Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 12

Übungsaufgaben

Aufgabe 12.1. Zeige, dass eine lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto ax,$$

stetig ist.

Aufgabe 12.2. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) f ist stetig in a.
(2) Zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}_+$ derart, dass aus

$$|x - a| \leq \frac{1}{m}$$

die Abschätzung

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{n}$$

folgt.
(3) Zu jedem $s \in \mathbb{N}$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ derart, dass aus

$$|x - a| \leq \frac{1}{10^r}$$

die Abschätzung

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{10^s}$$

folgt.

Aufgabe 12.3. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

stetig ist.

AUFGABE 12.4. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

stetig ist.

AUFGABE 12.5. Bauer Ernst möchte ein quadratisches Melonenfeld anlegen. Das Feld sollte 100 Quadratmeter groß sein, er findet aber jede Größe zwischen 99 und 101 Quadratmetern noch akzeptabel. Welcher Fehler ist ungefähr für die Seitenlänge erlaubt, damit das entstehende Quadrat innerhalb der vorgegebenen Toleranz liegt?

AUFGABE 12.6.*

Es sei

$$f(x) = 2x^3 - 4x + 5.$$

Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Beziehung gilt: Wenn

$$|x - 3| \leq \frac{1}{800},$$

dann ist

$$|f(x) - f(3)| \leq \frac{1}{10}.$$

AUFGABE 12.7. Bestimme für die Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 6$$

im Punkt $a = 1$ für $\epsilon = \frac{1}{10}$ ein explizites $\delta > 0$ derart, dass aus

$$d(x, a) \leq \delta$$

die Abschätzung

$$d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

folgt.

Aufgabe 12.8. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in T$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle $y \in T$ aus einem nichtleeren offenen Intervall $]x-\delta, x+\delta[$ gilt.

Aufgabe 12.9.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit

$$f(a) > g(a).$$

Zeige, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt, dass

$$f(x) > g(x)$$

für alle $x \in [a-\delta, a+\delta]$ gilt.

Aufgabe 12.10. Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

stetige Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $(fg)(a) = 0$ und mit $f(a) \neq 0$. Zeige, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt, dass die Einschränkung $g|_{[a-\delta,a+\delta]}$ die Nullfunktion ist.

Aufgabe 12.11. Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen und es seien

$$g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h\colon [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $g(b) = h(b)$. Zeige, dass dann die Funktion

$$f\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(t) = g(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } f(t) = h(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 12.12. Bestimme, für welche Punkte $x \in \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \leq -1\,, \\ x^2 \text{ für } -1 < x < 2\,, \\ -2x+7 \text{ für } x \geq 2\,, \end{cases}$$

definierte Funktion stetig ist.

Aufgabe 12.13. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Teilmenge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 12.14. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f gibt.

Aufgabe 12.15.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und seien $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dabei seien g und h stetig im Punkt a und es gelte $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass auch f in a stetig ist.

Die folgende Aufgabe verwendet die reelle Sinusfunktion, die wir später einführen werden. Im Moment muss man nur wissen, dass sie stetig und periodisch ist und dass sich ihre Werte zwischen -1 und 1 bewegen.

Aufgabe 12.16. Zeige, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist. Ist der Graph dieser Funktion „zeichenbar“?

Aufgabe 12.17. Zeige, dass es eine stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass f auf jedem Intervall der Form $[0, \delta]$ mit $\delta > 0$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt.

Aufgabe 12.18.*

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Funktion f ist durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$ eindeutig festgelegt.
(2) Der Funktionswert $f(a)$ ist durch die Funktionswerte $f(x)$, $x \neq a$, festgelegt.

(3) Wenn für alle $x < a$ die Abschätzung

$$f(x) \leq c$$

gilt, so gilt auch

$$f(a) \leq c.$$

AUFGABE 12.19.*

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt stetig ist.

