新課程標準師範
鄉村師範學校適用

算學

(I)

幾何及三角

全一冊

編者　余光烺等

中華書局印行

平面幾何學之部

余光烺
葉蘭馨 編
吳詠懷

立體幾何學之部

張濟華 編

平面三角學之部

潘廷洸 編

民國三十五年十二月十二版

新課程標準師範適用
幾何及三角（全一冊）
◎（郵運匯費另加）

編者　余光烺　葉蘭馨　吳詠懷　張濟華　潘廷洸

發行人　中華書局股份有限公司代表　顧樹森

印刷者　上海澳門路四六九號　中華書局永寧印刷廠

發行處　各埠中華書局

（一〇六三九）（天）

新課程標準師範適用

幾何及三角

編輯者言

1. 本書係依照最近部頒師範學校課程標準所編,專供師範及鄉村師範學校之用。

2. 本書內容,係分平面幾何學,立體幾何學及平面三角學三部,雖非混合編制,但頗注意彼此之聯絡,保持一貫之精神。

3. 本書因篇幅與時間之限制,對於各部教材,不無刪減,惟開始數章,敍述較詳,意在使初學者得一明確之基本概念。其他主要精華,亦力予羅列;雖間有割愛,但求無傷於邏輯。

4. 本書注意鄉村教材,如簡易測量法及日常生活之應用問題,特於例題及習題中,多予列入。

5. 關於軌跡及作圖題之基本原理,每爲初學者所苦,本書特設專編論述,以示注重。

6. 立體幾何學之第二編,關於平面體,曲面體之編制特與他書不同,藉以節省篇幅。

7. 初中對於銳角三角函數習之甚詳,故本書先從任意角三角函數着手,以銳角爲其特例,庶使學者得一要領而有整個之概念。

8. 求對數之首數,本書特採一簡單新法,既便記憶,且可減少錯誤。

9. 三角學中凡附有符號＊之章節,如教授時間不敷,可省略之。

10. 集重要三科於區區一册中,在晚近坊間,尚屬創舉,同人課務匆忙,應命編此,罣漏不周,自所難免,惟祈海內方家指政爲幸。

符號

$=$	相等,等積	$\equiv$	全相等或合同形
$\neq$	不等	$\sim$	差
$>$	大於	$<$	小於
$\ngtr$	不大於	$\nless$	不小於
$\because$	因	$\therefore$	故
$\angle$	角	$rt\angle$	直角
$\triangle$	三角形	$\perp$	垂直
$\parallel$	平行	$\nparallel$	不平行
$\#$	平行且相等	$\square$	平行四邊形
$\square$	矩形或長方形	$\odot$	圓
$\backsim$	相似		

新課程標準師範適用

幾何及三角

目次

平面幾何學

第一編　直線形

第二編　圓

第三編　軌跡及作圖

第四編 比例及面積

立體幾何學

第一編 直線及平面

第二編 平面體及曲面體

平面三角學

新課程標準師範適用

幾何及三角

平面幾何學

第一編

直線形

第一章　基本觀念

1.　空間,立體,面,線,點。

吾人所置身之宇宙,荒茫廣闊,漫無限界,是爲空間。凡在此無限之空間中,占一有限部分之物體,是爲立體。立體之界曰面。面之界曰線。線之界曰點。

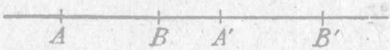
吾人依視覺或觸覺,以認識立體之位置與形像,更依長、寬、(或廣)厚(高或深)之三度,以測其大小。故立體者,有位置,有長,有寬,有厚;面者,有位置,有長,有寬而無厚;線者,有位置,有長,而無寬、無厚;點者,有位置而無大小者也。

點、線、面、立體四者爲構成空間之元素,其意義之介紹初無先後之分。如以點爲啓始,則點於空間移動之

跡爲線,線於空間移動之跡爲面,面於空間移動之跡曰立體,立體所在之處曰空間。

2. 直線,平面。

線之最簡單者爲直線。直線者,取其一部分任意置於其另一部分之上,常全相重合者也。



直線向兩方引伸之,皆無止限,故直線爲無限長,其一部分而有定長者,曰線段。如圖 AB 爲線段,AB 之長,稱爲兩點 A、B 間之距離。

面之最簡單者曰平面。平面者,連其上任意兩點之直線,恆全在其面上者也。

3. 平面形,直線形。

點、線、面所構成之形像曰圖形。圖形之在一平面上者曰平面形。其特由點與直線所構成者曰直線形。

4. 合同形。

以兩圖形相疊,而可密合爲一,或形象大小均等之兩圖形,曰合同形,或稱兩形相等。以＝表之,如　甲形＝乙形。

5. 何謂幾何學?

幾何學者,卽以吾人由經驗所得之若干眞理爲基礎,本推理演繹之方法,以研究圖形之位置、形像、大小等性質之科學也。

其所研究之圖形,屬於一平面者,曰平面幾何學。不全屬於一平面者,曰立體幾何學。

6. 公理。

吾人由經驗或直覺所得之若干眞理,其明確無待審度者,曰公理。公理之通用於算學之各科者,曰普通公理。其僅用於幾何學者,曰幾何公理。

7. 普通公理。

(1)等於同量或等量之諸量相等.

(2)等量加等量,其和相等.

(3)等量減等量,其差相等.

(4)不等量加等量,其和不等,原大者和亦大,原小者和亦小。

(5)不等量減等量,其差不等,原大者差亦大,原小者差亦小。

(6)等量減不等量,其差不等,所減者大其差小,所減者小,其差大.

(7)等量乘等量,其積相等。

(8)等量除等量,其商相等。

(9)此量大於彼量,則此量之等量比彼量大,彼量之等量比此量小。

(10)三不等量中,若甲量大於乙量,乙量大於丙量,則甲量大於丙量。

(11)全量等於其各部分之和。

(12)全量大於其任一部分。

8.　幾何公理。

(1)一線段中,可有無限多點;過一點可有無限多直線。

(2)過兩點之直線有一無二。

由此公理可知:

a.兩直線僅能相交於一點。

b.兩直線有一部分相合者,必全線相合。

(3)線段為其兩端間最短之途徑。

(4)任意取一點與一直線,則此點或在此直線上,或在直線外,二者僅居其一。

(5)一平面中,兩點在一直線之兩傍,則連兩點之直線,必與此直線相交。

(6)一直線上之兩點,已在一平面中者,則其全線亦必在此平面中。

9.　公設。

假定一種公認可能之事實,藉以爲證理或作圖之根據者,曰公設。

(1)凡線段能任意延長之。

(2)在一直線中,能截取一定長之線段。

(3)一直線可繞其上一點旋轉。

(4)一圖形,可以其一部分繞其中一點旋轉,而使其旋轉部分落於他一部分之上。

(5)一平面形,可以其中一直線爲軸,而以全平面或其一部分繞此軸旋轉。

(6)一平面形,可取一直線爲摺痕,而以此平面之一部分摺合於他一部分上。

(7)一圖形可移置於他一圖形上,使此兩形中一雙直線相重,此一雙直線上之一雙點相合。

(8)一圖形可任意變其位置而不變其形象與大小。

(9)形象相同,大小等量之兩圖形,可相重合。

10.　定義,定理,系。

(1)定一種名詞之意義曰定義。

(2)根據定義,公理,及其他已知之事實,加以推闡演繹而得之眞理曰定理。

(3)由已知定理,稍加推引而可直接斷定之定理曰系。

11. 定理與對定理,逆定理,逆對定理。

定理之內容,分作兩部,一曰**假設**,一曰**終結**。假設者,即所假定之一種或數種條件,以為推理之根據;終結者,根據於假設條件而斷定之結論,其確否則有待於證明者也。定理之形狀略如:

設 A 為 B,則 C 為 D。 (I)

此中『A 為 B』為假設,『C 為 D』為終結。

若將原定理之假設與終結同時反改而亦成立之定理,稱為原定理之**對定理**。如:

設 A 不為 B,則 C 不為 D。 (II)

若將原定理之假設與終結互易其位置而亦能成立之定理,稱為原定理之**逆定理**。如:

設 C 為 D,則 A 為 B。 (III)

若將原定理之假設與終結,互易且反改而亦能成立之定理,稱為原定理之**逆對定理**。如:

設 C 不為 D,則 A 不為 B。 (IV)

由上述四種定理相互之關係觀之,更可知(I)與(IV),(II)與(III)均互為逆對;(I)與(III),(II)與(IV)均互為逆;(I)與(II),(III)與(IV)均互為對。

【注意】 設一定理成立,其逆定理與對定理皆未必成立,而其逆對定理則必成立。

設一定理及其對定理同時成立,則其逆定理必能成立;反之,一定理及其逆定理同時成立,則其對定理亦能成立。

例如:

原定理: 中華民族為黃色人種。 (I)

對定理: 非中華民族,則非黃色人種。 (II)

逆定理: 黃色人種為中華民族。 (III)

逆對定理: 非黃色人種,則非中華民族。 (IV)

(I)與(IV)能同時成立,而(II)與(III)則未必然,因黃色人種,除我國外,尚有日本等國也。

又例如:

原定理: 歐幾里得為幾何學之鼻祖。 (I)

對定理: 非歐幾里得則非幾何學之鼻祖。 (II)

逆定理: 幾何學之鼻祖為歐幾里得。 (III)

逆對定理: 非幾何學之鼻祖則非歐幾里得 (IV)

設(I)與(II)同時成立,則(III)亦成立,或設(I)與(III)同時成立,則(II)亦成立,至如(IV)固與(I)同時成立無疑也。

12. 定理之證法。

定理之證法每因各定理之性質而異,初無定規,惟在學者之熟練耳。茲就其簡單通用者略舉數種如下,至其如何運用,後當隨時分別論列。

(1) 直接證法。

例如疊合法(§36, 註)及一切直接由假設推到終結之證法。

(2) 間接證法。

a. 窮舉法。(§40, 註)

b. 同一法。(§64, 註)

c. 歸謬法。(§108, 註)

(3) 分析法。 (§109, 註)

習題

1. 就教室內實物,說明立體、面、線、點。

2. 定一直線需幾點?

3. 定一點需幾直線?

4. 過一點有幾許直線?

5. 一直線上有幾許點?

6. 兩直線若有兩點公共則如何?

7. 一直線與一平面若有兩點公共則如何?

8. 由甲村往乙村之途徑有幾?其最短者爲何?

9. 試就下述兩句成語,說明孰爲定義,孰爲定理:『禮義廉恥,國之四維。四維不張,國乃滅亡。』

10. 就下列兩語,試各作其逆語,對語,逆對語;並判別其能否成立。

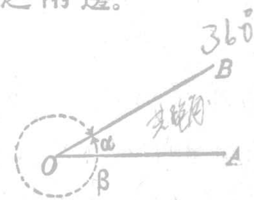
(1)中國爲人口最多之國家。

(2)中國爲亞洲之强國。

第二章　角

13. 定義。角。

由一點引兩直線,其間所展開之廣度,曰角。其點爲角之頂點,兩直線爲角之兩邊。



或如圖,以直線 OA 繞定點 O 廻轉而達 OB 之位置時,其廻轉所成之量曰角 AOB; O 爲頂點, OA、OB 爲兩邊。故角之大小,視其廻轉過程之廣狹而定,與其兩邊之長短無關。

由 OA 廻轉以達 OB 之途徑有二,如圖矢形所示 α、β。其小者爲曰劣角,大者曰優角,凡僅稱角,係指劣角。優角與劣角互稱爲共軛角。

14. 角之記法。

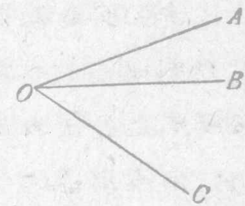
以三字母記角,置頂點之文字於中間,而配兩邊上各一點之文字於兩傍,再附以符號"$\angle$"於左下端,例如 $\angle AOB$ 或 $\angle BOA$ 皆角 AOB 之意。若單獨一角,則可以頂點之文字記之。有時用希臘字或數字記於兩邊之間以表角,如 $\angle\alpha$, $\angle\beta$, 及 $\angle 1$, $\angle 2$ 等。

15. 角之量法。

先定一單位,視所量角含單位之幾倍,即以數字表之。通常所用之單位曰**度**,即廻轉全周360分之一。再分一度為60等份,每份曰**分**。分一分為60等份,每份曰**秒**。如$45^\circ 30' 15''$。

16. 定義. 隣角,角之等分線。

(1)有兩角共一頂點及一邊,且分列於共有邊之兩傍者,則此兩角互為隣角,其不公共之兩邊,稱隣角之外邊。

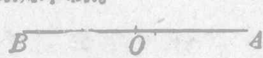


如圖$\angle AOB$, $\angle BOC$互為隣角。OA, OC為隣角之外邊。

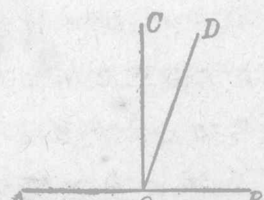
(2)一直線分一角為等量兩鄰角時,則此線稱為此角之等分線。

17. 定義。 平角,直角,垂線,斜線。

(1)角之兩邊,於反對方向,成一直線者曰平角。如圖$\angle AOB$為平角。



(2)角之等於平角之半者曰直角。以符號$rt. \angle$表之。如圖$\angle AOC$, $\angle BOC$為直角。



(3)兩直線相交成一直

角時,則此兩線互為垂線,或稱互相垂直,其交點曰垂線足,或簡稱垂足。

以"⊥"表垂直,如 $CO \perp AB$。

(4)不互相垂直之兩線,曰互為斜線。如圖 DO 與 AB 互為斜線。

18. 定義. 銳角,鈍角;餘角,補角。

(1)小於一直角之角為銳角.

(2)大於一直角而小於一平角之角曰鈍角.

如上圖 $\angle BOD$ 為銳角, $\angle AOD$ 為鈍角

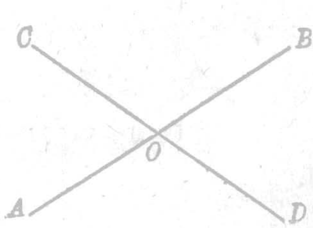
(3)兩角之和等於一直角者曰互為餘角.

(4)兩角之和等於一平角者曰互為補角。

如上圖 $\angle BOD$ 與 $\angle DOC$ 互為餘角, $\angle AOD$ 與 $\angle BOD$ 互為補角。

19. 定義. 對頂角.

兩直線相交,則其相向之角曰對頂角.

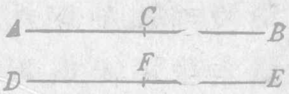


如圖 $\angle AOC$ 與 $\angle BOD$ 或 $\angle BOC$ 與 $\angle AOD$, 各為對頂角。

20. 定理。

凡平角皆相等。

設 $\angle ACB$, $\angle DFE$ 各爲平角。



求證　$\angle ACB=\angle DFE$

【證】置 $\angle ACB$ 於 $\angle DFE$ 上,使頂 C 落於頂 F 上,邊 CB 落於邊 FE 上,則因 ACB 與 DFE 皆爲直線,故邊 CA 必落於邊 FD 上。 (§8(2)b)

$\therefore$　$\angle ACB=\angle DFE$。

21.　系一。凡直角皆相等。

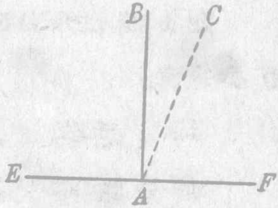
22.　系二。等角之餘角相等。

23.　系三。等角之補角相等。

24.　定理。

過一直線上一點,僅有一直線與此線垂直。

【證】蓋若於 A 點,可作兩垂線 AB 及 AC,則必有不相等之兩直角 $\angle BAF$ 及 $\angle CAF$ 與§21相矛盾也。



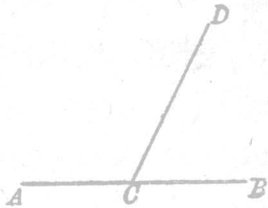
25.　定理。

若兩隣角之外邊,成一直線,則此兩角互爲補角。

設 $\angle ACD$ 與 $\angle DCB$ 爲隣角, AC 與 CB 成一直線。

求證　$\angle ACD$ 與 $\angle DCB$ 互爲補角。

【證】 因 ACB 爲一直線。



$\therefore$ $\angle ACB = 2rt.\angle$。

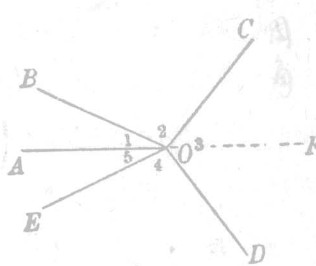
$\therefore$ $\angle ACD + \angle DCB = 2rt.\angle$。 (§7(11))

$\therefore$ $\angle ACD$ 與 $\angle DCB$ 互爲補角。

26. 系一。 在一平面內,過一直線上一點,向此直線之一傍,引若干直線,則其順次所成諸角之和等於二直角。

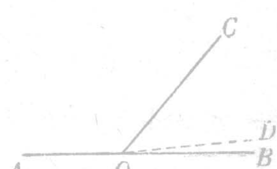
27. 系二。 在一平面內,過一點引若干直線,其順次所成諸角之和等於四直角。

因如圖,延長 AO 至 F,則在 AOF 之兩傍諸角之和各等於二直角也。 (§26)



28. 定理。

若兩隣角互爲補角,則其兩外邊成一直線。



設兩隣角 AOC 與 COB 互爲補角。

求證 AO, OB 成一直

線。

【證】 延長 AO 至 D,

則 $\angle AOC+\angle COD=2rt.\angle$。

然 $\angle AOC+\angle COB=2rt.\angle$,

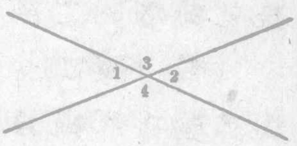
$\therefore$ $\angle COD=\angle COB$。 (§7(1))

故 OB 與 OD 相重,而 AO 及 OB 成一直線。

29. 定理。

凡對頂角相等。

設 $\angle 1$ 與 $\angle 2$, $\angle 3$ 與 $\angle 4$ 各爲對頂角。



求證 $\angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4$。

【證】 $\angle 1+\angle 3=2rt.\angle$, (§25)

$\angle 2+\angle 3=2rt.\angle$。 (§25)

$\therefore$ $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3$。 (§7(1))

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$。

同理, $\angle 3=\angle 4$。

習題

1. 求在一點鐘,三點鐘,五點鐘,六點鐘,九點鐘時,時針與分針所成之角度。

2. 東方與東北方、北方、西北方、西方、西南方、南方、

東南方所成之角度,各為幾許?

3. 求84°之餘角及補角。

4. 一角等於一直角三分之二,則其餘角等於平角之幾分?

5. 一角之餘角為其補角之三分之一,求此角。

6. 會於一點之四直線,所成之四角若相等,則此四直線可合成為兩直線。

7. 兩直線所成之四角若有一為直角,則其他三角均為直角。

8. 兩隣角互為補角,則其等分線互相垂直。

9. 過頂點垂直於其角之等分線之線,必等分其餘角。

10. 一角之等分線亦等分其對頂角。

11. 兩對頂角之等分線,必成一直線。

第三章　三角形

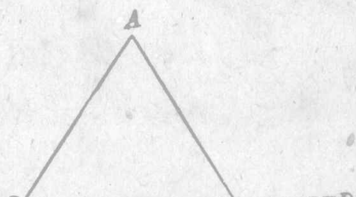
30. 定義。 三角形。

以三直線圍成平面之一部分,曰三角形。其三直線各爲三角形之**邊**,所交之三點,各爲三角形之**頂**,三邊之長之總和,爲三角形之**周**。

以"△"表三角形,如 $\triangle ABC$;A,B,C 爲頂,AB, BC, CA 爲邊。

三角形可視爲立於任意一邊之上,此時特稱此邊爲**底邊**,其所對之頂爲**頂點**,所對之角爲**頂角**。

31. 定義。 內角,外角,內對角。



(1)相隣兩邊所夾形內之角曰**內角**。

如 $\angle A, \angle B, \angle C$。

(2)一邊及隣邊延線所夾之角曰**外角**。

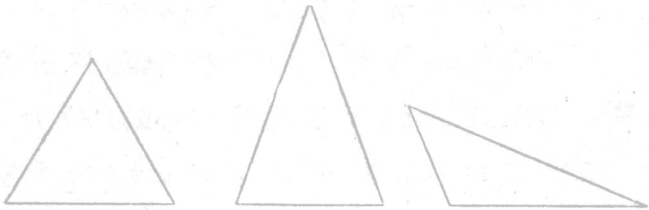
如 $\angle ACD$。

(3)不與一外角相隣接之兩內角,爲此外角之**內對角**。

如 $\angle A$ 及 $\angle B$ 各爲 $\angle ACD$ 之內對角。

32. 三角形之分類.

(*a*)依邊之關係分爲三種:



(1)**等邊三角形**,謂三邊相等者.

(2)**二等邊三角形**,謂有兩邊相等者.

相等之兩邊,稱爲**兩腰**,故二等邊三角形亦稱爲**等腰三角形**.又二等邊三角形,恆以等邊之交點爲**頂點**,其對邊爲**底邊**,底邊兩端之角各爲**底角**.

(3)**不等邊三角形**,謂三邊各不相等者.

(*b*)依角之關係分爲四種:

(1)**直角三角形**,謂有一角爲直角者.

直角三角形直角之對邊特稱**斜邊**,或**弦**.夾直角之兩邊亦稱爲**兩腰**.

(2)鈍角三角形,謂有一角爲鈍角者。

(3)銳角三角形,謂各角皆爲銳角者。

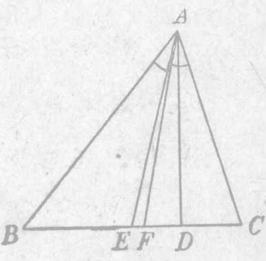
(4)等角三角形,謂三角均相等者。

等邊或等角三角形,均稱爲正三角形。

33. 定義。 三角形之高,中線,分角線。

(1)由三角形之任一項,至其對邊所引垂線之長爲三角形之高或項垂線。如 AD。

(2)連結任一項及其對邊中點之直線爲三角形之中線。如 AE。

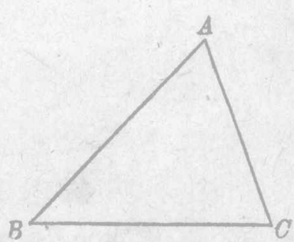


(3)其各角之等分線,爲三角形之分角線。如 AF。

三角形之高,中線及分角線,各有三個。

34. 定理。

三角形之一邊,小於其餘兩邊之和而大於其差.



就三角形 ABC 中,設 $AB>AC$,

求證 $BA+AC>BC>BA-AC$。

【證】 因線段 BC 爲兩點 B, C 間之最短距離。(§8(3))

$\therefore$ $BA+AC>BC$。

同理 $BC+AC>BA$。

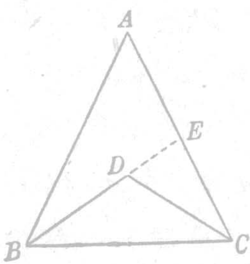
兩邊各減去AC,卽得 $BC>BA-AC$。 (§7(5))

【註】 若$AB<AC$,則$BC>AC-AB$。若大小不定,則$BC>AB\sim AC$。

35. 系。 從三角形內一點至其一邊之兩端所引兩線段之和,小於他兩邊之和。

設D爲$\triangle ABC$內任一點,

求證 $BD+DC<AB+AC$。



【證】 延長BD,會AC於E,

則 $BD+DE<AB+AE$。 (§34)

又 $DC<DE+EC$。 (§34)

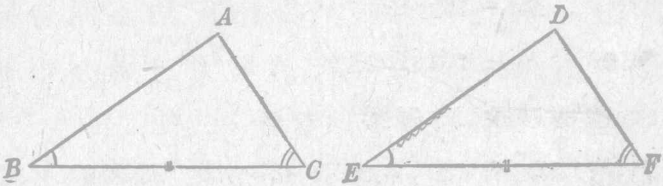
兩式則加,且從所得結果之兩邊減去DE,

則 $BD+DC<AB+AE+EC$,

卽 $BD+DC<AB+AC$。

36. 定理。

設一三角形之兩角及其公邊,各等於他一三角形之兩角及其公邊,則兩三角形爲合同形。等角所對之邊各相等,等邊所對之角亦相等。



就$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中,設$\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$, $BC=EF$。

求證 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

【證】 置$\triangle DEF$於$\triangle ABC$上使EF與BC相重,E與B合,D與A皆在BC之同傍,則因

$EF=BC$, $\angle E=\angle B$, $\angle F=\angle C$ (假設)

故F與C合,ED與BA相重,FD與CA相重。

D點既同時在BA, CA二邊之上,故必與其交點A合。 (§8(2)a)

故兩三角形合而爲一。即

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

【註】 疊合法。 證合同形時,先使兩形之已知相等部分疊合,然後證明其他部分一一密合,曰疊合法。其應用僅限於基本定理。

37. 定理。

設一三角形之兩邊及其夾角,各等於他一

三角形之兩邊及其夾角,則兩三角形爲合同形。

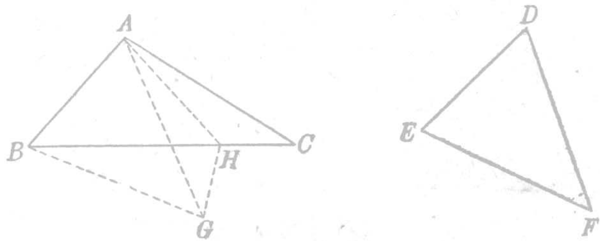
等邊所對之角各相等,等角所對之邊亦相等。

用疊合法證明,讀者試自習之。

38. 系。設一直角三角形之兩腰,各等於他一直角三角形之兩腰,則兩直角三角形爲合同形。

39. **定理。**

設一三角形之兩邊各等於他一三角形之兩邊,而其夾角不相等,則第三邊不相等,其對大角之邊較大。



就 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,設 $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A>\angle D$。

求證　　$BC>EF$。

【證】置 $\triangle DEF$ 於 $\triangle ABC$ 上,使 DE 與 AB 相重,D 與 A 合,且 F 與 C 在 AB 之同傍。

則因　　$AB=DE$,　　　　(假設)

故　　E與B合。

因　　$\angle D<\angle A$,　　(假設)

故　　DE必落於$\angle BAC$內,如AG。

引$\angle GAC$之等分線AH,交BC於H,並連GH。則就

$\triangle GAH$與$\triangle CAH$中,

AG(即DF)$=AC$,　　(假設)

AH為公共邊,

$\angle GAH=\angle CAH$,

故　　$\triangle GAH\equiv\triangle CAH$, $GH=HC$。　　(§37)

今就$\triangle BGH$論,

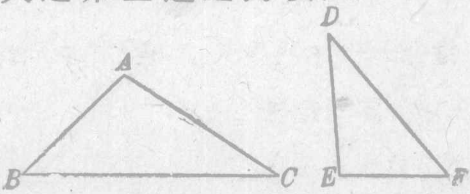
$BH+HG>BG$。　　(§34)

然　　$BH+HG=BH+HC=BC$, $BG=EF$,

$\therefore$　　$BC>EF$。

40. 定理。

設一三角形之兩邊各等於他一三角形之兩邊,而第三邊不相等,則兩邊之夾角不相等,其對於較大之第三邊之角較大。



就$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中,設$AB=DE$, $AC=DF$, $BC>EF$。

求證 $\angle A>\angle D$。

【證】 比較$\angle A$, $\angle D$不外$\angle A<\angle D$,或$\angle A=\angle D$或$\angle A>\angle D$。

今若 $\angle A<\angle D$ 則 $BC<EF$, (§39)

若 $\angle A=\angle D$ 則 $BC=EF$, (§37)

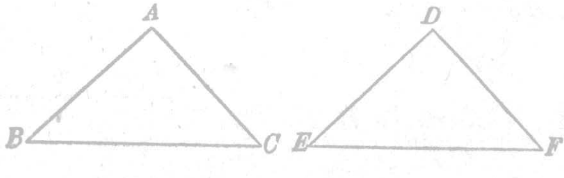
均與假設不合。

$\therefore$ $\angle A>\angle D$。

【註】 **窮舉法**。 設有一羣已經證明之定理,其假設已盡其可舉之種類,而其終結必不能同時成立,則此各定理之逆定理,亦必成立無疑,是謂窮舉法,亦稱逆定理之定則。例如本節定理爲前節定理之逆,而前節定理與其對定理(§37)既已證明,則其本節定理亦必成立,下節定理之證倣此。

41. 定理

一三角形之三邊,各等於他一三角形之三邊,則兩三角形爲合同形。等邊所對之角各相等。



就$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中,設$AB=DE, BC=EF, AC=DF$。

求證 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$。

【證】 就任意一雙對應角$\angle A, \angle D$比較其大小,不外(a) $\angle A<\angle D$,或(b) $\angle A>\angle D$,或(c) $\angle A=\angle D$。

然若(a)或(b)成立,則$BC\neq EF$, (§39)

與假設不合,故必 $\angle A=\angle D$。

今就$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中,

$$AB=DE,\quad AC=DF,\quad \angle A=\angle D.$$

$\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$。 (§37)

42. 定義。 中垂線.

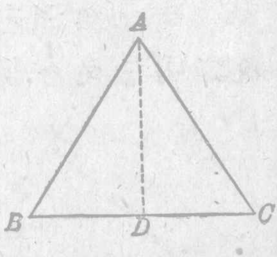
甲直線垂直於乙線段且過其中點,則甲線為乙線段之中垂線.

43. 定理.

三角形之兩邊相等,則其所對之兩角相等.

設 $\triangle ABC$中,$AB=AC$。

求證 $\angle B=\angle C$。



【證】 自A引中線AD,

則 $\triangle ABD\equiv\triangle ADC$。 (何故?)

$\therefore$ $\angle B=\angle C$。

【註】 若以AD作為$\angle A$之

分角線,則用§37之定理證之。

44. 系一。 等邊三角形必等角。

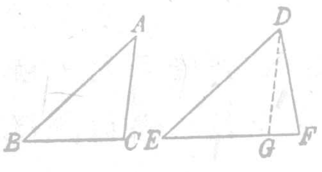
45. 系二。 二等邊三角形由項點所引之中線,等分項角,且垂直於底邊。

46. 系三。 二等邊三角形項角之分角線,為底邊之中垂線。

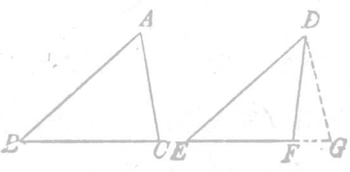
47. 系四。 與一線段之兩端等距離之兩點,可定此線段之中垂線。

48. 定理。

一三角形之兩邊各與他一三角形之兩邊相等,且一雙等邊之對角亦等,則其他雙等邊之對角或相等或互為補角;相等時則兩三角形為合同形。



甲圖



乙圖

就 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,設 $AB=DE, AC=DF, \angle B=\angle E$。

求證 $\angle C=\angle F$,因而 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$;

或 $\angle C+\angle F=2rt.\angle$。

【證】 置$\triangle ABC$於$\triangle DEF$上,使BA與DE相重,B與E合,且C與F在DE之同傍。則因$AB=DE$,故A與D合。又因$\angle B=\angle E$,故BC與EF相重。

今比較BC與EF之大小,不外

(a) $BC=EF$,或(b) $BC<EF$,或(c) $BC>EF$。

若$BC=EF$,則C與F合而$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$,$\angle C=\angle F$。 (§41)

若$BC<EF$,則C落於E,F之間,如G點(圖甲),又若$BC>EF$,則C落於EF之延線上,如G點(圖乙);

而 $\triangle ABC\equiv\triangle DEG$。 (§41)

因 $DG=AC=DF$, (假設)

$\therefore$ $\angle DGF=\angle DFG$, (§43)

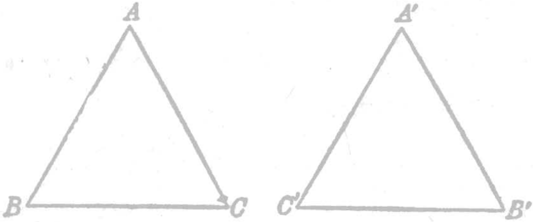
而 $\angle DGE+\angle DFE=2rt.\angle$, $\angle DGE=\angle C$。

故 $\angle C+\angle F=2rt.\angle$。

49. 系。 一直角三角形之斜邊及另一邊,各等於他直角三角形之斜邊及另一邊,則兩直角三角形爲合同形。

50. 定理。

三角形之兩角相等,則其所對之兩邊亦等(即此三角形爲二等邊三角形。)



就 $\triangle ABC$ 中,設 $\angle B=\angle C$。

求證　$AB=AC$。

【證】 覆置 $\triangle ABC$ 於平面上成 $\triangle A'B'C'$, 使 A',B',C' 各對應於 A,B,C。

則因　$\angle B=\angle C$,而 $\angle B'=\angle B=\angle C=\angle C'$。

故就 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'C'B'$ 中,

$$\angle B=\angle C',\ \angle C=\angle B',\ BC=C'B',$$

$\therefore$　$\triangle ABC \equiv \triangle A'C'B'$。　(§36)

$\therefore$　$A'C'=AB$。

然　$A'C'=AC$,　(作圖)

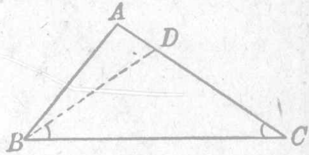
$\therefore$　$AB=AC$。

51. 系。 等角三角形必等邊.

52. 定理。

三角形之兩角不相等,則其所對之兩邊亦不等,而大角所對之邊大。

就$\triangle ABC$中,設$\angle B > \angle C$。



求證　$AC > AB$。

【證】從B引直線BD,使　$\angle DBC = \angle C$。

則因　$\angle ABC > \angle ACB$,故BD在$\angle ABC$內而會AC於D

故

$$DB = DC。\qquad (\S 50)$$

又在　$\triangle ABD$中,

$$AD + DB > AB, \qquad (\S 34)$$

卽

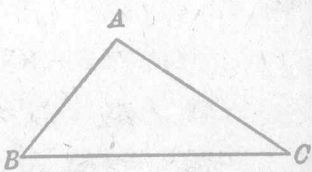
$$AD + DC > AB。$$

$$\therefore \quad AC > AB。$$

53. 定理。

三角形之兩邊不相等,則其所對之兩角亦不等,而大邊所對之角較大。

就$\triangle ABC$中,設$AC > AB$。



求證　$\angle B > \angle C$。

【證】比較$\angle B$,$\angle C$之大小不外　$\angle B < \angle C$,或$\angle B = \angle C$,或$\angle B > \angle C$。

然若　$\angle B < \angle C$　則　$AC < AB$, $\qquad (\S 52)$

又若　$\angle B=\angle C$　則　$AC=AB$,　(§50)

皆與假設不合。

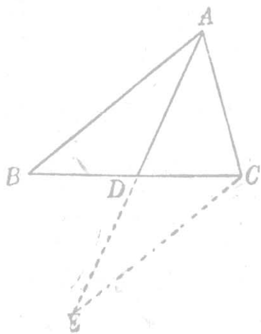
故必　$\angle B>\angle C$。

54. 例題.

設 AD 爲 $\triangle ABC$ 之中線,則

(1)　$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$;

(2)　$AD>\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$。



【證】 (1)延長 AD 至 E,使 $DE=AD$。

連結 CE,則就 $\triangle CDE$, $\triangle BDA$ 中,

$CD=BD$,　(假設)

$DE=AD$,　(作圖)

$\angle CDE=\angle ADB$,　(§29)

$\therefore\ \triangle CDE\equiv\triangle BDA$,　$CE=AB$。　(§37)

就 $\triangle ACE$ 中,

$AE<CE+AC$。　(§34)

然　$AE=2AD$,　(作圖)

$\therefore\ 2AD<AB+AC$。

即　$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$。

(2)就 $\triangle ABD$ 中, $AD>AB-BD$。　(§34)

又 $\triangle ACD$ 中,$AD > AC - CD$。　(§34)

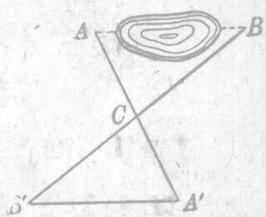
$$\therefore \quad 2AD > AB + AC - (BD + CD)。$$

$$\therefore \quad 2AD > AB + AC - BC。$$

$$\therefore \quad AD > \frac{1}{2}(AB + AC - BC)。$$

55. 例題.

求爲障礙物所隔斷之兩點 A, B 間之距離

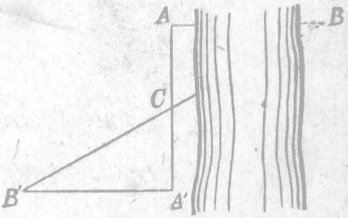


第一法　擇一適宜之 C 點。

作 AC,並延長至 A';使 $CA' = CA$。

作 BC,並延長至 B',使 $CB' = CB$。

則量 $A'B'$ 卽得 AB。　(何故?)



第二法　作 $AA' \perp AB$

求 AA' 之中點 C。

作 $A'B' \perp A'A$ 而使 B, C, B' 在一視線上。

則量 $A'B'$ 卽得 AB　(何故?)

習　題

1 1.　設 AD, BC 相交於 E,則 $AD + BC > AB + CD$。

2.　三角形內一點至各頂點距離之和,比此三角形之周小,而比周之半大。

2 3.　二等邊三角形兩底角之分角線相等。

4. 從二等邊三角形底邊兩端所引之兩中線相等。

3 5. 從二等邊三角形兩腰之中點,至底邊之中點所引之兩直線相等。

6. 二等邊三角形兩底角之外角相等。

4 7. 三角形一角之分角線,若垂直於對邊,則此三角形爲二等邊。

8. 三角形之一中線,若垂直於對邊,則此三角形爲二等邊。

5 9. 三角形之兩高相等,則此三角形爲二等邊。

10. AD 爲 $\triangle ABC$ 之中線,若 $\angle ADB$ 爲銳角

則　(a) $AB<AC$,　(b) $\angle C<\angle B$。

6 11. 設一三角形之兩邊,及此兩邊中一邊上之中線,各與他一三角形之兩邊及其對應中線相等,則此兩形爲合同形。

12. 設兩二等邊三角形共有一底邊,則其頂點之聯線,爲底邊之中垂線。

7 13. 二等邊三角形頂角之等分線上任意一點,至其底邊兩端之距離相等。

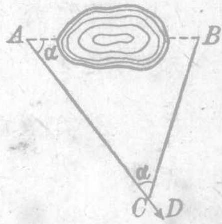
14. 在正三角形 ABC 之三邊上,順次取 D, E, F 三

點使 $AD=BE=CF$,則 $\triangle DEF$ 爲正三角形.

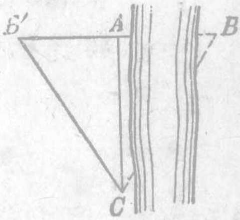
8 15. 在二等邊三角形 $ABC(AB=AC)$ 之一邊 AC 上,取任意一點 D,則 $BD>DC$。

16. 延長二等邊三角形 $ABC(AB=AC)$ 之一邊 AC 至 D,則 $\angle ABD>\angle ADB$。

9 17. 設直線 $AB>AC$, $DB\perp BA$, $DC\perp CA$,則 $DC>DB$。



18. 試就 §55 例題第一法中,由 A 向 D 進行,而使 $\angle A=\angle\alpha$ = 銳角,行至 C 點使 $\angle ACB=\angle\alpha$ 則何如?



10 19. 設就 §55 例題第二法中,使 AC 垂直 BB', $\angle ACB'=\angle ACB$,則何如?

第四章 垂線及平行線

由直線外一點,向此線所引無限多之直線中,有

(i) 與此線相交而成垂線者;

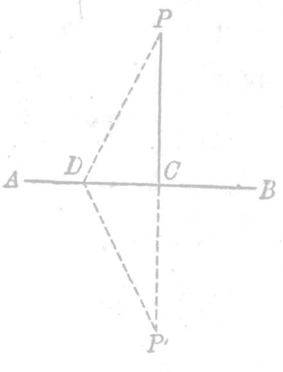
(ii) 與此線相交而成斜線者;

(iii) 不與此線相交者;

三者必居其一,且僅居其一。惟此三種直線各有幾許?又其相互間之關係如何?

56. 定理。

過一直線外一點,僅有一直線與此線垂直.



設 P 爲直線 AB 外之一點,

PC 爲垂線, PD 爲他一直線。

求證　　PD 不 $\perp AB$。

【證】 延長 PC 至 P',使 $CP'=CP$。連結 DP'。

因 PCP' 既爲一直線,則

PDP' 非一直線。　　(§8(2))

$\therefore$ 　　$\angle PDC+\angle CDP' \neq 2rt.\angle$。

然　　$\triangle DCP \equiv \triangle DCP'$, $\angle PDC=\angle CDP'$。　　(§38)

$\therefore$ 　　$2\angle PDC \neq 2rt.\angle$, $\angle PDC \neq rt.\angle$。

∴ PD不$\perp AB$。

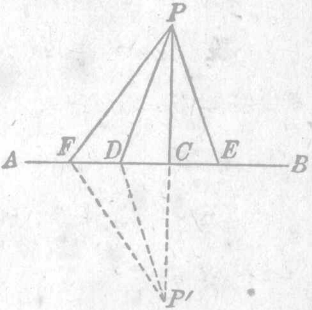
57. 定理。

由一直線外一點,向此直線所引之諸線段中,

(1)垂線最短;

(2)其交點與垂線足距離相等之兩斜線相等;

(3)其交點與垂線足距離不等之兩斜線不等,距離較遠之斜線較長。



設由直線 AB 外一點 P 向 AB 引垂線 PC 及斜線PD, PE, PF 使 $CD=CE$, $CF>CE$。

求證 (1) $PC<PD$;

(2) $PD=PE$;

(3) $PF>PE$。

【證】 延長PC至P'使$CP'=CP$連結$P'D$及$P'F$。

(1)因 $\triangle PDC \equiv \triangle P'DC$。 (§38)

∴ $PD=P'D$。

又就 $\triangle PDP'$中,

$PP'<PD+DP'$, (§34)

即 $2PC<2PD$，

故 $PC<PD$。

(2) 因 $\triangle PCD \equiv \triangle PCE$, (§38)

$\therefore$ $PD=PE$。

(3) 自 (1) 知 $PD=P'D$，

同理 $PF=P'F$。

今 D 為 $\triangle PFP'$ 中之一點，

故 $PF+FP'>PD+DP'$。 (§35)

故 $2PF>2PD$, $PF>PD$。

然自 (2), $PD=PE$,

$\therefore$ $PF>PE$。

58. 系。 過直線外一點，向此直線僅可引相等之兩斜線。

59. 定義。平行線。

在一平面內之兩直線，無論在何處不相交者，曰兩平行線，或稱互相平行。

以符號“$\parallel$”表平行，例如 $AB \parallel CD$。

【註】 平面上之兩直線不平行即相交。

60. 公理。

過一直線外一點,僅有一直線與此線平行。

61. 系。 相交兩直線不能同時與第三直線平行。

62. 定理。

平行於同一直線之兩直線,互相平行。

蓋若不平行,必相交,則與§61相衝突也。

63. 定理。

垂直於同一直線之兩直線,互相平行。

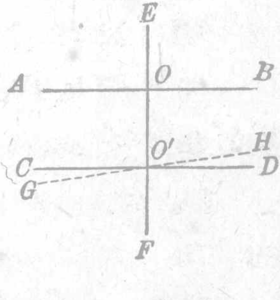
蓋若不平行必相交,則與§56相衝突也。

64. 定理。

兩直線互相平行,則垂直於其一之直線,必垂直於其二。

設 $AB \parallel CD, EF \perp AB$。

求證 $EF \perp CD$。



【證】 設 EF 交 CD 於 O'。過 O' 引 $GH \perp EF$,

則 $GH \parallel AB$, (§63)

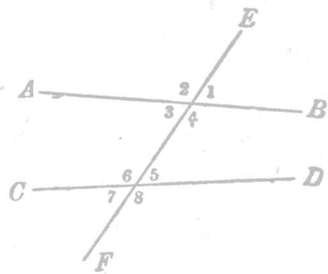
故 GH 與 CD 相重, (§60)

$\therefore EF \perp CD$。

【註】 同一法。 證一定理時,先作一合於終

結條件之圖形,後再證明所作圖形,與原定理所假設之圖形同爲一事,於以知原定理之終結確能成立,此證法曰同一法。本節及§68之證,皆屬此類。

65. 定義。 內角,外角,內錯角,外錯角,同位角,同傍內角,同傍外角。



一直線 EF 與他兩直線 AB,CD 相交,所成八角之中,依其相互位置之關係,命名如下:

(1) $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$各稱內角。

(2) $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$, $\angle 8$各稱外角。

(3) $\angle 3$與$\angle 5$, $\angle 4$與$\angle 6$各稱內錯角。

(4) $\angle 1$與$\angle 7$, $\angle 2$與$\angle 8$各稱外錯角。

(5) $\angle 1$與$\angle 5$, $\angle 2$與$\angle 6$, $\angle 3$與$\angle 7$, $\angle 4$與$\angle 8$各稱同位角。

(6) $\angle 4$與$\angle 5$, $\angle 3$與$\angle 6$各稱同傍內角。

(7) $\angle 1$與$\angle 8$, $\angle 2$與$\angle 7$各稱同傍外角。

66. 定理。

一直線與兩平行線相交,則

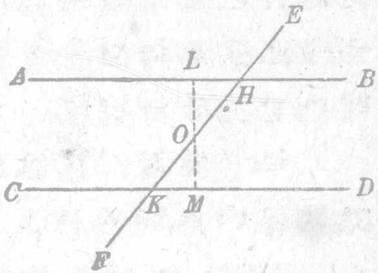
(1)內錯角相等;

(2)外錯角相等;

(3)同位角相等;

(4)同傍內角互爲補角;

(5)同傍外角互爲補角。



【證】 五定理中祇須證明其一,其他即易推得.茲證(1)如下:

如圖,過HK之中點O,引$LOM\perp AB$,則$LM\perp CD$。(何故?)

今置$\triangle OKM$於$\triangle OHL$上,使OK與OH相重,M,L在OH之同側,則因$OK=OH$(假設),故K與H合。又因$\angle KOM=\angle HOL$而OM與OL相重,故M與L合。 (§56)

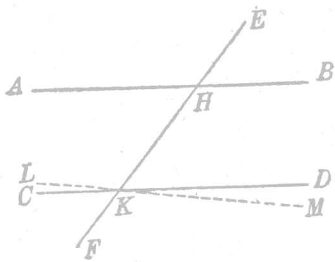
$\therefore\qquad \triangle OKM\equiv\triangle OHL$。

$\therefore\qquad \angle OHL=\angle OKM$。

67. 系。 兩角之邊各相平行,則此兩角或相等或互爲補角。

68. 定理。

一直線與兩直線相交,而適合下列五條件之一者:



(1)內錯角相等，

(2)外錯角相等，

(3)同位角相等，

(4)同傍內角互為補角，

(5)同傍外角互為補角，

則此兩直線互相平行。

設內錯角 $\angle AHK=\angle HKD$。[(2),(3),(4),(5)皆可化為此]

求證 $AB \parallel CD$。

【證】 過 K 引 $LM \parallel AB$，

則 $\angle AHK=\angle HKM$。 (§66(1))

然 $\angle AHK=\angle HKD$， (假設)

∴ $\angle HKM=\angle HKD$，KM 與 KD 相重。

因 $LM \parallel AB$， (作圖)

故 $KD \parallel AB$，

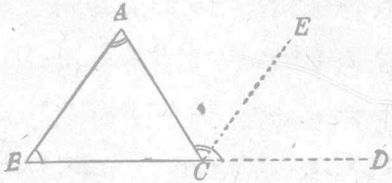
卽 $AB \parallel CD$。

69. 定理。

三角形內角之和等於二直角。

設 $\triangle ABC$。

求證 $\angle A+\angle B+\angle BCA=2rt.\angle$。



【證】 延長BC至D。過C引$CE \parallel BA$。

則　$\angle ECD = \angle B,\ \angle ECA = \angle A$。　(§66(3,1))

然　$\angle ECD + \angle ECA + \angle BCA = 2rt\angle$,　(§26)

$\therefore$　$\angle A + \angle B + \angle BCA = 2rt\angle$。

70. **系一**。 三角形之外角,等於內對角之和;故比任一內對角大。

71. **系二**。 三角形至多僅有一鈍角或一直角。

72. **系三**。 直角三角形之兩銳角互爲餘角。

73. **系四**。 一三角形之兩角,各等於他一三角形之兩角,則其第三角亦相等。

74. **系五**。 一三角形之兩角及其一角之對邊,各等於他三角形之兩角及其對應邊,則兩三角形爲合同形。 a.s.a.

75. **系六**。 一直角三角形之斜邊及一銳

角,各等於他一直角三角形之斜邊及一銳角,則兩三角形爲合同形。

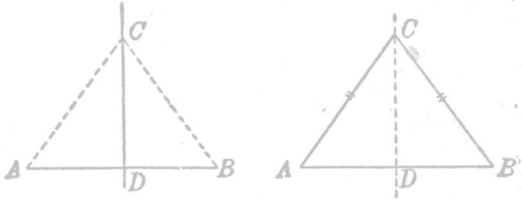
76. 系七。一直角三角形之一腰及一銳角,各對應等於他一直角三角形之一腰及一銳角,則兩三角形爲合同形。

77. 系八。兩角之邊各相垂直,則兩角或相等或互爲補角。

78. 定理。

(1)一線段之中垂線上各點,與此線段兩端之距離相等;反之,

(2)與一線段兩端距離相等之各點,在此線段之中垂線上。



【證】 證(1)用§38。證(2)用§41或§49。證法甚易,學者自習之。

79. 定義。點與直線之距離。

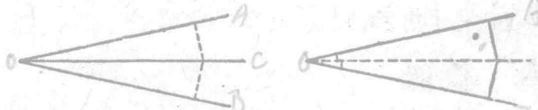
由直線外一點,向此線所引垂線之長,爲此

點與此線之距離。

80. **定理。**

(1)一角等分線上之各點,與此角兩邊之距離相等;反之,

(2)與一角兩邊距離相等之各點,在此角之等分線上。



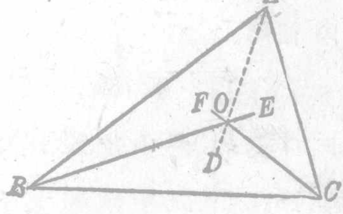
【證】 證(1)用§75。證(2)用§49。證法甚易,學者自習之。

81. **例題。**

三角形之三分角線,共交於一點;此點與三邊之距離相等。

設 AD, BE, CF 爲三角形 ABC 之三分角線。

求證 AD, BE, CF 共交於一點 O,而 O 與三邊 AB, BC, CA 之距離相等。



【證】 設 BE, CF 交於 O。 (何故?)

因 O 在 $\angle B$ 之等分線上,故與兩邊 AB, BC 之距離相等。

(§80(1))

又 O 在 $\angle C$ 之等分線上,故與兩邊 BC, CA 之距離亦等。

(§80(1))

即 O 與 AB, CA 之距離相等。

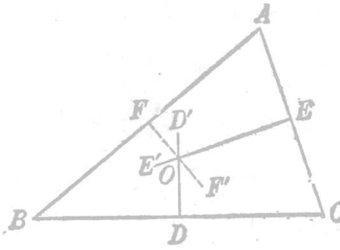
故 O 在 $\angle A$ 之等分線 AD 上, (§80(2))

而 O 與 AB, BC, CA 之距離相等。

【註】 三角形三分角線之交點,曰三角形之內心

82. 例題。

三角形三邊之中垂線共交於一點此點與三頂之距離相等。



設 DD', EE', FF' 爲三角形 ABC 三邊之中垂線。

求證 DD', EE', FF' 共交於一點 O,而 O 與 A, B, C 之距離相等。

【證】 設 DD', EE' 交於 O。 (何故?)

因 O 在 BC 之中垂線上,故 O 與 B, C 之距離相等。(§78(1))

又 O 在 CA 之中垂線上,故 O 與 C, A 之距離亦等。(§78(1))

即 O 與 A, B 之距離相等。

故 O 在 AB 之中垂線 FF' 上。 (§78(2))

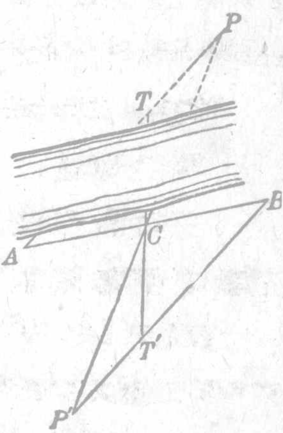
而 O 與 A, B, C 之距離相等。

【註】 三角形三中垂線之交點,曰三角形之外心。

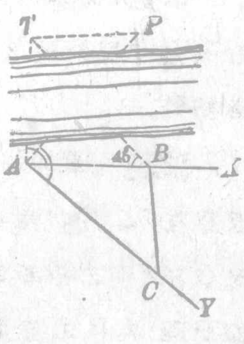
83. 例題。

求不能到達之兩點間距離。

設一尖塔 P 與一樹 T,均在河之對岸,可望而不可卽,今欲在此岸測 P, T 間之距離。



第一法　P, T 之聯線,與河之彼岸線不平行時,則在 PT 之延線上定一點 A,作直線 AB,而置一標柱於其中點 C。次在 B 點作 $\angle B=\angle A$,引直線 BP',交 TC 之延線於 T', PC 之延線於 P'。則量 $P'T'$ 卽得 PT 之長。(證從略,學者自習之。)



第二法　P, T 之聯線與河之彼岸線相平行時,則擇一同時可見 P, T 之點 A,引 $AX \perp AT$, $AY \perp AP$。在 AX 上,定一點 B,使 $\angle ABT=45°$,

則　$AB=AT$。　(§50)

同法在 AY 上定一點 C，使 $\angle ACP=45°$，

則 $AC=AP$。

於是量 BC 卽得 PT 之長(證從略,學者自習之)

習題

1. 若三角形之一高,分其底邊為不相等之兩部分,則大部分所隣接之邊較大。

√2. 兩角之邊,各相平行,則此兩角之等分線,或相平行,或相垂直。

3. 直線 $AB \parallel CD$，而 $EF \perp AB$，$GH \perp CD$，則 $EF \parallel GH$。

√4. 用§63之定理證§56之定理。

5. 一直線與兩平行線相交,則其同位角之等分線互相平行,其同側內角之等分線互相垂直。

√6. 延長 $\triangle ABC$ 之中線 AD 至 E，而使 $DE=AD$，則 $CE \parallel AB$。

7. 從 $\angle BAC$ 之等分線 AD 之任意一點 D，引 $DB \parallel AC$，$DC \parallel AB$，則 $DB=DC$。

√8. 過三角形之各頂,引其對邊之平行線,可得與原形全相等之三個三角形。

9. 設 AB 與 CD 互相等分於 E，則 $AC \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} DB$。

√10. 二等邊三角形頂角之外角之等分線,與底邊

相平行。

11. 試述上題之逆,並證其合理。

√12. 三角形一邊之中點與三頂之距離若相等,則此邊所對之角為直角。

13. AD, BE 為 $\triangle ABC$ 之兩高,則 $\angle CAD = \angle CBE$。

√14. 二等邊三角形等邊上之高相等。

15. 用§74之定理,證§50之定理。

√16. $\triangle ABC$ 兩角 B, C 等分線之交點,與其兩外角等分線之交點,均在 A 角之等分線上。

17. 過 $\triangle ABC$ 兩角 B, C 等分線之交點 O,作 $EF \parallel BC$,交 AB 於 E, AC 於 F,則 $EF = EB + FC$。

√18. 就§55所述之例題中,設測量員由另一點 D,依直線 DA 之方向步行,在 A 測得 $\angle DAB = \angle \alpha$,再前進800尺至 C,測得 $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle \alpha$。問 AB 相距幾尺?

19. 有一直立之高樹 AB。設吾人由樹根 A 沿一直路 AC 步行100尺至 C,測得 $\angle ACB = 45^\circ$。問樹高幾尺?

√20. 有不在一直線上之三村,欲設一公立學校使與三村之距離相等,問校舍應建於何處?

第五章 平行四邊形及多邊形

84. 定義 四邊形。

以四直線所圍成平面之一部分,曰四邊形,或四角形。連其對角之線曰**對角線**。

85. 定義 梯形。

四邊形之僅有一雙對邊平行者曰梯形。其平行之兩邊曰**底**,不平行之兩邊曰**腰**,兩腰相等者曰**等腰梯形**。

86. 定義 平行四邊形。

四邊形之兩雙對邊各相平行者,曰平行四邊形,以▱表之。

87. 定義 菱形。

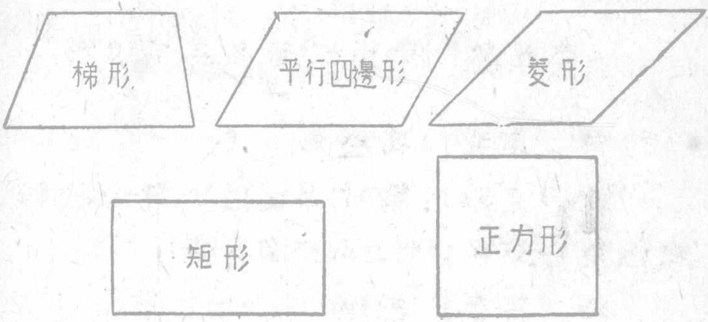
平行四邊形之各邊相等者曰菱形。

88. 定義 矩形。

平行四邊形之各角皆爲直角者曰矩形,或長方形。

89. 定義 正方形。

矩形之各邊相等者,曰正方形。



90. 定理.

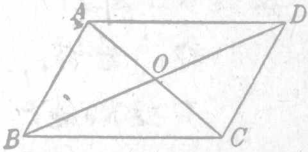
平行四邊形中:

(1)對邊相等;

(2 對角相等;

(3)對角線互相等分.

