次中音永居最後?

11. 於 24 人中派 4 人守夜，如每夜守夜者皆不完全相同，問可分配幾夜? 又每人被選派幾次?

12. *draught* 之字母能有幾種排列法，設母音字母永不分開?

13．市參議會有參議員 25 人及官吏 10 人；問可組成若干含 5 參議員及 3 官吏之會議?

14．字母 $A,B,C,p,q,r$，能成若干排列，設（1）以大字母居首，（2）首尾皆用大字母?

15．求 50 物每次取 46 所成之組合數．

16．設 ${}^nC_{12}={}^nC_8$，求 ${}^nC_{17}$，${}^{12}C_n$．

17．*vowels* 之字母可有若干排列法，設 *ol* 永居奇數位置．

18．於 4 官長 8 士兵中能由若干法選取六人（1）恰有一官長，（2）至少有一官長?

19．由 10 人成立 4 人或 4 人以上之會，可有幾種選法?

20．設 ${}^{18}C_r={}^{18}C_{r+2}$，求 ${}^rC_5$．

21．用 25 字音，5 母音，能排成若干含 2 子音 3 母音之字?

22．某圖書館有拉丁文書20 本，希臘文書 6 本；如以拉丁文 3本，希臘文 2 本爲一組置架上，問能有幾種置法?

23．四人等分 12 物可有幾種分法?

24．用 3 大寫字母，5 子音，及 4 母音．可成若干含 3 子音，2 母音且以大寫字母爲首之字?

25．某種選舉，三區應選舉之人數爲 10,15，及 20，設 45 人候選問彼等分配於不同三縣之方法應選有幾?

26．從 7 拉丁書及 3 英文書中，取 4 拉丁書 1 英文書置架上．設英文書永居中間，問可有幾種置法?

27．設船上有水手八人，其中 2 人僅用於船首，7 人船尾，問此八人有幾種配置法?

28．有每種 3 册之著作兩種及每種 2 册之著作兩種，如同著作之册數不分開，置 10 册於書架上，能有幾種置法?

29，設最好及最壞者永不置一處，問 10 試卷可有排列法若干?

30. 一八槳之船，由 11 人選取水手駕駛．設 11 人中三人把舵不能搖槳，其餘能搖槳而不能把舵．又設二人僅在船尾能搖，問水手可有幾種配置法？

31. 求證列 $p$ 正號及 $n$ 負號為一行，其中不得有二負號相鄰之列法之數為 ${}^{p+1}C_n$.

32. 設 ${}^{56}P_{r+6}$: ${}^{54}P_{r+3}=30800$: 1，求 $r$.

33. 由上下排列升起六不同色之旗能表不同信號若干，設其中之任何幾面皆可同時升起皆可用以表示，問共有表示法若干？

34. 設 ${}^{28}C_{2r}:{}^{24}C_{2r-4}=225$: 11，求$r$.

149. 迄今所記諸公式，所示皆視為不同之物．於視諸物之某一組或多組可以相同前，需要指出所用相同、相異二字之確切意義；當謂諸物為相異不同，不相似時，即指諸物顯然不相同，彼此之間甚易區別．另一方面相同物一詞表示由視覺知其相同，及彼此之間分別者．例如 §148 例題 2．內之諸子音字母，諸母音字母可謂各含以同性質相連合之物之一組，故由某種意義言，謂之同類；但不可視為相同之物，因每一皆個別存在於其組之諸物中，且彼此之間甚易區別也．故此例題之最後一步可謂每組含 5 不同之物；故其自身可為 $\lfloor 5$ 之排列．[§141 推論]

150. 設已求得以 12 本書置架上可能之排列方法，其中臘丁文 5 本，英文書 4 本，餘為不同文書籍．

其中同文書籍可視為五以其同性質相連之一類；但設其又互不相同則其排列之數為 $\lfloor 12$，因由其自為排列言，各書甚為相異也．

但設同文各書非盡不相同，其中之 5 爲相同之第一類，4 爲相同之第二類．求 12 物間所能自爲排列之方法之數；則此爲不直接屬於以前考究之任何情形之問題．

151．求 $n$ 物每次全取所能成自爲排列之數，設其中 $p$ 爲相同物之第一類，$q$ 爲相同物之第二類，$r$ 爲相同物之第三類，餘爲不相同者．

使其爲 $n$ 字母；設其中之 $p$ 爲 $a$，$q$ 爲 $b$，$r$ 爲 $c$，餘互不相同．

使 $x$ 爲所求排列之數，於是設由 $x$ 排列中之任一排列內易 $p$ 字母 $a$ 以與其餘皆異之 $p$ 相同字母，且不變其餘任一字母之位置，則能成 $\underline{|p}$ 新排列．故設此變換行於 $x$ 排列中之任一排列內，則得 $x\times\underline{|p}$ 排列．

同法，設 $q$ 字母 $b$ 易以 $q$ 不同字母，則排列之數

爲
$$x\times\underline{|p}\times\underline{|q}.$$

最後以同法易 $r$ 字母 $c$ 以 $r$ 不同字母，得 $x\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}$ 排列．

但茲諸物皆不相同，故其間能成 $\underline{|n}$ 排列．

由是
$$x\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}=\underline{|n}$$

卽
$$x=\frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}};$$

此爲所求排列之數．

諸物非盡不相同之任何情形，皆可以同法處理之．

例 assassination 所含字母每次全取，能成不同之排列若干?

此 13 字母中，4 爲 $s$，3 爲 $a$，2 爲 $i$，2 爲 $n$.

故排列之數.

$$=\frac{\lfloor 13}{\lfloor 4\ \lfloor 3\ \lfloor 2\ \lfloor 2}$$

$$=13.11.10.9.8.7.3.5$$

$$=1001\times 10800=10810800.$$

例 2. 以數字 1,2,3,4,3,2,1，能構成奇數位爲奇數字之數目若干?

奇數字 1,3,3,1 排於其四位置由

$$\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2\ \lfloor 2}\text{法}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

偶數字 2,4,2 排於其三位置可由

$$\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2}\text{法}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)內之每法可與(2)內之每法聯合.

故所求數$=\dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 2\cdot\lfloor 2}\times\dfrac{\lfloor 3}{\lfloor 2}=6\times 3=18.$

152. 設每物於每排列內皆可重複至一次，二次，…………至 $r$ 次，求 $n$ 物每次取 $r$ 所能成排列之數.

於此考究置 $r$ 處之置法之數，設有 $n$ 物被置，其中之任一可任意應用於任何排列內.

第一處可由 $n$ 法安置，當其已以任一法安置後，因不禁再置同物，第二處仍有 $n$ 置法，故首二處置法之數爲 $n\times n$ 或 $n^2$，第三處亦有 $n$ 置法，故首三處置法之數爲 $n^3$.

注意如此進行至任何地步 $n$ 之指數皆同於已置處之數，故得置 $r$ 處方法之數等於 $n^r$，

例．以 5 獎發給 4 兒童，可有幾種方法；設每兒童對各獎皆有取得之資格?

任一獎可有 4 種給法，其除各獎亦皆有 4 種給法，因已得獎之兒童對此獎仍可取得．故兩種獎品之發給法有 $4^2$ 個，三種獎品有 $4^3$，類推．故 5 種獎品可由 $4^5$ 或 1024 法發給．

153．求由 $n$ 物取幾個或全取成一組合之所有可能取法之全數．

每物可由取或留二法處理；又因處理任一物之任一法，可與處理其他每物之任一法相結合，故 $n$ 物處理法之數爲

$$2\times2\times2\times2\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 因子}.$$

但此包括各物全留之情形，故除去此種情形，則方法之全數爲 $2^n-1$.

此常稱爲 $n$ 物"組合之全數".

例．某有朋友六人；彼可有若干法請其一或一以上友人聚餐？

彼可選其 6 友人中之幾或全數；故其請法之全數爲 $2^6-1$或 63.

此結果可用下法證明．

每次所請之客可爲一人，二人，三人⋯⋯⋯；故選法之數

$$={}^6C_1+{}^6C_2+{}^6C_3+{}^6C_4+{}^6C_5+{}^6C_6$$

$$=6+15+20+15+6+1=63.$$

154．求 $n$ 物每次取 $r$ 所成之組合以 $r$ 爲何值時最大．

因 $${}^nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots(r-1)r},$$

及 $${}^nC_{r-1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)};$$

$$\therefore\quad {}^nC_r={}^nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}.$$

乘式 $\frac{n-r+1}{r}$ 可寫爲 $\frac{n+1}{r}-1$，此表此式當 $r$ 之值增大時減小；故當

$r$之值陸續為 1,2,3,………時,則$^nC_r$繼續增加至$\frac{n+1}{r}-1$等於 1,或小於 1.

茲　　$\frac{n+1}{r}-1>1,$

迄　　$\frac{n+1}{r}>2;$

即　　$\frac{n+1}{2}>r$

茲求 $r$ 適合此不等式之最大值.

(1) 使 $n$ 為偶數,且等於 $2m$; 於是

$$\frac{n+1}{2}=\frac{2m+1}{2}=m+\tfrac{1}{2}$$

捨此數大於 $r$ 外,所有 $r$ 之值大於 $m$.

故由使　$r=m=\frac{n}{2}$,則得組合之最大數為$^nC_{\frac{n}{2}}$

(2) 使 $n$ 為奇數,且等於 $2m+1$; 於是

$$\frac{r+1}{2}=\frac{2m+2}{2}=m+1.$$

捨此數大於 $r$ 外,所有 $r$ 之值皆大於 $m$ 但當 $r=m+1$ 時,乘式變為 1. 而

$$^nC_{m+1}={}^nC_m;\ 即,\ {}^nC_{\frac{n+1}{2}}={}^nC_{\frac{n-1}{2}}$$

故知組合之數以每次取$\frac{n+1}{2}$,或$\frac{n-1}{2}$時所成者為最大;二情形所得之結果相同.

155. $n$ 物每次取 $r$ 所成組合數之公式,可無須假定排列數之公式以求得之.

使$^nC_r$表 $n$ 物每次取 $r$ 所成組合之數;又使 $n$ 物表以字母 $a,b,c,d,$………….

取出 $a$，則所除字母可成 $n-1$ 物每次取 $r-1$ 所成之 ${}^{n-1}C_{r-1}$ 組合 於此每組合內綴以 $a$，由是知 $n$ 物每次取 $r$ 所成之組合中，含 $a$ 者之數爲 ${}^{n-1}C_{r-1}$，同理含 $b$ 者之數亦爲 ${}^{n-1}C_{r-1}$；$n$ 字母中之每個皆然.

故 $n\times{}^{n-1}C_{r-1}$ 等於含 $a$ 者，含 $b$ 者，含 $c$ 者 …………諸組合之總數.

但用此法作成諸組合時每特殊組合皆重複 $r$ 次. 例如，設 $r=3$，$abc$ 組合將見於含 $a$ 諸組合內，含 $b$ 諸組合內，含 $c$ 諸組合內.

故 $${}^{n}C_{r}={}^{n-1}C_{r-1}\times\frac{n}{r}.$$

以 $n-1$ 及 $r-1$ 代 $n$ 及 $r$，

$${}^{n-1}C_{r-1}={}^{n-2}C_{r-2}\times\frac{n-1}{r-1}.$$

同法 $${}^{n-2}C_{r-2}={}^{n-3}C_{r-3}\times\frac{n-2}{r-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}^{n-r+2}C_{2}={}^{n-r+1}C_{1}\times\frac{n-r+2}{2};$$

最後 $${}^{n-r+1}C_{1}=n-r+1.$$

諸縱直列相乘，且消去兩方公因子；由是

$${}^{n}C_{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots1}.$$

156. 求由取 $p+q+r+\cdots\cdots$ 物中之幾或全數成一組之可能方法之全數，設其中 $p$ 爲第一類相同物，$q$ 第二類相同物，$r$ 爲第三類相同物；類推.

此 $p$ 物可由 $p+1$ 法處置；因可取其中之 $0,1,2,3,\cdots\cdots p$. 同理 $q$ 物可由 $q+1$ 法處置；$r$ 物可由 $r$ 法處置；類推.

故所有諸物可能處置法之數爲 $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$；

但此含一物不取之情形，故除此情形，則選擇法之數爲 $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots 1$.

157. 表 $n$ 物每次取 $r$ 之排列數及組合數之一般公式，當諸物非盡不同時，不免稍爲紊亂，但一特殊情形，可以下法解之.

例. 求於 *proportio* 取含之字母中每次取 4 所成之 (1) 組合，(2) 排列之數.

此爲六不同類之 10 字母，即 $o$，$o$，$o$；$r$，$r$；$p$，$p$；$t$；$i$；$n$；求其 4 字母之組合時可分類如下：

(1) 三同一異.

(2) 兩兩相同.

(3) 兩同兩異.

(4) 四皆相異.

(1) 此類組合能由 5 法作成，因 $p,r,t,i,n$ 中之每一字母皆可由三相同字母 $o$ 之一組合取.

(2) 此類合能由 ${}^3C_2$ 法作成，因於（；$p,p$；$r,r$； 三對中取其二，由此可得 3 組合.

(3) 此類組合可由 $3\times 10$ 法作成，因於 3 對中取一對，再於其餘 5 字母中取 2，由此可得30組合.

(4) 此類組合可由 ${}^6C_4$ 法作成，因於 $o,o,p,r,t,i,n$ 中選取 4 不同字母，由此可得 15 組合.

故組合之全數爲 $5+3+30+15$；即53.

求 4 字母之不同排列，爲盡所有可能方法排列以上各組合.

(1)　　可得 $5\times\dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 3}$，或 20 排列.

(2)　　可得 $3\times\dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 2\,\lfloor 2}$，或 18 排列.

(3)　　可得 $30\times\dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 2}$，或 360 排列.

(4)　　可得 $15\times\lfloor 4$，或 360 排列.

故排列之全數爲 $20+18+360+360=758$.

## 習 題XI.b.

1．求由下字字母能成之排列數:

(1) *independence*，(2) *superstitions*，

(3) *institutions*

2．17 檯球能由幾法排列，設其中 7 爲黑色，6 爲紅色，4 爲白色？

3．某室飾以 14 旗幟；設其中 2 藍，3 紅，2 白，3 綠，2 黃，2 紫；問能有幾種懸法？

4．用數字 2,3,0,3,4,2,3，能作成大於百萬之數若干？

5．不變母音字母及子音字母之相關位置，求 *algebra* 所含字母能成之排列數.

6．某於三不同日期，騎車前往車站．及有 5 車輛供其選擇，問此三行程之行法有幾？

7．今有紅，白，藍，……$n$ 不同顏色之籌碼，設每色至少有 $r$，問能由幾法作成一含 $r$ 籌碼之排列？

8．某汽船有容 12 畜之廄舍．今有母牛，馬，小牛(每種至少有 12個．) 準備起運，問能有幾種裝法，

9．設不限制每人所受之物數，問以 $n$ 物給 $p$ 人，能有幾種方法？

10．二人分 5 事，能有幾種分法？

11．設各字母皆析爲一次，問 $a^3b^2c^4$ 式內所含字母，能成若干不同之排列？

12．某字母鎖含每週 15 不同字母之圈三圈，求開鎖時可能失敗之次數.

13．求聯十五邊形三頂點所成三角形之數.

14．某圖書館內，一書有 $a$ 複本，二書各有 $b$ 複本，三書各有 $c$ 複本，$d$ 書各有一本，問同時借出，可有幾種分配法？

15．用數字 1,2,3,0,4,5,6,7，能作成小於 10000 之數若干？

16 能由幾法以下獎發給 20 兒童之一班？經學之第一第二，數學之第一第二，科學之第一，及法文之第一之獎品.

17. 某電報機有電鑰 5 個，合靜止時，每電鑰能有 4 不同位置求此機所能成信號之全數爲何?

18. 7 人由幾種成一環形? 7 英人，7 美人能由幾法圍坐一圓桌設無二美人相鄰?

19. 設錢袋內有撒遏林，半撒遏林，克郎，福勞音，先令，辨士法星各一枚；問能有幾種取法?

20. 於 3 椰子，4 蘋果，2 橘子中，每種至少取一個，能有取法若干?

21. 分 $mn$ 物爲 $n$ 等分，問有不同分法若干?

22. 上下懸不同色之四旗以表信號，設其中任幾面皆可同時升起，問能表信號若干? 又 5 面旗能表信號若干?

23. 求從 *series* 所含字母中取三所成排列之數.

24. 茲有 $p$ 點在某平面內，設其中除 $q$ 點在一直線上外，無共線之三點；求連各點所成：(1) 直線之數，(2) 三角形之數.

25. 有空間之 $p$ 點，除 $q$ 點共面外，無共面之四點，求有含三點之平面若干?

26. 設有每種有 $p$ 複本不同之書 $n$ 種，問能由若干法選取?

27. 求從*expression* 之字母中每次取 4 能成之排列及組合之數?

28. 求從 *excmination* 之字母中每次取 4 所成之排列數?

29. 設各數內所有數字不得重複；求以數字 1,3,5,7,9，所做成大於 10000 之數之和.

30. 設各數內數字不得重複，求數字 0,2,4,6,8，所成大於10000 之數之和.

31. 設 $p+q+r$ 物中，$p$ 物相同，$q$ 物相同，餘物相異；指明其組合之全數爲

$$(p+1)(q+1)2^r-1.$$

32. 指明由 $a$ 及 $b$ 之 $2n$ 字母所成排列之數，以 $a$，$b$ 之數相等時爲最大.

33. 設 $a,b,c,d,\cdots\cdots$等 $n+1$ 數皆不相同，且皆爲質數，求証 $a^mbcd\cdots\cdots$式內不同因子之數爲 $(m+1)2^n-1$.

# 第十二章

## 數學歸納法

158. 甚多數學公式，不易以直接方法証明；於是常以用數學歸納之方法証明爲宜．此卽茲所說明者．

例 1．設求証首 $n$ 自然數之立方和等於

$$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

由試驗能易知此於简單情形時爲眞，如當 $n=1$，或 2，或 3 時；且由此可推測此公式於所有情形皆眞．假定其於 $n$ 項時爲眞；於是

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

加第 $n+1$ 項，卽 $(n+1)^3$ 於各方；於是

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3\cdots\cdots\text{ 至 } n+1 \text{ 項}&=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+(n+1)^3\\&=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)\\&=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}\\&=\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}^2;\end{aligned}$$

此與假定爲眞之 $n$ 項之結果同其形式，僅以 $n+1$ 代 $n$；換言之卽設當取某項數，可爲任何數之結果爲眞時，則當項數增 1 時亦眞；但已知取 3 項時爲眞，故 4 項時亦眞，5 項時亦眞；類推．故此結果無限爲眞．

例 2. 求形爲 $x-a$ 之 $n$ 二項因子之積.

由實際乘法得

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc,$$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4&+(a+b+c+d)x^3\\&+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2\\&+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.\end{aligned}$$

由此結果可得以下定律:

(1) 右方之項數較左方因子之數多一.

(2) 首項 $x$ 之指數與左方因子之數相等; 其他諸項內之指數皆較前項少一.

(3) 首項之係數爲一; 次項之係數爲 $a,b,c,\cdots\cdots\cdots$ 諸字母之和; 第三項之係數爲諸字母每次取 2 相乘之積之和; 第四項係數爲諸字母每次取 3 相乘之積之和; 類推. 末項爲諸字母之積.

假定此定律適用於 $n-1$ 因子; 即設

$$(x+a)(x+b)\cdots\cdots(x+h)=x^{n-1}+p_1x^{n-2}+p_2x^{n-3}+p_3x^{n-4}+\cdots\cdots\cdots+p_{n-1},$$

式內

$$\begin{aligned}p_1&=a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots h;\\p_2&=ab+ac+\cdots\cdots\cdots+ah+bc+bd+\cdots\cdots\cdots;\\p_3&=abc+abd+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\p_{n-1}&=abc\cdots\cdots\cdots\cdots h.\end{aligned}$$

左右乘以另一因子 $x+k$; 由是

$$(x+a)(x+b)\cdots\cdots\cdots\cdots(x+h)(x+k)$$

$$=x^n+(p_1+k)x^{n-1}+(p_2+p_1k)x^{n-2}+(p_3+p_2k)x^{n-3}+\cdots+p_{n-1}k,$$

茲 $p_1+k=(a+b+c+\cdots\cdots+h)+k=$所有 $n$ 字母 $a,b,c,\cdots\cdots k$ 之和;

$p_2+p_1k=p_2+k(a+b+c+\cdots\cdots\cdots+h)=$所有 $n$ 字母 $a,b,c,\cdots\cdots\cdots k$ 每次取 2 相乘之積之和;

$p_3+p_2k=p_3+k(ab+ac+\cdots\cdots\cdots+ah+bc+\cdots\cdots\cdots)$

$=$所有 $n$ 字母 $a,b,c,\cdots\cdots k$, 每次取 3 相乘之積之和;

$p_{n-1}k=$所有 $n$ 字母 $a,b,c,\cdots\cdots\cdots k$ 之積.

由是知設此法則適用於 $n-1$ 因子相乘時，則亦適用於 $n$ 因子相乘時；但確知其適用於 4 因子相乘時，故適用於 5 因子，6 因子時；類推．故知其適用於無限．由是

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+k)=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+S_3x^{n-3}+\cdots\cdots\cdots+S_n$$

式內 $S_1$＝所有 $n$ 字母 $a,b,c,\cdots\cdots\cdots k$ 之和；

$S_2$＝所有 $n$ 字母每次取 2 之積之和．

…………………………………………

$S_n$＝所有 $n$ 字母之積．

159．關於除盡之定理常由歸納法成立之．

例．指明 $x^n-1$ 於 $n$ 之所有正整值，皆能爲 $x-1$ 除盡．

由除法 $\dfrac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+\dfrac{x^{n-1}-1}{x-1}$；

由是設 $x^{n-1}-1$ 能爲 $x-1$ 除盡，則 $x^n-1$ 亦能爲 $x-1$ 除盡．但 $x^2-1$ 可爲 $x-1$ 除盡；由是 $x^3-1$ 亦能爲 $x-1$ 除盡；$x^4-1$ 亦能爲 $x-1$ 除盡，類推；故此命題成立．

同類他例將見於數論一章中．

160．由上例知歸納法僅能用於有相當自然數 $1, 2, 3, \cdots n$ 順序之連續情形之定理．

## 習 題 XII

用歸納法証明：

1．$1+3+5+\cdots\cdots\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$．

2．$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$．

3．$2+2^2+2^3+\cdots\cdots\cdots+2^n=2(2^n-1)$．

4．$\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3.4}+\cdots\cdots$至 $n$ 項$=\dfrac{n}{n+1}$．

5．用歸納法証明 $n$ 爲偶數時 $x^n-y^n$ 能爲 $x+y$ 除盡．

# 第 十 三 章

## 二項式定理· 正整指數

161. 由實際乘法可指明

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$

$=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$

$+(abc+abd+acd+bcd)\ x+abcd$ ……………………………………… (1)

但此結果亦可由心算法寫出，因其完全積等於若干部分積之和，由此每部分積爲四因子中每因子各取一字母之四字母之積．設觀察各部分積作成之方法，則知

(1) $x^4$ 之項爲於各因子中取 $x$ 作成．

(2) 含 $x^3$ 之項爲盡可能法於任三因子中取 $x$，除一因子中取字母 $a\ b,c,d$ 之一作成．

(3) 含 $x^2$ 之項爲盡可能法於任二因子中取 $x$，他二因子中取字母 $a,b,c,d$ 中之二作成．

(4) 含 $x$ 之項爲從任一因子中取 $x$，除三因子中取字母 $a,b,c,d$ 中之三作成．

(5) 不含 $x$ 之項，爲所有字母 $a,b,c,d$ 之積．

例 1. $(x-2)(x+3)(x-5)(x+9)$

$=x^4+(-2+3-5+9)x^3+(-6+10-18-15+27-45)x^2$

$+(30-54+90-135)x+270.$

$=x^4+5x^3-47x^2-69x+270,$

例 2．求下積內 $x^3$ 之係數．

含 $x^3$ 之項爲任三因子中取 $x$，餘二因子取數字相乘而得；故 $x^3$ 之係數等於 $-3$，$5$，$-1$，$2$，$-8$ 諸數中，每次取二之積之和．

$$\begin{aligned}\text{故所求係數} &= -15+3-6+24-5+10-40-2+8-16\\ &= -39.\end{aligned}$$

162．設上節方程式 (1) 內使 $b=c=d=a$，則得

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4.$$

於此例示之由較一般之結果推出特殊情形之方法，在數學中爲常見之一；因證一般命題，常較証特殊情形爲易也．

下節將用此法証明，稱爲二項式定理之公式：由之可乘出形爲 $x+a$ 之二項式之任何指定正整乘冪之展開式．

163．設 $n$ 爲正整數，求 $(x+a)^n$ 之開式．

觀察連乘式

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x+k,$$

其因子之數爲 $n$．

此展開式爲 $n$ 因子 $x+a$，$x+b$，$x+c$，$\cdots\cdots\cdots\cdots x+k$ 之積；且每項皆爲 $n$ 次，由於 $n$ 因子內各取一字母相乘而得．

$x$ 之最高次冪爲 $x^n$，成於由 $n$ 因子內皆各取 $x$，含 $x^{n-1}$ 之項爲成於由任 $n-1$ 因子內取 $x$，餘一因子內取字母 $a$，$b$，$c$，$d\cdots\cdots\cdots k$ 中之一，因之最後乘積內 $x^{n-1}$ 之係數爲 $a$，$b$，$c$，$\cdots\cdots\cdots k$ 諸字母之和；表之以 $S_1$．

含 $x^{n-2}$ 之項成於由任 $n-2$ 因子中取 $x$，餘 2 因子內取字母 $a$，$b$，$c$，$\cdots\cdots\cdots k$ 中之二，故最後積內 $x^{n-2}$ 之係數，爲 $a$，$b$，$c\cdots\cdots\cdots k$ 諸字母每次取二相乘之積之和．表之以 $S_2$．

一般言之，含 $x^{n-r}$ 項爲於任 $n-r$ 因子內取 $x$，其餘因子內取字母 $a, b, c, \cdots\cdots k$ 之 $r$ 個相乘而得．故 $x^{n-r}$ 之係數爲於 $a, b, c, \cdots\cdots k$ 諸字母中每次取 $r$ 相乘諸積之和．以 $S_r$ 表之．

末項爲 $a, b, c, \cdots\cdots k$ 諸字母之積．以 $S_n$ 表之．

故 $(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+k)$

$=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\cdots\cdots+S_rx^{n-r}+\cdots\cdots+S_{n-1}x+S_n$.

$S_1$ 內之項數爲 $n$；$S_2$ 內之項數等於 $n$ 物每次取 2 所成組合之數，即 ${}^nC_2$；$S_3$ 內之項數爲 ${}^nC_3$；類推．

今設 $b, c, \cdots\cdots k$ 皆等於 $a$，於是 $S_1$ 變爲 ${}^nC_1a$；$S_2$ 變爲 ${}^nC_2a^2$；$S_3$ 變爲 ${}^nC_3a^3$；類推；故

$$(x+a)^n=x^n+{}^nC_1ax^{n-1}+{}^nC_2a^2x^{n-2}+{}^nC_3a^3x^{n-3}+\cdots\cdots+{}^nC_na^n;$$

代 ${}^nC_1, {}^nC_2, \cdots\cdots$ 得

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}+\cdots\cdots+a^n.$$

此級數含 $n+1$ 項．

此爲二項式定理，右方稱爲 $(x+a)^n$ 之展開式．

164．二項式定理亦可證明如下：

如 § 158 例 2．可由歸納法求得 $x+a, x+b, x+c, \cdots\cdots x+k$，$n$ 因子之積．於是如 163 節，能求出 $(x+a)^n$ 之展開式．

165 $(x+a)^n$ 展開式內之係數以 ${}^nC_1, {}^nC_2, {}^nC_3\cdots\cdots{}^nC_n$ 表之爲最宜．但有時爲更簡單之表示，略去 $n$ 而寫爲 $C_1, C_2, C_3, \cdots\cdots C_n$．用此符號得

$$(x+a)^n=x^n+C_1ax^{n-1}+C_2a^2x^{n-2}+C_3a^3x^{n-3}+\cdots\cdots+C_n a^n.$$

設以 $-a$ 代 $a$，則得

$$(x-a)^n=x^n+C_1(-a)x^{n-1}+C_2(-a)^2x^{n-2}+C_3(-a)^3x^{n-3}+\cdots\cdots+C_n(-a)^n.$$

$$=x^n-C_1ax^{n-1}+C_2a^2x^{n-2}-C_3a^3x^{n-3}+\cdots\cdots+(-1)^nC_na^n.$$

故 $(x+a)^n$ 及 $(x-a)^n$ 二展開式內諸項之絕對值相同，僅在 $(x-a)^n$ 內有正負號之輪換；其末項之爲正或負，全視 $n$ 之爲偶數或奇數．

例1. 求 $(x+y)^6$ 之展開式.

由公式,

$$(x+y)^6=x^6+{}^6C_1x^5y+{}^6C_2x^4y^2+{}^6C_3x^3y^3+{}^6C_4x^2y^4+{}^6C_5xy^5+{}^6C_6y^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+5xy^5+y^6,$$

計算 ${}^6C_1, {}^6C_2{}^6C_3, \cdots\cdots$ 之值而得.

例2. 求 $(a-2x)^7$ 之展開式.

$(a-2x)^7=a^7-{}^7C_1a^6(2x)+{}^7C_2a^5(ax)^2-{}^7C_3a^4(2x)^3+\cdots\cdots$ 至 8 項.

倘憶 ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$, 故係數計算至 ${}^7C_3$, 則其餘可即刻寫出;因 ${}^7C_4={}^7C_3$; ${}^7C_5={}^7C_2$; 類推. 故

$$\begin{aligned}(a-2x)^7&=a^7-7a^6(2x)+\frac{7.6}{1.2}a^5(2x)^2-\frac{7.6.5}{1.2.3}a^4(2x)^3+\cdots\cdots\\&=a^7-7a^6(2x)+21a^5(2x)^2-35a^4(2x)^3+35a^3(2x)^4\\&\qquad-21a^2(2x)^5+7a(2x)^6-(2x)^7\\&=a^7-14a^6x+84a^5x^2-280a^4x^3+560a^3x^4\\&\qquad-672a^2x^5+448ax^6-128x^7.\end{aligned}$$

例3. 求 $(a+\sqrt{a^2-1})^7+(a-\sqrt{a^2-1})^7$ 之值.

此二展開式項之絕對值相等;惟第二展開式之第 2, 4, 6, 8 各項為負數, 故消去第一展開式之相當項, 得所求和.

$$\begin{aligned}&=2\{a^7+21a^5(a^2-1)+35a^3(a^2-1)^2+7a(a^2-1)^3\}\\&=2a(64a^6-112a^4+56a^2-7).\end{aligned}$$

166. $(x+a)^n$ 之展開式內, 其第二項之係數為 ${}^nC_1$; 第三項之係數為 ${}^nC_2$; 第四項之係數為 ${}^nC_3$; 類推每項之尾數較其所居項數少一; 故 ${}^nC_r$ 為第 $r+1$ 項之係數. 此等為通項, 因與 $r$ 以不同之值, 則可從 ${}^nC_r$ 求得任何係數之值; 且與 $x$ 及 $a$ 以適當之指數, 則可求出任一指定之項.

故其 $r+1$ 項可寫為

$${}^nC_rx^{n-r}a^r;\ 或\ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\phantom{r}}x^{n-r}a^r.$$

用此公式於任何特殊情形, 可知 $a$ 之指數與 $C$ 之尾數同, $x$ 及 $a$ 之指數和為 $n$.

例1．求 $(a+2x^3)^{17}$ 展開式之第 5 項．

所求項 $={}^{7}C_4a^{13}(2x^3)^4$

$$=\frac{17.16.15.14}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\times 16a^{13}x^{12}$$

$$=38080a^{13}x^{12}.$$

例 2．求 $(3-a)^{16}$ 之第十四項．

所求項 $={}^{16}C_{13}(3)^3(-a)^{13}$

$$={}^{16}C_3\times(-9a^{13})$$

$$=-945a^{13}.$$

167．二項式定理之最簡式爲 $(1+x)^n$ 之展開式．此由於 § 163 之一般公式內以 1 易 $x$，以 $x$ 易 $a$ 而得．故

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots\cdots\cdots+{}^nC_rx^r+\cdots\cdots\cdots+{}^nC_nx^n$$

$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots+x^n,$$

其通項爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r$$

二項式之展開式可永照首項爲 1 之情形求出之；如

$$(x+y)^n=\left\{x\left(1+\frac{y}{x}\right)\right\}^n$$

$$=x^n(1+z)^n.\qquad 於此\ z=\frac{y}{x}.$$

例1．求 $(x^2-2x)^{10}$ 展開式內 $x^{16}$ 之係數．

已知 $(x^2-2x)^{10}=x^{20}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{10}$;

又因 $x^{20}$ 乘 $\left(1-\frac{2}{x}\right)^{10}$ 展開式內之各項．故於此展開式內求 $\frac{1}{x^4}$ 之係數．

所求係數 $={}^{10}C_4(-2)^4$

$$=\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\times 16$$

$$=3360.$$

在某種情形內，下法較爲簡便．

例 2. 求 $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$ 之展開式內 $x^r$ 之係數.

設 $x^r$ 在第 $p+1$ 項內.

其第 $p+1$ 項 $={}^nC_p(x^2)^{n-p}\left(\frac{1}{x^3}\right)^p$

$={}^nC_p x^{2n-5p}$.

但此項含 $x^r$，故 $2n-5p=r$；或 $p=\frac{2n-r}{5}$.

故所求係數 $={}^nC_p={}^nC_{\frac{2n-r}{5}}$

$$=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{\tfrac{1}{5}(2n-r)}\;\lfloor\underline{\tfrac{1}{5}(3n+r)}}$$

捨 $\frac{2n-r}{5}$ 為正整數外，此展開式無含 $x^r$ 之項.

168. § 163 內曾由 $(x+a)(x+b)\cdots\cdots(x+k)$ $n$ 因子之積推出 $(x+a)^n$ 之展開式. 且此証法因其能得極一般之結論. 故甚有價值，但當注意以下二項式定理較簡短之証明.

於第十五章內將見用同法以求

$(a+b+c+\cdots\cdots\cdots)^n$

展開式之公項.

169. 求証二項式定理.

$(x+a)^n$ 之展開式為 $n$ 等於 $x+a$ 之因子之積，其各項皆為 $n$ 次，為於 $n$ 因子中每因子取一字母相乘之積. 故含 $x^{n-r}a^r$ 之各項，為於 $a$ 因子內取 $a$，其餘因子內取 $x$ 相乘而得. 故含 $x^{n-r}a^r$ 之項數必等於從 $n$ 物中選取 $r$ 為一組合所有取法之數. 即 $x^{n-r}a^r$ 之係數為 ${}^nC_r$，且由陸續與 $r$ 以 0, 1, 2, 3, ……$n$ 之值. 則可得所有諸項之係數. 故

$(x+a)^n=x^n+{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_2x^{n-2}a^2+\cdots\cdots\cdots+{}^nC_rx^{n-r}a^r+\cdots\cdots\cdots+a^n$，因 ${}^nC_0$ 及 ${}^nC_n$ 皆等於 1.

## 習 題 XIII. a.

展開以下各二項式：

1. $(x-3)^5$. 2. $(3x+2y)^4$. 3. $(2x-y)^5$.

4. $(1-3a^2)^6$. 5. $(x^2+x)^5$. 6. $(1-xy)^7$.

7. $\left(2-\frac{3x^2}{2}\right)^4$. 8. $\left(3a-\frac{2}{3}\right)^6$. 9. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^7$.

10. $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2x}\right)^6$. 11. $\left(\frac{1}{2}+a\right)^8$. 12. $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{10}$.

求出且化簡

13. $(x-5)^{13}$ 之第 4 項. 14. $(1-2x)^{13}$ 之第 10 項.

15. $(2x-1)^{13}$ 之第 12 項. 16. $(5x+8y)^{30}$ 之第 28 項.

17. $\left(\frac{a}{3}+9b\right)^{10}$ 之第 4 項. 18. $\left(2a-\frac{b}{3}\right)^8$ 之第 5 項.

19. $\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^9$ 之第 7 項. 20. $\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}-\frac{y^{\frac{5}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^8$ 之第 5 項.

求以下各式之值：

21. $(x+\sqrt{2})^4+(x-\sqrt{2})^4$.

22. $(\sqrt{x^2-a^2}+x)^6-(\sqrt{x^2-a^2}-x)^6$.

23. $(\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6$.

24. $(2-\sqrt{1-x})^6+(2+\sqrt{1-x})^6$.

25. 求 $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{10}$ 之中項. 26. 求 $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{14}$ 之中項.

27. 求 $\left(x^2+\frac{3a}{x}\right)^{15}$ 內 $x^{18}$ 之係數.

28. 求 $(ax^4-bx)^9$ 內 $x^{18}$ 之係數.

29. 求 $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ 內 $x^{32}$ 及 $x^{-17}$ 之係數.

30. 求 $\left(3a-\frac{a^3}{6}\right)^9$ 內之二中項.

31. 求 $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)$ 內不含 $x$ 之項.

32. 求 $\left(9x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 之第 13 項.

33. 設 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ 內有 $x^r$，試求其係數.

34. 求 $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ 內不含 $x$ 之項.

35. 設 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ 之展開式內有 $x^p$，求証其係數為

$$\frac{\lfloor 2n}{\lfloor \frac{1}{3}(4n-p)\ \lfloor \frac{1}{3}(2n+p)}.$$

170. $(1+x)^n$ 展開式內，距兩端等遠之項之係數相等.

正數第 $r+1$ 項之係數為 ${}^nC_r$.

倒數第 $r+1$ 項之前有 $n+1-(r+1)$ 或 $n-r$ 項；故正數為第 $n-r+1$ 項，其係數為 ${}^nC_{n-r}$. 由第 145 節知此曾指明其等於 ${}^nC_r$；由是得本命題.

171. 求 $(1+x)^n$ 之展開式內之最大係數.

$(1+x)^n$ 之公項之係數為 ${}^nC_r$； 故僅需求 $r$ 為何值時此數為最大.

由 §154 知 $n$ 為偶數時，則 ${}^nC_{\frac{n}{2}}$ 為最大係數. 及 $n$ 為奇數其最大係數為 ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$，或 ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$； 此二係數相等.

172. 求 $(x+a)^n$ 之展開式內之最大項.

$$(x+a)^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n;$$

因 $x^n$ 乘 $\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ 內之每項，故僅求後展開式內之最大項已足.

使第 $r$，及第 $r+1$ 項為任二連續項，第 $r+1$ 項由第 $r$ 項乘以 $\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{a}{x}$；即 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}$ 而得．　　　[§166]

$r$ 增大則因子 $\frac{n+1}{r}-1$ 減小；故第 $r+1$ 項不永大於第 $r$ 項．僅至 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}$ 等於或小於 1 時．

令　$$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}>1,$$

迄　$$\frac{n+1}{r}-1>\frac{x}{a};$$

即　$$\frac{n+1}{r}>\frac{x}{a}+1,$$

或　$$\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}>r \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設 $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$ 為一整數，以 $p$ 表之，於是設 $r=p$，則乘式因子變為 1．而第 $p+1$ 項等於第 $p$ 項；故此二項大於其他任何項．

設 $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$ 非整數，以 $q$ 表其整數部分，於是 $r$ 適合 (1) 式之最大值為 $q$；故第 $q+1$ 項為最大．

因只求絕對值之最大項，$(x-a)^n$ 之研究與此相同；故在任何數的習題中無須注意二項式第二項之符號，亦可發覺每習題之解決，以不用一般公式為最佳．

例 1. 設 $x=\frac{1}{3}$，求 $(1+4x)^8$ 之展開式內之最大項. 以 $T_r$ 及 $T_{r+1}$ 表第 $r$ 及 $r+1$ 項，於是

$$T_{r+1}=\frac{8-r+1}{r}\cdot 4x\times T_r$$

$$=\frac{9-r}{r}\times\frac{4}{3}\times Tr;$$

因 $$Tr_{+1}>Tr,$$

既然 $$\frac{9-r}{r}\times\frac{4}{3}>1;$$

卽 $$36-4r>3r,$$

或 $$36>7r.$$

$r$ 適合於此之最大值爲 5，故最大項爲第六項；且其值

$$={}^8C_5\times\left(\frac{4}{3}\right)^5={}^8C_3\times\left(\frac{4}{3}\right)^5=\frac{57344}{243}$$

例2. 設$x=1$ 時，求 $(3-2x)^9$之展開式內之最大項.

$$(3-2x)^9=3^9\left(1-\frac{2x}{3}\right)^9;$$

故僅考驗$\left(1-\frac{2x}{3}\right)^9$之展開式已足.

此處 $$T_{r+1}=\frac{9-r+1}{r}\cdot\frac{2x}{3}\times T_r,$$

$$=\frac{10-r}{r}\times\frac{2}{3}\times T_r;$$

因 $$T_{r+1}>T_r,$$

既然 $$\frac{10-r}{r}\times\frac{2}{3}>1;$$

卽 $$20>5r.$$

故於 $r$ 大於 3 之所有值，皆得 $T_{r+1}>T_r$； 但設 $r=4$，則 $T_{r+1}=T_r$， 此二項最大之項. 故第 4 及第 5 項之絕對值相等，且大於其他任何項，其值

$$=3^9\times{}^9C_3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=3^6\times 84\times 8=480888.$$

173．求$(1+x)^n$之展開式內各項係數之和．

於恆等式 $(1+x)^n=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots\cdots+C_nx^n$ 內使 $x=1$；由是

$$2^n=1+C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+C_n$$
$$=\text{係數之和}.$$

推論：$\therefore C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+C_n=2^n-1$；

即"$n$物組合之全數"為 $2^n-1$． [§153]

174．求證$(1+x)^n$之展開式內奇數項係數之和等於偶數項係數之和．

於恆等式 $(1+x)^n=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+C_nx^n$ 內，使 $x=-1$；於是

$$0=1-C_1+C_2-C_3+C_4-C_5+\cdots\cdots\cdots;$$
$$\therefore 1+C_2+C_4+\cdots\cdots\cdots=C_1+C_3+C_5+\cdots\cdots\cdots$$
$$=\tfrac{1}{2}(\text{所有係數之和})$$
$$=2^{n-1}.$$

175．二項式定理，亦可用以展開含二項以上之多項式．

例．求$(x^2+2x-1)^3$之展開式．

視 $2x-1$ 為一項，則展開式

$$=(x^2)^3+3(x^2)^2(2x-1)+3x^2(2x-1)^2-(2x-1)^3$$
$$=x^6+6x^5+9x^4-4x^3-9x^2+6x-1.$$

176．下例題含有啓示．

例．設$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n$，

求 $c_0+2c_1+3c_2+4c_3+\cdots\cdots+(n+1)c_n\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

及 $c_1^2+2c_2^2+3c_3^2+\cdots\cdots+nc_n^2$之值$\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

級數$(1)=(c_0+c_1+c_2+\cdots\cdots+c_n)+(c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+nc_n)$

$$=2^n+n\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\cdots\cdots+1\right\}$$
$$=2^n+n(1+1)^{n-1}$$
$$=2^n+n.2^{n-1}.$$

求級數 (2) 之值，如下進行：

$$c_1x+2c_2x^2+3c_3x^3+\cdots\cdots\cdots+nc_nx^n$$

$$=nx\left\{1+(n-1)x+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}\right\}$$

$$=nx(1+x)^{n-1}:$$

故，以 $\frac{1}{x}$ 易 $x$，得

$$\frac{c_1}{x}+\frac{2c_2}{x^2}+\frac{3c_3}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{nc_n}{x^n}=\frac{n}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

又 $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n=(1+x)^n\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$

設相乘級數 (3) 及(4) 之左方，則知積內不含 $x$ 之項爲級數 (2)；故

級數 $(2)=\frac{n}{x}(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1}$ 內不含 $x$ 之項.

$=\frac{n}{x^n}(1+x)^{2n-1}$ 內不含 $x$ 之項.

$=n(1+x)^{2n-1}$ 內 $x^n$ 之係數.

$$=n\times{}^{2n-1}C_n$$

$$=\frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1\ \lfloor n-1}$$

## 習 題 XIII.b.

於以下展開式內求何項爲最大項：

1. $(x-y)^{30}$ 當 $x=11,y=4$ 時.
2. $(2x-3y)^{28}$ 當 $x=9$，$y=4$ 時.
3. $(2a+b)^{14}$ 當 $a=4$，$b=5$ 時.
4. $(3+2x)^{15}$ 當 $x=\frac{5}{2}$ 時.

於以下展開式內求最大項之值：

5. $(1+x)^n$ 當 $x=\frac{2}{3}$，$n=6$ 時.
6. $(a+x)^n$ 當 $a=\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{3}$，$n=9$ 時.

7. 指明 $(1+x)^{2n}$ 中項之係數等於 $(1+x)^{2n-1}$ 二中項係數之和.

8. 設 $(x+a)^n$ 之展開式內奇數項之和爲 $A$，偶數項之和爲 $B$，求証 $A^2-B^2=(x^2-a^2)^n$.

9. $(x+y)^n$之展開式內之第 2，3，4 項爲 240,720,1080；求 $x,y,n$.

10. 求 $(1+2x-x^2)^4$ 之展開式.

11. 求 $(3x^2-2ax+3a^2)^3$ 之展開式.

12. 求 $(x+a)^n$ 從末項數之第 $r$ 項.

13. 求 $(x-\frac{1}{x})^{2n+1}$ 倒數第 $p+2$ 項

14. 設 $(1+x)^{43}$展開式中之第 $2r+1$ 項之係數與第 $r+2$ 項之係數相等；求 $r$.

15. 欲使 $(1+x)^{2n}$ 內第 $3r$ 項之係數等於第 $r+2$ 項之係數，求 $r$ 與 $n$ 間之關係.

16. 指明 $(1+x)^{2n}$ 之展開式內之中項爲

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{\underline{|n}}2^n x^n.$$

設 $c_0,c_1,c_2,\cdots\cdots c_n$ 表$(1+x)^n$ 之展開式內之係數，求証

17. $c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+nc_n=n\cdot 2^{n-1}$.

18. $c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

19. $\frac{c_1}{c_0}+\frac{2c_2}{c_1}+\frac{3c_3}{c_2}+\cdots\cdots+\frac{nc_n}{c_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}$.

20. $(c_0+c_1)(c_1+c_2)\cdots\cdots(c_{n-1}+c_n)=\frac{c_1c_2\cdots\cdots c_n(n+1)^n}{\underline{|n}}$.

21. $2c_0+\frac{2^2c_1}{2}+\frac{2^3c_2}{3}+\frac{2^4c_3}{4}+\cdots\cdots+\frac{2^{n+1}c_n}{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

22. $c_0^2+c_1^2+c_2^2+\cdots\cdots+c_n^2=\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}$.

23. $c_0c_r+c_1c_{r+1}+c_2c_{r+2}+\cdots\cdots+c_{n-r}c_n=\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|n+r}}$.

# 第十四章

## 二項式定理·任何指數

177. 前章研究當指數爲任何正整數時之二項式定理；茲考驗由是所得公式是否適用於指數爲負數或分數時之情形.

因由 §167，知任何二項式皆可變爲一公有節式，故集中吾人注意於形爲 $(1+x)^n$ 之二項式已足.

由實際開方，得

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\cdots\cdots;$$

又由實際除法，

$$(1-x)^{-2}=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots;$$

[比較第 60 節. 例題 1. ]

二級數之項數皆爲無窮.

以上爲用獨立方法求得 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 及 $(1+x)^{-2}$ 各式之展開式. 茲證此僅爲求 $(1+x)^n$ 之展開式之一般公式之特殊情形.

於此 $n$ 爲任何有理量.

此公式爲牛頓 (*Newton*) 所發明.

178. 設有依 $x$ 之升冪排列之二式，

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

及 $$1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此二展開式之積必爲一 $x$ 升冪之級數，表之以

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

於是 $A,B,C,\cdots\cdots\cdots$ 顯然爲 $m$ 及 $n$ 之函數．故在任何特殊情形下，$A,B,C,\cdots\cdots\cdots$ 之確值，必依其情形下 $m$ 及 $n$ 之值而定．但 (1) 及 (2) 內 $x$ 乘冪之係數聯合以得 $A,B,C,\cdots\cdots$ 之方法，則與 $m$，$n$ 全無關係．換言之，即無論 $m$ 及 $n$ 爲何值，$A,B,C,\cdots\cdots\cdots$ 永保此同一不變之形式．由是設能決定 $A,B,C,\cdots\cdots\cdots$ 之形式於 $m$ 及 $n$ 之任何值，則斷定於所有 $m$ 及 $n$ 之值，$A,B,C,\cdots\cdots$ 皆得同一之形式．

此原則常視爲"永遠等形"之一例．目下情形，僅認此種事實，即代數積內無論其所含之量爲整數或分數，正數或負數；其結果形式永遠相同．

茲用此原則爲二項式定理於任何指數時之一般証明．此証法應歸功於尤勒氏 *Euler*.

179．求証二項式定理，當指數爲正分數時．

不拘 $m$ 爲何值，正數或負數；整數或分數；以 $f(m)$ 表級數

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

於是 $f(n)$ 表級數

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

設此二級數相乘，則必成一 $x$ 升冪之級數．不論 $m$ 及 $n$ 爲任何值，其係數之形式不變．

決定此積之不變形式，可與 $m,n$ 以最宜之任何值，因之設 $m$ 及 $n$ 爲正整數．於此則 $f(m)$ 爲 $(1+x)^m$ 之展開形式，及 $f(n)$ 爲 $(1+x)^n$ 之展開形式，故

$$f(m)\times f(n)=(1+x)^m\times(1+x)^n=(1+x)^{m+n},$$

但當 $m$ 及 $n$ 爲正整量時，$(1+x)^{m+n}$之展開式爲

$$1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此即不論 $m$ 及 $n$ 爲任何值之所有情形內 $f(m)$ 及 $f(n)$ 之積之形式．且用以前表示法可以 $f(m+n)$ 表之；由是於 $m$ 及 $n$ 之所有值

$$f(m)\times f(n)=f(m+n).$$

又 $$f(m)\times f(n)\times f(p)=f(m+n)\times f(p).$$
$$=f(m+n+p).$$

依此法進行可指明

$f(m)\times f(n)\times f(p)\cdots\cdots\cdots$至 $k$ 因子$=f(m+n+p+\cdots$至$k$項$)$

使 $m$，$n$，$p$，$\cdots\cdots\cdots$中之每量爲$\frac{h}{k}$；$h$，$k$ 爲正整量；則

$$\left\{f\left(\frac{h}{k}\right)\right\}^h=f(h);$$

但 $h$ 爲正整量，故 $f(h)=(1+x)^k$.

$$\therefore(1+x)^h=\left\{f\left(\frac{h}{k}\right)\right\}^k;$$

$$\therefore(1+x)^{\frac{h}{k}}=f\left(\frac{h}{k}\right);$$

但 $f\left(\frac{h}{k}\right)$代表級數

$$1+\frac{h}{k}x+\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$(1+x)^{\frac{h}{k}}=1+\frac{h}{k}x+\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此証明於任何正分指數之二項式定理．

180. 求証指數爲任何負量時之二項式定理.

已証於 $m,n$ 之所有值

$$f(m)\times f(n)=f(m+n);$$

設 $n$ 爲正量，代 $m$ 以 $-n$ 得

$$f(-n)\times f(n)=f(-n+n)$$
$$=f(0)$$
$$=1,$$

因第一項外之所有各項皆消失;

$$\therefore \frac{1}{f(n)}=f(-n);$$

但於 $n$ 之任何正值 $f(n)=(1+x)^n$;

$$\therefore \frac{1}{(1+x)^n}=f(-n),$$

或 $\quad (1+x)^{-n}=f(-n)$.

但 $f\ (-n)$ 代表級數

$$1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots;$$

$$\therefore (1+x)^{-n}=1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

以上証明爲任何負指數之二項式定理. 故此定理已完全成立.

181. 前二節所含証明未見完全合意，且能與學生以某種困難. 茲對之僅有一點指明.

$f(m)$ 之式內之項數於 $m$ 爲正整量時爲無限，於所有他種情形時爲有限. 參考 § 182. 故考驗 $f(m)\times f(n)=f(m+n)$ 應以

何意義視之實爲必需．於第二十一章內可知當 $x<1$ 時，$f(m)$，$f(n)$，$f(m+n)$ 皆爲收斂級數，及 $f(m+n)$ 爲 $f(m)\times f(n)$ 之確實算術同值式．但當 $x>1$，則皆爲放散級數，故僅能謂如表以 $f(m)$ 之級數乘表以 $f(n)$ 之級數．則其積之首 $r$ 項與 $f(m+n)$ 之首 $r$ 項相等．此 $r$ 可爲任何定值．［見 §308］

例1．展開 $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 至四項．

$$(1-x)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}(-x)+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{1.2}(-x)^2+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{1.2.3}(-x)^3+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots\cdots$$

例2．展開 $(2+3x)^{-4}$ 至四項．

$$(2+3x)^{-4}=2^{-4}\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{-4}$$

$$=\frac{1}{2^4}\left\{1+(-4)\left(\frac{3x}{2}\right)+\frac{(-4)(-5)}{1.2}\left(\frac{3x}{2}\right)^2+\frac{(-4)(-5)(-6)}{1.2.3}\left(\frac{3x}{2}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{16}\left(1-6x+\frac{45}{2}x^2-\frac{135}{2}x^3+\cdots\cdots\right).$$

182．於求通項時必用公式

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x.$$

此須完全寫出；因當 $n$ 爲分量或負量時不能再用符號 ${}^nC_r$．

又非分子之一因子爲零則公項之係數永不消失；故當 $n-r+1$ 爲零卽 $r=n+1$，時，此級數於第 $r$ 項終止．但因 $r$ 爲正整量，故除當指數 $n$ 爲正整量外，此等式永不適用．故當 $n$ 爲正整數，則可用二項式定理能展至 $n+1$ 項；其他情形則可展至無限項．

例 1. 求$(1+x)^{\frac{1}{2}}$之展開式內之通項.

其第 $r+1$ 項$=\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-r+1)}{\underline{|r}}x^r$

$$=\frac{1(-1)(-3)(-5)\cdots\cdots(-2r+3)}{2^r\underline{|r}}x^r.$$

分子內因子之數爲 $r$，其中之 $r-1$ 個爲負，故由各負因子內提出 $-1$，則上式可寫爲

$$(-1)^{r-1}\frac{1.3.5.\cdots\cdots\cdots\cdots(2r-3)}{2^r\underline{|r}}x^r.$$

例 2. 求 $(1-nx)^{\frac{1}{n}}$ 之展開式內之通項.

其第 $r+1$ 項 $=\dfrac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{n}-r+1\right)}{\underline{|r}}(-nx)^r$

$$=\frac{1(1-n)(1-2n)\cdots\cdots(1-\overline{r-1}.n)}{n^r\underline{|r}}(-1)^r n^r x^r$$

$$=(-1)^r\frac{1(1-n)(1-2n)\cdots\cdots(1-\overline{r-1}.n)}{\underline{|r}}x^r$$

$$=(-1)^r(-1)^{r-1}\frac{(n-1)(2n-1)\cdots\overline{r-1}.n-1)}{\underline{|r}}x^r$$

$$=-\frac{(n-1)(2n-1)\cdots\cdots(\overline{r-1}.n-1)}{\underline{|r}}x^r.$$

$$(-1)^r(-1)^{r-1}=(-1)^{2r-1}=-1.$$

例 3. 求 $(1-x)^{-3}$ 之展開式內之通項.

其第 $r+1$ 項 $=\dfrac{(-3)(-4)(-5)\cdots\cdots(-3-r+1)}{\underline{|r}}(-x)^r$

$$=(-1)^r\frac{3.4.5\cdots\cdots(r+2)}{\underline{|r}}(-1)^r x^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{3.4.5\cdots\cdots(r+2)}{1.2.3.\cdots\cdots r}x^r$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r,$$

由消去分子及分母之公因子.

## 習 題. XIV. a.

展開以下各式至四項:

1. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$. 2. $(1+x)^{\frac{3}{2}}$. 3. $(1-x)^{\frac{2}{5}}$.

4. $(1+x^2)^{-2}$. 5. $(1-3x)^{\frac{1}{3}}$. 6. $(1-3x)^{\frac{1}{3}}$.

7. $(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$. 8. $\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-3}$. 9. $\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$

10. $\left(1+\frac{1}{2}a\right)^{-4}$. 11. $(2+x)^{-3}$. 12. $(9+2x)^{\frac{1}{2}}$.

13. $(8+12a)^{\frac{2}{3}}$. 14. $(9-6x)^{-\frac{3}{2}}$. 15. $(4a-8x)^{-\frac{1}{2}}$.

寫出並化簡:

16. $(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$之第 8 項.

17. $(1-2x^3)^{\frac{11}{2}}$之第 11 項.

18. $(1+3x^2)^{\frac{16}{3}}$之第 10 項.

19. $(3a-2b)^{-1}$ 之第 5 項.

20. $(1-x)^{-2}$ 之第 $r+1$ 項.

21. $(1-x)^{-4}$ 之第 $r+1$ 項.

22. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 之第 $r+1$ 項.

23. $(1+x)^{\frac{11}{3}}$ 之第 $r+1$ 項.

24. $(2^{10}-2^7x)^{\frac{13}{2}}$之第 14 項.

25. $(3^8+6^4x)^{\frac{11}{4}}$之第 7 項.

183. 設用二項式定理展開 $(1-x)^{-2}$, 則得

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots;$$

但由參照 § 60, 知此結果僅於 $x$ 小於 1 時爲眞. 此引吾人考究如假定述語

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots$$

爲眞, 是否能永遠正確. 設不能, 則於何種條件下 $(1+x)^n$ 之展開

式，始可爲其眞確同值式.

例如，設 $n=-1$；則得

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots(1);$$

於此展開式內使 $x=2$，則得

$$(-1)^{-1}=1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots$$

此種矛盾結果充分表示於所有情形下皆不能取

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲 $(1+x)^n$ 之眞確算術等值式.

由求等比級數和之公式，知級數 (1) 首 $r$ 項之和

$$=\frac{1-x^r}{1-x}$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{x^r}{1-x};$$

且當 $x$ 之絕對值小於 1 時，則由取 $r$ 爲充分之大，可使 $\frac{x^r}{1-x}$ 變爲適意之小量；即由 $r$ 取充分之項數可使其和與 $\frac{1}{1-x}$ 之差爲適意之小，當 $x$ 之絕對值大於 1 時，則 $\frac{x^r}{1-x}$ 之值與 $r$ 俱增.故取級數.

$$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots$$

之任若干項，皆不能得近於 $\frac{1}{1-x}$ 之值.

在發散及收斂級數一章內，將知當 $x$ 小於 1 時，則由二項式定理所得 $(1+x)^n$ 依 $x$ 升羃之展開式永有算術之解釋.

但當 $x$ 大於 1 時，則因此級數

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{1,2}x^2+\cdots\cdots\cdots$$

之公項含 $x^r$，則由取 $r$ 爲充分之大，能使其大於任何限定量；在此種情形下，對上級數之值無限制．故設 $x$ 大於 1，則 $(1+x)^n$ 之 $x$ 升羃展開式，無算術意義之解釋．

184．當注意 $(x+y)^n$ 永可以二項式定理展開；因此式可寫作下列二形式之一：

$$x^n\left(1+\frac{y}{x}\right)^n, \qquad y^n\left(1+\frac{x}{y}\right)^n;$$

及視 $x$ 之大於或小於 $y$，由第一或第二形式求得其展開式．

185．求 $(1-x)^{-n}$ 之展開式內通項之最簡式

第 $r+1$ 項

$$=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$$

$$=(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}(-1)^r x^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r$$

由此知 $(1-x)^{-n}$ 之展開式內之每項皆爲正項．

雖如 § 182 所示永可求得任何二項式之展開式之通項．但在負指數之任何情形下，皆以用以上公項之形式求之較爲迅速；僅在指數爲正數時始保留．

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

之形式．

例 1. 求 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$ 之展開式內之通項.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}=(1-3x)^{-\frac{1}{3}}.$$

其第 $r+1$ 項

$$=\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)(\frac{1}{3}+2)\cdots\cdots(\frac{1}{3}+r-1)}{\lfloor r}(3x)^r$$

$$=\frac{1.4.7\cdots\cdots(3r-2)}{3^r\lfloor r}3^r\ x^r.$$

$$=\frac{1.4.7\cdots\cdots(3r-2)}{\lfloor r}x^r.$$

設已知式爲 $(1+3x)^{-\frac{1}{3}}$，則其通項仍用同公式，以 $-3x$. 易 $3x$ 求得之.

186. 當記憶以下各展開式:

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots+x^r+\cdots\cdots\cdots$$

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots+(r+1)x^r+\cdots\cdots\cdots$$

$$(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r+\cdots\cdots$$

187. 當 $n$ 之值無限制時，$(1+x)^n$ 之展開式內最大項之一般研究，將見於 § 189;但用第 172 節之方法以解決數字問題，學者當無若何困難.

例. 求 $(1+x)^{-n}$ 之展開式內之最大項，當 $x=\frac{2}{3}$ 及 $n=20$時.

依絕對值 $$T_{r+1}=\frac{n+r-1}{r}\cdot x\times T_r,$$

$$=\frac{19+r}{r}\times\frac{2}{3}\times T_r;$$

$$\therefore T_{r+1}>T_r,$$

逆 $$\frac{2(19+r)}{3r}>1;$$

即 $$38>r.$$

故於 $r$ 大於 27 之所有值， 皆得 $T_{r+1}>T_r$; 但如 $r=38$，則 $T_{r+1}=T_r$，此二者皆爲最大項. 故則第 38 及 39 項之絕對值相等，且大於其他任何項.

188．以下諸例爲二項式定理之若干應用．

例 1．求

$$(1+3x)^{\frac{1}{2}}\ (1-2x)^{-\frac{1}{3}}$$

之展開式內之首三項

展開二二項式至含 $x^2$ 之項，得

$$\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2-\cdots\right)\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{8}{9}x^2+\cdots\right)$$

$$=1+x\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)+x^2\left(\frac{8}{9}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}-\frac{9}{8}\right)\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{13}{6}x+\frac{55}{72}x^2.$$

設此例內 $x=.002$，由是 $x^2=.000004$，則知第三項爲以 5 零始之小數．故設求已知式之數值以至 5 位小數止，則於 $1+\frac{13}{6}x$ 內以 .002 代 $x$ 而略去含 $x^2$ 之項已足．

例 2．求當 $x$ 小至其平方及以上乘冪可以略去時

$$\frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{-5}+\sqrt{4+2x}}{\sqrt{(4+x)^3}}\ \text{之值．}$$

因 $x^2$ 及較高乘冪可以略去，故留各二項式之展開式內之首二項已足．由是

此式

$$=\frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{-5}+2\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{8\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{10}{3}x\right)+2\left(1+\frac{1}{4}x\right)}{8\left(1+\frac{3}{8}x\right)}$$

$$=\frac{1}{8}\left(3-\frac{17}{6}x\right)\left(1+\frac{3}{8}x\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{8}\left(3-\frac{17}{6}x\right)\left(1-\frac{3}{8}x\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(3-\frac{95}{24}x\right).$$

其含 $x^2$ 之項被略去．

例 3. 求 $\frac{1}{\sqrt{47}}$ 之值至第四位小數.

$$\frac{1}{\sqrt{47}}=(47)^{-\frac{1}{2}}=(7^2-2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{7}\left(1-\frac{2}{7^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{7^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{7^5}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7^7}+\cdots$$

求各項之值，進行如下：

$$\begin{array}{l}
7)\underline{1\qquad\qquad\quad}\\
7)\underline{\ .142857}\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{7},\\
7)\underline{\ .020408}\\
7)\underline{\ .002915}\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{7^3},\\
7)\underline{\ .000416}\\
\quad\ .000059\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{7^5};
\end{array}$$

且可看出 $\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7^7}$ 一項爲始以 5 零之小數.

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{47}}=.142857+.002915+.000088=.14586.$$

故此結果至少對四位小數爲正確.

例 4 求. 126 五位小數之立方根.

$$(126)^{\frac{1}{3}}=(5^3+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$=5\left(1+\frac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=5\left(5+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^6}+\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{5^9}-\cdots\right)$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{5^7}-\cdots$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{10^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2^5}{10^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{2^7}{10^7}-\cdots$$

$$=5+\frac{.04}{3}-\frac{.00032}{9}+\frac{.000128}{81}-\cdots$$

$$=5+.013333\cdots-.000035\cdots+\cdots$$

$=5.01329$，至五位小數.

## 習　題 XIV. b.

求以下各展開式內之第 $r+1$ 項:

1. $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.　　2. $(1-x)^{-5}$.　　3. $(1+3x)^{\frac{1}{3}}$.

4. $(1+x)^{-\frac{2}{3}}$.　　5. $(1+x^2)^{-3}$.　　6. $(1-2x)^{-\frac{3}{2}}$.

7. $(a+bx)^{-1}$.　　8. $(2-x)^{-2}$.　　9. $\sqrt[3]{(a^3-x^3)^2}$.

10. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$.　　11. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$.　　12. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^n-nx}}$.

求以下各展開式內之最大項:

13. $(1+x)^{-7}$ 當 $x=\dfrac{4}{15}$時.

14. $(1+x)^{\frac{21}{2}}$ 當 $x=\dfrac{2}{3}$ 時.

15. $(1-7x)^{-\frac{11}{4}}$ 當 $x=\dfrac{1}{8}$ 時.

16. $(2x+5y)^{12}$ 當 $x=8$ 及 $y=3$ 時.

17. $(5-4x)^{-7}$ 當 $x=\frac{1}{2}$ 時.

18. $(3x^2+4y^3)^{-n}$ 當 $x=9$, $y=2$, $n=15$ 時.

求以下各數之値至五位小數:

19. $\sqrt{98}$.　20. $\sqrt[3]{998}$.　21. $\sqrt[3]{1003}$.　22. $\sqrt[4]{2400}$.

23. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{138}}$.　24. $\left(1\frac{1}{250}\right)^{\frac{1}{3}}$.　25. $(630)^{-\frac{3}{4}}$.　26. $\sqrt[5]{3128}$.

設 $x$ 小至平方及以上乘冪可省略; 求以下各式之値:

27. $(1-7x)^{\frac{1}{3}}(1+2x)^{-\frac{3}{4}}$.　28. $\sqrt{4-x}\cdot\left(3-\dfrac{x}{2}\right)^{-1}$.

29. $\dfrac{(8+3x)^{\frac{2}{3}}}{(2+3x)\sqrt{4-5x}}$.　30. $\dfrac{\left(1+\frac{2}{3}\right)^{-5}\times(4+3x)^{\frac{1}{2}}}{(4+x)^{\frac{3}{2}}}$.

31. $\dfrac{\sqrt[4]{1-\frac{3}{5}x}+\left(1+\frac{5}{6}x\right)^{-6}}{\sqrt[5]{1+2x}+\sqrt[5]{1-\frac{x}{2}}}$. 32. $\dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-\sqrt[5]{1-x}}{(1+5x)^{-\frac{3}{5}}+\left(4+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

33. 求證$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ 之展開式內 $x^r$之係數爲$\dfrac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}$

34. 求証$(1+x)^n=2^n\left\{1-n\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{n(n+1)}{1.2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2\cdots\cdots\right\}$.

35. 求$\dfrac{1}{(1+x)^2\sqrt{1+4x}}$之展開式內之首三項.

36. 求$\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{4}}+\sqrt{1+5x}}{(1+x)^3}$之展開式內之首三項.

37. 指明 $(1-x)^{-n}$之展開式內之第 $n$ 係數爲第 $n-1$ 係數之二倍.

189. 求 $n$ 爲任何有理量時 $(1+x)^n$展開式內之絕對值最大項.

因僅關最大項之絕對值，故視式內之 $x$，皆可視爲正量.

情形 I. 使 $n$ 爲正整量.

其第 $r+1$ 項由第 $r$ 項以$\dfrac{n-r+1}{r}x$；卽乘以$\left(\dfrac{n+1}{r}-1\right)x$ 而得；故各項繼續增大，迄

$$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x>1;$$

卽
$$\frac{(n+1)x}{r}>1+x,$$

或
$$\frac{(n+1)x}{1+x}>r.$$

設 $\frac{(n+1)x}{1+x}$ 爲整數，以 $p$ 表之；於是設 $r=p$，則施乘因子爲 1，且第 $p+1$ 項等於第 $p$ 項．此則大於其他任何項之二項．

設 $\frac{(n+1)x}{1+x}$ 非整數，以 $q$ 表其整數部分；於是 $r$ 之最大值爲 $q$，且第 $q+1$ 項爲最大項．

情形，II．設 $n$ 爲正分數．

同前，其第 $r+1$ 項由第 $r$ 項乘以 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$ 而得．

(1)．設 $x$ 大於 1，則由增 $r$ 之值使以上乘式逼近 $-x$ 至吾人所意欲之程度；如是則在某項後，每項皆數的漸近於以 $x$ 乘前項．由是各項皆繼續增大；故無最大之項．

(2) 設 $x$ 小於 1，則知施乘因子繼續爲正數且繼續減小直至 $r>n+1$，此後則變爲負數，但其數值永小於 1；故可有一最大項：

同前，施乘因子將大於 1，如

$$\frac{(n+1)x}{1+x}>r.$$

設 $\frac{(n+1)x}{1+x}$ 爲整數，以 $p$ 表之；於是同情形 I．其第 $p+1$ 項等於第 $p$ 項，且此二項較其他任何項爲大．

設 $\frac{(n+1)x}{1+x}$ 非整數，以 $q$ 表其整數部份；則以第 $q+1$ 項爲最大．

情形III．使 $n$ 爲負數．

使 $n=-m$，此 $m$ 爲正數；則施乘因子之數值爲 $\frac{m+r-1}{r}x$；即

$$\left(\frac{m-1}{r}+1\right)x.$$

(1) 設 $x$ 大於 1，則可如情形II，指明其並無最大項.

(2) 設 $x$ 小於 1，則此施乘因子大於 1，迄

$$\left(\frac{m-1}{r}+1\right)x>1;$$

則 $$\frac{(m-1)x}{r}>1-x,$$

或 $$\frac{(m-1)x}{1-x}>r.$$

設 $\frac{(m-1)x}{1-x}$ 爲正量，以 $p$ 表之；於是第 $p+1$ 項等於第 $p$ 項；而大於其他任何項.

設 $\frac{(m-1)x}{1-x}$ 爲正但非整量，使 $q$ 爲其整數部份；則其第 $q+1$ 項爲最大.

設 $\frac{(m-1)x}{1+x}$ 爲負量，於是 $m$ 小於 1； 且由寫此施乘因子爲 $\left(1-\frac{1-m}{r}\right)x$ 之形式知其永小於 1：故各項皆小於其前一項，結果其首項爲最大.

190. 求由 $n$ 字母 $a$，$b$，$c$……及其乘方，所成 $r$ 次齊次積之數.

由除法或二項式定理，得

$$\frac{1}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{1-bx}=1+bx+b^2x^2+b^3x^3+\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{1-cx}=1+cx+c^2x^2+c^3x^3+\cdots\cdots,$$

……………………………………

故，由乘法

$$\frac{1}{1-ax}\cdot\frac{1}{1-bx}\cdot\frac{1}{1-cx}\cdot\cdots\cdots$$

$$=(1+ax+a^2x^2+\cdots)(1+bx+b^2x^2+\cdots)(1+cx+c^2x^2+\cdots)\cdots$$

$$=1+x(a+b+c+\cdots)+x^2(a^2+ab+ac+b^2+bc+c^2+\cdots)+\cdots$$

$$=1+S_1x+S_2x^2+S_3x^3+\cdots\cdots$$ 設假；

$S_1$，$S_2$，$S_3$，…………為 $a$，$b$，$c$，…………及其乘羃所成一，二，三，……次齊次積之和.

求乘積之數，使 $a$，$b$，$c$，…………皆等於 1；於是 $S_1$，$S_2$，$S_3$，………內諸項皆變為 1．而 $S_1$，$S_2$，$S_3$……………由是求得之值即為一，二，三，……………次齊次積之數.

又　$$\frac{1}{1-ax}\cdot\frac{1}{1-bx}\cdot\frac{1}{1-cx}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

變為　$\dfrac{1}{(1-x)^n}$ 或 $(1-x)^{-n}$.

故　$S_r=(1-x)^{-n}$ 之展開式內 $x^r$ 之係數.

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{\underline{|r}}$$

$$=\frac{\underline{|n+r-1}}{\underline{|r}\;\underline{|n-1}}$$

191．求當指數為正整量，任何多項式之項數.

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_r)^n,$$

之展開式內之各項皆為 $n$ 次；故其項數同於由 $r$ 量 $a_1$，$a_2$，$a_3$，…………$a_r$ 及其乘羃所成 $n$ 次乘積之數；故由上節等於

$$\frac{\underline{|r+n-1}}{\underline{|n}\;\underline{|r-1}}.$$

192. 由 § 190 結果可推出一關於 $n$ 物組合數之定理.

觀察 $n$ 字母 $a, b, c, d, \cdots\cdots$; 於是設寫出所有此 $n$ 字母及其乘羃所成 $r$ 次齊次積，此每積皆爲 $n$ 物每次 $r$ 所成組合之一，其時任一字母皆可出現，一次，二次，三次，$\cdots\cdots$至 $r$ 次.

故設准重複，則 $n$ 物每次取 $r$ 所成組合之數，等於由 $n$ 字母所成 $r$ 次諸齊次積之數，即等於 $\dfrac{\lfloor n+r-1}{\lfloor r \lfloor n-1}$，或 ${}^{n+r-1}C_r$.

即 $n$ 物每次取 $r$ 准重複時所成組合之數，等於 $n+r-1$ 物每次取 $r$ 不准重複時所成組合之數.

193. 茲以數雜例結束本章.

例 1. 求 $\dfrac{(1-2x)^2}{(1+x)^3}$ 之展開式內 $x^r$ 之係數.

設此式 $=(1-4x+4x^2)(1+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots+p_rx^r+\cdots\cdots)$

其 $x^r$ 之係數可由 $p_r$, $p_{r-1}$ $p_{r-2}$ 乘以 1, $-4$, 4, 再相加其結果求得；故

所求係數 $=p_r-4p_{r-1}+4p_{r-2}$.

但 $\quad p_r=(-1)^r\dfrac{(r+1)(r+2)}{2}$ [§ 182 例 3.]

故所求係數

$$=(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{2}-4(-1)^{r-1}\frac{r(r+1)}{2}+4(-1)^{r-2}\frac{(r-1)r}{2}$$

$$=\frac{(-1)^r}{2}[(r+1)(r+2)+4r(r+1)+4r(r-1)]$$

$$=\frac{(-1)^r}{2}(9r^2+3r+2),$$

例 2．求級數．

$$2+\frac{5}{\lfloor 2 .3}+\frac{5.7}{\lfloor 3 .3^2}+\frac{5.7.9}{\lfloor 3 .3^3}+\cdots\cdots\text{之值}$$

$$\text{此式}=2+\frac{3.5}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{3.5.7}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{3.5.7.9}{4}\cdot\frac{1}{3^4}+\cdots$$

$$=2+\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\cdot\frac{2^2}{3^2}+\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\cdot\frac{2^3}{3^3}\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\frac{9}{2}}{\lfloor 4}\cdot\frac{2^4}{3^4}+\cdots$$

$$=1+\frac{\frac{3}{2}}{1}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}.$$

例3．設 $n$ 爲任何正整量，指明 $(3+\sqrt{7})^n$ 之整數部分爲奇數．

設 $I$ 表 $(3+\sqrt{7})^n$ 之整數部分，$f$ 表其分數部分．

於是 $I+f=3^n+C_1 3^{n-1}\sqrt{7}+C_2 3^{n-2}.7+C_3 3^{n-3}(\sqrt{7})^3+\cdots(1)$．

茲 $3-\sqrt{7}$ 爲正量且小於 1，故 $(3-\sqrt{7})^n$ 爲真分數；表之以 $f'$；

$$\therefore f'=3^n-C_1 3^{n-1}\sqrt{7}+C_2 3^{n-2}.7-C_3 3^{n-3}(\sqrt{7})^3+\cdots\cdots(2):$$

(1)，(2) 相加；則無理項消去，而得

$$I+f+f'=2(3^n+C_2 3^{n-2}.7+\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

$$=\text{一偶整數}.$$

但因 $f$ 及 $f'$ 爲真分數，其和必爲 1；

$$\therefore\ I=\text{一奇數整數}.$$

## 習題　XIV. c.

求係數

1．$\dfrac{3-5x}{(1-x)^2}$ 之展開式內之 $x^{100}$．

2．$\dfrac{4+2a-a^2}{(1+a)^3}$ 之展開式內之 $a^{12}$．

3．$\dfrac{3x^2-2}{x+x^2}$ 之展開式內之 $x^n$．

4．求 $\dfrac{2+x+x^2}{(1+x)^3}$ 之展開式內 $x^n$ 之係數.

5．求証

$$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{2^4}-\cdots\cdots=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

6．求証

$$\sqrt{8}=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$$

7．求証

$$1+\frac{2n}{3}+\frac{3n(2n+2)}{3.6}+\frac{2n(2n+2)(2n+4)}{3.6.9.}+\cdots\cdots$$

$$=2^n\left\{1+\frac{n}{3}+\frac{n(n+1)}{3.6}+\frac{n(n+1)(n+2)}{3.6.9}+\cdots\cdots\right\}.$$

8．求證

$$7^n\left\{1+\frac{n}{7}+\frac{n(n-1)}{7.14}+\frac{n(n-1)(n-2)}{7.14.21}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=4^n\left\{1+\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)}{2.4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.4.6}+\cdots\cdots\right\}.$$

9．當 $x$ 甚小時，求証漸近於

$$\frac{3\left(x+\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{4}x^3\right)^{-\frac{1}{3}}}{2\left(1+\frac{9}{16}x\right)^2}=1-\frac{307}{256}x^3.$$

10．設 $n$ 爲正整量，求證 $(5+2\sqrt{6})^n$ 之整數部分爲奇數.

11．設 $n$ 爲正整量，求證 $(8+3\sqrt{7})^n$ 之整數部分爲奇數.

12．求 $(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\cdots)^{-n}$ 之展開式內 $x^n$ 之係數.

13．求證 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{4n}$ 之中項等於 $(1-4x)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ 之展開式內 $x^n$ 之係數.

14．求証 $(1-x^3)^n$ 之展開式可使其形爲

$$(1-x)^{3n}+3nx(1-x)^{3n-2}+\frac{3n(3n-3)}{1.2}x^2(1-x)^{3n-4}+\cdots\cdots$$

15．求證$\dfrac{1}{1+x+x^2}$之展開式內 $x^n$ 之係數之爲 1,0,−1 全視 $n$ 之形爲 $3m$，$3m-1$，或 $3m+1$.

16．求 $(a+b+c)^8$之展開式之（1）項數（2）各項係數之和.

17．設 $n$ 爲偶整數，求證

$$\frac{1}{\underline{|1}\ \underline{|n-1}}+\frac{1}{\underline{|3}\ \underline{|n-3}}+\frac{1}{\underline{|5}\ \underline{|n-5}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n-1}\ \underline{|1}}=\frac{2^{n-1}}{\underline{|n}}.$$

18．設 $c_0,c_1,c_2,\cdots\cdots c_n$ 爲 $(1+x)^n$ 之展開式內之係數，求證當 $n$ 爲正整數時依 $n$ 之爲奇數或偶數，

（1）$c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots\cdots+(-1)^r c_r=(-1)^r\dfrac{\underline{|n-1}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r-1}}$

（2）$c_0-2c_1+3c_2-4c_3+\cdots\cdots+(-1)^n(n+1)c_n=0.$

（3）$c_0^2-c_1^2+c_2^2-c_3^2+\cdots\cdots+(-1)^n c_n^2=0$，或$(-1)^{\frac{n}{2}}c_{\frac{n}{2}}$，

19．設 $s_n$ 表首 $n$ 自然數之和，求證

（1）$(1-x)^{-3}=s_1+s_2x+s_3x^2+\cdots\cdots+s_nx^{n-1}+\cdots$

（2）$2(s_1s_{2n}+s_2s_{2n-1}+\cdots\cdots+s_ns_{n+1})=\dfrac{\underline{|2n+4}}{\underline{|5}\ \underline{|2n-1}}.$

20．設 $q_n=\dfrac{1.3.5.7\cdots\cdots(2n-1)}{2.4.6.8\cdots\cdots2n}$，求證

（1）$q_{2n+1}+q_1q_{2n}+q_2q_{2n-1}+\cdots\cdots+q_{n-1}q_{n+2}+q_nq_{n+1}=\frac{1}{2}.$

（2）$2\{q_{2n}-q_1q_{2n-1}+q_2q_{2n-2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}q_{n-1}q_{n+1}\}$
$=q_n+(-1)^{n-1}q_n^2.$

21．當 $n$ 爲正整數時，求 $(1+x)^n$ 之展開式內之係數兩兩相乘之積之和.

22．設 $(7+4\sqrt{3})^n=p+\beta$，於此 $n$ 及 $p$ 爲正整數，及 $\beta$ 爲眞分數，求證 $(1-\beta)(p+\beta)=1$.

23．設 $c_0,c_1,c_2,\cdots\cdots c_n$ 爲 $(1+x)^n$ 之展開式內之係數；$n$ 爲正整數，指明

$$c_1-\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{3}-\cdots\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}c_n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}.$$

# 第十五章

## 多項式定理

194. 於 §175已知如何用二項式定理以求一多項式之展開式．本章目的不在求多項式之完全展開式，而在求其任一指定項之係數．

例．求 $(a+b+c+d)^{14}$ 之展開式內 $a^4b^2c^3d^5$ 之係數．

此展開式爲等於 $a+b+c+d$ 之 14 因子之積，且其各項皆爲14次，由 14 因子內各取一字母相乘而得．故 $a^4b^2c^3d^5$ 項之作成，爲於 14 因子中之任四因子內取 $a$，餘十因子中之任二因子內取 $b$，餘八因子中任三因子取 $c$，但其可能作法之數顯然等，其中 4 爲 $a$，2 爲 $b$，3 爲 $c$，5 爲 $d$ 之 14 字母之排列法之數，即等於

$$\frac{\underline{|14}}{\underline{|4}\ \underline{|2}\ \underline{|3}\ \underline{|5}}. \qquad [\S151]$$

故此爲 $a^4b^2c^3d^5$ 項在結果積內顯現之次數，由是所求之係數爲2522520．

195. 求 $(a+b+c+d+\cdots\cdots\cdots)^p$ 展開式內任一指定項之係數．$p$ 爲正整數．

此展開式爲等於 $a+b+c+d+\cdots\cdots\cdots$ 之 $p$ 因子之積，其每項皆爲由 $p$ 因子內各取一字母作成；故其任一項 $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\cdots\cdots\cdots$ 在結果積內顯現之次數爲其中之 $\alpha$ 必爲 $a$，$\beta$ 必爲 $b$，$\gamma$ 必爲 $c$，$\delta$ 必爲 $d$，類推之 $p$ 字母排列法之數，即

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\cdots\cdots\cdots\text{之係數爲}\frac{\underline{|p}}{\underline{|\alpha}\ \underline{|\beta}\ \underline{|\gamma}\ \underline{|\delta}\cdots\cdots},$$

於此 $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots\cdots\cdots\cdots=p$.

推論. $(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^p$ 之展開式內含 $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ $\cdots\cdots$ 之項為

$$\frac{\lfloor p}{\lfloor\alpha\,\lfloor\beta\,\lfloor\gamma\,\lfloor\delta\cdots\cdots}a^\alpha(bx)^\beta(cx^2)^\gamma(dx^3)^\delta\cdots\cdots$$

或 $$\frac{\lfloor p}{\lfloor\alpha\,\lfloor\beta\,\lfloor\gamma\,\lfloor\delta\cdots\cdots}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\cdots\cdots x^{\beta+2\gamma+3\delta+\cdots\cdots},$$

於此 $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots\cdots=p$.

此式可稱為此展開式之通項.

例. 求 $(a+bx+cx^2)^9$ 展開式內 $x^5$ 之係數.

此展開式之通項為

$$\frac{\lfloor 9}{\lfloor\alpha\,\lfloor\beta\,\lfloor\gamma}a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{\beta+2\gamma}\cdots\cdots(1),$$

式內 $\alpha+\beta+\gamma=9$.

由實驗求得所有 $\beta$ 及 $\gamma$ 適於方程式 $\beta+2\gamma=5$ 之正整值；$\alpha$ 之值可由方程式 $\alpha+\beta+\gamma=9$ 求得.

使 $\gamma=2$, 得 $\beta=1$ 及 $\alpha=6$;

使 $\gamma=1$, 得 $\beta=3$, 及 $\alpha=5$;

使 $\gamma=0$, 得 $\beta=5$, 及 $\alpha=4$.

所求係數為 (1) 式諸相當值之和.

故所求係數

$$=\frac{\lfloor 9}{\lfloor 6\,\lfloor 2}a^6bc^2\ \frac{\lfloor 9}{\lfloor 5\,\lfloor 3}a^5b^3c+\frac{\lfloor 9}{\lfloor 4\,\lfloor 5}a^4b^5$$
$$=252a^6bc^2+504a^5b^3c+126a^4b^5.$$

196. 求 $(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^n$ 之展開式內之通項. $n$ 為任意有理量.

由二項式定理知其通項為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+1)}{\lfloor p}a^{n-p}(bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^p,$$

$p$ 為正整量.

又由 §195 知$(bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^p$ 之展開式之通項爲

$$\frac{\underline{|p}}{\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\,\underline{|\partial}\cdots\cdots}\,b^{\beta}c^{\gamma}d^{\partial}\cdots\cdots x^{\beta+2\gamma+3\partial+\cdots\cdots}$$

$\beta,\gamma,\partial,\cdots\cdots$爲正整數，且其和爲 $p$.

故已知式之展開式之通項爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+1)}{\underline{|\beta}\;\underline{|\gamma}\;\underline{|\partial}\cdots\cdots}\,a^{n-p}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\partial}\cdots\cdots x^{\beta+2\gamma+3\partial+\cdots\cdots}$$

式內　　$\beta+\gamma+\partial+\cdots\cdots\cdots\cdots=P.$

197. 因 $(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots\cdots)^n$ 可寫爲

$$a^n\left(1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x^3+\cdots\cdots\cdots\right)^n,$$

之形式，故觀察多項式首項爲 1 時之情形已足.

故　　$(1+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^n$之通項爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+1)}{\underline{|\beta}\;\underline{|\gamma}\;\underline{|\partial}}\,b^{\beta}c^{\gamma}d^{\partial}\cdots\cdots x^{\beta+2\gamma+3\partial+\cdots\cdots}$$

式內　　$\beta+\gamma+\partial+\cdots\cdots\cdots=p.$

例. 求 $(1-3x-2x^2+6x^3)^{\frac{2}{3}}$ 之展開式內 $x^3$ 之係數，其通項爲

$$\frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3}-2)\cdots\cdots(\frac{2}{3}-p+1)}{\underline{|\beta}\;\underline{|\gamma}\;\underline{|\partial}}(-3)^{\beta}(-2)^{\gamma}(6)^{\partial}x^{\beta+2\gamma+3\partial}\quad(1)$$

由驗算求得 $\beta,\gamma,\partial$ 所有適合方程式 $\beta+2\gamma+3\partial=3$ 之正整值. 由是可從方程式 $p=\beta+\gamma+\partial$ 內求得 $p$. 而所求係數爲 (1) 式內諸相當值之和.

求 $\beta$, $\gamma$, $\partial$ 之值時，最好從許可之最大值起，陸續與 $\partial$ 以整數值．現下情形內諸值之求得為

$$\partial=1,\quad \gamma=0,\quad \beta=0,\quad p=1;$$
$$\partial=0,\quad \gamma=1,\quad \beta=1,\quad p=2;$$
$$\partial=0,\quad \gamma=0,\quad \beta=3,\quad p=3.$$

諸值代入 (1)，則所求係數

$$=\left(\frac{2}{3}\right)(6)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(-3)(-2)+\frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{\underline{|3}}(-3)^3$$

$$=4-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$$

198．有時以用二項式定理較為敏捷．

例．求 $(1-2x+3x^2)^{-3}$ 之展開式內 $x^4$ 之係數．

所求係數為用二項式定理由 $(1-\overline{2x-3x^2})^{-3}$ 之展開式內之首數項取出 $x^4$ 之係數而得．即從

$$1+3(2x-3x^2)+6(2x-3x^2)^2+10(2x-3x^2)^3+15(2x-3x)^4;$$

止於此項，因所有其他項所含 $x$ 之乘羃皆高於 $x^4$．

故所求係數 $=6.9+10.3(2)^2(-3)+15(2)^4$

$=-66.$

## 習 題 XV.

求以下指定項之係數：

1．$(a-b-c-d)^{10}$ 之展開式內之 $a^2b^3c^4d$．

2，$(a+b-c-d)^8$ 之展開式內之 $a^2b^5d$．

3．$(2a+b+3c)^7$ 之展開式內之 $a^3b^3c$．

4．$(ax-by+cz)^9$ 之展開式內之 $x^2y^3z^4$．

5．$(1+3x-2x^2)^3$ 之展開式之 $x^3$．

6．$(1+2x+3x^2)^{10}$ 之展開式內之 $x^4$．

7．$(1+2x-x^2)^5$ 之展開式內之 $x^6$．

8．$(1-2x+3x^2-5x^3)^4$ 之展開式內之 $x^8$．

求以下指定乘方之係數：

9. $(1-2x+3x^2-x^4-x^5)^5$ 之展開式內之 $x^{23}$.

10. $(1-2x+3x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 之展開式內之 $x^5$

11. $(1-2x+3x^2-4x^3)^{\frac{1}{2}}$ 之展開式內之 $x^3$

12. $\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{9}\right)^{-2}$ 之展開式內之 $x^8$

13. $(2-4x+3x^2)^{-2}$ 之展開式內之 $x^4$

14. $(1+4x^2+10x^4+20x^6)^{-\frac{3}{4}}$ 之展開式內之 $x^6$

15. $(3-15x^3+18x^6)^{-1}$ 之展開式內之 $x^{12}$

16. 展開 $(1-2x-2x^2)^{\frac{1}{4}}$ 至 $x^2$.

17. 展開 $(1+3x^2-6x^3)^{-\frac{2}{3}}$ 至 $x^5$.

18. 展開 $(8-9x^3+18x^4)^{\frac{4}{3}}$ 至 $x^8$

19 設 $(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^p)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots a_{np}x^{np}$,

求證

(1) $a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{np}=(p+1)^n$.

(2) $a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+np.a_{np}=\frac{1}{2}np(p+1)^n$.

20. 設 $(1+x+x^2)^n$ 展開式之係數依次爲 $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ……

……, 求證

$$a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2+\cdots+(-1)^{n-1}a^2_{n-1}=\frac{1}{2}a_n\{1-(-1)^n a_n\}.$$

21. 設 $(1+x+x^2)^n$ 之展開式爲

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_rx^r+\cdots+a_{2n}x^{2n},$$

指明 $a_0+a_3+a_6+\cdots=a_1+a_4+a_7+\cdots=a_2+a_5+a_8+\cdots 3^{n-1}$.

# 第十六章

## 對　數

199. **定義**. 任一數以已知底爲底之對數，爲等於已知數之底之乘羃之指數. 如設 $a^x=n$，則 $x$ 稱爲 $N$ 以 $a$ 爲底之對數.

例：　(1) 因 $3^4=81$，故 81 以 3 爲底之對數爲 4.

　　　(2) 因 $10^1=10$，$10^2=100$，$10^3=1000$，…………

故自然數 1，2，3，…………爲 10，100，1000，…………以 10 爲底之對數.

200. $N$ 以 $a$ 爲底之對數常寫爲 $log_a N$，由是二式表同一意義　　$a^x=N$；　　$x=log_a N$

由此方程式導出有時有用之恆等式

$$N=a^{log_a N},$$

例. 求 $32\sqrt[5]{4}$ 以 $2\sqrt{2}$ 爲底之對數.

使 $x$ 爲所求對數；於是；

由定義　　$(2\sqrt{2})^x=32\sqrt[5]{4}$；

$$\therefore (2.2^{\frac{1}{2}})^x=2^5.2^{\frac{2}{5}}.$$

$$\therefore 2^{\frac{3}{2}x}=2^{5+\frac{2}{5}};$$

故由相等指數　　$\frac{3}{2}x=\frac{27}{5}$；

$$\therefore x=\frac{18}{5}=3.6.$$

201．常用某特殊系對數其底可不言而喻時，表底之附數常被略去．如在以 10 爲底之算術計算內常寫 $\log 2$, $\log 3$ …………… 以代 $\log_{10}2$, $\log_{10}3$, ……．

任何數皆可取爲對數之底．又相當此任一底可求得所有數之對數之一系．但於討論常用對數前，先證若干一般命題，此命題於所有對數皆眞，無關於任何特殊之底．

202．1 之對數爲 0．

因於 $a$ 之所有值，皆 $a^0=1$ 故不論爲何底，皆 $\log 1=0$．

203．底之本身之對數爲 1．

因 $a^1=a$; 故 $\log_a a=1$．

204．求積之對數．

使 $MN$ 爲積，$a$ 爲本系之底，又設

$$x=\log_a M, \quad y=\log_a N;$$

由是，$a^x=M$, $a^y=N$.

$$\text{故積}\quad MN=a^x\times a^y$$
$$=a^{x+y};$$

$$\text{故由定義}\ \log_a MN=x+y$$
$$=\log_a M+\log_a N.$$

同法，證 $\log_a MNP=\log_a M+\log_a N+\log_a P$,

且類推至任何數因子．

$$\text{例．}\quad \log 42=\log(2\times3\times7)$$
$$=\log 2+\log 3+\log 7.$$

205．求分數之對數．

使此分數爲 $\dfrac{M}{N}$，且設

$$x=\log_a M, \qquad y=\log_a N;$$

由是，$$a^x=M, \qquad a^y=N.$$

故分數　$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}$

$=a^{x-y}$

故由定義 $log_a\frac{M}{N}=x-y$

$=log_aM-log_aN.$

例．$log\left(4\frac{2}{7}\right)=log\frac{30}{7}$

$=log30-log7$

$=log(2\times3\times5)-log7.$

$=log2+log3+log5-log7.$

206．求某數之整數或分數任何乘羃之對數．

使所求爲 $log_a(M^p)$，且設

$x=log_aM$，如是則 $a^x=M$；

於是　$M^p=(a^x)^p$

$=a^{px}$；

故由定義　$log_a(M^p)=px$；

即　$log_a(M^p)=plog_aM$

同法証，$log_a\left(M^{\frac{1}{r}}\right)=\frac{1}{r}log_aM.$

207．由已証結果知

(1)　積之對數等其因子對數之和、

(2)　分數之對數等於分子之對數減分母之對數．

(3)　某數 $p$ 次羃之對數等於 $p$ 倍某數之對數．

(4)　某數 $r$ 次根之對數等於某數對數之$\frac{1}{r}$．

且知利用對數可以加法及減法演算替代乘法及除法；又乘方及開方之演算亦可代以乘法及除法．

例 1. 以 $\log a$, $\log b$, $\log c$ 表 $\frac{\sqrt{a^3}}{c^5b^2}$ 之對數.

$$\log\frac{\sqrt{a^3}}{c^5b^2}=\log\frac{a^{\frac{3}{2}}}{c^5b^2}$$

$$=\log^{\frac{3}{2}}-\log(c^5b^2)$$

$$=\frac{3}{2}\log a-(\log c^5+\log b^2)$$

$$=\frac{3}{2}\log a-5\log c-2\log b.$$

例2. 由方程式 $a^x\cdot c^{-2x}=b^{3x+1}$ 求 $x$ 之值.
取兩方之對數，得

$$x\log a-2x\log c=(3x+1)\log b;$$

$$\therefore x(\log a-2\log c-3\log b)=\log b.$$

$$\therefore x=\frac{\log b}{\log a-2\log c-3\log b}.$$

## 習 題 XVI. a.

求以下之對數:

1. 16 以 $\sqrt{2}$ 為底， 及 1728 以 $2\sqrt{3}$ 為底.
2. 125 以 $5\sqrt{5}$ 為底，及 .25 以 4 為底.
3. $\frac{1}{256}$ 以 $2\sqrt{2}$ 為底，及 $.\dot{3}$ 以 9 為底.
4. .0625 以 2 為底. 及 100 以 .01 為底.
5. .0001 以 .001 為底，及 .1 以 $9\sqrt{3}$ 為底.
6. $\sqrt[4]{a^{-\frac{8}{5}}}$, $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$, $\sqrt[3]{a^{-\frac{15}{2}}}$ 以 $a$ 為底.
7. 求以下之值.

$$\log_8 128,\ \log_6\frac{1}{216},\ \log_{27}\frac{1}{81},\ \log_{343} 49.$$

以 $\log a$, $\log b$, $\log c$，表以下各之對數.

8. $\log(\sqrt{a^2b^8})^6$. 9. $\log(\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{b^3})$. 10. $\log(\sqrt[9]{a^{-4}b^3})$.

11. $log(\sqrt{a^{-2}b}\times\sqrt[3]{ab^{-3}})$.　　12. $log(\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt{3^3}}\div\sqrt{b^3\sqrt{a}})$.

13. $log\dfrac{\sqrt[3]{ab^{-1}c^{-2}}}{(a^{-1}b^{-2}c^{-4})^{\frac{1}{3}}}$.　　14. $log\left\{\left(\dfrac{bc^{-2}}{b^{-4}c^{3}}\right)^{-3}\div\left(\dfrac{b^{-1}c}{b^{2}c^{-3}}\right)^{5}\right\}$.

15. 指明　$log\dfrac{\sqrt[4]{5}.\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18}.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4}\ log5-\dfrac{2}{5}\ log2-\dfrac{2}{3}\ log3$.

16. 化簡　$log\sqrt[4]{729\sqrt[3]{9^{-1}.27^{-\frac{4}{3}}}}$.

17. 求証　$log\dfrac{75}{16}-2\ log\dfrac{5}{9}+\ log\dfrac{32}{243}=log2$.

解以下各方程式:

18. $a^{x}=cb^{x}$.　　19. $a^{2x}.b^{3x}=c^{5}$.

20. $\dfrac{a^{x+1}}{b^{x-1}}=c^{2x}$.　　21. $\left.\begin{matrix}a^{2x}.b^{3y}=m^{5}\\ a^{3x}.b^{2y}=m^{10}\end{matrix}\right\}$.

22. 設 $log(x^2y^3)=a$, 及 $log\dfrac{x}{y}=b$, 求 $logx$ 及 $logy$.

23. 設 $a^{3-x}.b^{5x}=a^{x+5}.b^{3x}$, 指明 $x\ log\left(\dfrac{b}{a}\right)=loga$.

24. 解方程式

$$(a^4-2a^2b^2+b^4)^{x-1}=(a-b)^{2x}(a+b)^{-2}.$$

## 常用對數.

208. 以 10 爲底之對數稱爲常用對數；此對數係於 1615 年，爲與對數發明者納伯爾氏同時代人布利格司氏，所首次引用.

由方程式 $10^x=N$，顯然看出常用對數一般不爲整數亦不永爲正數.

例如　　$3154>10^3$ 而 $<10^4$;

$\therefore\ log\ 3154=3+$ 某分數.

又， $.06>10^{-2}$ 而 $<10^{-1}$;

$\therefore\ log.06=-2+$ 某分數.

209. 定義. 對數之整數部分稱爲指標，小數部分稱爲假數.

如下所指示任何數以 10 爲底之對數之指標皆能由觀察法寫出，今指明如下：

210. 定任何大於 1 之數之對數之指標.

因 $10^1=10,$

$10^2=100,$

$10^3=1000,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

由是知含二位整數之數在 $10^1$ 及 $10^2$ 之間；含三位整數之數在 $10^2$ 及 $10^3$ 之間；依此類推. 故含 $n$ 位整數之數在 $10^{n-1}$ 及 $10^n$ 之間.

使 $N$ 爲含 $n$ 位整數之數；於是

$M=10^{(n-1)}+$ 某分數.

$\therefore\ logN=(n-1)+$某分數.

故其指標爲 $n-1$；卽大於 1 之數之對數之指標較其整數部分之位數少一.

211. 定小數之對數之指標.

