科學叢書

幾何原理

傅種孫
韓桂叢 譯

共學社

共學社

科學叢書

幾何原理

法國嚇爾勃特原著

傅種孫
韓桂叢 譯述

商務印書館發行

敍　　言

幾何猶算術也,必需少數簡單基本的原則以爲論證之基礎.初等基本之原則,名爲幾何之公理.

公理之選擇及其間關係之考究,乃幾何之大問題,從歐几里特以來,鴻篇傑作,研究及之者不可勝數.此問題實卽吾人關於空間的直覺之論理的分析也.

本篇目的在選擇一組簡單而且完全之獨立公理爲根據,更由是導出幾何之重要定理,公理分類務求明晰,援理推證亦務求界限淸楚.

幾何原理目錄

敍　　言

第一章

五類公理

第二章

公理之互相諧和及互相獨立

第三章
比例論

第四章
平面面積理論

第五章
德沙格氏定理

第六章

巴斯開定理

第七章
根據五類公理之幾何作圖法

結論

幾何原理

第一章

五類公理

§1. 幾何要素及五類公理

幾何中有三種不同之物：第一種曰點(*Points*)以$A, B, C, \cdots\cdots$表之;第二種曰直線(*Straight lines*)以$a, b, c, \cdots\cdots$表之;第三種曰平面(*Planes*)以$\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$表之. 點稱爲直線幾何之要素(*Elements of linecar geometry*);點及直線稱爲平面幾何之要素(*Elements of plane geometry*);點,直線及平面稱爲空間幾何之要素(*Elements of geometry of space*),或稱空間之要素(*Elements of space*).

吾人覺點,直線及平面其間有種種相互關係,常以置在(*Being situat d on*)介乎(*Between*)平行(*Parallel*)合同(*Congruente*)連續(*Cont nuous*)等語表明之. 此種相互關係,加以正確而且完全之述說即爲幾何之

公理(*Axioms of geometry*). 公理可分五類,而各類皆可表現吾人空間直覺之一種基本事實. 類名如下:

I, 1–9. 結合公理(*Axioms of connection*).

II, 1–5. 順序公理(*Axioms of order*).

III, 平行公理(*Axioms of parallel*).

IV, 1–6. 合同公理(*Axioms of congruence*).

V, 連續公理(*Axioms of continuity*).

§2. 類 I. 結合公理

本類公理可證實點與直線與平面間之結合的關係. 其公理如下:

I, 1.* 一直線上最少有二點不相同.

I, 2. 相異二點 A, B 恆決定一直線 a.

可書爲 $AB=a$, 或 $BA=a$.

---

* 湯譯,(i)一直線上至少有二點不相同,(ii)一平面上至少有三點不在一直線上,(iii)空間至少有四點不在一平面上,三語併爲I, 7. 林譯將(i)(ii)兩語併爲I3,列入平面幾何公理,僅以(iii)屬於空間幾何公理. 譯者按(i)爲直線幾何公理,(ii)爲平面幾何公理.

決定(*Determine*)一語,亦可以他語代之. 例如曰A在a上,或曰A爲a之一點,或曰a通過A與B,或曰a連結A與B或到B等等,均無不可. 若一點A在直線a上,同時又在他一直線b上,則稱直線a, b有公共點A,或謂a, b兩直線相交於A.

I, 3. 一直線上相異的任意兩點能完全決定該直線. 卽如設$AB=a$及$AC=a$,而$B\neq C$,則$BC=a$.

I, 4.* 一平面上至少有三點不在一直線上.

I, 5. 不在同一直線上之三點A, B, C恆全完決定一平面α. 可書爲 $ABC=\alpha$。

此又可以「A, B, C在平面α上」,「A, B, C爲平面α上之點」諸語表之。

I, 6. 一平面α上,不在一直線之任意三點A, B, C能完全決定該平面.

I, 7. 若一直線a上之兩點A, B在一平面α上,則a上各點均在α上.

此種情形又可謂直線a在平面α上。

I, 8. 若α, β二平面有一公共點A,則至少必還有一公共點B.

I, 9.* 空間至少有四點不在一平面上.

公理類 I, 1 僅述及直線上之點,即直線幾何之要素,故稱爲類 I 之直線幾何公理. 公理類 I,2–4 僅述及平面上點及直線,即平面幾何之要素,故稱爲類 I 之平面幾何公理. 而公理類 I, 5–9 則稱爲類 I 之空間幾何公理,以便分別.

由類 I 之公理導出之定理如下:

定理 1. 一平面上之二直線可有一公共點或無公共點;二平面可有一公共直線或無公共點;一平面與不在該平面上之任一直線可有一公共點或無公共點.

定理 2. 過一直線與不在該直線上之任一點,或過有一公共點之二直線,均僅可作一平面.

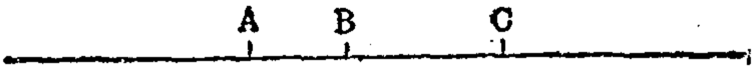
---

*(即Veblen-Young's Projective Geometry之所謂展延公理〔Assumption on Extention〕者是也) 他類公理之爲直線的,平面的,抑空間的既嚴格分別之,此處自不宜混合,故逕分別列之. 又僅論直線幾何而不論平面幾何時,則直線幾何公理中之"在一直線上"等字樣,可以取消.(以後諸類亦然) 公理類 I, 9 之"空間"二字,可有可無.

§3. 類 II. 順序公理

本類公理可確定介乎一語之意義,由此意義再證實直線上或平面上或空間之各點的順序. 直線上各點彼此有相互關係,特以介乎一語表之.其公理如下:

II, 1. 一直線上之 *A*, *B*, *C* 三點,若 *B* 介乎 *A* 與 *C* 之間,則 *B* 亦必介乎 *C* 與 *A* 之間。



第一圖

II, 2. 若 *A*, *C* 爲一直線上之二點,則至少有一點 *B* 介乎 *A* 與 *C* 之間;且至少另有其他一點 *D*,而 *C* 介乎 *A* 與 *D* 之間.

第二圖

II, 3. 一直線上之任意三點中,必有一點介乎其餘二點之間,且三點中僅有一點能介乎其餘二點之間.*

---

*意謂若 A,B,C 爲一直線上之三點,則必 B 介乎 A 與 C 之間,或 A 介乎 B 與 C 之間,或 C 介乎 A 與 B 之間;苟 B 介乎 A 與 C 之間,則 A 不得介乎 B 與 C 之間,C 不得介乎 A 與 B 之間。

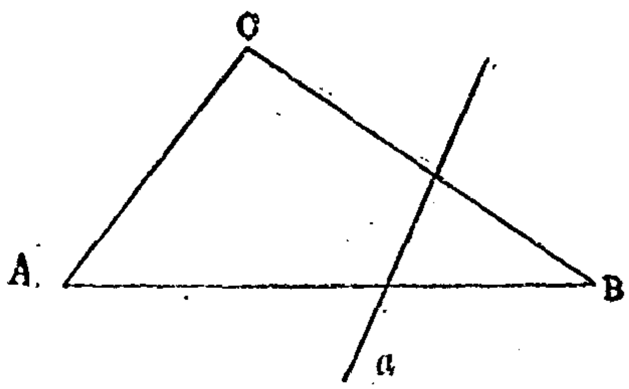
II, 4. 一直線上之任意四點A, B, C, D恆可排列之使B介乎A與C之間,又介乎A與D之間,且C介乎A與D之間,又介乎B與D之間.

定義. 一直線上A, B二點之組(*System of two points*)曰線段(*Segment*)以AB或BA表之.凡介乎A與B間之各點,皆稱線段AB之點或稱線段AB以內之點.

此直線上其餘各點,則稱爲線段AB以外之點.

A與B稱爲線段AB之兩端(*Extremities*).

II, 5. 設A, B, C爲不在同一直線上之三點,又設a爲平面ABC上之直線而不通過A, B, C.若a通過線段AB上之一點,則必通過線段AC上之一點或通過線段BC上之一點.



第三圖

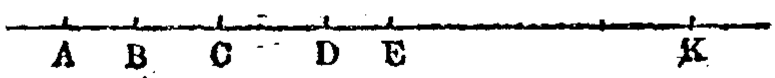
公理類 II, 1–4 僅述及直線上之各點,故稱爲類 II 之直線公理. 公理類 II, 5 則述及平面幾何之要素(即點及直線)的關係,故稱爲類 II 之平面公理.

§4. 結合公理及順序公理之演論

由公理 I, II 可以導出以下諸定理.

定理 3. 一直線上二點之間恆可有無窮個點.

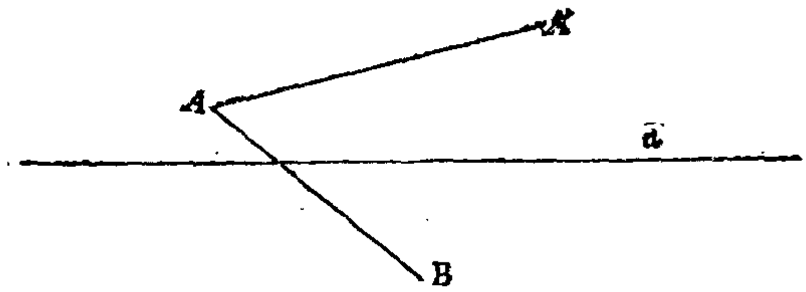
定理 4. 若有有窮個與點在一直線上恆可排爲 $A, B, C, D, E, \cdots\cdots, K$, 而使 B 介乎 A 與 $C, D, E, \cdots\cdots, K$, 之間, C 介乎 A, B 與 $D, E, \cdots\cdots, K$, 之間;餘類推. 除此種順序以外,含有以上性質者,僅爲其反對順序 $K, \cdots\cdots, E, D, C, B, A$.



第四圖

定理 5. 平面 α 上之任一直線 a 可將 α 平面上其餘各點分爲二部分;其一部分之一點 A 與他一

部分之一點B所決定之線段AB上,必含有a之一點;而同一部之二點A, A'所決定之線段AA',則不含有a之點在.



第五圖

定義. 若A, A', O, B為直線a上之四點,O居於A與B之間而不居於A與A'之間,則謂AA'兩點在a上居O點之同側;而A, B兩點在a上居O點之異側. 居O點之同側各點,總稱為發端於O之半線(*Half ray*);故直線上各點皆可分該直線為二半線.

第六圖

循用定理5之記號,則謂A, A'兩點在α平面上居直線a之同側;而A, B兩點在α平面上居直線a之異側.

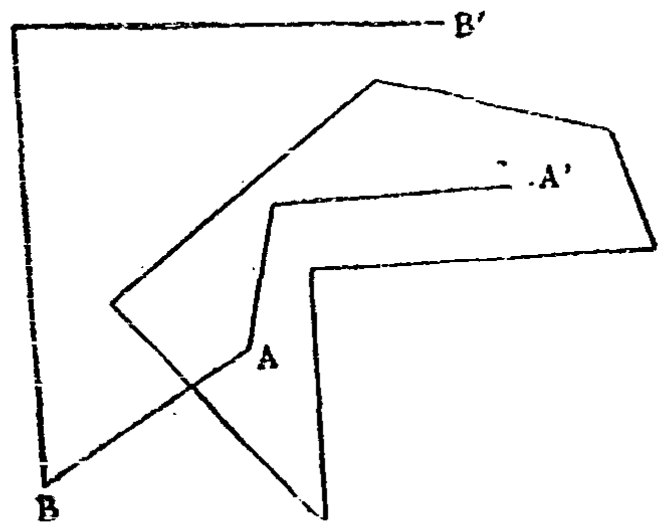
定義. 一組線段$AB, BC, CD, \cdots\cdots, KL$總稱爲連$A$與$L$之折線(*Broken line*),而爲簡便起見,以折線$ABCD\cdots\cdots KL$表之;在$AB, BC, CD, \cdots\cdots, KL$諸線段上之點以及$A, B, C, D, \cdots\cdots, K, L$各點,均稱爲該折線之點.在特別情形若$A$點與$L$點相合或一致,則此折線稱爲多角形(*Polygon*),而以多角形$ABCD\cdots\cdots K$表之;$AB, BC, CD, \cdots\cdots, KA$諸線段稱爲多角形之邊(*Sides*);而$A, B, C, D, \cdots\cdots, K$,各點稱爲多角形之頂(*Vertices*).多角形之有三頂點者爲三角形(*Triangles*),有四頂點者爲四角形(或四邊形)(*Quadrangles*),有五頂點爲五角形(*Pentagons*),以至有n個頂點者爲n角形(*n-gons*).若多角形之各頂點各各不同(卽分離)且無在各邊線段之上者,並且無有二邊相交者,則稱爲簡單多角形(*Simple polygon*).

根據定理5,以下諸定理不難證明:

定理 6. 任何一簡單多角形,若其頂點全在一平面α上,則必將平面上而不在多角形各邊上之各點分爲內外兩部,而有下列諸性質:設A爲內部之一點(內部點),B爲外部之一點(外部點),則連

此A, B二點爲任一折線時,至少必與該多角形有一公共點.

反之,設A, A'爲內部之兩點,而B, B'爲外部之兩點,則連A, A'



第七圖

及連B, B'之折線,可與該多角形無公共點. 故α平面上可以有許多直線完全在該多角之外而無一直線完全在該多角形之內.

定理 7. 任一平面α均能將其餘空間各點分爲兩部,而有下列諸性質:在連此部之一點A與他部之一點B所決定之線段AB上,必含有平面α上之一點. 反之連在同部二點A, A'決定之線段AA',則不含α上之點.

定義. 循用定理 7 之記號,則謂A, A'兩點在空間居平面α之同側,而A, B兩點在空間居平面α之異側.

定理 7 大可供給許多關於空間要素之順序的事實. 此事實卽爲以前所述公理推論之結果,故於類 II 中無須再加空間公理矣.

§5. 類III. 平行公理(歐幾里特公理)

自此公理提出之後,幾何之基本理論,益形簡單,而其發展,益覺容易. 玆述其公理如下:

III. 在一平面 α 上,經過直線 a 外之一點 A,可作一直線不與 a 相交,且其數限於一. 此直線卽稱爲過 A 平行於 a 之線.

此平行公理含有二層意義:第一,在 α 平面上恆有一直線經過 A 而不與 a 相交. 第二,此種直線僅限於一條. 第二層意義最爲緊要,又可申說之如下:

定理 8. 同一平面上 a, b, c 三直線,若 a, b 均不與 c 相交,則 a 與 b 亦不相交.

因設 a 與 b 有一公共點 A,則是在一平面上經過一點 A 可作二直線不與 c 線相交;但此與上述平行公理之第二層意義相矛盾. 反之若以定理 8 爲前提,亦可導出平行公理第二層意義之斷案.

平行公理亦爲平面公理(*Plane axiom*).

§6. 類 VI. 合同公理

本類公理於「合同」即全等(*Congruence*)或「變位」即遷移(*Displacement*)之觀念下一定意義.

兩線段間有某種關係者,特以「合同」(*Congruent*)一語表之.

IV, 1. 設 A,B 爲直線 a 上之二點,另一點 A' 或同在 a 上或在另一直線 a' 上,則 a' 上 A' 點之一與側必有一點 B' 能使線段 AB(或 BA)合同於線段 $A'B'$. 此種關係以

$$AB \equiv A'B'$$

表之. 凡線段皆必合同於其本身,即

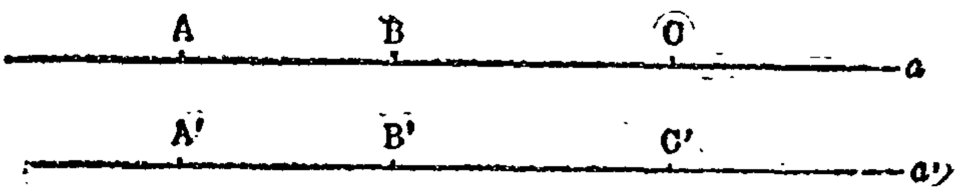
$$AB \equiv AB.$$

上述公理又可簡單述之,如曰,凡線段可以放置(*Being laid off*)在某直線上一點之一與側,且其置法限於一.

IV, 2. 若線段 AB 合同於線段 $A'B'$,且合同於線段 $A''B''$,則線段 $A'B'$ 必合同於線段 $A''B''$;即

設 $AB \equiv A'B'$,且 $AB \equiv A''B''$,則 $A'B' \equiv A''B''$.

IV, 3. 設AB, BC為一直線a之兩線段,兩線段除B點外別無公共點,又設$A'B', B'C'$為a線上或另一直線a'上之兩線段,同樣亦是除B'點外別無公共點;則若$AB \equiv A'B'$且$BC \equiv B'C'$,可得$AC \equiv A'C'$.



第八圖

定義. 設α為任一平面,而h, k為α上發端於O之異位兩半線——好似由不同兩直線截下者然.此二半線之組(*A system of two rays*)稱之為角(*Angle*),以$\angle(h,k)$或$\angle(k,h)$表之.由公理*II* 1–5,可知h,k兩半線與O點合而言之能分α平面上其餘各點為兩部分,而有下列諸性質:若A為一部分之點而B為其他部分之點,則凡連A, B兩點所成之折線必或通過O點或與h, k兩半線中之一有一公共點;但若A, A'為同部分之二點,則連A, A'之折線恆可不通過O點且不必與h或k有公共點.此二部分常稱為內部(*Interior*)及外部(*Exterior*)以區別之.連在同一

部分之任意兩點所成之線段,永遠完全在該部時.則稱爲角(h,k)之內部;其他一部分則稱爲角(h,k)之外部. h,k兩半線稱爲該角之邊(*Sides of angle*);O點稱爲該角之頂(*Vertex of angle*).

IV, 4. 設(h,k)角爲α平面上一與角,又設α'爲α'平面(無妨與α同)上一與線,h'爲α'上發端於一與點O之一半線,且設於α'上指定a'線之某側.則α'上必有一半線k'發端於O能令(h,k)角或(k,h)角與(h',k')角合同,且(h',k')角內部之點皆在a'線指定之某側.此類關係以

$$\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$$

記號表之.凡角均必合同於其本身,卽

$$\angle(h,k)\equiv\angle(h,k)$$

或 $\angle(h,k)\equiv\angle(k,h)$.

簡言之,凡一與平面之角均可放在某與半線之一側,且其置法限於一.

IV, 5. 若(h,k)角合同於(h',k')角,且合同於(h'',k'')角,則(h',k')角亦必合同於(h'',k'')角;卽

設$\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$,且$\angle(h,k)\equiv\angle(h'',k'')$,

則 $\angle(h',k')\equiv\angle(h'',k'')$.

定義. 設有一三角形 ABC 於此，發端於 A 而通過 B,C 二點之二半線命為 h,k，則 (h,k) 角名曰 AB 與 AC 二邊之夾角，或曰 BC 邊之對角. 此角之內部盡含有三角形 ABC 之內部諸點，普通以 $\angle BAC$ 或 $\angle A$ 表之。

IV, 6. 若兩三角形 ABC, $A'B'C'$ 間有三件合同關係

$$AB\equiv A'B',\quad AC\equiv A'C',\quad \angle BAC\equiv\angle B'A'C'$$

成立，則

$$\angle ABC\equiv\angle A'B'C',\ 及\ \angle ACB\equiv\angle A'C'B'$$

等合同關係亦確實.

公理類 IV 1—3 僅述及關於直線段之合同，故可稱為類 IV 之直線公理(*Linaer axiom*). 公理類 IV,4,5 則述及關於角之合同. 公理類 IV, 6 則述出線段合同與角之合同的結合關係. 後三公理述及平面幾何之要素，故可稱為類 IV 之平面公理 (*Plane axiom*).

§7. 合同公理之演論

定義. 設線段AB合同於線段$A'B'$. 因據公理IV, 1 線段AB合同於其本身,則據公理IV, 2 $A'B'$合同於AB; 卽若$AB \equiv A'B'$則$A'B' \equiv AB$. 故曰此二線段互相合同.

定義. 設$A, B, C, D, \cdots\cdots, K, L$爲直線$a$上一串之點,而$A' B' C' D', \cdots\cdots, K', L'$爲直線$a'$上一串之點;而其相對應各線段如$AB$與$A'B'$, AC與$A'C'$, BC與$B'C'$, $\cdots\cdots$, KL與$K'L'$等各相合同;則此兩點串稱爲互相合同. A與A',B與B',$\cdots\cdots$,L與L'等稱爲此二合同點串之相對應點(*Corresponding points*).

由直線的公理IV, 1–3可導出以下諸定理:

定理 9. 設$A,B,C,D,\cdots\cdots K,L$,與$A',B',C',D',\cdots\cdots,K',L'$,爲二合同點串. 若前串之排列法爲「$B$介乎$A$與$C,D,\cdots\cdots K,L$,之間,$C$介乎$A,B$與$D,\cdots\cdots,K,L$,之間等等」則後串亦必排成相似之順序,卽「$B'$介乎$A'$與$C',D',\cdots\cdots,K',L'$,之間,$C'$介乎$A',B'$與$D',\cdots\cdots,K',L'$之間等等」.

定義. 設(h,k)角合同於(h',k')角. 因據公理IV,4

(h,k)角合同於其本身,則依公理IV,5 (h',k')角必合同於(h,k)角;故曰此(h,k)及(h',k')兩角互相合同.

定義. 二角共一頂點,且有一邊公共而其不公共之邊合成一直線者,名曰補角(*Supplementary angles*).

二角共一頂點,而其邊合成二直線者,名曰對頂角(*Vertical angles*). 角之合同於其補角者,名曰直角(*Right angle*).

兩三角形ABC,$A'B'C'$若有

$$AB\equiv A'B',\quad AC\equiv A'C',\quad BC\equiv B'C',$$

$$\angle A\equiv\angle A,\quad \angle B\equiv\angle B',\quad \angle C\equiv\angle C'$$

諸合同關係成立時,則稱爲互相合同.

定理 10. (三角形合同定理第一) 若兩三角形ABC及$A'B'C'$有

$$AB\equiv A'B',\quad AC\equiv A'C',\quad \angle A\equiv\angle A'$$

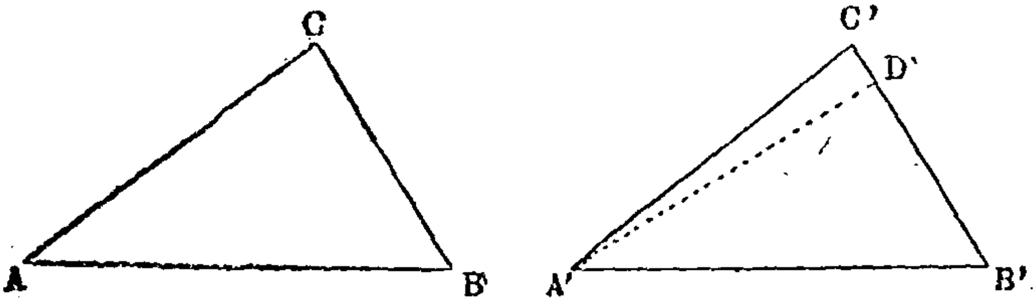
等合同關係時,則兩三角形互相合同.

證. 由公理IV,6可知

$$\angle B\equiv\angle B' \text{ 且 } \angle C\equiv\angle C'$$

二合同關係合理,且有此即足以證明BC與$B'C'$二邊相合同. 請先假設其反定理成立,即謂BC與

$B'C'$ 不相合同,繼證其自相矛盾. 若 $B'C'$ 上取 D' 點,令 $BC \equiv B'D'$. ABC 與 $A'B'D'$ 兩三角形之二邊及其夾角彼此互相合同. 但據公理 $IV, 6$ $\angle BAC$ 與



第九圖

$\angle B'A'D'$ 亦應互相合同,則依公理 $IV, 5$ $\angle B'A'C'$ 與 $\angle B'A'D'$ 必相合同. 然據公理 $IV, 4$ 一角放在某平面某與半線之一側,其置法僅限於一,則可證其爲不合理. 有此矛盾而本定理證明矣.

定理 11. (三角形合同定理第二) 兩三角形中若有一邊及其二鄰角彼此互相合同,則該兩三角形互相合同.

此定理可仿前法證明之.

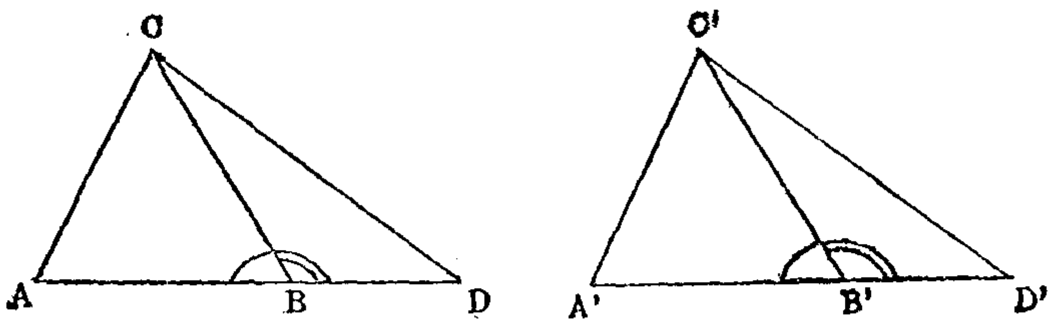
茲再述一緊要定理於下:

定理 12. 若兩角 ABC 與 $A'B'C'$ 互相合同,則其

補角CBD與$C'B'D'$亦互相合同.

