萬有文庫
第二集七百種
王雲五主編

數理精蘊

(二)

清聖祖敕編

商務印書館發行

數理精蘊

（二）

清聖祖敕編

國學基本叢書

萬有文庫

第二集七百種

總編纂者
王雲五

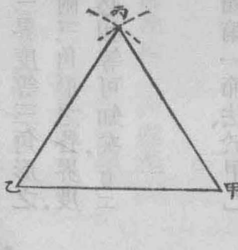
商務印書館發行

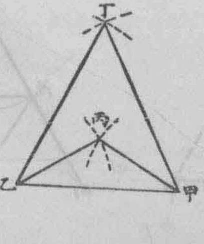
數理精蘊上編卷四

幾何原本十一

第一

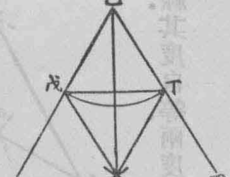
作三界度等之三角形及兩界度等之三角形法。如欲作三界度等之三角形。則作一甲乙線。取甲乙之度爲準。以甲爲心。自甲至丙作弧一段。又以乙爲心。自乙至丙作弧一段。兩弧相交處至甲乙作二線。即成三界度等之甲丙乙三角形矣。蓋甲乙丙三角形之甲乙、甲丙、丙乙三界。原係一圜之輻線。其度必等。度既等而線未有不等者也。若欲作兩界度等之三角形。仍作一甲乙線。比甲乙線之度或大或小取一度。以甲乙二處爲圜心。皆至丙作弧兩段。仍於兩弧相交處作二線。即成兩界度等之甲丙乙三角形矣。蓋甲丙、丙乙二線。雖比甲乙線或大或小。然二線俱同爲一圜之輻線。其度自等。兩度既等。則兩界線亦必等也。





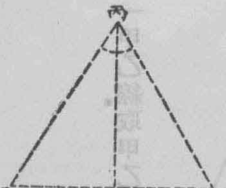
第二

平分直線角爲兩分法．如甲乙丙角．欲平分爲兩分．乃以乙角爲心．任意作弧線一段．則乙甲、乙丙二線．截於丁戊．卽成乙丁、乙戊等度二線．自弧兩端．復作一丁戊線．照丁戊線度．依前節法．作一三界度等之丁己戊三角形．則己角與乙角正相對．乃自乙角至己角、作一乙己直線．卽分甲乙丙角爲兩平分矣．何也．其乙丁己、乙戊己兩三角形之乙丁、乙戊二界．是一圜之輻線．其度等．而丁己、戊己二界．是三界度等三角形之兩傍界．其度亦等．而乙己線既爲兩形之共界．其等無疑．此兩三角形之各界度．既各相等．則與丁己、戊己界相對之丁乙己、戊乙己二角亦必相等可知矣．見二卷第七節．



第三

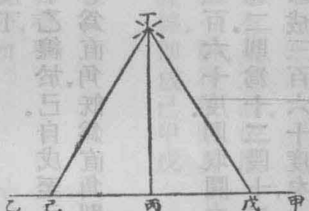
平分一直線爲兩分法．如有甲乙一直線．欲平分爲兩段．乃如第一節法、於甲乙線上、作一甲丙乙三界度等之三角形．又如第二節法．平分甲丙乙角爲二分．自丙角作垂線至甲乙線．卽平分甲乙線於丁．而甲丁、丁乙兩段必等也．蓋甲丙乙原爲三界度等之三角形．今作丙丁垂線．平分爲兩三角形．則兩三角形之相當各角各界必俱等．而甲丁、丁乙爲兩形相當之底界．其度安得不等乎．



第四

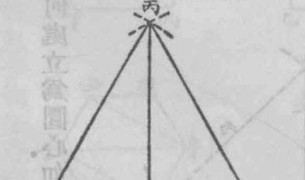
橫線上立縱線法．如有甲乙一橫線．欲於丙處立一縱線．則於丙之兩傍．任意取等度二分爲戊丙、己丙、

以戊爲心。於橫線上作弧一段。又以己爲心。於橫線上作弧一段。兩弧相交於丁。此丁處正與丙相對。自丁至丙作一直線。卽甲乙線上正立之縱線也。試自戊己至丁作二線。成一戊丁己三角形。此形之丁戊、丁己兩線。俱同一圜之輻線。其度必等。而丁丙線既將戊己底線爲兩平分。則丁丙線必爲甲乙線之垂線矣。見二卷第十節。



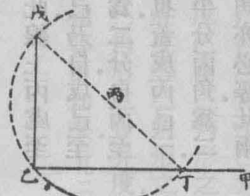
第五

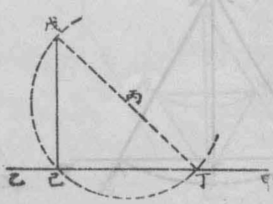
有一橫線。自此線上不拘何處立縱線法。如有甲乙一橫線。自此線上丙處至甲乙線。欲作一縱線。則以丙爲心作弧線一段。截甲乙線於戊己。乃自戊己至丙作二線。成一戊丙己三角形。又照第二節分角法平分丙角爲二分。自丙至甲乙線上作丙丁線。則此丙丁線卽爲自丙至甲乙線之縱線也。蓋戊丙己三角形之丙戊丙己兩界度等。故戊角與己角必等。而丙丁線又平分丙角爲二。則所分之戊丙丁、己丙丁兩角度亦等。而丙丁戊、丙丁己兩並角亦必等。此兩並角既等。則成兩直角。既成兩直角。則丙丁線必爲甲乙橫線之垂線矣。見一卷第十節。



第六

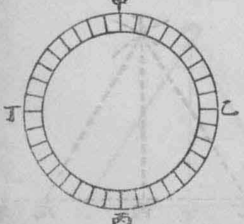
在橫線一邊立縱線法。如有甲乙橫線。在乙邊欲立一縱線。則於甲乙線上不拘何處立為圜心。如以丙為圜心。自丙至乙為圜界旋轉作一圜。則於甲乙線丁處相交。即自丁處過丙心至相對界、作一直線。交圜界於戊。乃自戊至乙作一戊乙直線。即是乙邊所立之縱線也。蓋丁乙戊角因在半圜。必為直角。見四卷第十四節。既為直角。則戊乙線必為甲乙線之垂線。既為垂線。故為橫線一邊所立之縱線也。若甲乙線一邊之上有一戊點。欲自戊至甲乙線一邊作一垂線。則自戊至甲乙線、任意作一戊丁斜線。遂將戊丁斜線平分於丙。於是以丙為心。自戊旋轉作一圜。則截甲乙線於己。自戊至己作一直線。即是欲作之垂線也。蓋戊己丁角既在半圜。必為直角。既為直角。則戊己必為垂線矣。





第七

一圜分為三百六十度法。如甲乙丙丁一圜界。欲分為三百六十度。則取圜之輻線度。緣圜界比之。即分圜界為六段。將六段各平分為二。則為十二段。十二段各平分為三。則為三十六段。三十六段各平分為十。即成三百六十度矣。

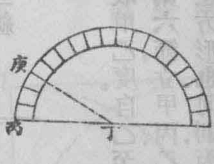


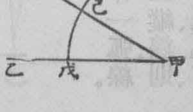
第八

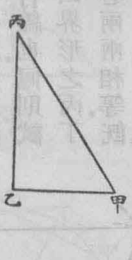
一直線上作角度法。如甲乙線上、欲作三十度之角。則用有度之圜。依圜之丙丁輻線度。截甲乙線於戊。於是以甲爲心。自戊作弧一段。復依圜界之丙庚三十度之分。自戊截弧於己。乃自己至甲作一直線。卽成己甲戊三十度之角矣。

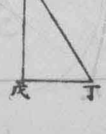
第九

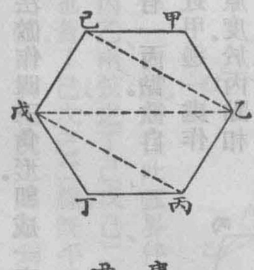
各種多界形。做已有之形。或大或小。另作一同式形法。如有甲乙丙一三角形。欲做此式另作一形。則考甲乙界度有幾分。如甲乙界度爲三分。今取其二分。作一丁戊線。又以甲丙界度亦作三分而取其二分。以丁爲圜心作弧一段。又以乙丙界度亦作三分而取其二分。以戊爲圜心作弧一段。兩弧相交於己。乃自己至丁戊作二線。卽成丁戊己一小三角形。與原有甲乙丙大三角形爲同式也。蓋丁戊己三角形之三界。雖與甲乙丙三角形之三界不等。而其相當各角之度俱等。因其相當各角之度俱等。故其相當各界之比例皆同。相當各界之比例旣同。則其二形之式不得不同也。若有一甲乙丙丁戊己六界形。欲做

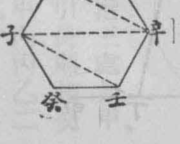








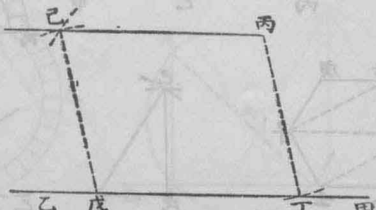




此式另作一形。則在此六界形作分角線。分爲四三角形。照前法倣作四三角形。卽成一庚辛壬癸子丑小六界形。其式與原有之甲乙丙丁戊己大六界形同也。

第十

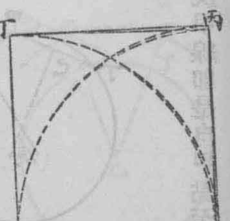
有一直線。或上或下一點。作與此線平行一線法。如甲乙線上有一丙點。欲自丙點作與甲乙線平行一線。則以丙爲圜心。任意取甲乙線之近甲邊一處作弧一段。如丁。又取甲乙線之近乙邊一處爲心。如戊。乃照丙丁原度。於丙點相對處作弧一段。如己。復照丁戊度。以丙爲心。於丙點相對處作弧一段。則二弧相交於己。乃自丙至己交處作一丙己直線。卽爲甲乙線之平行線也。何則試自丁戊二處至丙己二處作二線。卽成丙丁戊己一四界形。此四界形之丙丁、己戊、相對之兩縱線。丙己、丁戊、相對之兩橫線。因依各度所取、必兩兩相等。既兩兩相等。則必爲平行線之四邊形。然則丙己、甲乙、爲平行線四邊形之二線。豈有不平行之理哉。



第十一

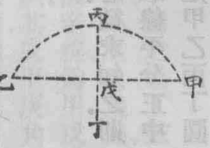
有一直線。上作一正方形法。如甲乙一直線。欲作一正方形。則以甲爲心。取甲乙度。自乙至丙作一弧線。又以乙爲心。依甲乙度。自甲至丁作一弧線。又於甲乙線之兩端。照本卷第六節立甲丙、乙丁二縱線。則乙丙弧截於丙。甲丁弧截於丁。乃自丙至丁作一直線。卽成甲乙丁丙一正方形也。何則丙甲、甲乙、乙丁、

三線俱同爲一圜之輻線。其度必等。而丁丙、丙甲二線。又俱切一圜界。爲兩尖相合。其度亦必等。見四卷第七節。則四界俱等矣。且甲乙二角。又爲垂線所立之角。必成直角。則丙丁二角亦必爲直角。而四角又等矣。四角皆等。故甲乙丁丙形爲甲乙線上所立之正方形也。



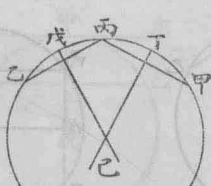
第十二

平分一弧爲兩段法。如有甲乙弧、欲平分爲兩段。則自甲至乙作一甲乙弦線。將此弦線照本卷第三節平分直線爲兩分法。作一戊丁縱線。復自戊引至弧界。截甲乙弧於丙。卽平分甲乙弧爲甲丙、丙乙兩段矣。蓋丙丁縱線。既平分甲乙弦線。則亦必平分甲乙弧之全圜。既平分甲乙弧之全圜。則必平分甲乙弧爲兩段可知矣。見四卷第六節。



第十三

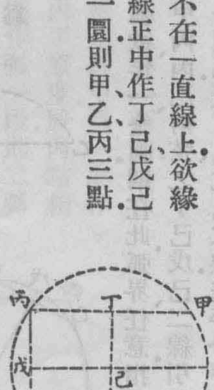
有一段弧。欲繼此弧作一全圜法。如有甲乙一段弧。繼此弧欲作一全圜。則在此弧界任意指三處。如甲、丙、乙。自甲、乙二處至丙。作甲丙、丙乙二線。照前節作平分甲丙、丙乙兩弦之丁己、戊己二線。引長則相交於己。乃以己爲心。繼甲乙弧界作一全圜。卽成甲乙弧之全圜也。蓋丁己、戊己二線。既平分甲丙、丙乙二弦。則必平分甲丙、丙乙二弧。見四卷第六節。既平分甲丙、丙乙二弧。則其相交之處。必爲圜心。故己爲繼



甲丙乙弧界所作全圜之圜心也。

第十四

不拘何處有三點。求線此三點作一圜法。如甲、乙、丙三點。不在一直線上。欲線此三點作一圜。則依前節作甲丙、丙乙二線。又平分此二線正中作丁己、戊己二垂線。引長至己處相交。遂以己爲心。以甲乙丙爲界作一圜。則甲、乙、丙三點。俱在一圜之界矣。此節之理・與前節同・



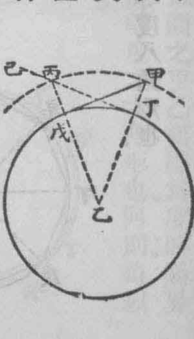
第十五

有圜不知中心。求知中心之法。如有一甲乙丙丁圜。不知其中心。欲求知之。則於此圜界隨便取甲、乙、丁三處。從甲至乙至丁作二弦線。將此二線平分正中爲戊己二處。自戊己作戊庚、己庚兩垂線。則相交於庚。此庚卽是甲乙丙丁圜之中心也。此節之理・亦與前同・

第十六

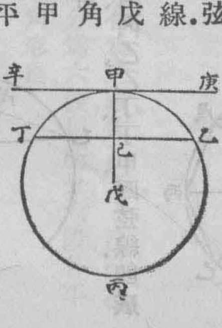
有圜外一點。將此點至圜界作切線法。如乙圜之外有一甲點。欲將此甲點與圜界相切。作一切線。則以此甲點至圜心作一甲乙直線。又以乙爲心。以甲爲界作一甲丙圜界。又自甲乙線所截圜之丁處。作一丁己垂線。則此垂線卽截甲丙圜界於丙。乃自丙至乙心作一丙乙直線。復自丙乙所截圜界戊處。作一戊甲線。卽是自甲點至圜

界所作之切線也.何則.此乙丁、乙戊、既同爲一圜之輻線.其乙甲、乙丙、亦同爲一圜之輻線.則甲乙戊與丙乙丁兩三角形之各兩邊線必等.而兩三角形又同一乙角.然則兩三角形之每相當各角必俱等矣.見二卷第六節.夫丁丙線原爲甲乙輻線之垂線.則丁角必爲直角.而相當之戊角亦必爲直角矣.戊角既爲直角.則甲戊線亦必爲乙丙輻線之垂線.故甲戊與丙丁皆爲圜界之切線也.見四卷第九節.



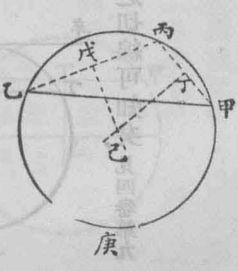
第十七

有圜內弦線.欲與此弦線平行.作圜外切線法.如有一甲乙丙丁圜之乙丁弦線.欲與此乙丁弦線平行、作切圜之切線.則從圜心戊至乙丁弦.作戊己垂線.平分乙丁弦線於己.引長截圜界於甲.爲甲戊線.又切甲處作庚辛線.爲甲戊之垂線.卽是所求之切線也.何則.此庚辛線既爲甲戊線之垂線.其戊甲庚角必爲直角.又己戊線既爲乙丁線之垂線.其戊己乙角亦必爲直角.然則戊甲庚角與戊己乙角.既俱爲直角.其度必等.因其度等.故乙丁、庚辛兩線爲兩平行線也.又戊甲線爲圜之輻線.而庚辛既爲甲戊之垂線.則必爲甲乙丙丁圜之切線可知矣.見四卷第九節.



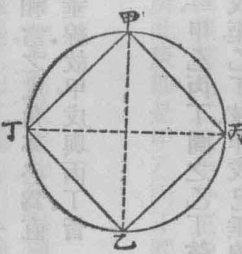
第十八

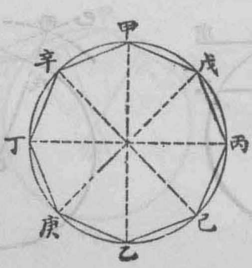
作函三角形之圜法。如甲乙丙三角形。欲作函此三角形之一圜。則平分甲丙邊於丁。平分丙乙邊於戊。自丁戊作二垂線。引長至己相交。卽以己爲心。任以甲丙乙三角形之一角爲界。作一甲丙乙庚圜。卽是函甲丙乙三角形之圜也。此節之理。與本卷第十三節同。



第十九

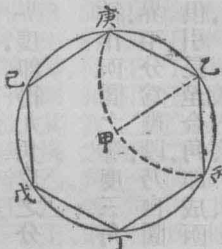
圜內作等度四角形及等度八角形法。如甲丙乙丁圜內。欲作一等度四角形。則以甲乙、丙丁二徑線交於圜心。皆作直角。復自甲丙乙丁四處。作甲丙、丙乙、乙丁、丁甲四弦線。卽成甲丙乙丁等度之四角形也。何則。甲乙、丙丁二徑線在圜心作直角相交。則平分圜界爲四分矣。既平分圜界爲四分。則甲丙、丙乙、乙丁、丁甲四弦線度必等。而甲丙、丙乙、乙丁、丁甲四角。既俱立在一圜之半界。亦必俱爲直角。見四卷第十四節。既俱爲直角。必爲正方形可知矣。苟欲作等度八角形。則照前平分圜界爲四分。將所分之每分。又各平分爲二分。卽平分圜界爲八分。乃作八弦線。卽成甲戊丙己乙庚丁辛一形。爲圜內等度八角形也。

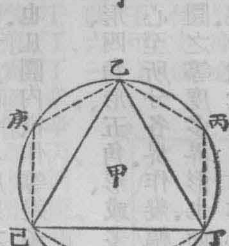


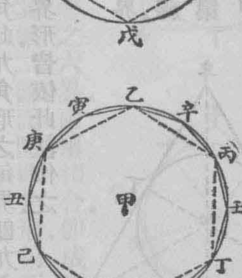


第二十

圜內作等度六角形三角形十二角形法。如甲圜內欲作等度六角形。則以圜之甲乙輻線爲度。將圜界分爲乙丙、丙丁、丁戊、戊己、己庚、庚乙、六段。作六弦線。卽成一乙丙丁戊己庚等度之六角形也。何則。苟以乙爲心。以甲爲界。作一丙甲庚弧線。則乙丙、乙甲二線。俱爲丙甲庚圜之輻線。而度必等。夫乙丙丁戊己庚六界形之諸界。因俱照甲乙輻線度所作。故此形之六界俱相等也。若欲作三角形。則照前法。將圜界分爲六段。以所分六段。兩兩相合爲三段。作乙丁、丁己、己乙、三弦線。卽成一乙丁己等度三角形也。若欲作十二角形。亦照前法。將圜界分爲六段。以所分六段各平分爲二分。作十二弦線。卽成一乙辛丙壬丁癸戊子己丑庚寅等度之十二角形也。



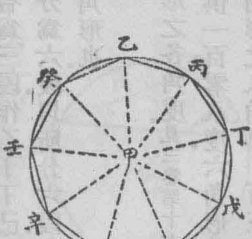




第二十一

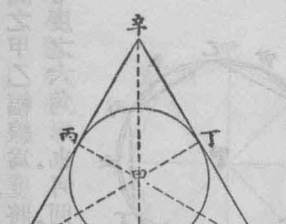
圜內作各種等度多界形總法。苟甲圜內欲作等度多界各種形。則察各種形之各角度。見三卷第十七節。如等度三角形之三角、俱六十度。四角形之四角、俱九十度。五角形之五角、俱一百零八度。六角形之六角、俱一百二十度。七角形之七角、俱一百二十八度三十四分一十七秒。八角形之八角、俱一百三十五

度。九角形之九角、俱一百四十度。十角形之十角、俱一百四十四度。十一角形之十一角俱一百四十七度一十六分二十一秒。十二角形之十二角、俱一百五十度。今甲圜內若欲作一等度九角形。則以九角形之每角一百四十度與一百八十度相減。餘四十度。復以別有度之圜。取四十度之分以分甲圜界。卽平分爲乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸之九分。再照平分度作乙丙、丙丁、丁戊、戊己、己庚、庚辛、辛壬、壬癸、癸乙、九弦線。卽成甲圜內等度之九角形也。何也。從圜心甲作線至各角、分九角形爲九三角形。其每三角形之三角、共一百八十度。內減去二界角一百四十度。餘心角四十度。卽每界所對之角。此九角形之每界卽九心角之弦線。故以心角度分圜界度。卽得九角形之分也。凡圜內欲作等邊多界形。皆依此法作之。

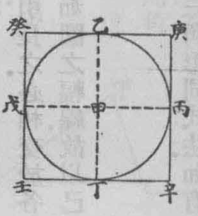


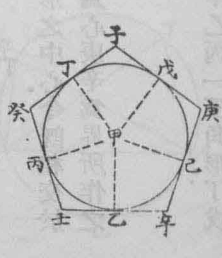
第二十二

作函圜等度多界形法。如欲作函圜之等度三角形、四角形、五角形、或多界形。則將圜界照欲作之幾界平分爲幾段。乃自圜心至所分各界作幾輻線。於輻線之末各作切界線。俱引長至合角。卽成函圜之等度多界形也。如第一圖自甲心至庚、辛、壬三角作甲庚、甲辛、甲壬三線。卽成六三角形。其庚甲乙、庚甲丙兩三角形之庚乙、庚丙二線。爲合尖切圜之線。其度必等。見四卷第七節。而庚甲乙、辛甲丁兩形之庚甲乙、辛甲丁二角爲對角。其度又等。庚



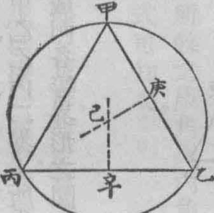
乙甲辛丁甲之二角爲輻線切線所成之角其度又皆爲直角相等見四卷第五節則其餘一角亦必等而其乙甲、甲丁、二界又同爲一圜之輻線其度必等則其他界亦必俱等可知再辛丙、辛丁、二線壬丁、壬乙、二線俱爲合尖切圜之線其度相等而辛甲丙與壬甲乙兩三角形壬甲丁與庚甲丙兩三角形必俱與前每相當之角等則此六三角形俱相等矣六三角形俱相等則其庚乙、乙壬、壬丁、丁辛、辛丙、丙庚、相等之六界兩兩相合卽成庚壬、庚辛、辛壬之三界其度安得不等乎故庚辛壬三角形爲函圜等界形也其第二圖函圜四角形第三圖函圜五角形或更欲作多界形其理皆同

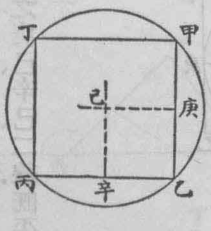


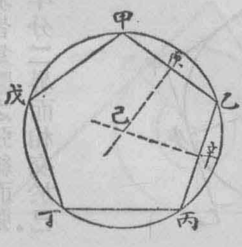


第二十三

作函等度多界形之圜法如甲乙丙三角形或甲乙丙丁四角形或甲乙丙丁戊五角形欲作函此三形之圜則任用此三形之甲乙、乙丙、二界平分於庚、辛、二處乃自庚、辛、二處各作垂線至各形中心相



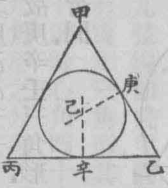


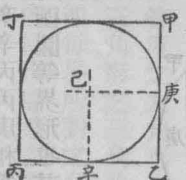


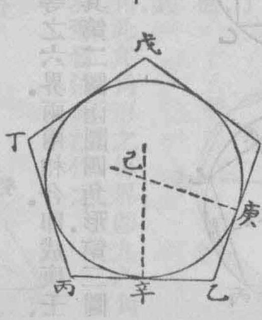
交為己。卽以己為心。以各形之角為界作圜。卽成函此三形之圜也。何也。各形之界。皆為圜之弦線。而弦線上所作之垂線。必皆交於圜心。今甲乙、乙丙二界上所作之庚己、辛己二線。既平分二界而相交於己。則己必為圜心。故以己為心作圜。卽成函各等界形之圜也。

第二十四

作函於等度多界形之圜法。如甲乙丙三角形。或甲乙丙丁四角形。或甲乙丙丁戊五角形。欲在此三形內各作一圜。則照前節平分甲乙、乙丙二界。作己庚、己辛二垂線。引長相交於己。卽以己為心。以庚辛為界作圜。卽成多界形內所函之圜也。何也。己庚、己辛二線。是平分甲乙、乙丙二線之垂線。引長之必相交於各形之中心。今既相交於己。則己必為各形之心。凡形心作垂線至各界。其度必等。卽如圜之輻線。故以己為心。庚辛為界所作之圜。卽為各等界形所函之圜也。







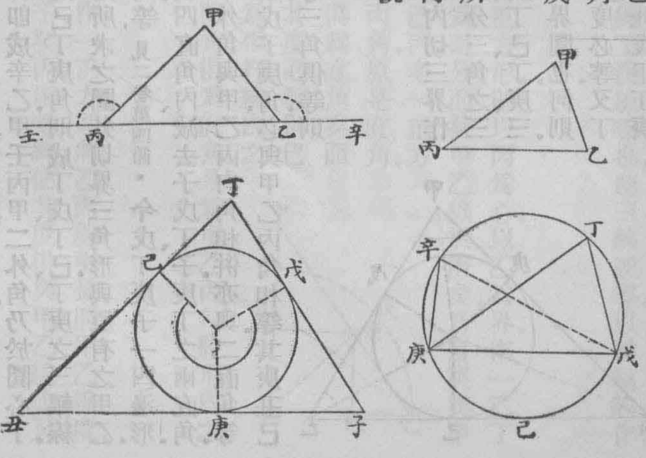
第二十五

有一三角形。一圜形。於此圜內作切圜界三角形。與原有之三角形同式法。如有甲乙丙一三角形。丁戊

己庚辛一圜形。欲於此圜內作一切界三角形。與原有之甲乙丙三角形同式。則於圜界任意作與甲角相等之辛角。將此角之兩邊線、俱引至圜界。作辛庚、辛戊、二線。再自戊至庚作一戊庚線。又於戊處作與乙角相等之庚戊丁角。爰自戊至丁作一丁戊線。復自庚至丁作一庚丁線。成一丁戊庚三角形。卽是所求之圜內切界三角形。與原有之甲乙丙三角形爲同式也。何則。其庚辛戊三角形之辛角。與庚丁戊三角形之丁角。其尖既俱與圜界相切。而共立於戊己庚一段弧分。其度必等。見四卷第十二節。此辛角原與甲角等。則丁角亦必與甲角等。又庚戊丁之戊角。原係依甲乙丙之乙角之度而作者。固相等。夫丁角與甲角、戊角與乙角既等。則所餘之庚角與丙角亦必等。其三角既俱等。其兩形必爲同式可知矣。

第二十六

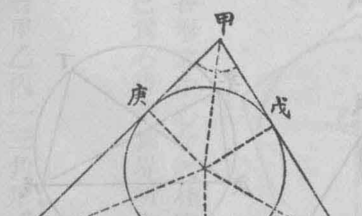
有一三角形。一圜形。於此圜外作切界三角形。與原有之三角形同式。法。如有甲乙丙一三角形。戊己庚一圜形。欲於此圜外作一切界三角形。與原有之甲乙丙三角形同式。則將



原有之甲乙丙三角形之乙丙底線、引長至辛壬二處．此兩傍卽成辛乙甲、壬丙甲二外角．乃於圜心丁處作與辛乙甲角相等之戊丁庚角．又作與壬丙甲角相等之己丁庚角．則成丁戊、丁己、丁庚之三輻線．於三輻線之末作三垂線．引長相交成一癸子丑三角形．卽是所求之圜外切界三角形與原有之甲乙丙三角形爲同式也．何則．凡三角形之三角相併．必與二直角等．見二卷第四節．今戊丁庚子一四邊形．可分爲兩三角形．則此四邊形之四角相併．必與四直角等矣．四直角內減去子戊丁、子庚丁之兩直角．所餘戊丁庚、戊子庚兩角相併．亦必與兩直角等也．又辛乙甲外角與甲乙丙內角相併．亦與二直角等．見一卷第十四節．其戊丁庚角既係依辛乙甲角之度而作者．則戊子庚角必與甲乙丙角相等．其庚丑己角亦必與甲丙乙角相等．而己癸戊角又必與乙甲丙角相等．三角俱等．則兩形之式必相同也．

第二十七

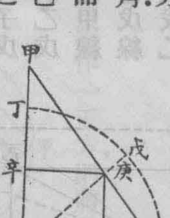
三角形內作切三界之圜法．如有一甲乙丙三角形．欲於此形內切三界作一圜．則依此卷第二節之法．將甲乙丙三角俱平分爲兩分．所分三角之三線．俱引長使相交於丁．自丁至甲乙、乙丙、丙甲三界線．作丁戊、丁己、丁庚三垂線．乃以丁爲心．以戊己庚爲界．作一圜．卽是三角形內之切界圜也．何則．戊甲丁與庚甲丁兩小三角形之甲角．因自一角爲兩平分．其度必等．又丁戊、丁庚、既係兩垂線．則甲戊丁、甲庚丁、二角俱爲直角而相等．此戊甲丁、庚



甲丁、兩小三角形內之二角既等其各三角必俱相等而又共用一甲丁線爲邊則此兩三角形之各相當邊亦必俱等故丁戊線與丁庚線等者卽是丁己線與丁戊線丁庚線等也此三線既等以爲輻線作戊己庚圜則必與三角形之甲乙、乙丙、丙甲三界相切矣

第二十八

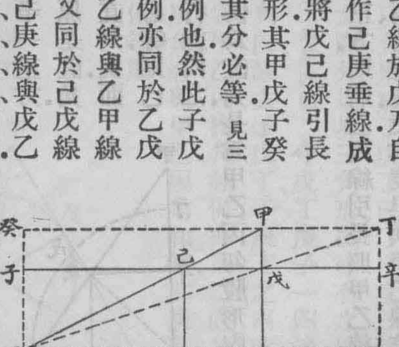
勾股形內作正方法如有一甲乙丙勾股形欲於此形內作一正方形則以丙爲心以乙爲界作一乙丁弧線將此弧線平分於戊自戊至丙作一戊丙線卽平分丙角爲兩分而截甲乙線於庚矣乃自庚與甲丙線平行作庚己線又自庚與乙丙線平行作庚辛線卽成庚己丙辛一正方形爲所求甲乙丙勾股形內之正方也何則甲丙乙勾股形之丙角原是直角今庚辛、庚己二線各與甲丙、乙丙平行則庚、己、丙、辛之四角必俱爲直角矣而庚己丙三角形內己庚丙角與己丙庚角又俱是直角之一半其度必等則己丙線與庚己線相等而庚辛線與己丙線庚己線與辛丙線皆爲平行線內之垂線其度亦等故庚己、己丙、丙辛、辛庚四線相等而庚、己、丙、辛四角俱爲直角是爲甲乙丙勾股形內之正方形也



