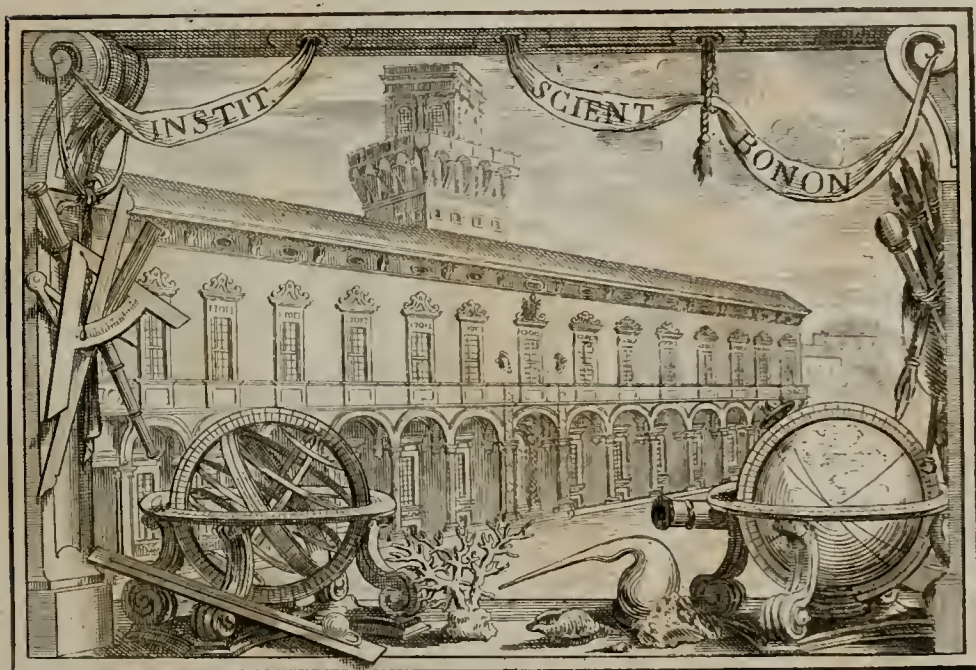


NOVI COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARUM
INSTITUTI BONONIENSIS
TOMUS SEXTUS

S. 1103.B.23

NOVI COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARUM
INSTITUTI BONONIENSIS

TOMUS SEXTUS.



BONONIAE MDCCCLIV

ET TYPOGRAPHAE O EMYGDII AB ULMO

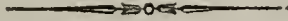
SUPERIORUM PERMISSU.



THE
MUSEUM OF
COMPARATIVE ZOOLOGY



OPUSCULA



FRANCISCI BERTELLI

CONJECTURAE DE ANOMALIA,

*cui ex opticis quibusdam experimentis obnoxia esse
videtur generalis lex refractionis. (1)*

Posteaquam anno superiore, Sodales praestantissimi, disquisitiones quasdam analyticas, experimentis innixas, de flexione laterum Micrometri iudicio vestro subjiciendas existimavi, accidit mihi ut legerem; clarissimo quoque Cacciatario, astronomo Panormitano, in supputationibus suarum observationum solstitialium suspicionem esse obortum erroris proficiscentis a flexione filorum metallicorum Micrometri, quam et non negligendam esse et non una vice recurrentem invenit. Idem quoque sensit egregius Carlinius, qui tamen Micrometri sui fila ex araneis (quibus ad ejusmodi observationes antea usus fuerat) periclitatus existimavit, flexionem magni momenti haud posse in iisdem filis induci pro vario rerum circumstantium influxu, dummodo ea ad sua capita recte tensa serventur: quam sententiam eximius etiam Santinius, datis ad me humanissimis litteris, amplecti visus est. Verum enimvero si tensio filorum laminarumque Micrometri pro crebra ingentique variatione, *temperaturae* saepissime mutatur, oportebit profecto animum ad hasce perturbationes frequenter advertere, eorundemque influxum in observationes supputare, quum neque semper commodum sit, neque interdum omnino liceat lineas micrometricas pro necessitate magis inten-

(1) Franciscus Bertellius hasce recitavit coram Academia in ejus sessione diei 12. Decembris An. 1838.

dere; qua de re egi in sermone illo meo, quem initio memoravi. Sed quidquid demum sit de flexione laterum Micrometri, rebus natura perpensis Carlinius fatetur, cum in suis observationibus, tum in observationibus Cacciatorii, quamdam adhuc ignotam erroris causam delitescere, quam magni referret detegere atque aestimare. (*Effemeridi di Milano* 1836, e 1837. *Appendice*.)

In experimento, quod vobis alibi descripsi, a Caturellio diligentissime ac saepius instituto, duae occurrunt causae perturbationis, qua affectas fuisse observationes, ab ipso per Micrometrum rhomboidale peractas, existimandum est: altera scilicet posita erat inflexione laterum Micrometri, quae ex temporis diuturnitate laxa forte evaserant et remissa, neque ita facile absque periculo immutandi accuratam Micrometri figuram ad pristinam tensionem restitui poterant; alteram a parva parallaxi optica repetendam censi, quam deinde proprio quodam caractere praeditam reperi. Notum Physicis est, si Micrometrum in ipso comuni foco vitri objectivi ac totius systematis optici Telescopii ad amussim locatum non sit (hoc est nisi unum idemque sit planum imaginis a vitro objectivo exhibitae, et planum Micrometri), ita turbatas apparere partes imaginis, quae sunt extra centrum axis tubi telescopici, ac si vel exterius, vel interius sitae essent: ex quo fieri certe nequit, quin error aliquis subrepat in observationibus. Huic vitio duobus modis mederi profecto possis; si videlicet in observationibus rationem habeas variationis ab istiusmodi parallaxe proficiscentis (quod haud aegre assequeris simul ac innotescat systema vitrorum tubi telescopici, et recessio Micrometri a foco), vel si per eos motus, quorum Micrometrum capax est, hocce ad locum suum apte reduces. Jam ex Smithii aliorumque experimentis tenemus quoque, lineas rectas, quae trans vitra lenticularia conspiciuntur et ab axe aliquantum distant, curvas praesertim prope extremas ora apparere et ea parte, qua cavae sunt, ad axem vitrorum vergere. Eo fit, ut recta latera Micrometri videantur curva; sed quum pari modo puncta etiam homologa imaginis, quae in foco, sive in ipso Micrometri plano depinguntur, in eandem speciem curventur atque flectantur, nullus error in observationibus perti-

mescendus est: et revera si lineas illas quantitativis ab ipsis observationibus sumptis construas, rectas quidem lineas habebis. At in Caturellii experimento res aliter cessit: nam constructis per ordinatas rectangulas et ad paria intervalla positionibus aliis post alias observatis in filis obliquis, sumptoque pro axe abscissarum diametro verticali Micrometri, extiterunt lineae curvae juxta modum supradictum, quin ratio haberetur flexionis laterum: ex quo necesse in imagines rerum externarum observatas error aliquis derivabitur. (Tabula I.)

Inter multa Optices experimenta, quae in insignibus Newtonii, Smithii, Boscovichii, et Herschelii operibus describuntur, ea potissimum ad examen revocanda censi, quae a proposito nostro non admodum obluderent, atque in quasdam incidi peculiare conclusiones, theoricisque consequutiones, quae tantam cum supradicto phoenomeno similitudinem praeseferunt, ut nullo pacto negligendae sint. Mihi vero talia perscrutari cupienti hoc pro lege posui, quod, si Micrometri situs cum rerum externarum imagine ad amussim congruat, neque ullus irreperere possit error in observationes propter opticum Instrumenti systema, hujusmodi error (qui etsi parvus tunc etiam quum maximus sit, haud tamen nihili ducendus) vitro objectivo usque tribui debeat. Re quidem vera si in hoc causa insit vitii alicujus, quum ipsa tantummodo afficiat imagines corporum extra positorum, quas in proprio foco exhibet, minime vero afficiat Micrometrum ibi constitutum, aperte patet, deberi a systemate optico veram Micrometri figuram ad oculos transmitti una cum imagine verum externarum, nonnihil tamen inmutata nec prorsus rebus ipsis similima; cujus quippe partes ab axe optico tubi telescopici perimetrum versus magis magisque in se contrahantur.

Jam a Fresnelio, qui juxta systema *undulationum* (uti ajunt phoenomena lucis per tenues lamellas immissae tanta perspicuitate explicavit, animadversum fuit formulas, quae sunt ad diametros anulorum diversis ordinibus coloribusque exactae, non convenire cum mensuris ac rationibus per experimenta consequutis, quoties lucis radii admodum oblique lamellas illas pertranseant. Hujusmodi formulae quum pendeant a variabilitate indicis sive rationis, quam sinus anguli incidentis ha-

bet pro data corporis interpositi qualitate cum sinu anguli refractionis, Fresnelius ab memoratum discrimen ita suum induxit animum, ut existimaret generalem refractionis legem cui-dam anomaliae obnoxiam esse; quod etiam illustris Jo. Herscheli- us in suo Tractatu de luce, nuper a Queteleto in gallicum sermonem verso supplementisque illustrato affirmat: quid- quid enim hac de re experientia constat tantopere (inquit il- le) a theoria undantis lucis discrepat; ut sane de veritate hu- jusce doctrinae dubitandum esset, nisi jure suspicari possemus in adductis exemplis valorem indicis refractionis immutari. Ani- madvertendum quoque est hujusmodi anomaliam nullum ob- tinere locum in altero phoenomenorum similium genere, quae adhibitis crassioribus laminis materie diversae per lucidae pro- ducuntur.

Hic vero peculiaria quaedam attingere non praetermittam, quae multum proposito meo conferre arbitror, ut scilicet re- bus ad examen revocatis aliquam ingrediamur viam, per quam nobis quodammodo innotescat de singulari illa anomalia, quae juxta experimentum Caturellii in observationibus micrometri- cis contingit, quaeque magis proprie, ut mox patebit, *paral- laxis refractionis* appellanda esse videtur. In apparatus, qui ad capienda experimenta lucis per tenues lamellas immissae ad- hibentur, superficies adversae, quibus laminae ipsae continen- tur, non sunt inter se parallelae, quemadmodum evenire so- let in laminis crassioribus, sed a puncto, quo contingunt inter se, magis magisque inclinantur. Sic in saponis bulla (haec e- nim in primo genere phoenomenorum exemplo esse solet) a ver- tice, qui centrum est subsequentium zonarum iricolorium, ad inferiores anplioresque zonas descendendo crassities bul- lae augetur, hoc est duae superficies, quibus tenuis perluci- dusque bullae cortex continetur, in angulum concurrunt; ex quo patet anomaliam legis generalis refractionis, de qua aje- bam, tunc tantum accidere, quum de interjectis corporibus agatur pellucidis ac tenuioribus, et quarum superficies inter se inclinantur.

Nunc quaedam commemorandae sunt ex probatissimis lu- cis diffractae proprietatibus. Exploratum est lucem quae extre- mas corporum oras praeterlabitur, iter suum ab hasce defle-

ctere, illudque persequi per lineas hyperbolicas; ac sese in varios fimbriarum ordines disponere, quae dum lux alba est alterius emicant, irisque colores trahunt; at si lux sit homogenea, unicolores apparent atque obscurae. Istiusmodi phaenomenorum series constantissima recurrit, quaecumque sit figura superficierum, in quibus corpora desinunt, haec enim flexio, uti Herscheliuss affirmat, angulos ut ut parvos (sive *prominentes* ii sint et acuti, sive *retroredientes*) perimetri corporum in quavis ipsorum sectione prosequitur, prioresque fimbriae ita eisdem adhaerent, ut ab illis erumpere videantur, quamquam nullus hic censi debeat densitatis nullus naturae corporum, vis refringentis, aut attractionum repulsionumque *electricarum* influxus, a quibus lux caeteroquin affici solet: atque ut idem brevius cum Pouillette dicam = omnis ratio phaenomenorum diffractionis non in natura materiei, sed in ejus figura posita est =

Hisce positis, si perpendamus insuper, superficies corporum quantumvis perpolitae, cujusmodi sunt vitra atque crystallae telescopicae, esse tamen asperrimas, corpusculisque constare valde prominentibus, facta praesertim comparatione cum summa tenuitate lucis aetherisque, a cujus *undulationibus* motus vibratorii lucis propagantur, quibus profecto fatebitur, lucem ipsam, dum corpora lambit (utar enim perspicuitatis gratia verbis iisdem atque ideis, quae theoriae, quam vocant, *emanationum* propriae sunt), tum quum a corporibus reflectitur, tum quum per eadem permeat atque inde rursum effunditur, cuidam vi mechanicae obnoxiam esse, quae, sepositis causis reflexionis et refractionis lucis, prorsus a diffractione repetenda est. Atque ad aestimationem aliquam animo concipiendam de mirifica exiguitate molecularum lucis cum moleculis materiei ponderabilis comparatarum, supputavit Herscheliuss, ex notione velocitatis qua lux per aetherem fertur, effectum quam unicum luci granum praestitutum foret, si haec pondere esset donata. Vis ejus motrix aequaret vim globi librarum centumquingenta a bellico tormento emissi ac mille pedum spatium pro quovis minuto secundo perficientis. Quanta igitur dicenda est lucis tenuitas; si tot myriades molecularum, uno impetu impingentes in vitra, ad hoc opportune disposita in

apparatibus delicatissimis, ne minimum quidem motum excitare potuerunt!

Verum atomos integrantes corporum ponderabilium longe majores censendas esse molecularis lucis, conjicitur cum ex iis, quae supra attulimus, tum ex sententia recentiorum Chaemicorum, qui arbitrantur atomos elementares, seu ut ita dicunt *constituentes*, parvo numero (quatuor scilicet aut non multo plures) simul jungi ad atomos compositas efformandas; secus enim per Microscopium conspici possent. Quae sententia videtur quodammodo illam Newtonii conjectationem confirmare, qua existimavit nos forte posse corporum ponderabilium integrantes particulas oculis percipere, cum demum ea nobis successerit constructio Microscopii, quod res ad quatuor mille vires augetur.

Hac recepta hypotesi, diffractionem scilicet lucis non tantum contingere quum lux ipsa superficies corporum ad lineam lambit, verum etiam quum illa, jam reflexa et refracta, minutissimas particulas prominentes eorum superficiei in ipsa incidentia, reflexione, et refractione praeterradit, duo habebuntur genera diffractionis, quorum prius *diffractionis vulgaris* est, alterum perspicuitatis gratia *diffractionem atomicam* appellanda duximus. Arbitramur autem ab hoc secundo diffractionis genere, nondum a Physicis perspecto, anomaliam illam esse repetendam, qua legem generalis refractionis in tenuibus lamellis perlucidis, quarum superficies non sunt parallelae et quas radii valde obliqui transgrediuntur, perturbatam cernimus. Hac in hypotesi juxta systema *undulationum* consequens esset; 1.° reflexionem lucis in superficiei interiori *mediorum* per diffractionem atomicam vix perturbari, contra vero valde perturbari debere in superficiei exteriori; 2.° in refractione negligi posse effectum diffractionis atomicae in prima superficiei refringenti *medii*, quod lux transgreditur, at in secunda superficiei, nisi magno intervallo sit a prima sejuncta, effectum diffractionis atomicae negligi non posse; 3.° quam diffractionis major sit pro brevioribus radiis, qui inter duas superficies vitrorum intercipiuntur, et versa vice, refractionem ab hac ipsa diffractione per modum variabilem immutari. Quae enuntiata cum ex allatis experimentis tum ex sequentibus animadversionibus facile demonstrari possunt.

Plerisque Joungii, Fresnelii, et Fraunhöferii experimentis compertum est, si punctum lucens solummodo e situ suo recedat ita ut plus minusve a corpore diffringenti removeatur aut eidem admoveatur quin tamen positio plani, in quod lux impingens fimbrias efflingit, aut positio corporis opaci varietur, exploratum est (inquam) fimbrias, quarum quaeque in illo spatio per suos ramos hyperbolicos dispositae sunt, puncto lucenti remoto contrahi, admoto verum magnopere dilatari. Quae a sectatoribus Newtoniani systematis *emanationi* aegre possunt enodari, quum phoenomenon hocce per theoriam virium repellentium perpendi omnino nequeat, at contra in doctrina *undulationum* ejusdem ratio perspicua plane sit atque evidens. Etenim juxta theoriam hanc punctum, in quod lucis radius incidit, punctumque a quo emergit, peculiariora contra sunt tremoris cujusdam aut vibrationis, a quibus in aethere pro vario *successivorum mediorum* elaterio totidem series pulsationum seu undarum concentricarum originem ducunt. Ab *interferentiis* (ut ajunt) variorum, quae exoriuntur, undarum systematum, prout positio naturaque fontium lucis atque *mediorum* ferunt, sicuti notum est, ortum trahunt phoenomena omnia, quae ad reflexionem ac refractionem attinent. Ex situ insuper et forma impedimentorum, seu ex varia ratione, qua undationes lucis an opacis corporibus interrumpuntur et deflectuntur, nec non a singularibus, quae inde consequuntur, *interferentiis* caetera omnia extant phoenomena, quae supra attigimus: quod sane rerum mox dicendarum perspicuitati consultum mihi praetermittendum non erat.

Ac primum quod ad reflexionem, quum centra vibrationis, in quibus lux insidet, valde remota usque sint inter se, si cum parvis intercapedinibus conferantur, per quas minutissimae asperitates superficiei materialis corporum sejunguntur a vera superficiei reflexionis, quae externum aetherem an aethere interno dirimit, effectus diffractionis atomicae in luce incidente crit juxta allata experimenta omnino exiguus ac pro nullo prope aestimandus: contra diffractionis influxus alicujus momenti esse debet in radios reflexos; tunc enim centra vibrationis, ut diximus, sunt ipsa *incidentiae* puncta, atque ora extrema particularum, quibus pars exterior superficiei *medio-*

rum constat, adeo proxima quum sit centris illis, particulae hujusmodi ipsa sunt corpora, quae lucem diffringunt, dum illas lux post incidentiam abradit. (Tab. I. fig. 1. (1)) Quamvis superficies, a quibus lux reflectitur, laevigatione et politura pro exquisitiori arte elaboratae ac perfectae sint, earum tamen scabrities, uti saepius animadvertit Herschellius, ferme ingentis molis censi debent cum aetheris particulis comparatae: quin imo experimenta confirmant regularem lucis reflexionem non solum a *medii* natura, verum etiam a majore politura superficiei pendere; et quo majori obliquitate lux in corpus incidit, eo minorem oportere laevigationem ad accuratam reflexionem obtinendam. Praeterea quemadmodum *integra* reflexio, quae contingit in interiori parte superficiei densioris *medii* dum lux per lineam fertur angulo-limite obliquiorem, quamdam demonstrat continuitatem *medii* ipsius usque ad punctum *incidentiae*; ita reflexio, externae parti superficiei jugiter referenda, demonstrat ibi *medium* non continuari, ideoque in basi ipsa scabrarum molecularum corporum (sicuti animadversum est) veram inveniri superficiem, in qua eorum aether interior ab aethere circumfluente disjungitur. Quod egregie quadrat cum doctrina *undulationum*, per quam apte explicari possunt peculiaris diffractionis vulgaris phaenomena: verum aegra id praestabit systema Newtonianum, quo docemur vires repellentes attrahentesque *mediorum* ultra asperitates superficierum involventium pertingere. Quibus rebus omnibus, quae ostendunt diffractionem atomicam in reflexione *peculiari*, sive exteriori superficiei *mediorum* fieri, addendus est exortus inchoantium quarundam fimbriarum versicolorium, quae inter reflexionem *integram* et *peculiarem* Gulielmo Herschelio in quodam suo experimento occurrerunt: hujusmodi phaenomenon nemo adhuc explicavit, atque a diffractione moleculari, ut mihi videtur, haud temere repeti potest.

Quod vero ad lucem refractam attinet, refractione prima, quae ad anteriorem superficiem *mediorum* contingit, ex ar-

(1) Cum in hac, tum in sequentibus Figuris atomi ad superficiem *mediorum* exhibent formam aliquam polyhedram, suntque juxta Mitscherlichium *isomorphae*.

gumentis supra allatis de radiis *incidentiae* in reflexione, censenda est vix a diffractione atomica posse perturbari. Verum animadvertendum est, in superficie dirimenti anteriore puncta *incidentiae* totidem efformare nova vibrationis centra, a quibus sibi respondentes undationum ordines effluunt, quarum celeritas quoque a celeritate aetheris in corpore pellucido diffusi pendet; undae autem ipsae simul ac lambere properarunt ambitus extremos atomorum, secundam superficiem corporis refringentis praefinientium, vel in aerem, vel in aliud *medium*, vel per inane disfluunt. Jam vero, quum intervalla finita et variabilia, quae inter duas illas superficies, hoc est inter centra vibrationis iisdemque respondentes diffractiones intercedunt, exigua plerumque sint in vitris telescopicis; sequitur profecto haud posse negligi effectum diffractionis atomicae, quae lucem proprio quodam modo ac plus minusve detorquens aliquam mutationem in effectu refractionis proprio inducat necesse est. (Tab. I. fig. 2. et Tab. II.)

Si radiis, diversis punctis sub aequali angulo *incidentiae*, impingant in anteriorem superficiem corporis sphaerici pellucidi, ac posterior ejus superficies anticae superficiei concentrica sit, ipsi diffractionem patiuntur constantem dum lux emergit in secunda refractione. Constans quoque erit diffraçtio pro luce parallela sive pro ea, quae a punctis lucentibus in summa distantia positis emititur, corpusque figurae planae permeat aut laminam. At si variet angulus *incidentiae*, variabit quoque diffraçtio; quod tamen nondum experientia constat. Inde vero perturbatio variabilis in luce refractionis *mediorum* fieri deberet, quae forte oculorum aciem quamvis vitris adjutam fugit, quaeque generaliter pro *additiva* habenda foret; nam diffraçtio atomica, quisquis demum sit angulus *incidentiae*, continget semper ratione opposita illi, quae sit refractio emersionis. (Tab. I. fig. 2.)

Num restat ut *medium* pellucidum, superficies sibi ad invicem inclinatas habens, ad examen revocemus; quod etiam propius ad tractationem hanc nostram accedit. Etiam si ponatur angulos *incidentiae* esse aequales, parallelos scilicet esse radios lucis, semper tamen variat distantia, quae centra vibrationis in prima superficie refringenti a punctis emersionis

ad superficiem *medii* posteriorem disjungit: quamobrem diffractio atomica, in iisdem prodiens, ab uno ad aliud punctum differre debet; et sane experimenta ipsa, de quibus superius diximus, ostendunt lineas hyperbolicas fimbriarum propter breviora tramitis interioris radiorum exterius magis dilatari. Aliter se res habet si vicem vertas. Fieri ergo nequit, quin diffractio haec refractionem emersionis aliquo modo, eoque vario nec constanti perturbet, sed ratione semper opposita, eandem scilicet plus minusve imminuens, quo circa secunda refractione in *mediis*, quae superficiebus inter se haud aequaliter dissitis continentur, variabilis reapse invenietur. (Tab. II.)

Opportuna quidem modo venit consideratio vitrorum, quae opticis instrumentis aptari solent. Commune vitrum lenticulare ut omnes norunt, corpus est pellucidum, quod utrinque sphaericis superficiebus continetur. Liquet autem ex supradictis generaliter refractionem, tum cum radii e vitro crumpunt, plus minusve affici a diffractione atomica. In parte quidem centrali vitrorum, in illa scilicet regione circa centrum aequae pertingente usque eo, donec binae eorum superficies, anterior et posterior, perinde ac si parrallelae essent censi possunt, diffractio atomica lucis parrallelae, aut ejusmodi quae ad parrallelam propius accedat, uniformis et vix nulla erit aestimanda. At longe aliter est in caeteris partibus campi lenticularis usque ad perimetrum; in quibus mutua earum inclinatio repente augetur, ac si de vitris convexis agatur, distantia duarum superficieum sive vitrorum crassities juxta vias radiorum lucis successivas magis magisque decrescit, ita ut ibi refractione haud exiguam perturbationem in posteriori superficie ab atomica diffractione perpeti debeat, etiamsi materia pellucida, ex qua vitra sunt efficta, homogineam prorsus omni ex parte se praebet. Hoc idem, ut patet, sed per rationem oppositam accidet in vitris cavis, quorum maxima crassities cum ad perimetrum sit, deinceps ad ipsum prope centrum axemque magis magisque extenuatur.

Stabit ergo generatim influxus commemoratae diffractionis atomicae in secundo vitrorum refractione, hoc est in emersione lucis. Verum tum in exiguis vitris, quibus ocularia Telescopiorum systemata constare solent, tum in vitris Microscopio-

piorum, zona eorum campi exterior ac superius indicata, in qua major fieri deberet diffractio, ita arcta est atque angusta, ut vix in iisdem refractionis perturbatio conspici possit aliqua ab atomica diffractioe manans. Ast in tubis astronomicis, quorum vitris objectivis haud parvam amplitudinem tribui, magnoque curvaturae radios dari mos est, eorum zona, quae vario effectui diffractionis atomicae subest, pro regione ad centrum *campi visionis* (ut ajunt) multo latius patet, quam in vitris ocularibus et microscopicis: quamobrem effectus diffractionis oculos ipso vitro adjutos non fugit, ideoque imagines corporum externorum quae ab istiusmodi vitris objectivis in proprio foco redduntur, haud parum abnormes evadent, sed non aequali modo, eo scilicet minus quo magis ab extrema campi ora centrum versus tendimus.

Per quoddam vitrum objectivum ejusmodi spectetur materialis linea recta indefinita, atque ita spectetur, ut oculo in foco vitri posito linea illa excentrica appareat ac veluti chorda in *campo visionis* non admodum ab axe remota. A medio lineae intendatur utrinque secundum lineam ipsam axis opticus oculi: dum lux effluit e superficie vitri posteriore, refractione pro augescenti diffractioe atomica sensim imminuetur, radiique lucis, qui a dicto linea recta hinc et illinc e medio proficiscuntur, per vitrum minus minusque convergentes ad oculos transmittentur; quocirca puncto lineae rectae ita in ejus imagine apparebunt ut eorum distantiae angulares cum centro collatae minores sint distantis variis, idest linea illa recta, si eandem ex ipsis quantitibus, quas in observatione perceperis, construere velis, extabit linea curva quae cavum suum ad axem verget, magisque flectetur ad oras axtremas, ubi perimetro vitri lenticularis accedit. (Tab. II.)

Meam porro sententiam confirmat observatio Robinsonii in adnotatione quadam ad descriptionem *Circulis muralis* turris speculatoriae Armachanae, Vol. IX. Actorum Regiae Societatis astronomicae Londinensis = *Oritur mihi* (inquit) *su-*
« spicio, dum astrum quoddam per aream circularem spe-
« ctatur, posse errores aliquos gigni ex deformatione ima-
« ginis, cujus caussa esse potest sive diffractio (quam ta-
« men Auctor juxta vulgarem irradiationis notionem sumit),

« sive quaedam excentrica aberratio. In punctum meridia-
 « nae directionis, extra centrum campi vitri objectivi ad
 « transitus observandos, oculum intendenti, illudque in or-
 « bem agenti occurrit mihi quaedam perturbatio, quam cen-
 « seo, cum vitrum adamussim ad centrum sit constitutum,
 « a secunda caussa (hoc est ab ea quam excentricam aber-
 « rationem vocat) repetendam esse; prioris enim caussae (id-
 « est irradiationis) proprium tantummodo est discrimina quae-
 « dam in diurnis nocturnisque observationibus inducere =
 Atque hic profecto Robinsonius aberrationem excentricam
 sphericitatis non respicit, cujus effectus, praeterquam quod val-
 de tenuis est, non nisi imagines solet perturbare.

Peculiare autem factum supra memoratum necessaria con-
 secutio est allatae hypothesis de atomica diffractione, simul-
 que probabilem (ut mihi videtur) praebet explicationem
 singularis phaenomeni, quod initio attingi, anomaliae scilicet,
 quae in refractione radiorum obliquorum pertenuis lamellas
 permeantium contingit, ac proposito nostro praecipue favet;
 ostendit enim caussam, unde in Caturelliano experimento re-
 petenda sit pars illa flexionis filorum micrometricorum, quam
 ad innuendam scilicet perturbationem, cui rerum imagines ex
 abnormi refractione subjiciuntur, parallaxem refractionis no-
 minavi. Experimenta quidem ipsa fidem faciunt, variationem
 hancee, ad pauca minuta secunda gradus pertingentem, aegre
 posse, etiamsi tubi adhibeantur summa vi augescenti praediti,
 oculis percipi, atque ad eam recte aestimandam necessum es-
 se rem omnem ad accuratissimas mensuras exigere. Dixi au-
 tem satis mihi probari allatam explicationem, quippe quae tum
 factis inmititur haud dubiis, tum pulchre cum doctrina conve-
 nit aethericarum *undulationum*, quae nunc apud viros doctos
 maxime obtinet. Nihilominus tamen minus, quam facta ejusmodi
 adeo multa non sint, sententiam meam tantummodo proferre
 ausim quasi conjecturam, quae tamen non mediocri est proba-
 bilitate suffulta. Utcumque sit, juvabit quidem viam pro vi-
 rili parte aperuisse ad scientiam Optices utilibus locupletan-
 dam investigationibus. Ex re profecto esset per micrometri-
 cum Fraunhoferianum perfectissimum apparatus experimento
 inquirere, an revera in quolibet corpore opaco, et qualibet

illud sit vi absorbendi lucem praeditum, aliquis se prodat effectus diffractionis atomicae pro radiis reflexis, nullus vero pro radiis incidentibus, hosce scilicet urgendo per vestigia ac semitas ipsas radorum reflexorum, et versa vice; item an in parte interiori superficiei corporum pellucidorum sub obliquitate majori quam *angulus-limes*, nulla prorsus diffractione patefiat. Praestabit itidem explorare, quomodo refractione in corporibus pellucidis pro varietate distantia temperetur, idque per intervalla minima ac maxima puncti luminosi, sive ejus superficiei, qua *medium* a subsequenti superficiei refringenti disjungitur; quin etiam exploranda esset via inversa, quam lux sequitur dum ex *mediis* in vacuum transit: quae omnia ideo essent perquirenda, ut proquovis *medio* ac pro luce tum alba tum homogenea accurate definiri possit quantitas indicis merae refractionis, omni nempe diffractionis atomicae influxu expertis, proindeque quantitas diffractionis pro casuum diversitates innotescat.

Equidem hisce peractis experimentis fas erit postmodum de correctione formularum opticarum ad refractionem pertinentium cogitare, effectum atomicae diffractionem in iisdem supputando. Sed jam nunc animo prospicere licet, quam magnam partem hujusmodi investigationes in theoriam aberrationum quae a lenticularibus vitris originem ducunt, habiturae sint: nec temere forsitan spes est viam inveniri posse, qua in vitris saltem objectivis tuborum astronomicorum statuatur modus curvaturae peridoneus zonae exteriori superficierum eadam vitra definientium, ut ejusmodi instrumenta potiori demum perfectione praestent.

Sed jam satis sit ne diutius, Sodales praeclarissimi, patientia vestra abuti videar. Liceat mihi tantummodo ut in fine orationis meae eo redeam, unde exorsus sum; meam scilicet qualemcumque sententiam vobis aperiendo de discrepantia quod ad obliquitatem circuli ecliptici juxta clarissimorum Cacciatorii et Carlinii observationes, ad aestivum solstitium et hyemale per actas, atque ad calculum opportune revocatas: quam quidem rem ne missam facerem operae pretium duxi ob quaedam rei ipsius adjuncta analogo argumento huic, quod mihi hodie coram vobis disserendum proposui.

Obliquitas circuli ecliptici ex observationibus solstitii aestivi tempore institutis inventa est proxime accedere ad formulas; unde sequitur errorem aliquem subesse in observationibus, quae hiemali tempore captae fuerunt: qui tamen error perperam a Carlinio tribuitur sive immutationi partium instrumentorum, quae in gradus distinctae sunt, sive vi refringenti aeris, cui diebus solstitium propioribus aer ipse pro varia *temperatura* obnoxius esse solet. Atqui si discrimina *temperaturae* inter eos limites, quibus per easdem tempestates solstitiali tempore illa continentur, vix officiant supputationibus observationum, quae alio quovis tempore instituuntur, suspicari tamen licet fieri id posse, si maxima perpendatur differentia, quae inter *temperaturas* duorum solstitiorum intercedit. Hoc mihi dubium obortum est quum animo revocarem influxum caloris inducem refractionis corporum pellucidorum. Plurima Fresnelii, sed praesertim recentissima Mitscherlichii et Barlowii experimenta id prorsus evincunt; ac propterea Herschelius concludere non dubitavit « *tantam inter characteres opticos et chrystallographicos interesse cognationem, ut nulla cuilibet eorum possit immutatio contingere, quin alii quoque immutentur* » Barlowius autem, experimentis per vitra lenticularia ex liquoribus conflata postremum institutis, reperit in *sulphuro carbonis* sub *temperaturis* 31.°, 57.°, 84.° Thermometri Fahrenheitiani hasce inter se valde discrepantes refractiones 0,642; 0,634; 0,625. (Quetelet, Suppl. cit.). Quapropter facili negotio assentimur, refractionem ejusdem vitri objectivi sub hiemale solstitium ut plurimum majorem esse quam sub aestivum, proindeque focum in primo casu minus quam in secundo distare. Jam vero si reticulum Micrometri adamussim vel quam proxime in eo loco collocatum sit, quo focus vitri objectivi summa aestate fervente pertingit, nullum dubium est, quin hiemali tempore, urgente frigore, idem reticulum propter imminutam foci distantiam citra eundem focum ac vitro oculari propius subsistat; ex quo apertum est opticam quandam et veram parallaxin gigni oportere, cui mea quidem sententia tribuenda foret memorata circuli ecliptici obliquitas obnormis, quam supradictae hiemales observationes suadere videntur. Enimvero si magnam foci distantiam in vitris objectivis atten-

damus, facile patebit quomodo vel minima aberratio lucis ab iisdem vitris refractae necessario focum ad certum intervallum transferre debeat, quod tum pro ingenti vi optica tuborum astronomicorum, qui nunc obtinent, tum pro summa diligentia, qua modo eorum partes gradibus designatae praestant, profecto haud exiguum censendum est. Fieri ergo nequit, quin incerta quaedam oscillatio in projectionibus filorum Micrometri. super planum verum imagines excipiens, interveniat, quae nil minus quam diffractio atomica fons erit errorum, in accuratioribus praesertim observationibus nullo pacto negligendorum.

EXPLICATIO TABULARUM

TABULA I.

Fig. 1.

- a a.* Corpus opacum.
- b.* Linea ad perpendicularum.
- c.* Fasciculus radiorum incidentium.
- d.* Fasciculus radiorum reflexorum.
- e.* Fasciculus radiorum diffractorum.

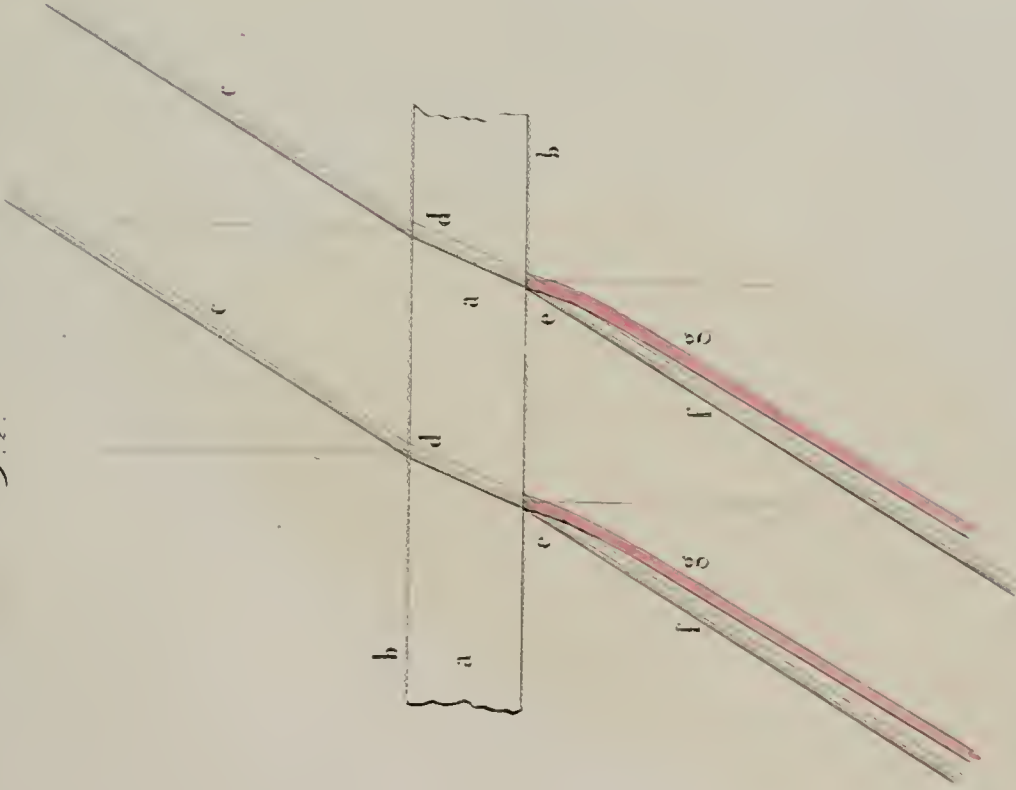
Fig. 2.

- a a.* Corpus pellucidum.
- b b.* Superficies planae, atque inter se parallelae.
- c c.* Fasciculi radiorum incidentium.
- d d.* Prima refractio.
- e e.* Secunda refractio.
- f f.* Fasciculi radiorum refractorum.
- g g.* Fasciculi radiorum diffractorum.

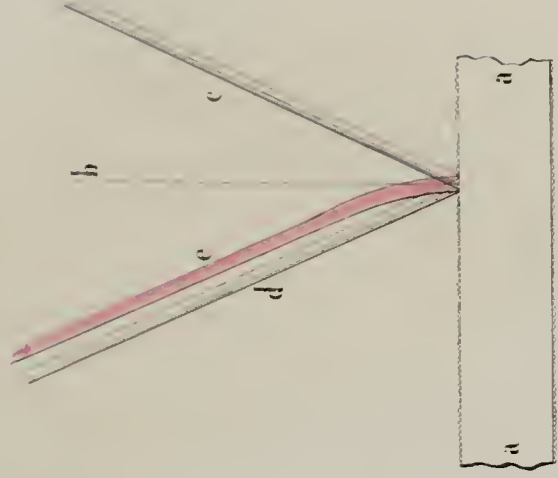
TAB. II.

- a . . . a* Lux ad axem parallela.
- b b.* Axis vitri lenticularis.
- c c.* Superficies refringens anterior.
- d d.* Superficies refringens posterior.
- e e.* Amplitudo vitri lenticularis.
- f f.* Crassities vitri lenticularis.
- g.* Focus vitri lenticularis.
- h . . . h.* Fasciculi radiorum refractorum.
- i . . . i.* Fasciculi radiorum diffractorum.

F. 2.

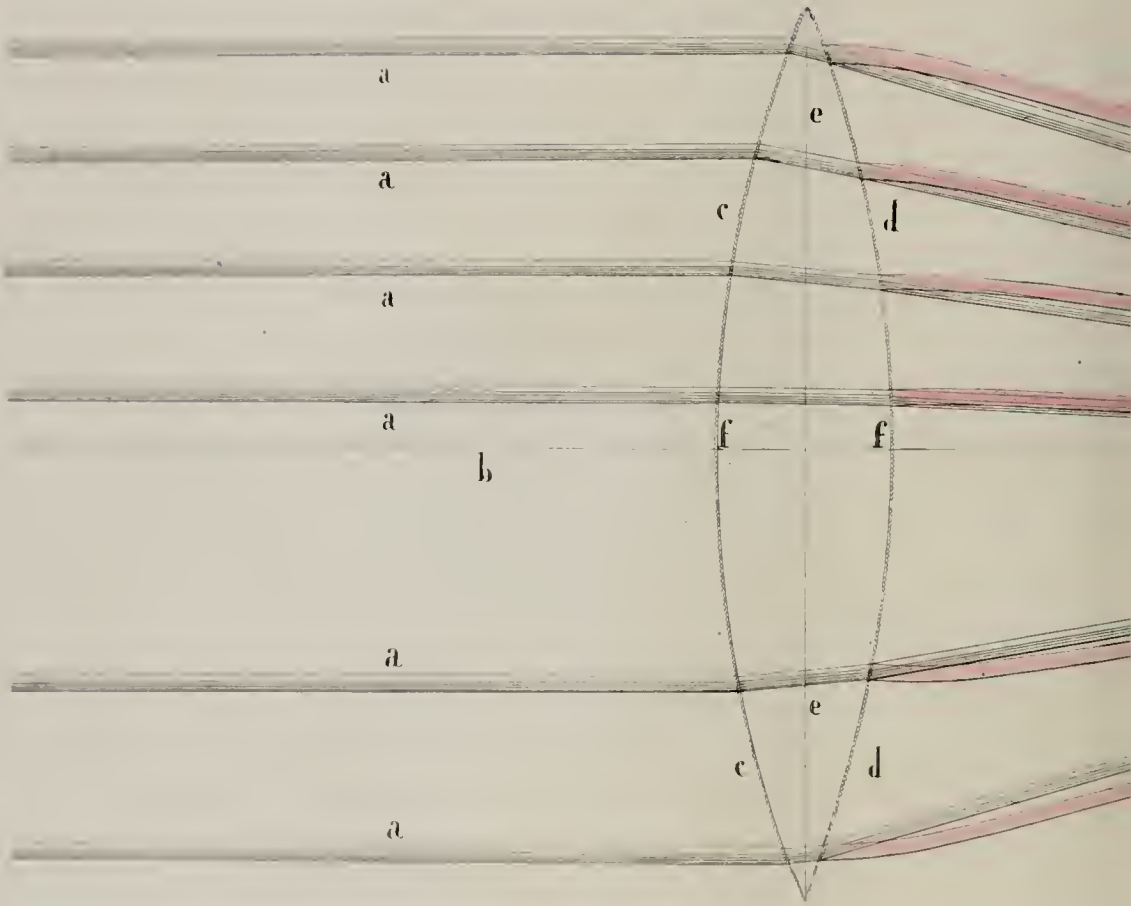


F. 1.



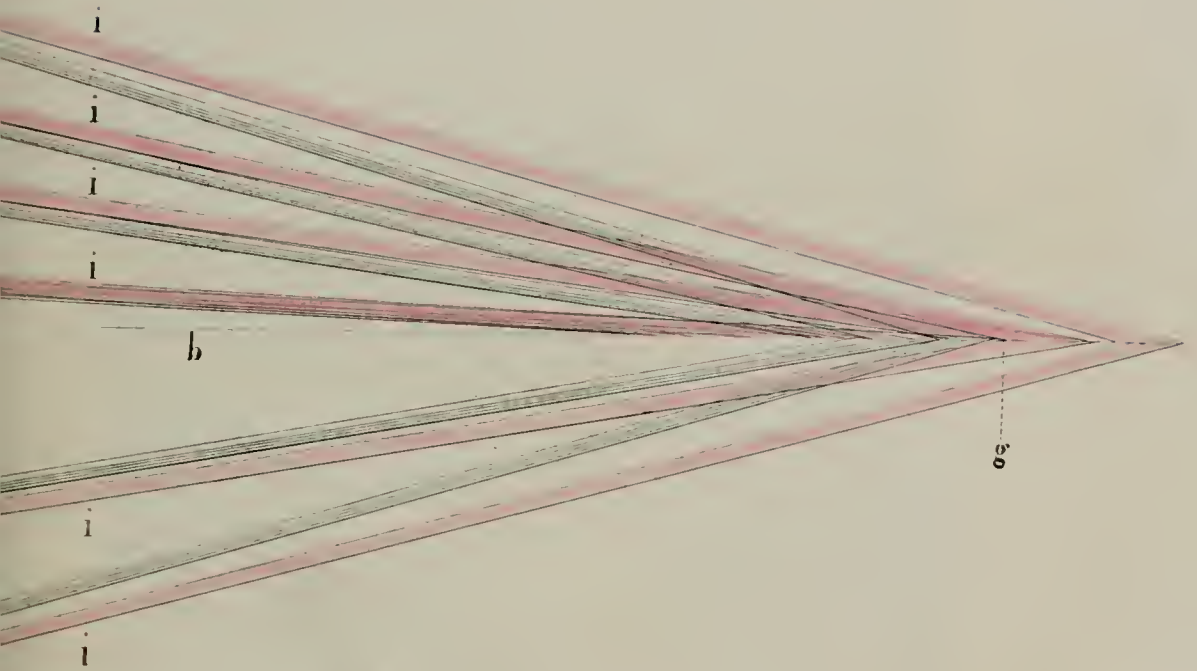
Lat. Bellini

C. Sp... ..



G. Botani in lap. sculp.

Tab:II.



L. u. Petrus

DOMINICI GUALANDII

SPECIMEN STATISTICAE MEDICAE

MANICOMII DIVAE URSULAE BONONIAE (1)

Jam inde ab anno 1819, cum scilicet huic Nosocomio Sanctae Ursulae Medicus ordinarius praefectus fui, curaque dementium, morborumque sordido-cutaneorum mihi tradita est, certam quamdam medendi normam in iis commentariis sive ephemeridibus mihi propositam volui, in quibus, curandi rationes, earumque exitus describuntur, illud probe sciens nullam mihi aliam paratiorum adesse viam, qua artem adeo abstrusam ac perdifficilem exercerem. Sed valde miratus sum quum de rebus hujusmodi medicos, qui mihi eo in officio praecesserunt, doctissimos licet, nihil in Archivium ejusdem Nosocomii retulisse comperi; in tabellis vero, quas reperire potui, si diem excipias, quo aegrotus quisque ingressus est, et remedia ipsis aegrotis adhibita, ne verbum quidem de morborum forma, diversisque, ut ajunt phasibus atque exitu; easdemque demum ita perturbatas, imperfectasque, ut nullo modo singulari licet usus diligentia, in ordinem redigere, et quidquam fructus ex eis colligere valuerim. Quapropter hujusmodi vitia graviter dolens, quae tutiores artis regulas auferebant, illico statui mihi in posterum consulere. *Album* nempe instituens, quod primo intuitu non solum ingressum, sexum, aetatem, artem, patriam aegrotantis, morbi formam, causas, curationem, exitum patefaceret, sed medicamentorum etiam qualitatem, omniaque notatu digna in ipso morborum processu sub oculos poneret, et perfecta ne, an imperfecta sanatio, sive mors consecuta sit, una cum pathologicis mutationibus in cadaverum sectione deprehensis. Tali ex methodo quinto quo-

(1) Academiae trad. die 14. Maii 1840.

que anno *Ratio* quaedam *medendi*, ingensque numerus notationum anatomico-pathologicarum exurgere debebat, qui lucem quoad ejus fieri posset maximam medico afferret, ut et prognostica efformaret, et curam hujusmodi infirmitatum satis valido innixus fundamento institueret. Sed ut fortuito multis, vel optimo instructis animo persaepe accidit, ut susceptae res ad finem usque non pertingat, sive quod gravia intercesserint impedimenta, sive quod aliis curis distento tempus defuerit, sive demum quod ille, cui tale munus fuerat demandatum, ignorantia aut ignavia omnia miscet, et perturbat, id mihi fateor omnino contigisse. Nam longo viginti annorum spatio nullo modo praestitutas observationes scripto mandare potui, nec ille, qui meo impulsu id oneris suscepit, ea usus est diligentia, ut multa non praetermiserit, quorum defectui nullo modo prospici potest. Qua de re in hoc saltem firmus, ut pauca quae adnotaverim nulla cum utilitate perirent, subsicivis horis, utpote mihi et artis munia, et curae domesticae siverunt, meam operam contuli et praecipua facta pro viribus in ordinem dirigenda, ut vobis possem *Statisticae Medicae* specimen exhibere si non omni ex parte perfectum, ejus tamen formae, quam ab initio animo conceperam; quod idem in posterum etiam, ni mea me fallit opinio, praestaturum confido.

Nemo tam tenuis ingenii est, qui facile non intelligat, quantum publicae conferat utilitati ut locus quilibet communi rei publicae bono procurando destinatus exhibere in ordinem possit quemdam veluti prospectum rerum omnium majoris ponderis et momenti, quae in ipso fiunt, quaeque summa diligentia, et ad amussim, ut ajunt, exprimi et exarari possunt. Et re quidem vera quicumque ad aliquem ex hisce locis, vel ut se se erudiat, vel ut ipsius quoquo modo necessitatibus consulat, accedit, jus certissimum habet cognoscendi quomodo res sese habeat, numerum et classes earumdem rerum tam certarum quam mutabilium, et quoad fieri potest qualitatem, locum, tempus, et caetera hujusmodi; quae si lateant, nec novas acquirere cognitiones, nec errores, si qui sunt, detegere, nec denique iis, quae jam didicit, utetur. Quam veritatem licet remotis etiam temporibus norit omnes, ut patet ex generalibus iis loquendi modis, nempe status coeli, terrae, morborum, agri-

culturæ, industriæ, commerciï, scientiarum, morum, militiarum etc. numquam tamen diligentius eam perscrutati sunt homines, neque rectius de eadem ratiocinati, quam nostris hisce temporibus, et præ omnibus, celeberrimi Gioja, Say, Dupin, et Romagnosi, qui attentissima consideratione plurimisque elucubrationibus, hujusmodi res dissitas, ut ita dicam, et separatas in unum veluti corpus collegerunt, doctrinamque certam efformarunt; ex quo factum est, ut ipsos hodierna scientia, cujus tam late fama diffunditur, *Civilis* nempe vel *Magistralis Statistica* habeat auctores. Quod si opus est, ut ii potissimum, qui gradum aliquem in societate obtinent, huic scientiæ dent operam, eamque totis viribus Reges et rerum publicarum moderatores foveant, quidquid in eorum ditionibus accidit sedulo perquirentes, ut iis necessitatibus ac vitiis possit consulere, quibus aut populi mores et salus, aut eorum labefactari potentia queat; numquam tamen eadem scientia validius confirmatur, ac majorem præsefert utilitatem, quam cum, ut vulgo dicitur, ipsius elementa et principia attente considerantur, rectæque ex ipsis illationes deducuntur, quibus omnibus fundamentum quodammodo substernunt Statisticæ peculiæ, sive, ut magis Romagnosio placet, Statisticæ preparatæ, aut, quod idem est, singulorum annorum perspectus.

Quilibet igitur locus commodis populi procurandis datus, qui quotannis, aut saltem in singula quinquennia hujusmodi accuratum non exhibet prospectum earum rerum omnium, quæ in eo usuveniunt, præterquam quod artis peritum, qui ibidem sese exercet, omnibus cognitionibus defraudat, quas inde posset adipisci, et contentum esse jubet iis tantum, quas suapte experientia et observatione longo quidem et difficili studio comparavit, impedit præterea quominus magistratus Statisticas instituant generales vitia scilicet et errores deprehendant, qui ibidem latitant, atque ipsis pro opportunitate occurrant. Quamobrem ut Statisticæ peculiæ in illum colliment scopum, ad quem instituuntur, necesse est observationes, quibus tales Statisticæ veluti constant, maxima diligentia, rectoque judicio ex præcipuis factis desumere, quæ quotidie in uno-quoque ex hujusmodi locis accidunt, ut lucis investigantibus afferant, qui illico et distincte cuncta dignoscant, et tutissime artes, in quibus

versantur, exerceant. Ideo ea ratione effingendae sunt, ut non inordinatam singularium notitiarum, et nullam inter se relationem habentium congeriem praebent, sed notitias connexas, et colligatas, scopum omnino respicientes, ac optimo in lumine collocatas, ut primo veluti intuitu, et quomodo sint res, et quatenam ex iis consequi possint clarissime percipiatur. Ageret quidem animo inconsiderato ille, qui Statisticas speciales conficere arbitraretur, Elenchos tantummodo conficiens ex notitiis peculiaribus et disjunctis, quae nullo modo ad propositum finem, uti diximus, facere possent, et huic jure ac merito error illius architecti objiciendus esset, qui lateres, calcem, arenam, ligna et caetera hujus generis condendo aedificio necessaria scripto enumeraret, ac ita se ejusdem aedificii formam, et distributionem exhibuisse confideret.

Ita obiter ac summis, ut ita dicam, labiis delibata necessitate atque utilitate Statisticarum generalium in quovis bene ordinato regimine, nec non Statisticarum specialium in quocumque publicae rei administrandae loco, et vobis, Sodales sapientissimi, specimen Statisticae Medicae obfero, in hoc amentibus curandis Nosocomio digestum, non sine magna animi patientia, diuturnoque labore. Quae quidem Statistica si ob eas, quas ab initio attuli, rationes non omni ex parte perfecta est, nec in Tabulas facta referuntur, quae ipsas singulas respiciunt, satis tamen ex earum prospectu ac veluti compendio cujus naturae sint, ac quousque augeri possint conjicietis, ut concepta methodus conducat nec ne ad propositum finem decernatis.

Ingressus igitur, *Sanatio*, *Mors*, et tria praecipua elementa, quae vestrae hic considerationi subjicio, tempus vero *Decennium* est, nempe ab anno 1819 ad annum usque 1829 exclusive. Porro ex relatione, quae intercedit inter haec elementa praecipua, et multa alia minoris ponderis, communia partim illis omnibus, partim alicui tantum eorum peculiaria, et ex relatione praeterea, quam tria eadem superiora habent inter se, exurgit dispositio et ordo tabularum, quas nunc in tres ingentes Categorias distribuere aggredior.

In *prima* relationem considero, quae habetur inter primum Elementum, scilicet *Ingressum* et secundaria, nempe *Sexum*, *Aetatem*, *Anni tempus*, *Artem*, *Rationem vivendi*, *Exter-*

num habitum, Corporis structuram, Causas physicas, morales, et mixtas, Prognosticon, et Clusses, et Genera stultitiae.

In altera perpendendam suscipio relationem, quam primum elementum, videlicet *Sanitas*, habet cum secundariis nuper allatis, et insuper cum *Diuturnitate morbi, et cum Ingressu.*

In tertia denique disquiro quomodo se invicem recipiant et primum elementum, quod est *Mortalitas*, et secundaria jam paulo ante in secunda classe enunciata, et *Praecipui morbi, quibus mentecapti decedunt, atque Mutationes Pathologicae in Necrotomiis deprehensae.*

Hic si Tabulam I. primae Categoriae inspiciatis, statim conjiciatis quae sit proportio inter numerum individuorum primi decenni, et Sexum et Aetatem; pernoscetis etiam alienationem mentis minimam esse in prima et postrema aetate; post primam autem gradatim augeri, gradatim deinde minui; adeo ut ad summum pertingere soleat, et maximus habeatur numerus inter annum trigesimum, et quadragesimum.

In II autem vobis manifestum est quantum in hisce morbis faciant anni tempora; ac veluti manu tangitis infestissimam esse aetatem, quam per quosdam, ut ita dicam, gradus decre-scendo ver, autumnus, et hyems subsequuntur.

In III artes considerantur, in eaque cernitis in nostra Provincia majorem numerum mentecaptorum reperiri inter *Agricolae, Hortorum cultores, et Pastores*; postea numerum minui cum agitur de *Militibus, Bajulis, Monachis, Sacerdotibus, Calculatoribus, Servis, Cannabis opificibus*; quod vero ad sexum femineum, complures ex iis esse, *quae campos, hortosque colunt, Textrices, Nentes, rebus domesticis vacantes, stipem per vias poscentes, Ancillas, Sutrices, Acupitricas, Sartrices, Calanticarum, et pileorum ex palea artifices* etc. nam artes hujusmodi maximopere funestissimae huic dant fomenta infirmitati.

Haec expono sicce et jejune, nihil de causis sollicitus, quae effectus hujusmodi attulerint; nam nisi prius hanc tabulam comparaverim cum alia, quae huic respondet, decenni insequentis, rei que stabilitatem per cursum saltem annorum vi-

ginti deprehenderim, haud satis firmas existimo hinc posse conjecturas deduci. Nam de influxu artium in hosce morbos tum tantum ratiocinari solide licebit, cum eorum phaenomena per tempus saltem antedictum constanter apparuerint.

Tabulae IV, V, VI, VII, VIII, magnae profecto fuissent utilitatis, nisi elementa, quibus ipsae conficerentur, defuissent; nihilo tamen minus quomodo eas efformare opus sit indicare volui, ut judicetis an instituta methodus, quae procul dubio tertio decennio perficietur, propositum finem consequatur.

Tabula vero IX quae ultima est primae Categoriae, ac vobis exhibet Classes diversas, et Genera Stultitiae una cum Prognostico, quod medicus prima vel altera die ex quo aegrotantes in Nosocomium excepti sunt, efformare potest, vos pariter docebit *Maniam* plures invadere quam *Monomaniam*; hanc vero plures quam *Dementiam* et *Idiotismum*; item *Maniam furiosam* saepius haberi quam *placidam*; *Monomaniam tristem* quam *amoenam*; *Dementiam chronicam* quam *acutam*, *Idiotismum* denique *Imbecillitatis*, quam *Idiotismum Amentiae*, qui imus gradus est humani intellectus. Ex hac insuper cognoscetis prognosticon feliciter exhiberi a maniacis furiosis quam a placidis, et similiter a Monomaniacis amoenis quam a tristibus; minus autem infelix praestari a Dementibus acutis, quam a Chronicis, minusque fatale ab Imbecilibus quam ab Amentibus.

Tabula porro X, quae est prima secundae Categoriae, sub oculos ponit numerum eorum, qui sanitati restituti sunt relate ad Sexum, et aetatem; et eo modo quo prima monebat, qua aetate facilius quis subjiciatur mentis alienationi, haec vobis manifestabit qua aetate facilius quis convalescat, quod saepius contingit inter annum trigesimum, et quadragesimum.

Quod autem ad tabulam XI, quae refertur ad secundam primae Categoriae, demonstrat quo sexu, et quo anni tempore facilius morbum superare liceat; hocque frequentius accidisse reperietis in Autumno, quem per gradus quosdam decrescendo aestas, ver, hyems consequuntur.

Dein in Tabula XII quidam veluti prospectus habetur artium aegrotorum utriusque sexus, qui inter Decennium in Nosocomio sanati, sunt, ac ideo discesserunt. Quam tabulam

cum tertia jam descripta in prima Categoria comparanti, clare apparebit, quae sit proportio inter mentecaptos ingressos et sanatos relate ad Sexum et Artem.

Tabularum vero XIII, XIV, XV, XVI, XVII, quae restitutam valetudinem considerant relate ad Sexum, vivendi modum, corporis externum habitum, causas physicas, morales, et mixtas, ob rationes superius allatas nulla in prompta materia est unde efformentur.

Quod si de Tabula XVIII sermo sit, laboriosa quidem, et maximae difficultatis, ipsa comparat sanitatem redditam cum Sexu, cum Prognostico, cum Classibus et Generibus Stultitiae, et eorum patefacit Diurnitatem; adeo ut eam dextrorsum inspicientibus summa appareat infirmorum utriusque sexus sanatorum relate ad Classes, et genera Stultitiae, nec non ad Prognosticon efformatum; inspicientibus autem deorsum diversae summae se se oberant relate ad diurnitatem morbi in capite ejusdem tabulae notatam, et inde conjiciatur plures convalescere inter maniacos, et deinde decrescendo inter monomaniacos, et postea inter dementes; neminem vero in amenibus idiotis. Reperitis etiam multos effugisse, morbum, qui sanabiles judicati sunt, pauci vero admodum, qui insanabiles. Et quod attinet ad diurnitatem, undecim sanatos esse intra duas hebdomadas, quinquaginta post mensem, septuaginta septem post mensem alterum, quinquaginta sex post tertium, centum post sextum, quadraginta duos post nonum, decem et octo jam anno elapso, quadraginta tres duobus post annis, et septem intra tres annos, et duodecim tantum transactis annis indeterminatis; nam ut tertius annus excesserit, nullum potest amplius Medicus efformare verisimile prognosticon; immo si audiatur celeberrimus Esquirol probabiliter affirmari potest, nullam esse viam, qua mentecaptus ad sanitatem deveniat.

Denique Tabula XIX. ultima ex iis, quae a morbo confirmatos enumerant, maximo labore digesta est, ac revellit, ni fallor, errorem quemdam, qui ad haec usque tempora invaluerat, considerandi scilicet sanitatem recuperatam, et mortem obitam quod ad sexum et ingressum, eos etiam supputando qui in Manicomio singulis annis supersunt, quasi eo ipso anno Manicomium tamquam recentes adierint. Cui errori primus

omnium conatus est occurrere celeberrimus Esquirol, tabulam progressivam, ut ajunt, effingens, quae ad finem usque primi decennii perducta, e medio tollit quidquid erat impedimenti. Sed cum eo perventum est, judicium nobis ferentibus ex forma, quam ipse tabulae dedit (non enim aliter fieri potest) opus est eos qui extremo anno supersunt, tamquam novos considerare in anno primo decennii insequentis; quae quidem res licet non omnem adinat utilitatem, certe saltem imminuit. Quum ipse respondentem Tabularum secundi Decennii proferam, vestrum erit sententiam ferre, num finem integrum consequi valuerim. Interim conspiciere est ad dexteram hujus tabulae partem quod tum mares tum foeminae uno quoque anno ingressi salutem in singulos item annos ejusdem decennii acquisiverint; et ad calcem quot ex omnibus utrisque sexus individuis in Nosocomio degentibus illo tantum anno sanati sint; ex quorum integra summa colligetis 757 infirmos Nosocomium adiisse, et 416 inde egressos incolumes.

Ad tertiam demum Categoriã accedentibus vobis sub oculos cadit Tabula XX, quae singulorum mortem cum sexu et aetate confert; et cuius facile est cognitu nullam vitae periodum huic infirmitati magis esse obnoxiam, quam illa, quae inter trigesimum et quadragesimum annum continetur, stadia vero, quae hanc praecedunt, minus quam ea, quae illam subsequuntur, eidem infirmitati subjici experientia constat.

Ex XXI patet quanam relatio sit inter uniuscujusque mortem et sexum, et anni tempore; unde oppido deduces infestiores esse autumnum, huic aestatem succedere et ver, minimum vero numerum mortuorum in hyeme haberi.

Tabula XXII diversas exhibet artes omnium utriusque sexus e vita decessorum intra Decennium, qui in qualibet necrologica tabula numerum efficiunt plus minus 242. Ex hac autem manifestum est ex maribus plures inter villicos, et hortorum cultores et pastores supremum diem obivisse; deinde autem inter calculatores, sarcinatores, milites, servos etc; ex mulieribus vero vita functas praecipue agrorum et hortorum cultrices, textrices, nentes, rebus domesticis vacantes, servas, mendicas, etc.

Quod ad tabulas necrologicas XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, quae superius dicta sunt videantur.

Tabula XXVIII tabulae IX primae Categoriae, et tabulae XVIII secundae ex parte similis, comparat mortalitatem cum Sexu, Prognostico, et variis Classibus et generibus stultitiae, una cum Morbi diurnitate: haec autem Tabula nos docet, uti videre est in seriebus dextrorsum dispositis, Dementiam chronicam plurimos absumere, cui succedit Monomania tristes, huic vero Mania furiosa et placida, Imbecillitas, et Amentia, ac denique Monomania amocna. Ad calcem exhibet summam diurnitatis morbi, quae diurnitas in fronte ipsius tabulae indicatur; qua ex summa colligitur majorem mortuorum numerum haberi in anno secundo infirmitatis, deinde gradatim decrescendo in primis sex mensibus, in novem, in duobus, et in primis denique hebdomadibus, etc.

Tabula XXIX in hoc tantum differt a XIX, quod ibi Sanatio, hic vero Mortalitas cum Sexu et Ingressu comparatur; et eo sane modo, quo ibi quae jam audistis deducuntur, hic in dextra parte cernitur summa hominum et mulierum, qui singulis annis per totum Decennium ingressi sunt, et ad imum habetur Mortalitates uniuscujusque anni, tum relate ad Sexum, tum collective considerata, adeo ut ingressorum numerus ad 757 ascendat, mortuorum vero ad 242, quomodo ex integris summis fas est intelligere.

Denique postremae duae tabulae XXX, et XXXI, quae ad methodum hujus nostrae Statisticae pertinent, et quarum primae esset nos docere relationem Mortalitates cum Sexu, et praecipuis infirmitatibus, quibus emoriuntur mentecapti; secundae vero quomodo se habeat Mortalitas cum Sexu, et Classibus et Generibus Stultitiae, et praecipuis Pathologicis mutationibus, quae omnia tantae forent medentibus utilitati, nullo modo a me vobis exhiberi possunt, nisi tertio decennio absoluto, quod jam ingressi sumus: qua de re jam nunc diligentissime studeo rebus omnibus et phoenomenis colligendis, quae iisdem possint inservire.

Mihi vero consideranti rationem et numerum harum Tabularum spes animo affulget, me ea omnia elementa suscepisse perpendenda, quae Medicae Statisticae utilitati maximae, et ponderi sint futura, et quibus tantum, ut mihi, videtur, diligentissime sit studendum. Puto enim non esse sapientis

Medico-Politici ad minutiora descendere, quae tamen ab aliquibus considerari video, exiguo aut, ut saepius fit, nullo scientiae profectu, immo et gravi damno illius veritatis, simplicitatis, et perspicuitatis, quae in huiusmodi prospectibus magni semper faciendae sunt. In id potius toto pectore incubui, ut unaquaeque tabula tali modo sit conformata, ut facillime utilioribus comparationibus, quae instiui velint, inserviant, atque ut supputatio cujusvis elementi praestituti, et quovis modo considerati, correspondentem usque uniformitatem, summamque inveniat.

Interim dum coram vobis, Sodales sapientissimi, illud de novo affirmo atque assero, nullum existere debere locum publico datum commodum ac bono, et scite dispositum et ordinatum, qui huiusmodi non praebat peculiare Statisticas, ut servetur, corrigatur, et melior fiat methodus in eo administrando adhibita, id omnino efficiendum profiteor in Nosocomiis, quorum est praecipue sanctissimo huic muneri operam navare. Hisce enim Statisticis quidquid carius pretiosiusque habetur, vita scilicet hominum, illudque lumen rationis excellentissimum tuemur, et procuramus. Huiusmodi Statisticarum ope Medici docentur ubinam methodus, fortuna vel scientia indicante, ortum duxerint, quae tutius faciliusque iniqua conflictatos valetudine sanitati restituant; patebit itidem quomodo hisce fulta praesidiis Chirurgia, animosa illa equidem sed prudens; insuato pene hominum, membrorumque humanorum numero consuluerit, ab ea toto caelo dissentiens atque abhorrens, quae dum cultores suos novis ausibus iisdemque audacissimis immortalitati commendavit, corpora neci crudeliter data, vel fedae artus e corporibus avulsos in tenebris, nil scriptis, memoriaeque tradens, jussit delitescere, ut odium posterorum et vituperationem effugeret.

Rerum publicarum moderatores, cum haec prae oculis habeant, quae ab huiusmodi generalibus ac civilibus Statisticis speciatim ac peculiariter deducuntur, nullo negotio perspectas habebunt causas, quibus tantam hominum frequentiam ipsorum curae commissorum amittant, unde civitas quaeque et solidior consistere posset, et laetior beatiorque florere. Inficiari enim quis audeat hominem negotiis addictum, licet scien-

tia quantavis praeditum, et recto iudicio, optimoque in rem animo donatum, nisi quomodo se se res habeant noverit, male et fortuito acturum, nec sine iis, quas diximus, Statisticis unquam cogniturum populi incommoda et necessitates, et quibus eisdem argumentis prospiciat? Multoque minus vitia, erroresque suborientes deprehendet, ac ideo difficilius etiam remedium aliquid adhibere poterit. Hisce considerationibus permotus, specimen hoc quaecumque Medicae Statisticae confeci, quod vos hodierna die pro vestra in me benignitate tanto cum silentio audivistis. Vestrum autem est iudicare num in eo mente concipiendo omnia, quae opus erant, elementa complexus sim, et rerum seriem ita distribuerim, quomodo et perspicuitas et utilitas postulant. Quod si, ut certe erit, aliquid peccaverim, ne, quaeso, sinitote, methodum, quae tanto scientiis et societati commodo esse potest, ob ingenii mei tarditatem aliquid detrimenti capere; quod a vobis facillime tali sapientia praeditis praestabitur, si me de erroribus, qui vel temporis angustia, vel laboris magnitudine et difficultate exciderunt, monitum volueritis.

I. DECENNIUM

1819 USQUE AD 1829.



C A T E G O R I A I.



INGRESSUS.

I. TABULA Ingressus quod ad Sexum et Aetatem.

AETAS	SEXUS	I. DECENNIUM										SUMMA		generalis
		1819	1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827	1828	quod ad sexum et aetatem	quod ad aeta- tem	
A natiuitate ad 10 annos	Mares	"	"	1	"	"	"	"	"	1	"	2	2	757
	Foeminae	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"		
a 10 ad 20	Mares	3	4	1	"	5	2	4	5	6	4	34	52	
	Foeminae	"	1	2	1	1	3	2	6	2	"	48		
a 20 ad 30	Mares	7	8	7	7	5	6	7	12	7	12	78	157	
	Foeminae	8	7	10	7	9	7	6	8	8	9	79		
a 30 ad 40	Mares	12	12	12	13	10	11	9	14	13	17	120	231	
	Foeminae	10	10	11	8	6	14	8	10	14	17	111		
a 40 ad 50	Mares	10	9	5	12	6	11	10	10	6	8	87	194	
	Foeminae	12	6	10	6	13	10	6	7	22	15	107		
a 50 ad 60	Mares	"	4	1	2	1	4	10	1	1	7	40	76	
	Foeminae	3	1	6	1	1	2	4	3	6	3	36		
a 60 ad 70	Mares	2	1	"	1	"	3	6	3	4	3	23	34	
	Foeminae	"	"	1	"	2	2	2	1	2	1	14		
a 70 ad 80	Mares	"	"	"	"	1	2	1	"	"	1	5	10	
	Foeminae	"	"	"	"	1	"	2	"	"	2	5		
ab 80 ad 90	Mares	"	1	"	"	"	"	"	"	"	"	1	1	
	Foeminae	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"		
ab 90 ad 100	Mares	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
	Foeminae	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"		

II. TABULA Ingressus quod ad Sexum et Anni Tempora.

ANNI TEMPORA		SEXUS	I. DECENNIUM										SUMMA		
			1819	1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827	1828	quod ad sexum et anni tempora	quod ad anni tempora	generalis
VER	MARTIUS	Mares	4	4	3	5	5	3	4	4	7	5	41	235	
		Foeminae	2	3	8	2	2	2	2	2	3	«	26		
	APRILIUS	Mares	3	3	2	2	7	4	4	6	2	6	39		
		Foeminae	5	3	3	3	«	1	3	3	7	10	38		
	MAIUS	Mares	3	5	3	4	2	5	11	6	6	6	51		
		Foeminae	3	2	5	1	7	4	2	2	11	3	40		
AESTAS	JUNIUS	Mares	6	4	3	8	3	1	4	6	1	7	43	248	
		Foeminae	5	3	6	3	4	4	2	4	7	6	44		
	JULIUS	Mares	4	4	5	6	1	6	4	3	4	2	39		
		Foeminae	3	5	«	2	2	8	2	3	5	5	35		
	AUGUSTUS	Mares	8	5	4	2	1	5	3	3	3	2	36		
		Foeminae	4	4	8	3	5	6	4	5	8	4	51		
AUTUMNUS	SEPTEMBER	Mares	2	2	1	2	1	5	1	3	3	7	27	144	
		Foeminae	4	«	3	2	«	2	2	4	4	8	29		
	OCTOBER	Mares	2	4	1	3	1	1	2	2	2	5	23		
		Foeminae	«	3	2	5	2	2	1	«	1	3	19		
	NOVEMBER	Mares	3	1	«	«	1	1	2	5	3	2	18		
		Foeminae	4	1	3	3	1	2	6	2	4	2	28		
HIEMIS	DECEMBER	Mares	«	1	«	1	3	4	4	2	2	4	21	130	
		Foeminae	2	1	2	1	4	1	1	5	«	3	20		
	JANUARIUS	Mares	2	4	2	«	3	2	2	2	3	2	22		
		Foeminae	1	«	2	«	2	2	4	3	3	2	19		
	FEBRUARIUS	Mares	«	2	6	2	3	2	3	3	5	4	30		
		Foeminae	«	3	1	1	4	4	1	2	1	1	18		

III. TABULA Ingressus quod ad Sexum et Artem.

I. DECENNIUM			
MARES		FOEMINAE	
Ars	Ingres- si	Ars	Ingres- sae
Agricolae, olitores et pastores . . .	142		
Milites	24		
Amanuenses	5	Hortorum et Agrorum cultrices	109
Molendinarii	2		
Sartores	8	Magistrae puerorum	1
Lanii	7		
Caupones	4	Scenicae	4
Scenici	2		
Servi	11	Ancillae	23
Bajuli	16		
Mathematici	6	Sarcinariae et artifices calantica- rum et pileorum	14
Structores caementarii	8		
Errones et mendici	6	Acu pictrices	15
Carminatores cannabis	9		
Barbitonsores	4	Vagae	2
Aurigae et Servi stabularii	4		
Pharmacopolae	1	Fulloniam exercentes	5
Monachi et Presbyteri	15		
Fabri ferrarii	5	Cauponae	6
Coqui	1		
Sutores, ephippiorum et pileorum opifices	6	Textrices et nentes	105
Sicerae artif. et coffeae venditores	5		
Legisperiti	4	Stipem petentes	9
Calculatores	13		
Salsamentarii, et Cetarii	6	Virgines olim in monasteriis Deo devotae	3
Veredarii	1		
Figuli	5	Domesticis negotiis deditae	62
Baphei, et qui pannos sericos crispant	1		
Pectinum et cistarum fabri	3	Nullam profitentes artem	12
Mercatores	5		
Discipuli	4		
Pulvis pyrici, et sulphuratorum opifices	2		
Puerorum magistri	2		
Aurifices et artifices horologiorum	3		
Carcereum custodes	1		
Pistores	2		
Fabri lignarii	7		
Pietores	1		
Tipographi	2		
Auletæ	1		
Speculorum fabri	1		
Aeditui	1		
Muliones	5		
Qui nullam artem exercent	29		
Summa	390	Summa	367

I. DECENNIUM

1819 USQUE AD 1829



CATEGORIA II.



SANATIO

XI. TABULA Sanationis quod ad Sexum et Anni Tempora.

ANNI TEMPORA		SEXUS	I. DECENNIUM										SUMMA				
			1819	1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827	1828	quod ad sexum et anni tempora	quod ad anni tempora	generalis		
VER	MARTIUS	Mares	«	4	2	«	1	3	2	«	1	«	13	102			
		Foeminae	«	1	«	«	1	2	2	«	1	3	10				
	APRILIS	Mares	«	1	«	1	3	«	3	4	2	1	15				
		Foeminae	2	2	1	2	1	1	2	2	2	3	18				
MAIUS	Mares	«	1	4	«	2	«	5	1	5	5	23					
	Foeminae	«	«	3	1	1	2	9	1	3	3	23					
AESTAS	JUNIUS	Mares	1	4	1	«	2	3	2	2	2	2	19			416	
		Foeminae	2	2	3	«	6	1	«	2	4	1	21				
	JULIUS	Mares	3	5	1	1	1	2	2	6	4	2	30				
		Foeminae	«	1	1	2	1	1	2	2	«	1	11				
AUGUSTUS	Mares	«	1	3	3	«	3	«	2	3	1	16					
	Foeminae	«	«	3	«	1	3	1	2	8	1	19					
AUTUMNUS	SEPTEMBER	Mares	1	2	5	2	«	7	4	2	1	4	28	416			
		Foeminae	3	2	2	2	1	2	1	1	3	4	21				
	OCTOBER	Mares	3	3	1	2	3	2	3	5	«	4	26				
		Foeminae	2	1	3	2	1	2	3	3	2	3	22				
NOVEMBER	Mares	3	3	3	3	1	«	1	1	5	3	23	137				
	Foeminae	1	1	«	2	1	3	3	«	2	1	17					
HIEMIS	DECEMBER	Mares	1	«	1	«	1	4	«	1	1	«					12
		Foeminae	«	1	2	3	1	1	1	«	«	2					11
	JANUARIUS	Mares	1	«	1	1	«	2	2	3	1	1		15			
		Foeminae	«	«	3	«	1	1	1	2	«	2		10			
FEBRUARIUS	Mares	«	2	1	«	«	1	1	1	«	1	7					
	Foeminae	«	«	1	«	«	«	1	3	«	1	6					

XII. TABULA Sanationis quod ad Sexum et Artem.

1. DECENNIUM			
MARES		FOEMINAE	
Ars	Sanati	Ars	Sanatae
Agricolae, olitores et pastores . . .	90		
Milites	11		
Amamenses	2	Hortorum et Agrorum cultrices . . .	63
Molendinarii	2		
Sartores	2	Magistrae puerorum	1
Lanii	5		
Caupones	"	Scenicae	1
Scenici	"		
Servi	5	Ancillae	8
Bajuli	12		
Mathematici	4	Sarcinariae et artifices calantica- rum et pilcorum	6
Structores caementarii	4		
Errones et mendici	3	Acu pictrices	8
Carminatores cannabis	5		
Barbitonsores	4	Vagae	1
Amigae et Servi stabularii	2		
Pharmacopolae	"	Fulloniam exerecentes	4
Monachi et Presbyteri	12		
Fabri ferrarii	3	Cauponae	3
Coqui	"		
Sutores, ephippiorum et pilcorum opifices	2	Textrices et nentes	46
Sicerae artif. et coffeae venditores	3		
Legisperiti	3	Stipem petentes	4
Calculatores	4		
Salsamentarii, et Cetarii	5	Virgines olim in monasteriis Deo devotae	3
Veredarii	"		
Figuli	3	Domesticis negotiis deditae	36
Baphei, et qui pannos sericos crispant	1		
Pectinum et cistarum fabri	"	Nullam profitentes artem	8
Mercatores	1		
Discipuli	4		
Pulvis pyrici, et sulphuratorum opifices	1		
Puerorum magistri	1		
Aurifices et artifices horologiorum	2		
Carcerum custodes	1		
Pistor es	1		
Fabri lignarii	6		
Pietores	"		
Tipographi	1		
Auletae	"		
Speculorum fabri	"		
Aeditui	"		
Muliones	3		
Qui nullam artem exerceant	20		
Summa	227	Summa	189

XVIII. TABULA Sanationis quod ad Sexum, Prognosticon, Classes, et Genera Stultitiæ, et Diurnitatem Curæ in Nosocomio.

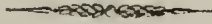
CLASSES	GENERA	PROGNOSTICON	SEXUS	I. DECENNIUM										SUMMA				
				DIURNITAS CURÆ IN NOSOCOMIO.										quod ad classes, genera, prognosticon et sexum	quod ad classes, genera et progn.	quod ad classes et genera	quod ad classes	generalis
				Duorum hebdomadarum	Unitis mensis	Duorum mensium	Trium mensium	Sex mensium	Novem mensium	Unitis anni	Duorum annorum	Trium annorum	Annorum indefinitorum					
MANIACI	FLACIDI	insana-sanabiles	Mares	"	6	13	4	7	1	"	4	"	1	36	76	76	200	
			Foeminae	"	5	5	6	11	3	3	6	"	1	10				
MANIACI	FURIOSI	insana-sanabiles	Mares	4	11	10	7	14	5	4	3	1	1	60	120	124	444	
			Foeminae	2	11	5	8	11	10	2	6	3	2	60				
MANIACI	FURIOSI	insana-sanabiles	Mares	"	"	1	"	3	"	"	"	"	4	4	4	44		
			Foeminae	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"			"	
MONOMANIACI	AMOENI	insana-sanabiles	Mares	"	"	"	1	2	"	"	1	"	1	10	10	144		
			Foeminae	"	"	1	1	3	1	"	"	"	"	6				
MONOMANIACI	TRISTES	insana-sanabiles	Mares	2	7	15	15	18	6	4	6	"	3	76	129	134	446	
			Foeminae	1	7	11	5	13	5	1	9	1	"	53				
MONOMANIACI	TRISTES	insana-sanabiles	Mares	"	"	"	"	1	"	1	"	"	2	5	5	134		
			Foeminae	"	"	1	"	1	"	"	1	"	"	3				
DEMENTES	ACUTI	insana-sanabiles	Mares	2	2	4	5	8	5	"	3	"	"	29	45	89	61	
			Foeminae	"	"	4	1	3	4	2	1	"	1	16				
DEMENTES	ACUTI	insana-sanabiles	Mares	"	"	"	2	"	"	"	"	"	2	4	4	61		
			Foeminae	"	1	1	"	"	"	"	"	"	"	2				
DEMENTES	CHRONICI	insana-sanabiles	Mares	"	"	2	"	"	1	"	"	"	3	5	15	61		
			Foeminae	"	"	"	1	"	1	"	"	"	"	2				
DEMENTES	CHRONICI	insana-sanabiles	Mares	"	"	2	"	1	"	"	"	1	4	10	10	61		
			Foeminae	"	"	1	"	"	"	"	1	1	3	6				
IDIOTÆ	IMBECILLES	insana-sanabiles	Mares	"	"	1	"	2	"	1	"	"	1	5	6	8		
			Foeminae	"	"	"	"	1	"	"	"	"	"	1				
IDIOTÆ	IMBECILLES	insana-sanabiles	Mares	"	"	"	"	"	"	"	1	"	1	1	1	8		
			Foeminae	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"				
IDIOTÆ	AMENES	insana-sanabiles	Mares	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	2	8		
			Foeminae	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"				
IDIOTÆ	AMENES	insana-sanabiles	Mares	"	"	"	"	1	"	"	1	"	2	2	2	8		
			Foeminae	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"				
Summa quod ad diurnitatem curæ in Nosocomio.				11	50	77	56	100	42	18	43	7	42	"	"	"	"	

XIX. TABULA Sanationis quod ad Sexum et Ingressum.

INGRESSUS			I. DECENNIUM												Summa quod ad Ingressum et ad sexum					
SEXUS	1819		1820		1821		1822		1823		1824		1825		1826		1827		1828	
	Mares	Fœminae	Mares	Fœminae	Mares	Fœminae	Mares	Fœminae	Mares	Fœminae	Mares	Fœminae	Mares	Fœminae	Mares	Fœminae	Mares	Fœminae	Mares	Fœminae
	34	33	7	5	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	39	28	19	6	4	5	4	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	30	43	19	14	19	14	6	5	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	35	26	10	8	6	7	6	7	6	7	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
	34	33	11	7	4	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	39	38	22	12	22	12	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9
	44	30	16	13	16	13	16	13	16	13	16	13	16	13	16	13	16	13	16	13
	45	35	19	11	19	11	19	11	19	11	19	11	19	11	19	11	19	11	19	11
	41	54	48	18	48	18	48	18	48	18	48	18	48	18	48	18	48	18	48	18
	52	47	49	16	49	16	49	16	49	16	49	16	49	16	49	16	49	16	49	16
Summa	300	367	13	10	23	22	16	44	47	46	27	19	25	26	28	18	25	23	27	28
Genera- litas	757	757	23	37	45	45	30	33	33	46	54	46	54	46	54	46	54	46	54	46

I. DECENNIUM

1819 USQUE AD 1829



CATEGORIA III.



MORS

XX. TABULA Mortis quod ad Sexum et Aetatem.

AETAS	SEXUS	I. DECENNIUM										SUMMA		generalis		
		1819	1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827	1828	quod ad sexum et aetatem	quod ad aetatem			
A natiuitate ad 10 annos	Mares	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α
	Foeminae	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α
a 10 ad 20	Mares	α	1	1	α	α	α	α	α	3	1	6	α	α	8	α
	Foeminae	α	α	α	α	α	α	α	α	1	1	2	α	α	α	α
a 20 ad 30	Mares	α	2	2	α	3	α	α	4	α	3	11	α	α	26	α
	Foeminae	3	2	4	α	α	2	2	4	α	4	15	α	α	α	α
a 30 ad 40	Mares	3	3	2	4	4	5	4	6	4	2	31	α	α	72	α
	Foeminae	2	5	5	3	5	3	1	4	2	8	38	α	α	α	α
a 40 ad 50	Mares	2	4	α	5	4	4	3	5	α	3	27	α	α	68	α
	Foeminae	4	2	5	3	5	5	2	4	12	5	41	α	α	α	α
a 50 ad 60	Mares	α	4	α	2	2	α	5	2	5	2	19	α	α	36	α
	Foeminae	3	4	α	2	4	α	3	α	5	2	17	α	α	α	α
a 60 ad 70	Mares	α	α	4	4	2	4	2	3	5	2	17	α	α	26	α
	Foeminae	α	α	α	4	2	4	4	4	4	2	9	α	α	α	α
a 70 ad 80	Mares	α	α	α	α	α	α	4	α	α	4	2	α	α	5	α
	Foeminae	α	α	α	α	α	α	α	4	α	2	3	α	α	α	α
ab 80 ad 90	Mares	α	4	α	α	α	α	α	α	α	α	4	α	α	1	α
	Foeminae	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α
a 90 ad 100	Mares	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α
	Foeminae	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α

XXI. TABULA Mortis quod ad Sexum et Anni Tempora.

ANNI TEMPORA		SEXUS	I. DECENNIUM										SUMMA		
			1819	1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827	1828	quod ad sexum et anni tempora	quod ad anni tempora	generalis
VER	MARTIUS	Mares	"	1	1	"	3	"	1	3	1	2	12	52	242
		Foeminae	"	1	"	1	"	2	1	"	2	2	9		
	APRILIS	Mares	"	1	1	"	3	1	"	"	2	"	8		
		Foeminae	"	"	1	"	"	2	"	"	2	3	8		
MAIUS	Mares	1	"	"	"	1	1	1	1	1	1	7			
	Foeminae	1	"	"	"	1	"	1	1	3	1	8			
AESTAS	JUNIUS	Mares	1	"	"	2	2	3	2	1	"	"	11	63	
		Foeminae	"	"	"	1	2	"	"	1	1	1	9		
	JULIUS	Mares	1	"	1	1	"	"	"	2	"	1	6		
		Foeminae	"	3	1	2	2	1	2	1	1	2	15		
AUGUSTUS	Mares	"	3	"	"	"	2	1	2	2	2	12			
	Foeminae	"	1	1	"	"	1	"	2	1	4	10			
AUTUMNUS	SEPTEMBER	Mares	"	1	"	"	"	2	"	1	3	3	10	76	
		Foeminae	3	"	1	2	1	1	"	"	3	3	14		
	OCTOBER	Mares	"	1	"	1	"	"	1	1	2	2	8		
		Foeminae	2	1	2	1	"	2	1	"	2	3	14		
NOVEMBER	Mares	1	1	1	2	2	1	3	1	1	3	22			
	Foeminae	"	2	"	"	"	"	2	"	2	2	8			
HYEMIS	DECEMBER	Mares	1	"	"	3	1	"	2	1	2	"	10	51	
		Foeminae	3	"	2	"	2	1	1	"	"	1	10		
	JANUARIUS	Mares	"	1	2	"	"	"	1	1	"	"	5		
		Foeminae	"	"	"	2	3	1	1	3	"	1	11		
FEBRUARIUS	Mares	"	"	"	3	"	"	"	3	"	"	6			
	Foeminae	"	2	3	"	2	"	"	"	1	1	9			

XXII. TABULA Mortis quod ad Sexum et Artem.

I. DECENNIUM			
MARES		FOEMINAE	
Ars	Mortui	Ars	Mortuae
Agricolae, olitores et pastores . . .	42		
Milites	8		
Amanuenses	4	Hortorum et Agrorum cultrices.	36
Molendinarii	"		
Sartores	5	Magistrae puerorum	"
Lanii	4		
Caupones	4	Secnicae	2
Secnici	2		
Servi	5	Ancillae	44
Bajuli	4		
Mathematici	4	Sarcinariae et artifices calantica- rum et pileorum	4
Structores caementarii	3		
Errones et mendici	2	Acu pictrices	2
Carminatores cannabis	3		
Barbitonsores	"	Vagae	4
Aurigae et Servi stabularii	2		
Pharmacopolae	"	Fulloniam exercentes	4
Monachi et Presbyteri	"		
Fabri ferrarii	4	Cauponae	3
Coqui	"		
Sutores, ephippiorum et pileorum opifices	3	Textrices et nentes	42
Sicerae artif. et coffeae venditores	2	Stipem petentes	5
Legisperiti	4		
Calculatores	9	Virgines olim in monasteriis Deo devotae	"
Salsamentarii, et Cetarii	4		
Veredarii	4	Domesticis negotiis deditae	48
Figuli	"		
Baphei, et qui pannosericos erispant	"	Nullam profitentes artem	3
Pectinum et cistarum fabri	3		
Mercatores	3		
Discipuli	"		
Pulvis pyrici, et sulphuratorum opifices	4		
Puerorum magistri	4		
Aurifices et artifices horologiorum	"		
Carcerum eustodes	4		
Pistores	"		
Fabri lignarii	4		
Pietares	4		
Tipographi	"		
Auletac	"		
Speculorum fabri	"		
Aelitui	"		
Muliones	4		
Qui nullam artem exercent	4		
Summa	447	Summa	425



XXX. TABULA Mortis quod ad Sexum, et praecipuos morbos,
quibus stulti moriuntur.

Praecipui morbi, quibus stulti moriuntur.	I. DECENNIUM		
	Mares	Foeminae	Summatim
Summa generalis			

INDEX TABULARUM

CATEGORIA I.

INGRESSUS

- I. Tabula Ingressus quod ad Sexum, et Aetatem.
- II. Tabula Ingressus quod ad Sexum, et Anni Tempora.
- III. Tabula Ingressus quod ad Sexum, et Artem.
- IV. Tabula Ingressus quod ad Sexum, et Vivendi Rationem.
- V. Tabula Ingressus quod ad Sexum, Externum Corporis Habitum, et Staturam.
- VI. Tabula Ingressus quod ad Sexum, et Causas Physicas.
- VII. Tabula Ingressus quod ad Sexum, et Causas Morales.
- VIII. Tabula Ingressus quod ad Sexum, et Causas Mixtas.
- IX. Tabula Ingressus quod ad Sexum, Prognosticon, et Classes et Genera Stultitiae.

CATEGORIA II.

SANATIO.

- X. Tabula Sanationis quod ad Sexum, et Aetatem.
- XI. Tabula Sanationis quod ad Sexum, et Anni Tempora.
- XII. Tabula Sanationis quod ad Sexum, et Artem.
- XIII. Tabula Sanationis quod ad Sexum, et Vivendi Rationem.
- XIV. Tabula Sanationis quod ad Sexum, Externum Corporis Habitum, et Staturam.
- XV. Tabula Sanationis quod ad Sexum, et Causas Physicas.
- XVI. Tabula Sanationis quod ad Sexum, et Causas Morales.
- XVII. Tabula Sanationis quod ad Sexum, et Causas Mixtas.
- XVIII. Tabula Sanationis quod ad Sexum, Prognosticon, Classes et Genera Stultitiae, et Diuturnitatem Curae in Nosocomio.
- XIX. Tabula Sanationis quod ad Sexum, et Ingressum.

CATEGORIA III.

M O R S.

- XX. Tabula Mortis quod ad Sexum, et Aetatem.
 XXI. Tabula Mortis quod ad Sexum, et Anni Tempora.
 XXII. Tabula Mortis quod ad Sexum, et Artem.
 XXIII. Tabula Mortis quod ad Sexum, et Vivendi Rationem.
 XXIV. Tabula Mortis quod ad Sexum, Externum Corporis Habitum, et Staturam.
 XXV. Tabula Mortis quod ad Sexum, et Causas Physicas.
 XXVI. Tabula Mortis quod ad Sexum, et Causas Morales.
 XXVII. Tabula Mortis quod ad Sexum, et Causas Mixtas.
 XXVIII. Tabula Mortis quod ad Sexum, Prognosticon, Classes et Genera Stultitiae, et Diuturnitatem Curae in Nosocomio.
 XXIX. Tabula Mortis quod ad Sexum, et Ingressum.
 XXX. Tabula Mortis quod ad Sexum, et Praecipuos Morbos, quibus Stulti moriuntur.
 XXXI. Tabula Mortis quod ad Sexum, Classes et Genera Stultitiae, et Praecipuas Mutationes Pathologicas.

MICHAELIS MEDICI

DE QUIBUSDAM INSOLITIS, ABNORMIBUSQUE ANIMALIBUS VEGETATIONIBUS.

Quamquam observationes, de quibus loquuturus sum, novitatis fucō in Medicinae annalibus refulgere non possint, tale tamen, tantumque eis inest pondus, atque momentum, ut qui in hujusmodi casus alias inciderunt, ad eos studium omne, omnemque diligentiam contulerint, dignosque, ut posteritati traderentur, existimaverint. Quamobrem in spem adducor fore ut frustra hodie ego non laborem, si istarum observationum nonnullas vobiscum, Sodales doctissimi, communicavero. Quod si, pro qua pollent dignitate, eas expendere satis, atque enucleare non potero, factorum saltem, quae disperdi non debent, in quibusque doctiores me viri utiliter insudabunt, numerum augebo. De insolitis igitur quibusdam, abnormibusque textuum animalium vegetationibus, quarum alterae humanum genus, alterae volucres respiciunt, verba faciam.

Mulier quaedam, cui nomen *Marianna Bonazzia*, annum agens quadragesimum septimum, purgatrix, die decima tertia mensis Januarii anni 1839 meas majoris hujusce civitatis Nosocomii aulas, gravissima pleuro-pneumonite septem abhinc diebus laborans, ingrediebatur. Et licet totum vitae suae curriculum in duris, asperisque subeundis laboribus consumpsisset, corpus tamen robustum erat ei, et bene constitutum. Bis nupsit illa, primusque maritus bis illam reddidit matrem. Hemiplegia aegrotavit, ictero deinde, atque anasarca, quibus a morbis longum post temporis spatium potuit illa sese expedire. Nisi quod duos menses antequam Nosocomium petiisset, valetudo ejus iterum labefactata fuit: de inusitata enim quae rebatur virium lassitudine, molestaque identidem tussi, feбри-

libusque accessionibus corripiebatur: posteaque gravissima incaepit paullo ante dicta pectoris inflammatio, in septima cujus die, ut modo retuli, nostrum in Nosocomium infirma recepta fuit. Morbi natura adeo clara erat, patensque, ut evidenter ipsa, ut ita dicam, loqueretur. Ideoque aegrotam antilogistica insigniter medendi methodo curavi, quae tantum profuit, ut gravissimos, quos de ejus vitae discrimine ego jam conceperam timores, post alios septem dies laetam in spem meam me tempestatibus infirmam, periculisque liberavisse, et in sanitatis portum adduxisse conversos fuisse, et mihi et omnibus, qui ad eam accesserant, videretur. Cujus quidem admodum melioris valetudinis causam partem ego fuisse arbitror phlegmonem prope venae brachii dexteri incisionem ortum, ubi die decubitus nona sanguis missus fuit; qui porro phlegmo ad regularem transit suppurationem. Adversus tamen supervenit eventus; quatuor idest vesicatoria in morbi cursu infirmæ corpori admota gangraenam pepererunt. Sed gangraena decidit, ulcera a vesicatoriis relicta induxerunt carnem, exceptoque tumore parvulo prope modo dictam venae brachii incisionem remanente, et ex quo paucae puris guttulae manabant, et phlegmo jam suppuratus cicatrice obductus fuit: pleuro-pneumonia vero ex toto ablata, penitusque fuisse devictam juravisses. Die nihilominus decima secunda mensis Februarii aegrotæ abdomen tumescere caepit, sequentibusque diebus ejus adeo moles increvit, ut de ascitis praesentia dubitari nequaquam posset: quae tamen non ita erat simplex, ut eis tympanitis non adiceretur. Cumque aegrotæ in pejus rueret, morbus, intra abdominis terminos initio circumscriptus, latius patuit, et in generalem evasit leucophlegmatiam. Commendatio a practicis, atque heroica, ut ajunt, remedia vana prorsus rediere. Quin imo impossibile mihi fuit in eorum praescriptione diu immorari. Eorum enim quae patienter aegrotæ glutire conabatur, aut confestim, aut paulo post stomachus ejus indignatus per vomitum eadem respuebat. Et tamquam si tot, tantaeque aerumnae aegrotæ conditioni, et naturae magis, magisque pessumdandae haud sufficissent, maculae quaedam violaceae, et veluti scorbuticae aegrotæ cutim obsignaverunt, ac faedaverunt, ossis sacri regioni gangraena radices infixit suas,

dieque Aprilis nona, videlicet a nonagesimo morbi die, de vita, infelix! migravit.

Cadaveris sectionem egregius, coram me, peregit discipulus olim meus, et tunc meus in nosocomio medicus assistens D. Doctor *Fridericus Frabonius*, qui nunc multa cum sui laude, infirmorumque utilitate medicam apud Urbinates praxim exercet. In sinistro ergo thoracis cavo profundas, latasque pleurae pulmonis cum eosam conglutinationes, pseudo-membranas, et respondentis pulmonis atrophiam vidimus; laesionem in dextero nullam; in neutroque pulmonum substantiam aut vastatam, aut corruptam. Pericardii liquoris quantitas aliquanto major erat naturali; pericardium tamen, cor, et praecordiorum vasa absque labe. Triginta circiter subflavi seri libras continebat abdomen: naturalis lien magnitudinis, sed non nihil induratus: ad duas tertias sui ordinarii voluminis partes redactum, luteum, organicaque degeneratione, quam granosam vocant, labefactatum jecur: cistifellea crasso, magnoque calculo biliari tota impedita: juxta naturae leges apparatus urinarius. Quod autem magis nobis interest, id partes speciei propagationi dicatae suppeditarunt. Ovario enim sinistro tumor communis gallinacei ovi magnitudinem aequans insidebat, quem ut diligentius scrutaremur, una partibus cum genitalibus ex cadavere eruimus. Peritoneali lati ligamenti, inter quod locabatur tumor, membrana crucis in modum secta, tumorem ipsum sine difficultate, et labore deteximus, atque sejunximus, propterea quod simplicis textus cellulosi ope peritonaco adhaerebat. Duorum videbatur tumorum congeries, tum quia constrictionem, et veluti jugulationem praeseferebat, quae cum tamquam duas in partes, anteriorem alteram, minoremque, posteriorem alteram, utrumque respicientem, atque duplo majorem dirimebat, tum quod et propter densitatem inter se differabant. Illa quippe tactui flexilis erat, materiei que liquiditate quadam praeditae plena: ista autem tenaci, solidiorique substantia turgebat. Externa aperta portione, materies quaedam admodum mollis, lactique coagulato persimilis, inodora, ponderis unius circiter unciae ob oculos venit, in quam plures, partim solitarii, partim in fasciculos, cirrosve collecti immergebantur pili, capillorum instar lucidi, ab uno ad duos polli-

ces longi, colorisque subflavi, dum naturalis pilorum mortuae aegrotae color ater erat, et fuscus. Lentibus vitreis acutis pilis suppositis, visum mihi fuit communes videre microscopio solari inspectos capillos, subtilissimos videlicet in suo centrali axi translucidos, in ambitu vero opacos tubulos, quorum extremum alterum, valde tenue, sensim sensimque, pro ut extremum alterum versus incedebat, crassitudinem adinisciebatur. adeo ut tenues praeter modum, longissimosque conos referre eos dixisses; in crassiori autem eorum extremo bulbus, sive radix desiderabatur. Neque ego notam circa horum pilorum formam addere profecto possem ullam, propter quam ab iis, quos in ovarii tumore sedulo quondam scrutatus fuit, iconibusque tradidit doctissimus *Schacherus*, discriminarentur (1). Sublevatis porro, extractisque una cum qua obducebantur materie, hisce pilis, pars tumoris altera, sive interna turgere perrexit, ex eo quod eam inter atque externam nulla aderat communicatio, transitus nullus. Parietem denique, qua pars tumoris vestiebatur externa, membrana efficiebat quaedam, albidam, qua magis, qua minus translucens, cujus organisatio etsi cum ea, quae ad textum spectat cellularem, conferri quodammodo posset, attamen, si quid iudico, pars existimanda est organica recens orta, aut contemporanea, aut paullisper praecedens corporum, quae continebat, formationi, potius quam veteris proximae cellularis vel productio, vel modificatio, vel appendix, uti multi arbitrantur; quam de ceteris quoque tumoribus cisticis consimilibus ego sententiam tuor. Pilus vero nullus interna hujusce membranae facie prominebat, quin erat ipsa laevissima.

Majora in interno, sive uterum respiciente tumore, ac rariora vidimus. Ejus cavum materies sebacea, granosa, lutea, unciarum binarum pondus superans, prodigiosa pilorum insimul confusorum copia referta occupabat, quos inter pilos, caeterosque, de quibus paulo ante mentionem feci, nullum intercedebat discrimen, longitudine tamen excepta, quae in per-

(1) V. Haller. disput. ad morborum historiam, et curationem facientes ec. T. 4. p. 477.

multis internum ad tumorem pertinentibus magis erat conspicua. Hujusce autem tumoris paries, seu cistis, ex duabus, ut mihi visum fuit, membranis mutue conjunctis conflabatur, dum externus tumor, uti supra dictum est, membrana simplici tegebatur. Densiori insuper parietis illius, crassiorique interno quodam spatio, vel potius disco plures longi defigebantur pili, qui, vacuo tumoris cavo reddito, ex illo disco erumpere videbantur, veluti ex humo virgulta. Cavum et hoc caecum erat. Extra omnem idcirco dubitationis aleam positum mihi videtur, totam hanc massam duobus componi minoribus, quorum peculiari quisque, suoque gaudebat pariete, ita tamen ut in medio tumorum parietes ambo extensione quadam conjungebantur, unumque, crassioremque parietem efficiebant, qui idcirco utriusque tumoris parietis erat portio. Cui quidem conjunctioni, quae extra massam primo jam videbatur intuitu, memorata constrictio, seu strangulatio est tribuenda, quaeque et intus sui indicium praebat, nam circularis prominentiae, seu crepidinis caeteris parietibus multo crassioris speciem referebat.

Ast quod nam ista nobis non obtulit phaenomenum membranarum conjunctio! Magnopere curiosum, mehercule! Sodales doctissimi, ac singulare! In illius enim vel prominentiae, vel crepidinis quodam puncto pulcherrimus, optimeque constitutus surgebat dens, iis plane similis, qui vocantur canini, magnusque quantum in homine solet esse adulto, partem ejus inferiorem, sive radicem tegebant, amplectebanturque membranae, seu parietes modo dicti, qui stricte eam circumdabant, eique, tamquam alveolus, inserviebant. Praetereaque, coronam versus sese extollendo, ad partem dentis externam, sive convexam crassiores fiebant, brevesque pilos complurimos, vel potius pilorum acumina ostendebant; propeque internum, sive concavum dentis latus longi pili e praefato disco erumpentes disseminabantur.

Haec de sinistro ovario. Quod ad dexterum attinet, id solum notatu dignum adjungo, quod nempe faciei ejus posteriori parva ossea concretio, nonnullis armata aculeis, crystallumque imitans inhaerebat, dum porro caeterae apparatus uterini partes a naturali statu, palam saltem, non recedebant.

Hi de reliquo a me observati tumores cistici quibusdam generalibus regulis, quas auctores doctissimi statuerunt, minime obtemperant. *Lobsteinus* ex. gr. hujusmodi pilos suo se bulbo instructos esse judicavit, *Sontisii*que, *Andersonii*que, observationes, sua pro paucitate, contrariae demonstrationi discernendae haud sufficere contendit: cui sententiae *Burdachius* quoque adstipulatur. Multi tamen clarissimi, expertissimique viri disquisitiones de hujusmodi pilis bulbi, seu radice plane expertibus peregerunt, annalibusque Medicinæ tradiderunt. Atque ut de paucis modo tangam, *Malpighius* in celebratissima vita, quam de se metipso conscripsit, observationem a suo propinquo, amico, discipuloque *Albertinio* factam refert, qui anno 1691 insignem sub bovis corio ad spatulam pilorum congeriem invenit. *Hi pili* (*Malpighius* est qui loquitur) *ziziphino inficiebantur colore. Inaequali pollebant longitudine, et ut plurimum aequabant longitudinem auricularis digiti. In apice acuminati erant, altera extremitate latiores, et ibidem perforati videbantur* (1). Quae qualitates duae, esse nimirum latiores in extremitate acuminato apici opposita, perforatosque, bulbi, seu radice, quae uti plerumque foraminibus, rimisve minime scatet, ita semper solida est, densa, atque rotunda, praesentiam rejicere videntur. Clarius *Verattus* loquitur, qui in mulieris apoplexia interfectae cerebro pilorum absque bulbis glomum intra sanguinis grumos in sinistri ventriculi anteriori parte degentes offendit. Qui quidem pili tantum abfuit, ut bulbo donarentur, ut eo in extremo, ubi poni potuisset, extenuarentur, in acutemque apicem desinerent. *Illud vero admirationem habuit* (inquit ille) *quod inter grumos pilorum glomus, implexorum simul, complicatorumque, se prodidit. Erat glomus ciceris grano par: pili autem tenuissimi, qui quamvis verissimos se esse pilos vel primo adspectu probarent, idque etiam microscopium confirmaverit, nullus tamen erat eo bulbo instructus, qui pilis pro radice esse solet: potius in acumen ex ea parte desinebant, si non omnes, certe aliqui* (2). Addit porro ipse

(1) V. *Malpighii* Opera Posthuma. Amstelod. 1700. p. 127.

(2) V. Comment. Instit. Bonon. T. 2. P. 1. p. 185.

vel numquam, vel raro contigisse, ut hujusmodi pili in cerebro inventi fuerint, atque pro solita pinguedine, quacum solent esse commixti, et a qua alimentum sumere videntur, corpusculis quibusdam minimis, albidis, figurae variae, quorum naturam neque ejus pericula, neque a doctissimis viris *Beccario*, *Galeatio*, *Balboque*, quos ille eo in negotio gerendo socios habuit, atque adjutores, exantlati labores detegere haud quaquam potuerunt, fuerint inditi(1). Hujusmodi pariter sine bulbis pilos, praeter *Sontisium*, atque *Andersonium*, et modo laudatus *Schacherus*, et *Blumenbachius* viderunt. Recentiusque *Rubinius* binas memoriae tumorum cisticorum pilos bulbis destitutos continentium, ovariisque haerentium historias prodidit: altera de annorum sexdecim puella, quam et cognita, omnibusque perspecta sua vivendi ratio, et cadaveris inspectio virginitatis florem servasse suadebant: altera de muliere quinquagesimum agente annum, pluries enixa, cuique sanguinea abdominis hydrops vitam ademit (2). Quibus omnibus observationibus et istam, de qua vobiscum, Sodales humanissimi, nunc sermonem habeo, apponere liceat. Juxta pariter modo laudatum *Lobsteinium* cistici tumores, in quibus pili absconduntur, dexterum plerumque occupant ovarium, ejusque sententia, ratione subducta, illorum qui dextero in ovario resident numerus triplex est prae iis, quos in oculis ponit sinistrum. Nihilo tamen secius a *Schachero*, a *Blumenbachio*, a *Rubinio*, atque a me observationes peractae hujusmodi tumorum sinistro in ovario locatorum numerum adaugent.

Ad alteram, Sodales, quam in mei sermonis initio nominavi vegetationem, quamque volucres respicere dixi, nunc transeo. Pavunculus quidam, propter nimium arctam, et fune factam pedum suorum ligaturam, fortasseque negligentis, et valde rudis latoris culpa, dum ab uno ad aliud transferebatur rus, sinistri pedis ad metatarsi circiter dimidium fracturam retulit. Apparatus ad naturalem membri servandam directionem, fractique ossis ferrurationem obtinendam adhibitus, idoneusque nihil

(1) V. Op. et l. cit.

(2) V. Giornale della Società Med. Chir. di Parma T. 7. osscr. 1. p. 244. et oss. 11. p. 245.

profuit. Perturbata fuerunt omnia, atque eversa, animalisque motibus inferius ossis, seu pedis totius dimidium pendulum, sicut erat antea, rediit. Sese praeterea tegumenta pedetentim contriverunt, osque mutilum detectum, nudumque remansit. Cumque etsi claudicando iuvenis pavo bene valere, et saltitare prosequeretur, post circiter annum in ossis mutili extremo ipsis metipsis oculis natum unguem vidi. Quatuor altus lineas ossis mutili ora surgebat, durus, albus, adeoque curvus, ut naturalis unguis, in quem ejusdem animalis pollex desinit, formam aemularetur. Ut ejus internum cognoscerem, os mutilum deartuavi, opportunaequae macerationi subjeci. Ablata cute, exterior unguis pars, et veluti cortex corniculo, seu pileolo phrygio similis, ex cornea, pellucidaque lamina conflatus, argenti, margaritaeve nitore indutus sese avulsit. Pars vero interior, quamvis exteriore minus, tamen et ipsa pellucebat, mitrulaequae figuram praeseferebat. Cujus quidem externae partis ab interna disjunctionis causam fuisse arbitror novi organi recentem, ut ita dicam, aetatem, propter quam organica, quibus componebatur, elementa in unum nondum corpus coaluerant. Ipsaque unguis interna pars, seu nucleus nihil aliud erat nisi mollis, crassa, et aliquanto succida lamiua, in quodam ossis mutili circuitus puncto posita, e tegumentis oriens, penitus tamen osseis magis quam tendineis musculorum artus propriis appendicibus, metatarsique ossi adhaerens, cujus porro ossis externa facies abnormibus fere tota erat vegetationibus distincta.

Sed in rerum, de quibus testis ego fui, descriptione diutius morari nolo: neque mea in aliis similibus exemplis ab antiquioribus aequae ac a recentioribus Anatomes pathologicae scriptoribus in medium allatis, atque a *Lobsteinio*, a *Burdachio*, aliisque auctoribus recollectis, recensendis verba producam. Silentio tamen mihi prorsus praetereunda non videntur a duobus doctissimis medicis italis duo prolata ejusmodi cisticorum tumorum exempla, quae quamquam saeculo superiore in lucem edita, scriptorum nihilominus, qui ultra montes, mariaque vivunt, diligentiam effagere potuerunt. De *Caspere M.* loquor *Forlano* publico in Senarum Universitate Professore, qui suas rariores observationes medicas edi-

dit anno 1769 (1), atque de *Ieronimo Guaraldo* medico Centensi eruditissimo, qui rariorem etiam observationem, de qua testis ipse fuit, typis anno 1779 mandavit (2). Licetque unguium vegetaciones in corporis partibus, in quibus juxta ordinarias naturae leges adesse non debent, frequentes haud sint, nonnulla tamen earum exempla Observationibus medicis *Tulpii*, Clinicae chirurgicae *Ansiauxii*, Diario medico, et physico Londinensi, medico *Corvisartii*, cuidamque quartae Institutionum physiologicarum *Blumenbachii* editioni appositae annotationi consignata perleguntur. Quodquidem exemplum postremum cum pro multis valeat, illud ipsis *Blumenbachii* verbis referre mihi etiam atque etiam aridet *Verum maxime insigne exemplum mihi ipsi oculis usurpare licuit in viro juvene medico, auditore meo, qui Franco-gallorum exercitum sequutus, in famoso ad Beresinam receptu trium digitorum sinistrae manus extremos articulos, minimi vero binos gelu perdidit, et cui jam proximo anno in penultimis phalangibus digiti indicis, medii, et anularis cornea unguium rudimenta renata erant, minimo tantum adhuc mutico* (3). Dico autem exemplum hocce pro multis valere, cum tres in uno, soloque individuo vegetaciones novas evenisse demonstrat. Utcumque sit, observatio mea, jam supra exarata magni mihi facienda videtur, tum quia quod in humano genere contingit phaenomenum, idem in animalibus contingere posse luculenter ostendit, tum quod digitorum, portionisque metatarsi inferioris jacturae occasionem non praebuit congelatio, qui, ut quidam censent, casus est unicus, ubi hujusmodi reproductio possibilis sit.

Nunc superest, ut ad modum, ob quem vegetaciones istae ortum ducunt, verba convertam. Investigatio densis profecto tenebris obvoluta, atque difficillima! Tales tamen, tantique Phy-

(1) V. Rariores observationes Med. pract. anat. a Doct. G. M. Forlani cc. editae. Decas 1. Senis 1769. Obscr. X. p. 98.

(2) V. De rara singularum rerum compage in mulieris ventre detecta a Ieronimo Guaraldo. Bononiae cc.

(3) V. D. Io. Frid. Blumenbachii Institutiones physiologicae. Gottinae. 1821. p. 511.

siologiae fuerunt progressus, ut, si perspicuam hodie nobis istorum phoenomenorum, tutamque reddere explicationem non datur, quasdam tamen generales doctrinas, quibus aliqua investigationi huic lux affulgeat, in medium proferre possimus, ac profiteri. Et quamquam facta, de quibus sum supra loquutus, quippequae inter sese similia, una posset, communisque pertractatio complecti, attamen, cum identitas iis non sit, nihil impedit quominus ea discriminatim ad trutinam revocentur.

Cisticorum igitur tumorum, qui dentes, pilos, aliasque organicas continent partes, auctores nonnulli, inter quos eminent *Astrucius*, in foeta, qui aut nisi ipsis in sui partibus, quae intra tumores conspiciuntur, incrementum certum subierit, aut si integre, planeque constitutus, atque omnibus absolutus numeris evasit, partes ejus omnes, illis exceptis, quae dictis in tumoribus absconduntur, causa aliqua subinde vastaverit, atque confecerit, originem quaerunt, eamque invenisse arbitrantur. In quo, ni mea me fallit opinio, est habenda distinctio. Aliud siquidem sunt tumores, ubi multarum, variarumque, quas inter praecipua, etsi inordinata, atque confusa, adsint animalis corporis organa, partium congeries reperitur: aliud illi, qui aut pilos, aut unum, vel plures dentes, aut alia aliqua ossicula tantum ostendunt. Primis non nego foetum modis nuper dictis vitiatum originem praebere potuisse: maxime si vel in utero, vel in ovariis, vel tubis in falloppianis, vel in abdominis cavo positi fuerint, quibus in partibus conceptus effectus pergere, absolvi que procul dubio possunt. At nescio an bene comprobatum cistici tumoris, in quo, veluti in nido, existant simul, coacervataque praestantiora animalis corporis sint organa, exemplum habeamus. Nihilque interest patefacere, me in istarum observationum numero, ac coetu neque notissimas, certissimasque graviditates extrauterinas, neque foetus a *Fattorio* gravidos, aut ab *Olliverio* per inclusionem vocatos reponere. Quibus omnibus in eventibus foetus, ubi perfecti quidem non sint, praecipuarum tamen partium organicae, animalique vitae famulantium potiuntur, dum a naturali regula aberrationes (praeterquam quod prae ceteris corporis partibus, quae via de naturali non deflectunt, paucae sunt) organa tantum secundaria, neque directe, proximeque vitae necessaria corripunt, atque deforma-

nt. Itemque a tumoribus, de quibus nunc ago, monstra, in quibus modo dictae adsint conditiones, in quibus videlicet organa corporis praecipua, et praestantiora reperiantur, sejungenda mihi videntur. Etenim si partibus hinc vitae organicae necessariis, corde idest, pulmonibus, jecinore, stomacho, intestinis, renibusque tumores illi deficerent, sique illinc cerebrum, cerebellum, medulla oblongata, et spinalis, cunctique nervi haec ad organa spectantes (partes vitae possibilitati quam maxime totae necessariae) in iis desiderarentur, nemo non novit quantum abs re foret, eos cum foetibus, vel monstris, quae his donata contra fuissent partibus, conferre. De omnibus igitur istis non loquor. De cisticis solummodo tumoribus, quos massa ex abnormi, insolitaque membranarum, vascularium ramorum, pilorum, ossiculorumque congregatione, nexuque conflata efficit, mihi sermo est, uti ex. gr. ea, quae a praefato visa fuit *Guaraldo* (1), vel illa, quam perdocte more suo, atque ingeniose *Blumenbachius* conscribendam suscepit (2). Haud ignoro massam illam a *Guaraldo* abdominali graviditati, istam vero a *Blumenbachio* graviditati ovarii tributam fuisse. Quoties tamen ab his doctissimis viris prolatas tabulas cum foetu comparo, seduloque perpendo, mihi toties suadere nequeo causas nonnullis ab auctoribus excogitatas, quasque supra tetigi, hujusmodi effectus cingere potuisse. Jamque in magnam confestim rapit animum ambiguitatem, atque dubitationem istarum causarum ignorantia. Et quaecumque porro eae sint, rationem inter ipsas, effectusque, qui eis adscribuntur, invenis profecto nullam. Vel enim foetus vegetationem cohibent, impediuntque, et tunc organo-genesis vetat nobis huic fidem opinioni adhibere. Et revera ponamus organa, quae a faecundatione sub sensibus prima cadunt, ea esse, quae organicae futurae vitae prospicient; opinio, uti meis in *Disquisitionibus anatomicis, et physiologicis de nervo intercostali* demonstrare sategi, caeteris anteferenda. Nonne hujusmodi partes, quippe quae caeterarum procreationi favent, permanere deberent, opusque foret, ut facilius earum, quae temporis progressu gignuntur, plus prohiberetur minusve for-

(1) V. Op. Cit.

(2) V. Comment. Soc. Reg. Gotting. 1785. T. 8. p. 41, et seq.

matio? Cur ergo neque cor, neque jecur, neque stomachus, neque organum, quod istorum vices gerat, in nostros unquam incidit oculos, dum partes invicem, quae serius oriuntur, videmus aperte, nostrisque tangimus manibus? Ponamus contra organum primitivum, uti nonnullis opinio est, axim esse cerebro-spinalem. Et tunc non minus clare patet, rationi quam maxime congruum esse efflagitare quomodo, et quare numquam cerebrum, numquam cerebellum, numquam oblongatam medullam, spinalem numquam, et quin imo simplicem numquam nerveum textum intueamur? Dixique simplicem etiam textum nerveum, cum in massis, seu congeriebus, de quibus quaestio est, nemo quod ego sciam, de truncis, ramisque nervorum testis fuerit. Cur invicem, neque perraro, ossicula, dentes, pilos offendimus, partes omnes, quae adeo sero conduntur, ut nisi post certum vitae extrauterinae tempus incrementum, ab solutionemque adipiscantur? Cuique bono vasorum propagines, membranasque in medium adducere, ac venditare, si ejusmodi partes prorsus absque foetus praesentia, quin et sine modulo ortum nancisci, struique posse Physiologia, atque Anatomie comparativa omnem extra dubitationis aleam jam satis posuerunt?

Causae neque deletrices a quibusdam invocatae tenebras magis discutiunt. Et ne longior sim, quisnam dicere posset quibus de causis partes semper vitae organicae, et animalis praecipuae, numquam vero caeterae sive absumantur, sive vastentur? Quod ad me, aut vehementer erro, aut verum est, quod hanc qui doctrinam sequuti sunt, ita gesserunt se non rati ratiocinationibus illam, observationibusque niti, sed necessitate coacti, quod putaverunt nempe ad permutationem solummodo foetus confugiendo, neque ullo alio pacto, possibile fore organicarum in usque adhuc ventilatis tumoribus cisticis abditarum partium originem explicare. Istaque prima positio alteram necessario requirebat, causas videlicet permutationis foetus. Hae vero causae ignorantur, earumque agendi ratio aut nescitur, aut temere explanatur. Neque aliter accidere negotium poterat, cum ex eo tantum excogitatae sint, quod prima a positione efflagitabantur. Sed tantum abest, ut positio illa comprobata sit, ut quod in quaestione versatur, id pro certo statuere non

dubitet. Quid ergo mirum si eadem nihilominus remanet phenomenon caligine obvolutum?

Ast si opinio praedicta cisticorum hactenus consideratorum tumorum rationi tradendae impar est, infirmitatem multo magis, paupertatemque ostendit suam, ubi eos, qui aut dentem, aut pilos, aut ossicula tantum continent, illustrare conetur. Maximopere enim difficultates augerentur, quotiescumque censere vellemus cunctas organici corporis partes, praeter unam solum, vel duas, aut coactas, aut absumptas fuisse: adeo ut juxta opinionem hanc, quod solet, debetque ut plurimum evenire, id omnino inverteretur. Quo magis nempe simplicitatem adpta quaestio fuisset, obscurior eo magis fieret, ac difficilior. Argumentis praeterea usque adhuc expositis omissis, hujusmodi tumorum exempla aliquando virgines mulieres praebuerunt, qua de re *Baillieus*, atque *Rubinius* certiores nos reddiderunt (1), et quod magis est, masculini sexus individua idem saepenumero ostenderunt: idemque, sive mares fuerint, sive foeminae, et in lingua, et in orbita, atque in conjunctiva oculi, et in lacrymali caruncula, et in cerebro, et in glandula thyroidea, et in diaphragmate, et in anteriori mediastino, aliisque thoracis internis partibus, et in stomacho, et in hepate, et in intestino, et in mesenterio, et lumbaribus in vertebrae, et in cistifellea, et in renibus, et in urinaria vescica, et in omento, et in pharynge, et sub cute, et in musculo doctissimorum viro- rum observationes detexerunt (2). Quid ergo de foetus necessitate cogitandum? Nonne plurimis, variisque modo enumeratis partibus cunctis insidere foetus arbitrari licebit? Et sicuti humanum non dicam foetum, sed homo natus, adultusque plus quam triginta duos habere non solet dentes, cuidam ne foetui tumor a *Burdachio* commemoratus, et in quo dentes abdebantur tercenti, erit tribuendus? Quorum porro dentium a *Plouqueto* pervestigatorum pars maxima dentium humanorum formam praeseferebant, aliquot tantum ab ea recedentibus. In eodemque in-

(1) V. Giornale della Società Med. Chir. di Parma l. c.

(2) V. Malpighi. Op. et l. c. Giornale di Parma Vol. Cit. Lobstein. Traité d'Anatomie pathologique ec. T. 1. Burdach Traité de Physiologie ec. T. 8.

super tumore quaedam inerant substantiae dentium vitreae parvae micae cartilaginosa per fragmenta dispersae (1). Eruntque ne ad foetum referenda ossicula quamplurima, quae e multis, dissitisque sui corporis partibus famosa illa osteogena puella *Elisabeth Marina* aliquot per annos subinde expulerat? Eventus sane quidem singularis, mirandusque a D. *Josepho Menegazzio* medico oculatissimo visus, ab eo cum Societate Medico-chirurgica Parmensi, quae raritatis gratia typis tantum phoenomenum divulgavit, communicatus, atque non paucorum probabilis ingenii virorum ab fide, atque auctoritate sancitus. Illa initio ossicula variis ex nasi partibus, cui nonnullos ante annos e cisio lapsus, dum puella decennis erat, contusionem intulerat, sese irrumpere. Prima vero per narium cavum descendere, osseaque ramenta, furfuris instar, videri, quae tamen in ossis frustum amygdalae dimidiae persimile, spongiosum intus, aliquatenus extus densum, durumque cito evaserant, quorumque numerus in anni curriculo decem circiter octo fuerat. Permulta alia, idestque septuaginta circiter, forma, et magnitudine diversa ab externo nasi, digitumque sub sua e fronte origine exire: aliaque a gena, dextroque frontis latere. Ultra quadraginta, quorum aliquot binos longitudinis pollices, lineasque latitudinis tres habebant, per foramen supra mammam, propeque sternum hians, perque rimulas quasdam, quae foramen circumdabant illud, sibi viam aperire. Illorum crista laeva uni, internusque lateris ejusdem femoris condylus alteri exitum praebere. Aliisque denique, et anterior tibiae pars, et cubiti posterior, manusque vola aditum patefacere, ita ut ad illud usque, quo nuper laudatus *Menegazzius* observationem hanc cum Societate Medico-Chirurgica Parmensi communicaverat, anno videlicet 1810, tempus, ex puellae *Elisabeth Marinae* corpore, minoribus fragmentis posthabitis, centum, et quinquaginta sex ossicula sese eruerint. Magisque mirandum est, quod ossiculorum illorum aut carie erosum, aut foetidum, aut quomodocumque vitiatum apparuit nullum: quod in locis, unde prodierant, neque a propinquioribus, naturalibusque os-

(1) V. Burdach. Op. et Vol. cit. p. 279.

sibus separationis, neque in iisdem substantiae suae jacturae alicujus extiterunt indicia: quodque molliorum, sensibilibusque textuum hiatus, rimaeve locales utique inflammationis notas exhibuerunt, sed istae, elapso vix ossiculo, quin suppuratio accederet, evanescabant, sineque ea, novis ut deinceps ossiculis viam sternerent, occludebantur, ferme uti utero foetus, vaginae expellitur (1).

Ad aliam si porro observationem, de qua superius egi, verba convertantur, unguem ex osse pavonis mutilo prominentem commutatum utcumque, perturbative pavunculi reliquias fuisse quem nam dicere, ne dicam cogitare non puderet? Quamquam hocce circa pavonis unguem commentum, etiam si tantulum considereretur, non longius a veritate, aut a probabilitate refugere videretur, quam ab ea reapse abhorreat, ubi ejus ope tumorum cisticorum pilos, atque ossicula continentium ratio reddi vellet.

Altera ad verisimilitudinem propius accedit opinio, ob quam organicis partibus, quae in praedictis tumoribus latent, germen accomodatum, congruumque ortum praebuisse contenditur: dentis germen, si de dente: unguis, si de ungue quaestio sit. In quo tamen, meo saltem judicio, est habenda distinctio. Et profecto si germina ista hujusmodi fingere vellemus, ut antiquitus composita, atque absoluta, ex una ad alteram descendant generationem, et, postquam in lucem prodierint, eorum dimensiones omnes solummodo augeantur, easdem, quibus ita nuncupatum de evolutionibus systema obrutum est, insuperabiles difficultates offenderemus, juxta quod compositiora, ac praestantiora animalium individuorum germina in primae a D. O. M. creatae foeminae ovarii latebris tota omnino, atque universa latuisse nonnulli constituerant. Quin ad infamiores imo scopulos impelleremur. Siquidem etsi satis nobis lucis effulgeat, ne in foeminae nascentis ovariiis cuncta subsequentium generationum ex ea discendentium organica inesse germina credamus, investigationum tamen subtilitas, atque arduitas, quae-

(1) V. Giornale della Società Med. Chir. di Parma T. 9. p. 62-107
196.

stionibus ansam praebere posset, uti reapse potuit, permultis: dum circa peculiaria, simplicioraque, de quibus sermo nunc est, germina, maxime ubi quodam copioso numero involucri communi custodirentur, minus difficile foret illorum praesentiam detegere. Ideoque quod in filiae videtur, et in matris videretur, visumque in aviae, proaviaeque corpore fuisset; quibus sese de rebus certiore reddere unquam potuit nemo. Subsequens praeterea compositiorum, quibusque speciei propagatio suffulcitur, germinum evolutio, sat est, ut in foeminarum ovariis ponatur, illa vero, quae ad peculiaria, ac simpliciora pertinet germina, et in maribus, quin et in multis, dissitisque eorum partibus statui oporteret; permulta, indubiaeque cum sint facta, quae organicas jam exaratas productiones, quas ab ejusmodi germinibus originem ducere videretur, in multis, variisque corporum marium locis residere posse, clare, aperteque testantur. Postremoque quamvis ad legum, quas circa viventium creationem Infinita voluit Sapientia jubere, intelligentiam mortalium mentis imbecillitati extolli negatum sit, nihilo tamen secius in evolutionum ita dicto systemate internosci posset (multique doctissimi viri internoscere id potuisse existimaverunt) altissimum quoddam, maximique momenti magisterium, propter quod viventium multiplicatio firmetur, tutaque reddatur: altitudo, momentumque, cujus speciem de pilorum, dentium, ossiculorum, aliorumque hujusmodi fragmentorum organicorum propagatione nemo profecto animo sibi, ac cogitatione ne fingere quidem unquam posset.

Quapropter, ut ratio horum postremorum phaenomenorum aliqua feratur, puto equidem debere in auxilium, aut posse germina peculiaria, et congrua vocari. Ast item censeo binas, quae sequuntur, leges fore statuendas, quod nempe germina recens orta sint, quodque quarumdam, ut statum, in quo nos ea vidimus, ultimum attingant, transformationum seriem patientur. In prima, post res hactenus a me conscriptas, non morabor, cum earum naturale sit, levisque negotii consecrarium. Quod vero ad secundam, nuper memorati dentes ex. gr. (quos una cum pilis, aliisque hujusmodi organicis productionibus neotericorum nonnulli textuum accidentalium nomine insigniunt) dentes, inquam, isti iisdem, quibus dentes ordinarii, natura-

lesque obbediunt, formationis legibus obtemperant. Anatome enim pathologica inquirendo reperit, satisque nos docuit, utrosque quibusdam in utriculis inter se distinctis, succoque gelatinae notas referente, qui materies videtur, qua ali incipiant, repletis nidificare: in utrisque coronas radicibus praeire; atque utrorumque incrementum juxta quasdam certas temporis successiones, sive periodos perfici. Id quod tam verum est, ut, ubi dentes accidentales coacerventur multi, eorum ibi nonnulli sua ad primordia constitisse, paulo alii ulterius processisse, dentiumque, ut ajunt, lacteorum qualitates induisse, aliique ad absolutum, perfectumque vegetationis opus pervenisse videantur. Utrique demum eandem semper plus, minusve praeferunt conformationem, qua animantium, apud quae illi sese ostendunt, dentes donantur, neque ullum in humano genere dentium rite evolutorum, qui cetera ad animantia pertinere posse existimarentur, adest, quantum scio, exemplum (!). Quibus porro transformationibus accidentales et unguis obnoxii sunt. Ille siquidem, de quo loquutus jam fui, suum nondum exitum obtinuerat, intusque, uti dixi, lamina instruebatur, quae alia densiori lamina tegi incipiebat, proptereaquod hactenus ambae simul non coiverant, ut unum, idemque corpus constituerent: mutationes, quae sive in primitiva corporis formatione, sive dum unguem excipit alter deciduum, in naturalibus quoque usu unguibus veniunt.

Nunc vero quanam vi, atque virtute accidentales hujusmodi textus componantur, inquirendum foret. In quo longum ex una parte impendere deberem tempus, vestramque ex altera, Sodales, sapientiam injuria afficerem, si physiologicum, ex cujus accomodatione plausibilior phaenomenorum istorum explicatio manare mihi videtur, in medium vellem principium adducere. Idcirco satis mihi dicere sit, a doctissima antiquitate, maximeque a *Galeno* ad nostros usque dies vim vitae rectricem fuisse statutam, ob quam sanguis et solidescit, et partium solidarum constructionem adipiscitur, et in varios organicos te-

(1) V. Lobstein. Op. et Vol. C. p. 344, et seq. Meckel. Journal. Compl. du Diction. des sciences Méd. T. 4. p. 133.

xtus evadit, et qua musculus, nervus, membrana, qua os, et cellularis fit. Quae vis multis etsi diversisque fuerit vocata nominibus, natura tamen est semper ei procreatrix, sive plastica. Quae porro uti suetas juxta, naturalesque vitae leges textuum organicorum perpetuas resarcit jacturas, eorumque debitam mixtionem, debitamque formam asservat, ita de re-cta sua haud raro agendi ratione deflectens, abnormes, aut praeternaturales, de quibus hactenus verba feci, vegetationes edit, adeo ut vegetationes istae eandem habere perfectorum textuum rationem, quam bene constitutorum individuorum habent monstra mihi quodammodo videantur.

Superesset nunc, ut causae, ob quas hujusmodi vis plastica subit aberrationes, explanarentur. Qua in re fateamur oportet medicorum studia longius abesse, optatum ut finem fuerint consecuta. Est aliquis, qui animi pathemata, rudemque incusat victum, ac farinaceum. Quarum causarum alteram ex tot, qui hoc in orbe vitam degunt, hominibus nemo forsau (ut foelix, fortunatusque sit) effugere potest, neque tam facile est, neque fortasse possibile eam prorsus excludere. Altera vero, si quibusdam in hominibus, verbique gratia in jampridem memorata *Marianna Bonazzia*, quae pauper erat purgatrix, agere facile potuit, nullum profecto invenire posset apud illos locum, qui suaviter, lauteque vivunt, sicuti (contrario ut utar exemplo) mulier fuit, de qua supra laudatus scripsit *Guaraldus*, nobili genere nata, equisque, rhedisque dives, domesticoque theatro, in quo ipsa, tragoedias agendo, libentissime sibi, laetissimeque indulgebat (1). Procul dubio causae modo dictae ad nutritionis opus corrumpendum admodum valent. Ast universus damna ab iis lata vegetationis processus patiatur oportet, cum propter eas malis sanguis plus, minusve imbutus principiis componatur; qui porro sanguis, dum in solidum evadit vivum, non potest quin organa corporis cuncta similiter inquinet. Hoc vero multo magis generalis fluidarum, solidarumque partium perturbationis, quam peculiarium vegetationis quibusdam in corporis locis aberrationum,

(1) V. Guaraldi. Op. Cit.

cur nempe, et quomodo interdum istae in lingua, aliquando in mediastino, in ovariiis quandoque tantum fiant, rationem reddit. Quantum idcirco hujusmodi causarum actioni adhibeatur fides, non possumus, ut mihi videtur, quin locales etiam causas, quae congruentibus effectibus occasionem praebeant, in auxilium voceimus, quaeque porro, heu nimis! usque adhuc in tenebris versantur. Et profecto brevi vitae, morbique, quo supremum *Marianna* obiit *Bonazzia* diem, supra relata historiae specie nullum fas mihi fuit depromere argumentum, quod in mulieris illius ovario sinistro quomodo dentis, pilorumque formatio contigisset, me edoceret. Neque in aliis hujusmodi non paucis narrationibus, quas ego pro viribus perpendi, minus rem infauste successisse mihi libenter profiteor. Quae quidem difficultas praeter modum augetur, gigantisque instar extollitur, mentemque nostram perterret, ubi perpendamus non de simplici alicujus textus uberiori vegetatione (difficultates tunc enim neque tot, tantaeque, neque fortasse insuperabiles forent), sed de organi novi, ab eoque, in quod, ut ita dicam, inseritur toto coelo diversi formatione agi. Bonaeque nemo fidei in adeo saepe invocata *dispositione* acquiescere posset, quocum specioso verbo nil agimus aliud, nisi id ipsum, quod explicare vellemus, enuntiare, nostramque ignorantiam contegere, ita ut hoc etiam sub aspectu peculiare istas vis plasticae aberrationes inter, atque monstra convenientiam adesse mihi videtur, propterea quod occasionales monstrorum causae, sive ad animalia, sive ad vegetabilia pertineant, totam eodem scientiam nostram fugiunt pacto. Atque ex hoc latere *Paulino*, *Swietenioque* adstipulor: quorum alter in 1.^a Effemeridum Curiosorum Naturae Decade tumores cisticos corpora superius enuncleata continentes pertractans effatus est = *Mihi satius est discere, quam dicere* = Alter autem in suis de *Boherravii* aphorismis Commentariis scribere non dubitavit = *Sufficit enim medico novisse quid fiat in corpore, licet rationem facti non semper liquido intelligat* = Dico autem ex hoc tantum latere. Nam, universali istarum praeter naturae ordinem conditarum vegetationum generatione perspecta, non eas foetus reliquias, sed potius tamquam peculiare vis plasticae, proximosque effectus existimandos es-

se, doctrina, ni vehementer fallor, est, quae cum omnes hujusmodi usque adhuc cognitae observationes concordēs reddit, easque inter necessarium in it foedus, tum intellectui satis idoneae nostro ad satisfaciendum valet, et studiorum, laborumque nobis nostrorum haud vilem nobis mercedem persolvit.

TABULAE EXPLICATIO

TABULA III.

Fig. 1.

Apparatus uterinus

- A.* Tumor cisticus sinistro in ovario residens.
- B.* Tumor internus, sive interna ejusdem tumoris pars.
- C.* Tumor externus, sive externa ejusdem tumoris pars.
- D.* Constrictio, vel jugulatio, quae tumorem totum duos in tumores, vel duas in partes dirimere videbatur.
- E. E. E. E.* Ligamenti lati membrana crucis in modum secta.
- F.* Parva ossea, nonnullisque aculeis armata concretio dexteri ovarii faciei posteriori inhaerens.

Fig. 2.

Tumor totus ex cadavere erutus.

- G.* Interni tumoris cavum, in quo pili, et dens aspiciuntur.
- H. H. H.* Ejus cistis.
- I.* Tumor externus materie molli, lactique coagulato persimili, in quam plures pili immergebantur, repletus adhuc, et tumens.

Fig. 3.

Massa sebaceo-pilosa, quae in interni tumoris cavo *G.* *Fig. 2.* latebat.

Fig. 4.

Superius metatarsi pavunculi dimidium.

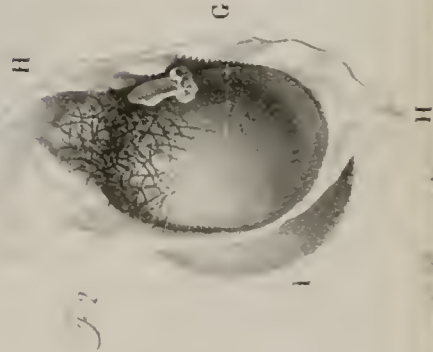
- A.* Unguis in ossis mutili extremo natus.
- B. B. B.* Abnormes osseae vegetationes, quibus fere tota ossis externa facies erat obducta.

Fig. 5.

Exterior unguis portio, seu lamina propter macerationem a portione interna disjuncta.

Fig. 6.

- C.* Unguis *A.* *Fig. 4.* interior portio, sive nucleus.





JOSEPHI BERTOLONII M. D.

IN ARCHIGYMNASIO BONONIENSIS BOTANICES PROFESSORIS

De Botyde silaceali, deque damno, quo afficit

Canuabin sativam L.

Unicuique notum est *Cannabim sativam* L. inter praecipuos agri Bononiensis redditus haberi; nullus igitur ibit inficias, notiūam omnem, quae culturae ejus perficiendae inserviat, animadversionibus nostris esse dignam, ut si quid utilitatis portendat, sedulo diligenterque amplectamur.

Haec ratio est, Collegae sapientissimi, cur hodie sermonem habere constitui de noxa quadam cannabis nostrae, quae magni momenti profecto mihi videtur. Quod si opem ferre malo huic consiliis meis valuerō, spero, fore ut sermonem meum, curasque meas de agriculturae nostra promovenda favorabiliter accipiat.

Cannabis sativa L. apud nos a verme quodam valdopere laborat, qui vermīs vulgo *bigatelle*, vel *tagliaticci da canapa* nuncupatur. Hic Junio, et Julio mensibus, cum plantae laetius vigent, et jam a terra insigniter extolluntur, corrodit caulem in parte inferiore ejus, cortice tantum illaeso. Quovis anno damnum ab hac corrosione proficiens majus vel minus est juxta majorem, vel minorem vermium evolutionem, sed ex observationibus a me repetito institutis in plagis diversis agri Bononiensis, et praesertim in viciniis oppidi nostri nunquam deest, quod cum maximum est, tertiam circiter redditus partem absumit. Rem hanc observationibus suis alii quoque confirmarunt, quos inter juvat memorare Antonium Santagatani collegam nostrum spectatissimum, et in Archigymnasio Bononiensi chymiac

professorem, et Alexandrum Zucchinium civem nostrum meritissimum, quorum uterque doctrinas de agricoltatione late extensas possidet, hisque inter caeteros enitet. Quin imo Zucchinus certum me fecit, damnum, de quo sermo est, in pinguioribus agris plusquam tertiam redditus partem saepe sibi vindicare.

Statim ac aerumna isthaec mihi innotuit, de cognoscenda eruca, quae erat mali causa, cogitavi, cum nullus auctor, quod sciam, illam nuntiaverit, vel descripserit; putavi enim, detectis moribus, atque metamorphosis huius erucæ, me facilius posse opem damno afferre, vel etiam radicitus tollere. Erat Julius mensis anni 1838., cum primum reperi inter sata cannabis erucas penitus evolutas, quarum aliae jam in aureliam transierant, evulsisque plantis, intra quas et vermes, et aureliae degebant, eas domum attuli, et animalcula sub crystallo diligenter custodivi, paucisque praeterlapsis diebus, insectum perfectum obtinui, quod *Botydem silacealem* esse facile dignovi.

Rem aperui viris clarissimis Bonafouxio, et Passerinio, qui quidem animal hoc nocere alii plantae, quae magnae utilitatis in Italia est, sciverant, non sciverant cannabi, meque impulerunt, ut plenam de evolutione, et moribus ejus historiam palam facerem. Antea vero quam ad rem devenirem, tutius duxi observationes meas repetere, ut quo tempore eruca nascitur, quo tempore insectum ova ponit, si fieri posset, detegerem.

Descriptio erucæ *Botydis silacealis*.

Eruca longa centimetrum cum dimidio, lata paulo ultra duos millimetros, utrinque in extremitatibus attenuata, sed magis in posteriore. Constat annulis duodecim (Tab. IV. fig. 1. 2.). Caput fuscum, nitens. Corpus nunc magis, nunc minus sordide album, semidiaphanum praesertim in annulo secundo, et in parte anteriore annuli tertii. Unusquisque trium annulorum capiti proximorum instructus crusculis duobus magis fusciscentibus, quam caput, apice valde attenuatis, quorum articuli saturatius colorati. Annulus quartus,

et quintus apodi; sextus, septimus, octavus, et nonus habent cruscula, sed formae a prioribus longe diversae, cum referant tentacula cylindrica apice truncato; reliqui posteriores annuli, ultimo excepto, iterum apodi; novissimus habet tentacula duo pone, extrorsum versa. Annulus secundus a capite fert in parte media superiore semicirculum pellucidum oris saturatoribus; prope latera hujus semicirculi utrinque sunt maculae duae nigrae, quarum anterior grandior; in lateribus vero annuli habentur puncta duo fuscescentia, anteriore majore, posteriore ocellato. Reliqui annuli superius, et anterius notantur maculis quatuor rotundis, serie recta transverse dispositis (Tab. IV. fig. 2.), sed maculae duae mediae magis distant inter se, ex quo animal per totam longitudinem suam mediam carens maculis, et semipellucidum conspicitur. Maculae istae omnes ocellatae, instructaeque puncto uno, vel duobus, nigris, pilum ferentibus. Insuper singuli annuli, quotquot sunt a tertio ad penultimum, ferunt sex alias minores maculas ocellatas, quarum duae pone seriem anticam jam descriptam, e quatuor reliquis duae in quovis latere, atque superior ex his inferiore minor. In parte inferiore corporis quivis annulus habet puncta duo lateralia ocellata, coloris aliquantisper fuscescentis, quorum exterius grandius est. Qui vero annuli apodi sunt, vel tentaculis carent, pro punctis ferunt quatuor maculas parvas vix ac ne vix quidem fuscescentes, quae seriem transversam efficiunt. Annulus extremus abit in parte postica in tentacula duo extrorsum valde protracta, inter quae stat anus. Erucae masculae sunt minores, et magis fuscae; femineae vero majores, et pallidiores.

Eruca haec valde vivida, quocumque loco tangatur, cito movetur; si id fiat anterius, tunc animal retrahitur, si posterius, tunc agit antrorsum. Primo intuitu valde refert cruculas albescentes, quae in fructu pyri, vel mali saepe reperiuntur. Plerumque solitaria est in internodio fistuloso cannabis, raro duae simul occurrunt, degitque in ea caulis parte, quae attollitur a terra non minus pede, neque ultra pedes duos. Cum planta laesa est ab eruca, statim id ostendit ostiolum, per quod animal ingressum est; vulnus solutionem conti-

nuitatis in textu plantae necessario ducit, tuncque pars superior caulis infirmata deflectitur, angulumque cum parte inferiore efficit, et ostiolum ipsum tegit. Campus, qui hanc aerumnam late passus est, plurimas plantas ita refractas, quas agricolae nostri *scavezze* dicunt, prae se fert, praeterquam quod eadem supra vulnus foliis fere orbantur. Eruca in plantam ingressa nunquam, aut rarissime recedit, neque in aliam transit ejusdem caulis partem. Plerumque eam reperi in fistula caulina, quae infra vulnus est, scilicet in illa, quae hactenus vivit, et succo saliente irroratur. Dignum quoque observatu est, epidermidem plantae hic loci mortuam tamen non esse corrosam; idem dicatur de fibris epidermidi statim subpositis, quae filum canuabinum (*tiglio*) suppeditant; quare eruca lignum caulis tantum rodit, et destruit. In vulnere plantarum valde luxuriantium mihi observare contigit excrescentiam amorpham saccharo crystallato similem, quam quidem ego puto quodammodo referre gallas insectorum, quae in aliis stirpibus gignuntur.

Eruca haec vivit sexdecim, aut viginti dies occlusa intra fistulam, quam descripsi. Re quidem vera tempestate nunc praeterlapsa reperi primas erucas plene evolutas ad dimidium Junii in campis *di Gesso*, qui secus torrentem Lavinum sunt, dum nullae aliae hactenus prodierant in campis planitiei ad S. Donatum. Vidi autem ad Quint. Non. Jul. in arvis inter *Gesso*, et *Zolla* easdem erucas jam in aureliam mutatas. Ex quo novi, omnes erucas non uno eodemque tempore evolvi; at quae tardius erumpunt, transire in aureliam fere ad XIII. Kal. August., quam rem jam observaveram in campis *del Meloncello*. Quare metamorphosis totius gentis dies fere viginti perdurat, scilicet a Kal. Jul. ad XIII Kal. Aug., et fit in ipsa fistula, quam eruca incoluerat. Prodiens vero aurelia exuit vestem novissimam, quae semper remanet intra fistulam statim sub ipsa aurelia. Haec vestis, qua parte caput animalculi tegebat, tota corrugata est. Unum caput animalculi pristiuam formam in metamorphosi retinet.

AURELIA

Longitudo, et latitudo aureliae eadem ac erucae, sed crassities in parte antica paulo major, dum extremitas posterior acutior (fig. 3.). Tota coloris castaneo-fusci est; situm verticalem tenet intra fistulam cannabis, capite sursum verso. Parte sua postica haeret parietibus fistulae ope telae arachnoideae albae praetenuis, quam eruca ante metamorphosim suam texuit folliculi modo, sed folliculi imperfecti. Quare si fistula quoquo pacto dilatetur, tunc aurelia pondere ipso suo retroflectitur. Infra animal coacervantur excrementa ejus, quorum pauca degunt quoque circa abrasam caulis partem (fig. 3.). Haec aurelia adeo vivax est, ut vix ac ne vix quidem tacta contorqueatur; degit in statu suo decem vel duodecim dies; quibus elapsis, in insectum perfectum transmutatur.

INSECTUM PERFECTUM.

Botys silacealis Treitsch.

Mas, et foemina hujus speciei adeo differunt colore, et maculis alarum, ut Hubnerus pro speciebus diversis habuerit. Vocavit autem marem nomine *Pyralis silacealis*, et figura 94. Pyralidum repraesentavit; foeminam dixit *Pyralim nubilalem*, et fig. 116. exhibuit. Treitscherus ante alios detexit errorem Hubneri, et novit quoque, erucam hujus insecti inhabitare caulem Lupuli; quare et metamorphoses ejus observasse palam est.

Mas. (fig. 4.). Caput, antennae, scutum, abdomen, crura pallide lutescunt. Oculi nigri. Latitudo, alis distentis, duorum centimetrorum cum dimidio, longitudo centimetri cum dimidio. Alae superius ex fusco quidquam purpurantes, basi et margine pallentes. Omnes notantur zona flava, transversa, interrupta, flexuosa praesertim in ala anteriore, quae macula incipit a margine externo hujus alae, et desinit fere in margine postico alae inferioris; praeterea in alis an-

ticis sunt maculae duae flavo-pallidae inter hanc zonam, et basim alae, quarum anterior paulo grandior, et praeter has maculas quaedam venulae ejusdem coloris serpunt. Omnes alae in facie inferiore sunt ejusdem coloris, ac in facie superiore, quamvis minus fuscis, vixque ibi apparet zona illa transversa, quae adeo manifesta est in facie superiore.

Foem. Paulo grandior mare. Antennae, caput, scutum, abdomen, crura pallide lutescunt ut in illo, sicuti et oculi nigrescunt. Alae coloris pallide flavi in viridem pistacium vergentis, limbis lateralibus, et praesertim angulo externo laeviter fuscis. Quaevis ala anterior notatur lineis tribus transversis, fuscis, flexuosis, longis, prout ala lata est. Harum exterior regulariter flectitur formà, quae dicitur a *zig-zag*; reliquae duae flexibus tam regularibus carent; tertia, sive interior, est omnium brevior, quia basi alae proximior. Linea secunda, et tertia eo magis divergunt inter se, quo propinquiores fiunt unargini anteriori alae; inter easdem est punctum fuscum interius, et lineola transversa exterior ejusdem coloris. Ex descriptis linearum transversarum flexibus ala videtur veluti irregulariter reticulata. Alae inferiores duas tantum lineas transversas, fuscas, et magis regulariter flexuosas exhibent. Caeterum omnes alae, quot quot sunt, subtus eodem colore inficiuntur, ac supra; lineae quoque ibi transparent, sed veluti in umbra, nec ullus flexus in eis detegitur.

Julio decedente papiliones isti copiosissimi occurrunt in cannabi, praesertim quo loco plantae confertiores sunt, neque inde facile discedunt. Volatus eorum interruptus, irregularis. Plerumque in inferiore foliorum pagina consistunt; ideo quiescentes dorsum terrae, ventrem coelo obvertunt, atque in hoc statu alas ita accomodant, ut hae triangulum efficiant (fig. 5.), quod plurium papilionum nocturnorum quiescentium proprium est.