證. 於過B'點之各邊上取A',C',D'諸點,令

$$A'B'\equiv AB,\quad C'B'\equiv CB,\quad D'B'\equiv DB.$$



第十圖

則在兩三角形ABC與$A'B'C'$中,AB及BC兩邊各合同於$A'B'$及$B'C'$兩邊. 但因其夾角亦各相合同(假設),故由定理10知該兩三角形互相合同;而可得

$$AC\equiv A'C',\quad \angle BAC\equiv\angle B'A'C'$$

諸合同關係. 又因準公理IV,3線段AD與$A'D'$互相合同,故仍由定理10而知三角形CAD與$C'A'D'$互相合同,而自然可得

$$CD\equiv C'D',\quad \angle ADC\equiv\angle A'D'C'$$

諸合同關係. 由此諸合同關係而觀察BCD與$B'C'D'$兩三角形,則由公理IV,6可知CBD角與

$C'B'D'$ 角互相合同.

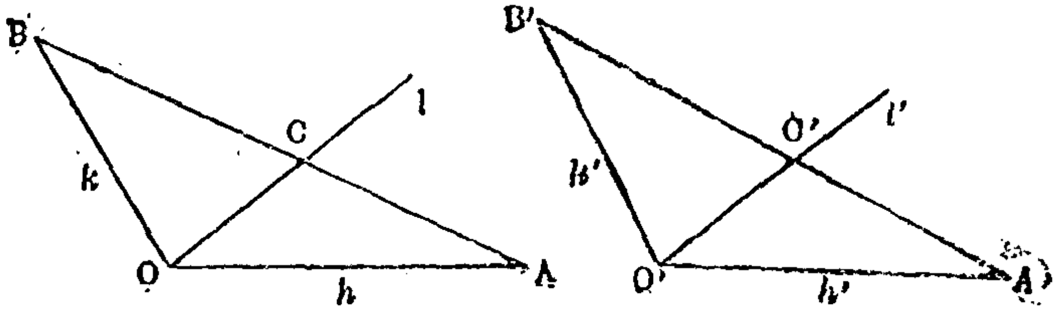
關於對頂角相合同之定理,即可由定理12推得.

定理13. 設平面 α 上 (h,k) 角與平面 α' 上 (h',k') 角相合同,且設 l 為平面 α 上發端於 (h,k) 角之頂而在該角內部之一半線. 則在平面 α' 上恆必有一半線 l' 發端於 (h',k') 角之頂而在該角之內部,而令

$$\angle(h,l)\equiv\angle(h',l'),\quad \angle(h,l)\equiv\angle(h',l')$$

證. 設 (h,k) 角之頂為 O, (h',k') 角之頂為 O',而於 $h,k,k'k'$,各邊上順次選擇 A,B,A',B' 各點,令

$$OA\equiv O'A',\quad OB\equiv O'B'.$$



第十一圖

則由 OAB 與 $O'A'B'$ 三角形之兩合同. 而得

$$AB\equiv A'B',\quad \angle OAB\equiv\angle O'A'B',\quad \angle OBA\equiv\angle O'B'A'.$$

設直線 AB 與 l 交於 C. 於線段 $A'B'$ 上取 C' 點,令 $A'C'\equiv AC$, 則 $O'C'$ 即為所求之半線. 蓋因據公

理 IV,3 由前者諸合同關係可得 $BC\equiv B'C'$. 申言之,三角形 OAC 與 $O'A'C'$ 彼此互相合同,而三角形 OBC 與 $O'B'C'$ 同樣亦彼此互相合同. 因此本定理可以證明矣.

同樣可得下之定理:

定理 14. 設 h,k,l 爲同平面同原點之三半線, h',k',l' 亦爲同平面同原點之三半線,——若* h 在 (k,l) 角之內部(或外部)則 h' 亦在 (k',l') 角之內部(或外部). 若

$$\angle(h,l)\equiv(h',l'),\quad \angle(k,l)\equiv\angle(k',l')$$

兩合同關係成立時,則

$$\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$$

合同關係亦能成立.

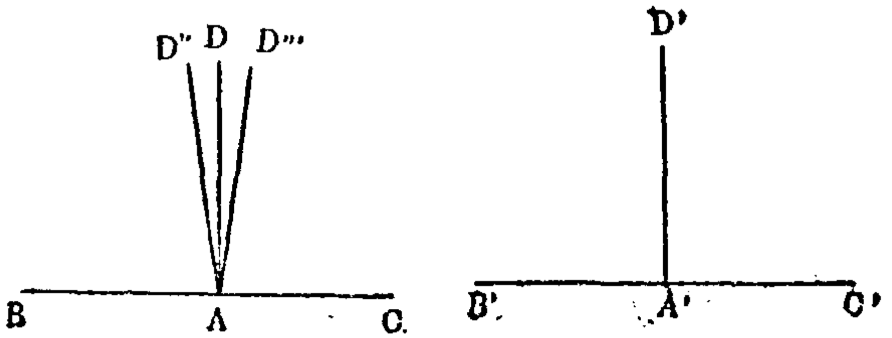
由定理12與13可以證明下述之簡單重要定理. 此定理 *Euclid* 置爲公理,著者殊不謂然.

定理 15. 凡直角均互相合同.

---

*內外部之限制,湯譯及林譯均無之,茲特嚴格限定.

證. 設BAD角與其補角CAD合同,$B'A'D'$角與其補角$C'A'D'$合同. 則BAD,CAD,$B'A'D'$,$C'A'D'$四角皆爲直角. 今暫假定直角BAD不與直角$B'A'D'$合同,然後再證其誤謬. 試還置$\angle B'A'D'$於半線



第二圖

AB之一旁(成BAD''角)令其他邊AD''落在$\angle BAD$內,或在$\angle CAD$內. 假如在$\angle BAD$內,則因$\angle BAD''$與$\angle B'A'D'$合同,其補角(由定理12)$\angle CAD''$與$\angle C'A'D'$亦必互相合同. 但$\angle B'A'D'$與$\angle C'A'D'$互相合同,故由公理IV,5 $\angle BAD''$必合同於CAD''. 然又因$\angle BAD$合同於$\angle CAD$,而由定理13必可於CAD角之內求得一半線AD'''發端於A,以令$\angle BAD''$合同於$\angle CAD'''$而$\angle DAD''$亦合同於$\angle DAD'''$. $\angle BAD''$旣合同於$\angle CAD''$,而由公理

$IV,5$ $\angle CAD''$亦必合同於$\angle CAD'''$. 但此不能有效,因按公理$IV,4$一角還置於一半線之一側其置法限於一. 故其反定理$\angle BAD$合同於$\angle B'A'D'$證明矣.

至此可以引用平時所謂銳角(*Acute angle*)鈍角(*Obtuse angle*)等名詞矣.

關於二等邊三角形底角之合同,及等邊三角形各角之合同等等;均可應用公理$IV,6$證明之. 用此定理及定理14更易證明下之定理.

定理 16. (三角形合同定理第三)若三角形之三邊與零一三角形之相對三邊彼此互相合同時,則兩三角形互相合同.

定義. 任意有限個點總名之曰圖形(*Figure*).

如其中各點同在一平面上,則名之曰平面圖形(*Plane figure*).

若兩圖形之各點排成「一對一的關係」,即線段與線段,角與角,在任何情形之下,彼此均互相合同,則該兩圖形稱為互相合同.

參考定理9及12即得兩合同圖形之性質如下:

(*i*)一圖形中有三點在一直線上,而在與該圖形合同之圖形中,亦有三對應點在一直線上. (*ii*)兩合同圖形中,對應平面上之各對應點關於對應直線之排列順序應當一樣. (*iii*) 對應直線上各對應點之順序亦應一樣.

茲述關於平面上及空間中之普遍的重要合同如下:

定理 17. 若$(A,B,C,\cdots\cdots)$與$(A',B',C',\cdots\cdots)$爲兩合同平面圖形,P爲前平面上之一點,而後平面上必可得一點P'能使$(A,B,C,\cdots\cdots,P)$與$(A',B',C',\cdots\cdots,P')$成合同圖形. 若此兩圖形至少各含有三點不在一直線上,則選擇P'點時,其法僅限於一.

定理 18. 若$(A,B,C,\cdots\cdots)$與$(A',B',C',\cdots\cdots)$爲兩合同的空間圖形,P爲任意一點,則必可得一點P',能使$(A,B,C,\cdots\cdots,P)$與$(A',B',C',\cdots\cdots,P')$兩圖形亦互相合同. 若$(A,B,C,\cdots\cdots,P)$圖形至少含有四點不在一平面上,則選擇$P'$點時,其法僅限於一.

由此定理觀之,關於空間內各種合同事件(或曰空間變位事件)均可由公理類 *IV* 所述之直線的

與平面的公理(或更以類 I 類 II 補助之)誘導出之.

故欲求解決此等問題,實無須假設平行公理.

若平行公理與合同公理二者兼用,則又可產出以下二重要定理.*

定理 19. 若二平行線為一直線所截,則其錯角合同,同位角亦合同. 逆之,若錯角合同或同位角合同,則該兩與線平行.

定理 20. 三角形內角之和等於二直角.

定義. 設 M 為平面 α 上任意一定點,則平面 α 上所有之各點 A,而各點與 M 所成之線段 MA 彼此均互相合同者,用類舉之法總名之曰圓(*Circle*). M 點稱為該圓之圓心(*Centre*). 圓之定義既如上述,則凡圓之重要性質如過不在一直線上之三點可作一圓,圓內同一線段所含之角各相合同,以及關於內接四邊形各角之定理等皆可由公理 III, IV 得之.

---

*林譯平行公理置於合同公理之後,故將此二定理亦置於平行公理之後.

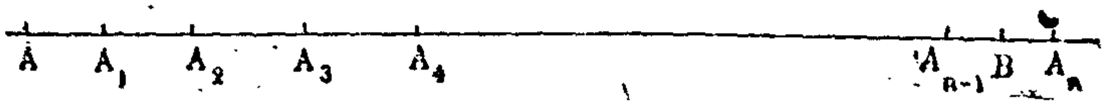
§8. 類V. 連續公理(亞幾默德公理)

此公理可將連續之觀念引入幾何中. 欲述明此公理,須先說明線段"相等"之意義. 此意義或根據於合同公理,而認合同線段爲"相等". 或根據於"聯結""順序"諸公理之觀念,而用適宜方法(參看第五章§24),以定怎樣從一直線上之一點起,置放一線段於該線上,而署得一新的且一定的線段與之相等. 有此定義而亞幾默德公理可述如下:

V. 設 A, B 爲一直線上任意二選點,A_1 爲 A, B 間之任一點. 更於此直線上取 $A_2, A_3, A_4, \cdots\cdots$ 等點令 A_1 介乎 A 與 A_2 之間,A_2 介乎 A_1 與 A_3 之間,A_3 介乎 A_2 與 A_4 之間等等. 且設

$$AA_1,\quad A_1A_2,\quad A_2A_3,\quad A_3A_4,\quad \cdots\cdots$$

諸線段互相等. 則諸點之中又有一點 A_n,令 B 點介乎 A 與 A_n 之間.



第十三圖

亞幾默德公理乃直線的公理也.

〔附論〕於上述五類公理以外,尚可加下之完備公理(*Axiom of Completeness*). 此公理雖不純屬幾何性質,然頗足起人理論方面之注意. 述之如下:

完備公理. 於點,直線,平面一組幾何原素之外,不能別加其他原素以組成服從五類公理之幾何. 換言之,若五類公理必求全體成立,則三種原素之外無復擴充之可能.

本完備公理並未嘗與吾人以極限點(*Limiting Points*)或收斂(*Convergency*)存在之觀念. 惟吾人借此可以證明伯爾贊歐氏定理(*Bolzano's theorem*),而根據此定理可謂一直線兩定點間所含各點必須有一集密點(*Point of Condensation*)即極限點存在. 故從理論方面觀念之,本公理之價值實在間接可以導出極限點,且因之可使線段各點與實數系間之一對一關係(*One-to one correspondence*)成立云. 惟以下各章並未用及此完備公理耳.*

*參看第三章末.

第二章

公理之互相諧和及互相獨立

§9. 公理之互相諧和

前章所論五類公理彼此無相矛盾者;換言之,根據該公理,依論理學的推論方法所得之定理,不至與該公理之任一致生矛盾現象也. 欲證明此說,但創造一種幾何學但能適合此五類公理足矣.

欲達此種目的,先考一數圍Ω. 凡發端於1而用加減乘除四則及第五算法$\sqrt{1+\omega^2}$(此中ω亦係用此五法而得者)若干次(有限次)而得之各數,總屬於數圍Ω. 試將數圍Ω中一對之數(x,y)視爲一點而將其中三數之比$(u:v:w)$而u,v不同時等於零視爲一直線. 更以方程式

$$ux+vy+w=0$$

之成立爲表示(x,y)點在$(u:v:w)$直線上之條件. 則類I 1-4及類III各公理皆能符合,可以概見. 因爲凡數圍Ω中各數均是實數,故有大小可以比較. 若按其大小而排列之,則關於點及直線可令

順序公理(類 II)成立. 設 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),\cdots\cdots$ 爲一直線上之任何點,則該各點在直線上之次序必依 $x_1, x_2, x_3,\cdots\cdots$ 或 $y_1, y_2, y_3,\cdots\cdots$ 之次序(依次遞大或遞小)而定. 欲說明平面的順序公理 $(II, 5)$,可設 (x,y) 點. 凡 x,y 兩值能令 $ux+vy+w$ 小於零者在直線 $(u:v:w)$ 之一側,反之其令 $ux+vy+w$ 大於零者在該直線之他一側. 此種說法亦依照上述定點在直線上之說法而來,乃吾人所深足自信者也.

線段與角度之遷置可用解析幾何之方法以平移合旋轉說明之. 形化法(*Transformation*)

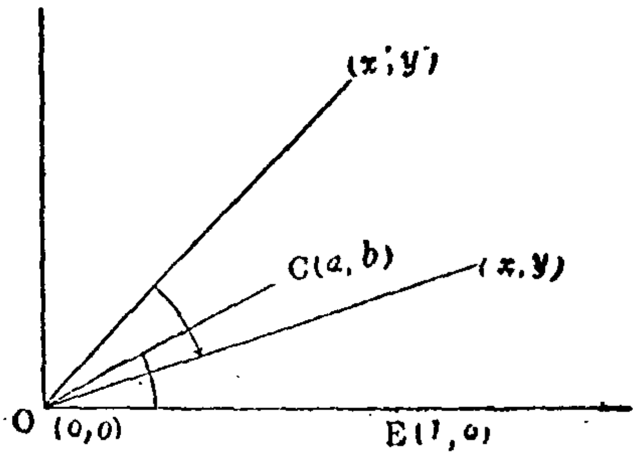
$$x'=x+a$$

$$y'=y+b$$

卽可令線段與角度平移. 設以 O 表 $(0,0)$ 點,以 E 表 $(1,0)$ 點,c 表 (a,b) 點. 則以 O 爲中心,旋轉一角度 COE 時,任一點 (x,y) 必形化爲 (x',y') 點,而其關係

$$x'=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y,$$

$$y'=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y.$$



第十四圖

但因 $$\sqrt{a^2+b^2}=a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

為屬於數圍 Ω 之數,故依以上之規定,合同公理(類 IV)完全適合. 連續公理同樣亦可完全適合.

由此觀之,由諸公理所生矛盾,同時亦必出現於關於數圍 Ω 之算術上. 算術無誤則公理不矛盾矣.

關於空間幾何之研究,不難仿此為之.

數圍 Ω 既可適用於公理 I——V 而如上所述矣.

設將數圍 Ω 擴充為實數圍,亦未嘗不能適用;然茲篇所論僅用數圍 Ω (數之一部分非數之全體)已足矣.

§10. 平行公理之獨立(非歐幾里特幾何)

各類公理之不相矛盾,既如前所述矣,而其各自獨立之研究亦頗有趣.實言之,其中各公理無一能用論理的推論方法由其餘各公理導出者.

公理類 I, II, IV 每類中各個公理雖關係密切,然欲證其互相獨立,至爲易易.

如以公理類 I, II 爲其餘公理之基礎,則足證明 III, IV, V 各類公理互相獨立.

平行公理之第一層意義「在一平面 α 上,經過直線 a 外之一點 A 可作一直線不令與 a 相交」可用類 I, II, IV 諸公理說明之.連結一與點 A 及直線 a 上之任意一點 B.設 C 爲直線 a 上之他一點.於 AB 之 A 點作一角令等於 ABC 角而使與 C 點在同一平面上,但與 C 在 AB 之異側.如此過 A 之直線不能與 a 相遇.因爲假使能以相交,譬如交於 D,且設 B 在 C 及 D 之間,則於 a 上必可尋一點 D' 而令 B 點居於 D 及 D' 之間,且令　$AD' \equiv BD'$.

因有三角形 ABD 及 BAD' 之合同,則

$$\angle ABD \equiv \angle BAD',$$

然 ABD' 角及 ABD 角相補則由定理12可知 BAD 角及 BAD' 角亦相補．但此不能成立,因由定理1兩線相交不能多過一點,若 BAD 角與 BAD' 角相補恰有此種情形．

平行公理之第二層意義則與其他公理互相獨立矣．觀下述情形,卽顯然可見．取普通幾何中之所謂點,直線,平面,如§9所論者作爲空間幾何之要素且限在定球之內部者．線段及角之轉遷亦用一次形化法 (*Linear transformation*) 與普通幾何同,惟其形化乃定球之自爲移轉耳．如此所規定之非歐幾里特幾何 (*Non-Euclidean geometry*) 除歐幾里特公理(類 III)外其餘四類均能適用．普通幾何之可能前已成立;今非歐幾里特幾何之可能亦爲以上觀察所應得之結果．然則平行公理之獨立益彰明矣．

§11. 合同公理之獨立

合同公理亦係獨立．今先說明(公理 IV, 6 或由該公理所導出之定理10(三角形合同定理第一)不能由其餘各公理 $I, II, III, IV, 1-5, V$ 用論理的

推論方法誘導出之]之理．即以普通幾何之點,直線,平面爲新空間幾何之要素;且角之遷置亦同於普通幾何如§9所論者．惟線段之移置則須零法表示之．設(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)代表A_1, A_2兩點,其坐標函數

$$\sqrt{(x_1-x_2+y-y_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_1)^2}$$

之正值認爲線段A_1A_2之長．若A_1A_2及$A'_1A'_2$兩線段按此意義其長相等,則謂之合同.

此新幾何之能適用公理I, II, III, IV 1–2, 4–5, V固顯而易見.

欲證明公理$IV3$亦適合．命A_1, A_2, A_3爲任一直線a上之點,而A_2居於A_1, A_3之間．又命a上任一點之x, y, z等於下式

$$x=\lambda t+\lambda',$$

$$y=\mu t+\mu',$$

$$z=\nu t+\nu',$$

此中$\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$各表一定常數(*Constant*),而$t$爲襄變數(*Parameter*)．若$t_1$, $t_2(<t_1)$, t_3, $(<t_2)$爲與A_1, A_2, A_3三點相當之襄變數,則線段A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3之長依次等於

$$(t_1-t_2)\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\mu^2+\nu^2}\right|,$$

$$(t_2-t_3)\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\mu^2+\nu^2}\right|,$$

$$(t_1-t_3)\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\mu^2+\nu^2}\right|.$$

因之,A_1A_3之長恰等於A_1A_2及A_2A_3二線段之長之和. 雖然,公理$IV6$於此新幾何中則未必安然無恙也. 欲實斯言,可設法直接推翻公理$IV6$,或間接推翻由公理$IV6$演繹而出之合同定理第一

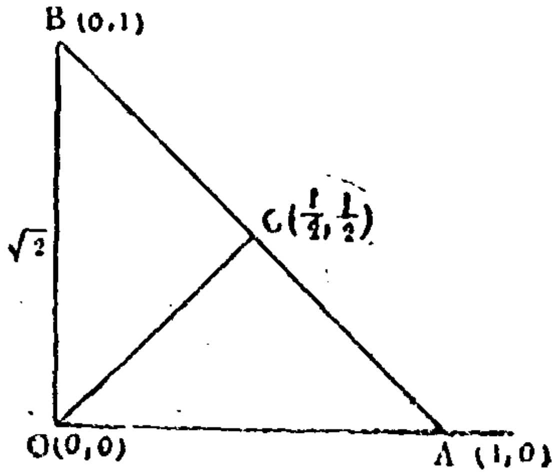
例如在平面$z=0$上取四點

O,其坐標$x=0, y=0$,

A,其坐標$x=1, y=0$,

B,其坐標$x=0, y=1$,

C,其坐標$x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$.



第　十　五　圖

在兩直角三角形OAC及OBC內在C點之兩角及

鄰邊AC, BC均相合同,因OC爲其公共邊而AC及BC均等於$\frac{1}{2}$. 然而OA等於1, OB等於$\sqrt{2}$,則不能相合同矣. 是合同定理第四無效也.

在此種新幾何中欲求兩三角形使與公理IV,6不適合,決非難事.

§12. 連續公理之獨立(非亞幾默德幾何)

欲證明亞幾默德公理之獨立,但創一種幾何除此公理之外其餘均能適用足矣.

今造一數圑$\Omega(t)$,其中各數皆係t之代數函數而可用加減乘除四則及第五算法$\sqrt{1+\omega^2}$(此中ω亦爲由此五法所成之函數)由t得之者. 數圑$\Omega(t)$之原素與前此之數圑Ω同,亦僅數之一部分耳. 由上述五法不至產生虛數(*Imaginary*)且僅可有一種算法. 故數圑$\Omega(t)$中僅含t之實數單值函數云.

設c爲數圑$\Omega(t)$中之任一函數. 因c爲t之代數函數,故使c等於零之t之值必爲有限個數;過此,而令t十分增大則c必常爲正或常爲負.

試將數圑$\Omega(t)$中之各函數視爲一種複素數

(Complex number).此系複素數均適用於尋常演算規則. 若a, b爲此系中二數,則a之大於b ($a>b$)或小於b($a<b$)恆視t之值十分增大時$c=a-b$之常爲正或常爲負而定. 本系之數比較大小之法旣已制定,則可仿排列實數之法而按其大小依次排列之. 又本系不等式之兩方均加以或乘以大於零之同數或等數其關係如故.

若n爲任意有理正整數,數團$\Omega(t)$中之n, t二數,不等式$n<t$定可成立;蓋其差$n-t$可視爲t之函數,當t十分增大時,$n-t$常爲負也. 此種情形自他方面觀之則可謂:數團$\Omega(t)$中1及t兩數均大於零,具有一種特性「前者之任何倍數常小於後者」.

用此種複素數仿§9之辦法亦可造出一種幾何.

卽將數團$\Omega(t)$中之三數$(x, y, z,)$爲一點,而將四數之比$(u : v : w : r)$而u, v, w不同時均等於零視爲平面而

$$xu+yv+zw+r=0$$

之關係之成立爲表示(x, y, z)點在平面$(u : v : w : r)$上之條件. 二平面公有各點之全體爲直線. 關於原素之排列及角和線段之遷移,可仿§9之規定

法,而創立一種非亞幾默德幾何,(*Non-Archimedean geometry*),在此種幾何中,前述公理除亞幾默德公理以外無不適合。蓋因遷移線段1於線段t上可至任若干次而不達線段之末端,此即與亞幾默德公理相矛盾矣。

第三章
比例論

§13. 複素數組織

玆為以後便於討論計,於本章開始特將複素數組織之概念切實預備一番.

實數總成一系有下列各性質:

結合定理(1–6)

1. 由一數 a 與一數 b 用加法可得另一數 c,用式表之則

$$a+b=c \text{ 或 } c=a+b.$$

2. 有一數名0(零)存在,對於任何數 a 恆有下列之關係,

$$a+0=a, \text{ 且 } 0+a=a.$$

3. 設有 a,b 二數於此,則必有亦僅有一個 x,一個 y 對於 a,b 有下列關係.

$$a+x=b, \quad y+a=b.$$

4. 由一數 a 與一數 b 相乘可另得一數 c,用式表之.則

$$ab=c \text{ 或 } c=ab.$$

5. 有一數名 1 存在,對於任何數 a 恆有下列之性質.

$$a1=a \text{ 且 } 1a=a.$$

6. 設 a, b 爲任意二數,而 a 非 0(零)則必有且亦僅有一個 x,一個 y,對於 a, b 有下列關係.

$$ax=b, \quad ya=b.$$

計算定律(7—12)

若 a,b,c 爲任意三數,下列計算律常能適合:

7. $a+(b+c)=(a+b)+c$.(加法之結合定律)

8. $a+b=b+a$.　(加法之交換定律)

9. $a(bc)=(ab)c$.　(乘法之結合定律)

10. $a(b+c)=ab+ac$.　(乘法之分配定律第一)

11. $(a+b)c=ac+bc$.　(乘法之分配定律第二)

12. $ab=ba$.　(乘法之交換定律)

順序定理(13—16)

13. 若 a, b 爲相異二數,而一數(譬如 a)大於 $(>)$ 他一數,則第二數稱爲二數中之小者. 此種關係恆以下式表之.

$$a>b,\quad b<a.$$

14. 若 $a>b$ 且 $b>c$, 則 $a>c$.