第二十九

勾股形內作正方第二法如有一甲乙丙勾股形欲於此形內作一正方則將乙丙線引長照甲乙線度增於乙丙作一壬丙線自此壬丙之兩末與甲乙線平行作丁壬、癸丙兩垂線使其度俱與甲乙線等又

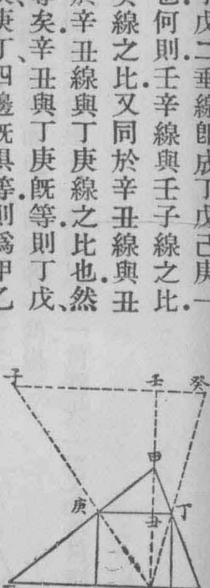
自丁至癸與壬丙線平行。作一丁癸線。自丁至丙作一對角線。截甲乙線於戊。乃自戊與乙丙線平行。作戊己線。截甲丙線於己。又自己與戊乙線平行。作己庚垂線。成一戊乙庚己正方形、卽爲甲乙丙勾股形內欲作之正方也。何則。試將戊己線引長成辛、戊、己、子線。則此辛戊己子線、與甲乙線分丁壬丙癸爲四長方形。其甲戊子癸長方與辛壬乙戊長方。既爲丁壬丙癸大長方對角線傍所成兩形。其分必等。見三卷第七節・故子戊線與戊辛線之比例。同於乙戊線與戊甲線之比例也。然此子戊線與丙乙線等。而戊辛線又與甲乙線等。則丙乙線與甲乙線之比例。亦同於乙戊線與戊甲線之比例也。又甲乙丙與甲戊己兩三角形爲同式。故丙乙線與乙甲線之比例。同於己戊線與戊甲線之比例。而乙戊線與戊甲線之比例。又同於己戊線與戊甲線之比例也。乙戊線既與巳戊線相等。而乙庚線與戊己線。己庚線與戊乙線。又爲兩平行線內之垂線。其度相等。故戊、乙、庚、己四角俱爲直角。戊、乙、庚、己四角。既俱爲直角。則戊乙庚己之方形。卽是甲乙丙勾股形內之正方矣。



第三十

三角形內作正方法。如有甲乙丙三角形。欲於此形內作一正方。則自甲角至乙丙底線。作一甲辛垂線。將此垂線引長出甲角。如乙丙底線度。作一壬辛線。又自壬兩分如乙丙線度。與乙丙線平行。作一子癸線。又自癸至辛作癸辛線。截甲乙線於丁。自子至辛作子辛線。截甲丙線於庚。乃自丁至庚作一庚丁線。

此線必與乙丙平行。又自庚丁二處作庚己丁戊二垂線。即成丁戊己庚一正方形。即為甲乙丙三角形內欲作之正方也。何則。壬辛線與壬子線之比。同於辛丑線與丑庚線之比。而辛壬線與壬癸線之比。又同於辛丑線與丑丁線之比。故辛壬線與癸子線之比。亦必同於辛丑線與丁庚線之比也。然辛壬與癸子原相等。則辛丑與丁庚亦必相等矣。辛丑與丁庚既等。則丁戊、戊己、己庚、庚丁四邊亦必俱等。丁戊、戊己、己庚、庚丁四邊既俱等。則為甲乙丙三角形內之正方無疑矣。

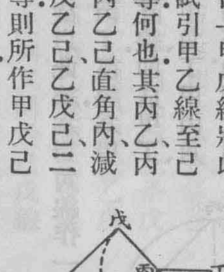


第三十一

有一直線。將此線為正方對角線作正方法。如有一甲乙直線。欲以此線為對角線作一正方。則將甲乙線平分為戊。以戊為心。以甲乙為界。作一圜。即於此圜內作一丙丁徑線。為甲乙線之垂線。乃自甲至丙、自丙至乙、自乙至丁、自丁至甲作四直線。即成甲丁乙丙一正方形。為所求之正方也。蓋甲丙乙角、丙乙丁角、乙丁甲角、丁甲丙角、既俱在半圜內。必俱為直角。而甲戊丙、丙戊乙、乙戊丁、丁戊甲四三角形之兩傍線。俱是半徑線。必相等。又此四三角形之兩傍線所合之角。俱為直角。亦必相等。則甲丙、丙乙、乙丁、丁甲四直線必俱相等。可知矣。甲丙乙丁四邊形內四角。既俱為直角。而四邊線又俱相等。則必為正方形。而甲乙線為其對角線矣。

第三十二

有一直線爲正方邊與對角線相較之餘。於此線求作其原正方法。如有一甲乙線。爲正方邊與對角線相較之餘。求作一正方則先將此甲乙線爲一邊。作甲乙丙丁一小正方形。次自甲至丙作一小對角線。於是以丙爲心。以乙爲界。作一圜。乃引甲丙線至圜界戊處。作一甲戊線。將此甲戊線爲度。作一甲戊巳庚大正方形。卽是所求之正方也。試引甲乙線至己作甲己一對角線。此對角線之乙己一段。必與戊己邊線相等。何也。其丙乙、丙戊爲一圜之二輻線。既等。則丙乙戊、丙戊乙二角亦等。若於丙乙己直角內。減去丙乙戊角。又於所作丙戊己直角內。減去丙戊乙角。所餘戊乙己、乙戊己二角亦必相等。此二角既等。則乙己、戊己兩線必等矣。因其相等。則所作甲戊己庚一大正方之甲己對角線。與戊己一邊線相較。則原有之甲乙線。爲其相較之餘可知矣。



幾何原本十二

第一

有一直線。將此線爲底。作一兩邊度等三角形。使底之兩邊各一角、俱比上一角爲大一倍之三角形法。

如有一甲乙直線。將此線爲底。欲作兩邊度等之三角形。而底之兩邊各一角俱比上一角爲大一倍。則用十一卷第八節之法。於甲乙線之兩頭。各作一七十二度之角。將兩邊線俱引長相交於丙。卽成一甲乙丙三角形。爲所求之形也。何則。凡三角形之三角相併。爲一百八十度。與二直角等。今此所作甲乙丙三角形之甲乙兩角。既俱係七十二度。則於一百八十度內。減去甲、乙、二角共一百四十四度。餘三十六度。卽爲丙角之度。三十六度者。七十二度之半。故甲、乙、兩底角比丙角各大一倍也。

第二

有一直線。依此線度作兩邊度等三角形。使上一角小於兩底角一倍之三角形法。如有甲乙一直線。以此線爲一邊。復依此線度作一邊。使此兩邊線所合之上一角。小於兩底角一倍之三角形。則用十一卷第八節之法。以甲乙、甲丙、二線之甲末相合。作一乙甲丙角。爲三十六度。再自丙至乙。作一乙丙直線爲底。卽得一甲乙丙三角形。爲所求之形也。何則。將甲角三十六度。與全形三角之共數一百

八十度相減餘一百四十四度。爲乙、丙、兩底角之共數。今甲丙線與甲乙線既等。則乙角與丙角必等。因其相等。將兩底角共數一百四十四度折半。得七十二度。卽爲每一底角之數。七十二度者。三十六度之倍數。故甲角比乙、丙兩底角俱爲小一倍也。

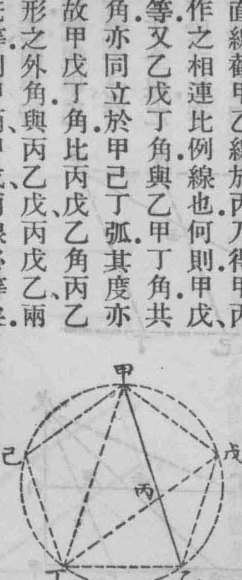
第三

有一直線。以此直線爲一邊。作等邊等角之五界形法。如有甲乙一直線。以此直線爲一邊。作一等邊等角之五界形。則將此甲乙直線爲底。用此卷第一節法。作一兩邊度等甲丙乙三角形。其甲丙乙角。爲丙乙甲、丙甲乙、二角之各一半。又用十一卷第十五節法。於此三角形之週圍作一圜。此甲丙、丙乙、兩直線原係相等。其相對之兩弧。亦必相等。乃以此兩弧自戊丁二處。爲兩平分。又自甲至戊、自戊至丙、自丙至丁、自丁至乙作四直線。卽成甲乙丁丙戊五邊五角等度之五界形也。何則。其甲丙乙角原爲丙乙甲角之一半。則甲丙乙角爲三十六度。試自甲乙二處至圜心作甲己、乙己二線。成甲己乙一三角形。則此甲己乙角比甲丙乙角亦爲大一倍。見四卷第十一節。故甲己乙角爲七十二度。而甲乙弧線亦爲七十二度矣。以七十二度於全圜界三百六十度內減之。餘二百八十八度。折半得一百四十四度。卽爲甲戊丙一段弧線之數也。再將一百四十四度折半。得七十二度。卽爲甲戊一段弧線之數也。既得甲戊弧線之數。則戊丙、丙丁、丁乙、各弧線度。俱各爲七十二度矣。甲乙、乙丁、丁丙、丙戊、戊甲五線。既俱係相等弧之弦線。則五線之度必俱等。五

線之度既等則此形又在圜之內而五角之度豈有不相等者哉

第四

有一直線分大小兩分．爲相連比例線法．如甲乙直線爲全分．甲丙一段爲大分．丙乙一段爲小分．以甲乙全分與甲丙大分之比．同於甲丙大分與丙乙小分之比．則用此甲乙線爲一邊．線依此卷第二節法．作兩邊等度之兩底角、比上一角各大一倍之甲乙丁三角形．又依此卷第三節法．取乙丁線度、作邊角俱等之甲戊乙丁己五邊形．又自戊至丁作一直線．截甲乙線於丙．乃得甲丙一大段爲大分．丙乙一小段爲小分．即是所欲作之相連比例線也．何則．甲戊、乙丁、兩弧線度等．則甲乙戊、乙戊丁、兩角度必等．又乙戊丁角與乙甲丁角共立於乙丁弧．其度必等．再甲戊丁與甲乙丁二角．亦同立於甲己丁弧．其度亦必等也．至於甲乙丁角．原比乙甲丁角大一倍．故甲戊丁角比丙戊乙角丙乙戊角俱大一倍．其甲丙戊角．因爲戊丙乙三角形之外角．與丙乙戊、丙戊乙、兩丙角等．故甲丙戊與甲戊丙兩角相等．此二角既等．則甲丙、甲戊、兩線必等矣．又甲戊、戊乙、兩線度原相等．其戊甲乙角．必與戊乙甲角等．而甲乙戊一大三角形．必與戊乙丙一小三角形爲同式形矣．蓋小三角形之丙戊乙角與大三角形之戊甲乙角等．而小三角形之丙乙戊角與大三角形之甲乙戊角爲共角．而等．則小三角形之戊丙乙角與大三角形之甲戊乙角．不得不等．三角俱等．非同式形而何．是故甲乙線與甲戊線之比．必同於乙戊線與丙乙線之比也．夫甲戊原與甲丙相等．



而乙戊原與甲戊相等.故乙戊亦與甲丙相等.然則甲乙全線與所分甲丙大分之比.必同於甲丙大分與丙乙小分之比可知矣.故曰甲乙與甲丙.甲丙與丙乙.爲相連比例之線也.

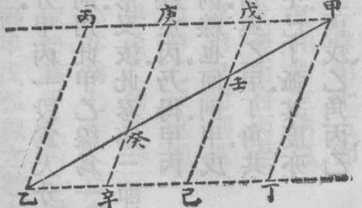
第五

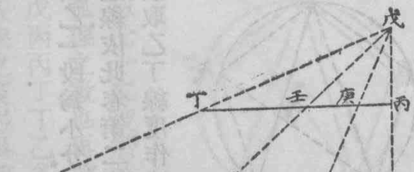
平分一直線爲數段法.如有甲乙一直線.欲平分爲三分.則自甲乙線之兩末.作甲丙、乙丁、二平行線.隨意取一甲戊度.將甲丙線分爲甲戊、戊庚、庚丙三段.又依甲戊度將乙丁線亦分爲乙辛、辛己、己丁三段.乃自二平行線之三段處.復作甲丁、戊巳、庚辛、丙乙、四平行線.即平分甲乙直線爲甲壬、壬癸、癸乙之三分矣.試觀甲乙丁三角形之甲乙、乙丁、兩傍線.爲與甲丁線平行之壬己、癸辛、二線所分.故俱爲相當率.今以甲乙全線與乙丁全線之比.同於丁己段與甲壬段之比.而己辛段與壬癸段之比.辛乙段與癸乙段之比.亦皆與甲乙全線與乙丁全線之比相同也.因其比例俱同.故丁己、己辛、辛乙、三段爲平分.而甲乙線之甲壬、壬癸、癸乙、三段亦爲平分也.

第六

有分數之直線.將別一直線.依此線分、分爲相當比例率法.

如有甲乙一直線.原分爲甲己、己辛、辛乙、三段.又有一丙丁

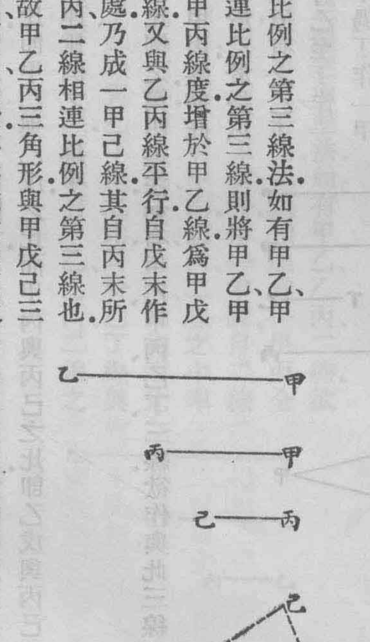




直線欲依此甲乙線。分分作三分爲相當比例之率。則齊二線之一端。以爲平行線。自甲乙線之甲端過丙丁線之丙端作一縱線。復自甲乙線之乙端過丙丁線之丁端作一斜線。則二線相交於戊。乃自戊至所分己辛二處。作戊己、戊辛二線。則丙丁線卽分爲丙庚、庚壬、壬丁三段。與甲乙線之甲己、己辛、辛乙三段。爲相當比例率也。試審戊甲乙全形內戊丙庚、戊甲己、戊庚壬、戊己辛、戊壬丁、戊辛乙之大小六三角形。其相當各式皆同。如戊丙庚與戊甲己爲同式。戊庚壬與戊己辛爲同式。戊壬丁與戊辛乙爲同式。故丙庚與甲己爲相當二界。庚壬與己辛爲相當二界。壬丁與辛乙爲相當二界。此六線既各爲相當界。故各爲相當比例率也。

第七

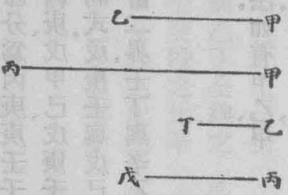
有二直線。作與此二線相連比例之第三線。法。如有甲乙、甲丙、二直線。欲作與此二線相連比例之第三線。則將甲乙、甲丙、二線之甲末。合成一角。照甲丙線度。增於甲乙線。爲甲戊線。自乙末至丙末。作一乙丙線。又與乙丙線平行。自戊末作一戊己線。將甲丙線引至己處。乃成一甲己線。其自丙末所分之丙己線。卽爲與甲乙、甲丙、二線相連比例之第三線也。蓋己戊線既與丙乙線平行。故甲乙丙三角形。與甲戊己三角形爲同式。而甲乙、甲丙、乙戊、丙己四段。必爲相當比例之

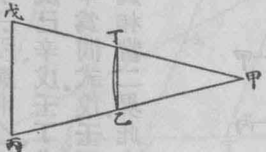


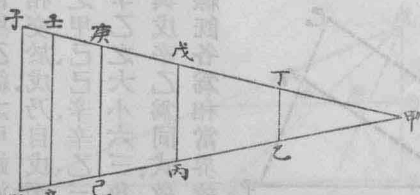
四率。是以甲乙第一率與甲丙第二率之比。卽同於乙戊第三率與丙己第四率之比也。夫乙戊之度。原與甲丙等。故甲乙與甲丙之比。卽甲乙與乙戊之比。而甲丙與丙己之比。卽乙戊與丙己之比。然則甲乙與甲丙。甲丙與丙己。豈非相連比例之三線乎。

第八

有三直線。作與此三線相當比例之第四線法。如有甲乙、甲丙、乙丁、三線。欲作與此三線相當比例之第四線。則取甲丙線度。另作一甲丙線。將此所作甲丙線。照甲乙線度紀於乙。於是以甲為心。自乙作弧一段。又取原有之乙丁線度。自乙截弧線於丁。卽自乙至丁作一乙丁線。再依甲丙線度。自甲過丁作一甲戊線。又與乙丁線平行。作一戊丙線。此戊丙線。卽為原三線相當比例之第四線也。蓋甲丙戊三角形與甲乙丁三角形為同式。故甲乙線與甲丙線之比。卽同於丁乙線與戊丙線之比。因其比例相同。故戊丙線為原有之甲乙、甲丙、乙丁、三線相當比



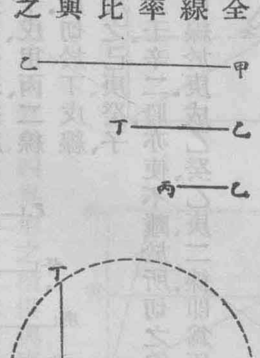




例之第四線也。或欲作相當比例之數線。則將甲角上下二線引長爲甲癸、甲子。凡相當各二處。任意截爲幾段。作幾平行線。卽得相當比例之數線矣。如以甲角之甲子、甲癸二線。截爲丁乙、戊丙、庚己、壬辛、子癸五段。於所截五處作五平行線。卽得相當比例之十率矣。蓋以甲乙與甲丙之比。同於丁乙與戊丙之比。以甲丙與甲己之比。同於戊丙與庚己之比。以甲己與甲辛之比。同於庚己與壬辛之比。以甲辛與甲癸之比。同與壬辛與子癸之比。故將甲子甲癸二線。雖分爲無數段。作無數平行線。其比例亦無不相同也。

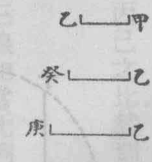
第九

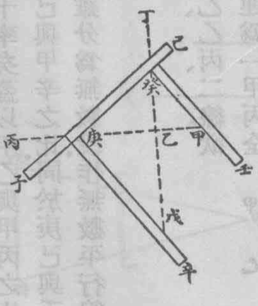
有二直線。欲另作一線。爲此二線之中率法。如有甲乙、乙丙二線。欲另作一線。爲此二線之中率。則將甲乙、乙丙二線相連爲一甲丙全線。乃平分全線於戊。以戊爲心。以甲丙兩末爲界。作一半圜。自二線相連乙處至圜界。作一丁乙垂線。卽爲原有甲乙、乙丙二線之中率線也。何也。丁乙線旣爲圜徑上之垂線。則甲乙、丁乙、乙丙爲相連比例之三率。見九卷第七節。故甲乙線與乙丁線之比。同於乙丁線與乙丙線之比也。比例旣同。則所作乙丁線。爲原有甲乙、乙丙二線之中率可知矣。



第十

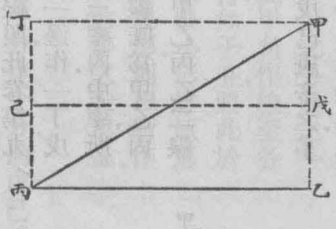
有二直線。欲另作二線。爲此二線間之兩率法。如有甲乙、乙戊、二直線。欲另作二線。爲此二線間之兩率。則將甲乙、乙戊、二線之乙末相合。爲直角。又自此二線所合乙角引長爲甲乙丙、戊乙丁、二線。次將二矩尺之二角正置於丁戊、甲丙、二線上。如一矩尺爲己庚辛。一矩尺爲壬癸子。乃以己庚辛矩尺之一股。切於丁戊線之戊末。又以壬癸子矩尺之一股。切於甲丙線之甲末。仍使二矩尺之己庚、癸子、二股相合。則癸、庚、二角亦爲直角。而不離於所跨之線。其二矩尺之壬辛、二股。亦使不離於所切之線末。乃自甲至癸。自戊至庚。自庚至癸。作三線。卽截丁乙線於癸。截乙丙線於庚。成乙癸、乙庚、二線。卽爲原有之甲乙、乙戊、二線間之兩率也。何也。如平分戊癸線於丑。則丑爲心。戊爲界。成一戊庚癸半圜。若平分甲庚線於寅。則寅爲心。甲爲界。成一甲癸庚半圜。今乙癸線爲甲癸庚半圜徑線上之垂線。故乙癸爲甲乙、乙庚、二線之中率。而乙庚線爲戊庚癸半圜徑線上之垂線。故乙庚又爲癸乙、乙戊、二線之中率。是以甲乙線與乙癸線之比。同於乙癸線與乙庚線之比。而乙癸線與乙庚線之比。亦同於乙庚線與乙戊線之比。因其比例相同。故乙癸乙庚二線爲甲乙、乙戊、二線間之兩率也。

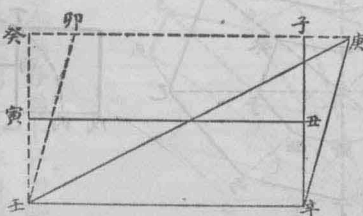




第十一

有三角形依一界作等積之直角四界形法．如有甲乙丙一直角三角形．欲依其乙丙界作一直角四界形與原三角形積等．則與乙丙平行作一甲丁線．又與甲乙平行作一丁丙線．卽成一甲乙丙丁直角四界形．於是平分甲乙線於戊．平分丙丁線於己．作一戊己線．則平分甲乙丙丁四界形爲兩形．此所分甲戊己丁、與戊乙丙己兩直角四界形之積．俱與甲乙丙三角形之積相等也．蓋甲乙丙三角形．爲甲乙丙丁四界形之一半．今所分甲戊己丁、與戊乙丙己兩四界形．旣俱爲甲乙丙丁四界形之一半．則必與甲乙丙三角形之積俱相等可知矣．又如庚辛壬無直角之三角形．依辛壬界作一直角四界形．與原三角形積等．則與辛壬平行作一庚癸線．又自辛壬至庚癸線．作子辛、癸壬二垂線．卽成一子辛壬癸直角四界形．於是平分子辛線於丑．平分癸壬線於寅．作一丑寅線．則平分子辛壬癸四界形爲兩形．其所分子丑寅癸與丑辛壬寅兩直角四界形之積．俱與庚辛壬三角形之積相等也．試與庚辛線平行作一卯壬線．卽成庚辛壬卯一斜方形．爲與子辛壬癸方形同底同高．故其積必等．見三卷第八節．今庚辛壬三角形．爲庚辛壬卯形之一半．則亦必爲子辛壬癸方形





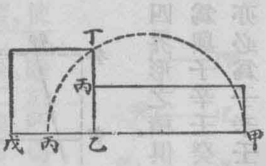
之一半矣。既爲一半。則所分子丑寅癸與丑辛壬寅直角四界形。必與庚辛壬三角形之積相等可知矣。

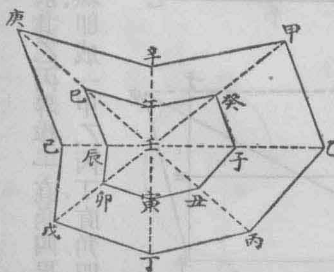
第十二

有一長方形。作與此積相等之正方形法。如有甲丙一長方形。欲作與此長方形相等之正方形。則將甲丙形之甲乙縱線。合於甲乙橫線。照此卷第九節法。求得甲乙、丙乙、二線之中率。爲丁乙線。卽以丁乙線爲一邊。作一丁戊正方形。卽與甲丙長方形之積相等也。何則。大凡相連比例三率內。中率所作之正方形積。與首率末率所作之長方形積相等。今丁乙線既爲甲乙、丙乙、二線之中率。則丁乙線所作之丁戊正方形積。焉得不與甲乙丙乙二線相合所作之甲丙長方形之積相等乎。

第十三

凡多界形。作與本形同式或大或小之形法。如有甲乙丙丁戊己庚辛之多界形。欲作比此形小一半之同式形。則目此形中心壬處。至各角作衆線。又取甲乙、乙丙、丙丁、丁戊、戊己、己庚、庚辛、辛甲、各界度之一半。與各界平行。置於對角各線之間。爲癸子、子丑、丑寅、寅卯、卯辰、辰巳、巳午、午癸之八線。卽成癸子丑寅卯辰巳午之形。爲原形每界減半之同式形也。何也。如對角線間





所成之甲乙壬癸子壬大小兩三角形之甲乙癸子線既平行而又同一壬角則其相當各角俱等而兩形之式相同。倣此推之。其乙丙壬、子丑壬二形。丙丁壬、丑寅壬二形。丁戊壬、寅卯壬二形。戊己壬、卯辰壬二形。己庚壬、辰巳壬二形。庚辛壬、巳午壬、二形。辛甲壬、午癸壬二形。必俱爲同式形。此各相當大小兩形既俱同式。則所作癸子丑寅卯辰巳午小形之各邊。爲甲乙丙丁戊己庚辛大形之各邊之一半而爲同式形可知矣。又如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸形從甲角作線至各角。取乙丙度之一半。置於甲乙、甲丙、二線之間。與乙丙平行。如子丑。照此於諸對角線間作諸界之平行線。卽成甲子丑寅卯辰巳午未申小形。爲原形每界減半之同式形。其理亦與前同。若欲作比原形大幾倍之形。則以所作諸對角線。按分引長。而於本形外作諸界之平行線。卽成所欲作之大形也。

第十四

作分釐尺法。如甲戊尺三寸。每寸欲分爲百釐。則將甲乙邊平分作十分。將戊己邊亦平分爲十分。對所分之分作諸橫線。與乙戊平行。次將一寸之甲辛、乙丙、兩邊俱分爲十分。再於甲辛邊之第一分作斜線。至乙丙邊之乙處。如此作十斜線。俱與第一分斜線平行。卽分乙丙之一寸爲一百釐也。何也。甲辛乙丙皆爲一寸之度。俱平分爲十分矣。若將每分又分爲十釐。卽每寸亦得百釐。然度狹線多。必致相淆。今作斜線橫線各十。其橫斜相交處。共有百分。此百分卽百釐也。如第一斜線、與第一橫線相交之點。卽爲一

釐。與第二橫線相交之點。卽爲二釐。以至第十橫線相交之點爲十釐。卽甲辛邊所分之第一分之十釐也。一斜線有十釐。則十斜線豈非百釐乎。由此推之。若作二十橫線。則一斜線得二十釐。每寸卽分爲二百釐。作百橫線。則一斜線得百釐。每寸卽分爲千釐。其法甚簡而其用尤甚便也。

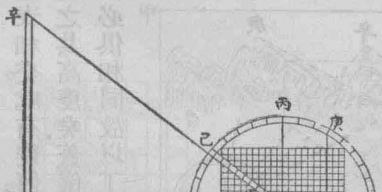
第十五

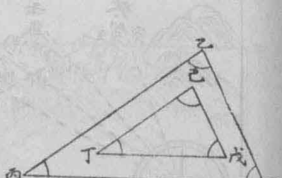
凡有三角形。知其一角之度。及此一角之兩傍界。或知其二角之度。及此二角之間一界。或不知角度。但知三界。欲求其餘角餘界法。如有一甲乙丙三角形。知丙角爲三十八度四十四分。及丙角兩傍之丙甲界長十四丈。丙乙界長十三丈。而欲知其餘角餘界。則依十一卷第八節法。作與丙角相等之三十八度四十四分之丁角。將丁角兩傍之丁戊界作十四分。丁己界作十三分。乃自戊至己作一戊己線。成一丁戊己小三角形。與甲乙丙大三角形同式。量其戊己邊得九分。卽大形之甲乙邊爲九丈也。再用有度之圜。量取小形戊角得六十四度三十七分。卽大形甲角之度也。小形己角得七十六度三十九分。卽大形乙角之度也。何也。夫甲乙丙、戊己丁、兩三角形之式既同。其相當各角各界必俱相等。小形之丁角。卽與大形之丙角等。其餘兩角亦必等。小形之丁己邊既以十三分當大形丙乙邊之十三丈。則小形戊己邊之九分。必當大形甲乙邊

之九丈矣。又或知甲乙丙三角形之乙角爲七十六度三十九分。丙角爲三十八度四十四分。及乙丙界長十三丈。而欲知其餘角餘界。則作己丁界爲十三分。照乙角丙角度作己角丁角。於是晝己戊、丁戊二界相交於戊。卽成戊己丁同式之小三角形。此小形之戊角。必與甲角等。而小形之丁戊界十四分。與大形之甲丙界十四丈相當。小形之戊己界九分。與大形之甲乙界九丈相當矣。若知甲乙丙三角形之甲乙、甲丙、乙丙三界。而不知其角。則照前將三界之度作同式之小形。量其三角之度。卽知大形之角度矣。

第十六

作分數比例測量儀器法。以甲丙乙半圜界、分爲一百八十度。每度作六十分。將此半圜之丁甲、丁乙、丁丙三半徑線。照所容方界分截開分爲一百分。於每分上俱與三半徑半行作縱橫線。於甲乙徑線之甲乙兩末作兩定表。以圜丁心爲樞。作一遊表如丁己。將此遊表亦如前所分一百分度。作二百分。復於此儀器後面作一垂線記號以掛墜線如庚。卽成一全儀器。用以測高深廣遠。可知其各角各界之度矣。如有一辛壬旗杆。欲測其高。則將儀器按墜線立準。看甲乙徑線兩末之定表與旗杆癸處相對。乃爲地平。再將丁己遊表。與旗杆頂尖辛處相對。次量儀器中心所對處至旗杆癸處得幾何。如有四十丈。則看儀

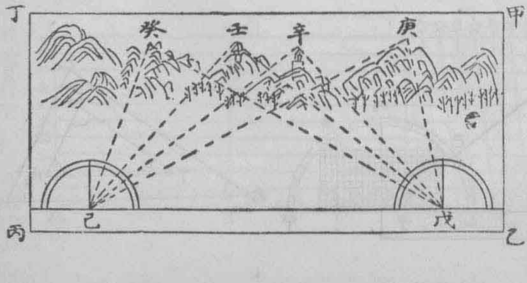




器丁乙線上自丁心至子得四十分。以當地平四十丈。即視與子相對垂線至遊表相交處有幾何。如丑子三十分。即爲旗杆自辛至癸相當數爲三十丈也。再加癸壬高。即得旗杆辛壬之共高度矣。蓋儀器上之丁子丑小三角形與所測得丁癸辛大三角形。原爲同式。其相當各界之比例必俱相同。故以丁子四十分、與子丑三十分之比。即同於丁癸四十丈、與癸辛三十丈之比也。若欲知丁辛弦線數。即視遊表自丁至丑相交之處得幾何。如有五十分。其相當數即爲五十丈也。若欲知丁癸辛三角形之各角度。則視圜界與遊表相交處。如己其乙己弧度。即丁角三十五度一十三分。其餘己丙弧五十度四十七分。即辛角度。而癸辛線原與子丑垂線平行。爲平行線。故癸角必是直角而爲九十度也。

第十七

倣各種地形畫圖法。如有甲乙丙丁地形。欲畫一圖。則選能見各地之二處。立儀器。爲戊爲己。將戊與己對准定表。先自戊以遊表視庚辛壬癸等處。得諸角之度。皆細記之。如庚戊己角得八十一度。辛戊己角得五十度三十分。壬戊己角得四十五度八分。癸戊己角得三十三度二十分。次自己以遊表照前視庚辛壬癸等處。得諸角之度。亦細記之。如庚己戊角得三十五度四十分。辛己戊角得四十度十分。壬己戊角得四十七度二十五分。癸己戊角得七十度。於是

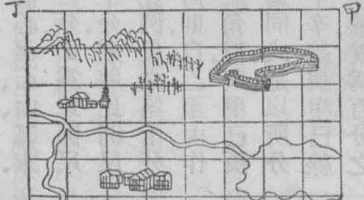


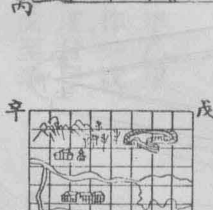
任意作一子丑線.爲戊己相當線.於此子丑線之兩末作諸角.與所記諸角相等.將所作諸角之各線.俱引長使相交於寅卯辰巳等處.乃以庚辛壬癸所有之諸地形.並其餘各處.凡目之所見.俱畫於圖之相當各界.卽成一午未申酉之圖.卽甲乙丙丁地形之圖也.蓋午未申酉圖內所作寅子丑、卯子丑類諸三角形之角度.皆與甲乙丙丁地形之庚戊己、辛戊己類諸三角形之角度相等而作.故其相當各三角形.俱爲同式.此所以全圖與全地形爲同式也.