Nunquam videre potui foeminas cum maribus copulatas, nec easdem ova ponentes.

Haec sunt, quae ad formas, et mores *Botydis silacalis* pertinent, cum animal hoc degit in cannabi. Figuram ejus descriptioni addere utile duxi, ut agricolae nostri facilius di-

gnoscant; systematicorum enim figurae hactenus non exhibuerunt formas omnes, quas animal induit in metamorphosis suis. Item auctores nostri, qui scripserunt de hoc insecto, veluti alii, diversaeque plantae infenso, easdem metamorphoses non noverunt, ideo nec figuris monstrarunt.

Ab eo tempore, quo hasce meas investigationes suscepi, constanter observavi, insectum hoc in omnibus agris cannabi satis, et a me lustratis quotannis stato tempore evolvi, quae res omnino convenit cum observatione veterum agricularum nostrorum, necnon cum observationibus ab Equ. Aloysio Davia, et a Francisco Guidalotto diligenter institutis. Ager quicumque, quicumque locus, ubi cannabim serunt, huic aerumnae magis vel minus obnoxius est, sed terra pinguior, et huic culturae aptior multo magis ab insecto laborat. Quin imo in eodem rure contingit, ut, si qua parte cannabis recenter colatur, in hac minimum sit ab insecto damnum prae illa, in qua cannabis jam antea colebatur, et quae evolutioni insecti longe favorabilior.

Verum diligentissimi Zucchinius, et Bagnius jam memorati observarunt, animalculum hoc in planitie Bononiensi demissiori, quae cum sit alluvioni obnoxia, pinguiissima quoque ex hac fit, longe majori copia evolvi in sationibus primis, quam in serioribus, et redditum cannabis fere dimidio minorem obtineri in primis, quam in novissimis.

Quae res, cum primo intuitu adversari videatur iis, quae contingunt in campis urbi nostrae propinquieribus, nihilo tamen secius non ita distant, ut nequeant consociari. Nam in arvis ex alluvione repente pinguiissimis vigor, et vegetatio cannabis recens satae major, et promptior est culturae initio, major pariter evolutio insecti officientis, ideoque minor redditus cannabis. Contra vero in campis urbi propinquieribus, qui initio steriles, et qui egent operibus, et stercorationibus per plures annos repetetis ad cannabim uberime ferendam, vigor, et vegetatio plantae initio minor, minor evolutio insecti, ideo redditus cannabis caeteris paribus major.

Agricolae nostri, cum viderint solum pinguius ferre copiosiores vermes, putant hos ab ipsa terra gigni, et ab hac

in caulem cannabis transire. Nos de hac opinione non mirabimur, cum veteres, et praesertim agricolae ita semper senserint de vermibus terrestribus cujuscunque generis, cumque sit notum omnibus, scholas ante Malpighium genesim equivocam sive ex putri animalibus tribuisse. Nec nos in refutando errore nostrorum diu inmorabimur, cum ad illos suadendos indicare sufficiat, insectum oriri ab ovo in cannabi deposito, idem pati metamorphoses suas intra cannabim, et totam vitam suam in cannabi degere, non in terra. Pinguis solum fert lactam cannabis segetem, et haec favet evolutioni insecti.

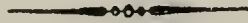
Superius monui, me nunquam vidisse foeminas ponentes ova; quare me latet quomodo ova haec superficiei cannabis haereant, sive id sit ope glutinis, sive alio pacto. Constat tantum ab examine caulis recenter vulnerati, insectum viam in caulem sibi sternere per foramen, ideo hoc ab externa superficie ad interiora pervenire, et, vulnere inlato, mortem plantae asserre.

Expositis iis, quae observavi de hoc animalculo cannabi tam infenso, restat, ut qua ratione vel penitus destrui, vel saltem numerus ejus imminui possit, breviter attingam. Prima igitur, et praecipua cura erit, ut cito evellantur, et a campo auferantur plantae omnes, quae erucam, vel anreliam hujus insecti fovent, idque fieri debet inter V. Non. Jul. et XIII. Kal. August. Nulla difficultas in hoc opere peragendo est, aut si qua est, ea habeatur in suadendis agricolis, ut peragant. At, quod summopere interest, evellendae plantae qua late patet ager, antequam insectum perficiatur, et foeminae ova ponant in caulibus, evulsaeque plantae statim cremandae. Hoc pacto numerus animalculorum nocentium imminuetur, sed forte non destruetur species, cum haec alias quoque plantas inhabitet. Treistcherns reperit in Lupulo. Ego suspicor eam incolere caulem Urticae, cum frequenter volitare viderim inter Urticas juxta se invicem crebre natas. In aliis pariter plantis, et praesertim in culmo fungoso *Zae Mays* nidulari certissimum est, quod quidem ipsemet observavi in campis cultis collium nostrorum *di Zolla*, vidique erucam in hoc culmo serius evolvi.

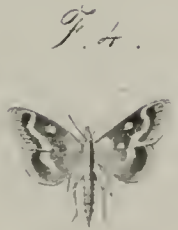
quam in canle *Cannabis sativae*; an id contigerit ex superiori generi, an potius ex generatione uno eodemque anno repetita, hactenus ignoro. Caesar Panantius e *Ronta* in Hetruria primus observavit sata *Zea Mays* plurimum ab eruca hujus insecti laborare, sed cuinam speciei eruca isthaec tribuenda esset, ignoravit; quare operae pretium duxit rem Academiae Georgophylorum Florentinae aperire, ut haec de specie quaereret, et de medela tantae noxae curaret. Postea, idest circa annum 1830, idem Panantius, Comes Guicciardinius, Marchio Ridolphius, et illustris Carolus Passerinius erucae isti colendae studuerunt, sed frustra; ideo nec speciem insecti hactenus cognoscere potuerunt, ut liquet ex dissertatione ejusdem Passerinii, cui titulus est = *Osservazioni e notizie relative alle larve pregiudicevoli alla pianta del Gran turco* =, quae lecta fuit coram Academia Georgophylorum Florentiae Quint. Id. Mart. ann. 1832. Novissime vero, idest anno 1833, Passerinius speciem determinare valuit, cum acceperit a Ferdinando Luciano de Castronovo, et de hoc monuit in scripto, cui titulus = *Rapporto fatto all' I. e R. Accademia de' Georgofili nel Luglio del 1833 intorno alla Memoria manoscritta del Signor Ferdinando Luciani* =, a quo scripto didicimus quoque, erucas hujus insecti in Hetruria hibernare intra culmos medullosos *Zae*, quos agricolae coacervatos relinquunt in agro. Quae res nos monet de culmis istis a campo auferendis, praesertim in arvis, ubi cannabis latius colitur. Ego vidi quoque insectum hoc hibernare in rachide spongiosa spicae, quae rachis cum seminibus suis passim servatur in horreo ad sationem usque veris insequentis. Haec igitur cito spolianda semine, et cito quoque cremanda. Denique Passerinius monet, culmum tritici corrumpi ab hoc, vel ab affini insecto, ita enim laborantem deprehendit anno 1836 in percelebri villa Meletensi Marchionis Ridolphii, tunc cum spica jam prodierat a culmo. Rem aperuit Academiae Georgophylorum in dissertatione lecta Quart. Kal. Febr. ann. 1837, et profecto magni esse momenti quisque videt, cum agatur de cereali victum praecipuum hominibus suppeditante.

Haec sunt, quae mihi contigit observare de ortu, metamorphosis, et moribus *Botydis silacealis*, deque damnis, quae eruca ejus affert *Cannabi sativae* in agro Bononiensi tam late, et tam utiliter cultae. Si remedium, quod contra malum proposui, aliquid utilitatis spondeat, videant, qui de agricolatione nostra impensius curant.

EXPLICATIO TABULAE IV.

Metamorphoses *Botydis silacealis*

- Fig. 1.* Eruca magnitudine naturali.
Fig. 2. Eruca supra magnitudinem naturalem aucta.
Fig. 3. Aurelia in situ naturali intra caulem cannabis.
Fig. 4. Mas in statu perfecto.
Fig. 5. Foemina in statu perfecto.



Metamorphoses Botydis silacealis.

C. Bettini ad nat. del. et in lap.

Lit. Bettini



J. JOSEPHI BIANCONI

DE ORIGINE CALORIS IN AQUIS THERMALIBUS

CONSIDERATIONES QUAEDAM.

Credo ego vos mirari, Academici praestantissimi, quod hodierna hac die sermonem habiturus accedam de Thermis, de argumento scilicet et perdifficili, et circa quod pene exhaustae videntur perquisitiones humani ingenii, cum innumeri, doctissimique Naturalis Historiae cultores, et Medici idem pertractaverint atque de eo scriptis mandaverint, prout de re potissima, quae tantum interest humani generis, et de quo est optime merita propter infirmitatum difficiliorum ac diuturniorum frequentem liberationem. At eo magis, ut puto, tum mirabimini, cum perspectum habeatis me, et Geologos, et Physicos invitare, ut tantum hucusque exagitatam quaestionem de earum calore in considerationem a communi consuetudine omnimode diversam recipere velint. Et vereor etiam ne forte me audaciae arguere debeatis; conjecturas enim meas supra principium physicum statuere aggredior, principium quod a pluribus, quod ego sciam, ne suspicatum quidem est, vel si qui de eo verbum aliquod fecerunt, id tantummodo fecere ut ostenderent et nullam omnino causam adhuc nos compertam habere, qua illius existentiam supponeremus, et experimentum nullum adduci hucusque posse, quo illud admittendum esse existimaretur. Sed considerationes quaedam circa Fontes thermales, et experimenta quaedam Fratris mei J. Baptistae auxilio instituta, me in opinionem hanc adduxerunt, scilicet quaedam argumenta adesse per quae prospera auspicia, si ita loqui fas est, desumi possunt circa existentiam hujusce physici Princi-

pri (quod jam sum vobis expositurus) atque potiori jure principium hocce adduci posse in quaestionem de Origine caloris in aquis thermalibus. Utrum rectae sint cogitationes meae circa hoc, nec ne, Vestrum erit judicium ferre: interim en argumenta, quae ad hanc sententiam me compulerunt.

Altero in opusculo (1), quod jam huic lectissimae Academiae exponere datum fuit, duas circumstantias ut ajunt, seu conditiones in Thermis occurrere solitum esse innuebam, quibus circumstantiis meus hodiernus sermo innititur, sunt autem haec: 1.^a Aquas thermales scaterere (quemadmodum observatio valde generalis importat) ex saxis solidis atque compactis, exemplo sint Granites, Gneissia, Porphyrites, Trachites etc.: 2.^a Earum scaturigines cum impetu, atque, ut ita dicam, cum ebullitione fieri. Prorumpunt enim, celeriter e rimis saxorum propulsatae ex aliquo Gas, quod eas in itinere suo comitatur, urgetque, atque inter tumultuosas exaestuationes in lucem emittit. Illibi rem tantummodo leviter attingi, haec vero idoneis argumentis et observationibus comprobari, et evolvi res expostulat.

Adducam igitur loca quaedam sive e scriptoribus Naturalis Historiae, sive e Viatoribus deprompta, inter innumera quae adduci possent ad demonstrandum generatim: aquas thermales exire e rimis saxorum solidorum, atque Gas quoddam eas concomitari.

« Thermales aquae proximae Monti *Dauphin* in Gallia exeunt ex Calcareo schistoideo in strata fere verticalia disposito, habentes viginti octo aut triginta gradus caloris Thermometri centigradi; atque ex iis evolvuntur bullae numerosae ac crebrae, licet intermittentes, Gas azoti, et acidi Carbonici. Haec Dominus Tripier (2).

« Thermae Ceylanicae ex solo quarzoso prorumpunt, temperaturam graduum quadraginta et unum Thermometri cent. habentes, et series bullarum aeris cum copiosa et assidua evo-

(1) Storia naturale dei terreni ardenti, dei Vulcani fangosi ec. Bologna 1839.

(2) Annales des mines. Ser. 3. T. 13. pag. 633.

lutione, ex quibusdam rimis, quae in ima putei parte conspiciuntur, emanat. Aer seu Gas erat Azotum fere purum « Haec Dominus H. Davy (1).

« Fons putei Caesaris loci dicti *Mont d'or* in Alvernia, exurgit scatens e rimis Porphyrei incessanter et valide exaestuans, atque jam notum est huiusmodi exaestuatio observari in plerisque aquis mineralibus calidis. « Haec Dominus Berthier (2) « Thermales aquae loci dicti *Onoto* in montibus vulgo *Cordilliere di Venezuela*, exsiliunt e Gneissio, gradus 44:5 caloris Th. cent. habentes, atque ex fundo uniuscujusque fontis ascendit identidem series bullarum aeris (Gas) Azoti; et similiter illae *di Mariara* (eadem in regione) exeunt e Gneissio, evolvunt Gas azotum purum, atque Thermometrum in quibusdam immersum ascendit ad gradus trigintaquatuor « Haec D. Boussingault (3). « Fontes calidi ad *Carlsbadt* sistunt in valle granitica, earum undae ascendunt violenter per crustam calcaream quam ipsae deponunt, indicant gradus 50. et 73. Th. cent. atque evoluitur Gas acidum Carbonicum » Haec D. Bertzèlius (4) « Thermae loci dicti Bourbon Lancy scatent ex colle cui saxum quarzosum lutescens haud perspicue in stratis divisum veruntamen fissuris et juncturis irregularibus plenum, pro basi est. Earum calor pertingit ad 41. 43. et 45 R. Aquae exsiliunt exaestuantes propter evolutionem Gas acidi carbonici « Haec habentur in Annalibus fodinarum (5) « Fons Cocomi secus viam *Popayan* in Nova Granata calida usque ad gradus 72:8 erumpit violenter e saxo trachytico, exhalans magna copia Gas Hydrogenium et acidum carbonicum « Haec denuo D. Boussingault (6) » Aquae Thermales aut tepentes Turcicae regionis semper in proximitate saxorum syeniticorum, trachyticorum, aut doleriticorum occurrunt; et Hydrogenio sul-

(1) Annales de Chimie etc. T. 23. pag. 270.

(2) Ann. des Min. Ser. 1. T. 7. pag. 203.

(3) Ann. des Min. Ser. 1. T. 9. pag. 364.

(4) Ibid. pag. 371.

(5) Ser. 2. T. 3. pag. 196.

(6) Annal. des min. Ser. 3. T. 5. pag. 526.

phurato sunt onustae, tum primum quando trachytis proximae sunt, quemadmodum ad Kostendil, ad Novibazar » etc. Haec D. Boué (1) « Fontes Thermales montium Pyreneorum relationem vere admirabilem habent cum Granitis hujusce cate-nae. Abundantia, et gradus caloris earumdem, eo sunt insi-gniores, quo magis ad Orientem quis vergit, ubi Granites a-bundantior quidem est. « Haec D. Forbes (2) « Ad *Ju-mnotri* Fontes thermales valde abundantes habentur ex Grani-to exsistentes; earum calor valde proximus ebullitioni habitus est, atque habemus unde credamus, ipsas gas quoddam evol-vere, ebulliunt enim pervalide « Tradit haec D. Labéche (3) « Pullulant aquae loci dicti Vichy e Gneissio et ex aliis sax-is primordialibus, atque murmurant in puteis in quibus reci-piuntur; 38, usque ad 45 gradus caloris tenent, secumque advehunt Gas acidi carbonici volumen fere duplum voluminis earum coelo quiescente, sed majori in copia diebus procello-sis. « Haec in Annalibus fodinarum (4) « Quarae aqua ca-lida in regione Mutinensi dum ab angustis saxorum erumpit, bullas per intervalla veluti aereas eructat « Haec D. Vallis-nerius (5) « Doctor Daubeny magnam partem Fontium calid-orum ex saxorum rimis exire ostendit (6), atque e Thermis generatim evolvi Gas Azotum etiam demonstravit (7) « Aquae regionis dictae *Moutiers* in Sabaudia exeunt e Schisto argilla-ceo, atque ex Phyllada paleata, cum exaestuatione, quam Gas acidum carbonicum operatur « Haec D. Brongniart (8) qui postquam plura circa fontes minerales collegerat, atque secun-dum terrena, e quibus eas exire videntur, distribuerat, haec infert 1.° aquas e terrenis primitivis (ut sunt Granites, Porphy-rites, Syenites, Gneissium Micaschystum etc. procedentes pro-

(1) Bullet. de la Soc. Géol. de France. T. 8. p. 57.

(2) Ibid. pag. 250.

(3) Manuel pag. 19.

(4) Ser. 1. T. 8. pag. 405.

(5) Opera T. 2. pag. 410. ed. Fol.

(6) Bukland. Géol. T. 1. pag. 501.

(7) Journal. de Géol. T. 2. pag. 113.

(8) Diction. Sc. Nat. Artic. *Selmarin*.

pe omnes esse thermales, atque ut plurimum gradu caloris satis eminenti donari; et substantias praedominantes, quas ipsae saepissime includunt, esse Gas Hydrogenium sulphuratum, acidum carbonicum liberum, sales, silicem etc. 2.º in terrenis sedimenti inferioris, et medii (et hujusmodi sunt Calcares plurimi, Macigni, Schisti ec.) reperiri etiam aquae valde calescentes. Acidum carbonicum adest, verumtamen rarius etc. 3.º aquas minerales terrenum sedimenti superioris (quemadmodum sunt Marnae, quaedam Granulariae, Macigni molles (*Mel-lasse*) Arenae, Argilla etc.) omnes habere calorem illi parem qui medius est in regione in qua exsurgunt, atque frigidae dicuntur per oppositionem cum aquis thermalibus. Demum notissimae nostrae Thermae Porrectanae ex rimis solidissimi macigni in stratus verticales dispositi exiliunt comitante atque impellente gas inflammabili.

Ad satietatem usque possem ego vobis tot alia testimonia naturalis historiae cultorum adducere, quibus probaretur Solum ex quo exsiliunt aquae thermales, perpetuo solidum esse atque compactum, semperque aliquod Gas eas in itinere suo concomitari. Pauca, quae vobis exhibui, non delecta, sed prima quae sese parabant collecta fuere; at centum et milia hujusmodi alia afferre possem, si iisdem opus esset; operarum enim scriptorum naturalis historiae pars major, de beneficiis Thermis verbum tenent, et in iisdem adnotatas saepissime circumstantias has haberetis, quamvis observationes de aquis thermalibus hucusque perhibitae principiis illis non propositis institutae fuerint; quae omnino ad hypothesim, quam vobis subjungam, essent conducentia. Aliis in operibus vero memorantur Gas et non Solum, aut Solum et non Gas; unde licet conjicere numerum factorum comprobantium amplio-rem latitudinem jam enunciatae observationis, eo quem cognoscimus, esse valde majorem.

Haud equidem ego eo usque conjecturas meas perducam, ut definiam quantum generalitatis habeat lex ista de origine aquarum calidarum e rimis saxorum solidorum comitante gas quoddam unius vel alterius naturae; sat mihi est ut vos pondus et pretium debitum huic legi tribuere possitis tum praesertim cum causam caloris Thermarum perquirere debeamus.

Atque ni fallor eo majori jure legem istam nobis studendam proponere debemus, cum considerare velimus facta nos habere, quae ostendant calorem aquarum in rationem, ut ajunt, directam existere velocitatis, atque abundantiae illius Gas, quod cum ipsis concurrit. Vallisnerius noster tradidit de Balneis Abani: pluribus in locis ejusdem ipsissimi fontis differentias esse haud parvi momenti, atque inter caeteras hanc observari, scilicet ubi aqua ex angustiis saxorum quasi per vim gemit, atque cum impetu exsurgit, ibi velocior Thermometrum adscendere, quam ubi immota quiescebat (1). In loco dicto *Chaudes-Aigues*, aquae gradus 88. habentes prorumpunt e saxo, seu ut vulgo dicitur *Roccia* primitiva; atque adnotatum est exsilire magna cum vehementia, atque causam, quae eas protrudit, cum vi impellere. Haec refert D. Berthier (2). Sen tandem redeuntes ad Porrectanas Thermas nostras (prout refert Ferdinandus Bassius) Fons Leonis dictus, 88 caloris gradus habet, Balneum reale 94, illud Martis 96, et illud Bovis 98; sed in Balneo Bovis (ipse dicit) prorumpit vapor accensibilis (Gas Hydrogenium) non solum incessanter, et magna copia, veruntamen cum impetu valde majori, quam aliis duobus in balneis, et in Fonte Leonis, in quibus similiter et caloris gradus inferior est.

Cum haec mecum ipse excogitarem, sic argumentari posse mihi videbatur. Numquid fieri potest quadam mera eventualitate assidue invicem concomitari saxa solida et Gas cum fontibus thermalibus? Quare conditiones hae duo tanta constantia sese in thermis ostendunt, si tamen ad earum existentiae essentiam non pertineant? Aut quomodo non earum essentiam pertingant si una aut altera deficiente fontes haud sunt thermales, et frigidae fiunt? Quomodo inficiari poterit eas partem bene multam habere in thermis cum ea ratione, qua crescunt, aut decrescunt velocitas et Gas cujusvis copia, eadem ratione temperatura aquarum augeatur, aut imminuatur?

Si igitur verum est aquis thermalibus aliquod influxum ma-

(1) Opera. Tom. 2.

(2) Journal des Min. T. 27. pag. 147.

nare, et quasdam modificationes venire ex peculiari qualitate saxorum, e quibus exsiliunt, atque ex praesentia quorundam Gas; considerationes aliae insuper horum agendi modos aperiant, atque ad conjiciendum adducunt quinam sint eorum effectus.

Ex his quae hucusque dicta sunt, manifestum est, ni fallor, aquas thermarum excurrere per canales efformatos a partibus saxorum, seu per rimas telluris. Iter earum quam sit longum ignoramus; potest tamen esse longissimum, cum Thermarum scaturigines habeamus per 2550 metra elatas super aequor oceani, cujusmodi sunt illae ad *Paypam* in America merid. (1), et alias per 3406,97,5 metra, quemadmodum sunt illae, quae ad *Iunnotri* prorumpunt, quae quidem fortasse non sunt prae omnibus excelsissimae. Veruntamen hae duo semitam percurrerent 2550, aut 3406 metrorum si ex aequore maris ortum ducerent: sed magna cum probabilitate credere possumus ad parem, ad duplam, ad triplam, majoremque profunditatem originem earum pertingere.

Cursus hic qui igitur praelongus esse potest, fit insuper in canalibus hermetice clausis. Etenim, est observatio praeclarissimi Geologi D. Alex. Brongniardt, cum gas Hydrogenium et acidum carbonicum sint in aquis thermalibus in quantitate, quae longe superat eam, quam imbibi, seu quam solvere possent per vim consuetam atmosphaerae, credendum est hujusmodi aquas validae compressionis ope hisce gas imbutas fuisse, et per canales optime clausos (*tres bien fermés*) diffluisse; ita ut pars illa horum gas quae excederet, quaeque dilui (ut ita dicam) in aquis non potuerat, inter viam evolare non posset. Istis gas, tali modo compressis, coadjuvantibus, aquae solutas sustentant, trahuntque substantias terreas, ac praesertim calcem carbonatam, quam illico deponunt statim ac perturbatio liquidi, et deficientia pressionis Gas evolare concedunt. Atque compressio haec nunquam certe haberetur si spiracula fuissent, quae aquis et gas exitus patefacerent.

Praeterea addendum est: Aquae cursus incessanter agitur

(1) Ann. des Min. Ser. 1. Tom. 7. pag. 197.

ac premitur ab impulsione Gasorum, in quorum societate ipsa iter suum perficit, quaeque Gas propter propriam naturam nec non propter compressionem quam in sinu terrae pati debent, quaerunt assidue, et saepe vi admiranda tum ad superficiem ascendere, tum ab angustiis in quibus ocludebantur, dissolvi, tum etiam per atmospheram exhalare: Urgent itaque ipsa Gas actione perenni, et compellunt ante se aquam, quae ad eorum exitum opponatur, atque eam inter angustias rimarum, et meatuum saxorum compactorum percurrere cogunt.

Nullus equidem, aut ego fallor, sese recusare poterit, quominus mecum in hoc conveniat, quod scilicet aquae in hujusmodi itinere nullo modo possunt quin pressionem et contretationem haud parvi momenti, contra parietes canalium quae eas continent, nec non contra semetipsas exercent: nullus contendere poterit hanc allisionem aut attritum (si ita nuncupari malit) extendi debere per integrum cursum, quem aquae ab initio e quo discedunt, usque ad os, e quo in lucem emittuntur, perficiunt: etenim vis impellens adeo elastica ut est Gas, non potest quin incessanter urgeat, semperque premat, ita ut quietas nunquam relinquat. Demum manifestum mihi videtur aquam hoc in itinere taliter se gerere ut allisionem seu attritum in longum productum atque violentum pati debeat.

Non ita fortasse omnes mecum acquiescere voluerint quoad suspicionem, quam mihi hujusmodi considerationibus percito, in mentem succurrit, videlicet Allisionem pressione comitante, sive Attritum (potens ille inter corpora solida caloris excitator) etiam in Thermis calorem infundere. Et revera, primo intuitu, equidem singulare habebitur quod corpus quemadmodum aqua, quae excessum ut ita dicam fluiditatis praesefert, effectum quoddam exhibere debeat proprium corporibus, quae sunt nullimode fluida; difficile fortasse apparebit quod fluidum illis legibus subsit, quibus solida, ideo quia solida sunt, subjacent; quod fluidum tandem tam renuens ad semet subjiciendum iis circumstantiis, quibus allisio cum pressione, seu attritus obtineri potest, subeat autem effectus illos ac mutationes sentiat illas, quae ab hac causa pendent. Veruntamen si mente ponderare velimus elementum attritus esse

pressionem, atque aquam sub dominio naturae, et supradictis circumstantiis suppositam, pressionem immensam pati; minus fortasse arduum fuerit hujus phoenomeni possibilitatem admittere.

Quidquid de hoc autem sit, mihi suspicio haec sese obtulit; at parum concipere proficiebat: quoniam ut eam merito amplecti possem, id necessarium fuerat cognosci an, sicut et in solidis, attritus calorem excitare valeret etiam et in liquidis, tum cum atteruntur violenter contra solida.

Audacem hanc opinionem communicavi vix enatam Fratri meo, cui propter studia physicae, quibus totis viribus deditus est, meliori jure erat perpendere. Cessit ipse desiderio meo, conjecturas meas examinandas accepit, atque omni cura ad experimenta quaedam sese dicavit, quibus difficile hoc physicae argumentum enucleare posset. Invenit atque confecit duo instrumenta, et tentamina plurima instituit, quae ad suspensiones meas confirmandas venire, quemadmodum ex eorum relatione cognoscetis.

Interea cupidus cognoscendi si quis cultor Physices hanc opinionem curasset, plurimos libros evolvere coepi, in quibus revera mea cum admiratione inveni ne unum quidem verbum fieri circa hoc non omnino impossibile nec inverosimile phoenomenon physicum. Duo tantummodo scriptorum opera ad manus meas pervenere, in quibus tamen, prout jam antea exposui, innuebatur haec quaestio, veruntamen solummodo ad ostendendam ejus difficultatem atque incertitudinem. Horum unum est magni ingenii hominis B. Franklin, qui haec ait « lamdiu observatum est attritum mutuum inter solida arida calorem suscitare: nunquam vero audivi similem effectum per simplicem agitationem fluidorum contra solida exoriri. Aqua per plures horas commota in canale molendini (versio gallica habet *tremie d' un mulin*) nullam caloris augmentationem recipit per id quod narratur » Aliud est clarissimi Lamark (1) qui hac habet = Ne unum quidem exemplum adduci potest in quo fluida exagitata etiam contra solida calorem exhibuerint nisi in decompositionis statu fuissent. =

(1) Recherches sur la chaleur. T. 2. Paris. an. 2. pag. 246.

Licet vota haec, certe magni ponderis, partim ad nostrum assumptum adversa fuissent, attamen tentamina quaedam incipere ausi sumus. Dixi autem partim contraria; etenim agitatio, atque commotio liquidorum contra solida, res longe diversa est ab attritu cum ictu aut pressione liquidorum contra solida. Veruntamen quantum facile est solidum contra solidum confricare, tantum difficile id est de liquido contra solidum; quapropter post plurima et varia experimenta, quae inutilia nobis fuere, duo tandem habuimus, e quibus indicia quaedam caloris evoluti accipere potuimus, cum duo diversa liquida attritui cum vi contra solida supposita fuissent.

Usus est itaque frater meus instrumento, quod delineatum habetis in Tab. IV.^a fig. 3 quodque constat fascia subtilis laminae auricalcicae quaeolvebatur circa semetipsam cum spira valde appressa. Unusquisque circulus spirae distabat a subsequente quantitate quadam determinata, ope duorum filorum auricalci, quae ad margines fasciae metallicaefixa sese inter omnes circulos spiralis ab una extremitate ad aliam interponebant; ita ut hac metodo canalis pervius per septem metra longus habitus est, atque latitudinis unius pollicis, et altitudinis vix per tertiam partem unius lineae. Cum igitur frater meus cogeret aquam per hunc canalem transcurrere, ipse consequebatur 1.^o exilem quantitatem aquae exhibere debuisse amplam superficiem, quae radere cogebatur latas parietes canalisis; 2.^o conservationem in siuu spiralis totius omnino caloris, si quis forte evolveretur per experimentum: 3.^o imitationem sane fidelem cursitationis aquarum thermalium, ad quas reapse imitandas apparatus hic praecipue instituebatur. Ad os externum descriptae spirae tubam (ut ajunt) adspirantem atque prementem apposuit, hac tamen cura ut tubus inter utrasque intercederet, in quo occludebatur Thermoscopium A B. cui munus erat indicare temperaturam aquae introeuntis in spira; et aliud Thermoscopium C D primo consonum, insinuabatur in puteolo centrali spiralis, quo dignoscebatur temperatura aquae exeuntis ex anfractibus spirae, postquam ejusdem circumvolutiones omnes percurrerat. Tubam compressabant tres homines; et aqua, quae haud parvam resistantiam opponebat, transibat per circulos spiralis, cum vi et conatu, atque ma-

gua cum velocitate. Inter plurimos quos habuimus experimentorum exitus, hos duos adnotabo.

Die quinta Februarii anno millesimo octingentesimo quadragesimo, cum atmosphaera gradus 7. et lin. 5 haberet, et temperatura machinae ante actionem esset 7 graduum, aquam lente ac sine vi Spiralem percurrere fecimus, quae in thermoscopio Tubae (seu antequam ingrederetur spiralem) gradus + 7:1 indicabat, et in therm. puteoli (seu postquam egressa fuerat) indicabat + 7:— . Post haec pressa aqua cum vi, et stante temperatura Thermosc. ingressiois ad gr. 7:1 habuimus in thermoscopio egressionis gradus 7:2 in prima compressione, gradus 7:4 in secunda, gradus similiter 7:4 in tertia et in quarta. Altero vero experimento septimo Februarii die habito, lineis duabus cum dimidio superior erat temperatura aquae egredientis, illa ingredientis; quae autem augmentatio per gradus eveniebat, et ratione compressionum quae fiebant in tuba. Adnotandum insuper est conatum aquae in interno spiralis metallicaе poros, rimulasque aperiisse in ejusdem superficie discoidali, e quibus quasi ros quidam exibat, qui eam madefaciebat, et cujus roris evaporatio necessario refrigerationem in apparatu promovere, et idcirco per semitam oppositam illi cui intendebamus, agere debebat. Nihilominus augmentationes, quas recensui, obtinimus.

Alter apparatus ad eundem finem propositus hoc alio modo a Fratre meo inventus est (Tab. IV.^a fig. 1. et 2.). Curas enim hac vice direxit ad obtinendam confricationem inter liquidum et solidum, cum motu rapidissimo solidi cujusdam in liquido immersi. Ut id assequeretur, supra longum axem metallicum disposuerat discum vitreum, cujus diametrum unius pollicis cum dimidio erat, qui que sistebat inter duos alios vitreos discos immobiles zona metallica circumcinctos, ad quam autem zonam Pila thermo-electrica adhaerebat quindecim elementis composita, et partem sentientem instrumenti efformabat. Communicatione autem statuta inter pilam et Galvanometrum, primo ipse curavit aqua adimplere tenuissimum spatium, quod intercedebat inter discum mobilem, et duos fixos; deinde maximam impressit velocitatem disco interno, attamen nullam temperaturae immutationem adnotatione dignam compertam ha-

buit: attamen dubium fuit de instrumenti aptitudine, ita ut nova de hoc experimenta sibi proposuerit. Postea vero oleum loco aquae posuit, et eandem sectando methodum, indicia minime aequivoca caloris evoluti emerferunt. Etenim cum Reofori immobiles manerent, deviationem in Galvanometrum per 18 gradus obtinuit, et cum accessionis et recessionis unius Reofori methodo usus esset, acus ad nonagesimum usque gradum processit.

Absit quod tantum nos hisce experimentis fidei tribuamus, ut eadem tamquam definitiva tradere velimus, cum de quaestione tam difficili et delicata agatur. Veruntamen ea nos physicarum disciplinarum cultoribus exhibemus tamquam invitationem, ut ipsi melioribus instrumentis, meliorique mente atque solertia aggredi velint tractationem argumenti, ex quo sperare licet et bonos quosdam effectus, et curriculum promittit plenum inventis et consequentiis scientiae quam colunt, opportunissimis. Idque eo magis quod alia etiam phaenomena ad has spes sustinendas adduci posse videantur. Etsi enim silentio praeteram calorem, qui exoritur tum cum efflatus Gas Hydrogenii spongiam platineam, carbonem, vitrum, pumicem etc. occurrit (quem autem Physici fortasse aliter, quam ex causa hicce exposita explicabunt), tantummodo innuendum credo experimentum cel. Gaylussac circa aerem, qui cum e recipiente quodam exiret per aliquem hiatum, quaevis fuerit compressio, qua premeretur, temperaturam suam non immutat quamvis dilatetur cum exeat e recipiente. Quod autem factum in hanc sententiam cl. Pouillet induxit (1) nempe » id indicare videri calorem produci in efflatu aeris, et hunc calorem eo validiorem esse quo major sit pressio quae efflatum producit; ita ut calor compensationem perexactam afferat ad frigus quod per expansionem oriri debet » (2). Ad id referendum

(1) *Traité de phys.* Tom. 1. pag. 422.

(2) Et aliud experimentum hic adducendum puto. Vescicam suinam in sacco inclusam aere implevit Frater meus, atque jacentem supposuit oneri librarum circiter quadraginta. Ad os adjunxerat tubum vitreum in filum oclusum desinens. Haec omnia quiescentiae dabat per horas 24, ut disperso calore aeris compressi, idem aer in equi-

insuper videtur phoenomenon Geologicum quod in Sicilia ad Terrapilatam prope *Caltanisseta* observatum fuit, videlicet; ex quibusdam soli rimis exeunt datis temporibus exhalationes Hydrogenii carbonati tanta cum vehementia, ut terram circumstantem tremere faciant, et calor, qui animadvertitur istis in rimis, proportionem habere cum rapiditate gas exeuntis videbatur. Similiter ni fallor recensendi sunt hic vulgo *Lagoni* Hebruriae, in quibus miranda vehementia effugiunt ex rimis terrae et Gas et vapores, quorum temperatura ut plurimum centum quadraginta graduum esse solet.

Geologis autem haec eadem exhibemus; merentur enim quod ab iis in considerationem excipiantur, tum quia quid habent commune cum quaestione circa originem caloris Thermanum, et has consociant cum pluribus phoenomenis, quae eas circumdant, tum quia pro ipsis quidem hypothesis haec, dummodo comprobata fuisset, ad consequentias altissimi momenti ascenderet.

Nunc vero per summa capita recensenda percurram quaedam, quae ad haec geologica referuntur.

Et primo quod spectat ad originem Fontium thermalium. Vidimus jam saxa vulgo *Roccae*, e quibus aquae calidae exsiliunt, solida esse, dura, atque ex eo genere quod dicebant primitiva, aut sedimenti inferioris et medii seu alia divisione nobis convenientiori, sunt in massa, ut ajunt, aut stratificata. Ea quae stratificata sunt, ad transitum aquarum exhibent intervalla, quae stratis singulis interponuntur, intervalla vero persaepe exilissima; exhibent aliis verbis canalia extensissimae superficiei, veruntamen luminis angustissimi, ita ut aqua, quae eadem percurrere debeat, expanditur et complanatur tali modo, ut quaevis ejus molecula, ut ita dicam, cogatur atterere,

librio cum atmosphaera ambiente veniret. Post id temporis leviter fracto apice sili vitrei, rapido efflatui aeris, qui inde exibat, opponerat elementa unius pilae Thermoelectricae, quae cum galvanometro conjuncta erat. Aer atterens elementa iisdem calorem participabat, unde acus galvanometri per gradus aliquot deviare (calorem versus) cogebat. Quoties experimentum fecimus, et pluries iterati sumus, toties caloris evoluti indicia haec manifestissima accepimus. Operabamur autem hyeme rigescente, cum aeris temperatura esset graduum +1.

et cum vi se confricare contra facies solidas stratorum: hoc itaque modo plane liquet actionem suppositi attritus, qui heic exoriri deberet, in maximo esset intensitatis suae, idque super minimam aquae quantitatem. Thermae nostrae Porrectanae, illae *Moutiers* in Sabaudia, aliaeque sunt hujusce generis. Attamen praetereundum minime fuerit id, quod per observationes saltem apparet, nempe Therinas in terrenis stratosi haud ita frequentes esse, quantum sunt in iis, quae in massa dicuntur; insuper observatum est, haud rarius inveniri iis in terrenis stratosi, quorum strata sunt verticalia, quam in horizontalibus: priorum sint exemplo Balnea Porrectae, Montis *Dauphin*, et alia. Id fortasse ex eo venit quod strata erecta facilem ingressum concedant Gas salientibus per earum rimas infernas ac sepultas, cum viceversa horizontalis stratificatio iis opponat, propter continuitatem suam, obstaculum impermeabile, nisi quaedam stratorum fractura, quaedam, ut ajunt gallici geologi, *faille*, ad semitam iis aperiendam non interveniat.

Terrena solida *in massa*, atque hoc cum vocabulo omnia illa comprehenduntur, quae stratis vere talibus carent, sintque ad exemplum Granites, Porphyrites, Trachytes, quidam calcarei, Euphotides, Serpentine etc, structuram habent vere persingularem. Exhibeo vobis, Ac. Sapientissimi, in Tab. IV.^a fig. 4. delineatum modum secundum quem hae Rocciae (ut ajunt) partiri solent, seu aliis verbis expressam dispositionem rimarum quae circumeunt in visceribus montium granitis, porphyritis etc. Hic perspicere licet fissuras sese invicem intersecantes angulatim, sed cum angulis cujuscumque mensurae, quae currentes per intrinsecum montium eo eodem modo quo hac in tabula effigiantur, secant ideo massam omnem montis atque dividunt tot in Polyedris, e quorum consociatione atque conjunctione quid consurgit integrum compactum solidissimum, et eodem tempore undique aquis permeabile. Videbitis hic insuper, si ex imo incipiatis, rimam aliquam sectantes vos posse per innumeras vias nulla interruptione ad summum, vel ad latera quomodo libeat pervenire: atque itidem percipietis tum Gas, tum aqua salientes posse non solummodo mille per oscula, curricula seu rimas ex imo inchoare, at vero

pariter posse ascendere, currere, expandere, atque ex innumeris locis montium exsilire. Haec demum fortasse una esse posset ex causis, per quam terrena, quae dicuntur primitiva adeo thermis abundant.

Rimae vero internae, seu canales, qui in interno Terrenorum *in massa* serpent, alia quidem considerata nobis proponunt. Ipsae etiam quasi ad similitudinem earum Terreni stratificati exhibent extensam superficiem, et minimum spatii propter parietum proximitatem; concedunt itaque transitum angustum, atque violentum venis aquarum, quae propulsatae a Gas eas percurrere debent. Veruntamen hi canales cum per tot partes discurrant, aquarum semitam longiorem efficiunt, ita ut iter quod supra ad metra 2550 computatum est supra maris aequor, certe non esset hujus tantummodo dimensionis iis aquis, quae in sinu terrenorum *in massa* percurrere debent; at potest augeri per diversiones rimarum, potest duplicari, et amplius etiam fortasse. Id animadvertendum censui, quoniam cum hoc suppositum attritum aquae contra parietes canalium in longum producat, eodem tempore, et in longum produceret actionem, quam credimus, calefacientem: et consequenter temperaturam eo majorem afferret iis aquarum venis quae longiorem curriculum perlustrarunt. Quae quidem consideratio opposita omnino est opinioni clarissimorum Bousingault, et Lecoq, qui cum tribuant igni centrali calorem Thermarum, concludunt ideo quo ipsae remotiores sunt ab hoc centro, eo magis calore depauperari debere, ita calidiores esse debeant Thermae, quae in littore maris exsiliunt, minus calidae quae oriuntur e montibus minoribus, et minus etiam illae, quae e rimis montium majoris proceritatis scatent. Adducunt itaque ad comprobationem suae sententiae tres illos fontes calidos, qui in montibus Americae *le Cordilliere* occurrunt, quorum unus ad *Trincheras* quasi in imo littore maris habet gradus 97°; alter ad Mariara per 676 metra elatus habet gradus 64°, et tertius ad Onoto per 702 metra supra maris aequor excelsus habet gr. 44.5. (1). Sed eorum

(1) Lecoq. Hydrograph. T. 2. pag. 29.

considerationi subjiemus fontem thermalem ad *Paipa*, qui certe longe elatior est, cum ad 2550 metra sistat, attamen gradus 73 attingit, et eo magis illum qui est ad *Iumnotri*, qui cum 10,483 pedes extollatur supra aequor Oceani, gaudet nihilominus temperatura ebullitioni proxima (1).

Alia quidem consideratio sese exhibet, scilicet: eo modo quo solidum potest excurrere diu per longum iter supra altero solido, nullum, aut parvum calorem ex hoc concipiens, dummodo lento gradu moveatur, et vicissim multum ei venire potest, si velociter currat cum attritu: sic haud dissimiliter si aqua in interno canalium seu rimarum saxorum (*Rocce*) leniter eat, nec pressa a Gas, potest calorem alicujus momenti non acquirere, et ideo venas aquae rigentis producere, quae etiam e montibus Granitosis Porphyrificis etc. decolant: dum e contra plurimum caloris acquirere posset, si velociter per angustias illas discurreret; immo tantum conciperet quanta esset velocitas et longitudo itineris sui. Et id comprobari reapse videtur ex quibusdam observationibus superne allatis, idest majus haberi caloris in iis Thermis Abani, quae majori impetu protruduntur, Vallisnerio referente: elatiorem temperaturam haberi in aquis ad *Chaud-Aigues*, quae magna cum velocitate discurrunt, ut refert D. Berthier; et demum temperaturam Balnei Bovis ad Porrectam insigniorem esse, quam in Balneis circumstantibus, ex quo itidem majori cum impetu Gas et aqua prorumpunt, quemadmodum narrat noster Ferdinandus Bassi. (2)

Fateor me inter tenebras, quae adhuc obvolvunt exorientem hanc opinionem, ignorare, utrum aqua dum pressionem validam pati debeat, et dum idcirco attritus ei exercendus sit super solidas parietes saxorum, qualitates particulares adipiscatur, per quas aliqua mineralia solvere valeat, quae soluta secum in Thermis adducit, et quae minime, aut difficilius valet, cum in consueto suo statu consistat, scilicet haud compressa, haud calefacta etc. Observationes vero quaedam ad hoc subjectum illustrandum accedunt; ex. gr. Aqua multum

(1) Labéche Manuel.

(2) Delle Terme Porrettane.

caefacta, et costipata in recipiente quodam valido, potis est et vitrum rodere, et silicem solvere copia multo majori ea, quam Bergmann observavit dissolvi ab aqua frigescente. Igitur potis est aqua in canalibus seu rimis saxorum, ubi calorem et pressuram bene graviorem sentit iis, quos in nostris ahenis, ut ajunt, *a vapore* patitur, potis est, dicam rodere, et solvere silicem saxorum inter quae transit: hocce autem modo explicationem quamdam haberemus circa abundantiam depositorum silicis, non dicam eorum Geysers in Islandia, quae prodigiosa prope dicenda, attamen illorum ad Mariara, ad Onoto, ad Popayan, ad Neris etc. Ad hanc similiter causam, sed eo magis ad dissolubilitatem, quam adipiscitur Carbonatum calcare, cum propter actionem Gas acidi carbonici transit ad Bicarbonatum, fortasse debetur calx illa carbonata quam copiose solutam habemus tantis in aquis, quamque ipsae deponunt vix ut in lucem prodierint, quia gas acidum carbonicum, quod ad ejusdem solutionem concurrebat, evolavit.

Ego vero ultra procedere minime audeo. Quaestiones caeterae spinis confertae, de aliis substantiis, quae dominantur plus minusve generatim in thermis, et quibus operam accuratissimam dederunt Chemici plurimi, praesertim autem cl. noster Professor Caj. Sgarzi, meum argumentum non attingunt. Et quamvis eam opinionem tenerem, ut quid luminis cuidam earum ex hoc singulari modo considerandi originem fontium thermalium, venire putarem, mitto tamen quae inde descendere viderentur.

Mitto pariter quominus aggrediar inquisitionem qualitatum Gas, quae in thermis operantur, nec non eorum originis, et loci e quo exsurgunt. Hoc non egerimus. Sufficiet enim nobis, ut in Thermis adsit fluidus hic aeriformis, hic motor, qui sua cum elasticitate, et cum sua propensione ad ascensionem, premat, impulset, atque motum imprimat aquis per angustias et fissuras montium. Hoc autem, vel alterum sit Gas, parum interest. Hypotesis haec, cum satis solido fundamento gauderet, phaenomenon Fontium thermalium ad id simplicitatis afferret, ut sufficeret ad hujusmodi fontes calidos producendos filum Gas cujusvis ascendentis, et venula aquae frigidae descendentis, quae cum in currentem gasosam incideret, ab hac

propulsaretur, et in cursum violentum agigaretur inter angustos meatus saxorum solidorum. Cui considerationi aquarum descendentiū mentem apponere possent ii, qui existentiam principiorum animalium et vegetabilium in aquis thermalibus admirantur.

Hucusque de origine fontium thermalium. At argumentum majoris sane momenti sese exhibet examinandum Geologis, cum calor aquarum thermalium repetendus esset ex causa quae sita esset etiam in externa Telluris cortice, aut paulo intus. Suppositus calor centralis, ut ajunt, quem facta adhuc non satis firma defendunt, et qui tenet calorem thermarum quasi quid suum, et quemadmodum demonstrationem suae existentiae, obstaculum haud leve in hac hypothese occurreret, quae eidem fulcrum cujusdam ponderis surriperet. Hypothesis ignis centralis, quam quidam ad explicandam aquarum thermalium originem adducunt, nescio utrum tantum praebet, quantum, ut mihi videtur, sese praebet opinio confricationis cum pressione liquidorum contra solidos.

Non ego tamen audeam rejicere tamquam inadmissibilem influentiam caloris terrestri in thermis; absit insuper quod ego judicem prout insubsistentes causas alias, quae pro origine phoenomeni hujus adscribuntur. Theoria Doctoris Daubeny, aliorumque qui idem censent effectum Vulcanorum, potest quidem haud raro applicationem recipere in locis proximis vulcanis sive ardentibus, sive quiescentibus. Veruntamen auctoritate utor Doctoris Boubée, qui fatetur thermales aquas omnibus fere in regionibus occurrere, et saepe longissime ab omni vulcanico loco: sint ad exemplum (ipse ait) illae quae prorumpunt in Pyrenaeis, et in Alpibus, montium catenae in quibus nullum vulcanicum indicium perspicitur (1) nosque difficulter fortassis existimare possemus ignitum Vulcanum, aut sopitum thermis nostris Porrectanis, aut aliis Appennini thermis suppositum. Origines item circa Pyrites efflorescentes, circa compositiones, et decompositiones chemicas, circa electricitatis interventum etc. possunt quibusdam in

(1) Cours abrégé de Géol. pag. 40.

circumstantiis ad suscitationem caloris Thermarum conferre. Attamen aut ego fallor, mihi videtur inter causas, quae huic phoenomeno assignantur, illa quae universalitatem majorem praesferat, quae cuique terreno aptetur sive plutonico, sive neptunico, dummodo sit solidum; illa quae consona sit ad uniformitatem Thermarum quacumque ratione (quae uniformitas quibusdam in fontibus perseverat, quod sciamus, per decem et octo saecula et ultra, cujusmodi sunt Thermae ad *Aix* in Provincia) illa causa mihi videtur, quam hic exposui: quam autem si causam unicam nolint, esse tamen poterit concausa, atque ad praestans phoenomenon Thermarum producendum concurrere poterit.

Ne miremini modo, Accad. praestantissimi, factum illud physicum caloris evoluti propter attritum et pressionem liquidorum contra solida corpora effugisse perquisitionibus Physicorum. Etenim si haud parvae difficultatis est hoc obtinere ope instrumentorum ad id constructorum, perraro insuper in Natura occurrit. Requiritur enim ut liquidum clausum sit in interno canalium, ut ex impellenti vi cogatur ad eos percurrere cum conatu, et reagendo contra eorum parietes. Quae duae conditiones obveniunt in Fontibus Thermalibus, prout exposui, et in regno inorganico (quod ego sciam) non amplius. Attamen alter locus quo obveniant hae circumstantiae (unicus tamen et ipse, si recte novi) in regno animalium occurrit, in sanguine, in quo similiter et calor succurrit. Non me sane laetet calori hujusmodi varias probatissimas explicationes tribui: at verum est similiter discordantes valde esse sententias doctorum, atque horum quidam (communiter mechanici appellati) huic nostrae theoriae confugium habuisse, licet nullis experimentis eam comprobarint; nec non pariter verum est eam opinionem, quae pluribus suffragiis donatur, illa nempe evolutionis caloris animalis propter respirationem, non omnino problemati satisfacere, quoniam operatio haec praebere non potest nisi $\frac{8}{10}$, aut $\frac{9}{10}$ quantitatis caloris, qui amittitur, quemadmodum patet ex laboriosis observationibus D. Dulong. Hac igitur de causa jam citatus cl. Pouillet fassus est = *videri idcirco in animalibus praeter respirationem, alium quidem*

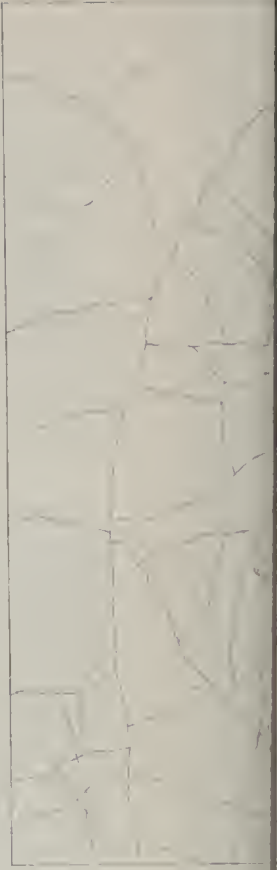
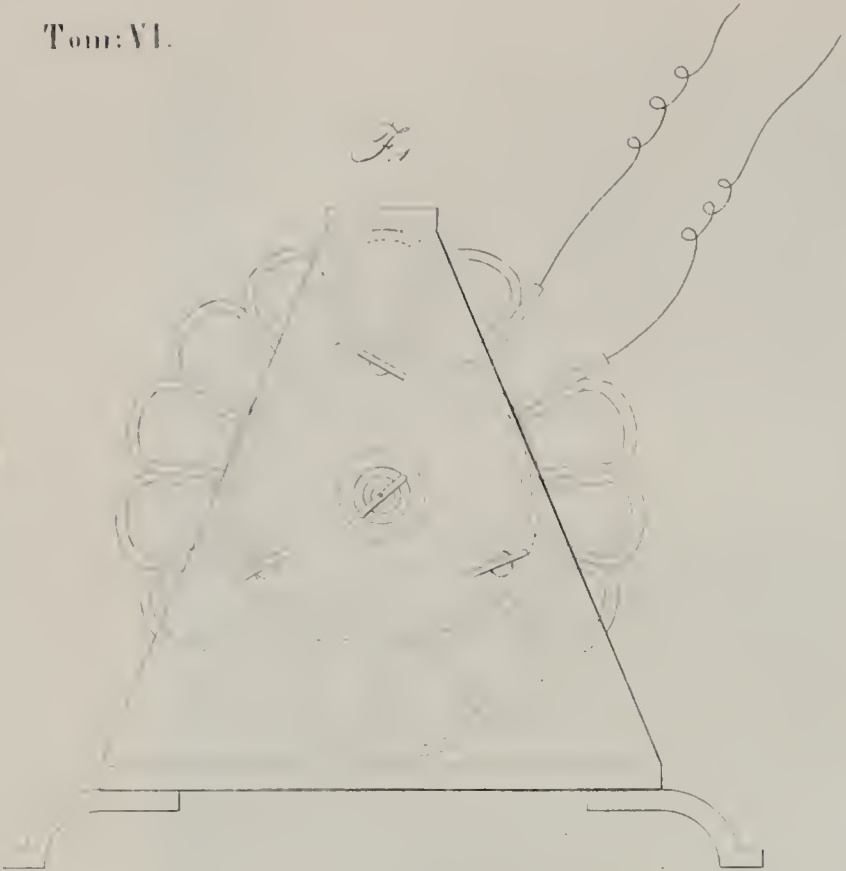
adesse fontem caloris (1). Et D.^{nus} Milne-Edwards haud secus haec tradidit » Actio sanguinis supra organa, videtur pariter necessario requiri ad manifestationem hujusce phoenomeni (caloris animalis); suspensionem enim circulationis liquidi hujus in quavis corporis parte, subsequitur frigus ejusdem partis; relatio insuper digna, quae notetur adest inter facultatem producendi calorem in variis animalibus, et divitiam sanguinis eorum. Aves quae inter omnia animalia ea sunt, quibus temperatura elatissima est, sunt etiam illa, quorum sanguis est onustior particularum solidarum, dum solito continet $\frac{14}{100}$ aut $\frac{15}{100}$ earundem. » Haec ille (2).

Quidquid interdum sit circa considerationes heic allatas, intactam ut ita dicam mitto quaestionem de sanguinis calore, atque sermonem meum ad haec revocanda adducam, nempe: in natura (ni fallor) duo dari casus in quibus liquida occlusa in interno canalium coguntur ad ea percurrere cum violentia compressa atque propulsa: 1°. in montium fissuris ex praepotenti vi Gasorum: 2°. in Arteriis animalium ex contractione earundem parietum. Ambobus in casibus caloris evolutio nobis sese offert. Utrum vero effectum hoc sit merum accidens, atque praestigium quoddam speciei, atque consociationis, id est quod ego ignoro, quodque vobis in sapientia vestra aeque judicandum dimitto.

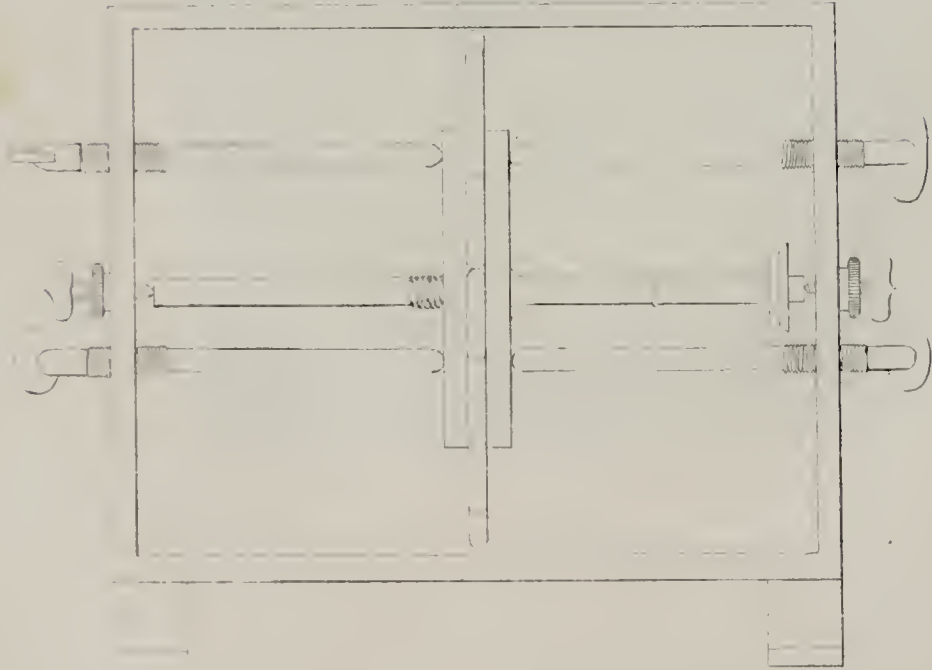
(1) *Traité de Phys.* T. 1. pag. 419.

(2) *Élem. de Zool.* Bruxell. 1837. p. 49.

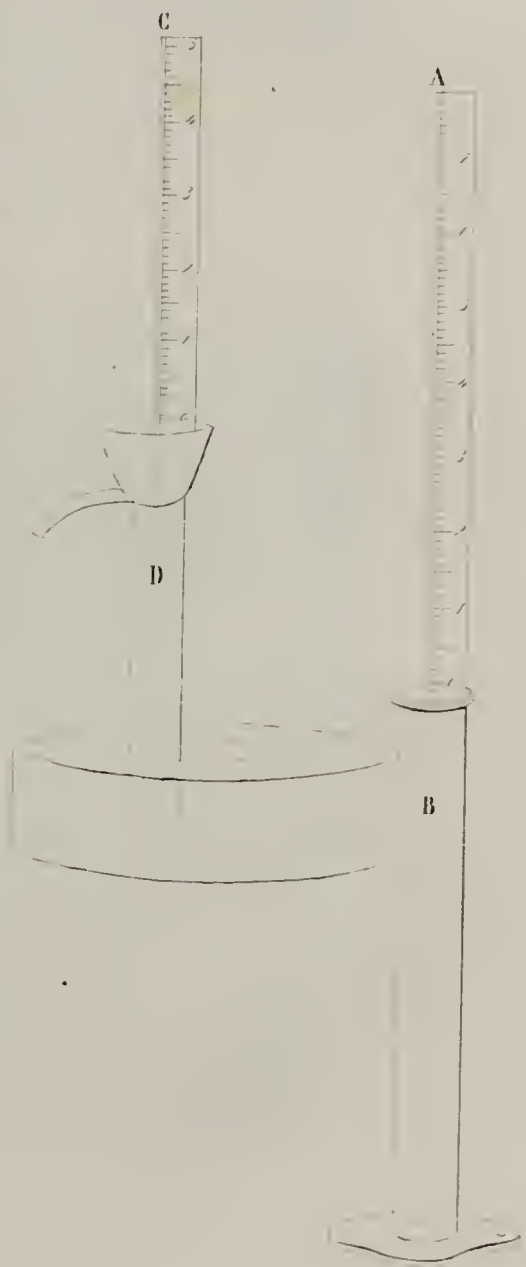




F2



F 3



F 4

FRANCISCI BERTELLI

*De derivatione aliisque proprietatibus formularum, quas
Mechanica coelestis usurpatur ad planetarum motus exhiben-
dos, et ad perturbationes definiendas, quibus eorundem
conversiones ea de causa afficiuntur.*

(Considerationes die 23. Ianuarii 1840 ad Academiam relatae.)

Posteaquam *gravitationis* universalis systema feliciter admodum excogitatum fuit, neminem vestrum praeterit, Sodales excellentissimi, Astronomos, et Geometras bene multos inter praestantiores saeculi proxime elapsi operam suam studiumque omne contulisse ad arduum illud et praeclarum *Mechanicae* argumentum, quod est de inquisitione ac definitione motus *Planetae*, attractioni *Solis* et tertii cujusque *Corporis* ejusdem systematis simul obnoxii (ejus *Planetae* conformatione motuque rotationis opportune consideratis), quodque deinceps ab enuntiatione sua *trium Corporum Problema* fuit appellatum. Abstrusissima hujusce disquisitionis pars ex ejus generis *anomaliis* erat, quibus motus ellipticus simplex *Planetae* illius propter rotationem suam nec absolutam rotunditatem obijcitur. Equidem prae cacteris *Euler* impervium veluti iter ad quaestionem enodandam expediverat. eximio Opere, cui titulus = *Theoria motus corporum solidorum* =; jamque *Astronomus* celebratissimus, *Copernic*, quod ad observationem attinget astrorum coelique motuum, summa perspicuitate animadverterat axem rotationis *Terrae* parvo quodam motu orbiculari, seu ferme tali, reapse ferri: id quod postea *Bradley* ansam praebuit, ut is, rem attentius penitusque scrutatus, veram deprehenderet legem motus terrestris axis ad inerrantes *stellas* relati; quem motum alii denuo in aequinoctiorum praegressionem ac in ejusdem axis nutationem dispertivere.

Horum autem phaenomenorum causas praeclarissimus Auctor systematis de universali *gravitatione* imprimis perspexit atque ex sua sententia commentatus est, easdem revocans omnes sagacitate mira ad principium illud generale, quod ipsa excogitaverat: veruntamen sublimis Analysis, tum in ipsis fere rudimentis et nondum ad eam conditionem provecta, qua tantummodo sperari poterat fere ut per summum studium ac laborem quaestio ejusmodi aliquando absoluta demonstratione persolveretur, huic muneri impar erit. Interim *Dalembert*, uti quisque novit, plenissimam theoriam de aequinoctiorum praegressione nutationeque Astronomiae physicae ex sua ingenii vi imperitus erat: hujusmodi vero acuta investigatio patefecit aditum ad alia phaenomena non minoris momenti, quae quidem ego brevi complectar, quum id maxime attingat, quod mihi propositum est hoc loco vobis exponere, Sodales humanissimi, siquidem me qua consuevistis benignitate nunc quoque audieritis. Etenim de supputatione motuum axis momentanei rotationis in interiori Terrae globo, deque mutatione situs, quae superficie tenus in ejusdem polis fieri potest, nonnulla dicam vestigiis insistens celebris Geometrae *Poisson*, qui praesertim ad rem hanc opus edidit eximium; item aliqua dicam de plano invariabili seu principali arearum projiciendarum, a summo *Laplace* excogitato, nec non de pereleganti theoriam, a *Lagrange* adinventam, unde librantes Lunae motus computarentur: quae omnia nimirum pendent ab attractione juxtam generalem theoriam motus rotationis in solidis corporibus considerata.

Gemino axuum orthogoniorum systemate constituto in eodem corporis puncto, quod centrum ipsum ejus gravitatis esse potest, atque horum systematum alterum, a coordinatis x, y, z appellatum, si firmum in spatio ponatur, alterum vero a coordinatis x', y', z' circa harum originem mobile fingatur una cum Corpore, Astronomi hodierni ex auctoritate atque exemplo celeberrimi *Lagrange* exhibere solent motum rotationis Planetarum, manantem e viribus primigenis momentaneis nec non ab alternis ipsorum attractionibus, per angulum symbolo θ expressum; cum videlicet, qui continetur Aequatore. Planatae contemplandi, Eclipticae plano, ar-

culusque, circuli maximi, qui abs linea intersectionis eorundem planorum (eorum scilicet, ex quibus computantur coordinatae x', y' , atque x, y , sive in quibus jacet linea nodorum Aequatoris) pertunduntur, quod ad primum arcum littera ψ significatum, juxta Eclipticam usque ad lineam aequinoctialem, quae veluti axis stabilis coordinatarum x usurpatur, et quod ad secundum arcum littera ϕ denotatum, juxta Aequatorem usque ad axem mobilem coordinatarum x' .

At vero cum hujusce disquisitionis pars geometrica, seu quae appellatur *describens*, solummodo respiciatur, et cum per datum tempus noti ponantur valores a natura virium pendentes nec non a forma et constitutione Planetæ arcuumque circuli maximi, qui distantias angulares uniuscujusque axis stabilis coordinatarum x, y, z a tribus aliis axibus mobilibus coordinatarum x', y', z' dimetiuntur, tum aequationes sex lineares habentur definitae; quarum tres exhibent valores coordinatarum x, y, z ad quodvis Planetæ elementum spectantium (sive ejus elementi positionem exprimunt, quod ad axes stabiles, per functionem coordinatarum x', y', z' respondentium elemento eidem ad axes mobiles relato), ubi coefficientium loco sunt cosinus illorum arcuum: aliae autem tres aequationes analogae, et sola immutata forma a prioribus derivatae, valores suppeditant coordinatarum x', y', z' per functionem x, y, z , eorundemque cosinum.

Quod si tempore quoddam cognitae haberentur memoratae distantiae angulares axuum mobilium a stabilibus, facile deprehenditur id unum satis fore, ut singulis ejus temporis punctis situs Planetæ dignosci posset: sed ad hoc plerique malunt uti angulo θ arcubusque superius memoratis ψ et ϕ ; ita ut conversis in functionem harum trium quantitatum valoribus cosinum (quos commodi gratia indicabimus litteris a, b, c ; a', b', c' ; et a'', b'', c'') pertinentium ad novas distantias angulares gemini systematis axuum mobilium stabiliumque, valores hosce prioribus sufficiantur in sex aequationibus, quae rationes inter coordinatas x, y, z , atque x, y', z' intercedentes ostendunt. Jam vero opus est aequationes istas, nec non alias e quibus pendent valores illorum cosinum, ad praestitutum quemdam modulum construere, ut omnes eam in-

duant formam, iuxta quam saepius usurpantur: quum autem aequationes ipsae peculiaris indolis motum, ejusque conditiones exhibere debeant, necesse quoque erit adjuncta sjngula reputare eidem motui ab initio necessaria, quae rationes referent et statuent, quas elementa earundem aequationum secum invicem habeant oportet. Ita a contemplatione initialis motus ejusque constructionis, cum haec fuerint tali modo per formulas clare certeque expressa, facile erit ad ea omnia descendere quae conditiones motus, de quo agimus, et illius conformationem pro dato quolibet tempore demonstrant.

Ilic jam mihi visum est scientiae nostrae incremento nonnihil conferre posse notationes quasdam intexere regulis; quae haec super re praescribuntur in usitationibus et quidem eximii Operibus de Astronomia physica, nempe idcirco ut illarum formularum usus facilior uberisque fiat: etenim praesertim quod ad derivationem aequationum, e quibus eruuntur valores cosinum a, b, c ; $a' b' c'$; a'', b'', c' expressorum per dictas variables circulares θ, ψ, ϕ a sese haud dependentes, ambigendum quidem est ac laborandum, ut normalis earundem constructio percipiatur; itaque ut in aperto sint conditiones initiales motus, cujus gratia aequationes eadem ad formam illam saepius usurpatam componuntur, sub qua celebris ipse *Laplace* (probatione caeteroquin praetermissa) eas conscripsit illo *Mechanicae* suae coelestis loco, ubi *de plano invariabili egit*. Nemo ante hunc celebratissimum Auctorem mentionem istius plani habuisse videtur praeter *Lagrange*, qui in suo Tentamine de problemate trium Corporum hoc nova prorsus sublimique adortus analysi pervenit ad sex priores aequationes, atque alias tres ideo assequutus non est, quia pro plano stabili quantitatum x, y illud sumpserit, majoris simplicitatis causa, quod deinceps *planum invariabile* fuit appellatum, et cujus proprietates admodum singulares, tantique adjumenti in rebus astronomicis, a summo *Laplace* demonstratae fuere. Sed aequationes illae ab aequationibus per *Laplace* adinventis differunt signis, ita ut diversa constructio eisdem respondeat necesse sit; id quod tamen *Lagrange* in praelaudato Opere non indicavit. Demonstratio hujusce rei, licet indirecta et a nonnullis transformationibus deprompta, una cum

respondente sed non absoluta constructione, habetur in mechanica eximii Poisson; cui postea opportunas quasdam addidit animadversiones in Commentario, quod ipse perlegit Academiae Scientiarum Gallici Instituti anno 1834.

Explicationes atque illustrationes, quae hac de re desiderabantur, utpote valde expetendae, neutiquam deesse Euleriano Operi de motu corporum solidorum (quippe quo res istas plenissime scribuntur) putari poterat: at vero hic doctrinas suas de componendis motibus rotationis, itemque *Dalembert* suas illas disquisitiones de praegressione aequinoctiorum alia aggressi sunt via, siquidem axes mobiles et praecipuos rotanti Corporis retulere ad circulum maximum stabilem sphaerae generatricis et ad punctum quoddam in illius circumferentia, ita ut distantias angulares variables axuum mobilium ex hoc puncto colligerent, motus vero rotationis circumagentis plana circulorum maximorum, ad quos attinent distantiae illae angulares, a plano circuli stabilis inferrent.

Hisce igitur aliisque de caussis, quas ante atigi, conabor denno in aspectum lucemque ponere demonstrationem formularum, quas hoc loco ostendere mihi propositum est; brevi tamen id expediam, ea postremo addens quae ideo scrutatus sum, ut praecipuae innotescerent vices variationum, quibus tempore rotationis Planctae objiciuntur distantiae angulares axuum sese moventium ab axibus stabilibus, ac quibus cognitis Planctae positio quovis temporis puncto determinari potest.

In corpore solido sit O (Tab. V. fig. 1.) quodlibet ex ejus punctis, circa quod vires cujusque naturae corpus ipsum compellant in motum, et a quo suam ducant originem coordinatae x, y, z elementorum materialium, quibus corpus idein constet, quaeque ad tres axes orthogonios OX, OY, OZ in spatio fixos referantur. Fingamus tres alios axes, qui initio motus prioribus adamussim congruentes, et subinde ab hac positione rotatim recedentes, una cum dicto corpore circumvolvuntur, firma tamen eorum origine semper in puncto O : tum elementis ejusdem ad hosce tres axes relatis, significen-

tur istorum coordinatae per litteras x', y', z' . Manifestum est coordinatas ejusmodi pro singulis elementis corporis mansuras esse constantes, donec perduraverit motus, easque factum in aequales x, y, z , quoties axes mobiles respondebunt fixis, quemadmodum esse posuimus sub motus initium. Ita si nobis ante oculos constituamus sphaeram centro O , radioque 1 , ac si quolibet motus intervallo advertemus animum ad circuli maximi arcus dimetientes angulares distantias punctorum (in quibus singuli axes stabiles coordinatarum x, y, z sphaeram illam intersecant) ab iis punctis, in quibus intersertio sit cum axibus mobilibus coordinatarum x', y', z' , facile percipiemus arcus hosce, quos litteris $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$ indicabimus toties ad nihilum recasuros esse, quoties fiet memorata conjunctio inter bina systemata axuum mobilium, stabiliumque.

Primo ipso rotationis momento axes mobiles ortum dabunt arcibus illis, quorum mensurae ineundae sunt ab axibus stabilibus, atque plana coordinatarum $x'y'$ et xy ; et $x'z'$ et xz ; $y'z'$ et yz necessario sese intercedent juxta lineas rectas coeuntes in O , quarum initialis positio pendebit ab indole directioneque virium, nec non a natura et forma corporis solidi. At vero insequente motu, et axibus una cum corpore se circumagentibus, memoratae intersectiones aliis aliisque locis fient; ita ut, si exempli gratia intendamus animum ad intersectionem OU in planis coordinatarum $x'y'$, xy factam (quam mox per caeteris considerabimus), angulus XOU inter hanc et axem stabilem OX , itemque angulus $X'OU$ factus cum axe mobili OX' continenter varios se praebuerint: quin imo angulus ipse, qui initio motus exoritur inter duo plana coordinatarum $x'y'$, xy , per vices alio alioque migraverit.

Quum autem ad corporum motus per Geometriam atque Analysis effigendos, sive ad eorum motuum elementa (quae continentur spatio et directione collatis cum tempore) tali pacto significanda necessum sit ut inter haec directae simul et oppositae intercedant rationes, seu ut lineae et anguli *positivi* alii, alii habeantur *negativi*, pro eo ut illae et hi immutantur; ac quum plerique soleant coordinatas $x, y, z; x', y', z'$, juxta axes $OX, OY, OZ; OX', OY', OZ'$, in positivis ducere,

eas vero ad horum axuum productiones, sed contra supputatas, in negativis habere; idcirco arcus angulique jam memorati pro positivis reputandi erunt, usque dum ex initiali et continua eorundem directione sumantur, at si versa vice, pro negativis.

Nunc ad rem nostram per aequationes definiri refert, quae sit ratio inter coordinatas x, y, z , ad axes stabiles relatas atque ad quodlibet corporis elementum pertinentes, quum corpus idem dato quovis tempore locum M occupet, ac inter coordinatas x', y', z' illius elementi quod ad axes mobiles. Primo in exemplum subjiciemus constructionem normalem, initium motus exhibentem, cujus *graphicam* dispositionem et symbola *algebraica* postea sic immutabimus, quemadmodum condiciones inter se dispares initialis motus ejusque variationum, et subsequentis motus requirent. Ea igitur constructione suscepta, quae indicatur in Tab. V. fig. 1, sit

$$OP = x, PQ = y, QM = z;$$

$$OP' = x', P'Q' = y', Q'M = z'.$$

Ducantur lineae rectae, $P'p$ ad OX perpendicularis, pq parallela et aequalis $P'Q'$; $Q'q$, et MM' aequales itidem et parallelae $P'p$, nec non $qM' = Q'M$: deinde qp' normalis ad OX ; $P'q, qq'$ parallelae et aequales, altera lineae qp' et altera lineae $p'P$: postremo describatur linea $M'q'$.

Quum sit

$$XOX' = \alpha; XOY' = \beta; XOZ' = \gamma;$$

ex triangulis rectangulis $OP'p, pp'q, qq'M$ colligitur

$$Op = \text{Cos. } \alpha x'; pp' = \text{Cos. } \beta y'; p'P = qq' = \text{Cos. } \gamma z';$$

atque hinc

$$x = \text{Cos. } \alpha x' + \text{Cos. } \beta y' + \text{Cos. } \gamma z'.$$

Constructionibus ejusmodi adhibitis, si advertatur esse

$$YOX' = \alpha'; YOY' = \beta'; YOZ' = \gamma';$$

$$ZOX' = \alpha''; ZOY' = \beta''; ZOZ' = \gamma'';$$

habebitur quoque

$$y = \text{Cos. } \alpha' x' + \text{Cos. } \beta' y' + \text{Cos. } \gamma' z';$$

$$z = \text{Cos. } \alpha'' x' + \text{Cos. } \beta'' y' + \text{Cos. } \gamma'' z'.$$

Quod si, ut ante diximus, ponemus simplicitatis gratia

$$\begin{aligned}\text{Cos. } \alpha &= a; \text{ Cos. } \beta = b; \text{ Cos. } \gamma = c; \\ \text{Cos. } \alpha' &= a'; \text{ Cos. } \beta' = b'; \text{ Cos. } \gamma' = c'; \\ \text{Cos. } \alpha'' &= a''; \text{ Cos. } \beta'' = b''; \text{ Cos. } \gamma'' = c'';\end{aligned}$$

priores aequationes in hasce convertentur

$$(A) \dots \begin{cases} x = a x' + b y' + c z'; \\ y = a' x' + b' y' + c' z'; \\ z = a'' x' + b'' y' + c'' z'. \end{cases}$$

Iam vero distantia OM elementi, quod nunc consideramus, eadem est in alterutroque coordinatarum systemate: ex hoc inferitur quoque aequatio

$$(f) \dots x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

quae cum *identica* fieri debeat etiamsi in eam subrogentur valores (A) x, y, z , rationes exhibebit, quas secum invicem habent quantitates $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$; nempe

$$(g) \dots \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & ab + a'b' + a''b'' = 0; \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1; & ac + a'c' + a''c'' = 0; \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1; & bc + b'c' + b''c'' = 0. \end{cases}$$

Aequationes (A) per vices multiplicentur, idest prima per a, b, c , altera per a', b', c' , et tertia per a'', b'', c'' ; deinde colligantur summae aequationum, quae priori ejusmodi multiplicatione efficiuntur, idemque fiat de aliis aequationibus, a secunda et tertia multiplicatione derivatis. Demum reducendo prout sese habent aequationes (g), summae reliqui erunt valores coordinatarum x', y', z' , per functionem x, y, z expressos; idest

$$(B) \dots \begin{cases} x' = a x + a' y + a'' z; \\ y' = b x + b' y + b'' z; \\ z' = c x + c' y + c'' z; \end{cases}$$

quibus substitutis in aequationem (f), aliam assequemur aequationem *identicam*, e qua rationes inter dictas quantitates $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ intercedentes eruemus hoc pacto

$$(h) \dots \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1; & a a' + b b' + c c' = 0; \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1; & a a'' + b b'' + c c'' = 0; \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1; & a' a'' + b' b'' + c' c'' = 0. \end{cases}$$

Aequationes (B) et (h) nil aliud sunt, quam praecedentes (A) et (g) in aliam formam conversae; hae itaque easdem referunt rationes et conditiones geometricas, quas antea inter earumdem elementa esse posuimus. Aequationes vero (g) et (h) omnia praebent indicia earum proprietatum, quas attinere novimus ad theoriam linearum rectarum in spatio, quum ipsae referantur ad bina systemata axuum orthogoniorum eandemque habentium originem.

Duabus primis seriebus ternariis aequationum (g) et (h) ad normam lineae rectae, separatim considerantur, primum singuli axes systematis coordinatarum x, y, z quod ad axes singulos alterius systematis coordinatarum x', y', z' ; deinde unusquisque hujus axis relatus ad prius systema: alteris vero seriebus ternariis earumdem aequationum expeditur axes coordinatarum x, y, z , singillatim bini, prout sunt inter sese orthogonii et quod ad axes coordinatarum x', y', z' : hi porro axes bini itidem cum antecedentibus comparantur.

Sed operae pretium est locum definire, in quo positum erit corpus quovis tempore motus: id toties patebit, quoties dato illo temporis puncto cognitae sint, juxta naturam et formam ejus corporis viriumque ipsum impellentium, quantitates a, b, c ; a', b', c' ; a'', b'', c'' ; quae positionem determinant axuum mobilium quod ad axes stabiles, ac propterea locum ipsius corporis demonstrant. Si eo ipso temporis momento dignosci velit, ubinam sit in spatio quodlibet ejusdem elementum, cujus coordinatae x', y', z' , secundum axes una cum eodem corpore mobiles, habeantur notae, hoc ab aequationibus (A) facili negotio colligetur: ab aequationibus vero (B) inferri poterit, quidnam ex elementis corporis, dato quovis tempore et vertente motu rotationis, occupabit punctum in spatio assignatum et ad axes fixos relatum. Quod autem attinet ad Cosinus, sive ad Coefficientes a, b, c ; a', b', c' ; a'', b'', c'' ; quum constitutus sit axis rotationis momentaneus, itemque determinatae sint velocitates angulares corporis quod ad axes mobiles (pro qui-

bus usurpantur illi quos vocant praecipuos sive naturales rotationis, ut calculi fiant simpliciores), notum est quoniam pacto ex praeceptis Mechanicae sublimis valor eorum Cosinuum exprimi possit per functionem illarum velocitatum angularium, momentorumque inertiae corporis quod ad memoratos axes praecipuos. Qua de re animadvertendum est oportere, valorem trium solummodo ex dictis quantitibus tali modo praefinire: etenim hae sunt novem ac inter ipsas generatim extant sex aequationes (g) vel (h), ideoque ad plenam earumdem determinationem satis sunt tres aequationes generales motus; quibus *principium arearum* continetur.

Attamen Astronomi commodiori inservientes methodo, qua considerari solent motus corporum caelestium, elementa de horum conversionibus, atque variationes a perturbationibus Planetarum pendentibus, ita ut simplicior fiat supputatio motus rotationis, saepius malunt quantitibus novem angularibus jam memoratis tres alias sufficere quantitates expressas per functionem ab iisdem derivatam. Nunc de istiusmodi quantitibus praesertim verba facere mihi propositum est.

In Figura 2. species antecedentis Figurae iterum effingatur, et notentur puncta B, E, G; C, D, F, ubi axes OX, OY, OZ et OX', OY', OZ' intersecantur cum sphaera, cujus radius sit 1 et centrum O, quaeque secet in A productionem lineae OU ex parte coordinatarum negativarum x, y ejusdem rectae OU, in qua sese intersecant plana xy et $x'y'$.

In plano xy quoquoque protenso describatur circulus maximus ABA'EA, itemque circulus alter maximus ACDA' ducatur in plano $x'y'$, quod post inceptam corporis rotationem magis magisque se inclinet in planum xy , seque deorsum versus convertat, sive propter coordinatas z negativas. Pars OU rectae intersectionis planorum xy , et $x'y'$, ob rotationem corporis una cum axibus mobilibus OX', OY', OZ', jam ab initio motus sensim sensimque accedat ad axem OX, a quo opposita pars OU proinde recedet; distantiae autem angulares puncti mobilis A nec non alterius puncti mobilis C computentur juxta arcus AB et AC. Ducantur demum arcus circuli maximi BC, BD, DF; EC, ED, EF; GC, GD, GF, ac iidem arcus AF, AG. Hisce positus habebitur ex antecedentibus denominationibus:

$\text{Cos. } BC = \text{Cos. } \alpha = a$; $\text{Cos. } BD = \text{Cos. } \beta = b$; $\text{Cos. } BF = \text{Cos. } \gamma = c$;
 $\text{Cos. } EC = \text{Cos. } \alpha' = a'$; $\text{Cos. } ED = \text{Cos. } \beta' = b'$; $\text{Cos. } EF = \text{Cos. } \gamma' = c'$;
 $\text{Cos. } GC = \text{Cos. } \alpha'' = a''$; $\text{Cos. } GD = \text{Cos. } \beta'' = b''$; $\text{Cos. } GF = \text{Cos. } \gamma'' = c''$.

Quod si litteris ψ et ϕ indicentur arcus AB, AC , et littera θ significetur angulus BAC , per hasce tres quantitates a sese haud dependentes functio illa erit constituenda, quae valores suppeditet quantitatum a, b, c ; a', b', c' ; a'', b'', c'' . Geometricis et mechanicis ejusmodi considerationibus celesber *Laplace* profecto usus est ad parandas formulas, quas ipse, omnia quaeque de earundem derivatione silentio praeteriens, in medium protulit tum cum potissimam adinvenerit proprietatem plani, quod vocant *invariabile* sive ab arearum *maximis*.

Nobis itaque resolvendi erant trianguli sphaerici, qui sequuntur, et quorum singula elementa ordinatim exhibentur: ad hanc rem adhibebimus valorem notum Cosinus anguli (cujus vertex in A omnibus triangulis est communis) per functionem laterum expressi; erit autem, ut patet, $\text{Cos. } GF = \text{Cos. } \gamma'' = c'' = \text{Cos. } \theta$, inclinatio scilicet inter duo plana xy et $x'y'$.

Trianguli

Elementa

(1) $BACD$ $\left\{ \begin{array}{l} AB = \psi \\ AC = \phi \\ \text{Cos. } BC = \text{Cos. } \alpha = a \\ BAC = \theta \end{array} \right.$

(2) $BACDB$ $\left\{ \begin{array}{l} AB = \psi \\ AD = \phi + 90^\circ \\ \text{Cos. } BD = \text{Cos. } \beta = b \\ BAD = \theta \end{array} \right.$

(3) $BAFB$ $\left\{ \begin{array}{l} AB = \psi \\ AF = 90^\circ \\ \text{Cos. } BF = \text{Cos. } \gamma = c \\ BAF = 90^\circ - \theta \end{array} \right.$

$$(4) \dots \text{EBA} \dot{\text{A}} \text{CE} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{AC} = \varphi \\ \text{ABE} = \psi + 90^\circ \\ \text{Cos. CE} = \text{Cos. } \alpha' = a' \\ \text{EBA} \dot{\text{A}} \text{C} = \theta \end{array} \right.$$

$$(5) \dots \text{EBACDE} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{ABE} = \psi + 90^\circ \\ \text{ACD} = \varphi + 90^\circ \\ \text{Cos. DE} = \text{Cos. } \beta' = b' \\ \text{EBA} \dot{\text{A}} \text{CD} = \theta \end{array} \right.$$

$$(6) \dots \text{EBAFE} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{ABE} = \psi + 90^\circ \\ \text{AF} = 90^\circ \\ \text{Cos. EF} = \text{Cos. } \gamma' = c' \\ \text{EBA} \dot{\text{A}} \text{F} = 90^\circ - \theta \end{array} \right.$$

$$(7) \dots \text{CAGC} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{AC} = \varphi \\ \text{AG} = 90^\circ \\ \text{Cos. CG} = \text{Cos. } \alpha'' = a'' \\ \text{CAG} = 90^\circ + \theta \end{array} \right.$$

$$(8) \dots \text{DCAGD} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{ACD} = \varphi + 90^\circ \\ \text{AG} = 90^\circ \\ \text{Cos. DG} = \text{Cos. } \beta'' = b'' \\ \text{DCA} \dot{\text{A}} \text{G} = 90^\circ + \theta. \end{array} \right.$$

Quocirca valores, quos quaerimus, tali forma assequemur, idest

$$(C) \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Cos. } \alpha = a = \text{Cos. } \theta \text{ Sin. } \psi \text{ Sin. } \varphi + \text{Cos. } \psi \text{ Cos. } \varphi; \\ \text{Cos. } \beta = b = \text{Cos. } \theta \text{ Sin. } \psi \text{ Cos. } \varphi - \text{Cos. } \psi \text{ Sin. } \varphi; \\ \text{Cos. } \gamma = c = \text{Sin. } \theta \text{ Sin. } \psi; \\ \\ \text{Cos. } \alpha' = a' = \text{Cos. } \theta \text{ Cos. } \psi \text{ Sin. } \varphi - \text{Sin. } \psi \text{ Cos. } \varphi; \\ \text{Cos. } \beta' = b' = \text{Cos. } \theta \text{ Cos. } \psi \text{ Cos. } \varphi - \text{Sin. } \psi \text{ Sin. } \varphi; \\ \text{Cos. } \gamma' = c' = \text{Sin. } \theta \text{ Cos. } \psi; \\ \\ \text{Cos. } \alpha'' = a'' = -\text{Sin. } \theta \text{ Sin. } \varphi; \\ \text{Cos. } \beta'' = b'' = -\text{Sin. } \theta \text{ Cos. } \varphi; \\ \text{Cos. } \gamma'' = c'' = \text{Cos. } \theta. \end{array} \right.$$

Nunc si attente considerentur elementa triangulorum (1), (2), (8), et constructio animadvertatur, cujus ope plenam absolutamque demonstrationem aequationum (C) obtinimus, facile colligitur triangulorum (1) converti in alios (2), (4), et (5) quum in locum φ et ψ sufficiantur per vices $\varphi + 90^\circ$, $\psi + 90^\circ$, simulque $\varphi + 90^\circ$, et $\psi + 90^\circ$; quo fit ut BC abeat in BD, EC, ED, ideoque a commutetur in b , a' , b' : dein ex triangulo (3) alius conficitur triangulus (6), subdito $\psi + 90^\circ$ in locum ψ ; et abs triangulo (7) infertur triangulus (8), substituto $\varphi + 90^\circ$ in locum φ : quapropter priori modo BF transformatur in EF sive c in c' , et secundo modo GC convertitur in GB seu a'' in b'' . Ita a prima, tertia, et sexta inter aequationes (C) quinque aliae deduci possent eodem pacto, quo usus est clarissimus *Poisson*; ipse autem demonstrationem praetermisit de vera rectaque derivatione geometrico-mechanica earum aequationum, quae ad rem nostram pro typo sunt.

Situs igitur ejus corporis, qui rotatim devehatur circa coordinatarum originem, a tribus solummodo quantitibus variabilibus pendeat, sive ab angulo θ inter duo plana $x\gamma$ et $x'\gamma'$, atque ab angulis ψ et φ , qui continentur axibus coordinatarum x, x' , et eorundem planorum intersectione.

Quod vero attinet ad valores (C), liquet eos ad identitatem redacturos esse aequationes conditionales (g) nec non alias (h), ut quisque sibi facile suadere potest.

Formula (C) modo memoratus quum ad motum rotationis Planetarum traducuntur, θ significat inclinationem Aequatoris Planetae cujusvis ad Eclipticam, ψ longitudinem lineae uU , quae aequidiali lineae xX refertur eorumque circulorum inter sectionem exhibet, et littera φ indicat rotationis motum, qui in Planeta juxta suum Aequatorem fit.

Variationes obliquitatis θ , quod ad Planetas generatim attinet, brevissimos intra limites se continent, ideoque quantitates trigonometricae $\sin. \theta$, $\cos. \theta$ idem semper servant signum. Arcus vero ψ sensim angetur, ita ut multae sint Corporis conversiones anteaquam ille primum circumferentiae quadrantem excedat; sive arcus φ se continenter adaugens plures circumferentias peragit. Quamobrem, si pro positivis habeantur $\sin. \psi$ et $\cos. \psi$; seu si ponatur primo $\psi < 90^\circ$, gradibus subsequen- tibus rotationis Planetae in proprio Aequatore (idest ex $\varphi = 0$ ad $\varphi = 90^\circ$, $= 180^\circ$, $= 270^\circ$, $= 360^\circ$) usui erit haud parvo dignoscere, quasnam intra limites varient arcus circuli maximi $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β'' ; $\gamma, \gamma', \gamma''$; ex quorum intersectionibus cum sphaera generatrice inferri potest dato quolibet temporis momento positio axum mobilium coordinatarum x', y', z' in spatio, unde situs quoque Corporis elicitor, praetermissis aequationibus (g).

Jam vero ponatur, initio motus θ finito esse valore, ita ut determinata sit semita lineae rectae uU intersectionis planorum xy , $x'y'$, quae ipsa est linea nodorum Aequatoris Planetae, atque rotatio computetur ex puncto A.

Sit primum $\varphi = 0$; ab aequationibus generalibus (C) colligemus

$$\begin{aligned} \text{Cos. } \alpha &= \text{Cos. } \psi; & \text{Cos. } \beta &= \text{Cos. } \theta \text{ Sin. } \psi; & \text{Cos. } \gamma &= \text{Sin. } \theta \text{ Sin. } \psi; \\ \text{Cos. } \alpha' &= -\text{Sin. } \psi; & \text{Cos. } \beta' &= \text{Cos. } \theta \text{ Cos. } \psi; & \text{Cos. } \gamma' &= \text{Sin. } \theta \text{ Cos. } \psi; \\ \text{Cos. } \alpha'' &= 0; & \text{Cos. } \beta'' &= -\text{Sin. } \theta; & \text{Cos. } \gamma'' &= \text{Cos. } \theta: \end{aligned}$$

quocirca erit

$$\begin{aligned} \alpha &= \psi; & \beta &= \text{Arc. Cos.}[\text{Cos. } \theta \text{ Sin. } \psi]; & \gamma &= \text{Arc. Cos.}[\text{Sin. } \theta \text{ Sin. } \psi]; \\ \alpha' &= 90^\circ + \psi; & \beta' &= \text{Arc. Cos.}[\text{Cos. } \theta \text{ Cos. } \psi]; & \gamma' &= \text{Arc. Cos.}[\text{Sin. } \theta \text{ Cos. } \psi]; \\ \alpha'' &= 90^\circ; & \beta'' &= 90^\circ + \theta; & \gamma'' &= \theta: \end{aligned}$$

quoniam autem angulus θ et arcus ψ habentur noti, sub no-

tiis initium praefiniti quoque erunt valores arcuum, de quibus agitur, et quorum dispositio in spatio vel ex ipsa priori constructione patet. Quod vero attinet ad valores $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$, si effingatur triangulus sphaericus orthogonius, cujus hypothenusa sit ψ et angulus adjacens $90^\circ - \theta$, liquet complementum catheti contigui valorem exhibere ipsius arcus β , uti per calculum facileprehendere est, itemque ab eodem triangulo inferri posse arcum β , dummodo ψ in $90^\circ - \psi$ convertatur. Ex triangulo igitur sphaerico orthogonio, qui ψ pro hypothenusa et θ pro angulo adjacente habeat, sicuti modo dictum est, quoties deducatur complementum lateris contigui, reliquum fiet arcus γ , atque in eodem triangulo arcui ψ subdito alio $90^\circ - \psi$ inferetur simili pacto arcus γ' .

Quod si statuatur, majoris simpliciter gratia,

$$\text{Arc. Cos.} [\text{Cos. } \theta \text{ Sin. } \psi] = \mu; \quad \text{Arc. Cos.} [\text{Cos. } \theta \text{ Cos. } \psi] = \nu;$$

$$\text{Arc. Cos.} [\text{Sin. } \theta \text{ Sin. } \psi] = \varepsilon; \quad \text{Arc. Cos.} [\text{Sin. } \theta \text{ Cos. } \psi] = \eta;$$

tunc valores arcuum, qui superius reputati sunt, posito $\varphi = 0$, hanc induent formam

$$(l) \dots \begin{cases} \alpha = \psi; & \beta = \mu; & \gamma = \varepsilon; \\ \alpha' = 90^\circ + \psi; & \beta' = \nu; & \gamma' = \eta; \\ \alpha'' = 90^\circ & \beta'' = 90^\circ + \theta; & \gamma'' = \theta. \end{cases}$$

Sit deinde $\varphi = 90^\circ$; aequationes (C) dabunt

$$\text{Cos. } \alpha = \text{Cos. } \theta \text{ Sin. } \psi; \quad \text{Cos. } \beta = -\text{Cos. } \psi; \quad \text{Cos. } \gamma = \text{Sin. } \theta \text{ Sin. } \psi;$$

$$\text{Cos. } \alpha' = \text{Cos. } \theta \text{ Cos. } \psi; \quad \text{Cos. } \beta' = \text{Sin. } \psi; \quad \text{Cos. } \gamma' = \text{Sin. } \theta \text{ Cos. } \psi;$$

$$\text{Cos. } \alpha'' = -\text{Sin. } \theta; \quad \text{Cos. } \beta'' = 0; \quad \text{Cos. } \gamma'' = \text{Cos. } \theta;$$

valores horum Cosinum ad arcus illos pertinentium, qui determinandi sunt, facili negotio praebeant, subsequentibus signis positivis et negativis caeteroquin animadversis,

$$(m) \dots \begin{cases} \alpha = \mu; & \beta = 180^\circ - \psi; & \gamma = \varepsilon; \\ \alpha' = \Pi - \nu; & \beta' = 90^\circ - \psi; & \gamma' = \eta; \\ \alpha'' = 90^\circ + \theta; & \beta'' = 270^\circ; & \gamma'' = \theta; \end{cases}$$

ubi littera Π totam circumferentiam significat.

Ponamus tertio loco esse $\varphi = 180^\circ$; tum fit

$$\begin{aligned} \text{Cos. } \alpha &= -\text{Cos. } \psi; & \text{Cos. } \beta &= -\text{Cos. } \theta \text{Sin. } \psi; & \text{Cos. } \gamma &= \text{Sin. } \theta \text{Sin. } \psi; \\ \text{Cos. } \alpha' &= \text{Sin. } \psi; & \text{Cos. } \beta' &= -\text{Cos. } \theta \text{Cos. } \psi; & \text{Cos. } \gamma' &= \text{Sin. } \theta \text{Cos. } \psi; \\ \text{Cos. } \alpha'' &= 0; & \text{Cos. } \beta'' &= \text{Sin. } \theta; & \text{Cos. } \gamma'' &= \text{Cos. } \theta; \end{aligned}$$

ideoque, signorum variationibus quoque animadversis, erit

$$(n) \dots \begin{cases} \alpha = 180^\circ - \psi; & \beta = 180^\circ - \mu; & \gamma = \varepsilon; \\ \alpha' = \Pi + 90^\circ - \psi; & \beta' = 180^\circ - \nu; & \gamma' = \eta; \\ \alpha'' = 270^\circ; & \beta'' = \Pi + \theta; & \gamma'' = \theta. \end{cases}$$

Ponatur quarto loco $\varphi = 270^\circ$; habebitur

$$\begin{aligned} \text{Cos. } \alpha &= -\text{Cos. } \theta \text{Sin. } \psi; & \text{Cos. } \beta &= \text{Cos. } \psi; & \text{Cos. } \gamma &= \text{Sin. } \theta \text{Sin. } \psi; \\ \text{Cos. } \alpha' &= -\text{Cos. } \theta \text{Cos. } \psi; & \text{Cos. } \beta' &= -\text{Sin. } \psi; & \text{Cos. } \gamma' &= \text{Sin. } \theta \text{Cos. } \psi; \\ \text{Cos. } \alpha'' &= \text{Sin. } \theta; & \text{Cos. } \beta'' &= 0; & \text{Cos. } \gamma'' &= \text{Cos. } \theta; \end{aligned}$$

atque hinc

$$(o) \dots \begin{cases} \alpha = 180^\circ - \mu; & \beta = \Pi + \psi; & \gamma = \varepsilon; \\ \alpha' = \Pi + 180^\circ - \nu; & \beta' = 270^\circ - \psi; & \gamma' = \eta; \\ \alpha'' = \Pi + 90^\circ - \theta; & \beta'' = \Pi + 90^\circ; & \gamma'' = \theta. \end{cases}$$

Sit demum $\theta = 360^\circ$; hoc posito conficietur

$$\begin{aligned} \text{Cos. } \alpha &= \text{Cos. } \psi; & \text{Cos. } \beta &= \text{Cos. } \theta \text{Sin. } \psi; & \text{Cos. } \gamma &= \text{Sin. } \theta \text{Sin. } \psi; \\ \text{Cos. } \alpha' &= -\text{Sin. } \psi; & \text{Cos. } \beta' &= \text{Cos. } \theta \text{Cos. } \psi; & \text{Cos. } \gamma' &= \text{Sin. } \theta \text{Cos. } \psi; \\ \text{Cos. } \alpha'' &= 0; & \text{Cos. } \beta'' &= -\text{Sin. } \theta; & \text{Cos. } \gamma'' &= \text{Cos. } \theta; \end{aligned}$$

unde, variorum signorum successione opportune reputata, colligetur

$$(p) \dots \begin{cases} \alpha = \Pi + \psi; & \beta = \Pi + \mu; & \gamma = \varepsilon; \\ \alpha' = \Pi + 90^\circ + \psi; & \beta' = \Pi + \nu; & \gamma' = \eta; \\ \alpha'' = \Pi + 90^\circ; & \beta'' = \Pi + 90^\circ + \theta; & \gamma'' = \theta. \end{cases}$$

Hac supra re considerare oportet, angulo θ et arcui ψ in singulis illis aequationibus (l) , (m) , (n) , (o) , (p) non eundem semper esse valorem, quia quantitates eae temporis functiones exhibent quae quidem determinari possunt, sed ejusmodi sunt, ut $\text{Sin. } \theta$, $\text{Cos. } \theta$ signum idem usque servant, dum $\text{Sin. } \psi$, $\text{Cos. } \psi$ positivos se praebent juxta praescriptam hypothesim etiamsi permultae fiant Planetarum conversiones, idest ex $\psi = 0^\circ$

ad $\psi = 90^\circ$. Quocirca in aequationibus nuper allatis valor is erit quantitibus θ et ψ , qui tempori respondeat, quo post motus initium Planeta juxta proprium Aequatorem rapitur motu omnino 90° , 180° , 270° , et 360° ; atque caeteris rotationis gradibus intermediis, θ et ψ valorem illi temporis momento peculiarem habebunt. Arcus quoque μ , ν , ε , ϕ , quum pendcant a quantitibus θ et ψ , similiter se praebeunt varios cum tempore.

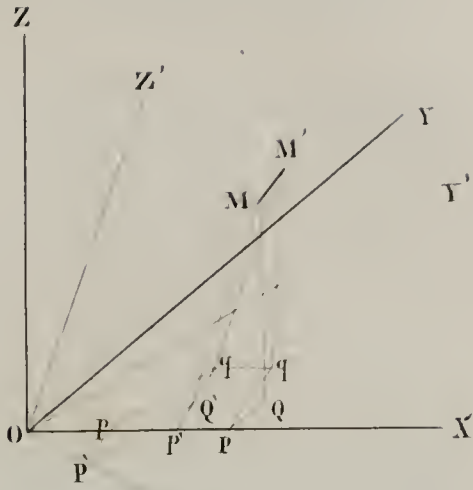
Aequationes jam expositas attente si quis consideret, facile deprehendet, arcum α'' cum sit $\phi = 0$, seu sub rotationis principium; β'' quum rotatio talis extet ut habeatur $\phi = 90^\circ$; rursus arcum α'' quoties sit $\phi = 180^\circ$, et β'' quum rotatio det $\phi = 270^\circ$, nulla pendere ratione a quantitibus θ et ψ , sive arcubus istis eundem fore valorem singulis illis rotationis gradibus utcumque variet una cum respondentibus temporibus Aequatoris inclinatio ad planum fixum seu ad Eclipticam, ac quoquo modo linea nodorum Aequatoris loco mutetur.

Arcus $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β'' , qui magis magisque adaugentur, dum rotatio Planetæ in Aequatore perficitur, sive ab ejus initio usque ad finem, plena increvere periferia, uti colligere est ex comparatione aequationum (l) et (p) ; arcus vero $\gamma, \gamma', \gamma''$, qui valorem eundem (quod ad ipsorum symbola) retinuerunt, mutationibus illis tantummodo obnoxii fuere, quae a variis temporibus motus nec non a variationibus quantitatum θ et ψ proficiscuntur.

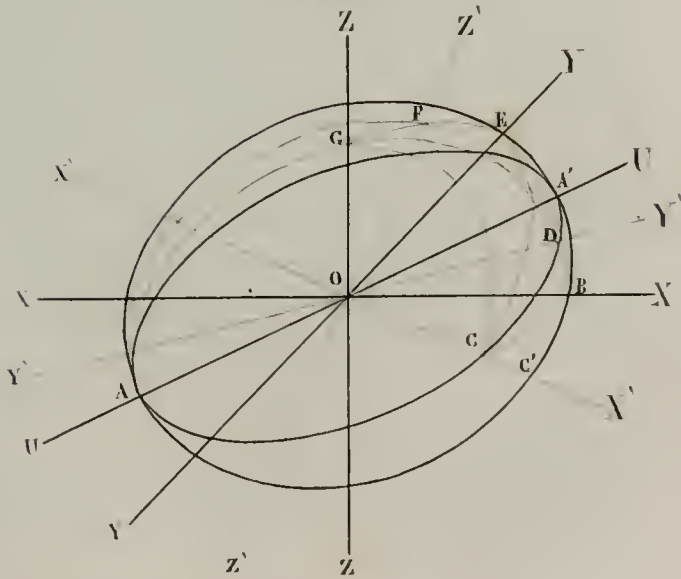
Ex his, quae dicta sunt, intelligitur quonam pacto istiusmodi investigatio de valoribus arcuum $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β'' ; $\gamma, \gamma', \gamma''$ produci posset eo usque dum linea nodorum Aequatoris Planetæ ad distantiam illam $\psi = 90^\circ$ abs æquinoctiali linea deduceretur ita, ut esset $\text{Sin. } \psi = 1$, $\text{Cos. } \psi = 0$; ac subinde in secundo quadrante eo procederet intra limites 90° et 180° ut $\text{Cos. } \psi$ fieret negativus, dum $\text{Sin. } \psi$ positivus consisteret; sicque deinceps donec plena absolvatur memorata lineae nodorum circumvectio.

Sed haec satis sint, cum jam mihi videar notiones adhuc abstrusas, et sin planae novas, at saltem non communes pro mea virili parte expedisse de rotationis corporum solidorum arduo argumento.

F. 1



F. 2.



Le Beau

EQ. ANTONII ALESSANDRINI

*Organum olfactus Cetaceorum generatim, praesertim vero
Delphini communis = Delphinus Delphis Linnæi, et
Delphini sufflantis = Delphinus Tursio Bonnaterre.*

(Sermo habitus die 2. Januarii 1839.)

Quae sit structura, immo quae sedes ipsa organi olfactus Mammalium ordinis Cetaceorum, adhuc incertum est apud Zoologos, atque Anatomicos. Alii enim, primi equidem nominis, quos inter Lacepedius (1), olfactus organum tribuunt his animalibus perfectissimum; sed neque sedem ejus neque structuram praecise indicant: alii e contrario, hique bene multi tum recentiores, tum veteres zootomistae vel mancum, et debilem prorsus, vel etiam nullum agnoscunt in cetaceis sensum olfactus. Rem adeo gravis momenti in quaestione manere, ac in tanta opinionum discrepantia adhuc versari indecorum nimis existimavi in praesenti scientiae, et artis Anatomicae perfectione; ideoque naturae factum ipsum data quaque occasione penitus inquirere non praetermisi, nimirum nervos, qui in caeteris Mammalibus organum olfactus praecipue constituunt, iterum, iterumque investigavi. Atque nunc breviter exponam vobis, doctissimi Sodales, hujusmodi observationes in ambabus habitis Delphini speciebus marium nostrorum incolis, nempe Delphini = *Delphis*, et Delphini = *Tursio*.

Mirari satis nequeo, cum considero scientiam regni animalis adeo mancam hactenus permansisse, quoad species gran-

(1) Histoire Naturelle des Cétacés. Paris l' an. XII. in 4.° pag. XIX.

diores, quas inter eae quidem recensendae sunt, quas ordo cetaceorum complectitur; perinde ac si maxima, sicuti olim minima animalia Zoologorum, atque Anatomicorum investigationibus obsisterent. At vero Physica nostrae aetatis lumina, atque subsidia viam aperuerunt, qua minimas quasque regni organici species inquirere licet; et microscopicae observationes tanta sagacitate, atque perseverantia institutae praesertim a clarissimis Amici, Turpin, et Ehrenberg difficultates per multas diluerunt, quas partium vel maxima tenuitas, vel fere fluiditas objiciebant. Nec ipsa minutiorum sive plantarum, sive animalium penitior textura inter inaccessa naturae arcana amplius recensetur. In Cetaceis vero nondum scientia eo usque producta est. Magna equidem moles, et formae omnino singulares Balaenarum, Physeterum, Ceratodontium, Manatorum, plurimumque Delphinorum non semel attentionem veterum naturae scrutatorum obtinuerunt; atque Aristoteles, Plinius, Oppianus, Festus, et Albertus magnus, aliique multi quotquot fere antiquitus floruerunt historiae naturalis scriptores verba fecerunt de his, ut vocant, monstris marinis. At sola plerumque viatorum, et piscatorum fallaci relatione confisi absurdas, et falsas de his animalibus notitias reliquerunt. Quibus tanto fidentius innixi scriptores permulti subsequentes maneam omnino et erroribus plenam ad nos usque perduxerunt hanc Zoologiae partem insignem atque praestantissimam, quam expolire, atque emendare difficilius est quam ex integro rite constituere initio fuisset; nunc etenim adversantur contrariae diu acceptae opiniones, atque veneratio antiquitatis.

Cum vero tanto fuerunt impedimento exteriori horum animalium Zoologiae relationes imperitorum, et nimia veterum scriptorum credulitas, ac defectus observationum; tum maxime ob easdem causas in tenebris jacere debebat eorum Anatomies, atque Physiologiae. Cujus generis notitiae, et descriptiones omni fide dignae non nisi ad aetates pertinent multo recentiores, cum scilicet Ray, Anderson, Klein, Daubenton, Pallas, Pennant, Lacépède, Hunter, Fratres Cuvier, Scoresby, Camper, Baer, aliique primi nominis Zoologi, et Anatomici ferro, et oculis ipsi suis Cetaceorum species varias per-

scrutari caeperunt. Ex quorum observationibus, et inventis id colligitur, quoad organum olfactus, duas ex ejus structura distinguam amplas Cetaceorum sectiones. Quarum prima species eas complectitur, in quibus organum, de quo agitur, nonnisi leviter situ, forma, et structura differt ab organo olfactus Mammalium terrestrium variorum ordinum, et familiarum. Huc pertinent tria cetaceorum genera componentium juxta recentiores familiam erbivoram, nempe *Manatus*, *Halivore*, et *Trichechus*, seu *Rytina* Stelleri. In istis sinus, fossae nasales, exteriores, et interiores harum aperturæ minori tantum extensione, et amplitudine, et simpliciori structura differunt, quas modificationes demersus continuus requirit, in quo vivunt hujusmodi animalia. Et quanquam exactae adhuc desiderentur descriptiones structurae fossarum nasalium, sive simul totius mollis integumentum; multae tamen, quas habemus, capitum horum animalium delineationes, quarum aliquae occurrunt in novo de Cetaceis opere Friderici Cuvier (1), sat clare ostendunt organi solidiorem partem generatim convenire cum typo aliorum Mammalium proprio: in eo et sat amplae, et complexae se offerunt superficies, ubi olfactus nervi late protendantur, et ramis quinti paris sat grandibus sit locus, et sat involutis. Nasales aperturæ minus amplae, at similiter positae ac in caeteris Mammalibus, repagulo fere ad instar valvulae insuper instructae aquam ingredi vetant in interiores narium caveas partes aëri excipiendo solum datas, cum cetaceum aquae summam petit superficiem respirationis causa.

Maximae olfactus organi modificationes occurrunt in sectione altera reliquorum cetaceorum, quae ejus formam, situm, atque structuram adeo varie in variis speciebus afficiunt, ut peculiari quaeque nomine distinguam soleat. Sic Balaenae, Phylseteres, Ceratodontes, Delphini implexis carent fossis nasalibus, earumque locum obtinent, uti communis opinio est, ductus duo tantummodo ex fundo faucium prodeuntes, atque ad summum caput terminati, quorum ope animal aquam ejicit cum cibo haustam, et commodius respirationi providet solo

(1) De l'Histoire Naturelle des Cétacés. Paris 1836. avec Pl.

ex aquis capite emergens; unde exterior apertura modo unica, modo duplex narium hujusmodi structurae singularis ex sufflandi officio isto vulgo nuncupatur (*Sfiatatojo*). Quoniam ergo nasales caveae celerrimo aquae fluxui frequentissime inserviunt, quam haec Cetacea altissime projicere solent, opinio invaluit nullos in iis inesse anfractus, atque sinus, quibus constat organum olfactus aliorum mammalium, et omnino deesse nervos illos, quorum praesentia adeo sensibilem efficit mucosam membranam tenuissimam, qua organi pars ossea et cartilaginea vestitur. Verum adeo enorme structurae discrimen primarii hujus organi in animalibus, quae cum aliis ejusdem ordinis tam apte conveniunt structura, et officio caeterarum partium, et organorum aequae ad vitam animalem, et vegetativam apprimè pertinentium, doctrinae nimis repugnabat de typo uniformi organicae constitutionis in variis animalium serièbus exeunte saeculo praecedenti inventam, jamque initio praesentis exploratam, perspectamque clarioribus Anatomicis, et Physiologis, qui magno condendo Anatomes comparatae aedificio cum operam dedissent, abstinere certe non poterant, quominus Cetaceorum familiam tandem reviserent, vana de iis inveterata commenta ad trutinam sane critices revocarent, et novae methodi subsidiis eorum quoque anatomen excolere, atque complere omni studio niterentur. Sic Joannes Hunter anno 1787 detexit in Balaenis *labyrinthum minimorum foliorum osseorum* (1), in quibus *olfactorius nervus extenditur, iis similium, quae in naribus Quadrupedum observantur* (2). Cujus inventi laude doctum Anglum praecessisset Professor noster Carolus Mondinius, si Itali, ut ingenio prompti sunt tantandem solliciti et diligentes essent in jure tuendo inventionum suarum. Die 16 Martii anni 1772, nempe annos bene quindecim ante editam Hunteri observationem, Mondinius Sermonem habuit coram Academia nostra, quem mihi sodalis optimus, et tanto Patre dignus Professor Franciscus

(1) Observations on the structure and oeconomy of whales ec. Transact. Phil. 1787.

(2) Lacépède Histoire des Cétacés p. XIX.

communicavit, de capite juvenis *Balaenae Boops*, in quo haec leguntur. « In etmoideo osse, quod satis amplum est, tran-
« sicut congregatio minimorum foraminum filamentis ner-
« veis primi paris transitum concedentium, quae in membra-
« nam dispergebantur ossa turbinata ita investientem, ut nul-
« lum horum vestigium appareret. Sunt autem haec ossa tur-
« binata peculiaris omnino structurae utrinque unum in su-
« periori parte cavitatum narium interiorum locata, atque
« spongiam veluti ramosam repraesentant ». Neque hanc ibi Mondinus tantummodo exposuit brevem quidem, sed veris-
simam, et exactam descriptionem complexus illius partium os-
searum, quas Hunter postea labyrinthum nuncupavit foliorum
osseorum, quaeque fundamenta proprie sunt organi olfactus,
sed eas etiam duplici sub aspectu praecise, eleganterque deli-
neatas in tabulis eidem scripto inedito additis repraesentavit.

Hunter sequuti sunt in hisce inquisitionibus Pallas, eodem-
que tempore Georgius Cuvier. Ille primum in Diario Socie-
tatis *Philomaticae* anni 1797 (1), deinde in Lectionibus A-
natomes Comparatae (2) completam tradidit descriptionem a-
perturae, et fossarum nasalium Delphini communis, et *Phocinae*.
Ac in Diario de sacco verba fecit, sive amplo vacuo spatio
profunde substrato inter aurem, oculum, et cranium validis-
sima cellulosa circumdato, et permolli subnigra mucosa intus
induto, in quem aditus patet ex solo canali tubae eustachia-
nae. Hoc vero implexum cavum describit celeberrimus Auctor
tanquam partem omnino sejunctam a caveis nasalibus proprie
dictis, atque aperte declarat tum has, tum illud nervos exci-
pere solius quinti paris; nares cetaceorum pellicula vestiri per-
tenui, arida, cryptis experte, in qua olfactus organum pro-
priam sedem habere posse minime videtur; non reperiri si-
nus in ossibus, quae nares ipsas circumdant, non laminas in
iis intus prominentes; etmoidem minime esse perforatum, neque
id opus esse, quoniam nervus olfactus non adest. Quae om-

(1) Sur les narines des Cétacés. Bulletin des Sciences par la So-
ciété Philomatique, juillet 1797.

(2) Tom. II. pag. 671. edit. I.

nia affirmante tantae auctoritatis, et doctrinae viro, mirum non est, quod in plerisque recentiorum de Anatomie Comparata scriptis eadem assumpta, ac repetita sint, tametsi Mayer (1), et Treviranus demonstraverunt existere nervos olfactus quanquam exilissimos in speciebus ipsis Delphinorum ab eodem Cuvierio observatis.

In Delphinis igitur, quae Cetaceorum familia est in mari quocumque frequentior, et communior, quorum organum olfactus maxima simplicitate praestare vulgo censetur, in quo vel prorsus desint nervi primi paris, vel sola horum rudimenta existant, in Delphinis, inquam, occasio oblata mihi est bis observandi organum istud, in eoque perspicendi situs, structurae, et conformationis characteres ejusmodi, ut affirmare certo possim simile plane esse organo olfactus aliorum Mammalium. Ad perfectam vero hujus organi cognitionem caput examinare juvat, quin maceratio praecedat, omnesque detrahantur partes molles. Aliter enim solae remanent conspicuae duae fossae nasales forma similes duplici tubo cylindraceo, quae ad dexteram, et sinistram partem vomeris a fundo faucium fere in semicirculum curvatae ante cranium usque ad summum caput extremis aperturis pertingunt, ibique terminantur, ubi in caeteris Mammalibus narium pars editior in sinus frontales dispergitur. Si e contra examen instituat capitis tota adhuc substantia molli sua induti, tunc evidentissima se oculis praebet, exacteque delineari facile potest singularis organi olfactus amplitudo, et dispositio intricata in his quoque speciebus, quae quoad hanc praerogativam in infinitum locum amandabantur. Sic prope exitum nasalis aperturae exterioris, etenim in unam hic aperturam coeunt nares Delphini, sex intus cavernulas perspicies profundas, sive sinus, utrinque tres, loculis variis mucosae nasalis compositos, qui crassum stratum pinguis integumenti hujus regionis trajicientes exteriorem simpliciter attingunt faciem ossium nasalium, frontalis, maxillarium, intermaxillarium, et vomeris cartilagineum. His vero primis describendis haud immorabor mollis

(1) Beitrage zur Anatomie des Delphins — In Diario Physiologiae Fromann Vol. V. pag. 141.

substantiae fossarum nasalium implicationibus; quarum jam accuratas ediderunt descriptiones Cuvier, Pallas, et Faber (1), aliique multi; et partem aggrediar organi olfactus magis implexam, et majoris momenti, inquiram scilicet veros sinus nasales vix indicatos a Cuvier, aliisque Anatomicis, qui auctoritati, et dictis ejus acquieverunt.

Ad dimidiam circiter faciem exteriorem fossarum nasalium (*a*, Tab. VI.), ubi fossae ipsae, suscepta curvatura coram etmoidale, et basi vomeris, anticam lambentes regionem basis cranii ad exitum procedunt interiorem, seu gutturalem, obliquam reperies aperturam aliquanto angustam (*d*. T. VI.), quae exitus est tubae eustachianae. Atque hic primo intuitu facile dubitaveris directionem hujus canalis, qui pars essentialis est organi auditus, longe aliter in Cetaceis se habere prae contiguis partibus, quoniam ad fossas nasales terminatur, cum aperiiri generatim solet in fornice seu regione superiori Pharyngis. Verum modificatio ista directionis in extremo tubae tractu a variata unice oritur directione fossarum nasalium. Etenim concipiatur has non sursum procedere versus cranii summum fornicem, sed parallelas ad maxillae superioris directionem distendi, uti in aliis Mammalibus solent; tuba tunc eustachiana in suam ad amussim verteretur communem directionem, in anticam nimirum partem summae pharyngis. Exitus itaque apertura tubae ejusdem, praeterquamquod angusta est, ita etiam est comparata, ut aqua in eam ingredi nequeat, cum e faucibus ad exteriores nasales aperturas ejicitur. Quum enim tuba deorsum oblique, et transverse intra mucosam, et subjectum pharyngis musculum constrictorem superum inserta consistat, aquea columna ascendens liberum ejus aperturae marginem urget, ac premit contra fundum tubae ipsius, in eaque cursum plane sibi praecludit. Neque hic valvula opus est appositae constructionis, uti censuit Fridericus Cuvier (Op. anted. p. 82.), quae revera non existit, ad demonstrandum non posse aquam hac via descendere in sinus nasales profunde repositos.

Ut totum ostenderem tubae cursum, et viam communica-

(1) Sur le Sufflage des Cétacés. Jsis 1827. p. 257.

tionis inter fossas nasales, et sinns, quibus praesertim constat organi complexus, recidi paullo infra descriptam exitus aperturam tubae mucosam nasalem (*e. Tab. VI.*), eamque decerpit cum musculo compressore (*f. Tab. VI.*), qui illam involvit extrinsecus. Hoc pacto faciem denudavi, et detexi interiorem regionis pterygoideae dexteræ sphaenoidis (*g. Tab. VI.*), simulque validum textum fibrosum (*h. Tab. VI.*), qui hanc ipsam regionem conjungit cum osse tympanico (*i. Tab. VI.*), et cum portione basilari occipitis (*k. Tab. VI.*). Specillum deinde (*o. Tab. VI.*) oportune curvatum promovendo a nasali tubae (*d. Tab. VI.*) apertura ad cavum tympani facile deprehendi totum cursum praecipui hujus canalís, qui revera in celluloso textu cavernoso (*m. Tab. VI.*) mersus jacet supra faciem interiorē respondentis apophysis pterygoideae. Specilli ipsius ope canalē (*nn. Tab. VI.*) aperui juxta longitudinem; resectaque, et sublata portione osseae bullae, quae inferius claudit cavum tympani (*l. Tab. VI.*), manifesta se illico obtulit tota longitudo, forma, structura, atque directio tubae eustachianae ab origine sua in cavo tympani (*l. Tab. VI.*) ad concursum (*d. Tab. VI.*) in narium caveas. Eam proinde ulterius describere omittam. Addam tantummodo ejus directionem longe differre ab ea, quam obtinet in descriptione, et figura tradita in suis de Anatomie Comparata lectionibus ab illustri Cuvier (1) et nuper repetita a Fratre ejus in Historia naturali Cetaceorum. Supponit Cuvier tubam, quae ex modo dictis faciem interiorē lambit processus pterygoidei, ideoque interiorē semper sequitur osseum parietem fossarum nasalium, supponit, inquam, ad exteriorē e contra processus illius faciem dirigi, deinde os maxillare trajiciens sic aditum sibi aperire ad caveas nasales; quod si verum esset, aberratio foret totius directionis, quam canalís sequitur in omnibus Mammalibus.

Ubi pars tubae cartilagineo-fibrosa in osseum semicanalem ingreditur, quo cum cavo tympani communicat, adest in interiori ejus facie ampla apertura (*v. Tab. VI.*), quae unica via

(1) Tom. II. pag. 761 edit. 1, et Tab. XXI. *h, h'*.

est communicationis nasales inter caveas, earumque sinus, tubo quidem ipso intercedente; et maxima haec est variatio, quae occurrit in organo olfactus cetaceorum prae organo eodem reliquorum Mammalium, in quibus caveae nasales, et earum sinus directe invicem communicant; atque praecipua haec causa fuit, quominus antehac in cetaceis vera olfactus sedes, ejusque organi complexio tota innotesceret, quodque ejus partis centralis innotuit, occasionem praebere desineret falsae hypothese hanc partem ipsam organum quoddam esse peculiare, et veluti succedaneum organi olfactus, quo prorsus carere insuper autinabant hanc Mammalium totam familiam.

Ut plane perspiciantur naturalis positio, forma, atque extensio dictorum sinuum nasalium, oportet, sicuti ostendit fig. 1. Tab. VII, totam inferiorem maxillam auferre, simulque validos musculos pterygoideos, qui illam firmiter cum cranio annectunt. Sic deinde inclinato capite, ut fornicem palati, et amplam fossam suborbitalem in prospectu habeas, tum depressa lingua, et pharynge, textum facile discernes fibrosum multo elasticum (*aa* Tab. VII. fig. 1.), qui exterior paries est sinuum nasalium. Super eum in sola superna, et antica regione (*ii*. Tab. VII. fig. 1.) sustentum ab ossea lamina processus palatini, et pterygoidei sphenoidis inserti consistunt muscoli fortes pterygoidei, quorum contractio, adductis, firmisque manentibus maxillis, exterius diducens mollem antedictum parietem sinuum, hos ampliores efficit, et voluntariam sic promovet aspirationem aeris, qui sine mechanica hujusmodi actione difficile sinus invaderet per angustam aperturam tubae eustachianae. Inciso pluribus in punctis hoc sinuum molli pariete exteriori (*b, c, d, e, f*. Tab. VII. fig. 1.), specilla inter binas aperturas tracta amplitudinem intermedii cujusque tractus, et directionem satis ostendunt. Sponte vero obvenit manifestissimus hic totus multiplex organi apparatus, pariete ipso prorsus sublato.

Figura 2. Tabulae VII. hanc Delphini vulgaris exhibet praeparationem. Unico sic poteris intuitu complecti, ac fere metiri antri hujus nasalis mirandam extensionem, quod initio a regione antica faciei palatinae maxillaris (*d*. Tab. VII. fig. 2.) admodum angustum sensim patescit fossam versus spheno-orbitalem sic, ut in hac prima cavi communis regione, quam

nomine apprime, ut mihi videtur, accommodato sinum maxillarem, vel antrum Hygmerianum appellabo, formam sumit conici sat regularis, cujus interior superficies propter innumeras, quibus interior scattet paries ejus, cellulas, et plicaturas mire amplificatur. Maxillaris sinus iste in puncto, ubi os jugale subtilissimam interponit apophysin (*c. Tab. VII. fig. 2.*), qua orbita inferius terminatur, praeterquamquod latitudine magnopere crescit, fit quoque implicatior; partem namque ejus systema obtinet ampliorum cellularum inter se communicantium, et aeri ubique permeabilium (*e. Tab. VII. fig. 2.*) Disperguntur cellulae istae, seque insinuant intra flexuosos osseos canaliculos tum in maxillari ipso, tum in frontali insculptos, partem osseam exhibentes antri Hygmeriani, et rudimentum sinus frontalis. Eisdem vero osseos canaliculos percurrunt simul vasa haud minima sanguifera, et rami praecipui maxillaris superioris quinti paris. Sed maxillaris sinus adhuc majorem acquirit extensionem inferius, simulque evadit implicatior; nam infra dictas cavernulas latum spatium invadit (*f, f. Tab. VII. fig. 2.*) inter palatinum os comprehensum, et processum pterygoideum, quam cavi communis appendicem haud improprie nuncupaveris sinum *pterygo-palatinum*. Haec est amplior cavi communis portio, quae in toto ambitu, et extensione sua osseo pariete circumdetur, quaeque proinde structuram perfecte imitetur sinuum nasalium omnium Mammalium propriam. Ab extremo puncto sinus *pterygo-palatini* usque ad os tympanicum (*g. Tab. VII. fig. 2.*) centralis pars cavi communis, quae veluti atrium est, quo sinus reliqui omnes diriguntur, amplitudine praestat. Superne eam limitat massa musculorum ad bulbum oculi pertinentium, densa intercedente, qua involvuntur, membrana aponeurotica; inferne autem ad planum usque pertingit superius ossei fornix palati. Prope os tympanicum (*g. Tab. VII. fig. 2.*), et petrosam temporalis apophysin per minimas aperturas innumeras communicat cum molli textu cavernoso latis, et involutis cellulis referto se invicem excipientibus (*i, i, i. Tab. VII. fig. 2.*), quo textu plane praecingitur tum postica regio tubae eustachianae, tum pars ossea tota organi auditus ossibus petroso, et tympanico simul junctis composita, atque ope textus ejusdem ossa haec ipsa cum ossibus cranii, nempe occipite, re-

gione squamosa temporalis, et sphaenoide adhaerescunt. Quae praeterea singularissima partium dispositio Anatomicis hucusque inobservata mirabiliter, meo iudicio, confert, ut auditus organum ad minimas excitetur aeris vibrationes, et praesentiam quodammodo suppleat auriculae exterioris, qua cetacea omnia procul dubio carent. Etenim totus osseus apparatus solidissimus, quo tum labyrinthus, tum cavum tympani continetur, cellulis aeriferis (*l. l. Tab. VII. fig. 2.*) circumdatur, parte minima excepta apophysis petrosae, quae nervos excipit acusticos, et fundum, seu partem exteriorem ossei cavi tympanici: quae cellulae directe communicant cum cavo ipso tympani ampla apertura tubae, ut dixi, prope os tympanicum existente. Idcirco quisque videt, quam late pateant nasales sinus Delphini, quamque multiplici, ac intricata partium congerie constant, et quam facile, et expedite multum aeris excipere, et reddere, et denuo recuperare possint, quoniam ad organum usque auditus pertingunt. Quod autem horum sinuum major pars exteriori simpliciter superficiei applicatur ossium cranii, et faciei, inque duplici horum lamina ossea minime intercipitur, quodque proinde in maceratione, et mollium partium solutione tota earum parietis substantia dissipatur, et evanescit, id alia causa extitit, ut genuina, et completa descriptio organi olfactus cetaceorum hucusque desideraretur. Sola namque Anatomicis, et Zoologis occasio fere obtigit examinandi vel capita mollibus partibus omnino denudata, vel cadavera jam generali putrefactione deformata, ac dissoluta.

Partes, quas hucusque perpendimus, solum constituunt exteriorem parietem sinuum nasalium. Intus autem eos ubique induit mucosa membrana tenuissima omnes sequens eorum adeo multiplices circumvolutiones, et anfractus, eosdemque omnes exacte praeseferens characteres membranae ejusdem generis, qua vestimtur ossei sinus nasales reliquorum Mammalium. Super hac membrana, quam sanguifera vasa quamplurima permeant quaquaversus, simul extenditur nerveum systema, quod vere essentialis pars est, et fundamentum organi sensus cujuscunque. Gravissima hic primum resolvenda quaestio obvenit: existat, necne in praesenti systemate ner-

vus olfactorius, praecipuum, sin unicum instrumentum in caeteris animalibus, quo facultas olfactus exercetur, et manifestatur; sine mora eorum numero quanquam parvo subscribere non vereor Mondini, ac Hunteri auctoritate fretus, qui nervum istum in Balaenis invenerunt, tum Trevirani, et Mayeri, qui in Delphinis descripserunt, necnon observationibus meis, quae ejus existentiam in hac ipsa familia confirmant. Id tantum accidit de nervo olfactus, quod generatim de nervis ad organa sensuum pertinentibus, ut variam teneant proportionem pro varia eorundem organorum amplitudine, et compositione. In Delphinis, aliisque generibus Cetaceorum, in quibus cavum olfactus parum late ad etmoidem patet, et admodum simplex est, nervus olfactus valde crassus frustra quaereretur; spatium enim deesset, in quo se expandere, ac distendere posset. Perparvo numero filamentorum exilis nervi olfactus nonnisi pauca, et exilissima foramina respondere poterant in lamina etmoidali, quae proinde facile, et saepe Anatomicorum vel diligentissimorum observationem eluderent. Effugere etiam propter extremam tenuitatem eos potuit ea cerebri productio, processus nempe a veteribus sic dictus, mammillaris, quo nervus olfactus cum cerebro communicat. Maxima tenuitas, debilisque textus hujusmodi nervorum, summa difficultas aperiendi osseam thecam cranii in magnis istis animalibus, ab eaque omnino integrum decerpendi organum adeo exile, atque implicatum; methodi ipsae usitatae hujusmodi praeparationum; et defectus plerumque cadaverum recentissimorum causae praesertim fuerunt incerti, et contrarii exitus observationum, quibus nimium confisi Serres, Desmoulins, Magendie, alique multi cerebrum descripserunt horum animalium olfactus nervis prorsus destitutum. Cum vero dantur cadavera nondum corrupta, praesertim ex genere Delphinorum, si sectio horizontalis in frontali multo inferius compleatur, scilicet in ejus regione, quae a nasalibus, et lamina maxillarium ascendente extrinsecus duplicata circumdat exteriorem aperturam nasalem, atque sic ablato fornice cranii, apertaque dura matre juxta horizontem, pariter secentur etiam haemisphaeria cerebralia, servata horum naturali positione, et sectio producat a regione occipitis frontalem versus, ut quam minimum fie-

ri potest, dimoveantur, et torqueantur lobi anteriores cerebri, quibus antrorsum inferius inhaerent filamenta nervi olfactus tenuissima; tunc breviter subvectis lobis ipsis filamenta, conspiciuntur se ibi insinuantia in tubulos justae capacitatis dura matre compositos, qui ethmoidem trajicientes ad fossas nasales perveniunt. Sed filamenta ista cum in cerebro leni admodum insitione teneantur, arcte autem intercipiuntur a dura matre ethmoidi valde adhaerente, facile accidit inter erigendum cerebrum, et e cranio educendum, ut ab eo disjungantur, vel abrum pantur; quo casu impossibile est eorum amplius discernere, ac determinare punctum insertionis, deficiente lobi olfactus vestigio, quod in aliis animalibus nervi insitionem vere statuit, atque definit. At semper detegi, et ostendi possunt filamenta ipsa, ubi ethmoidem trajiciunt, caute subvehendo duram matrem, quae a frontali opertam transit interiorem faciem ethmoidis, quemadmodum satis commonstrant praeparationes, quas Academiae judicio submitto.

Difficultas, quae organi tenuitatis causa vel ejus tantummodo existentiae demonstrationem adversabatur, nulla prorsus occurrit in examine ramorum quamplurimorum, qui a regione ophthalmica, et maxillari superiore quinti paris ad caveas, sinusque nasales procedunt, quorum amplitudo, et complexio proportionem semper servat cum partium extensione, quibus impertiri sensum debent, atque hos inter ramos ii praesertim manifestissimi sunt, qui sinus nasales petunt. Tanta denique, tamque evidens est analogia, et similitudo originis, et distributionis horum nervorum cum iis ejusdem nominis aliorum Mammalium, ut fusiori eorum descriptione immorari supervacaneum foret. Hoc addam solummodo, quod orbita haud amplius maxillari inferius clausa, et fossa sphaeno-palatina magnopere dilatata, vidi, et in tabula VII. fig. 2. *m. m.* ostendi truncum maxillaris superioris sola mucosa opertum altiolem percurrere regionem hujus fossae, quae, ut supra demonstravi, pars est sinuum nasalium, et illinc quaquaversus diffundere ramos illos, qui sensum non caveis solum, et sinibus nasalibus, sed parti etiam molli fornicis palati communicant; quos inter ramos ne quidem ille deest, quem celebris ejus illustrator Scarpa naso-palatinum appellavit. Hujus rami tractum e-

xhibet reipsa Tab. VI. (p.p.) cum multis etiam filamentis (q, q, q.), quae in aliis mammalibus diriguntur ad turbinate medios, et inferiores, hic autem evanescent ad posticam regionem sinus maxillaris. Certum itaque est, et demonstratu facile in Delphinis, quod similiter de omnibus Cetaceis dici potest, nervos nasales quinti paris tum ex trunco ophthalmico, tum ex maxillare procedentes, aequae insignes, atque multiplices pertinere ad eas partes organi olfactus, quibus in caeteris animalibus sensum istum, quo praediti sunt, impertiuntur. Minime assentiar Magendie, ejusque asseclis multis, qui affirmarunt, et experimentis super viva animalia institutis confirmare studuerunt officium totum facultatis olfactus ad ramos pertinere quinti paris, et primum par inter organa incerti usus esse recensendum. Rejicienda haec sententia est inter solitas vitiosas conclusiones falsa methodo partas vexandi animalia molestissimis experimentis. E contra factis anatomicis innixus, et auctoritati clariorum Physiologorum, atque Anatomicorum asseverabo nervos quinti paris nasales subsidio esse efficacissimo olfactus organo, truncum quinti ipsius sensorium in ganglio semilunari comprehensum ramos conferre essentielles ad sensum, et perfectionem, plenumque exercitium functionum ad alia exteriora sensuum organa omnia pertinentium. Hoc demonstrant in oculo nervi ciliares rami ophthalmici; in aure nervus tympanicus, et filamenta ganglii auditus; in lingua rami inferioris maxillaris; id denique probant intricatissima filamenta tum superioris, tum inferioris maxillaris, quae ad perimetrum labiorum procedentia ibi statuunt in brutis sedem tactus praecipuam: ac defendam postremo ex anatome comparata evidenter evinci tantam inter organum olfactus, et ramos nasales trigemini consensionem distributionis, et officii, ut tenuitas illius horum mole, et complexu adaucta supleatur. Ita praegrandis organi olfactorii, atque etmoidis moles *Dasyporum*, *Manidum*, *Myrmecophagorum* parvam compensat extensionem regionum inferiorum cavearum nasalium, et filamentorum quinti in iis discurrentium. Sic vicissim tenuitatem nervorum olfactus, et cellularum, et anfractuum etmoidalium in Gliribus plerisque reparant major sinuum inferiorum amplitudo, et moles simul aucta nervorum quinti. Sic in avibus, et piscibus crassitudo ner-

vorum perstringit olfactus organum intra narium regionem hoc nervo occupatam, et multo debiles sinit ramos nasales quinti in avibus, in piscibus autem omnino nullos.

Quae cum ita sint, dubitationi locus non erit amplius ordinem Cetaceorum aequae suo ac caetera Mammalia praeditum esse organo olfactus, quo haec animalia ut plurima evincunt obvia indicia, quum saltem cibum sibi magis homogenum quaeritantes discurrunt; quoad nervi olfactus tenuitatem multorum hujus generis animalium, optime naturam providisse mole, et complexu tantundem majori ramorum quinti paris, et membranosi apparatus, qui illos recipit; ac proinde characteres Cetaceorum ordini a Scriptoribus aliunde clarissimis assignatos, nervi scilicet olfactus defectum, organi olfactus debilitatem, ejus omnino incertam sedem ex Scientia Zoologica esse plane eliminandos. Characteres enim vero partes, et organa excludentes ad liberum plenumque exercitium apprime necessaria nobiliorum functionum machinae animalis nunquam, vel perraro locum habent in Natura, cujus agendi ratio semper uniformis, et sibi que constans censenda est; atque instrumentorum quibus utimur, mentisque nostrae infirmitati potius tribuendae observationes, et conclusiones in quoque genere exleges, atque invicem repugnantes.

EXPLICATIO TABULARUM

TAB. VI.

Dextera pars dimidia capitis, naturali magnitudine delineata, juvenis Delphini tursionis interiori facie tabulam inspicienti oblique obversa. Sectio normalis hujus capitis juxta longitudinem ita facta est, ut totum crassum maneret nasale sepimentum alteri dimidiae parti adhaerens. Sic simul clare ostenduntur tum paries exterior caveae nasalis sinistrae, tum totus tubae eustachianae tractus inter caveam ipsam nasalem, et ingressum ejus in cavum tympani. Fractis prope dimidium, et superius ossibus maxillaribus, ac intermaxillaribus, et sic cranio extra magis inclinato, conspicua fit in maxillari concaeva semita, quam longus sequitur, ac involutus sinus *membranosus* antrum referens *Higmorianum*, aliorum Mammalium.

- a. Exterior facies dexterae fossae nasalis mucosa naturali sua adhuc induta.
- b, b. Pars complexuum, vel sinuum, quos mucosa ipsa cavearum nasalium efficit prope exitum communem, sive *aperturam sufflantem*.
- c. Crassa cartilago, seu textus fibro-cartilagineus mucosa opertus cartilagini similis pinnarum nasalium aliorum Mammalium. Haec propriorum musculorum actionis ope valvulae officium praestat, quae dextrorsum aequae ac sinistrorsum claudit utramque fossam nasalem, et aquae ingressum impedit in caecum sacrum communem, qui exteriorem aperturam praecedit.
- d. Exterior, seu nasalis exitus tubae eustachianae.
- e. Punctum, ubi resecta est mucosa nasalis.
- f. Musculus eidem mucosae subjectus, qui valide comprimit regionem inferiorem ductuum nasalium ad aquam in ore contentam per sufflantem aperturam ejiciendam.
- g, g. Robustus textus fibrosus, fere periosteum crassescens, qui alani pterygoideam adnectit ossi tympanico *i*, et regioni basilari occipitis *k*.
- h. Facies exterior regionis pterygoideae dexterae sphenoidis.
- l. Cavum tympani inferius apertum.
- m. Textus cellularis-cavernosus, qui corpus tubae eustachianae involvit.

- m, n.* Tuba ipsa in tota longitudine aperta.
o. Specillum, quod aperturam commonstrat communicationis tubae eustachianae cum caveis nasalibus, et tubam ipsam totam trajiciens per tympanum exit apertum.
p, p. Arteria cum nervo naso-palatino obtruncata.
q, q, q. Alia filamenta quinti paris in maxillari superiori ad mollem apparatus tendentia posticae regionis sinus maxillaris.
r. Sinus pterygo-palatinus inferne apertus.
s. Cavum encefalicum cranii sectione verticali apertum, et dura matre adhuc manente.
t. Tentorium. *u.* Margo dexter magni foraminis occipitalis.
v. Specillum, quod statuit tubae aperturam transitus in sinus nasales.
x, y, z. Ductus profundus maxillari compositus *x*, intermaxillari *y*, et vomere *z*, in quo degit crassa cartilago etmoidalis septimenti narium.

TAB. VII. fig. 1.

Pars dimidia sinistra capitis juvenis Delphini tursionis, sublata prorsus maxilla inferiori cum musculis *pterygoideis*, ut mollis appareat exterior paries sinuum nasalium pluribus in locis apertus. Lingua cum pharynge, osse hyoide, et larynge paululum amota est a positu naturali suo. Caput autem ad latus sectionis jacens ita inclinatum est, ut appareat regio palatina, et ampla fossa *sub-orbitalis*. Dimidium naturalium dimensionum.

- a, a.* Textus cellulo-fibrosus admodum validus, quo constat paries exterior sinuum nasalium.
b, c, d, e, f. Aperturae in externo pariete cellulo-fibroso sinuum incisae ad clarius demonstrandam eorum extensionem, et directionem.
g. Specillum, quod ex sinu maxillari introductum *b* totam pervadit regionem supernam *c, d, e* ampli cavi posticos recessus penetrans communicantes cum systemate mollium cellularum aeri permeabilium, quibus organi auditus ossea portio praecingitur.
h. Specillum alterum descensum ostendens diectorum sinuum intra processus pterygoideos usque ad osseum fornicem palati.
i. Pars exterior mollis parietis osse palatino suffulta, cujus ope sinus inter laminam ipsam hic procedit, et subjectum parietem extensi processus pterygoidei sphaenoidis.
k, k. Linea insilionis musculorum pterygoideorum in exteriori pariete sinuum nasalium.
l. Os tympanicum. *m.* Meatus auditus cartilagineus.
n. Truncus nervi communicantis faciei. *o.* Lingua.

- p, p.* Crassa mucosa, quae linguam cingit, et planum inferius cavi oris constituit.
- q.* Portio solidorum integumentorum inter ramos maxillae inferioris prope angulum menti intercedentium. — *r.* Os *hyoides* cum musculis suis.
- s.* Larynx — *t.* Sinister condylus occipitis.

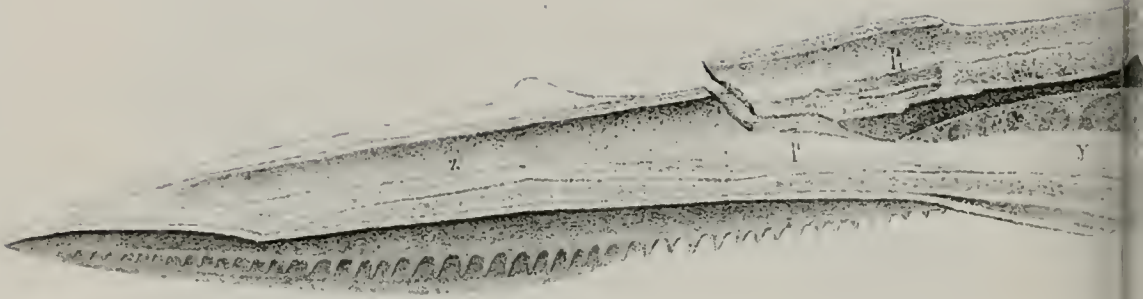
TAB. VII. fig. 2.

Caput juvenis Delphini vulgaris dextrorsum visum dimidiae naturalis magnitudinis. Sublata est cranii pars dimidia, totusque fornex ejus, simulque portio maxillaris dexteri, ut sinuum positus, et directio in conspectum venirent.

- a.* Oculus dexter sursum tractus, ac intra cranium depressus parietalis resecta, et sublata portione.
- b.* Posterior jugalis portio incisa, et sursum pariter distracta.
- c.* Punctum, in quo haec orbitalis subtilis apophysis jugalis se ab osse extricat.
- d.* Extremus apex anterior sinus maxillaris.
- e.* Systema mollium cellularum, quae intra peculiare canales, et foramina propagantur in ossibus maxillari, ac frontali.
- f, f.* Sinus nasalis pars osse palatino intercepta, et respondentem processum pterygoidem Sphenoidis.
- g.* Os tympanicum. *h.* Portio tubae eustachianae aperta.
- i, i, i.* Tomentum cellulo-cavernosum tubam eustachianam involvens, et cum eo communicans, quod osseam partem induit organi auditus.
- k, k.* Portio tubae apertae ejusdem disceptis parietibus, ut pateat cavernosa ejus plani inferioris dispositio, tum antedictus textus, quo involvitur.
- l, l.* Portio systematis mollium cellularum osseam organi auditus sedem committantium.
- m, m.* Truncus maxillaris superioris quinti.
- n.* Meatus cartilagineus auditus.
- o, o.* Plicae, et cellulae inter se communicantes, quibus adeo intricatur sinus maxillaris, quae passim occurrunt etiam in aliis sinuum nasalium regionibus.
- p.* Specillum quo transitus indicatur a communi sinu ad cellulas frontalis.

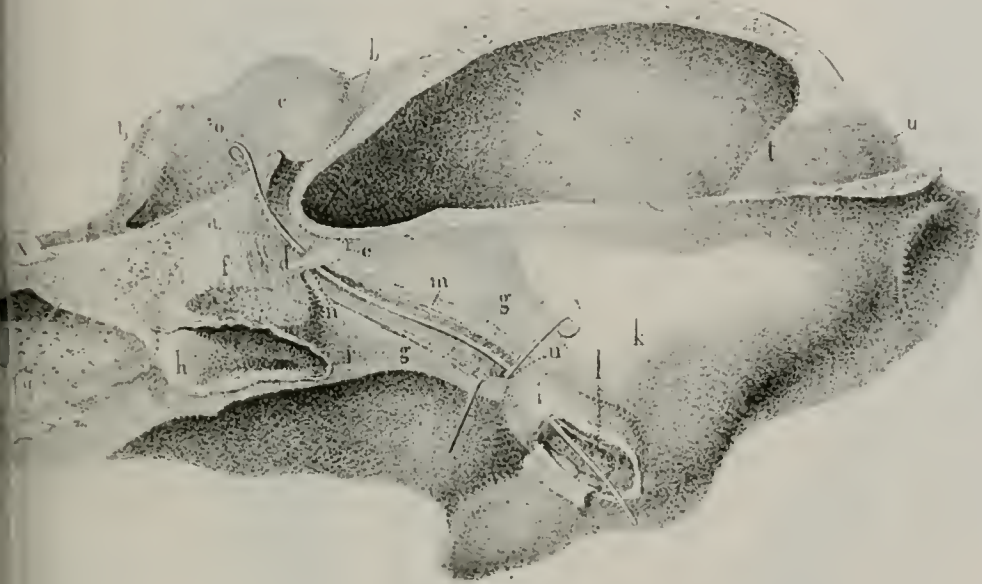


Tom:VI.



G. Bellini ad nat: et in lap de

Tab. VI.

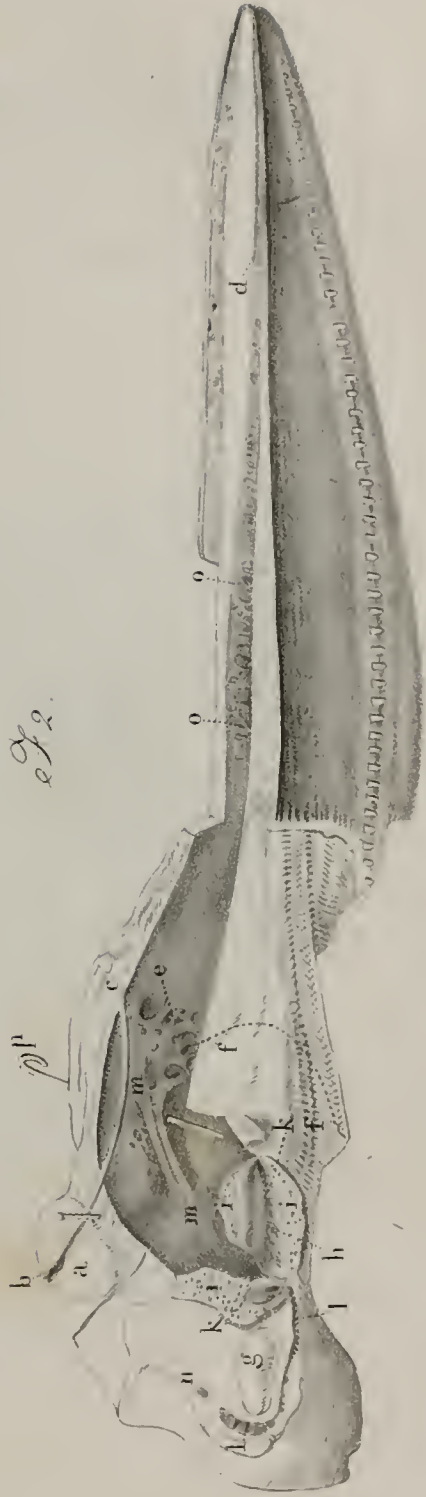


fol. 168m.

F. 1.



F. 2.



G. Dentium ad nat. in cu. cap. del.

L. B. Bottani

EQ. PAULLI BARONI

DE QUIBUSDAM ULCERIBUS CANCROSIS AD FACIEM,

QUAE PER ARSENICUM SANATA FUERE

JUXTA HELMUNDI METHODUM

(Animadversiones ad Academiam relatae Mense Novembris 1839)

Arsenicum jamdiu ad canerosos morbos curandos tanti momenti habitum, ut nonnulli ex praeclaris Medicis de ejus virtutibus multa praedicaverint, illudque censuerint veluti remedium singulare, atque specificum, a plerisque postea nullius efficaciae compertum est, quando aegrotis interius ministratur, ac nimium afferens dolorem, si extrinsecus eis suppeditetur, semper autem periculosum, quoquo modo ipsis adhibeatur.

Re quidem vera quum in horum sententiam et ipse concurrerem, arsenico contra canerosos morbos numquam interius usus sum, et causticis ad curandam valetudinem potiore usque duxi extirpationem per cultrum; hoc enim mihi suaseram, quod non semper causticorum vis, ut lubet, coerceri, malique eorum effectus penitus averti possent: videbatur quoque istius medicaminis usus graviores cicere doloris morsus quam incisio ipsa, quippe quae si intensius dolet, breviter tamen aegrotis dolet, ejusque molestia citius lenitur, ac prorsus evanescit.

Tribus autem ab hinc annis Germanicus quidam Medicus curationem ulceris ad faciem me praesente suscepit sua ex arsenico nescio qua praeparatione, qua profecto ulcus sanatum est solo decem vel duodecim dierum spatio, quin praeterea aegrotus valde acutis premeretur doloribus, suaque negotia unquam intermitteret, tum ex causticis ulla ei noxa superesset in facie; renuntiatum namque postea est obductam ulce-

ris cicatricem in planam, continuam, proximaque omnino similem cutem evasisse. Quamobrem jam tum me quoque incessit desiderium ejus methodi experiundae, ex qua Medico illi exitus curationis peroptato ita contigerat. Sed quibusnam principiis constarent ipsius remedia, quave ratione utendum eisdem esset, tunc ego haud satis callebam, nec quidquam certi me edocuit Chymica analysis, cujus ope medicamina ejusmodi inquirere curavi.