因 $10^0=1,$

$$10^{-1}=\frac{1}{10}=.1,$$

$$10^{-2}=\frac{1}{100}=.01,$$

$$10^{-3}=\frac{1}{1000}=.001,$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

由此知小數點後一零之小數如 .0324，大於 .01 而小於 .1，即在 $10^{-2}$ 及 $10^{-1}$ 之間；小數點後二零之數在 $10^{-3}$ 及 $10^{-2}$ 之間；依此類推．故在小數點後 $n$ 零之小數在 $10^{-(n+1)}$ 及 $10^{-n}$ 之間．

使 $D$ 爲小數點後有 $n$ 零之小數；於是

$$D=10^{-(n+1)+\text{某分數}}$$

$$\therefore \log D=-(n+1)+\text{某分數}.$$

故其指標爲 $-(n+1)$；即某小數之對數之指標，較小數點後之零數大 1，且爲負數．

212．從 1 至 200000 以 10 爲底之對數已被求得且表列之；多數對數表求至七位小數．此爲實用對數系，且有兩大利益：

(1)．由已証結果，顯然指標可由觀察法寫出；故僅以假數列入表內．

(2) 所有以數字相同之數其對數之假數皆相同；由是僅列入整數對數之假數已足．

玆從事爲此命題之證明．

213．使 $N$ 爲任一數，於是因乘以 10 之乘冪或除以 10 之乘冪，僅變其小數點之位置．而無關於其數字，由是知，設 $p$ 及 $q$ 爲任何整數，則 $N\times 10^p$ 及 $N\div 10^q$ 所用以表示之數字與 $N$ 相同．

玆
$$\log(N\times 10^p)=\log N+p\log 10.$$
$$=\log N+p \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

又
$$\log(N\div 10^q)=\log N-q\log 10$$
$$=\log N-q \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

(1) 內加一整數於 $\log N$，(2) 內減一整數從 $\log N$；即對數之假數或小數部分保留不變．

本節及前三節內皆假定假數爲正數，爲得 *Briggs* 氏對數系之利益，使表內之假數永爲正數．由是由表求任何對數之假數時，必照已知法則冠指標以適當之符號．

214．於負對數之情形內負號須從指標之上，勿從其前以表僅指標爲負數而非全數爲負數．如 .0002 之對數 $\bar{4}.30103$，等於 $-4+.30103$，與整數及小數部分皆爲負數之 $-4.30103$ 不同．爲負對數之演算時有時需要算術方法以變其假數爲正數．例如全爲負數之對數 $-3.69897$，可由整數部分減 1，小數部分加1，以使其假數變爲正數．如

$$-3.69897=-4+(1-.69897)=\bar{4}.30103.$$

其他情形可見於以下例題內．

例 1．求 .0002432 之對數．

於表內得 $\log 2432$ 之假數爲 3859636，(指標及小數點略去)，又由 §211 知已知數之指標爲$-4$．

$$\therefore\ \log .0002432=\bar{4}.3859636.$$

例 2．已知 $\log 165=2.2174839$，$\log 697424=5.8434968$．

求 $\sqrt[5]{.00000165}$ 之值．

使所求之值爲 $x$；於是

$$\log x=\log(.00000165)^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\log(.00000165)$$

$$=\frac{1}{5}(\bar{6}.2174839);$$

$\log .00000165$ 之假數與 $\log 165$ 之假數相同，又依法則列指標於其前．

茲
$$\frac{1}{5}(\bar{6}.2174839)=\frac{1}{5}(\overline{10}+4.2174839)$$

$$=\bar{2}.8434968.$$

又 .8434966 爲 $\log 697424$ 之假數；故 $x$ 所含數字與此相同，但於小數點後有一零．[§211]

故　　$x=.0697424$.

215. 對數之計算法將於下章說明，由是可知其乃先以他底求得，再變爲以 10 爲底之常用對數．

由是研究變已知底之對數爲不同底對數之方法實爲必需．

216. 設所有數以 $a$ 爲底之對數爲已知且已表出，求以 $b$ 爲底之對數．

使 $N$ 爲求其以 $b$ 爲底之對數之數．

使 $y=\log_b N$，由是 $b^y=N$；

$$\therefore\quad \log_a(b^y)=\log_a N;$$

即

$$y\log_a b=\log_a N;$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{\log_a b}\times\log_a N,$$

或

$$\log_b N=\frac{1}{\log_a b}\times\log_a N. \quad\cdots\cdots(1)$$

茲因 $N$ 及 $b$ 爲已知，$\log_a N$ 及 $\log_a b$ 可由表內求得；故可求出 $\log_b N$.

故變以 $a$ 爲底之對數爲以 $b$ 爲底之對數，僅乘以 $\frac{1}{\log_a b}$ 即得；$\frac{1}{\log_a b}$ 爲可從表內求得之常量；名爲對數率．

217. 於上節方程式 (1) 內以 $a$ 代 $N$；於是．

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}\times\log_a a=\frac{1}{\log_a b};$$

$$\therefore\ \log_b a\times\log_a b=1.$$

此結果亦可直接證明如下：

使 $x=\log_a b$，由是 $a^x=b$；

於是求以 $b$ 爲底之對數，得

$$x\log_b a=\log_b b$$
$$=1;$$
$$\log_a b\times\log_b a=1,$$

218. 下例表明以對數化簡算術計算之利益，關於對數表用法之說明，讀者可於三角法中求得之.

例 1. 已知 $\log 3=.4771213$，求 $\log\left\{(2.7)^3\times(.81)^{\frac{4}{5}}\div(90)^{\frac{5}{4}}\right\}$

$$\text{所求值}=3\log\frac{27}{10}+\frac{4}{5}\log\frac{81}{100}-\frac{5}{4}\log 90$$
$$=3(\log 3^3-1)+\frac{4}{5}(\log 3^4-2)-\frac{5}{4}(\log 3^2+1)$$
$$=\left(9+\frac{16}{5}-\frac{5}{2}\right)\log 3-\left(3+\frac{8}{5}+\frac{5}{4}\right)$$
$$=\frac{97}{10}\log 3-5\tfrac{17}{20}$$
$$=4.6280766-5.85$$
$$=\bar{2}.7780766.$$

學生須注意 5 及其乘羃之對數永能由 $\log 2$ 求得之；如 $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-\log 2.$

例 2. 已知 $\log 2=.3010300$，$\log 7=.8450980$.

求 $875^{16}$ 所含數字之數.

$$\log(875^{16})=16\log(7\times 125)$$
$$=16(\log 7+3\log 5)$$
$$=16(\log 7+3-3\log 2)$$
$$=16\times 2.9420080$$
$$=47.072128;$$

故所含數字之數爲 48. [§210]

例 3. 已知 $log2$ 及 $log3$，求 $x$ 之值，從方程式

$$6^{3-4x}.4^{x+5}=8.$$

取兩方之對數，得

$$(3-4x)log6+(x+5)log4=log8;$$

$$\therefore\ (3-4x)\ (log2+log3)+(x+5)2log2=3log2;$$

$$\therefore\quad x(-4log2-4log3+2log2)=3log2-3log2-3log3-10log2;$$

$$\therefore\ x=\frac{10log2+3log3}{2log2+4log3}$$

$$=\frac{4.4416639}{2.5105452}$$

$$=1.77\cdots$$

## 習　　題 XVI.b.

1. 用觀察法求 21735，23.8，350，.035，.2，.87，.875 之對數之指標.

2. $log7623$ 之假數為 .8821259；求 7.623，762.3，.007623，762300，.000007623 之對數.

3. 求諸數整數部分之位數，設已知其對數為
4.30103，1.4771213，3.69897，.56515.

4. 求諸數第一數字所居之位數，設已知其對數為
$\bar{2}.7781513$，$.6910815$，$\bar{5}.4871384$.

已知　$log2=.3010300$，$log3=.4771213$，$log7=.8450980$，
求以下各對數之值：

5. $log64$.　　6. $log84$.　　7. $log.128$.

8. $log.0125$.　　9. $log14.4$.　　10. $log4\frac{2}{3}$.

11. $log\sqrt[3]{12}$.　　12. $log\sqrt{\frac{35}{27}}$.　　13. $log\sqrt[4]{.0105}$.

14. 已知 $log44092388=7.6443636$，求 .00324 之七次根.

15. 已知 $log194.8445=2.2896883$，求 $(39.2)^3$ 之十二次根.

16. 求 37.203, 3.7203, .0037203, 372030 之積; 設已知 $log37.203=1.5705780$ 及 $log1915631=6.2823120$.

17. 已知 $log2$ 及 $log3$, 求 $log\ \sqrt[3]{\left(\frac{3^2 5^4}{\sqrt{2}}\right)}$.

18. 已知 $log2$ 及 $log3$, 求 $log\ (\sqrt[3]{48}\times 108^{\frac{1}{4}}\div\sqrt[12]{6})$.

19. 已知 $log2$, $log3$, $log7$ 及 $log\ 9076.226=3.9579053$.

求

$$\sqrt[3]{\left(\frac{294\times 125}{42\times 32}\right)^2};$$

之值至六位小數.

20. 已知 $log\ 2$, $log3$, $log7$; 及 $log11=1.0413927$, $log17814.1516=4.2507651$; 計算

$$(330\div 49)^4\div\sqrt[3]{22\times 70};$$

之值至六位小數,

21. 求 $3^{12}\times 2^8$ 所含數字之數.

22. 指明 $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ 大於 100.

23. 求 $(\frac{1}{3})^{1000}$之小數點及第一數字間之零數.

已知 $log2$, $log3$, 及 $log\ 7$; 解以下各方程式:

24. $3^{x-2}=5$. 25. $5^x=10^8$. 26. $5^{6-3x}=2^{x+2}$.

27. $21^x=2^{2x+1}.5^x$. 28. $2^x.6^{x-2}=5^{2x}.7^{1-x}$.

29. $\left.\begin{array}{l}2^{x+y}=6^y\\ 3^x\ \ =3.2^{y+1}\end{array}\right\}$. 30. $\left.\begin{array}{l}3^{1-x-y}=4^{-y}\\ 2^{2x-1}\ \ =3^{3y-x}\end{array}\right\}$.

31. 已知 $log_{10}2=.30103$, 求 $log_{25}200$.

32. 已知 $log_{10}2=.30103$, $log_{10}7=.84509$; 求 $log_7\sqrt{2}$ 及 $log_{\sqrt{7}}2^7$.

# 第十七章

## 指數及對數級數

219. 第十六章內已述及常用對數非直接求得，乃先求以他數爲底之對數，再變爲以 10 爲底之對數.

本章將證稱爲**指數及對數級數**之數公式，且於用以作成對數表之數方法，與以簡要之說明.

210. 依 $x$ 升冪展開 $a^x$.

設 $n$ 大於 1，由二項式定理，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

$$=1+nx\cdot\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{\underline{|3}}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

由使 $x=1$，得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

但 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{x}$,

故級數（1）爲級數（2）之 $x$ 次乘冪；即

$$1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

$$=\left\{1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\right\}^x,$$

不論 $n$ 爲若何大值，此式永遠眞實. 由是設 $n$ 無限增大，則得

$$1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots=\left(1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\right)^x,$$

此級數 $1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots$

常以 $e$ 表之；故

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots$$

以 $cx$ 代 $x$，於是

$$e^{cx}=1+cx+\frac{c^2x^2}{\underline{|2}}+\frac{c^3x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

今使 $e^c=a$，於是 $c=\log_e a$，由代 $c$，得

$$a^x=1+x\log_e a+\frac{x^2(\log_e a)^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3(\log_e a)^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

此即爲指數定理.

推論. 當 $n$ 爲無限大時，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 之極限$=e$. 又由前節研究，知如 $n$ 無限增大，可指明

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots;$$

即當 $n$ 爲無限大時，$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 之極限 $=e^x$。

由使 $\frac{x}{n}=-\frac{1}{m}$，得

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-mx}=\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^{-x}$$

玆 $m$ 於 $n$ 爲無限大時，爲無限大；

由是　　$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ 之極限 $=e^{-x}$

故　　$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ 之極限 $=e^{-1}$

221．前節內於 $x$ 之值無所限制；又因 $\frac{1}{n}$ 小於 1，故由所用式求得爲有算術解釋之結果［§183］．

但前證明內尙有値吾人注意之一點，前曾假定當 $n$ 爲無限大時，不論 $r$ 爲何値．

$$\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)}{\underline{|r}}\text{ 之極限爲 }\frac{x^r}{\underline{|r}}$$

使表　　$\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)}{\underline{|r}}$ 之値以 $u_r$，

於是　　$\frac{u_r}{u_{r-1}}=\frac{1}{r}\left(x-\frac{r-1}{n}\right)=\frac{x}{r}-\frac{1}{n}+\frac{1}{nr}$.

因 $n$ 爲無限大，得

$$\frac{u_r}{u_{r-1}}=\frac{x}{r}\text{；即 }u_r=\frac{x}{r}u_{r-1}.$$

既然 $u_2$ 之極限爲 $\frac{x^2}{\underline{|2}}$；$u_3$ 之極限爲 $\frac{x^3}{\underline{|3}}$；$u_4$ 之極限爲 $\frac{x^4}{\underline{|4}}$；及一般言之 $u_r$ 之極限爲 $\frac{x^r}{\underline{|r}}$.

222．前以 $e$ 表示之級數

$$1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

甚爲重要，因此爲最初計算對數之底．以此爲底之對數．

於其發明家納白爾之後稱爲納氏對數系．又因其爲於代數研究中自然映入吾人注意之最初對數，故亦稱爲自然對數．

當對數用於理論研究時，$e$ 永爲不言而喻之底，恰與算術演算中之永遠以 10 爲底相同．

用此級數以定 $e$ 之近似値，可至任何精確之程度；其十位小數之値求得爲 2.7182818284．

例 1．求無窮級數

$$1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|6}}\cdots\cdots\cdots\text{之和}$$

已知　$$e=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots;$$

又於　之級數內使 $x=-1$，得

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}\cdots\cdots$$

$$\therefore\ e+e^{-1}=2\left(1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|6}}+\cdots\cdots\right);$$

故所求之級數和爲 $\frac{1}{2}(e+e^{-1})$．

例 2．求 $\frac{1+ax-x^2}{e^x}$ 之展開式內 $x^r$ 之係數．

$$\frac{1-ax-x^2}{e^x}=(1-ax-x^2)e^{-x}$$

$$=(1-ax-x^2)\left\{1-x+\frac{x^2}{\underline{|2}}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^r x^r}{\underline{|r}}+\cdots\cdots\right\}.$$

所求係數 $=\dfrac{(-1)^r}{|\underline{r}}-\dfrac{(-1)^{r-1}a}{|\underline{r-1}}-\dfrac{(-1)^{r-2}}{|\underline{r-2}}$

$=\dfrac{(-1)^r}{|\underline{r}}\{1+ar+r(r-1)\}.$

223. 依 $x$ 升羃展開 $log_e(1+x)$.

由 §220.

$$a^y=1+ylog_ea+\frac{y^2(log_ea)^2}{|\underline{2}}+\frac{y^3(log_ea)^3}{|\underline{3}}+\cdots\cdots\cdots$$

於此級數內以 $1+x$ 代 $a$; 於是

$$(1+x)^y$$
$$=1+y\,log_e(1-x)+\frac{y^2}{|\underline{2}}\{log_e(1+x)\}^2+\frac{y^3}{|\underline{3}}$$
$$\{log_e(1+x)\}^3+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又由二項式定理當 $x<1$, 得

$$(1+y)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{|\underline{2}}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{|\underline{3}}x^3+\cdots(2).$$

今 (2) 內 $y$ 之係數爲

$$x+\frac{(-1)}{1.2}x^2+\frac{(-1)(-2)}{1.2.3.}x^3+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1.2.3.4}x^4+\cdots\cdots;$$

即 $$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots$$

相等此與 (1) 內 $y$ 之係數, 得

$$log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots$$

此稱爲對數級數.

例. 設 $x<1$、依 $x$ 之升羃展開 $\{log_e(1+x)\}^2$.

由相等 (1) 及 (2) 內 $y^2$ 之係數, 知所求展開式爲

$$\frac{y(y-1)}{1.2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}x^3+\frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{1.2.3.4}x^4$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

內 $y^2$ 之係數之二倍, 即

$$\frac{y-1}{1.2}x^2+\frac{(y-1)(y-2)}{1.2.3}x^3+\frac{(y-1)(y-2)(y-3)}{1.2.3.4}x^4+\cdots\cdots$$

內 $y$ 之係數之二倍.

故 $\{log_e(1+x)\}^2=2\{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2})x^3+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^4-\cdots\}$

224. 捨 $x$ 之值甚小外，$log_e(1+x)$ 之級數於數計算之用極微但由之可推出另一級數，以為作成對數表之助.

由以 $\frac{1}{n}$ 代 $x$，得 $log\ \frac{n+1}{n}$；故

$$log_e(n+1)-log_e n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由 $-\frac{1}{n}$ 代 $x$，得 $log_e\frac{n-1}{n}$；故由變方程式兩方之符號.

$$log_e n-log_e(n-1)=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由加法從 (1) 及 (2).

$$log_e(n+1)-log_e(n-1)=2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\cdots\right)\cdots(3)$$

使 $n=3$，由此公式，得 $log_e4-log_e2$，卽 $log_e2$；由計算得 $log_e2=.69314718\cdots\cdots\cdots$；由是 $log_e8$ 爲已知.

又由使 $n=9$，得 $log_e10-log_e8$；由是求得

$$log_e10=2.30258509\cdots\cdots\cdots.$$

變納氏對數爲以 10 爲底之對數，乘以 $\frac{1}{log_e10}$ 此爲常用系之對數率 [ §216 ]，且其值爲 $\frac{1}{2.30258509}$ 或 $.43429448\cdots\cdots\cdots$；茲表之以 $\mu$.

倫敦皇家學會彙報卷 XXV II，88 葉，亞當教授求得 $e$，$log_e2$，$log_e3$，$log_e5$，之值至 260 以上之小數位.

225. 設遍乘上級數以 $\mu$，則得用以求計算常用對數之公式.

故從 (1) $\mu log_e(n+1)-\mu log_e n=\frac{\mu}{n}-\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{3n^3}-\cdots\cdots$；

卽，$log_{10}(n+1)-log_{10}n=\frac{\mu}{n}-\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{2n^3}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

同法由（2），

$$log_{10}n-log_{10}(n-1)=\frac{\mu}{n}+\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{3n^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由上二結果之一知設已知二連續數中一數之對數，則可求出他一數之對數，由是對數表能以作成.

須注意上公式僅用之以求質數之對數，因複質數之對數可由求其諸質因子之對數之和而得.

計算任一較小質數之對數，常不以之代入公式（1）或（2），但求選一易於分析之數 $n$，使 $n+1$ 或 $n-1$ 含等於已知數之因子．於是求 $log(n+1)$ 或 $log(n-1)$，而由是推出已知數之對數.

例．求 $log 2$ 及 $log 3$，設已知 $\mu=.43429448$.

由使（2）內 $n=10$，得 $log 10-log 9$ 之值；故

$$1-2\,log\,3=.043429448+.002171472+.000144765+.000010857$$
$$+.000000868+.000000072+.000000006;$$
$$1-2log3=.045757488,$$
$$log3=.477121256.$$

使（1）內 $n=80$ 得 $log 81-log 80$；故

$$4\,log3-3\,log2-1=.005428681-.000033929+.000000283-$$
$$.000000003;$$
$$3log2=.908485024-.005395032,$$
$$log2=.301029997.$$

下節示一作對表時常用之 $log_e(n+1)-log_e n$ 之另一級數．其更詳盡之說明，讀者可參考葛來希氏（*Mr. Glaisher*）所著之 *Encyclopoedia Britannica* 中對數一節.

226. § 223 內曾証明

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

易 $x$ 以 $-x$，得

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\cdots\cdots\cdots$$

由減法，

$$\log_e\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

使 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$．由是 $x=\frac{1}{2n+1}$；故得

$$\log_e(n+1)-\log_e n=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}$$

註．此級數收斂甚速，但實用時並不永似 §224 內級數之合宜．

227． 下例 說明本章之主題．

例 1．設 $\alpha$ $\beta$ 爲方程式 $ax^2+bx+c=o$ 之根．求證．

因 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$，得

$$a-bx+cx^2=a\{1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2\}$$
$$=a(1+\alpha x)(1+\beta x).$$

$$\therefore\ \log(a-bx+cx^2)=\log a+\log(1+\alpha x)+\log(1+\beta x)$$
$$=\log a+\alpha x-\frac{\alpha^2x^2}{2}+\frac{\alpha^3x^3}{3}-\cdots+\beta x-\frac{\beta^2x^2}{2}+\frac{\beta^3x^3}{3}-\cdots\cdots$$
$$=\log a+(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\cdots,$$

例2． 求證 $\log(1+x+x^2)$ 之展開式內 $x^n$ 之係數之爲 $-\frac{2}{n}$ 或 $\frac{1}{n}$ 全視 $n$ 之是否爲 3 之倍數．

$$\log(1+x+x^2)=\log\frac{1-x^3}{1-x}=\log(1-x^3)-\log(1-x)$$
$$=-x^3-\frac{x^6}{2}-\frac{x^9}{3}-\cdots-\frac{x^{3r}}{r}-\cdots+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{x^r}{r}+\cdots\right).$$

設 $n$ 為 3 之由倍數，以 $3r$ 表之，於是 $x^n$ 之係數為第一級數之 $-\frac{1}{r}$；及第二級數內之 $\frac{1}{3r}$ 之和，即此係數為 $-\frac{3}{n}+\frac{1}{n}$ 或 $-\frac{2}{n}$.

設 $n$ 不為 3 之倍數，則 $x^n$ 不見於第一級數內，由是則所求係數為 $\frac{1}{n}$.

228. 求證 $e$ 為不可通約量.

因設其不然，使 $e=\frac{m}{n}$，$m$ 及 $n$ 為正整數.

於是 $$\frac{m}{n}=1+1+\frac{1}{|\underline{2}}+\frac{1}{|\underline{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{|\underline{n}}+\frac{1}{|\underline{n+1}}+\cdots\cdots\cdots$$

兩方乘以 $|\underline{n}$；

$$\therefore m|\underline{n-1}=\text{整數}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots$$

但 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots$

為真分數，因其大於 $\frac{1}{n+1}$，而小於等比級數

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\cdots;$$

即小於 $\frac{1}{n}$；如此則一整數等於一整數加一分數此為不合理；故為不可通約量.

## 習題 XVII

1. 求 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 之值

2. 求 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{2.2^3}-\frac{1}{2.2^4}+\frac{1}{2.2^5}-\cdots\cdots\cdots\cdots$ 之值.

3. 指明

$$\log_e(n+a)-\log_e(n-a)=2\left(\frac{a}{n}+\frac{a^3}{3n^3}+\frac{a^5}{5n^5}+\cdots\right).$$

4. 設 $$y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

指明 $$x=y+\frac{y^3}{\underline{|2}}+\frac{y^2}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\cdots$$

5. 指明.

$$\frac{a-b}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a}\right)^3+\cdots=\log_e a-\log_e b.$$

6. 求$\frac{1001}{999}$之納氏對數至六位小數.

7. 求證 $$e^{-1}=2\left(\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{2}{\underline{|5}}+\frac{3}{\underline{|7}}+\cdots\right).$$

8. 求證

$$\log_e(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}=2\left(\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}+\cdots\right).$$

9. 求 $x^2-y^2+\frac{1}{\underline{|2}}(x^4-y^4)+\frac{1}{\underline{|3}}(x^6-y^6)+\cdots\cdots\cdots$之值.

10. 已知 $\mu=.4342944$, $\log 2=.30103000$; 求 7, 11, 及 13之常用對數之數值.

11. 設 $ax^2$ 及 $\frac{a}{x^2}$ 皆小於 1: 指明

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{a^2}{2}\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+\frac{a^3}{3}\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-\cdots=\log_e\left(1+ax^2+a^2+\frac{a}{x^2}\right).$$

12. 求証 $\log_e(1+3x+2x^2)=3x-\frac{5x^2}{2}+\frac{9x^3}{3}-\frac{17x^4}{4}+\cdots$;
並求此級數之通項.

13. 求證 $\log_e\frac{1+3x}{1-2x}=5x-\frac{5x^2}{2}+\frac{35x^3}{3}-\frac{65x^4}{4}+\cdots$;
並求此級數之通項,

展開 $\frac{e^{5x}+e^x}{e^{3x}}$ 爲 $x$ 升冪之級數.

15. 依 $x$ 升冪表 $\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$，式內 $i=\sqrt{-1}$.

16. 指明

$$\log_e(x+2h)=2\log_e(x+h)-\log_e x-\left\{\frac{h^2}{(x+h)^2}+\frac{h^4}{2(x+h)^4}+\frac{h^6}{3(x+h)^6}+\cdots\right\}$$

17. 設 $\alpha$ 及 $\beta$ 爲 $x^2-px+q=0$ 之根；求證

$$\log_e(1+px+qx^2)=(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\cdots\cdots$$

18 設 $x<1$，求級數

$\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\frac{4}{5}x^5+\cdots\cdots$ 之和.

19. 指明

$$\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2\cdot3(n+1)^2}-\frac{1}{3\cdot4(n+1)^3}$$

20. 設 $\log\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$ 依 $x$ 之升冪展開，求証設 $n$ 爲奇數或 $4m+2$ 之形式，則展開式內 $x^n$ 之係數爲 $-\frac{1}{n}$，設 $n$ 爲 $4m$ 之形式，則 $x^n$ 之係數爲 $\frac{3}{n}$.

21. 指明

$$1+\frac{2^3}{\underline{|2}}+\frac{3^3}{\underline{|3}}+\frac{4^3}{\underline{|4}}+\cdots=5e.$$

22. 求證

$$2\log_e n-\log_e(n+1)-\log_e(n-1)=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{2n^6}+\cdots$$

23. 指明 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots$$

24. 設 $\log_e\frac{9}{10}=-a$，$\log_e\frac{24}{25}=-b$，$\log_e\frac{81}{80}=c$，指明

$\log_e 2=7a-2b+3c$，$\log_e 3=11a-3b+5c$，$\log_e 5=16a-4b+7c$；

並計算 $\log_e 2$，$\log_e 3$，$\log_e 5$ 至八位小數.

# 第十八章

## 利息與年金

229. 本章說明如何用代數公式以化簡關於利息及折扣問題之解法.

茲用名詞利息，折扣，現值仍表其通常算術之意義；但爲方便起見，不以 £ 100 一年之利息爲利率，而以 £ 1 一年之利息爲利率.

230. 求已知本金，於已知時期，依單利計算之利息及本利和.

使 $P$ 爲本金之磅數，$r$ 爲一磅一年之利息，$n$ 爲年數，$I$ 爲利息，及 $M$ 爲本利和.

$P$ 一年之利息爲 $Pr$，故 $n$ 年爲 $Pnr$；卽

$$I=pnr \cdots\cdots (1)$$

又 $$M=P+I$$

即 $$M=P(1+nr) \cdots\cdots (2)$$

由 (1) 及 (2) 知設 $P,n,r,I$ 或 $P,n,r,M$ 中任三量已知,則可求得第四量.

231. 求已知金額，於已知時期間照單利計算之現值及折扣.

使 $P$ 爲金額，$V$ 爲現值，$D$ 爲折扣，$r$ 爲 £1 一年之利息，$n$ 爲年數.

因 $V$ 爲由現時行息 $n$ 年得本利和 $P$ 之金額，故得

$$P=V(1+nr)$$

$$\therefore\quad V=\frac{P}{1+nr}$$

又
$$D=P-V=P-\frac{P}{1+nr}$$

$$\therefore\quad D=\frac{Pnr}{1+nr}$$

註.由此方程式所得 $D$ 之值稱爲眞折扣，但於實用上某款額於定期前預付時，慣例爲扣存款之利息以代眞折扣，而由此所扣之款稱爲銀行折扣；由是

$$\text{銀行折扣}=Pnr$$

$$\text{眞折扣}=\frac{Pnr}{1+nr}.$$

例. £ 1900 預付 4 月之眞折扣及銀行折扣之差爲 6*s*. 8*d*.；求單利之百分率.

使 $r$ 表 £1 一年之利息；於是其銀行折扣爲 $\frac{1900r}{3}$，眞折扣爲 $\dfrac{\frac{1900r}{3}}{1+\frac{1}{3}r}$.

$$\therefore\ \frac{1900r}{3}-\frac{\frac{1900r}{3}}{1+\frac{1}{3}r}=\frac{1}{3};$$

由是
$$1900r^2=3+r;$$

$$\therefore\ r=\frac{1\pm\sqrt{1+22800}}{3800}=\frac{1\pm 151}{3800}$$

棄負值，　得　$r=\frac{152}{3800}=\frac{1}{25}$；

$$\therefore\ \text{百分率}=100r=4.$$

233. 求已知款額於已知時期，行複利，所得之利息及本利和.

使 $P$ 表本金，$R$ 表 £1 一年之本利和，$n$ 爲年數，$I$ 爲利息及 $M$ 爲本利和.

第一年末 $P$ 之本利和為 $PR$；又因此為第二年之本金，故二年末之本利和為 $PR\times R$ 或 $PR^2$，同理第三年末之本利和為 $PR^3$，類推；故 $n$ 年之本利和為 $PR^n$；

即 $$M=PR^n;$$

$$\therefore\ I=P(R^n-1)$$

註．設 $r$ 表 £1 一年之利息，則

$$R=1+r.$$

233．商業運算內，當時期含一年之分數時，此一年之分數常例照單利計算．如 £1，$\frac{1}{2}$ 年之本利和為 $1+\frac{r}{2}$；及款 $P$，$4\frac{2}{3}$ 年之複利本利和為 $PR^4\left(1+\frac{2}{3}r\right)$．同理 $p$，$n+\frac{1}{m}$ 年之本利和為 $PR^n\left(1+\frac{r}{m}\right)$．

設利息之結算一年多於一次，則有虛年利率與實得年利率之分；實得年利率可稱為真年利率，如，設利息一年計算兩次，$r$ 為虛年利率，則 £1 半年之本利和為 $1+\frac{r}{2}$，由是其全年之本利和為 $\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$，或 $1+r+\frac{r^2}{4}$；由是其實年利率為 $r+\frac{r^2}{4}$．

234．設利息每年結算 $q$ 次，$r$ 為虛年利率，則 £1 每期之利息為 $\frac{r}{q}$．故款 $P$ $n$ 年或 $qn$ 期之本利和為 $P\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn}$．

於此情形內，稱利息每年 $q$ 次化為本金．

設利息每刹那皆可化爲本金，則 $q$ 變爲無限大．求本利和之值，使 $\frac{r}{q}=\frac{1}{x}$，由是 $q=rx$；故

$$本利和=P\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn}=P\left(1+\frac{1}{x}\right)^{rnx}=P\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{nr}$$

$$=Pe^{nr}\ [\S 220，推論]$$

235．求已知欵額於已知時期照複利計算之現值及折扣．

使 $P$ 爲已知款額，$V$ 爲現值，$D$ 爲折扣，$R$ 爲 £1 一年之本利和，$n$ 爲年數．

因 $V$ 爲從現時起行息 $n$ 年得本利和 $P$ 之本金，故．

$$P=VR^n;$$

$$\therefore\quad V=\frac{P}{R^n}=PR^{-n}$$

$$D=P(1-R^{-n})$$

例．£672 於某時期之現值爲 £126；設准照複利率 $4\frac{1}{6}\%$ 計算求時期；已知

$$log2=.30103, log3=.47712.$$

於此 $$r=\frac{4\frac{1}{6}}{100}=\frac{1}{24}，及\ R=\frac{25}{24}$$

使 $n$ 爲年數；於是

$$672=126\left(\frac{25}{24}\right)^n;$$

$$\therefore\quad n\log\frac{25}{24}=\log\frac{672}{126},$$

或 $$n\log\frac{100}{96}=\log\frac{16}{3};$$

$$\therefore\quad n(\log 100-\log 96)=\log 16-\log 3,$$

$$n=\frac{4\log 2-\log 3}{2-5\log 2-\log 3}$$

$$n=\frac{.72700}{.01773}=41，最近似值$$

故時期甚近似 41 年．

## 習題 XVIII. a.

需要時可用以下對數.

$$\log 2=.30100,\quad \log 3=.4771213.$$

$$\log 7=.8450980,\quad \log 11=1.0413927.$$

1. 求 £100 照複利率 5% 行息 50 年之本利和.

2. 某款額單利之行息為 £90，又同款額，同時間，同利率之折扣為 £80，求款額.

3. 照複利率 5% 行息，問經若干年，本利和始可為原款額之二倍.

4. 求八年期款 £10000 照複利率 5% 計算之現值．求至法星止，及已知 $\log 67683.94=4.8304856$.

5. 照複利率 10% 計算，問須若干年，£1000 經若干年始可變為 £2500.

6. 指明照單利計算折扣為其款額及其利息之調和中項之半.

7. 指明依 5% 行複利之款，經一世紀將增至本金之百倍以上.

8. 照複利率 5% 行息 12 年得本利和 £1000 之款為若干?

已知.

$$\log 105=2.0253059,\quad \log 49697=4.9963292.$$

9. 某人從債主貸金 £100，借單每半年增加 18%，問若干時始可增至 £6000? 已知 $\log 118=2.071882$.

10. 1 法星依複利率 6% 行息，200 年之本利和為何?已知 $\log 106=2.0253059$, $\log 115.1270=2.0611800$.

## 年金

236. 年金為於確定之條件下按期支付之固定金額；支付可一年一次，或於其他更常用之期間捨有另有說明外，皆假定支付期為一年.

確實年金為確依所定年限．照期付給之年金，不受其他影響；生命年金為當某人生時或某數人生時，支付之年金.

延期年金爲於若干年後始能開始支付之年金；當年金延期 $n$ 時，卽謂此年金於 $n$ 年後開始，及其第一次支付在 $n+1$ 年之末.

設年金永遠繼續則稱爲永續年金；設非，立卽開始，名之爲延期永續年金.

某年金於某數年內停付，則謂其於該數年內暫停 (*forborne*).

237. 求於已知數年內暫停之年金，照單利計算之本利總額和.

使 $A$ 爲年金，$r$ 爲 £1，一年之利息，$n$ 爲年數，$M$ 爲本利總額和.

第一年末應付 $A$，其於除 $n-1$ 年內之本利和爲 $A+(n-1)rA$；第二年末應付他一 $A$，其於除 $n-2$ 年內之本利和爲 $A+(n-2)rA$；類推. 茲 $M$ 爲所有本利和之和；

$$\therefore\ M=nA+(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{n-1})rA$$

$$=nA+\frac{n(n-1)}{2}rA.$$

238. 求於已知年數未付之年金，照複利計算之本利和.

使 $A$ 爲年金，$R$ 爲 £1，一年之本利和，$n$ 爲年數，$M$ 爲本利和.

第一年末應付 $A$，其於除 $n-1$ 年之本利和爲 $AR^{n-1}$，第二年末應付另一 $A$，其於除 $n-2$ 年之本利和爲 $AR^{n-2}$；類推.

$$\therefore\ M=AR^{n-1}+AR^{n-2}+\cdots\cdots+AR^2+AR+A$$

$$=A(1+R+R^2+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項})$$

$$=A\frac{R^n-1}{R-1}.$$

239. 求年金之現值，循例永照複利計算；照單利算得之結果爲矛盾而無用，關於此點及於年金之更詳說明，讀者可參考 *Text-book of the Institute of actuaries, Part I. II.* 及 *Encyclopœdia Britannica* 內 *Annuities* 一節.

240. 求繼續已知年數之年金，照複利計算之現值.

使 $A$ 爲年金，$R$ 爲 £1，一年之本利和，$n$ 爲年數，$V$ 爲所求之現值.

1 年 $A$ 應付之現值爲 $AR^{-1}$;

2 年 $A$ 應付之現值爲 $AR^{-2}$;

3 年 $A$ 應付之現值爲 $AR^{-3}$;

類推 [§235].

茲 $V$ 爲諸不同現值之和

$$\therefore\ V=AR^{-1}+AR^{-2}+AR^{-3}+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}.$$

$$=AR^{-1}\frac{1-R^{-n}}{1-R^{-1}}$$

$$=A\frac{1-R^{-n}}{R-1}.$$

註. 此結果亦可由除 §288 內 $M$ 之值以 $R^n$ 求得之.

推論. 設使 $n$ 爲無限大，則得永續年金之現值.

$$V=\frac{A}{R-1}=\frac{A}{r}.$$

240. 設 $mA$ 爲年金 $A$ 之現值，則謂此年金值 $m$ 年價.

於永續年金之情形內 $mA=\frac{A}{r}$; 故

$$m=\frac{1}{r}=\frac{100}{\text{百分率}};$$

即永續年金年購值之數由除 100 以百分率求得之.

可以由不免現債票所得入息爲永續年金之例，如多種之政府公債票，公司股票，及鐵路公債個等．政府信用之最好試驗可由其所發公債票年價之數見之；如 90 之 $2\frac{1}{2}$ $p.c.$ 公債值 36 年價；96 之埃及 $4p.c.$ 公債票值 24 價．同時 80 之澳州 $5p.c.$ 公債，僅值 16 年價．

242．求 $p$ 年末開始支付，繼續 $n$ 年之延期年金，照複利計算之現值．

使 $A$ 爲年金，$R$ 爲 £1，一年之本利和，$V$ 爲現值．

其第一次支付在 $p+1$ 年之末，[§236]．

故第一次，二次，三次，…………支付之現值爲

$$AR^{-(p+1)},\ AR^{-(p+2)},\ AR^{-(p+3)},\ldots\ldots$$

$$\therefore\ V=AR^{-(p+1)}+AR^{-(p+2)}+AR^{-(p+3)}+\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項}$$

$$=AR^{-(p+1)}\frac{1-R^{-n}}{1-R^{-1}}$$

$$=\frac{AR^{-p}}{R-1}-\frac{AR^{-p-n}}{R-1}.$$

推論．$p$ 年後開始支付之延期年金之現值，其求得可由公式．

$$V=\frac{AR^{-p}}{R-1}.$$

243．自由財產爲能得稱爲租金之永續年金之財產；故此財產之值等於與租金相等之永續年金之現值．

由 §241 知，設已知某租戶爲買其農田所付年購值之數，則可由以年購值之數除 100 求得用以計算利息之百分率．

例. 某自由產六年後之享有權爲 £20000 購得；設按複利率 5% 計算，問購者應得租金若干? 已知 $log105=.0211893$，$log1.340096=.1271358$

其租金爲此永續年金延期 6 年，可以 £20000 購得之年值.

使 £$A$ 爲此年金之值；於是因 $R=1.05$，得

$$20000=\frac{A\times(1.05)^{-6}}{.05};$$

$$\therefore\quad A\times(1.05)^{-6}=1000;$$

$$logA-6log1.05=3,$$

$$logA=3.1271358=log1340.096$$

$\therefore$ $A=1340.096$，其租金爲 £1340, 1$s$. 11$d$.

244. 設某租戶以某金額租某財產 $p+q$ 年，又其已過 $q$ 年後，欲續訂 $p+n$ 年之租期，其當再付之款稱爲續租 $n$ 年之租金.

使 $A$ 爲此財產每年之值；於是因租戶已付 $p+n$ 年中 $p$ 年之款；其當再付之款必等於 $p$ 年後始，繼續 $n$ 年之延期年金 $A$ 之現值；即

$$續租租金=\frac{AR^{-p}}{R-1}-\frac{AR^{-p-n}}{R-1}. \qquad [§242]$$

## 習題 XVIII. b.

捨有相反說明外，就照複利計算.

1. £120 之年金之 5 年停付之總和爲 £672；求照單利計之百分率.

2. 求 £100 之年金照複利率 $4\frac{1}{2}$% 計算 20 年之總和. 已知 $log1.04=.0191163$, $log24.117=1.3823260$.

3. 某自由財產照 £2750 購得；出租租金若干，則所有者可得購價 4% 之利息.

4. 某一年值 £120 之自由財產以 £4000 售出；求利率.

5. 問某自由產照 $3\frac{1}{2}\%$ 計算利息之年價若干?

6. 設某永續年金值 25 年價，求 £625 之年金繼續 2 年之總和.

7. 設某年值 20 年價，求能以 £2522 購得，繼續 3 年之年金.

8. 求每年 £400 此後 10 年，當利率爲 4% 時應付之現價；已知 $\log 104=2.0170333$，$\log 6.75565=.8296670$.

9. 求本金若干照利率 2% 每刹那計利，於 50 年內能得本利和 £500.

10. 設繼續 $n$ 年之年金應付 25 年價，繼續 $2n$ 年之年金應付 30 年價，求百分率.

11. 某人照複利率 4% 借 £5000；設本利每年一次等分十次清還；求每次償還之數. 已知

$\log 1.04=.0170333$ 及 $\log 675565=5.829667$.

12. 某人有照利率 5% 生息之本金 £20000；設其每年用 £1800，指明其將於第 17 年末破產；已知

$\log 2=.3010300$，$\log 3=.4771213$，$\log 7=.8450980$.

13. 某財產之年租爲 £500；設其租出 20 年；求 7 年後，照利率 6% 計算應付續租金之數.

14. 設某年金繼續 $n$，$2n$，$3n$ 年應付 $a,b,c$ 年價；

指明 $$a^2-ab+b^2=ac.$$

15. 某永續年金，第一年末付 £10，第二年末付 £20，第三年末付 £30，類推，每年增 £10；其照年利率 5% 計算之現值爲何?

# 第十九章

## 不等式

245. $a$，$b$ 爲任意二量，當 $a-b$ 爲正量時，謂 $a$ 大於 $b$．例如，2 大於 $-3$，因 $2-(-3)$ 或 5 爲正量，又當 $b-a$ 爲負量時，謂 $b$ 小於 $a$；如 $-5$ 卽小於 $-2$，因 $-5-(-2)$ 或 $-3$ 爲負數也．

依此定義必視零爲大於任何負量．

本章（除有相反說明外）假定所有字母永表正實量．

246. 設 $a>b$，則顯然

$$a+c>b+c;$$

$$a-c>b-c;$$

$$ac>bc;$$

$$\frac{a}{c}>\frac{b}{c};$$

卽不等式之兩邊於加，減，乘，或除以同正量後，仍爲不等式，如前序．

247. 設

$$a-c>b,$$

兩邊各加以 $c$

$$a>b+c.$$

此指明不等式之任一項，可變其符號從一邊移至他邊．

設 $a>b$，則顯然 $b<a$．

卽設不等式之兩邊互換，則其不等符號，亦必反轉．

設 $a>b$，則 $a-b$ 爲正量，$b-a$ 爲負量；即 $-a-(-b)$ 爲負數，故

$$-a<-b;$$

故設變不等式所有各項之符號；則其不等符號亦必反轉.

248. 設 $a_1>b_1, a_2>b_2, a_3>b_3 \cdots\cdots a_m>b_m$，顯然

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_m>b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots b_m;$$

及 $$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_m>b_1b_2b_3\cdots\cdots bm.$$

249. 設 $a>b$，及 $p, q$ 爲正整量，則 $\sqrt[q]{a}>\sqrt[q]{b}$，或 $a^{\frac{1}{q}}>b^{\frac{1}{q}}$

故 $a^{\frac{p}{q}}>b^{\frac{p}{q}}$；即 $a^n>b^n$，$n$ 爲任何正整量.

又 $\frac{1}{a^n}<\frac{1}{b^n}$；即 $a^{-n}<b^{-n}$.

250. 任何實數之平方皆爲正量，由是大於零；如 $(a-b)^2$ 爲正數.

$$\therefore a^2-2ab+b^2>o$$

$$\therefore a^2+b^2>2ab.$$

同法証 $$\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$$

即二正量之等差中項大於其等比中項.

當二數相等時則不等式變爲等式.

251. 前節所證結果，甚爲有用，特於不等式所含文字對稱之情形內.

例 1. 設 $a,b,c$ 表正量，求証

$$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab;$$

$$2(a^3+b^3+c^3)>bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$$

$$b^2+c^2>2bc \cdots\cdots\cdots\cdots(1);$$

$$c^2+a^2>2ca;$$

$$a^2+b^2>2ab;$$

$$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab.$$

應注意此結果於 $a,b,c$ 之任何實值皆真.

又從 (1) $$b^2-bc+c^2>bc \cdots\cdots\cdots\cdots(2);$$

$$\therefore b^3+c^3>bc(b+c) \cdots\cdots\cdots\cdots(3);$$

由寫出二相似不等式，且相加；得

$$2(a^3+b^3+c^3)>bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$$

可知 (3) 為由 (2) 引入因子 $(b+c)$ 得來，且設此因子為負數；則不等式 (3) 不再適用.

例 2. 設 $x$ 可為任何實值，求 $x^3+1$ 及 $x^2+x$ 何者較大.

$$\begin{aligned} x^3+1-(x^2+x) &= x^3-x^2-(x+1) \\ &= (x^2-1)(x-1) \\ &= (x-1)^2(x+1). \end{aligned}$$

今 $(x-1)^2$ 為正數，故

$$x^3+1>\text{或}<x^2+x$$

全視 $x+1$ 之為正或負；即視 $x>$ 或 $<1$.

設 $x=-1$，則此不等式變為等式.

252. 使 $a$ 及 $b$ 為二正量，$S$ 為其和，$P$ 為其積，於是從恒等式

$$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2,$$

得　　$4P=S^2-(a-b)^2$，及 $S^2=4P+(a-b)^2$.

故設 $S$ 為已知，則 $P$ 當 $a=b$ 時最大；又設 $P$ 為已知，則 $S$ 當 $a=b$ 時為最小.

即設二正量之和已知，則二量相等時之積最大，又設二正量之積已知，則二量相等時之和最小.

253. 求其和爲常量之諸因子之積之最大值.

使有 $n$ 因子 $a,b,c,\cdots\cdots\cdots k$，又設其和爲等於 $s$ 之常量.

考究乘積 $abc\cdots\cdots\cdots k$，及設 $a,b$ 爲二不等因子. 設以 $\frac{a+b}{2}$，$\frac{a+b}{2}$ 易二不等因子 $a,b$，則其積增大而其和依舊. 故含二不等因子之積，能不變其因子之和而使之增大；故當所有因子皆相等時之積最大. 於此 $n$ 因子中每因子之值皆爲 $\frac{s}{n}$，及積之最大值爲 $\left(\frac{s}{n}\right)^n$，或

$$\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots+k}{n}\right)^n.$$

推論. 設 $a,b,c,\cdots\cdots\cdots\cdots k$ 不等，則

$$\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots+k}{n}\right)^n>abc\cdots\cdots k;$$

即

$$\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots+k}{n}>(abc\cdots\cdots k)^{\frac{1}{n}}$$

由等差中項及等比中項二名詞意義之引伸，此結果常被引用如下：任若干正量之等差中項大於其等比中項.

例. 指明 $(1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots\cdots\cdots n^r)^n>n^n(\lfloor n)^r$；$r$ 爲任何實量.

因
$$\frac{1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r}{n}>(1^r.2^r.3^r\cdots\cdots\cdots n^r)^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \left(\frac{1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r}{n}\right)^n>1^r.2^r.3^r.\cdots\cdots\cdots n^r，\text{即}>(\lfloor n)^r;$$

由是得所求之結果.

254. 求 $a^m b^n c^p$ 當 $a+b+c+\cdots\cdots$ 爲常量時之最大值；$m, n, p, \cdots\cdots$ 爲正整數.

因 $m, n, p, \cdots\cdots$ 爲常量，故 $a^m b^n c^p \cdots\cdots$ 以當 $\left(\frac{a}{m}\right)^m\left(\frac{b}{n}\right)^n\left(\frac{c}{p}\right)^p\cdots\cdots$ 爲最大時最大，但後式爲其和爲 $m\left(\frac{a}{m}\right)+n\left(\frac{b}{n}\right)+p\left(\frac{c}{p}\right)+\cdots\cdots$ 或 $a+b+c+\cdots\cdots$ 之 $m+n+p+\cdots\cdots$ 因子之積，故爲常量，故 $a^m b^n c^p \cdots\cdots$ 當因子

$$\frac{a}{m},\ \frac{b}{n},\ \frac{c}{p},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

皆相等時，即當

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}=\cdots\cdots\cdots=\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots}{m+n+p+\cdots\cdots\cdots}.$$

時爲最大.

故其最大值爲

$$m^m n^n p^p \cdots\cdots\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{m+n+p+\cdots\cdots}\right)^{m+n+p+\cdots\cdots\cdots}$$

例. 求 $x$ 爲任何絕對值小於 $a$ 之實值之 $(a+x)^3(a-x)^4$ 之最大值.

已知式當 $\left(\frac{a+x}{3}\right)^3\left(\frac{a-x}{4}\right)^4$ 爲最大時最大；但此式因子之和爲 $3\left(\frac{a+x}{3}\right)+4\left(\frac{a-x}{4}\right)$，或 $2a$. 故 $(a+x)^3(a-x)^4$ 當 $\frac{a+x}{3}=\frac{a-x}{4}$，或 $x=-\frac{a}{7}$ 時爲最大.

故其最大值爲 $\frac{6^3 8^4}{7^7}a^7$

255. 決定極大值與極小值，用二次方程式解法，常較用前法簡便. 此種證例已見於第九章；茲再加以說明.

例. 分一奇整數爲其積極大之二數.

表此整數以 $2n+1$ 二數以 $x$ 及 $2n+1-x$ 及其積以 $y$；於是 $(2n+1)x-x^2=y$；由是

$$2x=2n+1\pm\sqrt{(2n+1)^2-4y};$$

但根號下之量必爲正量，故 $y$ 不能大於 $\frac{1}{4}(2n+1)^2$，或 $n^2+n+\frac{1}{4}$；又因 $y$ 爲整數，其最大值必爲 $n^2+n$；於是 $x=n+1$ 或 $n$；故此二數爲 $n$ 及 $n+1$.

256. 有時可用以下方法.

例. 求 $\frac{(a+x)(b+x)}{c+x}$ 之極小值.

使 $c+x=y$；於是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{(a-c+y)(b-c+y)}{y}\\&=\frac{(a-c)(b-c)}{y}+y+a-c+b-c\\&=\left(\frac{\sqrt{(a-c)(b-c)}}{\sqrt{y}}-\sqrt{y}\right)^2+a-c+b-c+2\sqrt{(a-c)(b-c)}.\end{aligned}$$

故原式當平方項爲零時，卽 $y=\sqrt{(a-c)(b-c)}$ 時爲一極小值. 故其極小值爲

$$a-c+b-c+2\sqrt{(a-c)(b-c)};$$

又 $x$ 之相當值爲 $\sqrt{(a-c)(b-c)}-c$.

## 習　題　XIX.a.

1. 求証 $(ab+xy)(ax+by)>4abxy$.
2. 求證 $(b+c)(c+a)(a+b)>8abc$.
3. 指明任一實數與其倒數之和，永不小於 2.
4. 設 $a^2+b^2=1$，及 $x^2+y^2=1$；指明 $ax+by<1$.
5. 設 $a^2+b^2+c^2=1$，及 $x^2+y^2+z^2=1$；指明
$$ax+by+cz<1.$$
6. 設 $a>b$，指明 $a^ab^b>a^bb^a$，$log\frac{b}{a}<log\frac{1+b}{1+a}$.
7. 指明 $(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2)>8x^2y^2z^2$.
8. 求 $3ab^2$ 及 $a^3+2b^3$ 何者爲較大.
9. 求證 $a^3b+ab^3<a^4+b^4$.
10. 証明 $6abc<bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$.
11. 指明 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>abc(a+b+c)$.

12. 當 $x$ 爲正數時，$x^3$ 及 $x^2+x+2$ 何者較大?

13. 設 $x>a$，指明 $x^3+13a^2x>5ax^2+9a^3$.

14. 設 $7x^2+11>x^3+17x$，求 $x$ 之最大值.

15. 求 $x^2-12x+40$ 之極小值及 $24x-8-9x^2$ 之最大值.

16. 指明 $(\lfloor n)^2>n^n$，及 $2.4.6\cdots\cdots 2n<(n+1)^n$.

17. 指明 $(x+y+z)^3>27xyz$.

18. 指明 $n^n>1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)$.

19. 設 $n$ 爲大於 2 之正整數，指明 $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$.

20. 指明 $(\lfloor n)^3<n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$.

21. 指明

(1) $(x+y+z)^3>27(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

(2) $xyz>(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

22. 求 $(7-x)^4(2+x)^5$ 當 $x$ 之值在 7 與 $-2$ 之間時之極大值.

23. 求 $\frac{(5+x)(2+x)}{1+x}$ 之極小值.

*257. 設 $a$ 及 $b$ 爲不等之正量，求證捨 $m$ 爲正真分數外，$\frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$.

已知 $a^m+b^m=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)^m+\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)^m$；又因 $\frac{a-b}{2}$ 小於 $\frac{a+b}{2}$，故可依 $\frac{a-b}{2}$ 之升冪展開各式. [§184]

$$\therefore\quad \frac{a^m+b^m}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^m+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m-2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m-4}\left(\frac{a-b}{2}\right)^4+\cdots\cdots$$

(1) 設 $m$ 為正整量，或任一負量，則所有右方諸項皆正，故

$$\frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

(2) 設 $m$ 為小於 1 之正量，則所有右方首項後諸項皆負，故

$$\frac{a^m+b^m}{2}<\left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

(3) 設 $m$ 為大於 1 之正量，使 $m=\frac{1}{n}$，於此 $n<1$；於是

$$\left(\frac{a^m+b^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n;$$

$$\therefore\ \left(\frac{a^m+b^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}}>\frac{(a^{\frac{1}{n}})^n+(b^{\frac{1}{n}})^n}{2}，\text{由(2)};$$

$$\therefore\ \left(\frac{a^m+b^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}}>\frac{a+b}{2}.$$

$$\therefore\ \frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

故本命題成立．設 $m=o$ 或 1，則此不等式變為等式．

*258．設有 $n$ 正量 $a,b,c,\cdots\cdots k$，於是除 $m$ 為正眞分數外，

$$\frac{a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots\cdots+k^m}{n}>\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots+k}{n}\right)^m$$

假使 $m$ 可為 0 及 1 間外之任何值．

考究多項式 $a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots\cdots+k^m$，假使 $a$ 及 $b$ 不相等；設以二等量 $\frac{a+b}{2}$，$\frac{a+b}{2}$ 易 $a$ 及 $b$，則 $a+b+c+\cdots\cdots+k$ 之值仍不變，但 $a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots\cdots+k^m$ 之值因

$$a^m+b^m>2\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$$

而減小．

故當諸量 $a,b,c,\cdots\cdots k$ 中有任二量不等時，則能不變 $a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots+k$ 之值，而使 $a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots\cdots+k^m$ 之值變小，由是 $a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots k^m$ 之值當以所有諸量 $a,b,c,\cdots\cdots k$ 皆等時爲最小．於此情形內，各值皆等於

$$\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots+k}{n};$$

而 $a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots\cdots+k^m$ 之值變爲

$$n\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots+k}{n}\right)^m$$

故當 $a,b,c,\cdots\cdots k$ 不等時，

$$\frac{a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots+k^m}{n}>\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots+k}{n}\right)^m.$$

設 $m$ 處於 0 與 1 之間，用同法可證明上結果內不等式之符號必反轉．

本命題可口述之如下：

$n$ 正量 $m$ 次冪之等差中項，於 $m$ 在 0 與 1 間外之所有情形下，大於此 $n$ 正量等差中項之 $m$ 次冪．

*259. 設 $a$ 與 $b$ 爲正整量且 $a>b$，又設 $x$ 爲正量．

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^a>\left(1-\frac{x}{b}\right)^b$$

因 $\left(1+\frac{x}{a}\right)^a=1+x+\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{x^2}{\underline{|2}}+\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}\right)\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots(1)$

此級數含有 $a+1$ 項．

$$\left(1+\frac{x}{b}\right)^b=1+x+\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{x^2}{\underline{|2}}+\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{2}{b}\right)\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots(2)$$

此級數含有 $b+1$ 項．

於第二項後，(1) 內之每項大於 (2) 內之相當項；又 (1) 內之項數多於 (2) 內之項數；故本命題成立．

*260. 設 $x$ 及 $y$ 爲正眞分數，及 $x>y$；求証

$$\sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}}>\sqrt[y]{\frac{1+y}{1-y}},$$

因　$$\sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}}>\text{或}<\sqrt[y]{\frac{1+y}{1-y}},$$

迄　$$\frac{1}{x}log\frac{1+x}{1-x}>\text{或}<\frac{1}{y}log\frac{1+y}{1-y}.$$

但　$$\frac{1}{x}log\frac{1+x}{1-x}=2\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\right),\ [\S\ 226];$$

又　$$\frac{1}{y}log\frac{1+x}{1-x}=2\left(1+\frac{y^2}{3}+\frac{y^4}{5}+\cdots\right)$$

$$\therefore\ \frac{1}{x}log\frac{1+x}{1-x}>\frac{1}{y}log\frac{1+y}{1-y},$$

本命題由是証明.

*261. 設 $x<1$. 求証 $(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}>1$，且推出

$$a^a b^b>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$$

表 $(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}$ 以 $P$；於是

$$\begin{aligned}log\ P&=(1+x)log(1+x)+(1-x)log(1-x)\\&=x\{log(1+x)-log(1-x)\}+log(1+x)+log(1-x)\\&=2x\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)-2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\cdots\right)\\&=2\left(\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}+\cdots\right).\end{aligned}$$

故 $log\ P$ 爲正數，由是 $P>1$；

即　$$(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}>1.$$

於此結果內，使 $x=\frac{z}{u}$，$u>z$；於是

$$\left(1+\frac{z}{u}\right)^{1+\frac{z}{u}}\left(1-\frac{z}{u}\right)^{1-\frac{z}{u}}>1;$$

$$\therefore\ \left(\frac{u+z}{u}\right)^{u+z}\left(\frac{u-z}{u}\right)^{u-z}>1^{u}，\text{或 } 1;$$

$$\therefore\ (u+z)^{u+z}(u-z)^{u-z}>u^{2u}.$$

茲使 $u+z=a$，$u-z=b$，由是 $u=\frac{a+b}{2}$；

$$\therefore\ a^a b^b>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}.$$

## *習題 XIX.b.

1. 指明 $27(a^4+b^4+c^4)>(a+b+c)^4$.
2. 指明 $n(n+1)^3<8(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3)$.
3. 設 $m>1$，指明首 $n$ 偶數 $m$ 次羃之和大於 $n(n+1)^m$.
4. 設 $\alpha$ 及 $\beta$ 爲正量及 $\alpha>\beta$，指明

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}>\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{\beta}.$$

由是指明設 $n>1$，則 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 之值處於 2 及 2.718……之間.

5. 設 $a>b>c$，指明

$$\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^a<\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^b$$

6. 指明 $\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots+k}{n}\right)^{a+b+c+\cdots+k}<a^a b^b c^c\cdots\cdots k^k$.
7. 設 $m>n$，求證 $\frac{1}{m}\log(1+a^m)<\frac{1}{n}\log(1+a^n)$.
8. 設 $n$ 爲正整量及 $x<1$，指明

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1}<\frac{1-x^n}{n}.$$

9．設 $a, b, c$ 成 $H.P.$ 及 $n>1$，指明 $a^n+c^n>2b^n$.

10．設 $x$ 爲小於 $4a$ 之正數，求 $x^3(4a-x)^5$ 之極大値；又設 $x$ 爲眞分數，求 $x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}$之極小値.

11．設 $x$ 爲正數，指明 $\log(1+x)<x$ 而 $>\dfrac{x}{1+x}$.

12．設 $x+y+z=1$，指明$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$之最小値爲 9；又 $(1-x)(1-y)(1-z)>8xyz$.

13．指明 $(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)>(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

14．指明二式

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$$

及

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)$$

爲正.

15．指明 $(x^m+y^m)^n<(x^n+y^n)^m$，設 $m>n$.

16．指明 $a^bb^a<\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{a+b}$

17．設 $a, b, c$ 表一三角形之邊，指明

(1) $a^2(p-q)(p-r)+b^2(q-r)(q-p)+c^2(r-p)(r-q)$

不能爲負；設 $p, q, r$ 爲任何實量；

(2)．$a^2yz+b^2zx+c^2xy$ 不能爲正，設 $x+y+z=0$.

18．指明 $\underline{\lvert 1}\ \underline{\lvert 3}\ \underline{\lvert 5},\cdots\cdots\cdots\underline{\lvert 2n-1}>(\underline{\lvert n})^n$.

19．設 $a, b, c, d, \cdots\cdots\cdots$爲 $p$ 正整量，共和等於 $n$，指明

$\underline{\lvert a}\ \underline{\lvert b}\ \underline{\lvert c}\ \underline{\lvert d}\cdots\cdots\cdots$之最小値爲 $(\underline{\lvert q})^{p-r}(\underline{\lvert q+1})^r$，式內 $q$ 爲 $n$ 除以 $p$ 之商，$r$ 爲其餘數.

# 第二十章

## 極限值與消失分數

262. 設 $a$ 爲限定常量，則分數 $\frac{a}{x}$，能由充分增大 $x$，使之變爲適意之小量；即由取 $x$ 爲充分大量，能使 $\frac{a}{x}$ 近似於零，近至吾人適意之程度；此常述爲"當 $x$ 爲無限大時，$\frac{a}{x}$之極限爲零"．

又分數 $\frac{a}{x}$ 當 $x$ 減小時增大，及由使 $x$ 爲適意之小，能使 $\frac{a}{x}$ 爲適意之大，故當 $x$ 爲零時 $\frac{a}{x}$ 無限定之極限；此常述爲"$x$ 爲零時，$\frac{a}{x}$之極限爲無限大"．

263. 當稱某量無限增大或無限大時，即謂能使此量變爲大於任何能名之量．

同理當稱某量無限減小時，即謂能使此量變爲小於任何能名之量．

符號 $\infty$ 表無限增變大之任何量之值，0 表無限減小之任何量之值．

264. §262 之二述語可以符號表之如下：

設 $x$ 爲 $\infty$，則 $\frac{a}{x}$ 爲 $0$.

設 $x$ 爲 $0$，則 $\frac{a}{x}$ 爲 $\infty$.

但用此簡單表示法時須記此僅爲較詳述語之縮寫。

265. 學生於"極限"二字用法之領會，因前已常用，當不感困難；但因"極限"或"極限值"二詞所表之清晰概念於數學之較高部門內爲必需，茲詳確說明其用法及意義.

266. 定義. 設 $y=f(x)$，又設當 $x$ 漸近某值 $a$ 時，能使函數 $f(x)$ 與某固定量 $b$ 之差小至適意欲之小，則 $b$ 稱爲 $y$ 當 $x=a$ 時之極限.

例如. 設 $S$ 表級數

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$；$n$ 項之和，於是 $S=2-\frac{1}{2^{n-1}}$

[§56].

於此 $S$ 爲 $n$ 之函數，及 $\frac{1}{2^{n-1}}$ 能由增大 $n$ 使之爲適意之小；即當 $n$ 爲無限大時，$S$ 之極限爲 2.

267. 此後常處理含諸項照某公有字母幂數排列之式，如

$$a_0+ax+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

式內 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 諸係數爲不含 $x$ 之有限量，項數爲有限或無限.

故宜討論關於此種多項式在某條件下之極限之若干命題.

268. 當 $x$ 無限減小時，級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots$$

之極限爲 $a_0$.

設此級數含有無限項.

使 $b$ 爲係數 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 中之最大係數；又使以 $S+a_0$ 表已知級數；於是

$$S<bx+bx^2+bx^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

設 $x<1$，得 $\quad S<\frac{bx}{1-x}$.

故當 $x$ 無限減小時，能使 $S$ 爲適意之小，故已知級數之極限爲 $a_0$.

設此級數之項數爲有限；$S$ 較以上情形尤小，故本命題爲眞.

269. 於級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

內，由取 $x$ 爲充分之小可使任一項與其後各項和之比爲適意之大；又取 $x$ 爲充分之大，可使任一項與其前各項和之比爲適意之大.

$a_nx^n$ 項與其後諸項和之比爲

$$\frac{a_nx^n}{a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots\cdots} \text{ 或 } \frac{a_n}{a_{n+1}x+a_{n+2}x^2}$$

當 $x$ 無限減小時，分母變爲意欲之小；卽此分數變爲意欲之大.

又 $a_nx^n$ 項與其以前諸項和之比爲

$$\frac{a_nx^n}{a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots} \text{ 或 } \frac{a_n}{a_{n-1}y+a_{n-2}y^2+\cdots\cdots}$$

以上 $y=\frac{1}{x}$.

當 $x$ 爲無限大時 $y$ 爲無限小；故．如以前情形，此分數能使之變爲適意之大．

270．以下前命題之特殊形式，甚爲有用．

式　$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

內含有依 $x$ 降冪排列之無限數項，由使 $x$ 爲充分之小，能使末項 $a_0$ 與共以前諸項和之比爲適意之大，又如使 $x$ 爲充分大，能使首項 $a_nx^n$ 與共以後諸項和之比爲適意欲之大．

例 1．由使 $n$ 爲充分大，可使 $n^4-5n^3-7n+9$ 式內首項 $n^4$ 與餘諸項和之比爲適意之大，即可取 $n^6$ 爲全式之等值式，由取 $n$ 爲充分大，可使其錯誤小至至所適意之程度．

例 2．求 $\dfrac{3x^3-2x^2-4}{5x^3-4x+8}$ 之極根，當（1）$x$ 爲無限大，（2）$x$ 爲零時．

（1）於分子及分母內略去首項外之各項，故其極限爲 $\dfrac{3x^3}{5x^3}$ 或 $\dfrac{3}{5}$．

（2）設 $x$ 爲無限小，則此極限爲 $\dfrac{4}{8}$ 成 $-\dfrac{1}{2}$．

例 3．當 $x$ 爲無限小時，求 $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 之極限．

使 $P$ 表巳知式之値；由取對數得

$$logP=\frac{1}{x}\{log(1+x)-log(1-x)\}$$

$$=2\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right)\qquad[\S\ 226]$$

故 $log\,P$ 之極限爲 2，而所求極限値爲 $e^2$．

## 消 失 分 數

271. 設求當 $x=a$ 時

$$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}$$

之極限.

設使 $x=a+h$，則 $h$ 之值當 $x$ 漸近於 $a$ 時，$h$ 之值漸近於零. 以 $a+h$ 代 $x$,

$$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}=\frac{3ah+h^2}{2ah+h^2}=\frac{3a+h}{2a+h};$$

又當 $h$ 爲無限小時，此式之極限爲 $\frac{3}{2}$.

但此問題有另一看法，因

$$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}=\frac{(x-a)(x+2a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{x+2a}{x+a},$$

又設茲使 $x=a$，則此式之極限爲 $\frac{3}{2}$，與前同.

設於此式化簡以前，使 $x=a$，則此式變爲 $\frac{0}{0}$ 其值爲無定；其原因爲分子分母皆有 $x-a$ 之因子. 固不能以零施除，但適 $x$ 非絕對等於 $a$ 時，$x-a$ 之因子可以消去，且知 $x$ 愈近於 $a$，此分式之值愈近於 $\frac{3}{2}$ 或照 § 266之定義，

當 $x=a$ 時，$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}$ 之極限爲 $\frac{3}{2}$.

272．設 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 爲 $x$ 之函數，且各因 $x$ 之某特值等於零，則分數 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ 成爲 $\dfrac{0}{0}$ 之形式，且稱之爲消失分數．

例 1．設 $x=3$，求

$$\frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-5x-3}$$

之極限．

當 $x=3$ 時此式變爲不定式 $\dfrac{0}{0}$；但消去分子分母之因子 $x-3$，則此分數變爲 $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$．當 $x=3$，則化爲$\dfrac{1}{4}$，此即所求之極限．

例 2．分數$\dfrac{\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}}{x-a}$，當 $x=a$ 時變爲$\dfrac{0}{0}$；求其極限以共軛不盡根 $\sqrt{3x-a}+\sqrt{x+a}$ 乘分子分母，則此分數變爲

$$\frac{(3x-a)(x+a)}{(x-a)(\sqrt{3x-a}+\sqrt{x+a})} \text{或} \frac{2}{\sqrt{3x-a}+\sqrt{x+a}};$$

故由使 $x=a$，求得此極限爲 $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$．

例 3．當 $x=1$ 時，分數 $\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$ 變爲$\dfrac{0}{0}$．

求其極限使 $x=1+h$，且依二項式定理展開．由是此分數

$$=\frac{1-(1+h)^{\frac{1}{3}}}{1-(1+h)^{\frac{1}{5}}}=\frac{1-\left(1+\frac{1}{3}h-\frac{1}{9}h^2+\cdots\right)}{1-\left(1+\frac{1}{5}h-\frac{2}{25}h^2+\cdots\right)}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}h-\cdots\cdots}{-\frac{1}{5}+\frac{2}{25}h-\cdots\cdots}.$$

茲當 $x=1$ 時 $h=0$；故所求極限爲$\dfrac{5}{3}$．

273．方程式之根有時因存在於方程式係數間之某種關係，而成爲無定形式．

例如，設
$$ax+b=cx+d,$$
$$(a-c)x=d-b,$$
$$x=\frac{d-b}{a-c}.$$

但設 $c=a$，則 $x$ 變爲 $\frac{d-b}{0}$ 或 $\infty$；卽設某一次方程式內 $x$ 之係數爲無限小，則其根爲無限大.

274. 方程式
$$ax+by+c=0,\ 及\ a'x+b'y+c'=0$$
之解爲
$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\quad y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$$

設 $ab'-a'b=0$，則 $x$ 及 $y$ 皆爲無限大，於此情形下假使 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=m$；由代 $a',b'$，第二方程式變爲 $ax+by+\frac{c'}{m}=0$

設 $\frac{c'}{m}$ 不等於 $c$，則二方程式 $ax+by+c=0$，及 $ax+by+\frac{c'}{m}=0$，僅常數項不同，則互相矛盾，不能爲 $x$ 及 $y$ 之任何有限值所適合.

設 $\frac{c'}{m}=c$，得 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$，則二式爲恒等式.

於此因 $bc'-b'c=0$，及 $ca'-c'a=0$，$x$ 及 $y$ 之值各成爲 $\frac{0}{0}$ 之形式，故其解答爲無定.

實則現情形下，僅有含二未知數之一方程式，且此方程式可爲無限數值所適合.

熟悉解析幾何之讀者連合直線幾何以解釋以上之結果，當無何困難.

275. 兹研究解二次方程式時可生之特殊情形.

使此方程式爲 $ax^2+bx+c=0$.

設 $c=0$，於是 $ax^2+bx=0$；

由是　　　　$x=0$，或 $-\frac{b}{a}$；.

即二根中之一爲零，一爲有限値.

設 $b=0$，則二根絕對値同，符號相反.［§118］

設 $a=0$，則方程式變爲 $bx+c=0$；本情形下，

此二次方程式僅有二根，即 $-\frac{c}{b}$. 但每二次方程式皆有二根，爲討論他一根之値. 玆進行如下：

於原式內以 $\frac{1}{y}$ 代 $x$，且消去分母. 得

$$cy^2+by+a=0.$$

玆使 $a=0$，得

$$cy^2+by=0$$

其解爲 $y=0$，或 $-\frac{b}{c}$；即 $x=\infty$，或 $-\frac{c}{b}$.

故任何二次方程式內設 $x^2$ 之係數變零，則其一根變爲無限大.

此爲上結果常見於他種高級數學中之形式，但學生須注意此僅爲以下較完全說明之適當縮寫.

方程式 $ax^2+bx+c=0$ 內，設 $a$ 爲甚小，則一根甚大，及當 $a$ 無限減小時，此根變爲無限大. 於此情形內其有限根漸近 $-\frac{c}{b}$ 如其限.

以上係消失之情形可以同法研究之.

## 習 題 XX.

求以下各式之極限.

(1) 當 $x=\infty$

1. $\dfrac{(2x-3)(3-5x)}{7x^2-6x+4}$.

3. $\dfrac{(3+2x^3)(x-5)}{(4x^3-9)(1+x)}$.

5. $\dfrac{1-x^2}{2x^3-1}\div\dfrac{1-x}{2x^2}$.

(2) 當 $x=0$.

2. $\dfrac{(3x^2-1)^2}{x^4+9}$.

4. $\dfrac{(x-3)(2-5x)(3x+1)}{(2x-1)^3}$.

6. $\dfrac{(3-x)(x+5)(2-7x)}{(7x-1)(x+1)^2}$.

求以下各式之極限.

7. $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, 當 $x=-1$.

8. $\dfrac{a^x-b^x}{x}$, 當 $x=0$.

9. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$, 當 $x=0$.

10. $\dfrac{e^{mx}-e^{ma}}{x-a}$, 當 $x=a$.

11. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}+\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}$, 當 $x=2a$.

12. $\dfrac{\log(1+x^2+x^4)}{3x^2(1-2x)}$, 當 $x=0$.

13. $\dfrac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$, 當 $x=1$.

14. $\dfrac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+(a-x)^{\frac{3}{2}}}{(a^3-x^3)^{\frac{1}{2}}+(a-x)^{\frac{1}{2}}}$, 當 $x=a$.

15. $\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, 當 $x=0$.

16. $\left\{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \quad \dfrac{n+1}{n}\right\}^{-n}$, 當 $n=\infty$.

17. $n\log\dfrac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}}$, 當 $n=\infty$.

18. $\sqrt[x]{\dfrac{a+x}{a-x}}$, 當 $x=0$.

# 第二十一章

## 級數之收斂與發散

276. 其連續各項爲由某一定法則所作成之式稱爲級數：設此級數終止於某指定項者，則稱之爲有限級數；設項數無限則稱爲無窮級數.

本章內將以形爲

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots$$

之式表一級數.

277. 設有一級數含有 $n$ 項，此級數和爲 $n$ 之函數；設 $n$ 無限變大，此和必傾向於變爲等於某有限之極限，或變爲無限大.

某無窮級數，當無論 $n$ 若何增大其首 $n$ 項和絕對値終不能數的大於某有限量時，稱爲收斂級數.

某無窮級數，當由使 $n$ 爲充分之大，能使其首 $n$ 項和絕對値大於任何有限量時，稱爲發散級數.

278. 設能求某已知級數首 $n$ 項之和，則由考驗當 $n$ 無限增大時，此級數仍爲有限量或變爲無窮大決定其爲收斂級數或發散級數.

例如. 級數

$$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots\text{首 } n \text{ 項之和爲}\frac{1-x^n}{1-x}.$$

設 $x$ 絕對值小於 1，則和漸近有限極限 $\frac{1}{1+x}$，由是此級數爲收斂級數.

設 $x$ 絕對值大於 1，其首 $n$ 項之和爲 $\frac{x^n-1}{x-1}$，且由取 $n$ 爲充分大，能使之大於任何有限量；由是此級數爲發散級數.

設 $x=1$，則其首 $n$ 項之和爲 $n$，故此級數仍爲發散級數.

設 $x=-1$，此級數變爲

$$1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

其偶數項之和爲零，奇數項之和爲 1；且其和跳躍於 0,1，二値之間. 此級數屬於可稱爲振動或週期收斂級數之類.

279. 甚多情形內吾人無法以求一級數首 $n$ 項之和，由是茲研究不求級數和而能判定級數爲收斂或發散之法則.

280. 正負號互易之無窮級數，設其任一項絕對值小於其前項，則爲收斂級數.

使此級數表以

$$u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

式內　　$u_1>u_2>u_3>u_4>u_5$

已知式可寫爲以下之任一形式：

$$(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-(u_6-u_7)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1)知任若干項之和皆爲正數；由 (2)知任若干項之和皆小於 $u_1$；故此級數爲收斂級數.

281. 例如，級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots$$

爲收斂級數．於 § 223 內由使 $x=1$ 知其和爲 $\log_e 2$．

又級數

$$\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\frac{7}{6}+\cdots\cdots\cdots$$

內，每項絕對值小於其前項，故此級數亦爲收斂級數．但此巳知級數爲

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及 $1-1+1-1+1-1+1-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

之和．

今 (1) 等於 $\log_e 2$，(2) 視項數之爲偶數或奇數等於 0 或 1．故巳知級數爲收斂級數．其和設取偶數則漸近於 $\log_e 2$，取奇數項則漸近於 $1+\log_e 2$．

282．各項皆同號之無窮級數，設其每項皆大於雖則甚小之有限量，則爲發散級數．

因設每項大於有限量 $a$，則其首 $n$ 項之和大於 $na$；由是如取 $n$ 爲充分之大，可使之大於任何有限量．

283．茲於研究收斂及發散之其他驗定法提出幾可視爲公理之二重要原理．

I．當級數加入或取出任有限數若干項後，設原級數爲收斂則所除仍爲收斂，爲發散則所除仍爲發散．因其取出諸項之和爲有限量也．

II．設所有項皆爲正之級數爲收斂，則當此級數之某幾項或所有項爲負時，亦爲收斂，因其和顯然當所有項皆同號時爲最大也．

捨有相反說明外茲假定所有項皆正．

284. 某無窮級數設由某固定項始且於其後每項與其前項之比絕對值小於本身小於 1 之某量則爲收斂級數.

使由固定項始之級數表以

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots\cdots;$$

又使 $\frac{u_2}{u_1}<r$, $\frac{u_3}{u_2}<r$, $\frac{u_4}{u_3}<r$, $\cdots\cdots$,

於此 $r<1$.

於是 $u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots$

$$=u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_4}{u_3}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\cdots\right)$$

$$<u_1(1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots);$$

即 $<\frac{u_1}{1-r}$. 因 $r<1$.

故已知級數爲收斂級數.

285. 於上節之說明內，學生須注意"由某固定項始且於其後"及所表之意義.

觀察級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於此 $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{nx}{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)x$;

由取 $n$ 爲充分之大，可使此比值近似 $x$，近至適意之程度，且每項比其前項終極皆等於 $x$，故設 $x<1$ 則此級數爲收斂級數.

但 $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ 之比值不小於 1，迄 $\frac{nx}{n-1}<1$; 即迄 $n>\frac{1}{1-x}$.

於此得收斂級數之一種情形，即其內由首項起遞增，至某點後復遞減. 例如，設 $x=\frac{99}{100}$，則 $\frac{1}{1-x}=100$，且各項不遞減迄 100 項之後.

286. 諸項同號之無窮級數，設由某固定項且於其後每項與其前項之比皆大於 1，或等於 1，則爲發散級數.

使此固定項表以 $u_1$. 設其比等於 1，則以後各項皆等於 $u_1$，$n$ 項之和等於 $nu_1$，故此級數爲發散級數.

設其比大於 1，則其每項皆大於 $u_1$，其 $n$ 項和大於$nu_1$，故此級數爲發散級數.

287. 於諸驗定法之應用內，避免決定於其後每項皆大於或小於其前項之某特項，以求當 $n$ 無限增大時$\frac{u_n}{u_{n-1}}$之極限爲宜；使此極限表以 $\lambda$.

設 $\lambda<1$，則爲收斂級數 [§ 284.]

設 $\lambda>1$，則爲發散級數 [§ 286]

設 $\lambda=1$，則此級數可爲收斂，可爲發散，要需另外之驗定；因當 $n$ 無限增大時可發生$\frac{u_n}{u_{n-1}}<1$，但漸近於 1 如其限之情形. 於此則不能指定一本身小於 1 而大於 $\lambda$ 之任何有限量 $r$. 故 § 284 之驗定法失效. 設雖$\frac{u_n}{u_{n-1}}>1$ 但漸近於 1 如其限，則由 § 286 知此級數爲發散級數.

玆用 "$Lim\ \frac{u_n}{u_{n-1}}$" 爲 "$\frac{u_n}{u_{n-1}}$當 $n$ 爲無窮大時之極限" 之縮寫.

例 1. 求第 $n$ 項爲$\frac{(n+1)x^n}{n^2}$之級數爲收斂抑爲發散.

$$\text{於此}\quad \frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{(n+1)x^n}{n^2}\div\frac{nx^{n-1}}{(n-1)^2}=\frac{(n+1)(n-1)^2}{n^3}.x,$$

$$\therefore Lim\ \frac{u_n}{u_{n-1}}=x;$$

故　　設 $x<1$，則爲收斂級數.

　　設 $x>1$，則爲發散級數.

設 $x=1$，於是 $Lim\frac{u_n}{u_{n-1}}=1$，需要另外驗定.

例 2. 級數

$$1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots\cdots\cdots$$

爲收斂級數抑爲發散級數.

於此 $Lim\frac{u_n}{u_{n-1}}=Lim\frac{n^2x^{n-1}}{(n-1)^2x^{n-2}}=x.$

故　　設 $x<1$，則爲收斂級數.

　　設 $x>1$，則爲發散級數.

設 $x=1$，此級數變爲 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots\cdots$，顯然爲發散級數.

例 3. 級數

$$a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots(a+\overline{n-1}\cdot d)r^{n-1}+\cdots$$ 內

$$Lim\frac{u_n}{u_{n-1}}=Lim\frac{a+(n-1)d}{a+(n-2)d}\cdot r=r;$$

由是設 $r<1$ 則爲收斂級數，且其和爲有限 [§ 60, 推論]

288. 設有二無窮級數各級數內之所有項皆爲正量，設二級數內相當項之比永爲有限數量，則此二級數必同爲收斂級數或同爲發散級數.

使此二無窮級數表以

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots\cdots$$

及　$$v_1+v_2+v_3+v_4+\cdots\cdots\cdots$$

則分數

$$\frac{u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n}{v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n}$$

之值處於

$$\frac{u_1}{v_1},\ \frac{u_2}{v_2},\ \cdots\cdots\cdots\frac{u_n}{v_n}\qquad [§ 14].$$

諸分數中之最大者及最小者之間.

故爲有限量，以 $L$ 表之；

$$\therefore u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots+u_n=L(v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots v_n)$$

故設一級數之值爲有限，他級數之值亦爲有限；一級數之值爲無限，他級數之值亦爲無限；此即証明本命題.

289. 此原理之應用甚爲重要，因用此能比較已知級數與其爲收斂或發散業已證明之輔助級數. 下節討論之級數爲常用之輔助級數.

290. 無窮級數

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots\cdots$$

捨 $p$ 爲大於 1 之正數外，永爲發散級數.

情形 *I*. 使 $p>1$.

則首項爲 1；次二項之和小於 $\frac{2}{2^p}$；再次四項之和小於 $\frac{4}{4^p}$；又次八項之和小於 $\frac{8}{8^p}$；類推. 故此級數小於 $1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots$；

即小於其公比 $\frac{2}{2^p}$ 小於 1 之等比級數，因 $p>1$；故此級數爲收斂級數.

情形 *II*. 使 $p=1$.

此級數變爲 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$

其第三，四兩項之和大於 $\frac{2}{4}$ 或 $\frac{1}{2}$；後四項之和大於 $\frac{4}{8}$ 或 $\frac{1}{2}$；又後八項之和大於 $\frac{8}{16}$ 或 $\frac{1}{2}$；類推. 故此級數大於

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$$

由是爲發散級數. [§ 286]

情形 *III*. 使 $p<1$ 或爲負.

則每項大於情形 *II* 內之相當項. 故爲發散級數.

故除 $p$ 爲大於 1 之正數外此級數永爲發散級數.

例．求證級數

$$\frac{2}{1}+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\cdots\cdots+\frac{n+1}{n^2}+\cdots\cdots$$

爲發散級數．

比較已知級數與 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$

由是設以 $u_n$ 及 $v_n$ 表已知級數及輔助級數之第 $n$ 項．則

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n+1}{n^2}\div\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n};$$

故 $Lim\frac{u_n}{v_n}=1$．由是二級數必同爲收斂級數或同爲發散級數．但輔助級數爲發散級數，故已知級數亦爲發散級數．

此完成 § 287，例 1 之解答．

291．於 § 288 之應用內，必須 $\frac{u_n}{v_n}$ 之極限爲有限量．設照下法求輔助級數，則可有此種情形．

取已知級數之第 $n$ 項 $u_n$，僅留 $n$ 之最高次乘羃．表此結果以 $v_n$，於是由 § 270 $\frac{u_n}{v_n}$ 之極限爲有限量，且 $v_n$ 可取作輔助級數之第 $n$ 項．

例 1．指明第 $n$ 項爲 $\frac{\sqrt[3]{2n^2-1}}{\sqrt[4]{3n^3+2n+5}}$ 之極數爲發散級數．當 $n$ 漸大時，$u_n$ 之值漸近於

$$\frac{\sqrt[3]{2n^2}}{\sqrt[4]{3n^3}}，或\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{12}}}$$

故設 $v_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{12}}}$，則得 $Lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}}$，此爲有限量；

由是可取第 $n$ 項爲 $\frac{1}{n^{\frac{1}{12}}}$，之級數爲輔助級數．但此爲發散級數［§ 290］；故已知級數亦爲發散級數．

例 2. 求驗定級數爲收斂或發散，設其內

$$u_n=\sqrt[3]{n^3+1}-n$$

於此
$$u_n=n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}-1\right)$$
$$=n\left(1+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{9n^6}+\cdots-1\right)$$
$$=\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{9n^5}+\cdots$$

設取 $v_n=\frac{1}{n^2}$，得

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9n^3}+\cdots\cdots\cdots$$
$$\therefore\ Lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{3}.$$

但此輔助級數

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots\cdots$$

爲收斂級數，故已知級數亦爲收斂級數.

292. 指明 $(1+x)^n$ 由二項式定理所得之展開式當 $x<1$ 時爲收斂級數.

使 $u_r, u_{r+1}$ 表此展開式之第 $r$ 及 $r+1$ 項；於是

$$\frac{u_{r+1}}{u_r}=\frac{n-r+1}{r}x.$$

當 $r>n+1$ 時此比爲負；即此後，設 $x$ 爲正，則正負項互現，設 $x$ 爲負則永爲同號.

茲當 $r$ 爲無限大時，$Lim\ \frac{u_{r+1}}{u_r}$ 絕對值等於 $x$；由是因 $x<1$，設所有項同號，則此級數爲收斂級數. 由是當其有幾項爲正與幾項爲負時亦爲收斂級數. [§ 283]

293. 指明 $a^x$ 依 $x$ 升冪之展開式，於 $x$ 之任何值，皆爲收斂級數.

於此 $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{x\log_e a}{n-1}$；由是無論 $x$ 爲何值，$Lim\frac{u_n}{u_{n-1}}<1$；故此級數爲收斂級數.

294. 指明 $\log(1+x)$ 依 $x$ 升羃之展開式當 $x$ 絕對小於 1 時爲收斂級數.

於此 $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{n-1}{n}x$ 之絕對值，於極限內爲 $x$；故當 $x$ 小於 1 時此級數爲收斂級數.

設 $x=1$，此級數變爲 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$，爲收斂級數. [§ 280].

設 $x=-1$，此級數變爲 $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots\cdots\cdots\cdots$，爲發散級數. [§ 290]. 此指示零之對數爲負無窮大，同於由方程式 $e^{-\infty}=0$ 之另一証明.

295. 以下二例之結果甚爲重要，且爲本章中之所必需者.

例 1. 求 $\frac{\log x}{x}$ 當 $x$ 爲無限大時之極限.

使 $x=e^y$ 於是

$$\frac{\log x}{x}=\frac{y}{e^y}=\frac{y}{1+y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\cdots}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{y}+1+\frac{y}{\lfloor 2}+\frac{y^2}{\lfloor 3}+\cdots};$$

又當 $x$ 爲無限大時，$y$ 爲無限大；故此分數之值爲零.

例 2. 指明當 $x<1$ 時，$nx^n$ 當 $n$ 爲無限大時之極限爲 0.

使 $x=\frac{1}{y}$，由是 $y>1$；

又使 $y^n=z$，由是 $n\log y=\log z$；於是

$$nx^n=\frac{n}{y^n}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\log z}{\log y}=\frac{1}{\log y}\cdot\frac{\log z}{z},$$

茲當 $n$ 爲無限大時 $z$ 亦爲無限大，及 $\frac{\log z}{z}=0$；又 $\log y$ 爲有限量. 故

$$\text{Lim}\; nx^n=0.$$

296. 有時需要決定無限個因子之積爲有限量與否. 設此積含 $n$ 因子，且表以

$$u_1u_2u_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots u_n;$$

於是，設當 $n$ 無限增大時 $u_n<1$，則此積最後等於零；又設 $u_n>1$ 則此積爲無限大，故欲此積爲有限數，$u_n$ 必傾向於極限 1.

以 $1+v_n$ 代 $u_n$，此積變爲

$$(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\cdots\cdots\cdots\cdots(1+v_n).$$

表此積以 $P$，且取其對數；於是

$$\log P=\log(1+v_1)+\log(1+v_2)+\cdots\cdots\cdots+\log(1+v_n)\cdots\cdots \quad (1)$$

欲此積爲有限量數，此級數必爲收斂級數.

選取一輔助級數 $v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+v_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$

茲 $$Lim\frac{\log(1+v_n)}{v_n}=Lim\left(\frac{v_n-\frac{1}{2}v^2{}_n+\cdots\cdots}{v_n}\right)=1,$$

因 $u^n$ 之極限爲 1 時 $v_n$ 之極限爲 0.

故設 (2) 爲收斂級數，則 (1) 亦爲收斂級數，而已知積爲有限量.

例 1. 求證 $n$ 爲無窮大時

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6},\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}$$

之極限爲有限量.

此積含 $2n$ 因子；表諸速積對以 $u_1,u_2,u_3,\cdots\cdots$ 及積以 $P$，則

$$P=u_1u_2u_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots u_n,$$

以上: $$u_n=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}=1-\frac{1}{4n^2};$$

但 $$\log P=\log u_1+\log u_2+\log u_3+\cdots\cdots+\log u_n\cdots\cdots \quad (1)$$

指明此級數爲有限量.

茲 $$\log u_n=\log\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=-\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{32n^4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

由是如 § 291，例 2 知此爲收斂級數，及已知積爲有限量.

297. 於數學研究中無窮級數時常發現，故決定其爲發散或收斂，至爲重要. 且若非注意所用級數確爲收斂，則引至錯誤之結論. [見§183.]

例如，設用二項式定理展開 $(1-x)^{-2}$，則得

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

但設照 § 60 所示，求此級數 $n$ 項之和，則知

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+nx^{n-1}=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x};$$

由是

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}+\frac{x^n}{(1-x)^2}+\frac{nx^n}{1-x}.$$

由使 $n$ 為無限大，則知 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 僅可視為無窮級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之真等值而 $\frac{x^n}{(1-x)^2}+\frac{nx^n}{1-x}$ 消失.

設 $n$ 為無限大，則此景當 $x=1$，或 $x>1$ 時變為無限大，當 $x<1$ 時無限減小，[§295]，由是僅當 $x<1$ 時始可斷言.

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots \text{至無窮項;}$$

設用由二項式定理得來 $(1-x)^{-2}$ 之展開式，認其於 $x$ 之一切值皆真，則必得錯誤之結論．換言之，如無窮級數 $1+2x+3x^2+\cdots$ 為收斂級數，則可引入推理而無錯誤，但當其為發散級數時則不可引用.

發散級數之難點迫出一級數與其代數等值間之區別．例如，1 除以 $(1-x)^2$，不論 $x$ 為何值永可得級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots.$$

之任意若干項，如是在某種意義下可稱 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 為其代數等值；但已知捨此級數為收斂級數外，此等值不能確實存在.

由是稱 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ 爲級數

$$1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之母函數較爲適當．即當用常用代數法則展開時得所論級數之函數

母函數一詞之用法，於循環級數一章中，將爲更詳盡之說明．

## 習　　題 XXI．a

求証驗定以下級數爲收斂級數，仰爲發散級數．

1．$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+2a}-\dfrac{1}{x+3a}+\cdots\cdots\cdots$

$x$ 及 $a$ 爲正量．

2．$\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\dfrac{1}{4.5}+\cdots\cdots\cdots$

3．$\dfrac{1}{xy}-\dfrac{1}{(x+1)(y+1)}+\dfrac{1}{(x+2)(y+2)}-\dfrac{1}{(x+3)(y+3)}+\cdots\cdots$

$x$ 及 $y$ 爲正量．

4．$\dfrac{x}{1.2}+\dfrac{x^2}{2.3}+\dfrac{x^3}{3.4}+\dfrac{x^4}{4.5}+\cdots\cdots\cdots$

5．$\dfrac{x}{1.2}+\dfrac{x^2}{3.4}+\dfrac{x^3}{5.6}+\dfrac{x^4}{7.8}+\cdots\cdots\cdots$

6．$1+\dfrac{2^2}{\lfloor 2}+\dfrac{3^2}{\lfloor 3}+\dfrac{4^2}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$

7．$\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{4}}+\sqrt{\dfrac{4}{5}}+\cdots\cdots$

8．$1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots\cdots$

9．$\dfrac{2}{1^p}+\dfrac{3}{2^p}+\dfrac{4}{3^p}+\dfrac{5}{4^p}+\cdots\cdots$

10．$1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{x^3}{10}+\cdots+\dfrac{x^n}{n^2+1}+\cdots\cdots$

11．$x+\dfrac{3}{5}x^2+\dfrac{8}{10}x^3+\dfrac{15}{17}x^4+\cdots+\dfrac{n^2-1}{n^2+1}x^n+\cdots\cdots$

*H.H.A.*

12. $1+\frac{2}{5}x+\frac{6}{9}x^2+\frac{14}{17}x^3+\cdots+\frac{2^n-2}{2^n+1}x^{n-1}+\cdots\cdots$

13. $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\cdots\cdots\cdots$

14. $2x+\frac{3x^2}{8}+\frac{4x^3}{27}+\cdots+\frac{(n+1)x^n}{n^3}+\cdots\cdots$

15. $\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\cdots\cdots\cdots$

16. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\frac{4^4}{5^5}+\cdots\cdots$

17. 驗定級數之性質設其通項爲

(1) $\sqrt{n^2+1}-n$.　　　(2) $\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}$.

18. $x$ 爲正分數驗定級數

(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$,

(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$,

19. 指明級數

$$1+\frac{2^p}{\underline{|2}}+\frac{3^p}{\underline{|3}}+\frac{4^p}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於 $p$ 之所有值皆爲收斂級數.

20. 指明無窮級數

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲收斂或發散，全視 $Lim\ \sqrt[n]{u_n}$ 之 $<1$，或 $>1$.

21. 指明當 $n$ 無限大時，積

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

爲有限量.

22. 指明當 $x=1$ 時，捨 $n$ 爲負量且絕對值大於 1 外，$(1+x)^n$ 之展開式內不含無限大之項.

*298. § 287,291 所示驗定收斂或發散之方法，通常已可足用．下節所証定理，使用補助級數

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots\cdots$$

推出附加驗定法，此有時甚爲有用．

*299. 設 $u_n, v_n$ 爲所有項皆正之二無窮級數之通項，於是設於某特項後 $\frac{u_n}{u_{n-1}}<\frac{v_n}{v_{n-1}}$，則當 $v$－級數爲收斂級數時 $u$－級數亦爲收斂級數；又設 $\frac{u_n}{u_{n-1}}>\frac{v_n}{v_{n-1}}$ 則當 $v$－級數爲發散級數時，$u$－級數亦爲發散級數．

設定 $u_1$ 及 $v_1$ 爲此特項．

情形 *I*. 使 $\frac{u_2}{u_1}<\frac{v_2}{v_1}$，$\frac{u_3}{u_2}<\frac{v_3}{v_2}$，……；於是

$$\begin{aligned}&u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\\&=u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\cdots\right)\\&<u_1\left(1+\frac{v_2}{v_1}+\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_2}{v_1}+\cdots\right);\\&<\frac{u_1}{v_1}(v_1+v_2+v_3+\cdots).\end{aligned}$$

即

故設 $v$－級數爲收斂級數，$u$－級數亦爲收斂級數．

情形 *II*. 使 $\frac{u_2}{u_1}>\frac{v_2}{v_1}$，$\frac{u_3}{u_2}>\frac{v_3}{v_2}$，…………；於是

$$\begin{aligned}&u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\\&=u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\cdots\right)\\&>u_1\left(1+\frac{v_2}{v_1}+\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_2}{v_1}+\cdots\right);\end{aligned}$$

則　　$>\frac{u_1}{v_1}(v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots\cdots)$.

故設 $v$—級數爲發散級數，則 $u$—級數亦爲發散級數．

*300 於 § 287 已知級數之爲收斂級數或發散級數，全視其第 $n$ 項與其前項比之極限之小於 1 或大於 1．本章之末將知以等值形式用此驗定法更爲合宜．

一級數之爲收斂或發散，全視其第 $n$ 項與其後項之比之極限之大於 1，或小於 1，即視 $Lim\frac{u_n}{u_{n+1}}>1$ 或 $<1$.

同理前節定理可述爲：

設 $Lim\frac{u_n}{u_{n+1}}>Lim\frac{v_n}{v_{n+1}}$，則 $v$—級數爲收斂級數時 $u$—級數亦爲收斂級數．又設 $Lim\frac{u_n}{u_{n+1}}<Lim\frac{v_n}{v_{n+1}}$，則 $v$—級數爲發散級數時 $u$—級數亦爲發散級數．

*301．通項爲 $u_n$ 之級數，其爲收斂或發散全視

$$Lim\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}>1，\text{或}<1.$$

使比較已知級數與通項 $v_n$ 爲 $\frac{1}{n^p}$ 之輔助級數．

當 $p>1$ 時，輔助級數爲收斂級數，又於此情形內已知級數爲收斂級數．設

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{(n+1)^p}{n^p}，\text{或}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p;$$

即設　$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>1+\frac{p}{n}+\frac{p(p-1)}{2n^2}+\cdots\cdots;$$

或　$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>p+\frac{p(p-1)}{2n}+\cdots\cdots;$$

即設　$$Lim\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}>p.$$

但設 $p$ 較 1 大一任何小有限量則此輔助級數爲收斂級數；故此命題之第一部成立.

當 $p<1$ 時，此輔助級數爲發散級數，由前法可證明此命題第二部.

例．求驗定級數

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots\cdots$$

爲收斂級數抑爲發散級數.

於此 $Lim\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{x^2}$；故設 $x<1$，此級數爲收斂級數；設 $x>1$ 則此級數爲發散級數.

設 $x=1$，則 $Lim\frac{u_n}{u_{n+1}}=1$．於此情形內

$$u_n=\frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-3)}{2.4.6\cdots\cdots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2n-1},$$

及 $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)(2n-1)}$；

$\therefore n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{n(6n-1)}{(2n-1)^2}$；

$\therefore Lim\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}=\frac{3}{2}$；

故當 $x=1$ 時，此級數爲收斂級數.

*302．通項爲 $u_n$ 之級數之爲收斂級數或發散級數全視 $Lim\left(n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)>1$，或 $<1$.

使比較已知級數與通項爲 $\frac{1}{n^p}$ 之級數.

則當 $p>1$ 時，此輔助級數爲收斂級數，又於此情形內此已知級數亦爲收斂級數，設

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^p; \qquad [§ 300.]$$

即設 $\log\frac{u_n}{u_{n+1}}p\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$；

或設 $\log\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{p}{n}-\frac{p}{2n^2}+\cdots\cdots$；

即，設 $$Lim\left(n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)>p$$

故命題之第一部成立．

當 $p<1$時，可以同法進行；於此情形內，此輔助級數爲發散級數．

例 1．求驗定級數

$$x+\frac{2^2x^2}{|\underline{2}}+\frac{3^3x^3}{|\underline{3}}+\frac{4^4x^4}{|\underline{4}}+\frac{5^5x^5}{|\underline{5}}+\cdots$$

爲收斂級數抑爲發散級數．

於此 $$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^nx^n}{|\underline{n}}\div\frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{|\underline{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^nx}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^nx};$$

$$\therefore Lim\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{ex}.\qquad [\S\ 220\ 推論．]．$$

故設 $x<\frac{1}{e}$ 則爲收斂級數，設 $x>\frac{1}{e}$ 則爲發散級數．

設 $x=\frac{1}{e}$，則 $$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n};$$

$$\therefore \log\frac{u_n}{u_{n+1}}=\log e-n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\cdots;$$

$$\therefore n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}+\cdots;$$

$$\therefore Lim\left[n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}\right]=\frac{1}{2};$$

故當 $x=\frac{1}{e}$ 時此級數爲發散級數．

*303．設 $Lim\frac{u_n}{u_{n+1}}=1$ 及 $Lim\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}=1$，則 §§ 300，301 所示之驗定法不適用，

求一另外驗定，則須用通項爲 $\frac{1}{n(\log n)^p}$ 之輔助級數．

爲判定此級數之爲收斂級數或發散級數．則需下節所証之定理．

304. 設 $\phi(n)$ 於 $n$ 之所有正整數值爲正，且當 $n$ 遞增時遞減，又設 $a$ 爲任何正整數．於是二無窮級數

$$\phi(1)+\phi(2)+\phi(3)+\cdots\cdots+\phi(n)+\cdots\cdots$$

及 $a\phi(a)+a^2\phi(a^2)+a^3\phi(a^3)+\cdots\cdots a^n\phi(a^n)+\cdots\cdots\cdots\cdots$

必同爲收斂級數或同爲發散級數．

使觀察第一級數內於 $\phi(a^k)$ 後始之項．

$$\phi(a^k+1),\ \phi(a^k+2),\ \phi(a^k+3),\cdots\cdots\phi(a^{k+1})\cdots\cdots(1)$$

此等項之數爲 $a^{k+1}-a^k$，或 $a^k(a-1)$，且每項大於 $\phi(a^{k+1})$；

故其和大於 $a^k(a-1)\phi(a^{k+1})$；卽大於 $\frac{a-1}{a}\times a^{k+1}\phi(a^{k+1})$．

由陸續與 $k$ 以 0，1，2，3，……之值得

$$\phi(2)+\phi(3)+\phi(4)+\cdots\cdots+\phi(a)>\frac{a-1}{a}\times a\phi(a);$$

$$\phi(a+1)+\phi(a+2)+\phi(a+3)+\cdots\cdots+\phi(a^2)>\frac{a-1}{a}\times a^2\phi(a^2);$$

故由加法，　$S_1-\phi(1)>\frac{a-1}{a}S_2$；

式內 $S_1$，$S_2$ 表第一及第二級數；由是設第二級數爲發散級數．第一亦然．

又 (1) 之各項皆小於 $\phi(a^k)$，由是此級數之和小於

$$(a-1)\times a^k\phi(a^k).$$

由陸續與 $k$ 以 0，1，2，3，……之值得

$$\phi(2)+\phi(3)+\phi(4)+\cdots\cdots+\phi(a)<(a-1)\times\phi(1);$$

$$\phi(a+1)+\phi(a+2)+\phi(a+3)+\cdots\cdots+\phi(a^2)<(a-1)\times a\phi(a).$$

…………………………………………………………

故由加法得

$$S_1-\phi(1)<(a-1)\{S_2+\phi(1)\};$$

故設第二級數爲收斂級數，則第一級數亦然．

注．求第二級數之通項，爲取第一級數之通項 $\phi(n)$，以 $a^n$ 代 $n$，且乘之以 $a^n$．

*305. 級數 $1+\frac{1}{2(\log 2)^p}+\frac{1}{3(\log 3)^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(\log n)^p}+$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$,
設 $p>1$，則為收斂級數；設 $p=1$，或 $p<1$ 則為發散級數.