第十八

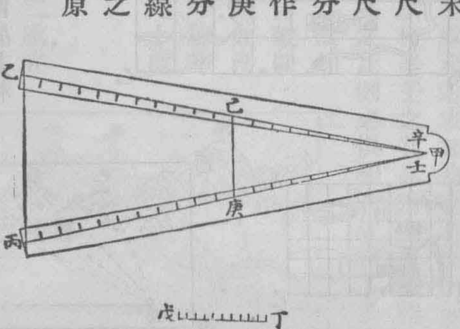
畫地理圖.欲約爲小圖.或欲廣爲大圖法.如有甲乙丙丁一地理圖.欲約爲小圖.爲原圖四分之一.則用甲乙丙丁形界之四分之一.畫一戊己庚辛形.將甲乙丙丁原形.任意分爲數正方形.而將小形亦分爲數正方形.視原圖中所有山川城郭村墅林園、函於大圖之某正方分者.約而畫入小圖某正方形內.則此所畫之戊己庚辛小圖.卽與原有甲乙丙丁大圖爲同式矣.

第十九





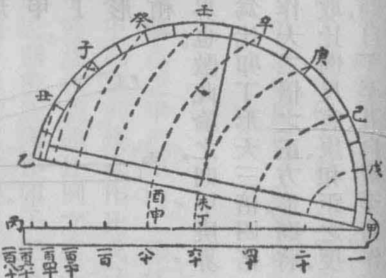
作比例尺平分線法。如於比例尺欲作平分線。則自甲樞心至乙、丙、二末。作甲乙、甲丙、二線。用本卷第五節法分之各平分為二百分。即為比例尺之平分線也。以用法明之。如有丁戊一直線欲平分為十分。則將比例尺一百分之己、庚、二點。照丁戊線度展開。勿令移動。次取比例尺之第十分之辛、壬、二點相離之度。即是丁戊線之十分之一分也。何則自乙至丙作一線。自己至庚作一線。自辛至壬復作一線。其甲乙丙三角形與甲己庚三角形為同式。而甲己庚三角形。又與甲辛壬三角形為同式。是以所分甲己線與甲乙線之比。同於己庚線與乙丙線之比。而甲辛線與甲己線之比亦同於辛壬線與己庚線之比也。然則十分之甲辛線。既為百分之甲己線之十分之一。其辛壬線亦必為己庚線之十分之一矣。丁戊線原與己庚線同度。則辛壬線亦為丁戊線之十分之一可知矣。



第二十

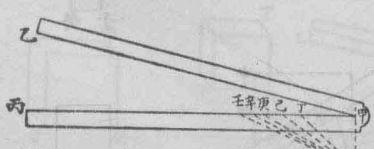
作比例尺分圜線法。如於比例尺欲作分圜線。則自甲樞心至乙、丙、二末。作甲乙、甲丙、二線。乃平分甲乙線於未。以未為心。以甲乙二末為界。作一半圜。於是分圜界為一百八十度。復以甲為圜心至所分圜界戊己庚辛壬癸子丑等處作各弦線。又將諸弦線度移於尺之甲乙、甲丙、二線。則此二線。即成一圜之諸弦之總線也。以用法明之。如寅卯、寅辰二線所合寅角。欲知其度。則以寅為心。作一辰卯弧。將比例尺六

十度之丁、未、兩點相距之度。照寅辰或寅卯度展開。勿令移動。次取卯、辰、相距之度。於比例尺上尋至八十度之申、酉、處恰符。卽是寅角爲八十度也。何則。若自丁至未、自申至酉、作二線。成甲申酉、甲丁未、兩同式三角形。其相當各角各界俱爲相當比例之率。故甲未線與甲酉線之比。同於丁未線與申酉線之比也。夫甲未線既爲比例尺所作甲庚六十度之弦線。而甲酉線又爲甲辛八十度之弦線。其丁未線既與小圜寅卯輻線等。而輻線原與六十度之弦線等。然則丁未線卽小圜六十度之弦線。而申酉線亦爲小圜八十度之弦線也。以此得知寅角之卯辰度爲八十度也。

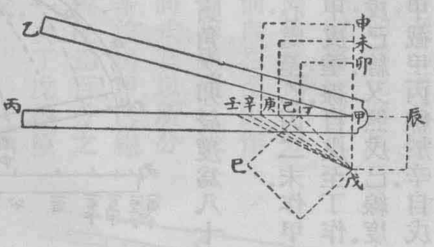


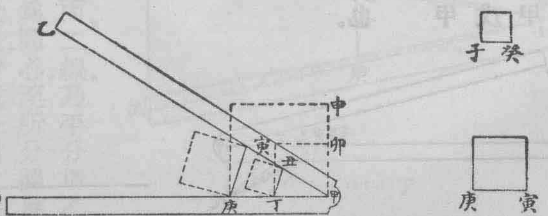
第二十一

作比例尺分面線法。如於比例尺欲作分面線。則以甲樞心處至乙、丙、二末作甲乙、甲丙、二線。自甲截甲丙線於丁。照所截甲丁度於甲心作一甲戊垂線。自戊至丁作一戊丁線。又照戊丁線度自甲截甲丙線於己。自戊至己作一戊己線。又照戊己線度自甲截甲丙線於庚。自戊至庚作一戊庚線。又照戊庚線度自甲截甲丙線於辛。自戊至辛



作一戊辛線.又照戊辛線度.自甲截甲丙線於壬.自戊至壬作一戊壬線.照此累累截之.至丙末.又將甲丙線所截各度.移置甲乙線.卽成比例尺之分面線也.何則.於甲丁戊直角三角形之三界.作卯丁、辰戊、戊巳三正方形.其甲丁、甲戊、二線.因爲相等度所作.故卯丁、辰戊二形必等.再於戊甲丁直角相對之戊丁界所作之戊巳一方形.亦必與直角兩旁界所作卯丁、辰戊、二方形相等也.見九卷第四節.次於甲己界作未己正方形.甲己界原與戊丁等.則甲己界所作未己方形.卽與戊丁界所作之戊巳方形相等矣.未己方形.旣與戊巳方形等.則必與卯丁、辰戊、二形相等.而亦與卯丁之倍數相等矣.夫甲己界卽大於卯丁形一倍.爲未己形之一界也.倣此論之.則甲庚界卽爲比卯丁形大二倍形之界.而甲辛、甲壬、等界.卽爲比卯丁形大三倍四倍形之界可知矣.以用法明之.如有一癸子正方形.欲作大二倍之正方形.則將比例尺展開.使其丁、丑、相距之度.與癸子界度等.次取比例尺寅、庚、相距之度.卽是比癸子方形大二倍之方形之一面界度也.何則.自丁至丑、自庚至寅、作

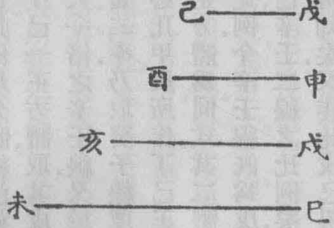


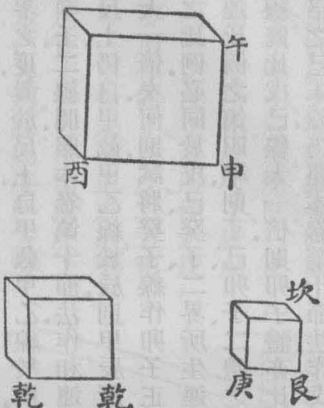


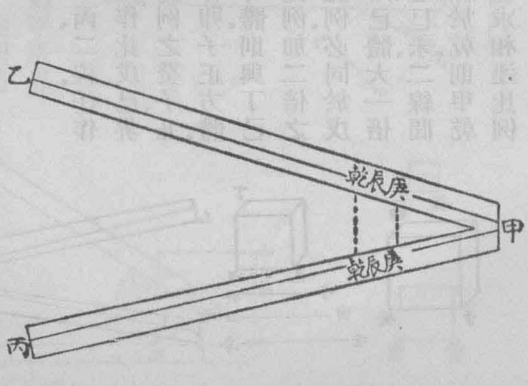
丁丑庚寅二線成甲丁丑甲庚寅同式兩三角形。則甲丁線與甲庚線之比即同於丁丑線與庚寅線之比也。夫甲庚線所作方形原比甲丁線所作方形大二倍。則庚寅線所作方形必比丁丑線所作方形亦大二倍矣。丁丑之度原與子癸等。則寅庚線豈非比子癸方形大二倍方形之一界乎。

第二十二

作比例尺分體線法。如於比例尺欲作分體線。則以甲樞心之甲乙、甲丙、二線。任作丁己一正方體。取其戊己一界之度置於尺上。自甲截甲乙線於庚。次作比戊己界大一倍之辛壬線。又於戊己、辛壬、二線間。照本卷第十節法。作相連比例之癸子、丑寅、二率。乃取癸子線度置於尺上。仍自甲截甲乙線於辰。則甲辰所作卯子正方體。必比甲庚所作丁己正方體大一倍矣。何則。試將癸子線作卯子正方體。則與丁己正方體爲同式。其二體相比之比例。必同於戊己、癸子、二界所生連比例加二倍之比例。今辛壬線既爲戊己相連比例之第四率。則丁己、卯子、二體之比例。必同於戊己、辛壬二線之比例矣。辛壬線既比戊己線大一倍。則卯子體亦比丁己體大一倍可知矣。又作比戊己界大二倍之巳未線。仍照本卷第十節法。作戊己、巳未、二線間相連比例之申酉、戌亥、二率。乃取申酉線度置於尺上。自甲截甲乙線於乾。則甲乾所作午酉正方體。即比甲庚所作丁己體大二倍矣。照此屢倍戊己界求相連比例







之四線。取其第二線度。置於尺之甲乙線上。又按甲乙線所截各度。移置甲丙線。卽成比例尺之分體線也。以用法明之。如有一坎庚正方體。欲作大二倍之體。則將比例尺展開。使其庚與庚第一次所截之點相距之度。與艮庚界度等。次取比例尺乾與乾第三次所截之點相距之度。卽是比坎庚正方體大二倍之正

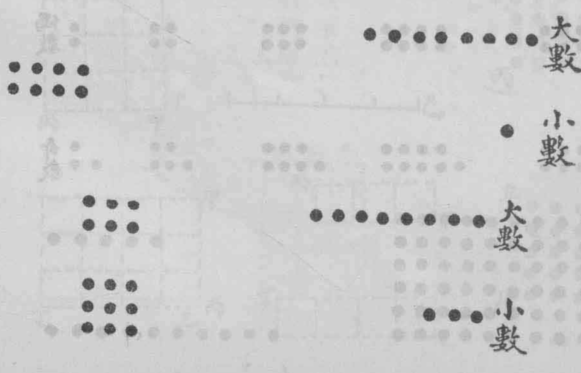
方體之一界度也。何則。自比例尺之庚乾二處作庚庚、乾乾、二線。卽成甲庚庚、甲乾乾、同式兩三角形。則甲庚線與甲乾線之比。同於庚庚線與乾乾線之比例矣。夫甲乾線所作方體。原大於甲庚線所作正方體之二倍。則乾乾線所作正方體。必大於庚庚線所作正方體之二倍可知矣。又捷法。設正方體界一百釐。其積數一百萬釐。以二因之。成二百萬釐。立方開之。得界一百二十五釐。又以三因之。成三百萬釐。立方開之。得界一百四十四釐。照此屢倍積數開立方。將所得之數。於分釐尺上取其度。截比例尺之甲乙、甲丙二線。卽成分體線。與前求連比例之法無異也。

數理精蘊上編卷五

算法原本一

第一

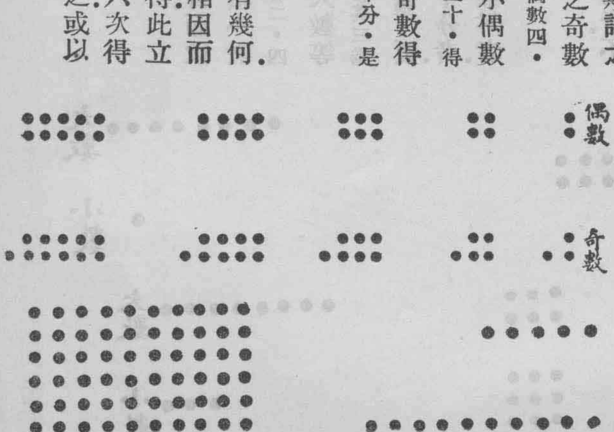
一者、數之原也。衆一相合而數繁焉。不能無大小多寡之不齊。而欲知其所以分合之故。必有一定之法。始可以得其準。若夫累積小數與大數等者。此小數卽度盡大數之準也。如大數有八。小數有二。四倍其二。與八必等。則二卽爲度盡八之準。苟累積小數不能與大數等者。此小數卽非度盡大數之準也。如大數有八。小數有三。二倍其三爲六。小於八矣。三倍其三爲九。又大於八矣。若此者卽爲非度盡大數之準。要之小數爲大數之平分者。卽能度盡大數。而小數非大數之平分者。卽不能度盡大數。是故以小度大。以寡御多。求其恰符而毫無舛者。惟在得其平分之法而已。



第二

數之目雖廣。總不出奇偶二端。何謂偶。兩整平分數是也。何謂奇不

能兩整平分數是也。如二、四、六、八、十之類。平分之俱爲整數。斯謂之偶數矣。若三、五、七、九、十一之類。平分之俱不能爲整數。斯謂之奇數矣。又如小偶數分大偶數得偶分。則謂之偶分之偶數。如小偶數四。分大偶數三十二得八平分。是爲偶分。其三十二。卽爲偶分之偶數。小偶數分大偶數得奇分。則謂之奇分之偶數。如小偶數六分。大偶數三十。得五平分。是爲奇分。其三十。卽爲奇分之偶數。又如小奇數分大奇數得奇分則謂之奇分之奇數矣。如小奇數五。分大奇數十五。得三平分。是爲奇分。其十五。卽爲奇分之奇數。



第三

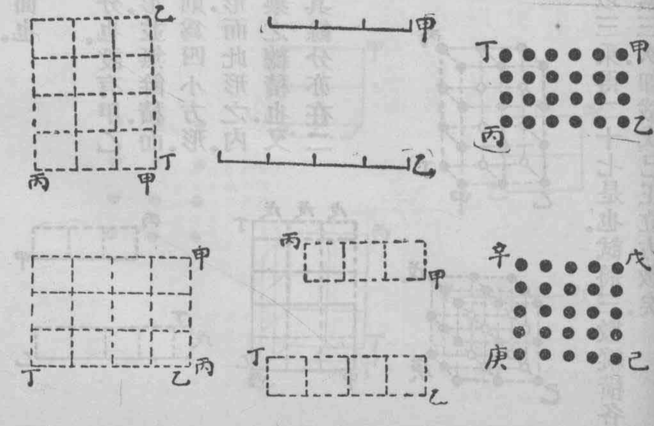
乘者。兩數相因而成也。蓋有兩數。視此一數有幾何。彼一數有幾何。將此一數照彼一數加幾倍。則兩數積而復成一數。故謂之相因而成。然不用加而用乘者何也。蓋加須層累而得。乘則一因卽得。此立法之精而理則實相通也。如有六與十兩數。以十爲主而加六次得六十。以六爲主而加十次亦得六十。今以十爲主而以六乘之。或以六爲主而以十乘之。皆得六十。其數無異。而比加捷矣。

第四

凡兩數相乘。為平方數。如四與六相乘。得二十四。是也。試將四六兩數作點排之。縱立四點為甲乙。橫列六點為甲丁。將此六點累四次。即成甲乙丙丁平方數矣。又若相等兩數相乘。得數則為正方數。如五與五乘得二十五。是也。苟將五數縱橫各列五點。或依縱數。或依橫數。累五次。即成戊己庚辛正方數矣。

第五

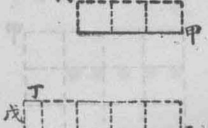
凡數之相乘。可用線以表之。然線雖無廣分。如依一線之長分廣為小方面。看此線所有方面若干。將彼線所有方面。加作幾倍。或看彼線所有方面若干。將此線所有方面。加作幾倍。則二線相積而成面矣。設如有甲乙、二線。甲線之分為三。乙線之分為四。將此二線相乘。則依甲線三分之一分作廣分為甲丙。依乙線四分之一分作廣分為乙丁。其甲丙有三小方形。乙丁有四小方形。若依甲丙所有之數。將乙丁加為三倍。或依乙丁所有之數。將甲丙加為四倍。俱成函十二小方形之乙丙、甲丁之二直角形矣。蓋面為線之積。以一線為

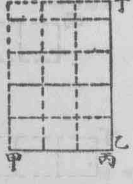


橫。一線爲縱。縱橫相因而成。故測面者必於線。知線卽可以知面也。

第六

凡二線彼此各分不均而有零分者。其相乘所成方面亦有零分也。設有甲乙二線。甲線爲三分。今將甲線依三分之一分作廣分爲三小方形。並無餘積。而乙線照甲線分。則爲四分有零。亦將乙線依甲線一分作廣分。則爲四小方形而餘戊一小形。以所作甲丙爲橫。乙丁爲縱。則成一丁甲四方形。而此形之內必有十二小方形。仍有三小戊形。附於十二方形。乃爲二線相乘之總積也。又如此類一線有零分者。其餘分在一邊。若二線俱有零分者。則其餘分亦在二邊矣。

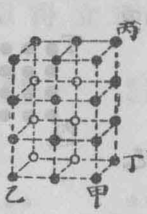


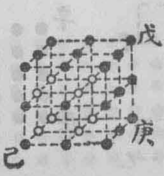


第七

凡三數遞乘。爲立方數。如二與三相乘得六。又以四乘之得二十四是也。試將二三四之三數作點排之。縱列二點爲甲丁。橫列三點爲甲乙。將此三點累二次。成丁乙平方數。又直立四點爲丙丁。依丙丁數將丁乙平方數累四次。卽成丙乙立方數矣。

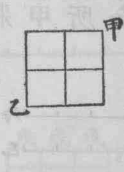
又若相等三數遞乘得數。則爲正立方數。如三與三乘得九。再以三乘得二十七是也。試將三數縱橫各排三點。平列三次。成庚己平方數。又直立三點。將庚己平方數累三次。卽成戊己正立方數矣。

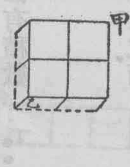


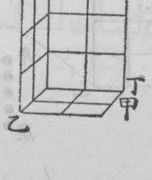


第八

凡數之遞乘爲體。可用面以表之。葢面雖無厚分。如依一面之積分。廣爲小方體。看面所有積分。得線之長分若干。將面所有小方體。加作幾倍。則線面因之而成體矣。設如有甲乙面之分爲四。丙丁線之分爲三。將此面線相乘。則依甲乙面四分之一作厚分。爲四小方體。乃依丙丁線分數。將甲乙加爲三倍。卽成函十二小方體之丙乙直角立方體矣。葢體爲面之積。而面爲線之積。故線可以測面。并可以測體也。

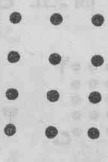






第九

除者。兩數相較而分也。葢視大數內有小數之幾倍。將大數照小數減幾次。則大數分而復爲一小數。故謂之相較而分。然不用減而用除者何也。葢減必遞消其分。除則一歸而卽得。除之與減。卽猶乘之與加。正相對待者也。如有大數十二。小數四。若用十二以四減之。三次而盡。卽知十二爲四之三倍。若用除法。則三倍其四與十二較。其數適等。卽知十二爲四之三倍矣。此除之與減。理相通。而用較捷也。

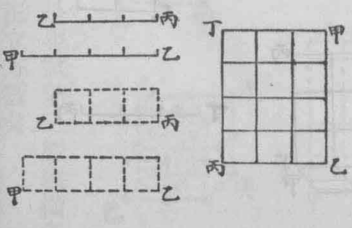


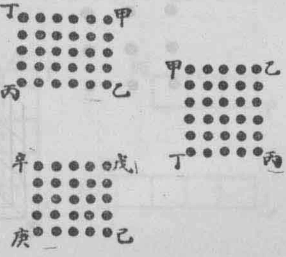
第十

凡兩數相乘之平方數。以一數除之。必得其又一數也。設如甲乙五。乙丙六。兩數相乘之。甲乙丙丁平方數三十。若以甲乙五除之。卽得乙丙六。或以乙丙六除之。卽得甲乙五。葢此三十中有五之六倍。六之五倍。如作點排之。五點爲橫。則縱排六次。六點爲橫。則縱排五次。皆成方數。故兩數不等平方面。知其一數。或知兩數相差之較。始能得其兩邊線也。又若正方數。則其縱橫皆同。如戊己庚辛之正方數二十五。其縱橫皆五。是巳。故凡正方面有積數。卽可得其每邊者。葢因其縱橫兩邊皆等故也。

第十一

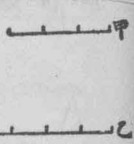
凡以線乘線。卽成面。而以線除面。亦復得線。故數之乘者可用線以表之。而除者亦可用線以表之也。設如有甲乙丙丁一方面積一十二。以甲乙線四分除之。得乙丙線之三分。或以乙丙線三分除之。亦得甲乙線之四分。試將甲乙、乙丙、二線作廣分。則甲乙線成四小方形。乙丙線成三小方形。若依甲乙線所有數。以分甲乙丙丁面。卽每分得三小方形。如乙丙線。依乙丙線所有數。以分甲乙丙丁面。卽每分得四小方形。如甲乙線。葢除之與乘。猶分合之相對。以線合者。仍以線而分。返本還原之義。有不爽矣。

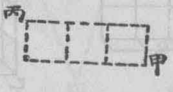


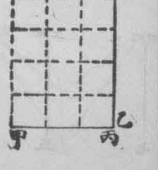


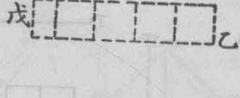
第十二

凡有零分不均二線相乘之方面．以整分線除之．必得零分線．以零分線除之．必得整分線也．設如甲線三分．乙線四分有零．相乘成丁甲面．若以甲線三分除之．即得乙線四分有零．或以乙線四分有零除之．亦得甲線三分．試將甲線作廣分．成三小方形．爲甲丙乙線作廣分．則成四小方形．爲乙丁．餘戊一小形．若依甲丙線所有數．以分丁甲面．即每分得四小方形一戊小形．如乙丁線．或依乙丁線所有數．以分丁甲面．即每分得三小方形如甲丙線矣．此爲二線一整一零相乘之總積．故以整線除之得零．以零線除之得整．若二線俱有零分者．彼此除之．必俱得零分也．



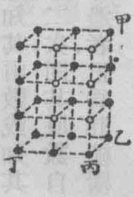


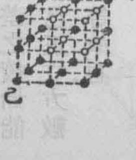




第十三

凡三數遞乘之立方數．以兩數遞除之．始得其又一數也．設如甲乙四．乙丙二．丙丁三．遞乘得甲丁立方數二十四．若以甲乙四除之．得乙丁平方數六．再以乙丙二除之．始得丙丁三．蓋乙丁平方中有三之二倍．而甲丁立方中有六之四倍．如作點排

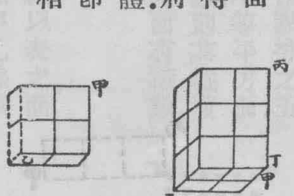


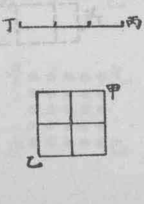


之二點爲縱橫排三次直累四次即成方體故三數不等立方體知其兩數或知其三數相差之較始能得各邊也又若正立方體其縱橫厚度皆爲一數即以一數遞除二次則其原數自得如戊已正立方數二十七其縱橫厚皆三是已故凡正立方體有積數即可得其每邊者正爲其縱橫厚度皆等故也

第十四

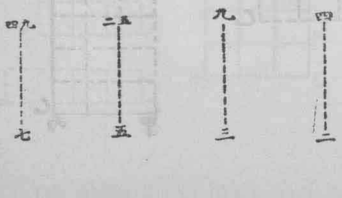
凡以線除體即得面而以面除體亦復得線故線可以除面而面亦可以除體也設如有丙乙體積一十二以丙丁線三分除之得甲乙面之四分或以甲乙面四分除之亦得丙丁線之三分試將甲乙面作厚分則成四小方體若依丙丁線所有數以分丙乙體即每分得四小方體如甲乙面依甲乙面所有數以分丙乙體即每分得三分如丙丁線蓋體本以線面相乘而得故可以線面相除也





第十五

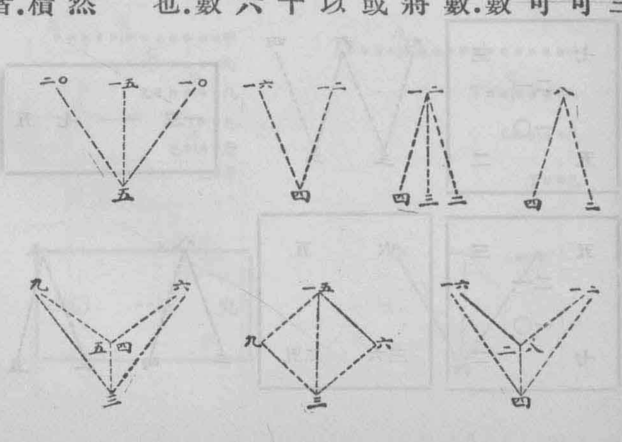
凡大數用小數可以度盡者此大數必爲此小數之所積也然所謂小數可以度盡大數者復有幾種有大數惟一數可以度盡者如四九二十五四十九之類惟用二可以度四三可以度九五可以度二十五七可以度四十九是也有大數用兩數三數俱可以



度盡者．如八與十二之兩數．用二用四俱可以度盡．八用二用三用四俱可以度盡十二是也．有兩大數或三大數．用一小數俱可以度盡者．如十二．十六之兩數．或一十、十五、二十之三數．用四可以度盡十二．十六之兩數．用五可以度盡一十、十五、二十之三數是也．又有一小數可以度盡幾大數．將此幾大數相加爲一總數．此小數亦可以度盡此總數．如四可以度盡十二、十六兩數．若將十二、十六相加爲二十八．則此四亦可以度盡此二十八也．又或一小數可以度盡幾大數．將此大數不拘幾分分之．此小數可以度盡一分．亦必可以度盡其餘幾分也．如三可以度盡十五．將十五分爲六、九兩數．此三可以度盡六．亦必可以度盡九也．又如六與九兩數．用三俱可以度盡．若將六與九相乘得五十四．此小數三仍可以度盡此五十四也．凡此類者．皆爲彼此有度盡之數也．

第十六

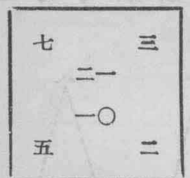
凡大數用小數不可以度盡者．此大數必非此小數之所積也．然用一以度之．無不可以度盡者．蓋一爲數之根．諸數皆自一而積之故也．所謂度不盡者．亦復有幾種．有大數無小數可以度盡者．

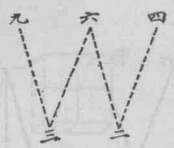


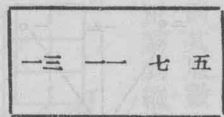
如五、七、十一、十三之類。任用二用三用四。俱不能度盡也。有兩大數。或三大數。用小數彼此不可以度盡者。如十五與八之兩數。用二用四可以度盡八。而不能度盡十五。用三用五。可以度盡十五。而不能度盡八。又如四、六、九之三數。用二可以度盡四、六。而不能度盡九。用三可以度盡六、九。而不能度盡四也。又有彼此不能度盡之數。或將一數自乘。或將兩數俱自乘。彼此仍俱不可以度盡也。如五與六之兩數。彼此不能度盡。亦無一小數可以度盡此兩數。即將五自乘爲二十五。或將六自乘爲三十六。則六仍不能度盡二十五。而五仍不能度盡三十六。即二十五亦不能度盡三十六也。又如三、七兩數與二、五兩數。俱爲彼此不能度盡之數。或將三與七相乘得二十一。將二與五相乘得一十。此一十與二十一之兩數。仍爲彼此不能度盡之數也。凡此類者。皆爲彼此無度盡之數也。

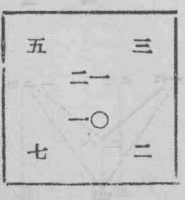
第十七

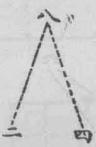
凡兩數互轉相減。未至於一而即可以減盡者。此減盡之最小數。即可以度盡此兩數也。設如有甲乙十六、丙丁六之兩數。將