Vertente demum Septembre anni proxime elapsi comperi, eum Helmundi methodo usum fuisse, ac paullo post mihimet occasio data est hujus adhibendae, felici iidem successu, aegroto ipsi, quem laudatus Germaniae Medicus duobus ante annis curaverat. Alia interim perquirens, si quae antea instituta essent ejusmodi curationis experimenta, quorum exitu ejus efficacia ulterius probaretur, incidi in egregiam Chelii Chirurgiae Epitomen, ex qua memini, quae olim perlegeram in Diario quodam (1) de hac ipsa methodo ulcera curandi annis 1826, et 1827 Berolini, et alibi in Germania feliciter adhibita. Quapropter ut primum aliqui hoc morbo laborantes mihi obvenerunt, eisdem Helmundi medicinam ministravi, quae duobus praesertim feliciter adeo respondit, ut vobis, Sodales praestantissimi, eorum curationes breviter enarrare, et vestros oculos ponere, rem haud inanem duxerim: vestrum autem erit judicare, anne methodus haec, licet a vitiis illis non omnino immunis, quae medicinae *polypharmaciae* objiciuntur, majorem tamen in lucem apud nos sit proferenda, eisque morbis, sin omnibus, ut Helmundus praedicat, multis saltem praeter caeteris remediis adhibenda.

Quindecim circiter abhinc annis Helmundo occasio fuit pharmaci sui efficiendi quidam ejus filiae morbus, cui alii bene multi salutari arte eruditi frustra medicinam fecerant: qui eam viscerant, et in consilium de illius valetudine convenerant, omnes ad unum existimaverant ulcera chronica, quibus laborabat, curationem non admittere. Quum itaque de salute filiae suae quisque desperaret, Helmundo visum est lice-

(1) Vide = *Canella. Giornale di Chirurgia Ann. 1826 e 1827.*

re sibi omnes persequi vias, ut tenacem morbum retunderet; ideoque bina composuit unguenta, quorum ope ulcera jam spe sanationis destituta cicatrice includere, eaque prorsus emendare potuit (1).

Singularis hujus sanationis fama ubi pervulgata est, tum multi, ejusmodi morbo correpti, Helmundum petiere, quorum non pauci, qui ab ipso in pristinam valetudinem fuerunt restituti, medicinae illius fidem fecerunt, et quamdam conciliarerunt celebritatem. Multa hac de re Berolinum quoque rumor pertulit; quo ut se conferret Helmundus mox invitatus est, cum ibi haud pauci cuperent experimentis comprobare, quae sermone jactabantur. Re quidem vera ipse inibi aegris nonnullis suam medicinam fecit coram viris inter praeclaros illius civitatis medicos, quibus novae methodi, ejusque effectuum examen, et judicium mandatum erat; hisque adeo placuit experimentum, ut magnificis verbis methodum commendaverint coram regis Borussiae Procuratoribus, qui Helmundo pecuniam ab aulario numerari mandaverunt, ut ejus inventum ad omnium utilitatem publici juris fieret. Neque autem multo post in Diariis relatam vidimus, multos ejusmodi morbo laborantes a variis Chirurgis ope Helmundianae methodi sanatos esse, eamque non modo in Borussia, sed etiam in aliis Germaniae partibus valde celebrari.

Attamen methodus haec in Italia, necnon in Gallia mihi videtur ferme ignorata fuisse; siquidem eandem apud nos, prout ego novi, unus inter omnes Professor Quadrius expertus est, qui oculis medendi arte praestat, eamque nunc Neapoli summo plausu profitetur. Hic idem, cujus ingenii, et peritiae anatomicae primos fructus percepit Archigymnasium nostrum, etsi quae huic methodo tribui possunt vitio non dissimulet immo aperte declaret, tamen per eam multoties sibi satisfactum praedicat prosperis, singularibusque morborum sanationibus. Sed haec hactenus: ad ea nunc veniam, quae vobis, Sodales humanissimi, hoc loco enarrare mihi propositum est.

Vere proxime elapso me adiit Vinitor quidam Tusculi, qua-

(1) Vide hujus Commentarii finem.

draginta circiter annorum aetate, sed firma corporis constitutione, qui menses jam multos afflictabatur ulcere cancroso in naso, cui incassum *topica* varia fuerant adhibita. Ulcus formam parallelogrami gerebat, dorsumque nasi occupabat, nempe medianam ejus partem, ad pollicarem fere longitudinem, et dextrorsum haud multum, sed sinistrorsum latius patebat ita, ut ibi ad genam proxime pertingeret. Cutis prorsus, subjectaeque fibrae musculares erosae fuerant, et cartilaginee denudatae: quapropter manifesto sulcus conspiciebatur, qui majores cartilaginee laterales nasi disjungit. Aeger hic, qui antequam ad me veniret medicam aliorum opem frustra postulaverat, jam de sua sanitate desperabat; quem ego omni spe destitutum ac jacentem erexi, statim atque me primum ac paratum pollicitus sum ad curationem morbi sui suscipiendam, eique non multos intra dies remedium afferri posse dixi.

Unguento Helmundi *balsamico-arsenicali* per dies septem usus sum, in quibus primo ulcus turgescere caepit, dein foedum livorem contrahere, cui modica proximarum partium subsequuta est inflammatio; quae quidem aegroti nec molestum et gravem attulit dolorem, nec cibi appetentiam hebetavit, neque impedivit, quominus ad me quotidie mane aegrotus veniret, ut medicamentum reficerem, quo se cruciari nunquam conquestus est. Paulo post ex ulcere crusta decidit, et cartilaginee longe lateque despoliatae apparuere; tum vero omnia earum involucra pessimum morbum depastum esse manifesto patebat: sed cartilaginee hae carnis gemmis mox sese induere, ulcusque caepit decima die post susceptam a me curationem, obduci, atque expleri. Tunc Vinitor noster Tusculum proficisci, ibique manere voluit, ut culturae praeesset vineae suae: idcirco unguenti balsamici Helmundiani absque arsenico, prout ego jam quadriduo circiter ulceri adhibebam, quantum satis erat, ei tradidi, eundem monens, ut solitam hujus applicationem quotidie renovaret. Quinto, vel sexto quoque die ille me adire non praetermisit, ut ulcus inspicerem; quod vix unum post mensem ab inita curatione omnino sanatum est: hoc enim temporis spatio ulcus jam obduxerat cicatricem planam, cute proxima aliquanto

pallidiorem, sed nec dolentem, nec crispata, eoque solum loco tantulum depressam, ubi tetra lues partes magis confecerat. Hanc cicatricem itidem se habere deprehendi, quum illum iterum aliquanto post vidi.

Dum medicationi huic operam dabam, quaedam Ferentini mulier, annorum circiter quadraginta, firma quidem corporis constitutione, sed ob infestum morbum, atque incommoda, quae egestas parit, valetudine utens jam admodum tenui petiit a me, ut cancroso mederer ulceri, quod nasum suum late perroserat. Hic enim praeter radicem, tam ex dorso quam a latere in longitudinem, latitudinemque dimidii digiti pollicis plus minusve ulcere affectus erat, ita ut superne cutis solummodo se ostenderet laesam, inferne vero cartilagine quoque haud brevi intervallo nudatae apparerent; quinimo hae allicubi, ad pinnas praecipue, erosae omnino fuerant. Qua ratione medicinam eidem facere satius esset, primo anceps haesi, eoque inclinabam, quod tutius censebam, partes morbo affectas per cultrum resecare, et *Rhinoplasticae* auxilio easdem instaurare Indorum methodo ad hoc praecacteris adhibita. At sperans id Helmundi methodo me assequuturum, ut multas ex ulceratis partibus servarem, statui primum ista, dein ad ea resarcienda, quae vel cicatrice obducta deficerent, *Rhinoplastica* uti. Ulceris igitur medelam unguento *balsamico-arsenicali-composito* adortus sum, quo illud tumens factum est, et aspectu turpissimum, faciesque mulieris horrendum in modum deformata: partes ulceri proximae inflammationem susceperant, quae tametsi haud vehemens esset, aegrae tamen gravem dolorem afferebat. Pharmacum idem nihilominus per dies fere novem adhibui, illud de integro quotidie mane restituens; arsenicum deinde missum feci, et tantummodo unguento usus fui, quod Helmundus *narcotico-balsamicum* vocat. Dies autem aliquot intercessere, antequam crusta secederet de ulcere, quod deinde caepit carneas gemmas induere vel ubi cartilagine erant denudatae, atque ad oras obducere cicatricem. At gemmae illae juxta ipsas ulceris oras prodire crassiores nimiaeque luxurie reviviscere visae sunt: hisce igitur unguentum arsenicale aliquoties adhibui. Incommodo istiusmodi excepto, cui quidem brevi remedium datum

est, aegra caeteroquin melius meliusque in dies singulos se habuit; et quamvis ipsa, cum ob rerum inopiam, qua premebatur, tum quia diutius se domi continere non assuesceret, quotidie per Urbis vias, et quaque coeli inclementia vagata esset ex quo illi mederi caeperam; tamen post dies quadraginta quinque circiter ejus valetudo pene confirmata est: siquidem quum ego Roma discesserim mense Julio, praeterquamquod pinnarum portio (dextrorsum magis quam sinistrorsum) deerat, caeterum ingens ulcus firmam undique cicatricem induxerat. Quapropter auctor ipsi fui, ut sineret me nasi apicem atque pinnas per *Rhinoplasticam* sibi reficere, cute a genis sublata: sed illa hac de re mihi assentiri uoluit, addens se malle id in aliud tempus differre. Nescio autem, an ipsa adhuc Romanam reversa fuerit, prout ego suaseram, ut ei postremum ejusmodi remedium Chirurghi alii adhiberent: ego caeteroquin novi per litteras mihi missas paucos post dies, quam ab Urbe discesseram, a Medico illo, cui mulierem istam procurandam tradidi, ipsam ad natale solum rediisse cicatrice penitus obducta.

Hanc medendi rationem, quae duobus illis aegrotis magno fuit usui, ad omnes morbos ejusmodi sanandos aequae conferre posse non arbitror, secus ac Helmundus asseverat; idemque mecum sentiunt multi ex Germaniae Chirurghi, qui vel improspere, vel incassum aegris nonnullis adhibuere Helmundi medicamina, quorum quidem ope ex ejusdem sententia illis quoque sanitas restitui poterat. Quamvis autem id mihi persuadeam, ut remedia ista, ad cancrosa ulcera quod attinet, eximiae virtutis sint, eaque afferant commoda, quae neque caustica alia, neque ipsa resectio semper afferret; quin etiam aegrotis minus doloris pariant, quam arsenicum secus praeparatum, aut alia ejus generis pharmaca solent; tamen cavendum puto, ne cancroso cuique ulceri Helmundiana medicamenta indiscriminatim adhibeantur. Nam si exulceratio late pateat, effectus ab arsenici absorptione periculosos vel ego metnerem cum egregio Quadrio: si vero cancrosus ulcus antecesserit *scirrhus*, aut *cancer occultus*, tum censeo illud leviter tantum hac medendi ratione emendari posse, et quidem difficile, ac raro. At inquam, quod ad ulcera cancrosa, quibus alia insit indo-

les, nec scirrhus praeverit, aut subjectarum partium durities (ut in ore maxime fit), opinor morbis istis (si non omnibus, at saltem multis) depellendis medicinam illam fore magno diuturnoque emolumento: sapienter enim judicare mihi videntur ii, qui ajunt cancrosa ulcera in duo genera esse dispertienda; alterum videlicet eorum, quae scirrhus praemolitus est, quaeque existimant eo medicinam non admittere, quod extirpatio ipsa per cultrum, aut per caustica morbum non depellat recidivum; alterum eorum, quae cum a scirrho ortum non ducant, sanari posse autumant. Opinionem hanc a ratione non abesse et ipse puto, quippe qui nullum umquam vidi cancrosam ulcus a scirrho procedens stabilem firmanque cicatricem inducere, dum pluries expertus sum aegros a quibusdam ulceribus in ore, cujus partes morbo affectae duritiem antea non conceperant, extirpatione diutine convaluisse. Sed medentum ars id nondum praestare valet, ut etiam ejus generis ulcera nunquam recidiva fiant.

Antequam dicendi finem faciam, rogo vos, Sodales humanissimi, ut si quid modo et gravioris momenti, et attentione vestra dignius disserere non potui, me excusatum habeatis, atque ut mihi per vos liceat nonnulla addere, quae ad hoc ipsum argumentum attinent. Quum enim amicis methodi Helmundi copiam fecissem, eosque incitassem desiderio ejusdem experiundae, inter alios Doctor Rizzolius, medicinae Helmundianae experimentum sumpsit, ut primum ei idonea sese obtulit occasio, ac paullo post domum meam deduxit hominem quemdam aetate gravem, ulcere ad genam cancroso laborantem, vix infra interiorem oculi angulum pollicis duas tertias partes circiter longo, et tantumdem lato. Quamvis autem vorax morbus ibidem carnem depastus esset, atque extimam ossis maxillaris partem non solum detegisset, sed etiam erodisset; tamen haud multo post inchoatam curationem illud se prorsus redintegruerat, ulcusque coeperat in dies magis expleri; ita ut aeger hic viginti circiter intra dies. cicatrice omnino erat obducta. Quae res quoque relatu digna mihi visa est, propterea quod ejusmodi tam subita, tamque facilis ossis maxillaris restitutio in pristinum statum inusitata sit, ac pene mira.

COMPOSITIONEM UNGUENTORUM HELMUNDI

videsis in sequentibus numeris 1. 2. 3.

N. 1.

Unguentum Narcotico-balsamicum.

℥ Balsami Peruv. nigri) á ā ʒß
Extract. Conii maculat.)

Acetat. Plumb. pur. crystal. ʒjv.

Tincturae opii crocat. ʒij.

Unguent. ceræ ʒjv.

M. l. a. exactissime f. Unguent.

N. 2.

Pulvis F. Cosmi.

℥ Arsenici albi ʒij

Ciner. solear. vetust. ʒß

Sanguin. dracon. gr. xvj

Cinabr. fact. praepar. ʒij

m. f. pulv.

N. 3.

Unguentum Arsenicale compositum.

℥ Pulv. F. Cosmi ʒj

Unguent. Narcotico-balsam. ʒj

m. f. Unguent.

ULISSIS BREVENTANI

DE EXPERIMENTIS ELECTRO-PHYSIOLOGICIS

ANNO MDCCCXL PERACTIS

IN MUSEO PHYSICO UNIVERSITATIS BONONIENSIS. (*)

Illustres Pisani Athenaci Professores, Franciscus Puccinotti et Aloisius Pacinotti, ut neminem vestrum, Academici praestantissimi, latet, Sapientibus Italis, qui Pisas anno proxime elapso primitus convenere, experimenta electro-physiologica, et consectaria quae ex iis fluere visa sunt, tradiderunt (1). His experimentis Galvanometro captis profluvia electro-physiologica in animalibus calidis, eorumque leges tandem aliquando demonstrari arbitrabantur. Ejusmodi enim profluvia plurimis licet periculis, variisque rationibus tentata, in dubium eatenus vocabantur. Nonnulla ex iis experimentis iterata fuere coram celeberrimis viris, Orioli, Majocchi, Belli, Buffalini, Frank, et Arcangioli; quos ideo Praesides Physicae et Medicae, uti vocant, Sectionis elegerant, ut de re tam gravi iudicium ferrent. Quamvis Professoribus selectis non omnia aequè probarentur, quae Puccinotti et Pacinotti asserebant, ac potius dubitarent, ne forte *phoenomena essent naturae tribuenda physicae dumtaxat et chymicae partium animalium, quibus ad experimenta facienda usi fuerant*; communi tamen sen-

(*) Narratio habita in Conventu Academiae Sexto Kalendas Decembris MDCCCXL.

(1) Esperienze sulla esistenza e le leggi delle correnti Elettro-Fisiologiche negli animali a sangue caldo, eseguite dai Professori Francesco Puccinotti, e Luigi Pacinotti nel Gabinetto di Fisica della Università di Pisa nei mesi di Giugno, e Luglio del 1839. — Pisa presso i Fratelli Nistri. 1839.

tentia Professor Belli Conventui retulit, omnia consecraria quae Puccinotti et Pacinotti suis experimentis collegerunt, probabilia videri. Verum eos ad nova facienda pericula excitavit: plurimum enim scientiis physicis, et medicis illos aiebat esse profuturos, ubi rem totam extra omnem ponerent dubitationem.

Dein Puccinotti et Pacinotti sua experimenta, atque sententiam Conventui traditam typis evulgarunt: nec quasdam adjicere annotationes obliti sunt, ut novis argumentis consecraria firmarentur, et omne dubium amoveretur. Clarius etiam exposuerunt discrimina, quae magis conferre arbitrati sunt ad profluvia electro-physiologica ab aliis diversae indolis quae ea comitarentur, distinguenda. Se autem ostendebant desiderio teneri, ut Physicae et Physiologiae cultores experimenta iterarent, et recognoscerent. Quae desideria felices exitus confestim habuerunt. Hoc enim ineunte anno opusculum Doctoris Fario, et Professoris Zantedeschi (1) in lucem prodiit. Opusculum continet experimenta, quae Venetiis, postremo anni superioris mense, coram aliis doctissimis Medicis capta fuerunt, quaeque profluvia ad vitam tantum pertinentia (electro-physiologica videlicet), et quasdam mirandas quidem, et inauditas leges ostendere et confirmare videntur. Statim ut haec evulgata fuerunt, illico Diaria operam dederunt, ut ad hominum aures iuveni fama perveniret. Iam tum mira experimenta per ora omnium facile versabantur: et quamquam aliquis, Conventus Pisani sapientes imitatus, adhuc haereret, nec satis firmam haberet experimentis fidem, plerique tamen, vel pene omnes rei novitate perculsi eam amplectebantur, adeoque extollebant, ut nova oriri Physicae, et Physiologiae aetas videretur. In tanta commotione animorum, juvenilium praesertim, rursus Professorum Puccinotti et Pacinotti desideriiis annui, rursusque experimenta iterari praestabat; ut ve-

(1) Esperienze intorno alle correnti elettro-Fisiologiche negli animali a sangue caldo, del Dottor L. P. Fario, e del Professor Francesco Zantedeschi. Memoria Prima. — Memoriale della Medicina contemporanea. Volume III. Venezia 1840.

rum nonnullis etiamnunc tenebris circumfusum in aperto poneretur.

His de rebus collocutus fui cum Clar. Physicae Professore, Silvestro Gherardi; qui quantum industria ad experimenta capienda, quantum doctrina ad phaenomena interpretanda polleat, vobis omnibus compertum est. Continuo mihi assentiebatur ille, ut primum tempus se offerret opportunum, una simul de profluviiis electro-physiologicis inquirere. Sed ut errori via tutissime intercluderetur, Doctores Marcum Paolini et Aloisium Benfenati nobis socios adjunximus; qui scientia et consilio nos rem adeo periculosam tractantes adjuvarent. Mihi autem mandatum fuit, ut peractis experimentis, et consecrariis collectis, omnia vobis, Sapientes Viri, referrem.

Antequam ad narrationem venio, hic praecipua recensere placet experimenta et consecraria, quae dudum leviter commemoravimus. Professores Pisani saepius electricitatem physiologicam experti fuerunt in cuniculis, in pullis columbarum, aliisque avibus, nec non in agno. Acubus, pugiunculis, stilisve usi sunt ex chalybe, platino, vel ferro ductis. Nonnullae acus ferreae in aciem auratam desinebant; pugiuncula autem ex platino conflata speciem frondis oleae, ut ipsi ajunt, praeseferebant. Hae acus, vel haec pugiuncula fili Galvanometri extremitatibus conjungebantur, ac animalibus feriendis, et explorandis profluviiis inserviebant. Galvanometrum plerumque adhibuerunt, quod Gurjon, Melloni moderante, construxit; quodque thermo-electricis vel minimis profluviiis commoveri profitentur.

Haec tria quoque animadvertere praestat. Primum; acuum homogeneitatem aqua saepius distillata, perraro salita expendunt. Secundo; ad profluvia physiologica statuenda satis esse putarunt ea tantum experimenta, quae acubus ex platino ductis egerunt: platinum enim non adeo leviter in oxidum vertitur, nec heterogeneitatem electro-motricem ita cito, ut alia metalla, consequitur. Tertio; plurimi faciunt experimenta perpauca, quae in regia Pinacotheca (*Museo*) Florentina illis acubus, et illustris Nobili Galvanometro cepere. Nam Galvanometrum hoc, quippe filo multiplicante instructum longissimo, multo magis commovetur profluviiis hydro-electricis,

quam thermo-electricis; et proinde ad profluvia electro-physiologica ostendenda aptissimum ab illis existimatur.

Hactenus de experimentis; modo ad consecutaria veniamus. Inter ea illud potissimum, de quo adeo ambigebatur, suis experimentis patere Pisani Professores contendunt: statuunt nempe, *profluvia nervea in posterum non esse inter hypotheses recensenda*. Haec profluvia eo quod nonnullis de causis cum electricis congruant, *electro-vitalia*, *neuro-electrica*, vel *electro-physiologica* nuncupaverunt. Ea tamen ab heterogeneitate oriri posse concedunt, ab heterogeneitate vero, quae vitae tantum propria sit. Sed ne ancipites haereamus, notas quasdam nos docent certissimas et invariables, quibus profluvia electro-physiologica a thermo-electricis, et electro-chymicis distinguere possimus. Quae notae sunt:

- (A). Si fila metallica organis immergantur, vel laminae admoveantur, profluvia electro-physiologica numquam prodibunt.
- (B). Prodeunt citissima et valida, cum animal vivens alacriter excitetur, sive mechanice, sive voluntarie.
- (C). Animalia, quae dum praeparentur, nimiis cruciatibus fuerint vexata, aut multum sanguinis emiserint, sensibilibiter profluvium infirmant.
- (D). Profluviorum excursus, et impulsio rationem sequuntur contractionum et motuum animalis.
- (E). Quo magis animal repente concutit membra, eo profluvium magis validum in prima immersione prodit.
- (F). Vis profluviorum imminuitur, vita neuro-musculari decrecente; ut vero vita neuro-muscularis extinguatur, statim profluvia evanescent, et nunquam instaurantur.
- (G). Profluvium electro-physiologicum unum, idemque iter perpetuo tenet; e cerebro scilicet per Galvanometri filum ad musculum. Cum vero experimenta fiant in corde et cerebro, vel in corde et musculo, tum cum vita neuro-muscularis sit imminuta, sed aliqua adhuc supersit; quiddam oritur profluvium, quod eo *cardiacum* appellaverunt, quia e corde ad cerebrum, seu ad musculum procedit. Quod si animal vitam vivat perfectam, ea profluvia itinera habent contraria. Sed aliis et aliis ex-

perimentis ad profluvium *cardiacum* firmandum opus esse arbitrantur.

Subtiliter et notas, quae profluvia thermo-electrica, et electro-chymica respiciunt, Professores Pisani addidere. Quae omnes in has praecipuas contrahi possunt.

Acus Galvanometri laudquaquam movetur, licet animal, in quo experimentum fiat, membra consentiat, et profluvia thermo-electrica, aut electro-chymica orientur.

Ejusmodi profluvia jugiter prodeunt tum in viventibus, tum in mortuis animalibus.

Cum demum profluvium fuerit electro-chymicum, acus Galvanometri subitis et diversis motibus commovetur.

Fario et Zantedeschi Galvanometro usi sunt, quod (†) profluvii thermo-electricis explorandis Baldrighi construxit. Acus ferreas, sive argenteas cum extremitatibus fili Galvanometri copulabant: atque cuniculos ad capienda experimenta adhibebant. Se vero ante omnia in opusculo profitentur iis non favore, qui vitae essentiam in chymicarum affinitatum perpetua pugna positam esse volunt; quae pugna ortum ducat e contactu partium heterogenearum, quibus animalium organa constat, vel ex electricitate, quae contactum prosequitur. Nam ad hoc animum inducere nequeant, ut vitam in electricitate positam credant. Contra vitam consistere putant in vi quadam primigenia, quae materiam informet, virtutis suae participem faciat, atque adeo transmutet, ut materia ea, quae legibus naturae universalibus se primo subjicebat, in materiam abeat viventem. Modo sibi tantum quaerere proponunt, an in animalibus calidis profluvia electrica sint, utrum ea ad vitam pertineant, quam et quantam habeant vim, et quorsum in corpore organico moveantur. Ea autem vocant profluvia electro-vitalia, quae solum in animalibus viventibus contingunt; eaque a thermo-electricis, et electro-chymicis profluviis secernunt. Quo loco Professores Pisanos imitati sunt. Profluvia vero e-

(†) Quo Galvanometro Fario et Zantedeschi usi fuerint, ex opusculo edito non patet. Litteris vero accepimus, Galvanometrum ab illis adhibitum fuisse binis acubus instructum, et ad profluvia thermo-electrica accomodatam.

lectro-chymica distinguunt ab electro-chymicis vitalibus, quae eadem esse arbitrantur, atque ea, quibus Puccinotti et Pacinotti electro-vitalium nomen imposuerunt. Praeterea intelligunt unam, eandemque rem significare, tum si profluvia esse dixerint electro-chymica vitalia, tum si electro-vitalia, aut neuro-electrica. Denique testantur id sibi non sumere, ut hanc quaestionem persolvant: utrum ex una vita ejusmodi profluvia originem directe ducant, an indicia sint causae quae vitam efficit.

His praemonitis cuncta experimenta, omnesque observationes inter se mirum in modum concordantes in quinque Propositiones dispertiti sunt.

- Prop. I. In animalibus calidis profluvium neuro-electricum *externum* vel *cutaneum* existit: quod in texto cutaneo a facie exteriori per Galvanometrum ad axem cerebro-spinalem pertransit. Profluvii vis major est, cum acus *exploratoriae* (1) sint ex ferro, vel chalybe ductae; minor, cum argenteae.
- Prop. II. In animalibus calidis profluvium neuro-electricum inest, quod ab axi cerebro-spinali ad organa cuti supposita excurrit; quodque proinde nuncupant neuro-electricum *interius*. Illius profluvii vis major est, si acus exploratoriae sint ferreae; minor, si argenteae.
- Prop. III. Profluvium electro-vitale adeo in animalibus calidis imminuitur dum vita decrescit, ut, extincta vita, directio ejus contraria evadat priori directioni.
- Prop. IV. Profluvium neuro-electricum cruciatus animalium infringunt, aut delent; si autem immanes fuerint, invertunt. Motibus vero mechanicis, sive voluntariis profluvium ita adaugetur, ut fere dici possit profluvii explosio.
- Prop. V. Ex alia in aliam singulorum viscerum partem nullum est profluvium; vel si quid sit, explorari non potest. Minima sunt, et forte nulla profluvia quae e visceribus ad viscera pertranseant.

(1) *Exploratorias* dicimus acus, quibus binae fili Galvanometrici extremitates instruuntur, quasque clar. Nobili italica voce *scandagli* appellavit. Non secus intelliges, quid fila exploratoria, exploratorii stili significant.

Propositionibus his, quas Auctores, ut diximus, ex suis experimentis sponte erui putant, nonnullas attexunt conjecturas iisdem experimentis consentientes: quas hic referre innopportunum visum est.

Adhuc experimenta quae de profluviis neuro-electricis, vel physiologicis capta fuere, et consecutaria quae ex iis colligi visa sunt, in memoriam vestram redegi. Iam nunc dicam ingenue experimenta, quae et nos in animalibus calidis egimus; ac ita dicam, ut ea sub oculis vestris peragi vobis pene videantur. Quod assequi arbitror, si experimenta et omnia quae notatu digna in iis deprehendimus, eodem prorsus pacto retulero, quo ea in dies singulos alia alia subsequuta sunt. Et quamvis timebamus, ne haec narrandi ratio nimio fastidio vobis esset futura, eam nihilominus ad rem nostram perutilem duximus; propterea quod et vosmetipsi, quid inferendum sit, facilius intellexeritis.

Merito vobis, sapientes Viri, tradendos censuimus nostrorum tentaminum fructus: vos enim verum libere inquiritis, et libere profiteremini. Sed nos quoque ut id faceremus, hic locus ipse suasit. Nam electricitas animalis hic ortum, et progressus accepit; hic novus honos decernitur Viro, qui primus validissimis conatibus electricitatem animaleam ostendit (1); hic demum incitamenta ad haec studia perpetuo tutanda, et promovenda apparantur (2).

(1) Cum codices manu scriptos celeberrimi Aloisii Galvani Professor Joannes Aldini Academiae legasset, clar. Silvester Gherardi Academiae retulit quid in iis codicibus contineretur, atque una proposuit, ut codices praecipuos evulgarentur. Quod Academia cum approbasset, suis sumptibus aggressa est opera omnia Aloisii Galvani typis mandare.

(2) Hoc spectat annua praemia, quibus Academiae eos donabit, qui felicissime diriment quaestiones quasdam ad electricitatem Galvanicam pertinentes, vel ad rationes, quibus bona et vitae incendio eripiantur. Haec quoque praemia a cive de patria benemerito, Joanne Aldini constituta fuerunt.

EXPERIMENTA.

In physico Museo hujus Universitatis experimenta cepimus. Quinto Kalendas Junias MDCCCXL initium eorum posuimus, et sexto Idus Julii finem. Diebus, quibus pericula fecimus, atmosphaerae conditiones perscrutari, licet id supervacaneum videri posset, non praeterivimus. Thermometrum Reaumurianum constitit inter gradus 16, et 24; Barometrum autem inter pollices 27,8, et 28,1.

Galvanometrum illustris Nobili, permultis spiris instructum, ceteris praelatum est; quippe quod ex ipsa Professorum Puccinotti et Pacinotti sententia, ad ejusmodi experimenta sit aptius. Extremitatibus fili Galvanometrici acus exploratoriae nunc ex platino ductae, nunc ex ferro eo consilio adjungebantur, ut phaenomena utrisque acubus consequentia comparari possent. Profluvii directionem in animali, et in ejus partibus, quemadmodum Physici Pisani et Veneti fecerant, itinere deprehendebamus, quod profluvium ipsum in filo Galvanometri habebat. Haec directio se facile nobis manifestabat; tum quia una eademque perpetuo fuit animalis positio ad Galvanometrum; tum quod acus exploratoria quae ad dexteram sita erat, partibus exempli causa, anterioribus figeretur, et quae ad laevam, posterioribus. Itaque satis erat inspicere, utrum acus Galvanometri quae ad meridiem spectabat, ad occasum vergeret, an ad orientem: nobis enim compertum fuerat, acum illam ad occasum vergere, cum profluvium e partibus posterioribus ad anteriores excurreret; ad ortum vero, cum ex anterioribus ad posteriores partes transiret.

Prima dies. Quinto Kalendas Junias

Quantum valeret Galvanometrum nostrum, hoc die tantummodo quaesivimus. Visum tamen est de illa inquisitione per pauca referre, ut etiam nunc pateat, multa prudentia opus esse ei, qui hujusmodi experimentis verum investiget, ne insciens in errorem labatur.

Alteram fili Galvanometrici extremitatem filo argenteo instru-

ximus, alteram filo cupreo; atque ipsa fila exploratoria in aquam vivam aliqua ex parte immersimus. Acus Galvanometri ad usque gradus sexaginta versa est.

Nonnullis acidi sulphurici guttis aquae permixtis, fila denuo immersa sunt: tunc acus non solum gradus nonaginta consecuta est, sed ulterius esset etiam progressa, si quadrans Galvanometri ipsi viam concessisset.

Filis exploratoriis homogeneis experiri placuit. Ab uno eodemque filo cupreo duo fila aequalia abscidimus, et prioribus subrogavimus. Cum ea una simul, et ex aequo in aquam mergerentur, acus Galvanometri nullo pacto movebatur; cum vero ipsa fila exploratoria inaequaliter, vel separatim immersa fuerint, ad tres, quatuorve gradus acus procedebat. Haec acus progressio adhuc augebatur, modo nonnullae acidi sulphurici guttae aquae distillatae permiscerentur.

Dies secunda. Pridie Nonas Junii.

Propositum nobis fuit quaerere primo, ane profluvia essent, quae e posterioribus ad anteriores animalium partes transirent. Vivido cuniculo quinquemestre experimentis faciendis usi sumus. Cutem ejus pollicari longitudine incidimus, cum in calvaria, tum in media et interiore coxae sinistrae parte. Per has incisiones fila exploratoria acuminata, ex platino ducta, sub cutem immissa sunt, antequam de eorum homogeneitate constaret. Filorum scilicet alterum sub capitis cutem posteriores versus calvarii partes, pollicari altitudine insinuavimus; alterum autem sub coxae sinistrae cutem, pedes versus, sesquipollicis circiter altitudine. Acus Galvanometri illico gradibus 25 ortum versus deflexit; ac proinde ostendit, ab anterioribus ad posteriores partes excurrere profluvium. Sed statim ut gradus 25 attigisset, rursus ad 0° remeavit. Filo exploratorio e coxa educto, et denuo in eam immisso, acus pariter gradibus 20 ad orientem versa est, atque confestim ad 0° rediit; neque hinc unquam recessit, etiamsi fila exploratoria per aliqua horae momenta sub cute consisterent.

Fila eadem per easdem incisiones, easdem partes versus, per novum tamen iter, sub cutem rursus immisimus, et prae-

terea curavimus, ut ambo fila aequali longitudine cutis con-
tingeret. Acus Galvanometri stetit inmota. At filo exploratorio,
quod coxae cutem pervadebat, interius impulso, acus nonnul-
lis gradibus ad occasum vergebat; ideoque demonstrabat, e
posterioribus ad anteriores partes leve profluvium transire.

Incisa coxae dexteræ cute, filum exploratorium ab altera co-
xa eductum, per recentem incisionem sub cutem insinuavimus:
neque ullus acus Galvanometricæ motus prodiit. Hoc idem con-
tingit, cum filorum alterum sub capitis cutem, alterum sub
cutem artus anterioris sinistri thoracem versus immersa fuerint.

Externam coxae dexteræ faciem, et artum anteriorem de-
xterum juxta thoracem incidimus. Per priorem incisionem pe-
des versus immissum est filum, quod sub artus anterioris si-
nistri cutem penetrabat, et per posteriorem caput versus fi-
lum, quod capiti haerebat. Gradus 30 ad occidentem acus
attigit, et paullo post ad 0° concessit.

Jam vero in his experimentis pene horam absumpsimus,
quum animal viribus defici incepit. Quare filis exploratoriis
sub cute relictis, dissolvere visum est vincula, quibus cuni-
culus detinebatur. Neque abhinc vinculis usi sumus; satis e-
nim esse arbitramur manibus animal continere; quod nobis
aeque ac Pisanis Professoribus successit. Hoc enim pacto ani-
mal liberius movetur; quod plurimum expedit, ut posthac
patebit. Vinculis divulsis, cuniculus statim membra concutere
coepit: et quamvis fila exploratoria, uti dictum est, adhuc
sub cute in locis praedictis haerent, index Galvanometri ni-
hilominus a 0° non deflexit. Non secus contigit, cum per eas-
dem incisiones iterum fila exploratoria quoquoversum inmis-
sa fuissent.

Cum nondum animal nimis excruciatum videretur, in cute
externa coxae sinistrae incisio alia facta est; qua, sicut in pri-
mo periculo, parum sanguinis fluxit. E filis exploratoriis al-
terum per id vulnus cruentum sub coxae cutem oblique in-
sinuavimus, alterum oblique et sinistrorsum sub cutem thora-
cis. Nullus pariter motus in Galvanometro apparuit.

Alia duo vulnera cuniculo intulimus, unum ad os sacrum, al-
terum inter scapulas; et in ea fuerunt fila exploratoria insi-
nuata. Filum, quod ad sacrum spectabat, caudam versus a-

ciem suam vertebat, et quod inter scapulas fixum fuit, caput versus. Quo experimento accidit, ut acus Galvanometrica 4, vel 5 gradibus mota fuerit; ideoque ostenderit profluvium ex anterioribus ad posteriores partes excurrere. Tandem per eadem vulnera filis iis compluries immissis, eorumque directionibus atque altitudinibus utcumque mutatis; acus Galvanometrica e 0° nequam deflexit.

Dies Tertia. Septimo Idus Junii.

In eodem cuniculo, quo die secunda usi sumus, experimenta resumpsimus. Satis enim ille videbatur vicens, ejusque vulnera, licet non curata, ad cicatricem fere prorsus tetenderant.

Assucta fila ex platino ducta ita perpetuo adhibuimus, ut simul ambo, et aequali altitudine infingerentur. Cutem autem filis exploratoriis insinuandis nunquam incidimus: nam fila ipsa magno sine negotio cutem trajicere possent. Utrum vero essent ea homogenea, an non, hac quoque die perscrutati non sumus.

Sub capitis cutem partes versus posteriores altero filorum infixio, alterum autem sub cutem coxae easdem partes versus; Galvanometri acus gradus 20 ad occasum consecuta est, indicavitque, e partibus posterioribus ad anteriores transire profluvium. Sed paullo post ad 12 tantum gradus recessit, ibique unum horae momentum constitit. — E coxa dextera filum exploratorium eduximus, atque fiximus sinistrae. Gradus 10 occidentem versus Galvanometrum demonstravit.

Filorum alterum sub cutem coxae sinistrae immissum fuit; alteram dein sub capitis cutem; ita tamen, ut utraque eorum acies utramque spectaret. Gradus tunc 12 occasum pariter versus acus Galvanometrica indicavit; atque ibi sesquimomentum horae commemorata est. Rursus fila exploratoria sub cutem capitis et coxae sinistrae ea ratione induximus, ut eorum acies ad partes oppositas vergerent: index gradus circiter 12 attingit, et rapide ad 0° regressus fuit. — E filis altero sub capitis cutem immisso, altero sub cutem ventris, ita ut partibus contrariis suas acies obverterent, per temporis punctum gradus 6 acus consequebatur; ideoque profluvium e ventre ad caput ostendebat.

Sub ventris cutem fila exploratoria; alterum juxta alterum, caput versus infiximus: index Galvanometri haudquaquam movebatur. Filis eodem inductis, hoc tamen pacto, ut eorum acies partes posteriores spectarent, ad 7 circiter gradus acus progressa est, sed confestim ad 0° revertebatur. Eodem iterato periculo, nullus prodiit motus; quod tum etiam contigit, cum denuo fila sub ventris cutem immissa ita fuerint, ut acies suas ad oppositas verterent partes. Denique filis exploratoriis sub cutem ventris immissis, ad corporis axem obliquis, leve et pene fluxum profluvium occasum versus excurrit.

Porro fila exploratoria invertere placuit: filum scilicet, quod dexteris Galvanometri partes tenebat, ad sinistras eveximus, et contra. Ita filum, quod antea infigebatur partibus posterioribus, sub capitis cutem insinuavimus, atque alterum, quod partes anteriores catenus penetraverat sub coxae cutem immisimus. Tunc acus tres quatuorve gradus ortum versus attingit, ac nobis proinde ostendit, profluvium iter tenere aliud ab eo, quod antea habebat. Hoc idem semel atque iterum experti jugiter sumus. Quare dubitavimus, ne forte indicis motus essent heterogeneitati filorum tribuendi; quod ita esse, facile comprobavimus. Immersis enim filis exploratoriis in aquam communem, acus Galvanometrica orientem aequae versus, et iisdem fere gradibus versa est.

Hoc ipso die in cuniculo sequioris sexus, vivido et aenum unum circiter nato paullo post egimus experimenta. Fila exploratoria sub cutem capitis, et coxae sinistrae immissa fuerunt: acus 4 gradus consecuta est, statimque, ut in postremis experimentis ad 0° rediit; atque profluvium e partibus anterioribus ad posteriores transire, compertum fuit. Postquam ea fila per nonnulla horae momenta sub animalis cutem constitissent, inde eruta sunt, et iterum atque iterum in aquam communem immersa; neque ideo acus Galvanometrica ullo pacto movebatur. Hinc autem intelleximus, fila exploratoria tum homogenea esse, quoad aqua communis ostendere posset.

Denuo utrumque filum utriusque locum occupavit; dexterum nempe sinistrorsum eveximus, et contra. Altero eorum sub capitis cutem, altero sub cutem coxae sinistrae infiximus; index

Galvanometri, attentissime licet inspiceremus, omnino immotus constitit. Hic fila exploratoria immergi placuit in aquam, cui aliquas acidi sulphurici guttas miscuimus. Index ad gradus 30 ortum versus excurrit, sed non ita cito, ut prius, ad 0° regressus est. Ipsi filis adhuc madidis in aquam communem immergis, acus itidem orientem versus gradibus 33 declinavit. Continuo fila abstersa, et sub cutem capitis et ventris immissa sunt; nullus vero motus prodivit.

In cuniculo, quo hujus diei initio usi sumus, eo rursus experiri visum est, quia ad ejusmodi pericula aptiorem esse censeremus. Filis exploratoriis infixis sub cutem capitis et coxae sinistrae, vel sub capitis et ventris cutem, vel sub cutem capitis et musculis coxae, aut artus anterioris, vel demum musculis utriusque artus; Galvanometri index aut nullo pacto movebatur, aut vix unum, duosve gradus attingebat. Denique spinalem medullam detegere aggressi sumus: sed hac operatione adeo animal excruciatum est, ut parum abfuerit, quin continuo moreretur. Satis tamen temporis concessum fuit, ut, animali etiam vivente, fila exploratoria parti detectae spinalis medullae, et coxae musculis figi possent. Animal ideo totum corpus concutiebat; acus vero a 0° neutiquam deflexit.

Ut cuniculus mortuus est, caput et coxam alteram evelli jussimus; et in capite cerebrum, in coxa musculos detegi. In cerebrum et musculos, invicem admotos, fila exploratoria immisimus; acusque Galvanometri 2 circiter gradus percurrit.

Dies Quarta. Sexto Idus Junii.

Vivaci cuniculo quadrimestre ad experimenta capienda usi fuimus. An vero fila exploratoria ex platino essent, necne homogena, primo inquirendum putavimus. Itaque ea fila in aquam tum distillatam, tum nonnullis acidi sulphurici guttis permixtam immersa fuerunt. Quare acus Galvanometrica priori immersione a 0° nullo pacto dimota est; posteriore autem exiguas oscillationes, et nullius momenti confecit.

Filorum altero sub capitis cutem immisso, altero sub cutem coxae sinistrae, index in 0° commoratus est. Filum, quod coxae infixeram, in ejus musculos plus, minusve quoquoquever-

sum detrusimus, modo pungendo, modo transfodiendo eo, ut animal membra concuteret. Attamen in acu Galvanometrica ne minimus quidem motus videbatur. = Dein lobo dextero cerebri, et coxae sinistrae musculis compluries infiximus fila exploratoria: index vero aut nullum, aut unum, duosve gradus indicavit. Tum animal mortuum est.

Filis ex platino ductis suffecimus ferreas acus exploratorias, quatuor circiter pollicibus longas, sub lanceae forma, et satis perpolitas (*aghi da materassaio*). His acubus aequae, ac eodem momento immersis in aquam perpauillulo acido sulphurico permixtam, confestim index Galvanometricus ad gradus 90 occasum versus progressus fuit, neque ibi constitisset, si ut antea dictum est, quadrantis constructio ejusmodi esset, ut index ulterius progredi posset. Nonnullis autem oscillationibus confectis, index ille in gradus 55 regressus est. = Ipsas acus exploratorias rite abstersas in aquam distillatam immerimus; et index Galvanometricus gradibus 20 occasum pariter versus deflexit.

Jam iis acubus ferreis profluvia experiri libuit in aliis, aliisque partibus cuniculi, qui nonnullis abhinc horae momentis mortuus erat. Cerebro, et musculis coxae eas acus ferreas infiximus: index statim 90 gradus orientem versus indicavit, et paullo post 60; ideoque profluvium a cerebro ad musculos transibat. Ambabus vero acubus in unum, eundemque musculum inductis, acus Galvanometrica nonnihil a 0° deflexit. Infixa altera acu ferrea thoracis musculis multo sanguine inundatis, altera autem jecori, gradus primum 60, dein 30, 20 demum ortum jugiter versus ab indice ostensi fuerunt; neque profluvii diminutio progressa est ulterius. In jecur, et in coxae musculos iisdem acubus exploratoriis inmissis, Galvanometri index gradibus 60 ad orientem versus est: qua re e jecore ad coxae musculos excurrerat profluvium. Experimentum dein capiendum in jecore, et musculis artus anterioris, profluvium graduum initio 90, postea 45 e musculis ad jecur transire, Galvanometro comperimus. Hac de re praeter eundem non est, dimidiam horae partem a cuniculi interitu effluxisse, quando superiora pericula agebantur.

Sed hic non destimus; experimenta enim per horae qua-

drantem, coque magis produximus. Ferreis acubus exploratorii jecori et alteri pulmonum infixis, profluvium graduum primo 90, et dein 35 prodivit, quod e jecore ad pulmonem excurrerat. Idem prorsus contigit, ubi acus exploratoriae invicem loca inter se permutarunt. At ambabus jecori infixis, acus Galvanometrica haudquaquam movebatur. — Alteram acuum exploratoriarum in jecur, in renem alteram immisimus, et vicissim: profluvium 10 graduum a jecore ad renes transivit. Eodem duplici pacto in jecore, et in stomachi membranis experti sumus; et index Galvanometricus gradus 90, et paullo post 50 indicavit. Acubus vero stomacho adnotis, index in 0° perstitit.

Acus ferreas in stomachum, qui chymo refertus erat, insinuavimus; alteram cardias versus in fundum caecum, alteram in mediam circiter magnae curvaturae partem. Profluvium graduum 70 prodiit, quod e magna curvatura ad cardias transibat. Denique interiori membranae incisi stomachi, et aperti acus exploratorias admovimus; et index Galvanometricus 50 gradus attingit.

Dies Quinta. Decimo Octavo Kalendas Julii.

Eaedem acu ferreae quibus die quarto usi sumus, homogeneae essent, necne, variis periculis exploravimus. Iis acubus immersis in aquam distillatam, index Galvanometricus duobus, tribusve gradibus orientem versus deflexit; in aquam vero vivam compluries immersis, gradus 30, 12, 10 Galvanometrum ordinatim indicavit. Tum tria decigramma chlorureti sodii in sex aquae decagrammis dissolvimus, atque in hanc dissolutionem acus exploratorias immersimus. Profluvium graduum 12 jugiter orientem versus prodivit. Acus haud abstersae iterum in eam dissolutionem immersae fuerunt; index Galvanometricus gradus 12, 13 occasum versus consecutus est: ubi autem acus non exsiccavimus solum, sed etiam perfricuimus, profluvium graduum 10 ad orientem visum fuit, et paullo post mutata directione se in aliud convertit, quod gradibus 10 ad occasum vergebat: statimque immersione iterata, gradus 6 occidentem versus Galvanometrum ostendit. Profluvia quoque

graduum 12, 15 et interdum 20 prodierunt, cum acus ferreae diligentissime quaqua vice abstersae et defricatae in praedictam dissolutionem iterum, iterumque immersae fuerint.

Septem decigramma acidi sulphurici sex circiter decagrammis aquae distillatae miscuimus. Acubus exploratoriis in solutionem immersis, index 90 gradus ad occasum attingit, eoque ulterius progressus esset. Immersione autem repetita, acus Galvanometrica primo gradus 20 orientem versus consecuta est, inde ad gradus 80 occasum versus recessit, et demum in gradibus 60 constitit. Rursus acus ferreas abstersas immersimus; et quamvis index ortum versus deflectere videbatur, confestim tamen gradibus 80 sese ad occasum convertit; postea vero retrocessit, et gradus 40 pariter ad occasum indicavit. Hoc fere idem accidit, cum duplum aquae ei dissolutioni permiscuerimus; acus enim Galvanometrica initio nutare visa est, et paullo post ad 60 gradus occasum versus excurrit. At continuo acubus exploratoriis denuo immersis, gradus 80, 90 eadem versus plagam consequebatur. In his omnibus periculis curavimus, ut acus exploratoriae eodem temporis puncto, et aequali altitudine immergerentur.

Iisdem acubus ferreis in cuniculo sequioris sexus, vivaci, et annum unum circiter nato experiri voluimus. Altera acuum sub capitis cutem faciem versus infixam, altera vero sub cutem coxae sinistrae adeo immissa, ut ejus acies sursum dirigeretur, profluvium graduum 30 e posterioribus ad anteriores partes transivit. Periculum eodem pacto iteravimus; tum e partibus anterioribus ad posteriores profluvium prodiit graduum 60, quod statim in gradus 20 redactum est. Quater etiam capto experimento, profluvium semper e partibus anterioribus ad posteriores excurrit; at semel gradus 50, ceterum 30 acus Galvanometrica principio indicavit, et perpetuo in gradibus 20 commorabatur.

Sub capitis cutem occiput versus alteram ex acubus ferreis immisimus, et musculis coxae sinistrae tendines nonnullos transfodiendo alteram infiximus. Profluvium graduum 90 e partibus posterioribus ad anteriores excurrit, quod cito imminutum fuit usque ad gradus 20; et quoad acus ferreae animali infixae steterunt, tale et illud persistere videbatur. Sed quamquam

cuniculus vehementer jactaretur, in acu tamen Galvanometrica haud ullus apparuit motus, qui notatu dignus censendus esset.

Cum acus exploratoria, quae coxam pervadebat, sub cutem ejus tantummodo immissa fuerit, fluxum profluvium graduum 30 ex anterioribus ad posteriores partes transivit: cum vero musculis rursus infigeretur, stabile profluvium graduum 40 e posterioribus ad partes anteriores prodiit: cum demum acus eo altius musculos pervaserit, graduum 60 profluvium fuit, idemque habuit iter. Eadem acu sub cutem, quae tegit os sacrum, compluries immissa, perpetuo index gradibus 90 occasum versus deflexit, et paullo post ad gradus 18 revertebatur; ideoque profluvium ex sacro ad caput excurrerat.

Fila ex platino ducta Galvanometro resituumus; atque in cuniculo circiter quadrimestre experimenta recepimus. His filis exploratoriis tum in aquam vel distillatam, vel communem, tum in utrasque praedictas dissolutiones immersis, index Galvanometricus haudquaquam movebatur. Quare, si ejusmodi tentamina quidem sufficiant, de eorum homogeneitate facti fuimus certiores.

Cum neuro-electrica profluvia, si quidem sint, in cerebro et medulla spinali apertius, quam alibi, deprehendi arbitraremur (ea enim axem versus cephalo-spinalem in unum, vel plura fila praecipua ad invicem coire deberent, ut probe clarissimus Nobili (1) monuit); cumque acus exploratorias uni systemati nerveo infigere nobis visum esset plurimum conferre ad dubium removendum, ne profluvia quae interdum in animalibus calidis Galvanometro demonstrantur, originem non solum ducerent ex acuum heterogeneitate, sed etiam ex heterogeneitate partium animalium a vita nullo modo dependente; hoc quoque nobis experimentum capere placuit. Inferiore parte medullae spinalis, et parte dextera cerebri detectis, alterum filorum ex platino totum in cerebrum immisimus; alterum pollicari altitudine in ductum rachidianum, medullam transfoliendo, insinuavimus: Galvanometrum quatuor tantum gradus occasum versus indicavit. Verum non est praetereundum, cere-

(1) V. Memorie ed Instrumenti del Cavaliere Professore Leopoldo Nobili Vol. I pag. 7. Firenze 1834.

bri superficiem multo fuisse sanguine infectam. Sed ut cerebri superficiem sanguine tersimus, et fila rursus infiximus, index Galvanometricus nullo pacto dimovebatur, etiamsi animal jam nunc moriturum vehementer membra concuteret.

Ut cuniculus mortuus fuit, compluries iisdem filis exploratoriis experti sumus in sanguine et corde, in cerebro et sanguine, in sanguine et jecore, in jecore et cerebro; et acus Galvanometrica in 0° stetit immota.

In ipso cuniculo sequioris sexus, quo antea eramus usi, rursus pericula fecimus. Filis exploratoriis sub cutem inductis, altero in dorsuali regione, altero in lombari, profluvium graduum 10 e posterioribus ad anteriores partes transivit. Filis autem musculis altius infixis ductum versus rachidianum, profluvium 7 graduum idem ut prius, tenuit iter. Semotis musculis, et vertebis detectis in regionibus praedictis, curavimus quam optime potuimus, ut fila exploratoria medullae spinali infingerentur. Et sive animal corpus concuteret, sive non, neququam index a 0° deflectebat. Neque deslexit, cum filum quod in lombari medullae regione musculis gluteis infixum fuit; eo tamen filo in coxae musculos infixum, index ad gradus 7 versa est, atque e partibus anterioribus ad posteriores fluxum profluvium excurrere significavit.

Caput cuniculo adhuc vivo praecisum fuit, filis exploratoriis ibidem manentibus. Interea dum vita una cum sanguine excedebat, musculi omnes contrahebantur, omnis fibra tremebat: expectabamus ideo, si profluvia neuro-electrica quidem essent, aliquam in iis mutationem fieri debere, quae Galvanometro nostro profluvia vel minima indicante ostendi posset. Sed Galvanometri index ne minimum quidem mutavit.

Cuniculo mortuo, fila exploratoria modo ambo in medullam spinalem immisimus, modo alterum in medullam, in coxae musculos alterum: leve profluvium e posterioribus ad anteriores partes transivit. Nullus demum motus indicis visus est, cum ea fila in aquam fuerint immersa.

Dies sexta. Decimo quarto Kalendas Julii.

Experimentis nostris adfuit Doctor Valentinus Amici, qui celebrem patrem suum sectatus universae Physicae peritissimus est. Fila exploratoria ex platino ducta in aquam distillatam compluries immersimus: acus Galvanometrica primum gradus 7 attingit, ceterum in 0° stetit immota. Duo decigramma acidi sulphurici septem decagrammis aquae miscuimus. In hanc dissolutionem bis filis iis immersis, Galvanometrum primitus gradus 15 occasum versus indicavit, iterum sex. Acus vero in 0° constitit, tum si fila abstersa in aquam communem mergerentur, tum si in dissolutiones sub-carbonatis potassae, aut chlorureti sodii, quae tribus circiter decigrammis salis, et septem aquae decagrammis constabant. Quare fila exploratoria homogenea esse putavimus.

Pullum columbarum octo menses natum, et egregie habitum experimentis capiendis adhibuimus. Filorum alterum sub cutem capitis, alterum primum sub coxae cutem, iterum in ejus musculos immisimus: index jugiter a 0° haudquaquam decessit. Hoc idem contigit, tum altero filorum cerebro, altero musculis coxae infixis, tum ambobus medullae spinali, altero superius, inferius altero. Tam continua acus Galvanometricae immobilitas nos habebat ancipites, ne ipsius Galvanometri vitio tribuenda esset. Sed fortuna continuo nobis haesitantibus profuit: ut enim fuit altero filorum admota casu ferrea vulsella, qua partes filis proximae removebantur, acus ad gradus 25 versa est.

Statim post animal mortem obivit. Hoc quoque die in jecore et ventriculo, in ventriculo et corde, in ventriculo et liene, in binis musculis pericula facere non reliquimus. At omnibus iis experimentis index Galvanometricus nullo pacto a 0° deflexit.

Postea cuniculo annum unum nato usi fuimus. Alterum filorum ex platino sub capitis cutem, alterum sub cutem ventris a latere infiximus: acus galvanometrica mota non fuit. Acus autem uno gradu movebatur, ubi ea fila abstersa in aquam distillatam immersimus. Praeterea septem aquae deca-

grammis tria decigramma acidi sulphurici permixta fuere; et filis in dissolutionem immersis, gradus 15 ad orientem index est consecutus. Iterata vero immersione, nullus prodiit motus. Hisce perspectis fila exploratoria abstersimus, atque alterum sub capitis cutem, alterum sub cutem partis dexteræ ventris defiximus: index stetit immotus. At profluvium graduum 2 e partibus posterioribus ad anteriores indicavit, cum filum e ventre deductum musculis coxæ fixissemus. Deinde in cerebro, et coxæ musculis experti sumus. Animal magna vi membra ex intervallo concutiebat; index tamen neque moveri, neque moveri velle nobis attentissime inspicientibus videbatur.

Acus ferreae filis ex platino ductis successere. In dissolutionem, de qua postremo sermo fuit, ter eas acus immersimus. Galvanometrum gradus 90 ortum versus primitus indicavit, iterum gradus 60 occasum versus, tertium gradus 10 rursus ad orientem. Iisdem acubus in aquam distillatam sæpius immersis, unum circiter gradum index semel attigit, ceterum stetit immotus. Quoad igitur aqua distillata homogeneitatem demonstrare posset, acus ferreae erant homogeneae.

Eundem quem antea, cuniculum adhibuimus; quique viribus defici incipiebat. Acus exploratorias ter infiximus, alteram sub capitis cutem, alteram sub cutem dexteri artus anterioris thoracem versus. Tria profluvia e posterioribus ad anteriores partes aequè transierunt; index vero Galvanometricus primo gradus 90 consecutus est, dein 50, demum 30. Acum ferream quae capiti infixæ erat, sub cutem artus dexteri anterioris immisimus, et quae artum penetrabat, sub capitis cutem eveximus. Verum monendum est, acus exploratorias a fili Galvanometrici extremitatibus non fuisse sejunctas. Tunc profluvium graduum 70 ex anterioribus ad posteriores partes excurrit. Quapropter profluvia duo, quae in duplici experimento prodierunt, tribuenda videbantur heterogeneitati partium, quas eramus periclitati. Si enim ex acuum heterogeneitate ortum duxissent, unum idemque iter sequi ambo debuissent.

Dies Septima. Octavo Kalendas Julii.

Hujus diei experimentis adfuit quoque Doctor Valentinus Amici. Pugiuncula ex platino adhibuimus, quae satis ea exprimebant, quibus Puccinotti et Pacinotti usi sunt; si latitudinem tantum excipias, quae minor fuit in nostris quam in illorum pugiunculis, sicuti diagramma referebat. Sanguinis serum omnibus aliis praetulimus rationibus, quibus homogeneitatem acuum exploratoriarum hactenus deprehenderamus. Cum enim omnia animalium organa sero sint imbuta, multum intererat dignoscere, quaenam phaenomenorum pars sero, quaenam profluviis neuro-electricis danda esset. Ea pugiuncula cum in aquam distillatam immersa fuerint, homogenea visa sunt; cum vero in serum sanguinis humani, acum Galvanometricum 5 gradibus ad ortum detorserunt. Rursus pugiunculis immersis, tres quatuorve gradus acus indicavit. Cinere pugiuncula perfricuimus, et lavimus (qua diligentia nos fugit), tertioque in serum immersimus: acus statim gradibus 15 orientem versus deflexit; sed confestim usque ad gradus 5 retrogressa est, et paullatim ad 0° concessit. Quarta demum immersione, acus immota stetit.

Praeterea acidi sulphurici dissolutionem fere ejusmodi ut antea, comparavimus; atque in eam saepius pugiuncula immersimus: index Galvanometricus nunc 15, nunc 7, vel 8 gradus occasum versus consequebatur, ac paullo post ad 0° jugiter redibat.

His pugiunculis experimenta fecimus in cuniculo unum circiter annum nato. Altero eorum sub cutem capitis immisso, altero autem tum sub coxae dexteræ cutem, tum in musculos ejus, index Galvanometri in 0° constitit. Pugiunculum, quod coxam pervadebat, eo magis induximus; quam ob rem non parum sanguinis erupit. Ideo profluvium gradum circiter duorum a posterioribus transiit ad anteriores partes. Eodemque pugiunculo iterum, iterumque musculis coxae quoquoersum infixo, profluvium graduum 2, 3, vel 4 prodiit, quod praedictam tenuit viam, semperque confestim evanuit. Verum et inversionem pugiunculorum, veluti superiore die, experti sumus;

cumque idem prorsus phenomenon contigerit, heterogeneitati partium tribuenda esse profluvia nobis videbantur.

Pugiunculis in serum immersis, eorumque homogeneitate hoc experimento comperta, ea cerebro et musculis coxae sinistrae infiximus; neque index movebatur, licet animal convelleretur. Tertio repetito periculo acus vix uno gradu ad occasum deflexit: reticendum vero non est, musculos quos pugiunculum pervadebat, multo sanguine inundari. Quamquam cuniculi vires debilitatae essent, eo tamen deductae non erant, ut experimentis ineptum existimare deberemus. Ideo enisi sumus alterum pugiunculorum infigere parti superiori spinalis medullae, alterum inferiori: et acus Galvanometrica gradibus 7 versa est ad orientem. Sed illico animadvertimus, posterius pugiunculum intra cavum abdominale penetrasse, et forsitan sanguine illic foedatum esse, ubi cum filo cupreo Galvanometri conjungebatur. Cum vero nobis compertum fuerit, pugiuncula exploratoria spinalem medullam pervadere, caput cuniculo adhuc viventi auferre placuit; et denuo animal vehementer membra concussit, et index in 0° commoratus est.

Deinde acus ferreas exploratorias in sanguinis serum compluries immersimus; et gradus modo 7, modo 12, atque etiam 17 et 20 Galvanometrum ostendit. At iis acubus cinere perfrictis, diligenterque lotis, gradus perpetuo 10 orientem versus index attingit.

Hisce perspectis, organis cuniculi mortui ferreas acus figere incepimus. Acubus iis parietibus cordis, et jecori infixis, profluvium graduum 15 e corde ad jecur transivit: quod ad gradus usque 90 adaugebatur, cum prior acus in cordis cavitates descendisset. Ea autem acu exploratoria intra cordis parietes retracta, profluvium graduum 10 ad cor e jecore excurrit; rursusque interius impulsa, profluvium graduum 20 contrario ordine prodiit. Invenimus quoque fluxum profluvium graduum 5 e lobo jecoris sinistro ad dexterum; profluvium graduum 32 e jecore ad caecum intestinum; profluvium e jecore ad stomachum graduum initium 90, eoque amplius, et dein 70; quod, acubus locum inter se commutantibus, idemque iter, eandemque habuit vim.

Demum in stomacho et vesica, in pulmonibus, vel tantum

in altero eorum experti sumus. Profluvium graduum statim 90, et postea 7 e vesica transiit ad stomachum; atque profluvium graduum 30 primo, deinde 20 e sinistro pulmone ad dexterum, vel ex alia ad aliam ejusdem pulmonis partem excurrit. Eadem fuit vis, idemque iter profluvio, quod acubus exploratoriis in serum immersis contigit.

Dies octava. Tertio Kalendas Julii.

Nibil magis conferre videbatur ad lumen aliquod nostris inquisitionibus praefendum, quam profluvia electro-chymica quidem, quae consequuntur acuum exploratoriis immersionem in alias atque alias dissolutiones et in sanguinis serum, cum iis comparare, quae prodeunt acubus iisdem partibus viventium, mortuorumve animalium infixis. Ideo experimenta recepimus; ferreisque plerumque acubus eo usi fuimus, quod insigniora ope earum profluvia oriebantur.

Acus ferreas in aquam distillatam immersimus. Galvanometri index in 0° constitit. Iisdem acubus in sanguinis serum immersis, profluvium graduum 13 initio, et dein 9 orientem versus excurrebat. Sed iterum immersis, gradus 20 indicati fuerunt, qui paullo post ad gradus usque 5 decrescebant.

Quatuor decigramma acidi sulphurici sex aquae decagrammis miscuimus, ac in solutionem acus exploratorias immersimus: index Galvanometricus gradibus 90 versus est, ac eo amplius progressus esset; sed postea in gradus 60 occasum versus recessit. Verum in aquam distillatam rursus immersis, stetit index immotus.

Dissolutionem sub-carbonatis sodae comparavimus nobis, tria decigramma sub-carbonatis in sex aquae decagrammis infundendo; et acubus immersis, 3 gradus orientem versus Galvanometrum indicavit. Praeterea visum nobis est, serum sanguinis varie calefacere, eoque acus ferreas experiri. Sero igitur calefacto ad gradus usque 22 thermometri Reaumuriani, atque acubus immersis, profluvium prodiit gradum 50 ortum versus, quod paulatim in gradus 30 redactum fuit. Cum vero seri temperatura ea fuerit, quae animalibus calidis vulgo tribuitur, graduum scilicet 32 circiter, index Galvanometri

primo gradibus 10 occasum versus deflexit, postea gradus 80 attingit, denique ad 12 concessit. Eo experimentis supersedimus, ut seri temperatura ad gradus 27 R. descendisset; tunc iterata immersione, profluvium graduum 30 ad occasum excurrit, quod ad gradus usque 7 imminuebatur.

His exploratis in vivaci cuniculo semestre pericula fecimus. Acus ferreas sub cutem capitis, et coxae dexteræ infiximus: index Galvanometricus 4 vel 5 gradus ad orientem ostendit. Eodem instaurato experimento, index parumper nutavit, dein 20 gradus occasum versus attingit, demumque in 11 gradibus commoratus est. Acuum alteram sub capitis cutem, alteram sub cutem ossi sacro finitimam eo insinuavimus pacto, ut earum acies ad oppositas vergerent partes; ideoque ex anterioribus ad partes posteriores excurrit profluvium graduum 90, quod paullo post usque ad gradus 12 decrevit.

Sub capitis cutem, et musculis coxae sinistrae acubus exploratoriis infixis, profluvium graduum 30 eandem, ut antea, directionem tenuit; at fere eodem rursus immissis, non sine nostra admiratione acus Galvanometrica gradibus 90 ad occasum versa est, et postea in gradibus 50 constitit. Quo periculo compluries renovato, idem prorsus accidit.

Acubus musculis artus anterioris et posterioris infixis, cum dextrorsum, tum sinistrorsum, index Galvanometricus ostendit, ex anterioribus ad posteriores partes (occasum scilicet versus) perpetuo profluvia transire; quae primo erant graduum 80, vel etiam 90, et postea in gradus 35, vel 40 redigebantur. Cum vero in musculos unius ejusdemque artus compluries acus ferreae immissae fuerint, gradus 35, 40 occidentem versus indicati fuerunt. Deinde ex acubus exploratoriis alteram cerebro, alteram musculis coxae sinistrae fiximus; index Galvanometri ad orientem deflectere videbatur, sed cito occasum versus excurrit, atque in gradibus 20 constitit. Acu, quae coxam pervadebat, interius impulsa, index 30 gradus ad occasum consequebatur; at altius adeo immissa, ut musculos non solum, sed tendines etiam trajiceret, index ille mirandum in modum ad gradus 30 orientem versus excurrerebat. Haec duo postrema pericula instaurari praestabat: et cum ferrea acus musculos solum coxae penetraret, profluvium 25 graduum ad occasum transi-

vit; cum vero musculos et tendines, ordo invertebatur, profluvium nempe graduum 20 orientem versus excurrit. Hic excruciatu cuniculus clamitabat; et vehementissime jactabatur; index autem ex iis gradibus 20 haudquaquam deflexit.

Pugiuncula ex platino ducta fili Galvanometrici extremitatibus conjunximus, et in aquam distillatam immersimus. Quo nullus prodiit motus. At iis pugiunculis ter in serum immersis, gradus primitus 20 orientem versus acus Galvanometrica indicavit, dein 10, tertium autem 0°. Cinere pugiuncula terimus, et lavimus, iterumque in serum immersimus: tunc gradus 12 ad occasum index est consecutus. Ea rursus tela linea siccata sunt, et in serum immersa; profluvium unius gradus ortum versus excurrit. Sed immersione repetita, pugiuncula videbantur homogenea.

E binis pugiunculis alterum cerebro, coxae musculis alterum infiximus; index uno gradu ortum versus deflexit. Cuius autem prius pugiunculum cerebrum adeo pervaderet, ut medullam productam fere contingeret, animal clamores tulit altissimos, corpus vehementissime concussit, et paullo post mortuum est. Galvanometri vero index, mobilissimus quidem, in tanta animalis commotione immotus stetit.

Neque praeterivimus occasionem; sed in partibus cuniculi mortui libuit pericula instaurari iisdem acubus ferreis, quibus dudum usi fuimus. Profluvium graduum 80 orientem versus contigit, cum acum altera cerebro, altera musculis coxae, atque tendinibus infixae fuerint. At cum acus posterior musculos tantum pervaserit, profluvium graduum 25 ad occidentem excurrit. Ea demum acu in tendines etiam impulsus, profluvium graduum 20 contrario ordine prodiit. Id scilicet in cuniculo mortuo comperimus, quod vivente cuniculo observavimus.

Postea alteram acum cerebro infiximus, alteram externae oculi dexteri tunicae superposuimus: gradus 10 orientem versus indicati fuerunt. Cum acus posterior oculo dextero infixus magis magisque fuerit, index Galvanometricus gradus 2 ad ortum initio indicavit, et paullo post usque ad gradus 30 conversus est. Eadem acu in auris tentorium nunc uno pacto, nunc alio inducta, altera in cerebro adhuc manente, gradus

20, 30, 40 orientem versus Galvanometrum ostendit. Acu vero ipsa eo interius impulsam, ut tentorium transfoderet, index modo unum, modo alium gradum attingit, modo orientem, modo occasum versus declinavit, prout contactuum puncta immutabantur. Ubi intra aurem illa acus exploratoria immissa fuit, profluvium graduum 55 ad ortum transiit; quod pene statim in 25 gradus redactum est. Idem profluvium prodit, ut in tubam Eustachianam acum ipsam, quam optime potuimus, insinuare curavimus. Tandem acum alteram in fauces, alteram in rectum intestinum semel, et iterum immisimus: index gradibus 4 ad orientem primitus deflexit, et dein gradibus 10 ad occasum. Bis pariter in oesophago, et in recto intestino experti sumus; et gradus 40, posteaque 20 occasum versus indicati fuerunt.

Dies Nona. Sexto Nonas Julias.

Quamquam hoc die experimentis animalia deessent, nobis tamen exercitationes non defuere. Plurimum quidem expediebat accuratius inquirere, quaenam phaenomena oborirentur cum pugiuncula nostra, nostraeque acus in sanguinis serum immersa fuerint; sero enim, quippe sanguinis parte, univsum animal inundatur. Et primum acus ferreas experiri placuit sero sanguinis nuperrime detracti, quod charta eliotropii tinctura caerulea alcalinum esse demonstravit. Acubus igitur in serum immersis, Galvanometri index gradibus 24 ad occasum deflexit; sed paullo post ad orientem versus est, decemque gradus indicavit. In 10 autem gradibus occasum versus stabiliter constitit, iterum et tertio immersione repetita. Demum acubus ferreis diligentius, quam antea, tervis, immersio quarta facta est: tunc index unum vix gradum occasum pariter versus consequebatur: at bis quoque periculo iterato, gradibus quinque ad occasum ambabus vicibus deflectebat.

Deinde serum adeo calefactum fuit, ut thermometrum R. in eo submersum quadraginta gradus indicaret. Tunc acubus ferreis in serum immersis, index Galvanometricus 20 initio gradus occasum versus attingit, dein regressus est, et in 5 gradibus commoratus. Instaurato autem experimento, 10 gradus

stabiliter ostendit: ut vero serum defervescere coepit, 10 aequae gradibus sed ortum versus una et altera vice declinavit. Jam seri temperatura triginta graduum erat: iis acubus denuo immersis, profluvium graduum 33 ad occasum excurrit. Profluvia occasum itidem versus prodierunt, graduum nunc 29, nunc 20, quae in gradibus nunc 12, nunc 10 consistebant, cum ter quoque illud periculum renovatum fuerit.

Seri temperatura ad gradus sex et viginti descenderat. Ferreis rursus acubus immersis, index gradibus circiter 5 ad orientem deflexit; at inde regressus gradus 18 ad occasum attingit, et in 12 stetit immotus. Cum vero seri temperatura fuerit graduum viginti, compluries experimento renovato, profluvia non fluxa graduum deinceps 12, 7, 18 occasum versus excurrerunt.

Acubus ferreis remotis, filis ex platino ductis Galvanometrum instruximus. Alterum ex iis filis eo, quod saepius cutem animalium non sine conatu transfodisset, in acie sua contortum erat, atque levigationem perdiderat. Ea igitur fila exploratoria in serum immersimus; acusque Galvanometrica gradibus 30 ad orientem versa est, et statim usque ad gradus 20 retrocessit, ibique constitit. Sed filum illud contortum direximus, et perpolivimus, atque amba ter in serum immersimus. Index ad orientem tribus, quatuor gradibus declinavit, postremo autem nullo pacto e 0° dimovebatur.

Serum usque ad gradus duos et quinquaginta R. calefecimus. Filis denuo immersis, gradus 12 ad ortum stabiliter fuerunt indicati: quatuor vero solummodo, cum seri temperatura nonnullis gradibus decrevisset. Tandem pugioncula ex platino adhibuimus: et quoties ea in serum immersimus, vel ejus seri temperatura graduum octodecim esset, vel ad eam assurgeret, quae animalibus calidis propria censetur, vel eo magis, acus Galvanometrica perpetuo stetit immota.

Dies Decima. Quinto Nonas Julias.

Quae hactenus egimus experimenta, ea quidem non erant, quae persuaderent nobis, diuturna profluvia in animalibus calidis existere. At si non diuturna, momentanea saltem fingi

possent profluvia, quae ut explorentur, non Galvanometro praesertim nostro, sed Reelectrometro, vel rana more Galvanico praeparata oporteat uti. Statuimus igitur quamdam adhibere machinulam, quae jam inde ab exordio electricitatis Galvanicae inserviebat, et hodie quoque optime inservit ad mirandas electricitatis vires in muscularibus ranae motibus ostendendas. Machinula constituitur ex vase vitreo cylindrico, cujus ora duo disci ex aurichalco ocludunt. Discus inferior fulcimini ligneo insistit; facies autem interior disci superioris unco pariter ex aurichalco instructa est. Rana praeparata ita unco suspenditur, ut disco inferiori pedibus incumbat. Hinc continuo patet machinulam istam vice Reelectrometri ejus fungi posse, quod Marianini et Grimelli descripserunt (1). Alterum e filis exploratoriis ex platino ductis cum dextera fili Galvanometrici extremitate conjunximus; alterum inferiori machinulae disco ope fili cuprei serico circumtecti anneximus, atque eidem disco copulavimus sinistram extremitatem fili Galvanometrici. Rana autem in vase vitreo nondum inclusa fuit.

Itaque cum serum sanguinis deesset, salem in aqua usque ad saturitatem dissolvimus; et filis in solutionem immersis, index gradibus 8 occasum versus deflexit. Deflexit vero gradibus tantum duobus, aliis iteratis immersionibus. Sed cum in aquam distillatam compluries ea fila fuerint immersa, acus Galvanometrica a 0° neutiquam recedebat. Experimento autem in aqua salita saepius instaurato, acus perpetuo ad occasum versa est gradibus primo sex, dein quatuor, uno, et demum in 0° stetit immota. Quapropter fila exploratoria satis homogenea esse censuimus.

Ea fila abstersimus, et cuniculo viginti, circiter semestri, sub ventris cutem infiximus. Index Galvanometricus eodem, quo antea, pacto declinavit; cum scilicet fila exploratoria in aquam salitam immersa fuissent. Periculo iterum facto, index in 0° commorabatur. Rursus fila exploratoria tersimus; et dein eorum alterum sub cutem capitis infiximus, alterum sub coxae dexteræ cutem. Profluvium graduum 3 e partibus poste-

(1). V. Osservazioni ed Esperienze Elettro-fisiologiche dirette ad istituire la Elettricità Medica. Modena. 1839.

rioribus ad anteriores transiit. At filo, quod coxam penetrabat, intra musculos propulso, profluvium graduum 5 easdem versus partes excurrit.

Hisce perspectis, ranam in vase vitreo locavimus; et filum exploratorium, quod prius disco inferiori dependebat, cum superiore disco conjunximus. Quo intelligi potest, omnia profluvia sive diuturna, sive momentanea, quae filum Galvanometricum percurrerent, ranam quoque pervadere debere. E filis exploratoriis alterum sub capitis cutem, alterum sub cutem coxae immisimus: e partibus posterioribus ad anteriores profluvium graduum 4 excurrit. Filo autem posteriore intra musculos impulso, profluvium duorum initio graduum, postea unius contigit, idemque atque antea, iter habuit; demum vero index ad 0° rediit. At in utroque periculo ne minimus quidem motus in rana conspiciebatur.

Dextero cerebri hemisphaerio alterum filorum infiximus, et coxae sinistrae musculis alterum; in 0° index constitit. Quo experimento compluries instaurato, index primum gradus 2 consecutus est, et dein, licet animal convelleretur, in 0° stetit perpetuo immotus. Fila exploratoria in medullam spinalem immisimus: acus Galvanometrica nullo pacto moveri videbatur, sed paullo post gradus 2 attigit, et ad 0° confestim reversa est. Quamvis animal multum debilitatum esset, ei tamen caput praecisum fuit. Capite ablato, et filis in medulla manentibus, omnes musculi parumper, at manifeste contrahebantur; acus vero Galvanometrica, et praeparata rana omnino immobiles steterunt.

Sed nobis magnopere referebat inquirere, quantum rana in vase vitreo locata fluido electrico commoveretur. Leydensem ideo parvulam phialam electricitate, ut ajunt Physici, oneravimus eo pacto, ut nullum experiretur concussum, qui phialam ipsam exonerare tentasset; neque aurea folia electrometri Bennet ab invicem diducerentur. Cum ejus globulus disco superiori machinulae nostrae, et externa ejusdem phialae superficies disco inferiori admotus fuerit, illico musculares contractiones non in rana solum prodierunt, sed etiam in cuniculo capite obtruncato, cujus medullae spinali fila exploratoria adhuc infixa erant; quae tam validae, celeresque fuerunt,

ut totum cadaver resiliret. Quod phaenomenon decem post horae momentis eadem phiala iterum sumus libenti animo experti. Ut vero cadaveris temperatura fuit graduum 28 R., contractiones prorsus defecerunt.

Eadem fila exploratoria in aquam salitam immersimus, et homogenea comperimus. Tunc alterum eorum jecori, stomacho alterum infiximus; index Galvanometricus 2 gradibus ad occidentem deflexit. Dein in cor, et stomachum iis filis immisis, profluvium graduum 6 exoriebatur. Decem autem gradus occasum versus index attingebat, cum fila in cor et intestina immissa fuerint. In corde et pulmonibus, in corde et vesica, in renibus et vesica, in jecore et vesica fuerunt quoque explorata profluvia graduum 2, 4, 7, 5, quae omnia ad occasum vergebant.

Rursus de filorum homogeneitate ope aquae salitae facti fuimus certiores. Quare antedicta profluvia non e filis exploratoriis, sed ex heterogeneitate partium quibus ea fila fuerant infixi, originem sane quidem ducebant. Quod apertius patuit, cum fila exploratoria in eadem organa, sed ordine contrario immissa fuerint; acus enim Galvanometrica ad orientem perpetuo, et iisdem fere gradibus in singulis experimentis deflexit.

Undecima Dies. Nonis Julii.

Homogeneitate filorum ex platino ope seri sanguinis perspecta, machinula nostra Galvanometrum instruximus, et in machinula praeparatam locavimus ranam, quae explosione electricitatis vel minimae manifestissime contrahebatur. In vivaci autem, atque adulta columba egimus experimenta. Statim ac alterum e filis exploratoriis inter colli vertebrae juxta medullam spinalem insinuavimus, et coxae musculis alterum infiximus, caput columbae obtruncatum est. Facile animo finxeris, quemadmodum moriens animal jactaretur, si tantum animadvertas, nullo cruciatu vexatum illud fuisse. Rana nihilominus, acusque Galvanometrica steterunt immotae. Verum enim vero citissimae in rana contractiones oriebantur, modo electricitatis explosio vel levissima fieret; et index Galvanometricus facile a 0° deflecte-

bat, modo fila exploratoria in aquam aliquibus acidi sulphurici guttis permixtam immergerentur.

Denuo homogeneitatem eorundem filorum recognovimus; et in nonnullis passeribus instauravimus experimenta. Passeres antea interficiebantur vel spiritus elidendo, vel venas incidendo, ut sanguis pene totus exprimeretur. In rana, et in acu Galvanometrica nullus plerumque motus prodibat, cum fila exploratoria cerebro, vel medullae spinali, et musculis coarum infixa essent. Cum vero alterum filorum in cor, alterum in jecur passeris suffocati inmissa fuerint compluries, index 2, 3, 4, 5 gradus consequbatur.

Tandem in ranis tum integris, tum more Galvanico praeparatis experiri libuit. Et nunc cerebro et musculis, nunc medullae spinali, vel nervis cruralibus et musculis fila exploratoria infiximus. Musculi quidem ranarum vehementer contrahantur; sed neque index Galvanometricus e 0° deflectebat, neque rana in machinula locata commovebatur.

Dies Duodecima. Decimo Septimo Kalendas Augusti.

Tot actis experimentis reliquum nobis esse videbatur, ut alia quoque dubitatio amoveretur. Dubitabamus enim, ne animalium vastitas ad profluvia apertius ostendenda posset conferre. Adulto igitur ariete comparato, contulimus nos ad Clinices Veterinariae Officinam, ibique pericula renovavimus coram illustri viro, Antonio Alessandrini, Praeside nostro amplissimo, et Doctore Eugenio Notari.

Machinula nostra rana praeparata instructa erat, atque cum filo Galvanometrico, et altero pugiunculorum conjuncta; ut profluvia momentanea, si quae essent, assequi etiam possemus. Pugiunculorum ex platino homogeneitatem sero sanguinisprehendimus; atque alterum sub cutem capitis, alterum sub coxae cutem arieti infiximus: nullus autem in rana, nullus et in acu Galvanometrica motus contigit. Acus pariter et rana immotae steterunt, cum illud periculum saepius et quoquoersum iteraverimus.

Deinde fila exploratoria ex platino ducta iis pugiunculis subrogavimus. Interim Doct. Notari cruralem nervum artus dexteri posterioris maxima ex parte detexit, et a ceteris partibus pre-

stantissime sejunxit. Ei nervo fiximus fila exploratoria centimetris sex ab invicem distantia. Statim artus contractiones visae sunt; sed nulli in rana praeparata, et in acu Galvanometrica motus prodierunt.

Rursus Galvanometrum pugiunculis exploratoriis fuit instructum. Alterum eorum immisimus per calvariae terebrationem in dexterum cerebri hemisphaerium, alterum in musculos coxae sinistrae. Animal adeo valide convellebatur, ut vix coerceri posset. Quapropter cor arietis transfiximus, eique mortem maturavimus. Pugiuncula tamen iisdem in locis haerebant; at index Galvanometri, mobilisque rana steterunt immobiles, neque aliquis nostrum potuit de re tam perspicua dubitare. Ut aries mortuus est, a consuetudine nostra nequaquam recessimus: experimenta scilicet in cadaveris organis prosequuti sumus. Aperto ventre, alterum e pugiunculis exploratoriis in jecur, alterum in rumen immisum fuit: hinc fluxum profluvium graduum 15 e stomacho ad jecur excurrit. Verum ea pugiuncula antequam infingerentur, nonnullo temporis spatio, quemadmodum saeda ex arietis corpore detraximus, aeri exposita fuerunt. Dein cerebro, et jecori pugiuncula infiximus; index 3 circiter gradibus occasum versus deflexit. Idem prorsus contigit, cum in cerebrum alterum, alterum in musculos immissa fuerint: profluvium nempe e musculis ad cerebrum transit. Quod phoenomenon, ariete vivente, nequaquam obtingere vidimus.

Experti quoque fuimus in cerebro et musculis, in cerebro et renibus, in renibus et liene, et in utroque rene; index autem in 0° commoratus est. Sed index gradus 8 occasum versus consequebatur, cum in liene et testiculis, in liene et renibus exploravissemus. Et in cerebro et testiculis, in cerebro et abomaso, in cerebro et corde, in corde et jecore, in corde et in felis vesica profluvia vel nulla, vel duorum, triumve graduum comperimus; quae omnia ad occasum vergebant, ex organo nempe posteriori ad prius transibant.

Quinque et viginti minutis ab arietis morte elapsis, acubus ferreis Galvanometrum instruximus. Acus cas in jecur et rumen, in jecur dein et testiculum immisimus; index Galvanometricus gradus 40 et 60 orientem versus attigit, atque inde retrogressus est, et 40 gradus ad occasum consecutus. Alteram

acuum jecori, alteram sanguinis grumo compluries infiximus; profluvium graduum saepius 30, interdum etiam 90 e jecore ad grunum excurrit.

CONSECTARIA

Jam nunc absoluta experimentorum narratione reliquum est, ut praecipua consectaria quae ex iis derivantur, summam perstringamus.

- I. In primis fere omnibus experimentis profluvia oriebantur conspicua; sed acus exploratoria essent ne homogeneae, an non, nos omnino latebat.
- II. Aqua distillata, vel viva haud satis est ad homogeneitatem filorum, et acuum perpendendam. Magis ad hoc confert aqua salita, vel acido sulphurico permixta, et quo ad ejusmodi experimenta attinet, praesertim sanguinis serum.
- III. Homogeneitas filorum, et pugiuncularum ex platino diu persistit. Acus vero ferreae leviter homogeneitatem amittunt, quippe quae humidae materiae contactu citissime immutentur.
- IV. Cum fila et pugiuncula ex platino ducta sero praesertim sanguinis homogenea deprehendissemus, et rite sub cutem, aut in axem cerebro-spinalem et musculos, aut tantum in nervum systema, vel tantum in musculare, aut demum in varia animalium organa quoquoversum immissemus, nunquam acus Galvanometrica profluvia vel minima indicavit.
- V. Hoc idem accidit, etiamsi animal in quo experimenta fierent, vehementissime corpus concuteret.
- VI. Et idem contigit perpetuo, cum fila vel pugiuncula exploratoria uni systemati nerveo infixae fuerint; illic videlicet, ubi profluvia neuro-electrica (si quidem essent) facilius inquirere putabamus.
- VII. Phaenomena, quae in animalibus viventibus oriebantur, cum fila ex platino, quorum homogeneitatem haud satis exploravimus, vel acus ferreas adhibuerimus, eadem plerumque prodierunt, etiamsi iisdem filis, et acubus experimenta in animalibus mortuis fierent; cum systemati neu-

ro-musculari, tum binis organis filis, acubusve exploratoriis infixis. Cujus rei quae caussa sit, non est hic inquirendi locus. Sed quod maxime notatu dignum arbitramur, eadem phaenomena contingebant, ubi ea fila, easque acus in alias atque alias dissolutiones immersimus, et praesertim in sanguinis serum plus minusve calefactum. Quod patet ex nostris diei octavi, et noni experimentis.

VIII. Ne rana quidem more Galvanico praeparata, ac in circuitu posita ea potuit momentanea profluvia demonstrare, quae Galvanometrum, ut liquet, ostendere nequit. Quod sane accidit, licet filis acubusve exploratoriis infixis, animal valide contraheretur, et explosio electricitatis vel levissima ranam manifeste commoveret.

IX. Denique comperimus, dissimilem altitudinem, qua fila, vel acus infingerentur, eorumque filorum, vel earum acum dissimilem pulituram, atque fortuitum cum metallis heterogeneis attactum adeo valere, ut profluvia gignerentur, et index Galvanometri dimoveretur. Comperimus quoque vim profluvii paulatim imminui, atque interdum evanescere, eoque facilius, quo saepius fila potissimum ex platino (dum heterogenea sint) in animalium partes immissa fuissent: quod aequae accidebat, cum immersiones filorum in aquam, et varias solutiones, nec non in serum sanguinis iterarentur.

Quare, ni omnino fallimur, existentia profluviorum, quae vitam unam respiciant, quae vita tantum permanente prodeant, nobis probari non potest. Interea enim dum animalia corpus valde concuterent, ne leve quidem eorum indicium se nobis visendum praebuit. Credimus scilicet, rationibus quae eatenus aptiores habebantur ad profluvia neuro-electrica ostendenda, eorum existentiam adeo certe demonstratam non esse, ut in quaestionem vocari non possit. Et haec quidem experimenta ejusmodi esse censemus, ut unum phaenomenon, quod profluviorum neuro-electricorum existentiam respuat, magis valeat, quam plurima, quae demonstrant. Improbabile enim videtur, si in animalibus calidis profluvia neuro-electrica sint, quae vita agente utcumque prodeant, et rationibus

quibus usi sumus, explorari possint; improbable, inquam, videtur, ea profluvia ne semel quidem deficere posse, cum vita stimulis mechanicis, aut voluntariis excitetur. Contra autem aliae, atque multae sunt caussae, quibus ipsa oriri possunt phaenomena, quae vitae nonnulli tribuunt, et ad profluvia neuro-electrica statuenda sumunt. Neque vobis nimium arrogantes visuri erimus, si quas ex iis caussis retulerimus, quae cum e nostris, tum ex aliorum periculis colligi posse arbitramur. Parum itaque, aut nihil proficiunt ad rem nostram profluvia, si

- I. Homogeneitatem filorum, vel acum tantummodo aqua distillata, vel viva expenderis. Nam acus eae, eaque fila heterogenea nihilominus esse possent, ac proinde originem profluvii praebere.
- II. Si non attenderis, an acus exploratoriae, dum animal contrahitur, persistent, necne aequali altitudine infixae; ne earum contactus cum animalis partibus minimum immutentur.
- III. Si latis pugiunculis exploratoriis ex platino ductis usus fueris, sicuti Professores Puccinotti, et Pacinotti commendant. Illa enim pugiuncula propterea, quod latas habeant superficies, perraro homogenea sunt, ac si quidem sint, facillime heterogenea evadunt. Alterum nempe pugiunculorum et superficie et pulitura ab altero differre potest, vel alterum adeo immutari, ut iis de caussis ab altero differat. Quod praesertim continget, si vulnera animalibus iisdem pugiunculis intuleris, vel si Pisanos Professores imitatus, musculos altero eorum trajiceris, altero autem thecam osseam calvariae.
- IV. Si persaepe, quemadmodum Fario et Zantedeschi, acubus ferreis usus fueris. Nam acus ferreae ad hujusmodi experimenta ineptae censentur.

Sed quonam pacto interpretabimur eam phaenomenorum constantiam, qua Fario et Zantedeschi sibi persuaserunt, profluvium ascendens externum, et profluvium descendens interius in animalibus calidis esse; et, quod mirabilius est, ea profluvia in animalibus mortuis inverso ordine excurrere? Quo-

rum omnium neque in nostris, neque in Professorum Puccinotti, et Pacinotti experimentis species ne quidem ulla visa est. Quare illi interpretationi nos impares profiteamur oportet. Scimus enim, quot sint, et quam dissimiles circumstantiae, quae phaenomena tunc praesertim variare possunt cum acubus ferreis, quibus Fario et Zantedeschi usi sunt saepius, profluvia explorentur.

Verum qualescumque sint caussae et circumstantiae, quibus Physici Veneti, et Pisani in errorem, ut nobis videtur, delati fuerunt, omnia, quae supra dicta sunt, nec non existimatio quam illis habemus, nos ad credendum inducunt, eos si experimenta debita diligentia (1) instaurare voluerint, animum a sua sententia revocatuos esse, et scientiae caussa, quae solum veritate alitur atque amplificatur, sententiae nostrae accessuros. In qua modo fidentius persistimus, propterea quod Physici alii et quidem illustres fidem consecrariis nostris fecerunt. Doctor scilicet Secundus Berruti, in Universitate Taurinensi Physiologiae Professor, una cum Professoribus Botto, Girola, Bellingeri, Demarchi et Malinverni experimenta electro-physiologica egit ex decimo sexto Kalendas Iulii ad sextum Idus Augusti anni hujus. Dein Sapientibus Italis Augustam Taurinorum congregatis omnia consecraria, omnesque tradidit observationes. Statim ac ex Taurinensi Diario Scientiarum Medicarum ea consecraria comperimus cum nostris congruere, eo vero delectati sumus; eorum enim Professorum industria et sapientia, atque Conventus celebritas maximum experimentis eorum, et aliquod nostris pretium largiantur. Dolemus tamen, quod summo vir praeditus ingenio, summaque doctrina, Franciscus Puccinotti impeditus fuerit, quominus illustri Conventui interesset. Nam nos non fugit, Professores Taurinenses constitutum habuisse, ut experimenta coram Puccinotti iterarentur. Ita ipse forsani sibi persuasisset, nimis tum festinasse, cum profluvia neuro-electrica Galvanometro demonstrabilia in vulgus protulerit, eorumque

(1) Suademus praecipue, ut homogeneitas acuum et florum exploretur sero sanguinis calefacto usque ad temperaturam animalium, in quibus experimenta fiant.

statuerit existentiam; et pari ingenio virtute in eorum sententiam concessisset. Quae virtus, quamvis perpauca ornet, deesse tamen Professori Pisano non potest; quippe sapientiam ante semetipsum diligat.

Neque ideo putetis, nos fluidi haud ponderosi et electricitati similis existentiam in corporibus viventibus, et praecipue in animantibus respicere. Haec enim fuit omnium fere temporum opinio, functionibus vitae cum organicae, tum animalis quiddam fluidum inservire, atque praeesse; quae aequissima eo nobis videtur, quia unum sit pene filum, quod in hoc ut ita dicam, phaenomenorum vitalium labyrintho aliquam nobis viam praemonstret. Re quidem vera continuus molecularum motus, earumque compositiones et resolutiones; phaenomena endosmoseos et exosmoseos, quae in corporibus viventibus atque in animalibus contingunt ex primo vitae exordio usque ad mortem, eoque amplius; indoles heterogenea partium, quibus organa constant, et praesertim humores; ea inquam omnia ejusmodi sunt, ut ex Physicorum sententia prae omnibus aptiora censi debeant ad electricitatem gignendam. Et quid aliud monere videtur ejus existentia systematis, quod sensationes e peripheria ad centrum, ac reactiones e centro ad peripheriam rapidissime perducit? Quid? profluvia Galvanica, quae in rana prodeunt, cum heterogeneae ejusdem animalis partes sese tantum contigant? (1) Quid? experimentum, quo ipse celebris Galvani demonstravit, communicatione inter cerebrum et organa electrica torpedinis nervis incisis sublata, nullam oriri electricam explosionem? (2) Quid? effectus electricitatis et acu-punctionis in curationem morborum, qui systema nerveum respiciunt? Verum neque demonstratum esse arbitramur, neque nobis demonstrari posse videtur, fluidum illud efficiatur a vita, an vitam efficiat, an in animalibus sit, atque agat instar communis electricitatis; utrum scilicet in corpore animanti aequabi-

(1) Hoc unum experimentum, licet Volta dissentiat, fortiori est argumento ad eorum profluviorum existentiam, quam omnia nostrae aetatis pericula ope Galvanometri peracta.

(2) Nuper Matteucci existimavit, eos nervos ex quarto cerebri lobo exire. Quare lobum illud electricum appellavit.

liter distribuatur, an in quaedam prouflvia continua, vel momentanea sese colligat, quae electrometris et Galvanometris, nec non rana more Galvanico praeparata ostendi possint. (a)

Sed sententia nostra, Academici praestantissimi, etsi nobis satis firma videatur, non esse tamen hujusmodi fatemur, ut in controversiam vocari non possit. Eo quidem consilio experimenta nostra, et consecraria ad vos relata fuerunt, ut cum omnia, quibus ea nititur, argumenta cognoveritis, eam probetis, si rectam; si falsam, respuatis.

(a) Ad hanc nostram firmandam sententiam plurimum conferre videtur experimentum illud, quod illustris Matteucci in torpedine egit, quodque hic iisdem verbis narrare placet, quibus ipse experimentum descripsit in libro edito hoc anno Parisiis, cui titulus est: *Essai sur les phénomènes électriques des animaux*. (pag. 48) « Il était important de bien connaître si, dans l'acte
 « de la décharge, une portion du courant électrique est tran-
 « smise par les nerfs qui vont à l'organe, et dans quelles con-
 « ditions cela se fait. L'expérience était très-difficile. J'ai pour
 « cela isolé le plus possible, sur une torpille très-mince, les
 « quatre nerfs de l'organe, en enlevant toutes les parties mu-
 « sculaires et cartilagineuses qui les enveloppent; j'ai tâché
 « d'en découvrir des grandes portions. La torpille donnait en-
 « core de très-fortes décharges sur l'organe préparé. J'ai in-
 « filé un de ces nerfs avec deux lames de platine pointues:
 « il faut que les lames ne touchent que le seul nerf, et qu'el-
 « les les touchent à la plus grande distance possible entre el-
 « les. Sur une torpille un peu grosse, on réussit à le tenir à
 « 2 ou 3 centimètres de distance. On rattache ces deux lames
 « aux extrémités du fil d'un galvanomètre très-sensible. L'expé-
 « rience ainsi disposée, on irrite l'organe de la torpille, et on
 « ne tarde pas à en obtenir la décharge. *Le Galvanomètre*
 « *ne donne jamais aucun signe de courant*. On conçoit que
 « si le nerf était traversé par un courant dans l'acte de la dé-
 « charge, portion en serait absorbée par les deux lames. C'est
 « là un fait, que j'ai plusieurs fois constaté et que nous ver-

« rons être d'une grande importance par la suit. « Si igitur in nervis, qui e cerebro torpedinis ad electrica ejusdem animalis organa pertingunt, et cum iisdem organis tantam habent convenientiam (ut ipsius Matteucci et Galvani experimentis patet), si in iis inquam nervis nullum electricum profluvium Galvanometrum indicaverit, quamam spe detinebimur fore, ut profluvia deprehendantur in aliis animalium organis, in quibus adhuc phoenomenon visum non est, quod cum profluviiis electricis, ne minima quidem parte conferri possit?

Porro et hic referre praestabit ea verba, quibus ceber Nobili sermonem concludit, postquam narrasset experimenta sua (1) in nervis et vasibus, in quibus profluvia electrica animalibus calidis propria facilius inquirere putaverat. « *O che gli organi o vasi scandagliati non sono destinati a condurre correnti elettriche, o che gli elettromotori che ve le spingono sono di una debolezza straordinaria.* Ora sarebbe egli mai possibile (ipse subdidit), che pile così poco efficaci bastassero all' esercizio delle funzioni vitali? Nello stato di assoluta ignoranza in cui siamo sulla natura delle forze dell' organismo animale, non si può, nè si deve azzardare alcuna risposta decisiva. Confesseremo per altro, che il giuoco delle funzioni vitali si presenta al nostro sguardo con tanta energia da crederlo piuttosto un effetto dovuto a cagioni del tutto sconosciute, che all' azione ben nota di pile debolissime ». Haec postrema conclusionis sententia nobis probari non potest; vis enim electricitatis quantulumcumque re ipsa sit, vel nostris experiendi rationibus videatur, ejus tamen indolis esse potest, ut vitae functionibus praesit, et vitam, pene dixeris, efficiat. Et quidem ab explosionibus electricis vel minimis conspicuae et validae contractiones prodeunt; quod neminem fugit, et nos die decima experti sumus. Verum enim vero ipsius Nobili conclusioni hodie quoque libenti animo consentimus. Nam ipsam conclusionem confirmant doctissimae *Observationes et Experimenta electro-physiologica*,

(1) Memorie ed Osservazioni edite ed inedite. ec. . . Firenze 1834. Vol. I. pag. 43.

quae anno superiore Professor Grimelli ideo fecit, ut *Electricitas Medica constitui posset*. Neque ab ea nos avertere possunt Physici nostrae aetatis nonnulli, neque egregia ipsius Matteucci (1) in torpedine atque in rana pericula. Etenim ab iis periculis nihil aliud consequi possumus, praeterquam quod Galvani collexit; nerveum scilicet systema plurimum conferre ad phaenomena electrica, quae in torpedine viva, in omnibus piscibus electricis et forsitan in rana contingunt; aut ad summum functionum systematis nervei vice, in torpedine saltem, profluvia electrica fungi posse. Attamen hujusmodi experimenta prosequantur Physicae et Physiologiae cultores, neque animo nihilominus concidant; propterea quod aliis inventis rationibus explorandi profluvia, indoles fortasse atque leges eorum deprehendi poterunt, quae una cum vita, vel ob vitam prodire videntur.

(1) Essai sur les phénomènes électriques des animaux. Paris. 1840.

EQ. ANTONII CAVARA

*De cranii terebratione feliciter instituta 5.º idus Januarii
anno 1840, et de methodis aptioribus ad vulnus
post operationem curandum.*

Duo abhinc elapsi sunt anni, quum mihi datum fuerit, Sodales Praeclarissimi, coram vobis sermonem habere de cranii terebratione satis feliciter instituta, quem humaniter accepistis, prout sola rei utilitas postularet. Sinite, quaeso, ut hodie denuo de altera terebratione disseram: Prodest aegrae humanitatis bono consulere, periclitanti hominum vitae opitulari illamque brevi temporis spatio, atque solo artis chirurgicae auxilio ad pristinam incolumitatem perducere, ac pene dixerim renovare, dum nulla salutis spes superesse putabatur. Nam si nulla, quoad fieri potest, praetermittenda est occasio, qua quisque bono provideat, exemplo aetatis nostrae chirurgos excitare conabor, ut si antea timore perculsi jacerent, animis a metu ad spem revocatis, veterem operationem alacriter instituent, quae nescio quo fato, obsoleta pene videbatur. In medium proferam experimenta, quae ejus utilitatem comprobare, omnemque dubitationem evertere plane valeant, quaeque dissentientium argumenta, vel acies ingenii imminuere haud possint.

Praeterito anno die 9 Januarii vespere ad majus hujus civitatis nostrum nosocomium adductus fuit Antonius Pizzirani Bononiensis, puer natus annos 14, manualis in arte muraria, qui dum ejus operam praestabat ab altitudine pedum 25 et ultra, infelix in praecipitium ruit, et caput in duram terram mi-

serando prorsus modo percussit. Ita destitutus omni sensu fuit, ut e vita discescisse videretur, ac in tanto discrimine statim ad Nosocomium perductus. Vocatus fui officii causa ut miserum, quoad ars valeret, sublevassem. Omnis investigatio, quamvis accuratissima, ad vulnera inquirenda fuit supervacanea, neque in toto corporis ambitu, neque in capitis partibus mollioribus indicia laesionis apparebant. Convulsiones tetanicae magnopere vexabant infirmum. Lenta erat respiratio simul cum suspiriis crebris; pulsus tardus et contractus. Facultates intellectus nullae. Sensus externi in quacumque corporis parte, quovis modo excitati non respondebant. Ostendebantur oculi aperti et immobiles, ac pupilla iners lucis actioni. Haec omnia praenunciabant mihi validissima indicia laesionis encephali. Quapropter tota denudata a capillis calvaria, ejus ossa ad examen statim revocavi, eaque diligenter manu pertractavi ad laesionis locum, si possibile foret, inveniendum. Tunc mihi visus fuit punctum depressionis aliquod dignoscere, etenim, quemadmodum enunciaui, nullum vulnus, nulla contusio in quovis loco apparebat. Ibi cruciali incisione per pollices tres instituta, ac subposito pericranio abraso, os parietale in conspectum venit, quod prope sagittalem suturam fractum apparuit ad longitudinem pollicis unius cum dimidio, et ad formam literae C. Aliquantisper erant ossa fracta depressa, neque inter fracturae limina tenuiori quoque specillo aditus apertus erat. Consilium cepi trepani coronam infigere, ut possibile foret, eo loco fracturae proximiori. Ablato disco quod trepanum secuit, mihi patebat via, ut per illam firmum vectem immitterem, depressumque os extollerem. Hoc egi prout ars, quae est in me, et prudentia ferebant. Encephalum a compressione liberavi, non modica sanguinis copia per ostium patefactum effluit, quae infra duram meningem, et cranii internam tabulam latebat, compressionemque supraenunciatam magis magisque in viscus adaugebat. Non mihi datum fuit dignoscere unde sanguis efflueret, non enim vulnus, non scissuram, non vasa abrupta inveni: fortasse a diploica, vel interlamineari ossium substantia stillabat. Nescio utrum sententia haec mea cum ratione congruat. Nihil certe peregi ad compescendam haemorrhagiam, quae in poste-

rum non aliter evenit, et quemadmodum in aliis capitis terebrationibus mihi contigit, aegrotus, veluti e somno excitatus, sensus internos et externos repente recuperavit, nec amplius abnormes artuum contractiones apparuere. Interea a sanguine ceterisque sordidis mundatum, ad perfectum contactum integumenta redacta, et ope cerati glutinavi ipsa contenta, linteamentis, ac pannis linteis et aptis fasciis vulnus obductum fuit. Nihil notatu dignum evenit in posterum, atque abuterer patientia vestra, S. P., si prolatam enarrationem de die in die proferrem. Hoc tantum opinor non esse silentio praetermittendum, scilicet in prima decade, post operationem institutam, sanguinem per phlebotomiam fuisse eductum, et ad uncias octo per vices quatuor; decima secunda die vero pone aures decem hyrudines adnotae fuerunt. Eccoprotici ad ventrem leniendum ex oleosis desumpti erant, nec non clysmata emollientia, prout res postularet omissa manebant. Et ita res bene se gessit, ut ad nullum aliud pharmacum confugere necesse fuerit. Strictum regimen dieteticum fuit semper ab aegroto observatum. Solummodo vigesimaquarta die ab instituta operatione, quod idem valet a vulnere adepti, aliquantisper victus auctus fuit, ita ut gradatim trigesimaquinta die victum plenum adeptus est, quod certe, si morbi gravitatem consideremus diuturnum non erit.

Numquam febre fuit affectus, atque ut uno complectar verbo, res ita bene successit, ut vigesimaquinta die proximi mensis februarii, quinquagesimaquinta scilicet ab instituta operatione, aegrotus perfecte convaluerit, et a nosocomio discesserit. En vobis, S. P., compendium historiologiae chirurgiae traumaticae, quam satis ad suum cursum exploratam censeo, postquam, nulla interposita cunctatione, necessariis auxiliis ferebatur opis. Tamen, ex mea sententia, non erit silentio praetermittenda methodus adhibita in vulnere curando, quam semper sum secutus, et nunquam me fefellit, neque arbitror esse contemnendam. Post cranii terebrationem, consequentiae, quae saepius eveniunt, quaeque magis sunt pertimescendae, erunt meningum inflammatio, inphiltrationes purulentae, et fungus cerebri, qui improprie aliquando cerebri hernia appellatur, ac tandem, quamquam raro, tumores fungosi durae matris. Haemorrhagiam ac cariem aliquando operationem istam subsequentes

praetermittam. Ad supra enunciatos finestos eventus vitandos fuerunt semper chirurgorum cura, studia, et industria couersa, quapropter pluribus modis vulnus operationem subsequens curarunt. Ommitto, quae apud veteres artis cultores in praetio erant, videlicet lintea carpta in oleo rosarum imbuta, aut globulum linteamenti sicci superpositum vello serico, vel linteo tenuissimo ad formam trepani coronae excisum: ommitto et balsama, et cerata, et cataplasmata ex herbis betonica, et aromatica confecta, quae ab ipsis medicamenta balsamica vocabantur, et alia pene innumerabilia, quorum virtutem et utilitatem hodierna practica, et sauum iudicium reprobant. Silentio etiam praeteream consuetudinem aliorum veterum chirurgorum, infingere nempe in trepani aperturam aurei, vel cuspiam alius metalli laminam, semper ad instar hujus aperturæ formam accomodatam, quae ad limites vulneris relicta ibi supersedebat, atque orbiculo clauso, cerebro incumbens, auxilium ferebat ne morbosae vegetationes visceris, vel ejus involucrorum gigni possent, quemadmodum post terebrationem exequutam animadverterant. Quamvis hoc medendi genus merito obliuio deleuit, attamen aliquis ex recentioribus chirurgis illud suscitare nostris ipsis temporibus gaudet, et ad praxim denno revocare. Etenim discum osseum a trepani corona avulsum, plane mundatum a partibus mollibus, in aperturam rursus remittere, atque cum illo cerebrum tegere conantur. Ad hoc Waltherius experimenta nonnulla in quadrupede instituit. Cranium canis terebravit, atque discum osseum in factam aperturam reposuit. Partes molles et superpositae rejunctae, cito coiverunt. Subsequenti anno canis fuit occisus, et discum osseum observatum colore dissimili, nempe albicante a Waltherio visum est: qua de causa ipse in suspensionem fuit inductus novam vitam non esse adeptum, sed illud discum, uti appellant chirugi, veluti in *sequestro* detentum ad limina ossis terebrati. Paulo post Waltherius terebrationem ad liquida extraenda in homine instituit, quae intra cranium, et eum locum ubi terebratio fuit instituta, existere putabantur. Attamen eum fefellit iudicium, et humore non reperto, denuo frustum osseum sectum a trepani corona remissum fuit, partes externae rejunctae, et sutura sicca contentae ac fascia obvolutae fuerunt.

Permulta evenit suppuratio, atque osseum frustum vacillans apparuit, ac tandem externa ejus superficies saltem cecidit. Lamina interna vero, juxta Waltherium, in situ permansit, quae a substantia gelatinosa induta, formam carnis adeptam est, et ita aegrotus convaluit. Hinc consequitur, suadente Waltherio, quocumque in casu non oportere vacuum aperturam servare, frustum osseum remittere perutile esse. Interea erit probandum, utrum ossis frustum remissum vitam adipiscatur an non, secus enim extraneum corpus maneret inter vulneris limites reseratum, quod absque incongruitate non esset. Haec omnia a chirurgis explorata fuere ad mala removenda, quae supra enunciavimus, et quae aliquando cranii terebrationem subsequuntur. Ego vero arbitror, ac bene exploratum habeo, perutile semper contingere partes molles divisas rejungeri, usitatisque modis eorum adhaesionem promovere. Tali modo tute terribiles eventus enunciatis praecavimus. Hodierna therapia Chirurgica in balsamis et unguentis spem suam non reponit, ac ita felix est conditio nostra, ut non amplius in nosocomiis multitudo varia unguentorum coloribus dissimilibus observetur, quae magis pictorum tabellam, quam medicamentorum apparatus Chirurgicum repraesentat. In solis naturae viribus physiologus chirurgus confidit, ipsam totis secundat viribus, ac quidquid ad salutarem ejus influxum opponitur removet, et in hoc sita est summa chirurgiae practicae. Superius dictum fuit inphiltramenta purulenta, meningites, ac fungos cerebrales infauste cranii terebrationem aliquando subsequi. Modo vero demonstrabo quanta sit utilitas in proposita medendi methodo, scilicet dum omni industria sectarum partium rejunctionem obtineri cogamur, et quanta sit in ea verisimilitudo, ut infausta praedicta praecaveamus. Etenim dum aeris contactum assidue a quovis vulnere removemus, tunc perdifficile suppuratio contingit. Hoc in chirurgia est satis probatum axioma, ac perutile docebat ille Italiae nostrae praecellens Magister in suo *de rara vulnerum medicatione* tractatu, quem hoc saeculo nostro per plures habuit sectatores. Larreyus primus generalis praepositus ad sanitatem tuendam in Gallorum exercitu, dum bellum in Russia flagrabat, hanc veritatem satis exploratam habuit, atque in suis practicis obser-

vationibus historias per plures nobis tradidit, quae enunciant operationes chirurgicas in milites ab ipso Mosquae institutas, quosque per *ambulantiam* vulgo appellatam in Galliam misit, in quibus nulla amplius deligatio facta fuit, et quos dum ipse Lutetiae Parisiorum revisit, eorum vulnera reperit perfecte ad cicatricem perducta. Tantum impeditus aeris contactus in vulneribus valet ad sanitatem promptam obtinendam. Quin imo ego ipse expertus sum hujus veritatis certitudinem, quando recrudescente hyeme aegroti, in quibus operationes varias institueram, et quos raro, vel nullo modo deligavi, citius convalescere. Neque majori animi sollicitudine hoc medendi genus commendare possem chirurgis, in nosocomiis praesertim, ubi aer saepe saepius pravis exhalationibus est inquinatus, in nonnullis etiam frigore rigidissimus. Sed ut sermo redeat ubi discessit, post terebrationem dicam, esse semper adhibendam partium rejunctionem atque ceteris medendi methodis praefereendam, excepto tamen casu si haemorrhagia foret compescenda, quae dum constitit, ad reunionem praedictam erit pariter deveniendum. Quoniam vero satis est demonstratum, impeditum aeris contactum suppurationem vitare, demonstratum quoque erit, ut opinor, supervenientis inflammationis probabilitatem removeri, quae semper suppurationem antecedit. Tali medendi modo et periculum inphiltrationis purulentae, et meningitis quoque timorem arceamus. Hinc apparet ex dictis omnem apparatus externum, si possibile foret, vel nunquam, vel raro, at semper caute removendum esse, quemadmodum usus semper fuit summa cum utilitate. Neque tantum supradictis periculis obstare possumus, verum etiam fungis cerebri et meningum, qui graviores sunt, ac magis pertimescendi. Superpositio laminae metallica, vel segmenti ossis avulsi, inutilis evadit, dum sola compressio officium praestat. Si capsula ossea cranii in quovis situ ejus continuitatis aperta erit, eo plane loco cerebri textura paulatim expanditur, inflatur, et crescit ultra hujusmodi ossis superficiem, et ad formam fungi sublevata distenditur. At dum hoc processerit, si recte ponderemus, oportet ut dura quoque meningis disrupta aut incisa sit eodem loco speciatim, qui cranii aperturae respondet. Ad hujus pathologici phaenomenon explicationem, Rourensus experien-

uas varias instituit, quas typis vulgavit, modo decem elapsi sunt anni. Praecipua ac prima excrescentiarum cerebri origo in ablata compressione, et interrupta cranii continuitate non solum, verum etiam durae meningis mihi sita esse videtur. Jam probe noscimus duram matrem validissimam esse membranam, quae cranii internae tabulae adhaerens, maxime est tensa, ac cerebri substantiam continet non solum, sed etiam in cranii fracturis ipsum defendit, et sustinet. Modo vero quid sentiant physiologi, licet sint eorum sententiae discrepantes, certum est encephalum quadam pulsatione gaudere, et quaecumque sit hujus phaenomenon causa, scilicet vel impetus circulationis sanguinis, vel effectus respirationis, aut peculiaris hujus visceris structura, hoc tamen profecto in practica observatur, nempe quo loco, ob quamlibet causam interrupta sit ossium cranii continuitas, nec non durae matris, ibi ut plurimum expanditur, et ultra limina fracturae extenditur cerebrum, ita ut veluti ad formam fungi extollitur, a cujus figura nomen pathologicum fungi cerebri est enatum. Si vero collum ejus et pedunculum intra limites ossis fracturae reseratum, minus sit diametro, relatae ad cerebri portionem protrusam, tunc improprie hernia cerebri nuncupatur. Neque ego de variis methodis ad hunc morbum curandum verba faciam, quae omnes ad rem non pertinent. Tantum hoc asserere non dubitabo, etiam in eo casu quando videlicet trepani apertura ostendat duram meningem scissam, et disruptam, utiliore semper partium rejunctionem evadere, quam repositionem disci ossei juxta Waltherium, aut laminae metallicaee juxta veteres magistros. Conjunctio partium mollium super aperturam, praeterquamquod consentiat idoneam compressionem fasciis instituere, obicem ad encephali expansionem fert, et explanat etiam viam ad transudationem substantiae gelatinosae vel fibrinosae, quae ab osse secto non solum, verum etiam a meningibus, ceterisque partibus emanat, atque novam substantiam osseam efficit dum indurescit, et a peripheria ad centrum progreditur, quod mirum in modum peragit natura in harum partium sanatione, (1) neque id sperandum esset si cor-

(1) Hoc fuit a me observatum eventum esse in adolescentem supra

pus extraneum foret aperturæ interpositum. Atque ex allatis patet proficuum quoque esse partium adhaesionem ad fungos duræ matris vitandos, quos nonnulli observarunt oriri, licet membrana ista invulnerata esset. Sunt tumores isti omnino ad encephali substantiam extranei, atque non raro ad magnitudinem fungorum cerebralium perveniunt. Attamen Abernethii observationes affirmant, morbosas hasce vegetationes non aliud esse nisi sanguinis grumum, qui fungositatis formam induit, quas facile ubi adhaerent evellere possumus. Quod si cum ratione consentiat hujus chirurgi opinio, post cranii terebrationem si partes disjunctas sollicito adhaerere curamus, successiva compressio hæmorrhagiam impedire valet, et pariter ne fungus iste-evolvatur. Sed mihi videor jam satis comprobatam hujus generis medendi utilitatem habere, neque diutius C. S. abutar patientia vestra. Jam fateor argumentum hodierni sermonis invisum esse debere cupidis rerum novarum. At si Medicus tantummodo acquiescit, cum possit se gloriari incolumen hominis vitam servasse, et dum familiarium lacrymis finem imposuerit, societati illum restituisse; fortasse ex hac parte non indignus hoc loco sermo meus apparebit. Scientiæ physiciæ tantum in honore habendæ sunt, quantum commodi et utilitatis nobis afferunt: secus enim et artes, et scientiæ chimaeræ essent et nomina vacua, quæ sensu effectaque carerent. Quamobrem magnopere semper existimabo illorum virorum ingenia, qui summis studiis ac laboribus illas promovere conantur. Attamen istæ non in omnibus aetatibus, et ratione eorum, qui illas profitentur pari fortuna gaudent et utilitate. Fateor nostris diebus permultos esse medicinæ scriptores, si illos enumerarem, perpauca vero qui mediocritatem prætergressos esse. Vereor tamen ne dum recentiorum somnia et deliria sequimur, id relinquamus quod in veteribus bonum erat et verum, et ut novum amplectamur, utile ammittamus. Quod si ab aliquibus magnopere existimantur, et pene artis miracula ostenduntur nova illa chirurgica instrumenta, quorum ope

dictum Pizziranum, quem revisi anno subsequenti ab operatione instituta.

aliquando modicum calculum urinarium in vesica conterimus, non erunt tamen illa oblivisci, ex eo quod vetera sunt, et usque ab ipso Hippocrate monita, quae recte a majoribus nostris adhibita, per plures ab imminentis mortis periculo eripere valuerunt, quemadmodum vobis exemplo S. P. clare, ut opinor, demonstraverim.

ANTONII BERTOLONII

EQ. AUR, ET ORD. SABAUD. M. D.

IN ARCHIGYMN. BONON. BOT. PROFESS. EMER.

MISCELLANEA BOTANICA II.

INTRODUCTIO.

In hisce Miscellaneis secundis, prosequar, Collegae praestantissimi, descriptionem plantarum, quae lectae fuerunt in expeditione Chesneyana per Euphratem; sed eisdem praefabor exhibens notitias quasdam, quae erunt botanicis summopere gratae, atque Archyginmasio nostro perhonorificae, quasque vos libenti animo accepturos facile credo.

Ulysses Aldrovandus noster magnum nomen inter Zoologos sibi comparavit innumeris, quos de animalibus scripsit, libris, et quos typis editos habemus. Scripsit quoque multa de plantis, prout Ovidius Montalbanus indicavit in Bibliotheca sua botanica p. 67.; sed pauca de his in lucem prodierunt. Una enim Dendrologia ejus evulgata fuit curis ipsius Montalbani anno 1668. per Joannem Baptistam Ferronium tres, et sexaginta annos post Aldrovandi obitum. Ex hoc libro profecto discimus, Aldrovandum etiam quoad plantas fuisse virum eruditissimum, nec tamen latissime in plantis versatum, cum ibi de paucis arboribus tantum agat. Atqui ego nunc ostendam, summam fuisse in Aldrovando peritiam rei herbariae, ex quo historia hujus scientiae novum capiet incrementum. Reperiuntur in museo horti botanici nostri plures plantae siccae in Hispania lectae, et chartulis caractere Ulyssis Aldrovandi scriptis comitatae, quas an ille legerit, cum juvenis

annorum sedecim per Hispaniam iter fecit, an postea sibi comparaverit, incertum est; sed quamplurimas alias plantas postea coegit, atque ex his hortum siccum sibi confecit, qui hactenus remanet, et in Bibliotheca hujus Archigymnasii custoditur. Hortus iste constat voluminibus numero sedecim, reapse septemdecim, cum volumen primum in duo sejuncta volumina dispertiat, quae omnia volumina simul sumpta continent quatuor mille quatuor centum et octo plantarum species probe numeratas, et chartis agglutinatas. Harum unaquaeque distinguitur nominibus, vel phrasibus sive a Theophrasto, sive a Dioscoride, sive a Plinio, sive a Galeno, sive a Fuchsio, a Matthiolio, a Lobelio, a Dodonaeo, a Ruellio, aliisque mutatis, vel ab ipso Aldrovando primum introductis, aut concinnatis, cujus rei exemplum a volumine primo horti siccii Aldrovandiani desumptum nunc vobis exhibeo.

1. Absinthium ponticum Mattioli. (*Artemisia pontica* L.)
 Abs. Galatium Sardonium Lob.
 Abs. ponticum Galeni.
 Santonicum Ruellii.
 Abrotanum foemina Fuchsii.
2. Chamaecyparissus (*Santolina squarrosa* W).
 Abrotanum foemina.
 Santolina.
 Santonicum minus Diosc. Trag.
3. Abrotanum mas (*Artemisia camphorata* W).
4. Alysson Plinii. Asperula vel Asperula odora Lob. (*Galium sylvaticum* L.).
 Matrisylva Tragi.
 Obs. Est tamen carnosior paulo et pinguior, minusque odorata quam Belgarum teste Cordo.
5. Xyris seu spatula foetida (*Iris foetidissima* L.)
6. Hex aquifolia. (*Ilex Aquifolium* L.).
 Acrifolium.
7. Alaternus Pl. Phyllirea quibusdam. (*Phillyrea latifolia* L.).
8. Halimus Diosc. Portulaca marina. (*Atriplex Halimus* L.)
9. Anagyris vera Diosc. (*Anagyris foetida* L.).

Nantea Plin.

!0. Arbutum. Unedo. Memecylon Diosc. (*Arbutus Unedo* L.)

Hortus siccus Aldrovandi Parisios a Gallis in ultima incursione perlatus rediit ad nos cum reliquis rebus nostris, quae ad litteras, vel ad artes spectarent. Desunt profecto chartae nonnullae, et cum his plantae eisdem agglutinatae; qua ratione, et a quo ablatae, ignoratur. Sed dolendum summopere est, plantas istas ab esu insectorum plurimum laborasse, et, nisi quis opem ferat, ex integro perituras, remanentibus tantum chartis, quae indicent: Hic fuit hortus siccus Ulyssis Aldrovandi! Qui quidem, cum sit ex antiquioribus Italiae, pro cimelio habendus, et eo potissimum magni faciendus, cum nobis ostendat, quae fuerit doctrina veterum de plantis, illorum praesertim, qui primi a renatis literis emiserunt, et Commentatores dicti sunt. Nec minus ab eo elucet, quae, et quanta fuerit doctrina plantarum in Aldrovando, qui tantam vim stirpium in ipsis incunabulis re-viscentis scientiae potuit sibi comparare, atque cognoscere!

Verum non hic constitit vir eximius, et ad aliud opus vere mirandum se convertit, quod in Bibliotheca Archigymnasii nostri pariter habetur. Scilicet curavit, ut tabulae plantarum mille, et septingentae cum triginta una fierent, easque in decem volumina dispertivit, quorum quatuor sunt in folio grandiori, reliqua sex in folio paulo minori. Figurae sunt tanta veritate circumlinitae, et coloribus tam assabre ad naturam pictae, ut miraculum illius aevi dicendae sint. Profecto a primis, rudibusque figuris, quae in *Horto Sanitatis* habentur, ad illas, quae sub fine seculi praeterlapsi datae sunt a Nicolao Josepho Jacquino, et quae inter praestantiores censentur, nullae alliae figurae plantarum existunt, quae hisce Aldrovandi figuris pulchritudine, et veritate sint pares. Nomina, et phrases more consueto ab antiquis auctoribus desumptae, vel ab Aldrovando attributae singulas icones comitantur. In fine vero voluminis noni habentur quoque effigies nonnullorum Zoophytorum, quae tunc temporis inter vegetabilia recensebantur. Atqui opus hoc cedro apprime dignum meretur, ut in utilitatem convertatur scientiae, et ut

figuræ ejus afferantur in libris, qui de re herbaria pertractant; ad quam rem assequendam opportunum foret, ut quis elencum harum iconum conficeret, nominibus recentioribus additis nominibus antiquis, ut figuræ facilius possent reperiri, atque recognosci.

Haec sunt merita eximia, et ingentia Ulyssis Adrovaudi in rem herbariam, et adhuc plura supersunt in scriptis ejus ineditis, in quibus nec deest systema dispartendarum plantarum a se inventum, quod quidem fuit ex systematibus primis, licet botanicos omnino lateat, deque illo libentissime loquar alia vice, si librum manuscriptum dabitur adire.

Venio nunc ad plantas Euphratis, quæ mihi describendæ supersunt, nec erit abs re quaedam præmittere de harum plantarum omnium habitu, atque natura. Sturpes istæ in genere sunt macrae, pusillae, contractae, quæ res portendit, solum, in quo degebant, esse sterile, et siccum. Eaedem mihi videntur valde appropinquare habitu plantas illas, quas Dominicus Della Cella legit in arenis Libycis, et in regione Cyrenaica, quasque ego vidi Genuæ apud Prof. Vivianum f.r., et quæ ab ipso Viviano in Specimine suo Floræ Libycae exhibitæ fuerunt. Quoad vero naturam plantarum Babylonensium, quarum nonaginta quatuor in totum obtinui, quatuor, et octuaginta pertinent ad Floram propriam, et Asiaticam, et in his quinquaginta species sunt novæ, reliquæ sunt communes cum Europa, nisi forte ex regione illa paulatim in Europam migraverint.

CLASSIS DECANDRIA.

ORDO DIGYNIA.

40. SAXIFRAGA *tridactylites* Sp. pl. p. 578.

Pl. sicc. Euphr. n. 52.

Ex rupibus gypsaceis in pago *Gorluk*. Martio *Ann.*

41. GYPSOPHYLA *Vaccaria* Sibith. et Smith. Fl. Graec. prodr. l. p. 279.

Saponaria *Vaccaria* Sp. pl. p. 585.

Pl. sicc. Euphr. n. 185.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

ORDO TRIGYNIA.

42. *SILENE cylindriflora* De Cand. *Prodr.* 1. p. 371. n. 42.
Pl. sicc. Euphr. n. 122.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

Radix gracilis, fusiformis. Caulis teres, erectus, vel ascendens, simplex, aut alterne ramosus, tri-quadrupollicaris. Folia anguste lanceolata, vel linearia, valde acuminato-attenuata, pubescentia. Inflorescentia *Sileneos conicae* L. Pedunculi tenues. Calyx trigintastriatus, quatuor-sex lineas longus, quinquefidus, laciniis lanceolato-linearibus, acuminatis, margine membranaceis, in anthesi cylindraceus, in fructu cylindraco-conicus. Pedunculi, et calyces hirsuto-glandulosi, sive adspersi pilis brevissimis, crassiusculis, patentibus, apice glanduliferis. Petalorum unguis exerti, lamina bifida.

43. *SILENE puberula*: caule erecto, foliis linearibus, acuminatis; racemo simplici, floribus brevissime pedicellatis; calycibus fructus longe clavatis; petalis bifidis.
Pl. sicc. Euphr. n. 123.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

Radix gracillima, simplex. Caulis teres, erectus, vel ascendens, palmaris, aut paulo ultra, superne remote foliosus. Folia linearia, valde angusta, acuminata, margine inferiore longiuscule ciliata, radicalia caespitosa, brevissima, graminea. Racemus terminalis, simplex, pauciflorus, secundus. Bractee lanceolato-lineares, acutae. Pedicelli vix lineam longi, aut breviores. Calyx decem-nervis, quinque-sex lineas longus, semper erectus, in fructu longe clavatus, quinquefidus, laciniis lanceolatis, acutis, dense ciliatis. Corolla calyce longior, limbo parvo. Unguis exerti, lamina bifida. Thecaphorum longitudine capsulae. Capsula ovoidea. Tota planta tenuiter puberula.

44. *STELLARIA media* De Cand. *Prodr.* 1. p. 396. n. 11.
Alsine media Sp. pl. p. 389.

Pl. sicc. Euphr. n. 17.

Ex fissuris rupium prope flumen ad portum *William. Martio. Ann.*

45. *ARENARIA nudiuscula*: foliis setaceis; caule filiformi, superne nudo; panicula trichotoma, pedunculis piloso-glandulosis; foliolis calycinis ovatis, obtusis, uninerviis; corollis calyce longioribus *Tab. VIII. fig. 1.*

Pl. sicc. Euphr. n. 126.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

Radix gracillima, subsimplex. Caulis filiformis, simplex, vel inferne ramosus, erectus, puberulus, superne tractu potius longo foliis denudatus, circiter bipollicaris. Folia setacea, mucronulata, glabra, longiuscula, dorso striata, basi dilatata, lateribus membranaceis, subciliatis. Panicula terminalis, trichotoma, pubescenti-glandulosa. Bractee exiguae, ovatae, acuminatae, nervo carinali viridi, lateribus albo-membranaceae, glabrae. Pedunculi alares calyce triplo longiores, reliqui breviores. Foliola calycina ovata, obtusa, uninervia, glabra, margine late albido-membranacea. Petala obovata, obtusa, calyce longiora, multistriata, supra, et oris alba, dorso leviter rosea. Capsula ovoidea, longitudine calycis, trivalvis. Semina apprimè minutissima, reniformia, sub fortiori vitro tenuissime granulata, flavido-fusca, lateribus depressa.

46. *ARENARIA rubra* β . tenuior, subglabra, floribus exiguis *Bert. Fl. Ital. 4. p. 683.*

A. diandra Guss. Fl. Sic. prodr. 1. p. 515.

Pl. sicc. Euphr. n. 199.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

Differt a typo speciei habitu multo tenuiore, floribus dimidio minoribus, glabritie totius plantae, aut uno, alterove pilo raro, apice glandulifero superne tantum adspersa, pedunculis fructiferis erectis, panicula minute bracteolata, subaphylla.

CLASSIS DODECANDRIA.

ORDO MONOGYNIA.

47. PEGANUM *Harmala* *Sp. pl.* p. 638.
Pl. sicc. Euphr. n. 134.
 Ex oris Euphratis. *Perenn.*

ORDO TRIGYNIA.

48. EUPHORBIA *cuspidata*: foliis lanceolatis, cuspidatis; umbel-
 la simplici, quinqueradiata; involucris ovatis, involucel-
 lis liberis, late rhombeis; nectariis semilunatis, muticis.
Pl. sicc. Euphr. n. 157.

Ex oris Euphratis. *Prenn.*

Caulis teres, spithamalis. Folia crassiuscula, lanceolata, api-
 ce angustato-cuspidata, inferiora multo minora, acuta.
 Umbella terminalis, simplex, quinqueradiata, subinde cum
 sexto flore centrali, sessili. Involucri foliola ovata, acuta,
 seu mucronulata. Involucella libera, late rhombea, pari-
 ter mucronulata. Nectaria (petala) luteola, semilunata,
 cornibus obtusis, muticis. Tota planta glabra, et glauce-
 scens. Similis *Euphorbiae terracinae* L., sive *Euphor-*
biae neapolitanae Ten. sed nectariis muticis, et habitu
 minore distincta.

49. EUPHORBIA *helioscopia* *Sp. pl.* p. 658.
Pl. sicc. Euphr. n. 51.
 Ex cultis ad portum *William. Martio. Ann.*

CLASSIS POLYANDRIA.

ORDO MONOGYNIA.

50. GLAUCIUM *mesopotamicum* *Spr. Syst. veg.* 2. p. 571.
n. 4.
Römera bivalvis *De Cand. Prodr.* 1. p. 122. *n.* 3.
Pl. sicc. Euphr. n. 135.

Ex oris Euphratis *Ann.*

51. *HELIANTHEMUM salicifolium Willd. En. 1. p. 571.*

Cistus salicifolius Sp. pl. p. 742.

Pl. sicc. Euphr. n. 46., et n. 181.

Ex rupibus mixtis (*breccie*) ad pagum *Gorluk. Martio. Ann.*

52. *HELIANTHEMUM Lippii Willd. En. 1. p. 571.*

Cistus lippii Mant. alt. p. 245.

Pl. sicc. Euphr. n. 182.

Ex oris Euphratis. *Suffrut.*

ORDO POLYGYNIA.

53. *ANEMONE coronaria Sp. pl. p. 760. flore rubro.*

Pl. sicc. Euphr. n. 27.

Secus rivulos ad portum *William. Martio. Perenn.*

Haec species tam flore rubro, quam flore violaceo promiscue, et copiosissime occurrit etiam in collibus Bononiensibus.

54. *ADONIS aestivalis Sp. pl. p. 771.*

Pl. sicc. Euphr. n. 54.

Ex campis ad pagum *Gorluk. Martio. Ann.*

55. *RANUNCULUS asiaticus Sp. pl. p. 777.*

Pl. sicc. Euphr. n. 81.

Ex locis insolatis prope *Bamboudseh. Aprili. Perenn.*

56. *RANUNCULUS myriophyllus De Cand. Regn. veg. syst. nat. 1. p. 257., et Prodr. 1. p. 28. n. 12.*

R. millefolius Russ. in Schrad. Journ. ann. 1799. 2. zweit. stück. p. 424.

Pl. sicc. Euphr. n. 82.

Ex arenosis siccis prope *Bamboudseh. Aprili. Perenn.*

57. *RANUNCULUS mucronatus: hirsutus; foliis radicalibus tripartitis, lobis inciso-dentatis, caulinis anguste laciniatis; carpellis erectis, glabris, longe subulato-rostratis Tab. VIII. fig. 2.*

Pl. sicc. Euphr. n. 96.

Ex oris Euphratis. *Perenn.*

Radix fasciculato-fibrosa. Caulis teres, erectus, sursum val-

de villosus, superne ramosus, subdichotomus, patulus, spithamalis. Folia radicalia petiolata, subcordata, hirsuta, tripartita, lobis latis, incis, obtuseque dentatis; caulina sub ramificationibus tantum sita, sessilia, tripartita, segmentis angustis, et anguste laciniato-dentatis, suprema minus decomposita, laciniis linearibus, integerrimis, subinde tantum bipartita, vel simplicia. Pedunculi terminales, et alares, longi, potius crassi, sursum villosi. Foliola calycina ovata, obtusa, dorso valde hirsuta, demum reflexa. Petala calyce duplo longiora, lutea, obovata, integerrima, multinervulosa, nervulis ramosis. Carpella in capitulum oblongum dense coadunata, stricta, compressa, laevia, glabra, carina interiore tantum pubescentia, basi semiovata, apice longe rostrato-subulata, rostro recto, vix extremitate subrecurvo.

CLASSIS DIDYNAMIA.

ORDO GYMNOSPERMIA.

58. *SCUTELLARIA tomentosa*: tota incano-tomentosa, foliis ovatis, obtuse dentatis; corollis extus villosis.

Pl. sicc. Euphr. n. 187.

Ex oris Euphratis. *Suffrut.*

Caulis teretes, ramosi, ascendentes, inferne lignescentes.

Folia parva, ovata, longiuscule petiolata, obtuse, et profunde dentata, utrinque albo-tomentosa, sed magis subtus. Bractee ovatae, obtusae, concavae, densissime albo-tomentosae, multo minores, quam in *Scutellaria orientali* L. Corolla lutea, extus villosa, pariter multo minor, quam in illa specie. Tota planta tecta tomento incano.

59. *DRACOCEPHALUM aristatum*: foliis lanceolatis, integris, obterve remote dentatis, racemo terminali, interrupto, bracteis, calycibusque apice-aristatis.

Pl. sicc. Euphr. n. 145.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

Radix fusiformis, flexuosa. Caulis tetragonus, erectus, vel

ascendens. Folia lanceolata, longiuscule petiolata, obtusa, aut suprema acutiuscula, integra, vel remote, obiterque dentata. Racemus verticillatus, terminalis, interruptus. Bractee cuneatae, apice dilatatae, et tri-quinquedentatae, dentibus acuminato-aristatis. Calyx bilabiatus, labio superiore bifido, laciniis latioribus, inferiore trifido, laciniis angustioribus, omnibus apice breviter aristatis. Corolla alba. Tota planta pubescens.

CLASSIS TETRADYNAMIA.

ORDO SILICULOSA.

60. LEPIDIUM *Draba* De Cand. *Regn. veg. syst. nat.* 2. p. 529. n. 1.
Cochlearia Draba *Sp. pl.* p. 904.
Pl. sicc. Euphr. n. 99.
 Ex oris Euphratis. *Ann.*
61. AETHIONEMA *cristatum* De Cand. *Regn. veg. syst. nat.* 2. p. 560. n. 3.
Pl. sicc. Euphr. n. 28.
 Ex rupibus mixtis (*breccie*) ad portum *William.* *Martio.*
Ann.
62. IBERIS *acutiloba*: foliis linearibus, superne profunde dentatis; siliculis emarginatis, lobis acutis *Tab. IX. fig. 1.*
Pl. sicc. Euphr. n. 89.
 Ex viciniis *Bamboudseh.* *Aprili.* *Ann.*
 Radix gracilis, fusiformis, alba. Caulis teres, erectus, pollicaris-palmaris, pubescens, simplex, vel superne ramoso-corymbosus. Folia crassiuscula, linearia, obtusiuscula, superne remote, et profunde paucidentata, aut laciniata, inferne integra, et ciliata. Flores umbellati, radiis hirtis. Corolla alba, vel rosea. Silicula ovata, glabra, apice biloba, lobis exquisite acutis.
63. ALYSSUM *tetraspermum*: pusillum, stellatim tomentosum; foliis linearibus, obtusis; siliculis obovatis, subtetraspermiis, glabris.
Pl. sicc. Euphr. n. 25.

- Ex campis ad portum *William*, ubi copiosum. Martio. *Ann.*
 Radix gracillima. Caulis subpollicaris, vix ultra, erectus,
 vel ascendens, solitarius, aut plures e radice caespitosi.
 Folia crassiuscula, linearia, superne sensim sensimque la-
 tiora, obtusa. Flores exigui. Petala alba. Silicula obova-
 ta, glabra, compressa, margine incrassato, stilo brevis-
 simo, persistente terminata, mono-tetraspermia. Tota her-
 ba tecta tomento stellato, adpresso.
64. *BISCUTELLA leiocarpa* *De Cand. Regn. veg. syst. nat.* 2.
p. 413. *n.* 14.
Pl. sicc. Euphr. n. 114.
 Ex oris Euphratis. *Ann.*
 Siliculae glaberrimae.
65. *EUCLIDIUM syriacum* *De Cand. Regn. veg. syst. nat.* 2.
p. 421. *n.* 1
Anastatica syriaca *Sp. pl. p.* 895.
Pl. sicc. Euphr. n. 133.
 Ex oris Euphratis. *Ann.*
66. *HESPERIS angustifolia* *De Cand. Regn. veg. syst. nat.* 2.
p. 457. *n.* 19.
Pl. sicc. Euphr. n. 92.
 Ex oris Euphratis. *Ann.*
67. *SISYMBRIUM Irio.* *Sp. pl. p.* 924.
Pl. sicc. Euphr. n. 91., *et n.* 113.
 Ex oris Euphratis *Ann.*
 In planta sub *n.* 91. tota herba est glabra; in planta sub
n. 113. caulis inferior, et folia pilis scatent; in reliquis
 nulla diversitas.
68. *SISYMBRIUM curvisiliquum*: caule ascendente, hispidulo;
 foliis inferioribus inaequaliter, acuteque runcinato-dentatis,
 glabriusculis; siliquis solitariis, axillaribus, curvis, bre-
 vissime pedicellatis *Tab.* 10. *fig.* 1.
Pl. sicc. Euphr. n. 131.
 β totum glabrum; caule spithamali.
Pl. sicc. Euphr. n. 137.
 Ex oris Euphratis. *Ann.*
 Radix fusiformis, potius gracilis, flexuosa, longa. Caulis ter-
 res, ascendens, hispidulus, pilis brevibus, palmaris, so-

litarius, vel plures ex eadem radice. Folia angusta, inferiora inaequaliter, et acute runcinato-dentata, lobis, dentibusque saepe apice piliferis, caeterum glabra, aut margine tantum pilis raris ciliata, suprema linearia, pectinato-pinnatifida, aut pectinato-dentata, lobo impari integro, longiusculo. Flores solitarii, axillares, racemum foliatum, longum sistentes, subinde jam ab imo caule incipientes. Petala angusta, oblonga, alba, calyce duplo longiora. Siliquae crasse, et brevissime pedicellatae, teretes, curvae, crassiusculae, semipollicem, octo lineas longae, hispidulae, terminatae stilo crasso, lineam, aut paullo ultra longo. Stigma subtruncatum, levissime emarginatum. Varietas β differt, quia tota glabra est, et caule spithamali gaudet.

Haec species est valde proxima *Sisymbrio rigido* De Cand. Regn. veg. syst. nat. 2. p. 480. n. 36.

69. *SISYMBRIUM pumilum* De Cand. Regn. veg. syst. nat. 2. p. 464. n. 8.

Pl. sicc. Euphr. n. 95.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

70. *DIPLOTAXIS hirsuta*: foliis obverse lanceolatis, obtusis, in petiolum angustatis, remote subserratis, integrisque; siliquis longe pedicellatis, pendulis; stilo compresso; stigmate bilobo.

Pl. sicc. Euphr. n. 98.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

Caulis inferne flexuosus, et hirsutus, strigis longis, retrorsis, superne laxius strigosus, teres, ramosus. Folia obverse lanceolata, obtusa, remote subserrata, vel integra, strigis raris adpersa, basi in petiolum longum angustata. Racemi terminales, solitarii, pedunculati, longi, laxiflori, glabri, nudi. Pedicelli tenues, lineas quinque circiter longi. Calyces hirsuti. Corolla lutea, calyce duplo longior. Siliqua thecaphoro tenui, unam-duas lineas longo stipitellata, pendula, compressa, lineam lata, pollicem, vel paulo ultra longa, glabra, valvis nervo mediano instructis, terminata stilo compresso, stigmatumque bilobo. Semina biseriata.

- Proxima *Diplo-taxi crassifoliae* De Cand. Regn. veg. syst. nat. 2. p. 629. n. 1.
71. *SINAPIS alba* Sp. pl. p. 933.
Pl. sicc. Euphr. n. 47.
 Ex campis ad pagum *Gorluk*. Martio. *Ann.*
 Abludit a planta Europaea caule, petiolisque hirsutis, foliis sparse strigosis, in reliquis simillima.
72. *SINAPIS mesopotamica* De Cand. Regn. veg. syst. nat. 2. p. 625. n. 40.
Pl. sicc. Euphr. n. 101.
 Ex oris Euphratis. *Ann.*
 Siliquae compresso-tetragonae, strigis raris adpersae, rostro paulo longiores. Rostrum cuspidatum, compressum, glabrum.

CLASSIS MONADELPHIA.

ORDO HEPTANDRIA.

73. *ERODIUM brevicaule*: foliis pinnatifidis, laciniis distantibus, oblongis, obtuse inciso-dentatis; pedunculis subquinquefloris; nucularum acubus inferne longe barbatis *Tab. IX. fig. 2.*
Pl. sicc. Euphr. n. 80.
 Ex rupibus prope *Bamboudseh*. Aprili. *Perenn.*
 Radix fusiformi-ramosa. Caulis vix ultra pollicem longus, et modo subnullus. Folia radicalia, et caulina inferiora longe petiolata, pinnatifida, laciniis oblongis, distantibus, obtuse inciso-dentatis, suprema brevissima, petiolata, angustius laciniata. Pedunculi longissimi. Umbella bi-quinqueradiata, radiis fructiferis declinatis. Involucrum e squamis parvis oblongis, scariosis. Calyces striati, segmentis oblongis, aristatis. Corolla calyce longior. Nucularum acus etiam sesquipollicares, inferne setis longis, fulvis barbati. Tota planta pubescens, et fere hirsuta, pilis in parte superiore pedunculorum, in radiis umbellae, et in calycibus apice glandulosis.
 Proximum *Erodio tordylioidi* De Cand. Prodr. 1. p. 647. n. 24.

74. *ERODIUM cicutarium* *γ De Cand. Prodr. 1. p. 646. n. 21.*
Geranium Chaerophyllum Cav. Diss. p. 226. tab. 95.
fig. 1.
Pl. sicc. Euphr. n. 65.
 Ex valle Euphratis prope castrum *Sedjim Kala*. Aprilis.
Ann.

ORDO DECANDRIA.

75. *GERANIUM tuberosum Sp. pl. p. 953.*
Pl. sicc. Euphr. n. 195.
 Ex oris Euphratis. *Perenn.*

ORDO POLYANDRIA.

76. *MALVA aegyptia Sp. pl. p. 971.*
Pl. sicc. Euphr. n. 130., et n. 159.
 Ex oris Euphratis. *Ann.*

CLASSIS DIADELPHIA.

ORDO DECANDRIA.

77. *ONOBRYCHIS Crista galli De Cand. Prodr. 2. p. 346.*
n. 18.
Hedysarum Crista galli Murr. Syst. veg. ed. 14. p. 676.
n. 64.
Pl. sicc. Euphr. n. 179.
 Ex oris Euphratis. *Ann.*
78. *ASTRAGALUS perpusillus*: villosus, subacaulis; foliis subquinquejugis, foliolis lanceolato-linearibus; capitulo subradicali, sessili; leguminibus teretibus, curvatis, hirsutis, dorso canaliculatis.
Pl. sicc. Euphr. n. 166.
 Ex oris Euphratis. *Ann.*
 Radix gracillima, simplex. Caulis subnullus. Folia petiolata, pinnata, pinnis subquinis, foliolis lanceolato-linearibus, acutiusculis. Stipulae a petiolo liberae, vix basi inter se connatae, lineares, membranaceae. Capitulum sub-

radicale, sessile. Calycis lacinae lineares, longiusculae, corollam aequantes, barbatae. Legumina brevia, deflexa, sursum arcuata, hirsuta, teretia, dorso canaliculata, apice breviter uncinata. Tota plantula incano-villosa, villo adpresso.

79. *ASTRAGALUS conduplicatus*: glaber; caule erecto; foliis subsexjugis, foliolis oblongo-cuneatis, subemarginatis, integrisque; pedunculis subtrifloris; leguminibus falcatis, compressis, conduplicatis *Tab. X. fig. 2.*

Pl. sicc. Euphr. n. 165.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

Radix longa, gracilis, lateraliter parce ramulosa. Caules solitarii, vel plures ex eadem radice, erecti, aut ascendentes, quatuor-quinque pollices longi. Folia pinnata, quinque-sexjuga, foliolis oblongo-cuneatis, parvis, subemarginatis, aut integris. Stipulae membranaceae, ovato-lanceolatae, acuminatae, liberae a petiolo, et vix inter se basi connatae. Pedunculi solitarii, axillares, modo folio breviores, modo aequales, modo longiores etiam duplo, uni-triflori. Bractea linearis sub quovis pedicello. Pedicelli floriferi erecti, fructiferi cernui. Calyx pubescens, praesertim in laciniis, ubi pili nigrescentes; ejus lacinae lineares. Corolla alba, parva, tamen calyce duplo longior. Legumen deflexum, falcatum, acuminatum, basi angustatum, compressum, lateribus foliaceis conduplicatum, glabrum, circiter semipollicem longum, tres lineas in medio latum. Loculus seminum alis angustior. Tota herba glabra.

80. *ASTRAGALUS gibberosus*: suffruticosus, sericeo-tomentosus; foliis subquinquejugis, foliolis obcordatis; pedunculis unifloris, folio brevioribus; calycibus hinc saccatis; leguminibus rectis, compressis.

Pl. sicc. Euphr. n. 177.

Ex oris Euphratis. *Suffr.*

Caulis valde ramosus, inferne perennans, et cortice fungoso tectus, superne herbaceus, angulatus, et flexuosus. Folia impari-pinnata, foliolis parvis, obcordatis cum mucronulo brevissimo in medio. Stipulae a petiolo liberae, basi

tantum inter se connatae, ovatae, superne dentatae, vel integrae. Pedunculi solitarii, axillares, in meis exemplaribus uniflori, folio paulo breviores, floriferi tenuiores, fructiferi crassi, prope apicem bracteis linearibus, deciduis instructi. Calyx tubulosus, oblique rectus, latere externo basi saccatus, sive gibberosus, quinque-sex lineas longus, laciniis lanceolatis, acutis. Corolla flava, calyce duplo longior. Vexillum bilobum, alis, et carina longius, extus villosum. Legumen oblique rectum, crassum, tamen compressum, circiter pollicem longum, et tres lineas latum, apice hinc rostratum. Tota planta molliter sericeo-tomentosa, incana.

81. *ASTRAGALUS depressus*: caule decumbente, erectove; foliis impari-pinnatis, multijugis: foliolis oblongo-lanceolatis, obtusis, villosis; pedunculis fructiferis declinatis, floribus fasciculato-subternis; leguminibus tereti-compressis, apice attenuatis, uncinatis.

Pl. sicc. Euphr. n. 66.

Ex viciniis castri *Sedjim Kala* in collibus calcariis sterilibus. Aprili. *Ann.*

Radix gracilis, simplex. Caules solitarii, vel plures caespitosi, decumbentes, aut erecti, pilosi, pollicares-palmares. Folia impari-pinnata, inferiora breviter petiolata, superiora sessilia, omnia multijuga, pinnis remotiusculis, foliolis parvis, ovato-oblongis, obtusis, adpresse villosis, brevissime petiolulatis, alternis, vel oppositis. Stipulae a petiolo, et inter se liberae, lanceolatae, acutae, villosae. Pedunculi solitarii, axillares, folio sublongiores, adpresse villosi, apice fasciculo tri-quadrifloro terminati, floriferi erecti, fructiferi declinati, vel retroflexi, leguminibus assurgentibus. Bractee sub floribus lanceolatae, membranaceae, villosae, deciduae. Flores parvi. Calyx adpresse villosus, laciniis lanceolato-linearibus, acutis, adspersis pilis nigrescentibus. Corolla caerulea, calyce triplo longior. Vexillum oblongum, angustum, conduplicatum, obtusum, alis, alaeque carina obtusa multo longiores. Legumen e tereti compressum, leniter ascendens, adpresse villosum, quatuor-quinque lineas longum, apice attenuatum, breviter uncinatum.