15. 若 $a>b$, 則 $a+c>b+c$ 而 $c+a>c+b$.

16. 若 $a>b$, 且 $c>0$ 則 $ac>bc$ 而 $ca>cb$.

連續定理(17)

17. (亞幾默德定理) 設 a, b 為任意二數而 $a>0$ 且 $b>0$ 則將 a 逐次增加必可至適當次數而令

$$a+a+a+\cdots\cdots+a>b.$$

凡事物之組織僅具上列性質(1–17)之一部分者稱為複素數組織 (*Complex number system*) 或簡稱曰數之組織 (*Number system*). 數組織之適合條件(17)者稱為亞幾默德的數組織; 否則稱為非亞幾默德的數組織.

上述諸性質(1–17)非各各獨立者也. 研究此種性質之論理的根據, 已成重要問題. 惟其在幾何之重要, 故於第六章 § 32,33 特述其兩條答案, 本章暫且不論. 本章僅使人注意於條件(17)並非前列諸條之演論而為超然獨立者也. 如 §12 所述數系 $\Omega(t)$ 備具(1–16)諸性質而獨與(17)相反, 此

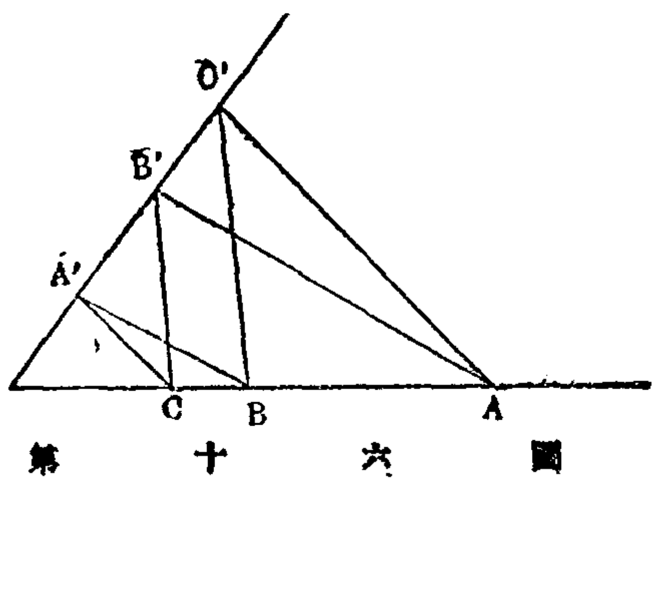
其例也.

§14. 巴斯開定理之證明

本章及下章皆僅以平面公理 $I1-4$, II, III, IV' 爲根據而立論,既不涉及空間,更特除開亞幾默德公理. 本章卽用此等公理以解釋歐幾里特之比例理論,換言之,卽除開亞幾默德公理而僅在平面上研究比例理論 (*Theory of proportion*) 也.

爲討論歐幾里特比例理論故,特先證明一緊要定理. 此定理不過圓錐曲線論中著名之巴斯開定理 (*Theorem of Pascal*) 之一特例耳. 玆爲便利起見,卽簡稱此爲巴斯開定理. 該定理如下:

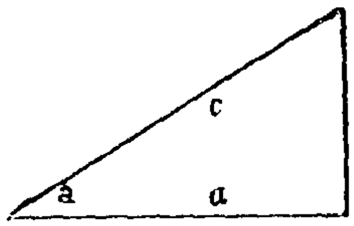
定理 21. (巴斯開定理)設有 A, B, C 及 A', B', C' 兩組之點分排於兩相交直線上,而無一在其交點者. 若 CB' 平行於 BC' 且 CA' 平行於 AC', 則 BA' 必平行於 AB'.



第十六圖

在着手證明此定理之先,特陳述一種記法. 在直角三角形,斜邊(弦)c 與斜角 α 定,則底邊 a 亦可因之而定. 此事實簡單表之爲 $a=\alpha c$.

故如果 α 爲銳角,c 爲線段,則 αc 亦常表一定線段.



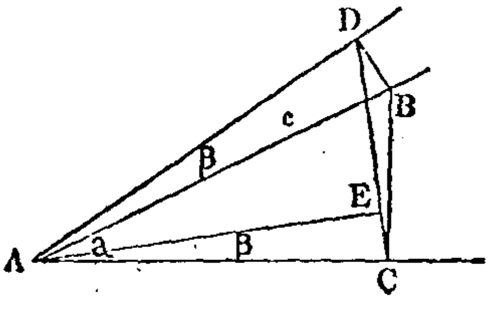
第十七圖

且若 c 爲任意線段,α,β 爲任意二銳角,則 $\alpha\beta c$ 與 $\beta\alpha c$ 永爲合同線段,卽

$$\alpha\beta c\equiv\beta\alpha c.$$

而 α 與 β 二記號可以互換云.

欲證明之,取線段 $c=AB$, 以 A 爲頂點,將 α 角移置於 AB 之一側而將 β 角移置於他側. 從 B 作 BC 垂直於 α 角之他邊,作 BD 垂直於 β 角之他邊. 連結 CD, 再從 A 點作 AE 垂直於 CD.



第十八圖

因 $\angle ACB$ 及 $\angle ADB$ 均爲直角,故 A,C,B,D 四點在同一圓上. $\angle ACD$ 及 $\angle ABD$ 爲立於同弧之圓周

角,互相合同. 但 $\angle ACD$ 與 $\angle CAE$ 相加等於一直角,而 $\angle ABD$ 與 $\angle BAD$ 相加亦等於一直角,故 $\angle CAE$ 及 $\angle BAD$ 亦互相合同. 即

$$\angle CAE=\beta.$$

所以 $$\angle DAE=\alpha.$$

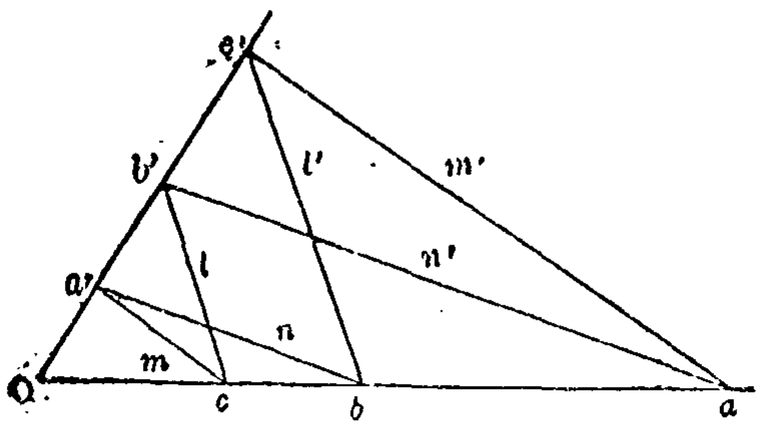
由是可得諸線段之合同關係如下:

$$\beta c\equiv AD,\qquad \alpha c\equiv AC,$$

$$\alpha\beta c\equiv\alpha(AD)\equiv AE,\qquad \beta\alpha c\equiv\beta(AC)\equiv AE.$$

觀此,則 $\alpha\beta c\equiv\beta\alpha c$ 合同式之正確完全證明矣.

今仍就巴斯開定理之圖形論之. 命二直線之交點為 O,其 $OA, OB, OC, OA', OB', OC', CB', BC', CA',$



第十九圖

AC', BA', AB',各線段依次以 $a, b, c, a', b', c', l, l', m, m',$

n, ν'代表之．從O作l, m, n之垂線．l之垂線與OA'，OA成兩銳角，以λ, λ'表之．同樣在m, n之垂線與OA'，OA亦各成銳角，以μ, μ'及ν, ν'表之．如前法以底角及斜邊定此等垂線，則有以下諸合同式：

(1) $$\lambda b' \equiv \lambda' c.$$

(2) $$\mu a' \equiv \mu' c.$$

(3) $$\nu a' \equiv \nu' b.$$

但由假設l與l'平行，m與m'平行，故由O所作l', m'之垂線必與由同點所作l, m之垂線一致，而得

(4) $$\lambda c' \equiv \lambda' b,$$

(5) $$\mu c' \equiv \mu' a.$$

合同式(3)之兩邊各以$\lambda' \mu$乘之，更遵前理而調換其中記號之位置得

$$\lambda \lambda' \mu a' \equiv \nu' \mu \lambda' b.$$

此合同式左側之$\mu a'$，由(2)式可以$\mu' c$代之，右側之$\lambda' b$由(4)式可以$\lambda c'$代之，則得

$$\nu \lambda' \mu' c \equiv \nu' \mu \lambda c',$$

或 $$\nu \mu' \lambda' c \equiv \nu' \lambda \mu c'.$$

而在此合同式中，由(1)式可以$\lambda b'$代$\lambda' c$，由(5)式可

以 $\mu'a$ 代 $\mu c'$,乃得

$$\nu\mu'\lambda b'\equiv\nu'\lambda\mu'a,$$

或
$$\lambda\mu'\nu b'\equiv\lambda\mu'\nu'a.$$

準此等記號之意義,上式可以一變而爲

$$\mu'\nu b'\equiv\mu'\nu'a.$$

再變而爲

(6) $$\nu b'\equiv\nu'a.$$

試觀從 O 所引 n 之垂線,並從 A 及 B' 引二垂線垂直於該線,則合同式(6)可以證明由 A 及 B' 點所作垂線之足相合;卽直線 $n'=AB'$ 與 n 之垂線成一直角;故 n' 亦必平行於 n. 是足證明巴斯開定理之眞矣.

此定理倘可證之如下:

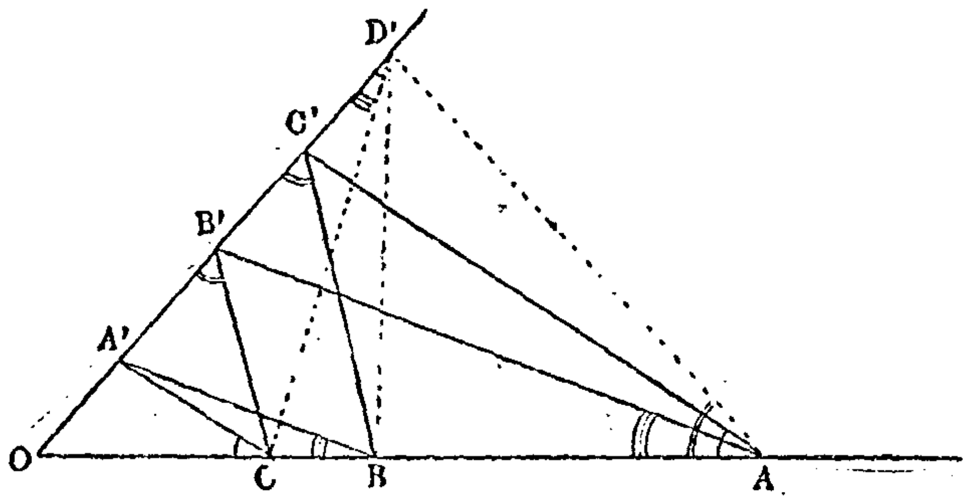
從 B 點引一直線截 OA' 於 D' 令合同式

(1') $$\angle OCA'\equiv\angle OD'B$$

成立. 按圓之著名性質, $CBD'A'$ 爲圓內接四邊形,其結果由立於同弧之角合同而得

(2') $$\angle OBA'\equiv\angle OD'C.$$

然據假設 CA' 與 AC' 平行,故



第二十圖

(3′) $\angle OCA' \equiv \angle OAC'$.

由(1′)及(3′)得合同式

$$\angle OD'B \equiv \angle OAC'.$$

又因 $BAD'C'$ 亦爲圓內接四邊形,由外角與內對角相等之合同定理得

(4′) $\angle OAD' \equiv \angle OC'B$.

但據假設 CB' 平行於 BC',故又

(5′) $\angle OB'C \equiv \angle OC'B$.

由(4′)及(5′)得合同式

$$\angle OAD' \equiv \angle OB'C.$$

此可證明 $CAD'B'$ 亦爲一圓內接四邊形,故合同式

(6′) $\angle OAB' \equiv \angle OD'C$

成立. 由(2′)及(6′)卽得

$$\angle OBA' \equiv \angle OAB',$$

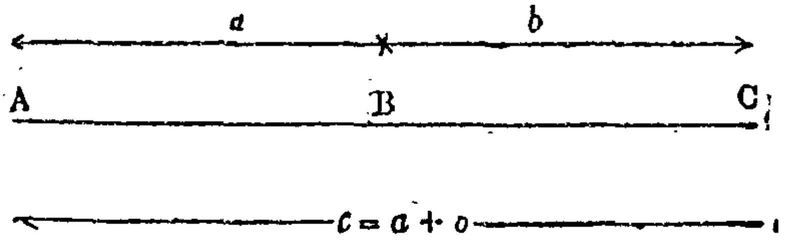
此可證明BA'與AB'平行,正合巴斯開定理之需求.

在特別情形若D'點與A',B',C'三點中之一點相合,則法則上必加以修正,然並非難事,茲不具論.

§15. 根據巴斯開定理之線段計算法

前節所述巴斯開定理適足爲吾人計算線段之基礎,由此導出之線段計算法,可以適用一切算術中定則云.

以前所用術語「合同」及記號$\equiv$,在線段計算法中,改用術語「等」及記號$=$.



第二十一圖

若A, B, C爲同一直線三點,而B居於A與C之間,則$c=AC$稱爲線段$a=AB$與線段$b=BC$之和. 以式表之則

$$c=a+b.$$

線段a, b謂之小於線段c. 以式表之則

$$a<c,\quad b<c.$$

換言之,c謂之大於a及b. 以式表之則

$$c>a,\quad c>b.$$

上之線段加法定義,根據直線的合同公理(類IV1-3)之理論,可知結合定律(*Associative law*)

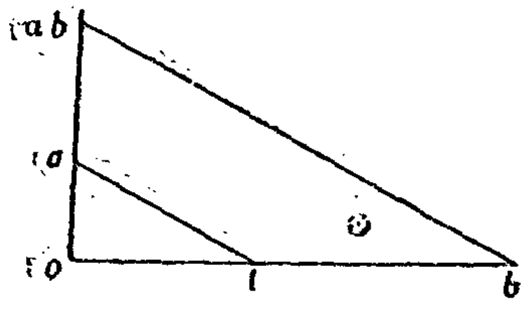
$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

及交換定律(*Commutative law*)

$$a+b=b+a$$

皆能適用於線段加法.

二線段a', b相乘之定義,可用下作圖法證之.先任取一線段,以1表之,初取時任意,既取後則終篇一定不變.



第二十二圖

於一直角之一邊,從頂點O起,置線段1及b. 再從O置線段a於直角之他一邊. 以直線連結1與a之端點,並由b之端點作直線平行

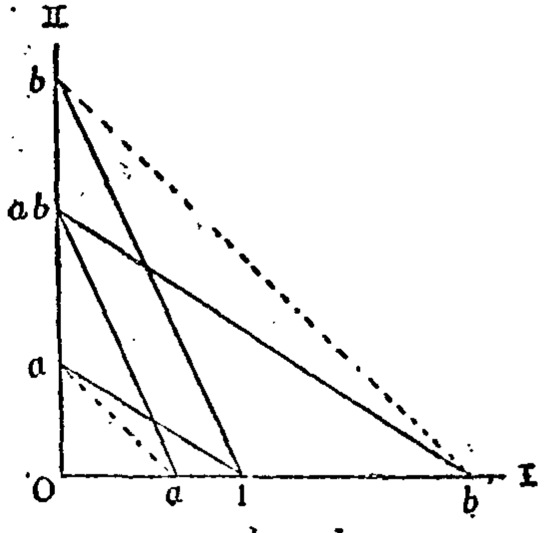
於此連結線. 則此平行線向該直角之他邊截取一線段 c. 線段 c 即可謂之為 a 與 b 之積. 其關係表示之如下:

$$c=ab.$$

如此定義之線段乘法亦適用交換定律

$$ab=ba$$

茲說明之如次. 先如前法作積 ab. 然後於直角之一邊(I)上取線段 a, 於他邊(II)上取線段 b. 將 1 之端點與(II)上 b 之端點以直線連之,從(I)上 a 之端點作直線平行於該線. 此平行線向(II)邊截取一線段



$ab=ab$

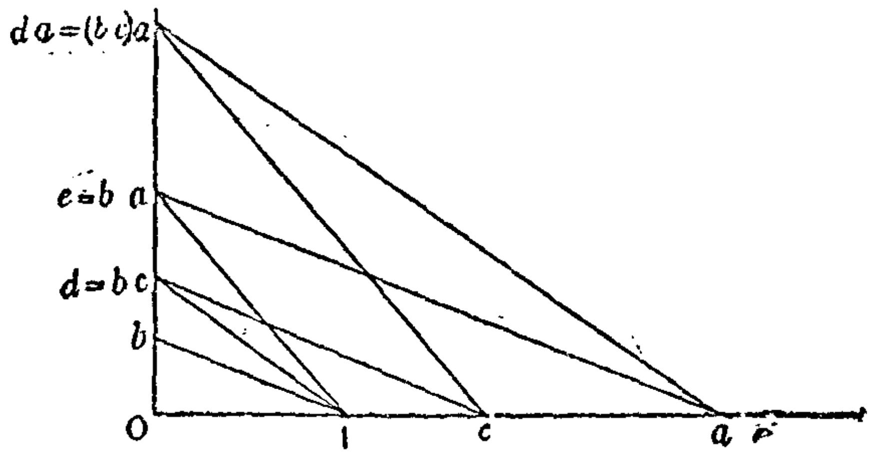
第二十三圖

ba, 與前相似. 但兩邊上兩 a 之端點之聯線原與兩 b 之端點之聯線平行(圖中點線)(蓋皆平行於 11 聯線也)故準巴斯開定理 ab 與 ba 二線段之端點一致,而相等.

欲證明結合定律

$$a(bc)=(ab)c$$

之適用於線段乘法，則先作線段 $d=bc$，次作 da，再作線段 $e=ba$，後作 ec。本巴斯開定理 da 及 ec 兩線



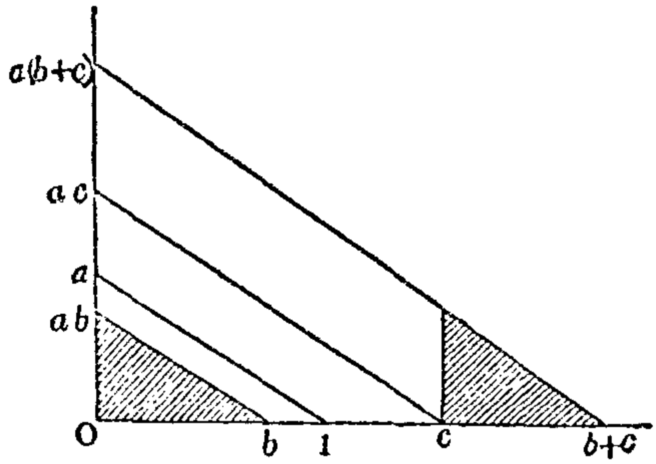
$$a(bc)=(ab)c.$$

第二十四圖

段之端點相重，由上圖一望而知之矣。若更應用交換定則，卽得兩線段相乘之結合定律之公式如上。

又分配定律 $a(b+c)=ab+ac$

亦適用於線段計算。試依前法作線段 ab, ac, $a(b+c)$，如圖所示。乃於 c 之端點引直線平行於直角之他邊。注意圖中用影標示兩直角三角形



$a(b+c)=ab+ac.$

第二十五圖

之全等及平行四邊形對邊之相等,而所求之證明得之矣.

設 b 與 c 爲任意二線段,則必有一線段 a 可令 $c=ab$. 如是之線段 a 名曰 b 除 c 之商,以 $\frac{c}{b}$ 表之.

§16. 比例及相似之定理

由前述線段計算,大足證明歐幾里特比例理論且可不用亞幾默德公理.

若 a,b,a',b' 爲任意四線段,則比例式

$$a : b=a' : b'$$

無非表示 $ab'=ba'$

之關係而已. 申言之,吾人即以後者定前者之義

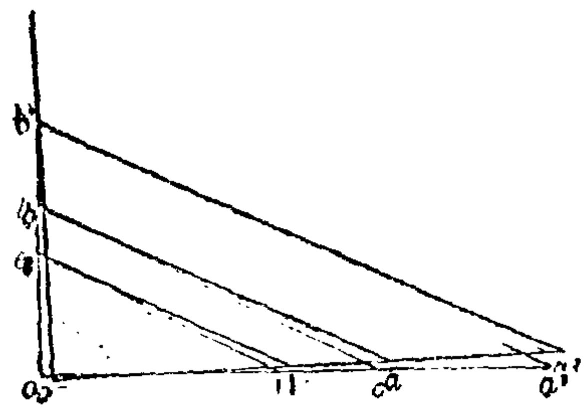
可也.

定義. 兩三角形之相當角相合同名曰相似三角形 (*Similar triangles*).

定理22. 若a,b與a',b'爲兩相似三角形之相當邊,則

$$a:b=a':b'.$$

證. 先就特別情形論之. 設a及b之夾角與a'及b'之夾角均爲直角. 再將兩三角形移置於同一直角上,如右圖所示. 於直角之一邊從O點起移置一線段1,更



第二十六圖

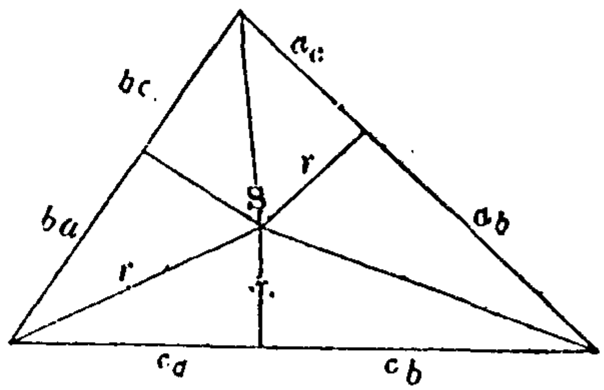
由1之端點作直線平行於兩三角形之斜邊. 此平行線在直角之他邊決定一線段e. 由線段乘積之定義得

$$b=ea,\ b'=ea',$$

由是得 $$ab'=ba',$$

即爲 $$a:b=a':b'.$$

次就一般情形論之. 於兩相似三角形內,求其各內角平分線之交點,設為 S 及 S'. 從此點向三角形



第二十七圖

之各邊各作 r 及 r' 六垂線,其各劃分邊之線段設為

$$a_b,\quad a_c,\quad b_a,\quad b_c,\quad c_a,\quad c_b,$$

及

$$a'_b,\quad a'_c,\quad b'_a,\quad b'_c,\quad c'_a,\quad c'_b.$$

由前述特別情形,適得

$$a_b:r=a'_b:r',\quad b_c:r=b'_c:r',$$

$$a_c:r=a'_c:r',\quad b_a:r=b'_a:r'.$$

由上列比例式用分配定律可得

$$a:r=a':r',\quad b:r=b':r'.$$

更用交換定律,又可變為

$$a:b=a':b'.$$

此定理既已證明,由此可以誘導比例理論之根本定理. 該定理可以述之如下:

定理23. 任一角之二邊被二平行線截斷之線段,若爲a,b及a',b'則四者成比例

$$a:b=a':b'.$$

反之,若有四線段a,b,a',b'成此比例,且若a,a',及b,b'各置於任一角之二邊上,則連結a及a'端點之直線與連結b及b'端點之直線必互相平行.

§17. 直線及平面之方程式

試於以前所論之線段組織外更另加第二種組織.以後每於線段之上加以特別記號以示區別,前者稱爲正線段,後者稱爲負線段,二者適相反對.如以單獨一點所定之線段視爲零線段,再加以適當之規約.由是§13所載計算實數之法則悉可取爲計算線段之法則.惟其中有特別重要問題數則,特提錄於下以資注意.

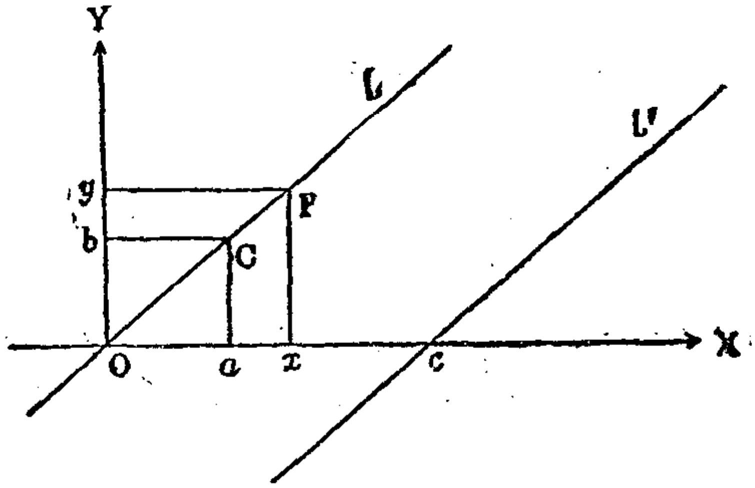
永遠 $a\cdot 1=1\cdot a=a.$

若 $a\cdot b=0.$則必$a=0.$或$b=0.$

若 $a>b$且$c>0$則$ac>bc.$

在平面α上選二直線垂直相交於O者爲正交坐標軸.從O起置任意二線段x,y於該軸上.視

線段之正負,而定移置時從O點所行之方向,此方向為正,則其反對方向為負. 於x及y之端點各立垂線,其交點命為P. 線段x及y稱為P點之坐標. 平面a上之各點皆可以其坐標x,y決定之,而坐標可正,負或零.



