新中學文庫

西洋近世算學小史

斯密斯 著

段育華
周元瑞 譯

商務印書館發行

百科小叢書

西洋近世算學小史

斯密斯著

段育華 周元瑞譯

王雲五主編

商務印書館發行

中華民國二十三年六月初版
中華民國三十六年二月四版

(51334)

百科小叢書 西洋近世算學小史一册
History of Modern Mathematics

定價國幣貳元
印刷地點外另加運費

原著者 D. E. Smith
譯述者 段育華 周元瑞
主編者 王雲五
發行人 朱經農
上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館
各地

西洋近世算學小史

目次

西洋近世算學小史

第一章　緒論

研究近世算學史，立發生二大問題：（一）算學二字之範圍？（二）近世二字之重力？換言之，即何謂近世算學？

茲篇所述，將限於純粹算學，其各支部應用之問題僅偶及之。大貢獻如牛頓（Newton）之於算理物理學；拉普拉斯（Laplace）之於天體力學；拉果蘭諸（Lagrange）與柯西（Cauchy）之於浪動論以及蒲哇孫（Poisson），佛耳內（Fourier）與柏塞爾（Bessel）之於熱學論；均屬於應用範圍者也。

專指言之，在數內範圍內將述及關於一般學理之貢獻，置無理數與超越數於科學基礎上者為何人，及發展近世複數論且施諸四元論，度界論（Ausdehnungslehre）者為何人。在方程論中

先述其先導之學者與其所得結果之略要。繼由解五次方程之不可能，引起羣論與行列式之創始者。因而述此方面高等代數上之式論。除適遇論略涉及外，未述導出微分方程及函數論之微積學發達，以結束代數之全部。在幾何學之範圍內，將述及發展近代解析幾何與綜合幾何之貢獻者，及其最有價值之工作。著者如不限於篇幅，當開列其他重要支科之各研究者，但上述各學目之於算學，無論算學之定義若何，皆嘗認為有卓越之地位者也。

近世算學，實未嘗有適當之定義。代數不可謂為近世之產物，若方程論在十九世紀中，曾受有重大之增益，而式論則純為近世之創製。同理於初等幾何羅巴秋士給(Lobachevsky)及波爾耶(Bolyai)之工作，於十九世紀曾放一異彩於此科之全部；而更近之三角形研究已於其理論上增一專章。由此觀之，近世算學史，亦即古代算學各科之近世史；至於其他學目之視若近世之產物者，實則早種根於往昔者也。

是篇以簡短，未能完備，觀於下列二書可以知之：一為算學書目一八九三年印於巴黎，凡七十一葉，僅列舉學目之名稱，且大部為近世者；二為德之算學年鑑，凡二十六冊，專記算學之進展，今則

每年且達千葉以上。

近今發見之學目大都已種根於十七十八兩世紀。笛卡兒(Descartes)發明解析幾何，費馬(Fermat)之貢獻於數論，哈略(Harriot)之貢獻於代數學，巴斯噶(Pascal)之貢獻於幾何學及算理物理學，以及牛頓與來本之(Leibniz)之發明微分學，皆足使十七世紀永垂不朽。十八世紀當然為一大活動時期，瑞士之尤拉(Euler)，彭祿利(Bernoulli)父子兄弟，法蘭西之達蘭貝耳(D'Alembert)，拉果蘭諸，拉普拉斯以及德意志之藍伯(Lambert)，一時蠭起，宣傳牛頓之大發明，且於理論應用兩方亦多所推廣。獨惜在此活動中於微積分學與沿襲之算學原理，皆默不深考，培基固礎，尚有待於後世也。

十九世紀為熱烈研究首要原則，認定各支部必要之限度，擴大算學之智識，並開闢應用算學領域之一時期。影響最巨者則為科學研究院，科學雜誌，以及大學講席之設立。幾何學之復興，其功多出於巴黎理工學校(一七九四)及布拉格(Prague 一八〇六)，維也納(Vienna 一八一五)，柏林(Berlin 一八二〇)，卡爾斯魯(Karlsruhe 一八二五)等城同性質之學校。至十九

世紀中葉以算學名家之歸附，聲譽愈隆，遂使楚黎（Zürich），卡爾斯魯，慕尼克（Munich），德勒斯登（Dresden）等城稱為算學之中心。

法國理工學校雜誌始於一七九六年，克拉爾（Crelle）算學雜誌始於一八二六年，其後十年盧微爾（Liouville）始創行純粹與應用算學雜誌，後乃由賴色爾（Resal）及約但（Jordan）二氏繼任其事。劍橋算學雜誌始於一八三九年，至一八四六年則合併而為劍橋都伯林算學雜誌云。其餘定期刊物之發揮算學知識者略述其名如下：

算學新聞年刊（Nouvelles Annales de Mathematiques）一八四二年。

格隆納氏算學記載（Grunert's Archiv der Mathematik）一八四三年。

陀托林尼氏數理科學年刊（Tortolini's Annali di Scienze Matematiche E. Fisiche）一八五〇年。

胥朗美氏數理雜誌（Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik）一八五六年。

算學季刊(The Quarterly Journal of Mathematics)一八五七年。

巴他格林尼氏數學雜誌(Battaglini's Giornale di Matematiche)一八六三年。

算學年刊(Mathematische Annalen)一八六九年。

法國數理科學雜誌(Bulletin des Sciences Mathematiques)一八七〇年。

美國算學雜誌(American Journal of Mathematics)一八七八年。

算學雜誌(Acta Mathematica)一八八二年。

算學年刊(Annals of Mathematics)一八八四年。

此外應附帶提及者，則為現代有特殊目的之一種嘗試，即算學家之介紹(L'Intermédiaire des Mathématiciens)始於一八八四年；及二種頗有價值之逐年刊物：(一)德國算學年鑑上文已述及之(始於一八六八年)，(二)德國算學會週年報告(始於一八九二年)是也。

學校及雜誌之影響固大，然尚有各種研究社，其社務及講演錄，與其所印行可為紀念之專集，亦有若干之影響焉。

前所述首要原則之研究，實因十八世紀濫用微積學解析幾何學自然之結果。其發展可見之於無窮級數之定理；於有理數無理數複數之基本原則；於極限，連續性，無窮大無窮小之意義。然十九世紀之所造詣，尚不止此也。是時嘗創有幾種重大之新學科於純粹應用兩方面皆有無窮之希望。其最重者爲柯西(Cauchy)，雷曼(Riemann)，外斯屈斯(Weierstrass)於始創之函數論。其次則爲圖畫幾何，投影幾何及羣論，式論，行列式論。

十九世紀自然爲一分門專究之時期。在其開始之際，人或以爲將如拉果蘭諸，拉普拉斯，高斯(Gauss)之所爲，以算學物理學天文學爲其方針。孰知自孟諸(Monge)，噶爾諾(Carnot)，彭色勒(Poncelet)，斯泰涅(Steiner)，伽羅哇(Galois)，阿柏爾(Abel)及耶可比(Jacobi)之輩出，乃分算學爲種種支科，其界線向爲曖昧不明者而專究之。及至近世則又呈一種反響，如函數論與羣論頗有合併之趨勢云。

第二章 數論

數論原爲希臘人愛好之學目，十六十七兩世紀賴韋特（Viote），貝拆(Bachet)之努力得以復興，尤以斐馬（Fermat）之功爲多云。十八世紀尤拉（Euler）與拉果蘭諸（Lagrange）均有貢獻。至十八世紀之末，得勒向德（Legendre）與高斯（Gauss）之大工作，此學始具有科學之形式。而高斯之理論算學（Disquisitianes Arithmetcae）一書，實開近世理論研究之端倪。此學分爲二大部：其一爲整數之研究，包括（一）質數(prime)，同餘數(congruence)，餘數（residues），逆數律(law of reciprocity)，及(二)式論(theory of form)；其二爲複數（complex number)之研究。

質數在十九世紀頗爲一般學者所注意，但其結果僅務其詳瑣，而遺其會通。至柴比千(Tchébichef) 始獲得二定限中質數之個數之結論，雷曼（Riemann）亦有一著名之公式，能求不超過某與數其中質數個數之定限。

同餘數之學理，可謂始於高斯之理論算學，氏首創 $a \equiv b$（模 c）記號，且多所擴充。柴比千於一八四七年，曾有關於此學之俄文論著。使此學見稱於世者，法國薩雷(Serret)之功亦不少云。

勒向德以前算學家在數論上之工作與貢獻，既如上述，至於基本定理二次剩餘之相反律，則當歸功於勒氏，故常附有勒氏之名字；此律雖爲尤拉用歸納法所發現，而首先獲得殊種之證明者，則爲勒氏，見於其所著之數論中（一七九八）。至一七九五年高斯始發現此律之一般的證明。此外對於此律有貢獻者有：柯西（Cauchy），法蘭西最靈變之算學家也；狄里胥勒(Dirichlet)氏有數論行世，由戴德肯（Dedekind）出版，爲一名著；耶可比(Jacobi)曾創一記號，後卽以其名名之；盧微爾（Liouville）；策勒（Zeller）；愛生斯坦（Eisenstein）；孔謨（Kummer）；克郎勒克(Kronecker)等。此律後更推廣以包括三次四次之相反性，其工作最著者，則有高斯，耶可比，孔謨，而耶氏則爲首先證明三次律者也。

高斯幷用二元二次形表示數字。柯西，彭索(Poinsot)，勒伯斯克(Lebesque)均有所增益，最著者爲赫邁(Hermite)。三元形之研究，當以愛生斯坦氏爲首領。氏與斯密(H. J. S. Smith)對

於形式論有一般之改進。斯氏有三元二次形之完全分類，并將高斯之實數二次形推廣至複數之二次形。以四，五，六，七，八，等平方和爲數字表示之研究，其推進者爲愛生思坦，完成之者，則爲斯密。

狄里脊勒爲德國最熱心研究數論者，曾以此題講演於德國之大學。其著作爲裴馬(Fermat)氏定理$x^n+y^n=z^n$之擴充。此定理在昔尤拉與勒向德曾證得$n=3,4$，時之可能，而狄氏則發現$x^5+y^5=az^5$之不可能也。最近法國之數論學者則有波勒爾(Borel)，彭加(Poincaré)，譚納禮(Tannery)，斯底澤(Stieltjes)。以波氏著作爲最多且有價值。德國之著名數論學者，則爲克郎勒克，孔謨，雪林(Schering)，巴克曼(Bachmann)，戴德肯。在奧國則有斯托濟(Stalz)之數論著作(Vorlesungen über allgemeine Arithmatik, 1885—86)。在英國則有馬索(Mathews)之數論(Theory of Numbers, Part I, 1892)。其餘如堅若齊(Genocchi)，西微士德(Sylvester)以及格雷瑟(Glaisher)，亦有貢獻也。

第三章　無理數及超越數

十六世紀時，分整負數已得一般學者最後之承認。十七世紀，則見現今小數分數之寫法早已通行。十八世紀，虛數已為棣美華(De Moivre)尤其是尤拉研究算學有力之工具。洎乎十九世紀之工作則為完成複數論，分析無理數為代數無理數與超然無理數二類，證明超然無理數之存在，并以科學方法研究自歐几里得(Euclid)以來一無進步之無理數。一八七二年有外斯屈斯(Weierstrass)(由其徒科沙 Kossak 為之出版)，海涅(Heine)，坎陀(Cantor)及戴德肯(Dedekind)諸氏之學說印行。梅雷(Meray)於一八六九年即嘗研究海氏之理，然今皆指為一八七二年之作云。外氏之法，得丙切爾(Pincherle)之發揮(一八八〇)而益明；戴(Dedekind)氏之法，則由作者於一八八八年之著述而愈顯，最近譚納禮(Tanery 一八九四)更贊助之。外氏，坎氏，海氏之學說，根據無窮級數。戴氏則由實數系之分割觀念分有理數為具有殊性之二組，以立論。其後外氏，克郎勒克(Kronecker)，梅雷尚有繼續之貢獻。

連續分數與無理數，有密切之關係，初為尤拉所注意。十九世紀初葉，拉果蘭諸 (Lagrange) 有著名之論著，此外則於一八三七年有菊肯彌勒 (Druckenmüller)，一八七二年有孔慈 (Kunze)，一八七〇年有倫母克 (Lemke)，一八七二年有君特 (Günther) 等有價值之貢獻。累馬斯 (Ramus) 首先以之聯合行列式而研究之結果以海涅，麥俾烏 (Möbius)，君特之繼續研究，而得無窮行列式之理論。狄里賀勒 (Dirichlet) 於連分數通論，及其應用亦頗多貢獻。

首先區別超然無理數與代數無理數者，為克郎勒克。鑑伯 (Lambert) 曾證明（一七六一）π不能為有理數，而 e^n（n為有理數）為無理數，惟其證明尚有未盡之處。其後勒向德 (Legendre，一七九四) 始足成之，且謂π不能為有理數之平方根。盧微爾證得 e 與 e^n 均不能為整係數二次方程式之根。超越數之存在，雖由盧氏之說（一八四九—一八五一）得以成立，然其充分證明則扶陀之力（一八七三）也。赫邁 (Hermite) 首先證明 e 為超越數，林特曼 (Lindemann) 由赫氏之結論，推得π亦為超越數，林氏之證明初由外斯屈斯化簡之（一八八五），其後由希爾伯 (Hilbert) 化之則更簡矣（一八九三），最後得胡耳維茲 (Hurwitz) 及哥頓 (Gordan) 則竟化為初等之

範圍云。

第四章 複數

複數論可謂遠在十六世紀時已有人注意，如意大利代數學家之認識虛根或不可能根是也。十七世紀時，笛卡兒(Descartes)有實根與虛根之分別。十八世紀時，則有尤拉(Euler)及棣美華(De Moirre)之工作。棣氏有一著名公式，後卽以氏名名之，

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$$

尤拉亦有一公式爲

$$\cos\phi + i\sin\phi = e^{\phi i}。$$

由是複數之幾何圖示之觀念因之以起，結果使複數論獲有可寶貴之擴大。以圖形表示複數可遠溯至一六八五年華里司(Wallis)之代數學。十八世紀時，庫咯(Kühn)於一七五〇年，威塞爾(Wessel)於一七九五年，對於複數均有趨向現今理論之改進。威氏著作於一七九九年發表於 Proceedings of the Copenhagen Academy 學報。其法之明瞭與完善，卽比之近世之著述亦當

無愧。氏并研究圓球及一種四元論。由此而發展一種球面三角學。一八〇四年濮伊(Abbe Buée)獨力之研究亦得華里司曾經提示之觀念。即 $\pm\sqrt{-1}$ 應代表一單位線，其負號即謂當與實數軸正交。濮氏著作至一八〇六年始出版，同年阿竟(Argand)亦有同樣之論著印行。而今之學者對於複數圖形表示之科學基礎，皆僅知其出於阿竟而已。一八三一年高斯已獲得複數論，至一八二三年其名著出版，此論始爲學者所共見。此外尚有毛來(Mourey)之一著名小册，其中論向量之理論，頗有科學之價值。至於複數之得受一般之承認，則柯西與阿柏爾(Abel)之力不少，而尤以阿氏之成功爲多云。