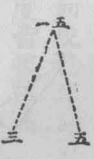




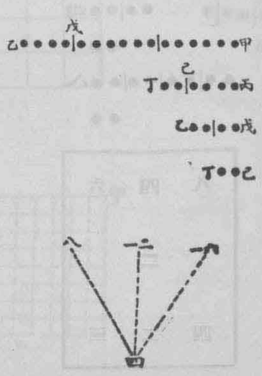






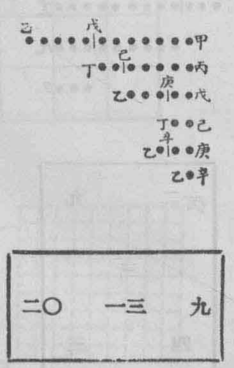


丙丁六與甲乙十六減二次餘戊乙四將此戊乙四轉與丙丁六相減餘己丁二又將此己丁二轉與戊乙四相減二次卽無餘則此己丁二卽可以度盡甲乙十六及丙丁六矣蓋八倍其二與十六等三倍其二與六等也又如十六與十二與八此三數亦爲彼此有度盡之數何也蓋十六與十二相減餘四以四轉與十二相減三次而盡則四可以度盡十六與十二矣又二倍其四卽與八等則四又可以度盡八然則十六、十二、與八之三數爲彼此有度盡之數可知矣



第十八

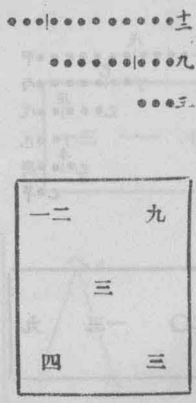
凡兩數互轉相減至於一始可以減盡者一之外別無他小數可以度盡此兩數也設如有甲乙十二、丙丁七之兩數將丙丁七與甲乙十二相減餘戊乙五將此戊乙五轉與丙丁七相減餘己丁二將此己丁二又轉與戊乙五相減餘庚乙三又將庚乙三轉與己丁二相減餘辛乙一既至於一始可以度盡甲乙、丙丁、兩數而一之外如二、三、四雖可以度盡十二而不能度盡七也又如九與十三及二十之三數亦爲彼此無度盡之數何



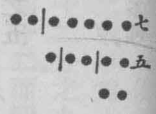
也。蓋將九與十三互轉相減。必至於一。即用十三與二十轉減。或用九與二十轉減。亦皆至於一。則除此一之外。皆無可以彼此度盡此三數之小數矣。

第十九

凡有大數。約爲相當比例之最小數。以從簡易。則爲約分法也。然數有可約不可約之分。可約者度盡之數。不可約者度不盡之數也。設如有九與十二之兩數。欲約爲相當比例之最小數。乃用求小數度盡大數法。以九與十二互轉相減。得減盡之數爲三。則三爲度盡九與十二之數矣。以三除九得三。以三除十二得四。此三、四兩數。即爲九與十二相當比例之最小數也。又如有六、四、八之三數。欲約爲相當比例之最小數。乃以六與四互轉相減。得減盡之數爲二。又以二與八相減。四次而盡。則二爲度盡六、四、八之小數矣。以二除六得三。以二除四得二。以二除八得四。此三、二、四三數。即六、四、八相當比例之最小數也。此皆數之可約者也。若夫數之不可約者。互轉相減。必至於一而

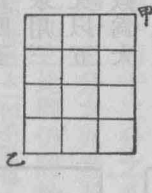


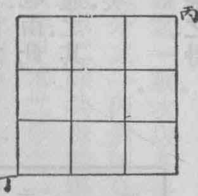
不可以度盡也。如有五、七兩數。以五減七餘二。復以二減五二次餘一。既餘一。則自一之外必無可以度盡之數而不可約矣。

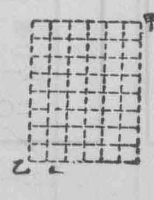


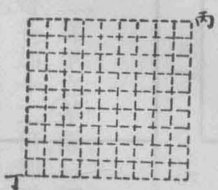
第二十

凡有大分。以分母乘之。通爲小分。則爲通分法也。然不曰乘而曰通者何也。蓋乘則積少成多。其得數溢於原數之外。通則變大爲小。其得數仍函於原數之中也。如有大分十二。其分母爲四。欲得其小分。則以分母四乘大分十二。得小分四十八。是已。試作甲乙方形以明之。其中所函方形十二。卽大分也。若將中函之方形。每分俱分爲四小方。則十二方形共分爲四十八小方形矣。其數雖比原大數加四倍。然其每分之分只得原數之四分之一。故仍函於甲乙方形之內。而未嘗溢出原數之外也。又如有大分九。其分母爲九。欲得其小分。則以分母九乘大分九。得小分八十一。是已。試作丙丁方形以明之。其中所函方形九。卽大分也。若將其中函之方形。每分俱分爲九小方。則九方





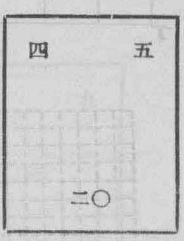


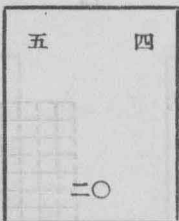


形共分爲八十一小方形矣。其數雖比原大數加九倍。而仍函於丙丁方形之內者。以其每分之分、只得原數之九分之一也。由此推之。其每分之母。或爲八或爲十二。或爲數十。亦皆倣此通之。其所通之數。雖至千萬而要皆未有溢於所通原分之外者矣。

第二十一

凡有幾小數。欲求俱可以度盡之大數。則以此幾小數連乘之、得數始爲此幾小數度盡之一大數也。設如有四、五兩小數。欲求用四用五俱可以度盡之一數。則以四與五相乘得二十。即爲四、五兩數俱可度盡之一大數矣。又如有三、四、五之三小數。欲求用三用四用五俱可以度盡之一數。則以三與四相乘得十二。又以五乘十二得六十。即爲三、四、五俱可度盡之一大數矣。蓋小數爲大數之根。始能度盡大數。如四、五可以度盡二十者。二十乃四之五倍。亦即五之四倍也。三、四、五可以度盡六十者。六十乃十二之五倍。而十二乃三之四倍也。





第二十二

凡有兩數。彼此互乘所得之數。與原數比例必同也。蓋數有多寡。

而分又有大小則紛紜難御。故必依此數之分將彼數加爲幾倍。又依彼數之分將此數加爲幾倍。則兩分數既同而比例亦同矣。如甲、乙二數甲爲三分之二。乙爲四分之三。欲辨其孰大則依甲數將乙數加三倍。爲十二分之九。依乙數。將甲數加四倍。爲十二分之八。如是則所加之兩大分同爲十二。而所生之兩小分相比。即同於原甲數與乙數之相比矣何也甲數本三分之二、而爲十二分之八者。乃加四倍之比例。十二爲三之四倍。八爲二之四倍。而十二分之八之比例仍同於三分之二之比例也。乙數本四分之三、而爲十二分之九者乃加三倍之比例。十二爲四之三倍。九爲三之三倍。而十二分之九之比例仍同於四分之三之比例也。此即互乘同母之法。如甲爲三分之二者。三即母數。二即子數也。乙爲四分之三者。四即母數。三即子數也。因兩母數不同。故用互乘以同之。

甲	乙
三	四
一二	一二
二	三
八	九

第二十三

凡子母分有幾數而子數同爲一者。先以各母求俱能度盡之一數。次以各母除之則爲各子數也。如甲、乙、丙三數甲爲二分之一。乙爲三分之一。丙爲四分之一。則先以三母數連乘得二十四。爲甲、乙、丙之共母數。又以二除共母數得十二。爲甲之子數。以三除共母數得八。爲乙之子數。以四除共母數得六。爲丙之子數。蓋甲本二分之一。子母各加十二倍。即爲二十四分之十二。而二十四與十二之比例。仍同於二與一之比例也。乙本三分之一。子母各加八倍。即爲

甲	乙	丙
二	三	四
一之	一之	一之
	二四	
一二	八	六

二十四分之八。而二十四與八之比例。仍同於三與一之比例也。丙本四分之一。子母各加六倍。卽爲二十四分之六。而二十四與六之比例。仍同於四與一之比例也。

第二十四

凡子母分有幾數而子母數俱不等者。亦先以各母求俱能度盡之一數。次以各母除之。得數復以各子數乘之。卽爲各子數也。如有甲、乙、丙三數。甲爲三分之二。乙爲四分之三。丙爲五分之四。則先以三母數連乘得六十。爲甲、乙、丙之共母數。次以三除共母數。得二十。以乘子數二。得四十。爲甲之子數。又以四除共母數。得十五。以乘子數三。得四十五。爲乙之子數。又以五除共母數。得十二。以乘子數四。得四十八。爲丙之子數。蓋甲本三分之二。子母各加二十倍。卽爲六十分之四十。而六十與四十之比例。仍同於三與二之比例也。乙本四分之三。子母各加十五倍。卽爲六十分之四十五。而六十與四十五之比例。仍同於四與三之比例也。丙本五分之四。子母各加十二倍卽爲六十分之四十八。而六十與四十八之比例。仍同於五與四之比例也。

甲三之二	乙四之三	丙五之四
	六〇	
四〇	四五	四八

第一

凡有幾小數與幾大數相比．其比例若同．則小數相加所得之總數．與大數相加所得之總數相比．仍同於原數之比例也．設如有一小數六．一小數四．一大數十八．一大數十二．其小數六、爲大數十八之三分之一．而小數四、亦爲大數十二之三分之一．將兩小數六、四相加．得一十．將兩大數十八、十二相加．得三十．此一十與三十之比．卽如六與十八、四與十二之比．皆爲三分之一之比例也．又如三小數二、三、四．與三大數六、九、十二相比．皆爲三分之一．將二、三、四相加．得九．將六、九、十二．相加．得二十七．其比例亦爲三分之一也．又或四小數四大數相加．其總數之比例亦皆同．如三與十二、四與十六、五與二十、六與二十四．俱爲四分之一．將三、四、五、六、四小數相加．得十八．將十二、十六、二十、二十四．四大數相加．得七十二．其比例仍爲四分之一矣．

第二

凡有幾小數與幾大數之比例若同．則小數相減所得之餘數．與大數相

六	一八
四	一二
一〇	三〇

二	六
三	九
四	一二
九	二七

三	一二
四	一六
五	二〇
六	二四
一八	七二

減所得之餘數相比．仍同於原數之比例也．設如有一小數十．一小數六．一大數三十．一大數十八．其小數十、爲大數三十之三分之一．而小數六、亦爲大數十八之三分之一．將兩小數十與六相減餘四將兩大數三十與十八相減餘十二．此四與十二之比．即如十與三十、六與十八之比．皆爲三分之一之比例也．又如三小數八、四、三．與三大數二十四、十二、九、相比．皆爲三分之一．將四、三與八遞相減．餘一．將十二、九、與二十四遞相減．餘三．其比例亦爲三分之一也．又或四小數四大數相減．其餘數之比例亦皆同．如十八與七十二、爲四分之一．而三與十二、四與十六、五與二十、俱爲四分之一．將小數三、四、五、與十八遞相減．餘六．將大數十二、十六、二十、與七十二遞相減．餘二十四．其比例仍爲四分之一矣．

第三

凡有一數乘兩數．其所得兩數相比．仍同於原兩數之相比也．設如一數六．與八與一十兩數相乘．以六乘八得四十八．以六乘一十得六十．此四十八與六十相比．即同於原數八

三〇	一〇
一八	六
一二	四

二四	八
一二	四
一二	四
九	三
三	一

七二	一八
一二	三
六〇	一五
一六	四
四四	一一
二〇	五
二四	六

一〇		八
	六	
六〇		四八

與一十之相比矣.夫八與四十八.一十與六十.皆爲六分之一.故一與六之比同於八與四十八之比.而一與六之比亦同於十與六十之比也.然則八與四十八之比例.必同於十與六十之比例.而四十八與六十之比例.亦必同於八與一十之比例可知矣.

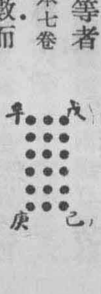
第四

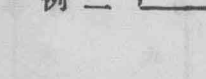
凡有一數除兩數.其所得兩數相比.仍同於原兩數之相比也.設如一數三.除十二與十五之兩數.以三除十二得四.以三除十五得五.則此四與五相比.卽同於原數十二與十五之相比矣.夫十二與四、十五與五、皆爲三分之一.故一與三之比.同於四與十二之比.而一與三之比亦同於五與十五之比也.然則四與十二之比例.必同於五與十五之比例.而四與五之比例.亦必同於十二與十五之比例可知矣.

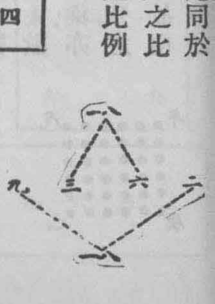
三	
一二	一五
四	五

第五

凡相當比例四數.其第一數與第四數相乘.第二數與第三數相乘.所得之數等者何也.蓋兩方面以其縱橫界互相爲比之比例若等.則兩方積必等.見幾何原本七卷第三節.今以第一數與第四數相乘.卽如以第一數爲縱.第四數爲橫.成一方數.而



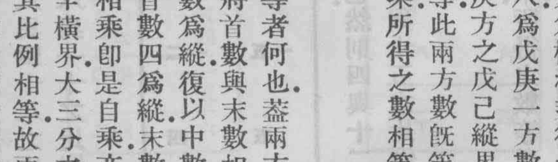




第二數與第三數相乘。即如以第二數爲縱。第三數爲橫。成一方數。其積必相等也。設如有二與六、三與九相當比例四數。將第一數二爲縱。第四數九爲橫。相乘得十八。爲甲丙一方數。將第二數六爲縱。第三數三爲橫。相乘亦得十八。爲戊庚一方數。夫甲丙方之甲丁橫界比戊庚方之戊辛橫界大三分之二。而戊庚方之戊己縱界。比甲丙方之甲乙縱界亦大三分之二。其比例相等。故兩方數亦等。此兩方數既等。則相當比例四數。其第一數與第四數相乘。第二數與第三數相乘所得之數相等無疑矣。

第六

凡相連比例三數。其首數與末數相乘。與中一數自乘所得之數等者何也。蓋兩方面相等者。其縱橫界之互相比例必等。見幾何原本七卷第三節。今將首數與末數相乘。即如以首數爲縱。末數爲橫。成一方數。而中數自乘。即是以中數爲縱。復以中數爲橫。成一方數。其積必相等也。設如有四、六、九相連比例三數。將首數四爲縱。末數九爲橫。相乘得三十六。爲甲丙一方數。將中數六爲縱。仍復爲橫相乘。即是自乘亦得三十六。爲戊庚一方數。夫甲丙方之甲丁橫界比戊庚方之戊辛橫界大三分之一。而戊庚方之戊己縱界比甲丙方之甲乙縱界亦大三分之一。其比例相等。故兩方數亦等。此兩方數既等。則相連比例三數。其首末兩數相等其中數自乘所得之



數相等無疑矣

第七

凡有兩數除一數。其所得兩數之比例。卽同於原兩數之轉相比例也。設如有一數十八。以二、三兩數除之。二除十八得九。三除十八得六。以此九與六兩數相比。卽同於原兩數三與二之相比也。蓋二與三、六與九爲相當比例之四數。以第一數二與第四數九相乘。第二數三與第三數六相乘。皆得十八。故二除十八得九。卽如以第一數除第二數與第三數相乘之數而得第四數也。以三除十八得六。卽如以第二數除第一數與第四數相乘之數而得第三數也。夫相當比例數。其第二數與第四數之比。原同於第一數與第三數之比。故第一數二除十八所得之九。與第二數三除十八所得之六相比。卽同於第二數三與第一數二之相比也。

三		二
	一八	
六		九

九	六	三	二

六		四
	三六	
六		九

九	六	六	四

第八

凡有兩數除一數。其所得之兩數內有一數與原兩數內一數相等者。則所得之兩數與原兩數互轉相比。卽成相連比例之數也。設如有一數三十六。以四、六兩數除之。四除三十六得九。六除三十六仍得六。與原數六相等。則此九與六兩數之比。卽同於原數六與四之比也。蓋四與六、六與九爲相連比例之四

數。以四爲首數。九爲末數相乘。以六爲中數自乘。皆得三十六。今以四除三十六得九、卽如以首數除中數自乘之數而得末數也。以六除三十六復得六、卽如以中數除首末兩數相乘之數。而仍得中數也。夫相連比例數。其末數與中數之比。原同於中數與首數之比。則首數四除三十六所得九與中數六除三十六所得六相比。卽同於中數六與首數四之相比也。

第九

凡相當比例四數。其第一數度盡第二數。則第三數亦必度盡第四數也。如有二、六、三、九、相當比例四數。其第一數二、可以度盡第二數六、則第三數三、亦可以度盡第四數九矣。夫相當比例四數。第一與第二之比。必同於第三與第四之比。今第一爲二。第二爲六。乃加三倍之比例。則第四與第三。亦必爲加三倍之比例。故三倍其二可以度盡六者。三倍其三。卽可以度盡九也。

二	六	三	九

第十

凡相連比例三數。其第一數度盡第二數。亦必度盡第三數也。如有二、四、八、相連比例三數。其第一數二可以度盡第二數四。亦必可以度盡第三數八矣。夫相連比例三數。第一與第二之比。同於第二與第三之比。今第一數爲二。第二數爲四。乃加倍之比例。則第二與第三。亦必爲加倍之比例。而第一與第三。則爲再加一倍之比例。故一倍其二可以度盡四者。再倍其二。卽可以度盡八也。

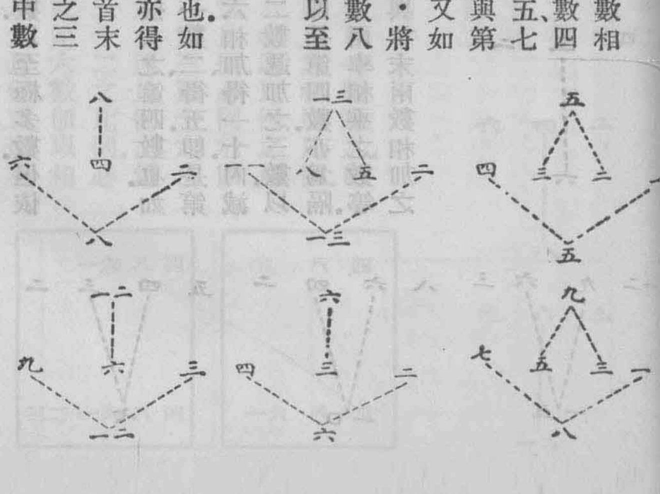
二	四	八

第十一

凡依次遞加取四數．其第一第四兩數相加．與第二第三兩數相加之數等也．如一、二、三、四遞加之四數．將第一數一與第四數四相加得五．以第二數二與第三數三相加．亦得五．又如一、三、五、七遞加之四數．一、三、五、七爲隔數以遞加者也．將第一數一與第四數七相加．得八．以第二數三與第三數五相加．亦得八也．又如二、五、八、十一遞加之四數．二、五、八、十一爲隔二數以遞加者也．將第一數二與第四數十一相加．得十三．以第二數五與第三數八相加．亦得十三．由此推之．或隔三數．或隔四數．或隔五六數．以至極多數．但依次遞加取四數．無有不如此也．

第十二

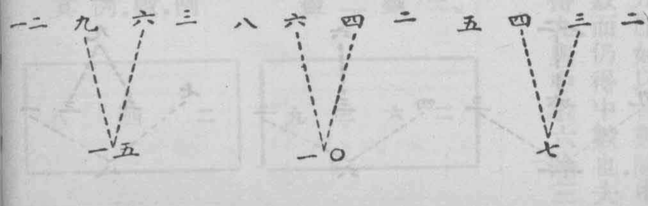
凡依次遞加取三數．其首末兩數相加．與中數加倍之數等也．如二、三、四遞加之三數．將首末二四相加．得六．以中數三倍之．亦得六．又如二、四、六遞加之三數．二、四、六隔一數以遞加者也．將首末二六相加．得八．以中數四．倍之．亦得八也．又如三、六、九遞加之三數．三、六、九隔二數以遞加者也．將首末三九相加．得十二．以中數



六倍之、亦得十二.由此推之.或隔三數.或隔四數.或隔五六數.以至極多數.但依次遞加取三數.無有不合者也.

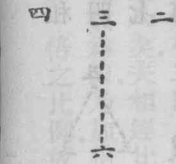
第十三

凡依次遞加三數.以第二第三兩數相加減去第一數.即得挨次之第四數也.如二、三、四之三數.以第二數三第三數四相加.得七內減去第一數二.得五.即是第四數.又如二、四、六隔一數遞加之三數.以第二數四第三數六相加.得一十.內減去第一數二.得八.即是第四數.亦為隔一數.又如三、六、九隔二數遞加之三數.以第二數六第三數九相加.得十五.內減去第一數三.得十二.即是第四數.亦為隔二數矣.蓋此即四率相當比例之理.四率中兩率相乘.與首末兩率相乘之數等.故中兩率相乘.以首率除之.即得末率.而此則中兩數相加.與首末兩數相加之數等.故以首一數減之.即得末一數.其義一也.



第十四

凡依次遞加兩數.以第二數倍之.減去第一數.即得挨次之第三數也.如二、三兩數.將第二數三倍之.得六.內減去第一數二.餘四.即是第三數.又如二、四隔一數之兩數.將第二數四倍之.得八.內減去第一數二.餘六.即是第三數.四與六亦



爲隔一數也。又如三、六隔二數之兩數。將第二數六倍之。得十二。內減去第一數三。餘九。即是第三數。九與六亦爲隔二數也。蓋此即三率相連比例之理。三率以中率自乘與首末兩率相乘之數等。故中率自乘。以首率除之。即得末率。而此則中數倍之與首末兩數相加之數等。故以首數減之。即得末數。於此見加減乘除之相對待而加減可以代乘除之理。亦可從此推矣。

二　四　六
　　八

三　六　九
　　一二

第十五

凡有彼此可以度盡兩數。欲求相連比例之數。則以一數自乘。以一數除之。即得相連比例之第三數也。如有四、八兩數。欲求第三數。如四與八之相連比例。乃以八自乘得六十四。以四除之。得十六。此十六即爲四與八相連比例之第三數。蓋八者四之二倍。而十六又爲八之二倍。則八與十六之比例。必同於四與八之比例矣。如有三數。求第四數。仍如四與八之比例。則以第三數十六自乘。得二百五十六。以第二數八除之。得三十二。即爲四、八、十六相連比例之第四數。蓋十六者四之四倍。而三十二者八之四倍。則十六與三十二之比例。必同於四與八、八與十六之比例矣。如欲求連比例之第五數或第六數。即以相近兩數依前法算之。由此遞生。可至於無窮焉。然此皆四與八之比例。或四與

四	八	
四	八	一六

四	八	一六	
四	八	一六	三二

十六、或三與六、五與十之類。凡有彼此度盡之數。欲求相連比例幾數者。亦皆如此求之。無不可得矣。

第十六

凡有彼此不可以度盡之兩數。欲依此兩數比例。求相連比例之數。則以一數自乘爲第一率。而以又一數自乘爲第三率。以兩數互乘爲第二率。卽爲相連比例之三數也。如有三、五兩數。欲求相連比例三數。皆如三與五之比例。乃以三自乘得九。以五自乘得二十五。以三與五相乘得十五。此九與十五、十五與二十五之三數。卽如三與五之相連比例三數。蓋九爲三之三倍。而十五爲五之三倍。則九與十五爲三與五之比例矣。而十五爲三之五倍。二十五爲五之五倍。則十五與二十五。亦爲三與五之比例矣。又或已有三數。欲求第四數。皆如三與五之連比例。則以三乘九得二十七。以三乘十五得四十五。以三乘二十五得七十五。復以五乘九得四十五。五乘十五得七十五。五乘二十五得一百二十五。此所得六數內。四十五、七十五、各得二。今止用其一。故二十七、四十五、七十五、一百二十五之四數。卽如三與五之相連比例數也。蓋二十七者三之九倍。而四十五者五之九倍。則二十七與四十五之比例。同於三與五之比例矣。又四十五者三之十五倍。而七十五者五之十五倍。則四十五與七十五

三	五	
九	一五	二五

三	五		
九	一五	二五	
二七	四五	七五	一二五

之比例同於三與五之比例矣又七十五者三之二十五倍而一百二十五者五之二十五倍則七十五與一百二十五之比例亦同於三與五之比例矣如欲求連比例之第五數或第六數以原一數遞乘先得之幾數復以又一數遞乘先得之幾數去其相同者所餘卽成相連比例之數由此求之亦可至於無窮也然此皆三與五之比例或三與七四與九五與八之類凡彼此不可以度盡之數欲求相連比例幾數者亦皆倣此求之而卽得矣

第十七

凡相當比例四數其前兩數之間有相連比例二數其後兩數之間亦必有相連比例二數也設如有甲二十四乙八十一丙三十二丁一百零八相當比例之四數甲數二十四與乙數八十一之間有戊三十六己五十四之相連比例兩數則丙數三十二與丁數一百零八之間亦必有庚四十八辛七十二之相連比例兩數也試將甲戊己乙四數求其相當比例之至小數則得壬八癸十二子十八丑二十七之四數其甲與乙之比卽同於壬與丑之比而丙與丁之比原同於甲與乙之比則丙與丁之比亦必同於壬與丑之比矣其比例既同則壬可以度盡丙丑亦可以度盡丁而癸與子亦必可以度盡庚與辛壬、癸、子、丑各四倍之卽與丙、庚、辛、丁等是四次可以度盡也是丙庚辛丁四數之比皆與壬癸子丑四數之比相同也夫壬癸子丑原爲甲戊己乙連比例相當

乙 八一	己 五四	戊 三六	甲 二四
丑 二七	子 一八	癸 一二	壬 八
丁 一〇八	辛 七二	庚 四八	丙 三二

之小數。今丙、庚、辛、丁之比。既與之相同。則丙、庚、辛、丁、亦爲相連比例之四數矣。既俱爲相連比例數。則戊、己爲甲、乙、兩數間之連比例數。庚、辛爲丙、丁、兩數間之連比例數無疑矣。

第十八

凡相連比例三數。其第一數與第二數之間。有相連比例一數。則第二數與第三數之間。亦必有相連比例一數也。設如有甲二、乙十八、丙一百六十二、相連比例之三數。其甲數二與乙數十八之間。有相連比例之丁數六。則乙數十八與丙數一百六十二之間。亦必有相連比例之戊數五十四也。蓋甲與乙之比。同於乙與丙之比。今丁六爲甲二之三倍。戊五十四亦爲乙十八之三倍。則甲與丁之比。同於乙與戊之比。而丁六爲乙十八之三分之一。戊五十四亦爲丙一百六十二之三分之一。則丁與乙之比。亦同於戊與丙之比。因其比例皆同。故甲、丁、乙、戊、丙、爲相連比例之五數。而丁、戊、兩數爲甲與乙、乙與丙、三數間之相連比例數可知矣。

甲二	乙一八	丙一六二
丁六	戊五四	

第十九

凡相連比例三數。其首數與末數。有用一數可以度盡者。有用一數不可以度盡者。如四、八、十六相連比例之三數。其首數四與末數十六。爲彼此有一數可以度盡之數也。如四、六、九相連比例之三數。其首數四與末數九、爲彼此無一數可以度盡之數也。然此兩種相連比例。雖有度盡度不盡之分。因其首數與

四	八	一六

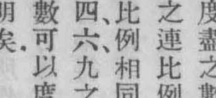
四	六	九

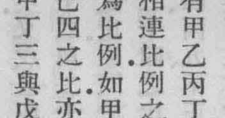
中數之比同於中數與末數之比。故總謂之相連比例之數矣。蓋末數可用首數平分。即爲有度盡之連比例數。末數不可用首數平分。即爲無度盡之連比例數也。且首末兩數彼此有一數可以度盡者。此三數非相當比例之至小數。若首末兩數彼此無一數可以度盡者。此三數即爲相當比例之至小數也。如四、八、十六之三數。其首末兩數爲彼此有一數可以度盡之數。而中數亦必爲此一數可以度盡之數。試用二以度之。則得二、四、八之連比例三數。或用四以度之。則得一、二、四之連比例三數。皆與四、八、十六之比例相同。而比四、八、十六之數爲小。故四、八、十六非相當比例之至小數也。如四、六、九之三數。其首末兩數爲彼此無一數可以度盡之數。故中數亦爲無一數可以度盡之數。既無一數可以彼此度盡。則爲相當比例數內之至小數也明矣。

四	八	一六
二	四	八
一	二	四

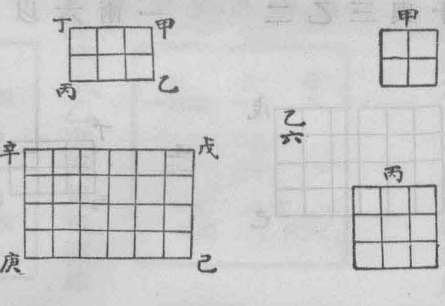
第二十

凡同式兩平方數。其間必有相連比例一數也。如有甲乙丙丁六、戊己庚辛二十四同式兩平方數。此兩數之間。必有壬十二爲相連比例之一數焉。蓋甲乙丙丁、戊己庚辛既爲同式平方數。則其每邊皆可爲比例。如甲乙二與甲丁三之比。同於戊己四與戊辛六之比。而甲乙二與戊己四之比。亦同於甲丁三與戊辛六之比也。今以甲丁三與甲乙二相因得六。甲丁三與戊己四相因得十





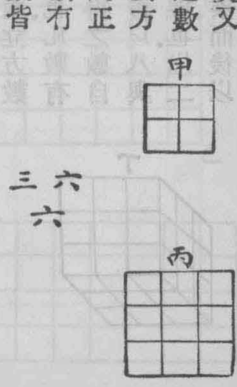
二。則六與十二之比。同於甲乙二與戊己四之比矣。又戊己四與甲丁三相因得十二。戊辛六與戊己四相因得二十四。則十二與二十四之比。同於甲丁三與戊辛六之比矣。夫甲丁三與戊辛六之比。原同於甲乙二與戊己四之比。則六與十二之比。亦必同於十二與二十四之比矣。又若兩正方數之間。亦必有相連比例之一數也。如有甲四、丙九、兩正方數。此四與九兩數之間。必有乙六爲相連比例之一數焉。葢兩正方數。其式旣同、故必有相連比例一數、且兩正方數之比例。同於其兩邊所作連比例隔一位之比例。見幾何原本七卷第五節・今甲方邊爲二。丙方邊爲三。求其與二、三相當連比例之第三數。則以二自乘得四。以三自乘得九。以二乘三得六。此四與六、六與九之三數。卽爲與二、三相當之連比例數。而其首數四與末數九。旣與甲丙兩方數等。則中數六亦必爲甲丙兩方數間之連比例數矣。