由前節此級數為收斂級數或發散級數於 $p$ 之同值.如通項為

$$a^n\times\frac{1}{a^n(\log a^n)^p}, \text{或} \frac{1}{(n\log a)^p}, \text{或} \frac{1}{(\log a)^p}\times\frac{1}{n^p}.$$

之級數.

常數因子 $\frac{1}{(\log a)^p}$ 為各項所公有. 故已知級數為收斂級數或發散級數，於 $p$ 之同值如通項為 $\frac{1}{n^p}$ 之級數. 故由是得所求之結果. [ §290 ]

* 306. 通項為 $u_n$ 級數之為收斂級數或發散級數全視

$$Lim\left[\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}\log n\right]>1 \text{ 或 } <1.$$

使比較已知級數與級數

$$1+\frac{1}{2(\log 2)^p}+\frac{1}{3(\log 3)^p}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n(\log n)^p}+\cdots\cdots\cdots$$

當 $P>1$ 時，此輔助級數為收斂級數，且於此情形內設

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{(n+1)\{\log(n+1)\}^p}{n(\log n)^p}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

則由 §299 知此已知級數為收斂級數.
茲當 $n$ 甚大時，

$$\log(n+1)=\log n+\log(1+\frac{1}{n})=\log n+\frac{1}{n}, \text{ 近似，故}$$

條件 (1) 變為

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)^p;$$

即 $$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{p}{n\log n}\right);$$

則 $$\frac{u_n}{u_{n+1}}>1+\frac{1}{n}+\frac{p}{n\log n};$$

或 $$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>1+\frac{p}{\log n};$$

或 $$\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}\log n>p.$$

故命題之第一部成立．其第二部分可用 §301 內所示方法証明．

例．級數

$$1+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^2.4^2}{3^2.5^2}+\frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2}+\cdots\cdots$$

爲收斂級數抑爲發散級數?

於此 $$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(2n+1)^2}{(2n)^2}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$\therefore\ Lim\ \dfrac{u_n}{u_{n+1}}=1$，又行其次驗定

由 (1) $$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=1+\frac{1}{4n}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$\therefore\ Lim\left\{n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}=1$，進行次一檢驗．

由 (2)，$$\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}\log n=\frac{\log n}{4n};$$

$$\therefore\ Lim\left[\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}\log n\right]=0.$$

因 $Lim\dfrac{\log n}{n}=0$ [§295]；故已知級數爲發散級數．

*307．§183 曾指示在數學推理中用發散級數可引至錯誤之結果．但卽此無窮級數爲收斂級數時運用時亦須十分謹愼．

例如，級數

$$1-x+\frac{x^2}{\sqrt[4]{2}}-\frac{x^3}{\sqrt[4]{3}}+\frac{x^4}{\sqrt[4]{4}}-\frac{x^5}{\sqrt[4]{5}}+\cdots\cdots$$

當 $x=1$ 時爲收斂級數． [§ 280．] 但設此級數自乘，則積內 $x^{2n}$ 之係數爲

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2n}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2n-1}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{2n-2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[4]{r}.\sqrt[4]{2n-r}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[4]{2n}}.$$

表之以 $a_{2n}$；於是因

$$\frac{1}{\sqrt[4]{r}\cdot\sqrt[4]{2n-r}}>\frac{1}{(\sqrt[4]{n})^2},\text{ 或}>\frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$a_{2n}>\frac{2n+1}{\sqrt{n}},$$ 故 $n$ 爲無窮大時，此亦爲無窮大.

設 $x=1$. 則此積變爲

$$a_0-a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{2n}-a_{2n+1}+a_{2n+2}-\cdots\cdots\cdots,$$

又因諸項 $a_{2n}$，$a_{2n+1}$，$a_{2n+2}$，……爲無窮，故此級數無算術意義.

此使吾人考究在何種條件下二收歛無窮級數之積亦爲收歛級數.

*308. 使表二無窮級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots\cdots\cdots,$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots\cdots+b_{2n}x^{2n}+\cdots\cdots\cdots$$

以 $A$ 及 $B$.

設此二級數相乘則得結果之形式爲

$$a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2+\cdots\cdots$$

設此級數連續至無窮且表之以 $C$；於是考究在何種條件下，$C$ 可視爲 $AB$ 乘積之眞正算術等值.

先假定所有 $A,B$ 內之項爲正.

使 $A_{2n},B_{2n},C_{2n}$ 表以 $A,B,C$ 內首 $2n+1$ 項所成之級數.

設 $A_{2n}$ 及 $B_{2n}$ 相乘則迄 $x^{2n}$ 項，$x$ 每乘羃之係數同於 $C$ 內同乘羃之係數；但 $A_{2n}$ $B_{2n}$ 內有含高於 $x^{2n}$ 之 $x$ 乘羃之項，而 $x^{2n}$ 則爲 $C_{2n}$ 內之最高乘羃；故

$$A_{2n}B_{2n}>C_{2n}.$$

設作成 $A_nB_n$ 之積，則其末項爲 $a_nb_nx^{2n}$；但 $C_{2n}$ 含所有積內諸項及另外若干項；故

$$C_{2n}>A_nB_n$$

故無論 $n$ 爲何值 $C_{2n}$ 爲$A_nB_n$ 及 $A_{2n}B_{2n}$ 間之中間值.

使 $A$ 及 $B$ 爲收斂級數; 及

$$A_n=A-X,\ B_n=B-Y,$$

$X$ 及 $Y$ 爲於級數取出 $n+1$ 項後, 所餘之項; 於是當 $n$ 爲無窮大時 $X$ 及 $Y$ 爲無限小.

$$\because\ A_nB_n=(A-X)(B-Y)=AB-BX-AY+XY.$$

由是因 $A$ 及 $B$ 皆爲無窮級數, 故 $A_nB_n$ 之極限爲 $AB$.

同理 $A_{2n}B_{2n}$ 之極限亦爲 $AB$.

故 $C_{2n}$ 之極限 $C$, 因處於 $A_nB_n$ 及 $A_{2n}B_{2n}$ 之間. 故必等於 $AB$.

次設 $A$ 及 $B$ 內諸項非皆同號、

於此情形內不等式 $A_{2n}B_{2n}>C_{2n}>A_nB_n$, 不必爲眞, 故亦不能如前情形推理.

使二級數內所有正項之和爲 $p,p'$; 負項之和爲 $N,N'$ 由是

$$A=P-N,\ B=P'-N'$$

於是設 $P,P',N,N'$ 各表一收斂級數, 則方程式

$$AB=PP'-NP'-PN'+NN',$$

因由命題之前部 $PP',NP'PN'NN'$(皆爲收斂級數; 有完全可解之意義; 故二級數 $A,B$ 之積爲收斂級數.

故設每級數內所有同號項之和皆爲收斂級數則二級數之積爲收斂級數.

但設 $P,N,P',N'$ 各表一發散級數 (如前節,其中又 $P'=P$, $N'=N$), 於是所有 $PP'$, $NP'$, $PN'$, $NN'$ 諸式皆爲發散級數. 當此情形時爲決定此積之爲收斂級數與否於每特殊習題皆需以細心之研究.

## 習　題 XXI. b.

求驗定以下級數爲收斂級數抑爲發散級數：

1. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^4}{8}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{x^6}{12}+\cdots\cdots$

2. $1+\frac{3}{7}x+\frac{3.6}{7.10}x^2+\frac{3.6.9}{7.10.13}x^3+\frac{3.6.9.12}{7.10.13.16}x^4+\cdots\cdots$

3. $x^2+\frac{2^2}{3.4}x^4+\frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}x^6+\frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}x^8+\cdots\cdots$

4. $1+\frac{2x}{\underline{|2}}+\frac{3^2x^2}{\underline{|3}}+\frac{4^3x^3}{\underline{|4}}+\frac{5^4x^4}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$

5. $1+\frac{1}{2}x+\frac{\underline{|2}}{3^2}x^2+\frac{\underline{|3}}{4^3}x^3+\frac{\underline{|4}}{5^4}x^4+\cdots\cdots$

6. $\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}x+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^2+\cdots\cdots$

7. $1+\frac{a(1-a)}{1^2}+\frac{(1+a)a(1-a)(2-a)}{1^2.2^2}$
$$+\frac{(2+a)(1+a)a(1-a)(2-a)(3-a)}{1^2.2^2.3^2}+\cdots\cdots$$

$a$ 爲一眞分數.

8. $\frac{a+x}{1}+\frac{(a+2x)^2}{\underline{|2}}+\frac{(a+3x)^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$

9. $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots\cdots$$

10. $x^2(\log 2)^q+x^3(\log 3)^q+x^4(\log 4)^q+\cdots\cdots$

11. $1+\alpha+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}+\cdots\cdots$

12. 設 $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^k+An^{k-1}+Bn^{k-2}+Cn^{k-3}+\cdots\cdots}{n^k+an^{k-1}+bn^{k-2}+cn^{k-3}+\cdots\cdots}$，$k$ 爲正整數，指明設 $A-a-1$ 爲正，則級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 爲收斂級數，設 $A-a-1$ 爲負或零則爲發散級數.

# 第二十二章

## 不定係數法

309. 初級代數 § 230 內，曾証明設任一 $x$ 之有理整函數於 $x=a$ 時爲零，則此函數可爲 $x-a$ 除盡．［又見 § 514，推論］

使 $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n$

爲當 $x$ 等於每一不等量

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots a_n.$$

爲零之 $x$ 之 $n$ 次有理整函數．

表此函數以 $f(x)$；於是因 $f(x)$ 能爲 $x-a$ 除盡，得

$$f(x)=(x-a_1)(p_0x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots),$$

此商爲 $n-1$ 次．

同理因 $f(x)$ 能爲 $x-a_2$ 除盡，得

$$p_0x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots=(x-a_2)(p_0x^{n-2}+\cdots\cdots),$$

此商爲 $n-2$ 次；又

$$p_0x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots=(x-a_3)(p_0x^{n-3}+\cdots\cdots),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

如是進行，於 $n$ 除法後，結果得

$$f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots(x-a_n).$$

310. 設一 $n$ 次有理整函數因其變量 $n$ 以上之值爲零，則其變

量各乘羃之係數必爲零.

使此函數表以 $f(x)$，於是

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n.$$

又假定 $f(x)$ 當 $x$ 等於各不等值 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots a_n$ 時爲零；於是

$$f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots(x-a_n).$$

使 $c$ 爲 $x$ 使 $f(x)$ 爲零之另一值；於是因 $f(c)=0$，得

$$p_0(c-a_1)(c-a_2)(c-a_3)\cdots\cdots(c-a_n)=0.$$

因由假設 $p_0$ 外之因子無一爲零，故 $p_0=0$. 由是 $f(x)$ 變爲

$$p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots\cdots+p_n$$

由假設，此式可由 $x$ 之 $n$ 個以上之值而爲零，故 $p_1=0$，同法可證 $p_2,p_3,\cdots\cdots p_n$ 各係數必等於零.

此結果亦可說明如下：

設某 $n$ 次有理整函數因其變量有 $n$ 以上之值爲零，則其必因變量之任何值爲零.

推論. 設函數 $f(x)$ 因 $x$ $n$ 以上之值而爲零，則方程式 $f(x)=0$，有 $n$ 以上之根.

故又設一 $n$ 次方程式有 $n$ 以上之根，則此方程式爲恆等式.

例. 求證

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$$

此爲二次方程式，且顯然爲 $a,b,c$ 各值所適合；故此爲恆等式.

311. 設二 $n$ 次有理整函數因其變量 $n$ 以上之值相等，則因其變量之任何值相等.

設二函數

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n,$$

$$q_1x^n+q_1x^{n-1}+q_2x^{n-2}+\cdots\cdots q_n.$$

因 $x$ $n$ 以上之值相等；則

$$(p_0-q_0)x^n+(p_1-q_1)x^{n-1}-(p_2-q_2)x^{n-2}+\cdots\cdots+(p_n-q_n)$$

因 $x^n$ 以上之值爲零；由是，由前節，

$$p_0-q_0=0,\ p_1-q_1=0,\ p_2-q_2=0,\cdots\cdots\cdots p_n-q_n=0;$$

即，　$p_0=q_0,\ p_1=q_1\ p_2=q_2,\cdots\cdots\cdots p_n=q_n.$

故此二式恆等，且由是因變量之任何值相等．故

設二有理整函數恆等，則可相等其變量同乘冪之係數．

此爲初級代數 § 227 內假定之原則．

推論．設函數中一之次數低於他函數，此命題依然適用．例如，設

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots\cdots\cdots+p_n$$
$$=q_2x^{n-2}+q_3x^{n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+q_n,$$

僅假定以上研究內 $q_0=0, q_1=0$，於是得

$$p_0=0\quad p_1=0,\ p_2=q_2,\ p_3=q_3,\cdots\cdots\cdots p_n=q_n.$$

312．前節定理常被指爲不定係數法之原則．此原則之應用於下例內說明．

例 1．求級數

$$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n+1)\text{ 之和．}$$

假定

$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots+n(n+1)=A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4+\cdots\cdots\cdots$ $A,B,C,D,E$，爲不含 $n$ 之量，其值爲待決定者．

變 $n$ 爲 $n+1$；於是

$$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots+n(n+1)+(n+1)(n+2)$$
$$=A+B(n+1)+C(n+1)^2+D(n+1)^3+E(n+1)^4+\cdots\cdots$$

由減法，

$(n+1)(n+2)=B+C(2n+1)+D(3n^2+3n+1)+E(4x^3+6n^2+4n+1)+\cdots\cdots\cdots$

此方程式於 $n$ 之所有整數值爲眞，其兩邊 $n$ 同乘冪之係數相等；故 $E$ 及其後所有之係數必等於零，及

$$3D=1;\ 3D+2C=3;\ D+C+B=2;$$

由是　$D=\frac{1}{3}$，　$C=1$，　$B=\frac{2}{3}$.

故其和 $=A+\frac{2n}{3}+n^2+\frac{1}{3}n^3$.

求 $A$，使 $n=1$；於是此級數變爲其首項，及

$$2=A+2，\text{或}\ A=0.$$

故 $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

註. 由此例知，當第 $n$ 項爲 $n$ 之有理整函數時，則爲其和假定一較其第 $n$ 項高一次之有理整函數卽可足用.

例 2. 求 $x^3+px^2+qx+r$ 可爲 $x^2+ax+b$ 除盡之條件.

假定 $x^3+px^2+qx+r=(x+k)(x^2+ax+b)$.

相等 $x$ 同乘羃之係數，得

$$k+a=p, ak+b=q, kb=r.$$

由末方程式 $k=\frac{r}{b}$；故由減法得

$$\frac{r}{b}+a=p，\text{及}\ \frac{ar}{b}+b=q;$$

卽 $r=b(p-a)$，及 $ar=b(q-b)$；

此爲所求之條件.

## 習 題 XXII. a.

用不定係數法求以下各級數之和.

1. $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots\cdots$ 至 $n$ 項.
2. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots$ 至 $n$ 項.
3. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+4.5^2+\cdots\cdots$ 至 $n$ 項.
4. $1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots\cdots$ 至 $n$ 項.
5. $1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots\cdots$ 至 $n$ 項.
6. 求 $x^3-3px+2q$ 可爲形如 $x^2+2ax+a^2$ 之因子除盡之條件
7. 求 $ax^3+bx^2+cx+d$ 爲完全立方之條件.
8. 求 $a^2x^4+bx^3+cx^2+dx+f^2$ 爲完全平方之條件.
9. 設 $b^2=ac, d^2=af, e^2=cf$ 求証 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$ 爲完全平方.

10. 設 $ax^3+bx^2+cx+d$ 能爲 $x^2+h^2$ 除盡，求證 $ad=bc$.

11. 設 $x^5-5qx+4r$ 能爲 $(x-c)^2$ 除盡，指明 $q^5=r^4$.

12. 証恒等式

(1) $$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

(2) $$\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)}$$
$$+\frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1.$$

13. 求 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ 爲形如

$$px+qy+r,\quad p'x+q'y+r'$$

二因子之積之條件.

14. 設 $\xi=lx+my+nz, \eta=nx+ly+mz$, $\zeta=mx+ny+lz$, 又設當 $\xi,\eta,\zeta$ 易以 $x,y,z$ 時，此方程式於 $x,y,z$ 之一切值皆真，求証
$$l^2+2mn=1,\quad m^2+2ln=0,\quad n^2+2lm=0.$$

15. 求証 $n$ 量 $a,a^2,a^3,\cdots\cdots a^n$ 中 $n-r$ 相乘之積之和爲
$$\frac{(a^{r+1}-1)(a^{r+2}-1)\cdots\cdots(a^n-1)}{(a-1)(a^2-1)\cdots\cdots(a^{n-r}-1)}a^{\frac{1}{2}(n-r)(n-r+1)}.$$

313. 設有無窮級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$，因其變量 $x$ 之任何有限值爲零，因之爲收斂級數，則其各項係數必恒等於零.

使此級數表以 $S$，又以 $S_1$ 表 $a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots\cdots$於是 $S=a_0+xS_1$，且由是，由假設 $a_0+xS_1=0$ 因 $x$ 之所有有限值. 但因 $S$ 爲收斂級數，$S_1$ 不能大過某有限值， 故由取充分之小量爲 $x$，可使 $xS_1$ 小至所適意之程度. 於此情形下，$S$ 之極限爲 $a_0$; 但 $S$ 永遠爲零，故 $a_0$ 必恒等於零.

取消 $a_0$ 項，得 $xS_1=0$ 因 $x$ 之一切有限值. 即 $x$ 之所有有限值皆能使 $a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots\cdots\cdots$等於零.

同法，陸續證明係數 $a_1,a_2,a_3\cdots\cdots$中之每係數恆等於零.

314. 設二無窮級數，因其變數之任何有限值互等，因之二者皆爲收斂級數，設二級數內同乘冪之係數相等.

使此級數表以

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

及 $$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots\cdots\cdots$$

於是

$$a_0-A_0+(a_1-A_1)x+(a_2-A_2)x^2+(a_3-A_3)x^3+\cdots\cdots\cdots$$

可因 $x$ 於指定極限內之所有值爲零；因是由上節

$$a_0-A_0=0,\ a_1-A_1=0,\ a_2-A_2=0,\ a_3-A_3=0,\cdots\cdots$$

即 $$a_0=A_0,\ a_1=A_1,\ a_2=A_2,\ a_3=A_3,\cdots\cdots$$

此證明本命題.

例 1. 展開 $\dfrac{2+x^2}{1+x-x^2}$ 爲 $x$ 升冪之級數至含 $x^5$ 之項.

使 $$\frac{2+x^2}{1+x-x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

$a_0, a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots$爲被定值之常量；於是

$$2+x^2=(1+x-x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots)$$

於此方程式內可相等兩邊同乘冪之係數. 右邊 $x^n$ 之係數爲 $a_n+a_{n-1}-a_{n-2}$，因 $x^2$ 爲左方 $x$ 之最高次冪，於 $n>2$ 之所有值得

$$a_n+a_{n-1}-a_{n-2}=0$$

此於已求得首三係數後足以陸續求其後之係數. 決定諸係數得方程式

$$a_0=2,\ a_1+a_0=0,\ a_2+a_1-a_0=1;$$

由是 $$a_0=2,\ a_1=-2,\ a_2=5.$$

又 $$a_3+a_2-a_1=0,\ \text{由是}\ a_3=-7;$$

$$a_4+a_3-a_2=0,\ \text{由是}\ a_4=12;$$

及 $$a_5+a_4-a_3=0,\ \text{由是}\ a_5=-19;$$

故 $$\frac{2+x^2}{1+x-x^2}=2-2x+5x^2-7x^3+12x^4-19x^5+\cdots$$

例 2．求証設 $n$ 及 $r$ 爲正整數則

$$n^r-n(n-1)^r+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n-2)^r-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}(n-3)^r+\cdots$$

等於 0，設 $r$ 小於 $n$；又等於 $\underline{|n}$，設 $r=n$.

已知 $$(e^x-1)^n=\left(x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\right)^n$$

$=x^n+$ 含 $x$ 較高次冪之項……………………(1).

又由二項式定理.

$$(e^x-1)^n=e^{nx}-ne^{(n-1)x}+\frac{n(n-1)}{1.2}e^{(n-2)x}-\cdots\cdots\cdots(2)$$

由展開 $e^{nx}$, $e^{(n-1)x}$, ……各項，得 (2) 內 $x^r$ 之係數爲

$$\frac{n^r}{\underline{|r}}-n\cdot\frac{(n-1)^r}{\underline{|r}}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{(n-2)^r}{\underline{|r}}-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot\frac{(n-3)^r}{\underline{|r}}+\cdots\cdots$$

又由相等 (1),(2) $x^r$ 之係數卽得所求之結果.

例 3. 設 $y=ax+bx^2+cx^3+\cdots\cdots$

以 $y$ 之升冪表 $x$ 至含 $y^3$ 之項.

假定 $x=py+qy^2+ry^3+\cdots\cdots$

且代入已知級數；由是

$y=a(py+qy^2+ry^3+\cdots)+b(py+qy^2+\cdots)^2+c(py+qy^2+\cdots)^3+\cdots$相等 $y$ 同乘冪之係數，得

$$ap=1；\text{由是 } p=\frac{1}{a}.$$

$$aq+bp^2=0；\text{由是 } q=-\frac{b}{a^3}.$$

$$ar+2bpq+cp^3=0；\text{由是 } r=\frac{2b^2}{a^5}-\frac{c}{a^4}.$$

故 $$x=\frac{y}{a}-\frac{by^2}{a^3}+\frac{(2b^2-ac)y^3}{a^5}+\cdots\cdots$$

此爲級數之還原易元之一例.

推論. 設 $y$ 之級數之形式爲

$y=k+ax+bx^2+cx^3+\cdots\cdots$

使 $y-k=z$;

於是 $z=ax+bx^2+cx^3+\cdots\cdots$

由是 $x$ 可展開依 $z$，卽 $y-k$ 之升冪展開之.

## 習 題 XXII.b.

依 $x$ 升羃展開下式至含 $x^3$ 之項.

1. $\dfrac{1+2x}{1-x-x^2}$.　　2. $\dfrac{1-8x}{1-x-6x^2}$.　　3. $\dfrac{1+x}{2+x+x^2}$.

4. $\dfrac{3+x}{2-x-x^2}$.　　5. $\dfrac{1}{1+ax-ax^2-x^3}$.

6. 求 $a$ 及 $b$，由是 $\dfrac{a+bx}{(1-x)^2}$ 之展開式之第 $n$ 項可爲 $(3n-2)x^{n-1}$.

7. 求 $a,b,c$ 由是 $\dfrac{a+bx+cx^2}{(1-x)^3}$ 之展開式內 $x^n$ 之係數爲 $n^2+1$.

8. 設 $y^3+2y=x(y+1)$，指明 $y$ 之一值爲

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{128}x^4+\cdots\cdots\cdots$$

9. 設 $cx^3+ax-y=0$，指明 $x$ 之一值爲

$$\frac{y}{a}-\frac{cy^3}{a^4}+\frac{3c^2y^5}{a^7}-\frac{12c^3y^7}{a^{10}}\cdots\cdots\cdots$$

由是指明 $x=.00999999$ 爲方程式 $x^3+100x-1=0$ 之近似解答. 指出至若干小數位，此結果始爲正確.

10. 設 $(1+x)(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\cdots\cdots\cdots$ 之展開式內因子之數爲無限，且 $a<1$，指明 $x^3$ 之係數爲

$$\frac{1}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)\cdots\cdots(1-a^r)}a^{\frac{1}{2}r(r-1)}.$$

11. 設 $a<1$，求

$$\frac{1}{(1-ax)(1-a^2x)(1-a^3x)\cdots\cdots\text{至無窮}}.$$

之展開式內 $x^n$之係數.

12. 設 $n$ 爲正整數指出

(1) $n^{n+1}-n(n-1)^{n+1}+\dfrac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n-2)^{n+1}-\cdots\cdots=\frac{1}{2}n\,\underline{|n+1}$;

(2) $n^n-(n+1)(n-1)^n+\dfrac{(n+1)n}{\underline{|2}}(n-2)^n-\cdots\cdots=1$;

此級數於各情形內展至 $n$ 項；又

(3) $1^n-n2^n+\dfrac{n(n-1)}{1.2}3^n-\cdots\cdots=(-1)^n\,\underline{|n}$;

(4) $(n+p)^n-n(n+p-1)^n+\dfrac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n+p-2)^n-\cdots\cdots=\underline{|n}$;

此級數於後二情形內展至 $n+1$ 項.

# 第二十三章

## 部分分數

315. 初等代數內,以加號及減號連合之若干分數,可由合爲一以已知分數之最低公分母爲分母之分數化之爲較簡之形式. 此分數之分母爲但析一分數爲若干較簡分數或部分分數之相反方法亦時常需要;例如設欲展 $\frac{3-5x}{1-4x+3x^2}$ 爲 $x$ 升冪之級數,可用§314例1之方法,求得任意若干項. 但欲求此級數之通項,則此法不可用,而以表已知分數以等值形式 $\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1-3x}$ 爲較簡. $(1-x)^{-1}$ 及 $(1-3x)^{-1}$ 每式可由二項式定理展開,而通項由是可得.

316. 本章將舉數例以說明析一有理分數析爲部分分數之方法. 關於此問題更詳細討論,讀者可參考 *Serret* 氏之 *Cours d'Algèbre Superieure*,或積分學. 其中証明任一有理分數可析爲一串之部分分數,及相當其分母之任一一次因子 $x-a$,有一形如 $\frac{A}{x-a}$ 之部分分數;相當於分母中兩見之任一一次因子 $x-b$ 有二部分分數 $\frac{B_1}{x-b}$ 及 $\frac{B_2}{(x-b)^2}$. 設 $x-b$ 見三次則又添一部分分數 $\frac{B_3}{(x-b)^3}$;類推. 相當任一二次因子 $x^2+px+q$ 有一形爲 $\frac{Px+Q}{x^2+px+q}$ 之部分分數;設因子 $x^2+px+q$ 見兩次,則有一第二部分分數 $\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^2}$;類推.

於此 $A_1, B_1, B_2, B_3, \cdots\cdots P, Q, P_1, Q_1$ 諸量皆不含 $x$.

茲用此結果於以下諸例內.

例 1. 析 $\dfrac{5x-11}{2x^2+x-6}$ 爲部分分數.

因分母 $2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$，假定

$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-3},$$

$A$ 及 $B$ 爲不含 $x$ 之量，其值爲待決定者.

消去分母，

$$5x-11=A(2x-3)+B(x+2).$$

因此爲恆異，可相等 $x$ 同乘羃之係數；由是

$$2A+B=5,\ -3A+2B=-11;$$

故　　$A=3,\quad B=-1.$

$$\therefore \frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{3}{x+2}-\frac{1}{2x-3}.$$

例 2. 析 $\dfrac{mx+n}{(x-a)(x+b)}$ 爲部分分數.

假定　$$\frac{mx+n}{(x-a)(x+b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+b}$$

$$\therefore mx+n=A(x+b)+B(x-a)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

茲可相等係數以求 $A, B$ 之值，但照下法進行較爲簡單.

因 $A$ 及 $B$ 不含 $x$，故可與 $x$ 以任意之值.

使 (1) 內 $x-a=0$，或 $x=a$；於是

$$A=\frac{ma+n}{a+b};$$

使 $x+b=0$，或 $x=-b$，$B=\dfrac{mb-n}{a+b}$.

$$\therefore \frac{mx+n}{(x-a)(x+b)}=\frac{1}{a+b}\left(\frac{ma+n}{x-a}+\frac{mb-n}{x+b}\right).$$

例 3. 析 $\dfrac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}$ 爲部分分數.

假定 $$\frac{23x-11x^2}{(2x-1)(3+x)(3-x)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{3+x}+\frac{C}{3-x}\cdots\cdots(1);$$

$\therefore\ 23x-11x^2=A(3+x)(3-x)+B(2x-1)(3-x)+C(2x-1)(3+x).$

由繼續使 $2x-1=0$, $3+x=0$, $3-x=0$, 得

$A=1$, $B=4$, $C=-1$.

$$\therefore\ \frac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}=\frac{1}{2x-1}+\frac{4}{3+x}-\frac{1}{3-x}.$$

例 4. 析 $\dfrac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}$ 爲部分分數.

假定 $$\frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2};$$

$\therefore\ 3x^2+x-2=A(x-2)^2+B(1-2x)(x-2)+C(1-2x).$

使 $1-2x=0$, 於是 $A=-\frac{1}{3}$;

使 $x-2=0$, 於是 $C=-4$.

求 $B$, 相等 $x^2$ 之係數; 得

$3=A-2B$; 由是 $B=-\frac{5}{3}$.

$$\therefore\ \frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=-\frac{1}{3(1-2x)}-\frac{5}{3(x-2)}-\frac{4}{(x-2)^2}.$$

例 5. 析 $\dfrac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}$ 爲部分分數.

假定 $$\frac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-4};$$

$\therefore\ 42-19x=(Ax+B)(x-4)+C(x^2+1).$

使 $x=4$, 於是 $C=-2$;

相等 $x^2$ 之係數, $0=A+C$, $A=2$;

相等絕對項 $42=-4B+C$, $B=-11$,

$$\therefore\ \frac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}=\frac{2x-11}{x^2+1}-\frac{2}{x-4}.$$

317. 下例所用方法有時甚爲有用.

例．析 $\dfrac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}$ 爲部分分數．

假定 $\dfrac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{f(x)}{(x-2)^4}$，

$A$ 爲某常量，$f(x)$ 爲其值待定之 $x$ 之函數．

$$\therefore\quad 9x^3-24x^2+48x=A(x-2)^4+(x+1)f(x).$$

使 $x=-1$，於是　　　$A=-1$．

代 $A$ 且移項，

$$(x+1)f(x)=(x-2)^4+9x^3-24x^2+48x=x^4+x^3+16x+16;$$

$$\therefore\quad f(x)=x^3+16.$$

求相當 $\dfrac{x^3+16}{(x-2)^4}$ 之部分分數，使 $x-2=z$；

於是

$$\frac{x^3+16}{(x-2)^4}=\frac{(z+2)^3+16}{z^4}=\frac{z^3+6z^2+12z+24}{z^4}$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{6}{z^2}+\frac{12}{z^3}+\frac{24}{z^4}$$

$$=\frac{1}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)^3}+\frac{24}{(x-2)^4}.$$

$$\therefore\quad \frac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)^3}+\frac{24}{(x-2)^4}.$$

318.　所有以前諸例，其分子之次數皆低於分母，如非此種情形，可以分母除分子，迄除式之次數低於分母止．

例．析 $\dfrac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}$ 爲部分分數．

由除法

$$\frac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}=2x+3+\frac{8x-4}{3x^2-2x-1}.$$

$$\frac{8x-4}{3x^2-2x-1}=\frac{5}{3x+1}+\frac{1}{x-1};$$

$$\therefore\quad \frac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}=2x+3+\frac{5}{3x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

319.　茲指明如何用部分分數法以簡易一有理分數依 $x$ 升羃之展開．

例 1. 求 $\dfrac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}$ 展開爲 $x$ 升冪級數 時之通項.

由 § 316 例 4，得

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=-\frac{1}{3(1-2x)}-\frac{5}{3(x-2)}-\frac{4}{(x-2)^2}$$

$$=-\frac{1}{3(1-2x)}+\frac{5}{3(2-x)}-\frac{4}{(x-2)^2}$$

$$=-\frac{1}{3}(1-2x)^{-1}+\frac{5}{6}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}-\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$$

故此展開式之通項爲

$$\left(-\frac{2^r}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^r}-\frac{r+1}{2^r}\right)x^r.$$

例 2. 依 $x$ 之升冪展開 $\dfrac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}$，且求其通項.

假定 $\dfrac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}=\dfrac{A}{1+x}+\dfrac{Bx+C}{1+x^2}$；

$\therefore\ 7+x=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+x)$.

使 $1+x=0$，　　於是 $A=3$；

相等絕對項 $7=A+C$，　由是 $C=4$；

相等 $x^2$ 之係數 $0=A+B$，　由是 $B=-3$.

$$\therefore\frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{3}{1+x}+\frac{4-3x}{1+x^2}$$

$$=3(1+x)^{-1}+(4-3x)(1+x^2)^{-1}$$

$$=3\{1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^p x^p+\cdots\}$$

$$+(4-3x)\{1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^p x^{2p}+\cdots\}.$$

求 $x^r$ 之係數:

(1)　設 $r$ 爲偶數則第二級數內 $x^r$ 之係數爲 $4(-1)^{\frac{r}{2}}$；故此展開式內 $x^r$ 之係數爲 $3+4(-1)^{\frac{r}{2}}$.

(2)　設 $r$ 爲奇數，則第二級數內 $x^r$ 之係數爲 $-3(-1)^{\frac{r-1}{2}}$；而所求係數爲 $3(-1)^{\frac{r+1}{2}}-3$.

## 習　題 XXIII.

解爲部分分數:

1. $\dfrac{7x-1}{1-5x+6x^2}$.　　2. $\dfrac{46+13x}{12x^2-11x-5}$.　　3. $\dfrac{1+3x+2x^2}{(1-2x)(1-x^2)}$

4. $\dfrac{x^2-10x+13}{(x-1)(x^2-5x+6)}$. 5 $\dfrac{2x^3+x^2-x-3}{x(x-1)(2x+3)}$.

6. $\dfrac{9}{(x-1)(x+2)^2}$. 7. $\dfrac{x^4-3x^3-3x^2+10}{(x+1)^2(x-3)}$.

8. $\dfrac{26x^2+208x}{(x^2+1)(x+5)}$. 9. $\dfrac{2x^2-11x+5}{(x-3)(x^2+2x-5)}$.

10. $\dfrac{3x^2-8x+10}{(x-1)^4}$. 11. $\dfrac{5x^3+6x^2+5x}{(x^2-1)(x+1)^3}$.

求以下各式，當依 $x$ 升羃展開時之通項.

12. $\dfrac{1+3x}{1+11x+28x^2}$. 13. $\dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)}$. 14. $\dfrac{x^2+7x+3}{x^2+7x+10}$.

15. $\dfrac{2x-4}{(1-x^2)(1-2x)}$. 16. $\dfrac{4+3x+2x^2}{(1-x)(1+x-2x^2)}$

17. $\dfrac{3+2x-x^2}{(1+x)(1-4x)^2}$. 18. $\dfrac{4+7x}{(2+3x)(1+x)^2}$.

19. $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$. 20. $\dfrac{1-x+2x^2}{(1-x)^3}$.

21. $\dfrac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$. 22. $\dfrac{3-2x^2}{(2-3x+x^2)^2}$.

23. 求以下各級數 $n$ 項之和

(1) $\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)}+\dfrac{x}{(1+x^2)(1+x^3)}+\dfrac{x^2}{(1+x^3)(1+x^4)}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{x(1-ax)}{(1+x)(1+ax)(1+a^2x)}+\dfrac{ax(1-a^2x)}{(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)}+\cdots$

24. 求以下各無窮級數當 $x<1$ 時之和.

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)}+\frac{x^2}{(1-x^3)(1-x^5)}+\frac{x^4}{(1-x^5)(1-x^7)}+\cdots\cdots$$

25. 求級數 $n$ 項之和，設其第 $p$ 項爲

$$\frac{x^p(1+x^{p+1})}{(1-x^p)(1-x^{p+1})(1-x^{p+2})}.$$

26. 求證 $a,b,c$ 三字母及其乘羃所成 $n$ 次齊次積之和爲

$$\frac{a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$

# 第二十四章

## 循環級數

320. 級數 $u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots$,
其內由某項及於其後項等於其前定數若干項分乘以確定常量之積之和．名爲循環級數．

321. 級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

內，第二項後每項等於其前兩項分乘以常量 $2x$ 及 $-x^2$ 之積之和；$2x$ 及 $-x^2$ 稱爲常量，因其不論 $n$ 爲何值永遠相同也，如

$$5x^4=2x.4x^3+(-x^2).3x^2;$$

即 $\quad u_4=2xu_3-x^2u_2;$

一般當 $n$ 大於 1 時，每項與其前二項關係，表以方程式

$$u_n=2xu_{n-1}-x^2u_{n-2},$$

或 $\quad u_n-2xu_{n-1}+x^2u_{n-2}=0.$

此方程式內 $u_n$, $u_{n-1}$ 及 $u_{n-2}$ 之係數同其適當之符號，稱成所謂關係式．

故級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots\cdots\cdots$$

爲循環級數，其關係式爲

$$1-2x+x^2.$$

322. 設循環級數之關係式已知，當已知任一項前足用之數項時，則可求得該項．

不論關係含式若干項共法與前同，下之說明卽可足用。

設　　$1-px-qx^2-ax^3$

爲級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots$$

之關係式，則

$$a_nx^n=px\,.\,a_{n-1}x^{n-1}+qx^2\,.\,a_{n-2}x^{n-2}+rx^3\,.\,a_{n-3}x^{n-3}.$$

或　　$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}.$

故當已知任一數係前數項之係數時，則該係數卽可求得.

323. 反之，設已知某級數足用之數項，則其關係式亦可以求得.

例. 求循環級數 $2+5x+13x^2+35x^3+\cdots\cdots$之關係式.

使其關係式爲 $1-px-qx^2$；於是求 $p$ 及 $q$，得方程式 $13-5p-2q=0$，及 $35-13p-5q=0$，由是 $p=5$，$q=-6$，故其關係式爲

$$1-5x+6x^2.$$

324. 設關係式含三項，則有二常量 $p$ 及 $q$，故必需二方程式以定 $p$ 及 $q$. 求第一至少須知級數之三項，求第二須再多知一項，故求含二常量之關係式，至少須已知級數之四項.

設關係式爲 $1-px-qx^2-rx^3$，求三常量，必須三方程式. 得第一方程式至少須知級數之 4項，求其他二式，必須再多知兩項；故求含三常數之關係式，至少須知級數之六項.

一般言之，求含 $m$ 常量之關係式，至少須知 $2m$ 連續項.

反之，設已知 $2m$ 連續項，則可假定其關係式爲

$$1-p_1x-p_2x^2-p_3x^3-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots-p_mx^m.$$

325. 求循環級數 $n$ 項之和.

無論其關係式爲何，其求和之法皆同；爲簡便計，假定其關係式含二常量.

使此級數爲

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots \qquad (1)$$

又使其和爲 $S$；其關係式爲 $1-px-qx^2$；由是於大於 1 之 $n$ 之各值得

$$a_n-pa_{n-1}-qa_{n-2}=0.$$

今 $S=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1},$

$-px\,S=-pa_0x-pa_1x^2-\cdots-pa_{n-2}x^{n-1}-pa_{n-1}x^n,$

$-qx^2\,S=-qa_0x^2-\cdots-qa_{n-3}x^{n-1}-qa_{n-2}x^n-qa_{n-1}x^{n+1},$

$\therefore (1-px-qx^2)S=a_0+(a_1-pa_0)x-(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n-qa_{n-1}x^{n+1},$

因 $x$ 之其他乘羃之係數因關係式 $a_n-pa_{n-1}-qa_{n-2}=0$ 而爲零.

$$\therefore S=\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}-\frac{(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+qa_{n-1}x^{n+1}}{1-px-qx^2}$$

故循環之和爲其分母爲關係式之一分數.

326. 設上節結果內之第二分數，當 $n$ 無限增大時而無限減小，則其無窮項之和變爲$\dfrac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}$.

設照 § 314 所示，依 $x$ 升羃展開此分數．則得原級數之任意若干項；因之，稱

$$\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}$$

爲此級數之母函數.

327. 由 § 325 之結果得

$$\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

$$+\frac{(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+qa_{n-1}x^{n+1}}{1-px-qx^2};$$

由是可知雖用母函數

$$\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}$$

可求得級數之任意若干項，但僅當 $n$ 無限增大時餘式

$$\frac{(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+qa_{n-1}x^{n+1}}{1-px-qx^2}$$

能化爲零適可視此母函數爲無窮級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 之真等值.

328. 當母函數能表以部分分數時，此循環級數之通項甚易求得；如設此母函數能表以部分分數

$$\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1+bx}+\frac{C}{(1-cx)^2}.$$

則其通項爲

$$\{Aa^r+(-1)^rBb^r+(r+1)Cc^r\}x^r.$$

於此情形下，可不用 § 325 方法，以求得 $n$ 項之和.

例. 求循環級數

$$1-7x-x^2-43x^3-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之母函數，通項，及 $n$ 項之和.

使其關係式爲 $1-px-qx^2$；於是

$$-1+7p-q=0,\quad -43+p+7q=0;$$

由是得 $p=1$，$q=6$；及其關係式爲

$$1-x-6x^2.$$

使 $S$ 表此級數之和；於是

$$\begin{aligned} S&=1-7x-x^2-43x^3-\cdots\cdots\\ -xS&=-x+7x^2+x^3+\cdots\cdots\\ -6x^2S&=-6x^2+42x^3+\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\therefore\ (1-x-6x^2)\ S=1-8x,$$

$$S=\frac{1-8x}{1-x-6x^2};$$

此爲其母函數.

設析 $\dfrac{1-8x}{1-x-6x^2}$為部分分數，則得$\dfrac{2}{1+2x}-\dfrac{1}{1-3x}$；由是其第 $r+1$ 項或通項為

$$\{(-1)^r 2^{r+1}-3^r\}x^r.$$

使 $r=0,1,2,\cdots\cdots n-1,$

其 $n$ 項和

$$=\{2-2^2x+2^3x^2-\cdots+(-1)^{n-1}2^n x^{n-1}\}-(1+3x+3^2x^2+\cdots\cdots+3^{n-1}x^{n-1})$$

$$=\frac{2+(-1)^{n-1}2^{n+1}x^n}{1+2x}-\frac{1-3^n x^n}{1-3x}.$$

329. 求循環級數 $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$之通項及 $n$ 項和，可僅求級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$之通項及 $n$ 項，再使結果內之 $x=1$.

例. 求級數

$$1+6+24+84+\cdots\cdots$$

之通項及 $n$ 項和.

級數 $1+6x+24x^2+84x^3+\cdots\cdots$之關係式為 $1-5x+6x^2$，其母函數為 $\dfrac{1+x}{1-5x+6x^2}$.

此式等值於部分分數

$$\frac{4}{1-3x}-\frac{3}{1-2x}.$$

設依 $x$ 升冪展開此式，則其通項為

$$(4.3^r-3.2^r)x^r.$$

故已知級數之通項為 $4.3^r-3.2^r$；其 $n$ 項和為

$$2(3^n-1)-3(2^n-1).$$

330. 須提示學生，前節內之母函數，捨 $x$ 有使此級數為收斂級數之值外，不能取為級數

$$1+6x+24x^2+84x^3+\cdots\cdots$$

之和. 故當 $x=1$ 時（此時此級數斷然為發散級數），其母函數非此級數之真等值. 但 $1+6+24+84+\cdots\cdots$之通項不含 $x$，且不論 $x$ 為何值永為 $1+6x+24x^2+84x^3+\cdots\cdots$內 $x^n$ 之係數.

故如收斂級數處理之，以常法求其通項，再使 $x=1$

## 習 題 XXIV.

求以下級數之母函數及通項:

1. $1+5x+9x^2+13x^3+\cdots\cdots$ 2. $2-x+5x^2-7x^3+\cdots\cdots$

3. $2+3x+5x^2+9x^3+\cdots\cdots$ 4. $7-6x+9x^2+27x^4+\cdots$

5. $3+6x+14x^2+36x^3+98x^4+276x^5+\cdots\cdots$

求以下級數之第 $n$ 項，及 $n$ 項和:

6. $2+5+13+35+\cdots\cdots$ 7. $-1+6x^2+30x^3+\cdots\cdots$

8. $2+7x+25x^2+91x^3+\cdots\cdots$

9. $1+2x+6x^2+20x^3+66x^4+212x^5+\cdots\cdots$

10. $-\frac{3}{2}+2+0+8+\cdots\cdots$

11. 指明以下級數爲循環級數，且求其關係式。

$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2$,

$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+n^3$,

12. 指出如何從循環級數

$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$

無窮項之和推出首 $n$ 項之和.

13. 求級數

$$3-1+13-9+41-53+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$2n+1$ 項之和.

14. 循環級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots$$

之關係式爲 $1+px+qx^2$，及 $1+rx+sx^2$；指明通項爲 $(a_n+b_n)x^n$ 之級數爲循環級數，其關係式爲

$$1+(p+r)x+(q+s+pr)x^2+(qr+ps)x^3+qsx^4.$$

15. 設作成一級數，以已知級數之 $n$ 項和．爲其第 $n$ 項爲指明其亦爲一循環級數，其關係式之項數較已知級數之項數多一.

# 第二十五章

## 輾轉分式

331. 形如 $a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cdots\cdots\cdots\cdots}}$ 之式稱爲輾轉分式；字母 $a$, $b$, $c$…………可表任何量，但今僅討論較簡式 $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots\cdots\cdots}}$, $a,b,c,\cdots$ 爲正整量. 此常寫爲較簡形式

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

332. 當 $a_1, a_2, a_3,$ ………… 諸商之數爲有限時，此輾轉分式稱爲有限輾轉分式；設諸商之數爲無限則稱爲無窮輾轉分式.

任何有盡分式能由最下層陸續化簡，變之爲通常分數.

333. 變已知分數爲輾轉分式.

使 $\frac{m}{n}$ 爲已之分數；除 $m$ 以 $n$，使 $a_1$ 爲其商，$p$ 爲餘數；由是

$$\frac{m}{n}=a_1+\frac{p}{n}=a_1+\cfrac{1}{\cfrac{n}{p}}\ ;$$

除 $n$ 以 $p$，使 $a_2$ 爲其商，$q$ 爲其除數；由是

$$\frac{n}{p}=a_2+\frac{q}{p}=a_2+\frac{1}{\frac{p}{q}}$$

除 $p$ 以 $q$，使 $a_3$ 爲其商，$r$ 爲其除數；類推．由是

$$\frac{m}{n}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}=a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

設 $m$ 小於 $n$，則第一商爲零，使

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n}{m}}$$

再如前進行．

上法與求 $m$ 及 $n$ 之最大公約數之法相同；故設 $m$ 及 $n$ 爲可約量，則最後必有除盡之一步，此演算亦於是終止，故任一分子分母爲正整數之分數，皆能化爲有終輾轉分式．

例．變 $\frac{251}{802}$ 爲輾轉分式．

用常法求 251 及 802 之最大公約數，

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 251 | 802 | 3 |
| 6 | 6 | 49 | 8 |
| | | 1 | |

其陸續商爲 3,5,8,6；故

$$\frac{251}{802}=\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{6}.$$

334．輾轉分式於第一，二，三，……次商停止所得諸分數稱爲第一，二，三，……次之收歛值，因將於 § 339 內指示，每陸續收歛值皆較其前諸收歛值近於此輾轉分式眞值．

335. 指明輾轉分式諸收斂值更迭小於或大於此連續分數.

使此輾轉分式爲 $a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots$

其第一次收斂值爲 $a_1$，但過小，因$\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$之部分被略去* 二次收斂值爲 $a_1+\frac{1}{a_2}$，此過大，因分母 $a_2$ 過小．三次收斂值爲 $a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3}$，此過小，因 $a_2+\frac{1}{a_3}$過大，類推.

當已知分數爲眞分數時 $a_1=0$；設於此情形下；則可視零爲其第一次收斂，以上結果可述之如下：

奇次收斂值皆小於其輾轉分式，偶次收斂值皆大於其輾轉分式，

336. 求陸續收斂值之法則.

使此輾轉分式表以

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

則其首三收斂值爲

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_1a_2+1}{a_2},\ \frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_3.a_2+1};$$

由是可見其第三收斂值之分子之作成爲乘第二收斂值之分子，以第三商再加第一次收斂值之分子；分母亦可由同法作成.

假使諸陸續收斂值爲由同法構成；使諸分子表以 $p_1, p_2, p_3,\cdots\cdots$，諸分母表以 $q_1, q_2, q_3,\cdots\cdots\cdots$

假定此構成法則適用於 $n$ 次收斂值，則設

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},\ q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}.$$

其第 $n+1$ 次收斂值與第 $n$ 次收斂值之別，僅為以商 $a_n+\frac{1}{a_{n+1}}$ 易 $a_n$；故其 $n+1$ 次收斂值

$$=\frac{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1}+p_{n-2}}{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{a_{n+1}(a_np_{n-1}+p_{n-2})+p_{n-1}}{a_{n+1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1}}$$

$$=\frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}，\text{由假設.}$$

由是設使

$$p_{n+1}=a_{n+1}p_n+p_{n-1},\quad q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1},$$

則知第 $n+1$ 次收斂之分子及分母亦合於假定適於求第 $n$ 次收斂值之法則．但此法則能用於三次，亦能用於四次，依此類推；故可用於無限．

337．$a_n$ 宜稱為 $n$ 次部分商，其全商為 $a_n+\frac{1}{a_{n+1}+}\frac{1}{a_{n+2}+}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$此後在任何情況下，皆以 $k$ 表全商．

因知

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}；$$

使此連續分式表以 $x$；於是 $x$ 與 $\frac{p_n}{q_n}$ 之別，僅為以完全商 $k$ 代以部分商 $a_n$；由是

$$x=\frac{kp_{n-1}+p_{n-2}}{kq_{n-1}+q_{n-2}}$$

338．設 $\frac{p_n}{q_n}$ 為一連續分式之第 $n$ 次收斂值，則

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

使此連續分式表以

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots；$$

於是

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-1}-p_{n-1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})$$
$$=(-1)(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})$$
$$=(-1)^2(p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2}),$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=(-1)^{n-2}(p_2q_1-p_1q_2).$$

但 $p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1.a_2=1=(-1)^2$;

故 $$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

當輾轉分數小於 1 時，設使 $a_1=0$，此結果依然適用，其第一次收歛值爲零.

註. 當計算陸續收歛值之數值時，以上定理可爲其精確程度之核驗.

**推論 1.** 每收歛值皆爲最簡分數；因設 $p_n$ 及 $q_n$ 有公約數，則其必除盡 $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$，或 1；此爲不可能.

**推論 2.** 二連續收歛值之差爲以分子爲一之分數；因

$$\frac{p_n}{q_n}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_nq_{n-1}\sim p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}}=\frac{1}{q_nq_{n-1}}.$$

## 習 題 XXV.a.

計算以下之陸續收歛值：

1. $2+\frac{1}{6+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{11+}\ \frac{1}{2}.$

2. $\frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{6}.$

3. $3+\frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{9}.$

表以下諸量以連續分數，且求其四次收歛值.

4. $\frac{253}{179}$.　　5. $\frac{832}{159}$.　　6. $\frac{1189}{3927}$.　　7. $\frac{729}{2318}$.

8. $.37$.　　9. $1.139$.　　10. $.3029$.　　11. $4.31\dot{6}$.

12. 1 公尺為 39.37079 吋，試用連續分式原理指出 32 公尺略等於 35 碼.

13. 求收斂為 .24226 之一串分數，.24226 為真正太陽年超過 365 日之日數.

14. 1 基羅米突甚近於 .62138 哩；指明分數 $\frac{5}{8}$，$\frac{18}{29}$，$\frac{23}{37}$，$\frac{64}{103}$ 為 1 基羅米突與 1 哩之比之連續漸近值.

15. 等長二尺各分為 162 及 209 等分，設重合二尺之零點. 指一尺第 31 分點近於與他尺之第 40 分點重合.

16. 設變 $\frac{n^4+n^2-1}{n^3+n^2+n+1}$ 為連續分式，指出其商互為 $n-1$ 及 $n+1$. 且求其連續收斂值.

17. 指明

(1) $\frac{p_{n+1}-p_{n-1}}{q_{n+1}-q_{n-1}}=\frac{p_n}{q_n}$,

(2) $\left(\frac{p_{n+2}}{p_n}-1\right)\left(1-\frac{p_{n-1}}{p_{n+1}}\right)=\left(\frac{q_{n+2}}{q_n}-1\right)=\left(1-\frac{q_{n-1}}{q_{n+1}}\right)$.

18. 設 $\frac{p_n}{q_n}$ 為某連續分式之 $n$ 次收斂值，$a_n$ 為其相當商，指明

$p_{n+2}q_{n-2}\sim p_{n-2}q_{n+2}=a_{n+2}.a_{n+1}.a_n+a_{n+2}+a_n$.

339. 每收斂值皆較其前任何收斂值近於此連續分式.

使 $x$ 表此連續分式，及 $\frac{p_n}{q_n}$，$\frac{p_{n-1}}{q_{n+1}}$，$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ 為三連續收斂值；則 $x$ 與 $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ 之不同，僅為取第 $n+2$ 次全商，代 $a_{n+2}$；表之以 $k$；由是

$$x=\frac{kp_{n+1}+p_n}{kq_{n+1}+q_n};$$

$$\therefore\ x\sim\frac{p_n}{q_n}=\frac{k(p_{n+1}q_n\sim p_nq_{n+1})}{q_n(kq_{n+1}+q_n)}=\frac{k}{q_n(kq_{n+1}+q_n)},$$

and $$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\sim x=\frac{p_{n+1}q_n\sim p_nq_{n+1}}{q_{n+1}(kq_{n+1}+q_n)}=\frac{1}{q_{n+1}(kq_{n+1}+q_n)}.$$

茲 $k$ 大於 1，$q_n$ 小於 $q_{n+1}$；故於二計算皆 $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 及 $x$ 之差小於 $\frac{p_n}{q_n}$ 及 $x$ 之差；卽每收歛較其前一收歛近於此輾轉分式，由是較其前之任一收歛近於此輾轉分式.

合本節與 §335 之結果．知

奇次收歛值陸續增大，但永小於此輾轉分式.

偶次收歛陸續減小，但永大於此輾轉分式.

340．求取輾轉分式之任何收歛值時所成誤差之極限．使 $\frac{p_n}{q_n}$，$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$，$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ 爲三連續收歛值，$k$ 表第 $n+2$ 次全商；

於是 $$x=\frac{kp_{n+1}+p_n}{kq_{n+1}+q_n},$$

$$\therefore x\sim\frac{p_n}{q_n}=\frac{k}{q_n(kq_{n+1}+q_n)}=\frac{1}{q_n\left(q_{n+1}+\frac{q_n}{k}\right)}.$$

今 $k>1$，故 $x$ 及 $\frac{p_n}{q_n}$ 之差小於 $\frac{1}{q_nq_{n+1}}$，而大於 $\frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)}$.

又因 $q_{n+1}>q_n$，故以 $\frac{p_n}{q_n}$ 代 $x$ 所成之誤差小於 $\frac{1}{q_n^2}$ 而大於 $\frac{1}{2q^2_{n+1}}$.

341．由上節知以 $\frac{p_n}{q_n}$ 代此輾轉分式所成之誤差小於 $\frac{1}{q_nq_{n+1}}$ 或 $\frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n+q_{n-1})}$；卽小於 $\frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$；故 $a_{n+1}$ 愈大，$\frac{p_n}{q_n}$ 愈近於此輾轉分式.

因是，任一大商之前一收歛爲較近於此連續分數.

又，因此誤差小於$\frac{1}{q_n^2}$，故欲求與連續分數之差小於已知值$\frac{1}{a}$之收歛值，僅計算連續收歛值至$\frac{p_n}{q_n}$已足，其 $q_n^2$ 大於 $a$.

342. 連續分數之性質，能使吾人求出二小整數，其比甚近於二不可約量之比，或近於二量之比，此二量之精確比值能用大整數適能表示.

例. 求漸近 3.14159 之連續分數.

於求 14159 及 100000 之最大公約數時，其連續商爲 7，15，1，25，1，7，4. 由是

$$3.14159=3+\frac{1}{7+}\ \frac{1}{15+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{25+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{7+}\ \frac{1}{4}.$$

其連續收歛値爲

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

最大商 25 前之最後收歛値爲最近値，其誤差小於$\frac{1}{25\times(113)^2}$，因是小於$\frac{1}{25\times(100)^2}$或 .000004.

343. 任何收歛値，皆較任何其他分母小，此收歛値之分母之分數，近於此連續分數.

使 $x$ 爲此連續分數，$\frac{p_n}{q_n}$，$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$爲二連續收歛値. $\frac{r}{s}$ 爲一分數，其分母 $s$ 小於 $q_n$.

設其可能，使$\frac{r}{s}$較$\frac{p_n}{q_n}$近於 $x$，於是$\frac{r}{s}$必較$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$近於 $x$ [§ 339]；且因 $x$ 在 $\frac{p_n}{q_n}$及$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$，故$\frac{r}{s}$必在$\frac{p_n}{q_n}$與$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$之間.

故

$$\frac{r}{s} \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p_n}{q_n} \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}，\text{即} < \frac{1}{q_n q_{n-1}}；$$

$$\therefore\ rq_{n-1} \sim sp_{n-1} < \frac{s}{q_n}；$$

即整數小於分數；此爲不可能．故 $\frac{p_n}{q_n}$ 必較 $\frac{r}{s}$ 近於此輾轉分式．

344．設 $\frac{p}{q}$，$\frac{p'}{q'}$ 爲輾轉分式 $x$ 二連續收斂値，則 $\frac{pp'}{qq'}$ 之大於或小於 $x^2$，全視 $\frac{p}{q}$ 之大於或小於 $\frac{p'}{q'}$．

使 $k$ 爲相當 $\frac{p'}{q'}$ 後第一收斂値之全商；於是

$$x=\frac{kp'+p}{kq'+q},$$

$$\therefore \frac{pp'}{qq'}-x^2=\frac{1}{qq'(kq'+q)^2}\{pp'(kq'+q)^2-qq'(kp'+p)^2\}$$

$$=\frac{(k^2p'q'-pq)(pq'-p'q)}{qq'(kq'+q)^2}$$

因 $p'>p$ $q'>q$，及 $k>1$，故因子 $k^2p'q'-pq$ 爲正，故 $\frac{pp'}{qq'}$ $>$ 或 $<$ $x^2$ 全視 $pq'-p'q$ 之爲正或負；即依照 $\frac{p}{q}$ $>$ 或 $<$ $\frac{p'}{q'}$

推論．由以上研究知諸式 $pq'-p'q$，$pp'-qq'x^2$，$p^2-q^2x^2$，$q'^2x^2-p'^2$ 同號．

## 習　題　XXV.b.

1．已知一(米突)公尺等於 1.0936 碼，求以 $\frac{222}{203}$ 碼爲一公尺時所生之誤差之極限．

2. 求 $1+\frac{1}{3+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{7+}\ \frac{1}{9+}\ \frac{1}{11+}\cdots\cdots$

較眞值小 .0001 之近似值.

3. 用聯轉分式理論指出 $\frac{99}{70}$ 與 1.41421 之差小於 $\frac{1}{11830}$.

4. 表 $\frac{a^3+6a^2+13a+10}{a^4+6a^3+14a^2+15a+7}$ 以聯轉分式，且求其第三次收斂值.

5. 指出第一次及第 $n$ 次收斂值之差之絕對值等於

$$\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\frac{1}{q_3q_4}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}.$$

6. 設 $a_n$ 爲相當 $\frac{p_n}{q_n}$ 之商，指明

(1) $\frac{p_n}{p_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\ \frac{1}{a_{n-2}+}\ \frac{1}{a_{n-3}+}\cdots\frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_1}$,

(2) $\frac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\ \frac{1}{a_{n-2}+}\ \frac{1}{a_{n-3}+}\cdots\frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_2}$.

7. 於聯轉分式 $\frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\cdots\cdots$ 內，指出

(1) $p_n^2+p_{n+1}^2=p_{n-1}p_{n+1}+p_np_{n+2}$,

(2) $p_n=q_{n-1}$,

8. 設 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲聯轉分式 $\frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\cdots\cdots$，之第 $n$ 次收斂值. 指明 $q_{2n}=p_{2n+1}$, $q_{2n+1}=\frac{a}{b}p_{2n}$.

9. 於聯轉分式

$$\frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\cdots\cdots$$

內指明

$$p_{n+2}-(ab+2)p_n+p_{n-2}=0.\quad q_{n+2}-(ab+2)q_n+q_{n-2}=0.$$

10．指明

$$a\left(x_1+\frac{1}{ax_2+}\frac{1}{x_3+}\frac{1}{x_4+}\cdots\cdots\cdots\text{至 }2n\text{商}\right)$$

$$=ax_1+\frac{1}{x_2+}\frac{1}{ax_3+}\frac{1}{x_4+}\cdots\cdots\cdots\text{至 }2n\text{商}.$$

11．設 $\frac{M}{N}$，$\frac{P}{Q}$，$\frac{R}{S}$ 爲連轉分式

$\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}$，……，$\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}$，……，$\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}$

$\frac{1}{a_5+}$……………，之第 $n$ 次；$(n-1)$ 次，$(n-2)$次收斂値，指明

$$M=a_2P+R,\quad N=(a_1a_2+1)P+a_1R.$$

12．設 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲 $\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}$ …………… 之 $n$ 次收斂値．指明 $p_n$ 及 $q_n$ 爲

$$\frac{x}{1-ax-x^2}\text{ 及 }\frac{ax+x^2}{1-ax-x^2}$$

之展開式內 $x^n$ 之係數．且由是指明 $p_n=q_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$，式內 $\alpha$ 及 $\beta$ 爲 $t^2-at-1=0$ 方程式之根．

13．設 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲 $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}$ ……………之 $n$ 次收斂値，指出 $p_n$ 及 $q_n$ 各爲

$$\frac{x+bx^2-x^3}{1-(ab+2)x^2+x^4}\text{及}\frac{ax+(ab+1)x^2-x^4}{1-(ab+2)x^2+x^4}$$

之展開式內 $x^n$ 之係數．由是指明

$$ap_{2n}=bq_{2n-1}=ab\,\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},$$

$$p_{2n+1}=q_{2n}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}-(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta}$$

式內 $\alpha$，$\beta$ 爲由方程式 $1-(ab+2)x^2+x^4=0$ 求得之 $x^2$ 之値．

# 第二十六章

## 一次無定方程式

345. 第十章內已指示如何求數字係數無定方程式之正整數解答；茲利用榧轉分式之性質以求一次無定方程式之一般解答.

346. 任何含二未知量 $x$ 及 $y$ 之一次方程式可變形爲 $ax\pm by=\pm c$，式內 $a$，$b$，$c$，爲正整數. 此方程式可有無數解答；但設此問題之條件爲求 $x$ 及 $y$ 爲正整數. 則其解答之數可爲有限.

方程式 $ax+by=-c$ 顯然無正整數解答；又方程式 $ax-by=-c$ 同於 $by-ax=c$；故考究方程式 $ax\pm by=c$ 已足.

設 $a$ 及 $b$ 有不能除之公因子 $m$，則二方程式 $ax\pm by=c$ 皆不能被適合於 $x$ 及 $y$ 之整數值；因 $ax\pm by$ 能以 $m$ 除盡，而 $c$ 則不能也.

設 $a$，$b$，$c$ 有公因子，則可用除法消去，而視爲無公因子，且 $a$ 及 $b$ 互爲質數.

347. 求方程式 $ax-by=c$ 之一般正整數解答.

使 $\frac{a}{b}$ 變爲榧轉分式，又使 $\frac{p}{q}$ 表 $\frac{a}{b}$ 前一收歛值；於是 $aq-bp=\pm1$.
[§338]

*I*. 設 $aq-bp=1$，則已知方程式可寫爲

$$ax-by=c(aq-bp);$$

$$\therefore\ a(x-cq)=b(y-cp).$$

茲因 $a$ 及 $b$ 無公因子，故 $x-cq$ 必能被 $b$ 除盡；$x-cq=bt$. $t$ 爲整數.

$$\therefore\quad \frac{x-cq}{b}=t=\frac{y-cp}{a};$$

卽　　$x=bt+cq$，$y=at+cp$；

由使 $t$ 爲任何正整值，或絕對值小於 $\frac{cq}{b}$，$\frac{cp}{a}$ 二量中較小者之任何負整值，可由是求得正整數之解答；$t$ 亦可爲零；故解答之數爲無限.

*II*. 設 $aq-bp=-1$，得

$$ax-by=-c(aq-bp);$$

$$\therefore\ a(x+cq)=b(y+cp);$$

$$\therefore\ \frac{x+cq}{b}=\frac{y+cp}{a}=t,\ \text{一整數};$$

故　　$x=bt-cq$，$y=at-cp$；

由使 $t$ 爲大於 $\frac{cq}{b}$，$\frac{cp}{a}$ 二量中較大者之值，可由之求得正整數之解答；故解答之數爲無限.

Ⅲ. 設 $a$ 或 $b$ 爲 1，分數 $\frac{a}{b}$ 不能變爲以 1 爲分子之輾轉分式則此研究失效. 但於此種情下，其解答可由觀察寫出；如，設 $b$ 爲 1，此方程式變爲 $ax-y=c$；由是 $y=ax-c$，而解答可由使 $x$ 爲任何大於 $\frac{c}{a}$ 之正整值得之.

註. 可見 $x$，$y$ 之值串成公差爲 $b$ 及 $a$ 之二等差級數.

例．求 $29x-42y=5$ 之一般正整數解答．

於變 $\frac{42}{29}$ 爲輾轉分式內 $\frac{42}{29}$ 前之最近收斂值爲 $\frac{13}{9}$；

由是

$$29\times 13-42\times 9=-1;$$

$$\therefore 29\times 65-42\times 45=-5;$$

合此與已知方程式，得

$$29(x+65)=42(y+45);$$

$$\therefore \frac{x+65}{42}=\frac{y+45}{29}=t,\text{整數}.$$

故其一般解答爲

$$x=42t-65,\quad y=29t-45.$$

348．已知方程式 $ax-by=c$ 之一正整數解答，求其一般解答．

使 $h,k$ 爲 $ax-by=c$ 之一解答；則 $ah-bk=c$．

$$\therefore ax-by=ah-bk;$$

$$\therefore a(x-h)=b(y-k);$$

$$\therefore \frac{x-h}{b}=\frac{y-k}{a}=t,\ \text{整數};$$

$$\therefore x=h+bt,\quad y=k+at;$$

此爲一般之解答．

349．求方程式 $ax+by=c$ 之一般正整數解答．

使 $\frac{a}{b}$ 變爲輾轉分式，$\frac{p}{q}$ 爲 $\frac{a}{b}$ 前最近之收斂值；於是 $aq-bp=\pm 1$

I．設 $aq-bp=1$，則

$$ax+by=c(aq-bp);$$

$$\therefore a(cq-x)=b(y+cp);$$

$$\therefore \frac{cq-x}{b}=\frac{y+cp}{a}=t,\ \text{整數};$$

$$\therefore x=cq-bt,\quad y=at-cp;$$

由使 $t$ 爲大於 $\frac{cp}{a}$ 而小於 $\frac{cq}{b}$ 之正整值，可由是求得正整數之解答．故解答之數爲有限．又設無整數能滿足此條件，則爲無解答．

ii．設 $aq-bp=-1$，則

$$ax+by=-c(aq-bp);$$

$$\therefore\ a(x+cq)=b(cp-y);$$

$$\therefore\ \frac{x+cq}{b}=\frac{cp-y}{a}=t.\ \text{整數};$$

$$\therefore\ x=bt-cq,\quad y=cp-at;$$

由使 $t$ 爲大於 $\frac{cq}{b}$ 而小於 $\frac{cp}{a}$ 之正整值，可由是求得正整數之解答．同前，此解答之數爲有限，亦可無解答．

iii．設 $a$ 或 $b$ 等於 1，則此解答可如 §347 由觀察法求得之．

350．已知方程式 $ax+by=c$ 之一正整數解答，求其一般解答．

使 $h,k$ 爲 $ax+by=c$ 之一解；於是 $ah+bk=c$，

$$\therefore\ ax+by=ah+bk;$$

$$\therefore\ a(x-h)=b(k-y);$$

$$\therefore\ \frac{x-h}{b}=\frac{k-y}{a}=t,\quad \text{整數};$$

$$\therefore\ x=h+bt,\quad y=k-at;$$

此爲其一般解答．

351．求方程式 $ax+by=c$ 正整數解答之數．

使 $\frac{a}{b}$ 變爲漸轉分式，且使 $\frac{p}{q}$ 爲 $\frac{a}{b}$ 前最近之收斂值；於是 $aq-bp=\pm1$.

$I$. 使 $aq-bp=1$；則一般解答爲

$$x=cq-bt,\quad y=at-cp. \qquad [\S 349]$$

由是 $t$ 爲不大於 $\frac{cq}{b}$，及不小於 $\frac{cp}{a}$ 之正整數值. 可由是求得其正整數之解答.

$(i)$ 設 $\frac{c}{a}$ 及 $\frac{c}{b}$ 非整數.

使 $\frac{cp}{a}=m+f$，$\frac{cq}{b}=n+g$，

式內 $m,n$ 爲正整數，$f,g$ 爲真分數；於是 $t$ 能有之最小值爲 $m+1$. 最大值爲 $n$；故解答之數爲

$$n-m=\frac{cq}{b}-\frac{cp}{a}+f-g=\frac{c}{ab}+f-g.$$

茲爲一整數，視 $f$ 之大於或小於 $g$ 可寫之爲 $\frac{c}{ab}$ +一分數或 $\frac{c}{ab}$ ——分數. 由是解答之數爲近於 $\frac{c}{ab}$ 之整數，其爲較大或較小，全視 $f$ 或 $g$ 之爲較大而定.

$(ii)$. 設 $\frac{c}{b}$ 爲整數.

於此情形內 $g=0$，$x$ 之一值爲零. 設含此，則解答之數爲 $\frac{c}{ab}+f$，此必爲整數. 故解答之數全視含此零之解答而爲 $\frac{c}{ab}+1$ 或 $\frac{c}{ab}$ 內之最大整數

$(iii)$ 設 $\frac{c}{a}$ 爲整數.

於此情形下 $f=0$，$y$ 之一值爲零. 設含此，則 $t$ 之最小值爲 $m$，最大值爲 $n$；故解答之數爲 $n-m+1$ 或 $\frac{c}{ab}-g+1$. 由是解答之數視

解答之數視含此零之解答與否，爲 $\frac{c}{ab}+1$ 或 $\frac{c}{ab}$ 內之最大整數.

(iv) 設 $\frac{c}{a}$ 及 $\frac{c}{b}$ 皆爲整數，

於此情形下 $f=0$，$g=0$，$x$，$y$ 皆有一零之解答. 設含此. 則 $t$ 能有之最小值爲 $m$，最大值爲 $n$；故解答之數爲 $n-m+1$ 或 $\frac{c}{ab}+1$. 設零值除外，則解答之數爲 $\frac{c}{ab}-1$.

II. 設 $aq-bp=-1$，則一般解答爲

$$x=bt-cq;\quad y=cp-at,$$

其相似結果卽可求得.

352. 求方程式 $ax+by+cz=d$ 之正整數解答，可進行如下：

由移項 $ax+by=d-cz$；由陸續使 $z$ 爲 $0,1,2,3,\cdots\cdots\cdots$ 之值，得形如 $ax+by=c'$ 之方程式，此可如已示方法解之.

353. 設有二聯立方程式

$$ax+by+cz=d,\quad a'x+b'y+c'z=d',$$

由消去一未知數，如 $z$，得形爲 $Ax+By=C$ 之方程式. 設 $x=f$，$y=g$ 爲一解，則其一般解答可寫爲

$x=f+Bs$，$y=g-As$. $s$ 爲一整數.

代此 $x,y$ 之值入任一已知方程式，得形爲 $Fs+Gz=H$ 之方程式，其一般解答設爲

$$s=h+Gt,\quad z=k-Ft.$$

代 $z$ 得，$x=f+Bh+BGt$，$y=g-Ah-AGt$.

$x,y,z$ 之值可由使 $t$ 爲適當之值以求得之.

354．設二方程式

$$ax+by+cz=d,\ a'x+b'y+c'z=d'$$

之正整數解答之一能以求得，則其一般解答可求之如下：

使 $f, g, h$ 爲此特殊解答；則

$$af+bg+ch=d,\ a'f+b'g+c'h=d'.$$

由減法

$$a(x-f)+b(y-g)+c(z-h)=0,$$
$$a'(x-f)+b'(y-g)+c'(z-h)=0;$$

由是 $$\frac{x-f}{bc'-b'c}=\frac{y-g}{ca'-c'a}=\frac{z-h}{ab'-a'b}=\frac{t}{k},$$

式內 $t$ 爲整數，$k$ 爲分母 $bc'-b'c$，$ca'-c'a$，$ab'-a'b$ 之 H.C.F.

故其一般解答爲

$$x=f+(bc'-b'c)\frac{t}{k},\ y=g+(ca'-c'a)\frac{t}{k},\ z=h+(ab'-a'b)\frac{t}{k}.$$

## 習　題 XXVI.

求以下方程式之一般解答及最小正整數解答：

1．$775x-711y=1$，　2．$455x-519y=1$．　3．$436x-393y=5$，

4．以福勞音 *florins* 及半克郎 *half-crowns* 償 £ 1．19s．6d 能有幾種償法？

5．求 $11x+15y=1031$ 之正整數解答之數．

6．求分母爲 7 與 9，和爲 $1\frac{10}{63}$ 之二分數．

7．求差爲 $\frac{1}{24}$ 之二真分數，已知其最簡式之分母爲 12 及 8．

8．某款含 $x$ 磅 $y$ 先令，而爲 $y$ 磅 $x$ 先令之半；求此款，

求正整數解答：

9．$\left.\begin{aligned}6x+7y+4z&=122\\ 11x+8y-6z&=145\end{aligned}\right\}$　　10．$\left.\begin{aligned}12x-11y+4z&=22\\ -4x+5y+z&=17\end{aligned}\right\}.$

11. $\left.\begin{aligned}20x-21y&=38\\3y+4z&=34\end{aligned}\right\}$.

12. $\left.\begin{aligned}13x+11z&=103\\7z-5y&=4\end{aligned}\right\}$.

13. $7x+4y+19z=84$.

14. $23x+17y+11z=130$.

15. 求除以 5,7,8，餘 3,2,5，之所有正整數之一般形式.

16. 求除以 3,7,11，餘 1,6,5，之二最小整數.

17. 某七進三位數，以九進位表之，亦爲此三數字，但反其順序. 設每情形之中間數字爲零，求此數十進位之值.

18. 設 6,$a$,$b$ 成調和級數，求所有 $a$,$b$ 之可能值.

19. 分等長二杆爲 250 及 243 等分，設重合其兩端，求相距最近之分點.

20. 三鈴同時開始振動，且各鈴振動之間隔爲 23,29,34. 又第二，第三鈴振動之時間，較第一鈴各長 39 及 40 秒；設其皆於 20 分鐘內停止，求每鈴振動之次數.

21. 求使方程式 $7x+9y=c$ 洽有六正整數解答之 $c$ 之最大值.

22. 求使方程式 $14x+11y=c$ 洽有五正整數解答之 $c$ 之最大值.

23. 求使方程式 $19x+14y=c$ 爲零外，可有六解答 $c$ 所必處其間之二極限.

24. 指明爲使設零之解答除外方程式 $ax+by=c$ 可洽有 $n$ 正整數解答，證明 $c$ 之最大值爲 $(n+1)ab-a-b$，其最小值爲

$$(n-1)ab+a+b.$$

# 第二十七章

## 循環輾轉分式

355. 於二十五章內，知有理商之有限輾轉分式，可變爲整數分子分母之通常分式，故不能等於不盡根；但茲證明一二次不盡根能表以循環商之無窮輾轉分式．今先考究數字例題．

例．表 $\sqrt{19}$ 爲一輾轉分式，並求漸近其值之分數串．

$$\sqrt{19}=4+(\sqrt{19}-4)=4+\frac{3}{\sqrt{19}+4};$$

$$\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-2}{3}=2+\frac{5}{\sqrt{19}+2};$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-3}{5}=1+\frac{2}{\sqrt{19}+3};$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{19}-3}{2}=3+\frac{5}{\sqrt{19}+3};$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-2}{5}=1+\frac{3}{\sqrt{19}+2};$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-4}{3}=2+\frac{1}{\sqrt{19}+4};$$

$$\sqrt{19}+4=8+(\sqrt{19}-4)=8+\cdots\cdots$$

在此商之後 2，1，3，1，2，8 循環；故

$$\sqrt{19}=4+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{8+}\cdots\cdots$$

注意商於至二倍首商之商後開始循環．於 § 361 將証其永遠如此．

[註. 以各行施算之方法皆同. 例如, 第二行: 先求 $\frac{\sqrt{19}+4}{3}$ 內之最大整數; 卽2, 及其餘數爲 $\frac{\sqrt{19}+4}{3}-2$, 卽 $\frac{\sqrt{19}-2}{3}$. 於是乘分子分母以 $\sqrt{19}-2$ 之共軛式, 由是反轉其結果 $\frac{5}{\sqrt{19}+2}$ 後, 又起始一有理分母之新行.]

如 § 336 內所示構成之首七收歛值爲

$$\frac{4}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{48}{11},\ \frac{61}{14},\ \frac{170}{39},\ \frac{1421}{326}.$$

取最末者所生之誤差小於 $\frac{1}{(326)^2}$. 由是小於 $\frac{1}{(320)^2}$ 或 $\frac{1}{102400}$ 及小於 .00001. 故第七次收歛值至少與四小數位之值.

356. 每循環輾轉分式皆等於有理係數二次方程式之一根.

使 $x$ 表此輾轉分數, $y$ 爲其循環部分, 並設

$$x=a+\frac{1}{b+}\ \frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{h+}\ \frac{1}{k+}\ \frac{1}{y},$$

及 $$y=m+\frac{1}{n+}\cdots\cdots\frac{1}{u+}\ \frac{1}{v+}\ \frac{1}{y},$$

式內 $a, b, c, \cdots\cdots h, k, m, n, \cdots\cdots u, v$ 爲正整數.

使 $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ 爲相當商 $h, k$ 對 $x$ 之收歛值; 於是因 $y$ 爲全商, 得 $x=\frac{p'y+p}{q'y+q}$; 由是 $y=\frac{p-qx}{q'x-p'}$.

使 $\frac{r}{s}$, $\frac{r'}{s'}$ 爲相當 $u$, $v$ 二對商 $y$ 之收歛值; 於是

$$y=\frac{r'y+r}{s'y+s}.$$

代 $y$ 以 $x$ 之式且化簡, 得一有理係數之二次方程式.

求 $y$ 值之方程式 $s'y^2+(s-r')y-r=0$，有異號之二實根；

設以 $y$ 之正數值代入 $x=\dfrac{p'y+p}{q'y+q}$ 內，有理化其分母，則 $x$ 之值之形式為 $\dfrac{A+\sqrt{B}}{C}$，$A,B,C$ 為整數，因 $y$ 之值為實數，故 $B$ 為正數.

例．以不盡根表 $1\dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{3+}\ \dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{3+}\cdots\cdots$

使 $x$ 為此輾轉分式之值；於是 $x-1=\dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{3+(x-1)}$；由是 $2x^2+2x-7=0$.

此輾轉分式等於此方程式之正根，因之等於 $\dfrac{\sqrt{15}-1}{2}$.

## 習　題 XXVII.a.

表以下不盡根以輾轉分式，並求其第六次收斂值：

1. $\sqrt{3}$.　2. $\sqrt{5}$.　3. $\sqrt{6}$.　4. $\sqrt{8}$.

5. $\sqrt{11}$.　6. $\sqrt{13}$.　7. $\sqrt{14}$.　8. $\sqrt{22}$.

9. $2\sqrt{3}$.　10. $4\sqrt{2}$.　11. $3\sqrt{5}$.　12. $4\sqrt{10}$.

13. $\dfrac{1}{\sqrt{21}}$.　14. $\dfrac{1}{\sqrt{33}}$.　15. $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$.　16. $\sqrt{\dfrac{7}{11}}$.

17. 求以 $\dfrac{268}{65}$ 為 $\sqrt{17}$ 時誤差之極限.

18. 求以 $\dfrac{916}{191}$ 為 $\sqrt{23}$ 時誤差之極限.

19. 求 $\sqrt{101}$ 之一次收斂值至五位小數.

20. 求 $\sqrt{15}$ 之一次收斂值至五位小數.

以輾轉分式表以下各方程式之正根：

21. $x^2+2x-1=0$.　22. $x^2-4x-3=0$.　23. $7x^2-8x-3=0$.

24. 以輾轉分式表方程式 $x^2-5x+3=0$ 之各根.

求以下各輾轉分式之值：

25. 求 $3+\dfrac{1}{6+}\ \dfrac{1}{6+}\ \dfrac{1}{6+}\cdots\cdots$

26. 求 $\dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{3+}\ \dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{3+}\cdots\cdots$

27. 求 $3\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\cdots\cdots$

28. 求 $5+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{10+}\cdots\cdots$

29. 指明

$$3+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{6+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{6+}\cdots\cdots=3\left(1+\frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\cdots\cdots\right).$$

30. 求下二無窮輾轉分式之差.

$$\frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{5+}\cdots\cdots,\quad \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{5+}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$,

* 357. 變二次不盡根爲連續分式.

使 $N$ 爲非完全平方之正整數,又使 $a_1$ 爲 $\sqrt{N}$ 內所含之最大整數；於是

$$\sqrt{N}=a_1+(\sqrt{N}-a_1)=a_1+\frac{r_1}{\sqrt{N}+a_1}\text{，設 } r_1=N-a_1^2.$$

使 $b_1$ 爲 $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ 內所含之最大整數；於是

$$\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}=b_1+\frac{\sqrt{N}-b_1r_1+a_1}{r_1}=b_1+\frac{\sqrt{N}-a_2}{r_1}=b_1+\frac{r_2}{\sqrt{N}+a_2};$$

$$a_2=b_1r_1-a_1 \text{ 及 } r_1r_2=N-2_2^2.$$

同法 $\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}=b_2+\frac{\sqrt{N}-a_3}{r_2}=b_3+\frac{r_3}{\sqrt{N}+a_3}$；

$$a_3=b_2r_2-a_2 \text{ 及 } r_2r_3=N-a_3^2;$$

餘類推，通常

$$\frac{\sqrt{N}+a_{n-1}}{r_{n-1}}=b_{n-1}+\frac{\sqrt{N}-a_n}{r_{n-1}}=b_{n-1}+\frac{r_n}{\sqrt{N}+a_n};$$

$$a_n=b_{n-1}r_{n-1}-a_{n-1} \text{ 及 } r_{n-1}r_n=N-a_n^2.$$

$$\therefore\quad \sqrt{N}=a_1+\frac{1}{b_1+}\ \frac{1}{b_2+}\ \frac{1}{b_3+}\ \frac{1}{b_4+}\cdots\cdots;$$

故 $\sqrt{N}$ 能表以無窮輾轉分式.

茲証此種分式含循環部份；此部分顯然始於任一迭商首次重複時.

玆稱商串

$$\sqrt{N},\ \frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1},\ \frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2},\ \frac{\sqrt{N}+a_3}{r_3},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲第一，二，三，四，………… 次全商.

* 358. 由上節知 $a_1$，$r_1$，$b_1$，$b_2$，$b_3$，………… 諸量爲正整數；玆証 $a_2$，$a_3$，$a_4$，……… $r_2$，$r_3$，$r_4$，……… 諸量亦爲正整數.

使 $\frac{p}{q}$，$\frac{p'}{q'}$，$\frac{p''}{q''}$ 爲對 $\sqrt{N}$ 之連續收斂值. 又使 $\frac{p''}{q''}$ 爲相當部分商 $b_n$ 之收斂值.

此一步之全商爲 $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$；故

$$\sqrt{N}=\frac{\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}p'+p}{\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}q'+q}=\frac{p'\sqrt{N}+a_np'+r_np}{q'\sqrt{N}+a_nq'+r_nq},$$

消去分母，且相等其有理及無理部分，得

$$a_np'+r_np=Nq';\ a_nq'+r_nq=p';$$

由是 $a_n(pq'-p'q)=pp'-qq'N$，$r_n(pq'-p'q)=Nq'^2-p'^2$.

但 $pq'-p'q=\pm1$，及 $pq'-p'q$，$pp'-qq'N$，$Nq'^2-p'^2$ 同號. [§344]；故 $a_n$ 及 $r_n$ 爲正整數. 因有二收斂值在全商 $\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$ 之前，故此研究適用於 $n$ 大於 1 之所有值.

* 359. 求証全商及部分商循環.

§357 內已証 $r_n r_{n-1}=N-a_n^2$. 又 $r_n$ 及 $r_{n-1}$ 爲正整數；故 $a_n$ 必小於 $\sqrt{N}$，故 $a_n$ 不能大於 $a_1$，且不能有 1，2，3，………… $a_1$ 外之任何値；即不同値之數不能多於 $a_1$.

又 $a_{n+1}=r_nb_n-a_n$，即 $r_nb_n=a_n+a_{n+1}$，由是 $r_nb_n$ 不能大於 $2a_1$. 故 $r_n$ 不能有 1，2，3，………… $2a_1$以外之任何値；即 $r_n$ 不同値之數不能過 $2a_1$，

故全商 $\dfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ 不能有多於 $2a_1^2$ 之不同值；即某一全商，且由是所有以後諸全商必循環.

又 $b_n$ 爲 $\dfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ 內之最大整數；故部分商亦必循環 且每循環節內部分商之數不能過 $2a_1^2$.

*360. 求證 $a_1<a_n+r_n$.

則 $$a_{n-1}+a_n=b_{n-1}r_{n-1};$$

$$\therefore a_{n-1}+a_n=\text{或}>r_{n-1},$$

$$\therefore \sqrt{N}+a_n>r_{n-1}.$$

但 $$N-a_n^2=r_nr_{n-1};$$

$$\therefore \sqrt{N}+a_n<r_n;$$

$$\therefore a_1-a_n<r_n,$$

此証明本命題.

361. 指出循環節以第二部分商始以二倍第一部分商之部分商終.

因，如 § 359 所見，此循環必然發生，使第 $n+1$次全商於 $s+1$ 次循環；於是

$$a_s=a_n,\quad r_s=r_n,\quad \text{及}\ b_s=b_n;$$

則証明 $a_{s-1}=a_{n-1}$，$r_{s-1}=r_{n-1}$，$b_{s-1}=b_{n-1}$.

則有 $$r_{s-1}r_s=N-a_s^2=N-a_n^2=r_{n-1}r_n=r_{n-1}r_s;$$

$$\therefore r_{s-1}=r_{n-1}.$$

$$a_{n-1}+a_n=b_{n-1}r_{n-1},\quad a_{s-1}+a\ =b_{s-1}r_{s-1}=b_{s-1}r_{n-1};$$

$$\therefore a_{n-1}-a_{s-1}=r_{n-1}(b_{n-1}-b_{s-1});$$

$$\therefore \frac{a_{n-1}-a_{s-1}}{r_{n-1}}=b_{n-1}-b_{s-1}=0,\text{或整數}.$$

但，由 § 360，$a_1-a_{n-1}<r_{n-1}$，及 $a_1-a_{s-1}<r_{s-1}$；即 $a_1-a_{s-1}<r_{n-1}$；由是 $a_{n-1}-a_{s-1}<r_{n-1}$；故 $\frac{a_{n-1}-a_{s-1}}{r_{n-1}}$小於 1，故必為零.

故 $a_{s-1}=a_{n-1}$，又 $b_{s-1}=b_{n-1}$.

因之設第 $n+1$ 全商循環，則第 $n$ 全商亦必循環；類推.

此證明適用於 $n$ 不小於 2 之一切值，[ §358 ] 故完全商循環，始於第二商 $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$. 由是此循環以第二部分商 $b_1$ 始，玆指出其以部分商 $2a_1$ 終.

使$\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ 為第二完全商 $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ 當其循環時之前一全商；由是

$$a_n+a_1=r_nb_n,\ r_nr_1=N-a_1^2;$$

但 $N-a_1^2=r_1$；故 $r_n=1$.

又 $a_1-a_n<r_n$. 即 $<1$；故 $a_1-a_n=0$，即

$$a_n=a_1.$$

又 $a_n+a_1=r_nb_n=b_n$；故 $b_n=2a_1$；此指明本命題.

*362. 指明任一循環節內，末商除外，距首尾等距之部分商相等.

使最後全商表以 $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$；於是

$$r_n=1,\quad a_n=a_1,\quad b_n=2a_1.$$

証 $$r_{n-1}=r_1,\quad a_{n-1}=a_2,\quad b_{n-1}=b_1;$$

$$r_{n-2}=r_2,\quad a_{n-2}=a_3,\quad b_{n-2}=b_2;$$

..........................................................

則有$r_{n-1}=r_nr_{n-1}=N-a_n^2=N-a_1^2=r_1$.

又 $a_{n-1}+a_1=a_{n-1}+a_n=r_{n-1}b_{n-1}=r_1b_{n-1}$;

$$a_1+a_2=r_1b_1;$$

$$\therefore\quad a_2-a_{n-1}=r_1(b_1-b_{n-1});$$

$$\therefore\quad \frac{a_2-a_{n-1}}{r_1}=b_1-b_{n-1}=0,\text{或整數}.$$

但 $\frac{a_2-a_{n-1}}{r_1}<\frac{a_1-a_{n-1}}{r_1}$, 卽$<\frac{a_1-a_{n-1}}{r_{n-1}}$, 此爲小於 1 之值; 由是 $a_2-a_{n-1}=0$; 故 $a_{n-1}=a_2$, $b_{n-1}=b_1$;

同理 $r_{n-2}=r_2$, $a_{n-2}=a_3$, $b_{n-2}=b_2$; 類推.

*363. 由 §§ 361, 362 之結果知當二次不盡根 $\sqrt{N}$ 變爲櫬轉分式時, 必爲以下之形式

$$a_1+\frac{1}{b_1+}\,\frac{1}{b_2+}\,\frac{1}{b_3+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{b_3+}\,\frac{1}{b_2+}\,\frac{1}{b_1+}\,\frac{1}{2a_1+}\cdots\cdots\cdots$$

*364. 求循環節之倒第二收斂值.

使 $n$ 爲循環節內部分商之數; 於是諸循環節之倒第二收斂值爲第 $n$ 次, 第 $2n$ 次, 第 $3n$ 次, ………… 收斂值; 使此各表以

$$\frac{p_n}{q_n},\ \frac{p_{2n}}{q_{2n}},\ \frac{p_{3n}}{q_{3n}},\ \cdots\cdots\cdots$$

今 $\sqrt{N}=a_1+\frac{1}{b_1+}\,\frac{1}{b_2+}\,\frac{1}{b_3+}\cdots\cdots\frac{1}{b_{n-1}+}\,\frac{1}{2a_1+}\cdots\cdots\cdots$

由是相當 $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 之部分商爲 $2a_1$; 故

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{2a_1p_n+p_{n-1}}{2a_1q_n+q_{n-1}}$$

同時之完全商含有循環節

$$2a_1+\frac{1}{b_1+}\,\frac{1}{b_2+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{b_{n-1}+}\quad\cdots\cdots\cdots,$$

且由是等於 $a_1+\sqrt{N}$；故

$$\sqrt{N}=\frac{(a_1+\sqrt{N})p_n+p_{n-1}}{(a_1+\sqrt{N})q_n+q_{n-1}}$$

消分母．且相等有理及無理部分，得

$$a_1p_n+p_{n-1}=Nq_n,\ a_1q_n+q_{n-1}=p_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ 由取以爲等於 $a_1+\frac{p_n}{q_n}$ 之商

$$2a_1+\frac{1}{b_1+}\ \frac{1}{b_2+}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{b_{n-1}},$$

可從 $\frac{p_n}{q_n}$ 及 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 求得之；由是

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\frac{\left(a_1+\frac{p_n}{q_n}\right)p_n+p_{n-1}}{\left(a_1+\frac{p_n}{q_n}\right)q_n+q_{n-1}}=\frac{Nq_n+\frac{p_n}{q_n}\cdot p_n}{p_n+\frac{p_n}{q_n}\cdot q_n}\ \text{由 (1)};$$

$$\therefore\ \frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{p_n}{q_n}+\frac{Nq_n}{p_n}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

同法可証設 $\frac{p_{cn}}{q_{cn}}$ 爲第 $c$ 循環節內之倒第二收歛值，則

$$a_1p_{cn}+p_{cn-1}=Nq_{cn},\ a_1q_{cn}+q_{cn-1}=p_{cn}.$$

且由此方程式可陸續求得 $\frac{p_{3n}}{q_{3n}}$, $\frac{p_{4n}}{q_{4n}}$, ………

須注意方程式 (2)適用於一切 $n$ 之倍數，由是

$$\frac{p_{2cn}}{q_{2cn}}=\frac{1}{2}\left(\frac{p_{cn}}{q_{cn}}+\frac{Nq_{cn}}{p_{cn}}\right);$$

此証明與以上證明相似．

*365．§ 356 內已知一循環連續分式，能表之以有理係數二次方程式之根．

反之，可用§ 357 之方法證明形爲 $\frac{A+\sqrt{B}}{C}$ 之式，$A,B,C$ 爲正整數，$B$ 非完全平方，能變爲循環連續分式．於本情形下循環節不常以第二部分商始，最後部分商亦不盡二倍於第一部分商．

關於循環連續分式之更詳說明，讀者可參考 *Serret* 氏之 *Cours d'Algebra Superieure*，及 *Thomas Muir, M.A., F.R.S.E.* 之論文 *The Expression of Quadratic Surd as a Continued Fraction*.

## *習　題 XXVII.b

表以下不盡根以連續分式，並求其第四收斂值．

1. $\sqrt{a^2+1}$.　　2. $\sqrt{a^2-a}$.　　3. $\sqrt{a^2-1}$.

4. $\sqrt{1+\frac{1}{a}}$.　　5. $\sqrt{a^2+\frac{2a}{b}}$.　　6. $\sqrt{a^2-\frac{a}{n}}$.

7. 証明

$$\sqrt{9a^2+3}=3a+\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{6a+}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{6a+}\cdots\cdots,$$

又求其第五收斂值．

8. 指出

$$p+\frac{2}{1+}\,\frac{1}{p+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{p+}\,\frac{1}{1+}\cdots\cdots=\sqrt{p^2+4p}.$$

9. 指出

$$p\left(a_1+\frac{1}{pqa_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{pqa_4+}\cdots\cdots\right)=pa_1+\frac{1}{qa_2+}\,\frac{1}{pa_3+}\,\frac{1}{qa_4+}\cdots$$

10. 設 $\sqrt{a_2+1}$ 表以連續分式，指明

$2(a^2+1)q_n=p_{n-1}+p_{n+1}$，$2p_n=q_{n-1}+q_{n+1}$

11. 設

$$x=\frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\cdots,$$

$$y=\frac{1}{2a_1+}\,\frac{1}{2a_2+}\,\frac{1}{2a_1+}\,\frac{1}{2a_2+}\cdots,$$

$$z=\frac{1}{3a_1+}\,\frac{1}{3a_2+}\,\frac{1}{3a_1+}\,\frac{1}{3a_2+}\cdots,$$

指明 $x(y^2-z^2)+2y(z^2+x^2)+3z(x^2-y^2)=0$.

12. 求證

$$\left(a+\frac{1}{b+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{a+}\cdots\cdots\right)\left(\frac{1}{b+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{a+}\cdots\right)=\frac{a}{b}.$$

13. 設
$$x=a+\frac{1}{b+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{a+}\cdots,$$
$$y=b+\frac{1}{a+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{b+}\cdots,$$
指明
$$(ab^2+a+b)x=(a^2b+a+b)y=a^2-b^2$$

14. $\frac{p_n}{q_n}$ 爲 $\sqrt{a^2+1}$ 之第 $n$ 收斂值，指明

$$\frac{p_2^2+p_3^2+\cdots\cdots+p^2_{n+1}}{q_2^2+q_3^2+\cdots\cdots+q^2_{n+1}}=\frac{p_{n+1}+p_{n+2}-p_1p_2}{q_{n+1}q_{n+2}-q_1q_2}.$$

15. 指明

$$\left(\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\cdots\right)\left(c+\frac{1}{b+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{c+}\right)=\frac{1+bc}{1+ab}.$$

16. 設 $\frac{p_r}{q_r}$ 表 $\frac{\sqrt{5+1}}{2}$ 之第 $r$ 收斂值，指明

$$p_3+p_5+\cdots+p_{2n-1}=p_{2n}-p_2,\quad q_3+q_5+\cdots+q_{2n-1}=q_{2n}-q_2.$$

17. 求證

$$\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\cdots\cdots,\quad \frac{1}{b+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{c+}\cdots\cdots,$$

二連分式之差等於 $\frac{a-b}{1+ab}$.

18. 設 $\sqrt{N}$ 變爲連分式，$n$ 爲循環節內商之數，指明

$q_{2n}=2p_nq_n$，$p_{2n}=2p_n^2+(-1)^{n+1}$.

19. 設 $\sqrt{N}$ 變爲連分式，又設其第一，二，……$k$ 循環節內之倒第二項爲 $n_1,n_2,\cdots\cdots n_k$，指明

$$\frac{n_k+\sqrt{N}}{n_k-\sqrt{N}}=\left(\frac{n_1+\sqrt{N}}{n_1-\sqrt{N}}\right)^k$$

# 第二十八章

## 二次無定方程式

*366. 高於一次之無定方程式之正整數解於實用雖不甚重要，但因其與數論之關係，亦甚值吾人注意. 本章專注意於含二變數之二次方程式.

367. 指明如何求適合方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

之 $x$，$y$ 之正整數值，$a$，$b$，$c$，$f$，$g$，$h$ 爲整數.

如 §127 內方法，照 $x$ 之二次方程式解之，得

$$ax+hy+g=\pm\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(hg-af)y+(g^2-ac)} \cdots (1)$$

爲使 $x$，$y$ 可爲正整數，根號下可表以 $py^2+2qy+r$ 之式必爲完全平方；即

假使 $\quad py^2+2qy+r=z^2$，

照 $y$ 之二次方程式解之，得

$$py+q=\pm\sqrt{q^2-pr+pz^2};$$

如前；根號下之式必爲完全平方；假使其等於 $t^2$；於是

$$t^2-pz^2=q^2-pr.$$

$t$ 與 $z$ 爲變量，$p$，$q$，$r$ 爲常量.

捨此方程式有正整數解答外，原方程式不能有正整數解答，故將於 §374 內復回此論點.

設 $a$, $b$, $h$ 皆爲正，則解答之數顯然爲有限，因於 $x$, $y$ 之大值，左式之符號依 $ax^2+2hxy+by^2$ 而定，[ §269 ]，由是不能因 $x$, $y$ 之大正整數值而爲零.

又，設 $h^2-ab$ 爲負，則 (1) 內 $y^2$ 之係數爲負，且由同理可知其解答之數爲有限.

例．求方程式

$$x^2-4xy+6y^2-2x-20y=29$$

之正整數解答.

照 $x$ 之二次方程式解之，得

$$x=2y+1\pm\sqrt{30+24y-2y^2}.$$

但 $30+24y-2y^2=102-2(y-6)^2$; 故 $(y-6)^2$ 不能大於 51，由試驗知 $(y-6)^2=1$ 或 49 時，根號下之式爲完全平方；故 $y$ 之正整數值解答爲 5, 7, 13.

當 $y=5$ 時，$x=21$ 或 1; $y=7$ 時，$x=25$ 或 5; $y=13$ 時，$x=29$ 或 25.

* 368．已知方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

之正整數解可使之依形爲

$$x^2\pm Ny^2=\pm a. \qquad N \text{ 及 } a \text{ 爲正整數}.$$

之一方程式解之.

方程式 $x^2+Ny^2=-a$ 無實根，同時方程式 $x^2+Ny^2=a$ 有有限數解答，可由試驗得之，由是集吾人注意於形爲 $x^2-Ny=\pm a$ 之方程式.

* 369．指明方程式 $x^2-Ny^2=1$ 永可有正整數解答.

使 $\sqrt{N}$ 變爲循環分式，且使 $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ 爲任三連續收斂值；設 $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ 爲相當 $\frac{p''}{q''}$ 之全商；於是

$$r_n(pq'-p'q)=Nq'^2-p'^2 \quad [\S\ 358].$$

但在任一循環節之末，$r_n=1$ [§ 361]；

$$\therefore\ p'^2-Nq'^2=p'q-pq';$$

$\dfrac{p'}{q'}$ 為任一循環節之倒第二收斂值.