第二十八圖

命l為平面a上一直線,通過O及另一點C而C點之坐標為a,b. 若x,y為l上任一點P之坐標,則由定理22可得

$$a:b=x:y.$$

即 $$bx-ay=0.$$

此卽所謂直線l之方程式也. 若另有一直線l'平行於l而截一線段c於x軸上,則l'之方程式

可由l之方程式導出之．但用$x-c$代x可矣．其導出之方程式爲

$$lx-ay-bc=0.$$

由以上之考證可得下之結論：（不與亞幾默德公理相干）平面上之直線皆可用坐標x,y之一次方程式表之；反之如此形狀之一次方程式（視其變數爲點之坐標而其坐標皆爲合於所論幾何之線段）各表一直線云．

空間幾何可仿此爲之，所得結果亦正相類．

幾何之其他各部皆可用解析幾何方法推究之．

本章開首以來，從未引用亞幾默德公理．吾人如承認其適用而用之，則直線上之各點與實數，固有一定關係可言，請申述之．

先於直線上任擇二點，以0及1二數表示之．平分線段(0,1)則其中點以$\frac{1}{2}$表之．再平分線段$\left(0,\frac{1}{2}\right)$而以$\frac{1}{4}$表其中點．餘類推．若分至$n$次以後，則可得一點與數$\frac{1}{2^n}$相對應．今於0點之兩側各移置線段$\left(0,\frac{1}{2^n}\right)$至$m$次．由此可得二點與$\frac{m}{2^n}$及$-\frac{m}{2^n}$二數相對應．由亞幾默德公理可見直線上

之任何點各與惟一的固定實數相對應,且有下列性質:若A,B,C為直線上順次任意三點,而其對應之數為α,β,γ. 因B在A,C之間,則下列二不等式

$$\alpha<\beta<\gamma \text{ 或 } \gamma<\beta<\alpha$$

中必有一式成立.

由第二章§9所述之解說,可知凡數圈Ω中之各數必各有一對應點存在於直線上. 然任何實數是否可於直線上得一對應點,尚無普遍的解決,但視吾人所論幾何之組織如何耳.

原有點直線及平面之組織恆可擴而充之,若加入無理的(*Irrational*)(或理想的 *Ideal*)原素,使其幾何中之任意直線上每點皆與三個實數(x,y,z)相對應而無例外. 若採用適當之規約,則在新擴充之幾何中五類公理$I-V$亦可適用. 此新擴充之幾何(加入無理原素者)與尋常空間解析幾何無異.

第四章

平面面積理論

§18. 多角形之算術的等積及代數的等積

本章所根據之公理仍與前章 §§13–17 所根據者同,除僅不用亞幾默德公理外,凡平面各公理(含有 I 1–4 及 II–IV)無不用之.

前章所論之比例理及線段計算,正足供吾人解決歐幾里特面積之理論 *Theory of area* 之用,而解決之之時,卽用上述各公理;換言之,卽在平面上而不用亞幾默德公理也.

又前章解決比例理論,全憑巴斯開定理(定理 21),本章之面積理論亦依然借助之. 以作者觀之,巴斯開定理之應用於初等幾何,此其最顯著者也.

若以任一折線聯結多角形 *Polygon* P 上之兩點,而此折線又全在該多角形之內,則 P 分爲 P_1 及 P_2 兩多角形而此兩多角形內部各點又皆在 P 內.如此可稱多角形 P 區分(*Decomposed into*)爲兩多角形 P_1 及 P_2,或稱 P 由 P_1 及 P_2 所合成(*Composed of*)云云.

定義. 兩多角形如可分之各成有限個三角形彼此兩兩互相合同,則此兩多形稱爲算術的等積. *Equal area.*

定義. 兩多角形各加以其他算術等積之多角形而後可成算術等積者稱爲代數的等積 *Equal content.*

由上述之定義,可知算術等積的多角形加以算術等積的多角形,其結果仍爲算術等積的多角形,然若從算術等積的多角形減去算術等積的多角形則其結果爲代數等積的多角形矣.

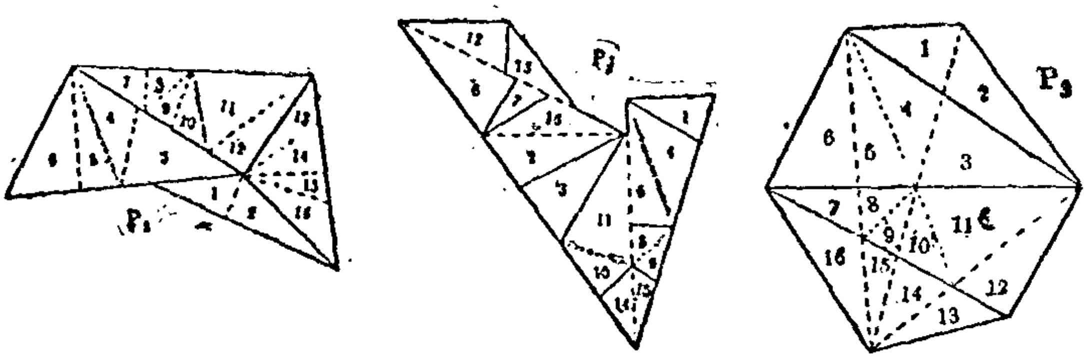
由是可得下定理;

定理 24. 若兩多角形P_1及P_2各與第三多角形P_3爲算術等積,則P_1與P_2亦互爲算術等積. 若P_1及P_2各與第三多角形P_3爲代數等積,則P_1與P_2亦互爲代數等積.

證. 由假設可將P_1及P_2各區分爲若干三角形,而此兩組三角形中之任一三角形使之與區分P_3所成之一組三角形中之一對應三角形互相合同.

若將P_3對P_1及對P_2之兩區分法合而觀之,則見

往往此區分之三角形被彼區分之線段所切斷而



第二十九圖

變爲多角形. 若於此多角形內增引線段使變爲三角形,再將同樣之區分法施之P_1及P_2,則各區分之爲對應三角形矣. 明明P_1及P_2兩多角形各區分爲同數之三角形而兩兩各相合同. 故由定義P_1及P_2爲算術等積.

此定理第二段之證法與前法同. 然又可證之如下.

若Q_1與Q_3爲代數等積,則必有P_1存在能令Q_1+P_1與Q_3+P_1爲算術等積;若Q_2與Q_3爲代數等積,則必有P_2存在能令Q_2+P_2與Q_3+P_2爲算術等積. 但$Q_3+P_1+P_2$與$Q_1+P_1+P_2$爲算術等積亦與$Q_2+P_1+P_2$爲算術等積,故$Q_1+P_1+P_2$與$Q_2+P_1+P_2$亦爲

算術等積. 由是得Q_1與Q_2爲代數等積.

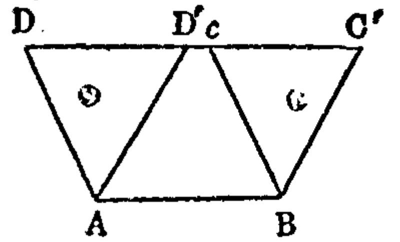
以下所用矩形(*Rectangle*),平行四邊形(*Parallelogram*)之底及高(*Base and height*).以及三角形之底及高諸名詞皆與一般幾何書之義同.

§19. 等底且等高之平行四邊形及三角形

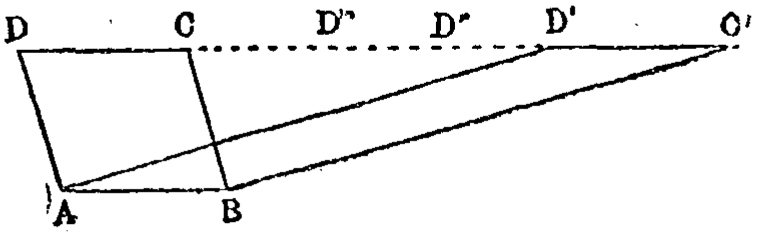
由下圖就歐幾里特之推論可以得下列定理之證明:

定理25. 等底且等高之兩平行四邊形互爲代數等積.

(1)



(2)



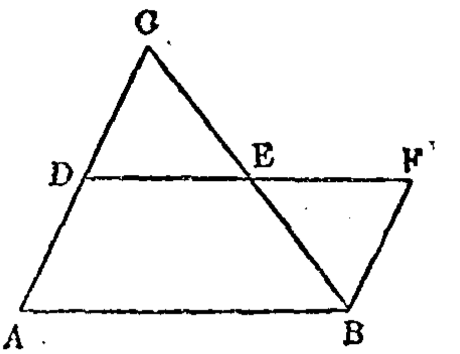
第三十圖

下定理亦可證明:

定理26. 以一三角形之底爲底以其半高爲高之平行四邊形,必有與該三角形爲算術的等積者.

證. 平分AC於D,BC於E,連結DE,延長之至F

而令 EF 等於 DE. 則三角形 DEC 與 FEB 互相合同,而三角形 ABC 與平行四邊形 $ABFD$ 互爲算術等積.



第三十一圖

由定理25及26更借助定理24可直得下定理.

定理27. 等底且等高之兩三角形互爲代數等積.

等底且等高之兩三角形永爲算術等積,其證明頗屬平常. 然證明之非利用亞幾默德公理不可.

(實言之等底且等高之兩平行四邊形,欲證其互爲算術等積,亦非借力於亞幾默德公理不可. 如第三十圖之(1),固可直接證明平行四邊形 $ABCD$, $ABC'D'$ 爲算術等積,且爲代數等積;然(2)圖僅可直接證明其爲代數等積. 但取 $D'D''$ 等於 $C'D'$ 則平行四邊形 $ABC'D'$, $ABD'D''$ 與(1)圖同,可證其爲算術等積;再取 $D''D'''$ 等於 $D'D''$ 則平行四邊形 $ABD'D''$, $ABD''D'''$ 亦爲算術等積. 如上作法,準亞幾默德公理必有一點 $D^{(n)}$ 在 CD 邊上. 由最初平行四邊

形 $ABC'D'$ 依次而推，可證與最後之 $ABL^{(n-1)}D^{(n)}$ 爲算術等積，然由(1)圖 $ABCD$，$ABD^{(n-1)}L^{(n)}$ 爲算術等積，故 $ABCD$ 及 $ABC'D'$ 亦爲算術等積。再由定理26可證明等底且等高之兩三角形亦爲算術等積。)

若不承認亞氏公理而另立一非亞幾默德幾何(§12)，則欲作兩三角形使其底及高相等而用定理27必可證其爲代數等積；但無論如何不能證其爲算術等積。如取兩三角形 ABC 及 ABD 各令底邊 $AB=1$ 而高爲 1，C 在 A 處之垂直線上，而 D 對 AB 之垂線足點 F 距 A 之長 $AF=t$，則此兩三角形不能證其爲算術等積。

其餘初等幾何關於多角形面積之定理，皆不過吾人以上各定理之演論，不難依法推定之，派達哥拉氏定理 (*Theorem of Pythagoras*，即直角三角形勾上正方形與股上正方形之和等於弦上正方形)其尤著者也。然吾人於面積之理論之研究若再進一步，困難之處實在所不免。即如一切多邊形是否不皆代數的等積？(即是否有不代數的等積之兩多邊形之存在)一問題，迄今尙爲疑案。苟一切

多邊形皆為代數的等積,更無不代數的等積者,則吾人以上孳孳焉所獲得之定理曰某與某為代數的等積云云者,未免太累贅太無價值矣. 且也「代數的等積之兩矩形,底相等高能不相等否」,換言之「矩形是否不能僅以其面積與其一邊決定之」等問題亦甚待考究. 欲深加研究以解答此等問題,必須先證實定理27之逆定理方可. 此定理可述之如下:

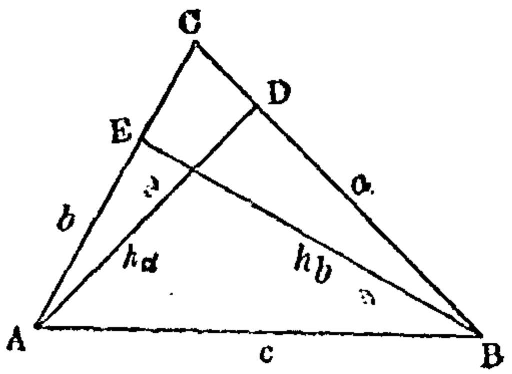
定理28. 代數的等積之兩三角形若其底相等則其高亦相等.

此基本定理(28)見於歐幾里特幾何原本(*Euclids Elements*)之第一卷命題39. 然其證明歐氏借助關於量之普通公理"全體大於一部分"此即導入新幾何的面積公理之一種手續也.

今吾人仍保持前此之態度,僅用平面幾何公理,且除去亞幾默德公理,足可證明此定理(28)得此則全部面積理論完備矣. 為此之故,須先導論面積測度(*Measure of area*)以為立論之預備.

§20. 三角形及多角形之面積測度

定義. 若三角形 ABC 內,其邊為 a,b,c, 作兩高線 $h_a=AD, h_b=BE$, 則本定理 22 由三角形 BCE, ACD 之相似而得比例式



第三十二圖

$$a:h_b=b:h_a;$$

即 $\quad a\cdot h_a=b\cdot h_b.$

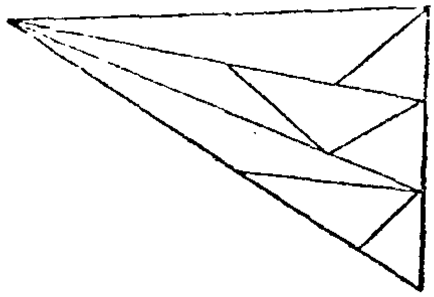
是足證明三角形每底與其相當高之相乘積永遠相等而不變. 三角形△之底與高乘積之半稱為三角形△之面積測度(*Measure of area of the triangle*△)以 $F(\triangle)$表之.

三角形中一頂點與對邊一點之聯結線名曰割頂線(*Transversal*). 一割頂線可將一三角形區分為兩個三角形,其高相同,其底在同一直線上. 此區分謂之三角形之割頂區分(*Transversal decomposition of the triangle*)云.

定理 29. 若三角形△被任直線區分成有限個三角形$\triangle_k$, 則△之面積測度等於諸三角形$\triangle_k$面

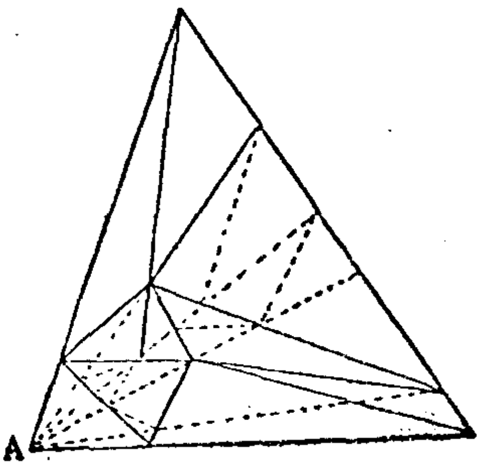
積測度之和.

證. 如將三角形用任意割頂線區分之爲兩三角形,則準線段計算之分配定律,可證該三角形之面積測度等於區分所得兩三角形面積測度之和. 將此法遞次行之,可知若用割頂區分法將三角形繼續區分若干次時,該三角形之面積測度仍等於區分所得三角形面積測度之總和.



第三十三圖

次試就「將三角形△任意區分(不必爲割頂區分)爲三角形$\triangle_k$時」證之. 由三角形△之頂點A過每區分分點(Point of division)各作一割頂線即各過三角形$\triangle_k$之頂作一割頂線. 由此許多割頂線,三角形△被區分爲若干三角形$\triangle_t$. 此三角形$\triangle_t$被原區分各線段截爲若干三



第三十四圖

角形及四邊形．若於各四邊形作一對角線則三角形 $\triangle_t$ 又各區分爲若干三角形 $\triangle_{ts}$．於是三角形 $\triangle_{ts}$ 乃由區分三角形 $\triangle_t$ 而成亦卽由區分三角形 $\triangle_k$ 而成，無他，一組之剸頂區分也．

無論如何，由三角形區分爲部分三角形法，若此區分之分點不在三角形內，且至少有一邊不含區分分點，則永遠可謂由一組之剸頂區分而成，頗爲明顯．

按此二條件適合於三角形 $\triangle_t$ 顯而易見．蓋其各三角形之內部以及對 A 之邊均不含有區分分點也．

同樣就各三角形 $\triangle_k$ 而言，區分爲 $\triangle_{ts}$ 可化爲剸頂區分．試一考三角形 $\triangle_k$，由三角形 $\triangle$ 之頂點 A 所作之諸剸線 (I) 不落於 $\triangle_k$ 之一邊上卽 (II) 將 $\triangle_k$ 區分爲二．(I) 種情形區分爲三角形 $\triangle_{ts}$ 時該邊永不含有分點，而 (II) 種情形，剸線之在三角形 $\triangle_k$ 內部之線段將爲其所區分，兩三角形之公共邊，定然不再含有分點．

然從此證明之初步考之，三角形 $\triangle$ 之面積測度

$F(\triangle)$與諸三角形$\triangle_i$之面積測度$F(\triangle_i)$之總和相等,而此總和又與面積測度$F(\triangle_{ik})$之總和相等.然面積測度$F(\triangle_k)$之總和亦與面積測度$F(\triangle_{ik})$之總和相等.故結果面積測度$F(\triangle)$亦與面積測度$F(\triangle_{ik})$之總和相等,斯本定理完全證明矣.

定義. 若多角形P之面積測度$F(P)$定義為「由此多角形用一定之區分法所得各三角形之面積測度之和」,則據定理29及類似§18中證明定理24之推論法,可知多角形之面積測度與所區分之三角形狀態無關,即直接由多角形自身決定之.因此用定理29可得結論曰算術等積之多角形亦有相等之面積測度.

又若P,Q為代數等積之二多角形,則本上述定義必有P',Q'二算術等積之多角形可令P,P'所合成之多角形將與Q,Q'所合成之多角形為算術等積.由下列二方程式

$$F(P+P')=F(Q+Q'),$$

$$F(P')=F(Q'),$$

可得方程式

$$F(P)=F(Q),$$

卽可得結論曰代數等積之多角形亦有相等之面積測度.

由上述說法,卽刻可得定理28之證明. 若設兩三角形之等底爲 g 而其相對各高各爲 h 及 h',則由該兩三角形爲代數等積之假定可斷其亦必有相等之面積測度,

卽 $$\frac{1}{2}gh=\frac{1}{2}gh'$$

兩端各以 $\frac{1}{2}g$ 除之,則得

$$h=h',$$

此卽定理28之證明.

§21. 代數的等積與面積測度

前節曾述代數的等積之多角形亦有相等之面積測度矣,其逆定理亦能成立.

欲證其逆定理,試考兩三角形 ABC 及 $AB'C'$,有一公共直角在 A. 此兩三角形之面積測度可以下列公式表之:

$$F(ABC)=\frac{1}{2}AB.AC,$$

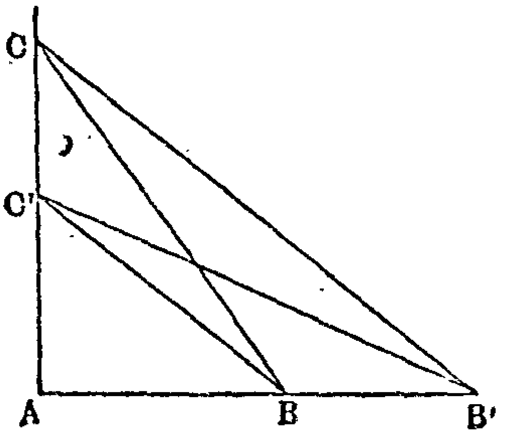
$$F(AB'C')=\frac{1}{2}AB'.AC'.$$

設其面積測度相等則

$$AB\cdot AC=AB'\cdot AC',$$

或 $$AB:AB'=AC':AC.$$

按定理23,直線 BC' 與 $B'C$ 互相平行,故由定理27 三角形 $BC'B'$ 及 $BC'C$ 爲代數等積. 若各與三角形 ABC' 相連則三角形 ABC 及 $AB'C'$ 爲代數等積. 故曰同一面積測度之兩直角三角形亦爲代數等積.



第三十五圖

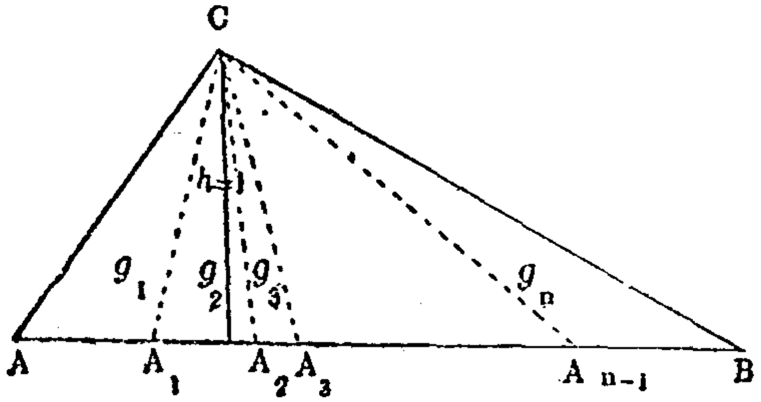
次再就一般三角形論之. 設其底爲 g 高爲 h, 則按定理27必與「其邊爲 g 及 h 之直角三角形」爲代數等積. 然原三角形明明與此直角三角形有同一面積測度,故上述直角三角形之限定儘可取消. 故曰有相等面積測度之任意兩三角形亦必爲代數等積.

再設 P 爲任一多角形其面積測度爲 g,且設 P 可區分 n 個三角形而其面積測度各爲 $g_1, g_2, g_3\cdots\cdots,$

g_n. 故知

$$g=g_1+g_2+g_3+\cdots\cdots+g_n.$$

作一三角形ABC令其底$AB=g$,高$h=1$. 於底AB上取點A_1, A_2, A_3, $\cdots\cdots A_{n-1}$令$g_1=AA_1$, $g_2=A_1A_2$,



第三十六圖

$g_3=A_2A_3,\cdots\cdots,g_{n-1}=A_{n-2}A_{n-1}$, $g_n=A_{n-1}B$. 因組成多角形P之諸三角形,其面積測度各與三角形AA_1C, $A_1A_2C,A_2A_3C,\cdots\cdots,A_{n-2}A_{n-1}C,A_{n-1}BC$之面積測度相同,故準前述定理可謂其各爲代數等積. 由是多角形P與一底爲g而高$h=1$之三角形爲代數等積.

用定理24可證相等面積測度之兩多角形恆爲代數等積.

若將前節所論與本節所論合而觀之,則得下之定理:

定理30. 代數等積之兩多角形恆有相等之面積測度. 反之,面積測度相等之兩多角形恆爲代數等積.

特例,若兩矩形之一邊爲公共且爲代數等積,則其餘邊亦各相合同. 故得下之定理:

定理31. 若用直線將矩形區分爲若干三角形而取消其一,則所餘之三角形不復能將該矩形組織完全矣.

此定理曾經 *F. Schur* 及 *W. Killing* 證明之,但二氏須用亞幾默德公理. *O. Stolz* 曾列之爲公理.

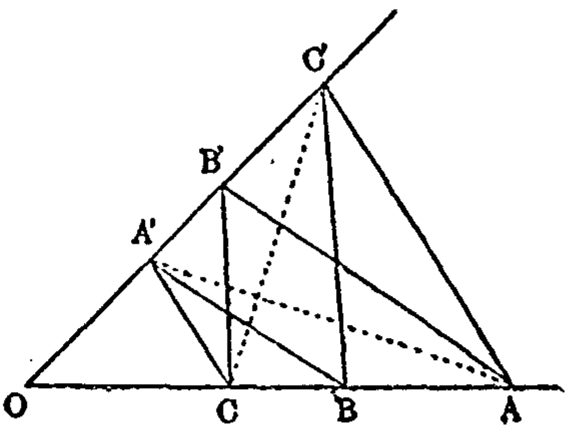
由上之討論可謂完全無須乎依賴亞幾默德公理.

然若不顧亞幾默德公理則定理31不足以使吾人證明定理28.

定理28, 29, 及30之證明曾用§15所述之線段計算,而此計算全根據於巴斯開定理(定理21)故此定理實面積理論之礎石也.

依據定理24, 27, 28可得巴斯開定理(一般情形)之證明. 若假定直線CB', $C'B$平行則由定理27可知兩三角OBB'及OCC'爲代數等積;若假定CA',AC'

平行則由同理可知兩三角形 OAA', OCC' 爲代數等積. 再由定理24,則兩三角形 OBB', OAA' 亦爲代數等積. 然由定理



第三十七圖

28可知 BA', AB' 之平行而巴斯開定理證明矣.

於兩多角形 P, Q 中,若 P 之面積測度 $F(P)$ 較 Q 之面積測度 $F(Q)$ 爲大時則 P 對 Q 稱爲代數大積(*Larger in Content*)若 $F(P)$ 較 $F(Q)$ 爲小時則 P 稱爲代數小積.(*Smaller in Content*)由上所述,代數等積,代數大積,代數小積之概念定互相拒斥,即同時不得有二者均成立,彰彰明甚. 且若一多角形全部在其他多角形之內則前者必較後者爲代數小積,不待深思,即可明瞭.