設在▱$ABCD$中,對角線AC, BD之交點為O。



求證 (1) $AB=DC$,

$AD=BC$;

(2) $\angle BAD=\angle BCD$, $\angle ABC=\angle ADC$;

(3) $OA=OC$, $OB=OD$。

【證】 (1) 及 (2), 因 $AB \parallel DC$,

故 $\angle ABD=\angle BDC$; (§66(1))

因 $AD \parallel BC$,

故 $\angle DBC=\angle ADB$; (§66(1))

又因 BD 爲 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CDB$ 之公共邊;

故 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$。 (§36)

$\therefore$ $AB=DC, AD=CB$;

$\angle BAD=\angle BCD$。

又 $\angle ABD+\angle DBC=\angle BDC+\angle ADB$, (§7(2))

$\therefore$ $\angle ABC=\angle ADC$。

(3) 在 $\triangle AOB$ 與 $\triangle COD$ 中,

$\angle ABO=\angle CDO$, (§66(1))

$\angle BAO=\angle DCO$, (§66(1))

$AB=CD$, (本節(1))

故 $\triangle AOB \equiv \triangle COD$。 (§36)

$\therefore$ $OA=OC,\quad OB=OD$。

91. 系一。平行四邊形之任一對角線,分原形爲全相等之兩三角形。

92. 系二。平行四邊形之兩隣角互爲補角。

93. 系三。平行線之夾於兩平行線間之部分相等。

94. 系四。兩平行線間之距離卽其所夾

公共垂線之長),處處相等。

95. 定理。

四邊形中,有下列條件之一者:

(1)對邊相等,

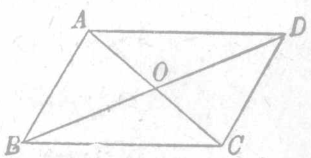
(2)對角相等,

(3)一雙對邊相等且平行,

(4)對角線互相等分,

則此四邊形爲平行四邊形。

四邊形 $ABCD$ 之對角線 AC, BD 之交點爲 O。設



(1) $AB=DC, AD=BC$。

(2) $\angle ABC=\angle CDA$,

$\angle BAD=\angle BCD$。

(3) $AB \parallel CD, AB=CD$。

(4) $OA=OC, OB=OD$。

求證合上列條件之一者, $ABCD$ 爲平行四邊形。

【證】 (1) 就 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ 中,

$AB=CD$, (假設)

$BC=AD$, (假設)

AC 爲公共邊,

$\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$。 (§41)

$\therefore$ $\angle ACB = \angle CAD$, $\angle BAC = \angle ACD$。

$\therefore$ $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$。 (§68(1))

$\therefore$ $ABCD$ 爲平行四邊形。

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2rt.\angle$。(§69)

同理在 $\triangle ADC$ 中, $\angle ADC + \angle DCA + \angle CAD = 2rt.\angle$。

故 $\angle ABC + \angle ADC + \angle BCD + \angle BAD = 4rt.\angle$。

然 $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BCD = \angle BAD$, (假設)

故 $\angle ABC + \angle BCD = 2rt.\angle$。

故 $AB \parallel CD$。 (§68(4))

同理 $AD \parallel BC$。

$\therefore$ $ABCD$ 爲平行四邊形。

(3) 就 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ 中,

$AB = CD$, (假設)

$\angle BAC = \angle ACD$, (何故?)

AC 爲公共邊,

故 $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$。 (§37)

$\therefore$ $\angle ACB = \angle CAD$。

$\therefore$ $AD \parallel BC$。 (§68(1))

然 $AB \parallel CD$。 (假設)

∴ $ABCD$ 爲平行四邊形。

(4) 就 $\triangle AOB$ 與 $\triangle COD$ 中,

$\angle AOB=\angle COD$, (§29)

$OA=OC, OB=OD$, (假設)

故 $\triangle AOB \equiv \triangle COD$。 (§37)

∴ $\angle BAO=\angle DCO$。

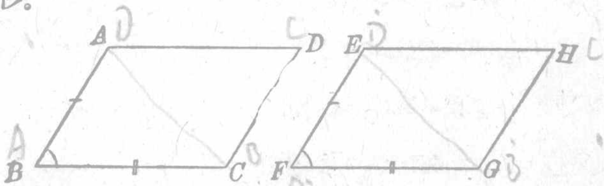
∴ $AB \parallel CD$。 (§68(1))

同理, $AD \parallel BC$

∴ $ABCD$ 爲平行四邊形。

96. 定理。

一平行四邊形之兩隣邊及其夾角,各等於他一平行四邊形之兩隣邊及其夾角,則兩形爲合同形。



設就 $\square ABCD$ 與 $\square EFGH$ 中, $AB=EF$, $BC=FG$, $\angle B=\angle F$。

求證 $\square ABCD \equiv \square EFGH$。

【證】 移置 $\square EFGH$ 於 $\square ABCD$ 上,使 FG 與 BC 相

重合，EH 與 AD 同在 BC 之一傍則因 $\angle F=\angle B$, $FE=BA$, 故 FE 與 BA 相重而 E 與 A 合。

今因 $\angle A$ 爲 $\angle B$ 之補角，$\angle E$ 爲 $\angle F$ 之補角， (§66(4))

而 $\angle B=\angle F$, (假設)

故 $\angle E=\angle A$。 (§23)

故 EH 與 AD 相重。

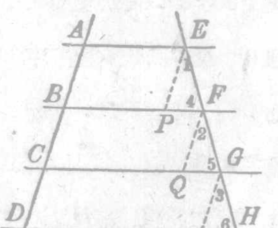
同理 $\angle G=\angle C$, GH 與 CD 相重。

因兩直線祇相交於一點，故 H 與 D 相合。 (§8(2)a)

$\therefore \quad \square EFGH=\square ABCD$。

97. 定理。

數平行線於一截線上，截成相等之線段時，則其於他一截線上，亦截成相等之線段。



設 $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$,

$AB=BC=CD$。

求證 $EF=FG=GH$。

【證】 引 EP, FQ, GR 各平行於 AD。

則 $EP \parallel FQ \parallel GR$, (§62)

而 $EP=FQ=GR$。 (何故?)

又 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$, $\angle 4=\angle 5=\angle 6$。 (§66(3))

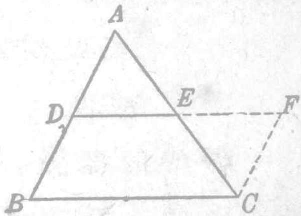
故　　$\triangle EPF \equiv \triangle FQG \equiv \triangle GRH$。　　(§48)

$\therefore$　　$EF = FG = GH$。

98. 系。 過三角形一邊之中點,引底邊之平行線,必過他邊之中點。

99. 定理。

連三角形兩邊中點之線段,平行於第三邊,且等於其半。



設 D, E 各爲 $\triangle ABC$ 兩邊 AB, AC 之中點。

求證　　$DE \parallel BC$,

$DE = \frac{1}{2} BC$

【證】　延長 DE 至 F,使 $EF = DE$。連結 CF。

則　　$\triangle AED \equiv \triangle CEF$, $\angle DAE = \angle ECF$, $AD = CF$。　(何故?)

故　　$AD \parallel CF$,　即 $BD \parallel CF$,　　(§68(1))

且　　$BD = CF$。　　(何故?)

故　　$BDFC$ 爲平行四邊形。　　(§95(3))

故　　$DF \parallel BC$, $DF = BC$,　　(§90(1))

即　　$DE \parallel BC$, $DE = \frac{1}{2} BC$。

100. 系。 連結梯形兩腰中點之線段,平行

於兩底,且等於兩底之和之半;其夾於兩對角線間之部分,等於兩底之差之半。

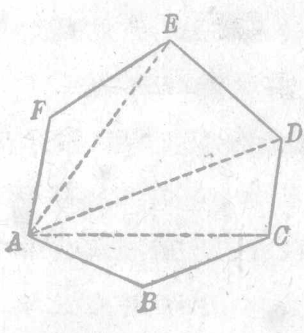
101. 定義。 多邊形。

以多數直線所圍平面之一部分,概稱**多邊形或多角形**。其邊數與角數相等。依其邊數分爲四邊形、五邊形、六邊形等等。

多邊形之各邊相等及各角相等者曰**正多邊形**或**正多角形**。無限延長多邊形之各邊,而多邊形恆全在其一旁者曰**凸多邊形**;否則曰**凹多邊形**。

102. 定理。

多邊形內角之和,等於以其邊數減 2 之差乘二直角。



設多邊形 $ABCDE\cdots\cdots$ 之邊數爲 n。

求證其內角之和爲 $2(n-2)rt.\angle$。

【證】 從頂點 A 引諸對角線,則分此多邊形爲 $(n-2)$ 個三角形,而此諸三角形內角之總和卽爲此多邊形內角之和。

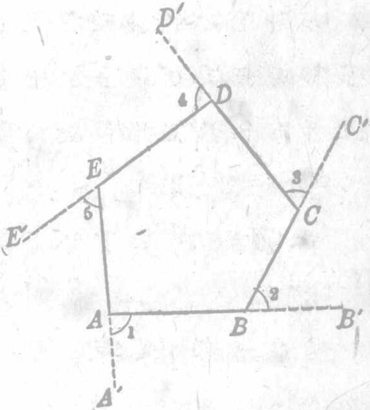
然每一三角形內角之和爲$2rt.\angle$。　(§69)

故多邊形內角之和$=(n-2)2rt.\angle=2(n-2)rt.\angle$。

103. 系。 正n邊形每一內角爲$\frac{2(n-2)}{n}rt.\angle$

104. 定理。

順次延長凸多邊形各邊,所得諸外角之和,等於四直角。



設多邊形之邊EA, AB, BC,……各延長至A', B', C'……所得外角順次爲$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$,……。

求證　$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\cdots\cdots=4rt.\angle$。

【證】　因(一內角)+(隣接外角)$=2rt.\angle$,

設多邊形之邊數爲n,則

$$(n\text{個內角之和})+(n\text{個外角之和})=2nrt.\angle。$$

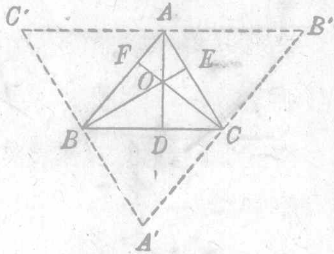
然　n個內角之和$=2(n-2)rt.\angle$,　(§102)

$\therefore$ n個外角之和$=2nrt.\angle-2(n-2)rt.\angle=4rt.\angle$。

105. 系。 正n邊形每一外角爲$\frac{4}{n}rt.\angle$。

106. 例題。

三角形之三項垂線共交於一點。



設 AD, BE, CF 爲 $\triangle ABC$ 之三項垂線。

求證 AD, BE, CF 共交於一點 O,

【證】 過 A,B,C 各引對邊之平行線,得 $\triangle A'B'C'$。

因四邊形 $ABCB'$ 及 $ACBC'$ 各爲平行四邊形, (§86)

故 $AB'=BC=AC'$。 (§90(1))

故 A 爲 $B'C'$ 之中點。

又 $AD \perp B'C'$, (§64)

故 AD 爲 $B'C'$ 之中垂線,

同理, BE, CF 各爲 $A'C', A'B'$ 之中垂線。

故 AD, BE, CF 共交於一點 O。 (§82)

【註】 三角形之項垂線之交點曰三角形之垂心。

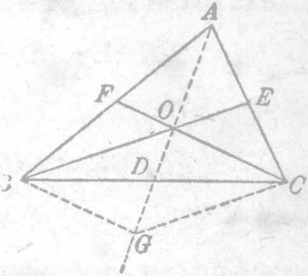
107. 例題。

三角形之三中線共交於一點,此點與各項點之距離,爲由各項至其對邊中點之距離之三分之二。

設 AD, BE, CF 爲 $\triangle ABC$ 之三中線。

求證 AD, BE, CF 共交於一點 O 且 $AO=\frac{2}{3}AD$。

【證】　設 BE, CF 相交於 O。



連結 AO 且延長之交 BC 於 D。

過 B 引 $BG \parallel CF$，交 AO 之延線於 G。

連結 CG，則因 F 為 AB 之中點而 $FO \parallel BG$，

故 O 為 AG 之中點。　(§98)

又因 O, E 各為 AG, AC 之中點，

故 $OE \parallel CG$ 卽 $BO \parallel GC$。　(§99)

故 $BGCO$ 為平行四邊形。　(§86)

故 $DB=DC,\ DO=DG$。　(§90(3))

故 AD 為中線而 $AO=\frac{2}{3}AD$。

【註】　三角形三中線之交點曰三角形之重心。

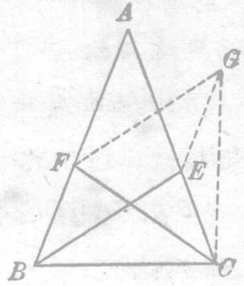
108.　例題。

三角形之兩分角線相等，則此三角形為二等邊。

設 BE, CF 各為 $\triangle ABC$ 之兩分角線，$BE=CF$。

求證　$AB=AC$。

【證】 從F引$FG \parallel BE$。從E引$EG \parallel BF$。



連結CG,則$BEGF$爲平行四邊形,而

$BF=EG,\ FG=BE=CF,$ (§90(1))

$\angle FGE=\angle FBE=\frac{1}{2}\angle ABC$。 (§90(2))

故$\triangle FCG$爲二等邊,而$\angle FGC=FCG$。 (§43)

今如$AB \neq AC$,則必$AB<AC$或$AB>AC$。

若$AB<AC$則必$\angle ABC>\angle ACB$……………(1); (§53)

若$AB>AC$則必$\angle ABC<\angle ACB$……………(2)。 (§53)

假定$\angle ABC>\angle ACB$,卽$\frac{1}{2}\angle ABC>\frac{1}{2}\angle ACB$,

則 $\angle FBE>\angle FCE$, 卽$\angle FGE>\angle FCE$。 (§7(9))

故 $\angle EGC<\angle ECG$, (§7(6))

故 $CE<EG$, 卽$CE<BF$, (§52)

於是就$\triangle BEC$與$\triangle CFB$中,

$BE=CF, CE<BF, BC$爲公共邊,

故 $\angle CBE<\angle BCF$。 (§40)

故 $2\angle CBE<2\angle BCF$。

卽 $\angle ABC<\angle ACB$。此與前所假定者相反。

即假定$\angle ABC > \angle ABC$時,當得自相矛盾之結果,故(1)不能成立可知。

同理,若假定$\angle ABC < \angle ACB$時,亦必得自相矛盾之結果,故(2)亦不能成立。

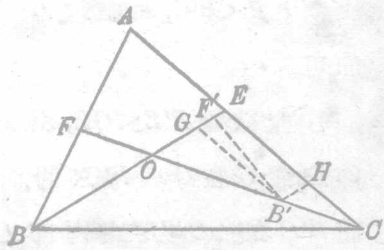
今(1)(2)既均不能成立,則不得不$\angle ABC = \angle ACB$,即不得不

$$AB = AC。$$

【註】歸謬法。 證一定理時,先否定其終結,由此否定,乃推得一與常理相背或自相矛盾之結果,於是斷此否定爲誤,而原有之終結,不得不眞。此證法曰歸謬法。上題即其一例。

109. 例題。

三角形兩邊不相等,則其對角之兩分角線不相等,大角之分角線較小。



設BE, CF爲$\triangle ABC$之分角線。$AB < AC$。

求證　$BE < CF$。

【證】 設BE, CF交於O,

則因 $\angle B > \angle C$, (§53)

故 $\angle OBC > \angle OCB$。

故 $OB < OC$。 (§52)

是已知 BE 之一部分,比 CF 之一部分小。故欲證 $BE < CF$,必須比較各線段中之另一部分 OE 與 OF 之大小。但如 $OE = OF$ 或 $OE < OF$,則 $BE < CF$ 自不待言,故僅須就 $OE > OF$ 論之。

今設 $OE > OF$,在 OE 上取 $OF' = OF$,又在 OC 上取 $OB' = OB$,

則 $BF' = B'F$。 (何故?)

故欲 $BE < CF$,必須 $F'E < B'C$。

從 B' 引 $B'H \parallel BE$,$B'G \parallel CA$,則得 $\square GB'HE$ 而 $GE \mathrel{\underline{\parallel}} B'H$。故欲 $F'E < B'C$,如能證得 $F'E < GE$, $B'H < B'C$ 同時成立即可。

今欲證 $F'E < GE$,須先證 F' 在 G 與 E 之間,換言之,即須證 G 在 O 與 F' 之間。而欲證 G 在 O 與 F' 之間,須先證 $B'G$ 在 $\angle OB'F'$ 之內即 $\angle OB'F' > \angle OB'G$。

然 $\angle OB'F' = \angle OBF = \frac{1}{2}\angle B$, (何故?),

$\angle OB'G = \angle OCA = \frac{1}{2}\angle C$。(何故?) 而 $\frac{1}{2}\angle B > \frac{1}{2}\angle C$,

故 $\angle OB'F' > \angle OB'G$。

次欲證 $B'H<B'C$,須先證 $\angle B'CH<\angle B'HC$。

然　$\angle B'HC=\angle CEB>\angle ABE=\frac{1}{2}\angle B$,　(何故?)

而　$\angle B'CH=\frac{1}{2}\angle C$,

故　$\angle B'CH<\angle B'HC$。

先決條件,旣已次第判明成立,於是逐層倒推,以達原題之終結,而知其成立。學者可自整理上文,寫出一普通形式之證。茲不贅。

【註】 **分析法**。 證一定理時,先姑承認其終結,以推及致此終結之原因,再進而推及致此原因之原因,層層相因,終乃達一已知事實;於是逐層倒推,以得原來之終結,而完成本定理之證。如此證法曰分析法。

例如,欲有 A 必先有 B,有 B 必先有 C,窮本求源,以達於 G,G 能成立,乃逐層倒推,由 G 而……而 C 而 B 而 A,則 A 成立無疑矣。

習題

1. 矩形之對角線相等;反之,平行四邊形之對角線相等者必為矩形。

2. 菱形之對角線互相垂直且等分其對角;反之,平行四邊形之對角線互相垂直或等分其對角者必為

菱形。

3. 在▱$ABCD$之四邊AB, BC, CD, DA上,各取E, F, G, H四點,而使$AE=CG, BF=DH$,則$EFGH$為平行四邊形。

4. 設就上題$ABCD$為正方形,而$AE=BF=CG=DH$,則$EFGH$為正方形。

5. 順次連結一四邊形之中點,則得一平行四邊形;若此四邊形為菱形,矩形,正方形,則如何?

6. 等腰梯形之(1)各底與其等腰成等角,

(2)兩對角互為補角,

(3)兩對角線相等。

7. 在直線AB之兩側,作▱$ABCD$及▱$ABEF$,則$CDEF$亦為平行四邊形。

8. 四邊形一雙對邊之中點及兩對角線之中點為一平行四邊形之四頂。此題有例外,試說明之。

9. ▱$ABCD$一雙對邊AB, CD之中點為E, F,則BF, DE三等分對角線AC。

10. 延長▱$ABCD$之相隣兩邊AB, AD至E, F而令$BE=AB, DF=AD$,則三點E, C, F在一直線上。

11. 直角三角形斜邊之中點與三頂等距離。

12. 設直角三角形之一銳角為他銳角之兩倍,則其斜邊必為最短邊之兩倍。

13. 連三角形各邊中點之直線,分原形為四全相等之三角形。

14. 求正五邊形、正六邊形、正八邊形、正九邊形及正十邊形各內角之度數及各外角之度數。

15. 一多邊形內角之和等於外角之和之兩倍,求此多邊形之邊數。

16. 從二等邊三角形底上之任意一點,引兩線段各平行於等腰之一,而止於另一腰上,則此兩線段之和為一定長;設取一點於底之延線上時,則如何?

17. 將▱$ABCD$之兩對邊AB, CD各依原長反向延長之,得B'及D'兩點,則$AB'CD'$為一平行四邊形。

18. 三角形之兩中線相等,則為二等邊三角形。

19. 有A, B兩點,中隔一障礙物,彼此不能相望,試求A, B之距離。

20. 有直塔AB,測量員沿水平直路DCA上向塔足A步行,在D點測得$\angle BDA=15°$,再前進300尺至C點測得$\angle BCA=30°$。問塔高幾尺?

第一編之雜題

1. 正三角形之內心,外心,垂心,重心四點相合。

2. 三角形三中線之和,比其周小,而比周之半大。

3. $\triangle ABC$之$\angle B$等於$2\angle C$,則AC小於$2AB$。

4. 平行四邊形兩對角之等分線相平行。

5. 從直角三角形ABC之直角頂C向斜邊引垂線CD,則$CD+AB>CB+AC$。

6. 三角形頂角之等分線與頂垂線所夾之角,等於兩底角之差之半。

7. 三角形兩外角之等分線與其第三內角之等分線共交於一點。(註。此點稱為三角形之傍心。)

8. 在$\triangle ABC$中,$AB>AC$;AD, BE, CF各為中線,則

(1) $\angle ADB>rt.\angle$,

(2) $BE>CF$,

(3) $\angle FCB>\angle EBC$。

9. ABC為任意三角形,引$BP\perp BA$, $CQ\perp CA$,而令$BP=BA$, $CQ=CA$。又引PM, QN各垂直於BC,則

(1)若$\angle B$, $\angle C$各為銳角,則$BC=PM+QN$,

(2)若$\angle B$, $\angle C$之一為鈍角,則$BC=PM\sim QN$。

10. 在$\triangle ABC$之各邊上,向形外作正三角形ABC', $AB'C$, $A'BC$,則$AA'=BB'=CC'$。

11. 在 $\triangle ABC$ 中 $AC>AB$，在 AC 上取 $AD=AB$，則 $\angle DBC=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$。

12. 在二等邊$\triangle ABC$之底邊 BC 上，取 $BE=BA$, $CD=CA$，則 $\angle DAE=\angle B$。

13. 從線段AB之兩端向他一直線XY上，作垂線AC, BD，則C, D與AB中點之距離相等。

14. 從$\triangle ABC$之三頂及其重心G，向不與此形相交之一直線XY引垂直線AA', BB', CC', GG'，則$AA'+BB'+CC'=3GG'$。

15. 從 $\square ABCD$ 之四頂向與此形不相交之一直線XY引垂線AA', BB', CC', DD'，則$AA'+CC'=BB'+DD'$。

16. 從二等邊三角形底邊上之任意一點至兩腰距離之和爲一定長。

17. 從二等邊三角形底邊之延線上之任意一點至兩腰距離之差爲一定長

18. 從正三角形內之任意一點至其三邊距離之和爲一定長。

19. 三角形ABC之三中線爲AD, BE, CF。以BE, CF爲兩隣邊作平行四邊形$BEGF$，連結CG，則$\triangle CFG$之三邊各等於 $\triangle ABC$ 之三中線。

20. 梯形之兩對角線若相等,則爲等腰梯形。

21. □$ABCD$外接於□$EFGH$,則兩者之對角線AC, BD, EG, FH共交於一點。

22. 設六邊形之對邊相平行,且有一雙對邊相等,則其對邊均相等。

23. 多邊形之邊數爲n,則其對角線之總數爲$\frac{n(n-3)}{2}$。

24. 相交兩直線所成之兩雙對頂角之等分線,互相垂直。

25. 兩三角形全相等之條件爲何?

26. 兩直角三角形全相等之條件爲何?

第二編

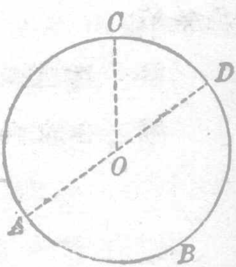
圓

第一章 基本性質

110. 定義。 圓,圓周,圓心。

(1)圓爲一平面鎖閉曲線,曲線上之任何點與曲線內一定點之距離皆相等。如下圖鎖閉曲線 ABC 爲圓。

(2)圓之長曰圓周。



(3)定點曰圓之中心,簡稱圓心。如 O 點。

111. 記圓法。

以⊙表圓,附記以圓心或圓上之三點,如上圖可記爲⊙O 或⊙ABC。

112. 定義。 半徑,直徑。

(1)自圓心至圓所引之線段曰圓之半徑。如 OC。

(2)通過圓心,兩端止於圓之線段曰圓之直徑。如 AD。

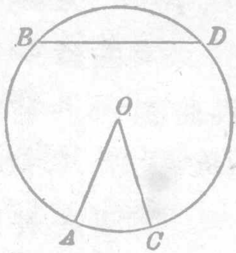
113. 定義。 同心圓。

同一中心之諸圓曰同心圓。

114. **定義。弦。**

連結圓上兩點之線段曰弦。如 BD。

115. **定義。弧。**



圓之一部分曰弧,設兩弧之和爲全圓,則此兩弧互稱曰共軛弧。其中大者曰優弧,小者曰劣弧。通常稱弧係指劣弧而言。如圖曲線 AC 爲劣弧,ABC 爲優弧。

116. **定義。圓心角。**

兩半徑所夾之角曰圓心角。如 $\angle AOC$。

117. **公設。**

以任意一點爲圓心,任意線段爲半徑,必可作一圓。

118. **定理。**

點之在圓外者與圓心之距離大於半徑,在圓上者等於半徑,在圓內者小於半徑。

119. **定理。**

點與圓心之距離大於半徑者在圓外,等於半徑者在圓上,小於半徑者在圓內。

120. 定理。

同圓或等圓之半徑相等。(自定義推得)

121. 定理。

同圓或等圓之直徑相等。(自定義推得)

122. 定理。

等半徑諸圓全相等。(用疊合法證明)

123. 定理。

半徑不等之同心圓無公共點。(自定義推得)

124. 定理。

直徑分圓爲全相等之二部分。(用疊合法證明)

此二部分各稱**半圓**。

125. 定理。

互相垂直之兩直徑分圓爲全相等之四部分。(自§124推得)

此四部分各稱**象限**或曰**四分圓**。

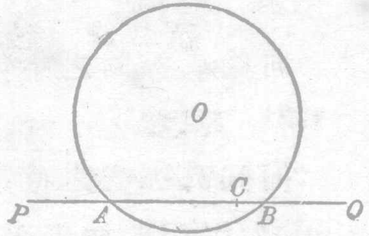
126. 定理。

一直線與一圓之交點不能多於兩個。

【證】 假若直線PQ與⊙O交於三點A, B, C,則OA, OB, OC皆爲半徑,而

$OA=OB=OC$,

(§120)



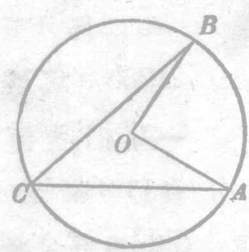
是自圓心一點至 PQ 所引諸斜線中可有三個相等者,顯與 §58 之定理衝突。故 PQ 與 $\odot O$ 之交點不能多於兩個。

習題

1. 試證圓之中心僅有一個。

2. AB 為圓之直徑, C 為圓上一點,則 $\angle ACB$ 為直角。

3. OA, OB 為 $\odot O$ 之半徑, C 為圓上一點,如 $\angle ACB$ 為直角,則 AB 為 $\odot O$ 之直徑;即 A, O, B 三點在一直線上。



4. 右圖內 O 為圓心,試證 $\angle AOB=2\angle ACB$。

提示 過 O, C 作直徑.

6. 自圓之直徑上一點,向兩側引相等之線段,止於圓上,則此兩線段與直徑作成之角相等。

7. 矩形四頂點在以其對角線之交點為圓心之圓上.

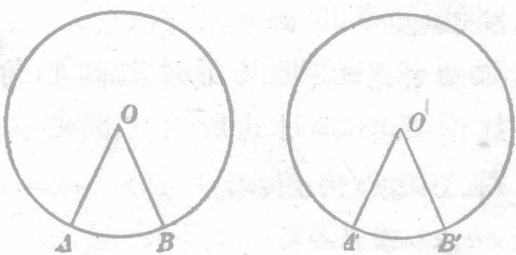
第二章 圓心角,弧,弦

127. 定理.

在同圓或等圓中,

(1)如兩圓心角相等,則其所對之弧亦等;

(2)如兩圓心角不等,則其所對之弧亦不等,大角所對之弧較大.



$\odot O$ 與 $\odot O'$ 爲兩等圓.

(1)設 $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

求證 弧 $AB =$ 弧 $A'B'$.

【證】 置 $\odot O'$ 於 $\odot O$ 上,使 O' 與 O 合,$O'A'$ 與 OA 相重,B 與 B' 在 OA 之同側.則因 $\angle AOB = \angle A'O'B'$(假設)故 $O'B'$ 與 OB 相重.

今 $O'A' = OA,\ O'B' = OB,$ (§120)

故 A' 與 A 合,B' 與 B 合.

$\therefore$ 弧 $AB=$ 弧 $A'B'$。

(2) 設 $\angle AOB>\angle A'O'B'$。

求證 弧 $AB>$ 弧 $A'B'$。

提示: 亦用疊合法證明,學者自習之。

【註】 定理之在等圓爲眞確者,在同圓亦必眞確;反之亦然。(§122)

128. 定理。

在同圓或等圓中,

(1) 如兩弧相等,則其所對之圓心角亦等;

(2) 如兩弧不等,則其所對之圓心角亦不等大弧所對之圓心角較大。

(圖見 §127)

$\odot O$ 與 $\odot O'$ 爲兩等圓。

(1) 設弧 $AB=$ 弧 $A'B'$。

求證 $\angle AOB=\angle A'O'B'$。

【證】 比較 $\angle AOB$ 與 $\angle A'O'B'$ 之大小,不外 $\angle AOB \gtreqless \angle A'O'B'$。

今若 $\angle AOB<\angle A'O'B'$,

則 弧 $AB<$ 弧 $A'B'$; (§127)

又若 $\angle AOB>\angle A'O'B'$,

則　　　弧 $AB >$ 弧 $A'B'$;　　　(§127)

均與假設衝突,故必 $\angle AOB = \angle A'O'B'$。

(2)設弧 $AB >$ 弧 $A'B'$。

求證　　$\angle AOB > \angle A'O'B'$。

【證】　今若 $\angle AOB = \angle A'O'B'$, 則弧 $AB =$ 弧 $A'B'$; 又若 $\angle AOB < \angle A'O'B'$, 則弧 $AB <$ 弧 $A'B'$; 均與假設衝突,故必 $\angle AOB > \angle A'O'B'$。

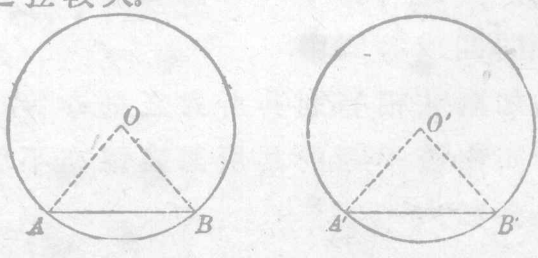
【註】　本節定理爲前節定理之逆,其內容與逆定理定則(§40,註)所述者相合。故前節定理既證得後,本節定理之眞確本不待證。以後凡遇此類逆定理時,不再詳證。

129.　定理。

在同圓或等圓中,

(1)如兩弧相等,則其所對之弦亦等;

(2)如兩弧不等,則其所對之弦亦不等,大弧所對之弦較大。



$\odot O$ 與 $\odot O'$ 爲兩等圓。

(1)設弧 $AB=$ 弧 $A'B'$。

求證 $AB=A'B'$。

【證】 連結 $OA, OB, O'A', O'B'$ 則在 $\triangle OAB$ 與 $\triangle O'A'B'$ 中，

$OA=O'A', OB=O'B',$ (§120)

$\angle AOB=\angle A'O'B',$ (何故?)

$\therefore$ $\triangle AOB\cong\triangle A'O'B'$。 (§37)

$AB=A'B'$。

(2)設弧 $AB>$ 弧 $A'B'$。

求證 $AB>A'B'$。

【證】 在 $\triangle AOB$ 與 $\triangle A'O'B'$ 中，

$OA=O'A', OB=O'B';$ (§120)

又因 弧 $AB>$ 弧 $A'B'$, (假設)

故 $\angle AOB>\angle A'O'B';$ (§128)

$\therefore$ $AB>A'B'$。 (§39)

130. 定理。

在同圓或等圓中，

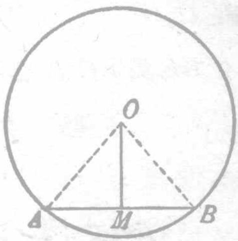
(1)如兩弦相等，則其所對之弧亦等；

(2)如兩弦不等，則其所對之弧亦不等，大弦所對之弧較大。

本定理爲前節定理之逆,其內容與逆定理定則所述者相合,故其眞確無待證明。

131. 定理。

連結圓心與弦之中點之直線垂直於此弦。



設 AB 爲 $\odot O$ 之弦, M 爲 AB 之中點。

求證 $OM \perp AB$。

【證】 連結 OA, OB 則

$\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ (何故)?

$\therefore \angle AMO = \angle BMO = rt. \angle$。

$\therefore OM \perp AB$。

132. 系一。 自圓心至弦之垂線,平分弦及弦所對之弧。

133. 系二。 弦之中垂線,過圓之中心,且平分弦所對之弧。

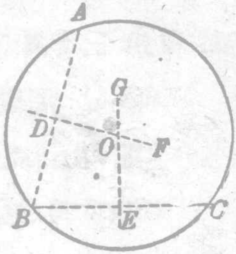
134. 系三。 圓之中心爲任何不平行兩弦中垂線之交點。

135. 定理。

過不在一直線上之三點之圓惟一.

設 A, B, C 三點不在一直線上。

求證過 A, B, C 三點之圓惟一。



【證】 連結 AB, BC。引 AB, BC 之中垂線 DF, EG。因 A, B, C 三點不在一直線上,故易知 DF 與 EG 決不平行。

令 DF 與 EG 之交點爲 O。因 O 在 DF 上,

故 $$OA=OB。 \qquad (§78(1))$$

又因 O 在 EG 上,

故 $$OB=OC。 \qquad (§78(1))$$

故 O 與 A, B, C 之距離相等。

因 DF 與 EG 之交點惟一,故除 O 以外,別無他點與 A, B, C 之距離相等。

故以 O 爲圓心, OA 爲半徑之圓必過 B, C;且爲過所設三點惟一之圓。

136. 系。 不全合之兩圓最多交於兩點。

蓋設兩圓可交於三點,則兩圓全相合(§135)與所設不符也。

137. 定義。 三角形之外接圓,圓之內接三角形.

過三角形三項之圓曰三角形之外接圓,此三角形曰圓之內接三角形。

138. 定理。

三角形之外心爲其外接圓之中心。(§82)

139. 定理。

在同圓或等圓中,

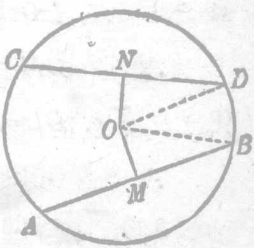
(1)等弦與圓心之距離相等;

(2)弦不相等,則其與圓心之距離不等,而大弦與圓心之距離較近。

AB, CD 爲 $\odot O$ 之弦, $OM \perp AB$, $ON \perp CD$。

(1)設 $AB = CD$,

求證 $OM = ON$。



【證】 連結 OB, OD 則在直角三角形 OBM 與 ODN 中,

$\because$ $AB = CD$ (假設)

$\therefore$ $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$ (§7(7))

即 $MB = ND$

又 $OB = OD$ (§120)

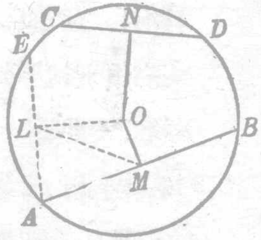
$\therefore$ $\triangle OBM \equiv \triangle ODN$ (§49)

$\therefore$ $OM = ON$。

(2)設 $AB>CD$。

求證　$OM<ON$。

【證】過 A 點引弦 $AE=CD$。作 $OL\perp AE$。連結 LM。則因 $AB>CD$ 而 $CD=AE$，故 $AB>AE$。又因 AM, AL 各為 AB, AE 之半 (§132)



故　$AM>AL$。

∴　$\angle ALM>\angle AML$。 (§53)

又 $\angle OLM, \angle OML$ 各為 $\angle ALM, \angle AML$ 之餘角。

故　$\angle OLM<\angle OML$。 (§7(3))

∴　$OM<OL$。 (§52)

但　$OL=ON$。 (本節(1))

∴　$OM<ON$。

140. 定理。

在同圓或等圓中，

(1)與圓心距離相等之弦相等；

(2)與圓心距離不等之弦不等，而距離較近之弦較大。

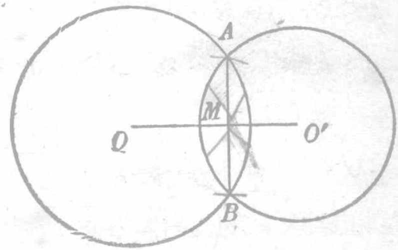
本節定理為前節定理之逆，根據逆定理定則，其眞

確不待證明。

141. **系。直徑爲圓之最大弦。**

142. **定理。**

兩圓相交,則其聯心線爲公弦之中垂線。



設⊙O與⊙O'交於A, B兩點。

求證　OO'(聯心線)爲AB(公弦)之中垂線。

【證】　連結AB,取其中點M。連結OM與$O'M$。則因M爲AB之中點。

故　$OM\perp AB$,　(§131)

同理　$O'M\perp AB$。

故OMO'爲一直線,垂直於AB,且過其中點M。

習題

1. AB, CD爲圓之直徑,則弧AC=弧BD, 弧AD=弧BC。

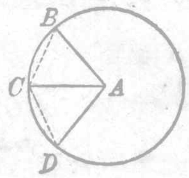
2. 自圓上一點A引直徑AB及弦AC,則與AC平行之半徑平分弧BC。

3. A, B, C爲圓上之三點,且弧AB爲弧BC之半,

則 $AB > \frac{1}{2} BC$。

4. 在同圓或等圓中,一圓心角爲他圓心角之二倍,則其所對之弧亦爲他圓心角所對之弧之二倍。又其所對之弦亦爲他圓心角所對之弦之二倍否?

5. 右圖內,A爲圓內任意一點,設 $\angle BAC = \angle DAC$, $AB = AD$, 則弧 $BC =$ 弧 CD。

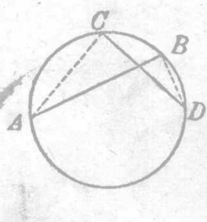


6. 圓上一點與兩半徑之距離相等,則此點爲兩半徑所截弧之中點。

7. 在同圓或等圓中,(1)如兩圓心角相等,則其所對之弦亦等;(2)如兩圓心角不等,則大角所對之弦較大

8. 述第七題之逆,並證其合理。

9. $\triangle ABC$ 爲圓之內接三角形,如 $\angle A > \angle B$, 則弧 $BC >$ 弧 AC。



10. 右圖內 $AC > BD$, 且弧 ACB 及 CBD 皆爲劣弧,則 $AB > CD$。

11. 一直線界於兩同心圓間之部分相等。

12. 過兩等弦交點之半徑等分兩弦所成角。

13. 不爲直徑之兩弦不能互相平分。

14. AB爲圓之定弦,M爲其中點,則過 M 之弦,以何

者爲最大?何者爲最小?

15. 兩圓相交,過兩交點引兩線段互相平行,各止於兩圓上,則其長相等.

16. 兩圓相交,自一交點引線段止於兩圓上,且與聯心線平行,則此線段爲兩圓聯心線之二倍.

第三章　切線

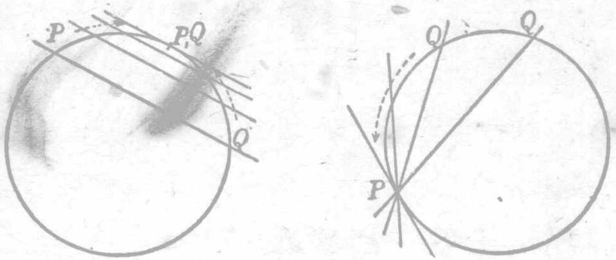
143.　定義。割線。

與圓交於兩點之直線(無限長)曰割線。

144.　定義。切線,切點。

一直線與圓僅會於一點者曰切線,或稱直線切圓於其點,此點曰切點。

如圖:



(1)令直線與圓交於P,Q兩點。設此線漸離圓心向外移動,且常與其原來位置平行,則P,Q兩點漸相接近,終至相合,此時直線與圓僅會於一點,故爲圓之切線。

(2)令直線與圓交於P,Q兩點。設PQ按P點旋轉,則Q點沿圓移動,漸近於P,終與P點相合,此時直線與圓相切於P點。

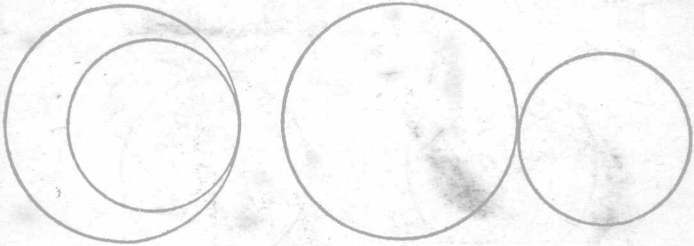
145.　定義。兩圓相切,兩圓內切,兩圓外切,

內切圓,外切圓。

(1)兩圓僅會於一點時,曰兩圓相切。

(2)兩圓相切,有一圓含於他圓之內時,曰兩圓內切。在內者曰內切圓,在外者曰外切圓。

(3)兩圓相切,無一圓含於他圓之內時,曰兩圓外切。各圓曰外切圓。



內切　　　　外切

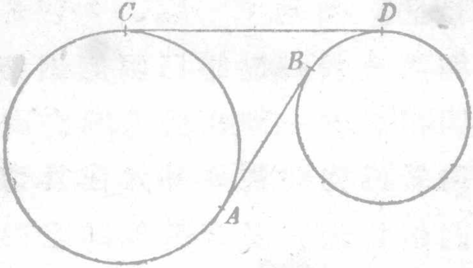
146. **定義。切線長。**

自圓外一點至圓之切線長爲該點與切點間之距離。

147. **定義。外公切線,內公切線。**

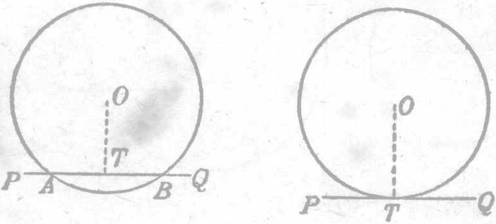
(1)兩圓之公切線不截其聯心線者曰外公切線。如 CD。

(2)兩圓之公切線截其聯心線者曰內公切線。如 AB。



148. 定理.

圓之切線垂直於過切點之半徑.



設 PQ 爲 $\odot O$ 之切線, T 爲切點.

求證 $OT \perp PQ$.

【證】 假若 PQ 不爲切線而爲割線,且與圓交於 A, B 兩點,則 AB 之中點 T 與 O 之聯線垂直於 PQ(§131),令 PQ 離 O 移動,且常與其原來位置平行.此舉於 $OT \perp PQ$ 一性質毫無變更(§64),惟 A, B 兩點漸趨近於 T,最後當 A, B 合於 T 時,PQ 變爲切線, T 爲切點(§144), OT 爲半徑;而 OT 仍垂直於 PQ,故如定理所云.

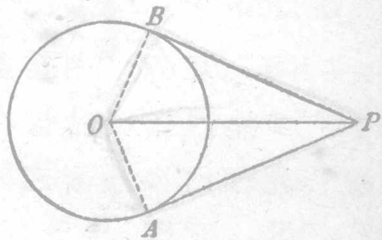
149. 系一。過圓上一點之切線惟一。

150. 系二。自切點引切線之垂線必過圓心。

151. 系三。在半徑外端之垂線爲圓之切線。

152. 定理。

自圓外一點至圓之兩切線,其長相等。



設 PA, PB 爲自 P 點至 $\odot O$ 之兩切線; A, B 爲切點。

求證　$PA=PB$,

【證】 連結 OA, OB, OP。

則在 $\triangle OAP$ 與 $\triangle OBP$ 中,

$OA=OB$,　(§120)

OP 爲公共邊,

$\angle OAP, \angle OBP$ 均爲直角,　(§148)

$\therefore$　$\triangle OAP \equiv \triangle OBP$,　(§49)

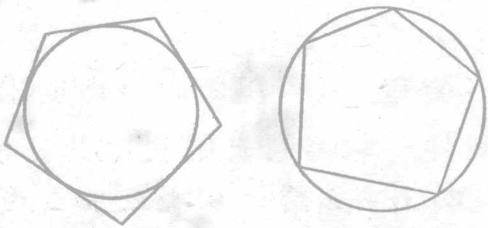
$\therefore$　$PA=PB$。

153. 系。自圓外一點至圓之兩切線與連

此點及圓心之直線成等角。

154. 定義。 外切多邊形,內切圓.

多邊形諸邊與圓相切者曰圓之外切多邊形,此圓曰多邊形之內切圓。



155. 定義。 內接多邊形,外接圓。

多邊形之頂點皆在圓上者曰圓之內接多邊形,此圓曰多邊形之外接圓。

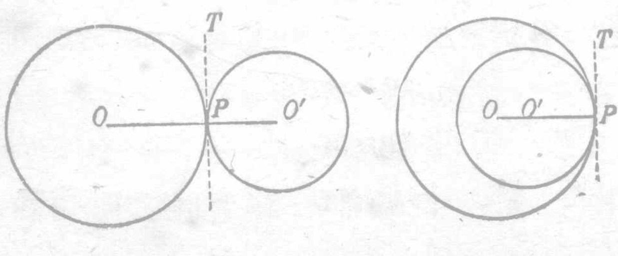
156. 定理。

三角形之內心爲其內切圓之中心。(§81)

157. 定理。

兩圓相切,則其聯心線過切點。

設⊙O與⊙O'相切於P點。



求證 O, O', P 三點在一直線。

【證】 令 PT 爲公切線。連結 OP 與 $O'P$。

則 $OP \perp PT, O'P \perp PT$。 (§148)

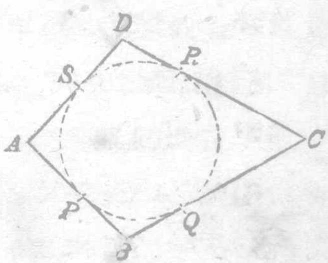
故 $\angle OPT$ 與 $\angle O'PT$ 皆爲直角。故 O, O', P 三點在一直線上。

158. 系一。 兩相切圓之公切線垂直於聯心線。

159. 系二。 過兩相切圓之切點有惟一之公切線。

160. 例題。

圓之外切四邊形兩兩對邊之和相等。



設 $ABCD$ 爲圓之外切四邊形；P, Q, R, S 爲其四邊與圓相切之點。

求證 $AB+CD=AD+BC$。

【證】 自 §152 知

$$AP=AS,$$

$$BP=BQ,$$

$$CR=CQ,$$

$$DR=DS;$$

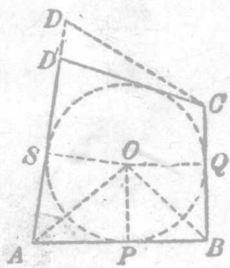
相加得 $AB+CD=AD+BC$。

161. 例題。

設四邊形兩兩對邊之和相等,則此四邊形可容一內切圓。

就四邊形 $ABCD$ 中,設 $AB+CD=AD+BC$。

求證 四邊形 $ABCD$ 可容一內切圓。



【證】 引 $\angle A$, $\angle B$ 之分角線 AO, BO,設其交點為 O。由 O 引 OP, OQ, OS 使各垂直於 AB, BC, DA。

則 $OP=OQ=OS$。 (§80)

故以 O 為圓心,OP 為半徑之圓必過 Q, S 兩點,且與 AB, BC, DA 各相切於 P, Q, S。 (§151)

今若此圓不與 CD 相切而與過 C 點之直線 CD' 相切。如 CD' 交 AD(或 AD 之延長線)於 D' 點,

則 $AB+CD'=BC+AD'$, (§160)

但 $AB+CD=BC+AD$, (假設)

故 $CD\sim CD'=AD\sim AD'$。

但 $AD\sim AD'=DD'$,

$CD\sim CD'<DD'$。 (§34)

是 $DD'<DD'$。此種矛盾乃由於假定 CD 不與圓相切而生,故必 CD 與圓相切。

故 $ABCD$ 可容一內切圓。

習題

1. 圓之兩切線平行,則連兩切點之直線爲圓之直徑。

2. 一直線與一圓位置之關係有幾種?

3. 兩平行線於圓上截取相等之兩弧。

提示　分三部證明:(1)設兩直線皆爲割線。

(2)設一爲割線一爲切線。

(3)設兩線皆爲切線。

4. 兩相切圓之中心爲 O 與 O',過切點作一直線,交 $\odot O$ 於 P, $\odot O'$ 於 P',則 $OP \parallel O'P'$。

5. 兩圓之內公切線之長相等。

6. 兩圓之外公切線之長相等。

7. 大小兩圓位置之關係有幾種? 設大小兩圓之半徑各爲 R 及 r,聯心線之長爲 l,則兩圓在不同位置時,R, r, l 應合乎何種條件?

何種條件

第四章 度角法及圓周角

162. 定義。 有理數,無理數.

凡數有可以分數表示者,有不可以分數表示者,例如3可以分數$\frac{3}{1}$或$\frac{6}{2}$表示之,0.6可以分數$\frac{3}{5}$表示之。但$\sqrt{2}$則不可以分數表示之,何則? 假若$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$(m, n爲兩個無公約之整數),則$2=\frac{m\cdot m}{n\cdot n}$,此爲不可能之事,因$m$, n無公約數也;故$\sqrt{2}$不可以分數表示之。

(1)凡可以分數表示之數曰有理數。如3, 0.6, $\frac{2}{3}$等。

(2)凡不可以分數表示之數曰無理數。如$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$等。

163. 無理數之近似值。

無理數可以其近似值表示之例如$\sqrt{2}$之近似值取小數點三位時爲1.414,取四位時爲1.4142。近似值小數點後之位數愈多愈與眞值相近。即眞值與近似值之差可使之小於任何指定之極小數,因此

如兩無理數之近似值步步相等,則兩無理數視爲相等。

164. 定義。 兩量之比。

兩同類量之比爲兩量所含同單位數量之比。

例如四尺與六尺之比爲$\frac{4}{6}$即$\frac{2}{3}$或$2\div3$。

165. 定義 可公度,不可公度。

(1)設二量之比爲有理數則可求得一第三量稱曰公度,使前二量皆爲公度之整倍數。如是二量曰可公度。

例如直線a長六尺,b長八尺,則$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$,乃有理數,今以第三量$\frac{1}{4}$尺量前二量,則a爲$\frac{1}{4}$尺之24倍,b爲32倍,皆$\frac{1}{4}$尺之整倍數,$\frac{1}{4}$尺爲a, b之公度。

(2)設二量之比爲無理數,則無公度,如是二量稱曰不可公度。

例如設a與b之比爲$\sqrt{3}$,即$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$,則a與b無公度;蓋若有公度,則a將爲b之有理數倍數,而$\sqrt{3}$將爲有理數也。

【註】 二量之比爲無理數時其比值可以此無理數之近似值表示之。

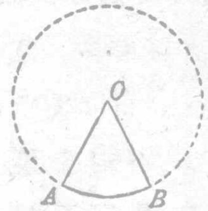
166. 圓弧之單位。

分圓周爲360等份,每份曰度;分一度爲60等份。每份曰分;分一分爲60等份,每份曰秒。

167. 定理.

圓心角可以其對弧度之。

設圓心角 $\angle AOB$ 之對弧為 AB。



求證 $\angle AOB$ 與弧 AB 所含之度數相同。

【證】 (1)設 $\angle AOB$ 所含之度數為有理數,

則 $\angle AOB$ 之度數可以$\left(\frac{m}{n}\right)^\circ$表之, m, n 為整數。 (§162)

設在 O 點之周角被分為 360 等份,則每份角截圓周之 $\frac{1}{360}$ (§127)

即 1°之圓心角對 1°之弧。

同理,設 1°之圓心角被分為 n 等份,則

$\left(\frac{1}{n}\right)^\circ$之圓心角對$\left(\frac{1}{n}\right)^\circ$之弧;

$\left(\frac{2}{n}\right)^\circ$之圓心角對$\left(\frac{2}{n}\right)^\circ$之弧;

....

$\left(\frac{m}{n}\right)^\circ$之圓心角對$\left(\frac{m}{n}\right)^\circ$之弧。

故 $\angle AOB$ 與弧 AB 所含之度數相同。

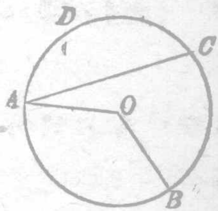
(2)設 $\angle AOB$ 所含之度數為無理數,則 $\angle AOB$ 所含

度數之近似值與弧 AB 所含度數之近似值步步相等(1)。例如設 $\angle AOB$ 含$(\sqrt{2})^\circ$,取 $\sqrt{2}$之近似值爲 1.4 時,則弧 AB 亦含 1.4°;爲 1.41 時,則弧 AB 亦含 1.41°,……其近似值步步皆等。

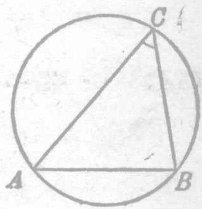
故 $\angle AOB$ 與弧 AB 所含之度數相同。 (§163)

168. 系。 在同圓或等圓中,兩圓心角之比等於其所對兩弧之比。

169. 定義。 扇形,弓形,弓形角,圓周角。



(1)弧與其兩端之半徑所圍平面之部分曰扇形。如圖 OAB 部分爲扇形。



(2)弧與連結其兩端之弦所圍平面之部分曰弓形。如圖 ADC 及 ABC 皆爲弓形。

(3)角之頂點在弓形之弧上,兩邊過此弧之兩端者曰弓形角。如圖 $\angle ACB$ 爲弓形 ACB 之弓形角。

(4)角之頂點在圓上,兩邊爲弦者曰圓周角。如圖 $\angle ACB$ 爲圓周角。

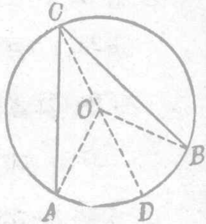
【註】 自本節定義(3)(4)觀之,弓形角與圓周

角名異而實同。

170. 定理。

圓周角可以其對弧之半度之。

設 $\angle ACB$ 爲 $\odot O$ 之圓周角,其對弧爲 ADB。



求證　$\angle ACB$ 可以 $\frac{1}{2}$ 弧 ADB 度之。

【證】 過 C, O 作直徑 CD。

則 $$\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD$$
$$= \frac{1}{2}\angle AOD + \frac{1}{2}\angle BOD. \quad (\S 70)$$

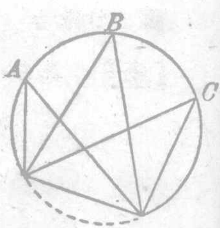
$\angle AOD, \angle BOD$ 各可以弧 AD, 弧 DB 度之。 (§167)

故 $\angle ACB$ 可以 $\frac{1}{2}$(弧 AD + 弧 DB) 度之。

但　弧 AD + 弧 BD = 弧 ADB。

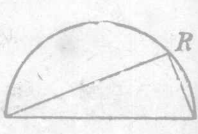
$\therefore$　$\angle ACB$ 可以 $\frac{1}{2}$ 弧 ADB 度之。

171. 系一。 同弓形之角相等。



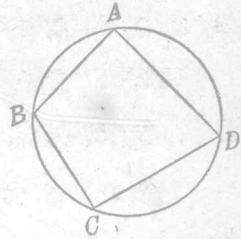
$$\angle A = \angle B = \angle C.$$

172. 系二。 半圓所含之圓周角爲直角。



$\angle R$ 爲直角。

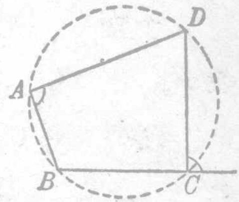
173. 系三。內接四邊形之兩兩對角互爲補角。



$\angle A+\angle C=180°$,

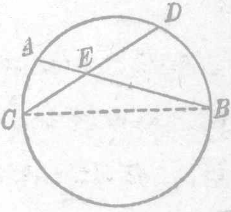
$\angle B+\angle D=180°$。

174. 系四。內接四邊形之外角等於內對角。



175. 定理。

交於圓內兩弦所夾之角可以其在圓上截弧之和之半度之。



設 AB, CD 爲圓之兩弦相交於 E 點。

求證　$\angle AEC$ 可以$\frac{1}{2}$(弧AC + 弧 BD)度之。

【證】 連結CB。

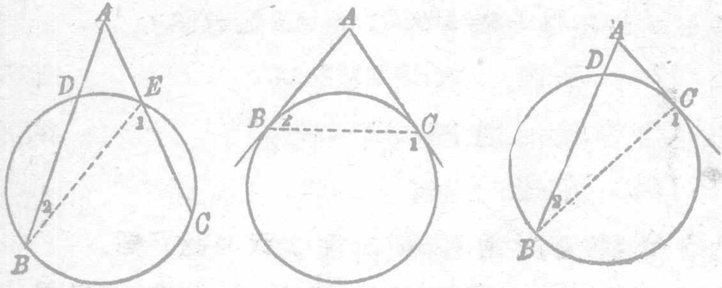
則　$\angle AEC=\angle EBC+\angle ECB$。 (§70)

又　$\angle EBC$ 可以$\frac{1}{2}$弧 AC 度之，$\angle ECB$ 可以$\frac{1}{2}$弧 BD 度之。 (§170)

故　$\angle AEC$ 可以$\frac{1}{2}$(弧 AC+ 弧 BD) 度之。

176. 定理。

在圓外相交之(1)兩割線,或(2)兩切線,或(3)一割線與一切線所夾之角可以其在圓上截弧之差之半度之.



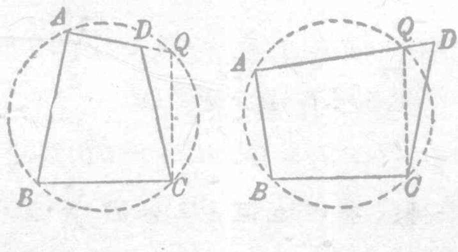
(1)設 AB 與 AC 爲圓之兩割線交於圓外一點 A。

求證　$\angle A$ 可以 $\frac{1}{2}$(弧 $BC-$ 弧 DE) 度之。

提示:　$\angle A=\angle 1-\angle 2$,再應用§170之定理卽得.用同法證(2)及(3),學者自習之。

177. 定理.