設循環節內之商數為偶數，則 $\dfrac{p'}{q'}$ 為偶數收斂值.因之大於$\sqrt{N}$，且大於 $\dfrac{p}{q}$；故 $p'q-pq'=1$,於本情形下$p'^2-Nq'^2=1$，由是 $x=p'$ $y=q'$ 為方程式 $x^2-Ny^2=1$ 之一解.

因$\dfrac{p'}{q'}$ 為任一循環節之倒第二收斂值，故解答之數為無限.

設循環節內商之數為奇數,則第一循環內之倒第二收斂值為奇次收斂值,但第二循環節內之倒第二收斂值為偶次收斂值,故整數解答可由使 $x=p'$, $y=q'$ 求得之, $\dfrac{p'}{q'}$ 為第二，四，六，………循環節內之倒第二收斂值. 故此情形內解答之數亦為無限、

*370. 求方程式 $x^2-Ny^2=-1$ 之正整數解答.如前節，得

$$p'^2-Nq'^2=p'q-pq'.$$

設循環節內商之數為奇數，又設$\dfrac{p'}{q'}$ 為任一循環節內之奇倒第二收斂值，則$\dfrac{p'}{q'}<\dfrac{p}{q}$，由是 $p'q-pq'=-1$.

於本情形內 $p'^2-Nq'^2=-1$,方程式 $x^2-Ny^2=-1$ 之正整數解答可由使 $x=p'$ $y=q'$ 求得之；$\dfrac{p'}{q'}$為第一，三，五,……循環節內之倒第二收斂值.

例．求 $x^2-13y^2=\pm1$ 之正整數解答．

可指出

$$\sqrt{13}=3+\frac{1}{1+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{6+}\cdots\cdots\cdots$$

於此，循環節內商之數爲奇數；第一循環節內之倒第二收歛值爲 $\frac{18}{5}$；故 $x=18$，$y=5$ 爲

$$x^2-13y^2=-1$$

之一解．

由 § 364 知第二循環節之倒第二收歛值爲

$$\frac{1}{2}\left(\frac{18}{5}+\frac{5}{18}\times13\right)，即\ \frac{649}{180}；$$

故 $x=649$，$y=180$ 爲 $x^2-13y^2=1$ 之一解．

由搆求諸循環節內之連續倒第二收歛值，能得方程式

$$x^2-13y^2=-1，及\ x^2-13y^2=+1$$

之任若干解答．

*371．當已求得 $x^2-Ny^2=1$ 之一正整數解答時，則可由下法求得任若干之正整數解答．

設 $x=h$，$y=k$ 爲一解，$h$ 及 $k$ 爲正整數；於是 $(h^2-Nk^2)^n=1$，$n$ 爲任何正整數．由是

$$x^2-Ny^2=(h^2-Nk^2)^n.$$

$$\therefore\ (x+y\sqrt{N})(x-y\sqrt{N})=(h+k\sqrt{N})^n(h-k\sqrt{N})^n;$$

使 $x+y\sqrt{N}=(h+k\sqrt{N})^n$，$x-y\sqrt{N}=(h-k\sqrt{N})^n$；

$$\therefore\ 2x=(h+k\sqrt{N})^n+(h-k\sqrt{N})^n;$$

$$2y\sqrt{N}=(h+k\sqrt{N})^n-(h-k\sqrt{N})^n.$$

由此求得 $x,y$ 之值爲正整數，且由指定 $n$ 爲 $1,2,3,\cdots\cdots$ 等值可得任若干之解答．

同理．設 $x=h$，$y=k$ 爲方程式 $x^2-Ny^2=-1$ 之一解，又設 $n$ 爲任一奇正整數，則

$$x^2-Ny^2=(h^2-Nk^2)^n.$$

由是 $x$ 及 $y$ 之諸值與已求得者同，但 $n$ 爲限於 $1,3,5,\cdots\cdots$ 之值．

*372．由使 $x=ax'$，$y=ay'$，方程式 $x^2-Ny^2=\pm a^2$ 變爲 $x'^2-Ny'^2=\pm1$，其解法業經指出．

*373. 於 § 369 內知

$$p'^2-Nq'^2=\mp r_n(pq'-p'q)=\pm r_n.$$

故設 $a$ 爲變 $\sqrt{N}$ 爲輾轉分式時任一全商之分母. 又設 $\frac{p'}{q'}$ 爲止於此全商所得之收斂值，則方程式 $x^2-Ny^2=\pm a$ 中之一必被適合於 $x=p'$，$y=q'$ 之值.

又，奇收斂值皆小於 $\sqrt{N}$，偶收斂值皆大於 $\sqrt{N}$；故設 $\frac{p'}{q'}$ 爲偶收斂值，則 $x=p'$，$y=q'$ 爲 $x^2-Ny^2=a$ 之一解；設 $\frac{p'}{q'}$ 爲奇收斂值，則 $x=p'$，$y=q'$ 爲 $x^2-Ny^2=-a$ 之一解.

*374 前節所示方法能用以求得方程式 $x^2-Ny^2=\pm a$ 中之一之解，僅在變 $\sqrt{N}$ 爲輾轉分數時 $a$ 爲其中分母之一時. 例如，設變 $\sqrt{7}$ 爲輾轉分式，則得

$$\sqrt{7}=2+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\cdots\cdots\cdots$$

其全商之分母爲 3,2,3,1.

其連續收斂值爲

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{37}{14},\ \frac{45}{17},\ \frac{82}{31},\ \frac{127}{48},\ \cdots\cdots\cdots$$

設取方程式

$x^2-7y^2=-3$，$x^2-7y^2=2$，$x^2-7y^2=-3$，$x^2-7y^2=1$， 將知其被適合於以 2,3,5,8,37,45,82,127,………諸值爲 $x$，及 1,1,2,3,14,17,31,48,…………爲 $y$.

*375. 由是知 $x^2-Ny^2=\pm a$ 之正整數解答能以一定方法求得之情形，其數甚爲有限. 但於數字問題內有時當 $a$ 不爲上示諸分母之一時，亦可由試驗能發現一正整數解答.

由是甚易指出方程式 $x^2-7y^2=53$ 能爲 $y=2$, $x=9$ 所適合．當已求得一正整數解答時，則如下節所示，可求得其任若干之解答．

*376. 設 $x=f$, $y=g$ 爲方程 $x^2-Ny^2=a$ 之一解；且使 $x=h$, $y=k$ 爲方程式 $x^2-Ny^2=1$ 之任一解答；於是

$$x^2-Ny^2=(f^2-Ng^2)(h^2-Nk^2)$$
$$=(fh\pm Ngk)^2-N(fk\pm gh)^2$$

由使 $x=fh\pm Ngk$, $y=fh\pm gh$,

又指定 $h$, $k$ 爲 § 371 所示求得之諸值，則可得任若干之解答．

*377. 此前皆假使 $N$ 非完全平方；但設 $N$ 爲完全平方，此方程式之形爲 $x^2-n^2y^2=a$，則其亦可迅速解出如下：

假使 $a=bc$, $b,c$ 爲二正整數且 $b$ 大於 $c$；於是

$$(x+ny)(x-ny)=bc.$$

使 $x+ny=b$, $x-ny=c$；設從二方程式求得 $x$, $y$ 之值爲正整數，則得此方程式之一解；其餘解答可由指定 $b$, $c$ 爲其所有可能之值以求得之

例．求其平方差爲 60 之二正整數．

使 $x,y$ 爲二整數；于是 $x^2-y^2=60$；卽 $(x+y)(x-y)=60$．

今 60 爲任一對因子之積中．

1, 60; 2, 30; 3, 20; 4, 15; 5, 12; 6, 10;

所求值可由方程式

$$x+y=30, \qquad x+y=10,$$
$$x-y=2; \qquad x-y=6;$$

求得之，他方程式則與 $x,y$ 以分數之值．

故所求數爲 16, 14. 或 8, 2.

推論．設方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=k$$

之左方可析爲二有理一次因子，則其正整數解答亦可用同法求得之．

*378．設於一般方程式內 $a$，或 $b$，或同爲零，則不用 § 367 所示方法，而如下例進行較爲簡便．

例．求 $2xy-4x^2+12x-5y=11$

之正整數解答．

$y$ 表以 $x$，

$$y=\frac{4x^2-12x+11}{2x-5}=2x-1+\frac{6}{2x-5}.$$

欲 $y$ 爲整數，必 $\frac{6}{2x-5}$ 爲整數；故 $2x-5$ 必等於 $\pm1$，或 $\pm2$，或 $\pm3$，或 $\pm6$．

$\pm2$，$\pm6$ 二情形顯然必被擯棄；故 $x$ 之許可值爲從 $2x-5=\pm1$．及 $2x-5=\pm3$ 求得之值；由是 $x$ 之值爲 3，2，4，1．

陸續取諸值，得解答

$$x=3,\ y=11;\quad x=2,\ y=-3;\quad x=4,\ y=9;\quad x=1,\ y=-1.$$

故可能解答爲

$$x=3,\ y=11;\quad x=4,\ y=9.$$

*379．由已述諸原理可求出變數之何值能使已知一次或二次 $x$，$y$ 之函數變爲完全平方．因此類問題於四世紀中葉已首爲希臘數學家 *Diophantine* 氏所研究，故有時稱爲 *Diophantine* 問題．

例 1．求二正整數之一般式，設其平方和減其積之差爲完全平方．

表二整數以 $x$ 及 $y$，於是

假定 $$x^2-xy+y^2=z^2;$$

$$\therefore x(x-y)=z^2-y^2;$$

此方程式被適合於二假定

$mx=n(z+y)$，$n(x-y)=m(z-y)$，

$m$ 及 $n$ 爲正整數．

故　　$mx-ny-nz=0,\quad nx+(m-n)y-mz=0.$

用十字乘法由二方程式，得

$$\frac{x}{2mn-n^2}=\frac{y}{m^2-n^2}=\frac{z}{m^2-mn+n^2};$$

又因已知方程式爲齊次，故可取

$$x=2mn-n^2,\quad y=m^2-n^2,\quad z=m^2-mn+n^2.$$

爲其一般解答．於此 $m,n$ 爲任二正整數，$m$ 爲較大；由是設 $m=7$，$n=4$，得

$$x=40,\quad y=33,\quad z=37.$$

例 2．設三數成等差級數，且任二數之和爲完全平方，求三數之一般式．

表三數以 $x-y$，$x$，$x+y$；且使

$$2x-y=p^2,\quad 2x=q^2,\quad 2x+y=r^2;$$

於是　　$p^2+r^2=2q^2.$

或　　$r^2-q^2=q^2-p^2,$

此方程式被適合於二假定

$$m(r-q)=n(q-p),\ n(r+q)=m(q+p).$$

$m$ 及 $n$ 爲正整數．

用十字乘法由二方程式得

$$\frac{p}{n^2+2mn-m^2}=\frac{q}{m^2+n^2}=\frac{r}{m^2+2mn-n^2},$$

故可取

$$p=n^2+2mn-m^2,\quad q=m^2+n^2,\quad r=m^2+2mn-n^2;$$

由是　　$x=\frac{1}{2}(m^2+n^2)^2,\ y=4mn(m^2-n^2),$

爲其一般解答而此三整數能以求得．

由 $x$ 之值知 $m$ 及 $n$ 必同爲偶數或奇數，且 $x$ 必大於 $y$，即

$$(m^2+n^2)^2>8mn(m^2-n^2),$$

或　　$m^3(m-8n)+2m^2n^2+8mn^3+n^4>0;$

設 $m>8n$，則能適和此條件．

設 $m=9$，$n=1$，則 $x=3362$，$y=2880$，而三數爲 482，3362，6242；其每二者之和爲 3844，6724，9604，而爲 62，82，98 之平方．

## *習　題 XXVIII.

求正整數解答:

1. $5x^2-10xy+7y^2=77$.　　2. $7x^2-2xy+3y^2=27$.

3. $y^2-4xy+5x^2-10x=4$.　　4. $xy-2x-y=8$.

5. $3x+3xy-4y=14$.　　6. $4x^2-y^2=315$.

求最小之正整數解答

7. $x^2-14y^2=1$.　8. $x^2-19y^2=1$.　9. $x^2=41y^2-1$.

10. $x^2-61y^2+5=0$.　　11. $x^2-7y^2-9=0$.

求正整數之一般解答.

12. $x^2-3y^2=1$.　13. $x^2-5y^2=1$.　14. $x^2-17y^2=-1$.

求 $x, y$ 使下式爲完全平方之一般值.

15. $x^2-3xy+3y^2$.　16. $x^2+2xy+2y^2$　17. $5x^2+y^2$.

18. 求平方差爲 105 之二正整數.

19. 求三正整數之一般公式，設其可用以表直三角形之邊長.

20. 求表二正整數之一般公式；設其積加其平方和爲完全平方.

21. "設余有結婚未久之三德友人來訪；彼等各携其夫人．男子之名爲亨得利，克拉司，康內略；婦人之名爲格耳楚，嘉特林，及安娜：但忘却各人之妻之名．彼等告余謂偕至市場買猪．每人所買之猪數同於每猪所值先令之數；亨得利較嘉特林多買 23 隻，克拉司較格耳楚多買 11 隻；又每人皆較其妻多出三金泥 (*guineas*)，余欲求知每人之妻之名．(1743，數學問題叢書)

22. 設 $n$ 等於 $k^2$ 或 $k'^2-1$，$k$ 及 $k'$ 爲對 $\sqrt{2}$ 之一奇數及偶數收斂值之分母，指出首 $n$ 個自然數之和爲完全平方.

# 第二十九章

## 級數之和

380. 某種級數求和之例題，已見於前數章內；茲與一已示級數求和法之提要.

(*i*) 等差級數，第四章.

(*ii*) 等比級數，第五章，

(*iii*) 一部等差，一部等比之級數， § 60.

(*iv*) 自然數之平方和及聯合級數，§ 68 至 § 75.

(*v*) 用不定係數法求和 § 312.

(*vi*) 循環級數，第二十四章.

茲進行討論較爲一般之方法，但前述方法中之若干於本章內仍常運用.

381. 設級數之第 $r$ 項能表以 $r$ 及 $r-1$ 之同一函數之二量之差，則此級數之和可迅速求得.

因使此級數表以

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n,$$

其和表以 $S_n$，且假使任一項 $u_r$ 可使其形爲 $v_r-v_{r-1}$；於是

$$S_n=(v_1-v_0)+(v_2-v_1)+(v_3-v_2)+\cdots+(v_{n-1}-v_{n-2})+$$
$$(v_n-v_{n-1})=v_n-v_0.$$

例. 求級數

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)}+\frac{1}{(1+2x)(1+3x)}+\frac{1}{(1+3x)(1+4x)}+\cdots\cdots$$

至 $n$ 項之和.

設表此級數以

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n,$$

則

$$u_1=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+2x}\right),$$

$$u_2=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{1+3x}\right);$$

$$u_3=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+3x}-\frac{1}{1+4x}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+nx}-\frac{1}{1+\overline{n+1}.x}\right),$$

∴ 由加法 $S_n=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+\overline{n+1}.x}\right)$

$$=\frac{n}{(1+x)(1+\overline{n+1}.x)}.$$

382. 有時由用第二十三章方法析 $u_n$ 爲部分分數可得適宜之變形.

例. 求級數

$$\frac{1}{(1+x)(1+ax)}+\frac{a}{(1+ax)(1+a^2x)}+\frac{a^2}{(1+a^2x)(1+a^3x)}$$

至 $n$ 項之和

假使共第 $n$ 項 $=\dfrac{a^{n-1}}{(1+a^{n-1}x)(1+a^nx)}=\dfrac{A}{1+a^{n-1}x}+\dfrac{B}{1+a^nx}.$

$$\therefore\ a^{n-1}=A(1+a^nx)+B(1+a^{n-1}x).$$

由陸續使 $1+a^{n-1}x$, $1+a^nx$ 等於零得

$$A=\frac{a^{n-1}}{1-a},\ B=-\frac{a^n}{1-a}.$$

故 $u_1=\dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{a}{1+ax}\right),$

同法 $u_2=\dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{a}{1+ax}-\dfrac{a^2}{1+a^2x}\right),$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n=\frac{1}{1-a}\left(\frac{a^{n-1}}{1+a^{n-1}x}-\frac{a^n}{1+a^nx}\right),$$

$$\therefore S_n=\frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{a^n}{1+a^nx}\right).$$

383. 設級數之每項含 $r$ 成等差級數之因子，各項之第一因子又成同一之等差級數，求此級數 $n$ 項之和.

使此級數表以 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_n$,

其中

$$u_n=(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)(a+\overline{n+2}.b)\cdots(a+\overline{n+r-1}.b).$$

易 $n$ 以 $n-1$,

$$u_{n-1}=(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)\cdots(a+\overline{n+r-2}.b);$$

$$\therefore\ (a+\overline{n-1}.b)u_n=(a+\overline{n+r}-1.b)u_{n-1}=v_n,$$

易 $n$ 以 $n+1$,

$$(a+\overline{n+r}.b)u_n=v_{n+1};$$

故，由減法，

$$(r+1)b.u_n=v_{n+1}-v_n.$$

同法　$(r+1)b.u_{n-1}=v_n-v_{n-1}$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(r+1)b.u_2=v_3-v_2,$$

$$(r+1)b.u_1=v_2-v_1.$$

由加法　$(r+1)b.S_n=v_{n+1}-v_1$;

即

$$S_n=\frac{v_{n+1}-v_1}{(r+1)b}$$

$$=\frac{(a+\overline{n+r}.b)u_n}{(r+1)b}+C,$$

$C$ 爲不關 $n$ 之量，可由使 $n$ 爲某特値求得之.

上結果得以下適宜之法則：

寫第 $n$ 項於附以其後之次一因子，除以由是增加後之因子之數及乘公差，再加一常數.

須注意 $C=-\dfrac{v_1}{(r+1)b}=-\dfrac{a}{(r+1)b}u_1$；但終以不用此結果，而由以上所示求得 $C$ 爲佳.

例. 求級數

$$1.3.5.+3.5.7+5.7.9.+\cdots\cdots$$

至 $n$ 項之和.

其第 $n$ 項為 $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$; 故由法則

$$S_n=\frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{4.2}+C.$$

使 $n=1$, 決定 $C$; 於是此級數變為其首項, 且得

$$15=\frac{1.3.5.7}{8}+C; \text{ 由是 } C=\frac{15}{8};$$

$$\therefore S_n=\frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{8}+\frac{15}{8}$$

化簡後 $=n(2n^3+8n^2+7n-2)$.

384. 上節級數之和, 亦可由不定係數法, [§ 312], 或下法求得之.

已知 $u_n=(2n-1)(2n+1)(2n+3)=8n^3+12n^2-2n-3$;

$$\therefore S_n=8\Sigma n^3+12\Sigma n^2-2\Sigma n-3n,$$

用 § 70 之表示法;

$$\therefore S_n=2n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)-n(n+1)-3n$$
$$=n(2n^3+8n^2+7n-2).$$

385. 須注意 § 383 之法則僅用於每項之因子成一等差級數每項之各第一因子又成此同一等差級數之情形下.

故級數

$$1.3.5+2.4.6+3.5.7+\cdots \text{至 } n \text{ 項之和.}$$

可由前節提示之方法求得, 但非直接引用 § 383 之法則. 於此

$$u_n=n(n+2)(n+4)=n(\overline{n+1}+1)(\overline{n+2}+2)$$
$$=n(n+1)(n+2)+2n(n+1)+n(n+2)+2n$$
$$=n(n+1)(n+2)+3\ \ (n+1)+3n.$$

茲此法則可用於各項; 由是

$$S_n=\tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)+n(n+1)(n+2)+\tfrac{3}{2}(n+1)+C.$$
$$=\tfrac{1}{4}n(n+1)(n+4)(n+5) \text{ 其常數項為零.}$$

386. 求級數 $n$ 項之和，設級數之每項爲含 $r$ 成等差級數之因子之積之倒數，且各項之第一因子亦成此同一等差級數.

使此級數表以 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$.

其中

$$\frac{1}{u_n}=(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)(a+\overline{n+2}.b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-1}.b).$$

易 $n$ 以 $n-1$

$$\frac{1}{u_{n-1}}=(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)\cdots(a+\overline{n+r-2}.b);$$

$$\therefore\ (a+\overline{n+r-1}.b)u_n=(a+\overline{n-1}.b)u_{n-1}=v_n,$$

易 $n$ 以 $n+1$，得

$$(a+nb)u_n=v_{n+1};$$

故由減法.

$$(r-1)b.u_n=v_n-v_{n+1}.$$

同法，
$$(r-1)b.u_{n-1}=v_{n-1}-v_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(r-1)b.u_2=v_2-v_3,$$

$$(r-1)b.u_1=v_1-v_2.$$

由加法
$$(r-1)b.S_n=v_1-v_{n+1};$$

即
$$S_n=\frac{v_1-v_{n+1}}{(r-1)b}=C-\frac{(a+nb)u_n}{(r-1)b};$$

$C$ 爲不關 $n$ 之量，可由使 $n$ 爲某特值求得之.

由是
$$S_n=C-\frac{1}{(r-1)b}\cdot\frac{1}{a+\overline{n-1}.b\cdots(a+\overline{n+r-1}.b)}.$$

故此和可由下法則求得之:

寫下第 $n$ 項，先消去首一因子，除以消去後後因子之數乘公差，再變號而加以一常量.

値 $C=\dfrac{v_1}{(r-1)b}=\dfrac{a+rb}{(r-1)b}u_1$; 但於每種情形皆應由指定 $n$ 爲某特值以決定 $C$.

例 1. 求級數

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項之和}$$

其第 $n$ 項爲 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

故由上法則

$$S_n=C-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

使 $n=1$，於是 $\frac{1}{1.2.3.4}=C-\frac{1}{3.2.3.4}$; 由是 $C=\frac{1}{18}$;

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

由使 $n$ 爲無窮大，得 $S_\infty=\frac{1}{18}$.

例 2. 求級數

$$\frac{3}{1.2.4}+\frac{4}{2.3.5}+\frac{5}{3.4.6}+\cdots\cdots$$

至 $n$ 項之和.

於此不能直接運用以上法則，因雖各分母之第一因子 1,2,3, ……成等差級數，但任一分母之因子則否. 本問題可解之如下:

$$u_n=\frac{n+2}{n(n+1)(n+3)}=\frac{(n+2)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n+1)+3n+4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{3}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

此中每式皆可取作可運用上法則之級數之第 $n$ 項.

$$\therefore\ S_n=C-\frac{1}{n+3}-\frac{3}{2(n+2)(n+3)}-\frac{4}{3(n+1)(n+2)(n+3)};$$

使 $n=1$，於是

$$\frac{3}{1.2.4}=C-\frac{1}{4}-\frac{3}{2.3.4}-\frac{4}{3.2.34.};\ \text{由是 } C=\frac{29}{36};$$

$$\therefore S_n=\frac{29}{36}-\frac{1}{n+3}-\frac{3}{2(n+2)(n+3)}-\frac{4}{3(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

387. 於能直接運用 §§383,386 之方法之情形內永可用下法求和以代上法則之引用，此方法有時稱爲求差法.(*Method of Substraction*)

例. 求級數

$$2.5+5.8+8.11+11.14+\cdots\cdots$$

之 $n$ 項和.

於此情形內之等差級數爲

$$2,5,8,11,14,\cdots\cdots$$

已知級數之每項皆引入等差級數之次項、爲一新因子；表此級數以$S'$；已知級數以 $S$；於是

$$S'=2.5.8+5.8.11+8.11.14.+\cdots\cdots+(3n-1)(3n+2)(3n+5);$$

$$\therefore S'-2.5.8=5.8.11+8.11.14+11.14.17.+\cdots \text{至}(n-1)\text{項}$$

減之

$$-2.5.8=9[5.8+8.11+11.14+\cdots\text{至}(n-1)\text{項}]-(3n-1)(3n+2)(3n+5),$$

$$-2.5.8=9[S-2.5]-(3n-1)(3n+2)(3n+5),$$

$$9S=(3n-1)(3n+2)(3n+5)-2.5.8+2.5.9,$$

$$S=n(3n^2+6n+1)$$

387. 當級數之第 $n$ 項爲 $n$ 之有理整函數時，則可表之以能便於運用 § 383 之方法之形式.

因假使 $\phi(n)$ 爲 $n$ 之 $p$ 次有理整函數，又假定

$$\phi n=A+Bn+Cn(n+1)+Dn(n+1)(n+2)\cdots\cdots,$$

$A,B,C,\cdots\cdots$爲 $p+1$ 未定常量.

例. 求通項爲 $n^4+6n^3+5n^2$ 之級數之 $n$ 項和.

假定

$$n^4+6n^3+5n^2=A+Bn+Cn(n+1)+Dn(n+1)(n+2)+En(n+1)(n+2)(n+3).$$

則卽可知 $A=0$，$B=0$，$E=1$；且由連續使 $n=-2$，$n=-3$．得 $C=-6$，$D=0$ 由是

$$n^4+6n^3+5n^2=n(n+1)(n+2)(n+3)-6n(n+1).$$

故 $S_n=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-2n(n+1)(n+2)$

$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n^2+7n+2).$$

## 多角數及擬形數.

389. 設於首項爲 1，公差爲 $b$ 之等差級數 $n$ 項和之式 $n+\frac{1}{2}n(n-1)b$ 內，使 $b$ 爲 0，1，2，3，………，之值，則得

$$n,\ \tfrac{1}{2}n(n+1),\ n^2,\ \tfrac{1}{2}n(3n-1),\ \cdots\cdots,$$

此爲二次，三次，四次，五次，………多角數之第 $n$ 項．一次多角數內之各項皆爲 1．二次，三次，四次，五次，………多角數有時稱爲直線，三角數，四角數，五角數，………

390. 求 $r$ 次多角數首 $n$ 項之和.

其 $r$ 次之 $n$ 項爲 $n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)$；

$$\therefore\ S_n=\Sigma n+\tfrac{1}{2}(r-2)\Sigma(n-1)n$$

$$=\tfrac{1}{2}n(n+1)+\tfrac{1}{6}(r-2)(n-1)n(n+1)\ [\S383]$$

$$=\tfrac{1}{6}n(n+1)\{(r-2)(n-1)+3\}.$$

391. 設級數

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\cdots\cdots$$

之 $n$ 項和取爲一新級數之第 $n$ 項，則得

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots,$$

設再取後級數 $n$ 項之和 $\frac{n(n+1)}{2}$ 爲一新級數之第 $n$ 項；則得

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\cdots\cdots$$

依此進行可得一級數系．其中任一級數之第 $n$ 項爲前級數 $n$ 項之和．由是作成之級數系稱爲一次，二次，三次、……之擬形數.

392. 求擬形數 $r$ 次之第 $n$ 項及 $n$ 項之和.

一次之第 $n$ 項爲 1; 二次之第 $n$ 項爲 $n$, 三次之第 $n$ 項爲 $\Sigma n$, 即 $\frac{1}{2}n(n+1)$; 四次之第 $n$ 項爲 $\Sigma\frac{n(n+1)}{1.2}$, 即 $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$; 五次之第 $n$ 項爲 $\Sigma\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$, 即 $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{|\underline{4}}$ ;類推.

由是甚易知 $r$ 次之第 $n$ 項爲

$$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-2)}{|\underline{r-1}}\text{或}\frac{|\underline{n+r-2}}{|\underline{n-1}\;|\underline{r-1}}.$$

又 $r$ 次之 $n$ 項和爲

$$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots\cdots(n+r-1)}{|\underline{r}},$$

此爲 $r+1$ 次之第 $n$ 項.

註. 於用 §383 之法則求任何次擬形數之 $n$ 項之和內, 可知常數 $C$ 永遠爲零.

393. 擬形數之性質因爲 *Pascal* 氏 1665 年發表之 *Traité du tsiangle arithmétique* 所應用, 故深有歷史之興趣.

下表爲最簡形式之算術三角形.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1···· |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9···· | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36···· | | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84···· | | | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126···· | | | | |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126···· | | | | | |
| 1 | 7 | 28 | 84···· | | | | | | |
| 1 | 8 | 36···· | | | | | | | |
| 1 | 9···· | | | | | | | | |
| 1···· | | | | | | | | | |

*Pascal* 氏由下法則組諸數爲三角形;

任一數爲上一數及左一數之和;

如 $15=5+10$, $28=7+21$, $126=56+70$.

由組成之範形知連續諸水平行或鉛直列爲一次，二次，三次，………之擬形數.

由頂行及左列過等數 1 所作之直線，稱爲底，此底爲從左上角數起，故第 6 底爲過 1,5,10,10,5,1 所作之直線，其經過之數爲 6，且爲 $(1+x)^5$ 之展開式之係數.

此種數之性質曾經 *Pascal* 氏極精細之研究;復運用其算術三角形發明組合之原理，且證明若干關於適遇法極饒興趣之命題. 此問題於 *Todhunter's* 之適遇法史(*History of Probability*)第二章內論之甚詳.

394. 如級數內之項數無含糊不明存在則用符號 $\Sigma$ 表總和.

但於某種情形內以下表其和所處之極限之符號較爲合宜.

使 $\phi(x)$ 表任一 $x$ 之函數於是 $\sum\limits_{x=l}^{x=m}$ 表由使 $x$ 爲由 $l$ 至 $m$ 內所有正整數值從 $\phi(x)$ 所得之級數之項之和.

例如，假使求由與 $p$ 以從 $r+1$ 至 $p$ 內所有整數值由式

$$\frac{(p-1)(p-2)\cdots\cdots\cdots(p-r)}{\underline{|r}}$$

所得級數之所有項之和.

照非器寫分子之諸因子，

$$\text{所求和}=\sum_{p=r+1}^{p=p}\frac{(p-r)(p-r+1)\cdots(p-1)}{\lfloor\underline{r}}$$

$$=\frac{1}{\lfloor\underline{r}}\{1.2.3\cdots\cdots r+2.3.4\cdots\cdots(r+1)+\cdots+(p-r)(p-r+1)\cdots\cdots(p-1)\}$$

$$=\frac{1}{\lfloor\underline{r}}\cdot\frac{(p-r)(p-r+1)\cdots(p-1)p}{\lfloor\underline{r+1}},\qquad[\S\ 383.]$$

$$=\frac{p(-1)(p-2)\cdots(p-r)}{\lfloor\underline{r+1}}.$$

因已知級數於所有 $p$ 從 1 至 $r$ 之值爲零，故此結果可寫爲

$$\sum_{p=1}^{p=p}\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-r)}{\lfloor\underline{r}}=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-r)}{\lfloor\underline{r+1}}$$

## 習　題 XXIX.a.

求下級數至 $n$ 項之和.

1. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots$
2. $1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+\cdots\cdots$
3. $1.4.7+4.7.10+7.10.13+\cdots\cdots$
4. $1.4.7+2.5.8+3.6.9+\cdots\cdots$
5. $1.5.9+2.6.10+3.7.11+\cdots\cdots$

求下級數至 $n$ 項及無窮項之和

6. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots$
7. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\cdots\cdots$
8. $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+\cdots\cdots$
9. $\frac{1}{1.4.7}+\frac{1}{4.7.10}+\frac{1}{7.10.13}+\cdots\cdots$
10. $\frac{4}{1.2.3}+\frac{5}{2.3.4}+\frac{6}{3.4.5}+\cdots\cdots$
11. $\frac{1}{3.4.5}+\frac{2}{4.5.6}+\frac{3}{5.6.7}+\cdots\cdots$
12. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\frac{5}{3.4.5}+\frac{7}{4.5.6}+\cdots\cdots$

求以下各級數 $n$ 項之和:

13.　$1.3.2^2+2.4.3^2+3.5.4^2+\cdots\cdots$

14.　$(n^2-1^2)+2(n^2-2^2)+3(n^2-3^2)+\cdots\cdots$

求級數 $n$ 項之和，設其第 $n$ 項爲

15.　$n^2(n^2-1)$.　　16.　$(n^2+5n+4)(n^2+5n+8)$.

17.　$\dfrac{n^2(n^2-1)}{4n^2-1}$.　　18.　$\dfrac{n^4+2n^3+n^2-1}{n^2+n}$

19.　$\dfrac{n^3+3n^2+2n+2}{n^2+2n}$.　　20.　$\dfrac{n^4+n^2+1}{n^4+n}$

21.　指明擬形數 $r$ 次之第 $n$ 項，等於 $n$ 次之第 $r$ 項.

22.　設擬形數 $r$ 次之第 $n$ 項等於 $r-2$ 次之第 $n+2$ 項，指明 $r=n+2$.

23.　指明由一次至 $r$ 次多角數之所有組之首 $n$ 項之和爲

$$\frac{(r-1)n(n+1)}{12}(rn-2n-r+8).$$

## 由逐差法求和

395.　使 $u_n$ 表 $n$ 之某有理整函數，又使 $u_1$，$u_2$，$u_3$，$u_4$，$\cdots\cdots$ 表陸續使 $n$ 爲 $1,2,3,4,\cdots\cdots\cdots$ 之值時 $u_n$ 之值.

茲研究當已知 $u_1$，$u_2$，$u_3$，$u_4$，$\cdots\cdots$ 中之若干項時求 $u_n$ 之方法.

由每項減去其前項，從級數 $u_1,u_2,u_3,u_4,\cdots\cdots\cdots$ 可得一第二級數.

由是所得之級數

$$u_2-u_1,\ u_3-u_2,\ u_4-u_3,\ u_5-u_4,\cdots\cdots\cdots$$

稱爲一次逐差，表之以

$$\Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \Delta u_3,\ \Delta u_4,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此逐差之每項減其前項得

$$\Delta u_2-\Delta u_1,\Delta u_3-\Delta_2,\Delta u_4-\Delta u_3,\cdots\cdots\cdots$$

稱爲二次逐差表之以

$$\Delta_2 u_1,\ \Delta_2 u_2\ \Delta_3 u_3\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此級數可構成三次，四次，五次，…………之逐差各數串之通項爲 $\triangle_3 u_r$，$\triangle_4 u_r$，$\triangle_5 u_r$，……………

由級數

如 $u_1$，$u_2$，$u_3$，$u_4$，$u_5$，$u_6$，………………………

$\triangle u_1$，$\triangle u_2$，$\triangle u_3$，$\triangle u_4$，$\triangle u_5$，……………

$\triangle_2 u_1$，$\triangle_2 u_2$，$\triangle_2 u_3$，$\triangle_2 u_4$，……………

$\triangle_3 u_1$，$\triangle_3 u_2$，$\triangle_3 u_3$，……………

……………………………………………

之構成法則，知任一級數內之任一項等於其前一項加下左一項.

如 $u_2=u_1+\triangle u_1$，及 $\triangle u_2=\triangle u_1+\triangle_2 u_1$.

因 $u_2+\triangle u_2=u_3$ 由加法，得

如 $u_3=u_1+2\triangle u_1+\triangle_2 u_1$.

由以二次，三次，四次逐差代一次，二次，三次，用全同法得

$$\triangle_3=\triangle u_1+2\triangle_2 u+\triangle_3 u_1$$

因 $u_3+\triangle u_3=u_4$，由加法，得

$$u_4=u_1+3\triangle u_1+3\triangle_2 u_1+\triangle_3 u_1.$$

迄今其數字係數皆合於二項式定理內之同一定律．玆用數字歸納法証其永遠如此，因假使

$$u_{n+1}=u_1+n\triangle u_1+\frac{n(n-1)}{1.2}\triangle_2 u_1+\cdots\cdots+{}^nC_r\triangle_r u_1+\cdots+\triangle_n u_1;$$

則由以二次至 $n+2$ 次逐差代一次至 $n+1$ 次逐差，…

$$\triangle u_{n+1}=\triangle u_1+n\triangle_2 u_1+\frac{n(n-1)}{1.2}\triangle_3 u_1+\cdots+{}^nC_{r-1}\triangle_r u_1+\cdots+\triangle_{n+1}u_1.$$

因 $u_{n+1}+\triangle u_{n+1}={}^nu_{+2}$，由加法得

$$u_{n+2}=u_1+(n+1)\triangle u_1+\cdots+({}^nC_r+{}^nC_{r-1})\triangle_r u_1+\cdots+\triangle_{n+1}u_1.$$

但 $^nC_r+{}^nC_{r-1}=\left(\frac{n-r+1}{r}+1\right)\times{}^nC_{r-1}=\frac{n+1}{r}\times{}^nC_{r-1}$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(\overline{n+1}-r+1)}{1.2.3\cdots(r-1)r}={}^{n+1}C_r.$$

因是設構成法則適用於 $u_{n+1}$，必亦適用於 $u_{n+2}$，但其於 $u_4$之情形內爲眞，故適用於 $u_5$，由是適於無限．故

$$u_n=u_1+(n-1)\triangle u_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\triangle_2 u_1+\cdots\cdots\cdots+\triangle_{n-1}u_1.$$

396．求級數

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

表以 $u_1$ 之逐差之 $n$ 項之和．

假使級數 $u_1,\ u_2,\ u_3,\cdots\cdots\cdots\cdots$爲級數

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之一次逐差．於是 $v_{n+1}$ 恒等於

$$(v_{n+1}-v_n)+(v_n-v_{n-1})+\cdots\cdots\cdots+(v_2-v_1)+v_1;$$

$$\therefore\ v_{n+1}=u_n+u_{n-1}+\cdots\cdots\cdots+u_2+u_1+v_1.$$

故級數

$$o,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\cdots\cdots\cdots$$

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\cdots\cdots\cdots$$

$$\triangle u_1,\ \triangle u_2,\ \triangle u_3,\cdots\cdots\cdots$$

內之構成法則同於前節；

$$\therefore\ v_{n+1}=0+nu_1+\frac{n(n-1)}{1.2}\triangle u_1+\cdots+\triangle_n u_1;$$

則 $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

$$=nu_1+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\triangle u_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\triangle_2 u_1+\cdots+\triangle_n u_1.$$

本節與前節之公式可表之以小異之形式如下：設 $a$ 爲已知級數之首項，$d_1$、$d_2$，$d_3$，$\cdots\cdots\cdots$ 爲連續各次逐差之首項，則已知級數之第 $n$ 項之求得可由公式

$$a+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}d_2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 3}d^3+\cdots;$$

其 $n$ 項和則由公式

$$na+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}d_2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}d_3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

例. 求級數

12, 40, 90, 168, 280, 432, ……………

之通項及其 $n$ 項和.

其連續諸次逐差級數為

28, 50, 78, 112, 152, ……………
22, 28, 34, 40, …………
6, 6, 6, ……………
0 0……………

$$\text{故其第 } n \text{ 項}=12+28(n-1)+\frac{22(n-1)(n-2)}{2}+$$
$$+\frac{6(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 3}$$
$$=n^3+5n^2+6n.$$

其 $n$ 項之和今可由寫出 $\Sigma n^3+5\Sigma n^2+6\Sigma$ 之值求得之，或由本節公式得

$$S_n=12n+\frac{28n(n-1)}{\lfloor 2}+\frac{22n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}$$
$$\frac{6n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}$$
$$=\frac{n}{12}(3n^3+26n+69n+46),$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+23n+46).$$

397. 須知此求和法僅用於當求其諸次逐差時最後能得一各項相等之級數之級數，設級數之第 $n$ 項為 $n$ 之有理整函數則此為永遠可能.

為簡便計茲考究一三次函數，但其證法則甚為一般.

使此級數為

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中 $u_n=An^3+Bn^2+Cn+D.$

又使 $v_n$, $w_n$, $z_n$ 表一次，二次，三次逐差之第 $n$ 項;

於是 $v_n=u_{n+1}-u_n=A(3n^2+3n+1)+B(2n+1)+C$;

即 $v_n=3An^2+(3A+2B)n+A+B+C$;

同法 $w_n=v_{n+1}-v_n=3A(2n+1)+3A+2B$

$$z_n=w_{n+1}-w_n=6A.$$

故其三次逐差級數內諸項相等；且一般，設已知級數之第 $n$ 項爲 $p$ 次，則其 $p$ 次逐差內之諸項相等.

反之，設 $p$ 次逐差內之諸項相等，則此級數之第 $n$ 項爲 $n$ 之 $p$ 次有理整函數.

例. 求級數 $-1, -3, 3, 23, 63, 129, \cdots\cdots$ 之第 $n$ 項. 其連續諸次逐差級數爲

$-2,\ 6,\ 20,\ 40,\ 66, \cdots\cdots$

$8,\ 14,\ 20,\ 26, \cdots\cdots$

$6,\ 6,\ 6, \cdots\cdots$

由是其三次逐差內之諸項相等，故可假定

$$u_n=A+Bn+Cn^2+Dn^3,$$

$A, B, C, D$ 爲待定値之量.

使 $n$ 陸續爲 1,2,3,4，則得四聯立方程式，解之得 $A=3$，$B=-3$，$C=-2$，$D=1$.

故此級數之通項爲 $3-3n-2n^2+n^3$.

398. 設 $a$ 爲 $n$ 之 $p$ 次有理整函數，則級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$ 爲循環級數其關係式爲 $(1-x)^{p+1}$

使 $S$ 表此級數之和；於是

$$S(1-x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+\cdots+(a_n-a_{n-1})x^n-a_nx^{n+1}$$

$$=a_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n-c_nx^{n+1}.$$

但 $b_n=a_n-a_{n-1}$ 由是 $b_n$ 爲 $n$ 之 $p-1$ 次函數乘上級數以 $1-x$，得

$$S(1-x)^2$$

$$=c_0+(b_1-a_0)x+(b_2-b_1)x^2+\cdots+(b_n-b_{n-1})\ x^n-(a_n+b_n)x^{n+1}+a_nx^{n+2}$$

$$=c_0+(b_1-a_0)x+c_2x^2+c_3x^3\cdots+c_nx^n-(a_n+b_n)\ x^{n+1}+a^nxn^{+2}a^{n+2}=$$

$$a^0+(b_1-r_0)x+c_2x^2+b_3x^3+\cdots+c_nx^x-(a_n+b_n)x^{n+1}+a_nx^{n+2}$$

於此 $c_n=b_n-b_{n-1}$ 由是 $c_n$ 爲 $n$ 之 $p-2$ 次函數.

故知於連續乘以 $1-x$ 之後，第一次，二次，三次………乘積內 $x^n$ 之係數，為諸係數之一次，二次，三次，逐差……之通項.

由假使 $a_n$ 為 $n$ 之 $p$ 次有理整函數；由是以 $1-x$ 施乘 $p$ 次後，必達一級數，此級數除首 $p$ 項及末 $p$ 項之外，成一各項係數皆同之等比級數. [§397].

由是 $S(1-x)^p=k(x^p+x^{p+1}+\cdots\cdots+x^n)+f(x)$，

於此 $k$ 為常數，$f(x)$ 代此乘積之首 $n$ 項及末 $n$ 項.

$$\therefore\ S(1-x)^p=\frac{k(x^p-x^{n+1})}{1-x}+f(x);$$

即 $$S=\frac{kx^p(1-x^{n-p+1})+(1-x)f(x)}{(1-x)^{p+1}};$$

故此級數為循環級數，其關係式為 $(1-x)^{p+1}$ [§325]

設通項為未知，則 $a_n$ 之次數可即由 § 397 所示方法即刻求得之.

例. 求級數 $3+5x+9x^2+15x^3+23x^4+33x^5+\cdots\cdots\cdots$ 之母函數.

構成係數之連續次逐差，得

$$2,4,6,8,10,\cdots\cdots\cdots$$

$$2,\ 2,2,2,\cdots\cdots\cdots$$

由是二次逐差內之諸項相等，故 $a_n$ 為 $n$ 之二次有理整函數；且其關係式為 $(1-x)^3$ 於是

$$\begin{aligned}
S&=3+5x+9x^2+15x^3+23x^4+33x^5+\cdots\cdots\\
-3xS&=\quad-9x-15x^2-27x^3-45x^4-69x^5\cdots\cdots\\
3x^2S&=\qquad\qquad 9x^2+15x^3+27x^4+45x^5-\cdots\cdots\\
-x^3S&=\qquad\qquad\qquad -3x^3-5x^4-9x^5\cdots\cdots
\end{aligned}$$

由加法 $(1-x)^3S=3-4x+3x^2$；

$$\therefore\ S=\frac{3-4x+3x^2}{(1-x)^3}$$

399．於第二十四章知循環級數之母函數，為以關係式為分母之有理分數．假使此分母能析為因子 $(1-ax)(1-bx)(1-cx)\cdots\cdots\cdots$；則此母函數能析為部分分數，其形為

$$\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1-bx}+\frac{C}{1-cx}+\cdots\cdots\cdots$$

其中每分數能由二項式定理展開為等比級數之形式：故於此情形內，循環級數可表以若干等比級數之和．

但設關係式含任一因子 $1-ax$ 高於一次，則相當此重複因子為 $\frac{A_2}{(1-ax)^2}$，$\frac{A_3}{(1-ax)^3}$，$\cdots\cdots\cdots$ 之形式之部分分數；此當用二項式定理展開時不成等比級數；故於本情形內，此循環級數不能表以若干等比級數之和．

400．等比級數 $a$，$ar$，$ar^2$，$ar^3$，$ar^4$，$ar^5$，$\cdots\cdots\cdots$之連續諸次逐差為

$$a(r-1),\ a(r-1)r,\ a(r-1)r^2,\ a(r-1)r^3,\cdots\cdots\cdots$$

$$a(r-1)^2,a(r-1)^2r,a(r-1)^2r^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此又各自成與原級數同公比 $r$ 之等比級數．

401．使考究其內

$$u_n=ar^{n-1}+\phi(n);$$

$\phi(n)$ 為 $n$ 之 $p$ 次有理整函數，又使由此級數構成連續次逐差之次逐差，諸次中逐差之任一內之每項，皆為由形為 $ar^{n-1}$ 之諸項所成及由原級數內形為 $\phi(n)$ 諸項二部之和．今因 $\phi(n)$ 為 $p+1$ 次，故由 $\phi(n)$ 所成之部分將於 $p+1$ 次及以後之逐差為零，故諸級數將為等比級數，其公比為 $r$ [§400]

故設級數之首幾項已知，又設此幾項之逐差之 $p$ 次級數成公差爲 $r$ 之等比級數，則可假定此已知級數之通項爲 $ar^{n-1}+f(n)$，$f(n)$ 爲 $n$ 之 $p-1$ 次有理整函數．

例．求級數 10，23，60，169，494，…………

之第 $n$ 項．

其連續次逐差爲

$$13,\ 37,\ 109,\ 335,\ \cdots\cdots$$

$$24,\ 72,\ 216,\ \cdots\cdots$$

故其逐差之二次級數爲以 3 爲公比之等比級數；故可假定其通項

$$u_n=a.3^{n-1}+bn+c.$$

使 $n$ 連續等於 1，2，3，決定常數 $a$，$b$，$c$．

得　$a+b+c=10$，$3a+2b+c=23$．$9a+3b+c=60$．

由是　$a=6$，$b=1$，$c=3$．

故　$u_n=6.3^{n-1}+n+3=2.3^n+n+3$．

402．適示循環級數諸例中之每例內於構成連續逐差時皆得一級數，其法則顯然由於觀察，且可由是求得原級數第 $n$ 項之通式．

但設此循環級數等於公比爲 $a, b, c,$ ……… 之若干等比級數之和，則其通項之形式爲 $Aa^{n-1}+Bb^{n-1}+Cc^{n-1}$，且由是其連續逐差次級數之通項同形；即所有逐差與原級數合於同一法則，於此情形內求此級數之通項必須借助第二十四章內所示之較一般之方法．但當係數大時，則其關係式設經算術之繁難不能求得．故寫出逐差之級數幾以察其是否遂諸項法則明顯之級數，一般甚爲必要．

403．今更益數例以爲前諸原則更進一步之說明．

例 1.　求級數

$$\frac{5}{1.2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{2.3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{9}{3.4}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{11}{4.5}\cdot\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$$ 至 $n$ 項之和.

於此　$$u_n=\frac{2n+3}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

假定　$$\frac{2n+3}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},$$

得　$$A=3,\ B=-1.$$

故　$$u_n=\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{3^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

且由是　$$S_n=1-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

例 2.　求級數

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{3.7}+\frac{5}{3.7.11}+\frac{7}{3.7.11.15}+\cdots\cdots$$ 至 $n$ 項之和.

其第 $n$ 項為 $$\frac{2n-1}{3.7.11\cdots\cdots(4n-5)(4n-1)}.$$

假定　$$\frac{2n-1}{3.7\cdots\cdots(4n-5)(4n-1)}=\frac{A(n+1)+B}{3.7\cdots\cdots4n-1}-\frac{An+B}{3.7\cdots\cdots(4n-5)}.$$

$$\therefore\ 2n-1=An+(A+B)-(An+B)(4n-1).$$

由相等係數，得含二未知數 $A,B$ 之三方程式，設能求得 $A,B$ 之值適合所有此三方程式，則吾人之假定為確.

相等 $n^2$ 之係數，得 $A=O$.

相等常數項，$-1=2B$；即 $B=-\frac{1}{2}$；且此可知 $A$，$B$ 之值適合第三方程式.

$$\therefore u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.7\cdots\cdots(4n-5)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.7\cdots\cdots(4n-5)(4n-1)};$$

故　$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.7.11\cdots\cdots(4n-1)}.$$

例 3.　求級數

$$6.9+12.21+20.37+30.57+42.81+\cdots\cdots\cdots$$

至 $n$ 項之和.

用 §396 或 §397 之方法，求得級數

$$6.\ 12.\ 20.\ 30.\ 42.\ \cdots\cdots\cdots$$

之第 $n$ 項為 $n^2+3n+2$. 又級數

$$9.\ 21.\ 37.\ 57.\ 81.\ \cdots\cdots\cdots$$

之第 $n$ 項為 $2n^2+6n+1$.

$$u_n=(n+1)(n+2)\{2n(n+3)+1\}$$
$$=2n(n+1)(n+2)(n+3)+(n+1)(n+2);$$
$$\therefore S_n=\frac{2}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)-2.$$

例 1. 求級數 $2.2+6.4+12.8+20.16+30.32+\cdots\cdots$ 之 $n$ 項之和.

級數 2, 6, 12, 20, 30, ………內之第 $n$ 項爲 $n^2+n$;

故 $$u_n=(n^2+n)2^n,$$

假定 $(n^2+n)2^n=(An^2+Bn+C)2^n-\{A(n-1)^2+B(n-1)+c\}2^{n-1}$; 消去 $2^{n-1}$ 且相等同乘冪之係數, 得

$$2=A,\ 2=2A+B,\ 0=C-A+B;$$
$$A=2,\ B=-2,\ C=4,$$
$$\therefore u_n=(2n^2-2n+4)2^n-\{2(n-1)^2-2(n-1)+4\}2^{n-1};$$
$$S_n=(2n^2-2n+4)2^n-4=(n^2-n+2)2^{n+1}-4,$$

## 習 題 二 十 九 b.

求以下級之第 $n$ 項及 $n$ 項之和:

1. 4, 14, 30, 52, 80, 114, …………
2. 8, 26, 54, 92, 140, 198, ………
3. 2, 12, 36, 80, 150, 252, ………
4. 8, 16, 0, −64, −200, −432, ………
5. 30, 144, 420, 960, 1890, 3360, ………

求以下級數之母函數:

6. $1+3x+7x^2+13x^3+21x^4+31x^5+\cdots\cdots$
7. $1+2x+9x^2+20x^3+35x^4+54x^5+\cdots\cdots$
8. $2+5x+10x^2+17x^3+25x^4+37x^5+\cdots\cdots$
9. $1-3x+5x^2-7x^3+9x^4-11x^5+\cdots\cdots$
10. $1^4+2^4x+3^4x^2+4^4x^3+5^4x^4+\cdots\cdots$

求以下無窮級數之和;

11. $\frac{1.2}{3}+\frac{2.3}{3^2}+\frac{3.4}{3^3}+\frac{4.5}{3^4}+\cdots\cdots$

12. $1^2-\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{5^2}-\frac{4^2}{5^3}+\frac{5^2}{5^4}-\frac{6^2}{5^5}+\cdots\cdots$

求以下級數之通項及其 $n$ 項之和：

13. 9, 16, 29, 54, 103, ……

14. $-3$, $-1$, 11, 39, 89, 167, ……

15. 2, 5, 12, 31, 86, ……

16. 1, 0, 1, 8, 29, 80, 193, ……

17. 4, 13, 35, 94, 262, 755……

求以下級數 $n$ 項之和.

18. $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots\cdots$

19. $1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+\cdots\cdots$

20. $\frac{3}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{5}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{6}{4\cdot5}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots$

21. $\frac{1^2}{2\cdot3}\cdot4+\frac{2^2}{3\cdot4}\cdot4^2+\frac{3^2}{4\cdot5}\cdot4^3+\frac{4^2}{5\cdot6}\cdot4^4+\cdots\cdots$

22. $3\cdot4+8\cdot11+15\cdot20+24\cdot31+35\cdot44+\cdots\cdots$

23. $1\cdot3+4\cdot7+9\cdot13+16\cdot21+25\cdot31+\cdots\cdots$

24. $1\cdot5+2\cdot15+3\cdot31+4\cdot53+5\cdot81+\cdots\cdots$

25. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{4}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}+\cdots\cdots$

26. $\frac{1\cdot2}{\underline{|3}}+\frac{2\cdot2^2}{\underline{|4}}+\frac{3\cdot2^3}{\underline{|5}}+\frac{4\cdot2^4}{\underline{|6}}+\cdots\cdots$

27. $2\cdot2+4\cdot4+7\cdot8+11\cdot16+16\cdot32+\cdots\cdots$

28. $1\cdot3+3\cdot3^2+5\cdot3^3+7\cdot3^4+9\cdot3^5+\cdots\cdots$

29. $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}+\cdots\cdots$

30. $\frac{2}{1\cdot2}+\frac{5}{2\cdot3}\cdot2+\frac{10}{3\cdot4}\cdot2^2+\frac{17}{4\cdot5}\cdot2^3+\cdots\cdots$

31. $\frac{4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{6}{3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots$

32. $\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{5}{\underline{|4}}+\frac{11}{\underline{|5}}+\frac{19}{\underline{|6}}+\cdots\cdots$

33. $\frac{19}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{28}{2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{39}{3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{1}{16}+\frac{52}{4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{1}{32}+\cdots\cdots$

404．甚多級數之和，不能用一般法則求得．於某種情形內，以前諸方法需要巧妙之變形；其他之求和則賴某已知展開式如由二項式，對數，及指數諸定理所得者之性質．

例1．求無窮級數

$$\frac{2}{\underline{|1}}+\frac{12}{\underline{|2}}+\frac{28}{\underline{|3}}+\frac{50}{\underline{|4}}+\frac{78}{\underline{|5}}+\cdots\cdots\text{之和}$$

級數 $2,12,28,50,78\cdots\cdots$ 之第 $n$ 項爲 $3n^2+n-2$；故

$$u_n=\frac{3n^2+n-2}{\underline{|n}}=\frac{3n(n-1)+4-2}{\underline{|n}}$$

$$=\frac{3}{\underline{|n-2}}+\frac{4}{\underline{|n-1}}-\frac{2}{\underline{|n}}.$$

連續使 $n$ 等於 $1,2,3,4,\cdots\cdots$ 於是得

$$u_1=4-\frac{2}{\underline{|1}};\quad u_2=3+\frac{4}{\underline{|1}}-\frac{2}{\underline{|2}};\quad u_3=\frac{3}{\underline{|1}}+\frac{4}{\underline{|2}}-\frac{2}{\underline{|3}};$$

餘類推

由是 $S_\infty=3e+4e-2(e-1)=5e+2$．

例2．設 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots+c_nx^n$，求

$$1^2c_1+2^2c_2+3^2c_3+\cdots\cdots\cdots n^2c_n\ \text{之值}.$$

如 §398 內甚易指出

$$1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

又 $c_n+c_{n-1}x+\cdots c_2x^{n-2}+c_1x^{n-1}+c_0x^n=(1+x)^n$．

此二結果相乘；於是已知級數等於 $\dfrac{(1+x)^{n+1}}{(1-x)^3}$ 卽 $\dfrac{(2-\overline{1-x})^{n+1}}{(1-x)^3}$

內 $x^{n-1}$ 之係數．

此展開式內含 $x^{n-1}$ 之僅有項成於

$$2^{n+1}(1-x)^{-3}-(n+1)2^n(1-x)^{-2}+\frac{(n+1)n}{\underline{|2}}2^{n-1}(1-x)^{-1};$$

$$\therefore\quad \text{已知級數}=\frac{n(n+1)}{\underline{|2}}2^{n+1}-n(n+1)2^n+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}}2^{n-1}$$

$$=n(n+1)2^{n-2}.$$

例　3．設 $b=a+1$，$n$ 爲正整數，求

$$b^n-(n-1)ab^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{2}a^2b^{n-4}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{\underline{|3}}$$

$a^3b^{n-6}+\cdots\cdots$之值．

由二項式定理知

$$1,\quad n-1,\quad \frac{(n-3)(n-2)}{\underline{|2}},\quad \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{\underline{|3}},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

各爲 $(1-x)^{-1}$，$(1-x)^{-2}$，$(1-x)^{-3}$，$(1-x)^{-4}$，……… 展開式內 $x^n$，$x^{n-2}$，$x^{n-4}$，$x^{n-6}$，………之係數．故所求和等於級數 $\frac{1}{1-bx}-\frac{ax^2}{(1-bx)^2}$ $+\frac{a^2x^4}{(1-bx)^3}-\frac{a^3x^6}{(1-bx)^4}+\cdots\cdots\cdots$

之展開式內 $x^n$ 之係數．又巳知展開式雖僅含有限數項，但此級數可視之爲擴展至無窮．

$$\text{但此級數之和}=\frac{1}{1-bx}\div\left(1+\frac{ax^2}{1-bx}\right)=\frac{1}{1-bx+ax^2}.$$

$$=\frac{1}{1-(a+1)x+ax^2}\text{，因 } b=a+1$$

$$\text{故巳知級數}=\frac{1}{(1-x)(1-ax)}\text{內 } x^n \text{ 之係數．}$$

$$=\frac{1}{a-1}\left(\frac{a}{1-ax}-\frac{1}{1-x}\right)\text{ 內 } x^n \text{ 之係數．}$$

$$=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

例4．設級數

$$1+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^6}{\underline{|6}}+\cdots\cdots,\quad x+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\frac{x^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots,\quad \frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}+\frac{x^8}{\underline{|8}}+\cdots\cdots,$$

分表以 $a,b,c$，指明 $a^3+b^3+c^3-3abc=1$．

設 $\omega$ 爲 1 之立方虛根之一，則

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c).$$

$$\text{今}\qquad a+b+c=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$$

$$=e^x;$$

$$\text{又}\qquad a+\omega b+\omega^2c=1+\omega x+\frac{\omega^2x^2}{\underline{|2}}+\frac{\omega^3x^3}{\underline{|3}}+\frac{\omega^4x^4}{\underline{|4}}+\frac{\omega^5x^5}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$$

$$=e^{\omega x};$$

$$\text{同法}\qquad a+\omega^2b+\omega c=e^{\omega^2x}.$$

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc=e^x\cdot e^{\omega x}\cdot e^{\omega^2x}=e^{(1+\omega+\omega^2)x}$$

$$=1\text{，因 } 1+\omega+\omega^2=0.$$

405. 求首 $n$ 自然數 $r$ 次羃之和.

使此和表以 $S_n$，於是

$$S_n=1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r.$$

假定

$$S_n=A_0n^{r+1}+A_1n^r+A_2n^{r-1}+A_3n^{r-2}+\cdots\cdots+A_rn+A_{r+1}\cdots(1),$$

$A_0,A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots$爲待定值之量.

以 $n+1$ 代 $n$，且相減；由是

$$(n+1)^r=A_0\{(n+1)^{r+1}-n^{r-1}\}+A_1\{(n+1)^r-n^r\}$$
$$+A_2\{(n+1)^{r-1}-n^{r-1}\}+A_3\{(n+1)^{r-2}-n^{r-2}\}+\cdots+A_r$$
$$\cdots\cdots\cdots(2).$$

展開 $(n+1)^{r+1}$，$(n+1)^r,(n+1)^{r-1},\cdots\cdots$且相等 $n$ 之同乘羃之係數. 由相等 $n^r$ 之係數，得

$$1=A_0(r+1)，由是\ A_0=\frac{1}{r+1}.$$

由相等 $n^{r-1}$ 之係數得

$$r=\frac{A_0(r+1)r}{2}+A_1r；由是\ A_1=\frac{1}{2}.$$

相等 $n^{r-p}$ 之係數，代 $A_0$ 及 $A_1$，且乘方程式左右以

$$\frac{p}{r(r-1)(r-2)-(r-p+1)};$$

由是得

$$1=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}+A_2\frac{p}{r}+A_3\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+A_4\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}+\cdots\cdots(3)$$

於 (1) 內以 $n-1$ 代 $n$ 且相減；由是

$$n^r=A_0\{n^{r+1}-(n-1)^{r+1}\}+A_1\{n^r-(n-1)^r\}+A_2\{n^{r-1}-(n-1)^{r-1}\}+\cdots\cdots$$

相等 $n^{r-p}$ 之係數且代 $A_0,A_1$；由是

$$0=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}+A_2\frac{p}{r}-A_3\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+A_4\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}\cdots\cdots(4)$$

由加法，及減法從（3）及（4）得

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}=A_2\frac{p}{r}+A_4\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}+\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$

$$0=A_3\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+A_5\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{r(r-1)(r-2)(r-3)}+\cdots\cdots(6).$$

由連續使 $p$ 之值為 2，4，6，………，從（6）知 $A_3$，$A_5$，$A_7$，…………… 各係數為零；又從（5）得

$$A_2=\frac{1}{6}\cdot\frac{r}{\underline{|2}}\cdot\ A_4=-\frac{1}{30}\cdot\frac{r(r-1)(r-2)}{\underline{|4}};$$

$$A_6=\frac{1}{42}\cdot\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{\underline{|6}};\ \cdots$$

由相等（2）內常數項，得

$$1=A_0+A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots\cdots+A_r;$$

又由使方程式（1）內 $n=1$，得

$$1=A_0+A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots+A_r+A_{r+1};$$

由是 $$A_{r+1}=0,$$

406．前節結果最便為表之以公式

$$S_n=\frac{n^{r+1}}{r+1}+\frac{1}{2}n^r+B_1\frac{r}{\underline{|2}}n^{r-1}-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{\underline{|4}}n^{r-3}$$

$$+B_5\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{\underline{|6}}n^{r-5}+\cdots$$

式內 $B_1=\frac{1}{6}$，$B_3=\frac{1}{30}$，$B_5=\frac{1}{42}$，$B_7=\frac{1}{30}$，$B_9=\frac{5}{66}$，….

$B_1$，$B_3$，$B_5$，……… 諸數稱為 *Bernoulli's Numbers*；應用於其他級數求和之例．可參考 *Boole* 氏之 *Finite Differences*.

例．求 $1^5+2^5+3^5+\cdots\cdots\cdots+n^5$ 之值，

$$S_n=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}B_1\frac{5}{\underline{|2}}n^4-B_3\frac{5.4.3}{\underline{|4}}n^2+C.$$

$$=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}.$$

其常數為零

## 習題 XXIX. c

求以下各級數之和：

1. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots$

2. $\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\cdots\cdots$

3. $x+\frac{x^5}{\underline{|5}}+\frac{x^9}{\underline{|9}}+\cdots\cdots$

4. $\frac{1}{\underline{|r}}+\frac{\underline{|2}}{\underline{|r+1}}+\frac{\underline{|3}}{\underline{|r+2}}+\cdots\cdots$

5. $1+2x+\frac{2^2-1}{\underline{|2}}\cdot\frac{x^2}{1}+\frac{3^2-1}{\underline{|3}}\cdot\frac{x^3}{2}+\frac{4^2-1}{\underline{|4}}\cdot\frac{x^4}{3}+\cdots\cdots$

6. $\frac{}{r}+\frac{p^{r-1}}{\underline{|r-1}}\cdot\frac{q}{1}+\frac{p^{r-2}}{\underline{|r-2}}\cdot\frac{q^2}{2}+\frac{p^{r-3}}{\underline{|r-3}}\cdot\frac{q^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$ 至$a+1$ 項

7. $\frac{n(1+x)}{1+nx}-\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{1+2x}{(1+nx)^2}$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot\frac{1+3x}{(1+nx)^3}-\cdots\cdots$$ 至$n$項,

8. $1+3\frac{2n+1}{2n-1}+5\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^2+\cdots\cdots$至$n$項.

9. $1-\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.2^2}-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2.2^2.3^2}+\cdots\cdots$至 $n+1$ 項

10. $(1+2)\log_e 2+\frac{1+2^2}{2}(\log_e 2)^2+\frac{1+2^3}{\underline{|3}}(\log_e 2)^3+\cdots\cdots$

11. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots\cdots$

12. $\frac{2}{\underline{|1}}+\frac{3}{\underline{|2}}+\frac{6}{\underline{|3}}+\frac{11}{\underline{|4}}+\frac{18}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$

13. $1+\frac{2x^2}{\underline{|2}}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{7x^4}{\underline{|4}}-\frac{23x^5}{\underline{|5}}+\frac{121x^6}{\underline{|6}}-\cdots\cdots$

14. 不假定公式；求以下級數之和：

(1) $1^6+2^6+3^6+\cdots\cdots+n^6$.　　(2) $1^7+2^7+3^7+\cdots\cdots+n^7$.

15. 求 $1^3+2^3+\frac{3^3}{\underline{|2}}+\frac{4^3}{\underline{|3}}+\frac{5^3}{\underline{|4}}+\cdots\cdots$之和.

19. 指明 $\frac{x}{(1-x)^2-cx}$之展開式內 $x^n$ 之係數爲

$$n\Big\{1+\frac{n^2-1}{\quad}c+\frac{(n^2-1)(n^2-4)}{\underline{|5}}c^2+\frac{(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{\underline{|7}}c^3+\cdots\cdots\Big\}.$$

17. $n$ 爲正整數求

$$2^n-(n-1)2^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{\underline{|2}}2^{n-4}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{\underline{|3}}2^{n-6}+\cdots\cdots$$ 之值；

又設 $n$ 爲 3 之倍數，指明

$$1-(n-1)+\frac{(n-2)(n-3)}{\underline{|2}}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots=(-1)^n.$$

18. 設 $n$ 爲大於 $3^3$之正整數，指明

$$n^3+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n-2^3)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}(n-4)^3+\cdots=n^2(n+3)2^{n-4}$$

19. 求下級數 $n$ 項之和：

(1) $\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\cdots\cdots$

(2) $\frac{5}{1.2}-\frac{3}{2.3}+\frac{9}{3.4}-\frac{7}{4.5}+\frac{13}{5.6}-\frac{11}{6.7}+\frac{17}{7.8}-\cdots\cdots$

20. 求無窮級數和，設其第 $n$ 項爲 $\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(n+1)(n+2)}$.

21. 設 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\cdots+c_nx^n$, $n$ 爲正整數，求 $(n-1)^2c_1+(n-3)^2c_3+(n-5)^2c_5+\cdots\cdots$ 之值

22. 求下級數 $n$ 項之和；

(1) $\frac{2}{1.5}-\frac{4}{5.7}+\frac{8}{7.17}-\frac{16}{17.31}+\frac{32}{31.65}-\cdots\cdots$

(2) $\frac{7}{1.2.3}-\frac{17}{2.3.4}+\frac{31}{3.4.5}-\frac{49}{4.5.6}+\frac{71}{5.6.7}-\cdots\cdots$

23. 設 $a<1$，求証 $(1+ax)(1+a^3x)(1+a^5x)\cdots\cdots$

$$=1+\frac{ax}{1-a^2}+\frac{a^4x^2}{(1-a^2)(1-a^4)}+\frac{a^9x^3}{(1-a^2)(1-a^4)(1-a^6)}+\cdots$$

24. 設 $A_r$ 爲

$$(1+x)^2\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\left(1+\frac{x}{2^2}\right)^2\left(1+\frac{x}{2^4}\right)^2\cdots\cdots\cdots$$

之展開式內 $x^r$ 之係數，求証

$$A_r=\frac{2^2}{2^r-1}(A_{r-1}+A_{r-2})\ \text{及}\ A_4=\frac{1072}{315}.$$

25. 設 $n$ 爲 6 之倍數，指明二級數

$$n-\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor\underline{3}}\cdot 3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\lfloor\underline{5}}\cdot 3^2-\cdots\cdot$$

$$n-\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor\underline{3}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\lfloor\underline{5}}\cdot\frac{1}{3^2}\cdots,$$

皆等於零.

26. 設 $n$ 爲正整數，指明

$$(p+q)^n-(n-1)pq(p+q)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{\lfloor\underline{2}}p^2q^2(p+q)^{n-4}-\cdots\cdots$$

等於 $\dfrac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$.

27. 設 $P_r=(n-r)(n-r+1)(n-r+2)\cdots\cdots(n-r+p-1)$,

$Q_r=r(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+q-1)$,

指明

$$P_1Q_1+P_2Q_2+P_3Q_3+\cdots\cdots+P_{n-1}Q_{n-1}=\frac{\lfloor\underline{p}\ \lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{n-1+p+q}}{p+q+1\ \lfloor\underline{n-2}},$$

28. 設 $n$ 爲 3 之倍數，指明

$$1-\frac{n-3}{2}+\frac{(n-4)(n-5)}{\lfloor\underline{3}}-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{\lfloor\underline{4}}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{r-1}\underline{(n-r-1)(n-r-2)\cdots(n-2r+1)}+\cdots$$

視 $n$ 爲奇或偶等於 $\dfrac{3}{n}$ 或 $-\dfrac{1}{n}$.

29. 設 $x$ 爲眞分數，指明

$$\frac{x}{1-x^2}-\frac{x^3}{1-x^6}+\frac{x^5}{1-x^{10}}-\cdots\cdots=\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^6}+\frac{x^5}{1+x^{10}}+\cdots\cdots$$

# 第三十章

## 數論

407. 本章內用"數"字表正整數之意義.

捨其本身及 1 外不能以任何數整除之數，名為質數；捨其本身及 1 外可以他數整除之數名為複質數；如 53 為質數而 35 為複質數. 捨 1 外無公因子之二數稱為互質數如 24 與 77 為互質數.

408. 此後常用以下之基本命題，其中若干由質數定義自然生出，可以公理視之.

($i$) 設數 $a$ 能約積 $bc$ 且與因子 $b$ 為互質數，則 $a$ 必能約因子 $c$.

因 $a$ 能約 $bc$，故 $a$ 之各因子必可於 $bc$ 內尋得；但 $a$ 於 $b$ 為互質數，故 $b$ 內無 $a$ 之因子. 由是所有 $a$ 之因子，可於 $c$ 求得；即 $a$ 能約 $c$.

($ii$) 設質數 $a$ 能約積 $bcd$……，則必能約盡其中因子之一；且由是設質數 $a$ 能約 $b^n$，$n$ 為任何正整數，則必能約 $b$.

($iii$) 設 $a$ 與 $b$ 及 $c$ 為互質數，則與積 $bc$ 亦為互質數. 因 $a$ 內無因子能約 $b$ 或 $c$；由是乘積 $bc$ 亦不能約以 $a$ 之任何因子，即 $a$ 與 $bc$ 為互質數. 反之設 $a$ 與 $bc$ 為互質數，則與 $b$ 及 $c$ 亦為互質數.

又設 $a$ 與 $b$, $c$, $d$,………中之每數爲互質數，則亦與乘積 $bcd$……………爲互質數；反之設 $a$ 與任何數爲互質數則亦與其數之各因子互爲質數.

(iv). 設 $a$ 及 $b$ 爲互質數，則 $a$ 之任何正整數器與 $b$ 之任何正整數器爲互質數，此可由 (iii) 推得.

(v) 設 $a$ 與 $b$ 爲互質數，則 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{a^n}{b^m}$ 爲最簡分數，$n$ 及 $m$ 爲任何正整數，又設 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$. 又設 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 爲二相等分數，及 $\frac{a}{b}$ 爲最簡分數，則 $c$ 及 $d$ 必各爲 $a$ 及 $b$ 之等倍數.

409. 質數之數爲無窮.

因設其不然；使 $p$ 爲最大質數；於是各因子爲質數之積 $2.3.5.7.11\cdots\cdots\cdots p$，能爲 2，3，5，7，11，…………… $p$ 中之任一因子約；且由加 1 於其積所成之數不能爲其中之任一因子所約；故必其本身爲一質數，或能爲大於 $p$ 之質數約；於任一情形內 $p$ 皆非最大質數，故質數之數爲無窮.

410. 無僅能表質數之有理代數式.

設其不然，使此式爲 $a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots\cdots$ 僅表質數並假使 $x=m$ 時此式之値爲 $p$，由是

$$p=a+bm+cm^2+dm^3+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

當 $x=m+np$ 時此式變爲

即 $\qquad a+b(m+np)+c(m+np)^2+d(m+np)^3+\cdots\cdots\cdots,$

或 $\qquad a+bm+cm^2+dm^3+\cdots\cdots\cdots+p$ 之倍數,

$$p+p\ \text{之倍數},$$

由是此式可爲 $p$ 約盡，故非質數.

411. 一數僅可由一法析爲質因數，.

使 $n$ 表此數；假使 $N=abcb\cdots\cdots\cdots\cdots$，其中 $a$, $b$, $c$, $d$,……… 爲質數. 又假使 $N=\alpha\beta\gamma\delta\cdots\cdots\cdots$，其中 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$,………爲其他質數. 於是

$$abcd\cdots\cdots\cdots=\alpha\beta\gamma\delta\cdots\cdots\cdots;$$

故 $\alpha$ 必能約 $abcd\cdots\cdots$；但此積中之因數皆爲質數，故 $\alpha$ 必能約其中之一，設爲 $a$. 但 $a$ 及 $d$ 皆爲質數；故 $\alpha$ 必等於 $a$. 由是 $bcd\cdots\cdots=\beta\gamma\delta\cdots\cdots$；又如前，$\beta$ 必等於 $bcd\cdots\cdots$ 中諸因子之一；類推.

故 $\alpha\beta\gamma\delta\cdots\cdots$ 諸因數等於 $abcd\cdots\cdots$ 諸因數，且由是知僅有一法能析 $N$ 爲質因數.

412．求複質數約數之數.

使 $N$ 表此數，又假使 $N=a^pb^qc^r\cdots\cdots$，$a$，$b$，$c$，……爲不同之質數，$p$，$q$，$r$ 爲正整數，於是積

$$(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)\cdots\cdots$$

中之每項顯然爲已知數之約數．且此外亦無其他約數；故約數之數爲此積內之項數，即

$$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$$

此如約數含 1 及數之本身.

413．求複質數能析爲二因數之析法之數.

使 $N$ 表此數，且假使 $N=a^p\,b^q\,c^r\cdots\cdots$，$a$，$b$，$c$，……爲不同之質數，$p$，$q$，$r$ 爲正整數．於是積

$$(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots\cdots+b^q)$$
$$(1+c+c^2+\cdots\cdots+c^r)\cdots\cdots$$

之每項爲 $N$ 之一約數，但相當析 $N$ 爲二因數之每法有二約數；故所求數爲

$$\tfrac{1}{2}(p+1)(q+1)(r+1)$$

此假使 $N$ 爲非完全平方，由是至少 $p$，$q$，$r\cdots\cdots$ 諸量中之一爲奇數.

設 $N$ 爲完全平方，則析法之一爲 $\sqrt{N}\times\sqrt{N}$ 且相當此法僅一約數 $\sqrt{N}$．設棄此則解法之數爲

$$\tfrac{1}{2}\{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots-1\},$$

且於此必加一法 $\sqrt{N}\times\sqrt{N}$；由是得所求數

$$\tfrac{1}{2}\{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots+1\}.$$

414．求一複質數析爲二互質因數之析法之數．

如前，使此數 $N=a^p b^q c^r\cdots\cdots$ 二因數之一必含 $a^p$，否則此因數含 $a$ 之乘羃，他因數亦含 $a$ 之乘羃，二因數不爲互質數．故其必值見於一因數內；類推．故所求數等於 $abc\cdots\cdots\cdots$ 析爲二因子之析法之數；卽方法之數爲 $\frac{1}{2}(1+1)(1+1)(1+1)\cdots\cdots\cdots$ 或 $2^{n-1}$，$n$ 爲$N$內相異質因數之數．

415．求一數之約數和．

如前使此數表以 $a^p\ b^q\ c^r\ \cdots\cdots\cdots$，於是積

$$(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots\cdots\cdots+c^r)\cdots\cdots\cdots$$

內之每項爲一約數．由是約數之和等於此積；卽

$$所求和=\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{r+1}-1}{c-1}\cdots\cdots\cdots$$

例 1．考究 21600．

因 $21600=6^3\cdot10^2=2^3\cdot3^3\cdot2^2\cdot5^2=2^5\cdot3^3\cdot5^2$，

$$約數之數=(5+1)(3+1)(2+1)=72;$$

$$約數之和=\frac{2^6-1}{2-1}\cdot\frac{3^4-1}{3-1}\cdot\frac{5^3-1}{5-1}$$

$$=63\times40\times31$$

$$=78120.$$

又 21600 能由 $2^{3-1}$ 或 4 法析爲二互質因數．

例 2．設 $n$ 爲奇數，指明 $n(n^2-1)$ 可約以 24．

已知 $n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$

因 $n$ 爲奇數故 $n-1$ 及 $(n+1)$ 爲二連續偶數；故其中之一可約以 2，他可約以 4．

又 $n-1$，$n$，$n+1$ 爲三連續數；故其中之一可約以 3．故已知式可約以 2，3，4 之積，卽 24．

例 3. 求含於$\lfloor 100$內之 3 之最高次冪.

首 100 個整數可以 3 約之數同於 100 內所含 3 之次數，即33；且此整數爲 3，6，9，……………99. 其中若干含 3 因數之二次冪，即 9，18，27，……………99，其數爲 100 除以 9 之商. 又上整數中之若干含因子 3 之三次冪即 27，54，81，其數爲 100 除以 27 之商僅 81 一數含 2 之四次冪.

故所求最高次冪$=33+11+3+1=48$.

此例爲下節研究之定理之特殊情形.

416. 求$\lfloor n$內所含質數 $a$ 之最高次冪.

使$\frac{n}{a}$，$\frac{n}{a^2}$，$\frac{n}{a^3}$，………內所含最大整數各表以$I\left(\frac{n}{a}\right)$ $I\left(\frac{n}{a^2}\right)$，$I\left(\frac{n}{a^3}\right)$，………………於是在 1，2，3，…………$n$ 諸數中，有 $I\left(\frac{n}{a}\right)$ 至少含 $a$ 一次即 $a$，$2a$，$3a$，$4a$，………諸數，同理有$I\left(\frac{n}{a^2}\right)$至少含 $a^2$ 一次，及 $I\left(\frac{n}{a^3}\right)$ 至少含 $a^3$ 一次；類推. 故$\lfloor n$ 內所函 $a$ 之最高次冪爲

$$I\left(\frac{n}{a}\right)+I\left(\frac{n}{a^2}\right)+I\left(\frac{n}{a^3}\right)+\cdots\cdots\cdots$$

417. 本章此後以符號 $M(n)$ 表 $n$ 之倍數.

418. 求証 $r$ 連續整數之積可約以$\lfloor r$.

使 $P_n$ 代此 $r$ 連續整數之積，此連續數中之最小數爲 $n$；於是

$$P_n=n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1),$$

$$P_{n+1}=(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+r)$$

$$\therefore\ nP_{n+1}=(n+r)P_n=nP_n+rP_n;$$

$$\therefore\ P_{n+1}-P_n=\frac{P_n}{n}\times r$$

$$=r\text{倍}r-1\text{連續整數之積}$$

故設 $r-1$ 連續數之積可約以 $r-1$，則得

$$P_{n+1}-P_n=rM(\underline{|r-1}).$$

$$=M(\underline{|r}).$$

茲 $P_1=\underline{|r}$，由是 $P_2$ 爲 $\underline{|r}$ 之倍數，$P_3$，$P_4$……………亦爲 $\underline{|r}$ 之倍數．由是證明設 $r-1$ 連續整數之積可以 $\underline{|r-1}$ 約則 $r$ 連續整數可以 $\underline{|r}$ 約；但任何二連續數之積可約以 $\underline{|2}$；故任三連，續數之積可約以 $\underline{|3}$；類推至一般．

本命題亦可如下証明：

由 §416，可指出含於 $\underline{|n+r}$ 內之每質因數之次數至少同於 $\underline{|n}\ \underline{|r}$ 內所含者．

此如一練習題使學生證之．

419．設 $p$ 爲質數，則 $(a+b)^p$ 之展開式，除首末二項外，之各係數皆可約以 $p$.

首末二項外，各項係數之形式爲

$$\frac{p(p-1)(p-2)\cdots\cdots(p-r+1)}{\underline{|r}},$$

$r$ 可爲不大於 $p-1$ 之任何整數；今此式爲一整數；又因 $p$ 爲質數，故無 $\underline{|r}$ 內之因數爲其約數，又因 $p$ 大於 $r$，不能約 $\underline{|r}$ 內之任何因數；即 $(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)$ 必能約以 $\underline{|r}$. 故首末二項外，每係數皆可約以 $p$.

420．設 $p$ 爲質數，求証

$$(a+b+c+d+\cdots\cdots)^p=a^p+b^p+c^p+d^p+\cdots\cdots+M(p).$$

以 $\beta$ 代 $b+c+\cdots\cdots$；於是由前節

$$(a+\beta)^p=a^p+\beta^p+M(p)$$

又設 $\beta^p=(b+c+d+\cdots\cdots)^p=(b+\gamma)^p$；

$$=b^p+\gamma^p+M(p)$$

照此法進行可得所求之結果．

421. 悲而夫定理［*Fermat's Theorem*］. 設 $p$ 爲質數及 $N$ 爲 $p$ 之互質數，則 $N^{p-1}-1$ 爲 $p$ 之倍數.

已証

$$(a+b+c+d+\cdots\cdots)^p=a^p+b^p+c^p+d^p+\cdots\cdots+M(p);$$

使 $a$, $b$, $c$, $d$,………諸址中每址等於 1，又設址之數爲 $n$；

於是　$N^p=N+M(p)$

即　$N(N^{p-1}-1)=M(p)$.

但 $N$ 與 $p$ 爲互質數；故 $N^{p-1}-1$ 爲 $p$ 之倍數.

推論. 因 $p$ 爲質數 故捨 $p=2$ 外，$p-1$ 爲偶數.

由是　$$\left(N^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\left(N^{\frac{p-1}{2}}-1\right)=M(p).$$

故　$N^{\frac{p-1}{2}}+1$ 或 $N^{\frac{p-1}{2}}-1$ 爲 $p$ 之倍數.

即　$N^{\frac{p-1}{2}}=Kp\pm1$，$K$ 爲某正整數.

422. 應注意 §421 內指示 $N^p-N=M(p)$，$N$ 與 $p$ 爲互質數或否；此結果有時較悲而夫氏定理爲用尤廣.

例 1. 指出 $n^7-n$ 可約以 42.

因 7 爲質數，　$n^7-n=M(7)$；

又　$$n^7-n=n(n^6-1)=n(n+1)(n-1)(n^4+n^2+1).$$

今 $(n-1)n(n+1)$ 可約以 3；故 $n^7-n$ 可約以 $6\times7$，或 42.

例 2. 設 $p$ 爲質數，指出任二數 $p$ 次冪之差大過二數之差以 $p$ 之倍數.

使 $x$，$y$ 表二數；於是

$$x^p-x=M(p) \text{ 及 } y^p-y=M(p)$$

即　$$x^p-y^p-(x-y)=M(p);$$

由是得所求結果.

例 3. 求証任何平方數之形爲 $5n$ 或 $5n\pm1$.

設 $N$ 與 5 不互爲質數，則 $N^2=5n$，$n$爲某正整數. 設 $N$ 與 5 互爲質數，則由悲而夫氏定理 $N^4-1$ 爲 5 之倍數. 由是 $N^2-1$ 或 $N^2+1$ 爲 5 之倍數；即 $N^2=5n\pm1$.

## 習　題 XXX a.

1. 求 3675, 4374, 18375, 74088 各數可使其積爲完全平方之最小倍數.

2. 求 7623, 109350, 539539 各數可使其積爲完全立方之最小倍數.

3. 設 $x$ 及 $y$ 爲正整數，$x-y$ 爲偶數，指明 $x^2-y^2$ 可約以 4.

4. 指明任何數與其平方之差爲偶數.

5. 設 $4x-y$ 爲 3 之倍數，指明 $4x^2+7xy-2y^2$ 可約以 9.

6. 求 8064 之約數.

7. 7056 可由若干法析爲二因數?

8. 求証 $2^{4n}-1$ 能約以 15.

9. 求証 $n(n+1)(n+5)$ 爲 6 之倍數,

10. 指明任一數及其立方除以 6 時，其餘數相同.

11. 設 $n$ 爲偶數，指明 $n(n^2+20)$ 可以 48 整除.

12. 指明 $n(n^2-1)(3n+2)$ 可約以 24.

13. 設 $n$ 大於 2，指明 $n^5-5n^3+4n$ 可約以 120.

14. 求証 $3^{2n}+7$ 爲 8 之倍數.

15. 設 $n$ 爲大於 3 之質數，指明 $n^2-1$ 爲 24 之倍數.

16. 指明 $n^5-n$ 可約以 30 於 $n$ 之所有値，又設 $n$ 爲奇數則可約以 240.

17. 指明平方差大於 6 之任何二質數，可約以 24.

18. 指明無形爲 $3n-1$ 之平方數,

19. 指明任何立方數之形式爲 $9n$ 或 $9n\pm1$.

20．指明設一立方數可約以 7，則其餘數爲 0，1 或 6.

21．設某數兼爲平方數及立方數，指明其形式爲 $7n$或$7n+1$.

22．指明無形爲 $3n-1$ 之三角數.

23．設 $2n+1$ 爲質數，指明 $1^2$，$2^2$，$3^2$，$\cdots\cdots\cdots n^2$ 除以 $2n+1$ 時餘不同之餘數.

24．指明無論 $a$ 及 $x$ 爲何值，$a^x+a$ 及 $a^x-a$ 永爲偶數.

25．求証每奇數之每偶次冪之形式爲 $8r+1$.

26．求証任何數之 12 次冪之形式爲 $13n$或 $13n+1$.

27．求証任何數之 8 次冪之形式爲 $17n$ 或 $17n\pm1$.

28．設 $n$ 爲大於 5 之質數，指明 $n^4-1$ 可約以 240.

29．設 $n$ 爲 7外 大於 3 之任何質數指明 $n^6-1$ 可約以 168.

30．設 $n$ 與 2，3，19，及 37 爲互質數，指明 $n^8-1$ 可整除以 33744.

31．設 $x$ 與 2，$p+1$，及 $2p+1$ 爲互質數，指明當 $p+1$ 及 $2p+1$ 皆爲質數時，$x^{2p}-1$ 可約以 $8(p+1)(2p+1)$.

32．設 $p$ 爲質數，及 $x$ 與 $p$ 爲互質數，指明 $x^{p^r-p^{r-1}}-1$ 可整除以 $p^r$.

33．設 $m$ 爲質數，$a$，$b$ 爲小於 $m$ 之二數，求証

$$a^{m-2}+a^{m-3}b+a^{m-4}b^2+\cdots\cdots\cdots+b^{m-2}$$

爲 $m$ 之倍數.

423．設 $a$ 爲任何數，則任一他數 $N$ 可表以 $N=aq+r$ 之形式，$q$ 爲 $N$ 除以 $a$ 時之整商，$r$ 爲小於 $a$ 之餘數，此他數借以參考之數 $a$ 有時稱爲數率；對任何已知數率 $a$ 一數有 $a$ 不同之形式，每形式相當 $r$ 一不同之值．例如對數率 3，有不同形式 $3q$，$3q\pm1$，

$3q+2$；因 $3q+2$ 即等於 $3(q+1)-1$；故或更簡爲 $3q$，$3q\pm1$，同理任一數對數率 5 必爲 $5q$，$5q\pm1$，$5q\pm2$ 五形式中之一.

424. 設 $b$，$c$ 爲除以 $a$ 時餘數相同之二整數，則稱 $b$，$c$ 關於數率 $a$ 一致於此情形內 $b-c$ 爲 $a$ 之倍數，照哥斯氏 (Gauss) 符號有時可表之如下：

$$b\equiv c(mod.a)，\text{或}\ b-c\equiv o\ (mod.a),$$

二公式皆稱爲相一致公式.

425. 設 $b$，$c$ 關於數率 $a$ 一致，則 $pb$ 及 $pc$ 亦爲一致，$p$ 爲任意整數.

因由假設 $b-c=na$，$n$ 爲某整數；故 $pb-pc=pna$；此証明本命題.

426. 設 $a$ 與 $b$ 爲互質數，及諸量

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots\cdots\cdots\ (b-1)a$$

除以 $b$，則餘數皆不相同.

因設其可能．使 $ma$ 及 $m'a$ 二量除以 $b$ 時餘同數 $r$，由是

$$ma=qb+r,\qquad m'a=q'b+r;$$

於是 $$(m-m')a=(q-q')b;$$

由是 $b$ 能約 $(m-m')a$；因其與 $a$ 爲互質數，故能約 $m-m'$；但因 $m$ 及 $m'$ 皆小於 $b$，故此爲不可能.

由是諸餘數皆不相同，且因無一量能約以 $b$，故餘數必爲級數 1，2，3，………… $b-1$ 內之項，但無須必依此順序.

推論．設 $a$ 與 $b$ 爲互質數，$c$ 爲任一數，則 $A.P.$ 之 $b$ 項

$$c,\ c+a,\ c+2a,\cdots\cdots\cdots\ c+(b-1)a,$$

除以 $b$ 時，將與級數

$$c,\ c+1,\ c+2,\cdots\cdots\ c+(b-1),$$

內之項餘相同餘數，雖則順序不定相同；且由是其餘數爲 $0,1,2,\cdots\cdots\cdots, b-1$.

427. 設 $b_1, b_2, b_3,\cdots\cdots$ 各與 $c_1, c_2, c_3,\cdots\cdots$ 關於數率 $a$ 一致，則積 $b_1\ b_2\ b_3\cdots\cdots$，及 $c_1\ c_2\ c_3\cdots\cdots$ 亦一致.

因由假設

$$b_1-c_1=n_1a,\quad b_2-c_2=n_2a,\quad b_3-c_3=n_3a\cdots\cdots,$$

$n_1, n_2, n_3,\cdots\cdots$ 爲整數.

$$\therefore\ b_1\ b_2\ b_3\cdots\cdots=(c_1+n_1a)(c_2+n_2a)(c_3+n_3a)\cdots\cdots$$
$$=c_1c_2c_3\cdots\cdots+M(a),$$

此證明本命題.

428. 茲與惠而夫定理以另一證明

設 $p$ 爲質數，及 $N$ 與 $p$ 爲互質數，則 $N^{p-1}-1$ 爲 $p$ 之倍數. 因 $N$ 與 $p$ 爲互質數，故諸數

$$N,\ 2N,\ 3N,\ \cdots\cdots(p-1)\ N\cdots\cdots\cdots(1)$$

除以 $p$ 時得餘數

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ p-1\ \cdots\cdots\cdots(2)$$

雖則不定依此順序. 故 (1) 內諸項之積與(2)內諸項之積一致，$p$ 爲其數率.

即 $\underline{|p-1}\ N^{p-1}$ 及 $\underline{|p-1}$ 除以 $p$ 時餘同餘數；故

$$\underline{|p-1}(N^{p-1}-1)=M(p)$$

但 $\underline{|p-1}$ 與 $p$ 爲互質數；故得

$$N^{p-1}-1=M(p).$$

429. 茲表小於 $a$ 且與 $a$ 爲互質數之整數之數以符號 $\phi(a)$；如 $\phi(2)=1$. $\phi(13)=12$; $\phi(18)=6$; 小於 18 且與之互爲質數之整數爲 1, 5, 7, 11, 13, 17. 於此視 1 爲所有數之互質數.

430．指明設諸數 $a$，$b$，$c$，$d$，…………爲互質數，則

$\phi(abcd\cdots\cdots\cdots)=\phi(a)\cdot\phi(b)\cdot\phi(c)\cdots\cdots\cdots\cdots$

考究乘積 $ab$；於是首 $ab$ 數可寫爲 $b$ 行，每行含 $a$ 數；如

$$1,\quad 2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; k,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a$$

$$a+1,\; a+2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a+k,\;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a+a$$

$$2a+1, 2a+2,\;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2a+k,\;\cdots\cdots\cdots\cdots 2a+a,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(b-1)a+1,\; (b-1)a+2,\cdots\cdots\cdots(b-1)a+k,\cdots\cdots(b-1)a+a.$$

玆考究以 $k$ 始之列，設 $k$ 與 $a$ 爲互質數，則所有本列各項皆與 $a$ 爲互質數；但設 $a$ 與有一公約數則本列無與 $a$ 互爲質數之數；玆首行含 $\phi(a)$ 數與 $a$ 互爲質數；故有 $\phi(a)$ 列每內之各項與 $a$ 互爲質數，假使以 $k$ 始之列卽爲此中之一列．此列爲一 $A.P.$ 其各項當除以 $b$ 時餘 0，1，2，3，…………$b-1$［§456 推論］；故此列含 $\phi(b)$ 與 $b$ 爲互質數之整數．

同法證，每項與 $a$ 爲互質數之 $\phi(a)$ 縱列中之每列含 $\phi(b)$ 與 $b$ 爲互質數之數；故此表內有 $\phi(a)\cdot\phi(b)$ 整數與 $a$ 及 $b$，且由是與 $ab$ 互爲質數；卽

$$\phi(ab)=\phi(a).\phi(b).$$

$$\text{故}\,\phi(abcd\cdots)=\phi(a).\phi(bcd\cdots)$$

$$=\phi(a).\phi(b).\phi(cd\cdots)$$

$$=\phi(a).\phi(b).\phi(c).\phi(d)\cdots\cdots$$

431．求小於已知數且與之互爲質數之正整數之數

使 $N$ 表此數，且假使 $N=a^pb^qc^r$ …………，$a$，$b$，$c$，…………爲不同之質數，$p,q,r$ 爲正整數．考究因數 $a^p$；自然數 1，2，3……………$a^p-1$，$a^p$ 中不與 $a$ 爲互質數之數僅

$a$，$2a$，$3a$，…………$(a^{p-1}-1)a$，$(a^{p-1})a$，

且其數爲 $a^{p-1}$；故

$$\phi(a^p)=a^p-a^{p-1}=a^p(1-\tfrac{1}{a}).$$

今所有因數 $a^p$，$b^q$，$c^r$，……爲互質數．

$$\therefore\ \phi(a^pb^qc^r\cdots)=\phi(a^p)\cdot\phi(b^q)\cdot\phi(c^r)\cdots$$
$$=a^p\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot b^q\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdot c^r\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots$$
$$=a^pb^qc^r\cdots\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots;$$

即　$$\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots$$

例．指明小於 $N$ 且與之互爲質數之所有整數之和爲 $\frac{1}{2}N\phi(N)$．

設 $x$ 爲小於 $N$ 且與之互爲質數之任一整數，於是 $N-x$ 亦爲小於 $N$ 且與之互爲質數之整數．

表諸整數以 1　$p$，$q$，$r$，………………，及其和以 $S$；則

$$S=1+p+q+r+\cdots+(N-r)+(N-q)+(N-p)+(N-1).$$

此級數含 $\phi(N)$ 項．

反級數之順序

$$S=(N-1)+(N-p)+(N-q)+(N-r)+\cdots\cdots+r+q+p+1$$

∴ 由加法，$2S=N+N+N+\cdots\cdots$至 $\phi(N)$項；

$$\therefore\ S=\tfrac{1}{2}N\phi(N).$$

432．由上節知小於 $N$ 且不與之互爲質數之整數之數爲

$$N-N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{1}{d}\right)\cdots;$$

$$\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}+\cdots-\frac{N}{ab}-\frac{N}{ac}-\frac{N}{bc}-\cdots+\frac{N}{abc}+\cdots\cdots$$

於此由 $\frac{N}{a}$ 項得整數

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\frac{N}{a}\cdot a$$

之數．皆含 $a$ 爲因數；由項 $\frac{N}{ab}$ 得整數 $ab$，$2ab$，$3ab$，……$\frac{N}{ab}$

數，此皆含 $ab$ 爲因數，類推．可將每整數計一次，且僅計一次；例如，$ab$ 之每一倍數，於 $a$ 之倍數內現一次，於 $b$ 之倍數內現一次，而於 $ab$ 之倍數內否定一次，故僅計一次．又 $abc$ 之每倍數將現於爲 $a$，$b$，$c$ 之倍數之 $\frac{N}{a}$，$\frac{N}{b}$，$\frac{N}{c}$ 項內；$ab$，$ac$，$bc$ 之倍數之 $\frac{N}{ab}$，$\frac{N}{ac}$，$\frac{N}{bc}$ 內及 $abc$ 之倍數之 $\frac{N}{abc}$ 內；即因 $3-3+1=1$，$abc$ 之每倍數皆發現一次，且僅只一次．其他情形，亦可同樣研究．

433．威爾遜氏定理 [*wilson's Theorem*]．設 $p$ 爲質數，則 $1+|\underline{p-1}$ 可約以 $p$.

由 §314 例 2，知

$$|\underline{p-1}=(p-1)^{p-1}-(p-1)(p-2)^{p-1}+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-3)^{p-1}$$

$$-\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{|\underline{3}}(p-4)^{p-1}+\cdots\text{至 } p-1\text{ 項}.$$

又由惠而夫氏定理，$(p-1)^{p-1}$，$(p-2)^{p-1}$，$(p-3)^{p-1}$，………諸式中之每式皆屬於 $1+M(p)$ 之形式；例如

$$|\underline{p-1}=M(p)+\left\{1-(p-1)+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}-\cdots\text{至 } p-1\text{ 項}\right\}$$

$$=M(p)+\left\{(1-1)^{p-1}-(-1)^{p-1}\right\}$$

$$=M(p)-1，\text{因 } p-1 \text{ 偶數}$$

$$\text{故}\quad 1+|\underline{p-1}=M(p).$$

此定理僅於 $p$ 爲質數時爲真．因設 $p$ 有一因數 $q$；則 $q$ 必小於且能約 $|\underline{p-1}$；故 $1+|\underline{p-1}$ 非 $q$ 之倍數，且由是非 $p$ 之倍數．

威爾遜氏定理亦不用由 §314 引來之結果，如下節證之．

434. [威爾遜氏定理]，設 $p$ 爲質數，則 $1+|\underline{p-1}$ 能爲 $p$ 約盡.

使 $a$ 表

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots(p-1)\cdots\cdots(1).$$

中之任一數，於是 $a$ 與 $p$ 爲互質數，又設諸積

$$1.a,\ 2.a,\ 3.a,\ \cdots\cdots(p-1)a$$

除以 $p$，則其中之一，且僅一之除數爲 1. [§426]

使此爲積 $ma$；則可指出捨 $a=p-1$ 或 1 外 $m$ 及 $a$ 二數不相同. 因設 $a^2$ 除以 $p$ 時之餘數爲 1，則得

$$a^2-1\equiv o\ (mod.\ p),$$

因 $p$ 爲質數，故僅於 $a+1=p$ 或 $a-1=0$ 時，即當 $a=p-1$ 或 1 時可以如此.

故諸積 $2a,\ 3a,\ \cdots\cdots(p-2)a$ 中之一，且僅一除以 $p$ 時得餘數 1；即 (1) 內之任一數，捨首末二數外，連續求得每二數之積之形爲 $M(p)+1$.

由是 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots\ (p-2)$ 偶數個數，能組爲 $M(p)+1$ 之形式之各對.

由是所有諸對數相乘，得

$$2.3.4\ \cdots\ (p-2)=M(p)+1;$$

即 $1.2.3.4\ \cdots\ (p-1)=(p-1)\{M(p)+1\}$;

於是 $|\underline{p-1}=M(p)+p-1$;

或 $1+|\underline{p-1}$ 爲 $p$ 之一倍數.

**推論.** 設 $2p+1$ 爲質數，則 $(|\underline{p})^2+(-1)^p$ 爲 $2p+1$ 約盡.

因由威爾遜氏定理 $1+|\underline{2p}$ 可爲 $2p+1$ 約盡. 使 $n=2p+1$，由是 $p+1=n-p$：於是

$$|\underline{2p}=1.2.3.4\cdots\cdots p(p+1)(p+2)\cdots\cdots(n-1)$$
$$=1(n-1)2(n-2)3(n-3)\ \cdots p(n-p)$$
$$=n+(-1)^p(|\underline{p})^2\text{之倍數}.$$

故 $1+(-1)^p(|\underline{p})^2$ 可以 $n$ 或 $2p+1$ 約盡，$(|\underline{p})^2+(-1)^p$ 可以 $2p+1$ 約盡.

435. 甚多關於數之性質之定理能以歸納法証明之.

例 1. 設 $p$ 為質數，則 $x^p-x$ 可約以 $p$.

使 $x^p-x$ 表以 $f(x)$；於是

$$f(x+1)-f(x)=(x+1)^p-(x+1)-(x^p-x)$$
$$=px^{p-1}+\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}+\cdots\cdots+px$$
$$=p \text{ 之倍數，設 } p \text{ 為質數 [§419]}$$

$\therefore f(x+1)=f(x)+p$ 之倍數.