如斯,關於面積理論之重要定理,已多所證明矣.

第五章

德沙格氏定理

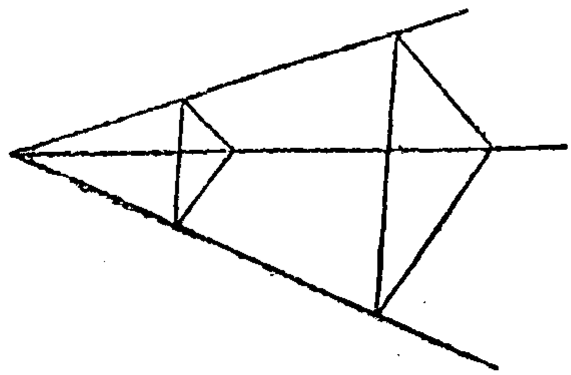
§22. 德沙格氏定理及其在平面幾何用合同公理之證明法

五類公理中,(§§1–8) $II-V$ 四類公理一部分爲直線的,一部分爲平面的;惟類 $I5-9$ 各公理爲空間的. 欲明白表示空間的公理之要旨,試假定有一平面幾何及一適用類 $I-III$ 各公理之空間幾何,而研究此平面幾何可視爲此空間幾何之一部之條件.

根據類 $I-III$ 各公理,則所謂德沙格氏定理 (*Theorem of Desargues*) 甚易證明. 此定理僅論及平面上交點問題. 特設兩三角形相當邊之交點所在之直線爲所謂在無窮處之直線. 由此所起之定理及其逆定理合稱之爲德沙格氏定理. 述之如下:

定理32. (德沙格氏定理) 同平面上兩三角形若其相當之邊兩兩平行,則其相當頂點之聯結線

必交於一點,或互相平行. 反之,同平面上兩三角形若其相當頂點之聯結線會於一點或互相平行,且其兩對相當之邊互相平行,則其第三對相當邊亦必互相平行.



第三十七圖

上述德沙格氏定理(32)全係 $I-III$ 各公理之推演. 然則一平面幾何果可視爲「以 $I-III$ 各公理爲基礎之空間幾何」之一部分時,而德沙格氏定理之成立,爲必須條件矣.

德沙格氏定理可以借助合同公理而證明之. 欲明其理,可倣§§13-21之研究法,先設有一平面幾何,其中公理類 I 1-4及 $II-IV$ 皆能成立,且依§15於此幾何再造出線段計算法,

準前 §17 中所論,平面上各點皆可以一對線段 (x,y) 表之,各直線皆可以三線段之比 $(u:v:w)$ 表之,而一次方程式

$$ux+vy+w=0$$

爲點 (x,y) 在直線 $(u:v:w)$ 上之條件. 同節又謂此種幾何中線段之組織恰成一數團,具有 §13 之 1—16 各性質. 故可用此種數團做 §9 或 §12 (§9 用數團 Ω, §12 用數團 $\Omega(t)$) 之辦法,創造一種空間幾何. 以三線段之組 (x,y,z) 表點,以四線段之比 $(u:v:w:\gamma)$ 表平面;而兩平面相交成爲直線. 故一次方程式

$$ux+vy+wz+\gamma=0$$

爲點 (x,y,z) 在平面 $(u:v:w:\gamma)$ 上之條件. 至於點在直線上之排列,點在平面上對於同平面一直線之位置,以及點在空間對於一平面之位置,諸順序關係,則悉倣 §9 之方法以不等式定之.

因由此空間幾何,若令 $z=0$, 則又得吾人原設之平面幾何,故平面幾何實可視爲空間幾何之一部分. 然德沙格氏定理爲此種結果之必須條件.(由上所述)則在吾人所設之平面幾何中,德沙格氏定

理亦必能適用矣.

又上述結果,不難由比例理論中定理23直接得之,玆不贅.

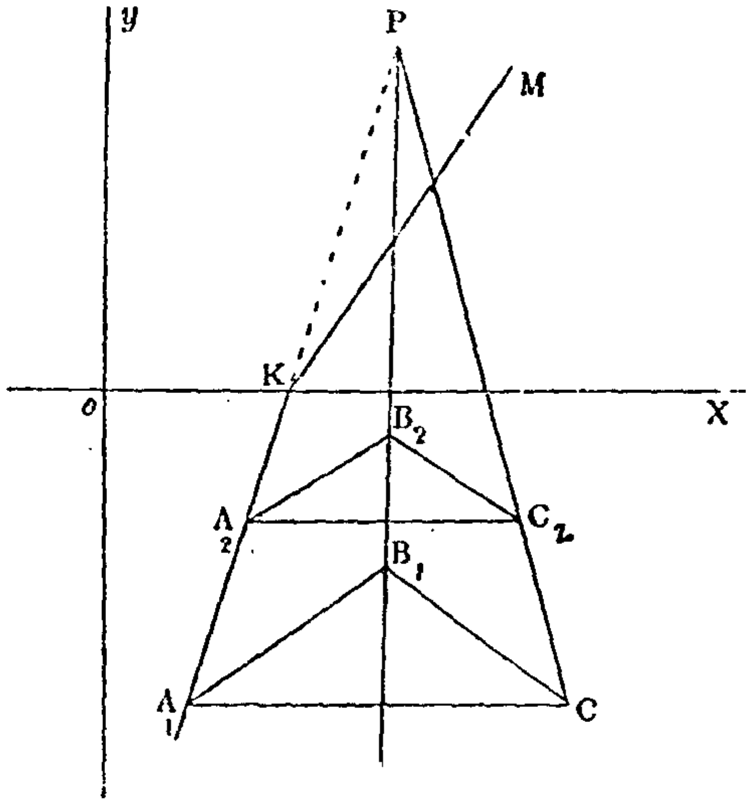
§23. 在平面幾何不用合同公理不能證明德沙格氏定理

本節所討論之問題,為德沙格氏定理在平面幾何中不用合同公理,是否可以證明. 其答案如次:

定理33. 平面幾何之能適用公理 $I\,1-4, II-III, IV\,1-5, V$ 諸公理,卽除公理 $IV\,6$ 以外凡直線的及平面的公理完全適用,而獨不能使德沙格氏定理成立者實在有之. 此種平面幾何旣然存在,足徵德沙格氏定理非純係上述諸公理 ($I\,1-4, II, III, IV\,1-5, V$)之演論,而其證明必須借助於空間公理或全部合同公理也.

證* 於尋常平面幾何中,選定(其可能已於 §9 述之矣)兩垂直線為坐標軸. 繞原點 O 作一橢圓 *Ellipse*. 令其長軸 *Major axis*. 之半為 1, 短軸(*Minor axis*)之半為 $\frac{1}{2}$. 再於正 x 軸上距 O 點 $\frac{3}{2}$ 處取一點 F.

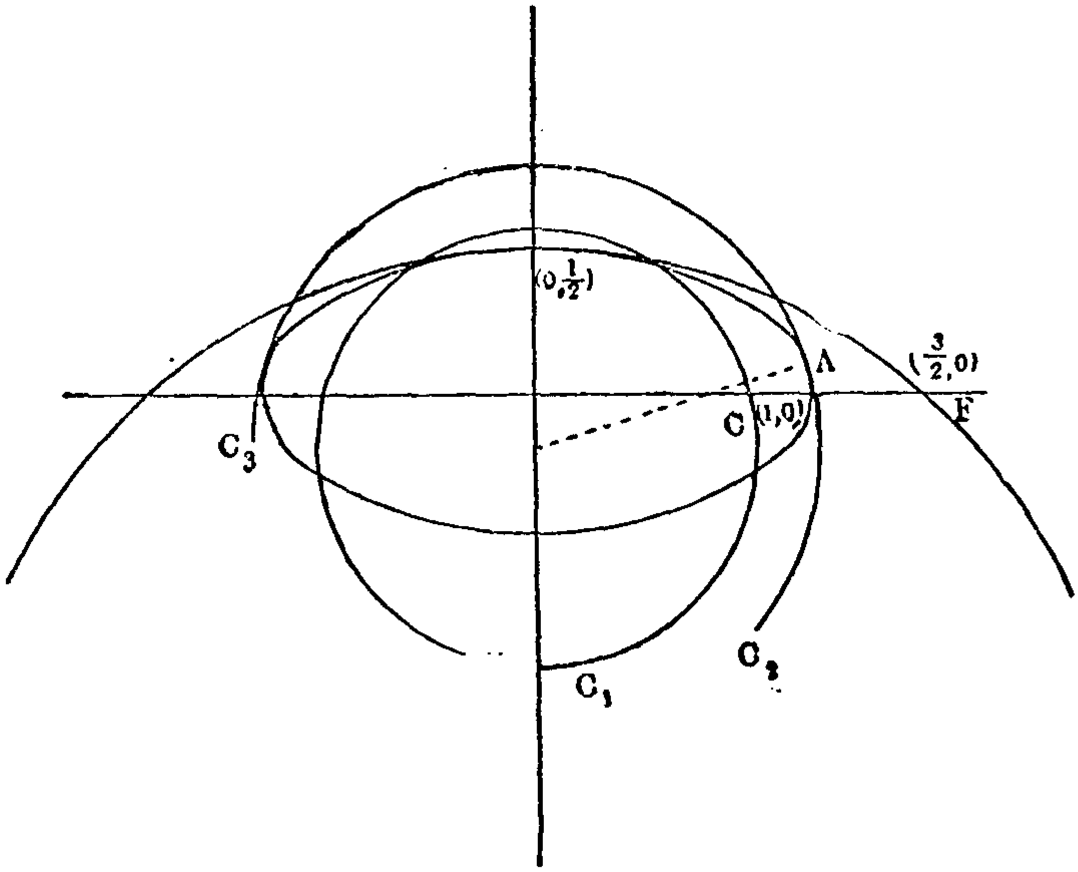
*按此證法較繁,1905年 *Leipzing* 曾刪修之,載在 *Abstrakte Geometrie*. 此外有一尤爲簡單之證法,爲 *R. F. Maulton* 所創,見於 *Asimple non-desarguesion Plane Geometry*,載在 *Trans. Math. Soc., vol. III.* 1902. 摘錄之如下:



第三十八圖

在平常幾何中,試就 $y=f(m,y)mx+a$. 一類之軌跡論之,此中以 m,a 爲寡變數,而 $f(y,m)$ 爲 m 及 y 之一定函數,當 $m\leqq o$,則 $f(y,m)=1$; 當 $m>o, y\leqq o$, 則 $f(y,m)=1$;當 $m>o, y<o$,則 $f(y,m)=c$, 而 c 爲常數.

今以此種軌跡爲代用直線另創一種新平面幾何,則公理類 *I.1-3, II-III* 之能成立無疑義. 惟德沙格氏定理則不能成立,觀圖自明.



第三十九圖

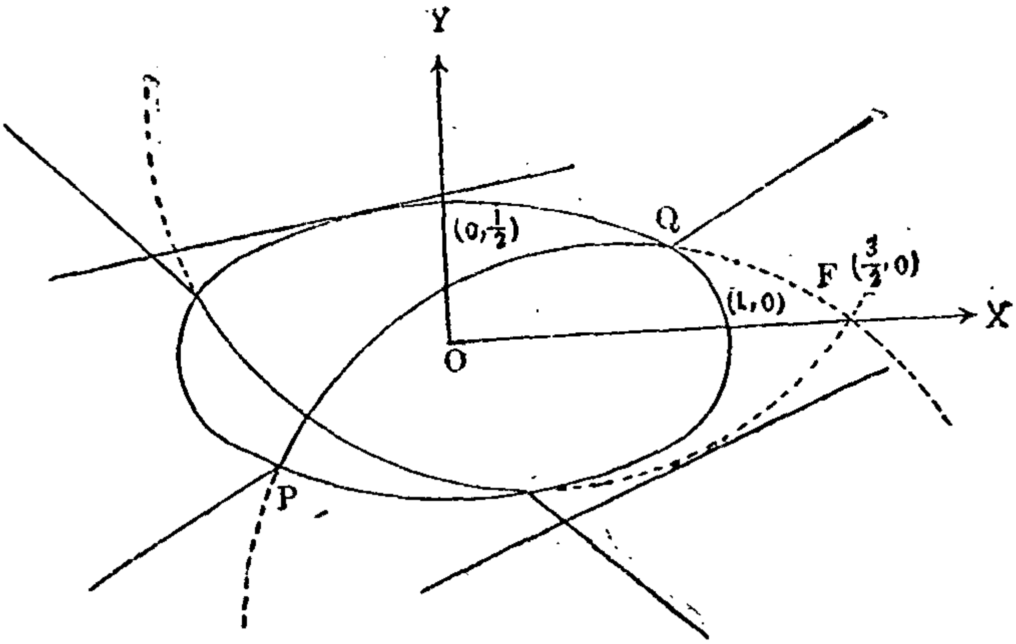
試作圓令與橢圓交於四個實點,或各各不同或相重均可,(惟交於虛點者除外). 於此諸圓中,考其與 x 軸相交點之距原點 O 最遠者. 試先任作一圓 C_1,令與橢圓交於四點各不相重,而與 x 軸交於 C 點. 與 C_1 同心更作一羣之圓,其中必有一圓 C_2,其二個交點相重於而 A,其餘者仍為實點,則 C_2' 為橢圓之切圓. 又順 C_2 圓內過切點 A 之直徑上

取圓心,而作一羣之圓,皆與橢圓相切於A;其中又必有一圓C_3與橢圓更切於另一切點B,而與切點A相對稱.(過此諸圓則有兩點為虛點,不在所論之列.)此圓截x軸定較C點為遠.在橢圓以外而且與之重切(*Doubly Tangent*)(兩切點相重者)諸圓中,定可尋其與正x軸相交之最遠者;且此等各圓皆對稱於y軸而圓心皆在y軸之上.設(a,b)為橢圓上之任一點.則切於該點而對稱於y軸之圓,其與正x軸相切之線段

$$x=|\sqrt{1+3b^2}|$$

不難算出.然$|b|=\frac{1}{2}$時,即$|b|$為最大時則上式為$\frac{1}{2}\sqrt{7}$亦為最大.而F點之橫坐標為$\frac{3}{2}>\frac{1}{2}|\sqrt{7}|$,故凡與橢圓相交四次(交點或各別或相重)諸圓無過$F$點者.

今另創一種新幾何如下.新幾何以(xy)全平面上之點為點.其直線之定義,則以(xy)平面上橢圓之切線,或橢圓外部之直線仍為直線,無所變更;然若該面上之直線g截橢圓於P及Q兩點時,則新幾何中與此直線g對應之直線應另行規定之如



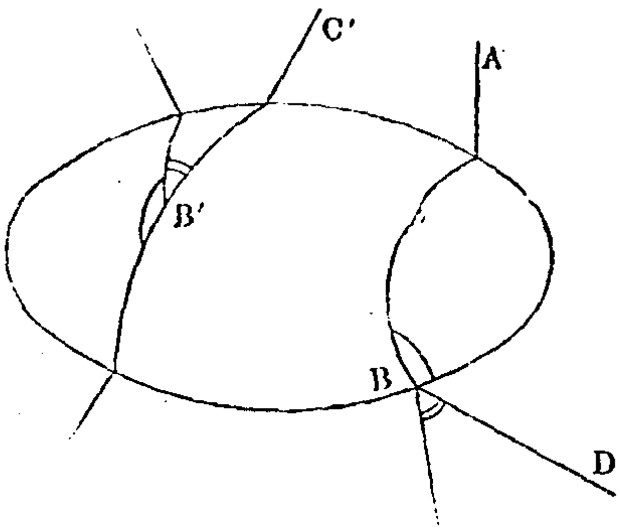
第四十圖

下. 過P, Q及定點 F 三點作一圓,則由前段所論,此圓當不再與橢圓交於他點. 此直線 g 在橢圓外部之兩部與在橢圓內之 PQ 弧所合成之折線,即視爲新幾何中所定之直線云. 若將依此法所作各折線皆視爲與 (xy) 平面上之直線相對應,則得一系之折線(即新幾何中之直線) 其能適用於 I1—3, 及 III 各公理,顯然可見. 若將新幾何中點,線之排列法略加規定使順序公理(類 II) 適合,亦屬易事.

新幾何之兩線段 AB 及 $A'B'$,原係折線,若伸直後

其長相等,則 AB 與 $A'B'$ 稱爲合同線段云.

至於角之合同,又可以規定之如下. 若所比較各角之頂皆在橢圓之外則其合同與否,即以尋常意義鑑別之. 如其不然,命 A,B,C 爲一直線上(新的)順次三點, A', B', C' 爲另一直線(新的)上三點; D 爲 ABC 直線以外之點, D' 爲 $A'B'C'$ 直線以外之點. 聯 $DB'D'B$,. 若其各角間以尋常幾何之意義論,而比例關係



第四十一圖

$$\angle ABD:\angle CBD=\angle A'B'D':\angle C'B'D'$$

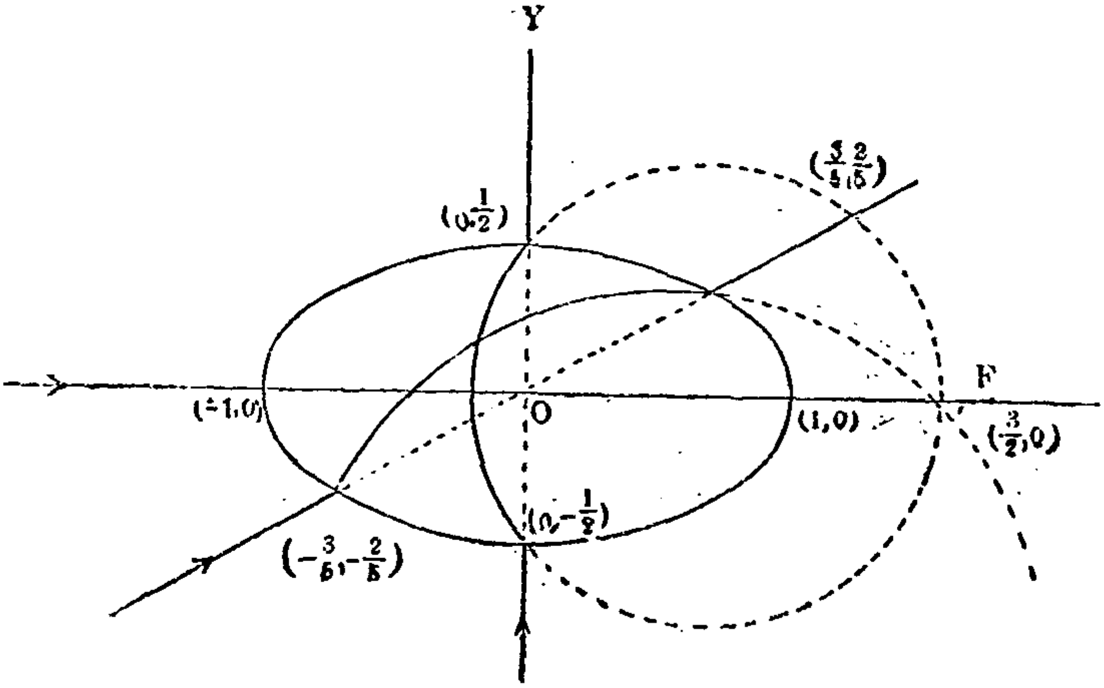
成立時,則在新幾何視之,即謂爲有合同關係

$$\angle ABD\equiv\angle A'B'D',\ \angle CBD\equiv\angle C'B'D'$$

云云. 如此規定,則合同公理 $IV\,1-5$ 皆能成立矣.

欲知德沙格氏定理在新幾何之不能成立但就下列三尋常直線之在 (x,y) 平面上者觀之可矣. 其

一爲 x 軸，其二爲 y 軸；其三爲過橢圓上 $\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$，$\left(-\frac{3}{5},-\frac{2}{5}\right)$ 兩點之直線．在原來幾何中，此三直



第四十二圖

線均經過原點，故可作兩三角形，令其各頂點兩兩在該三直線上，相當邊兩兩平行，而各邊咸在橢圓之外．如圖將此三直線改爲相當之三折線（新幾何中之直線）其不能會交於一點，不難由計算而知也．由是觀之德沙格氏定理必不能適用於此特殊的平面幾何矣．

上述新幾何特以公理 $I\,1-3, II-III, IV\,1-5, V$

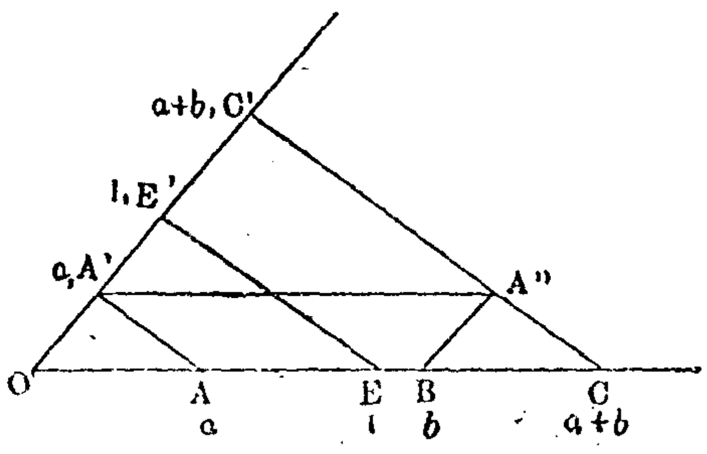
爲基礎,而不能爲空間幾何之一部]之一種平面幾何之一例耳.

§24. 根據德沙格氏定理而不用合同公理之線段計算新法緒論

茲爲顯明德沙格氏定理(定理32)之特性起見,特標一種平面幾何,以前三類平面公理(即公理1—3, II—III)爲根據,更不憑藉合同公理而另立一種線段計算之新法如下.

平面上取相交於O點之二定直線,僅考究發端於O而其他端在此二直線上之各線段. O點之本身亦視爲線段,名之曰線段O(零),表之如下式:

$$OO=o, \text{ 或 } o=OO.$$



第四十三圖

設 E 及 E' 爲兩定點，分配於過 O 點之二定直線上。OE, OE' 二線段規定爲線段 1，而表之如下式：

$$OE=OE'=1, \text{ 或 } 1=OE=OE',$$

其直線 EE' 簡稱么率直線 (*Unit-line*)。又設 OE 上有 A 點，OE' 上有 A' 點而其聯結線 AA' 平行於 EE'，則稱 OA 與 OA' 兩線段互相等，而以

$$OA=OA', \text{ 或 } OA'=OA$$

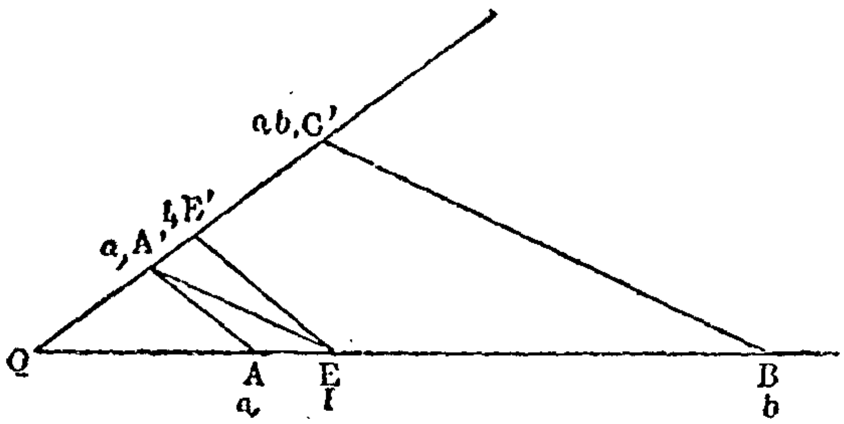
表之。

欲立二線段 $a=OA$ 及 $b=OB$ 之和之定義，可先引 AA' 平行於 EE'，再由 A' 引 OE 之平行線，由 B 引 OE' 之平行線，其相交之點命爲 A''。然後由 A'' 引直線平行於 EE'，與 OE 相交於 C，與 OE' 相交於 C'。則 $c=OC=OC'$ 即稱爲 $a=OA$ 及 $b=OB$ 二線段之和。可以

$$c=a+b, \text{ 或 } a+b=c$$

表之。

欲求線段 $b=OB$ 乘線段 $a=OA$ 之積之定義，可全然仿用 §15 之作圖法，惟彼處所用之直角三角形之邊，今以 OE 及 OE' 代之耳。作法如下。於 OE' 上定一點 A' 使 AA' 平行於么率線 EE'，乃聯 E 及 A'，



第四十四圖

於是由 B 作 EA' 之平行線，此平行線必交定直線OE'於 C'點，而 $c=OC'$稱爲線段$b=OB$乘線段$a=OA$之積云. 此又可以

$$c=ab \text{ 或 } ab=c$$

表之.

§25. 線段計算新法中加法之交換定律及結合定律

本節及下節之宗旨，即在僅以平面公理 I 1—3 II—III 與夫德沙格氏定理爲立論根據，而考核 §13 所列舉諸演算律，何者能合於適纔所創之線段計算新法.