82. *ASTRAGALUS Behen*: fruticosus; petiolis spinulentibus; foliis subquinquejugis, foliolis oblongo-cuneatis, acutis, senioribus glabratibus; floribus solitariis, brevissime pedunculatis; calycibus vesicoso-inflatis, reticulatis, subpilosis; corolla exerta.

Pl. sicc. Euphr. n. 32.

Ex pago *Gorluk*, ubi copiosissimus. Martio. *Frut.*

Caulis fruticosus, ramosus, dense foliosus, superne pilosus. Folia impari-pinnata, petiolata, subquinquejuga, juniora pilosa, seniora glabrata, foliolis parvis, oblongo-cuneatis, acutis, brevissime petiolulatis, deciduis. Petiolus communis demum in spinam validam, longam, nudam induratus. Stipula utrinque petiolo adnata, membranacea. Pedunculi uniflori, solitarii, axillares, folio, et calyce multo breviores. Bracteae duae, exiguae, ovatae, obtusae, concavae, membranaceae, statim sub flore. Calyx jam in flore grandis, vesicoso-inflatus, ovato-oblongus, ore constricto, multinervis, et creberrime venoso-reticulatus, pilosus, ex albo rubescens, dentibus brevibus, triangularibus, acutis. Corolla extra calycem exerta, licet prae calyce parva. Vexillum purpurascens; alae, et carina albae. Legumen oblongum, inclusum calyce valde inflato, theca-phoro brevi suffultum.

83. *TRIGONELLA fasciculata*: foliolis obovato-cuneatis, superne denticulatis; stipulis semiovatis, acuminatis; floribus spicatis, coadunato-subquaternis; leguminibus erectis, villosis, longitudinaliter reticulato-venosis.

Pl. sicc. Euphr. n. 143.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

Radix gracilis, fusiformi-subramosa. Caules caespitosi, erecto-patuli, striati, palmares. Folia ternata, foliolis obovato-cuneatis, margine superiore obiter dentatis. Pedunculi solitarii, axillares, folio aequales, vel longiores, etiam duplo. Flores tres-quatuor, coadunato-spicati, et fere fasciculati. Calyx villosissimus, corollam paulo superans, laciniis lineari-subulatis, tubo calycino longioribus. Corolla exigua. Legumen rectum, compressum, venis longitudinalibus, confluentibus reticulatum, villosum, hinc rostro

recto terminatum, quatuor-quinque lineas longum. Totam plantam molliter villosam, villo sordido. Apex pedunculi inter flores mihi visus est in spinam indurari, sed certus non sum.

ERIOCARPAEA.

Calyx bilabiatus, labio altero bifido, laciniis basi dilatatis, altero trifido, laciniis angustioribus, omnibus apice subulatis. Carina a vexillo remota. Legumen compressum, arcuatum, polyspermum, muricatum, gossypio dense obvolutum.

Habitus. Caulis erectus, ramosus. Folia impari-pinnata, multijuga, pinnis superioribus decrescentibus. Racemi axillares, longissimi, laxiflori. Legumina pendula.

Observ. Genus medium inter *Anthyllidem*, et *Medicaginem*.

84. ERIOCARPAEA *pinnata*.

Pl. sicc. Euphr. num. 178.

Ex oris Euphratis. *Ann.?*

Caulis fistulosus, erectus, flexuosus, striatus, angulatus, tenuiter pubescens, pilis longioribus pubescentiae interjectis. Folia impari-pinnata, multijuga, foliolis ovato-oblongis, acutis, integerrimis, pubescentibus, petiolulatis, superioribus decrescentibus. Petioli striati, pubescentes, pilis longioribus pubescentiae interjectis. Stipula brevissima, lata, obtusa, membranacea, villosula, utrinque ad basim petioli. Racemi simplices, axillares, solitarii, longissimi, vel gemini, altero multo brevior, laxiflori, stricti, rachide crassa, striata, tenuiter pubescente, inferne brevi tractu floribus denudata. Bractea sub quovis pedicello, exigua, lanceolata, acuta, villosula, nigrescens. Pedicelli brevissimi. Flores parvi, erecti. Calyces villosi. Vexillum extus villosulum. Legumina pendula, dense obvoluta gossypio sordide albente. Reliqua generis.

CLASSIS SYNGENESIA.

ORDO POLYGAMIA AEQUALIS.

85. *SCORZONERA vaginata*: caule ramoso; foliis anguste linearibus, carinatis, nervosis, basi dilatato-vaginantibus, vaginis lanatis; bracteis filiformibus; calathi squamis externis brevioribus, margine sublanugineis.

Pl. sicc. Euphr. n. 117.

Ex oris Euphratis. *Perenn.*

Caulis ramosus, inferne sublanugineus, ascendens, in meis exemplaribus quadri-quinquepollicaris. Folia anguste linearia, dorso carinata, et nervosa, acuminata, basim versus sublanuginea, reliqua parte glabra, basi dilatata in vaginam amplexicaulem, plus minus lanatam praesertim margine, lana mollissima, longa, albente. Pedunculi terminales cauli, ramisque, solitarii, monocephali, sublanuginei, vel glabrati, adpersi una, alterave bractea filiformi, remota, longiuscula. Flores potius parvi, lutei. Calathi squamae lanceolatae, dorso atrovirentes, margine pallentes, inferiores breviores, acutae, plerumque lanugineae praesertim margine, supremae longiores, obtusiusculae, glabrae, subinde rubescentes.

86. *SCORZONERA lanata* De Cand. *Prodr. 7. sect. 1. p. 124. n. 51.*

Leontodon lanatum *Amoen. Acad. 4. p. 287. excl. syn. Rauw.*

Pl. sicc. Euphr. n. 31.

Ex collibus secus flumen prope pagum *Gorluk*. Martio. *Perenn.*

87. *OPORINA laciniata*: glabra; foliis pinnatifidis, laciniis angustissimis, acuminato-attenuatis.

Pl. sicc. Euphr. n. 132.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

Radix longa, fusiformis, aut fusiformi-ramosa, modo crassiuscula, modo gracilior. Folia omnia radicalia, profunde pinnatifida, laciniis angustissimis, et subinde lineari-fi-

liformibus, inaequalibus, valde acuminato-attenuatis, longioribus patulis, brevioribus subinde runcinatis. Scapi e radice plures, decumbentes, ascendentes, simplices, monocephali, rarissime bifidi, et bicephali, nudi, aut superne una, alterave bracteola setacea adpersi. Calathi squamae lineares, accessoriae multo breviores. Corollae luteae. Achenia longe attenuato-subulata, striata, striis hispidulo-scabris. Pappus plumosus, sordidule albus, setis basi latioribus, achenio paulo brevior. Tota planta glabra, vel squamae calathi tantum subinde villis albis, mollibus adpersae.

88. *HYPOCHAERIS* ? *serioloides* : foliis petiolatis, pubescentibus, obverse oblongo-spathulatis, sinuatis, lobo impari majore, tridentato; scapis radicalibus, monocephalis; calathis subglabris.

Pl. sicc. Euphr. n. 15.

Ex viciniis hortorum ad portum *William. Martio. Ann.*
Radix gracilis. Folia omnia radicalia, longiuscule petiolata, obverse oblongo-spathulata, sinuata, lobo impari majore, tridentato, reliquis deorsum decrescentibus, utrinque, petiolisque pubescentia. Scapi duo-tres, radicales, erecti, simplices, monocephali, nudi, pubescentes, et densius superne, unum-tres pollices longi. Flores potius parvi, lutei. Calathi squamae glabrae, vel carina subpilosae, dorso atrovirentes, margine pallentes, accessoriae lanceolatae, multo breviores, interiores lineares, utraeque acuminatae.

89. *KOELPINIA linearis* *De Cand. Prodr. 7. sect. 1. p. 78. n. 1. a.*

Lapsana Kölpinia *Lin. fil. Sup. p. 348.*

Rhagadiolus Koelpinia *Willd. Sp. pl. 3. p. 1626.*

Pl. sicc. Euphr. n. 138.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

90. *NOTOBASIS syriaca* *De Cand. Prodr. 6. p. 660. n. 1.*

Carduus syriacus *Sp. pl. p. 1153.*

Cnicus syriacus *Willd. Sp. pl. 3. p. 1683.*

Pl. sicc. Euphr. n. 183.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

ORDO POLYGAMIA SUPERFLUA.

91. *CHARDINIA xeranthemoides* De Cand. Prodr. 6. p. 530.
n. 1.

Xeranthemum orientale Willd. Sp. pl. 3. p. 1902.

Pl. sicc. Euphr. n. 104.

Ex oris Euphratis. *Ann.*

- 92 *ANTHEMIS pygmaea*: caule brevissimo; foliis inferioribus bipinnatis, superioribus pinnatis, omnium foliolis lineari-subulatis, mucronulatis; calathi squamis glabris, margine scariosis; paleis externis obovatis, crosulis; acheniis coronulatis.

Pl. sicc. Euphr. n. 29.

Ex collibus prope portum *William*, ubi communis. *Ann.*

Radix gracillima, longa. Caules caespitulosi, decumbentes, ascendentes, brevissimi, semipollicares, vix paulo ultra, tenues, apice nudi, monocephali. Folia brevia, inferiora bipinnata, superiora pinnata, omnium foliolis lineari-subulatis, apice mucronulatis. Calathi squamae oblongae, obtusae, glabrae, ambitu scariosae. Ligulae radiales ovatae, albae, quinquenerviae, apice tridentatae, disco duplo longiores. Flosculi disci lutei, quinquedentati. Receptaculum convexum. Paleae exteriores obovato-cuneatae, obtusae, ambitu late scariosae, superne crosulae, interiores videre non potui. Achenium compressiusculum, glabrum, apice coronatum membranula brevissima, plicata. Tota herba pubescens.

93. *ACHILLEA imbricata* De Cand. Prodr. 6. p. 32. n. 48.,
et 7. sect. 1. p. 296.

Pl. sicc. Euphr. n. 184.

Ex oris Euphratis. *Suffrut.*

CLASSIS MONOECIA.

ORDO TETRANDRIA.

94. *URTICA stipulacea*: nudiuscula; foliis petiolatis, ovatis, grosse serratis, floralium stipulis membranaceis, ciliatis; spicis simplicibus, axillaribus, pedunculatis, fasciculatis, laxifloris.

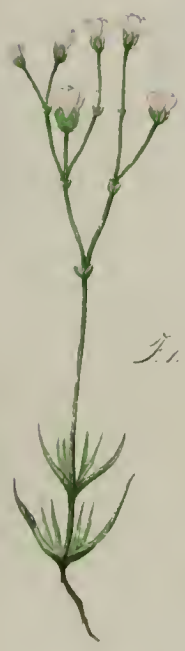
Pl. sicc. Euphr. n. 61.

Ex ruinis prope castrum *Sedjim Kala*. Martio. *Ann.*

Radix ramosa. Caulis erectus, vel ascendens, strigis, pilisque raris adpersus, circiter semipedalis. Folia opposita, longe petiolata, potius parva, ovata, grosse, et acute serrata, sparse strigoso-pilosa, subtus granulato-scabra. Stipulae foliorum inferiorum foliaceae, virides, floralium albo-membranaceae, ovatae, vel lanceolatae, acutae, ciliatae. Spicae simplices, breviter pedunculatae, axillares, fasciculatae, hispidulae, laxiflorae, folio multo breviores.

Proxima *Urticae urenti* L., sed certe diversa dentibus foliorum latioribus, stipulis foliorum floralium albo-membranaceis, spicis pedunculatis, laxifloris, herba nudiuscula.

*Haec Miscellanea lecta fuerunt in conventu Academiae Scientiarum
Instituti Bononiensis habito Tert. Id. Febr. ann. 1841.*



F. 1.

Arenaria nutans

Boiss del



F. 2.

Panunculus micrensis

La F. del









F. 1.

Silybum curvisiliquum



F. 2.

Astragalus unduplicatus



FRANCISCI BERTELLI

EVOLUTIO FUNCTIONIS *PERTURBATRICIS*

quam involvunt aequationes differentiales motus cujuscumque Planetae viribus tracti aliorum Planetarum, Solisque vi praevalenti: nec non animadversiones in quaedam praecipua ejus evolutionis loca, quae aliquam postulant emendationem.(1)

Cum multa in rebus mechanicis subtilioribus obscura sint, tum difficilis et ardua quaestio est de motu cujuscumque Planetae, qui vi Solis praevalenti, aliorumque ejusdem systematis Planetarum viribus attractivis agatur. Quam ad exponendam, et facilius dirimendam permulti et excellentissimi quidem Geometrae, atque Astronomi tum actae aetatis, tum nostrae studium et operam utiliter contulerunt: quod vobis omnibus, sapientes viri, sane compertum est. Sic nempe quaestio se habet, ut per principia newtoniana, ex quibus vis attractiva fingitur rationem sequi compositam ex directa massae, et reciproca quadrati distantiae, cujuslibet Planetae motus aequationibus differentialibus facile exprimatur; sed earum integrationes ejusmodi sunt, ut in hoc etiam continuo atque mirabili Analysis progressu a nemine adhuc perfici potuerint. Quapropter ad eas aequationes per approximationem integrandas mathematici omnes animum converserunt. Verum haec quoque ratio suis est difficultatibus obnoxia. Nam calculi, quibus res tota continetur, valde implexi evadunt; neque solum ma-

(1) Dissertatio habita in conventu Academiae septimo Idus Ianuarias MDCCCXLI.

gui momenti est, unicuique quantitati variabili, quae praevalem vim Solis immutet, quam et quotam totius perturbationis partem tribuere; sed etiam oportet, ut series, quoad e jus fieri potest, sint convergentes, et termini earum qui retinentur, ad verum valorem, quantum res postulet, accedant. Ad haec omnia efficienda multas, variasque rationes mathematicorum industria excogitavit; quarum ea, quam celeberrimo Lagrangiae debemus, faciliorem reddidit quaestionem, et nobilissimis consecrariis ornavit. Primus quidem Lagrangia, et deinde omnes Mechanicae, ut vocant, coelestis scriptores, littera R quamdam denominaverunt functionem coordinatarum cum perturbati, tum perturbantis Planetae. Huic functioni propterea quod suis differentialibus mutuas perturbationes exprimat, nomen *perturbatrix* impositum fuit. Hoc pacto aequationes differentiales motus Planetarum in breviores contrahebantur, et magis ad rem nostram accomodatae fiebant. Alia dein, atque alia exquisita artificia ideo fuerunt inventa, ut earum aequationum integratio vero proxima erueretur. Et primo coordinatas orthogonias in angulares libuit convertere, et ex motus aequationibus functiones quantitatis R , ejusque differentialium elicere, quae radium vectorem, longitudinem atque latitudinem Planetae perturbati repraesentarent; quaeque vel quadraturis parabolicis, vel per series essent integrandae. Cum autem series adhiberentur, mos erat, ut Planetae perturbati, et Planetae perturbantis orbes ad planum immobile quocumque exiguum angulum comprehenderent, ambo referrentur; atque functio perturbatrix R in seriem evolveretur ordinatam per potestates excentricitatum et inclinationum orbium eorum.

Hanc methodum alia Lagrangiae subsequuta est; quae etsi nonnullis de causis minus simplex sit, subtilior tamen, atque utilitatis magis universalis censetur. Concinne enim transfertur cum ad omnes Astronomiae Physicae quaestiones, tum ad detectionem quorundam nexuum inter phaenomena, quae prima facie disparia videbantur, atque ad nonnullas res interpretandas, quae prius latebant quadam caligine circumfusa, vel peridoneam demonstrationem postulabant. Ut sunt, exempli causa, magnae variationes motus Jovis et Saturni, quas celeberrimus Laplace ex eo originem ducere ostendit, quod eorum Pla-

netarum motus medii sint pene inter se commensurabiles; exiguae inaequalitates Veneris, et Terrae, longo temporis intervallo perficiendae, ab illustri Airy demonstratae; secularis motus medii lunaris acceleratio, quam collatione remotiorum observationum cum hodiernis Haley detexit, et analysi Laplace confirmavit, et explanavit; nobilissimum demum theorema, quo docuit Poisson, Solis, Lunaeque vires attractivas adeo non valere, ut situs polorum in sphaeroidica Terrae superficie, aequabilisque ejusdem sphaeroidis conversio aliqua sensibili parte immutentur; quoque latitudinum terrestrium, et longitudinis dierum sideralium immutabilitatem comprobavit. Mutuae Planetarum attractiones, quippe quae prae magna Solis attractione parvi momenti sint, habitae a Lagrangia fuerunt, ut vires quae cum amplitudinem, tum positionem ellipsis, per quam unusquisque Planeta una vi Solis volveretur, nonnihil atque eo pacto varient, ut indolem suam perturbatus orbis retineat, et unaquaeque ellipsium, quarum alia aliam sine intermissione excipit, ellipsim subsequentem ac infinite proximam osculetur; aequatio scilicet quae ad quamdam ellipsim sit, subsequentem ita respiciat, ut in utraque ellipsi coordinatae et earum differentialia prima inter se sint aequalia. Cum igitur ex his hypothesebus tot eliciantur aequationes, quot sunt variationes differentiales elementorum ellipsis, has variationes poteris ex iis aequationibus eruere, et per approximationem integrare; ac quo magis series per differentialia functionis R , vel per massarum dimensiones ordinatas produxeris, eo valores magis proximi tibi erunt. Hac methodo, quae e *constantium arbitrary variatione* nomen assumpsit, deprehendi potest, quemadmodum et quantum cujusdam Planetae elliptica elementa vis perturbatrix aliorum Planetarum immutet.

Inter alias methodos exinde compertas ea praecipue commendata fuit, quae illustri viro, Jacobi, debetur. Ostendit ille, quo pacto integrationes aequationum differentialium motus deriventur ex quodam suo theoremate nobilissimo ad integrationem cujusdam generis aequationum linearium pertinente. Neque regulam clarissimi Hansen praetereundam censeo. Quae licet duobus antedictis methodis quodammodo accedat, multo tamen est brevior: sola enim variatione, quam motus

medius, tempore variando, patitur, coordinatae angulares perturbantur; cetera vero orbis elementa pro quantitibus constantibus habentur. Sic omnium elementorum variationes in unam tantum variationem congregantur, quae motui medio tribuitur in formulis motus elliptici.

Nuper Cauchy aequationes differentiales motus perturbati in unam tantum aequationem linearem contraxit, cui *characteristicae* nomen imposuit; exemplum forsitan celeberrimi Laplace imitatus, qui eodem prorsus pacto integrationem aequationum differentialium motus elliptici elegantissime absolvit. Ceterum, quamvis Lagrangiam sequutus sit, methodo tamen variationis constantium arbitrariarum nonnihil profuit; tum quia peridonea selegit elementa, tum propterea quod uti potuit proprietatibus, partim cognitis, partim a semetipso detectis, ad quasdam functiones, quas *alternas* appellavit, spectantibus.

Verum intra argumenti finem sermonem nostrum coerceamus, licet quae hactenus dicta sunt, haud proposito aliena videantur; atque ad functionis perturbatricis evolutionem revertamur. De qua evolutione ea tantum disseram, quae propius Mechanicam Coelestem respiciunt, et maximo usui sunt. Itaque series non ultra secundas potestates excentricitatum et inclinationum producam; ac methodos, quas supra primo et secundo loco recensui, libenti animo sequar: quippe quae vulgo probentur, atque perturbationibus Planetarum statuendis inserviant tum in egregio opere de Mechanica Coelesti illustris Laplace, tum in recenti *Theoria analytica Systematis Mundi*, quam Pontécoulant, Geometra insignis, conscripsit.

Dum in hanc rem studii causa incumberem, et mathematicorum volumina versarem, continuo comperi, rem totam esse nimia brevitate expositam, et in epitomam, quam tradiderat Pontécoulant, nonnullas mendas irrepsisse. Hinc quaedam formulae haud satis cum quaestione consentientes, neque omnium errorum immunes exortae sunt. Quod facile accidere potuit: calculos enim longos, et involutos reddunt varia artificia analytica, quibus uti opus est, atque multiplices quarumdam functionum trigonometricarum in aliam formam conversiones; quae argumentum suppeditaverunt cuidam eleganti theoriae Lagrangiae, exinde a Poisson amplificatae. Multi quidem Astronomi

formulas sine demonstratione edidere, quae terminos altiorum ordinum repraesentabant. Ex his Bourckardt anno MDCCCVIII ad usque terminos sextae dimensionis evolutionem provexit (1); anno autem MDCCCXII Gallicanae Scientiarum Academiae Binet tradidit opusculum, in quo ejusdem seriei termini usque ad septimum ordinem continentur. At utrumque opus, et praesertim prius aliqui errores inficiunt. Nuperrime vero calculos manu ipsius Binet scriptos, fatigantes sane atque arduos Pontécoulant recognovit, et in tertio Volumine *Theoriae analyticae Systematis Mundi* eos coefficients usque ad sextum ordinem emendatos in vulgus protulit. Qua de re monendum puto, Binet et Bourckardt terminos praeteriisse, qui ab inclinationibus ortum duxissent, perinde ac nimis exigui, et negligendi essent. Diligens vero Pontécoulant eos quoque terminos ad sextam usque dimensionem recensuit. Merito laudatur Bourckardt, quod nexus inter coefficients *a posteriori* detegere expertus fuerit, et alium ex alio coefficiente, quoad facere potuit, deduxerit: ita enim laborem in tanto opere ponendum multum imminuit. Sed hoc ipsum deinde Geometrae utiliter curaverunt, et novas rectasque comperierunt rationes; ut refert Pontécoulant in commutato *Theoriae analyticae* loco.

Nunc vobis tradam, doctissimi viri, calculum de quo sermo est, ad exitum quam optime, breviterque potui, perductum. Verum brevitatis laudem adeo non studui, ut quae notatu dignissima essent, silentio praeterirem. Quo calculo patebit, in formulis quibus Pontécoulant in Capite VII Libri II citati operis per approximationem exprimit longitudinis verae in plano immobile projectionem ex inclinationibus et excentricitatibus nullo modo dependentem, atque valores ordinatarum x, y Planetae perturbati, et x', y' Planetae perturbantis; in iis inquam formulis evanescere debere angulos α, α' , qui pertinent ad projectiones in ipso plano immobile longitudinum linearum nodorum in orbe cum Planetae perturbantis, tum Planetae perturbati. Functio enim R ita constitu-

(1) Mémoires de la Classe des Sciences Mathématiques de l'Institut de France - Année MDCCCVIII.

ta est, ut in nodorum lineis longitudinum origines capiantur; quae lineae tempore t , quo perturbationes quaeruntur, pro axibus abscissarum x, x' habitae quoque sunt. Ordinatae autem z, z' solummodo excipi debent, ut infra ostendemus; at calculis absolutis, in iis etiam anguli α, α' in nihilum redigantur, oportet. Demum functionis perturbatricis evolutionem in duas partes dispertiam: in altera recensebo terminos, qui, ex eo quod tempus non contineant, inaequalitates seculares respiciunt, in altera vero, qui periodicas. Ex quibus omnibus intelligi poterit, in nonnullis terminis definiendis ad secundam partem evolutionis pertinentibus ipsum Pontécoulant deceptum fuisse.

1. Mos tenet, ut Planetae cujusque massa perinde consideretur, quasi in centrum gravitatis ejusdem Planetae collecta esset: quod fingi licet, tum quia Planetarum figurae pene sphaericae sint, tum quod coelestia corpora longissimis intervallis ab invicem distent. Sic Planetarum magnitudines, ac densitates, quae variae in variis ejusdem Planetae partibus esse possent, a calculo quem valde redderent implexum, commodissime rejiciuntur. His positis, sit m massa Planetae A perturbati, in gravitatis centrum collecta, quod, origine ordinarum in Solis centro locata, tempore t habeat ordinatas x, y, z : eodemque tempore massis m', m'', \dots Planetarum perturbantium B, C, \dots sint ordinatae $x', y', z'; x'', y'', z''; \dots$, Massam denique Solis littera M denominemus.

Ideirco radii vectores $r, r', r'' \dots$ erunt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2};$$

$$r'' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2};$$

et

$$\rho = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2};$$

$$\rho' = \sqrt{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2};$$

distantiae massarum m', m'', \dots a massa m ,

Ponamus brevitatis causa

$$M + m = \mu,$$

atque

$$(A) \dots \left\{ \begin{array}{l} m' \left\{ \frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right\} \\ + m'' \left\{ \frac{1}{\rho'} - \frac{xx'' + yy'' + zz''}{r''^3} \right\} \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\} = R;$$

motus massae m ex Lagrangiae demonstratione his aequationibus differentialibus definitur

$$(B) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \left(\frac{dR}{dx} \right); \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = \left(\frac{dR}{dy} \right); \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = \left(\frac{dR}{dz} \right); \end{array} \right.$$

in quibus R ea functio est, quam dicunt *perturbatricem*, quamque ideo evolvere debemus, ut aequationum (B) integratio per approximationem absolvi possit.

2. Cum termini, quos unaquaeque massa perturbatrix in functionis R evolutionem invehit, unius ejusdemque sint formae, satis erit solam massam m' considerare. Sit igitur (A)

$$(a) \dots R = m' \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}} - \frac{xx' + yy' + zz'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Praeterea litteris r, r' repraesentemus radiorum r, r' in plano ordinarum x, y projectiones, quae cum axe x angulos ν, ν' comprehendant. Hi anguli erunt projectiones longitudinum ν, ν' , quae in orbibus massarum m, m' ex nodorum lineis diuumerantur. Hinc erit

$$(O) \dots \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \nu, \quad y = r \sin \nu; \\ x' = r' \cos \nu', \quad y' = r' \sin \nu'; \end{array} \right.$$

quibus valoribus in aequatione (a) substitutis, habebimus

$$(\beta) \dots R = m' \left\{ \frac{1}{\sqrt{r_1'^2 - 2r_1 r_1' \cos(\nu_1' - \nu_1) + r_1^2 + (z' - z)^2}} - \frac{r_1 r_1' \cos(\nu_1' - \nu_1) + zz'}{(r_1'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

3. Plana orbium Planetarum in Solari Systemate exiguas inter se inclinationes habent, et exiguae quoque sunt orbum eorum excentricitates. Si igitur fingamus, planum ordinarum x, y cum quodam orbum plano congruere, vel ita constitutum esse, ut exiguos angulos cum iisdem orbum planis contineat; valores ordinarum z, z' prae media a sole distantia minimi censendi erunt, ideoque negligendi in evolutione functionis R termini ii, in quibus ordinatae z, z' ad dimensiones altiores, quam sit ordo statutus, assurgerent. Quare si in aequatione (α) numeri praecedentis valores substituuntur ordinarum z, z' , aliarumque quantitatum variabilium, per tempus, inclinationes et excentricitates expressi, atque functionis R evolutio per dimensiones excentricitatum, ac inclinationum ordinata sit; series orietur convergens, quae quantum libuerit, produci poterit.

Hisce positis, quoniam est

$$\frac{1}{\sqrt{r_1'^2 - 2r_1 r_1' \cos(\nu_1' - \nu_1) + r_1^2 + (z' - z)^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{r_1'^2 - 2r_1 r_1' \cos(\nu_1' - \nu_1) + r_1^2}} \\ - \frac{(z' - z)^2}{2\{r_1' - 2r_1 r_1' \cos(\nu_1' - \nu_1) + r_1^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\};$$

$$(r_1'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}} = r_1'^3 + \frac{3}{2} r_1' z'^2 + \dots;$$

et proinde

$$\frac{r_1 r_1' \cos(\nu_1' - \nu_1) + z z'}{r_1'^3 + \frac{3}{2} r_1' z'^2 + \dots} = \frac{r_1 \cos(\nu_1' - \nu_1)}{r_1'^2} + \frac{3 z'^2 r_1 \cos(\nu_1' - \nu_1)}{2 r_1'^4} - \frac{z z'}{r_1'^3} + \dots;$$

aequatio (β) vertetur in hanc

$$(\beta') \dots R = \left\{ \begin{array}{l} m' \left\{ \frac{1}{\sqrt{r_1'^2 - 2r_1 r_1' \cos(\nu_1' - \nu_1) + r_1^2}} - \frac{r_1 \cos(\nu_1' - \nu_1)}{r_1'^2} \right\} \\ - \frac{m' z z'}{r_1'^3} + \frac{3 m' r_1 z'^2 \cos(\nu_1' - \nu_1)}{2 r_1'^4} - \frac{m' (z' - z)^2}{2\{r_1'^2 - 2r_1 r_1' \cos(\nu_1' - \nu_1) + r_1^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

4. Modo ponamus, duos Planetas m, m' , alterum perturbatum, perturbantem alterum, per duos circulos volvi in plano (x, y) jacentes, quorum radii sint constantes eorum Planeta-

rum a Sole distantiae a, a' . Longitudines Planetarum m, m' ad epocham pertinentes sint $\varepsilon, \varepsilon'$; quarum originem in axe abscissarum x sitam esse putabimus. Tempore autem t eorum medii motus per $nt, n't$ exprimantur; qui perinde ac motus veri habendi sunt, quia per circulos Planetas volvi posuimus.

Hinc erit

$$z = 0, z' = 0; \text{ et } r_1 = a, r_1' = a';$$

et longitudes ν, ν' evadent

$$\nu = \nu_1 = nt + \varepsilon; \nu' = \nu_1' = n't + \varepsilon'.$$

Quapropter si perturbationes ejusmodi esse finxeris, ut turbatus Planeta m in plano sui orbis perpetuo consisteret, neque Planetarum m, m' a Sole distantiae variarentur, functio R abiret in

$$(\gamma) \dots R_1 = m' \left\{ [a'^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a^2]^{-\frac{1}{2}} - \frac{a}{a'^2} \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \right\}$$

5. Ostendit Lagrangia, quamlibet functionem hujus formae $(a'^2 - 2aa' \cos \phi + a^2)^{-\frac{1}{2}}$ evolvi posse in seriem ordinatam per cosinus angulorum multiplicium $\phi, 2\phi, 3\phi, \dots, i\phi \dots$. Sit igitur

$$(1) \dots \left\{ a'^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} A^{(0)} + A^{(1)} \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ + A^{(2)} \cos 2(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ + A^{(3)} \cos 3(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ \vdots \\ + A^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\};$$

ubi $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(i)}, \dots$ quaedam functiones sunt quantitatum a, a' , ad massae m' perturbationes spectantes.

Mathematici solent littera Σ uti ad summam quantitatum similium, haud continuarum exprimendam. Itaque possumus totam seriem (1) contrahere, et per symbolum

$$\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

significare.

Hic vero monendum est, singulos valores integros cum positivis, tum negativis ex $-\infty$ ad 0, et ex 0 usque ad $+\infty$ litterae i tribuendos esse. Neque illud praetereundum. Quemadmodum generatim est

$$\cos -i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) = \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon),$$

ita fiat

$$(2) \dots\dots\dots \Lambda^{(-i)} = \Lambda^{(i)};$$

et cum valor ± 1 quantitati i respondeat,

$$(3) \dots\dots\dots \Lambda^{\left(\frac{\pm 1}{2}\right)} = \Lambda^{(1)} - \frac{a}{a'^2}.$$

Si igitur constituto symbolo Σ utamur, aequatio (γ) evadit

$$(\delta) \dots\dots R_i = \frac{m'}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).$$

6. Jam ad orbis ellipticos redeamus. Ellipses, per quas Planetarum m, m' volvuntur, exiguas habeant excentricitates, atque earum plana angulos itidem exiguos cum immobile plano ordinarum x, y contineant. Si in memoriam revocaveris series, quibus longitudinis in orbe ex nodorum linea numeratae (num. 2), et radii vectoris projectiones in eo plano immobile per tempus, excentricitates, et inclinationes denominantur; facile intelliges, projectiones $r_i, \nu_i; r'_i, \nu'_i$ hoc pacto exprimi posse

$$(4) \dots\dots\dots \begin{cases} r_i = a(1+U); & r'_i = a(1+U'); \\ \nu_i = nt + \varepsilon + V; & \nu'_i = n't + \varepsilon' + V'; \end{cases}$$

quo valores U, U', V, V' tenuis sunt magnitudinis, quippe quae ex serierum earum terminis constant, quos omnes excentricitates, inclinationesque multiplicant.

Tempore t Planetarum m, m' latitudines sint θ, θ' : erit ideo

$$z = r_i \tan \theta; \quad z' = r'_i \tan \theta'.$$

Orbum autem inclinationes ad planum ordinarum x, y litteris φ, φ' denominemus; et ex binis triangulis sphaericis rectangulis, quorum alteri sunt latera $\theta, \nu_i; \theta', \nu'_i$, alteri, statim eruatur

$$\text{tang } \theta = \text{tang } \varphi \sin \nu_1 ;$$

$$\text{tang } \theta' = \text{tang } \varphi' \sin \nu_1' .$$

Quare et inter valores utriusque ordinatae z, z' , atque utriusque orbis inclinationes nexus necessarii intercedunt; factis enim substitutionibus, habemus

$$z = r_1 \text{ tang } \varphi \sin \nu_1 ;$$

$$z' = r_1' \text{ tang } \varphi' \sin \nu_1' .$$

Si longitudinum origo, quae hactenus fuit nodorum linea, sive axis abscissarum x , quaedam recta esset in utroque orbe diversa; ideoque anguli, quos earum linearum projectiones cum nodorum linea comprehendunt, essent α, α' ; tum $(\nu_1 - \alpha), (\nu_1' - \alpha')$ pro ν_1, ν_1' in valoribus z, z' substitui deberent; quare eliceretur

$$(5) \dots\dots\dots \begin{cases} z = r_1 \text{ tang } \varphi \sin(\nu_1 - \alpha) ; \\ z' = r_1' \text{ tang } \varphi' \sin(\nu_1' - \alpha') . \end{cases}$$

At quamvis valores z, z' immutaverimus, constructionem tamen quam initio statuimus, immutari haud oportet. Nam iisdem valoribus uti quidem poterimus, dummodo, calculis absolutis, anguli α, α' in nihilum redigantur, et valor tantum retineatur, qui ex integratione variationis differentialis anguli α derivabitur. Ita comperiemus, quantum situs lineae nodorum orbis turbati, quocumque temporis puncto, in plano immobile mutetur.

Ut igitur functio R in seriem evolvatur per dimensiones eccentricitatum et inclinationum ordinatam, erunt in aequatione (β) , (num. 3) substituendi valores (4), (5), $r_1, r_1'; \nu_1, \nu_1'; z, z'$. Sed valorum $r_1, r_1'; \nu_1, \nu_1'$ substitutio alio pacto fieri potest; aequationes enim (4) ejusmodi sunt, ut liceat in aequatione (β) ponere primo $a, a', (nt + E), (n't + E')$ loco r_1, r_1', ν_1, ν_1' , et postea quantitibus $a, a', (nt + E), (n't + E')$ incrementa valde exigua $aU, a'U', V, V'$ tribuere.

Quapropter ob aequationem (δ) , erit

$$\begin{aligned} & \{ r_1'^2 - 2r_1 r_1' \cos(\nu_1' - \nu_1) + r_1^2 \}^{-\frac{1}{2}} - \frac{r_1 \cos(\nu_1' - \nu_1)}{r_1'^2} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{(i)}}{(a + aU, a' + a'U')} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon + V' - V) . \end{aligned}$$

Et hic quoque, ut in num. 5, quantitas
 $\{a'^2 - 2aa' \cos(\nu_i' - \nu_i) + a^2\}^{-\frac{3}{2}}$ evolvi potest; ideoque fieri

$$(6) \dots \{a'^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a^2\}^{-\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} B^{(0)} + B^{(1)} \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ + B^{(2)} \cos 2(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ + B^{(3)} \cos 3(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ \vdots \\ + B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ \vdots \end{array} \right\};$$

quae aequatio, si numerus integer i varietur intra terminos
 $-\infty, +\infty$, et sumatur

$$(7) \dots B^{(-i)} = B^{(i)},$$

in hanc contrahitur

$$(8) \dots \{a'^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a^2\}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon);$$

ubi coefficientes $B^{(0)}, B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(i)}, \dots$ functiones sunt
 quantitatum a, a' .

Tribuantur jam nunc incrementa $aU, a'U', V, V'$ quantitati-
 bus $a, a', (nt + \varepsilon), (n't + \varepsilon')$; erit

$$\left\{ \begin{array}{l} \{r_i'^2 - 2r_i r_i' \cos(\nu_i' - \nu_i) + r_i^2\}^{-\frac{3}{2}} = \\ \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(i)}_{(a+aU, a'+a'U')} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon + V' - V) \end{array} \right\};$$

ac proinde aequatio (β') vertetur in

$$(9) \dots R = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m'}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(i)}_{(a+aU, a'+a'U')} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon + V' - V) \\ - \frac{m' z z'}{(a' + a'U')^3} + \frac{3m'(a+aU)z'^2 \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon + V' - V)}{2(a' + a'U')^4} \\ - \frac{m'}{4} (z' - z)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(i)}_{(a+aU, a'+a'U')} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon + V' - V) \\ + \dots \end{array} \right\}.$$

Quantitates $a, a', (n't + nt - \epsilon' - \epsilon)$ perinde considerentur, ac absolutae variables, quae exigua incrementa $aU, a'U', V' - V$ acceperint: tum ope theoremati Tayloriani evolutio (9) poterit ordinari per potestates, et producta quantitatum U, U', V, V', z, z' . Hoc pacto erues seriem

$$\begin{aligned}
 \text{(C) } \dots\dots\dots R = & \left. \begin{aligned}
 & \frac{m}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(i)} \cosi(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot U \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \cosi(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot U' \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cosi(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & - \frac{m'}{2} (V - V') \sum_{-\infty}^{+\infty} iA^{(i)} \sini(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & + \frac{m'}{4} \cdot U^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 \left(\frac{d^2A^{(i)}}{da^2} \right) \cosi(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot UU' \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' \left(\frac{d^2A^{(i)}}{dada'} \right) \cosi(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & + \frac{m'}{4} \cdot U'^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 \left(\frac{d^2A^{(i)}}{da'^2} \right) \cosi(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & - \frac{m'}{2} (V' - V)U \sum_{-\infty}^{+\infty} ia \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \sini(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & - \frac{m'}{2} (V' - V)U' \sum_{-\infty}^{+\infty} ia' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \sini(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & - \frac{m'}{4} (V' - V)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cosi(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & - \frac{m'zz'}{a^3} + \frac{3m'az'^2}{2a'^4} \cdot \cosi(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & - \frac{m'(z' - z)^2}{4} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(i)} \cosi(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\
 & + \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

7. Haec series, quae quantum massa m' massam m perturbet, ostendit, facile in eam vertitur, quae perturbationem massae m' ortam ex massae m attractione repraesentaret.

Re quidem vera in aequatione (C) loco inassae m' , et quantitatum, quotquot sunt, quae massam illam respiciunt, nec non differentialium coefficientium $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, substituendae essent analogae quantitates ad massam m pertinentes, et vicissim. Simples tamen coefficientes $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ in utroque casu immutati perstabunt, quippe similiter, et aequae ex quantitatibus a , et a' componantur.

8. Radii vectoris, et longitudinis projectiones r, v , in plano (x, y) , atque ordinata z (quae omnia tempore t in motu elliptici hypothesis pertinent ad massam perturbatam m) perturbationum causa tempore consequenti τ evadant $\bar{r}, \bar{v}, \bar{z}$, exrescant scilicet incrementis, seu variationibus finitis $\delta r, \delta v, \delta z$; quae variationes ex variationum differentialium integratione derivantur.

Pariter projectiones r', v' , atque ordinata z' massae m' ob variationes finitas $\delta r', \delta v', \delta z'$ tempore τ fiant $\bar{r}', \bar{v}', \bar{z}'$.

Idcirco erit

$$(f) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \bar{r} = r + \delta r; \quad \bar{v} = v + \delta v; \quad \bar{z} = z + \delta z; \\ \bar{r}' = r' + \delta r'; \quad \bar{v}' = v' + \delta v'; \quad \bar{z}' = z' + \delta z'. \end{array} \right.$$

Sed vis perturbatrix, cui tempore τ incipiente valorem functionis R tribuimus, in fine temporis illius necessario immutabitur: eum nempe valorem accipiet, in quem ipsa functio R sese vertit, cum $\bar{r}, \bar{v}, \bar{z}$; $\bar{r}', \bar{v}', \bar{z}'$ loco r, v, z ; r', v', z' substituuntur. Itaque functionis R variationes ex mutuis massarum m, m' perturbationibus ortae, sint

$$\delta R = \left(\frac{dR}{dr} \right) \delta r + \left(\frac{dR}{dv} \right) \delta v + \left(\frac{dR}{dz} \right) \delta z;$$

$$\delta' R = \left(\frac{dR}{dr'} \right) \delta r' + \left(\frac{dR}{dv'} \right) \delta v' + \left(\frac{dR}{dz'} \right) \delta z';$$

ubi omnia differentialia altiorum ordinum praetermisimus. Quoniam R evanesceret, neque ullo pacto variaret, si massa m per ellipsim volveretur, valor \bar{R} , qui functioni R tempore τ responderet, erit sane

$$\bar{R} = R + \delta R + \delta' R.$$

Cum autem quantitates $\overline{r}_i, \overline{v}_i, \overline{z}; \overline{r}'_i, \overline{v}'_i, \overline{z}'$ esse debeant functiones ipsius R , idest

$$\begin{aligned} \overline{r}_i &= f(\overline{R}); \overline{v}_i = \phi(\overline{R}); \overline{z} = \psi(\overline{R}); \\ \overline{r}'_i &= f'(\overline{R}); \overline{v}'_i = \phi'(\overline{R}); \overline{z}' = \psi'(\overline{R}); \end{aligned}$$

si in his aequationibus valor \overline{R} substituatur, atque earum pars altera in seriem evolvatur per totam variationem $(\delta R + \delta' R)$ functionis R ordinatam, prior tantum serierum terminus unius erit dimensionis massarum m, m' , omnesque alii ad dimensiones altiores assurgent. Nam in variationibus $\delta r, \delta v, \delta z$ ortis ex massa m' massam m perturbante factor m' inest; atque inest pariter factor m in variationibus $\delta r'_i, \delta v'_i, \delta z'$ ex massa m massam m' perturbante proficiscentibus. Cum vero ad valores satis proximos eliciendos primus terminus earum serierum plerumque sufficiat; cumque functionis perturbatricis R evolutio, quae hac hypothesis eruitur, facile possit ubi res postulet, ulterius produci, terminis scilicet altiorum dimensionum ampliari; hos modo terminos negligere visum est.

Erit igitur

$$\begin{aligned} \overline{r}_i &= f(R); \overline{v}_i = \phi(R); \overline{z} = \psi(R); \\ \overline{r}'_i &= f'(R); \overline{v}'_i = \phi'(R); \overline{z}' = \psi'(R); \end{aligned}$$

et consequenter

$$\begin{aligned} \overline{r}_i &= r_i; \overline{v}_i = v_i; \overline{z} = z \\ \overline{r}'_i &= r'_i; \overline{v}'_i = v'_i; \overline{z}' = z'. \end{aligned}$$

Nobis ideo liceat in functionis perturbatricis valore missas facere perturbationes variabilium, quas ipsa functio continet.

9. Hisce praemonitis, huc afferamus formulas notas, quae pertinent ad radii vectoris, longitudinisque projectiones in plano immobile ordinarum x, y , quum in linea nodorum, quemadmodum (num. 1.) finximus, origo longitudinum sumitur. Eas vero formulas in series expositas ultra terminos duarum dimensionum inclinationum haud provehemus. Itaque faciendum est

$$r_i = r \left\{ 1 - \frac{1}{2} \tan^2 \phi \sin^2 \nu \right\};$$

$$(\gamma) \dots \dots \nu_1 = \nu - \text{tang}^2 \frac{1}{2} \phi \sin 2\nu :$$

cum autem angulus ϕ exiguae sit magnitudinis, in termino

$$-\frac{1}{2} \text{tang}^2 \phi \sin^2 \nu,$$

ob aequationem (γ) loco $\sin^2 \nu_1$ ponere licebit $\sin^2 \nu$; erit igitur

$$(\delta) \dots \dots r_1 = r \left\{ 1 - \frac{1}{2} \text{tang}^2 \phi \sin^2 \nu \right\} .$$

In aequationibus (γ) , et (δ) sunt quoque substituendae series per potestates excentricitatis atque inclinationis ordinatae, quae expriment valores r , et ν . Sed iterum excentricitatis atque inclinationis potestates et producta, quae plures, quam duas habeant dimensiones, expungere debemus. Quare valor ν , qui generatim posita excentricitate $= e$, est hujus formae $(nt + \varepsilon + eP)$, propter factores $\text{tang}^2 \phi$, $\text{tang}^2 \frac{1}{2} \phi$ contrahi quidem debet in $(nt + \varepsilon)$: ideoque

$$(\zeta) r_1 = a \left\{ 1 - e \cos(nt + \varepsilon - \omega) + \frac{1}{2} e^2 \left\{ 1 - \cos 2(nt + \varepsilon - \omega) \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \text{tang}^2 \phi \sin^2(nt + \varepsilon) \right\} \right\}$$

$$(\eta) \dots \dots \nu_1 = \left\{ \begin{array}{l} nt + \varepsilon + 2e \sin(nt + \varepsilon - \omega) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(nt + \varepsilon - \omega) \\ - \text{tang}^2 \frac{1}{2} \phi \sin 2(nt + \varepsilon) \end{array} \right\} ;$$

quo a indicat semiaxem majorem orbis massae m , ε epochae longitudinem, ω longitudinem perihelii, $(nt + \varepsilon)$ mediam massae m longitudinem, et $(nt + \varepsilon - \omega)$ anomaliam mediam.

10. Eodem prorsus pacto, si a' , e' , n' , ε' , ω' , ϕ' denominentur pro Planeta perturbante m' quantitates eae, quae litteris a , e , n , ε , ω , ϕ pro Planeta perturbato m dudum indicatae fuerunt, projectiones in plano immobile elicientur cum radii vectoris, tum longitudinis Planetæ m' : quae erunt

$$(\zeta)' \dots r_1' = \left\{ \begin{array}{l} a' \left\{ 1 - e' \cos(n't + \varepsilon' - \omega') + \frac{1}{2} e'^2 \left\{ 1 - \cos 2(n't + \varepsilon' - \omega') \right\} \right\} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{1}{2} \text{tang}^2 \phi' \sin^2(n't + \varepsilon') \right\} \end{array} \right\}$$

$$(\eta)' \dots \nu_1' = \left\{ \begin{array}{l} n't + \varepsilon' + 2e' \sin(n't + \varepsilon' - \omega') + \frac{5}{4} e'^2 \sin 2(n't + \varepsilon' - \omega') \\ - \text{tang}^2 \frac{1}{2} \phi' \sin 2(n't + \varepsilon') \end{array} \right\} .$$

11. Jam in aequationibus (4), (num. 6), valoribus r_1 , ν_1 , r_1' , ν_1' substitutis, multiplicationibus peractis, atque servatis terminis unius et duarum tantum dimensionum excentricitatum ac inclinationum, exorientur aequationes

$$(\theta) \dots\dots \begin{cases} U = \left\{ \begin{aligned} & -e \cos(nt + \varepsilon - \omega) + \frac{1}{2}e^2 \{1 - \cos 2(nt + \varepsilon - \omega)\} \end{aligned} \right\}; \\ V = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \varphi \sin^2(nt + \varepsilon) \\ & 2e \sin(nt + \varepsilon - \omega) + \frac{5}{4}e^2 \sin 2(nt + \varepsilon - \omega) \\ & - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \varphi \sin 2(nt + \varepsilon) \end{aligned} \right\}; \end{cases}$$

$$(\delta) \dots\dots \begin{cases} U' = \left\{ \begin{aligned} & -e' \cos(n't + \varepsilon' - \omega') + \frac{1}{2}e'^2 \{1 - \cos 2(n't + \varepsilon' - \omega')\} \end{aligned} \right\}; \\ V' = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \varphi' \sin^2(n't + \varepsilon') \\ & 2e' \sin(n't + \varepsilon' - \omega') + \frac{5}{4}e'^2 \sin 2(n't + \varepsilon' - \omega') \\ & - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \varphi' \sin 2(n't + \varepsilon') \end{aligned} \right\}. \end{cases}$$

Si demum hi valores quantitatum U, V, U', V', nec nou ordinatarum z, z' valores (5), (num. 6), in aequatione (C), (num. 6) substituuntur, series eruetur usque ad binas dimensiones excentricitatum et inclinationum protracta, quae functionem perturbatricem R representabit.

12. Sed antequam ad substitutiones veniamus, inclinationes φ, φ' , et nodorum longitudes α, α' , (num. 6), eliminare praestabit, et in locum earum quantitatum alias p, q, p', q' sufficere, quas cum iis copulent aequationes

$$(\chi) \dots\dots \begin{cases} p = \operatorname{tang} \varphi \sin \alpha; & q = \operatorname{tang} \varphi \cos \alpha; \\ p' = \operatorname{tang} \varphi' \sin \alpha'; & q' = \operatorname{tang} \varphi' \cos \alpha'; \end{cases}$$

ex quibus elicitur

$$(\lambda) \dots\dots \begin{cases} \operatorname{tang} \varphi = \sqrt{p^2 + q^2}; & \operatorname{tang} \alpha = \frac{p}{q}; \\ \operatorname{tang} \varphi' = \sqrt{p'^2 + q'^2}; & \operatorname{tang} \alpha' = \frac{p'}{q'}. \end{cases}$$

Haec conversio plurimum confert; ita enim tum sinus inclinationum, qui valde exigui divisores sunt, ex variationibus differentialibus inclinationum et longitudinum eliminantur, tum earum variationum integrationes faciliores redduntur.

Coordinatae orthogoniae X, Y; X', Y' massarum m, m' in orbum planis sumantur, atque abscissarum origines in nodorum lineis sint; axis tamen x in plano immobile (x, y), quemadmodum antea situs erat, persistat. Inter coordinatas X, Y; X', Y' et x, y, z; x', y', z', quae ad massas m, m' pertinebant, quum massae ipsae ad axes, quibus motui definiendo usi sumus, referebantur, has relationes comperies:

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \cos \phi \sin \alpha; \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \phi \cos \alpha; \\ z = Y \sin \phi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = X' \cos \alpha' - Y' \cos \phi' \sin \alpha'; \\ y' = X' \sin \alpha' + Y' \cos \phi' \cos \alpha'; \\ z' = Y' \sin \phi'; \end{cases}$$

quae una cum aequationibus (χ) his quoque satisfaciunt

$$(\mu) \dots\dots z = qy - px; \quad z' = q'y' - p'x'.$$

Cum autem in evolutione functionis perturbatricis R, (C), (num. 6), prima ordinarum z, z' dimensio non insit, et quantitates p, q, p', q' ejusdem ordinis sint atque inclinationes; valorum x, y, x', y' , (num. 2), qui postea substituendi erunt in aequationibus (μ), eam solum retinebimus partem, quae nec ab excentricitatibus, neque ab inclinationibus pendet. Quod fieri oportet, ne functionis R evolutio terminos trium, eoque aliorum dimensionum contineat.

Itaque substitutis

$$(\nu) \dots\dots \begin{cases} r_1 = a; \quad v_1 = n t + \varepsilon; \\ r_1' = a'; \quad v_1' = n' t + \varepsilon'; \end{cases}$$

in aequationibus (σ), (num. 2), erit

$$(\zeta) \dots\dots \begin{cases} x = a \cos(n t + \varepsilon); \quad y = a \sin(n t + \varepsilon); \\ x' = a' \cos(n' t + \varepsilon'); \quad y' = a' \sin(n' t + \varepsilon'); \end{cases}$$

ideoque (μ)

$$(\varrho) \dots\dots \begin{cases} z = a \{ q \sin(n t + \varepsilon) - p \cos(n t + \varepsilon) \}; \\ z' = a' \{ q' \sin(n' t + \varepsilon') - p' \cos(n' t + \varepsilon') \}. \end{cases}$$

Hae sunt formulae, quae inservient ad quantitates p, q, p', q' in evolutionem functionis R invehendas.

13. Jam in aequatione (C) substituamus valores quantitatum U, V, U, V (θ), (δ), (num. 11), ($p^2 + q^2$) et ($p'^2 + q'^2$) loco $\tan^2 \phi$ et $\tan^2 \phi'$, pariterque $\frac{1}{4}(p^2 + q^2)$, $\frac{1}{4}(p'^2 + q'^2)$ pro $\tan^2 \frac{1}{2} \phi$, $\tan^2 \frac{1}{2} \phi'$: cum enim sit

$$\tan \phi = \frac{2 \tan \frac{1}{2} \phi}{1 - \tan^2 \frac{1}{2} \phi} = 2 \tan \frac{1}{2} \phi + 2 \tan^3 \frac{1}{2} \phi + \dots$$

ob exiguitatem anguli ϕ erit quamproxime

$$\text{tang } \phi = 2 \text{ tang } \frac{1}{2} \phi;$$

ideoque pro massa m

$$\text{tang}^2 \frac{1}{2} \phi = \frac{1}{4} \text{tang}^2 \phi;$$

et pro massa m'

$$\text{tang}^2 \frac{1}{2} \phi' = \frac{1}{4} \text{tang}^2 \phi'.$$

Denique series, quae per eas substitutiones derivabitur, ordinetur per excentricitates, ac quantitates p, q, p', q' ; erit

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{m'}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(i)} \text{cosi}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot e \left\{ \begin{aligned} & 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \text{sini}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \text{sin}(nt + \varepsilon - \omega) \\ & - \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \text{cosi}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \text{cos}(nt + \varepsilon - \omega) \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot e' \left\{ \begin{aligned} & -2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \text{sini}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \text{sin}(n't + \varepsilon' - \omega') \\ & - \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \text{cosi}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \text{cos}(n't + \varepsilon' - \omega') \end{aligned} \right\} \\
 D & + \frac{m'}{2} \cdot e^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{5}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \text{sini}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \text{sin}2(nt + \varepsilon - \omega) \\ & - 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \text{cosi}(n't - n't + \varepsilon' - \varepsilon) \text{sin}^2(nt + \varepsilon - \omega) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \text{cosi}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ & - \sum_{-\infty}^{-\infty} i a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \text{sini}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \text{sin}2(nt + \varepsilon - \omega) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \text{cosi}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \text{cos}2(nt + \varepsilon - \omega) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da^2} \right) \text{cosi}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \text{cos}^2(nt + \varepsilon - \omega) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & 4 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin(nt + \varepsilon - \omega) \sin(n't + \varepsilon' - \omega') \\
 & + 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \cos(nt + \varepsilon - \omega) \sin(n't + \varepsilon' - \omega') \\
 & - 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin(nt + \varepsilon - \omega) \cos(n't + \varepsilon' - \omega') \\
 & + \sum_{-\infty}^{+\infty} a a' \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{d a d a'} \right) \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \cos(nt + \varepsilon - \omega) \cos(n't + \varepsilon' - \omega')
 \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot e e' \\
 \\
 & \left. \begin{aligned}
 & - \frac{5}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin 2(n't + \varepsilon' - \omega') \\
 & - 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin^2(n't + \varepsilon' - \omega') \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\
 & + \sum_{-\infty}^{+\infty} i a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin 2(n't + \varepsilon' - \omega') \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \cos 2(n't + \varepsilon' - \omega') \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{d a'^2} \right) \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \cos^2(n't + \varepsilon' - \omega')
 \end{aligned} \right\} \\
 & D \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot e'^2 \\
 \\
 & \left. \begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin 2(nt + \varepsilon) \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \cos^2(nt + \varepsilon) \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin^2(nt + \varepsilon)
 \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot p^2 \\
 \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin^2(nt + \varepsilon)
 \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot p q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m'}{2} \cdot q^2 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} iA^{(i)} \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin 2(nt + \varepsilon) \\ & -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin^2(nt + \varepsilon) \\ & -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin^2(nt + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot pp' \left\{ \begin{aligned} & -\frac{2a}{a'^2} \cdot \cos(nt + \varepsilon) \cos(n't + \varepsilon') \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \cos(nt + \varepsilon) \cos(n't + \varepsilon') \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot pq' \left\{ \begin{aligned} & \frac{2a}{a'^2} \cdot \cos(nt + \varepsilon) \sin(n't + \varepsilon') \\ & - \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \cos(nt + \varepsilon) \sin(n't + \varepsilon') \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot qq' \left\{ \begin{aligned} & -\frac{2a}{a'^2} \cdot \sin(nt + \varepsilon) \sin(n't + \varepsilon') \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin(nt + \varepsilon) \sin(n't + \varepsilon') \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot qp' \left\{ \begin{aligned} & \frac{2a}{a'^2} \cdot \sin(nt + \varepsilon) \cos(n't + \varepsilon') \\ & - \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin(nt + \varepsilon) \cos(n't + \varepsilon') \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot p'^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{3a}{a'^2} \cdot \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \cos^2(n't + \varepsilon') \\ & + \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} iA^{(i)} \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin 2(n't + \varepsilon') \\ & - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \cos^2(n't + \varepsilon') \\ & - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin^2(n't + \varepsilon') \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 +\frac{m'}{2} \cdot p' q' \left\{
 \begin{array}{l}
 -\frac{3a}{a'^2} \cdot \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin 2(n't + \varepsilon') \\
 +\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin 2(n't + \varepsilon')
 \end{array}
 \right\} \\
 \\
 D \\
 \\
 +\frac{m'}{2} \cdot q'^2 \left\{
 \begin{array}{l}
 \frac{3a}{a'^2} \cdot \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin^2(n't + \varepsilon') \\
 +\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin 2(n't + \varepsilon') \\
 -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin^2(n't + \varepsilon') \\
 -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \sin^2(n't + \varepsilon')
 \end{array}
 \right\}
 \end{array}
 \right\}$$

14. Haec functionis perturbatricis evolutio ad formam magis simplicem reduci potest, atque ita exhiberi, ut duo genera inaequalitatum, periodicarum scilicet, et secularium, facilissime ab invicem secernantur.

Brevitatis causa ponatur

$$(1) \dots \left\{ \begin{array}{l} nt + \varepsilon = x; \\ n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon = y; \end{array} \right.$$

et primum factor excentricitatis e in aequatione (D) evadet

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \sin i y \sin(x - \vartheta) \\ - \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \cos i y \cos(x - \vartheta). \end{array} \right.$$

At si litterae i omnes valores integros tum positivos, tum negativos, ne excepto quidem valore $i = 0$, deinceps tribueris, et summam symbolo Σ indicatam confeceris, has aequalitates comperies

$$(2) \dots 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \sin i y \sin(x - \vartheta) = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \cos(iy + x - \vartheta);$$

$$(3) \dots - \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \cos i y \cos(x - \vartheta) = - \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \cos(iy + x - \vartheta);$$

posito igitur

$$(4) \dots \dots \left\{ 2i\Lambda^{(i)} + a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) \right\} = M^{(0)},$$

factorem excentricitatis e ita exprimes

$$(b) \dots \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} M^{(0)} \cos(iy + x - \omega).$$

15. Animadvertere praestat, cuilibet functioni numeri integri variabilis i , cui symbolum Σ praefixum sit, eundem valorem perstare, etiamsi i vertatur in $(i \pm r)$, modo r sit numerus integer quicumque. Si enim in utraque hypothesis omnes valores integri possibili quantitati i tributi fuerint, et summae evolutae, iisdem terminis utraque summa constabit, ac proinde ex quovis suo termino utraque evolvi potest.

Quapropter factor alterius excentricitatis e' (D), idest

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i \Lambda^{(i)} \sin iy \sin(y + x - \omega') \\ - \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da'} \right) \cos iy \cos(y + x - \omega'), \end{array} \right.$$

qui eodem pacto ut in numero praecedente (2), (3) vertitur in

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i \Lambda^{(i)} \cos \{ (i+1)y + x - \omega' \} \\ -2 \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da'} \right) \cos \{ (i+1)y + x - \omega' \} \end{array} \right.$$

ne minimum qui lem mutabitur, licet loco i scriberes $(i - 1)$. Si igitur posueris

$$(5) \dots \dots \left\{ 2(i - 1)\Lambda^{(i-1)} - a' \left(\frac{d\Lambda^{(i-1)}}{da'} \right) \right\} = M^{(1)},$$

factor excentricitatis e' tibi erit

$$(c) \dots \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} M^{(1)} \cos(iy + x - \omega').$$

16. Prior terminus factoris quadrati e (D) per formulas (2) numeri 14 reducitur in

$$(6) \dots \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{-\infty} iA^{(i)} \sin iy \sin 2(x-\vartheta) = -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} iA^{(i)} \cos(iy+2x-2\vartheta).$$

Cum autem sit

$$\sin^2(x-\vartheta) = -\frac{1}{2} \{ \cos 2(x-\vartheta) - 1 \},$$

secundus terminus ejusdem factoris erit

$$-2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos iy \sin^2(x-\vartheta) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos iy \cos 2(x-\vartheta) \\ - \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos iy \end{array} \right\}.$$

Verum ex formula (3), (num. 14), est

$$(7) \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos iy \cos 2(x-\vartheta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos(iy+2x-2\vartheta);$$

is igitur terminus evadet

$$(8) \dots -2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos iy \sin^2(x-\vartheta) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos(iy+2x-2\vartheta) \\ - \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos iy \end{array} \right\}.$$

Quartus autem terminus, et quintus cum ejusdem sint formae, ac termini aequationum (2), (3), vertentur in

$$(9) \dots \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{-\infty}^{+\infty} ia \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \sin iy \sin 2(x-\vartheta) = \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} ia \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \cos(iy+2x-2\vartheta). \end{array} \right.$$

$$(10) \dots \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \cos iy \cos 2(x-\vartheta) = \\ -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \cos(iy+2x-2\vartheta). \end{array} \right.$$

Sextus denique et postremus terminus factoris quadrati *e* ob aequalitatem hanc

$$\cos^2(x-\vartheta) = \frac{1}{2} \{ \cos 2(x-\vartheta) + 1 \}$$

fiet

$$\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 \left(\frac{d^2 \Lambda^{(i)}}{da^2} \right) \cos iy \cos^2(x-\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 \left(\frac{d^2 \Lambda^{(i)}}{da^2} \right) \cos iy \cos 2(x-\omega) \\ + \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 \left(\frac{d^2 \Lambda^{(i)}}{da^2} \right) \cos iy \end{array} \right\};$$

cumque sit (num. 14, (3))

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sum_{+\infty}^{+\infty} a^2 \left(\frac{d^2 \Lambda^{(i)}}{da^2} \right) \cos iy \cos 2(x-\omega) = \\ \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 \left(\frac{d^2 \Lambda^{(i)}}{da^2} \right) \cos(iy+2x-2\omega); \end{array} \right.$$

erit etiam

$$(11) \dots \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 \left(\frac{d^2 \Lambda^{(i)}}{da^2} \right) \cos iy \cos^2(x-\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 \left(\frac{d^2 \Lambda^{(i)}}{da^2} \right) \cos(iy+2x-2\omega) \\ + \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 \left(\frac{d^2 \Lambda^{(i)}}{da^2} \right) \cos iy \end{array} \right\}.$$

Jam omnes terminos (6), (8), (9), (10), (11), qui simul cum tertio termino coefficientis quadrati *e* factorem ejus constituunt, in unum cogamus. Eorum autem parti, quae per $\cos(iy+2x-2\omega)$ ducta est, coefficientem $N^{(o)}$ praefigemus, et quae per $\cos iy$, coefficientem $N^{(3)}$; ut pars altera ab altera di stinguatur. Itaque habebimus

$$(12) \dots \frac{1}{4} \left\{ i(4i-5)\Lambda^{(i)} + 2(2i-1)a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) + a^2 \left(\frac{d^2 \Lambda^{(i)}}{da^2} \right) \right\} = N^{(o)};$$

$$(13) \dots \dots - \frac{1}{4} \left\{ 4i^2 \Lambda^{(i)} - 2a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) - a^2 \left(\frac{d^2 \Lambda^{(i)}}{da^2} \right) \right\} = N^{(3)};$$

et proinde totus factor quadrati *e* erit

$$(d) \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(o)} \cos(iy+2x-2\omega) + \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(3)} \cos iy.$$

17. Ad factorem producti *ee'* (D) veniamus. Sit *c* basis logarithmorum naturalium; erit quidem, ut neminem latet,

$$(14) \dots \left\{ \begin{array}{l} \sin(x-\omega) = \frac{c^{(x-\omega)\sqrt{-1}} - c^{-(x-\omega)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \\ \cos(x-\omega) = \frac{c^{(x-\omega)\sqrt{-1}} + c^{-(x-\omega)\sqrt{-1}}}{2}; \\ \sin(y+x-\omega') = \frac{c^{(y+x-\omega')\sqrt{-1}} - c^{-(y+x-\omega')\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \\ \cos(y+x-\omega') = \frac{c^{(y+x-\omega')\sqrt{-1}} + c^{-(y+x-\omega')\sqrt{-1}}}{2}; \end{array} \right.$$

atque hinc

$$(15) \dots \left\{ \begin{array}{l} \sin(x-\omega)\sin(y+x-\omega') = -\frac{1}{2} \{ \cos(y+2x-\omega-\omega') - \cos(y+\omega-\omega') \} \\ \cos(x-\omega)\sin(y+x-\omega') = \frac{1}{2} \{ \sin(y+2x-\omega-\omega') + \sin(y+\omega-\omega') \}; \\ \sin(x-\omega)\cos(y+x-\omega') = \frac{1}{2} \{ \sin(y+2x-\omega-\omega') - \sin(y+\omega-\omega') \}; \\ \cos(x-\omega)\cos(y+x-\omega') = \frac{1}{2} \{ \cos(y+2x-\omega-\omega') + \cos(y+\omega-\omega') \}. \end{array} \right.$$

Quare factor producti $e e'$ hanc induet formam

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos iy \{ \cos(y+2x-\omega-\omega') - \cos(y+\omega-\omega') \} \\ + \sum_{-\infty}^{+\infty} ia \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \sin iy \{ \sin(y+2x-\omega-\omega') + \sin(y+\omega-\omega') \} \\ - \sum_{-\infty}^{+\infty} ia' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \sin iy \{ \sin(y+2x-\omega-\omega') - \sin(y+\omega-\omega') \} \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{dada'} \right) \cos iy \{ \cos(y+2x-\omega-\omega') + \cos(y+\omega-\omega') \} \end{array} \right.$$

Sed ex formulis (7) numeri 6, et (2), (3) numeri 14 habemus quoque

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos iy \cos(y+2x-\omega-\omega') = -2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos \{ (i+1)y+2x-\omega-\omega' \}; \\ 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos iy \cos(y+\omega-\omega') = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos \{ (i+1)y+\omega-\omega' \}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} ia \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \sin iy \sin(\gamma + 2x - \omega - \omega') &= - \sum_{-\infty}^{+\infty} ia \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \cos \{ (i+1)\gamma + 2x - \omega - \omega' \}; \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} ia \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \sin iy \sin(\gamma + \omega - \omega') &= - \sum_{-\infty}^{+\infty} ia \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \cos \{ (i+1)\gamma + \omega - \omega' \}; \\ - \sum_{-\infty}^{+\infty} ia' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \sin iy \sin(\gamma + 2x - \omega - \omega') &= \sum_{-\infty}^{+\infty} ia' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cos \{ (i+1)\gamma + 2x - \omega - \omega' \}; \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} ia' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \sin iy \sin(\gamma + \omega - \omega') &= - \sum_{-\infty}^{+\infty} ia' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cos \{ (i+1)\gamma + \omega - \omega' \}; \\ \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' \left(\frac{d^2A^{(i)}}{dada'} \right) \cos iy \cos(\gamma + 2x - \omega - \omega') &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' \left(\frac{d^2A^{(i)}}{dada'} \right) \cos \{ (i+1)\gamma + 2x - \omega - \omega' \}; \\ \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' \left(\frac{d^2A^{(i)}}{dada'} \right) \cos iy \cos(\gamma + \omega - \omega') &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' \left(\frac{d^2A^{(i)}}{dada'} \right) \cos \{ (i+1)\gamma + \omega - \omega' \}; \end{aligned} \right.$$

posito igitur $i = (i - 1)$, quod per num. 15, salva magnitudine, fieri potest, et terminis ductis per $\cos(i\gamma + 2x - \omega - \omega')$ ab iis secretis, quos per $\cos(i\gamma + \omega - \omega')$ multiplicantur; factor producti ee' evadet

$$\left\{ \begin{aligned} - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 4(i-1)^2 A^{(i-1)} + 2(i-1)a \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da} \right) - 2(i-1)a' \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'} \right) - aa' \left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{dada'} \right) \right\} \times \\ \times \cos(i\gamma + 2x - \omega - \omega') \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 4(i-1)^2 A^{(i-1)} - 2(i-1)a \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da} \right) - 2(i-1)a' \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'} \right) + aa' \left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{dada'} \right) \right\} \times \\ \times \cos(i\gamma + \omega - \omega') \end{aligned} \right.$$

Notandum est, alteram hujus factoris partem, mutato i in $-i$, et loco $A^{(-i)}$ substituto $A^{(i)}$, (2), (num. 5) eandem magnitudinem retinere, ideoque converti posse in

$$\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 4(i+1)^2 A^{(i+1)} + 2(i+1)a \left(\frac{dA^{(i+1)}}{da} \right) + 2(i+1)a' \left(\frac{dA^{(i+1)}}{da'} \right) + aa' \left(\frac{d^2A^{(i+1)}}{dada'} \right) \right\} \times \left. \begin{aligned} \times \cos(i\gamma - \omega + \omega') \end{aligned} \right\}.$$

Quo patet, nos uti posse utraque forma modo utriusque dimidium sumamus. Ergo si ponatur

$$(16) \dots - \frac{1}{2} \left\{ 4(i-1)^2 A^{(i-1)} + 2(i-1)a \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da} \right) - 2(i-1)a' \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'} \right) - aa' \left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{dada'} \right) \right\} = N^{(1)};$$

$$(17) \dots \frac{1}{4} \left\{ 4(i-1)^2 A^{(i-1)} - 2(i-1)a \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da} \right) - 2(i-1)a' \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'} \right) + aa' \left(\frac{d^2 A^{(i-1)}}{dad a'} \right) \right\} = N^{(4)};$$

$$(18) \dots \frac{1}{4} \left\{ 4(i+1)^2 A^{(i+1)} + 2(i+1)a \left(\frac{dA^{(i+1)}}{da} \right) + 2(i+1)a' \left(\frac{dA^{(i+1)}}{da'} \right) + aa' \left(\frac{d^2 A^{(i+1)}}{dad a'} \right) \right\} = N^{(5)};$$

factor aequabitur quantitati

$$(f) \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(1)} \cos(iy + 2x - \theta - \theta') + \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(4)} \cos(iy + \theta - \theta') + \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(5)} \cos(iy - \theta + \theta');$$

quo, ut monuimus, coefficientes $N^{(4)}$, $N^{(5)}$ eundem valorem habebunt: si vero forma etiam eorum consideretur, atque denominetur $N^{(-5)}$ valor, quem mutato i in $-i$ sumit coefficientis $N^{(5)}$, erit

$$(19) \dots \dots N^{(-5)} = N^{(4)}.$$

18. Factor quadrati e' (D) eodem prorsus modo convertitur, quo factor quadrati e (num. 16) conversus fuit: termini scilicet, quibus ille factor constat, evadunt

$$(20) \dots -\frac{5}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \sin i y \sin 2(y+x-\theta') = \frac{5}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \cos \{ (i+2)y + 2x - 2\theta' \};$$

$$(21) \dots -2 \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos i y \sin^2(y+x-\theta') = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos \{ (i+2)y + 2x - 2\theta' \} \\ - \sum_{-\infty}^{+\infty} i^2 A^{(i)} \cos i y \end{array} \right\};$$

$$(22) \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} i a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \sin i y \sin 2(y+x-\theta') = - \sum_{-\infty}^{+\infty} i a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cos \{ (i+2)y + 2x - 2\theta' \};$$

$$(23) \dots -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \sin i y \cos 2(y+x-\theta') = -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cos \{ (i+2)y + 2x - 2\theta' \};$$

$$(24) \dots \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da'^2} \right) \cos i y \cos^2(y+x-\theta') =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da'^2} \right) \cos \{ (i+2)y + 2x - 2\theta' \} ; \\ + \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da'^2} \right) \cos i y \end{array} \right\}.$$

His terminis in unam summam collectis, tertioque termino

addito, atque mutato i in $(i-2)$, ubi $\cos\{(i+2)y+2x-2\omega'\}$ insit; factor ille exprimi poterit per

$$(g') \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(2)} \cos(iy+2x-2\omega') + \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(3)'} \cos iy$$

Coefficientes autem $N^{(2)}$, $N^{(3)'}$ erunt

$$(25) \dots N^{(2)} = \frac{1}{4} \left\{ (i-2)(4i-3) \Lambda^{(i-2)} - 2(2i-3) a' \left(\frac{d\Lambda^{(i-2)}}{da'} \right) + a'^2 \left(\frac{d^2\Lambda^{(i-2)}}{da'^2} \right) \right\};$$

$$(26) \dots N^{(3)'} = -\frac{1}{4} \left\{ 4i^2 \Lambda^{(i)} - 2a' \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da'} \right) - a'^2 \left(\frac{d^2\Lambda^{(i)}}{da'^2} \right) \right\}.$$

Verum ex Lagrangiae theoria, qua valores $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $\dots A^{(i)}$, \dots determinantur, relationes existunt

$$a' \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da'} \right) = -\Lambda^{(i)} - a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right);$$

$$a'^2 \left(\frac{d^2\Lambda^{(i)}}{da'^2} \right) = 2\Lambda^{(i)} + 4a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) + a^2 \left(\frac{d^2\Lambda^{(i)}}{da^2} \right);$$

atque his valoribus in aequatione (26) substitutis, eruntur

$$N^{(3)'} = -\frac{1}{4} \left\{ 4i^2 \Lambda^{(i)} - 2a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) - a^2 \left(\frac{d^2\Lambda^{(i)}}{da^2} \right) \right\};$$

erit ergo (13), (num. 16)

$$(27) \dots N^{(3)'} = N^{(3)},$$

et factor quadrati e' fiet

$$(g) \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(2)} \cos(iy+2x-2\omega') + \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(3)} \cos iy.$$

19. Per formulam (2) numeri 14 primus terminus factoris quadrati p (D) vertetur in

$$(28) \dots -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i \Lambda^{(i)} \sin iy \sin 2x = \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i \Lambda^{(i)} \cos(iy+2x);$$

et per formulam (11) numeri 16 secundus terminus aequabitur quantitati

$$(29) \dots \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{-\infty} a^2 B^{(i)} \cos(iy+2x) \\ -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 B^{(i)} \cos iy \end{array} \right\};$$

tertius demum (8), (num. 16) evadet

$$(30) \dots -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) \cos iy \sin^2 x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) \cos(iy+2x) \\ -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) \cos iy \end{array} \right\}.$$

Quapropter posito

$$(31) \dots \frac{1}{4} \left\{ i\Lambda^{(i)} - a^2 B^{(i)} + a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) \right\} = P^{(o)};$$

et

$$(32) \dots -\frac{1}{4} \left\{ a^2 B^{(i)} + a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) \right\} = Q^{(o)};$$

factor quadrati p erit

$$(h) \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} P^{(o)} \cos(iy+2x) + \sum_{-\infty}^{+\infty} Q^{(o)} \cos iy.$$

20. Factor producti pq (D) per formulam (3) numeri 14, et ob aequationem (7) numeri 6, idest

$$B^{(-i)} = B^{(i)}$$

reduci potest in

$$(l) \dots \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 B^{(i)} \sin(iy+2x).$$

21. Quemadmodum primus terminus factoris quadrati p (D) ad formam magis commodam redactus fuit, ita et primus terminus factoris quadrati q vertitur in

$$(33) \dots \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i\Lambda^{(i)} \cos(iy+2x):$$

secundus autem per formulam (8) numeri 16 erit

$$(34) \dots -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 B^{(i)} \cos iy \sin^2 x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 B^{(i)} \cos(iy+2x) \\ -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 B^{(i)} \cos iy \end{array} \right\};$$

et tertius

$$(35) \dots -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) \cos iy \sin^2 \dot{x} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) \cos(iy+2x) \\ -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) \cos iy \end{array} \right\}.$$

Hinc posito

$$(36) \dots \frac{1}{4} \left\{ i\Lambda^{(i)} + a^2 B^{(i)} + a \left(\frac{d\Lambda^{(i)}}{da} \right) \right\} = P^{(1)};$$

atque coefficiente $Q^{(o)}$ (32) ex numero 19 huc revocato, factor quadrati q evadet

$$(m) \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos(iy+2x + \sum_{-\infty}^{+\infty} Q^{(o)}) \cos iy.$$

22. Primus terminus factoris producti pp' per formulas(15) numeri 17 fiet

$$(37) \dots -\frac{2a}{a'^2} \cdot \cos x \cos(y+x) = -\frac{a}{a'^2} \{ \cos(y+2x) + \cos y \};$$

pariterque secundus erit

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos iy \cos x \cos(y+x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos iy \cos(y+2x) \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos iy \cos y \end{array} \right\};$$

atque ambobus his terminis per aequationem (3) numeri 14 versis in formam accomodatiorem, et dein mutato i in $(i-1)$, erit etiam

$$(38) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos \{ (i+1)y+2x \} \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos(i+1)y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \cos(iy+2x) \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \cos iy \end{array} \right\}.$$

Quare factor producti pp' evadet

$$(n) \dots -\frac{a}{a'^2} \{ \cos(y+2x) + \cos y \} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \cos(iy+2x) \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \cos iy \end{array} \right\}.$$

23. Terminus primus factoris producti $p q'$ erit (15), (numeri 17),

$$(39) \dots \frac{2a}{a'^2} \cdot \cos x \sin(y+x) = \frac{a}{a'^2} \left\{ \sin(y+2x) + \sin y \right\}.$$

Si in altero autem loco $\cos x \sin(y+x)$ functionem equivalentem substitueris, eique formam, ut in numero 20 (l), mutaveris, statim obtinebis

$$(40) \dots - \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos i y \cos x \sin(y+x) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \sin \{ (i+1)y + 2x \} \\ -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \sin(i+1)y \end{array} \right\}.$$

Ille igitur factor, posito $i = (i-1)$, evadet

$$(o) \dots \frac{a}{a'^2} \left\{ \sin(y+2x) + \sin y \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \sin(iy+2x) \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \sin iy \end{array} \right\}.$$

24. Per formulas (15) numeri 17 primus terminus factoris producti $q q'$ (D) erit

$$(41) \dots - \frac{2a}{a'^2} \cdot \sin x \sin(y+x) = \frac{a}{a'^2} \left\{ \cos(y+2x) - \cos y \right\};$$

itidemque secundus

$$(42) \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos i y \sin x \sin(y+x) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos \{ (i+1)y + 2x \} \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos(i+1)y \end{array} \right\};$$

ac proinde totus factor abibit in

$$(r) \dots \frac{a}{a'^2} \left\{ \cos(y+2x) - \cos y \right\} + \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \cos \{ iy + 2x \} \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \cos iy \end{array} \right\}.$$

25. Quo pacto (num. 23) prior terminus factoris producti $q' p$ (D) in aliam formam conversus fuit, primus etiam terminus factoris producti $q p'$ (D) verti poterit in

$$(43) \dots \frac{a}{a'^2} \left\{ \sin(\gamma + 2x) - \sin \gamma \right\};$$

alter vero fiet

$$(44) \dots - \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \cos i \gamma \cos x \cos(\gamma + x) = \left. \begin{aligned} & \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \sin \{ (i+1) \gamma + 2x \} \right. \\ & \left. \left\{ +\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i)} \sin (i+1) \gamma \right. \right\}; \end{aligned} \right\}$$

et factor aequabitur quantitati

$$(b) \dots \frac{a}{a'^2} \left\{ \sin(\gamma + 2x) - \sin \gamma \right\} = \left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \sin(i\gamma + 2x) \right\} \\ & \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \sin i \gamma \right\}. \end{aligned} \right\}$$

26. Si in primo termino factoris quadrati $p'(D)$ loco $\cos^2(\gamma + x)$ substituetur $\frac{1}{2} \{ \cos 2(\gamma + x) + 1 \}$, habebimus (15), (num 17)

$$(45) \dots - \frac{3a}{a'^2} \cdot \cos \gamma \cos^2(\gamma + x) = \frac{3a^2}{4a'^2} \left\{ \cos(3\gamma + 2x) + \cos(\gamma + 2x) + 2\cos \gamma \right\};$$

secundus vero per formulam (2) numeri 14 erit

$$\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \sin i \gamma \sin 2(\gamma + x) = -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \cos \{ (i+2) \gamma + 2x \};$$

seu posito $i = i - 2$ in altero membro

$$(46) \dots \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sin i \gamma \sin 2(\gamma + x) = -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} (i-2) A^{(i-2)} \cos \{ i \gamma + 2x \};$$

tertius terminus, loco i substituto $(i - 2)$ in prima parte alterius membri, erit (11) num. (16)

$$(47) \dots - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i)} \cos i \gamma \cos^2(\gamma + x) = \left. \begin{aligned} & \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i-2)} \cos(i\gamma + 2x) \right\} \\ & \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i)} \cos i \gamma \right\}; \end{aligned} \right\}$$

quartus denique terminus (8), (num. 16), posito, un antea, $i = i - 2$, abibit in

$$(48) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i-2)}}{da'} \right) \cos(iy+2x) \\ - \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cos iy \end{array} \right\}.$$

Itaque si ponatur

$$(49) \dots - \frac{1}{4} \left\{ (i-2)A^{(i-2)} + a'^2 B^{(i-2)} - a' \left(\frac{dA^{(i-2)}}{da'} \right) \right\} = P^{(2)};$$

et

$$(50) \dots - \frac{1}{4} \left\{ a'^2 B^{(i)} + a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \right\} = Q^{(1)};$$

factor quadrati p' evadet

$$(t) \dots \frac{3a}{4a'^2} \left\{ \cos(3y+2x) + \cos(y+2x) + 2\cos y \right\} \\ + \sum_{-\infty}^{+\infty} P^{(2)} \cos(iy+2x) + \sum_{-\infty}^{+\infty} Q^{(1)} \cos iy.$$

27. Cum primus terminus factoris producti $p' q'$ (D) ob formulas (15) numeri 17 vertatur in

$$(51) \dots - \frac{3a}{a'^2} \cdot \cos y \sin 2(y+x) = - \frac{3a}{2a'^2} \left\{ \sin(3y+2x) + \sin(y+2x) \right\};$$

alter autem (L), (num. 20), loco i posito $(i-2)$ in

$$(52) \dots - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i-2)} \sin(iy+2x);$$

factor erit

$$(u) \dots - \frac{3a}{2a'^2} \left\{ \sin(3y+2x) + \sin(y+2x) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i-2)} \sin(iy+2x).$$

28. Tandem ad factorem quadrati q' descendamus. Cum sit

$$\sin^2(y+x) = - \frac{1}{2} \left\{ \cos 2(y+x) - 1 \right\},$$

primus illius factoris terminus (15), (num. 17), erit

$$(53) \dots \frac{3a}{a'^2} \cdot \cos y \sin^2(y+x) = - \frac{3a}{4a'^2} \left\{ \cos(3y+2x) + \cos(y+2x) - 2\cos y \right\};$$

secundus vero (2)i (num. 14),

$$(54) \dots \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} i A^{(i)} \sin iy \sin 2(y+x) = -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} (i-2) A^{(i-2)} \cos(iy+2x);$$

ubi in altero membro positum fuit $(i-2)$ loco i . Tertius, termino (8), (num. 16), in prima alterius membri parte substituto pariter $(i=2)$ pro i , fiet

$$(55) \dots -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i)} \cos iy \sin^2(y+x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i-2)} \cos(iy+2x) \\ -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i)} \cos iy \end{array} \right\};$$

quartus demum, eadem facta substitutione, erit

$$(56) \dots -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cos iy \sin^2(y+x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i-2)}}{da'} \right) \cos(iy+2x) \\ -\frac{1}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty} a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'} \right) \cos iy \end{array} \right\}.$$

Quare si ponamus

$$(57) \dots -\frac{1}{4} \left\{ (i-2) A^{(i-2)} - a'^2 B^{(i-2)} - a' \left(\frac{dA^{(i-2)}}{da'} \right) \right\} = P^{(3)};$$

atque ad aequationem (50), (num. 26) attendamus, factor quadrati q' hanc induet formam

$$(w) \dots -\frac{3a}{4a'^2} \left\{ \cos(3y+2x) + \cos(y+2x) - 2\cos y \right\} \\ + \sum_{-\infty}^{+\infty} P^{(3)} \cos(iy+2x) + \sum_{-\infty}^{+\infty} Q^{(1)} \cos iy.$$

29. Quibus omnibus functionis perturbatricis R evolutio (D), (num. 13) vertitur in

$$(E) \dots R = \begin{array}{l} \dots \frac{m'}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(i)} \cos iy \\ \dots \\ \dots + \frac{m'}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} M^{(o)} e \cos(iy+x-\vartheta) \dots \dots \dots (b), \text{ (num. 14),} \\ \dots \\ \dots + \frac{m'}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} M^{(1)} e' \cos(iy+x-\vartheta') \dots \dots \dots (c), \text{ (num. 15),} \\ \dots \\ \dots + \frac{m'}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(o)} e^2 \cos(iy+2x-2\vartheta) \dots \dots \dots (d), \text{ (num. 16).} \end{array}$$

$$+\frac{m'}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(1)} e e' \cos(iy+2x-\omega-\omega') \dots\dots\dots (f), \text{ (num. 17),}$$

$$+\frac{m'}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(2)} e'^2 \cos(iy+2x-2\omega') \dots\dots\dots (g), \text{ (num. 18),}$$

$$+\frac{m'}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(3)} (e^2+e'^2) \cos iy \dots\dots\dots (d), (g), \text{ (num. 16, 18),}$$

$$+\frac{m'}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(4)} e e' \cos(iy+\omega+\omega') \dots\dots\dots \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} (f), \text{ (num. 17),}$$

$$+\frac{m'}{2} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} N^{(5)} e e' \cos(iy-\omega+\omega') \dots\dots\dots$$

$$+\frac{m'}{2} \cdot p^2 \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} P^{(o)} \cos(iy+2x) + \sum_{-\infty}^{+\infty} Q^{(o)} \cos iy \right\} \dots (h), \text{ (num. 19),}$$

$$+\frac{m'}{2} \cdot pq \left\{ \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 B^{(i)} \sin(iy+2x) \right\} \dots\dots\dots (l), \text{ (num. 20),}$$

$$+\frac{m'}{2} \cdot q^2 \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} P^{(1)} \cos(iy+2x) + \sum_{-\infty}^{+\infty} Q^{(o)} \cos iy \right\} \dots (m), \text{ (num. 21),}$$

(E)..... R=

$$+\frac{m'}{2} \cdot pp' \left\{ \begin{array}{l} -\frac{a}{a'^2} \{ \cos(\gamma+2x) + \cos \gamma \} \\ + \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a a' B^{(i-1)} \cos(iy+2x) \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a a' B^{(i-1)} \cos iy \end{array} \right] \end{array} \right\} \dots\dots\dots (n), \text{ (num. 22),}$$

$$+\frac{m'}{2} \cdot pq' \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{a'^2} \{ \sin(\gamma+2x) + \sin \gamma \} \\ + \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a a' B^{(i-1)} \sin(iy+2x) \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a a' B^{(i-1)} \sin iy \end{array} \right] \end{array} \right\} \dots\dots\dots (o), \text{ (num. 23);}$$

$$+\frac{m'}{2} \cdot qq' \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{a'^2} \{ \cos(\gamma+2x) - \cos \gamma \} \\ + \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a a' B^{(i-1)} \cos(iy+2x) \\ + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a a' B^{(i-1)} \cos iy \end{array} \right] \end{array} \right\} \dots\dots\dots (r), \text{ (num. 24);}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{a}{a'^2} \{ \sin(\gamma+2x) - \sin \gamma \} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot p' \left\{ + \left[\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \sin(i\gamma-2x) \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} aa' B^{(i-1)} \sin i\gamma
 \end{aligned} \right] \right\} \dots\dots\dots (s), \text{ (num. 25);} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot p'^2 \left\{ \frac{3a}{4a'^2} [\cos(3\gamma+2x) + \cos(\gamma+2x) \cos + 2 \cos \gamma] \right. \\
 (E) \dots R = & \left. + \sum_{-\infty}^{+\infty} P^{(2)} \cos(i\gamma+2x) + \sum_{-\infty}^{+\infty} Q^{(1)} \cos i\gamma \right\} \dots (t), \text{ (num. 26),} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot p' q' \left\{ - \frac{3a}{2a'^2} [\sin(3\gamma+2x) + \sin(\gamma+2x)] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'^2 B^{(i-2)} \sin(i\gamma+2x) \right\} \dots\dots\dots (u), \text{ (num. 27),} \\
 & + \frac{m'}{2} \cdot q'^2 \left\{ - \frac{3a}{4a'^2} [\cos(3\gamma+2x) + \cos(\gamma+2x) - 2 \cos \gamma] \right. \\
 & \left. + \sum_{-\infty}^{+\infty} P^{(3)} \cos(i\gamma+2x) + \sum_{-\infty}^{+\infty} Q^{(1)} \cos i\gamma \right\} \dots (v), \text{ (num. 28);}
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

quo pro x , et γ substituendae erunt (1), (num. 14) quantitates $(nt + \varepsilon)$, $(n't - nt + \varepsilon - \varepsilon)$.

30. Denique imaginamus, omnibus quantitibus quas aequatio (E) sub symbolo $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ complectitur, series (num. 5, 6) restitui, quae exoriuntur, cum in iis quantitibus omnes valores integros numero i , ne excepto quidem $i=0$ deinceps tribuamur. Ea pars totius evolutionis, quae angulos nt , $n't$ una cum tempore variables non continebit, ideoque variationes sive inaequalitates seculares respiciet, littera F adnotata sit. Statim formam aequationis (E), vel leviter consideranti, quaesiti termini occurrunt; nequeunt enim ex ullo alio valore numero i , praeter $i=0$, derivari. Quapropter erit

$$F = \left\{ \begin{aligned}
 & A^{(0)} + N^{(3)}(e^2 + e'^2) + (N^{(4)} + N^{(5)})ee' \cos(\varpi - \varpi') \\
 & + Q^{(0)}(p^2 + q^2) + Q^{(1)}(p'^2 + q'^2) + \frac{1}{2}aa'B^{(1)}(pp'qq')
 \end{aligned} \right\}.$$

Cum autem sit $i=0$, erit etiam (13), num. 16),

$$N^{(3)} = \frac{1}{2} \left\{ a \left(\frac{d\Lambda^{(0)}}{da} \right) + \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{d^2\Lambda^{(0)}}{da^2} \right) \right\};$$

ac si factorem quadrati e' in pristinam formam $N^{(3)'}$, quae formae coefficientis $N^{(3)}$ similis est, tibi reverti libeat, (26), (27), (num. 18), habebis

$$N^{(3)} = \frac{1}{2} \left\{ a' \left(\frac{d\Lambda^{(0)}}{da'} \right) + \frac{1}{2} a'^2 \left(\frac{d^2\Lambda^{(0)}}{da'^2} \right) \right\}.$$

Praeterea in eadem hypothesisi, quoniam est (2), (num. 5),

$$\Lambda^{(-1)} = \Lambda^{(1)},$$

summa aequationum (17), (18) numeri 17 abibit in

$$N^{(4)} + N^{(5)} = 2\Lambda^{(1)} + a \left(\frac{d\Lambda^{(1)}}{da} \right) + a' \left(\frac{d\Lambda^{(1)}}{da'} \right) + \frac{1}{2} aa' \left(\frac{d^2\Lambda^{(1)}}{dada'} \right);$$

et formulae (32) numeri 19, et (50) numeri 26 evadent

$$Q^{(0)} = -\frac{1}{4} \left\{ a^2 B^{(0)} + a \left(\frac{d\Lambda^{(0)}}{da} \right) \right\};$$

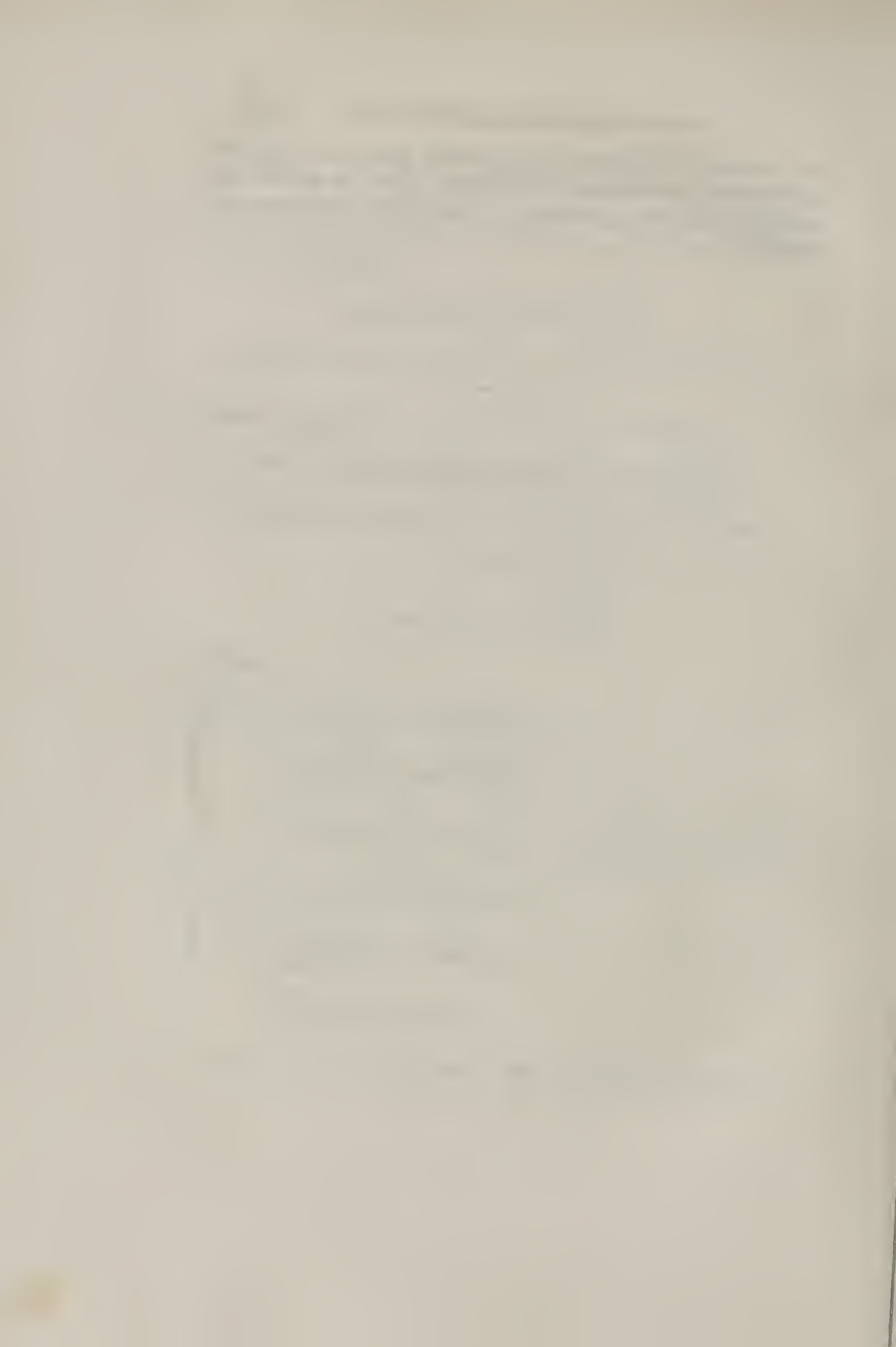
$$Q^{(1)} = -\frac{1}{4} \left\{ a'^2 B^{(0)} + a' \left(\frac{d\Lambda^{(0)}}{da'} \right) \right\}.$$

Hinc

$$F = \left\{ \begin{aligned} & \frac{m'}{2} \cdot \Lambda^{(0)} + \frac{m'}{4} \left\{ a \left(\frac{d\Lambda^{(0)}}{da} \right) + \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{d^2\Lambda^{(0)}}{da^2} \right) \right\} e^2 \\ & + \frac{m'}{4} \left\{ a' \left(\frac{d\Lambda^{(0)}}{da'} \right) + \frac{1}{2} a'^2 \left(\frac{d^2\Lambda^{(0)}}{da'^2} \right) \right\} e'^2 \\ & + \frac{m'}{2} \left\{ 2\Lambda^{(1)} + a \left(\frac{d\Lambda^{(1)}}{da} \right) + a' \left(\frac{d\Lambda^{(1)}}{da'} \right) + \frac{1}{2} aa' \left(\frac{d^2\Lambda^{(1)}}{dada'} \right) \right\} ee' \cos(\theta' - \theta) \\ & - \frac{m'}{2 \cdot 4} \left\{ a' \left(\frac{d\Lambda^{(0)}}{da'} \right) + a^2 B^{(0)} \right\} (p^2 + q^2) \\ & - \frac{m'}{2 \cdot 4} \left\{ a' \left(\frac{d\Lambda^{(0)}}{da'} \right) + a'^2 B^{(0)} \right\} (p'^2 + q'^2) \\ & + \frac{m'}{4} \cdot aa' B^{(1)} (pp' + qq'). \end{aligned} \right.$$

In ceteris seriei (E) terminis sinus, et cosinus arcuum una

cum tempore variabilium erunt; quibus altera pars evolutionis functionis perturbatricis constituetur, quam in secundo inaequalitatum genere recensere, et periodicam nuncupare solemus.



PAULLI BARONI

DISSERTATIO

De educatione calculorum, qui in prostatica urethrae regione concrevere, et de bilateralis methodi ad hos educendos utilitate.

(Acad. trad. die 17. Maii 1838)

Cum apud Vos, Sodales humanissimi, aliquot jam sunt anni, verba feci de operationibus Lithotritiae, oblata occasione cursim attingi casus quorundam ex calculis laborantium, quibus Cystotomiam potius quam illam operandi methodum adhibendam esse censueram, atque inter Lithotomiae varias methodos lateralis usus fueram, maxima simplicitate prout eam Cheselden excogitavit. Etenim haec clariorum Chirurgorum consensu inter caeteras methodos longe praestat, ideoque libentius hanc ipse usurpabam, etsi ex Italis nostris nonnulli, et inter Gallos aliqui adhuc arbitrentur Cystotomiam recto-vesicalem, et hypogastricam eidem methodo plerumque antefereendam esse.

Sed vero non istud in animum induxeram meum, ut vel ipse putarem curationem ejusmodi oportere usquequaque, ac indiscriminatim fieri; quin imo jam tum eadem potiorein saepe duxi Lithotritiam, et hanc adhibui quoties aegroti ita se haberent, ut augurari possem calculos per eam feliciter educendos fore. Porro autem methodo hypogastrica, missa laterali, usus essem, quum istos tantae molis deprehendissem, ut aegre

trahi possent a prostata, licet haec et altius incideretur, et quam maxime distenderetur; demum ab utraque methodo recessissem, si calculum vel collo vesicae insidentem, vel prostatae regionem occupantem reperissem: caeterum ex quo profiteor chirurgiam, calculi istiusmodi ter tantummodo se mihi obtulere. At novissime cuidam ex hisce calculosis chirurgicam navans operam cum existimaverim lateralem methodum, secus ac ante sentiebam, esse adhibendam, eorum historias Vobis enarrare decrevi, et de postrema hac opinione mea ad Vos referre. Videbitis itaque, utrum aliquoties expediat, necne talibus aegrotis mederi alio fere pacto, quam quo ipse pridem uti satius duxeram.

Calculum in vesicae cavo minime liberum, sed prostatae iuhaerentem primo nactus sum in quodam puero quadrimulo, vel ad summum quinquenne, cujus incommodam valetudinem curare suscepi in Provinciali Nosocomio Bononiensi, a pauperibus recipiendis appellato. Hunc incidere ex Celsi praeceptis statui, quia introducto cathetere, patuit calculum in prostata consistere, sed simul deliberavi catheterem sulcatum adhibere, qui mihi sedem calculi indicaret, ut contra hunc secarem urethram, et incisionem satis amplam super calculum ipsum aperirem; scilicet haud multo secus, quam *Boyer* monuit operandum esse, cum catheteris aditum usque ad vesicam calculus idem intercludit.

Quod parato opus erat, paraveram jam, puerumque instraveram tabulato ad horizontem erecto, ejus manibus antea cum pedibus colligatis, ac subinde sulcatum catheterem immiseram in urethram; sed dum studebam eundem ibi accommodate constituere, puer repentino motu corpus suum concussit, ita ut catheteris apex offenderit calculum, et in vesicam adegerit. Quapropter a proposita incisionis ratione statim recessi, et lateralem methodum amplexus sum, per quam facile eduxi parvum calculum, figura similimum glandulae prostatae. Hac enim simplici incidendi ratione, ut in ejusmodi re, nil mihi videbatur aptius, quippe quia tenuis calculus evellendus erat, aetataeque puer curandus, et quia omnes adhuc fatentur methodum illam calculosis bene multis accommodatam esse, ac praesertim aegrotis primae aetatis: accedebat eo, quod cal-

culus constiterat in ipsa prostata, et in vesicae collo; neque me praeterierat Chirurgos eximios, *Dupuytren* inter caeteros, et *Begin*, eum tum suadere incisionis modum: demum id ipsum pro puero fieri alio pacto vix, aut omnino non poterat, quia sulcatus catheter ad vesicam deduci nequibat. Caeterum si res mihi, ut proposueram, cessisset; simplicem *Celsi* methodum inter alias elegerem, cathetere solummodo addito, ut urethrae secturam tutius imprimerem, sed *ductore Ledran* a *Boyer* commendato, sulcatoque specillo, et reliquis hujusmodi instrumentis omissis.

Alter ex istis calculosis mihi se obtulit Romae, mense Septembris an. 1835, quo nempe juvenis quidam ad Centum Cellas natus me adiit, ut sibi mederer, cum frustra ab aliis medicam petivisset opem. Hunc ego per catheterem exploravi, qui multo antequam vesicam ingrederetur, in calculum incurrit: id mihi indicium fecit calculum occupare prostaticam et membranaceam urethrae regionem, atque ea de causa aegrotum acerrimis doloris morsibus afflicti, urinaeque incontinentia laborare. Is quidem incisionem permetuens enixe a me postulabat, ut sibi *Lithotritiam* potius adhiberem; sed hac nequam uti poteram, neque melius ad rem facere videbatur *Cystotomia* lateralis, cui praeponenda omnimode erat incisio recto-vesicalis, qua scilicet juxta calculi longitudinem secare licebat prostatam, urethramque, a parte ejus antica ad posticam, et ita viam ad eum educendum expeditiorem aperire, quam per obliquam vel transversam prostatae secturam.

Vix dum igitur juvenis curatioui hujusmodi se permisit, illi incisionem tali pacto adhibui, regulis simul obsequens a celeberrimo *Vaccà* traditis, sed caesuram paullo magis producens, quantum nempe opus erat, ut calculus a facie ejus anteriori plane detegeretur: hunc feliciter quidem, sed non sine aliqua difficultate extrahere potui, quia forcipem statim introducere nequivi, cum calculus non staret in cavo libero et extensivo, prout vesica est; ac propterea corpus extraneum ab urethra quasi divellere debui cochleari quodam (veteris *Obstetricorum* haud dissimili, sed amplitudinis admodum minoris) inter urethram, et calculum ipsum insinuato. Sic porro fas fuit solam calculi portionem evellere, quae obstruebat

urethram, et prostatae formam referebat; pars enim altera, quae ob cochlearis pressuram se a priori sejunxerat, et in vesicam deciderat, per communem forcipem mihi fuit educenda. Aeger postmodum doloribus liberatus est, qui eum die nocteque ante cruciabant, ac melius meliusque inde se habuit, sed plane convalescere non potuit, quod ei fistula ad perinaeum supervenit. Id autem mirum mihi non accidit; siquidem calculus, dum sensim et gradatim crescebat, urgebat itidem, et dilatabat vesicae collum, et prostatam, ac proinde factum est forsitan, ut hae partes denuo in arctum se contrahere nequiverint, quae contra in pristinum statum probe restitui solent, cum brevi ac violenter dilatantur ad extraendum calculum in vesica degentem per incisionem lateralem, aut recto-vesicalem, aut medianam: cum vero canalis portio, quam prostata circumplectit, plane se in integrum non restituit, urina per assuetum iter, idest per solam urethram ex toto effluere non potest, atque continenter se egerens quoque per vulnus impedimento esse debet, quominus partes hujus exteriores cicatricem omnino obducant.

Ego vero quamvis autumem hanc fistulae illius veram fuisse originem; inficiari tamen nequeo fistulam ipsam caussis effici eisdem potuisse, quibus post incisionem recto-vesicalem ea persaepe gignitur. Quoniam vero in hac medendi ratione fistula tum maxime oriri videtur, cum retrorsum incisio multo protenditur, ultra prostatam: iccirco partem hujus posteriorem servavi integram; et sectionem antea magis, quam fieri solet, produxi primam sequutus sum de fistulae origine explicationem. Vulneri ejusmodi mederi studui; sed vix dum eidem primam manum admoveram, initio aegroti intolerantia, dein necessitas, qua ipse premebatur, natale repetendi solum, prohibuere, quominus inchoatam curationem perficere ultra conarer. Is igitur Roma excessit sanus quidem et valens corpore, at fistula ad perinaeum nondum coercita.

Quoniam calculo per catheterem ante explorato mihi patuit hunc tenere haud parvam urethrae portionem, satius habui juvenem ex methodo recto-vesicali curare, quippe qua fas erat incisionem producere supra calculum ipsum, prout luberet, urethram findendo quatenus fuisset opus: id autem per methodum lateralem vix aut omnino fieri non posse existimabam.

Accedebat quod tali pacto calculum ab urethra sejungere, et simul extrahere aegre tantummodo, ac non ita expedite potuissem. His de caussis, aliisque mox dicendis ab alia hujus generis curatione oblatis Celsi methodum praetermisi.

Homo quidam, domo Viterbio, annum agens aetatis quinquagesimum, vel sexagesimum ad summum, Romam petiit me consulendi gratia incunte anno 1837. Hic jamdiu, a prima nempe aestate anni 1833, incommodis illis afficiebatur, quae calculus in vesica concretus parere solet: sed ut erat vitae deliciis minime assuetus, laboris patiens, et acri animo, dolorum molestiam toleranter ferebat, quin ad hosce leniendos remedium a medicina quaereret. Septembre autem anni 1836 isti adeo recrudere, ut equitare (prout ei opus erat) amplius non posset, et die nocteque deberet summo cum dolore urinas stillatim reddere. Tunc Chirurgum quemdam advocavit, cui se explorandum dedit, intellexitque se calculo reapse laborare. Quamvis cruciatibus vexaretur acerbissimis, tamen summa hyeme non dubitavit vehiculo Romam usque, nempe ad quinquaginta passuum millia, se conferre. Percontanti mihi eum de suo morbo, constitit propter calculum periculose illum aegrotare; id quod omnino cognitum perspectumque fuit, inducto cathetere, qui libere quidem usque ad regionem prostatae descendit, sed eo deductus praepeditum iter offendit, immo calculo impegit: catheter enim ille metallicus distincte reddidit sonitum, uti solet, cum in corpus lapideum hujusmodi incurrit. Sed ego eundem ultra impellere conatus sum, et juxta posticam calculi partem provehendo potui illum haud brevi tractu insinuare, antequam sentirem apicem suum praetergredi corpus solidum, quod transeundo catheter ipse perstringebat. Quamobrem dignovi calculum esse amplum, quantum saltem conjicere poteram ex ejus diametro, quam secundum urethrae axem sic proxime instrumento metitus eram. Ubi semel id inspexi, neque aeger multum laboris ac molestiae se inde cepisse ostendit, visum est paullo post aliam agere explorationem, qua ego omnes persecutus sum vias, sed incassum, removendi calculi a sede sua. Quod cum omnimode iterum, iterumque frustra tentaverim, aegroto aperte significavi Lithotritiae locum omnino non relinqui, sed calculum sola incisio-

ne educi posse. Tunc ille Viterbium consternatus rediit, ubi primum ejus morbus ingravescere in dies, et ipse intensius cruciari, mox remittere quidpiam dolores caeperunt. Sed vix dum sibi meliuscule fieri sensit, me per litteras vocavit curae iterum meae se offerens. Sed ego tunc variis distentus curis statim non potui illuc conferre me, et solum postremis Februarii diebus, cum aliquid otii nactus essem, Viterbium petii, ubi aegrotum reperi tristem ac prostratum degere vitam vel in sessibulo ad focum, vel saepius in lecto, acutis vexari doloribus, hisque vehementius sub urinae fluxum, quam saepissime emittere cogebatur, pulsumque vim et celeritatem una cum calore cutis (quae semper arida erat) die vesperascente augescere quoque deprehendi.

Quoniam pacto curationem illi facere satius foret, studiose mecum ipse reputabam; etenim Celsi methodus, prout ab auctore traditur, in aegrotum istum, secus atque in puerum ante dictum, minus apte quadrare videbatur, quia calculus haud parvae molis erat, et nihilominus catheter in vesicam intromitti poterat: neque censebam ad rem melius conferre methodum recto-vesicalem, quum calculus in urethra non pertingeret ultra prostatam ex parte ejus antica, sicuti fieri vidimus in juvene, quem Romae medicaveram. Comperiebam praeterea calculum hunc haud brevi intervallo prostatam retrorsus praegredi, seu intra vesicam ipsam se extendere, et ideo commodius ducebam prostatam secare a latere, ubi magis quam in mediana linea incisionem prolatare licet: nam, si ultra prostatam sectura producat, mihi persuasum est urinariam fistulam necessario ferme subsequi, et perquam facile vesicae parietes in educendo calculo lacerari posse, quod ne fiat, sedulo cavendum est, ut monent celeberrimus *Scarpa*, alii-que Lithotomistae. Quamobrem bilateralis incisio caeteris videbatur anteferenda, quod ad intercidendam urethram cathetere sic me juvare potuissem, et quia prostata utrinque diffissa, ubi majoris est amplitudinis, patuisset plaga satis lata, ut ope instrumenti inter prostatam, et calculum insinuati facile extrahi posset. Caeterum, quoad ejus fieri licuisset, methodum clarissimi *Dupuytren* adhibere mecum ipse constitueram: sed dubitans fore ut calculus ab hoc incidendi modo me impedi-

ret, consilium erat, sectura arcuatim facta, urethraque membranaea incisa, ad laevam aegroti convertere sulcum catheteris, et sinistrorsum super hunc prostatam oblique secare eodem fere modo, quo imprimi solet incisio lateralis *Cheselden*, ac dein similem incisuram dextrorsum agere super eundem catheterem, huc converso ejus sulco. Quod si calculus reapse prohibuisset, quominus id facerem, postremo statueram, urethra (ope catheteris, ut ante dixi) probe diffissa, in hanc demittere scalprum constrictum, apiceque obtuso, eum a regione urethrae membranaceae ad prostaticam deducere, et sinistrorsum primo, dextrorsum postea incisionem facere, ut jam indicavi. Accidit autem, ut paullo ante diem, quo mihi propositum erat aegroti curationem tali pacto aggredi, in manus meas veniret Opus, ab eximio *Civiale* editum, cui titulus = *Parallèle des divers moyens de traiter les calculeux* =, ubi nova quaedam et recentia ab ipso excogitata de ratione exterioris incisionis efficiendae proponebat, quae visae sunt aegroti nostro recte convenire posse, quaeque idcirco in eodem experiri ipse constitui.

Postridie ejus diei, quo Viterbium perveneram (die nempe 1. Martii an. 1837), primum aegroti adhibere jussi clysterium, ut vacuaretur intestinum rectum, et ita periculum ejus laedendi in incisione removeretur, dein astantibus eximiis Doctoribus *Mencarini*, *Smeraldi*, et *Feliciani*, manum operi admovi in vesicam introducendo catheterem, quem juxta calculum demisi perinde ac egeram Romae, cum primitus aegrotum ipsum scrutatus eram. Eo deinde supra firmam tabulam horizonti parallelam imposito, manibus ejus cum pedibus colligatis, cathetere alteri ex astantibus tradito, ne loco suo moveretur, ipsemet initio incisionem feci, quam ab anteriore ani margine juxta *raphe* produxi ad longitudinem circiter unius pollicis cum dimidio, postea sectura alia ad urethram membranaceam pervasi, inquam infixi scalprum idem constrictum, et convexum, cujus ope cutem, subjectasque partes antea secueram. Quo facto, catheterem sinistra manu apprehendi, et ad pubem erexi, ejusque manubrium dextrorsum ita inclinavi, ut a sinistra esset ipsius sulcus, et statim juxta hanc impulsi scalprum, quod idcirco prostatam oblique incidit ex hac

parte, unde illud retro agens commode potui incisuram prolatare, cathetereque in contrariam partem verso, ibi quoque prostatam eodem modo incidere. Tunc digito indice sinistrae manus juxta calculum intromisso, licuit mihi tuto inducere, et ad eundem calculum accommodate applicare primum forcipis ramum, dein alterum, quippe qui sejungi ab illo et cum hoc, prout lubet, connecti poterat ad modum forcipis obstetrici a *Brinningaussen* inventi. Conjunctis itaque binis forcipis ramis, hisque simul compressis, haud difficile potui calculum arripere, eundemque a vesica extrahere; quem cum ego conspexerim faciem quamdam habere laevam, etsi reliqua ejus superficies esset scabra, in suspicionem veni calculum alterum superesse: neque mea me sefellit opinio, quod digito in vesicam insinuat, et demisso propter hunc communi forcipe, extraneum corpus apprehendi, et foras eduxi, calculumque vidi illo longiorem, sed minus latum, qui prostatam occupabat. Digito rursus vesicam exploravi, et parva calculi fragmenta ibidem inesse sensi, quae partim cochleare sublata, partim aquae injectione extrusa fuere. Tum demum aeger in lectum deportatus reliquum ejus diei satis bene se habuit, praeterquam quod articularum pulsationes, jam lentiores mox factae sunt celeriores, et ideo sanguinis missione eas temperavimus. Hinc noctem ille bene egit, et postera die aequales inveni ejus articularum motus, quorum vis una cum calore cutis minime adaucta est vesperscente die, quemadmodum illi contingebat antequam se mihi curandum permitteret. Caetera quoque fauste satis procedebant, et vulnus parum ei dolebat ex urinae fluxu, quae etiam naturali via egeri caepit.

Sanatione aegroti sic feliciter inchoata, mihi deinde Romam reverso significabatur per literas magis magisque in dies cum convalescere. Tandem paucos post menses rescivi hominem istum a morbo prorsus recreatum esse pristinaeque sanitati restitutum; id quod ferme praeter expectationem meam contigisse non inficior: noveram enim educationem calculorum prostatae inhaerentium persaepe consequi urinae incontinentiam, etiamsi minoris sint molis quam ille, de quo nunc sermo est.

Quod ad geminos hosce calculos attinet, animadvertam postremo eos prae se ferre colorem flavum-subrubeum, eo ta-

men dilutiorem, quem trahere solent calculi ex solo acido *urico* conflati, quo quidem et isti magna ex parte constare videbantur; praeterea eosdem admodum friabiles esse, totaque superficie scabros, si excipiantur facies, quibus sese ad invicem attingebant, quaeque apparent politissimae, colore subalbido, et ideo a reliqua superficie diversissimae. Utraque ejusmodi facies parvam exhibet prominentiam et cavum quoddam, quorum alterum alteri in faciebus singulis respondet, ita ut ad articulationem duorum ossium *carpi* nempe, vel *tarsi* similitudine proxime accedant. Sed calculi hi, quod ad formam, inter se valde differunt: prior enim, qui in prostata consistebat, parallelepipedum imitatur; ab anteriore ejus latere ad posterius, (sive a facie, quae portionem urethrae anticam respiciebat, ad eam, quae calculum alium in vesica positum contingebat) quindecim lineas in longitudinem patebat, a summo ad imum decem et novem, transverse vero viginti duas. Calculus alter in vesica concretus oblongus valde est, siquidem major ejus diametros viginti et septem lineas longitudinis habet, media septemdecim, et alia, quae est a facie polita ad oppositam, decem solummodo: calculus hic valde friabilis, dum a vesica extrahebatur, nonnihil detritus est, eaque dedit fragmenta, quorum caussa injectionem adhibere opus fuit. (1)

Haec de calculoso istiusmodi mihi visa sunt, Academici praestantissimi, attentione vestra quodammodo digna, tum quia calculus raro in ea positura deprehenditur, et nihilo secius curatio bene et prospere cessit, nec plurimum difficultatis et laboris habuit; tum quia Chirurghi nostri adhuc attente satis non adverterint (quantum quidem ego novi) utilitatem methodi bilateralis, licet eorum multi, et plerique exterorum nunc po-

(1) Homo idem, cui tam bene cesserat operatio ista, iterum anno post calculis laborare caepit, quos toleravit usque ad annum 1839, cum se mihi denuo curandum Viterbii tradidit. Eadem prorsus methodo antecedente, eodemque successu calculum eduxi mole antedictis fere aequalem, cujus magna pars item in prostata insidebat, reliqua prominebat in vesica. Quatuor exinde vicibus eadem methodo in aliis usus fui.

tissimam habeant caeterisque anteferendam methodum lateralem *Cheselden*, et bilateralem ad educendos calculos per perinaeum, quoties calculosus ejusmodi non sit, ut eidem Lithotritiam commode adhiberi possit. Attamen bilateralem Itali Chirurghi non adhuc satis perpensis videntur: certe facta nimis pauca adhuc habemus, quae methodi hujus praestantiam quibusdam casibus comprobare sufficiant. Accedit, quod modum operandi a *Civiale* propositum nemo videtur etiam nunc esse prosequutus, eumque, nescio, quanti aestimaturi sint illustriores artis Chirurgicae periti. Qua de re pergratum mihi foret judicium vestrum, Academici praeclarissimi, quorum nomen, et auctoritas tantopere apud omnes valet. Neque vero ea, quae modo ego animadverti, ideo minoris sunt ponderis, vel minus ad rem nostram faciunt, quod mihi, aliisque jam ante notum erat, eximios Italiae Chirurgos usos fuisse bilaterali incisione juxta methodum, et per instrumenta a *Dupuytren* adinventata, duosque adnotationibus hac super re evulgatis istud sibi persuasum assertuisse, quod talis medendi ratio caeteris methodis perinaealibus sit praeponenda tum, cum Lithotritia vel omnino adhiberi nequeat, vel aegroto minime accommodata sit; Professorem nempe *Riberi*, qui Augustae Taurinorum Clinicam docet, et Operibus editis, et praeceptis Chirurgiae tradendis, eisque ad usum revocandis magnam sui nominis existimationem merito assequutus est, nec non Doctorem *Cappelletti* Tergestinum, qui scriptis, de luxationibus, de cystotomia, deque ossis maxillaris amputatione scientiam nostram locupletavit, et de ea optime meruit.

Iam porro facile probatu est incisionem bilateralem (quod attinet ad secturam partium interiorum, et maxime prostatae) eas afferre utilitates, quae incisioni laterali tribuuntur, imo eadem omnino commoda, ex quibus methodus *Cheselden* nostris hisce temporibus habita est etiam aliis methodis perinealibus antecellens; itemque illum operandi modum haud iis obnoxium esse incommodis, quae vitio vertuntur incisioni rectovesicali tum juxta primam methodum a *Sanson* adhibitam, tum juxta aliam a *Vaccà* emendatam, nec non medianae ejusdem auctoris incisurae. Quocirca argumentis iis ipsis utar, quibus vir ille princeps inter incisionis lateralis laudatores, ce-

leberrimus *Scarpa*, ostendebat methodum istam eo perfectionis processisse, quo alia quaeque operandi ratio pervenire possit. Monet igitur *Scarpa* ad felicem exitum Lithotomiae propter perinaeum factae omnino opus esse, ut prostata satis ample secetur, nequa laceratione, vel contusione haec afficiatur forcipe immittendo, calculove educendo, simulque ut eidem numquam sectura tam alte imprimatur, quae prostatam ipsam perfodiat; id quod neququam fieri potest, quin ingeneretur urinae fluxus per cellularem textum inter vesicam, et intestinum rectum, et inde gangraenosi abscessus, fistulae, aliaque istiusmodi gravissima mala subrepant. Quoniam autem lateralis methodus ad normas praeclaudati auctoris facta ambas illas condiciones praestat, idest nec brevem nimis, nec nimis profundam secturam imprimit; ipse hinc autumat eam omnium esse commodissimam. Sed nemo non videt incisionem bilateralem hoc idem praestare, imo etiam per hanc posse vel intra regionem prostatae secturam effici duplo longiorem ea, quae sit ex incisione laterali, atque ita vulveris hiatus tertiam sui parte augeri, quin prostata ipsa, vel collum urethrae violenter dilatetur. Hactenus igitur mihi videtur bilateralis methodus semper, et praesertim cum de calculis magnae molis agatur, laterali praecellere.

In utraque methodo prostatae incisio ad eandem directionem fit, et hac de re omnia in laterali paria, et in bilaterali: ergo haec, non secus quam illa, incommodis iis expedita est, quae incisioni recto-vesicali vitio vertuntur; fistula nempe inevitabilis fere est, si calculoso adhibeatur incisura ex priori methodo *Sanson*, qua nunc nemo jam utitur: periculum vero laedendi alterutrum ex seminalibus ductibus, et quae inde possunt mala sequi formidolosa, si alia adhibeatur incidendi ratio a *Vaccà* emendata; praeterea hic prostatae incisura non satis ampla, ut commode digitos, vel instrumenta intronittere, et calculos educere liceat: quibus addendum est tali operandi modo basim prostatae minime secari, quae (ut inquit *Scarpa*) facilius lacerari quam distendi potest. Quod si quis vellet methodum alteram, eam videlicet a *Vaccà* emendatam, sic porro temperare, ut sectura prostatae retrorsum produceretur, prioris incommoda offenderet.

De incisione autem exteriori Lithotomistae omnes curandum

esse docent, ut haec interiori prorsus respondeat, ne calculi eductio impediatur, neve urinae, aliarumque materierum effluxus aegre fiat per vulnus, quod tum viae naturalis vicem supplet, aut illae ibidem non immorentur, imo facile, rectaque a vesica extra perinaeum egerantur. Sed quum ex methodo a *Civiale* emendata exterior incisura, quod ad directionem, interioribus omnino non respondeat, videretur et haec incommodis eisdem obnoxia, quae ut devitarentur a Lithotomistis praeceptum illud traditum fuit. Si vero animadvertatur, binas secturas obliquas in unam et solam coalescere, atque in eo loco, quo haec conveniunt, patescere incisionem ductam in longitudinem, manifestum erit tali pacto calculos extrahi, et urinas, aliasve materias pariter egredi posse ac si prostata secaretur eadem directione, qua fit exterior incisura (1). Re quidem vera, sicut materierum effluxus neque impediretur neque retardaretur per vulnus lineam curvam repraesentans ad modum segmenti circularis (quod hac de re parum differretur vulnererecta deducto), ita incommoda istiusmodi afferre nequit illud, cuius os hinc illinc primo directe finditur, mox in angulum se flectit; quaevis enim ante fuerit huius anguli mensura, ob naturalem partium incisarum contractionem idem cito specie mutabitur, et lineae angulatim concurrentes formam simul curvae lineae inducent; neque verbis opus est, ut clare pateat

(1) Id ipsum animadvertendi jam inde a mense Augusto anni 1839 occasione mihi praebeuit Professor egregius Franciscus Rizzoli, quocum sermo tunc fuit de methodi bilateralis modificatione a Doctore Civiale facta. Hoc unum in ea se probare minime posse ajebat Rizzoli, incisionem scilicet exteriorem cum binis interioribus acuto angulo concurrentem, verens, ne facilis ita deficeret materierum effluxus. Periculum grave istud plana averti tunc ego monui, si prostata incideretur in antico segmento ope instrumenti (gorgeret) a Scarpa emendati hac sola conditione, ut incisio aequae, et simul fieri posset a latere utroque. In hac cogitatione fere ipsa, quoad interiorem incisionem, et formam instrumenti versatum postea fuisse Doctorem Cittadini Aretinum didici ex ejus methodo Lithotomiam administrandi anno 1841 evulgata.

id, quod de uno angulo fit, de altero itidem ab alio latere fieri debere, nec, non ad liberio rem exitum corporum solidorum, vel fluidorum illud quidem vix facere, utrum plaga praeseferat speciem litterae I, vel potius C, aut Y. Sententiae huic meae suffragatur opinio scriptorum illustrium, qui praecceptum de congruentia interioris incisionis cum exteriori se minime negligere arbitrantur, dum id curent, ut altera alteri ad modum anguli conveniat. Inter caetera proferam exemplum eximii *Boyer*, qui de methodo laterali agens, propter quam nempe incisio a *raphe* perducitur ad punctum quoddam medium inter anum, et prominentiam ischii, auctor erat, ut prostata transverse secaretur; necnon exemplum celeberrimi *Scarpa*, cujus conductor (*gorgeret*) juxta *Hawkins* emendationem conformatum desuper oblique incidebat ita, ut sectura exterior, et prostatae intercisio in angulum obtusum concurrerent. Atqui parvum hujusmodi incommodum, si modo id revera tale aliquid habendum sit, satis rependitur securitate, qua calculosos incidere licet absque periculo laedendi quodvis ex praecipuis vasis, etiamsi arteriae perinaei potiores propter aberrationem quamdam, sive melius ob varietatem aliquam in earumdem systemate (ut fieri saepe solet) in consueta sede, vel magnitudine non consisterent.

Civiale putat praeterea incisionem istam anteferendam esse secturae arcuatae, quod illa eandem tenet, servatque directionem, qua primum imprimitur, neque ejus margines adeo divaricantur, ut ingens dehiscat vulnus, sicut in arcuata sectura contingere *Civiale* ipse asserit. Huic insuper objicere quis posset, quod limitibus nimis angustis incisionem circumscribere necessum sit, ne urethrae bulbos, et intestinum rectum laedantur. Ego vero quum facilitatem considero, qua priorem calculum extrahere potui (licet idem diametrum haberet linearum duarum et viginti ex parte forcipibus apprehensa, harumque addita crassitie, pollices bene duos in longitudinem pateret, neque minoris esset molis ex parte altera); quum praeterea animadverto cutem, ut lubet, distendi, et intestinum commode retro agi posse; quod methodo isti de exiguitate incisionis ita objicitur meo judicio minimum valet. Etenim si calculi magnitudo aliquando anteverteret Chirurghi praesensionem

nil vetat, quominus a latere intestini incidatur, et ita sectura exterior producatur ischium versus eodem pene modo, ac in methodo laterali fieri solet.

Quae hucusque exposita sunt, sat certam facere mihi videntur incisionis bilateralis utilitatem, praesertim cum magnae molis calculi sunt educendi. Si qui vero censeant nihilominus incisionem lateralem prae bilaterali magis esse accommodatam, eique praefereendam; his probandum superest, quanam alia methodo curari facile, ac feliciter potuisset calculosus, de quo postremum verba feci. Re quidem vera si qualibet alia methodo usus fuisset, nec incisuram tam latam caute, et tuto prostatae imprimere, neque eam longe adeo perducere potuissem, ut sine nimia partium distensione ingentem illum calculum forcipibus expedite prehensare, et foras ducere mihi liceret. Non ego quidem inficias ibo ad rem haud parum profuisse amplitudinem prostatae, quae crescentem calculi molem sequuta est; nihilo tamen secius neque lateralis methodus a *Scarpa* commendata, neque incisio recto-vesicalis, neque alia quaelibet eodem, atque bilateralis incisio emolumento fuisset; et satis jam nobis esse debet, quod methodus quaedam prae aliis aliquid commodi (vel semel in multis casibus) afferat, ut ejusdem rationem, et usum habere pro re nata par sit. Quamvis autem arbitrer methodum illam non solis aegrotis esse adhibendam, qui ex magnis calculis in prostata concretis valde laborant, tamen vel ipse mihi persuadeo calculosos non multos sic incidi debere; hominem enimvero etiam illum egomet tali methodo non curassem, si calculum a prostata remove, et in vesicam adigere potuissem, aut si calculus ejus parvae saltem molis fuisset. Hunc licet praegrandem intra cavum vesicae per liquorem aliquem apte protensae minutatim incidere valuissem ope instrumenti ab *Heurteloup*, *Percuteur à marteau* nuncupati, quo in calculosis aliis fauste satis potui duriores calculos, et majores diffringere, neque verbis opus est, ut hujus instrumenti utilitatem ostendam nunc, cum in Italia nostra, et alibi Chirurgi bene multi illud prospere itidem adhibuerint, atque inter Chirurgiae inventa apud omnes magni habeatur. Quod si calculus parvae fuisset molis, eum in ipsa prostatae regione commode obterere potuissem per instrumenta, quae et *Civiale*, et

Leroy D' Etiolles, et *Doubovisk* pro urethrali Lithotritia invenerunt, vel perfecerunt inventa. Accedit quod nunc ab urethra extrahi possunt calculi vel integri, vel concisi, qui paucis ante annis sine incisione educi nequibant: ita mihi novissime accidit, ut calculosum quemdam curarem, cui quatuor annis ante incisio lateralis adhibita fuerat, et in quo tres calculos reperi: quorum prior magnitudine et forma communis avellanae ferme similis, et cujus diametros major lineas octo, media sex, et minor duas cum semisse longa erat, integer ab urethra extractus fuit; alter parem crassitudinem habens ibidem fractus est, et tertius in vesicam adactus comminutus fuit per instrumentum *Heurteloup*.

Sed de hoc satis dictum est, ne patientia vestra, Academici humanissimi, abuti videar singula quaeque verbis persequens: restat autem, ut vos ea, qua soletis, benignitate sermonem hunc meum accipiatis, qua certe tum propter ingenii mei tenuitatem, tum propter celeriter scribendi necessitatem summopere indiget.

CAMILLI RANZANI

DE MAXILLA

IN AGRO BONONIENSI REPERTA

A JOSEPHO MONTI

DISSERTATIO

(*Academiae tradita die 11. Maii 1837. Mem: posth.*)

Ineunte saeculo decimo octavo Josephus Montius montes, ac colles agri bononiensis perlustrabat, atque diligenter perquirebat non modo plantas, verum etiam fossilia, quorum catalogum, si otium daretur, et contexere, et in vulgus edere sibi proposuerat. Cum autem ab aliquo loco discedendum illi esset, ejusdem incolas etiam atque etiam hortabatur, atque promissione praemii alliciebat, ad colligenda, sibi que deferenda ossa animalium, conchylia, atque alia fossilia minus obvia, quae inibi invenirent. Cum itaque quadam die Montius partes omnes percurreret illius montis, qui a familia Blancanorum nomen habuit, atque Mons blancanus dicitur, obviam illi prodiit quidam ruricola in manibus ferens saxum coercens, ac continens dentes satis magnos adhuc maxillae insertos, nec non conchylia quaedam. Montius saxum, dentes et ossa curiose ac diligenter inspexit, deinde ruricolam, sciscitatus est de loco ubi saxum iavenit: Brevis est hinc via, respondit ruricola, in locum ubi saxum reperi: jacebat enim ad radices rupis, quae appellatur *Salto del Musico*, quaeque est huic monti contermina. Hoc audito Montius una cum ruricola illic se contulit, rupem diligenter expendit, eamque cognovit esse margaceam, ac conchyliferam, deinde ruricolam large donatum ab se benigne, comiterque dimisit.

Ubi autem in urbem reversus est, Montius primo curavit, ut ex arenaceis; petrosisque partibus superfluis fossile, ut ipse ait, expediretur. Verum, quod ipsae fossilis figurae ab eodem nobis oblatae confirmant, haud parum substantiarum reliquit, quae os tegebant ex parte, adeo ut non satis illius figura perspicere posset. Nihil tamen secius Montius os illud magni fuisse cetacei absque ullo errandi timore asserere non dubitavit. Ut autem illius assequeretur speciem, omnia, quae consulere potuit, Zoologorum opera caepit perlustrare, iisque pluries evolutis, conclusit tandem animal, ad quod pertinebat fossile, a Rosmaro Wormii haud multo differre.

Anno 1719 Josephus Montius opusculum edidit, cuius titulus « *De monumento diluviano nuper in agro Bononiensi detecto dissertatio* » Hujus pars magna comprobandae inservit veritati universalis diluvii ex animalium, plantarumque quae passim effodiuntur, reliquiis. Parum moratur Auctor in fossilis illius ossis descriptione, cum tantum dicat, inferius illud ceu in cuneum desinere, atque hinc latius fieri, inque duas connexas, manifesto perfractas, ideoque non integras partes dividi. De molaribus autem, quos tantum perspexit, planos eos, boviumque molaribus similes affirmat: non praetermittit autem quominus colorem, et dimensiones omnium indicet partium. Prope duorum ramorum fracturam in parte, quam Montius supinam vocat, duo, uti ait, repleta terra foramina cernebantur, inque interiori parte haud procul a foraminibus perspexit, aut sibi perspicere visus est inter arenam non omnino obduratam cartilaginum vestigia, et exteriori in parte ossea fragmenta.

Illam porro fossilis partem quae cunei-figuram exhibet, Montius arbitratus est verticem esse, duosque ejusdem ramos ossa maxillaria superiora ad extremitatem perfracta: et muscutorum, ac cartilaginum acervum, quarum sibi Montius visus est reperire vestigia inter arenam conglutinatam, obduratamque, in animali vivo haec ossa tegere, atque celare. Suo quidem opusculo tabulam addidit, in qua figura fossilis, Rosmarique a Wormii tabula expressa, nec non exerti dentis hujusce cetacei exhibentur. Dissertatio haec non parum auctori suo celebritatis peperit, neque ullus fere scriptor de Petrifica-

tionibus, aut de simili argumento disseruit, qui de capite fossili Rosmari bononiensis mentionem non haberet, multisque illum qui tale edidit, laudibus non esseret: utque non raro fit, inter tot eruditos naturalis historiae professores non defuit, qui opusculo Montii haud debita diligentia perlecto, summa illius referens gravem in errorem laberetur.

Joannes Gesnerus in sua dissertatione « *De Petrificatorum differentiis, et varia origine* » (pag. 72.) ita loquitur. « In tegrum caput Phocae dentibus exertis sive Rosmari vel Obo-daeni lapideum cum dentibus molaribus, et caninis circa Bononiam detectam descripsit celebris Josephus Monti Historiae naturalis professor in Instituto bononiensi. » Ex quo, ni fallor, deducitur, Gesnerum figuram Rosmari ex Wormio expressam pro alia sumpsisse, quae fossile exhibet, cujus canini nec unquam reperti sunt neque in allata figura indicantur.

Joannes Guilielmus Baumer in suo libro, cujus titulus: *Historia naturalis regni mineralogici*, edito Francofurti Anno 1780 (pag. 370) fidenter asserit, fossile, de quo hic habetur sermo, a Montio ut pote ad Hippopotamum spectans fuisse evulgatum. En verba Baumer « Ad Bononiam caput Hippopotami petrificatum effossum esse Dn. Monti in monumento diluvii in agro bononiensi reperto, Bononiae 1719, edito, retulit.

Abbas Fortis primus fuit, qui in dubium venerit de veritate Montii sententiae, illud nempe os Rosmari calvariae portionem esse tenendum. Ubi vero inter nos domicilium habuit, curavit, ut quantum fieri posset, os fossile a marga, quae illud ex parte tegebat, expediretur; neque curae illi fuit, ut duo terra repleta foramina et fragmenta ossea, cartilaginumque vestigia nuper allata adservarentur. Id utrum jure an injuria fecerit, non ego dicere queo, qui fossile, quale reliquit Montius, numquam vidi. Cum autem Fortis animadverteret deesse sibi assicata brutorum cadavera, accuratasque, quae eadem repraesentarent, tabulas, hujusmodi quidem quaestioni explanandae necessarias, exemplar a Dn. Sophia Sellier expressum ad celeberrimum Georgium Cuvierum mittere constituerat, qui tunc temporis studium suum ad ossa fossilia ma-

gna ex parte contulerat. At mors iis semper viris praematura, qui animum ad progressum scientiarum accelerandum intendunt, prohibuit, quominus ad Zoologum gallum exemplar perveniret. Paulo post nonnullas mihi proposui de iisdemquisitiones instituire, ulteriusque ad os illud omnino detegendum progressus sum. At statim mihi desistendum fuit, ut animadverti grave esse periculum in minuta illud fragmenta resolvendi, cum materiei pars, qua constat marga conchylifera, huc illuc adhuc tenaciter, arcteque adhaerentis in ipsum penetraverit.

Ante omnia igitur dijudicandum existimavi utrum Rosmari maxilla esset, an non. Animadverti primum cum Rosmari caput fere orbiculatum sit, ac veluti in rictu pressum, id ossis figurae in Montii tabula expressi contrarium esse; et parum licet inter se in dentibus molaribus Rosmari describendis consentiant Zoologi; ex iis tamen, quae referunt, satis constare mihi visum est eosdem ab illis fossilibus, de quo loquimur, multum differre. Quare Fortis dubium visum est mihi fundamento non destitutum. Pulchras quoque Rosmari, quas nobis reliquit Daubenton, figuras inspexi, dubiumque super allatum gravem induxit probabilitatem. Nihil aliud erat mihi magis optandum, quam accuratam fossilis a Montio descripti cum Rosmari calvaria, aut cum ejusdem dumtaxat exemplari comparationem posse instituire. At quamdam in Musaeo Divi Alexandri Mediolani me vidisse commemini. Hinc clarissimi P. Ermenegildum Pinium rogavi, ut accuratissimum illius exemplar mihi exprimendum curaret. Ipse vero cum anno 1805 ad generalem Italici Instituti conventum Bononiae habitum se contulisset, calvariam ipsam ad me omni comitate afferre maluit. Quam ubi diligenter quoquo versu perspexissem, judicavi non modo a fossili nostro differre, verum quidpiam in eo simile difficillime posse reperiri. Et sane, ubi quisquam haec eadem Montio suppeditasset, dum fossile, quod illustrandum sibi proposuerat, expendebat, sic persuasum habeo, vel ipsam suspicionem Rosmari illud esse, ob sincerissimum suum veritatis amorem, illum fuisse remoturum; sique vivente Montio typis edita esset Rhinocerotis Osteologia, de qua multis post annis perdocte scripserunt Pallas, Camper et

Georgius Cuvierius, nullum mihi est dubium, quin Montius ipse fuisset facile agniturus, os fossile Blancani montis ad animal generis *Rhinocerotis* pertinuisse. Ut autem oculos conieci in figuras calvariarum *Rhinocerotum* Indorum unicornium, unicornis Javæ, atque bicornis Taprobanae a Cuvierio nobis exhibiti (Ann. du Mus. tom. 7. tab. 2.) fossilis nostri statim subiit figura, jamque tum mihi visus sum haud parum reperire similitudinis cum inferiori horum *Rhinocerotum* maxilla. Hinc peculiarem proposui comparationem instituere.

Anterior nostri fossilis pars, ut jam tradidit Montius, ad cuneum figura accedit: superius quidem species canalis inerat, qui adhuc marga neracea, ac valde obdurata est refertus. Illius anterior extremitas rectilinea est duobus parisiorum pollicibus oblonga. Fere rectilineae sunt pariter laterales extremitates, quae parum inter se distantiores fiunt, ubi pars eadem cuneiformis in duos partitur ramos, curvamque vix apertam exhibet. Ambo, ut diximus, perfracti sunt rami. Maxima inter reliquas partes distantia est duorum pollicum circa. Lateralis hujus ossis longitudo ab uno angulo lateris anterioris usque ad fracturæ locum est fere pollicum octo. Ossi altitudo per gradus augetur a latere anteriori usque ad fracturam: prope hanc est trium pollicum, dentibus non computatis.

Ex quibus omnibus characteribus patet fossilem maxillam plurimum differre ab illa *Rhinocerotis* bicornis Africi, illaque potius similem esse aliorum trium *Rhinocerotum* viventium, quos nuper indicavimus. At dentium configurationem Cuvierius vult maxime considerandam esse. Dentes tres sunt, omnesque molares, qui in hac fossili maxilla reliqui sunt. In dextero ejusdem ramo unus adest ruptus, ac veluti in posteriori parte perfractus: unus integer in sinistro, et alter oblique fractus in parte posteriori. Postremus hic unico respondit altero in ramo superstiti. Longitudo integri unius est pollicis, et duarum linearum; latitudo maxima decem linearum est, ac manifesto tertior apparet sequenti, qui procul dubio erat major. Liquido etiam constat molares superstites non priores ejusdem maxillae fuisse, cum non dubia ante eos vestigia appareant alterius molaris illis quidem minoris, qui supersunt;

tantumque in dextero ramo vacui spatii existat, ut duo alii saltem ante illum, qui modo conspicitur, adesse potuerint. In lateribus partis cuneiformis non valui reperire indicia, quae vel ipsam suspicionem possent inducere, dentes illis fuisse insertos. Quod autem ad anteriorem spectat extremitatem, angulosque, quibus terminatur, ambigua ac incerta dentium indicia mihi visa sunt. Porro docet Cuvierius in Rhinocerotibus molares inferiores ad basem fere quadrangulos esse, duas super eam prominentias, quas vocat colliculos, elevari, quae ad extremitates costam exhibent acutam, atque in arcum reflexam; extremo ex duobus arcibus retro unum plusquam alium adstare, cavumque amborum ad interiorem maxillae partem nonnihil oblique deflecti.

Extremitates acutae conteruntur usu, earumque loco duo in arcum exsurgunt tegumenta, quarum extremitates vitrea crusta unice tectae conspiciuntur: duo tandem tegumenta in unum coeunt ad curvaturam duplicem satis latam, cum colliculorum partes, quae sese tangebant, mutuo conteri incipiant. Clariss. Zoologus gallus figuras nobis expressit, quae molares dentes variis in statibus descriptos exhibent. Porro tertia, et septima figura Tab. 3. (Ann. du Mus. tom. 7) quae inferiores molares ostendunt in statu extremo, nos dubitare non sinunt, quin Rhinoceros, ad quem fossile nostrum spectavit, hujusmodi dentes habuerit valde attritos. Quod si Cuvierius allatis characteribus tantam contendit inesse vim, ut ubi fossiles molares exsecti, dispersique iisdem praediti reperiantur, illos statim ad iudicet Rhinoceroti, majori quidem jure hujusce generis animalis adscribenda mihi fuit maxilla Musaei nostri, in qua dentium similitudini aliarum ejusdem partium, ut vidimus, similitudo conjungitur.

Dum Cuvierius suam texebat dissertationem de Rhinocerotum Osteologia cum viventium, tum fossilium in Annalibus Musaei historiae naturalis Parisiorum insertam: sibi persuasum esse ostendit, calvarias fossiles jam tum cognitae omnes ad eandem spectare speciem, perque plurimos necessarios characteres hanc a viventibus speciebus differre. Ex quibus fossilium calvariarum characteribus unus consistit in conjunctione ossium ad nasum spectantium cum incisoribus, quam post con-

junctionem osseum sectum inest, quod posterius protrahitur, vomerique conjungitur. Cuvierius autem, licet aperte negaret certa sibi deesse argumenta defectus incisorum in specie fossili, quasi auderem tamen dicere, inquit, superiorem dumtaxat maxillam iisdem carere. Alios vero maxillae inferioris, si qui erant, minimos censuit, ac dubium aliquod sibi esse significavit de veritate acquisitionis a Pallas factae, qui scripsit reperiisse oblitterata vestigia quatuor alveorum in anteriori extremitate maxillae inferioris calvariae secus flumen Tschikoi. Sibiriae effossae. At vero ex figura, quam calvariae hujusce Pallas nobis exhibuit (Acta Acad. Petrop. tom. 1. tab. XI.) atque ex figuris 1.^a et 3.^a tom. 3. dissertationis Cuvierii nuper commemoratae, probe novimus, priores maxillae inferioris molares notabiliter distare ab ejusdem maxillae apice, ac notabile proinde in lateribus spatium absque dentibus reperiri. Per hunc characterem portio maxillae ad Blancanum Montem effossae, similis est, licet non omnino, inferiori calvariae repertae secus flumen Tschikoi. In hoc vero caractere satis esse argumenti non censui, ut rhinocerotes, ad quos haec pertinerunt ossa, speciei ejusdem fuisse indubitanter dicatur. Nonne, ajebam ipse, hi duo Rhinocerotes in extremis inferioris maxillae partibus consimiles adeo cetero corpore differre inter se poterant, ut ad speciem omnino diversam spectarent? Verum ubi animadverti in inferiori maxilla trium rhinocerotum viventium, unicornis nempe indiarum, unicornis Javae, bicornisque Taprobanae inter priores molares, atque incisores notabile absque dentibus adesse spatium, existimavi hinc unum characterem eo magis speciei determinandae insufficientem existere. Cumque nullum alium detegere possem characterem vere specificum in fragmento maxillae perpendendo, de quo hic loquimur, sufficere mihi putavi genus mammiferi, ad quod spectavit, ostendisse; omnemque ulterius progrediendi spem ipse deposui. Paulo post hasce meas acquisitiones protuli in sermone habito, cum adolescentes Medicinae, et Chirurgiae laurea publice donarentur. Cum vero nihil ad me relatum esset de dissertatione de Mastodontibus, quam Dn. Georgius Cuvierius inseruerat in Tom. 8. Ann. Mus. historiae naturalis Parisiorum, ignorabam illum de maxilla a

Montio edita in dissertatione loquutum esse atque a mea de eadem sententia ipsum dissentire. Ut autem legere illam potui, hic mihi occurrit articulus « Montii figura vix inspecta, « apparet statim inferiorem eam maxillam exhibere. Duo rami « in posteriori parte fracti sunt, multoque crassiores erant; « parum quod adspicitur, foramen molaris canalis est. Duo « interius rami in oblongum junguntur apicem, qui videtur « tur dentibus omnino caruisse. In quovis maxillae latere unus « extat molaris oblongus, pressus, omnesque illius partes « prominentes adeo attritae sunt, ut nihil aliud cerni possit, « quam discus oblongus materiei osseae a vitreae crustae fascia « circumdatus. Si, uti probabile est, inquit Cuvierius, « anterior pars erat dentibus desituta, haec inferior maxilla « non nisi ad Mastodontem spectare censendum est. Caeterum « nullius adhuc cogniti animalis esse potuit: nullum quippe « est, quod omnes complectatur characteres, qui in hac fossili « maxilla reperiuntur, ut crassitudo, ramorum rotunditas, « dentium longitudo, atque anterius acumen ». Hinc Cuvierius « comparisonem instituit inter notabile fragmentum maxillae « inferioris Mastodontis a Dombey in Peruvia repertum, et « fragmentum maxillae a Montio editum, et notabilia inter haec « discrimina perspexisse confirmat. Siquidem peripheria rami « maxillae Musaei nostri, teste Montio, est pollicum octo: in « maxilla vero Peruviae, pars, cui primus molaris insertus est, « sex pollicum peripheriam habet. Praeterea maxilla Musaei « nostri habet anteriorem partem, quam Cuvierius rostrum vocat, « longiorem alia maxilla Mastodontis Peruviae. « Hoc est, con- « cludit Cuvierius, quod de maxilla a Montio edita licet ju- « dicium ferri, si ex forma male expressa sit judicandum.»

Argumenta nuper exposita, quibus celeberrimus Zoologus usus est, ut comprobaret maxillam fossilem montis Blancani aut ad Mastodontem, aut ad alium adhuc ignotum animal spectare, parvi admodum ponderis mihi visa sunt. Quod attinet ad figuras, quibus Montii opusculum exornatur, non ego dicam accuratissimas, omnique debita diligentia expressas, at nullam tamen ex iisdem censeo rationem posse erui, qua maxilla fossilis montis Blancani aut Mastodonti, aut alio adhuc ignoto mamifero tribuenda sit. Praeter totam fere inferiorem su-

perficiem, ac molarium coronam, reliqua extraneis teguntur substantiis. Quapropter si parvi extitissent incisores; aut saltem eorum alveoli, cerni nullo modo possent. Nullis ergo rationibus ductus asserit Cuvierius, anteriorem partem sine dentibus probabiliter fuisse. Ex inspectione vero inferioris superfici, quae in Montii figura fere tota conspicitur, nihil quidem apparet, cur in rostrum illam terminare judicemus. Cuvierii igitur suppositio fundamento omnino destituta est. Sed superficies inepte expressa coronae osseae molarium attritae nimis in figura Montii, nec non vitreae crustae fascia, qua ipsa praecingitur, satis evincunt, dubium quidem esse, utrum unus tantum in quovis ramo molaris extiterit, an in sinistro saltem alterius fragmentum adhuc inesset. Ergo Cuvierius cum statuit unum solummodo quovis in ramo reliquum esse molarem oblongum ac valde pressum, illius immemor videtur, quod jam antea animadvertendum docuerat; tales nempe figuras Montii extare, ut in determinandis fossilis quod exhibent characteribus omnis sit cura adhibenda. Cumque ab examinatione ejusdem fossilis expediti magna ex parte a substantiis extraneis, quae illum tegebant, in animum induxissem meum anteriorem partem haud terminare in modum rostri, atque in sinistro ramo vestigia inesse duorum molarium, hinc inferendum censui, portionem maxillae fossilis ad montem Blancanum repertam haud pertinere ad Mastodontem; et cum ratio sufficiens sit ut Rhinocerotis habeatur, animal cujus fuit pars, generi adhuc ignoto minime adscribendum esse.