由是設 $f(x)$ 可為 $p$ 約盡，則 $f(x+1)$ 亦可為 $p$ 約盡；

但 $f(2)=2^p-2=(1+1)^p-2$,

且當 $p$ 為質數時為 $p$ 之倍數 [§419]；故 $f(3)$ 可為 $p$ 約盡，故 $f(4)$ 可為 $p$ 約盡.類推；由是此命題全眞.

因設 $x$ 與 $p$ 為互質數；則 $x^{p-1}-1$ 為 $p$ 之倍數，故此又與惠而夫氏定理以另一證明.

例 2. 求証 $5^{2n+2}-24n-25$ 可為 576 約盡.

使 $5^{2n+2}-24n-25$ 表以 $f(n)$；

於是 $$f(n+1)=5^{2n+4}-24(n+1)-25$$
$$=5^2.5^{2n+2}-24n-49;$$

$$\therefore f(n+1)-25f(n)=25(24n+25)-24n-49$$
$$=576(n+1).$$

由是設 $f(n)$ 可為 576 約盡，則 $f(n+)$ 亦可；但由試驗知 $n=1$ 時此定理為眞，故 $n=2$ 時為眞，$n=3$ 時為眞，類推：故此定理全眞.

上結果亦可証明如下：

$$5^{2n+2}-24n-25=25^{n+1}-24n-25$$
$$=25(1+24)^n-24n-25$$
$$=25+25.n.24+M(24^2)-24n-25$$
$$=576n+M(576)$$
$$=M(576).$$

## 習 題 XXX.b.

1. 指明 $10^n+3\cdot4^{n+2}+5$ 可為 9 約盡.

2. 指明 $2\cdot7^n+3\cdot5^n-5$ 為 24 之倍數.

3. 指明 $4.6^n+5^{n+1}$ 除以 20 時之餘數為 9.

4. 指明 $8.7^n+4^{n+2}$ 屬於 $24(2r-1)$之形式.

5 設 $p$ 為質數，指明 $2\,\underline{|p-3}+1$ 為 $p$ 之倍數.

6. 指明 $a^{4b+1}-a$ 可為 30 約盡.

7. 指明 $\underline{|2^r-1}$ 內 2 之最高次冪為 $2^r-r-1$.

8. 求証 $3^{4n+2}+5^{2n+1}$ 為 14 之倍數.

9. 指明 $3^{2n+5}+160n^2-56n-243$ 可約以 512.

10. 求証 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{n-1}$ 之展開式內 $x$ 奇次冪之係數和，當 $n$ 為 5 外之質數時可為 $n$ 約盡.

11. 設 $n$ 為大於 7 之質數，指明 $n^6-1$ 可為 504 約盡.

12. 設 $n$ 為奇數，求証 $n^6+3n^4+7n^2-11$ 為 128 之倍數.

13. 設 $p$ 為質數，指明 $(1+x)^{p-1}$ 之各項之係數輪次較 $p$ 之某倍數大 1 或小 1.

14. 設 $p$ 為質數，指明公差不能為 $p$ 約盡之 $A.P.$ 內任 $p$數之 $p-1$ 次冪之和較 $p$ 之倍數少 1.

15. 設 $a$ 及 $b$ 皆與 91 為互質數，指明 $a^{12}-b^{12}$ 可為 91約盡.

16. 設 $p$ 為質數，指明$\underline{|p-2r}\,\underline{|2r-1}-1$ 可為 $p$ 約盡.

17. 設 $n-1$，$n+1$ 皆為大於 5 之質數. 指明 $n(n^2-4)$ 可為 120 約盡，及 $n^2(n^2+16)$ 可為 720 約盡. 又指明 $n$ 必為 $30t$ 或 $30t\pm 12$ 之形式.

18. 指明 $\underline{|n^r-1}$ 內 $n$ 之最高次冪等於

$$\frac{n^r-nr+r-1}{n-1}$$

19. 設 $p$ 為質數，$a$ 與 $p$ 為互質數，又設能求得 $c^2-a$ 可為 $p$ 約盡之平方數 $c^2$，指明 $a^{\frac{1}{2}(p-1)}-1$ 可為 $p$ 約盡.

20. 求一致式

$$98x-1\equiv o\ (mod.139)$$

之一般解答.

21. 指明小於已知數 $N$ 且與之爲互質數之所有數之平方和爲

$$\frac{N^3}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots+\frac{N}{6}(1-a)(1-b)(1-c)\cdots\cdots$$

又其立方和爲

$$\frac{N^4}{4}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots+\frac{N^2}{4}(1-a)(1-b)(1-c)\cdots\cdots$$

$a$, $b$, $c$, ………… 爲 $N$ 內不同之質因數.

22. 設 $p$ 及 $q$ 爲任二正整數，指明 $\lfloor pq$ 可爲 $(\lfloor p)^q\cdot\lfloor q$ 及 $(\lfloor q)^p\cdot\lfloor p$ 所約盡.

23. 指明 $\frac{1}{1-6x+x^2}$ 之展開式內 $x$ 乘冪之係數之平方爲四角數亦爲三角數給出之數，又

$$\frac{1}{1-10x+x^2}$$

之展開式內 $x$ 之係數爲平方數亦爲五角數.

24. 求證小於 $N$ 且行之爲互質數所有數之四次冪之和爲

$$\frac{N^5}{5}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots+\frac{N^3}{3}(1-a)(1-b)(1-b)\cdots$$

$$-\frac{N}{30}(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\cdots,$$

$a$, $b$, $c$, …………爲 $N$ 之不同質因數.

25. 設 $\phi(N)$ 爲小於 $N$ 且與之爲互質數之整數之數，$x$ 與 $N$ 爲互質數，指明

$$x^{\phi(N)}-1\equiv o\ (mod.N).$$

26. 設 $d_1$, $d_2$, $d_3$, ……… 表 $N$ 之約數，則

$$\phi(d_1)+\phi(d_2)+\phi(d_3)+\cdots\cdots\cdots\cdots=N.$$

又

$$\phi(1)\frac{x}{1+x^2}-\phi(3)\frac{x^3}{1+x^6}+\phi(5)\frac{x^5}{1+x^{10}}-\cdots\cdots\text{至無窮}=\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

# 第三十一章

## 輾轉分數通論

*436. 第二十五章曾研究形爲 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}$ ………之輾轉分式之性質，$a_2$，$a_3$，………爲正整數，$a_1$ 爲正整數或零．茲考究較爲一般形式之輾轉分式．

*437. 輾轉分式之最一般形式爲

$$\frac{b_1}{a_1\pm}\ \frac{b_2}{a_2\pm}\ \frac{b_3}{a_3\pm}\cdots\cdots\cdots,\quad a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots\cdots,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\cdots\cdots$$

表任何量．

分數 $\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_2}{a_2}$，$\frac{b_3}{a_3}$，………稱爲此輾轉分式之份子，茲祇注意於兩種情形；(I) 其中各份子前之符號爲正．(II) 其中各份子前之符號爲負．

*438. 構成輾轉分式

$$\frac{b_1}{a_1+}\ \frac{b_2}{a_2+}\ \frac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots\cdots$$

諸連續收斂值構成法則之研究．

其首三收斂值爲

$$\frac{b_1}{a_1},\quad \frac{a_2b_1}{a_2a_1+b_2},\qquad \frac{a_3\cdot a_2b_1+b_3\cdot b_1}{a_3(a_2a_1+b_2)+b_3\cdot a_1}.$$

其三次收斂值之構成爲乘二次收斂值之分子以 $a_3$，一次收斂值之分子以 $b_3$ 而加其結果；其分母亦可由同法構成．

假使諸連續形收斂值由同法構成；使諸分子表以 $p_1$, $p_2$, $p_3$, ……………, 諸分母表以 $q_1$, $q_2$, $q_3$, ………….

假定此構成法則適用於 $n$ 次收斂值；即假使

$$p_n=a_np_{n-1}+b_np_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2}.$$

則其 $n+1$ 次與 $n$ 次收斂值之別，僅爲易 $a$ 以 $a_n+\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$；

故其 $n+1$ 次收斂值

$$=\frac{\left(a_n+\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)p_{n-1}+b_np_{n-2}}{\left(a_n+\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)q_{n-1}+b_nq_{n-2}}=\frac{p_n+\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}p_{n-1}}{q_n+\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}q_{n-1}}=\frac{a_{n+1}p_n+b_{n+1}p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+b_{n+1}q_{n-1}}.$$

由是設使

$$p_{n+1}=a_{n+1}p_n+b_{n+1}p_{n-1},\quad q_{n+1}=a_{n+1}q_n+b_{n+1}q_{n-1}.$$

則知 $n+1$ 次收斂值之分子分母合於假使適用於 $n$ 次收斂值之構成法則．但此法則適用於三次收斂值；故亦適用於四次；餘類推；由是適用於一切．

*439． 於帳轉分式爲

$$\frac{b_1}{a_1-}\;\frac{b_2}{a_2-}\;\frac{b_3}{a_3-}\;\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

之情形內，可證明

$$p_n=a_np_{n-1}-b_np_{n-2}\quad q_n=a_nq_{n-1}-b_nq_{n-2};$$

此結果可由易 $b_n$ 之符號從前節導出．

*440．於帳轉分式

$$\frac{b_1}{a_1+}\;\frac{b_2}{a_1+}\;\frac{b_3}{a_3+}\;\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

內已知

$$p_n=a_np_{n-1}+b_np_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2}.$$

$$\therefore\quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(a_{n+1}p_n+b_{n+1}p_{n-1})q_n-(a_{n+1}q_n+b_{n+1}q_{n-1})p_n}{q_{n+1}q_n}$$

$$=-\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right);$$

但 $$\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}=\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{a_{n+1}q_n+b_{n+1}q_{n-1}},$$

由是爲一眞分數；故 $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\dfrac{p_n}{q_n}$ 絕對值小於 $\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 而符號相反.

如 §335 解釋可指出各奇次收斂值皆大於此輾轉分式；各偶次收斂值皆小於此輾轉分式；故任一奇次收斂值大於任一偶次收斂值.

由是 $\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}-\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}$ 爲正量且小於 $\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}-\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}$；故

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}<\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

又 $\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}-\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}$ 爲正量且小於 $\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}-\dfrac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}$；故

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}}>\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}.$$

故奇次收斂值皆大於其輾轉分式但遞減，偶次收斂值皆小於其輾轉分式但遞增.

茲假使份子之數爲無窮，則奇次之諸收斂值必漸近一固定極限，偶次之諸收斂值亦必漸近一固定極限，設此二極限相等則此輾轉分式傾向一固定極限．設其不等，則奇次諸收斂值傾向一極限，偶次諸收斂值傾向一不同極限，而此輾轉分式稱爲擺動輾轉分式；於此情形內輾轉分式爲二量之符號表示，其一爲奇次收斂值之極限，他則爲偶次收斂值之極限.

*441. 設$\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}$當 $n$ 爲無窮大時之極限大於零，指明輾轉分數$\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots$有一限定值.

設$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$及$\frac{p_n}{q_n}$極限之差爲零，則此輾轉分式當 $n$ 爲無窮大時有一限定值.

茲
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=-\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right);$$

由是

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=(-1)^{n-1}\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\cdot\frac{b_nq_{n-2}}{q_n}\cdots\frac{b_4q_2}{q_4}\cdot\frac{b_3q_1}{q_3}\left(\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}\right)$$

但
$$\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}=\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}q_n+b_{n+1}q_{n-1}}=\frac{1}{\frac{a_{n+1}q_n}{b_{n+1}q_{n-1}}+1};$$

及
$$\frac{a_{n+1}q_n}{b_{n+1}q_{n-1}}=\frac{a_{n+1}(a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2})}{b_{n+1}q_{n-1}}=\frac{a_na_{n+1}}{b_{n+1}}+\frac{a_{n+1}b_nq_{n-2}}{b_{n+1}q_{n-1}};$$

又諸項皆不能爲負；故設$\frac{a_na_{n+1}}{b_{n+1}}$之極限大於零，則$\frac{a_{n+1}q_n}{b_{n+1}q_{n-1}}$之極限亦大於零；於此情形內$\frac{b_{n-1}q_{n-1}}{q_{n+1}}$之極限小於 1；由是$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}$爲無窮個眞分數之積之極限，故必等於零；即$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$及$\frac{p_n}{q_n}$傾向同一極限；此証明本命題.

例如，輾轉分式

$$\frac{1^2}{3+}\frac{2^2}{5+}\frac{3^2}{7+}\cdots\cdots\frac{n^2}{2n+1+}\cdots\cdots,$$

內$Lim\frac{a_na_{n+1}}{b_{n+1}}=Lim\frac{(2n+1)2n+3)}{(n+1)^2}=4$；

因是，此輾轉分式傾向一限定極限.

* 442. 輾轉分式 $\frac{b_1}{a_1-}\frac{b_2}{a_2-}\frac{b_3}{a_3-}\cdots$ 內，設各份子之分母較其分子至少大 1，則諸收斂值爲依遞增次序之正分數.

由假設 $\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_2}{a_2}$，$\frac{b_3}{a_3}$，…爲正眞分數，且每分母至少較其分子大 1. 其二次收斂值爲 $\cfrac{b_1}{a_1-\cfrac{b_2}{a_2}}$，且因 $a_1$ 至少較 $b_1$ 大 1，及 $\frac{b_2}{a_2}$ 爲眞分數，故 $a_1-\frac{b_2}{a_2}$ 大於 $b_1$，卽二次收斂值爲一正眞分數. 同法可指明 $\cfrac{b_2}{a_2-\cfrac{b_3}{a_3}}$ 爲一正眞分式；表之以 $f_1$，於是三次收斂爲 $\frac{b_1}{a_1-f_1}$，故爲正眞分數. 同法可指出 $\frac{b_2}{b_2-}\frac{b_3}{b_3-}\frac{b^4}{b_4-}$ 爲正眞分數；故四次收斂值

$$\frac{b_1}{a_1-}\frac{b_2}{a_2-}\frac{b_3}{a_3-}\frac{b_4}{a_4}$$

亦爲正眞分數；類推.

$$p_n=a_np_{n-1}-b_np_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}-b_nq_{n-2},$$

$$\therefore\quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right);$$

故 $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}$ 及 $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 同號.

但 $\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{a_2b_1}{a_1a_2-b_2}-\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_1b_2}{q_1q_2}$，因是爲正數

故 $\frac{p_2}{q_2}>\frac{p_1}{q_1}$，$\frac{p_3}{q_3}>\frac{p_2}{q_2}$，$\frac{p_4}{q_4}>\frac{p_3}{q_3}$；類推；此卽證明本命題.

推論．設份子之數爲無窮，則諸收斂值構成一遞增之無窮真分數級數；於此情形下，此輾轉分式必傾向於不大1之限定極限．

*443．由公式

$$p_n=a_np_{n-1}+b_np_{n-2};\ q_n=a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2},$$

永可陸續決定任若干收斂值．但於某種情形下能求出 $n$ 次收斂值之一般式．

例求 $\dfrac{6}{5-}\ \dfrac{6}{5-}\ \dfrac{6}{5-}$ ……之 $n$ 次收斂值．

因 $p_n=5p_{n-1}-6p_{n-2}$；故諸分子成一循環級數，其中任三連續項之關係式爲

$$p_n-5p_{n-1}+6p_{n-2}.$$

使 $$S=p_1+p_2x+p_3x^2+\ldots+p_nx^{n-1}+\ldots;$$

於是如 §325，得 $S=\dfrac{p_1+(p_2-5p_1)x}{1-5x+6x^2}$.

但首二收斂值爲 $\dfrac{6}{5}$；$\dfrac{30}{19}$；

$$\therefore\ S=\frac{6}{1-5x+6x^2}=\frac{18}{1-3x}-\frac{12}{1-2x};$$

由是 $$p_n=18.3^{n-1}=12.2^{n-1}=6(3^n-2^n).$$

同法設 $$S'=q_1+q_2x+q_3x^2+\ldots+q_nx^{n-1}+\ldots,$$

得 $$S'=\frac{5-6x}{1-5x+6x^2}=\frac{9}{1-3x}-\frac{4}{1-2x};$$

由是 $$q_n=9.3^{n-1}-4.2^{n-1}=3^{n+1}-2^{n+1};$$

$$\therefore\ \frac{p_n}{q_n}=\frac{6(3^n-2^n)}{3^{n+1}-2^{n+1}}.$$

此法僅適用於 $a_n$ 及 $b_n$ 於 $n$ 所有值皆爲常量時．故於輾轉分式 $\dfrac{b}{a+}\ \dfrac{b}{a+}\ \dfrac{b}{a+}$…之情形內，可指明諸連續收斂值爲 $\dfrac{b}{1-ax-bx^2}$ 之展開式內 $x$ 諸羃之係數，分母則爲 $\dfrac{a+bx}{1-ax-bx^2}$ 之展開式內 $x$ 諸羃之係數．

* 444. 於 $p_n$ 及 $q_n$ 之一般值之研究，學生可參考"有限逐差法"此類值僅於特殊情形時可由代數方法求得之，以下方法有時有用.

例. 求 $\frac{1}{1+}\ \frac{2}{2+}\ \frac{3}{3+}\cdots$之值.

$p_n$ 及 $q_n$ 可由同一法則構成；使 $u_n$ 表二者之一；

於是
$$u_n=nu_{n-1}+nu_{n-2},$$
或
$$u_n-(n+1)u_{n+1}=-(u_{n-1}-nu_{n-2}).$$
同理
$$u_{n-1}-nu_{n-2}=-(u_{n-2}-\overline{n-1}u_{n-3}).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_3-4u_2=-(u_2-3u_1);$$
因是由乘法得 $u_n-(n+1)u_{n+1}=(-1)^{n-2}(u_2-3u_1)$.

其首二收斂值爲 $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{4}$；故
$$p_n-(n+1)p_{n-1}=(-1)^{n-1},\quad q_n-(n+1)q_{n-1}=(-1)^{n-2},$$
故
$$\frac{p_n}{\lfloor n+1}-\frac{p_{n-1}}{\lfloor n}=\frac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n+1},\quad \frac{q_n}{\lfloor n+1}-\frac{q_{n-1}}{\lfloor n}=\frac{(-1)^{n-2}}{\lfloor n+1},$$
$$\frac{p_{n-1}}{\lfloor n}-\frac{p_{n-2}}{\lfloor n-1}=\frac{(-1)^{n-2}}{\lfloor n},\quad \frac{q_{n-1}}{\lfloor n}-\frac{q_{n-2}}{\lfloor n-1}=\frac{(-1)^{n-3}}{\lfloor n},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{p_2}{\lfloor 3}=\frac{p_1}{\lfloor 2}=-\frac{1}{\lfloor 3},\quad \frac{q_2}{\lfloor 3}-\frac{q_1}{\lfloor 2}=\frac{1}{\lfloor 3},$$
$$\frac{p_1}{2}=\frac{1}{\lfloor 2},\quad \frac{q_1}{\lfloor 2}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{\lfloor 2};$$
因是；由加法
$$\frac{p_n}{\lfloor n+1}=\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n+1};$$
$$\frac{q_n}{n+1}=1-\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}-\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{\lfloor n+1}.$$
由使 $n$ 爲無限大，得
$$Lim\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{e}\div\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e-1},$$
由是此爲已知式之值.

*445. 設 $\frac{b_1}{a_1+}\,\frac{b_2}{a_2+}\,\frac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots\cdots$ 之各份子皆爲整分子及分母之眞分數，則此輾轉分數爲不可約量.

因設其可約，使此輾轉分數爲可約且等於 $\frac{B}{A}$，$A$，$B$ 爲正整數，於是 $\frac{B}{A}=\frac{b_1}{a_1+f_1}$，$f_1$ 表無窮輾轉分數 $\frac{b_2}{a_2+}\,\frac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots\cdots$；故 $f_1=\frac{Ab_1+Ba_1}{B}=\frac{C}{B}$，今 $A$，$B$，$a_1$，$b_1$，爲整數，$f_1$ 爲正量，由是 $C$ 爲正整數，同法 $\frac{C}{B}=\frac{b_2}{a_2+f_2}$，$f_2$ 表無窮輾轉分數 $\frac{b_3}{a_3+}\,\frac{b_4}{a_4+}\cdots\cdots\cdots$；故 $f_2=\frac{Bb_2-Ca_2}{C}$ 假使 $=\frac{D}{C}$；如前知 $D$ 爲正整數；類推.

又因 $\frac{B}{A}$ 小於眞分數 $\frac{b_1}{a_1}$；$\frac{C}{B}$ 小於 $\frac{b_2}{a_2}$；$\frac{D}{C}$ 小於 $\frac{b_3}{a_3}$；類推，故 $\frac{B}{A}$，$\frac{C}{B}$，$\frac{D}{C}$；$\cdots\cdots\cdots$ 爲眞分數.

由是 $A$，$B$，$C$，$D$，$\cdots\cdots$ 成一正整數之遞減無限級數．此爲不合理．故已知分數爲不可約量.

設從某固定份子後所有其他份子皆爲眞分數，則以上結果於份子之幾不爲眞分數時，亦依然適用，

因設 $\frac{b_n}{a_n}$ 及所有其後諸份子，爲眞分數；由是如適所證明，以 $\frac{b_n}{a_n}$ 始之無窮輾轉分數爲不可約量；表之以 $k$，於是相當 $\frac{p_n}{q_n}$ 之全商爲 $\frac{k}{1}$，且由是此輾轉分數之值爲 $\frac{p_{n-1}+kp_{n-2}}{q_{n-1}+kq_{n-2}}$.

非$\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$此不能為可約量；且非$\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\dfrac{p_{n-3}}{q_{n-3}}$，$\dfrac{p_{n-3}}{q_{n-3}}$ $=\dfrac{p_{n-4}}{q_{n-4}}$，………，及最後$\dfrac{p_2}{q_2}=\dfrac{p_1}{q_1}$；即 $b_1b_2=o$ 此條件不能成立，但此為不可能，故已知分數必為不可約量.

*446. 設 $\dfrac{b_1}{a_1-}\;\dfrac{b_2}{c_2-}\;\dfrac{b_3}{a_3-}$………之各份子皆為整分子，分母之真分數，且此無窮輾轉分數從任一分子始之值皆小於 1，則此分數為不可約量.

本定理之証明與前節相似.

## *習　題　XXXI.a

1. 指出輾轉分數

$$\frac{b_1}{a_1-}\;\frac{b_2}{a_2-}\;\frac{b_3}{a_3-}\cdots\cdots,$$

內　$p_n=a_np_{n-1}-b_np_{n-2}$，　$q_n=a_nq_{n-1}-b_nq_{n-2}$.

2. 變$\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^2$為以 1 為分子之輾轉分數.

3. 指出

(1) $\sqrt{a^2+b}=a+\dfrac{b}{2a+}\;\dfrac{b}{2a+}\cdots\cdots\cdots$,

(2) $\sqrt{a^2-b}=a-\dfrac{b}{2a-}\;\dfrac{b}{2a-}\cdots\cdots\cdots$

4. 於輾轉分數 $\dfrac{b_1}{a_1-}\;\dfrac{b_2}{a_2-}\;\dfrac{b_3}{a_3-}$ ……… 內，設份子之分母至少較其分子大 1，指明 $p_n$ 及 $q_n$ 與 $n$ 之值俱增.

5. 設 $a_1$，$a_2$，$a_3$ ……$a_n$ 為調和級數，指明

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{1-}\;\frac{1}{2-}\;\frac{1}{2-}\cdots\cdots\frac{1}{2-}\;\frac{a_2}{a_1}.$$

6. 指明

$$\left(a+\frac{1}{2a+}\ \frac{1}{2a+}\cdots\right)^2+\left(a-\frac{1}{2a-}\ \frac{1}{2a-}\cdots\right)^2=2a^2,$$

及 $$\left(a+\frac{1}{2a+}\ \frac{1}{2a+}\cdots\right)\left(a-\frac{1}{2a-}\ \frac{1}{2a-}\cdots\right)=a^2-\frac{1}{2a^2-}\ \frac{1}{2a^2-}\cdots$$

7. 於輾轉分數

$$\frac{b}{a+}\ \frac{b}{a+}\ \frac{b}{a+}\cdots\cdots,$$

內，指明　　$p_{n+1}=bq_n$，$bq_{n+1}-ap_{n+1}=b^2q_{n-1}$.

8. 指明 $\dfrac{b}{a+}\ \dfrac{b}{a+}\ \dfrac{b}{a+}\cdots\cdots=b\cdot\dfrac{\alpha^x-\beta^x}{\alpha^{x+1}-\beta^{x+1}}$,

$x$ 爲份子之數，$\alpha$，$\beta$ 爲方程式 $k^2-ak-b=0$ 之根.

9. 求証輾轉分數

$a+\dfrac{1}{b+}\ \dfrac{1}{c+}\ \dfrac{1}{d+}\ \dfrac{1}{a+}\cdots\cdots$,　$-d+\dfrac{1}{-c+}\ \dfrac{1}{-b+}\ \dfrac{1}{-a+}\ \dfrac{1}{-d+}$ ……………，之積等於 $-1$

指明

10. $$\frac{1}{1-}\ \frac{4}{5-}\ \frac{9}{13-}\ \frac{64}{25-}\cdots=\frac{(n^2-1)^2}{n^2+(n+1)^2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

11. $$\frac{2}{1-}\ \frac{3}{5-}\ \frac{8}{7-}\cdots\cdots\frac{n^2-1}{2n+1}=\frac{n(n+3)}{2}$$

12. $$\frac{2}{2-}\ \frac{3}{3-}\ \frac{4}{4-}\cdots\cdots\frac{n+1}{n+1-}\ \frac{n+2}{n+2}=1+1+\underline{|2}+\underline{|3}+\cdots+\underline{|n}.$$

13. $$\frac{1}{1-}\ \frac{1}{3-}\ \frac{2}{4-}\ \frac{3}{5-}\cdots\cdots\frac{n-1}{n+1-}\cdots\cdots=e-1.$$

14. $$\frac{4}{1+}\ \frac{6}{2+}\ \frac{8}{3+}\cdots\cdots\frac{2n+2}{n+}\cdots\cdots=\frac{2(e^2-1)}{e^2+1}.$$

15. $$\frac{3.3}{1+}\ \frac{3.4}{2+}\ \frac{3.5}{3+}\cdots\cdots\frac{3(n+2)}{n+}\cdots\cdots=\frac{6(2e^3+1)}{5e^3-2}.$$

16. 設 $u_1=\dfrac{a}{b}$、$u_2=\dfrac{b}{a+b}$，$u_3=\dfrac{a+b}{a+2b}$，…………，每連續分數皆由取前分數之分母及分子分母之和爲分子及分母構成，指明 $u_\infty=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

17. 求証連轉分數

$$\frac{r}{r+1-}\;\frac{r}{r+1-}\;\frac{r}{r+1-}\;\cdots\cdots$$ 之 $n$ 次收斂值爲 $\frac{r^{n+1}-r}{r^{n+1}-1}$.

18. 求 $\frac{a_1}{a_1+1-}\;\frac{a_2}{a_2+1-}\;\frac{a_3}{a_3+1-}$ 之值

$a_1$, $a_2$, $a_3$, $\cdots\cdots$ 爲大於 1 之正數.

19. 指明 $1-\frac{1}{4-}\;\frac{1}{4-}\cdots\cdots$ 之 $n$ 次收斂值等於

$\frac{1}{1+}\;\frac{1}{2+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{2+}\;\cdots\cdots$ 之 $2n-1$ 次收斂值.

20. 指明

$$\frac{1}{5-}\;\frac{1}{2-}\;\frac{1}{1-}\;\frac{1}{5-}\;\frac{1}{2-}\;\frac{1}{1-}\;\frac{1}{5-}\;\cdots\cdots$$

之 $3n$ 次收斂值爲 $\frac{n}{3n+1}$.

21. 指明 $\frac{1}{2+}\;\frac{2}{3+}\;\frac{3}{4+}\;\cdots\cdots=\frac{3-e}{e-2}$;

由是指明 $e$ 處於 $2\frac{2}{3}$ 及 $2\frac{8}{11}$ 之間.

## 變級數爲連轉分數

* 447. 於此寫級數爲

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{u_n}$$

之形式較爲合宜.

使 $$\frac{1}{u_r}+\frac{1}{u_{r+1}}=\frac{1}{u_r+x_r};$$

於是 $$(u_r+x_r)(u_{r+1}+u_r)=u_ru_{r+1},$$

$$\therefore\; x_r=-\frac{u_r^2}{u_r+u_{r+1}}.$$

故 $$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}=\frac{1}{u_1-\dfrac{u_1^2}{u_1+u_4}}=\frac{1}{u_1-}\;\frac{u_1^2}{u_1+u}$$

同法

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2+x_2}=\frac{1}{u_1-}\ \frac{u_1^2}{u_1+u^2+x_2}$$

$$=\frac{1}{u_1-}\ \frac{u_1^2}{u_1+u_2-}\ \frac{u_2^2}{u_2+u_3};$$

類推；故一般言之

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{u_n}$$

$$=\frac{1}{u_1-}\ \frac{u_1^2}{u_1+u_2-}\ \frac{u_2^2}{u_2+u_3-}\cdots\cdots\frac{u^2_{n-1}}{u_{n-1}+u_n}.$$

例 1. 以輾轉分數表級數

$$\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0a_1}+\frac{x^2}{a_0a_1a_2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{a_0a_1a_2\cdots a_n}$$

使 $$\frac{1}{a_n}-\frac{x}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_n+y_n};$$

於是 $$(a_n+y_n)(a_{n+1}-x)=a_na_{n+1};$$

$$\therefore\ y_n=\frac{a_nx}{a_{n+1}-x}.$$

故 $$\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0a_1}=\frac{1}{a_0+y_0}=\frac{1}{a_0+}\ \frac{a_0x}{a_1-x}.$$

又 $$\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0a_1}+\frac{x^2}{a_0a_1a_2}=\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{x}{a_1a_2}\right)=\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0(a_1+y_1)}$$

$$=\frac{1}{a_0+}\ \frac{a_0x}{a_1+y_1-x}$$

$$=\frac{1}{a_0+}\ \frac{a_0x}{a_1-x+}\ \frac{a_1x}{a_2-x};$$

及一般 $$\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0a_1}+\frac{x^2}{a_0a_1a_2}\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{a_0a_1a_2\cdots a_n}$$

$$=\frac{1}{a_0+}\ \frac{a_0x}{a_1-x+}\ \frac{a_1x}{a_2-x+}\cdots\cdots\cdots\frac{a_{n-1}x}{a_n-x}.$$

例 2. 以輾轉分數表 $log(1+x)$.

已知 $$log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+$$

所求式可用極簡方法由同値級數

$$\frac{x}{a_1}-\frac{x^2}{a_2}+\frac{x^3}{a_3}-\frac{x^4}{a_4}+\cdots\cdots\cdots$$

輾轉分數推出.

由使
$$\frac{1}{a_n}-\frac{x}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n+y_n},$$

得
$$y_n=\frac{a_n^2x}{a_{n+1}-a_nx};$$

故知

$$\frac{x}{a_1}-\frac{x^2}{a_2}+\frac{x^3}{a_3}-\frac{x^4}{a_4}+\cdots\cdots=\frac{x}{a_1+}\ \frac{a_1^2x}{a_2-a_1x+}\ \frac{a_2^2x}{a_3-a_2x+}\ \frac{a_3^2x}{a_4-a_3x+}\cdots;$$

$$\therefore\ log(1+x)=\frac{x}{1+}\ \frac{1^2x}{2-x+}\ \frac{2^2x}{3-2x+}\ \frac{3^2x}{4-3x+}\cdots\cdots$$

448. 於某種情形內可用下命題化簡褸轉分數之份子：

褸轉分數

$$\frac{b_1}{a_1+}\ \frac{b_2}{a_2+}\ \frac{b_3}{a_3+}\ \frac{b_4}{a_4+}\cdots\cdots\cdots$$

等於褸轉分數

$$\frac{c_1b_1}{c_1a_1+}\ \frac{c_1c_2b_2}{c_2a_2+}\ \frac{c_2c_3b_3}{c_3a_3+}\ \frac{c_3c_4b_4}{c_4a_4+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$c_1$，$c_2$，$c_3$，$c_4$，…………爲任何量.

使 $f_1$ 表$\frac{b_2}{a_2+}\ \frac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots\cdots$：於是

此褸化分數$=\frac{b_1}{a_1+f_1}=\frac{c_1b_1}{c_1a_1+c_1f_1}$.

使 $f_2$ 表 $\frac{b_3}{a_3+}\ \frac{b_4}{a_4+}\cdots\cdots\cdots$；於是

$$c_1f_1=\frac{c_1b_2}{a_2+f_2}=\frac{c_1c_2b_2}{c_2a_2+c_2f_2}.$$

同法證 $c_2f_2=\frac{c_2c_3b_3}{c_3a_3+c_3f_3}$；類推；由是本命題成立.

## 習　題　XXXI.b.

指明

1. $\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{u_n}$

$$=\frac{1}{u_0+}\;\frac{u_0^2}{u_1-u_0+}\;\frac{u_1^2}{u_2-u_1+}\cdots\cdots\frac{u^2_{n-1}}{u_n-u_{n-1}}$$

2. $\frac{1}{a_0}+\frac{x}{a_0a_1}+\frac{x^2}{a_0a_1a_2}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{a_0a_1a_2\cdots a_n}$

$$=\frac{1}{a_0-}\;\frac{a_0x}{a_1+x-}\;\frac{a_1x}{a_2+x-}\cdots\cdots\frac{a_{n-1}x}{a_n+x}.$$

3. $\frac{r-1}{r-2}=\frac{r}{r-}\;\frac{r+1}{r+1-}\;\frac{r+2}{r+2-}\cdots\cdots$

4. $\frac{2n}{n+1}=\frac{1}{1-}\;\frac{1}{4-}\;\frac{1}{1-}\;\frac{1}{4-}\cdots\cdots$至 $n$ 商

5. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{1-}\;\frac{1}{3-}\;\frac{4}{5-}\;\frac{9}{7-}\cdots\cdots\frac{n^2}{2n+1}.$

6. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{1-}\;\frac{1^4}{1^2+2^2-}\cdots\cdots\frac{n^4}{n^2+(n+1)^2}.$

7. $e^x=1+\frac{x}{1-}\;\frac{x}{x+2-}\;\frac{2x}{x+3-}\;\frac{3x}{x+4-}\cdots\cdots$

8. $\frac{1}{a}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}-\frac{1}{abcd}+\cdots=\frac{1}{a+}\;\frac{a}{b-1+}\;\frac{b}{c-1+}\;\frac{c}{d-1+}\cdots\cdots$

9. $1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^4}+\frac{1}{r^9}+\frac{1}{r^{16}}+\cdots=1+\frac{1}{r-}\;\frac{r}{r^3+1-}\;\frac{r^3}{r^5+1-}\;\frac{r^5}{r^7+1-}$

10. $\frac{a_1}{a_1+}\;\frac{a_2}{a_2+}\;\frac{a_3}{a_3+}\cdots\cdots\frac{a_n}{a_n}=\frac{1}{1+}\;\frac{1}{a_1+}\;\frac{a_1}{a_2+}\;\frac{a_2}{a_3+}\cdots\cdots\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}.$

11. 設　$P=\frac{a}{a+}\;\frac{b}{b+}\;\frac{c}{c+}\cdots\cdots\quad Q=\frac{a}{b+}\;\frac{b}{c+}\;\frac{c}{d+}\cdots\cdots,$

指明　　　$P(a+1+Q)=a+Q.$

12. 指明 $\frac{1}{q_1}-\frac{x}{q_1q_2}+\frac{x^2}{q_2q_3}-\frac{x^3}{q_3q_4}+\cdots\cdots$等於輾轉分數

$\frac{1}{a_1+}\;\frac{x}{a_2+}\;\frac{x}{a_3+}\;\frac{x}{a_4+}\cdots\cdots$, $q_1$, $q_2$, $q_3$,……為逐漸收斂值之分母.

# 第三十二章

## 適遇法

449. 定義. 設某事件能由 $a$ 法發生，於由$b$ 法不發生，且各法皆有同等可能性，則其發生之適遇量或機會量爲$\frac{a}{a+b}$，其不發生者爲 $\frac{b}{a+b}$.

例如. 設某種彩票得獎者 7 而落空者 25 則有一彩票者得一獎之機會爲 7/32，其落空之機會爲 25/32，

450. 適遇量數學定義之理由，可由以觀察使之更爲淸晰.

設某事件能由 $a$ 法發生，由 $b$ 法不發生，且諸法有同等可能性. 則謂其發生之機會量比不發生之機會量等於 $a$ 比 $b$. 由是設其發生機會量表以 $ka$，$k$ 爲某未定常數，則其不發生之機會量可表以 $kb$.

$\therefore$ 發生之機會量＋不發生之機會量 $=k(a+b)$. 茲此事件必爲發生或不發生；由是其發生及不發生機會量之和必爲定量，故設取此定量爲單位，則

$$1=k(a+b)，\text{或}k=\frac{1}{a+b}.$$

$\therefore$ 此事件發生之機會量爲 $\frac{a}{a+b}$.

其不發生之機會量爲 $\frac{b}{a+b}$.

推論. 設 $p$ 爲某事件發生之適遇量，則其不發生之適遇量爲 $1-p$.

451. 謂某事件發生之適然量爲 $\frac{a}{a+b}$，有時易稱之爲利此事件之優勝率爲 $a$ 比 $b$，或反此事件之優勝率爲 $b$ 比 $a$.

452. §449 之定義可與以小異之形式，此有時有用，設 $c$ 爲情形之全數，其可能性皆相等，其中 $a$ 爲利此事件者，則其事件發生之適遇量爲 $\frac{a}{c}$，其不發生之適遇量爲 $1-\frac{a}{c}$.

例1. 以骰面刻 1 至 6 之常用骰擲得大於 4 之數之適遇量爲何?

骰落下之可能情形有 6，其中二者利於所求之事件:

$$\text{由是所求之適遇量}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

例2. 某人由裝 4 白球 5 黑球之袋內，任取 3 球；問不利三者皆黑之優勝率爲何?

三球取法之全數爲 ${}^9C_3$；三黑球取法之全數爲 ${}^5C_3$；故取三黑球之適遇量

$$=\frac{{}^5C_3}{{}^9C_3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{9\cdot8\cdot7}=\frac{5}{42}.$$

故不利此之優勝率爲 37 比 5.

例3. 求二骰一擲至少有一爲么之適遇量.

其可能之情形爲 $6\times6$ 或 36.

一面爲么之骰可與他骰六數中之任一數聯合，其中 5 數中之每數又可與他骰之么連和；故有利情形之數爲 11.

故所求適遇量爲 $\frac{11}{36}$.

或可如下解釋:

每骰不擲么之擲法爲 5，故二骰可有 25 擲法不爲么，由是不擲么之適遇量爲 $\frac{25}{36}$；於是至少擲一么之適遇量爲

$$1-\frac{25}{36} \text{ 或 } \frac{11}{36}.$$

例4. 求三骰一擲得 15 點以上之適遇量.

一擲得 18 點，必由 6,6,6 合成，且僅由 1 情形；17 能由 6，6,5 合成，可由 3 種情形；16 由 6,6,4，及 6,5,5，合成，可由 3 種情形.

故有利情形之數為

$$1+3+3+3 \text{ 或 } 10.$$

其情形之全數為 $6^3$ 或 216；

$$\text{故所求適遇量}=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}.$$

例 5. $A$ 有 3 獎 6 空之彩票 3 張；$B$ 有 1 獎 2 空之彩票1張：指明 $A$ 得獎之適遇量比 $B$ 得獎之適遇量為 16 比 7.

$A$ 得 3 獎僅可由 1 種情形；

得 2 獎 1 空可由 $\frac{3.2}{1.2}\times 6$ 種情形；

得 1 獎 2 空可由 $3\times\frac{6.5}{1.2}$ 種情形；

諸數之和為 64，此為 $A$ 可得一獎之得法之數.

又共可由 $\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 2}$ 或 84 種情形，取法得三票.

故 $A$ 得獎之適遇量 $=\frac{64}{84}=\frac{16}{21}$.

$B$ 得獎之適遇量顯然為 $\frac{1}{3}$.

故 $A$ 之適遇量：$B$ 之適遇量 $=\frac{16}{21}:\frac{1}{3}$

$$=16:7.$$

或可解釋為：$A$ 可由 $\frac{6.5.4}{1.2.3}$ 或 20 方法完全落空；其適遇量為 $\frac{20}{84}$ 或 $\frac{5}{21}$；

故 $A$ 得獎之適遇量為 $1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$.

453. 設有若干事件 $A$，$B$，$C$，……其中必有一，且僅有一能發生；又設 $a$，$b$，$c$ 為各事件能發生之方法之數，及各方法皆有同等發生之可能性；求各事件發生之適遇量.

同等可能方法之全數為 $a+b+c+\cdots\cdots$，其中利於 $A$ 者為 $a$；故

$A$ 可發生之適遇量爲 $\dfrac{a}{a+b+c+\cdots}$. 同理 $B$ 可發生之適遇量爲 $\dfrac{b}{a+b+c+\cdots}$；類推.

454. 由上例知解易解之適遇量問題，僅知適遇量之定義及排列，組合定律之應用已足.

## 習題 XXXII. $a$.

1. 求二骰一擲得（1）五點，（2）六點之適遇量.

2. 從 52 一束之紙牌內任取二張；求得一侯役及一皇后之適遇量.

3. 某袋內有5白球，7 黑球及 4 紅球：求任意取 3，其色皆白之適遇量.

4. 設擲錢幣四枚，求得二背二面之適遇量.

5. 二事件之一必然發生：已知一事件之適遇量爲他事件者2/3，求利於他事件之優勝率.

6. 設從一付紙牌內任意取四，求其爲同套四樣之適遇量.

7. 十三人圍圓桌而坐，指明不利二特殊人物隣坐之適遇量爲 5 比 1.

8. 有 $A,B,C$ 三事件，其中之一，且僅一必發現；其不利之優勝率於 $A$ 爲 8 比 3，於 $B$ 爲 5 比 2，：求不利於 $C$ 之優勝率.

9. 比較一骰擲 4，二骰擲 8，三骰擲 12 之適遇量.

10. 和牌時忽落四張；求其爲每套各一張之適遇量.

11. $A$ 有 3獎 9 空之彩票 3 張，$B$ 有 2 獎 6 空之彩票 2 張；比較其得獎之適遇量.

12. 指明用 4，3，或 2 骰擲六點之適遇量之比爲 1:6:18.

13．有著作三種，一 3 本，一 4 本，一 1本，設任置書架上，求證同著作置同處之適遇量為 $\frac{3}{140}$.

14．$A,B$ 擲二骰；設 $A$ 得 9，求 $B$ 得較大數之適遇量.

15．任置構成 *Clifton* 之字母為一行：問二母音相鄰之適遇量為何?

16．手內紙牌，一人持 4 王牌之適遇量為何?

17．有 4 先令及 3 半克郎任置一行：指明兩端二錢幣為半克郎之適遇量為 $\frac{1}{7}$．一般化此結果於 $m$ 先令及 $n$ 半克郎之情形.

455．以前討論者僅為在適遇法上所稱之簡單事件，當此事件之二或二以上互相關連時，則稱此關連事件為複合事件.

例如，假使一袋內有 5 白球，8 黑球，及從其中連取兩次，每次取 3 球．設欲計算先取 3 白球，再取三黑球之適遇量，則須處理一複合事件.

於此情形下第二結果可或否受第一結果之影響，設第一次取出之球不再放回，於是設其為三白球，則其餘黑球與白球之比值大於第一次取出非三球皆白者，即受第一結果之影響．但設第一次取出之球於取第二次前依然放回，則顯然第二次之結果於任何方面皆不受第一次結果之影響，

由是得以下定義：

諸事件稱為相關或獨立事件，全視一事件之發生是否影響於其他事件．相關事件有時稱為離定事件.

456．設有二獨立事件，其各適遇量為已知，求二者皆能發生之適遇量．

假使第一事件可由 $a$ 方法發生由 $b$ 方法不發生，及諸情形之可能性皆等；又假使第二事件可由 $a'$ 方法發生，由 $b'$ 方法不發生，諸方法亦有同等之可能性，則 $a+b$ 中每方法皆可與 $a'+b'$ 中每方法遇合，成 $(a+b)(a'+b')$ 有同等發生可能性之複合情形．

其中之 $aa'$ 內二事件皆能發生，$bb'$ 內二事件皆不發生，$ab'$ 內第一發生而第二不發生，$a'b$ 內第一不發生，第二發生．故

$$\frac{aa'}{(a+b)(a'+b')}$$ 為二事件皆發生之適遇量．

$$\frac{bb'}{(a+b)(a'+b')}$$ 為二事件皆不發生之適遇量．

$$\frac{ab'}{(a+b)(a'+b')}$$ 為第一發生而第二不發生之適遇量．

$$\frac{a'b}{(a+b)(a'+b')}$$ 為第一不發生而第二發生之適遇量．

故設二獨立事件之適遇量各為 $p$ 及 $p'$，則兩皆發生之適遇量為 $pp'$．同理可適用於任若干獨立事件．故設 $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots$ 各為若干獨立事件發生之適遇．則其皆發生之適遇量為 $p_1p_2p_3\cdots\cdots$；首二者發生，餘皆不發生之適遇量為 $p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)\cdots\cdots$；同法可用於任何他種特殊情形．

457．設 $p$ 為某事件一次試驗可發生之適遇量，則其於任意指定之 $r$ 次試驗中之適遇量為 $p^r$；此由前節，使 $p_1=p_2=p_3=\cdots\cdots=p$ 推知之．

求諸事件中至少有一事件發生之適遇量，可如下進行：諸事件皆不發生之適遇量為 $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots\cdots$；此情形外必有一事件發生；故所求適遇量為

$$1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots\cdots$$

例 1. 從盛 5 白球 8 黑球之袋內取球二次，每次取 3 個，第一次取出之球仍於取第二次前放回；求首取三球皆白及次取三球皆黑之適遇量.

三球取法之數爲 ${}^{13}C_3$；

三白球取法之數爲 ${}^{5}C_3$；

三黑球取法之數爲 ${}^{8}C_3$.

故首次取 3 白球之適遇量 $=\dfrac{5\cdot4}{1\cdot2}\div\dfrac{13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{5}{143}$；

第二次取 3 黑球之適遇量 $=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\div\dfrac{13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{28}{143}$；

故此複合事件之適遇量 $=\dfrac{5}{143}\times\dfrac{28}{143}=\dfrac{140}{20449}$.

例 2. 設擲一錢，求其連續三次而背互見之適遇量.

第一擲必爲背或面；第二擲反第一次結果之適遇量爲 $\frac{1}{2}$，第三擲同於第一擲之適遇量爲 $\frac{1}{2}$.

故此複合事件之適遇量 $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

例 3. 假使 9 比 7 不利於 $A$ 由現年 35 歲活至 65 歲 3 比 2 不利於 $B$ 由現年 45 歲活至 75 歲；求二人至少有一人由此再活 30 年之適遇量.

$A$ 於 30 年內故去之適遇量爲 $\dfrac{9}{16}$；

$B$ 於 30 年內故去之適遇量爲 $\dfrac{3}{5}$；

故二人皆故去之適遇量爲 $\dfrac{9}{16}\times\dfrac{3}{5}$ 或 $\dfrac{27}{80}$；

故二人非皆故去，卽至少一人生存之適遇量爲 $1-\dfrac{27}{80}$ 或 $\dfrac{53}{80}$.

458. 由稍變 §456 內符號之意義，可用以估定二相依事件之適遇量. 因假使當第一事件發生時，$a'$ 表第二事件可因之發生之方法之數，$b'$ 表不因之發生之方法之數：於是二事件可由是俱發生之方法之數爲 $aa'$，及其發生之適遇量爲 $\dfrac{aa'}{(a+b)(a'+b')}$.

故設 $p$ 爲第一事件之適遇量，$p'$ 爲第二事件相隨之適遇量，則二事件發生之適遇量爲 $pp'$.

例 1. 紙牌之戲，求某指定賭徒持有優勝牌王牌及后牌之適遇量.

表此賭徒以 $A$；則 $A$ 得王牌之適遇量顯然爲 $\frac{13}{52}$；因此特殊牌由 52 不同方法分配，其中 13 可落於 $A$. 當其已有王牌時，其兼持后牌之適遇量於是爲 $\frac{12}{51}$；因后牌可由 51 法分配，其中之 12 可落於 $A$ 也.

故所求適遇量 $=\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}=\frac{1}{17}$.

或可如下解釋之；

王牌及后牌能分配於 $A$ 之方法之數等於 13 物每次取 2 排列之數，或 $13\cdot12$. 同理王及后分配法之全數爲 $52.51$.

故其適遇量 $=\frac{13\cdot12}{52\cdot51}=\frac{1}{17}$ 與前同.

例 2. 從盛 5 白球 8 黑球之袋內，每次 3 球取二次. 已取出者於取第二次前不放回原處. 求第一次取出爲 3 白球，第二次爲 3 黑球之適遇量.

於第一次，三球之取出可由 ${}^{13}C_3$ 方法；

又三白球之取出可由 ${}^{5}C_3$ 方法；

故第一次取三白球之適遇量 $=\frac{5\cdot4}{1\cdot2}\div\frac{13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3}=\frac{5}{143}$.

3 白球旣取出後，袋內餘 2 白球 8 黑球.

故第二次取三球可由 ${}^{10}C_3$ 方法

3 黑球之取出，可由 ${}^{8}C_3$ 方法

故第二次取三黑球之適遇量

$$=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\div\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=\frac{7}{15};$$

故複合事件之適遇量

$$=\frac{5}{143}\times\frac{7}{15}=\frac{7}{429}.$$

學生可以此解法與 §457，例 1，之解法相比較.

459. 設某事件能由互相排斥之二或二以上之不同方法發生，則其發生之適過量爲其由不同方法發生之適過量之和.

此有時視爲由適過量定義生出之自明命題. 但亦可證明如下：

設某事件能由相斥之二方法發生；使 $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ 爲其適過量，於是 $b_1\ b_2$ 情形外有 $a_1\ b_2$ 情形此事件可由第一方法發生，及 $a_2\ b_1$ 情形此事件可由第二方法發生；且諸方法不能相合. 由是 $b_1\ b_2$ 外之所有情形有 $a_1b_2+a_2b_1$ 利於此事件；故此事件可由此法或他法發生之適過量爲

$$\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1b_2}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}.$$

同理可用於任若干此事件能由發生之相斥方法.

故設某件能由 $n$ 互斥之方法發生，又設 $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots\cdots\ p_n$ 爲此事件由各不同方法發生之各適過量，則其能由諸方法之某一發生之適過量爲

$$p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots\cdots+p_n.$$

例 1. 求擲二骰至少得 9 點之適過量.

9 能由 4 法作成，故擲 9 之適過量爲 $\frac{4}{36}$.

10 能由 3 法作成，故擲 10 之適過量爲 $\frac{3}{36}$.

11 能由 2 法作成，故擲 11 之適過量爲 $\frac{2}{36}$.

12 能由 1 法作成，故擲 12 之適過量爲 $\frac{1}{36}$.

因擲得點不小於 9 之適過量爲以上諸適過量之和；

$\therefore$ 所求適過量$=\frac{4+3+2+1}{36}=\frac{5}{18}$.

例 2. 某錢袋內有 1 薩瓦林，3 先令，第二錢袋內有 2 薩瓦林，4 先令；第三錢袋內有 3 薩瓦林 1 先令。設從任一錢袋內任取一錢，求其爲一薩瓦林之適遇量。

因各錢袋同爲可取，故第一之選取適遇量爲 $\frac{1}{3}$；於其內取一薩瓦林之適遇量爲 $\frac{1}{4}$； 故從第一袋取一薩瓦林之適遇量爲 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{12}$。同理從第二袋取一薩瓦林之適遇量爲 $\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}$ 或 $\frac{1}{9}$；從第三袋內取一薩瓦林之適遇量爲 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$ 或 $\frac{1}{4}$；

$$\therefore \text{所求適遇量} = \frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{4}{9}.$$

460. 由前節知某事件之適遇量爲有時可視爲二或二以上諸事件之適遇量之和，但務須注意，一串事件內之一之適遇量爲諸個別適遇量之和僅在諸事件爲互斥時，即當一事件之發生與他任一事件之發生不能並見時。

例. 由寫首 20 自然數之 20 紙片中隨手取一：求其數爲 3 或 7 之倍數之適遇量。

此數爲 3 之倍數之適遇量爲 $\frac{6}{20}$，其爲 7 之倍數之適遇量爲 $\frac{2}{20}$；此二事互斥，故所求適遇量爲

$$\frac{6}{20}+\frac{2}{20} \text{ 或 } \frac{2}{5}.$$

但設此問題爲：求此數爲 3 或 5 之倍數之適遇量，則如下推究，即不正確。

但此數爲 3 之倍數之適遇量爲 $\frac{6}{20}$，爲 5 之倍數之適遇量爲 $\frac{4}{20}$，故其爲 3 或 5 之倍數之適遇量爲 $\frac{6}{20}+\frac{4}{20}$ 或 $\frac{1}{2}$。因紙片上之數可同爲 3 及 5 之倍數，由是二事件非互相排斥也。

461. 當知單獨及複合事件間之區別，於甚多情形內僅爲技巧問題；事實僅對同一事件之不同看法間之區別而已。

例．某袋內有 5 白球及 7 黑球；設任取二球，則其爲一黑一白之適遇量爲何？

($i$) 視此事件爲單獨事件，其適遇量

$$=(5\times 7)\div {}^{12}C_2=\frac{35}{66}.$$

($ii$) 此適遇事件可視爲以下二複合事件中之一之發生．

(1) 取一白球後，再取一黑球，其適遇量爲

$$\frac{5}{12}\times\frac{7}{11}\text{ 或 }\frac{35}{132}.$$

(2) 取一黑球後再取一白球，其適遇量爲

$$\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}\text{ 或 }\frac{35}{132}.$$

因二事件互斥，故所求適遇量

$$=\frac{35}{132}+\frac{35}{132}=\frac{35}{66}.$$

須注意，此處假定陸續取列舉二球與同時取二球相同，稍注意即知其必當如此．

## 習　題　XXXII b

1．求一骰連擲二次，僅第一擲爲么之適遇量．

2．於常用紙牌內任取三張，求其含一傑，一后，一王之適遇量．

3．不利某事件之優勝率爲 5 比 2．利於不關前者之另一事件之優勝率爲 6 比 5；求至少有一事件發生之適遇量．

4．不利 $A$ 解某問題之優勝率爲 4 比 3，利於 $B$ 解同問題之優勝率爲 7 比 5；設二人同解．求此問題能被解出之適遇量．

5．從一部爲 3 先令2蘇瓦林，他一部爲 2 蘇瓦林1 先令之錢袋內取得一蘇瓦林之適遇量爲何？

6. 某袋藏 17 數碼，上刻 1 至 17 之數字，先取出一數碼復放回；於是再取一張：問先取出者爲偶數後取出者爲奇數之適過量爲何？

7. 四人從常用紙牌內各取一張，求適過量．

(1) 每套一張 (2) 無二張爲同值．

8. 求一骰擲五次 至少一次爲六之適過量．

9. 某書爲三獨立批評家批評之有利優勝率爲 5 比 2，4 比 3，3 比 4，問三批評者多數贊許此書此書之適過量爲何？

10 從盛 5 白球 3 黑球之袋內陸續取 4 球，取出後不再放回；求其輪爲不同顏色球之適過量．

11. 用二骰擲三次求至少一次同點之適過量．

12. 設任取 4 整數相乘，指明其積之末數字爲 1,3,7，或 9 之適過量爲$\frac{16}{625}$.

13. 盛 10 錢幣之錢袋內，除一爲薩瓦林外餘皆爲先令；另一錢袋內之 10 幣皆爲先令，從前袋取出九枚置入後者，復由後者取出九枚置入前者：求該薩瓦林仍在前袋之適過量．

14. 設二錢擲 5 次，問 5 背 5 面之適過量爲何？

15. 設擲 8 錢求有一且僅有一爲背之適過量．

16. $A,B,C$ 依次籤紙牌一付，每籤後依然放回，以先籤得鋤形牌者爲勝；求各人之適過量．

17. $A$ 及 $B$ 得盛有 3 薩瓦林 4 先令之錢袋內各取一幣：設已取者不再置入，求各取一薩瓦林之各適過量．

18. $n$ 人圍坐一圓桌，求不利二特殊人鄰坐之適過量．

19. $A$ 爲競走中 6 馬之一，且由騎馬師 $B,C$ 中之一人所騎，$B$ 騎 $A$ 爲 2 比 1，於此情形下，各馬得勝之可能性皆同，設 $B$ 乘 $A$ 則三倍其適過量；問不利其得勝之適過量爲何？

20. 設平均 10 船中有一船沉沒，求 5 船至少有 4 船平安到達之適過量．

462. 某事件於一次試驗內發生之適遇量爲已知，求其於 $n$ 次試驗內洽發生一次，二次，三次，……之適遇量.

設 $p$ 爲某事件於一次試驗內發生之適遇量．又使 $q=1-p$；則此事件於 $n$ 試驗內洽發生 $r$ 次之適遇量爲 $(q+p)^n$ 之展開式之第 $r+1$ 項.

因設於全數 $n$ 試驗中選出任 $r$ 試驗一特殊組，則此事件於 $r$ 試驗中每試驗皆發生與其除內皆不發生之適遇量，爲 $p^r q^{n-r}$ [ §456 ] 又因 $r$ 試驗一組之選取可由 ${}^nC_r$ 方法，諸方法同等適用於此情形，故所求適遇量

爲　　${}^nC_r p^r q^{n-r}$

設用二項式定理展開 $(p+q)^n$，則得

$$p^n+{}^nC_1p^{n-1}q+{}^nC_2p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+{}^nC_{n-r}p^rq^{n-r}+\cdots\cdots+q^n;$$

由是此級數之各項表 $n$ 試驗中此事件洽發生 $n$ 次 $n-1$次，$n-2$ 次，………之適遇量.

463. 設此事件發生 $n$ 次，或僅一次，二次，……$(n-r)$ 次不發生，則其發生 $r$ 或 $r$ 以上次；故其於 $n$ 試驗內至少發生 $r$ 次之適遇量爲

$$p^n+{}^nC_1p^{n-1}q+{}^nC_2p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+{}^nC_{n-r}p^rq^{n-r}, \text{或 } (p+q)^n$$

之展開式內首 $n-r+1$ 項之和.

例 1. 設以二骰擲 4 次求至少二次二骰同點之適遇量.

二骰一擲同點之適遇量爲 $\frac{6}{36}$，或 $\frac{1}{6}$；非同點之適遇量爲 $\frac{5}{6}$.

今所求事件，爲擲四次、三次，或二次同點，故所求適遇量爲 $\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^4$ 之展開式內首三項之和.

$$\text{故此適遇量} = \frac{1}{6^4}(1+4\cdot5+6\cdot5^2)=\frac{19}{144}.$$

例2. 某袋內有球若干，其中之幾爲白球；一球取出後卽放回，他一球取出後又放回；類推：設 $p$ 爲取一次得白球之適遇量，求於 $n$ 試驗中取得白球之最近數.

恰取出 $r$ 白球之適遇量爲 ${}^nC_r p^r q^{n-r}$，茲求 $r$ 爲何值時此式之值爲最大.

今 $${}^nC_r p^r q^{n-r} > {}^nC_{r-1} p^{r-1} q^{n-(r-1)},$$

迨 $$(n-r+1)p > rq,$$

或 $$(n+1)p > (p+q)r.$$

但 $p+q=1$；故所求 $r$ 之值爲 $p(n+1)$ 內之最大整數.

設 $n$ 爲 $pn$ 爲一整數，則最近似情形爲 $pn$ 成功而 $qn$ 失敗.

464. 假使有 £$x$ 一獎之彩票 $n$ 張，於是因各票有相同得獎之可能性．及有全數票者必得獎，故各票之價值爲 £$\frac{x}{n}$；換言之此爲其每票之代價；故有 $r$ 票之某人可以 £$\frac{rx}{n}$ 爲任何欲買其票者應付之價；則估定 £$\frac{r}{n}x$ 爲其機會量之值，由是得以下定義：

設 $p$ 表某人於任何投機事業成功之適遇量．$M$ 爲成功時所得之款額，則表以 $pM$ 之款額稱爲某人之可期值.

465. 於同法內用於人時稱可期值．用於物時則稱可能值.

例1. 某袋內盛 5 先令及 1 薩瓦林；又一袋內盛 6 先令，取第一袋內二錢置次袋內；復從次袋取二錢置第一袋內；求各袋內所容之可能值.

一薩瓦林在第一袋內之適遇量等於其曾移動兩次，或全未移動之適遇量之和.

則其適遇量$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ 薩瓦林在次袋內之適遇量$=\frac{1}{4}$.

故第一袋之可能值

$$=\frac{3}{4}\cdot 25s.+\frac{1}{4}\cdot 6s.=\pounds 1, 0s., 3d.$$

$\therefore$ 第二袋之可能值

$$=31s.-20\tfrac{1}{4}s.=10s., 9d.$$

此問題或可如下解之:

錢幣移出之可能值

$$=\frac{1}{3}\cdot 25s.=8\tfrac{1}{3}s.$$

錢幣移回之可能值

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(6s.+8\frac{1}{3}s.\right)=3\frac{7}{12}s.$$

$\therefore$ 第一袋內之可能值

$$=\left(25-8\frac{1}{3}+3\frac{7}{12}\right)\text{先令}=\pounds 1.\ 0s.\ 3d.\text{，與前同.}$$

例 2. $A$ 及 $B$ 擲一骰賭 $\pounds$ 11 之輸贏，以首擲六點者爲贏. 設 $A$ 先擲，問各人之可期值爲何?

於第一擲，$A$ 之適遇量爲 $\frac{1}{6}$; 其於第二擲爲 $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$，因各賭徒於 $A$ 擲第二次前必各失敗一次; 其第三擲之適遇量爲$\left(\frac{5}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}$，因各賭徒必於其擲第三次前各失敗二次也; 類推.

故 $A$ 之適遇量爲無窮級數

$$\frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^4+\cdots\cdots\cdots\right\}\text{之和;}$$

同理 $B$ 之適遇量爲無窮級數

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^4+\cdots\cdots\cdots\right\}\text{之和;}$$

$\therefore$ $A$ 之適遇量比 $B$ 之適遇量爲 6 比 5; 由是其各適遇量爲 $\frac{6}{11}$ 及 $\frac{5}{11}$，其可期值爲 $\pounds 6$ 及 $\pounds 5$.

466. 茲與二問題，由是可得有用及有趣之結果.

例 1. 二遊戲者 $A$ 及 $B$ 欲各得獲勝一組輸贏之 $m$ 點及 $n$ 點；二人勝一輸贏之適遇量各爲 $p$ 及 $q$，$p$ 及 $q$ 之和得 1；勝利屬於先成其一組者；利於每人之適遇量.

假使 $A$ 洽勝 $m+r$ 輸贏；如是彼必勝最末及前 $m+r-1$ 中之 $m-1$ 輸贏. 其適遇量爲 ${}^{m+r-1}C_{m-1}p^{m-1}q^r p$，或 ${}^{m+r-1}C_{m-1}p^m q^r$.

今此組必於 $m+n-1$ 輸贏內決定之，及 $A$ 可勝其 $m$ 輸贏於洽 $m$ 輸贏內或於 $m+1$,………或 $m+n-1$ 輸贏內；由是 $A$ 勝一組之適遇量可由使 ${}^{m+r-1}C_{m-1}p^m q^r$ 式內 $r$ 之值爲 0, 1, 2,……$n-1$ 求得. 故 $A$ 之適遇量爲

$$p^m\left\{1+mq+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}q^2+\cdots\cdots+\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,(n-1)!}q^{n-1}\right\};$$

同理 $B$ 之適遇量爲

$$q^n\left\{1+np+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}p^2+\cdots\cdots+\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,(n-1)!}p^{m-1}\right\}.$$

此爲著名之"點之問題"；曾爲從 *Pascal* 氏以來多數名數學家所注意，此首由 *Pascal* 氏於 1654 年提出於 *Chevalior de Méré*：且爲 *Pascal* 氏及 *Fermat* 所研究，但彼等僅限於賭者有同等技術之情形下；二人所得結果亦由不同形式發表. 已知公式應歸 *Montmort* 氏發明，因此首見於該氏 1714 年發表之著作中. 後此同結果爲 *Lagrane* 氏及 *Laplace* 氏以不同方法求得，且後者曾對此問題之種種變形與以極詳細之研究.

例 2. 有 $f$ 面刻 1 至 $f$ 之 $n$ 骰；設任意一擲，則諸數和等於 $p$ 之適遇量爲何?

因 $f$ 面中每面皆可由 $n$ 骰內任一骰顯示，故骰之落法之數爲 $f^n$.

又擲得數之和爲 $p$ 擲法之數等於

$$(x^1+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^f)^n$$

之展開式內 $x^p$ 之係數．因此係數可由取指數 1，2，3，……$f$ 中 $n$ 之和爲 $p$ 者之不同方法作成．

今上式 $=x^n(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{f-1})^n$

$$=x^n\left(\frac{1-x^f}{1-x}\right)^n$$

由是求 $(1-x^f)^n(1-x)^{-n}$ 之展開式內 $x^{p-n}$ 之係數，

因 $(1-x^f)^n=1+nx^f+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot1}x^{2f}-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^{3f}+\cdots\cdots$

及 $(1-x)^{-n}=1+nx+\dfrac{n(n+1)}{1\cdot2}x^2+\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots$

二級數相乘，且取出積內 $x^{p-n}$ 之係數；得

$$\frac{n(n+1)\cdots(p-1)}{\lfloor\underline{p-n}}-n\cdot\frac{n(n+1)\cdots(p-f-1)}{\lfloor\underline{p-n-f}}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(p-2f-1)}{\lfloor\underline{p-n-2f}}\cdots\cdots$$

此級數連續至無負因子發現時．除此級數以 $f^n$ 即得所求之適過量．

此問題 *De Moivre* 氏所發明且於 1730 年發表；說明一常用之方法．

後 *Laplace* 氏亦得此同一公式，但用極煩雜之方法；彼用以說明使行星於軌道內移動接近黃道及與地球繞日同一方向之基本原因．關於此點學生可參考 *Todhunter* 氏之 *History of Probability*, §987.

## 習　　題 XXXII. c.

1. 於某遊戲內 $A$ 之技術比 $B$ 之技術爲 3 比 2：求 $A$ 於 5 次內至少勝 3 次之適過量．

2. 二面刻 2，3 之錢擲 5 次：問共得 12 之適過量爲何？

3. 一組輪贏內之每一輪贏皆 2 比 1 有利於前輪贏之得勝者：問第一輪贏之得勝者於次四輪贏至少得 3 之適過量爲何？

4. 某袋內藏錢幣 9 枚，其中 5 爲先令，餘爲等值之未知幣，設取一次之可能值爲 12 先令，求未知者爲何幣．

5. 一錢幣擲 $n$ 次．而現奇數次之適然量爲何?

6. 某人許可從盛 2 薩瓦林 3 先令之袋內隨手取二；求其可期之值.

7. 六人擲一辨士以賭輸贏，先擲得面者爲贏，設陸續行擲，求第四人之適遇量.

8. 置刻 1，2，3 之籌碼於袋內，於是從其內取一復放還．如是三次，問全數爲 6 之適遇量爲何?

9. 擲二面刻 3 與 5 之一錢 4 次：問不利於擲得數之和小於 15 之適遇量爲何?

10. 求三骰一擲恰得 10 點之適遇量.

11. 等技術二賭徒 $A$ 及 $B$ 賭一組輸贏；於 $A$ 得 3，$B$ 得 2 時終止．設賭注爲 £16，問各人應取之部分爲何?

12. $A$,$B$ 擲 3 骰：設 $A$ 擲得 8，則 $B$ 擲得較高點之適遇量爲何?

13. $A$ 衣袋內有 1 薩瓦林 4 先令；設隨手取出 2 枚與 $B$ 及 $C$，則 $C$ 之可期值爲何?

14. 一骰擲五次，求適遇量 (1) 恰爲三么，(2) 至少有 3 么.

15. $A$ 用二骰於 $B$ 擲得 4 前擲得 7 與 $B$ 爲 5s 對 2s 之賭，二人各以二骰同擲至一人贏時止，同點時不計：求 $B$ 之可期值

16. 某人擲二骰一爲普通立方體一爲正四面體，其點視四面體之底面．求擲得和不小於 5 之適遇量.

17. 某袋內有值 $M$ 之錢幣一枚及其值 $m$ 之他種錢幣若干枚．某每次於其中取一枚至取出 $M$ 之幣止：求其可期值.

18. 號碼爲 0，1，2，…… $6n-1$．之 $6n$ 票同置袋內，設每次取三票，指明三數和爲 $6n$ 之適遇量爲

$$\frac{3n}{(6n-1)(6n-2)}$$

## *反 適 遇 法

*467 以前考驗諸情形內，皆含假使發生某事之原因之知識可用以決定此事件發生之適遇量．茲考驗不同性質之問題．例如，設已知某事件含因若干原因中之一而發生，求估定各原因爲真原因之適遇量，並由是推出未來事件由此同原因發生之適遇量．

*468. 於討論一般情形前，先示一數字例題．

假使有二錢袋，一藏 5 薩瓦林，3 先令，一藏 3 薩瓦林 1 先令，又設取出 1 薩瓦林：求其從第一或第二袋取出之適遇量．

考驗試驗之極大數$N$；於是因未取前各袋皆有同等被取之可能性，可假定第一袋由試驗中之 $\frac{1}{2}n$ 被選，又由其中 $\frac{5}{8}$ 內取出一薩瓦林，故一薩瓦林可由第一袋內取 $\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}N$ 或 $\frac{5}{16}N$ 次．

第二袋可由試驗中之 $\frac{1}{2}N$ 被選，又一薩瓦林於其中之 $\frac{3}{4}$ 被取；故一薩瓦林可由第二袋內取 $\frac{3}{8}N$ 次今 $N$ 爲最大數，但同時又爲一任意數；使$N=16n$；由是一薩瓦林可從第一袋內取 5 $n$ 次，第二袋內取 $6n$ 次；即取一薩瓦林之 11 $n$ 次內，從第一袋取 5 $n$ 次，從第二袋內取 6 $n$ 次．

故此薩瓦林從第一袋取出之適遇量爲 $\frac{5}{11}$． 從第二袋取出之適遇量爲 $\frac{6}{11}$

*469. 學生之注意力應引向前節假定之性質，此甚爲重要，如，取一特殊之例，雖然以完全對稱之骰擲 60 次，么點之擲得，可不爲 10 次，但設擲之次數縱增，則么數對擲次數之比將漸近於其極限 $\frac{1}{6}$，則其承認爲毫無可疑，至何以一面較他一面爲常現，此實無理由可以斷定；故由加多試驗次數可見六面中各面顯現之次數漸近於相等.

上例爲一般定理內之特殊情形，*James Bernoulli* 氏於 1713 發表於 *Ars Conjectandi* 內，時在作者故去八年之後. *Bernoulli* 氏定理可述之如下：

設 $p$ 爲某一事件在一次試內之適遇量則當試驗次數無限增加時，成功次數與試驗數之比之極限變爲一定數等於 $p$；換言之，設試驗之數爲 $N$，則成功之數可使爲 $PN$.

參考 *Todhunter* 氏之 *History of probability* 第 *VII* 章. *Bernoulli* 氏定理之證明可見於 *Encyclopadia Britannica probability* 內一節.

*470. 某事件曾由若干互斥原因中之一而發生：試求任一指定之原因爲眞原因之適遇量.

使有 $n$ 原因，且在此事件發生前設諸原存在之適遇量被估定爲 $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots\cdots p_n$，使 $p_r$ 表當第 $r$ 原因存在時此事件相因之適遇量：於此事件已發生後，求估定第 $r$ 原因爲眞原因之適遇量.

考驗一試驗之最大數$N$；則第一原因存在於其中之 $P_1N$ 內，又此中之 $p_1P_1N$ 內此事件因之發生；同理有 $p_2P_2N$ 試驗此事件因第二原因發生；類推於其他每一原因，故此事件因之發生之數為.

$$(p_1P_1+p_2+P_2+\cdots\cdots p_nP_n)N，\text{或 } N\Sigma(pP)；$$

又此事件屬於第 $r$ 原因之數為 $p_rP_rN$；故此事件後，第 $r$原因為眞原因之適遇量為

$$p_rP_rN\div N\Sigma(pP)；$$

卽此事件由第 $r$ 原因產生之適遇量為

$$\frac{p_rP_r}{\Sigma(pP)}$$

*471．此事發生前所估定幾原因存在之適遇量，及此事件發生後任一指定原因可為眞原因之適遇量之精晰判別實為必要，前者常稱為前適遇量，表之以$P_1,P_2,P_3$ $\cdots\cdots P_n$ 後者稱為後適遇量．表之以 $Q_1$，$Q_2$，$Q_3$，$\cdots\cdots\cdots$ $Q_n$，前已證明

$$Q_r=\frac{p_rP_r}{\Sigma(pP)}；$$

$p_r$ 表在第 $r$ 原因存在之假設上此事件之適遇量.

由此結果知 $\Sigma(Q)=1$，另一面，當此事件由諸原因中之一且僅一發生時亦甚顯明.

玆定理不用 §469 內說明之原則與前節定理以另一証明.

*472．某觀察事件已由若干互斥原因中之某一原因發生：求任一指定原因為眞原因之適遇量.

使有 $n$ 原因，且設於此事件發生前，諸原因存在之適遇量為$P_1$，$P_2$，$P_3$，$\cdots\cdots\cdots$ $P_n$．使 $p_r$ 表第 $r$ 原因存在時此事件發生之適遇量，於是此事件因第 $r$ 原因發生之前適遇量為 $p_rP_r$.

使 $Q$ 爲第 $r$ 原因爲眞原因之後適遇量．則第 $r$ 原因爲眞原因之適遇量，與此原因設其存在，產生此事件之適遇量成比例；

$$\therefore \frac{Q_1}{p_1P_1}=\frac{Q_2}{p_2P_2}=\cdots\cdots=\frac{Q_n}{p_nP_n}=\frac{\Sigma(Q)}{\Sigma(pP)}=\frac{1}{\Sigma(pP)};$$

$$\therefore Q_r=\frac{p_rP_r}{\Sigma(p_rP)}.$$

故於本類問題內，積 $P_rp_r$ 當先正確求出爲第一步；但於甚多情形內 $P_1$，$P_2$，$P_3$ ……皆相等，則其解法由是更爲簡單．

例．今有 3 袋，每袋內有 5 白球 2 黑球，又有 2 袋每袋內有 1 白球及 4 黑球：茲取出一黑球 求從第一組內取出之適然量．

5 袋中 3 袋屬於第一組，2 袋屬於第二組；故

$$P_1=\frac{3}{5},\qquad P_2=\frac{2}{5}.$$

設一袋已從第一組內選出．則取一黑球之適遇量爲 $\frac{2}{7}$；設從第二組，則其適遇量爲 $\frac{4}{5}$；故 $p_1=\frac{2}{7}$，$p_2=\frac{4}{5}$；

$$\therefore p_1P_1=\frac{6}{35},\qquad p_2P_2=\frac{8}{25}.$$

故此黑球從第一組內取出之適遇量爲

$$\frac{6}{35}\div\left(\frac{6}{35}+\frac{8}{25}\right)=\frac{15}{43}$$

*473．當某事件已發生時，則可用 §472 方法估定任一特殊原因爲眞原因之適遇量；於是可算得第二次試驗時此事件發生之適遇量，或可求其他某事件發生之適遇量．

例如，$p_r$ 爲設第 $r$ 原因存在時，某事件由其發生之適遇量，及第 $r$ 原因爲眞原因之適遇量爲 $Q_r$：則第二試驗此事件由第 $r$ 原因發生之適遇量爲 $p_rQ_r$．由是此事件於第二試驗時由諸原因中某一發生之適遇量爲 $\Sigma(pQ)$．

例． 某錢袋內有薩瓦林或先令之錢幣 4 枚；取出二枚，視之為先令：設此依然放回，再取一次，則取得一薩瓦林之適遇量為何？

此問題可有二解法，茲分別研究之．

I． 設若驗先令之所有數為有值視同等之可能性之 *a priori*，則可有三假設；(*i*) 所有錢幣皆為先令，(*ii*) 其中之三為先令，(III)其中僅二為先令．

於此　　$P_1=P_2=P_3$

又　　$p_1=1,\ p_2=\frac{1}{2},\ p_3=\frac{1}{6}.$

故第一假設之適遇量$=1\div\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{10}=Q_1,$

第二假設之適遇量$=\frac{1}{2}\div\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{10}=Q_2.$

第三假設之適遇量$=\frac{1}{6}\div\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{10}=Q_3.$

由是取第二次得一薩瓦林之適遇量．

$$=(Q_1\times 0)+\left(Q_2\times\frac{1}{4}\right)+\left(Q_3\times\frac{2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{10}\times\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{10}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}.$$

II． 設每錢幣為先令或薩瓦林有同等可能性，由取 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^4$ 之展開式內之項，知四先令之適遇量為 $\frac{1}{16}$，三先令者為 $\frac{4}{16}$，二先令者為 $\frac{6}{15}$；故

$$P_1=\frac{6}{16},\qquad P_2=\frac{4}{16},\qquad P_3=\frac{6}{16};$$

又，同前，　$p_1=1,\qquad p_2=\frac{1}{2},\qquad p_3=\frac{1}{6}.$

故　　$\frac{Q_1}{6}=\frac{Q_2}{12}=\frac{Q_3}{6}=\frac{Q_1+Q_2+Q_3}{24}=\frac{1}{24}.$

由是第二次取出，有一薩瓦林之適遇量

$$=(Q_1+0)+\left(Q_2\times\frac{1}{4}\right)+\left(Q_3\times\frac{2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{2}{16}=\frac{1}{4}.$$

*474. 玆指明，如何用適遇量理論估定由假定可信之證人所證明之述語之眞實性，玆假使每證人皆信述其所信以爲眞，其所本爲觀察，推究，或實驗所得之結果；由是任何錯誤或不實應歸於推斷之錯誤而非有意之欺騙.

此類將討論之問題，供給一極有用之智力鍛鍊．雖其結果不能視爲有任何實用重要，但可以堅强常識之判斷.

*475. 常謂某人述說眞實之適遇量爲 $p$ 時，意卽此人之大多數談話曾被試驗，$p$ 爲其中之眞實者比全數之値.

476. 二獨立證人 $A$ 及 $B$，同爲某一述說，二人之述說眞實之適遇量爲 $p$ 及 $p'$；問此述說眞實之適遇量爲何?

此處觀察之事件，爲 $A$ 及 $B$ 爲同一之述說，事前有四假設．因 $A$ 及 $B$ 可俱述眞實；或 $A$ 眞而 $B$ 僞；或 $A$ 僞而 $B$ 眞；或 $A$ 及 $B$ 皆述虛僞．此四假設之適遇量各爲

$pp'$，$p(1-p')$，$p'(1-p)$，$(1-p)(1-p')$.

故於 $A$ 及 $B$ 爲某述說之被觀察事件之後，此述說爲眞之適遇量比其爲僞之適遇量爲 $pp'$ 比 $(1-p)(1-p')$；卽此述合述說爲眞之適遇量爲

$$\frac{pp'}{pp'+(1-p)(1-p')}.$$

同理設述說眞實適遇量爲 $p''$ 之第三人亦爲此同一述說，則此述說眞實之適遇量爲

$$\frac{pp'p''}{pp'p''+(1-p)(1-p')(1-p'')}$$

類推至任若干人.

*477. 前節皆假定關於此事件於 $A$、$B$ 之陳述外他無所知；設又從他方面而得關於此述說之眞或僞之適遇量之指示，則於估定各假設之適遇量時亦必須計及.

例如. 設 $A$, $B$ 述敍其事實相一致，其前適遇量爲 $P$，則估定此陳述之眞及僞之適遇量各以

$$Ppp' \text{ 及 } (1-P)(1-p)(1-p').$$

例. 某彩票共 12 張，有 £9 及 £3 之二彩. 敍述眞實適遇量各爲 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ 之三人 $A$, $B$, $C$ 同報告結果於持有一票之 $D$. $A$, $B$ 謂其得 £9 之彩，$C$ 謂其得 £3 之彩：問 $D$ 之可期値爲何?

有三種情形可能；$D$ 如得 £9, £3, 或不得，因 $A$, $B$, $C$ 之報告可皆爲不實也.

茲用 §472 之表示法，得前適遇量

$$P_1=\frac{1}{12}, \quad P_2=\frac{1}{12}, \quad P_3=\frac{10}{12};$$

又 $$p_1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{30}, \quad p_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{30}, \quad p_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{30};$$

$$\therefore \frac{Q_1}{4}=\frac{Q_2}{3}=\frac{Q_3}{20}=\frac{1}{27};$$

故 $D$ 之可期値 $=\frac{4}{27}\cdot$ £9 $+\frac{3}{27}\cdot$ £3 $=$ £1. 13$s$. 4$d$.

*478. 關於 §476 證得結果須注意其假定此述說僅由二法. 由是設所有証人之述說皆僞，則述說同一謊話.

設非此情形，使 $C$ 爲 $A$, $B$ 二人一致述說同一謊話之適遇量則此陳述爲眞之適遇量比其爲僞之適遇量爲 $pp'$ 比 $c(1-p)(1-p')$.

就一般而論，二獨立証人述同一謊話者極端少有，故 $C$ 常爲極小；且當証人之數愈增則 $C$ 量顯然愈小，此種考究可使二或二以上証人所述說之眞實適遇量增加，雖則証人之可信量小.

例. $A$ 談話 4 次中 3 次爲眞，$B$ 10 次中 7 次爲眞；二人同謂由裝不同色 6 球之袋內，取出之一球爲白色；求其語之眞實適遇量.

有二假設；（I） 二人一致之意見爲眞 （II）二人一致之意見爲僞.

於此 $P_1=\frac{1}{6}$, $P_2=\frac{5}{6}$;

$$p_1=\frac{3}{4}\times\frac{7}{10},\quad p_2=\frac{1}{25}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{10};$$

因當未取出時估定 $p_2$ 必計及 $A,B$ 皆選取白球之適遇量； 此適遇量爲

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5} \text{ 或 } \frac{1}{25}.$$

茲二假設之適遇量爲 $P_1p_1$ 比 $P_2p_2$，由是爲 35 比 1； 故二人意見之適遇 爲 $\frac{35}{35}$.

*479. 已考驗之情形，有關於共同證言眞實性之適遇量. 下爲口傳證言之情形.

設 $A$ 稱某事發生，彼從 $B$ 得此事件發生與否之報告間此事件發生之適遇量爲何?

設（1）二人所述皆眞（2)二人所述皆僞則此事件曾發生，設僅一人所述爲眞則此事件未能發生.

使 $p$, $p'$ 表 $A$, $B$ 述說眞實之適遇量；則此事發生之適遇量爲

$$pp'+(1-p)(1-p').$$

其未發生之適遇量爲

$$p(1-p')+p'(1-p)$$

*480. 前節爲常見於教科書內之解法，但此解法暴露一重要之缺陷，因設 $A$, $B$ 所述皆僞時，斷定此事件之發生，必此僅可由二法述說時，不能眞確. 再者，雖則謂 $A$ 得報告自 $B$，但一般不能如 $AQ$ 之證言之信任.

以不同方法解釋此問題之較詳盡之討論，及由是引出之不同解法可見於 *Educational Times Reprint*，卷 *XXVII* 及卷 *XXXII*，

## *習 題 XXXII.d.

1. 某袋內有四球，但不知其爲何色，取出一球，適爲白色：求皆爲白球之適遇量，

2. 某袋內有未知色之球六枚；取出三球適爲黑球，求袋內餘球無黑色者之適遇量.

3. 已知某信爲由 *London* 或 *Clifton* 寄來；郵局戳記僅 *ON* 二連續字母尚可看出；問其由 *London* 寄來之適遇量爲何？

4. 賽跑前三與賽者 $A$，$B$，$C$ 被估定之適遇量爲 5，3，2 之比；但當舉行時 $A$ 因遭意外降落其適遇量至 $\frac{1}{3}$ 問 $B$，$C$ 之現適遇量爲何？

5. 某錢袋內有未知 $n$ 值之錢幣，任取一枚適爲一薩瓦林：問此爲袋內僅有之薩瓦林之適遇量爲何？

6. 某人有 10 先令，其中之一爲二面，被任取一枚，擲之 5次皆得面：問此即爲二面先令之適遇量爲何？

7. 某袋盛未知色之球 5 取出一球復放回者二次，每次取出者皆爲紅色：設同時取出二球，求皆爲紅色之適遇量.

8. 某袋內有五錢幣，每一皆可爲先令或一六辨士；設取出二枚，得先令；求其餘錢幣之可能値.

9. 一骰擲三次，三擲得數之和爲 15：求首擲爲四之適遇量

10. $A$ 談話 4 次，有 3 次爲眞，$B$ 6 次有 5 次爲眞；問二人述同事，互相矛盾之適遇量爲何？

11. $A$ 談話 3 次中 2 次爲眞，$B$ 5 次中 4 次爲眞；設二人一致謂從含 6 異色球之袋內取出一球爲紅球，求二人所話眞實之適遇量.

12. 52 張一付之紙牌失落一張，從餘牌中任意取二得二鏟牌；求失者爲鏟牌之適遇量.

13. 10 張之某種彩票，有值 £ 5 及 £ 1 之兩彩；$A$ 持有一張，$B$ 謂其得 £ 5 之彩，$C$ 謂其得 £ 1 之彩；設 $B$ 之可信量爲 $\frac{2}{3}$，$C$ 之可信量爲 $\frac{3}{4}$；問 $A$ 之可期值爲何?

14. 某錢袋含有 4 錢幣，取二，得二薩瓦林；求適遇量(1) 所有錢幣皆薩瓦林．(2)設此幣放回，再取一次得一薩瓦林之適遇量.

15. $P$ 以三競賽之勝利爲 $A$，$B$，$C$，三馬所得，與 $Q$ 爲 £ 8 比 £120 之賭，各對之此賭賽爲 3比 2，4 比 1，及 2 比 1，首次競走 $A$ 得勝，及已知二競走必爲 $B$ 或一馬所勝，對之此賭賽爲 2 比 1．求 $P$ 之可期值.

16. 某袋，內有 $n$ 球，其色或黑或白，所有每種之數皆有相同可能性，從其內取一，得白球；放回，另取一，復得白球，設此球復放回，求証下一次取得黑球之適遇量爲 $\frac{1}{2}(n-1)(2n+1)^{-1}$

17. 設以 $mn$ 錢幣分置 $m$ 袋內，每袋 $n$ 個，求(1)二特殊錢幣同在一袋之適遇量；(2) $r$ 袋經檢查，不得二特殊幣中任一之適遇量，

18. $A$，$B$ 爲二不精確數學家，其解一問題正確之適遇量爲 $\frac{1}{8}$ 及 $\frac{1}{12}$；設其得同一結果；又設 1000 比 1 不利其得同一錯誤，求此結果爲確之適遇量.

19. 每人六次談話中僅一次不眞之 10 証人，同謂某事件發生；求利於其談話眞實之優勝率爲 5 比 1，雖則此事件之前適遇量小至爲 $\frac{1}{5^9+1}$.

## 位置適遇量．　幾何法．

481．幾何對於適遇量問題之應用，通常須借助於積分；但有若干簡易問題可以初等幾何解之．

例 1．從長 $l$ 之二等線段任意各截一段，且移去之；問餘二線段之和小於 $l$ 之適遇量爲何？

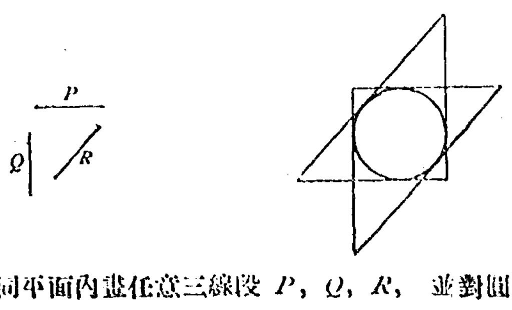
設二線段於互相平行之位置，又設截斷後右方之部分移去．於是此問題等於問右方部分之和大於左方部分之和之適遇量．首和之大於或小於第二和；顯然有同等可能性，故所求適遇量爲 $\frac{1}{2}$．

**推論．** 已知二線段中每線段之長皆不大於 $l$；其和不大於 $l$ 之適遇量爲 $\frac{1}{2}$．

例 2．設三線爲任意選取，求証其恰爲不表一可能三角形之三邊．

三線段中之一必等於或大於其他每線段；表其長以 $l$，於是於其他二線段之所知僅爲其長皆在 $o$ 及 $l$ 之間．但設知二線段中每線段爲 $o$ 及 $l$ 間之任意長，則其與其和大於 $l$ 有同等之適遇量．

例 3．對已知圓任作三切線；指明不利此圓內切於其所成三角形之優勝率爲 3 比 1．



於圓之同平面內畫任意三線段 $P$，$Q$，$R$，並對圓作平行於三線段之六切線．

*H．H．A*

則此圓於由是作成之 8 三角形中，顯然外切 6 而內切 2；且無論 $P$，$Q$，$R$ 之原方向為何，皆同此之為真，故得所求之結果.

482. 適遇法內問題，有時可借助坐標幾何學解決之.

例. 於長 $a+b+c$ 之杆上，任意劃分度 $a$，$b$ 之長．求二劃分綫無一點相重合之適遇量.

使 $AB$ 為已知線，且設 $AP=x$，$PQ=a$．又使度 $a$ 時由 $P$ 向 $B$，由是 $x$ 必小於 $b+c$．又使 $AP'=y$，$P'Q'=b$，且設度 $P'Q'$ 由 $P'$ 向 $B$，於是 $y$ 必小於 $a+c$.

茲於有利情形必 $AP'>PQ$，或 $AP>AQ'$，

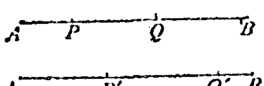
故 $$y>a+x \quad 或 \quad x>b+y \qquad\cdots\cdots\cdots(1)$$

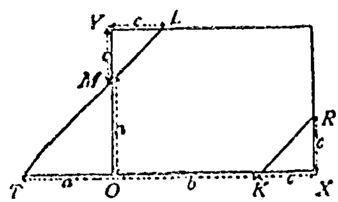
又由所有可能情形得

$$\left.\begin{array}{l} x>o \text{ 而} <b+c \\ y>o \text{ 而} <a+c \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

取二直坐標軸，使 $OX=b+c$，$OY=a+c$.

作直線 $y=a+x$，於圖內表之以 $TML$ 及直線 $x=b+y$ 表之之以 $KR$.




於是 $YM$，$KX$ 皆等於 $c$，$OM$，$OT$ 皆等於 $a$.

條件 (1) 僅為三角形 $MYL$ 及 $KXR$ 及內諸點所適合，而條件 (2) 則被適合於 $OX$，$OY$ 矩形內之任何點；

$$\therefore \text{所求適遇量} = \frac{c^2}{(a+c)(b+c)}$$

*483. 茲以若干雜例結束本章.

例 1. 分某箱為 $m$ 等部分，於其中任意擲入 $n$ 球；求 $p$ 部分每部有 $a$ 球，$q$ 部分每部有 $b$ 球，$r$ 部分每部有 $c$ 球，類推，之適遇量，於此 $pa+qb+rc+\cdots\cdots=n$.

因 $n$ 球之每球能落入 $m$ 部分中之任一部分，故可能發生之情形之全數爲 $m^n$，且皆有同等可能性，欲決定有利情形之數，必求 $n$球能分爲含 $a$，$b$，$c$，……球之 $p$，$q$，$r$，………部分之分法之數.

先選取諸部分中之任 $s$ 部分，$s$ 於此表 $p+q+r+\cdots\cdots$；其可能性取法之數爲 $\dfrac{\underline{|m}}{\underline{|s}\;\underline{|m-s}}$……………………………………(1)

次分 $s$ 部分爲含 $p$，$q$，$r$，……之各部分；由 § 147，其可能分法之數爲

$$\frac{\underline{|s}}{\underline{|p}\;\underline{|q}\;\underline{|r}\cdots}\text{……………………………………}(2)$$

最後以 $n$ 球分配各部分內，置 $a$ 球於 $p$ 組之各部分，$b$ 球於 $q$ 組之各部分，$c$ 球於 $r$ 組之各部分，類推，其可能分配法之數爲

$$\frac{\underline{|n}}{(\underline{|a})^p\,(\underline{|b})^q\,(\underline{|c})^r\cdots}\text{……………………………}(3)$$

由是能適合所求條件之排列方法之數爲 (1)，(2)，(3) 三式之積，故所求適遇量爲

$$\frac{\underline{|m}\;\underline{|n}}{m^n(\underline{|a})^p(\underline{|b})^q(\underline{|c})^r\cdots\cdots\underline{|p}\;\underline{|q}\;\underline{|r}\cdots\cdots\underline{|m-p-q-r-\cdots}}$$

例 2．某袋含 $n$ 球；陸續取 $k$ 次，每次皆得白球；求再取仍得白球之適遇量．($i$) 每次取出後依然放回時，($ii$) 皆不放回時.

($i$) 因此袋可含 0，1，2，3，……$n$ 球，故於事前有 $n+1$ 同等可能之假設；由是依 §471 之表示法，

$$p_0=p_1=p_2=p_3=\cdots=p_n;$$

$$p_0=0,\ p_1=\left(\frac{1}{n}\right)^k,\ p_2=\left(\frac{2}{n}\right)^k,\ p_3=\left(\frac{3}{n}\right)^k,\ \cdots\cdots p_n=\left(\frac{n}{n}\right)^k.$$

故及事後，

$$Q_r=\frac{r^k}{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}.$$

茲再取仍得白球之適遇量 $=\Sigma\,\dfrac{r}{n}Q_r$；

故所求適遇量$=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+\cdots\cdots+n^{k+1}}{1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k}$

其分子，分母之值可用 §405 方法求得之.

於 $k=2$ 之特殊情形，

$$\text{所求適遇量}=\frac{1}{n}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\div\frac{n(n+2)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{3(n+1)}{2(2n+1)}$$

設 $n$ 爲無窮大，則其適遇量等於

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{n^{k+2}}{k+2}\div\frac{n^{k+1}}{k+1}$$

當 $n$ 爲無窮大時之極限；故其適遇量爲 $\frac{k+1}{k+2}$.

(*ii*)　設球不再放回，

$$p_r=\frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1}\cdot\frac{r-2}{n-2}\cdots\cdots\frac{r-k+1}{n-k+1};$$

及

$$Q_r=\frac{p_r}{\Sigma p_r}=\frac{(r-k+1)(r-k+2)\cdots\cdots(r-1)r}{\sum\limits_{r=o}^{r=n}(r-k+1)(r-k+2)\cdots\cdots(r-1)r}$$

$$=(k+1)\frac{(r-k+1)(r-k+2)\cdots\cdots(r-1)r}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots\cdots(n-1)n(n+1)}.\quad[\S 39\text{ⅰ}]$$

$$\text{再取仍爲一白球之適遇量}=\sum_{r=o}^{r=n}\frac{r-k}{r-k}Q_r$$

$$=\frac{k+1}{(n-k)(n-k+1)\cdots n\ (n+1)}\sum_{r=o}^{r=n}(r-k)(r-k+1)\cdots(r-1)r$$

$$=\frac{k+1}{(n-k)(n-k+1)\cdots\cdots n(n+1)}\cdot\frac{(n-k)(n-k+1)\cdots n(n+1)}{k+2}$$

$$=\frac{k+1}{k+2}.$$

此與袋內最初之球數無關，

例 3. 某人寫 $n$ 信及 $n$ 信封；設諸信任意置諸信封內；則各信皆誤置之適遇量爲何?

使 $u_n$ 表諸信皆誤置之置法之數，又使 $abcd$ ……表所有信皆在其本信封內之排列順序，茲設 $a$ 居任其他排列內佔據某指定信 $b$ 之位置，則 $b$ 必佔 $a$ 或其他某一之位置.

(*i*)　設 $b$ 佔 $a$ 之位置．於是其餘 $n-2$ 信易位法之數爲 $u_{n-2}$，由是 $a$ 可由與其他 $n-1$ 信中之某一互換而易位及其餘皆易位之方法之數爲$(n-1)u_{n-2}$

(*ii*). 設 $a$ 佔 $b$ 之位置，而 $b$ 未佔 $a$ 之位置．則於適合所要條件之排列內，因 $a$ 在 $b$ 之位置，故字母 $b$, $c$, $d$, ………亦必皆易位，其易法可有 $u_{n-1}$ 個；由是 $a$ 佔他一個之位置，但不與之互換之方法數爲 $(n-1)u_{n-1}$:

$$\therefore\ u_n=(n-1)(u_{n-1}+u_{n-2});$$

用 §444 方法．由是求得 $u_n-nu_{n-1}=(-1)^n(u_2-u_1)$.

又 $u_1=0$, $u_2=1$；故最後得

$$u_n=\underline{|n}\left\{\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{\underline{|n}}\right\}.$$

今以 $n$ 物置 $n$ 處置法之全數爲 $\underline{|n}$；故所求適遇量爲

$$\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n}.$$

此處所論問題有極可重視之價值，其甚多變形中之若干於適遇法之研究上佔有永久之地位．此問題首爲 *Montmort* 氏所研究，繼爲 *De Moivre* 氏及 *Laplace* 氏使之一般化．

*484. 適遇法領域如是之廣，使吾人不能較此主要代數方法之概要，爲更詳盡之說明．說明各代數方法之問題之可欽佩之搜集可見於 *Whitworth* 氏之 *Choice and Chance* 內；熟習積分學之讀者，可參考 *Crofton* 教授 *Encyclopædia Britannica* 內，*Probability* 一節．關於適遇法之起原及發展可見於 *Todhunter* 氏之 *History of the Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace*.

適遇法理論於商業上之實用，超出此初步研究之外：關此可參考 *Encyclopædia Britannica* 內 *Annuities* 及 *Insurance* 兩節．

## 習　題 XXXII. c.

1. 利於二骰一擲至小得 7 之優勝率爲何?

2. 某錢袋內有 5 蘇瓦林及 4 先令．設一一取出．則蘇瓦林與先令互現之適遇量爲何?如起始爲一蘇瓦林?

3. 設平均 10 船中有 9 船安然回港，問 5 船至少到 3 船之適遇量爲何?

4. 某彩票除 1 張外皆無彩，每人抽取一張收存之．指明各人有相等得彩之適遇量．

5. 一袋有 5 白球，3 紅球，又一袋內有 4 白球 5 紅球，於其中任一袋任取二球；求二球異色之適遇量．

6. $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ 五人自擲得么之人始依次擲一骰．假使迨一人擲得么爲止：求三人相關之得勝適遇量．

7. 任選旗盤上三正方形，問二爲同色一爲異色之適遇量爲何？

8. 某人擲二骰，一爲普通立方體，一爲正四面體．四面體視其底面之數；求擲得之平均數，並比較擲得 5，6，7 之適遇量．

9. $A$, $B$ 技巧之比爲 1:3. $A$, $C$ 爲 3:2 $A$, $D$ 爲 4:3：求 $A$ 與每人一次之三次中至少勝二次之適遇量．

10. 某賭品爲擲一八面骰首次得么者贏：設有四人．問最後者之適遇量爲何？

11. 等技術之二賭徒 $A$, $B$, 賭一組之輸贏，$A$ 少 2 輸贏完成此組，$B$ 少 3 輸贏完成此組：比較二人之適遇量．

12. 某錢袋內有 3 薩瓦林 2 先令：某人二手各取一錢．視其一爲薩瓦林：指明他一之爲薩瓦林或先令有同等可能．

13. $A$, $B$ 賭一物：一骰由 $A$ 先擲，得 6 則贏．如失敗則由 $B$ 擲，得 5 或 6 即贏．設亦失敗，則仍由 $A$ 擲，得 6，或 5 或 4 即贏：類推：求各人之適遇量．

14. 七人抽籤分配頭等車內之六座位，求適遇量 (1) 二特殊人之座位相對，(2) 其座位在同旁相鄰．

15. 某數含和爲 59 之 7 數字：求証其能爲 11 除盡之適遇量爲 $\frac{4}{21}$.

16. 求 3 骰一擲得 12 之適遇量．

17. 某袋內有 7 票各號以 0, 1, 2, …… 6 之數字. 一票抽出後放還; 求 4 次抽得數字之和爲 8 之適遇率.

18. 今有 10 票, 5 爲空白, 他號以 1, 2, 3, 4, 5 之數字: 求三次抽得 10 之適遇率 (1) 當每次皆放還時, (2) 設票不放還時?

19. 設任取 $n$ 整數相乘, 指明其積之末數字爲 1, 3, 7, 或 9 之適遇率爲 $\frac{2^n}{5^n}$; 爲 2, 4, 6, 或 8 者爲 $\frac{4^n-2^n}{5^n}$; 爲 5 者爲 $\frac{5^n-4^n}{10^n}$; 及爲 0 者爲 $\frac{10^n-8^n-5^n+4^n}{10^n}$.