第二十一

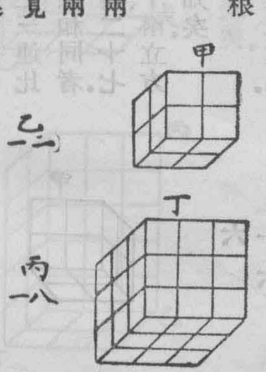
凡同式兩平方數相乘。得數爲正方數也。如有甲乙丙丁六。戊己庚辛二十四。爲同式兩平方數。相乘、得一百四十四。卽爲正方數矣。葢同式兩平方數之間。原有相連比例一數。今此六與二十四之間。必有十二之一數。

且連比例三率、以首末兩率相乘、與中率自乘之數等、則此六與二十四兩平方數相乘所得之一百四十四、卽爲中率十二自乘之數矣、又若兩正方數相乘、得數亦仍爲正方數、其方根卽原兩方根相乘之數也、如有甲四、丙九、兩正方數、此兩數相乘得三十六、仍爲正方數、其方根爲六、亦卽甲方根二與丙方根三相乘之數也、蓋此兩方數俱爲正方、卽爲同式兩平方數矣、因其式同、故相乘亦仍得正方數也、凡數有先各自乘而後相乘者、有先相乘而後自乘者、其理無異、故其得數皆等、今以二自乘得四、以三自乘得九、復以四九相乘得三十六、此先各自乘而後相乘也、以二與三相乘得六、復以六自乘得三十六、此先相乘而後自乘也、且四與九積也、積與積乘仍得積、二與三根也、根與根乘仍得根、此亦理之必然者也、



第二十二

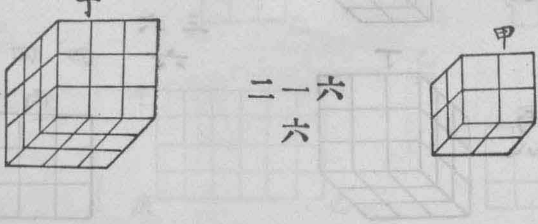
凡兩正立方數之間、必有相連比例之兩數也、如有甲八、丁二十七、兩正立方數、此八與二十七之間、必有乙十二、丙十八、爲相連比例之兩數焉、蓋兩正立方之比例、同於其兩邊所作連比例隔二位之比例、見幾何原本十卷第四節、今甲方邊爲二、丁方邊爲三、求其與二三相當連



比例之第三第四數．則以二自乘得四．以三自乘得九．以二與三相乘得六．此四、六、九爲連比例三數．又以二遞乘此四、六、九三數得八、十二、十八之三連比例數．復以三遞乘四、六、九三數得十二、十八、二十七之三連比例數．除相同者不計．其二十七．卽連比例之第四數．則八與十二、十二與十八、十八與二十七．皆爲與二、三相當之連比例數．而其首數八與末數二十七．旣與甲、丁、兩立方數等．則其中數之十二、十八．爲甲、丁、兩立方數間連比例之兩數可知矣．

第二十三

凡兩正立方數相乘．得數仍爲正方數．而其方根卽原兩立方根相乘之數也．如有甲八、丁二十七兩正立方數．此兩數相乘得二百一十六．仍爲正立方數．而其方根爲六．亦卽甲立方根二與丁立方根三相乘之數也．葢此兩立方數俱爲正方．卽爲同式兩立方數矣．因其式同．故相乘亦仍得正立方也．凡數有先自乘再乘．而後以所得之數相乘者．有先以兩數相乘．而後以所得之數自乘再乘者．其得數皆等．故二自乘再乘得八．三自乘再乘得二十七．復以八與二十七相乘得二百一十六．此先各自乘再乘．而後以所得之數相乘也．以二與三相乘得六．復以六自乘再乘亦得二百一十六．此先以兩數相乘而後以所得之數自乘再乘也．且八與二十七積也．以積乘積仍得積．二與三根也．以



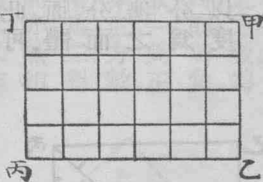
根乘根仍得根此又理之自然者也

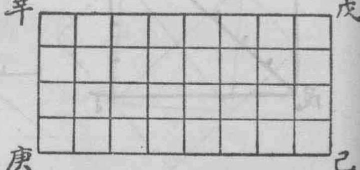
第二十四

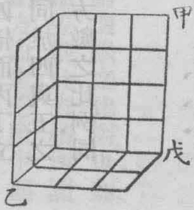
凡兩平方數若一邊相等。則此兩平方之比例。同於其不等邊之比例也。如有甲丙、戊庚、兩平方數。其甲丙平方之甲乙邊爲四。而戊庚平方之戊己邊亦爲四。甲丙平方之乙丙邊爲六而戊庚平方之己庚邊爲八。則此兩平方數二十四與三十二之比。卽同於其不等邊六與八之比也。蓋甲乙平方數二十四者。四之六倍。而戊庚平方數三十二者。四之八倍也。然則二十四與三十二之比。卽同於六與八之比矣。二十四與三十二之比。旣同於六與八之比。則兩平方數之比例同於其不等邊之比例可知矣。

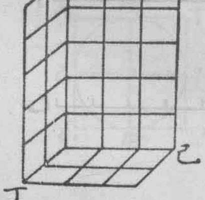
第二十五

凡兩立方數。其底積相等。則此兩立方之比例。同於其高之比例也。如有甲乙、丙丁、兩立方數。其甲乙立方之戊乙底爲六。而丙丁立方之己丁底亦爲六。甲乙立方之甲戊高爲四。而丙丁立方之丙己高爲五。則此兩立方數二十四與三十之比。卽同於其兩立







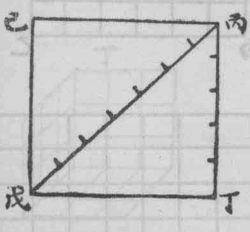


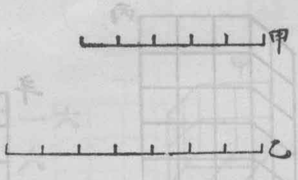
方之高四與五之比也。蓋甲乙立方數二十四者。六之四倍。而丙丁立方數三十者。六之五倍也。然則二十四與三十之比。卽同於四與五之比矣。二十四與三十之比。既同於四與五之比。則兩立方數之比例。同於其高之比例可知矣。

第二十六

凡兩線、兩面兩體。用一度如尺寸之屬。可以度盡者。此類之線、面、體。皆爲有整分可以度盡者也。設如有甲、乙、兩線。甲線分爲五分。乙線如甲線度分之。得七分無餘。則此二線。卽爲一度彼此可以度盡者矣。若將此二線各爲正方面各爲正方體。則其兩面、兩體。亦皆爲整分彼此可以度盡者也。至如兩線、兩面兩體。不可以一度度盡者。此類之線、面、體。皆爲無整分可以度盡者也。如丙丁戊己方面。其丙丁邊線爲五分。而丙戊對角線。則爲七分有餘。乃爲彼此無度盡之數矣。蓋以丙丁邊之五分爲度。則丙戊線得七分以得。或將丙戊線爲七分。整而以其分爲度。則丙丁線得五分不足。凡此類之線、面、體。皆爲無整分彼此可以度盡之數也。

第二十七

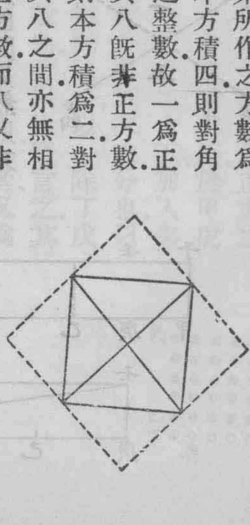


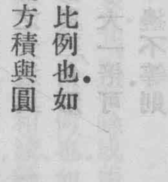


凡正方一邊線與對角線無一度可以彼此度盡者葢以本方積與對角線所成方積比之必有一數非正方數也夫對角線自乘所作之方數爲本方積之二倍如本方積一則對角線所作之方爲二本方積四則對角線所作之方爲八此一與二、四與八之間無相連比例之整數故一爲正方數則二非正方數四爲正方數而八亦非正方數二與八旣非正方數則邊必有零餘而不能盡矣或對角線所作方積爲四則本方積爲二對角線所作方積爲十六則本方積爲八此四與二、十六與八之間亦無相連比例之整數故四爲正方數而二非正方數十六爲正方數而八又非正方數然則對角線所作方積固爲正方數而本方積復不能成正方數其邊必有零餘而不能盡矣故凡正方邊線與對角線斷無一度可以彼此度盡之理也

第二十八

凡正方面與平圓面同徑者其積之比例同於其周圍邊線之比例也如甲乙丙丁正方面戊己庚辛平圓面其戊壬庚之徑相等則此方積與圓積之比例同於方周於圓周之比例也何以見之以正方面之壬庚半徑爲高甲乙、乙丙、丙丁、丁甲之全周爲底作一子甲直角長方形則此長方

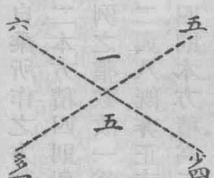


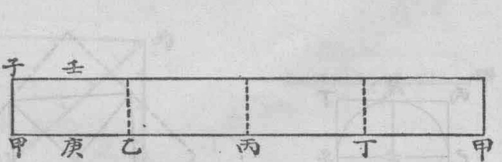


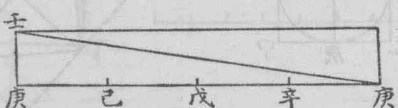
形之積。比正方形之積。必大一倍。又以壬庚半徑爲高。庚己、己戊、戊辛、辛庚、全周爲底。作一壬庚直角長方形。則此長方形之積。比平圓形之積。亦必大一倍。凡直角三角形之小邊與圓形之半徑等。而三角形之大邊與圓形之全周等者。三角形之積與圓形之積等也。今此長方形與三角形同底同高。其積比三角形必大一倍。然則壬庚長方形比圓形大一倍可知也。夫壬庚、子甲兩長方形。旣同以壬庚爲高。則一邊相等。一邊不等。則其積之比例。必同於其不等邊之比例。而全與全之比例。原同於半與半之比例。故兩長方形之比例。必同於庚庚與甲甲之比例。而方與圓之比例。亦必同於庚庚與甲甲之比例矣。甲甲卽方周。而庚庚卽圓周。然則方周與圓周之比例。豈非方積與圓積之比例乎。

第二十九

凡有不知之一大數。用兩小數度之不盡。而一有餘一。不足者。其一多一少之數相併。以兩小數之較度之。卽得其度戊次之分與大數之幾何也。如有一大數。用小數五度之多一、數用小數六度之又少四數。則以多一與少四相加得五。以六與五



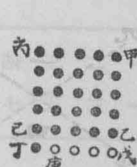


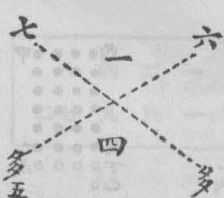


兩小數相減、餘一、爲較數除之。仍得五。卽知兩小數各度五次也。試排點以明之。其甲乙五卽小數五。丙丁六卽小數六。以甲乙五累五次。則爲甲乙己丙正方二十五。多一爲丁。以丙丁六累五次。則爲甲戊丁丙長方三十。少四爲戊庚。於甲戊丁丙長方三十內、減去少數戊庚四爲二十六。於甲乙己丙正方二十五、加入多數丁一亦爲二十六。是知大數有二十六。用此五六兩小數各度五次之分也。以丁一與戊庚四相加三丁戊五。以小數甲乙五與丙丁六相減餘一。以一除丁戊五仍得五與甲丙相等。故甲丙爲甲庚數二十六之五次數也。若以比例言之。其小數五與六相減所餘一者。乃度一次之較。而一多一少相併之戊丁五者、又爲度五次之較。故以所餘一與度一次之比。卽同於戊丁五與度五次之比。其比例旣同。故其數亦相等也。

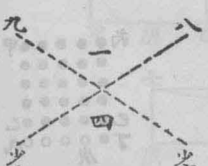
第三十

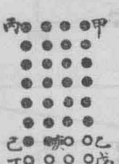
凡有不知之一大數。用兩小數度之不盡。而俱有餘、或俱不足者。其兩有餘或兩不足之數俱相減。以兩小數之較度之。卽得其度幾次之分、與大數之幾何也。如有一大數、用小數六度之多五。數用小數七度之仍多一。數則以兩多數相減、餘四。以六與七兩小數相減、餘一、爲較數除之。仍得四。卽知兩小數各度四次也。試排點以明之。其甲乙六卽小數六。丙丁七卽小數七。以甲乙六累四次。則爲甲乙





庚丙方二十四。多五爲戊丁己。以丙丁七累四次。則爲甲戊丁丙方二十八。多一爲己。於甲乙庚丙方二十四、加入多數戊丁己五得二十九。於甲戊丁丙方二十八、加入多數己一、亦得二十九。是知大數有二十九。用此六七兩小數各度四次之分也。以己一與戊丁己五相減餘戊丁四。以小數甲乙六與丙丁七相減餘一。以一除戊丁四仍得四。與甲丙相等。故甲丙爲度大數二十九之四次數也。若以比例言之。其兩小數相減所餘之一。乃度一次之較。兩多數相減所餘之戊丁四。乃度四次之較。故以一與度一次之比。卽同於戊丁四與度四次之比也。又如有不知之一大數。用小數八度之少二數。用小數九度之少六數。則以兩少數相減、餘四。以八與九兩小數相減、餘一、爲較數除之。仍得四。卽知兩小數各度四次也。今作點排之。其甲乙八卽小數八。丙丁九卽小數九。以甲乙八累四次。則爲甲乙己丙方三十二。內少二數爲乙庚。以丙丁九累四次。爲甲戊丁丙方三十六。內少六數爲乙庚丁戊。於甲乙己丙方三十二內。減去少數乙庚二爲三十。於甲戊丁丙方三十六內、減去少數乙庚丁戊六亦爲三十。是知大數有三十。用此八、九兩小數各度四次之分也。以乙庚二、與乙庚丁戊六相減。餘戊丁四。以小數甲乙八與丙丁九相減餘一。以一除戊丁四仍得四。與甲丙爲相等。故甲丙爲度大數三十之四次數也。其比例亦以兩小數相減所餘之較。比度一次之分。卽同於兩少





數相減所餘之較．比度幾次之分也．復有不知之一大數．用兩小數度之．一小數度之而盡．一小數度之而不盡．或有餘．或不足．卽以不盡之數．或有餘之數．或不足之數．用兩小數之較度之．卽得其度幾次之分．與大數之幾何．其理皆相同也．

第三十一

凡數自少至多．遞加之而各有定率者．謂之平加比例數也．夫平加之數．有每次遞加一者．爲挨次遞加之數．如一、二、三、四之類是也．有每次遞加二者．爲超位平加之數．如一、三、五、七之類是也．或遞加三．或遞加四．或遞加五六．皆是一理．有每次增一加者．爲按位相加之數．如一、三、六、十之類．其第二次加二、第三次加三、第四次加四是也．有每次增二加者．爲按位自乘之數．如一、四、九、十六之類．其第二次加三、第三次加五、第四次加七是也．復有一種倍加者．爲挨次倍加之數．如一、二、四、八之類．每次皆加二倍．又如一、三、九、二十七之類．每次皆加三倍是也．遞加之數雖多．按其條理求之．大抵不出此數端．今各列數分析於後．

第三十二

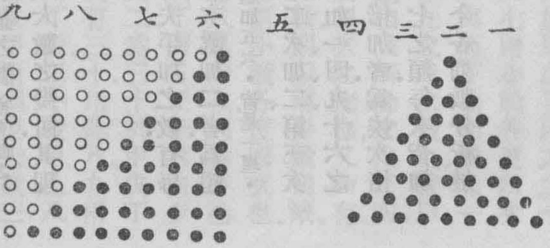
凡挨次遞加之數．將首數與末數相加．以位數乘之．所得之數折半．卽爲總數

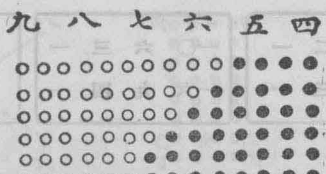
一	二	三	四
一	三	五	七

一	三	六	一〇
一	四	九	一六

一	二	四	八
一	三	九	二七

也。如一、二、三、四、五、六、七、八、九之九數。其每次所加之數爲一。將首數一與末數九相加得十。以位數九乘之得九十。折半得四十五。卽是此九數之總數也。何也。夫挨次遞加之數、爲等邊三角平面形。而兩數相乘、卽成四方形、今以位數九爲高。末數九爲底。相乘所得之正方形、其數八十一。較之總數則多。較之總數加倍之數。又少。此所少卽一行之數。爰知位數與底數相乘所得之數。比總數加倍之數。少一行之數矣。既知挨次遞加之數爲三角形。而位數與底數相乘之數爲正方形。又知位數與底數相乘之數。幾等於總積加一倍之數。則合兩三角形之數。適當總積加一倍之方數矣。兩三角形所合。其底數必比高數大一數。故末數九爲底數者。加首數一。與高相乘。始成兩三角形所合之一方形焉。試將此九數作點排之。自上而下。上一下九。作爲直角三角形。復將此九數另作一直角三角形。合於原三角形之側。則成一長方形。其高卽位數。其底卽末數與首數相加之數。其積卽爲總數加一倍之數也。

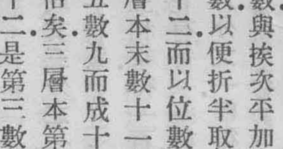




然則首數末數相加與位數相乘、爲總數之倍數可知矣。又如四、五、六、七、八、九之六數。欲知其總數亦以首數四與末數九相加得十三爲底。以位數六乘之、得七十八爲長方形。折半得三十九爲總數。其理與前同。若但知首數爲四。末數爲九不知位數。則視首數四以上至一虛幾位。今虛三位。故以三與末數九相減餘六即位數也。何也。凡自一遞加之數。其末數即位數。今首數爲四。計自一是少三位矣。故用三即爲所少之位數。於末數內減去所少之位。即爲今之所有之位數也。

第三十三

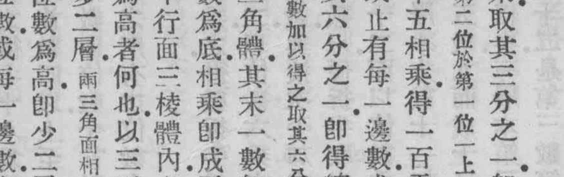
凡超位平加之數。亦將首數與末數相加。以位數乘之得數折半爲總數也。如一、三、五、七、九、十一之六數。每次皆加二數。將首數一與末數十一相加得十二。以位數六乘之得七十二。折半得三十六。爲此六位之總數也。蓋此超位平加之數。與挨次平加之理無異。其以首末兩數相加與位數相乘者。總欲得此總數之倍數。以便折半取之也。試將此六位之數作六層排之。上一下十一。以首末數相加得十二。而以位數乘之。則六層皆爲十二矣。上層本首數一加末數十一而成十二。下層本末數十一加首數一而成十二。是首數末數俱加倍矣。二層本第二數三加第五數九而成十二。五層本第五數九加第二數三而成十二。是第二數第五數俱加倍矣。三層本第三數五加第四數七而成十二。四層本第四數七加第三數五而成十二。是第三數第四數亦俱加倍矣。其每位之數皆倍。則相乘所得之數。豈非此總數之倍數乎。由此推之。每次加三



加四或加五加六以至加七加八加九之類。凡係超位平加之數。其理無不相同也。

第三十四

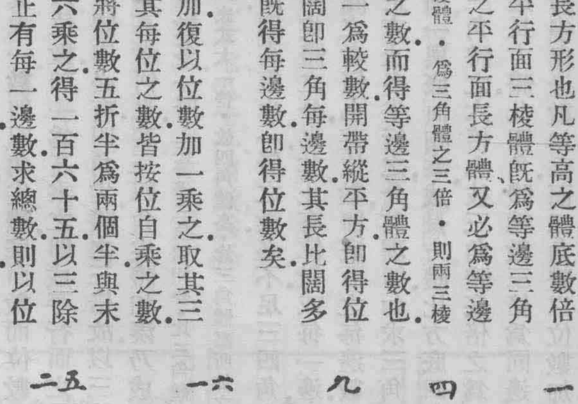
凡每次按位相加之數。將位數加二與末數相乘。取其三分之一。即爲總數也。如一、三、六、十、十五之五數。其每次皆按位加之。如第二位於第一位一上加二爲三。第三位於第二位三上加三爲六是也。將位數五加二與末數十五相乘。得一百零五。以三除之。得三十五。即是此五數之總數也。如或止有位數。或止有每一邊數求總數。則以位數加一與位數相乘。得數復以位數加二乘之。取其六分之一。即得總數也。若止有每一邊數。即以每一邊數加一與每邊數相乘。得數。復以邊數加以得之取其六分之一。得數亦同。葢每次按位相加之數。層疊排之。其式成等邊三角體。其末一數。即三角體底面數。而位數即每一邊之數。今以位數加二爲高。末數爲底。相乘即成平行面之三稜體。凡同底同高之平行面體。爲尖體之三倍。則此平行面三稜體內。必有等邊三角體之三倍。故以三除之。即得也。然必以位數加二爲高者何也。以三三角體相湊。乃成上下相等之平行面體。其高必比原有之位數多二層。兩三角面相合。比原位數多一層。今三三角體相合。故必比原位數多二得也。如止以位數爲高。即少二層之數。而不足三三角體之分。故必以位數加二乘之也。其止有位數。或每一邊數求總數。以位數加一與位數相乘。復以位數加二乘之。而用六除者何也。葢位數即底面之每邊數。而



底面又爲等邊之三角面今以邊數加一與邊數相乘成長方面爲三角體底面之倍數。即如前挨次遞加數之兩三角面相合所成之長方形也。凡等高之體底數倍者。積數亦倍。彼以位數加二乘三角體之底、所成之平行面三棱體既爲等邊三角體之三倍矣。今以位數加二、乘三角體之倍底、所成之平行面長方體、又必爲等邊三角體之六倍矣。以兩三棱體相合。即成長方體。一三棱體。爲三角體之三倍。則兩三棱體。必爲三角體之六倍矣。 故以六除平行面長方體之數。而得等邊三角體之數也。又或但知首數末數。而不知位數。則以末數倍之。用一爲較數。開帶縱平方。即得位數焉。蓋末數倍之者。即兩三角面所合之長方也。其闊即三角每邊數。其長比闊多一數。故用一爲較。開帶縱平方。則得三角每邊之數。既得每邊數。即得位數矣。

第三十五

凡每次按位自乘相加之數。將位數折半。與末數相加。復以位數加一乘之。取其三分之一。即爲總數也。如一、四、九、十六、二十五之五數。其每位之數。皆按位自乘之數。如第二位之四。即二自乘數。第三位之九。即三自乘數也。將位數五折半爲兩個半。與末數二十五相加。得二十七個半。復以位數五加一爲六乘之。得一百六十五。以三除之。得五十五。即爲此五數之總數也。如止有位數。或止有每一邊數求總數。則以位數加半個。與位數相乘得數。復以位數加一乘之。取其三分之一。即得總數也。 若只



有每一邊數・則以每一邊數加半個・以每二邊數相乘・得數・復以每邊數加一乘之・取其三分之一・得數亦同・蓋按位自乘相加之數層疊排之其式成方底四角尖體其末一數即四角尖體底面數而位數即每一邊之數今以位數折半與末數相加則成長方面爲底再以位數加一爲高乘之即成平行面之長方體凡同底同高之平行面體爲尖體之三倍則此平行面長方體內必有四角尖體之三倍故以三除之即得也然必以位數折半與末數相加爲底復以位數加一爲高者何也蓋三四角尖體相湊乃成上下相等之長方體其底比正方面必多半行其高必比原有之位數多一層三等邊三角體相合・比三角體原位數多二層・今三方底四角尖體相合・比原位數止多一層・蓋因方底比三角底式大一倍・故四角體高・比三角體高所加之數減一半也・如止以末數爲底則底必少半行之數止以位數爲高則高復少一層之數必不足三四角尖體之分故以末數加位數之半而以位數加一乘之適足三四角尖體之分也其止有位數或每一邊求總數以位數加半個與位數相乘復以位數加一乘之而用三除之者何也蓋位數即底面之每邊數而底面又爲正方面今以邊數加半個與邊數相乘成長方面比正方止多半行之分其理即如求三角體總數以邊數加一與邊數相乘爲三角體底之倍數也以位數加一與底面相乘成長方體比方底四角尖體大三倍即如求三角體總數以位數加二與倍底相乘爲三角體之六倍也彼三角體底倍之爲長方此四角體底數加半行即爲長方彼三角體總數六倍爲同邊長方體此四角體總數三倍爲同邊長方體故三角體以邊數加一與邊數相乘者今四角體以邊數加半與邊數相乘而三角體以位數加二爲高與倍底相乘者今四角體以位數加一與本底加半行相乘總之四角體底式比三角體底式大一倍故立法

時三角體加數幾何。而此四角體皆用其半也。又或但知首數末數而不知位數。則以末數開平方。卽得位數焉。蓋末數本為正方數。故開方卽得每邊數。既得每邊數。則得位數矣。

第三十六

凡每次倍加之數。將末數與加倍之數相乘。減去首數。復以所加之分數除之。卽得總數也。如二、四、八、十六、四數。為每次以二倍之之數。欲求其總數。則以末數十六用二乘之。因以二倍之。故用二乘。得三十二。減去首數二。為三十。復以其所加分數一除之。仍得三十。卽此四數之總數也。蓋以二加倍之數。其末一數。比前幾位之總數。止多一首數。故二乘末數。則比末數多一分。仍多一首數。故減去首數二。而以一除之。卽得總數也。又如三、九、二十七、八十一、四數。為每次以三倍之之數。欲求其總數。則以末數八十一用三乘之。以三倍之。故用三。得二百四十三。減去首數三。為二百四十。復以其所加分數二除之。得一百二十。卽為此四數之總數也。蓋以三加倍之數。其末一數。為前幾數之倍數。而仍多一首數。今三乘末數。則比末數多二分。仍多一首數。三乘末數八十一。則為八十一者有三。除本數八十一。仍為多二分也。故必減去首數三。而以二除之。卽得總數也。又如四、十六、六十四、二百五十六、四數。為每次以四倍之之數。欲求總

二	四	八	一六

三	九	二七	八一

四	一六	六四	二五六

數。則以末數二百五十六用四乘之。以四倍之。故用四。得一千零二十四。減去首數四。爲一千零二十。復以其所加分數三除之。得三百四十。爲此四數之總數也。蓋以四加倍之數。其末一數爲前幾數之三倍而仍多一首數。今四乘末數。則比末數多三分。仍多一首數。四乘末數二百五十六。則爲二百五十六者有四。除本數二百五十六。仍爲多三分也。故必減去首數四而以三除之。卽得總數也。凡此倍加之數。不論加倍幾何。皆爲相連比例之數。故其比例皆同。如遞加二倍之數。其四與八之比。同於二與四之比。卽八與十六之比。亦皆同於二與四之比也。又如遞加三倍之數。其九與二十七之比。同於三與九之比。卽二十七與八十一之比。亦皆同於三與九之比也。卽遞加四倍之數。其十六與六十四之比。同於四與十六之比。卽六十四與二百五十六之比。亦皆同於一與四之比也。總之以二倍加者。皆一與二之連比例。以三倍加者。皆一與三之連比例。以四倍加者。皆一與四之連比例。卽推之以五倍加六倍加者。其理亦無不相同也。

二	四		一六
三	九	二七	八一
四	一六	六四	二五六

數理精蘊下編卷一

首部一

度量權衡

虞書同律度量衡．蓋度量衡皆本於律．而律爲萬事之本也．漢志曰度者分寸尺丈引．所以度長短也．本起於黃鐘之長．以子穀秬黍中者一黍之廣．度之九十分黃鐘之長．一爲一分．十分爲寸．十寸爲尺．十尺爲丈．十丈爲引．而五度審矣．量者龠合升斗斛．所以量多少也．本起於黃鐘之龠．以子穀秬黍中者千二百實其龠．合龠爲合．十合爲升．十升爲斗．十斗爲斛．而五量嘉矣．權者銖兩斤鈞石．所以權輕重也．本起於黃鐘之重．一龠容千二百黍．重十二銖．兩之爲兩．十六兩爲斤．三十斤爲鈞．四鈞爲石．而五權謹矣．通考曰律度量衡．並因秬黍散爲諸法．其率可通．外此則代不一名．度之異名者．如左傳注、方丈曰堵．三堵曰雉．長三丈．高一丈．易緯通卦驗、十馬尾爲一分．孫子算術曰蠶所吐絲爲忽．十忽爲絲．十絲爲豪．十豪爲釐．十釐爲分．十分爲寸．十寸爲尺．十尺爲丈．小爾雅曰跬、一舉足也．倍跬謂之步．四尺謂之仞．倍仞謂之尋．倍尋謂之常．五尺謂之墨．倍墨謂之丈．倍丈謂之端．倍端謂之兩．倍兩謂之疋．疋百謂之束．孔安國又以八尺爲仞．說文曰人手却十分動脈爲寸口．十寸爲尺．周制寸咫尺尋常仞．皆以人體爲法．又曰婦人手八寸謂之咫．周尺也．又曰丈、丈夫也．周制以八寸爲尺．十尺爲丈．人長八尺．故曰丈夫．量之異名者．

如左傳、齊舊四量。豆區鬴鍾。四升曰豆。各自其四以登於鬴。六斗四升・鬴十則鍾。六十四斗・論語注、十六斗曰庾。十六斛曰秉。孫子算術曰、六粟爲圭。十圭爲抄。十抄爲撮。十撮爲勺。十勺爲合。漢應劭又以四圭爲撮。孟康以六十四黍爲圭。小爾雅、一手之盛謂之溢。兩手謂之掬。掬四謂之豆。豆四謂之區。區四謂之釜。釜二有半謂之藪。藪二有半謂之缶。缶二謂之鍾。鍾二謂之秉。秉十六斛。衡之異名者。如漢志注、應劭曰、十黍爲纍。十纍爲銖。小爾雅、二十四銖曰兩。兩有半曰捷。倍捷曰舉。倍舉曰鋝。鋝謂之鍰。二鍰四兩謂之斤。斤十謂之衡。衡有半謂之秤。秤二謂之鈞。鈞四謂之石。石四謂之鼓。通考、唐劉承珪以忽萬爲分絲則千。豪則百。氂則十。轉以十倍倍之。則爲一錢。黍以二千四百枚爲一兩。纍以二百四十。銖以二十四。是則度量衡之名不一。故其爲制不同。而紛雜難用。然時易世殊。古今沿革。有必不可比而同者。故入算之際。不過取其大同者。以審不齊之物耳。要之度定於丈。量定於石。衡定於兩。大之而遞進於無窮。小之而遞析於不可測。爰悉其名目於左。以爲數學之所資焉。

度法丈以下曰尺。十寸・寸。十分・分。十氂・氂。十豪・豪。十絲・絲。十忽・忽。十微・微。十纖・纖。十沙・沙。十塵・塵。十埃・埃。十渺・渺。十漠・漠。以下皆以十析・模糊。逡巡。須臾。瞬息。彈指。刹那。六德。虛空。清淨。