Anno 1810 Dn. G. Cuvierius Bononiam se contulit, maxillam a Montio editam inspexit, meamque de animalis genere ad quod pertinuit, sententiam probavit. Anno sequenti Lutetiam Parisiorum profectus ipse Cuvierio dono attuli accuratum fossilis nostri exemplar. Hoc usus est in 2. editione exiti operis sui de ossibus fossilibus, quod exprimendum curavit ad tertium magnitudinis in fig. 10. tab. 9. de ossibus fossilibus Rhinocerotum. Nescio autem cur sculptor qui effingendum eo pacto suscepit, molarium illius coronam parum admodum attritam expressit. Haec Cuvierii figura habetur in fig. 4. tab. 1. dissertationis Christol de characteribus magnarum specierum Rhinocerotum fossilium insertae Tomo 4. al-

terius seriei Ann. Scientiarum naturalium edito An. 1835. In hoc ineleganti exemplari molarium corona non modo cernitur parum attrita, verum etiam in quovis maxillae ramo molares duo imperite inter se similes exprimuntur.

Cuvierius Tomo 2. Alterius editionis exquisitionum suarum de ossibus fossilibus pag. 74, ubi loquitur de maxilla a Montio edita fatetur utique se in errorem delapsam, cum illam Mastodontis, aut alterius adhuc ignoti generis iudicaverit; verum sui erroris culpam Montii adscribit figurae, meque detegisse confirmat, fossile hoc, quod celebre appellavit, maxillae inferioris rhinocerotis partem fuisse. Addit autem speciem eandem esse procul dubio, quam ipse vocaverat Rhin. Tichorhinum, idest ad sectum narium osseum, atque concludit, inventum hoc magni momenti esse, cum aperte demonstrat duas olim in Italia vixisse praecipuas fossiles species, nempe Rhin. tichorhinum et leptorhinum, cujus ossa quam saepissime effodiuntur in Hetruria.

Quam incuriose Huot haec Cuvierii verba perpenderet, patebit vobis, Acc. praestantissimi, ex iis quae attulit in articulo *Ossemens fossiles* Tom. 7. Lexicon Geographiae physicae, quod spectat ad Enciclop. methodicam, editum An. 1828. Postquam disseruit de Ossibus Rhinocerotis Valdarni, subjungit; » reperta quoque sunt ossa fossilia rhinocerotis citra Apeninos: cujusmodi est inferior maxilla, quae effossa est An. 1719. ab Ab. Ranzani in arena, cui immiscebantur conchylia maritima ad Montem Blancanum etc.

Praeter hasce duas fossiles species, duas alias induxit Cuvierius, idest Rhinocerotem incisivum, sic vocatum, quod satis magnos, et oblongos incisores habeat, et rhinocerotem minutum, incisoribus quidem praeditum, ast multo corporis magnitudine prioribus inferiorem. Cuicumque verba Christol nuper allata consideranti, liquido apparebit, Cuvierium in hujusmodi speciebus determinandis haud raro infirmis admodum argumentis innixum fuisse.

Christol opus Cuvierii mendis expurgandum curavit, quoad species magnas fossiles generis rhinocerotis. Speciem excludit, quam *Rhin. leptorhinum* vocavit, adscribitque portionem ossium fossilium, quae eidem tribuebantur in *Rhin. tichorhino*,

definitionem a Cuvierio allatam notabiliter immutans. Altera istorum ossium pars, et praecipuae Hetruriae, diversae speciei dubitanter attribuit. Delet etiam Christol a catalogo specierum fossilium rhinocerotis *Rhin. incisivum* Cuvierii; asseritque incisores passim repertos, atque alia fossilia ossa adscripta speciei huic inepte, ut ait, constitutae, Rh. tichorhini esse posse. Quod vero spectat ad calvariam ad Eppelsreim in magno Assiae Ducato effossam a Schleyermacher probabiliter illam speciei tribuit, quam vocat *Rhin. megarhinum*, quaeque complectitur calvariam ad Montpellier repertam, in qua nasi ossa pergrandia sunt, atque ab incisoribus divisa, neque ullum exhibent sectum, quod cum vomere illa jungat. Christol memoria multis exornata est figuris, inter quas illa adest calvariae Montpellier, maxillaeque inferioris integrae, quae penes eum est, cujus in extremitate quatuor alveoli conspiciuntur, atque in altero ex illis pars aliqua incisoris. Porro pro certo habet maxillam hujusmodi, nec non illam effossam ad flumen Tschikoi, nostramque montis Blancani ejusdem speciei esse, nempe *Rhin. tichorhini*.

Haud mihi proposui Christol memoriam diligenter perpendere, de qua non pauca haberem proferenda. Animadvertam tamen ex figura, quam nobis exhibuit maxillae inferioris ad symphysim perlongam, quae penes eum est, aperte constare, extremitates laterales partis superioris ipsius vix citra priorem molarem sibi invicem accedere intrantem curvam describentes, ac rursus recedere ita ut extrema ejusdem pars veluti spatulae figuram exhibeat.

Porro per hunc characterem maxilla Christol haud parum differt ab illa Blancani Montis, et quoniam, ut supra diximus, non leve discrimen est, nostram inter, et aliam calvariae ad flumen Tschikoi effossae, prorsus omnem deponere suspensionem nequeo, ad diversam illas speciem pertinere. Atque ea hic referam, quae jam viginti ab hinc annis attuli de specie Rhinocerotis, ad quam spectavit maxilla Blancani montis, nihil nempe statui posse quod argumentis satis firmis innitatur.

Aliquis forsam ad finem hujusce meae dissertationis putabat me duas Cuvierii generales assertiones perpensurum de speciebus fossilibus Generis Rhinocerotum; scilicet omnes a viventibus

differre essentialiter, atque specierum fossilium animalia iisdem in locis vitam degisse, ubi, aut prope quidem, reliquia condita reperiuntur.

Verum, Collegae praestantissimi, cum geologicam doctrinam ab hoc eximio Zoologo traditam diligenter, accurateque perpenderit, meamque proximo anno sententiam iudicio vestro me subjecturum confidam; nunc tandem mihi finem sermoni faciendum censeo.

EXPLICATIO TABULARUM

Tabula XI.

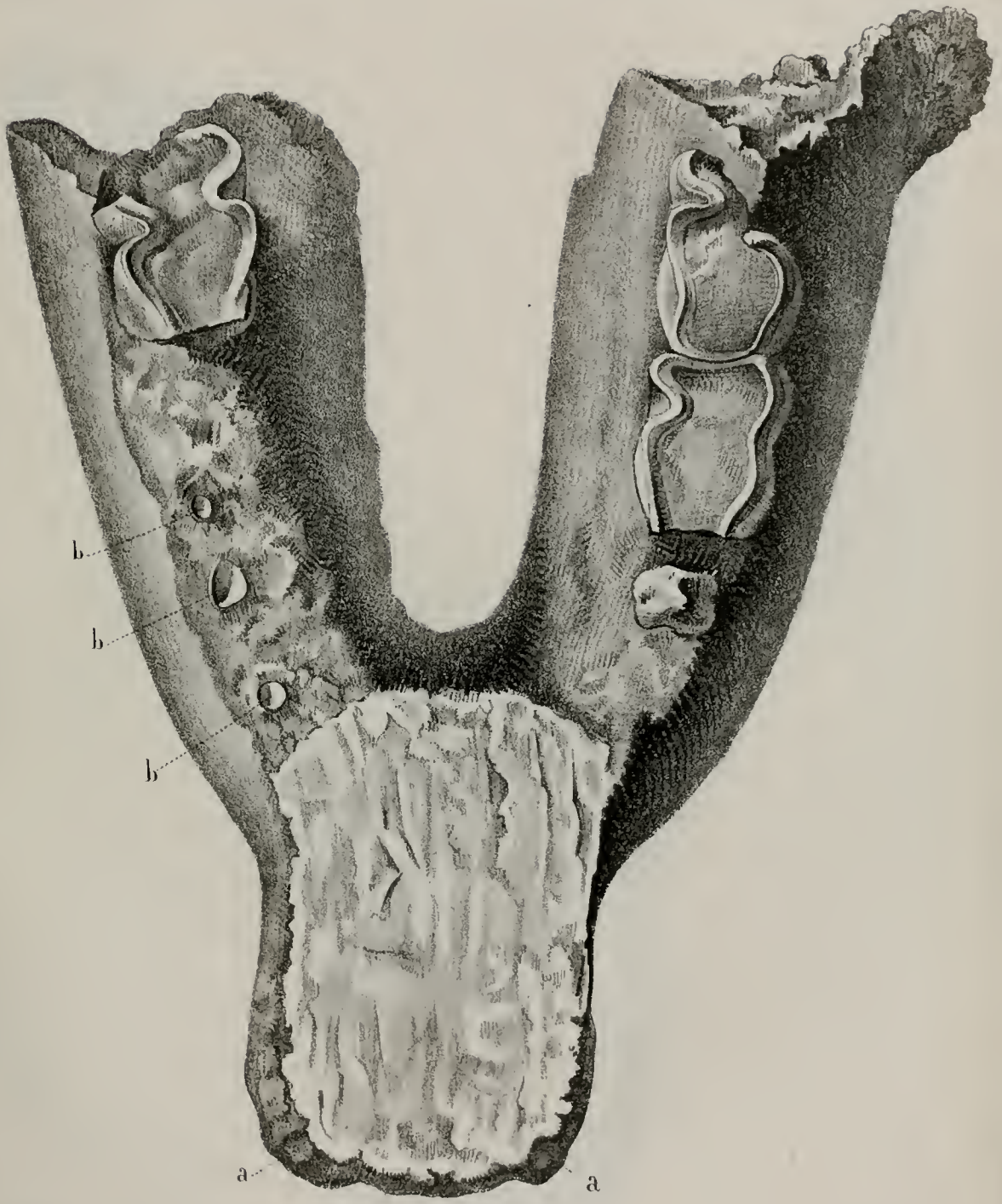
Maxillae a Jos. Monti reperta facies supera.
a. a. Vestigia obscura alveorum dentium incisorum
b. b. b. Fragmenta conchyliorum.

Tabula XII.

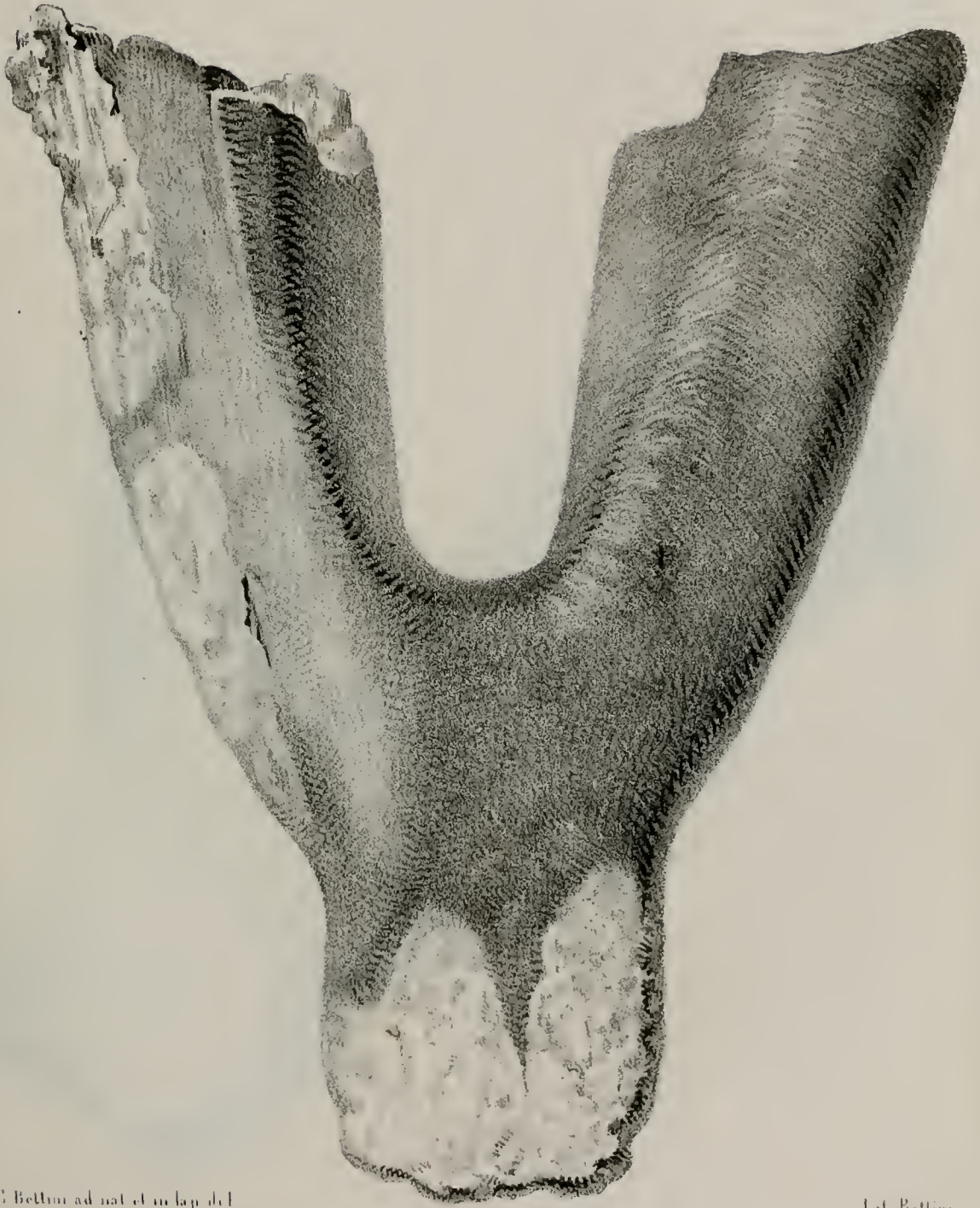
Eadem oblique expressa.

Tabula XIII.

Ejusdem maxillae facies infera.



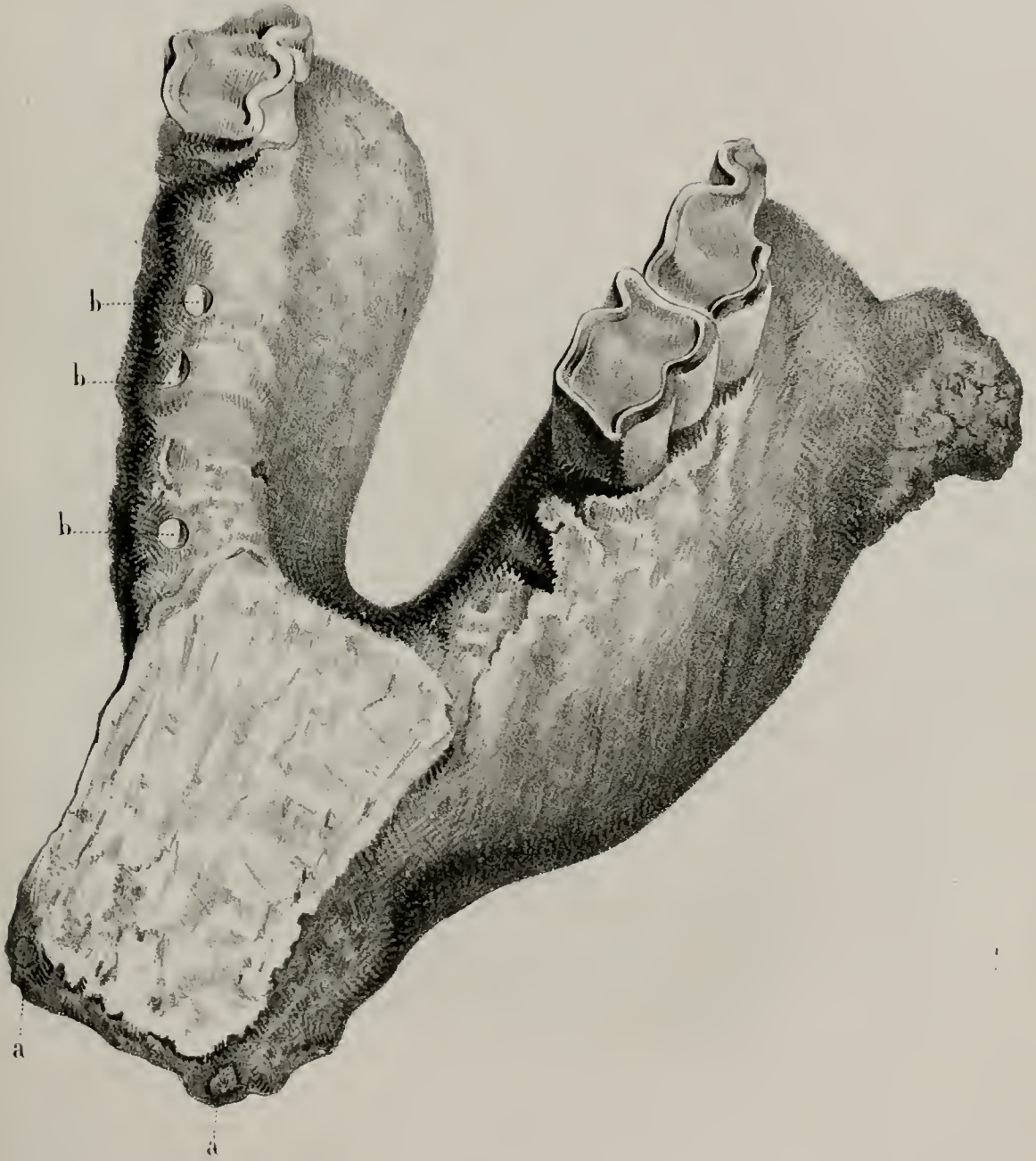




C. Bellini ad nat. et in lap. del.

Lit. Bellini.







CAJETANI SGARZI

SPECIMEN CHIMYCAE ANALYSIS

DE AQUIS POTABILIBUS CIVITATIS BONONIAE.

(Academiae traditum die 9. Aprilis 1840)

Gentes cognationesque hominum, qui primum variis co-
iere societatibus, ea quidem loca domicilio sibi deligebant,
ubi praesertim esset aquarum copia, vel saltem fontes salu-
bres; noverant quippe hoc, tum ad vitae commoditatem, tum
maxime ad valetudinem tuendam conducere. At posterius hu-
manum genus, multis de caussis prope orbem terrarum per-
vagatum, in regionibus longe diversis consedit; ejusque fami-
liae, separatim a reliquis consilio sibi capto, loca quae inco-
lerent saepius eligerunt prout eas sollicitaret eorundem loco-
rum opportunitas, sive ad exercendas artes, sive ad hostium
vim propulsandam, sive etiam ad faciendam mercaturam: ma-
jores itaque nostri multoties vicos et oppida posuere, arces-
ve moliti sunt, aut magnas quoque urbes condidère vel in il-
lis regionibus, per quas nullus fluebat annis, qui terram al-
lueret atque foecundaret, seu tandem ubi terra non semper
bonarum aquarum venis scatebat fontibusque abundabat. In-
terdum accidit etiam, ut queis initio natale solum bonas lar-
giebatur aquas, isti postea tali beneficio destituerentur; quia
immutatis terrae stratis, unde in ejus interiora humores per-
meant, hi quoque turbati essent, aut profluentibus aquis quo-
quoversus deductis ad agrorum et artium utilitatem, ipsae sae-
pe in salubres evaderent propter variarum materierum admix-
tionem, vel minus aptae fierent domesticis usibus.

Qamobrem Chemia pneumatica ut primum theoriam sub-

ruerit Stahlianam, eamque exceperint doctrinae a celeberrimo *Lavoisier* traditae, et simul ac *Boyle*, *Duclos*, *Black*, *Bergmann* alique lucubrationibus novis aquarum naturam dilucidavère, Chymici illico postulati sunt de analysi et inquisitione illarum, quas vocant dulces et potabiles, quaeque apud homines in usus tam varios et multiplices veniunt. Quod si ab experimentis et doctrinis Chymicorum non singula quaeque de varietate aquarum, quae diversis et iisdem quoque scaturiunt locis, cognita nobis fuerunt, ea omnia saltem didicimus quae nosse de praecipuis earundem proprietatibus necessum erat: verum hac super re *Hippocrates*, *Celsus*, et *Plinius*, deinde *Gerardus Cremonensis*, *Simon Ligusticus*, *Tarentinus Valasta* et *Guainerius Papiensis* propria ingenii vi atque experientia deprehenderant jam multa, scriptisque mandaverant. Horum igitur praeceptis adjutus, et maxime Chemia recentiorum administra, quilibet nunc facile dignoscere potest inter aquarum varietates quaenam sibi magis accomodata sit; ac quod ad opera quaedam praesertim attinet, non omnis artifex nunc astringitur necessitate aquae prius experiundae magno saepe cum periculo atque impensae jactura facta, sed satis illi est chymicam analysim consulere, qua ipse plane edocetur, ubinam bonitatis aquarum caussa debeat opificinam suam constituere, aut quonam pacto earundem vitis mederi atque occurrere oporteat.

Jam vero, si aquas dulces et potabiles praenosceret eorum interest, qui sedem ac domicilium suum, prout lubet, sibi eligere possunt, hoc magis illorum interesse putamus, qui datam regionem aut locum quemdam incolere debeant, sicuti praesertim sunt cives maritimarum aliarumque urbium, in quibus ponendis conditores (ut supra monuimus) saepe saepius rationem habuere opportunitatis mercaturae, navigationis, et caeterarum rerum potius quam agrorum ubertatis vel amoenitatis, humorum copiae, ac similium. Quapropter analysis aquarum, quae ad incolarum usum vel a fontibus manant vel per annes defluunt, quanti momenti sit quisque videt, nec multis verbis et argumentis opus est ut ejusdem necessitas demonstretur, cum id satis clare per se pateat ab exemplis tum apud nos tum apud exteros editis.

Neminem autem praeterit, in civitatibus bene constitutis (jam ab ultima antiquitate, et nostra etiam memoria) gubernatores, qui commodo atque utilitati civium studiosè prospiciebant, curam aquarum maximam egisse; unde tot exstant aquaeductus et fontes, insignia patriae liberalitatis et beneficentiae monumenta, quae dein cives laudibus et digna grati animi significatione merito prosequuntur: neque vero hujusmodi monumenta Bononiae nostrae desunt, quippe quae bonis institutis, artibus, litteris, aliisque rebus civitates magnas semper aemulata est. Sed si illi nihil abest quod ad copiam publicorum et privatorum fontium, horum tamen conditio quod ad naturam aquarum neque optime est, neque adhuc habetur earumdem explorata cognitio, quam nemini (prout ego quidem novi) curae fuit ab experientia atque analysi directe expiscari, quum plerique aquas nostras vel solummodo praegustando, vel quoquo modo inepte experiundo, earum alias censuerint bonas, alias mediocres, alias pessimas.

Haec dum proloquor, quaeso ne quis putet me talia animadvertere, quasi velim ea cuipiam exprobrare, patriaeque meae vitio vertere. Scio equidem istam de aquis nostris investigationem rem esse parvi negotii, quam quidem multi antea adhorti fuissent, dummodo vel curae aliae graviores eisdem non impendissent, vel eorum aliquis id ipsum omnino necessarium reputasset. Mihi porro visum est haud inutile fore civibus nostris clare ac distincte demonstrare quae natura sit aquis fluvialibus, fontanis, et putealibus, quas nos quotidie adhibemus, scilicet ut iisdem recte et scienter utamur, neve decipiamur, tum cum aquam quamdam existimamus bonam, quod ipsa nobis videtur levis, dulcis, et ad concoquendam facilis, aliam vero judicamus ineptam prorsus et crudam, quia saponem non dissolvit, vel legumina non elixat, dum haec reapse variis usibus apta est, illa autem neque stomacho accomodata neque artibus aliisque rebus idonea admodum est habenda. Accedit quod aquas nonnullas, quibus aliquid vitii inesse conijcitur abs levi et vulgari experiundi modo, vel tales prorsus non esse, vel facili negotio meliorandas deprehenderemus, quoties per analysim chymicam in eas recte inquireremus; alias autem, quae nunc inutiles fluunt, nec cuiquam emolumento sunt, in civium

commodum et in publicam utilitatem, ut par est, derivare fortasse possemus, statim atque earundem naturam et usus seculo expiscati essemus.

Quamobrem jam ex illo tempore, cum tractatui de Chemia ad artes accomodata operam dabamus una cum clarissimo *Orioli*, perutile duximus, aquas hujusce nostrae civitatis tentare, atque experiri; itaque fecimus, eisque per *Reagentia* tantummodo probatis, vulgarem opinionem de nonnullis deprehendimus veritati consonam, sed quod ad alias fallacem recognovimus, ac praesertim de aqua quadam vulgo inter optimas habita. Nobis igitur illud magis persuasum fuit, quod in animum induxeramus, nempe analysim aquarum omnium accuratam instituere oportere, ut demum ejusmodi incommodis occurrere et propriae utilitati prospicere cives nostri possent. Contigit autem ut opus hoc, quod continuo fueramus aggressi, variis de causis vix inchoatum desinere debuerimus; neque illud nunc egomet denuo suscepissem, nisi me occasione data incessisset cupido deferendi vobis, Sodales praestantissimi, quidquid possem ad rem hanc conficiendam, utpote quae attentione vestra prorsus digna, et civibus nostris commoda ac necessaria videbatur. Nihil est porro omnibus tam utile atque opportunum, quam varias dignoscere qualitates aquarum, quas nos ad familiares et oeconomicos usus quotidie adhibemus; expedit singulis videre an illae vel istae potius bono, utilitati, suoapte commodo conducant; doctis indoctisque confert quaerere, quonam pacto vel minus optimae vel insalubres aquae fieri possint meliores. Quapropter spero vos, Academici humanissimi, accepturos esse ea, qua consuevistis, benignitate opellam hanc meam, qualiscumque sit; etenim licet eandem pro virili parte elaboraverim, sentio tamen mancam fore atque imperfectam, ideoque *Speciminis* titulo rectius inscribendam.

Jacet Bononia sub ipsis radicibus collium cum Apennini jugis continentium, ac credi potest eam solo insistere ejus simili, quo colles iidem potissime constant, idest *marnoso-coeruleo conchyliifero*. Quum autem haud raro per *Marnam coeruleam* — horum clivorum prodeat *Argila salifera* ut in montibus *Paderno*, *Veglio*, etc.; seu Gypsum ut in monte *Do-*

nato; vel *Petra Molasse* ut in colle *S. Victoris* etc.; ita verisimile est, alicubi materiabus istis (Argila nempe salifera, Gypso, aut *Petra Molasse*) fundamenta civitatis nostrae fulciri. Sed illud proprius fides est, ejusdem solum pene totum conflare ex hisce marnis coeruleis (quippe quae saepe numero Apennini basim praecingunt), at forsitan humo ex alluvione tellureque detrito obvolutis. Geologi quidem nostri sic opinantur, et mox videbimus, hujusmodi opinione ea roborari, quae ab experimentis meis ipse collegi, simulque illi multum ponderis accedere ex iis, quae mihi de qualitate aquarum nostrarum chymica patefecit analysis. Ego vero disquisitionem hanc ita prosequar, ut ipsa argumenti ratio postulare videtur; primo nempe de aquis *fluvialibus*, dein de *fontanis*, et postremo de *putealibus* verba faciam; ac de his quidem paullo amplius dicam.

Amnes *Rhenum* et *Savena*, nec non torrens *Apoxa*, soli sunt aquarum cursus, qui sive directe sive per canales manufactos Bononiam interfluunt. Horum primus suam ducit originem (1) in Pistorii provincia ab oppido, quod vocant *La Prunetta*; ex quo fit ut ille usque ad pontem, vulgo *delle Piastre*, qui est in itinere ad Mutinam, nuncupetur *Fosso della Prunetta*. Iste jam hic Rheni nomine notatur, et per regionem Hetruriae ab sua origine millibus passuum sex citatus fertur, finesque Bononiensis agri attingit prope locum, quem appellant *Vizzero di Granaglione*; spatio itidem millium passuum sex ejus alveus Bononiense solum ab Hetruria dividit, neque provinciam nostram prorsus ingreditur nisi ad villicationem a mapaliis dictam in situ, quem vocant *la Castellina*. Hoc in itinere ac in reliquo ejus decursu amnes alii, multique amniculi in eundem influunt. Ipse enim paullum infra notissimum pagum, qui *Porretta* dicitur, sinistrorsum recipit fluentum *Sela*, quod ex Cornu a Scalas nuncupato defluit, et ad dexteram ripam prope ab vico *Vimignano* excipit torrentem

(1) Videsis Operam, cui titulus = *Brevi Cenni relativi all' origine ed al corso del Reno ec.* = in parte prima pag. 109. Collectionis legum, praescriptionum etc., in usum Procuratorum Canalis Rheni, editae curante Doctore Emydio Mezzini.

Rementiam sive *Limentriam*, qui oritur a *Fossa Rigoli*, et adaugetur per aquas defluas a convalle *Pian del Toro*, ponti *Alberaccio* proxima, nec non per eas rivi eodem nomine profluentis ex convalle *Scolonica* in Commune *Sambuca*, e quibus torrens idem conflatur atque ita irrumpit in provinciam Bononiensem per agrum Communis *Bargi* infra *Stagno et Chiaporato*. Sela autem fines constituit Communibus *Belvedere*, *Gaggio*, et *Porretta*, quod a dextera ipsius Selae est. Ab Sela ad *Limentriam*, Rhenum dividit *Gaggio* et *Vergato* a Communibus *Casio*, *Casola*, et *Tavernola*; sed *Vergato* portionem tenet dexteræ ripae ejusdem Rheni usque ad *Rio-Secco* et partem aliam ad *Rio-Volpara*. Rhenum deinde ultra villam *Salvan* progreditur in Commune *Caprara* supra *Panico*, totamque ejus longitudinem secat usque ad Commune *Sasso* trans pontes, quos vocant *della Loggiola*: hinc ad confluentem *Settae* idem Rhenum terminos ponit inter Communia *Sasso* et *Caprara*.

Ex monte *Casciajo* profluit *Setta*, cui fluminis potius quam torrentis nomen inditur, et praeruptis viis inter vastissima abietum nemora villae montis *Piano* labens, Bononiensem agrum attingit eumque ingreditur ad septentriones, et Commune *Castiglione* praeter fluens, ea subinde alluit, quae vulgo appellantur *Piano*, *Tavernola*, *Caprara* supra *Panico*, et *Sasso*, ubi in Rhenum influit intra montem *Sirano* sive *Bago* et montem *Battedizzo*, qui etiam mons *Marius* cognominatur. Rhenum hinc media secat Comuniā *Praduro* et *Sasso* usque ad finitimos campos *Vezzano* inferioris, itemque Commune *Casalecchio* interfluit, unde volvens se inter fines Communium *Bononiae* et *Praduro* progreditur ad illud *Tojano* appellatum, ac dein subluit iterum campos Bononienses nec non defluit per eos Burgi *Panigale*, *Calderara*, *Casal-Maggiore*, *Sala*, *Argeloto*, *Argile*, et *S. Joannis in Persiceto*, ac tandem in agros *Centenses* irrumpit, posteaquam ab ejus ripa laeva receperit aquas torrentis *Samoggia* a *Lavino* jam adaucti.

Quod ad reliquum Rheni cursum pertinet brevi expediam, addens ipsum, cum jam intersecuerit partem agri *Centensis*, rursus ingredi in provinciam *Bononiae* paullo infra locum,

quem vocant *Retta-Panfilia*, ubi cursum suum pristinum deserens convertit se in orientem solem, deflectit ab agro Bononiensi, cui *S. Augustini* nomen est, cum *Galliera* praeterfluit, seque evolvens inter fines Communium *Poggio Renatico* et *Malalbergo*, dein parte quadam arvi *Baricella* sinistrorsum intercisa, rursus provinciam Ferrariae pervadit ad confinia *Molinella*, unde truncum suum postremum *Cavo-Spina* convertit in agrum Bononiensem, et sub fine hujus trunci terminos ponit territoriis Ferrariae et Bononiae. Idem denique ad orientem solem usque vergens, ubi appropinqua-verit Mari Adriatico, in quod influit, inter confinia provinciarum Ferrariae et Ravennae effunditur per alveum, qui *Primaro* nuncupatur.

Horum autem omnium, quae de Rheno flumine jam dicta sunt vel dici possent, ea solummodo ad rem nostram faciunt, quae pertinent ad illius aquas corrivatas per ductum, cui nomen Canalis Rheni inditur. Hic ex auctoritate *Patris Lecchi*, *Ghirardacci*, *Masinae* et *Vizzani*, jam inde ab ejus initio ideo extractus fuit, ut moletrinis motum suppeditaret, ac deinceps ita effusus est, ut rates, scaphas, aliasque fluviailes naviculas devehere posset ad mercaturam faciendam inter Bononiam et Ferrariam, a qua per Padum usque ad mare commode navigatur. Anno 1191. Bononienses cives multi, qui inde *Ramisani* fuerunt dicti, pecunia collata decursum Rheno intercludi curarunt aggere, qui vulgo *Chinsa di Casalecchio* appellatur: hinc Canalis Rheni profluit, qui ab initio solus sublebat civitatem nostram, idest unico fluens alveo in eam ingrediebatur per vicum *Pratello* ante Portam vetustam, quam nunc appellant *Torresotto* S. Francisci, deinde per vicum *Galliera*, per parvam plateam S. Bartolomaei, perque viam *Avesella* (eo ipso loco, quo nunc cursum suum pergit torrens *Apoxa*) demum in alveum antiquae *Savenae* influebat.

Post annum 1208 agger ille a Communi Bononiensi longe lateque adauctus fuit, subinde a Senatu (vertente anno 1321) opere lateritio et calce firmato refactus, et auspicio providentiaque Antistitum *Bertrando* ac *Albornozio* ad eam, qua nunc est conditione, anno 1360 perductus fuit; ita ut Canalis ipse in Civitatem immissus per eundem ductum, quo

hodie pergit, nempe per locum *La Grada* nuncupatum, et majori aquarum copia praeditus, distrahi potuerit brevi spatio post in duos alveos, quorum unus ad *Cavadizzo* affluebat et a Communi Bononiensi possidebatur, alter (quem *Ramisani* tenebant) progrediebatur per *Avesella*, ambo vero moletrinis praesertim, aliisque machinis motum inferebant, nec non propter aquas ab ipsis derivatas ad irrigandos hortos, latrinasque abluendas, sive ob illas in eosdem defluentes ab inciliis, aquariis, ac similibus, civibus hic accolis emolumento erant. Cum autem, moletrinis illis eversis, paullo infra conditae fuerunt istae, quas nunc habemus in *Campo del Mercato*, tum (alveo Canalis ad *Avesella* in alium curso deflexo) is effossus est, qui hodie *Canalis a Moletrinis* nomen obtinet, unde collatae aquae extra urbem effluunt inter portas *Mascarella* et *Galliera*, eodem coeunt in torrentem *Apoxam*, atque ita consociatae influunt in Canalem *Naviglio* extra Portam *Lamme* ad locum, qui appellatur *La Bova*.

Hisce de caussis alveus *Canalis Cavadizzo* nil aliud fuit, quam foveica et deductorium aquarum in illum defluentium ab ante dictis derivationibus, qui nunc quidem ad situm, *Porto Navile* appellatum, confluit in Canalem *Naviglio*: hic ipse subinde dilabitur extra urbis moenia, atque, ubi ad locum *La Bova* receperit aquas alterius amnis, citatus fertur per agros *Castri Majoris*, *S. Petri* in *Casale*, *S. Mariae* in *Duno*, et *Malalbergo*, ac demum in flumen *Rhenum*, a quo manavit, effunditur paullo infra locum *Passo del Gallo*.

Ego vero ut hujus *Canalis* aquas experirer (sive supra sive infra urbis moenia, aut intra haec ubi ille vel uno vel pluribus fluit alveis), atque ut earundem qualitates comperire possem, per analysim chemicam primo tentavi eas *Canalis* externi superioris, dein illas ad locum *La Grada* dehaustas, subinde alteras in *Cavadizzo* defluas, ac postremo experimentum sumpsit earum, quae extra civitatem effunduntur per Portum *Naviglio* et per Canalem a *Moletrinis* nuncupatum: neque verbis persequar, quibus methodis chemicae analysis, hanc ad rem usus sim, quosnam deprehenderim characteres physicos harum aquarum, et quaenam fuerit qualitas *Reagentium* eorumque effectus, unde chymicae aquarum pro-

prietatis conjici solent; etenim quod ad analysis methodos, adhibui eas ab odiernis Chymicis commendatissimas, et quod ad reliqua attinet, ne longius a proposito aberrarem, nove eadem vel similia sine utilitate pluries repeterem, satius duxi Vobisque, sodales praestantissimi, gratum et acceptum fore putavi, si ea omnia, quae de aquis istis deque aliis recognoverim, summam et compendiaro collegissem, ac brevi quasi tabella totam illarum seriem amplexus essem. Itaque sequentem exaravi concisam ac ordinatam earundem *Descriptionem*, quam ob oculos vestros pono, et considerantiae judicioque vestro permitto (1).

Si tabulae istiusmodi primiores lineas intueamini, quibus *fluentes aquas* recensentur, manifestum Vobis erit quidpiam singularis et ab eo, quod fieri solet, absonum; unde jam nunc indicium quasi novum eruatis de utilitate chymicae analysis. Etenim apparet hinc, fluminis aquas, se evolventes per campos, sub dio, et per alveos glareosos vel ex puro sabulo, bonas generatim esse ad hominum usus magis accommodatas; eas vero amium, loca inhabitata interfluentium, saepe saepius malas fieri, vitiatas, ac pene inutiles, quippe quae officinas adlambunt et rivulos a foricis aliisque locis defluos recipiunt. Rheni, aquae, optimae quidem eatenus quoad in suo ipso alveo fluunt, ubi per Canalem ante memoratum ductae urbi appropinquavere, jam sunt immutatae, et vix mediocres dici possunt, quia tum sibi adjungunt *HIDROCLORATEM SULPHATEM* et *CARBONATEM CALCIS, SULPHATEM SODAE, CARBONATEM FERRI*, et *SILICEM*, nempe horum omnium grana duo semis in singulis libris; cum autem aquae hae per urbem excurrunt, meliores evadunt, siquidem, si missum facimus aliquantillum organicae materiei, quae ob decursum istum eisdem permiscetur, uti ex analysi illarum ad *Cavadizzo* patet, dimidio fere plus dictorum Salum jam demiserunt; ipsae demum, ubi de civitate effluunt per Portum *Naviglio*, censei inter bonas idcirco possunt, quod ne unum quidem granum eorundem Salum in eis reperitur: neque pars aquarum

(1) Vide *Tabulam analyticiam generalem* etc. in calce hujusce Commentarii.

altera, quae ab urbe recedit per Canalem a Moletrinis nuncupatum, condiciones admodum dissimiles subit, quum haec probe a me tentata, eadem exstiterit atque alia nunc commemorata, at parva sulphatis calcarei quantitate solummodo persatura.

Rhenum igitur suppeditat nobis aquam aliquantum *Seleniticam*, sed varie pro ratione locorum, quae urbem interfluendo alluit, uti fieri solet de aquis in varios amnes diductis, et huc illuc corrivatis; ea scilicet ex mediocri fit deterior, et plus minusve insalubris propter organicas materies, quae diversae in diversis locis eidem immiscentur, vel sigulari quodam modo in melius mutatur, sive ex mediocri fit bona, pro eo ut cursum suum teneus, substantias illas amittit, easque subsidere finit.

Magnam urbis partem subluit Canalis Rheni per derivationes jam descriptas ac per varios amnes, in quos distrahitur sive abs loco, quem vocant *La Grada*, usque ad primam cataractam Moletrinarum, sive sinistrorsum, ubi ille machinis permultis praecipue motum affert, nec non per canaliculos, qui sunt inter vias S. Felice et *Lamme*: horum autem pars maxima confluit in *rivum* vulgo appellatum *Scolo della Carrara*, qui ad Portam *Lamme* bipartito fluit; atque hinc dilabens, in motum impellit machinas hydraulicas Officinae monetalis, aliarumque industriarum, ac demum in Canalem *Naviglio* se effundit, illinc vero in *rivum della Ghisiliera* se exonerat, posteaquam brevi spatio vicinos campos alluerit. Quod si missas quoque faciamus minores alias, sed bene multas, aquarum derivationes, quae per subterraneos ductus quoquo versus deducuntur ad cloacas, ad hortos, ad aquarii receptacula, ad foricas, ad lavacra, et similia, perspicuum erit Canalem Rheni pro civitatis parte ante descripta officium suum de distribuendis et recipiendis aquis probe obire; id quod pro altera urbis regione itidem praestat Canalis ex amne *Savona* profluens.

Annis *Savona* oritur e tribus fontibus in Apennino, vulgo *Le Savonelle* unde illi tale nomen est: profluit ad Septemtriones, moenia Bononiae praeterlambit ad ortum Solis, atque cursu passuum millium quadraginta octo illabitur dextrorsum

in Padum *Primaro* prope a Ferraria. Ita ipse describitur in Lexico geographico, neque hoc amplius de eo dicunt *Ghirardacci* Leander *Alberti*, Ioannes Andrea *Taruffi*, Pius *Fantoni*, et Pompeus *Vizzani*; cui ego istud dumtaxat addendum puto, quod ille anno 1752. a cursu suo non procul a Bononia deflexus fuerit atque in flumen *Idice* effusus. Etenim mihi dicendum est potissimum de Canale, qui jam inde ab anno 1221. per aggerem S. Rufilli derivatus a Savena profluit ad Moletrinam, quam vocant *Di-Frino*, atque hinc in plures annes diductus ad Civitatem decurrit.

Primus ex hisce annibus infert sese in urbem ad Portam S. Stephani, et sinistrorsum praeterfluit usque ad angulum viae *Della Fondazza*, ubi praesertim in duos rivos dividitur; quorum alter aedes subluit ejusdem viae atque ad locum, vulgo *La Magione*, devenit in viam *Strada Maggiore*, alter vero in ipsum primum rivum decurrit, posteaquam vicus *Della Fondazza* sinistrorsum lambent. Ex situ *La Magione* ad viam *Torleone* hi unico manant alveo, cui nomen inditur Canalis *Della Viola*; quique subinde Hortum agrarium secat, abs civitate defluit ad Portam *Mascarella*, atque hinc aductus aquis ductuum insequentium per suburbanos agros illabitur.

Annus alter civitatem ingreditur per aquaeductum Fossae superiori Portae S. Stephani superstructum, atque Ecclesiam S. Iuliani porticumque *Baraccano* subterfluens ad viam *Remorsella* fertur, unde per Hortum S. Cristinae *Della Fondazza* decurrit in Canalem nuper memoratum *Della Viola*.

Tertius annis per ductum, qui Fossam civitatis secat, in Caenobium olim S. Petri Martyris evadit, defertur ad domum quondam *Ghiselli*, nunc *Corneti*, ac demum se effundit in rivum *Fiaccacollo*.

Iamvero Canalis Savenae, a Moletrina *Di Frino* pergens eo, quo coepit, cursu pervenit ad aliam Moletrinam *Ghislardi* pridem, nunc *Malvasiae*, extra Portam *Castiglione* prope ab Ecclesia Misericordiae; idem hinc Civitatem interfluit subter viam *Castiglione*, et in locum devenit, quem appellant *Fiaccacollo*, ubi in duos alveos distrahitur, e quibus sequentes rivi, quartus et quintus, manant.

Quartus rivus, cui proprie *Fiaccacollo* nomen est, defluit ad locum vulgo *Rialto*, domum meam aliasque in via *Cartoleria nuova* subluit, plateam, *Selciata di Strada Maggiore* nuncupatam subtermeat, ac postremo in ductum, quem vocant *Pellacani*, confluit.

Quintus denique rivus locum, appellatum *Torresotto di Strada Castiglione*, subterlabitur, atque hinc in ductus per multos diducitur ad viam *Cartoleria Vecchia*, ad Coenobium S. Luciae, nec non recta pergit ad viam *Castiglione* usque ad Ecclesiam S. Agatae, palatio *Pepoli* proximam. Hoc in loco ejus aquarum pars se ejicit in Apoxam et Forum piscarium abluit; pars altera ad Portam *Ravegnanam* defertur, ac subter Aediculam, Turri *Gariseudi* adstructam, in ductus alios dividitur, qui demum fere omnes influunt in Canalem *Della Viola*.

Ab eodem Canale Savenae per fornicatum deductorium ad memoratam Moletrinam *Ghislardi*, rivus deducitur, qui urbis moenia praeterlambit juxta viam ad Portam S. Mammantis, secat Apoxam, ac paullo infra gemino fluit alveo: horum primos (qui simul sextus est amnis ex Canale Savenae derivatus) civitatem ingreditur per ductum *La Savonella*, et usque ad viam, *Primo-Mirasole* vulgo dictam, defertur, ubi denuo dividitur, hinc inter suum pergens per vicum *Delle Ballotte*, unde influit in Apoxam, illinc vero subterfluens domus contra locum *La Savonella* subluit Coenobium Ordinis Praedicatorum, hortos horum irrigat, effluit in viam *Della Grada*, plateam *Calderini* secat, atque itidem confluit in Apoxam; alveus alter (ex quo fit septimus amnis, qui S. Agnesis ductus nuncupatur) sub Portam S. Mammantis fertur in Civitatem, defluit ad pratum S. Agnesis, subterlabitur viam *Nosadella*, Coenobium olim S. Francisci, nunc Publicanorum Mensam, et vicum *Delle Casse*, ac demum influit in Canalem *Cavadizzo*.

Putant aliqui, sexto et septimo ex modo descriptis amnibus, cursum aliorum ac non ita pridem fuisse, eosdem tunc officium longe diversum obiisse; attamen hac de re constat solummodo, vel nunc exstare ductus, quos vocant *Nosadella*, S. Mammantis, et S. Archangeli, hosce vero aquas a Savena minime deducere. Sed tantum eas a stillicidiis aliisque

locis defluas, quibus latrinas foricasque obluunt ipsi atque expurgant.

Caeterum operae pretium non est singula haec verbis persequi; neque ego aquas omnes per ductus istiusmodi fluentes ad examen revocandos censui: etenim mihi visum est, ad rem nostram satis superque conferre posse, si primo eas *Canalis di Frino* experimento probarem, deinde illas rivi *Fiaccacollo*, propterea quod istae indicio esse poterant caeterarum per similes ductus fluentium, ac si postremo tentarem aquas ipsas, urbe egredientes ad *Portam Mascarella*.

Analysis indicat, aquas *Canalis di Frino* continere solummodo in singulis libris granum unum et paucillum corporum *salinorum*, idest *HYDROCLORATIS CALCIS* et *SODAE*, *SULPHATIS SODAE* et *CALCIS*, nec non *CARBONATIS CALCIS* et *FERRI*, cum autem aquae eadem urbi interfluerint, praeterquamquod materiis organicis immiscetur, *SILICEM* praeterea suscipiant et maiorem quantitatem illorum *Salum*, grana videlicet pene quinque in singulis libris, sicuti constat ab experimento chymico de iis rivi *Fiaccacollo*: neque vero aquae istae, ubi ex urbe defluunt; meliores fiunt; ut videre est in *Tabula analitica generali* ad calcem hujus *Commentarii*.

Quum *Leander Alberti* haec scripserit = *L'acqua della Savena è di tanta virtù, che rade ritrovansigli eguali per tingere scarlatto e seta di ogni colore* =; cumque *Pompeus Vizzani* easdem iteraverit laudes, puto eos loquutos fuisse de aquis *Savenae fluminis*, quas ego quidem optimas comperi, dum earum periculum non ita pridem feci ad aggerem *S. Rufilli*. Ast reor tantundem dici non posse de illis, quae ad *Civitatem* nostram defluunt per *Canalem di Frino*: licet enim hae sint *seleniticae* minus minusque *Hydrochlorate Calcis* refertae, tamen inter optimas censi vix possunt, atque ad usus commemoratos omnino idoneae haberi nequeunt. Quod vero attinet ad aquam rivi *Fiaccacollo*, et ad caeteras alias illius *Canalis*, per alveos jam descriptos *Civitati* interfluentes, hae cum superioribus ne comparari quidem possunt, quippe quae deductoriis foricisque abluendis diffunduntur.

Sed de hac prima aquarum serie, de fluvialibus nempe, ut incoliatum opus perficiamus, ea torrentis *Apoxae* perpenden-

da superest, quae etiamsi aliis sit et qualitate et usu deterior, locum tamen suum hic habeat oportet.

Scribit Calindri, torrentem Apoxam (vulgo *Avesa* seu *Aposa*) ex variis fossis profluere haud longius a Bononia millibus passuum quinque, in hanc se inferre per ostium transenna munitum inter Portas *S. Mammantis* et *Castiglione*, ac posteaquam Civitatem interfluere spatio millium passuum et ultra, ab eadem dilabi per aliud ostium inter Portas *Galliera* et *Mascarella*, unde Bononiae moenia adlambens decurrit per fossatum in Canalem *Naviglio*.

Ex Historicis nostris et ab ipso Calindri habemus (1) Apoxam jam inde ab initio et a regione collium *Valverde* et *S. Michaelis* in *Bosco*, recepisse aquas ab *Setta* derivatas per ductum *Augustalem*, seque in Civitatem contulisse prope locum, quo nunc Porta *S. Mammantis* est, dein subterfluxisse vicum *Val di Aposa*, pontem *S. Michaelis Arcangeli*, et viam *Galliera*, donec per ductum *Avesella* appellatum conflueret in veterem *Savenam* prope ab *Ecclesia Arcoveggio*, ubi aedificula fuit *S. Hermeti* dicata. Sed *Apoxa* postmodum ab hoc itinere aversa fuit et variis de caussis, in cursum, quo nunc fluit, deflexa est (2).

De hujus torrentis aquis, quas ego sive supra, sive intra, sive extra urbis moenia scrutatus sum, nihil plane novi, quod ad earundem naturam, me edocuit Chyminica analysis; in eisdem enim reperi *HYDROCLARATES CALCIS* et *SODAE*, *SULPHATES SODAE* et *CALCIS*, *CARBONATES CALCIS* et *FERRI*, nec non *SILICEM*, ideoque eas censeo (ut jam indicavi) aquis *Savenae* paullo inferiores, quippe quae, Civitatem cum supermeant, grana continent duo et semis illorum corporum; duplum ferme hujus ponderis (additis quoque materiis organicis) dum Civitatem ipsam interfluunt; ac duplo plus ad earundem effluvi-um ex urbe, sicuti videre est in *Tabula analytica gene-*

(1) Vide = *Appendice alla Raccolta di Leggi, Regolamenti etc. intorno al Canale di Reno*, Pag. LXXIV =

(2) Vide Opusculum Prof. Ioan. Baptistae Masetti in Tom. 4.º Collectionis, cui titulus = *Nuova Raccolta d' Autori Italiani, che trattano del moto delle acque Bologna pei Tipi Marsigli 1824* =

rali. Quum autem ante monuerim, aquas istas obire munus minoris momenti, seu deteriori usu esse, hoc eo monui, ut innuerem easdem nunc derivari tantummodo ad foricas, ad scrobes, ac ad similia abluenda, minime vero in usum Moletrinarum vel alius generis machinamentorum, cujusmodi officium praecipuum est illis Canalis Rheni.

Veniam nunc ad *fontales aquas*; ac primo dicam de fonte Neptuni, unde profluunt etiam aquae ad fontem alterum, vulgo *La Fontana vecchia*; deinde verba faciam de *fonticulo*, quem nostri vernacula dictione vocant *La Fontanina*; loquar postremo de aqua exsiliante ab exteriori basi moenium urbis in loco quodam iuter Portam S. Stephani et Portam Majorem. Hae enim solae sunt aquarum scatebrae, quae populi commodo Bononiae nostrae exsiliunt.

Neptuni fons et vetus alter ab eo derivatus aiebantur primitus binis aquaeductibus, quos appellant *Di Valverde* et *S. Michaelis in Bosco* (1). Horum prior ingens aquilegium est, sive magna cella subterranea concamerata, octogona, ab ejus solo ad fornicem (fenestra itidem octogona pertusum) alta pedes Bononienses tres et viginti, et circuitu longa pedes sexaginta octo. Acceditur ad eam per parvum quasi procoeton, inde per mesaulos, ad quorum caput parva area et climaces binae sunt, dextrorsum una, sinistrorsum alia, quae ad solum sive pavementum illius cellae faciunt aditum: in pariete ejusdem cellae postico foramina quatuor patent, quibus totidem respondent cuniculi in visceribus collis excavatis fastigatoque fornice in eum subeuntes ad longitudinem quinquaginta, sexaginta, nonaginta, et centum etiam pedum; horum parietibus lateralibus interseruntur hic illic craticulae quaedam insinuatae in terram primigenam collis, quam quidem attingunt vel ipsi cuniculi. Ingeniosus Architecton istiusmodi craticulas eo consilio in parietibus constituit, ut ex iisdem atque ab ima cuniculorum parte facilius resudare possent humores, utque inde collati in geminos sulculos, de industria factos in solo uniuscujusque cu-

(1) Vide Opus, de quo ante memini, idest, = *Nuova Raccolta d' Autori Italiani, che trattano del moto delle acque. Parte I. Pag 108 e seguenti* =

nuculi, profluerent ad parvas lacunas prope ab exitu cuniculorum effossas. Aqua in istis lacunis stagnans a limo aliisque materiis purgatur, et ab iisdem defluit in canaliculos perfossos sub tramite, quo per ambitum magnae cellae quisque circumire potest: canaliculi hi ingerunt se in octo parvos muros, qui totidem majoribus lacunis, sive puteis interjacent, atque ita humor ab illis defluus per exiles meatus in hosce denno illabitur, et rursus purificatur; Architecton scilicet totam cellae aream solerter distribuit in tramitem illum ad ambitum, in istos octo puteos, atque in cavum dehiscens in medio solo ejusdem cellae, a quo aer et lux affunditur magno cuidam cuniculo inferiori. Hic cellam ultra subtermeat, magisque progreditur in collem ad novas aquas excipiendas, quarum multae etiam in illum manant percolatae ex parietibus et a pavimento cellae pluries commemoratae, nec non ab fornice ejusdem cuniculi.

In pariete binis illis climacibus intermedio aliud ostium patet, et prope ab hoc hiatus dehiscit in crassitudine parietum de industria factus, ut is aquas bis expurgatas recipiat ac deferat in canaliculum, qui denno eas effundit in cellam alteram minorem, probe concameratam, cujus ambitus viginti quatuor pedes complectitur. Aquae hic tertio considunt in concha, inde per angustum incile egeruntur (una cum humoribus defluentibus a majori cuniculo subterraneo) in aquaeductum, qui initium suum hic habet, quique spatio pedum circiter centum et decem eas defert iterumque effundit in puteum alium, ut ibidem stagnando crassioribus sordium particulis denique emundentur: eadem hinc effluunt per canaliculum alium ad tertiam cellam ovatam subter declivia collis conditam, in quam itidem humores novi percolantur.

Aquae hae omnes simul collatae paullo infra postremam cellam illabuntur in puteum, septem et viginti pedes profundum, et respondentem reliquiis Aquaeductus Augustalis, qui easdem excipit simulque cum paucis illis, a propriis cuniculis in ipsum permeantibus, alveo suo devehit nongenti quinquaginta pedum spatio ad Ecclesiam *Ab Angelis* nuncupatam: hinc per alium ductum influunt in cellam sive concham, pedes tredecim longam, latam pedes duodecim, et pedes quin-

que altam, quae subter terra est contra murum Coenobii Patrum Minorum Observantium, quaeque appellari debet *Depositu commune* seu *Castellum* aquarum fontalium; siquidem huc confluunt quoque aquae alterius ductus, vulgo *S. Michaelis in Bosco* nuncupati.

Ductus hic constat cuniculo subterraneo, in interiora collis insinuato, ex quo humores fluunt ad parvam lacunam in media quadam cella rotunda effossam; ipsi inde per canaliculum, una cum aquis alterius cuniculi dexteram collis declivitatem subeuntis, egeruntur in aliam cellam, itidem rotundam, et influunt in puteum habentem rhomboidis figuram. Hoc in loco consistunt atque expurgantur, et per foramen laterale effusi, hinc pars eorum distruit ad hortum olim Coenobii *Olivetorum*, illinc pars altera canaliculo deducta illabitur in puteum sive concham, quadrato oblongam, et in tertia cella ejusdem figurae excavatam; huc confluunt quoque humores alii ex duobus cuniculis in viscera collis irrepentibus, et in cellam ipsam a latere admissis. Aquae itaque in concham hujusce cellae collatae effunduntur per pavimentum ejusdem, a quo decidunt in parvum ductum inferiorem, ac subinde crepidine quadam in eodem ductu coercentur, ut subsideant aliquantisper et sic depurgentur; ubi vero fastigium illius crepidinis excesserint, in canaliculum illabuntur, ac per hujus anfractus aliquantulum spatiantur, donec se exonerant in concham majoris cujusdam cellae oblongae, quam nostri vocant *Il Vascello*. Haec extrinsecus et civitatem versus adornatur duobus arcibus ex ordine dorico, quos anno 1524 extrui curavit Praesul Altobello Averoldi, Vicarius Card. Francisci Cibo, Bononiae Legati: alter horum arcuum patebat jam, aditumque faciebat in viam, quae olim hinc fuit ad collem *S. Michaelis in Bosco*; alter pariete clausus usque extitit, ut nunc quidem est, cujus in fornice non ita pridem fuerant stemmata Clementis VII, Cardinalis Cibo, Senatus Bononiensis, nec non ea ipsius Praesulis Averoldi: sed nunc non tam vetustatis situ obruta, quam temporum injuria eversa sunt.

A latere cellae istiusmodi desiliunt aquae in puteum, ubi expurgantur, inde fluunt subter fossulam ad viam vulgo *del Listone* per ductum concameratum, qui easdem exonerat in

tubum plumbeum semihiantem: hic ab ejus initio concluditur quodam quasi aquaeductu super pilas et arcus instructo, dein in solum pervadit seque infert in magnam Cellam, seu in *Depositum commune*, cujus supra memini, a quo aquae omnes ita consociatae per tubum plumbeum subinfluunt in civitatem, perguntque ad Neptuni fontem, nec non ad alium, quem vocant *La Fontana vecchia*.

Hanc ductuum aquarum descriptionem, quam a Lexico chorographico-oryctographico etc. Calindri praesertim excerpsti, hic adumbrare mihi visum est, quia diagraphmatibus, quae habentur Chiarini nostri, illa respondet omnino; accedit quod ex auctoritate ipsius Calindri aliorumque cives meos monitos esse volui, miram aquaeductus *Valverde* constructionem tribuendam non esse Romanorum munificentiae, ac minime omnium Consuli Mario (quamvis ex vulgari opinione aedificia et reliquiae, quae illic extant, *Balneae Marii* nuncupantur), sed verius eam, nec non aedificationem alterius S. Michaelis in *Bosco* ad liberalitatem Senatus Populique Bononiensis esse referendam. Narrant enim *Ghirardacci* et Pater *Salani*, ductum *Valverde* quatuordecim vel quindecim saeculis post mortem Marii substructum fuisse, et cura Bononiensis Senatus publico sumptu reapse aedificatum.

At vero, ne etiam a proposito longius abeam, istud tantummodo animadvertem, quod circiter annum 1820, cum jam ductui illi humores pene deficerent, neque ii alterius a S. Michaelis in *Bosco* appellati jam satis essent ad alendos fontes publicos, Civitatis nostrae Moderatores (exemplo de eo capto quod peractum fuit anno 1731 simili de causa per fontanales Architectos, Bartholomaeum *Macchiavelli* et Petrum *Pilati*) mandaverunt ut ductus *Valverde* expurgaretur ab ejus conflente in Aquaeductum Augustalem usque ad radices Collis *Ronzano*, ubi in eum descenditur per schalam tercentorum triginta quinque graduum. Hoc dum solvebatur, itemque pars alterius ductus instauraretur, accidit ut Architecton Philippus *Miserocchi* oculos adjiceret cuidam parvae conchae, laterculo cocili structae ad rivum, qui profluit a collibus *Ronzano* et *Observantiae*. Ille parvam istiusmodi concham inspiciens, cujus nemo ex allatis scriptoribus mentionem facit, ibi-

dem vetustam reperit cellam subterraneam, tripartitam, et in unoquoque spatio quoddam habentem cavum in modum putei, quorum prius aquam a concha illa et haec abs rivo fortasse olim accipiebat, alterum occlusum erat, tertium descendebat in Aquaeductum Augustalem. Opere itaque instaurato, et novis humoribus in Aquaeductum istum sic denuo corrivatis abs rivo illo, Architecton *Miserochi* potuit ductui *Valverde* pristinam restituere aquarum copiam, et perennitati publicorum fontium prospicere.

Nunc denique ut illuc redeam, unde diverti, mihi visum est qualitatem aquarum Neptuni aliusque fontis commode deprehendi posse et civibus nostris patefieri, si per me explorarentur primum humores in concha S. Michaelis in *Bosco*, deinde illi in aquilegio ad Coenobium, ab Annuntiatione Mariae Virginis appellatum, ac postremo ii ab siphunculis ipsorum fontium exilientes. In unciis centum aquae prioris reperi grana quinquaginta octo materierum *fixarum*, quas constare recognovi *HYDROCLORATIBUS CALCIS* et *SODAE*, *SULPHATIBUS SODAE* et *CALCIS*, *CARBONATIBUS CALCIS* et *FERRI* nec non aliquanto *SILICIS ET ORGANICORUM CORPORUM*. Substantiae hae omnes tum qualitate tum quantitate imminutae comperiuntur in aqua conchae ad illud Coenobium; absunt scilicet materies organicae et Silex, aliorumque corporum grana quadraginta et unum solummodo exstant in eodem aquae pondere. Hoc etiam magis magisque fit de aquis in duobus ipsis fontibus, cum de istis triginta tantum grana ab evaporatione reliqua fuerint, neque Sulphas et Carbonas Calcis apparuerint, ut videre est in *Tabula analytica generali*.

Aqua igitur ductus ad S. Michaellem in *Bosco* videtur primum selenitica et deteriori conditione esse; dein meliuscula fieri cum pervenerit ad aquilegium contra dictum Coenobium, sive propter sedimen materierum extranearam factum ob ejus decursum, sive propter aquas melioris qualitatis, quas eo deferunt ductus *Valverde*, Augustalis, et rivus collis *Ronzano*; eadem postremo in melius quoquo modo esse conversa, cum iter suum perrexerit ad fontem in platea Neptuni et ad eum adversus veterem Publicanorum mensam, prout indicio esse possunt calcariae incrustationes, quibus canaliculi plumbei et tubi induuntur.

Fons, cui vulgo *La Fontanina* nomen est, ad caput viae ejusdem cognominationis exsilit e solo, prope ab aedificiis Equitis D. Matthaei *Conti Castelli* in usum Machinamentorum Officinarumque, ac ejus aqua non vulgo tantum sed etiam a plebisque civium optima existimatur, eaque bonitate ut cum Nuceriae aquae comparare illam multi non dubitent. At huic judicio longe dissimilis eadem mihi apparuit per chymicam analysim explorata: licet enim ea quod ad proprietates physicas optima sit, ut videre est in *Tabula analytica generali*, tamen quod ad ejus elementa attinet reapse peronustam se praebuit *HYDROCHLORATE*, *SULPHATE* et *CARBONATE CALCIS*, *SILICE*, et *HYDROCHLORATE SULPHATEQUE SODAE* quibus vero adjicitur parva *CARBONATIS FERRI* quantitas. Igitur probabilis mihi videtur opinio eorum ex Architectis nostris, qui putant aquam istius fontis ab humoribus canalibus Rheni sub hujus originem proficisci, qui cum per ductus manufactos non fluant, sed libere per meatus terrae pervadant, materies hinc suscipiunt, quibus deteriores fiunt, sicuti de aquis putealibus esse videbimus.

In uncüs centum hujus aquae reperi quinque et centum grana illorum salum, imo pro rata portione amplius eorum deprehendi, qui aquas faciunt crudas, stomacho graves, et ad oeconomicos familiaresque usus minime accomodatas, ut sunt nempe Sales pro basi Calcem habentes. Itaque satis, inquam, mirari nequeo, quomodo pacto factum sit, ut experientia vel quotidianus usus numquam fregerit communem de illius bonitate sententiam.

Pauca dicam de scatebra, quae ex pede moenium externorum urbis profluit inter Portam S. Stephani et Portam Majorem. De illius aqua multi itidem opinione falluntur, quippe qui eadem ferro medicatam putant, et ad morbos quosdam consanandos idoneam. Sed chymica analysis ne indicium quidem ferri mihi fecit, at contra ostendit, singulis libris ejus immisceri septem fere grana materierum, quae sequuntur, idest *HYDROCLORATIS* et *SULPHATIS CALCIS* et *SODAE*, *CARBONATIS CALCIS*, et *SILICIS*. Caeterum videsis *Tabulam analyticam generalem*.

Restat ut postremo loco verba faciam de *aquis putealibus*; et quandoquidem propositum haberem, Specimen harum

tantummodo exhibere, easdem non exploravi per omnem et totam Civitatem, sed satis esse duxi, puteos privatosque fontes lustrare in viis praecipuis, ad portas urbis, in regionibus intermediis, et in aliis quibusdam partibus, prout civium frequentia, aedificiorum coacervatio, opificinae, varii denique aquarum ejusmodi usus exostulare videbantur. Primo cognitum hinc perspectumque habui, puteos istos aliosque hujus generis fontes dissimili aqua manare, quae licet haud multum inter se se differat quod ad substantias componentes, satis tamen discrepat quod ad harum quantitatem, ita ut una ab altera recte discriminari possit. Quapropter aquas eorundem disperitus sum in novem *sectiones*, et brevitatis commodique gratia harum unamquamque colore diverso indicavi ac descripsi in Ichnographia Civitatis nostrae ad calcem Commentarii: etenim reputanti mihi illud Plinii adagium = *Tales sunt aquae, qualis terra, per quam fluunt* = visum est, ab dissimili aquarum qualitate, quae in puteos nostros permeant, conversa adagii ipsius ratione licere quoque conjici diversitatem telluris, in quo illi effossi sunt, idque commodum significari posse per colores varios, ut Geologi solent. Itaque Ichnographiae illi adjiciam eorundem colorum designationem, ut legentes vel primo intuitu ab istis inferre possint materierum qualitatem, quae permiscentur aquis in unaquaque sectione descriptis, atque ut inde conjectura saltem colligere queant naturam aquarum in alios cujusque sectionis puteos permeantium, quamvis harum omnium analysim chymicam ego met neque perfecero, neque in specimen istud retulerim.

Aquae sectionis I, *subflavo* colore distinctae, continent *HYDROCLORATES CALCIS, MAGNESIAE, et SODAE, SULPHATES SODAE et CALCIS, CARBONATES CALCIS et FERRI*, nec non aliquantum *SILICIS*: pertinent hae ad extremas urbis oras et ad regiones S. Isaiae, Viae Majoris, S. Blasi, S. Salvatoris, *Mirasole Grande*, S. Felicis, *Saragozza, Vetturini, Borgo S. Petri et Galliera*. Quantitas illarum materierum est granorum septuaginta quinque pro singulis unciis centum aquae, et augetur usque ad grana centum nonaginta eodem ordine, quo regiones superiores descripsimus. Vix credi potest, ad Sectionem hanc esse referendam aquam quoque putei, vulgo *della Miseri-*

cordia, quae levis dulcis et optima reputatur ex multorum opinione.

De hac sectione animadvertam nunc (id quod de caeteris etiam dictum habeatur) non Ichnographiam tantum, sed etiam Tabulam analiticam inspicere oportere, ut aquarum qualitas probe dignoscatur. Etenim si quis consideret Tabulam illam, quae tum physicos characteres proprietatesque chymicas, tum vero compositio singulis aquis cujusque sectionis peculiaris describitur eodem semper ordine, prout nempe quantitas materierum extranearum a minima fit maxima, videbit is harum summam potiore de quibusdam aquis non semper constare Salibus, pro basi Calcem habentibus, sive insalubribus, ideoque deprehendet in una eamdeque sectione aquas longe diversas, neque eo deteriores, quo major est materierum illarum quantitas.

Aquae Sectionis II, colore *viridi* depicta, eandem compositionem chymicam habent: accedit tantummodo aliquid materierum organicarum, quae quidem in venas earum permeant ex foricis, aquariis, similibusque; hisce scatet scilicet media urbis regio, ad quam pertinent aquae istae, nempe ad loca = *Clavature, Porta Ravennana, Platea Calderini, Via S. Vitalis* (ultra *Torresotto*), et *Mercato di Mezzo* = Sed quantitas salum ex *MAGNESIA, SODA, FERRO, et CALCE* in istis praesertim adaugetur usque ad grana biscentum quinque, neque minor est granis nonaginta pro singulis centenis unciis aquae inter priores delectae.

Harum quasi varietatem exhibet aqua Sectionis III, *miniaeco* colore distinctae, quum Salibus omnibus earum consocietur tantum in ista *SULPHAS MAGNESIAE*: id quod caussa esse posset ut primo obtutu auguraretur quis de meliori ejusdem qualitate. Animadvertendum autem est, eam abundare Salibus calcareis, et praesertim *SULPHATE, CARBONATEQUE CALCIS* ita ut pessima existimari debeat aqua haec ipsa, quae Sectione sua urbis regione *la Montagnola* tantummodo amplectitur.

Ferro carent aquae Sectionis IIII, quae idcirco non est depicta; sed adjungunt sibi *HYDROCLORATES CALCIS, MAGNESIAE, SODAE; SULPHATES SODAE et CALCIS, solum CARBONATEM CALCIS, et*

SILICEM. Occupant regionem urbis ad oras Sectionis I, maximeque circum quasi medium tenent juxta vias *Nosadella*, *Selciata* S. Francisci, *Borgo delle Casse*, et vias S. Georgi et *Mascarella*. In centenis unciis singulis aquae hujus reperiuntur grana octoginta quinque illorum corporum, vel ad summum grana centum viginti: itaque aquae hujusce Sectionis mediocri essent qualitate, nisi materierum quantitas illa potissime constaret *SULPHATE* et *CARBONATE CALCIS*.

Aquae Sectionis V, *citreo* colore adumbratae, pejori etiam conditione fiunt: nam Salibus calcareis, quorum summa est granorum centum viginti quinque ad centum triginta quinque, haud parva adjicitur quantitas materierum organicarum. Eadem pertinent ad viciniam Theatri Communis nostrae, et ad regionem publico Palatio adjacentem ex parte hujus dextera, ubi Horologium est.

Sectio VI. colore *glauco*, vel *subcaeruleo* depicta, aquas complectitur, quibus tantummodo dimidium circiter illorum Salium inest, grana nempe sexaginta quinque omnino; insuper carent *SILICE*. Quapropter caeteris aliis qualitate praestant, ac dolendum est eas solam obtinere regionem *Lamine*, quae spatium occupat ad urbis perimetrum.

Hanc subsequitur Sectio VII, colore *rosco* designata, cujus character peculiaris est defectus *HYDROCLORATIS MAGNESIAE* quem aliis aquis inesse vidimus, nec non *FERRI* et *SILICIS* renovata praesentia. Eadem reliquum tenet perimetri civitatis, et in circum hujusce medium pervadit aliquantum, siquidem amplectitur vias S. Stephani, *Della Fondazza*, *Fiaccacollo*, *Castiglione*, regionem ad Coenobium S. Dominici, partem viae S. Vitalis eamque tota S. Donati. Quod ac qualitatem attinet aquarum ejus, hae mediocres extarent, quum corporum extraneorum pondus a granis quinquaginta ad centum sexaginta omnino accrescat; sed in istis nimia sunt quantitate *HYDROCLORAS*, *SULPHAS*, maximeque *CARBONAS CALCIS* ut quoquo modo inter mediocres enumerari queant, nonnullae tamen in melius, aliae contra in pejus mutantur, ratione illius ponderis servata, uti cernere est in *Tabula analytica generali*.

In Sectionem VIII, colore *atro-caeruleo* pictam, referuntur aquae e puteis haustae, qui occupant regionem quamdam Civitatis ju-

xta lineam ductam a Porta S. Mamantis ad Ecclesiam S. Pauli. Praesentia *MAGNESIAE* quae tamen *CARBONATIS* speciem praesert, aquas istas ab aliis seceruit: in ea Coenobii *Delle Grazie*, quae optima creditur, comperi *HYDROCLORATEM SULPHATEMQUE CALCIS* et *SODAE*, *CARBONATEM CALCIS FERRI* et *MAGNESIAE*, nec non *SILICEM*, et quidem grana duodecim horum corporum in singulis libris ipsius aquae. Accedit quod pro rata portione abundant substantiae calcareae, ita ut illa haud dissimilem se praeberit aquis puteorum ad Ecclesiam S. Pauli, quas inter optimas nemo sane habet.

Sectio denique IX, et postrema, colore *violaceo* distinguitur: etenim parvam complectitur seriem aquarum, quae solae dici possunt bonae inter omnes a nobis adhuc per analysim tentatas, et quarum scaturigines quasi gemmae in Civitate rae admodum atque aliae alio adinveniuntur; prima nempe in via *Capo di Lucca*, altera in almo Hispaniarum Collegio, tertia in platea *Selciata di Strada Maggiore*, ubi statera est pro foeno ponderando, quarta denique in templo S. Stephani sub S. Sepulcro. Aquae istae eadem ferme compositione sunt, atque si tertia excipiat (quae ad sectionem VII ideo non retuli, quod *FERRO* caret, et quae continet communes *HYDROCLORATES*, *SULPHATES*, *CARBONATES*, et aliquantum *SILICIS*, idest horum omnium grana septuaginta in singulis unciis centum aquae), de tribus aliis ex eodem humoris pondere pauca grana illarum materierum fiunt reliqua, atque hae salibus constant, qui non semper nec plerumque *CALCEM* pro basi habent. Igitur aquae istae reapse caeteris qualitate praestant: veruntamen fieri potest ut quemadmodum optimae nonnullae aquarum scatebrae inventae sunt in eadem illa Civitatis regione, ubi fontes alios pessimos, alios mediocres tantumprehendimus, ita major earum numerus fortasse nobis innotesceret, quoties aquas omnes reliquas, in Civitatem nostram permanentes, ad rationem chymicae analysis exquireremus. Novimus enim soli terraeque constitutionem, unde humores effluunt, in horum naturam agere, et subterraneas extrusiones foricas, latrinas, aliaque similia, plus minusve (prout in vicinia fontium sunt) qualitates ipsas aquarum afficere: rationi itaque consonum videtur, scaturigines bonas hic, illi medio-

eres vel pessimas reperiri posse pro varietate locorum, e quibus profluunt.

Sed ponamus aquas omnes Civitatis nostrae ea conditione reapse esse, quam deprehendimus de paucis illis per analysim tentatis, ita ut cum caeteros quoque fontes diligenter scrutati essemus, horum aquas inveniremus illis haud multo dissimiles, quas descripsimus in *Tabula generali analytica*, idest pessimas alias, alias mediocres vel minus bonas. Quæret quis, num modus adsit, quo eisdem paullo mederi possimus, ut saltem domesticis et oeconomicis usibus fiant accomodata? Fateor me pluries in hanc rem tentandam frustra laborem insumpisse. Jam tum equidem, quum Bononienses aquas experiri caepissem, dignovi eas non solum materierum innatantium admistione vitari, verum etiam inquinari intima dissolutione Solum, idest Hydrochloratis Calcis, quo fiunt amaræ, et Sulphatis Carbonatisque Calcis ex quibus præsertim cruditas et alia derivantur vitia; ideoque hæc anteaquam evulgarem, malui de remediis cogitare, quibus cives nostri ab ejusmodi incommodis sibi cavere possent. Sed nodus ille difficultatis est, quod non agitur tantum de corporibus extraneis, quæ cum aquis nostris (ut mox innui) quoquomodo commista sint: si aquæ ab istis solummodo expurgandæ forent, facili negotio id fieri posset per varios *percolationis* modos, quos in Gallia, in Britannia, et in Scotia adhiberi ipse vidi; conferrent itidem Apparatus *Parrot*, *Stirling*, *Lèloge*, nec non illi *Chambers*, *Stambus*, et *Tearrad*, *Bell*, et *Zeni*, ac magno essent usui methodi *Lowitz*, *Smith*, *Cuchet* et *Montfort* perfectæ a *Ducomann*, et ab *Henry de Fonvielle*; vel illa expeditior *Habick*. Verum agitur de materiis chymicum in modum, ut ajunt, junctis cum aquis, et ad eas disjungendas atque eliminandas sola adsunt remedia Hydrochloras Barytes, Sub-Carbonas Potassæ, Bi-Carbonas Sodæ, Alumen, aliaque similia, quæ Sales modo memoratos dissolvendi vim habeant idque efficiant ut Calx confidat. Sed remedia ista sunt ejusmodi, quæ nec omnibus aquis indiscriminatim adhibenda, nec sine periculo in manus vulgi tradi possunt, nequeunt propterea in usum populi commode venire, qui eisdem quoque probe uti nesciret.

Memoriae proditum est, aquas Nili et Gaugis purgari jam potuisse in vasibus, quae Amygdalis Amaris, vel Fabis S. Ignatii ante fricabantur: scimus aquas maris salsas a Legislatore Moyse factas fuisse dulces per Salicem, seu per Olivam, ut nonnulli Rabbinii tradunt, vel ex sententia Bewerning per Nerium Oleander. Apud Romanos in Thermopoliis, et apud Persas quoque, sicut narrat Herodotus, aqua fervefacta ac subinde refrigerata parabatur olim *aqua illa decocta*, de qua meminit Juvenalis et Martialis veluti de usu a Graecia recepto. Haec vero sunt ne remedia efficacia, vel numquid apud nos et ad nostras aquas purgandas conferre possent? nihil quidquam. Requidem vera Aegyptii nunc aquas Nili Alumine purificant, itemque Sinae eas fluminis *Pei-ho*; ac si in India citeriore mos adhuc obtinet aquae decoquendae, id fortasse eo fit, quod chymicae doctrinae in eam regionem nondum pervulgatae sunt, vel quia consuetudinem ipsam religiosa tuetur opinio.

Quum itaque et pericula a me suscepta et methodos apud alios usitatas ad expurgandas aquas haud recte in rem nostram conducere viderem, totus in eo fui, ut opera Scriptorum de aquis rursus versarem ac diversas exquirerem rationes, quibus satius esset Bononiensium aquarum vitii mederi: hinc persuasum mihi fuit nos eisdem occurrere commodius nullos posse, quam per *Depositum*, vel per *Agitationem*, aut per *Distillationem* — fontes et scaturigines omnes explorandas esse in Civitate, illudque sedulo curandum ut, quas cognovimus bonas vel tales reperiremus, ex uberioribus scateant humoribus, si fieri possit, vel sin minus, ut putei alii effodiantur, terra diversis in locis et ad profunditates varias antea de industria tentata — inopiam denique bonarum aquarum, defectumque venarum salubrium, quas frustra rimati fuerimus, (cum earumdem purificatio per nos alio quoquo modo fieri nequeat) aquagiis comparandis, vel condendis cisternis, ex regulis et praeceptis Physices, Chemiae, Hygienes supplere opus esse — Qua de re obiter attingam, me assentiri non posse Doctori Josepho Benvenuti(1), qui contra Celsi, Hoffmanni, aliorumque sententiam opi-

(1) V = Giornale d' Italia Tom. VI. pag. 298. e seg. Lucca in — 4°. 1669.

natur pro cisternis nivalem aquam pluviatili esse anteferrendam.

Quantum utilitati vel simplex *Depositum* afferre possit aquis nostris, patet ab incrustationibus et ab crasse sedimine calcareo, quibus induuntur (ut ante monuimus), parietes cellarum, ductuum, tuborumque in ipsis fontibus, atque hoc idem probatur quodammodo ex qualitate aquae in Canalem *Cavaddizzo* fluentis. Itaque magna condenda essent aquilegia, in quae confluerent humores ibique diutius immorarentur antequam e siphunculis exsiliant: sic procul dubio fieret, ut Carbonatis et Sulphatis Calcis pars maxima consideret; pars autem horum reliqua una cum Hydrochlorate ab aquis expelli posset per *Agentia* chymica, quae eisdem scite essent adhibenda (idest pro illorum corporum quantitate et pro capacitate aquilegiorum), addito etiam Per-Sulphate Ferri ex consilio *Stiprian Luiscus*, et Alumine a *D' Arcet* commendato simulque Calce, si de aquis ageretur corruptis vel ob organicas materies inquinatis, seu quoties hisce inesset Ferrum, quo ipsae fiunt quibusdam artibus minus idoneae. Timendum vero non est, ne aquae diutine stagnantes in aquilegiis putrescant; hae enim seleniticae quum sint, putredini obsistunt: quod si in eisdem confervas gigni permittemus vel alias crescere aquaticas plantas, facile assequemur ut illae ad domesticos usus, vel saltem ad artes quasdam exercendas adhiberi possint, sicuti *Jugenhoutz*, *Sennebier*, alique experientia comperiere. Ingens Aquilegium Labronis exstructum ad similitudinem veteris Piscinae mirabilis; cisternae variae, quas egomet vidi in Anglia et in Scotia, quarum aliquae longitudinem habent hiscentum pedum, latitudinemque pedum centum sexaginta quinque; aquilegia denique, quae in Institutis pene omnibus tum oeconomicis tum industriosis ibidem conspexi, hujusce rei exemplo esse possunt.

Multum quoque *Agitationem* conferre ad aquas meliorandas, quis dubitabit? etenim novimus, fluviatiles aquas hac de causa bonas fieri; vidimus eas Canalis Rheni ad Portum *Naviglio*, easque Canalis a moletrinis appellati, eadem ratione meliorescere; scimus etiam, *Mondsley* auferre ab aqua vel ipsas materies organicas per follem in istam afflando, eamque

imbris adinstar per cribrum effundendo ab alto aliquo loco compertum denique habemus, ad aquas efficiendas levem agitationem plurimum posse, quippe quae Sales sidere aeremque illis admisceri cogit. Igitur curandum omnino videtur, ut cisternae et aquilegia quibusdam instruantur machinis, quibus aquae apte concutiantur, sive ut hae fistulis sursum tollantur et subinde ad similitudinem fontium effundantur, antequam in usum commoditatemque civium scateant.

Postremo quod ad *Distillationem* attinet, puto hanc nobis majori adjumento prae caeteris remediis esse posse. Nam quum maxime dubitandum sit ne terra, cui Civitas insidet nostra, magna ex parte constet Argilla salifera et Gypso, neve ideo omnes venae scatebraeque deferant aquas seleniticas et calcareas; quum putei, qui appellantur *Artesiani*, tot effodi, quot opus esset, perquam difficile possint; quum denique cisternas condere, vel aquilegia pro re satis ampla constituere, eaque machinis munire ad excutiendas aquas, aut hisce chymica adhibere medicamenta, ejusmodi negotium sit, quod et multum difficultatis in se habeat, et impensae nimis requirat, videtur sane *Distillatio* aliis provisionibus anteponenda. Nonne igitur utile esset, Bononiae officinas quasdam instituere, ubi vitatae aquae distillatione purgarentur? atque inde posset ne genus industriae novum quodammodo parari, a quo pecunia aliqua fortasse conficeretur institoribus, simul et cives utilitatem perciperent? Ni mea me fallit opinio commodum videtur et utile apparatus ejusmodi moliri, qui aquas distillando et aere perfundendo (id quod potissimum expedit) ad necessarios usus efficiant idoneas. Sic equidem meo jam ducebam animo, eoque consilio quemdam excogitavi. Clibanum ad stillandum, convenienti aedificio et apparatu instructum, unde destillata aquae artificiose cadens, quoad ejus fieri potest, optime expurgatur: quae omnia antequam in lucem proferrem, iudicio eximii nostri Alexandri Calzoni permittenda censui, ut ipse ea qua praestat, experientia et peritia in rebus machinalibus, partes ejusmodi inventionis ex arte sua temperaret, prout opus esset, et structura usuque faciles redderet.

Ecce autem vobis, Sodales praeclarissimi, descriptio totius,

Apparatus quem in Tabula XV. sub finem hujusce speciminis adumbravi.

Tabula haec primo exhibet aedificii Ichnographiam, ejusque Sciographiam juxta lineam A' A' — AA paries est, Apparatum praecingens et circumplectens — B indicat fornaculam cum aheno G, cujus labris retroflexis apponitur stannea cucurbita retorta D, quibus haec conjungitur per oram suam itidem inflexam, cochleisque (a) obstringitur. Hujus cucurbitae orificium, seu collum se inserit in cylindrum testaceum EE, tectorio vitreo inductum, et pluribus conflatum vasibus inter sese innexis, quorum singulis compaginibus respondent totidem diaphragmata (b) — Cylindro subjacet cella F, quae cum aere externo communicat per ductum (c), intra parietes aedificii se attollentem usque ad altitudinem secundi diaphragmatis — G repraesentat lebetem ex laterculo cocili, instructum stanneo tubo H instar serpentis flexuoso, sive *Serpentino* ut vulgo ajunt, qui in aqua mergitur: recipit hic et defert stillatam aquam ad excipula duo I, I marmorea et rectangula.

Aqua, priusquam stilletur et per aerem effundatur in modum imbris, si lubeat, purgari potest more Chymicorum in magna conca subterranea L, statim atque dehausta est a puteo M, a quo derivatur prout res postulat. Adest insuper cubiculum N pro operario, nec non alia cella lignaria O.

Quum apparatu hocce uti velimus, aqua per antliam simplicem P et per tubum (d) a puteo M depromatur, atque hinc deducatur ad concham subterraneam in magna cella R, ad quam scalae geminae (e, e) faciunt aditum. Ab concha illa per aliam antliam (f) aqua ipsa derivanda est usque ad lebetem G, qui propter tubum (g) communicat cum aheno G; et ideo cum superficies aquae in illo stagnantis constiterit supra meatum ejusdem tubi (g), hoc erit indicio, ahenum jam esse repletum aqua: postea curandum est, ut tale aquae libramentum usque servetur. Subdito igne, hujus flamma serpens per tubum flexuosum, qui circumambit ahenum, pertingit ad tubos alios ex ferro fusili Q, inter sese conjunctos et in cella F (quae externo aeri patet) flexuose dispositis in modum serpentis, ut supra, quorum postremus devenit in ductum cami-

ni intra parietes aedificii AA, seu in ipsum infumibulum SSS, quod usque ad fastigium se attollit.

Tubi hi sane incalescent antequam aqua in ahenis vapores emittat; proinde aer cellae F tepescet, pars ejus calefacta ascendet, ac per patentem valvulam (*l*), quae aditum praebet ad cylindrum testaceum, in hunc effluet eumque calore perfundet: hinc fiet in eodem aeris profluvium ascendens, quod transgrediatur diaphragmata (*b, b, b, b*), et ex superiori erumpens in absidem incurret, unde recedat necesse est, quum in spatio frigidiusculo inter cylindrum et absidem constipetur. Descendet igitur, seque diffundendo per tubum flexuosum H (in lebetem G demersum) et patentis oris in aerem, ab hoc effluet, atque ita jam frigidus aer dispergetur in cellam, quae externis auribus et flatibus panditur ob fenestras T, T, T, T.

Si hocce rarefacti aeris profluvium per cylindrum E suum non intermiserit cursum, patet illud magis magisque caliturum esse ac violentius properaturum; ita ut, simul atque vapores stillatitii ipsum ingrediuntur cylindrum, aeri isti immisceantur, et cylinder propterea majori afficiatur calore. Quamobrem aer efficacius attrahitur eoque velocius contendit una cum vaporibus, atque hisce increbrescentibus major itidem fit profluvii velocitas nec non temperies intervallis quod est inter cylindrum E et aedificium AA. Nunc vapores ipsi aeri permixti permeando tubum flexuosum H, in aqua algida mersum, condensantur et decidunt in parvum excipulum (*u*): hic per corpus innatans vaporibus stillatis dignosci potest an isti saturantur aere, ut par est; si non, reclusa valvula (*l*), augeatur aeris profluvium.

Vapores omnes, qui ita densari possunt sive extra sive intra cylindrum testaceum, impluunt in concham Z, in quam incumbit ille base sua perterebrata, unde pari libra aquam in eum effundit. Aqua haec dum accrescit, superficiem suam sane attollit, et devenit tandem ad ductum (*o*), qui mergitur in imo solo vasis (*p*); hec itaque aqua destillata repletur ad eam altitudinem, ad quam ibidem est siphunculus quidam, a quo eadem effluit ac illabitur in concham, ubi qualis specifica gravitas eidem sit, corpus innatans indicium facit.

Per apparatus ejusmodi, ni fallor, populo nostro suppete-

ret sane aqua lenis, dulcis, et concoctu facilis; artibus oeconomicis aqua praeberetur, quae corpora dissolveret facile parvoque sumptu; industriae vero talem haberent aquam, qualis eisdem esset necessaria ad varios usus; neque prae utilitate, quam omnes inde perciperent, magni ducendum esset impensum pretium in Apparatus hosce extruendos, quod singulis pro rata portione ac pro usu impositum parvi foret momenti. Qua de re referam quoque, quemadmodum Londini Consociationes Artificum, quoties ingentis molis machinae vel instrumenta comparanda sint, quae licet utilissima, eximium quidem postulant sumptum, sibimet ipsis pecuniae summa vicissim imperata id curent; ut illa efficiantur, eadem in comune conferant et adhibeant, potius quam Artes tanti auxilii praesidiique viduitas teneat: sed dolendum est, apud nos hisce vel similibus operum institutionibus fautores adhuc paucos admodum se praebere.

Silentio denique non praeteream, Sinarum neminem praeterquam eos, quibus tenues valde sunt opes, ad familiares et quotidianos usus numquam uti aqua, nisi destillata. Repetam quoque, nobis fore perutile, puteos (qui vulgo *Artesiani* nuncupantur) saepius tentare atque experiri; absit enim suspicio, ne nos in illis effodiendis oleum et operam usque perdituri simus, quum tellus provinciae nostrae longe aliter se abeat ac illa Comitatus Staffordshire, ubi putei cujusdam fossura in soli viscera profunde admodum perducta fuit (idest ab bis mille et sexcentos pedes), neque tamen exsiluit aqua. Addam postremo consilium, quod ante obtuli, de augendis cisternis mihi videri haud inane fore, verum etiam multum nobis profecturum esse, ut inopiae bonarum aquarum mederi possimus, dummodo illae secus, atque nunc plerique solent, exstruantur, et pluviales aquae in easdem opportune colligantur, purgantur apte, et ita servantur.

Sed forsitan fieri posset, ut conditiones omnes, quas huc usque proposui, simul et remedia ad meliorandas aquas necessaria omnino non essent, quando fontes singulos et scaturigines quasque rimaremur et sedulo experiremur. Jam vero nobis de bonitate nonnullarum ex istis constat; alias quoque tales esse ex multorum opinione conjicitur: haec autem utrum

revera ita se abeant, an novi fontes optimi terram effodiendo apud nos deprehendi possint, ab analysi chymica et ab experimentis solummodo cognoscemus.



TABULA ANALITICA GENERALIS

AQUARUM DULCIUM ET POTABILIUM, QUAE AD USUS OECONOMICO-DOMESTICOS AD VARIAS ARTES ETC.

BONONIAE ADIIBENTUR



AQUAE FLUVIATILES

CIVILIS BUONI

CIVILIS SIVEVI

TORRENTIS APOVAE

AQUAE FONTALES

FONTIS APTUM

	CHARACTERES PHYSICI				CHARACTERES CHYMICI												COMPOSITIO														
	Color	Olor	Sapor	Pelliculitas	Tinctura Heliotropi	Tinctura Albene	Tinctura Gallae	Solutio Saponis	Aqua Calcis consistens	Ammoniacum Crustum	Sulf-Carbonas Ammoniacae	Oxalis Ammoniacae	Nitras Argentii	Hydras Aereae Divales	Hydro-sulfidus Sodae	Hydro-Cerocyranus Potassae	Acetas Plumbi	Protosulfidus Ferri	HYDROCHLORICIS		SULFURICIS			CARBONICIS							
																			Sodae	Calcis	Magnesia	Sodae	Calcis	Magnesia	Calcis	Magnesiae	Ferri	Silex	Materiae organicae	Summae	
BIHNUM-EXTRA	albus			turbidula				levis	levis	vix sensibilis		levissimus	vix sensibilis	vix sensibilis				levis		Sodae	Calcis	Magnesia	Sodae	Calcis	Magnesia	Calcis	Magnesiae	Ferri	Silex	Materiae organicae	Summae
GRADA	opacina			turbidula				*	*	levissimus	vix sensibilis	levissimus	levissimus	levis				communis	levissimus et ruber lateralis	5,00	5,00	2,50	7,50		2,50		1,00	1,50		29,00	
BIHNUM-INTRA	*			*				aliquantum sensibili	levissimus	vix sensibilis	*	*	*	vix sensibilis				levis		5,00	2,50	7,00	2,50		2,50		1,00	1,50	0,50	20,00	
CAVADIZZO	*			*				aliquantum copiosius	*	*	vix sensibilis	vix sensibilis		*				levissimus		1,25	2,50	3,25	2,50		2,50		0,50			10,00	
PORTUS NAVIGLO	aliquantum opacina			*				copiosissimus	levis	levis	levis	levissimus	vix sensibilis	levissimus	vix sensibilis			levis		1,25	1,25	1,00			1,00			0,50	5,00		
EFFLUVIUM BIHNI per rivosi ostium				*				levis	*	levissimus	vix sensibilis	*	levissimus	levis				*	levissimus et lateris lateralis	5,00	2,50	10,50			1,50		0,50			20,00	
CIVILIS SALVAL al Trino	alba			turbida				copiosa	levis		vix sensibilis	levissimus	levissimus	levis				vix sensibilis		2,00	1,50	1,50	1,50		5,00		0,50			15,00	
FIAC-CACOLLO sub via Carthageni	alutacina opacina			*				*	*	vix sensibilis	*	*	*	levissimus				*		5,00	10,00	2,50	12,50		6,00		1,00	2,00	1,00	10,00	
EFFLUVIUM RIVI FIACCA COLLE al portu Martella	albus opacina			*				communis	*	*	levissimus	levis	*	*				levissimus		5,00	10,00	2,50	1,50		6,00		1,50	5,00	1,50	36,00	
APONA-LABIA	aliquantum albus			turbidula				copiosa	levis	vix sensibilis	vix sensibilis	levis	vix sensibilis	vix sensibilis				levissimus	levissimus et lateris lateralis	2,50	0,50	0,50	6,50		6,50		1,50	2,00		20,00	
APONA-INTRA	albus turbidula			turbida				*	*	levissimus	*	levissimus	*	*				*	levissimus et lateralis	2,50	10,00	2,50	12,50		3,50		1,50	2,00	0,50	15,00	
EFFLUVIUM APOVAE sub T. Colonna Madonna del Borgo S. Vito et Montegrotto	*			*				copiosa et fluctans	*	levis	levissimus	aliquantum copiosius	levissimus	*	levissimus			communis	*	2,50	10,00	2,50	20,50		5,00		2,50	2,50	0,50	11,00	
ADULLIUM AD S. MICHELEM IN BENO								copiosa	levis	levissimus	levissimus	levis	levis	vix sensibilis				levissimus		10,00	10,50	1,50	11,00		15,00		1,00	1,50	1,50	38,00	
EFFLUVIUM AD COLONIAM Patruum Mo. Observantium								*	levissimus	*	*	*	communis	*				*		8,00	8,50		1,00	10,50		4,50		0,50		11,00	
FOSS IN PLATEA SEPTUM								*	levis	vix sensibilis	*	*	levissimus	levissimus				levis	levissimus et lateralis	1,00	6,00	3,25	7,50		7,00		0,25			30,00	
FOSS VETUS								*	*	*	vix sensibilis	*	*	*				*		6,00	6,00		3,25	7,50		7,00		0,25		30,00	
LA FOSCAMIA								copiosissimus	levis	levis	levis	communis	copiosus	levis	levissimus			levis	lateris lateralis	15,00	20,00		10,00	35,00		12,50		7,50	5,00	105,00	
MASTELLA al Collo romano et per Portum S. Stephan e Portum in oppido								copiosus	levissimus	*	levissimus	copiosus	levissimus	levissimus	*			copiosus		10,00	7,50		2,50	25,00		12,50		2,50		10,00	

levissimus	levis	levis
communis	parum copiosus	le

AQUAE PUTEALES

SECTIONS I.

S. ISMAEL								copiosus	nonnihil copiosus	levia	levissimus	levia	valde copiosus	levissimus		levissimus	copiosus et haeculans	15,00	20 0 0	5,00	5,00	22 50	3,50	1 00	2,00	5,00
VIA MAIOR	nonnihil opalosa							copiosus et valde floccosus	levia	*	*	*	copiosus	*			copiosus et haeculans	13,50	5,00	1 50	7 50	22 50	20,00	5,00	5,00	80,00
S. BASIL								*	*	VIA ANABELE	*	communis	nonnihil copiosus	levia		levia	saltem flavum	10,00	7,50	2,50	5,00	30,00	11,50	1,50	5,00	85,00
SS. SALVATORIS								*	*		levia	levia	copiosus	levissimus	*		levia et subflava	26,00	10,00	1,00	10,00	27,50	15,00	1,50	1,50	95,00
Miraval-Grande								abundans et floccosus	*	levia	*	valde copiosus	*	*	levissimus		nonnihil copiosus	15,00	15,00	5,00	10,00	10,00	8,50	1,50	5,00	100,00
MISERICORDIA								*	levia	levissimus	levissimus	copiosus	copiosus	levia		levia	serulans et subflava	15,00	15,00	5,00	20,00	25,00	17,50	2,50	5,00	107,00
VIA S. FELICIS								copiosus	nonnihil abundans	copiosus	levia	nonnihil abundans	*	*	levissimus	levissimus		10,00	15,00	5,00	40,00	15,00	30,00	2,50	7,50	125,00
Saragocia								nonnihil abundans	levia	communis	*	*	*	*	levia	levia		20,00	10,00	2,50	20,00	57,50	13,50	1,50	5,00	130,00
Pedurnas								copiosus	*	levia	*	levia	*	*	*	*		10,00	11,00	5,00	30,00	25,00	13,50	1,50	5,00	130,00
Borgo S. PETRI	nonnihil allula							copiosus	*	*	levia	communis	valde copiosus	communis	levia	*		12,50	12,50	5,00	20,00	50,00	30,00	5,00	20,00	155,00
Galilea								*	*	nonnihil copiosus	*	*	parum abundans	*	*			30,00	15,00	15,00	15,00	80,00	25,00	2,50	7,50	190,00

SECTIONS II.

Clavitare								nonnihil copiosus	levia	levia	levissimus	levia	copiosus	levissimus		levissimus	levia et subflava	20,00	20,00	7,00	5,00	23,00	15,00	0,50	1,50	80,00
Pavia Rangiana								abundans et floccosus	*			levia	*	*	*	*		17,50	7,50	2,50	10,00	32 50	21,00	1,50	2,00	95,00
PLATEA Calosa								copiosus	*	copiosus	*	valde copiosus	*	*	levia		nonnihil abundans	20,00	10,00	2,50	20,00	32 50	19,00	1,00	1,50	110,00
VIA S. VITALIS								abundans et floccosus	*		copiosus	abundans	nonnihil abundans	communis		levissimus	abundans et subflava	12,50	12,50	5,00	10,00	15,00	25,00	2,50	2,25	115,00
Miravolo Di Mova		nonnihil turbida						*	*	levia	*	nonnihil abundans	valde copiosus	*		levia	*	10,00	25,00	5,00	40,00	80,00	9,00	1,00	4,50	205,00

SECTIONS III.

Montagna								abundans	levia	levia	levia	communis	nonnihil copiosus	abundans	levia	abundans	subflava	25,00	10,00	10,00	25,00	37 50	5,00	10,00	2,50	10,00	205,00
----------	--	--	--	--	--	--	--	----------	-------	-------	-------	----------	-------------------	----------	-------	----------	----------	-------	-------	-------	-------	-------	------	-------	------	-------	--------

SECTIONS IV.

Nosidella	abundans et allula		VIA turibula					copiosus	nonnihil copiosus	levia	levissimus	nonnihil abundans	abundans	levissimus		levissimus		7,50	10,00	2,50	5,00	30,00	25,00		5,00	85,00
Masarulla								*	*	*	levia	*	*	nonnihil abundans		levia		12,50	7,50	5,00	7,50	32 50	20,00		15,00	100,00
S. GEORGII								*	levia	*	communis	*	levia	*	levia	*		15,00	20,00	5,00	20,00	42 50	25,00		2,50	110,00
Schola S. FRANCISCO								valde abundans et floccosus	*	levissimus	*	levia	abundans	communis	*	copiosus		15,00	20,00	5,00	10,00	10 00	20,00		10,00	120,00
Borgo Delle Case								*	nonnihil copiosus	abundans	levissimus	nonnihil abundans	aliquantum copiosus	levia	tenna pellucida	levia		10,00	25,00	5,00	10,00	40,00	20,00		10,00	120,00

SECTIONS V.

THEATRUM COMMUNE	abundans et opalosa							abundans et floccosus	abundans	communis	levia	*	*	communis	levissimus	*		10,00	10,00	10,00	20,00	15,00	25,00		5,00	5,00	125,00
------------------	---------------------	--	--	--	--	--	--	-----------------------	----------	----------	-------	---	---	----------	------------	---	--	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--	------	------	--------

SECTIONS VI.

QUADRIVIVUM AB PUBLI- CUM TOPOLOGUM	nonnihil allula							*	*	*	*	communis	valde abundans	levia	*	*		20,00	20,00	5,00	10,00	40,00	25,00		5,00	10,00	135,00
Lanone								abundans	levissimus	levia	levissimus	nonnihil abundans	levia	levissimus	VIA serulans	levia		20,00	11 25	1 25	10,00	12 50	7,50	2,50		65,00	

SECTIONS VII.

VIA S. SILEPHAN	opalosa							aliquantum copiosus	levissimus	levia	levissimus	aliquantum copiosus	levissimus	levissimus	levissimus	communis		10,00	10,00		2,50	12 50	10,50	2,00	2 50	50,00
VIA Francesco								abundans et floccosus	levia	levissimus	*	communis	abundans	*	*	nonnihil abundans	levissimus et subflava	10,00	10,00		5,00	15,00	5,00	1,50	3,00	50,00
COEMETERIUM S. DOMINI	nonnihil allula		VIA turibula					abundans	levissimus	levia	levia	valde abundans	nonnihil copiosus	*	VIA spectabilis	abundans	levia et subflava	42 50	7,50		5,00	25,00	12 50	2,50	5,00	70,00
VIA Castiglione								abundans et floccosus	levia	levissimus	*	communis	copiosus	levia	levissimus	levia	levissimus et subflava	10,00	10,00		2,50	22 50	37,50	2,50	5,00	90,00
VIA S. DONATI								*	*	communis	*	abundans	*	nonnihil abundans	*	*		37 50	20,00		10,00	21 50	11 25	1 25	2,50	125,00
Fandocci			VIA turibula					*	nonnihil abundans	*	communis	abundans	levia	levia	*	serulans subflava		30,00	12 50		20,00	52 50	12 50	2,50	10,00	160,00

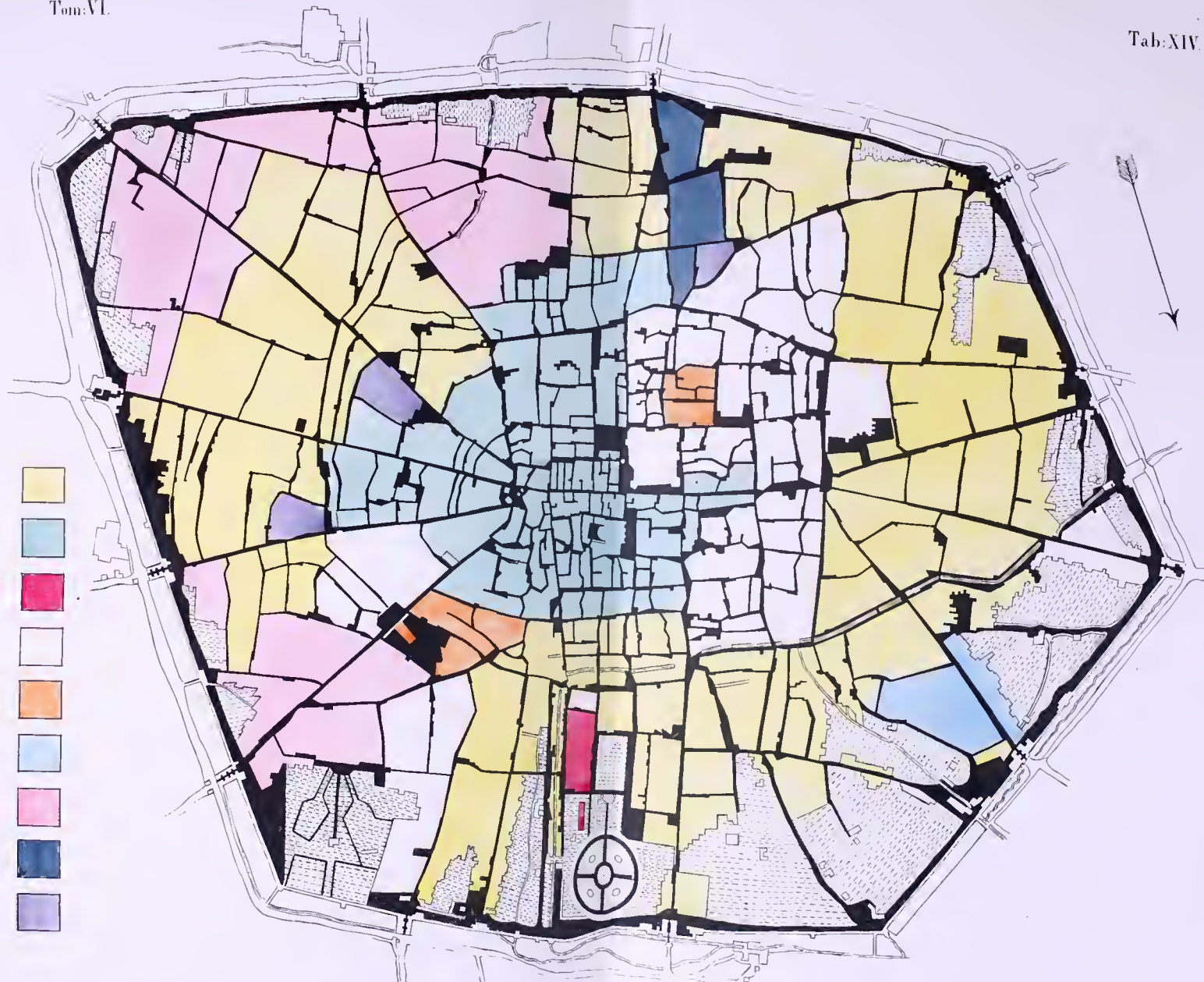
SECTIONS VIII.

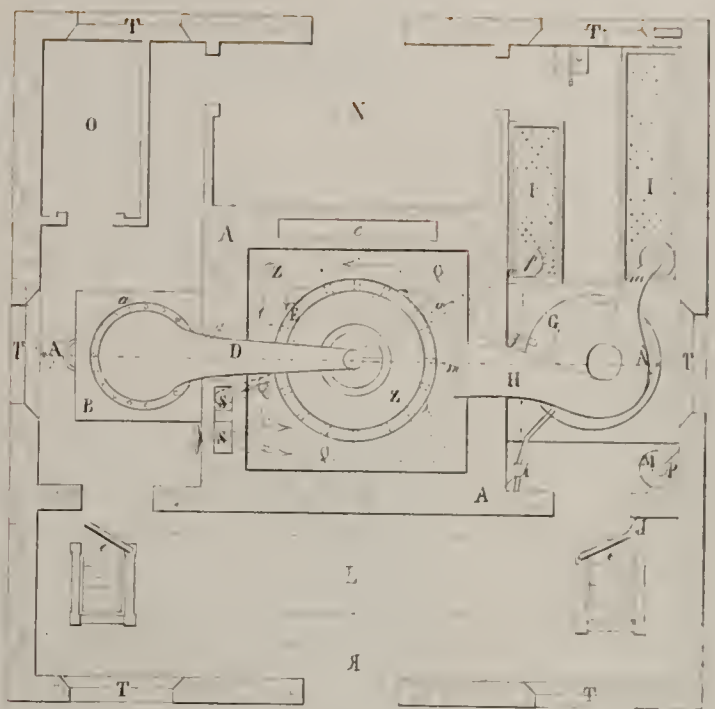
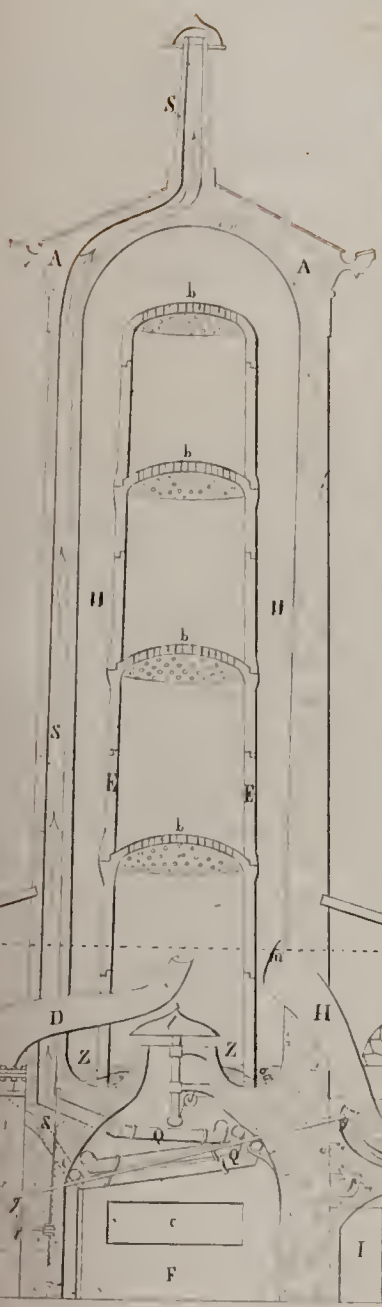
ECCLESIA S. PAULI								abundans	nonnihil copiosus	levia	levissimus	levia	valde abundans	levissimus		levia		15,00	5,00		7 50	40,00	25 50	1 50	3 50	7,00	105,00
LOCUS MORTUORUM S. MARTINI								*	*	*	levia	communis	aliquantum copiosus	levia		communis		20,00	15,00		20,00	25,00	17 50	5,00	1,50	6,00	110,00

SECTIONS IX.

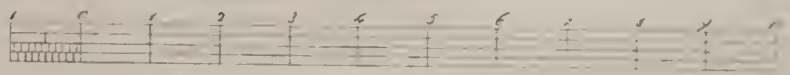
Capo Di Lucio	allula		turbida					parum abundans	levissimus	VIA spectabilis	VIA serulans	levissimus	VIA serulans		levissimus			2 50			3 75	1 75	2,00			10,00
ALMEN HISPANUM COL- LEGII								parum abundans	*	*	*	VIA spectabilis	VIA serulans		levia			5,00	2 50		2 50	5,00				15,00
S. PULCRUM IN ECCLESIA S. SILEPHANI								aliquantum copiosus	*	levissimus	levia	levissimus	VIA serulans		*			2 50	1 50		2 50	6,00		7 50		20,00
Pera Di Fino								aliquantum abundans et floccosus	levia	communis	parum copiosus	levia	levia		levia		serulans subflava	7,00	5,00		2 50	32 50	15,00		10,00	70,00







V. Berna exc



Musei



JULII BEDETTI

DE SUPERFICIERUM CURVARUM QUADRATURA

DISSERTATIO.

*In qua nonnulla de earum curvatura,
Archimedisque postulato traduntur (*).*

Quae de plano tangente (1) disserui, Vobisque, sapientes Viri, anno superiore tradidi, ea et huic opusculo argumentum suppeditarunt. Ut enim superficies in tria genera dispersivi juxta earum positionem ad planum tangens, illico sensi, a demonstratione, qua celeberrimus *Lagrangia* usus est ad formulam quadraturae superficierum curvarum constituendam, omnes prorsus effugere secundi generis superficies, quippe quae a plano tangente continguntur, et una simul secantur. Re quidem vera *Lagrangia*, atque ii, qui *Theoriam*, ut vocant, *functionum analyticarum* sequuti sunt, ubi aream geminati incrementi cujusvis superficiei majorem esse, vel minorem area cujusdam plani tangentis per *Archimedis* postulatum concludunt, tacite ponunt incrementum illud vel super planum tangens, vel sub eo undique consistere. At hoc fingere quidem licet, cum superficies, cujus quadratura quaeritur, ad primum genus, aut ad tertium pertineat; non autem, cum ad secundum: tum quod superficies secundi generis planum tangens intersecet in quadam linea, quae utrinque excurrit a contactu; tum quia *Archimedis* postulatum, quod limitibus definiendis inservit, superficies tantum respiciat, quae undique a dato plano easdem versus partes detorqueantur. Quo illud col-

(*) Opusculum hoc Academiae traditum est tertio Nonas Junii MDCCCXLI.

(1) V. Nov. Comm. Acad. Scient. Institut. Bonon. T. V. pag. 485.

ligitur, quod paullo ante dixi: colligitur scilicet, formulam quadraturae superficierum curvarum ita adhuc principiis *Lagrangiae* demonstratam esse, ut ad omnes primi, et tertii generis superficies profecto transferatur, dubiumque sit, anne secundum quoque genus superficierum amplecti possit.

Itaque supplendi demonstrationem *Lagrangiae*, quoad ejus facere possem, desiderium me tenuit; quo excitatus in id sedulo studui, ut *Theoriae functionum analyticarum* inmixtus ostenderem, qua formula expressa est area superficierum, quae primo, ac tertio generi adscribuntur, eadem exprimi et aream aliarum superficierum. Quam id recte fecerim, Academici praestantissimi, videritis.

§. I.

Propositiones quaedam ad secundum genus superficierum pertinentes.

Initium ducemus e quibusdam propositionibus, quae etsi planum tangens, et curvaturam superficierum propius respiciant, atque fere sint prioris opusculi supplementum, magno tamen usui nobis in posterum erunt. His enim patebit, quomodo superficies secundi generis circa quodlibet suum punctum sese explicent, et quam habeant positionem ad planum tangens juxta punctum contactus; quae demum forma universalis geminato incremento superficiei concavo-convexae sit tribuenda. Sed ut infra de verbis ambigendum non sit, illud monendum puto. Cum superficiem, exempli gratia, ad secundum genus pertinere dixerem, vel esse concavo-convexam, intelligatis velim, ejus generis condiciones per universam superficiem pertinere. Ita unicuique generi una tantum conditio respondebit (1). Genera autem in singulis punctis superficierum persequi nolui, ne ab instituto meo nimis decederem, ubi expendendae mihi forent singulae condiciones, quas in num. 23 primi opusculi recensui.

(1) V. Nov. Comment. T. V. pag. 512-13

Propositio I. Theorema.

1. Planum tangens superficiem secundi generis, eidem superficiem occurrit in linea, quae punctam duplex habet in ipso puncto contactus.

2. Sit $z = \varphi(x, y)$ aequatio ad superficiem;

$$p_{x,y} = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right); q_{x,y} = \left(\frac{d\varphi}{dy} \right);$$

$$r = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right); s = \left(\frac{d^2\varphi}{dx dy} \right); t = \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} \right);$$

et x, y, z sint ordinatae cujusvis puncti illius superficiem. Aequatio ad planum, quod superficiem in illo puncto contingit, erit

$$z' - z = p_{x,y} \cdot (x' - x) + q_{x,y} \cdot (y' - y);$$

et linea, in qua superficies et planum tangens se invicem secant, his aequationibus exprimitur

$$(A) \begin{cases} z' = \varphi(x', y') \\ z' - z = p_{x,y} \cdot (x' - x) + q_{x,y} \cdot (y' - y). \end{cases}$$

Hinc, habita x' pro variabili, ope differentiationis elicitur

$$\begin{cases} \left(\frac{dz'}{dx'} \right) = p_{x',y'} + q_{x',y'} \cdot \left(\frac{dy'}{dx'} \right) \\ \left(\frac{dz'}{dx'} \right) = p_{x,y} + q_{x,y} \cdot \left(\frac{dy'}{dx'} \right) \end{cases}$$

seu

$$(B) \begin{cases} \left(\frac{dy'}{dx'} \right) = - \frac{p_{x',y'} - p_{x,y}}{q_{x',y'} - q_{x,y}} \\ \left(\frac{dz'}{dx'} \right) = \frac{p_{x',y'} \cdot q_{x',y'} - p_{x,y} \cdot q_{x,y}}{q_{x',y'} - q_{x,y}} \end{cases}$$

A binis his quantitibus pendent directiones projectionum rectae, quae lineam communem plano tangenti et superficiem in puncto (x', y', z') contingit. Positis autem $x' = x, y' = y, z' = z$, illud punctum in ipsum contactus punctum abibit, et quantitates $\left(\frac{dy'}{dx'} \right), \left(\frac{dz'}{dx'} \right)$ induent formam indeterminatam $\frac{0}{0}$. Ita-

que, ut valor exempli caussa $\left(\frac{dy'}{dx'}\right)$ in puncto (x, y, z) . lineae communis detegatur, habita rursus x' pro variabili, differentiale numeratoris formulae (B) per differentiale denominatoris dividendum erit, et in quoto erunt substituendae ordinatae x, y pro x', y' . Quare habebitur

$$\left(\frac{dy'}{dx'}\right) = -\frac{r+s\left(\frac{dy'}{dx'}\right)}{s+t\left(\frac{dy'}{dx'}\right)}$$

sive

$$t\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + 2s\left(\frac{dy'}{dx'}\right) + r = 0;$$

ac proinde

$$(C) \quad \left(\frac{dy'}{dx'}\right) = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t};$$

et aequatio

$$\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = p_{xy} + q_{xy} \cdot \left(\frac{dy'}{dx'}\right)$$

evadet

$$\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = p_{xy} + q_{xy} \cdot \left\{ \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t} \right\}.$$

Cum igitur in quovis puncto (x, y, z) superficiei sit ex hypothesi $(s^2 - rt) > 0$, ideoque quantitates $\left(\frac{dy'}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)$ habeant binos valores reales, binae rectae duci poterunt, quae lineam (A) in eo puncto contingant: linea nempe, in qua superficiei secundi generis planum tangens occurrit, punctum duplex habet in ipso puncto contactus.

Scholion. I.

3. Haec propositio satis est argumenti ad illud discrimen, quod inter primum, et secundum genus superficierum intercedit: quod hujusmodi esse demonstravimus (1), ut planum tangens,

(1) V. Nov. Comment. T. V. pag. 490-91, num. 4.

nonnullos intra terminos, superficiebus primi generis in puncto tantum contactus occurreret; superficies vero alterius generis contingeret, atque secaret. Si enim fuerit $(s^2 - rt) < 0$, bini valores $\left(\frac{dy'}{dx'}\right)$ in quantitates imaginarias vertentur (num. 2. (C)); ideoque nulla erit recta, quae lineam communem plano tangenti, et superficiei, si quam esse cogitatione fingamus, in puncto (x, y, z) contingat. Quare planum tangens superficiei primi generis non secat, vel, si secet, occurrit illis in linea, quae cum puncto contactus nequaquam continuatur.

Cum autem sit $(s^2 - rt) > 0$, tunc planum tangens superficiei occurrere potest in linea, quae transeat per punctum contactus; punctum enim (x, y, z) sane continetur in aequationibus (A), ac reales sunt bini valores $\left(\frac{dy'}{dx'}\right)$. Planum vero tangens non solum posse, sed etiam occurrere profecto superficiebus secundi generis, in quibus scilicet est $(s^2 - rt) > 0$, in primo opusculo ostendimus.

Ex aequatione (C) eruitur quoque, tertium genus superficierum in eo a secundo differre, quod linea, in qua planum tangens superficiei secundi generis occurrit, habeat punctum duplex in ipso puncto contactus; linea autem in qua tertii generis superficiem planum tangens contingit, per punctum contactus semel transeat. Nam posito $(s^2 - rt) = 0$, ambo valores $\left(\frac{dy'}{dx'}\right)$ erunt inter se aequales.

Scholion II.

Hoc ipso theoremate liquido patet, punctum simplex superficierum haud recte definivisse, qui illud etiam in omni quacumque sectione simplex esse voluerunt. Ea enim definitione non sunt secundi generis superficies complexi; quandoquidem sectio communis hujusmodi superficiebus et plano tangenti punctum habeat duplex in ipso puncto contactus. Nec dubitare possumus, quin et illud superficierum genus definitione comprehendere vellent. Id nobis persuadere malumus, quam omnia, puta, Paraboloidis hyperbolicae puncta ex eorum sen-

tentia duplicia appellare, aut non simplicia censere. Potius igitur a planis tangentibus, quam a sectionibus ea est definitio petenda.

Propositio II. Theorema.

4. Per quodvis punctum lineae, in qua superficiei secundi generis planum tangens occurrit, nulla alia recta superficiem tangens in plano tangente duci potest, praeterquam quae eam lineam contingat. Et lineae punctis illud tantum excipitur, in quo planum tangit superficiem.

Sint x', y', z' coordinatae cujuscumque puncti lineae communis plano tangenti, atque superficiei. Per id punctum ducatur planum perpendiculare ad planum (x, y) , et cum plano (x, z) comprehendens angulum, cui tangens trigonometrica sit $= n$. Sectio hujus plani, et superficiei his binis aequationibus continebitur

$$\begin{cases} z'' = \phi(x'', y'') \\ y'' - y' = n(x'' - x'). \end{cases}$$

Hinc

$$\begin{cases} \left(\frac{dz''}{dx''} \right) = p_{x''y''} + q_{x''y''} \left(\frac{dy''}{dx''} \right) \\ \left(\frac{dy''}{dx''} \right) = n; \end{cases}$$

et in puncto x', y', z'

$$\begin{cases} \left(\frac{dy'}{dx'} \right) = n \\ \left(\frac{dz'}{dx'} \right) = p_{x'y'} + q_{x'y'} \cdot \left(\frac{dy'}{dx'} \right) = p_{x'y'} + q_{x'y'} \cdot n; \end{cases}$$

ideoque ad rectam in puncto (x', y', z') sectionem tangentem aequationes erunt

$$\begin{cases} y'' - y' = n(x'' - x') \\ z'' - z' = \{p_{x'y'} + nq_{x'y'}\}(x'' - x'). \end{cases}$$

His positis quaeramus, quae condiciones adimpleri debeant, ut ea recta tangens sectionem, atque superficiem in puncto (x', y', z') , jaceat in plano superficiem eandem tangente in

puncto (x, y, z) . Tunc quisquis sit valor x'' , una simul satisfacere oportet tribus his aequationibus

$$\begin{cases} z'' - z = p_{xy} \cdot (x'' - x) + q_{xy} \cdot (y'' - y) \\ y'' - y = n(x'' - x') \\ z'' - z' = (p_{x',y'} + nq_{x',y'}) (x'' - x'); \end{cases}$$

quarum prima ad planum tangens est, reliquae duo ad rectam tangentem. Eliminatis igitur y'' , z'' , erit

$$z' - z + (p_{x',y'} + nq_{x',y'}) (x'' - x') = p_{xy} \cdot (x'' - x) + q_{xy} \cdot (y' - y + n(x'' - x'))$$

sen

$$\begin{cases} z' - z + (x'' - x') \{ p_{x',y'} + nq_{x',y'} \} = \\ = (x'' - x') \{ p_{xy} + nq_{xy} \} + p_{xy} \cdot (x'' - x) + q_{xy} \cdot (y' - y); \end{cases}$$

quae aequatio, cum vera esse debeat, uti dictum est, qualiscumque valor quantitati x'' , vel $(x'' - x')$ tribuatur, describitur in has

$$(D) \quad \begin{cases} z' - z = p_{xy} \cdot (x' - x) + q_{xy} \cdot (y' - y) \\ p_{xy} + nq_{xy} = p_{x',y'} + nq_{x',y'}. \end{cases}$$

Prior harum aequationum cum poscat id, quod ex hypothesi ponitur, nempe ut punctum (x', y', z') sit in plano tangente, expleta reapse censenda est; ex altera autem eruitur

$$n = \left(\frac{dy'}{dx'} \right) = - \left(\frac{p_{x',y'} - p_{xy}}{q_{x',y'} - q_{xy}} \right);$$

adeoque

$$\left(\frac{dz'}{dx'} \right) = \frac{p_{xy} \cdot q_{x',y'} - q_{xy} \cdot p_{x',y'}}{q_{x',y'} - q_{xy}}.$$

Atqui hi valores $\left(\frac{dy'}{dx'} \right)$, $\left(\frac{dz'}{dx'} \right)$ iidem sunt, atque illi, qui pertinent (num. 2. (B)) ad rectas, quae sectionem plani tangentis et superficiei in eodem puncto (x', y', z') contingunt. Ergo recta tangens superficiem in quovis puncto lineae, in qua superficies ea plano tangenti occurrit, in hoc plano jacebit, dummodo eam quoque lineam contingat.

Scholion.

5. Hinc patet, superficies secundi generis a plano tangente secari, et in linea communi non contingi, praeterquam in puncto contactus: qua in re consistit totum discrimen, quo secundum genus superficierum a tertio discernitur. Nam quotiescumque planum in quadam linea superficiem tangat, quaevis recta per quodcumque illius lineae punctum in eo plano ducta superficiem eam contingere necessario debet. Cum autem planum tangat superficiem concavo-convexam, in eo plano una tantum recta jacere potest, quae per quoddam punctum lineae communis aliud a puncto contactus transeat, superficiemque contingat: superficies igitur secundi generis, et planum tangens sese mutuo secant. Quod si superficies ad tertium genus pertineat, altera aequationum (D) reipsa vera est. Ubi enim superficies a plano tangente in quadam linea contingitur, in omnibus ejusdem lineae punctis quantitates p, q constantes fiunt (1); ideoque

$$p_{x',y'} = p_{x,y}; \quad q_{x',y'} = q_{x,y}.$$

Quo colligitur, omnes superficiei tertii generis sectiones, quas variando n planum $y'' - y' = n(x'' - x')$ perpetuo gignit, in puncto (x', y', z') lineae communis plano tangenti, atque superficiei contingi a rectis, quae in eodem plano tangente jacent.

Propositio III. Problema.

6. Ex infinitis numero sectionibus, quae planis utcumque ductis per unum et idem punctum cujusdam superficiei in hac superficie fieri possunt, eas sectiones secernere, quae in eo puncto flexum habeant.

7. Sit $z = \varphi(x, y)$ aequatio ad superficiem; sint x, y, z coordinatae cujuscumque puncti ejus superficiei; et quodlibet planum per id punctum transiens hac aequatione exprimat

(1) Novi Comment. Tom. V. pag. 506.

$z' - z = A(x' - x) + B(y' - y)$. His positis ad sectionem hujus plani, et superficiei aequationes erunt

$$\begin{cases} z' = \phi(x', y') \\ z' - z = A(x' - x) + B(y' - y); \end{cases}$$

atque ad ejus projectionem in plano ordinarum x, y erit aequatio

$$z + A(x' - x) + B(y' - y) = \phi(x', y');$$

unde, differentiatione semel et iterum peracta, eruitur

$$\begin{cases} A + B \left(\frac{dy'}{dx'} \right) = p + q \left(\frac{dy'}{dx'} \right) \\ B \left(\frac{d^2 y'}{dx'^2} \right) = r + 2s \left(\frac{dy'}{dx'} \right) + t \left(\frac{dy'}{dx'} \right)^2 + q \left(\frac{d^2 y'}{dx'^2} \right); \end{cases}$$

id est

$$(E) \begin{cases} \left(\frac{dy'}{dx'} \right) = \frac{A - p}{q - B} \\ \left(\frac{d^2 y'}{dx'^2} \right) = -\frac{1}{(q - B)^3} \left\{ r(q - B)^2 + 2s(A - p)(q - B) + t(A - p)^2 \right\}; \end{cases}$$

et in puncto (x, y, z) sectionis quantitates p, q, r, s, t functiones erunt ordinarum x, y .

Quamvis nobis satis fuisset inquirere, quomam pacto accidat, ut in sectionis projectione flexus habeatur, ne tamen de problematis resolutione ullo modo ambigatur, e projectione ad sectionem reverti visum est. Sumantur abscissae x'' in recta, quae intersectio est plani secantis, et plani paralleli plano ordinarum x, y ducti per punctum (x, y, z) ; et ordinatae y'' capiantur in perpendiculari ad axem x'' , quae transeat per ipsum punctum (x, y, z) et jaceat in plano sectionis. Ad hos axes sectio superficiei referatur. Formulae generales, quibus ad axes permutandos utimur, hac hypothese evadunt

$$\begin{cases} x'' = x - \frac{Bx''}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{Ay''}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{1 + A^2 + B^2}} \\ y'' = y + \frac{Ax''}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By''}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{1 + A^2 + B^2}} \end{cases}$$

sive, separatis x'', y'' ,

$$\begin{cases} x'' = \frac{A(y' - y) - B(x' - x)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ y'' = \frac{\{B(y' - y) + A(x' - x)\} \sqrt{1 + A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \end{cases}$$

quae, brevitatis causa, positis

$$(F) \begin{cases} a = \frac{-Ay' + Bx}{\sqrt{A^2 + B^2}}; & b = \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; & c = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \\ a' = \frac{-(By' + Ax) \sqrt{1 + A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}; & b' = \frac{A\sqrt{1 + A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}; & c' = \frac{B\sqrt{1 + A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \end{cases}$$

in has contrahuntur

$$(G) \begin{cases} x'' = a + bx' + cy' \\ y'' = a' + b'x' + c'y' \end{cases}$$

8. Nunc resolutio problematis eo deducta est, ut datis $\left(\frac{dy'}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)$, atque duabus relationibus (G), reperiatur quantitas $\left(\frac{d^2y''}{dx''^2}\right)$, quae, ubi evanescat, flexum sectionis, si quis est, ostendat. Itaque cum x vertatur in $(x + \omega)$, ponamus quantitates y' , x'' , y'' verti in $(y' + i)$, $(x'' + \omega')$, $(y'' + i')$. Idcirco erit

$$\begin{aligned} i &= \left(\frac{dy'}{dx'}\right) \omega + \left(\frac{d^2y'}{dx'^2}\right) \frac{\omega^2}{2} + \dots \\ \omega' &= b\omega + ci \\ i' &= b'\omega + c'i \\ i' &= \left(\frac{dy''}{dx''}\right) \omega' + \left(\frac{d^2y''}{dx''^2}\right) \frac{\omega'^2}{2} + \dots; \end{aligned}$$

et eliminatis i , ω' , i' , orietur aequatio

$$\left\{ \begin{aligned} &\omega \left\{ b' + c' \left(\frac{dy'}{dx'}\right) \right\} + c' \left(\frac{d^2y'}{dx'^2}\right) \frac{\omega^2}{2} + \dots = \\ &= \omega \left\{ b + c \left(\frac{dy'}{dx'}\right) \right\} \left(\frac{dy''}{dx''}\right) + c \left(\frac{d^2y'}{dx'^2}\right) \left(\frac{dy''}{dx''}\right) \frac{\omega^2}{2} + \dots \\ &+ \left\{ b + c \left(\frac{dy'}{dx'}\right) \right\}^2 \cdot \left(\frac{d^2y''}{dx''^2}\right) \cdot \frac{\omega^2}{2} + \dots \end{aligned} \right\};$$

quae eo, quia vera esse debeat, utcumque varietur ω , has contineat necesse est:

$$b' + c' \left(\frac{dy'}{dx'} \right) = \left(\frac{dy''}{dx''} \right) \left\{ b + c \left(\frac{dy'}{dx'} \right) \right\}$$

$$c' \left(\frac{d^2y'}{dx'^2} \right) = c \left(\frac{d^2y''}{dx''^2} \right) \left(\frac{dy''}{dx''} \right) + \left(\frac{d^2y''}{dx''^2} \right) \left\{ b + c \left(\frac{dy'}{dx'} \right) \right\}^2$$

.....

unde

$$\left(\frac{dy''}{dx''} \right) = \frac{b' + c' \left(\frac{dy'}{dx'} \right)}{b + c \left(\frac{dy'}{dx'} \right)}$$

$$\left(\frac{d^2y''}{dx''^2} \right) = \frac{\left(\frac{d^2y'}{dx'^2} \right) (bc' - b'c)}{\left\{ b + c \left(\frac{dy'}{dx'} \right) \right\}^3}$$

Hinc, substitutis valoribus $\left(\frac{dy'}{dx'} \right)$, $\left(\frac{d^2y'}{dx'^2} \right)$, b, c, b', c' , quibus signa (E), (F) adposuimus, et eliminato $\left(\frac{dy''}{dx''} \right)$, prodibit

$$(H) \left(\frac{d^2y''}{dx''^2} \right) = \frac{\sqrt{1+A^2+B^2}(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}} \{ r(q-B)^2 + 2s(A-p)(q-B) + t(A-p)^2 \}}{\{ A(A-p) + B(B-q) \}^3}$$

Jam flexus erit in puncto (x, y, z) sectionis, si $\left(\frac{d^2y''}{dx''^2} \right)$ evanuerit; quod accidere potest tum numeratore aequationis (H) in nihilum abeunte, tum denominatore in infinitum. Denominator in iufinitum excresceret, si altera duarum quantitatum A, B infinita pariter evaderet; at cum quantitas A, vel B infinita esset, numerator aequae, ac denominator in infinitum ejusdem ordinis abirent; igitur $\left(\frac{d^2y''}{dx''^2} \right)$, denominatore in infinitum excrescente, evanescere nequit. Quare numeratorem in nihilum redigi oportet, nempe ponere

$$\sqrt{1+A^2+B^2}(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \{r(q-B)^2+2s(A-p)(q-B)+t(A-p)^2\} = 0.$$

Factor $\sqrt{1+A^2+B^2}$ est hinc rejiciendus, quippe qui utcumque varientur A et B , nunquam evanescat. Neque altero factore $(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}$ uti possumus ideo, ut ei aequationi satisfaciamus; quantitas enim $(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}$ tum solum evanescit, cum una sint $A=0, B=0$; cum scilicet planum sectionis parallelum sit plano ordinarum x, y ; quo in casu nusquam est recta, in qua sumpsimus abscissas x' , ac proinde formulae superiores neque vim, neque sensum habent. Si igitur quantitates A et B hujusmodi fuerint, ut sit

$$(L) \quad r(q-B)^2+2s(A-p)(q-B)+t(A-p)^2=0,$$

sectiones superficiei, atque planorum

$$z'-z=A(x'-x)+B(y'-y)$$

in puncto (x, y, z) flexum habebunt.

9. Sed planum secans plano (x, y) parallelum non est praetercundum. Ad illud planum aequatio est $z'=z$; et aequatio ad superficiem, posito $z'=z$, vertitur in hanc

$$z=\varphi(x', y');$$

quae ad sectionem erit, nec non ad ejus projectionem in plano ordinarum x, y . Inde differentiatione bis peracta, atque postea substitutis x, y pro x', y' , elicitur

$$0=p+q \left(\frac{dy'}{dx'}\right)$$

$$0=r+2s \left(\frac{dy'}{dx'}\right)+t \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2+q \left(\frac{d^2y'}{dx'^2}\right)$$

seu

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{dy'}{dx'}\right) &= -\frac{p}{q} \\ \left(\frac{d^2y'}{dx'^2}\right) &= -\frac{(rq^2-2spq+tp^2)}{q^3} \end{aligned} \right.$$

Flexus itaque erit in puncto (x, y, z) sectionis parallelae plano ordinarum x, y , si fuerit

$$rq^2-2spq+tp^2=0.$$

Cum hac vero omnino congruit aequatio (L), positus $A=0$,

$B=0$; quapropter si in sectione plano (x, y) parallela flexus insit, si nempe sit

$$rq^2 - 2spq + tp^2 = 0,$$

aequationi (L) profecto satisfaciunt valores $A=0, B=0$. Ergo in aequatione (L) tum sectionum, quarum plana occurrunt plano ordinarum x, y , tum sectionis, cujus planum plano (x, y) parallelum est, flexus continentur.

10. Modo aequationem (L) resolvamus. Confecta divisione per $t(q-B)^2$, erit

$$\left(\frac{A-p}{q-B}\right)^2 + \frac{2s}{t}\left(\frac{A-p}{q-B}\right) + \frac{r}{t} = 0;$$

unde

$$\frac{A-p}{q-B} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}.$$

Hinc porro duo consequuntur.

1°. Si superficies ad primum genus pertineat, binae radices aequationis (L) sunt ambae imaginariae; et proinde nulla erit sectio superficierum primi generis, quae alicubi flexum habeat.

2° Infinitae numero sunt sectiones superficierum secundi generis, quae in quovis puncto flexum habent. Etenim ad plana, quae ejusmodi sectiones gignunt, ea erit aequatio, quae e binis aequationibus

$$\begin{cases} z' - z = A(x' - x) + B(y' - y) \\ \frac{A-p}{q-B} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t} \end{cases}$$

eliminato A , exoritur. Itaque binis valoribus $\left(\frac{A-p}{q-B}\right)$ una litera n promiscue notatis, habebimus

$$n = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}$$

$$A = p - Bn + qn;$$

et aequatio $z' - z = A(x' - x) + B(y' - y)$ evadet

$$(M) \quad z' - z = (p + qn - Bn)(x' - x) + B(y' - y);$$

quae, eo quod contineat quantitatem B prorsus indeterminatam, erit ad infinita numero plana, quorum sectiones flexum habent in puncto (x, y, z) superficiei concavo-convexae.

Corollarium I.

11. Ut clarius pateat, qui situs sit planis, quae amplectitur aequatio (M), pauca inquiramus de eorum intersectione cum plano superficiem secundi generis tangente in ipso puncto (x, y, z) . Ad eam intersectionem aequationes erunt

$$\begin{cases} z' - z = p(x' - x) + q(y' - y) \\ z' - z = (p + qn - Bn)(x' - x) + B(y' - y) \end{cases}$$

quarum prior ad planum tangens est, altera ad plana secantia. Inde eliminato $(z' - z)$ eruitur

$$(y' - y)(B - q) = n(x' - x)(B - q);$$

seu

$$y' - y = n(x' - x);$$

ideoque ad quaesitam intersectionem aequationes in has verti possunt

$$(N) \quad \begin{cases} y' - y = n(x' - x) \\ z' - z = (p + qn)(x' - x); \end{cases}$$

quae cum non pendeant ex indeterminata B , eadem perstant, utut valor B varietur. Hae autem ob binos valores n binas rectas exhibent. Quare infinita numero plana sectionum, quae in puncto (x, y, z) flexum habent, plano tangenti perpetuo occurrunt in altera binarum rectarum, ad quas sunt aequationes (N).

Corollarium II.

12. Si aequationes (N) cum iis contulerimus, quae essent ad binas rectas in puncto (x, y, z) tangentes lineam communem plano tangenti, et secundi generis superficiei (Prop. I), facile comperiemus cum illis absolute congruere. Quo inferitur, binas rectas in puncto (x, y, z) eam lineam communem tangentes, easdem esse atque illas, quarum alteram trajiciunt plana sectionum in eo puncto flexum habentium.

Corollarium III.

13. Ponamus, planum secans superficiem in puncto (x, y, z) ita moveri, ut continenter sit sibimetipsi parallelum, eoque motu in punctum $\{(x + \omega), (y + i)\}$ superficiei advenisse. Idcirco quantitates A et B non mutabunt; mutabunt vero p, q, r, s, t , quae in functiones ordinarum $(x + \omega), (y + i)$ se vertent. Itaque imaginamur, has quantitates in aequatione (H) functiones esse ordinarum $(x + \omega), (y + i)$, atque alteram ejus partem evolutam in seriem per dimensiones quantitatum ω , et i ordinatam. Primus terminus seriei idem erit, ac valor, quem habebat $\left(\frac{d^2 y''}{d x''^2}\right)$, dum per punctum (x, y, z) planum secans transibat: atque ideo incrementa ω , et i ita exigua statui poterunt, ut signum valoris $\left(\frac{d^2 y''}{d x''^2}\right)$ in puncto $\{(x + \omega), (y + i)\}$ posterioris sectionis idem sit, ac signum valoris $\left(\frac{d^2 y''}{d x''^2}\right)$ in puncto (x, y) prioris. Quare, si quibusdam planis inter se parallelis quaedam superficies secetur, sectiones omnes plano (x, y) concavitatem obvertent, vel omnes aequae convexitatem; non omnes tamen indefinite, neque in omnibus suis punctis; sed omnes eae, quae nonnullis terminis circumscribuntur, et in omnibus punctis iisdem terminis definitis. Haec conclusio penitus corrueret, ubi planum secans, quod a puncto (x, y, z) proficiscitur, et sibimetipsi parallelum progreditur, quiddam esset ex iis, quae alteram trajiciunt binarum rectarum in puncto (x, y, z) contingentium lineam communem superficiei secundi generis, et plano in eodem puncto superficiem tangenti.

Scholion.

14. Omnia, quae hactenus dicta sunt, eo potissimum spectant, ut forma universalis superficierum secundi generis nostris pene oculis subjiciatur. Sit igitur M Tab. XVI. fig. 1. quilibet punctum cujusvis superficiei concavo-convexae. OP,

PQ, QM coordinatae sint illius puncti; ABCD planum, quod eam superficiem in puncto M contingit. In plano (x, y) circa punctum Q describatur rectangulum $Q'Q''Q'''Q^{IV}$, cujus latera $Q'Q', Q'''Q^{IV}$ sint axi Ox parallela, caetera axi Oy: demum per hujus rectanguli latera erigantur quatuor plana ad planum (x, y) perpendicularia, quae superficiei, et plano tangenti occurrant in perimetris $M'M''M'''M^{IV}$, ABCD. Superficies eo, quod secundo generi adscribatur, planum tangens secare debebit (num. 2) in linea, quae punctum duplex habeat in ipso M; quamque ideo duobus ramis $mn, m'n'$ sese invicem secantibus in M conflata esse fingemus. In plano tangente ductis rectis $ab, a'b'$, quarum unaquaeque contingat unumquemque ramorum $mn, m'n'$, quaelibet sectio, uti ce , cujus planum utramvis earum rectarum trajiciat, in puncto M flexum habebit (num. 12). Caeterae autem sectiones, quarum in planis neutra jaceat rectarum $ab, a'b'$, in ipso M concavae erunt, aut convexae. Quare, si ponamus, quoddam planum transire per ordinatam MQ, et circa eandem converti, atque hanc conversionem ita fieri, ut planum vertens rectam Mb primo initio trajiciat, et sinistrorsum volvatur, in ipso motus exordio sectio plani vertentis flexum habebit in puncto M; verum simul ac motus inceperit, in puncto M subsequentium sectionum non inerit flexus; et si quaedam earum plano ordinarum x, y concavitatem obverterit, caeterae quoque eodem plano obvertent concavitatem, donec, plano secante per rectam Mb' transeunte, alia sectio exoriatur, quae iterum in puncto M flexum habebit. Conversione autem procedente, planum vertens inter rectas Mb' et Ma perveniet; atque hic sectiones omnes in puncto M plano ordinarum x, y convexitatem obvertent. Quod sic ostendo. In qualibet planorum secantium hypothese (num. 8) hujusmodi est valor $\left(\frac{d^2 y''}{dx''^2}\right)$, ut, cum positus sit aequalis zero, aequationem (L) praebeat, in qua $\left(\frac{A-p}{q-B}\right)$ binos habet valores reales et inaequales. Quare si $\left(\frac{A-p}{q-B}\right)$ continua variatione varietur, quantitas $\left(\frac{d^2 y''}{dx''^2}\right)$ e va-

lore positivo in negativum migrabit. At negativa est, cum planum vertens jaceat inter rectas Mb , Mb (hoc enim in casu sectiones omnes posuimus plano (x, y) concavitatem obvertere), et in nihilum redigitur, cum rectam Mb' illud planum consequatur; ergo, conversione ulterius pergente, $\left(\frac{d^2y''}{dx''^2}\right)$ in positivum abibit, et sectiones superficiei plano (x, y) convexitatem obvertent.

Hisce omnibus patet, superficiem quampiam secundi generis, si ex. gr. inter ramos Mn , Mn' sub plano tangente consistat, inter Mn' et Mm super planum id eminere, rursus ab eo sese demittere inter Mm et Mm' , ac demum inter Mm' et Mn super planum tangens se iterum attollere. Patet etiam, ad geminatum incrementum superficierum secundi generis Archimedis postulatum transferri non posse, cum si bini e quatuor ramis Mn , Mn' , Mm , Mm' in eo incremento jaceant, tum si unus tantum. Neque hoc minus tenet, ubi nullum ex iis ramis geminatum incrementum concludat; et quamvis incrementum illud concavum, aut convexum in puncto M merito dici posset, nobis tamen cavendum est, ne postulato Archimedis utamur. Positio enim variabilis puncti M ponere vetat, nullum ramorum Mn , Mn' , Mm , Mm' in geminato incremento jacere; et quod majus est, incrementum hoc, quantumcumque sit, cuivis plano concavitatem aequae, ac convexitatem in omnibus aliis suis punctis obvertit.

§. II.

De Archimedis Postulatis.

15. Non erit abs re paucis hic denarrare, quibus verbis Archimedis postulata Geometrae expresserint. Id ut facerem, non opportunitas solum allexit, sed quaedam etiam necessitas imperavit: quae enim sequentur, Archimedis postulatis, eorumque interpretationi aliquo modo nituntur.

Franciscus Maurolicus Siculus, celeber Geometra, in *Praeparatione*, quam operibus Archimedis praemisit, et jam ab anno MDXXXIV conscripsit, inter postulata recensuit illa duo,

quae adhuc ab Archimede nominamus. Ea sic expressit: (1)

« 2. Perimetrum figurae planae circumscribentis, vel includentis planam figuram, perimetro circumscriptae, aut inclusae esse majorem; si tamen ad easdem partes cavae fuerint.

« 4. Superficiem figurae solidae circumscribentis, aut includentis solidam quampiam figuram, superficie inscriptae, aut inclusae ad easdem partes cavae esse majorem ».

Verum quid essent lineae, quid superficies ad easdem partes cavae, *Maurolicus* non definiit; eo fortasse quia satis perspicuum esse, quid illae voces sonent, arbitratus sit. Sed quod *Maurolius* praeteriit, id factum est ab illustri *Barrow*, cujus verba referre placet: (2)

« II. Ad easdem vero partes cavam appello ejusmodi lineam, in qua sumptis utcumque duobus punctis, quae iis interjacent rectae vel omnes ad easdem lineae partes cadunt, vel aliquae quidem ad easdem, quaedam vero secundum ipsam, sed ad diversas nulla.

« IV. In easdem vero partes cavas ejusmodi voco superficies, in quibus si duo sumantur puncta, quae punctis interjacent rectae vel omnes ad easdem superficiei partes cadunt, vel quaedam ad easdem, quaedam vero secundum illas, in diversas autem nulla. »

Cum autem definitio II. subobscura videretur, in Scholio *Barrow* adjecit: « certum esse cavitatis in easdem partes contiguatae signum, si nulla recta lineam pluribus, quam duobus punctis secet. » Hanc declarationem, vel potius definitionem alteram e lineis ad easdem partes cavis ad superficies pariter cavas ad easdem partes deducere noluit. In postulatis autem, uti *Maurolicus* fecerat in primo, haec ille subdidit: *modo sint ambae* (lineae, superficiesve) *ad easdem partes cavae*: et nimia forsitan usus subtilitate poposcit etiam, ut linearum termini, atque superficierum in uno, eodemque plano jacerent.

(1) Admirandi Archimedis Syracusani Monumenta omnia Ex Traditione doctissimi viri D. Francisci Maurolici — Panormi 1685.

(2) Archimedis Opera illustrata. Js. Barrow. Londini 1675.

Deinde inter axiomata omnes Geometrae Archimedis postulata acceperunt, et iisdem pene verbis, quibus *Maurolicus* usus fuerat, exposuerunt; uno tantum excepto celeberrimo *Legendre*, qui libentius, et meliori consilio *Barrow* sequutus est. *Legendre* enim definitiones postulatis praeposuit, et lineas aequae, ac superficies ad easdem partes cavas eodem definivit pacto, quo *Barrow* lineas in suo Scholio. Verum etiam *Maurolico* accessit: nam solam lineam, vel superficiem circumscriptam ad easdem partes cavam esse voluit; quod *Siculus Geometra* in superficie inclusa solummodo postulavit. Nomina autem utiliter contraxit; superficies enim *convexas* eas appellavit, quibus nulla recta pluribus, quam duobus punctis occurreret. Sed mihi, ni fallor, inter superficies *convexas*, et superficies in easdem partes cavas aliquid discriminis intercedere videtur. Et sane superficies *convexae* sunt Hyperbolicis hyperbolica, et Parabolicis hyperbolica, quippe quae a quavis recta in duobus tantum punctis secantur; sed inter superficies, quas ad easdem partes cavas vocavit *Barrow*, recenseri eo nequeunt, quod in quovis earum puncto sectiones quaedam concavitatem, quaedam vero convexitatem uni, eidemque plano obvertant; et proinde ita quatuor puncta sumi possint, ut quae binis eorum interjacet recta ad quasdam partes cadat, et quae binis aliis, ad diversas. (1) Igitur superficies, quibus *Legendre convexarum* nomen imposuit, non eas solum completuntur, quas *cavas ad easdem partes Maurolicus*, et *Barrow* nuncupaverunt, sed nonnullas etiam earum, quae cuivis plano concavitatem, et una simul convexitatem obvertunt; in quibus scilicet non undique assumi ita possunt duo puncta, ut quae iis interjacent rectae omnes ad easdem superficiei partes cadant.