四邊形之對角互爲補角,則四邊形之四頂點在同一圓上。



設四邊形 $ABCD$ 之對角 $\angle B+\angle D=180^\circ$

求證　A, B, C, D 在同一圓上。

【證】　過 A, B, C 三點有一圓。 (§135)

假設此圓不過 D 點而截 AD(或 AD 延線)於 Q。

則　$\angle B+\angle AQC=180^\circ$。 (§173)

但　$\angle B+ADC=180^\circ$。 (假設)

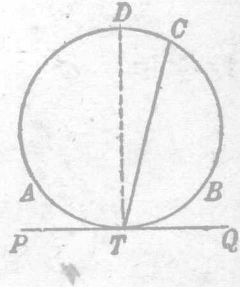
$\therefore$　$\angle AQC=\angle ADC$。

故 Q 與 D 相合。故過 A, B, C 三點之圓必過 D 點。

178. 系。 四邊形之外角等於其內對角,則四邊形之項點在同一圓上。

179. 定理。

圓之切線與過切點之弦所成之角,可以其同側之弧之半度之。



設 PQ 切圓於 T 點, TC 爲過 T 點之弦。

求證　$\angle QTC$ 可以 $\frac{1}{2}$ 弧 TBC 度之;

$\angle PTC$ 可以 $\frac{1}{2}$ 弧 TAC 度之。

【證】　過 T 點作直徑 TD, 則因 $\frac{1}{2}$ 弧 TBD 爲 90°,

又因　$\angle QTD$ 爲直角，　(§172)

故　$\angle QTD$ 可以$\frac{1}{2}$弧 TBD 度之，

又　$\angle DTC$ 可以$\frac{1}{2}$弧 CD 度之，　(§170)

故　$\angle QTC$ 可以$\frac{1}{2}$弧 TBC 度之。　(§7(2))

同理，　$\angle PTC$ 可以$\frac{1}{2}$弧 TAC 度之。

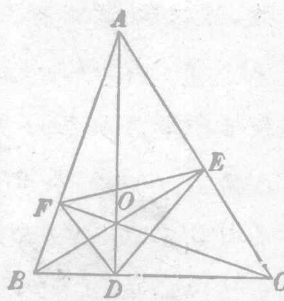
180. 系。 切線與過切點之弦所成角等於不同側弓形之角。

181. 定義。垂足三角形。

三角形三項垂線之足所成之三角形曰垂足三角形。

182. 例題。

自銳角三角形各項點至對邊之垂線等分垂足三角形之各角。



設 AD, BE, CF 爲銳角三角形三項垂線，DEF 爲垂足三角形。

求證　AD, BE, CF 各等分 $\angle FDE$ $\angle DEF$ $\angle EFD$。

【證】 AD, BE, CF 共交於一點 O，　(§106)

$\angle ODC$ 與 $\angle OEC$ 爲直角，　(假設)

$\therefore$ O, D, C, E 在一圓上。　(§177)

故同弓形之角　$\angle ODE=\angle OCE$。　(§171)

同理，　$\angle ODF=\angle OBF$。

但　$\angle OCE$，$\angle OBF$ 同爲 $\angle BAC$ 之餘角，

$\therefore$　$\angle OCE=\angle OBF$。

$\therefore$　$\angle ODE=\angle ODF$。

即 AD 等分 $\angle FDE$。

同理，BE，CF 各等分 $\angle DEF$，$\angle EFD$。

習　題

1.　AB，CD 爲圓之兩弦交於圓內 E 點，則 $\triangle AEC$ 之各角各與 $\triangle BED$ 之各角相等。

2.　ABC 爲二等邊三角形，引直線 XY 平行於底邊 BC，且與兩腰交於 X, Y，則 B, C, X, Y 四點在同一圓上。

3.　於 AB 爲弦之弓形弧上任取一點 P，則 $\angle PAB$ 與 $\angle PBA$ 之和爲一定。

4.　AB 爲圓之定弦，P 爲其對弧上任意一點，則 $\angle APB$ 之等分線必過其共軛弧上一定點。

5.　圓之弦與其兩端之切線成等角。

6.　兩圓外切，過其切點引一直線止於兩圓，則在

其末點之各圓之切線互相平行。

7. AB, CD 爲圓之兩弦交於圓內之一點 E,設 $\angle ABD=40^\circ$,弧 $BC=100^\circ$,求 $\angle AED$ 之度數。

8. 設一割線與一切線所成之角爲35°,其較大之截弧爲90°,求較小之截弧之度數。

9. $ABCD$ 爲圓之內接四邊形,連對角線 AC, BD,設弧 ABC 爲 200°,弧 BC 爲 70°,弧 AD 爲 60°,求圖中所有各角之度數。

第二編之雜題

1. 過正方形對角線上一點作各邊之平行線,則其與四邊之交點,在一圓上,此圓以兩對角線之交點爲中心。

2. 自圓內一點向圓上引直線,其相等直線若多於兩個,則此點爲圓心。

3. PQ 爲圓之弦, AB 爲其任意一直徑,自 A 及 B 引 PQ 之垂線,則此兩垂線長之和或差爲一定(換言之,此和或差與直徑 AB 之位置無關)。

4. 圓之中心爲 O, AB、CD 爲兩弦,引長後相交於圓外一點 E,且 OE 平分 $\angle BED$,則 AB 等於 CD。

5. 兩圓交於 A,B 兩點,過 A 點引兩圓之直徑 AP,

AQ,則 P, B, Q 三點在一直線上。

6. 過兩相切圓之切點引一直線,則其所截兩圓不同側之弧所含度數相等。

7. 過兩相切圓之切點引兩直線止於各圓上,則連結每圓內一對末點之直線互相平行。

8. 兩圓交於 A, B 兩點,過 A 點引直線 PAQ, 與兩圓各交於 P, Q,則 $\angle PBQ$ 之值為一定

9. 兩圓交於 A, B 兩點,過 A 點引兩直線 PAQ, XAY 各止於兩圓上,則 $\angle PBX$ 等於 $\angle QBY$。

10. AB, AC 為圓之兩弦,P, Q 為其所對兩劣弧上之中點,連結 PQ, 交 AB 於 X,AC 於 Y,則 AX 等於 AY。

11. 圓之兩切線所夾之角為連兩切點之弦及過任一切點之直徑所夾角之二倍。

12. 圓之內接梯形必等腰。

13. $ABCDEF$ 為圓之外切六邊形,則 $AB+CD+EF=BC+DE+FA$。

14. 過圓之直徑之兩端所引之平行弦相等。

15. 兩垂直弦交於圓內,則其相對兩截弧之和為 $180°$。

16. 兩等弦相交,則順次連結諸末點之直線成等

腰梯形。

17. 兩圓相切於C,又其外公切線切兩圓於A及B,則$\angle ACB$為直角。

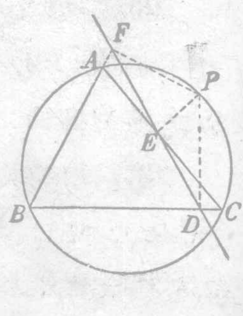
18. 圓之外切四邊形之各兩對邊所對之圓心角互為補角。

19. 圓之內接四邊形之對角線互相垂直,則自其交點向一邊所引之垂線,延長之,必過其對邊之中點。

20. 圓之內接四邊形之對角線互相垂直,則連結其交點與一邊之中點之直線,延長之,必與其對邊相垂直。

21. 延長圓之內接四邊形之兩兩對邊所成角之等分線互相垂直。

△22. 自三角形外接圓上任一點所引各邊垂線之足在一直線上(此定理為英人西姆商氏發明,三垂足所在之直線特稱為西姆商氏線)。



提示: 設D,E,F,為自$\triangle ABC$外接圓上一點P至各邊之垂足。P,E,A,F。四點在同一圓上,故$\angle PEF=\angle PAF=\angle PCD$。又$P,E,D,C$亦在同一圓上。然後證$\angle PED$為$\angle PEF$之補角即得。

第三編

軌跡及作圖

第一章 軌跡

183. 定義。軌跡。

一圖形中所有各點皆有某種性質,圖外各點皆無此性質,則此圖形爲有此性質之點之軌跡。

184. 定理。

圓爲與一定點有定距離之點之軌跡。 (§110)

185. 定理。

一線段之中垂線爲與其兩端有等距離之點之軌跡。 (§78)

186. 定理。

一角之等分線爲與此角兩邊有等距離之點之軌跡。 (§80)

187. 證明軌跡之方法。

圖中所有各點皆有所設之性質,則無所設性質之點絕不混雜於其間,此爲軌跡之純粹性,圖外所有各點

皆無所設性質,則有此性質之點亦絕未遺漏於圖外,此爲軌跡之完備性。故吾人欲證一圖形爲有某種性質之點之軌跡,必須證明。

(1)關於純粹性者,

(a)圖中所有點皆有所設性質,或

(b)無所設性質之點皆不在圖中;

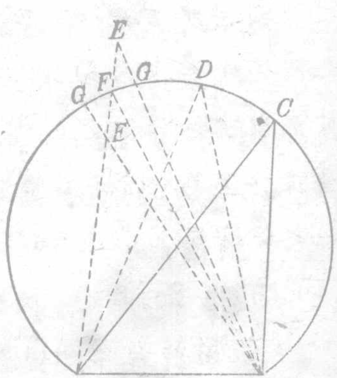
(2)關於完備性者,

(c)圖外所有點皆無所設性質,或

(d)有所設性質之點皆在圖中。

188. 定理。

一定長線段所對之圓弧爲此線段所對一定量角頂點之軌跡。



設弧 ACB 對線段 AB, D 爲弧上一點, E 爲弧外一點。

求證: (1) $\angle ADB = \angle ACB$…………

(a)純粹性。

(2) $\angle AEB \neq \angle ACB$…………

(c)完備性。

【證】 (1)連 AC, BC, AD 及 BD。因 D 及 C 同在弧 ACB 上,

$$\therefore \qquad \angle ADB = \angle ACB。 \qquad (\S 171)$$

(2)因 E 不在弧 ACB 上,故 AE 或其延線必會弧 ACB 於一點,設為 F,連 BF,

則 $$\angle AEB > (\text{或} <) \angle AFB。 \qquad (\S 175, \S 176)$$

但 $$\angle AFB = \angle ACB, \qquad (\S 171)$$

$$\therefore \qquad \angle AEB \neq \angle ACB。$$

$\therefore$ 對 AB 之弧 ACB 為對 AB 之一定量角如 $\angle ACB$ 者之頂點之軌跡。

189. 軌跡問題.

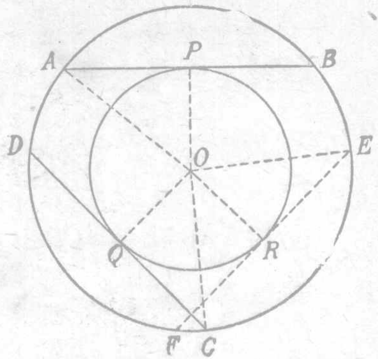
前定理中,軌跡之圖形為已知,故祇須證明其是否具有純粹性及完備性卽可。此外尙有一種軌跡問題,其圖形為未知者,則必先依所設之性質探求其形狀而後證實之。惟初等幾何學中軌跡問題多屬直線及圓,其圖形甚為顯明,故有時無須探求也,玆舉一例如下:

190. 問題。

定圓內定長弦上中點之軌跡為何?

設定圓 $\odot O$, 其弦 AB 有定長 a, 此弦上之中點為 P,

求P之軌跡。



【解】 作圓心O與AB之中點P之聯線OP。以O為中心，OP為半徑，作同心圓，此卽為所求之軌跡。

(1)設Q為有定長a之弦CD上之中點；

求證 Q在以OP為半徑之同心圓上。……………………(d)完備性

(2)設R為在以OP為半徑之同心圓上一點；

求證 垂直於OR之弦EF之長為a；R為EF之中點。……………………(a)純粹性。

【證】 (1)連OA, OC，則在兩直角三角形OCQ及OAP中。

$$CQ=AP, \qquad \text{(故何?)}$$

$$OC=OA, \qquad \text{(何故?)}$$

故 $$rt.\triangle OCQ=rt.\triangle OAP。 \qquad (\S 49)$$

$\therefore$ $$OQ=OP。$$

$\therefore$ Q在以O為中心，OP為半徑之圓上。

(2)連 OE,則在兩直角三角形 OER 及 OAP 中,

$$OR=OP, \qquad \text{(何故?)}$$

$$OE=OA, \qquad \text{(何故?)}$$

故 $$rt.\triangle OER=rt.\triangle OAP。 \qquad (\S 49)$$

$$\therefore \quad ER=AP=\frac{a}{2}。$$

$$\therefore \quad EF=a; R \text{ 且為 } EF \text{ 之中點。}$$

習題

1. 一動點與一定線有一定之距離,則此動點之軌跡為在此定線兩側之一雙平行線。

√2. **同斜邊直角三角形之直角頂點之軌跡為以此斜邊為直徑之圓。**

3. 過定圓內或圓上一定點諸弦中點之軌跡為以圓心及定點之聯線為直徑之圓。

√4. 自一點至一定圓作定長之切線,此點之軌跡為在定圓外之一同心圓

5. 與兩相交直線有等距離之點之軌跡為何?

√6. 過兩定點諸圓中心之軌跡為何?

7. 與兩平行直線相切諸圓中心之軌跡為何?

√8. 過一定點且有定長之半徑諸圓中心之軌跡為何?

9. 與一定圓相切且有定長之半徑諸圓中心之軌跡爲何?

10. 定圓之切線交成定量之角,此交點之軌跡爲何?

11. 一線段 AB 與一定線 CD 平行而移動,其一端常在一定圓 $\odot O$ 上,他一端之軌跡爲何?

12. 一線段兩端着於互相垂直之兩定直線而移動,其中點之軌跡爲何?

第二章　基本作圖題

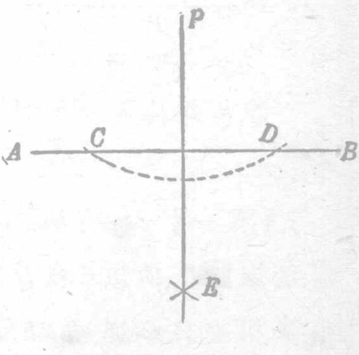
191. 解作圖題。

解作圖題者,求以合理之方法,用圓規及直尺作一圖形而有所設性質之謂也。一般解法必須包括(一)**述說作圖之法則**及(二)**證實作法之合理**兩步驟。其意義可疑者,宜加討論;其比較繁難者,更須事先分析。詳細情形,容後申述,茲舉簡易者如下:

192. 作圖題。

自一直線外之一點作此線之垂線。

設 P 爲直線 AB 外之所設點,求自 P 作一直線 $\perp AB$。



【解】　在 AB 上取一任意點 C;以 P 爲圓心, PC 爲半徑,作圓弧,再交 AB 於 D;以 C 及 D 爲圓心,大於 $\frac{1}{2}CD$ 之長爲半徑,作兩弧,相交於 E,(有兩交點,取與 P 之距離較大者)連結 PE,則此 PE 卽爲所求之垂線。

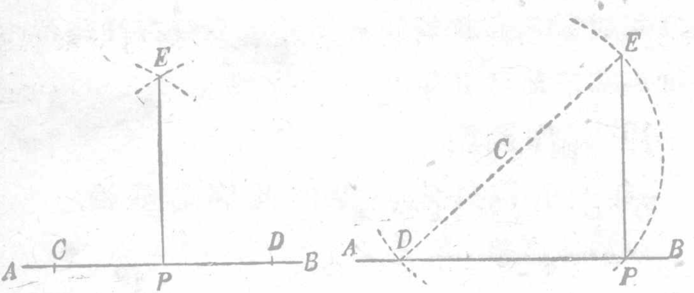
【證】　P 及 E 爲與 C, D 有等距離之兩點,

$\therefore$　　$PE \perp AB$。　　(§185)

【註】　若以 P 爲圓心,PC 爲半徑之圓不再與 AB 相會,則 AB 切$\odot P$於 C,因知 $PC \perp AB$;此 PC 卽爲所求之垂線。　　(§148)

193.　作圖題。

自一直線上之一點作此線之垂線。



甲圖　　　　乙圖

設 P 爲直線 AB 上之所設點,求自 P 作一直線 $\perp AB$。

【解一】　在直線 AB 上 P 之兩側(甲圖)取與 P 等距離之兩點 C, D;以 C 及 D 爲圓心,大於 PC 之長爲半徑作兩弧,相交於 E;連結 PE,則此 PE 卽爲所求之垂線。

【證】　P 及 E 爲與 C, D 等距離之二點,

$\therefore$　　$PE \perp AB$。　　(§185)

【解二】　在 AB 外取一任意點 C;(乙圖)以 C 爲圓心,

CP 爲半徑,作圓,再交 AB 於 D;延長 DC,交圓於 E;連結 PE,則此 PE 卽爲所求之垂線。

【證】　弧 DPE 爲半圓,

故　$\angle DPE$ 爲一直角。　(§172)

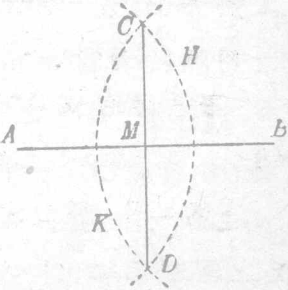
$\therefore$　$PE \perp AB$。

【註】　若以 C 爲圓心,PC 爲半徑之圓不再與 AB 相會,則 AB 切⊙C 於 P,因知 $PC \perp AB$;此 PC 卽爲所求之垂線。　(§148)

194.　作圖題。

等分一所設線段。

AB 爲所設線段,求分之爲相等之兩分。



【解】　以 A 及 B 爲圓心,大於 $\frac{1}{2}AB$ 之長爲半徑,作兩弧 CHD 及 CKD,相交於兩點 C 及 D;連結 CD,會 AB 於 M,則此 M 卽爲 AB 之等分點。

【證】　C 及 D 爲與 A, B 等距離之兩點,

故　CD 爲 AB 之中垂線。　(§185)

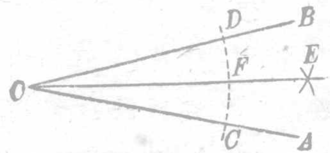
$\therefore$　$AM = BM$

195. 系一。 作一所設線段之中垂線。

196. 系二。 等分一所設弧(等分其所含之弦並延長此等分線使之與弧相會。) (§132)

197. 作圖題。

等分一所設角。



設 $\angle AOB$,求分之爲相等之兩分。

【解】 以 O 爲圓心,任意長如 OC 爲半徑,作弧 CFD,與兩邊 OA, OB 各交於 C 及 D;再分別以 C 及 D 爲圓心,大於 $\frac{1}{2}CD$ 爲半徑,作兩弧,相交於 E。(有兩交點,取與 O 之距離較大者。)連結 OE,則 OE 爲 $\angle AOB$ 之等分線。

【證】 O 及 E 爲與 C, D 等距離之兩點,故 OE 爲弦 CD 之中垂線,且等分弧 CD,亦即弧 CF = 弧 DF。

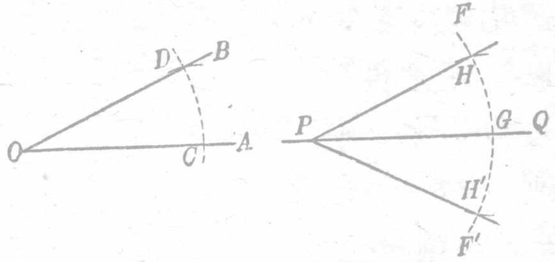
$\therefore \qquad \angle AOE = \angle BOE$。 (§128(1))

198. 注意。 由以上兩題及前題之系二推知:

一所設線段,一所設弧,或一所設角,可分作四等分,八等分,十六等分,…… 以至 2^n 等分。(n 爲一正整數)

199. 作圖題。

過一所設直線上之一所設點作一直線,使其與所設直線交成所設角。



P 爲所設直線 PQ 上一所設點,$\angle AOB$ 爲所設角,求過 P 引一直線,使與 PQ 交成一角而與 $\angle AOB$ 相等。

【解】 以 O 爲圓心,任意長如 OC 爲半徑,作弧 CD 分別與兩邊 OA, OB 交於 C 及 D。再以 P 爲圓心,等於 OC 之長爲半徑,作弧 FGF' 與 PQ 交於 G。又以 G 爲圓心,等於弦 CD 之長爲半徑,作弧,與弧 FGF' 交於 H 及 H' 連結 PH, PH'。則 $\angle HPG$ 及 $\angle H'PG$ 皆與 $\angle AOB$ 相等。

【證】 證明顯易,學者自習之。

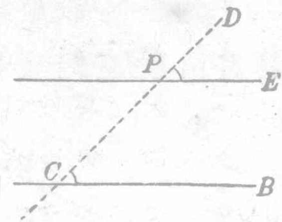
200. 系。 設一三角形之兩角,作其第三角。

201. 作圖題。

過一直線外之一點作此線之平行線。

設 P 爲所設線 AB 外之一點,求過 P 作一直線與 AB 平行。

【解】 作PC與AB交於C,而成一適宜之角如$\angle PCB$過P作PE,使其與PC交成$\angle DPE$而與$\angle PCB$相等;



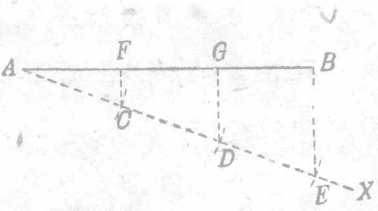
則 $PE \parallel AB$ (§68(3))

【證】 證明留待學者。

202. 作圖題。

分一所設線段為三等分。

AB為一所設線段,求分之為相等之三分。



【解】 自A作直線AX與AB成一適宜之角。取一適宜之長如AC,在AX上順沿截取AC, CD, DE三相等線段,連結EB,並作DG, CF與EB平行而與AB交於G, F則G, F。為所求之分點。

【證】 學者試自證明。(§97)

203. 注意。 由此題推得:

一線段可分為五,六,七……n等分(n為一正整數。)

習題

1. 試證作圖題§199。

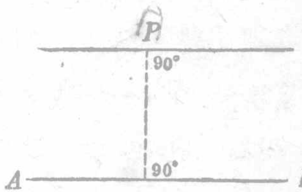
2. 分一直角爲相等之三分。

3. 作 $22.^\circ5$ 及 135° 之角。

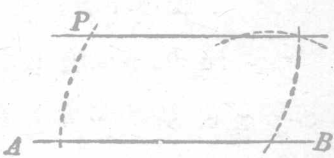
4. 設一線段爲正方形之周,求作其一邊。

5. 設一線段爲正六邊形之周,求作其一邊。

6. 試用右圖解作圖題§201。



7. 試用右圖解作圖題§201。



8. 在一所設直線上求一點,使其與線外所設兩點之距離相等。

9. 設一等腰三角形之頂角,求作其底角。

10. 設有 A, B, C 三點,求過 A 作一直線,使自 B, C 兩點至此直線之距離相等

11. 過一所設點作一直線與一所設角之兩邊交成一雙相等之角。

12. 求一點與所設兩相交直線各有一定之距離

13. 自兩所設點引兩直線使其在一所設線上任一點相會且與此所設線成相等之角。

第三章 三角形之作圖題

204. 三角形之記法.

為研究三角形便利起見,此後常用一種有系統之記法如下:

A, B, C 表三角形之三頂,

$\angle\alpha, \angle\beta, \angle\gamma$ 表三角形之三角,

a, b, c 表三角形之三邊,與 $\angle\alpha, \angle\beta, \angle\gamma$ 相對,

h_a 表 a 邊上之高,即 $\angle\alpha$ 之頂垂線,

b_a 表 α 角之等分線,

m_a 表自 A 至 a 之中點之中線,

$2p$ 表三角形之周,

R 表三角形外接圓之半徑,

r 表三角形內切圓之半徑。

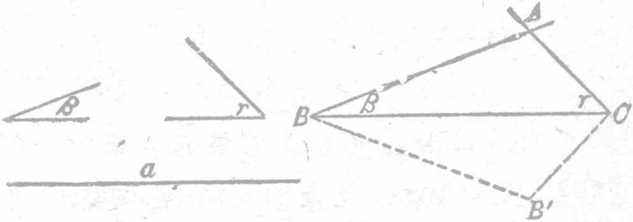
205. 注意.

(1) $\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma=2rt\angle$.。

(2) $a+b+c=2p$。

206. 作圖題。

設一三角形之兩角及此兩角之公邊作此三角形。(β, γ, a)



設三角形之兩角β, γ, 及此兩角之公邊 a,求作此三角形。

【解】 引一線段 BC,使其長等於 a;以 BC 為一邊,B 為頂點,作 $\angle CBA=\angle\beta$;再以 CB 為一邊,C 為頂點,在 A 之同側作 $\angle BCA=\angle\gamma$(§199)。BA 與 CA 交於 A。此 $\triangle ABC$ 即所求之三角形。

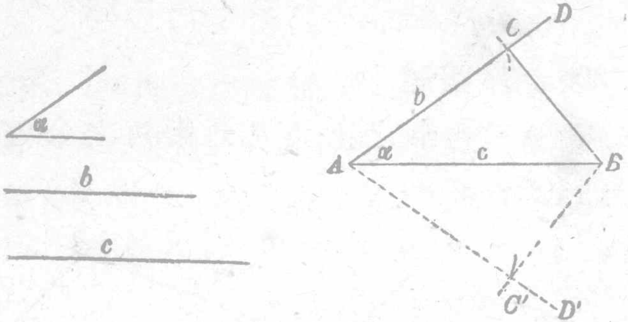
【證】 從略。

【討論】 設 $\angle\beta+\angle\gamma$ 不小於兩直角,則此題不能解。

207. 作圖題。

設一三角形之兩邊,及此兩邊之夾角,作此

三角形。(b, c, α)



設三角形之兩邊 b, c, 及其夾角 α, 求作此三角形。

【解】 引一線段 AB, 使其長等於 c; 以 AB 爲一邊, A 爲頂點, 作 $\angle BAD=\angle\alpha$; (§199) 在 AD 上截取 $AC=b$; 連結 CB, 則 $\triangle ABC$ 爲所求之三角形。

【證】 從略。

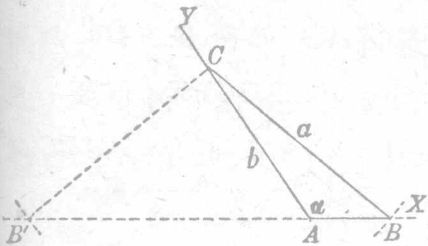
208. 作圖題。

設一三角形之兩邊, 及此兩邊中一邊之對角, 作此三角形。$(a, b, \alpha$ 或 $\beta)$

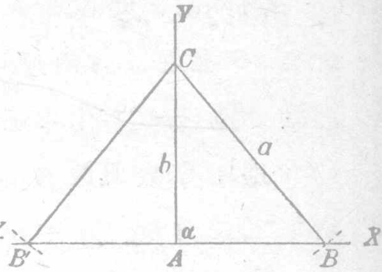
設三角形之兩邊 a, b 及 a 邊所對之角 α, 求作此三角形。

【解】 引一直線 AX; 以之爲邊, A 爲頂, 作 $\angle XAY=\angle\alpha$; (§199)

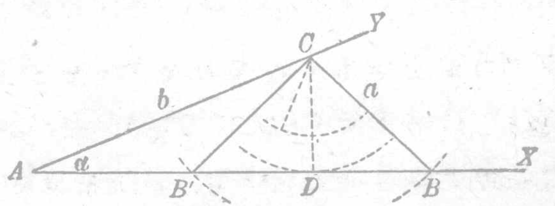
在 AY 上截取 AC 等於 b; 以 C 爲圓心, a 之長爲半



甲圖



乙圖



丙圖

徑,作弧交 AX 於 B;(或 B' 看下面討論。) 連結 BC, 則 $\triangle ABC$ 爲所求之三角形。

【證】 從略。

【討論】 爲便利起見,分三款討論之。

第一款 設 $\angle\alpha > rt.\angle$;(甲圖)

(1) $a<b$ 時本題無解,因自 C 所作之弧 BB' 不與 AX 相會。

(2) $a=b$ 時本題亦無解,蓋 B 與 A 合, ABC 不成三角形也。

(3) $a>b$ 時本題僅有一解,如 $\triangle ABC$; 因自 C 所作之弧 BB' 雖在 A 之兩側,截 AX 於 B 及 B', 僅 $\triangle ABC$ 與題理吻合也。$\triangle AB'C$ 中兩邊 AC, $B'C$ 各等於 b, a, 但其一角 CAB' 則不等於所設角 α, 而等於 α 之補角,故 $\triangle AB'C$ 非所求之三角形。

第二欵 設 $\angle\alpha=rt.\angle$;(乙圖)

(1) $a<b$, 及 (2) $a=b$ 時本題均無解,理由與前款相同,

(3) $a>b$ 時本題僅有一解,蓋 $\triangle ABC$, $\triangle AB'C$ 相等,祇可云一解也。

第三欵 設 $\angle\alpha<rt.\angle$;(丙圖)

結論如下,學者試詳說其理由。

(1) $a<CD$, 本題無解。

(2) $a=CD$, 有一解。

(3) $b>a>CD$, 兩解。

(4) $a=b$, 一解。

(5) $a>b$, 一解。

209. 作圖題。

設一三角形之三邊,作此三角形 (a, b, c)

本題簡易,學者可自行解證,並討論其成立之可能

性。

習題

1. 設一三角形之兩角,及此兩角中一角之對邊,作此三角形。(α, β, a 或 b)

2. 設三角形之底,底上之高,及一底角,作此三角形。(a, h_a, β 或 γ)

3. 設直角三角形之一邊及一銳角,作此直角三角形。($\gamma = rt. \angle, a, \beta$)

4. 設菱形之兩對角線,作此菱形。

5. 設矩形之一邊及對角線,作此矩形。

6. 設矩形之一邊及兩對角線之夾角,作此矩形。

7. 設平行四邊形之兩邊及其夾角,作此平行四邊形。

8. 設正方形之對角線,作此正方形。

9. 設三角形三邊之中點,作此三角形。

10. 設三角形之二邊及一中線,作此三角形。

11. 設等腰三角形之底及頂角,作此等腰三角形。

12. 設等腰梯形之高,兩底之和,兩底之差,作此等腰梯形。

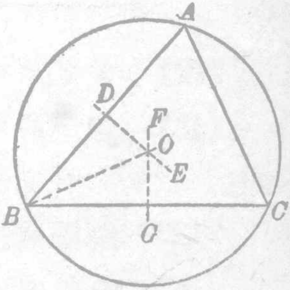
13. 設平行四邊形之兩對角線及此兩對角線所

夾之角,作此平行四邊形。

第四章　圓之作圖題

210. 作圖題.

作一所設三角形之外接圓.



設三角形 ABC, 求作其外接圓。

【解】 作 AB 之中垂線 DE, BC 之中垂線 FG。 (§195)

則 DE, FG 必相交於一點, 且僅此一點如 O; 以 O 爲中心, OB 爲半徑,作圓;此卽爲所求之外接圓。

【證】 參看 §135, §138。

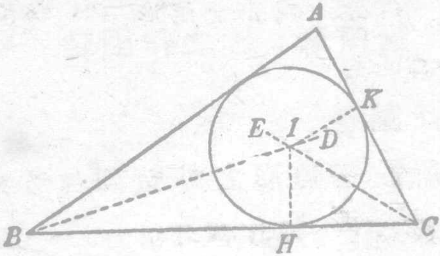
【註】 作一圓過不在一直線上之三點,可連三點成一三角形,依此法作之。

211. 作圖題.

作一所設三角形之內切圓.

設三角形 ABC, 求作其內切圓。

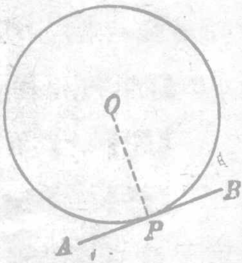
【解】 作 $\angle B$ 之等分線 BD, $\angle C$ 之等分線 CE, 兩線相交於 I (§197, §81); 自 I 作 $IH \perp BC$, (§192); 以 I 爲圓心, IH 爲半徑,作圓;此卽爲所求之內切圓。



【證】　參看§156。

【註】　作一圓與不交於一點之三線相切可延三線成一三角形,依此法作之。

212. 作圖題。

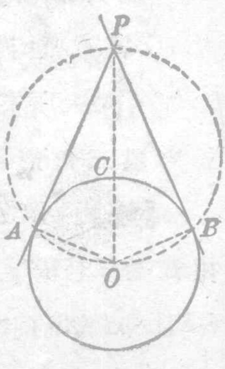


過一所設點作一所設圓之切線。

(1)設點 P 在所設圓之上,求過 P 作此圓之切線,

【解】　作圓心 O,連結 OP; 過 P 作 OP 之垂線 APB, (§193) 此 APB 卽爲所求之切線。

【證】　因 $AB \perp OP$, 故 AB 爲過 P 點之切線,　(§151)



(2)設點 P 在所設圓之外,求過 P 作此圓之切線。

【分析】假定本題爲已解者，PA 爲所求之切線，自切點引半徑 OA，

則 $$PA \perp OA。$$ (§148)

引直線 OP，乃得 AOP 直角三角形，OP 爲斜邊，A 爲直角頂；因知 A 爲在以 OP 爲直徑之圓上之一點；(參看本編第一章習題 2) 但 A 又爲所設圓上之一點，故 A 爲此二圓之交點；因得作圖法如下：

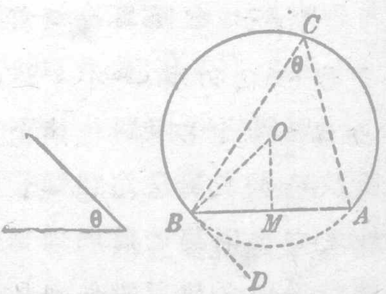
【解】作圓心 O，連結 OP，求其中點 C；以 C 爲圓心，CP 爲半徑作圓，與所設圓交於 A 及 B；連結 PA，PB，則 PA，PB 皆爲所求之切線。

【證】從略：

213. 作圖題。

在所設線段上作一含有所設角之弓形。

假定 AB 爲所設線段，$\angle\theta$ 爲所設角，求在 AB 上作一弓形含有 $\angle\theta$ 之等角。



【分析】設弓形 ACB 含有 $\angle\theta$ 之等角，引半徑 OB，在 B 點引切線 BD；

則 $$\angle ABD=\angle ACB, \quad (\S 179, \S 170)$$
$$=\angle\theta。$$

因得作圖法如下:

【解】 以AB為一邊,B為頂點,作$\angle ABD$等所設角θ(§199);自B作$OB\perp BD$(§193);再作AB之中垂線OM(§195);以OB及OM之交點O為圓心,OB為半徑,作圓,卽為所求之弓形。

【證】 點O與A及B之距離相等。

$\therefore$ 此圓過A,B。

但 $BD\perp OB$,

故 BD為此圓之切線。

$\therefore$ $\angle ACB=\angle ABD=\angle\theta$。 (何故?)

【註】 設θ為一銳角,則此弓形比半圓大;為一直角,則弓形為半圓;為一鈍角,則弓形比半圓小

214. 分析〔參看§109註〕

繁難之作圖題,往往不能直接用已有之定理解之,蓋歧路滋多,正當途徑選擇匪易也。遇有此等難題,其最妙之方法,則莫若將題理剖解,假定作圖題為已解者,逆轉而推引之,使所設件與所求件之間相互之關係顯明,從而推得作圖之方法,是謂作圖題中之分析。如§212(2),

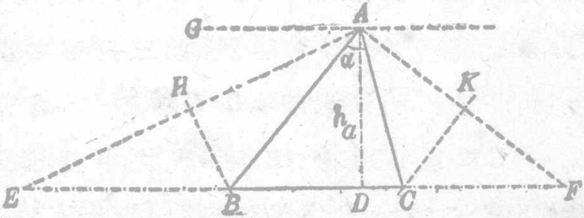
§213 皆用此法。

215. 討論。

一作圖題也,其解數有時一定,亦有時無定,又有時絕無解法者,故不得不討論之。討論云者,依所設之性質,決定其解法數目之謂也。如 §206, §208 皆用之。

216. 例題。

設一三角形之周,一角及此角之項垂線,作此三角形。$(2p, \alpha, h_a)$



設三角形之周 $2p$, 角 α, 及此角對邊 a 上之高 h_a, 求作此三角形。

【分析】 設 $\triangle ABC$ 爲所求之三角形,延長 $\angle A$ 之對邊 BC 之兩端,在 B 端之延線上截取 $BE=BA$, 在 C 端之延線上截取 $CF=CA$。則 EF 等於所設之周。連結 AE 及 AF, 因得三角形 AEF, 及兩等腰三角形 BAE, CFA。

故 $\angle E=\angle EAB=\frac{1}{2}\angle ABC\ (=\frac{1}{2}\beta)$,

依同理 $\angle F=\angle CAF=\frac{1}{2}\angle ACB\ (=\frac{1}{2}\gamma)$。

故 $\angle EAF=\angle EAB+\angle BAC+\angle CAF$

$$=\frac{1}{2}\angle ABC+\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ACB。$$

即 $\angle EAF=\frac{1}{2}\beta+\alpha+\frac{1}{2}\gamma$

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{1}{2}\alpha$$

$$=90^\circ+\frac{1}{2}\alpha; \qquad (\S 205(1))$$

故$\angle EAF$之量為已知所設之頂垂線AD亦即$\triangle AEF$之頂垂線。由是$\triangle AEF$之底EF,頂角$\angle EAF$及頂垂線AD皆為已知,故此形可作。(看本節解)此三角形之頂A亦即所求三角形ABC之頂A。因$\triangle BAE$及$\triangle CAF$為等腰,故$\triangle ABC$之B,C兩頂分別在AE及AF之中垂線上,因得作圖法如下:

【解】 引一線段EF使有所設之周$2p$長;在此線段上作一含$90^\circ+\frac{1}{2}\alpha$角量之弓形(§213);在弓形之同側引一直線$GA$與$EF$平行且有等於所設$AD$之距離(§201);此直線$GA$與弓形交於$A$,連結$AE$及$AF$,作$AE$之中垂線$HB$,交$EF$於$B$,作$AF$之中垂線$KC$,交$EF$於$C$(§195);連結$AB$及$AC$,則$\triangle ABC$即為所求之三角形。

【證】 從略。

【討論】 與 EF 平行之引線 GA，若不與弓形 EAF 相會，則此題無解；若相切，則僅有一解，如是 $\triangle ABC$ 爲一等腰三角形，其中 $AB=AC$；若相交於二點，則此題將有兩解，在 EF 之中垂線兩側。

習題

1. 作一圓過兩所設點，且使其中心在一所設線上。

2. 以一所設長爲半徑作一圓過兩所設點。

3. 以所設之半徑作一圓過一所設點並與一所設直線相切。

4. 以所設之半徑作一圓過一所設點並與一所設圓相切。

5. 作一圓過一所設點並與兩所設線相切，

6. 設等腰三角形之底邊及其內切圓之半徑，作此等腰三角形。

7. 設直角三角形弦上之高，弦上之兩點，及各腰上之一點，作此形。

8. 設三角形之三角及其外接圓之半徑，作此三角形。(α, β, γ, R)

9. 設菱形之一角及內切圓之半徑，作此菱形。

10. 以所設之長爲半徑,作一圓過一定點,並在一定線上截取一定長之弦。

第三編之雜題

1. 設三角形之底邊及頂角,皆爲定量,其內心之軌跡爲何?

2. 設三角形之底邊及頂角,皆爲定量,其重心之軌跡爲何?

3. 自正方形內任一點,至各邊所作諸直線之中點之軌跡爲何?

4. 作一線與所設三角形之一邊平行,且爲他兩邊在此線上截取一所設長之線段。

5. 設等腰三角形之周及高,作此等腰三角形。

6. 設直角三角形之一銳角,及其內切圓之半徑,作此直角三角形。

7. 設直角三角形之一銳角,及其兩腰之和,作此直角三角形。

8. 設正三角形內切圓之半徑,作此正三角形。

9. 設三角形之一邊,一隣角,及他兩邊之和,作此三角形。$(a, \beta, b+c)$

10. 設三角形兩邊之和及三角,作此三角形。$(a+b,$

α, β, γ)

11. 設三角形之一邊,一隣角及他兩邊之差,作此三角形。($a, \beta, b-c$)

12. 設三角形之一角,此角之等分線及自角頂所作之頂垂線,作此三角形。(α, b_a, h_a)

13. 設三角形之三中線,作此三角形。(m_a, m_b, m_c)

14. 設正方形之對角線及一邊之和,作此正方形。

15. 設矩形之周及對角線,作此矩形。

16. 設菱形之一邊及一對角線,作此菱形。

17. 設等腰梯形之兩底,及對角線,作此等腰梯形。

18. 設等腰梯形之兩底,及其外接圓之半徑,作此等腰梯形。

19. 設梯形之兩底及兩對角線,作此梯形。

20. 作一圓與所設直線相切於此線上之一所設點,並過線外之一所設點。

21. 作一圓與所設之三線相切。

22. 作一圓過一所設點並與所設之兩同心圓相切。

23. 設一扇形(圓心角小於180°),作其內切圓

24. 在一所設圓內,作三等半徑之圓,彼此相切,且

與所設圓相切。

25. **作兩圓之外公切線。**

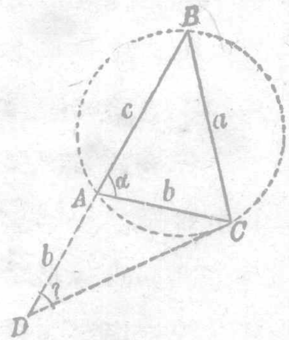
26. **作不相會兩圓之內公切線。**

27. 設兩線段,不許延長使之相交,求等分其交角。

28. 設三角形之兩角及周,作此三角形。

29. 設三角形之周,一角及自他一角頂所作之頂垂線,作此三角形。($2p, \alpha, h_b$ 或 h_c)

30. 設三角形之一邊,此邊之對角及他兩邊之和,作此三角形。($a, \alpha, b+c$)



31. 設三角形之一邊,此邊之對角,及他兩邊之差,作此三角形。($a, \alpha, b-c$)

32. 以所設三角形之三頂為圓心,作三圓彼此相切。

33. 作一正方形,使其各邊過一所設點。

第四編

比例及面積

第一章　比例

217. 普通比例定理.

關於比例定理,多詳載於代數書中,茲為便利研究形之相似性起見,特集其中重要者如下:

(1) **定理**　若 $ad=bc$　則 $a:b=c:d$。

(d 為 a, b, c 之第四比例項.)

(2) **定理**　若 $a:b=c:d$　則 $ad=bc$。

(3) **定理**　若 $a:b=b:c$　則 $b^2=ac$。

(b 為 a, c 之比例中項; c 為 a, b 之第三比例項.)

(4) **定理**　若 $a:b=c:d$　則 $a:c=b:d$。

(5) **定理**　若 $a:b=c:d$　則 $b:a=d:c$。

(6) **定理**　若 $a:b=c:d$　則 $a+b:b=c+d:d$。

及 $a+b:a=c+d:c$。

(7) **定理**　若 $a:b=c:d$　則 $a-b:b=c-d:d$。

及 $a-b:a=c-d:c$。

(8) **定理**　若 $a:b=c:d$　則 $a+b:a-b=c+d:c-d$。

(9) **定理** 若 $a:b=c:d=e:f=g:h$……………………

則 $(a+c+e+g+\cdots\cdots):(b+d+f+h+\cdots\cdots)=a:b=c:d$…………

……………

(10) **定理** 若 $a:b=c:d, e:f=g:h, k:l=m:n,$

則 $aek:bfl=cgm:dhn$。

(11) **定理** 若 $a:b=c:d$ 則 $a^n:b^n=c^n:d^n$

(12) **定理** 若 $a:b=c:d$ 則 $ma:mb=c:d$。

218. 定義。 分點,線分。

設 C 為在 AB 線內或其延線上之一點,則 C 稱為 AB 上之分點。AC 及 BC 皆稱為 AB 之線分.

219. 定義。 內分,外分。

若 C 在 AB 線內,則謂 AB 為 C 所內分;若 C 在 AB 之延線上,則謂 AB 為 C 所外分.

220. 定義。 比例線分.

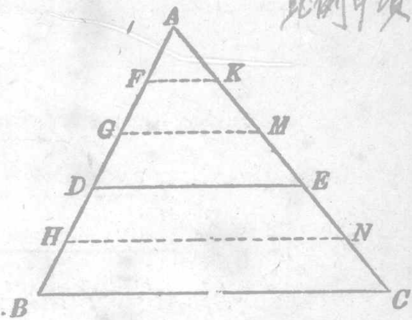
一直線(AB)上兩線分(AC, BC)所含單位長度之比值與另一直線$(A'B')$上兩線分$(A'C', B'C')$所含單位長度之比值相等時,則四線分 $AC, BC, A'C', B'C'$ 成比例。

221. 定理。

一直線平行於三角形之一邊,則此直線所

分他兩邊上之線分成比例。

137
比例中項



設一直線平行於$\triangle ABC$之一邊BC而與AB, AC各交於D, E。

求證　$AD:DB=AE:EC$。

【證】(1) 設AD, DB有公度如AF。AD為此公度之m倍,DB為其n倍;則$AD:DB=m:n$。將AD分作m等分,DB分作n等分。自分點引FK, GM, HN等與BC平行,則此諸線等分AC為$m+n$分;AE含m等分,EC含n等分。

$$\therefore \qquad AE:EC=m:n,$$

$$\therefore \qquad AD:DB=AE:EC。$$

(2) 設AD, DB無公度,則$AD:DB$為一無理數。若其近似值為$m:n$,則(1)中$AE:EC$之近似值亦必為$m:n$。故$AD:DB$之近似值必依次逐步與$AE:EC$之近似值相等。

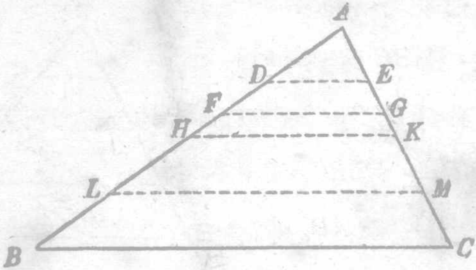
$$\therefore \qquad AD:DB=AE:EC。\qquad (\S 163)$$

222. 系一。 (1) $AB:AD=AC:AE$,

(2) $AB:DB=AC:EC$。　(§217(7))

223. 系二。 引多數直線平行於三角形之

一邊,則他兩邊上所分各對應線分之比互相等。



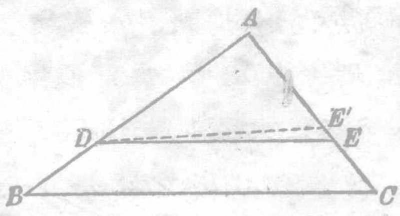
$$AD:AE=DF:EG=FH:GK$$

$$=HL:KM=LB:MC。$$

224. 系三。 兩直線與諸平行線相交,則兩線上各線分之比相等。 (§223)

225. 定理。

一直線分三角形兩邊,其所得之各線分成比例,則此直線平行於三角形之第三邊。



直線 DE 與 $\triangle ABC$ 之二邊 AB, AC 各交於 D, E, 而

$$AD:DB=AE:EC。$$

求證 $DE \parallel BC$。

【證】 因 $AD:DB=AE:EC,$

故 $AB:DB=AC:EC$ ……………(1) (§222(2))

自 D 引 $DE' \parallel BC$ 而與 AC 交於 E',

則 $AB:DB=AC:E'C$ ……………(2) (§221)

比較(1)(2)得 $AC:EC=AC:E'C,$

$\therefore$ $EC=E'C$。

故 E' 與 E 必相合,因而 DE' 與 DE 相合,

然 $DE' \parallel BC,$

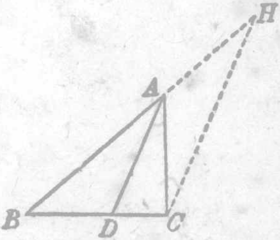
故 $DE \parallel BC$。

226. 定理。

三角形一角之內角等分線,或外角等分線,內分或外分此角之對邊爲兩線分,與其隣邊成比例。

(1) 設三角形 ABC 之 A 角內角等分線 AD 交 BC 於 D。

求證 $BD:DC=BA:AC$。



【證】 自 C 引 $CH \parallel DA$ 而與 BA 之延線會於 H;

則 $\angle DAC=\angle ACH,$ 內错角 (何故)?

及 $\angle BAD=\angle AHC$。 同位角相等 (何故)?

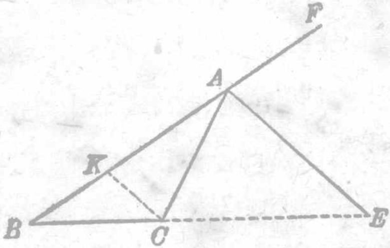
但 $\angle BAD = \angle DAC$,

$\therefore$ $\angle ACH = \angle AHC$。

$\therefore$ $AC = AH$。

又在 $\triangle BCH$ 中 $BD:DC = BA:AH$, (§221)

故 $BD:DC = BA:AC$。



(2) 設三角形 ABC 之 A 角外角等分線 AE 交 BC 之延線於 E,

求證 $BE:EC = BA:AC$。

【證】 自 C 引 $CK \parallel EA$ 而與 BA 會於 K,

則 $\angle EAC = \angle ACK$, (何故?)

及 $\angle FAE = \angle AKC$。 (何故?)

但 $\angle FAE = \angle EAC$,

$\therefore$ $\angle AKC = \angle ACK$,

$\therefore$ $AC = AK$。

又在 $\triangle BEA$ 中 $BE:EC = BA:AK$, (§222)

故 $BE:EC = BA:AC$。

習題

1. 求 56,77 及 32 之第四比例項。

2. 求 21 及 336 之比例中項。

3. 求 84 及 3 之第三比例項。

4. 若 $a:b=b:c$，則 $a^2:b^2=a:c$。

5. $\triangle ABC$ 中，$AB=14$ 尺，$BC=10$ 尺，$CA=6$ 尺。求角 A 等分線在 BC 上所分兩部分之長。

6. $\triangle ABC$ 中，$AB=95$尺，$AC=57$ 尺。今在此兩邊上各取 D 點及 E 點使 $AD=70$ 尺，$AE=42$ 尺，連結 DE，則直線 DE 能否與 BC 平行？

7. D, E, F 各為 $\triangle ABC$ 之三邊 BC, CA, AB 之中點，連結 DE，以 $CA:AB$ 之比，內分之於 G，則直線 GF 等分 $\angle DFE$。

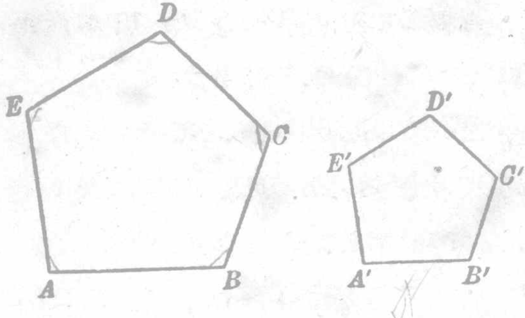
8. 從 $\triangle ABC$ 之邊 BC 上任意一點 D 引一直線，與 $\angle A$ 之等分線平行，而與 AC, AB 或其延線會於 E, F，則 $DB:DC=FB:EC$。

FB:EC.

第二章　相似形

227. 定義. 相似多邊形.

相似多邊形者,多邊形之諸對應角相等,諸對應邊成比例者也.



例如在多邊形 $ABCDE$ 及多邊形 $A'B'C'D'E'$ 內,

(1)　$\angle$s $A, B, C, \cdots\cdots$ 等於 $\angle$s $A', B', C', \cdots\cdots,$

(2)　$AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=\cdots\cdots,$

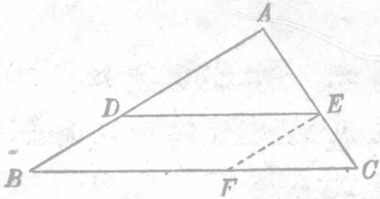
則此二多邊形相似.

【註】　兩形相似,以 $\backsim$ 號表示之;如多邊形 $ABCDE$ $\backsim$ 多邊形 $A'B'C'D'E'$.

228. 定理.

一直線平行於三角形之一邊而與他兩邊相會,則此直線與兩邊所成之三角形與原三角

形相似.



設一直線 DE 與 $\triangle ABC$ 之 BC 邊平行而會他兩邊於 D 及 E,

求證　$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$,

【證】(1)　因　$DE \parallel BC$,

故　$\angle ADE = \angle B$,

及　$\angle AED = \angle C$;

且有　$\angle A = \angle A$,

$\therefore$ 諸對應角相等。

(2)　因　$DE \parallel BC$,

故　$AD:AB = AE:AC$……………(a) (§222, §217(5))

過 E 引 $EF \parallel AB$, 會 BC 於 F。

則　$AE:AC = BF:BC$。　(何故?)

但 $BFED$ 爲一平行四邊形,

故　$BF = DE$,

因得　$AE:AC = DE:BC$,……………(b)

由(a)(b)∴ $AD:AB=AE:AC=DE:BC$,

諸對應邊成比例,∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$。 (§227)

229. **系一**。兩三角形中之三角各相等,則此兩形相似。

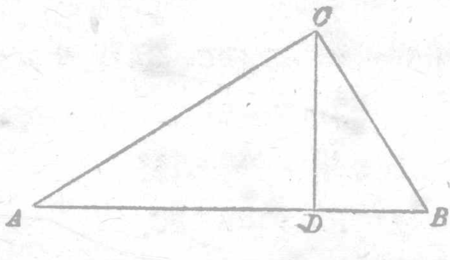
230. **系二**。凡正三角形皆相似。

231. **系三**。兩等腰三角形中之頂角相等或一底角相等,則此兩形相似。

232. **系四**。兩直角三角形之一銳角相等,則此兩形相似。

233. **定理**。

直角三角形弦上之高分得之兩三角形皆與原三角形相似,且彼此相似。



設 ABC 爲一直角三角形,CD 爲弦 AB 上之高。

求證 $rt.\triangle ACD \backsim rt.\triangle CBD \backsim rt.\triangle ABC$。

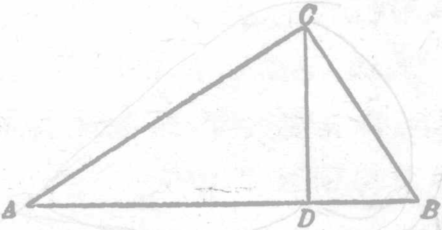
【證】 證明簡易,學者自習之,(§229)

234. **系一.** 直角三角形之直角項垂線爲弦上兩線分之比例中項(即$\overline{CD}^2=AD\cdot DB$.)

235. **系二.** 直角三角形之一腰爲弦及弦上與此腰相隣線分之比例中項.(即$\overline{AC}^2=AB\cdot AD$; $\overline{CB}^2=AB\cdot DB$.)

236. **定理.**

直角三角形兩腰之平方和,等於其弦之平方.



設ABC爲一直角三角形;AC, CB爲其兩腰,AB爲其弦.

求證 $\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=\overline{AB}^2$.

【證】 作 $CD\perp AB$,

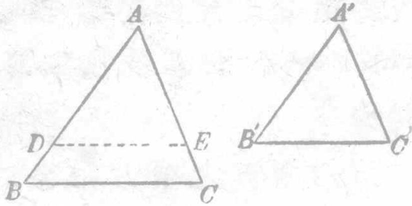
則 $\overline{AC}^2=AB\cdot AD$,

$\overline{CB}^2=AB\cdot DB$. (§235)

相加,得 $\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=AB(AD+DB)=\overline{AB}^2$.

237. 定理。

兩三角形之一角相等,且夾等角之邊成比例,則此兩形相似。



設在兩三角形 ABC, $A'B'C'$ 中, $AB:A'B'=AC:A'C'$, 且 $\angle A=\angle A'$。

求證 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

【證】 在 $A'B'$ 之對應邊 AB 上取 D 點,使

$$AD=A'B'。$$

過 D 作 $DE \parallel BC$, 會 AC 於 E,

則 $$AB:AD=AC:AE, \qquad (\S 222)$$

然 $$AD=A'B',$$

$\therefore$ $$AB:A'B'=AC:AE。$$

與所設比較,得 $$AC:AE=AC:A'C'。$$

$\therefore$ $$AE=A'C'。$$

由是在兩三角形 ADE, $A'B'C'$ 中,

$$AD=A'B',\ AE=A'C',\ \angle A=\angle A',$$

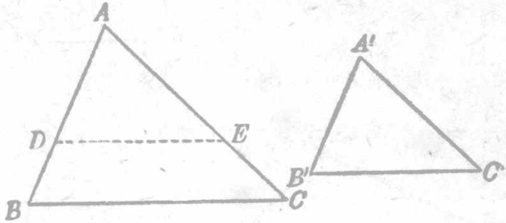
$\therefore$ $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$。

但 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$, (§228)

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

238. 定理

兩三角形之對應邊成比例,則此兩形相似。



設在 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中,

$$AB:A'B' = BC:B'C' = CA:C'A',$$

求證 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

【證】 在 $A'B'$ 之對應邊 AB 上取 D 點,使

$$AD = A'B',$$

過 D 作 $DE \parallel BC$, 會 AC 於 E,

則 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$。 (§228)

$\therefore$ $AB:AD = BC:DE = CA:EA$。

然 $AD = A'B'$,

$\therefore$ $AB:A'B' = BC:DE = CA:EA$。

與所設比較,得 $BC:B'C' = BC:DE$,

及 $$CA:C'A'=CA:EA。$$

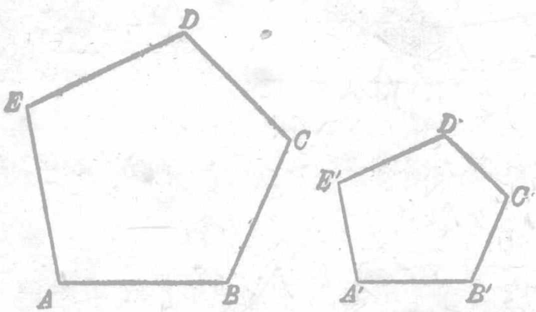
$$\therefore \quad DE=B'C',\ EA=C'A'。$$

$$\therefore \quad \triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'。$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'。$$

229. 定理。

兩相似多邊形之周之比,等於其對應邊之比。



設 P, P' 各為兩相似多邊形 $ABCDE, A'B'C'D'E'$ 之周,$AB, A'B'$ 為其對應邊,

求證 $$P:P'=AB:A'B'。$$

【證】 $$AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=\cdots\cdots$$

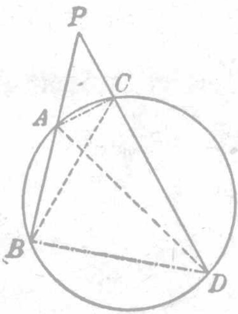
$$\therefore (AB+BC+CD+\cdots\cdots):(A'B'+B'C'+C'D'+\cdots\cdots)$$

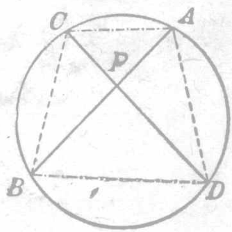
$$=AB:A'B', \qquad (\S 217(9))$$

即 $$P:P'=AB:A'B'。$$

240. 〔定理〕

自圓外或過圓內一點引兩線各交圓於兩點,則連結二雙交點之二弦與兩線所成之兩三角形相似。





設自圓外或圓內一點P,引兩線PA, PC;PA交圓於A, B,PC交圓於C, D。

求證 (1) $\triangle PAC \backsim \triangle PDB$,

及 (2) $\triangle PAD \backsim \triangle PCB$。

【證】 提示: 應用§171 §174, 及§229。學者試自證之。

241. 系一 自圓外一點引兩割線,則一割線與其圓外線分相乘之積等於他一割線與其圓外線分相乘之積;

即 $$PA \cdot PB = PC \cdot PD。$$

242. 系二。 自圓外一點引一切線,此切線之平方等於自此點所引之割線與其圓外線分相乘之積;

卽若$B=A$, 則 $\overline{PA}^2=PC\cdot PD$。 (§144)

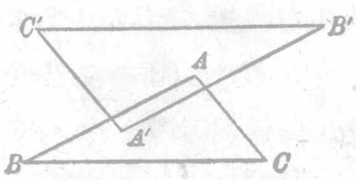
243. 系三 過圓內一點引兩弦,則一弦上兩線分相乘之積,等於他弦上兩線分相乘之積;

卽 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$。

習題

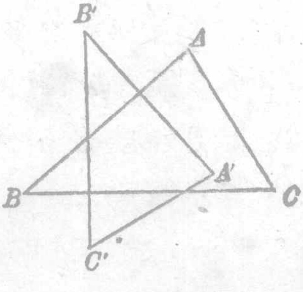
√1. AD及BE爲$\triangle ABC$之兩高,求證$\triangle CED\backsim\triangle CAB$。

2. **兩相似三角形對應高之比等於其對應邊之比。**



√3. **兩三角形對應邊互相平行或垂直,則此兩形相似。**

4. 設兩圓相切,過切點引一直線,則在此直線上兩弦之比等於兩直徑之比。



√5. 在下圖中ABC爲一鈍角三角形, $\angle B$爲

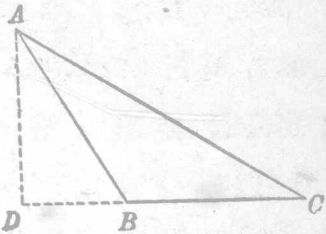
一鈍角，$\angle C$為一銳角；求證

(1) $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$+2BC \cdot DB$,

(2) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

$-2BC \cdot DC$。



6. 過相切兩圓之切點引三直線，會一圓於 A, B, C，會他圓於 A', B', C'，求證 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。(參看第二編之雜題 7。)

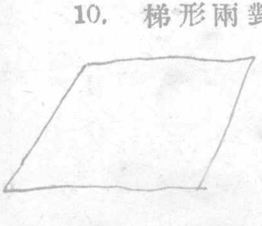
7. 三角形兩邊之積，等於其外切圓之直徑乘其第三邊上之高之積。

8. 設兩圓相切；(1)則其內公切線必平分其兩外公切線；(2)則其外公切線爲其兩直徑之比例中項。

9. 設在平行四邊形 $ABCD$ 內，自 D 引一直線分別會對角線 AC 於 E，邊 AB 於 F 及邊 BC 於 G，則 DE 爲 EG 及 EF 之比例中項。

10. 梯形兩對角線彼此互分之線分成比例。

$DE^2=EG \cdot EF$



第三章　面積

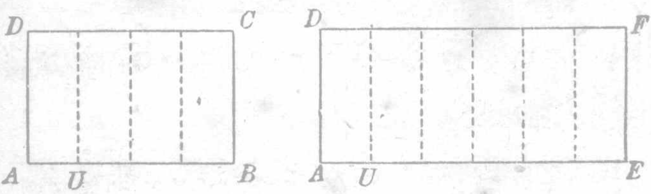
244. 定義. 面積.