20. 某錢袋內有二蘇兀林, 二先令, 及一同形體之金屬僞幣; 某人許可每次取一枚, 迄取得僞幣止: 求其可期值.

21. 以錢若干與 $A$, $B$, $C$ 三人中以三骰首擲得 10 者; 設三人依次擲之, 迄 10 首次被擲得止; 求証其各適遇率爲

$$\left(\frac{8}{13}\right)^2,\quad \frac{56}{13^2},\quad 及\quad \left(\frac{7}{13}\right)^2.$$

22. 設語眞實適遇率爲 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{5}{6}$ 之二人謂由 15 票之袋內抽得某特殊票: 此繼語之眞實適遇率爲何?

23. 某袋內有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 籌碼, 其中一標以 1, 二標以 1, 二標以 4. 三標以 9, 類推; 某人任取其一, 照其上所標數得若干先令: 求其可期值.

24. 設以 10 物分與 3 人, 指明某一人較他二人多得 5 之適遇率爲 $\frac{1507}{19683}$.

25. 設於一杆上任意點 $n$ 點且由諸點分開, 則無大於此杆之 $\frac{1}{n}$ 之部分之適遇率爲 $\frac{1}{n^n}$.

26. 有二錢袋一含三薩乑林一先令，一含三先令一薩乑林．從任一袋內取一錢置入他袋；再由二袋內各取一錢得二先令，設再從二袋各取一枚，則不利其仍爲二先令之優勝率爲何？

27. 設一三角形爲連圓周上之任三點所成．求證不利其爲銳角之優勝率爲 3 比 1.

28. 於一圓之圓周上任取三點；問由是所成之任二弧之和大於第三弧之適遇量爲何？

29. 任分一直線爲三部，問其能成一可能三角形之適遇量爲何？

30、 二錢袋其一含 25 薩乑林，他含 10 薩乑林 15 先令．於任一袋內任取 4 錢，俱得薩乑林；問此袋僅含薩乑林之適遇量爲可？又由其取第二次之可期值爲何？

31. 於長 $a$ 之直線上任取二點；求其間距離大於 $b$，之適遇量．

32. 長 $a$ 之某直線由於其上任取兩點分爲三部；求無大於 $b$ 之部分之適遇量．

33. 設於長 $a+b$ 之一直線上，任意度二線段 $a$ 及 $b$，則二線段公有部分不大於 $c$ 之適遇量爲 $\frac{c^2}{ab}$，$c$ 爲小於 $a$ 或 $b$ 之長；又較小 $b$ 線段完全在較大綫段 $a$ 內之適遇量爲 $\frac{a-b}{a}$.

34. 設於長 $a+b+c$ 之直線上任意度二長 $a,b$，則公有不大於 $d$ 之部分之適遇量爲 $\frac{(c+d)^2}{(c+a)(c+b)}$，$d$ 爲小於 $a$，或 $b$ 之量．

35. 四全不相識之旅客 $A$，$B$，$C$，$D$ 同乘有 $l$ 頭等，$m$ 二等及 $n$ 三等房間之火車．$A$，$B$ 爲男子其得乘頭等，二等三等之前適遇量各表以 $\lambda$，$\mu$，$\nu$；$C$ 及 $D$ 爲婦人其相似前適遇量各表以 $l,m,n$，求證於 $\lambda$，$\mu$，$\nu$ 之一切值（除 $\lambda:\mu:\nu=l:m:n$ 外），$A,B$ 與同一婦人爲伴較二人各與一相異婦人爲伴之可性大．

# 第三十三章

## 行列式

485. 本章之目的爲與行列式及其較基本性質以簡單之討論，此簡單之概要可助學生了解行列式表示法；在解析幾何及高級數學之他數部門中利益，關於此部門解析數學之詳細說明可見之於*Dr Salmon*氏之近世高級代數概論，及 *Muir* 氏之行列式論.

485. 觀察二齊次一次方程式

$$a_1x+b_1y=o,$$

$$a_2x+b_2y=o;$$

乘第一方程式以 $b_2$，第二以 $b_1$，相減且除以 $x$，得

$$a_1b_2-a_2b_1=o$$

此結果有時可寫爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=o$$

右方之式稱爲行列式．含二行二列，且於其展開式內每項皆爲二量之積；因是名之爲二次行列式.

字母 $a_1$、$b_1$，$a_2$，$b_2$ 稱爲行列式之元，$a_1b_2$，$a_2b_1$ 則稱爲展開式之元.

487．因

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

由是知行變爲列，列變爲行後，行列式之值不變.

488．又可知

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}，及\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix};$$

即設行列式之兩行或兩列互換，則得一僅與其異號之行列式.

489．茲觀察齊次一次方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0$$

由消去 $x$，$y$，$z$，如 §16 例 2 得

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$$

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=0.$$

此消去式常寫爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0,$$

左式爲含三行三列之行列式，稱爲三次行列式.

490．由從新排列各項，則以上行列式之展開式可寫爲

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1).$$

或

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix};$$

故

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

即行列式於行變爲列，列變爲行後，其值不變.

491．由前節

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdots\cdots(1)$$

又從 §489，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdots\cdots(2).$$

茲說明寫出三次行列式展開式之簡單方法，且當注意其由第一行或第一列展開皆無關重要.

從(1)知 $a_1, a_2, a_3$，中任一元之係數爲其所居行列外之二次行列式．此行列式稱爲行列式之子式，而方程式（1）之左方可寫爲

$$a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3$$

$A_1$，$A_2$，$A_3$ 表 $a_1$，$a_2$，$a_3$，之行列子式.

又由方程式(2)此行列式等於

$$a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1,$$

$A_1$，$B_1$，$C_1$，爲 $a_1$，$b_1$，$c_1$ 之子式.

492．行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$-b_1(a_2c_3-a_3c_2)-a_1(c_2b_3-c_3b_2)-c_1(b_2a_3-b_3a_2);$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

由是知設行列式之相隣二行或二列互換，則行列式之符號變而其絕對值不變．

設爲簡便計，則表行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

以$(a_1\ b_2\ c_3)$；於是適得結果可寫爲

$$(b_1\ a_2\ c_3)=-(a_1\ b_2\ c_3).$$

同法可指明

$$(c_1\ a_2\ b_3)=-(a_1\ c_2\ b_3)=+(a_1\ b_2\ c_3).$$

493．設行列式之二行，或二列恆等，則此行列式之値爲零．

因使 $D$ 爲行列式之值，則由二行或二列之互換得其値爲 $-D$ 之行列式，但此行列式未變；故 $D=-D$，即 $D=0$．由是得以下方程式．

$$a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3=D,$$

$$b_1A_1-b_2A_2+b_3A_3=0,$$

$$c_1A_1-C_2A_2+c_3A_3=0.$$

494．設任一行或任一列之各元乘以同因子，則此行列式爲此因子所乘．

因
$$\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= ma_1 . A_1 - ma_2 . A_2 + ma_3 . A_3$$
$$= m(a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3);$$

此卽証明本命題.

**推論.** 設任一行或任一列之各元爲他一行或列之相當元之同倍數，則此行列式之值爲零.

495. 設任一行或列之各元含二項，則此行列式可以他二行列式之和表之.

例如：

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

因左式 $= (a_1+\alpha_1)A_1 - (a_2+\alpha_2)A_2 + (a_3+\alpha_3)A_3$

$$= (a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3) + (\alpha_1A_1 - \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3);$$

此即証明本命題.

同理，設任一行或列之各元含 $m$ 項，則此行列式可以他 $m$ 行列式之和表之.

同法可証明

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2+\beta_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3+\beta_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

此結果甚易使其一般化；例如，設三行之元含 $m, n, p$ 項，則此行列式可表之以 $mnp$ 行列式之和．

例 1. 指明 $\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix}=3abc-a^3-b^3-c^3.$

已知行列式

$$=\begin{vmatrix} b & a & a \\ c & b & b \\ a & c & c \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b & b & a \\ c & c & b \\ a & a & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & a \\ a & b & b \\ b & c & c \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix}.$$

四行列式中首三行列式爲零，§493；故原式變爲其中最末之行列式；故其值

$$=-\{c(c^2-ab)-b(ac-b^2)+a(a^2-bc)\}$$

$$=3abc-a^3-b^3-c^3$$

例 2. 求行列式

$$\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

則得

$$\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10+57 & 19 & 21 \\ 0+39 & 13 & 14 \\ 9+72 & 24 & 26 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 57 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 72 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 19 & 19+2 \\ 0 & 13 & 13+1 \\ 9 & 24 & 24+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 24 & 2 \end{vmatrix}+9\begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}=20-63=-43.$$

496. 觀察行列式

$$\begin{vmatrix} a_1+pb_1+qc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2+qc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+pb_3+qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

如末節可示其相等

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} pb_1 & b_1 & c_1 \\ pb_2 & b_2 & c_2 \\ pb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} qc_1 & b_1 & c_1 \\ qc_2 & b_2 & c_2 \\ qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

其中末二行列式爲零［§454．推論］．故知已知行列式等於一新行列式，此行列式首列之得來，爲由原行列式首列之各元減他二列中各相當元之同倍數，而第二及第三列保留不變．

反之，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+pb_1+qc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2+qc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+pb_3+qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

此處關於第一列所得之證明於任何行或列皆眞；故知於化簡一行列式時，可易任一行列式以新行或列如下法：

加或減被易行或列內之元以他一或一以上行或列內相當元之任何等倍數．

於稍爲熟練之後可知行列式常可由同時易二或二以上之行或列使之迅速化簡；例如，

$$\begin{vmatrix} a_1+pb_1 & b_1-qc_1 & c_1 \\ a_2+pb_2 & b_2-qc_2 & c_2 \\ a_3+pb_3 & b_3-qc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

但於上述法則之任何變形內，須注意必留一行或一列不變．

例如，設上恒等式內左方第三列各元易以 $c_1+ra_1, c_2+ra_2, c_3+ra_3$，則前値必增加

$$\begin{vmatrix} a_1+pb_1 & b_1-qc_1 & ra_1 \\ a_2+pb_2 & b_2-qc_2 & ra_2 \\ a_3+pb_3 & b_3-qc_3 & ra_3 \end{vmatrix}.$$

此式可解之四行列式中，有一行列式不爲零，即

$$\begin{vmatrix} pb_1 & -qc_1 & ra_1 \\ pb_2 & -qc_2 & ra_2 \\ pb_3 & -qc_3 & ra_4 \end{vmatrix}$$

例1. 求 $\begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 46 \end{vmatrix}$ 之值.

已知行列式

$$=\begin{vmatrix} 3 & 26 & -4 \\ -6 & 31 & -4 \\ 9 & 54 & -8 \end{vmatrix}=-3\times4\times\begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -2 & 31 & 1 \\ 3 & 54 & 2 \end{vmatrix}=-12\times\begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 29 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-12\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=132.$$

[注. 化簡之第一步中使第二列保留不變；由第一列內各元減二列內之相當元爲新第一列；第三列內各元減第二列內之相當元爲新第三列. 第二步提出因數 3 及 −4 . 第三步不變第一列；由第二列內各元減去一列內之相當元爲新第二列；由第三列各元減去第一列之相當元爲新第三列. 其除各步則甚易看出.]

例 2. 指明

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

已知行列式

$$=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\times\begin{vmatrix} -b-c-a & 0 \\ 0 & -c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

［注．第一新行列式之第一行爲原行列式內三行諸元之和，第二及第三行不變．第三新行列式之第一列不變，第二及第三列爲由第二及第三列內各元減第一列內各元；其餘變法則甚爲明顯．］

497．於指示如何表二行列式之積爲一行列式前；茲研究行列式

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

由 §495 知上行列式可表以 27 行列式之和，此以下各式表之已足：

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & a_2\alpha_3 \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 & b_3\beta_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & c_1\gamma_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & c_2\gamma_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & c_3\gamma_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix},$$

此各等於

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix},\ \alpha_1\beta_2\gamma_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\ \alpha_1\beta_3\gamma_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix};$$

其中第一爲零；同法可知 27 行列式中之 21 式爲零．所餘六行列式等於

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3-\alpha_1\beta_3\gamma_2+\alpha_2\beta_3\gamma_1-\alpha_2\beta_1\gamma_3+\alpha_3\beta_1\gamma_2-\alpha_3\beta_2\gamma_1)\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

即
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

故已知行列式可表以他二行列式之積．

498．二行列式之積爲一行列式．

觀察二一次方程式

$$\left.\begin{aligned} a_1X_1+b_1X_2=0 \\ a_2X_1+b_2X_2=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

於此

$$\left.\begin{aligned} X_1&=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\\ X_2&=\beta_1x_1+\beta_2x_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

以 $X_1$ 及 $X_2$ 之值代入 (1)，得

$$\left.\begin{aligned}(a_1\alpha_1+b_1\beta_1)x_1+(a_1\alpha_2+b_1\beta_2)x_2=0\\ (a_2\alpha_1+b_2\beta_1)x_1+(a_2\alpha_2+b_2\beta_2)x_2=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(3).$$

爲使 (3) 可適於 $x_1$ 及 $x_2$ 零以外之值，必

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2\\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

但設 (1) 適合則 (3) 能適合；欲如此必設

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5),$$

或 $X_1=0$ 及 $X_2=0$；

其最後條件需要

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6).$$

故設方程式 (5)，(6) 適合，則 (4) 亦適合；由是 (4) 內之行列式必含 (5) 及 (6) 內之行列式爲其因子；且由行列式次數之觀察，可指明 (4) 之其餘因子必爲數字；故

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2\\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2\end{vmatrix},$$

此數字因子由比較兩方 $a_1b_2\alpha_1\beta_2$ 之係數知其爲 1.

推論. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2 & a_1a_2+b_1b_2\\ a_1a_2+b_1b_2 & a_2^2+b_2^2\end{vmatrix}$

上之證明方法極爲一般，可用之於任何次數之行列式.

因行列式當以行爲列以列爲行時其值不變，故二行列式之積表之以一行列式，可用種種方法；但於展開時皆得同一結果.

例. 指明

$$\begin{vmatrix} A_1 & -B_1 & C_1 \\ -A_2 & B_2 & -C_2 \\ A_3 & -B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2.$$

大寫字母表右方行列式內相當小寫字母之子式.

使 $D$, $D'$ 分表左右兩方之行列式; 則

$$DD' = \begin{vmatrix} a_1A_1-b_1B_1+c_1C_1 & a_2A_1-b_2B_1+c_2C_1 & a_3A_1-b_3B_1+c_3C_1 \\ -a_1A_2+b_1B_2-c_1C_2 & -a_2A_2+b_2B_2-c_2C_2 & -a_3A_2+b_3B_2-c_3C_2 \\ a_1A_3-b_1B_3+c_1C_3 & a_2A_3-b_2B_3+c_2C_3 & a_3A_3-b_3B_3+c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix};$$ [§493.]

故 $DD' = D^3$, 由是 $D' = D^2$.

## 習　題 XXXIII. a.

計算以下各行列式之值:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 39 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$.　2. $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$.　3. $\begin{vmatrix} 13 & 3 & 23 \\ 30 & 7 & 53 \\ 39 & 9 & 70 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$.　5. $\begin{vmatrix} 1 & z & -y \\ -z & 1 & x \\ y & -x & 1 \end{vmatrix}$.　6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$.　8. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

設 $\omega$ 為 1 之虛立方根之一, 求以下行列式之值:

9. $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$.　10. $\begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^3 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$.

11. 從方程式

$al+cm+bn=0$, $cl+bm+an=0$, $bl+am+cn=0$; 消去 $l$, $m$, 及 $n$, 且表其結果以最簡形式.

12. 求不展開下行列式，證明

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

13. 解方程式:

(1) $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix}=0$　　(2) $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix}=0$

證以下恆等式:

14. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$

15. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(b-c)(c-a)(a-b).$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$

17. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}=(y-z)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy).$

18. $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}=4(b+c)(c+a)(a+b).$

19. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3.$

20. 以一行列式表

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2.$$

21. 求方程式 $lx+my+nz=0$ 可為三組值 $(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2)$, $(a_3, b_3, c_3)$ 所適合之條件，且指明此條件同於三方程式.

$a_1x+b_1y+c_1z=0$，$a_2x+b_2y+c_2z=0$，$a_3x+b_3y+c_3z=0$ 可同為 $l$, $m$, $n$ 所適合之條件.

22. 求行列式

$$\begin{vmatrix} a^2+\lambda^2 & ab+c\lambda & ca-b\lambda \\ ab-c\lambda & b^2+\lambda^2 & bc+a\lambda \\ ca+b\lambda & bc-a\lambda & c^2+\lambda^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda & c & -b \\ -c & \lambda & a \\ b & -a & \lambda \end{vmatrix}$$ 之値.

23. 求證

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha-i\beta & \gamma-i\delta \\ -\gamma-i\delta & \alpha+i\beta \end{vmatrix},$$

能寫爲

$$\begin{vmatrix} A-iB & C-iD \\ -C-iD & A+iB \end{vmatrix};$$

之形式,式內 $i=\sqrt{-1}$.

由是得以下 *Euler* 氏定理:

含四平方之二和之積，可以四平方之和表之.

證以下恒等式

24.
$$\begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 1 & ca+bd & c^2a^2+b^2d^2 \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d).$$

25.
$$\begin{vmatrix} bc-a^2 & ca-b^2 & ab-c^2 \\ -bc+ca+ab & bc-ca+ab & bc+ca-ab \\ (a+b)(a+c) & (b+c)(b+a) & (c+a)(c+b) \end{vmatrix}$$
$$=3(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(bc+ca+ab).$$

26.
$$\begin{vmatrix} (a-x)^2 & (a-y)^2 & (a-z)^2 \\ (b-x)^2 & (b-y)^2 & (b-z)^2 \\ (c-x)^2 & (c-y)^2 & (c-z)^2 \end{vmatrix}$$
$$=2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y)$$

27. 用行列式求

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta$$

可爲 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 二一次因子之積之條件.

28. 解方程式:

$$\begin{vmatrix} u+a^2x & w'+abx & v'+acx \\ w'+abx & v+b^2x & u'+bcx \\ v'+acx & u'+bcx & w+c^2x \end{vmatrix}=0$$

以行列式表其結果.

499．行列式之性質，常可用之以解聯立一次方程式．

使此方程式爲

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0.$$

分乘之以 $A_1$，$-A_2$，$A_3$，且相加其結果，$A_1$，$A_2$，$A_3$ 爲行列式，

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

內 $a_1$，$a_2$，$a_3$ 之子式，$y$，$z$ 之係數因 §493 所証之關係化爲零，於是得

$$(a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3)x+(d_1A_1-d_2A_2+d_3A_3)=0$$

同法可指明

$$(b_1B_1-b_2B_2+b_3B_3)y+(d_1B_1-d_2B_2+d_3B_3)=0,$$

及

$$(c_1C_1-c_2C_2+c_3C_3)z+(d_1C_1-d_2C_2+d_3C_3)=0.$$

今 $a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3=-(b_1B_1-b_2B_2+b_3B_3)$

$$=c_1C_1-c_2C_2+c_3C_3=D;$$

故此解答可寫爲

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

或更對稱爲

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

500．設有四齊次一次方程式之一組，

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1u=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2u=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3u=0,$$
$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4u=0.$$

如前節，由後三式得

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}}=\frac{-u}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}$$

代入第一方程式，其消去式爲

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}-d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}=0$$

此可簡寫之爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0;$$

左式爲一四次行列式.

又可知 $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ 之係數同其特有符號爲除去該元所居行列所得之子式.

501. 較一般言之，設有 $n$ 一次齊次方程式

$$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+\cdots\cdots\cdots+k_1x_n=0,$$
$$a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+\cdots\cdots\cdots+k_2x_n=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_nx_1+b_nx_2+c_nx_3+\cdots\cdots\cdots+k_nx_n=0,$$

含 $n$ 未知量 $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\cdots\cdots\cdots x_n$，則諸量可消去，且其結果可表以

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots\cdots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots\cdots & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots\cdots & k_n \end{vmatrix}=0.$$

方程式之左方爲含 $n$ 行 $n$ 列之行列式，稱爲 $n$ 次行列式.

關於行列式較一般形式之討論，不在本範圍之內；於此注意由二次及三次行列式証得之性質甚爲一般，且可引伸至任何次數之行列式已足.

例如，以上 $n$ 次行列式依從首行或首列展開等於

$$a_1A_1-b_1B_1+c_1C_1-d_1D_1+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}k_1K_1,$$

或　$$a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3-a_4A_4+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_nA_n.$$

於此諸大寫字母爲其相當小寫字母之元之子式　爲 $n-1$ 次之行列式每式可表之以若干 $n-2$ 次行列式之和；類推；故行列式之展開式可由是求得.

一行列式雖永可用上述方法展開，但不永爲最簡之方法，尤於目的非求全行列式之値而爲求其展開式內各項之符號時.

502.　行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 之展開式

$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1,$$

其中各項皆爲三因子之積，由各行取一，由各列取一；又諸項中符號，半數爲＋，半數爲－．各項之符號可如下求得．第一項，其附數依等差之順序，爲正；稱爲展開式之主項．由與附數以適當之互換可由之求得其他之任何項．任何項前符號之爲＋或－全視其由主項變來

時二尾數互換次數之爲偶數或奇數；例如，$a_3\ b_2\ c_1$ 項之得來爲 1，3 互換故其符號爲負，$a_3\ b_1\ c_2$ 項之得來，爲先互換尾數 1 及 3，再互換尾數 1 及 2，故其符號爲正.

503. 展開式之主項爲 $a_1\ b_2\ c_3\ d_4$ ……… 之行列式可表以符號

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$\Sigma\pm$ 置於主項之前，表所有項之總合，各項可由適當互換尾數及規定符號求得之.

有時行列式可更簡表之以置主項於括弧之內；如$(a_1\ b_2\ c_3\ d_4\cdots)$，則 $\Sigma\pm\ a_1b_2c_3d_4$ ……… 之簡單表示.

例. 行列式 $(a_1\ b_2\ c_3\ d_4\ e_5)$ 內 $a_4\ b_3\ c_1\ d_5\ e_2$ 項之符號爲何?

從主項易 $a$，$d$ 之尾數得 $a_4\ b_2\ c_3\ d_1\ e_5$：又易 $b$，$c$ 之尾數得 $a_4\ b_3\ c_2\ d_1\ e_5$；又易 $c$，$d$ 之尾數得 $a_4\ b_3\ c_1\ d_2\ e_5$；最後易 $d$，$e$ 之尾數得 $a_4\ b_3\ c_1\ d_5\ e_2$；因共互換之次數爲四，故此項之符號爲正

504. 設 §501 內 $b_1$，$c_1$，…………$k_1$ 各元爲零，則此行列式變爲 $a_1A_1$，換言之等於 $a_1$ 及一 $n-1$ 次行列式之積，由是推得下之一般定理.

設行列式之首行或首列之首元外皆爲零，且設此元等於 $m$，則此行列式等於 $m$ 乘首行及首列外之子式.

又因由行列式之適當互換可使任一元爲首元，故設任一行或列僅一元不爲零，則此行列式即可表之以低次行列式.

此有時於行列式之降低或化簡，甚爲有用.

例．　求 $\begin{vmatrix} 30 & 11 & 20 & 38 \\ 6 & 3 & 0 & 9 \\ 11 & -2 & 36 & 3 \\ 19 & 6 & 17 & 22 \end{vmatrix}$ 之值．

由首列各元減去第二列相當元之二倍，又減第四列各元以第二列相當元之三倍，得

$$\begin{vmatrix} 8 & 11 & 20 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 15 & -2 & 36 & 9 \\ 7 & 16 & 17 & 4 \end{vmatrix}$$

又因第二行內有三元爲零，故此行列式

$$=3\begin{vmatrix} 8 & 20 & 5 \\ 15 & 36 & 9 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 8 & 20 & 5 \\ 8 & 19 & 5 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 19 & 5 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=9.$$

505．　下例表有時有用之捷法．

例 1．　求証

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}=(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(a+b-c-d),$$

由所有行相加知 $a+b+c+d$ 爲此行列式之因子；又由第二及第四行之和減第一及第三行之和知 $a-b+c-d$ 亦爲一因子；同法可指出 $a-b-c+d$ 及 $a+b-c-d$ 亦爲其因子；餘因子爲數字，由比較各方含 $a^4$ 之項之係數，知此數字爲 1，由是得所求之結果．

例 2．　求證

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

此行列式於 $b=a$ 時爲零；因如是則第一，二兩列恆等．故$a-b$爲此行列式之因子［§514］．同理．$a-c$，$a-d$，$b-c$，$b-d$，$c-d$皆爲此行列式之因子：此行列式爲六次，故餘因子爲數字；由比較兩方含 $bc^2d^3$ 之項之係數，知其爲 1；故得所求之結果．

## 習　題 XXX III. b.

計算以下各行列式之值:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+c & a & a \\ 1 & b & c+a & b \\ 1 & c & c & a+b \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & c & b \\ -y & -c & 0 & a \\ -z & -b & -a & 0 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

10. 設 $\omega$ 爲 1 之虛立方根之一，指明

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

由是指明左方行列式之值爲 $3\sqrt{-3}$.

11. 設

$$(f^2-bc)x+(ch-fg)y+(bg-hf)z=0,$$
$$(ch-fg)x+(g^2-ca)y+(af-gh)z=0,$$
$$(bg-hf)x+(af-gh)y+(h^2-ab)z=0,$$

指明 $$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

解方程式：

12.
$$\begin{aligned} x+\ y+\ z&=1,\\ ax+by+cz&=k,\\ a^2x+b^2y+c^2z&=k^2. \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} ax+by+cz&=k,\\ a^2x+b^2y+c^2z&=k^2,\\ a^3x+b^3y+c^3z&=k^3, \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} x+\ y+\ z+\ u&=1,\\ ax+by+cz+du&=k,\\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2u&=k^2,\\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3u&=k^3. \end{aligned}$$

15. 求証

$$\begin{vmatrix} b+c-a-d & bc-ad & bc(a+d)-ad(b+c)\\ c+a-b-d & ca-bd & ca(b+d)-bd(c+a)\\ a+b-c-d & ab-cd & ab(c+d)-cd(a+b) \end{vmatrix}$$
$$=-2(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d).$$

16. 求證

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc\\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ca\\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix}$$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

17. 指明

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f\\ f & a & b & c & d & e\\ e & f & a & b & c & d\\ d & e & f & a & b & c\\ c & d & e & f & a & b\\ b & c & d & e & f & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B & C\\ C & A & B\\ B & C & A \end{vmatrix},$$

於此

$$\begin{aligned} A&=a^2-d^2+2ce-2bf,\\ B&=e^2-b^2+2ac-2df,\\ C&=c^2-f^2+2ae-2bd. \end{aligned}$$

18. 設一行列式爲 $n$ 次，又設其第一，二，三，………… $n$行之元爲第一，二，三 次之擬形數，指明其值爲 1.

# 第三十四章

## 雜定理及雜題

506. 本章之始於代數形式之永久性上與以注意，擇要復習書中已証得之諸基本定律.

507. 於代數原理之闡明，採用解析方法；開端時不提出新名辭及新觀念，僅由抽象及算術之知識起始；由是証明某種演算法則在任何特殊情形下皆可用之，此種法則之一般理論即構成代數科學.

故常謂算術代數學及符號代數學，且與二間以顯然之差異，前者限定符號表示爲可以算術解釋之意義，由是推出基本之施算定律，後者則不論符號之性質，而求須加何種意義於諸符號，始可使其合於諸施算定律，由是漸超出初級算術之限制，得出新結，運用新術語，與符號以初等算術定義中未曾預及之解釋．同時代數之一般法則由是成立，確定其永久性及一般性，即當其用於無算術解釋之量時亦然.

508. 設專注意於符號之正整數値，則以下諸法則皆易由直觀算術定義成立之.

I. 交換定律. 解釋如下:

(*i*) 加法及減法可使之爲任何順序.

如 $a+b-c=a-c+b=b-c+a.$

(*ii*) 乘法及除法可使之爲任何順序.

如 $a\times b=b\times a;$

$$a\times b\times c=b\times c\times a=a\times c\times b;$$

$$ab\div c=a\times b\div c=(a\div c)\times b=(b\div c)\times a.$$

II. 分配定律. 解釋如下:

乘法及除法可分配於加法及減法.

如 $$(a-b+c)m=am-bm+cm,$$
$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd.$$

[見初級代數 §§ 33,34.]

又因除法爲乘法之逆算故無須分別討論.

III. 指數定律.

(*i*) $$a^m\times a^n=a^{m+n},$$
$$a^m\div a^n=a^{m-n},$$

(*ii*) $$(a^m)^n=a^{mn},$$

[見初級代數 §233–235]

以上諸定律，爲本論題之基礎，被證明於所用符號表正整數之假設下，且限制上示諸施算爲有算術之解釋者，設無此種條件，則由符號代數學假定算術代數學諸定律於任何情形皆眞，且承受由此假定所得之一切解釋，由次確定諸代數演算定律，爲自合定律；且於普遍性內含所有初級算術中諸特殊情形.

509. 由交換定律，推出加或去括號之法則 [初級代數§§21,22]；又由此法則成立 §35 內之分配定律. 例如証明

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd.$$

爲以 $a, b, c, d$ 爲正整數，及 $a$ 大於 $b$, $c$ 大於 $d$ 之限制，當除去所有限制時，對類此結果之解釋則屬於符號代數學之範圍．故由使 $a=o$, $c=o$, 得 $(-b)\times(-d)=bd$, 或二負量之積爲正量；又由使 $b=o$, $c=o$, 得 $a\times(-d)=-ad$, 或異號二量之積爲負量．

由是知符號法則爲分配定律直接之結果，因此可謂符號法則含於基本施算定律之內．

510．運用基本定律確定代數分數性質之方法，讀者可參考初級代數第十九，二十一，及二十二章；於是可知不能與以 *a pricri* 定義之符號及算法，永可以使其遵從算術代數之定律解釋之．

511．指數定律於初級代數第三十章內已有詳細之討論，當 $m$ 及 $n$ 爲正整數，及 $m>n$ 時，皆由指數定義直接證明．

$$a^m\times a^n=a^{m+n};\ a^m\div a^n=a^{m-n};\ (a^m)^n=a^{mn}.$$

於是設假定當指數無任何限制時其中之第一式爲眞，且由是歸定此符號在最初定義中未曾引用之意義．

從第一定律所得對於 $a^{\frac{q}{p}}, a^0, a^{-n}$ 之解釋甚合於其他二定律；由此可知指數諸定律之運用能一致，且有完全之一般性．

512．第三章內曾規定符號 $i$ 或 $\sqrt{-1}$ 依從 $i^2=-1$ 之關係．由此定義，及由使 $i$ 依從代數之一般定律，能以討論形爲 $a+ib$ 之實虛量連合式之性質．此式有時稱爲素數，且由 §92 至 105 知於複數施以加，減，乘，除之演算後其所得結果一般仍爲複數．又因任一有

理函數不含上示外之運算，由是一複數有理函數一般爲一複數.

形爲 $a^{x+iy}$，$log\ (x+iy)$之式不用三角法不能完滿處理；但用馬夫勒氏定理則易指出此式能變爲 $A+iB$ 形式之複數.

式 $e^{x+iy}$ 當然含於較一般式 $a^{x+iy}$ 之內，但有另一處理方法亦甚值注意.

於 §220 內知

$n$ 爲無窮大時，$e^{x}=Lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$.

$x$ 爲任何實量；$e^{x+iy}$ 亦可由同法用方程式

當 $n$ 爲無窮大時，$e^{x+iy}=Lim\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^{n}$.

規定之，$x$ 及 $y$ 爲任何實量.

複數理論發展之詳細研究可於*Schlömilchs* 氏 *Handbuch der algebraischen Analysis*

513. 茲與若干定理及例題以說明證恒等式中及方程式論中常用之方法.

514. 求任一 X 之有理整函數除以 $x-a$ 時之餘數.

使 $f(x)$ 表 $x$ 之有理整函數；除$f(x)$ 以 $x-a$ 至餘數不含 $x$ 止，使 $Q$ 爲商，$R$ 爲餘式，於是

$$f(x)=Q(x-a)+R.$$

因 $R$ 不含 $x$，故與 $x$ 爲何值無關；使 $x=a$，則

$$f(a)=Q\times O+R;$$

茲 $Q$ 於 $x$ 之有限值爲有限.故

$$R=f(a).$$

推論，設 $f(x)$ 可整除以 $x-a$，則 $R=0$，則 $f(a)=0$；故設 $x$ 之有理整函數於 $x=a$ 時爲零，則此函數能被 $x-a$ 除盡.

515. 上節命題甚爲有用，茲另與以利於商之表示形式之證明.

假設此函數爲 $n$ 次，且表之以

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots\cdots+p_n,$$

則其商爲 $n-1$ 次；表之以

$$q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\cdots\cdots q_{n-1};$$

使 $R$ 爲不含 $x$ 之除數；則

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots\cdots+p_n$$

$$=(x-a)(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\cdots\cdots+q_{n-1})+R.$$

施乘，且相等 $x$ 同冪之係數，得

$$q_0=p_0;$$

$$q_1-aq_0=p_1,\ \text{或}\ q_1=aq_0+p_1;$$

$$q_2-aq_1=p_2,\ \text{或}\ q_2=aq_1+p_2;$$

$$q_3-aq_2=p_3,\ \text{或}\ q_3=aq_2+p_3;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R-aq_{n-1}=p_n,\ \text{或}\ R=aq_{n-1}+p_n;$$

故商內每一連續係數，皆由其前一係數乘 $a$ 再加被除式內之次一係數所構成，求商之各項及除式之方法可排列如下：

$$\begin{array}{cccccc}
p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_{n-1} & p_n \\
 & aq_0 & aq_1 & aq_2 & aq_{n-2} & aq_{n-1} \\
\hline
q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_{n-1} & R
\end{array}$$

故 $\quad R=aq_{n-1}+p_n=a(aq_{n-2}+p_{n-1})+p_n=\cdots\cdots$

$$=p_0a^n+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}+\cdots\cdots+p_n.$$

設除式爲 $x+a$，亦可用此方法，僅於此情形下，其乘數爲 $-a$ 而已.

例. 求 $3x^7-x^6+31x^4+21x+5$ 除以 $x+2$ 時之商及餘數. 於此之乘數爲 $-2$，故得

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
3 & -1 & 0 & 31 & 0 & 0 & 21 & 5\\
 & -6 & 14 & -28 & -6 & 12 & -24 & 6\\
\hline
3 & -7 & 14 & 3 & -6 & 12 & -3 & 11
\end{array}$$

故其商爲 $3x^6-7x^5+14x^4+3x^3-6x^2+12x-3$，其餘數爲 11.

516. 上例施算曾由僅寫各項之係數化零係數爲用以表 $x$ 乘羃之缺項. 此分離係數法常用省去初級代數方法之繁難，特於當處理之函數爲有理整函數時. 下爲他一示例.

例. 除 $3x^5-8x^4-5x^3+26x^2-33x+26$ 以 $x^3-2x^2-4x+8$.

$$\begin{array}{l}
1+2+4-8)3-8-\ 5+26-33+26(3-2+3\\
\qquad\qquad\quad \underline{3+6+12-24}\\
\qquad\qquad\quad\ \ -2+\ 7+\ 2-33\\
\qquad\qquad\quad\ \ \underline{-2-\ 4-\ 8+16}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3-\ 6-17+26\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{3+\ 6+12-24}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\ 5+\ 2
\end{array}$$

由是其商爲 $3x^2-2x+3$，其餘式爲 $-5x+2$.

注意寫除式時，首項外之各項皆須變其符號；由是可易各步減法爲加法.

517. 此演算仍可由以下排列使之更化簡單，此爲 *Horner* 氏之綜合除法.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
1 & 3 & -8 & -5 & +26 & -33 & +26\\
2 & & 6 & +12 & -24 & & \\
4 & & & -4 & -8 & +16 & \\
-8 & & & & 6 & +12 & -24\\
\hline
 & 3 & -2 & +3 & +0 & -5 & +2
\end{array}$$

[解. 鉛直線左之數字列含除式各項之係數，首項外各項之符號皆變，第二水平行由 2，4，$-8$ 乘以商之首項 3 求得，於是相加鉛直線右方第二列之各項，得 $-2$，此爲商式之第二項之係數；由是求

得之係數作成次一水平行，又加各項於第三列得 3，爲商式第三項之係數.

由相加其他各列，得除式諸項之係數.］

例. 除 $6a^5+5a^4b-8a^3b^2-6a^2b^3-6ab^4$ 以 $2a^3+3a^2b-b^3$ 至商之第四項.

$$\begin{array}{r|r|l}
2 & 6+5-8-6-6 & \\
-3 & -9+0+3 & \\
0 & 6+0-2 & -1 \\
1 & 3+0 & 12+0-4 \\
\hline
 & 3-2-1+0-4 & +11+0-4
\end{array}$$

故其商爲 $2a^2-2ab-b^2-4a^{-2}b^4$，$11b^5-4a^{-2}b^7$ 爲其除式.

於此加各列諸項如前，但各和皆除以除式之首項係數 2. 已得所要諸項後，除式僅由加其除各列求得，無須再除以 2.

學者可用分離係數以証明此法則.

518. §514 之原則常用以証代數恆等式；但於其加以任何說明前須於對稱及輪換函數加以幾許之注意.

某函數當其中任二變數互換而不變其值時，稱爲關於其變數對稱，如 $x+y+z$，$bc+ca+ab$，$x^3+y^3+z^3-xyz$ 卽爲一次，二次，三次之對稱函數.

須注意僅 $x$，$y$，$z$ 之一次對稱函數之形式爲 $M(x+y+z)$；$M$ 爲不含 $x$，$y$，$z$ 之量.

519. 由定義知任二對稱函數之和，差，積及商仍爲對稱函數，此原則於核算代數演算結果之眞確性極爲有用，且有時用之可免去甚多計算之繁雜.

例如. $(x+y+z)^3$ 之展開式必爲三次之齊次函數，且由是爲 $x^3+y^3+z^3+A(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)+Bxyz$，$A$，$B$ 爲不含 $x$，$y$，$z$，之量，

使 $z=0$, 則 $A=3$, 爲 $(x+y)^3$ 之展開式內 $x^2y$ 之係數.

使 $x=y=z=1$, 則 $27=3+(3\times6)+B$; 由是 $B=6$.

故 $(x+y+z)^3$

$$= x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3y^2z+3yz^2+3z^2x+3zx^2+6xyz,$$

520. 某函數當其中任二變數互換後僅其符號變, 而其值不變, 稱爲關於其變數之輪換函數時, 如 $x-y$ 及 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 即爲輪換函數.

顯然無含二變數以上之一次輪換函數. 又一輪換函數及一對稱函數之積仍爲輪換函數.

521. 對稱函及輪換函數可由其中之一項冠以符號 $\Sigma$ 表之; 如 $\Sigma a$ 表以 $a$ 爲範式之所有諸項之和, $\Sigma ab$ 表以 $ab$ 爲範式之所有諸項之和; 類推. 例如, 設此函數含四字母 $a$, $b$, $c$, $d$, 則

$$\Sigma a=a+b+c+d;$$

$$\Sigma ab=ab+ac+ad+bc+bd+cd;$$

類推.

同法設函數含三字母 $a$, $b$, $c$,

$$\Sigma a^2(b-c)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b);$$

$$\Sigma a^2bc=a^2bc+b^2ca+c^2ab;$$

類推.

須注意爲三字母時, 則 $\Sigma a^2b$ 不含三項而表六項; 如

$$\Sigma a^2b=a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b.$$

符號 $\Sigma$ 亦可用以表關於二或二以上字母組之和. 如

$$\Sigma yz(b-c)=yz(b-c)+zx(c-a)+xy(a-b).$$

522. 上符號亦可用以表示對稱式之積或羃之簡縮形式：如

$$(a+b+c)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6abc;$$

$$(a+b+c+d)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc;$$

$$(a+b+c)^4=\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc;$$

$$\Sigma a\times\Sigma a^2=\Sigma a^3+\Sigma a^2b.$$

例 1. 求證

$$(a+b)^5-a^5-b^5=5ab(a+b)(a^2+ab+b^2).$$

表左函數以 $E$；於是 $E$ 爲 $a$ 之函數，當 $a=0$ 時爲零；故 $a$ 爲 $E$ 之因子；同理 $b$ 亦爲 $E$ 之因子．又 $E$ 當 $a=-b$ 時爲零，故 $a+b$ 爲 $E$ 之因子；故 $E$ 含 $ab(a+b)$ 之因子．餘因子必爲二次，且因其關於 $a,b$ 對稱，其形式必爲 $Aa^2+Bab+Ab^2$；由是

$$(a+b)^5-a^5-b^5=ab(a+b)(Aa^2+Bab+Ab^2).$$

$A,B$ 爲不含 $a$，$b$，之量．

使 $a=1$，$b=1$，得 $15=2A+B$：

使 $a=2$，$b=-1$，得 $15=5A-2B$；

由是 $A=5$，$B=5$；而所求結果即可寫出．

例 2. 求$(b^3+c^3)(b-c)+(c^3+a^3)(c-a)+(a^3+b^3)(a-b)$之因子．

表此式以 $E$；則 $E$ 爲 $a$ 之函數：此式於 $a=b$ 時爲零，故含 $a-b$ 之因子．[§514]．同理含因子 $b-c$ 及 $c-a$，故 $E$ 含 $(b-c)(c-a)(a-b)$之因子．

又因 $E$ 爲四次，故餘因子必爲一次；且因其爲關於 $a$，$b$，$c$ 對稱之函數，其形式必爲 $M(a+b+c)$．[§518]．

$$\therefore\quad E=M(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

求 $M$ 之值，可與 $a$，$b$，$c$ 以最適當之值；如使 $a=0$，$b=1$，$c=2$，得 $M=1$；由是得所求結果．

例 3. 指明

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$$
$$=5(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy).$$

表左式以 $E$；於是因 $E$ 於 $y=-z$ 時爲零，故 $y+z$ 爲 $E$ 之一因子；同理 $z+x$ 及 $x+y$ 亦爲其因子；故 $E$ 含 $(y+z)(z+x)(x+y)$

之因子．又因 $E$ 爲五次式，其餘因子必爲二次，又因其關於 $x,y,z$ 對稱，其形式必爲

$$A(x^2+y^2+z^2)+B(yz+zx+xy).$$

使 $x=y=z=1$；得 $10=A+B$；

使 $x=2,\ y=1,\ z=0$；得 $35=5A+2B$

由是 $A=B=5$

即得所求之結果．

523．茲列一恆等式表以備參考，此於代數式之變形甚爲有用；其中若干曾見於初級代數第二十九章內．

$$\Sigma bc(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

$$\Sigma a^2(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

$$\Sigma a(b^2-c^2)=(b-c)(c-a)(a-b).$$

$$\Sigma a^3(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

此恆等式可與以另一形式，

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b).$$

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$\Sigma bc(b+c)+2abc=(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$\Sigma a^2(b+c)+2abc=(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$$
$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

## 習 題 XXXIV, a.

1．求 $3x^5+11x^4+90x^2-19x+53$ 除以 $x+5$ 時之餘數．

2．求 $2x^4-7x^3+ax+b$.

可以 $x-3$ 除盡時 $a,b$ 之關係方程式．

3. 求 $x^5-5x^4+9x^3-6x^2-16x+13$ 除以 $x^2-3x+2$ 時之商及餘數.

4. 求 $x^3-7x+5$ 爲

$$x^5-2x^4-4x^3+19x^2-31x+12+a$$

之因子時 $a$ 之值.

5. 依 $x$ 降冪展開 $\dfrac{1}{x^4-5x^3+7x^2+x-8}$ 至第四項. 且求其餘數.

求以下各式之因子:

6. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$.

7. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+b^4(a^2-b^2)$.

8. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$.

9. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$.

10. $a(b^4-c^4)+b(c^4-a^4)+c(a^4-b^4)$.

11. $(bc+ca+ab)^3-b^3c^3-c^3a^3-a^3b^3$.

12. $(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4$

13. $(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$.

14. $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3$.

證下列諸恒等式:

15. $\Sigma(b+c-2a)^3=3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$.

16. $\dfrac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}=a+b+c$.

17. $\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2b}{b+c}+\dfrac{2c}{c+a}+\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=3$.

18. $\Sigma a^2(b+c)-\Sigma a^3-2abc=(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

19. $\dfrac{x^3(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)}=bc+ca+ab$.

20. $4\Sigma(b-c)(b+c-2a)^2=9\Sigma(b-c)(b+c-a)^2$.

21. $(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2=\Sigma x^4(y+z)^2+2(\Sigma yz)^3-2x^2y^2z^2$.

22. $\Sigma(ab-c^2)(ac-b^2)=(\Sigma bc)(\Sigma bc-\Sigma a^2)$.

23. $abc(\Sigma a)^3-(\Sigma bc)^3=abc\Sigma a^3-\Sigma b^3c^3$

$$=(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab).$$

24. $\Sigma(b-c)^3(b+c-2a)=0$; 故 $\Sigma(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-2\alpha)^3=0$.

25. $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$
$$=2(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

26. 設 $x=b+c-a, y=c+a-b,\ z=a+b-c$，指出
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

27. 求証 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 內，設以 $s-a, s-b,\ s-c$ 易$a,\ b,\ c$ 其值不變．於此
$$3s=2(a+b+c).$$

求以下各式之值：

28. $$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$$

29. $$\frac{a^2-b^2-c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-c^2-a^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-a^2-b^2}{(c-a)(c-b)}$$

30. $$\frac{(a+p)(a+q)}{(a-b)(a-c)(a+x)}+\frac{(b+p)(b+q)}{(b-c)(b-a)(b+x)}+\frac{(c+p)(c+q)}{(c-a)(c-b)(c+x)}.$$

31. $\Sigma\dfrac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}$. 　　32. $\Sigma\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}$.

33. 設 $x+y+z=s$，及 $xyz=p^2$，指明
$$\left(\frac{p}{ys}-\frac{y}{p}\right)\left(\frac{p}{zs}-\frac{z}{p}\right)+\left(\frac{p}{zs}-\frac{z}{p}\right)\left(\frac{p}{xs}-\frac{x}{p}\right)+\left(\frac{p}{xs}-\frac{x}{p}\right)\left(\frac{p}{ys}-\frac{y}{p}\right)=\frac{4}{s}.$$

## 雜恆等式

524. 若干恆等式可用 1之立方根之性質，迅然證明；如常例表 1 之立方根，以 1，$\omega$，$\omega^2$.

例． 指明
$$(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

左式 $E$ 當 $x=0$，$y=0$，及 $x+y=0$ 時爲零，故含 $xy(x+y)$ 之因子．

使 $x=\omega y$，得
$$E=\{(1+\omega)^7-\omega^7-1\}y^7=\{(-\omega^2)^7-\omega^7-1\}y^7$$
$$=(-\omega^2-\omega-1)y^7=0;$$
故 $E$ 含 $x-\omega y$ 之因子；同法指明含 $x-\omega^2y$ 之因子，即 $E$ 可爲 $(x-\omega y)(x-\omega^2y)$ 或 $x^2+xy+y^2$ 所除盡．

又 $E$ 爲七次，$xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ 爲五次，故除因子必爲 $A(x^2+y^2)+Bxy$ 之形式；故

$$(x+y)^7-x^7-y^7=xy(x+y)(x^2+xy+y^2)(Ax^2+Bxy+Ay^2)$$

使 $x=1,\quad y=1$，得 $21=2A+B$；

使 $\quad x=2,\quad y=-1$，得 $21=5A-2B$

由是 $\quad A=7;\quad B=7$；

$$\therefore\ (x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

525. 從初級代數知

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab),$$

又從 §110 例 3 知

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$$

故 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 可析三一次因子；即

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c).$$

例. 指明 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 及 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 之積，可使爲 $A^3+B^3+C^3-3ABC$ 之形式.

$$\begin{aligned}\text{原積}\ &=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)\\ &\quad\times(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z).\end{aligned}$$

於六因子取諸對因子 $(a+b+c)(x+y+z)$；

$(a+\omega b+\omega^2c)(x+\omega^2y+\omega z)$；及 $(a+\omega^2b+\omega c)(x+\omega y+\omega^2z)$，

得三部分積

$$A+B+C,\ A+\omega B+\omega^2C,\ A+\omega^2B+\omega C.$$

於此 $\quad A=ax+by+cz,\ B=bx+cy+az,\ C=cx+ay+bz.$

$$\begin{aligned}\text{故原積}\ &=(A+B+C)(A+\omega B+\omega^2C)(A+\omega^2B+\omega C)\\ &=A^3+B^3+C^3-3ABC.\end{aligned}$$

526. 當 $a, b, c$ 諸量以方程式 $a+b+c=0$ 相關係時求含 $a$，$b$，$c$ 諸式之值，可用代替式

$$a=h+k,\qquad b=\omega h+\omega^2k,\ c=\omega^2h+\omega k$$

但設式內所含之 $a$，$b$，$c$ 對稱，則用下列所示方法尤佳.

例. 設 $a+b+c=0$ 指明

$$6(a^5+b^5+c^5)=5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2).$$

已知 $(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+px+qx^2+rx^3$ 爲恆等.

於此 $p=a+b+c,\ q=bc+ca+ab,\ r=abc.$

故用此係體得

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+qx^2+rx^3.$$

取其對數且相等 $x^n$ 之係數，得 $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(a^n+b^n+c^n)=log$ $(1+qx^2+rx^3)$ 之展開式內 $x^n$ 之係數$=(qx^2+rx^3)-\frac{1}{2}(qx^2+rx^3)^2+\frac{1}{3}(qx^2+rx^3)^3-$……………… 內 $x^n$ 之係數.

由使 $n=2$ 3，5 得

$$-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=q,\ \frac{a^3+b^3+c^3}{3}=r,\ \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=-qr;$$

由是
$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

而所求之結果卽可求得.

設 $a=\beta-\gamma,\quad b=\gamma-\alpha,\ c=\alpha-\beta,$ 能適合已知條件；由是得合於$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 一切值之恆等式

$$6\{(\beta-\gamma)^5+(\gamma-\alpha)^5+(\alpha-\beta)^5\}$$
$$=5\{(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3\}\{(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2\}$$

則

$$(\beta-\gamma)^5+(\gamma-\alpha)^5+(\alpha-\beta)^5=5(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta);$$

[比較 §522 例 3]

## 習 題 XXXIV. b.

1. 設$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$，指明當 $n$ 爲正整數時 $(a+b+c)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$.

2. 指明
$(a+\omega b+\omega^2c)^3+(a+\omega^2b+\omega c)^3=(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b).$

3. 指明 設 $n$ 爲奇正整數且非 3 之倍數，則 $(x+y)^n-x^n-y^n$能爲 $xy(x^2+xy+y^2)$ 所除盡.

4. 指明
$$a^3(bz-cy)^3+b^3(cx-az)^3+c^3(ay-bx)^3$$
$$=3abc(bz-cy)(cx-az)(ay-bx).$$

5. 求$(b-c)(c-a)(a-b)+(b-\omega c)(c-\omega a)(a-\omega b)+(b-\omega^2 c)(c-\omega^2 a)(a-\omega^2 b)$之值.

6. 指明 $(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$ 可使之爲 $A^2+B^2+C^2-BC-CA-AB$ 之形式.

7. 指明 $(a^2+ab+b^2)(x^2+xy+y^2)$ 可使之爲 $A^2+AB+B^2$ 之形式，且求 $A,B$ 之值.

指明

8. $$\Sigma(a^2+2bc)^3-3(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab) = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

9. $$\Sigma(a^2-bc)^3-3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

10. $$(a^2+b^2+c^2)^3+2(bc+ca+ab)^3-3(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)^2 = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

設$a+b+c=0$，證明習題 11－17 之恆等式.

11. $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$.

12. $a^5+b^5+c^5=-5abc(bc+ca+ab)$.

13. $a^6+b^6+c^6=3a^2b^2c^2-2(bc+ca+ab)^3$.

14. $3(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)=5(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)$.

15. $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

16. $\left(\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}\right)\left(\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}\right)=9$.

17. $$(b^2c+c^2a+a^2b-3abc)(bc^2+ca^2+ab^2-3abc) = (bc+ca+ab)^3+27a^2b^2c^2.$$

18. $$25\{(y-z)^7+(z-x)^7+(x-y)^7\}\{(y-z)^3+(z-x)^3 +(x-y)^3\}=21\{(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5\}^2.$$

19. $$\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}^3-54(y-z)^2(z-x)^2(x-y)^2 =2(y+z-2x)^2(z+x-2y)^2(x+y-2z)^2$$

20. $$(b-c)^6+(c-a)^6+(a-b)^6-3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 =2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^3$$

21. $$(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7 =7(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2.$$

22. 設 $a+b+c=0$，及 $x+y+z=0$， 指明

$$4(ax+by+cz)^3-3(ax+by+cz)(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) -2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y)=54abcxyz.$$

設 $a+b+c+d=0$，指明

23. $\frac{a^5+b^5+c^5+d^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}$

24. $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(bcd+cda+dab+abc)^2$
$=9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)$.

25. 設 $2s=a+b+c$ 及 $2\sigma^2=a^2+b^2+c^2$，求証
$\Sigma(s-b)(s-c)(\sigma^2-a^2)+5abcs=(s^2-\sigma^2)(4s^2+\sigma^2)$.

26. 指明 $(x^3+6x^2y+3xy^2-y^3)^3+(y^3+6xy^2+3x^2y-x^3)^3$
$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^3$.

27. 指明 $\Sigma\frac{a^5}{(a-b)(a-c)(a-d)}$
$=a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd$.

28. 析下式爲因式
$2a^2b^2c^2+(a^3+b^3+c^3)abc+b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3$.

## 消 去 法

527. 於第三十三章內知一組一次方程式之消去式可以行列式之形式即刻寫出．至於任何次方程式之一般消去法，則於方程式論中討論之，必要時可使學生參考 *Salmon* 氏之 *Lessons Introductory to the modern Algebra* 之第四及第六章．與 *Burnside* 之第八章及 *Panton* 氏之 *Theory of Equations* 之第十三章．

此方法雖理論完善但不常適於實用，故僅與一般原理以簡單之說明而以例題說明若干較切於實用之消去法，

528. 茲先討論二方程式間一未知量之消去法．

表二方程式以 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$，又設必需時假使二方程式已變爲 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 表 $x$ 之有理整函數之形式．於是因二方程式通同爲眞，故必 $x$ 之某值同時適合二已知方程式；故

其消去式必表使二方程式有一公根之係數間之條件.

假使　$x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma\cdots\cdots$ 爲 $f(x)=0$ 之根，則至少 $\phi(\alpha)$, $\phi(\beta)$, $\phi(\gamma)$,$\cdots\cdots$諸量中之一必爲零；故此消去式爲

$$\phi(\alpha)\ \phi(\beta)\ \phi(\gamma)\cdots\cdots=0.$$

左式爲 $f(x)=0$ 之根之對稱函數，且其值可由方程式論中所示方法求得.

529.　茲說明三一般消去法：此示一簡單之例已足，但可知於每情形下，此方法皆可用於任何次方程式.

下例所示原則爲 *Euler* 氏所發明.

例.　消去方程式.

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,\ fx^2+gx+h=0$$

中之 $x$.

使 $x+k$ 爲相當二方程公根之因子，又設

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x+k)(ax^2+lx+m)$$

及
$$fx^2+gx+h=(x+k)(fx+n).$$

$k$, $l$, $m$, $n$ 爲未知量.

於是由二方程式,得恆等式

$$(ax^3+bx^2+cx+d)(fx+n)=(ax^2+lx+m)(fx^2+gx+h).$$

相等 $x$ 同冪之係數，得

$$\begin{aligned}
fl\qquad\ \ -an+ag-bf&=0,\\
gl+fm-bn+ah-cf&=0,\\
hl+gm-cn\qquad -df&=0,\\
hm-dn\qquad\qquad\ &=0,
\end{aligned}$$

從諸一次方程由消去未知量 $l$, $m$, $n$, 得行列式

$$\begin{vmatrix} f & 0 & a & ag-bf \\ g & f & b & ah-cf \\ h & g & c & -df \\ 0 & h & d & 0 \end{vmatrix}=0.$$

530. $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之消去式可用西兒維士特氏（*Sylvester*）之解析消去法，表之爲一行列式．茲仍用前例．

例．消去方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,\quad fx^2+gx+h=0$$

中之 $x$．

乘第一方程式以 $x$，第二方程式以 $x$ 及 $x^2$；得 5 方程式，可視 $x^4,x^3,x^2,x$ 量爲四變量於 5 方程中消去之．5 方程式爲

$$\begin{aligned}
ax^3+bx^2+cx+d&=0,\\
ax^4+bx^3+cx^2+dx&=0,\\
fx^2+gx+h&=0,\\
fx^3+gx^2+hx&=0,\\
fx^4+gx^3+hx^2&=0.
\end{aligned}$$

故其消去式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & f & g & h \\ 0 & f & g & h & 0 \\ f & g & h & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

531. 以下方法之原則爲 *Bezout* 氏所發明；用之可以較前數法皆低之行列式表此結果．茲仍用前例並提出 *Cauchy* 氏之消去法．

例．消去方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,\quad fx^2+gx+h=0$$

中之 $x$；由二方程式得

$$\frac{a}{f}=\frac{bx^2+cx+d}{gx^2+hx}$$

$$\frac{ax+b}{fx+g}=\frac{cx+d}{hx};$$

由是　　$(ag-bf)x^2+(ah-cf)x-df=0,$

及　　$(ah-cf)x^2+(bh-cg-df)x-dg=0.$

合此二方程式與

$$fx^2+gx+h=0,$$

且視 $x^2$ 及 $x$ 爲二不同變量，得消去式

$$\begin{vmatrix} f & g & h \\ ag-bf & ah-cf & -df \\ ah-cf & bh-cg-df & -dg \end{vmatrix}=0.$$

532. 設有二方程式之形式爲 $\phi_1(x,y)=0$，及 $\phi_2(x,y)=0$，則 $y$ 可由任一已示方法消去；其消去式爲 $x$ 之函數.

設有三方程式，其形式爲

$\phi_1(x,y,z)=0$，$\phi_2(x,y,z)=0$，$\phi_3(x,y,z)=0$，

則由第一與第二，第一與第三內，消去 $z$，得二方程式，其形爲

$\psi_1(x,y)=0$. $\psi_2(x,y)=0$.

設從此二方程式消去 $y$，則得形爲 $f(x)=0$之結果. 由此方法推理，可知能於 $n+1$ 方程中消去 $n$ 變量.

533. 已示之一般方法，有時亦便於應用，但由是所得之消去式甚少爲簡單之形式，又有時諸方程式之本身卽暗示某種特殊消去法，此於以下諸例內說明之.

例 1. 消去方程式

$$lx+my=a,\ mx-ly=b,\ l^2+m^2=1.$$

中之 $l$ 及 $m$.

由平方首二方程式，且相加，得

$$l^2x^2+m^2x^2+m^2y^2+l^2y^2=a^2+b^2,$$

卽 $$(l^2+m^2)(x^2+y^2)=a^2+b^2;$$

故其消去式爲 $$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

設 $l=\cos\theta$，$m=\sin\theta$，則第三方程式恒被適合；卽

$x\cos\theta+y\sin\theta=a$，$x\sin\theta-y\cos\theta=b$

之消去式爲 $$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

例 2. 消去下三方程式中之 $x$, $y$, $z$;

$$y^2+z^2=ayz,\ z^2+x^2=bzx,\ x^2+y^2=cxy.$$

因 $$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=a,\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=b,\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=c;$$

由相乘三方程式得

$$2+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=abc;$$

故 $$2+(a^2-2)+(b^2-2)+(c^2-2)=abc;$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2-4=abc.$$

例 3. 消去下三方程式中之 $x$, $y$,

$$x^2-y^2=px-qy,\ 4xy=qx+py,\ x^2+y^2=1.$$

乘第一方程式以 $x$, 第二方程式以 $y$, 得

$$x^3+3xy^2=p(x^2+y^2);$$

故由第三方程式

$$p=x^3+3xy^2.$$

同理 $$q=3x^2y+y^3.$$

故 $$p+q=(x+y)^3,\ p-q=(x-y)^3;$$

$$\therefore (p+q)^{\frac{2}{3}}+(p-q)^{\frac{2}{3}}=(x+y)^2+(x-y)^2$$
$$=2(x^2+y^2);$$

$$\therefore\ (p+q)^{\frac{2}{3}}+(p-q)^{\frac{2}{3}}=2.$$

例 4. 消去下三方程式中之 $x$, $y$, $z$.

$$\frac{y}{z}-\frac{z}{y}=a\cdot\frac{z}{x}-\frac{x}{z}=b\cdot\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=c$$

$$a+b+c=\frac{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)}{xyz}$$
$$=\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{xyz}.$$

設變 $x$ 之符號，則 $b$, $c$ 之符號亦變，而 $a$ 之符號保留不變.

故 $$a-b-c=\frac{(y-z)(z+x)(x+y)}{xyz}.$$

同法 $$b-c-a=\frac{(y+z)(z-x)(x+y)}{xyz}.$$

及 $$c-a-b=\frac{(y+z)(z+x)(x-y)}{xyz}.$$

$\therefore\quad (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$=-\frac{(y^2-z^2)^2(z^2-x^2)^2(x^2-y^2)^2}{x^4y^4z^4}$$

$$=-\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)^2\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)^2\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2$$

$$=-a^2b^2c^2.$$

$\therefore\quad 2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4+a^2b^2c^2=0.$

## 習　題 XXXIV. c.

1. 消去 $m$ 由方程式
$$m^2x-my+a=0,\quad my+x=0.$$

2. 消去 $m,n$ 由方程式
$$m^2x-ny+a=0,\quad n^2x-ny+a=0,\quad mn+1=0.$$

3. 消去 $m,n$ 由方程式
$$mx-ny=a(m^2-n^2),\quad nx+my=2amn,\quad m^2+n^2=1.$$

4. 消去 $p,\ q,\ r$ 由方程式
$$p+q+r=0,\quad a(qr+rp+pq)=2a-x,$$
$$apqr=y,\qquad qr=-1.$$

5. 消去 $x$ 由方程式
$$ax^2-2a^2x+1=0,\quad a^2+x^2-3ax=0.$$

6. 消去 $m$ 由方程式
$$y+mx=a(1+m),\quad my-x=a(1-m).$$

7. 消去 $x,\ y,\ z$ 由方程式
$$yz=a^2,\quad zx=b^2,\quad xy=c^2,\quad x^2+y^2+z^2=d^2,$$

8. 消去 $p,\ q$ 由方程式
$$x(p+q)=y,\quad p-q=k(1+pq),\quad xpq=a.$$

9. 消去 $x,y$ 由方程式
$$x-y=a,\quad x^2-y^2=b^2,\quad x^3-y^3=c^3.$$

10. 消去 $x,y$ 由方程式
$$x+y=a,\quad x^2+y^2=b^2,\quad x^4+y^4=c^4.$$

11. 消去 $x,y,z,u$ 由方程式
$$x=by+cz+du,\quad y=cz+du+ax,$$
$$z=du+ax+by,\quad u=ax+by+cz.$$

12. 消去 $x,y,z$ 由方程式
$$x+y+z=0,\quad x^2+y^2+z^2=a^2,$$
$$x^3+y^3+z^3=b^3,\quad x^5+y^5+z^5=c^5.$$

13. 消去 $x, y, z$ 從方程式

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=a, \quad \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=b, \quad \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)=c.$$

14. 消去 $x, y, z$ 從方程式

$$\frac{x^2(y+z)}{a^3}=\frac{y^2(z+x)}{b^3}=\frac{z^2(x+y)}{c^3}=\frac{xyz}{abc}=1.$$

15. 消去 $x, y$ 從方程式

$$4(x^2+y^2)=ax+by, \quad 2(x^2-y^2)=ax-by, \quad xy=c^2.$$

16. 消去 $x, y, z$ 從方程式

$$(y+z)^2=4a^2yz, \quad (z+x)^2=4b^2zx, \quad (x+y)^2=4c^2xy.$$

17. 消去 $x, y, z$ 從方程式

$$(x+y-z)(z-y+x)=ayz, \quad (y+z-x)(y-z+x)=bzx,$$
$$(z+x-y)(z-x+y)=cxy.$$

18. 消去 $x, y$ 從方程式

$$x^2y=a, \quad x(x+y)=b, \quad 2x+y=c.$$

19. 指明 $(a+b+c)^3-4(b+c)(c+a)(a+b)+5abc=0$

為 $ax^2+by^2+cz^2=ax+by+cz=yz+zx+xy=0$ 之消去式.

20. 消去 $x, y$ 從方程式

$$ax^2+by^2=ax+by=\frac{xy}{x+y}=c.$$

21. 指明 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=5a^2b^2c^2$

為 $ax+yz=bc$, $by+zx=ca$, $cz+xy=ab$, $xyz=abc$ 之消去式.

22. 消去 $x, y, z$ 自

$$x^2+y^2+z^2=x+y+z=1.$$

$$\frac{a}{x}(x-p)=\frac{b}{y}(y-q)=\frac{c}{z}(z-r).$$

23. 用 *Bezout* 氏法消去 $x, y$ 從

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=0, \quad a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+d'y^3=0.$$

# 第三十五章

## 方程式論

534. 於第九章內曾證明二次方程式根與係數之若干必然關係．茲更探究 $n$ 次方程式內與此相似之關係，且討論方程式一般原理內更較根本之性質．

535. 使 $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$ 爲 $x$ 之 $n$ 次有理整函數，且表之以 $f(x)$；於是 $f(x)=0$ 爲 $n$ 次有理整方程式之範式，遍除之以 $p_0$，於其一般性無任何損失，故可以

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

爲任何次有理整方程式之範式．

捨有特別說明外，係數 $p_1$，$p_2$，$\cdots\cdots\cdots p_n$ 永設其爲有理量．

536. $x$ 使 $f(x)$爲零之任何值，稱爲方程式 $f(x)=0$ 之根．

§514內曾證明 $f(x)$ 除以 $x-a$ 時之除式爲 $f(a)$；故設$f(x)$能爲 $x-a$ 除盡而無餘式，則 $a$ 爲方程式 $f(x)=0$ 之一根．

537. 茲假定任何形爲 $f(x)=0$ 之方程式有一實根或虛根 此命題之證明可見於方程式論中；而不屬於現今所討論之範圍．

538. 任一 $n$ 次方程式有 $n$ 根，且僅有 $n$ 根.

表已知方程式以 $f(x)=0$，於此

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n.$$

方程式 $f(x)=0$ 必有一實根，或虛根；使表之以 $a_1$；於是 $f(x)$ 可爲 $x-a_1$ 除盡，由是

$$f(x)=(x-a_1)\phi_1(x),$$

$\phi_1(x)$ 爲 $n-1$ 次之有理整函數. 又方程式 $\phi_1(x)=0$必有一根，表之以 $a_2$，於是 $\phi_1(x)$ 能爲 $x-a_2$ 所除盡；由是

$$\phi_1(x)=(x-a_2)\phi_2(x),$$

$\phi_2(x)$ 爲 $n-2$ 次之有理整函數.

由是 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\phi_2(x)$.

依此進行，如 §309 內，得

$$f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots\cdots(x-a_n)$$

於是因 $f(x)$ 當 $x$ 爲 $a_1$，$a_2$，$a_3\cdots\cdots\cdots a_n$ 中之任何值時爲零，故方程式 $f(x)=0$ 有 $n$ 根.

此方程式之根亦不能多於 $n$ 個；因設 $x$ 有不同於 $a_1$，$a_2$，$a_3$，$\cdots\cdots\cdots$ $a_n$ 之任何值，則右方所有因子皆不爲零，由是 $f(x)$ 即不能因是值而消滅.

上研究內 $a_1$，$a_2$，$a_3$ $\cdots\cdots\cdots$ $a_n$ 諸量中之幾，可以相等；於此情形下，雖諸根非盡相異，但仍視爲有 $n$ 根.

539. 任何方程式根與係數間關係之研究.

使此方程式表以

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

其根表以 $a$，$b$，$c$，$\cdots\cdots\cdots k$；於是得恆等式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$$
$$=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots\cdots(x-k).$$

用 §163 之表示法得

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$$
$$=x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}x+(-1)^nS_n.$$

相等此恆等式內 $x$ 同冪之係數．

$$-p_1=S_1=\text{根之和};$$
$$p_2=S_2=\text{根每次取二之積之和};$$
$$-p_3=S_3=\text{根每次取三之積之和};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^n p_n=S_n=\text{根之積}.$$

設 $x^n$ 之係數爲 $p_0$，除各項以 $p_0$，則此方程式變爲

$$x^n+\frac{p_1}{p_0}x^{n-1}+\frac{p_2}{p_0}x^{n-2}+\cdots\cdots+\frac{p_{n-1}}{p_0}x+\frac{p_n}{p_0}=0.$$

用 §521 之表示法，

$$\Sigma a=\frac{p_1}{p_0},\ \Sigma ab=\frac{p_2}{p_0},\ \Sigma abc=\frac{p_3}{p_0},\cdots\cdots\cdots,abc\cdots\cdots k=(-1)^n\frac{p_n}{p_0}.$$

例 1．解方程式

$$x+ay+a^2z=a^3,\ x+by+b^2z=b^3,\ x+cy+c^2z=c^3.$$

由此方程式，知 $a$，$b$，$c$ 爲 $t$ 之諸值適合三次方程式

$$t^3-zt^2-yt-x=0;$$

故 $\quad z=a+b+c,\ y=-(bc+ca+ab),x=abc.$

例 2．設 $a$，$b$，$c$ 爲方程式 $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$ 之根，求根爲 $a^2$，$b^2$，$c^2$ 之方程式．

所求方程式爲

$$(y-a^2)(y-b^2)(y-c^2)=0,$$

或 $$(x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)=0,\ \text{若}\ y=x^2;$$

即 $$(x-a)(x-b)(x-c)(x+a)(x+b)(x+c)=0.$$

但 $$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+p_1x^2+p_2x+p_3;$$

故 $$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3-p_1x^2+p_2x-p_3.$$

由是所求方程式爲

$$(x^3+p_1x^2+p_2x+p_3)(x^3-p_1x^2+p_2x-p_3)=0,$$

或 $$(x^3+p_2x)^2-(p_1x^2+p_3)^2=0,$$

或 $$x^6+(2p_2-p_1^2)x^4+(p_2^2-2p_1p_3)x^2-p_3^2=0;$$

又設易 $x^2$ 以 $y$ 得

$$y^3+(2p_2-p_1^2)y^2+(p_2^2-2p_1p_3)y-p_3^2=0.$$

540. 因上節証得之關係式，其數與根數相等，故學者或認爲能用以解任何已知之方程式，但稍加思慮，則知其並非如此．消去 $a$，$b$，$c$，……… $k$ 諸量中之任 $n-1$ 量，即得一次定餘一量之方程式；但因諸量於各方程內爲對稱，顯然將永得相同係數之方程式，由是此方程式僅爲以 $a$，$b$，$c$，……… $k$ 中之某值代 $x$ 之原方程式而已．

今設以方程式

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$$

爲例，且使 $a$，$b$，$c$ 爲其根；於是

$$a+b+c=-p_1,$$
$$ab+ac+bc=-p_2,$$
$$abc=-p_3.$$

以 $a^2$，$-a$，乘方程式，於是

$$a^3=-p_1a^2-p_2a-p_3,$$
$$a^3+p_1a^2+p_2a+p_3=0,$$

此爲以 $a$ 代 $x$ 之原方程式．

以上消去法甚爲一般，可用之於任何次之方程式．

541. 設方程式之二或二以上之根以某指定關係相關連，則有時用 §539 証明之性質能求得其完全解答．

例 1. 解方程式 $4x^3-24x^2+23x+18=0$，已知其諸根成等差級數．

表其諸根以 $a-b$，$a$，$a+b$；於是其諸根之和爲 $3a$；每次取二根之積之和爲 $3a^2-b^2$；諸根之連乘積爲 $a(a^2-b^2)$；故得方程式

$$3a=6,\quad 3a^2-b^2=\frac{23}{4},\quad a(a^2-b^2)=-\frac{9}{2};$$

由第一方程式得 $a=2$，第二得 $b=\pm\frac{5}{2}$；且因諸值適合於第三方程式，故三方程式一致，由是所求根爲

$$-\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{9}{2}.$$

例 2. 解方程式 $24x^3-14x^2-63x+45=0$，已知其一根爲他一根之二倍.

表其根以 $a$，$2a$，$b$；則

$$3a+b=\frac{7}{12},\ 2a^2+3ab=-\frac{21}{8};\ 2a^2b=-\frac{15}{8}.$$

由首二方程式求得

$$8a^2-2a-3=0;$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{4}\ \text{或}\ -\frac{1}{2};\ b=-\frac{5}{3}\ \text{或}\ \frac{25}{12}.$$

由驗算知 $a=-\frac{1}{2}$ 及 $b=\frac{25}{12}$ 二值不適合於第三方程式；有效值僅限於

$$a=\frac{3}{4}\ \text{及}\ b=-\frac{5}{3}.$$

由是所求根爲 $\frac{3}{4}$，$\frac{3}{2}$，$-\frac{5}{3}$.

542. §539 証明之性質雖不能用以求得方程式之根，但可用以決定根之對稱函數之值.

例 1. 求方程式 $x^3-px^2+qx-r=o$ 之根之平方和及立方和.

表各根以 $a$，$b$，$c$；於是

$$a+b+c=p,\quad bc+ca+ab=q.$$

今

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(bc+ca+ab)$$
$$=p^2-2q.$$

又於已知方程式內以 $a$，$b$，$c$ 代 $x$，且相加；由是

$$a^3+b^3+c^3-p(a^2+b^2+c^2)+q(a+b+c)-3r=0;$$
$$\therefore\ a^3+b^3+c^3=p(p^2-2q)-pq+3r$$
$$=p^3-3pq+3r.$$

例 2. 設 $a$，$b$，$c$，$d$ 爲方程式

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

之根. 求 $\Sigma a^2b$ 之值.

因

$$a+b+c+d=-p\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=q\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$abc+abd+acd+bcd=-r\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由三方程式得

$$-pq=\Sigma a^2b+3(abc+abd+acd+bcd)$$
$$=\Sigma a^2b-3r;$$
$$\therefore\ \Sigma a^2b=3r-pq.$$

## 習　題 XXXV. a.

求方程式，設其根為

1. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\pm\sqrt{3}$.　　2. 0, 0, 2, 2, −3, −3.

3. 2, 2, −2, −2, 0, 5.　　4. $a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$.

解以下諸方程式

5. $x^4-16x^3+86x^2-176x+105=0$，其二根為 1 及 7.

6. $4x^3+16x^2-9x-36=0$，其中有二根之和為零.

7. $4x^3+20x^2-23x+6=0$，有二根相等.

8. $3x^3-26x^2+52x-24=0$，其根成等比級數.

9. $2x^3-x^2-22x-24=0$，有二根之比為 3:4.

10. $24x^3+46x^2+9x-9=0$，一根為他一根之二倍.

11. $8x^4-2x^3-27x^2+6x+9=0$，其中有二絕對值同而符號異.

12. $54x^3-39x^2-26x+16=0$，其根成等比級數.

13. $32x^3-48x^2+22x-3=0$，其根成等差級數.

14. $6x^4-29x^3+40x^2-7x-12=0$，二根之積為 2.

15. $x^4-2x^3-21x^2+22x+40=0$，其根成等差級數.

16. $27x^4-195x^3+494x^2-520x+192=0$，其根成等比級數.

17. $18x^3+81x^2+121x+60=0$，一根為他二根之和之半.

18. 設 $a, b, c$ 爲方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 之根，求以下二式之值：

(1) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.　　(2) $\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}+\frac{1}{a^2b^2}$.

19. 設 $a, b, c$ 爲方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根，求以下二式之值：

(1) $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$

(2). $(b+c)^{-1}+(c+a)^{-1}+(a+b)^{-1}$.

20. 求 $x^4+qx^2+rx+s=0$ 之根之平方和及立方和.

21. 求 $x^3+qx+r=0$ 之根之四次冪之和.

543. 實係數方程式內之虛根必成對出現.

設 $f(x)=0$ 爲實係數方程式，且設其有一虛根 $a+ib$；茲指明 $a-ib$ 亦爲其一根.

$f(x)$ 內相當此二根之因子爲

$$(x-a-ib)(x-a+ib) \text{ 即 } (x-a)^2+b^2.$$

使 $f(x)$ 除以 $(x-a)^2+b^2$；表其商以 $Q$，其餘式以 $Rx+R'$；於是

$$f(x)=Q\{(x-a)^2+b^2\}+Rx+R'.$$

於此恆等式內使 $x=a+ib$，於是由假設 $f(x)=0$；又 $(x-a)^2+b^2=0$. 故 $R(a+ib)+R'=0$.

使實數虛數二部分皆等於零，即

$$Ra+R'=0,\quad Rb=0$$

但根據假設 $b$ 不爲零，

$$\therefore\ R=0 \text{ 及 } R'=0.$$

故 $f(x)$ 可爲 $(x-a)^2+b^2$ 所除盡，即爲

$$(x-a-ib)(x-a+ib)$$

所除盡. 故 $x=a-ib$ 亦爲一根.

544. 於前節知設方程式 $f(x)=0$ 有一對虛根 $a\pm ib$，則 $(x-a)^2+b^2$ 爲式 $f(x)$ 之因子.

設 $a\pm ib$，$c\pm id$，$e\pm ig$，……… 爲方程式 $f(x)=0$ 之虛根，及 $\phi(x)$ 爲相當諸虛根之二次因子之積；則

$$\phi(x)=\{(x-a)^2+b^2\}\{(x-c)^2+d^2\}\{(x-e)^2+g^2\}\cdots$$

因各因子於 $x$ 爲實值時爲正，故 $\phi(x)$ 於 $x$ 爲實值時永遠爲正.

545. 如 §543 可指明有理係數方程式內之不盡根亦成對存在 即設 $a+\sqrt{b}$ 爲一根，則 $a-\sqrt{b}$ 亦爲一根.

例 1. 解方程式 $6x^4-13x^3-35x^2-x+3=0$，已知其一根爲 $2-\sqrt{3}$.

因 $2-\sqrt{3}$ 爲一根，故知 $2+\sqrt{3}$ 亦爲一根，而相當此對根之二次因子爲 $x^2-4x+1$.

又　$6x^4-13x^3-35x^2-x+3=(x^2-4x+1)(6x^2+11x+3)$

故從　$6x^2+11x+3=0$，或 $(3x+1)(2x+3)=0$

可得其他二根；

由是所求四根爲，$-\frac{1}{3}$，$-\frac{3}{2}$，$2+\sqrt{3}$，$2-\sqrt{3}$.

例 2. 求四次有理係數方程式，已知其一根爲 $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$.

於此必以 $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$，$\sqrt{2}-\sqrt{-3}$ 爲一對根，及 $-\sqrt{2}+\sqrt{-3}$，$-\sqrt{2}-\sqrt{-3}$ 爲他一對根.

相當第一對之二次因子爲 $x^2-2\sqrt{2}x+5$，相當第二對之二次因子爲 $x^2+2\sqrt{2}x+5$

故所求方程式爲

$$(x^2+2\sqrt{2}x+5)(x^2-2\sqrt{2}x+5)=0$$

或
$$(x^2+5)^2-8x^2=0$$

或
$$x^4+2x^2+25=0$$

例 3. 指明方程式

$$\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}+\frac{C^2}{x-c}+\cdots\cdots+\frac{H^2}{x-h}=k.$$

無虛根.

設其有，使 $p+iq$ 爲其一根；則 $p-iq$ 亦爲一根；以二值代 $x$，且從第一結果減第二結果；由是

$$q\left\{\frac{A^2}{(p-a)^2+q^2}+\frac{B^2}{(p-b)^2+q^2}+\frac{C^2}{(p-c)^2+q^2}+\cdots+\frac{H^2}{(p-h)^2+q^2}\right\}=0;$$

此捨 $q=0$ 外，决爲不可能.

546. 决定方程式某數根之性質不盡需解此方程式，例如，以下數條卽可用以决定根之性質.

(*i*) 設係數皆正數則方程式無正根；故方程式$x^5+x^3+2x+1=0$不能有正根.

(*ii*) 設 $x$ 之偶次羃皆同號，及奇次羃同有與此相反之符號，則此方程式無負根，故方程式.

$$x^7+x^6-2x^4+x^3-3x^2+7x-5=0$$

不能有負根.

(*iii*) 設方程式僅含 $x$ 之偶次羃，又其係數皆爲同號，則此方程式無實根；故方程式 $2x^8+3x^4+x^2+7=0$，捨 $x=0$ 外不能有實根.

(*iv*) 設方程式僅含 $x$ 之奇次羃，又其係數皆爲同號，則此方程式捨 $x=0$ 外無實根；故方程式 $x^9+2x^5 3x^3+x=0$

捨 $x=0$ 外，不能有實根.

所有以上結果皆含於下節定理內，是卽笛卡特氏之符號法則.

547. 方程式$f(x)=0$不能有多於$f(x)$內符號變換數之正根，及多於 $f(-x)$ 內符號變換數之負根.

設一多項式內各項之符號爲 $++--+---+-+-$；茲指明設此乘以符號爲$+-$之二項式，則積內符號之變換數至少較原多項式內多一.

今僅寫乘式及被乘式內各項之符號，

$$\begin{array}{l}
++--+---+-+-\\
+-\\
\hline
++--+---+-+-\\
\quad --++-+++-+-+\\
\hline
+\pm-\mp+-\mp\mp+-+-+
\end{array}$$

故細察積內知

(i)　雙關號易原多項式內連續相同之號.

(ii)　一或一組雙關前後之號不相同.

(iii)　其尾端加入一符號變換.

茲取一最不利之情形，即所有未定號皆易以連續相同之符號；由(ii)知無論取上部之號抑取下部之號其符號變換之數皆同，使取其上部符號；由是符號變換之數不能較

$$+ + - - + - - - + - + - +$$

內者爲少，此一串符號與原多項式內所有者相同，僅於尾端加入一符號變換而已.

設相當負根及虛根之因子業已相乘出，則相當正根 $x-a$ 之每因子至少入另帶入一符號變換；故方程式之正根不能多於其符號變換之數.

又，方程式 $f(-x)=0$ 之根同於 $f(x)=0$ 內之根而異其符號；故 $f(x)=0$ 之負根爲 $f(-x)=0$ 之正根；但其正根之數不能多於 $f(-x)$ 內符號變換之數；即 $f(x)=0$ 之負根之數不能多於 $f(-x)$ 內符號變換之數.

例．研究方程式 $x^9+5x^8-x^3+7x+2=0$

此方程式符號變換之數爲二，故至多有二正根.

又 $f(-x)=-x^9+5x^8+x^3-7x+2$，其中符號變換之數爲三，故已知方程式至多有三負根，故原方程式至少有四虛根.

## 習　題　XXXV.b.

解方程式：

1．　$3x^4-10x^3+4x^2-x-6=0$，其一根爲 $\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$.

2．　$6x^4-13x^3-35x^2-x+3=0$，其一根爲 $2-\sqrt{-3}$.

3．　$x^4+4x^3+5x^2+2x-2=0$，其一根爲 $-1+\sqrt{-1}$.

4. $x^4+4x^3+6x^2+4x+5=0$，其一根為 $\sqrt{-1}$，

5. 解方程式 $x^5-x^4+8x^2-9x-15=0$，其一根為 $\sqrt{3}$，一根為 $1-2\sqrt{-1}$。

求最低次之有理係數方程式，已知其一根為

6. $\sqrt{3}+\sqrt{-2}$。　　7. $-\sqrt{-1}+\sqrt{5}$。

8. $-\sqrt{2}-\sqrt{-2}$。　　9. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$。

10. 作方程式，已知其根為$\pm4\sqrt{3}$，$5\pm2\sqrt{-1}$。

11. 作方程式，已知其根為 $1\pm\sqrt{-2}$、$2\pm\sqrt{-3}$。

12. 作八次有理係數方程式，已知其一根為

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{-1}$$

13. 求方程式 $3x^4+12x^2+5x-4=0$ 之根之性質。

14. 指明方程式 $2x^7-x^4+4x^3-5=0$ 至少有四虛根。

15. 關於方程式

$$x^{10}-4x^6+x^4-2x-3=0$$

之根，可有如何之推斷。

16. 求方程式 $x^9-x^5+x^4+x^2+1=0$ 至少有幾虛根。

17. 求 $x^3-px^2+qx-r=0$ 有

(1) 異號之二等根，

(2) 成等比級數之根，

之條件。

18. 設方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之根成等差級數，指明 $p^3-4pq+8r=0$；又設其根式成等比級數，指明 $p^2s=r^2$。

19. 設方程式 $x^n-1=0$ 之根為 $1,\alpha,\ \beta,\ \gamma,\cdots\cdots$，指明

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\cdots\cdots=n.$$

設 $a,\ b,\ c$ 為方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 之根，求下式之值：

20. $\Sigma a^2b^2$。　　21. $(b+c)(c+a)(a+b)$。

22. $\Sigma\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)$。　　23. $\Sigma a^2b$。

設 $a,\ b,\ c\ d$，為 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之根，求下式之根：

24. $\Sigma a^2bc$。　　25. $\Sigma a^4$

548. 求當 $f(x)$ 爲 $x$ 之有理整函數時，$f(x+h)$ 之值.

使 $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$；於是 $f(x+h)$ $=p_0(x+h)^n+p_1(x+h)^{n-1}+p_2(x+h)^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}(x+h)+p_n$. 展開各項且依 $h$ 之升冪排列之，得

$$\begin{aligned}&p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n\\&\quad+h\{np_0x^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}+\cdots+p_{n-1}\}\\&\quad+\frac{h^2}{\lfloor 2}\{n(n-1)p_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)p_1x^{n-3}+\cdots+2p_{n-2}\}\\&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\quad+\frac{h^n}{\lfloor n}\{n(n-1)(n-2)\cdots2.1p_0\}.\end{aligned}$$

此結果常寫爲

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)+\frac{h^3}{\lfloor 3}f'''(x)+\cdots+\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(x),$$

函數 $f'(x),f''(x),f'''(x),\cdots\cdots$稱爲 $f(x)$之一次，二次，三次，$\cdots\cdots$誘導函數.

知微分原理之學生，當知以上 $f(x+h)$ 之展開式僅爲泰勒氏定理之特殊情形；故函數 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ 可由微分常用法則即刻寫出；故從 $f(x)$求$f'(x)$之方法，爲先乘 $f(x)$內各項以該項 $x$ 之指數，再從其指數減 1.

同法由繼續微分求得 $f''(x),f'''(x),\cdots\cdots\cdots$

以 $-h$ 代 $h$，得

$$f(x-h)$$
$$=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)-\frac{h^3}{\lfloor 3}f'''(x)+\cdots+(-1)^n\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(x).$$

$f(x+h)$ 顯然爲關於 $x$ 及 $h$ 之對稱函數；故

$$f(x+h)=f(h)+xf'(h)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(h)+\cdots+\frac{x^n}{\lfloor n}f^n(h).$$

此處 $f'(h), f''(h), f'''(h), \cdots\cdots$ 表以 $h$ 易 $x$ 由連續誘導函數 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $\cdots\cdots$ 得來之結果.

例. 設 $f(x)=2x^4-x^3-2x^2+5x-1$, 求 $f(x+3)$ 之值.

此處 $f(x)=2x^4-x^3-2x^2+5x-1$, 於是 $f(3)=131$;

$$f'(x)=8x^3-3x^2-4x+5, \text{ 及 } f'(3)=182;$$

$$\frac{f''(x)}{\lfloor 2}=12x^2-3x-2, \text{ 及 } \frac{f''(3)}{\lfloor 2}=97;$$

$$\frac{f'''(x)}{\lfloor 3}=8x-1, \text{ 及 } \frac{f'''(3)}{\lfloor 3}=23;$$

$$\frac{f^{iv}(x)}{\lfloor 4}=2.$$

則 $\quad f(x+3)=2x^4+23x^3+97x^2+182x+131.$

但此計算可如下節所示運用杭納氏法完成之.

549. 設 $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$: 使 $x=y+h$, 並設 $f(x)$ 於是變爲

$$q_0y^n+q_1y^{n-1}+q_2y^{n-2}+\cdots\cdots+q_{n-1}y+q_n.$$

今 $y=x-h$; 故得恆等式

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$$

$$=q_0(x-h)^n+q_1(x-h)^{n-1}+\cdots\cdots+q_{n-1}(x-h)+q_n;$$

由是 $q_n$ 爲除 $f(x)$ 以 $x-h$ 所得之餘式, 又其所得之商爲

$$q_0(x-h)^{n-1}+q_1(x-h)^{n-2}+\cdots\cdots+q_{n-1}$$

同理 $q_{n-1}$ 爲除末式以 $x-h$ 所得之餘式, 其所得之商爲.

$$q_0(x-h)^{n-2}+q_1(x-h)^{n-3}+\cdots\cdots+q_{n-2};$$

類推, 故 $q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, \cdots$ 可用 §515所示法則求得之末商爲 $q_0$ 且顯然等於 $p_0$.

例．求 $2x^4-x^3-2x^2+5x-1$ 內以 $x+3$ 易 $x$ 所得之結果．

陸續除以 $x-3$．

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $-1$ | $-2$ | 5 | $-1$ |
| | 6 | 15 | 39 | 132 |
| | 5 | 13 | 44 | $131=q_4$ |
| | 6 | 33 | 138 | |
| | 11 | 46 | $182=q_3$ | |
| | 6 | 51 | | |
| | 17 | $97=q_2$ | | |
| | 6 | | | |
| | $23=q_1$ | | | |

或再減之爲

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $-1$ | $-2$ | 5 | $-1$ |
| 2 | 5 | 13 | 44 | 131 |
| 2 | 11 | 46 | 182 | |
| 2 | 17 | 97 | | |
| 2 | 23 | | | |
| 2 | | | | |

故此結果爲 $2x^4+23x^3+97x^2+182x+131$．比較 §548．

當注意杭納氏法於數字計算最爲有用．

550．設變數 $x$ 從 $a$ 陸續變至 $b$，則 $f(x)$ 亦從 $f(a)$ 陸續變至 $f(b)$．

設 $c$ 及 $c+h$ 爲 $x$ 在 $a$ 及 $b$ 間之任二值，則

$$f(c+h)-f(c)=hf'(c)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(c)+\cdots+\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(c).$$

由取 $h$ 爲充分之小，則 $f(c+h)$ 及 $f(c)$ 間之差能使之爲適意之小；故變數 $x$ 每有一小變化，函數 $f(x)$ 亦有一相當之小變化，由是當 $x$ 從 $a$ 漸變至 $b$ 時，$f(x)$ 亦從 $f(a)$ 漸變至 $f(b)$．

551．應注意，此前尙未証明 $f(x)$ 從 $f(a)$ 至 $f(b)$ 永爲遞增，抑永爲遞減，僅證明其從一值至經過一值變至他一值不能爲突然之變化而已，此有時可以遞增，有時亦可以遞減．

學生如有迹象表示法原理之知識，可於任何特殊例題，由畫 $y=f(x)$ 之曲線，看出 $f(x)$ 遞變之情形．

552．設 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相反，則方程式 $f(x)=0$ 必有一根在 $a$ 與 $b$ 之間．

當 $x$ 從 $a$ 漸變至 $b$ 時，函數 $f(x)$ 從 $f(a)$ 漸變至 $f(b)$，由是必經過所有中間各值；但 $f(a)$ 及 $f(b)$ 異號，故零值必存於其間；即參

$x$ 爲 $a,b$ 間之某值時$f(x)=0$.

但此非謂 $f(x)=0$ 於 $a$ 及 $b$ 間僅有一根，亦非謂設 $f(a)$ 及 $f(b)$同號，則$f(x)=0$ 無一根在 $a,b$ 之間也.

553. 任何奇次方程式至少有一實根與末項異號.

於函數$f(x)$內陸續以 $+\infty,0,-\infty$易 $x$，則

$$f(+\infty)=+\infty,f(0)=p_n,f(-\infty)=-\infty.$$

設 $p_n$ 爲正，則$f(x)=0$ 有一根在 0 及 $-\infty$之間，設 $p_n$ 爲負，則$f(x)=0$ 有一根在 0 及$+\infty$之間.

554. 任何末項爲負之偶次方程式至少有一正一負之二實根.

因於此情形內

$$f(+\infty)=+\infty,f(0)=p_n,\ f(-\infty)=+\infty;$$

但 $p_n$ 爲負；故$f(x)=0$ 有一根在 0 及$+\infty$之間，一根在 0 及$-\infty$之間.

555. 若$f(a)$及$f(b)$異號，則$f(x)=0$ 有奇數個根在 $a$及 $b$ 間；又若$f(a)$及$f(b)$同號則 $f(x)=0$ 有偶數個根或無根在 $a,b$ 之間.

設 $a$ 大於 $b$，及 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$，……k 表所有$f(x)=0$ 在 $a,b$ 間之根. 又設 $\phi(x)$ 表 $f(x)$除以$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots\cdots(x-\mathrm{k})$ 之積之商；於是

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\mathrm{k})\phi(x).$$

故 $$f(a)=(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\cdots(a-\mathrm{k})\phi(a).$$

$$f(b)=(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)\cdots(b-\mathrm{k})\phi(b).$$

今 $\phi(a)$ 及 $\phi(b)$ 必同號，因否則方程式 $\phi(x)=0$ 之一根亦即 $f(x)=0$ 之一根，必在 $a,b$ 之間 [§552]，此與假設不合，故若 $f(a)$及$f(b)$之符號相反，則二式

$(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\cdots\cdots(a-k)$,

及　$(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)\cdots\cdots(b-k)$

之符號亦必相反，又第一式內各因子皆正，第二式內之各因子皆負；故因子之數必爲奇數，即 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots K$ 諸根之數必爲奇數.

同理若$f(a)$及$f(b)$同號，則其因子之數必爲偶數，於此情形內，設 $\alpha,\beta,\gamma\cdots\cdots k$皆大於$a$，或皆小於 $b$，亦能適合已知條件；故 $f(x)=0$ 不必定有根在 $a,b$ 之間也.

556．設 $a,b,c,\cdots\cdots k$ 爲方程式$f(x)=0$ 之根，則

$$f(x)=p_0(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-k)$$

$a,b,c,\cdots\cdots k$ 諸量不必皆不相等．設其中有 $r$ 個等於$a$，$s$ 個等於 $b$，$t$ 個等於 $c$，……則

$$f(x)=p_0(x-a)^r(x-b)^s(x-c)^t\cdots\cdots.$$

於此仍稱方程式$f(x)=0$ 有 $n$ 根，其相等各根以不同之根視之.

557．設方程式$f(x)=0$ 有 $r$ 根等於 $a$，則方程式$f'(x)=0$ 有 $r-1$ 根等於 $a$.

設 $\phi(x)$爲$f(x)$ 除以 $(x-a)^r$ 時之商，則

$$f(x)=(x-a)^r\phi(x).$$

以 $x+h$ 代 $x$；由是

$$f(x+h)=(x-a+h)^r\phi(x+h);$$

$$\therefore f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(x)+\cdots$$

$$=\left\{(x-a)^r+r(x-a)^{r-1}h+\cdots\right\}\left\{\phi(x)+h\phi'(x)+\frac{h^2}{\underline{|2}}\phi''(x)+\cdots\right\}.$$

由相等此恆等式內 $h$ 之係數，得

$$f'(x)=r(x-a)^{r-1}\phi(x)+(x-a)^r\phi'(x).$$

由是$f'(x)$含因子 $x-a$ 有 $r-1$ 次；則方程式 $f'(x)=0$ 有 $r-1$ 根等於 $a$.

同法可指明設 $f(x)=0$ 有 $s$ 根等 $b$，則方程式 $f'(x)=0$ 有 $s-1$ 根等於 $b$；類推.

558. 由以上証明知設 $f(x)$ 含 $(x-a)^r$ 之因子，則 $f'(x)$ 含 $(x-a)^{r-1}$ 之因子；由是 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 有一公因子 $(x-a)^{r-1}$.

故設 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 無公因子，則 $f(x)$ 內無重複之因子；故方程式 $f(x)=0$ 之有無等根全視 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之有無含 $x$ 之公因子.

559. 由上節可見欲求方程式 $f(x)=0$ 之等根，必先求 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之公因子.

例 1. 解有等根之方程式 $x^4-11x^3+44x^2-76x+48=0$.

於此 $f(x)=x^4-11x^3+44x^2-76x+48$

$$f'(x)=4x^3-33x^2+88x-76;$$

由常用方法求得 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之公因子爲 $x-2$；故 $(x-2)^2$ 爲 $f(x)$ 之因子；而

$$f(x)=(x-2)^2(x^2-7x+12);$$

$$=(x-2)^2(x-3)(x-4);$$

故其根爲 2,2,3,4.

例 2. 求方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 有二等根之條件.

於此情形內方程式 $f(x)=0$，及 $f'(x)=0$，即

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$ax^2+2bx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

必有一公根，而所求條件可由消去二方程式間之 $x$ 求得之.

結合(1)及(2)，得

$$bx^2+2cx+d=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

從 (2) 及 (3)，得

$$\frac{x^2}{2(bd-c^2)}=\frac{x}{bc-ad}=\frac{1}{2(ac-b^2)};$$

故所求條件爲

$$(bc-ad)^2=4(ac-b^2)(bd-c^2).$$

560. 已知設方程式 $f(x)=0$ 有 $r$ 根等於 $a$，則方程式 $f'(x)=0$ 有 $r-1$ 根等於 $a$，但 $f''(x)$ 爲 $f'(x)$ 之一次導來函數，故方程式 $f''(x)=0$ 有 $r-2$ 根等於 $a$；同理 $f'''(x)=0$ 必有 $r-3$ 根等於 $a$；類推，此種觀察法用之以求 $f(x)=0$ 之等根，有時較 §559 之方法尤爲簡便.

561. 設 $a, b, c, \cdots\cdots k$ 爲方程式 $f(x)=0$ 之根，求證

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}+\cdots+\frac{f(x)}{x-k}.$$

已知 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-k)$；

以 $x+h$ 代 $x$，

$$f(x+h)=(x-a+h)(x-b+h)(x-c+h)\cdots(x-k+h)\cdots(1).$$

但 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(x)+\cdots$；

故 $f'(x)$ 等於 (1) 式右方 $h$ 之係數；由是如 §163

$$f'(x)=(x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-k)+(x-a)(x-c)\cdots\cdots(x-k)+\cdots\cdots$$

即 $f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}+\cdots\cdots+\frac{f(x)}{x-k}.$

562. 上節結果，能用之以求一方程式之根之指定羃之和.

例. 設 $S_k$ 表方程式 $x^5+px^4+qx^2+t=0$ 之根之 $k$ 次羃之和，求 $S_4$，$S_6$ 及 $S_{-4}$ 之值.

使 $f(x)=x^5+px^4+qx^2+t$；

則 $f'(x)=5x^4+4px^3+2qx$

$$今\frac{f(x)}{x-a}=x^4+(a+p)x^3+(a^2+ap)x^2+(a^3+a^2p+q)x+a^4+a^3p+aq;$$

類似式適用於

$$\frac{f(x)}{x-b},\ \frac{f(x)}{x-c},\ \frac{f(x)}{x-a},\ \frac{f(x)}{x-e}.$$

故由加法

$$5x^4+4px^3+2qx=5x^4+(S_1+5p)x^3+(S_2+pS_1)^2$$
$$+(S_3+pS_2+5q)x+(S_4+pS_3+qS_1)$$

由相等係數，

$$S_1+5p=4p,\ 故\ S_1=-p;$$
$$S_2+pS_1=0,\quad 故\ S_2=p^2;$$
$$S_3+pS_2+5q=2q,\ 故\ S_3=-p^3-3q;$$
$$S_4+pS_3+qS_1=0,\quad 故\ S_4=p^4+4pq.$$

求 $k$ 爲他値時 $S_k$ 之値，可施算如下：

乘已知方程式以 $x^{k-5}$，

$$x^k+px^{k-1}+qx^{k-3}+tx^{k-5}=0.$$

陸續以 $a$，$b$，$c$，$d$，$e$，諸値代 $x$，得

$$S_k+pS_{k-1}+qS_{k-3}+tS_{k-5}=0,$$

使 $k=5$；則　$S_5+pS_4+qS_2+5t=0,$

故　$S_5=-p^5-5p^2q-5t.$

使 $k=6$；則　$S_6+pS_5+qS_3+tS_1=0,$

故　$S_6=p^6+6p^3q+3q^2+6pt.$

求 $S_{-4}$，陸續使 $k=4$，3，2，1．於是

$$S_4+pS_3+qS_1+tS_{-1}=0,\ 故\ S_{-1}=0;$$
$$S_3+pS_2+5q+tS_{-2}=0,\ 故\ S_{-2}=-\frac{2q}{t};$$
$$S_2+pS_1+qS_{-1}+tS_{-3}=0,\ 故\ S_{-3}=0;$$
$$S_1+5p+qS_{-2}+tS_{-4}=0,\ 故\ S_{-4}=\frac{2q^2}{t^2}-\frac{4p}{t}.$$

563．當爲數字係數時亦可如下例施算．

例．求　$x^3-2x^2+x-1=0$ 之根之四次器之和．

於此　$f(x)=x^3-2x^2+x-1,$

$$f'(x)=3x^2-4x+1.$$

又
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$$
$$=\Sigma\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^3}{x^4}+\cdots\right)$$
$$=\frac{3}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\frac{S_3}{x^4}+\cdots;$$

故 $S_4$ 等於 $f'(x)$除以 $f(x)$ 之商內 $\frac{1}{x^5}$之係數，此最宜於用綜合除法求之如下：

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
1 & 3 & -4 & +1 & & & & \\
2 & & 6 & -3 & +3 & & & \\
-1 & & & 4 & -2 & +2 & & \\
1 & & & & 4 & -2 & +2 & \\
 & & & & & 10 & -5 & +5 \\
\hline
 & 3 & +2 & +2 & +5 & +10 & +\cdots\cdots &
\end{array}
$$

故商爲　　$$\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}+\frac{10}{x^5}+\cdots\cdots;$$

則　　$$S_4=10.$$

## 習題 XXXV.c.

1. 設 $f(x)=x^4+10x^3+39x^2+76x+65$, 求 $f(x-4)$之值.
2. 設 $f(x)=x^4-12x^3+17x^2-9x+7$, 求 $f(x+3)$之值.
3. 設 $f(x)=2x^4-13x^2+10x-19$, 求 $f(x+1)$之值.
4. 設 $f(x)=x^4+16x^3+72x^2+64x-129$, 求 $f(x-4)$之值.
5. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 求 $f(x+h)-f(x-h)$ 之值.
6. 指明方程式 $10x^3-17x^2+x+6=0$ 有一根在 0 及 −1 間.
7. 指明方程式 $x^4-5x^3+3x^2+35x-70=0$ 有一根在 2 及 3 間，一根在 −2 及 −3 間.
8. 指明方程 $x^4-12x^2+12x-3=0$ 有一根在 −3 及 −4 間，另一根在 2 及 3 間.
9. 指明方程式 $x^5+5x^4-20x^2-19x-2=0$ 有一根在 2 及 3 間，另一根在 −4 及 −5 間.