(1) Ad Hyperboloidem hyperbolicam, cum axes sint diametri conjugatae, aequatio est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

et ad Paraboloidem hyperbolicam

$$Ay^2 - Bz^2 + Cx = 0.$$

Porro superficies omnes, quibus planum tangens in duabus rectis occurrit, sane *convexae* sunt, non autem *cavae ad easdem partes*. Ex eo enim, quod a plano tangente secentur, perspicue patet, ad easdem partes non esse cavas. Convexas vero esse eo facile colligitur, quod superficies illae plano tangenti in binis rectis occurrunt. Nam binae rectae tangentes intersectionem plani tangenti, et cujusdam ex illis superficiebus, cum iis duabus rectis congruent; ac proinde unumquodque planum, quod earum utramvis trajiciat, in eadem recta superficiem secabit: quare nulla erit sectio, quae in quovis ejusdem superficiei puncto flexum habeat reipsa, neque recta nulla erit, quae superficiei in tribus punctis occurrat. Sed me latet, an praeter binas, quas dudum commemoravi superficies, aliae sint, quae planum tangens in duabus pariter rectis secent.

16. Verum *Legendre* eo commendandus maxime est, quia Archimedis postulata ab axiomatum numero disjunxerit, et inter theoremata recensuerit. Ad superficies quod attinet, duobus Lemmatibus, ex quibus Elementorum liber VIII initium ducit, illa duo demonstrat. Primum; superficies plana minor est qualibet alia superficie in eadem perimetro terminata. Secundo; quaevis superficies *convexa* minor est qualibet alia superficie, quae *convexam* circumscribat, et uni, eidemque perimetro incumbat. Atque hic nonnulla animadvertere praestat. In prioris Lemmatis demonstratione *Legendre* ponit, duarum superficierum eam esse minorem, cujus sectiones sint quoquo-versum minores. In Lemmate autem posteriore per quodlibet punctum superficiei convexae planum ducit, vel duci fingit, quod superficiem contingat, et nusquam alibi secet. Quae constructio ostendere videtur, statutum habuisse animo *Legendre*, superficies convexas cum superficiebus ad easdem partes cavis congruere; quamquam ejus definitio tum cavas ad easdem partes, tum alius generis superficies complecteretur.

§. III.

Lemmata.

17. Quo postulato, seu axiome in priore Lemmate usus *Legendre* est, nos etiam utemur ad limites geminati incrementi superficierum secundi generis praefiniendos. Illud nempe nobis concedatur, velimus. Duarum superficierum ea minor est, cujus sectiones sunt quoquoersum minores. Sed antequam ad rem venio, lemmata quaedam ponere juvat, ne postea nobis de quadratura superficierum tractantibus sit saepius haerendum.

Lemma. I.

18. Angulum determinare, quem cum axe Ox (Tabula XVI. Fig. 2.) continet recta MT , quae in puncto M contingit lineam curvam MN relatam ad axes Ox , Oy angulum quemvis inter se comprehendentes.

Sint $OP = x$, $MP = y$ coordinatae puncti M ; angulus $\angle POx = \beta$; $MP' = y'$, $OP' = x'$ ejusdem puncti M coordinatae, ubi axis Oy in Oy' ad axem Ox perpendicularem abeat; demum ponamus $\angle MTP = \alpha$. Cum axes essent Oy' , Ox' , angulus α hac aequatione definiretur

$$\text{tang. } \alpha = \left(\frac{dy'}{dx'} \right).$$

At inter x', y' et x, y hae binae relationes intercedunt

$$\begin{cases} y' = y \sin. \beta \\ x' = x + y \cos. \beta; \end{cases}$$

e quibus ope differentiationis eruitur

$$\begin{cases} \left(\frac{dy'}{dx} \right) = \left(\frac{dy}{dx} \right) \sin. \beta \\ \left(\frac{dx'}{dx} \right) = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right) \cos. \beta; \end{cases}$$

ideoque

$$\left(\frac{dy'}{dx'}\right) = \left(\frac{dy'}{dx}\right) : \left(\frac{dx'}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right) \sin. \beta}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right) \cos. \beta}.$$

Igitur, axibus Ox , Oy angulum β comprehendentibus, angulo MTP definiendo haec inservit aequatio

$$\text{tang. } \alpha = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right) \sin. \beta}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right) \cos. \beta}.$$

Corollarium.

Hinc si exprimere volueris quantitatem $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ per angulos α , et β , habebis

$$(O) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\text{tang. } \alpha}{\sin. \beta - \cos. \beta \text{ tang. } \alpha}.$$

Lemma II.

19. Quaedam linea MN relata sit ad axes Ox , Oy (Tab. XVI. fig. 2.) quemlibet angulum β inter se comprehendentes. Differentiale arcus ejusdem lineae quaeritur.

Posito arcu $AM = s$, et linea MN ad axes orthogonios Oy' , Ox' relata, erit

$$\left(\frac{ds}{dx'}\right) = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right\}}.$$

At hic rursus habemus, ut in num. praec.

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{dy'}{dx}\right) &= \left(\frac{dy}{dx}\right) \sin. \beta \\ \left(\frac{dx'}{dx}\right) &= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right) \cos. \beta \end{aligned}\right.$$

et praeterea

$$\left(\frac{ds}{dx'}\right) = \left(\frac{ds}{dx}\right) : \left(\frac{dx'}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dy'}{dx'}\right) = \left(\frac{dy'}{dx}\right) : \left(\frac{dx'}{dx}\right)$$

aequatio igitur

$$\left(\frac{ds}{dx'}\right) = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right\}}$$

factis rite substitutionibus, evadet

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) : \left(\frac{dx'}{dx}\right) = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 : \left(\frac{dx'}{dx}\right)^2\right\}};$$

seu

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2\right\}};$$

ac demum

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) \cos. \beta\right\}}.$$

Lemma III.

20. Per punctum M (Tabula XVI. Fig. 3.) lineae cujuslibet AM ducta quavis recta MS, arcum MN ejus lineae ita exiguum statui possumus, ut, ducta per N recta NR, quae cum MS angulum quempiam β contineat, sit

$$MR + RN > MN.$$

Linea MN ad binos axes Ox, Oy in plano lineae positos, et binis rectis MS, NR parallelos referatur; atque sint $MP = y, OP = x, PQ = \omega$. Ponamus primo, lineam MN ita jacere, ut crescente abscissa, crescat et ordinata. Hoc posito, obtinebimus

$$MR = \omega$$

$$NR = y_{x+\omega} - y_x = \left(\frac{dy}{dx}\right)\omega + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2} + \dots;$$

et arcus MN habitus pro differentia duorum arcuum $AM = s_x$

$AN = s_{x+\omega}$, erit $= \left(\frac{ds}{dx}\right)\omega + \left(\frac{d^2s}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2} + \dots$. Cum autem

axes angulum β contineant, est (lem. II.)

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) \cos. \beta\right\}};$$

ideoque

$$MN = \omega \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta\right\} + \left(\frac{d^2s}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2} + \dots}$$

Demonstrare igitur oportet, quantitatem ω ita exiguam statui posse, ut sit

$$\omega + \omega \left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2} + \dots > \omega \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta\right\} + \left(\frac{d^2s}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2} + \dots}$$

seu posito

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2s}{dx^2}\right) = D,$$

$$\omega \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right) - \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta\right\}}\right\} + D\omega^2 + \dots > 0.$$

Hic si valorem ω positivum, et ita exiguum censebimus, ut primus seriei terminus caeterorum summam excedat, tota series positiva erit, modo sit

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right) > \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta\right\}}.$$

Verum positivus est valor $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, (posuimus enim crescente x , crescere et y) multoque magis $\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$; positivus pariter habendus est valor $\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta\right\}}$, quippe qui arcus magnitudinem solam respiciat; utramque ideo inaequalitatis partem ad potestatem secundam evehere, salva inaequalitate, licebit. Quare erit

$$1 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 > 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta,$$

sive

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) > \left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta,$$

et, divisione per valorem positivum $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ peracta,

$$1 > \cos.\beta.$$

In hanc inaequalitatem vertitur $MR + RN > MN$; atqui ea vera est, quisquis valor tribuatur angulo β , si tantum excipias $\beta = 0$, quem profecto excipere eo debemus, quod rectae MR , NR nusquam sibi invicem occurrerent: ergo, cum fuerit $\left(\frac{dy}{dx}\right) > 0$, rectam MR , ideoque arcum MN ita exiguum statui possumus, ut sit

$$MR + RN > MN.$$

Ponamus secundo, crescente abscissa x , decrescere ordinatam y , nempe esse $\left(\frac{dy}{dx}\right) < 0$. Hac in hypothesis erit (Tab. XVI. fig. 4.)

$$MR = \omega$$

$$NR = y_x - y_{x+\omega} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)\omega - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2} + \dots$$

$$MR + NR = \omega \left\{ 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\} + \dots$$

$$MN = \omega \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta} + \dots;$$

et ostendere debemus

$$\omega \left\{ 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\} + \dots > \omega \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta} + \dots;$$

quae inaequalitas ad hanc reduci potest

$$1 - \left(\frac{dy}{dx}\right) > \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta}.$$

Jam cum sit $\left(\frac{dy}{dx}\right) < 0$, valor $\left\{ 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\}$ positivus erit; positivus aequè est valor $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta}$; a signo igitur radicali alteram inaequalitatis partem exsolvere possumus, utramque partem ad potestatem secundam evehendo. Unde erit

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right) > \left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\beta$$

sen

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right)(1 + \cos. \beta) > 0;$$

cumque sit $\left(\frac{dy}{dx}\right) < 0$, idest valor $-\left(\frac{dy}{dx}\right)$ positivus, erit
 $1 + \cos. \beta > 0$.

Huic inaequalitati satisfacit quilibet valor anguli β , solummodo excepto valore $\beta = 180^\circ$, quem ipsa respuit propositio. Itaque, cum fuerit $\left(\frac{dy}{dx}\right) < 0$, arcum MN etc.

Tertio. Sit demum $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$: tum in rectam, quae lineam MN in puncto M contingit, abit ipsa MS axi Ox parallela. Jam prout infra contactum linea MN concavitatem, vel convexitatem axi Ox obverterit, crescente abscissa, decrescent ordinatae (Tab. XVI. fig. 5), vel crescent (Tab. XVI. fig. 6). Cum fuerit $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, et decreverint ordinatae, erit

$$MR + RN = \omega + (y_x - y_{x+\omega})$$

sive

$$MR + RN = \omega - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{\omega^2}{2} + \dots,$$

et arcus s differentialia

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) \cos. \beta \right\}}$$

$$\left(\frac{d^2s}{dx^2}\right) = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \left\{ \left(\frac{dy}{dx}\right) + \cos. \beta \right\}}{\sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) \cos. \beta \right\}}}$$

evadent

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = 1$$

$$\left(\frac{d^2s}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \cos. \beta;$$

ac proinde

$$MN = \omega + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \cos. \beta \cdot \frac{\omega^2}{2} + \dots$$

Quapropter inaequalitas $MR + RN > MN$ fiet

$$\omega - \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \frac{\omega^2}{2} + \dots > \omega + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \cos. \beta \cdot \frac{\omega^2}{2} + \dots$$

seu

$$-\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) (1 + \cos. \beta) \cdot \frac{\omega^2}{2} + \dots > 0.$$

Rursus sumere possumus ω ita exiguum, ut ea inaequalitas ver-
tatur in hanc

$$-\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) (1 + \cos. \beta) > 0,$$

quae natura sua adimpletur; valor enim $-\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$ positivus est, ubi linea MN axi Ox cavitatem obvertit, positivus et valor $(1 + \cos \beta)$, modo, ut oportet, angulus β gradus 180 minime pertingat.

Si autem fuerit $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, et ordinatae y creverint (Tab. XVI. fig. 6), habebimus

$$\begin{aligned} MR + RN &= \omega + (y_{x+\omega} - y_x) = \\ &= \omega + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \frac{\omega^2}{2} + \dots; \end{aligned}$$

et, sicut antea,

$$MN = \omega + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \cos. \beta \cdot \frac{\omega^2}{2} + \dots$$

Idcirco haec series excedet priorem, si

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) (1 - \cos. \beta) > 0;$$

at positivus est valor $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$, cum convexitatem axi linea obvertat, positivus et $(1 - \cos \beta)$; propositio enim valorem $\beta = 0$

rejeit. Ergo, cum fuerit $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, arcum MN ita exiguum etc.

Quod si $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ in infinitum excreverit, satis erit axes inter se commutare, ut in quemdam reveniamus ex iis casibus, quos modo consideravimus. Neque id, cui demonstrando operam damus, minus valebit, etiamsi $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ una evanescerent. Quibus omnibus inferitur, ita exiguum statui posse arcum MN, ut sit

$$MR + RN > MN.$$

Scholion.

21. Hanc propositionem magis universalem reddere possumus. Sed prius animadvertere praestat eam interruptionem, quae inest in formulis analyticis magnitudinem $(MR + RN)$ repraesentantibus. Magnitudo enim $(MR + RN)$, quae aequabatur $\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\}^{\theta} + \dots$, ubi valor $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ positivus erat, vertitur in $\left\{ 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right) \right\}^{\theta} + \dots$, cum $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ in negativum migrat; adeo ut altera formularum non solum alteram non contineat, sed penitus rejiciat. Interruptio illa ex eo oritur, quod magnitudo $(MR + RN)$ tum vere exprimatur, cum differentia ordinarum $y_x, y_{x+\theta}$ ita notetur, ut evadat positiva. Quare ad magnitudinem $(MR + RN)$ rite exprimendam non utraque formularum $(y_{x+\theta} - y_x)$, $(y_x - y_{x+\theta})$ uti licebit, sed prior inserviet, si crescente abscissa, crescant et ordinatae; si decrescant, posterior. Itaque sumpto quovis arcu MN (Tab. XVI. fig. 7) hac tantum conditione, ut in omnibus suis punctis valori $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ unum, et idem signum praefigatur, inferri poterit

$$MR + RN > MN.$$

Resoluta enim linea recta MR in tot, ac ita exiguas lineolas, ut habeatur

$$MR_1 + R_1 M_1 > MM_1$$

$$M_1 r_1 + r_1 M_1 > M_1 M_1$$

$$M_1 r_1 + r_1 M_1 > M_1 M_1$$

$$M_1 r_1 + r_1 M_1 > M_1 M_1$$

additis inaequalitatibus, erit

$$MR + RN > MN.$$

Locus ipse monere videtur, ne quaerere obliviscamur, quemadmodum distingui possit, utrum valor $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ unum, idemque signum servet, an e positivo in negativum migret. Ex aequatione (O) Lemmatis primi leviter eruitur, valorem $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ tum solum evanescere, vel in infinitum abire, cum angulus α in nihilum redigatur, vel aequetur angulo β . Quamobrem valor $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e positivo in negativum abire non poterit, nisi angulus α transeat per 0, vel valorem β consequatur. Atqui cum sit $\alpha = 0$, aut $\alpha = \beta$, recta tangens arcum MN (Tab. XVI. fig. 2.) alteri axium Ox , Oy parallela est: ergo in omnibus punctis arcus MN valor $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ unum signum servabit, si nulla rectorum ipsum arcum MN in quolibet ejus puncto tangentium sit utrivis axi parallela. Idest ii arcus MN (Tab. XVI. fig. 7), quorum in quolibet puncto rectae tangentes nusquam sint utrivis rectorum MR, RN parallelae, earundem summa minores sunt.

Neque illa duo praetereunda. Primum. Couditio, cui rectorum tangentes satisfacere debent, quamvis omnia arcus puncta utique respiciat, ejus tamen terminos non spectat; in quibus rectorum tangentes cum altera rectorum MR, RN congruere possunt. Secundo. Etsi arcus in quolibet suo puncto flexum haberet, eadem nihilominus valebunt.

Lemma IV.

22. Per quodlibet punctum cujusvis superficiei duci potest recta, quae superficiem in eo puncto contingat, ac dato plano parallela sit.

Ducatur planum in illo puncto superficiem tangens, atque producatum usque eo, quod dato plano occurrat; per idem punctum, et in plano tangente agatur recta intersectioni eorum planorum parallela. Perspicue patet, rectam hanc dato plano parallelam esse, et superficiem in dato puncto contingere.

Quod si planum, cui recta esse debet parallela, plano superficiem in dato puncto tangenti parallelum fuerit, tunc non una solum recta per punctum contactus ducta, sed eae etiam numero infinitae, quae in plano tangente jacerent, dato plano parallelae essent, et superficiem in dato puncto contingerent.

Sed hoc idem per calculos tractari juvabit. Sint x', y', z' cujuslibet puncti M superficiei coordinatae; ad superficiem aequatio sit

$$z' = \phi(x', y'),$$

et ad quodcumque datum planum

$$z'' = Ax'' + By'' + C.$$

Per punctum igitur (x', y', z') recta ducenda est, quae plano $\{z'' = Ax'' + By'' + C\}$ sit parallela, et superficiem $\{z' = \phi(x', y')\}$ in eo puncto contingat. Ponamus, rectam quam quaerimus, adeo sitam esse, ut ad planum projectionis suae in plano ordinarum x', y' aequatio sit

$$y'' - y' = n(x'' - x').$$

Planum hoc superficiem secabit in linea, quam hae binae aequationes definiunt

$$\begin{cases} y'' - y' = n(x'' - x') \\ z'' = \phi(x'', y'') \end{cases}$$

et proinde ad rectam, quae in puncto (x', y', z') superficiem contingit, aequationes erunt (num. 5)

$$\begin{aligned} (y'' - y' &= n(x'' - x')) \\ (z'' - z' &= \{p_{x',y'} + nq_{x',y'}\}(x'' - x')). \end{aligned}$$

Modo quantitati n ejusmodi valor tribuendus est, ut recta dato plano sit parallela; quod profecto accidet, si aequationi

$$(P) \quad A + Bn = p_{x',y'} + nq_{x',y'}$$

satisfecerimus; si videlicet sumpserimus

$$n = - \left(\frac{p_{x',y'} - A}{q_{x',y'} - B} \right).$$

Scholion.

23. Planum $\{y'' - y' = n(x'' - x')\}$, quod superficiem secat, et rectam quaesitam trajicit, locum ita determinatum teneat, ut quemdam angulum cum plano ordinarum z, x comprehendat, et per quoddam transeat punctum superficiei aliud ab eo, in quo recta tangens sectionem parallela est dato plano. Quamquam plani secantis ad planum (z, x) inclinatio constans esset, atque determinata, plani tamen situs variabit, punctum superficiei variando, quod illud planum trajicere debet. Sed ambas ordinatas x, y illius puncti variables sumere non expedit; altera enim earum pro variabili habita, planum secans eo, quo velimus, perducere possumus. Sit igitur γ ordinata puncti, per quod planum $\{y'' - y' = n(x'' - x')\}$ transire debeat; β variabilis quaepiam, et $(x + \beta)$ ipsius puncti abscissa. Cum punctum $\{x + \beta, \gamma\}$ in plano sectionis jaceat, habebitur

$$y - \gamma = n(x + \beta - x'),$$

seu

$$(1) \quad y' - \gamma = n(x' - x - \beta);$$

cumque punctum sit superficiei,

$$(2) \quad z' = \phi(x', y');$$

quibus duabus est adjungenda aequatio

$$(P) \quad A + Bn = p_{x',y'} + nq_{x',y'}.$$

Sic datis n, β, γ, x , tribus his aequationibus inveniri poterunt

coordinatae puncti sectionis, in quo recta tangens plano dato parallela est.

Corollarium I.

24. Si valor n unus, et idem perstet, et quantitas β varietur, planum secans sibiinmetipsi semper parallelum movebitur, locusque geometricus punctorum, in quibus rectae sectiones tangentes parallelae sunt dato plano $\{z' = Ax'' + By'' + C\}$, his aequationibus continebitur

$$(Q) \quad \begin{cases} z' = \phi(x', y') \\ A + Bn = p_{x', y'} + nq_{x', y'}; \end{cases}$$

quippe quae a variabili β nullo modo pendent.

Corollarium II.

25. Rectae tangentes propterea, quod dato plano sint parallelae, et in planis secantibus parallelis jaceant, sunt quidem inter se parallelae, utraque utriusque, et quamdam superficiem cylindricam efficiunt, quae superficiem $\{z' = \phi(x', y')\}$ contingit in linea aequationibus (Q) definita. Nunc imaginamur, plana secantia circa rectas tangentes volvi, atque uno, eodemque angulo a sua prima positione omnia declinare. Facile intelligitur, plana in posteriorem positionem perducta eo adhuc parallela perstare, quia tum rectae, per quas transeunt, sint inter se parallelae, tum parallela sint plana, quibuscum eundem angulum comprehendunt. Patet etiam, posteriores sectiones ab eisdem rectis, quae priores contingebant, in iisdem punctis contingi. Quare locus geometricus punctorum, in quibus rectae tangentes posteriores sectiones sunt dato plano parallelae, idem est, atque locus punctorum, in quibus rectae tangentes priores sectiones eidem dato plano parallelae sunt. Haec ut teneant, solummodo oportet, ut communis intersectio plani cujuscumque priorum sectionum, atque cujuscumque posteriorum sit dato plano parallela. Data igitur planorum secantium ad axes inclinatione, si locum geometricum punctorum, in quibus rectae superficiei sectiones tangentes sint dato plano pa-

rallae, construere voluerimus; ducto quodam ex planis secantibus, per rectam, in qua planum hoc dato plano occurrit, ducebimus planum ad planum ordinarum (x, y) perpendiculare, et locus geometricus punctorum, in quibus haec sectiones ad planum (x, y) perpendiculares a rectis dato plano parallelis continguntur, idem erit ac locus, qui sectiones respiciet datam ad axes inclinationem habentes. Quae omnia eorum locorum constructionem, quaecumque sit sectionum ad axes inclinatio, non solum facilem reddunt, sed nos etiam a molestia eximunt, quae gravis nobis fuisset, si calculos ad sectiones quaslibet transferre voluissemus.

Corollarium III.

26. Planum, cui rectae superficiem tangentes parallelae sunt, cum eo congruat, quod superficiem in puncto (x, y) contingit. Hic erit

$$A = p_{x, y} ; \quad B = q_{x, y} ;$$

ac proinde aequationes superiores (num. 23) in has convertentur

$$(1) \quad y' - y = n(x' - x - \beta)$$

$$(2) \quad z' = \phi(x', y')$$

$$(3) \quad p_{x, y} + nq_{x, y} = p_{x', y'} + nq_{x', y'}$$

His tribus aequationibus, datis n, β, y, x , cognosci potest, cujus magnitudinis esse debeant coordinatae x', y', z' puncti, in quo recta sectionem tangens parallela est plano superficiem tangenti. Quod si planum secans sibimetipsi semper parallelum moveatur, aequationes (2), (3) ad locum erunt punctorum, in quibus rectae sectiones tangentes sunt illi plano tangenti parallelae. Hic geometricus locus per contactus punctum transibit: valores enim x, y si pro x', y' in aequationibus (2), (3) transferantur, ipsas veras reddunt, quisquis sit valor quantitatis n .

27. Sed videamus etiam, quibus conditionibus accidat, ut per idem superficiem punctum (x, y) transeat et locus punctorum, in quibus rectae dato plano $\{z'' = Ax'' + By'' + C\}$ parallelae contingunt superficiem sectiones, quas variando β pla-

num $\{y'' - y = n(x'' - x - \beta)\}$ perpetuo generat. Ad eum locam aequationes sunt (num. 24)

$$(Q) \quad \begin{cases} z' = \phi(x', y') \\ \Lambda + nB = p_{x', y'} + nq_{x', y'}; \end{cases}$$

ideoque punctum (x, y) superficiei in eo loco geometrico erit, si fuerit

$$(R) \quad \Lambda + nB = p_{x, y} + nq_{x, y}.$$

At posita hac aequalitate, aequationes (Q) cum aequationibus (2), (3) probe congruunt. Ergo si quaedam superficies planis parallelis secetur, puncta sectionum, in quibus rectae eas sectiones tangentes sunt dato plano parallelae, lineam constituunt quae per datum superficiei punctum transibit, ubi eae rectae fuerint quoque parallelae plano superficiem in dato puncto tangenti.

Atque illud etiam colligere possumus. Locus geometricus punctorum, in quibus rectae sectiones tangentes sunt dato plano parallelae, si per quoddam punctum transiverit, idem erit ac locus punctorum, in quibus rectae easdem sectiones tangentes parallelae sunt plano in eo puncto superficiem tangenti.

28. Antequam finem huic lemmati faciam, unum de aequalitate (R) attingere praestat. Inter plana secantia parallela illud seligo, quod superficiem in puncto (x, y, z) trajicit; et quaero, quae sint aequationes ad illius intersectionem cum plano in ipso puncto superficiem tangente. Ex aequationibus ad ea bina plana

$$\begin{cases} y' - y = n(x' - x) \\ z' - z = p_{x, y} \cdot (x' - x) + q_{x, y} \cdot (y' - y) \end{cases}$$

elicio

$$\begin{cases} y' - y = n(x' - x) \\ z' - z = \{p_{x, y} + nq_{x, y}\}(x' - x); \end{cases}$$

et hae erunt aequationes ad intersectionem plani secantis in puncto (x, y, z) , et plani in eodem puncto superficiem tangentis. Per idem punctum (x, y, z) planum duco ei plano parallelum, cui rectae tangentes parallelae esse debent; et pari-

ter quaero, quibus aequationibus exprimat intersecio hujus plani cum eodem plano secante. Modo aequationes erunt

$$\begin{cases} y' - y = n(x' - x) \\ z' - z = A(x' - x) + B(y' - y) \end{cases}$$

unde

$$\begin{cases} y' - y = n(x' - x) \\ z' - z = (A + Bn)(x' - x). \end{cases}$$

Cum vero aequalitas (R) vera sit, hae binae aequationes cum binis superioribus congruunt, ac proinde tum prior intersecio, tum posterior in unam rectam sese colligunt. Hinc illud consequitur. Ut linea, ad quam sunt aequationes (Q) per quoddam superficiei punctum transeat, necesse est, ut et planum in eo puncto superficiem tangens, et illud inter plana secantia, quod per id punctum transit, et planum dato plano parallelum per idem punctum ductum in una, eademque recta sese invicem secent: ut scilicet parallelae sint binae interseciones cujuslibet plani secantis cum plano in eo puncto superficiem tangente, cumque illo plano, cui rectae tangentes parallelae esse debent.

§. IV.

Quadratura superficierum curvarum ad secundum genus spectantium.

29. Descendamus jam ad limites geminati incrementi superficierum, quae ad secundum genus pertineant. Sit M (Tab. XVII fig. 8.9. 10) quodlibet ejusmodi superficiei punctum, cujus situm praefiniant coordinatae orthogoniae $OP = x$, $PQ = y$, $MQ = z$. Sumpto $PP' = o$, et $Q'Q'' = i$, et constructo rectangulo $QQ'Q''Q'''$, per ejus latera erigantur quatuor plana ad planum ordinarum x, y perpendicularia. Haec plana a superficie geminatum incrementum $MM'M''M'''$ segregabunt, et parallelogrammum $ABCM$ a plano tangente. E quatuor ramis lineae superficiei et plano tangenti communis ii in superficie describantur, quos geminatum incrementum intercludit. Ideo si fingamus plano $ABCD$ (Tab. XVI. fig. 1.) parallelogrammum $MABC$ ita superimponi, ut congruant puncta eadem littera

M notata, sane accidit, ut vel nullus ramorum (Tab. XVII. fig. 8), vel unus tantum (Tab. XVII. fig. 9.), vel bini ad summum (Tab. XVII. fig. 10) in geminato incremento ceciderint. Neque poterit incrementum $MM'M''M'''$ tres ex iis ramis a puncto M exeuntes complecti; hoc enim si posueris, statim intelliges, intra angulum M parallelogrammi rectas tangentes ab , et Mb' inesse debere: quod est absurdum. Verum enim vero in geminato incremento una cum duobus ramis Mm , Mn' pars quaedam alius rami Mn jacere posset; sed ea pars nequaquam cum puncto M continuaretur, atque inter quodlibet ejus partis punctum, et punctum M finita intercederet distantia. Idcirco ita exiguos in posterum statuemus valores ω et i , ut in geminato incremento nullus ex iis ramis cadat, qui cum puncto M non continuantur. Si autem bini rami in geminato incremento jacentes in nodum sese mutuo vinciant, de novo postulamus, ut quantitates ω et i ita exiguae sint, ne in geminato incremento nodus ille claudatur. Volumus etiam, ramos, quos incrementum complectitur, in altero desinere laterum AB, BC parallelogrammi MABC.

30. Hisce positis imaginamur, geminatum incrementum $MM'M''M'''$ secari plano, quod sibimetipsi parallelum moveatur. In quavis sectione quoddam punctum erit, aut esse poterit, in quo recta sectionem tangens sit plano superficiem in M tangenti parallela; aliud quoque, et tertium erit punctum, vel esse poterit, quorum in utroque recta sectionem tangens parallela sit utrique plano $Q'M''$, $Q'M$. Locus geometricus punctorum, in quibus rectae successivas sectiones tangentes plano MABC sunt parallelae, erit linea quaedam Mp , quae (num. 26) per punctum M transibit. Contra loca punctorum, in quibus rectae easdem sectiones tangentes sunt plano $Q'M''$, vel plano $Q'M$ parallelae, punctum M non comprehendunt (num. 28); nisi si binae intersectiones plani secantis cum plano tangente, cumque altero planorum $Q'M''$, $Q'M$ parallelae essent. Atque hic exiguitate quantitatum ω et i ad voluntatem variabili rursus utemur. Petimus scilicet haec tria.

Primum, ut nulla linearum, quae sunt loca punctorum, in quibus rectae sectiones tangentes planis $Q'M''$, $Q'M$ parallelae sunt, in geminato incremento jaceat.

Secundo, ut linea Mp tota ad easdem partes plani tangentis $MABC$ cadat: et in geminato incremento ex abscissa x pergat ad abscissam $(x + \vartheta)$.

Tertio, ut nullam ejus lineae partem, quae cum puncto M non continuaretur, geminatum incrementum complectatur.

Demum recta axi Ox semper parallela perpetuo motu lineam Mp percurrat, ac superficiem cylindricam gignat, quae planum tangens secet in linea Mq .

31. Primum dico, parallelogrammum $MABC$ minus esse, quam summam, quae fit in unum colligendo superficiem $MM'M''M'''$, atque areas, quas parallelogrammi latera et lineae MM' , $M'M''$, $M''M'''$, $M'''M$ a quatuor planis QM' , $M'Q''$, $Q''M'''$, $M'''Q$ abscindunt. Id ut pateat, nostra quidem opera non indiget; *Legendre* enim in primo lemmate libri VIII hoc vel ipsum demonstravit. Quare, ubi in geminato incremento nullus ramorum inerit lineae, in qua superficiei planum tangens occurrit, habebimus

$$MM'M''M''' > \left\{ \begin{array}{l} MABC - MAM' - M'ABM'' + \\ -M''BCM''' - M'''CM \end{array} \right\}; \quad (\text{Tab. XVII. fig. 8.})$$

et ubi unus tantum ad latus AB terminatus

$$MM'M''M''' > \left\{ \begin{array}{l} MABC - MAM' - M'An - nBM'' + \\ -M''BCM''' - M'''CM \end{array} \right\}; \quad (\text{Tab. XVII. fig. 9.})$$

ac demum si bini adfuerint ambo terminati ad latus AB

$$MM'M''M''' > \left\{ \begin{array}{l} MABC - MAM' - M'An - npn'n + \\ -n'BM'' - M''BCM''' - M'''CM \end{array} \right\}; \quad (\text{Tab. XVII. fig. 10.})$$

32. Secundo dico, superficiem curvam $MM'M''M'''$ minorem esse summa, quae fit in unum colligendo parallelogrammum $MABC$, et areas planas, quae lateribus parallelogrammi, et lineis MM' , $M'M''$, $M''M'''$, $M'''M$ e quatuor planis QM' , $M'Q''$, $Q''M'''$, $M'''Q$ abscinduntur; nec non superficiem cylindricam $MpqM$ toties repetitam, quoties libuerit; si forte lineam Mp geminatum incrementum complexum fuerit. Vide licet nobis est demonstrandum, esse

$$MM'M''M''' < \left\{ \begin{array}{l} MABC + MAM' + M'ABM'' + \\ + M''BCM''' + M'''CM + r(MpqM) \end{array} \right\}; \text{ (Tab. XVII. fig. 8)}$$

$$MM'M''M''' < \left\{ \begin{array}{l} MABC + MAM' + M'An + nB'M'' + \\ + M''BCM''' + M'''CM + r(MpqM) \end{array} \right\}; \text{ (Tab. XVII. fig. 9)}$$

$$MM'M''M''' > \left\{ \begin{array}{l} MABC + MAM' + M'An + npn'n + n'BM'' + \\ + M''BCM''' + M'''CM + r(MpqM) \end{array} \right\}; \text{ (Tab. XVII. fig. 10)}$$

Hic littera r exprimit qualemcumque numerum integrum, et positivum.

33. Id rursus postulo, quod *Legendre* in primo lemmate assumpsit, duarum superficierum eam esse minorem, cujus sectiones sunt quoquo versus minores. Hoc concesso, geminatum incrementum superficiei secundi generis plano quocumque (P) secetur. Planum hoc vel occurret, vel non plano superficiem in M tangenti, unum aut binos trajiciet ramorum lineae communis plano tangenti, atque superficiei, vel per nullum transibit; ac demum occurret, vel non lineae Mp, quae locus est punctorum, in quibus rectae, tangentes sectiones plano assumpto parallelas, parallelas sunt plano superficiem tangenti in puncto M. Hinc plures prodeunt casus, quos singulos persequamur, oportet.

1. Planum (P) quo geminatum incrementum secatur, plano tangenti occurrat, et linearum quas supra percensuimus, nullam trajiciat. Sit (Tab. XVII. fig. 11) arcus BC ejus intersectio cum superficie, recta AD cum plano tangente, et rectae AB, CD sint intersectiones ejusdem plani (P), et binarum quarumlibet facierum paralleleppipedi QB. Arcus BC nec rectae AD occurret, neque ullum punctum habebit, in quo recta eum arcum tangens parallela sit rectis AD, AB, CD. Posuimus enim, planum secans nec lineam communem plano tangenti et superficiei trajicere, nec lineam Mp, cujus in quovis puncto recta sectionem tangens parallela esset plano tangenti. Nulla demum recta arcum BC tangens parallela erit alteri rectarum AB, CD; nam geminatum superficiei incrementum ita (num. 30) constitutum fuerit, ut nullum complecteretur locorum, in quibus rectae tangentes utrivis planorum Q'M', Q'M essent parallelas. Quod si ita est, per arcum terminum C, qui magis ad rectam AD accedit, quam alter

terminus B, ducta recta Ce ipsi AD parallela, arcus BC praeter punctum C nusquam rectae Ce occurret, totusque sub ea consistet. Si enim in nullo arcus puncto recta eundem arcum tangens sit rectae AD parallela, distantiae punctorum arcus BC a recta AD perpetuo excrescent; et e minori quae pertinet ad punctum C , in majorem quae punctum B respicit, continua accessione abibunt. Pariter distantiae eorundem punctorum a recta Ce ipsi AD parallela perpetuo excrescent. Neque hoc minus tenet, etiamsi arcus BC in quodam suo puncto flexum haberet. Qua re patet, rectam Ce arcui BC , praeter punctum C , nusquam occurrere. Cum igitur arcus BC nec secetur a recta Ce in aliquo puncto alio ab ipso C , neque ab ulla recta ipsi AD , vel Ce , vel Be parallela contingi possit, per Lemma III inferre licebit inaequalitatem hanc

$$BC < Be + eC$$

et multo magis

$$BC < BA + AC$$

seu

$$BC < BA + AD + DC$$

2. Planum (P) geminatum incrementum secet (Tab. XVII. fig. 12.) in arcu BC , planum tangens in recta AD , binas paralleleppipedi facies in rectis AB , CD , atque unum ramum lineae communis plano tangenti, et superficiei in puncto f . Id punctum arcus partem, quae sub recta AD consistit, ab ea dirimit, quae extra eam eminet. Hic cum nulla recta parallela cuilibet rectorum AD , AB , CD arcum BC contingere possit, rursus erit

$$Bf < BA + Af$$

et

$$fC < fD + CD$$

quibus inaequalitatibus additis, elicitur

$$BC < AB + AD + DC.$$

3. Planum (P) in arcu BC (Tab. XVII. fig. 13.) geminato incremento occurrat, in recta AD plano tangenti, in rectis AB , CD areis in faciebus paralleleppipedi jacentibus, et lineae Mp in puncto E ; nullum vero secet ramorum lineae communis plano tangenti, atque superficiei. Per punctum E

ducta recta gl ipsi AD parallela, et arcum BC in puncto E tangente, erit

$$BE < Bg + gE$$

$$EC < El + lC;$$

quibus additis, eruitur

$$BC < Bg + gl + lC;$$

et multo magis

$$BC < BA + Al + lC,$$

sive

$$BC < BA + AD + DC.$$

4. Ponamus jam a plano (P) geminatum incrementum scari in arcu BC (Tab. XVII. fig. 14), planum tangens in recta AD , binas paralleleppedi areas in rectis AB, CD ; in puncto f quemdam ramorum lineae communis superficiei, et plano tangenti; nec non superficiem cylindricam $MpqM$ in linea Eh . Per C recta Ce ipsi AD parallela ducatur; atque per punctum E , in quo recta arcum tangens ipsi AD parallela erit, et per c agantur rectae Ed, ec eidem CD parallelae. Hic denuo erit

$$(1) \quad Bf < AB + Af,$$

et

$$fe < fc + ce,$$

seu

$$(2) \quad fe < fc + DC.$$

Praeterea

$$\begin{cases} Ee < ed + Ed \\ EC < Ed + Cd; \end{cases}$$

quibus additis

$$(a) \quad eEC < eC + 2 \cdot Ed.$$

Vero magnitudo arcus Eh , vel chordae ejus, quantulacumque sit, toties repeti potest, ut rectae $2 \cdot Ed$ magnitudinem, maximam licet, excedat; hoc est, quemdam numerum r ita sumere possumus, ut sit

$$r(Eh) > 2 \cdot Ed:$$

igitur inaequalitatem (a) multo magis licebit convertere in hanc

$$(3) \quad eEC < cD + r(Eh)$$

Demum inaequalitatibus (1), (2), (3) in unam summam collectis, erit

$$BC < AB + AD + DC + r(Eh).$$

5. Iisdem positis, ut in quarto casu, planum (P) alterum quoque raram lineae communis superficiei et plano tangenti secet (Tab. XVII. fig. 15.) in puncto f' . Erit iterum

$$(1) \quad Bf < BA + Af$$

$$(2) \quad fE' < ff' + r(Eh)$$

$$(3) \quad f'C < f'D + DC;$$

ex quibus

$$BC < BA + AD + DC + r(Eh).$$

6. Hactenus planum (P) intra paralleleppipedum QB plano tangenti occurrere posuimus. Nunc binas dumtaxat areas in paralleleppipede jaentes (Tab. XVII. fig. 16.) in rectis BD, DC intersecet. Ex eo, quod nulla recta arcum BC tangens sit utrivis rectorum BD, DC parallela, patet denuo esse

$$BC < BD + DC.$$

Sed accidere posset, ut (Tab. XVII. fig. 17.) tres paralleleppipedi facies a plano (P) secarentur. Tunc etiam, veluti in primo casu, colliges

$$BC < Be + Ce$$

$$BC < AB + CA$$

$$BC < AB + AD + DC.$$

7. Tandem planum (P) ita situm sit, ut binae ejus intersectiones cum plano tangente, et cum quadam paralleleppipedi facie sint inter se parallelae. Ideo (num. 28.) eadem linea Mp loca repraesentabit punctorum, in quibus rectae tangentes sectiones plano (P) parallelas tum parallelae sunt plano tangenti, tum illi cuidam paralleleppipedi faciei. Itaque si planum (P) plano tangenti adhuc intra paralleleppipedum occurrat, iterum valebunt inaequalitates superiores: si autem parallelogrammum MABC non secet, intersectio plani (P) cum ea paralleleppipedi facie intersectioni cum plano tangente succedet. Quare ad similes inaequalitates eodem prorsus pacto adducemur.

34. Hisce omnibus eruitur, geminati incrementi sectiones esse quoquo versus minores, quam sectiones superficiei, quae componitur ex parallelogrammo MABC, ex arcis in faciebus pa-

ralleleppiedi jacentibus, atque ex superficie Mpq toties repetita, quoties opus fuerit. Ergo patet id, quod erat secundo loco demonstradum.

Sic geminatum incrementum superficierum secundi generis his limitibus circumscripsimus (num. 31. 32.)

$$MM'M''M''' \left\{ \begin{array}{l} > \left\{ \begin{array}{l} MABC - MAM' - M'ABM'' + \\ -M''BCM''' - M'''CM \end{array} \right\} \\ < \left\{ \begin{array}{l} MABC + MAM' + M'ABM'' + \\ +M''BCM''' + M'''CM + r(MpqM) \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (\text{Tab. XVII. fig. 8.})$$

$$MM'M''M''' \left\{ \begin{array}{l} > \left\{ \begin{array}{l} MABC - MAM' - M'An - nBM'' + \\ -M''BCM''' - M'''CM \end{array} \right\} \\ < \left\{ \begin{array}{l} MABC + MAM' + M'An + nBM'' + \\ +M''BCM''' + M'''CM + r(MpqM) \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (\text{Tab. XVII. fig. 9.})$$

$$MM'M''M''' \left\{ \begin{array}{l} > \left\{ \begin{array}{l} MABC - MAM' - M'An - npn'n + \\ -n'BM'' - M''BCM''' - M'''CM \end{array} \right\} \\ < \left\{ \begin{array}{l} MABC + MAM' + M'An + npn'n + \\ +n'BM'' + M''BCM''' + M'''CM + r(MpqM) \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (\text{Tab. XVII. fig. 10.})$$

35. Nunc areas, quae in iis inaequalitatibus continentur, per calculos exprimamus. In geminato incremento $MM'M''M'''$ constituendo, atque determinando operam nostram profecto non insumemus. Vir enim illustris, et de universa mathesi egregie meritus, *Joannes Baptista Magistrini*, Praeceptor meus, id tam perspicue, tamque eleganti ratione assecutus est, ut nemini haerendum sit in geminato integrali, pro ut unaquaeque quaestio postulet, rite definiendo (1). Paulo post Abbas *Franchini*, Professorem nostrum caeterum imitatus, in seriem evolvit functionem indeterminatam $F(x, \gamma)$ quae incrementum $MM'M''M'''$ exprimit; et, sicut antea notum erat, ostendit, in ea serie nullum alium terminum binarum dimensionum inesse praeter $\left(\frac{d^2 F}{dx dy}\right)_{oi}$, caeterosque ad dimensio-

(1) Memorie della Società Italiana. Tomo XVII. Parte Matematica. pag. 459.

nes superiores assurgere (1). Neque area parallelogrammi nos detinebit. Nam omnes, qui superficierum curvarum quadraturam tractant, aream $MABC$ demonstrant esse $=oi\sqrt{1+p^2+q^2}$: vel si quam elegantiam hic quoque desideres, opusculum clarissimi *Schubert* eam tibi sufficiet (2).

36. Interim areas demetiamur MAM' , $M''CM$, $MpqM$, quae pro superficieribus cylindricis haberi possunt. Sit igitur haec propositio.

Area superficiei cylindricae Mmm' (Tab. XVII. fig. 18), quae constituitur segmentis ordinarum z interjectis plano in puncto M quamlibet curvam superficiem tangenti, et cuius lineae in superficie curva per punctum M descriptae, a serie exprimitur, in qua tertia potestas differentiae abscissarum terminorum M, m minorem caeteris exponentem habet.

Sint x, y, z coordinatae puncti M ; $z = \phi(x, y)$ aequatio ad superficiem curvam;

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

ad planum tangens superficiem in ipso M ; et ad quamlibet lineam Mm in ea superficie per punctum M descriptam aequationes sint

$$\begin{cases} z'' = \phi(x'', y'') \\ y'' - y = \psi(x'') - \psi(x) \end{cases};$$

quarum prior est ad superficiem, quae lineam continet, posterior ad quamcumque lineam QS per punctum M in plano (x, y) ductam; ac proinde ad quam lineam in data superficie jacentem tibi libuerit, eas binas aequationes transferre poteris. Modo abscissa x abeunte in $(x + a)$, punctum M lineae Mm transcurrat in m ; tunc erit

$$y'' - y = \psi(x + a) - \psi(x)$$

sive

$$y'' = y + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)a + \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)\frac{a^2}{2} + \dots;$$

et posito

(1) La Scienza del Calcolo sublime. Parte II. pag. 352.

(2) Mémoires de l'Académie de Saint Pétersbourg. Tom. IX.

$$h\alpha = \left(\frac{d\psi}{dx}\right)\alpha + \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)\frac{\alpha^2}{2} + \dots$$

erit

$$(1) \quad y'' = y + h\alpha.$$

Pro x'', y'' substitutis $(x + \alpha)$, $(y + h\alpha)$ in altera lineae Mm aequatione, nempe in $z'' = \varphi(x'', y'')$, elicitur

$$\begin{aligned} z'' &= \varphi(x + \alpha, y + h\alpha) = \\ &= \varphi(x, y) + p\alpha + r\frac{\alpha^2}{2} + \dots \\ &\quad + qh\alpha + s\alpha^2h + \dots \\ &\quad + t\frac{\alpha^2h^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

atque brevitatis causa substituta littera z pro $\varphi(x, y)$, denominatisque R, S, \dots coefficientibus potestatum $\alpha^2, \alpha^3, \dots$ erit

$$(2) \quad z'' = z + \alpha(p + qh) + R\alpha^2 + S\alpha^3 + \dots$$

His aequationibus (1), (2) valores ordinarum y'', z'' puncti m colligi possunt; modo incrementum α ita exiguum sit, ut eae series convergant. Quaerere etiam oportet ordinatam $Sm' = z'$ plani tangentis, quae e puncto S ordinarum $(x + \alpha)$, $(y + h\alpha)$ erigitur. Aequatio ad planum tangens

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

factis substitutionibus, evadet

$$z' - z = \alpha(p + qh)$$

seti

$$z' = z + \alpha(p + qh);$$

quam si aequationi (2) subtraxeris, erit

$$mm' = z'' - z'$$

$$mm' = R\alpha^2 + S\alpha^3 + \dots$$

Ita expressimus segmentum cujuslibet ordinatae z , quod superfici $z = \varphi(x, y)$, et plano tangenti interjacet. Quare in formula

$$\int z dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

quae superficiebus cylindricis quadrandis inservit, substitutis $(R\alpha^2 + S\alpha^3 + \dots)$, α , $\left(h + \left(\frac{dh}{d\alpha}\right)\right)$ pro z , x , $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, area $Mm m'$ aequabitur

$$f(R\alpha^2 + S\alpha^3 + \dots) d\alpha \sqrt{\left\{1 + \left(h + \left(\frac{dh}{d\alpha}\right)\right)^2\right\}}.$$

Quantitas sub vinculo f posita, ordinata per α , in seriem vertetur hujusmodi

$$(R'\alpha^2 + S'\alpha^3 + \dots) d\alpha;$$

ac proinde

$$Mm m' = f(R'\alpha^2 + S'\alpha^3 + \dots) d\alpha;$$

unde

$$(S) \quad Mm m' = C + \frac{R'\alpha^3}{3} + \frac{S'\alpha^4}{4} + \dots;$$

atque integratione intra terminos $\alpha = 0$, et $\alpha = PR = \theta$ definita, hinc demum prodibit

$$Mm m' = \frac{R'\theta^3}{3} + \frac{S'\theta^4}{4} + \dots$$

Quod erat demonstrandum.

Inde statim colligitur, areas $MA M'$, $M''' C M$, $M p q M$ (num. 34) exprimi a serie ordinata per incrementorum θ et i dimensiones, quarum minor caeteris tertia est.

37. Animadvertere et illud praestat. Altera linearum, quae aream circumscribunt, perpetuo debet super alteram eminere intra limites, quibus valor integralis (S) definitur. Hujus enim integralis valor tum a veritate recederet, cum intra ejus limites linea Mm' partim sub altera Mm consisteret, partim supra eandem Mm consurgeret. Id autem ex eo oritur, quod illa in hypothesi valor segmenti $(z'' - z')$ e positivo in negativum migret; ideoque una, eademque formula uti nequeamus ad segmenti, atque areae magnitudinem exprimendam. Hoc idem e nostris superficiebus cylindricis ad areas planas, et solidorum cubaturam traduci potest.

38. Reliquum est, ut areas in binis faciebus $Q' B$, $Q'' C$ parallelepipedi jacentes demetiamur. Harum utravis vel penitus continua erit (Tab. XVII. fig. 8), vel ex duabus (Tab. XVII. fig. 9), vel tribus partibus constabit (Tab. XVII. fig. 10.). Sa-

tis nobis erit in altera binarum arearum, exempli gratia M'A BM'' singulos eos casus expendere: quod enim de area M'A BM'' dicemus, id, mutatis tantum limitum denominationibus; de altera M'BCM'' dicendum erit.

Ad lineam M'M'', in qua superficies $z = \varphi(x, y)$ plano Q'B secatur, aequationes erunt:

$$\begin{cases} x'' = x + \omega \\ z'' = \varphi(x'', y'') \end{cases};$$

et

$$\begin{cases} x' = x + \omega \\ z' - z = p(x' - x) + q(y' - y) \end{cases}$$

ad rectam AB, in qua planum tangens plano Q'B occurrit. Sumpta variabili quapiam α , ordinata y abeat in $(y + \alpha)$; habebimus

$$\begin{aligned} x'' &= x + \omega \\ z'' &= \varphi(x'', y + \alpha) = \varphi(x + \omega, y + \alpha) = \\ &= z + p\omega + r \cdot \frac{\omega^2}{2} + \dots \\ &\quad + q\alpha + s \cdot \omega\alpha + \dots \\ &\quad + t \cdot \frac{\alpha^2}{2} + \dots \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x'' &= x + \omega \\ z'' &= \varphi(x'', y + \alpha) = \varphi(x + \omega, y + \alpha) = \\ &= z + p\omega + r \cdot \frac{\omega^2}{2} + \dots \\ &\quad + q\alpha + s \cdot \omega\alpha + \dots \\ &\quad + t \cdot \frac{\alpha^2}{2} + \dots \end{aligned}} \right\};$$

$$z' = p\omega + q\alpha.$$

Ponamus, extra lineam curvam M'M'' rectam AB prorsus eminere: area plana iis lineis, atque binis quibusvis rectis axi Oz parallelis circumscripta aequabit

$$\begin{aligned} f d\alpha(z' - z'') &= f d\alpha \left\{ - \left(\frac{r \cdot \omega^2}{2} + s\omega\alpha + t \cdot \frac{\alpha^2}{2} \right) + \dots \right\} = \\ &= C - \left\{ \frac{r\omega^2\alpha}{2} + \frac{s\omega\alpha^2}{2} + \frac{t\alpha^3}{2 \cdot 3} \right\} + \dots \end{aligned}$$

Si contra linea M'M'' supra rectam AB tota consisteret, area esset

$$= C + \left\{ \frac{r\omega^2\alpha}{2} + \frac{s\omega\alpha^2}{2} + \frac{t\alpha^3}{2 \cdot 3} \right\} + \dots$$

Ad valorem areae intra limites $\alpha = 0, \alpha = i$ accurate definien-

dum, tres superiores casus singillatim pertractemus, oportet.

Primo. Cum area $M'ABM'$ (Tab. XVII. fig. 8) continua sit inter rectas AM' , BM'' , ejus limites sunt $\alpha = 0$, $\alpha = i$. Quapropter erit

$$M'ABM'' = \mp \left\{ \frac{r\omega^2 i}{2} + \frac{s\omega i^2}{2} + \frac{ti^3}{2.3} \right\} + \dots$$

Alteri autem aequationis parti eo duplex signum \mp praefiximus, quod modo unum, modo alterum sumendum sit, prout linea $M'M''$ sub recta AB , aut super eam consistat.

Secundo. Rectae AB in puncto n (Tab. XVII. fig. 9) arcus $M'M''$ occurrat; adeoque ejus tractus $M'n$ rectae AB ex. gr. subjaceat, et reliquus tractus nM'' ex eadem AB emineat. Quaeramus valores α , quibus arcus, rectaeque occursum respondent. Hi occursum eo fient, quo differentia ($z'' - z'$) evanescet; aequatio igitur erit

$$0 = \left\{ r \cdot \frac{\omega^2}{2} + s\omega\alpha + t \cdot \frac{\alpha^2}{2} \right\} + \dots$$

Hinc per serierum regressum eruetur

$$\alpha = A\omega + B\omega^2 + C\omega^3 + \dots$$

qua in serie est

$$A = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t},$$

et B, C, \dots pariter sunt functiones biformes. Quare binis valoribus A litteris m, m' denominatis, ordinatae ($y + \alpha$) punctorum, in quibus recta AB arcui $M'M''$ occurrit, hae duae erunt

$$(T) \quad \begin{cases} y + m\omega + B_m \cdot \omega^2 + C_m \cdot \omega^3 + \dots \\ y + m'\omega + B_{m'} \cdot \omega^2 + C_{m'} \cdot \omega^3 + \dots \end{cases}$$

Cum vero unum tantum eorum punctorum intra geminatum incrementum jacere positum sit, limites areae

$$M'An = C \mp \left\{ \frac{r\omega^2 \alpha}{2} + \frac{s\omega \alpha^2}{2} + \frac{t\alpha^3}{2.3} \right\} + \dots$$

erunt $\alpha = 0$, et alter valorum (T), exempli caussa $\alpha = m\omega + B_m \cdot \omega^2 + C_m \cdot \omega^3 + \dots$; limitesque areae

$$nBM'' = C \pm \left\{ \frac{r\omega^2\alpha}{2} + \frac{s\omega\alpha^2}{2} + \frac{t\alpha^3}{2.3} \right\} + \dots$$

$$\alpha = m\omega + B_m \cdot \omega^2 + C_m \cdot \omega^3 + \dots,$$

et

$$\alpha = i.$$

Itaque habebimus

$$M'An = \mp \left\{ \frac{rm\omega^3}{2} + \frac{sm^2\omega^3}{2} + \frac{tm^3\omega^3}{2.3} \right\} + \dots$$

$$nBM'' = \mp \left\{ \frac{rm\omega^3}{2} + \frac{sm^2\omega^3}{2} + \frac{tm^3\omega^3}{2.3} \right\} + \dots \pm \left\{ \frac{r\omega^2i}{2} + \frac{s\omega i^2}{2} + \frac{t i^3}{2.3} \right\} + \dots$$

Tertio. Bina puncta, in quibus recta AB (Tab. XVII. fig. 10.) secat arcum M'M'', cadant ambo intra parallelepipedum QB. Tum limites prioris areae

$$M'An = C \mp \left\{ \frac{r\omega^2\alpha}{2} + \frac{s\omega\alpha^2}{2} + \frac{t\alpha^3}{2.3} \right\} + \dots$$

erunt

$$\alpha = 0; \alpha = m\omega + B_m \cdot \omega^2 + C_m \cdot \omega^3 + \dots$$

et

$$\alpha = m\omega + B_m \cdot \omega^2 + C_m \cdot \omega^3 + \dots; \alpha = m'\omega + B_{m'} \cdot \omega^2 + C_{m'} \cdot \omega^3 + \dots$$

limites alterius

$$npn'n = C \pm \left\{ \frac{r\omega^2\alpha}{2} + \frac{s\omega\alpha^2}{2} + \frac{t\alpha^3}{2.3} \right\} + \dots :$$

ac demum

$$\alpha = m'\omega + B_{m'} \cdot \omega^2 + C_{m'} \cdot \omega^3 + \dots; \alpha = i$$

limites erunt tertiae areae

$$n'BM'' = C \mp \left\{ \frac{r\omega^2\alpha}{2} + \frac{s\omega\alpha^2}{2} + \frac{t\alpha^3}{2.3} \right\} + \dots$$

Et in hoc tertio casu aequae, ut in binis superioribus, patebit, areas M'ABM'', M'An, nBM'', npn'n, n'BM'' a seriebus exprimi, quae dimensiones quantitatum ω et i non minores continent, quam tertias.

39. Jam nunc argumentum, quod initio propositum fuerat, ad finem perduximus. Etenim, si areae quibus inaequalitatum numeri 34. pars altera componitur, excepto parallelogrammo MABC, nullas alias incrementorum ω et i dimensiones in eas

inaequalitates invehunt praeter tertias, tertiisque majores; in utroque limitum comprehendentium geminatum incrementum

$MM'M''M''' = \left(\frac{d^2 F}{dx dy}\right) \omega i \dots \text{unus}$, et idem erit secundae dimensionis terminus, scilicet

$$\omega i \sqrt{\{1+p^2+q^2\}} = MABC.$$

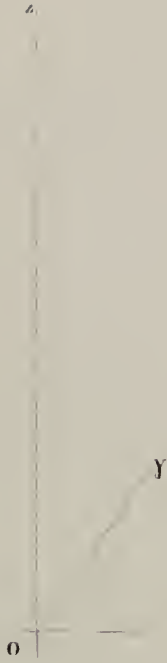
Ex quo, *Lagrangiae*, uti vocant, principio statim infertur aequatio

$$\left(\frac{d^2 F}{dx dy}\right) = \sqrt{\{1+p^2+q^2\}}.$$

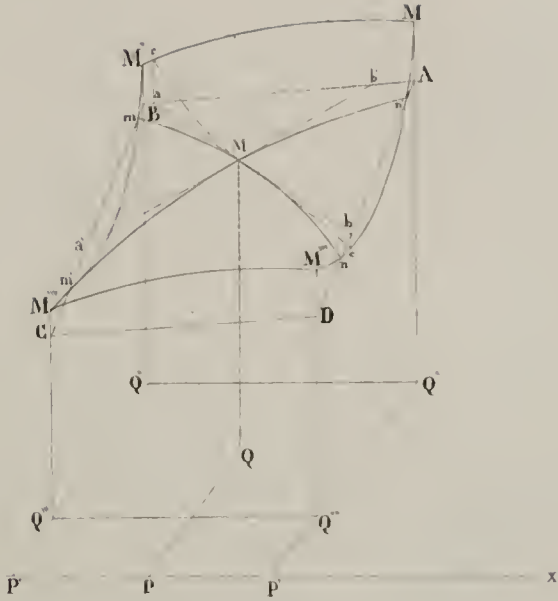
Haec formula prorsus cum ea convenit, quae ad superficies primi, et tertii generis spectat.

Via, qua rem aggressus sum, plana licet sit, atque patens, sua tamen prolixitate difficilis fit, et odiosa. Id quidem, praestantissimi Academici, sensi; at nihilominus incepto desistere eo nolui, quod fore sperarem, ut hoc levi meo experimento aliquis incitatus majori ingenii vi, meliorique fortuna demonstratam viam redderet brevior, vel sibi sterneret novam.

51

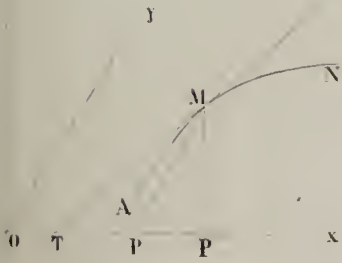


F. 2.

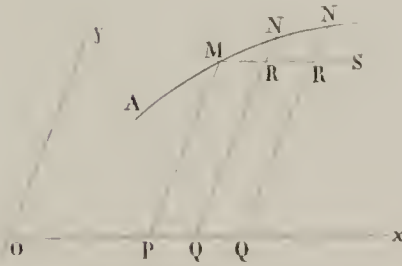


F. 3.

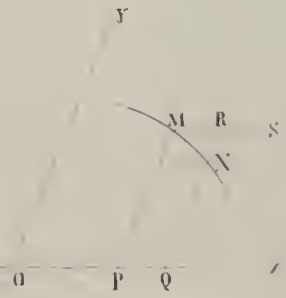
F. 4.



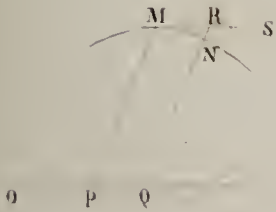
F. 5.



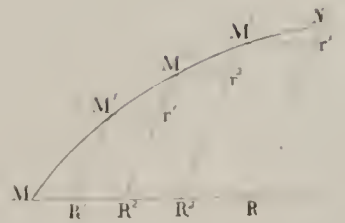
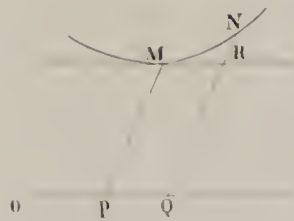
F. 6.



F. 7.



Postum exu

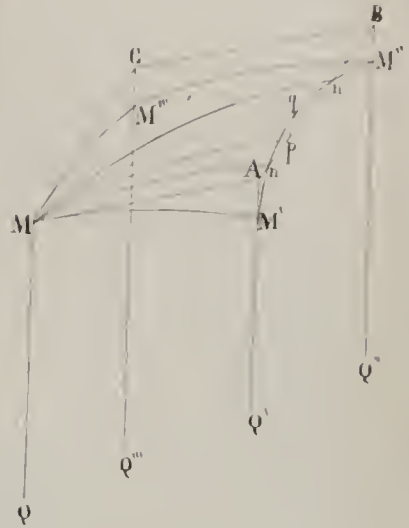
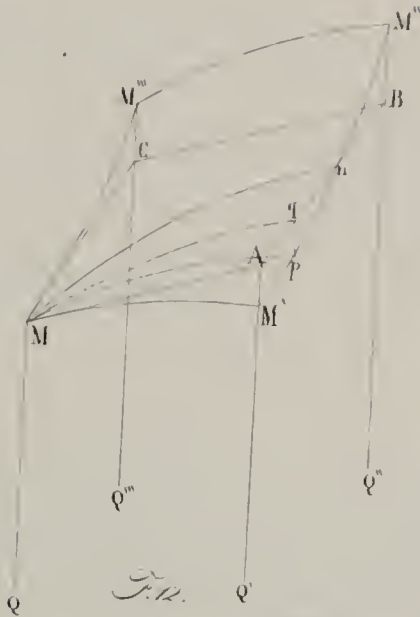
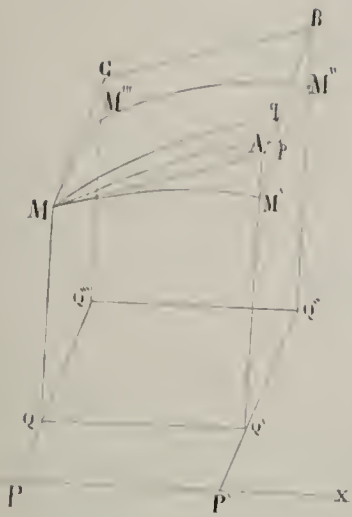


Lev. Pellena

F. 1

F. 9

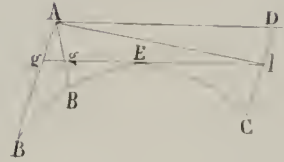
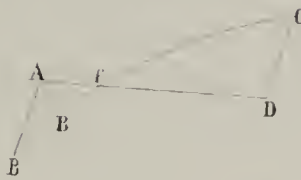
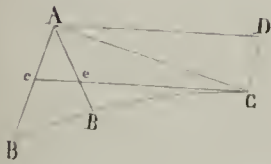
F. 10



F. 11

F. 12

F. 13



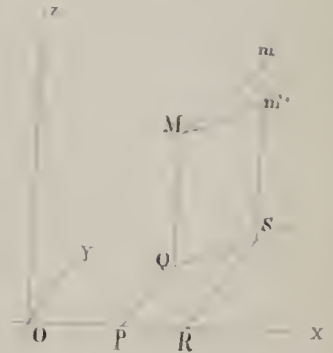
F. 14

F. 15

F. 16

F. 17

F. 18



6. Bellini esca

1. et Bellini

ALOYSII CASINELLI

*Disquisitiones variae super resolutionem nonnullarum
aequationum algebraicarum praesertim quinti gradus.*

DISSERTATIO.

Quamvis ea, de quibus hic tractaturus sum, ad argumentum pertineant Dissertationis = *De innumeris aequationibus algebraicis, quae peculiari artificio resolvi possunt* = (1), tamen non constituunt appendicem quam ad dissertationem illam promiseram, quamque opportuniori occasione edere non praetermittam. Hic tantum est mihi in animo exhibere varias observationes super principio seu theoremate, cui dissertatio illa penitus innititur, easque applicare ad resolutionem nonnullarum aequationum specialium, praesertim ad resolutionem aequationum quinti gradus.

Theorema memoratum in hisce aequationibus consistit.

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + d + \dots + l + m \\ B &= \alpha a + \alpha^2 b + \alpha^3 c + \alpha^4 d + \dots + \alpha^{n-2} l + \alpha^{n-1} m \\ C &= \beta a + \beta^2 b + \beta^3 c + \beta^4 d + \dots + \beta^{n-2} l + \beta^{n-1} m \\ D &= \gamma a + \gamma^2 b + \gamma^3 c + \gamma^4 d + \dots + \gamma^{n-2} l + \gamma^{n-1} m \\ &; \dots \dots \dots \\ L &= \lambda a + \lambda^2 b + \lambda^3 c + \lambda^4 d + \dots + \lambda^{n-2} l + \lambda^{n-1} m \\ M &= \mu a + \mu^2 b + \mu^3 c + \mu^4 d + \dots + \mu^{n-2} l + \mu^{n-1} m \end{aligned}$$

experimentibus A, B, C, D, L, M radices cujusvis ae-

(1) Nov. Comment. Accad. Scient. Bonon. Tom. V. pag. 423.

quationis gradus n esimi; $1, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu$ radices n -
 ximee unitatis; a, b, c, d, \dots, l, m elementa radicum

Si ergo agitur de aequationibus quinti gradus, erit

$$A = a + b + c + d$$

$$B = \alpha a + \alpha^2 b + \alpha^3 c + \alpha^4 d$$

$$C = \beta a + \beta^2 b + \beta^3 c + \beta^4 d$$

$$D = \gamma a + \gamma^2 b + \gamma^3 c + \gamma^4 d$$

$$E = \delta a + \delta^2 b + \delta^3 c + \delta^4 d$$

et quoniam ea est proprietas aequationis $y^m - 1 = 0$ ut sit
 $\beta = \alpha^2, \gamma = \alpha^3, \delta = \alpha^4$, erit quoque

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad A = a + b + c + d \\ (2) \quad B = \alpha a + \alpha^2 b + \alpha^3 c + \alpha^4 d \\ (3) \quad C = \alpha^2 a + \alpha^4 b + \alpha c + \alpha^3 d \\ (4) \quad D = \alpha^3 a + \alpha b + \alpha^4 c + \alpha^2 d \\ (5) \quad E = \alpha^4 a + \alpha^3 b + \alpha^2 c + \alpha d \end{array} \right\} (a)$$

Ex aggregato aequationum (2), (5) habemus

$$(6) \quad (\alpha + \alpha^4)(a + d) + (\alpha^2 + \alpha^3)(b + c) = B + E$$

atque ex aggregato duarum (3), (4)

$$(7) \quad (\alpha^2 + \alpha^3)(a + d) + (\alpha + \alpha^4)(b + c) = C + D$$

Ex hisce duabus aequationibus (6), (7) infertur

$$a + d = \frac{B + E - (\alpha^2 + \alpha^3)(b + c)}{\alpha + \alpha^4}$$

$$a + d = \frac{C + D - (\alpha + \alpha^4)(b + c)}{\alpha^2 + \alpha^3}$$

Ergo

$$\frac{B + E - (\alpha^2 + \alpha^3)(b + c)}{\alpha + \alpha^4} = \frac{C + D - (\alpha + \alpha^4)(b + c)}{\alpha^2 + \alpha^3}$$

Reductione autem fractionum ad eundem denominatorem,
 obtinebimus

$$(B + E)(\alpha^2 + \alpha^3) - (\alpha^2 + \alpha^3)^2(b + c) = (C + D)(\alpha + \alpha^4) - (\alpha + \alpha^4)^2(b + c)$$

ex qua infertur

$$\begin{aligned}
 b+c &= \frac{(B+E)(\alpha^2+\alpha^3)-(C+D)(\alpha+\alpha^4)}{(\alpha^2+\alpha^3)^2-(\alpha+\alpha^4)^2} \\
 &= \frac{(B+E)(\alpha^2+\alpha^3)-(C+D)(\alpha+\alpha^4)}{\alpha+\alpha^4-\alpha^2-\alpha^3}
 \end{aligned}$$

Multiplicetur numerator et denominator hujus expressionis per $\alpha + \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^3$, et habebimus

$$\begin{aligned}
 b+c &= \frac{(B+E)(\alpha^2+\alpha^3-2)+(C+D)(\alpha+\alpha^4-2)}{5} \\
 &= \frac{B(\alpha^2+\alpha^3-2)+C(\alpha+\alpha^4-2)+D(\alpha+\alpha^4-2)+E(\alpha^2+\alpha^3-2)}{5}
 \end{aligned}$$

Ex iisdem aequationibus (6), (7) colligitur

$$\begin{aligned}
 b+c &= \frac{B+E-(\alpha+\alpha^4)(\alpha+d)}{\alpha^2+\alpha^3} \\
 b+c &= \frac{C+D-(\alpha^2+\alpha^3)(\alpha+d)}{\alpha+\alpha^4}
 \end{aligned}$$

Hinc

$$\frac{B+E-(\alpha+\alpha^4)(\alpha+d)}{\alpha^2+\alpha^3} = \frac{C+D-(\alpha^2+\alpha^3)(\alpha+d)}{\alpha+\alpha^4}$$

et ex reductione fractionum ad eundem denominatorem

$$(B+E)(\alpha+\alpha^4) - (\alpha+\alpha^4)^2(\alpha+d) = (C+D)(\alpha^2+\alpha^3) - (\alpha^2+\alpha^3)(\alpha+d)$$

Unde

$$\begin{aligned}
 \alpha+d &= \frac{(B+E)(\alpha+\alpha^4)-(C+D)(\alpha^2+\alpha^3)}{(\alpha+\alpha^4)^2-(\alpha^2+\alpha^3)^2} \\
 &= \frac{(B+E)(\alpha+\alpha^4)-(C+D)(\alpha^2+\alpha^3)}{\alpha^2+\alpha^3-\alpha-\alpha^4}
 \end{aligned}$$

Multiplicetur numerator et denominator hujus expressionis per $\alpha^2 + \alpha^3 - \alpha - \alpha^4$, et habebimus

$$\begin{aligned}
 \alpha+d &= \frac{(B+E)(\alpha+\alpha^4-2)+(C+D)(\alpha^2+\alpha^3-2)}{5} \\
 &= \frac{B(\alpha+\alpha^4-2)+C(\alpha^2+\alpha^3-2)+D(\alpha^2+\alpha^3-2)+E(\alpha+\alpha^4-2)}{5}
 \end{aligned}$$

Ab aequatione (2) deducatur aequatio (5), erit residuum

$$(8) \quad (\alpha-\alpha^4)(\alpha-d) + (\alpha^2-\alpha^3)(b-c) = B-E$$

Ab aequatione (3) deducatur aequatio (4), erit residuum

$$(9) \quad (\alpha^2 - \alpha^3)(a-d) - (\alpha - \alpha^4) = C - D.$$

Ex hisce duabus aequationibus infertur

$$a - d = \frac{B - E - (\alpha^2 - \alpha^3)(b-c)}{\alpha - \alpha^4}$$

$$a - d = \frac{C - D + (\alpha - \alpha^4)(b-c)}{\alpha^2 - \alpha^3}$$

et ideo

$$\frac{B - E - (\alpha^2 - \alpha^3)(b-c)}{\alpha - \alpha^4} = \frac{C - D + (\alpha - \alpha^4)(b-c)}{\alpha^2 - \alpha^3};$$

reductis autem fractionibus ad eundem denominatorem, habebimus

$$(B - E)(\alpha^2 - \alpha^3) - (\alpha^2 - \alpha^3)^2(b-c) = (C - D)(\alpha - \alpha^4) + (\alpha - \alpha^4)^2(b-c).$$

Unde

$$\begin{aligned} b - c &= \frac{(B - E)(\alpha^2 - \alpha^3) - (C - D)(\alpha - \alpha^4)}{(\alpha - \alpha^4)^2 + (\alpha^2 - \alpha^3)^2} \\ &= \frac{(B - E)(\alpha^2 - \alpha^3) - (C - D)(\alpha - \alpha^4)}{-5} \end{aligned}$$

atque mutatis signis

$$\begin{aligned} b - c &= \frac{(C - D)(\alpha - \alpha^4) - (B - E)(\alpha^2 - \alpha^3)}{5} \\ &= \frac{B(\alpha^3 - \alpha^2) + C(\alpha - \alpha^4) + D(\alpha^4 - \alpha) + E(\alpha^2 - \alpha^3)}{5}. \end{aligned}$$

Ex iisdem aequationibus (8), (9) habemus

$$b - c = \frac{B - E - (\alpha - \alpha^4)(a-d)}{\alpha^2 - \alpha^3}$$

$$b - c = \frac{D - C + (\alpha^2 + \alpha^3)(a-d)}{\alpha - \alpha^4}$$

unde

$$\frac{B - E - (\alpha - \alpha^4)(a-d)}{\alpha^2 - \alpha^3} = \frac{D - C + (\alpha^2 + \alpha^3)(a-d)}{\alpha - \alpha^4};$$

reductis vero fractionibus ad eundem denominationem, concludemus

$$(B - E)(\alpha - \alpha^4) - (\alpha - \alpha^4)^2(a-d) = (D - C)(\alpha^2 - \alpha^3) - (\alpha^2 - \alpha^3)^2(a-d).$$

ex qua elicitur

$$a-d = \frac{(B-E)(\alpha-\alpha^4) + (C-D)(\alpha^2-\alpha^3)}{(\alpha-\alpha^4)^2 + (\alpha^2-\alpha^3)^2}$$

$$= \frac{(B-E)(\alpha-\alpha^4) + (C-D)(\alpha^2-\alpha^3)}{-5},$$

et mutatis signis

$$a-d = \frac{(E-B)(\alpha-\alpha^4) + (D-C)(\alpha^2-\alpha^3)}{5}$$

$$= \frac{B(\alpha^4-\alpha) + C(\alpha^3-\alpha^2) + D(\alpha^2-\alpha^3) + E(\alpha-\alpha^4)}{5}.$$

Habemus igitur

$$a+d = \frac{B(\alpha+\alpha^4-2) + C(\alpha^2+\alpha^3-2) + D(\alpha^2+\alpha^3-2) + E(\alpha+\alpha^4-2)}{5}$$

$$a-d = \frac{B(\alpha^4-\alpha) + C(\alpha^3-\alpha^2) + D(\alpha^2-\alpha^3) + E(\alpha-\alpha^4)}{5}$$

$$b+c = \frac{B(\alpha^2+\alpha^3-2) + C(\alpha+\alpha^4-2) + D(\alpha+\alpha^4-2) + E(\alpha^2+\alpha^3-2)}{5}$$

$$b-c = \frac{B(\alpha^3-\alpha^2) + C(\alpha-\alpha^4) + D(\alpha^4-\alpha) + E(\alpha^2-\alpha^3)}{5}.$$

Ex additione duarum priorum inferitur

$$a = \frac{B(\alpha^4-1) + C(\alpha^3-1) + D(\alpha^2-1) + E(\alpha-1)}{5},$$

et ex earum differentia

$$d = \frac{B(\alpha-1) + C(\alpha^2-1) + D(\alpha^3-1) - E(\alpha^4-1)}{5}.$$

Ex additione duarum posteriorum inferitur

$$b = \frac{B(\alpha^3-1) + C(\alpha-1) + D(\alpha^4-1) + E(\alpha^2-1)}{5},$$

et ex earum differentia

$$c = \frac{B(\alpha^2-1) + C(\alpha^4-1) + D(\alpha-1) + E(\alpha^3-1)}{5}.$$

Cum autem sit $A = -B - C - D - E$ concludemus

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{A + \alpha^4 B + \alpha^5 C + \alpha^2 D + \alpha E}{5} \\ b &= \frac{A + \alpha^3 B + \alpha C + \alpha^4 D + \alpha^2 E}{5} \\ c &= \frac{A + \alpha^2 B + \alpha^4 C + \alpha D + \alpha^3 E}{5} \\ d &= \frac{A + \alpha B + \alpha^2 C + \alpha^3 D + \alpha^4 E}{5} \end{aligned} \right\} (b)$$

Ad confirmandas has aequationes fiat primum aggregatum earum, eritque

$$a + b + c + d = \frac{4A - B - C - D - E}{5},$$

sed

$$-B - C - D - E = A$$

ergo

$$a + b + c + d = \frac{4A + A}{5} = A,$$

quae est prima aequationum (a).

Multiplicetur prima aequationum (b) per α , secunda per α^2 , tertia per α^3 , quarta per α^4 , et inde fiat earum aggregatum, eritque

$$\alpha a + \alpha^2 b + \alpha^3 c + \alpha^4 d = \frac{-A + 4B - C - D - E}{5};$$

sed

$$-A - C - D - E = B,$$

ergo

$$\alpha a + \alpha^2 b + \alpha^3 c + \alpha^4 d = \frac{4B + B}{5} = B,$$

quae est secunda aequationum (a).

Multiplicetur prima aequationum (b) per α^2 , secunda per α^4 , tertia α , quarta per α^3 , et inde fiat earum aggregatum, eritque

$$\alpha^2 a + \alpha^4 b + \alpha c + \alpha^3 d = \frac{-A - B + 4C - D - E}{5};$$

sed

$$-A - B - D - E = C,$$

ergo

$$a^2a + a^1b + ac + a^3d = \frac{4C + C}{5} = C;$$

quae est tertia aequationum (a)

Multiplicetur prima aequationum (b) per a^3 , secunda per a , tertia per a^4 , quarta per a^2 , et inde fiat earum aggregatum, eritque

$$a^3a + ab + a^1c + a^2d = \frac{-A - B - C + 4D - E}{5};$$

sed

$$-A - B - C - E = D,$$

ergo

$$a^3a + ab + a^1c + a^2d = \frac{4D + D}{5} = D,$$

quae est quarta aequationum (a)

Multiplicetur tandem prima aequationum (b) per a^4 , secunda per a^3 , tertia per a^2 , et quarta per a , et inde fiat earum aggregatum, erit

$$a^4a + a^3b + a^2c + ad = \frac{-A - B - C - D + 4E}{5};$$

sed

$$-A - B - C - D = E,$$

ergo

$$a^4a + a^3b + a^2c + ad = \frac{4E + E}{5} = E.$$

quae est quinta aequationum (a).

Verum quamvis expressiones elementorum superius deductae sint admodum simplices, nihil tamen conferunt ad resolutionem generalem aequationum quinti gradus, nullo enim modo scimus eliminare radices A, B, C, D, E, et elementa exprimere quantitibus notis.

Cl. Eulerus in *Dissertatione de formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio* = (1) suspicatur pro quavis aequatione.

$$x^n - A'x^{n-2} - B'x^{n-3} - C'x^{n-4} - \text{etc.} = 0,$$

dari aequationem uno gradu inferiorem, cujus radices si sint A, B, C, D etc. sit

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} + \text{etc.}$$

Hanc Euleri conjecturam methodo nostra exprimentes, si a, b, c, d etc. sint elementa radicum cujusvis aequationis gradus n *esimi*, erit aequatio altera gradus $n - 1$, ejusque radices a^n, b^n, c^n, d^n etc. Hanc aequationem cum Eulero resolventem appellabimus, atque si aequatio erit quinti gradus, nempe

$$x^5 - A'x^3 - B'x^2 - C'x - D' = 0,$$

et a, b, c, d sint elementa ejus radicum, erit aequatio resolvens.

$$z^4 - (a^5 + b^5 + c^5 + d^5)z^3 + (a^5b^5 + a^5c^5 + a^5d^5 + b^5c^5 + b^5d^5 + c^5d^5)z^2 \\ - (a^5b^5c^5 + a^5b^5d^5 + a^5c^5d^5 + b^5c^5d^5)z + a^5b^5c^5d^5 = 0.$$

Coefficientes hujus aequationis equidem exprimere possumus radicibus aequationis datae, etenim ex aequationibus (b) habemus valores elementorum a, b, c, d expressos radicibus illis; atque si functiones harum radicum notae essent, radices resolventis innotescerent, et aequatio quinti gradus resolveretur. Verum expressiones illorum coefficientium nullo modo determinari possunt, quod sequenti calculo demonstrare facile possumus.

In coefficiente secundi termini, substituuntur a, b, c, d valores deprompti ex aequationibus (b) habebimus post reductiones

$$3125(a^5 + b^5 + c^5 + d^5) =$$

Divisio 1.	Divisio 2.	Divisio 3.	Divisio 4.	Divisio 5.
$4A^5$	$-5A^4B$	$-10A^3B^2$	$-20A^2BC$	
$+4B^6$	$-5A^4C$	$-10A^3C^2$	$-20A^2BD$	
$+4C^5$	$-5A^4D$	$-10A^3D^2$	$-20A^2BE$	$+100A^3BE$
$+4D^5$	$-5A^4E$	$-10A^3E^2$	$-20A^2CD$	$+100A^3CD$
$+4E^5$	$-5B^4A$	$-10B^3A^2$	$-20A^2CE$	
	$-5B^4C$	$-10B^3C^2$	$-20A^2DE$	
	$-5B^4D$	$-10B^3D^2$	$-20B^2AC$	$+100B^2AC$
	$-5B^4E$	$-10B^3E^2$	$-20B^2AD$	
	$-5C^4A$	$-10C^3A^2$	$-20B^2AE$	
	$-5C^4B$	$-10C^3B^2$	$-20B^2CD$	
	$-5C^4D$	$-10C^3D^2$	$-20B^2CE$	
	$-5C^4E$	$-10C^3E^2$	$-20B^2DE$	$+100B^2DE$
	$-5D^4A$	$-10D^3A^2$	$-20C^2AB$	
	$-5D^4B$	$-10D^3B^2$	$-20C^2AD$	
	$-5D^4C$	$-10D^3C^2$	$-20C^2AE$	$+100C^2AE$
	$-5D^4E$	$-10D^3E^2$	$-20C^2BD$	$+100C^2BD$
	$-5E^4A$	$-10E^3A^2$	$-20C^2BE$	
	$-5E^4B$	$-10E^3B^2$	$-20C^2DE$	
	$-5E^4C$	$-10E^3C^2$	$-20D^2AB$	$+100D^2AB$
	$-5E^4D$	$-10E^3D^2$	$-20D^2AC$	
			$-20D^2AE$	
			$-20D^2BC$	
			$-20D^2BE$	
			$-20D^2CE$	$+100D^2CE$
			$-20E^2AB$	
			$-20E^2AC$	
			$-20E^2AD$	$+100E^2AD$
			$-20E^2BC$	$+100E^2BC$
			$-20E^2BD$	
			$-20E^2CD$	

Divisio 6.	Divisio 7.	Divisio 8.	Divisio 9.
— 30 A ² B ² C		— 60 A ² B C D	+ 120 ABCDE
— 30 A ² B ² D	+ 150 A ² B ² D	— 60 A ² B C E	
— 30 A ² B ² E		— 60 A ² B D E	
— 30 A ² C ² B	+ 150 A ² C ² B	— 60 A ² C D E	
— 30 A ² C ² D		— 60 B ² A C D	
— 30 A ² C ² E		— 60 B ² A C E	
— 30 A ² D ² B		— 60 B ² A D E	
— 30 A ² D ² C		— 60 B ² C D E	
— 30 A ² D ² E	+ 150 A ² D ² E	— 60 C ² A B D	
— 30 A ² E ² B		— 60 C ² A B E	
— 30 A ² E ² C	+ 150 A ² E ² C	— 60 C ² A D E	
— 30 A ² E ² D		— 60 C ² B D E	
— 30 B ² C ² A		— 60 D ² A B C	
— 30 B ² C ² D		— 60 D ² A B E	
— 30 B ² C ² E	+ 150 B ² C ² E	— 60 D ² A C E	
— 30 B ² D ² A		— 60 D ² B C E	
— 30 B ² D ² C	+ 150 B ² D ² C	— 60 E ² A B C	
— 30 B ² D ² E		— 60 E ² A B D	
— 30 B ² E ² A	+ 150 B ² E ² A	— 60 E ² A C D	
— 30 B ² E ² C		— 60 E ² B C D	
— 30 B ² E ² D			
— 30 C ² D ² A	+ 150 C ² D ² A		
— 30 C ² D ² B			
— 30 C ² D ² E			
— 40 C ² E ² A			
— 20 C ² E ² B			
— 30 C ² E ² D	+ 150 C ² E ² D		
— 30 D ² E ² A			
— 30 D ² E ² B	+ 150 D ² E ² B		
— 30 D ² E ² C			

Cum autem aequatio sit

$$x^5 - A'x^3 - B'x^2 - C'x - D = 0,$$

expresso nunc solito symbolo P_r aggregato potentiarum r residuarum radicum, erit ut notum est

$$P_2 = 2A'$$

$$P_3 = 3B'$$

$$P_4 = 2A'^2 + 4C'$$

$$P_5 = 5A'B' + 5D'.$$

Hoc posito termini primae divisionis $4A^5 + 4B^5 + 4C^5 + 4D^5 + 4E^5$ erunt aequivalentes $4P_5 = 20A'B' + 20D'$

Termini divisionis secundae reducuntur ad

$$-5A^4(B+C+D+E)$$

$$-5B^4(A+C+D+E)$$

$$-5C^4(A+B+D+E)$$

$$-5D^4(A+B+C+E)$$

$$-5E^4(A+B+C+D)$$

sed $A+B+C+D+E = 0$ ergo

$$\left. \begin{array}{l} -5A^4(B+C+D+E) \\ -5B^4(A+C+D+E) \\ -5C^4(A+B+D+E) \\ -5D^4(A+B+C+E) \\ -5E^4(A+B+C+D) \end{array} \right\} = 5A^5 + 5B^5 + 5C^5 + 5D^5 + 5E^5 =$$

$$5P_5 = 25A'B' + 25D'.$$

Termini divisionis tertiae reducuntur ad

$$-10A^3(B^2+C^2+D^2+E^2)$$

$$-10B^3(A^2+C^2+D^2+E^2)$$

$$-10C^3(A^2+B^2+D^2+E^2)$$

$$-10D^3(A^2+B^2+C^2+E^2)$$

$$-10E^3(A^2+B^2+C^2+D^2)$$

sed

$$B^2 + C^2 + D^2 + E^2 = P_4 - A^2 = 2A' - A^2$$

$$A^2 + C^2 + D^2 + E^2 = P_4 - B^2 = 2A' - B^2$$

$$A^2 + B^2 + D^2 + E^2 = P_4 - C^2 = 2A' - C^2$$

$$A^2 + B^2 + C^2 + E^2 = P_4 - D^2 = 2A' - D^2$$

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = P_4 - E^2 = 2A' - E^2$$

ergo

$$\left. \begin{aligned} -10A^3(B^2 + C^2 + D^2 + E^2) \\ -10B^3(A^2 + C^2 + D^2 + E^2) \\ -10C^3(A^2 + B^2 + D^2 + E^2) \\ -10D^3(A^2 + B^2 + C^2 + E^2) \\ -10E^3(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} -10A^3(2A' - A^2) \\ -10B^3(2A' - B^2) \\ -10C^3(2A' - C^2) \\ -10D^3(2A' - D^2) \\ -10E^3(2A' - E^2) \end{aligned} \right\} =$$

$$10A^5 + 10B^5 + 10C^5 + 10D^5 + 10E^5 - 20A'(A^3 + B^3 + C^3 + D^3 + E^3)$$

$$= -10P_5 - 20A'P_3 = -10A'B' + 50D'$$

Termini divisionis quartae reducuntur ad

$$\begin{aligned} & 20A^3(AB + AC + AD + AE + BC + BD + BE + CD + CE + DE - AB - AC - AD - AE) \\ & + 20B^3(AB + AC + AD + AE + BC + BD + BE + CD + CE + DE - BA - BC - BD - DE) \\ & + 20C^3(AB + AC + AD + AE + BC + BD + BD + CD + CE + DE - CA - CB - CD - CE) \\ & + 20D^3(AB + AC + AD + AE + BC + BD + BD + CD + CE + DE - DA - DB - DC - DE) \\ & + 20E^3(AB + AC + AD + AE + BC + BD + BE + CD + CE + DE - EA - EB - EC - ED) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & 20A^3A' + 20A^4(B + C + D + E) \\ & = 20B^3A' + 20B^4(A + C + D + E) \\ & = 20C^3A' + 20C^4(A + B + D + E) \\ & = 20D^3A' + 20D^4(A + B + C + E) \\ & = 20E^3A' + 20E^4(A + B + C + D) \end{aligned} \right\} =$$

$$= 20A'P_3 - 20P_5 = -40A'B' - 150D'$$

Termini divisionis quintae ad formam simplicioremi reduci nequeunt

Termini divisionis sextae reducuntur ad

$$\begin{array}{l}
 -30A^2B^2(C+D+E) \\
 -30A^2C^2(B+D+E) \\
 -30A^2D^2(B+C+E) \\
 -30A^2E^2(B+C+D) \\
 -30B^2C^2(A+D+E) \\
 -30B^2D^2(A+C+E) \\
 -30B^2E^2(A+C+D) \\
 -30C^2D^2(A+B+E) \\
 -30C^2E^2(A+B+D) \\
 -30D^2E^2(A+B+C)
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 -30A^2B^2(-A-B) \\
 -30A^2C^2(-A-C) \\
 -30A^2D^2(-A-D) \\
 -30A^2E^2(-A-E) \\
 -30B^2C^2(-B-C) \\
 -30B^2D^2(-B-D) \\
 -30B^2E^2(-B-E) \\
 -30C^2D^2(-C-D) \\
 -30C^2E^2(-C-E) \\
 -30D^2E^2(-D-E)
 \end{array}
 \right\} =$$

$$\begin{array}{l}
 30A^3B^2 \\
 +30A^3C^2 \\
 +30A^3D^2 \\
 +30A^3E^2 \\
 +30B^3A^2 \\
 +30B^3C^2 \\
 +30B^3D^2 \\
 +30B^3E^2 \\
 +30C^3A^2 \\
 +30C^3B^2 \\
 +30C^3D^2 \\
 +30C^3E^2 \\
 +30D^3A^2 \\
 +30D^3B^2 \\
 +30D^3C^2 \\
 +30D^3E^2 \\
 +30E^3A^2 \\
 +30E^3B^2 \\
 +30E^3C^2 \\
 +30E^3D^2
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 30A^3(B^2+C^2+D^2+E^2) \\
 +30B^3(A^2+C^2+D^2+E^2) \\
 +30C^3(A^2+B^2+D^2+E^2) \\
 +30D^3(A^2+B^2+C^2+E^2) \\
 +30E^3(A^2+B^2+C^2+D^2)
 \end{array}
 \right\} =$$

$$\left. \begin{aligned} &30A^3(P_2 - A^2) \\ &+30B^3(P_2 - B^2) \\ &+30C^3(P_2 - C^2) \\ &+30D^3(P_2 - D^2) \\ &+30E^3(P_2 - E^2) \end{aligned} \right\} = 30P_2P_3 - 30P_3 = 30A'B' - 150D'$$

Termini divisionis septimae ad formam simplicioreni reduci nequeunt.

Termini divisionis octavae reducuntur ad

$$\left. \begin{aligned} &-60A(ABCD + ABCE + ABDE + ACDE) \\ &-60B(ABCD + ABCE + ABDE + BCDE) \\ &-60C(ABCD + ABCE + ACDE + BCDE) \\ &-60D(ABCD + ABDE + ACDE + BCDE) \\ &-60E(ABCE + ABDE + ACDE + BCDE) \end{aligned} \right\} =$$

$$\left. \begin{aligned} &-60A(ABCD + ABCE + ABDE + ACDE + BCDE - BCDE) \\ &-60B(ABCD + ABCE + ABDE + ACDE + BCDE - ACDE) \\ &-60C(ABCD + ABCE + ABDE + ACDE + BCDE - ABDE) \\ &-60D(ABCD + ABCE + ABDE + ACDE + BCDE - ABCE) \\ &-60E(ABCD + ABCE + ABDE + AEDE + BCDE - ABCD) \end{aligned} \right\} =$$

$$60C'(A + B + C + D + E) + 300ABCDE = 300D'$$

Terminus divisionis nonae reducitur ad 480 D'

Erit igitur

$$\begin{aligned} &3125(a^5 + b^5 + c^5 + d^5) = \\ &20A'B' + 20D' + 100A^3BE + 150A^2B^2D \\ &+ 25A'B' + 25D' + 100A^3CD + 150A^2C^2B \\ &- 10A'B' + 50D' + 100B^3AC + 150A^2D^2E \\ &- 40A'B' - 250D' + 100B^3DE + 150A^2E^2C \\ &+ 30A'B' + 300D' + 100C^3AE + 150B^2C^2E \\ &+ 480D' + 100C^3BD + 150B^2D^2C \\ &+ 100D^3AB + 150B^2E^2C \\ &+ 100D^3CE + 150C^2D^2A \\ &+ 100E^3AD + 150C^2E^2D \\ &+ 100E^3BC + 150D^2E^2D \end{aligned}$$

at ideo coefficientis secundi termini $-a^5 - b^5 - c^5 - d^5 =$

$$\begin{aligned} & -25A'B' - 625D' - 100A^3(BE + CD) - 150A(B^2E^2 + C^2D^2) \\ & \quad - 100B^3(AC + DE) - 150B(A^2C^2 + D^2E^2) \\ & \quad - 100C^3(AE + BD) - 150C(A^2E^2 + B^2D^2) \\ & \quad - 100D^3(AB + CE) - 150D(A^2B^2 + C^2E^2) \\ & \quad - 100E^3(AD + BC) - 150E(A^2D^2 + B^2C^2) \end{aligned}$$

3125

$$\begin{aligned} = & -A'B' - 25D' - 4A^3(BE + CD) - 6A(B^2E^2 + C^2D^2) \\ & \quad - 4B^3(AC + DE) - 6B(A^2C^2 + D^2E^2) \\ & \quad - 4C^3(AE + BD) - 6C(A^2E^2 + B^2D^2) \\ & \quad - 4D^3(AB + CE) - 6D(A^2B^2 + C^2E^2) \\ & \quad - 4E^3(AD + BC) - 6E(A^2D^2 + B^2C^2) \end{aligned}$$

125

Verum haec expressio incognita manet, etenim praeter duos priores terminos $-A'B'$, $-25D'$ ceteri neque singulatim, neque simul ad formam notam radicum reduci possunt, nisi aliqua data relatio inter radices intersit. Sed cum id agatur de aequatione generali quinti gradus, inter radices nulla alia interest relatio praeter illam quam habent cum coefficientibus aequationis, relationes quae equidem non convertunt in quantitatem notam complexum illorum terminorum. Et quoniam in quavis aequatione sufficit ut unus coefficientis ignotus sit ad iudicandum eam non esse solvibilem; ita concludere possumus resolventem aequationum quinti gradus methodo euleriana de promptam resolvere non posse hanc aequationem quin opus sit ceteros coefficientes invenire.

In quovis aequatione

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3}Cx^{n-4} + ec. = 0$$

carente secundo termino tantum, numerus coefficientium est $n - 1$; ejus autem forma erit generalis, omnesque comprehendet aequationes ejusdem gradus si unusquisque coefficientium aliis nullo vinculo connexus sit, ipsique assignari possit valor quicumque arbitrarius. Ut autem coefficientes omnes arbitrarj sint, oportet numerum elementorum radicum esse

$n-1$, atque item $n-1$ numerum incognitarum quas ipsa compræhendunt. Tunc enim, cum numerus æquationum auxiliarium inter elementa et coefficientes sit $n-1$, erunt omnes determinatae et subsistere possunt, quæcumque valorem habeant coefficientes. Verum si numerus elementorum, vel incognitarum quas radices continent sit minor $n-1$ ex. gr. $n-h$, $n-h$ æquationes auxiliares sufficiunt ad eas incognitas separandas, et ideo $n-h$ coefficientes valorem quemcumque habere possunt; ne autem reliquæ $h-1$ æquationes sint ceteris contradictoriae opus est ut $h-1$ coefficientes vinculo speciali aliis connexi sint ab eisque penitus dependeant. Quapropter concludere possumus in quavis æquatione tot esse coefficientes arbitrarios quot sunt incognitæ in elementis inclusæ. Sic in æquationibus discussis in dissertatione = *De innumeris æquationibus algebraicis* etc. = duo tantum sunt elementa radicum et duo quoque tantum coefficientes arbitrarii.

Ad hunc casum pertinet amplissima classis æquationum de quibus diffuse egit Cl. Eulerus in dissertatione = *Innumerae æquationum formæ cujusque ordinis, quarum resolutio exhiberi potest* = (1) Elementa radicum harum æquationum, cujus gradus dicemus n , sunt

$$\sqrt[n]{pq^{n-1}}, \sqrt[n]{p^2q^{n-2}}, \sqrt[n]{p^3q^{n-3}}, \text{etc. } \sqrt[n]{p^{n-1}q}.$$

Eorum numerus completus est, sed cum duæ tantum sint incognitæ in ipsis compræhensæ nempe p, q , duo quoque tantum erunt coefficientes arbitrarii: reapse æquatio ab ipso Eulero inventa est

$$\begin{aligned} x^n - n \frac{(n-1)}{2} pq x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} pq(p+q)x^{n-3} \\ - \frac{n(n-1)\dots(n-3)}{2 \dots 4} pq(p^2+pq+q^2)x^{n-4} \\ - \frac{n(n-1)\dots(n-4)}{2 \dots 5} pq(p^3+p^2q+pq^2+q^3)x^{n-5} \\ - \text{etc.} \end{aligned}$$

(1) Nov. Act. Ac. Scient. Petrob. Tom. 6.

Positis $pq = A^2, p + q = 2B$, duo priores coefficientes erunt
 $-n \frac{(n-1) A^2}{2}, -2 \frac{(n-1)(n-2) A^2 B}{2 \cdot 3}$, qui evidenter

erunt arbitrarii, possumus enim assignare quantitibus A, B valorem quemcumque; ceteri autem ab hisce derivant lege manifesta. Cum igitur non omnes coefficientes arbitrarii sint, forma aequationis non erit generalis, excepto tamen casu $n = 3$; exceptis scilicet aequationibus tertii gradus, in hisce enim aequationibus cum duo tantum sint coefficientes, erunt omnes arbitrarii.

Erit autem haec aequatio

$$x^3 - 3A^2y - 2A^2B = 0$$

et elementa radicum $\sqrt[3]{pq^2}, \sqrt[3]{p^2q}$. Positis itaque $pq = A^2, p + q = 2B$ inferemus

$$p = B + \sqrt{B^2 - A^2}, q = B - \sqrt{B^2 - A^2}$$

unde radices aequationis erunt

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{A^2B + \sqrt{A^4B^2 - A^6}} + \sqrt[3]{A^2B - \sqrt{A^4B^2 - A^6}} \\ & \alpha \sqrt[3]{A^2B + \sqrt{A^4B^2 - A^6}} + \alpha^2 \sqrt[3]{A^2B - \sqrt{A^4B^2 - A^6}} \\ & \alpha^2 \sqrt[3]{A^2B + \sqrt{A^4B^2 - A^6}} + \alpha \sqrt[3]{A^2B - \sqrt{A^4B^2 - A^6}} \end{aligned}$$

quae expressiones sunt eae ipsae quae obtinentur in aequationibus tertii gradus, quavis methodo resolutis.

Atque haec consequentia in mentem mihi redigit conjecturam quam olim assecutus sunt, nempe ex forma nota radicum resolutionem aequationis deduci posse; equidem haec conjectura sancitur in aequationibus tertii et quarti gradus. Iam vidimus supra quomodo ex forma radicum $\sqrt[3]{pq^2} + \sqrt[3]{p^2q}$ aequationum tertii gradus resolutio obtinetur; id ipsum videbimus nunc formam ordinariam $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$ radicum earumdem aequationum adhibentes.

Sit igitur aequatio generalis tertii gradus

$$x^3 + 3Bx - 2C = 0.$$

Incognitae x substituatur $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$, et habebimus

$$a + \sqrt{b} + 3\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})^2(a-\sqrt{b})} + 3\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})^2} + a - \sqrt{b} \\ + 3B\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + 3B\sqrt[3]{a-\sqrt{b}} - 2C = 0,$$

seu

$$2a - 2C + 3(\sqrt[3]{a^2 - b} + B)\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + 3(\sqrt[3]{a^2 - b} + B)\sqrt[3]{a-\sqrt{b}} = 0.$$

At ut haec aequatio subsistere possit necesse est ut separatim ad nihil reducantur quantitates rationales, et quantitates irrationales; erit ergo

$$2a - 2C = 0, \text{ et ideo } a = C,$$

$$3(\sqrt[3]{a^2 - b} + B)(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}}) = 0$$

et quoniam non potest esse

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} = 0$$

haec enim est expressio valoris incognitae x , ergo debet esse

$$\sqrt[3]{a^2 - b} + B = 0;$$

ergo

$$a^2 - b = -B^3,$$

atque

$$b = a^2 + B^3,$$

sed

$$a^2 = C^2,$$

ergo

$$b = C^2 + B^3;$$

erit igitur

$$x = \sqrt[3]{C + \sqrt{C^2 + B^3}} + \sqrt[3]{C - \sqrt{C^2 + B^3}},$$

ideoque aequatio erit resoluta.

Sit nunc aequatio generalis quarti gradus

$$x^4 + 4Bx^2 - 8Cx + 4D = 0.$$

Forma ejus radicum, est

$$u + \sqrt{m + \frac{n}{u} - u^2};$$

ubi abbreviationem calculi, symbulo u indicamus

$$\sqrt{\frac{3}{h + \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{a - \sqrt{b}}}}}}$$

Substituatur $u + \sqrt{m + \frac{n}{u} - u^2}$ incognitae x in aequatione data, e inferemus

$$\left. \begin{aligned} -4u^4 + 4mu^2 + (4n - 8C)u + \frac{2mn - 4Bn}{4} + \frac{n^2}{u^2} + m^2 - 4Bm - 4D \\ + ((4m - 8B)u + 4n - 8C)\sqrt{m + \frac{n}{u} - u^2} \end{aligned} \right\} = 0.$$

Fiat $4m - 8B = 0$, $4n - 8C = 0$; unde $m = 2B$, $n = 2C$ sicque aequatio reducitur ad

$$-4u^4 + 8Bu^2 + \frac{4C^2}{u^2} - 4B^2 - 4D = 0,$$

seu

$$u^6 - 2Bu^4 + (B^2 + D)u^2 - C^2 = 0.$$

Quae aequatio est ea ipsa, quae reductae nomine designatur in aequationibus quarti gradus quavis alia methodo resolutis. Cum autem haec aequatio resolvatur uti aequationes tertii gradus, retinere possumus u tamquam cognitam et ideo aequationem generalem quarti gradus resolutam. Sed revertamur ad formulam eulerianam; elementa radicum aequationum quarti gradus erunt

$$\sqrt[4]{pq^3}, \sqrt[4]{p^2q^2}, \sqrt[4]{p^3q},$$

et aequationum forma

$$x^4 - 6pqx^2 - 4pq(p+q)x - pq(p^2 + pq + q^2) = 0.$$

Ponatur $pq = A^2$, $p + q = 2B$, et erit

$$p = B + \sqrt{B^2 - A^2} \quad q = B - \sqrt{B^2 - A^2},$$

ergo

$$pq(p^2 + pq + q^2) = 4A^2B^2 - A^4.$$

Erit igitur aequatio

$$x^4 - 6A^2x^2 - 8A^2Bx - 4A^2B^2 + A^4 = 0.$$

Duo coefficientes $-6A^2$, $-8A^2B$ erunt arbitrari, possumus enim assignare A , et B quemcumque valorem; ultimus terminus vero $-4A^2B^2 + A^4$ ab illis dependet, quod per se evidens est, ideoque forma aequationis non est generalis.

Cum autem sit

$$p = B + \sqrt{B^2 - A^2}, \quad q = B - \sqrt{B^2 - A^2},$$

erit

$$\sqrt[4]{p^3q} = \sqrt[4]{A^2(B + \sqrt{B^2 - A^2})} = \sqrt[4]{A^2B + \sqrt{A^4B^2 - A^6}}, \quad \sqrt[4]{p^2q^2} = \sqrt[4]{A^4} = A;$$

$$\sqrt[4]{pq^3} = \sqrt[4]{A^2(B - \sqrt{B^2 - A^2})} = \sqrt[4]{A^2B - \sqrt{A^4B^2 - A^6}}.$$

Hinc radices aequationis

$$\alpha \sqrt[4]{A^2B + \sqrt{A^4B^2 - A^6}} + \alpha^2 A + \alpha^3 \sqrt[4]{A^2B - \sqrt{A^4B^2 - A^6}}$$

experimente α quamcumque radicem quartam unitatis.

In elementis radicum introducemus tertiam incognitam r , scilicet sint elementa $\sqrt[4]{pq^2r^3}$, $\sqrt[4]{p^2q^2r^2}$; $\sqrt[4]{p^3q^2r}$ quo nihil vel parum alteratur lex formulae eulerianae.

Sit aequatio

$$x^4 + 6Bx^2 - 4Cx + D = 0,$$

et erunt aequationes auxiliares

$$pqr = -B$$

$$pqr^2\sqrt{q} + p^2qr\sqrt{q} = C$$

$$pq^2r^3 + p^3q^2r + p^2q^2r^2 = -D.$$

Ex duabus prioribus deducimus

$$p = \frac{-C}{2B\sqrt{q}} + \sqrt{\frac{C^2}{4B^2q} + \frac{B}{q}}$$

$$r = \frac{-C}{2B\sqrt{q}} - \sqrt{\frac{C^2}{4B^2q} + \frac{B}{q}};$$

quibus valoribus substitutis in aequatione tertia, habebimus, reductione facta $D = \frac{C^2}{B} + B^3$. Ab hac aequatione igitur evasit

incognita q , atque ideo ut ipsa subsistat coefficientis D a ceteris dependet, nec aequatio potest esse generalis. Introductio igitur tertiae incognitae in elementis nihil confert ad generalem resolutionem aequationum quarti gradus imo eadem aequatio, obtinetur sive assumantur elementa $\sqrt[4]{pq^2}$, $\sqrt[4]{p^2q^2}$, $\sqrt[4]{p^3q}$, sive elementa $\sqrt[4]{pq^2r^3}$, $\sqrt[4]{p^2q^2r^2}$, $\sqrt[4]{p^3q^2r}$, nam si in aequatione supposita ponatur $B = -A^2$, $C = 2A^2B$ redit aequatio prior,

$$x^4 - 6A^2x^2 - 8A^2Bx - 4A^2B^2 + A^4 = 0.$$

Pro aequationibus quinti gradus formula euleriana reducitur ad

$$x^5 - 10pqx^3 - 10pq(p+q)x^2 - 5pq(p^2+pq+q^2)x - pq(p^3+p^2q+pq^2+q^3) = 0,$$

et elementa radicum

$$\sqrt[5]{pq^4}, \sqrt[5]{p^2q^3}, \sqrt[5]{p^3q^2}, \sqrt[5]{p^4q}.$$

Posito $pq = A^2$, $p + q = 2B$ habebimus

$$p = B + \sqrt{B^2 - A^2}, \quad q = B - \sqrt{B^2 - A^2}.$$

Hinc

$$pq(p^2 + pq + q^2) = 4B^2A^2 - A^4, \quad +pq(p^3 + p^2q + pq^2 + q^3) = 8B^3A^2 - 4BA^4;$$

erit igitur aequatio

$$x^5 - 10A^2x^3 - 20A^2Bx^2 - 5(4A^2B^2 - A^4)x - 8A^2B^3 + 4BA^4 = 0,$$

radices vero

$$\alpha \sqrt[5]{A^2(B + \sqrt{B^2 - A^2})^3} + \alpha^2 \sqrt[5]{A^4(B + \sqrt{B^2 - A^2} + \alpha^3 \sqrt[5]{A^4(B - \sqrt{B^2 - A^2})^3}} \\ + \alpha^4 \sqrt[5]{A^2(B - \sqrt{B^2 - A^2})^3};$$

experimente α quamcumque radicem quintam unitatis.

Cum introductio tertiae incognitae in elementis radicum aequationum quarti gradus nihil confert ad earum resolutionem generalem, recte concludere possumus nihil conferre ad solutionem generalem aequationum quinti gradus introductio duarum incognitarum in elementis earum radicum. Atque ut id calculo demonstretur, sit aequatio

$$x^5 - 10Bx^3 - 5Cx^2 + 5Dx - E = 0,$$

et elementa ejus radicum

$$\sqrt[5]{pq^2r^3s^4}, \sqrt[5]{p^2q^4rs^3}, \sqrt[5]{p^3qr^4s^2}, \sqrt[5]{p^4q^3r^2s}.$$

Erunt aequationes auxiliares

$$\begin{aligned} pqr s &= B \\ pq^2rs^2 + p^2q^2rs + pqr^2s^2 + p^2qr^2s &= C \\ p^3qr^3s^2 + pq^2r^2s^3 + p^3q^2r^2s + p^3q^3rs^2 + gp^2q^2r^2s^2 &= 10B^2 + D \\ \left. \begin{aligned} pq^2r^3s^4 + 50p^2q^2r^3s^3 \\ p^2q^4rs^3 + 50p^2q^3r^3s^2 \\ p^3qr^4s^2 + 50p^3q^2r^3s^2 \\ p^4q^3r^2s + 50p^3q^3r^4s^2 \end{aligned} \right\} &= 50BC + E. \end{aligned}$$

Ponatur $ps = k$, $qr = h$ erit $hk = B$, $r = \frac{h}{q}$, $s = \frac{k}{p} = \frac{B}{hp}$; ita aequationes auxiliares reducuntur ad

$$\begin{aligned} hk &= B \\ \frac{B^2q}{kp} + Bpq + \frac{B^2}{pq} + \frac{Bkp}{q} &= C \\ \frac{B^2h}{q^2} + \frac{B^3}{hp^2} + Bhp^2 + \frac{B^2q^2}{h} &= B^2 + D \\ \left. \begin{aligned} \frac{B^4}{hp^3q} + \frac{B^3q^3}{h^2p} + \frac{B^2h^2p}{q^3} + Bhp^3q \\ + \frac{50B^3}{pq} + \frac{50B^3q}{hp} + \frac{50B^2hp}{q} + 50B^2pq \end{aligned} \right\} &= 50BC + E \end{aligned}$$

Ex secunda harum aequationum multiplicata per 50 B habemus

$$\frac{50B^3}{pq} + \frac{50B^3q}{hp} + \frac{50B^2hp}{q} + 50B^2pq = 50BC;$$

reducitur igitur aequatio postrema ad

$$\frac{B^4}{hp^3q} + \frac{B^3q^3}{h^2p} + \frac{B^2h^2p}{q^3} + Bhp^3q = E.$$

Ita aequationes auxiliares reducuntur ad tres sequentes

$$\frac{B^2q}{kp} + Bpq + \frac{B^2}{pq} + \frac{Bkp}{q} = C$$

$$\frac{B^2h}{q^2} + \frac{B^3}{hp^2} + Bhp^2 + \frac{B^2q^2}{h} = B^2 + D$$

$$\frac{B^4}{hp^3q} + \frac{B^3q^3}{h^2p} + \frac{B^2h^2p}{q^3} + Bhp^3q = E.$$

Ponatur

$$\frac{B^2q}{hp} + \frac{Bhp}{q} = M$$

$$Bpq + \frac{B^2}{pq} = N$$

atque ex earum multiplicatione habemus,

$$\frac{B^3q^2}{h} + \frac{B^4}{hp^2} + B^2hp^2 + \frac{B^3h}{q^2} = MN,$$

unde $\frac{MN}{B} = B^2 + D$. Ex additione duarum priorum deducitur $M + N = C$ et ideo

$$M = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4B^3 - 4BD}}{2}$$

$$N = \frac{C \mp \sqrt{C^2 - 4B^3 - 4BD}}{2}.$$

Itaque notae fiunt quantitates M, N .

Cum autem sit

$$\frac{hp}{q} + \frac{Bq}{hp} = \frac{M}{B}, \quad pq + \frac{B}{pq} = \frac{N}{B},$$

erit

$$\frac{hp}{q} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4B^3}}{2B}$$

$$pq = \frac{N \mp \sqrt{N^2 - 4B^3}}{2B}$$

Notae igitur erunt quoque $\frac{hp}{q}, pq$.

Ponatur $\frac{hp}{q} = H, pq = K$, atque substitutis hisce valoribus in aequatione postrema habebimus

$$E_1^4 = \frac{B^4}{K^2H^2} + B^3KH + \frac{HK}{B^2} + BK^2H^2.$$

Ex hac aequatione evasere omnes quantitates incognitae, sunt enim notae B, H, K. Igitur non est E arbitrarius, neque ideo aequatio generalis. Ejus tamen forma, quae est

$$\left. \begin{array}{l} x^5 - pqr sx^3 - spq^2rs^2 \\ \quad - sp^2q^2rs \\ \quad - spqr^2s^2 \\ \quad - sp^2qr^2s \\ \quad - sp^2q^2r^2s^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 - sp^2qr^3s^2 \\ \quad - spq^2r^2s^3 \\ \quad - sp^3q^2r^2s \\ \quad - sp^2q^3rs^2 \\ \quad - sp^2q^2r^2s^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} x - pq^2r^3s^4 \\ \quad - p^2q^4rs^3 \\ \quad - p^3qr^4s^2 \\ \quad - p^4q^3r^2s \end{array} \right\} = 0.$$

constituit amplissimam classem aequationum quinti gradus quae omnes resolvibiles erunt quemcumque valorem habeant quantitates p, q, r, s .

Cum radices aequationum quinti gradus constare possint vel uno vel duobus vel tribus, vel quatuor elementis juxta classificationem quam statui in dissertatione pluries memorata, aequationes quinti gradus distinguemus in quatuor ordines.

Primus ordo eas aequationes comprehendit quarum radices unico constant elemento; ipsae omnes sunt unius formae quae est $x^5 - A = 0$, quaeque omnes resolvibiles sunt, atque uti notissimum est, ejus radices sunt $\sqrt[5]{A}$, $\alpha_1\sqrt[5]{A}$, $\alpha^2\sqrt[5]{A}$, $\alpha^3\sqrt[5]{A}$, $\alpha^4\sqrt[5]{A}$.

Secundus ordo continet aequationes quarum radices constant duobus elementis; earum forma duplex est; primo, jamdiu nota analysis est

$$x^5 + 5Bx^3 + 5B^2x + 2T = 0.$$

Haec aequatio resolvibilis est, uti est notum, ejusque radices sunt

$$\begin{aligned} & \sqrt[5]{-T \pm \sqrt{T^2 + B^5}} + \sqrt[5]{-T \mp \sqrt{T^2 + B^5}} \\ & \alpha \sqrt[5]{-T \pm \sqrt{T^2 + B^5}} + \alpha^4 \sqrt[5]{-T \mp \sqrt{T^2 + B^5}} \\ & \alpha^2 \sqrt[5]{-T \pm \sqrt{T^2 + B^5}} + \alpha^3 \sqrt[5]{-T \mp \sqrt{T^2 + B^5}} \end{aligned}$$

$$\alpha^3 \sqrt[5]{-T \pm \sqrt{T^2 + B^5}} + \alpha^2 \sqrt[5]{-T \mp \sqrt{T^2 + B^5}}$$

$$\alpha^4 \sqrt[5]{-T \pm \sqrt{T^2 + B^5}} + \alpha \sqrt[5]{-T \mp \sqrt{T^2 + B^5}}$$

quae radices, ex analogia cum radicibus aequationum tertii gradus, dicuntur formae cardanicae.

Secunda forma harum aequationum est

$$x^5 - 5MNx^2 - 5MN^2x - MN^3 - M^2N = 0.$$

De his aequationibus diffuse egi in dissertatione = De innumeris aequationibus etc. earumque radices sunt.

$$\sqrt[5]{MN^3} + \sqrt[5]{M^2N}$$

$$\alpha \sqrt[5]{MN^3} + \alpha^4 \sqrt[5]{M^2N}$$

$$\alpha^2 \sqrt[5]{MN^3} + \alpha^3 \sqrt[5]{M^2N}$$

$$\alpha^3 \sqrt[5]{MN^3} + \alpha^2 \sqrt[5]{M^2N}$$

$$\alpha^4 \sqrt[5]{MN^3} + \alpha \sqrt[5]{M^2N}$$

Cum autem utraque forma harum aequationum solvibilis sit concludere possumus omnes aequationes quinti gradus ordinis secundi resolvi posse.

Tertius ordo continet aequationes quarum radices constant tribus elementis. Nemo adhuc quod sciam has aequationes discutere aggressus est; sunt tamen omnes resolvibiles, quod hic breviter demonstrare mihi propono.

Sit aequatio quinti gradus

$$x^5 - 10Bx^3 - 5Cx^2 - 5Dx - E = 0.$$

Sint elementa radicum a, b, c ; erunt aequationes auxiliares

$$bc = 2B$$

$$ab^2 + a^2c = C$$

$$2ac^3 + 2ba^2 + 3b^2c^2 = 20B^2 + 2D$$

$$a^5 + b^5 + c^5 + 20ab^2 + 30a^2c^2b = 50BC + E$$

Ex prima harum aequationum habemus $c = \frac{2B}{b}$; hinc secunda et tertia reducuntur ad

$$ab^2 + \frac{2a^2B}{b} = C$$

$$\frac{8aB^2}{b^2} + ba^2 = 4B^2 + D.$$

Ponatur $ab^2 = M$, $\frac{2a^2B}{b} = N$ eritque

$$M + N = C$$

$$\frac{MN}{2B} + \frac{4B^2N}{M} = 4B^2 + D,$$

ideo $N = C - M$, et ita haec ultima aequatio reducitur ad

$$M^3 - CM^2 + (16B^2 + 2BD)M + B^2C = 0.$$

Haec aequatio resolubilis est, atque ita est M quantitas nota, nec non $N = C - M$.

Nunc ex aequationibus

$$ab^2 = M, \quad \frac{2a^2B}{b} = N$$

habemus

$$a = \sqrt[5]{\frac{M(C-M)^2}{4B^2}}, \quad b = \sqrt[5]{\frac{2BM^2}{C-M}},$$

et tandem ex

$$c = \frac{2B}{b}, \quad c = \sqrt[5]{\frac{16B^4(C-M)}{M^2}}.$$

Erit igitur radix aequationis propositae

$$\sqrt[5]{\frac{M(C-M)^2}{4B^2}} + \sqrt[5]{\frac{2BM^2}{C-M}} + \sqrt[5]{\frac{16B^4(C-M)}{M^2}}.$$

Determinandum vero manet coefficientis seu terminus E , atque ne postrema aequatio

$$a^5 + b^5 + c^5 + 20ab^3c + 30a^2c^2b = 50BC + E$$

sit ceteris contradictoria, positus in hac quatione loco a, b, c valoribus superius deductis, debet esse

$$E = \frac{M(C-M)^2}{4B^2} + \frac{2BM^2}{C-M} + \frac{16R^4(C-M)}{M^2} + 10BC - 20BM.$$

Forma igitur generalis aequationum quinti gradus tertii ordinis erit

$$x^5 - 10Bx^3 - 5Cx^2 - 5Dx - \frac{M(C-M)^2}{MB^2} + \frac{2BM^2}{C-M} + \frac{16R^4(C-M)}{M^2} - 10BC + 20BM = 0.$$

Haec autem est unica forma aequationum hujus ordinis ad eam enim pervenimus etiam si assumamus elementa radicum a, b, d ; a, c, d ; b, c, d . Ultimus terminus hujus formae generatim est irrationalis, est enim irrationalis quantitas M nisi inter coefficientes B, C, D existat aliqua relatio qua M evadat rationalis.

Quartus et ultimus ordo aequationum quinti gradus comprehendit eas omnes quarum radices constant quatuor elementis. Sed harum aequationum resolutio adhuc ignorari notissimum est, nisi aliqua peculiaris relatio existat inter radices, vel etiam inter coefficientes aequationum qua aliquo artificio elementa omnia possint determinari. Sed si aliqua existit relatio inter elementa radicum qua aequationes resolvi possunt, tunc ex dictis superius facile aequationes ipsae ad ordines praecedentes reduci possunt ita ut aequationes quinti gradus et quarti ordinis stricte sumptae adhuc resolvi nequeunt.

ANTONII BERTOLONII

EQ. AUR. ET ORD. SABAUD. M. D.

IN ARCHIGYMN. BONON. BOT. PROFESS. EMER.

MISCELLANEA BOTANICA III. (I)

Miscellanea tertia, quae vobis exhibeo, Academici sapientissimi, de quibusdam Europae, Africae, et Americae plantis agunt, quae vel notis minus aptis fuerant sancitae, vel confusae incedebant cum aliis, aut novae omnino sunt, quia noviter detectae. Neque de his observationibus miremini, cum in doctrina tam late extensa, cujus elementa saepe a locis petenda inter se dissitis, vel peragratu difficillimis, raro contingat, ut cultores rei herbariae cuncta viderint, quae ad sistendam, et determinandam speciem potissimum valent; missisque iis, quae a proposito divertant, statim ad rem exponendam devenio.

Linnaeus in libris, quos de plantis scripsit, unam tantum *Soldanellae* speciem admisit, eamque *Soldanellam alpinam* vocavit Sp. pl. p. 206., cui attribuit *Soldanellam alpinam rotundifoliam* C. B. P. p. 295. Moris. Oxon. sect. 3. tab. 15. fig. 8., et *Soldanellam alpinam* Camer. Epit. p. 254. At botanici recentiores Germaniae species quatuor *Soldanellae* statuerunt, quae ab eis dictae sunt

1. *Soldanella montana* Willd. En. 1. p. 192.
2. *Soldanella alpina* Lin. Sp. pl. p. 206.

(1) Haec Miscellanea botanica tertia lecta fuerunt ab Auctore in conventu Academiae scientiarum Institut. Bonon. habito an. 1841. decimo sept. Kal. Jan.

3. *Soldanella pusilla* Baumg. *En. stirp. Trans.* 1. p. 158.

4. *Soldanella minima* Hoppe.

Descriptions, et characteres harum specierum extant in Deuts. Fl. iterum edita, et aucta a Mertensio, et Kochio tom. 2. p. 122-124., in Syn. Fl. Germ. et Helv. Kochii p. 591. 592., et in Fl. Germ. exc. Reichenbachii tom. 2. p. 405. 406. Priores duae habent corollam ad dimidium usque longitudinis alte laciniatam; sed *Soldanella montana* [essato horum auctorum distinguitur, quia pedunculi ejus scatent glandulis exiguis brevissime stipitatis, dum *Soldanella alpina* L. fert easdem glandulas sessiles. Insuper iidem statuunt, *Soldanellam montanam* gaudere habitu omnium grandiore, et ad illam afferunt figuram *Soldanellae alpinae majoris* Clus. Hist. pl. lib. 3. p. 308.; *Soldanellam alpinam* vero dicunt esse longe minorem, et reliquis duabus fere parem, eique assignant figuram *Soldanellae alpinae minoris* Clus. l. c. p. 309. Sed in eodem loco natali reperiuntur individua, quae per varios gradus continuata serie a planta majore ducunt ad minorem. Quare evidens est, curari de dimensione non posse in hujusmodi specierum determinatione sistenda. Totum vero penu distinctionis staret in glandulis pedunculorum stipitatis, vel sessilibus, si hoc quoque constans esset; sed in horto sicco meo possideo exemplaria formae grandioris figuram *Soldanellae alpinae majoris* Clusii perfecte referentia, quae indiscriminatim gerunt glandulas pedunculorum sessiles, aut brevissime stipitatas, eundemque usum reperio in aliis exemplaribus minoribus, imo minimis uno, eodemque loco lectis cum exemplaribus majoribus. Quis non videt ex hoc, distinctionem petitam a glandulis stipitatis, vel sessilibus esse commentitiam? Et ita revera est, duaeque illae species unam tantum speciem omnino sistunt. Hinc Linnaeus jure merito unam ex illis fecit, et sub *Soldanella alpina* sua attulit figuras tam formae majoris quam minoris; unam ego quoque feci in Fl. Ital. vol. 2. p. 397., neque me errasse contendo. Restat, ut observem, non solum proprium esse cujuscunque formae, et magnitudinis *Soldanellae alpinae* gerere corollam profunde laciniatam, sed etiam habere stilum ipsa corolla lon-

giorem, aut saltem aequalem, et antheras apice desinentes in appendicem filiformem, longam, recurvam, neque curvandum esse de proportione filamenti ad antheram, et de foliis sive integris, sive repandis, sive crenatis, cum notae istae sint inconstantes, et de individuo in individuum varietatibus obnoxiae.

Quoad reliquas duas species iidem auctores tribuerunt *Soldanellae pusillae* folia cordato-reniformia, subrepanda, glandulas pedunculorum sessiles, et Kochius in Syn. Fl. Germ. et Helv. p. 592. addidit antheras basi praeditas auriculis mucronulatis; e contrario assignaverunt *Soldanellae minimae* folia orbiculata, glandulas pedunculorum brevissime stipitatas, et Kochii monitu l. c. auriculas antherarum obtusas. Utraque autem fert corollam minus alte, quam *Soldanella alpina* L., laciniatam, stilum corolla breviorum, et antheras desinentes in apiculum perbreve, plerumque rectum. Sed ego demonstrare possum pluribus exemplaribus horti siccis mei, has foliorum, glandularum, et antherarum notas esse ludibundas, et nullius momenti pro statuenda specie. Quaecunque enim sit forma foliorum, eidem pari modo accomodantur glandulae sessiles, aut stipitatae, auriculae antherarum muticae, vel mucronulatae. Igitur hic quoque una tantum species est, prout eam exhibui in Fl. Ital. v. 2. p. 399. sub nomine *Soldanellae pusillae* in nixam exemplaribus in eodem loco lectis, et lusus, de quibus loquutus sum, evidenter ostendentibus.

Sed erit, qui dicat: Si sub *Soldanella pusilla* tua comprehendis tam *Soldanellam pusillam*, quam *Soldanellam minimam* Germanorum, qua ratione *Soldanellam minimam* Sturm. Deuts. Fl. I. abth. 20. heft ad *Soldanellam alpinam* L. retulisti? Si quis perpendat figuram Sturmianam, videbit, eam exhibere corollam profunde laciniatam, et antheras desinentes in appendicem longam, filiformem, quae notae omnino pertinent ad *Soldanellam alpinam* L., minime vero ad *Soldanellam minimam* Hoppii, et Reichenbachii. Quod si Sturmius non dedit genuinam Hoppii plantam, figura Sturmiana nunquam ad hanc erit referenda, sed ad *Soldanellam alpinam* L. macriorem ducenda, nisi velimus excludere e synonymis, ne ulterius decipiamur.

Ex cunctis autem, quae hactenus dixi, luculenter patet, duas tantum dari *Soldanellae* species, scilicet *Soldanellam alpinam* L., et *Soldanellam pusillam* Baumg., quorum lusus pro duabus aliis speciebus erronee imposuerunt.

Prof. Vivianius f. r. in opella, cui titulum fecit *Florae Corsicae specierum novarum, vel minus cognitarum diagnosis*, p. 8. evulgavit *Helleborum argutifolium* veluti novum, et indigenum insulae Corsicae. Dixit autem, Linnaeum in Sp. pl. p. 784. male habuisse hanc plantam pro varietate *Hellebori foetidi*, et adhuc pejus botanicos insequutos confundisse cum *Helleboro livido* Curt. Bot. mag. tab. 72., qui nascitur in America. Idem Vivianius mihi impertiverat exemplar stirpis suae, et pari modo obtinui aliud exemplar a Loiseleurio Deslongchampsio lectum in Corsica, quod ipse sub nomine *Hellebori lividi* Curt. indicaverat in Fl. Gall. ed. 1. tom. 1. p. 336., et ed. 2. tom. 1. p. 406. Horum exemplarium collatione facile fuit cognoscere identitatem speciei sub diversis nominibus evulgatae, quam identitatem recognoverat ipse Loiseleurus Deslongchampsius in Fl. Gall. ed. 2. l. c.; sed nondum liquebat de identitate cum planta Curtisii, praesertim cum Americanam esse Vivianius statuisset. Profecto Curtisius l. c. nullam mentionem iniecit de loco natali plantae suae, et Aitonius in Hort. Kew. ed. 2. tom. 3. p. 361. dixit, eam esse patriae ignotae. Imo nullus Helleborus hactenus repertus est in America, ut habemus ex De Candolleo in Regn. veg. syst. nat. 1. p. 316-321., et in Prodr. 1. p. 46. 47., nec non ex Sprengelio in Syst. veg. 2. p. 658. 659., et si qua pars Americae ad gignendos Helleboros foret apta, haec esset America septentrionalis, quippe quae nobis climate proximior: attamen nullus Florarum hujus regionis scriptor, non Michauxius, non Purshius, non Nutallius, non Torreyus recentior omnium in hac repererunt, aut Helleboros indicarent. Quare labitur per se sententia Vivianii de patria *Hellebori lividi* Curtisii. Haec species est omnino Europaea, et Corsicam, atque insulas Baleares inhabitat, ut recte monuerant Loiseleurus Deslongchampsius l. c., Sprengelius l. c., Cambessedius Fl. Balear. in Mém. du Mus. d'hist. nat. tom.

14. p. 204., et nuperrime Lindleyus in Bot. regist. ann. 1838. vol. 24. tab. 54., qui insuper, cum accepisset a Viviano exemplar *Hellebori argutifolii* (errore *angustifolium* scripsit Lindleyus l. c.), nos certissimos fecit de identitate hujus plantae cum planta Curtisii, prout Loiseleurus Deslongchampsius ante alios statuerat.

Mirum dictu, quomodo Africa ferat easdem species locis inter se quam remotissimis! Quis enim crederet, Nilum, et Aegyptum stantes in plaga orientali Africae possidere ipsas plantas, quas alunt flumina *Gambia*, et *Senegambia* dicta, insulaeque Capitis viridis, quae ad plagam occidentalem, et ad mare Atlanticum pertinent? Aliae vero stirpes tam plagae occidentali, quam australi sunt communes. De quibus rebus me certum fecit strenuus peregrinator Samuel Brunnerus Bernensis, qui cum Africam occidentalem peragrasset, itineris sui historiam protulit in libris, quorum alterum inscripsit *Reise nach Senegambien*, alterum *Botanische Ergebnisse einer Reise nach Senegambien*, atque in novissimo hoc p. 143. elenchum plantarum exhibuit, quae diversis Africae regionibus sunt communes, quarum nonnullas mecum benevole communicavit. Idem pariter mihi patuit tam ex plantis, quas amicus Raddius legerat in Aegypto, quam ex illis, quas cum ingenti rerum naturalium, et praesertim insectorum novorum penu ad me, et ad filium meum natu majorem ex ora austro-orientali Africae misit alacris juvenis Josephus Fornasinius Bononiensis, qui pluribus abhinc annis mercaturae faciendae causa Zanguebariam inhabitat. Anne flumina Nilus, *Gambia*, et si quod aliud mihi ignotum, stirpes istas ex culmine quodam centrali Africae in remotissimos, contrariosque fines ejus deducunt? Verum his rationibus non egemus ad phaenomenon explicandum, cum sciamus, totam zonam inter tropicos sitam iisdem speciebus ferendis, acque alendis praestare.

De una ex hujusmodi plantis primum loquar, quae est *Nymphaea caerulea* Savign. in Annal. du Mus. d' hist. nat. tom. 1. p. 366. tab. 25. Exemplaria ejus, quae possideo, lecta fuerunt a Raddio in Aegypto, a Brunnero in Capite viridi prope pagum *Vocham*. Brunnerus quidem putavit, plan-

tam suam pertinere ad *Nymphaeam stellatam* Leprim., et Perot., deque illa loquitur in Bot. Ergebn. p. 93. n. 150.; verum observo, *Nymphaeam stellatam* esse valde proximam, et forte eandem cum *Nymphaea micrantha* W., de qua ipse Willdenowius dixit, « differre a *caerulea* « seu Aegyptiaca exiguitate omnium partium », quod evidens quoque est ex figura ejus sub nomine *Citambel* in Hort. Malab. tom. 11. p. 53. tab. 27. E contrario *Nymphaea* Brunneriana e Capite viridi habet florem quadruplo grandiolem, pariter ac folia, et conlata cum exemplaribus *Nymphaeae caeruleae*, quae accepi a Raddio ex Aegypto, omnino cum illis convenit, sicuti etiam convenit cum *Nymphaea caerulea* Vent. Jard. de la Malm. pag. 6. tab. 6. forte melius, quam cum figura ejusdem speciei a Savignyo data. Quare *Nymphaea caerulea* tam plagae orientali, quam occidentali Africae solemnis; sed et excurrit in zonam aequinoctialem Indiae orientalis, cum Banksius repererit in Tranquebaria.

Secundo loco agam de alia *Nymphaeae specie*, quam idem Brunnerus legit in paludibus Capitis viridis, et dono misit. Is putavit in Bot. Ergeben. pag. 92. n. 149. esse *Nymphaeam Lotum* L., et est profecto *Nymphaea Lotus* Paliss. Fl. d'Ower. et Ben. 2. p. 50. tab. 83., non Linnaei, ut facile dignovi ex collatione exemplaris Brunneriani cum exemplaribus verae *Nymphaeae Loti* L. a Raddio in Nilo lectis. Etenim novissima haec habent folia tenuiora, paulo magis longa, quam lata, instructa auriculis baseos acutis, subtus leviter pubescentia, et tenuius nervosa, dum exemplar Brunnerianum fert folia grandiora, crassiora, rotundiora, paulo magis lata, quam longa, auriculis baseos rotundatis, subtus dense tomentosa, crasse nervosa, nervis prominentioribus; quibus notis evidenter pertinet ad *Nymphaeam pubescentem* Willd. Sp. pl. 2. p. 1154., sive ad *Ambel* Hort. Malab. tom. 11. p. 51. tab. 26., ad quam, Palissotii quoque plantam esse referendam, monstravit De Candolleus in Prodr. 1. p. 115. n. 8. Ego vero accepi eandem forte stirpem a Fornasinio lectam in Zanguebaria. Igitur haec species a plaga occidentali Africae ad plagam austro-

-orientalem pertingit, imo pertingit ad Indiam orientalem, ut habemus ex Horto Malabarico.

Hic finem faciens sermoni de plantis Africae novam *Polycarpaeae* speciem describere aggredior, quam Brunnerus reperit in insulis Capitis viridis.

1. *POLYCARPAEA candidissima*: breviter, stipateque tomentosa; caule decumbente; foliis verticillatis, lanceolato-linearibus, obtusis, inaequalibus; corymbo terminali, paucifloro, subsessili *Tab. XVIII. fig. 1.*

P. candidissima *Brunn. pl. sicc.**

Elichrysum *Brunn. Reis. nach. Seneg. p. 228.** ex ejus litt.

Helichrysum? an *Phagnalon?* *Brunn. Bot. Ergebn. p. 77. n. 122.** ex ejus litt.

Perenn. Nascitur in insula *Do Sal* Capitis viridis, ubi detexit BRUNNERUS.

Caulis decumbens, nodosus, ramosus, palmaris-semipedalis. Folia verticillato-sena, crassa, lanceolato-lineararia, obtusa, integerrima, inaequalia. Stipulae parvae, lanceolatae, acuminateae, acumine setaceo, scarioso, reliqua parte tomentosae, ut aegre distinguantur a foliis. Flores pauci, parvi, corymbosi, corymbo subsessili, fastigiato, ut potius fasciculati videantur. Bractae ovatae, obtusae, dorso tomentosae, et subinde ferrugineae, lateribus scariosae, lacerae. Calyces obtusi. Tota planta tecta tomento brevissimo, valde stipato, et adpresso, albissimo.

Venio nunc ad pertractandum de plantis Americae. Guilielmus Cooperus Novae Yorkiae civis anno 1825. misit ad me divitem plantarum siccatarum collectionem, quarum pars lecta fuerat in America septentrionali media, pars in finibus Canadensibus; sed et alias accepi a Prof. Ricciolio Romano, quas ille legerat prope Trentonium inter novam Yorkiam, et Philadelphiam; demique plures obtinui a Prof. Balbisio f. r., quas Berternus heu nimis infelix! in itinere suo primo repererat in Antillis. Profecto, si de his omnibus vellem dicere, ingens mihi foret sermonis materies; sed, ne patientia vestra abutar, seligam praestantiores.

2. *CUNILA glabella*: caule ascendente, erectove, foliis imis ovali-oblongis, superioribus lanceolato-linearibus, subintegris omnibus, margineque revolutis; pedunculis axillaribus, subsolitariis, longiusculis *Tab. XVIII. fig. 2.*

C. glabella Mich. Fl. boreal. Amer. 1. p. 13. Vahl. En. 1. p. 214. Torrey. Flor. of the middl. sect. of the Unit. stat. 1. p. 23. Spreng. Syst. veg. 1. p. 54. n. 2.

Hedeoma glabrum Nutt. Gen. 1. p. 16.

Zizipora glabella Röm. et Schult. Syst. veg. 1. p. 209.

Perenn. Habui ex Canada, ubi nascitur in rupibus calcariis ad cataractam fluminis *Niagara*, a COOPERO.

Caulis ascendens, vel erectus, septem-octopollicaris, subinde ex imis nodis radicans. Folia ima ovali-oblonga, reliqua lanceolato-lineararia, aut lineararia, omnia vel integra, vel levissime, remoteque subcrenata, pellucido-punctata, margine revoluta, obtusa, majora sex lineas circiter longa. Pedunculi axillares, solitarii, raro duo, tenues, uniflori, longiusculi, licet subposito folio breviores, basi instructi bracteis duabus lanceolato-linearibus. Calyx decemstriatus, inter strias punctatus, basi angustatus, nec ullimode gibbus, intus fauce barbatus, breviter bilabiatus, labio superiore tridentato, inferiore bidentato, dentibus omnibus aequalibus. Corolla calyce longior, violacea. Stamina duo tantum, exserta. Tota planta glabra.

Descriptio haec desumpta fuit a duobus exemplaribus Cooperianis. Verum Vahlus l. c. tribuebat huic speciei folia sesquipollicaria pro semipollicaribus, pedunculos brevissimos, terminales, ternos pro pedunculis axillaribus, subsolitariis, longiusculis. Eadem retinuerunt Römerus, et Schultesius, nec non Sprengelius ll. cc. Insuper priores duo dixerunt caulem vix pollicarem, dum septem, vel octo pollicum longitudinem habet; posterior vocavit calycem basi gibbum, dum nullo modo neque in basi, neque alibi gibbus est. Unus Torreyus cum descriptione nostra magis consentit; sed reliquit dubium, an folia essent, nec ne, margine revoluta, et an flos ferret stamina quatuor potius quam duo. Sed ea, quae protuli, nunc satis superque declarant hanc speciem, quae antea ob erroneos characteres eidem ab auctoribus tributos non poterat recognosci.

Explicatio Figuræ.

Tab. XVIII. fig. 2. a. Flos magnitudine auctus.
fig. 2. b. Calyx magnitudine auctus

Duas plantarum species in territorio Novæ Yorkiæ sponte nascentes obtinui ab eodem Coopero, quas Torreyus iterum revocavit ad alias duas Europæ indigenas, quamvis Coldenius, et Purschius distinxissent. Esse autem distinctas, novasque species descriptionibus, iconibusque facile ostendam.

3. *PYROLA obovata*: foliis subcoriaceis, obovatis, obiter crenatis, petiolo subæqualibus; stylo declinato, longitudine corollæ *Tab. XIX.*

P. rotundifolia Torr. *Comp. p. 185. n. 1., et Flor. of the middl. and north. sect. of the Unit. Stat. tom. 1. p. 434. non Linn.*

P. noveboracensis Cold. *Noveb. p. 99.*

Perenn. Habui ex sylvis Novæ Yorkiæ a COOPERO.

Radix repens. Folia omnia radicalia, obovata, obtusa, aut vix acutiuscula, obiter, et remote crenata, basi cuneata, et in petiolum leviter decurrentia, subcoriacea, nitida, laete viridia, utrinque concoloria, nervo medio, venisque lateralibus insignibus instructa, fere sesquipollicem sine petiolo longa, pollicem, vel paulo ultra lata. Petioli circiter longitudine folii, aut paulo breviores, anguste alati. Scapus situs inter folia radicalia, erectus, tri-pentagonus, basi cinctus squamis duabus-tribus, ovatis, amplexantibus, infra racemum gerens unam, vel duas bracteas remotas, lanceolatas, acutas, spithamalis-pedalis. Racemus terminalis, pluriflorus, laxiflorus, floribus cernuis. Sub quovis pedicello bractea lanceolata, acuta, trinervis. Pedicelli tennes, recurvi, bractea longiores. Laciniae calycinae lanceolatae, acutae. Corolla fere triplo longior calyce, triplo grandior, quam in *Pyrola rotundifolia* L., alba, vel albo-rosea. Petala oblongo-obovata, obtusa, laxiuscule venosa, venis ramosis. Antherae quoque duplo grandiores, quam in *Pyrola rotundifolia* L. Stylus declinatus, longitudine corollæ. Tota planta glabra.

Pyrola rotundifolia L. est planta ab hac diversa, et Europae indigena, eademque habet folia multo minora, rotundo-elliptica, utrinque obtusa, nec basi cuneata, supra viridia, subtus pallide albertia, petiolos longiores folio, petala multo minora, crebriusque venosa, antheras dimidio minores, stilum corolla insigniter longiorem. Linnaeus in Sp. pl. p. 567. de hac tantum intellexi, licet tribuerit illi pro patria tam Europam, quam Virginiam, et Brasiliam, sed quoad Virginiam certe erravit, et errasse quoque puto quoad Brasiliam.

Explicatio Figurae.

Tab. XIX. a. Calyx magnitudine auctus.

XIX. b. Corolla magnitudine aucta.

4. *PYROLA corymbosa*: foliis coriaceis, lanceolatis, cuneatis, concoloribus, superne argute serratis; floribus corymbosis; capsulis apice dehiscentibus, suturis laevibus *Tab. XX.*

P. umbellata Torr. Comp. p. 186. n. 7., et Fl. of. the middl. and north. sect. of. the Unit. Stat. 1. p. 435. non Linn.

Chimophyla corymbosa Pursh. Fl. Amer. 1. p. 30.

Suffr. Habui ex sylvis Novae Yorkiae a COOPERO, et ex sylvis Trentonensibus a RICCIOLIO.

Radix late repens. Caulis adscendens, pentagonus, inferne foliosus, superne nudus, simplex, circiter spithamalis. Folia verticillata, quina-sena in quovis verticillo, verticillis duobus-quatuor, inter se fere aequidistantibus, coriacea, lanceolata, plus minus acuta, basi cuneata, superne argute serrata, reliquo margine integra, vix petiolata, nitida, concoloria, seu vix subtus pallidiora. Corymbus terminalis, subsexflorus, puberulus, a caule superiore nudo longe pedunculatus. Una, alterave bractea lineari-angustissima, sita in longitudine pedicellorum loco inconstanti, decidua, subinde deficiens. Calycis lacinae subrotundae, margine membranaceae, lacero-ciliatae. Corolla calyce triplo longior, e virescenti alba, vel suffusa tinctura violacea. Petala obovata,

obtusa, ciliato-lacera. Stamina longitudine corollae. Filamenta inferne dilatata, expansione ovata, ciliata, violacea. Loculi antherarum apice poro amplo hiantes. Stylus brevissimus, immersus in depressione ovarii. Stigma convexum, quinquelobum. Capsula subrotunda, apice tantum dehiscens, valvarum suturis laevibus, aut vix scabridis. Herba glabra.

Pyrola umbellata L. est planta diversa, Europae indigena, et multo minor omnibus partibus. Folia ejus sunt crebrius serrata, evidenter discoloria, sive subtus albertia, lacinae calycinae ovatae, stamina corolla breviora; capsula dehiscit fere tota longitudine sua, valvaeque ejus habent suturas dense granulato-scabras. Hic quoque Linnaeus erravit tribuens pro patria *Pyrolae umbellatae* suae Europam, Americam septentrionalem, et Asiam, sed plantam Europaeam tantum intelligebat. Quid sit planta Americana demonstravi. De Asiatica nulla mihi notitia est.

Explicatio Figurae.

Tab. XX. fig. a. Corolla magnitudine aucta.

Lythrum verticillatum L. ex territorio Novae Yorkiae pariter proficiscens mihi obtulit varietatem insignem, de qua nullam mentionem reperio apud Botanicos sive Americanos, sive Europaeos, eamque descriptione, et figura dignam existimo.

5. *LYTHRUM verticillatum* β : foliis omnibus alternis, remotis; pedunculis axillaribus, fasciculato-ternis, unifloris; stilo calycem aequante *Tab. XXI.*

Perenn. Habui ex Nova Yorkia a COOPERO.

Caulis pentagonus. Folia omnia alterna, inter se remota, lanceolata, acuminata, basi angustata, breviter petiolata, integerrima, supra viridia, glabra, subtus pallentia, molliter pubescentia, seu leviter tomentosula. Pedunculi axillares, uniflori, fasciculato-terni, lusu duo-quinque, subfastigiati, et umbellam simplicem, sessilem sistentes, nudi, calyci subaequales. Calyx campanulatus, duas-tres lineas longus, octo-decudentatus, dentibus alternis longioribus, angustioribus,

subulatis, saturate viridibus, reliquis brevibus, latis, ovatis, acuminatis, pallide virentibus. Petala quatuor-quinque, inserta contra dentes calycinis latiores, oblonga, unguiculata, purpurea, margine undulata. Stamina decem, inaequalia, longiora corollam superantia. Stylus calycem aequans. Stigma capitatum. Pubescentia plantae e pilis apice ramoso-stellatis.

Flores in hac varietate non sunt verticillati, quia folia non sunt opposita. Descriptio, quam dedi, valet etiam ad speciem melius declarandam, cum auctores non satis exacte de illa loquuti sint. Willdenowius in Sp. pl. 2. p. 867. dicit pedunculos ejus multifloros, quod nullimode verum, cum sint uniflori. Sprengelius in Syst. veg. 2. p. 455. describit flores verticillato-corymbosos, qui rectius dicendi fuissent fasciculati, aut fasciculato-verticillati. Kunthius male retulit ad genus *Nesaeam*, quod distinguitur calyce duodecimdentato, corolla hexapetala, capsula quadriloculari, quorum characterum nullus habetur in *Lythro verticillato* L., praeterquam quod *Nesaeae* verae hactenus notae gaudent corolla lutea. Quod si sequi volumus recentiores botanicos, qui genus *Lythrum* in plura genera disperserunt, quorum alia profecto sunt artificialia, rectius erit referre *Lythrum verticillatum* L. ad peculiare genus *Decodon*, ut jam peregerunt Gmelinus, Elliotus, et De Candolleus. Vide De Cand. Prodr. 3. p. 90.

Ricciolius legit ad *Point-Breese* prope Trentonium speciem quandam *Hyperici*, quae primo intuitu videbatur *Hypericum perforatum* L., sed diversam esse sequentia demonstrabunt.

6. *HYPERICUM pseudoperforatum*: caule ancipiti; foliis oblongo-lanceolatis, basi angustatis, pellucido-punctatis; corymbo paucifloro, contracto; petalis obovatis, obtasis; stilibus divaricatis *Tab. XXII. fig. 1.*

H. perforatum *Torr. Comp. p. 220. n. 5.* non Linn.

Perenn. Habui ex *Point-Breese* prope Trentonium in America septentrionali media a Prof. RICCIOLIO.

Caulis e tereti anceps, angulis parum prominentibus, subpedalis, ramulosus, ramis brevibus, foliosis, abortivis. Folia

parva, opposita, sessilia, oblongo-lanceolata, obtusa, basi quidquam angustata, integerrima, laete viridia, et utrinque concoloria, pellucido-punctata, tri-quinquenervia, margine plana, circiter quatuor lineas longa, sesquilineam lata. Corymbus terminalis, brevis, contractus, pauciflorus. Bracteae sub pedicellis lanceolato-lineares, acutae, pellucido-punctatae. Laciniae calycinae bracteis angustiores, sed ejusdem formae, acuminato-aristulatae. Corolla calyce duplo longior. Petala obovata, obtusa, flava, scatentia glandulis concoloribus, oblongo-linearibus, in medio pellucidis, subinde in ambitu nigro-punctata. Utraque genitalia longitudine corollae. Antherae nigro-punctatae. Stili divaricati. Tota planta glabra.

Hypericum perforatum L. gaudet habitu grandiore, robustiore. Ejus caulis altior, passim instructus ramis pluribus, elongatis, fere fastigiatis. Folia grandiora, margine revoluta, discoloria, sive supra viridia, subtus pallide albertia, pellucido-punctata, et saepe etiam punctis nigris, opacis scatentia. Corymbus ramosior, patens, multiflorus. Petala ovata, acuta, staminibus longiora. Stili initio breves, erecti, postea elongantur, et divergunt, aequant, aut paululum superant stamina, non corollam.

Explicatio Figurae.

Tab. XXII. fig. 1. a. Flos adhuc in alabastro magnitudine auctus.

fig. 1. b. Corolla magnitudine aucta.