以單位長為一邊所成之正方形稱為面之單位.一面含單位面之數稱為面之面積.諸平面形所含面之單位數相等者稱為等積形.

【註】　凡關於面積諸命題內之矩形,三角形……云者,概指其面積而言,故 $\triangle ABC$ 表示三角形 ABC 之面積,等積形常簡稱等形,故以 $=$ 號表示之,合同形常為等積形,而且相似,故以 $\cong$ 表之.

245. 定理.

等高兩矩形之比等於其底之比.



設二矩形 $ABCD$, $AEFD$ 有等高 AD,而其底各為 AB, AE,

求證　　$\square ABCD : \square AEFD = AB : AE$,

【證】　(1) 設 AB, AE 有公度如 AU, AB 為 AU 之 m 倍,

全等形一定是等積形，等積形不是全等形。

AE 爲其 n 倍;

則 $$AB:AE=m:n。$$

分 AB 爲 m 等分, AE 爲 n 等分,各有公度 AU。自各分點作底之垂線;由是 $\square ABCD$ 分爲 m 個相等矩形, $\square AEFD$ 分爲 n 個相等矩形。

故 $$\square ABCD:\square AEFD=m\square:n\square,$$

$$=m:n。$$

∴ $$\square ABCD:\square AEFD=AB:AE。$$

(2)設 AB, AE 無公度, $AB:AE$ 爲一無理數。若其近似值爲 $m:n$, 則(1)中 $\square ABCD:\square AEFD$ 之近似值亦必爲 $m:n$, 故 $\square ABCD:\square AEFD$ 之近似值必依次逐步與 $AB:AE$ 之近似值相等。(§163)

∴ $$\square ABCD:\square AEFD=AB:AE。$$

246. 系。 等底兩矩形之比,等於其高之比。

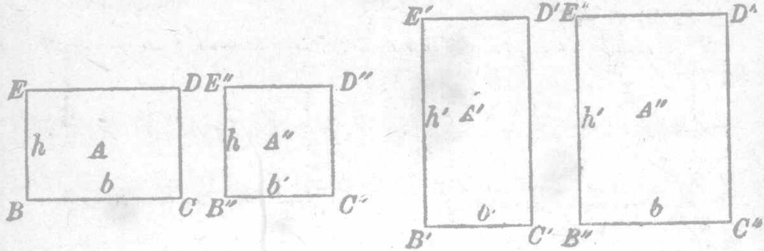
247. 定理。

兩矩形之比等於其高與底之積之比。

兩矩形 $BCDE, B'C'D'E'$, 設其面積各爲 A, A', 其底各爲 b, b' 及其高各爲 h, h'。

求證 $$A:A'=b\cdot h:b'\cdot h'。$$

【證】 另作一矩形 $B''C''D''E''$ 使其底爲 b',(或 b)高



爲 h;(或 h')若其面積爲 A'',

則 $$\frac{A}{A''}=\frac{b}{b'},(\text{或 }\frac{h}{h'}),$$

及 $$\frac{A''}{A'}=\frac{h}{h'},(\text{或 }\frac{b}{b'})。\qquad (\S245, \S246)$$

$$\therefore \quad \frac{A}{A'}=\frac{A}{A''}\cdot\frac{A''}{A'}=\frac{b}{b'}\cdot\frac{h}{h'},(\text{或 }\frac{h}{h'}\cdot\frac{b}{b'})$$

即 $$A:A'=h\cdot b:h'\cdot b'。$$

248. 系一。 矩形之面積等於其高與底之積。

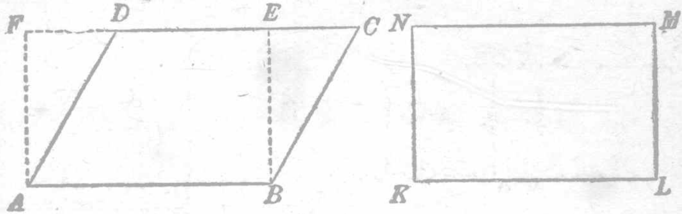
249. 系二。 正方形之面積等於其一邊之平方.

250. 定理。

平行四邊形與等底等高之矩形等積。

設平行四邊形 $ABCD$ 及矩形 $KLMN$ 有等底 AB 及 KL, 及等高 AF 及 KN,

求證 $\square ABCD=\square KLMN$。



【證】　自 B 作 $BE\perp CD$(或其延線),自 A 作 $AF\perp CD$ 之延線(或 CD),

則　$$\square ABEF\cong\square KLMN。$$

今在 $\triangle BEC$ 及 $\triangle AFD$ 中:

$$BE=AF,\qquad\text{(何故?)}$$

$$BC=AD,\qquad\text{(何故?)}$$

$$\angle BEC=\angle AFD=rt.\angle,$$

$\therefore$　$$\triangle BEC\equiv\triangle AFD。$$

$\therefore$　梯形 $ABED+\triangle BEC=\triangle AFD+$ 梯形 $ABED$。

$\therefore$　$$\square ABCD=\square ABEF。$$

$\therefore$　$$\square ABCD=\square KLMN。$$

251. 系一。 等底等高之平行四邊形皆等積。

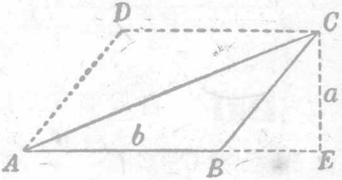
252. 系二。 等底兩平行四邊形之比等於其高之比;等高兩平行四邊形之比等於其底之

比。

△ 253. **定理。**

三角形之面積等於其高及底之積之半。

設三角形ABC之高為a,底為b,



求證　　$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab$。

【證】　在AB及BC上作平行四邊形$ABCD$,

則　　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\square ABCD$。　　(何故?)

但　　$\square ABCD=a\cdot b$,　　(§248, §250)

$\therefore$　　$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab$。

254. 系一。與矩形等底等高之三角形,等於矩形之半。

255. 系二。等底等高之三角形皆等積。

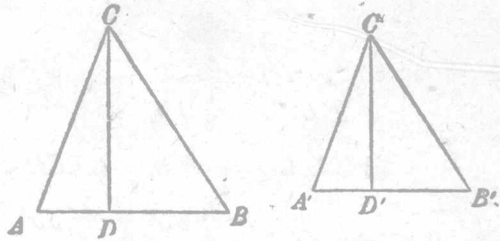
256. 系三。等底兩三角形之比等於其高之比;等高兩三角形之比等於其底之比。

257. 系四。兩三角形之比等於其高底之積之比。

258. **定理。**

兩相似三角形之面積之比,等於任兩對應

邊之平方之比。



設$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$爲兩相似三角形,AB與$A'B'$對應,

求證　$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2$

【證】　作兩三角形之頂垂線(即高)$CD, C'D'$,

則　$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=AB\cdot CD:A'B'\cdot C'D'$,　(§257)

$$=\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{CD}{C'D'}$$

但　$\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$,　(前章習題 2.)

∴　$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2$。

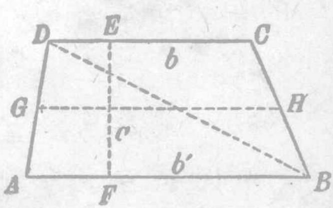
259. 定理。

梯形之面積等於其兩底之和之半與其高之積。

設梯形 $ABCD$ 之上下兩底各爲 b, b',其高爲 a。

求證　梯形$ABCD$

$$=\frac{1}{2}a(b+b')。$$



【證】 作對角線BD,

則 $$\triangle ABD=\frac{1}{2}ab',$$

$$\triangle BCD=\frac{1}{2}ab。\qquad (\S 253)$$

∴ $$\text{梯形}ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$$
$$=\frac{1}{2}ab'+\frac{1}{2}ab$$
$$=\frac{1}{2}a(b+b')。$$

260. 系、 梯形之面積等於其中線與其高之積。

261. 定理。

直角三角形斜邊上之正方形等於他兩邊上之正方形之和。

設直角三角形ABC斜邊BC上之正方形爲BE, AC邊上之正方形爲CG, AB邊上之正方形爲AK。

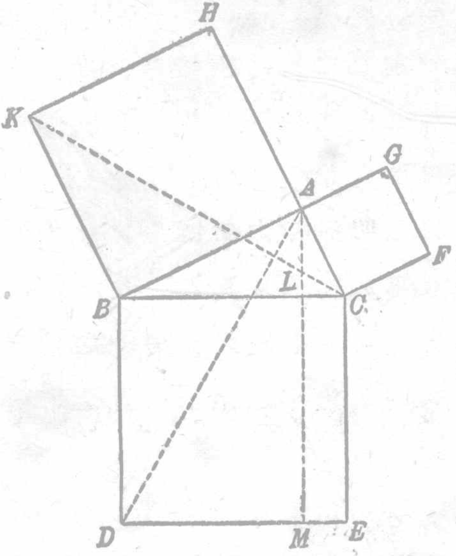
(爲便利起見,此處正方形以對角頂二字表示之。)

求證 $$\square BE=\square CG+\square AK。$$

【證】 自直角頂A引$AL\perp BC$並延長之會DE於M。連結AD及CK;則在$\triangle ABD$, $\triangle KBC$中,

$$AB=KB,\quad BD=BC,$$

$$\angle ABD=\angle KBC。\qquad (何故?)$$



$\therefore$ $\triangle ABD \equiv \triangle KBC$。

今 $\triangle ABD = \frac{1}{2} \square BM$,

又 $\triangle KBC = \frac{1}{2} \square AK$, (§254)

$\therefore$ $\square BM = \square AK$。

依同理 $\square LE = \square CG$。

$\therefore$ $\square BM + \square LE = \square CG + \square AK$。

即 $\square BE = \square CG + \square AK$。

本定理常寫作 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$。 (參看 §.236)

習題

1. 一等邊三角形之面積爲 200 方寸,另一等邊三角形之底爲前形之底之兩倍,求其面積。

2. 梯形之兩底爲24及40,延長其兩腰使之相交,求所成兩三角形之比。

3. 兩相似四邊形之對應邊之比爲5:9,其面積之和爲 212 方尺,求此兩形之面積。

4. 連梯形兩底中點之線,必分之爲兩等積梯形。

5. 順次作三角形三邊上中點之聯線,必分之爲四等積三角形。

6. 菱形之面積等於其兩對角線相乘之積之半。

7. 外切多邊形之面積,等於其周及內切圓之半徑相乘之積之半。

8. 以直角三角形之三邊爲對應邊,作三相似三角形,則弦上之三角形之面積等於兩腰上兩三角形面積之和。

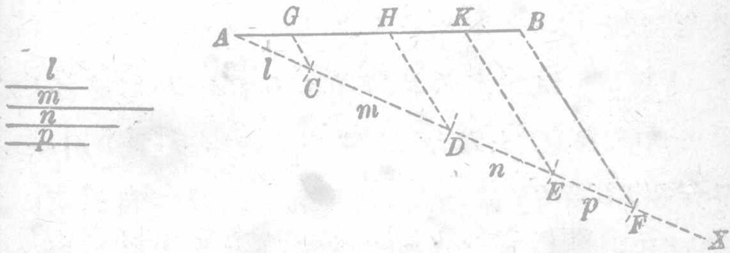
9. 凡過平行四邊形之兩對角之交點所作之線,必分此形爲兩等積分。

10. 四邊形四邊中點之順次聯線,所成之四邊形之面積等於原形之面積之半。

第四章 關於比例及面積之作圖題

262. 作圖題。

分一所設線段爲數分而與所設之數線段成比例。



設有線段 AB, l, m, n, p 等,求將 AB 分爲四分而與 l, m, n, p 等成比例。

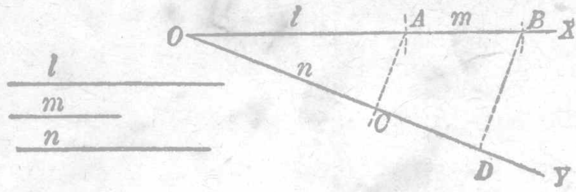
【解】 自 A 引 AX 與 AB 成一適宜之角,在 AX 上截取 $AC=l$, $CD=m$, $DE=n$, $EF=p$; 連結 FB; 自 C, D, E, 作 CG, DH, EK 各與 FB 平行,分別會 AB 於 G, H 及 K;則 G, H, K 即爲所求之諸分點。

【證】 $$AG:AC=GH:CD=HK:DE=KB:EF, \qquad (\S 223)$$

即 $$AG:l=GH:m=HK:n=KB:p。$$

263. 作圖題。

求所設三線段之第四比例項。



設三線段l, m, n,求作第四線段而爲l, m, n,之第四比例項。

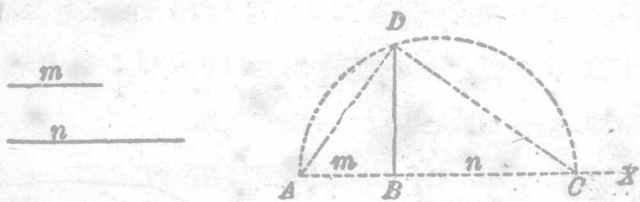
【解】　作任意角XOY;在OX上截取OA等於l,AB等於m;又在OY上截取OC等於n。連結AC,自B引AC之平行線BD會OY於D,則CD爲所求之第四比例項。

【證】　$$OA:AB=OC:CD,$$ (何故?)

卽　$$l:m=n:CD。$$

264. 作圖題。

△ 求所設兩線段之比例中項。



設兩線段m, n,求其比例中項。

【解】　引任意直線AX,在AX上截取$AB=m$,$BC=n$;以AC爲直徑作半圓ADC,自B作AC之垂線BD,會半圓

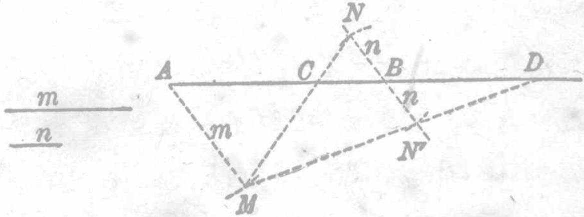
於 D，則 BD 爲所求之比例中項。　半圓所含之圓周角為直角

【證】　因 ADC 爲半圓，故 $\angle ADC = rt. \angle$。　(§172)

$\therefore$　BD 爲 m, n 之比例中項。直角三角形之直角(§234)頂垂線子弦上兩線分之比例中項($BD)^2=AD\cdot DB$)

265. 作圖題。

內分及外分一所設線段，使有所設之比。



設比 $m:n$，線段 AB，求以 $m:n$ 內分及外分 AB。

【解】　自 A 引 AM 與 AB 成一任意角，使 $AM=m$；並自 B 引 BN 與 AM 平行而使 N, M 分在 AB 之兩側。且使 $BN=n$。連結 MN，會 AB 於 C，則 C 爲所求之內分點。

又在 BN 之 B 端延線上，取 $BN'=n$；連結 MN'，會 AB 之延線於 D，則 D 爲所求之外分點。

【證】　(1)　在 $\triangle ACM$ 及 $\triangle BCN$ 中。

$\angle CAM = \angle CBN$，　內錯角

$\angle ACM = \angle BCN$。　對頂角

故　$\triangle ACM \backsim \triangle BCN$。　相似　(何故?)

$$\therefore \qquad AC:CB = AM:BN$$

$$= m:n。$$

(2) 在 $\triangle MAD$ 及 $\triangle N'BD$ 中:

$$\angle MAD = \angle N'BD,$$ 同位角,

$$\angle D = \angle D。$$ 公用

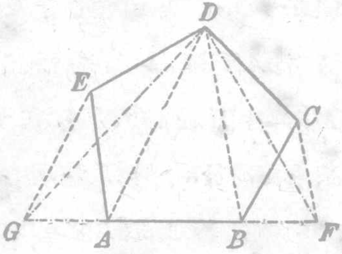
$$\therefore \qquad \triangle MAD \backsim \triangle N'BD。$$ (何故?

$$\therefore \qquad AD:BD = AM:BN'$$

$$= m:n。$$

266. 作圖題。

作一三角形使其與一所設多邊形等積。



設多邊形 $ABCDE$,求作一三角形與之等積。

【解】 作對角線 AD, BD,過 E, C 各作 AD, BD 之平行線 EG, CF,與 AB 之延線相交於 G, F; 連結 DG, DF, 則 $\triangle DGF$ 爲所求之三角形。

【證】 因 $\qquad EG \parallel DA,$

$\therefore$ $\triangle DAG=\triangle DAE$。 (§255)

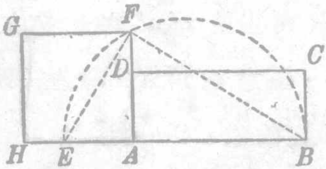
依同理 $\triangle DBF=\triangle DBC$。

$\therefore$ $\triangle DAG+\triangle DAB+\triangle DBF=\triangle DAE+\triangle DAB+\triangle DBC$;

$\therefore$ $\triangle DGF=$多邊形$ABCDE$。

267. 作圖題

作一正方形,使其與一所設之矩形等積。



設矩形$ABCD$,求作一正方形與之等積。

【解】 延長矩形之一邊AB,在其上截取$AE=AD$,以EB爲直徑作半圓EFB,與AD之延線交於F;以AF爲一邊作正方形$AFGH$,卽爲所求之正方形。

【證】 AF爲EA及AB之比例中項, (§234)

故 $\overline{AF}^2=EA\cdot AB$.

但 $EA=AD$, (作圖)

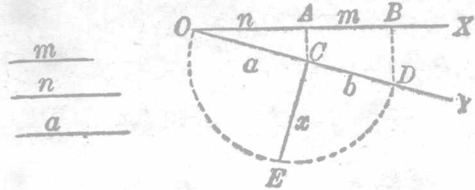
$\therefore$ $\overline{AF}^2=AD\cdot AB$。

卽 $\square AFGH=\square ABCD$。

268. 作圖題。

作一正方形使其與所設正方形之比等於

所設兩線段之比。



設 a 爲所設正方形之一邊，m, n 爲所設兩線段；求作一正方形，使其與正方形 a^2 之比等於 $m:n$。

【解】　作一任意銳角 XOY，在 OX 上截取 $OA=n$，$AB=m$，又在 OY 上截取 $OC=a$；連結 AC，並作 $BD \parallel AC$，會 OY 於 D。以 OD 爲直徑作半圓 OED；自 C 作 OD 之垂線 CE，會半圓於 E。此 CE 即爲所求正方形之一邊。

【證】　設以 n, m, a, b 及 x 分別表諸線段 OA, AB, OC, CD 及 CE。

$x^2=a\cdot b \quad a:x=x:b$

$a^2:x^2=a:b$

$a^2:x^2=n:m$

$\therefore x^2:a^2=m:n$

因 $$a:x=x:b,$$

故 $$a^2:x^2=a:b。\quad \text{(本編第一章習題 4)}$$

又 $a:b=b:c$

$a^2:b^2=a:c$

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

$\frac{a^2}{b^2}=\frac{b}{c}\times\frac{a}{b}=\frac{a}{c}$

(a:b=n

但 $$a:b=n:m,$$

故 $$a^2:x^2=n:m。$$

$$\therefore \quad x^2:a^2=m:n。\quad (\S 217(5))$$

269.　定義。　中末比。

若 C 在線段 AB 之內，分 AB 爲兩段而使 AB:

$x^2 = (m:n)a^2 = (\frac{ma}{n})a$

$\frac{ma}{n}$ $b:a = m:n$ $\therefore a:b = n:m$

$n = a:b$ $x^2 = b \times a$

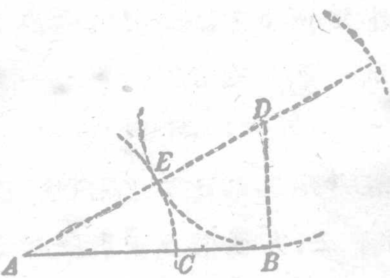
$AC = AC:CB$，則此線段 AB 謂為 C 所內分成中末比；C 稱為 AB 之內中末分點。若 C' 在 AB 之延線上而有 $AB:AC' = AC':C'B$，則 AB 謂為 C' 所外分成中末比，C' 稱為 AB 之外中末分點。

270. 作圖題。

CC 等中末比分點

內分一所設線段成中末比。

線AB 當C所分



設線段 AB，求內分之成中末比。即在 AB 內求 C，使有

$$AB:AC = AC:CB。$$

【分析】 設 $AB = l$，$AC = x$，則 $CB = l - x$，故 $l:x = x:l - x$；$x^2 = l^2 - lx$。移項，配平方得 $(x + \frac{l}{2})^2 = l^2 + (\frac{l}{2})^2$，故以 l 及 $\frac{l}{2}$ 分別為直角三角形之兩腰，其弦必等於 $x + \frac{l}{2}$；因得作圖法如下：

【解】 以 AB 為一腰，在 B 端豎立垂線 BD 並截取 $BD = \frac{1}{2} AB$。連結 AD；在 DA 上截取 $DE = DB$；再在 AB 上截取 $AC = AE$，則 C 為所求之中末分點。

【證】 證明顯明,學者自習之。

習題

1. 求分三角形之一邊爲兩線分與其兩隣邊成比例。

2. 求過圓外一所設點 P 作一割線 PAB 使 $PA:PB$ 等於一所設比 $m:n$。

3. 求外分一所設線段成中末比。

4. 求作一圓之外切三角形與一所設三角形相似。

5. 設兩線分之和及其比,求作此兩線。

6. 求作一正方形與若干所設正方形之和爲等積。

7. 求變一正方形爲一等積等邊三角形。

8. 求變一三角形爲一等積直角三角形,而有一定長之腰。

9. 設四線段 a, b, c, d, 求作一線段 x, 使 $x=\dfrac{ab}{cd}$。

10. 求作一與所設三角形之一邊平行,分此三角形爲兩等積分。

$MN \parallel BC \quad \triangle AMN = \square BCNM$

$\therefore \triangle AMN = \frac{1}{2}\triangle ABC \quad \triangle AMN \sim \triangle ABC$

$AM : AB = MN : BC = AN : AC$

$\triangle AMN : \triangle ABC = 1:2 = AM^2 : AB^2 \quad AM^2 : AB^2 = 1:2 \quad AM :$

$\therefore AM = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$

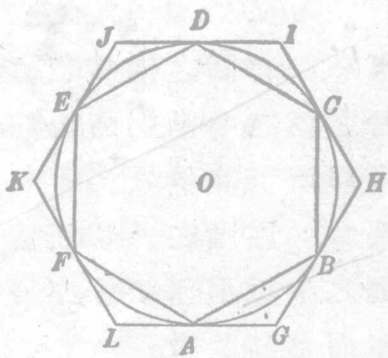
第五章　正多邊形及圓之量法

271. 定理.

設任意分一圓周爲若干等分,則

(1)順次連結相隣分點之弦,成一內接此圓之正多邊形。

(2)在各分點作此圓之切線,成一外切此圓之正多邊形。



設分一圓周爲 n(圖中 n 爲六)等分,其分點順次爲 A, B, C, D, E, F。(1)順次作 $AB, BC,$……諸弦,求證 $ABCDEF$ 爲一正多邊形。

(2)作 LAG, GBH……諸切線,求證 $GHIJKL$ 爲一正多邊形。

【證】 (1) 邊 $AB, BC, CD, \cdots\cdots$ 均等, (§129)

$\angle ABC, \angle BCD, \cdots\cdots$ 均等, (§171)

$\therefore$ $ABCDEF$ 爲一正多邊形。 (§101)

(2) $\triangle AGB, \triangle BHC, \cdots\cdots$ 各爲等腰三角形且均等, (何故?)

$\therefore$ $\angle G, \angle H, \cdots\cdots$ 均等;

$GA, GB, HB, HC \cdots\cdots$ 亦均等;

$\therefore$ $GH, HI, IJ, \cdots\cdots$ 均等。

$\therefore$ $GHIJKL$ 爲一正多邊形。 (§101)

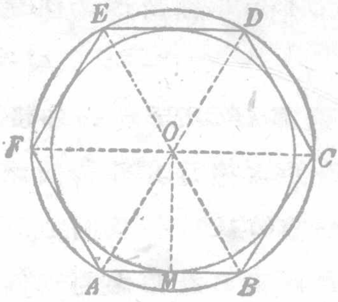
272. 系一。 自圓之內接正多邊形之諸頂至諸邊所對之弧之中點引諸聯線,必構成一新內接正多邊形而倍其邊數。

173. 系二。 在圓之外切正多邊形之諸相隣切點間弧之中點引諸切線,亦必構成一新外切正多邊形而倍其邊數。

274. 【注意】 僅用直尺與圓規任意分一圓周爲若干等分通常爲不可能。其可作者僅有特別數種。此中簡易之題,本章內亦將述及。

275. 定理。

正多邊形可有一外接圓及一內切圓。



設 $ABCDEF$ 正多邊形,

求證　(1)必可作一外接圓,又

(2)必可作一內切圓。

【證】　(1)過 A, B, C 三點作一圓,設此圓之中心為 O,

則　$OA=OB=OC$;

$\angle OBC=\angle OCB$。

今　$\angle ABC=\angle BCD$,　(§101)

故　$\angle OBA=\angle OCD$。　(何故?)

又因　$AB=CD$,　(§101)

故　$\triangle OBA=\triangle OCD$。

$\therefore$　$OB=OD$。

故過 A, B, C 三點之圓必過 D 點;倣此,此圓亦必過其餘諸頂點,

故以 O 爲圓心, OA 爲半徑所作之圓爲此多邊形之外接圓。

$\therefore$　正多邊形 $ABCDEF$ 有一外接圓。

(2)因正多邊形之邊爲其外接圓之弦且互相等,故與其中心之距離相等。故以 O 爲圓心。以此距離 OM 爲半徑所作之圓,爲此正多邊形之內切圓。

$\therefore$　正多邊形 $ABCDEF$ 亦有一內切圓。

注意 **276.　定義。　正多邊形之中心,邊心距,頂心距及中心角。**

正多邊形之內切圓及外接圓之公共中心,稱爲正多邊形之中心;其內切圓之半徑,稱爲正多邊形之邊心距;其外接圓之半徑,稱爲正多邊形之頂心距。由正多邊形之中心至一邊之兩端所引兩頂心距之角,稱爲正多邊形之中心角。

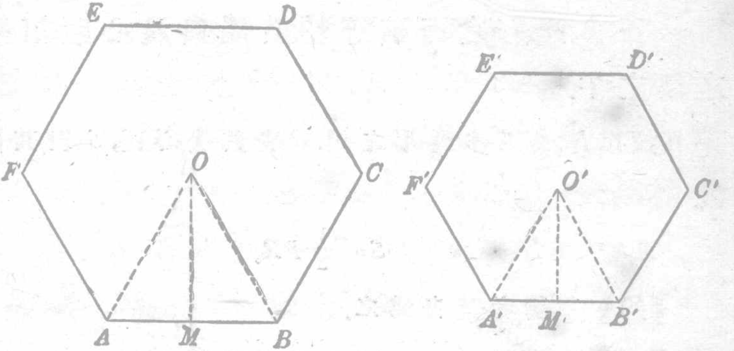
277.　系一。　正多邊形之中心角等於四直角除以邊數所得之商。

278.　系二。　正多邊形之內角與其中心角互爲補角。

279.　定理。

同邊數之兩正多邊形相似;其周之比等於

其邊心距之比或頂心距之比。



設$ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F'$為二同邊數正多邊形,OM, OA及$O'M'$,$O'A'$各為其邊心距及頂心距;又以P及P'表其周。

求證 (1)正多邊形$ABCDEF \backsim$正多邊形$A'B'C'D'E'F'$,

(2) $P:P' = OM:OM'$

$= OA:OA'$。

【證】 參看§239。

280. 系一。同邊數之兩正多邊形之面積之比等於其兩對應邊之平方之比。$AB^2:A'B'^2$

281. 系二。同邊數之兩正多邊形之面積之比等於其邊心距之平方之比,或頂心距之平

$OA^2:O'A'^2 = OM^2:O'M'^2$

方之比。

282. 定理。

正多邊形之面積等於其周與邊心距相乘之積之半。

設以P表正多邊形之周,R表其邊心距,S表其面積。

求證　　$$S=\frac{1}{2}PR。$$

【證】　學者試自爲之。

提示:　引諸頂心距,則此正多邊形分成n(邊數)個等積等腰三角形,求此諸三角形之面積之和。

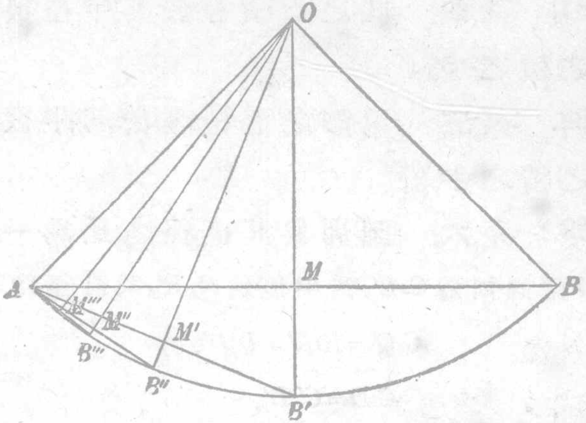
283. 定理。

圓之內接正多邊形之邊數無限加倍,則此正多邊形之邊心距漸近於此圓之半徑,二者之近似值可視爲相等。

設圓之半徑爲OA,其內接正多邊形之邊數爲n(大於2之正整數),AB爲其一邊,OM爲其邊心距。

求證n無限加倍,則OM漸近於OA,二者之近似值可視爲相等。

【證】　設$AB', AB'', AB''', \cdots\cdots$爲逐次加倍正多邊形之一邊,$OM', OM'', OM''', \cdots\cdots$各爲其邊心距。



今　　$AB, AB', AB'', AB''', \cdots\cdots$逐次減少而近於零,

故　　$OM, OM', OM'', OM''', \cdots\cdots$逐次增大,　(§139(2))

漸近於OA。正多邊形之邊數n愈大,則OM愈與OA相近,故n加倍大至無限時,OM與OA可視爲相等。　(§163)

284. 系一。 圓之內接正多邊形之邊數無限加倍,則此正多邊形之周漸近於此圓之周,二者可視爲相等。

285. 系二。 圓之內接正多邊形之邊數無限加倍,則此正多邊形之面積漸近於此圓之面積,二者可視爲相等。

286. 系三。 兩圓周之比等於其半徑之比。

(§279)

287. **系四。** 圓之面積等於其半徑與圓周相乘之積之半。 (282)

288. **系五** 扇形之面積等於其半徑與弧相乘之積之半。

289. **系六。** 圓周與其直徑之比爲一常量。

設兩圓周爲 C, C'，其半徑爲 R, R'，其直徑爲 D, D'，

則 $$C:C'=R:R'=D:D'.$$

故 $$C:D=C':D'.$$

290. **定義。** 圓周率。

圓周與其直徑之比稱爲圓周率，常以希臘字母 π 表之。

291. **系一。** 圓周等於其直徑與 π 相乘之積；圓之面積等於半徑之平方與 π 相乘之積。

292. **系二.** 圓心角爲 n° 之扇形之面積等於半徑之平方與 $\dfrac{n\pi}{360}$ 相乘之積。

證2. 扇形 $=\frac{1}{2}r\cdot\widehat{AB}$

弧長與圓周之比等 $\widehat{AB}:C=\angle A$

則 $\widehat{AB}=\dfrac{c\angle A\cdot B}{360^\circ}=\dfrac{nc}{360^\circ}$

∴ 扇形 $=\frac{1}{2}r\cdot\dfrac{2\pi nr}{360}$

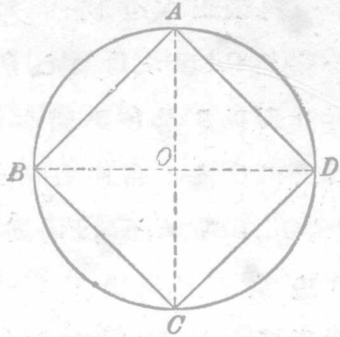
$=r^2\dfrac{n\pi}{360^\circ}$

293. **作圖題。**

作一所設圓之內接正方形。

設 ⊙O，求作一內接正方形。

【解】 作互相垂直之二直徑 AC, BD；連結 AB, BC, CD, DA；則 $ABCD$ 卽爲所求之正方形。



【證】　　$AB=BC=CD=DA$,　　(何故?)

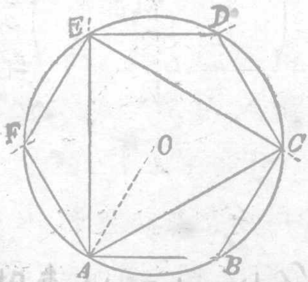
$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=rt.\angle$。

$\therefore$　　$ABCD$ 爲一正方形。

294. 系。 作一所設圓之內接正八邊形,正十六邊形,……以至一切內接正 2^n 邊形.(n 爲一正整數)。

△ 295. 作圖題。

作一所設圓之內接正六邊形.



依次聯接不相連的頂点就成等邊△形

設$\odot O$,求作一內接正六邊形。

【解】 引一半徑OA;以A爲圓心,OA爲半徑,作弧交圓於B及F。再分別以B及F爲圓心,相同之半徑,作弧交圓於C及E;更以C或E爲圓心,同長之半徑作弧交圓於D。連結AB, BC, CD, DE, EF, FA,則$ABCDEF$卽爲所求之內接正六邊形。

【證】 證明從略。

296. 系一. 作一所設圓之內接正三角形。

297. 系二. 作一所設圓之內接正$3\cdot 2^n$多邊形。(n爲一正整數。)

298. 作圖題。 $\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

作一所設圓之內接正十邊形。

$\angle OAB = \angle OBA = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = \frac{14}{2}$

$\angle ACB = \angle OAB = \angle OBA = 7$

$\angle CBA = \angle AOB = 36^\circ$

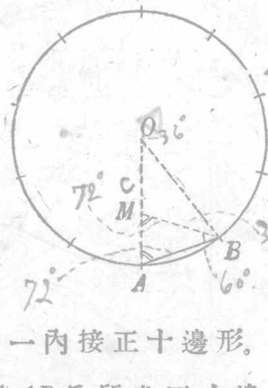
$\therefore \triangle OAB \sim \triangle ABC$

$\angle OCB = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

$\angle CBO = 180^\circ - 108^\circ - 36^\circ = 72 - 36$

$OA : AB = AB : AC$ 對應邊成比

$OA : OC = OC : AC$.



設$\odot O$,求作一內接正十邊形。

【分析】 設AB爲所求正十邊形之一邊,連結OA,

OB,則$\triangle AOB$成一等腰三角形。以B爲圓心,AB爲半徑,作弧與OA交於M;連結MB,則$\triangle MBA$亦成一等腰三角形,而與$\triangle AOB$相似。(何故?)故$OA:MB=AB:MA$。但$\triangle MBO$亦爲一等腰三角形。(何故?)其中$MB=OM$,故$OA:OM=OM:MA$,換言之,M爲OA之中末內分點,因得作圖法如下:

【解】√引一半徑OA;內分OA於M使有中末比$OA:OM=OM:MA$(§270);以A爲圓心,OM爲半徑,作弧與所設圓交於B;連結AB,此即所求內接正十邊形之一邊。

【證】　學者自習之。

提示:　倒轉分析中各步即得。

299. 系一。 作一所設圓之內接正五邊形。

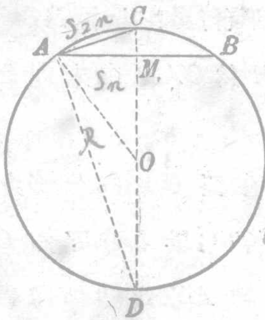
300. 系二。 作一所設圓之內接正$5\cdot2^n$邊形。(n爲一正整數。)

301. 系三。 作一所設圓之內接正十五邊形。(作內接正六邊形之一邊AB,及內接正十邊形之一邊AC;連結BC,此即正十五邊形之一邊,蓋$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$也。)

302. 定理

設一圓之半徑爲R，其內接正n邊形及正$2n$邊形之邊長各爲S_n, S_{2n}，

則$S_{2n}=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-S_n^2})}$。（$n$爲大於2之正整數。）



S. Sn S

$AB = S_n \quad AC = S_{2n}$

$AC^2 = CD \cdot CM = 2R \cdot CM$

$CM = OC - OM = R - OM$ (?)

$OM^2 = OA^2 - AM^2 = R^2 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 = R^2 -$

$\therefore OM = \sqrt{R^2 - \frac{S_n^2}{4}} = \sqrt{4R^2 -}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}(4R^2 - S_n^2)}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - S_n^2}$

設⊙O之半徑$OA=R$，其內接正n邊形之一邊$AB=S_n$，正$2n$邊形之一邊$AC=S_{2n}$。

求證　$S_{2n}=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-S_n^2})}$。

【證】　引直徑COD，則COD垂直等分AB於M；連結AD。在$rt.\triangle OMA$中，　$\overline{OM}^2=\overline{OA}^2-\overline{AM}^2$，

故　$OM=\sqrt{R^2-\frac{S_n^2}{4}}$。

故　$CM=R-\sqrt{R^2-\frac{S_n^2}{4}}$。

又在$rt.\triangle CAD$中，　$\overline{AC}^2=CD\cdot CM$。

故　$S_{2n}^2=2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{S_n^2}{4}}\right)$，

∴　$S_{2n}=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-S_n^2})}$。

$\therefore CM = R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - S_n^2} = \frac{2R - \sqrt{4R^2 - S_n^2}}{2} = \frac{1}{2}(2R - \sqrt{4R^2 - S_n^2}$

$AC^2 = 2R \cdot \frac{1}{2}(2R - \sqrt{4R^2 - S_n^2}) = R(2R - \sqrt{4R^2 - S_n^2}$

$C=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-S_n^2})}$ $\sqrt{3}$ $=\sqrt{0.398}$

303. 系。 設 $R=1$, 則 $S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}$。

304. 計算 π 之值。

設 $R=1$, 則 $S_6=1$, 應用 $S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}$, 順次得

單位圓內接正多邊形之一邊	其全周
$S_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-\ \ 1^2}}=0.51763809$	6.21165708
$S_{24}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.51763809)^2}}=0.26105238$	6.26525722
$S_{48}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.26105238)^2}}=0.13080626$	6.27870041
$S_{96}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.13080626)^2}}=0.06543817$	6.28206396
$S_{192}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.06543817)^2}}=0.03272346$	6.28290510
$S_{384}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.03272346)^2}}=0.01636228$	6.28311544
$S_{768}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.01636228)^2}}=0.00818121$	6.28316941

取最後之周爲圓周之近似值則 π 之近似值等於

$$\frac{C}{2R}=\frac{6.28316941}{2}=3.14159。$$ 26535.

圓周與直徑之比例(π)

習　題

1. 連正多邊形之任一頂與不相隣之諸頂之諸對角線分其角爲比邊數少二之諸等分。

√ 2. 設圓之半徑爲 R, 其內接正八邊形之一邊爲 S_8, 試證 $S_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$。

3. 圓之內接正三角形之面積等於其內接正六

邊形之面積之半。

V○4. 圓之內接正五邊形一邊之平方,等於此圓之半徑與其內接正十邊形一邊之平方之和。

5. 圓之內接正多邊形之頂心距為其邊心距及相似外切多邊形之頂心距之比例中項。

√6. 圓之外切正方形之面積等於其內接正方形之面積之二倍。

7. 設圓之半徑為R,其內接正多邊形之一邊為S,試證其邊心距為$\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-S^2}$。

√8. 設兩同心圓周之長為 130 尺及 85 尺,求此兩圓周間環形之寬,及其面積。

9. 設一扇形之圓心角為$20°$,其半徑為 3 尺,求此扇形之面積。

√10. 有矩形草地一塊,長 14 尺,寬 9 尺;設在其中心拴羊一隻,繩長 4 尺,則此羊不得食之草地之面積為若干方尺?

11. 一正八邊形之池塘邊長 8 尺,求其相對兩岸間之距離。

第四編之雜題

1. 自某點至兩定點之距離之比為一常量,此點

之軌跡爲何?

2. 某點與兩相交定線之距離之比爲一常量,此點之軌跡爲何?

3. 某點與兩定點之距離之平方和爲一常量,此點之軌跡爲何?

4. 自圓外一所設點作一割線 PAB 使 $PA:AB=m:n$。

5. 作一所設圓之外切正三角形。

6. 在三角形內求一點使自此點至三頂之聯線分此形爲三等積分。

7. 過梯形內任一點作一線,分此形爲兩等積分。

8. 作一點使其與所設三直線之距離之比爲 $m:n:p$。

9. 設一三角形之三角及面積,作此三角形。

10. 作一圓周等於兩所設圓周之和。

11. 作一圓使其面積等於兩所設圓面積之和。

12. 作一正八邊形使其面積與另一所設正八邊形面積之比爲 $m:n$。

13. 一園地成正方形,其面積共16627.84平方尺。今欲築牆圍之,牆價每尺洋2元,問共價若干元?

14. 設一扇形之圓心角爲60°,半徑爲9寸,求其內切圓之面積(參看第三編之雜題23)。

15. 一橋成圓弧形,其弦爲120尺,弧之最高點距脚平地高15尺,求此弧之半徑。

16. 有三等圓彼此相切,設其公共半徑爲5尺,求此三圓間所含之面積。

17. 三角形一角之等分線之平方等於此角兩邊之積,減去此分角線在第三邊上所分兩線分之積。

18. 三角形兩邊之積等於其外切圓之直徑與其第三邊上之高之積。

19. 過相交兩圓之一交點作一線,則在線上兩弦之比等於兩直徑之比。

20. 大小兩圓相內切,由切點作大圓之弦必爲小圓所分成比例。

21. 圓之內接四邊形$ABCD$中,兩對角線$AC\cdot BD$之積,等於其兩雙對邊之積之和,$AB\cdot CD+BC\cdot DA$。

提示: 作DE,使$\angle CDE=\angle ADB$。

22. 兩圓相切,其內公切線必等分其外公切線。

23. 四邊形兩對角線之平方和,等於其兩雙對邊之中點之聯線平方和之二倍。

24. 述§226之逆,並證其合理。

25. 在圓之內接矩形各頂作圓之切線,必圍成一菱形

26. 圓之內接正六邊形之面積爲其內接及外切正三角形之面積之比例中項。

27. 三角形之面積等於其周與其內切圓半徑相乘之積之半。

28. 自正多邊形內一點至其諸邊之垂線之和等於其邊數與邊心距相乘之積。

29. 設圓內兩弦彼此垂直且相交,則以其四線分爲直徑之四圓與原圓等積。

30. 在正六邊形各邊上,向形外作正方形,則諸正方形之外頂爲一正十二邊形之諸頂。

立體幾何學

第一編

直線及平面

第一章　基本概念

305. 定義。 平面。

面之連其上任意兩點之直線全在其面上者,曰平面。

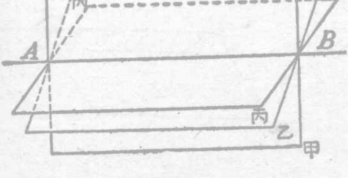
如水面、桌面,皆爲平面。反之,鍋底、皮球,皆爲曲面。

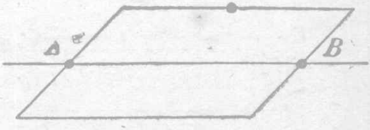
設一直線或點在一平面上,則曰此平面含此直線或點,或此平面過此直線或點。

306. 公設。

(1) 過一直線,可作無數平面.

(2) 過不在同一直線上之三點,可作一平面.





307. 公理。

不在同一直線上之三點,僅定一平面。

由是知(1)一直線及其線外一點,僅定一平面;

(2)兩相交直線僅定一平面;

(3)兩平行直線僅定一平面。

308. 平面之記法。

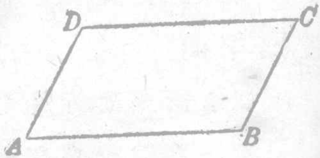
一平面廣無邊緣,恰如一直線長無止限。惟吾人欲記一平面,常以其面上之

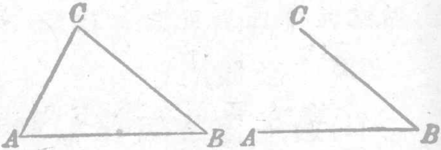
(1)平行四邊形,或

(2)不在同一直線上之三點,或

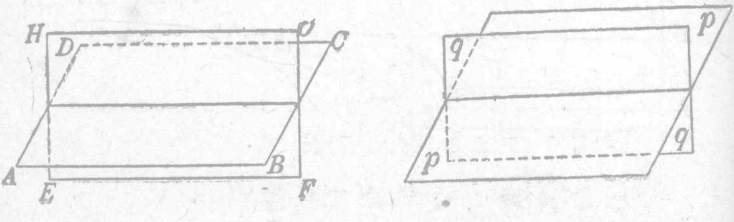
(3)兩相交直線

表之。如右圖稱平面 $ABCD$ 及平面 ABC。





如無混指多數平面之弊,吾人亦常以平面上一點或一字母表其平面。如下圖稱平面 A,平面 E,平面 p,及平面 q。

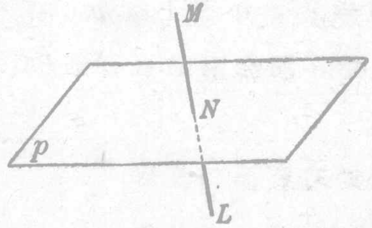


309. 公理。

(1)設一直線有兩點在一平面之兩旁,則此直線與此平面必相交於一點,且僅相交於一點。

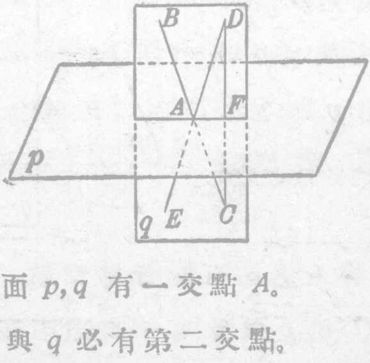
(2)設一直線與一平面僅相交於一點,則此直線被交點所分之兩部必在此平面之兩旁。

如下圖,直線LM與平面p僅相交於N點,而NM及NL在平面p之兩旁。



310. 定理。

設兩平面有一交點,則必有第二交點。



設兩平面p,q有一交點A。

求證p與q必有第二交點。

【證】　在 q 平面上,過 A 點,作兩直線 BC,DE。設 BC,DE 各與 p 平面僅相交於 A 點,蓋否則 p,q 已有第二交點而本定理已成立矣。

取 AB,AD 在 p 之一旁及 AC,AE 在 p 之又一旁。(§309(2))

卽 C,D 兩點在 p 之兩旁而直線 CD 必過 p 之一點 F。(§309(1))

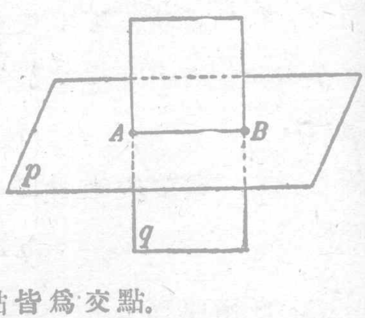
但 CD 直線在 q 平面上,故 p,q 亦有交點 F。

又 F,A 爲不同之兩點,蓋否則 BC,DE 相重合而爲一直線矣。

故 p 與 q 乃有第二交點 F。

311.　定理。

兩平面相交成一直線。



設兩平面 p,q 相交而共有兩點 A,B。(§310)

求證: (1) p 與 q 之所有交點皆在 AB 直線上;及

(2) AB 直線上之所有點皆爲交點。

【證】　(1) 如 p 與 q 有一交點不在 AB 直線上,則

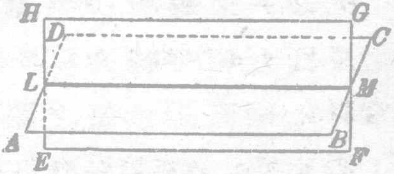
p與q相重合而爲一平面矣(§307)。故p與q之所有交點皆在AB直線上。

(2) AB全在p平面上,且全在q平面上(§305),故AB直線上之所有點皆在p,q兩平面上而爲其交點。

312. 公理。

設兩平面相交於一直線,則各平面被交線所分之兩部必在他一平面之兩旁。

如右圖,平面E之兩部$LMGH$及$LMFE$在平面A之兩旁。



習題

1. 就教室內實物,說明平面及相交平面。

2. 兩點,三點或四點各定幾許平面?試詳論之。

3. 一桌有四足而不能穩立於極平滑之地板上。何故?

4. 攝影師恒用三足架。何故?

第二章 平行及垂直

313. 定義。平行。

(1)設兩直線在同一平面上而無交點,則曰此兩直線互相平行。

(2)設兩平面無交點,則曰此兩平面互相平行。

(3)設一直線與一平面無交點,則曰此直線與此平面互相平行。

314. 兩直線位置之關係,分下列四種:

(1)相合　兩直線在同一平面上,相重合而成一直線。

(2)相交　兩直線在同一平面上,相交於一點。

(3)平行　兩直線在同一平面上,但無交點。

(4)相左　兩直線不在同一平面上,故無交點。(§307)

315. 兩平面位置之關係,分下列三種:

(1)相合　兩平面相重合而成一平面。(§307)

(2)相交　兩平面相交於一直線。

(3)平行　兩平面無交點。

316. **一直線與一平面位置之關係,分下列三種:**

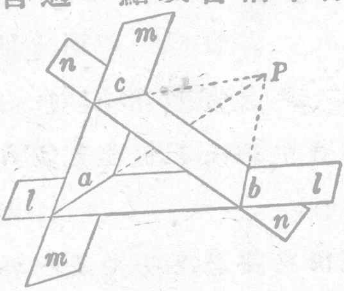
(1)相重　直線全在平面上。 (§305)

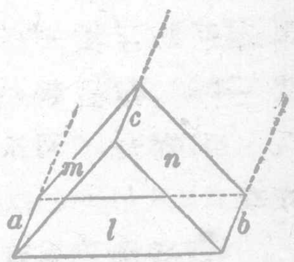
(2)相交　直線與平面相交於一點。

(3)平行　直線與平面無交點。

317. **定理。**

設三平面兩兩相交於三直線,則此三直線或皆過一點或皆相平行.





設三平面 l, m, n 相交於三直線 a, b, c。

求證 a, b, c 或皆過一點,或皆相平行。

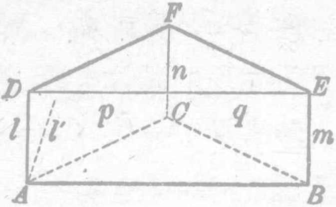
【證】　如圖,a, b 皆在 l 平面上。

第一款　如 a, b 相交於一點 P,則 P 點亦在 m, n 兩平面上,故 a, b, c 皆過 P 點。

第二款　如 a, b 互相平行,則 a, c 及 b, c 各互相平行,蓋否則 a, b 亦必相交而不平行矣,故 a, b, c 皆相平行。

318. 定理.

平行於同一直線之兩直線互相平行。



設兩直線 l, m 各平行於同一直線 n。

求證　　$l \parallel m$。

【證】　第一款　如 l, m, n 皆在同一平面上,則本定理已成立矣。 (§62)

第二款　今設 l, m, n 不在同一平面上。設 l, n 之平面爲 p 及 m, n 之平面爲 q。 (§307(3))

過在 l 直線上而不在 m 直線上之一點 A 及 m 直線,作平面 ABE (§306(2))。則 ABE 與 q 相交於 m,且與 p 相交於過 A 點之一直線 l'。 (§311)

於是, ABE, p, q 兩兩相交於 l', m, n 而 l', m, n 皆相平行。 (§317)

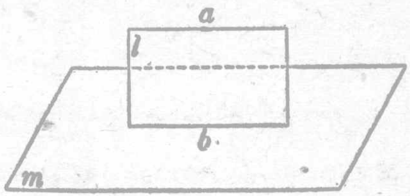
$\because$　l', l, n 皆在 p 平面上,且 l', l 皆過 A 點各平行於 n。

$\therefore$　l', l 相重合而成一直線矣。 (§60)

$\because$　$l' \parallel m$。　$\therefore$　$l \parallel m$。

319. 定理。

設兩相交平面之一平面上之一直線與其交線平行,則此直線必與其他一平面平行.



設兩平面 l, m 相交於一直線 b, 而 l 平面上之一直線 a 與 b 交線平行。

求證 a 直線平行於 m 平面。

【證】　$a \parallel m$, 蓋否則 a 與 m 有一交點 P 在 b 交線上,而 a, b 爲相交線矣。此與所設者相衝突也。

320. 定理。

設兩相交平面之一平面上之一直線與其他一平面平行,則此直線必與其交線平行。

參看前節定理之圖

設兩平面 l, m 相交於一直線 b, 而 l 平面上之一直線 a 與 m 平面平行。

求證 a 直線平行於 b 交線。

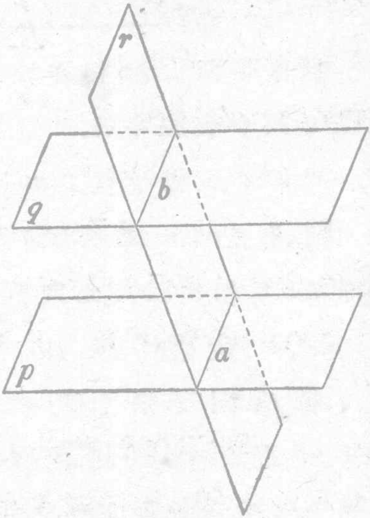
【證】　$a \parallel b$, 蓋否則 a 與 b 有一交點 P, 而 a 與 m

亦相交於P點矣。此與所設者相衝突也。

321. 系。 設一平面平行於一直線,則過此平面上之一點而平行於此直線之另一直線必在此平面上。

322. 定理。

兩平行之平面與第三平面相交之兩直線必互相平行。



【證】 如兩平面p, q與平面r相交於兩直線a, b,而$p \parallel q$,則$a \parallel b$,蓋否則a, b相交而p, q亦相交矣。此與所設者相衝突也。

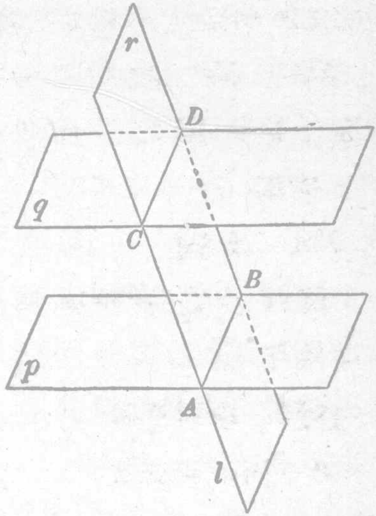
323. 系。 平行直線之夾於兩平行平面間之線段皆相等。

324. 定理。

設一直線與兩平行平面之一相交,必與其二相交。

設一直線 l 與兩平行平面 p, q 之 p 相交於一點 A。

求證 l 與 q 亦相交。



【證】 取在 q 上而不在 l 上之一點 D, 蓋否則 q, l 共有 D 點而本定理已成立矣。(§316)

過 l 及 D, 作一平面 r。則 r 與 p, q 分別相交於兩平行直線 AB, CD。(§310, 311, 322)

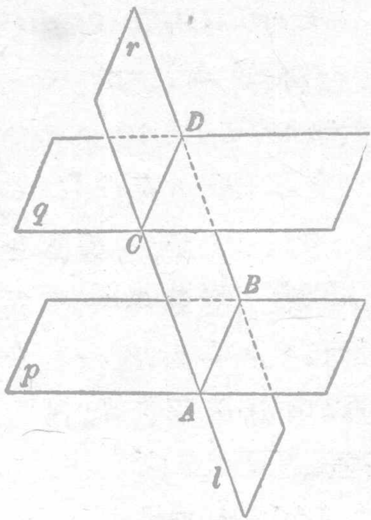
$\because$ l, AB, CD 皆在 r 平面上,而 l 與 AB 相交於 A 點。

$\therefore$ l 與 CD 亦相交於一點 C, 蓋否則 $l \parallel CD$ 而 l 與 AB 相重合矣(§60)。此與所設者相衝突也。

即 l 與 q 共有 C 點而相交(§316)。

325. 定理

設一平面與兩平行平面之一相交,必與其二相交.