量法石以下曰斗。十升・升。十合・合。十勺・勺。十撮・撮。十抄・抄。十圭・圭。六粟・粟。

衡法兩以下曰錢。十分・分。十氂・氂。十豪・豪。十絲・絲。十忽・忽。以下並與度法同。

凡度量衡自單位以上則曰十。百。千。萬。億。兆。京。垓。秭。穰。溝。澗。正。載。極。恆河沙。阿僧秖。那由他。不可思議。無

量數。

自億以上有以十進者。如十萬曰億十億曰兆之類。有以萬進者。如萬萬曰億萬億曰兆之類。有以自乘之數進者。如萬萬曰億億億曰兆之類。今立法從中數。

曆法則曰宮。三十度。度。六十分。分。六十秒。秒。六十微。微。六十纖。纖。六十忽。忽。六十芒。芒。六十塵。塵。

又有日。十二時。又爲二十四小時。時。八刻。又以小時爲四刻。刻。十五分。分以下與前同。

田法則曰頃。百畝。畝。積二百四十步。分。積二十四步。

里法則三百六十步計一百八十丈爲一里。古稱在天一度在地二百五十里。今尺驗之在天一度在地二百里。蓋古尺得今尺之十分之八。實緣縱黍橫黍之分也。

石法二千五百寸。按漢志曰。斛重二鈞。又曰四鈞爲石。是二斛爲一石也。古尺斛積一千六百二十寸。爲今尺之八百六十寸有奇。倍之。得古尺石積三千二百四十寸。爲今尺之一千七百二十寸有奇。以權法準之。石重一百二十斤。求其積。古尺應得三千一百一十寸。爲今尺之一千六百五十寸有奇。今之權法又加古一倍。則今尺石積應得三千三百寸有奇。今現行斛積爲一千五百八十寸。石積爲三千一百六十寸。舊算書所載。數各不同。而多以二千五百寸爲率。總之古今尺度不同。古今量法亦不一。須先求其斗斛之積數。然後用其積數以比例之。方得密合。今設例從舊數。

命位

凡數視所命單位爲本。如度法命丈爲單位。則尺寸分釐皆爲奇零。命尺爲單位。則寸以下爲奇零。而丈則進而爲十。若命寸爲單位。則分以下爲奇零。而尺則進而爲十。丈則進而爲百。量法命石爲單位。則斗升合勺皆爲奇零。命斗爲單位。則升以下爲奇零。而石則進而爲十。若命升爲單位。則合以下爲奇零。而斗則進而爲十。石則進而爲百。衡法命兩爲單位。則錢分釐毫皆爲奇零。命錢爲單位。則分以下爲奇零而兩則進而爲十。若命分爲單位。則釐以下爲奇零。而錢則進而爲十。兩則進而爲百。故凡列數單爲一位。十爲二位。百爲三位。千爲四位。萬爲五位。如有數一萬二千三百四十五。則以單位爲末。向前列之。共有五位。卽知此數首位是萬矣。至於曆法宮度分秒日時刻分之定位。則每項命兩位。如宮曰幾十幾宮。度曰幾十幾度。分曰幾十幾分之類。蓋因秒以六十而進分。分以六十而進度。度以三十而進宮。故常例一位卽命一等者。宮度時刻。則兩位命爲一等。而每一等有十單之別焉。此又命位之最要者也。

凡數未至單位者。必須作〇以存其位。如有數一萬二千三百四十丈。則補作〇以存單位。如下式。　又如有數一萬二千丈。則補作〇〇〇以存百十單之位。如下式。

一二三四〇

一二〇〇〇

凡數單位後有奇零者。必作點於單位上以誌之。如有金三百四十五兩六錢七

分命兩爲單位則於五上作點誌之如下式　又如有米六石五斗四升三合命石爲單位則於六上作點誌之如下式

三	四	五·	六	七
	六·	五	四	三

凡列衆數幾多位中有空者必作〇以存其位如有數二萬零四百五十六此中千位無數故必作〇於萬後百前以存其位如下式　又如有數一萬零三十四此中千位百位俱無數故補作兩〇於萬後十前以存其位如下式

二	〇	四	五	六
一	〇	〇	三	四

凡宮度分秒皆兩位列之如有一十一宮二十度三十二分四十五秒列位如下式　又如日時刻分列位日時分則兩位刻止一位列之如二十一日一十八時三刻零二分列位如下式

十	宮	十	度	十	分	十	秒
一	一	二	〇	三	二	四	五

十	日	十	時	刻	十	分
二	一	一	八	三	〇	二

加減乘除

算法以加減乘除爲八門．然究其終．雖至於千變萬化．總不出乎此．但用法不同耳．或應取其相和之數則用加．或應取其相較之數則用減．或應聚而總其積則用乘．或應散而取其分則用除．又有先加而後減者．或先減而後加者．有先乘而後除者．或先除而後乘者．又有加減與乘除先後互用者．古稱九章．命算自方田以至勾股．數有繁簡．理有顯晦．法有淺深．算有難易．然何一不從加減乘除而得．故淺言之則算法之八門．究言之實算法之全體也．

加法

加者合衆數而成總也。蓋數始於一。終於九至十又復爲一。等而上之十百千萬以至億兆京垓皆得名之爲一。卽皆自一而加者也。今自一位言之有自一至九之數。合前後之位言之。有單十百千萬之等。先自單數加起成十則進前一位。仍爲一。以單數紀本位下。挨次併之。卽得總數。若夫宮度時刻斤兩之類。則不以十進。必足其所命之分始進一位。如宮度足六十分進一度。足三十度進一宮。如時刻足十五分進一刻。足四刻進一時。足二十四時進一日。如斤兩足十六兩進一斤之類。至於定位則以原數列於上加數列於下。或大數列於上小數列於下。按法依次對位列之。加畢、所得之數。依原列之位定之。

設如有數一萬二千三百四十五。與六千七百八十九相加

法以原數橫列於上加數橫列於下按位相對加之。如九與五相對。單從單。八與四相對。十從十。百千萬數。俱各從其類。單位之五九相加得十四進十於前位爲一誌之。作一點於前位爲誌。如進二十則作二點。如進三十則作三點。本位紀四。書於橫格下。次十位之四八相加得十二併所進之一爲十三。復進十於前位爲一誌之本位紀三。次百位之三七相加得十。併所進之一爲十一。復進十於前位爲一誌之。本位紀一。次千位之二六相加得八。併所進之一爲九。於是本位紀九。至於萬位獨有原數。無可加則仍紀一。所加之數。共得一萬九千一百三十四。卽總數也。

一	二	三	四	五
	六	七	八	九
一	九	一	三	四

設如有數一萬四千五百四十五．與一萬七千三百五十相加．

法以原數橫列於上．加數橫列於下．加數內單位無數．故作〇以存其位．仍按位相對加之．單位之五對〇無可加．仍紀五．次十位之四五相加得九．本位紀九．次百位之五三相加得八．本位紀八．次千位之四七相加得十一．進十於前位爲一誌之．本位紀一．次萬位之一與一相加得二．併所進之一爲三．於是本位紀三．所加之數共得三萬一千八百九十五．卽總數也．

一	四	五	四	五
一	七	三	五	〇
三	一	八	九	五

設如有二十三丈零五寸六分．與二丈八尺六寸二分相加．

法以原數橫列於上．加數橫列於下．原數內尺位無數．故作〇以存其位．仍按位相對加之．分位之六二相加得八．本位紀八．次寸位之五六相加得十一．進十於前位爲一誌之．本位紀一．次尺位之八對〇無可加．乃併所進之一爲九．本位紀九．次丈位之三二相加得五．本位紀五．至於十位獨有原數．無可加．則仍紀二．所加之數共得二十五丈九尺一寸八分．卽總數也．

十	丈	尺	寸	分
二	三	〇	五	六
	二	八	六	二
二	五	九	一	八

設如有糧四萬五千零三十一石．與三千零九十石相加．

法以原數橫列於上．加數橫列於下．原數內百位無數．加數內百位單位俱無數．故各作〇以存其位．仍按位相對加之．石位

萬	千	百	十	石
四	五	〇	三	一
	三	〇	九	〇
四	八	一	二	一

之一對○無可加。仍紀一。次十位之三九相加得十二。進十於前位爲一。誌之本位紀二。次百位○與○無可加。則以所進之一爲本位數。故下紀一。次千位之五三相加得八。本位紀八。至於萬位獨有原數。無可加則仍紀四。所加之數。共得四萬八千一百二十一石。即總數也。

設如有銀八兩六錢五分四釐與四兩零六分二釐相加。

法以原數横列於上。加數横列於下。加數內錢位無數。故作○以存其位。仍按位相對加之。釐位之四二相加得六。本位紀六。次分位之五六相加得十一。進十於前位爲一。誌之本位紀一。次錢位之六對○無可加。乃併所進之一爲七。本位紀七。次兩位之八四相加得十二。進十於前位爲一。誌之本位紀二。至於十位無數。則紀所進之一爲一。所加之數。共得十二兩七錢一分六釐。即總數也。

設如有田三區。一區五百九十二畝三分。一區八百五十五畝九分。一區七百八十二畝五分。相加。

法以田三區按位横列。相對加之。分位之三九五相加得十七。進十於前位爲一。誌之本位紀七。次畝位之二五二相加得九。併所進之一爲十。進十於前位爲一。誌之本位紀○。次十位之九五八相加得二十二。併所進之一爲二十三。進二十於前位爲二。誌之本位紀三。次百位之五八七相加得二十。併所進之二爲二十二。進二十

十	兩	錢	分	釐
	八	六	五	四
	四	○	六	二
一	二	七	一	六

千	百	十	畝	分
	五	九	二	三
	八	五	五	九
	七	八	二	五
二	二	三	○	七

於前位爲二誌之本位紀二至於千位無數則紀所進之二爲二所加之數共得二千二百三十畝零七分即總數也

設如有銀九宗一宗八千八百五十二兩一宗三千二百一十一兩一宗五百二十兩一宗九百三十八兩一宗二千五百九十兩一宗一千二百一十五兩一宗二千五百一十八兩一宗五千三百六十六兩一宗四千三百七十二兩相加

法因九宗數繁難加故分爲三次三次復併爲一次則得共數其八千八百五十二兩三千二百一十一兩五百二十兩相併則得一萬二千五百八十三兩其九百三十八兩二千五百九十兩一千二百一十五兩相併則得四千七百四十三兩其二千五百一十八兩五千三百六十六兩四千三百七十二兩相併則得一萬二千二百五十六兩既得三總數又將三數併之得二萬九千五百八十二兩即九宗共數也

設如九宮二十度三十分二十六秒與六宮一十八度二十分五十秒相加

法以原數橫列於上加數橫列於下其每項各命兩位仍按各

	八	八	五	二
	三	二	一	一
		五	二	〇
一	二	五	八	三

	二	五	一	八
	五	三	六	六
	四	三	七	二
一	二	二	五	六

	九	三	八
二	五	九	〇
一	二	一	五
四	七	四	三

一	二	五	八	三
	四	七	四	三
一	二	二	五	六
二	九	五	八	二

位相對加之。秒之單位六對〇無可加仍紀六。秒之十位二五相加得七十。乃以六十秒進一分。誌於分之本位。秒之十位紀一。次分之單位〇與〇無可加。則以所進之一爲本位數。故下紀一。次分之十位三二相加得五。故下紀五。次度之單位八對〇。無可加。仍紀八。次度之十位二一相加得三十。乃以三十度進一宮。誌於宮之本位。度之十位紀〇。次宮之本位九六相加得十五。併所進之一爲十六。因十二宮滿一周天。故逢十二去之。餘四。故下紀四。所加之數共得四宮八度五十一分一十六秒。即總數也。

宮	十	度	十	分	十	秒
九	二	〇	三	〇	二	六
六	一	八	二	〇	五	〇
四	〇	八	五	一	一	六

設如一日一十五時二刻八分。與一日一十二時三刻九分相加。

法以原數橫列於上。加數橫列於下。日時分則合兩位共加。刻則仍命以單位。蓋以四刻進一小時故也。分位之八與九相加得十七。十五分進一刻。故於刻之本位下誌一。餘二。故單位下紀二。十位下紀〇。次刻位之二與三相加得五。併所進之一爲六。四刻進一時。故於時之本位下誌一。餘二。故本位紀二。次時之單位五二相加得七。併所進之一得八。時之十位一與一相加得二。共爲二十八。二十四時進一日。故於日之本位下誌一。餘四。故時之單位下紀四。十位下紀〇。次日之單位一與一相加得二。併所進之一爲三。故下紀三。所加之數共得三日四時二刻二分。即總數也。

日	十	時	刻	十	分
一	一	五	二	〇	八
一	一	二	三	〇	九
三	〇	四	二	〇	二

設如有物重三十四斤十五兩五錢。與二十一斤十四兩三錢相加。

法以原數橫列於上．加數橫列於下．其錢位斤位與斤之十位．仍皆按位相對加之．兩位與兩之十位．則合其數共加之。兩以十六方進一斤．故合而加之．如列數有兩數無十數者．仍作〇以存十兩之位． 錢位之五三相加得八．本位紀八．兩位之原數十五加數十四相加共得二十九．則進十六兩於前斤位為一誌之．其所餘十三兩．則於兩位紀三．十位紀一．次斤位之四一相加得五．併所進之一為六．本位紀六．次十位之三二相加得五．本位紀五．所加之數共得五十六斤十三兩八錢．即總數也．

十	觔	十	兩	錢
三	四	一	五	五
二	一	一	四	三
五	六	一	三	八

減法

減者較衆數而得餘也．凡以少減多．以小減大．原有之數書於上．應減之數書於下．橫列必對其位．相減必從其類．如千減千百減百之類．如或下數大於上數．不足減．則借前位之一以減本位．加法由後而進前．減法則借前而退後．其理一也．詳見設如中．前位作一點以誌之．既得本位．則前位所借之一．併於前數而爲減數．然兩數相減．必先辨其多寡．首位必大於減數始可．其定位亦照原列之次．爲減餘位．

設如有數五萬六千七百八十九．內減四萬三千六百四十二．

法自單位減起．單位之九．減二餘七．故下紀七．十位之八．減四餘四．故下紀四．百位之七．減六餘一．故下紀一．千位之六．減三餘三．故下紀三．萬位之五．減四餘一．故下紀一．所減之數．得一萬三千一百四十七．卽餘數也．

五	六	七	八	九
四	三	六	四	二
一	三	一	四	七

設如有數二萬三千六百七十二．內減一萬六千四百八十一．

法自單位減起．單位之二．減一餘一．故下紀一．十位之七．減八．爲下大於上．則借前位之一．前位下作一點爲誌．作本位之十．共十七．減八．餘九．故下紀九．百位之六．減四．併十位所借之一．則爲六減五．餘一．故下紀一．千位之三．減六．爲下大於上．則借前位之一．前位亦作一點爲誌．作本位之十．共十三．減六．餘七．故下紀七．萬位之

二	三	六	七	二
一·	六	四·	八	一
○	七	一	九	一

二減一。併千位所借之一。則為二減二。恰盡。故下紀○。所減之數。得七千一百九十一。即餘數也。

設如有六丈七尺八寸九分一釐。內減三丈四尺五寸九分九釐。

法自釐位減起。釐位之一。減九。為下大於上。則借前位之一。前位下作一點為誌。作本位之十。共十一。減九。餘二。故下紀二。分位之九。減九。併釐位所借之一。則為九減十。亦為下大於上。故復借前位之一。前位下作一點為誌。作本位之十。共十九。減十。餘九。故下紀九。寸位之八。減五。併分位所借之一。則為八減六。餘二。故下紀二。尺位之七。減四。餘三。故下紀三。丈位之六。減三。餘三。故下紀三。所減之數得三丈三尺二寸九分二釐。即餘數也。

設如有米六十五石四斗三升二合。內減四十六石二斗七升三合。

法自合位減起。合位之二。減三。為下大於上。則借前位之一。前位下作一點為誌。作本位之十。共十二。減三。餘九。故下紀九。升位之三。減七。併合位所借之一。則為三減八。為下大於上。則借前位之一。前位下作一點為誌。作本位之十。共十三。減八。餘五。故下紀五。斗位之四。減二。併升位所借之一。則為四減三。餘一。故下紀一。石位之五。減六。為下大於上。則借前位之一。前位下作一點為誌。作本位之十。共十五。減六。餘九。故下紀九。十位之六。減四。併所借之一。則為六減五。餘一。故下紀一。所減之數得十九石

丈	尺	寸	分	釐
六	七	八	九	一
三	四	五	九	九
三	三	二	九	二

十	石	斗	升	合
六	五	四	三	二
四	六	二	七	三
一	九	一	五	九

一斗五升九合卽餘數也．

設如有銀十五兩三錢六分七釐．內減九兩二錢三分四釐．

法自釐位減起．釐位之七減四餘三．故下紀三．分位之六減三餘三．故下紀三．錢位之三減二餘一．故下紀一．兩位之五減九．爲下大於上．則借前位之一（前位下作一點爲誌）．作本位之十．共十五．減九餘六．故下紀六．十位之一．減兩位所借之一．恰盡．故下紀〇．所減之數得六兩一錢三分三釐．卽餘數也．

設如七宮一十八度二十七分五十二秒．內減九宮二十一度三十五分四十三秒．

法自秒位減起．秒之單位二減三．爲下大於上．則借前位之一（前位下作一點爲誌）．作本位之十．共十二．減三餘九．故下紀九．秒之十位五減四．併所借之一．則爲五減五．恰盡．故下紀〇．分之單位七減五餘二．故下紀二．分之十位二減三．爲下大於上．則借度位之一．爲六十分（度位下作一點爲誌）．六十分與原二十分．共爲八十分．內減三十分．餘五十分．故下紀五．度之單位八減一．併所借之一．則爲八減二．餘六．故下紀六．度之十位一減二．爲下大於上．則借宮位之一．爲三十度（宮位下作一點爲誌）．三十度與原十度．共爲四十度．內減二十度．餘二十度．故下紀二．宮之單位七減九．併所借之一．則爲七減十．爲下大於上．則外借一周天．爲十二宮．十二宮與原七宮．共爲十九宮．內減十宮．餘九宮．故下紀九．所減之數得九宮二十六度五十二分九秒．卽

十	兩	錢	分	釐
一	五	三	六	七
．	九	二	三	四
〇	六	一	三	三

十	宮	十	度	十	分	十	秒
	七	一	八	二	七	五	二
	九．	二	一．	三	五	四．	三
	九	二	六	五	二	〇	九

餘數也

設如一十二日二十二時三刻零九分內減一十一日二十三時三刻十分．

法自分位減起日位刻位俱各按單位相減其分位時位則合兩位減之分位之九減十．爲下大於上則借刻位之一爲十五分．刻之本位下作一點爲誌．十五分與原九分共爲二十四分內減十分餘十四分故分之單位紀四分之十位紀一刻之本位三減三．併所借之一．則爲三減四．爲下大於上則借時位之一爲四刻時之單位下作一點爲誌．四刻與原三刻共爲七刻內減四刻．餘三刻．故本位下紀三時位之二十二減二十三．併所借之一．則爲二十二減二十四．爲下大於上則借日位之一爲二十四時．日之本位下作一點爲誌．二十四時與原二十二時共爲四十六時內減二十四時．餘二十二時．故時之單位下紀二時之十位下亦紀二．日位之二減一．併所借之一．則爲二減二．恰盡．故下紀○．日之十位之一減一．恰盡．故亦紀○．所減之數得二十二時三刻一十四分．卽餘數也．

設如有物十五斤零四兩八錢．內減十二斤十二兩三錢．

法自錢位減起．錢位之八減三．餘五．故下紀五．兩位之四減二．似非下大於上．然原數兩之十位爲○．十六兩爲一斤．故作○於斤後兩前．以存十兩之位．而減數兩之十位爲一．則爲四兩減十二兩．亦爲下大於上．故借斤位之一爲十六兩．斤位下作一點爲

分	十	刻	時	十	日	十
九	○	三	二	二	二	一
○	一	三·	三·	二	一·	一
四	一	三	二	二	○	○

錢	兩	十	觔	十
八	四	○	五	一
三	二	一	二·	一
五	八	○	二	○

誌。十六兩與原四兩共爲二十兩內減十二兩餘八兩故兩之單位紀八十位紀〇斤位之五減二併所借之一則爲五減三餘二故下紀二十位之一減一恰盡故下紀〇所減之數得二斤零八兩五錢卽餘數也。

因乘

因乘者生數也．以數生數．有生生不已之義焉．凡有幾數彼此按次加之．爲得總數．然所加之次數多．則必至於煩而無統．此因乘之所以立也．因者一位相因而得．如二因三而成六．四因二而成八也．乘者多位相乘而得．如兩位以上．則各以每位所因之數．而又層累以積之也．其法以原數爲實．乘數爲法．實列於上．法列於下．必使法實相當．如千對千百對百十對十單對單之類．按法乘實．合而加之．爲所得數．定位之法．視其法實所命之單位後有奇零與否．如無奇零．則實中所命之單位相對．卽法尾之數．若有奇零．則法實相乘者．法實之一位．統得數之二位．如單位後奇零有一位．則截得數之二位．奇零有二位．則截得數之四位．向前爲單位計之．法實相乘再以法乘者．卽自乘再乘也．法實之一位．統得數之三位．如單位後奇零有一位．則截得數之三位．奇零有二位．則截得數之六位．向前爲單位計之．是故得數以一位論者．則爲單十百千之類．以兩位論者．則爲自乘之類．以三位論者．則爲自乘再乘之類．錯綜交互．用法不一．必須臨題詳審．求其無誤．始爲得之．具見設如於左．

設如有三人．每人賞緞二疋．問共得幾疋．

法以三人爲實．列於上．二疋爲法．列於下．以二因三得六．卽書於本位下．定位以實之三人卽是單位．而法又止一位爲疋．今得數之六與實之單位相對．故知六是疋位．得共數爲六疋也．

三
二
——
六

設如有八人每人賞米六石問共得幾石．

法以八人爲實列於上六石爲法列於下以六因八得四十八．將四書於前位下．前位爲十位．故十數紀前位下．八書於本位下．本位爲單位．故單數紀本位下．定位以實之八人即是單位而法亦止一位爲石．今得數之八．與實之單位相對．即知八是石位．而四在石之前一位．故知四是十位．得共數爲四十八石也．

設如有一十二人每人賞銀五兩問共得幾兩．

法以一十二人爲實列於上五兩爲法列於下命兩位與人之單位相齊．先以五乘二得一十．將十進前一位作一點誌之．紀○於本位下．此數無單．故下紀○．次以五乘一仍得五．併所進之一爲六．故書六於本位下．一雖爲十位．而以五乘一．則一下爲本位矣．共得六○．定位因實之單位對法之兩位而得數之○．與實之單位相對．故知○爲兩位而六爲十位．得共數爲六十兩也．

設如有二十四人每人賞銀三兩六錢問共得幾兩．

法以二十四人爲實列於上三兩六錢爲法列於下．命錢位與人之單位相齊．乃以法之六遍乘實之二四．其所得之單位數．即對本法位下書之．六乘四得二十四．將二十進前一位作二點誌之．四書於本位下．次以六乘二得一十二．將十進前一位爲一書之二．併所進之二爲四．故書四於本位下．二雖爲十位．而以六乘二．則二下即爲

```
 八
 六
────
四八
```

```
一二
  五
────
 六○
```

```
 二四
 三六
──────
一四四
 七二
──────
 八六四
```

本位矣．法之六既與實乘畢．次以法之三遍乘實之二四．其所得之單位數．即對本法位下書之．三乘四得一十二．將十進前一位作一點誌之．二書於本位下．次以三乘二得六．併所進之一爲七．故書七於本位下．法之三又與實乘畢．乃用加法併之．共得八六四．總書於下．定位以實尾之四係四人爲單位．而法尾爲錢．今得數末位之四與實之單位相對．即知四是錢位．二位爲兩．三位爲十兩．得共數爲八十六兩四錢也．

設如有田三百六十畝．每畝納糧三升五合．問共得若干．

法以三百六十畝爲實．列於上．三升五合爲法．列於下．實之單位無數．則補○以存其位．命合位與畝之單位相齊．乃以法之五遍乘實之三六○．其所得之單位數．即對本法位下書之．五乘○仍爲○．故下紀○．五乘六得三十．將三十進前一位作三點誌之．本位紀○．五乘三得一十五．將十進前一位爲一書之．五併所進之三爲八．故書八於本位下．又以法之三遍乘實之三六○．其所得之單位數．即對本法位下書之．三乘○仍爲○．故下紀○．三乘六得一十八．將十進前一位作一點誌之．八書於本位下．三乘三得九．併所進之一爲十．故進前一位爲一．書之．本位紀○．乘畢．用加法併之．共得一二六○○．總書於下．定位以實尾之○係單位．法尾是合．今得數末位之○與實之單位相對．即知末位之○是合．前一位是升．向前數至首位得十石．因知共數爲一十二石六斗也．

		三	六	○
			三	五
	一	八	○	○
一	○	八	○	
一	二	六	○	○

設如有田三頃五十畝．每頃納糧一石二斗三升．問共得若干．

法以三頃五十畝爲實列於上。因畝位無數。故作〇以存其位。一石二斗三升爲法列於下命石位與頃之單位相齊。題中言每頃納一石。故石與頃對爲單位。乃以法之三遍乘實之三五〇。其所得之單位數。卽對本法位下書之。三乘〇。仍得〇。故下紀〇。次以三乘五得一十五。將十進前一位作一點誌之。五書於本位下。次以三乘三得九。併所進之一爲十。故進前一位爲一書之本位紀〇。又以法之二遍乘實之三五〇。其所得之單位數。卽對本法位下書之。二乘〇。仍得〇。故下紀〇。二乘五得一十。將十進前一位作一點誌之。本位紀〇。二乘三得六。併所進之一爲七。故書七於本位下。又以法之一遍乘實之三五〇。其所得之單位數。卽對本法位下書之。一乘〇。仍得〇。一乘五仍得五。一乘三仍得三。俱各書於本位下。乘畢用加法併之。共得四三〇五〇。總書於下。定位因每頃納糧一石二斗三升。卽命頃爲單位。而石亦爲單位。其後二位則爲奇零。凡法實之奇零有一位則統得數之兩位。今奇零既有二位。則統得數之四位。故從後截去四位。而第五位定爲石。因知共數爲四石三斗零五合也。

		三	五	〇
		一	二	三
	一	〇	五	〇
	七	〇	〇	
三	五	〇		
四	三	〇	五	〇

設如有金三十六兩。每兩價銀九兩九錢八分。問共價幾何。

法以三十六兩爲實列於上。九兩九錢八分爲法列於下。實中錢位分位俱無數。則補作〇〇以存其位。命分位與分位相齊。乃以法之八遍乘實之三六〇〇。先以八

			三	六	〇	〇
				九	九	八
		二	八	八	〇	〇
	三	二	四	〇	〇	
三	二	四	〇	〇		
三	五	九	二	八	〇	〇

乘〇〇。仍得〇〇。故下紀〇〇。次以八乘六得四十八。將四十進前一位作四點誌之。八書於本位下。次以八乘三得二十四。將二十進前一位爲二書之。四併所進之四爲八。故書八於本位下。又以法之九遍乘實之三六〇〇。先以九乘〇〇。仍得〇〇。故下紀〇〇。次以九乘六得五十四。將五十進前一位作五點誌之。四書於本位下。次以九乘三得二十七。將二十進前一位作二點誌之。七併所進之五爲十二。二十又進前一位爲一。併所誌之二爲三。故前位書三。本位書二。又以法之九遍乘實之三六〇〇。先以九乘〇〇。仍得〇〇。故下紀〇〇。次以九乘六得五十四。將五十進前一位作五點誌之。四書於本位下。次以九乘三得二十七。將二十進前一位作二點誌之。七併所進之五爲十二。二十又進前一位爲一。併所誌之二爲三。故前位書三。本位書二。乘畢用加法併之。共得三五九二八〇〇。定位因題言每兩價銀九兩九錢八分。爰以兩爲單位。其後二位則爲奇零。奇零既有二位。則統得數之四位。故從後截去四位。而第五位定爲兩。第六位爲十。第七位爲百。因知共數爲三百五十九兩二錢八分也。

設如有物二十六斤。求兩數。

法以二十六斤爲實。列於上。以每斤十六兩爲法。列於下。乃以法之六遍乘實之二六。其所得之單位數。卽對本法位下書之。六乘六得三十六。將三十進前一位作三點誌之。六書於本位下。次以六乘二得一十二。將十進前一位爲一。書之。二併所進之三爲五。故書五於本位下。又以法之一遍乘實之二六。其所得之單位數。卽對本法位下書之。一乘六仍得六。故下書六。次以一乘二仍得二。故下書二。乘畢用加法併之。得四一六。定位

	二	六
	一	六
一	五	六
二	六	
四	一	六

因實尾是單位而法尾又是兩位故得數末位之六卽爲單位爲兩而前一位爲十又前一位爲百因知得數爲四百一十六兩也．

又法斤求兩身加六名爲定身加法．蓋以十六兩之十爲一．乘之仍得原數．故以本身加六卽得．如二十六斤．則從首位加起．二六加一十二．將一對實之十位二對實之單位下書之．又六六加三十六．則三對實之單位而六對實之單位後一位書之．用加法相併得四一六．定位以原斤數之後一位爲兩．今得數末位之六在原斤數之後一位．卽知是兩．因知得數爲四百一十六兩也．

二	六	
一	二	
	三	六
四	一	六

設如周天三百六十度．每度六十分．問共得若干分．

法以三百六十度爲實．列於上．以六十分爲法．列於下．因單位俱無數．故各作〇以存其位．乃以法之〇遍乘實之三六〇．仍皆得〇．故各紀〇於各位下．又以法之六遍乘實之三六〇．其所得之單位數．卽對本法位下書之．六乘〇．仍得〇．故本位下紀〇．次以六乘六得三十六．將三十進前一位作三點誌之．六書於本位下．次以六乘三得一十八．將十進前一位作一點誌之．八併所進之三爲十一．十又進前一位爲一．併所誌之一爲二．故前位書二．本位書一．乘畢．用加法併之．共得二一六〇〇．定位以實之末位是單位．法之末位是分．今求分數．故得數末位之〇．卽是分之單位．向前數至首位得萬．因知共數爲二萬一千六百分也．

		三	六	〇
			六	〇
		〇	〇	〇
二	一	六	〇	
二	一	六	〇	〇

設如有驗時儀墜子來一秒。往一秒。今十五分。問共得來往幾秒。

法以十五分爲實列於上。以每分六十秒爲法列於下。乃以法之〇。遍乘實之一五。仍皆得〇。故各紀〇於本位下。又以法之六。遍乘實之一五。其所得之單位數。卽對本法位下書之。六乘五得三十。將三十進前一位。作三點誌之。本位紀〇。次以六乘一。仍得六。併所進之三爲九。故書九於本位下。定位以實之末位是單位。法之末位是秒。今求秒數。故得數末位之〇。卽是秒之單位。其前一位爲十。又前一位爲百。因知共數爲九百秒也。