複數上之術語，多由發見者各自定名。阿竟名 $\cos\phi+i\sin\phi$ 爲方向因子，$y=\sqrt{a^2+b^2}$ 爲模；柯西名 $\cos\phi+i\sin\phi$ 爲縮簡式(reducod from)；高斯以 i 代 $\sqrt{-1}$，名 $a+bi$ 爲複數通式，a^2+b^2 爲模；韓克爾(Hankel)稱 $\cos\phi+i\sin\phi$ 爲方向係數，而外斯屈斯稱模爲絕對值。

高斯，柯西以後之算學家，研究複數而有特別貢獻者尚有孔謨(Kummer，一八四四)，克郎

勒克（Kronecker，一八四五，）瑟斐勒（Scheffler，一八四五—一八五二，一八八〇，）伯拉微底（Bellavitis，一八三五—一八五二，）裴各克，（Peacock，一八四五，）及棣摩庚（De Morgan，一八四九。）麥俾烏（Möbius）有複數應用於幾何之撰著甚多，頗有價值；狄里賀勒（Dirichlet）曾擴充複數論以括入質數同餘數及逆數等，一如實數然，均不可不一述及焉。

除已熟知之 $a+bi$ 式外，其中 i 爲 $x^2+1=0$ 之根，別種形式亦曾研究。愛生斯坦（Eisenstein）有 $a+bj$ 式之研究，其中 j 爲 $x^3-1=0$ 之複數根。同理由 $x^k-1=0$（k 爲質數）曾經導出種種之複數式。此種通式之研究，大部出於孔謨，理想數（ideal numbers）之理論亦出於孔氏，一八九三年克來因（Klein）以幾何學之觀點研究之，其說乃簡而易明。此外對於複數研究，有加羅哇（Galois），其說以不可約同餘數之虛根爲基礎，$F(X)\equiv 0$（模爲 k 爲一質數），自一八八四年以後，研究複數論之著作家有外斯屈斯，蘇華茲（Schwartz），戴德肯（Dedekind），和爾得（Hölder），柏羅得（Berloty），彭加（Poincaré）史脫底（Study）及馬克法倫（Macfarlane）。

第五章　四原術及度界論

四原術及度界論，均與複數量有密切之關係。而度界論與複數尤爲密切，今略述其發達之大概。威塞爾(Wessel)對於複數量及四原術之貢獻，見於"Proceedings of the Copenhagen Academy"雜誌，幾無人問津。昔阿竟有擴展其複數方法至三度空間以外之嘗試。一八一三年塞哇(Servois)之研究，幾於侵入四元術之範圍。惟韓密爾頓(Hamilton)之貢獻，實爲空前未有之發現。氏於一八四三年發現四原術之原理，次年發表其第一次之研究，如是擴充阿竟之觀念至於三度空間。其步驟須展開 $\cos\phi + i\sin\phi$ 之觀念，使 r 應爲實數，ϕ 爲實數角，i，j 或 k 爲有向單位線，而有 $i^2=j^2=k^2=-1$ 之關係。又必須撤去乘法交換定律，即前人所謹守而爲發明上之障礙者也。韓氏有四原術講演集於一八五三年發表，其四原術原理一書，則於一八六六年出版。

在韓密爾頓印行其四原術之同一年，即一八四四年，格拉斯曼(Grassmann)亦以其名著度界論出而問世。氏於此種學理，似於一八四〇年早已獲得。其與韓氏四原術不同之點固多，亦有若

干重要原則爲兩說所同具，然皆爲兩氏各自獨得之發現也。

繼韓密爾頓之後，大不列顛有式德(Tait 一八六七，)克南(Kelland)及式德(一八七三)，西微士德(Sylvester)麥柯利(McAulay)等之論文出現。歐洲大陸則有韓克爾(Hankel 一八六七，)胡威爾(Hoüel 一八七四，)賴桑(Laisant 一八七七—一八八一)之著述，但鮮爲人所注意耳。美洲則皮爾司(Pierce 一八七〇)對於四原術發展爲最著，哈底(Hardy 一八八一，)馬克法倫(Macfarlane)，哈塔威(Hathaway 一八九六)均有貢獻。其共同所感之困難，即爲記號之使用。爲欲改善記號，馬克法倫謂須發展一種空間分析，使之能包括代數，三角，複數，度界論，及四原術，并論及向量分析與動量分析學一般之原則。近世向量代數學之貢獻者，則有季布茲(Gibbs 一八八一以後，)及赫維賽(Heaviside 一八八五)二氏。

繼格拉斯曼而起之學者，則不若繼韓密爾頓者之多。在德國貢獻最多者，爲薛拉格(Schlegel)，在意大利爲平羅(Peano)，在美國則亥德(Hyde)之有向微積分(一八九〇)對於格氏學說，曾有所辯論。

與韓格二氏相類似之研究，有瑟斐勒(Scheffler)之貢獻。韓格二氏犧牲交換律，瑟氏（一八四六，一八五二，一八八〇）則犧牲分配律。由此種基本律之犧牲，遂引起在此律有效之範圍內之研究，於此格拉斯曼，卡來(Carley)，尼爾力斯(Ellis)，布爾(Boole)，許羅德(Schröder，一八九〇至一八九一，及克洛夫(Kroft，一八九三)均有所貢獻。卡來尚有與同種類之大貢獻，即方陣論(Matrices，一八五八)是也。

第六章　方程論

數字方程其本身問題有二：一爲根之求法，二爲根之近似值。二者均非新問題也，十九世紀最先研究求根法者爲柏丹(Budan)。同時佛耳內(Fourier)亦有同樣之工作，惟其著述至氏歿後於一八三一年始出版。自來一切求根方法，皆異常繁重，直至一八二九年，斯圖謨(Sturm)得一著名定理，其事乃簡，即今所謂斯圖謨定理是也。此定理實爲代數分析上最光耀之發現。

方程之根既得，進而求近似值，有種種方法。牛頓有一法，佛耳內嘗補充之；拉果蘭諸有一法，用連分數寫出，芬遜特(Vincent)嘗苦心研究之。至最適實用爲近世所通行者，則爲和湼(Horner)之方法。自有斯圖謨，和湼二氏求根之問題，事實上可謂已告結束矣。惟求虛根近似值法，至今尚爲懸題云。

凡數字方程至少必有一根之基本定理，在十八世紀中葉以前，僅爲一種假設。自達蘭貝耳(D' Alembert)（一七四八）予以證明後，拉果蘭諸（一七七二），拉普拉斯（一七九五）高

斯(一七九九)以及阿竟(一八〇六)皆各有一證明。惟n次方程恰有n個根不多亦不少之普遍定理，則爲柯西一八三一年關於某區域內根之個數之論文中之一特例。其後高斯，薩雷(Serret)，克利佛德(Clifford)，馬雷(Mallet)等，亦各有證明。

四次以上之方程，其根不能以係數之代數函數表示之說，高斯唱之，盧芬尼(Ruffini)和之，及拉果蘭諸之嘗試屢經失敗，信其說者遂愈衆。直至阿柏爾(Abel)始有正式之嚴密證明，惜天不假之年，竟以早死，遂令其一切算學工作，皆未能盡其力之所及，可勝痛哉。

五次方程自然爲一種特殊之研究。拉果蘭諸曾示其解法須視一個六次方程而定，謂之拉果蘭諸之六次解式，馬華棣(Malfatti)與樊答芒(Vandermonde)對此六次解式之構造，均有所研究。後經恪苛(Cockle)，哈犂(Harley 一八五八——五九)，及克萊(Cayley 一八六一)稍稍化簡之，但首先確定眞能化簡之解式者，則爲克郎勒克(Kronecker 一八五八)也。一七八六年布林(Bring)最先證明僅須求出平立方根可使五次方程通式變爲一個三項式，如$x^5+ax+b=0$。一八三四年厥拉(Jerrard)亦獨力發現此理。赫邁(Hermite)於一八五八年用全浩孫

(Tschirnhausen) 定理及其橢圓函數之解法，確已得出此種簡化之變式。

近世方程論，可謂始於阿柏爾 (Abel)，及伽羅哇 (Galois)。伽氏之名著至一八四六年氏歿已十五年後始出版，方程論遂得一確定之基礎。伽羅哇發現每一方程必有一代換羣，其方程之重要性質卽由此而生。伽氏以未盡天年而歿，故遺有若干重要定理，未及予以充分之證明，後由柏替 (Betti 一八五二) 補成之。初時約但 (Jordan)，赫邁 (Hermite)，克郎勒克 (Kronecker) 亦有所增益。在伽羅哇研究之前，阿柏爾（一八二四）曾由凡少於五個値之五字有理函數不能多於二値之理，推得普通五次方程式之根不能以其係數之根式表明之。於是乃研究可以開得方根求解之五次方程特式。赫邁，西微士德，布力奥奇 (Brioschi) 曾應用二項形之不變式論以解五次方程。

自羣之觀點言之，用根式解方程，爲在昔代數學家之目標者，今則知其僅爲無理數變換及其分類之長鍊中一環而已。一八八四年克來因 (Klein) 曾用二十面體方程，以爲解五次方程之範式，且示其法可以推廣至包括高次方程之全部。氏與哥頓 (Gordan) 自一八七九年後，曾治六七

次方程在伽羅哇之羣中有一百六十八個代換者，哥氏曾縮簡此七次方程至一個三元式之問題。克氏於一八八八年曾指示三次曲面論中之二十七次方程，可以縮爲尋常四個變數之問題，而柏克哈(Burkhardt)於一八九三年則實行其演算，其中所涉及之四元羣，馬肯克(Maschke)於一八八七年嘗討論之。

用根式解五次方程，已爲超越數所取而代之矣。赫邁曾指示用橢圓函數可解任何布林(Bring)之方程，因此即可以解任何五次方程。克郎勒克（一八五八）由另一立足點亦得同樣之結果，後復由布力奧奇化簡之。最近克郎勒克，哥頓，歧伯特(Kiepert)，克來因對此問題均有貢獻，而馬肯克及布力奧奇嘗用雙曲橢圓函數以求六次方程之解法。

二項方程之可縮爲 $x^n-1=0$ 者，用三角公式 $x=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ 可以立解，惟其在代數上解法之可能，直待高斯一八〇一年始爲揭出。拉果蘭諸於一八〇一年曾推廣此理論，其在幾何上之應用，乃爲十九世紀首屆一指之增益。阿柏爾推廣高斯之結果，得一重要定理，謂凡不可縮之方程，若有二根，其一根可用他根之有理式明之者，則其方程之次數爲質數時，必生二根式，否

則視其較低次方程之解法而定。二項方程其形為 $\sum_{0}^{n-1} x^m = 0$ 者，即為此類方程之一，而阿柏爾曾研究者也。後克郎勒克遂名之為阿柏爾之方程。李傑樂（Richellot，一八三二），耶可比（Jacobi，一八三七），愛生斯坦（Eisenstein，一八四四—一八五〇），克萊（Cayley，一八五一），克郎勒克（一八五四）等，對此二項方程均有所討論，而巴克曼（Bachmann）且有一專書論之。最近研究阿柏爾方程者，則有白勒（Pellet）。

幾何學上有幾個重要方程，則有赫斯（Hesse），斯泰涅（Steiner），克萊，克勒布肯（Clebsch），沙而曼（Salmon），以及孔謨（Kummer）曾研究之。例如決定三次曲線拐點之九次方程，及三次曲線與圓錐曲面五級切點之二十七次方程皆是。

係數之對稱函數，及諸根錯列形式不變之函數，均為近世理論中重大之論題。計算方程根之對稱函數之公式，雖吉刺德（Girard，一六二九）有一類似而無證明之公式，似為牛頓首先作出。十八世紀拉果蘭諸（一七八六）及華林（Waring，一七七〇——一七八二）均有貢獻，但最

初四行之表直列至十次式者，則見於一八〇九年梅爾噶背（Meye -Hirsch）二氏所著之某書。在柯西（一八一二）之行列式名著中，曾有此學目之重要理論，氏與高斯（一八一二）皆有甚多有價值之貢獻。自伽羅哇之發明以來，此學目已成爲重大論題之一。克萊（一八五七）有對稱函數之次數及效數之簡單規則，且氏與布力奧奇，幷使此表之計算化爲簡易。

消元法及柏楚（Bezout）之求結式法或即棣摩庚之求消式法，頗爲十八世紀甚多之代數學者所重視，就中最著者爲尤拉（一七四八）其法依據對稱函數於一七五〇及一七六四先後經克剌麥（Cramer）及柏楚之改良。其發達之主要步驟則爲拉果蘭諸（一七七〇一七七一）耶可比，西微士德（一八四〇），克萊（一八四八一八五七），赫斯（一八四三一八五九）白魯諾（Bruno 一八五九），卡脫（Katter 一八七六）諸家之工作。西微士德之析配法於一八四一年發表，判別式之名稱爲氏所定，判別式論之一部份亦出於氏之工作。近世研究方程論者，則有本賽德（Burnside）及白勒（Pellet 自一八八七年以後。）

第七章　代換論及羣論

代換論與羣論，在算學上最居重要，羣之研究及不變式之探求，頗爲現代多數算學家所注意。爲研究於 n 次方程 n 根中取 m 個根（$m<n$）成一 m 次方程式之問題，學者始知列字分析之重要，此問題之雛形，可追溯至喝德(Hudde 氏，一六五九)一七四〇年邵德孫（Saunderson）嘗謂欲決定四次式之二次因子，常得六次方程，而勒蘇（Le Soeur，一七四八）及華林（Waring，一七六二至一七八二）更窮究其意義。

拉果蘭諸首先以科學眼光研究代換論。在拉果蘭諸以前凡解低次方程之法多爲零星散錦毫無系統之理論。自拉果蘭諸運其分析之大力，發現一共同之基礎（一七七〇，一七七一）而代換論因以產生。初拉氏將當時已知之方法詳細審查，然後推究其何以僅能適用於五次以下之方程，否則失敗之故。於是發現各分解式之根皆爲其相當方程根之有理函數。研究此種函數之性質，拉氏因以發現一種組合算，是爲趨近代換論之第一重大步驟。對於此行將出現之代換論，同時尚

有樊答芒（Vandermonde）之工作，亦當爲一述及也。

從事第二重大步驟者，爲盧芬尼（Ruffini）。氏之出發點，亦爲拉果蘭諸始則討論解低次方程之各方法，繼則爲證明五次及高次方程不可解之嘗試。終以上述嘗試之失敗，而發現係數錯列之類別，卽柯西所謂共軛代換組或簡稱共軛組而伽羅哇所謂代換羣者是也。今之所謂不可轉羣可轉非純素羣可轉純素羣者，盧氏皆一一識別之，惟其名稱微有不同耳，且於一八〇一年（竟時常道及）方程羣而呼之曰錯列組。盧氏幷發表亞巴替（Abbati）寄盧氏之信函一件，其中羣論之觀念，亦頗顯著云。