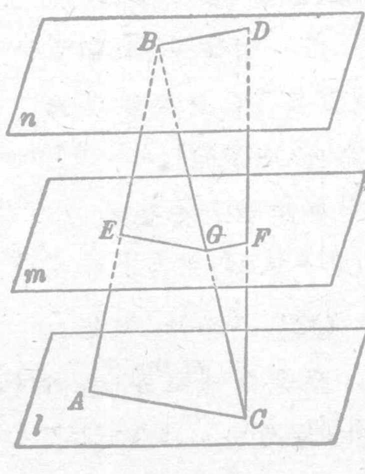


設一平面 r 與兩平行平面 p,q 之 p 相交於一直線 AB。

求證 r 與 q 亦相交。

【證】 在 r 平面上,過 AB 直線上之一點 A,作另一直線 l。則 l 與 q 相交於一點 C (§324)。即 r 與 q 共有 C 點而相交(§310, 311)。

326. 定理。



設兩直線被三平行之平面所截,則其所截之對應線段成比例。

設兩直線 AB, CD 被三平行之平面 l, m, n 所截,而其截點爲 A, E, B, C, F, D 諸點。

求證　$AE:EB=CF:FD$。

【證】　連 BC 遇 m 於一點 G。並連 EG, GF, AC, 及 BD。則 $AC \parallel EG$ 及 $BD \parallel GF$ (§322)

$\therefore$　$AE:EB=CG:GB=CF:FD$。　(§223)

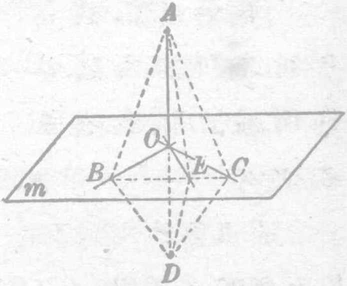
327. 定義。 垂直,垂足。

設一直線與一平面相交於一點,且與過此點而在此平面上之一切直線互相垂直,則曰此直線與此平面互相垂直。其交點曰垂線足或簡稱垂足。

328. 定理。

設一直線過他兩直線之交點而垂直於其兩線,必垂直於其兩線之平面。

設一直線 AO 過兩直線 OB 及 OC 之交點 O 而垂直於 OB 及 OC。



求證 AO 垂直於 OB 及 OC 之平面 m。

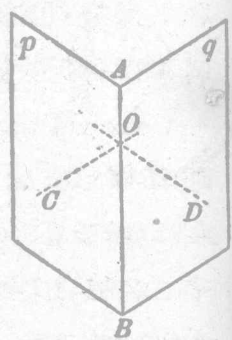
【證】　在 m 平面上,過 O 點,作任一直線 OE。如 AO 垂直於此任一直線 OE,則 AO 垂直於 m 平面。(§327)

通過 m 平面,引長 AO 至 D 點而取 $AO=OD$。在 m 上,作一直線 BC 交 OB, OE, OC 於 B, E, C。連 AB, AE, AC, DB, DE, DC。則 OB 及 OC 各爲 AD 之中垂線。故 $AB=DB$ 及 $AC=DC$。(§78)

$\therefore$　$\triangle ABC \equiv \triangle DBC$。如疊置兩三角形 ABC 及 DBC,使其相重合,則兩線段 AE 及 DE 亦相重合。故 $AE=DE$。又 $AO=OD$。故 OE 亦爲 AD 之中垂線(§78)。卽 $AO \perp OE$ 故 $AO \perp m$。(§327)

329. 作圖題。

過一直線上之一點,作一平面垂直於此線。



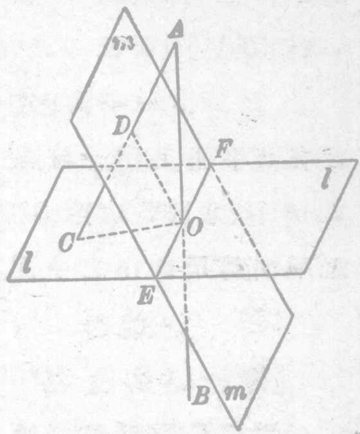
設 O 爲 AB 直線上之一點,求作一平面過 O 而垂直於 AB。

【解】　過 AB, 作兩平面 p, q (§306)。在兩面上,過 O, 分別作兩直線 OC 及 OD 各垂直於 AB (§193)。則 OC 與 OD 所定之平面爲所欲作之平面(§307(2))。

【證】　OC 與 OD 所定之平面過 O 點,且垂直於 AB 直線(§328)。

330. 定理。

過一直線上之一點,僅有一平面垂直於此線。



設O為AB直線上之一點。

求證過O而垂直於AB之平面唯一。

【證】 由§329,設有一平面l過O而垂直於AB。

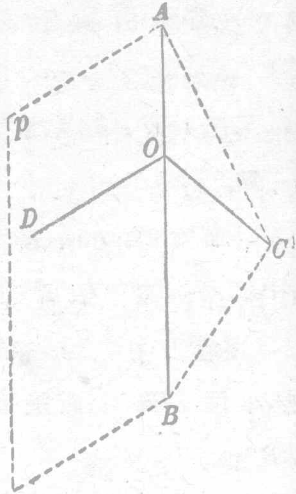
如有第二平面m亦過O而垂直於AB,則l, m相交於過O之一直線EF(§310, 311)。取AB上之一點A及l上之一點C,使A及C分列於m之兩旁(§309(2),312)。連AC直線交m於一點D(§309(1))。連兩直線OC, OD。則$AO \perp OC$及$AO \perp OD$(§327),且OC及OD皆在AB與AC所定之平面上(§305)。此與§24相衝突也。故無第二平面m過O而垂直於AB。故過O而垂直於AB之平面唯一。

331. 作圖題。

過一直線外之一點,作一平面垂直於此線。

設C為AB直線外之一點,求作一平面過C而垂

直於AB。



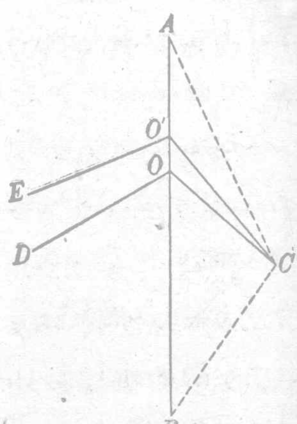
【解】 在AB及C所定之平面上(§307(1)),作一直線$CO\perp AB$(§192),而記其交點爲O。過AB,另作一平面p(§306),並在p平面上作一直線$OD\perp AB$(§193)。則CO與OD所定之平面爲所欲作之平面。

(§307(2))

【證】 CO與OD所定之平面過C點,且垂直於AB直線(§328)。

332. 定理。

過一直線外之一點,僅有一平面垂直於此線。



設C爲AB直線外之一點。

求證過C而垂直於AB之平面唯一。

【證】 由§331,設有一平面COD過C而與AB垂直

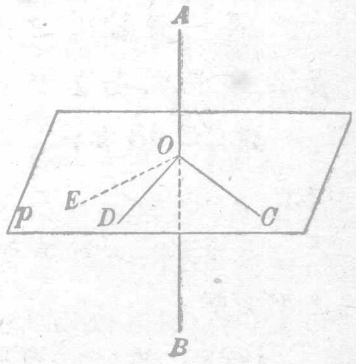
於 O 點。

如有第二平面 $CO'E$ 亦過 C 而與 AB 垂直於 O' 點，則 O 及 O' 爲不同之點(§330)，而 CO 及 CO' 亦爲不相重合之兩直線矣。CO 及 CO' 皆在 ABC 平面上而與 AB 垂直(§327)。此與§56相衝突也。故無第二平面 $CO'E$ 過 C 而與 AB 垂直。故過 C 而垂直於 AB 之平面唯一。

333. 系。 垂直於同一直線之兩平面互相平行。

334. 定理。

過一直線上一點之一切垂線皆在過此點而垂直於此線之唯一平面上。



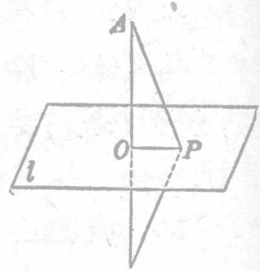
設 p 爲過 AB 直線上之 O 點而垂直於 AB 之唯一平面。

求證過 O 而垂直於 AB 之一切垂線皆在 p 平面上。

【證】 過 O，作兩直線 OC，OD 各垂直於 AB。則 COD 平面過 O 而垂直於 AB，故與 p 相重合。即 OC 及 OD 皆在 p 平面上。過 O，作其他任一

線 OE 垂直於 AB。則依前法可得 COE 平面,亦過 O 而垂直於 AB。故 COE 平面與 p 平面亦相重合,而 OE 亦在 p 平面上。如是過 O 而垂直於 AB 之一切垂線皆在 p 平面上。

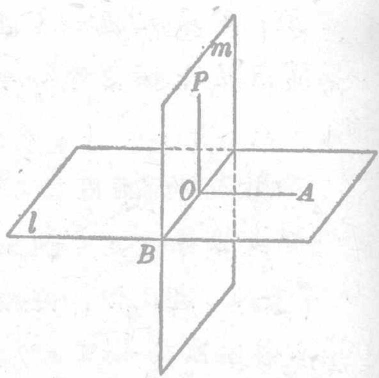
335. 系。 過一線段中點之垂直平面為與此線段兩端有相等距離之點之軌跡。 參看§183, 187。



336. 作圖題。

過一平面上之一點,作一直線垂直於此平面。

設 O 為 l 平面上之一點,求作一直線過 O 而垂直於 l。

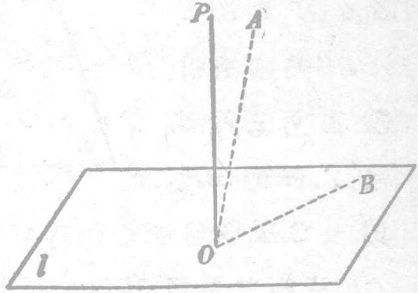


【解】 在 l 上,過 O,作 OA 直線。過 O,作 m 平面 $\perp OA$ (§329)。則 m 交 l 於 OB 直線(§310, 311)。在 m 上,作 $OP \perp OB$ (§193)。則 OP 為所欲作之直線。

【證】 $OP \perp OA$ (§327)。$OP \perp OB$。 $\therefore$ $OP \perp l$ (§328)。

337. 定理。

過一平面上之一點,僅有一直線垂直於此平面。



設 O 為 l 平面上之一點。

求證過 O 而垂直於 l 之直線唯一。

【證】 由§336,設 OP 直線過 O 而垂直於 l。

如有第二直線 OA 亦過 O 而垂直於 l, 則 POA 平面交 l 於 OB 直線(§310, 311)。$OP \perp OB$ 及 $OA \perp OB$ (§327)。此與§24相衝突也。故無第二直線亦過 O 而垂直於 l。故過 O 而垂直於 l 之直線唯一。

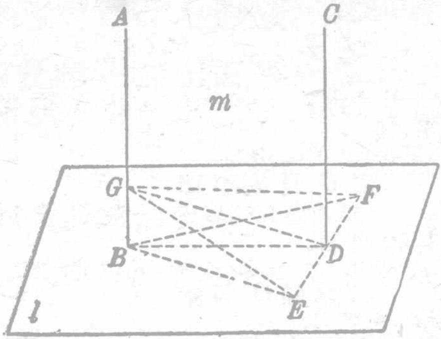
338. 定理。

垂直於同一平面之兩直線互相平行。

設兩直線 AB, CD 各垂直於一平面 l, 而記其垂足為兩點 B, D。

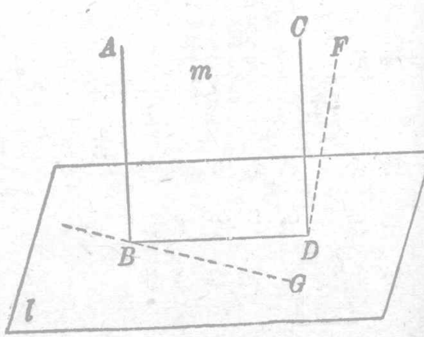
求證 $AB \parallel CD$。

【證】 連 BD。在 l 上,過 D, 作直線 $EF \perp BD$ 而取



$DE=DF$。連 $B'E$ 及 BF」在 AB 上,取任一點 G, 並連 GD, GE。及 GF。則 BDE 及 BDF 爲兩全相等之直角三角形(§38)。∴ $BE=BF$。GBE 及 GBF 亦爲兩全相等直角三角形(§327, 38)。∴ $GE=GF$。故兩三角形 GDE, GDF 皆在 GEF 平面上而全相等(§41)。∴ $\angle GDE=\angle GDF$ 而 $GD\perp EF$, $CD\perp EF$ (§327) 故 BD, GD, CD 各垂直於 EF 而同在 m 平面上(§334)。AB 亦在 m 上(§305)。故 AB, CD 同在 m 平面上,且各垂直於 BD (§327)。∴ $AB \parallel CD$(§63)。

339. 定理。



設一平面垂直於兩平行直線之一,必垂直於其二。

設兩直線 AB, CD平行;且設平面

$l\perp AB$,而記其垂足為B點,

求證　　$l\perp CD$。

【證】　設AB, CD之平面為m及m、l之交線為BG(§307(3), 310, 311)。

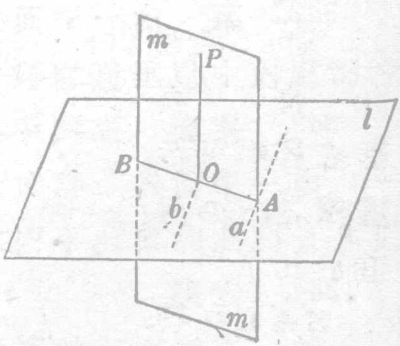
則l與CD共有一點D,蓋否則$l\parallel CD, BG\parallel CD$(§ 20),於是在$m$上,過$B$,有兩直線$BG, BA$各平行於$CD$,與§60相矛盾也。

過D,作直線$DF\perp l$(§336)。則$DF\parallel AB$(§338),且DF在m平面上,蓋因AB直線及D點能定m平面也。故DF及DC相重合而為一線(§60)。$\therefore DC\perp l$,即$l\perp CD$。

340. 作圖題。

過一平面外之一點,作一直線垂直於此平面。

設P為l平面外之一點,求作一直線過P而垂直於l。



【解】　在l上,作任一直線a。作一平面m過P而垂直於a,並記其垂足為

A 點(§331)。則 l, m 相交於一直線 AB。

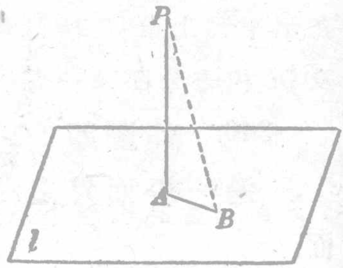
在 m 上,作直線 $PO \perp AB$ 而記其垂足爲 O 點。則 PO 爲所欲作之直線。

【證】 在 l 上,過 O,作直線 $b \parallel a$(§201)。則 $b \perp m$(§339)。$\therefore PO \perp b$(§327)。故 $PO \perp l$ (§328)。蓋因 AB 及 b 定 l 平面也。

341. 定理。

過一平面外之一點,僅有一直線垂直於此平面。

【證】 由 §340, 設 PA 直線過 P 點而垂直於 l 平面。若第二直線 $PB \perp l$, 則 $PA \perp AB$ 及 $PB \perp AB$(§327) 與 §56 相矛盾也。



342. 系。 由一平面外一點,向此平面所引之諸線段中,以垂直線段爲最短。

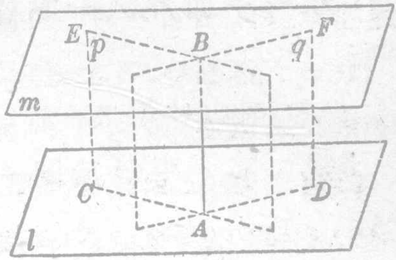
343. 定義。 點與平面之距離。

由一平面外一點向此平面所引之垂直線段之長曰此點與此平面之距離。

344. 定理。

設一直線垂直於兩平行平面之一,必垂直

於其二。

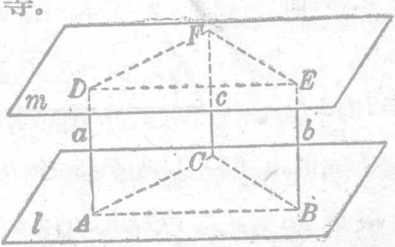


設兩平面 l, m 平行;且設直線 $AB\perp l$, 而記其垂足爲 A 點。

求證 $AB\perp m$。

【證】　AB 必交 m 於一點 B (§324)。過 AB, 作兩平面 p,q 交 l 於兩直線 AC, AD, 而交 m 於兩直線 BE, BF, 則 $AB\perp AC, AB\perp AD$ (§327)。$AC \parallel BE, AD \parallel BF$。(§322)。$\therefore$ $AB\perp BE, AB\perp BF$ (§64)。故 $AB\perp m$。

345. 系。 兩平行平面間之一切垂直線段之長皆相等。



346. 定義。 平行平面之距離。

兩平行平面間之垂直線段之長曰此兩平行平面之距離。

347. 定理。

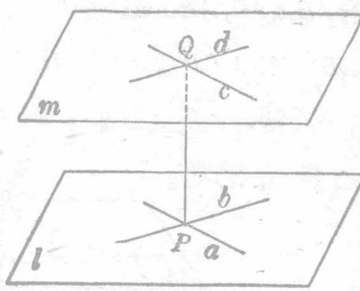
過一平面外之一點,僅有一平面與此平面平行。

參考§330, 344。學者自證之。

348. 系。 平行於同一平面之兩平面互相平行。

349. 定理。

設兩相交直線平行於同一平面,則此兩交線之平面亦平行於此平面。



設兩直線 a, b 相交於 P 點而平行於同一平面 m。

求證 a, b 之平面 l 平行於平面 m。

【證】 作 $PQ\perp m$,而記其垂足為 Q 點。則 a 與 PQ 之平面及 b 與 PQ 之平面分別交 m 於兩直線 c, d。$\because PQ\perp c, PQ\perp d$ (§327)。又 $a\parallel c$, $b\parallel d$ (§320)。$\therefore PQ\perp a, PQ\perp b$ (§64)。$\therefore PQ\perp l$ (§328)。故 $l\parallel m$ (§333)。

350. 定理。

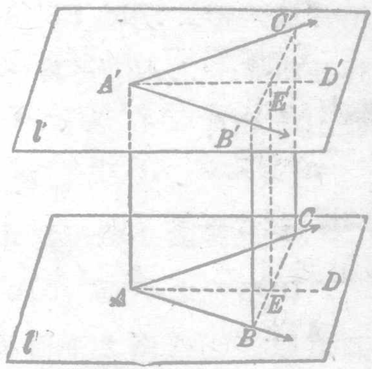
設甲乙兩相交直線分別平行於丙丁兩相

交直線,則

(1)甲乙之平面平行於丙丁之平面;

(2)甲乙所成之角與丙丁所成之對應角相等;

(3)甲乙之角之等分線與丙丁之對應角之等分線互相平行。



設兩相交直線AB, AC分別平行於兩相交直線$A'B'$, $A'C'$;且設諸對應線所引之方向相同。

求證(1) AB與AC之平面l平行於$A'B'$與$A'C'$之平面l';

(2) $\angle BAC=\angle B'A'C'$;

(3) $\angle BAC$與$\angle B'A'C'$之等分線AD與$A'D'$互相平行。

【證】(1) $AB \parallel l'$, $AC \parallel l'$ (§319)。$\therefore l \parallel l'$ (§349)

(2)取$AB=A'B'$及$AC=A'C'$。連AA', BB', CC', BC及$B'C'$。則$ABB'A'$及$ACC'A'$各為一平行四邊形(§95(3))。$\therefore$ AA', BB'與CC'皆相等且平行(§318)。$\therefore BCC'B'$亦為一平

行四邊形。∴ $BC \parallel B'C'$ 且 $BC=B'C'$。∴ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (§41)。故 $\angle BAC=\angle B'A'C'$。

(3)設 AD 與 BC, $A'D'$ 與 $B'C'$ 之交點為 E,E'。連 EE'。$\angle BAE=\angle B'A'E'$。$\angle ABE=\angle A'B'E'$(本定理(2))。∴ $\triangle ABE \equiv \triangle A'B'E'$ (§36)。∴ $BE=B'E'$, 且 $BE \parallel B'E'$。∴ $BEE'B'$ 為一平行四邊形。∴ BB', EE' 平行且相等。∴ AA', EE' 亦平行且相等。∴ $AEE'A'$ 為一平行四邊形。∴ $AE \parallel A'E'$。即 $AD \parallel A'D'$。

習題

1. 試就一粉筆盒說明:

(1)平行之平面; (2)平行之直線; (3)平行之平面及直線; (4)垂直之平面及直線。

2. 設兩相交直線被諸平行平面所截,則所成之諸三角形皆相似。

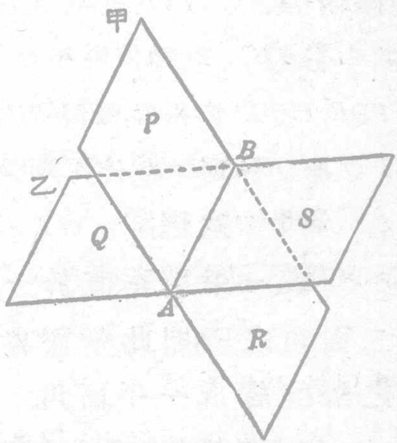
3. 自一平面上一點,作一直線平行於此平面外之一平行線,則所作之直線在此平面上。

4. 求在 P 平面上而與 A,B 兩點有相等距離之點之軌跡。設 AB 直線垂直於 p 平面,則如何?

第三章 二面角

351. 定義。半平面,延面,邊線。

兩平面之交線分各平面爲兩部,每部曰半平面,又曰他部之延面.此交線曰各半平面之邊線。



如圖,甲乙兩平面相交於 AB 直線。AB 分甲平面爲兩半平面 P, R,又分乙平面爲兩半平面 Q, S。諸半平面皆以 AB 爲邊線。P 與 R 互爲延面。

352. 定義。二面角,稜,面。

由一直線引兩半平面,其間所展開之廣度曰二面角,其直線及兩半平面各曰二面角之稜及兩面。

如前節之圖,甲乙兩平面相交於 AB 直線,共分空間爲四部,成四個二面角,即 $P(AB)Q$, $Q(AB)R$, $R(AB)S$,

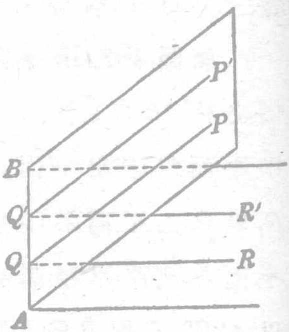
$S(AB)P$。P與Q為$P(AB)Q$之兩面，AB為其稜。

353. 定義。 平面角。

由二面角之稜上之任一點，在各面上，引一垂線，則此兩垂線所成之角曰二面角之平面角。

354. 定理。

二面角之一切平面角皆相等。



【證】 如圖，任兩平面角PQR，$P'Q'R'$皆相等，蓋因$PQ \parallel P'Q'$而$QR \parallel Q'R'$也（§63，350(2)）。

355. 定理。

設一平面垂直於一個二面角之稜，則此平面與此二面角之兩面所交之兩直線成一平面角。

參考§327，353。學者自證之。

356. 定義。 相等二面角。

設兩個二面角之對應面及稜可使其分別相重合，則曰此兩個二面角相等。

357. 定理。

設兩個二面角相等，則其平面角亦相等。

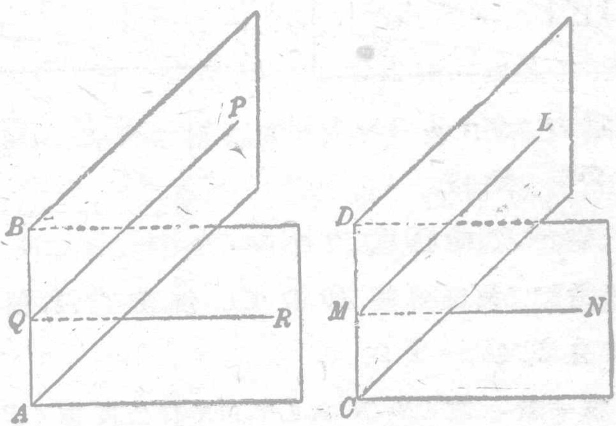
參考§356, 354,學者自證之。

358. 定理。

設兩個二面角之平面角相等,則其二面角亦相等。

設 $\angle PQR$ 與 $\angle LMN$ 爲兩個二面角 $P(AB)R$ 與 $L(CD)N$ 之平面角而相等。

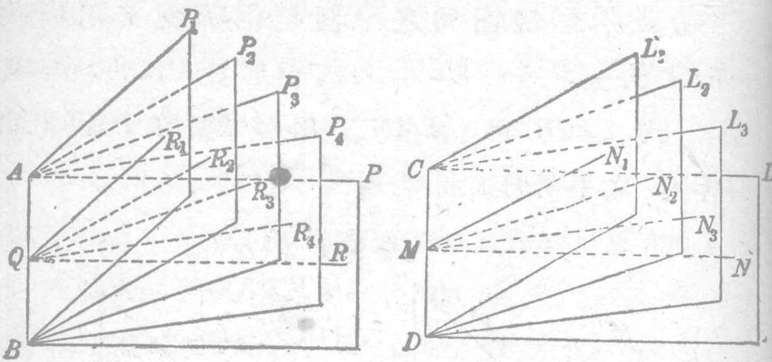
求證 $P(AB)R$ 與 $L(CD)N$ 亦相等。



【證】　疊置 $\angle PQR$ 於 $\angle LMN$ 上,而使 Q, QP,及 QR 分別落於 M, ML 及 MN 上(§4); 則兩平面 PQR, LMN 相重合(§307(2))。 ∴ AB 與 CD 相重合(§328, 337)。 ∴ PAB 面與 LCD 面相重合,而 RAB 面與 NCD 面相重合(§307(2))。故 $P(AB)R$ 與 $L(CD)N$ 相等(§356)。

359. 定理.

兩個二面角之比等於其平面角之比,



設 $\angle R_1QR$ 及 $\angle N_1MN$ 爲兩個二角 $P_1(AB)P$ 及 $L_1(CD)L$ 之平面角。

求證 $P_1(AB)P:L_1(CD)L=\angle R_1QR:\angle N_1MN$。

【證】 如圖,兩稜 AB 及 CD 分別垂直於兩平面 R_1QR 及 N_1MN,

第一款 設 $\angle R_1QR$ 與 $\angle N_1MN$ 有公度如 $\angle R_1QR_2=\angle N_1MN_2$。在 R_1QR 及 N_1MN 兩平面上,作直線 QR_2, QR_3 等及 MN_2, MN_3 等,分 $\angle R_1QR$ 及 $\angle N_1MN$ 爲 e 及 f 等分。則

$$\angle R_1QR:\angle N_1MN=e:f。$$

由 AB 引半平面 P_2AB, P_3AB 等過 QR_2, QR_3 等;並由

CD引半平面L_1CD, L_2CD等過MN_2, MN_3等。AB垂直於QR_2, QR_3等,而CD垂直於MN_2, MN_3等(§328,327)。$\therefore$ $\angle$s R_1QR_2, R_2QR_3等爲諸二面角$P_1(AB)P_2$, $P_2(AB)P_3$等之平面角,而$\angle$s N_1MN_2, N_2MN_3等爲諸二面角$L_1(CD)L_2$, $L_2(CD)L_3$等之平面角。故$P_1(AB)P$分爲e等分而$L_1(CD)L$分爲f等分(§358)。故

$$P_1(AB)P:L_1(CD)L=e:f。$$

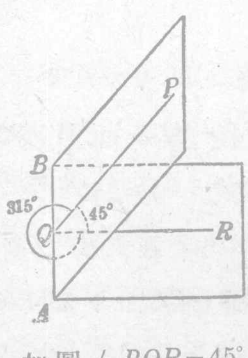
$$\therefore \quad P_1(AB)P:L_1(CD)L=\angle R_1QR:\angle N_1MN。$$

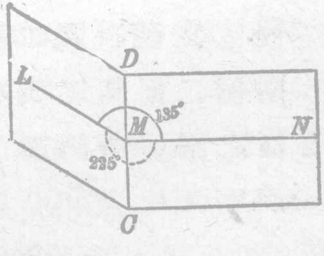
第二款　設$\angle R_1QR$與$\angle N_1MN$無公度。

本款之證從略,或參看§221, 245,由讀者自證之。

360. 二面角之量法。

依據§357－359吾人恆以平面角之大小度其二面角之大小。





如圖,$\angle PQR=45°$。 $\therefore P(AB)R=45°$。 $\angle LMN=135°$,

$\therefore L(CD)N=135^\circ$。再者，$\angle PQR$ 可爲 315°　$\therefore P(AB)R$ 亦可爲 315°。$\angle LMN$ 可爲 225°。$\therefore L(CD)N$ 亦可爲 225°。**惟本書僅討論不大於 180° 之二面角及其平面角。**

361. 定義。 銳二面角，直二面角，鈍二面角。

(1) 二面角之有銳角平面角者曰銳二面角。

(2) 二面角之有直角平面角者曰直二面角。

(3) 二面角之有鈍角平面角者曰鈍二面角。

吾人翻閱一書時，即得一個二面角。此二面角由銳二面角展大成直二面角，再展大成鈍二面角。待此書完全展開而平放於桌面時，此二面角爲 180°。又此書未展開之前，此二面角爲 0°。

362. 定理。

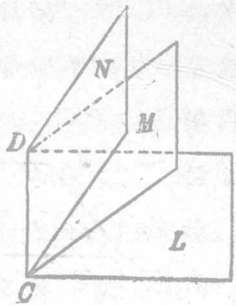
凡直二面角皆相等，且各爲 90°。

參考§21，358，學者自證之。

363. 定義　隣二面角。

兩個二面角之共有一稜及一面且分列於共有面之兩旁者曰隣二面角。

如§351之圖，$P(AB)Q$ 與 $P(AB)S$ 互爲隣二面角；又 $P(AB)Q$ 與 $Q(AB)R$ 亦互爲隣二面角。又如下圖，$L(CD)M$ 與 $M(CD)N$ 互爲隣二面角。



364. 定理.

設兩平面相交時,有兩隣二面角相等,則其四個二面角皆爲直二面角而相等.

學者自證之.

365. 定義. 垂直之兩平面.

設兩平面相交時,有一個二面角爲直二面角,則曰此兩平面互相垂直.

366. 定理.

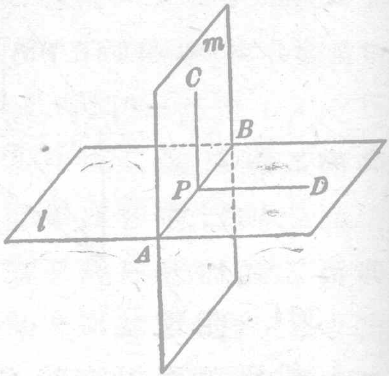
兩垂直平面之四個二面角皆爲直二面角而相等.

學者自證之.

367. 定理.

設一平面垂直於一直線,必垂直於過此直線之一切平面.

設 l 平面垂直於 PC 直線而記其垂足爲 P 點,又 m 平面爲過 PC 之任一平面交 l 於 AB 直線(§310, 311)。



求證 $l \perp m$。

【證】 $PC \perp AB$ (§327)。在 l 上,作直線 $PD \perp AB$, 則 $\angle CPD$ 爲 $C(AB)D$ 二面角之平面角。$PC \perp PD$ (§327); $\therefore \angle CPD = 90°$ 而 $C(AB)D = 90°$。$\therefore l \perp m$(§365)。

習題

1. 就教室內實物,說明二面角、稜、面、直二面角。

2. 試展開一課本,作成兩隣二面角,令其和爲90°或 180°。

3. 試用硬紙片,作成兩垂直平面。

4. 設兩平面互相垂直,且過其交線上一點之一直線垂直於其一平面,則此直線必在其他一平面上。

第一編之雜題

1. 試討論三平面位置之關係分幾種(參看§315)。

2. 過一點而平行於一平面之一切直線皆在過

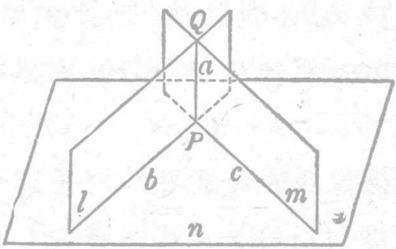
此點而平行於此平面之唯一平面上。

3. 求與兩平行平面有相等距離之點之軌跡。

4. 求在一平面上而與其面外一點有一定距離之點之軌跡。

5. 設三平面兩兩相交而其三交線兩兩相平行,則此三平面中最多有一對互相垂直。

6. 設兩相交平面各垂直於第三平面,則其交線亦垂直於此第三平面。



7. 求與兩相交平面有相等距離之點之軌跡。

8. 求作一平面等分一所設二面角

9. 求在空間而與一所設圓之一切點有相等距離之點之軌跡(參看§184)。

10. 設一對平行平面與另一對平行平面相交,則其四交線皆相平行。

11. 過一平面上之一直線,作另一平面垂直於此

平面.

12. 過一平面上之一直線,僅有一垂直平面.

第二編

平面體及曲面體

第一章　平面體

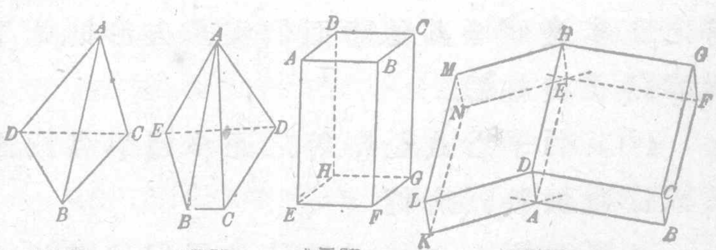
368. 定義。平面體,面,稜,頂。

(1)諸多邊形所圍空間之部分曰平面體或多面體。

(2)諸多邊形曰其面。

(3)諸多邊形之邊及頂曰其稜及頂。

平面體最少有四面,依其面數曰**四面體,五面體,六**面體等。



四面體　五面體　六面體　十面體

369. 定義。凸平面體。

無限延長平面體之各面,而平面體全在其一旁時,則此平面體曰凸平面體。

如上節圖中之十面體,不為凸面體。但本書僅討論

凸平面體,並簡稱之曰平面體。

370. 定義　全相等之平面體。

設一平面體之面、稜及項,可使其分別與他一平面體之對應面、稜及項相重合,則曰此兩平面體全相等。

371. 定理。

設一平面體之面可使其分別與他一平面體之對應面相重合,則此兩平面體全相等。

參看§311。

372. 定義。　正稜柱體,底面,旁面,底稜,旁稜。

(1)設一平面體,有兩面互相平行且爲全相等之正多邊形,而其他諸面皆爲長方形,則此平面體曰正稜柱體。

(2)其兩平行且全相等之正多邊形各曰底面或底,他面各曰旁面。

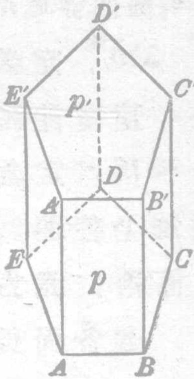
(3)兩底面上之稜曰底稜,他稜曰旁稜。

373. 作圖題。

設一底面及一旁稜,作一正稜柱體。

設一正多邊形 $ABCDE$ 及一線段 AA' 爲一底面及一旁稜,求作一正稜柱體。

【解】 如圖,作諸線段 AA',BB',CC',DD',EE',令各垂直於正多邊形 $ABCDE$ 之平面 p (§336)。過 A',作平面 $p'\perp AA'$ (§329). 則 $p\parallel p'$ (§333) 而 p' 截 BB',CC',DD',EE' 於諸點 B',C',D',E' (§324)。則 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ 爲所欲作之正稜柱體。



【證】 AA',BB',CC',DD',EE' 皆垂直於 p 及 p' (§344);因此,皆平行且相等 (§338,345)。又 $AA'\perp AB, BB'\perp BC, CC'\perp CD, DD'\perp DE, EE'\perp EA$ (§327)。故 $AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E, EE'A'A$ 皆爲長方形。

$ABCDE$ 與 $A'B'C'D'E'$ 之對應邊及角皆相等 (§350(2))。

故 $ABCDE$ 與 $A'B'C'D'E'$ 平行且爲全相等之正多邊形(何故?)

故 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ 爲含所設之底面及稜之正稜柱體。

374. 定理。

(1)正稜柱體之旁稜皆垂直於其兩底面,互相平行,且相等。

(2)正稜柱體之旁面皆垂直於其兩底面。

參看§328, 338, 367, 372。

375. 定義。 正稜柱體之高。

正稜柱體之旁稜之長曰其高。

376. 定義。 長方體。正方體。

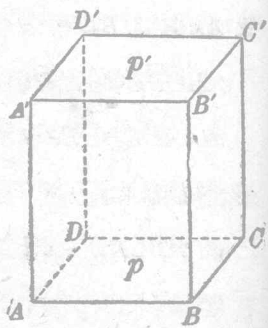
(1)各面爲長方形之六面體曰長方六面體，又簡稱曰長方體。

(2)各面爲正方形之長方體曰正方六面體，又簡稱曰正方體或立方體。

377. 作圖題。

設一面及由此面所引之一稜，作一長方體。

設一長方形 $ABCD$ 及一線段 AA' 爲一面及由此面所引之一稜，求作一長方體。



【解】 如圖，作諸線段 AA', BB', CC', DD' 各垂直於長方形 $ABCD$ 之平面 p。過 A'，作平面 $p' \perp AA'$。則 $p \parallel p'$ (§333) 而 p' 截 BB', CC', DD' 於諸點 B', C', D' (§324)。則 $ABCD-A'B'C'D'$ 爲所欲作之長方體。

【證】 AA', BB', CC', DD' 皆垂直於 p 及 p' (§344)；因此，皆平行且相等 (§338, 345)。又 $AA' \perp AB$, $BB' \perp BC$, $CC' \perp$

CD, $DD' \perp DA$ (§327)。故 $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$, $DD'A'A$ 皆爲長方形。

$ABCD$ 與 $A'B'C'D'$ 之對應邊及角皆相等 (§350(2))。故 $A'B'C'D'$ 亦爲長方形。

故 $ABCD-A'B'C'D'$ 爲含所設之面及由此面所引之一稜之長方體。

378. 定義。 隣面,對面。

(1)長方體之各對相交面互曰隣面。

(2)其各對未相交面互曰對面。

如前節之圖,$ABCD$與$A'B'C'D'$ 互爲對面,且各爲其他四面之隣面。

379. 定理。

(1)長方體之任兩對面間之四稜皆垂直於此兩對面,互相平行,且相等.

(2)長方體之各面垂直於其四隣面。

(3)長方體之任兩對面平行且全相等。

參看§328, 333, 338, 367, 376。

【註】 長方體可以任兩對面作兩底面,而以他面作旁面。

380. 系。 正方體之諸稜皆相等,而其諸面

皆全相等。

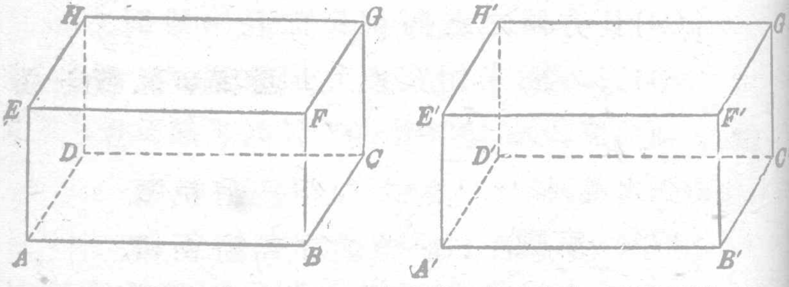
381. 定義。 長方體之長、寬、高。

由長方體之任一頂所引之三稜之長曰長方體之長、寬、高。

【註】 正方體之長寬高皆相等。

382. 定理。

長、寬、高各相等之兩長方體全相等。



設兩長方體 $ABCD-EFGH$, $A'B'C'D'-E'F'G'H'$ 之長寬高各相等;即 $AB=A'B'$, $AD=A'D'$, $AE=A'E'$。

求證 $ABCD-EFGH$ 與 $A'B'C'D'-E'F'G'H'$ 全相等。

【證】 $ABCD$ 與 $A'B'C'D'$ 為全相等之長方形。置 $A'B'C'D'$ 於 $ABCD$ 上,令其對應邊及頂各相重合。則 AE, BF, CG, DH 諸稜分別與 $A'E'$,$B'F'$,$C'G'$,$D'H'$ 諸對應稜相重(§337),而 E, F, G, H 諸頂分別與 E', F', G', H' 諸對應頂相合(§379(1))。如是, $EFGH$ 面之諸稜分別與 $E'F'G'H'$ 面

之諸對應稜相重合。於此,兩長方體之對應面皆相重合矣(§307)。

故 $ABCD-EFGH$ 與 $A'B'C'D'-E'F'G'H'$ 全相等(§370或371)。

383. 定理。

設兩正稜柱體之底面及高各相等,則此兩正稜柱體全相等。

參看前節中定理之證法。

384. 定義　平面體之底面積,旁面積,全面積。

(1)平面體各底面之面積曰底面積。

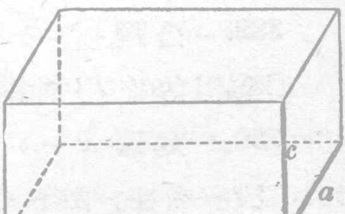
(2)其諸旁面之面積之和曰旁面積。

(3)其諸面之面積之總和曰全面積。

385. 定理。

長方體之全面積等於其長、寬、高兩兩相乘之積之和之二倍。

即　$A=2(ab+ac+bc)$



證略。

386. 定理。

正稜柱體之旁面積等於其一底之周與高相乘之積,即 $A=pa$

證略。

【註】 參看§282,則得一定理以求正稜柱體之底面積。

387. 定義。 平面體之體積,單位體積。

(1)平面體所含空間之量曰體積。

(2)以一單位長爲邊之正方體之體積曰單位體積。

(3)平面體所含單位體積之數曰體積之度數,亦簡稱曰體積。

【註】 茲所謂體積,實含有兩種意義。一爲抽象之量,其值不變;一爲實用之度,其值視所用單位體積而定。如3立方市尺之體積,亦可曰3000立方市寸。

388. 公理。

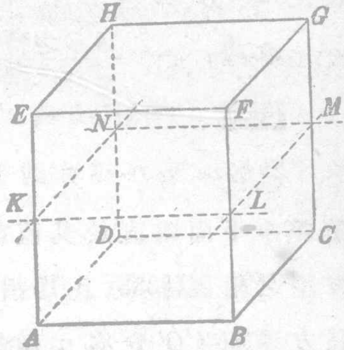
全相等之平面體必有相等之體積。

389. 定理。

設一平面平行於一長方體之兩底面並截其旁稜,則此長方體所分之兩部亦皆爲長方體。

設一平面 $KLMN$ 平行於一長方體 $ABCD-EFGH$

之兩底面 $ABCD$ 及 $EFGH$，並分別截旁稜 AE,BF,CG,DH 於四點 K,L,M,N。

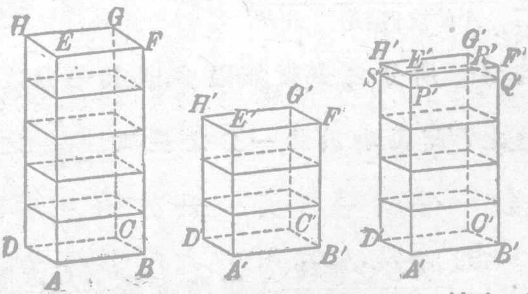


求證 $ABCD-KLMN$ 及 $KLMN-EFGH$ 皆為長方體。

【證】 四旁稜 AE, BF, CG, DH 皆垂直於平面 $KLMN$ (§379(1), 344)。∴四邊形 $ABLK, BCML, CDNM, DAKN$ 皆為長方形(§327)。又四邊形 $KLMN$ 亦為一長方形(§350(2))。∴$ABCD-KLMN$ 為一長方體(§376)。仿此，$KLMN-EFGH$ 亦為一長方體。

390. 定理。

等長等寬兩長方體，體積之比等於其高之比。



設兩長方體 AG 及 $A'G'$ 之長寬各相等，即 $AB=A'B'$

及 $AD=A'D'$。

求證 $$\frac{AG\text{之體積}}{A'G'\text{之體積}}=\frac{AE(\text{高})}{A'E'(\text{高})}。$$

【證】 (1)設 AE 與 $A'E'$ 有一公度。以此公度分 AE 及 $A'E'$ 爲 m 及 n 等分。則 $\dfrac{AE}{A'E'}=\dfrac{m}{n}$。過 AE 及 $A'E'$ 之諸分點,各作平面垂直於其直線,則此等平面皆平行於其長方體之兩底(§333),且互相平行(§348)。如是 AG 分爲 m 個長方體而 $A'G'$ 分爲 n 個長方體(§389)。AG 與 $A'G'$ 共分之 $m+n$ 個長方體皆全相等(§382)。

$$\therefore \frac{AG\text{之體積}}{A'G'\text{之體積}}=\frac{m}{n}。\qquad \therefore \frac{AG\text{之體積}}{A'G'\text{之體積}}=\frac{AE}{A'E'}。$$

(2)設 AE 與 $A'E'$ 無公度。試分 AE 爲 m 等分。以其一分之長量 $A'E'$,得 $A'P'$ 爲 n 倍,而所餘 $P'E'$ 不足一倍。仿(1)款,過 P' 作平面 $P'Q'R'S'$ 分 $A'G'$ 爲兩長方體 $A'R'$ 及 $P'G'$。如是 AE 與 $A'P'$ 有公度。

故 $$\frac{AG\text{之體積}}{A'R'\text{之體積}}=\frac{AE}{A'P'}。\qquad\text{(本定理之(1)款)}$$

若 AE 所分之分數無限多,則其一分之長無限小,而所餘之 $P'E'$ 更小於此一分之長。故 $\dfrac{AE}{A'P'}$ 之值漸近於 $\dfrac{AE}{A'E'}$。而

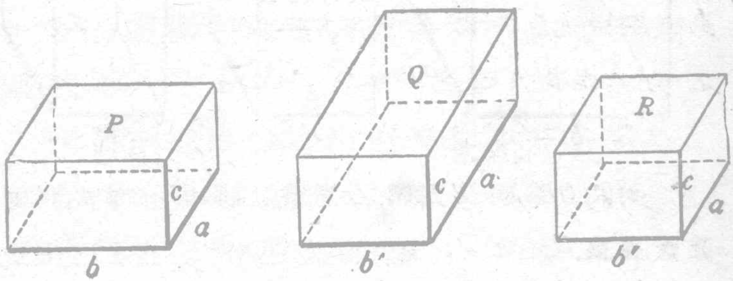
$$\frac{AG\text{之體積}}{A'R'\text{之體積}}\text{之值漸近於}\frac{AG\text{之體積}}{A'G'\text{之體積}}。$$

但　$\dfrac{AG\text{之體積}}{A'R'\text{之體積}}=\dfrac{AE}{A'P'}$恆成立。

故　$\dfrac{AG\text{之體積}}{A'G'\text{之體積}}=\dfrac{AE}{A'E'}$(§163)。

391. 定理。

等高之兩長方體之體積之比等於其長寬相乘之積之比。



設P, Q為兩長方體之體積,又設a, b, c及a', b', c為其長、寬、高。

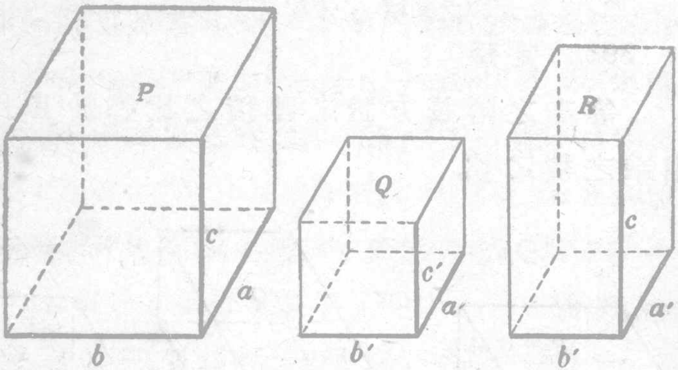
求證　$\dfrac{P}{Q}=\dfrac{ab}{a'b'}$。

【證】　作第三長方體,令其長寬高為a, b', c(§377)。設R為此第三長方體之體積,則$\dfrac{P}{R}=\dfrac{b}{b'}$而$\dfrac{R}{Q}=\dfrac{a}{a'}$(§379註, 390)。

∴　$\dfrac{P}{Q}=\dfrac{ab}{a'b'}$。

392　定理。

兩長方體之體積之比等於其長、寬、高相乘之積之比。



設 P, Q 為兩長方體之體積。又設 a, b, c 及 a', b', c' 為其長、寬、高。

求證 $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{a\,b\,c}{a'b'c'}$。

【證】 作第三長方體,令其長、寬、高為 a', b', c。設 R 為此第三長方體之體積,則 $\dfrac{P}{R}=\dfrac{a\,b}{a'b'}$,又 $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{c}{c'}$。

$\therefore \quad \dfrac{P}{Q}=\dfrac{a\,b\,c}{a'b'c'}$。

393. 定理。

長方體之體積等於其長、寬、高相乘之積,即 $V=abc$。

設一長方體之長、寬、高及體積為 a, b, c 及 V。

求證　　$V=abc$。

【證】以 a,b,c 之公共單位長為邊作一正方體,則此正方體之各邊為 1。茲以 V' 表其體積,則 $\frac{V}{V'}=\frac{a\,b\,c}{1\cdot1\cdot1}$ 或 $V=abcV'$。即 V 含有 V' 之數為 abc。故 $V=abc$(§387(3))。

394. 系。 正方體之體積等於其一邊之立方,即 $V=a^3$。

395. 定義。 直三角直稜柱體,底面,旁面,底腰,底弦,高。

(1)設一五面體,有兩面互相平行且為全相等之直角三角形,而其他三面皆為長方形,則此五面體曰直三角直稜柱體。

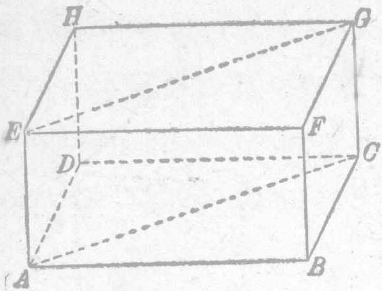
(2)其兩全相等之直角三角形各曰底面或底,他面各曰旁面。

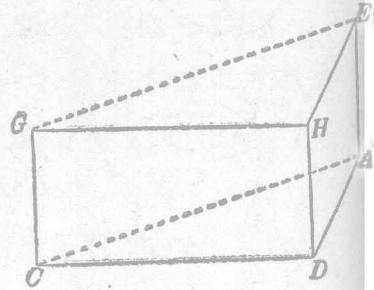
(3)兩直角三角形之腰及弦各曰底腰及底弦,兩底面間之稜(皆相等)曰高。

396. 定理。

設一平面過一長方體之不在同一面上之兩平行稜,則此長方體分為兩全相等之直三角直稜柱體。

設長方體 $ABCD-EFGH$ 被平面 $AEGC$ 所分。





求證兩五面體 $ABC-EFG$ 及 $CDA-GHE$ 爲兩全相等之直三角直稜柱體。

【證】 諸直角三角形, ABC, EFG, CDA, GHE 全相等(何故?) $AEGC$ 爲長方形(§379(1), 327)。故 $ABC-EFG$ 及 $CDA-GHE$ 皆爲直三角直稜柱體。

學者可參看§382 中定理之證法而自證此兩直三角直稜柱體全相等。

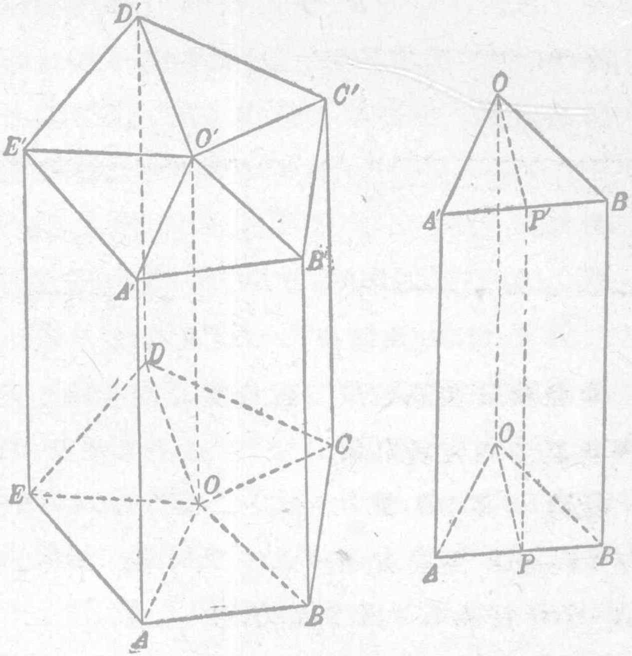
397. 系。 直三角直稜柱體之體積等於

(1)其一底之兩腰與高相乘之積之半;或

(2)其一底之面積與高相乘之積,即 $V=Sa$。

398. **定理。**

正稜柱體之體積等於其一底之面積與高相乘之積,即 $V=Sa$。



設 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ 爲一正稜柱體。

求證其體積等於其一底之面積與高相乘之積,即 $V=Sa$。

【證】　設 O 點爲下底之中心(§276)。作頂心線 OA, OB, OC, OD, OE,並過 O 點作下底之垂線 OO'。則 OO' 亦垂直於上底(§344),茲記其垂足爲 O' 點。連 $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, $O'D'$, $O'E'$, OO' 平行於諸旁稜(§374(1), 338)且等於諸旁稜之長(§345)。故 $OO'A'A$, $OO'B'B$, $OO'C'C$, $OO'D'D$, $OO'E'E$

皆爲長方形。故 $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, $O'D'$, $O'E'$ 各平行於並各等於 OA, OB, OC, OD, OE。 $\because O$ 點爲下底之中心。$\therefore O'$ 點爲上底之中心。 $\therefore OAB, OBC, OCD, ODE, OEA$ 及 $O'A'B', O'B'C', O'C'D', O'D'E', O'E'A'$ 皆爲全相等之等腰三角形。

故 $OAB-O'A'B', OBC-O'B'C', OCD-O'C'D', ODE-O'D'E', OEA-O'E'A'$ 各爲一五面體,其兩底平行而爲全相等之等腰三角形,其他三面皆爲長方形。

連 AB 及 $A'B'$ 之中點 P 及 P', 並連 OP 及 $O'P'$, 則 $AA'P'P$, 及 $BB'P'P$ 皆爲長方形。 $\therefore PP' \parallel OO'$ 且 $PP'=OO'$。(何故?)故 $PP'O'O$ 亦爲一長方形。又 $OPA, OPB, O'P'A', O'P'B'$ 皆爲全相等之直角三角形。

故 $OPA-O'P'A'$ 及 $OPB-O'P'B'$ 皆爲直三角直稜柱體(§395(1))。 $\therefore$ 兩者之體積各等於其一底之面積與高 OO' 相乘之積(§397(2))。 $\therefore$ 五面體 $OAB-O'A'B'$ 之體積等於其一底之面積與 OO' 之長相乘之積。故正稜柱體所分之五面體之體積各等於其一底之面積與 OO' 之長相乘之積。卽正稜柱體 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ 之體積等於其一底之面積與高相乘之積。

399. 定義。 正稜錐體,底面,旁面,錐頂,底稜,

旁稜,高,斜高。

(1)設一平面體之一面為正多邊形,他面皆為三角形,而其共有之項在過正多邊形之中心之垂線上,則此平面體曰正稜錐體。

(2)其正多邊形曰底面或底,諸三角形各曰旁面,諸三角形共有之項曰錐項。

(3)其底上之稜曰底稜,他稜曰旁稜。

(4)自錐項至底上之中心之垂線之長曰高,自錐項至諸底稜之垂線之長曰斜高。

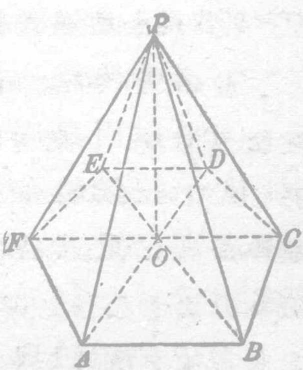
400. 定理。

正稜錐體之。

(1)諸旁稜皆相等(§327);

(2)諸旁面皆為全相等之等腰三角形;

(3)諸斜高皆相等且皆過其底稜之中點。



證略。

401. 定義。 平截,平截面,正稜錐臺,子稜錐體,母稜錐體,正稜錐臺之底面及旁面。

(1)設一平面平行於一正稜錐體之底面並截其體於一多邊形,則曰此平面平截此正稜錐體.

(2)其所截之多邊形曰平截面.

(3)正稜錐體之在平截面下之部分曰正稜錐臺,其在平截面上之部分曰子稜錐體.原正稜錐體亦曰母稜錐體.

(4)正稜錐體之底面及其平截面分別曰正稜錐臺之下底面及上底面,正稜錐臺之他面各曰旁面.

402. 定理.

設一正稜錐體被一平面所平截,則

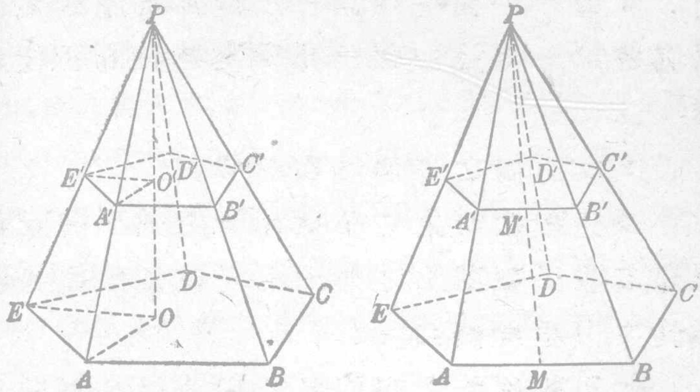
(1)諸旁稜,諸斜高,及高所分之線分成比例;

(2)平截面與底面相似而爲一正多邊形;

(3)子稜錐體亦爲一正稜錐體,其高與母稜錐體之高相重,其各斜高亦與母稜錐體之對應斜高相重;

(4)子稜錐體與母稜錐體之底面積之比等於其高之平方之比.