解以下有等根之方程式：

10. $x^4-9x^2+4x+12=0$.　　11. $x^4-6x^3+12x^2-10x+3=0$.
12. $x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0$.
13. $x^5-x^3+4x^2-3x+2=0$.　14. $8x^4+4x^3-18x^2+11x-2=0$.
15. $x^6-3x^5+6x^3-3x^2-3x+2=0$.
16. $x^6-2x^5-4x^4+12x^3-3x^2-18x+18=0$.
17. $x^4-(a+b)x^3-a(a-b)x^2+a^2(a+b)x-a^3b=0$.

求解以下有公根之各對方程式:

18. $2x^4-2x^3+x^2+3x-6=0$, $4x^4-2x^3+3x-9=0$.

19. $4x^4-12x^3-x^2-15x=0$, $6x^4+13x^3-4x^2-15x=0$.

20. 求 $x^n-px^2+r=0$ 可有等根之條件.

21. 指明 $x^4+qx^2+s=0$ 不能有三等根之條件.

22. 求使方程式

$$ax^2+bx+a=0,\ 及\ x^3-2x^2+2x-1=0$$

可有 (1) 一公根, (2) 二公根 之 $b$ 比 $a$ 之値.

23. 指明方程式

$$x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots\cdots+\underline{|n}=0$$

不能有等根.

24. 設方程式 $x^5-10a^3x^2+b^4x+c^5=0$ 有三等根, 指明 $ab^4-9a^5+c^5=0$.

25. 設方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有三等根, 指明其各等於$\dfrac{6c-ab}{3a^2-8b}$.

26. 設 $x^5+qx^3+rx^2+t=0$有二等根,求證其中之一必爲二次方程式

$$15rx^2-6q^2x+25t-4qr=0$$

之根.

27. 求方程式 $x^3-x-1=0$ 內 $S_6$ 之值.

28. 求方程式 $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$ 內 $S_4$ 之值.

## 方程式之變形

564. 一方程式之研究有時可由化之爲其根與此方程式之根具有某指定關係之另一方程式, 以使其手續化簡; 此於解三次方程式時, 尤爲有用.

565. 變一方程式爲另一方程式, 其根爲原方程式之根而符號相反.

設 $f(x)=0$ 爲原方程式.

使以 $-y$ 代 $x$；則方程式 $f(x)=0$ 變號之每根必適合於方程式 $f(-y)=0$，故所求方程式爲 $f(-y)=0$.

設原方程式爲

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0.$$

則所求方程式顯然爲.

$$p_0y^n-p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}p_{n-1}y+(-1)^np_n=0$$

故從原方程式第二項起，每隔一項變號即得所求之方程式.

566. 變一方程式爲另一方程式，其根等於原方程之根乘以一已知量.

設 $f(x)=0$ 爲原方程式，$q$ 爲已知量.

使 $y=qx$，則 $x=\dfrac{y}{q}$，於是所求方程式爲 $f\left(\dfrac{y}{q}\right)=0$.

此種變形主要應用爲整化分係數方程式.

例. 消去分係數，從方程式

$$2x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}=0.$$

使 $x=\dfrac{y}{q}$，且乘各項以 $q^3$；得

$$2y^3-\frac{3}{2}qy^2-\frac{1}{8}q^2y+\frac{3}{16}q^3=0.$$

使 $q=4$，變所有項爲整數，再除以 2，得

$$y^3-3y^2-y+6=0.$$

567. 變一方程式爲另一方程式其根爲原方程式之根之倒數.

設 $f(x)=0$ 爲原方程式；使 $y=\dfrac{1}{x}$，由是 $x=\dfrac{1}{y}$；故所求方程式爲 $f\left(\dfrac{1}{y}\right)=0$.

此種變形之主要用途之一，爲求含有根之負乘冪之對稱函數式之值.

例 1. 設 $a, b, c$ 爲方程式

$$x^3-px^2+qx-r=0$$

之根，求 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ 之值.

以 $\frac{1}{y}$ 代 $x$，乘以 $y^3$，且變其所有符號；則原方程式變爲

$$ry^3-qy^2+py-1=0,$$

其根爲 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$；

故 $\Sigma\frac{1}{a}=\frac{q}{r}$，$\Sigma\frac{1}{ab}=\frac{p}{r}$；

$$\therefore \Sigma\frac{1}{a^2}=\frac{q^2-2pr}{r^2}.$$

例 2. 設 $a, b, c$ 爲

$$x^3+2x^2-3x-1=0$$

之根，求 $a^{-3}+b^{-3}+c^{-3}$ 之值.

以 $\frac{1}{y}$ 代 $x$，則得方程式

$$y^3+3y^2-2y-1=0$$

而已知式等於此方程式內 $S_3$ 之值.

於此 $S_1=-3$；

$$S_2=(-3)^2-2(-2)=13;$$

$$S_3+3S_2-2S_1-3=0;$$

故 $S_3=-42$.

568. 設一方程式於變 $x$ 爲 $\frac{1}{x}$ 後不變，則此方程式稱爲倒數方程式.

設原方程式爲

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-2}x^2+p_{n-1}x+p_n=0,$$

則以 $\frac{1}{x}$ 代 $x$，整化後所得之方程式爲

$$p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+p_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots+p_2x^2+p_1x+1=0.$$

設此二方程式相同，必

$$p_1=\frac{p_{n-1}}{p_n},\ p_2=\frac{p_{n-2}}{p_n},\ \cdots\cdots p_{n-2}=\frac{p_2}{p_n},\ p_{n-1}=\frac{p_1}{p_n},\ p_n=\frac{1}{p_n};$$

從最後結果得 $p_n=\pm1$，由是得兩類倒數方程式.

(i) 設 $p_n=1$，則

$$p_1=p_{n-1},\quad p_2=p_{n-2},\quad p_3=p_{n-3},\cdots\cdots;$$

卽距首尾等遠之每二項之係數相等.

(ii) 設 $p_n=-1$，則

$$p_1=-p_{n-1},\quad p_2=-p_{n-2},\quad p_3=-p_{n-3},\cdots\cdots;$$

故設此方程式爲 $2m$ 次，則 $p_m=-p_m$ 或 $p_m=0$. 於本情形內，距首尾等遠之每兩項之係數，絕對質同而符號相反，又設此方程爲偶次則必缺中項.

569. 設 $f(x)=0$ 爲一倒數方程式.

若 $f(x)=0$ 屬於第一類，且爲奇次，則必有一根 $-1$；由是 $f(x)$ 可以 $x+1$ 除盡. 設其商爲 $\phi(x)$，則 $\phi(x)=0$ 爲第一類之偶次倒數方程式.

若 $f(x)=0$ 屬於第二類，且爲奇次，則必有一根 $+1$； 於此情形內，$f(x)$ 可爲 $x-1$ 除盡，則同前，$\phi(x)=0$ 爲第一類之偶次倒數方程式.

若 $f(x)=0$ 屬於第二類且爲偶次，其必有 $+1$ 及 $-1$ 之二根；於此情形內 $f(x)$ 可爲 $x^2-1$ 除盡，同前，$\phi(x)=0$ 爲第一類之偶次倒數方程式.

故任何倒數方程式必爲偶數次且末項爲正，或能變爲如此形式. 由是則可視此爲倒數方程式之標準式.

570. 標準倒數方程式可變之爲半其次數之方程式.

使此方程式爲

$$ax^{2m}+bx^{2m-1}+cx^{2m-2}+\cdots\cdots+kx^m+\cdots\cdots$$
$$+cx^2+bx+a=0;$$

除以 $x^m$，且重列各項，得

$$a\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+b\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+c\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\cdots\cdots+k=0.$$

今 $$x^{p+1}+\frac{1}{x^{p+1}}=\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right);$$

故以 $z$ 代 $x+\frac{1}{x}$，且次第與 $p$ 以 1，2，3，……之值，得

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2.$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=z(z^2-2)-z=z^3-3z;$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=z(z^3-3z)-(z^2-2)=z^4-4z^2+2;$$

類推；一般 $x^m+\frac{1}{x^m}$ 爲 $m$ 次之 $z$，故此方程式以 $z$ 言爲 $m$ 次.

571. 求一方程式，其根爲已知方程式之根之平方.

設 $f(x)=0$ 爲已知方程式；使 $y=x^2$，則 $x=\sqrt{y}$；故所求方程式爲 $f(\sqrt{y})=0$.

例. 求一方程式，其根爲方程式

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$$

之根之平方.

使 $x=\sqrt{y}$，移項得

$$(y+p_2)\sqrt{y}=-(p_1y+p_3);$$

由是 $$(y^2+2p_2y+p_2^2)y=p_1^2y^2+2p_1p_3y+p_3^2,$$

或 $$y^3+(2p_2-p_1^2)y^2+(p_2^2-2p_1p_3)y-p_3^2=0.$$

比較 §539，例2.

572. 變已知方程式爲另一方程式，使其根大於已知方程式之根以已知量.

設 $f(x)=0$ 爲已知方程式，$h$ 爲已知量；使 $y=x+h$，由是 $x=y-h$；故所求方程式爲 $f(y-h)=0$.

同理 $f(y+h)=0$ 爲一方程式，其根較 $f(x)=0$ 之根小 $h$.

例．求一方程式，其根較方程式

$$4x^4+32x^3+83x^2+76x+21=0$$

之根大 2．

所求方程式可由以 $x-2$ 代已知方程式內之 $x$ 得之；故用梳納氏法以 $x+2$ 爲除式計算之如下：

$$\begin{array}{llllll}
4 & 32 & 83 & 76 & 21 \\
4 & 24 & 35 & 6 & \vert 9 \\
4 & 16 & 3 & \vert 0 & \\
4 & 8 & \vert -13 & & \\
4 & \vert 0 & & & \\
4 & & & &
\end{array}$$

故所求方程式爲

$$4x^4-13x^2+9=0,\ 或\ (4x^2-9)(x^2-1)=0.$$

此方程式之根爲 $+\frac{3}{2}$，$-\frac{3}{2}$，$+1$，$-1$；故已知方程式之根爲

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{7}{2},\ -1,\ -3.$$

573．上節代入法之主要用途爲消去已知方程式內之某指定項．設已知方程式爲

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0;$$

使 $y=x-h$，則得新方程式

$$p_0(y+h)^n+p_1(y+h)^{n-1}+p_2(y+h)^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0,$$

$$p_0y^n+(np_0h+p_1)y^{n-1}+\left\{\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}p_0h^2+(n-1)p_1h+p_2\right\}y^{n-2}+\cdots\cdots=0$$

設欲消去者爲第二項，使 $np_0h+p_1=0$，

則　$h=-\frac{p_1}{np_0}$；設欲消去者爲第三項，使

$$\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}p_0h^2+(n-1)p_1h+p_2=0,$$

由是得一求 $h$ 之二次方程式；同法可消去任何其他指定項．

有時如下例施算則更爲簡便.

例. 消去方程式

$$px^3+qx^2+rx+s=0$$

之第二項.

使 $\alpha, \beta, \gamma$ 爲其新根，則 $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{q}{p}$. 於是設每根加 $\frac{q}{3p}$，則此新方程式內諸根之和必等於 $-\frac{q}{p}+\frac{q}{p}$；則第二項之係數爲零.

故所求方程式可由以 $x-\frac{q}{3p}$ 代已知方程式內之 $x$ 求得之.

574. 由方程式 $f(x)=0$ 可作一方程式，其根與已知方程式之根，以某種指定之關係相關連.

設使 $y$ 爲所求方程式之一根，又以 $\phi(x,y)=0$ 表指定之關係；於是新方程式可由先從方程式 $\phi(x,y)=0$ 求出表 $x$ $y$ 之函數，再以此 $x$ 之值代入 $f(x)=0$ 求得之；或由消去 $f(x)=0$ 及 $\phi(x,y)=0$ 間之 $x$ 求得之.

例 1. 設 $a$, $b$, $c$ 爲方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根；求根爲 $a-\frac{1}{bc}$, $b-\frac{1}{ca}$, $c-\frac{1}{ab}$ 之方程式.

當已知方程式內 $x=a$ 時，新方程式內 $y=a-\frac{1}{bc}$.

但 $$a-\frac{1}{bc}=a-\frac{a}{abc}=a+\frac{a}{r};$$

故新方程式可由代替式

$$y=x+\frac{x}{r}, \text{ 或 } x=\frac{ry}{1+r}$$

求得之，故所求方程式爲

$$r^2y^3+pr(1+r)y^2+q(1+r)^2y+(1+r)^3=0.$$

例 2. 求其根爲三次方程式

$$x^3+qx+r=0$$

之根之差之平方之方程式.

使 $a$、$b$，$c$ 爲三次方程式之根；則所求方程式之根爲 $(b-c)^2$，$(c-a)^2$，$(a-b)^2$.

今 $(b-c)^2=b^2+c^2-2bc=a^2+b^2+c^2-a^2-\frac{2abc}{a}$

$$=(a+b+c)^2-2(bc+ca+ab)-a^2-\frac{2abc}{a}$$

$$=-2q-a^2+\frac{2r}{a};$$

又當已知方程式內 $x=a$ 時，所求方程式內 $y=(b-c)^2$；

$$\therefore\ y=-2q-x^2+\frac{2r}{x}.$$

由是消去方程式

$$x^3+qx+r=0$$

及 $$x^3+(2q+y)x-2r=0$$

間之 $x$.

由減法 $(q+y)x=3r$； 或 $x=\frac{3r}{q+y}$.

代入且整理之，得

$$y^3+6qy^2+9q^2y+27r^2+4q^3=0$$

推論．設 $a$，$b$，$c$ 皆爲實數，則 $(b-c)^2$，$(c-a)^2$，$(a-b)^2$爲正；由是 $27r^2+4q^3$ 爲負．

故欲使方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根皆爲實根，必 $27r^2+4q^3$ 爲負量．即$\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3$必爲負量．

設變形方程式 $27r^2+4q^3=0$ 有一根爲零，則原方程式有二等根．

設 $27r^2+4q^3$ 爲正，則變形方程式有一負根［§553］，由是原方程式必有二虛根，因僅此一對根能使變形方程式有一負根也．

## 習　題 XXX. d.

1. 變方程式 $x^3-4x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{9}=0$ 爲一整係數且首項係數爲 1 之方程式．

2. 變方程式 $3x^4-5x^3+x^2-x+1=0$ 爲首項係數爲 1 之另一方程式．

解以下各方程式

3. $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$.
4. $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$.
5. $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$.
6. $4x^6-24x^5+57x^4-73x^3+57x^2-24x+4=0$.

7. 解其根成調和級數之方程式

$$3x^3-22x^2+48x-32=0.$$

8. 已知 $x^3-11x^2+35x-36=0$ 之根成調和級數，求諸根.

9. 設方程式 $x^3-ax^2+x-b=0$ 之根成調和級數，指明中根爲 $3b$.

10. 解其根成調和級數之方程式

$$40x^4-22x^3-21x^2+2x+1=0$$

消去以下各方程式內之第二項.

11. $x^3-6x^2+10x-3=0.$

12. $x^4+4x^3+2x^2-4x-2=0$

13. $x^5+5x^4+3x^3+x^2+x-1=0$

14. $x^6-12x^5+3x^2-17x+300=0.$

15. 變 $x^3-\frac{x}{4}-\frac{3}{4}=0$ 爲另一方程式，其根較原方程式之相當根大$\frac{3}{2}$.

16. 求方程式 $x^5-4x^4+3x^2-4x+6=0$ 之根減 3 之方程式.

17. 求每根較方程式 $x^3-5x^2+6x-3=0$ 之一根小 1之方程式.

18. 求其根爲 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$ 之根之平方之方程式.

19. 求其根爲 $x^3+3x^2+2=0$ 之根之立方之方程式.

設 $a$，$b$，$c$ 爲 $x^3+qx+r=0$ 之根，求方程式，其根爲

20. $ka^{-1}$，$kb^{-1}$，$kc^{-1}$.

21. $b^2c^2$，$c^2a^2$，$a^2b^2$.

22. $\frac{b+c}{a^2}$，$\frac{c+a}{b^2}$，$\frac{a+b}{c^2}$.

23. $bc+\frac{1}{a}$，$ca+\frac{1}{b}$，$ab+\frac{1}{c}$.

24. $a(b+c),b(c+a),c(a+b)$.

25. $a^3$，$b^3$，$c^3$.

26. $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$，$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$，$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

27. 指明 $x^3+ax^2+bx+ab=0$ 之根之立方爲方程式 $x^3+a^3x^2+b^3x+a^3b^3=0$ 之根.

27. 解方程式 $x^5-5x^4-5x^3+25x^2+4x-20=0$，其根之形式爲 $a,-a$，$b,-b,c$.

29. 設 $x^3+3px^2+3qx+r=0$ 之根成調和級數．指明 $2q^3=r(3pq-r)$.

## 三次方程式

575. 三次方程式之一般式爲

$$x^3+Px^2+Qx+R=0,$$

但由 §573 所示，此方程式可變爲較簡之形式.

$$x^3+qx+r=0,$$

此取以爲三次方程式之標準形式.

576. 解方程式 $x^3+qx+r=0$.

使 $x=y+z$；於是

$$x^3=y^3+z^3+3yz(y+z)=y^3+z^3+3yzx,$$

而已知方程式變爲.

$$y^3+z^3+(3pz+q)x+r=0.$$

茲 $y,z$ 爲其和等於已知方程式之一根之二量；設更假使其適合方程式 $3yz+q=0$，則其値爲完全可定. 由是得

$$y^3+z^3=-r,\qquad y^3z^3=-\frac{q^3}{27};$$

故 $y^3,z^3$ 爲二次方程式.

$$t^2+rt-\frac{q^3}{27}=0$$

之二根. 解此方程式，並使

$$y^3=-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$z^3=-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 $x=y+z$ 之關係求 $x$ 之値，得

$$x=\left\{-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{24}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left\{-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

以上解法一般稱爲卡登爾氏解法 (*cordan's solution*)，因其於1545 年首次發表於 *Ars Magna* 書中也，卡爾登氏得此解法於太爾太格里亞 *Tartaglia*；但此解法似應於1505 年創始於 *Scipio Ferreo*. 在 *Burnside* 及 *Panton* 氏之方程式論末有關於此問題之有興趣之記載.

577. 由 §110，知上節方程式 (1)，(2) 右方之每量有三立方根，故 $x$ 必有九根；但此不屬於本情形．因 $yz=-\frac{q}{3}$，諸立方根成對發現，由是每對之積必爲有理．故設 $y$，$z$ 表滿足此條件之任一對立方根之值，則其他被許可之對值僅爲 $wy$，$w^2z$ 及 $w^2y$，$wz$，於此 $w$，$w^2$ 表 1 之二虛立方根．故方程式之根爲

$$y+z,\quad wy+w^2z,\quad w^2y+wz.$$

例． 解方程式 $x^3-15x=126$．

以 $y+z$ 代 $x$，於是

$$y^3+z^3+(3yz-15)x=126;$$

使 $$3yz-15=0,$$

則 $$y^3+z^3=126;$$

又 $$y^3z^3=125,$$

故 $y^3$，$z^3$ 爲方程式 $t^2-126t+125=0$ 之根．

$$\therefore\quad y^3=125,\ z^3=1;$$

$$\therefore\quad y=5,\ z=1.$$

由是 $$y+z=5+1=6;$$

$$wy+w^2z=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.5+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$=-3+2\sqrt{-3};$$

$$w^2y+wz=-3-2\sqrt{-3};$$

及其根爲 $6,\quad -3+2\sqrt{-3},\quad -3-2\sqrt{-3}.$

578. 解釋 §576 內 $x$ 何以得九值之理由，須知 $y$ 及 $z$ 爲從方程式 $y^3+z^3+r=0$，及 $yz=-\frac{q}{3}$ 求得；但於求解時第二變爲 $y^3z^3=-\frac{q^3}{27}$，此亦合於 $yz=-\frac{wq}{3}$，或 $yz=-\frac{w^2q}{3}$ 之情形；故 $x$ 之其他六值爲三次方程式

$$x^3+wqx+r=0,\quad x^3+w^2qx+r=0$$

之解答．

579. 茲更精密考究方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根．

(*i*) 設$\frac{r}{4}+\frac{q^3}{27}$爲正，則 $y^3$ 及 $z^3$ 皆爲實量；使 $y$ 及 $z$ 表其算術立方根，則其立方根爲

$$y+z,\quad wy+w^2z,\quad w^2y+wz.$$

其第一根爲實，又由代入 $w$ 及 $w^2$ 之值，則他二根變爲

$$-\frac{y+z}{2}+\frac{y-z}{2}\sqrt{-3},\quad -\frac{y+z}{2}-\frac{y-z}{2}\sqrt{-3}.$$

(*ii*). 設$\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$爲零，則 $y^3=z^3$；於是 $y=z$，而三根變爲

$2y$，$y(w+w^2)$，$y(w+w^2)$，或 $2y$，$-y$，$-y$.

(*iii*). 設$\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$爲負，則 $y^3$ 及 $z^3$ 爲 $a+ib$，及 $a-ib$ 形式之虛式；設二量之立方根爲 $m+in$ 及 $m-in$；則此三次方程式之根變爲

$$m+in+m-in,\qquad \text{或 } 2m;$$
$$(m+in)w+(m-in)w^2,\quad \text{或}-m-n\sqrt{3};$$
$$(m+in)w^2+(m-in)w,\quad \text{或}-m+n\sqrt{3};$$

此皆爲實根．但當無一般之算術或代數方法求得此虛量立方根之確值時，[比較 §89]，則當三次方程式之根皆爲實根且不相等時，則§576解法之實用殊小．

此種情形有時稱爲卡尉登解法之叵約失效之情形．

580．適示叵約情形之解法，可用三角法補足之如下，設其解答爲

$$x=(a+i\ \ )^{\frac{1}{3}}+(a-ib)^{\frac{1}{3}};$$

使 $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$, 由是 $r^2=a^2+b^2$, $\tan\theta=\frac{b}{a}$;

於是 $$(a+ib)^{\frac{1}{3}}=\left\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\right\}^{\frac{1}{3}}$$

玆由 *Moivre* 氏定理得此式之三值爲

及 $$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right),\ r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right),$$

$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right),$$

於此 $r^{\frac{1}{3}}$ 表 $r$ 之立方根, $\theta$ 表由方程式 $\tan\theta=\frac{b}{a}$ 求得最小之角.

$(a-ib)^{\frac{1}{3}}$ 之值可由變上結果中 $i$ 之符號求得之; 故所求三根爲

$$2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3},\ 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3},\ 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}.$$

## 四 次 方 程 式

581. 玆於求四次方程式一般解答之幾種方法,與以簡單之討論.每種方法皆先解一輔助三次方程式; 由是如解三次方程式然, 此一般解法不適於求數字方程式之解答.

582. 四次方程式之解法首爲卡爾登氏之弟子 *Ferrari* 氏所求得, 其解法如下.

表此方程式以

$$x^4+2px^3+qx^2+2rx+s=0;$$

各邊加以 $(ax+b)^2$, $a,b$ 爲使左邊爲完全平方之量; 於是

$$x^4+2px^3+(q+a^2)x^2+2(r+ab)x+s+b^2=(ax+b)^2.$$

設方程式之左邊等於$(x^2+px+k)^2$, 則由比較係數, 得

$$p^2+2k=q+a^2,\ pk=r+ab,\ k^2=s+b^2;$$

由諸方程式消去 $a,b$ 得

$$(pk-r)^2=(2k+p^2-q)(k^2-s)$$

或 $$2k^3-qk^2+2(pr-s)k-p^2s+qs-r^2=0.$$

得此三次方程式，永可求得 $k$ 之一實數值 [§553]；由是 $a$ 及 $b$ 爲已知. 又

$$(x^2+px+k)^2=(ax+b)^2;$$

$$\therefore\ x^2+px+k=\pm(ax+b);$$

$x$ 之値可得之於二次方程式

$$x^2+(p-a)x+(k-b)=0$$

$$x^2+(p+a)x+(k+b)=0$$

例. 解方程式

$$x^4-2x^3-5x^2+10x-3=0.$$

加 $a^2x^2+2abx+b^2$ 於方程式之每邊，且假定

$$x^4-2x^3+(a^2-5)x^2+2(ab+5)x+b^2-3=(x^2-x+k)^2$$

於是由相當係數得

$$a^2=2k+6,\ ab=-k-5,\ b^2=k^2+3;$$

$$\therefore\ (2k+6)(k^2+3)=(k+5)^2;$$

$$\therefore\ 2k^3+5k^2-4k-7=0.$$

由驗算求得 $k=-1$；故 $a^2=4$，$b^2=4$，$ab=-4$，

但從假定知

$$(x^2-x+k)^2=(ax+b)^2.$$

代入 $k,a$ 及 $b$ 之値，得二方程式

$$x^2-x-1=\pm(2x-2)$$

即 $x^2-3x+1=0$，及 $x^2+x-3=0$

由是其根爲 $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

583. 以下解法爲笛卡兒氏於 1637 年所發明.

設變此四次方程式之形式爲

$$x^4+qx^2+rx+s=0;$$

假定 $x^4+qx^2+rx+s=(x^2+kx+l)(x^2-kx+m)$；

於是由相等係數得

$$l+m-k^2=q,\ k(m-l)=r,\ lm=s.$$

從首二方程式得

$$2m=k^2+q+\frac{r}{k},\ 2l=k^2+q-\frac{r}{k};$$

代入第三方程式，

$$(k^3+qk+r)(k^3+qk-r)=4sk^2,$$

或　$$k^6+2qk^4+(q^2-4s)k^2-r^2=0.$$

此爲 $k^2$ 之三次方程式，永可有一正實數解答 [§553]；故當 $k^2$ 爲已知時，則 $l$ 及 $m$ 之值可定，而此四次方程之解答可由解二次方程式.

$$x^2+kx+l=0,\ 及\ x^2-kx+m=0$$ 求得之.

例．解方程式

$$x^4-2x^2+8x-3=0.$$

假定　$$x^4-2x^2+8x-3=(x^2+kx+l)(x^2-kx+m)$$

於是由相係數得

$$l+m-k^2=-2,\ k(m-l)=8,\ lm=-3;$$

由是得　$$(k^3-2k+8)(k^3-2k-8)=-12k^2,$$

或　$$k^6-4k^4+16k^2-64=0$$

此方程式顯然被適合於 $k^2-4=0$ 即 $k=\pm2$ 時，注意 $k$ 之一值已足；使 $k=2$，得

$$m+l=2,\ m-l=4,\ 即\ l=-1,\ m=3.$$

由是　$$x^4-2x^2+8x-3=(x^2+2x-1)(x^2-2x+3);$$

故　$$x^2+2x-1=0,\ 及\ x^2-2x+3=0;$$

故其根爲 $-1\pm\sqrt{2},\ 1\pm\sqrt{-2}.$

584. 高於四次之方程式之一般代數解法，至今尚未求得；而 *Abel* 氏關於此解法之不可能性之說明，則爲一般數學家所承認．但設一方程式之係數爲數字係數，則任何實根之值可用 *Horner* 氏之近似值法求得之至於適意之精確程度，其詳盡說明可見於方程式論一書內．

585. 茲以若干各種方程式之討論，以為本章之結束.

例 1. 解方程式

$$\begin{aligned} x+y+z+u&=0\\ ax+by+cz+du&=0\\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2u&=0\\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3u&=0 \end{aligned}$$

從最下一方程式起分乘各方程式以 1，$p$，$q$，$r$；$p$，$q$，$r$．為尚未決定之量，假定其能使 $y$，$z$，$u$ 之係數為零；於是

$$x(a^3+pa^2+qa+r)=k,$$

於此 $b$，$c$，$d$ 為方程式

$$t^3+pt^2+qt+r=0$$

之根.

故　　$$a^3+pa^2+qa+r=(a-b)(a-c)(a-d).$$

由是　　$$(a-b)(a-c)(a-d)x=k.$$

故 $x$ 之值求得，而 $y$，$z$，$u$ 可用對稱法寫出.

推論．設方程式為

$$\begin{aligned} x+y+z+u&=1\\ ax+by+cz+du&=k\\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2u&=k^2\\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3u&=k^3, \end{aligned}$$

則如前法得

$$x(a^3+pa^2+qa+r)=k^3+pk^2+qk+r;$$

$$\therefore\quad (a-b)(a-c)(a-d)x=(k-b)(k-c)(k-d).$$

由是 $x$ 之值可得而 $y$，$z$，$u$ 之值可由對稱法寫出.

上方程式之解法可用不定係數法使之簡易.

例 2. 指明方程式

$$(x-a)(x-b)(x-c)-f^2(x-a)-g^2(x-b)-h^2(x-c)+2fgh=0$$

之根皆為實根.

從已知方程式，得

$$(x-a)\{(x-b)(x-c)-f^2\}-\{g^2(x-b)+h^2(x-c)+2fgh\}=0$$

使 $p$，$q$ 為二次方程式

$$(x-b)(x-c)-f^2=0$$

之根，並設 $p$ 不小於 $q$. 則由解此二次方程式得

$$2x=b+c\pm\sqrt{(b-c)^2+4f^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1);$$

今不論根之值大於 $b\sim c$，故 $p$ 大於 $b$ 或 $c$，而 $q$ 小於 $b$ 或 $c$.

再於已知方程式內陸續代 $x$ 以各值

$$+\infty,\quad p,\quad q,\quad -\infty;$$

則其各結果為

$$+\infty,\ -(g\sqrt{p-b}-h\sqrt{p-c})^2,\ +(g\sqrt{b-q}-h\sqrt{c-q})^2,\ -\infty,$$

因　$(p-b)(p-c)=f^2=(b-q)(c-q)$.

故已知方程式有三實根，一大於 $p$，一在 $p$ 及 $q$ 間，一小於$q$.

設 $p=q$，於是由 (1) 得 $(b-c)^2+4f^2=0$，由是 $b=c$，$f=0$. 於此情形下，已知方程式變為

$$(x-b)\{(x-a)(x-b)-g^2-h^2\}=0;$$

故其根皆實.

設 $p$ 為已知方程式之一根，則以上研究失效；因其僅能指示有一根在 $q$ 及 $+\infty$之間，即 $p$ 也，但與前同，有小於 $q$ 之第二根；故第三根亦必為實根. 同法，設 $q$ 為已知方程式之一根，亦可證明三根皆為實根.

於此研究之方程式甚當重視；此常見於立體幾何中，稱之為三次方程判定式.

586. 以下各方程式組常見於各門應用數學中.

例. 解方程式

$$\frac{x}{a+\lambda}+\frac{y}{b+\lambda}+\frac{z}{c+\lambda}=1$$

$$\frac{x}{a+\mu}+\frac{y}{b+\mu}+\frac{z}{c+\mu}=1$$

$$\frac{x}{a+\nu}+\frac{y}{b+\nu}+\frac{z}{c+\nu}=1$$

觀察以下 $\theta$ 之方程式.

$$\frac{x}{a+\theta}+\frac{y}{b+\theta}+\frac{z}{c+\theta}=1-\frac{(\theta-\lambda)(\theta-\mu)(\theta-\nu)}{(a+\theta)(b-\theta)(c+\theta)}.$$

起始暫視 $x$, $y$, $z$ 為已知量.

此方程式整化後變爲 $\theta$ 之二次方程式，由已知方程，知此必爲 $\theta=\lambda$，$\theta=\mu$，$\theta=\nu$ 三值所適合；故必爲恆等式．[§310]．

求 $x$ 之値，乘之以 $a+\theta$，再使 $a+\theta=0$

由是
$$x=-\frac{(-a-\lambda)(-a-\mu)(-a-\nu)}{(b-a)(c-a)};$$

即
$$x=\frac{(a+\lambda)(a+\mu)(a+\nu)}{(a-b)(a-c)}.$$

由對稱法得
$$y=\frac{(b+\lambda)(b+\mu)(b+\nu)}{(b-c)(b-a)},$$

及
$$z=\frac{(c+\lambda)(c+\mu)(c+\nu)}{(c-a)(c-b)}.$$

## 習　題 XXXV. c.

解以下各方程式：

1．$x^3-18x=35$．　　2．$x^3+72x-1720=0$．

3．$x^3+63x-316=0$．　　4．$x^3+21x+342=0$．

5．$28x^3-9x^2+1=0$．　　6．$x^3-15x^2-33x+847=0$．

7．$2x^3+3x^2+3x+1=0$．

8．求証方程式 $x^3+12x-12=0$ 之實根爲 $2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$．

解以下各方程式

9．$x^4-3x^2-42x-40=0$．　　10．$x^4-10x^2-20x-16=0$．

11．$x^4+8x^3+9x^2-8x-10=0$．

12．$x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$．

13．$x^4-3x^2-6x-2=0$．　　14．$x^4-2x^3-12x^2+10x+3=0$．

15．$4x^4-20x^3+33x^2-20x+4=0$．

16．$x^5-6x^4-17x^3+17x^2+6x-1=0$．

17．$x^4+9x^3+12x^2-80x-192=0$，已知其有等根．

18．求爲使方程式 $x^3+qx+r=0$ 可爲 $x^4=(x^2+ax+b)^2$ 之形式之 $q$ 及 $r$ 間之關係，

由是解方程式

$$8x^3-36x+27=0.$$

19. 設 $x^3+3px^2+3qx+r$ 及 $x^2+2px+q$

有一公因子，指明

$$4(p^2-q)(q^2-pr)-(pq-r)^2=0.$$

設其有二公因子，指明

$$p^2-q=0, \qquad q^2-pr=0.$$

20. 設方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 有二等根， 指明每等根等於$\frac{bc-ad}{2(ac-b^2)}$.

21. 設 $r^2=p^2s$ 指明方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 可如二次方程式解之.

22. 解方程式

$$x^6-18x^4+16x^3+28x^2-32x+8=0$$

已知其一根爲 $\sqrt{6}-2$.

23. 設 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ 爲方程式

$$x^4+qx^2+rx+s=0$$

之根，求根爲 $\beta+\gamma+\delta+(\beta\gamma\delta)^{-1}$ 等之方程式.

24. 於方程式 $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ 內，求証設其二根之和等於他二根之和，則 $p^3-4pq+8r=0$; 又設其二根之積等於他二根之積，則 $r^2=p^2s$.

25. 方程式 $x^5-209x+56=0$ 有二根其積爲 1，求此二根.

26. 求 $x^5-409x+285=0$ 內其和爲 5 之二根.

27. 設 $a$, $b$, $c$, ………… $k$ 爲

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots p_{n-1}x+p_n=0,$$

之根，指明

$$(1+a^2)(1+b^2)\cdots(1+k^2)=(1-p_2+p_4-\cdots)^2+(p_1-p_3+p_5-\cdots)^2.$$

28. 方程式 $x^4-8x^3+21x^2-20x+5=0$ 之二根之和爲 4; 說明何以由此事實求解時，而此解法失效.

# 雜　題

1. 設 $S_1$, $S_2$, $S_3$ 爲某等差級數之 $n$，$2n$，$3n$ 項之和，指明 $S_3=3(S_2-S_1)$.

2. 求其差，和，及積之比爲 1，7，24 之二數.

3. 依何種進位法，25 反數字順序之數爲其二倍?

4. 解方程式 .

(1) $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$.

(2) $x(y+z)+2=0$, $y(z-2x)+21=0$, $z(2x-y)=5$.

5. 設首項爲 $a$ 之 A. P. 之首 $p$ 項和爲零，指明其次 $q$ 項之和

$$=-\frac{a(p+q)q}{p-1}$$

6. 解方程式

(1) $(a+b)(ax+b)(a-bx)=(a^2x-b^2)(a+bx)$.

(2) $x^{\frac{1}{3}}+(2x-3)^{\frac{1}{3}}=\{12(x-1)\}^{\frac{1}{3}}$.

7. 求首項爲 1 之等差級數，已知其第二，十，及十四項成等比級數.

8. 設 $\alpha$, $\beta$ 爲 $x^2+px+q=0$ 之根，求

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$, $\alpha^2\beta^2+\beta^4$ 之值.

9. 設 $2x=a+a^{-1}$ 及 $2y=b+b^{-1}$，求

$xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$ 之值.

10. 求 $\dfrac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$ 之值.

11. 設 $\alpha$ 及 $\beta$ 爲 1 之虛立方根，指明

$\alpha^4+\beta^4+\alpha^{-1}\beta^{-1}=0$.

12. 指明進位根大於 4 之任何進法內，12432 能爲 111 除盡，亦能爲 112 除盡.

13. $A$ 及 $B$ 爲一英哩之競走，首次 $A$ 讓 $B$ 11 碼，結果勝 $B$ 57 秒；二次 $A$ 讓 $B$ 81 秒結果勝 $B$ 88 碼：問跑 1 哩各需時若干?

14. 消除 $x$，$y$，$z$，從方程式

$$x^2-yz=a^2,\quad y^2-zx=b^2,\quad z^2-xy=c^2,\quad x+y+z=0.$$

15. 解方程式

$$ax^2+bxy+cy^2=bx^2+cxy+ay^2=d$$

16. 某舟子划行至 48 哩之地點，復經 14 時划回原處：已知其於順水 4 哩及逆水 3 哩所用之時間相同，求水流之速度.

17. 求下二式之平方根，

(1)　$(a^2+ab+bc+ca)(bc+ca+ab+b^2)(bc+ca+ab+c^2.)$

(2)　$1-x+\sqrt{22x-15-8x^2}$

18. 求 $(1-3x)^{\frac{10}{3}}$ 之展開式內 $x^6$ 之係數，及 $\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2x}\right)^9$ 內不含 $x$ 之項.

19. 解以下方程式：

(1)　$\dfrac{2x-3}{x-1}-\dfrac{3x-8}{x-2}+\dfrac{x+3}{x-3}=0$

(2)　$x^2-y^2=xy-ab$，$(x+y)(ax+by)=2ab(a+b)$.

20. 指明設 $a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2$ 爲完全平方，則 $a$，$b$，$c$ 三量成調和級數.

21. 設

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$$

且 $x$，$y$，$z$ 爲實數，指明 $x=y=z$.

22. 用十二進法求 3e58261 之平方根，並指明於何進法內 [illegible] 皆可以 $\cdot\dot{1}\dot{7}$ 表之.

23. 求 1, 2, 3, ……… $n$ 諸整數每次取二之積之和，並指明其等於已知諸整數之立方和與其平方和之差之半.

24. 某人及其家屬每週食麵包 20 塊. 設其工資增加5%，麵包價增加 $2\frac{1}{2}$%，則每週盈餘 $6d$，但設其工資減低 $7\frac{1}{2}$%，麵包價降落10%，則每週損失 $1\frac{1}{2}d$，求其每週工資及麵包之價格.

25. 成 A. P. 之四數之和爲 48，又二外項之積比二中項之積爲 27:35，求此四數.

26. 解方程式:

(1) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0.$

(2) $\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-a-b}=\dfrac{(x-c)(x-d)}{x-c-d}.$

27. 設 $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+\sqrt{c-x}=0$，指明

$$(a+b+c+3x)(a+b+c-x)=4(bc+ca+ab);$$

又設 $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$，指明 $(a+b+c)^3=27abc$.

28. 某火車於出發一小時後因遭意外停留一小時， 其後照原速度 3 之速度進行，於原定時刻三時後到達：但設此意外發生於較遠50哩之處，則可早到 $1\frac{1}{2}$ 時：求行程之遠近.

29. 解方程式

$$2x+y=2z,\ 9z-7x=6y,\ x^3+y^3+z^3=216.$$

30. 有試紙六張，二爲數學試紙，設使二數學試紙不得相連，問能排爲幾種不同順序.

31. 易 £5. 4s. 2d. 爲錢幣 60 枚，設其中含半克郎，先令，四辨士三種，問能有幾種換法.

32. 爲使 $x^3+ax^2+11x+6$ 及 $x^3+bx^2+14x+8$ 可有形爲 $x^2+px+q$ 之公因子，求 $a$ 及 $b$ 之值.

33. 問某工作由 A, B, C 三人合作需時若干，設 A 獨作較之多用 6 時，B 獨作多用 1時，及 C 獨作用其二倍之時間?

34. 設方程式 $ax+by=1$，$cx^2+dy^2=1$ 僅有一解，求証

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{d}=1,\ \text{及}\ x=\frac{a}{c},\ y=\frac{b}{d}.$$

35. 用二項式定理求 $(1-2x+2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 之展開式之首五項.

36 設 $x^2+px+q=0$ 之一根爲他根之二倍，指明 $p^3-q(3p-1)+q^2=0$.

37. 解方程式

$$x^4-5x^2-6x-5=0.$$

38. 求分式

$$\frac{x^3-ax^2+19x-a-4}{x^3-(a+1)x^2+23x-a-7}$$

可以化簡時 $a$ 之值；化之爲最低式.

39. 設 $a$，$b$，$c$，$x$，$y$，$z$ 爲實量，及

$$(a+b+c)^2=3(bc+ca+ab-x^2-y^2-z^2),$$

指明 $$a=b=c,\ \text{及}\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

40. 當 $x$ 之值爲 $\frac{6}{7}$ 時，$\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{-\frac{3}{2}}$ 之展開式內之最大項爲何?

41. 求二數，設其和乘其平方和得 5500，其差乘其平方差得 352.

42. 設 $x=\lambda a$，$y=(\lambda-1)b$，$z=(\lambda-3)c$，

$\lambda=\dfrac{1+b^2+3c^2}{a^2+b^2+c^2}$ 求以 $a$，$b$，$c$ 表 $x^2+y^2+z^2$ 之最簡形式.

43. 解方程；

(1) $x^4+3x^2=16x+60$

(2) $y^2+z^2-x=z^2+x^2-y=x^2+y^2-z=1$.

44. 設 $x$，$y$，$z$成調和級數，指明

$$\log(x+z)+\log(x-2y+z)=2\log(x-z).$$

45 指明

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\cdots=\frac{4}{3}(2-\sqrt{3})\sqrt{3}.$$

46. 設 $$\frac{3x+2y}{3a-2b}=\frac{3y+2z}{3b-2c}=\frac{3z+2x}{3c-2a},$$

則 $5(x+y+z)(5c+4b-3a)=(9x+8y+13z)(a+b+c)$

47. 以 17 子音及 5 母音字母，可組成若干四字母之字，設其中間爲二不同母音字母，兩端爲相同或否之二子音子母?

48. 爲 600 人表決之某議案被否決；由同人複決此同議案，其否決優勝之票二倍前者，又新多數比舊多數爲 8 比7；問其心理之變易若干?

49. 指明

$$log\frac{(1+x)^{\frac{1-x}{2}}}{(1-x)^{\frac{1+x}{2}}}=x+\frac{5x^3}{2\cdot3}+\frac{9x^5}{4\cdot5}+\frac{13x^7}{6\cdot7}+\cdots\cdots\cdots$$

50. 若干人排成三層之空心方陣，設增加 25 人則變爲實心方陣，其每邊人數爲空心方陣每邊人數之平方根加 22；求人數.

51. 解方程式:

(1) $\sqrt[m]{(a+x)^2}+2\sqrt[m]{(a-x)^2}=3\sqrt[m]{a^2-x^2}.$

(2) $(x-a)^{\frac{1}{2}}(x-b)^{\frac{1}{2}}-(x-c)^{\frac{1}{2}}(x-d)^{\frac{1}{2}}=(a-c)^{\frac{1}{2}}(b-d)^{\frac{1}{2}}.$

52. 求証

$$\sqrt[3]{4}=1+\frac{2}{6}+\frac{2.5}{6.12}+\frac{2.5.8}{6.12.18}+\cdots\cdots\cdots$$

53. 解 $\sqrt[3]{6(5x+6)}-\sqrt[3]{5(6x-11)}=1.$

54．某器盛$a$帑之酒，另一盛 $b$ 帑之水，今從每器中取出$c$ 帑注入他器，如此重複至任何次數：指明設 $c(a+b)=ab$，則於第一次後每器內之酒量將保留不變.

55．設 $m$，$n$ 之等差中項及 $a$，$b$ 之等比中項同等於$\frac{ma+nb}{m+n}$：求 $m$，$n$ 表以 $a$，$b$ 之值.

56．設 $x$，$y$，$z$ 之和爲常數，又設

$$(z+x-2y)(x+y-2z)$$

因 $yz$ 正變，求証 $2(y+z)-x$ 因 $yz$ 正變.

57．設 $n$ 大於 3，求証

$$1.2.{}^nC_r-2.3.{}^nC_{r-1}+3.4.{}^nC_{r-2}-\cdots\cdots+(-1)^r(r+1)(r+2)$$
$$=2.{}^{n-3}C_r.$$

58．解方程式

(1)　$\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

(2)　$4\{(x^2-16)^{\frac{3}{4}}+8\}=x^2+16(x^2-16)^{\frac{1}{4}}$.

59．求証　設

$$\frac{y-z}{1+yz}+\frac{z-x}{1+zx}+\frac{x-y}{1+xy}=0.$$

則 $x$，$y$，$z$ 中必有二量互等.

60．某團體之人數爲 $p$，能讀，能寫者佔 $a$ %，男女分計則男子能讀能寫者之成數爲 $b$%，女子爲 $c$%：求團體中男女之人數.

61．設 $x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2ab}{a^2-b^2}}$，指明$\frac{ab}{a^2+b^2}\left(x^{\frac{a}{b}}+x^{\frac{b}{a}}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$.

62．指明 $(1-x+x^2-x^3)^{-1}$ 展內式內 $x^{4n}$ 之係數爲 1.

63．解方程式

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}.$$

64．求首項爲 $a$ 末項爲 $b$ 之 $n$ 項等差級數及等比級數；並指明前級數之第 $r$ 項及次級數之第 $n-r+1$ 項之積爲 $ab$.

65. 設方程式

$$\left(1-q+\frac{p^2}{2}\right)x^2+p(1+q)x+q(q-1)+\frac{p^2}{2}=0$$

之根為等根，指明 $p^2=4q$.

66. 設 $a^2+b^2=7ab$，指明

$$log\left\{\tfrac{1}{3}(a+b)\right\}=\tfrac{1}{2}(log a+log b).$$

67. 設 $n$ 為方程式

$$x^2(1-ac)-x(a^2+c^2)-(1+ac)=0$$

之根，又設插入 $n$ 調和中項於 $a$, $c$ 之間，指明首末二插入中項之差為 $ac(a-c)$.

68. 設 ${}^{n+2}C_8 : {}^{n-2}C_4=57:16$，求 $n$.

69. 某人投資若干於利率 $6\frac{1}{2}\%$ 之政府公債：設其每張購價少 £3，則其投資可多得 $\frac{1}{4}\%$ 之利息；問公債發行之價格為何？［註 假票面額為 £100.］

70. 解方程式：

$$\{(x^2+x+1)^3-(x^2+1)^3-x^3\}\{(x^2-x+1)^3-(x^2+1)^3+x^3\}$$
$$=3\{(x^4+x^2+1)^3-(x^4+1)^3-x^6\}.$$

71. 設由消去方程式

$$x^2+ax+b=0,\text{ 及 }xy+l(x+y)+m=0$$

中之 $x$ 成一 $y$ 之二次方程式，其根同於 $x$ 之原二次方程式，指明 $a=2l$, $b=m$, 或 $b+m=al$.

72. 已知 $log 3=.47712$, $log\ 2=.30103$；解方程式

(1) $6^x=\frac{10}{4}-6^{-x}$ (2) $\sqrt{5^x}+\sqrt{5^{-x}}=\frac{29}{10}$.

73. 求和為 9，四次冪和為 2417 之二數.

74. $A$ 以每時 4 哩之速率前進．$B$ 於其出發 $2\frac{3}{4}$ 時後追之，第一時行 $4\frac{1}{2}$ 哩，第二時 $4\frac{3}{4}$ 哩，第三時行 5 哩， 由從此每時多行 $\frac{1}{4}$ 哩，問 $B$ 追及 $A$ 需若干時？

75. 求証 $(\sqrt{3}+1)^{2m}$ 之前一整數含 $2^{m+1}$ 之因子.

76. 分自然數串爲 1; 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8, 9; ……等組:求証第 $n$ 組諸數之和爲 $(n-1)^3+n^3$.

77. 指明級數

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{|\underline{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{|\underline{4}}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\cdots\cdots$$

之 $n$ 項和等於 $1-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots\cdots(2n-1)}{2^n n}$

78. 指明 $\dfrac{1+2x}{1-x+x^2}$ 之展開式內 $x^n$ 之係數,依 $n$ 之形式爲 $3m$, $3m+1$, $3m+2$ 而爲

$$(-1)^{\frac{n}{3}},\ 3(-1)^{\frac{n-1}{3}},\ 4(-1)^{\frac{n-2}{3}}.$$

79. 解方程式

(1) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=\dfrac{xyz}{x+y+z}$.

(2) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=x+y+z=3$.

80. $xyz$ 之值依級數 $a$, $x$, $y$, $z$, $b$ 之爲等差或調和級數而爲 $7\frac{1}{3}$ 或 $3\frac{3}{5}$: 求 $a$, $b$ 之值,假定其爲正整數.

81. 設 $ay-bx=c\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$,指明捨 $c^2<a^2+b^2$ 外, $x$, $y$ 無能適合此方程式之實數值.

82, 設 $(x+1)^2$ 大於 $5x-1$ 而小於 $7x-3$,求 $x$ 之正整值.

83. 設 $p$ 爲對數指標爲 $p$ 之整數之數, $Q$ 爲倒數對數指標爲 $-q$ 之整數之數,指明

$$log_{10}P-log_{10}Q=p-q+1.$$

84. 五人分 20 先令,設每人所得皆不少於 3 先令,問能有幾種分法?

85. 某人欲使其二女於成年時得相等之遺產,遺贈長女以臨終時儲若某額金依每 88 得 4 之利率所得利息之總數; 遺少女以較前者少 £3500 磅照每 63 得 3 之利率之儲金所得利息之總數. 設其父臨終時二女之年齡爲 17 及 14,求爲每女所儲之金額,及二女各得之財產.

86. 某 7 進三位數，當表以 9 進法時則反其數字之順序；求某數.

87. 設某 $A.P$，$m$ 項之和等於次 $n$ 項和亦等於再次 $p$ 項和；求証

$$(m+n)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)=(m+p)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right).$$

88. 求証

$$\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2$$

89. 設 $m$ 爲大於 1 之負或正量，指明

$$1^m+3^m+5^m+\cdots\cdots\cdots+(2n-1)^m>n^{m+1}.$$

90. 設三方程式

$$x^2+p_1x+q_1=0,\ x^2-p_2x+q_2=0,\ x^2+p_3x+q_3=0$$

中每對有一公根，求証

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+4(q_1+q_2+q_3)=2(p_2p_3+p_3p_1+p_1p_2).$$

91. $A$ 及 $B$ 以同速度由同路從渾丁敦至倫敦. $A$ 於距倫敦第 50 哩石之處，追及以每二時行 3 哩之穉一羣；二時後復追及每四時行 9 哩之車一輛. $B$ 追及同穉羣於第 45 哩石之處，又恰於至第 31 哩石之 40 分鐘前，遇及該車，問當 $A$ 至倫敦時，$B$ 在何處?

92. 設 $a+b+c+d=0$，求証

$$abc+bcd+cda+dab=\sqrt{(bc-ad)(ca-bd)(ab-ad)}.$$

93. 首二項爲 $a$，$b$ 之 $A.P$，$G.P$，$H.P$. 各一，設

$$\frac{b^{2n+2}-a^{2n+2}}{ba(b^{2n}-a^{2n})}=\frac{n+1}{n}$$

試指明三級數之第 $n+2$ 項成等比級數.

94. 指明 $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)}$ 依 $x$ 升羃之展開式內 $x^n$ 之係數爲 $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}\cdot\dfrac{1}{a^nb^n}$；又 $\dfrac{(1+x^2)^n}{(1-x)^3}$ 展開式內 $x^{2n}$ 之係數爲 $2^{n-1}(n^2+4n+2)$.

95．解方程式：

$$\sqrt{x-y}+\frac{1}{2}\sqrt{x+y}=\frac{x-1}{\sqrt{x-y}},\quad x^2+y^2:\ xy=34:\ 15.$$

96．求以二次不盡根形式表 $1+\frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}$ 之值．

97．求証一整數之立方可表以二平方之差；每奇整數之立方可由二法表示；又任連續整數之立方差可以二平方之差表之．

98．求無窮級數

$$\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\frac{3}{7!}+\frac{4}{9!}+\cdots\cdots\cdots$$

之值．

99.設　$x=\frac{a}{b+}\ \frac{c}{d+}\ \frac{a}{b+}\ \frac{c}{d+}\cdots\cdots\cdots$

及　$y=\frac{c}{d+}\ \frac{a}{b+}\ \frac{c}{d+}\ \frac{a}{b+}\cdots\cdots\cdots$

則　$bx-dy=a-c$

100．求循環級數 $1+5x+7x^2+17x^3+31x^4+\cdots\cdots$ 之母函數，$n$ 項和，及第 $n$ 項．

101．設 $a$，$b$，$c$ 成 $H$，$P$．則

(1) $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+d}{2c-b}>4.$

(2) $b^2(a-c)^2=2\{c^2(b-a)^2+a^2(c-b)^2\}$

102．設 $a$，$b$，$c$ 皆實量，又 $x^3-3b^2x+2c^3$ 可爲 $x-a$ 及 $x-b$ 除盡；求證 $a=b=c$ 或 $a=-2b=-2c$．

103．指明三連續奇數之平方和加 1 能爲 12 除盡，但不能爲 24 除盡．

104．指明$\frac{ac-b^2}{a}$視 $a$ 之爲負或正，爲 $ax^2+2bx+c$ 之最大值或最小值．

設 $x^4+y^4+z^4+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=2xyz\ (x+y+z)$，又設 $x$，$y$，$z$ 皆爲實量，指明 $x=y=z$．

105. 指明$\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}$之展開式爲

$$\frac{x}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{x^5}{10}+\cdots\cdots\cdots$$

106. 設 $\alpha,\beta$ 爲方程式

$$x^2+px+q=0,\quad x^{2n}+p^nx^n+q^n=0,$$

之根，其中 $n$ 爲偶整數，指明 $\frac{\alpha}{\beta}$、$\frac{\beta}{\alpha}$ 爲

$$x^n+1+(x+1)^n=0$$

之根.

107. 求無窮輾轉分數

$$a+\frac{b}{2a+}\;\frac{b}{2a+}\;\frac{b}{2a+}\cdots\cdots\cdots\text{及}c+\;\frac{d}{2c+}\;\frac{d}{2c+}\;\frac{d}{2c+}\cdots\cdots$$

之平方差.

108. 以某款分與若干人，第二人較第一人多得 1 先令第三人較第二人多得 2 先令，第四人較第三人多得 3 先令，餘類推，餘設第一人得 1 先令最後人得 3 鎊 7，令先求人數及款數.

109. 解方程式

$$(1)\frac{x}{a}+\frac{y+z}{b+c}=\frac{y}{b}+\frac{z+x}{c+a}=\frac{z}{c}+\frac{x+y}{a+b}=2.$$

$$(2)\frac{x^2+y^2}{xy}+x^2+y^2=13\frac{1}{3},\quad\frac{xy}{x^2+y^2}+xy=3\frac{3}{10},$$

110. 設 $a>b>o$，及 $n$ 爲正整數，求證

$$a^n-b^n>n(a-b)(ab)^{\frac{n-1}{2}}.$$

111. 表 $\frac{763}{396}$ 以輾轉分數，由是求 $x,y$ 適合方程式$396x-763y=12$ 之最小值.

112. 完成某工所需之天數，$A$ 獨作所需爲 $B,C$ 合作所需之$m$倍；$B$ 獨作所需爲 $A$ $C$ 合作所需之 $n$ 倍；$c$ 獨作所需爲 $A,B$ 合作所需之 $p$ 倍：指明每人獨作所需天數之比爲 $m+1$: $n+1$: $p+1$.

又求證 $\frac{m}{m+1}+\frac{n}{n+1}+\frac{p}{p+1}=2$.

113. 海上療養所之用費，一部為常數，一部因寓者之人數正變，寓者一人每年繳費 £65. 設寓者為 50 人時，從寓者每人每年可獲利 £9，60 人時可獲利 £10，13$S$. 4$d$：問當 80 人時從每寓者可獲利若干？

114. 設 $x^2y=2x-y$ 及 $x^2$ 不大於 1. 指明

$$4\left(x^2+\frac{x^6}{3}+\frac{x^{10}}{5}+\cdots\right)=y^2+\frac{y^4}{2}+\frac{y^6}{3}+\cdots$$

115. 設 $\dfrac{x}{a^2-y^2}=\dfrac{y}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{b}$，及 $xy=c^2$；指明當 $a,c$ 不等時

$$(a^2-c^2)^2-b^2c^2=0，或\ a^2+c^2-b^2=0.$$

116. 設 $(1+x+x^2)^{2r}=1+k_1x+k_2x^2+\cdots$，

及 $(x-1)^{2r}=x^{2r}-c_1x^{2r-1}+c_2x^{2r-2}-\cdots$；

求証 (1) $1-k_1+k_2-\cdots\cdots=1$，

(2) $1-k_1c_1+k_2c_2-\cdots\cdots=\pm\dfrac{\underline{|3r}}{\underline{|r}\,\underline{|2r}}$.

117. 解方程式：

(1) $(x-y)^2+2ab=ax+by$，$xy+ab=bx+ay$.

(2) $x^2-y^2+z^2=6$，$2yz-zx+2xy=13$，$x-y+z=2$.

118. 設有 $n$ 正量 $a_1$，$a_2$，$\cdots\cdots a_n$，又設所有每次取二之積之平方根為已知. 求証

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\cdots\cdots<\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)；$$

並由是證明每二量之積之平方根之等差中項，小於已知量之等差中項.

119. 設 $b^2x^4+a^2y^4=a^2b^2$，及 $a^2+b^2=x^2+y^2=1$，求証

$$b^4x^6+a^4y^6=(b^2x^4+a^2y^4)^2.$$

120. 求級數首 $n$ 項之和，設其第 $r$ 項為

(1) $\dfrac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$，　　(2) $(a+r^2b)x^{n-r}$.

121. 求$\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$之最大值.

122. 解方程式

(1) $1+x^4=7(1+x)^4$

(2) $3xy+2z=xz+6y=2yz+3x=0$

123. 設 $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, 爲某二項式展開式內之任四連續係數, 求証

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

124. 析$\dfrac{x^3+7x^2-x-8}{(x^2+x+1)(x^2-3x-1)}$爲部分分式; 並求$\dfrac{3x-8}{x^2-4x-4}$當照 $x$ 升羃展開時之通項.

125. 循環級數

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x+2x^2+lx^3+5x^4+7x^5+\cdots\cdots$$

內之關係式爲一二次式; 求第四項之未知係數, 關係式及本級數之通項.

126. 設 $x$, $y$, $z$ 不等, 且

$$2a-3y=\frac{(z-x)^2}{y},\quad 2a-3z=\frac{(x-y)^2}{z},$$

則 $$2a-3x=\frac{(y-z)^2}{x},\quad x+y+z=a.$$

127. 解方程式

(1) $xy+6=2x-x^2, x-9=2y-y^2$.

(2) $(ax)^{\log a}=(bx)^{\log b}, b^{\log x}=a^{\log y}$.

128. 求下二式之極限值:

(1) $x\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^4+a^4}$. 當 $x=\infty$時

(2) $\dfrac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}$, 當 $x=a$時.

129. 今有二數, 其積爲 192, 其最大公約及最小公倍之等差中項除以調和中項之商爲 $3\frac{25}{48}$: 求二數.

130．解以下方程式：

(1) $\sqrt[3]{13x+37}-\sqrt[3]{13x-37}=\sqrt[3]{2}$.

(2) $\left.\begin{aligned} b\sqrt{1-z^2}+c\sqrt{1-y^2}&=a,\\ c\sqrt{1-x^2}+a\sqrt{1-z^2}&=b,\\ a\sqrt{1-y^2}+b\sqrt{1-x^2}&=c,\end{aligned}\right\}$

131．求証級數

$$\frac{1}{2^3\,\lfloor 3}-\frac{1.3}{2^4\,\lfloor 4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^5\,\lfloor 5}\cdots\cdots$$

無窮項之和爲$\frac{23}{24}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

132．某三位數，反其數字之順序則爲其二倍；求証其首末二數字所成之數亦然，又此數於每三進法中僅能用一種進法求出．

133．求 $\frac{1+x^3}{(1-x^2)(1-x)}$ 及 $1-x+x^2$ 之積內 $x^{12}$ 及 $x^7$ 之係數．

134．某賈主購得街前地一塊；此地爲長方形，三倍前面與二倍側面之和爲 96 碼，求其可作成之最大正方形．

135，求証

$$(a+b+c+d)^4+(a+b-c-d)^4+(a-b+c-d)^4+(a-b-c+d)^4$$
$$-(a+b+c-d)^4-(a+b-c+d)^4-(a-b+c+d)^4-(-a+b+c+d)^4$$
$$=192abcd.$$

136．求 $a, b, c$ 能使 $x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ 及 $x^4+2ax^3+2bx^2+2cx+1$ 各爲完全平方之值．

137．解方程式

(1) $\frac{\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}+\sqrt{x-y}}=3$，$x^2+y^2=65$.

(2) $\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-1}=\frac{2}{\sqrt{3-2x}}$.

138．某農夫以某價售羊 10 隻，又售 5 隻每隻之價低 10s：設每次售得鎊數之二數字相同：求羊每隻之價．

139．求 $n$ 項和：

(1) $(2n-1)+2(2n-3)+3(2n-5)+\cdots\cdots$

(2) 級數 $1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\cdots\cdots$ 諸項之平方．

(3) (2) 內之奇數項．

140．設 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 爲方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根，求証

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)=5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4).$$

141．解方程式：

$$(1)\ \left.\begin{aligned} x(3y-5)&=4\\ y(2x+7)&=27\end{aligned}\right\}\qquad (2)\ \left.\begin{aligned} x^3+y^3+z^3&=495\\ x+y+z&=15\\ xyz&=105\end{aligned}\right\}$$

142．設 $a,\ b,\ c$ 爲 $x^3+qx^2+r=0$ 之根求以 $a+b-c,\ b+c-a,\ c+a-b$ 爲根之方程式．

143．求級數和：

(1) $n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+2x^{n-2}+x^{n-1}$；

(2) $3-x-2x^2-16x^3-28x^4-676x^5+\cdots\cdots$ 至無窮．

(3) $6+9+14+23+40+\cdots\cdots$ 至 $n$ 項．

144．消去 $x,\ y,\ z$，從方程式

$$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=a^{-1},\quad x+y+z=b,$$
$$x^2+y^2+z^2=c^2,\quad x^3+y^3+z^3=d^3,$$

並指明設 $x,\ y,\ z$ 皆爲限定數，且絕對不等之數，則 $b$ 不能等於 $d$．

145．已知方程式 $3x^2(x^2+8)+16(x^3-1)=0$ 之根非盡不相等；求諸根．

146．某旅客自某地出發，第一日行1哩第二日 3 哩，第三日5哩，類推．每日較其前一日多行 2 哩，行三日後第二人出發，第一日行12哩，第二日行13哩，類推．問第二人始可追及第一人需時若干？並解釋其二答數．

147．求

$$\frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\cdots\cdots 之值．$$

148. 解方程式

$$x^3+3ax^2+3(a^2-bc)x+a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

149. 設 $n$ 為不能除盡 $a$，$b$，及 $a+b$ 之質數，求証 $a^{n-2}b-a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3$ 加 1 為 $n$ 之倍數.

150. 求級數之第 $n$ 項及 $n$ 項和，已知其無窮項和為$(1-abx^2)(1-ax)^{-2}(1-bx)^{-2}$

151. 設 $a$，$b$，$c$ 為方程式 $x^3+px+q=0$ 之根，求

根為$\dfrac{b^2+c^2}{a}$，$\dfrac{c^2+a^2}{b}$，$\dfrac{a^2+b^2}{c}$之方程式.

152. 求証

$$(y+z-2x)^4+(z+x-2y)^4+(x+y-2z)^4=18(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2.$$

153. 解方程式:

(1) $x^3-30x+133=0$，用卡登氏法.

(2) $x^5-4x^4-10x^3+40x+9x-36=0$，已知其根之形式為 $\pm a$，$\pm b$，及 $c$.

154. 已知某人每時工作之量，因其每時之報酬正變，而與其每日工作時數之平方根反變．設某工作每日工作 9 時，每時工資 1$s$. 六日可完，若每日工作 16 時每時酬金 1$s$.6$d$ 則幾日可完?

155. 設 $s_n$ 表級數

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots$$

之 $n$ 項和，$S_{n-1}$ 表級數

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\cdots\cdots$$

之 $n-1$ 項和．指明 $18s_nS_{n-1}-s_n+2=0$.

156. 解方程式:

(1) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5.$

(2) $\dfrac{1}{5}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}+\dfrac{1}{9}\dfrac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-6)}-\dfrac{2}{13}\dfrac{(x+5)(x-7)}{(x+6)(x-8)}=\dfrac{92}{585}$

157. 某房於某年初值金 £250，但因逐漸陳舊，每年末損其每年初價格之 10%：問若干年後該房之價格落至 £25 以下？已知 $\log_{10}3=.4771213$.

158. 指明二無窮級數

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1\cdot4}{4\cdot8}+\frac{1\cdot4\cdot7}{4\cdot8\cdot12}+\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10}{4\cdot8\cdot12\cdot16}+\cdots\cdots$$

及 $$1+\frac{2}{6}+\frac{2\cdot5}{6\cdot12}+\frac{2\cdot5\cdot8}{6\cdot12\cdot18}+\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11}{6\cdot12\cdot18\cdot24}+\cdots\cdots$$

相等.

159. 求証恒等式

$$\left\{1-\frac{x}{\alpha}+\frac{x(x-\alpha)}{\alpha\beta}-\frac{x(x-\alpha)(x-\beta)}{\alpha\beta\gamma}+\cdots\right\}$$
$$\left\{1+\frac{x}{\alpha}+\frac{x(x+\alpha)}{\alpha\beta}+\frac{x(x+\alpha)(x+\beta)}{\alpha\beta\gamma}+\cdots\right\}$$
$$=1-\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{x^2(x^2-\alpha^2)}{\alpha^2\beta^2}-\frac{x^2(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}+\cdots$$

160. 設 $n$ 爲大於 1 之正整數，指明

$$n^5-5n^3+60n^2-56n$$

爲 120 之倍數.

161. 若干人被派完成某工作，設同時著手則需 24 小時；但彼等隔等時間開始，由是繼續至完工，報酬與每人工作之量成比例：已知最先開始者爲最後開始者之 11 倍，求完成工作所用之時間.

162. 解方程式:

(1) $$\frac{x}{y^3-3}=\frac{7}{x^3-3}=\frac{-7}{x^3+y^3}.$$

(2) $$y^2+z^2-x(y+z)=a^2,$$
$$z^2+x^2-y(z+x)=b^2$$
$$x^2+y^2-z(x+y)=c^2$$

163. 解方程式

$a^3(b-c)(x-b)(x-c)+b^3(c-a)(x-c)(x-a)+c^3(a-b)(x-a)(x-b)=0$;

並指明設其二根相等則

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\pm\frac{1}{\sqrt{b}}\pm\frac{1}{\sqrt{c}}=0.$$

164. 求級數和：

(1) $1\cdot2\cdot4+2\cdot3\cdot5+3\cdot4\cdot6+\cdots\cdots$至 $n$ 項.

(2) $\frac{1^2}{\lfloor 3}+\frac{2^2}{\lfloor 4}+\frac{3^2}{\lfloor 5}+\cdots\cdots$至無窮.

165. 指明設 $a$, $b$, $c$, $d$ 爲四不等正量. 及 $s=a+b+c+d$, 則 $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)>81abcd$.

166. 解方程式

(1) $\sqrt{x+a}-\sqrt{y-a}=\frac{5}{2}\sqrt{a}$, $\sqrt{x-a}-\sqrt{y+a}=\frac{3}{2}\sqrt{a}$.

(2) $x+y+z=x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)=3$.

167. 消去 $l$, $m$, $n$, 從方程式

$$lx+my+nz=mx+ny+lz=nx+ly+mz$$
$$=k^2(l^2+m^2+n^2)=1.$$

168. 化簡

$$\frac{a(b+c-a)^2+\cdots\cdots+\cdots\cdots+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{a^2(b+c-a)+\cdots\cdots+\cdots\cdots-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

169. 指明

$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$ 爲完全平方，並求其平方根.

170. 有 $A$, $B$, $C$ 三鎭，某人步行由 $A$ 至 $B$，乘車由 $B$ 至 $C$，騎馬由 $C$ 至 $A$. 共用 $15\frac{1}{2}$ 時；若乘車由 $A$ 至 $B$，騎馬由 $B$ 至 $C$, 步行由 $C$ 至 $A$ 則用 12 時, 設已知此旅程步行用 22 時，騎馬用 $8\frac{1}{2}$ 時乘車用 11 時，又步行一哩，馬行一哩，車行一哩共需半時. 求各速度及諸鎭間之距離.

171. 指明設 $n$ 為不小於 3 之整數則

$$n^7-7n^5+14n^3-8n$$

可為 840 所除盡.

172. 解方程式

(1) $\sqrt{x^2+12y}+\sqrt{y^2+12x}=33,\ x+y=23.$

(2) $\dfrac{u(y-x)}{z-u}=a,\ \dfrac{z(y-x)}{z-u}=b,\ \dfrac{y(u-z)}{x-y}=c,\ \dfrac{x(u-z)}{x-y}=d$

173. 設 $s$ 為 $n$ 不等正量 $a,\ b,\ c,\ \cdots\cdots$ 之和，則

$$\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\frac{s}{s-c}+\cdots\cdots>\frac{n^2}{n-1}.$$

174. 某商以賣油之款買棉花若干，棉之磅數，易棉一磅所用油之器數，與油每器售價之先令數成降等比級數，彼計算設多得棉一磅每易一磅多用油一器，每器油多售一先令則可多得 £508. 9s；又設多得一磅之棉，易每磅棉少用一器，每器油少售一先令則少得 £483. 13s.：問其得款確為若干?

175. 求証

$$\Sigma(b+c-a-x)^4(b-c)(a-x)=16(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c).$$

176. 設 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 為方程式 $x^3-px^2+r=0$ 之根，求根為 $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha},\ \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta},\ \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$ 之方程式.

177. 設任若干 $a^2+b^2$ 形式之因子相乘，指明其積可表以二平方之和.

已知 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2)=p^2+q^2$，求以 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h$ 表 $p,\ q$.

178. 解方程式

$$x^2+y^2=61,\quad x^3-y^3=91.$$

179. 某人應試，計有四試卷，每試卷之最高分數為 $m$ 分，求証其得 $2m$ 分之方法之數為

$$\tfrac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+3).$$

180. 設 $\alpha$, $\beta$ 爲 $x^2+px+1=0$ 之根，$\gamma$ $\delta$ 爲 $x^2+qx+1=0$ 之根；指明 $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$.

181. 指明設 $a_m$ 爲 $(1+x)^n$ 之展開式內 $x^m$ 之係數，則無論 $n$ 爲何值.

$$a_0-a_1+a_2\cdots\cdots\cdots+(-1)^{m-1}a_{m-1}=\frac{(m-1)(m-2)\cdots(n-m+1)}{|\underline{m-1}}$$
$(-1)^{m-1}$

182. 某數爲三質因數之積，其三質因數之平方和爲 2331，有 7560 數（1 在內）小於此數且與之爲互質數，又其約數（1 及本數在內）之和爲 10560. 求某數.

183. 求某方程式，其根爲方程式 $x^3-ax^2+bx+c=0$ 之根中每二者之積.

全解方程式

$$2x^5+x^4+x+2=12x^3+12x^2.$$

184. 設 $n$ 爲正整數，求証

$$n^n-n(n-2)^n+\frac{n(n-1)}{|\underline{2}}(n-4)^n\cdots\cdots\cdots=2^n\,|\underline{n}.$$

185. 設 $(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}=N$，又設 $F$ 爲 $N$ 之分數部分，求証 $NF=20^{2n+1}$.

186. 解方程式：

(1)　$x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=0$, $x^3+y^3+z^3=-1$.

(2)　$x^2-(y-z)^2=a^2$, $y^2-(z-x)^2=b^2$, $z^2-(x-y)^2=c^2$

187. 某次普通選舉之結果，自由黨被選議員之全數較英格蘭保守黨議員多 15 人，保守黨被選議員之全數較英格蘭自由黨議員人數之二倍多 5 人. 又蘇格蘭保守黨議員之數同於威爾士自由黨議員之數，蘇格蘭自由黨議員多於其保守黨議員之數爲威爾士保守黨議員人數之二倍，而與愛爾蘭自由黨議員多於其保守黨議員之數之比爲2:3. 再英格蘭保守黨議員多於其自由黨議員之數較愛爾蘭議員之全數多 10. 國議員之全數爲 652 人，其中 60 人爲由蘇格蘭選民選出者，求英格蘭，蘇格蘭，愛爾蘭，威爾士，各邦所選每黨議員之人數.

188. 指明　$a^5(c-b)+b^5(a-c)+c^5(b-a)$

$$=(b-c)(c-a)(a-b)(\Sigma a^3+a^2b+abc).$$

189． 求證 $\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(a-1)^6.$

190． 設 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}=0$，求證捨 $b=a+c$ 外，$a,b\ c$，成調和級數．

191． 解方程式：

(1) $x^3-13x^2+15x+189=0$．已知其一根較他一根大 2．

(2) $x^4-4x^2+8x+35=0$，已知其一根爲

$2+\sqrt{-3}$．

192． 設 $a$，$b$ 二數爲已知；他二數 $a_1$，$b_1$，爲由 $3a_1=2a+b$ 及 $3b_1=a+2b$ 之關係作成之數：又二數 $a_2$，$b_2$，爲用同法由 $a_1$，$b_1$ 作成之數，類推；求 $a_n$，$b_n$ 表以 $a$，$b$ 之值，並證當 $n$ 爲無窮大時，$a_n=b_n$．

193． 設 $x+y+z+w=0$，指明

$$wx(w+x)^2+yz(w-x)^2+wy(w+y)^2+zx(w-y)^2$$
$$+wz(w+z)^2+xp(w-z)^2+4xyzw=0.$$

194． 設 $a+\frac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}$ 於 $a$，$b$，$c$ 中某不等二字母互換後其值不變，則於任何二字互換後其值皆不變；且於 $a+b+c=1$ 時爲零．

195． 於 $A$、$B$ 二地間之四軌鐵路上；二車於 6 點及 6 點 45 分開去，他二車於 7 點 15 分及 8 點 30 分起始開來．設四車（以四點視之）於同時互相越過，求其每時速度 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$ 所成之方程式．

$$\frac{3x_2}{x_2-x_1}=\frac{4m+5x_3}{x_1+x_3}=\frac{4m+10_4}{x_1+x_4}.$$

$m$ 爲 $AB$ 間之哩數．

196． 棄去三次以上各項．求證

$$\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}+(1-y)^{-\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{(1-x)(1-y)}}=1+\tfrac{1}{4}(x+y)+\tfrac{1}{8}(3x^2+xy+3y^2).$$

197. 指明級數

$$a,\ a-b,\ a-2b,\ \cdots\cdots,\ a-(n-1)b,$$

諸項中兩兩之積之和，當 $n$ 之形式為 $3m^2-1$ 及 $2a=(3m-2)(3m+1)b$ 時為零.

198. 設 $n$ 為偶數，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 為二中項，指明此等差數之立方和為

$$n\alpha\{\alpha^2+(n^2-1)\beta^2\}.$$

199. 設 $a$，$b$，$c$ 為正實量，指明

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{a^3+b^3+c^3}{a^3b^3c^3}.$$

200. $A$，$B$，$C$ 同時起身至遠一哩之某鎮；$A$ 以每時 $u$ 哩之等速度步行，$B$，$C$ 以每時 $v$ 哩之等速度車行. 某時後 $B$ 下車與 $A$ 同速度步行，$C$ 則驅車返行迎 $A$；$A$ 入車後二人乘車追 $B$，結果與 $B$ 同時入鎮：指明其所用之全時間為 $\frac{a}{v}\cdot\frac{3v+u}{3u+v}$ 時.

201. 某城市之街道照棋盤排列. 南北街之數為 $m$，東西街之數 $n$，設某人從西北至東南，求最近可能走法之數.

202. 解方程式 $\sqrt[4]{x+27}+\sqrt[4]{55-x}=4$.

203. 指明級數

$$ab+(a+x)(b+x)+(a+2x)(b+2x)+\cdots\cdots 至\ 2n\ 項.$$

內末 $n$ 項和與首 $n$ 項和之差比末項與首項之差為 $n^3$ 比 $2n-1$.

204. 求下之 $n$ 次近值：

(1) $\frac{1}{2-}\ \frac{1}{2-}\ \frac{1}{2-}\ \cdots\cdots\cdots\cdots$

(2) $\frac{4}{3+}\ \frac{4}{2+}\ \frac{4}{3+}$

205. 求証

$$(a-x)^4(y-z)^4+(a-y)^4(z-x)^4+(a-z)^4(x-y)^4$$

$$=2\{(a-y)^2(a-z)^2(x-y)^2(x-x)^2+(a-z)^2(a-x)^2$$

$$(y-z)^2(y-x)^2+(a-x)^2(a-y)^2(z-x)^2(z-y)^2\}.$$

206. 設 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 爲 $x^3+qx+r=0$ 之根求

$$\frac{m\alpha+n}{m\alpha-n}+\frac{m\beta+n}{m\beta+n}+\frac{m\gamma+n}{m\gamma-n}$$

表以 $m$, $n$, $q$, $r$ 之值.

207. 英國每年每 46 人中死一人, 每 33 人中生一人. 設無移民, 問依此計算若干年後人口可增一倍.

208. 設 $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 求証捨 $r$ 爲 3 之倍數外.

$$a_r-na_{r-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_{r-2}-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}a_0=0.$$

又當 $r$ 爲 3 之倍數時, 其值爲何?

209. 某團體爲波蘭, 土耳其, 希臘, 德意志, 意大利五國人所組成. 其中波人較德人之 $\frac{1}{3}$ 少 1, 意人之半數少 3, 土人與德人較希人與意人多 3 人; 意人及希人佔全團體人數之 $\frac{7}{26}$; 求各國籍之人數.

210. 求無窮級數之和, 已知其第 $n$ 項爲

$(n+1)n^{-1}(n+2)^{-1}(-x)^{n+1}$.

211. 設 $n$ 爲正整數, 求証

$$n-\frac{n(n^2-1)}{\underline{|2}}+\frac{n(n^2-1)(n^2-2^2)}{\underline{|2}\,\underline{|3}}-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^r\frac{n(n^2-1)(n^2-2^2)\cdots\cdots(n^2-r^2)}{\underline{|r}\,\underline{|r+1}}+\cdots=(-1)^{n+1}.$$

212. 求級數和:

(1) 6, 24, 60, 120, 210, 336,$\cdots\cdots$至 $n$ 項.

(2) $4-9x+16x^2-25x^3+36x^4-49x^5+\cdots\cdots$至無窮

(3) $\frac{1\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 5}{2^2}+\frac{5\cdot 7}{2^3}+\frac{7\cdot 9}{2^4}+\cdots\cdots$至無窮.

213. 解方程式 $\begin{vmatrix} 4x & 6x+2 & 8x+1 \\ 6x+2 & 9x+3 & 12x \\ 8x+1 & 12x & 16x+2 \end{vmatrix}=0.$

214．指明

(1)　$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)>6abc$,

(2)　$n(a^{p+q}+b^{p+q}+c^{p+q}+\cdots\cdots)>(a^p+b^p+c^p+\cdots\cdots)(a^q+b^q+c^q+\cdots\cdots)$．$a$，$b$，$c$，……諸量之個數為 $n$.

215．解方程式

$$\left.\begin{aligned} yz&=a(y+z)+\alpha \\ zx&=a(z+x)+\beta \\ xy&=a(x+y)+\gamma \end{aligned}\right\}.$$

216．設 $n$ 為質數，求証

$$1(2^{n-1}+1)+2(3^{n-1}+\tfrac{1}{2})+3(4^{n-1}+\tfrac{1}{3})+\cdots\cdots+(n-1)\left(n^{n-1}+\frac{1}{n-1}\right)$$

可為 $n$ 約盡.

217．某人於某射擊比賽內，每射擊可得 5，4，3，2，或 0 點：求其七次得 30 點之不同得法之數.

218．求証 $x^5-bx^3+cx^2+dx-e$ 為完全平方及完全立方之積，設

$$\frac{12b}{5}=\frac{9d}{b}=\frac{5e}{c}=\frac{d^2}{c^2}.$$

219．某袋內有六黑球及不能多於六之白球，設陸續取出三球，不再放回，得三白球；求証次取得一黑球之適遇量為 $\frac{677}{909}$.

220．指明首 $n$ 自然數中每二數平方之積之和為 $\frac{1}{360}n(n^2-1)(4n^2-1)(5n+6)$.

221．設 $\dfrac{\alpha^2(b-c)}{x-a}+\dfrac{\beta^2(c-a)}{x-b}+\dfrac{\gamma^2(a-b)}{x-c}=0$ 有等根.

求証 $\alpha(b-c)\pm\beta(c-a)\pm\gamma(a-b)=0$

222．求証當 $n$ 為正整數時，

$$n=2^{n-1}-\frac{n-2}{1}2^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{\underline{|2}}2^{n-5}$$
$$-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{\underline{|3}}2^{n-7}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

223. 解方程式:

(1) $x^2+2yz=y^2+2zx=z^2+2xy+3=76$.

(2) $x+y+z=a+b+c$.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$$

$ax+by+cz=bc+ca+ab$.

224. 求證設連一直線內 $m$ 點中每點與他一直線內 $n$ 點中，各點則由諸點所決定之諸直線，令已知點在內共交 $\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1)$ 次.

225. 已知 $y=x+x^2+x^5$， 展開 $x$ 爲

$$y+ay^2+by^3+cy^4+dy^5+\cdots\cdots$$

之形式. 並指明 $a^2d-3abc+2b^3=-1$.

226. 某農夫買牛，猪，羊所用之款相等. 牛每頭之價較猪一隻之價貴 £1，羊一隻之價貴£2；計共買 47 頭. 但知猪多於牛之隻數，同於 £9 所買之羊數：求 牛，猪，羊各買若干頭.

227. 表 $log2$ 以無窮聯轉分數

$$\frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{2^2}{1+}\ \frac{3^2}{1+}\cdots\cdots\frac{n^2}{1+}\cdots\cdots$$

之形式.

228. 某考試有試題六種，每種以 100 分爲滿分. 指明被試者能得全分數之 40%，之得法之數爲

$$\frac{1}{5}\left\{\frac{\lfloor\underline{245}}{\lfloor\underline{256}}-6\cdot\frac{\lfloor\underline{144}}{\lfloor\underline{139}}+15\cdot\frac{\lfloor\underline{43}}{\lfloor\underline{38}}\right\}$$

229. 試計算下式之收斂值.

$$\frac{x}{\lfloor\underline{2}}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^6}{10}+\frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{x^7}{41}+\cdots\cdots$$

230. 求循環級數 $1+6+40+288+\cdots\cdots$ 之關係式，第 $n$ 項，及 $n$ 項和.

並指明以此級數 $r$ 項和爲第 $r$ 項所成級數之 $n$ 項和爲

$$\frac{2}{3^2}(2^{2n}-1)+\frac{4}{7^2}(2^{3n}-1)-\frac{5n}{21}.$$

231. 已知某地午時之太陽，平均三日內有二日為雲所蔽；求此後五日內至少有四日，午時太陽照耀大地之適遇量.

252. 解方程式

$$\left.\begin{aligned} x^2+(y-z)^2&=a^2 \\ y^2+(z-x)^2&=b^2 \\ z^2+(x-y)^2&=c^2 \end{aligned}\right\}.$$

233. 消去 $x$，$y$，$z$，從方程式

$$\frac{x^2-xy-xz}{a}=\frac{y^2-yz-yx}{b}=\frac{z^2-zx-zy}{c},$$

234. 設方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之二根絕對值同而符號相反，指明 $pq=r$.

235. 求級數和：

(1) $1+2^3x+3^3x^2+\cdots\cdots+n^3x^{n-1}$,

(2) $\dfrac{25}{1^2\cdot2^2\cdot3^2}+\dfrac{52}{2^2\cdot3^2\cdot4^2}+\cdots+\dfrac{5n^2+12n+8}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

236. 設 $(1+a^3x^4)(1+a^5x^8)(1+a^9x^{16})(1+a^{17}x^{32})\cdots\cdots$

$$=1+A_4x^4+A_8x^8+A_{12}x^{12}+\cdots\cdots$$

求証 $A_{8n+4}=a^3A_{8n}$ 及 $A_{8n}=a^{2n}A_{4n}$；並求此展開式之首十項.

237. 某水面上無水流由 $A$ 至 $B$，但有水流由 $B$ 至 $C$，某人順水划舟由 $A$ 至 $C$ 用 3 時，逆水從 $C$ 至 $A$ 用 $3\frac{1}{2}$ 時；設全路水流同於從 $B$ 至 $C$，則其順水路程僅用 $2\frac{3}{4}$ 時；求於同情形下划回所用之時間.

238. 求証續連分數 $\dfrac{3}{2+}\,\dfrac{3}{2+}\,\dfrac{3}{2+}\cdots\cdots$ 之 $n$ 次收斂值為

$$\frac{3^{n+1}+3(-1)^{n+1}}{3^{n+1}-(-1)^{n+1}}.$$

239. 設展開式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n=f(x)=0,$$

內所有係數皆為整數，及 $f(0)$, $f(1)$ 為奇整數，求証此方程式內無可約根.

240. 指明設 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}=0$，則方程式

$$\sqrt{ax+\alpha}+\sqrt{bx+\beta}+\sqrt{cx+\gamma}=0$$

可變爲简方程式.

解方程式.

$$\sqrt{6x^2-15x-7}+\sqrt{4x^2-8x-11}-\sqrt{2x^2-5x+5}=2x-3.$$

241. 某袋內有紅綠球各三個，某人從袋內隨手取出三球．後從入三藍球於是復隨手取出三個．指明適取三球不利爲三種顏色之適遇是爲 8 比 3，

242. 求方程式 $x^4-7x^2+4x-3=0$ 之根之五次幂之和.

243. 某等比級數及調和級數之第 $p$，$q$，$r$ 項同爲 $a$，$b$，$c$：指明

$$a(b-c)\log a+b(c-a)\log b+c(a-b)\log c=0.$$

244. 今有四數，第一，三，四 數之和較第二數大 8；第一，第二之平方和較第三，第四之平方和大 36；第一第二之積與第三第四之積之和爲 42；又第一之立方等於第二，第三，第四之和；求四數.

245. 設 $T_n$，$T_{n+1}$，$T_{n+2}$ 爲循環級數以關係式 $T_{n+2}=aT_{n+1}-bT_n$ 相關連之三連續項，求証

$$\frac{1}{b^n}\left\{T^2_{n+1}-aT_nT_{n+1}+bT_n^2\right\}=\text{某常數}$$

246. 消去 $x$，$y$，$z$ 從方程式：

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}, & x^2+y^2+z^2=b^2\\ x^3+y^3+z^3=c^3, & xyz=d^3\end{array}\right\}$$

247. 指明方程式

$$x^4-px^3+qx^2-rx+\frac{r^2}{p^2}=0$$

之根成比例．並由是解方程式 $x^4-12x^3+47x^2-72x+36=0$，

248. 射擊某標的，$A$5 發中4；$B$4 發中 3，$C$3 發中 2．今三人齊發一次：問至少中 2 彈之適遇量爲何？又設其中 2；問 $C$ 未中之適遇量爲何？

249. 求以下各級數，之 $n$ 項和：

(1) $1+0-1+0+7+28+79+\cdots\cdots$；

(2) $\frac{2\cdot 2}{1.2\cdot 3.4}+\frac{1.2^2}{2.3.4.5}+\frac{6.2^3}{3.4.5.6}+\frac{13.2^4}{4.5.6.7}+\cdots\cdots$；

(3) $3+x+9x^2+x^3+33x^4+x^5+129x^6+\cdots\cdots$

250. 解方程式

(1) $\left.\begin{aligned} y^2+yz+z^2=ax,\\ z^2+zx+x^2=ay,\\ x^2+xy+y^2=az,\end{aligned}\right\}$ (2) $\left.\begin{aligned} x(y+z-x)=a,\\ y(z+x-y)=b,\\ z(x+y-z)=c,\end{aligned}\right\}$

251. 設$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，且 $n$ 爲奇整數，指明

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$

設 $u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4)=0$，試証 $(u^2-v^2)^6=16u^2v^2(1-u^8)(1-v^8)$．

252. 設$x+y+z=3p$，$yz+zx+xy=3q$，$xyz=r$，求証

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-27p^3+36pq-8r,$$

$$(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3=27p^3-24r.$$

253. 求

$\{a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+c(a+b)z^2\}^2-4abc(x^2+y^2+z^2)(ax^2+by^2+cz^2)$ 之 $x$，$y$，$z$ 之一次因式．

254. 指明$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}>x^xy^yz^z\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}$

255. 用恆等式$\left\{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1+x}{1-x}$証明

$$\sum_{r=1}^{r=n}(-1)^{n-r}\frac{(n+r-1)!}{r!(r-1)!(n-r)!}=1.$$

256. 解方程式:

(1) $ax+by+z=zx+ay+b=yz+bx+a=0$

(2) $$\left.\begin{aligned} x+y+z-u&=12,\\ x^2+y^2-z^2-u^2&=6,\\ x^3+y^3-z^3+u^3&=218\\ xy+zu&=45. \end{aligned}\right\}$$

257. 設 $p=q$ 近似，及 $n>1$，指明

$$\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

設$\dfrac{p}{q}$迄第 $r$ 小數位爲 1，則其近似值一般求至小數若干位爲正確.

258. 某婦人買茶及咖啡共 54 磅；設其買茶 $\frac{5}{6}$，咖啡之 $\frac{4}{5}$，則共用錢僅爲所用者之 $\frac{9}{11}$；又設茶及咖啡之磅數互易，則須多用 5 先令，已知茶貴於咖啡，又咖啡 6 磅之價較茶 2 磅之價多 5先令；求各價若干?

259. 設 $s_n$ 表首 $n$ 自然數每次取二之積之和，則

$$\frac{2}{3!}+\frac{11}{4!}+\cdots\cdots\frac{s_{n-1}}{n!}+\cdots\cdots=\frac{11}{24}e.$$

260. 設

$$\frac{P}{pa^2+2qab+rb^2}=\frac{Q}{pac+q(bc-a^2)-rab}=\frac{R}{pc^2-2qca+ra^2}.$$

求証 $P,p;Q,q.R,r$ 可互換而不變此等式.

261. 設 $\alpha+\beta+\gamma=0$. 指明

$\alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3}=\alpha\beta\gamma(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n)+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1})$.

262. 設 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ 爲方程式

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

之根，求以諸係數表 $\Sigma(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2$之值.

263. 某農夫買火鷄，鵝，鴨若干；每種每隻所用之先令數同於該種之隻數；合計用錢 £10,11s 共買 23 隻，問每種各買若干隻?

264. 求証方程式

$$(y+z-8x)^{\frac{1}{3}}+(z+x-8y)^{\frac{1}{3}}+(x+y-8z)^{\frac{1}{3}}=0$$

同値於方程式

$$x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2=0$$

265. 設方程式$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{c}{x+c}+\frac{d}{x+d}$有二等根，則 $a$，$b$ 二量中必有一量 $a$，或 $b$ 等於 $c$ 或 $d$；或$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. 並証其根爲 $-a$，$-a$，$o$；$-b$，$o$；或 $0,0,-\frac{2ab}{a+b}$,

266. 解方程式:

(1) $x+y+z=ab$，$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=a^{-1}b$. $xyz=a^3$.

(2) $ayz-by+cz=bzx+cz+ax=cxy+cx+by=a+b+c$.

287. 求下式之最簡式

$$\frac{a^3}{(a-\beta)(a-\gamma)(a-s)(a-\epsilon)}+\frac{\beta^3}{(\beta-a)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\epsilon)}$$
$$+\frac{\epsilon^3}{(\epsilon-a)(\epsilon-\beta)(\epsilon-\gamma)(\epsilon-\delta)}$$

268. 某僧侶，醫生及律師之團體內，現年合計爲 2160 歲；平均年齡爲 36；僧侶及醫生之平均年齡爲 39；醫生及律師者爲$32\frac{8}{11}$；僧侶及律師者爲$36\frac{2}{3}$. 設每僧侶1大歲：每律師大7歲，每醫生大 6 歲，則其平均年齡大 5 歲：求每種人數及其平均年齡，

269. 設 $a_0x^4+4a1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4y^4$ 能變爲二 $x$，$y$ 一次式四次冪之和，求存於其係數間之條件.

270. 求下方程式之實根：

$$x^2+v^2+\omega^2=a^2,\qquad v\omega+u(y+z)=bc,$$
$$y^2+\omega^2+u^2=b^2,\qquad \omega v+v(z+x)=ca,$$
$$z^2+u^2+v^2=c^2,\qquad uv+\omega(x+y)=ab,$$

271. *Gaelic* 內一法則謂；一子音或數子音不能處於強弱二母音之間；強母音爲 $a$，$o$，$u$；弱母音爲 $e$，$i$，指明由 $n$ 子音及母音 $aeo$ 組成含 $n+3$ 字母之 *Gaelic* 字，共有 $\frac{\lfloor n+3}{n+2}$ 個，同字內各字母不能相同．

272. 指明設 $x^2+y^2=2z^2$．$x$，$y$，$z$ 爲整數則

$$2x=r(l^2+2lk-k^2),2y=r(k^2+2lk-l^2),2z=r(l^2+k^2).$$

式內 $r$，$l$，及 $k$ 爲整數．

373. 求級數和

(1) $\frac{x^2}{2.3}+\frac{2x^3}{3.4}+\frac{3x^4}{4.5}+\cdots\cdots$至無窮項

(2) $\frac{\lfloor 1}{a+1}+\frac{\lfloor 2}{(a+1)(a+2)}+\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$

275. 解方程式

(1) $2xyz+3=(2x-1)(3y+1)(4z-1)+12$

$$=(2x+1)(3y-1)(4z+1)+80=0.$$

(2) $3ux-2vy=vx+uy=3u^2+2v^2-14$；$xy=10uv$，

276. 指明 $\begin{vmatrix} a^2+\lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2+\lambda & bc & bd \\ ac & bc & c^2+\lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2+\lambda \end{vmatrix}$

可爲 $\lambda^3$ 約盡，並求其他因子．

277，設 $a, b, c, \cdots\cdots$ 爲方程式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

之根．求 $a^3+b^3+c^3+\cdots\cdots$ 之和，並指明

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\cdots\cdots=p_1-\frac{p_{n-1}(p_1^2-2p_2)}{p_n}.$$

278．用 $\dfrac{1+2x}{1+x^3}$ 或其他之展開式證明

$$1-3n+\frac{(3n-1)(3n-2)}{1\cdot 2}-\frac{(3n-2)(3n-3)(3n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+\frac{(3n-3)(3n-4)(3n-5)(3n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots=(-1)^n,$$

當 $n$ 爲整數時，此級數止於爲零之第一項．

279．$A$，$B$ 外出遊獵，共獲鳥 10 隻，所用彈數之平方和爲 2880，又每人所用彈數之積爲每人所獲鳥數之積之 48 倍．設二人所發之彈數互易．則 $B$ 較 $A$ 多得 5 鳥．求每人所得之鳥數．

280．求證 $8(a^3+b^3+c^3)>9(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$．

281．指明 $\dfrac{2}{3-}\;\dfrac{4}{4-}\;\dfrac{6}{5-}\cdots\cdots\cdots\cdots$ 之 $n$ 次近值爲

$$2-\frac{2^{n+1}}{\Sigma^n{}_0 2^r(n-r)!}$$

又當 $n$ 爲無窮大時，其極限爲何．

282，設 $\dfrac{p_n}{q_n}$ 爲輾轉分式．

$$\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之 $n$ 次近值指明 $p_{3n+3}=bp_{3n}+(bc+1)q_{3n}$．

283．指明 1，2，3，$\cdots\cdots\cdots n$ 時長之 $n$ 直線中，可作內切四邊形之四線之取法之數爲

$$\frac{1}{48}\{2n(n-2)(2n-5)-3+3(-1)^n\}.$$

284. 設 $u_2$, $u_3$ 爲小於 $n$ 且與之互質之二數之平方及立方等差中項，求証 $n^3-6nu_2+4u_3=0$，$l$ 視爲質數.

285. 設 $n$ 之形式爲 $6m-1$，指明 $(y-z)^n+(z-x)^n+(x-y)^n$ 能爲 $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ 所除盡；又設 $n$ 之形式爲 $6m+1$，指明其可除盡

$$(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2.$$

286. 設 $s$ 爲 $a_1$, $a_2$, $a_3$, ……$a_n$ $n$ 量 $m$ 次器之和，$P$ 爲其中每 $m$ 個相乘諸積之和. 指明

$$|\underline{n-1}\cdot S > |\underline{n-m}.|\underline{m}.P.$$

287. 求証設方程式

$$x^3+qx-r=0 \text{ 及 } rx^3-2q^2x^2-5qrx-2q^3-r^2=0$$

有一公根，則第一方程式有一對等根；又設其每等根爲 $a$，求所有第二方程式之根.

288. 設 $x\sqrt{2a^2-3x^2}+y\sqrt{2a^2-3y^2}+z\sqrt{2a^2-3x^2}=0$. $a^2$ 表 $x^2+y^2+z^2$，求証

$$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=0.$$

289. 求 $x_1$, $x_2$, ……$x_n$ 適合下聯立方程式組之值：

$$\frac{x_1}{a_1-b_1}+\frac{x_2}{a_1-b_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_1-b_n}=1,$$

$$\frac{x_1}{a_2-b_1}+\frac{x_2}{a_2-b_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_2-b_n}=1,$$

…………………………………………………

$$\frac{x_1}{a_n-b_1}+\frac{x_2}{a_n-b_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n-b_n}=1.$$

290. 指明 $\begin{vmatrix} yz-x^2 & zx-y^2 & xy-z^2 \\ zx-y^2 & xy-z^2 & yz-x^2 \\ xy-z^2 & yz-x^2 & zx-y^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r^2 & u^2 & u^2 \\ u^2 & r^2 & u^2 \\ u^2 & u^2 & r^2 \end{vmatrix}$,

式內 $r^2=x^2+y^2+z^2$，$u^2=yz+zx+xy$.

291. 某工作由 $A$, $B$, $C$ 三人完成；最初 $A$ 獨作，數日後 $B$ 加入，又於數日後 $C$ 始加入. 設 $B$, $C$ 工作共確作時間之二倍，則彼二人亦能完成全功. 此工作亦可由 $A$ 工作共確作日數之 $\frac{2}{3}$ 日，$C$ 作共確作時間之四倍，而不用 $B$ 之帮助完成之；或 $A$, $B$ 同作 40 日不用 $C$；或三人同作 $B$ 所曾作之日數以完成之，又 $B$ 開始工作前之日數比 $C$ 開始工作前之日數等於 3 比 5：求每人工作之日數.

292. 指明設 $S_r$ 爲 1, $x$, $x^2$, $x^3$,……$x^{n-1}$ 內每 $r$ 個之積之和，則 $S_{n-r}=S_r.x^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2r)}$.