雖然建立羣論之榮譽，則當歸諸伽羅哇，伽氏嘗考得設有一方程之n個根，爲 $r_1 r_2 \cdots\cdots r_n$，則此諸根必有一錯列羣：（一）凡其根之函數，經此羣之代換而不變者，恆可爲有理式的推知，（二）反之，凡其根之可以有理式測定之函數，對於此羣之代換亦必不變。伽氏對於模方程論及橢圓函數論亦有貢獻。伽氏第一次出版之羣論在一八二九年，其時氏年僅十八歲，故鮮有人注意之，直至一八四六年其論著全集出版始爲世所重視。

最初欣賞羣論之重要者，為柯西與克萊二氏，而柯西且有許多重要定理之貢獻。使此題為一般的，則首見於薩雷(Serret)之研究。薩氏代數學第四章專述羣論；約但(Camille Jordan)代換論一書，乃一名著；而勒陀(Netto)之著述(一八八二)曾由柯爾(Cole 一八九二)譯成英文。柏特龍(Bertrand)，赫邁(Hermite)，佛洛奔納(Frobenius)，克郎勒克(Kronecker)以及馬陀(Mathieu)對於羣論，均有所增益。惟斷定n個字羣之個數之一般問題，至今仍待解決云。

近年繼續伽羅哇之工作為不連續羣之研究，其佼佼者則有克來因(Klein)，李依(Lie)，彭加(Poincaré)及皮伽耳(Picard)在不連續羣論之外，尚有種種羣。其中有限連續羣則在微分方程論上最居重要。研究此種羣最力者為李依(自一八八四年以後)獲得近世算學最要之科目，即變換羣論是也。此外啟令(Killing)之羣的構造研究，史脫底(Study)之應用羣論於複數，以及許耳(Schur)，卯納(Maurer)之工作，均頗有價值。

第八章 行列式

行列式論可謂始於來本之（Leibniz，一六九三）其後克剌麥（Cramer）稍有增加，與其前人無異皆完全研究方程組之關係。首先提出循環律者，爲柏楚（Bezout 一七六四。）但最初認行列式爲自由變動之函數者，則爲樊答芒（Vandermonde 一七七一；）首先爲有連貫之論述者，亦爲樊氏，故氏可稱爲行列式論之正式創始者。樊氏雖已有用子式展開行列式之特例，但其通法則爲拉普拉斯氏（一七七二）之所獲得。未幾拉果蘭諸（一七七三）有二級及三級行列式之詳論，以當時超越空間之觀念，尚未通行，故僅能止於此。拉果蘭諸對於行列式之通論，雖無特殊之貢獻，惟首先應用行列式於消元以外之問題者，則爲拉果蘭諸，拉氏且發現許多特殊之恆等式，爲後來著名定理之特例者。十八世紀末二三十年間於行列式論無重大之貢獻。辛登伯（Hindenburg，一七八四）與洛忒（Rothe 一八〇〇）對於論題幷未討究。及高斯繼起，始爲第二次之進展。氏常應用行列式於數論中，一如拉果蘭諸。行列式之名稱，昔時拉普拉斯稱之曰結式（resultant），

高斯始創用今名，惟其意義似含有應用於代數方程判別之意味，與現今之了解惟有不同耳。今之所謂逆行列式者，高氏似早有此觀念，而其造詣實甚近於今之行列式乘法定理。繼高氏而起者，爲賓納（Binet，一八一一—一八一二）。賓氏正式陳述此定理以日行ㅁ列之方陣之乘積爲例，今之所謂行列式之乘法定理者，實爲賓氏定理中日＝ㅁ之一特例。賓氏於一八一二年十一月三十日發表此論文，同日柯西亦有同樣之論文發表，柯氏所用行列式之名字，與今日所通行之意義相同，搜集當時行列式之種種研究加以整理，改良記號，末述乘法定理及其證明，較之賓氏之證明，猶有過之者。能操持行列式之全部如一物者，柯氏也，柯氏之前有行列式矣，然將行列式爲一整個之理論，則自柯氏始。

此後最大之貢獻者，除柯西外，則爲耶可比（Jacobi，自一八二七以後）行列式之名義，獲得其最後之承認，耶氏之力也。耶氏首先研究函數行列式，即西薇士德所謂耶可比式是也；耶氏名著印於一八四一年者，曾特別詳論此題，并及交錯函數，即西氏稱爲交錯式者也。繼耶氏而起者，則爲西氏與克萊之大工作，其精深廣大，未易以一二言概括之，蓋即近世行列式論發達之代表品也。

行列式之通論既已完備矣，種種特式之研究，自然因以產生。勒伯斯克（Lebesque），赫斯（Hesse），西徵士德諸氏有軸對稱行列式之研究；西徵士德，韓克爾（Hankel）有穿透對稱行列式之研究；卡武南（Catalan），斯波替斯武（Spottiswoode），格雷瑟（Glaisher）及司各脫（Scott）有環式行列式之研究；克萊有反稱行列式及普法夫式（Pfaffians）之研究；西徵士德有連續式之研究；克力斯托夫（Christoffel），佛洛奔納（Frobenius）有郎司庚式之研究；史爾威斯特，雷斯（Reiss），畢格（Picquet）有複行列式之研究；西徵士德有耶可比式及赫斯式之研究；曲抵（Trudi）有捩對稱行列式之研究。至於行列式之教科書，則以斯波替斯武之書爲最早。在美國則韓納（Hannus 一八八六），魏爾特（Weld 一八九三）均有行列式詳論之印行。

第九章　代數形式論

代數形式論胚胎於拉果蘭諸一七七三年及一七七五年之論文，其中拉氏討論二元二次形式 $ax^2+bxy+cy^2$，並建立以 $x+\lambda y$ 代 x 時此式之判別式之不變性。拉氏依 b^2-4ac 之正負以定此種形式之分別，且引起此式之變換與等值之觀念。其次則爲高斯之研究，高氏曾證明二元三元二次形式之判別式之不變性，曾爲二次形式有系統之研究，即斯密，愛生斯坦，狄里脊勒，李勒昔(Lipschitz)，彭加及克萊所苦心研究者也。伽羅哇於其詳論中亦嘗論及此題（一八二九），至於能使此理論顯然成立，其第一步工作，有時歸之於赫斯即其三級平面曲線之研究是也。

雖然奠定不變式論之眞正基礎者，則一致歸功於布爾 (Boole，一八四一)。布氏首先指示判別式之不變性之通則，即拉果蘭諸與高斯二氏曾得其特例者。因布爾之發現，遂引起克萊之研究，一八四五年有一次變換論之論文發表，翌年又有共變式之研究及以記號法求不變式之發現。由不變式共變式之種種發現（最初稱爲超越行列式）所謂近世代數，形式論，方式論，以及不變

式及共變式論者，皆認克氏為創始之人。一八五四年後克氏大論文，對於一個單獨理論，有如是至鉅且多之工作，實從來未有之事。未幾西薇士德乃與克氏合作研究，以其創造力與精到力，不久即使其名與克氏及形式論出類拔萃。樹立形式通論之基礎，使後之學者有所依據，實皆西氏之功，至於大部份名詞之出於西氏，猶其餘事也。

同時德國愛生斯坦（一八四三）亦得三次及四次形式中最簡之不變式及共變式，又赫斯與格拉斯曼（一八四四）亦有此題之研究。但傳佈此新理論於德國者，則為亞郎何（Aronhold，一八四九），亞氏曾創一種記號法，今日通行於德國，曾發現三元三次形之不變式及其與判別式之關係，并曾與克萊及西薇士德研究二元二次形式之不變與共變式能適合之微分方程。記號法則有克勒布胥（Clebsch），哥頓（Gordan）及最近史脫底（Study，一八八九）斯特老（Stroh，一八九〇）繼續研究之，與英國學者所取之途徑大不同矣。

其在法國從事此項工作者，以赫邁（Hermite）為最早（一八五一）。赫氏曾發現（一八五四）相反律，即對於凡第m級形式之p次r級不變式或共變式亦有第p次形式之m次r級不

變式或共變式之對應是也。同時（一八五四）布力奧奇（Brioschi）即加入此項研究，其貢獻亦甚有價值。至於沙而曼（Salmon）之平面曲線（一八五二）及高等代數（一八五九）二書可謂爲此理論之新紀元，亦當一爲述及也。

哥頓之初入形式論也，有克萊工作之評論，事在一八六八年。氏且於此題頗多增益，其尤著者則爲氏之形式系統定理，其證法後來略有修改。此定理中二元形式之不變式及共變式之有限性，則由平羅（Peano，一八八三）希爾柏（Hilbert，一八八四）莫吞（Mertens，一八八六）繼續研究之。希氏於一八九〇年求得n個變數形式全部之有限性，其證明法曾由史托利（Story）爲之修改。

介紹克萊與西薇士德之工作於德國者，以克勒布背爲最多，曾用兩氏不變式論及雷曼（Riemann）之函數論以解釋投射幾何。其最堪注意者，則自氏之形式論之著述出版後（一八七一）遂引起外斯屈斯，克郎勒克，蠻祥（Mansion），納脫（Noether），希爾柏，克來因，李依（Lie），伯全美（Beltrami），柏克哈（Burkhardt）等一般學者對於形式論之興趣。白魯諾（Bruno）對於二

元形式之研究，史脫底 Study) 對於三元形式之研究，皆爲世所重視。又棣陀勒多 (De Toledo, 一八八九）及厄力奧特 (Elliott，一八九五）均有形式論之書籍問世。

都伯林大學嘗產生不少之貢獻者，就中最著者有麥克苦拉 (MacCullagh)，韓密爾頓，沙而曼，邁克爾 (Michael)，羅伯 (Robert) 本賽德 (Burnside)。本賽德曾與潘頓 (Panton) 合著方程論一書，其後半爲本氏所作，中有一種變換法，富於幾何之解釋，且將二元形式及若干三元形式合併討論者也。

二次及二組多元形式等值問題，曾先後引起外斯屈斯，克郎勒克，克力斯托夫 (Christoffel)，佛洛奔納 (Frobenius)，李依及最近羅斯勞 (Rosenow)，偉爾納 (Werner，一八八九，啓令 (Killing 一八九〇）以及瑟斐爾 (Scheffers，一八九一）之注意。其非二次形式之等值問題，則有克力斯托夫之研究。以一次自身變換研究形式論者，則有蘇華茲 (Schwartz，一八七二）福克斯 (Fuchs，一八七五——一八七六），克來因 (Klein，一八七七——一八八四），布力奧奇 (Brioschi，一八七七）及馬賫克 (Maschke，一八八七）等之貢獻。以母函數求出非枚舉法者，則有克萊

（自一八七〇年以後，）西微士德（一八七七）之研究。西微士德，馬克馬項(MacMahon)及罕夢德(Hammond)有微分不變式之研究以微分不變式即克萊稱為蘇華茲之微分係數為出發點，西微士德（一八八九）曾創立逆式論，其後馬克馬項，罕夢德，魯德司多夫(Leudesdorf)，厄力奧特，福賽司(Forsyth)以及哈爾芬(Halphen)均有貢獻。研究宗規形式論者，則有西微士德（一八五一，）克萊及赫邁（此宗規形式論之名即由赫氏所定）及最近之羅森(Rossanes一八七三）柏列爾(Brill一八八二)，龔得芬葛(Gundelfinger，一八八三，)希爾柏(一八八六。

二元形式幾何論之研究，可追溯至彭色勒(Poncelet)及其門徒。但近世研究法之起源，則與橢圓模函數論有連帶關係，當以戴德肯與波卡(Borchardt)之書信為開始之日，（見克拉爾雜誌（一八七七。）克來因，胡耳維茲(Hurwitz)於此均有著名之貢獻。至線網法為另一種二元二次形式之幾何的討論，則高斯（一八三一，）狄里脣勒（一八五〇，）彭加（一八八〇，）均有論著發表。

第十章　微積學

微積學創自牛頓及本來之。其一般之理論，至十八世紀之末已可謂完備矣。除柯西，高斯，約但(Jordan)，皮伽耳(Picard)，梅雷(Meray)，諸家及與函數論有關之諸算學家對於微積之首要原理均有貢獻外，其次當論及記號法之發展，定微分論變分法微分方程論及牛頓之微積學在物理上之種種應用。自來著有微積通論，其最著名者有柯西（一八二一），拿勃(Raabe，一八三九至一八四七），度阿麥爾(Duhamel，一八五六），斯圖謨(Sturm，一八五七至一八五九），柏特龍(Bertrand，一八六四），薩雷(Serret，一八六八），約但(Jordan 再版一八九三）以及皮伽爾（一八九一——一九三）。最近奧而全麻(Oltramare)在分析學上亦當有價值，即其一八九三年出版之微積分通論是也。

何種微分式可以尋常函數求其積分，研究此問題似以阿柏爾為最早，盧微爾(Liouville)繼之。研究有定積分之通論，則以柯西為最早，且為十九世紀著名之學目也。夫魯南列(Frullani)

定理（一八二一）比倫（Bierens）之工作所製之表（一八六七）狄里脣勒之講義之見於邁爾（Meyer）之詳論一書中者（一八七一）以及勒向德，蒲哇孫，柏南那（Plana），拿勃，桑克（Sohncke），脣朗美（Schlömilch）厄力奧特，魯德司多夫（Leudesdorf）克郎勒克等，對此學目，皆有著名之貢獻。

尤拉積分，創自尤拉，其後勒向德繼續研究，尤拉第一積分及尤拉第二積分其式如：

$$\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}dx \text{ 及 } \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

與尤拉之原式微有不同也。若 n 爲整數則

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = n!$$

若 n 爲分數則爲一超越函數。勒氏以 P 字代表之，卽今所謂『甘馬』函數是也。狄里脣勒對於此題有一重要定理（一八三九），其後盧微爾，卡忒南（Catalan），厄爾力斯（Ellis），等皆窮究之。對於求 Γx 及 $\log\Gamma x$ 之數值，拿勃（一八四三——四四），竇厄（Bauer，一八五九），辜德曼

(Gudermann，一八四五）均有述作。勒向德鉅大之表，久已於一八一六年出版。

符號方法可追溯至戴勞(Taylor)，而疊次求微分與尋指數之類似點，十九世紀以前已有許多學者注意及之。阿博戛(Arbogast，一八〇〇）首先在微分方程中分別運算之符號及數量之符號。弗朗沙(Francois，一八一三）及塞哇(Servois，一八一四）似爲最先發表此項問題正確之規則者，哈格理佛(Hargreave，一八四八）曾應用此等方法於其微分方程之論文中，而布爾(Boole)則常常應用之者也。格拉斯曼及韓克爾皆嘗得此理論之大用，格氏應用之於研究方程，韓氏用之於其複數論。