AUFGABE 12.20.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}\,, \\ \frac{1}{b}, & \text{bei } x \in \mathbb{Q} \text{ und } x = \frac{a}{b} \text{ gekürzt}\,. \end{cases}$$

(1) Zeige, dass f in den rationalen Zahlen nicht stetig ist.
(2) Zeige, dass f in den irrationalen Zahlen stetig ist.

AUFGABE 12.21. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei

$$S = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Die Funktion $f\colon S \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$$

festgelegt. Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 12.22. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $x \in \mathbb{R}$. Es sei

$$T = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Die Funktion

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

sei durch

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = x_n \text{ und } f(0) = x$$

festgelegt. Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn die Folge gegen x konvergiert.

Die folgende Aufgabe beschreibt eine Variante des Folgenkriteriums für die Stetigkeit.

Aufgabe 12.23.*

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge,

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $x \in T$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) f ist stetig im Punkt x.
(2) Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe 12.24.*

Sei $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(az) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte. Zeige, dass f konstant ist.

Die nächsten beiden Aufgaben verwenden folgende Definition.

Es seien L und M Mengen und es sei

$$f\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $S \subseteq L$ heißt die Abbildung

$$S \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

die *Einschränkung der Abbildung* auf die Teilmenge S.

Die Einschränkung wird mit $f|_S$ bezeichnet.

Aufgabe 12.25. Es seien $S \subseteq T \subseteq \mathbb{K}$ Teilmengen. Zeige, dass zu einer stetigen Funktion

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

auch die Einschränkung $f|_S$ stetig ist.

Aufgabe 12.26. Man gebe ein Beispiel für eine streng wachsende Funktion

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass es keine (endliche) Zerlegung $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$ des Intervalls $[0,1]$ gibt, so dass die Einschränkungen $f|_{]a_{i-1},a_i]}$ stetig sind.

Aufgabe 12.27. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es sei $f\colon T \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{K}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Es ist
$$\lim_{x \to a} f(x) = b\,.$$
(2) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, konvergiert auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b.

Aufgabe 12.28. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$n \mapsto x_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n .$$

Aufgabe 12.29. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x-1}{x^2-1}$$

im Punkt $a = 1$.

Aufgabe 12.30. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{2x^3+3x^2-1}{x^3-x^2+x+3}$$

im Punkt $a = -1$.

Aufgabe 12.31. Es sei

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Definiere die Begriffe „linksseitiger“ und „rechtsseitiger Grenzwert“ von f in a sowie den Begriff „Sprungstelle“.

Aufgabe 12.32. Es sei

$$T = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

die Menge der Stammbrüche und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Es sei $b \in \mathbb{R}$ und $D = T \cup \{0\}$. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Die Folge konvergiert gegen b.
(2) Die Funktion

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$$

besitzt den Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x) = b$.
(3) Die Funktion

$$\tilde{f} \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$$

und $\tilde{f}(0) = b$ ist stetig.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.33. (3 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

im Punkt $a = 3$ für $\epsilon = \frac{1}{100}$ ein explizites $\delta > 0$ derart, dass aus

$$d(x, a) \leq \delta$$

die Abschätzung

$$d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

folgt.

Aufgabe 12.34. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = 2a_n^4 - 6a_n^3 + a_n^2 - 5a_n + 3\,,$$

definierten Folge, wobei

$$a_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{4n^3 + 2n - 1}$$

ist.

Aufgabe 12.35. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 12.36. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{\frac{2\sqrt{n} - 3}{3\sqrt{n} - 2}}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff der geraden und der ungeraden Funktion.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(-x)$$

gilt.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

Aufgabe 12.37. (4 Punkte)

Zeige, dass man jede stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

als $f = g + h$ mit einer stetigen geraden Funktion g und einer stetigen ungeraden Funktion h schreiben kann.

Aufgabe 12.38. (5 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}_+$ und

$$f\colon B\,(P, b) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

von f gibt.

Aufgabe 12.39. (7 Punkte)

Zeige, dass die Menge der stetigen Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ überabzählbar ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Melons-Fethiye Market.jpg , Autor = Benutzer Palosirkka auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0 2

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 11

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 11