293. 設 $a$, $b$, $c$ 爲正量，且任二者之合大於第三量，求証

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c<1.$$

294. 析

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)-8a^2b^2c^2.$$

爲因子. 求証

$$4\{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+(\alpha+\beta+\gamma)^4\}=(\beta+\gamma)^4+(\gamma+\alpha)^4+(\alpha+\beta)^4$$

$$+6(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2+6(\gamma+\alpha)^2(\alpha+\beta)^2+6(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2$$

295. 求証 1, 2, 3, ……$n$ 諸數及其乘冪之 $r$ 次齊次積之和爲

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\underline{|n-1}}\left\{1^{n+r-1}-\frac{n-1}{1}\cdot 2^{n+r-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}-3^{n+r-1}-\cdots\cdots\right.$$

至 $n$ 項.

296. 設 $n$ 爲正整數，求証

$$1-3n+\frac{3n(3n-3)}{1\cdot 2}-\frac{3n(3n-4)(3n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots=2(-1)^n.$$

297. 設 $x(2a-y)=y(2a-z)=z(2a-u)=u(2a-x)=b^2$, 指明捨 $b^2-2a^2$ 外，$x=y=z=u$；又設 $b^2=2a^2$ 適合已知方程式，則諸已知方程式不能獨立.

298. 設 $a$, $b$, $c$ 爲不等正量，指明方程式

$$ax+yz+z=0,\quad zx+by+z=0,\quad yz+zx+c=0$$

內 $x$, $y$, $z$ 之實數值有不同之三組；且 $x$, $y$ 之三值之積之比爲 $b(b-c):a(c-a)$.

299. 設
$$A=ax-by-cz,\quad D=bz+cy,$$
$$B=by-cz-ax,\quad E=cx+az,$$
$$C=cz-ax-by,\quad F=ay+bx,$$

求証 $ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF$
$$=(a^2+b^2+c^2)(ax+by+cz)(x^2+y^2+z^2).$$

300. 某學者譯釋某抄本. 由已往之經驗知每日工作之字數與每日散步之哩數及工作之時數合變. 彼第一日依常法工作，由是起每日多行一哩，多工作一時，以漸增其工作及散步之量. 已知此書共有 23000 字，彼第一日工作 12000 字，末一日工作 72000 字，又全時間之半之末日工作 62000 字：求其每日散步之哩數，及工作之時數.

# ANSWERS.

## I. Pages 10—12.

**1.** (1) $54b : a$. (2) $9 : 7$. (3) $bx : ay$. **2.** 18. **3.** 885, 660.
**4.** 11. **5.** $5 : 13$. **6.** $5 : 6$ or $-8 : 5$.
**10.** $\frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{8}$, or $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$. **17.** $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$.
**20.** 8, 4, 1. **21.** $-8$, 4, 1. **22.** 7, 3, 2. **23.** 8, 4, 1.
**25.** $\pm a(b^2-c^2)$, $\pm b(c^2-a^2)$, $\pm c(a^2-b^2)$.
**26.** $bc(b-c)$, $ca(c-a)$, $ab(a-b)$.

## II. Pages 19, 20.

**1.** 45. **2.** (1) 12. (2) $800a^3b$. **3.** $\frac{x^3}{y(x^2+y^2)}$.
**13.** 0, 5, $\frac{8}{7}$. **14.** 0, 3, 8. **15.** $\frac{a(b+c)}{cm-bm-2an}$.
**18.** 8. **19.** 6, 9, 10, 15. **20.** 8 gallons from $A$; 8 gallons from $B$.
**21.** 45 gallons. **23.** $17 : 8$. **24.** $a=45$.
**25.** 64 per cent. copper and 36 per cent. zinc. 3 parts of brass are taken to 5 parts of bronze. **26.** 63 or 12 minutes.

## III. Pages 26, 27.

**1.** $5\frac{1}{3}$. **2.** 9. **3.** $1\frac{1}{3}$. **4.** 2. **7.** 60.
**9.** $y=2x-\frac{8}{x}$. **10.** $y=5x+\frac{36}{x^2}$. **11.** 4.
**12.** $x=\frac{22}{15}z+\frac{2}{15z}$. **14.** 30. **15.** 1010 feet; 805·9 feet.
**16.** $22\frac{1}{4}$ cubic feet. **17.** $4 : 3$.
**19.** The regatta lasted 6 days; 4th, 5th, 6th days.
**20.** 16, 25 years; £200, £250. **21.** 1 day 18 hours 28 minutes.
**22.** The cost is least when the rate is 12 miles an hour; and then the cost per mile is £$\frac{3}{16}$, and for the journey is £9. 7*s*. 6*d*.

## IV. a. PAGES 31, 32.

1. $277\frac{1}{2}$. 2. 153. 3. 0. 4. $\frac{n(10-n)}{3}$. 5. 30.

6. $-42$. 7. $-185$. 8. $1325\sqrt{3}$. 9. $75\sqrt{5}$.

10. $820a-1680b$. 11. $n(n+1)a-n^2b$. 12. $\frac{21}{2}(11a-9b)$.

13. $-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \dots, -9\frac{1}{4}$. 14. $1, -1\frac{1}{2}, \dots, -39$. 15. $-33x, -31x, \dots, x$.

16. $x^2-x+1,\ x^2-2x+2, \dots, x$. 17. $n^2$. 18. 3. 19. 5.

20. 612. 21. 4, 9, 14. 22. 1, 4, 7. 23. 495. 24. 100.

25. $\frac{p(p+1)}{2a}+pb$. 26. $n(n+1)a-\frac{n^2}{a}$.

## IV. b. PAGES 35, 36.

1. 10 or $-8$. 2. 8 or $-13$. 3. 2, 5, 8,...

4. First term 8, number of terms 59.

5. First term $7\frac{1}{2}$, number of terms 54.

6. Instalments £51, £53, £55,... 7. 12. 8. 25.

9. $\frac{n}{2(1-x)}(2+\overline{n-3}\,.\sqrt{x})$. 10. $n^3$. 12. $-(p+q)$.

13. 3, 5, 7, 9. [Assume for the numbers $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$.]

14. 2, 4, 6, 8. 15. $p+q-m$. 16. 12 or $-17$. 17. $6r-1$.

20. $10p-8$. 21. 8 terms. Series $1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, \dots\dots$

22. 3, 5, 7; 4, 5, 6. 23. $ry=(n+1-r)x$.

## V. a. PAGES 41, 42.

1. $\frac{2059}{1458}$. 2. $\frac{1281}{512}$. 3. $191\frac{1}{4}$. 4. $-682$.

5. $\frac{1093}{45}$. 6. $\frac{1}{4}(5^p-1)$. 7. $\frac{9}{7}\left\{1-\left(\frac{4}{3}\right)^m\right\}$. 8. $364(\sqrt{3}+1)$.

9. $\frac{1}{2}(585\sqrt{2}-292)$. 10. $-\frac{463}{192}$. 11. $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}$.

12. $\frac{16}{3}, 8, \dots, 27$. 13. $-7, \frac{7}{2}, \dots, \frac{7}{32}$. 14. $\frac{64}{65}$.

15. $\frac{27}{58}$. 16. $\cdot 999$. 17. $\frac{1}{2}$. 18. $\frac{3(3+\sqrt{3})}{2}$.

19. $7(7+\sqrt{42})$. 20. 2. 21. 16, 24, 36,... 22. 2.

23. 2. 24. 8, 12, 18. 25. 2, 6, 18. 26. $6, -3, 1\frac{1}{2}, \dots\dots$

### V. b. PAGES 45, 46.

1. $\dfrac{1-a^n}{(1-a)^2}-\dfrac{na^n}{1-a}$. 2. $\dfrac{8}{3}$. 3. $\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$.

4. $4-\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{n}{2^{n-1}}$. 5. 6. 6. $\dfrac{1}{(1-x)^3}$.

9. $\dfrac{1}{(1-r)(1-br)}$. 10. 40, 20, 10. 11. $4, 1, \dfrac{1}{4}, \ldots$

12. $\dfrac{x(x^n-1)}{x-1}+\dfrac{n(n+1)a}{2}$. 13. $\dfrac{x^2(x^{2n}-1)}{x^2-1}+\dfrac{xy(x^ny^n-1)}{xy-1}$.

14. $4p^2a+\dfrac{2}{9}\left(1-\dfrac{1}{2^{2p}}\right)$. 15. $1\frac{1}{4}$. 16. $\dfrac{23}{48}$. 19. $n \cdot 2^{n+2}-2^{n+1}+2$.

20. $\dfrac{(1+a)(a^nc^n-1)}{ac-1}$ 21. $\dfrac{a}{r-1}\left\{\dfrac{r(r^{2n}-1)}{r^2-1}-n\right\}$.

### VI. a. PAGES 52, 53.

1. (1) 5. (2) $3\frac{1}{2}$. (3) $3\frac{11}{12}$. 2. $6\frac{1}{3}$, $7\frac{1}{7}$. 3. $\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{11}$.

4. 6 and 24. 5. 4 : 9. 10. $n^2(n+1)$.

11. $\dfrac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+3)$. 12. $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$.

13. $\dfrac{1}{2}n(n+1)(n^2+3n+1)$. 14. $\dfrac{1}{2}(3^{n+1}+1)-2^{n+1}$.

15. $4^{n+1}-4-n(n+1)(n^2-n-1)$.

18. The $n^{\text{th}}$ term $=b+c(2n-1)$, for all values of $n$ greater than 1. The first term is $a+b+c$; the other terms form the A.P. $b+3c$, $b+5c$, $b+7c$,....

19. $n^4$. 22. $\dfrac{n}{2}(2a+\overline{n-1}d)\left\{a^2+(n-1)ad+\dfrac{n(n-1)}{2}d^2\right\}$

### VI. b. PAGE 56.

1. 1240. 2. 1140. 3. 16646. 4. 2470. 5. 21321.
6. 52. 7. 11879. 8. 1840. 9. 11940. 10. 190.
11. 300. 12. 18296. 14. Triangular 861; Square 4900.
15. 120. 16. $n-1$.

### VII. a. PAGE 59.

1. 333244. 2. 728626. 3. 1740137. 4. $e$7074. 5. 112022.
6. 334345. 7. 17832126. 8. 1625. 9. 2012. 10. 342.
11. $tt$90001. 12. 231. 13. 1456. 14. 7071. 15. $eee$.
16. (1) 121. (2) 122000.

### VII. b. PAGES 65, 66.

1. 20305. 2. 4444. 3. 11001110. 4. 2000000. 5. 7333.
6. 34402. 7. 6587. 8. 8978. 9. 26011. 10. 37214.

**11.** 80034842. **12.** $710te3$. **13.** 2714687. **14.** $\cdot\dot{2}04\dot{6}$. **15.** $15\cdot1t6$.

**16.** 20·73. **17.** $125\cdot01\dot{2}\dot{5}$. **18.** $\frac{5}{8}$. **19.** $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$.

**20.** Nine. **21.** Four. **22.** Twelve. **23.** Eight. **24.** Eleven.

**25.** Twelve. **26.** Ten. **30.** $2^{11}+2^7+2^4$.

**31.** $3^9-3^8-3^7-3^6-3^5+3^3+3^2+1$.

## VIII. a. Pages 72, 73.

**1.** $\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. **2.** $\dfrac{3+\sqrt{6}+\sqrt{15}}{6}$.

**3.** $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-\sqrt{ab(a+b)}}{2ab}$. **4.** $\dfrac{a-1+\sqrt{a^2-1}+\sqrt{2a(a-1)}}{a-1}$.

**5.** $\dfrac{3\sqrt{30}+5\sqrt{15}-12-10\sqrt{2}}{7}$. **6.** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}$.

**7.** $3^{\frac{5}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\,.\,2^{\frac{1}{2}}+3\,.\,2+3^{\frac{2}{3}}\,.\,2^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{1}{3}}\,.\,2^2+2^{\frac{5}{2}}$.

**8.** $5^{\frac{5}{6}}-5^{\frac{4}{6}}\,.\,2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{3}{6}}\,.\,2^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{2}{6}}\,.\,2+5^{\frac{1}{6}}\,.\,2^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{5}{3}}$.

**9.** $a^{\frac{11}{6}}-a^{\frac{10}{6}}b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{9}{6}}b^{\frac{1}{2}}-\ldots+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{10}{4}}-b^{\frac{11}{4}}$. **10.** $3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+1$.

**11.** $2^3-2^2\,.\,7^{\frac{1}{4}}+2\,.\,7^{\frac{1}{2}}-7^{\frac{3}{4}}$.

**12.** $5^{\frac{11}{3}}+5^{\frac{10}{3}}\,.\,3^{\frac{1}{4}}+5^3\,.\,3^{\frac{2}{4}}+\ldots+5^{\frac{1}{3}}\,.\,3^{\frac{10}{4}}+3^{\frac{11}{4}}$. **13.** $\dfrac{1-3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}}{2}$

**14.** $17-3^{\frac{5}{3}}\,.\,2^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{4}{3}}\,.\,2^2-3\,.\,2^{\frac{5}{2}}+3^{\frac{2}{3}}\,.\,2^3-3^{\frac{1}{3}}\,.\,2^{\frac{7}{2}}$.

**15.** $3^2\,.\,2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{5}{3}}\,.\,2+3^{\frac{4}{3}}\,.\,2^{\frac{3}{2}}-3\,.\,2^2+3^{\frac{2}{3}}\,.\,2^{\frac{5}{2}}-3^{\frac{1}{3}}\,.\,2^3$.

**16.** $\dfrac{1}{2}\left(3^{\frac{5}{6}}-3^{\frac{4}{6}}+3^{\frac{3}{6}}-3^{\frac{2}{6}}+3^{\frac{1}{6}}-1\right)$. **17.** $\dfrac{2^5+2^{\frac{31}{6}}+2^{\frac{13}{3}}+2^{\frac{21}{6}}+2^{\frac{16}{6}}+2^{\frac{11}{6}}+1}{31}$.

**18.** $\dfrac{3^{\frac{3}{4}}+3^{\frac{5}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}{8}$. **19.** $\sqrt{5}+\sqrt{7}-2$.

**20.** $\sqrt{5}-\sqrt{7}+2\sqrt{3}$. **21.** $1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **22.** $1+\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}$.

**23.** $2+\sqrt{a}-\sqrt{3b}$. **24.** $3-\sqrt{7}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$. **25.** $1+\sqrt{3}$.

**26.** $2+\sqrt{5}$. **27.** $3-2\sqrt{2}$. **28.** $\sqrt{14}-2\sqrt{2}$.

**29.** $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$. **30.** $3\sqrt{3}-\sqrt{6}$. **31.** $\sqrt{\dfrac{2a+x}{2}}+\sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

**32.** $\sqrt{\dfrac{3a+b}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-b}{2}}$. **33.** $\sqrt{\dfrac{1+a+a^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{1-a+a^2}{2}}$.

**34.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-a^2}}\left(\sqrt{\dfrac{1+a}{2}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{2}}\right)$.

**35.** $11+66\sqrt{3}$. **36.** 289. **37.** $\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$.

38. $3\sqrt{3}+5$. 39. 3. 40. $8\sqrt{3}$.

41. $3+\sqrt{5}=5\cdot23607$. 42. $x^2+1+\sqrt[3]{4}+x-x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}$.

43. $3a+\sqrt{b^2-3a^2}$. 44. $\dfrac{a-1}{2}$.

## VIII. b. Pages 81, 82.

1. $6-2\sqrt{6}$. 2. $-13$. 3. $e^{2\sqrt{-1}}-e^{-2\sqrt{-1}}$.

4. $x^2-x+1$. 5. $\dfrac{3+\sqrt{-2}}{11}$. 6. $-19-6\sqrt{10}$.

7. $-\dfrac{8}{29}$. 8. $\dfrac{4ax\sqrt{-1}}{a^2+x^2}$. 9. $\dfrac{2(8x^2-1)\sqrt{-1}}{x^2+1}$.

10. $\dfrac{3a^2-1}{2a}$. 11. $\sqrt{-1}$. 12. 100.

13. $\pm(2+3\sqrt{-1})$. 14. $\pm(5-6\sqrt{-1})$. 15. $\pm(1+4\sqrt{-3})$.

16. $\pm 2(1-\sqrt{-1})$. 17. $\pm(a+\sqrt{-1})$. 18. $\pm\{(a+b)-(a-b)\sqrt{-1}\}$.

19. $-\dfrac{9}{13}+\dfrac{19}{13}i$. 20. $\dfrac{4}{7}-\dfrac{\sqrt{6}}{14}i$. 21. $i$.

22. $-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$. 23. $\dfrac{2b(3a^2-b^2)}{a^2+b^2}i$.

## IX. a. Pages 88—90.

1. $35x^2+13x-12=0$. 2. $mnx^2+(n^2-m^2)x-mn=0$.

3. $(p^2-q^2)x^2+4pqx-p^2+q^2=0$. 4. $x^2-14x+29=0$.

5. $x^2+10x+13=0$. 6. $x^2+2px+p^2-8q=0$.

7. $x^2+6x+34=0$. 8. $x^2+2ax+a^2+b^2=0$.

9. $x^2+a^2-2ab+b^2=0$. 10. $6x^3+11x^2-19x+6=0$.

11. $2ax^3+(4-a^2)x^2-2ax=0$. 12. $x^3-8x^2+17x-4=0$.

14. 3, 5. 15. $2,\ -\dfrac{10}{9}$. 16. $\dfrac{a-b}{a+b}$.

18. $\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$. 19. $\dfrac{bc^4(3ac-b^2)}{a^7}$. 20. $\dfrac{b^2(b^2-4ac)}{a^2c^2}$.

21. 7. 22. $-15$. 23. 0. 24. $x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0$.

26. (1) $\dfrac{b^2-2ac}{a^2c^2}$. (2) $\dfrac{b(b^2-3ac)}{a^3c^3}$. 27. $nb^2=(1+n)^2ac$.

28. $a^2c^2x^2-(b^2-2ac)(a^2+c^2)x+(b^2-2ac)^2=0$.

29. $x^2-4mnx-(m^2-n^2)^2=0$.

## IX. b. Pages 92, 93.

1. 2 and $-2$. 5. $bx^2-2ax+a=0$.

6. (1) $\dfrac{p(p^2-4q)(p^2-q)}{q}$. (2) $\dfrac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^4}$. 11. $\dfrac{1}{3}$.

## IX. c. Page 96.

1. $-2$. 3. $\pm 7$. 5. $(ln' - l'n)^2 = (lm' - l'm)(mn' - m'n)$.
7. $(aa' - bb')^2 + 4(ha' + h'b)(hb' + h'a) = 0$.
10. $(bb' - 2ac' - 2a'c)^2 = (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')$; which reduces to $(ac' - a'c)^2 = (ab' - a'b)(bc' - b'c)$.

## X. a. Pages 101, 102.

1. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$. 2. $\pm\frac{1}{3}, \pm 1$. 3. $4, \frac{1}{4}$. 4. $\frac{4}{9}, \frac{1}{4}$.
5. $3^n, 2^n$. 6. $1, 2^{2n}$. 7. $27, \frac{25}{147}$. 8. $\frac{9}{13}, \frac{4}{13}$.
9. $\frac{1}{9}, \frac{25}{4}$. 10. $-1, -\frac{1}{32}$. 11. $2, 0$. 12. $\pm 1$.
13. $-4$. 14. $\pm 3$. 15. $0$. 16. $\frac{1}{8}, 450$.
17. $9, -7, 1 \pm \sqrt{-24}$. 18. $2, -4, -1 \pm \sqrt{71}$. 19. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{-47}}{4}$.
20. $4, -\frac{7}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{65}}{4}$. 21. $2, -8, -3 \pm 3\sqrt{5}$. 22. $3, -\frac{5}{3}, \frac{2 \pm \sqrt{70}}{3}$.
23. $5, \frac{1}{3}, \frac{8 \pm \sqrt{148}}{3}$. 24. $7, -\frac{14}{9}, \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$. 25. $2, \frac{1}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{201}}{4}$.
26. $5, -\frac{7}{3}, \frac{8 \pm \sqrt{415}}{6}$. 27. $1, 3$. 28. $5, \frac{1}{2}$.
29. $1, 9, -\frac{18}{5}$. 30. $a, \frac{a}{2}, -\frac{a}{3}$. 31. $2, -\frac{9}{2}$.
32. $4, -\frac{10}{3}$. 33. $0, 5$. 34. $6, -\frac{5}{2}$.
35. $1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. 36. $3, \frac{1}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{-35}}{6}$. 37. $2 \pm \sqrt{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.
38. $2, -\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{5}$. 39. $3a, -4a$. 40. $\pm\frac{2a}{5}$.
41. $0, 1, 3$. 42. $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$.
43. $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$. 44. $3, -1$. 45. $\pm 1$.
46. $13$. 47. $4$. 48. $0, \frac{63a}{65}$.
49. $1, \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4}$. 50. $\pm 5$. 51. $5, -4, \frac{1 \pm \sqrt{-75}}{2}$.
52. $-\frac{1}{3}, \frac{1 \pm \sqrt{-31}}{6}$.

## X. b. PAGES 106, 107.

1. $x=5, -\frac{8}{3}$; $y=4, -\frac{15}{2}$.
2. $x=2, -\frac{8}{10}$; $y=7, -\frac{97}{10}$.
3. $x=1, -\frac{53}{88}$; $y=1, -\frac{25}{22}$.
4. $x=\pm 5, \pm 3$; $y=\pm 3, \pm 5$.
5. $x=8, 2$; $y=2, 8$.
6. $x=45, 5$; $y=5, 45$.
7. $x=9, 4$; $y=4, 9$.
8. $x=\pm 2, \pm 3$; $y=\pm 1, \pm 2$.
9. $x=\pm 2, \pm 3$; $y=\pm 3, \pm 4$.
10. $x=\pm 5, \pm 3$; $y=\pm 3, \pm 4$.
11. $x=\pm 2, \pm 1$; $y=\pm 1, \pm 3$.
12. $x=\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{\frac{3}{10}}$; $y=0, \pm 6\sqrt{\frac{3}{10}}$.
13. $x=5, 3, 4\pm\sqrt{-97}$; $y=3, 5, 4\mp\sqrt{-97}$.
14. $x=4, -2, \pm\sqrt{-15}+1$; $y=2, -4, \pm\sqrt{-15}-1$.
15. $x=4, -2, \pm\sqrt{-11}+1$; $y=2, -4, \pm\sqrt{-11}-1$.
16. $x=\frac{4}{5}, \frac{1}{5}$; $y=20, 5$.
17. $x=2, 1$; $y=1, 2$.
18. $x=6, 4$; $y=10, 15$.
19. $x=729, 343$; $y=343, 729$.
20. $x=16, 1$; $y=1, 16$.
21. $x=9, 4$; $y=4, 9$.
22. $x=5$; $y=\pm 4$.
23. $x=1, \frac{5}{3}$; $y=2, \frac{2}{3}$.
24. $x=9, 1$; $y=1, 9$.
25. $x=\pm 25$; $y=\pm 9$.
26. $x=6, 2, 4, 3$; $y=1, 3, \frac{3}{2}, 2$.
27. $x=\pm 5, \pm 4, \pm\frac{5}{2}, \pm 2$; $y=\pm 5, \pm 4, \pm 10, \pm 8$.
28. $x=4, \frac{107}{13}$; $y=1, \frac{48}{13}$.
29. $x=-6, \frac{1\pm\sqrt{-143}}{2}$; $y=-3, -\frac{1\pm 3\sqrt{-143}}{4}$.
30. $x=0, 9, 3$; $y=0, 3, 9$.
31. $x=0, 1, \frac{15}{22}$; $y=0, 2, \frac{9}{22}$.
32. $x=5, \frac{10}{23}, 0$; $y=3, -\frac{6}{23}, -\frac{4}{7}$.
33. $x=2, \sqrt[3]{4}, 2$; $y=2, 2\sqrt[3]{4}, 6$
34. $x=1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $y=2, 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.
35. $x=\pm 3, \pm\sqrt{-18}$; $y=\pm 3, \mp\sqrt{-18}$.
36. $x=y=\pm 2$.
37. $x=0, \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; $y=0, \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, -\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.
38. $x=b, \frac{b(-1\pm\sqrt{3})}{2}$; $y=a, a(1\mp\sqrt{3})$.
39. $x=\frac{a^2}{b}, \frac{a(2b-a)}{b}$; $y=\frac{b^2}{a}, \frac{b(2a-b)}{a}$.

40. $x=0,\ \pm a\sqrt{7},\ \pm a\sqrt{13},\ \pm 3a,\ \pm a;\ y=0,\ \mp b\sqrt{7},\ \pm b\sqrt{13},\ \mp b,\ \mp 3b.$

41. $x=\pm 1,\ \pm\dfrac{2a^2}{\sqrt{16a^4-a^2-1}};\ y=\pm 2a,\ \mp\dfrac{a}{\sqrt{16a^4-a^2-1}}.$

## X. c. PAGES 109, 110.

1. $x=\pm 3;\ y=\pm 5;\ z=\pm 4.$
2. $x=5;\ y=-1;\ z=7.$
3. $x=5,\ -1;\ y=1,\ -5;\ z=2.$
4. $x=8,\ -3;\ y=3;\ z=3,\ -8.$
5. $x=4,\ 3,\ \dfrac{2\pm\sqrt{151}}{3};\ y=3,\ 4,\ \dfrac{2\mp\sqrt{151}}{3};\ z=2,\ -\dfrac{11}{3}.$
6. $x=\pm 3;\ y=\mp 2;\ z=\pm 5.$
7. $x=\pm 5;\ y=\pm 1;\ z=\pm 1.$
8. $x=8,\ -8;\ y=5,\ -5;\ z=3,\ -3.$
9. $x=3;\ y=4;\ z=\dfrac{1}{2};\ u=\dfrac{1}{3}.$
10. $x=1;\ y=2;\ z=3.$
11. $x=5,\ -7;\ y=3,\ -5;\ z=6,\ -8.$
12. $x=1,\ -2;\ y=7,\ -3;\ z=3,\ -\dfrac{11}{3}.$
13. $x=4,\ \dfrac{60}{7};\ y=6,\ \dfrac{66}{7};\ z=2,\ -6.$
14. $x=a,\ 0,\ 0;\ y=0,\ a,\ 0;\ z=0,\ 0,\ a.$
15. $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ \dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-9}}{6}a;\ y=\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ \dfrac{-5\sqrt{3}\pm\sqrt{-9}}{6}a;$
$z=\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-9}}{3}a.$
16. $x=a,\ -2a,\ \dfrac{7\pm\sqrt{-15}}{2}a;\ y=4a,\ a,\ \dfrac{-11\pm\sqrt{-15}}{2}a;$
$z=2a,\ -4a,\ (1\pm\sqrt{-15})a.$

## X. d. PAGE 113.

1. $x=29,\ 21,\ 13,\ 5;\ y=2,\ 5,\ 8,\ 11.$
2. $x=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9;\ y=24,\ 19,\ 14,\ 9,\ 4.$
3. $x=20,\ 3;\ y=1,\ 8.$
4. $x=9,\ 20,\ 31;\ y=27,\ 14,\ 1.$
5. $x=30,\ 5;\ y=9,\ 32.$
6. $x=50,\ 3;\ y=3,\ 44.$
7. $x=7p-5,\ 2;\ y=5p-4,\ 1.$
8. $x=13p-2,\ 11;\ y=6p-1,\ 5.$
9. $x=21p-9,\ 12;\ y=8p-5,\ 3.$
10. $x=17p,\ 17;\ y=13p,\ 13.$
11. $x=19p-16,\ 3;\ y=23p-19,\ 4.$
12. $x=77p-74,\ 3;\ y=30p-25,\ 5.$
13. 11 horses, 15 cows.
14. 101.
15. 56, 25 or 16, 65.
16. To pay 3 guineas and receive 21 half-crowns.
17. 1147; an infinite number of the form $1147+39\times 56p$.
18. To pay 17 florins and receive 3 half-crowns.
19. 37, 99; 77, 59; 117, 19.
20. 28 rams, 1 pig, 11 oxen; or 13 rams, 14 pigs, 13 oxen.
21. 3 sovereigns, 11 half-crowns, 13 shillings.

## XI. a. Pages 122—124.

1. 12. 2. 224. 3. 40320, 6375600, 10626, 11628.
4. 6720. 5. 15. 6. 40320; 720. 7. 15, 360.
8. 6. 9. 120. 10. 720. 11. 10626, 1771.
12. 1440. 13. 6375600. 14. 360, 144. 15. 230300.
16. 1140, 231. 17. 144. 18. 224, 896. 19. 848.
20. 56. 21. 360000. 22. 2052000. 23. 369600.
24. 21600. 25. $\dfrac{\lfloor 45}{\lfloor 10 \lfloor 15 \lfloor 20}$. 26. 2520. 27. 5760.
28. 8156. 29. 2903040. 30. 25920. 32. 41.
33. 1956. 34. 7.

## XI. b. Pages 131, 132.

1. (1) 1663200. (2) 129729600. (3) 3326400. 2. 4084080.
3. 151351200. 4. 360. 5. 72. 6. 125.
7. $n^r$. 8. 531441. 9. $p^n$. 10. 30.
11. 1260. 12. 3374. 13. 455. 14. $\dfrac{\lfloor a+2b+3c+d}{\lfloor a\,(\lfloor b)^2\,(\lfloor c)^3}$.
15. 4095. 16. 57760000. 17. 1023. 18. 720; 3628800.
19. 127. 20. 315. 21. $\dfrac{\lfloor mn}{(\lfloor m)^n \lfloor n}$. 22. 64; 325. 23. 42.
24. (1) $\dfrac{p(p-1)}{2} - \dfrac{q(q-1)}{2} + 1$; (2) $\dfrac{p(p-1)(p-2)}{6} - \dfrac{q(q-1)(q-2)}{6}$.
25. $\dfrac{p(p-1)(p-2)}{6} - \dfrac{q(q-1)(q-2)}{6} + 1$. 26. $(p+1)^n - 1$.
27. 113; 2190. 28. 2454. 29. 6666600. 30. 5199960.

## XIII. a. Pages 142, 143.

1. $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$.
2. $81x^4 + 216x^3y + 216x^2y^2 + 96xy^3 + 16y^4$.
3. $32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$.
4. $1 - 18a^2 + 135a^4 - 540a^6 + 1215a^8 - 1458a^{10} + 729a^{12}$.
5. $x^{10} + 5x^9 + 10x^8 + 10x^7 + 5x^6 + x^5$.
6. $1 - 7xy + 21x^2y^2 - 35x^3y^3 + 35x^4y^4 - 21x^5y^5 + 7x^6y^6 - x^7y^7$.
7. $16 - 48x^2 + 54x^4 - 27x^6 + \dfrac{81x^8}{16}$.
8. $729a^6 - 972a^5 + 540a^4 - 160a^3 + \dfrac{80a^2}{3} - \dfrac{64a}{27} + \dfrac{64}{729}$.
9. $1 + \dfrac{7x}{2} + \dfrac{21x^2}{4} + \dfrac{35x^3}{8} + \dfrac{35x^4}{16} + \dfrac{21x^5}{32} + \dfrac{7x^6}{64} + \dfrac{x^7}{128}$.

10. $\frac{64x^6}{729} - \frac{32x^4}{27} + \frac{20x^2}{3} - 20 + \frac{135}{4x^2} - \frac{243}{8x^4} + \frac{729}{64x^6}$.

11. $\frac{1}{256} + \frac{a}{16} + \frac{7a^2}{16} + \frac{7a^3}{4} + \frac{35a^4}{8} + 7a^5 + 7a^6 + 4a^7 + a^8$.

12. $1 - \frac{10}{x} + \frac{45}{x^2} - \frac{120}{x^3} + \frac{210}{x^4} - \frac{252}{x^5} + \frac{210}{x^6} - \frac{120}{x^7} + \frac{45}{x^8} - \frac{10}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}$.

13. $-35750x^{10}$. 14. $-112640x^9$. 15. $-312x^2$.

16. $\frac{\lfloor 30}{\lfloor 27 \lfloor 3}(5x)^3(8y)^{27}$. 17. $40a^7b^3$. 18. $\frac{1120}{81}a^4b^4$.

19. $\frac{10500}{x^3}$. 20. $\frac{70x^6y^{10}}{a^2b^6}$. 21. $2x^4+24x^2+8$.

22. $2x(16x^4-20x^2a^2+5a^4)$. 23. $140\sqrt{2}$.

24. $2(365-363x+63x^2-x^3)$. 25. 252. 26. $-\frac{429}{16}x^{14}$.

27. $110565a^4$. 28. $84a^3b^6$. 29. 1365, $-1365$.

30. $\frac{189a^{17}}{8}$, $-\frac{21}{16}a^{19}$. 31. $\frac{7}{18}$. 32. 18564.

33. $\frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-r) \lfloor \frac{1}{2}(n+r)}$. 34. $(-1)^n \frac{\lfloor 3n}{\lfloor n \lfloor 2n}$.

## XIII. b. Pages 147, 148.

1. The $9^{th}$. 2. The $12^{th}$. 3. The $6^{th}$. 4. The $10^{th}$ and $11^{th}$.

5. The $3^{rd} = 6\frac{2}{3}$. 6. The $4^{th}$ and $5^{th} = \frac{7}{144}$. 9. $x=2$, $y=3$, $n=5$.

10. $1+8x+20x^2+8x^3-26x^4-8x^5+20x^6-8x^7+x^8$.

11. $27x^6-54ax^5+117a^2x^4-116a^3x^3+117a^4x^2-54a^5x+27a^6$.

12. $\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r+1} x^{r-1}a^{n-r+1}$. 13. $(-1)^p \frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor p+1 \lfloor 2n-p} x^{2p-2n+1}$.

14. 14. 15. $2r=n$.

## XIV. a. Page 155.

1. $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$. 2. $1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3$.

3. $1-\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}x^2-\frac{8}{125}x^3$. 4. $1-2x^2+3x^4-4x^6$.

5. $1-x-x^2-\frac{5}{3}x^3$. 6. $1+x+2x^2+\frac{14}{3}x^3$.

7. $1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x^3$. 8. $1-x+\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{27}x^3$.

9. $1+x+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{54}$. 10. $1-2a+\frac{5}{2}a^2-\frac{5}{2}a^3$.

11. $\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}x^3\right)$.     12. $3\left(1+\frac{x}{9}-\frac{1}{162}x^2+\frac{1}{1458}x^3\right)$

13. $4\left(1+a-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{6}a^3\right)$.     14. $\frac{1}{27}\left(1+x+\frac{5}{6}x^2+\frac{35}{54}x^3\right)$.

15. $\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{x}{a}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{a^2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{x^3}{a^3}\right)$.     16. $-\frac{429}{16}x^7$.     17. $\frac{77}{256}x^{30}$.

18. $-\frac{1040}{81}a^{15}$.     19. $\frac{16b^4}{243a^5}$.     20. $(r+1)x^r$.

21. $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1\,.\,2\,.\,3}x^r$.     22. $(-1)^{r-1}\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2r-3)}{2^r\,\underline{|r}}x^r$.

23. $(-1)^{r-4}\frac{11\,.\,8\,.\,5\,.\,2\,.\,1\,.\,4\,\ldots\,(3r-14)}{3^r\,\underline{|r}}x^r$.

24. $-1848x^{13}$.     25. $-\frac{19712}{3}x^5$.

## XIV. b. Pages 161, 162.

1. $(-1)^r\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2r-1)}{2^r\,\underline{|r}}x^r$.     2. $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{\underline{|4}}x^r$.

3. $(-1)^{r-1}\frac{1\,.\,2\,.\,5\,\ldots\,(3r-4)}{\underline{|r}}x^r$.     4. $(-1)^r\frac{2\,.\,5\,.\,8\,\ldots\,(3r-1)}{3^r\,\underline{|r}}x^r$.

5. $(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{\underline{|2}}x^{2r}$.     6. $\frac{3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2r+1)}{\underline{|r}}x^r$.

7. $(-1)^r\frac{b^r}{a^{r+1}}\,.\,x^r$.     8. $\frac{r+1}{2^{r+2}}x^r$.

9. $-\frac{2\,.\,1\,.\,4\,\ldots\,(3r-5)}{3^r\,\underline{|r}}\cdot\frac{x^{3r}}{a^{3r-2}}$.     10. $(-1)^r\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2r-1)}{\underline{|r}}x^r$.

11. $\frac{2\,.\,5\,.\,8\,\ldots\,(3r-1)}{\underline{|r}}x^r$.     12. $\frac{(n+1)(2n+1)\ldots(\overline{r-1}\,.\,n+1)}{\underline{|r}}\cdot\frac{x^r}{a^{nr+1}}$.

13. The 3rd.     14. The 5th.     15. The 13th.     16. The 7th.

17. The 4th and 5th.     18. The 3rd.     19. 9·89949.

20. 9·99333.     21. 10·00399.     22. 6·99927.     23. ·19842.

24. 1·00133.     25. ·00795.     26. 5·00096.     27. $1-\frac{23x}{6}$.

28. $\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{24}\right)$.     29. $1-\frac{5x}{8}$.     30. $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}x$.     31. $1-\frac{343}{120}x$.

32. $\frac{1}{3}-\frac{71}{360}x$.     35. $1-4x+13x^2$.     36. $2+\frac{29}{4}x+\frac{297}{32}x^2$.

## XIV. c. Pages 167—169.

1. $-197$.     2. 142.     3. $(-1)^{n-1}$.

4. $(-1)^n(n^2+2n+2)$.     6. $\sqrt{8}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

7. $\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-n}=2^n\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-n}$. 12. $\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$.

14. Deduced from $(1-x^3)-(1-x)^3=3x-3x^2$. 16. (1) 45. (2) 6561.

18. (1) Equate coefficients of $x^r$ in $(1+x)^n(1+x)^{-1}=(1+x)^{n-1}$.

(2) Equate absolute terms in $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2}=x^2(1+x)^{n-2}$.

20. Series on the left $+(-1)^n q_n{}^2=$ coefficient of $x^{2n}$ in $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

21. $2^{2n-1}-\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$.

[Use $(c_0+c_1+c_2+\ldots c_n)^2-2(c_0c_1+c_1c_2+\ldots)=c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+\ldots c_n{}^2$].

## XV. Pages 173, 174.

1. $-12600$. 2. $-168$. 3. $3360$. 4. $-1260a^2b^3c^4$.

5. $-9$. 6. $8085$. 7. $30$. 8. $1905$.

9. $-10$. 10. $-\frac{3}{2}$. 11. $-1$. 12. $-\frac{4}{81}$.

13. $\frac{59}{16}$. 14. $-1$. 15. $\frac{211}{3}$. 16. $1-\frac{1}{2}x-\frac{7}{8}x^2$.

17. $1-2x^2+4x^3+5x^4-20x^5$. 18. $16\left(1-\frac{3}{2}x^3+3x^4+\frac{9}{32}x^6-\frac{9}{8}x^7+\frac{9}{8}x^8\right)$.

## XVI. a. Pages 178, 179.

1. 3, 6. 2. 2, $-1$. 3. $-\frac{16}{3}$, $-\frac{1}{2}$. 4. $-4$, $-\frac{3}{2}$.

5. $\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{5}$. 6. $\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{2}$. 7. $\frac{7}{3}$, $-3$, $-\frac{4}{3}$, $\frac{2}{3}$.

8. $6\log a+9\log b$. 9. $\frac{2}{3}\log a+\frac{3}{2}\log b$.

10. $-\frac{4}{9}\log a+\frac{1}{3}\log b$. 11. $-\frac{2}{3}\log a-\frac{1}{2}\log b$.

12. $-\frac{7}{12}\log a-\log b$. 13. $\frac{1}{2}\log a$. 14. $-5\log c$. 15. $\log 3$.

18. $\dfrac{\log c}{\log a-\log b}$. 19. $\dfrac{5\log c}{2\log a+3\log b}$.

20. $\dfrac{\log a+\log b}{2\log c-\log a+\log b}$. 21. $x=\dfrac{4\log m}{\log a}$, $y=-\dfrac{\log m}{\log b}$.

22. $\log x=\frac{1}{5}(a+3b)$, $\log y=\frac{1}{5}(a-2b)$. 24. $\dfrac{\log(a-b)}{\log(a+b)}$.

### XVI. b. PAGES 185, 186.

1. 4, 1, 2, $\bar{2}$, $\bar{1}$, $\bar{1}$, $\bar{1}$.
2. ·8821259, 2·8821259, $\bar{3}$·8821259, 5·8821259, $\bar{6}$·8821259.
3. 5, 2, 4, 1.
4. Second decimal place; units' place; fifth decimal place.
5. 1·8061800. 6. 1·9242793. 7. $\bar{1}$·1072100. 8. $\bar{2}$·0969100.
9. 1·1583626. 10. ·6690067. 11. ·3597271. 12. ·0563520.
13. $\bar{1}$·5052973. 14. ·44092388. 15. 1·948445. 16. 191563·1.
17. 1·1998692. 18. 1·0039238. 19. 9·076226. 20. 178·141516.
21. 9. 23. 301. 24. 3·46. 25. 4·29. 26. 1·206. 27. 14·206.
28. 4·562. 29. $x=\dfrac{\log 3}{\log 3-\log 2}$; $y=\dfrac{\log 2}{\log 3-\log 2}$.
30. $x=\dfrac{3\log 3-2\log 2}{4(\log 3-\log 2)}$; $y=\dfrac{\log 3}{4(\log 3-\log 2)}$. 31. 1·61601.
32. $\dfrac{\log 2}{2\log 7}=\cdot 1781$; $\dfrac{2\log 7}{\log 2}=5\cdot 614$.

### XVII. PAGES 195—197.

1. $\log_e 2$. 2. $\log_e 3-\log_e 2$. 6. ·0020000006666670.
9. $e^{x^2}-e^{y^2}$. 10. ·8450980; 1·0413927; 1·1139434. In Art. 225 put $n=50$ in (2); $n=10$ in (1); and $n=1000$ in (1) respectively.
12. $(-1)^{r-1}\cdot\dfrac{2^r+1}{r}x^r$. 13. $\dfrac{(-1)^{r-1}3^r+2^r}{r}x^r$.
14. $2\left\{1+\dfrac{(2x)^2}{\lfloor 2}+\dfrac{(2x)^4}{\lfloor 4}+\ldots+\dfrac{(2x)^{2r}}{\lfloor 2r}+\ldots\right\}$.
15. $1-\dfrac{x^2}{\lfloor 2}+\dfrac{x^4}{\lfloor 4}-\dfrac{x^6}{\lfloor 6}+\ldots+(-1)^r\dfrac{x^{2r}}{\lfloor 2r}+\ldots$ 18. $\dfrac{x}{1-x}+\log_e(1-x)$.
24. ·69314718; 1·09861229; 1·60943792; $a=-\log_e\left(1-\dfrac{1}{10}\right)=\cdot 105360516$;
$b=-\log_e\left(1-\dfrac{4}{100}\right)=\cdot 040821995$; $c=\log_e\left(1+\dfrac{1}{80}\right)=\cdot 012422520$.

### XVIII. a. PAGE 202.

1. £1146. 14*s*. 10*d*. 2. £720. 3. 14·2 years.
4. £6768. 7*s*. 10½*d*. 5. 9·6 years. 8. £496. 19*s*. 4¾*d*.
9. A little less than 7 years. 10. £119. 18*s*. 5¾*d*.

### XVIII. b. PAGE 207.

1. 6 per cent. 2. £3137. 2*s*. 2¾*d*. 3. £110.
4. 3 per cent. 5. 28¾ years. 6. £1275. 7. £926. 2*s*.
8. £6755. 13*s*. 9. £183. 18*s*. 10. 3½ per cent. 11. £616. 9*s*. 1¼*d*.
13. £1308. 12*s*. 4½*d*. 15. £4200.

## XIX. a. PAGES 213, 214.

8. $a^3+2b^3$ is the greater. 12. $x^3 >$ or $< x^2+x+2$, according as $x >$ or $<2$.
14. The greatest value of $x$ is 1. 16. 4; 8.
22. $4^4 . 5^3$; when $x=3$. 23. 9, when $x=1$.

## XIX. b. PAGES 218, 219.

10. $\frac{3^3 . 5^3}{2^5} a^3$; $\sqrt{\frac{3}{5}} . \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$.

## XX. PAGE 228.

1. $-\frac{10}{7}$; $-\frac{9}{4}$. 2. $9$; $\frac{1}{9}$. 3. $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$.
4. $-\frac{15}{8}$; 6. 5. 1; 0. 6. 0; $-30$. 7. $-\frac{3}{2}$.
8. $\log a - \log b$. 9. 2. 10. $me^{ma}$. 11. $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.
12. $\frac{1}{3}$. 13. $-1$. 14. $\frac{\sqrt{2a}}{a\sqrt{3}+1}$. 15. $\sqrt{a}$.
16. 0. 17. $\frac{3}{2}$. 18. $e^{\frac{2}{a}}$.

## XXI. a. PAGES 241, 242.

1. Convergent. 2. Convergent. 3. Convergent.
4. $x<1$, or $x=1$, convergent; $x>1$, divergent.
5. Same result as Ex. 4. 6. Convergent. 7. Divergent.
8. $x<1$, convergent; $x>1$, or $x=1$, divergent.
9. Divergent except when $p>2$.
10. $x<1$, or $x=1$, convergent; $x>1$, divergent.
11. If $x<1$, convergent; $x>1$, or $x=1$, divergent.
12. Same result as Ex. 11. 13. Divergent, except when $p>1$.
14. $x<1$, or $x=1$, convergent; $x>1$, divergent.
15. Convergent. 16. Divergent.
17. (1) Divergent. (2) Convergent.
18. (1) Divergent. (2) Convergent.

## XXI. b. PAGE 252.

1. $x<1$, or $x=1$, convergent; $x>1$, divergent.
2. Same result as Ex. 1. 3. Same result as Ex. 1.
4. $x<\frac{1}{e}$, or $x=\frac{1}{e}$, convergent; $x>\frac{1}{e}$, divergent.
5. $x<e$, convergent; $x>e$, or $x=e$, divergent.

6. $x<1$, convergent; $x>1$, or $x=1$, divergent. 7. Divergent.

8. $x<\frac{1}{e}$, convergent; $x>\frac{1}{e}$, or $x=\frac{1}{e}$, divergent.

9. $x<1$, convergent; $x>1$, divergent. If $x=1$ and if $\gamma-\alpha-\beta$ is positive, convergent; if $\gamma-\alpha-\beta$ is negative, or zero, divergent.

10. $x<1$, convergent; $x>1$, or $x=1$, divergent. The results hold for all values of $q$, positive or negative.

11. $a$ negative, or zero, convergent; $a$ positive, divergent.

## XXII. a. PAGE 256.

1. $\frac{1}{3}n(4n^2-1)$.
2. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.
3. $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$.
4. $n^2(2n^2-1)$.
5. $\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.
6. $p^3=q^2$.
7. $b^3=27a^2d,\ c^3=27ad^2$.
8. $ad=bf,\ 4a^2c-b^2=8a^2f$.

13. $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$.

## XXII. b. PAGE 260.

1. $1+3x+4x^2+7x^3$.
2. $1-7x-x^2-43x^3$.
3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$.
4. $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}x+\frac{11}{8}x^2+\frac{21}{16}x^3$.
5. $1-ax+a(a+1)x^2-(a^3+2a^2-1)x^3$.
6. $a=1,\ b=2$.
7. $a=1,\ b=-1,\ c=2$.

9. The next term is $+\cdot 0000000000003$.

11. $\frac{a^n}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)\ldots\ldots(1-a^n)}$.

## XXIII. PAGES 265, 266.

1. $\frac{4}{1-3x}-\frac{5}{1-2x}$.
2. $\frac{7}{3x-5}-\frac{5}{4x+3}$.
3. $\frac{4}{1-2x}-\frac{3}{1-x}$.
4. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x-3}$.
5. $1+\frac{1}{x}-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{8}{5(2x+3)}$.
6. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$.
7. $x-2+\frac{17}{16(x+1)}-\frac{11}{4(x+1)^2}-\frac{17}{16(x-3)}$.
8. $\frac{41x+3}{x^2+1}-\frac{15}{x+5}$.
9. $\frac{3x}{x^2+2x-5}-\frac{1}{x-3}$.
10. $\frac{5}{(x-1)^4}-\frac{7}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}$

11. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}+\frac{2}{(x+1)^4}$.

12. $\frac{4}{3(1+7x)}-\frac{1}{3(1+4x)}$; $\frac{(-1)^r}{3}(4.7^r-4^r)x^r$.

13. $\frac{11}{3(1-x)}-\frac{4}{3(2+x)}$; $\frac{1}{3}\left(11+\frac{(-1)^{r-1}}{2^{r-1}}\right)x^r$.

14. $1+\frac{7}{3(x+5)}-\frac{7}{3(x+2)}$; $(-1)^r\frac{7}{3}\left(\frac{1}{5^{r+1}}-\frac{1}{2^{r+1}}\right)x^r$.

15. $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{4}{1-2x}$; $\{1+(-1)^{r-1}-2^{r+2}\}x^r$.

16. $\frac{4}{9(1+2x)}-\frac{1}{9(1-x)}+\frac{3}{(1-x)^2}$; $\frac{1}{3}\{9r+8+(-1)^r2^{r+2}\}x^r$.

17. $\frac{1}{4(1-4x)}+\frac{11}{4(1-4x)^2}$; $4^{r-1}(12+11r)x^r$.

18. $\frac{2}{1+x}+\frac{3}{(1+x)^2}-\frac{6}{2+3x}$; $(-1)^r\left(3r+5-\frac{3^{r+1}}{2^r}\right)x^r$.

19. $\frac{3}{2(x-1)}+\frac{1-3x}{2(1+x^2)}$; $r$ even, $\frac{1}{2}\{(-1)^{\frac{r}{2}}-3\}x^r$; $r$ odd, $-\frac{3}{2}\{1+(-1)^{\frac{r-1}{2}}\}x^r$.

20. $\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{3}{(1-x)^2}+\frac{2}{1-x}$; $(r^2+1)x^r$.

21. $\left\{\frac{a^{r+2}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{r+2}}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^{r+2}}{(c-a)(c-b)}\right\}x^r$.

22. $\frac{5}{(2-x)^2}-\frac{2}{2-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{1-x}$; $\left\{r+3-\frac{5r+9}{2^{r+2}}\right\}x^r$.

23. (1) $\frac{1}{x(1-x)}\left\{\frac{1}{1+x^{n+1}}-\frac{1}{1+x}\right\}$.

(2) $\frac{1}{(1-a)^2}\left\{\frac{1}{1+a^nx}-\frac{1}{1+a^{n+1}x}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+ax}\right\}$.

24. $\frac{1}{x(1-x)(1-x^2)}$.

25. $\frac{1}{(1-x)^2}\left\{\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}+\frac{x^{n+2}}{1-x^{n+2}}\right\}$.

## XXIV. Page 272.

1. $\frac{1+3x}{(1-x)^2}$; $(4r+1)x^r$.

2. $\frac{2+x}{1+x-2x^2}$; $\{1+(-1)^r2^r\}x^r$.

3. $\frac{2-3x}{1-3x+2x^2}$; $(1+2^r)x^r$.

4. $\frac{7-20x}{1-2x-3x^2}$; $\left\{\frac{27}{4}(-1)^r+\frac{3^r}{4}\right\}x^r$.

5. $\frac{3-12x+11x^2}{1-6x+11x^2-6x^3}$; $(3^r+2^r+1)x^r$.

6. $3^{n-1}+2^{n-1}$; $\frac{1}{2}(3^n-1)+2^n-1$.

7. $(2.3^{n-1}-3.2^{n-1})x^{n-1}$; $\frac{2(1-3^nx^n)}{1-3x}-\frac{3(1-2^nx^n)}{1-2x}$.

8. $(4^{n-1}+3^{n-1})x^{n-1}$; $\frac{1-4^nx^n}{1-4x}+\frac{1-3^nx^n}{1-3x}$.

9. $(1+3^{n-1}-2^{n-1})x^{n-1}$; $\dfrac{1-x^n}{1-x}+\dfrac{1-3^nx^n}{1-3x}-\dfrac{1-2^nx^n}{1-2x}$.

10. $\dfrac{8}{5}(-1)^n+\dfrac{2^{2n-3}}{5}$; $\dfrac{4}{5}\{(-1)^n-1\}+\dfrac{1}{30}(2^{2n}-1)$.

11. $u_n-3u_{n-1}+3u_{n-2}-u_{n-3}=0$; $u_n-4u_{n-1}+6u_{n-2}-4u_{n-3}+u_{n-4}=0$.

12. $S_n=S_\infty-\Sigma$, where $\Sigma=$ sum to infinity beginning with $(n+1)^{\text{th}}$ term. This may easily be shewn to agree with the result in Art. 325.

13. $(2n+1)^2+\dfrac{2}{3}(2^{2n+1}+1)$.

## XXV. a. Pages 277, 278.

1. $\dfrac{2}{1}, \dfrac{13}{6}, \dfrac{15}{7}, \dfrac{28}{13}, \dfrac{323}{150}, \dfrac{674}{313}$.

2. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{7}{17}, \dfrac{9}{22}, \dfrac{43}{105}, \dfrac{95}{232}, \dfrac{613}{1497}$.

3. $\dfrac{3}{1}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{13}{4}, \dfrac{36}{11}, \dfrac{85}{26}, \dfrac{121}{37}, \dfrac{1174}{359}$.

4. $1+\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{17}{12}$.

5. $5+\dfrac{1}{4+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{157}{30}$.

6. $\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{33}{109}$.

7. $\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{5+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{11}{35}$.

8. $\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{7}{19}$.

9. $1+\dfrac{1}{7+}\,\dfrac{1}{5+}\,\dfrac{1}{6+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{254}{223}$.

10. $\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{6+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{10}$; $\dfrac{63}{208}$.

11. $4+\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{6+}\,\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{259}{60}$.

13. $\dfrac{1}{4}, \dfrac{7}{29}, \dfrac{8}{33}, \dfrac{39}{161}, \dfrac{47}{194}$.

16. $n-1+\dfrac{1}{(n+1)+}\,\dfrac{1}{(n-1)+}\,\dfrac{1}{n+1}$; and the first three convergents are

$$\frac{n-1}{1},\ \frac{n^2}{n+1},\ \frac{n^3-n^2+n-1}{n^2}.$$

## XXV. b. Pages 281—283.

1. $\dfrac{1}{(203)^2}$ and $\dfrac{1}{2(1250)^2}$.

2. $\dfrac{151}{115}$.

4. $\dfrac{1}{a+}\,\dfrac{1}{(a+1)+}\,\dfrac{1}{(a+2)+}\,\dfrac{1}{a+3}$; $\dfrac{a^3+3a+3}{a^3+3a^2+4a+2}$.

## XXVI. Pages 290, 291.

1. $x=711t+100$, $y=775t+109$; $x=100$, $y=109$.
2. $x=519t-73$, $y=455t-64$; $x=446$, $y=391$.
3. $x=393t+320$, $y=436t+355$; $x=320$, $y=355$.
4. Four. 5. Seven. 6. $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$.
7. $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{8}$; $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{8}$; or $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$; $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$.
8. £6. 13s. 9. $x=9$, $y=8$, $z=3$. 10. $x=5$, $y=6$, $z=7$.
11. $x=4$, $y=2$, $z=7$. 12. $x=2$, $y=9$, $z=7$.
13. $x=3, 7, 2, 6, 1$; $y=11, 4, 8, 1, 5$; $z=1, 1, 2, 2, 3$.
14. $x=1, 3, 2$; $y=5, 1, 3$; $z=2, 4, 3$.
15. $280t+93$. 16. 181, 412.
17. Denary 248, Septenary 503, Nonary 305.
18. $a=11.10, 9, 8, 6, 4, 3$; $b=66, 30, 18, 12, 6, 3, 2$.
19. The 107[th] and 104[th] divisions, reckoning from either end.
20. 50, 41, 35 times, excluding the first time.
21. 425. 22. 899. 23. 1829 and 1363.

## XXVII. a. Pages 294, 295.

1. $1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\cdots$; $\frac{26}{15}$.
2. $2+\frac{1}{4+}\cdots$; $\frac{2889}{1292}$.
3. $2+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\cdots$; $\frac{485}{198}$.
4. $2+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\cdots$; $\frac{99}{35}$.
5. $3+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{6+}\cdots$; $\frac{3970}{1197}$.
6. $3+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\cdots$; $\frac{119}{33}$
7. $3+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\cdots$; $\frac{116}{31}$.
8. $4+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{8+}\cdots$; $\frac{197}{42}$.
9. $3+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{6+}\cdots$; $\frac{1351}{390}$.
10. $5+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{10+}\cdots$; $\frac{198}{35}$.
11. $6+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{12+}$; $\frac{161}{24}$.
12. $12+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{24+}$; $\frac{253}{20}$.
13. $\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{8+}\cdots$; $\frac{12}{55}$.
14. $\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{10+}\cdots$; $\frac{47}{270}$.
15. $1+\frac{1}{10+}\,\frac{1}{2+}\cdots$; $\frac{5291}{4830}$.
16. $\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{16+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{16+}\cdots$; $\frac{280}{351}$.

17. $\dfrac{1}{(65)^2}$ and $\dfrac{1}{2(528)^2}$.
18. $\dfrac{1}{(191)^2}$ and $\dfrac{1}{2(240)^2}$.

19. $\dfrac{4030}{401}$.
20. $\dfrac{1677}{433}$.
21. $\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2+}\cdots$

22. $4+\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{4+}\cdots$
23. $1+\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{1+}\cdots$

24. $4+\dfrac{1}{8+}\,\dfrac{1}{8+}\cdots$; $\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{8+}\,\dfrac{1}{3+}\cdots$.
25. $\sqrt{10}$.

26. Positive root of $x^2+3x-3=0$.
27. Positive root of $3x^2-10x-4=0$.

28. $4\sqrt{2}$.
30. $\dfrac{1}{2}$.

## XXVII. b. Pages 301, 302.

1. $a+\dfrac{1}{2a+}\,\dfrac{1}{2a+}\,\dfrac{1}{2a+}\cdots$; $\dfrac{8a^4+8a^2+1}{8a^3+4a}$.

2. $a-1+\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2(a-1)+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2(a-1)+}\cdots$; $\dfrac{8a^2-8a+1}{8a-4}$.

3. $a-1+\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2(a-1)+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2(a-1)+}\cdots$; $\dfrac{2a^2-1}{2a}$.

4. $1+\dfrac{1}{2a+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2a+}\,\dfrac{1}{2+}\cdots$; $\dfrac{8a^2+8a+1}{8a^2+4a}$.

5. $a+\dfrac{1}{b+}\,\dfrac{1}{2a+}\,\dfrac{1}{b+}\,\dfrac{1}{2a+}\cdots$; $\dfrac{2a^2b^2+4ab+1}{2ab^2+2b}$.

6. $a-1+\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2(n-1)+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2(a-1)+}\cdots$; $\dfrac{2an-1}{2n}$.

7. $\dfrac{432a^5+180a^3+15a}{144a^4+36a^2+1}$.

## XXVIII. Page 311.

1. $x=7$ or $1$, $y=4$; $x=7$ or $5$, $y=6$.
2. $x=2$, $y=1$.
3. $x=3$, $y=1, 11$; $x=7$, $y=9, 19$; $x=10$, $y=18, 22$.
4. $x=2, 3, 6, 11$; $y=12, 7, 4, 3$.
5. $x=3, 2$; $y=1, 4$.
6. $x=79, 27, 17, 13, 11, 9$; $y=157, 51, 29, 19, 13, 3$.
7. $x=15$, $y=4$.
8. $x=170$, $y=39$.
9. $x=32$, $y=5$.
10. $x=164$, $y=21$.
11. $x=4$, $y=1$.
12. $2x=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$; $2\sqrt{3}\,.\,y=(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n$; $n$ being any integer.
13. $2x=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$; $2\sqrt{5}\,.\,y=(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n$; $n$ being any even positive integer.
14. $2x=(4+\sqrt{17})^n+(4-\sqrt{17})^n$; $2\sqrt{17}\,.\,y=(4+\sqrt{17})^n-(4-\sqrt{17})^n$; $n$ being any odd positive integer.

The form of the answers to 15—17, 19, 20 will vary according to the mode of factorising the two sides of the equation.

15. $x=m^2-3n^2,\ y=m^2-2mn.$

16. $x=-m^2+2mn+n^2;\ y=m^2-n^2.$

17. $x=2mn,\ y=5m^2-n^2.$

18. 53, 52; 19, 16; 13, 8; 11, 4.

19. $m^2-n^2;\ 2mn;\ m^2+n^2.$

20. $m^2-n^2;\ 2mn+n^2.$

21. Hendrick, Anna; Claas, Catriin; Cornelius, Geertruij.

## XXIX. a. Pages 321, 322.

1. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$

2. $\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$

3. $\frac{1}{12}(3n-2)(3n+1)(3n+4)(3n+7)+\frac{56}{12}=\frac{n}{4}(27n^3+90n^2+45n-50).$

4. $\frac{n}{4}(n+1)(n+6)(n+7).$

5. $\frac{n}{4}(n+1)(n+8)(n+9).$

6. $\frac{n}{n+1};\ 1.$

7. $\frac{n}{3n+1};\ \frac{1}{3}.$

8. $\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)};\ \frac{1}{12}.$

9. $\frac{1}{24}-\frac{1}{6(3n+1)(3n+4)};\ \frac{1}{24}.$

10. $\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{2(n+1)(n+2)};\ \frac{5}{4}.$

11. $\frac{1}{6}-\frac{1}{n+3}+\frac{2}{(n+3)(n+4)};\ \frac{1}{6}.$

12. $\frac{3}{4}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)};\ \frac{3}{4}.$

13. $\frac{n}{10}(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3).$

14. $\frac{1}{4}n^2(n^2-1).$

15. $\frac{n}{10}(n-1)(n+1)(n+2)(2n+1).$

16. $\frac{1}{15}(n+1)(n+2)(3n^3+36n^2+151n+240)-32.$

17. $\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{6(2n+1)}.$

18. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n}{n+1}.$

19. $\frac{n(n+3)}{2}+\frac{3}{2}-\frac{2}{n+2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$

20. $n+1-\frac{1}{n+1}.$

## XXIX. b. Pages 332, 333.

1. $3n^2+n;\ n(n+1)^2.$

2. $5n^2+3n;\ \frac{1}{3}n(n+1)(5n+7).$

3. $n^2(n+1);\ \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1).$

4. $-4n^2(n-3);\ -n(n+1)(n^2-3n-2).$

5. $n(n+1)(n+2)(n+4);\ \frac{1}{20}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+21).$

6. $\frac{1+x^2}{(1-x)^3}.$

7. $\frac{1-x+6x^2-2x^3}{(1-x)^3}.$

8. $\frac{3-x+x^2}{(1-x)^3}.$

9. $\frac{1-x}{(1+x)^2}.$

10. $\frac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5}.$

11. $\frac{9}{4}.$

12. $\frac{25}{54}.$

13. $3\,.\,2^n+n+2;\ 6(2^n-1)+\frac{n(n+5)}{2}.$

14. $n^3-(n+1)^2$; $\frac{n}{12}(3n^3+2n^2-15n-26)$.

15. $3^{n-1}+n$; $\frac{3^n+n^2+n-1}{2}$.

16. $2^{n+1}-n^2-2n$; $2^{n+2}-4-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$.

17. $3^n-1+\frac{1}{2}n(n+3)$; $\frac{1}{2}(3^{n+1}-3)+\frac{n(n+1)(n+5)}{6}-n$.

18. $\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$.

19. $\frac{1-x^n}{(1-x)^3}-\frac{nx^n}{(1-x)^2}-\frac{n(n+1)x^n}{2(1-x)}$.

20. $1-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}$.

21. $\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{4^{n+1}}{3}+\frac{2}{3}$.

22. $\frac{n(n+1)(3n^3+27n^2+58n+2)}{15}$.

23. $\frac{n(n+1)(12n^3+33n^2+37n+8)}{60}$.

24. $\frac{n(n+1)(9n^2+13n+8)}{12}$.

25. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\ldots\,(2n+1)}$.

26. $1-\frac{2^{n+1}}{\lfloor n+2}$.

27. $(n^2-n+4)\,2^n-4$.

28. $(n-1)\,3^{n+1}+3$.

29. $\frac{1}{2}-\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\ldots\,(2n+1)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\ldots\,(2n+2)}$.

30. $\frac{n}{n+1}\cdot 2^n$.

31. $\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{3^n}$.

32. $\frac{1}{2}-\frac{n+1}{\lfloor n+2}$.

33. $1-\frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$.

## XXIX. c. Pages 338—340.

1. $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})-x$.

2. $1+\frac{1-x}{x}\log(1-x)$.

3. $\frac{1}{4}(e^x-e^{-x}-ie^{ix}+ie^{-ix})$.

4. $\frac{1}{(r-2)\lfloor r-1}$.

5. $(1+x)e^x$.

6. $\frac{(p+q)^r}{\lfloor r}$.

7. 1.

8. $n(2n-1)$.

9. 0.

10. 4.

11. $\log_e 2-\frac{1}{2}$.

12. $3(e-1)$.

13. $e^x-\log(1+x)$.

14. (1) $\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42}$. (2) $\frac{n^8}{8}+\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7n^4}{24}+\frac{n^2}{12}$.

15. $15e$.

17. (1) $n+1$.

19. (1) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+n+n^2}\right)$; (2) $3-\frac{2+(-1)^n}{n+1}$.

20. $\frac{(1+x)^2}{2x^2}\log(1+x)-\frac{3x+2}{4x}$.

21. $n(n+1)\,2^{n-3}$.

22. (1) $\frac{1}{3}\left\{1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}\right\}$. (2) $\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}+(-1)^{n-1}\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right\}$.

## XXX. a. Pages 348, 349.

1. 3, 6, 15, 42.  2. 1617, 180, 1859.  6. 48.
7. 23.  33. 8987.

## XXX. b. Pages 356—358.

20. $x = 139t + 61$, where $t$ is an integer.

## XXXI. a. Pages 367—369.

2. $1 + \frac{1}{x-}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{x}$.  18. 1; it can be shown that $q_n = 1 + p_n$.

## XXXII. a. Pages 376, 377.

1. (1) $\frac{1}{9}$; (2) $\frac{5}{36}$.  2. $\frac{8}{663}$.  3. $\frac{1}{56}$.  4. $\frac{3}{8}$.
5. 2 to 3.  6. $\frac{4}{270725}$.  8. 43 to 34.  9. 36 : 30 : 25.
10. $\frac{2197}{20825}$.  11. 952 to 715.  14. $\frac{1}{6}$.  15. $\frac{2}{7}$.
16. $\frac{11}{4165}$.  17. $\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$.

## XXXII. b. Pages 383, 384.

1. $\frac{5}{36}$.  2. $\frac{16}{5525}$.  3. $\frac{52}{77}$.  4. $\frac{16}{21}$.  5. $\frac{8}{15}$.
6. $\frac{72}{289}$.  7. (1) $\frac{2197}{20825}$; (2) $\frac{2816}{4165}$.  8. $\frac{4651}{7776}$.  9. $\frac{209}{343}$.
10. $\frac{1}{7}$.  11. $\frac{91}{216}$.  13. $\frac{10}{19}$.  14. $\frac{63}{256}$.  15. $\frac{1}{32}$.
16. $\frac{16}{37}, \frac{12}{37}, \frac{9}{37}$.  17. $\frac{22}{35}, \frac{13}{35}$.  18. $n-3$ to 2.
19. 13 to 5.  20. $\frac{45927}{50000}$.

## XXXII. c. Pages 389, 390

1. $\frac{2133}{3125}$.  2. $\frac{5}{16}$.  3. $\frac{4}{9}$.  4. Florins.  5. $\frac{1}{2}$.
6. 17*s*. $2\frac{2}{3}d$.  7. $\frac{4}{63}$.  8. $\frac{7}{27}$.  9. 11 to 5.  10. $\frac{1}{8}$.

11. $A$ £5; $B$ £11. 12. $\frac{20}{27}$. 13. $4\frac{1}{2}$ shillings.

14. (1) $\frac{250}{7776}$; (2) $\frac{276}{7776}$. 15. $4d.$ 16. $\frac{3}{4}$. 17. $M+\frac{1}{2}m$.

## XXXII. d. Pages 399, 400.

1. $\frac{2}{5}$. 2. $\frac{1}{35}$. 3. $\frac{12}{17}$. 4. $B\ \frac{2}{5}$; $C\ \frac{4}{15}$.

5. $\frac{2}{n(n+1)}$. 6. $\frac{32}{41}$. 7. $\frac{377}{550}$. 8. $2s.\ 3d.$ 9. $\frac{1}{5}$.

10. $\frac{1}{3}$. 11. $\frac{40}{41}$. 12. $\frac{11}{50}$. 13. £1. 14. (1) $\frac{3}{5}$; (2) $\frac{7}{8}$.

15. £8. 17. $\frac{n-1}{mn-1}$, $\frac{n-1}{mn-m-1}$. 18. $\frac{13}{14}$.

## XXXII. e. Pages 405—408.

1. 7 to 5. 2. $\frac{1}{120}$. 3. $\frac{12393}{12500}$. 5. $\frac{275}{504}$.

6. $1 : \frac{5}{6} : \left(\frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{5}{6}\right)^3 : \left(\frac{5}{6}\right)^4$. 7. $\frac{16}{21}$. 8. 6; each equal to $\frac{1}{6}$.

9. $\frac{13}{28}$. 10. $\frac{343}{1695}$. 11. 11 to 5. 13. $A$, $\frac{169}{324}$; $B$, $\frac{155}{324}$.

14. $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{21}$. 16. $\frac{25}{216}$. 17. $\frac{140}{2401}$. 18. $\frac{83}{1000}$, $\frac{1}{60}$.

20. One guinea. 22. $\frac{140}{141}$. 23. $\frac{n(n+1)}{2}$ shillings. 26. 15 to 1.

28. $\frac{1}{4}$. 29. $\frac{1}{4}$. 30. $\frac{1265}{1280}$; £$\frac{5087}{5144}$. 31. $\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.

32. If $b>\frac{a}{2}$, the chance is $1-3\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$;

If $b<\frac{a}{2}$, the chance is $\left(\frac{3b-a}{a}\right)^2$.

## XXXIII. a. Pages 419, 420, 421.

1. 7. 2. 0. 3. 1. 4. $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$.

5. $1+x^2+y^2+z^2$. 6. $xy$. 7. 0. 8. $4abc$. 9. 0.

10. 3. 11. $3abc-a^3-b^3-c^3=0$. 13. (1) $x=a$, or $b$; (2) $x=4$.

20. $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix}$. 22. $\lambda^3(\lambda^2+a^2+b^2+c^2)^3$.

26. The determinant is equal to $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -2x & x^2 \\ 1 & -2y & y^2 \\ 1 & -2z & z^2 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} u & w' & v' \\ w' & v & u' \\ v' & u' & w \end{vmatrix} = 0.$

28. $\begin{vmatrix} u & w' & v' \\ w' & v & u' \\ v' & u' & w \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} u & w' & v' & a \\ w' & v & u' & b \\ v' & u' & w & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$

## XXXIII. b. Pages 427, 428.

1. 1.
2. 0; add first and second rows, third and fourth rows.
3. $(a+3)(a-1)^3$.
4. $a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab$.
5. 6; from the first column subtract three times the third, from the second subtract twice the third, and from the fourth subtract four times the third.
6. $abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$.
7. $-(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.
8. $(ax-by+cz)^2$.
9. $a^4$.
12. $x=\frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}$; &c.
13. $x=\frac{k(k-b)(k-c)}{a(a-b)(a-c)}$; &c.
14. $x=\frac{(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$; &c.

## XXXIV. a. Pages 439, 440.

1. $-102$.
2. $3a+b=27$.
3. $x^3-2x^2+x+1$; $-15x+11$.
4. $a=3$.
5. $x^{-4}+5x^{-5}+18x^{-6}+54x^{-7}$; $147x^{-4}-356x^{-5}+90x^{-6}+432x^{-7}$.
6. $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
7. $-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$.
8. $24abc$.
9. $(b+c)(c+a)(a+b)$.
10. $(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.
11. $3abc(b+c)(c+a)(a+b)$.
12. $12abc(a+b+c)$.
13. $80abc(a^2+b^2+c^2)$.
14. $3(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)$.
28. $\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.
29. 2.
30. $\frac{(p-x)(q-x)}{(a+x)(b+x)(c+x)}$.
31. $-1$.
32. $a+b+c+d$.

## XXXIV. b. Pages 442, 443.

5. 0.
7. $A=ax+by+ay$, $B=bx-ay$.
28. $(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$.

## XXXIV. c. PAGES 449, 450.

1. $x^3+xy^2+ay^2=0.$  2. $x+a=0.$  3. $x^2+y^2=a^2.$
4. $y^2=a(x-3a).$  5. $a^3-a^2=1.$  6. $x^2+y^2=2a^2.$
7. $b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4=a^2b^2c^2d^2.$  8. $y^2-4ax=k^2(x+a)^2.$
9. $a^4-4ac^3+3b^4=0.$  10. $a^4-2a^2b^2-b^4+2c^4=0.$
11. $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}+\dfrac{d}{1+d}=1.$  12. $5a^2b^2=6c^3.$
13. $ab=1+c.$  14. $a^3+b^3+c^3+abc=0.$
15. $(a+b)^{\frac{2}{3}}-(a-b)^{\frac{2}{3}}=4c^{\frac{2}{3}}.$  16. $-a^2+b^2+c^2\pm 2abc=1.$
17. $abc=(4-a-b-c)^2.$  18. $a^3-4abc+ac^2+4b^2-b^2c^2=0.$
20. $c^2(a+b-1)^2-c(a+b-1)(a^2-2ab+b^2-a-b)+ab=0.$

23. $$\frac{1}{(a-b)cr+(a-c)bq}+\frac{1}{(b-c)ap+(b-a)cr}+\frac{1}{(c-a)bq+(c-b)ap}=\frac{1}{bcqr+carp+abpq}.$$

24. $$\begin{vmatrix} ab'-a'b & ac'-a'c & ad'-a'd \\ ac'-a'c & ad'-a'd+bc'-b'c & bd'-b'd \\ ad'-a'd & bd'-b'd & cd'-c'd \end{vmatrix}=0.$$

## XXXV. a. PAGES 456, 457.

1. $6x^4-13x^3-12x^2+39x-18=0.$  2. $x^6+2x^5-11x^4-12x^3+36x^2=0.$
3. $x^6-5x^5-8x^4+40x^3+16x^2-80x=0.$
4. $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2.$  5. $1, 3, 5, 7.$
6. $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -4.$  7. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -6.$  8. $0, 2, \frac{2}{3}.$
9. $-\frac{3}{2}, -2, 4.$  10. $-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{3}.$  11. $\pm\sqrt{3}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}.$
12. $\frac{8}{9}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}.$  13. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}.$  14. $\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 1\pm\sqrt{2}.$
15. $-4, -1, 2, 5.$  16. $\frac{8}{9}, \frac{4}{3}, 2, 3.$  17. $-\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}.$
18. (1) $\dfrac{q^2-2pr}{r^2}$; (2) $\dfrac{p^2-2q}{r^2}.$  19. (1) $-6q$; (2) $\dfrac{q}{r}.$
20. $-2q, -3r.$  21. $2q^3.$

## XXXV. b. PAGES 460, 461.

1. $3, -\frac{2}{3}, \dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}.$  2. $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, 2\pm\sqrt{3}.$
3. $-1\pm\sqrt{2}, -1\pm\sqrt{-1}.$  4. $\pm\sqrt{-1}, -2\pm\sqrt{-1}.$
5. $-1, \pm\sqrt{3}, 1\pm 2\sqrt{-1}.$  6. $x^4-2x^2+25=0.$
7. $x^4-8x^2+36=0.$  8. $x^4+16=0.$

9. $x^4-10x^2+1=0$. 10. $x^4-10x^3-19x^2+480x-1392=0$.
11. $x^4-6x^3+18x^2-26x+21=0$. 12. $x^8-16x^6+88x^4+192x^2+144=0$.
13. One positive, one negative, two imaginary. **[Compare Art. 554.]**
15. One positive, one negative, at least four imaginary. [Compare Art. 554.]
16. Six. 17. (1) $pq=r$; (2) $p^2r=q^2$. 20. $q^2-2pr$.
21. $pq-r$. 22. $\frac{pq}{r}-3$. 23. $pq-3r$.
24. $pr-4s$. 25. $p^4-4p^2q+2q^2+4pr-4s$.

## XXXV. c. Pages 470, 471.

1. $x^4-6x^3+15x^2-12x+1$. 2. $x^4-37x^2-123x-110$.
3. $2x^4+8x^3-x^2-8x-20$. 4. $x^4-24x^2-1$.
5. $16axh(x^6+7x^4h^2+7x^2h^4+h^6)+2bh(5x^4+10x^2h^2+h^4)+2ch$.
10. 2, 2, $-1$, $-3$. 11. 1, 1, 1, 3. 12. 3, 3, 3, 2, 2.
13. $-2, \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}, \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$. 14. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2$.
15. 1, 1, 1, $-1$, $-1$, 2. 16. $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}, 1\pm\sqrt{-1}$.
17. $a, a, -a, b$. 18. $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}$; $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1\pm\sqrt{-23}}{4}$.
19. $0, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$; $0, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}$. 20. $n^n r^{n-2}=4p^n(n-2)^{n-2}$.
22. (1) $-2$; (2) $-1$. 27. 5. 28. 99, 795.

## XXXV. d. Pages 478, 479.

1. $y^3-24y^2+9y-24=0$. 2. $y^4-5y^3+8y^2-9y+27=0$.
3. $1, 1, -2, -\frac{1}{2}$. 4. $3\pm2\sqrt{2}, 2\pm\sqrt{3}$.
5. $1, \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. 6. $2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$.
7. $4, 2, \frac{4}{3}$. 8. 6, 3, 2. 10. $\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$.
11. $y^3-2y+1=0$. 12. $y^4-4y^2+1=0$. 13. $y^5-7y^3+12y^2-7y=0$.
14. $y^6-60y^4-320y^3-717y^2-773y-42=0$.
15. $y^3+\frac{9y^2}{2}+\frac{13y}{2}-\frac{15}{4}=0$. 16. $y^5+11y^4+42y^3+57y^2-13y-60=0$.
17. $y^3-8y^2+19y-15=0$. 18. $y^4+3y^3+4y^2+3y+1=0$.
19. $y^3+33y^2+12y+8=0$. 20. $ry^3+kqy^2+k^3=0$.
21. $y^3-q^2y^2-2qr^2y-r^4=0$. 22. $ry^3-qy^2-1=0$.
23. $ry^3+q(1-r)y^2+(1-r)^3=0$. 24. $y^3-2qy^2+q^2y+r^2=0$.
25. $y^3+3ry^2+(q^3+3r^2)y+r^3=0$.
26. $r^3y^3+3r^3y^2+(3r^2+q^3)ry+r(r^2+2q^3)=0$. 28. $\pm1, \pm2, 5$.

## XXXV. e. PAGES 488, 489.

1. $5, \frac{-5\pm\sqrt{-3}}{2}$. 2. $10, -5\pm 7\sqrt{-3}$. 3. $4, -2\pm 5\sqrt{-3}$.

4. $-6, 3\pm 4\sqrt{-3}$. 5. $-\frac{1}{4}, \frac{2\pm\sqrt{-3}}{7}$. 6. 11, 11, 7.

7. $-\frac{1}{2}, -\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$ 9. $4, -1, -\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-31})$.

10. $4, -2, -1\pm\sqrt{-1}$. 11. $\pm 1, -4\pm\sqrt{6}$. 12. $1, 2, -2, -3$.

13. $1\pm\sqrt{2}, -1\pm\sqrt{-1}$. 14. $1, -3, 2\pm\sqrt{5}$.

15. $2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. 16. $1, 4\pm\sqrt{15}, -\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

17. $-4, -4, -4, 3$. 18. $q^3+8r^2=0$; $\frac{3}{2}, \frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{4}$.

22. $-2\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{2}, 2\pm\sqrt{2}$. 23. $s^3y^4+qs(1-s)^2y^2+r(1-s)^3y+(1-s)^4=0$.

25. $2\pm\sqrt{3}$. 26. $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$.

28. $x^4-8x^3+21x^2-20x+5=(x^2-5x+5)(x^2-3x+1)$; on putting $x=4-y$, the expressions $x^2-5x+5$ and $x^2-3x+1$ become $y^2-3y+1$ and $y^2-5y+5$ respectively, so that we merely reproduce the original equation.

## MISCELLANEOUS EXAMPLES. PAGES 490—524.

2. 6, 8. 3. Eight.

4. (1) $1\pm\sqrt{5}$; $1\pm 2\sqrt{5}$.
   (2) $x=1$, $y=3$, $z=-5$; or $x=-1$, $y=-3$; $z=5$.

6. (1) $1, -\frac{a+2b}{2a+b}$. (2) 3, 3, 1. 7. First term 1; common difference $\frac{1}{3}$.

8. $p^2-q$; $-p(p^2-3q)$; $(p^2-q)(p^2-3q)$.

9. $\frac{1}{2}(ab+a^{-1}b^{-1})$. 10. $\frac{7}{13}$. 13. $A$, 7 minutes; $B$, 8 minutes.

14. $a^2=b^2=c^2$.

15. $x^2=y^2=\frac{d}{a+b+c}$; or $\frac{x}{c-a}=\frac{y}{a-b}=k$;
    where $k^2a(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=d$.

16 One mile per hour.

17. (1) $(b+c)(c+a)(a+b)$. (2) $\sqrt{\frac{5-4x}{2}}+\sqrt{\frac{2x-3}{2}}$. 18. $\frac{35}{9}$; 2268.

19. (1) $\frac{21\pm\sqrt{105}}{14}$.
    (2) $x=y=\pm\sqrt{ab}$; $\frac{x}{2a+b}=\frac{y}{-(3a+2b)}=\pm\sqrt{\frac{ab}{b^2+ab-a^2}}$.

22. 1$et$5; nine. 23. $\frac{1}{2}\{(1+2+3+\ldots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)\}$.

24. Wages 15*s*.; loaf 6*d*. 25. 6, 10, 14, 18.

26. (1) 1, $\dfrac{c(a-b)}{a(b-c)}$. (2) $\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$. 28. $88\frac{8}{9}$ miles.

29. $x=3k$, $y=4k$, $z=5k$; where $k^3=1$, so that $k=1$, $\omega$, or $\omega^2$. 30. 480.

31. Either 83 half-crowns, 19 shillings, 8 fourpenny pieces;
or 87 half-crowns, 6 shillings, 17 fourpenny pieces.

32. $a=6$, $b=7$. 33. 40 minutes.

35. $1+x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{13}{8}x^4$.

37. $\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, or $\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$. $[x^4-x-5(x^2+x+1)=0.]$

38. $a=8$; $\dfrac{x-4}{x-5}$. 40. The first term.

41. 13, 9. 42. $\dfrac{1+4b^2c^2+9c^2a^2+a^2b^2}{a^2+b^2+c^2}$.

43. (1) 3, $-2$, $\dfrac{-1\pm\sqrt{-39}}{2}$. [Add $x^2+4$ to each side.]

(2) $x=1,\ -\dfrac{1}{2},\ -1,\ 0,\ 0$;

$x=1,\ -\dfrac{1}{2},\ 0,\ -1,\ 0$;

$z=1,\ -\dfrac{1}{2},\ 0,\ 0,\ -1$. 47. 5780.

48. 150 persons changed their mind; at first the minority was 250, the majority 350. 50. 936 men.

51. (1) 0, $\dfrac{2^m-1}{2^m+1}a$. (2) $\dfrac{ad-bc}{a-b-c+d}$.

[Put $(a-c)(b-d)=\{(x-c)-(x-a)\}\{(x-d)-(x-b)\}$; then square.]

53. 6, $-\dfrac{161}{30}$. 55. $m=\dfrac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $n=\dfrac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

58. (1) 1. (2) $\pm 4\sqrt{2}$ [putting $x^2-16=y^4$, we find $y^4-16-4y(y^2-4)=0$.]

60. $\dfrac{(a-c)p}{b-c}$ males; $\dfrac{(b-a)p}{b-c}$ females. 63. 0, $a+b$, $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.

65. Common difference of the A. P. is $\dfrac{b-a}{n-1}$; common difference of the A.P. which is the reciprocal of the H. P. is $\dfrac{a-b}{ab(n-1)}$. [The $r^{\text{th}}$ term is $\dfrac{a(n-r)+b(r-1)}{n-1}$; the $(n-r+1)^{\text{th}}$ term is $\dfrac{ab(n-1)}{a(n-r)+b(r-1)}$.]

68. 19. 69. £78.

70. 0, $\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$, $\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

$[(a+b)^3-a^3-b^3=3ab(a+b)$, and $(a-b)^3-a^3+b^3=-3ab(a-b)$.]

**72.** (1) $x = \pm\frac{\log 3}{\log 6} = \pm\cdot 614.$ (2) $x = \pm\frac{2(1-2\log 2)}{1-\log 2} = \pm 1\cdot 139.$

**73.** 7, 2. **74.** 8 hours.

**79.** (1) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = 0$, or $\frac{a+b+c}{abc}$. (2) $x = y = z = 1$.

**80.** $a=3$, $b=1$. **81.** [Put $x-a=u$ and $y-b=v$.] **82.** $x=3$. **84.** 126.

**85.** Sums invested were £7700 and £3500: the fortune of each was £1400.

**86.** 503 in scale seven. **91.** 25 miles from London.

**95.** $x=5,\ 1,\ \frac{15\pm 6\sqrt{-1}}{29}$; $y=3,\ \frac{8}{5},\ \frac{25\pm 10\sqrt{-1}}{29}$. **96.** $\sqrt{\frac{5}{8}}$. **98.** $\frac{1}{2e}$.

**100.** Generating function is $\frac{1+4x}{1-x-2x^2}$; sum $= \frac{2(1-2^n x^n)}{1-2x} - \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x}$.
$n^{\text{th}}$ term $= \{2^n + (-1)^n\}\, x^{n-1}$.

**107.** $a^2+b-c^2-d$. **108.** 12 persons, £14. 18*s*.

**109.** (1) $x=a$, $y=b$, $z=c$. (2) $x=3$, or 1; $y=1$, or 3.

**111.** $1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{12+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{9}$; $x=948$, $y=492$. **113.** £12. 15*s*.

**117.** (1) $x=a$, $y=b$; $x=a$, $y=2a$; $x=2b$, $y=b$.
(2) $x=3$ or 1, $y=2$, $z=1$ or 3;
$x=\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$, $y=-3$; $z=\frac{-1\mp\sqrt{29}}{2}$.

**120.** (1) $1-\frac{1}{(n+1)^2}$.
(2) $\frac{a(x^n-1)}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^3}\{x^{n+2}+x^{n+1}-(n+1)^2x^2+(2n^2+2n-1)x-n^2\}$.

**121.** $\frac{1}{3}$. **122.** (1) $\frac{-5\pm\sqrt{-11}}{6}$ or $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.
(2) $x=0$, $y=0$, $z=0$; $x=\pm 2$, $y=\pm 1$, $z=\pm 3$.

**124.** $\frac{13x-23}{8(x^2-3x-1)} - \frac{10x-1}{3(x^2+x+1)}$; $-\frac{r+4}{2^{r+1}}$.

**126.** $l=1$; scale of relation is $1-x-2x^2$; general term is $\{2^{n-3}+(-1)^{n-1}\}\,x^{n-1}$.

**127.** (1) $x=-6,\ 2$; $y=9,\ -3$. (2) $x=\frac{1}{a}$; $y=\frac{1}{b}$.

**128.** (1) $\frac{a^2}{2}$. (2) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **129.** 12, 16; or 48, 4.

**130.** (1) $x=\pm 7$.
(2) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\pm\frac{k}{2abc}$, where $k^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.

**133.** 11, $r-1$. **134.** 384 sq. yds. **136.** $a=\pm 2$, $b=3$, $c=\pm 2$.

**137.** (1) $x=\pm\frac{7}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\frac{9}{\sqrt{2}}$. (2) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\pm\sqrt{\frac{13}{10}}$.

**138.** £3. 2*s*. at the first sale and £2. 12*s*. at the second sale.

**139.** (1) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. (2) $\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)$.

(3) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$.

**141.** (1) $x=1$ or $\frac{14}{5}$; $y=3$ or $\frac{15}{7}$.

(2) $x, y, z$ may have the permutations of the values 3, 5, 7.

**142.** $y^3+qy^2-q^2y-q^3-8r=0$.

**143.** (1) $\frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}-\frac{n}{x-1}$. (2) $\frac{3+14x-157x^2}{1+5x-50x^2-8x^3}$.

(3) $2^{n+1}+\frac{1}{2}n(n+7)-2$. **144.** $2(b^3-d^3)=3(b^2-c^2)(b-a)$.

**145.** $-2, -2, -2, \frac{2}{3}$.

**146.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ walks in successive days | 1, 3, 5, 7, 9, | 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, | miles, |
| $B$ walks ..................... | 12, 13, | 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, | |

so that $B$ overtakes $A$ in 2 days and passes him on the third day; $A$ subsequently gains on $B$ and overtakes him on $B$'s 9th day.

**147.** $\frac{\sqrt{37}-4}{7}$. **148.** $-(a+b+c)$, $-(a+\omega b+\omega^2c)$, $-(a+\omega^2b+\omega c)$.

**150.** $n^{\text{th}}$ term is $\frac{n(a^n-b^n)}{a-b}x^{n-1}$; Sum $=A-B$,

where $A=\frac{a(1-na^nx^n)}{1-ax}+\frac{a^2x(1-a^{n-1}x^{n-1})}{(1-ax)^2}$ and $B$ denotes a corresponding function of $B$.

**151.** $qy^3-2p^2y^2-5pqy-2p^3-q^2=0$.

**153.** (1) $-7, \frac{7\pm3\sqrt{-3}}{2}$. (2) $\pm1, \pm3, 4$. **154.** 3 days.

**156.** (1) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}, \frac{5\pm\sqrt{-39}}{24}$. $[(12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4)=120.]$

(2) $1\pm\sqrt{19}$. $\left[\frac{92}{585}=\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{2}{13}.\right]$

**157.** 22 years nearly. **161.** $4\frac{1}{4}$ hours.

**162.** (1) $x^2=y^2=\frac{-7\pm\sqrt{217}}{4}$; $x=\pm1, \pm2$; $y=\mp2, \mp1$; $x=-y=\pm\sqrt{3}$.

(2) $x=k(b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2)$, &c., where $2k^2(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)=1$.
[It is easy to shew that $a^2x+b^2y+c^2z=0$, and

$$a^2y+b^2z+c^2x=x^3+y^3+z^3-3xyz=a^2z+b^2x+c^2y.]$$

**163.** $2(a+b+c)x=(bc+ca+ab)\pm\sqrt{(bc+ca+ab)^2-4abc(a+b+c)}$.
[Equation reduces to $(a+b+c)x^2-(bc+ca+ab)x+abc=0$.]

**164.** (1) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+13)$. (2) $2e-5$.

166. (1) $x = \dfrac{51+30\sqrt{2}}{8}a$, $y = \dfrac{17a}{8}$. [Eliminate $x$.]

(2) $x, y, z$ are the permutations of the quantities $2, \dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}$.

167. $(x+y+z)^2 = 3k^2$. 168. 2. 169. $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

170. He walks $3\frac{3}{4}$ miles, drives $7\frac{1}{2}$ miles, rides 10 miles per hour. $AB = 37\frac{1}{2}$, $BC = 30$, $CA = 15$ miles.

172. (1) $x = 13$ or 10, $y = 10$ or 13.

(2) $x = \dfrac{d(a-b)}{d-c}$; $y = \dfrac{c(a-b)}{d-c}$; $z = \dfrac{b(d-c)}{a-b}$; $u = \dfrac{a(d-c)}{a-b}$.

174. £3200. 176. $ry^3 + 3ry^2 + (3r - p^3)y + r^3 = 0$.

177. $p = (ac \pm bd)(eg \pm fh) + (bc \mp ad)(fg \mp eh)$;
$q = (bc \mp ad)(eg \pm fh) - (ac \pm bd)(fg \mp eh)$.

178. $x = 6, -5$; $\dfrac{13 \pm \sqrt{-47}}{2}$; $\dfrac{-14 \pm \sqrt{-74}}{2}$;

$y = 5, -6$; $\dfrac{-13 \pm \sqrt{-47}}{2}$; $\dfrac{14 \pm \sqrt{-74}}{2}$.

[Put $x - y = u$ and $xy = v$, then $u^2 + 2v = 61$, $u(61+v) = 91$.]

182. 8987. 183. $y^3 - by^2 - acy - c^2 = 0$. $-1, -2, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

186. (1) $x, y, z$ are the permutations of the quantities $1, \dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}$.

(2) $x = \pm \dfrac{a(b^2+c^2)}{2bc}$, &c.

187. Conservatives; English 286, Scotch 19, Irish 35, Welsh 11.
Liberals; English 173, Scotch 41, Irish 68, Welsh 19.

191. (1) 7, 9, $-3$. (2) $2 \pm \sqrt{-3}$, $-2 \pm \sqrt{-1}$.

192. $2a_n = a + b + \dfrac{a-b}{3^n}$; $2b_n = a + b - \dfrac{a-b}{3^n}$. 201. $\dfrac{\lfloor m+n-2}{\lfloor m-1 \lfloor n-1}$.

202. 54, $-26$, $14 \pm 840\sqrt{-1}$. 204. $\dfrac{n}{n+1}$, $\dfrac{4^{n+1}+4(-1)^{n+1}}{4^{n+1}-(-1)^{n+1}}$.

206. $\dfrac{3rm^3 + nm^2q - 3n^3}{rm^3 + nm^2q + n^3}$. 207. 81 years nearly.

209. 7 Poles, 14 Turks, 15 Greeks, 24 Germans, 20 Italians.

210. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{1+x^2}{2x}\log(1+x)$.

212. (1) $\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$; (2) $\dfrac{4+8x+x^2}{(1+x)^3}$; (3) 23.

213. $-\dfrac{11}{97}$. 215. $x = a \pm \sqrt{\dfrac{(a^2+\beta)(a^2+\gamma)}{a^2+\alpha}}$, &c. 217. 420.

**223.** (1) $x=y=\frac{1}{3}(\pm 15 \pm \sqrt{-3})$, $z=\frac{1}{3}(\pm 15 \mp 2\sqrt{-3})$;

or $x=4,\ 6,\ -4,\ -6$;
$y=6,\ 4,\ -6,\ -4$;
$z=5,\ 5,\ -5,\ -5$.

(2) $\dfrac{x-a}{a(b-c)}=\dfrac{y-b}{b(c-a)}=\dfrac{z-c}{c(a-b)}=\lambda$,
where $(b-c)(c-a)(a-b)\lambda=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$.

**228.** 12 calves, 15 pigs, 20 sheep. **229.** Lim $\left\{n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}=\dfrac{3}{2}$; convergent.

**230.** Scale of relation is $1-12x+32x^2$; $n^{\text{th}}$ term $=\dfrac{1}{2}\{4^{n-1}+8^{n-1}\}$;

$S_n=\dfrac{2^{2n-1}}{3}+\dfrac{2^{3n-1}}{7}-\dfrac{5}{21}$.

**231.** $\dfrac{17}{243}$. **232.** $3x=\pm\sqrt{a^2-b^2+c^2}\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, &c.

**233.** $a^3+b^3+c^3=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$.

**235.** (1) $(1-x)^4S=1+4x+x^2-(n+1)^3x^n+(3n^3+6n^2-4)x^{n+1}$
$-(3n^3+3n^2-3n+1)x^{n+2}+n^3x^{n+3}$.

(2) $\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

**236.** $1+a^3x^4+a^6x^8+a^8x^{12}+a^9x^{16}+a^{12}x^{20}+a^{14}x^{24}+a^{17}x^{28}+a^{17}x^{32}+a^{20}x^{36}$.

**237.** 3 hours 51 min. **240.** 2 or $-\dfrac{1}{2}$. **242.** $-140$.

**244.** 3, 4, 5, 6. **246.** $a^3(c^3-3d^3)^2=(ab^2+2d^3)(ab^2-d^3)^2$.

**247.** 2, 6, 1, 3. **248.** $\dfrac{6}{13}$.

**249.** (1) $2^{n+1}-2-\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(2) $\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)(n+3)}-\dfrac{2}{3}$.

(3) $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}+\dfrac{2(1-2^nx^n)}{1-4x^2}$ when $n$ is even; $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}+\dfrac{2(1-2^{n-1}x^{n+1})}{1-4x^2}$
when $n$ is odd.

**250.** (1) $x=y=z=0$ or $\dfrac{a}{3}$. If however $x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=0$, then
$x+y+z=-a$, and the solution is indeterminate.

(2) $\dfrac{x}{a(-a+b+c)}=\dfrac{y}{b(a-b+c)}=\dfrac{z}{c(a+b-c)}$

$$=\frac{1}{\pm\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

**253.** $-(Ax+By+Cz)(-Ax+By+Cz)(Ax-By+Cz)(Ax+By-Cz)$ where
$A=\sqrt{a(b-c)}$, &c.

256. (1) $x=1,\ \omega,\ \omega^2;$
$y=1,\ \omega^2,\ \omega;$
$z=-(a+b),\ -(a\omega+b\omega^2),\ -(a\omega^2+b\omega).$
(2) $\left.\begin{matrix} x=3, \text{ or } 7 \\ y=7, \text{ or } 3 \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} z=6, \text{ or } -4 \\ u=4, \text{ or } -6 \end{matrix}\right\}.$

257. To at least $3r-2$ places. 258. Tea, 2*s.* 6*d.*; Coffee, 1*s.* 8*d.*

262. $2q^2-6pr+24s.$ 263. 11 turkeys, 9 geese, 8 ducks.

266. (1) $x, y, z$ have the permutations of the values

$$a,\ \frac{1}{2}a\left(b-1+\sqrt{b^2-2b-3}\right),\ \frac{1}{2}a\left(b-1-\sqrt{b^2-2b-3}\right).$$

(2) $x=y=z=1;\quad x=\dfrac{a+b+c}{a-b-c};$ &c. 267. 0.

268. 16 Clergymen of average age 45 years;
24 Doctors of average age 35 years;
20 Lawyers of average age 30 years.

269. $(a_0a_2-a_1^2)(a_2a_4-a_3^2)=(a_1a_3-a_2^2)^2;$
or $a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3=0.$

270. $x=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, &c. $u=\pm\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, &c 273. $e^{-\frac{1}{2}}$.

274. (1) $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\log(1-x)-2.$ (2) $\dfrac{1}{a-1}\left\{1-\dfrac{\lfloor n+1}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}\right\}.$

275. (1) $x=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 2;$

$y=-1,\ -\dfrac{4}{3},\ -1;$

$z=1,\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{4}.$

(2) $x=\pm4,\ y=\pm5,\ u=\pm2,\ v=\pm1.$

$$x=\pm\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},\ y=\mp2\sqrt{\frac{2}{3}},\ u=\mp\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},\ v=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

276. $a^2+b^2+c^2+d^2+\lambda.$ 277. $-p_1^3+3p_1p_2-3p_3.$

279. $A$, 6 birds; $B$, 4 birds. 281. 2.

287. $a,\ -5a,\ -5a.$ 289. $x_1=-\dfrac{(b_1-a_1)(b_1-a_2)\dots(b_1-a_n)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)\dots(b_1-b_n)}$, &c.

291. $A$ worked 45 days; $B$, 24 days; $C$, 10 days.

294. $(b^2+c^2-a^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2).$

300. Walked 3 miles, worked 4 hours a day;
or walked 4 miles, worked 3 hours a day.

CAMBRIDGE: PRINTED BY J. B. PEACE, M.A., AT THE UNIVERSITY PRESS.

# 北平科學社最近出版新書

| | | |
|---|---|---|
| 初中英文選 | 實價 | 報紙平裝六角 |
| 漢譯范氏大代數（訂正三版） | 實價 | 宣紙精裝二元八角<br>報紙精裝二元 |
| 新標準初中代數學 | 實價 | 宣紙平裝一元<br>報紙平裝八角 |
| 漢譯斯蓋尼新解析幾何學（訂正再版） | 實價 | 洋宣精裝一元四角<br>洋宣平裝一元一角<br>報紙平裝九角 |
| 漢譯斯蓋二氏解析幾何學 | 實價 | 洋宣精裝二元二角<br>報紙精裝一元八角 |
| 漢譯溫斯二氏平面幾何學 | 實價 | 洋宣精裝一元三角<br>洋宣平裝一元<br>報紙平裝八角 |
| 漢譯溫德華士初中代數學 | 實價 | 洋宣精裝一元<br>報紙平裝六角 |
| 漢譯舒塞司平面幾何學（訂正四版） | 實價 | 洋宣精裝一元四角<br>洋宣平裝一元一角<br>報紙平裝九角 |
| 漢譯舒塞司立體幾何學（訂正再版） | 實價 | 洋宣平裝九角<br>報紙平裝六角 |

# 漢譯郝爾斐特高等代數學

| | | |
|---|---|---|
| 全一册 | 實價 | 洋宣精裝 二元<br>報紙精裝 一元六角 |
| 譯者 | | 李士奇 |
| 發行者 | | 北平科學社 |
| 社址 | | 北平地安門內<br>油漆作十二號 |
| 電話 | | 東局二九九三 |

中華民國二十四年一月出版