變分學可謂始於約翰彭祿利(Johann Bernoulli)大問題（一六九六）。不久卽引起節柯彭祿利(Jakob Bernoulli)及駱必達(l'Hôpital)之注意。但首先窮究之者尤拉也。尤氏之貢獻始於一七七三年，而變分之名稱，則自其變分原本一書始。拉果蘭諸對於此學有甚多之貢獻，而勒向德（一七八六）則立有極大極小之判別法，惟不十分充分耳。對此判別法柏魯拿希(Brunacci，一八一〇），高斯（一八二九），蒲哇孫（一八三一）奧斯却格拉斯給(Ostrogradsky，一

八三四）以及耶可比（一八三七）均有貢獻。詳論此學之著述，其重要者有薩剌(Sarrus)之書（一八四二），後柯西嘗修改之（一八四四）。其他有價值之專書及論文則爲史曲老(Strauch 一八四九），節勒(Jellett 一八五〇)，赫斯(Hesse 一八五七)，克勒布胥(Clebsch 一八五八)以及卡爾(Carll 一八八五)等之工作，特此世紀最重要者則爲外斯屈斯之工作。外氏之貢獻，實於變分學開一新紀元，且已置之於一穩固毫無問題之基礎之上，可斷言也。

微積學在天文及物理上之應用，自微積學發明之時即已有之。十八世紀一百年中應用尤廣，及此世紀之末，拉普拉斯及拉果蘭諸覓置力學之全部於分析學之中。雖位勢函數之名稱及其基本論文出於格林(Green 一八二七年至一八二八年始出版)而引入位勢論於動力學者，實始於拉果蘭諸（一七七三）。位勢二字之名起於高斯（一八四〇），而位勢與位勢函數之區別，則起於克勞修司(Clausius)。至於此論之發達，則有狄里胥勒，雷曼，訥伊曼(Neumann)，海涅(Heine)，克郎勒克，李勃昔(Lipschitz)，克力斯托夫(Christoffel)，克希荷夫(Kirchhoff)，伯全美(Beltrami)以及當時之領袖物理學家皆與有功焉。

此外關於分析學在物理問題上之種種應用，範圍至大，未能詳述。如尤拉氏顫絃之研究；澤門(Sophie Germain)彈膜之研究，蒲哇孫(Poisson)，拿默(Lamé)，聖徵能(Saint Venant)及克勒布肯之三度彈性之研究；佛耳內熱之擴散之研究；夫累涅爾(Fresnel)光學之研究；馬克斯維耳(Maxwell)，赫爾姆霍斯(Helmholtz)及赫耳茲(Hertz)電學之研究；韓孫(Hansen)，喜爾(Hill)及吉爾登(Gylden)天文之研究；累力(Rayleigh)聲學之研究，以及狄里肯勒，魏柏(Weber)，克希荷夫(Kirchoff)，訥伊曼(Neumann)，克爾文(Kelvin)，克勞修司(Clausius)，邊克霓(Bjerknes)，麥克苦拉(MacCullagh)，富曼(Fuhrmann)對於普通物理學之貢獻皆是。而赫爾姆霍斯之工作，當更特別論列，以其在力學電學理論上之貢獻，及其對於力學與純粹算學之基本公理之討論，皆足以顯其有甚大之分析能力也。

第十一章 微分方程

李依謂微分方程爲近世算學中最重要者。自牛頓，來本之以來，經彭祿利，李加惕（Riccati），克萊羅（Clairaut）以及達蘭貝耳（D'Alembert）尤拉等之研究幾何物理天文三科之影響於算學者至爲顯著，而尤以在常係數一次偏微分方程論者爲多。首先獲得常係數一次全微分方程之解法者爲尤拉氏，其法令微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + A_n y = 0$$

之解法觀一n次代數方程

$$F_{(z)} = Z^n + A_1 Z^{n-1} + A_2 Z^{n-2} + \cdots\cdots + A = 0$$

之解法而定，式中Z^k代替$\frac{d^k y}{dx^k}$ $(k=1, 2, \cdots\cdots n)$。此方程 $F_{(z)}=0$ 爲「別性」方程，後孟諸（Monge），柯西皆嘗研究之。

一次偏微分方程論，可謂始於拉果蘭諸（一七七九至一七八五）。孟諸（一八〇九）曾研究一級二級偏全微分方程以之與幾何並論，且引入『別性』之觀念於 $F(z)=0$ 所表之曲線，即近時達波(Darboux)，利維 (Levy)，及李依 (Lie) 所嘗研究者也。普法夫(Pfaff 一八一四，一八一五）首先獲得解一級偏微分方程之通法，曾經高斯（一八一五）分析，且認為極有價值者也。不久柯西（一八一九）由分析學之立點，用孟諸之別性式，得一更簡單之方法。與代數基本定理相應，每一微分方程規定一斂級數表示之函數之定理，亦為柯西之發現，後經柏里奧 (Briot)，寶格(Bouquet)，皮伽耳(Picard 一八九一）之研究，而證法愈簡。耶可比亦曾分析普法夫之法，另得一新法（一八三六），由克勒布肖為之印行。克勒布肖自創之法，則發表於一八六六年，此外布爾（一八五九，）考肯 (Korkine 一八六九），及邁爾 (Mayer 一八七二）皆各有一新法。普法夫氏之問題實為研究上一重要論題，於此拿淡尼(Natani 一八五九，）克勒布肖（一八六一，一八六二），雷芒 (Reymond 一八五九，）卡來 (Carley)，包爾則 (Baltzer)，佛洛奔納，摩勒拉(Morera)，達波以及李依均有研究。至於一級偏微分方程論第二步之大改良，則當歸功於李依

（一八七二），自有李依，此理論遂立於一強健之基礎之上。一八七〇年以後，達波，科瓦勒勿斯基(Kovalevsky)，梅雷蠻祥(Mansion)，格倫多奇(Graindorge)以及英賢勒茲給(Imschenetsky)對於此題均有研究。其二級及高級偏微分方程論，則始自拉普拉斯及孟諸至安派耳（Ampire，一八四〇）而大進步。英賢勒茲給曾集錄一八七三年以後對此問題之貢獻，但此理論仍未臻完善之境。

微分方程奇解之理論，自來本之以來，即為一般學者之所研究，但自十九世紀中葉以後，始獲得特別之注意。胡否（Houtain，一八五四）之工作頗有價值，但知之者甚鮮，達波為研究此問題之領袖，以幾何推闡此種解式，闢一新境域，繼之者甚衆，而卡梭拉底(Casorati)與克萊其尤者也。現今通行之一級微分方程奇解論，即克萊之作。

最初處理微分方程之嘗試，僅以求積分為其目標。十八世紀分析學家求任何微分方程之通解，一如當時代數學家之求解普通 n 次方程。高斯（一七九九）謂在微分方程中若不引入複數，則其求解有限度，遂開闢一新而廣大之場域。柯西即為欣賞此說之重要之第一人，而近世理論可

謂自柯氏始矣。自是而後，眞正之問題，非爲以已知函數或其積分是否可以求解之問題，乃此微分方程是否可以確定此諸變數之函數，如其可也，此函數之特性，當爲如何之問題。

在此半世紀中尋常微分方程論已成爲分析學中最重要之部分，而偏微分方程論則尙有待於完整。惟求積分之普遍問題，甚爲困難，故一般研究家均僅限於求已知點隣近積分之性質。及福克斯（Fuchs），一八六六至一八六八）之兩大論文出現，湯姆（Thomé），佛洛奔納（Frobenius），又從而窮究之，於是學者之態度乃一變。自一八六九年以後，柯勒（Collet）爲一拔萃之貢獻者，特其求解非一次方程組之方法，則於一八六八年傳於柏特龍（Bertrand）矣。克勒布肖（Clebsch，一八七三）治此理論，以其治阿柏爾積分之法治之。因柯柏爾積分可依以有理變換不受影響之基本曲線之性質而分類，故克勒布肖謂凡微分方程所規定之超越函數，亦可依其受有理之一對一變換其對應曲面 $F=0$ 之不變式之性質而分類。

自一八七〇年以後，李依之工作，實已將微分方程論置於一更滿意之基礎之上。李氏謂昔日算學家所認爲各各分立之積分學理，若引入變換連續羣之意義，均可以視同一致，尋常微分方程

之可受同一微分變換者，其積分求法將呈同樣之困難。李氏曾重視接觸變換，即近世理論大部份之所從出者也。近世派學者之注意亦因之而移集於微分不變式論，其使此基本重要理論，超然特出者，李依之力也。他如克萊恪苛(Cockle)，西微士德，福賽司(Forsyth)，南括(Laguerre)以及哈爾芬(Halphen)亦與有功焉。近世著作者有一共同之趨向：觀於孟諸，柯西之工作可以知之，即分爲二學派之趨向是也：一派用幾何圖形研究，蘇華茲，克來因辜沙(Goursat)代表之，其又一派則嚴守純粹分析學，外斯屈斯，福克斯，佛洛奔納屬之。福克斯之工作及初等除數論，即爲梭威傑(Sauvage，一八九五)最後工作之基礎。彭加(Poincaré)最近貢獻亦甚著名。彭氏之福克斯方程論，克來因亦有研究，與一般之理論，頗有關係。彭氏且使方程之全部與函數論發生密切之關係。亞白耳(Appell)最近對於更改函數及變數微分方程可變換至其自身之一次微分方程論有所貢獻。赫爾奇(Helge)有關於無窮行列式及一次微分方程之作品。皮伽耳於二級微分方程有福克斯，彭加之工作之擴充。法布里(Fabry，一八八五)曾擴充湯姆之常態積分，即彭加所稱爲變態積分者，最近皮伽耳亦曾研究之。呂奎而(Riquier)曾詳論在任何微分系中積分之存在

問題，並有一八九五年以前關於此題之史略。至於近世研究微分方程者，爲數甚多，除上述諸算學家外，尚有布力奧奇(Brioschi)，哥尼斯堡(Königsberger)，平羅(Peano)，格拿夫(Graf)，韓柏葛(Hamburger)，格倫多奇(Graindorge)，許拉弗里(Schläfli)，格雷瑟(Glaisher)，郎默爾(Lommel)，吉爾柏特(Gilbert)，法布里(Fabry)，克累(Craig)及奧東(Autonne)。

第十二章　無窮級數

雷福（Reiff）分無窮級數之發達史爲三時期：（一）牛頓及來本之時代即萌芽時代；（二）尤拉時代即正式成立時代；（三）近世時代即用科學研究無窮級數時代始於高斯。近世時代與前期之分界點實以高斯一八一二年所發表論

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots\cdots$$

級數一文爲始。拉氏曾研究此級數，但能精通之者，以高斯爲最早，普法夫名之爲超越幾何級數，其後耶可比，孔謨，蘇華玆，克萊孳沙以及其餘學者均先後注意及之。此級數之本身，實不若高氏所設立之討論標準，尤爲重要，包括收斂判定及收斂限域與餘項之問題。

高斯氏之貢獻，當時尚不爲學者所注意，其次喚起一般人之注意者爲柯西，柯氏可認爲級數斂發論之創始者。柯氏又爲重視嚴格測驗收斂性之第一人，並證明二斂級數之積不必爲斂級數，

而斂發性之有效判法之發現實自柯氏始。雖然吾人當知此類名詞在一六六八年格列高里(Gregory)曾用及之，而尤拉與高斯亦有種種之判定法，至於柯氏之發現，馬克羅麟似早已略有認識，柯氏並擴充其冪級數論，使一複數函數亦能展為冪級數。其斂級數之測驗法，如遇求積分可能之時，至今仍為最適用之方法。

其次之重要者為阿柏爾。在阿氏論下列級數

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

之論文中，有幾處對於柯西結果之修改，並有當m x為複數時，此級數和之學的求法。柯氏極反對濫用級數，並謂收斂問題中綿續性有討究之必要。

柯西方法尚非普遍之方法，同樣有拿勃之法；棣摩庚之對數測驗法，曾經雷芒，普林諸證明在某一限域內無效；以及柏特龍，波勒，馬耳斯登，斯托克斯，包克爾，柴比千，亞特等諸法。至於普遍之測驗法始於孔謨，後愛生斯坦曾研究之，外斯屈斯於其函數論之貢獻中亦曾及之，丁尼(Dini)，雷芒

以及其他學者亦有研究。普林諧自一八八九年以後之工作於此理論最爲完備而普遍。

齊一收斂論之研究始於柯西（一八二一）阿柏爾曾指出其限度，但最先研究而有所成就者，爲斯托克斯，賽得（Seidel，一八四七——四八）。其後柯西再研究之，容納阿氏之評論，亦得斯托克斯同樣之結果。湯姆嘗採用此原理（一八六六），但齊一收斂與非齊一收斂之分辨，雖爲函數論之所必需，畢竟遲之又久，始爲人所承認。

研究半斂級數者，爲蒲畦孫（Poisson），蒲氏且有馬克羅麟餘項之通式。此問題最重要之解決，應歸功於耶可比（一八三四），耶氏於餘項問題，由另一立足點而得一不同之公式。其後馬耳斯登（一八七四）亦求出其式，並另得一公式。肖朗美（Schlömilch，一八五六）亦曾改良耶氏餘項式，且獲得此餘項式與彭祿利函數

$$F_{(x)} = 1^n + 2^n + \cdots\cdots + (x-1)^n$$

之關係。其後堅若齊（Genocchi，一八五二）亦有貢獻。

昔之研究半級數者，有瑯司基（Wronski），其著述（一八一五）初無人注意，又克萊揭出始

著於世。此外荃孫(Transon，一八七四)，拉果蘭諸(Lagrange，一八八四)，厄科斯(Echols)，狄克斯騰(Dickstein)均有論述。

插値公式自牛頓至今，學者之論述甚衆。拉果蘭諸定理，雖昔尤拉亦有類似之式，實爲著名之定理，此外則有奧利未(Olivier，一八二七)，閔汀(Minding，一八三〇)，柯西(一八三七)，耶可比(一八四五)，格隆納(Grunert，一八五〇－一八五三)，克力斯托夫(Christoffel，五八一八)，梅納(Mehler，一八六四)等之公式。

在高斯，柯西，阿柏爾研究其無窮級數理論之時，由物理學之應用，有佛耳內(Fourier)級數之研究。用諸倍弧正餘弦之冪展開正餘弦爲級數，會經彭祿利兄弟及更早韋特(Viète)之研究。及經尤拉與拉果蘭諸及最近彭索(Poinsot)，薛魯得(Schröter)，格雷瑟(Glaisher)，孔謨(Kummer)之研究，其式乃歸簡易。佛耳內所欲解者，則爲另一問題，即以x諸倍角之正餘弦以展開x之函數是也。見於其熱之分析學中(一八二二)。尤拉曾有確定此級數諸係數之公式，拉果蘭諸見之而不知其價値，但首先認識及證明其普遍定理者則爲佛耳內，蒲哇孫(一八二〇——