一·五
六〇
───
〇〇
九〇
───
九〇〇

設如一尺二寸自乘求積。以本數乘本數。故爲自乘。

法以一尺二寸互爲法實列於上下。乃以法之二遍乘實之一二。其所得之單位數。卽對本法位下書之。二乘二得四。故下書四。次以二乘一。仍得二。故下書二。又以法之一遍乘實之一二。其所得之單位數。卽對本法位下書之。一乘二。仍得二。故下書二。次以一乘一。仍得一。故下書一。乘畢用加法併之。共得一四四。定位因自乘數成平方面。其每一尺正方面容積一百寸。故百寸爲尺。百尺爲丈。俱以兩位命之。今實之末位爲寸。卽命爲單位。法之末位是寸。得數末位之四。與實之單位相對。卽知爲寸位。向前第二位爲十寸。第三位爲百寸。既以百寸爲尺。卽知得數爲一尺四十四寸也。若命尺爲單位。則於尺上命位。其後一位爲奇零。故於得數內從末截去二位。以第三位爲尺。葢自乘乃兩數相乘。兩數既各有一位零數。故截去兩

一·二
一二
───
二四
一二
───
一四四

位算也．今得數有三位．卽知首位爲一尺．首位既爲尺．末位又既爲寸．則中一位爲十寸可知矣．

設如一尺二寸自乘再乘求積以本數乘本數．所得之數．又以本數乘之．故謂之自乘再乘．

法先以一尺二寸互爲法實按法自乘得一尺四十四寸又以一尺四十四寸爲實復以一尺二寸爲法．按法乘之共得一七二八．定位因自乘再乘數成立方體．其每一尺正方體容積一千寸．故以千寸爲尺．千尺爲丈．俱以三位命之．今實之末位爲寸．卽命爲單位．法之末位是寸．得數末位之八與實之單位相對．卽知爲寸．位向前第二位爲十寸．第三位爲百寸．第四位爲千寸．既以千寸爲一尺．卽知得數爲一尺七百二十八寸也．若命尺爲單位．則於尺上命位．其後一位爲奇零．故於得數內從末截去三位．以第四位爲尺．蓋自乘再乘．乃以三數相乘．三數既各有一位零數．故截去三位算也．今得數有四位．卽知首位爲一尺．首位既爲尺．末位又既爲寸．則中二位爲十寸百寸可知矣．

		一	二
		一	二
		二	四
	一	二	
	一	四	四
		一	二
	二	八	八
一	四	四	
一	七	二	八

歸除

歸除者分數也以數分數有各得均齊之義焉凡有兩數以此數減彼數減得幾次即爲所得然所減之次數多則益至於紛而難紀此歸除之所以立也歸者一位歸之而得如歸作幾分而均分之也除者多位除之而得蓋以所得之數與法相因而於實內除去也其法以原數爲實橫列於下除數爲法橫列於上法之小於實者法之首位與實之首位列齊法之大於實者則法比實退一位看實足法幾倍即爲得數自法之末位上紀所得之數既得數乃以所得與法相因書於實下與實相減餘者即爲次商實依次按法歸除以恰盡爲度 減餘者乃所得與法相因之數在實中所減者其數每與法位相對即初商之餘實也至於實位所餘之數則每次取下一位續於減餘之末以爲每商之實若實無餘位而歸除仍未盡者則按位添○以紀之 如實不足法之一倍者則得數爲○定位之法以法中所命單位與原實相對之數爲所得之首位數若實之位數少於法者則作幾○位以補足法然後位數一覽即明至於一位歸除捷法則竟以原數書於上就身用幾分分之得數書於下其定位仍照原列之位定之具見設如於左

設如有緞六疋令三人分之問每人得幾疋

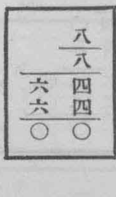
法以六疋爲實列於下三人爲法列於上今法與實俱爲單位而法比實小故列法與實相齊爰看實足法幾倍今足二倍故書二於法上乃以得數之二與法之三相因得六書於實下與實相減恰盡即得數爲二疋也定位因法之三人即爲單位而

二
三　六
　　六
　　○

實亦止一位為疋。是法之單位。與實之疋位相對。故得數為二疋也。

設如有米六十四石。令八人分之。問每人得幾石。

法以六十四石為實。列於下。八人為法。列於上。因法之八大於實之首位之六。故將法退一位書之。爰看實足法幾倍。今足八倍。故書八於法上。乃以得數之八與法之八相因。得六十四。書於實下。其所得單位數即對得數之本位下書之。與實相減恰盡。即得數為八石也。定位因法之八人即為單位。而與實之石位相對。故得數為八石也。



設如有銀三百四十三兩。令七人分之。問每人得幾兩。

法以三百四十三兩為實。列於下。七人為法。列於上。因法之七大於實之首位之三。故將法退一位書之。爰看實足法幾倍。今實前兩位為三四。足法之四倍。何以知其足法之四倍。蓋實之三十四內。足法之七之四倍。為二十八。如法之七之五倍。則為三十五。比實則大矣。故書四於法上。乃以得數之四與法之七相因。得二十八。書於實下。其所得單位數。即對得數之本位下書之。後倣此。與實相減。餘六。次取實數所餘之三。書於減餘之後。共六三。為次商實。爰看實之六三足法幾倍。今足九倍。故書九於得數之次。乃以得數之九與法之七相因。得六十三。書於次商實之下。與實相減恰盡。即得數為四十九兩也。定位因法之七人即為單位。而與實中之兩之十位相對。故得數首位即為十。而次位為兩。是知每人得四十九兩也。

設如有絲四十五斤。共織得緞九十二丈二尺五寸。問每斤織得若干。

法以九十二丈二尺五寸為實列於下。四十五斤為法列於上。因法之首位四。小於實之首位九。故列法與實相齊。爰看實之九二。足法之二倍。故書二於法上。乃以得數之二。與法之四五相因得九〇。書於實下。與實相減餘二。次取實數所餘之二。書於減餘之後。共二二為次商實。今實之二二。不足法之四五之一分故得數為〇。乃紀〇於上復取實數所餘之五。書於二二之後。共二二五為三商實。次商實之二二。不足法之四五故再取實之一位續書於下。謂之三商實者。〇位為次商故也。爰看實之二二五。足法之五倍。故書五於上。乃以得數之五與法之四五相因得二二五。書於實下與實相減恰盡。即得數為二丈零五寸也。定位因法之五斤為單位而與實之丈位相對。故得數首位即為丈等而下之為尺為寸。是知每斤織得二丈零五寸也。

	二	〇	五
四	五		
九	二	二	五
九	〇		
〇	二	二	五
	二	二	五
	〇	〇	〇

設如有田四十五畝六分。共納穀五十七石。問每畝納穀若干。

法以五十七石為實列於下。四十五畝六分為法列於上。因法之首位四。小於實之首位五。故列法與實相齊。又因實之位數少於法。故補作〇以足其位。爰看實之五七〇。足法之一倍。故書一於法上。乃以得數之一與法之四五六相因仍得四五六。書於實下。與實相減餘一一四。此後實無餘位。故添書一〇於減餘之末。為次商實。爰看一一四〇。足法之二倍故

		一	二	五
四·	五	六		
五	七	〇		
四	五	六		
一	一	四	〇	
	九	一	二	
〇	二	二	八	〇
	二	二	八	〇
	〇	〇	〇	〇

書二於上．乃以得數之二與法之四五六相因得九一二．書於實下與實相減餘二二八．又添書一〇於減餘之末．爲三商實．爰看二二八〇．足法之五倍．故書五於上．乃以得數之五．與法之四五六相因得二二八〇．書於實下．與實相減恰盡．卽得數爲一石二斗五升也．定位因法之五畝爲單位．而與實之石位相對．故得數首位爲石．是知每畝納穀一石二斗五升也．

設如有丹砂一兩．價値錢二萬五千文．問每錢一文該得丹砂幾何．

法以丹砂一兩爲實．列於下．錢二萬五千爲法．列於上．因法之首位二．大於實之首位一．故將法退一位列之．又因法之百位十位單位俱無數．故各作〇以存其位．而實亦作五〇位以補足法．爰看實足法之四倍．故書四於法上．乃以得數之四．與法之二五〇〇〇相因．得一〇〇〇〇〇．書於實下．與實相減恰盡．卽得數爲四絲也．定位因法之末位〇．係單位．故從實之首位一兩．數至法之單位相對之位爲絲．是知每錢一文得丹砂四絲也．

設如有銀一千二百五十兩．買果賞人．每果一枚．價二釐五毫．問買果若干．

法以一千二百五十兩補五〇位爲實．列於下．因法之單位是毫．故補五〇位與法相對．蓋命實爲一千二百五十萬毫也．二釐五毫爲法．列於上．爰看實之一二五．足法之五倍．故書五於法上．乃以得數之五．與法之二五相因．得一二五．書於實下．與實相減恰盡．然實後尚有五〇位．故得數後亦添五〇位．爲五十萬也．定位因法實俱至毫位

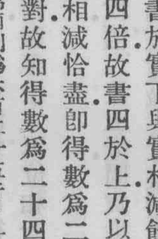
　　　　四
二五〇〇〇
一〇〇〇〇〇
一〇〇〇〇〇
〇〇〇〇〇〇

五〇〇〇〇〇
二五
一二五〇〇〇〇〇
一二五
〇〇〇

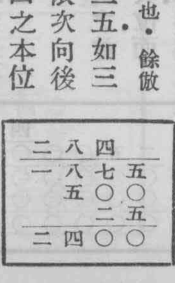
止。即命豪爲單位。爰從實之末位數至法之單位相對之位爲十萬。是知得果爲五十萬枚也。

設如有物重三百八十四兩。問得斤數若干。

法以三百八十四兩爲實。列於下。每斤一十六兩爲法。列於上。爰看實之三八足法之二倍。故書二於法上。乃以得數之二。與法之一六相因得三十二。書於實下。與實相減餘六。次取實數之四。書於減餘之後。共爲六四。因足法之四倍。故書四於上。乃以得數之四。與法之一六相因得六十四。書於實下。與實相減恰盡。即得數爲二十四斤也。定位因法之兩數爲單位。而與實之十位相對。故知得數爲二十四斤也。



又法名爲斤稱流法。其法曰一退六二五。如一萬兩則爲六百二十五斤。一千兩則爲六十二斤半。一百兩則爲六斤二分半。皆以十遞析。退者退一位命之也。二一二五如二萬兩則爲一千二百五十斤。二千兩則爲一百二十五斤。二百兩則爲十二斤半。不言退者。對位命之也。餘倣此。三一八七五。四二五。五三一二五。六三七五。七四三七五。八五。九五六二五。如三百八十四兩。則列於上。先以三之一八七五通之。爰將一對三之本位以下依次向後書之。次以八之五通之。將五對八之本位書之。次以四之二五通之。將二對四之本位書之。五則列於次位。三數書畢。乃以加法併之。得數爲二十四斤。定位因兩之前一位爲斤。今得數之四在兩之前一位。故四即爲斤位。而又前一位則爲十位。是知得數爲二十四斤也。



設如周天三百六十度。分十二宮。問每宮得若干度。

法以三百六十度爲實列於下。一十二宮爲法列於上。爰看實之三六。足法之三倍。故書三於法上。乃以得數之三。與法之一二相因得三六。書於實下。與實相減恰盡。然實後尚有〇位。故得數後亦添一〇位。即得數爲三十度也。定位因法之二爲單位而與實之十位相對。故得數首位爲十而每宮爲三十度也。

設如一日之中得一千四百四十分。以九十六刻分之。問每刻得若干分。

法以一千四百四十分爲實列於下。以九十六刻爲法列於上。爰看實之一四四。僅足法之一倍。故書一於法上。乃以得數之一。與法之九六相因仍得九六。書於實下。與實相減。餘四八。次取實之〇位書於減餘之後。共爲四八〇。因足法之五倍。故書五於上。乃以得數之五。與法之九六相因得四八〇。書於實下。與實相減恰盡。即得數爲一十五分也。定位因法之六爲單位而與實之十位相對。故得數首位爲十而每刻爲一十五分也。

一位歸除捷法

設如有銀三十四萬五千六百七十八兩。作二分分之。問每分若干。

法以三十四萬五千六百七十八兩爲實列於上。視首位之三足二分之幾何。今足一倍。故下書一。一二除二餘一。乃移於下位爲十。下位作點爲誌・併下位之四共爲十四。足二分之七倍。故下書七。二七除一十四恰盡。次五足二分之二倍。故下書二。二二除四

餘一。移於下位爲十。併下位之六共爲十六。足二分之八倍。故下書八。二八除一十六恰盡。次七足二分之三倍。故下書三。二三除六餘一。移於下位爲十。併下位之八。共爲十八。足二分之九倍。故下書九。二九除一十八恰盡。定位因得數仍原數之位。故知每分得一十七萬二千八百三十九兩也。

設如有銀一十二萬三千四百五十三兩作九分分之。問每分若干。

法以一十二萬三千四百五十三兩爲實。列於上。因首位之一小於九分。故移於下位爲十。併下位之二。共爲十二。足九分之一倍。故下書一。一九除九餘三。移於下位爲三十。併下位之三。共爲三十三。足九分之三倍。故下書三。三九除二十七餘六。移於下位爲六十。併下位之四共爲六十四。足九分之七倍。故下書七。七九除六十三餘一。移於下位爲十。併下位之五。共爲十五。足九分之一倍。故下書一。一九除九餘六移於下位爲六十。併下位之三。共爲六十三。足九分之七倍。故下書七。七九除六十三恰盡。定位因得數比原數退一位。故知每分得一萬三千七百一十七兩也。

三	四	五	六	七	八
一	七	二	八	三	九

一	二	三	四	五	三
	一	三	七	一	七

數理精蘊下編卷二

首部二

命分

凡歸除分至最細而可以恰盡無餘者。謂之無奇零數。若分至最細而屢除不盡者。謂之有奇零數。其奇零若略去之。則不能復還原數。此命分之所以立也。其法命爲分母分子。分母者卽除數也。分子者卽除不盡之數也。凡不盡之數得分母中之幾分者。卽命爲幾分之幾。是以命分之一法。正所以濟歸除之所不逮也。

設如有銀十一兩。命三人分之。問每人得若干。

法以三人分銀十一兩。每人得銀三兩。仍餘二兩。所餘二兩再以三人分之。每人得六錢六分六釐六毫。如是每得六而仍餘二數不盡。故立命分法。以三人爲分母。所餘二兩爲分子。命爲每人得三兩又三分兩之二。葢將每兩剖作三分。其所餘二兩則共剖作六分。三人分之。每人得二分。故命爲三分兩之二也。如因三分兩之二。求知原銀數。則以三人與分子二分相乘得六分。葢每人得二分。則三人共得六分也。以六分用分母三分歸之得二兩。葢初分一兩爲三分。故終收三分爲一兩也。再加入三人所得整數共九兩。一人三兩。三人共得九兩。則得十一兩以合原數也。

設如有銀一百八十七兩。命十八人分之。問每人得若干。

法以十八人分銀一百八十七兩。每人得銀十兩。仍餘七兩。分之不盡。則以十八人爲分母。所餘七兩爲分子。命爲每人得一十兩又十八分兩之七。蓋將每兩剖作十八分。其所餘七兩。則共剖作一百二十六分。十八人分之。每人得七分。故命爲十八分兩之七也。如因十八分兩之七。求知原銀數。則以十八人與分子七分相乘。得一百二十六分。蓋每人得七分。則十八人共得一百二十六分也。以一百二十六分用分母十八分歸之。得七兩。蓋初分一兩爲十八分。故終收十八分爲一兩也。再加入十八人所得整數共一百八十兩一人十兩·十八人共得一百八十兩·則得一百八十七兩。以合原數也。

約分

約分者.以所命之分.約之以就整分也.蓋命分是隨其數之多寡.全而紀之.而約分則即其多寡之數.從而約之.以求簡易焉.其法以分子分母兩數輾轉相減.務期減餘兩數相同.是爲度盡兩數之一數.乃以此數爲一分.以除分母得幾分者.即約分母爲幾分.又除分子得幾分者.即約爲分母幾分中之幾.凡諸法中有帶分者.皆由約法而得.故設例於此.所以明帶分之根也.

設如古曆歲實命爲三百六十五日又一百分日之二十五.今以法約之.求相當最小數.

法置日分一百.以餘分二十五減之.餘七十五分.再以二十五減之.餘五十分.再以二十五減之.亦餘二十五分.兩數齊等.即以相等之數二十五.轉除日分一百得四.即爲四分.又以二十五除餘分二十五得一.即爲一分.乃百分日之二十五約爲四分之一.是歲實共得三百六十五日又四分日之一也.蓋將一日剖作四分.而得其四分之一也. 凡約分法.以分母分子相減.必得相等之數.然後用之.蓋因此數可以度盡分母.又可以度盡分子故也.今以相等之數二十五爲一分.則日分一百有四倍二十五.故爲四分.而餘分二十五.又恰足一分之數.故爲一分.一百與二十五之比.即同於四與一之比.是四與一.即一百與二十五之相當最小數也.凡分母分子輾轉相減.不得相等之數.終減至於一.是分母分子俱無一數可以度盡之數.即不用約分.用命分誌之可也.

設如有銀二百一十兩.命一百四十七人分之.每人得銀一兩.仍餘六十三兩不盡.以法約之.求相當最

小數。

法置一百四十七人。以餘銀六十三減之。餘八十四。再以六十三減之。餘二十一。又置六十三。轉以二十一減之。因減數大於原數。又不得兩數齊等。故以二十一轉減之。餘四十二。再以二十一減之。亦餘二十一。則兩數齊等。即以相等之數二十一。轉除一百四十七人。得七。即爲七分。又以二十一除銀六十三兩。得三。即爲三分。乃一百四十七人分餘銀六十三兩。約爲七分之三。是每人得銀一兩又七分兩之三也。蓋將每兩剖作七分。而得其七分之三也。此法以一百四十七人與六十三兩輾轉相減。得相等之數二十一。是二十一可以度盡一百四十七人。又可以度盡六十三兩故也。既以二十一爲一分。則一百四十七有七倍二十一。故爲七分。六十三有三倍二十一。故爲三分。一百四十七與六十三之比。即同於七與三之比。是七與三即一百四十七與六十三之相當最小數也。

通分

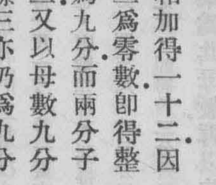
凡奇零數目。不以十遞析者。難以立算。則用通分。如斤通爲兩。宮通爲度。度通爲分之類是也。又有整數而帶零分者。則必通之以從其類。如化整爲零。收零作整之類是也。或有零分而分母不同者。則必通之以同其母。如互乘之類是也。通分之法立。然後奇零數目得以歸。有餘齊不足。而帶分之法皆根於此。故爲另設加減乘除之法以明其義焉。

加法

凡奇零數相加。兩分母同者。即併兩分子爲得數。若相加之數大於母數。則於所得數內減去母數爲一整數。紀其餘爲零數。

設如有九分丈之七。一丈分爲九分。而得其七分也。與九分丈之五。一丈分爲九分。而得其五分也。相加求總數。

法以九分之七與九分之五。左右列之。將兩分子七與五相加得一十二。因子數大於母數。乃於一十二內減去母數九。爲一整數。餘三爲零數。即得整數一丈零九分丈之三。爲相加之數也。此法因兩分母同爲九分。而兩分子亦同爲九分中之零分。故徑併兩零分之七與五得一十二。又以母數九分收爲一丈。蓋初以一丈分爲九分。今滿九分即收爲一丈也。其所餘三亦仍爲九分

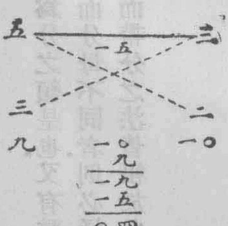


中之三分。故得一丈零九分丈之三。為兩零分之共數。此分母相同之加法也。如以眞數明之。九分丈之七。是將一丈分為九分。得其九分中之七分。一丈分為九分。則每一分得一尺一寸一分一釐有餘。九分中之七分。則為七尺七寸七分七釐有餘也。九分中之五分。則為五尺五寸五分五釐有餘也。兩數相加。共得一丈三尺三寸三分三釐有餘。卽一丈零九分丈之三也。蓋一尺一寸一分一釐有餘。既為九分中之一分。則三尺三寸三分三釐有餘。卽九分中之三分也。如以九分除三分。卽得三尺三寸三分三釐不盡之數。是九分與一丈之比。卽同於三分與三尺三寸三分有餘之比也。

凡奇零數相加。兩分母不同者。則用互乘法。以兩分母相乘為共母數。再以前分母乘後分子。又以後分母乘前分子。以所得兩子數相加為共子數。紀於共母數之下。為共零數。

設如有三分丈之二一丈分為三分。而得其二分也。與五分丈之三二丈分為五分。而得其三分也。相加。求總數。

法以兩分母三五相乘。得一十五。為共母數。再以前分母三乘後分子三。得九。又以後分母五乘前分子二。得十。將兩得數相加。得十九。為共子數。因子數大於母數。乃於十九內減去共母數十五。為一整數。餘四為零數。卽得整數一丈零十五分丈之四。為相加之數也。此法用互乘者。本為齊其分母也。夫以兩分母相乘得十五者。乃以兩分母俱變為十五分也。因分母不同。難以相加。故變為同等。以前分母三乘後分子三得九者。乃以後分子變為十五分中之九也。又以後分母五乘前分子二得十者。是又以前分子亦變為十



五分中之十也蓋十五分之十與三分之二其比例等。俱為五倍比例。而十五分之九與五分之三其比例亦等。俱為三倍比例。兩分母既變為同等則兩分子亦俱為同分母之子矣故相加如第一法此分母不同之加法也。如以眞數明之。三分丈之二。既變為十五分丈之十。則每一分為六寸六分六釐有餘。今得十分。卽六尺六寸六分六釐有餘也。又五分丈之三。既變為十五分丈之九。則每一分亦為六寸六分六釐有餘。今得九分。卽六尺也。兩數相加。共得一丈二尺六寸六分六釐有餘。卽一丈零十五分丈之四也。蓋六寸六分六釐有餘。卽為十五分中之一分。今二尺六寸六分六釐有餘。為四倍六寸六分六釐有餘。卽十五分中之四分也。如以十五分除四分。卽得二尺六寸六分不盡之數。是十五分與一丈之比。卽同於四分與二尺六寸六分有餘之比也。

又或分母不同而可以加減之使同者則變而同之可省互乘。

設如有八分兩之一與十二分兩之三相加求總數。

法以十二分之三變為八分之二則與八分之一兩分母相同故徑併兩分子二與一得三卽八分兩之三為相加之數也此法將十二分之三變為八分之二者乃分母分子各減三分之一也母數十二減三分之一餘八子數三減三分之一餘二蓋十二分之三與八分之二其比例相等故變從簡易如數有參差者則當用下節之法。如以眞數明之。八兩分之一。是將一兩分為八分。其一分卽一錢二分五釐也。又十二分兩之三。是將一兩分為十二分。其三分為二錢五分。今變為八分兩之二。是將一兩分為八分。其二分亦為二錢五分也。兩數相加。

八		八
	二一	
	三	
一		二

共得三錢七分五釐・卽八分兩之三也・葢一錢二分五釐・爲八分中之一分・今三錢七分五釐・卽八分中之三分也・如以八分除三分・卽得三錢七分五釐・是八分與一兩之比・卽同於三分與三錢七分五釐之比也・

設如有六分石之五與三分石之二相加求總數・

如依前法將六分之五折半爲三分之二分半・則兩分母雖同而分子卻有奇零・若將三分之二加一倍作六分之四・變少從多・則與六分之五兩分母相同・乃徑併兩分子五與四得九・因子數大於母數・乃於九內減去母數六爲一整數・餘三爲零數・卽得整數一石零六分石之三・爲相加之數也・此法三分之二變爲六分之四者・乃分母分子各加一倍之比例也・凡變分母分子・或加或減・務期所變之分數與原分數比例相同・使其兩分母同而兩分子可併也・此條與上條用加減雖各異・而齊其分母以加之則同也・如以眞數明之・六分石之五・是將一石分爲六分・則每一分得一斗六升六合六勺六抄六撮有餘・今得五分・卽八斗三升三合三勺三抄三撮有餘也・又三分石之二・是將一石分爲三分・其二分爲六斗六升六合六勺六抄六撮有餘・今變爲六分石之四・是將一石分爲六分・其四分亦爲六斗六升六合六勺六抄六撮有餘也・兩數相加共得一石四斗九升九合九勺九抄九撮有餘・收爲五斗卽一石零六分石之三也・葢六分爲一石・則三分卽五斗也・

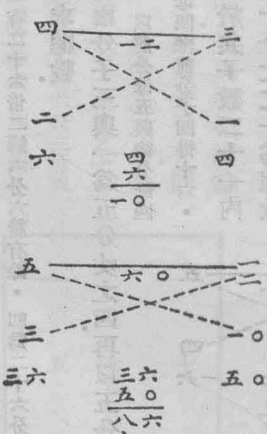
六	四五	六
四	九六	五
	三	

凡子母數有三四種相加者・其分母分子俱不同・則用互乘以齊其分母・按前法加之・三種者・以第一數與第二數依前互乘法相加得數・又與第三數依前互乘法相加・四種者・以第一數第二數互乘相加得數・與第三數互乘相加

得數。復與第四數互乘相加。如兩分母相同者卽併其兩分子而與所餘之分母不同者用互乘以加之又或有兩分母相乘後所得之數與所餘之分母相同者則直以所得之分子與所餘之分子相加爲得數。卽不用互乘矣。

設如有三分斤之一。又四分斤之二。又五分斤之三。相加求總數。

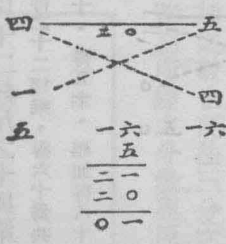
法以前兩分子分母按互乘法相加得十二分斤之十。以兩分母三與四相乘得十二爲共母數。以前分母三乘後分子二得六。又以後分母四乘前分子一得四。相加得一十爲共子數。是爲十二分斤之十。乃以十二分斤之十與第三子母分用互乘法相加得六十分斤之八十六。以第三分母五。與前兩分母互乘所得之十二相乘。得六十爲共母數。以前兩分母所得十二。乘第三分子三。得三十六。又以第三分母五。乘前兩分子所得十。得五十。相加得八十六。爲共子數。是爲六十分斤之八十六。因子數大於母數。乃於共子數八十六內減去共母數六十爲一整數餘二十六爲零數卽得一斤零六十分斤之二十六爲總數也。凡子母分有四種五種相加者俱倣此。如以眞數明之。三分斤之一。是將一斤分爲三分。其一分卽五兩三錢三分三釐有餘也。四分斤之二。是將一斤分爲四分。則每一分爲四兩。今得二分。卽八兩也。五分斤之三。是將一斤分爲五分。則每一分爲三兩二錢。今得三分。卽九兩六錢也。三數相加。共



得二十二兩九錢三分三釐有餘・內收十六兩爲一斤・餘六兩九錢三分三釐有餘・即六十分斤之二十六也・葢以十六兩分爲六十分・每分得二錢六分六釐有餘・今六兩九錢三分三釐有餘・有二十六倍二錢六分六釐有餘・即爲二十六分也・

設如有五分丈之三又四分丈之一又五分丈之一相加求總數。

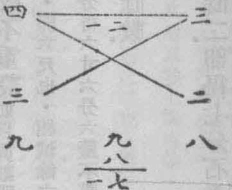
法因五分丈之三與五分丈之一兩分母相同故直併其兩分子三與一爲五分丈之四再以五分丈之四與四分丈之一依互乘法相加得二十分丈之二十一　以前分母五與後分母四相乘・得二十爲共母數・以前分母五乘後分子一得五・又以後分母四乘前分子四得十六・相加得二十一・是爲二十分丈之二十一・　因子數大於母數乃於共子數二十一內減去共母數二十爲一整數餘一爲零數即得一丈零二十分丈之一爲總數也如以眞數明之・其五分丈之三・即六尺也・其四分丈之一・即二尺五寸也・其五分丈之一・即二尺也・三數相加得一丈零五寸・即一丈零二十分丈之一・葢一丈分爲二十分・每分得五寸也・



設如有三分兩之二又四分兩之三又十二分兩之四相加求總數。

法以三分之二與四分之三用互乘法相加得十二分兩之十七　以前分母三與後分母四相乘・得十二爲共母數・以前分母三乘後分子三得九・又以後分母四乘前分子二得八・相加得十七・是爲十二分兩之十七・此所得之十二分兩之十七與第三分母相同即以前兩分所得共子十七與後一分子四相加得二十一是爲十二分兩之二十一因子數大於母數乃於共子數二十一內減去共母數十二爲一整數餘九爲零數即得

一兩零十二分兩之九爲總數也．如以眞數明之．其三分兩之二．卽六錢六分六釐有餘也．其四分兩之三．卽七錢五分也．其十二分兩之四．卽三錢三分三釐有餘也．三數相加得一兩七錢四分九釐有餘．收作七錢五分．卽一兩零十二分兩之九．蓋十二分兩之九．卽七錢五分也．



減法

凡奇零數相減兩分母同者．卽將兩分子相減爲餘數．

設如有十一分丈之七．減十一分丈之五．求餘數．

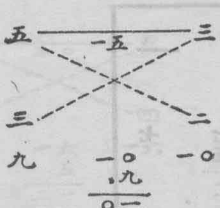
法以十一分丈之七與十一分丈之五．左右列之．將兩分子五與七相減餘二．卽得十一分丈之二爲餘數也．蓋因兩分母同爲十一分．則兩分子亦同爲十一分中之零分．故徑將兩分子相減餘二．亦仍爲十一分中之二分．是以定爲十一分丈之二．此分母相同之減法也．如以眞數明之．十一分丈之七．是將一丈分爲十一分．則每一分得九寸零九釐零九絲有餘．其中之七分．卽六尺三寸六分三釐六豪三絲有餘也．其中之五分．卽四尺五寸四分五釐四豪五絲有餘也．相減餘一尺八寸一分八釐一豪八絲有餘．卽十一分中之二分也．蓋九寸零九釐零九絲有餘爲一

分。則一尺八寸一分八釐一毫八絲有餘卽爲二分也。如以十一分除二分。亦得一尺八寸一分八釐一毫八絲不盡之數。是十一分與一丈之比。卽同於二分與一尺八寸一分八釐一毫八絲有餘之比也。