今首先證明依 §24 所立線段加法之定義，則其

交換定律

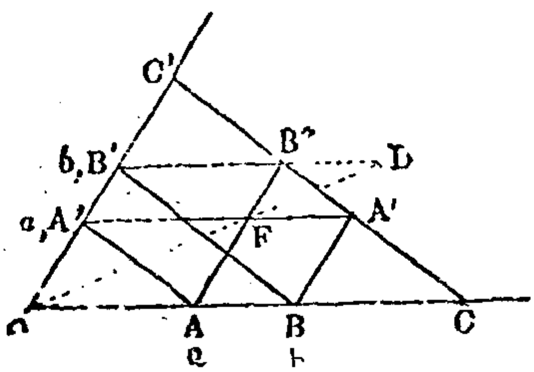
$$a+b=b+a$$

成立. 設

$$a=OA=OA'$$

$$b=OB=OB'$$

故依吾人之規約AA'與BB'必互相平行,且平行於么率線EE'. 作$A'A''$及BB''平行於OA,AB''及BA''平行於OA'而得A''及B''兩點. 由此可知$A''B''$正與AA'平行如交換定律所



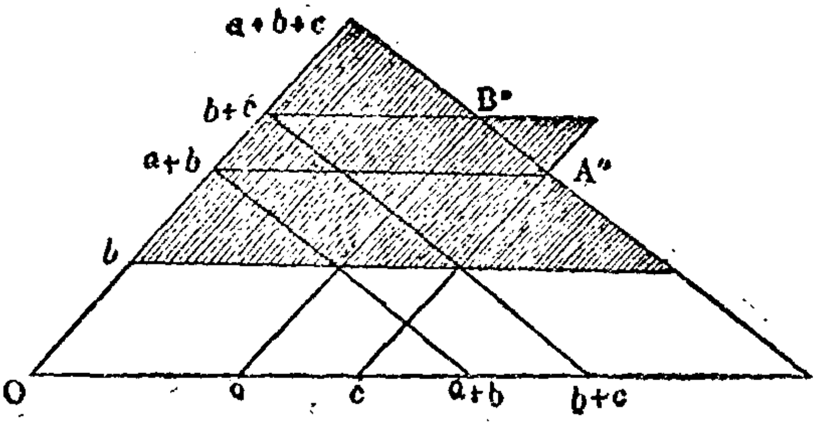
第四十五圖

希冀. 今請用德沙格氏定理以證其合理於下. 命AB''與$A'A''$之交點爲F, BA''與$B'B''$之交點爲D. 則就$AA'F$及$BB'D$兩三角形而論,對應之邊各互相平行. 由德沙格氏定理知O,F,D三點在一直線上. 準此,就OAA'及$DB''A''$兩三角形觀之則對應頂點之聯線會於一點F,而因有OA及DB'',OA'及DA''二對之對應邊互相平行,則由德沙格氏定理

(定理32)可知第三邊AA'及$B''A''$亦互相平行.

更用下圖以證明加法之結合定律

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$



第四十六圖

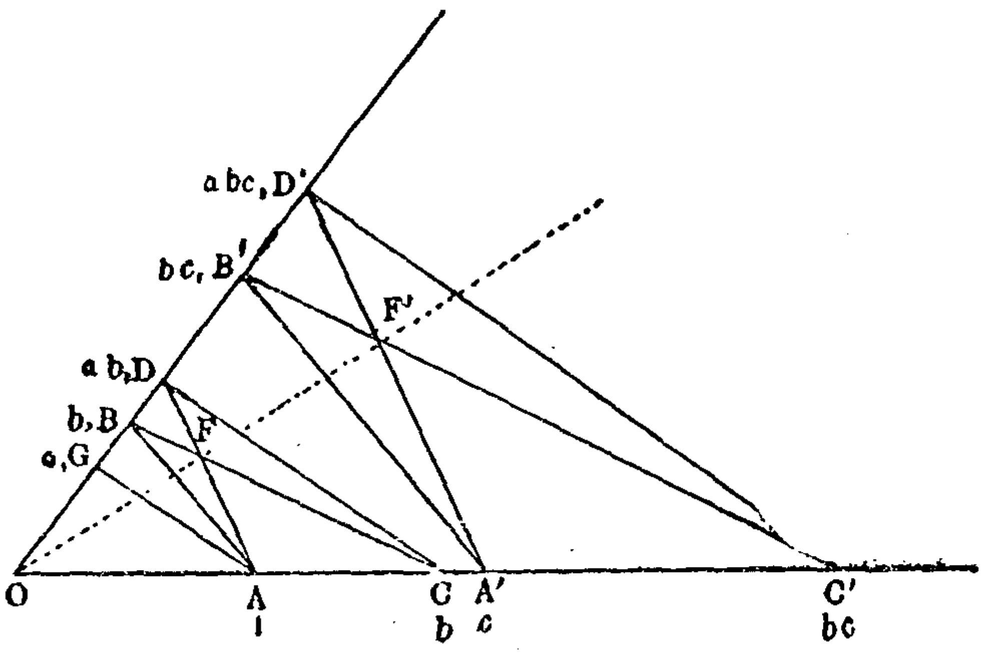
$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

準上述加法之交換定律,則圖中$A''B''$必平行於么率線EE'. 因上圖之陰影部分完全與前圖相同,故結合定律公式之成立顯然可見矣.

§26. 線段計算新法中乘法之結合定律及分配定律. 乘法之結合定律

$$a(bc)=(ab)c$$

在線段計算新法中亦不失其眞確之地位.



第四十七圖

$$a(bc)=(ab)c.$$

設此二定直線中,其一線上有

$$1=OA,\ b=OC,\ c=OA'$$

各線段;又一線上有

$$a=OG;\ b=OB.$$

各線段. 欲更畫出

$$bc=OB' \text{ 及 } bc=OC'$$

$$ab=OD,$$

$$(ab)c=OD',$$

各線段,祇須按 §24 之定義作 $A'B'$ 平行於 AB, $B'C'$

平行於BC, CD平行於AG, 及$A'D'$平行於AD可矣.

由是結合定律之旨趣全在$C'D'$平行於CD,蓋顯而易見. 今命AD與BC之交點爲F, $A'D'$與$B'C'$之交點爲F'. 則就ABF與$A'B'F'$兩三角形而論,對應之邊兩兩平行,而據德沙格氏定理之前部, O, F, F'三點必在一直線上. 準此更據德沙格氏定理之後部應用於CDF與$C'D'F'$兩三角形,卽可證CD平行於$C'D'$.

根據德沙格氏定理尚可證明

乘法第一分配定律:

$$a(b+c)=ab+ac$$

及第二分配定律

$$(a+b)c=ac+bc$$

之合於新計算法.

今請就下圖(48)以證明第一分配定律.

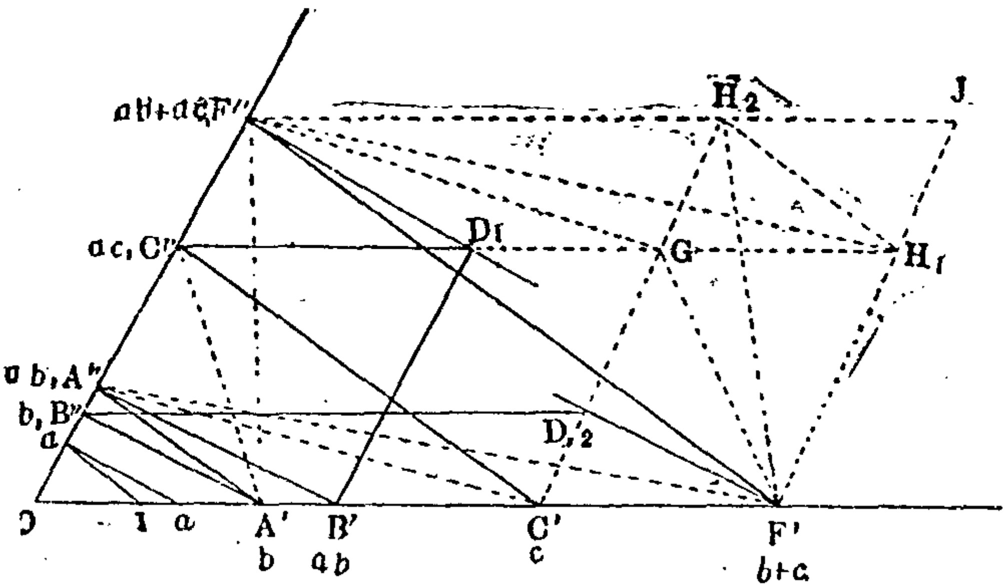
圖中

$$b=OA',\ c=OC',$$

$$ab=OB',\ ab=OA'',\ ac=OC'',$$

諸如此類.

圖中 $B''D_2$ 平行於 $C''D_1$, 且皆與定直線 OA' 平行, $B'D_1$ 平行於 $C'D_2$, 且皆與定直線 OA'' 平行. 又 $A'A''$ 平行於 $C'C''$, 而 $A'B''$ 平行於 $B'A''$, 平行於 $F'D_2$, 又平行於 $F''D_1$.



第四十八圖

$$a(b+c)=ab+ac$$

第一律惟一之旨趣即謂:

$F''F''$ 亦必平行於 $A'A''$ 且必平行於 $C'C''$ 也. 欲明此,請先作下之補助線:

$F''J$ 平行於定線 OA',

$F'J$ 平行於定線 OA''.

試將 $C''D_1$ 與 $C'D_2$, $C''D_1$ 與 $F'J$, $C'D_2$ 與 $F''J$ 之各交

點,順次以 G, H_1, H_2 表之. 然後如圖將現成之點聯結之,則又可得其他補助線.

在 $A'B''C''$ 及 $F'D_2G$ 兩三角形,相當頂點之聯線,旣互相平行,又有兩對對應邊 $A'B''$ 與 $F'D_2$, $B''C''$ 與 D_2G 互相平行,故據德沙格氏定理之後部可知

$$A'C'' \text{ 平行於 } F'G.$$

準此結果,更就 $A'C''F''$ 及 $F'GH_2$ 兩三角形而論,相當頂點之聯線亦屬平行者,故仍據德沙格氏定理後部得

$$A'F'' \text{ 平行於 } F'H_2.$$

由此可知 $OA'F''$ 與 JH_2F' 兩三角形之對應邊係兩兩平行者,故據德沙格氏定理之前部,得證其相當頂點之聯線

$$OJ,\ A'H_2,\ F''F'$$

應相會交於一點,命之爲 P.

仿上法可知

$$A''F' \text{ 必平行於 } F''H_1.$$

且因 $OA''F'$ 與 JH_1F'' 兩三角形之對應邊兩兩平行,則據德沙格氏定理可知其相當頂點之聯線

$$OJ,\ A''H_1,\ F'F'',$$

亦應相會交於同一點P.

再就$OA'A''$與JH_2H_1兩三角形而論,對應頂點之聯線同會於P,且兩對對應邊互相平行,故

$$H_1H_2\text{平行於}A'A'',$$

因此得

$$H_1H_2\text{平行於}C'C''.$$

據此又將德沙格氏定理之前部應用於$OC'C''$與JH_2H_1兩三角形,則可知OJ必通過G點. 惟是OJ既通過G點,則$OF'F''$與JH_1H_2兩三角形對應頂點之聯線咸會於J,故據德沙格氏定理之後部而得

$$F'F''\text{平行於}H_1H_2,$$

而最後之結論

$$F'F''\text{平行於}A'A''$$

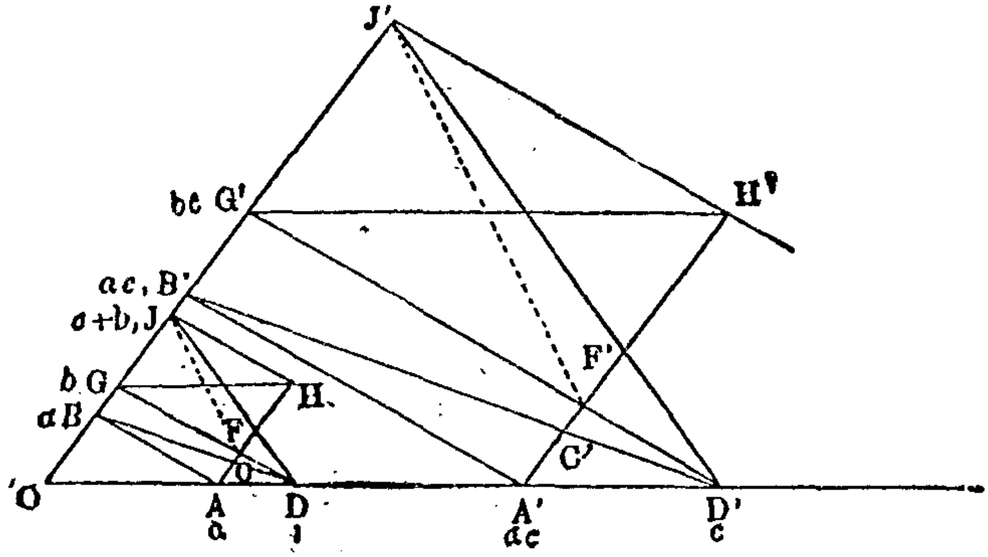
亦隨之而得矣.

請另用一圖(49)證明第二結合定律.

$$(a+b)c=ac+bc.$$

圖中 $1=OD,\ a=OA,\ a=OB,\ b=OG,\ c=OD',$

$$ac=OA',\ ac=OB',\ bc=OG',$$



第四十九圖

諸如此類. 且有

GH平行於$G'H'$,且平行於定線OA,

AH平行於$A'H'$,且平行於定線OB.

又　AB平行於$A'B'$,

BD平行於$B'D'$,

DG平行於$D'G'$,

HJ平行於$H'J'$.

吾人所欲證明者卽在

DJ必平行於$D'J'$.

設BD與AH,GD與AH之交點各以C,F表之,而$B'D'$與$A'H'$,$G'D'$與$A'H'$之交點各以C',F'表之.

然後作補助線 FJ 及 $F'J'$，如圖中虛線所表.

在 ABC 與 $A'B'C'$ 兩三角形，對應之邊兩兩平行，故據德沙格氏定理知 O,C,C'，必同列一直線上. 持此結果再就 CDF 與 $C'D'F'$ 兩三角形而論，則同理可知 O,F,F' 亦必同列一直線上. 再考 FGH 與 $F'G'H'$ 兩三角形而 O,H,H' 三點亦同在一直線上.

今在 JHF 與 $J'H'F'$ 兩三角形中，其對應頂點之聯結線既知其同會於一點 O 矣，故據德沙格氏定理而 JF 與 $J'F'$ 亦必互相平行. 最後就 FDJ 與 $F'D'J'$ 兩三角形觀之，當然可得 DJ 與 $D'J'$ 互相平行，而所論之問題完全證明矣.

§27. 以此線段計算新法爲基礎之直線方程式

於§§24–26三節中，曾導出一種線段計算新法. 此法由於假定§24所述之公理及德沙格氏定理成立，而加法之交換定律，及結合定律，乘法之結合定律及二種分配定律皆可適用者也. 本節以此線段計算爲基，更進而論平面上點與直線之解析的表示法，如何可以有效.

定義. 於平面上取相交於O點之二定直線,以為x軸及y軸. 在平面上設任一點P,當由P作兩軸之平行線時,在x軸與y軸各截線段x與y,而該點P即以此線段x,y定之. 此線段即稱為該點之坐標. 用線段計算新法為本,更以德沙格氏定理輔助之,可以導出下之定理.

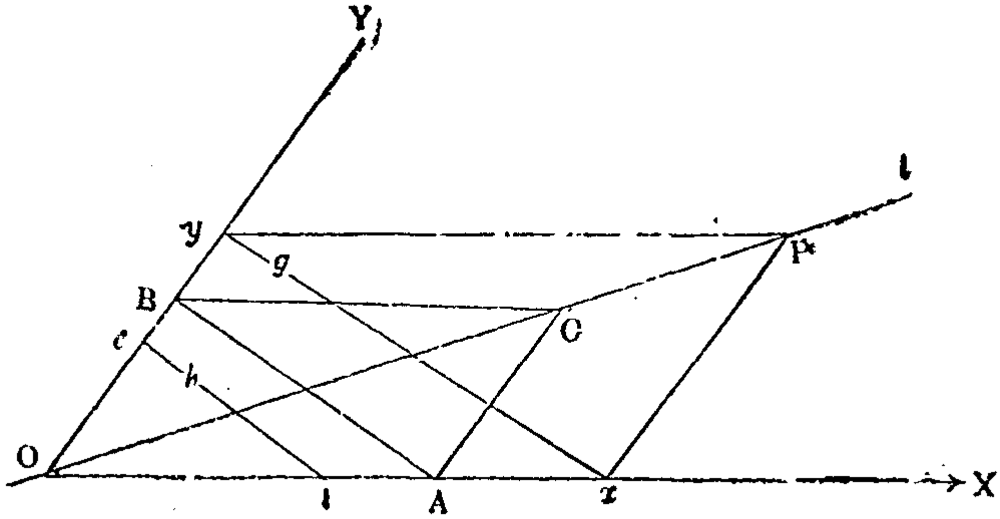
定理31 任意一直線上一點之坐標x,y必能滿足下列形狀之線段方程式

$$ax+by+c=o.$$

此方程式中a,b二線段必居於坐標x,y之左側,又線段a,b決不能同時等於零而c則為任意一線段.

反之,凡如上列形狀之線段方程式恆可以表示吾人所論之平面幾何之一直線.

證 先設有一直線l通過原點O. 再設c為l上之一固定點(但非O),而P為l上任意一點. 命OA與OB為C點之坐標,x與y為P點之坐標. 聯x,y二線段之端點以直線g表之. 過x軸上線段1之端點而作直線h與AB平行. 此平行線h必截y軸於線段l. 由德沙格氏定理之後部可知直

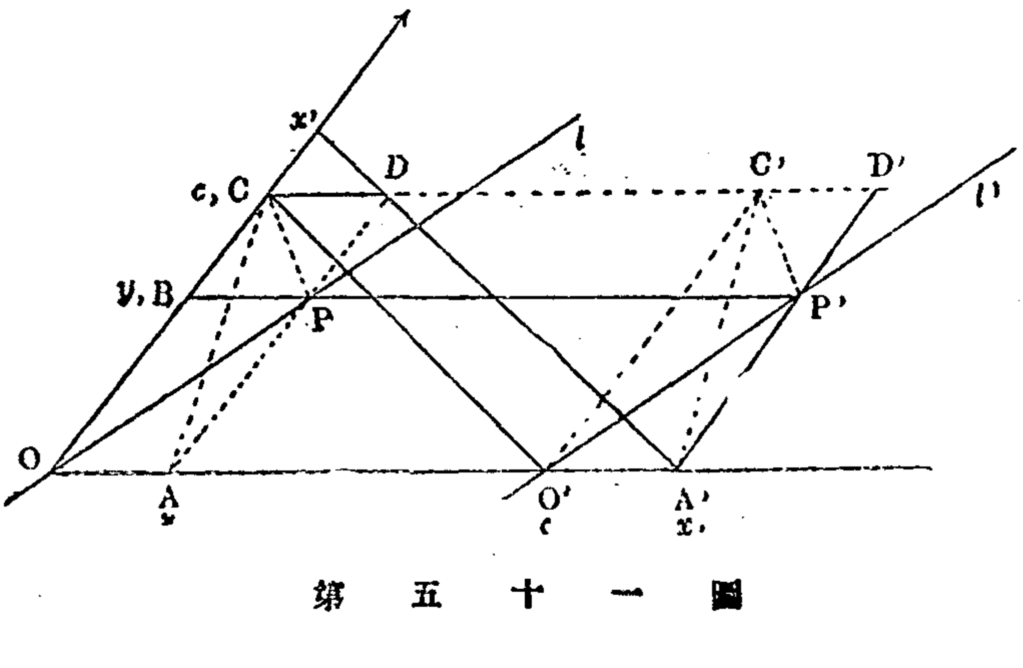


第 五 十 圖

線 g 亦必平行於 AB. 因 g 與 h 常互相平行,故 P 之坐標 x,y 必常能滿足方程式

$$lx=y.$$

再於下圖(51)設 l' 爲任意一直線,此直線於 x 軸



第 五 十 一 圖

上截一線段$c=OO'$. 今過原點O作直線l使平行於l'. 設P'爲l'上之任意一點,則過P'點所作平行於x軸之直線,必與l交於P點,而於y軸上截一線段$y=OB$. 然後過P及P'作平行於y軸之直線,而於x軸截線段$x=OA$, 及$x'=OA'$.

今請先事證明x與x'二線段能滿足方程式

$$x'=x+c$$

因是之故,先(如圖)引$O'C$平行於么率線,又引CD平行於x軸,及AD平行於y軸. 則上式之旨趣卽謂

$A'D$必平行於$O'C$,

命D'爲CD與$A'P'$之交點,再引$O'C'$平行於y軸.

在ACP與$O'C'P'$兩三角形,因對應點之聯線互相平行,故據德沙格氏定理之後部,可知

CP平行於$C'P'$.

同理論ACP與$A'C'P'$兩三角形,則又得

AC平行於$A'C'$

在ACD及$C'A'O'$兩三角形,因其對應之邊兩兩互相平行,可得AC', CA', DO'三直線會於一公共點.

持此結果再考$C'A'D$及ACO'兩三角形則可知$A'D$

與CO'爲互相平行.

由已得之二方程式

$$ex=y \text{ 及 } x'=x+c.$$

卽刻可以導出方程式

$$ex'=y+ec.$$

欲使此方程式合於所標之形狀,可用n以代表「以線段1加之則得線段o」之線段,則上式可化爲

$$ex'+ny+nec=o.$$

是卽屬於定理34所標之形狀之一方程式也.

今請證本定理之後部亦爲合理. 蓋凡一次方程式

$$ax+by+c=o$$

其左方以某特別選定之線段乘之,易使之改爲

$$ex+ny+nec=o$$

之形狀也.

然吾人所假設之線段方程式之形狀

$$xa+yb+c=o$$

中,其線段a,b之在坐標x,y右側者通常未必表示一直線,此必須明白宣示者也.

以後§30,將更闡發定理34之緊要應用.

§28. 線段系 視如複數系

於§24所立之線段計算新法中,§13所述定理1–6皆能適用,甚爲易見.

又據德沙格氏定理在§§25及26已述及§13中所舉7–11諸演算律,亦復成立. 故除乘法之交換定律外,其餘各結合定理蓋全能成立也.

欲令此種線段發生大小順序之可能,可規定之如下. 命A及B爲OE直線上相異之二點. 則如公理II, 4所云,O,E,A,B四點設有一定之順序關係.

若其順序關係爲

$ABOE$, $AOBE$, $AOEB$, $OABE$, $OAEB$, $OEAB$,

六者之一,則可謂線段$a=OA$小於(*Smaller than*)線段$b=OB$,而以

$$a<b$$

表之. 反之,若其順序關係爲

$BAOE$, $BOAE$, $BOEA$, $OBAE$, $OBEA$, $OEBA$,

六者之一,則可謂線段$a=OA$大於(*Greater than*)線段$b=OB$,而以

$$a>b$$

表之. 此種規定當A或B重合於O或E時,依然有效,不過二點相重合則視爲一單純之點,而僅論三點之順序耳.

故以公理類II爲根據,吾人能證明§13所舉13—16各順序定理全行適合於線段計算新法. 由是,各種相異線段之總組織成一複數系 *Complex number system.* 而此複數系能適用§13所舉1—11, 13—16諸律,換言之,卽除乘法之交換定律及亞幾默德定理以外,其餘之尋常演算律蓋莫不適合云.

此種組織特簡稱之曰德沙格氏數系. *Desarguesiau number system*

§29. 用德沙格氏數系創立空間幾何

設有一德沙格氏數系D於此. 此種數系可能以之創立一空間幾何,而使公理類I, II, III均能適合.

欲說明此點,可將德沙格氏數系D之任意三數組(x,y,z)視爲一點,而將此類之四個數之比$(u:v:w:\gamma)$,其中前三數同時不得皆等於零,視爲一平面.

然若a亦爲D系中之一數而不爲零,則$(u:v:w:\gamma)$與$(au:av:aw:a\gamma)$表同一平面. 方程式

$$ux+vy+wz+\gamma=o$$

之成立,卽認爲(x,y,z)點在$(u:v:w:\gamma)$平面上之條件.

最後設有二平面$(u':v':w':\gamma')$與$(u'':v'':w'':\gamma'')$,若於德沙格氏數系D中不能有相異於零之二數a'及a'',同時令

$$a'u'=a''u'',\ a'v'=a''v'',a'w'=a''w''$$

諸式成立,則二平面之組織稱爲直線之定義,而以$[(u':v':w':\gamma'),(u'':v'':w'':\gamma'')]$表之. 設有一點$(x,y,z)$旣在$(u':v':w':\gamma')$平面上,又在$(u'':v'':w'':\gamma'')$平面上,則稱該點$(x,y,z)$在直線$[(u':v':w':\gamma'),(u'':v'':w'':\gamma'')]$上. 二直線所含各點完全相同,則爲同一直線無庸區別,『如$[(u':v':w':\gamma'),(u'':v'':w'':\gamma'')]$與$[(u'':v'':w'':\gamma''),(u':v':w':\gamma')]$卽係一直線』.