二三）亦曾由另一立足點以治此問題。雖然佛耳內於其級數之收斂問題殊不措意，是則有待於柯西（一八二六）之嘗試，與狄里脅勒之科學的討究者也。狄氏於三角級數之論有一結束，然其討論與改良，則雷曼（一八五四），海湼，李勃昔(Lipschitz)許拉弗里以及雷芒皆與有功焉。此外於三角級數論及佛耳內級數論之著名貢獻者，尚有丁尼，赫邁，哈爾芬，克勞西(Krause)，擺而里(Byerly)以及亞白耳(Appell)。

第十三章　函數論

代數學家雖於研究三次及四次方程式時，早已熟悉無理函數，但函數之發達當自牛頓之工作始。牛頓於其討論方程根之對稱函數時，似爲握有函數觀念之第一人。函數之名稱來本之（一六九四）於討論笛卡兒幾何時，嘗用及之。然知其近世意義者，似以約翰彭祿利（Johann Bernoulli）爲最早。蓋彭氏且嘗用 ϕ 爲函數之記號，克萊羅（Clairaut，一七三四）曾用 $\pi x, \phi x, \Delta x$ 爲各種 x 函數之記號，其後達蘭貝耳（一七四七），尤拉（一七五三）皆沿用之。拉果蘭諸則奠定一般理論之基礎，並此記號一廣大之意義及 $f, \phi, F, \ldots\ldots f', \phi', F', \ldots\ldots$ 等記號近世之意義。高斯氏亦有貢獻，其尤著者，爲代數基本定理之證明及對應圖形論討論之命名，即克萊所稱正交伸縮形是也。

以拉果蘭諸之工作爲出發點，柯西遂大發展函數論，故柯氏當爲函數論創作者之一。其論著亙數十年（一八一四至一八五一），包括虛數限之積分，無窮級數收斂問題，微分學在複數上之

應用，算學基本律，以及近今所認爲函數通論之各支部。柯氏原爲反對高斯自由運用複數之運動，最後亦如阿柏爾反爲此運動之一辯護者。近代算學上之研究皆視柯氏之指導，函數論之地位因以增高，函數種類得以辨別，而函數論之全部遂得立於一強健之基礎之上。函數論之發展，至是遂與各特種函數之發展相須並進，最著者如阿柏爾函數橢圓函數；今爲節省篇幅，故將此等函數不另分章述之如下。

橢圓函數論通常認爲起原於蘭頓（Landen，一七七五）之二橢圓弧與一雙曲線弧之代換。但節柯彭祿利（Jakob Bernoulli，一六九一）曾提出比較同一曲線之二不合同兩弧之觀念，而約翰彭祿利（Johann Bernoulli）嘗繼續而研究之。華格南羅（Fagnano，一七一六）亦有同樣之研究，而馬克羅麟（一七四二）及達蘭貝耳（一七四六）均達到橢圓函數甚近之境界。尤拉（自一七六一年以後）會集諸家之說而擴充之，得成橢圓函數論之雛形，且謂橢圓弧有以一記號代表之之必要，並預言此種記號將產出一種新微積學，予茲所述，乃其開宗明義耳。尤拉之研究繼續至其終身（一七八三）。勒向德以建立橢圓函數論之初基歸諸尤拉。尤氏或始終不知

闊頓之發現也。

橢圓函數論大都出於勒向德，而勒氏一生之名譽亦大抵得之於此。勒氏早年之討究，純以嚴格之分析法代替幾何法。手此不倦者垂四十年，其工作均載於其橢圓函數論及尤拉積分論一書（一八二五至一八二八）有一可驚之事，觀於勒氏之言可以知之，其言曰：余之工作，殆難放異彩，予見有二青年算學家耶可比，阿柏爾曾完成其橢圓函數論最高之部分，有可驚及滿意之結果。阿氏於一八二五年始研究橢圓函數，明年即發表其基本定理於巴黎學校。此次發表，殊屬草草。其詳細至一八四一年始刊布之，但已於阿氏歿前送至格拉爾雜誌社（一八二九）矣。阿氏發現橢圓函數之二重週期，而以橢圓積分爲其幅之函數之研究，即自阿氏始。

耶可比一若勒向德，高斯均亟讚賞青年阿柏爾定理。耶氏稱之爲紀念碑，從此阿氏之名，遂與此定理並稱。而此定理中所述及之複週期函數，即名爲阿氏函數。阿氏之工作早經盧微爾（Liouville），及赫邁(Hermite)證明。薩雷（Serret），沙爾(Chasles)，外斯屈斯，克勒布胥（Clebsch），哥頓（Gordan），柏里奧（Briot），寶格（Bouquet）對於阿氏之說，皆著有專書以闡發之。雷曼

(Riemann) 之著名論述出之以齊諧之體，致久之始獲學者之注意。其立論乃根據阿氏積分及其反函數卽阿氏函數，以推闡曲面之觀念卽今所謂雷曼曲線者，及其對應之基本存在定理。克勒布胥由一方程所規定之代數曲線爲出發點，使橢圓函數論易於了解，並推廣阿氏積分至多變數之代數函數論，而產生一支科，卽後來納脫 (Noether)，皮伽耳 (Picard)，彭加 (Poincaré) 所致力者也。至將不變式論與投射幾何引入曲線橢圓函數及阿柏爾函數中，乃克勒布胥計畫之擴充。研究此種擴充及阿氏函數之一般理論，則以克來因爲首領。關於阿氏函數之發展者，除上述諸家外有甚多之學者如削德基(Schottky)，罕柏特(Humbert)，訥伊曼 (Neumann)，弗立克 (Fricke)，哥尼斯堡(Königsberger)，勃林姆(Prym)，蘇華茲(Schwartz)，盆勒微 (Painlevé)，胡耳維茲(Hurwitz)，布力奧奇(Brioschi)，波卡 (Borchardt)，克萊 (Cayley)，福賽司 (Forsyth)，羅孫亨(Rosenhain) 等。

茲再論橢圓函數。耶可比在一八二七年對於勒向德之工作，大有增益。耶氏創一新記號，且創定模方程式之名。至於著有橢圓函數之專書者，則有柏里奧，賓格勞郎(Laurent)，哈爾芬 (Halphen)，哥尼斯堡（Königsherger），玉勒（Durège）以及卡來是也。以此學理加入劍橋叢書中之赫邁。僅有克萊所作之一書，然此學理遂有流行於英之勢。

希太函數論（Theta Functions）為耶可比與阿柏爾同時異地之發現（一二二八）。高斯謂彼曾於二十年前已知希太函數之性質，但未有所發表也。此函數之主要之貢獻者，有羅孫亨（Rosenhain）與哥白爾（Göpel），哥氏聯合二重希太函數及二變數之阿柏爾函數，而建立與耶可比橢圓函數論對應之雙曲橢圓函數。外斯屈斯（Weierstrass）亦推展希太函數使與空間界域之形狀無涉，其後哥尼斯堡曾苦究之，而有所增益。雷曼曾完成希太函數論與阿柏爾函數論之關係，使希太函數為其阿柏爾積分之主要部分，遂置希太函數於其現今之地位。斯密則將其對於希太函數之貢獻，包括於其奧迷加函數論中。近世之希太函數之貢獻者，有克拿則（Krazer）勃林姆（Prym，一八九二）及物庭葛（Wirtinger，一八九五。）

克萊為週期函數論拔萃之貢獻者，其二重週期函數之論文曾推廣阿柏爾二重無窮乘積之研究。尤拉有 sin x, cos x 之單純無窮乘積，而阿柏爾擴充之而得 sn x, cn x, dn x 之二重無

窮週期函數。以此種阿柏爾之式爲出發點，克萊獲得其橢圓函數論之完全基礎。愛生斯坦（一八四七）繼之，由純粹分析之立場，而有一般二重無窮乘積着之討論，外斯屈斯嘗補充之，且謂其工作爲一名著。

近世一般之函數論，大抵出於柯西，雷曼，及外斯屈斯之工作。雷曼謂一切自然律皆應有算學公式之解釋，故其方法乃得之於位勢論，其算學思想以實質爲立足點，外斯屈斯則反是，純粹由分析之觀點而推敲之。以能表明一切函數之基本性質之偏微分方程，爲一般分析論之基礎；及以不連續性與端界條件，爲探求分析函數之判別法：此二觀念皆出自雷曼。克來因（一八八二）嘗苦研雷氏學說，且擴充雷曼之曲面論。克勒布胥，魯洛（Lüroth）以及近世學者皆根據此理論，以探求環圈線之性質。雷氏之思想並非無弱點，幸與位勢論方面，有訥伊曼，分析方面有蘇華茲，爲之護衞也。

於函數通論，橢圓函數論，以及其他函數論，克勒布胥皆甚有名。克氏曾爲代數曲線之有系統之研究，用近世投影幾何觀念以治其橢圓函數論。克來因曾於其橢圓函數論書中擴充此理並推廣其法，至雙曲橢圓函數及阿柏爾函數。

繼雷曼之後有同等之重要同等之創造性，而更嚴密之工作，卽外斯屈斯之學說。其最初之函數論之論演，實為近世算學發達之焦點。而尤以其阿柏爾超越函數之研究，殆為阿柏爾耶可比以後，最為重要之工作，其於橢圓函數之貢獻，及其所創之 Pu 函數亦極重要。外氏於一般之函數論，創設種種記號，製定種種名詞，幷發現甚多之定理。外氏首先發現（一八六六）分析函數之自然限度之存在，卽後來蘇華茲，克來因及弗立克所繼續研究者也。外氏之於複變數函數論自始至終有整個之發展，而於實變函數論亦不弱云。

福克斯（Fuchs）亦為有名之貢獻者，尤喜研究（一八七三）有奇點之函數之通式。密他勒弗（Mittag-Leffler）則治有無窮多個奇點之函數，且獲得一基本定理。基沙（Guichard，一八八三）嘗總核函數奇點之分類而擴充之，而密他勒弗與拔陀有一同樣之貢獻。南括（Laguerre，一八八二）則最先討論超越函數之分類，而彭加，塞沙羅（Cesaro），微彎迪（Vivanti），亦各有所貢獻。克來因所命名之自形函數（automorphic function）研究之最著者為彭加，且定有其一般之分類，此外蘇華茲，福克斯，克萊，魏柏（Weber），肯勒辛葛（Schlesinger），本賽德均有貢獻。

橢圓模函數論始於愛生斯坦之論著（一八四七）而外斯屈斯之橢圓函數講義，近始以克來因學派之影響亦取得卓越之地位。許拉弗里（Schläfli 一八七〇）及最近克來因，達克（Dyck），基爾司脫（Gierster），胡耳維茲（Hurwitz）曾獲得克來因及弗立克最近所著橢圓模函數詳論一書中之理論。於此理論戴德肯（一八七七，）克來因（一八七八）及彭加（自一八八一以後）之論著，均甚有名。

對於一般理論及特殊理論各領袖貢獻者之姓名，除約但（Jordan），赫邁，和爾得（Hölder）皮伽耳（Picard）皮曼（Biermann），達波（Darboux），白勒（Pellet），雷哈特（Reichardt），柏克哈（Burkhardt），克勞西（Krause），罕柏特（Humbert）外可參考柏里與納脫（Brill-Noether）之報告。

至於各種特殊之代數函數，茲以篇幅所限，僅能述及一種，卽柏塞爾（Bessel）之函數是也。柏氏零級函數，見於彭祕利（一七三二）及尤拉（一七六八）之論著，在十八世紀末葉以前，凡第一類及整數級之柏塞爾各函數均早用及。但以特殊函數之所以見重於世者，皆出柏氏之力，柏

氏於一八二四年置此函數於現今之形式。拉果蘭諸級數（一七七〇）及拉普拉斯之所擴充（一七七七）爲刻卜勒（Kepler）問題最良之法（即以時間與差均述無紛擾之行星運動之問題），而此法之證明，則全賴柏塞爾函數。韓克爾（Hankel，一八六九），郎默爾（Lommel，一八六八以後），訥伊曼（Neumann），海涅（Heine），格拿夫（一八九三），格雷（Gray），馬索（Mathews，一八九五）以後其他學者，於此理均有貢獻。累力爵士（一八七八）曾證明得柏塞爾函數與拉普拉斯之關係，但未嘗認爲顯然各別之超越函數系。柏塞爾函數之數表，（一八二四）韓孫（一八四三）以及梅塞爾（Meissel，一八八八）均各曾製出云。

第十四章　或然算與最小二乘法

或然論與誤差論爲觀察現象之應用算學，大部分發展於十九世紀。或然算之原則，可回溯至斐馬（Fermat）與巴斯噶（Pascal，一六五四）。最先以科學法研究之者，爲海巨史（Huygens，一六五七）而使之成爲算學史上之一支科者，則爲彭祿利（一七一三）及棣美華（一七一八）之著作。誤差論可追溯至科次（Cotes）之著述（一七二二）而應用其理於科學觀察上者，則自辛普生（Simpson，一七五五）始。辛氏之作，印於一七五六年，其再版（一七五七）中有正負誤差之或然性相等之公理，并論及一切誤差之限度，連續誤差及或然曲線等，拉普拉斯則首先（一七七四）由或然原理推演得觀察合併之規則，拉氏以 $y=\varphi(x)$ 曲線表誤差之或然律，其中 x 爲誤差，y 爲或然數，并確定此曲線之三大特性：(1)曲線依 y 軸爲對稱；(2) x 軸爲漸近線，其誤差爲 ∞ 時之或然數爲 0；(3)其所包之面積爲 1，卽謂有誤差存在也。拉氏并推得三次觀察平均數之公式。拉氏亦有一誤差便捷律（此名由拉果蘭諸一八七四年所定）之公式，但往往引出一不

易處理之方程。彭祿利（一七七八）有集中誤差組之或然最大乘積之原理。

最小二乘方法始於勒向德（一八〇五），見於其所著決定彗星軌道之方法一書。有一愛爾蘭之美國著作家爲分析家雜誌之編輯者（一八〇八）亞橋倫（Adrain）並不知有勒氏之法，亦求得誤差便捷律如 $\phi(x)=ce^{-k^2x^2}$，其中 c 與 k 爲視觀察準確而異之常數。亞氏有兩證法，其第二法大體與赫失勒（Herschel）所得者同（一八五〇）。高斯亦有一證法，在歐洲似於一八〇九年已爲人所共知，則亞氏外之第三法也。使最小二乘法理論及應用之在算學上佔一地位者，高氏之功也。

此外之證明則拉普拉斯（一八一〇—一八一二），高斯（一八二三），愛服立（Ivory，一八二五—一八二六），哈根（Hagen，一八三七），唐金（Donkin，一八四四—一八五六）以及克洛夫頓（Crofton 一八七〇）均有之。其他之貢獻者，爲厄爾力斯（Ellis 一八四四），棣美華（一八六四），格雷瑟（Glaisher 一八七二）以及斯恰帕勒利（Schiaparelli 一八七五），彼得斯（Peters，一八五六）之單個觀念之或然誤差 r 之公式，亦甚著名。