Botanici Americae sumpserunt pro *Osmunda regali* L. plantam illam, quam ipse Linnaeus receperat in varietatem. Hanc Willdenowius rectissime in distinctam speciem vindicavit sub nomine *Osmundae spectabilis*, neque tamen characteribus melioris notae firmavit, quos quidem mihi suppeditarunt exemplaria perfecta o Coopero missa.

7. *OSMUNDA spectabilis*: fronde bipinnata; pinnulis lanceolatis, obtusis, obiter denticulatis, basi oblique subcordatis; panicula terminali, decomposita. glomerulis interruptis.

O. spectabilis Willd. *Sp. pl.* 5. par. 1. p. 98.

O. regalis β *Sp. pl.* p. 1521.

O. regalis Michx. *Flor. bor. Amer.* 2. p. 273. Torr. *Comp.* p. 386.

Pereun. Habui ex sylvis Americae septentrionalis mediae a COOPERO.

Facies *Osmundae regalis* L., sed pinnulae frondis multo breviores, lanceolatae, obtusae, obiter, et obtuse denticulatae, basi oblique subcordatae, seu oblique truncatae, neque extus auriculatae, plerumque alternae, interdum tamen superiores oppositae. Glomeruli fructificationis subglobosi, distincti, et interrupti, licet valde approximati.

Osmunda regalis L. habet frondis pinnulas multo longiores, extus basi dilatatas in auriculam rotundatam. Glomeruli fructificationis ejus sunt densissime juxta se invicem positi continuata serie.

Obtinni ab Ill. Caströmsio Stockolmiensi, qui fuerat ex discipulis Linnaei, una cum aliis pretiosis, aut opticisque plantarum speciminibus Thunbergii, et Forsteri exemplar *Euphorbiae hypericifoliae* L., quod opportunissimum fuit ad distinguendas stirpes duas, quae sub eodem nomine ad me missae fuerant, licet et ab illa specie, et inter se longe diversae; sed antequam ad earum descriptionem deveniam, pauca attingam de vera *Euphorbia hypericifolia* L. majoris intelligentiae causa.

8. *EUPHORBIA hypericifolia*: caule dichotomo; foliis ovato-oblongis, serrulatis, basi obliquatis; corymbis terminalibus, subsessilibus, contractis; nectariis semilunatis; capsulis glabris.

E. hypericifolia *Sp. pl.* p. 650.

Tithymalus Americanus flosculis albis *Commel. Prael.* p. 60.

fig. 10. bona.

Ann. Nascitur in Jamaica. Habui a CASSTRÖMSIO.

Caulis teres, dichotomus. Folia opposita, ovato-oblonga, ambitu superiore magis curvo, acutiuscula, margine serrulata, basi rotundata, et obliquata, brevissime petiolata, supra laete viridia, subtus pallentia. Stipula utrinque inter petiolos, lanceolata, decidua. Flores numerosi, exigui, corymbosi,

corymbo terminali cauli, ramisque, contracto, subsessili inter duo folia reliquis minora, caeterum similia. Bractee lanceolatae. Nectaria parva, semilunata, alba. Stili breves. Capsula parva, laevis, glabra, acute trigona. Tota planta glabra.

A specie nunc descripta sequens profecto distat, licet sub eodem nomine acceperim missam a Prof. Balbisio ex Berterianis lectis in Guadalupa.

9. *EUPHORBIA cuspidata*: glabra; caule erecto; foliis lanceolatis, acuminatis, serrulatis, basi obliquatis; corymbis axillaribus, terminalibusque, longiuscule pedunculatis *Tab. XXII. fig. 2.*

E. hypericifolia Balb. *Pl. sicc. Berter.** non Linn.

Ann. Habui ex Guadalupa, ubi reperit Berterus, a Prof. BALBISIO.

Radix fusiformis, potius gracilis, flexuosa, fibrillis lateralibus paucis. Caulis teres, dichotomus, erectus, subpedalis. Folia opposita, petiolata, lanceolata, superne sensim sensimque in cuspidem angustata, acuminata, leviter serrulata, basi rotundata, et obliquata, subpellucido-punctata, ima minora. Petioli tenues, circiter lineam longi. Stipula modo solitaria, modo duae utrinque inter petiolos, exiguae, lanceolatae, acutae, integerrimae, deciduae. Corymbuli solitarii, axillares, et terminales, longiuscule pedunculati, multiflori, contracti, et subcapitati. Pedunculi tenues. Bractee ad divisiones corymbulorum exiguae, lineares, acuminatae, et subinde aristulatae, pellucido-punctatae. Nectaria semilunata, alba. Capsula parva, laevis, glabra, coccis convexis, acutiuscule carinatis. Tota planta glabra.

Explicatio Figurae.

Tab. XXII. fig. 2. c. Flos, et capsula naturali magnitudine multo auctiores.

Occurrit in Italia species *Euphorbiae*, quae caule, et foliis valde refert *Euphorbiam hypericifoliam* Linn. Sp. pl. p. 652., et hoc nomine saepe ad me missa fuit; sed differt

evidenter floribus solitariis, capsulis scabris, aliisque notis. Eam pluribus abhinc annis nomine *Euphorbiae trinervis* salutaveram, et sic amicis botanicis impertiveram. Postea vero Pollinius putavit, hanc plantam convenire cum *Euphorbia maculata* L., et ita vocavit in Fl. ver. 2. p. 98.

De errore Pollinii facile liquet ex eo, quod *Euphorbia maculata* L. indigena Americae septentrionalis habet totum caulem prostratum « spreading flat on the ground », ut dicit Torreyus in Comp. p. 331., « caules totos quantos telluri pressissime incumbentes », ut ait Jacquinus in Hort. Vind.

2. p. 87.; folia ejus sunt lanceolato-linearum, et omnes plantae partes sunt multo minores, quam in *Euphorbia trinervi*, quae praeterea fert caulem erectum, vel ascendentem, et folia grandia ut in *Euphorbia hypericifolia* L. Figura in Jacq. Hort. Vind. 2. tab. 86. satis superque ostendit, quid sit *Euphorbia maculata* L., et quam longe distet a planta Polliniana. Nunc satis sit declarasse, *Euphorbia trinervem* confundi non posse nec cum *Euphorbia hypericifolia* L., nec cum *Euphorbia maculata* L. Mox fusius loquar de illa in Flora Italica. Quoniam vero de *Euphorbiis* sermo est, describam quatuor alias species ejusdem generis, quarum tres sunt novae, licet Balbisius pro jam cognitis habuerit.

10. *EUPHORBIA Berteriana*: caule dichotomo, stricto, pubescente; foliis ellipticis, obtusissimis, serrulatis, basi obliquatis; corymbulis terminalibus, solitariis *Tab. XXIII. fig. 1.*
E. Berteriana Balb. *Pl. Berter. sicc.* Spreng. Syst. veg.*
 3. p. 794. n. 121.

Ann. Habui ex Guadalupa, ubi Berterus legerat, a Prof. BALBISIO.

Caulis teres, ascendens, pubescens, dichotomus, ramis strictis, quatuor-quinque pollices longus. Folia opposita, breviter petiolata, elliptica, obtusissima, basi oblique cordata, levissime, et remotiuscule serrulata, pubescentia praesertim subtus, copiose pellucido-punctata. Stipula utrinque una in basi petioli, setacea, decidua. Corymbuli terminales cauli, ramisque, solitarii, subsessiles, subcapitati, hirsuti. Perigonium, et capsula quoque hirsutiae teguntur.

Explicatio Figuræ.

Tab. XXIII. fig. 1. a. Flos, et fructus magnitudine aucti.
fig. 1. b. Folium magnitudine auctum.

Descriptiuncula nostra magis magisque declarat plantam, quæ hactenus exposita fuerat solis characteribus specificis Sprengelianis. Figura vero ejus, quæ primo nunc prodit, melius ponet sub studiosorum oculos.

11. *EUPHORBIA bicephala*: caule ramosissimo, dichotomo, divaricato; foliis ovatis, serrulatis, flexuose pellucido-lineolatis, basi obliquatis; corymbulis terminalibus, geminatis *Tab. XXIII. fig. 2.*

E. organoides *Balb. Pl. Bert. sicc.** non Linn.

Ann. Habui ex insula S. Dominici, ubi reperit Berterus, a Prof. BALBISIO.

Caulis teres, decumbens, ramosissimus, dichotomus, ramis divaricatis, pubescens. Folia opposita, brevissime petiolata, ovata, oblique acutiuscula, vel obtusa, serrulata, basi obliquata, pubescentia præsertim superiora, supra viridia, subtus pallida, tota lineolis pellucidis curvis, aut sinuosis sub vitro pulchre variegata, tri-quinquenervia. Stipula utrinque una in basi petioli, setacea, villosa, decidua. Corymbuli duo, terminales in apice caulis, et ramorum, breviter pedunculati, pauciflori, subfastigiati, pubescentes, folio subposito breviores. Bracteæ ad divisiones corymbulorum setaceæ, deciduæ. Perigonium, et capsula pariter pubescunt. Nectaria minutissima, subrotunda.

Characteres *Euphorbiæ organoidis* Sp. pl. p. 650. ita statuuntur a Linnaeo in *Amoen. Acad.* 3. p. 114. « Caulis « simplex. Rami nulli. Folia sessilia, glabra. Panicula ut « in Origano terminat caulem ». Ergo hæc species longe distat ab *Euphorbia bicephala* nostra.

Explicatio Figuræ.

Tab. XXIII. fig. 2. e. Flos, et fructus magnitudine aucti.
fig. 2. f. Folium magnitudine auctum.

12. *EUPHORBIA adenoptera*: caule prostrato, alterne ramoso; foliis crassiusculis, opacis, ovatis, obtusis, obsolete subcrenatis, basi obliquatis; floribus axillaribus, solitariis, subsessilibus; nectariis limbo petaloideo, discolore inaequaliter marginatis *Tab. XXIII. fig. 3.*

E. serpyllifolia *Balb. Pl. Berter. sicc.** non Linn.

Perenn. Habui ex insula S. Dominici, ubi reperit Berterus, a Prof. BALBISIO.

Caules caespitosi, prostrati, teretes, minute puberuli, alterne ramosi, circiter bipollicares. Folia opposita, brevissime petiolata, crassiuscula, prorsus opaca, ovata, obtusissima, margine incrassata, obsolete subcrenata, vel potius levissime repanda, basi obliquata, tenuiter trinervia, pilosula, aut inferiora glabra, supra viridia, subtus subrufescentia, sicca rugulosa. Stipula utrinque una in basi petioli, setacea, decidua. Flores solitarii, axillares, siti in axillis foliorum superiorum, sessiles, aut subsessiles. Perigonium puberulum. Nectaria glandulae quatuor, sanguineo-rubellae, margine externo circumdatae limbo petaloideo, albo, in inferioribus duabus angusto, aequali, rotundato, saepe lineolis tribus-quatuor sanguineo-rubellis radiato, in superioribus duabus sursum elongato, alaeformi, adscendente. Capsula pubescenti-albida.

Haec profecto non est *Euphorbia serpyllifolia* Pers. Syn. pl. 2. p. 14. n. 74. Spreng. Syst. veg. 3. p. 792. n. 96., quae habet folia subrotunda, emarginata, integerrima, nectaria absque limbo petaloideo, et capsulas glabras. Possideo exemplar ejus lectum a Bertero in Guadalupa, et missum a Balbisio sub nomine *Euphorbiae serpentis*, quo etiam a Kunthio indicata fuit *Euphorbia serpyllifolia* Pers. Vide Spreng. l. c.

Explicatio Figurae.

Tab. XXIII. fig. 3. c. Flos, et fructus magnitudine aucti. fig. 3. d. Folium magnitudine auctum.

13. *EUPHORBIA trichogona*: caule prostrato, pubescente; foliis

ellipticis, obtusissimis, levissime serrulatis, oblique subcordatis; ramulis floriferis microphyllosis; floribus solitariis, axillaribus; capsularum angulis hispidis *Tab. XXIII. fig. 4.*

E. prostrata *Balb. Pl. Berter. sicc.** non Willd.

Ann. Habui ex Guadalupa, ubi reperit Berterus, a Prof. BALBISIO.

Caulis e radice plures, toti in rosulam prostrati, tenues, alterne ramosi, vix ultra duos pollices longi, inferne undique pilosi, superne lateraliter tantum. Rami patuli, iterum ramulosi, ramulis ferentibus folia exigua. Folia opposita, breviter petiolata, elliptica, obtusissima, superne levissime serrulata, et interdum subciliata, basi quidquam obliqua, et subcordata, tenuiter tri-quinquenervia, punctis, vel lineolis rectis, pellucidis adpersa, glabra, subtus glauca, quae in ramulis secundariis multo minora, et plus minus pilosa. Flores exigui, solitarii, axillares foliis ramulorum secundariorum, brevissime pedunculati. Pedunculi glabri. Perigonium apice tantum hispidulum. Nectaria minima, sobrotunda. Capsula angulis hispida, reliqua parte glabra, vel pilis raris adpersa.

Euphorbia prostrata Willd. *Sp. pl.* 2. p. 895. recedit ab hac caule glabro, foliis obtusiusculis, nec obtusissimis, pedunculis plerumque trifloris. *Euphorbia trichogona* magis appropinquat *Euphorbiam centunculoideam* Kunthii apud Spreng. *Syst. veg.* 3. p. 792. n. 98., quae tamen diversa foliis cordato-orbiculatis, prope integerrimis.

Explicatio Figurae.

Tab. XXIII. fig. 4. g. Flos, et fructus magnitudine aucti.
fig. 4. h. *Folium magnitudine auctum.*



Polytrichum candidissimum = Bort. =



Carex glabrella = Mich. =







Pyrola chlorata = Bert





Pyrola corymbosa = Bert. =

C. Bettini ad nat et in lap del:

Lit Bettini







Lophium verticillatum G. Bert.



Fig. 1.

Hypericum pseudoperforatum Bert.

C. Bettini ad nat. et in lap. del. et lit.



Fig. 2.

Euphorbia cuspidata Bert.

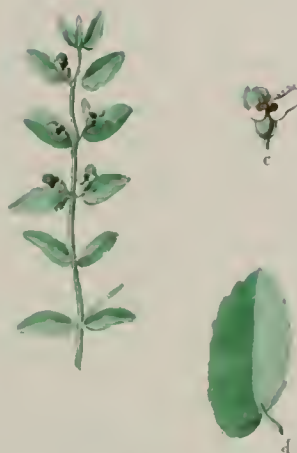


F. 1



Euphorbia Bertoniana „Balb.“

F. 3.



Euphorbia adenoptera „Bert.“

F. 2



Euphorbia laeophala „Bert.“

F. 4.



Euphorbia trahogena „Bert.“



EQ. ANTONII ALESSANDRINI

*De miris quibusdam organicis degenerationibus
in corde bovis domestici observatis.*

(Sermo habitus die 6. Maii anni 1844.)

Scientiam morborum cordis, quae in humana Medicina tanti momenti est, ad Artem quoque Veterinariam pertinere, non adhuc vel inter Auctores nostrae aetatis omnino convenit; nec porro qui negant, argumentis carent propriae tuendae opinioni accomodatis, variis nimirum observationibus, quibus ea confirmari videtur. In fasciculo mensis septembris anni proxime elapsi Diarii de re Veterinaria, quod Parisiis evulgatur, ubi agitur de singulari auriculae dexteræ completa ossificatione cum hypertrophia conjuncta, quam veterinarius Gaspar *Barthélemy* in corde equi observavit, haec leguntur auctore *Bouley* juniore. « Les maladies du coeur, si frequentes et « si connues chez l'homme ne se remarquent presque ja- « mais chez nos animaux domestiques où elles ont été à pei- « ne étudiés (1) ». His verbis laudatus Veterinarius innuere tantum videtur perraro in scientiae annalibus facta occurrere, et accuratas observationes quod quidem attinet ad casum ibi descriptum, non autem ad cordis generatim vitia sive organica, sive dinamica, quibus variae cicurum species diversimode, et persaepe obnoxiae sunt. Verum paulo post in eodem articulo *Bouley* aperte declarat se opinari « que les maladies du « coeur sont tres rares chez nos animaux domestiques (2). »

(1) *Recueil de Médecine Vétérinaire Sept. 1840. pag. 566.*

(2) *l. c. pag. 568.*

Qua opinione fretus absolute improbat, et acriter nimis reprehendit librum, quem eodem fere tempore edidit *Leblanc* de morbis cordis praecipuorum animalium domesticorum (1).

Quamquam procerto ego semper habuerim cor animalium domesticorum morbis obnoxium esse multiformibus, et frequentissimis, atque meminerim hanc sententiam ipsam ex cathedra protulisse gratae recordationis Magistrum meum doctissimum Professorem TESTA, tum scriptis confirmasse in aureo illo opere de morbis cordis (2): « Non esser vero, che siffatte malattie assolutamente mancassero nei bruti, come si è usato di scrivere, essendo antichissime le osservazioni, e dai tempi di Galeno, di offese di pericardio, e di cuore vedute negli animali, ed altre consimili essendo state narrate da Eduardo *Tyson*, da Teofilo *Bonnet*, e da altri Raccoglitori di fatti patologici, abbenchè l'Anatomia comparativa patologica degli animali eserciti così di rado la industria di periti Anatomici ». Quamquam, dico, de veritate hujus sententiae minime dubitem, desiderio nihilominus satisfacere hodie mihi placet clarissimi *Bouley* descriptione novarum quarundam praeparationum Musei nostri Anatomiae comparatae, quae singulares offerunt organicas cordis laesiones. Quod dum facio, debitas reddo gratias, et laudes plurimas sedulis doctisque Veterinariis, quorum opera Museum hisce aliisque aequae pretiosis ejusdem generis Pathologicis exemplaribus ornatum, auctumque est.

I.

Mense Decembri proxime elapso Cajetanus Pelagatti, Veterinarius peritissimus, quem saepe nominandi tractatio hujus materiae gratam mihi afferet occasionem, vaccinum cor misit vico Minerbio, ubi artem suam exercet, in quo textus degenerationem subivit perraro observatam in cadavere humano ipso, numquam vero, quod ego noverim, in brutis. Animal

(1) Ib. Novemb. 1840.

(2) Tom. I. pag. 13. art. 10.

aetate provectum, ex quo cor istud depromptum est, referente Veterinario, macrescere caeperat, etsi cibum appeteret, satque vesci prosequeretur. Cum aliud nullam in eo appareret indicium aegritudinis, solitis ut antea laboribus subjiciebatur. Ad dimidium mensem Novembrem, qui ejus vitae ultimus fuit, ex solito incessu bestia caepit admodum remittere; strata aegre, ac difficulter assurgere, et antequam erecta consisteret, vacillare, sollicite et anxie respirare, aucta, et turbata, et saepe intermissa arteriarum pulsus frequentia. Villicus phoenomena ista animalis senectuti tribuebat, et nutritus defectui, nec aliam adesse causam suspicabatur, nec ullum proinde consolvit Artis peritum, qui rem penitus inquireret, et apta curatione saltem moderari, sin prorsus sanare gravissimam infirmitatem susciperet. Sensim deficiebant vires, macies praeter modum crescebat: aedemata primum in mammillis, deinde ad posticos artus apparere: mors tandem subsequuta est die 2. Decembris anni ejusdem.

Sectio cadaveris die subsequenti facta obtulit vesiculas non paucas hydatidum similes in pulmone, et plurima in omento, et mesenterio crassa ac solidissima tubercula; cellulares adipe omnino destitutas, sed aqueo sero tumescentes, cujus portio aliqua reperta quoque est in peritoneo, pleuris, et pericardio. Insignis vero, et manifesta prae caeteris erat immutatio cordis, quod mihi missum est die 3. Decembris, quodque statim delineari jussi, quo majori fieri posset, naturalium ejus colorum imitatione, et partium naturali proportione servata.

Tabula XXIV. exhibet cor istud magnitudine ad dimidiam partem imminuta, in quo extant crassa et permulta tubercula serosae interioris (endocardum *Bouillaud*) tum ventriculi, tum auricularum. Sectio longitudinalis a basi fere usque ad apicem cordis omnino dirimit parietes ejus a cavo dextero, eorumque totam detegit faciem interiorem: unde haec cernitur primo intuitu latis maculis irregularibus conspersa, colore maxime flavo tinctis fere ipso adipi proprio; quae maculae totidem respondent tumoribus parum prominentibus, sed amplis, quorum superficies inaequalis, tuberosa, uti se habent aliquando in quibusdam corporis partibus glomeres ipsi pinguedinis. Reipsa praeparatio speciem prima fronte ex-

hibet degenerationis in substantiam pinguedineam, quam textus pars aliqua subiverit, eam nempe mutationem, quam non raro patitur textus etiam muscularis. Celebris *Cruveilhier* spontaneam cordis lacerationem observavit (1), cujus substantia partim degenerata colore suo albo-flavescente pinguedinem adeo imitabatur, ut sola partis degeneratae chimica analysi convinci erroris sui potuerit Doctor *Bergeon*, qui adipem musculorum surae conferens cum degenerata cordis portione ejusdem cadaveris inter eorum, et hujus organi sectionem analogiam interesse manifestam argumentabatur. In casu vero, de quo sermo est, haud opus fuit adeo subtili investigatione, ut natura tumorum in corde existentium plane agnoscerem, ac rite definirem. Lentus progressus et phaenomena morbi universalis, qui animal ad mortem perduxit; degeneraciones serosae praesertim peritonaei, in eaque sparsa grandiuscula tubercula multa, in mesenterio, atque omento, quae liberum irretiebant sanguinis circuitum, lymphae, et chyli praesertim, unde mortalis macies rapide crescebat, eadem tubercula in serosa quoque pericardii, uti clare ostendit portio hujus membranae (*a*, Tab. XXIV.), quae in figura basi cordis adhaeret, et caevae ascendenti (*b, b*), maxima sunt argumenta, quibus tuto concludere mea sententia potest quaestionem hic esse de morbo tuberculari in serosis, qui analogos textus vel disjunctos, ac procul dissitos inter se invadere solitus a serosa abdominali in serosam pericardii irrepserit, inque ipsum endocardium, cui pariter naturam serosam tribuunt plerique Anatomici et Physiologi, imo pro tunicae ipsius interioris vasorum sanguineorum continuatione habent.

Attentum praeterea examen praeparationis mihi plane persuasit tumores natura esse tuberculari scirrhusa, non autem piuguedinea, tum palam fecit eis sedem esse dictam membranam serosam tenuissimam, quae cardiacos penitiores sinus involvit, hinc valvulas varias efficiens propagatur, et systema complectitur tum artericum, tum venosum cum corde com-

(1) Anatomia Patologica del Corpo umano. Versionis ital. Tom. III. pag. 79.

municans. Cnltro anatomico tentati, ac profunde incisi ad-
spectum, soliditatem, atque texturam praebuerunt longe aliam
quam quae pinguedinis propria est. Durities singularis, stru-
ctura fere glomerum sphaericorum arcte invicem cohaerentium,
haud equidem in sectione granosam et globosam adipis adeo
propriam exhibentium, sed densam materiam continuam, et u-
niformem liquore christallino fere instillato suffusam aperte o-
stendebant substantiam ejusdem naturae ac tubercula in perito-
naeo reperta, atque adhuc in pericardio visibilia. Quod ve-
ro tumores isti ex abnormi serosae membranae vegetatione pro-
venerint, non autem ex carnea substantiae cordis ipsius de-
generatione, id luculenter probat multo ampli, crassique tu-
moris praesentia in tenuissima membrana valvulae tricuspida-
tae foraminis ventriculo-auricularis, quae profecto simplici
constare videtur serosae, vel endocardi plicatura. Sed neque
tumores in cordis parte ipsa magis carnea existentes, scilicet
super ventriculorum parietes, a fibrae muscularis degeneratione
originem duxisse dicendi sunt. Quicumque enimvero ex his
tumorebus penitus incidatur, sub eo reperies muscularium fi-
brarum strata attenuata quidem et constricta propter tumoris
mole jugiter crescentis diuturnam pressionem: transversim ve-
ro, et in margine eorum nullibi cernes ullum adesse inser-
tum fibrarum muscularium fasciculum, quod quidem neces-
sario eveniret, si hujusmodi tumores in vitio, et degeneratio-
ne substantiae muscularis tantummodo consisterent.

Certum itaque est quaestionem hic unice esse de propaga-
tione ad membranam cordis interiorem processus illius, qui
gignere maxime in serosis potest morbum tubercularem, at-
que inter exitus Endocarditis hanc quoque degenerationem
esse recensendam. Opinio etenim fere generatim a pathologis
recepta haec dici potest, singularem textus mutationem hujus-
modi, tuberculorum nempe grandinem, ut vocant, effectum
semper esse lenti processus flogistici, qui sensim late inva-
dens membranosum systema lentam denique tabem gignit,
quae affectum animal perducit ad interitum. Hujusmodi re-
apse finem habuit vita animalis, quod praesenti inquisitioni
peroptatam obtulit occasionem. Quamquam vero immutatio in
corde appareret adeo gravis, atque profunda, minime certum

erat huc tantummodo pertinere vitii phaenomena, quod primum uti videtur in abdomine ortum sensim deinde serpsit in pectore, gravissimaque laesiones passim prodeuntes ineanti morbo tribuebantur, et pro ultimo ejus exitu jam habebantur, organica nimirum irreparabili dissolutione. Caeterum etsi praenosci potuisset vitium in corde residere, nullum ars praebuisset remedium, quo morbum eo loci directe adoriri liceret, nec opportuna ibi fuissent remedia, quae morbo eidem alibi posito efficaciter adhiberentur. Igitur inter vitia cordis, quibus humana, aequae ac omnes brutorum species obnoxiae sunt, suum jure sibi vindicat locum etiam tuberculosa serosarum degeneratio. Qui morbus, haud infrequens praesertim in bubula specie, ad cor usque pertingere facile potest: ideoque in brutis vitio cordis aliquo laborantibus ratio hujus etiam causae habenda erit praeter communes illas, quibus in humana specie frequenter nimis organum istud animalis aegritudinis princeps male affici solet.

Etsi *tubercularis* degeneratio, quam demonstravi, ad serosas solas pertineat sinuum dexterorum cordis, non ideo censendum est auriculam sinistram, atque ventriculum ejusdem lateris ea expertes fuisse, nam partes quoque istae eandem mutationem alicubi passae sunt, quod aperte ostendit naturalis praeparatio, quae in Conclave servatur sub numero 2756.

II.

Mense Ianuario anni praesentis Fortunatus *Bencivelli*, Veterinarius habilissimus Boricellae Oppidum provinciae bononiensis, morbosum cor bovis mihi misit, brevi addita casus historia, quae sequitur, notatu digna: « Nel giorno 3. di
« Gennajo del corrente anno 1841, *inquit laudatus* Bencivelli, fui chiamato dal signor Gaetano Sarti Agente del N. U. il
« signor marchese Persichelli all' oggetto di istituire la sezione del cadavere di un bue morto improvvisamente nel giorno antecedente alle 4. pomeridiane nel mentre che aggitato col compagno intendeva ad alcuni lavori campestri.
« Interrogato il bifolco, che lo custodiva, asserì, che questo animale nè nel giorno, in cui perì, nè prima aveva dato in-

« dizio d'essere infermo. Solo parecchi mesi addietro, cioè
 « nell'agosto, e settembre del 1840, mangiò per del tempo
 « svogliatamente, a quando a quando fissava gli occhi im-
 « mobili e socchiusi sopra qualche oggetto, rimanendo in que-
 « sta posizione, e come stupido, per delle ore continue, feno-
 « meno, che ripetendosi ad intervalli non molto lunghi ave-
 « va indotto un notevole dimagrimento: ma all'innoltrarsi del-
 « l'autunno parve, che il rinfrescarsi dell'atmosfera portasse
 « tal giovamento a questo infermo da far cessare i notati fe-
 « nomeni in guisa da potersi anche rinutrire alquanto, senza
 « però mostrarsi mai pieno, satollo e pingue, come lo erano
 « i suoi compagni, che pure facevan uso della stessa qualità
 « di foraggi. Accaduta quindi la morte senza previa notevole
 « malattia, si volle mediante la sezione del cadavere scopri-
 « re la causa probabile, che l'aveva prodotta.

« Esaminati con diligenza e il cervello, ed i visceri addo-
 « minali, non fu trovata cosa meritevole di rimarco; nel tora-
 « ce però eravi raccolta di notevole copia di siero rossigno tan-
 « to nella destra, che nella sinistra cavità delle pleure. I pol-
 « moni, e singolarmente il destro vedevansi seminati nella
 « loro superficie di tumoretti vescicolari somiglianti a delle
 « idatidi, i maggiori dei quali arrivavano alla mole di un
 « uovo di colombo: tutta la sostanza ancora del viscere era
 « ingorgata di sangue nero. Il cuore poi alquanto più vo-
 « luminoso del naturale, e di insolita forma all'apice, mostra-
 « va esso pure un grosso tumore idatidoso sviluppatosi nella
 « grossezza delle pareti ventricolari: » *Cnjus singularis dege-*
nerationis causa cor istud integrum, diligenterque servatum mi-
hi perpendendum laudatus Veterinarius sine mora tradidit. Si-
nister ventriculus bipartitus fuerat verticali sectione a basi
fere ad apicem producta, uti repraesentat Tabula XXV.
ad dimidium naturalis magnitudinis. Quapropter facto uni-
ce opus mihi fuit incisiones disponere atque accommodare, ut
clarius posset pathologica degeneratio describi atque demonstrari.

Haec consistit in praegrandi tumore vesiculari figura idati-
 di simile *e, f* Tab. XXV. inter crassos nato parietes muscula-
 res ventriculi aortici ad apicem cordis, ubi in ejus superficiem
 aliquanto tuberans in *f*, apicem ipsum valde comprimit.,

atque obtundit. Succrevisse hic tumor videtur media inter strata muscularia dictorum parietum, eosque disiungendo, prout mole crescebat, et in proxima strata urgendo se extendisse cavum versus sinistri ventriculi, quem maxima pars ejus obtinere videbatur, atque ulterius eo usque progressum, ut vel in facie cordis exteriori praesentiae proximae suae indicium praerberet. Ubi tumor magis prominet, ab utraque facie, interiori scilicet, et exteriori parietis ventricularis translucet, veramque cystim prope sphaericam exhibet limpido sero plenam quippe hic solum intercedit serosae interioris, atque exterioris velamentum. Naturali sic delineata positione tumoris, intus eum scrutari caepi, ut naturam ejus substantiae dignoscerem. Leniter divulsis stratis muscularibus margines tumoris praecingularibus, interiorem quoque membranam cordis sustuli ex tumoris parte magis tuberante intra ventriculum, qua, ut dixi, cum membrana ipsa cohaerebat. Crassa tum cystis integra ex incisione erupit fere sphaerica characteres extrinsecus praeseferens Echinococchi ab Helminthologis assignatos: hujus vermum descriptionem, ejusque partium mensuram praetermitto. Haec sat clare supplebit vermum ipse in Conclavi existens N. 2760. Hoc unum addo vesicam ejus amplam adeo fuisse, ut uncias decem librae medicae caperet liquoris, in quo minimi vermes innumeri microscopii ope distinguebantur, ejus porro generis, quorum praesentia essentialis character est Echinococcorum, hosque inter, et idatides vesiculares veram juxta recentiores differentiam constituit. Oportune accidit eodem tempore, ut alium observare possem Echinococcum in jecure porcino praecedenti omnino similem, excepta mole minori. Quapropter utrumque pertinere existimavi ad speciem a Rudolpho *Echinococcus veterinorum* nuncupatam.

In variis brutorum domesticorum corporis partibus vermem istam Entozoarium compositum facile evolvi posse res est jamdiu demonstrata. *Bremser* enim in Camelo, ed *Dromedario* eum invenit, *Rudolphi et Gurlt* in bove, ove et porco. Plerumque vero in parenchymate jecuris, aut pulmonis residet; in cordis autem substantia observatum ante hac fuisse nullibi, quod sciam, historia scientiae aperte declarat. Multi equidem inter vesiculares tumores idatidum similes in homine, et brutis

reperiti, quorum toties mentio, et descriptio occurrit, ad speciem vermis hujusmodi fortasse pertinebant; id vero probare nemo hactenus susceperat accurata nimirum liquoris in hisce vesiculis contenti inspectione, atque observatione tot minimorum animantium super libera superficie, intimioris eorum, et tenuioris tunicae, quae ab ea ut facile excutiuntur, tunc in liquore modo innatantes, modo pensiles cernuntur. Omnes norunt alias praeter Echinococcum in corde reperiri posse Idatidum animalium species, praesertim *Cysticercum cellulosae* in porco adeo frequentem, et Idatidem quoque simplicem, seu tumidam substantiam cellulo-idatidosam, laud quidem animal verum ab animali, in quo continetur, distinctum. Idatides cordis maxime brutorum, de quibus mentio est apud veteres scriptores, referri aeque possent ad quamvis aliam ex supradictis speciebus. Certum namque est scriptores vel antiquiores hanc novisse cordis mutationem, idatidem generatim dictam. Galenus ipse (1), ubi scripsit = *palpitationem videlicet cordis aut per se evenire, aut cum significatione quadam, quod in humore cor ipsum moveatur* = subdit se pluries vidisse in pericardio animalium, quae sectione facta exploravit, et grandem in simia idatidem; unde aquae in pericardio praesentiam idatibus tribuit in corde existentibus, quae diffractae aquam fundant in pericardium. Morgagnus ipse (2), ubi causas proximas recenset, quae in pericardio aquam congerere possunt, Galeni hypothesim commemorat fracturae idatidum, ac subjungit ejusmodi idatides ab aliis post Galenum praeclaris Medicis, atque Anatomicis tum in brutis, tum in homine repertas fuisse. *Wepfer* multas vidit, et quidem harum aliquas ruptas: idem dic de *Ballonio*, *Rolfinckio*, *Tebesio*, quibus observationibus suas item addidit celebris *Morgagnus*.

Affirmare ergo licet sine dubitatione idatides varii generis facile, et frequenter in corde evolvi posse; quoad vero idatides animales bruta homine magis obnoxia esse organicae huic de-

(1) Lib. V. de locis affectis c. 2.

(2) De sedibus, et causis morborum. Epist. Anat. XVI. art. 44.

generationi; nam praeter *Cysticercum cellulosae* in corde porci adeo frequentem, Echinococcus ipse evolvi, et magnopere crescere potest, uti in presenti casu, de quo loquimur, exemplum fortasse primum habemus. Cum tumores isti modicae sunt molis, motus cordis praesentia sua minime impediunt, vel cum ejus cavi nonnisi partem claudant, parum molesti esse solent, ac saepe animal tantae laesionis ne quidem praebet indicium: exemplo est porcus, qui ad maximum usque pinguedinis gradum prosperare potest etsi grandine sic dicta vexatus, inque regione cordis praesertim carnosa cysticerchis fuse conspersus, quorum praesentia plerumque, animale adhuc vivo, sub lingua visibilis fit ad latera frenuli, sola intercedente mucosa harum partium tenuissima. In descripto autem casu organica degeneratio, quae affecti animalis vitam repente interimit, nihil obstat, quominus multo ante nata, diuque in substantia cordis inobservata latuisse supponatur. Tunc solummodo, quum tumor mole praeter modum auctus loci nimium tenuit in cavo sinistri ventriculi, circuitum sanguinis turbavit, et animal periit, qui eo usque bona valetudine uti videbatur.

III.

Inter sanguinis vitia, quae in vivis animalibus saepe occurrunt, locum habet polypus, quo improprio nomine vulgo appellantur concretiones, sive coagula in corde, vasisque sanguiferis plerumque orta propter nimis lentum sanguinis circuitum, vel mutatam hujus liquoris crasim, quae saepe saepius subsequuntur lentam vis vitalis defectionem in vitae extremis longe protrahi solitam. Verum in casu pathologico, quem hic subjungere juvat, obtigit mihi, ut eam quoque ipsam degenerationis formam observarem in cordis tunica interiore, quam Chirurghi polypum vere nuncupant in membranis mucosis. Unde opportunum censeo primam vitii speciem nomine distinguere concretionis fibrinosae, servato polypi nomine iis postremis vegetationibus tunicae interioris cordis, et vasorum; in his enim censeo easdem obtingere posse vegetationes polypis mucosarum omnino similes.

Repente obiit Minerbii die 21. Aprilis anni 1840. hos

aetate annorum circiter novem, quin ejus mortem morbus, aut invaletudo ulla praecesserit, sic referente villico Antonio Orcini, cujus erat animal: hoc saltem certum est neminem artis peritum ante bovis obitum auxilio vocatum fuisse, ideoque bovem nullo saltem gravi morbo affectum fuisse; villici enim maxime solliciti esse solent de valetudine praesertim bovum suorum. Veterinarius jam supra laudatus Cajetanus *Pelagatti* sectionem cadaveris exequutus est. Nihil novi partes omnes, et viscera obtulerunt, corde excepto, quod naturali magnitudine, et pondere multo majus repertum est, vergente majori dilatatione praesertim ad dexterum ventriculum, cujus parietes debiles, et molles erant, perinde ac si inesset ibi aneurisma, quod vocant passivum. Dissecto ventriculo isto in superna regione, et grandi perspecto tumore, qui cavum ejus fere totum occupabat, laudatus Veterinarius contentus reperisse causam repentinae mortis ad museum Anatomiae comparatae vitiatum organum dono misit.

Tab. XXVI. cor istud repraesentat ad dimidium naturalis magnitudinis. Sectio verticalis a basi fere usque ad ejus apicem ducta juxta sulcum, qui extrinsecus partitur positum septimenti interventricularis, quae sectio ambo cordis cava dextera complectitur, partem eorum interiorum patefacit inverso resectorum parietum limbo ad dexteram observatoris; ex auriculae fornice introrsum verti cernitur in formam infundibuli portio parietis ejus (a, tab. XXVI.) distenta versus cavum ventriculare ipso tumore pondere, qui adhaeret, seque protendit atque insinuat in angustiorum partem infundibuli *b*, ibique proinde efformat pediculum polypi. Jugulatae huic parti arcte annexae conspiciebantur valvulae foraminis ventriculo-auricularis (*c, c*), quae proinde in contactum venire invicem nequibant, ut in ventriculi contractionibus defluxum sanguinis auriculam versus impedirent.

Hic mollis polypus (*d*) aspectu plane similis mucosarum tumoribus, praesertim illius, quae fossas nasales induit, et imperfecte rotundus ad cavum usque acuminatum ventriculi minime pertingebat, id impediens non sola ejus angustia, sed potius subjecta haud parva transversa trabecula (*e*), quae anteriorem ventriculi parietem cum espimento medio conjungebat.

Caeterum tumor omnino liber insidebat in cavo ventriculi, ex quo facile removeri potui, ac sursum converti, uti ostendit Tab. XXVII. Haec molem, figuram, atque exteriorem dispositionem tumoris exacte commoustrat; cujus substantia antequam duresceret, discerpi facile poterat, ac per strata dissolvi, ut cernitur in *b* ejusdem figurae, quae strata substantia uniformi constant juri coagulato admodum denso fere simili nullum praeseferente filamentorum, aut fibrarum vestigium. Tumoris superficies, quam tabula coram objicit, inaequalis apparet et, quodammodo rugosa, vel inordinate sulcata perinde ac si vestigia in ea permanserint postici parietis reticulati dexteri ventriculi, et partim sepimenti interventricularis, quibus superficies ipsa fortiter obnutebatur in cordis contractionibus.

Exteriore absoluto examine accurato adeo singularis morbosae hujus productionis, pertentare non omisi oportuna sectione intimam quoque texturam, manu enimvero tumorem tractans quandam in eo sentire mihi videbar fluctuationem liquoris in ejus centro latentis. Facta igitur incisione secundum longitudinem *a, b*, fig. 1. Tab. XXVIII. in antica facie tumoris, servato naturali positu ejus in ventriculo, in cavum usque paulo angustum penetravi (*c*. Tab. XXVIII. fig. 1.) oviforme, peculiari membranula sua intus contactum tenuissima, sed elastica, et robusta, ac humore refertum denso, atque filatim uti albumen ovi defluente, quo expresso umore, se obtulit in fundo cavi ad dexteram observatoris (*d*, Tab. XXVIII. fig. 1.) parva cystis altera vix sacco adnexa ope mollis textus cellulosi ita ut facile divelli potuerit. Hanc separatim delineatam exhibet figura 2. ejusdem tabulae XXVIII, et integra servatur in Conclavi sub numero 2762. Hac secunda cysti pariter incisa, nullus humor in parvo ejus cavo repertus est; sed inerat corpusculum carnosum arcte adhaerens membranulae involventi in puncto adamussim, ubi membranula ipsa se pariter, ut supra dixi, inserebat in cystis majoris superficiem. Itaque punctum exacti contactus horum textuum abnormium diversorum hic quoque indicare videtur locum, ubi ex interiori facie auriculae dexterae germinare caepit excrescentia polyposa, ac probabile item est hic ab auriculae pariete tumorem versus processisse vasa sanguinea nutrientia, etsi ut in polyypis hujusmodi generatim

accidit, vasa perparum conspicua sint tunc etiam, quum tumor praegrandem adeptus est molem. Quae proprietas in casu, de quo agitur, confirmata reipsa est. Processus iste morbosus animalis vegetationis cum primum incepit, progredi mira celeritate solet: ac pondus, distensio, et mechanicus stimulus insolitus in vivos textus gignere videntur, sin veram phlogosim, cujus profecto existentiae sive in tumore, sive in corde, in quo adoleverat, nullum aderat indicium, saltem exuberantiam vis vegetativae, quae adeo manifesta est tum ex rapido polypi incremento, tum ex textili pene carnosa, et ponderosa, ac generatim multo densa ejus substantia. Prout autem adolebat polypus iste, necessarie descendere debebat cavum subjectum versus usque ad ventriculi parietes, ubi consisteret, ut reipsa factum est; inque hanc ipsam sui progressus directionem secum trahere debebat membranam fornicis dexterae auriculae, in qua morbosa vegetatio initium habuerat. Ex sectione (*ff*) in figura 1. ejusdem tabulae XXVIII. patet depressio ista ad instar infundibuli parietis auriculae, in cujus fundo adhaeret polypus, qui iccirco petiolatus apparet. Quod autem hic tumor intus cavus repertus est, non ideo ullum sequitur essentielle discrimen inter ipsum, et alios congeneres tumores ubivis natos; nam *Desmazières* vel nuperissime communicavit Regiae Academiae Scientiarum Parisiensi (1) observationem polypi uterini interius pariter cavi; item *Velpeau* de hoc casu loquens duos alios omnino similes se nactum fuisse testatur, monetque Chirurgos, ne quum polypos hujusmodi abstulerint, se abstulisse credant uterum ipsum, ut revera saepe accidit. Quoad morbosum processum, qui in polypo descripto reliquum fecit cavum, probabile mihi videtur pressionem continuam, atque collisionem parietum cordis validorum in tumorem solvere unionem potuisse nucleum inter centram, et extima strata, et sic circa ipsum manere vacuum illud spatium, quemadmodum causae similes in humana specie ipsa quosdam efficere solent mucosos sacculos naturales, uti constans, ac evidentissimus ille est ex compres-

(1) *Bullettino delle Scienze Mediche* Febbraio, e Marzo 1841. p. 181.

pressionè, et motu procedens in cellulosa inter rotulae integumenta, et faciem exteriorem ossis. Roboratur haec conjectura ex eo, quod humor in polypo ejusdem naturae repertus est, atque humor sacculorum mucosorum; facilitas autem solutionis inter strata polypi liquet ex compositione tumoris cujus substantia stratis constat in tota sua crassitudine, uti demonstrat fig. 1, Tab. XXVIII., quae strata reipse in tumore adhuc recente adeo facile sejungebantur, ut contactum solummodo tenere inter se absque ulla substantiae communione viderentur.

Quaquam de polypis mentio passim occurrat in historia laesionum cordis, hac tamen denominatione Auctores ut plurimum utuntur, quum agitur de coagulis substantiae fibrinosae sanguinis vel recentibus, vel inveteratis in corde super ejus cavi parietibus, in vasis sanguineis, in ductu ipso thoracico: quae porro concretae origine sua, forma, colore, atque intima textura a polypis carnis, ut Chirurghi nuncupant, prorsus differunt. *Bouillaud* ipse, auctor inter recentiores doctissimus, et degenerationum cordis indagator solertissimus nullum refert ex polypis quamplurimis, quos describit (1), huic nostro similem. Verum in Diario, cui titulus — *Revue médicale*, invenio (2) observationem polypi in corde cum Societate Anatomica Parisiensi communicatam a *Choisy*, qui casum ibi refert polypi carnosum piriformem adhaerentem interno parieti auriculae sinistrae cordis humani, qui magnitudine par erat ovo perdicis. Narrat praeterea perrari hujus casus alium similem ab Antonio Benivieni observatum primo fuisse (3). At *Pigeaux* de hac observatione *Choisy* loquens coram eadem Societate monuit, quod supra ego animadverti, probe definiendum esse polypum cordis. Hoc enim nomine, ut veteres Medici, et Anatomici solebant, coagulis etiam fibrinosi tributo, generice usi sunt *Corvisart*, *Burns*, *Testa*, *Lae-nec*, *Bouillaud* ad haec vitia significanda, quae in morborum

(1) In Opere supradicto.

(2) Iuin 1833, p. 138.

(3) Ant. Benivieni de abditis morborum causis. Basilae 1529. = Sprengel Histor. Pragmatica. Tom. 2. p. 394 ponit ejus obitum ad annum circiter 1503.

cordis inquisitione saepe occurrunt. Quum vero nomen polypus solis tribuitur polypis veris, sicuti ii sunt, qui in utero, in fossis nasalibus, et generatim in mucosis sedem habent, nemo hactenus polypum hac nominis significatione acceptum in corde extitisse affirmavit; imo *Senac, Lieutaud, Morgagni*, aliique ejusdem aetatis Anatomiei a corde prorsus excludunt polypos hujusmodi, quorum fortasse raritas fecit, ut eorum observationis vel effugerit occasio, vel necessario defuerit attentio, atque perseverantia. Equidem in humano cadavere observati sunt, sane perraro, polypi veri in corde (1), at nullam novi descriptionem polypi proprie dicti in corde brutorum nati, polypi multo minus, structura, et mole adeo singularis, qualis hic est, qui in corde bovis se mihi obtulit. Hoc unum doleo, quod animal morbo adeo raro affectum ab artis perito exploratum ante obitum non fuerit, ac phaenomena ignorentur, quae morbum necessario comitabantur, unde norma sin certa, saltem probabilis prodiisset arguendi in hisce casibus organico-mechanicam causam, quae turbare maxime debet circuitum, et contractiones cordis usquedum repentina mors subsequatur, ut in casu etiam nostro evenit. Accurate hujusmodi descriptiones apprime necessariae ad dijudicandam graviorum morborum naturam in Veterinaria fere semper desiderantur, quum de cordis morbis quaestio est. Vix aetate nostra invalescere caepit inter hujus artis cultores usus auscultationis, qui tanto humanae medicinae adjumento est in curatione morborum nobilissimi hujus organi, quae ratio examinis tanto magis necessaria est in medicina brutorum, in qua veterinarius proficere nequit subsidiis, quae ex loquela, exquisito sensu, et ratiocinio praesto sunt humanae medicinae in morbis maxime abstrusis, atque difficilibus. Opinio infrequentiae morborum cordis in animalibus, ac desperatio sanationis morborum omnium ex vitio organico procedentium causae extiterunt, cur historia pariter, ac studium eorum negligeretur. At tempus est,

(1) Vide etiam scriptum recentissimum clarissimi doctoris Maximiliani *Rigacci* « *Lettera ad un amico sopra una poliposa vegetazione organizzata e vivente ritrovata nell' orecchietta sinistra del cuore. Firenze 1843 8.º* »

ut Veterinarii, atque industriae agrariae Cultores huic quoque ramo utilissimo Hygienis, ac Pathologiae Veterinariae toto animo incumbant. Et si casus hic expositi raro contingunt, innumeri alii non desunt aequae graves, atque ob eorum frequentiam funestissimi, quibus obnoxia praesertim est bubula species prae caeteris mammiferis omni cura digna. Plurimum annorum inquisitio laesionum cordis causam mihi patefecit saltem in hac provincia communiorem, carditis, lentae consumptionis, mortis repentinae, quibus pars utilior bubuli gregis frequenter adimitur. Communis usus villicorum nostrorum tum folia decerpenti altiorum arborum autumnii tempore, tum hieme degendi in stabulis, ibique quidquid operis domestici exercendi maxime perniciosus est; in folia ex foeminarum vestibulis acus facile decidunt, inque paratum pabulum multiplex illa sutoris, et sartoris officina durae materiae angulosa, et pungentia frustula facile disperdit, quae a bestiis cum cibo absorpta ex reticulo ad cor usque, imo in ejus cava ipsa pertinent, ejusque substantiam laecessunt, lacerant incredibili horum animalium dolore atque cruciatu. Vere magnus est bovum numerus, qui hac de causa quam cavere tam facile foret, misere pereunt. Solus Minerbii Veterinarius Cajetanus *Pelagatti* annorum haud amplius trium spatio casus duodeviginti mihi communicavit anatomica inspectione rite comprobatos acuum ex cauali digerente in cor trajectorum. Aliae insuper praeparationes Conclavis nostri exempla offerunt hujusmodi laesionum: nam Veterinarii diligentes, et artis suae pariter studiosi Angelus *Ghelfi*, Felix *Parmeggiani*, Angelus *Puglioli*, Aloysius *Lugaresi*, similes proprias nuntiaverunt observationes, et corda bovum ipsa ad conclave comiter miserunt ab extraneis corporibus profunde, et varie laesa. Quoniam igitur jam triginta et amplius indubiae observationes numerantur a paucis veterinariis habitae lethalium cordis vulnerum ex dicta causa procedentium; si animadvertatur pleraque animalia affecta, cum emaciari, et confici prae lenta gravissima laesione incipiunt, vel annonae demandantur, vel occulte occiduntur; manifestum erit me plus nimio adventitiae, de qua loquimur, causae minime tribuisse cum ex ea maxime pendere affirmavi repentinos interitus, et lentos, ac diu-

turnos morbos, qui meliora domestica animalia nobis auferunt. At satis abusus sum patientia vestra Sodales humanissimi, hoc jam nimis longo sermone; alia iccirco praetermittam facta et argumenta, quibus confirmare ulterius possem funestam hujus causae efficaciam; de qua, deque ratione eam praecavendi, vel saltem minuendi alias verba faciam, si quidem probaveritis. Interea concludam animalia domestica morbis cordis varii generis esse obnoxia, ac vitiis hujus organi funestissimis haud minus procul dubio frequentibus, quam quae in humano corde aliis de causis generantur, ac summopere interesse omni cura praevertere causas laesionum hujusmodi, quae cum ad certum gradum processerunt, nulla Medico, aut Veterinario suppetit curationis via, et certo animal atroces inter dolores peribit.

EXPLICATIO TABULARUM

Figurae omnes repraesentant praeparationes ad dimidium naturalis magnitudinis.

Tab. XXIV. Exhibet cor vaccinum, cui portio tenuis pericardii adhuc conjuncta manet, apertis et deductis parietibus cavi dexteri, ut conspici possint singulares, et ampli tumores subflavi super endocardio existentes, quorum aliqui profunde incisi.

- a. a. Portio pericardii dexteram versus distenta.
- b, b. Vena cava postica pericardio aperta.
- c. Vena cava antica.
- d. Aorta.
- e. Arteria pulmonaris.

Tab. XXV. Cor bovis, in quo praegrandis repertus est Echinococcus = *Echinococcus Veterinorum*. = Ventriculus sinister apertus est sectione verticali a basi usque ad verticem cordis.

- a. Dexter a auricula item secta verticali directione ventriculi.
- b. Auricula sinistra.
- c. Aorta.
- d. Arteria pulmonaris.
- e. Crassus tumor idatidi similis in cavum prominens sinistri ventriculi, cujus tertiam abunde partem occupat.
- f. Pars exterioris parietis cordis, in qua prominebat idem tumor, qui hic quoque translucebat.

Tab. XXVI. Cor bubulum cum polypo carnosio descendente ab interiore facie dexterae auriculae in cavum subjecti ventriculi.

- a. Fornix dexterae auriculae a pondere tumoris introrsum tractus.
- b. Pars angustior tumoris adinstar infundibuli, quae ei petiolus est.
- c, c. Portio valvularum tricuspidum.
- d. Tumor polyposus.
- e. Crassa trabecula transversa tumorem fulciens, qua fundum spectat ventriculi.
- f. Sinister ventriculus.
- g. Auricula ad idem latus aperta.
- h. Truncus aortae.
- i. Id. arteriae pulmonaris.

Tab. XXVII. Cor ipsum, et tumor, *a*, ex ventriculo detractus, et sursum conversus.

b. Strata substantiae ejusdem tumoris disjuncta, et versa extrinsecus, quo structura conspicua sit.

c. Pedunculus conjunctionis cum pariete antedictae auriculae.

d. Inflatio tumoris sulco profundo, *e*, sejuncta, in quo crassa trabecula parietis ventriculi adhaerebat.

f. Trabecula haec ipsa, quae sic tumorem jugulabat.

Tab. XXVIII. fig. 1. Cor ipsum eodem, quo in tabula XXVI. positu delineatum, addita secundum longitudinem incisione tumoris usque ad centrum ejus substantiae. Incisus quoque est verticaliter paries ultimi tractus interni adinstar infundibuli, quo auricula tumorem sustentat; et diductis oris sectionis, perspicitur quomodo fornex auriculae introrsum in proprium cavum flectitur.

a, b. Sectio tumoris, quae hujus internum cavum patefacit.

c. Hoc cavum ipsum.

d. Corpusculum adinstar nuclei in cavo polypi antedicto repertum.

f, f. Sectio perpendicularis in pariete auriculae introrsum depressae in formam infundibuli.

e. Laevis paries oppositus dexteræ auriculae, qui retrorsum complet ambitum infundibuli.

Fig. 2. Corpusculum, *d*, a cavitate polypi fig. 1. eductum.

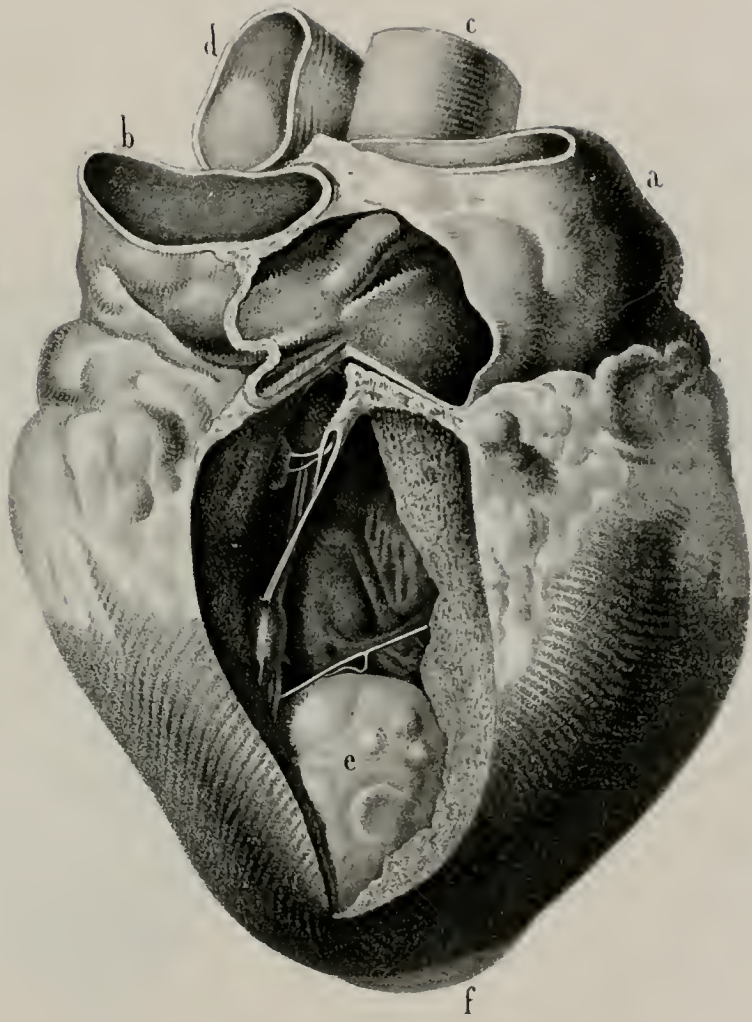


C. Bellini ad nat: del:

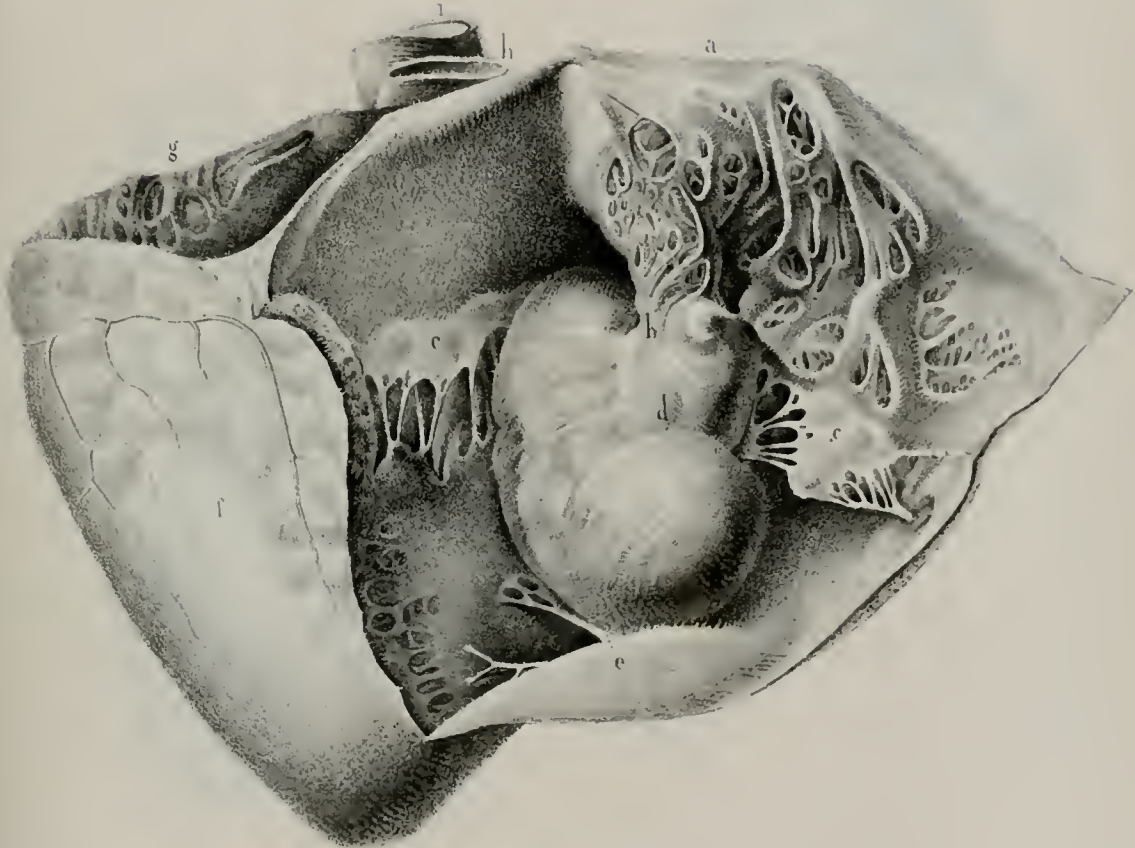
C. Bellini in lap: del

Lit Bellini

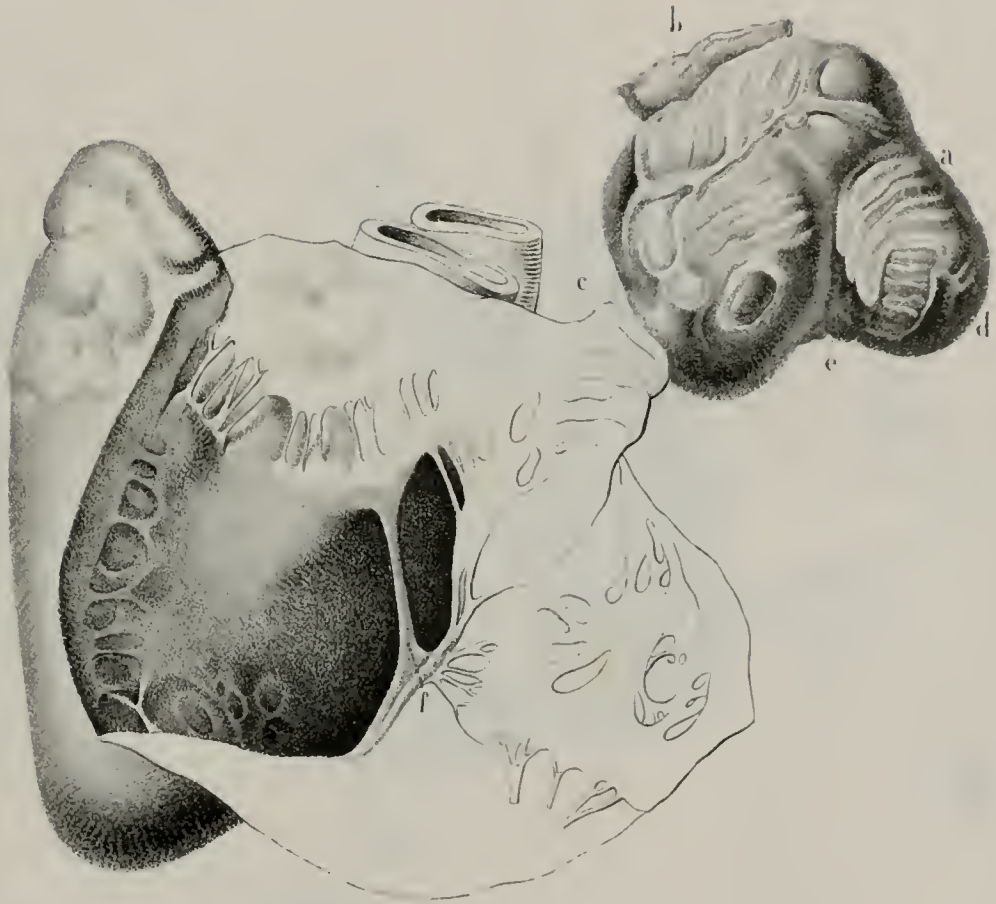












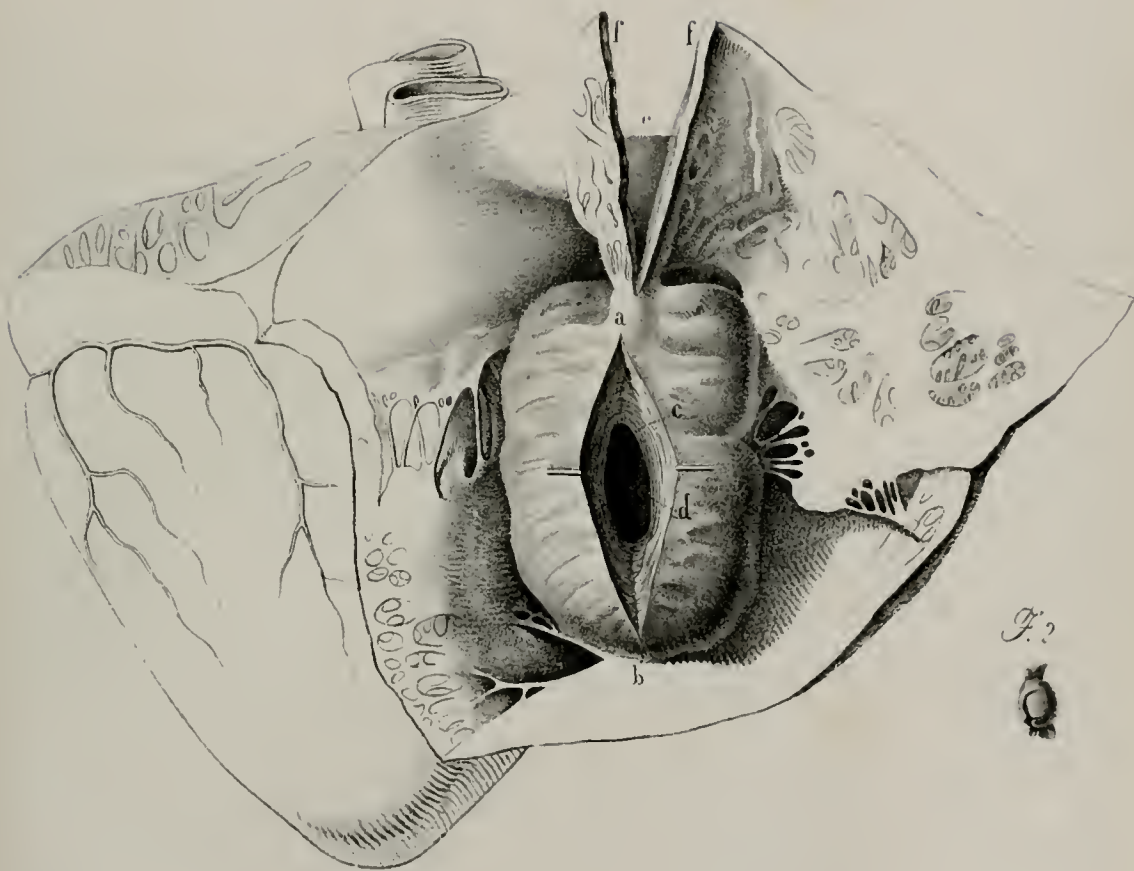
C. Bottini ad nat del

G. Bottini in lap del

Lit Bottini



F. 1



F. 2



JOSEPHI BERTOLONII M. D.

IN ARCHIGYMNASIO BONONIENSI BOTANICES PROFESS.

*De duobus insectis Ulmo campestri, et Pyro Malo
infensis.*

Ab eo tempore, quo detexi, *Galerucam calvariensem*, insectum summopere infensum foliis ulmi, hyeme se se recipere intra domos campestras, de qua re, Collegae sapientissimi, sermonem apud vos habui in conventu nostro, qui fuit XVII. Kal. Maj. anni 1839., et ostendi, quo pacto hoc animal facile posset destrui, studium omne posui in moribus, et metamorphosis ejus diligenter observandis, cognoscendisque; quare ad ea, quae in rure contingunt, primo, et patienter animum converti. Accidit autem, quod eodem anno ad Tert. Id. Maj., et in eodem agro, in cujus domuncula primas meas de hoc insecto observationes insitueram, erucam quamdam super folia ulmorum viderim, quae degebat intra cavum ab elata cuticula utramque superficiem folii obtegente profectum, nec non a destructo parenchymate cellulari interposito, ex quo pars folii moriebatur.

Initio credidi, noxam, qua omnes ulmos illius praedii affici videram, ab ovis esse profectam, quae Galerucae cum e domibus paulo ante exiissent, posuerant in foliis noviter eruptis, quae res magnum detrimentum in pabulo boum hoc anno futurum mihi portendebat. Nolui tamen in hisce tam levibus observationibus, consecrariisque consistere, sed majori diligentia in erucas, quae aerumnam illam efficiebant, investigavi, pariter ac in circumstantias omnes, quae eandem comitabantur, atque in suspicionem veni, sin noxa proficisceretur ab

erucula Galerucarum juniore, quam ego nondum noveram, profecto erucacae alius speciei eam esse tribuendam.

Ut certior de re fierem, et ut de metamorphosis successivis illius animaleuli cognoscerem, complures ramos ulmeos abscidi onustos foliis ita morbo affectis, et Bononiam attuli, ubi sub campanis vitreis posui usus omni diligentia, et sedulitate, ut animalculorum evolutioni prospicerem.

Post duos dies, scilicet Id. Maj. animaleula evoluta microscopio subjeci, et sedulo examinavi, et vidi horum alia jam in aureliam transisse, quo pacto certior factus sum, ea ad Galerucam incipientem minime pertinere, sed ad aliam insecti speciem mihi ignotam, et ulmis pariter summopere infensam, ita ut quod uni Galerucacae perperam tribuebatur damnnum, utrique animalculorum generi fuisset tribuendum. Re quidem vera paucis post diebus, scilicet Sept. et Oct. Kal. Jun. insecta perfecta ex aureliis prodierunt ad *Orchesthem alni* pertinentes, quam speciem jam probe noveram, et in collectione mea insectorum agri Bononiensis possidebam, cum a pluribus annis reperissem in ulmis quibusdam junioribus hic in loco qui dicitur *gli Arienti*, tunc cum nulla suspicio mihi erat de iis, quae postea in hoc animalculo patuerunt.

Quae nunc detexeram, animadversione digna mihi visa sunt, praesertim cum noxa ab hoc novo animalculo profecta late effunderetur hoc anno in ulmos universas tam in collibus, quam in planitie. Rem aperui nonnullis ex amicis meis, qui agricolationi maximopere student, quos inter memorare juvat Franciscum Guidalottum Doctorem matheseos, et Aloysium Daviam Marchionem. Horum uterque observationes meas confirmavit, primus in ulmis, quae colles Ozani incolunt, alter in illis, quae in collibus extra portam S. Mammantis habentur. Contentus de rebus a me primum visis easdem memoriae mandavi, ut sequente anno confirmarem, et si fieri posset, vere veniente anni 1840. auferem, praesertim cum nec insectum perfectum, nec metamorphoses totius animaleuli naturae studiosis hactenus innotuissent, longaeque minus agricolae de noxiis qualitatibus ejus scirent.

En autem, quae postea observavi. Hoc insectum in statu perfecto quam certissime hybernat apud nos Galerucarum iu-

star; sed, quo loco tunc degat, detegere non valui. Apparuit prima vice anno praeterlapso circiter ad duod. Kal. Maj. in foliis ulmi noviter evolutis, quae esuriens illico perforabat, vorabatque, prout vidi in ulmis consitis in collibus ad Petrusiam (*Zola Predosa*). Post aliquot dies, scilicet Prid. Non. Maj. observavi, folia omnia ulmorum quam late affici ab erucis nunc bene evolutis, natis absque dubio ab ovis, quae foeminae hybernantes ibi posuerant; has enim foeminas paucis diebus ante super eadem folia videram inhabitare.

Eruca perpetuo degit intra cavum, quod sit in folio a junctis cuticulis utriusque superficiei, et ab eroso parenchymate. Eadem vescitur hoc parenchymate. Num vero animal nascatur intra cavum ab ovo, quod foemina ibi posuerit, an extra, ut inde viam intra cavum sibi sterneret, id me latet; eruca enim incipiens adeo exigua est, ut oculorum aciem pene aufugiat. Folium, qua parte ita laeditur, confesum moritur, quod quidem apicem ejus versus passim obtingit, extenditurque in latera, rarius in basim. Pars mortua refert vesiculam, intra quam animal nidulatur. Cur vero mors haec contingat in apice folii, docent cum Hamelio physiologi; folium enim citius elongatur in parte superiore, quam in basi; cumque basis Aprili decedente plenam evolutionem nondum adeptam sit, ideo foeminae coguntur ponere ova in foliorum apice, vel in viciniis ejus. Damnum, quod ex hoc proficiscitur, ingens profecto est; nam folia prima in universum absumuntur, aut saltem aliqua sui parte exsiccantur, et quae pars remanet aegerime postea, et vix pergit evolvi.

Eruca autem in cavo contenta, cum ad augmentum suum plene pervenerit, quod quidem contingit intra viginti ab exortu dies, aut parum ultra, idest a Duod. Kal. Maj. ad Idus circiter Majas, longitudinem habet fere quatuor millimetrorum cum dimidio, latitudinem paulo plus, quam millimetri. Constat annulis duodecim, qui ab anterioribus ad posteriora continuo decrescunt, adeo ut extrema pars postica attenuetur. Apoda fere est; tamen posterius a quarto annulo inclusive ad decimum usque fert veluti sulcum longitudinalem, cui in quovis annulo perbreve tentaculum, seu potius rudimentum cruculi vix vitri ope visibile utrinque a latere adjungitur. Color

totius corporis albus, capite excepto, quod nigrum, et nitens. Item annulus primus superne nigrescit, inferne albet cum maculis tribus fuscis irregularibus, quarum quae media major est. Annuli secundus, tertius, quartus, quintus, sextus, septimus, quae invicem inosculantur, fuscis sunt, sicuti etiam stigmata, quae tamen minus intense, et fuscescit pariter apex annuli novissimi. Eruca haec vix ac ne vix tangitur, abrupte, celeriter, fere clonice excutitur, sive sit intra folliculum suum, sive extra. Ad Idus circiter Majas abit in aureliam in ipso cavo folii. Inter illas, quas Tert. Id. Maj. selegeram, ipsis Idibus paucae metamorphosim secundam jam passae erant.

Aurelia est brevior, et crassior erucâ, tota coloris luteoli, qui intensior in capite, et in scuto; in editiori fronte gerit tubercula duo nigra, quorum unumquodque setam fert. Jam apparent rudimenta alarum, et crurum, quae sub corpore reflectuntur; margo vero alarum quidquam fuscescit; extremum corporis acuminatum, et fuscum. Vivacior quam eruca, ita ut tactu vel levissimo vi contrahatur. Majo decedente, idest inter Sept. et Oct. Kal. Jun. insectum perfectum prodire incipit, ex quo facile dignoscitur, animal septem, vel octo dies in statu chrysalidis transigere.

Hoc insectum pertinet ad Coleoptera, et in his ad sectionem Tetramerum, ad familiam Rhincophororum, et ad genus *Orchestes*. Fabricius vocavit *Rynchaenum alni*, quo nomine specifico indicare voluit, illud vivere in alno, sed apud nos vivit quam latissime in ulmo. Ejus longitudo est circiter duorum millimetrorum cum dimidio, latitudo fere sesquimillimetri; forma ovalis; totum corpus superne coloris luteo-testacei, maculis duabus plus minusve manifestis in quavis elytra; at hae in quibusdam individuis sunt fere oblitteratae; caput, et pars anterior abdominis nigrescunt; nigrescunt quoque, sed minus intense, femora, et tibiae, dum tarsi elytrorum iustar sunt coloris testaceo-pallentis. Os fit tuba, quae dum quiescit, reflectitur super pectus, curvula est. Animal utitur apice tubae ad folia corrodenda. Antennae acutae, et ad angulum flexae sunt in parte media longitudinis hujus tubae, qui character una cum crurculis inflatis, et ad saltandum aptis genus hoc a *Ciono* distinguit.

Idem animal, statim ac prodit ab aurelia, e cavo suo exit, non exit tamen a foliis ulmi, quae nunquam derelinquit, donec vivit, et ibi vivit numero individuorum pene infinito. Mole, et saltibus suis aequiparari eum pulice crassiore potest; si enim vel capere, vel tantum tangere studeas, statim exsilit saltu non parvo, et se se a periculo liberat. Ut plurimum degit in facie inferiore folii. Ipsemet recubans sub sepe ulmea testis sum noxae ingentis, quam paucis horis in folia ejus inferebat; ore enim suo hic illic vel epidermidem cum subposita substantia fibrosa, et cellulari, vel substantiam fibrosam, et cellularem tantum corrodebat; hinc folium eribri instar perforatum evadebat, foraminibus aliis apertis, aliis epidermidis velamine tectis, ut patet ex ramo cum foliis ita laesis, quem vobis exhibeo.

Ex iis, quae dixi, liquet, *Orchestem alni* destruere folia ulmi tam in statu erucæ, quam in statu animalis perfecti, noxam hanc incipere veniente vere, et ad Maji mensis finem perdurare, atque ad universas ulmos agri Bononiensis extendi, quas observationes nostras alii quoque confirmarunt. Ego profecto vidi illam eadem fere copia in agrum nostrum effundi, ac ibi effunditur *Galeruca*; mihi enim occurrit in collibus Petrusiae, Gypsi, in arvis juxta viam, quae Bononia Lavinum ducit, in iis Almeldulae, Burgi Panicalis, Fiessi, et per plura millia passuum secus ripas Idicis, ubi non solum infestabat ulmos in campis proximis cultas, sed etiam caespites sylvestres ulmeos, qui erant in ripis fluminis prope Fiessum, et Castrum Nasicæ; verbo observavi in omnibus ulmis, in quas offendi tempore evolutionis hujus animalculi; alii idem viderunt, ut jam superius innui, in collibus Ozani, Observantiae etc.

Hic vero reticere nequeo, noxam ab hoc insecto inlatam hactenus injuria tributam fuisse unis Galerucis, quae observationibus meis, aliorumque anno superiore factis non tam late ulmos infestant nisi decedente Junio, toto Julio, et parte mensis Augusti. Sed cum aerumna, quae ab hac postea habetur, suppetias ferat aerumnis antea ab Orcheste inlatis, malum malo addit, et pabulum bobus pergit adimere, vim arborum non amplius se se nutrientium infringit, et ligno ulmeo sequioris notae originem praebet, ut, si quid boni ligni remanet, plurimi veneat..

Vellem nunc agere de modo, quo Orchestes quoque posset auferri. Sed quamnam methodum vobis proponam? destructio foliorum ulmi, quo tempore animal in statu cruceae est, perutilis forte censebitur, quia totam generationem animalis infensi auferret; sed ad eam consequendam in difficultates maximas offendimus: 1. quia impossibile foret, id uno eodemque tempore peragere in universo agro, praesertim cum refugiat animus a destructione eorum, quae spondent messem uberrimam pabuli bobus nostris: 2. quia haec eadem res nullius momenti demum esset; nam cum animal vivat quoque super folia alni, quae arbor sponte, et copiose crescit apud nos secus canales, torrentes, flumina vel in ipsis montanis locis, quod destrueretur in ulmo, haberetur ex alno, neque tota gens animalculi infensi penitus unquam posset absumi.

Venio nunc ad alteram insecti non minus infensi speciem. *Pyrus Malus L.*, quam serunt, et colunt ubique per universam Europam, male mulcatur apud nos a pluribus, diversisque insectorum speciebus, quarum una est, quae nocentior omnium, quia non solum annis quibusdam aufert saluberrima, itemque deliciosa poma, prout facit eruca *Tineae Padellae*, sed totam arborem, quod pejus est, plerumque ducit ad interitum. Haec species ab agricolis nostris vulgo dicitur vermis mali, ad quem vermem, qui foret, detegendum me converti. Nam in pometo longo ordine consito hic ad pistrinum, quod dicitur *della China*, vidi ramos malorum duos, vel tres annos agentes facile aegrotare, et sic aegrotantes cito interire, quaerensque causam hujus aerumnae, eam a vermibus oriri detexi, qui lignum corrodebant, eumque in metamorphoses eorum sedulo incubissem, erucas *Cossi aesculi* esse cognovi; sequutus vero observationes meas per alios annos vidi, hanc ipsam erucam omnes qualitates arborum *Pyri Mali* apud nos invadere, et aequae caudices, ac ramos juniores, tenuioresque passim terebrare, qua da causa rami paulatim siccabantur, donec tota arbor, etiam quae robustior esset, paucorum annorum spatio interiret. In hoc autem aegrotantis arboris statu fructus erant parvi, minusque saporis, et si forte vere favente flores magna copia faecundarentur, rami, qui iis magis erant onusti, aestate mox sequuta citius peribant. Opportunum

igitur duco patefacere structuram, habitum, et metamorphoses hujus vermis perniciosissimi, de quo scriptores geoponici silent, et medelam noxae, quantum in me est, proponere.

Eruca hujus insecti initio est albo-luteola; nascitur decedente aestate, et hyeme sequente adhuc breviuscula est, cum vix novem linearum longitudinem adepta sit. Postea paulatim, at semper lente, crescit, et prout augetur, penitus arborem subit, in qua, cum junior, et tenuior est, fistulam in axe per longitudinem sibi parat, quam corrosionibus inter vescendum magis magisque undique adauget. In fundo hujus canalus pars excrementorum deponitur, pars exit a foramine ejus externo mixta cum humore aliquo, qui superficiem corticis infra vulnus madefacit, et qui ab ore animalculi probabiliter proficiscitur. Ita habetur indicium noxae interioris. Dixi, erucam hanc lente crescere, et si recte video, nisi intra tres annos ad incrementum plenum, et perfectum non pervenit. Individuum N. 1., quod nunc vobis exhibeo, aetatem fert anni unius, dum alterum individuum majus, quod cum illo ostendo, aetatem annorum circiter trium demonstrat. Novissimum hoc gaudet notis omnibus perfectionis suae, et jam, ni fallor, proximum erat, ut in aureliam mutaretur, sicuti in aureliam cito mutabitur, quod vivum hic habetis intra surculum insitum, qui una cum arbore periit aestate praeterlapsa. Idem animal jam a septem mensibus ligno sicco vescitur, regulariter, at lente, auctum corpore, absque eo quod valetudine sua vel minimum laboraverit, et spero Junio proximo in aureliam abiturum.

Eruca, cum ad maximam evolutionem suam pervenerit, habet longitudinem centimetrorum circiter sex, latitudinem vero centimetri. Caput nitens veluti totum corpus fuscescit in lateribus, at in medio sui tam supra, quam infra pallide lutescit. Corpus fit annulis duodecim luteis, primo excepto, qui in parte superiore notatur macula discoidea fusca, et nitente, et novissimo quoque excepto, qui pariter fuscus, et nitens, ornaturque brevibus pilis in dorso. Tres primi annuli habent crura vera; sextus, septimus, octavus, nonus, et duodecimus pro veris cruribus ferunt tentacula brevia, tamen ad gradiendum apta. Unusquisque annulus desuper adpersus maculis

exiguis octo, fuscis, rotundis, quarum sex per seriem transversam recta dispositae, atque utrinque inter duas maculas laterales hujus seriei est stoma coloris minus fusci, quod ante se tantum habet punctum exiguum fuscum. Secundus, tertius, et ultimus annulus stomatibus carent. Reliquae duae maculae habentur in parte superiore corporis pone seriem jam descriptam. Ab hac macularum dispositione excipiuntur maculae annuli secundi, et tertii, quae in una eademque serie transversa degunt. Quisque annulus inferius, et a latere fert duas exiguas maculas, seu puncta superioribus minora, et minus intense fusca. Praeterea eruca haec suapte natura non valde mollis fert per longitudinem dorsi lineam semipellucidam. Quae omnia facile demonstrantur a praeparatione N. 4., a fig. *a* Tabulae XXIX., praesertim vero ab ipsa eruca vivente.

Incessus animalculi per longas vias, quas sibi aperit in caudice, tardus est. Si in parte anteriore tangatur, aut laedatur, retrocedit. Hae viae generatim recta non pergunt; hinc si filam ferream volumus in illas introducere, ut interficiamus animal, raro id obtinere possumus. Diameter canalium sequitur crassitiam erucae, ex quo intelligimus, erucam per has vias omnes libere excurrere, prout crescit, et inter vescendum eas corrodit, atque auget. Qua de re fit, ut etiam extremitas canalium, per quam ingressa est, sit ejusdem amplitudinis, ac moles erucae perfectae, quin imo eadem in hac extremitate in aureliam mutatur, partem anteriorem corporis sui ostium versus convertens, a quo postea exit.

Color totius aureliae dilute castaneus; longitudo circiter trium centimetrorum cum dimidio, latitudo paulo infra centimetrum. Posterior extremitas animalculi obtusa, et attenuata. Quivis annulus corporis ejus superius, et in ora fert margines duos elevatos, transversos, parallelos, inter se aequidistantes, pariter ac inter articulum, et articulum, ita ut totum corpus videatur septum lineis transversis parallelis (fig. *c*. Tab. XXIX.) Margo posterior cujusvis annuli anteriore contractior est, atque in annulis posticis tegit stomata. Hi margines aculeolis tota ora ciliati, quibus animal utitur ad gradiendum, tunc cum intra cavum distorquetur; nam veluti ipomoclio eisdem utitur contra canalium parietes. Hoc pacto au-

relia mense Julio exit a foramine, quod in superficie arboris hiat, idque contingit circiter hora quarta post meridiem, quo tempore papilio evolvi incipit. Ipsemet eum deprehendi hactenus humore madentem, nondumque ad volitandum aptum prope exuvias, a quibus exiit.

Aureliae lepidopterorum, quae progrediuntur, sunt numero paucae, et haec nostra in iis est, sicuti etiam aurelia *Cossi ligniperdae*, quae ulmos, et salices nostras pessumdat, item illa *Sesiae apiformis*, quae apud nos raro evoluitur intra caudices populi magno arboris detrimento, et demum aurelia *Phycis boleti*, quae non solum facilius loco movetur, sed pari celeritate retrocedit, qui motus non minus pendent a marginibus elatis in dorso, quam ab appendice elongata, sita inter abdomen, et pectus, sicuti vidi in hujusmodi aurelia intra *Boletum fomentarium* nidulante in fagetis vetustis Apennini Bononiensis ad Castalionem Populorum situs.

Papilio evoluitur Julio, et Augusto, ut jam dixi. Alis patentibus habet latitudinem octo centimetrorum. Corpus cum antennis longitudinem quatuor centimetrorum aequat. Alae, et scutum coloris albo-sericei sunt. Idem scutum superne notatur maculis sex caeruleis, magnitudinis capitis aciculae communis, atque hae maculae in series duas per longitudinem disponuntur. Alae anticae superne item pinguntur maculis pluribus caeruleis, formae, et magnitudinis diversae, quae ex altera alarum facie perlucunt. Alae posticae vero vix dicerentur maculis similibus notatae, cum hae sint levissimae. Abdomen, et crura colore caeruleo pariter inficiuntur. Articuli annulorum abdominalium scatent villo albo-sericeo, adeo ut abdomen caeruleum zonis albis interstinctum videatur (tab. XXIX. fig. D.)

Papilio iste, qui ex nocturnis est, raro volitat; ut plurimum enim quiescit super truncos, in quibus ova ponit. Tunc venatio ejus facilis. Eruca non solum vivit intra caudicem *Pyri Mali L.*, sed ex observationibus Ochsenheimeri (Schen. von Europ. band. 3. p. 101.) etiam in caudicibus *Juglandis regiae L.*, *Ulmi campestris L.*, *Tiliae europaeae L.*, *Pyri communis L.*, *Sorbi aucupariae L.*, et *Aesculi Hippocastani L.* Apud nos tamen passim degit in *Pyro malo L.*, et in *Py-*

ro communi L., una tantum vice vidi in *Quercu Aesculo L.*; quanti vero detrimenti nobis sit, facile liquet ex iis, quae dixi, et agricolae nostri satis superque noscunt.

Remedium praecipuum hujus aerumnae stat in venatione papilionis ad generationem ejus minuendam, sin extinguendam. Haec autem venatio fieri debet mensibus Julio, et Augusto vesperscente die; quaerendumque animal supra truncos vetustos, qui ab illo affici dignoscuntur, et semper afficiuntur magna manu, nec aliter ab insecto possunt liberari, quia vulnera, et recisiones ligni majus asserunt damnum, quam animalia ipsa. At si caudex tenuior, et junior est, idest sex, vel septem annorum, unam tantum erucam plerumque fovet, quo in casu filo ferreo intra canaliculum immisso animal interfici potest, et cum id mihi non contingeret, amplo vulnere ope cultri in caudice facto, eruca potitus sum, et destruxi, deinde pice liquida vulnus obliniens, idem cicatrizari, et perfecte sanari repetito vidi, licet fere partem dimidiam caudicis aegrotantis abstulerim.

Haec sunt observationes, et experimenta, quae institui de perniciosissimis istis insectis, et quae animadversionibus vestris, Collegae sapientissimi, libenter subjicio, a quibus si forte fiat, ut agricolae utilitatem aliquam accipiant, et agricolationis doctrina incrementum adipiscatur, quam lactissimus ero, atque in hujusmodi entomologiae practicae studium, quippe quod utilissimum, alacritate majori prosequar incuubere.



Metamorphosis Cefse uisculi. F.

C. Bellini ad nat. et in lap. del. et lit. imp.

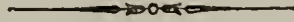


MARCI PAOLINI

SPECIMEN

Quorundam experimentorum de vi Rubiae ad ossa, ovorumque Gallinarum putamina calcaria coloranda..

(Sermo habitus in conventu Academiae XVI Kal. Jan. 1811.)



PARS PRIMA

HISTORICA MENTIO DE PRAECIPUIS PERICULIS SUPRA VIVA ANIMALIA.
RUBIA INSTITUTIS.

Non est fortasse quispiam, in Physiologiae studiis adeo leviter versatus, quem lateat Rubiae radicem (1) ab animalibus deglutitam pollere illa facultate rubro colore tingendi ossa omnia, quibus constat illorum skeleton. Et quamvis illi Medico Galliae Antonio Mizaldo hujusce inventi gloria, de communi Scriptorum sententia, tribuenda sit utpote qui, quemadmodum eruitur ex ejus libro jam ab an. 1572 typis demando (2), curiosam istiusmodi observationem fecit omnium primus; nihilotamen secius, cum ex illa aliquid utilitatis ad scientiae incrementum ipse neglexerit haurire, quod facile potuerit in vivis animalibus experimentum saepe saepius instaurans, singularis ipsius observatio fere duobus ab hinc saeculis oblivione obruta est, et adhuc etiam ibi sepulta jaceret, nisi

(1) *Rubia tinctorum.*

(2) Antonii Mizaldi Monluciani Galli Medici Memorabilium, sive Arcanorum omnis generis, per aphorismos digestorum. Centuriae IX. Coloniae An. D. MDLXXII. Centuria VII. Aph. 91.

eam ad lucem, ut ita dicam, inopinatus eventus revocasset. Perspicuum sane et prope in aperto est factum quod Londinensi Chirurgo Belchier patefecit phenomenon physiologicum a Rubiae actione prolatum; ideoque de illo omitto dicere. Dicam equidem investigationes quotquot magni ponderis, quae tunc poterant institui, praecommentati Britannii ingenio non sane impervias fuisse: quod illico ad pericula venit quae felici perfectoque successu non caruere. Ipse enim perspexit et an. 1736. (1) in publicum detulit: ossa animalium per quoddam tempus Rubia nutritorum rubro colore tincta esse ex eo nempe quod ipsa, vel ipsius materies tinctilis intra ossa eorumque substantiam depositionem facit. Pericula a Belchier habita ob eorum singularitatem et pondus magnam Londini famam, cum ea Regiae Societati detulit, ipsi cito comparrarunt. Idque adeo ut propter illa intimae necessitudinis mutuaeque deferentiae vincula quae Instituti nostri Doctores et illos Britannii Consensus amplissimi inter sese devinciebant, insignis Chirurgus Samuel Sharp operae pretium duxerit, per Epistolam Clariss. nostro Petro Paulo Molinellio oblatam, nobis hac de re notitiam tradere, et aliqua insuper ossa taliter colorata remittere. Exoptabat utique Molinellius et ipse pericula iterare quod sapienter affirmabat « rebus in novis ad-
 « mirationem moventibus omnino convenire investigandi veri
 « scientiam experiri, nec tam aliorum fidei ac testimonio, quam
 « suismet oculis credere (2) ». Sed tot gravissimisque distentis negotiis, et infirma valetudine laborans, quod erat in votis perficere haud potuit: ideoque se contulit ad suum collegam Matthaeum Bazzanum Virum pariter doctissimum, illumque rogavit, ut suas ipse vices gereret, et experimenta perficeret. Hic sibi onus libenter suscepit et, periculis multa cum diligentia iterum iterumque institutis, X. Kal. April. an. 1738. (existimans rem omnibus gratam et una sui ipsius Instituti scopo accomodatam fore), pereleganti oratione, praecipuos even-

(1) Philosoph. Trans. Vol. XXXIX. 1736.

(2) De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto, atque Academia Commentarii. Tom. 2. Pars. 2. pag. 124.

tus huic Academiae, in qua tunc temporis Praesidis officio defungebatur, exhibuit. Perspexit itaque Bazzanius in juvenilibus Gallinaceis a semetipso Rubia enutritis, eorum ossa tantummodo rubefieri, et periostium, cartilagine, ligamenta, tendines, aliasque membranas, visceraque omnia pristinas sine ulla immutatione species retinere; una stomachi interna membrana excepta, quae subtilem rubeam lanuginem (ab intrusae radicis reliquiis fortasse satam) prae oculis offerebat. Neque vero hic constitit praestans ille Medicus Bononiensis, quin etiam voluit, quoad liceret, ad humanam valetudinem curandam peritiles inde tentare applicationes. Verum ejus conjecturae, ejusque consilia philanthropica non diu experientia confirmata sunt. Rubiae sane erat ad aliud prorsus, quam ad aegrotationes medicandas inservire. Erat ejusdem sese nobis praeferre non dicam therapeuticum instrumentum sed agentem ad ossium texturam, eorumque formationem atque augmentum illustrandum, unaque ad existentiam continui in animalium systematibus motus compositionis et decompositionis patefaciendam, uno verbo, ad nutritionis seu reproductionis organicae magnum mirandumque phaenomenon confirmandum potentissimum. Rubia in manibus immortalis Viri Duhamel facta est, fere dicam, ingenium prodigiosum, vi cujus natura tenebrosissimas latebras, quibus sua homini mysteria abscondere delectatur, rarefacere coacta est. Magnus ille Physiologus suo genio ductus tum observatione cum experientia omnino extraordinario, plurimas iteratasque supra varias volatilium, mammiferorumque species instituit investigationes, quibus non modo quantum et Belchier, et Bazzanius declararunt (videlicet ossa tantummodo, utpote quae omnium delicatissima, Rubia rubefieri), verum etiam et hoc ulterius agnovit, quod, quo plus animalia sunt ad ortum propinqua, eo citius et facilius eorum ossa colorantur; et contra quo magis ad senectam accedunt, eo serius et difficilius rubefiunt; et ossa eorumque puucta, quae ad extremum duritiei gradum pervenere, ea rubescunt multo leviter. Agnovit et insuper cartilagine non nisi juxta ipsarum ossificationem rubefieri, et, reddito animalibus alimento ordinario, rubrum in ossibus evanescere, et rursus sese in iisdem patefacere, si rursus et ea Rubia alantur. Sed prae-

ter ossa agnovit et ipse (ut antea Belchier) a dicta radice affectam, et rubefactam esse dentium portionem osseam, et ita pariter caeteras etiam partes quoties in eis ossificatio forte fieret: ut v. g. sunt tendines ossei, qui secundum pedes volatilium longe distenti percurrunt, parvula ossa ipsorum laryngis, annuli asperae arteriae, et squammae osseae eorundem membranae scleroticae et aliae demum ossificationes praeternaturales, nucleique ossei calli in fracturis. Hisce experimentis a Duhamel, non sine magna gloria et admiratione, in illo volumine *Memoriarum Academici Instituti Scientiarum Parisiensis* An. 1739. in aperto positus, sollicitam deinde, quantum in se erat, operam navabat, singulari hacce Rubiae praerogativa fretus, novis quotidie investigationibus instituendis, ut primae ossium formationis, eorumque augmenti modum, nec non magisterium, rationemque mechanicam dilucidaret, quam in calli productione, et fracturarum coagmentatione natura sequitur. Hinc in voluminibus An. 1741. 42. 43. praecommandatarum *Memoriarum laborum, curarumque*, quas incredibili patientia sustinuit, fructum amplissimum evulgabat, et Anatomiam et Ossei systematis Physiologiam tot et tantis inventis locupletabat. Et, quoniam istiusmodi res (de quibus dicere et longum esset, et ad meum propositum non sane accomodatum) fundamenta, ut ita dicam, plerarumque doctrinarum hucusque omnium adprobatione retentorum penitus evertunt; non ideo mirandum est, si ubique terrarum tanta in Physiologis exarsit cupiditas innovandorum experimentorum, ut denique et novae et singulares haustae a Duhamel deductiones aut indubitate confirmarentur, aut omnino delerentur. Boehmer, Ludwig, Delius, Steinmeyer, Dehtleef, Haller (1), Bordenave, et Fongeroux (2) experimentis hujusmodi sese dederunt omnes, et, dum nonnulli ex illis magis magisque supra commendati Duhamel laboribus adhaerentes ipsius consilia rata habuere; non tamen defuerunt, qui consecraria a suis omnino discordantia inde trahentes eisdem obstiterent.

(1) Haller. *Elementa Pysiologiae* Tom. 8. pag. 327.

(2) Fongeroux. *Memoires sur les os etc.* Paris 1760.

At si experientes inter sese disputationibus dissentiebant, non dissentiebant tamen factis. Hoc ad gloriam Physiologi Gallici certum exploratumque semper fuit, quod effecta, quae illi supra animalia Rubiae usu enutrita perspexere, sunt profecto simillima quin imo eadem atque ea, quae ipse perspexit. Itaque comprobatum magis magisque est partes tantummodo osseas (osseas autem hic intelligo aut quae tales natura sunt, aut quae morbo tales fiunt), ut supra exposui, rubesceri; hac una insuper praefati Fougereux (1) singulari observatione adnexa, quod nempe praeter ossa concretiones etiam terreas podagrosarum gallicinarum et facile, et celeriter colorantur. Dein Gibson (2), Hunter, Morand, Blake, et denique hoc ipso anno Flourens (3) post plurima experimenta, quod Belhier, Bazzanini, et Duhamel primi declaraverunt, id multo magis confirmarunt; ita ut idem Flourens asseveret « Nous pouvons donc conclure « aujourd'hui, et avec plus de certitude encore que Duhamel, « que dans les animaux nourris avec la garance les os seuls « se colorent, mais que tout ce qui est os, quelque fin, quelque délie, quelque délicat qu'il soit, se colore (4) »

Verumtamen Rubiae affinitas cum durioribus animalium corporis partibus, quales sunt ossa, non ita exclusiva est, ut nullum sui ipsius vestigium relinquat in aliis ejusdem corporis partibus, quae cum illis comparatae minima pollent cohaesione, uti v. g. sunt humores. Etenim nonnulli contendunt inter quos Lister (5), quamvis hoc oppugnet Haller, (6) chylum in animalibus allata planta enutritis rubefactum vidisse; et Barbier (7) et Mussey (8) id ipsam de sanguinis sero affirmant. Quoad vero humores alios, non desunt observationes Duha-

(1) Op. cit. pag. 95.

(2) Burdach. Traité de Physiologie. Tom. 8. pag. 341.

(3) Annales des Sciences Naturelles. Février. 1840. Nouvelles recherches concernant l'action de la garance sur les os.

(4) Loc. cit.

(5) Richerand. Nouveaux Elemens de Physiologie. Bruxelles 1833. pag. 94.

(6) Loc. cit.

(7) Dizionario de' Medicamenti. Modena 1832. Tom. 4. art. Rubia.

(8) Omodei. Anuali universali di Medicina Vol. 54. pag. 200.

mel, Parmentier, Deyeux, et Joung (1) quae contra Dehtleef sententiam (2) vaccarum tali pacto nutritarum lac hoc ipso rubore, qui butyrum etiam afficit, probant colorari. Faeces etiam plus minusve hac eadem tinctura affectas sese exhibent. Et Galenus (3) omnium primus, dein Phaloppius (4), Stuard (5), et Stehberger (6) urinam rubefactam vidisse commemorant. Quin imo novissimus ex citatis auctoribus addit se etiam in hominum urina Rubiae vestigium viginti minutis, ex quo in stomachum introducta fuerit, perspexisse.

Haec est paucis verbis Historia praecipuorum periculorum quae in animalibus Rubia instituta sunt. Ex qua quisque per sese quae quotque sint corporum partes tum solidae cum fluidae adhuc usque illius substantiae vi rubefactae nullo negotio valet comprehendere. Qua super re cum memetipsum contulissen, hac opinione quod in objecto hujuscemodi ulterius etiam indagines possent impelli, statui experiri: an Rubia exerceret vim aliquam super gallinarum ovorum putamine, quod nique et juxta chymicam suorum componentium indolem et juxta ideas anatomico-philosophicas eximii Viri Carus, potest haberi pro ovi sceleto externo aut dermato-sceleto. Et quamvis me non parum deterreret quod forsitan experimentum hocce a celebri Duhamel non ideo susceptum fuit quia forte ad scientiam nullius ponderis existimatum: ipse enim de hoc uno conqueritur, quod non sibi datum est experiri, an rubeus color agere posset super ossa animalium in utero matris degentium (quae res, licet in posterum a Dehtleef (7) negata, nuper tamen a Mussey Professore Anatomiae in Collegio Dermouth (8) comprobata sane fuit); nihilo tamen secius rem

(1) Fougereux. Op. cit. pag. 29. et Burdach. Op. cit. Tom. 8. pag. 341.

(2) Fougereux. Op. cit. pag. 124.

(3) Dizionario compendiatore delle Scienze Mediche Art. Robbia.

(4) Commentarii de Bonon. Scient. Tom. cit.

(5) Merat et De Lens Dictionnaire universel de Matière Medicale Paris 1834. art. Rubia.

(6) Burdach. loc. cit.

(7) Fougereux. Op. cit. pag. 29. et 154.

(8) Omodei. Annal. univ. loc. cit.

aggredi, volui, existimans ob tot quae mihi occurrebant, opus non omnino inutile facturum. Huc accessit quod, utcumque res caderent, in hisce periculis instituendis peropportune mihi datum erat Rubiae potentiae effecta super ossa aliosque animalium textus propriis oculis intueri. Quapropter rem aggressus plurima tentavi pericula ex quibus, cum alia faustissimum eventum sortita sint, vestra singulari humanitate fretus, Academici praestantissimi, qua alias mea omnia accepistis, ea breviter et simpliciter Vobis audeo proferre.

PARS ALTERA

PERICULA AB AUCTORE INSTITUTA

Ante quam huc pericula proferam, haec duo mihi restant declaranda. 1.^o quidem quod egomet Rubiae nostrae eam antetuli quae ab aromatum negotio (*Lagorio*) in commercium venit sub nomine Rubiae Uratislaviae utpote quae multo magis colorata; 2.^o quod haec eadem, bene siccata et arefacta nec non in minutissimum pulverem conversa, a me quotidie miscebatur in primis uno cum furfure, dein (ut gallinae fierent minus morosae ad edendum illum cibum initio ipsis adeo stomachantem) huic parem quantitatem farinae frumentariae adjungebam; denique, ut magis magisque illarum famem allicerem, illi substitui farinam Mais. Hisce autem per sufficientem quantitatem aquae fiebat pulvicula quaedam in qua pro quarta fere parte locum habebat Rubia. In hujusce vero periculis III. Kal. Junias an. proxime elapsi a me inchoatis, conficiendis, decem descriptae radiceis libras consumpsi. Duas III. Kal. Junias Rubia depavi gallinas sane adultas, quarum altera (quam dicam A) ovum pridie protulerat, altera (quam dicam B) ovum pariter ediderat tribus ante diebus. Ambas una simul claudere satius duxi hoc ipso quod plerumque observatum est haec animalia sociata facilius quam incommitata ovum deponere. Pridie Non. Junias, non sine mei solatio, partum est ovum quod totum prae oculis offerebat putamen calcarium roseo colore tantisper diluto uniformiter picturatum. Postridie Nonas alterum compertum est primo minus

coloratum. VII. vero. V, et II Idus ejusd. mensis nova ova inventa sunt roseo colore, sed paulo plus intenso: quod ovum diei II. Idus procul dubio cum rosae colore poterat conferri. Ovum de quo sermo, erat gallinae B, cum forte eam deprehendissem in eo quod illud pareret. IV. Kal. Julias alterum prolatum est, alterum ipsis Kal. Julii, et alterum V. Non. ejusd. mensis, omnia colore rubeo pallidissimo; qui quidem color ab ovo primo ad tertium latius patebat. IV. cit. Nonas ultimum ovum apparuit vix coloratum, quamvis et hoc, sicuti et illud V. Nonas, aequè peperisset antedicta gallina B. Dixi ultimum ovum, quod nulla alia prodire usque ad VII. Kal. Octobris, quo die gallinae ambae occisae sunt. Hae autem (sicuti contigit in caeteris de quibus deinceps), gustato in primis cibo, videbantur non posse induci ad illum edendum, et « aspernari, ut Bazzanii verbis « utar, ingratum ipsis saporem Rubiae, rostroque fastidiosius « excutere ». At denique famis stimulo coactae cesserunt, et sensim sese ita illi assueverunt, ut nullum inde detrimentum pati ostenderent. Est etiam notatu digna faecum illa qualitas a gallinis evacuatarum illo praecipue tempore, quo taliter alebantur: illae enim erant admodum durae colore ex cinereo-nigricanti intus, extra autem crusta quadam colore rubeo-carminio. Occisis itaque ambabus caesione vasorum sanguiferorum colli, et collecto sanguine, non leviter miratus sum, quod, nihil obstante hujusmodi cibo tantopere illis inamabili earum corpus, quantum satis est, erat enutritum. Nihil erat peculiare in pennis, nihil in rostro, nihil in unguibus, nihil in pelle. Separatis cadaveribus, membranam mucosam oesophagi aliquot lineis tum supra, cum subter ingluviem perspexi rubefactam; quae quidem ingluvies glutiti cibi plena in superficie interna erat adeo rubra, ut in externa etiam, quamvis paulo minus, colorata appareret. Decrescebat sensim, et fere evanescebat color in bulbo, aut stomacho succenturiato, dum contra sese exhibebat purpureo colore picturatum vel maxime superficies interna ventriculi, qui pariter illius cibi reliquias continebat. Hic vero rubor ingluviei et ventriculi (quem et Bazzanius, et Duhamel suis experimentis pariter conspexere) etsi debilitaretur iteratis in aqua ablu-

tionibus, perstitit tamen satis patefactus, sicuti tantisper adhuc etiam perstat (V. Praep. N. 2616, et 2620). Intestina tenuia, caeca, et reliquum crassorum tam intus quam extra naturali in statu extabant. In gallina B et praecipue in tubo intestinali, haec praeter, inveni aliquot ascases et taeniam naturali colore: peritonaem vero quod tenuia intestina involvit, mesenterium, et speciatim appendicem peritonaci quae ovario adhaeret, hic illic variis nigricantibus maculis aspersam inveni: quae quidem maculae, iterum etiam iterumque aqua ablutae, minime debebantur (V. Praep. N. 2622. et 2617). Reliquum viscerorum, membranae, vasa majora, et nervi magis conspicui naturali statu gaudebant. Bilis visa est magis exsoluta et minus solito colorata. Supererant in ovario, praeter indicatas nigricantes maculas, aliqua ova indurata, eorumque in forma vitiosa: oviductus coloris nec vestigium nec signum offerebat; una cloaca rosae colorem levissimum exhibebat (V. Praep. N. 2621). Sed antequam de sceletto verba faciam, notandum est: adipem hic illic fere immediate superimpositum ossibus pelvis, et alibi stratum musculare in ipso ossium tactu, paulum praeter naturam, colorata visa esse. In ossibus vero, in aliisque partibus, quae crebro osseae fiunt, quantum adhucusque a Belchier et a Flourens diligenter inspectum est, potui confirmare. Periostium, cartilagine, ligamenta naturali colore praedita erant. Trunci autem et columnae vertebralis ossa (Vide Praep. N. 2615, aut gallinam B, et N. 2619, aut A) aequae omnia rubebant pulcherrimo colore carminio qui et cranii afficiebat ossa exceptis punctis centralibus in quibus, cum campages compactior sit propter jam perfectam ossificationem, naturales species sese oculis objiciebant: rubrae erant maxillae, cornea rostri parte sublata, rubra et ossa quae constant membra thoracis sed in humero rubeus color, qui in utraque epiphysi seu in ambobus extremis vivissimus apparebat, decrescebat pedetentim ad partem mediam sive centralem quae est omnium durissima; atque adeo decrescebat ut haec eadem pars fere omnino non colorata reperiretur. Idem observatum est in femore, inque cruris ossibus dum contra illa carpi et metacarpi, tarsi, et digitorum rubebant pulcherrimo illo colore quo gaudebant pariter

ossei tendines qui ad tarsum eundem, qui improprie dicitur os cruris, distenti decurrunt (V. Praep. N. 2618). Rubrum quoque inspectum est os hyoideum, demptis continuo punctis in quibus ossificatio locum habere caepit; rubro item colore in larynge apparuit lamina ossea anterior quae mammiferorum hyoideae cartilagini respondet; itemque puncta jam facta ossea in annulis asperae arteriae, et praecipue tria aut quatuor priora et ultima quindecim aut viginti prope suam bifurcationem in bronchia (Vid. Praep. N. 2653.). Quapropter mihi cum Flourens arridet repetere « In quovis ossorum quidquid est cartilago naturalem colorem prae se fert; in quavis cartilagine quidquid factum est osseum rubro colore pertingitur ». Duo sceleti A et B (qui, uti cernere est in adjecta Tabula, (vide Tab. XXIX fig. 4) pulcherrimum colorem carminium prae se ferebant) non possunt impraesentiarum nisi remotam exhibere ideam suae colorationis, quod artificia anatomica, quibus propter eorum praeparationem subjecti, et aer et lux, quibus non brevi tempore expositi fuere, colorem in ipsis fere omnem delerunt: quod, praeter Bazzanum, aliis contigit observare. Tandem quoad gallinas, de quibus sermo, non mihi est praetereundum 1.° quod, collecto intra duo vasa aequali forma sanguine a colli caesione manante, ille sese divisit in serum et crassamentum ea proportione ut 1. stat ad 3. et serum paleae colore flavebat et naturali pollebat densitate; 2.° quod serum hujusmodi, intromissa etiam phosphatis calcis quantitate quadam, et, elapso horarum spatio non exiguo, atque solis ejusque radiorum actione, ut exsiccaretur, interposita, haud ullam coloris mutationem indicavit. Quid plura? Percolare volui alteram ejusdem seri portionem ut palam fieret an materiei Rubiae colorantis ullam sibi adnexam prae se ferret partem: at hujusce vestigium nec unum vel minimum perstitit in colo, quod licet colore rubeo-flavescente fieret, illum tamen colorem non Rubiaetribuendum putavi: siquidem hoc idem evenit a sero sanguinis alterius gallinae quae nunquam tali radice nutrita fuit.

Pridie nonas Sextilis solita Rubiae alimonia depavi gallinam media aetate quae ovum peperat hesternae die. Mane novo ipsa protulit ovum quod, bene inspectum, vix colore obum-

bratum videbatur. Interea alia ova expectavi ab hac gallina quam nominabo C, ita ut, elapso quinquaginta quinque dierum spatio, ex quo Rubia alebatur, eam communi pasto enutriverim: mihi ipsi pollicens eam, detracto cibo adeo ipsi fastidioso, forte nova ova parituram; et, hac spe sublata, certo facile mihi futurum successivas mutationes in ejus sceleto factas plane agnoscere. Cum dies viginti et tres elapsi essent, nullo invento ovo, gallina C uccisa est, et, habita sui cadaveris diligenti sectione, en notatu digniora. Mucosa oesophagi, ingluvies, ventriculus naturali colore erant omnes aequae ac viscera omnia, membranae, ligamenta, cartilagineae; peritoneum tantum, ejusque productiones hic illic aliquantulas maculas nigricantes patefaciebant. Ossa, superficialiter observata, uniformiter rubro colore pertincta apparebant non secus ac ossei tendines crurum, osseae partes laryngis nec non annulorum asperae arteriae. Sed, accuratiore inspectione facta, secernebantur in ossibus planis, ut v. g. in sterno et in illis pelvis, hic illic quaedam vana aut insulae radiatae quae rubro colore carebant. In ossibus vero longis, ut v. g. in humeris, in tibiis, hoc peculiare erat videre quod color fere totus limitabatur ad extrema articularia. Praep. N. 2626 et 2649 produnt exemplum; atque in hisce rubor est satis palam, cum ossa neque macerati fuerint subjecta neque Mercurii Deuto-chlorureti solutione abluta.

Aliam XIII. Kal. Septembris adultam gallinam D, de cujus fecunditate certior factus eram, clausi, solitaque cum Rubia alimonia nutrivimus. Eadem die ovum peperit et, ut erat expectandum, naturali specie praeditum. Biduo post alterum prodidit cujus putamen calcarium erat aliquantulum colore roseo obumbratum. IX. Kal. ejusdem mensis, vespere facto, exiit alterum undequaque pulcherrime rubescens (vid. Tab. XXIX. fig. 2). Quinque post diebus, quartum edidit ita leviter pertinctum ut vix color posset distingui nisi forte cum ovo communi comparatum; et fuit novissimum quod gallina D peperit. Elapsis triginta et octo diebus, ex quo gallina Rubiae usu enutrita fuit, ordinarium ei alimentum suppeditavi et ita per octodetriginta dies; quibus confectis, iterum Rubiae radicis eam, ut ante, alimonia pavi; et, cum illa per alios iterum octodetriginta dies vitam

sic ageret, ipsi mortem attuli amputatione vasorum sanguiferorum colli exanguem faciens. Serum etiam, quod ab hujusmodi sanguine manavit, chymicis experimentis ab insigni Doctore Paulo Muratori habitis, nullum materiae colorantis indicium oculis ostendebat. Quare mihi videtur non magnam fidem mereri observationes Mussey et Barbier per quas contendunt sanguinis serum, propter aliquantulas moleculas colorantes quibus constat, prope rubrum apparere. Nec videor posse assentiri illi affinitati chymicae quam Gibson sanguinis sero dedit propter Rubiae materiem colorantem: qua praeponderante affinitate innixus novam ipse hypothesim fundare intendit eo consilio ut seriem et modum, quo fit ossium color eorumque reditus ad pristinum naturalem statum, explicaret (1). Sed eodem rediens, unde per aliquot profectus eram, dicam quod, cum mihi prae omnibus staret in gallina D investigare quis color esset in chylo per vasa lactea currenti, qua in re, ut antea dictum est, non consentiunt Scriptores qui vini Rubiae in animalibus experti sunt, per aliquot horas, antequam eam immolarem, jejunam tenui: inde, solito praedictae radice alimento subministrato, duabus post horis mortua est. Separato cadavere pulchrum erat cernere, quolibet vel minimo tactu intestinorum, haec agitari a motibus vermicularibus, et vasa lactea per mesenterium serpentina plena esse chylo qui, per translucentas hujusmodi vasorum membranas, colore rubeo-flavente sese oculis offerebat. Nec ullum dubium suboriri poterat circa realem naturam chyliferorum vasorum: haec enim facile, per eorundem plenitudinem, secernebantur a vasis sanguiferis quae fere vacua extabant et vix percipi poterant. Qua super re certior factus fui cum, rursus intestinis aliquo post tempore observatis et omni in eis vitae indicio sublato, plura ex supradictis lacteis vasis vacua omnino reperia sunt et alia perpauca leviter tantummodo colorata. Ingluvies et ventriculus illo eodem rubebant colore ut in caeteris gallinis factum esse dictum est; colon ex quadam sui parte contra lucem inspectum (quod unum in caeteris individuis ana-

(1) Gazette Médicale. Paris. 1840. N. 13.

tomice introspectis non mihi contigit observare) membranas suas colore rubro-carneo offerebat. Hinc sane non magnam fidem promereri videntur observationes habitae ab uno Crozier (1) qui intestina, eodem quo ossa colore, rubefacta vidisse declarat. Reliquum viscerorum erat sano statu. Mesenterium tantum, ad concavam praecipue partem intestinorum nec non ad ovarium, hic illic consuetis nigricantibus maculis aspergebatur (V. Praep. N. 2652); et membrana externa ipsorum intestinorum, aut peritonealis, parvula quaedam exhibebat tubercula instar grani milii sebacea materie plena. Erant quidem duo tubercula longe majora in peritoneo quod abdominalium musculorum faciem internam vestit, et mesenterium sibi adhaerentem ferebat latissimum tumorem cysticum a duabus irregulari forma bulgis efformatum, cujus parietes constabant textu quodam cellulari denso quidem et robusto; hae autem bulgae humorem luteolum adinstar mellis includebant. Hujusce vero gallinae sceleton solito rubore nitebat, sed haec oculis exhibebat praecipua: rubor erat sane languidior quam in gallinis A et B; plana ossa patefaciebant hic illic spatia aut insulas radiatas specie sane naturali sed numero minores quam individuum C: ossa longa, ad eorum partem centralem, ruboris vix leve vestigium prae se ferebant. Sed prae omnibus in eo curiosus eram ut statum agnoscerem internae texturae longorum ossorum: siquidem hac in gallina, quae primo Rubia, dein ordinario cibo, novissime demum Rubia enutrita fuit, debuisset, juxta pericula a Duhamel instituta et nuper a Flourens confirmata, oculis occurrere stratum osseum internum quidem rubefactum, medium colore naturali, externum tantopere tinctum. Et quamvis, ob parvam animalium molem quae meorum periculorum erat subjectum, expectandum forte esset quod antedicta strata ossea haud facile inter se possent distinguere (ad hoc enim necesse est, quemadmodum suggerunt laudati Physiologi, ut adhibeantur quadrupedes; veluti Sues, Canes, Felles etc.); nihilo tamen secius in ossibus cubiti et speciatim in illo cruris sive in tarso, qui ex transverso sectus fuit

(1) Merat et De Lens. loc. cit.

prope superiorem extremitatem, non difficile fuit cernere medullae substantiam, quae naturales notas servabat, lato circulo rubeo circumiri et super hoc sistere stratum album quod in externa superficie nascentis colorationis manifesta indicia praestabat. Postremo denique inveni os hyoideum, et laryngem, et repetitos annulos tracheae-arteriae, et cruris tendines osseos, more solito, rubefacta: verum nec hac in gallina nec in caeteris ullum ad oculos ruborem mihi contigit intueri. Cujus rei causam invenire facile fuit: in hac enim volatilium specie, inter duas laminas anterioris partis corneae, non sane extat ille circulus ossiculorum qui vere peculiaris est et proprius aliarum generationum, sed tantummodo inest circulus simplicium (ut ita dicam) squammarum fibrosarum et nihil amplius. Gallinae D sceleton (V. Praep. N. 2651), qui vini spiritu intra vas adhuc usque servatur, nil fere suae colorationis amisit.

XIV. kal. Nov. Rubiam more solito praestiti adultae gallinae E, nec non pullastrae septem circiter mensibus, quam dicam F, in quibus ambabus ovum jamjam completum per oviductum tactu dignoscebam. Prima postero die totum vix editum comedit, nec ex illo in posterum ovum amplius edidit quamvis duodeviginti diebus post ei ordinarium cibum suppeditarem. Altera pariter, ex qua, ob teneram ejus aetatem, Rubiae effecta et promptiora et clariora obtenturum sperabam, postero et ipsa die ovum peperit, sed mihi vix ullam ipsius putaminis partem forte licuit servare, cum illam in eo deprehendissem ut, fame forsitan stimulata, avidè illud vorabat. XI. Kal. ut supra, alterum ex illa prodiit ovum quod in putamine naturalem albedinem prae se ferebat, et deinceps nulla alia habui, licet IV. Idus Nov. (idest viginti tribus post diebus) ei pro Rubia nutrimentum satis bonum suffecissem.

Ipsis Kal. Decembris periculo subjecta fuit adulta gallina G, de cujus foecunditate jam certior factus eram. Sed et ista, deposito illa ipsa die ovo naturali colore, nullum aliud in posterum dedit. Quare cum hoc experientia cognovissem quod, cogens gallinas unum Rubiae alimentum quotidie sumere, ovorum partus (ita enim forte apparatus genitalis functiones

turbantur) suspendebatur, pridie nonas ejusdem mensis, cuidam pullastrae H valde cicuratae, et quae ovum hesternae die peperat, reliqui ad libitum purgamenta grani et insimul quinque drachmas Rubiae polenta involutae triduo mihi contigit suppetere. Tunc ovum illa protulit quod in ejus putamine erat colore roseo valde pallidulo, imo colore fere luteolo. Et, hac eadem ratione Rubia deinceps administrata, alterum exiit ovum III. Idus eodem fere colore ac *nankin* diluto. Cogitanti mihi super rationem hujusce colorationis, ab illa diversae quae in tot ovis aliis inspecta est, occurrit cito dubium quin ad tale phaenomenon gignendum posset concurrere ipsa polenta Mais, quam pullastra una cum Rubia admixtum sumpserat. Et subito veritatem intueri potui: relicta enim illo ipso die polenta, et data per tres non interruptos dies Rubia una cum micis panis, ipsis idibus ovum illa peperit vix quidem pertinctum sed uno colore roseo.

Itaque, cum mihi satis superque investigationes hujuscemodi viderentur, antequam periculis finem imponerem hoc statui explorare: an scilicet reapse chylus (ut in gallina D visus eram cernere) Rubiae usu rubeo colore tingeretur. Pullastra F (quae, ut dixi, comederat in primis praedicatam radicem per viginti duos dies, et inde per integrum mensem cibum ordinariuum) sine alimento per viginti duas horas retenta est. In posterum ei Rubia farinae tritici admixta allata fuit, et, elapsis duabus cum dimidio horis, ex quo avidè hunc cibum comedebat, per caesionem vasorum sanguiferorum colli, illam jussi de more occidi. Separato cadavere et scrutatis diligenter intestinis, quae irritabilem viam admodum energeticam servabant, investigationem jam antea habitam in individuo D potui reapse confirmare: siquidem, praeterquamquod intra primum tenuis intestini tractum inveni quendam humorem luteolum, vidi insuper vasa chyliifera mesenterii plena chylo colore rubro-luteolo, quo, intra horam et dimidio, vasa illa caruere. Quae res sane adhaeret observationibus Magendie, cujus iudicio, chyli absorptio et motus in vasa lactea, etiam aliquantulum post mortem, continuant(1). Caeterum in

(1) Précis Elementaire de Physiologie. Bruxelles 1834. pag. 217.

hujusce etiam pullastrae corpore inveni granulationes materiae sebaceae in peritoneo, et in cavitate abdominali tumorem cysticum praeseferentem humorem albidum instar albuminis. Ossa tam plana quam longa sui sceleti easdem fere coloris gradationes eademque praecipue illa quae de individuo C exposui, patefaciebant.

PARS TERTIA.

CONSIDERATIONES PHYSIOLOGICAE

Pericula hactenus a me descripta ad quadrifidum praecipue scopum mihi videntur notata dignissima. Opus enim est diligentius considerare 1.^o quam, super animalium functionibus et valetudine, Rubia exercent actionem, 2.^o colorem roseum qui in ovorum putamine sese patefacit. 3.^o texturam osseam aliasque partes organicas quae colorem sane rubrum ostenderunt, 4.^o denique quo modo contingat collatio materiae colorantis Rubiae cum principiis eorundem animalium textus componentibus.

Quoad primum, si animadvertimus quod memoriae prodidit Duhamel, aperte constat, ab alimento Rubiae immixto pullorum stomachum defatigari, ideoque ipsos valde macrescere atque etiam, si cogantur diutius ea uti, certe emori. Contra, si Bazzanii experimentis attentionem non denegamus, animalium valetudo ex illo cibo detrimentum nec ullum patitur, quin immo ita bene, cibo illo enutriente, ea vivere ut ipse, qui tunc temporis a secretis erat nostri Instituti, debuerit exclamare « nobis autem gaudendum qui vel Rubiam « minus noxiam vel pullos habemus valentiores (1) ». Mihi tamen videtur quod, ubi res agatur cum gallinis adultis (adultis dixi: nam quatuor pulli, qui octo vel decem ab ortu vitae dies compleverant, a Rubia enutriti, triginta ad summum horarum spatio, omnes interiire et eorum ossa nullum

(1) Commentarii de Bonon. Scient. et. Art. Instituto etc. Tom. 2. Par. 1. Pag. 133.

colorationis indicium dedere) ubi ergo, inquam, res agatur cum gallinis adultis, veritas ponenda sit in sententia media. Enim vero quamvis illae ipsae, eo lapsu temporis quo meis experimentis subjectae fuerint, infirmae valetudinis non sane aperta signa dedissent et mediocris enutritionis statum servassent, confitendum tamen est omnes, post mortem, plus minusve notas exhibuisse anatomico-pathologicas, praesertim in peritonaeo, quae crisis sanguinis peculiarem alterationem indicabant. Et revera tubercula, quibus duobus in casibus laborabat antedicta membrana, et nigrum pigmentum, quod generatim, sub specie *striae*, parvarumque macularum, hic illic eam membranam intime afficiebat, quodque magna ratione poterat haberi pro illo morboso productu cui hodie imponunt nomen melanosis liquidae, alterationis sanguinis effecta nemo est qui non agnoscat: siquidem constat ex analysi chymica Melanosim praecipue formari de materia colorante in qua eminenter praevaleat carbonium; quae materies ordinario habetur pro ipso vituato sanguinis cruore. Qua super sanguinis alteratione, quae forte in meis gallinis facta est, non multopere mirandum est, si 1.º animus convertatur ad continuas excruciantes sensationes physico-morales nec non ad alia discrimina quae ipsae eadem passae sunt in functionibus digerentibus, cum (ne inedia perirent) cibum naturae suae non accommodatum, ne dicam contrarium, comedere cogerentur; si 2.º consideretur Rubiam, per sui ipsius naturam non *assimilabilem* a viribus organismi (nam, experientia teste, licet ipsa organismi partes reconditiores penetret, perstat tamen fere omnino immutata), in sanguinis massam introductam, non posse non agere super illo sicuti materiale extraneum et non sane affine. Atque ita perturbans normales affinitates organico-chymicas principiorum illum humorem constituentium, et praecipue cruoris, forte generat illam materiem adeo late carbonio redundantem, in quo uno melanosis videtur consistere. Nec valet opponere quod, hac ipsa degeneratione admissa tanquam consecario vitatae plasticitatis sanguinis a Rubiae usu causatae, non facile reddi posset ratio adparentis bonae valetudinis, illorumque animalium mediocris nutritionis. Propterea quod, iudicio ipsius An-

dral, morbosus ille productus aut melanosis non sane ulla (nisi, ut mihi forte contigit observare, subsequatur inflammatio vel existentia simultanea aliarum accidentalium productionum alicujus ponderis) prae se fert signa pathognomica quae peculiaria sint; ita ut suboriri possit et crescere quin unquam ab aliqua perturbatione aliquove phoenomeno morbozo tam locali quam generali ejus existentia patefiat, et diu etiam individui salus in statu adparentis integritatis perstare valeat (1). Quibus ex rebus eruitur 1.° Melanosim, (quae initio in homine inque equo studium sibi attraxit, dein ad lucusque, ut a Breschet, in cane, in felle, in cuniculo, in mure observata est) gallinaceos etiam, quibusdam in casibus, afficere et praecipue cum, ut saepe fit in morbis vitiatae plasticitatis, praecesserit alimentum aut nimiae parcitatis aut perniciosae qualitatis. 2.° Rubiam, quamvis haec in pullis actionem veneficam immediate non exercent, posse, si ipsius usus protrahatur, materiales, ut nemo denegabit, corruptiones causare, profectas vel maxime a solidorum et humorum vitiata reproductione; atque hoc idem non modo a meis observationibus factum est planum, verum etiam et ab illis Clariss. Viri Lynnaei qui animalia Rubia enutrita in variis corporis partibus tumores et scirrhus patefacere memoriae prodidit (2).

Venio nunc ad investigationem quae mcorum experimentorum caput praecipuum est, videlicet ad illum colorem roseum quo rubet ovorum putamen calcarium. Atque illud in primis videtur notatu dignissimum quod licet roseus ille color speciosior appareret in ovo quod, duodecim diebus post Rubiae usum, gallina D peperit; tinctura tamen satis viva duobus in casibus visa est vix quattuor diebus post, et, quod magis admirandum, binis tantummodo diebus elapsis, aliquod colorationis vestigium perspectum est. Quod vero in genere ova, primo ipso die periculi nata, nullo colore tincta apparuerint, id non sine fundamento dici potest evenisse ex

(1) Andral. Précis d' Anatomie Pathologique. Bruxelles. 1837. Tom. 1. Pag. 257. et seq.

(2) Merat et De Lens loc. cit.

eo quod antea putaminis calcarii formatio vel perfecta vel fere perfecta fuit; et causa parvi vel nullius coloris illorum ovorum, quae secundo, quae tertio die deposita fuere, deglutiti cibi parcissimae portioni (cum illum in primis fastidirent gallinae) multo probabiliter tribui potest. Non tamen aequae facile mihi profecto videtur invenire causam discriminis inter colorem et colorem illorum ovorum quae deinde parta sunt, quamvis Rubia quotidie admiscebatur cibo portione fere aequali, et quamvis inter unius et alterius partum aliquod dierum spatium intercederet. Nihilominus, animadvertens varias causas accidentales, quae probabiliter ad haec discrimina gignenda praesto fuisse possunt, non inopportuno duco exponere 1.° quod, cum aliquoties aestivo tempore pulicula exsiccaretur et gallinae illae scalpturirent continuo, forte potuerint furfuram a Rubia discernere; 2.° quod labente triduo, quo gallinae A et B data fuit radix farinae Mais solummodo immixta, exierunt duo ova (VIII. scilicet et VII. idus Junii) aliis minus colorata; dum contra in pullastra H, quae eam radicem sumpserat cum polenta ejusdem farinae, ovi putamen colorem exhibuit roseo-uteolum et fere flavum per nescio quas praecipuas modificationes super Rubiam inductas a materie colorante praedicatae farinae Mais seu a *Zeina* quae per passam ebullitionem majorem vim nacta est. Praeter haec non sunt silentio praeterenda nec copia plus minusve magna faecum et urinarum separatarum illo ipso die quo ovum prolatum est, nec tempus quo intra oviductum putamen formatum est. Nam stratum externum rubeolum quod faeces circumibat, dum clare aperteque demonstrat partem glutitae Rubiae illis ipsis inhaerere et, quod multo probabilius, salibus calcariis quos ordinario continent, multopere rationabilem facit hypothesim qua credimus ad praedictum stratum rubeolum gignendum, habuisse partem et urinam quae in cloaca faecibus sese miscet, quaeque una cum his corpore egreditur. Tempus etiam, quo generatur putamen calcarium, suam, ni fallor, in hujusmodi colorationis discrimine partem habere debet. Enim vero licet ab Anatomia comparativa accepimus ovum, propter salium calcariae indolis ad formandum putamen necessariorum excretionem, per aliquantulum temporis

morari et diutius forte in inferiore ac dilatata oviductus parte quae uteri nomine appellatur; hoc tamen procul dubio est, quod haec eadem operatio horarum spatium sane exiguum non excedet: siquidem, si ulterius progredere, haud facile intelligeretur quo modo, cum antedicta pars oviductus nonnisi unum eodem actu ovum continere valeat, gallina possit unum per singulos dies ovum parere. Itaque natura sua continget ut eo major fuerit putaminis coloratio quo major erit quantitas Rubiae quae reperitur in sanguine animalis eo tempore quo ipsius putaminis secretio fit; quae quidem quantitas sine dubio major erit horis post partum immediate labentibus, quam antea, et major etiam prout minor est copia faecum et urinarum eodem tempore evacuatorum. Ita mihi videtur (ni mea me fallit sententia) aliqua ratione explicare posse varii variae colorationis gradus quos forte in ovis nobis contigit observare.

Sed color putaminis, sive sceleti externi ipsius ovi, hisce ne solis circumscribitur limitibus, alias organicas partes nihil afficiens ut fit in sceleto post ortum animalium quae, si ossa rubra exhibent, caeteroquin ordinariam speciem prae se ferunt? Ita equidem se habent res. Nam, ovis aliquot coloratis adaptis et multo diligenter scrutatis, patet roseum colorem afficere quidem totam putaminis spissitudinem aequae ad internam superficiem sese dilatantem; sed tamen ultra putamen calcarium non progredi, cum tam membrana testacea, quae illi contermina est, quam albumen et vitellus notas cuique peculiare prae se ferant. Hic vero posset quidam a me postulare: an scilicet, si ova a Rubia colorata incubationi supponerentur, ossa parvorum pullorum, qui inde nascerentur, darentne osseis in punctis ruboris indicia aliqua? Et, quamvis non mihi praesto sint pericula ad hujusce objectionis responsionem satis idonea, analogia et ratio rerum eo me adducunt ut teneam non sane futurum fuisse ut illa ossa colorarentur; cum ad hoc necessario requiratur ut phosphas calcis non minimo gradu extet in animalium partibus, et chymice cum aliis substantiis non sit conlatum ut equidem in albumine inque vitello reperitur. Quod sane ex iis, quae deinceps explicabo, luculentius patefiet. Itaque hoc etiam in casu

palam est Rubiam solummodo cum salibus terreis relationem habere chymicam et nihil tenere affinitatis, nisi cum materiis inorganicis sceleti et ovorum et animalium quae in lucem venerunt. Sed, qua ratione putamen calcarium aut dermatoskeleton ovorum gallinarum colorem, ad summum, roseum, Rubiae usu acquisiverat, dum contra ossa illarum neuro-skeleton componentia coccineo colore perbelle rubebant? Salium calcariorum proportionibus diversae, ad utriusque sceleti chymicam compositionem concurrentes, hoc mihi in animum induxerunt ut in huiusmodi conditione tam variatae colorationis causam opus esset investigare. Re autem vera accurata et multiplex analysis chymica super gallinae ovorum putamen instituta a Vanquelin, Prout, et Merat-Guillet, ipsum maxima ex parte compositum esse carbonate calcis aperte demonstrat (1). Iuxta novissimum ex praedictis auctoribus in ejus compositione locum habent 0,72 carbonatis calcis, 0,02 phosphatis, 0,03 substantiae organicae, et 0,23 aquae (2). Contra, de communi illustrium Chymicorum sententia, ex quibus satis est Vanquelin et Berzelium recensere, inter sales ad basem calcis, qui in ossium compositione locum habent, phosphas ante alios eminenter praevalet. Iuxta Berzelium super 10 millibus partium, sunt in ossibus 0,5104 phosphatis calcarii, 0,1130 carbonatis calcis, et 0,200 fluatis calcis. Si vero concinnius scrutetur chymica compositio ossium pullorum, Ferdinandus de Barros affirmat: carbonatē stare ad phosphatē calcis uti 0,104 stat ad 0,886 (3). Hisce praemissis non multopere erat inverosimile conjicere: facilius sane fore ut, cum Rubia phosphati magis quam carbonati affinis sit, rubescerent ossa, quam ovorum putamen calcarium. Quae quidem conjectura, licet appareret rationi consentanea, teste tamen experientia, probanda mihi visa est.

Edoctus ille sodalis meus Doctor Paulus Muratorius, post aliquantulos quaesitus illi delatos, non abnuit ad ea venire chy-

(1) Burdach. Op. cit. Tom. 2. pag. 408.

(2) Op. cit. Tom. 7. pag. 309.

(3) Op. cit. Tom. 7. pag. 224. et 301.

nica pericula quae meis investigationibus opitulari poterant: quae eadem pericula ad veritatem magis magisque confirmandam voluit, me praesente, iterare. Atque hic in primis et ante omnia operae pretium est commonstrare pericula haec facta esse cum infusione composita ex duabus drachmis Rubiae exque sex unciis aquae distillatae quae, calefacta ad temperaturam fere illi volatilium aequalem, idest ad 32 gradus T. R., talis saltem per sex horarum spatium permansit. Perspexit itaque praecommandatus Muratorius phosphatem et carbonatem calcis sicca et arida non sese cum Rubiae materia colorante conjungere. Nam istorum salium duabus partibus intra duo vasa praedictae infusionis quantitatem aequalem continentia positis, et biduo etiam post scrutatis, mutatio in illis non apparuit, dempta levi tinctura in colorem flaveo-castaneum: quae quidem tinctura, aquae distillatae ablutione, evanuit. Deinde, eisdem salibus non amplius aridis sed hydratis in solita infusione positis, biduo pariter post, perspectum est phosphatem acquisivisse colorem flavo-rubrum et fere lividum qui, etsi iterum iterumque in aqua distillata ablueretur, talis tamen jugiter perstavit. Contra carbonas non, nisi levissimo gradu, illum colorem acceperat, quem insuper, prima ablutione facta, cito amisit. Quadam autem portione istorum salium ita coloratorum actioni acidi hydrochlorici admodum diluti jam exposita, illico soluti sunt et solutio luteolo colore flavebat. Portio alia posita fuit in contactu cum aqua calcis, et color exiit rubeo-carminius et omnino similis illi qui in animalium Rubia enutritorum ossibus late conspicitur: qui quidem novissimus effectus non tantum a calce sed etiam ab Alcalis in genere proficiscitur. Facta porro versione aquae calcis super salem, qui flavus existit per actionem acidi hydrochlorici, initio primaevum colorem recuperat, idest flavo-rubeum; dein, praedictae aquae versione continuata, apparet color ille rubeo-carminius qui pariter gignitur aquam calcis infundendo super sales hydratos, qui per aliquantulum temporis ad infusionis contactum fuere. Atque haec phaenomena conspiciuntur Acidis aequae ac Alcalis adhibitis. Quare ex hisce experimentis magna cum ratione posset deduci: colorem rubeo-carminium in ossibus nec a phosphate nec a car-

bonate calcis progigni, sed potius ab una calce quae utique in excessu invenitur in ipsis salibus ossuim. Qui sane calcis excessus chymice sese inferens cum flavo-castanea Rubiae materia colorante, qua prae omnibus imbuitur phosphas novum prodit compositum cujus peculiaris nota est color rubeo-carminius. Uno verbo calx agit supra Rubiae materiem colorantem ut agit supra croceam materiem colorantem radicis Curcumae, Rhabarbari, etc.; quae materies, per attactum non modo calcis sed cujusvis etiam substantiae alkalinae, rubro colore perbelle rubescunt. Atque, ut magis magisque confirmetur colorem rubeo-carminium a chymica collatione materiei colorantis Rubiae cum calce libera progigni; utque luculentius pateat carbonatem calcis ne in statu nascente quidem aptum esse ad unionem cum praedicata materie colorante, Rubiae ab aqua calcis rubefactae infusio, aere acido carbonico late fluente probata est. Perspectum cito est, pedetentim hoc acidum cum calce sese immiscens, in ima parte vasis progignere praecipitatum album sive carbonatem calcis, nec non rubrum colorem infusionis sensim evanescere et subinde redire ad pristinum, idest ad flavo-castaneum. Portio altera solitae infusionis jam a calce rubefactae acta est acido phosphorico diluto: exiit phosphas calcis indissolubile, quod cum in statu nascente esset ad contactum cum materie colorante quae tincturam flavo-castaneam recuperaverat, una cum ipsa sese junxit praecipitans instar pulveris, non albedine hujusce salis propria nitentis, sed illo micantis colore qui, ut jam vidimus, progignitur ex unione materiei colorantis cum phosphate calcis. Ut autem in aperto ponatur materiem colorantem reapse cum praedicto phosphate sese conjunxisse et una cum ipso ad imam partem vasis praecipitasse, separatim est praecipitatum, et in colo positum et dilutum, proindeque adhuc umidum in attactu cum aqua calcis locatum est; et en rursus pulcherrimus ille color rubeo-carminius qui, ut saepe dictum est, fit a collatione chymica Rubiae materiei colorantis cum calce. Contra effecta haecenus descripta (haec ipsa eademque cum carbonate calcis agendo iterandoque) nunquam evenere.

Verum, ut pericula haec majorem vim et pondus sibi apud

omnes nanciscantur, operae pretium erat ea etiam super ossa protendere. Nonnullis igitur ossibus coloratis affabre cum infusione Rubiae, aliisque similiter, quae spectabant ad gallinam D ameilla planta enutritam, in acido hydrochlorico diluto immersis, rubeum omnia colorem subito amiserunt et liquidum Acidum factum est flavescens. Hoc autem liquidum, aliquanto post, colatum et in vase vitreo positum, quadam portione carbonatis sodae aspersum est guttatim, donec protulit praecipitatum album quod per colum separatum et dilutum, apparuit purum carbonas calcis. Separatum a dicto praecipitato adhuc flavescens liquidum cum carbonate sodae exactum est denuo; et ita apparuit praecipitatum alboluteolum et fere flavum, et liquidum super ipsum natans colorem pene totum amisit. Praecipitatum hujusmodi, accurata contemplatione facta, patuit phosphas calcis cum parvula carbonatis calcis quantitate immixtum. Deinde duobus praecipitatis in attactu cum aqua calcis separatim inmissis, unum phosphas sese exhibuit pulchro illo colore rubeo-carminio, et carbonas contra persistit album. Similia item effecta, quum putamen ovi rosei a gallina B editi in attactu ponebatur tam cum acido hydro-chlorico diluto quam cum aqua calcis, evenere. Nam putamen illud in primis flavum colorem, deinde pristinum idest roseum, adeptum est.

Quapropter, inspecta ex una parte stabili ac perstante concordia pulcherrimorum effectuum qui ex nostri Muratorii chymicis periculis prodire; contemplata ex altera salium calcariorum natura nec non portione varia, qua inveniuntur in ossibus et in gallinarum ovorum putamine; mihi sane, si mortuae, ut ita dicam, Chymiae leges cum Chymiae vivae legibus comparare fas esset, mihi (inquam) sane videntur argumenta satis superque extare ut discrimen coloris, quod inter putamen intercedit et ossa explicetur, ipsiusque causa in aperto ponatur. Enimvero ex eo quod materies inorganica, quae in ossibus reperitur, maxima ex parte constat Phosphate calcis, cujus prae caeteris est imbuere aut suas inter moleculas Rubiae materiem colorantem veluti physice excipere, procul dubio eruitur quare in illis color praevaleat. Ex vi autem et actione, quam excessus calcis sive calx libera.

(non acido phosphorico, non carbonico ipsorum ossium coagulata), supra materiem colorantem in phosphate retentam, exercet, comprehenditur causa cur pulchro illo colore carminio rubescant. Re enim vera, ubi in ossium salibus deficeret praecallegatus excessus calcis, ille ad summum pateret color flavo-castaneus qui a Rubia cum phosphate calcis immixta progignitur. Contra ex eo quod ovorum putamen maxima parte constet carbonate calcis, quod vel nullo modo vel tantum debili praedicatam materiem colorantem retinet, arguitur peropportune cur illud ipsum unice polleat colore roseo quem ex parvula quantitate phosphatis calcis in illo extantis adipiscitur. Quod vero color roseus ipsius putaminis effectus sit peculiaris collationis chymicae materiei Rubiae colorantis cum phosphate calcario, collationis (inquam) provenientis ab oviductus secernentibus vasis et a vitae viribus directae ac gubernatae, id unusquisque nullo negotio per se valet comprehendere, si tincturam roseam ovorum quae peperit gallina B, et D cum illa comparet tinctura quam exhibet ovum quod, quum per quinque horas immersum extitisset in Rubiae decoctione saturatissima et ad gradum 32 T. R. calefacta non solum adeptum est intensum colorem rubro-castaneum, sed et iste insuper color ad unam externam putaminis superficiem circumscribitur. Admonendum denique mihi restat, ova per binos vel ternos menses aeri et luci exposita, omnem fere colorem amisisse; et pauca illorum, quae etiam nunc colorem reservant, chartis fuisse involuta, et hanc contra lucis actionem tutelam habuisse.

Sed jam tempus est ad examen revocare ossa caeterasque partes organicas quae in gallinarum corporibus plus minusve rubeo colore inventae sunt. Et ab ingluvie incipiens et a ventriculo, quae duo in sui ipsius superficie interna erant rubro colore vivissimo, mihi vileor non multum a veritate aberrare reputans illud phaenomenon non effectus intimae collationis molecularum Rubiae cum textu animali ut in ossibus contingit, sed potius veluti productus simplicis imbutiois physicae, et illi tribuendus permeabilitati qua generatim gaudent iidem textus, et temporis lapsui quo Rubia una cum cibo in tot cavis, digestionis gratia, remorata est, et fortasse etiam chymicae

imputandus actioni quam supra materiem colorantem exercent succus gastrici ab eorundem interna membrana scatentes. Et magis magisque hanc opinionem amplectendam censeo, quum considero 1.° colorationem illam, iteratis leviter ablutionibus illarum bulgarum in aqua ad ambientis temperaturam, pedetentim decrevisse; 2.° in gallina C, quae per multos dies Rubia, viginti tamen quattuor diebus ante obitum ordinario alimento enutrita est, tam ventriculorum quam ingluviem naturales species recuperasse, et mediocrem etiam tum rubefactionis gradum conservare. Similes itidem causae meo arbitrato assignari possunt colori rubeo-carneo qui in gallina D videbatur obsignare intestinum colon, nec non colori illi qui plerumque apparuit in cloaca: nam faeces, quae, ut supra exposui, a Rubiae quantitate quadam colorantur, diutius ob earum confectionem in crasso intestino et praesertim in cloaca, ubi postremum elaborationis gradum accipiunt, remorantur. Quoad ossa, et meae observationes omnino illis adhaerent quas experimentatores antiqui et recentiores fecere: Rubiam videlicet ossa solummodo rubeo colore pertingere et nihil afficere periostium, nihil ligamenta, nihil cartilagineas ec.: Rubia rubefieri non tantum ossa sceletum componentia, sed etiam hos hyoideum et in pullis insuper laryngis portiones osseas, asperaeque arteriae annulos, illosque cruris tendines qui ossificationem passi sunt; contra cornea, cum in hoc volatilium genere desit circulus osseus, rostrum, et ungues ne modice quidem laeduntur. Compertum quoque est, per meas hasce observationes, ruborem in ossibus vivum eo magis apparere quo minus eorum textus densus est, et compactus, sive quo minus prodiit eorum ossificatio, sicuti in extremis aut in utraque epiphysi longorum ossium cernere est; ex adverso vel nihil vel fere nihil rubefieri illas ossium partes quae extremum consistentiae et compactionis gradum tetigere; ut v. g. media in parte longorum ossium et in centro planorum cranii facile est observare. Et sicuti generatim, ut inter caeteros iudicant Duhamel et Flourens, ossa eo citius pulchro colore rubescunt, quo propius ad ortum animalia sunt; et in adultis (uti egometipse expertus sum) illae faci-

lius ossium partes colorantur in quibus ossificationis processus plasticus nondum perfectus existit, ea fortasse de causa quod tam in primo quam in altero casu textus osseus, majorem sanguinis copiam in se accipiens, sinit ut eorundem latiore superficiem Rubia pertingat; ita ex hisce mihi videtur legitime posse deduci: ad ossium colorationem hoc inter necessarias condiciones requiri, ut scilicet ossa hujusmodi a numero plus minusve magno vasorum sanguiferorum penetrentur, sive, mutatis verbis, colorationem plus minusve patere prout major minorque extat ipsorum vascularitas. Hoc etiam ex meis experimentis colligitur quod, subtracta cuidam animali Rubia ossium tincturam non, nisi plus minusve diuturno tempore elapso omnino deleri, uti planum faciunt aliquot ossa gallinarum C et F quae satis patente rubore perstabant etiamsi post praedicatae plantae usum, altera per viginti quattuor, altera per triginta dies ordinario cibo enutrientur. Hoc tamen in casu haec sunt peculiaria. Praeterquamquod color generatim non adeo vivide rubebat, in ossibus planis hic illic rubore in medio spatia quaedam, radiataeque naturalis coloris insulae conspiciebantur: in ossibus vero longis color magis magisque perstringitur ad extrema, quae in recuperandis ordinariis speciebus novissima semper sunt. Ossa denique cubiti et praecipue tarsi gallinae D, quae, ut dictum est, primo Rubia, postea alimento comuni, inde iterum Rubia enutrita fuit palam exponunt, etsi non adeo manifeste ob eorum parvitatem, rubeum stratum internum cui supereminet stratum album quod in externa superficie incipientis colorationis vestigia patefacit. Quae quidem observatio pericula confirmat et doctrinas, quas de longorum ossium in latitudinem incremento per strata alia aliis supstantia, deque textura lamellari protulere Duhamel et Flourens. Doctrinas, inquam, quae ad nostri gloriam secundamque fortunam hac ipsa in urbe, per opera Marcelli Malpighii (1) et Michaelis Medici (2) Phy-

(1) Anatomie plantarum. Cap. de Caudicis augmento et nodis. Lug. Bat. 1687. pag. 36 et 37. Opera posthuma. Amst. 1700. pag. 65 et seq.

(2) Vide magni ponderis opera V. C. Medici de textura Oss. edita in opusculis Scientificis et in novis Commentariis Instit. Bon.

siologorum magni nominis, ortum habuere et illustrationem.

Una denique restat investigatio quantum utilis tantum difficultatis plena et discriminis: quae scilicet sint viae quas Rubiae colorans materies percurrit cum a tubo intestinali, ut ad ossa transeat, proficiscitur; quove statu ipsa in sanguine reperiat, an modo suspensa, an alicui ex suis principiis adhaerens; et quae demum sit ratio quae illam ad ossa tantum, et in gallinis ad ovorum etiam putamen calcarium afficiendum, determinat. Et quamvis tanto oneri me imparem confitear, audeo tamen conjecturas proferre quae id saltem boni in se habent ut causam praebent et materiam qua caeteri me praestantiores possint illustrare argumentum quod tam prope respicit maximum ex essentialibus et stupendis negotiis aeconomiae animalis, quale est reproductio fibrae. Quamquam Physiologi recentiores generatim opinantur colorantes materias, in tubum intestinale ductas, sese per absorptionem a venarum propaginibus operatam cum sanguine immiscere, ego tamen sentio ad hunc transitum, cum de Rubia agatur, praeter antedicta vasa etiam lactea vel chylifera concurrere. Nam me hanc in sententiam impellit non modo observatio a me facta in gallinis D et F quae illico post mortem ad examen revocatae exhibuerunt vasa chylifera jam plena chylo colorem rubro-luteolum prae se ferente; sed etiam facilitas qua Rubia sese ostendit in lacte, uti testantur plurimae observationes, quum forte se una conferat cum calce et phosphate terreo, quae duo caseosae materiae adhaerentia inveniuntur. Quo facto posito fas mihi videtur colligere chylum (cum iste juxta Raspail (1), tam in characteribus physicis quam in chymica sui ipsius compositione, humor sit lacti multum persimilis et eosdem etiam sales contineat) eandem posse affinitatem supra Rubiam exercere et una insimul sese commiscere uti profecto contingit in lacte. Sed quaecumque sint viae per quas Rubia in torrentem transit circulationis, procul dubio est hanc substantiam una cum sanguine ad ossa ab arteriis, quae late per ipsa se junguntur, transferri.