設正稜錐體 $P-ABCDE$ 被一平面所平截,其平截



面為多邊形$A'B'C'D'E'$，而截其高PO及一斜高PM於O'及M'兩點。

求證

(1) $PA':A'A=PM':M'M=PO':O'O$;

(2) 多邊形$A'B'C'D'E'$與正多邊形$ABCDE$相似，而為一正多邊形;

(3) $P-A'B'C'D'E'$亦為一正稜錐體，PO'及PM'為其高及一斜高;

(4) $A'B'C'D'E'$之面積S': $ABCDE$之面積$S=\overline{PO'}^2:\overline{PO}^2$。

【證】

(1) $\because A'M' \parallel AM,\ A'O' \parallel AO$ (§322)。

$\therefore PA':A'A=PM':M'M=PO':O'O$ (§221)。

(2) $A'B'C'D'E'$ 與 $ABCDE$ 之對應邊平行,其方向亦相同(§322)。 $\therefore A'B'C'D'E'$ 與 $ABCDE$ 之對應角皆相等(§350(2))。故 $A'B'C'D'E'$ 爲等角多邊形。且 $PO':PO=PA':PA$ $=A'B':AB=B'C':BC=C'D':CD=D'E':DE=E'A':EA$ (§222)。$\therefore A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=E'A'$。

故 $A'B'C'D'E'$ 與 $ABCDE$ 相似,亦爲正多邊形(§227, 279)。

(3) $\because PO':PO=O'A':OA=O'B':OB=O'C':OC=O'D'$ $:OD=O'E':OE$。$\therefore O'A'=O'B'=O'C'=O'D'=O'E'$, 卽 O' 爲 $A'B'C'D'E'$ 之中心。且 PO' 垂直於 $A'B'C'D'E'$ 之平面(§344)。故 $P-A'B'C'D'E'$ 爲一正稜錐體,而 PO' 爲其高。

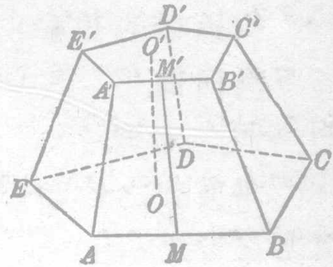
$\because PM\perp AB$。 $\therefore PM\perp A'B'$ 或 $PM'\perp A'B'$, 卽 PM' 爲 $P-A'B'C'D'E'$ 之一斜高。

(4) $S':S=\overline{A'B'}^2:\overline{AB}^2$ (§280)。 $\because PO':PO=PA':PA=A'B':AB$。 $\therefore S':S=\overline{PO'}^2:\overline{PO}^2$。

403. 系。 正稜錐臺之

(1)兩底面平行且爲相似正多邊形(§402(2);

(2)諸旁面皆爲全相等之等腰梯形(§402(3), 400(2));



(3)兩底面之中心之聯線垂直於兩底面(§402(3))。

(4)諸旁面之平行邊之中點之聯線皆相等且垂直於平行邊(§402(3), 400(3))。

404. 定義。 正稜錐臺之高,斜高。

(1)正稜錐臺之兩底面之中心之聯線曰高。

(2)其諸旁面之平行邊之中點之聯線各曰斜高。

405. 定理。

(1)正稜錐體之旁面積等於其底之周與斜高相乘之積之半,即 $A=\frac{1}{2}ph$。

(2)正稜錐臺之旁面積等於其兩底之周之和與斜高相乘之積之半,即 $A=\frac{1}{2}(p+p')h$。

參看§253, 259。

406. 定理。

四面體之各面爲三角形。

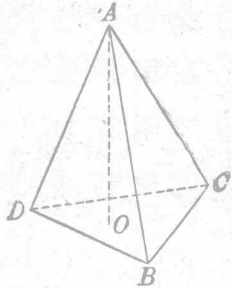
學者自證之。

407. 定義。 四面體之底面,高。

四面體可以任一面作底面,其底面與對頂之距離曰高。

408. **定理。**

四面體之體積等於其底面積與高相乘之積之三分之一。



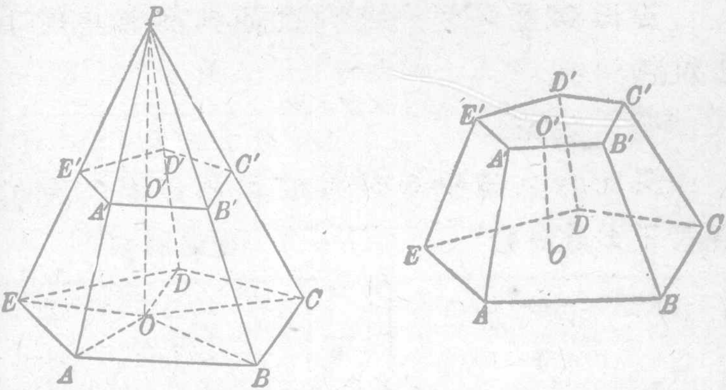
【特註】 本書爲篇幅所限,編製特異,頗有删減。上述定理,後須引用,惟其證涉及所删之處甚多,兹故述而不證。

409. **系** 正稜錐體之體積等於其底面積與高相乘之積之三分之一,即 $V=\frac{1}{3}Sa$。

410. **定理。**

正稜錐臺之體積等於兩底面積及其比例中項之和與高相乘之積之三分之一,即

$$V=\frac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})a。$$



設 V 等於正稜錐臺 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ 之體積, S 及 S' 為兩底 $ABCDE$ 及 $A'B'C'D'E'$ 之面積, a 等於高 OO'。

求證　$V=\frac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})a$。

【證】　$V=\frac{1}{3}S\cdot\overline{PO}-\frac{1}{3}S'\cdot\overline{PO'}$　(§402(3),409)

$\overline{PO}^2:\overline{PO'}^2=S:S'$　(§402(4))

$PO:PO'=\sqrt{S}:\sqrt{S'}$

$\frac{\overline{PO}}{\sqrt{S}}=\frac{\overline{PO'}}{\sqrt{S'}}=\frac{\overline{OO'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}=\frac{a}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}$　(何故?)

$\therefore\quad \overline{PO}=\frac{a\sqrt{S}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}},\ \overline{PO'}=\frac{a\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}$

$\therefore\quad V=\frac{1}{3}S\frac{a\sqrt{S}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}-\frac{1}{3}S'\frac{a\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}$

$=\frac{a}{3(\sqrt{S}-\sqrt{S'})}(S\sqrt{S}-S'\sqrt{S'})$

$$=\frac{a}{3}\cdot\frac{(\sqrt{S})^3-(\sqrt{S'})^3}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}$$

$$=\frac{a}{3}(S+\sqrt{S}\sqrt{S'}+S')$$

$$=\frac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})\,a。$$

(1) 度制表

1公尺＝10公寸＝100公分
1市尺＝10市寸＝100市分
1公尺＝3市尺

(2) 量制表

1公石＝10公斗＝100公升
1市石＝10市斗＝100市升
1公升＝1市升
1公升＝1立方公寸
1市升＝27立方市寸

(3) 衡制表

1公斤＝10公兩＝100公錢＝1000公分
1市斤＝16市兩＝160市錢＝1600市分
1公斤＝ 2市斤　　1公分＝ 3.2 市分

(4) 物品每一市升之重量表

(下表之重量單位為一市兩)

物品	糯米	米	綠豆	蠶豆	水	猪油	豆油	蔴油	花生油	菜油	桐油
重量	25	25	25	20	32	30	29.6	29.6	29.4	29.3	30

(5)物品每一立方市寸之重量表

(下表之重量單位為一市兩)

物品	石灰	蠟	玻璃	金	銀	紅銅	鐵	錫	鉛	松樹	軟木塞
重量	3.9	1.1	3.1	22.9	12.4	10.5	8.8	8.7	13.4	.59	.28

習題

1. 某茶葉店製白鐵茶葉盒 200 隻,盒之形為六旁面之正稜柱體,其底每邊長 4 寸,其高 5 寸。問共需白鐵多少方尺?

2. 問前題之白鐵盒 100 隻可盛米若干升?所盛之米共稱若干斤?

3. 某鞋店製鞋盒 150 隻,盒長為 9 寸,寬 5 寸,高 $3\frac{1}{2}$ 寸,盒蓋深 $\frac{1}{2}$ 寸。問共需硬紙若干方尺?

4. 某銀樓以一長方體之木盒盛碎金。盒長 5 寸,寬 3 寸,高 2 寸。問此盒可盛碎金若干兩?

5. 某隊童子軍製帳幕 50 頂,幕之形為六旁面之正稜錐體,其底每邊長 6 尺,其高 12 尺。問共需布若干方尺?設布寬 2 尺 5 寸,問約共需布若干尺?

6. 設前題之帳幕各容 4 人,帳幕全夜緊閉而不使其空氣流通,問每人全夜可吸新鮮空氣若干立方尺?

7. 設有水門汀紀念塔一座,塔之座基爲四旁面之正稜錐台,其下底每邊長10尺,其上底每邊長6尺,其高4尺,塔身爲四旁面之正稜錐體,其底每邊長3尺,其高8尺。若每立方尺水門汀之建築費爲1.3元,問此紀念塔共需建築費若干元?

8. 設有六旁面之正稜錐台,其上底及下底每邊長6寸及8寸,其斜高5寸,求其全面積。

9. 設一教室長二丈五尺,寬一丈六尺,高一丈四尺。若每方丈之粉刷費爲.85元,問四面牆及頂共需粉刷費若干元?

10. 設有鐵一塊,其形爲正方體,每邊長5寸,問此塊鐵共重若干兩?

第二章 曲面體

411. 定義。 圓面,曲面,曲面體及其面積與體積。

(1)圓所圍平面之部分曰圓面.

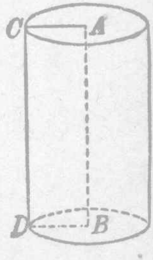
(2)面之無平面部分者曰曲面。

(3)曲面所圍空間之部分,或曲面與平面形所合圍空間之部分,曰曲面體。

(4)曲面體之底面積,旁面積,全面積,及體積之定義與平面體諸定義全相同(§384, 387)。

412. 定義。 直圓柱體,軸,底面,旁面。

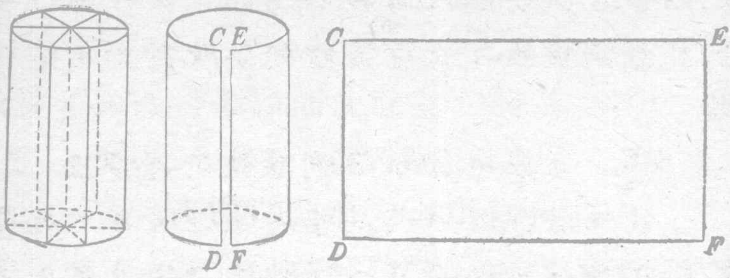
(1)以長方形之一邊爲軸而廻轉一周,由此所生之曲面體曰直圓柱體。



(2)垂直於軸之兩邊因廻轉所生之兩圓面各曰底面,或底。(§334)

(3)平行於軸之對邊因廻轉所生之曲面曰旁面或直圓柱面。

413. 直圓柱體之基本性質,母線及高之定義。



(1)直圓柱體之兩底面皆垂直於軸,互相平行,且全相等;軸之兩端為兩底之圓心(§333, 334)。

(2)長方形於廻轉時與旁面所交之一切線段曰母線,

(3)一切母線皆平行於軸,等於軸,且垂直於兩底面(§339)故一切母線皆相等且平行(§318)。

軸或母線之長曰高。

(4)旁面沿一母線切開而平放之,乃得一長方形,其高及底分別為直圓柱體之高及一底之圓周。

414. 定義。 內接正稜柱體,外接直圓柱體。

設一正稜柱體之兩底面及諸旁稜分別為一直圓柱體之兩底圓

之內接正多邊形及母線,則曰此正稜柱體內接於此直圓柱體,而此直圓柱體外接於此正稜柱體。

415. 正稜柱體與直圓柱體之近似性。

設先用四旁面之正稜柱體內接於一直圓柱體,然後逐步加倍其旁面數,使之爲八旁面,十六旁面,三十二旁面等之內接正稜柱體,則正稜柱體一底之周p_1及其面積S_1,旁面積A_1,及體積V_1步步漸近於直圓柱體之一底之圓周p及其面積S,旁面積A,及體積V。旁面數愈增多,諸近似值愈近於其眞值,而其差愈小。則此兩種之值可視爲相等。惟正稜柱體及直圓柱體之高皆恆爲a而不變。故

$$p_1 \doteq p, S_1 \doteq S, A_1 \doteq A, V_1 \doteq V.$$

416. 定理。

(1)直圓柱體之旁面積等於其一底之圓周與高相乘之積,即$A=pa$。

(2)直圓柱體之體積等於其一底之面積與高相乘之積,即$V=Sa$。

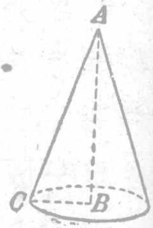
【證】 (1) $\because$ $A_1=p_1a$(§386) $\therefore$ $A=pa$(§415)

(2) $\because \quad V_1=S_1a$(§398) $\quad\therefore \quad V=Sa$(§415)

417. 定義。直圓錐體,軸,底面,旁面,錐頂。

(1)以直角三角形之一腰爲軸而廻轉一周,由此所生之曲面體曰直圓錐體。

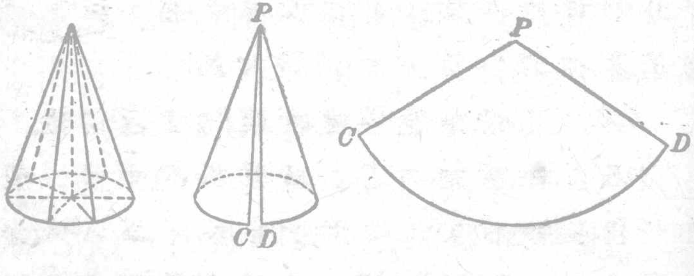
(2)垂直於軸之他腰因廻轉所生之圓面曰底面或底(2§334)。



(3)弦因廻轉所生之曲面曰旁面或直圓錐面。

(4)軸在底面外之一端曰錐頂。

418. 直圓錐體之基本性質;高,母線及斜高之定義。



(1)直圓錐體之軸垂直於底面而其兩端爲錐頂及底之圓心。

軸之長曰高。

(2)直角三角形於廻轉時與旁面所交之一

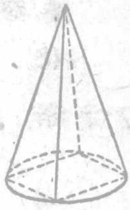
切線段曰母線。

(3)一切母線皆等於直角三角形之弦而互相等,其兩端爲錐頂及底圓上之點。母線之長曰斜高。

(4)旁面沿一母線切開而平放之,乃得一扇形,其半徑及弧分別爲直圓錐體之斜高及底之圓周。

419. 定義。 內接正稜錐體,外接直圓錐體。

設一正稜錐體之底面、錐頂及諸旁稜,分別爲一直圓錐體之底圓之內接正多邊形、錐頂及母線,則曰此正稜錐體內接於此直圓錐體,而此直圓錐體外接於此正稜錐體。



420. 正稜錐體與直圓錐體之近似性。

設先用四旁面之正稜錐體內接於一直圓錐體,然後逐步加倍其旁面數,使之爲八旁面,十六旁面,三十二旁面等之內接正稜錐體。則正稜錐體之底之周 p_1,斜高 h_1,底面積 S_1,旁面積 A_1,及體積 V_1 步步漸近於直圓錐體之底之圓周 p,斜高 h,底面積 S,旁面積 A 及體積 V。旁面數愈增

多諸近似值愈近於其眞值,而其差愈小。則此兩種之值可視爲相等。惟正稜錐體及直圓錐體之高皆恆爲 a 而不變。故

$$p_1 \doteq p,\ h_1 \doteq h,\ S_1 \doteq S,\ A_1 \doteq A,\ V_1 \doteq V.$$

421. 定理。

(1)直圓錐體之旁面積等於其底之圓周與斜高相乘之積之半,即 $A=\frac{1}{2}ph$。

(2)直圓錐體之體積等於其底面積與高相乘之積之三分之一,即 $V=\frac{1}{3}Sa$。

【證】 (1) $\because\ A_1=\frac{1}{2}p_1h_1$(§405(1)),

$\therefore\ A=\frac{1}{2}ph$(§420)。

(2) $\because\ V_1=\frac{1}{3}S_1a$(§409),

$\therefore\ V=\frac{1}{3}Sa$(§420)。

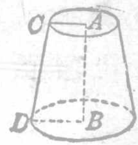
422. 定義。 垂腰,垂腰梯形。

設一梯形之一腰垂直於兩平行邊,則此腰曰垂腰,而此梯形曰垂腰梯形。

423. 定義。 直圓錐臺,軸,底面,旁面。

(1)以垂腰梯形之垂腰爲軸而迴轉一周,由此所生之曲面體曰直圓錐臺。

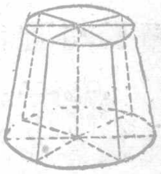
(2)兩平行邊因迴轉所生之兩圓面曰底面或底。大者曰下底面，小者曰上底面。



(3)對軸之腰因迴轉所生之曲面曰旁面。

424. 直圓錐臺之基本性質;高,母線及斜高之定義

(1)直圓錐臺之兩圓面皆垂直於軸且互相平行。軸之兩端爲兩底之圓心。



軸之長曰高。

(2)垂腰梯形於迴轉時與旁面所交之一切線段曰母線。

(3)一切母線皆等於垂腰梯形對軸之腰而互相等。其兩端爲兩底圓上之點。

母線之長曰斜高。

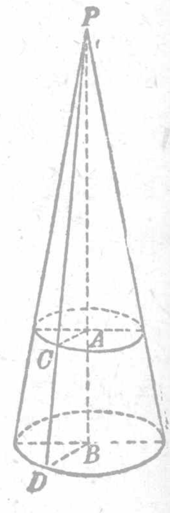
425. 定義。 垂腰梯形之子三角形及母三角形。

設引長垂腰梯形之兩腰，使其相遇於一點，則

(1)所得不含垂腰梯形之直角三角形曰子三角形;

(2)所得含垂腰梯形之直角三角形曰母三角形。

426. **定理。**



設一垂腰梯形因廻轉而生一直圓錐臺,則

(1)其子母三角形各生一直圓錐體,分別曰子母圓錐體(§417(1));

(2)子母圓錐體之底面分別爲直圓錐臺之上底面及下底面;

(3)直圓錐臺之高,斜高,旁面積,及體積分別爲母圓錐體與子圓錐體之高,斜高,旁面積及體積之差。

學者自證之。

427. **定理。**

(1)直圓錐臺之旁面積等於兩底圓周之和與斜高相乘之積之半,即 $A=\frac{1}{2}(p'+p'')h$。

(2)直圓錐臺之體積等於兩底面積及其比例中項之和與高相乘之積之三分之一。即

$$V=\frac{1}{3}(S'+S''+\sqrt{S'S''})a。$$

設母圓錐體之底之圓周、高、斜高、底面積、旁面積,及體積爲p'', a'', h'', S'', A'', 及V'';子圓錐體之諸對應量爲p', a', h', S', A', 及V';直圓錐臺上下底之圓周、高、斜高,上下底之面積、旁面積,及體積爲p', p'', a, h, S', S'', A, 及V。

求證 (1) $A=\frac{1}{2}(p'+p'')h$。

(2) $V=\frac{1}{3}(S'+S''+\sqrt{S'S''})a$。

【證】 $a=a''-a'$, $h=h''-h'$, $A=A''-A'$, $V=V''-V'$。 (§426(3))

$\frac{a'}{a''}=\frac{h'}{h''}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}=\frac{p'}{p''}=\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S''}}$(參看前節之圖及§286, 291)

(1) $A=A''-A'$

$=\frac{1}{2}p''h''-\frac{1}{2}p'h'$ (§421(1))

$=\frac{1}{2}(p''h+p''h'-p'h')$

$=\frac{1}{2}(p''h+p'h''-p'h')$

$=\frac{1}{2}(p''h+p'h)$

$=\frac{1}{2}(p'+p'')h$。

(2) $V=V''-V'$

$$=\frac{1}{3}S''a''-\frac{1}{3}S'a' \qquad (\S421(2))$$

$$=\frac{1}{3}(S''a''-S'a')。$$

$$\because \quad \frac{a'}{a''}=\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S''}}$$

$$\therefore \quad \frac{a''}{\sqrt{S''}}=\frac{a'}{\sqrt{S'}}=\frac{a''-a'}{\sqrt{S''}-\sqrt{S'}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{S''}-\sqrt{S'}}$$

$$\therefore \quad a''=\frac{a\sqrt{S''}}{\sqrt{S''}-\sqrt{S'}}, \quad a'=\frac{a\sqrt{S'}}{\sqrt{S''}-\sqrt{S'}}$$

$$\therefore \quad V=\frac{1}{3}\left(\frac{aS''\sqrt{S''}}{\sqrt{S''}-\sqrt{S'}}-\frac{aS'\sqrt{S'}}{\sqrt{S''}-\sqrt{S'}}\right)$$

$$=\frac{a}{3}\left(\frac{S''\sqrt{S''}-S'\sqrt{S'}}{\sqrt{S''}-\sqrt{S'}}\right)$$

$$=\frac{a}{3}\left[\frac{(\sqrt{S''})^3-(\sqrt{S'})^3}{\sqrt{S''}-\sqrt{S'}}\right]$$

$$=\frac{a}{3}(S''+\sqrt{S''}\sqrt{S'}+S')$$

$$=\frac{1}{3}(S'+S''+\sqrt{S'S''})a。$$

428. 定義。 球,球體,球面,球心,球面積,球體積.

(1)以半圓面之直徑爲軸而迴轉一周,由此所生之曲面體曰球體或球。

(2)半圓因廻轉所生之曲面曰球面或球。

(3)軸之中點曰球心。

(4)球面之面積曰球面積。球體之體積曰球體積。

429. 球之基本性質;半徑,直徑及同心球之定義。

(1)球面為與球心有一定距離之點之軌跡。此一定距離曰半徑。

(2)過球心而止於球面之線段曰直徑。直徑皆為半徑之兩倍,且皆相等。

(3)設兩球有同一球心及相等半徑,則其球面相重合。

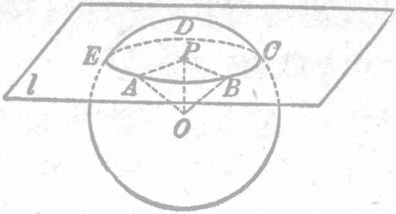
(4)全相等之球皆有相等半徑;有相等半徑之球皆全相等。

(5)同一球心而不同一球面之諸球曰同心球。

430 定理。

一平面與一球面相交成一圓;一平面與一球體相交成一圓面。

設一平面 l 與一球面相交於一鎖閉曲線 $ABCDE$。



求證 鎖閉曲線 $ABCDE$ 爲一圓。

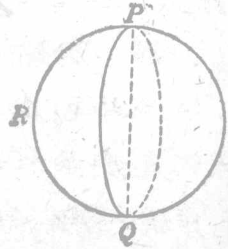
【證】 (1)先設平面 l 不過球心 O。自球心 O, 作 OP 線段垂直於平面 l, 而記其垂足爲 P 點。再取鎖閉曲線 $ABCDE$ 之任兩點 A, B。作半徑 OA, OB; 並作 PA, PB。則 $OA=OB$, $OP\perp PA$, $OP\perp PB$(§327)。$\therefore$ OPA, OPB 爲兩全相等直角三角形。$\therefore PA=PB$, 即鎖閉曲線 $ABCDE$ 之一切點皆與在 l 平面上之 P 點有相等之距離。

$\therefore ABCDE$ 爲一圓。

(2)次設平面 l 過球心 O。則鎖閉曲線 $ABCDE$ 之一切點皆與在其平面上之球心 O 有相等之距離。

$\therefore ABCDE$ 爲一圓。

431. 定義。 小圓,大圓,平面與球面相切,切面。



(1)球面上之圓,其平面不過球心者曰小圓,而其平面過球心者曰大圓。

(2)設一平面與一球面僅有一交點,則曰兩者相切;其平面曰切面。

432. 定理。

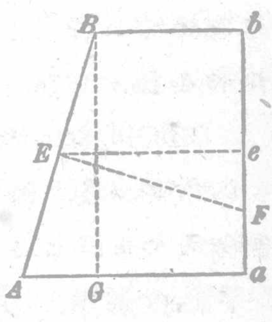
(1)大圓之圓心爲球心。

(2)同球或等球之一切大圓全相等。

(3)過球面上一點,而垂直於過此點之半徑之平面,爲球之切面。

學者自證之。

433. 定理。



設 $ab\ BA$ 爲垂腰梯形,ab 爲垂腰,EF 爲 AB 腰之中垂線之夾於兩腰間之線段,則以 ab 爲軸而迴轉此垂腰梯形所生之直圓錐臺之旁面積 A 等於 $2\pi\cdot\overline{EF}\cdot\overline{ab}$。

【證】 $A=\frac{1}{2}(2\pi\cdot\overline{Aa}+2\pi\cdot\overline{Bb})\times\overline{AB}$。 (§427(1))

$=\pi(\overline{Aa}+\overline{Bb})\times\overline{AB}$。

作 $Ee\perp ab$, 則 $2\overline{Ee}=\overline{Aa}+\overline{Bb}$。 (何故?)

$\therefore A=2\pi\cdot\overline{Ee}\cdot\overline{AB}$。

作 $BG\perp Aa$, 則 BGA, EeF 爲相似直角三角形(何

故?)

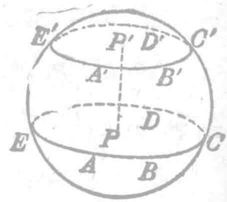
$\therefore\ \overline{AB}:\overline{BG}=\overline{FE}:\overline{Ee}$, 或 $\overline{AB}\cdot\overline{Ee}=\overline{FE}\cdot\overline{BG}$。

$\therefore\ A=2\pi\cdot\overline{FE}\cdot\overline{BG}$, 即 $A=2\pi\cdot\overline{EF}\cdot\overline{ab}$。

434. 定義。 球帶,高。

(1)球面之夾於兩平行平面間之部分曰球帶。

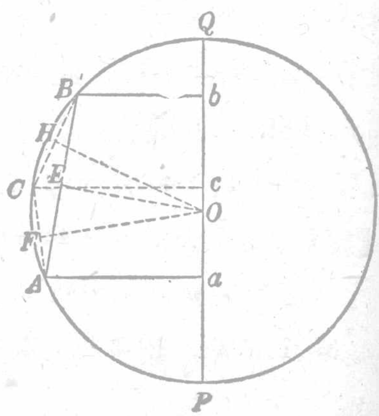
(2)兩平行平面之距離曰球帶之高。



435. 定理。

球帶之面積等於大圓之圓周與球帶之高相乘之積。

設PQ爲直徑,O爲球心,$PABQ$ 爲大圓面,$abBA$爲大圓面上之垂腰梯形,ab爲垂腰,EO爲 AB 腰之中垂線之夾於兩腰間之線段(§133)。以 ab 爲軸而迴轉 $PABQ$ 半圓面,則弧 AB 生一球帶,其高爲 $\overline{ab}$。



求證　弧 AB 所生球帶之面積 S 等於 $\pi\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{ab}$。

【證】　AB 弦生一直圓錐臺之旁面,其面積 $S'=2\pi\cdot\overline{EO}\cdot\overline{ab}$(§433)。分弧 AB 爲 AC 及 CB 兩等弧,則弦 $AC=$ 弦 CB 且 $acCA$ 及 $cbBC$ 皆爲垂腰梯形。作弦 $\overline{AC}$ 及 $\overline{CB}$ 之中垂線 FO, HO。則 $\overline{FO}=\overline{HO}$(何故?)。

設 S'' 爲 $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ 兩弦所生兩直圓錐臺之旁面積之和,則

$$S''=2\pi\cdot\overline{FO}\cdot\overline{ac}+2\pi\cdot\overline{HO}\cdot\overline{cb}=2\pi\cdot\overline{FO}\cdot\overline{ab}$$

仿此,加倍等分弧 AB,則 S', S'' 等爲 S 之近似值,而 EO, FO 等爲半徑 PO 之近似值。弧 AB 等分之次數愈多,兩近似值愈近於其眞值而其差愈小。則近似值與其眞值可視爲相等。故 $S''\doteq S$, $\overline{FO}\doteq\overline{PO}$。

$\therefore\quad S=2\pi\cdot\overline{PO}\cdot\overline{ab}$, 即 $S=\pi\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{ab}$。

436. 定理。

球面積等於大圓之圓周與直徑相乘之積。

【證】　在§435之圖中,設弧 AB 爲半圓,則 aA 及 bB 所生之平面,切球於 P 及 Q (§432(3)),弧 AB 所生之球帶爲球面,球帶之高爲 PQ 直徑。故本定理依前定理而成立。

437. 定理。

球體積等於球面積與半徑相乘之積之三分之一。

【證】　自球心引諸半徑至球面,使每三半徑所遇球面之三點及球心各定一四面體,而不取其重複者。此等四面體皆以球心爲頂,其對面爲底面。

設a_1, a_2, a_3等及S_1, S_2, S_3等爲諸四面體之高及底面積,S'及V'爲其底面積之和及體積之和。並設S及V爲球面積及球體積。

則　$V'=\frac{1}{3}a_1 S_1+\frac{1}{3}a_2 S_2+\frac{1}{3}a_3 S_3+\cdots\cdots\cdots$(§408

而　$S'=S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$。

a_1, a_2, a_3等皆爲球之半徑r之近似值。S'及V'各爲S及V之近似值。

四面體愈增多而各底面愈縮小,諸近似值愈近於其眞值而其差愈小。則兩種之值可視爲相等。故

$$a_1 \doteq r, a_2 \doteq r, a_3 \doteq r, \cdots\cdots, S' \doteq S, V' \doteq V。$$

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}rS_1+\frac{1}{3}rS_2+\frac{1}{3}rS_3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{3}r(S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{3}rS'$$

$$=\frac{1}{3}rS。$$

438. 公式。 設 r, A, V 爲球之半徑,球面積,及球體積,則上兩節之定理可以下列之公式表之:——

$$(1)\quad A=4\pi r^2 \quad (\S 436)$$

$$(2)\quad V=\frac{4}{3}\pi r^3 \quad (\S 437)$$

習題

1. 設有直圓柱體之白鐵水桶一對,其底之半徑爲 8 寸,其高爲 1 尺 6 寸,問兩桶共能盛水若干斤?

2. 問前題之兩水桶需用白鐵若干方尺製成?

3. 設有一直圓柱體之鐵桶,其底之半徑爲 9 寸,其高爲 3 尺,問此桶能盛桐油若干斤?

4. 設於前題之鐵桶內放一等底等高之直圓錐體,問該桶尚能盛豆油若干斤?

5. 某隊童子軍製帳幕 50 頂,幕之形爲直圓錐體,其底之半徑爲 6 尺,其高爲 12 尺,問共需布若干方尺?

6. 設有木塞 1000 個,其形爲直圓錐臺,上下底之半徑各爲 4 分及 6 分,高爲 8 分,問所有木塞共重若干兩?

7. 設有臘燭 20 對,燭之形爲直圓錐臺,其上下底之半徑各爲 2 分及 4 分,其高爲 1 尺 2 寸,問此 20 對臘

燭共重若干斤?

8. 某白鐵匠擬製淘米盆15隻,盆之形爲直圓錐臺,其口之半徑爲1尺2寸其底之半徑爲9寸,其斜高爲5寸,問共需白鐵若干方尺?

9. 足球之直徑爲1尺,問20隻球套需用皮若干方尺製成?

10. 一鉛球之直徑爲5寸。問其重爲若干兩?

第二編之雜題

1. 設兩直三角直稜柱體之底面及高各相等,則此兩直三角直稜柱體全相等。

2. 設兩正稜錐體之底面及高各相等,則此兩正稜錐體全相等。

3. 設一平面體之一面爲一正多邊形,而他面皆爲全相等之等腰三角形且有一公頂,則此平面體爲一正稜錐體。

4. 設一平面體之兩面平行且爲相似而不全相等之正多邊形,他面皆爲四邊形,又兩正多邊形之中心之聯線垂直於其兩平行面,則此平面體爲一正稜錐臺。

5. 設一平面體之兩面平行且爲相似而不全相等之正多邊形,他面皆爲等腰梯形,則此平面體爲一正

稜錐臺。

6. 設任一平面體之稜數、頂數,及面數分別為 e, v,及 f,則 $e+2=v+f$。

7. 凡正稜錐體之旁面積皆大於其底面積。

8. 凡直圓錐體之旁面積皆大於其底面積。

9. 設有草房一間,寬14尺,深10尺,前後牆高各12尺,兩端山牆尖各高15尺。今有8人在內住宿10小時,緊閉其門窗而不使空氣流通,問每人每小時可吸新鮮空氣若干立方尺?若每人每小時需要新鮮空氣30立方尺,則此房可容幾人住宿10小時,雖使門窗緊閉而不妨礙衛生?

10. 今有玻璃球5000個,其直徑各為2寸,問共重若干兩?

11. 今有空心紅銅球200個,其內外層之直徑各為2寸及2寸4分,問共重若干兩?

12. 一木桶之形為一直圓柱體,其底之半徑為1尺5寸,其高為2尺。問此桶能盛石灰若干斤?

13. 設有一銀塔,座基為四旁面之正稜錐臺,上下底每邊長2寸及3寸,高2寸;塔身為四旁面之正稜錐體,底邊長1寸2分,高5寸。問此塔共用銀若干兩製成?

14. 設一磨盤上之漏斗形似一倒置之直圓錐臺,大口之直徑為 1 尺,小口之直徑為 1 寸,高為 6 寸。問此漏斗能容綠豆若干斤?

15. 今有長方體之松板 50 塊,其長、寬、厚各為 12 尺、8 寸,及 5 分,問共重若干斤?

16. 今有正方體之錫盒一個,外層每邊長 6 寸 4 分,六面各厚 2 分,盒內裝滿糯米。問盒與糯米共重若干斤?

17. 一鄉人有粗布袋兩口,其形皆似直圓柱體,大袋之底之直徑為 1 尺 4 寸,小袋之底之直徑為 1 尺。此鄉人將大袋裝米至三尺深,小袋裝蠶豆至 2 尺深,而用一驢背負兩袋上街,問此驢負重約若干斤?

18. 一油鉢之形為一倒置之直圓錐臺,上下底之直徑各為 5 寸及 4 寸,高為 4 寸,問此鉢能盛猪油,蔴油,花生油,或菜油各若干兩?

19. 一直角三角形之兩腰之長為 3 寸及 4 寸。以各邊為軸而廻轉直角三角形,由此生三曲面體。試求各曲面體之全面積及體積。

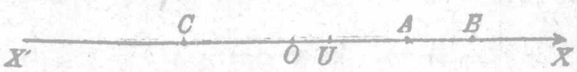
20. 一長方形長 6 寸,寬 4 寸。以長或寬為軸而廻轉長方形,由此各生一直圓柱體。試求各直圓柱體之旁面積及體積。

平面三角學

第一章　三角函數

439. 有向線。

在直線 $X'X$ 上取一點 O，名之曰**原點**。設由 O 向右為 $X'X$ 之**正向**，以$\longrightarrow$表示之，與此相反之方向為**負向**，並取 OU 為一單位之長。此種直線具有原點、方向、單位者，曰有向線。



設 A, B 為有向線 $X'X$ 上任意兩點。若由 A 至 B 之方向與 $X'X$ 之方向相同，則其值為正，反之為負。普通以 AB 表示由 A 至 B 之距離，故 AB 與 BA 長短相等而方向則相反，即

$$AB = -BA。\tag{1}$$

設 C 為 $X'X$ 上任一第三點，又可得

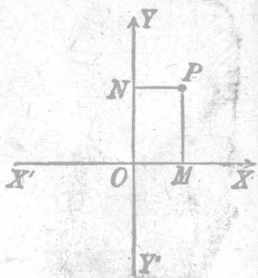
$$AB + BC = AC。\tag{2}$$

(1),(2) 為有向線上距離之重要性質。

440. 坐標系。

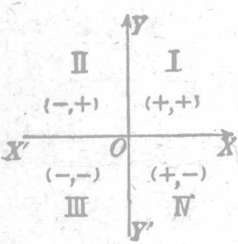
如圖設 $X'X$ 及 $Y'Y$ 兩有向線互相垂直於原點 O。

$X'X$曰橫軸或X軸,$Y'Y$曰縱軸或Y軸,二者合稱坐標軸。



縱橫兩軸,分平面爲四部,各名爲象限,XOY曰第一象限,$X'OY$曰第二象限,$X'OY'$曰第三象限,XOY'曰第四象限。

設P爲平面上任意一點,



則由縱橫兩軸至P點之兩距離NP及MP,必等於OM及MP之值。此OM及MP兩值,曰P點之坐標。普通記

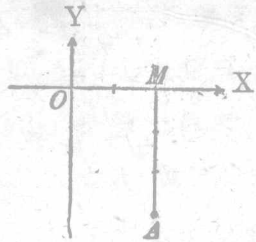
$$x=OM,\qquad y=MP,$$

而以(x, y)表示P點。括弧內第一數曰P之橫標,第二數曰P之縱標。

凡橫標向右爲正,向左爲負。縱標向上爲正,向下爲負。故點在第一象限者,其縱橫標皆爲正數。在第二象限者,橫標爲負而縱標爲正。在第三象限者,縱橫標皆爲負數。在第四象限者,橫標爲正而縱標爲負。

知某點之坐標,求其點之位置,曰描點。設有A點,其坐標爲$(2,-3)$。即$x=2$, $y=-3$。先在X軸上取$OM=2$, 由M

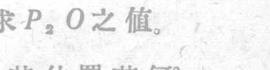
作直線與Y軸平行,取 $MA=-3$, 則A即為所求之點。



習題

1. 設某甲以已知之速率,在直路上行走,若欲求甲於某時間內所經過之距離,問先決之事項為何?試與有向線比較之。

2. 如圖已知P, P_1, P_2三點之位置。



(a)求P_1P_2之值。 (c)求P_2P_1及P_1P_2之差。

(b)求P_2P及PP_1之和。 (d)求P_2O之值。

3. 點之橫標或縱標為零者,其位置若何?

4. 求原點之坐標。

5. 下列各點,在何象限?

(a) $x=7, y=2$。 (b) $x=-3, y=5$。 (c) $(-3,-3)$

(d) $(6,-5)$ (e) $(\sqrt{3},1)$ (f) $(-\frac{1}{2},4)$

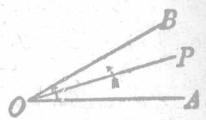
6. 描上題中諸點。

441. 廣義角。

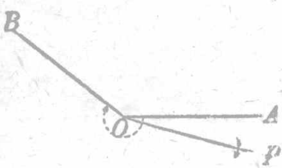
以 OP 繞定點 O 在平面上迴轉,由 OA 之位置,迴轉至於 OB,則成一角,記爲 $\angle AOB$,或以 θ, α, x 等字表示之。O 爲角之頂點,OA 爲角之起邊,OB 爲角之終邊。

普通規則,以 OP 迴轉之方向與時針迴轉之方向相反時所成之角爲正角,與時針迴轉之方向相同時所成之角爲負角。

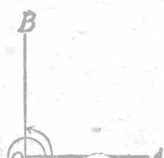
一角之終邊,迴轉一週而返於起邊之位置,則歷 $0°$ 至 $360°$ 或 $0°$ 至 $-360°$ 各度之角。若仍繼續迴轉,可得 $360°$ 以上或 $-360°$ 以下諸角,以至於無限。



正角



負角



450°角

−360°角

平面幾何學所言之角,設爲正量,且不得大於 $360°$。(§13) 本節所論,則**正**、**負**、**大**、**小**,毫無限制,名之曰廣義角,以示區別。

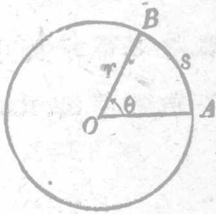
以後除特別申明外,皆以橫軸之正向部份 OX

爲角之起邊,以原點 O 爲角之頂點。

角之位置,視其終邊所在之象限而定。例如 150° 之終邊,在第二象限內,故 150° 角在第二象限。而 -150° 則在第三象限,因其終邊在第三象限故也。

442. 弧度法。

量角之大小,普通有度、分、秒及弧度兩種單位。前者便於實用上之計算,後者則宜於理論上之研究,高等算學常用之。



取某角 θ 之頂點爲圓心,以任意長 r 爲半徑作圓。若以 r 量圓心角 θ 所對之弧 s,則所得之數,曰 θ 之弧度數,即 $\theta=\frac{s}{r}$ 弧度。其法曰弧度法。若 $s=r$,則 $\theta=1$ 弧度,即某角所對弧等於半徑時,其角等於一弧度,是爲弧度法之單位。

由幾何學之定理(§166, 291),知

$$360^\circ=2\pi r。$$

故 $$1\text{弧度}=\frac{360^\circ}{2\pi}=\frac{180'}{\pi}=57.2957^{\circ+}$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\doteq 0.01745^{+}\text{弧度}。$$

$22.5^\circ = \frac{\pi}{8}$　$7.5^\circ = \frac{\pi}{24}$　$360^\circ = 2\pi$弧度.
$15^\circ = \frac{\pi}{12}$.

故度與弧度兩者,可互相化換。例如:

$360^\circ = 2\pi$ 弧度,　　$\frac{2\pi}{3}$弧度$=\frac{2\pi}{3}\times\frac{360^\circ}{2\pi}=120^\circ$,

$45^\circ = \frac{\pi}{4}$弧度,　　$\frac{\pi}{6}$弧度$=\frac{\pi}{6}\times\frac{360^\circ}{2\pi}=30^\circ$,

$60^\circ = 60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$弧度,　$\frac{\pi}{2}$弧度$=\frac{\pi}{2}\times\frac{360^\circ}{2\pi}=90^\circ$,

習題

1. 試述決定一角之值之條件。

2. 求下列各角之位置,並作其圖: 560°, -240°, 750°, -390°, -60°, -200°, 197°。

3. 求圖中所示各角之度數。

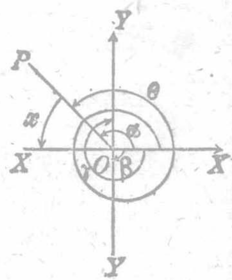
$\alpha = 135^\circ$

$\beta = ?$

$\gamma = ?$

$\theta = ?$

$x = ?$



4. 代換下列諸角之度數及弧度: 30°, 150°, 750°, -75°, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{1}{5}\pi$, $-\frac{2}{11}\pi$。

443. 函數。

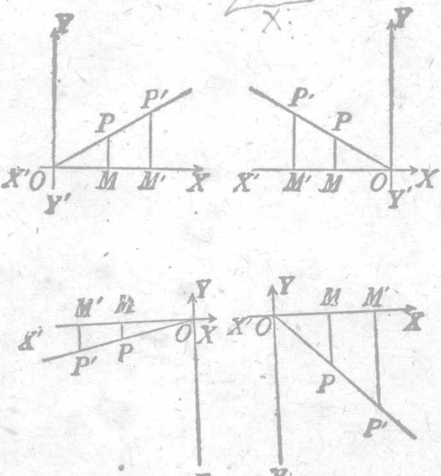
與常數相對之數曰變數。變數者,其數值時常改變而不固定者也。普通以 x, y, z……等字母記之。

$30° = \frac{\pi}{6}$ 弧度
$45° = \frac{\pi}{4}$ 弧度
$60° = \frac{\pi}{3}$ 〃 〃

設有甲乙二變數,甲數之值隨乙數而改變,則乙數曰自變數,甲數曰乙數之函數。例如 $y=2x+1$ 中之 x, y 皆爲變數。設 $x=1$, 則 $y=3$。設 $x=2$, 則 $y=5$。設 $x=3$, 則 $y=7$。是 y 之值,隨 x 之值而改變。故 y 爲 x 之函數。

444. 三角函數之廣義。

設 θ 爲一任何角。在其終邊上取任一點 $P(x,y)$, 名 OP 曰動徑。由 P 向橫軸作垂線 PM, 得 $\triangle OMP$, $OM=x$, $MP=y$。設 $OP=r$, 則 x, y, r 三邊共成六比,即 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ 及其倒數 $\frac{r}{y}$, $\frac{r}{x}$, $\frac{x}{y}$。



Cosine
tana

在終邊上另取一點 P',由 P' 向橫軸作垂線 $P'M'$,得

$\triangle OM'P'$。因$\triangle OMP$與$\triangle OM'P'$相似,故$\triangle OMP$中任意兩邊之比,必等於$\triangle OM'P'$之相當兩邊之比。是**六比之值,與P點在終邊上之位置無關**,即P點在定角θ之終邊上移動時,六比之值不變。但當θ改變時,六比之值隨之而變。θ之大小不變,則六比不變,故**六比之值,爲θ之函數**。因六比爲三角形三邊所作成,故通稱之曰θ之三角函數。

各三角函數之名稱如下:

$\frac{y}{r}$曰θ之**正弦**,記爲$\sin\theta$。

$\frac{x}{r}$曰θ之**餘弦**,記爲$\cos\theta$。

$\frac{y}{x}$曰θ之**正切**,記爲$\tan\theta$。

其倒比$\frac{r}{y}$,$\frac{r}{x}$,$\frac{x}{y}$曰θ之**餘割**、**正割**、**餘切**,而記爲$\csc\theta$,$\sec\theta$及$\cot\theta$。換言之,即

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\text{縱標}}{\text{動徑}},\qquad \csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{\text{動徑}}{\text{縱標}},$$

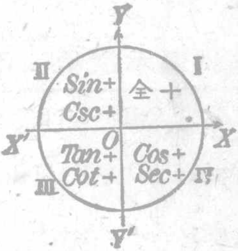
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\text{橫標}}{\text{動徑}},\qquad \sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{\text{動徑}}{\text{橫標}},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\text{縱標}}{\text{橫標}},\qquad \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{\text{橫標}}{\text{縱標}},$$

【註】　除此六個函數外,尚有以$\operatorname{vers}\theta$表示$1-\cos\theta$,以$\operatorname{covers}\theta$表示$1-\sin\theta$,亦稱爲$\theta$之三角函數,惟不常用。

445. 三角函數之符號

設動徑$OP=r$之值常爲正數,則θ之三角函數之符號,由P點坐標x, y之符號而決定,而P點坐標之符號,又隨θ所在之象限而改變。θ在第一象限時,P之坐標皆爲正,**故第一象限中各角之三角函數皆爲正數**。θ在第二象限時,P之橫標爲負而縱標爲正,**故第二象限中各角之正弦及餘割爲正,其餘之函數爲負**。θ在第三象限時,P之橫縱標皆爲負數,**故第三象限內各角之正切及餘切爲正其餘函數爲負**。θ在第四象限時,P之橫標爲正,而縱標爲負,**故第四象限內各角之餘弦及正割爲正,其他函數爲負**。



右圖示各象限中各角之正三角函數,其未記出者,皆爲負數。

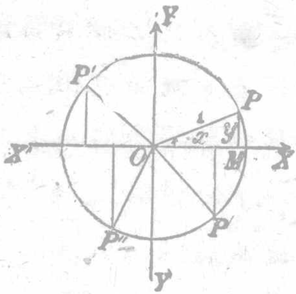
446. 三角函數值之變化

凡角之終邊密合者,其相同之三角函數相等。(何故)?設n爲任意之正或負整數,則$n\cdot 360^\circ+x$諸角之終邊,與x之終邊相合。若以f代表任何三角函數,卽得

$$f(n.360^\circ+x)=f(x)。$$

故討論三角函數值之變化,使θ由0°變至360°足矣。

取 $OP=r=1$。令 θ 經過0°至360°間各角,則 P 之軌跡爲一單位圓。



(一)正餘弦。因 $r=1$, 故 $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{y}{1}=y$,

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{1}=x。$$

設以↗示漸增,↘示漸減,則得正餘弦值之變化如下:

當 θ	由0°至90°	由90°至180°	由180°至270°	由270°至360°
$\sin\theta$	0 ↗ 1	1 ↘ 0	0 ↘ −1	−1 ↗ 0
$\cos\theta$	1 ↘ 0	0 ↘ −1	−1 ↗ 0	0 ↗ 1

(二)正餘切。在第一象限內,當 θ 由 0° 至 90°, x 由1漸減至 0, y 由 0 漸增至 1,即 $\frac{y}{x}$ 之分子漸增而分母漸減,故 $\frac{y}{x}$ 逐漸增大。

若 $\theta=0°$,則 $y=0$, $x=1$。故 $\frac{y}{x}=0$,即 $\tan 0°=0$, 若 θ 與90° 甚爲接近,則 y 與 1 幾等而 x 甚小。故 $\frac{y}{x}$ 之值甚大,

θ 與 90° 愈接近，$\frac{y}{x}$ 之值愈大，乃至於無限大，以 ∞ 記之，故 $\tan 90^\circ=\infty$。

故在第一象限，正切由 0 漸增至 ∞。

在第二象限內，當 θ 略大於 90° 時，y 與 1 幾等而 x 甚小，且為負數，故正切乃大至於無限大，且為負數，即 $\tan 90^\circ=-\infty$。當 θ 由 90° 至 180°，y 由 1 漸減至 0，x 由 0 漸減至 -1，故 $\tan 180^\circ=0$。

故在第二象限，正切由 $-\infty$ 漸增至 0。

在第三象限內，正切為正，當 θ 至 270° 時，正切為無限大。即 $\tan 270^\circ=\infty$。

故在第三象限，正切由 0 漸增至 ∞。

在第四象限，正切為負。當 θ 與 270° 接近時，正切為無限大，且為負數，即 $\tan 270^\circ=-\infty$。

故在第四象限，正切由 $-\infty$ 漸增至 0。

同法可得餘切之值之變化，如下表所示：

當 θ	由 0° 至 90°	由 90° 至 180°	由 180° 至 270°	由 270° 至 360°
$\tan\theta$	$0 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow 0$	$0 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow 0$
$\cot\theta$	$\infty \searrow 0$	$0 \searrow -\infty$	$\infty \searrow 0$	$0 \searrow -\infty$

(三)正餘割。　正餘割之值之變化如下(學者自證

之):

當 θ	由$0°$至$90°$	由$90°$至$180°$	由$180°$至$270°$	由$270°$至$360°$
$sec\theta$	$1 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow -1$	$-1 \searrow -\infty$	$\infty \searrow 1$
$csc\theta$	$\infty \searrow 1$	$1 \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow -1$	$-1 \searrow -\infty$

由上討論,可見任何角之正餘弦之值,不能比1大,又不能比-1小。其正切與餘切,可有任意之值。至於正餘割,則不能比1小又不能比-1大。適與正餘弦相反。

習題

1. 車票之價目與乘車之距離,皆爲變數。問何者爲函數?

2. 試舉一函數實例。

3. 試述三角函數名稱之由來。

4. 以下諸角,在何象限?

(a) $cos\theta=-\frac{2}{3}$,　(c) $csc\theta=89$,

(b) $tan\theta=4$,　(d) $sin\theta=-\frac{1}{4}$。

5. 設$P(3,-4)$爲某角終邊上之一點。求此角之各三角函數。

6. 在$0°$與$-360°$之間,何角正弦之值爲最大?最小?何角餘弦爲最大?

7. 設$cos\theta=\frac{1}{2}$，　$tan\theta=-\sqrt{3}$，問 θ 在何象限?

√8. 設$sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，　$cos\theta=-\frac{1}{2}$，問 θ 在何象限?

9. 設$sin\theta=\frac{3}{5}$求 θ 之其餘各函數。

√10. 詳述餘割之值之變化。

11. 某角終邊上P點之橫標爲-2,其正切爲$\frac{5}{3}$,求P之縱標及該角之正弦及餘弦。

12. 直角三角形之頂爲$A(0,0)$, $B(3,4)$, $C(3,0)$。求A角之三角函數。

447. 銳角之三角函數。

設 θ 爲一銳角,則 θ 必在第一象限,其六個三角函數皆爲正。在終邊上取任一點P,向橫軸作垂線PM,得直角三角形$\triangle OMP$。θ 爲此直角三角形之一銳角。OP爲其斜邊,OM爲 θ 之隣邊,MP爲 θ 之對邊,故得銳角之三角函數如下:

$$sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{MP}{OP}=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}},\quad csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{OP}{MP}=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}},$$

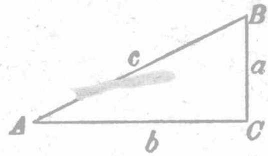
$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{OM}{OP}=\frac{\text{隣邊}}{\text{斜邊}},\quad sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{OP}{OM}=\frac{\text{斜邊}}{\text{隣邊}},$$

$$tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}=\frac{\text{對邊}}{\text{隣邊}},\quad cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{OM}{MP}=\frac{\text{隣邊}}{\text{對邊}},$$

初中三角學,用此爲銳角三角函數之定義。§444所

述之三角函數,則爲任何角之三角函數,非僅限於銳角。名之曰三角函數之廣義,蓋對此銳角三角函數之定義而言也。

銳角三角函數之定義,雖包含於三角函數廣義之中,然於直角三角形問題中,應用甚廣,故學者當熟記之,以求便利。例如$\triangle ABC$爲直角三角形,C爲直角,a, b, c爲A, B, C各角所對之邊。因c爲斜邊,b爲A之隣邊,a爲A之對邊。



故得 $\sin A=\dfrac{a}{c}$,

$\cos A=\dfrac{b}{c}$,

$\tan A=\dfrac{a}{b}$ 等。

同理,b爲B之對邊,a爲B之隣邊,

故 $\sin B=\dfrac{b}{c}$,

$\cos B=\dfrac{a}{c}$ 等。

可知 $\sin A=\cos B$,

$\cos A=\sin B$,

$\tan A=\cot B$ 等。

而 $B=90^\circ-A$, 故得以下之關係:

$\sin A=\cos(90^\circ-A)$, $\cos A=\sin(90^\circ-A)$,

$$\tan A=\cot(90^\circ-A),\qquad \cot A=\tan(90^\circ-A),$$

$$\sec A=\csc(90^\circ-A),\qquad \csc A=\sec(90^\circ-A)。$$

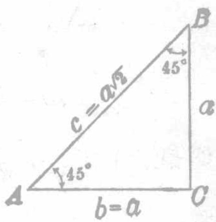
正弦與餘弦,正切與餘切,正割與餘割,各互爲餘函數。故以上六式,亦可如下表之。

正

定理　若兩角互爲餘角,則一角之三角函數,等於他一角之餘函數。

448. 特別角之三角函數。

(一)45°　令△ABC爲一直角三角形,C爲直角,$A=45^\circ$,　則$B=90^\circ-A=45^\circ$,　而 $a=b, c=\sqrt{a^2+b^2}=a\sqrt{2}$ 。



故　$\sin 45^\circ=\dfrac{a}{c}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

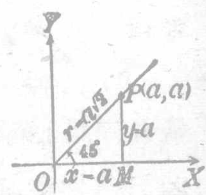
$=\dfrac{1}{2}\sqrt{2},$

$\cos 45^\circ=\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{2},$

$\tan 45^\circ=\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{a}=1$。

【註】　45°角之函數,亦可由函數之廣義求之。

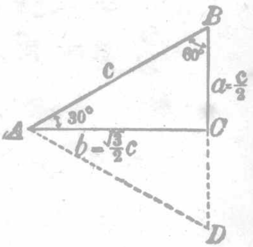


作　$\angle XOP=45^\circ$。取終邊上任一點 P,

則　$P=(a,a)$,　而　$OP=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$ 。

由　§444 定義,得 45° 之函數如上。

(二)30° 與 60°。　令 $\triangle ABC$ 為一直角三角形,C 為直角,$A=30$。延長 BC 至 D,使 $DC=CB$。則 $\triangle ADB$ 為一正三角形。每角等於 60°。



故　$DB=AB=c$,

$$CB=a=\frac{c}{2}。$$

而　$b^2=c^2-a^2$,

$$b^2=c^2-\frac{c^2}{4}=\frac{3c^2}{4},$$

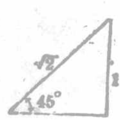
即　$b=\frac{c}{2}\sqrt{3}$。

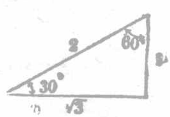
故　$\sin 30^\circ=\frac{a}{c}=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$,

$$\cos 30^\circ=\frac{b}{c}=\frac{1}{2}\sqrt{3}=\sin 60^\circ,$$

$$\tan 30^\circ=\frac{a}{b}=\frac{1}{3}\sqrt{3}=\cot 60^\circ。$$

【注意】　本節圖形,若以 $a=1$, 則成為





學者記憶兩圖,由 §447 之定義,即可求出 45°, 30°, 60° 等角之三角函數,不必將各函數值一一强記。

習題

1. 由§444三角函數之廣義,求60°之各三角函數。

2. 由§444三角函數之廣義,求30°之各三角函數。

3. 某直角三角形之兩腰為3,4。求兩銳角之各三角函數。

4. 試由60°之函數值,求30°之函數值。

5. 將下列諸角之函數,變為其餘角之函數:

(a) $sin 30°$, (c) $cos 4°$,

(b) $tan 25°$, (d) $cot 50°20'20''$。

6. 證 $sin 45° cos 30° - cos 45° sin 30° = \sqrt{\dfrac{1-cos 30°}{2}}$。

7. 試比較§444,447所述兩種三角函數之定義。

449. 正銳角之三角函數。

凡大於0°而小於90°諸角之函數,須應用高等算學,始得求其值,不在本書範圍之內,學者可由附錄第一表檢查得之。

第一表載0°至90°間每10′之角之正餘弦及正餘切。正餘割之值未列入,可由正餘弦之倒值求之。第一表左旁之度數及上邊之分數,為檢查正弦及正切之用。右旁之度數及下邊之分數,則為檢查餘弦及餘切之用。

(一)如角之分數,載於表中者。則與度數同行分數同列之數,即為該角函數之值。例如:

$$\cos 50°40' = .6338,$$

$$\tan 80°20' = 5.871,$$

$$\cot 30°20' = 1.709,$$

$$\cos 10°0' = .9848,$$

$$\sin 40°30' = .6493。$$

(二)如角之分數不見於表者,可以角之差與函數之差爲相比,而以比例計算之,是曰補插法。就理論言之,角差並不與函數之差相比。但當兩角甚爲接近時,其角之差,幾與函數之差相比,補插法則姑視之爲相比者也。以後仿此。

例一 求 $\cos 70°23'$ 之值。

$\cos 70°23'$ 在 $\cos 70°30'$ 及 $\cos 70°20'$ 之間。

檢表得 $\cos 70°20' = .3365$

$\cos 70°30' = .3338$

角大 $10'$ 則餘弦小 .0027。

$$10 : .0027 = 3 : x,$$

$$\therefore\ x = .0081。$$

故 $\cos 70°23' = .3365 - .0081 = .3357$。

例二 求 $\sin 30°15'$ 之值。

$\sin 30°15'$ 在 $\sin 30°10'$ 及 $\sin 30°20'$ 之間。

檢表得　$sin30°20' = .5050$

$sin30°10' = .5025$

角大$10'$則正弦大$.0025$

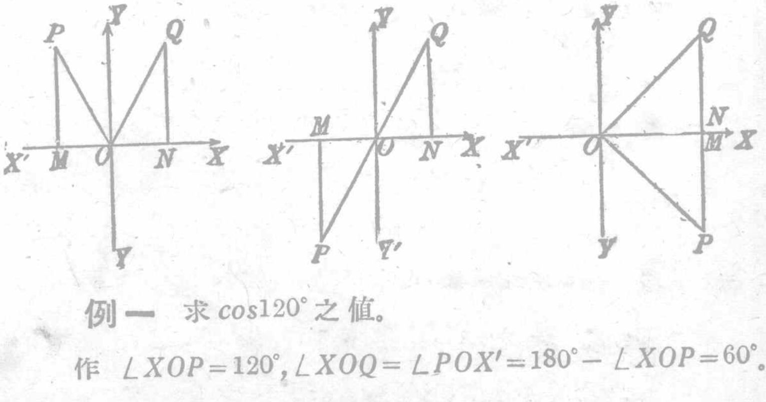
$10 : .0025 = 5 : x,$

$\therefore \quad x = .00125 = .0013$。

故　$sin30°15' = .5025 + .0013 = .5038$。

450. 任何角之三角函數。

若角比$90°$大或比$0°$小者,在其終邊上取一點P,由P向橫軸作垂線,相交於M,得直角三角形$\triangle OMP$。在第一象限內,作一與之全相等之直角三角形$\triangle OQN$,N在橫軸上,且爲直角,比較此兩直角三角形之邊,可得所欲求函數之值。(參看§479,480)

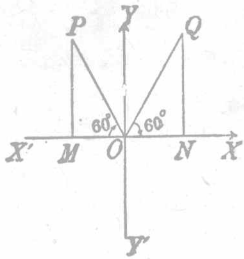


例一　求$cos120°$之值。

作　$\angle XOP = 120°, \angle XOQ = \angle POX' = 180° - \angle XOP = 60°$。

取　$OP = OQ$,

由 P, Q 向橫軸作垂線得



$\triangle OMP \equiv \triangle ONQ$,

而 $OP = OQ$, $MP = NQ$,

$OM = -ON$,

故 $\cos 120^\circ = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{-ON}{OQ}$

$= -\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$。

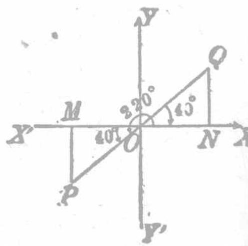
同法得 $\sin 120^\circ = \dfrac{MP}{OP} = \dfrac{NQ}{OQ} = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan 120^\circ = \dfrac{MP}{OM} = \dfrac{NQ}{-ON} = -\dfrac{NQ}{ON} = -\tan 60^\circ$

$= -\sqrt{3}$。

例二 求 $\sin 220^\circ$ 之值。

如法作 $\triangle ONQ \equiv \triangle OMP$,



則 $OP = OQ$, $OM = -ON$,

$MP = -NQ$,

故 $\sin 220^\circ = \dfrac{MP}{OP} = \dfrac{-NQ}{OQ}$

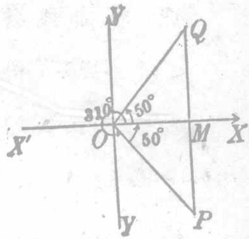
$= -\dfrac{NQ}{OQ} = -\sin 40^\circ = .6428$。

例三 求 $\tan 310^\circ$ 之值。

如法作 $\triangle OMP \equiv \triangle OMQ$,

則　$OP=OQ$,　$OM=OM$,

$MP=-MQ$。



故　$\tan 310°=\dfrac{MP}{OM}=-\dfrac{MQ}{OM}$

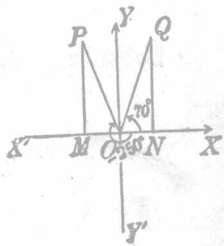
$=-\tan 50°=-1.192$。

例四　求 $\cos(-250°)$ 之值。

如法作 $\triangle OMP \equiv \triangle ONQ$,

則　$OP=OQ$,　$OM=-ON$,

$MP=NQ$。



故　$\cos(-250°)=\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{-ON}{OQ}$

$=-\dfrac{ON}{OQ}=-\cos 70°=-.3420$。

習　題

1.　求下列函數之值:

(a)　$\sin 40\frac{1}{3}°$,　　(d)　$\cot 80°50°$,

(b)　$\cos 23°10'$,　　(e)　$\cos 45.5°$,

√(c)　$\tan 52°20'$,　　√(f)　$\csc 30°$。

2.　用補插法,求下列函數之值:

(a)　$\cos 15°51'$,　　(d)　$\sin 30°25'$,

(b)　$\cot 60°12'$,　　(e)　$\tan 22°1'$,

√(c)　$\sec 20°14'$,　　√(f)　$\cos 42°13'$。

3. 求下列各函數之值:

(a) $\sin 370^\circ$,

(b) $\cos 1000^\circ$,

(c) $\tan 200^\circ$,

(d) $\cot 260^\circ 40'$,

(e) $\cos 322.4^\circ$,

(f) $\tan(-33^\circ)$,

(g) $\sin(-60^\circ)$,

(h) $\cos(-842^\circ)$,

(i) $\sin(-100^\circ)$,

(j) $\cot(-120^\circ)$。

451. 相當正值函數之銳角。

設知某函數之正值,亦可由第一表求其相當之銳角。

(一)如函數之值載於表中者,則與函數值同行之度數,爲相當銳角之度數,與函數值同列之分數,爲相當銳角之分數。惟須注意者,**如係正弦及正切,取左旁之度數及上邊之分數,如係餘弦及餘切,則取右旁之度數及下邊之分數。**

例如已知 $\sin x = .5831$,求銳角 x。

檢表得 .5831 與左旁 35° 同行,與上邊 $40'$ 同列,

卽 $\sin 35^\circ 40' = .5831$,

故 $x = 35^\circ 40'$。

同法查得:

若 $\sin x = 0.8021$, 則 $x = 53^\circ 20'$。

若 $tonx=0.7046$, 則 $x=35°10'$。

若 $cosx=.3584$, 則 $x=69°$。

(二)如函數之值不見於表中者,可用補插法視函數之差與角差相比而求之。

例如已知 $tanx=.9407$, 求銳角 x。

檢第一表知 .9407 在 .9380 與 .9435 之間。

而 $.9435=tan43°20'$

$.9380=tan43°10'$

正切大 .0055 則角大 $10'$

$.9407-.9380=.0027$,

$.0055:10=.0027:A$,

$\therefore\ A=4.9'$。

故 $x=43°10'+4.9'=43°14.9'$。

習 題

1. 求下列各銳角:

(a) $sinx=.1045$, √(f) $cotx=.1973$,

(b) $tanx=1.792$, (g) $sinx=.9100$,

√(c) $cosx=.6428$, (h) $cosx=.7698$,

(d) $cotx=5.671$, √(i) $tanx=.4663$,

(e) $secx=2.000$, (j) $sinx=.8192$.