十九世紀對於或然通論之貢獻者，有拉普拉斯，拉克啦(Lacroix，一八一六)力特牢(Littrow，一八三三)刻特雷(Quetelet，一八五三)，戴德肯(Dedekind，一八八〇)，赫爾麥(Helmort，一八七二)勞郎(Laurent，一八七三)，立亞格(Liagre)，狄亭(Didion)，披爾遜(Pearson)，棣美華與布爾(Boole)曾改良此學理，但無甚基本之新論也。楚柏(Czuber)除其獨自之甚多貢獻(一八八四，一八九一)外，且譯(一八七九)有邁爾(Meyer)之作。至於幾何方面則密勒(Miller)與教育時報及此報之投稿者克洛夫頓(Crofton)，麥克柯爾(McColl)，渥爾斯丹和(Wolstenholme)，瓦特孫(Watson)，馬丁(Martin)，影響頗爲巨大。

第十五章　解析幾何

幾何學發達史大概可分為四部：（一）希臘時代之綜合幾何，實際上以亞奇默德（Archimedes）為終點；（二）解析幾何之誕生，即由古丁（Guldin），棣沙格（Desargue），刻卜勒（Kepler），羅伯渥（Roberval）之綜合幾何變化而為笛卡兒（Descartes），裴馬（Fermat）之坐標幾何之時期；（三）自一六五〇至一八〇〇年，其特點在應用微積於幾何學上，所包括之學者有牛頓，來本之，彭祿利，克萊羅，馬克羅麟，尤拉以及拉果蘭諸此諸學者與其謂為幾何家，毋寧謂為分析學家也；（四）十九世紀即純粹幾何學復興時代，有孟諸（Monge）之繪畫幾何，彭色勒（Poncelet），斯泰涅（Steiner），史韜（von Staudt），克理摩拿（Cremona）之近世綜合幾何，白呂克（Plücker）之近世解析幾何，羅巴秋士給（Lobachevsky），波爾耶（Bolyai）之非歐幾何，勒滿（Lemoine）初等三角幾何。故十九世紀解析幾何與綜合幾何區別頗難劃分，其發達史當與下章合併讀之。

笛卡兒一六三七年發明之解析幾何，初僅限於平面曲線，其後各種代數曲線之共同特性不久亦次第發現。牛頓在一七〇六年曾貢獻有三個著名定理，其餘則為科次（Cotes 一七二二）馬克羅麟，華林（Waring 一七六二—一七七二等年）之貢獻。建立平面曲線論之科學基礎，當歸功於尤拉（一七八四）與克剌麥（一七五〇）。尤拉分別代數曲線與超越曲線，幷曾為代數曲線分類之嘗試。克氏有一問題為世人所共知稱克氏理論者是也，其後為拿默（Lamé）所解決（一八一八）。置代數曲線之奇解論於科學基礎之上者，亦克氏之功，但依據近世幾何之意義之理論，則始自彭色勒云。

當時曲面之研究漸盛，笛卡兒曾云其幾何學可推廣至三度空間，爾倫（Wren 一六六九）曾發見一葉雙曲線體母線二組，琶倫（Parent 一七〇〇）亦曾用三個坐標面以研究曲面。雖然正式之三度幾何實始於克萊羅（Clairaut 一七三一）當時氏年僅十六，即已解得甚多之雙曲率之曲線問題。尤拉（一七六〇）則建立曲面曲率之解析論，嘗為二次曲面之分類，以前人已有二級曲線之分類也。孟諸，哈傑特（Hachette）及其同派之學者均熱心為曲面之研究。孟氏嘗提出

曲面族之觀念，并發現曲面論與偏微分方程求積分之關係，使二者可以互相闡明。十九世紀研究曲面論之學者甚多，不僅本章所述及者已也。

麥俾烏（Möbius）在幾何學上之貢獻，始於一八二三年，四年後有一微積學書出版。在此大著述中有齊次坐標與幾何公式之對稱，幾何上正負號原則之科學解釋，及單複幾何對應原理之建立。麥氏又嘗爲三次曲線之分類（一八五二），卽蔡登（Zeuthen 一八七四）所賴以成其四次曲線之分類者也。與麥氏同時有波必烈氏（Bobillier，一八七二）會創用三線坐標，又有伯拉微底（Bellavitis）在解析幾何學上貢獻甚多。澤剛（Gergonne）之工作，當於下章述之。

近世解析幾何學之貢獻最著者，當推白呂克（Plücker）。氏於一八二八年刊布其解析幾何學之第一册，近世之各記號皆始於此，實開解析幾何學之一新紀元。一八三一年其第二册出現，其中有對偶原理，現今在分析學上之形式。高次曲線焦點之一般討論法，亦出於白氏（一八三五）。三次曲線之分類，前人屢經嘗試而未能者，至白氏始完全解決。又有柏拉格郎（Bragelogne）及尤拉曾嘗試之四級本面曲線，亦於一八三九年由白氏完成其類別。一八四二年白氏發現其著名之

六方程幷證明此六方程中如任何三者爲已知，則一曲線之特性如曲線之級與類，二重點之數，尖點之數，雙切點之數，扭點之數皆可求得。一曲線之對偶定義，切線坐標系及雙切線問題之研究皆出於白氏，其後克萊（一八四七—一八五八）赫斯（一八四七）沙而曼（Salmon，一八五八）得胥（Dersch，一八七四）亦曾繼續雙切線問題。線織面論始於孟諸，亦得白氏而後深廣。白氏之最大工作或爲其始創直線爲空間原素之說。白氏於一八六五年創其說，繼於一八六八至六九兩年間著其膾炙人口之詳論一書。叢線彙線及線織面之通性及平直叢線與一次彙線之特性，卽後來孔謨，克來因及其他近世學者所致力之學目。四度乃至n度空間之觀念，拉果蘭諸及高斯亦曾述及，至白氏始盛行而成爲近世研究之要目。雷曼，赫爾姆霍斯（Helmholtz），李勃昔（Lipschitz），克郞勒克（Kronecker），魏朗尼（Veronese），克來因，李依，克萊，多微爵（d'Ovidio）以及其他甚多學者，均先後窮究其說。至四度空間中有規則之超越立體則爲瑟斐勒（Scheffler），魯德（Rudel），何勃（Hoppe），薛拉格（Schlegel）及斯屈靈韓（Stringham）特殊研究之學目。

在耶可比之貢獻中，則有由代數曲面之交結而得之曲線及點族之研究，繼之者爲聿愛

(Reye 一八六九。)耶氏並有橢圓體在平面上之對應表示，一八五八年由雪林(Schering)完成之。其後蘇華茲(Schwartz 一八六九)及亞謨斯騰(Amstein 一八七二)又有平面上或球面各四面種種對應表示之例。

赫斯(Hesse)對於幾何之貢獻既多而有價值，於一八四四年著有曲線扭點論並創有所謂赫斯曲線者爲三元形共變式之第一例。赫氏於三級曲線論亦有貢獻，推廣巴斯噶(Pascal)及布里安詳(Brianchon)之定理至於球面。近有龔得芬葛(Gundelfinger 一八九四)頗喜窮究赫氏之法。

沙爾(Chasles)除其綜合幾何學之貢獻外，尚有三次四次曲線論之撰著。沙氏創有一方法名示性法，即今之計數幾何之起源，後經蔣格(Jonquieres)，哈爾芬(Halphen 一八五七)，叔伯特(Schubert 一八六七—一八七九)乃發達，克勒布肖，林特曼(Lindemann)，胡耳惟茲(Hurwitz)均有貢獻。一般之對應論起於幾何學，而沙氏乃首先研究代數曲線之對應，但僅限於缺欠爲零之曲線。克萊繼之，至於缺欠較高之曲線(一八六六)至柏列爾(Brill 一八七三以後)其

理論始成。

克萊在幾何學上之影響甚大。初年克氏研究白呂克曲線奇點之說，即證得任一奇點可視爲普通若干奇點之結合，如是則「六方程」可施於任何奇點之曲線。克氏因此闢一新領域爲納脫，蔡登，哈爾芬，及斯密等致力之場所。克氏之曲線相交定理（一八四三）及其單類代數對應中自身對應點之決定法，皆爲此理論之基本，其後巴卡拉(Bacharach)，柏列爾(Brill)，及納脫於此義均有甚多之貢獻。克氏對於有理變換及對應論，有甚多之增進，證明空間變換論及軌跡對應論之區別。克氏平面曲線上雙切線之研究，尤其爲無奇點之四次式之二十八個雙切線之研究，於白呂克焦點觀念之發展，於密切二次曲線及平面上六點之討論，其平面曲線不變性及共變性之幾何理論，均有價值，克氏首先發表（一八四九）立體面上之二十七直線，并擴充沙而曼之逆面論，以及討論（一八六九）許拉弗里(Schläfli)曾經述及之立體面分類。克氏於不可展線織面論曲面之正交系波浪面論等均有貢獻，且首先達到雙曲率曲線論最普遍之結果，即後來哈爾芬，納脫改進（一八八二）之理論也。其他克氏在幾何上之貢獻，尚有其絕對形論即研究一圖形之一切

計量性質之法也。

克勒布脩(Clebsch)亦爲研究曲線曲面之重要人物。首先應用代數之一次變換於幾何。氏於曲線不完觀念甚爲注意，卽昔日阿柏爾所創之觀念，氏并應用橢圓函數論及阿柏爾函數論於幾何以研究曲線。氏於一八七二年有三級曲面形狀之研究。繼克氏者有克來因，克來因嘗研究決定此等曲面之一切可能形狀之問題，遂得建立以連續原理任何三級眞實曲面之一切形狀，皆可由四圓錐實點之特殊曲面引出之事實。蔡登(Zeuthen，一八七四)嘗討論四級平面曲線之各種形式并指出其結果與克來因三次曲面之結果之關係。氏曾爲推廣此理至n線曲線之嘗試，但一般之分類迄未獲得，聿昂(Rohn)有四次曲面之研究，但未能完全枚舉，聿氏於孔謨之曲面亦有貢獻(一八八一)。

李依曾採取白呂克之空間元素并擴充其理論。其球形幾何乃由高級觀點以討論六個齊次坐標之問題，與初等球形幾何僅有五個且可以對應群判識者有別，卽後來達波(Darboux)所研究之幾何也。李氏以切點變換論及其在微分方程之應用，其叢線及球面叢線，以及最小曲面之研

究，均甚爲重要。

用模形研究曲線面及函數論效力甚大，達克 (Dyck)，柏列爾 (Brill)，亨立西 (Henrici)，舒華茲 (Schwartz)，克來因與佛里 (Schonflies)，孔謨等均製有種種模形。

最小曲面之發達隨解析幾何一般之發達前進。拉果蘭諸（一七六〇至六一）有在一今有之區域內最小曲面之方程式，梅士尼 (Meusnior) 於一七七六年亦研究之，一七八五年其論著出版。此後半世紀中除蒲哇孫之廬面研究外，鮮有著名之貢獻。孟諸（一七八四）勒向德（一七八七）則得曲線研究與微方方程并論，但於此問題無立時可見之影響，雪克 (Scherk，一八三五）增加不少之重要結果，最先施用孟諸與勒向德之工作於此理論。卡武南 (Catalan，一八四二）邊林 (Björling，一八四四）及丁尼 (Dini，一八六五）於此理論亦有增益，最著之貢獻者，則爲波內，蘇華茲，達波及外斯屈斯。波內（一八五三以後）創設一組關於曲面通論之新公式，并完全解決經過任何曲線之最小曲面，及於此曲線每點容納一前定切面之問題。外斯屈斯(一八六六)有數種基本定理之貢獻，證明如何求出一切代數最小曲面及證明虛變數函數論與最小曲面論

之關係。

第十六章　近世幾何

畫法幾何，投影幾何及近世綜合幾何發達史之界限，頗難劃分，較之其於解析幾何，殆難數倍。孟諸藏守其理論者三十年，始印行其畫法幾何一書（一八〇〇）其遲緩之原因，以軍事關係，必須守其可貴之祕密。此幾何之起源，雖有數點可追溯至棟沙格（Desargue），戴勞（Taylor），藍伯（Lambert），弗里則（Frézier），但首先澈底研究，使之成爲一科學者爲孟諸，拉克啦（Lacroix）雖於一七九五年有此學最早之著述發表，實得諸孟諸在法國高等專門學校之講演。自孟氏工作出現後，哈傑特（Hachette，一八一二，一八一八，一八二一）頗有所增益，其後法人之貢獻者，有勒啦（Leroy 一八四二）奧利未（Olivier，一八四五以後）辜勒黎（Gournerie，一八六〇以後），法雷（Vallée），佛耳栖（Fourcy），亞登麻（Adhemar）等。德國有齊格納（Ziegler 一八四三）安葛（Anger，一八五八，）其尤著者爲斐得納（Fiedler 第三版一八八三至八八）及微焉納（Wiener，一八八四至八七）。當此之時孟氏研究決非僅限於畫法幾何。其於解析幾何之工作，異

常優越，所謂近世解析幾何理論之鼻祖是也。孟氏嘗創有配極之基本定理，云非用近代之術語，實有許多線織面之討論，并推廣之至二次曲面之對極論。

孟諸及其學派頗致力於形之關係，而尤注意於空間曲面與曲線之關係。噶爾諾(Carnot)則因當時風氣之驅使，繼續棣沙格及巴斯噶之步驟，研究計量幾何。其所特別注意者，為穿線論，此論之四射線束之基本性質乃起原於帕坡(Pappos)，但其一般之形式，棣沙格略有修改，實首先見於噶氏之位置幾何一書中(一八〇三)，後更補充之見於其穿線論書中(一八〇六)。於此二書中氏嘗引入負量，四角形，四邊形，以及近世初等幾何上種種有價值之通理。噶氏理論雖若是之重要，但其內容在今日則甚平常，不特其理之名稱，即其方法已無存留者也。近世位置幾何與噶氏之位置幾何已判然二物矣。

投影幾何之起源，似略遲於孟諸與噶爾諾之時期。牛頓曾發現一切三級曲線皆可由五種基本形式之中心射影而得。雖有此說，但此理未為人所注意者，多於一世紀之久，而其起源普通均歸諸彭色勒(Poncelet)。俄國有一囚犯，在獄中暇時，研究投影幾何，八年後其著作出版。此著作中最

顯著者，爲中心投影之次數及綿續原理之次數。其主要觀念則爲投射性質之研究，并引入非調和比原理，昔帕坡有此觀念，而棣沙格亦曾用及之。麥俾烏 (Möbius) 繼續彭色勒之研究，氏於其徵積書中往往用及非調和比，即現今皆用斯泰涅之簡式者也。非調和比或函數之名創於沙爾，而交叉比之名，則始於克利佛德 (Clifford)。其後關於非調和點線之性質，則出於布里安詳 (Brianchon)，沙爾，斯泰涅及史緇 (Staudt)。出於彭色勒尚有相似形論，透視軸與透視心，(沙爾稱爲相應軸與心，) 噶爾諾穿線論之推廣，以及白呂克應用於各級曲線之二次曲線之弦之觀念。并發現沙而曼所謂無窮遠之圓點，因而完成及建立近世幾何之最大原理，即連續原理是也。布里安詳嘗用棣沙格之極線論，以完成孟諸未竟之理，以爲彭色勒之配極論之基礎。