(1) Chimie Organique. Paris. 1833. pag. 355.

At quo statu Rubia reperiatur in sanguine perquam grave est verbis determinare. Nihil tamen secius mecum ipse perpendens inter materias inorganicas praedicatum humorem componentes esse, juxta analysim Denis et Lecanu (1), calcem et sales terreos nec non super omnia phosphatam calcis, et iterum bene perpendens Rubiam in praedicatis substantiis praeponderantem exercere affinitatem; multo facilius in eorum sententiam devenire qui opinantur ipsam in sanguine cum calce aut fortasse melius cum suo phosphatè simul collatam reperiri. Ex quo primum esset deducere cur in sero, quod illis caret principiis, incassum Rubiae colorans materies desideretur; et item cur frustraneae aut multopere difficiles sint curae quæ nitimur eam in sanguine reperiri, cum ex adverso in lacte et chylo uno intuitu potest discerni, quod latius deinde patebit. Nam in sanguine calx, seu potius sub-phosphas calcarium (prima enim propter magnam qua pollet cum acidis affinitatem in libero statu difficiliter esse potest) quum intime cum fibrina et praecipue cum cruore una sese conferat, Rubiae colorans materies, cum hisce ipsius sanguinis principiis organicis sese immiscens, isthic vix poterit apparere: dum contra in lacte et chylo, quae duo colorante materia omnino carent, sui vestigia in aperto linquit. Ex qua collatione Rubiae cum calce, quam diximus fibrinae et cruoris (2) veluti comitem esse peculiarem et indivisibilem, posset etiam deduci et causa quaedam illius Melanosis quam perspexi in gallinis quae periculis a me institutis subjectae fuere ut supra: nam morbosus iste productus a cruore sanguineo vitato jam vulgo constitutus reputatur. Sed quoniam de communi chymicorum sententia tam calx quam ejus phosphas non a sanguine obtinetur nisi postquam in carbonem et in cinerem reductus sit; ita secundum accuratas Berzelii investigationes permulti Physiologi sane illustres opinantur, terram animale non esse sanguinis partem naturalem et integram, sed utique talem componi in vasis secernentibus earundem partium in qui-

(1) Burdach. Op. cit. Tom. 6. pag. 87.

(2) Burdach. Op. cit.

bus scilicet reperitur (1). Quae res si veritati reapse esset consentanea nullam aliud discrimen in his quae supra diximus inferret, nisi quod conjunctio colorantis materiei Rubiae cum sale terreo, non in sanguine locum haberet, sed potius in ipsis vasis quae spectant ad ossa et partem inferiorem oviductus. Quidquid hac de re sit, factum aperte declarat Rubiae materiem colorantem ab arteriis ad ossa transferri et super illa deponi, hoc ipso fortasse quod phosphas calcis, quod ea continent, illam ipsam ex quadam electiva chymica affinitate sibi attrahit. At nonne plus rationi congruum videretur ossium colorationem admittere causatam a novis particulis phosphatis calcarii a sanguine segregatis, quae intime cum Rubiae materie colorante sese conferentes, ex vi attractiva quam in sanguine exercet unumquodque organum, illum occuparent locum quem totidem ejusdem salis calcarii particulae veteres, denutritionis processus causa, relinquere? Non equidem credo, nam ubi reapse id accideret, ossium decoloratio, cessante Rubiae prestatione, ea, qua coloratio fit, celeritate deberet fieri: quod profecto non est, cum constet ex periculis a Dubamel et Flourens institutis, animalium ossa paucis diebus imo aliquot horis, ex quo Rubia aluntur, rubefacta apparere; et contra, illo alimento detracto, dies sane multi opus est ut transeant ante quam illa pristinum colorem recipiant, prout egometipse in gallinis C et F expertus sum. Mihi ergo plus verosimile videtur ossium rapidam colorationem tribuendam esse tum novis moleculis terreis jam Rubia rubefactis quae super ipsa deponuntur, cum attractioni quam peculiaris affinitatis chymicae vi super praedicatam radicem exercet phosphas calcarium in ipsis ossibus praeesistens. Ad hujusce autem affinitatis exercitium necesse est ut phosphas sit in statu libero et bene evolutum. Ita etiam peropportune in aperto ponitur quare cartilagineae, aliaeque tum solidae cum liquidae animalium partes a Rubia immunes supersint quamvis praedictum salem terreum contineant: quod scilicet illum vix vix continent, et in statu latente, non jam in libero ut in ossibus.

(1) Medici. Manuale di Fisiologia. Bologna 1833. Part. 2. pag. 219.

Postremo in hoc ut omnes conveniant necesse est quod consideratio effectuum a Rubia in animalibus viventibus productorum, viam nobis patefacit, qua possumus ad intelligentiam pervenire illarum functionum vitalium quae ad reproductionis seu nutritionis operam physiologicam concurrant. Sed praeter huiusmodi utilitatem, mihi sane videtur posse, analogia duce, conceptus fieri magis omnibus verosimilis de illo modo quo in morbis organico-chymicis generandis et expellendis agunt potentiae morbosae et therapeuticae. Re enim vera sane probabile est quasdam infestas substantias in sanum corpus introductas non solum pollere facultate sese immiscendi cum sanguine, interdum et suam plasticitatem alterantes; sed etiam, peculiaris affinitatis chymico-organicae vi, sese conferre cum textibus quibusdam producentes processus reproductivi materiales alterationes seu morbos organico-chymicos. Similiter hoc idem dici potest de illis potentiis quae valent nos a praefatis morbis liberare: siquidem hisce etiam in casibus sane rationi consentaneum est ipsas in sanguinem introductas vitiatam ipsius corrigere plasticitatem, et, cum sint in attactu chymico-organico cum partibus morborum, solidorum et humorum materialia vitia posse superare. Et en quomodo doctrinae pathologico-therapeuticae, quae a generalibus vitae legibus desumuntur, firmo fulcimine nitantur in periculis etiam physiologicis, et en pariter in Rubiae actione et vi praeclarissimum specimen rectitudinis legum et principiorum Medicinae organico-dinamicae ab insigni nostro Physiologo fundatae.

Verum ego Vos, Academici, nolo ulterius fastidire nec vestrum animos diutius retinere: quapropter huic sermone finem impono. Forte pericula a me de ovorum putamine instituta, inutilia plerisque aut curiosae ad summum lucubrationes videbuntur. Hisce ego peropportune dirigo aurea illa verba quibus perceleber Franciscus Maria Zanottus, qui tunc a secretis erat Instituti, exordiebatur Commentarios ad summam Dissertationis Bazzanii circa ipsius experimenta de ossium coloratione « Quamquam (inquit ille) quid est in natura non « utile? quid est, quod si utilitatem praesentem nullam affe- « rat, spem tamen non ostendat? » Nec vanum sane fuit ipsius vaticinium: propterea quod non multum temporis intercessit et

observationes, a Bononiensi Anatomico factae; aliis magni nominis Physiologis luminosissimae viae fuere quae illos ad inventa super Osteogenia omnium sane pulcherrima tuto duxerunt. Sed nec ego Bazzanius sum, nec mihi sumo tantum ut parvula haec mea possint lapsu temporis Doctorum attentionem excitare. Nihil tamen secius cum ego effecta super ossibus a Rubia peracta confirmare curavissem, labores meos acceptos fore non despero huic Academiae, quae, ut eximius ille concivis noster, quem iterum honoris gratia nomino, Matthaeus Bazzanius ingenio doctrina et virtute praeclarissimus multo sapienter inquit, « non modo inventoribus rerum gratiam tribuere, sed etiam comprobatores et aemulos inventionum libenter amplecti et probare consuevit ».

TABULAE EXPLICATIO*TABULA XXIX.**Figura 1.*

Sceleton ostendit Gallinae B quae per quattuor circa menses alimonia cum Rubia nutrita est.

Figura 2.

Ovum quod peperit Gallina D quattuor post diebus ex quo praedicto alimento cum Rubia usa est.



G. Bellini ad nat: et in lap del: et lit



FRANCISCI RIZZOLI

De methodo exequendi Kelotomiam in Coeci intestini

Hernia scrotali incarcerata.

Quamquam anatome pathologica istiusmodi herniae, quae ex coeco intestino producitur, investigationibus ac curis praesertim Scarpa cl. ex Italia Chirurgiae Doct. per multum quidem profecerit, salutaris tamen disciplinae sectatores haud inde eam, quae par erat utilitatem hucusque percaeperant, quam ducti exequendi herniotomiam necessitate herniam revera ex coeco intestino efformatam esse deprehenderent. Quoniam vero, debite perpenso modo, quo haec efformatur hernia, nec non ratione, qua variae disponuntur partes ad herniosum tumorem efficiendum concurrentes, compertum est mihi perfacilem fore (si id res ipsa postulat) eam operationem methodo admodum ac antea diversa, simulque omnia evitare pericula, quae eidem operationi comitari poterant; non omnis utilitatis expers esse censeo perbreve istiusmodi methodi notitiam tradere.

Coecum intestinum situm est in regione Ileolumbari dextera, cui mollis ope cellularis texti posterius adhaeret. Eiusdem autem anteriori faciei jungitur lamina posterior peritonealis, quae dextrorsum ac sinistrorsum se dirigens interius musculo Psoas, exterius lateri ac respondententi Iliaco inhaerescit, eoque super quam late dilatatur. Quum vero huiusmodi pro anatomica partium dispositione coecum intestinum ad latera ejusque anteriorem faciem firmatum sit valideque suffultum a peritoneo, contra verum ad posteriorem superficiem tantummodo

per molle textum cellulare aliis textis conjunctum inveniatur, quotiescumque vis quaelibet illud deprimit, illudque ad forum dirigit inguinale posterior ipsius coeci pars, aliquantumque inferior utpote adhaerens leviter proximis textis prima descendit; deinde vero eam sequitur pars anterior utpote firmiter detenta vi laminae posterioris peritoneae, cui ipsum intestinum coecum est inhaerens. Ubi autem una pars faciesque posterior ejusdem intestini, iliaco muscolo innitae praecipue, ad imum impellantur, eundem inter musculum eamque portionem laminae peritonealis, qua hic ultimus vestitur, sese immittunt, ideoque ipsa pars posterior coeci aliquantumque inferior, ea nempe quae minime velatur peritoneo, nuda sese offert interno foro inguinali, hocque pacto absque nempe sacculo, ac ne operta quidem lamina libera peritoneae, canalem respondentem ingreditur. Quod si causae, quibus hernia producitur nondum quiescant ima pars coeci intestini per inguinis canalem, induens textum cellulare ibi inclusum, descendet donec, ipso foro relicto ac cremasterem ingressa, ad partem inferiorem scroti sese dirigit. Ut tamen imum coeci intestini huc valeat pervenire, necesse est ipsius facies anterior imum sequens partemque posteriorem, relicta sede naturali, cremasterem et ipsa ingrediatur. Sed id quum nequeat evenire quin una descendant laminae simulque portiones peritoneae ipsius circumstantes tractum, qui coeci intestini soli faciei innititur anteriori, fit persaepe ut interim dum ejusdem caeci pars inferior cremasterem ingreditur; ipsamet praefatis peritoneae laminiibus partibusque velata et obducta permaneat. (1) Semper itaque sit praesens Chirurgus anatomicus pathologicae herniae scrotalis coeci intestini, semper ad oculos sit eidem, quod hac in erniae specie intestinum egressus haud operatum est sacco, qui efformatur a peritoneo, quique in hernia inguinali vulgari partes continet intestini vel omenti, quae ad herniosi tumoris efformationem conveniunt; neque ejus cadat memoria quod in istiusmodi herniis pars inferior ac

(1) Vide Tab. XXXI. in qua lamina libera peritoneae scissa continuari atque inhaereri faciei anteriori coeci intestini inspicitur.

posterior caeci intestini nudae sunt, vixque simplici texto cellulari cremasteri conjunctae; ejusdem vero intestini facies anterior tantummodo quum et ipsa ad herniam efficiendam concurrat, ea velari lamina peritonaei ipsius conjuncta portioni, quae cum intestino coeco anterieus continuatur. Hisce absque cognitionibus nunquam herniotomiam aggrediatur Chirurgus, ne quum invenire nequeat saccum peritonaealem, qui in hernia vulgari plus minusve extensas partes intestini vel omenti includit, eundem ductus detegendi persuasione texturas temere incidat, seque in periculum adducat secandi coecum intestinum, existimans ita saccum ingredi, qui praefatis in circumstantiis a peritoneo producitur. Ast accurata insuper anatomicae pathologicae istiusmodi hernia cognitio plurimarum fons utilitatum ulterius censenda.

Equidem hucusque, nec injure, existimatum est, quod quum hernia caeci intestini vix inciperet, quum scilicet pars inferior posteriorque intestini, quae primae egrediuntur, paullulum citra forum inguinale externum essent adductae, eadem scisso cremastere cui per molle textum cellulare inhaerescunt, faciliter possent ope herniotomiae, sublato vinculo adstringente, in abdominalem cavitatem denuo revocari. Ast optabile hujusmodi effectum frustra speratum foret ubi coecum intestinum profunde in scrotum descendisset. Quum enim hoc in casu non modo inferior posteriorque, sed anterior etiam caeci intestini pars ingrediens in cremastere, quumque haec ultima anterieus velata permaneat ea libera portione peritonaei, cum illa ipsius parte continuante, quae anterieus huic inhaerescit intestino, sequitur idcirco ut eo quia hisce in factis lamina libera peritonaei inhaerescat per totam sui extensionem cremasteri, quum insuper adnexa sit valide extensae caeci portioni, idem intestinum, hisce obstantibus adhaerentiis, reduci omnino nequeat.

Ipsimet Scarpa ita de hisce persuasum erat, ut agens de methodo herniotomiae, sequentes tradit normas « Posito quod
« hernia ingens et inveterata caeci intestini vere adstringatur,
« ita ut ad aegrotum periculo eximendum omnimode opus
« sit incisione, Chirurgus operam aggrediatur secum reputans
« quod viscera decursa ob eorum connexionem cum lamina
« peritonaei, qua anterieus teguntur nequeunt perfecte in lo-

« cum restitui. Quamobrem ubi nullo detur gangraenae suspica-
 « tio Chirurgus, incisis communibus tegumentis deteget continuo
 « annulum inguinalem, illumque exterius fendet suspensa manu;
 « hocque pacto viscera egressa liberabit, quin ipsa ad aeris
 « actionem exponat; atque premens leviter tumorem denuo
 « ad assuetum cursum flatus faecesque congregatas revoca-
 « bit, simulque quoad fieri potest curabit viscera protrusa
 « contrahere. Si autem vel ob incuriam Chirurgi, vel ob de-
 « fectum signorum sufficientium circa coeci discensionem, vel
 « tandem ob indicia proximae gangraenae aperta fuerit ultra
 « cremasterem lamina peritonealis quae anterieus tegit intes-
 « tinum, non deserit Chirurgus quod ipse secutus est Petit:
 « primum nempe incidet laqueum, rejiciet in ventrem par-
 « tem sanam intestini, quae ingredi valet; dein teget viscera
 « paratis limbis, omniaque involvet panniculis malvae sive
 « althaeae decoctu madefactis, quos binas in horas die noc-
 « teque permutare curabit: Temporis autem progressu, soli-
 « tis nec praetermissis praesidiis in operatione herniae incar-
 « ceratae, natura ipsa contrahet partem intestini portionemque
 « laminae peritonealis quae anterieus illud integebat, quae-
 « que super eo continuabatur. Quid porro de ipsa extra per-
 « manet tempore dissecabitur, seque operiens granulatione a
 « communi cicatrici in inguinis tegmentis praecoccupabitur. Pro-
 « cul dubbio permanet in inguine majoris minorisve molis
 « tumor, prout portionem caeci extra permanentem, ad quem
 « tuendum a pressionibus, atque impediendum ne tempore
 « major deinceps evadat aegrotus cingulo globo concavo se-
 « se quoad vixerit armabit. »

Hujusmodi a Scarpa tradita erant documenta, haecque a
 praestantioribus etiam sequebantur. Verumtamen saepe saepius
 ex iis plurima effluere debebant incommoda. Re quidem ve-
 ro eequo pacto Chirurgus, quamvis etiam peritus antequam
 opus aggrediatur certior fieri potest herniam ab intestino coe-
 co produci? Hoc autem in dubbio quomodo, impossibile pu-
 tans hanc herniam reducere, secatis tegmentis communibus,
 sese limitare audebit solutioni adstringentis nodi, indiciaque
 ita comprimere, quibus hernia dignoscitur? Nonne magis ve-
 rendum ubi hernia ab alia producaturs ansa intestinali, alia-

que devinciatur re praeter forum inguinale, aegrotum ab hanc strangulationis speciem sub oculis periturum? Licet dein ex solo caeco intestino efformatur hernia num comperiet, quin intestinum denudatur, idem nulla in parte gangrena laborare? Equidem hac de re absolute judicabit nemo si tamen ipsum non praeterit persaepe in adhibenda herniotomia ansas invenire intestinales sin omnino saltem aliqua in parte gangrenatas, quin tamen ad hujusce gangraenae sinthoma aegrotus attenderit. Id porro si contingeret in emortuis partibus e vivis distrahendis, quum non possent illa eadem expelli facilitate, qua inciso cremastre ac nudato intestino, discerptae forent e corpore, inclusae ideo cum faecibus a caeco productis necessario in eodem cremastere permanerent, ex quo mors vel saltem damna proficiscerentur gravissima. Hisce interim circumspectis, ubi cremasterem findere atque intestinum retere prudentis videatur nihilominus in factis etiam hujusmodi licet per inguinalis annuli externi solutionem innitum sit strangulationis causam auferre, quoddam in vitae periculum aegrotus adduceretur. Re quidem ipsa etiam si factis nonnullis probatum videtur, inciso annulo inguinali, quiescere sinthoma strangulationis, partesque egressas cicatrici occupari, id tamen Chirurgus si sapit haud constanter audeat sibi promittere. Ipsemet enim, laborante individuo hernia scrotali strangulata a cl. Prof. herniotomiae subjecto, observare potui, quod licet amplissime solutus fuerit annulus inguinalis, uti cum Scarpa docuit Petit, diligenterque horum omne expletum sit de hisce praeceptum, ob tamen irritationem inductam tum ex incisione cum ab aeris actione nec non operibus necessariis, eaque facilitate, qua flatus faecesque pervaserunt intestinum, hoc ipsum, quod in operatione tantummodo ingorgatum erat sanguine tali modo augetur ut incisionis annuli inguinalis potuerit denuo illuc vi tanta constringere ut celeriter cum ipsius individui morte gangraenam evaderet. Ast posito etiam ut hujusmodi in rebus evitari queat gangraena, vulnusque tendat in cicatricem, quum nequat intestinum rursus ventrem ingredi, individuus pro vita irreducibili hernia laboraret, omnibusque malis, quibus ipsa comitatur, praecipueque novae strangulationis periculo objiceretur.

An porro verendum sit ne intestinum, vinculo etiam sublato, deinceps detrudatur, hincque gangraenam evadat, unusquisque facile comperiet modo animadvertat cicatricem fori inguinalis propter incisionis irritationem inflammantem ac tumescentem latitudine imminui, ideoque permeantibus inniti corporibus, eaque etiam aliquando fortiter adstringere. Lemniscus enim, qui acta herniotomia vulgaris herniae expedite inditus est in foro inguinali haud raro ab eodem destructus permanet ob annuli cicatricis inflammationem, cujus incisiones aliaeque operationes necessariae causa fuerunt. Id autem etiam atque etiam pavendum est quum pro lemnisco idem intestinum annulum permeet. Licet enim Chirurgus det operam ut evacuetur intestinum ab interaneis materiis, periculumque ita novae strangulationis amoveatur; idem tamen intestinum flatibus faecibusque magis extensum faciliter permanens, talimodo augebitur, ut saepe constringi rursus videatur ab externo foro inguinali, quod adhuc inflammationis causa, uti praefatum est latitudine decrescit. Haec porro facilitas qua ipsae faeciosae flatusque ingrediuntur intestinum caecum, a quo producit hernia quodque contrahi nequivit, ex eo potissimum oritur, quod quam sublata fuerit eidem coeco pressio tegumentorum cremasterem scrotumque efformantium, quae proinde incisa fuere ut egressum intestinum detegeretur flatus materiesque aliis intestinibus inclusae facile per contractiones abdominalium musculorum atque diaphragmatis eo intromittuntur ubi vel nulla iisdem obsistat compressio. Si autem hac in rerum dispositione ad pervertendam gangraenam utpote consequens violentis distensionis coeci a faecibus in ipso congregatis effectae, optimum quidem videretur, uti nonnulli autumantes, ejusdem intestini partem anteriorem incidere, ut eae exeant substantiae, quae sunt hujusmodi periculosae caeci distensionis causa, aegrotus hoc etiam pacto gravissima quaedam in pericula pertraheretur. Ipsa enim diurna docet experientia aliquando interanea vulneca citissime fieri mortifera per ea tantummodo gravissima nervorum phaenomena, quae ab iisdem vulneribus excitantur: et licet haec sinthoma vel minime sentiri vel reprimi obtineatur non ideo tamen aegrotum ire liberum ab iis incommodis, quibus annormalis anus afficitur.

Ad haec igitur evitanda pericula necesse erat a Petit atque Scarpa recedere, methodumque herniotomiae excogitare, qua intestinum herniosum in ventrem restitui posset, quaque non solum herniae dstrictae sinthomorum quietatio, sed insuper ut hernia prius irreducibilis vel consistens, vel etiam nulla fieret obtineretur, uti quam recte adhibitum sit herniotomiam, exstante hernia inguinali sive scrotali vulgari strangulata per saepe solet contingere. Qua in re anatomen pathologicam herniae scrotalis coeci intestini perpendenti mihi lepide prospereque successit.

Quum interim mecum ipso reputarim quod hac in herniae specie peculiari intestinum egressum anterieus velatur sola lamina libera peritonaei, cum ea continuante, quae pariter ipsius intestini faciei innititur anteriori, quumque animo intenderim quod non modo externa superficies hujusce extensae laminae, sed etiam facies anterior posteriorque coeci cum cremastere per simplex textum cellulare connectuntur, assecutus sum constanter in cadaveribus tali hernia correptis caecum intestinum ad munus sequenti methodo revocare. Secatis primum tegumentis, quibus tumor velabatur, simulque scisso anterieus debitis cautionibus non modo cremastere sed etiam lamina libera peritonaeali eodem substante, ut omnis ita denuderetur intestini superficies anterior, in praefata lamina libera peritonaei incisionem tuli, quae subtus continuo et exterius annulo-inguinali incipiens, eo prope loco quo ipsa lamina libera continuatur portioni peritonaei inhaerenti coeco intestino, progrediebatur infra, totumque circumdans idem intestinum ipsius ad latus internum nonnihil tamen ab eodem distans in altum terminabatur. (1) Sublata hinc foisiculis portione limbi efformati ab incisione laminae liberae peritonaealis mihi optime accidit eandem ita refigere atque recedere e subjecto cremastere, cui per molle textum cellulare jungitur, ut facies posterior inferiorque hujusce intestini mihi citius occurreret, sicque eadem distrali posset ab eodem cre-

(1) V. Tab. XXXI. Linea punctis notata directionem incisionis indicat.

mastere, ut nulla amplius obstaret difficultas quin coecum intestinum in ventrem contraheretur. (1) *Vid. adnot. in fin.*

Hanc verum ad suadendam herniotomiae methodum, qua uteretur ubi vesica urinaria, eaque intestini colon portio, quae partim a peritonaeo velatur ad herniam efformandam concurrerent non modo ratiocinia experimentaque in cadaveribus acta me quidem impelli debebant, sed prosper insuper haec circa eventus, quem in vivis etiam aliquando obtinuissem. Ob quam rem, quum mihi id benevenisset labente anno 1839, pauca de hoc ipso referendum videtur.

Quidam hujusce civitatis nobile genere natus multis abhinc annis hernia scotali dextra laborabat, quum haec ob se se contrahendi impossibilitatem sibimetipsae fuit destituta. Elaborans quondam indebite praefatus vir, acerrimo invasus est dolore in inguine dextero, acto dein ab hernioso tumore, tandemque fortissimis subsecuto vomitibus, talique virium depressione, ut necesse fuerit aegrotus lectum occuparet. Quum hinc accersitus Chirurgus herniam cognoverit strangulari citius ad taxim recurrendum judicavit. Hoc inutile prorsus experto, neque sanguinis missioni, neque tepido generali fumento, neque oleosis potionibus, neque clysteriis, neque applicationi circa ventrem annulumque inguinalem unguenti pomarii belladonnae parvitum est. Hisce omnibus invidis, manentibus adhuc imo augmentibus sinthomis strangulationis, ipse quoque petitus sum aegrotum visitare; quod accidit tringinta post horas ex quo eadem sinthoma in cognitionem pervenere. Tumoris durities, medicamentorum inutilitas, vultus pallore confectus tenuitas celeritasque pulsus, ventris tumescentia, frequens vomitus, aliaque istius generis me citius ad herniotomiam, utpote remedium ultimum, determinarunt. Tonsis interim pilis scrotum pubemque velantibus, tegmenta atque Dartos ab ora superiore annuli inguinali usque ad infimam partem tumoris, secata pariterque incisa fascia superficiali, cremasterem quoque retegí. Mecum autem reputans quod hernia antequam adstrin-

(1) Tab. XXXII. intestinum segregatum atque liberum inversum super ventre demonstrat.

geretur irreducibilis erat, ideoque timens ne aliqua in parte intestino adhaereret, vel etiam ab eodem intestino coeco efformeretur; indicisum extremitate premens cremasterem quaesivi an aliquo in loco fluctuaret serum illud, quod, adstante hernia strangulata, inter egressum intestinum laminamque peritonaei qua idem vestitur, generatim consistit. Quum revera hujusmodi fluctuationem circa mediam anterioremque tumoris partem internoscerim, certior factus sum intestinum, quodcumque esset, minime illic adhaereri laminae liberae peritonaei, qua vestitur, imo ab ipsa plurimum distare; quocirca huc audentius ferre potui scalprum, hincque non modo cremasterem solitis normis incidere, sed etiam ea strata cellularis texti, eamque peritonaei laminam liberam, quae antea intestinum operculabant. Sextans dein serositatis ex ipsa emanavit incisione, quam indicem laevae sequens eam immisum ita scalpro apici obtuso protuli, ut herniosum intestinum, quod coecum esse cognovi, denudarem. Hinc ut intestinum egressum in ventrem adducerem, soluto annulo inguinali, secavi laminam liberam peritonaei quae continuabatur cum illa adhaerente faciei anteriori coeci intestini, et obstabat ne illud in cavitatem abdominalem reponeretur. Incisio lateri externo ejusdem intestini, propeque annulo inguinali, initium ducebat, ad imum inferiusque proferebatur, tandemque lateri interno haud longe a foro inguinali finem obtinebat. Tunc forficulis portionem sustuli laminae liberae peritonaei cum ea continuantis, quae antea adhaeret intestino coeco, multaque cum facilitate e supposito texto cellulari exterius satis sejungi. Hisce confectis occurrit illud textum cellulare, quod posterius inferiusque jungit cremasteri coecum intestinum, ex quo hoc perfecte segregavi, adimens ita vel omnia impedimenta, quibus ipsum ne ingredieretur ventrem detinebatur. Ipso revera pacto intestinum, quod subruher colore visum est, liber evasit, potuitque, anulo inguinali soluto, in cavum abdominale restitui. Lemnisco tandem immisso in foro inguinali, reliquum incisioni glutinosi caerati conjungi, ligamentaue compressionesque convenientes accomodavi. Paulo post aegroto sanguinem extraere jussi, eique ricinii olei sescunciam praebere; quibus actis non parum levaminis subito expertus est, vomitus siqui-

dem cessavit, ventris minuit inflatio, pulsusque sese denuo composuerunt. Nil deinceps occurrit peculiaris, vulnus actutum in bonum flectitur, annulus inguinalis carnem induit, vixque mense ab operatione transacto, aegrotus non modo sese habet liberum ab incuris periculis, sed etiam irreducibili hernia, ad cujus impediendam rennovationem suasum fuit eidem cingulum aliquo pro tempore vestire.

Id equidem mihi fuit mercedis, quam exoptare unquam potuissem ex inventa herniotomiae methodo, qua ratiocinia experimentaque in cadaveribus suasere tantum inesse utilitatis, quantum frustra ex ea speratum foret cui istiusmodi in rebus vel ipsi peritissimi Chirurghi omni tempore studuerunt.

Adnot. Ne incidente Chirurgo laminam peritonealem circa intestinum coecum vasa laedantur seminalia optimum erit vix incepta incisione, eodem prope intestinum, specillum vel indicem in ipsam immittere, atque scalpello vel forcibus incidere circa intestinum coecum, eoque prope, laminam liberam peritonei, tali pacto e suppositis partibus, ipsisque seminaliis vasis segregatam. Si quando autem fiat ut nexus, quibus haec membrana adjacentibus jungitur usque ad internum canalis inguinali progredierentur, neque ideo faciliter adimi possent, prudentis etiam erit eundem findere. canalem quantum necesse est, ut detegantur partes, ad quas tuto ferendum est sector instrumentum, hocque pacto omnia auferre impedimenta, quibus adstantibus, intestinum egressum ad sedem nequit revocari.

PETRI CALLEGARI

*De usu subtractionis, et divisionis extendendo ad nonnullas
praesertim propositiones demonstrandas*

TENTAMEN.

Qua ratione ac utilitate subtractio, divisioque algebraicae ad permulta analyseos theoremata demonstranda adhiberi possint, in hoc opusculo conscribendo ostendere mihi proposui. Neminem profecto latet, quanto cum emolumento his operationibus in theoria aequationum usi sint inter caeteros Lagrangia et Lacroix: puto tamen majorem profectum ex iisdem operationibus deduci posse, eo quod ad veritates non paucas demonstrandas brevissimis, minimeque artificiosis calculis sese praebeant aptissimas. Inter multas applicationes interea nonnullas delegi, quas proposito meo magis accomodatas judicavi. In his autem pertractandis se obtulit perbelle occasio demonstrandi inter caetera, atque extendendi elegantissimum Fermatii de numeris theorema, praetereaque adnotandi aliquid non raro utile ad superiorem radicum positivarum aequationum limitem inveniendum juxta theoremata ab insignibus Geometris Fourier, Cauchy, ac Sturm paucis abhinc annis detecta. Sed me hoc conscribentem commentariolum alia quoque res alliciebat; quae, ni fallor, maximae esset utilitati, si perfici posset. Multa enim in primo mathematicae institutionis curriculo praetermittuntur, quae ad elementa pertinent; et ea tantum juvenes docentur, quum ad firmiorem aetatem jam pervenerunt; iique solum, qui sese totos Mathesi dedicant, perque diversa itinera, et valde inter se discrepantia ducuntur. Ast hujusmodi non pauca fortasse possent illi etiam degustare, qui solis Elementis vacant, si quaedam temporis parsimonia adhiberetur (tot nempe calculi artificiis, quantum fas est,

arctatis, ac faciliori methodo explanatis). Nec solum idcirco facilem, ac brevissimam semitam prosecutus sum deductam ex operationibus superius commemoratis in disserendo de rebus, quas tractare decrevi; sed etiam curavi, ut quoad ejus fieri potest, omnes invicem colligarentur inter se, et quadam donarentur unitate. Utinam vero hoc perbreve specimen illo benigno vultu, quo excepta fuit alia mea lucubratiuncula (qua pro re maximas ago gratias) a celeberrima Academia Felsinei Instituti (1) accipi possit, cujus judicio, ac censurae sub-
jicio, quod ei dicare mihi pergratum est.

§. I.

Principia praecipua exponuntur.

1. In aequatione

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

denotentur per $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ coefficientes integri, ac reales. Haec aequatio nomine *aequationis propositae* appellabitur. Radices ejusdem ex

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$$

designentur, quae loco x singulatim substitutae subsequentem aequationum seriem suppeditabunt, quarum numerus erit m .

$$a_1^m + A_1 a_1^{m-1} + A_2 a_1^{m-2} + A_3 a_1^{m-3} + \dots + A_{m-1} a_1 + A_m = 0,$$

$$a_2^m + A_1 a_2^{m-1} + A_2 a_2^{m-2} + A_3 a_2^{m-3} + \dots + A_{m-1} a_2 + A_m = 0,$$

$$a_3^m + A_1 a_3^{m-1} + A_2 a_3^{m-2} + A_3 a_3^{m-3} + \dots + A_{m-1} a_3 + A_m = 0,$$

⋮

⋮

$$a_m^m + A_1 a_m^{m-1} + A_2 a_m^{m-2} + A_3 a_m^{m-3} + \dots + A_{m-1} a_m + A_m = 0.$$

(1) Volumen quartum Nov. Commentar. hujus Academiae inspiciatur.

Ut calculi sint expeditiores, per $E_x = 0$ denotari potest aequatio proposita, et ideo denotanda erunt per

$$E = 0, E = 0, E = 0 \dots E = 0$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_m$$

aequationes, quas supra obtinuimus substitutione radicum. Hinc in primis subducendo, ac postea dividendo per binomium $a_1 - a_2$, nobis erit

$$\left(\begin{matrix} E & -E \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \right) : (a_1 - a_2) = a_1^{m-1} + a_1^{m-2} a_2 + a_1^{m-3} a_2^2 + \dots + a_1^{m-2} a_2^{m-1}$$

$$+ \Lambda_1 \left(a_1^{m-2} + a_1^{m-3} a_2 + a_1^{m-4} a_2^2 + \dots + a_1^{m-3} a_2^{m-2} \right)$$

$$+ \Lambda_2 \left(a_1^{m-3} + a_1^{m-4} a_2 + a_1^{m-5} a_2^2 + \dots + a_1^{m-4} a_2^{m-3} \right)$$

$$\dots$$

$$+ \Lambda_{m-3} \left(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2 \right)$$

$$+ \Lambda_{m-2} \left(a_1 + a_2 \right)$$

$$+ \Lambda_{m-1} = 0.$$

Compendii causa symbolo $[a_1 + a_2]$ designabimus polynomium

$$a_1^{m-1} + a_1^{m-2} a_2 + a_1^{m-3} a_2^2 + \dots + a_1^{m-2} a_2^{m-1}$$

idemque fiat de aliis similibus polynomiis. Praeterea per E' denotetur expressio $\left(\begin{matrix} E & -E \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \right) : (a_1 - a_2)$, pariter-

que per E' altera $\left(\begin{matrix} E & -E \\ a_1 & a_3 \end{matrix} \right) : (a_1 - a_3)$ exhibeatur, et

ita deinceps; unde habebimus

$$\left(\begin{matrix} E & -E \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \right) : (a_1 - a_2) = E'_{a_1, a_2} = \left\{ \begin{aligned} & [a_1^{m-1} + a_2] + \Lambda_1 [a_1^{m-2} + a_2] + \Lambda_2 [a_1^{m-3} + a_2] + \\ & + \dots + \Lambda_{m-2} [a_1 + a_2] + \Lambda_{m-1} \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left(\begin{matrix} E & -E \\ a_I & a_3 \end{matrix} \right) : \left(a_1 - a_3 \right) =_{a_I, a_3} E' = \left\{ \begin{matrix} [a_1 + a_3]^{m-1} + \Lambda_1 [a_1 + a_3]^{m-2} + \Lambda_2 [a_1 + a_3]^{m-3} + \\ + \dots + \Lambda_{m-2} [a_1 + a_3] + \Lambda_{m-1} \end{matrix} \right\} = 0,$$

$$\left(\begin{matrix} E & -E \\ a_I & a_4 \end{matrix} \right) : \left(a_1 - a_4 \right) =_{a_I, a_4} E' = \left\{ \begin{matrix} [a_1 + a_4]^{m-1} + \Lambda_1 [a_1 + a_4]^{m-2} + \Lambda_2 [a_1 + a_4]^{m-3} + \\ + \dots + \Lambda_{m-2} [a_1 + a_4] + \Lambda_{m-1} \end{matrix} \right\} = 0,$$

⋮

$$\left(\begin{matrix} E & -E \\ a_I & a_m \end{matrix} \right) : \left(a_1 - a_m \right) =_{a_I, a_m} E' = \left\{ \begin{matrix} [a_1 + a_m]^{m-1} + \Lambda_1 [a_1 + a_m]^{m-2} + \Lambda_2 [a_1 + a_m]^{m-3} + \\ + \dots + \Lambda_{m-2} [a_1 + a_m] + \Lambda_{m-1} \end{matrix} \right\} = 0;$$

Ex E' subducatur denuo E' , et inde dividatur per binomium $a_2 - a_3$; iterumque ex E' subducatur E ac postea dividatur per binomium $a_2 - a_4$, etc. Denotatis expressionibus, quae successive exurgunt, per symbola

$$E''_{a_I, a_2, a_3}, E''_{a_I, a_2, a_4}, E''_{a_I, a_2, a_5}, \dots, E''_{a_I, a_2, a_m}$$

novam aequationum seriem assequemur, videlicet

$$\left(\begin{matrix} E' & -E' \\ a_I, a_2 & a_I, a_3 \end{matrix} \right) : (a_2 - a_3) =_{a_I, a_2, a_3} E'' = \left\{ \begin{matrix} [a_1 + a_2 + a_3]^{m-2} + \\ + \Lambda_1 [a_1 + a_2 + a_3]^{m-3} + \dots + \Lambda_{m-2} \end{matrix} \right\} = 0,$$

$$\left(\begin{matrix} E' & -E' \\ a_I, a_2 & a_I, a_4 \end{matrix} \right) : (a_2 - a_4) =_{a_I, a_2, a_4} E'' = \left\{ \begin{matrix} [a_1 + a_2 + a_4]^{m-2} + \\ + \Lambda_1 [a_1 + a_2 + a_4]^{m-3} + \dots + \Lambda_{m-2} \end{matrix} \right\} = 0,$$

$$\left(\begin{matrix} E' & -E' \\ a_I, a_2 & a_I, a_5 \end{matrix} \right) : (a_2 - a_5) =_{a_I, a_2, a_5} E'' = \left\{ \begin{matrix} [a_1 + a_2 + a_5]^{m-2} + \\ + \Lambda_1 [a_1 + a_2 + a_5]^{m-3} + \dots + \Lambda_{m-2} \end{matrix} \right\} = 0,$$

$$\left(\begin{matrix} E' & -E' \\ a_1, a_2 & a_1, a_m \end{matrix} \right) : \left(a_2 - a_m \right) = \begin{matrix} E'' \\ a_1, a_2, a_m \end{matrix} = \left[a_1 + a_2 + a_m \right] + \left. \begin{matrix} + \Lambda_1 [a_1 + a_2 + a_m] + \dots + \Lambda_{m-2} \\ m-2 \end{matrix} \right\} = 0.$$

2. Hic juvat bene notare, quomodo expressio $[a_1 + a_2 + a_3]$, ac similes evolvantur, cum opus sit. In primis expetita evolutio par est seriei

$$a_1^{m-2} + a_1^{m-3} \cdot [a_2 + a_3] + a_1^{m-4} \cdot [a_2 + a_3]^2 + \dots + [a_2 + a_3]^{m-2}.$$

Exinde pro $[a_2 + a_3]^2$ substituendum erit trinomium

$$a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2,$$

et ita porro.

3. Eo pacto, quo in n.º 1.º egimus, invenientur aequationes

$$\left(\begin{matrix} E'' & -E'' \\ a_1, a_2, a_3 & a_1, a_2, a_4 \end{matrix} \right) : \left(a_3 - a_4 \right) = \begin{matrix} E'' \\ a_1, a_2, a_3, a_4 \end{matrix} = \left[a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \right] + \left. \begin{matrix} + \Lambda_1 [a_1 + a_2 + a_3 + a_4] + \Lambda_2 [a_1 + a_2 + a_3 + a_4]^2 + \dots + \Lambda_{m-3} \\ m-3 \end{matrix} \right\} = 0,$$

$$\left(\begin{matrix} E'' & -E'' \\ a_1, a_2, a_3 & a_1, a_2, a_5 \end{matrix} \right) : \left(a_3 - a_5 \right) = \begin{matrix} E'' \\ a_1, a_2, a_3, a_5 \end{matrix} = \left[a_1 + a_2 + a_3 + a_5 \right] + \left. \begin{matrix} + \Lambda_1 [a_1 + a_2 + a_3 + a_5] + \Lambda_2 [a_1 + a_2 + a_3 + a_5]^2 + \dots + \Lambda_{m-3} \\ m-3 \end{matrix} \right\} = 0,$$

⋮

$$\left(\begin{matrix} E'' & -E'' \\ a_1, a_2, a_3 & a_1, a_2, a_m \end{matrix} \right) : \left(a_3 - a_m \right) = \begin{matrix} E'' \\ a_1, a_2, a_3, a_m \end{matrix} = \left[a_1 + a_2 + a_3 + a_m \right] + \left. \begin{matrix} + \Lambda_1 [a_1 + a_2 + a_3 + a_m] + \Lambda_2 [a_1 + a_2 + a_3 + a_m]^2 + \dots + \Lambda_{m-3} \\ m-3 \end{matrix} \right\} = 0$$

Hinc parum attendentes facillime legem colligemus, qua hae aequationes progrediuntur.

4. Quotiescumque parentheses rectangulas radix ingreditur, ex aequatione terminus eliminatur, qui est postremus, et primitivus aequationis gradus unitate successive semper imminuitur.

Liquet igitur generatim sequentem aequationem nos statuere posse

$$(1) \left[a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+r} \right] + \Lambda_1 \left[a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+r} \right] + \dots + \Lambda_2 \left[a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+r} \right] + \Lambda_3 \left[a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+r} \right] + \dots + \Lambda_{m-r} = 0,$$

ubi a_i, a_{i+1}, \dots sunt radices $r+1$ quaecumque ex m radicibus aequationis propositae.

5. Superior aequatio jam vero in hunc modum scribi potest

$$\left[a_1 + a_2 + \dots + a_r + x \right] + \Lambda_1 \left[a_1 + a_2 + \dots + a_r + x \right] + \dots + \Lambda_{m-r} = 0.$$

In hanc aequationem unaquaeque reliquarum radicum $m-r$ aequationis propositae loco x immittenda erit. Exinde haud difficulter colligitur istam aequationem ad sequentem traduci posse formam

$$x^{m-r} + \left\{ \left[a_1 + a_2 + \dots + a_r \right] + \Lambda_1 \right\} x^{m-r-1} + \left\{ \left[a_1 + a_2 + \dots + a_r \right] + \Lambda_1 \left[a_1 + a_2 + \dots + a_r \right] + \Lambda_2 \right\} x^{m-r-2} + \dots + \left[a_1 + a_2 + \dots + a_r \right] + \Lambda_1 \left[a_1 + a_2 + \dots + a_r \right] + \dots + \Lambda_{m-r} = 0.$$

Sequitur ideo aequationem (1) ita expositam, sicuti formulam habendam esse, qua utiliter aliquando utemur. Exempli causa occurrat aequatio particularis

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 17 = 0,$$

quam a radicibus 3, -1 expleri scimus; habebitur proinde

$$x^2 + \{ [3^1 - 1] - 8 \} x + [3^2 - 1] - 8 [3^1 - 1] + 17 = 0,$$

et hinc cito eruetur

$$x^2 - 6x + 8 = 0,$$

uti expectandum erat.

§. II.

De nonnullis applicationibus rerum expositarum.

1. Sit

$$\Lambda_0 x^n + \Lambda_1 x^{n-1} + \Lambda_2 x^{n-2} + \dots + \Lambda_n,$$

polynomium quodcumque, et ad nihilum redigatur per quemcumque valorem loco x substitutum, vel saltem per innumeros valores inter determinatos limites comprehensos. Successive ideo termini seriei

$$a^1, a^2, a^3 \dots a^n,$$

substituantur, atque deinde

$$b^1, b^2, b^3 \dots b^n.$$

In primis eruetur (§. I.º n.º 4)

$$\Lambda_0 [a^1 + a^2 + \dots + a^n] + \Lambda_1 = 0.$$

Cum sit progressio

$$a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1},$$

quae breviter per $\varphi_{n+1}(a)$ exprimi potest, habebimus

$$(1') \quad \Lambda_0 \cdot \varphi_{n+1}(a) + \Lambda_1 = 0.$$

Ex substitutione terminorum secundae seriei pariter nobis erit

$$(2') \quad \Lambda_0 \cdot \varphi_{n+1}(b) + \Lambda_1 = 0.$$

Ab aequationibus (1'), (2') ejice Λ_1 . Emerget haec aequatio

$$\Lambda_0 (\varphi_{n+1}(b) - \varphi_{n+1}(a)) = 0,$$

et ideo

$$\Lambda_0 = 0,$$

ac proinde propositum polynomium ad

$$\Lambda_1 x^{n-1} + \Lambda_2 x^{n-2} + \dots + \Lambda_n$$

trahitur.

Eodem pacto, quo superius ratiocinati sumus, habebimus

$$A_1(\phi_n(b) - \phi_n(a)) = 0,$$

et ideo

$$A_1 = 0.$$

Ex ipso demonstrationis processu deducitur in ea, qua sumus hypothesi, omnes caeteros coefficientes nihilum aequare. In hoc theoremate neminem praeterit, celeberrimum canonem *coefficientium indeterminatorum* esse positum, ex quo pulcherrimae Matheseos veritates inferuntur.

2. Radices aequationis

$$(1) \quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_m = 0$$

si sint

$$(\lambda) \quad a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_m,$$

et omnes ex littera a denotentur, habebimus

$$[a+a] + A_1 [a+a] + A_2 [a+a] + \dots + A_{m-1} = 0;$$

videlicet

$$m a^{m-1} + (m-1) A_1 a^{m-2} + (m-2) A_2 a^{m-3} + \dots + A_{m-1} = 0.$$

Ast si pro quantitate a denuo x restituatur, ac postea per m fiat divisio, statim prodibit aequatio, cujus $m-1$ radices ex a exprimentur, idest habebimus

$$(2) \quad x^m + \frac{m-1}{m} A_1 x^{m-1} + \frac{m-2}{m} A_2 x^{m-2} + \dots + \frac{1}{m} A_{m-1} = 0.$$

Cum omnes radices (λ) sint inter se aequales, si vero unitatem negative sumptam aequaverint, ex multiplicatione aequationis (2) per binomium $x+1$ eruemus

$$(3) \quad x^m + \left(\frac{m-1}{m} A_1 + 1\right) x^{m-1} + \left(\frac{m-2}{m} A_2 + \frac{m-1}{m} A_1\right) x^{m-2} + \left(\frac{m-3}{m} A_3 + \frac{m-2}{m} A_2\right) x^{m-3} + \dots + \frac{1}{m} A_m = 0.$$

Aequationes (1), (3) quum identicae esse debeant, ex earum comparatione generatim inferes

$$\Lambda_r = \frac{m-r}{r} \cdot \Lambda_r + \frac{m-r+1}{m} \cdot \Lambda_{r-1},$$

et hinc

$$\Lambda_r = \frac{m-r+1}{r} \cdot \Lambda_{r-1}.$$

Cum sit $\Lambda_0 = 1$, posito $r = 1$, prodibit $\Lambda_1 = \frac{m}{1}$; deinde

$$\Lambda_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \Lambda_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ etc. etc.}$$

Iisdem principiis, ex quibus haec deduximus, duo theoremata maximi momenti, ac alia plura ad doctrinam aequationum spectantia demonstrari possent; et cum jam notissima sint, solummodo ea meminisse nobis sufficiat, quia ad res demonstrandas deinceps opus sunt. En interea theoremata, de quibus loquimur.

I.° « Coefficiens secundi termini aequationis (1) gradus m *esimi* acceptus cum signo contrario aequat summam omnium radicum; coefficiens tertii termini acceptus cum proprio signo aequat summam productorum e binis; coefficiens quarti termini acceptus cum signo contrario aequat summam productorum e ternis, et sic deinceps; postremus vero terminus acceptus cum signo suo, vel cum contrario, prout nempe fuerit m par, vel impar, aequat productum ex radicibus omnibus simul. »

II.° « Omnis aequatio conficitur ex producto factorum primi gradus habentium formam ejusmodi $x - a_1, x - a_2, x - a_3, \dots, x - a_m$, cum a_1, a_2, a_3, \dots denotent radices. »

Propter secundum theorema aequatio (1) evadit

$$(x+1)^m = 0,$$

et ideo

$$(4) (x+1)^m = x^m + mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} + \dots + 1,$$

quae continet Newtonianam binomii formulam, cum exponens m sit integer ac positivus.

Reapse haec demonstratio est ea, quae Geometrae Landen

debetur, sed eandem hęc loco referre nobis visum est, nam hinc consequentia eruentur, quas per aliam semitam procedentes non ita luculenter deducere potuissemus.

3. Si in aequatione (4) substituatur $\frac{x}{b}$ in locum x , et postea b in $-b$ immutetur, prodibit

$$(x-b)^m = x^m - \frac{m}{1} \cdot x^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{m-2} b^2 - \dots \pm b^m.$$

Hinc ob primum theorema patet, numerum combinationum, quae manant ex literis m singillatim sumptis, ab ipso numero m exprimi; pariter numerum combinationum ex binariis deductum exprimi per $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$; numerum e ternariis deductum exprimi ab $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, et ita deinceps. Ex his infertur numerum combinationum ex m literis deductum juxta exponentem p conjunctis (1), exprimi ex formula generali

$$C = \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}.$$

Interea obiter notandum est, ex his facillime ad doctrinam permutationum gressum fieri posse.

4. Ex aequatione §. I.ⁱ n. 4, cum posuerimus

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_m = 1,$$

ob res expositas prodibit

$$\begin{aligned} & [1^{(1)} + \dots + 1^{(r+1)}] - \frac{m}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r+1)}] + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r+1)}] \\ & - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r+1)}] + \dots \pm \frac{m(m-1)(m-2) \dots (r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-r)} = 0, \end{aligned}$$

ubi indices positi sunt ad tot unitates designandas, quot inter rectangulas parentheses conscribuntur.

(1) Numerus, secundum quem res datae conjunguntur, dicitur *exponens* combinationis. Ars conjectandi Jacobi Bernoulli inspiciatur. Basileae 1713, pag. 82.

Ponatur in primis $r = m - 1$, et habebimus

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(m)}]_{-m} = 0,$$

et hinc

$$(a) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(m)}] = m.$$

Praeterea si fiat $r = m - 2$, proveniet

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(m-1)}]_{-m} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-1)}] + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = 0;$$

et ideo cum sit $[1^{(1)} + \dots + 1^{(m-1)}] = m - 1$, obtinetur

$$(b) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-1)}] = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}.$$

Posito $r = m - 3$, exsurget

$$\begin{aligned} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-2)}]_{-m} - \frac{m}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-2)}] \\ + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-2)}] - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 0. \end{aligned}$$

E formula (b), subrogato $m - 1$ in locum m , assequemur

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(m-2)}] = \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2},$$

et e formula (a), substituto $m - 2$ loco m , habebimus

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(m-2)}] = m - 2.$$

Ex his, peractis substitutionibus ac reductionibus, erit

$$(c) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-2)}] = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Ponatur $r = m - 4$, et ideo prodibit

$$\begin{aligned} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-3)}]_{-m} - \frac{m}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-3)}] + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-3)}] \\ - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-3)}] + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0. \end{aligned}$$

Sume formulam (c), atque loco m substitue $m - 1$, ac erit

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(m-3)}] = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Itemque formula (b), substituto $m-2$ in locum m , suppedabit

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(m-3)}] = \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2}.$$

Pariter e formula (a), si loco m substituatur $m-3$, prodibit

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(m-3)}] = m-3.$$

Exinde post substitutiones, ac reductiones elicietur

$$(d) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-5)}] = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Non pluribus opus est, ut e formulis (a), (b), (c), (d) generatim stabiliatur

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(r+1)}] = \frac{m(m-1) \dots (r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-r)}.$$

Ideo si erit $r < m-r$ seu $r+1 < m-r+1$, scribi poterit hoc modo

$$\begin{aligned} \frac{m(m-1) \dots (r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} &= \frac{m(m-1) \dots (m-r+1)(m-r) \dots (r+2)(r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r(r+1) \dots (m-r)} \\ &= \frac{m(m-1) \dots (m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}. \end{aligned}$$

Si e contra fuerit $m-r+1 < r+1$, scribi poterit

$$\frac{m(m-1) \dots (r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-r)} = \frac{m(m-1) \dots (r+1)r \dots (m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-r)(m-r+1) \dots r}.$$

Ex his generaliter colligemus

$$(A) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(r+1)}] = \frac{m(m-1) \dots (m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}.$$

Hinc in primis hoc theorema infertur. « Si polynomium in-
 « ter parentheses rectangulas interclusum evolvitur, uti n.º 2.º
 « §.º I.º docuimus, (quod $r+1$ terminos habet, sive ad nu-
 « merum m conficiendum in eo termini $m-(r+1)$ desi-
 « nunt) idem terminorum numerus proveniet, qui ex rerum

« m combinatione exsurgit, si res datae juxta exponentem r
« conjungantur. »

5. Quibus positis haec interim observari queunt. Si in aequatione (1) paragraphi primi n.º 4.º ponatur $i=1$, $i+r=n$, atque $m-r=p$, habebimus

$$(B) \quad [a_1 + \dots + a_n]^p + \Lambda [a_1 + \dots + a_n]^{p-1} + \dots + \Lambda = 0.$$

Ob theorema primum hujus paragraphi, quod n.º secundo enunciamus, atque ex ratione, qua expressiones symbolicae

$$[a_1 + \dots + a_n]^p, [a_1 + \dots + a_n]^{p-1}, \dots$$

evolvendae sunt, patet formulam (B) hic relatam eandem esse, ac demonstratam a Geometra Terquem (1), quae antea a Stern (2) exhibita fuerat, in qua theorema combinationum continetur.

Haec addere bonum est claritatis gratia. Si habeatur polynomium $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ constans n elementis, atque ad

potentiam ex numero integro ac positivo designatam evehatur, ac loco coefficientium ab evolutione productorum unitas conscribatur, hoc pacto obtinetur, quod Geometrae Germanici vocant combinationem *cum repetitione* classis p ex n elementis a_1, a_2, a_3, \dots et hoc juxta nostrum systema ex symbolo $[a_1 + \dots + a_n]^p$ denotari potest. Symbolum vero A_p summam productorum diversorum denotaret, qui ex n propositis elementis deducuntur *sine repetitione* sumptis secundum exponentem p , sive denotaret classem *p-esimam combinationum sine repetitione* ex n praedictis elementis compositarum.

6. Si in formula symbolica (A) loco r substituitur $n-1$, et postea $m+n-2$ in locum m , habebimus

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-1} = \frac{m(m+1)\dots(m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}.$$

Evolutio formulae $[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-1}$ jam patet ex n.º 2.º paragraphi primi, et erit

(1) Journal de M. Liouville vol. 3. pag. 556. Année 1838.

(2) Journal de M. Crelle. vol. 18. pag. 375. Année 1838.

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}] + \dots + 1.$$

Posito $n = 2$ habebimus

$$[1^{(1)} + 1^{(2)}] = [1^{(1)}] + [1^{(1)}] + \dots + 1;$$

idecirco series numerorum naturalium exsurget, si successive ponatur $m = 1, = 2, = 3, \dots$ videlicet numeri figurati secundi ordinis habentur, qui generaliter denotati erunt e formula

$$[1^{(1)} + 1^{(2)}].$$

Igitur manifeste patet numeros figuratos *secundi ordinis* (qui triangulares etiam appellantur) ex successiva additione numerorum *primi ordinis* gigni.

Si fiat $n = 3$, erit

$$[1^{(1)} + 1^{(2)} + 1^{(3)}] = [1^{(1)} + 1^{(2)}] + [1^{(1)} + 1^{(2)}] + \dots + 1.$$

Hinc numeri tertiæ seriei deducuntur, posito successive $m = 1, = 2, = 3, \dots$ cujus terminus generalis denotatur ex

$$[1^{(1)} + 1^{(2)} + 1^{(3)}].$$

Interea liquet, ex additione successiva numerorum naturalium, seu secundi ordinis numeros figuratos *tertii ordinis* nasci.

Ex eodem processu deducitur generatim, formulam

$$(C) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] = \frac{m(m+1) \dots (m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}$$

denotare terminum m^{esimum} figuratorum numerorum *ordinis* n^{esimi} .

7. Ex aequatione (C), substituto $n + 1$ loco n , eruitur

$$(D) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] + \dots + 1 \\ = \frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n};$$

videlicet

“ Summam numerorum m figuratorum cujusdam dati ordinis
 “ n^{esimi} aequari numero m^{esimo} numerorum figuratorum sub-
 “ sequentis ordinis $(n + 1)^{\text{esimi}}$.

8. Si $n + 1$ loco n scribitur, ex praecedenti numero eruitur, serie inversa,

$$1 + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}]^2 + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}]^{m-1}$$

$$= \frac{m(m+1) \dots (m+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)};$$

sive ex formula (D)

$$\frac{1 \cdot 2 \dots n}{1 \cdot 2 \dots n} + \frac{2 \cdot 3 \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} + \frac{3 \cdot 4 \dots (n+2)}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} = \frac{m(m+1) \dots (m+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)}.$$

Haec relatio est eadem, quam perillustris Geometra Cauchy exhibuit, ex qua deducit theorema relatam in nota sexta (1) addita primae parti *Cursus Analyseos*.

9. Si vero praecedentis aequationis ambo membra per $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ multiplicentur, theorema habebimus

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n + 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1) + 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n+2) + \dots + m(m+1) \dots (m+n-1)$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot m(m+1) \dots (m+n).$$

Talis demonstratio est expedita, ac brevis (rebus quae antea exposuimus, bene perspectis), et si lubet, comparari potest cum ea, quam Geometrae Le-Grande, atque Rochat dederunt (2), quamque brevissimam Gergonne nuncupavit, et hac de causa in suis *Annalibus* retulit.

10. In formula (C) scribi potest m loco n , et viceversa, unde obtinetur

$$(E) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-1} = [1^{(1)} + \dots + 1^{(m)}]^{n-1}.$$

Reapse habemus ab expositis

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-1} = \frac{m(m+1) \dots (m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) m \dots (m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}.$$

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(m)}]^{n-1} = \frac{n(n+1) \dots (n+m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n \dots (n+m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)}.$$

(1) Pag. 534.

(2) *Annales de Mathématiques* t. 3. pag. 60.

et ideo patet statuta aequalitas.

11. Ex demonstratis etiam colligitur

$$1 + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^2 + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-1} = \\ = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{1.2.3\dots(m-1)};$$

« quae formula numerum figuratum m^{esimum} ordinis $(n+1)^{\text{esimi}}$ « exprimit aequare primos m^{esimos} numeros figuratos ordinis « n^{esimi} . » Hoc theorema Fermatio debetur, quod inter suas praecipuas res arithmeticas recensuit; ad hoc resultatam tamen pertigit Pascalius, uti nos monuit in suo *Tractatu de ordinibus numericis*.

12. Ex formula (D), subrogato m in locum $m-1$, ac $n-1$ pro n , deducitur

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^m = \frac{(m+1)\dots(m+n-1)}{1.2.3\dots(n-1)}.$$

Haec formula inservit « ad numerum suppeditandum terminorum potentiae m^{esimae} polynomii, quod n terminos habeat (1).

Cum sit manifeste

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^m + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-1} + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^1 + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^0 \\ = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}]^m = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}{1.2.3\dots n},$$

statim deducitur « numerum terminorum aequationis completae gradus n^{esimi} inter m incognitas haberi ex formula

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}{1.2.3\dots n}.$$

Hoc theorema demonstratione paulisper proluxa a Bézout (2), et postea a Brianchon (3), ac a Theodoro Olivierio (4) com-

(1) Ad hanc formulam pervenit etiam Brianchon in suo Commentario, ubi in investigatione hujus formulae praecipue versatus est. Tomus XV Scholae Polythecnicae inspiciatur.

(2) Théorie générale des équations. 1779. pag. 23. — Gergon ne t. 13. Annales de Mathématiques pag. 282.

(3) In loco cit. pag. 173.

(4) Journal de l'École Polytechnique cahier 25. pag. 129.

probatum fuit.

13. Cum invenerimus (n.º 10.º)

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(m)}],$$

substituto $m+1$ in locum m et $n+1$ in locum n , obtinetur

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(m+1)}].$$

Hinc expedite, ac magna evidentia assequimur theorema a Fournier (1) repertum; videlicet « aequatio completa gradus m^{esimi} complectens n incognitas eundem terminorum numerum habet, ac si eidem esset gradus n^{esimus} , cum essent m incognitae. »

14. Ob formulam (E) habebimus autem successive

$$\begin{aligned} 1 &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] = [1^{(1)}], \\ [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] &= [1^{(1)} + 1^{(2)}] \\ [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] &= [1^{(1)} + 1^{(2)} + 1^{(3)}] \\ &\dots\dots\dots \\ [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(m)}]; \end{aligned}$$

iccirco inter duas sequentes series aequalitas patebit; idest nobis erit

$$\begin{aligned} [1^{(1)}] + [1^{(1)} + 1^{(2)}] + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(m)}] &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] \\ + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] & \\ = \frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} &. \end{aligned}$$

Ex his hoc infertur theorema. « Summa m terminorum, qui eundem locum tenent, sumptorumque successive ex diversis ordinibus numerorum figuratorum usque ad m^{esimum} aequat summam terminorum usque ad m^{esimum} ordinis, qui

(1) Annales de Mathématiques par Gergonne. t. 4. pag. 117.

« denotatur a loco, quem praedicti termini ex diversis ordinibus sumpti tenent. » (1)

Cum hoc theorema sit corollarium ex formula (E) deductum, simul manifestum est idem esse, atque alterum « Figuratus numerus m^{esimus} ex ordine n^{esimo} desumptus aequatur numero n^{esimo} ordinis m^{esimi} »

15. Hinc sequens theorema faciliter demonstratur. « Numerus figuratus $(m + 1)^{esimus}$ ordinis n^{esimi} aequiparat summam numeri figurati $(m - p + 1)^{esimi}$ ejusdem ordinis n^{esimi} , ac numeri figurati $(m - p + 2)^{esimi}$ ordinis $(n - 1)^{esimi}$, ac numeri figurati $(m - p + 3)^{esimi}$ ordinis $(n - 2)^{esimi}$, et ita deinceps usque ad numerum figuratum $(m + 1)^{esimum}$ ordinis $(n - p)^{esimi}$, dummodo hi numeri per terminos multiplicentur, qui ex $(1 + 1)^p$, evolutione executâ, habentur, cum p sit numerus quicumque integer ac minor numeris m atque n ; videlicet erit

$$(F) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] + \frac{p}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}] + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-2)}] + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-p)}].$$

Revera habetur

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}] + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}];$$

Ast cum sit

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}] + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}],$$

primo infertur

$$(a) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}].$$

Ob hanc aequalitatem scribi poterit binomium

(1) Vide Franchinium in Articulo secundo Commentarii, quod spectat ad res diversas *Scientiae calculi*, ac est sicuti additamentum quatuor primis voluminibus hujusce *Scientiae*.

$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-2} + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}]^{m-1}$ pro $[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-1}$,
 ac aliud

$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}]^{m-1} + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-2)}]^m$ loco $[1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}]^m$,
 et ideo aequatio (a) vertetur in

$$(b) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-1} = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-2} + 2[1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}]^{m-1} \\ + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-2)}]^m.$$

Pariter cum habeantur

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-2} = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-3} + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}]^{m-2}, \\ [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}]^{m-1} = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}]^{m-2} + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-2)}]^m, \\ [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-2)}]^m = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-2)}]^{m-1} + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-3)}]^m,$$

ex substitutione probabit

$$(c) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^m = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-3} + 3[1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}]^{m-2} \\ + 3[1^{(1)} + \dots + 1^{(n-2)}]^m \\ + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-3)}]^m.$$

Eodem pacto obtinebitur

$$(d) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^m = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{m-4} + 4[1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}]^{m-3} \\ + 6[1^{(1)} + \dots + 1^{(n-2)}]^m \\ + 4[1^{(1)} + \dots + 1^{(n-3)}]^m \\ + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-4)}]^m.$$

Haec inductio ad majorem perfectionem, si opus esset adduci posset. Exinde si formulae (a), (b), (c), (d)..... attente perpendantur, aequalitas super relata inferri poterit, et ideo enunciatum theorema innotescet.

1.6. Aequalitas (F) vero traduci potest ad

$$\begin{aligned} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1.2.3\dots(n-1)} &= \frac{(m-p+1)(m-p+2)\dots(m-p+n-1)}{1.2.3\dots(n-1)} \\ &+ \frac{p}{1} \cdot \frac{(m-p+2)(m-p+3)\dots(m-p+n-1)}{1.2.3\dots(n-2)} \\ &+ \frac{p(p-1)}{1.2} \cdot \frac{(m-p+3)\dots(m-p+n-1)}{1.2.3\dots(n-3)} \\ &\vdots \\ &+ \frac{(m+1)(m+2)\dots(m-p+n-1)}{1.2.3\dots(n-p-1)} \end{aligned}$$

Si in hac aequatione primo scribatur $n+1$ loco n , atque fiat $p=m$, prodibit

$$\begin{aligned} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}{1.2.3\dots n} &= \frac{1.2.3\dots n}{1.2.3\dots n} + \frac{m}{1} \cdot \frac{2.3.4\dots n}{1.2.3\dots(n-1)} \\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot \frac{3.4.5\dots n}{1.2.3\dots(n-2)} + \dots + \frac{(m+1)(m+2)\dots n}{1.2.3\dots(n-m)} \end{aligned}$$

Supposito $n > m$, ultimus terminus potest ita scribi

$$\frac{1.2.3\dots m}{1.2.3\dots m} \cdot \frac{n(n-1)\dots(m+1)\dots(n-(m-1))}{1.2.3\dots(n-m)(n-(m-1))\dots m}$$

et ideo

$$(G) \quad \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}{1.2.3\dots n} = 1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot \frac{n(n-1)}{1.2} + \dots \\ \dots + \frac{m(m-1)\dots 1}{1.2.3\dots m} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))}{1.2.3\dots m}$$

Haec formula demonstrata fuit a Geometris Lenthéric (1), ac Valles (2). Hujus demonstratio uti elegantissima a Bellavitis habetur (3).

17. Hic addendum est, quod si ponatur $n > m$, tunc formula (F) inverso ordine scribenda erit. Ideo posito $n+1$ loco n habebimus

(1) Annales de Mathématiques vol. XVI. pag. 120.

(2) Idem volumen Annalium Gergonnii inspice.

(3) Observetur diarium inscriptum — Annali delle Scienze del Regno Lombardo Veneto. Gennajo e Febbrajo 1834. pag. 11.

$$\begin{aligned}
 [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-p+1)}] \\
 &+ \frac{p}{1} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-p+2)}] \\
 &+ \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-p+3)}] \\
 &+ \dots \\
 &+ [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}];
 \end{aligned}$$

seu

$$\begin{aligned}
 [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(m+1)}] \\
 &+ \frac{p}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m)}] \\
 &+ \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-1)}] \\
 &+ \dots \\
 &+ [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-p+1)}].
 \end{aligned}$$

Hinc, in hypothesi $p = n$, obtinetur

$$\begin{aligned}
 \text{(H)} \quad \frac{(m+1)(m+2) \dots (m+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{m}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \dots \\
 &\dots + \frac{n(n-1) \dots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{m(m-1) \dots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.
 \end{aligned}$$

Si m in n immutetur, atque vicissim, secundum membrum utriusque aequationis recidit in unum. Quando in formula (F) ponatur $p = m - 1$, habebimus summam seriei a Brianchon (1) relatam, videlicet

$$\begin{aligned}
 \frac{(m+1)(m+2) \dots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} &= n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{m-1}{1} \\
 &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \\
 &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots
 \end{aligned}$$

(1) Locum cit. inspic. pag. 162.

18. Ex formula (a) n.ⁱ 15.ⁱ deduci potest

$$(a') \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] - [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}].$$

Hinc habebitur

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+2)}] - [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+2)}],$$

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+2)}] - [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+2)}].$$

Facta enim substitutione eruitur

$$(b') \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+2)}] - 2[1^{(1)} + \dots + 1^{(n+2)}] \\ + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+2)}].$$

Praeterea cum sint

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n+2)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+3)}] - [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+3)}],$$

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n+2)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+3)}] - [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+3)}],$$

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n+2)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+3)}] - [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+3)}];$$

ope substitutionis aequatio (b') sub hac forma sese offert

$$(c') \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+3)}] - 3[1^{(1)} + \dots + 1^{(n+3)}] \\ + 3[1^{(1)} + \dots + 1^{(n+3)}] \\ - [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+3)}].$$

Non pluribus opus est, ut intelligatur hoc processu ad sequentem generatim perducere aequationem, si inspiciantur aequationes (a'), (b'), (c'), ex quibus manifestum est, signum positivum ante postremum terminum sumi debere si p est par, atque signum negativum si p est impar. Habebimus igitur:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+p)}] - \frac{p}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+p)}] \\
 &+ \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+p)}] \\
 &- \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+p)}] \\
 &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\vdots \\
 &\pm [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+p)}]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Exinde sequens theorema deducitur. * Si $p + 1$ numeros descendentes figuratos ex ordine $(n + p)^{esimo}$ successive sumamus a numero $(m + 1)^{esimo}$ incipientes, ac singuli per singulos terminos, qui ex evolvendo $(1 - 1)^p$ obtinentur, multiplicantur, numerum figuratum $(m + 1)^{esimum}$ ordinis n^{esimi} habebimus. »

19. Praecedens aequalitas etiam ad hanc formam traduci poterit

$$\begin{aligned}
 [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] - \frac{p}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] \\
 &+ \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}] \\
 &- \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-2)}] \\
 &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\vdots \\
 &\pm [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-p+1)}].
 \end{aligned}$$

Hinc aliud theorema nunc assequimur. « Numerus figuratus $(m + 1)^{esimus}$ ordinis n^{esimi} adaequat numeros figuratos ejus-

(1) Bene attendenti patebit hanc seriem ex aliis doctrinis deduci posse (qua de re elegantissima elementa Professoris Andreae Caraffae e Societate Jesu consuli possent. Part. I. pag. 248) ast potius eandem ex nostro calculo symbolico deducere nobis libuit, ex quo occasio demonstrandi alias elegantias analyticas se obtulit.

« dem indicis $n + p$ et ex successivis ordinibus depromptos
 « ac descendentes, dummodo incipiatur ex numero figurato
 « $(m + 1)^{esimo}$, successive multiplicatos per terminos, qui ab
 « evolutione $(1 - 1)^p$ obtinentur. »

20. Ex formula (1), facto $n = 1$, aliam sequentem aequationem habebimus

$$\begin{aligned} 1 = & [1^{(1)} + \dots + 1^{(p+1)}] - \frac{p}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(p+1)}] \\ & + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(p+1)}] \\ & - \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [1^{(1)} + \dots + 1^{(p+1)}] \\ & + \dots \\ & \vdots \\ & \pm [1^{(1)} + \dots + 1^{(p+1)}]. \end{aligned}$$

Ab hac prodibit

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p = & (m+1)(m+2) \dots (m+p) - \frac{p}{1} \cdot m(m+1) \dots (m+p-1) \\ & + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \cdot (m-1)m \dots (m+p-2) - \dots \pm (m-p+1) \dots m. \end{aligned}$$

Si vero ponatur

$$(m+1)(m+2) \dots (m+p) = m^p + A_1 \cdot m^{p-1} + A_2 \cdot m^{p-2} + \dots + A_p,$$

posito $m - 1$ loco m , habebimus

$$m(m+1) \dots (m+p-1) = (m-1)^p + A_1(m-1)^{p-1} + A_2(m-1)^{p-2} + \dots + A_p.$$

Pariter erit

$$(m-1)m \dots (m+p-2) = (m-2)^p + A_1(m-2)^{p-1} + A_2(m-2)^{p-2} + \dots + A_p,$$

et ita deinceps. Ideo, facta substitutione ac terminis ordinatis, habebimus.

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p = m - \frac{p}{1}(m-1)^p + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}(m-2)^p - \dots \\
 + \Lambda_1 \left(m^{p-1} - \frac{p}{1}(m-1)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}(m-2)^{p-1} - \dots \right) \\
 + \Lambda_2 \left(m^{p-2} - \frac{p}{1}(m-1)^{p-2} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}(m-2)^{p-2} - \dots \right) \\
 \vdots
 \end{aligned}$$

Cum potestates binomiorum $m - 1, m - 2, m - 3 \dots$ in series evolutae fuerint, prodibit

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p = \phi_1 \cdot m^p + \frac{p \cdot p}{1} \phi_2 \cdot m^{p-1} - \frac{p \cdot p(p-1)}{1 \cdot 2} \phi_3 \cdot m^{p-2} + \frac{p \cdot p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \phi_4 \cdot m^{p-3} - \dots \\
 + \frac{p}{1} \left(1^{p-1} - \frac{p-1}{1} \cdot 2^{p-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \cdot 3^{p-1} - \dots \right) \\
 + \Lambda_1 \left\{ \phi_1 \cdot m^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1} \phi_2 \cdot m^{p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \phi_3 \cdot m^{p-3} + \dots \right\} \\
 \pm p \cdot \Lambda_1 \left(1^{p-2} - \frac{p-1}{1} \cdot 2^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \cdot 3^{p-2} - \dots \right) \\
 + \Lambda_2 \left\{ \phi_1 \cdot m^{p-2} + \frac{p(p-2)}{1} \phi_2 \cdot m^{p-3} - \frac{p(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2} \phi_3 \cdot m^{p-4} + \dots \right\} \\
 \pm p \cdot \Lambda_2 \left(1^{p-3} - \frac{p-1}{1} \cdot 2^{p-3} + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \cdot 3^{p-3} - \dots \right) \\
 \vdots
 \end{aligned}$$

ubi compendii causa posita fuere

$$\begin{aligned}
 \phi_1 = 1 - \frac{p}{1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} + \dots, \\
 \phi_2 = 1 - \frac{p-1}{1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots, \\
 \phi_3 = 1 - \frac{p-1}{1} \cdot 2 + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \cdot 3 - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4 + \dots, \\
 \phi_4 = 1 - \frac{p-1}{1} \cdot 2^2 + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \cdot 3^2 - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4^2 + \dots, \\
 \vdots
 \end{aligned}$$

Ast primum membrum hujusce aequationis nequit profecto per elementum m exhiberi, et cum idem evenire debeat de secundo membro, erit ideo $\varphi_1 = 0$, quoniam non alio modo termini multiplicati per m^p eliminari possunt. Tunc superscripta aequatio in hanc vertitur

$$\begin{aligned}
 1.2.3\dots p &= \frac{p \cdot p}{1} \varphi_2 \cdot m^{p-1} - \frac{p \cdot p(p-1)}{1.2} \varphi_3 \cdot m^{p-2} + \frac{p \cdot p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \varphi_4 \cdot m^{p-3} - \dots \\
 &\pm \frac{p}{1} \left\{ 1^{p-1} - \frac{p-1}{1} \cdot 2^{p-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \cdot 3^{p-1} - \dots \right\} \\
 &+ \Delta_1 \left\{ \frac{p(p-1)}{1} \varphi_2 \cdot m^{p-2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2} \cdot \varphi_3 \cdot m^{p-3} + \dots \right\} \\
 &\pm p \Delta_1 \left\{ 1^{p-2} - \frac{p-1}{1} \cdot 2^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \cdot 3^{p-2} - \dots \right\} \\
 &+ \Delta_2 \left\{ \frac{p(p-2)}{1} \varphi_2 \cdot m^{p-3} - \frac{p(p-2)(p-3)}{1.2} \varphi_3 \cdot m^{p-4} + \dots \right\} \\
 &\pm p \cdot \Delta_3 \cdot \left\{ 1^{p-3} - \frac{p-1}{1} \cdot 2^{p-3} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \cdot 3^{p-3} - \dots \right\} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Quoniam ex hac aequatione termini multiplicati per m^{p-1} eliminari debent, opus est, ut evadat $\varphi_2 = 0$, et ita ad aequationem deveniemus, quae monstrabit fieri debere $\varphi_3 = 0$, si ab ea terminos multiplicatos per m^{p-2} expellere velimus. Ita progredientes inferemus $\varphi_4 = 0$, $\varphi_5 = 0$, $\varphi_6 = 0$, \dots , atque generaliter

$$\varphi_{i+2} = 1 - \frac{p-1}{1} \cdot 2^i + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \cdot 3^i - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3} \cdot 4^i + \dots = 0.$$

Hinc etiam infertur

$$1^{p-2} - \frac{p-1}{1} \cdot 2^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \cdot 3^{p-2} - \dots = 0,$$

$$1^{p-3} - \frac{p-1}{1} \cdot 2^{p-3} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \cdot 3^{p-3} - \dots = 0,$$

.....

et ideo erit

$$(H) \quad 1.2.3\dots p = \pm \frac{p}{1} \left(1^{p-1} - \frac{p-1}{1} \cdot 2^{p-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \cdot 3^{p-1} - \dots \right).$$

Talis aequatio, si lubet, sub hac forma retineri potest

$$1.2.3\dots p = \phi_1 \cdot m^p + \frac{p \cdot p}{1} \phi_2 \cdot m^{p-1} - \frac{p \cdot p(p-1)}{1.2} \phi_3 \cdot m^{p-2} + \dots \\ = \pm \frac{p}{1} \left(1^{p-1} - \frac{p-1}{1} \cdot 2^{p-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \cdot 3^{p-1} - \dots \right),$$

quae etiam ad hanc traduci potest

$$(G) \quad 1.2.3\dots p = m^p - \frac{p}{1}(m-1)^p + \frac{p(p-1)}{1.2}(m-2)^p - \dots,$$

ut constat ex rebus expositis.

21. Dum vero ponatur $p = m$, habebitur

$$1.2.3\dots m = m^m - \frac{m}{1}(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m - \dots,$$

quae formula relata fuit a pluribus scriptoribus de rebus mathematicis (1), ac demonstrata per calculum *functionum derivatarum*, seu *differentiarum finitarum*.

Hic postremo notabimus, aequationem (H) demonstrare, in aequatione (G) elementum m ad potestates evectum esse quantitatem eidem aequationi extraneam.

22. Unicuique innotescit haberi ex formula binomii Newtoniani

$$\left(a_1 + \dots + a_i + b_1 + \dots + b_r \right)^m = \left(a_1 + \dots + a_i \right)^m \\ + m \left(a_1 + \dots + a_i \right)^{m-1} \cdot \left(b_1 + \dots + b_r \right) \\ + \dots + \left(b_1 + \dots + b_r \right)^m.$$

Ast satis perspicuum est numerum terminorum, qui proveniunt ex evolutione expressionis $(a_1 + \dots + a_i)^h$; eundem esse,

(1) Inter caetera videatur Franchini opus. t. 4. pag. 111. Labroni. 1820.

quam si evolvatur $[1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^h$; ideoque deducitur haec aequalitas

$$(K) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)} + 1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^m = [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^m \\ + [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^{m-1} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^{m-2} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^2 \\ + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^m.$$

Hinc sequitur, quemcumque numerum figuratum cujuscumque ordinis exprimi posse per alios numeros figuratos inferiorum ordinum. Ex hac eadem aequalitate (K) hoc elegans theorema oritur. « Quicumque numerus figuratus ordinis n^{esimi} ex « numero $2p+1$, seu $2p+2$ expressi (cum $2p$ vel $2p+1$ « sint ordines, qui praecedunt) repraesentari potest p ratio- « nibus in primo casu, atque $p+1$ vicibus in casu altero, « quoniam totidem modis numerus n in duas partes partiiri po- « test, prout fuerit impar, vel par. »

23. Si numerus n , qui numerorum figuratorum ordinem denotat, per $i+r$ exprimatur, ex eadem (K) aequalitate etiam aliud non minus elegans theorema ediscitur; videlicet « numerum figuratum n^{esimum} summa productorum constare, « quae ex m numeris alternatim inter se multiplicatis ab or- « dinibus $n-1$ praecedentibus desumptis obtinentur, qui or- « dines ab extremis aequae distent. Nempe numerus $(m+1)^{esimus}$ « ordinis i multiplicari debet per primum numerum ordinis « $n-i$; numerus m^{esimus} ordinis i multiplicetur per numerum « secundum ordinis $r=n-i$, et ita deinceps ac postea in « summam colligantur facta. »

Hic animadvertendum est, theorema n.º 7.º demonstratum ex praecedenti crui, uti patet ex formula (K), si in eadem ponatur $i=n$, $r=1$, atque $m-1$ loco m ; talis formula ob has substitutiones in formulam (D) immutatur.

24. Ex symbolis calculi hactenus adhibitis alia utilia, atque mira dimanant. Reapse illico habebimus

$$\begin{aligned}
 (L) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(x+y)}] &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(x)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(x)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(1)}] \\
 &\quad + [1^{(1)} + \dots + 1^{(x)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(2)}] \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + [1^{(1)} + \dots + 1^{(x)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(y)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(y)}].
 \end{aligned}$$

Sed ob aequationem (E) n.ⁱ 10.ⁱ §.i II.ⁱ scribi poterit

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] \text{ pro } [1^{(1)} + \dots + 1^{(x+y)}];$$

ita loco

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(x)}] \text{ ponatur } [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}];$$

itemque

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] \text{ substituatur pro } [1^{(1)} + \dots + 1^{(x)}],$$

et ita porro. Eodem pacto agatur quoad

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(y)}], [1^{(1)} + \dots + 1^{(2)}],$$

et caetera; et ideo post has transformationes aequatio sequens profluet

$$\begin{aligned}
 (M) \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}] \\
 &\quad + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] \cdot [1^{(1)} + 1^{(2)}] \\
 &\quad + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n-1)}] \cdot [1^{(1)} + 1^{(2)} + 1^{(3)}] \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + [1^{(1)} + 1^{(2)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] \\
 &\quad + [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}].
 \end{aligned}$$

Hic in primis, antequam praetergrediamur, notandum erit. « Nu-
 « merum $(x+y)$ *esimum* figuratum ordinis $(n+1)$ *esimi* esse
 « summam productorum, quae colliguntur si numeri figurati
 « bini multiplicentur alternatim ex indicibus x , ac y constan-
 « ter denotati, et ex ordinibus successivis, qui praecedunt,
 « usque ad $(n+1)$ *esimum* inclusive desumpti. »

Exempli causa numerus figuratus decimus quinti ordinis ad-
 aequat sextum numerum figuratum quinti ordinis multiplica-

tum per quartum numerum figuratum primi ordinis, ac numerum sextum quarti ordinis multiplicatum per quartum numerum figuratum secundi ordinis, et ita deinceps, dummodo facta, quae ex his multiplicationibus proveniunt, in summam colligantur; videlicet erit

$$715 = 126 \cdot 4 + 56 \cdot 4 + 21 \cdot 10 + 6 \cdot 20 + 1 \cdot 35.$$

Hoc theorema multam habet analogiam cum theoremate in numero praecedenti demonstrato; idemque sicuti casum particularem, quod n.º 14.º annotavimus, complectitur; idque statim compertum est, si ponatur $x = 1$, $y = n$, atque $n + 1 = m$.

24. Hoc dein inferitur; " quot sunt rationes, quibus in duas partes x, y numerus $x + y$ resolvi potest, tot quidem rationibus idem numerus figuratus obtineri potest; unde $x + y$ sive sit numerus par $2p$, sive impar $2p + 1$, in utroque casu in duas partes resolvi potest p rationibus, indeoque totidem modis idem numerus figuratus haberi poterit. "

25. Propter exposita e formula (M) prodibit

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)(x+y+1) \dots (x+y+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} &= \frac{x(x+1) \dots (x+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \\ &+ \frac{x(x+1) \dots (x+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \cdot \frac{y}{1} \\ &+ \frac{x(x+1) \dots (x+n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)} \cdot \frac{y(y+1)}{1 \cdot 2} \\ &\vdots \\ &+ \frac{y(y+1) \dots (y+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}. \end{aligned}$$

Haec aequalitas statim solutionem sequentis problematis praebet:

" Quomodo factum

$$(x+y)(x+y+1) \dots (x+y+n-1)$$

" (in quo littera n numerum quemcumque integrum denotet) exprimi posset per facta

$$\begin{aligned}
 & x(x+1) \dots (x+n-1) \\
 & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
 & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
 & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
 & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
 & y(y+1) \dots (y+n-1).
 \end{aligned}$$

Alio artificio idem problema a celeberrimo Cauchy resolutum fuit (1). Si vero x in $-x$, y in $-y$ immutentur, formulam (2) ejusdem Geometrae loco citato habebimus.

26. Ex formula (L) superius reperta faciliter hujusce problematis solutio etiam deduci potest.

« In urna sint m globuli partim albi, partim nigri. Supponatur in primis esse $m-s$ albos, ac s nigros; postea esse $m-s-1$ albos, ac $s+1$ nigros, inde $m-s-2$ albos ac $s+2$ nigros, et ita deinceps. Cum globulos $t+s$ extrahere debeamus, inter quos t sint albi, et s nigri, inquiritur, quinam sit numerus totus combinationum, sive mutationum. »

Parum attendenti patebit ad problema resolvendum esse valde accomodatam seriem (n. 4. §. II.).

$$\begin{aligned}
 & [1^{(1)} + \dots + 1^{(t+1)}]^{(m-s)-t} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(s+1)}]^{s-s} + [1^{(1)} + \dots + 1^{(t+1)}]^{(m-s-1)-t} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(s+1)}]^{(s+1)-s} \\
 & + [1^{(1)} + \dots + 1^{(t+1)}]^{(m-s-2)-t} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(s+1)}]^{(s+2)-s} + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(t+1)}]^{t-t} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(s+1)}]^{(m-t)-s}.
 \end{aligned}$$

Haec series propter citatam formulam (L) deducitur ex evolutione expressionis symbolicae

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(t+s+2)}]^{m-s-t},$$

quae aequat

$$\frac{(m-t-s+1)(m-t-s+2) \dots (m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (t+s+1)},$$

et haec est formula ad solutionem propositi problematis apta. (2)

27. Eodem pacto, quo actum est in numero vigesimo quinto, expedite exprimi poterit

$$(x+y+z)(x+y+z+1) \dots (x+y+z+n-1)$$

per facta

(1) Vide Op. cit. in Parte prima. pag. 100.

(2) Inspice commentariolum Geometrae Coste in Diario inscripto — Journal de Mathématiques par Liouville. t. 7. pag. 176. Année 1842.

$$\begin{aligned}
 &x(x+1) \dots (x+n-1) \\
 &y(y+1) \dots (y+n-1) \\
 &z(z+1) \dots (z+n-1) \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

quod constituit alterum problema praecedenti analogum.

Revera in primis accipiatur

$$\begin{aligned}
 [1^{(1)} + \dots + 1^{(x+y+z)}] &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(x+y)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(x+y)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(z)}] \\
 &+ [1^{(1)} + \dots + 1^{(x+y)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(z)}] \\
 &\vdots \\
 &+ [1^{(1)} + \dots + 1^{(x+y)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(z)}] \\
 &+ [1^{(1)} + \dots + 1^{(z)}].
 \end{aligned}$$

sed

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(x+y)}], [1^{(1)} + \dots + 1^{(x+y)}], \dots \dots \dots$$

eadem ratione, uti supra, evolvi queunt in series; videlicet loco prioris expressionis scribi poterit

$$\begin{aligned}
 [1^{(1)} + \dots + 1^{(x)}] &+ [1^{(1)} + \dots + 1^{(x)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(y)}] \\
 &+ [1^{(1)} + \dots + 1^{(x)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(y)}] \\
 &\vdots \\
 &+ [1^{(1)} + \dots + 1^{(x)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(y)}] \\
 &+ [1^{(1)} + \dots + 1^{(y)}];
 \end{aligned}$$

et ita agendum erit quoad secundam, ac alias expressiones symbolicas, et ideo emersurum erit

Ex his attendenti patebit extendi posse theorema, de quo mentionem fecimus n. 23.

Quoniam habemus

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(x+y+z)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}],$$

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(x)}] = [1^{(1)} + \dots + 1^{(n+1)}]$$

et caetera, ita aequalitas subsequens prodibit:

$$\frac{(x+y+z)(x+y+z+1) \dots (x+y+z+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \frac{x(x+1) \dots (x+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \frac{x(x+1) \dots (x+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \cdot \frac{y}{1} + \frac{x(x+1) \dots (x+n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)} \cdot \frac{y(y+1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x(x+1) \dots (x+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \cdot \frac{z}{1} + \frac{x(x+1) \dots (x+n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)} \cdot \frac{yz}{1} + \dots$$

Haec formula solutionem problematis propositi continet, ac nos edocet, quomodo alia similia resolvere debeamus, quum numerus elementorum augetur. (1)

28. Ex Newtoniana binomii formula (§. II. n. 3.) substitutis loco x successive quantitibus notis $a_1, a_2, a_3, \dots a_i$ atque b in $-b$ immutato, hoc aequationum systema prodibit

(1) De hoc argumento laudati Geometrae Cauchy citatum opus inspiciatur. pag. 102.

$$(a_1+b)^m = a_1^m + ma_1^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a_1^{m-2}b^2 + \dots,$$

$$(a_2+b)^m = a_2^m + ma_2^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a_2^{m-2}b^2 + \dots,$$

$$(a_3+b)^m = a_3^m + ma_3^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a_3^{m-2}b^2 + \dots,$$

⋮

$$(a_i+b)^m = a_i^m + ma_i^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a_i^{m-2}b^2 + \dots,$$

Interea ex prima aequatione aliae singillatim subducantur (uti n.º 1.º §. i. I. actum est), et prima membra aequationum, quae obtinentur, per

$$(a_1+b)^i - (a_2+b)^i, (a_1+b)^i - (a_3+b)^i, (a_1+b)^i - (a_4+b)^i, \\ (a_1+b)^i - (a_5+b)^i, \dots$$

successive dividantur; itemque in secundis membris fiat divisio per binomia

$$a_1 - a_2, a_1 - a_3, a_1 - a_4, a_1 - a_5, \dots$$

et ideo novum aequationum systema habebimus, videlicet

$$[(a_1+b)^{m-1} + (a_2+b)^{m-1}] = [a_1 + a_2] + m[a_1 + a_2]b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} [a_1 + a_2]b^2 + \dots,$$

$$[(a_1+b)^{m-1} + (a_3+b)^{m-1}] + [a_1 + a_3] + m[a_1 + a_3]b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} [a_1 + a_3]b^2 + \dots,$$

$$[(a_1+b)^{m-1} + (a_4+b)^{m-1}] = [a_1 + a_4] + m[a_1 + a_4]b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} [a_1 + a_4]b^2 + \dots$$

⋮

Si ex istarum prima aequatione aliae successive denuo subducantur, et postea prima novarum enascentium aequationum membra per

$$(a_2+b)^i - (a_3+b)^i, (a_2+b)^i - (a_4+b)^i, (a_2+b)^i - (a_5+b)^i, \dots,$$

et secunda per

$$a_2 - a_3, a_2 - a_4, a_2 - a_5, \dots,$$

dividantur, hoc aequationum systema eruetur.

$$[(a_1+b)^i + (a_2+b)^{m-2} + (a_3+b)^i] = [a_1+a_2+a_3]^{m-2} + m[a_1+a_2+a_3]^{m-3} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} [a_1+a_2+a_3]^{m-4} b^2 + \dots,$$

$$[(a_1+b)^i + (a_2+b)^{m-2} + (a_4+b)^i] = [a_1+a_2+a_4]^{m-2} + m[a_1+a_2+a_4]^{m-3} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} [a_1+a_2+a_4]^{m-4} b^2 + \dots,$$

⋮

Hoc pacto progredientes, uti n.º 1.º §. i I. i, ad hanc generalem formulam pervenire possumus

$$[(a_1+b)^i + (a_2+b)^{m-1} + \dots + (a_{i+1}+b)^i] = [a_1+a_2+\dots+a_{i+1}]^{m-i} + m[a_1+a_2+\dots+a_{i+1}]^{m-i-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} [a_1+a_2+\dots+a_{i+1}]^{m-i-2} b^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-i)} b^{m-i}.$$

Et haec nova formula ad alias praecipue numerorum figurarum elegantias demonstrandas peraccomodata erit.

29. Si ponamus $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{i+1}$, habebimus

$$(N) [1^{(1)} + \dots + 1^{(i+1)}]^{m-i} (a_1+b)^{m-i} = [1^{(1)} + \dots + 1^{(i+1)}]^{m-i} a_1^{m-i} + \frac{m}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(i+1)}]^{m-i-1} a_1^{m-i-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(i+1)}]^{m-i-2} a_1^{m-i-2} b^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-i)} a_1^{m-i} b^{m-i}.$$

Posito $b = 1$, atque $a_1 = -1$, profluit

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(i+1)}]^{m-i} - \frac{m}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(i+1)}]^{m-i-1} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-i)} = 0.$$

Si vero ponatur $i + 1 = r$, $m - i = \theta + 1$, obtinebimus

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] - \frac{\theta + r}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] + \frac{(\theta + r)(\theta + r - 1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] - \frac{(\theta + r)(\theta + r - 1)(\theta + r - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] + \dots \pm \frac{(\theta + r)(\theta + r - 1) \dots r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\theta + 1)} = 0.$$

Hinc infertur: « si $(x - 1)^{\theta + r}$ in seriem evolvatur, et primi « $\theta + 2$ termini hujusce seriei accipiantur, ac loco potentia- « rum quantitas x successivi descendentes termini $\theta + 2$ ex nu- « meris figuratis ordinis r^{esimi} desumpti substituantur, dummo- « do ex termino $(\theta + 2)^{esimo}$ substitutio initium habeat, series « terminorum zero aequalis prodibit. » (1)

30. Si in hac postrema formula substituatur p in locum $\theta + 1$, atque n in locum $\theta + r$, eruetur

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] - \frac{n}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}] - \dots \pm \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} = 0,$$

quae aequatio hoc theorema comprehendit: « si $p + 1$ termi- « nos accipiamus ex numeris figuratis descendentibus ordinis « n^{esimi} , dummodo a numero $(p + 1)^{esimo}$ incipiamus, atque « eos multiplicemus successive per terminos, qui ex evolgen- « do $(1 - 1)^n$ eliciuntur, summa habebitur, quae zero ae- « qualis erit. » Jam Dominus Terquem admonuit, formulam, quam nunc retulimus, relationem inter numeros figuratos comprehendere, atque in id recidere aequationem Geometrae Stern, cum omnia elementa $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ unitatem aequent. (2)

31. Si in formula (N) ponatur $a_i = b = 1$, erit

(1) Citatum opus Cauchy observetur. pag. 634.

(2) Journal de M. Liouville. vol. 3. pag. 556. Année 1838.

$$\begin{aligned}
 2^{\theta+1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^{\theta+1} &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^{\theta+1} + \frac{\theta+r}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^{\theta} \\
 &\quad + \frac{(\theta+r)(\theta+r-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^{\theta-1} \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \frac{(\theta+r)(\theta+r-1) \dots (r-1)r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} = 0.
 \end{aligned}$$

Exinde hoc theorema agnoscitur: « Si $\theta + 2$ primi termini « descendentes ex numeris figuratis ordini r^{esimi} assumantur in « summam collecti, ac per $\theta + 2$ successivos terminos seriei, « quae ab $(1 + 1)^{\theta+r}$ evolvendo obtinetur, multiplicentur, nu- « merus figuratus $(\theta + 2)^{esimus}$ ejusdem ordinis per $2^{\theta+1}$ multi- « plicatus prodibit. »

32. Formula vero (N) ita scribi poterit

$$\begin{aligned}
 [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-i+1)}]^i (a+b)^{m-i} &= [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-i+1)}] a^{m-i} \\
 &\quad + \frac{m}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-i)}] a^{m-i-1} \cdot b \\
 &\quad + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(m-i-1)}] a^{m-i-2} \cdot b^2 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \frac{m(m-1) \dots (i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-i)} \cdot b^{m-i}.
 \end{aligned}$$

Haec aequalitas breviter, et expedite ducit ad inferendum id, quod deduxit Geometra Querret inquisitionibus paulisper prolixis. De hac re, si lubet, inspiciatur illius commentariolum, dummodo animadvertatur, hanc formulam a nobis repertam diversis symbolis ab eo esse relatam in linea sexta pag. 194 voluminis decimi quinti Annalium Gergonne, atque ut formula Geometrae Querret in nostram recidat, ponendum erit $m - i = r$, sive $i = m - r$.

33. Posito $i + 1 = r$, $m - i = \theta + 1$ infertur etiam ex formula generali n.º 28. « quantitatem

$$[(a_1 + b)^{\theta+1} + (a_2 + b)^{\theta+1} + \dots + (a_{r+1} + b)^{\theta+1}] - [a_1 + a_2 + \dots + a_r]$$

« esse divisibilem per $\theta + r$ absque residuo, dummodo $\theta + r$
 « sit numerus primus, quaecumque sint quantitates $a_1, a_2, a_3,$
 « $a_r.$ »

34. Antequam ad alia praetergrediamur, bonum erit nonnulla quidem alia addere de numeris figuratis, quoniam colligata sunt cum eis, quae pedetentim de iisdem numeris exposuimus.

Hactenus cum occasio nobis obvenit de numeris figuratis sermonem habendi, systema numerorum perpendimus, qui proveniunt ex numeris figuratis primi ordinis omnibus expressis ab unitate; et hoc est systema *ordinarium numerorum figuratorum*. Ast nunc breviter loquemur de iis, quorum systema profluit ex numeris figuratis primi ordinis expressi a serie

$$1, \delta, \delta, \delta, \delta, \dots;$$

ubi δ est quantitas quaecumque haud variabilis.

Ex ratione, qua in hoc systemate numeri figurati deducuntur, infertur terminum generalem esse expressum a formula (1)

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] \delta;$$

videlicet haec formula numerum figuratum ordinis r^{esimi} denotat. Hinc theorema sequens deducitur: « Numerus quicumque
 « figuratus m^{esimus} ordinis r^{esimi} , qui ad systema pertinet, cujus
 « differentia constans est δ , aequat numerum figuratum m^{esimum}
 « ordinis $(r-1)^{\text{esimi}}$ systematis ordinarii, dummodo huic ad-
 « datur numerus figuratus $(m-1)^{\text{esimus}}$ subsequentis ordinis
 « r^{esimi} systematis ordinarii multiplicatus per δ . »

35. In quocumque systemate vero invenientur numeri figurati dati ordinis r^{esimi} , qui ex numeris figuratis praecedentis ordinis $(r-1)^{\text{esimi}}$ systematis ordinarii prodibunt multiplicati per indicem loci, quam tenent.

Revera superius formulam generalem obtinuimus

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] \delta.$$

Ast generaliter habetur

(1) Inspice opus Mathematicae purae Francoeur in vol. 2. pag. 23.

$$(1) [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}] = \frac{m-p+1}{i-1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(i-1)}];$$

hinc si ponatur $i = r$, $p = 2$, erit

$$(2) [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] \delta = \left(1 + \frac{m-1}{r-1} \cdot \delta\right) [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}].$$

Posito $\delta = r - 1$ habetur generaliter haec formula

$$m [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}],$$

quae nostram assertionem ostendit. Exempli causa sit $\delta = 3$, ac numeri figurati quarti ordinis in hoc systemate habentur expressi a serie

$$1, 6, 18, 40, 75, 126, \dots,$$

sive

$$1.1, 3.2, 6.3, 10.4, 15.5, 21.6, \dots,$$

qui derivantur ex numeri figuratis ordinariis tertii ordinis multiplicatis singillatim per indicem loci, quem occupant.

36. Si in formula (2) successive ponatur $m = 1, = 2, = 3, \dots$ et postea quae obtinentur, simul addantur, habebimus summam numerorum figuratorum usque ad m^{esimum} , quodcumque sit systema. Erit ideo

$$1 + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}]^2 + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}]^{m-1} \\ + \left\{ \frac{1}{r-1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] + \frac{2}{r-1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}]^2 + \dots + \frac{m-1}{r-1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}]^{m-1} \right\} \delta.$$

Inde si formula (1) utamur, haec series repraesentari poterit hoc modo

$$1 + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}]^2 + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}]^{m-1} \\ + \left\{ 1 + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^2 + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^{m-2} \right\} \delta,$$

quae in hanc recidit

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r+1)}] \delta.$$

Hinc patet relatio, quam allata summa habet cum numeris figuratis ordinariis.

37. Hic nobis se offert occasio etiam demonstrandi sequens

elegans theorema de numeris figuratis ordinariis, quod eruitur ex aequalitate

$$0. [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] + 1. [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] + 2. [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] + \dots \\ \dots \dots \dots + (m-1) [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] = (r-1) [1^{(1)} + \dots + 1^{(r+1)}],$$

et haec patet ex nuper dictis. Ergo « numerus figuratus
 « $(m-1)^{esimus}$ ordinis $(r+1)^{esimi}$ multiplicatus per $(r-1)$
 « erit aequalis summae numerorum figuratorum ordinis $(r-1)$
 « esimi ex primo usque ad m^{esimum} singulatum multiplicatorum
 « per indicem loci, quem tenent, dempta unitate. »

Ex quo etiam deducitur « summam successivam numero-
 « rum figuratorum cujuscumque ordinis (quotquot sint) mul-
 « tiplicatorum singillatim per indicem loci, quem tenent, dem-
 « pta unitate, dividi posse per indicem ordinis eorundem nu-
 « merorum »

Hinc statim aliud theorema infertur « Quicumque numerus
 « figuratus per indicem loci, quem tenet, dempta unitate, mul-
 « tiplicatus dividi potest sine residuo ex indice ordinis sui.

38. De numeris figuratis cujuscumque systematis exstant theoremata, uti demonstrata fuere de numeris figuratis systematis ordinarii. Exemplum praebetur. Cum sint (n. 15).

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}]^{m-1} = [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}]^{m-i-1} + \frac{i}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-2)}]^{m-i} \\ + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-3)}]^{m-i+1} + \dots \dots \dots \\ + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-i-1)}]^{m-1},$$

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^{m-2} = [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^{m-i-2} + \frac{i}{1} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}]^{m-i-1} \\ + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-2)}]^{m-i} + \dots \dots \dots \\ + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-i)}]^{m-2},$$

tum infertur

$$\begin{aligned}
& [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] \delta = [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] \delta \\
& \quad + \frac{i}{1} \left\{ [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-2)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-1)}] \delta \right\} \\
& \quad + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} \left\{ [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-3)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-2)}] \delta \right\} \\
& \quad \vdots \\
& \quad + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-i-1)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r-i)}] \delta.
\end{aligned}$$

Videlicet « si i numeros figuratos in summam colligamus, « ac ex eo numero incipiamus, qui $(m-i)^{esimum}$ locum tenet, atque successive indicem ordinis imminuamus ac indicem loci augeamus unitate, eisdemque numeros singulatim « per terminos evolutionis $(1+1)^i$ multiplicemus, numerum « figuratum ordinis r^{esimi} , qui locum m^{esimum} tenet, obtinebimus. »

Sint $m=5$, $r=5$, $i=3$; erit

$$4 + \delta + \frac{3}{1}(6+4\delta) + \frac{3}{1}(4+6\delta) + 1 + 4\delta = 35 + 35\delta,$$

et hoc denotat numerum figuratum ordinis quinti, qui quintum locum occupat.

Multa alia de numeris figuratis a nobis deduci poterint, ast brevitatis gratia praetermittuntur.

39. Per expositum calculum symbolicum faciliter sequens problema resolvi potest: « Quot termini sunt negativi, dum « ad potentiam m^{esimam} polynomium evehitur, in quo i termini sunt negativi «

Numerus terminorum, qui ab evolutione potentiae m^{esimae} polynomii n terminos complectentis gignuntur, symbolice exprimitur ex

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}].$$

Interea si polynomium i terminos negativos habeat atque r positivos, ad numerum terminorum potestatis m^{esimae} denotandum scribi poterit

$$[-1^{(1)} - 1^{(2)} - \dots - 1^{(i)} + 1^{(1)} + 1^{(2)} + \dots + 1^{(r)}].$$

Gradus m est vel par, vel impar; in primo casu exprimitur m per $2p$, ac evolvendo in seriem erit

$$\begin{aligned} & [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^m - [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^{m-1} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] \\ & \quad + [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^{m-2} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^2 \\ & \quad - \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^m; \end{aligned}$$

et ideo numerus terminorum negativorum exprimetur a formula

$$(1') \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^{m-1} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^{m-3} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^3 + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^{m-1}.$$

Si vero m est impar, sequens polynomium habebimus, quod terminos negativos exprimet.

$$(2') \quad [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^m + [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^{m-2} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^2 + \dots + [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^{m-1}.$$

40. Ab expositis haec veniunt notanda. Si polynomium detur, ita ut ejusdem radix possit accurate extrahi, opus erit, ut illud sit potentia, quae constet ex debito terminorum numero. Exempli gratia si polynomium propositum h terminos continet, ut secunda potentia sit, ob formulam n.º 12.º hujusce paragraphi adinventam (posito $m=2$), aequatio secundi gradus quoad n resolvenda erit, videlicet

$$\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = h.$$

Interea si haec formula reales valores, atque integros pro littera n exhibebit, tunc polynomium propositum, quoad numerum terminorum, quadratum perfectum esse poterit. Quotiescumque vero negativos terminos polynomium propositum habeat, hi per k denotentur, si m est par (ut patet ex formula (1') praecedentis numeri), hanc aequationem habebimus

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^{m-1} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}]^{m-3} \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}]^3 + \dots = k;$$

sive, si m est impar, nobis erit altera

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}] + [1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] + \dots = k.$$

Cum sit $r = n - i$, in his aequationibus elementum i erit quantitas incognita. Interea si loco i valores reales, atque integros obtinebimus, tunc secunda conditio expleta erit, ut polynomium propositum perfecta sit potentia. Quod si alterutra conditio deerit, omne tentamen ad radicem extrahendam omnino supervacuum erit, cum finitus terminorum numerus optetur. Sit exempli gratia $m = 2$, $h = 28$, $k = 12$; his suppositionibus prodibit aequatio

$$n(n+1) = 2 \cdot 28.$$

unde erit $n = 7$. Prima conditione expleta, an altera adimpleatur, experiendum erit.

Cum m sit par, ex duabus superius constitutis aequationibus prima accipitur, et ideo habebimus

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(i)}] \cdot [1^{(1)} + \dots + 1^{(r)}] = 12;$$

videlicet

$$i \cdot r = 12.$$

Ast quum $n = 7$ invenerimus, tum erit $r = 7 - i$, et in hoc casu aequatio

$$i^2 - 7i = -12$$

resolvenda erit, ex qua eruuntur $i = 3$, $i = 4$. Igitur propositum polynomium complectens terminos viginti octo, quod ex radice complectenti septem terminos derivare poterit, uti perfectum quadratum, quoad numerum terminorum se praefert, inter quos tres, vel quatuor termini negativi esse possunt.

41. Calculo symbolico, cujus non paucas applicationes hactenus fecimus, etiam in sequenti problemate combinationum resolvendo uti possumus. « Quot modis numerus m unitatum, « vel rerum inter n individua, seu personas distribui potest. »

Stabiliatur symbolum $(1^{(e)})^f$ generatim denotare f unitates distributas personae e ; per $(1^{(e)})^f \cdot (1^{(i)})^k$ denotentur f unitates distributae individuo e , et k unitates personae i , et ita deinceps de caeteris symbolis similibus.

Hoc posito observetur in primis, unicuique n individuorum

saltem unam unitatem distribuendam esse; tunc vero unitates $m - n$ distribuendae remanent, quae omnes primo individuo dari possunt, vel omnes secundo, et ita porro, unde rationum numerus, quibus hoc effici potest, exprimitur a formula

$$(1'') \quad (1^{(1)})^{m-n} + (1^{(2)})^{m-n} + (1^{(3)})^{m-n} + \dots + (1^{(n)})^{m-n}.$$

Unitates vero, quae remanent, distribui poterunt etiam sequenti modo. Postquam unicuique individuo una unitas data fuit, ex unitatibus remanentibus distribui poterunt $m - n - 1$ unitates primo individuo, et altera secundo individuo, sive tertio et caet.; vel potius distribui $m - n - 1$ unitates ex remanentibus poterunt secundo individuo, et aliae primo, vel tertio, vel quarto et caet. Hinc secundam seriem habebimus

$$(2'') \quad (1^{(1)})^{m-n-1} \cdot 1^{(2)} + (1^{(1)})^{m-n-1} \cdot 1^{(3)} + \dots + (1^{(2)})^{m-n-1} \cdot 1^{(1)} + \dots,$$

quae denotabit alias rationes, quibus nota distributio fieri potest.

Praeterea unitates, quae restant, distribui poterunt hoc modo; unitates $m - n - 2$ dari poterunt primo individuo, ac duae secundo, sive una secundo, et altera tertio individuo; vel etiam dare possumus duas unitates primo individuo, seu duas tertio et ita de caeteris. Exinde prodibit nova series

$$(3'') \quad (1^{(1)})^{m-n-2} (1^{(2)})^2 + (1^{(1)})^{m-n-2} (1^{(2)})^1 \cdot (1^{(3)})^1 + (1^{(2)})^{m-n-2} (1^{(1)})^2 + \dots,$$

quae repraesentabit alios modos distribuendi res propositas. Ex seriebus interim (1''), (2''), (3'') in summam collectis habebitur polynomium

$$\begin{aligned} & (1^{(1)})^{m-n} + (1^{(2)})^{m-n} + (1^{(3)})^{m-n} + \dots + (1^{(n)})^{m-n} \\ & + (1^{(1)})^{m-n-1} (1^{(2)})^1 + (1^{(1)})^{m-n-1} (1^{(3)})^1 + \dots + (1^{(2)})^{m-n-1} (1^{(1)})^1 + \dots \\ & + (1^{(1)})^{m-n-2} (1^{(2)})^2 + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

quod est evolutio quantitatis symbolicae

$$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}];$$

quae quantitas vero manifeste exprimitur ex

$$\frac{(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}.$$

Ad eandem formulam per diversum iter pervenit laudatus Brianchon. (1)

Methodus, quam secuti sumus, non solum faciliter nos ducit ad numerum rationum determinandum, quibus unitates distribui possunt, sed etiam de modis, qui actu perfici queunt, nos admonet, ac quomodo talis distributio fieri debeat, sub oculos projicit. Exempli gratia ponamus $m = 6, n = 4$; tunc numerus rationum, quibus distributiones efficiendae sunt, erit decem, unde

$$\begin{aligned} [1^{(1)} + 1^{(2)} + 1^{(3)} + 1^{(4)}]^2 = & 1^{(1)2} + 1^{(2)2} + 1^{(3)2} + 1^{(4)2} \\ & + 1^{(1)1} \cdot 1^{(2)1} + 1^{(1)1} \cdot 1^{(3)1} + 1^{(1)1} \cdot 1^{(4)1} \\ & + 1^{(2)1} \cdot 1^{(3)1} + 1^{(2)1} \cdot 1^{(4)1} + 1^{(3)1} \cdot 1^{(4)1}. \end{aligned}$$

Exinde quisque videt unam unitatem unicuique individuorum dari posse, et postea alias duas vel primo, vel secundo, vel tertio, vel quarto individuo; sive potius unam unitatem unicuique individuorum dari posse, et ex duabus unitatibus residuis unam primo, et alteram secundo; seu unam primo, et alteram tertio; vel unam primo, et alteram quarto. Vel etiam ex duabus unitatibus residuis una dari potest secundo individuo, ac altera tertio; sive una secundo individuo, altera quarto; seu denique ex duabus unitatibus residuis una dari potest tertio individuo, et altera quarto. Formula, quae problema resolvit, in id manifeste recidit, ut si polynomium

$$1^{(1)} + 1^{(2)} + \dots + 1^{(n)}$$

ad potentiam $(m - n)^{esimam}$ evehatur, dummodo coefficientes terminorum evolutionis praetermittantur.

(1) Locus cit. videatur. pag. 65.

§. III.

De aliis proprietatibus numerorum.

1. Hic in primis expedit problema ab aliis jam resolutum denuo pertractare, inter quos perillustis Mainardi (1) recensendus est, ex quo problemate consequenter nonnulla digna observatu prodibunt. Problema, de quo loquimur, ita enunciari potest. « Exquirere aequationem

$$x^n + \Lambda_1 x^{n-1} + \Lambda_2 x^{n-2} + \dots + \Lambda_n = 0,$$

« ejus radices sint

$$m, m+h, m+2h, \dots, m+(n-1)h.$$

Una quaevis harum radicum littera *a* denotetur, et subsequens ab *a+h*. Propter res in §. I.º perspectas optatam aequationem scribere poterimus, uti sequitur

$$(A') \quad [a+(a+h)^I]^{n-1} + \Lambda_1 [a+(a+h)^I]^{n-2} + \Lambda_2 [a+(a+h)^I]^{n-3} + \dots + \Lambda_{n-1} = 0.$$

Hinc evolvendo statim deducitur

$$\begin{aligned} [a+(a+h)^I]^{n-1} &= na^{n-1} + (1+2+3+\dots+(n-1))ha^{n-2} \\ &+ \left(1+3+6+\dots+\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}\right)h^2a^{n-3} \\ &+ \left(1+4+10+\dots+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1.2.3}\right)h^3a^{n-4} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

sive ab expositis de numeris figuratis (§. II.º n.º 7.) eruitur

$$\begin{aligned} [a+(a+h)^I]^{n-1} &= na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}ha^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h^2a^{n-3} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}h^3a^{n-4} + \dots \end{aligned}$$

(1) Elegantissimae, ac ingeniosae hujus Geometrae investigationes observentur de doctrina aequationum. Par.º I.º pag. 63.

In hac aequalitate si $n - 1$ loco n substituitur, habebimus

$$[a + (a+h)^I] = (n-1)a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} h a^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^2 a^{n-4} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} h^3 a^{n-5} + \dots$$

atque deinde

$$[a + (a+h)^I] = (n-2)a^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} h a^{n-4} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^2 a^{n-5} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} h^3 a^{n-6} + \dots$$

His animadversis superior aequatio (A') post substitutiones, et postquam termini ordinati fuerint juxta elementum a , evadit

$$(B') \quad \varphi_0 \cdot a^{n-1} + \varphi_1 \cdot a^{n-2} + \varphi_2 \cdot a^{n-3} + \dots + \varphi_{n-1} = 0,$$

ubi

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= n, \quad \varphi_1 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h + (n-1)A_1, \\ \varphi_2 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot A_1 h + (n-2)A_2, \\ \varphi_3 &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} h^3 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_1 h^2 \\ &\quad + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \cdot A_2 h + (n-3)A_3; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Si vero loco a scribatur x , aequatio carens radice..... $m + (n - 1)h$ habebitur, uti paullulum attendenti patebit ex aequatione (A'). Ob multiplicationem igitur aequationis (B') per factorem linearem $x - (m + (n - 1)h)$ obtinebimus

$$\begin{aligned} \varphi_0 \cdot x^n + (\varphi_1 - (m + (n-1)h)\varphi_0) x^{n-1} + (\varphi_2 - (m + (n-1)h)\varphi_1) x^{n-2} \\ + (\varphi_3 - (m + (n-1)h)\varphi_2) x^{n-3} + (\varphi_4 - (m + (n-1)h)\varphi_3) x^{n-4} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Ex comparatione hujus cum aequatione proposita generatim inferitur

$$(C') \quad \varphi_0 \cdot \Delta_r = \varphi_r - (m + (n-1)h)\varphi_{r-1}.$$

Exinde, valoribus restitutis a symbolis $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ denotatis, prodibit

$$\begin{aligned}
 r A_r = & \frac{n-(r-1)}{1 \cdot 2} ((n-r)h - 2(m+(n-1)h)) A_{r-1} \\
 & + \frac{(n-(r-1))(n-(r-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3} ((n-r)h^2 - 3(m+(n-1)h)h) A_{r-2} \\
 & + \frac{(n-(r-1))(n-(r-2))(n-(r-3))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} ((n-r)h^3 - 4(m+(n-1)h)h^2) A_{r-3} \\
 & \vdots \\
 & + \frac{(n-(r-1))(n-(r-2)) \dots (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)r} ((n-r)h^{r-1} - r(m+(n-1)h)h^{r-2}) A_1 \\
 & + \frac{(n-(r-1)) \dots (n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r(r+1)} ((n-r)h^r - (r+1)(m+(n-1)h)h^{r-1}).
 \end{aligned}$$

Hac universali formula singillatim coefficients $A_1, A_2, A_3 \dots$ determinabimus, sumpto successive $r=1, =2, =3 \dots$ et ideo propositum problema resolutum erit.

2. Si in formula, quae generatim exprimit A_r , loco m substituitur h , tunc expressio

$$(n-r)h^r - (r+1)(m+(n-1)h)h^{r-1}$$

in hanc vertitur

$$-r(n+1)h^r,$$

et ideo extremus terminus dividi potest per $n+1$.

Quando accipiatur $r=1$, habebimus

$$A_1 = -\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot h.$$

Idcirco cum A_2 ex binomio repraesentetur, cujus primus terminus per A_1 , ac alter per $n+1$ multiplicatur; similiter cum A_3 a trinomio exhibeatur, cujus primus terminus per A_2 , secundus per A_1 , ac ultimus per $n+1$ multiplicatur, et idem sermo sit de aliis coefficientibus A_4, A_5, \dots patet manifeste omnes coefficients A_1, A_2, A_3, \dots ex numero $n+1$, dummodo hic numerus sit primus, dividi posse, cum adimpleatur

conditio $r < n$. Supposito $n + 1$ numero primo, et $r = n$, aequationem hujus formae habemus

$$A + h = \frac{1}{n} (\psi_1 \cdot A^{n-1} + \psi_2 \cdot A^{n-2} + \dots + \psi_{n-1} \cdot A_1),$$

ex qua perinsigne theorema Wilsonii patet. (1)

3. Ab aequatione (C'), posito $m = h$, deducitur

$$\varphi_0 \cdot A = \varphi_r - nh \cdot \varphi_{r-1}.$$

Hinc, cum sit $\varphi_0 = n$, per successivas substitutiones habentur aequationes

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= n\Lambda_1 + n^2h, \quad \varphi_2 = n\Lambda_2 + n^2h\Lambda_1 + n^3h^2, \\ \varphi_3 &= n\Lambda_3 + n^2h \cdot \Lambda_2 + n^3h^2 \cdot \Lambda_1 + n^4h^3; \text{ et caet.} \end{aligned}$$

Ex his infertur generatim

$$\varphi_r = \ell_0 \cdot A + \ell_1 \cdot A_{r-1} + \dots + \ell_{n-1} \cdot A_1 + n^{r+1} \cdot h^r.$$

Aliunde vero inspicientes expressiones symbolorum $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ quas (n. 2) invenimus, generaliter deducimus

$$\varphi_r = (n-r)A_r + \dots + \frac{(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} h^{r-1} A_1 + \frac{n(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r(r+1)} h^r.$$

Instituta comparatione inter expressiones symboli φ_r , liquet esse

$$\frac{(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r(r+1)} - n^r$$

quantitatem divisibilem per $n + 1$ numerum primum, quodcumque sit r , dummodo $< n$.

4. Posito $m = h = 1$, radices aequationis

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n = 0$$

sunt numeri $1, 2, 3, \dots, n$, quos per $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ repraesentabimus.

Hinc faciliter demonstrari poterit « quantitatem symbolice expressam a

(1) Vide opus Legendrii inscriptum = Essai sur la Théorie des nombres. pag. 167. =

$$(D') \quad \left[a + a_{i+1} + \dots + a_{i+r} \right]$$

esse divisibilem per $n + 1$ numerum primum. »

Reapse patet exstare aequationem

$$(D') \quad \left[a + \dots + a_{i+r} \right] + \Lambda_1 \left[a + \dots + a_{i+r} \right] \\ + \Lambda_2 \left[a + \dots + a_{i+r} \right] + \dots + \Lambda_{n-r} = 0.$$

Quando $n + 1$ sit numerus primus, habentur $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_{n-1}$ divisibiles per eundem numerum, et ideo divisibilis erit quantitas symbolice ex (D') expressa, uti enunciatum fuit.

5. Loco a_i , substitui poterit $p_i(n + 1) + a_f$; pro a_{i+1} substitui poterit $p_{i+1}(n + 1) + a_k$; pariterque in locum a_{i+2} ponere possumus $p_{i+2}(n + 1) + a_g$, et ita deinceps, ubi factores $p_i, p_{i+1}, p_{i+2} \dots$ sunt numeri integri; ac post substitutiones quantitas etiam divisibilis per numerum primum $n + 1$ obtinebitur. Reapse sit factum $a_i a_{i+1} \dots a_{i+h-1}$ una quaevis e combinationibus provenientibus ex evolutione quantitatis symbolicae

$$\left[a + \dots + a_{i+r} \right],$$

quae combinatio constabit h elementis sive identicis, sive partim identicis partim inaequalibus, sive omnibus inaequalibus, cum sit $h = m - r$. Relata combinatio, substitutis valoribus, quos supra indicavimus, vertetur in

$$\left(p_i^{(n+1)+a_f} \right) \left(p_{i+1}^{(n+1)+a_k} \right) \dots \left(p_{i+h-1}^{(n+1)+a_e} \right).$$

Multiplicatione absoluta, polynomium habebimus hujusce formae

$$B_1(n+1)^h + B_2(n+1)^{h-1} + \dots + B_h(n+1) + a_f a_k \dots a_o.$$

Polynomia similia eruentur ex unoquolibet termino evolutionis quantitatis symbolicae (D') post debitas substitutiones, et ideo ista quantitas symbolica ad hanc formam reduci poterit

$$f(n+1) + \left[a + a_{i+1} + \dots + a_{i+r} \right],$$

ubi $f(n+1)$ polynomium repraesentat, cujus termini omnes per $n+1$ multiplicantur. Hinc faciliter intelligitur (quicumque sint valores quantitatum $a_i, a_{i+1} \dots$ dummodo non multiples numero $n+1$, ac per eundem numerum divisi residua omnia diversa suppeditent) esse

$$\left[a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+r} \right]$$

quantitatem exacte divisibilem per numerum primum $n+1$

6. Hic sicuti occasio perbella se praefert, celeberrimum Fermatii theorema demonstrabimus uti consequentiam, quae ab expositis dimanat.

Ponatur $r=1$ in aequatione (D'), et erit

$$\left[a_i^{n-1} + a_f \right] + \Lambda_1 \left[a_i^{n-2} + a_f \right] + \dots + \Lambda_{n-1} = 0,$$

cum a_i, a_f sint duae quaecumque radices aequationis propositae n.º 4.º Ast evolutio quantitatis symbolicae $\left[a_i^{n-1} + a_f \right]$ nobis suppeditat

$$\left[a_i^{n-1} + a_f \right] = \frac{a_i^n - a_f^n}{a_i - a_f};$$

et ideo

$$\frac{a_i^n - a_f^n}{a_i - a_f}$$

est quantitas divisibilis per $n+1$ numerum primum, sed hoc evenire nequit, nisi $a_i^n - a_f^n$ dividatur per eundem numerum. Si in locum a_i, a_f ponantur H, K, cum hae sint quantitates quaecumque, dummodo valores numerici residua diversa suppeditent, nec sint multiples divisore $n+1$, erit etiam

$$H^n - K^n$$

quantitas divisibilis per eundem numerum primum $n+1$; et

hoc patet ab expositis superius in praecedenti numero. Haec postrema expressio in hanc transformari potest

$$K^n \left\{ \left(\frac{H}{K} \right)^n - 1 \right\},$$

quae divisibilis erit per numerum primum $n+1$, quod evenire nequit, nisi dividatur $\left(\frac{H}{K} \right)^n - 1$. Ponatur vero $y = \frac{H}{K}$, ac habebimus formulam

$$y^n - 1,$$

in qua per $n+1$ divisio fit, quicumque sit valor integer, vel fractus elemento y tributus, dummodo non multiplex numero $n+1$. In hoc continetur perinsigne Fermatii theorema, de quo mentionem fecimus in praefatione. (1)

7. Haec adjiciemus praeterea. Cum per numerum primum $n+1$ sit divisibilis quantitas symbolica (D'), (uti ex n.º 4.º patet), tum et divisibilis erit per eundem numerum quantitas reciproca

$$\left[\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}} + \dots + \frac{1}{a_{i+r}} \right].$$

Theorema vero quoad hanc quantitatem reciprocā adimpletur iisdem limitationibus, quæ comprobatur quoad quantitatem directam.

Ad hoc demonstrandum in locum x substituatur $\frac{1}{z}$ in proposita aequatione; et ideo habebimus

$$z^n + \frac{A_{n-1}}{A_n} \cdot z^{n-1} + \frac{A_{n-2}}{A_n} \cdot z^{n-2} + \dots + \frac{1}{A_n} = 0,$$

cujus radices sunt quantitates reciprocae $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_i}$.

Hinc aequatio eruitur

$$\left[\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}} + \dots + \frac{1}{a_{i+r}} \right] + \frac{A_{n-1}}{A_n} \left[\frac{1}{a_i} + \dots + \frac{1}{a_{i+r}} \right] + \dots + \frac{A_r}{A_n} = 0,$$

(1) Observetur Legendrius in opere cit.

sive altera

$$A_n \left[\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}} + \dots + \frac{1}{a_{i+r}} \right] + A_{n-1} \left[\frac{1}{a_i} + \dots + \frac{1}{a_{i+r}} \right] + \dots + A_r = 0.$$

Ast coefficientes A_{n-1}, A_{n-2}, \dots omnes dividi possunt per numerum primum $n+1$, excepto A_n , (inspice n.^{um} primum hujus paragraphi), et ideo divisibilis erit quantitas

$$\left[\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}} + \dots + \frac{1}{a_{i+r}} \right].$$

Quibus positis, hoc venit notandum, quantitatem symbolicam hic constitutam esse etiam divisibilem per numerum primum $n+1$, si in locum $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$ valores alii quicumque substituantur, dummodo conditiones superius notatae adimpleantur; videlicet si nullus valor numericus assumptus sit multiplex numero primo $n+1$, ac omnes praeterea dent diversa residua.

8. Denique notetur ex praemissis deduci quoque faciliter, quantitatem

$$\left[a_i + \frac{1}{a_f} + \frac{1}{a_h} + a_g + \dots \right]$$

esse divisibilem per numerum primum $n+1$, dummodo $r+1$ sint termini inter parentheses rectangulares. Nam quisque intelligit statim, aequationem gradus $2n$ obtineri posse, quae habeat n radices directas, ac n reciprocas a duabus seriis expressas

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \\ \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}.$$

in qua aequatione omnes coefficientes per numerum primum $n+1$ evadunt divisibiles, dempto postremo. Reapse aequatio habens, uti radices, quantitates ab utraque serie repraesentatas, nil aliud est, nisi aequatio enascens ex aequationibus, quarum altera radices directas, altera reciprocas habet.

§. IV.

Nounulla de radicum limitibus observantur.

1. Ab aequatione, cui $i + 1$ radices positivae sint, quas juxta solitum denotabimus, hanc habebimus aequationem

$$(A'') \quad [a_1 + a_2 + \dots + a_i + x] + \Lambda_1 [a_1 + a_2 + \dots + a_i + x]^{n-i-1} + \Lambda_2 [a_1 + a_2 + \dots + a_i + x]^{n-i-2} + \dots - \Lambda_e [a_1 + \dots + a_i + x]^{n-i-e} \pm \Lambda_{n-i} = 0,$$

ubi Λ_e est primus coefficientis negativus. Hic notandum est litteram x in hac aequatione loco radicis a_{i+1} esse positam, sed vere quamcumque aliam radicem inter parentheses rectangulas scriptam repraesentare posse. His notatis evolutione habebimus

$$(B'') \quad [a_1 + \dots + a_i]^{n-i} + [a_1 + \dots + a_i]^{n-i-1} x + [a_1 + \dots + a_i]^{n-i-2} x^2 + \dots + x^{n-i} \\ + \Lambda_1 [a_1 + \dots + a_i]^{n-i-1} + \Lambda_1 [a_1 + \dots + a_i]^{n-i-2} x + \dots + \Lambda_1 x^{n-i-1} \\ + \Lambda_2 [a_1 + \dots + a_i]^{n-i-2} + \dots + \Lambda_2 x^{n-i-2} \\ \vdots \\ - \Lambda_e x^{n-i-e} \\ \vdots \\ \pm \Lambda_{n-i} = 0.$$

si vero etiam proposita aequatio haberet omnes terminos negativos incipiendo ex eo, qui a coefficiente Λ_e multiplicatur, et si maximus coefficientis ab Λ_f notetur, quantitas positiva enascetur, quotiescumque adimpleatur conditio

$$(C'') \quad x^{n-i} > \Lambda_f (x^{n-i-e} + x^{n-i-e-1} + \dots + 1),$$

ex qua, ut notum est, deducitur

$$x = 1 + \sqrt[e]{\Lambda_f}.$$

Quamvis non pluribus opus sit ad stabiliendum quantitatem positivam ex aequatione (B'') haberi (conditio (C'') adimpleta), nihilominus haec adjicere possumus. Alia quaecumque

verticalis terminorum series perpendatur. Si per α terminos ab extremo distet, quantitas enascens habebitur positiva dummodo sit vera conditio

$$x^{m-i-\alpha} > A_f(x^{n-i-e-\alpha} + x^{n-i-e-\alpha-1} + \dots + 1);$$

et hinc, uti prius, manifeste eruitur

$$x = 1 + \sqrt[e]{A_f}.$$

Idem dicendum erit, si libuerit uti methodo, quam geometra Bret (1) adinvenit. Nam si maxima fractio substituenda pro x ex postrema verticali terminorum serie seligatur, omnes aliae verticales terminorum series, quae praecedunt, quantitatem enascentem positivam suppeditabunt, et consequenter explebitur conditio $(B'') > 0$.

Quo pacto in duabus praecedentibus methodis superior limites radicum positivarum sumitur a maximo coefficiente negativo inter illos, qui remanent in aequatione (A') , similiter de applicatione aliarum methodorum agendum est. (2)

2. Quod in praecedenti numero observavimus, perutile esse potest, cum numerus positivarum radicum innotescat. Ast ob progressus theoriae aequationum nobis facultas agnoscendi, quot sint radices positivae aequationis, data est, et praesertim post theoremata valde bella, quae celeberrimi Geometrae Fourier (3), ac Sturm tradiderunt. (4)

3. Exempli gratia sit aequatio

$$x^5 - 10x^4 - 3x^3 + 184x^2 - 20x - 380 = 0,$$

atque per ista theoremata detegatur, hanc aequationem tres

(1) De hac methodo commentariolum hujus perillustris Mathematici observetur, quod in volumine sexto Annalium Gergonii cusum fuit, sive *Cursus Matheseos Purae Francoeurii*.

(2) De hoc argumento elegantissima Pianii disquisitio observetur, quae cusa fuit in volumine III. Nov. *Comment. Instituti Bononiensis*. 1837.

(3) *Analyse des Équations*. Paris 1831. pag. 87.

(4) Insigne theorema Sturmii inter caeteros exposuit illustris Mainardius loco citato. — Vide etiam elegantissimam lucubrationem Abbatibus Moigno editam in opere periodico inscripto. — *Journal de Mathématiques pures, et appliqués par Liouville*.

habere radices positivas; tunc etiam sequens aequatio expleri debet

$$[a_1 + a_2 + x]^3 - 10[a_1 + a_2 + x]^2 - 3[a_1 + a_2 + x] + 184 = 0,$$

ex qua colligimus pro limite superiori radicum positivarum accipi posse

$$1 + \Delta_f = 11.$$

4. Ab expositis de limite superiori inveniendis radicum positivarum aliquando facillime detegere possumus, an aequatio radices imaginarias habeat. Ponamus ad exemplum aequationem hanc

$$x^3 - 10^2 \cdot x^2 + x - 10^6 = 0,$$

quae positivam radicem realem habere debet. Si duae essent radices positivae hujusce aequationis, etiam adimpleretur conditio

$$[a + x]^2 - 10^2[a + x] + 1 = 0,$$

et ideo alia

$$[a_1 + (10^2 + 1)^1] - 10^2[a_1 + (10^2 + 1)^1] + 1 > 0.$$

His stantibus, opus esset, ut omnes aliae sequentes conditiones explerentur (1)

$$(10^2 + 1)^3 - 10^2(10^2 + 1)^2 + (10 + 1)^1 - 10^6 > 0,$$

$$3(10^2 + 1)^2 - 2 \cdot 10^2(10^2 + 1)^1 + 1 > 0,$$

$$3(10^2 + 1)^1 - 10^2 > 0.$$

Ast cum hae conditiones omnes non verificentur, quia harum prima non adimpleretur, et ideo aequatio proposita solummodo unicam radicem positivam habet. Ex his statim inferitur alias duas radices esse imaginarias, quoniam aequatio radicibus realibus negativis caret, dum signa terminorum alternatim sint positiva, ac negativa.

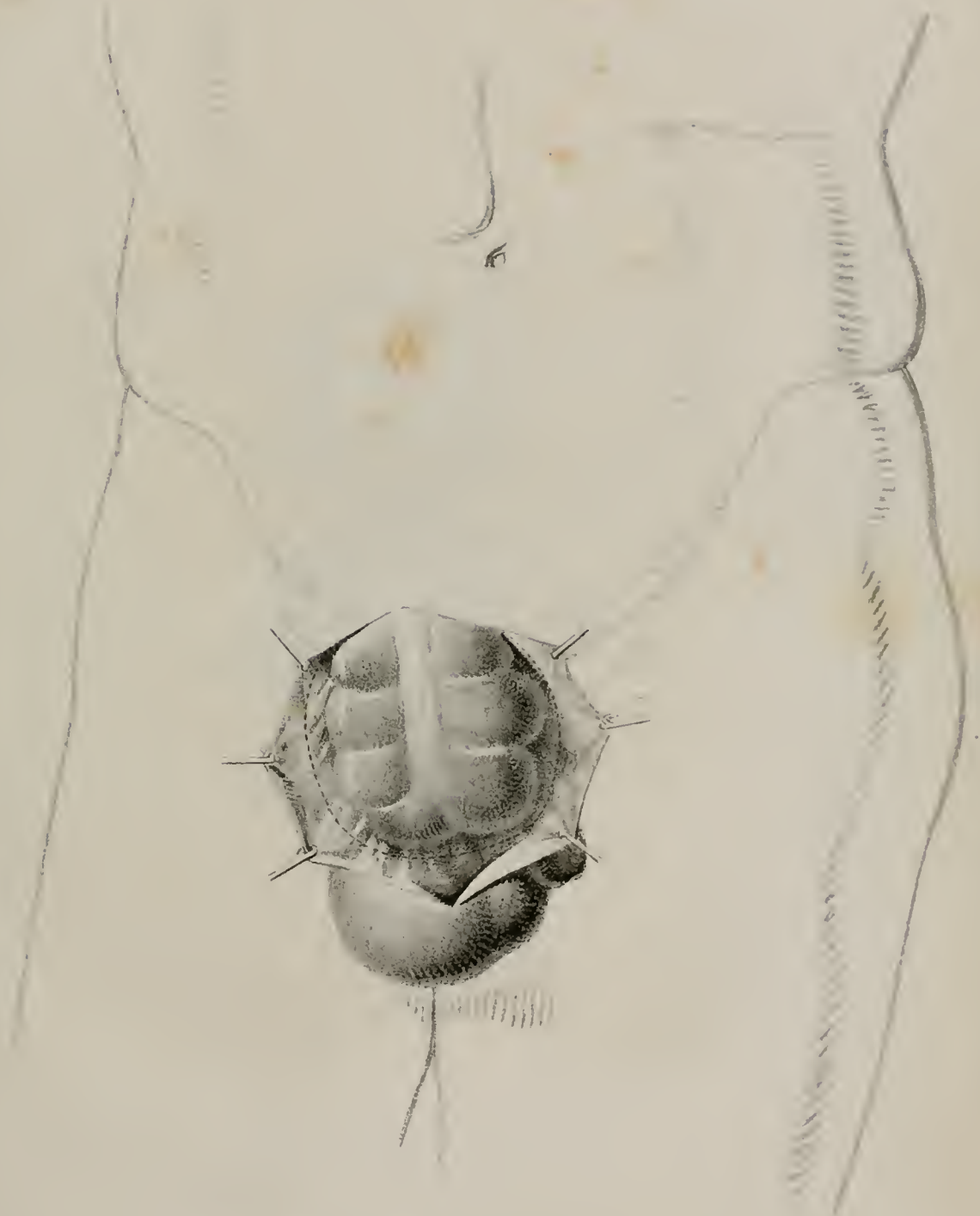
5. Minime vera est propositio inversa; videlicet si ex aequatione proposita, ac ejus derivatis quantitates positivae ob-

(1) Videto Cursum Introductionis *Calculi sublimis* Lotteri in Part. I. pag. 217. an. 1821.

tinentur per substitutionem alicujus coefficientis negativi, omissis signo, et unitate aucti, nullo modo inferri potest, aequationem propositam tot radices positivas habere, quot denotantur a numero terminorum unitate aucto, qui sequuntur terminum, cujus coefficiente usi sumus. Exemplum sit aequatio

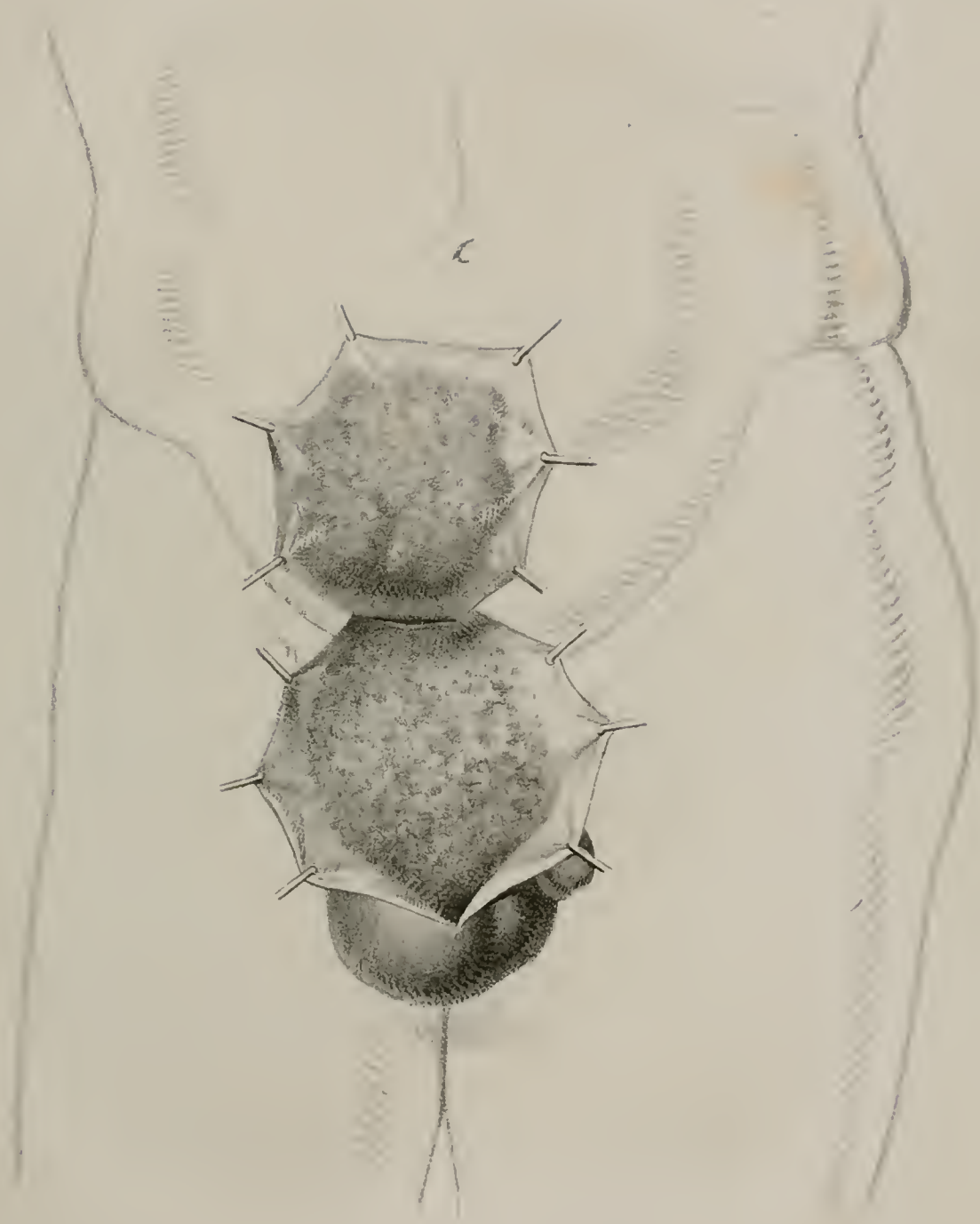
$$x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 56x + 65 = 0.$$

Sive quantitas $56 + 1$, sive alia $8 + 1$ adhibeatur, in utroque casu notae conditiones adimplentur, et ideo haec aequatio omnes suas radices habere positivas, vel saltem duas dijudicaretur, quod variationes etiam signorum confirmant; attamen singulae radices sunt imaginariae.



. Bellini ad nat. et in lap. del. et lit. imp.





C Bellum ad nat et in lapid et lit imp



INDEX OPUSCULORUM.

<i>FRANCISCI BERTELLI. Conjecturae De Anomalia, cui ex opticis quibusdam experimentis obnoxia esse videtur generalis lex refractionis. Tab. I. II.</i>	pag. 3
<i>DOMINICI GUALANDI. Specimen Statisticae medicae Manicomii Divae Ursulae Bononiae</i>	" 19
<i>MICHAELIS MEDICI. De quibusdam insolitis, abnormibusque animalibus vegetationibus. Tab. III.</i>	" 69
<i>JOSEPHI BERTOLONII. De Botyde silaceali, deque damno, quo afficit Cannabim sativam L. Tab. IV.</i>	" 91
<i>J. JOSEPHI BIANCONI. De origine caloris in aquis Thermalibus Considerationes quaedam</i>	" 103
<i>FRANCISCI BERTELLI. De derivatione aliisque proprietatibus formularum, quas Mechanica coelestis usurpatur ad planetarum motus exhibendos, et ad perturbationes definiendas, quibus eorundem conversiones ea de causa afficiuntur. Tab. V.</i>	" 123
<i>ANTONII ALESSANDRINI Eq. Organum olfactus Cetaceorum generatim, praesertim vero Delphini communis — Delphinus Delphis Linnaei, et Delphini sufflantis — Delphinus Tursio Bonnaterre. Tab. VI. VII.</i>	" 141
<i>PAULLI BARONI Eq. De quibusdam ulceribus cancris ad faciem, quae per arsenicum sanata fuere juxta Helmundi methodum</i>	" 159
<i>ULISSIS BREVENTANI. De experimentis Electro-physiologicis anno MDCCCXL peractis in Museo physico Universitatis Bononiensis.</i>	" 167
<i>ANTONII CAVARA Eq. De cranii terebratione feliciter instituta 5.º idus Januarii anno 1840, et de methodis aptioribus ad vulnus post operationem curandum</i>	" 207
<i>ANTONII BERTOLONII Eq. Miscellanea Botanica II. Tab. VIII. IX. X.</i>	" 217
<i>FRANCISCI BERTELLI. Evolutio functionis perturbatricis, quam involvunt aequationes differentiales motus cujuscumque Planetæ viribus tracti aliorum Planetarum, Solisque vi praevalenti: nec non animadversiones in quaedam praeci-</i>	

<i>pua ejus evolutionis loca, quae aliquam postulant emendationem</i>	« 239
<i>PAULI BARONI Eq. De eductione calculorum, qui in prostatica urethrae regione concrevere, et de bilateralis methodi ad hos educendos utilitate</i>	« 279
<i>CAMILII RANZANI. De maxilla in agro Bononiensi reperta a Josepho Monti. Tab. XI. XII. XIII.</i>	« 295
<i>CAJETANI SCARZI. Specimen chymicae analysis de aquis potabilibus civitatis Bononiae. Tab. XIV. XV.</i>	« 309
<i>JULII BEDETTI. De superficierum curvarum Quadratura Dissertatio. In qua nonnulla de earum curvatura, Archimedisque postulato traduntur. Tab. XVI. XVII.</i>	« 341
<i>ALOYSI CASINELLI. Disquisitiones variae super resolutionem nonnullarum aequationum algebraicarum, praesertim quinti gradus.</i>	« 391
<i>ANTONII BERTOLONII Eq. Miscellanea Botanica III. Tab. XVIII. XIX. XX. XXI. XXII. XXIII.</i>	« 419
<i>ANTONII ALESSANDRINI Eq. De miris quibusdam organicis degenerationibus in corde bovis domestici observatis. Tab. XXIV. XXV. XXVI. XXVII. XXVIII.</i>	« 439
<i>JOSEPHI BERTOLONII. De duobus insectis Ulmo campestri, et Pyro Malo infensis. Tab. XXIX.</i>	« 459
<i>MARCI PAIOLINI. Specimen quorundam experimentorum de vi Rubiae ad ossa, ovorumque Gallinarum putamina calcaria coloranda. Tab. XXX.</i>	« 469
<i>FRANCISCI RIZZOLI. De methodo exequendi Kelotomiam in coeci intestini Hernia scrotali incarcerata. Tab. XXXI. XXXII.</i>	« 503
<i>PETRI CALLEGARI. De usu subtractionis et divisionis extendendo ad nonnullas praesertim propositiones demonstrandas Tentamen.</i>	« 513

ERRATA-CORRIGE

Pag.	Lin.	Errata	Corrige
3	— 10	obortum	obortam
4	— 12	inflexione.	in flexione
«	— 24	observationibus	observationes
«	— 33	ora	oras
5	— 27	verum.	rerum
6	— 2	ab	ad
«	— 25	contingunt	continguntur
«	— ult.	hasce	hisce
7	— 6	quibus	quas
8	— 22	landa	landam
«	— 28	superficie	superficie
«	— 34-5	quam diffractio major sit	eam diffractionem esse majorem
9	— 9	emanationi	emanationis
«	— 15	contra	centra
«	— 23	an	ab
«	— 32	an	ab
10	— 23	acgra	acgre
11	— 31	quae	qua
«	— 33	Num	Nunc
12	— 33	ad ipsum	ipsum
«	— 36	secundo	secunda
13	— 22	dicto	dicta
«	— 24	puncto	puncta
«	— 26	variis	veris
15	— 8	distantia	distantiae
«	— 16	diversitates	diversitate
16	— 14	inducem	in lucem
«	— 30	quo	quem
19	— 19	consulere. <i>Album</i>	consulere ; <i>Album</i>
20	— 18	contuli et	contuli ad
«	— 37	norit	norint
21	— 14	possit	possint
«	— 22	perspectus	Prospectus
«	— 37	lucis	lucem
25	— 7	inprompta	in promptu
«	— 20	pauci	paucos
«	— 30	affimari	affirmari

26	—	9	Tabularum	Tabulam
"	—	12	quod	quot
"	—	14	utrisque	utriusque
"	—	26	tempore	tempus
28	—	29	fedae	faede
106	—	29	etc. procedentes	(etc.) procedentes
124	—	7	fere	fore
"	—	9	erit	erat
"	—	pen.	cum	eum
"	—	ult.	Aequatore. Planatae	Aequatore planetae
126	—	13	haec	hac
127	—	8	istas	istae
"	—	12	rotanti	rotantis
128	—	3	factum in	facturas
"	—	4	aequales	aequales coordinatis
"	—	6	ae	ac
"	—	10	intersertio sit	intersectio fit
"	—	18	intercedent	intercident
130	—	30	aequationem	aequatione
132	—	30	propter	contendat ad
133	—	22	B A C D	B A C B
135	—	13	triangulorum.	triangulos
136	—	1	Formula	Formulae
"	—	"	memoratus	memoratae
"	—	17	quasnam	quosnam
137	—	1	tiis initium	tus initio
"	—	11	reliquum	reliquus
139	—	36	planac	plane
173	—	28	praecipuos	praecipui
181	—	21	acu	acus
187	—	13	Galvanometricum	Galvanometricam
"	—	31	gradum	graduam
191	—	18	productam	oblongatam
198	—	31	felis	fellis
204	—	10	confe-	confer-
206	—	6	plurium	plurimum
242	—	1	tempore	tempus
251	—	3	theoremati	theorematis
265	—	9	quos	qui
275	—	12	imaginamus	imaginamur
304	—	5	Alterius	alterius
343	—	20	$\left(\frac{d z'}{d x'}\right) = p_{x',y} \cdot q_{x',y'}$	$\left(\frac{d z'}{d x'}\right) = p_{x,y} \cdot q_{x',y'}$
356	—	24	eodem	eidem
382	—	26	imi-	imita-
487	—	20	roseol-uteolum	roseo-luteolum

491	—	2	ossuim	ossium
515	—	2	denotanda	denotandae
516	—	5	E a_1, a_4	E' a_1, a_4
528	—	5	$(m+1)^{esimi}$	$(n+1)^{esimi}$
531	—	5	$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^{(m-1)}$	$[1^{(1)} + \dots + 1^{(n)}]^m$
548	—	7	$[(a_1+b)^i + \dots + (a_{i+1}+b)^i]^{m-1}$	$[(a_1+b)^i + \dots + (a_{i+1}+b)^i]^{m-i}$
549	—	6	quantitas	quantitatis
550	—	4	$\equiv 0$	<i>dele</i>
«	—	6	ordini	ordinis
551	—	30	quam	quem
568	—	36	appliqués.	appliquées

IMPRIMATUR

Fr. P. Caj. Feletti O. P. Inq. S. O.

IMPRIMATUR

Ioseph. Archid. Passaponti Prov. Gen.