2. 用補插法,求下列各銳角:

(a) $\sin x=.1895$, (c) $\cot x=.8676$,

(b) $\tan x=1.747$, (d) $\cos x=.5552$。

3. 求與下列負值函數相當之最小正角。

(a) $\sin x=-.2700$, (c) $\tan x=-1.144$,

(b) $\cos x=-.6494$, (d) $\sin x=-.4508$。

*452. 三角函數之圖形。

設 y 爲 x 之某三角函數。則 x 有一值,y 卽有一相當之值。若 x 之值漸變,則 y 之值隨之亦變。取 x 及 y 之各相當值爲點之橫縱標,可畫成無限點。此無限點所作成之曲線,曰此三角函數之圖形。

作三角函數之圖形之方法如下:

第一步 令 y 等於三角函數。

第二步 使 x 等於各種不同之度數,直接或間接由第一表檢查 y 之相當值,作成一表。

第三步 將 x 之各值由度數變爲弧度,以 x 之弧度爲橫標,y 之值爲縱標,描成平面上之點。

第四步 將各點由左向右依次連結之,卽得三角函數之圖形。

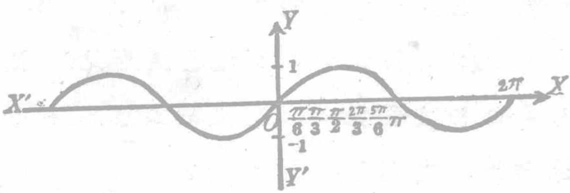
例如求作 $\sin x$ 之圖形。

令　$y=sinx$,

當x=	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
則y=	0	.50	.86	1.00	.86	.50	0	-.50	-.86	1.00	-.86	-.50	0

描點 $(0,0)$, $(\frac{\pi}{6},.50)$, $(\frac{\pi}{3},.86)$, $(\frac{\pi}{2},1)$, $(\frac{2\pi}{3},.86)$........

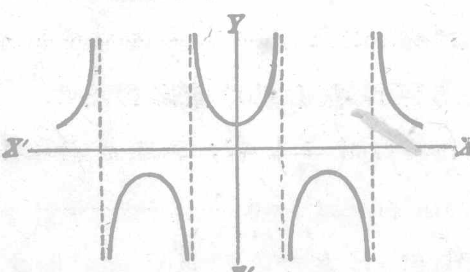
等等而由左向右依次連結之,得 0°至360°間 $sinx$之圖形如下:

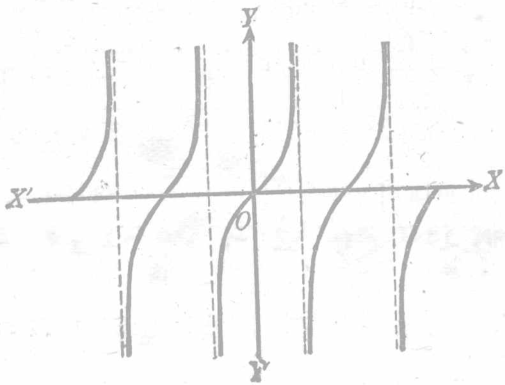


因 $sin(n.360°+x)=sinx$, n=任何正或負整數。故正弦之完全圖形,實包含無限浪形曲線,有如上圖也

習　題

1.　作 $tanx$ 之圖形。





2. 作 $secx$ 之圖形。

3. 作 $cosx$ 之圖形,並與 $sinx$ 之圖形比較之。

4. 作 $cotx$ 之圖形。

5. 作 $cscx$ 之圖形。

453. 三角函數間之關係。

由§444三角函數之定義,得

$$\sin\theta\cdot\csc\theta=1,\cdots\cdots(1)$$

$$\cos\theta\cdot\sec\theta=1,\cdots\cdots(2)$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1,\cdots\cdots(3)$$

又 $x^2+y^2=r^2$,左右以 r^2 除之,得

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1,$$

即
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\cdots\cdots(4)$$

若將 $x^2+y^2=r^2$ 之左右同以 x^2 或 y^2 除之,可得

$$1+ton^2\theta=sec^2\theta,\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$1+cot^2\theta=csc^2\theta,\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

又 $$\frac{sin\theta}{cos\theta}=\frac{y}{r}\Big/\frac{x}{r}=\frac{y}{x},$$

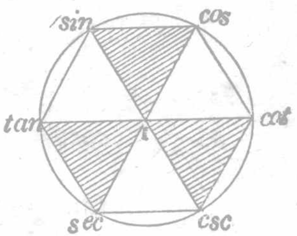
故 $$tan\theta=\frac{sin\theta}{cos\theta}。\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

由(3)得 $$cot=\frac{cos\theta}{sin\theta}。\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

以上八式,為同角之三角函數間之基本關係,應用頗廣,學者須熟記之。

【注意】 (1)–(6)六式,可用下圖記憶。

以六函數示正六邊形之六頂點,其對角線分之為六個三角形,內有三個三角形向下。記對角線交點為1,則任一向下三角形底邊兩端平方之和,等於頂點之平方。任一對角線兩端之積等於1。



例一 已知$sin\theta=\frac{3}{5}$,求θ之其餘五個函數之值。

由(1)式得 $csc\theta=\frac{5}{3}$,

由(4)式得 $cos\theta=\pm\sqrt{1-sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\frac{4}{5}$,

由(2)式得 $\sec\theta=\pm\frac{5}{4}$,

由(7)式得 $\tan\theta=\frac{3}{5}\Big/\pm\frac{4}{5}=\pm\frac{3}{4}$,

由(3)式得 $\cot\theta=\pm\frac{4}{3}$。

因 $\sin\theta$ 爲正,故 θ 在第一象限,或第二象限。

如 θ 在第一象限,則

$$\sin\theta=\frac{3}{5},\qquad \csc\theta=\frac{5}{3},$$

$$\cos\theta=\frac{4}{5},\qquad \sec\theta=\frac{5}{4},$$

$$\tan\theta=\frac{3}{4},\qquad \cot\theta=\frac{4}{3}.$$

如 θ 在第二象限,則

$$\sin\theta=\frac{3}{5},\qquad \csc\theta=\frac{5}{3},$$

$$\cos\theta=-\frac{4}{5},\qquad \sec\theta=-\frac{5}{4},$$

$$\tan\theta=-\frac{3}{4},\qquad \cot\theta=-\frac{4}{3}.$$

此題係應用基本關係,由已知某函數之值,以求同角之其他函數。

例二 試以 $\sin\theta$ 表示 θ 之其餘五個函數之值。

由(4)式得 $\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$,

由(7)式得 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}$,

由(8)式得　$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$,

由(2)得　$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}$,

由(1)得　$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$。

習題

1. 問 $\sin^2\theta$, $(\sin\theta)^2$, $\sin\theta^2$ 三者有何分別?
2. 設 $\tan\theta=t$, 求 θ 之其餘五個函數之值。
3. 設 $\sec\theta=\frac{5}{2}$, 求 θ 之其餘五個函數之值。
4. 試以 $\cot\theta$ 表示 θ 之其餘五個函數。

直角三角形

第二章 直角三角形

454. 對數之定義。

設 $k^x=A$，則 x 曰 A 之 k 底對數。恆以 $\log_k A=x$ 記之。讀如「A 之 k 底對數爲 x」。$k^x=A$ 與 $\log_k A=x$，乃二種方式，表明 x, k, A 三數同樣之關係。前者曰指數形式，後者曰對數形式，任知其一，可變得其二。例如：

$$2^3=8,\quad 故\quad \log_2 8=3。$$

$$2^{-2}=\frac{1}{4},\quad 故\quad \log_2 \frac{1}{4}=-2。$$

$$3^2=9,\quad 故\quad \log_3 9=2。$$

$$5^0=1,\quad 故\quad \log_5 1=0。$$

習題

1. 求下列對數之值：

$\log_3 27$, $=3$ $\log_{10} 1000$, $=5$ $\log_2 32$, $\log_k k$, $=1$ $\log_k 1$。

2. 求下列各式之值，並以對數形式表示之：

$\frac{1}{16}$ 2^{-4}, $8^{\frac{2}{3}}$, 10^3, $.008^{-\frac{1}{3}}$, $.000125^{\frac{2}{3}}$, $216^{\frac{1}{3}}$

$.005^2=.0025$ $\log_{.000125} .0025=\frac{2}{3}$

3. 變下列各式之形式：

(a) $\log_y x=z$, $y^z=x$, (c) $\log_C \frac{A}{B}=\frac{M}{N}$,

(b) $A^s=r$, (d) $(\sqrt{x})^{yz}=t$。

$\log_y y^z=z$

底数……$A = M$……真数.

4. 求下列方程式中各對數之底: $+5^2$　$2^3=8$.

(a) $log 64=2$,　　(c) $log\frac{1}{25}=-2$,　$log_2 8=3$

(b) $log 121=2$, $\because 11^2=121$ $\therefore log_{11}121=2.$　(d) $log 625=4$。

864
8

455. 對數之性質。

設 $A=k^x$, $B=k^y$, 則 $log_k A=x$, $log_k B=y$.

於是　$A\cdot B=k^x\cdot k^y=k^{x+y}$,

$log_2 32=$

故　$log_k(A\cdot B)=x+y$,

即　$log_k(A\cdot B)=log_k A+log_k B$。 ……(1)

又　$A\div B=k^x\div k^y=k^{x-y}$,

$log_k(A\cdot B)=x+y$

故　$log_k\frac{A}{B}=x-y$,

$log_k(A\cdot B)=log_k A+log_k B$

即　$log_k\frac{A}{B}=log_k A-log_k B$。 ……(2)

又　$A^n=(k^x)^n=k^{nx}$,

故　$log_k(A^n)=nx$,

即　$log_k(A^n)=n\,log_k A$。 ……(3)

又　$\sqrt[n]{A}=(k^x)^{\frac{1}{n}}=k^{\frac{x}{n}}$,

故　$log_k\sqrt[n]{A}=\frac{1}{n}x$,

即　$log_k\sqrt[n]{A}=\frac{1}{n}\,log_k A$。 ……(4)

以上四式,可書之如下:

(一)兩數之積之對數,等於兩數之對數之和。

(二)兩數之商之對數,等於兩數之對數之差。

(三)一數之 n 次冪之對數,等於 n 乘此數之對數。

(四)一數之 n 次根之對數,等於 $\frac{1}{n}$ 乘此數之對數。

習題

1. 證明:

(a) $log_{10}\sqrt{1000}+log_{10}\sqrt{.01}=\frac{1}{2}$,

(b) $log_{10}\sqrt{\frac{1}{10}}+log_{10}\sqrt{10}=0$,

(c) $log_8(2)^5+log_7(\frac{1}{49})^{\frac{1}{3}}=1$,

(d) $log_2(.5)^3-log_4\sqrt[3]{16}=-\frac{11}{3}$。

2. 展開下列各對數:

(a) $log_{10}\frac{ab\sin C}{2}$, (c) $log_b\sqrt[5]{\frac{a^3(c+d)^{\frac{1}{2}}}{c^2}}$,

(b) $log_{10}P(1+r)^n$, (d) $log\frac{(m+n)s^2}{\sqrt{m-n}(1+s)}$。

456. 常對數。 對數有兩種 1.常用對數 2.自然對數

對數之以10爲底者,曰常對數。最便於數学之計算,以後常用之,簡稱之曰對數,且書 $log_{10}A$ 爲 $logA$。

設已知某數 N 之對數,則凡與N小數點位置不同之數目,其對數即能由觀察得之。此爲常對數之主要優點。如設 $log2.23=0.3483$ 則 $log22.3=log10+log2.23=1.3483$,

底爲 log_{10} 的對數曰常用對數.

$\log W = \log M \times 10^{p} = \log M + p \log 10 = \log M + p = p + \log M$,

$N = M \times 10^{-q}$. $\therefore \log N = \log M + \log 10^{-q} = -q + \log M$.

$log2230 = 3.3483$。

一數之對數,共含兩部份:一爲整數部份,一爲小數部份。其整數部份,曰**首數**。如上舉三對數中之 0, 1, 3 等是。其小數部份,曰**尾數**。如 .3483 是。**不論對數之爲正爲負,其尾數則常爲正數**。設某對數之首數爲 -2,尾數爲 .5625, 則此對數等於 $-2+.5625$, 書爲 $\bar{2}.5625$, 以示首數獨爲負數之意。通常計算時,大都以 10 加減之,如 $\bar{2}.5625$ 變爲 $8.5625-10$ 形式,以便利計算焉。

457. 首數。

緊接小數點左旁之位曰**個位**,設 M 爲任意一數,其第一有效數字在個位。則 M 必在 10 與 1 之間。但

$$log10 = 1, \qquad log1 = 0,$$

且一數之對數,恆隨其數增減而增減,故 M 之對數,必在 1 與 0 之間,卽 M 之對數之首數爲 0。

設 N 與 M 兩數之有效部份相同,兩小數點之位置互異。設 N 之第一有效數字在個位之左第 p 位,則

$$N = M \times 10^{p},$$

$$logN = p + logM,$$

因 $logM$ 之首數爲 O, 故 $logN$ 之首數爲 p。

設 N 之第一有效數字在個位之右第 q 位,則 $N=$

27683之首數等4.

$M\div 10^q$ 例如 $N=0.0024$, $q=3$, $M=2.4$。故 $\log N=\log M-q$, 而 N 之對數之首數爲 $-q$。

故得以下之法則:

某數第一有效數字在個位之左第 n 位者,其對數之首數爲 n。若第一有效數字在個位之右第 n 位者,其對數之首數爲 $-n$。

例如 $\log 2400$ 之首數爲 3,因第一有效數字 2 在個位左第三位,$\log 0.0503$ 之首數爲 -2,因第一有效數字 5 在個位之右第二位也.

【註】 取消一數前後之零字所得之數,曰該數之有效部份。如 24000 之有效部份爲 24, 6.050 之有效部份爲 605, .000907 之有效部份爲 907, .00081070 之有效部份爲 8107。有效部份左邊第一數字,曰第一有效數字。例如 2 爲 24000 之第一有效數字, 9 爲.000907 之第一有效數字。

習題

求下列各數之對數之首數:

27683, 456.2, 9.67, 436000, 26, 0.04,

0.0000612, .7963, .8, .0012。

458. 尾數。

將某數N之小數點向右移p位,等於以10^p乘N,將小數點向左移q位,等於10^q除N。

但
$$log(N\times10^p)=p+logN,$$
$$log(N\div10^q)=-q+logN,$$

故任意將某數之小數點位置移動,其對數之尾數不變。換言之,凡小數點位置不同之數目,或因前後加0而致不同者,其對數之尾數相同。故求$logN$之尾數,可忽略N中小數點及其前後之0,而注意其有效部份足矣。例如求22.3, .00204, 45300等數之對數之尾數,可用223, 204, 453等數以求之。

尾數之計算,應用高等算學,不在本書範圍。學者可由第二表檢查得之

第二表載100至1000間各數對數之尾數。首二位數字,書於左旁,第三位數字,則書於上邊。凡與首二位數字同行,第三位數字同列之數,在其前加小數點後,即爲此三位數字所成之數之對數之尾數。例如由表檢得與90同行與8同列之數爲9581,故$log908$之尾數爲.9581。又與10同行與5同列之數爲0212,故$log1.05$之尾數爲.0212。

459.　求一數之對數。

(一)一數之有效部份適含三位數字者,如616, .0254, 3.01, 41200等數。

第一步　由§457之法則求首數。

第二步　取有效部份由第二表檢查尾數。

例　求$log0.908$。

因第一位之有效數字在個位之右第一位,故首數$=-1$。

檢第二表,與90同行與8同列之數,爲9581,故尾數$=.9581$。

$\therefore\quad log0.908=-1+.9581=\bar{1}.9581$。

(二)一數之有效部份含二位或一位數字者,如7, .00026, 1.5, 40000等數。

第一步　由§457之法則求首數。

第二步　將有效部份右邊加0,使成爲三位數。而後由第二表檢查尾數。

例　求$log7$。

因7小於10而大於1,故首數$=0$。

在7之右旁加00,得700。查表與70同行與0同列之數爲8451,故尾數$=.8451$。

$\therefore\quad log7=0.8451$。

(三)一數有效部份含四位或四位以上數字者,如13.25, 60140, .03001等數。

第一步　由§457之法則求首數。

第二步　視數差與尾數之差相比由補插法求尾數。

例　求$log 13.25$。

因第一有效數字在個位之左第一位,故首數$=1$。

又13.25在13.20與13.30之間。

檢表得

$$\begin{array}{r} log 13.30\text{之尾數}=.1239 \\ log 13.20\text{之尾數}=.1206 \\ \hline \text{數差}.10,\text{則尾數差}.0033 \end{array}$$

$.10:.0033=.5:x,$

$\therefore\ x=.00165=.0017$。

故　$log 13.25$之尾數$=.1206+.0017=.1223$

$\therefore\ log 13.25=1.1223$。

習題

1. -1.3024與$\bar{1}.3024$兩數有無區別?

2. 求下列各數之對數:

(a) 25.8,　　(b) 0.0572,

(c) 2537, (d) 5.2,

(e) 3000, (f) 0.8,

(g) 53600 (h) 3.091。

460. 求相當一對數之數。

知某數之對數,則與尾數左邊同行之二字,爲某數之有效部份之首二位數字。與尾數上邊同列之字,爲其有效部份之第三位數字。求出某數之有效部份後,再由§457之法則,定小數點之位置,而某數乃完全決定。若對數之值不載於第二表時,可由補插法求之

例一 $\log x=\bar{2}.7324$, 求 x。

查表與7324相當之數爲540。

因首數 $=-2$, 故第一有效數字應在個位之右第二位。

故 $x=.054$。

例二 $\log x=2.3985$, 求 x。

查表得 .3985在.3979與.3997之間。

而 .3997相當之數 $=$ 251

.3979相當之數 $=$ 250

尾數差.0018則相當數差1

$.3985-.3979=.0006$,

$.0018:1=.0006:x,$

$\therefore\quad x=.3\frac{1}{3}=.3$

故與.3985相當之數爲250+.3,即2503。

今首數 =2,故第一有效數字,應在個位之左第二位。

故　$x=250.3$。

習題

1.　求 x:

(1)　$\log x=1.6551,$　　(5)　$\log x=\bar{1}.8768,$

(2)　$\log x=\bar{2}.6990,$　　(6)　$\log x=2.7780,$

(3)　$\log x=3.9299,$　　(7)　$\log x=1.5057,$

(4)　$\log x=\bar{3}.3979,$　　(8)　$\log x=0.7787$。

2　應用對數求下列各值:

(a)　$\sqrt{227.5}$　　(e)　$\sqrt[4]{5},$

(b)　$243\times13.4,$　　(f)　$\frac{15.08\times.0843}{.06376\times4.24},$

(c)　$\sqrt[3]{.7182},$　　(g)　$-\frac{401.8}{52.37},$

(d)　$336\div7984,$　　(h)　$\sqrt{2}$。

461.　三角函數之對數。

三角函數之值,可由第一表査得,前已於第一章言之。然於實際運算之時,則應用此等三角函數之對數,較

爲便利。第三表爲由 0° 至 90° 間各角之正餘弦及正餘切之對數,利用高等算學製成,其用法與第一表相同。

正餘弦之值,除等於 1 外,常小於 1,故其對數之首數爲負。小於 45° 之正切,亦小於 1,故其對數之首數亦爲負。爲避免負數起見,**表中所列之首數,均較原來大 10,故應用時須減去之。**

例一 $\log\sin 10^\circ10' = 9.2468 - 10 = \bar{1}.2468,$

$\log\cos 46^\circ30' = 9.8378 - 10 = \bar{1}.8378,$

$\log\tan 84^\circ20' = 11.0034 - 10 = 1.0034,$

$\log\cot 40^\circ40' = 10.0659 - 10 = 0.0659$。

例二 求 $\log\sin 30^\circ24'$

$\log\sin 30^\circ24'$ 在 $\log\sin 30^\circ20'$ 及 $\log\sin 30^\circ30'$ 之間。

而 $\log\sin 30^\circ30' \quad = \quad \bar{1}.7055$

$\log\sin 30^\circ20' \quad = \quad \bar{1}.7033$

角大 $10'$ 則對數大 22。

.00

$10:22 = 4:x$。

$\therefore \quad x = 8.8$。

故 $\log\sin 30^\circ24' = \bar{1}.7033 + .00088 = \bar{1}.7042$。

例三 設 $\log\sin x = \bar{1}.5409$,求銳角 x。

檢表 $\log\sin 20^\circ20' = 9.5409 - 10,$

故 $x=20°20'$。

例四 $\log\tan x=\bar{1}.5740=9.5740-10$,求銳角 x。

因 $\bar{1}.5766=\log\tan 20°40'$

$\bar{1}.5727=\log\tan 20°30'$

對數大39則角大$10'$。

$39:10=13:A$,

$\therefore\ A=3.3$。

故 $x=20°30'+3.3'=20°33'$。

習題

1. 求 $\log\sin 63°13'$, $\log\cos 37°42'$, $\log\cot 62°22'$, $\log\tan 21°14'$, $\log\sin 14°50'$ 之值。

2. 求下列各銳角 θ:

(a) $\log\sin\theta=9.8864-10$,

(b) $\log\cos\theta=9.3225-10$,

(c) $\log\tan\theta=0.2544$,

(d) $\log\cot\theta=\bar{1}.415$。

3. 已知 $\cos x=\sqrt{.9681}$,求銳角 x。

4. 計算 $\sqrt{361\tan 87.5°\sin 9.55°}$ 之值。

462. 直角三角形之解法。

三角形之三邊及三角,曰三角形之元素。直角三角

形中,除其一元素等於直角為固定外,其餘五元素,恆隨直角三角形之大小而改變。由幾何學之定理(§38, 49,75, 76), 兩直角三角形,若有一邊及其他一元素兩兩相等,則兩直角三角形全等。換言之,若已知直角三角形之一邊及其他一元素,則其餘三元素必可決定。由直角三角形已知之二元素,求其未知之三元素,名曰解直角三角形。已知之二元素,其一必為邊。其他或為邊或為角。

(一)若已知之元素為一邊及一角,例如已知 A, a。則

(1)求 B 由 $B=90^\circ-A$ 求得之。

(2)求 b 取 A 角函數之含 a 及 b 者,如取 $\tan A=\frac{a}{b}$,則 $b=\frac{a}{\tan A}$,由此可求 b 之值。

(3)求 c 取 A 角函數之含 a 及 c 者,如 $\sin A=\frac{a}{c}$。故 $c=\frac{a}{\sin A}$,由此可求 c 之值。

【注意】 求 b, c 之值,須各應用已知二元素 A, a。若已求得 b 值,則應用 b, B 以求 c,本無不可。惟若求 b 稍有錯誤,則 c 亦隨之錯誤,又用 $a^2+b^2=c^2$ 亦有同樣弊病,故仍以上述(1),(2)兩法為妥。

(二)若已知之元素為二邊,例如已知 a, b。則

(1) 已知二邊之比,必為一銳角之函數。如 $\frac{a}{b}=\tan A$,由此可求 A 之值。

(2) 求出 A 角之後,可用(一)法求得其餘未知之元素。

463. 實例。

設有三角形△ABC,C 為直角, $A=26°34'$, $a=24$ 公尺。求 B 角及 b, c 兩邊。

第一法 不用對數之解法。

(1) $B=90°-A=90°-26°34'=63°26'$。

(2) $\sin A=\sin 26°34'=\frac{a}{c}=\frac{24}{c}$,

$\therefore \quad c=\frac{24}{\sin 26°34'}=\frac{24}{0.4472}=53.667$ 公尺。 $\frac{a}{b}$

(3) $\tan A=\tan 26°34'=\frac{a}{b}=\frac{24}{b}$,

$\therefore \quad b=\frac{24}{\tan 26°34'}=\frac{24}{0.50004}=47.996$ 公尺。

第二法 應用對數之解法。

(1) $B=90°-A=90°-26°34'=63°26'$。

(2) $\sin A=\sin 26°34'=\frac{a}{c}=\frac{24}{c}$,

$\therefore \quad c=\frac{24}{\sin 26°34'}$。

内心径 两种
边心径

$$\log 24 \quad = 11.3802 - 10$$

$$\log\sin 26°34' = 9.6505 - 10$$

$$\log c \quad = 1.7297$$

$\therefore \quad c = 53.662$ 公尺。

(3) $\tan A = \tan 26°34' = \dfrac{a}{b} = \dfrac{24}{b}$,

$\therefore \quad b = \dfrac{24}{\tan 26°34'}$。

$$\log 24 \quad = 1.3802$$

$$\log\tan 26°34' = 9.6990$$

$$\log b \quad = 1.6812$$

$\therefore \quad b = 47.996$ 公尺。

464. 正多邊形。

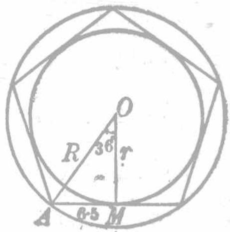
正多邊形之中心,爲其外接圓及內切圓之公共中心。(§275, 276)此兩圓之半徑,與正多角形一邊之半成一直角三角形。其一銳角等於正多邊形一中心角之半。即$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{360°}{\text{邊數}}\right) = \dfrac{180°}{\text{邊數}}$。故若知正多邊形之邊數及其一邊或兩半徑之一,可應用直角三角形之解法,以求正多邊形未知之件。

設 n=邊數, c= 一邊之長, R = 外接圓之半徑,

r＝內接圓之半徑，P＝周，S＝面積，

則　$s=\frac{1}{2}rp$。

例　已知 $n=5$，$p=65$ 尺，



求 S。

因　$\angle AOM=\frac{180°}{5}=36°$，

$AM=\frac{1}{2}c=\frac{65}{10}=6.5$，

$\therefore\ r=\frac{6.5}{\tan 36°}$。

$\log 6.5 = 0.8129$

$\log\tan 36° = 9.8613-10$

$\log r = 0.9516$

$S=\frac{1}{2}rp=\frac{1}{2}\times 65\times r=32.5r$

$\log 32.5=1.5119$

$\log r = 0.9516$

$\log S = 2.4635$

故　$S=290.7$ 方尺。

464 定理，
$\angle AOB=\frac{360°}{n}$
$\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{n}=\frac{180°}{n}$
$n\cdot AB=c$
D. S. $S=\frac{1}{2}rP$.
$S=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COD$
$=\frac{1}{2}r\cdot AB+\frac{1}{2}r\cdot BC+\frac{1}{2}r\cdot CD+$ —
$=\frac{1}{2}r(AB+BC+CD+DE)+$ —
$=\frac{1}{2}rP.$

習題

解下列各直角三角形($C=90°$)：

1. 已知　$a=60$，　$c=100$。

2. 已知　$A=34°15'$，　$a=843.2$。

3. 已知 $A=31°14.2'$, $c=2.934$。

4. 已知 $B=47.26°$, $c=4.614$。

5. 已知 $B=43.8°$, $b=50.94$。

6. 已知 $a=5$, $b=2$。

7. 已知 $B=68°50'$, $a=729.3$。

8. 已知 $A=64°1.5'$, $b=200.05$。

解下列各正多邊形:

9. 已知 $n=10$, $r=1$, 求 S。

10. 已知 $n=18$, $R=1$, 求 P。

11. 已知 $n=10$, $c=1$, 求 r。

12. 已知 $n=7$, $S=7$, 求 R.

13. 有正六邊形之地一塊,其周之長爲41尺8寸,求地之面積。

465. 三角問題中之術語。

(一)過一點之**鉛直線**,卽與由此點掛一重錘之線相重合之直線。

(二)過一點之**水平線**,卽與過此點之鉛直線相垂直之直線

(三)過一點之**直立面**,卽含過此點之鉛直線之平面

(四)過一點之**水平面**,卽與過此點之鉛直線相垂直

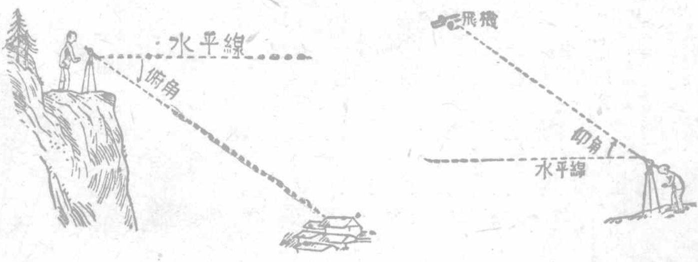
之平面。

(五)直立角爲直立面內之角。

(六)水平角爲水平面內之角。

(七)設B點在過A之水平面以上,則AB與過A之水平線所成之直立角,爲由A視C之仰角。

(八)設Q點在過P之水平面以下,則PQ與過P之水平線所成之直立角,爲由P視Q之俯角。



(九)由A點至過B點之鉛直線之距離,曰此兩點間之水平距離。

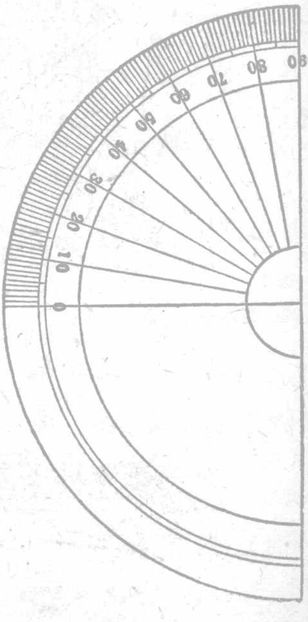
(十)由A點至過B點之水平面之距離,曰此兩點間之直立距離。

(十一)航海用之羅盤,分圓周爲32方位,相接兩方位間之角,等於$360^\circ \div 32 = 11\frac{1^\circ}{4}$。各方位之名稱如下圖所示。

466. 測量器械.

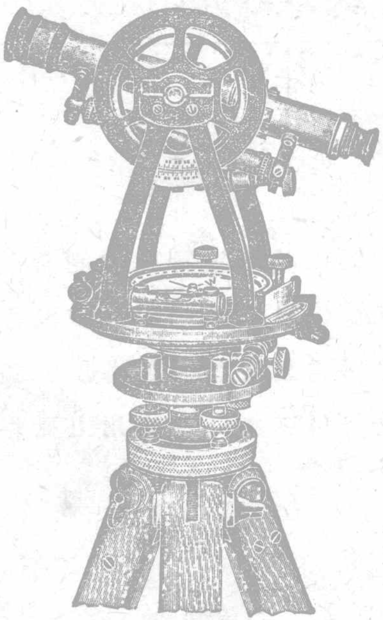
測鎖與卷尺,為測量兩點間之距離之器械。經緯儀為測量仰角俯角水平角等之重要儀器.

經緯儀價格太昂,購置不易。為簡單練習起見,學者可自製測角器。取白色厚紙剪成半圓形,將 0° 至 90° 間各度之角如圖畫出。次將半圓貼於一長方木板上,使半圓之直徑,與木板之一邊相合。在圓心釘一細針,懸絲線於



測量器械

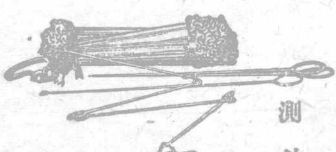
經緯儀



標尺

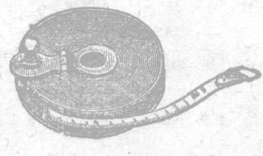
測桿

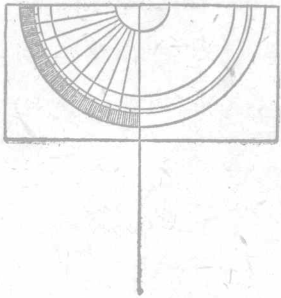
測鎖



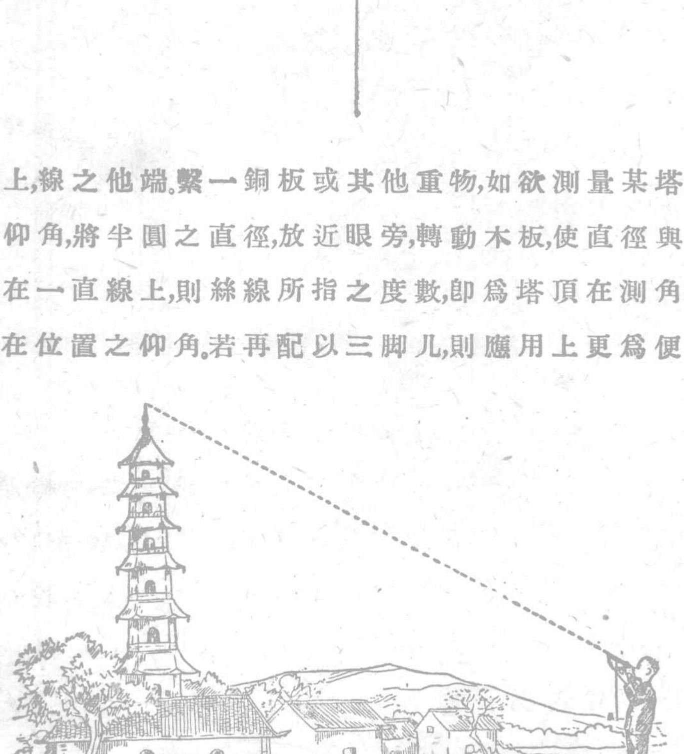
測針

卷尺





其上,線之他端。繫一銅板或其他重物,如欲測量某塔頂之仰角,將半圓之直徑,放近眼旁,轉動木板,使直徑與塔頂在一直線上,則絲線所指之度數,即爲塔頂在測角器所在位置之仰角。若再配以三脚儿,則應用上更爲便利。

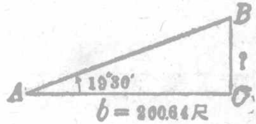


467. 高及距離之測量.

例一　平地上有一旗杆,在離杆足 200.64 尺處,測得杆頂之仰角爲19°39′。求旗杆之高。

【解】　設C爲杆足,B爲杆頂,A爲地上已知之點,則三角形$\triangle ABC$中,已知:　$C=$直角,　$A=19°30'$,

$CA=b=200.64$尺。



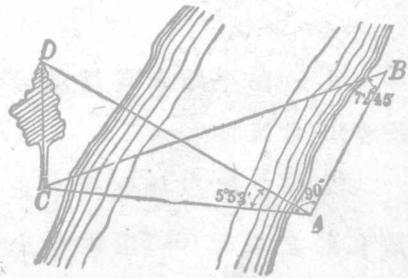
今　$\tan A=\dfrac{a}{b}$,

故　$a=b\tan A$。

$$\begin{aligned}\log b &= 2.3024\\ \log\tan A &= 9.5491-10\\ \hline \log a &= 1.8515\end{aligned}$$

故　$a=71.04$尺,卽旗杆之高爲 71.04 尺。

例二　設有一樹,在河之左岸C處。人在右岸選一適宜之A處,測得樹頂D之仰角爲$5°53'$。再沿AC之垂直方向,步行 206.45 尺至B處,測得樹根C及A點之水平角爲$72°48'$。求樹高及B與樹根之距離。



【解】　$\triangle ABC$及$\triangle ACD$各爲直角三角形。A, C各爲直角。

由$\triangle ABC$得

$$\cos\angle ABC=\frac{AB}{BC},\qquad \tan\angle ABC=\frac{AC}{AB}.$$

故 $BC=\dfrac{AB}{\cos\angle ABC}$,

$AC=AB\tan\angle ABC$。

$\log AB$	$=2.3148$	$\log AB$	$=2.3148$
$\log\cos\angle ABC$	$=9.4709$	$\log\tan\angle ABC$	$=0.5097$
$\log BC$	$=2.8439$	$\log AC$	$=2.8245$

故 $BC=698.1$ 尺.

由$\triangle ACD$得

$$\tan\angle CAD=\frac{CD}{AC},$$

故 $CD=AC\tan\angle CAD$.

$\log AC$	$=2.8245$
$\log\tan\angle CAD$	$=9.0130$
$\log CD$	$=1.8375$,

故 $CD=$樹高$=68.79$尺。

習題

1. 在平地上離塔足 200 尺之處,測得塔頂之仰角爲$60°$,求塔高。

2. 某船以等速率向正東行駛,在上午七時,見燈塔在船之正北10.32里處,在上午七時三十分,則在船之

北偏西18°13′。求船駛之速率及在上午十時燈塔之方向。

3. 由 120 尺高之塔頂上,測得塔足之平地上一物體之俯角爲27°43′,求物體與塔頂及塔足之距離。

4. 梯長40尺,倚於街之一邊33尺高之窗,設移梯頂於街之對邊而不動梯脚,則倚於21尺高之窗,求街之寬.

5. 由互在東西之甲乙二村,測得風箏之仰角各爲45°。且風箏在甲之北西,在乙之北東,若甲乙兩處之距離爲 320 尺,求風箏之高。

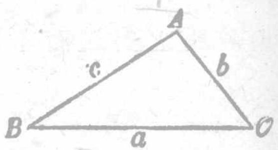
6. 一岩石直出於水面上 326 尺,自其頂測得一艇之俯角爲24°,求艇與水面上石底之距離。

7. 樹影長80尺,太陽之高度爲50°,求樹高。

【註】 天象之仰角,亦稱高度。

第三章　任意三角形

468. 任意三角形之決定.



任一三角形,其三角 A, B, C 三邊 a, b, c 合稱六元素。若已知一邊及其他任意兩元素,則由幾何學之定理(§48, 74),必可決定一三角形。決定三角形之三元素,可分為四類:

第一類　**一邊及二角。**

第二類　**兩邊及其夾角。**

第三類　**三邊。**

第四類　**兩邊及其一之對角。**

由三角形已知之三元素,求其未知之三元素,曰解三角形。本章目的,在推求公式,以解各類所決定之三角形。

469. 正弦定律.

任何三角形之各邊與其對角之正弦成比例,即

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$

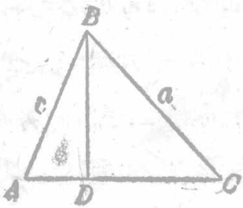
【證】　令 $\triangle ABC$ 為任何三角形,作 $BD\perp AC$。

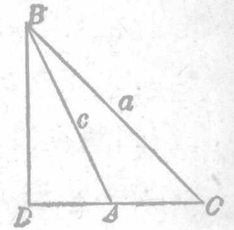
則 $\sin A=\dfrac{DB}{c}$, 即 $DB=c\sin A$。

$\sin C=\dfrac{DB}{a}$, 即 $DB=a\sin C$。

故 $c\sin A=a\sin C$。

故 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin C}{c}$。





同法由 C 向 AB 作垂線,可得

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b},$$

$$\therefore\quad \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$

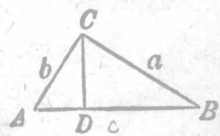
470. 餘弦定律。

任何三角形一邊之平方,等於其餘兩邊平方之和,減去餘兩邊與夾角餘弦之積之二倍,即

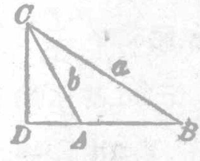
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C。$$



【證】 令$\triangle ABC$為任何三角形,A為銳角或為鈍角,由C作$CD\perp AB$。



則 $a^2=\overline{DC}^2+\overline{DB}^2$,

$\sin^2 C+\cos^2 C=1 \quad \therefore \sin^2 C=1-\cos^2 C.$

$$DB=DA+AB=AB-AD=c-AD,$$

故 $$a^2=\overline{DC}^2+(c-AD)^2=\overline{DC}^2+c^2-2c\cdot AD+\overline{AD}^2$$

$$=b^2+c^2-2c\cdot AD,$$

P325 2. 題解 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle 1$

但 $AD=b\cos A,$ $\sin BAC=\sin 1=\frac{BD}{R}=\frac{\frac{BC}{2}}{R}=\frac{BC}{2R}$

$\therefore$ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。 $\frac{\sin A}{BC}=\frac{1}{2R}$ ......(1)

同法可證明其餘二式。 $\sin B=\sin 2=\frac{\frac{AC}{2}}{R}=\frac{AC}{2R}$ ∴

471. 三角形之面積。 $\frac{\sin B}{AC}=\frac{1}{2R}$ ......(2)

(一)令$\triangle ABC$爲任意三角形,作$BD\perp AC$。同理 $\frac{\sin C}{AB}=\frac{1}{2R}$ ......

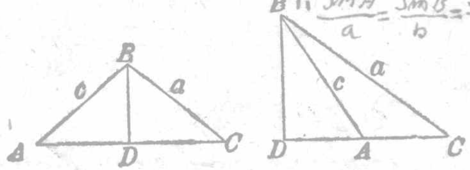
則 $\triangle ABC$之面積,

$\therefore \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

等於 $\frac{1}{2}b\cdot DB$(§253)。

但 $DB=a\sin C,$

代入,得



$$\textbf{面積}=\frac{1}{2}ab\sin C。\qquad\qquad(1)$$

(二)由正弦定律,

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C},\quad b=\frac{c\sin B}{\sin C}。$$

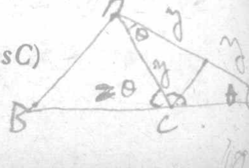
代入(1)得

$$\textbf{面積}=\frac{1}{2}\;\frac{c^2\sin A\sin B}{\sin C}。\qquad\qquad(2)$$

(三)由基本關係及餘弦定律,

2.

$$\sin^2 C=1-\cos^2 C=(1+\cos C)(1-\cos C)$$



$$= \left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$= \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} \cdot \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

設 $a+b+c=2s$, $\quad$ 令 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$\therefore a+b+c=2s$.

則 $a+b-c=2(s-c)$, $\quad a+b+c-2c=2s-2c$. $\quad \therefore a+b-c=2(s-c)$

$a-b+c=2(s-b)$, $\quad a+b+c-2b=2s-2b$. $\quad \therefore a-b+c=2(s-b)$

$c-a+b=2(s-a)$, $\quad a+b+c-2a=2s-2a$ $\quad \therefore b+c-a=2(s-a)$.

代入上式而兩端開方得

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

代入(1),得

$$\text{面積} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。\qquad\cdots\cdots(3)$$

習 題

1. 應用正弦定律,求證 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$。

2. 試由三角形 $\triangle ABC$ 之外接圓,證明正弦定律。

3. 試由三角形面積之公式,求兩角之和及兩角之差之函數。

4. 設餘弦定律中之 $A=0^\circ$ 或 90° 或 180°,問其公式及三角形各變為若何?

5. 求以下三角形之面積:

$\therefore \frac{2y}{\sin ACD} = \frac{x}{\sin\theta}$ $\quad \sin(180^\circ-2\theta) = 2\frac{y}{x}\sin\theta$

$\sin ACD = \frac{\sin\theta \cdot 2y}{x}$ $\quad \therefore \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

(a) $a=4474.5$, $b=2164.5$, $C=116°30'20''$。

✓(b) $a=40$, $b=13$, $c=37$。

(c) $b=8$, $c=5$, $A=60°$。

✓✓(d) $b=149$, $A=70°42'30''$, $B=39°18'28''$。

472. 第一類解法: 已知一邊及兩角。

(1)第三角由 $A+B+C=180°$ 求之。

(2)餘兩邊由正弦定律求之。

例。 已知 $B=27°30'$, $C=43°20'$, $a=243$ 求 A, c, b。

【解】 (1) $A=180°-(B+C)=180°-(27°30'+43°20')$

$=109°10'$。

(2) $\dfrac{b}{a}=\dfrac{sinB}{sinA}$, $\dfrac{c}{a}=\dfrac{sinC}{sinA}$,

$\therefore\ b=\dfrac{asinB}{sinA}$, $c=\dfrac{asinC}{sinA}$,

$loga\quad=2.3856$

$logsinA=9.9752-10$

2.4104	2.4104
$logsinB=9.6644-10$	$logsinC=9.8365-10$
$logb\quad=2.0748$	$logc\quad=2.2469$
$\therefore\ b=111.63$	$\therefore\ c=176.57$

473. 第二類解法: 已知兩邊及其夾角。

(1)第三邊由餘弦定律求之。

(2)其餘二角,由正弦定律求之。並用 $A+B+C=180°$ 核對。

例。 設 $a=15$, $b=20$, $C=51°$。求 c, A, B。

【解】 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=225+400-600\cos 51°$

$=247.42$,

$\therefore$ $c=15.73$。

又 $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{15\sin 51°}{15.73}=.7410$,

$\therefore$ $A=47°50'$。

同法 $\sin B=\dfrac{20\sin 51°}{15.73}=.9880$,

$\therefore$ $B=81°10'$。

核對: $A+B+C=180°$。

【註】 如 a, b, c, C 等數目甚大,可用對數以求 A, B。以下仿此。

474. 第三類解法: 已知三邊.

若已知三邊,其三角 A, B, C, 可由餘弦定律求之。

例。 設 $a=5, b=6, c=7$。求 A, B, C。

【解】 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$a^2=b^2+c^2=2bc\cos A$

$$=\frac{36+49-25}{84}=.7143,$$

$\therefore\ A=44°25'$。

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$=\frac{25+49-36}{70}=.5428,$$

$\therefore\ B=57°8'$。

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{52+36-49}{60}=.2000,$$

$\therefore\ C=78°27'$。

核對 $A+B+C=180°$。

475. 第四類解法: 已知二邊及其一之對角。

例如已知 a, b 及 B。則

(1) 求 A 由正弦定律 $\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}$ 求之。

(甲)若 $\dfrac{a\sin B}{b}>1$, 不論 B 為任何角,此題無解(§446)。

(乙)若 $\dfrac{a\sin B}{b}=1$, 則 $A=90°$,故如 $B<90°$,此題有一解。如 $B\geqslant 90°$,此題無解,因 $A+B\ngtr 180°$。

(丙)若 $\dfrac{a\sin B}{b}<1$, 則 A 有二值。一為銳角,一為鈍角。故如 $B<90°$,此題有二解。如 $B\geqslant 90°$, 此題僅有一解。

(2) 求 C　由 $A+B+C=180^\circ$ 求之。

(3) 求 c　由正弦定律求之。

例一。 已知 $a=25, b=15, B=30^\circ$。求 A, C, c。

【解】 (1) $\sin A=\dfrac{25\sin 30^\circ}{15}=\dfrac{5}{6}=.8333$。

由(丙)之討論,知此題有二解。

$\therefore\ A=56^\circ27'$ 或 $123^\circ33'$。

(2) $C=180^\circ-(A+B)=93^\circ33'$ 或 $26^\circ27'$。

(3) $c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{15\sin C}{\frac{1}{2}}=30\sin C=13.36$ 或 29.94。

故得以下二解:

$A=56^\circ27'$,		$A=123^\circ33'$,
$C=93^\circ33'$,	或	$C=26^\circ27'$,
$c=29.94$,		$c=13.36$。

例二。 已知 $a=50, b=100, A=30^\circ$, 求 B, C, a。

【解】 (1) $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{100\times\frac{1}{2}}{50}=1$, 故有一解。

$B=90^\circ$。

(2) $C=180^\circ-30^\circ-90^\circ=60^\circ$。

(3) $c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{100\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=50\sqrt{3}$。

例三。 已知 $a=10, b=7, B=60^\circ$。求 A, C, b。

因 $\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{7}=\dfrac{10\sqrt{3}}{14}>1$

故本題無解。

習題

1. 解下列各三角形或示其無解:

(1) $a=41.4$, $b=52.8$, $A=40°19'$.

(2) $a=72.63$, $b=117.48$, $A=80°0'50''$.

(3) $a=840$, $b=485$, $A=21°31'$.

(4) $b=19$, $c=18$, $C=15°49'$.

(5) $a=62.2$, $b=74.8$, $A=27°18'$.

(6) $a=7.42$, $b=3.39$, $A=105°$.

2. 決定下列各三角形之解數:

(1) $b=10$, $a=12$, $A=30°$.

(2) $b=5$, $a=3$, $A=30°$.

(3) $b=25$, $c=30$, $C=30°$.

(4) $b=7$, $a=10$, $B=60°$.

3. 解下列各三角形:

(1) $A=79°59'$, $B=44°41'$, $a=79.5$.

(2) $B=126°$ $C=12.44°$, $a=76.08$,

(3) $B=95°36'$, $C=24°12'$, $b=.085$.

(4) $a=73,\qquad b=82,\qquad c=91$。

4. 試以幾何圖形,討論第四類之解。

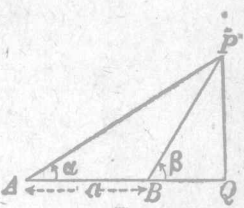
476. 不能到達之立體之高之測量.

如測量某山之高或隔江某塔之高等,均屬此類。

第一法　設 QP 爲平地上直立之不可到達之立體。先在平地上 A 點,測 P 之仰角 α, 沿 AQ 之方向,取 $AB=a$, 再由 B 點測 P 之仰角 β。

由 $\triangle PBQ$ 得　$x=BP\cos\beta$。…………(1)

由 $\triangle PAB$ 得　$\dfrac{BP}{a}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$。…(2)



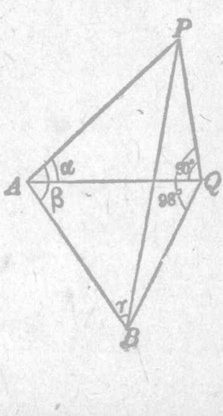
由 (1),(2) 消去 BP, 得

$$x=a\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

第二法　沿 AQ 之方向取 B, 或有不便,故亦可在任何適當方向取 $AB=a$, 幷在 A 點測 P 之仰角 α, 及 $\angle PAB=\beta$, 再在 B 點測 $\angle PBA=\gamma$。

由 $\triangle PAB$ 得　$\angle APB=180^\circ-(\beta+\gamma)$

$$\therefore\quad \frac{AP}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

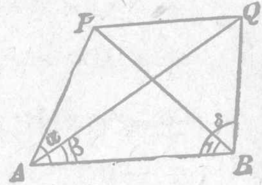


由 $\triangle PAQ$ 得

$$x=AP\sin\alpha=a\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

477. 不能到達之兩點間距離之測量.

(一)設 P, Q 爲不能到達之兩點,且與我人在同一平面上。設 A, B 爲已知兩點,其 $AB=a$。在 A 測 $\angle PAB=\alpha$, 及 $\angle QAB=\beta$, 在 B 測 $\angle PBA=\gamma$, 及 $\angle QBA=\delta$。



由 $\triangle PAB$ 得

$$\frac{AP}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\angle APB}$$

$$=\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)},$$

由 $\triangle QAB$ 得

$$\frac{AQ}{a}=\frac{\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)},$$

今在 $\triangle APQ$ 中, AP, AQ 及 $\angle PAQ=\alpha-\beta$ 爲已知。

$\therefore$ 由餘弦定律,可求得 PQ 之距離。

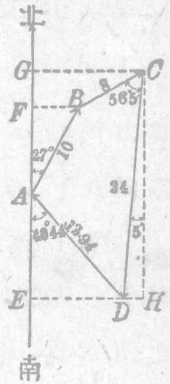
(二)設 P, Q, A, B 不在同一平面,再測 $\angle PAQ$, 則依同法,亦可求得 PQ 之距離。

478. 土地面積之測量.

土地之面積,可利用直角三角形及梯形,或任意三角形之面積以求之。以下舉例,明示測量之方法。

例。 設由 A 向北偏東 27° 量至 B 處爲 10 測鏈,由 B 向北東微東量至 C 爲 8 測鏈,由 C 向南偏西 5° 量至 D 爲 24 測鏈,由 D 向北偏西 $40^\circ44'$ 量至 A 爲 13.94 測鏈,求 $ABCD$ 之面積。

第一法　作地之圖過最西之點,作直貫南北之線。由圖，四邊形 $ABCD$=梯形 $GCDE-$(梯形 $GCBF+\triangle FBA+\triangle ADE$)。……(1)



由 $\triangle DCH$ 求 HC 及 DH,

由 $\triangle AED$ 求 ED 及 EA,

由 $\triangle ABF$ 求 FB 及 AF,

而梯形 $GCDE=\frac{1}{2}(GC+ED)\cdot HC$

$$=\frac{1}{2}HC(2ED+DH),$$

梯形　$GCBF=\frac{1}{2}FG(GC+FB)$

$$=\frac{1}{2}(HC-EA-AF)(GC+FB),$$

$$\triangle FBA=\frac{1}{2}FB\cdot AF,$$

$$\triangle ADE=\frac{1}{2}EA\cdot ED,$$

代入(1),即得所求之 $ABCD$ 之面積。

第二法　作 BD。則

四邊形 $ABCD=\triangle ABD+\triangle BDC$, ……(2)

而　$\triangle ABD=\frac{1}{2}AB.AD\sin\angle BAD,$

$$\triangle BDC=\frac{1}{2}CB.CD.\sin\angle BCD,$$

代入(2),即得所求之 $ABCD$ 之面積。

習題

√1. 一人身高 5 尺 10 寸,立於離路燈 4 尺 7 寸之處,設其影之長為 18 尺,求路燈之高.