近世幾何學家可與彭色勒比擬者，有澤剛 (Gergonne)，澤氏之研究嚴格論之，應認爲解析幾何學家。氏(一八一三)首先用極線之名如近世幾何上之意義，但極之名，則始於塞哇 (Servois 一八一一)。摩羅立噶 (Maurolycus) 史勒爾 (Snell)，韋特 (Viète)，雖已覺察平行性之重要，然

首先明瞭平行性爲基本原理之觀念者，則爲澤氏（一八二五至二六）。此原理之文詞爲澤氏所撰，幷定名爲對偶原理，爲連續原理後近世幾何中最重要之原理也。幾何之轉倒原理，或亦以爲彭色勒之發現，曾經眞涅栖（Genese）苦心研究，而於近世代數初等幾何及力學上均佔一位置。澤剛首先用「類」之一字以說明曲線，明定類與次之定義且證明二者之對偶性。澤氏與沙爾又爲最先以科學法研究高次曲面者。

斯泰涅（一八三二）最先完成點列與線束等投影關係之討論，且建立近代純粹幾何發展之基礎。圓錐曲線論，及其在三度空間之對應形論，二級曲面論，至斯氏皆已結束，故自斯氏後遂開一高級曲線曲面特殊之研究之時期。斯氏之對偶原理討論及應用投影束線論於圓錐曲線之產生，皆爲其絕作。一點之極線論曾經波必烈（Bubillier）及格拉斯曼（Grassmann）研究，但斯泰涅於一八四〇年證得此論可爲不用坐標研究平面曲線之基本，幷獲得與今日有曲線共變之曲線，即今所稱爲斯泰涅赫斯，卡來之曲線是也。此理論之全部，曾經格拉斯曼，沙爾，克理摩拿（Cremona），蔣格（Jonqueres），盡力擴充。有一對應例題經斯氏首先研究（一八三二）而後顯著，較之彭色

勒，麥俾烏，馬格那斯 (Magnus)，沙爾所研究者，更爲複雜。斯泰涅及辜德曼 (Gudermann) 對於球形幾何之研究，亦甚有名。

當麥俾烏，白呂克，斯泰涅研究於德國之時，沙爾方將孟諸在法國所開始之幾何時期爲之結束。沙氏有一種算學史一書（一八三七）乃一名著，其工作之在法國，一如沙而曼代數幾何之工作之在英國，傳佈前人之研究使之普遍，且對於近世幾何之理論及其定名，均有貢獻。「相稱圖」之名及此原理施於平面及立體圖形之完全文詞，皆出於沙爾，其後英人沙而曼韜森 (Townsend) 斯密均極注意之。

史韜 (Staudt) 之研究，在白呂克，斯泰涅及沙爾諸大貢獻已出之後，似乎不易發展，但史韜則有過之無不及者。加入斯泰涅之學派反對白呂克學派，史韜成爲近世純粹綜合幾何上最大之學者。史韜創定一完成純粹幾何之系統，使計量幾何無存在之地位。不計數量之投影幾何之諸性質因以成立，數量乃屏逐於幾何之外，而非幾何之見棄於數目，但虛數原數仍保存於幾何學中。根據包括一切實投射及其對偶變換之羣之投影幾何既已發展，而虛數變換亦已引入純粹幾何之得

有今日之地位者，大都由於史韜之影響。自史韜而後，度量幾何與投影幾何之區別，完全消滅，凡度量之性質皆視爲基本圖形之投影關係，即一切球形共同之無窮遠圓形是也。所可惜者，史韜之論著以體裁不甚動目不爲人所注意，今日之得爲人稱道者，則聿愛解釋宣傳之功也。

克理摩拿之研究，始於一八六二年。其投影幾何初步之工作（一八七五）爲自魯德司多夫 (Leudesdorf) 之譯本英文之讀者無不知之。克氏於幾何變換論之貢獻甚有價值，而其對於曲線曲面等之研究亦復不少。

在英國近世幾何一科，始於麥加 (Mulcahy)，而尤以韜森（一八六三）及斯泰涅弟子赫司脫 (Hirst) 之功爲多。克利佛德除其曲線通論及極線研究外，則以傳佈德國理論於英國之工作爲多。

第十七章　初等幾何

三角學與初等幾何學在十九世紀亦受一般算學精神之影響，在三角學中則線段比代替線段以爲諸函數之定義，已使三角之研究，大加簡單，而於公式亦有改良與增加。三角級數之斂性，佛耳內級數之引入虛數之自由採用，前已論及。以級數爲正弦餘弦之定義，由是以發展三角學理之全部，則柯西（一八二一），羅巴秋士給（一八三三）及其他學者，皆嘗爲之。雙曲線三角學有邁爾(Mayer)，鑑伯(Lambert)啓其端，辜德曼(Gudermann 一八三〇)，胡威爾(Hoüel)，賴桑(Laisant 一八七一)竟其緒，而投影之公式擴充之圖形則有辜德曼，麥俾烏，彭色勒，斯泰涅之研究。最近史脫底(Study)嘗以近世函數論及羣論之立足點而有球面三角公式之研究，而馬克法倫(Macfarlane)已推廣三角基本定理於三度空間。

至於初等幾何所受之影響，尤爲鉅大，貢獻蓁多，其可述者如下：麥俾烏之線，角，面，體，正負之意義，澤剛與彭色勒之對偶原理；棣摩庚之初等幾何之邏輯；孟諸，布里安詳，塞哇，噶爾諾，沙爾等之穿

線論；阿拉伯人所發見，高翟（Gaultier 一八一三）所確定，斯泰湼可稱為等冪線之根軸論；高斯之內接十七邊與二百五十七邊之多邊形；柯西，耶可比，柏特龍，克萊，麥偉烏，微焉納，赫斯，赫色爾等於刻卜勒彭索（Keplor-Poinsot）之四正體之外所增諸體之多面體論。凡此種種，研究與改善在今日教科書中均稍有採入。

於此尚有應述及者，即近世之幾何學，現今初等算書中已列為專章。克拉爾（Crelle 一八一六）於此學稍有研究，福爾巴（Feuerbach 一八二二）不久即發見九點圓之性質，而斯泰湼亦獲得若干三角形之性質，但皆無繼續不斷之研究。首先為有系統之研究者，為勒滿（Lemoine 一八七三）勒氏對於此學之研究貢獻極多。其綿續變換論及圓解幾何均當述及。柏樂卡（Brocard三角形之貢獻始於一八七七年。其他顯著之貢獻者有塔刻（Tucker），諾易堡（Neuberg）微加利（Vigarie），恩莫力（Emmerich），馬凱（M'Cay），隆宋（Longchamps）以及戴勞外此則有兩報記者密勒（Miller），賀弗曼（Hoffmann）亦與有功焉。

聯絡性之研究，始於頗色列（Peaucellier 一八六四）氏首先有畫直線合理論之正確方法。

懇普（Kempe），及西徵士德（Sylvester）亦嘗窮究其理。

在昔三等分角，倍積立方，圓積求方之三難題，近年亦已解決，證明其爲僅用直尺圓規，乃不可能之事。

第十八章　非歐幾何

非歐乃自白洛克羅（Ploklos）時代至十九世紀之初企圖證明歐几里得第五公設（亦稱第十二公理，有時亦稱第十一或第十三公理）之自然結果。首先以科學方法研究此種幾何者爲沙噶里（Saccheri，一七三三），在羅巴秋士給（Lobachevsky）之先，初不爲世所知。及經伯全美（一八八九）指出始爲人所共認。其次則有藍伯疑及歐氏公設，著有平行論，沙噶里與羅巴秋士給及波爾耶二氏之工作間重要之著述。勒向德亦曾研究此學，但始終未能超出歐氏之範圍。

十八世紀末葉康德（Kant）之絕對空間原則及其幾何必須公設之肯定，頗爲探討致疑之目標。同時高斯嘗注意第五公設但僅及求證一方面。有一時期世人皆以高斯爲非歐幾何學之創始者，卽羅巴秋士給及波爾耶亦以爲或因高斯之友，或因高斯之徒，而有所成就。廣泛言之，高斯，康德雖不無些微之影響，非歐幾何之發明，今已確定實與高斯初無若何之關係也。

巴忒（Bartels，一八〇七）往喀山地方（Kasan），而羅巴秋士給遂爲其門人。羅氏講演稿有

云：巴氏從未與彼提及第五設題，故其研究雖始於一八二三年以前，而完全爲其獨自之創造。一八二六年羅氏乃發表其平行原則，以經過一定點可作無數直線而永不與一定線相遇之假設爲根據。此學理於一八二九年至三〇年已完全刊布，而羅氏一生對於此學理及其他種算學，尙多貢獻云。

波爾耶研究算學之興趣，得自其父烏而夫剛（Wolfgang），其父蓋高斯之徒也。波氏二十一歲時，即與羅巴秋士給同時發見非歐幾何之原理，其一八二三年十一月之信件中已提及此理。至一八二五年始明白寫出，一八三二年正式出版。高斯與叔瑪赫書信中（一八三一至三二）有云：彼亦有羅波二氏同樣之理論，但因二氏之作已出版，彼遂不繼續云云。許威加（Schweikart）亦嘗獨力發現非歐幾何，按近來所發見氏之信件有此說，但其著述中則絕未之見也，其論平行線之理，與其姪陶林納（Taurinus）相同，而與羅波二氏之觀念則絕不相侔者也。

此學說得算學界中之承認甚爲遲緩，自此出版後已四十年始爲人所注意。法國之胡威爾（Houël，一八六六），佛來（Flye，一八七一），德國之雷曼（Riemann，一八六八），赫爾姆霍斯

(Helmholtz 一八六八)，佛里考夫 (Frischauf 一八七二)，包耳則 (Baltzer 一八七七) 意大利之伯全美 (Beltrami 一八七二)，比利時之狄利 (Tilly 一八七九)，英國之克利佛德 (Clifford)，美國之哈爾斯德 (Halsted 一八七八)，均爲宣傳此說最力之人。自一八八〇年後此學說可謂已得一般之了解與正式承認矣。

在一切非歐幾何之貢獻中，由科學之立足點言，其最著名者，當推雷曼。雷氏著述中曾用解析幾何方法與此理論，并提出一負曲率之曲面卽伯全美稱爲假球面者是也。如是則歐氏幾何當在零曲率之曲面上介於雷氏幾何及羅巴秋士給幾何二者之間。雷氏遂發見三種幾何。波爾耶僅知其二種，此三種幾何克來因（一八七一）稱之爲橢圓幾何，雷曼之幾何是也；拋物線幾何卽歐几里得幾何；雙曲線幾何羅巴秋士給幾何是也。

由廣義言之，在十九世紀末葉，大多數之算學對此均有貢獻，除上述者外，尚有克萊，李依，克來因，牛亢 (Newcomb)，巴希 (Pasch)，皮爾司 (Pierce)，啓令 (Killing)，斐得納 (Fiedler)，亹祥 (Mansion)，及馬克林托 (McClintock)，克萊之計量幾何，初未嘗認爲與羅波二氏幾何有何相

同之點。及至克來因指出，將克氏之法簡化之，遂於此學理上增一重大之結果。在克氏公式中當絕對値爲實數時，則與雙曲線幾何相同；爲虛數時則爲橢圓幾何相同；在二者間之極限時，則爲抛物線幾何，卽歐几里得幾何也。克氏著述曾提出一問題：謂如不用距離，以空間觀念規定投影幾何究能至何程度，史稻（一八五七）曾討論此問題，其後克來因（一八七三）及林特曼（一八七六）均曾研究之。

第十九章　一般之趨勢

十九世紀之初，鑒於十八世紀濫用十七世紀積聚之材料，故爲一深自內省之時期。斯時算學界之方針，爲審核其智識之基本，逐步判察種種學說。於是取前人之發現，從新探討較前尤爲精審，但其思想之途徑以創造之方向爲指歸。至十九世紀之末，又爲一內省時期，而最近之趨向，亦爲原理之重新研究。在英國此種運動之領袖爲羅素（Russell）研究幾何之基礎（一八九七）及一般算學之基礎（一九〇三）。在美國有勃傑爾（Bôcher）一九〇四年在聖路易地方（St. Louis）算學基本觀念及方法之講演，及罕亭吞（Huntington），不可約公設問題之研究。在意大利有葩多亞（Padoa）及卜勒立，胡翟（Burali-Forti）代數基本公設，及丕利（Pieri）幾何基本公設之研究。在德國有希爾柏（Hilbert）幾何基本原理（一八九九，）及其最近算術公理之研究（一九〇〇），在法國有彭加（Poincaré）直覺與邏輯在算學上任務之研究，是各國均以精密研究基本原理爲目標也。

希爾柏（一九〇〇）在巴黎著名之講演，即爲算學方針之一例。此講演先評論純粹算學之場域，然後提出現今時期必需致力之諸大問題。幾何一門，則有一八九一年舍格累（Segrè）論幾何學研究之趨勢一文，亦經修改而切合時世矣。

現代尚有一事爲前此所未見者，即協作研究，交換見解，及算學之國際化是也。萬學算學聯合會一八九七年開第一次會議於楚黎（Zurich），一九〇〇年開第二次會議於巴黎，其第三次則於一九〇四年會於海得勃格（Heidelberg）。第一次萬國哲學聯合會，於一九〇〇年在巴黎舉行，其第三組爲邏輯與科學史（此次以算學爲主），第二次會議則於一九〇四年在日內瓦（Geneva）舉行。一九〇三年尚有萬國史學聯合會議開於羅馬，其時幷有萬國科學史聯合會籌備委員會之組織。此種集會交換見解之度，決非舊時僅藉出版物者所可方擬也。

在美國亦有同樣之趨勢，以交換意見及口頭報告最近之發現，美國算學會於一八九四年成立，越十年會員已增至一倍，其每年之論文則由三十份增至一百五十份。其會所現已有二處：一在芝加哥（一八九七），一在舊金山（一九〇〇）。以其會員之努力，及其論文之優良，遂於一九〇

○年正式出版一種會報，爲便於各地會員互相質問疑難起見，又另出一種定期刊物論述世界著名大學高等算學之課程。半由上述之活動，半由回國留學生之衆多，各大學及專門學校算學工作遂有異常之改善。數年前僅見少數著名大學之課目，今則專門學校中已等閒視之。此種課目均爲曾在葛廷庚(Göttingen)柏林，巴黎及其他著名大學得有高等算學學位者所講授，且彼又皆於近世理論上有甚大之興趣者也。最近（一九〇三）美國十大學中之調查專研函數論之學生凡六十七人，橢圓函數論者十一人，投射幾何者九十四人，不變式論者二十六人，羣論者四十五人，近世高等方程論者四十六人，此皆美國數年前不多見之課目也。其他各國亦有同樣變化，尤以英國與意大利爲顯著，數年前僅巴黎或德國始得有之課程，今則國內大學中皆有之矣。一九〇四年海得勃格第三萬國算學聯合會議正式代表凡三百三十六人，僅德，俄，奧，法四國人數較美爲多，亦可以見美國學者之興趣矣。