§13所舉1—11各律旣假設其適合於德沙格氏數系D矣,則用此以說明適間所創空間幾何均能適用結合公理(類I)及平行公理(類III),殊非難事.

欲說明順序公理(類 II)亦能成立,先採一種規定如下. 設

$$(x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2),\ (x_3,y_3,z_3)$$

爲直線

$$[(u':v':w':\gamma'),\ (u'':v'':w'':\gamma'')]$$

上之任意三點. 則,若

$$(1)\ x_1<x_2<x_3,\qquad x_1>x_2>x_3,$$

$$(2)\ y_1<y_2<y_3,\qquad y_1>y_2>y_3,$$

$$(3)\ z_1<z_2<z_3,\qquad z_1>z_2>z_3,$$

六種連不等式中至少有一種成立,則謂 (x_2,y_2,z_2) 點居於其餘二點之間. 惟是若(1)行二不等式中有一成立,則必 $y_1=y_2=y_3$ 或(2)行二不等式中之一成立,且必 $z_1=z_2=z_3$ 或(3)行二不等式中之一成立. 試將

$$u'x_i+v'y_i+w'z_i+\gamma'=o,$$

$$u''x_i+v''y_i+w''z_i+\gamma''=o$$

$$(i=1,2,3)$$

二方程式之左端各乘以 D 系中之適宜數(其選擇法,先選二數 a',a'',令 $a'+a''=o$, 再選二數 b',b'' 令 $b'w'$

$=a'$,而$b''w''=a''$,然後以b'乘第一式之左端以b''乘第二式之左端)而加其結果,必可得一組之方程式其形爲

$$(4)\qquad u'''x_i+v'''y_i+\gamma'''=o,(i=1,2,3).$$

此式中之v'''必與零相異,否則

$$u'''x_i+\gamma'''=o,\ (i=1,2,3)$$

而$x_1=x_2=x_3$與原來假設不合矣.

因原設

$$x_1\lesseqgtr x_2\lesseqgtr x_3,$$

則

$$u'''x_1\lesseqgtr u'''x_2\lesseqgtr u'''x_3,$$

(其等號乃備u'''爲零時之用者)更據(4)可得

$$v'''y_1+\gamma'''\lesseqgtr v'''y_2+\gamma'''\lesseqgtr v'''y_3+\gamma''',$$

故 $$v'''y_1\lesseqgtr v'''y_2\lesseqgtr v'''y_3.$$

然v'''不等於零,故又得

$$y_1\lesseqgtr y_2\lesseqgtr y_3.$$

以上各連不等式必同時全用上層小於號,或全用中層等於號,或全用下層大於號.

同理,從前之二方程式消去y,再假設

$$x_1 \lesseqgtr x_2 \lesseqgtr x_3,$$

則明明可得

$$z_1 \lesseqgtr z_2 \lesseqgtr z_3.$$

由以上之考究可見吾人所創之幾何中,凡直線的順序公理 II 1–4完全適用. 然尚須證明平面公理 II,5亦能成立於此種幾何. 證之如下.

設有一平面$(u:v:w:\gamma)$及其上一直線〔$(u:v:w:\gamma)$, $(u':v':w':\gamma')$〕. 平面$(u:v:w:\gamma)$上各點(x, y, z), 可視 $u'x+v'y+w'z+\gamma'$ 一式之大於零或小於零爲標準,而定該點在與直線此側或他側. 如是規定與直線的順序仍保其協調,而平面的順序公理($-II$,5)亦不難證明.

由上之說可見(公理類 I, II, III, 全然適合於吾人用德沙格氏數系D所創立之空間幾何)也. 然德沙格氏定理本爲 I, II, III 三類公理當然之演論前已言之, 故上命題云云不過§28所得結論之逆理耳.

§30. 德沙格氏定理之真諦

設有一平面幾何,公理類 I 1–4, II, III, 旣能適

合,德沙格氏定理亦屬眞確,則據 §§24−28 之研究,以此種幾何爲基礎必可造出一線段計算,能適用§13所舉之1−11,及13−16各演算律.此類線段若視爲一複數系,據 §29 之研究以此種複數系爲基礎必又創立一種空間幾何,能適用公理類 *I,II,III*.

就此空間幾何中,若僅取(x,y,o)諸點及僅含該類之點諸直線.則可得一平面幾何必如 §27 所述諸定理而正與最初所用之平面幾何一致.故最後得下列定理,本章全章之主旨,盡在於此.

定理35 一平面幾何若能適用公理 *I* 1−4, *II III*, 則其「可視爲一種能適用公理 *I,II,III* 之空間幾何之一部分」之必需而且充分之條件,卽爲德沙格氏定理之成立云.

由此觀之,所謂德沙格氏定理者儼然空間公理之特徵,吾人苟於空間幾何固有之 *I,II,III* 三類公理革去其空間公理 *I* 5−9, 其結果,在此遺存之平面幾何中德氏定理依然無恙也.

本章研究之心得,適足使吾人悟及:凡能適用公理類 *I,II,III* 之空間幾何皆可視爲一任何多度空

間幾何之一部分. 所謂任何多度空間幾何者乃以點,直線,平面,及其他一次原素*所組織而能適用結合,順序及平行諸公理者也.

---

*譯者註. 平面幾何中點及直線爲一次原素,二度空間幾何中點,直綫,平面爲一次原素,此等原素之解析的表示皆爲一次方程式,故名. n度空間幾何,自解析的眼光觀之,卽研究 n 個未知數之方程式之學;凡未知數之個數不多於n而爲一次方程式者卽一次原素之代表.

第六章
巴斯開定理

§31. 關於巴斯開定理之可否證明之二定理

德沙格氏定理可以公理類 *I,II,III,* 證明之,換言之,卽可以特別借助於空間公理而證明之,吾人知之已熟;然舍去類 *I* 之空間公理,且不用類 *IV* 之合同公理,雖以亞幾默德公理爲根據,亦不能證明此定理之能否存在,在 §23 已言之矣.

以公理 *I* 1–4,*II,III,IV* 爲基礎,卽除去空間公理而加入合同公理,在 §14 曾推演出巴斯開定理而據 §22 又可證明德沙格氏定理. 然若屏去合同公理,巴斯開定理果能證明否乎? 細究之,卽知巴斯開定理與德沙格氏定理大不相同,其眞否須視亞幾默德公理之採納與否爲轉移. 玆將研究之結果,合之爲下列二定理.

定理36. 巴斯開定理(定理21)可由公理 *I,II,III,V* 證明之;換言之,卽棄去合同公理而用亞幾默

德公理以證明之也.

定理37. 巴斯開定理(定理21)不能僅以公理 I, II, III,證明之;換言之,卽謂如將合同公理及亞幾默德公理並舍而不用,則不能證明之也.

由定理35之說,上述二定理中之空間公理 I 5—9 得以「德沙格氏定理能成立之平面幾何條件」代替之.

§32. 乘法交換定律之於亞幾默德數系

欲證明定理36及37尙有一應先決之問題,卽算術之演算諸律與基本諸定理之互相的關係是也.

此種關係之本身亦尙屬重要,玆先舉其二定理於下.

定理38. 於亞幾默德數系中,乘法交換定律爲其餘各演算律必然的結果;換言之,凡一數系若含有§13所舉1—11, 13—17諸性質,則公式12之成立亦爲必然之結果.

證. 請先就特別情形論之. 若 a 爲此數系中之任意一數,且若

$$n=1+1+\cdots\cdots\cdots\cdots+1$$

爲一任意有理正整數,則就 a 及 n 而言乘法交換定律可以成立. 蓋因

$$an=a(1+1+\cdots\cdots\cdots+1)$$
$$=a\cdot1+a\cdot1+\cdots\cdots\cdots+a\cdot1$$
$$=a+a+\cdots\cdots\cdots+a.$$

且

$$na=(1+1+\cdots\cdots\cdots+1)a$$
$$=1\cdot a+1\cdot a+\cdots\cdots\cdots+1\cdot a$$
$$=a+a+\cdots\cdots\cdots a.$$

而得 $$an=na.$$

今進而論一般情形. 設 a,b 爲本數系中任意二數,姑且反本定理,假令 ab 與 ba 不相等,則爲便利計無妨假定

$$a>o,\ b>o,\ ab-ba>o$$

據§13之條件 6,可知必有一數 c (大於零) 之存在而

$$(a+b+1)c=ab-ba.$$

最後選定一數 d,使能同時合於

$$d>o,\ d<1,\ d<c,$$

諸不等式．又以m及n表示合於

$$md<a\leqq(m+1)d,$$

及

$$nd<b\leqq(n+1)d.$$

二條件之有理整數(大於零或等於0)．則m,n二數之存在,以亞幾默德定理(定理17,§13)推之,當然無疑．本證法最初之理今再取而用之,則由上列二不等式相乘,可知

$$ab\leqq mnd^2+(m+n+1)d^2,$$

$$ba>mnd^2,$$

相減得

$$ab-ba<(m+n+1)d^2$$

然因 $md<a,\ nd<b,\ d<1.$

則

$$(m+n+1)d<a+b+1.$$

故 $ab-ba<(a+b+1)d$

然又因$d<c$,故

$$ab-ba<(a+b+1)c.$$

此顯然與c之定義[$(a+b+1)c=ab-ba$]相矛盾,故乘

法之交換定律不能不成立而定理38眞確矣.

§33. 乘法交換定律之於非亞幾默德數系

定理39. 於非亞幾默德數系中,乘法交換定律不必爲其餘各演算律必然之結果;換言之,卽具有§13之1–11及13–16各性質之數系,但不能適用乘法交換定律者有之. §28之所謂德沙格氏數系卽其一例也.

證. 設 t 爲褒變數, T 爲

$$T=r_0t^n+r_1t^{n+1}+r_2t^{n+2}+r_3t^{n+3}+\cdots\cdots,$$

形狀之代數式,其項數爲有窮或無窮;其中 $r_0(\neq 0)$, $r_1,r_2,r_3,\cdots\cdots$ 爲任意的有理數;其中 n 爲任意有理整數,大於零或等於零或小於零. 又設 s 爲另一褒變數, S 爲

$$S=s^mT_0+s^{m+1}T_1+s^{m+2}T_2+\cdots\cdots\cdots,$$

形狀之代數式,其項數爲有窮或無窮;其中 $T_0(\neq 0)$, $T_1,T_2,\cdots\cdots$ 爲表形狀 T 之任意代數式,其中 m 亦爲任意有理整數,大於零或等於零或小於零. 凡 S 形狀之式,統而名之曰複素數系 $\Omega(s,t)$, 其演算之

規定如下: 演算時,§13 所舉 7–11 各律一仍其舊,惟遇 s 與 t 相乘時第 12 條(卽乘法交換定律)特別改訂爲公式

$$(1) \qquad ts=2st$$

今設 S',S'' 爲 S 形狀之二式,卽

$$S'=s^{m'}T'_0+s^{m'+1}T_1'+s^{m'+2}T_2'+\cdots\cdots,$$

$$S''=s^{m''}T''_0+s^{m''+1}T_1''+s^{m''+2}T_2''+\cdots\cdots,$$

則相加應另得一式 $S'+S''$,仍爲 S 形狀之式,定然無疑. 此 $S'+S''$ 卽稱爲 S' 與 S'' 之和云.

若 S' 與 S'' 兩式各項相乘則得

$$S'S''=s^{m'}T_0's^{m''}T_0''+(s^{m'}T_0's^{m''+1}T_1''+s^{m'+1}T_1's^{m''}T_0'')$$
$$+(s^{m'}T_0's^{m''+2}T_2''+s^{m'+1}T_1's^{m''+1}T_1''+s^{m'+2}T_2's^{m''}T_0'')$$
$$+\cdots\cdots,$$

欲顯明出此式屬於 S 形狀,當整理 s 之同乘羃時令遵守公式(1)可也* 如此所得之式亦係惟一固定的代數式而屬於 S 形狀者. 此式稱爲 S' 與 S'' 二式所表之數之積.

如此計算方法適用 §13 所舉 1–5 各演算律,甚爲明顯. 卽同節第 6 條演算律亦不難證明. 設有

$$S'=s^{m'}T_0'+s^{m'+1}T_1'+s^{m'+2}T_2'+\cdots\cdots,$$

$$S'''=s^{m'''}T_0'''+s^{m'''+1}T_1'''+s^{m'''+2}T_2'''+\cdots\cdots$$

*例如第三大項之第一項原爲 $s^{m'}T_0's^{m''+2}T_2''$, 欲將其中 $s^{m'}$ 與 $s^{m''+2}$ 相乘而併爲 $s^{m'+m''+2}$, 必須先將 T_0' 與 $s^{m''+2}$ 之位置互換,而互換時須遵守公式(1). 設使

$$T_0'=r_0't^n+r_1't^{n+1}+r_2't^{n+2}+\cdots\cdots$$

則 $T_0's^{m''+2}=r_0't^ns^{m''+2}+r_1't^{n+1}s^{m''+2}+r_2't^{n+2}s^{m''+2}+\cdots\cdots$

$$=r_0'\ 2^{n(m''+2)}s^{m''+2}t^n+r_1'\ 2^{(n+1)(m''+2)}s^{m''+2}t^{n+1}+\cdots\cdots$$

$$=s^{m''+2}\ \{2^{n(m''+2)}r_0't^n+2^{(n+1)(m''+2)}r_1't^{n+1}+\cdots\cdots\}$$

爲二 S 形狀之式,並再設 T_0' 之係數 r_0' 不等於零.

則由方程式

(2)　　　$S'S''=S'''$

中,若將其兩端 s 之同方次項以等號聯之,則先得一定形狀之整數 m'' 爲指數,次得一列之式

$$T_0'',\ T_1'',\ T_2'',\cdots\cdots$$

而用公式(1)可使式

$$S''=s^{m''}T_0''+s^{m''+1}T_1''+s^{m''+2}T_2''+\cdots\cdots$$

能滿足方程式(2). 故第6條亦成立也.

欲使數系 $\Omega(s,t)$ 中一切之數排列爲一定之次序,可遵下列之規約. 一式 S 所表之數,其大於零或小於零,全視其式中 T_0' 之第一係數 r_0 之大於零或小於零而定. 設有複素數系中任意二數 a 及 b,其 $a<b$, 或 $a>b$ 卽全視 $a-b<o$ 或 $>o$ 而定. 如是則§13所舉之13-16諸律亦能成立. 故曰 $\Omega(s,t)$ 卽德沙格氏數系也. (參考§28)

由公式(1)所示, §13 所舉第12 條律不能適用於複素數系 $\Omega(s,t)$ 而定理39之成立,完全證明矣.

由定理38, 亞幾默德定理(定理17, §13) 不能適用適才所建之數系 $\Omega(s,t)$.

吾人尙必注意者: 數系 $\Omega(s,t)$ 以及 §9 與 §12 所用之數團 Ω 與 $\Omega(t)$ 皆各含一組之數而非數之全體.

§34. 關於巴斯開定理的二命題之證明（非巴斯開幾何）

凡空間幾何公理類 I, II, III 能成立者，德沙格氏定理（定理32）亦必能成立，而據 §§24–26 之研究又可導出含有 §13 所舉 1–11 及 13–16 各性質之一種線段計算法．設吾人之空間幾何爲適用亞幾默德公理（V）者；則所導出之線段計算法當然適用亞幾默德定理（卽 §13 之定理 17），更據定理 38 可知乘法交換定律（§13 之定理 12）亦隨之而成立．然因 §24（圖 42）所規定二線段相乘積之定義與 §15（圖22）所規定者無異；故由 §15 之作法，則所謂乘法交換定律者亦不過巴斯開定理而已．—— 果乘法交換定律成立則巴斯開定理亦成立，反之，亦然．

由是而定理 36 證明矣．

欲證明定理 37，可仍以 §33 所用德沙格氏數系 $\Omega(s,t)$ 爲立論之憑藉，而依 §29 之方法創立一種幾何，使公理類 I, II, III 皆能成立．如此所創之幾何必不能適用巴斯開定理，蓋因乘法交換定律不能適用於德沙格氏數系 $\Omega(s,t)$ 故也．由此觀之，如此

之非巴斯開幾何 *Non-pascalian geometry.*)亦必爲非亞幾默德氏幾何, *Non-archimedean geometry.*)而定理37完全證明矣.

僅如以上假設,固無由證明巴斯開定理. 欲使之成立,除非將吾人之空間幾何視爲任何度空間幾何之一部,而此種任何度空間幾何,如§30末文所述,除點,直線,平面以外,尙有其他一次原素;且對此諸原素必有相當的結合公理,順序公理,及平行公理之存在而後可以證明之也.(猶如在平面幾何僅憑平面公理*I* 1-4,*II*,*III* 而欲證明德沙格氏定理之成立,必須將此平面幾何視爲空間幾何之一部分;而此空間幾何除點,直線以外須另有一次之原素平面,且於關於平面公理*I* 1-4,*II*,*III* 之外,尙有關於空間結合公理*I* 5-9適合也).

§35. 關於交點的定理用巴斯開定理及德沙格氏定理之證明

凡關於平面上直線會交的命題,無非首先選定若干點,若干直線,言明某某點在某某直線上,次求某幾線之交點,又將某幾點聯成直線,最後得三直

線而斷定三線交於同一點已爾.

先設有一平面幾何,其中公理 $I\,1-4, II-V$ 皆能成立. 據 §17 之研究,可於平面上取一對正交直線爲坐標軸,則每一點皆可以二數之耦 (x,y) 表之,每一直線皆可以三數之比 $(u:v:w)$ 表之. 此處所用之 x,y,u,v,w 諸數概爲實數而 u 與 v 不同時等於零. 凡謂一點 (x,y) 在一直線 $(u:v:w)$ 上,其條件卽

$$ux+vy+w=0$$

而此方程式與本來意義無異. 逆而言之,若 x,y,u,v,w 爲數系 Ω(§9)中之數而 u,v 同時不等於零,則每二數之耦 (x,y) 皆可以表此幾何中之一點,每三數之比 $(u:v:w)$ 皆可以表一直線.

平面上關於交點之定理,其中所謂點悉以二數之耦代之,其中直線悉以三數之比代表之,則該定理之斷案無非謂: 某式 $A(p_1,p_2,p_3,\cdots p_r)$ (p 等之有理式,以實數爲係數)當其褒變數 $p_1,p_2,\cdots\cdots p_r$ 各取數圍 Ω 之數值時恆等於零. 由是吾人可斷言曰,此 $A(p_1,p_2,\cdots\cdots p_r)$ 式之等於零可以 §13 所舉 7—12 各

演算律徵驗之.

今吾人若將德沙格氏定理及巴斯開定理兩皆採用以立幾何,則因有德氏定理之故吾人可以採用§24所創之線段新計算法,又因有巴氏定理之故乘法交換定律當然成立. 故今茲之線段計算法(較之§24節者多巴氏定理爲根據)實能完全適用§13之7－12各律者也.

若以先前所用之坐標軸爲線段計算新法之坐標軸,而於其上取適宜之么率點E及E',則可見此線段計算新法與前者所用之坐標系無異.

故欲證明式$A(p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots p_r)$於線段計算新法中恆等於零,僅用巴斯開定理及德沙格氏定理可矣. 結果如下.

在上述平面幾何中,凡關於交點的定理,苟添設適宜之補助點及直線,必可證其爲巴斯開定理與德沙格氏定理之合併. 故關於交點定理之成立之證明,無須乎藉助於合同公理也.

第七章

根據五類公理之幾何作圖法

§36. 用直尺及線段遷移器之幾何作圖法

設有一空間幾何,五類公理($I-V$)皆能成立.茲爲簡便起見,本章僅就該空間幾何之一部分即平面幾何而論,以研究(在此種幾何中何種初等幾何作圖法可以畫出)之問題.

以公理類 I 爲根基,則下列作圖法恆屬可能:

作圖題 1. 聯二點爲一直線,與求不平行之二直線之交點.

據公理類 III,則下列作圖法,亦屬可作:

作圖題 2. 過一與點作一直線平行於一與直線.

借助於合同公理(IV),線段及角之遷移亦屬可能;換言之,在此種幾何中吾人可以解下列二題:

作圖題 3. 從一與直線上之一與點爲起點,取一線段與一與線段合同;換言之,從一與直線之一

與點,移置一與線段.

作圖題 4. 將一與角移置於一與直線上;換言之,作一直線令與與直線相交成爲與角.

以上四種作圖法並未引用公理 *II* 及公理 *V*, 卽用之於作圖方法亦無所增益. 故以五類公理立論,凡可由作圖題1–4化出之作圖法盡歸有效,且惟此種作圖法可以有效.

玆於作圖題 1–4 四者之外再加下列之基本作圖法:

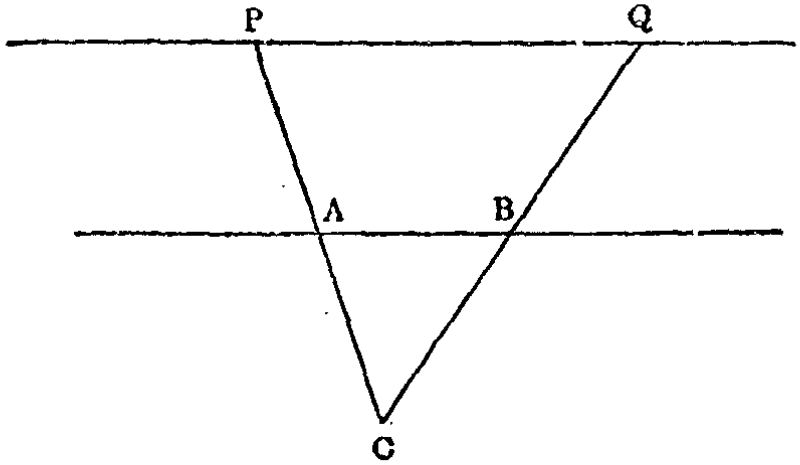
作圖題 5. 作一與直線之垂線.

此題可由作圖題 1–4 用種種方法作出之,其理甚明.

從事於作圖題 1 僅需用一直尺. (*Straight edge.*) 從事於作圖題 3 所用之器械吾人可名之曰線段遷移器. (*Transferer of segments.*) 作圖題 2, 4 及 5 又可由作圖題 1 與 3 化出之,其理見下. 然則 1–5 五法皆可用直尺及線段遷移器完全成之矣. 故得:

定理 40. 凡僅用公理 *I–V* 可解之諸幾何作圖問題恆可以直尺及線段遷移器作出之.

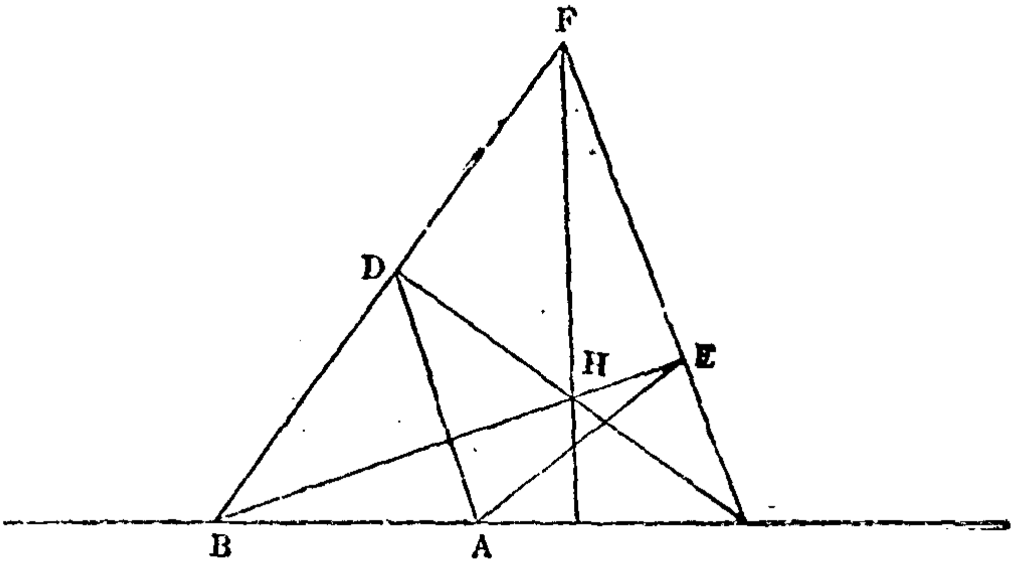
證. 欲用作圖題 1 及 3 而解作圖題 2, 則聯與點 P 與與直線上任一點 A, 而延長 PA 至 C, 令 $AC=PA$. 再聯 C 點與與直線上之另一點 B 而延長



第五十二圖

CB 至 Q, 令 $BQ=CB$. 則 PQ 卽爲所求之平行線.