2. 一探船在港之南西 10 浬,見一敵船由港駛行。其方向為南 80°東,而速率為每時 9 浬,求此探船須行何方向及何速率,始能於 $1\frac{1}{2}$ 小時內捕獲敵船。

3. 設飛機由本軍之炮位與地面成 22°角向敵營飛去,以每分鐘 4500 尺之速率飛行 42 秒鐘後,測得敵營之俯角為 21°30′。求敵營與本軍炮位之距離。

√4. 一船由海岸上 A, B 兩處望之,測得 $AB=800$ 尺, $\angle SAB=67°43'$, $\angle SBA=74°21'$。求船與 A 之距離。

5. A, B, C 三鎮各有直路聯接。設 $AB=4$ 里, $BC=5$ 里, $AC=7$ 里,求 AB 及 BC 兩直路所成之角。

6. A, B, C 三城由 A 至 B 之距離為 165 里,由 B 至 C 為 185 里,由 A 至 C 為 72 里,設 B 在 A 之正東,求 C 在 A 之何方向。

√7. 設乙村在甲村之南偏東 50°25′,有直路長 6.04 里連接之。丙村在乙村之南偏西 58°10′,有直路長 4.15 里連接之。丁村在丙村之北偏西 28°12′,有直路長 5.10 里連

接之。

(a)求丁村在甲村之何方向。

(b)試由甲村造直路至丁村求路長。

(c)求四條直路所包圍土地之面積。

8. 有土地一塊 $ABCD$,其邊長如下:

$AB=155$ 尺,　$BC=236$ 尺,

$CD=252$ 尺,　$DA=105$ 尺,

又由 A 至 C 為 311 尺。求面積。

9. 兩樹 A, B 在塘之兩邊。設在平地上任一點 C,測得 $AC=297.6$ $BC=864.4$, $\angle ACB=87.72^\circ$。求兩樹相隔之距離。

√10. 設在 A 處測得山頂之仰角為 $72^\circ 23'$,向後退 200 尺至 B 處,再測山頂之仰角為 $42^\circ 15'$,求山之高。

第四章　三角函數之分析

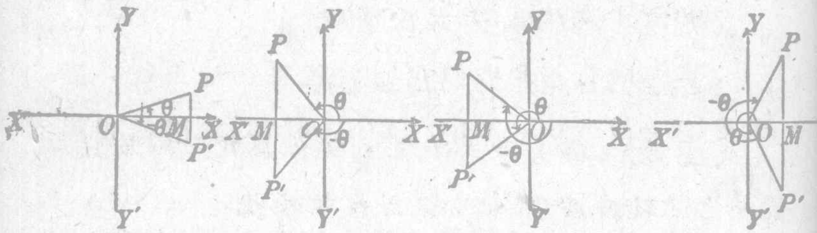
479. 負角之函數。

如圖令 $\angle XOP=\theta$=任意正角,

$$\angle XOP'=-\theta,$$

連結 P, P', 交橫軸於 M, 則得 $\triangle OPM \equiv \triangle OP'M$,

其 $MP'=-MP$, $OP=OP'$, $OM=OM$。



故　$$\sin(-\theta)=\frac{MP'}{OP'}=-\frac{MP}{OP}=-\sin\theta,$$

$$\cos(-\theta)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos\theta,$$

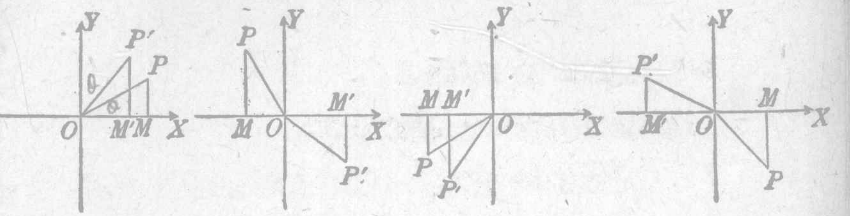
$$\tan(-\theta)=\frac{MP'}{OM}=-\frac{MP}{OM}=-\tan\theta。$$

480. $90^\circ \pm \theta$, $180^\circ \pm \theta$, $270^\circ \pm \theta$, $360^\circ \pm \theta$ 等角之函數。

(一)　$90^\circ-\theta$。

如圖令 $\angle XOP=\theta$=任意角。若 $\angle P'OY=\theta$, 則 $\angle XOP'=90^\circ-\theta$。由 P, P' 向橫軸作垂線, 得 $\triangle OM'P' \equiv \triangle OMP$。

其 $OM'=MP$, $M'P'=OM$, $OP=OP'$.



故 $\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{M'P'}{OP'}=\dfrac{OM}{OP}=\cos\theta,$

$\cos(90^\circ-\theta)=\dfrac{OM'}{OP'}=\dfrac{MP}{OP}=\sin\theta,$

$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{M'P'}{OM'}=\dfrac{OM}{MP}=\cot\theta.$

【注意】 以上公式中之 θ 爲任意角,§447所論互爲餘角之函數,則僅指 θ 爲正銳角而言.

(二) $90^\circ+\theta$。

因 $90^\circ+\theta=90^\circ-(-\theta)$,

故 $\sin(90^\circ+\theta)=\sin[90^\circ-(-\theta)]=\cos(-\theta)=\cos\theta,$

$\cos(90^\circ+\theta)=\cos[90^\circ-(-\theta)]=\sin(-\theta)=-\sin\theta,$

$\tan(90^\circ+\theta)=\tan[90^\circ-(-\theta)]=\cot(-\theta)=-\cot\theta.$

(三) $180^\circ\pm\theta$。

因 $180^\circ\pm\theta=90^\circ+(90^\circ\pm\theta)$, 應用(一)(二)兩節公式得

$\sin(180^\circ\pm\theta)=\mp\sin\theta,$ $\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{P'M'}{OP'}=\dfrac{OM}{OP}=\cos\theta$

$\cos(180^\circ\pm\theta)=-\cos\theta,$ $\cos(90^\circ-\theta)=\dfrac{OM'}{OP'}=\dfrac{PM}{OP}=\sin\theta.$

$\tan(90^\circ-\theta)\ \dfrac{P'M'}{OM'}=\dfrac{OM}{PM}=\cot\theta.$

$\tan(180°\pm\theta)=\pm\tan\theta$。

(四) $270°\pm\theta$。

$\sin(270°\pm\theta)=-\cos\theta$,

$\cos(270°\pm\theta)=\pm\sin\theta$,

$\tan(270°\pm\theta)=\mp\cot\theta$。　(學者自證之)

(五) $360°\pm\theta$。

$\sin(360°\pm\theta)=\pm\sin\theta$,

$\cos(360°\pm\theta)=\cos\theta$,

$\tan(360°\pm\theta)=\pm\tan\theta$。　(學者自證之)

以上(一)至(五)各節公式,可一言以蔽之,曰:

除符號外,凡 $90°\pm\theta$ 或 $270°\pm\theta$ 之函數,必等於 θ 之餘函數。凡 $-\theta$, $180°\pm\theta$, $360°\pm\theta$ 之函數,必等於 θ 之同樣函數。至於符號,可假設 θ 為正銳角,視諸角所在之象限,由§445之法則分別決定之。

例 一求 $\cot 210°$ 之值。

$210°=180°+30°$,

故 $\cot 210°=\cot(180°+30°)=\cot 30°=\sqrt{3}$。

習題

應用§479,480之公式,求下列函數之值並用§450之方法以核對之:

1. $\sin 160^\circ$,　　5. $\cos(-372^\circ)$,

2. $\cos 140^\circ$,　　6. $\tan 481^\circ$,

3. $\tan(-120^\circ)$,　　7. $\sin(-300^\circ)$,

4. $\cot 132^\circ 20'$,　　8. $\cos(-60^\circ)$。

481. 反三角函數。

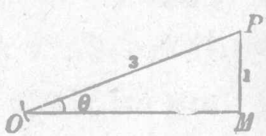
在 $\sin\theta=a$ 中,爲特別注意 θ 起見,可讀爲 θ 爲正弦等於 a 之角,而書爲 $\theta=\arcsin a$ 或 $\theta=\sin^{-1}a$。同樣 $\theta=\arctan b$, 則示 θ 爲正切等於 b 之角。此等 $\arcsin x$, $\arctan x$, $\arccos x$, $\operatorname{arccot} x$, $\operatorname{crccsc} x$, $\operatorname{arcsec} x$ 函數,稱爲 x 之反三角函數 $\arcsin x$ 爲 x 之反正弦,$\arctan x$ 爲 x 之反正切,………$\operatorname{arccsc} x$ 爲 x 之反餘割。

$\sin\theta=a$ 與 $\theta=\arcsin a$ 兩者,以不同形式,表示 θ 與 a 之同樣關係。猶如 $10^x=N$ 與 $x=\log_{10}N$, 形異而義同也。但分別觀之,則三角函數與反三角函數,實截然不同。其一,三角函數爲角之函數之值,係一不名數。而反三角函數,則僅示角之大小,乃一名數。其二,設一角爲已知,則其三角函數可完全決定。設一函數爲已知,則其反三角函數(即相當之角),可有無限多之任一值。例如設 $\theta=\arcsin\frac{1}{2}$ 則 θ 可爲 30°, 或 150°, 或爲以 360° 之整倍數加減於此等

角之諸角。又如設 $\theta=\arctan\sqrt{3}$,則 $\theta=60^\circ$, 或 $60^\circ\pm n360^\circ$, n 為正整數。在此等無限多值之中,其最小之正值,稱為反三角函數之主值。以下諸例,僅用主值。

例一。 設 $\arcsin\frac{1}{3}=\theta$, 求 $\cot\theta$。

【解】 因 $\arcsin\frac{1}{3}=\theta$, 故 $\sin\theta=\frac{1}{3}$。欲作 θ 角,畫直角 M,取 $MP=1$, 以 P 為圓心, 3 為半徑,作圓弧,與直角之他邊相交於 O。則



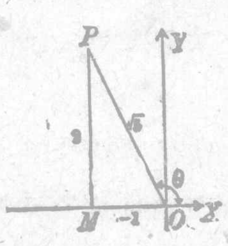
$$\angle MOP=\theta,$$

$$OM=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2},$$

$$\therefore\ \cot\theta=2\sqrt{2}。$$

例二。 設 $\operatorname{arccot}(-\frac{1}{2})=\theta$, 求 $\sin\theta$。

【解】 因 $\operatorname{arccot}(-\frac{1}{2})=\theta$, 故 $\cot\theta=-\frac{1}{2}$。故 θ 之主值,必在第二象限。作 θ 角取 $OM=-1$,由 M 作垂線 $MP=2$。



則 $\angle XOP=\theta$,

$$OP=\sqrt{5},$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}。$$

*482. 兩角之和之三角函數.

設 A, B 爲任意兩角,則

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B, \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B, \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} \quad \cdots\cdots(3)$$

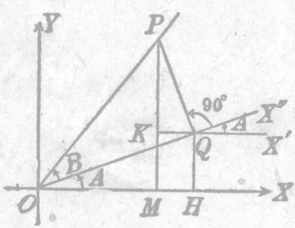
【證】

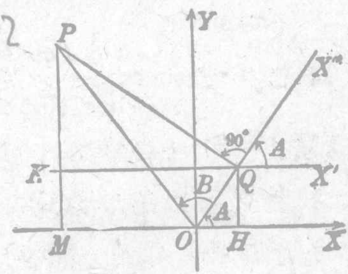
(一)先設 A, B 各爲銳角。

如圖作 $\angle XOX''=A$,　$\angle X''OP=B$,

則 $\angle XOP=A+B$。

$$\sin(A+B)=\frac{MP}{OP}=\frac{MK+KP}{OP}=\frac{HQ}{OP}+\frac{KP}{OP},$$





但 $HQ=OQ\sin A$,

$KP=QP\sin(90°+A)=QP\cos A$,

$\therefore$ $\sin(A+B)=\sin A\cdot\dfrac{OQ}{OP}+\cos A\cdot\dfrac{QP}{OP}$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$。

又 $\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{OH+HM}{OP}=\frac{OH}{OP}+\frac{QK}{OP}$,

但 $OH=OQ\cos A$, $QK=QP\cos(90^\circ+A)=-QP\sin A$,

$$\therefore\quad \cos(A+B)=\cos A.\frac{OQ}{OP}-\sin A.\frac{QP}{OP}$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B。$$

(二)設 A, B 非為銳角,A 在第三象限,B 在第二象限。則

$$A=180^\circ+A',$$

$$B=90^\circ+B',$$

其 A', B' 為銳角。

而
$$\sin(A+B)=\sin(270^\circ+A'+B')$$
$$=-\cos(A'+B')$$
$$=-\cos A'\cos B'+\sin A'\sin B'$$
$$=-\cos(A-180^\circ)\cos(B-90^\circ)+\sin(A-180^\circ)$$
$$\sin(B-90^\circ)=\cos A\sin B+\sin A\cos B。$$

同法得
$$\cos(A+B)=\cos(270^\circ+A'+B')$$
$$=\sin(A'+B')$$
$$=\sin A'\cos B'+\cos A'\sin B'$$
$$=\sin(A-180^\circ)\cos(B-90^\circ)+\cos(A-180^\circ)$$
$$\sin(B-90^\circ)=-\sin A\sin B+\cos A\cos B。$$

(三)(1),(2) 相除,得

$$tan(A+B)=\frac{sin(A+B)}{cos(A+B)}=\frac{sinAcosB+cosAsinB}{cosAcosB-sinAsinB}$$

以 $cosAcosB$ 除右邊分數式之母子各項,得

$$tan(A+B)=\frac{\frac{sinA}{cosA}+\frac{sinB}{cosB}}{1-\frac{sinA}{cosA}\frac{sinB}{cosB}}=\frac{tanA+tanB}{1-tanAtanB}。$$

*483. 兩角之差之三角函數.

設 A,B 爲任意兩角,則

$$sin(A-B)=sinAcosB-cosAsinB,\cdots\cdots(1)$$

$$cos(A-B)=cosAcosB+sinAsinB,\cdots\cdots(2)$$

$$tan(A-B)=\frac{tanA-tanB}{1+tanAtanB}。\cdots\cdots(3)$$

【證】

(一)設 A,B 爲銳角。

令 $B+B'=90^\circ$,則 B' 亦爲銳角。

故 $sin(A-B)=sin(A+B'-90^\circ)$

$$=-sin(90^\circ-A-B')$$

$$=-cos(A+B')$$

$$=-cosAcosB'+sinAsinB'$$

$$=-cosAcos(90^\circ-B)+sinAsin(90^\circ-B)$$

$$=-cosAsinB+sinAcosB。$$

同法 $cos(A-B)=cos(A+B'-90^\circ)$

$$=cos(90°-A-B')$$

$$=sin(A+B')$$

$$=sinAcosB'+cosAsinB'$$

$$=sinAcos(90°-B)+cosAsin(90°-B)$$

$$=sinAsinB+cosAcosB。$$

(二)設A,B非爲銳角,設A在第二象限,B在第四象限。

則 $A=90°+A'$,

$B=270°+B'$,

其A',B'爲銳角。

而 $sin(A-B)=sin(A'-B'-180°)$

$$=-sin(A'-B')$$

$$=-sinA'cosB'+cosA'sinB'$$

$$=-sin(A-90°)cos(B-270°)+cos(A-90°)sin(B-270°)=-cosAsinB+sinAcosB。$$

(三)由(1),(2)得

$$tan(A-B)=\frac{sin(A-B)}{cos(A-B)}=\frac{sinAcosB-cosAsinB}{cosAcosB+sinAsinB}.$$

$$=\frac{\frac{sinA}{cosA}-\frac{sinB}{cosB}}{1+\frac{sinA}{cosA}\frac{sinB}{cosB}}=\frac{tanA-tanB}{1+tanAtanB}.$$

習題

1. 由 $\sin(45°+30°)$ 求 $\sin 75°$ 之值。

2. 由 $\tan(45°+45°)$ 求 $\tan 90°$ 之值。

3. 由 $\cos(0°-0°)$ 求 $\cos 0°$ 之值。

4. 求 $\cos 15°$ 及 $\sin 15°$ 之值(不用表)。

5. 求證 $\tan(45°\pm\theta)=\dfrac{1\pm\tan\theta}{1\mp\tan\theta}$。

6. 求證 $\cot(A\pm B)=\dfrac{\cot A\cot B\mp 1}{\cot B\pm\cot A}$。

7. 證 (a) $\arcsin\dfrac{2}{5}=\arctan\dfrac{2}{\sqrt{21}}$,

(b) $\tan^{-1}\dfrac{3}{4}+\tan^{-1}\dfrac{4}{3}=\dfrac{\pi}{2}$。

8. 作以下諸角:

$\arccos(-\dfrac{3}{5})$, $\arctan\dfrac{2}{5}$, $\arcsin(-\dfrac{1}{2})$。

9. 設 $A=\arcsin\dfrac{1}{4}$, $B=\arccos(-\dfrac{3}{4})$,求 $\sin(A-B)$。

10. 設 $\sin A=\dfrac{3}{5}$, $\cos B=\dfrac{5}{13}$, A, B 爲銳角,求 $\cos(A+B)$ 及 $\tan(A+B)$。

*484. 倍角及半角之三角函數。

令 §482 之 (1),(2),(3) 三式中之 A, B 各等於 θ,則得

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta, \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta, \quad\cdots\cdots(2)$$

$$=1-2\sin^2\theta,$$

$\sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ (1)

2, $\cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta$ ------(2)

$\to \cos(\theta+\theta)=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta$

$=1-\sin^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$

$$=2\cos^2\theta-1。$$ $=\cos^2\theta-1+\cos^2\theta=2\cos^2\theta-1$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}。\quad\cdots\cdots(3)$$

系. $$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1。\text{等}$$

由系又得

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}},\quad\cdots\cdots(4)$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}},\quad\cdots\cdots(5)$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}。\quad\cdots\cdots(6)$$

*485. 三角函數之和或差與積之關係.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta),\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta),\quad\cdots\cdots(2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta),\quad\cdots\cdots(3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)。\quad\cdots\cdots(4)$$

【證】 將 §482 之 (1)(2) 兩公式相加或相減,則得

$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B,$ $\therefore \tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$

$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B,$ $=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}}$

$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B,$

$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B.$ $=\pm\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}}$

$=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta \sin^2\theta} = \frac{\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ------(3)

令　$A+B=\alpha$

$A-B=\beta$

$\sin 2\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ ---------(4)

於是　$2A=\alpha+\beta$,　　而　$A=\frac{\alpha+\beta}{2}$。

$2B=\alpha-\beta$,　　而　$B=\frac{\alpha-\beta}{2}$。

將 A, B 之值代入上式,卽得所求之關係。

*486. 三角恆等式。

凡等式包含三角函數,且其角度可爲任意之值者,曰三角恆等式。僅含一角之三角恆等式,可由三角函數之基本關係或其定義推證。若含兩角之和或差或倍角或半角,則用§482, 483, 484之公式以證之。

例一。 求證　$\sin\theta.\sec\theta = \tan\theta$。

$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$

$= 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ ...(5)

【證】　因　$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$,

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

故　$\sin\theta.\sec\theta = \sin\theta.\frac{1}{\cos\theta}$,

$2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-\cos\theta$

$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$。

$\therefore \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ ......(6)

$\therefore \sin\theta.\sec\theta = \tan\theta$。

$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$

例二。 求證　$\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$。

$2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+\cos\theta$

$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$

【證】

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ ....(7)

第一法　左式 $= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}$

$$=\frac{sinAcosB+cosAsinB}{cosAcosB}$$

$$=\frac{sin(A+B)}{cosAcosB}$$

$\therefore$ 左式＝右式。

第二法　右式 $=\frac{sin(A+B)}{cosAcosB}=\frac{sinA}{cosA}+\frac{sinB}{cosB}$

$$=tanA+tanB$$

$\therefore$ 右式＝左式。

第三法　設 $tanA+tanB=\frac{sin(A+B)}{cosAcosB}$,

則 $\frac{sinA}{cosA}+\frac{sinB}{cosB}=\frac{sinAcosB}{cosAcosB}+\frac{cosAsinB}{cosAcosB}$,

於是 $\frac{sinA}{cosA}+\frac{sinB}{cosB}=\frac{sinA}{cosA}+\frac{sinB}{cosB}$,

$\therefore$ 左式＝右式。

以上三法,可視題式情形,取用一種足矣。

習題

1. 證明下列三角恆等式:

(a) $cos\theta \cdot tan\theta=sin\theta$。

(b) $tan\theta+cot\theta=sec\theta csc\theta$。

(c) $cos^2\theta(1+tan^2\theta)=1$。

(d) $sec^4\theta-tan^2\theta=sec^2\theta+tan^4\theta$。

(e) $\frac{sin5\theta-2sin3\theta+sin\theta}{cos5\theta-2cos3\theta+cos\theta}=tan3\theta$。

(f) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$。

(g) $\tan 2x+\sec 2x=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$,

(h) $\cos 3\theta=2\cos 4\theta\cos\theta-\cos 5\theta$。

(i) $\dfrac{\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}=\tan A\cdot\tan B$。

(j) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$。
$(A+B+C=180^\circ)$。

方程式是未知数在几种條件以下值成的。
恒等式是未知数无論如何变化位置很是相同的

2. 分解因式:

(a) $\sin 80^\circ-\sin 70^\circ$。

(b) $\cos 3A+\cos A$。

(c) $\sin 55^\circ+\sin 65^\circ$。

(d) $\cos 5\theta-\cos 2\theta$

3. 求 $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ 之值(不用表)。

4. 由30°之函數值,求$\cos 15^\circ$及$\sin 15^\circ$之值。

*487. 三角方程式。

凡等式包含三角函數,且僅於特殊角度時始能存在者,曰三角方程式。求適合於此方程式之特殊角之值,曰解三角方程式。

普通解法共分三步,即

第一步　應用三角函數之基本關係,或其他公式,

將方程式中各函數變爲同角之同函數,而化簡之。

第二步　視其惟一之三角函數爲未知數,(必要時代以一文字)而求其值。

第三步　由§481 方法,進求由第二步所得各解之各角,

例一　求 $\sin^2\theta+\cos\theta=1$ 之解在 $0°$ 及 $360°$ 以內者。

【解】　因 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$。

代入得 $1-\cos^2\theta+\cos\theta=1$,

化簡 $\cos\theta(\cos\theta-1)=0$,

故 $\cos\theta=0$ 或 1。

若 $\cos\theta=0°$, 則 $\theta=90°$ 或 $270°$。

若 $\cos\theta=1$, 則 $\theta=0°$ 或 $360°$。

例二　求 $2\cos\theta=\sin\theta+1$ 之解在 $0°$ 及 $360°$ 以內者。

【解】　因 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$,

代入得 $2\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sin\theta+1$,

平方 $4-4\sin^2\theta=\sin^2\theta+2\sin\theta+1$,

化簡 $5\sin^2\theta+2\sin\theta-3=0$,

$(5\sin\theta-3)(\sin\theta+1)=0$。

故 $\sin\theta=-1$, 即 $\theta=270°$。

又 $\sin\theta=\frac{3}{5}$, 即 $\theta=36°52'$ 或 $143°8'$。

【注意】 中途若曾平方,易引入不合用之解。故求出時,須一一核算。又計算時,不可隨便放棄因式,而失去某解。

習題

求 0° 及 360° 間之解:

1. $\cos\theta+\sec\theta=\frac{5}{2}$。

2. $\sin\theta=\tan\theta$。

3. $\tan^2\theta+3\cot^2\theta=4$。

4. $\cos2\theta+\sin^2\theta=\frac{3}{4}$。

5. $\sin\theta+\sin2\theta=\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}$。

第一表

三角函數表

由 0° 到 45°之正弦之數值

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0.0000	0029	0058	0087	0116	0145	0175	89
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88
2	0349	0378	0407	0436	0465	0494	0523	87
3	0523	0552	0581	0610	0640	0669	0698	86
4	0698	0727	0756	0785	0814	0843	0872	85
5	0.0872	0901	0929	0958	0987	1016	1045	84
6	1045	1074	1103	1132	1161	1190	1219	83
7	1219	1248	1276	1305	1334	1363	1392	82
8	1392	1421	1449	1478	1507	1536	1564	81
9	1564	1593	1622	1650	1679	1708	1736	80
10	0.1736	1765	1794	1822	1851	1880	1908	79
11	1908	1937	1965	1994	2022	2051	2079	78
12	2079	2108	2136	2164	2193	2221	2250	77
13	2250	2278	2306	2334	2363	2391	2419	76
14	2419	2447	2476	2504	2532	2560	2588	75
15	0.2588	2616	2644	2672	2700	2728	2756	74
16	2756	2784	2812	2840	2868	2896	2924	73
17	2924	2952	2979	3007	3035	3062	3090	72
18	3090	3118	3145	3173	3201	3228	3256	71
19	3256	3283	3311	3338	3365	3393	3420	70
20	0.3420	3448	3475	3502	3529	3557	3584	69
21	3584	3611	3638	3665	3692	3719	3746	68
22	3746	3773	3800	3827	3854	3881	3907	67
23	3907	3934	3961	3987	4014	4041	4067	66
24	4067	4094	4120	4147	4173	4200	4226	65
				30'				
25	0.4226	4253	4279	4305	4331	4358	4384	64
26	4384	4410	4436	4462	4488	4514	4540	63
27	4[illegible]	4566	4592	4617	4643	4669	4695	62
28	4[illegible]	4720	4746	4772	4797	4823	4848	61
29	4848	4874	4899	4924	4950	4975	5000	60
30	0.5000	5025	5050	5075	5100	5125	5150	59
31	5150	5175	5200	5225	5250	5275	5299	58
32	5299	5324	5348	5373	5398	5422	5446	57
33	5446	5471	5495	5519	5544	5568	5592	56
34	5592	5616	5640	5664	5688	5712	5736	55
35	0.5736	5760	5783	5807	5831	5854	5878	54
36	5878	5901	5925	5948	5972	5995	6018	53
37	6018	5041	6065	6088	6111	6134	6157	52
38	6157	6180	6202	6225	6248	6271	6293	51
39	6293	6316	6338	6361	6383	6406	6428	50
40	0.6428	6450	6472	6494	6517	6539	6561	49
41	6561	6583	6604	6626	6648	6670	6691	48
42	6691	6713	6734	6756	6777	6799	6820	47
43	6820	6841	6862	6884	6905	6926	6947	46
44	6947	6967	6988	7009	7030	7050	7071	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	°

由 45° 到 90°之餘弦之數值

由 45°到 90°之正弦之數值

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
45	0.7071	7092	7112	7133	7153	7173	7193	44
46	7193	7214	7234	7254	7274	7294	7314	43
47	7314	7333	7353	7373	7392	7412	7431	42
48	7431	7451	7470	7490	7509	7528	7547	41
49	7547	7566	7585	7604	7623	7642	7660	40
50	0.7660	7679	7698	7716	7735	7753	7771	39
51	7771	7790	7808	7826	7844	7862	7880	38
52	7880	7898	7916	7934	7951	7969	7986	37
53	7986	8004	8021	8039	8056	8073	8095	36
54	8090	8107	8124	8141	8158	8175	8192	35
55	0.8192	8208	8225	8241	8258	8274	8290	34
56	8290	8307	8323	8339	8355	8371	8387	33
57	8387	8403	8418	8434	8450	8465	8480	32
58	8480	8496	8511	8526	8542	8557	8572	31
59	8572	8587	8601	8616	8631	8646	8660	30
60	0.8660	8675	8689	8704	8718	8732	8746	29
61	8746	8760	8774	8788	8802	8816	8829	28
62	8829	8843	8857	8770	8884	8897	8910	27
63	8910	8923	8936	8949	8962	8975	8988	26
64	8988	9001	9013	9026	9038	9051	9063	25
65	0.9063	9075	9088	9100	9112	9124	9135	24
66	9135	9147	9159	9171	9182	9194	9205	23
67	9205	9216	9228	9239	9250	9261	9272	22
68	9272	9283	9293	9304	9315	9325	9336	21
69	9336	9346	9356	9367	9377	9387	9397	20
				30'				
70	0.9397	9407	9417	9426	9436	9446	9455	19
71	9455	9465	9474	9483	9492	9502	9511	18
72	9511	9520	9528	9537	9546	9555	9563	17
73	9563	9572	9580	9588	9596	9605	9613	16
74	9613	9621	9628	9636	9644	9653	9659	15
75	0.9659	9667	9674	9681	9689	9696	9703	14
76	9703	9710	9717	9724	9730	9737	9744	13
77	9744	9750	9757	9763	9769	9775	9781	12
78	9781	9787	9793	9799	9805	9811	9816	11
79	9816	9822	9827	9833	9838	9843	9848	10
80	0.9848	9853	9858	9863	9868	9872	9877	9
81	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	8
82	9903	9907	9911	9914	9918	9922	9925	7
83	9925	9929	9932	9936	9939	9942	9945	6
84	9945	9948	9951	9954	9957	9959	9962	5
85	0.9962	9964	9967	9969	9971	9974	9976	4
86	9976	9978	9980	9981	9983	9985	9986	3
87	9986	9988	9989	9990	9992	9993	9994	2
88	9994	9995	9996	9997	9997	9998	9998	1
89	9998	9999	9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	°

由 0° 到 45°之餘弦之數值

由 0° 到 45° 之 正 切 之 數 值

°	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0.0000	0029	0058	0087	0116	0145	0175	89
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88
2	0349	0378	0407	0437	0466	0495	0524	87
3	0524	0553	0582	0612	0641	0670	0699	86
4	0699	0729	0758	0787	0816	0846	0875	85
5	0.0875	0904	0934	0963	0992	1022	1051	84
6	1051	1080	1110	1139	1169	1198	1228	83
7	1228	1257	1287	1317	1346	1376	1405	82
8	1405	1435	1465	1495	1524	1554	1584	81
9	1584	1614	1644	1673	1703	1733	1763	80
10	0.1763	1793	1823	1853	1883	1914	1944	79
11	1944	1974	2004	2035	2065	2095	2126	78
12	2126	2156	2186	2217	2247	2278	2309	77
13	2309	2339	2370	2401	2432	2462	2493	76
14	2493	2524	2555	2586	2617	2648	2679	75
15	0.2679	2711	2742	2773	2805	2836	2867	74
16	2867	2899	2931	2962	2994	3026	3057	73
17	3057	3089	3121	3153	3185	3217	3249	72
18	3249	3281	3314	3346	3378	3411	3443	71
19	3443	3476	3508	3541	3574	3607	3640	70
20	0.3640	3673	3706	3739	3772	3805	3839	69
21	3839	3872	3906	3939	3973	4006	4040	68
22	4040	4074	4108	4142	4176	4210	4245	67
23	4245	4279	4314	4348	4383	4417	4452	66
24	4452	4487	4522	4557	4592	4628	4663	65
25	0.4663	4699	4734	4770	4806	4841	4877	64
26	4877	4913	4950	4986	5022	5059	5095	63
27	5095	5132	5169	5206	5243	5280	5317	62
28	5317	5354	5392	5430	5467	5505	5543	61
29	5543	5581	5619	5658	5696	5735	5774	60
30	0.5774	5812	5851	5890	5930	5969	6009	59
31	6009	6048	6088	6128	6168	6208	6249	58
32	6249	6289	6330	6371	6412	6453	6494	57
33	6494	6536	6577	6619	6661	6703	6745	56
34	6745	6787	6830	6873	6916	6959	7002	55
35	0.7002	7046	7089	7133	7177	7221	7265	54
36	7265	7310	7355	7400	7445	7490	7536	53
37	7536	7581	7627	7673	7720	7766	7813	52
38	7813	7860	7907	7954	8002	8050	8098	51
39	8098	8146	8195	8243	8292	8342	8391	50
40	0.8391	8441	8491	8541	8591	8642	8693	49
41	8693	8744	8796	8847	8899	8952	9004	48
42	9004	9057	9110	9163	9217	9271	9325	47
43	9325	9380	9435	9490	9545	9601	9657	46
44	9657	9713	9770	9827	9884	9942	1.0000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°

由 45° 到 90° 之 餘 切 之 數 值

由 45° 到 90°之正切之數值

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
45	1.000	1.006	1.012	1.018	1.024	1.030	1.036	44
46	1.036	1.042	1.048	1.054	1.060	1.066	1.072	43
47	1.072	1.079	1.085	1.091	1.098	1.104	1.111	42
48	1.111	1.117	1.124	1.130	1.137	1.144	1.150	41
49	1.150	1.157	1.164	1.171	1.178	1.185	1.192	40
50	1.192	1.199	1.206	1.213	1.220	1.228	1.235	39
51	1.235	1.242	1.250	1.257	1.265	1.272	1.280	38
52	1.280	1.288	1.295	1.303	1.311	1.319	1.327	37
53	1.327	1.335	1.343	1.351	1.360	1.368	1.376	36
54	1.376	1.385	1.393	1.402	1.411	1.419	1.428	35
55	1.428	1.437	1.446	1.455	1.464	1.473	1.483	34
56	1.483	1.492	1.501	1.511	1.520	1.530	1.540	33
57	1.540	1.550	1.560	1.570	1.580	1.590	1.600	32
58	1.600	1.611	1.621	1.632	1.643	1.653	1.664	31
59	1.664	1.675	1.686	1.698	1.709	1.720	1.732	30
60	1.732	1.744	1.756	1.767	1.780	1.792	1.804	29
61	1.804	1.816	1.829	1.842	1.855	1.868	1.881	28
62	1.881	1.894	1.907	1.921	1.935	1.949	1.963	27
63	1.963	1.977	1.991	2.006	2.020	2.035	2.050	26
64	2.050	2.066	2.081	2.097	2.112	2.128	2.145	25
65	2.145	2.161	2.177	2.194	2.211	2.229	2.246	24
66	2.246	2.264	2.282	2.300	2.318	2.337	2.356	23
67	2.356	2.375	2.394	2.414	2.434	2.455	2.475	22
68	2.475	2.496	2.517	2.539	2.560	2.583	2.605	21
69	2.605	2.628	2.651	2.675	2.699	2.723	2.747	20
				30				
70	2.747	2.773	2.798	2.824	2.850	2.877	2.904	19
71	2.904	2.932	2.960	2.989	3.018	3.047	3.078	18
72	3.078	3.108	3.140	3.172	3.204	3.237	3.271	17
73	3.271	3.305	3.340	3.376	3.412	3.450	3.487	56
74	3.487	3.526	3.566	3.606	3.647	3.689	3.732	15
75	3.732	3.776	3.821	3.867	3.914	3.962	4.011	14
76	4.011	4.061	4.113	4.165	4.219	4.275	4.331	13
77	4.331	4.390	4.449	4.511	4.574	4.638	4.705	12
78	4.705	4.773	4.843	4.915	4.989	5.066	5.145	11
79	5.145	5.226	5.309	5.396	5.485	5.576	5.671	10
80	5.671	5.769	5.871	5.976	6.084	6.197	6.314	9
81	6.314	6.435	6.561	6.691	6.827	6.968	7.115	8
82	7.115	7.269	7.429	7.596	7.770	7.953	8.144	7
83	8.144	8.345	8.556	8.777	9.010	9.255	9.514	6
84	9.514	9.788	10.078	10.385	10.712	11.059	11.430	5
85	11.430	11.826	12.251	12.706	13.197	13.727	14.301	4
86	14.301	14.924	15.605	16.350	17.169	18.075	19.081	3
87	19.081	20.206	21.470	22.904	24.542	26.432	28.636	2
88	28.636	31.242	34.368	38.188	42.964	49.104	57.290	1
89	57.290	68.750	85.940	114.589	171.885	343.774	infinite	0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	°

由 0° 到 45°之餘切之數值

第二表

對 數 表

由100到549之數之對數

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1403
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2915	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4218	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4655	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5604	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

由550到999之數之對數

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	9331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	9727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8989	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9169	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	6335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	8552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9722
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

第三表

三角函數之對數

由 0° 到 45° 之正弦之對數

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	°
0	−∞	7.4637	7.7648	7.9408	8.0658	8.1627	8.2419	89
1	8.2419	8.3088	8.3668	8.4179	4637	5050	5428	88
2	5428	5776	6097	6397	6677	6940	7188	87
3	7188	7423	7945	7875	8059	8251	8436	86
4	8436	8613	8783	8946	9104	8.9256	8.9403	85
5	8.9403	8.9545	8.9682	8.9816	8.9945	9.0070	9.0192	84
6	9.0192	9.0311	9.0426	9.0539	9.0648	0755	0859	83
7	0859	0961	1060	1157	1252	1345	1436	82
8	1436	1525	1612	1697	1781	1863	1943	81
9	1943	2022	2100	2176	2251	2324	2397	80
10	9.2397	9.2468	9.2538	9.2606	9.2674	9.2740	9.2806	79
11	2806	2870	2934	2997	3058	3119	3179	78
12	3179	3238	3296	3353	3410	3466	3521	77
13	3521	3575	3629	3682	3734	3786	3837	76
14	3837	3887	3937	3986	4035	4083	4130	75
15	9.4130	9.4177	9.4223	9.4269	9.4314	9.4359	9.4403	74
16	4403	4447	4491	4533	4576	4618	4659	73
17	4659	4700	4741	4781	4821	4861	4900	72
18	4900	4939	4977	5015	5052	5090	5126	71
19	5126	5163	5199	5235	5270	5306	5341	70
20	9.5341	9.7375	9.5409	9.5443	9.5477	9.5510	9.5543	69
21	5543	5576	5609	5641	5673	5704	5736	68
22	5736	5767	5598	5828	5859	5889	5919	67
23	5919	1948	5678	6007	3036	6065	6093	66
24	6093	6121	6149	6177	6205	6232	6259	65
25	9.6259	9.6286	9.6313	9.6340	9.6366	9.6392	9.6418	64
26	6418	6444	6470	6495	6521	6546	6570	63
27	6570	6595	6620	6644	6668	6692	6716	62
28	6716	6740	6763	6787	6810	6833	6856	61
29	6856	6878	6901	6923	6946	6968	6990	60
30	9.6990	9.7012	9.7033	9.7055	9.7076	9.7097	9.7118	59
31	7118	7139	7160	7181	7201	7222	7242	58
32	7242	7262	7282	7302	7322	7342	7361	57
33	7361	7380	7400	7419	7438	7457	7476	56
34	7476	7494	7513	7531	7550	7568	7586	55
35	9.7586	9.7604	9.7622	9.7640	9.7657	9.7675	9.7692	54
36	7692	7710	7727	7744	7761	7778	7795	53
37	7795	7811	7828	7844	7861	7877	7893	52
38	7893	7910	7926	7941	7957	7973	7989	51
39	7989	8004	8020	8035	8050	8066	8081	50
40	9.8081	9.8096	9.8111	9.8125	9.8140	9.8155	9.8169	49
41	8169	8184	8198	8213	8227	8241	8255	48
42	8255	8269	8283	8297	8311	8324	8338	47
43	8338	8351	8365	8378	8391	8405	8418	46
44	9.8418	9.8431	9.8444	9.8457	9.8469	9.8482	9.8495	45
°	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	°

由 45° 到 90° 之餘弦之對數

由45到90°之正弦之對數

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	°
45	9.8495	9.8507	9.8520	9.8532	9.8545	9.8557	9.8569	44
46	8569	8582	8594	8606	8618	8629	8641	43
47	8641	8653	8665	8676	8688	8699	8711	42
48	8711	8722	8733	8745	8756	8767	8778	41
49	9.8778	9.8789	9.8800	9.8810	9.8821	6.8832	9.8843	40
50	8843	8853	8864	8874	8884	8895	8905	39
51	8905	8915	8925	8935	8945	8955	8965	38
52	8965	8975	8985	8995	9004	9014	9023	37
53	9023	9033	9042	9052	9061	9070	9080	36
54	9.9080	9.9089	9.9098	9.9107	9.9116	9.9125	9.9134	35
55	9134	9142	9151	9160	9169	9177	9186	34
56	9186	9194	9203	9211	9219	9228	9236	33
57	9236	9244	9252	9260	9268	9276	9284	32
58	9284	9292	9300	9308	9315	9323	9331	31
59	9.9331	9.9338	9.9346	9.9353	9.9361	9.9368	9.9375	30
60	9375	9383	9390	9397	9404	9411	9418	29
61	9418	9425	9432	9439	9446	9453	9459	28
62	9459	9466	9473	9479	9486	9492	9499	27
63	9499	9505	9512	9518	9524	9530	9537	26
64	9.9537	9.9543	9.9549	9.9555	9.9561	9.9567	9.9573	25
65	9573	9579	9584	9590	9596	9602	9607	24
66	9607	9613	9618	9624	9629	9635	9640	23
67	9640	9646	9651	9656	9661	9667	9672	22
68	9672	9677	9682	9687	9692	9697	9702	21
69	9.9702	9.9706	9.9711	9.9716	9.9721	9.9725	9.9730	20
70	9730	9734	9739	9743	9748	9752	9757	19
71	9757	9761	9765	9770	9774	9778	9782	18
72	9782	9786	9790	9794	9798	9802	9806	17
73	9806	9810	9814	9817	9821	9825	9828	16
74	9.9828	9.9832	9.9836	9.9839	9.9843	9,9846	9.9849	15
75	9849	9853	9856	9859	9863	9866	9869	14
76	9869	9872	9875	9878	9881	9884	9887	13
77	9887	9890	9893	9896	9899	9901	9904	12
78	9904	9907	9909	9912	9914	9917	9919	11
79	9.9919	9.9922	9.9924	9.9927	9.9929	9.9931	9.9934	10
80	9934	9936	9938	9940	9942	9944	9946	9
81	9946	9948	9950	9952	9954	9956	9958	8
82	9958	9959	9961	9963	9964	9966	9968	7
83	9968	9969	9971	9972	9973	9975	9976	6
84	9.9976	9.9977	9.9979	9.9980	9.9981	9.9982	9.9983	5
85	9983	9985	9986	9987	9988	9989	9989	4
86	9989	9990	9991	9992	9993	9993	9994	3
87	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	2
88	9997	9.9998	9.9998	9.9999	9.9999	9.9999	9.9999	1
89	9.9999	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	0
°	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	°

由0°到45°之餘弦之對數

由 0° 到 45°之正切之對數

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	°
0	−∞	7.4637	7.7648	7.9409	8.0658	8.1627	8.2419	89
1	8.2419	8.3089	8.3669	8.4181	4638	5053	5431	88
2	5431	5779	6101	6401	6682	6945	7194	87
3	7194	7429	7652	7865	8067	8261	8446	86
4	8446	8624	8795	8960	9118	8.9272	8.9420	85
5	8.9420	8.9563	8.9701	8.9836	8.9966	9.0093	9.0216	84
6	9.0216	9.0336	9.0453	9.0567	9.0678	0786	0891	83
7	0891	0995	1096	1194	1291	1385	1478	82
8	1478	1569	1658	1745	1831	1915	1997	81
9	1997	2078	2158	2236	2313	2389	2463	80
10	9.2463	9.2536	9.2609	9.2680	9.2750	9.2819	9.2887	79
11	2887	2953	3020	3085	3149	3212	3275	78
12	3275	3336	3397	3458	3517	3576	3634	77
13	3634	3691	3748	3804	3859	3914	3968	76
14	3968	4021	4074	4127	4178	4230	4281	75
15	9.4281	9.4331	9.9381	9.4430	9.4479	9.4527	9.4575	74
16	4575	4622	4669	4716	4762	4808	4853	73
17	4853	4898	4943	4987	5031	5075	5118	72
18	5118	5161	5203	5245	5287	5329	5370	71
19	5370	5411	5451	5491	5531	5571	5611	70
20	9.5611	9.5650	9.5689	9.5727	9.5766	9.5804	9.5842	69
21	5842	5879	5917	5954	5991	6028	6064	68
22	6064	6100	6136	6172	6218	6243	6279	67
23	6279	6314	6348	6383	6417	6452	6486	66
24	6486	6520	6553	6587	6620	6654	6687	65
25	9.6687	9.6720	9.6752	9.6785	9.6817	9.6850	9.6882	64
26	6882	6914	6946	6977	7009	7040	7072	63
27	7072	7103	7134	7165	7196	7226	7257	62
28	7257	7287	7317	7348	7378	7408	7438	61
29	7438	7467	7497	7526	7556	7585	7614	60
30	9.7614	9.7644	9.7673	9.7701	9.7730	9.7759	9.7788	59
31	7788	7816	7845	7873	7902	7930	7958	58
32	7958	7986	8014	8042	8070	8097	8125	57
33	8125	8153	8180	8208	8235	8263	8290	56
34	8290	8317	8344	8371	8398	8425	8452	55
35	9.8452	9.8479	9.8506	9.8533	9.8559	9.8586	0.8613	54
36	8613	8639	8666	8692	8718	8745	8771	53
37	8771	8797	8824	8850	8876	8902	8928	52
38	8928	8954	8980	9006	9032	9058	9084	51
39	9084	9110	9135	9161	9187	9212	9238	50
40	9.9238	9.9264	9.9289	9.9315	9.9341	9.9366	9.9392	49
41	9392	9417	9443	9468	9494	9519	9544	48
42	9544	9570	9595	9621	9646	9671	9697	47
43	9697	9722	9747	9772	9798	9823	9.9848	46
44	9.9848	9.9874	9.9899	9.9924	9.9949	9.9975	10.0000	45
°	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	°

由 45°到 90°之餘切之對數

由 45° 到 90° 之正切之對數

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	°
45	10.0000	10.0025	10.0051	10.0076	10.0101	10.0126	10.0152	44
46	0152	0177	0202	0228	0253	0278	0303	43
47	0303	0329	0354	0379	0405	0430	0456	42
48	0456	0481	0506	0532	0557	0583	0608	41
49	10.0608	10.0634	10.0659	10.0685	10.0711	10.0736	10.0762	40
50	0762	0788	0813	0839	0865	0890	0916	39
51	0916	0942	0968	0994	1020	1046	1072	38
52	1072	1098	1124	1150	1176	1203	1229	37
53	1229	1255	1282	1308	1334	1361	1387	36
54	10.1387	10.1414	10.1441	10.1467	10.1494	10.1521	10.1548	35
55	1548	1575	1602	1629	1656	1683	1710	34
56	1710	1737	1765	1792	1820	1847	1875	33
57	1875	1903	1930	1958	1986	2014	2042	32
58	2042	2070	2098	2127	2155	2184	2212	31
59	10.2212	10.2241	10.2170	10.2299	10.2327	10.2356	10.2386	30
60	2386	2415	2444	2474	2503	2533	2562	29
61	2562	2592	2622	2652	2683	2713	2743	28
62	2743	2774	2804	2835	2866	2897	2928	27
63	2928	2960	2991	3023	3054	3086	3118	26
64	10 3118	10.3150	10.3183	10.3215	10.3248	10.3280	10.3313	25
65	3313	3346	3380	3413	3447	3480	3514	24
66	3514	3548	3583	3617	3652	3686	3721	23
67	3721	3757	3792	3828	3864	3900	3936	22
68	3936	3972	4009	4046	4083	4121	4158	21
69	10.4158	10 4196	10.4234	10.4273	10.4311	10.4350	10 4389	20
70	4389	4629	4469	4509	4549	4589	4630	19
71	4630	4671	4713	4755	4797	4839	4882	18
72	4882	4925	4969	5013	5057	5102	5147	17
73	5147	5182	5238	5284	5331	5378	5425	16
74	10.5425	10.5473	10.5521	10 5170	10.5619	10.5669	10.5719	15
75	5719	5770	5822	5873	5926	5979	6032	14
76	6032	6086	6141	6196	6252	6309	6366	13
77	6366	6424	6483	6542	6603	6664	6725	12
78	6725	6788	6851	6915	6980	7047	7113	11
79	10.7113	10.7181	10.7250	10.7320	10.7391	10.7464	10.7537	10
80	7537	7611	7687	7764	7842	7922	8003	9
81	8003	8085	8169	8255	8342	8431	8522	8
82	8522	8615	8709	8806	8904	9005	9109	7
83	9109	9214	10 9322	10 9433	10.9547	10.9664	10 9784	6
84	10 9784	10 9907	11.0034	11·0164	11.0299	11.0437	11.0580	5
85	11 0580	11.0728	0882	1040	1205	1376	1554	4
86	1554	1739	1933	2135	2348	2571	2806	3
87	2806	3055	3318	3599	3899	4221	4569	2
88	4569	4947	5362	11 5819	11 6331	11.6911	11.7581	1
89	11.7581	11 8373	11.9342	12.0591	12.2352	12.5363	∞	0
°	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	°

由 0° 到 45° 之餘切之對數

平面三角學答案

p.271

2. (a)5。(b)−5 (c)−10。(d)−3。

p.274

3. $\beta=-90^\circ$, $\gamma=-270^\circ$, $\theta=495^\circ$, $x=45^\circ$。

4. $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{25}{6}\pi$, $-\frac{5}{12}\pi$, $120^\circ, 270^\circ$, 36°, $-32\frac{8}{11}^\circ$。

p.280

4. (a)II, III。(b)I, III。(c)I, II。(d)III, IV。

5. $\sin\theta=-\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$。$\tan\theta=-\frac{4}{3}$, $\csc\theta=-\frac{5}{4}$, $\sec\theta=\frac{5}{3}$, $\cot\theta=-\frac{3}{4}$。**6.** -270°之正弦爲最大，-90°之正弦爲最小，-180°之餘弦爲最大。**7.** IV。**8.** III。**9.** $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$, $\csc\theta=\frac{5}{3}$, $\sec\theta=\frac{5}{4}$, $\cot\theta=\frac{4}{3}$；或$\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$, $\csc\theta=\frac{5}{3}$, $\sec\theta=-\frac{5}{4}$, $\cot\theta=-\frac{4}{3}$。**11.** 縱標爲$-\frac{10}{3}$, $\sin\theta=-\frac{5}{\sqrt{34}}$, $\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{34}}$。**12.** $\sin A=\frac{4}{5}$, $\cos A=\frac{3}{5}$, $\tan A=\frac{4}{3}$, $\csc A=\frac{5}{4}$, $\sec A=\frac{5}{3}$, $\cot A=\frac{3}{4}$。

p.284

3. $sinA=\frac{4}{5}$, $cosA=\frac{3}{5}$, $tanA=\frac{4}{3}$, $cscA=\frac{5}{4}$, $secA=\frac{5}{3}$, $cotA=\frac{3}{4}$; $sinB=\frac{3}{5}$, $cosB=\frac{4}{5}$, $tanB=\frac{3}{4}$, $secB=\frac{5}{4}$, $cscB=\frac{5}{3}$, $cotB=\frac{4}{3}$, **5.** (a)$cos60°$。 (b)$cot65°$。 (c)$sin86°$。 (d)$tan39°39'40''$。

p.289

1. (a).6472。 (b).9194。 (c)1.295。 (d).1614。 (e).7009。 (f)2。 **2.** (a).9620。 (b).5727。 (c)2.892。 (d).5063。 (e).4044。 (f).7406。 **3.** (a).1736。 (b).1736。 (c).3640。 (d).1644。 (e).7923。 (f)$-.6494$。 (g)$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$。 (h)$-.5299$。 (i)$-.9848$。 (j)$\frac{1}{3}\sqrt{3}$。

p.291

1. (a)6° (b)60°50′。 (c)50°。 (d)10°。 (e)60°。 (f)79°50′。 (g)65°30′。 (h)39°40′。 (i)25°。 (j)55°。 **2.** (a)10°55′。 (b)60°13′。 (c)49°3.5′。 (d)56°16.5′。 **3.** (a)195°40′。 (b)130°30′。 (c)131°10′。 (d)206°48′。

p.297

2. $sin\theta=\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}$, $cos\theta=\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}$, $cot\theta=\frac{1}{t}$, $csc\theta=\frac{\pm\sqrt{1+t^2}}{t}$, $sec\theta=\pm\sqrt{1+t^2}$。 **3.** $sin\theta=\frac{\pm\sqrt{21}}{5}$,

$\cos\theta=\frac{2}{5}$, $\tan\theta=\frac{\pm\sqrt{21}}{2}$, $\csc\theta=\frac{5}{\pm\sqrt{21}}$, $\cot\theta=\frac{2}{\pm\sqrt{21}}$, **4.** $\sin\theta=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}}$, $\cos\theta=\frac{\cot\theta}{\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}}$, $\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$, $\csc\theta=\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}$, $\sec\theta=\frac{\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$。

p.298

1. 3, 3, 5, 1, 0。 **2.** $\log_2\frac{1}{16}=-4$, $\log_8 4=\frac{2}{3}$, $\log_{10}1000=3$, $\log_{.008}5=-\frac{1}{3}$, $\log_{.000125}.0025=\frac{2}{3}$, $\log_{216}6=\frac{1}{3}$。 **3.** (a)$y^z=x$。 (b)$\log_A r=s$。 (c)$C^{\frac{M}{N}}=\frac{A}{B}$。 (d)$\log_{\sqrt{x}}t=yz$。 **4.** 8, 11, 5, 25。

p.300

2. (a)$\log_{10}a+\log_{10}b+\log_{10}\sin C-\log_{10}z$。 (b)$\log_{10}p+n\log_{10}(1+r)$。 (c)$\frac{3}{5}\log_b a+\frac{1}{10}\log_b(c+d)-\frac{2}{5}\log_b c$。(d)$\log_k(m+n)+2\log_k s-\frac{1}{2}\log_k(m-n)-\log(1+s)$。

p.302

4, 2, 0, 5, 1, −2, −5, −1, −1, −3。

p.305

2. (a)1.4116。 (b)$\bar{2}$.7574。 (c)3.4043。 (d).7160。 (e)

3.4771。 $(f)\bar{2}.9031$。 $(g)4.7292$。 $(h).4901$。

$P.307$

1. (1)45.2。 (2).05。 (3)8510。 (4).0025。 (5).753。 (6)599.8。 (7)32.04。 (8)6.008。 **2.** $(a)15.08$。 $(b)3256.2$。 $(c).8955$。 $(d).04208$。 $(e)1.495$。 $(f)4.703$。 $(g)-7.672$。 $(h)1.414$。

$P.309$

1. $\bar{1}.9507$, $\bar{1}.8983$, $\bar{1}.7189$, 1.5[illegible]4, $\bar{1}.4083$。 **2.** $(a)50°20'$。 $(b)77°52'$。 $(c)60°54'$。 $(d)77°37'$。 **3.** $10°20'$。 **4.** 37.04。

$P.3$[illegible]

1. $b=75.89$, $A=52°$, $B=38°$。 **2.** $B=55°45'$, $b=1238.5$, $c=1498$。 **3.** $B=58°45.8'$, $a=1.522, b=2.508$。 **4.** $A=42°44.4'$, $b=3.389$, $a=3.131$。 **5.** $A=46°12'$, $a=53.12$, $c=73.8$。 **6.** $c=5.385$, $A=68°12'$, $B=21°48'$。 **7.** $A=21°10'$, $b=1883.5$, $c=2019.8$。 **8.** $B=25°51'$, $a=412.9$, $c=458.8$。 **9.** 3.249。 **10.** 6.25, **11.** 1.539。 **12.** 1.599。 **13.** 126.1 平方尺。

$P.320$

1. 34[illegible].4 尺。 **2.** 每時 6.79 里, 北偏西 $63°14'$。 **3.** 與塔頂之距離爲 258 尺,與塔足之距離爲 228.4 尺。

4. 56.65 尺。**5.** 100 尺。**6.** 732.2 尺。**7.** 95.34 尺。

P·325

4. 設 $A=0°$, $a^2=(b-c)^2$, 三角形變爲一直線;

設 $A=90°$, $a^2=b^2+c^2$, 三角形變爲直角三角形;

設 $A=180°$, $a^2=(b+c)^2$,三角形亦變爲一直線。

5. (a)4333600。(b)240。(c)17.32。(d)15540。

P.330

1. (1)$B=55°36'$, $C=84°5'$, $c=63.6$; $B'=124°24'$, $C'=15°17'$, $c'=16.9$。(2)無解。(3)$B=12°14'$, $C=146°15'$, $c=1272$。(4)$A=147°28'$, $B=16°43'$, $a=35.52$; $A'=0°54'$, $B'=163°17'$, $a'=1.042$。(5)$B=33°28'$, $C=119°14'$, $c=118.3$; $B'=146°32'$, $C'=6°10'$, $c'=14.57$。(6)$B=26°11'$, $C=48°4$[illegible]$'$, $c=5.783$。**2.** (1)一解。(2)兩解。(3)一解。(4)無解。**3.** (1)$b=56.8$, $c=66.4$, $C=55°20'$。(2)$A=41.56°$, $b=92.8$, $c=24.7$。(3)$A=60°12'$, $a=.0741$, $c=.035$。(4) $A=49°34'$, $B=58°46'$, $C=71°38'$

P.334,

1. 7.32 尺。**2.** 每時13.9浬, 北偏東76°56'。**3.**

355,000 尺。 **4.** 1253 尺。 **5.** $101°2'$。 **6.** 北偏西或南偏西 $4°23'$。 **7.** (*a*)丁村在甲村之北偏東 $39°42'$。 (*b*)2 里。 (*c*)16.6平方里。 **8.** 29000平方尺, **9.** 903 尺。 **10.** 241 尺。

p.338

1. .3420。 **2.** $-.7660$。 **3.** 1.732。 **4.** $-.9110$。 **5.** .9781。 **6.** -1.664。 **7.** .8660。 **8.** .5000。

p.344

1. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$。 **2.** ∞。 **3.** 1。 **4.** $-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$。 **9.** $-\frac{1}{16}(3+\sqrt{105})$。 **10.** $-\frac{16}{65}$, $-\frac{63}{16}$。

p.348

2. (*a*)$2\cos 75°\sin 5°$。 (*b*)$2\cos 2A\cos A$。 (*c*)$2\sin 60°\cos 5°$。 (*d*)$-2\sin\frac{7}{2}\theta\cos\frac{3}{2}\theta$。 **3.** $\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-2)$。 **4.** $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$。

p.351

1. 60°, 300°。 **2.** 0°, 180°。 **3.** 45°, 225°; 60°, 240°; 135° 315°; 120°, 300°。 **4.** 30°, 150°; 210°, 330°。 **5.** 180°, 40°, 80°, 280°, 320°。

中西名詞對照表

(一) 中西對照

頁數

二　畫

三　畫

四　畫

頁數

五畫

九 畫

十 畫

十一畫

十 二 畫

十 三 畫

十 四 畫

十五畫

十六畫

十七畫

十八畫

十九畫

二十二畫

二十三畫

(二) 西中對照

D

E

$n=5\quad P=65$ 求 S.

$S=\frac{1}{2}rP \quad AB=\frac{65}{5}=13$

$AM=\frac{1}{2}AB=6.5$

$\angle AOM=\frac{180°}{5}=36°$

$\tan 36°=\frac{AM}{OM}=\frac{6.5}{r}$

$\log 6.5=0.8129$

$\log\tan 36°=\bar{1}.8613$

$\log r=0.9516$

$S=\frac{1}{2}r\,65=32.5r$

$\log 32.5=1.5119$

$\log r=0.9516$