凡奇零數相減兩分母不同者。則用互乘法以兩分母相乘爲共母數。再以前分母乘後分子。又以後分母乘前分子。以所得兩子數相減爲餘數。

設如有三分丈之二。減五分丈之三。求餘數。

法以兩分母三五相乘得一十五。爲共母數。再以前分母三乘後分子三。得九。又以後分母五乘前分子二。得一十。將所得兩分子相減餘一。卽得十五分丈之一爲餘數也。此法用互乘齊其分母。將三分丈之二變爲十五分丈之十。將五分丈之三變爲十五分丈之九。兩分母旣同爲十五分。故兩分子十與九相減餘一。爲十五分丈之一也。此分母不同之減法也。如兩分母不同。可以加減之使其相同者。減之亦如加法中例。故不重設。如以眞數明之。其三分丈之二。卽六尺六寸六分六釐有餘也。其五分丈之三。卽六尺也。相減餘六寸六分六釐有餘。卽十五分丈之一也。蓋一丈分爲十五分。每一分得六寸六分六釐不盡也。



凡零數與整數相減者。卽以分子與分母相減爲餘數。

設如有米一石。內減七分石之五。求餘數。

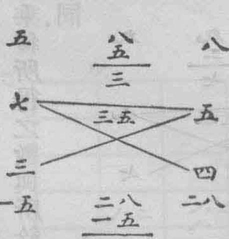
法以整數一石變爲七分爲分母。與分子五相減餘二。卽得七分石之二爲

餘數也。蓋將一石分爲七分。而於此七分內減去五分。則所餘卽七分石之二。此整數中減零數法也。如
以眞數明之。將一石分爲七分。則每一分得一斗四升二合八勺五抄七撮有餘。其五分卽七斗一升四合二勺八抄五撮有餘
也。與一石相減。餘二斗八升五合七勺一抄四撮有餘。卽七分石之二也。蓋一斗四升二合八勺五抄七撮有餘爲一分。則
二斗八升五合七勺一抄四撮有餘自爲二分也。

凡整數帶零分相減者。將兩零分用互乘法變爲同母。然後減之。

設如有銀八兩零五分兩之四。內減五兩零七分兩之三。求餘數。

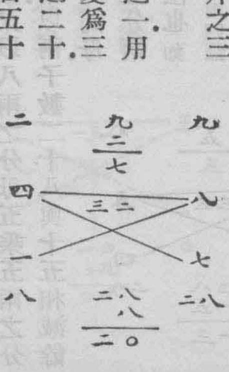
法以八兩之零數五分之四與五兩之零數七分之三。用互乘法兩分母七五相乘得三十五爲共母數。再以五兩之分母七乘八兩之分子四得二十八。爲八兩所變之子數。又以八兩之分母五乘五兩之分子三得十五。爲五兩所變之子數。乃以八兩五兩二整數相減餘三兩。以兩子數二十八與十五相減餘十三。卽得三兩又三十五分兩之十三爲餘數也。蓋旣將兩子數變爲同母。則八兩者爲八兩零三十五分兩之二十八。五兩者爲五兩零三十五分兩之十五。分母旣同。故以子數相減而得餘數。此整數帶零分相減之法也。如
以眞數明之。其八兩零五分兩之四。卽八兩八錢也。其五兩零七分兩之三。卽五兩四錢
二分八釐五毫七絲有餘也。相減餘三兩三錢七分一釐四毫二絲有餘。其三兩爲整數。其
三錢七分一釐四毫二絲有餘。卽三十五分中之六三分也。蓋將一兩分爲三十五分。則每
一分得二分八釐五毫七絲有餘。其十三分卽三錢七分一釐四毫二絲有餘也。

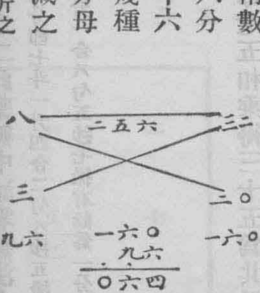


凡子母數三四種相減者。其分母分子俱不同。則用互乘以齊其分母。按前法減之。如兩分母相同者。卽將其兩分子相減而與所餘之分母不同者。用互乘以減之。又或有兩分母相乘後所得之數與所餘之分母相同者。則直以所得之分子與所餘之分子相減。卽得餘數。其理與加法同。

設如有銅九斤零八分斤之七。內減二斤零四分斤之一。又減八分斤之三。求餘數。

法以九斤內減去二斤餘七斤為整數。乃以八分斤之七與四分斤之一。用互乘法。將八分斤之七。變為三十二分斤之二十八。將四分斤之一。變為三十二分斤之八。兩數相減。餘三十二分斤之二十。又以三十二分斤之二十。與第三零數八分斤之三。用互乘法。將三十二分斤之二十。變為二百五十六分斤之一百六十。將八分斤之三。變為二百五十六分斤之九十六。兩數相減。餘二百五十六分斤之六十四。合前整數共得七斤又二百五十六分斤之六十四。為餘數也。如用約法。則為七斤零四分斤之一。蓋二百五十六為四倍六十四。今以六十四為一分。則二百五十六自得四分也。其餘幾種零分內有兩分母相同。或兩分母乘出之數與餘一分母相同。俱照同分母之例減之。故不再設。或零分有四種五種者。亦俱倣此。此幾種零分相減之法也。如以眞數明之・其九斤零八分斤之七・卽九斤十四兩也・內減二斤零四分斤之





一・是減去二斤四兩・又減去八分斤之三・是又減去六兩也・餘七斤零四兩・卽七斤零四分斤之一也・蓋一斤分爲四分・則每一分得四兩・今七斤零四兩・故謂七斤零四分斤之一也・

乘法

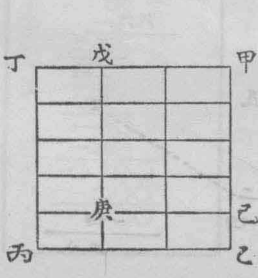
零分與零分相乘者・兩分母兩分子各相乘・所得之數卽乘出之分也・

設如有三分丈之二與五分丈之四相乘・問得幾何

法以兩分母三五相乘得十五分・爲乘出之分母・又以兩分子二四相乘得八分・爲乘出之分子・卽定爲十五分丈之八・爲所得之數也・今以圖明之・如甲乙爲一丈・而甲丁亦爲一丈・作一甲乙丙丁正方形・將甲丁分爲三分・甲乙分爲五分・內共容十五分・卽共母數・乃兩分母三與五乘出之數也・其甲丁之三分之二爲甲戊・甲乙之五分之四爲甲己・二數相乘・得甲己庚戊長方形・內容八分・卽共子數・乃兩分子二與四乘出之數也・甲乙丙丁正方與甲己庚戊長方相較・卽知甲己庚戊長方爲甲乙丙丁正方中之十五分之八矣・此零分乘零分之法也・如以眞數明之・其三分丈之二・卽六尺六寸六分六釐有餘也・其五分丈之四・卽八尺也・相乘得五十三尺三十三寸三十三分三十三釐有餘・卽十五分丈之八也・蓋一丈正方・內容百尺・分爲十五分・則每一分得六尺六十六寸六十六分六十六

三——五
一五

二——四
八

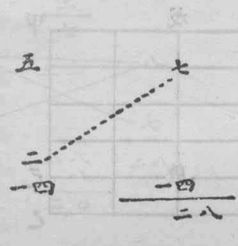


釐有餘．今得其八分．卽五十三尺三十三寸三十三分三十三釐有餘也．

零分與整數相乘者分子乘整數而以分母歸之卽所得之數也．

設如有七人每人賞銀五分兩之二．問共得若干．

法以分子二與七人相乘得十四．以分母五歸之得二兩八錢．卽七人共得之數也．蓋五分兩之二．是一兩分爲五分而得其二分也．一人得二分．則七人必共得十四分．旣以一兩分爲五分．今滿五分收爲一兩．故以五歸十四得二兩八錢爲共數．此零分與整數相乘之法也．

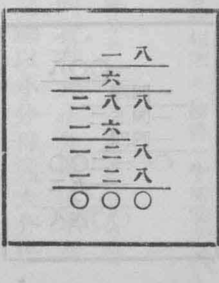


整數帶零分與整數乘者．先將整數俱通爲零分相乘得數．以分母自乘之數除之卽得．

設如有整數二丈又四分丈之一．與八丈相乘．問得幾何．

法以整數二丈用分母四通爲八分．加入分子一．共得九分．又以整數八丈用分母四通爲三十二分．乃與九分相乘得二百八十八分．以分母四自乘之一十六除之．得一十八．卽定爲一丈正方一十八爲所得之數也．此法蓋以一丈

通為四分。是四四自乘之數。始合一丈自乘之數。故一十六者。卽分母四自乘之數。未乘之先。既以四通之。故相乘之後。必以四四自乘之數收之。乃得眞數。此整數帶零分與整數相乘之法也。如以眞數明之。其二丈又四分丈之一。卽二丈二尺五寸。與八丈相乘。卽得一十八丈也。



整數帶零分與零分乘者。先將整數通為零分。相乘得數。以分母自乘之數除之卽得。

設如有整數二丈又五分丈之四。與零分五分丈之三相乘。問得幾何。

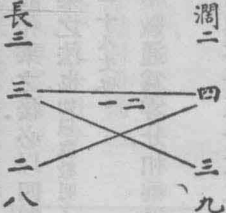
法以整數二丈用分母五通為十分。加入分子四得十四分。乃與零分分子三相乘得四十二。以分母五自乘之二十五除之。得一六八。卽定為一丈正方一又一尺正方六十八。為所得之數也。此法蓋以一丈通為五分。是五五自乘之數。始合一丈自乘之數。故以二十五除之。又二丈之零分五分之四。與所乘之零分五分之三。為同母。故用此法。如兩零分分母不同。則先將兩零分用互乘法變為同母。然後用所變之分母化

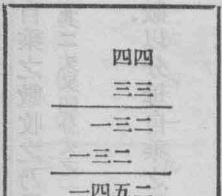
整爲零再與彼一零分相乘得數以所變之分母自乘之數除之即得乘出之數法見下節此整數帶零分與零分相乘之法也如以眞數明之其二丈又五分丈之四即二丈八尺也其五分丈之三即六尺也以六尺與二丈八尺相乘即得一丈六十八尺也

整數帶零分與整數帶零分相乘而零分之分母不同者則以兩零分之分母用互乘法齊其數然後各以相同之分母化整爲零兩數相乘再以同母自乘之數除之即得如所帶零分本爲同母者可省互乘

設如有長方田闊二丈又四分丈之三長三丈又三分丈之二求積

法以兩分母四三相乘得一十二爲共母數以前分母四乘後分子二得八以後分母三乘前分子三得九爲兩分子數乃以共母數十二化闊二丈爲二十四分加入分子九得三十三分爲闊邊所變之分數又以共母數十二化長三丈爲三十六分加入分子八得四十四分爲長邊所變之分數爰以闊三十三分與長四十四分相乘得一千四百五十二乃以共母數十二自乘之一百四十四除之得一○○八餘四八不盡即定爲一丈正方十一尺正方八零一百四十四分尺之四十八約爲三分尺之一爲所得之數也此整



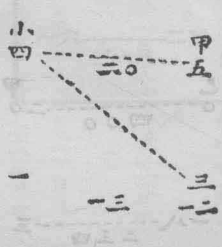


數帶零分與整數帶零分相乘之法也。如以眞數明之。其闊二丈又四分丈之三。即二丈七尺五寸也。其長三丈又三分丈之二。即三丈六尺六寸六分六釐有餘也。以二丈七尺五寸與三丈六尺六寸六分六釐有餘相乘。即得一十丈零八尺有餘也。

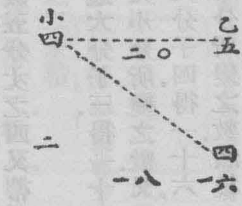
大分下又帶小分相乘者其例有四。所謂大分下帶小分者。是將大分之一分。又分爲幾分。如大分五分之三。又帶小分四分之一。是將大分五分之三之一分。又分爲四分而得其一分也。有大小分母俱同者有大小分母俱不同者。有大分母同而小分母不同者。有大分母不同而小分母同者今以一法馭之總以小分母通大分母爲母數又以小分母通大分子。加入小分子爲子數然後以所變之兩母數兩子數對乘即得。總以小分母通之者。蓋小分母又爲大分母之每一分之幾分。小分不能使大大分可以變小。使大分母大分子俱變爲小分母一體。然後可以相乘。乘之即所以通之也。設法中以度數明之。其理自顯。

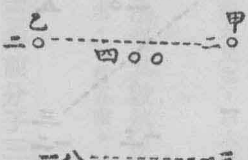
設如有甲數五分丈之三又帶此一分之四分之一與乙數五分丈之四又帶此一分之四分之二相乘問得幾何。此大小分母俱同者也。

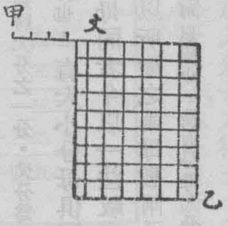
法以甲數小分母四通大分母五得二十仍以小分母四通大分子三得一十二再加入小分子一得一十三共得二十分之十三爲甲大小分所變之數又以乙數小分母四通大分母五得二十仍以小分母四通大分子四得一十六再加入小分子二得一十八共得二十分之十八爲乙大小分所變之數然後以甲所變之分母二十與乙所變之分母二十相乘得四百分爲乘出之分母

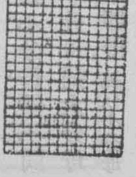


又以甲所變之分子十三與乙所變之分子十八相乘得二百三十四分爲乘出之分子卽定爲四百分丈之二百三十四爲所得之數也此法甲乙之小分母俱爲四故將其大分母之每分亦俱化爲四分又將大分子之每分亦俱化爲四分使大分與小分之子母一體然後乘之今以度數明之甲之五分丈之三乃一丈內之六尺其所帶小分之四分之一乃二尺內之五寸是甲數共爲六尺五寸乙之五分丈之四乃一丈內之八尺其所帶小分之四分之二乃二尺內之一尺是乙數共爲九尺六尺五寸與九尺相乘得五十八尺五十寸是一丈正方爲一百尺而得其五十八尺又小餘五十寸也若以分母四乘一百尺得四百分又乘得數五十八尺五十寸得二百三十四分故爲四百分之二百三十四也若以尺隨寸命之則五十八尺五十寸又爲五千八百五十寸以大分每一分通爲小分四分則每一千寸分爲四分每分得二百五十寸以二百五十寸歸五千八百五十寸得二十三寸四十分乃四十分中之二十三又小零分之四分進而命爲丈則爲四百分丈之二百三十四也



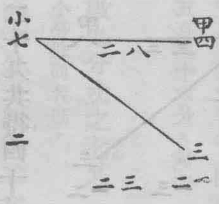


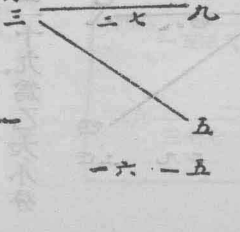


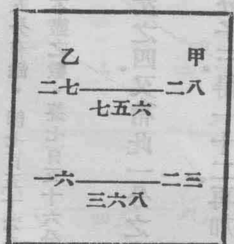


設如有甲數四分丈之三又帶此一分之七分之二與乙數九分丈之五又帶此一分之三分之一相乘．問得幾何　此大小分母俱不同者也．

法以甲數小分母七通大分母四得二十八．仍以小分母七通大分子三得二十一．再加入小分子二得二十三．共得二十八分之二十三．爲甲大小分所變之數．又以乙數小分母三通大分母九得二十七．仍以小分母三通大分子五得一十五．再加入小分子一．得一十六．共得二十七分之一十六．爲乙大小分所變之數．然後以甲所變之分母二十八與乙所變之分母二十七相乘得七百五十六分．爲乘出之分母．又以甲所變之分子二十三與乙所變之分子一十六相乘．得三百六十八分．爲乘出之分子．即定爲七百五十六分丈之三百六十八．爲所得之數也．如以眞數明之．甲四分丈之三．即一丈內之七尺五寸．又帶小分七分之二．即二尺五寸內之七寸一分四釐二豪有餘．是甲數共爲八尺二寸一分四釐二豪有餘．乙九分丈之五．即一



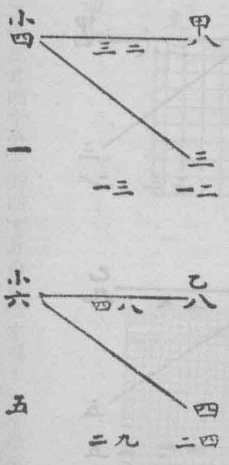




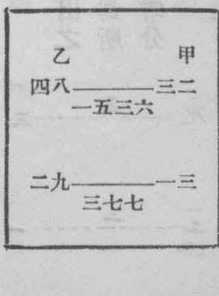
丈內之五尺五寸五分五釐五豪有餘．又帶小分三分之一．卽一尺一寸一分一釐一豪有餘內之三寸七分零三豪有餘．是乙共爲五尺九寸二分五釐九豪有餘也．兩數相乘．得四十八尺六十七寸六十五分有餘．卽七百五十六分丈之三百六十八也．如以七百五十六分．除三百六十八分．亦得四十八尺六十七寸六十五分不盡之數．蓋七百五十六分．爲一百尺．則三百六十八分．自得四十八尺六十七寸六十五分有餘也．

設如有甲數八分丈之三又帶此一分之四分之一．與乙數八分丈之四又帶此一分之六分之五相乘．問得幾何．此大分母同．而小分母不同者也．

法以甲數小分母四通大分母八得三十二．仍以小分母四通大分子三得一十二．再加入小分子一．得一十三．共得三十二分之一十三．爲甲大小分所變之數．又以乙數小分母六通大分母八得四十八．仍以小分母六通大分子四得二十四．再加入小分子五得二十九．共得四十八分之二十九．爲乙大小分所變之數．然後以甲所變之分母三十二．與乙所變之分母四十八相乘．得一千五百三十六分．爲乘出之分母．又以甲所變之分子十三．與乙所變之分子二十九相乘．得三百七十七分．爲乘出之分子．卽定爲一千五百三十六分丈之三百七十七．爲所得之數也．如以眞數明之．甲八分丈之三．卽三尺七寸五分．又帶此一分之四分之一．卽三寸一分二釐五豪．是甲數共爲四

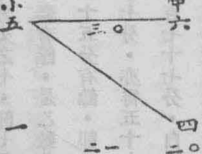


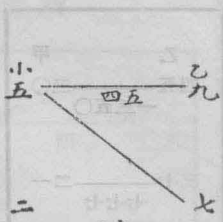
尺零六分二釐五豪也・乙八分丈之四・卽五尺・又帶此一分之六分之五・卽一尺零四分一釐六豪有餘・是乙數共爲六尺零四分一釐六豪有餘也・兩數相乘・得二十四尺五十四寸四十二分有餘・卽一千五百三十六分丈之三百七十七也・如以一千五百三十六分・除三百七十七分・亦得二十四尺五十四寸四十二分不盡之數・蓋一千五百三十六分・爲一百尺・則三百七十七分・自得二十四尺五十四寸四十二分有餘也・



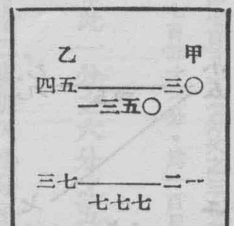
設如有甲數六分丈之四・又帶此一分之五分之一・與乙數九分丈之七・又帶此一分之五分之二相乘・問得幾何此大分母不同・而小分母同者也・

法以甲數小分母五通大分母六得三十・仍以小分母五通大分子四得二十・再加入小分子一得二十一・共得三十分丈之二十一・爲甲大小分所變之數・又以乙數小分母五通大分母九得四十五・仍以小分母五・通大分子七得三十五・再加入小分子二得三十七・共得四十五分之三十七・爲乙大小分所變之數・然後以甲所變之分母三十・與乙所變之分母四十五相乘・得一千三百五十分・爲乘出之分母・又以甲所變之分子二十一・與乙所變之分子三十七相乘・得七百七十七分・爲乘出之分子・卽定爲一千三百五十分之七百七十七・爲所得之數也・如以眞數





明之．甲六分丈之四．卽六尺六寸六分六釐六豪有餘．又帶此一分之五分之一．卽三寸三分三釐三豪有餘．是甲數共爲六尺九寸九分九釐九豪有餘也．乙九分丈之七．卽七尺七寸七分七釐七豪有餘．又帶此一分之五分之二．卽四寸四分四釐四豪有餘．是乙數共爲八尺二寸二分二釐二豪有餘也．兩數相乘．得五十七尺五十五寸五十五分有餘．卽一千三百五十分丈之七百七十七也．如以一千三百五十分．除七百七十七分．亦得五十七尺五十五寸五十五分不盡之數．蓋一千三百五十分．爲一百尺．則七百七十七分．自得五十七尺五十五寸五十五分有餘也．



除法

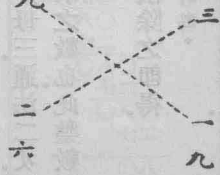
零分歸除零分者．兩分母兩分子各自除之．所得之數卽除出之分也．如有奇零不盡者．用互乘法齊之．卽得分數．其比例與除出之法同．

設如有九分丈之二．以三分丈之一除之．求得幾何．

法以九分丈之二爲實．三分丈之一爲法．以法分母三除實分母九．得三爲除出之分母．又以法分子一除實分子二．仍得二．爲除出之分子．卽定爲三分丈之二爲所得之數也．此法卽乘法內兩分母兩分子各相乘爲所得之數者．轉用之耳．此零分除零分之法也．

又法以互乘代除．以實分母九乘法分子一．得九．爲除出之分母．又以法分母三乘

實分子二得六。爲除出之分子。共得九分丈之六。卽所求之數也。此法與前法所得之分母分子之數雖不同。而理則一。前法之三分之二與此法之九分之六。其比例實同。蓋前法以法除實。其得數爲減分之比例。此法以兩數互乘其得數爲加分之比例。故九分之六。卽三分之二也。但法中不用兩分母相乘之數。省去一層耳。如欲明晰其故。則以兩分母九與三相乘得二十七。法分母三與實分子二相乘得六。實分母九與法分子一相乘得九。是將三分之一變爲二十七分之九。將九分之二。變爲二十七分之六。其兩分母既等。則其兩分子自成比例。故九與六之比。卽同於三與二之比。九分之六。以三約之。非三分之二耶。



如以眞數明之。實九分丈之二爲面積。卽二十二尺二十二寸二十二分二十二釐有餘也。法三分丈之一爲邊線。卽三尺三寸三分三釐有餘也。除之得六尺六寸六分六釐有餘。卽三分丈之二也。如以三分除二分。亦得六尺六寸六分六釐不盡之數。蓋三分爲一丈。其二分自得六尺六寸六分六釐有餘也。

整數歸除零分者。分母通整數。以除分子。卽得所求之數。

設如有五分丈之三。以八丈除之。求得幾何。

法以分子三爲實。以分母五通整數八丈。得四十爲法。除之得七寸五分。卽所求之數也。此法以五分乘八丈者。是分母通整數。將每丈俱通爲五分也。八丈旣通爲四十分。則五分之三之每一分。卽與四十分中之每一分同等。然而零

數三分。以四十分除之。而得七寸五分者。則又爲變分爲尺寸之比例矣。四十分與一丈之比。卽同於三分與七寸五分之比。此整數除零分之法也。

零分歸除整數者。分母通整數。而以分子除之。卽得所求之數。

設如有六丈。以三分丈之二除之。求得幾何。

法以分母三。通整數六丈。得一十八爲實。以分子二爲法除之。得九丈。卽所求之數也。此法以三分乘六丈者。是將每丈俱通爲三分也。六丈旣通爲十八分。則十八分中之每一分。與三分之二之每一分同等。故以分子二除十八。得九丈。此零分除整數之法也。

整數帶零分歸除整數者。先將法實之兩整數。俱通爲零分。而於法中加入分子除之。卽得。

設如有二十四丈。以二丈零三分丈之二除之。求得幾何。

法以分母三。通二十四丈。得七十二爲實。又以分母三。通二丈得六。加入分子二得八爲法除之。得九丈。卽所求之數也。此法以分母三。通實二十四丈。是將實之每丈俱化爲三分也。又以分母三。通法二丈。是將法之每丈亦俱化爲三分也。兩整數俱化爲同等。則法實一體。故法除實而得所求之數也。此整數帶零分除整數之法也。

整數歸除整數帶零分者。先將法實之兩整數。俱通爲零分。而於實中加入分子。以法除之。卽得。

設如有二丈零三分丈之二。以二十四丈除之。求得幾何。卽以前法數目作題者。取其易明也。

法以分母三。通二丈得六。加入分子二。得八爲實。又以分母三。通二十四丈得七十二爲法除之。得一尺

一寸一分不盡。約爲九分丈之一。卽所求之數也。此法以分母三通法實之兩整數者。是將兩整數之每丈俱通爲三分也。一得七十二分。一得八分。以七十二與八之比。卽同於九與一之比。故約爲九分之一。且以七十二除八。得一一一不盡之數。定爲一尺一寸一分有餘者。葢七十二分與一丈之比。卽同於八分與一尺一寸一分有餘之比也。此整數除整數帶零分之法也。

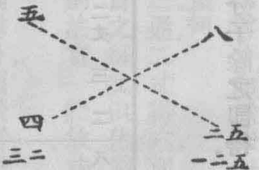
整數帶零分歸除零分者。先將整數通爲零分。加入分子除之卽得。

設如有五分丈之四。以三丈零八分丈之一除之。求得幾何。

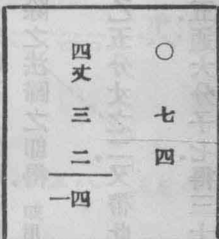
法以五分丈之四爲實。以法之分母八通三丈得二十四。加入分子一。得二十五。共得八分丈之二十五爲法。用兩分母兩分子各自歸除之法。以法分母八。除實分母五。得六二五。爲除出之分母。以法分子二五。除實分子四。得一六〇。爲除出之分子。乃以所得之分母除所得之分子。得二尺五寸六分。卽所求之數也。葢法之三丈又八分丈之一。乃三丈一尺二寸五分也。實之五分丈之四。乃八尺也。以三丈一尺二寸五分。歸除八尺。每丈得二尺五寸六分。是三丈一

尺二寸五分與一丈之比．卽同於八尺與二尺五寸六分之比也．今以分母六二五．除分子一六〇．亦得二尺五寸六分．是六二五與一丈之比．卽同於一六〇與二尺五寸六分之比也．然六二五與三丈一尺二寸五分之比．又卽同於一六〇與八尺之比．而皆爲加倍之比例也．此整數帶零分除零分之法也．又或整數通爲零分加入分子之後．以法除實而數有奇零不盡者．則用互乘代除之法．如前數已將整數通爲八分丈之二十五爲法．乃以實分母五．乘法分子二十五．得一百二十五．爲除出之分母．又以法分母八．乘實分子四．得三十二．爲除出之分子．乃以所得之分母．除所得之分子．亦得二尺五寸六分．蓋一百二十五分與一丈之比．卽同於三十二分與二尺五寸六分之比也．後法之有奇零數而用互乘代除者．皆同此例．

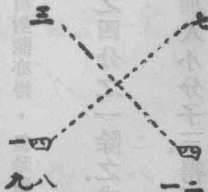
零分歸除整數帶零分者．先將整數通爲零分．加入分子．以法除之卽得．

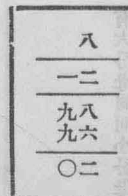


設如有四丈又三分丈之二。以七分丈之四除之。求得幾何。



法以實之分母三通四丈。得十二。加入分子二。得十四。共得三分丈之十四爲實。以七分丈之四爲法。用互乘代除之法。以實分母三。乘法分子四。得十二。爲除出之分母。以法分母七。乘實分子一十四。得九十八。爲除出之分子。乃以所得之分母除所得之分子。得八尺。仍餘二不盡。命爲十二分尺之二。以法約之。爲六分尺之一。共得八尺零六分尺之一。卽所求之數也。葢十二與一尺之比。卽同於九十八與八尺有餘之比也。此零分除整數帶零分之法也。



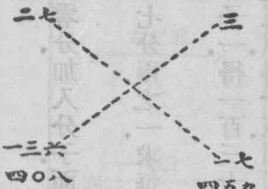


整數帶零分歸除整數帶零分者。先各以整數通爲零分。加入分子。而以法除實卽得。

設如有田五畝又三分畝之二。共租銀五兩又二十七分兩之一。求每畝得租銀幾何。

法以銀分母二十七。通五兩。得一百三十五。加入分子一。得一百三十六。共得二十七分兩之一百三十六爲實。又以田分母三。通五畝。得十五。加入分子二。

得十七。共得三分畝之十七為法。用互乘代除之法。以銀分母二十七。乘田分子一十七。得四百五十九。為除出之分母。以田分母三。乘銀分子一百三十六。得四百零八。為除出之分子。乃以所得之分母。除所得之分子。得八錢八分八釐零四百五十九分釐之四百零八。即每畝所租之銀數也。蓋四五九與一兩之比。即同於四○八與八錢八分八釐有餘之比也。此整數帶零分除整數帶零分之法也。

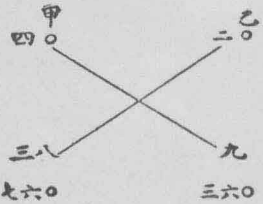


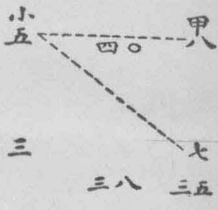
大零分下又帶小零分相除者。其例有四。有大小分母俱同者。有大小分母俱不同者。有大分母同而小分母不同者。有大分母不同而小分母同者。今以一法馭之。總以小分母通大分母為母數。又以小分母通大分子加入小分子為子數。然後以所變之子母數用互乘代除之法歸之即得。如用子母各自對除亦得。但恐數有奇零。故用此法。

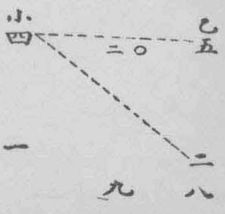
設如有甲八分丈之七。又帶此一分之五分之三。以乙五分丈之二。又帶此一分之四分之一除之。求得之幾何。

法以甲小分母五。通大分母八。得四十。仍以小分母五。通大分子七。得三十五。再加入小分子三。得三十

八。共得四十分丈之三十八。為甲大小分所變之數。以之為實。又以乙小分母四。通大分母五。得二十。仍以小分母四。通大分子二。得八。再加入小分子一。得九。共得二十分丈之九。為乙大小分所變之數。以之為法。然後用互乘代除之法。以甲所變之分母四十。乘乙所變之分子九。得三百六十。為除出之分母。又以乙所變之分母二十。乘甲所變之分子三十八。得七百六十。為除出之分子。乃以所得之分母三百六十。除所得之分子七百六十。得二尺一寸一分一釐零三百六十分釐之四十。約為九分釐之一。即所求之數也。蓋三六〇與一尺之比。即同於七六〇與二尺一寸一分一釐有餘之比也。此大零分下帶小零分相除之法也。其分母分子俱同。及分母同而分子不同。分母不同而







分子同者。皆用此例。故不重設。