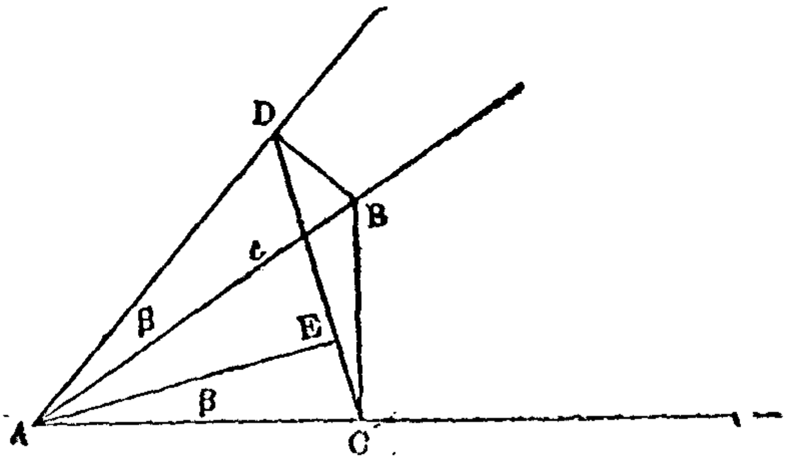
又可解作圖題 5 如下. 設 A 爲與直線上之任



第五十三圖

意一點．則於該線上 A 點之兩側取兩相等之線段 AB 及 AC．於過 A 點之二任意直線上，定出 D,E 二點而令線段 AD 及 AE 等於 AB 及 AC．設 BD 與 CE 之交點爲 F 而 BE 與 CD 之交點爲 H．則 FH 卽爲所求之垂線．蓋因 BDC 及 BEC 兩角內接於以 BC 爲直徑之半圓形故爲兩直角．而按三角形三高線(*Altitude*)會交於一點之定理，則 FH 與 BC 應互相垂直．

作圖題 4 本可以作直線及遷移線段諸手續簡易解之．用下法僅需畫垂直線及平行線卽可．(由上述二證明，此二作法已可用作圖題 1 及 3 解之．) 設 β 爲所欲遷移之角而 A 爲其頂點．由 A 點



第 五 十 四 圖

作 l 直線使平行於〔欲將 β 角移置其上〕之與直線.

從 β 角之一邊上之任意一點 B,作 BD 垂直於其他一邊,再作 BC 垂直於 l. 該二垂線之足點各以 D,C 表之. 此等垂線之作法乃由作圖題 2,及 5 作成者. 於是,從 A 點作垂線垂直於 CD,而其足點以 F 表之. 按§14所述之證明,CAE 角卽等於 β 角. 是故作圖題 4 亦可謂依作圖題 1 及 3 而成,而本定理證明矣.

§37. 可用上作圖法所得之點之坐標之解析的表徵

除 §36 所列初等幾何作圖法以外,尙有一組之其他作圖題可用引直線及遷移線段解之者. 如此所解得諸問題之範圍欲加以精密的觀察,請以一組之垂直坐標軸爲考察之基礎,而假設點之坐標仍以實數或某襄變數之函數表之. 點之可以如上法作出者其坐標之表徵如何,欲答此問題,請論之如下.

設有一組之點,旣經指定. 將此等點之坐標悉歸納於一數圍 R,則此數圍 R 含有某若干實數及

某若干任意褒變數．凡可由此等點用引直線及線段遷移法所作之點，其坐標所作成之數閾名之曰數閾 $\Omega(\ )$，則此數閾亦含有實數及任意褒變數 p 之函數云．

由 §17 之討論，可知直線及平行線之畫法正等於線段之解析的演算加減乘除四法．又據 §9 之旋轉公式觀之，則直線上遷移線段所須要之解析的演算，於加減乘除四法而外，不過求〔已知二線段平方之和〕之平方根而已．反之，據柏達葛拉斯氏定理，僅用線段之遷移亦可由直角三角形而得〔二線段平方之和〕之平方根．

由此觀之，數閾 $\Omega(R)$ 者乃由 R 中之實數及褒變數，用加，減，乘，除及求二平方和之平方根五法則若干次所導出之實數及褒變數 p 之函數之全體組成者也．總結之如下：

定理 41. 幾何作圖之是否可由引直線及遷移線段解之，即是否可用直尺及線段遷移器二者作出之，一視其解析的解法所求各點之坐標是否為所與點之坐標可以加減乘除及開平方和之平方

根五法表出之之函數爲轉移.

由上定理,可見用直尺及圓規可解之問題,未必亦可用直尺及線段遷移器解之. 欲明其理,請復就§9所標榜之幾何論之. 此幾何本爲借助於代數的數圍Ω所建設,故其中線段,悉爲數圍Ω之數所能表者,卽用直尺及線段遷移法可以作成者也

今若ω爲數圍Ω中一數,則由Ω之定義易知凡之共軛數亦必在Ω中. 因Ω中各數悉爲實數,故謂Ω僅能含有〔其共軛數亦爲實數〕之代數實數;若共軛點有虛數,則該數不屬於Ω.

設有一作圖題:以1爲斜邊,$|\sqrt{2}|-1$爲一邊,求作直角三角形. 表其他一邊之代數值$\sqrt{2|\sqrt{2}|-2}$不屬於Ω,蓋因其共軛數$\sqrt{-2|\sqrt{2}|-2}$爲虛數故也.

故此題雖可以用直尺及圓規解之,但決不能用直尺及線段遷移器解之也.

§38. 用平方之和表示代數的數及整的有理函數之方法

關於幾何作圖題可否用直尺及線段遷移器解答,此問題之圓滿的討論有待於含有算術的及代

數的性質之若干定理;自著者觀之,該定理自身亦頗饒趣味.

自費美特(*Fermat*)以來,已知任何正整有理數可以四平方之和表示之. 此費美特之定理尙可推廣之如下.

定義. 設k爲任意一數體,*而m爲其次數(卽度數). 與k共軛之$m-1$個數體以$k', k'', \cdots\cdots k^{m-1}$表之. 此$m$個數體$k, k', k'', \cdots\cdots k^{m-1}$之中,若有一數體或數個數體純由實數組織而成,則該等數體稱之爲實數體. 設m體之中有$k, k', k'', \cdots\cdots k^{(s-1)}$等爲實體. k體中若有數α,其共軛數之屬於$k, k', k'', \cdots\cdots k^{(s-1)}$諸體中者全係正數,則稱$\alpha$在$k$體中爲〔全正〕. 然若$k, k', k'', \cdots\cdots k^{m-1}$,諸數體中各含有虛數,卽無一體純係實數組成者,則$k$中之任意一數$\alpha$皆稱之爲〔全正〕. (*Totally positive*)

玆得定理如下:

---

* *Number field* 譯爲數體或數系,取體系之意,結構之意.

定理42. k中任何〔全正〕的數,可以四數之平方和表之,其底數爲k中之整數或分數.

此定理之證明,雖關甚多; 其證明,著者近曾於他種論文中論之. 解明之,必以相對的二次數體理論爲基礎. 今僅取此論中一較有關係之命題提示於此. 卽三元無定方程式(*Ternary diophantine equation*)如

$$\alpha\xi^2+\beta\eta^2+\gamma\zeta^2=0.$$

形式者,若其中α,β,γ爲k中已知之係數,ξ,η,ζ爲k中未知而欲求之數,則此方程式可解. 欲證明定理42但以此命題反復用之可矣.

由定理42推廣之,關於一種〔係數有理,得值常正〕的有理函數之表示法可得一列之定理. 今僅述於下節有用之定理如下.

定理43. 設$f(x)$爲x之有理整函數,其係數全是有理數,且當x取任何實值時,其值決不爲負. 則$f(x)$常可以二〔平方和〕之商表示之,其中平方之底皆爲有〔有理係數〕x之有理整函數.

證. $f(x)$之次數若爲m,則m無論如何,必爲偶數,

蓋因奇次之有理函數有時得負值也. 當 $m=0$ 時,即當 $f(x)$ 為一有理數時,由費美特之以四平方和表示正整數之定理,則定理43可以成立. 以下所用之證法,先假設本定理對於 $2, 4, 6, \cdots\cdots (m-2)$, 等次函數皆已成立,然後求證其對於 m 次函數亦能成立. 分兩種情形論之如下:

第一. 假設 $f(x)$ 可以劈為二個或多個因數之積,其中各因數皆為 x 之有理整函數——以有理數為係數,當 x 取任何實值時其值決不為負. 再設 $p(x)$ 為此等因數之一,而 $p(x)$ 自身不復能劈為[係數有理之整函數的]因數之積. 則據 $f(x)$ 所有之特性,(即當 x 取任何實值時,決不為負)可知其因數 $p(x)$ 必:(一)於 $f(x)$ 內現偶次,(即 $f(x)$ 含有偶數個 $p(x)$)或(二) $p(x)$ 自身亦有 $f(x)$ 所有之特性;換言之, $p(x)$ 為[當 x 取任何實值時,決不為負值]之函數也. 在(一)情形時之 $\dfrac{f(x)}{\{p(x)\}^2}$ 及在(二)情形之 $p(x)$ 與 $\dfrac{f(x)}{p(x)}$ 二者皆含有該特性且皆為低於 m 之偶次函數. 故按上述之假設, $\dfrac{f(x)}{\{p(x)\}^2}$ 及 $p(x)$ 與 $\dfrac{f(x)}{p(x)}$ 皆可依定理43所述之性質以平方和之商表之也. 故在上

列二種情形時，$f(x)$必可以所要求之表示法表之。

第二，若$f(x)$不能劈為〔以有理數為係數之有理整函數〕之積．則方程式$f(\theta)=0$必決定一代數數體$k(\theta)$，其次數為m，其全體共軛數體皆為虛的．（即有虛數含於各數體中）．因按以前所述之定義（在定理42之上）而$k(\theta)$中任一數皆稱之為〔全正〕，且-1亦稱為〔全正〕；則由定理42，-1一數可以$k(\theta)$中四數之平方和表之．設如

(1) $$-1=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$$

*因$f(x)$可以劈為因數如$p(x)$及$\dfrac{f(x)}{p(x)}$，而因數之次皆低於m，則

$$p(x)=\frac{\Sigma a_i^2}{\Sigma b_j^2}=\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots\cdots},$$

及 $$\frac{f(x)}{p(x)}=\frac{\Sigma c_k^2}{\Sigma d_l^2}=\frac{c_1^2+c_2^2+c_3^2+\cdots\cdots}{d_1^2+d_2^2+d_3^2+\cdots},$$

其中a, b, c, d，等各為x之有理整函數其係數皆為有理者．

故 $$f(x)=p(x).\frac{f(x)}{p(x)}=\frac{\Sigma a_i^2}{\Sigma b_j^2}.\frac{\Sigma c_k^2}{\Sigma d_l^2}=\frac{\Sigma(a_i.c_k)^2}{\Sigma(b_j.d_l)^2},$$

其中諸$a\cdot c$及諸$b\cdot d$當然為有理函數以有理數為係數．

其中$\alpha,\beta,\gamma,\delta$皆爲$k(\theta)$中之有理整數或分數.

設

$$\alpha=a_1\theta^{m-1}+a_2\theta^{m-2}+\cdots\cdots+a_m=\phi(\theta),$$

$$\beta=b_1\theta^{m-1}+b_2\theta^{m-2}+\cdots\cdots+b_m=\psi(\theta),$$

$$\gamma=c_1\theta^{m-1}+c_2\theta^{m-2}+\cdots\cdots+c_m=\chi(\theta),$$

$$\delta=d_1\theta^{m-1}+d_2\theta^{m-2}+\cdots\cdots+d_m=\rho(\theta);$$

其中$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_m,\cdots\cdots d_1,d_2,\cdots\cdots,d_m$皆爲有理數係數而$\phi(\theta),\psi(\theta),\chi(\theta),\rho(\theta)$皆爲$\theta$之有理整函數,其次數爲$m-1$.

由(1)式得

$$1+\{\phi(\theta)\}^2+\{\psi(\theta)\}^2+\{\chi(\theta)\}^2+\{\rho(\theta)\}^2=0.$$

再設

$$F(x)=1+\{\phi(x)\}^2+\{\psi(x)\}^2+\{\chi(x)\}^2+\{\rho(x)\}^2,$$

則因$f(x)=0$不能劈爲因數,$F(x)$必爲x之有理整函數而可被$f(x)$除盡者. 於是$F(x)$亦爲具有特性——係數有理,得值常正——之函數,其次數爲$2m-2$或較低. 故$F(x)/f(x)$亦爲具有特性之x的函數而其次數爲$m-2$或較低. 由前所立之假設,則$F(x)/f(x)$可以〔定理43所述之〕二平方和之

商表之。又因$F(x)$之自身爲如是之平方和,故$f(x)$亦必爲所要求之平方和之商也.* 如此故無論$f(x)$可劈與否,定理43常能成立.

二個以上元(變數)之有理整函數之問題,其證明更非易易矣. 兹僅就其證法之不同述之. 欲證明二個元(變數)之有理整函數且具有特性者,可否以兩個〔若干整函數之平方之和〕之商表之;先假設所用之函數之係數,不惟有理,而且爲任意實數即可矣.

*設 $\dfrac{F(x)}{f(x)}=\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots}{b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots}$,

其中諸 a 及 b 各爲 x 之有理整函數,則

$$f(x)=\frac{F(x)}{\dfrac{F(x)}{f(x)}}=\frac{1^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots}{b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots}}$$

$$=\frac{\Sigma\{b_i^2+(\alpha b_i)^2+(\beta b_i)^2+(\gamma b_i)^2+(\delta b_i)^2\}}{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots\cdots}$$

其中$i=1, 2, 3,\cdots\cdots\cdots\cdots$.

§39. 幾何作圖題可否用直尺及線段遷移器作成之準則

設有一幾何作圖題,原可以直尺及圓規作成.今試求〔由該問題之解析的性質及其解法而決定其是否可以直尺及線段遷移器作成〕之準則.研究之結果如下.

定理44. 設有一幾何作圖題,含有一種性質:其解析說法可使吾人〔用加減乘除及開平方五法〕從已知各點之坐標以決定所求各點之坐標.設計算各點坐標所用之平方根至少為n個.則〔欲使該問題可以畫直線及遷移線段作成〕,其必需而且充分條件為:〔對於已知點之任何位置,換言之,即對於已知點坐標所成之衰變數之一切值,該幾何問題應有2^n個眞實解法〕.

證.今證明此定理,僅就已知點之坐標純為一衰變數p之有理函數其係數亦為有理者論之.

由§37上述之條件其必需也明甚.今證其為充分條件如下.先假設此條件成立,然後就n個平方根中,而考其〔計算所求點之坐標時〕之必須

首先開方者．根號下之式$f_1(p)$，乃p之有理整函數，以有理數爲係數．無論裏變數p爲任何實値，根號下函數$f_1(p)$決不爲負，蓋因如其不然，則$\sqrt{f_1(x)}$爲虛數而與原來之假設相矛盾矣．由是，據定理43，吾人可斷言$f_1(x)$可以〔若干有理函數之平方和〕之商表之．

又由

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2+c^2},$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2+d^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

等公式可見無論多少個平方之和之平方根，皆可以遞次化爲二平方和之平方根．

將此結論與上之結果合而論之，即可知$\sqrt{f_1(p)}$定可用直尺及線段遷移器作成之．

次就n個平方根中，考其於計算所求點之坐標時之第二須開方者．根號下式爲裏變數p及第一所論平方根之有理函數$f_2(p,\sqrt{f_1})$．無論p取任何實値，$\sqrt{f_1}$取任何符號（正或負），此函數f_2決不

爲負;蓋因如其不然,則$\sqrt{f_2}$爲虛數而與假設不符矣. 故f_2必能適下列之二次方程式

$$f_2{}^2-\phi_1(p)f_2+\psi_1(p)=0$$

其中$\phi_1(p)$及$\psi_1(p)$必皆爲p之含有特性之有理函數,一卽其係數全爲有理,而無論p取任何實値時,該函數之値決不爲負. 據定理43,$\phi_1(p)$及$\psi_1(p)$二函數必可以〔有理函數之平方和〕之商表示之. 而$f_2=\dfrac{1}{2}\{\phi_1(p)\pm\sqrt{\{\phi_1(p)\}^2-4\psi_1(p)}\}$之値不得爲虛數,——卽根號內之有理函數必常爲正,故f_2亦可以用直尺及線段遷移器作出之. 然由

$$f_2=\frac{f_2{}^2+\psi_1(p)}{\phi_1(p)},$$

可知f_2可以〔函數之平方和〕之商表示之,而其函數又皆用直尺及線段遷移器作出者. 故$\sqrt{f_2}$亦用直尺及線段遷移器作出之.

仿上法,設$\phi_2(p,\sqrt{f_1})$爲p及$\sqrt{f_1}$之任意其他有理函數,若當裏變數p取任何實値而$\sqrt{f_1}$取任何符號(正或負)時,該式決不爲負,則可以〔可作函數之平方和〕之商表之.

由此附註又可將上述法則推廣之如下.

設計算所求點之坐標時,第三次開方者爲$f_3(p,\sqrt{f_1},\sqrt{f_2})$,乃三褢變數$p\sqrt{f_1},\sqrt{f_2}$之有理函數.同上理,無論$p$取任何實值,$\sqrt{f_1}$及$\sqrt{f_2}$取何符號時,$f_3$決不爲負.由此可見$f_3$必適合於下列之二次方程式

$$f_3^2-\phi_2(p,\sqrt{f_1})f_3+\psi_2(p,\sqrt{f_1})=0.$$

其中ϕ_2及ψ_2爲p及$\sqrt{f_1}$之有理函數,當p取任何實值,$\sqrt{f_1}$取任何符號時,該二函數決不爲負.據上之附註可知ϕ_2及ψ_2必可以二〔可作函數之平方和〕之商表之.故

$$f_3=\frac{f_3^2+\psi_2(p,\sqrt{f_1})}{\phi_2(p,\sqrt{f_1})}$$

亦可用直尺及線段遷移器作出之.

將上推證方法繼續用之,則關於一褢變數p之問題可證定理44成立.

定理44之可否推及於二個以上之褢變數,全視定理43之可否推及於二個以上之褢變數爲轉移.

茲論用直尺及圓規所能作成之有法多邊形以爲定理44之應用例題.此等情形中並無有褢變

數 p 之存在且其所求作之式皆含代數之數. 然則定理44之條件已能滿足而上述有法多邊形當然可以用畫直線法及遷移線段法作出之. 直接用分圓理論亦可得同樣之結果.

此外初等幾何中其他著名之作圖題,如麥爾費特(*Malfatti*)問題:〔作三圓內切於一三角形,使每圓各切於二邊,且三圓互切〕可以用直尺及線段遷移器作成,共計三十二個解法. 然 *Appolonius* 切圓問題:『作一圓切於三圓』則不能僅以此二器爲之云。

結論

本書所論僅限於歐几里特幾何;換言之卽承認平行公理之成立而硏究其種種問題也. 若將平行公理除掉,而其基本之原則及定理之硏究,固亦甚屬緊要也. 不用平面及直線之概念,僅以點作原素而利用形化羣論之概念或藉助於距離概念,可否能建設一論理的幾何,此緊要問題本書略去.

此問題由於李氏(*Sophus Lei*)基本的且蘊藏的著作,近時已變爲大可硏究之問題. 然爲其完全解明起見,空間爲數的集羣體可區分李氏公理爲種種部分. 李氏之假設:「發生形化之函數不但爲連續的且爲可微分的」起初以爲可作深邃之硏究.

但據著者所考,凡可能微分之條件內所含之幾何公理均屬必需的,其說殊不足信.

在此種問題之解明中,前此所述之方法及原則,著者信其甚有價値. 例如,著者曾勸 *Dehn** 硏究關於三角形三角之和之李金得氏(*Legendre*)定理.

Dehn 之硏究,乃以結合,順序,合同諸公理卽公理類 *I, II, IV* 爲基礎而除外平行公理及亞幾默得

公理立論者．且其順序公理亦較本書所述爲普遍，茲述之如下：在直線上之 A,B,C,D 四點，恆有二點（如 A,C）爲其他二點（B,D）所隔離，而逆之亦眞．直線上 A,B,C,D,E 五點恆排爲 A,C 爲 B,D 及 B,E 所隔離．於是，A,D 恆爲 B,E，及 C,E 所隔離，餘類推．如此定順序之義，苟取此等命題爲順序公理，則黎曼氏幾何（卽橢圓幾何，本書未曾論及）當然亦在成立之列．

以結合，順序，合同公理，卽公理類 I,II,IV 爲基礎，又可導出所謂理想原素（*Ideal elements*）——理想點，理想直線，理想平面．（*Ideal points, Ideal lines, Ideal planes.*）

Dehn 曾證明之如下定理：

> 平面上將直線 t 及其上各點除外，若將凡其餘各直線及各點（實原素或理想原素）視爲一種新幾何之原素，則可得新幾何之合同定義能令結合，順序，合同，諸公理以及歐几里特公理皆得成立．此直線 t 在新幾何中用爲在無限遠處之直線．

此建築於非歐几里特平面上之歐几里特幾何，

可稱之曰虛擬幾何,(*Pseudo-geometry*). 且此種新合同定義稱曰虛擬合同.(*Pseudo-congruence*).

據上述定理,以 §15 所作之解說爲基而關於平面可導出一種線段計算法. 由此線段計算又可生下之定理:

若任意一三角形其三角之和爲大於二直角或等於二直角或小於二直角則凡一切三角形皆有同樣之結果.

就中一三角形三角之和等於二直角則凡三角形皆然一層,卽有名之李金得氏定理也,然其證明李金得曾用連續性.

Dehn 更研究〔關於三角形三角之和之三種假定〕與〔關於平行線之三種假定〕間之關係. 茲將其所得之定理述之於下:

根據〔過一已知點可作無限個直線平行於一已知直線〕之假設,而不用亞幾默得公理,則不能斷定三角形三角之和小於二直角,且未嘗不可.

(*a*)大於二直角,或

(b)等於二直角.

因欲證明上定理之(a)部分,*Dehn* 曾創一種幾何,其中過一已知點可作無限個平行線平行於一已知直線而同時承認凡黎曼的(橢圓的)幾何之定理皆能成立. 李金得定理謂三角形三角之和決不能大於二直角,此種恰與之相反故可稱爲非李金得氏幾何.(*Non-legendrian geometry*). 由此非李金得氏幾何之存在,可知不用亞幾默得公理則不能證明李金得氏定理,而李金得解明該定理故曾用連續性也.

因欲證明(b)部分,*Dehn* 又創一種幾何,其中平行公理不能實現,但歐几里特幾何之定理均能成立.則可得三角形三角之和等於二直角. 相似三角形亦能存在,〔其長相等,其足常在同一直線上〕之諸垂線之端,亦均在同一直線上,等等. 由此種幾何之存在,可知若略去亞幾默得公理不論,則平行公理不能以通常視爲有同樣價值之各命題代替之.

此種新幾何可稱爲半歐几里特幾何.(*Semi-eucli-*

dean geometry). 與非李金得氏幾何同樣,半歐几幾里特幾何同時明明亦爲非亞幾默得幾何.

最後, *Dehn* 得下列之驚人的定理:

若假定無平行線之存在則三角形三角之和大於二直角.

由上定理,可知關於平行之兩種非歐几里特的假定對於亞幾默得公理全不相同.

茲將上述之結果合爲下表:

三角形三角之和	過一已知點,平行於一已知線可作		
	無一平行線	一平行線	無限個之平行線
大於二直角	黎曼氏幾何(橢圓的)	不可能之情形	非李金得氏幾何
等於二直角	不可能之情形	歐几里特幾何(拋物線的)	半歐几里特幾何
小於二直角	不可能之情形	不可能之情形	羅柏奇* 氏幾何(雙曲線的)

*羅柏奇譯自 *Lobatschewski.*

本書所論大可謂爲歐几里特幾何原則之批評的研究. 在此研究中常守下之基本的原則;即任一問題之研究同時必須考察該問題是否可能以

從前所定之法則及限定用何種方法解答之. 此基本的原則,著者頗覺有事物自然之適合及普遍之法則. 無論如何,吾人凡從事於數學的研究,每遇一問題或懷疑於一定理必須對該問題有完全之解決或對於該定理有精密之證明;或者將其成功之不可能與失敗之必然眞實明瞭;而後吾人之理由方爲充足也.

故近世數學書中,某問題解明之是否可能,成爲重要材料. 而因欲答此種疑問,往往別闢學問之途大開研究之門. 請舉數例:用根式解五次方程式之不可能,被 *Abel* 所證明者;證明平行公理之不可能,以及 *Hermite* 與 *Lindeman* 定理所謂, e, π 二數用代數方法製造 e, π 之不可能.

此基本的原則,當欲研究證明之可能與否之原則時,吾人必須牢記,然與證明方法之純潔 (*Purity*) 條件相關亦至爲密切,此純潔條件近世多數數學家視爲最重要者. 此條件之原理亦不外上述基本的原則之主觀的概念而已. 由此觀之,上述幾何研究大致不過說明於初等幾何眞理之證明中

所必需之公理假定,方法爲如何,而其所不及者僅爲從吾人之觀察點應選如何之證明法以待解決者也。

民國二十一年一月二十九日敝公司突遭國難總務處印刷所編譯所書棧房均被炸燬附設之涵芬樓東方圖書館尚公小學亦遭殃及盡付焚如三十五載之經營燬於一旦迭蒙各界慰問督望速圖恢復詞意懇摯銜感何窮敝館雖處境艱困不敢不勉爲其難因將需用較切各書先行覆印其他各書亦將次第出版惟是圖版裝製不能盡如原式勢事所限想荷鑒原謹布下忱統祈垂鑒

上海商務印書館謹啓

中華民國　　　　　　　　版
民國廿一年十月印行 國難後
共學社 科學叢書
一册
原著者 Hilbert
譯述者 傅種孫 韓桂叢
印刷者 商務印書館 河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