近今又有一種活動，即印行各大家之全集，於以窺見各大家研究之線索，且以便於參考覆核者是也。此種著述大都經政府獎勵，由著名學會刊印，當代名家爲之出版。全集之已出版者，有加里

略(Galileo)，費馬(Fermat)，笛卡兒，海亘史(Huygens)，拉普拉斯，高斯，伽羅哇(Galois)，柯西，赫斯，自呂克，格拉斯曼，狄里胥勒(Dirchlet)，南括(Laguerre)，克郎勒克，穡克斯，外斯屈斯，托克斯(Stokes)，忒德(Tait)及其他算學領袖學者之工作。今後尚希望有一大批之全集出現，一來以遠接過去學者之傳授，二來以近十年中死去作家特別之多。茲將一部份最近作古之算學大家，其著作有刻全集之價値者開列如下：克萊（一八九五），訥伊曼（一八九五），狄色南(Tisserand 一八九六）布力奧奇(Brioschi 一八九七，西徵士德（一八九七，外斯屈斯（一八九七）李依（一八九九，伯全美（一九〇〇）柏特龍(Bertrand 一九〇〇），忒德（一九〇一）赫邁（一九〇一）穡克斯（一九〇二），季布茲(Gibbs 一九〇三），克理靡拿（一九〇三）沙而曼（一九〇四）等除算理物理家佛洛斯脫(Frost 一八九八，何勃(Hoppe 一九〇〇），克栔(Craig，一九〇〇）胥朗美(Schlömilch 一九〇一），厄味勒特(Everett)以及算學史家法人譚納禮(Tannery，一九〇四）。

至於欲確定最近之今日算學上之趨勢，當能爲不可能之事。但由出版論文之種數與性質以

及過去數年之工作上判斷之，似乎各途徑均應有大大之發展，尤以此種近世支科如羣論，函數論，不變式論，高等幾何，微分方程更有希望。吾人若於近世應用算學之工作上判別之，則吾人方將步入一與拉普拉斯類似之時期，即一切近世算學理論應覓得其應用於最近物理學上之種種發現之一時期也。英法兩國應用算學之高深研究，法德兩國純粹算學之發現工作，德意兩國算學在邏輯上之根據之探求，均將於國際算學上顯其特色。吾恐任何單純勢力之影響於國際算學者，未有若美國現代青年之學於英，法，德，意者，聚衆長而鎔於一爐，其影響之將爲更大也。

本 書 譯 名 表

A

Abbati	亞巴替
Abel	阿柏爾
Adbemar	亞登麻
Adrain	亞橢倫
Ampire	安派耳
Amstein	亞謨斯臘
Anger	安葛
Appell	亞白耳
Archimedes	亞奇默德
Arbogast	阿博戛
Argand	阿貢
Arndt	亞德
Aronhold	亞郎何
Autonne	奧東

B

Bacharach	巴卡拉
Bachet de Meziriac	貝拆
Bachmann	巴克曼
Baltzer	包爾則
Bartels	巴武
Bauer	寶厄
Bellavitis	伯拉微底
Beltrami	伯全美
Berloty	柏羅得
Bernoulli	彭祿利
Bertrand	柏特龍
Bessel	柏塞爾
Betti	柏替
Bezout	柏楚
Bierens	比倫
Biermann	皮曼
Binet	賓納
Bjerknes	邊克霓
Björling	邊林
Bobillier	波必烈
Bocher	勃傑爾
Bolyai	波爾耶
Bonnet	波內
Boole	布爾
Borchardt	波卡
Borel	波勒爾
Bouquet	寶格
Bragelogne	柏拉格耶
Brianchon	布里安詳
Brill	柏列爾
Bring	布林
Brioschi	布力奧奇
Briot	柏里奧
Brocard	柏樂卡
Brunacci	柏魯拿希
Bruno	白魯諾
Abbe Buée	濮伊
Budan	柏丹
Bureli-Forti	卜勒立胡翟
Burkhardt	柏克哈
Burnside	本賽德
Byerly	擺而里

C

Cantor	坎陀
Carley	卡來
Carll	卡爾
Carnot	嘮爾諾
Casorati	卡梭拉底

Catalan	卡式南
Cauchy	柯西
Cayley	克萊
Cesaro	塞沙羅
Charles	查理
Charpit	沙丕
Chasles	沙爾
Christoffel	克力斯托夫
Clairaut	克來羅
Clausius	克勞修司
Clebsch	克勒布脊
Clifford	克利佛德
Cockle	恪苛
Cole	柯爾
Collet	柯勒
Cotes	科次
Craig	克累
Cramer	克剌麥
Crelle	克拉爾
Cremona	克理摩拿
Crofton	克洛夫頓
Czuber	楚柏

D

D'alembert	達蘭貝耳
Darboux	達波
Dedekind	戴德肯
De Moivre	棣美華
De Morgan	棣摩庚
Dersch	得脊
De Toledo	棣陀勒多
Desargue	棣沙格
Descartes	笛卡兒
Dickstein	狄克斯騰
Didion	狄亭
Dini	丁尼
Dirichlet	狄里脊勒
Donkin	唐金
d'Ovidio	多微爵
Druckenmüller	蒴肯爾勒
Duhamel	度阿參爾
Durège	丢勒
Dyck	達克

E

Echols	厄科斯
Eisenstein	愛生斯坦
Elliott	厄力奥特
Ellis	厄爾力斯
Emmerich	恩莫力
Euclid	歐几里得
Euler	尤拉
Everett	厄味勒特

F

Fabry	法布里
Fagnano	華格南羅
Fermat	費馬
Feurback	福爾匹
Fiedler	斐得納
Flye	佛來
Forsyth	福賽司
Fourcy	佛耳栖
Fourier	佛耳內
Francois	弗朗沙
Fresnel	夫累涅爾
Frezier	弗里則
Fricke	弗立克
Frischauf	佛里考夫
Frobenius	佛洛奔納
Frost	佛洛斯脫
Frullani	夫魯南列
Fuchs	福克斯
Fuhrmann	富曼

G

Galois	伽羅哇
Gaultier	高翟
Genese	眞涅栖
Genocchi	堅若齊
Gergonne	澤剛
Sophie Germain	澤門
Gibbs	季布茲
Gierster	基爾司脫
Gilbert	吉爾柏特
Girard	吉剌德
Glaisher	格雷瑟
Göpel	哥白爾
Gordan	哥頓
Göttingen	葛廷庚
Gournerie	辜勒黎
Goursat	辜沙
Graf	格拿夫
Graindorge	格倫多奇
Grassmann	格拉斯曼
Gray	格雷
Green	格林
Gregory	格列高里
Grunert	格隆納
Gudermann	辜德曼
Guichard	基沙
Guldin	辜丁
Gundelfinger	龔得芬葛
Günther	君特
Gylden	吉爾登

H

Hachette	哈傑特
Hagen	哈根
Halphen	哈爾芬
Halsted	哈爾斯德
Hamburger	韓柏葛
Hamilton	韓密爾頓
Hammond	罕夢德
Hankel	韓克爾
Hansan	韓孫
Hannus	韓納
Hardy	哈底
Hargreave	哈格理佛
Harley	哈犂
Harriot	哈略
Hathaway	哈塔威
Heaviside	赫維賽
Heidelberg	海得勃格
Heine	海湼
Helge	赫爾奇
Helmert	赫爾麥
Helmholtz	赫爾姆霍斯
Hermite	赫邁
Herschel	赫失勒
Hersel	赫色爾
Hertz	赫耳茲
Henrici	亨立西
Hesse	赫斯
Hilbert	希爾柏
Hill	喜爾
Hindenburg	辛登伯
Hirst	赫司脫
Hoffmann	賀弗曼
Hölder	和爾得
Hoppe	何勃
Horner	和湼
Hoüel	胡威爾
Houtain	胡呑
Hudde	喝德
Humbert	罕柏特
Huntington	罕亭呑
Hurwitz	胡耳維茲
Huygens	海更史
Hyde	亥德

I

Imschenetsky	英賢勒茲給
Ivory	愛服立

J

Jacobi	耶可比
Jakob Bernoulli	節柯彭祿利
Jellet	節勒
Jerrard	厥拉
Johann Bernoulli	約翰彭祿利
Jonquieres	蔣格
Jordan	約但

K

Kant	康德
Kattor	卡脫
Kelland	克南
Kelvin	克爾文
Kempe	懇普
Kepler	刻卜勒
Kiepert	岐伯特
Killing	啓令
Kirchoff	克希荷夫
Klein	克來因
Königsberger	哥尼斯堡
Korkine	考肯
Kossak	科沙
Kovalersky	科瓦勒夕斯基
Krause	克勞西
Krazer	克拿則
Kroft	克洛夫
Kronecker	克耶勒克
Kühn	庫喀
Kummer	孔謨
Kunze	孔慈

L

Lacroix	拉克啦
Lagrange	拉果蘭諸
Laisant	賴桑
Lambert	藍伯
Lamé	拿默
Landen	蘭頓
Laguerre	南括
Laplace	拉普拉斯
Laurent	勞耶
Lebesque	勒伯斯克
Legendre	勒向德
Leibniz	來本之
Lemke	倫母克
Lemoine	勒滿
Leroy	勒啦
Le Soeur	勒蘇
Leudesdorf	魯德司多夫
Levy	利維
L. Hobitol	駱必達
Liagre	立亞格
Lie	李依
Lindemann	林特曼
Liouville	盧微爾
Lipschitz	李勃昔
Littrow	力特牢
Lobachevsky	羅巴秋士給
Lommel	耶默爾
Long Champs	隆宋
Luroth	魯洛

M

Mac Cullagh	麥克苦拉
Macfarlane	馬克法倫
Maclaurine	馬克羅麟
Macmahon	馬克馬項
Magnus	馬格那斯
Malet	馬雷
Malfatti	馬華棣
Malmsten	馬耳斯登

Mansion	鑾祥
Martin	馬丁
Maschke	馬脊克
Mathews	馬索
Mathieu	馬陀
Maurer	卯納
Maurolycus	摩羅立噶
Maxwell	馬克斯維耳
Mayer	邁爾
McAuley	麥柯利
M'cay	馬凱
McClintock	馬克林托
McColl	麥克柯爾
Mehler	梅納
Meissel	梅塞爾
Meray	梅雷
Mertens	莫吞
Meusnier	梅士尼
Meyer	邁爾
Myer Hirsch	梅爾噶脊
Michael	邁克爾
Miller	密勒
Minding	閔汀
Mittag-Leffler	密他勒弗
Möbius	麥倬烏
Monge	孟諸
Morera	摩勒拉
Mourey	毛來
Mulcahy	麥加

N

Natani	拿淡尼
Netto	勒陀
Neuberg	諾易堡
Neumann	訥伊曼
Newcomb	牛亢
Newton	牛頓
Noether	納脫

O

Olivier	奧利未
Oltramare	奧而全麻
Ostrogradsky	奧斯却格拉斯給

P

Padoa	葩多亞
Painlevé	盆勒徵
Panton	潘頓
Pappos	帕坡
Parent	琶倫
Pascal	巴斯噶
Pasch	巴希
Paucker	包克爾
Peacock	裴各克
Peano	皮亞諾
Pearson	披爾遜
Peaucellier	頗色列
Pellet	白勒
Peters	彼得斯
Pfaff	普法夫
Picard	皮伽耳
Picquet	畢格
Pierce	皮爾司
Pieri	丕利
Pincherle	丙切爾
Plana	柏南那
Plücker	白呂克
Poincaré	彭加
Poinsot	彭索
Poisson	蒲哇孫
Poncelet	彭色勒
Prague	布拉格
Pringsheim	普林諧
Ploklos	白洛克羅
Prym	勃林姆

Q

Quetelet	刻特雷

R

Raabe	拿勃
Ramus	累馬斯
Rayleigh	累力
Reichardt	雷哈特
Reiff	雷福
Reiss	雷斯
Resal	賴色爾
Reye	聿愛
Reymond	雷芒
Riccati	李加惕
Richellot	李傑樂
Riemann	雷曼
Riquier	呂奎而
Robert	羅伯
Roberval	羅伯渥
Rohn	聿昂
Rosenhain	羅孫亨
Rosenow	羅斯勞
Rossanes	羅森
Rothe	洛武
Rudel	魯德
Ruffini	盧芬尼
Russell	羅素

S

Saccheri	沙嘱里
St. Louis	聖路易
Saint Venant	聖微能
Salmon	沙而曼
Sarrus	薩剌
Saunderson	邵德孫
Sauvage	梭威傑
Scheffer	瑟斐爾
Scheffler	瑟斐勒
Schering	雪林
Scherk	雪克
Schiaparelli	斯恰帕勒利
Schläfli	許拉弗里
Schlegel	薛拉格
Schlesinger	胥勒辛葛
Schlömilch	胥朗美
Schonflies	奧佛里
Schottky	觚德基
Schroder	許羅德
Schröter	薛魯得
Schubert	叔伯特
Schumacher	叔麻赫
Schur	許耳
Schweikart	許威加
Schwartz	蘇華慈
Scott	司各脫
Seidel	賽得
Segrè	舍格累
Serret	薩雷
Servois	塞哇
Simpson	辛普生
H. J. S. Smith	斯密
Snell	史勒爾
Sohncke	桑克
Spottiswoode	斯波替斯武
Stalz	斯托濟
Staudt	史韜
Steiner	斯泰涅
Stieltjes	斯底澤
Stokes	斯托克斯
Story	史托利
Strauch	史曲老
Stroh	斯特老
Stringham	斯屈靈韓
Study	史脫底
Sturm	斯圖謨
Sylvester	西薇士德

T

Tait	忒德
Tannery	譚納禮
Taurinus	陶林納
Taylor	戴勞
Tchébichef	柴比千
Thome	湯姆
Tilly	狄利
Tisserand	狄色南
Townsend	韜森
Transon	荃蓀
Trudi	曲抵
Tschirnhausen	全浩孫
Tucker	塔刻

V

Vallèe	法雷
Vandermonde	樊答芒
Veronese	魏朗尼
Viete	韋特
Vigarie	徵加利
Vincent	芬遷特
Vivanti	微彎迪

W

Wallis	華里司
Waring	華林
Watson	瓦特孫
Weber	魏柏
Weierstrass	外斯屈斯
Weld	魏爾特
Werner	偉爾納
Wessel	威塞爾
Wiener	微為納
Wirtinger	物庭葛
Wolfgang	烏而夫剛
Wolstenholme	渥爾斯丹和
Wren	爾倫
Wronski	瑯司基

Z

Zeller	策勒
Zeuthen	蔡登
Ziegler	齊格納
Zurich	楚黎