Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 22

Weil-Divisoren

Wir nennen eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ der Kodimension 1 in einem integren Schema X einen *Primdivisor*. Wenn X normal und noethersch ist, so ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ am generischen Punkt η zu Y ein diskreter Bewertungsring. Somit besitzt jedes Element $f \neq 0$ aus dem Funktionenkörper $K(X)$ eine wohlbestimmte Ordnung $\operatorname{ord}(f)$ längs Y, die wir mit $\operatorname{ord}_Y(f)$ bezeichnen. Wenn π die Ortsuniformisierende im diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ bezeichnet, so kann man $f = u\pi^n$ mit einer Einheit u aus dem Ring und $n \in \mathbb{Z}$ schreiben, und dieser Exponent n ist die Ordnung von f längs Y heißt. Bei positiver Ordnung spricht man von einer Nullstelle, bei negativer Ordnung von einem Pol. Wenn $U = \operatorname{Spek}(R) \subseteq X$ eine offene affine Teilmenge mit $U \cap Y \neq \emptyset$ ist, so entspricht Y einem Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 in R und für den lokalen Ring gilt $\mathcal{O}_{X,\eta} = R_{\mathfrak{p}}$.

Definition 22.1. Es sei X ein normales noethersches integres Schema mit Funktionenkörper K und sei $f \in K$, $f \neq 0$. Dann heißt die formale Summe

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{Y \text{ Primdivisor}} \operatorname{ord}_Y(f) \cdot Y,$$

wobei $\operatorname{ord}_Y(f)$ die Ordnung von f im lokalen Ring zu Y bezeichnet, der durch f definierte *Hauptdivisor*.

Der Hauptdivisor beschreibt also das Nullstellen- und das Polverhalten der Funktion f. Wir zeigen zunächst, dass es sich bei einem Hauptdivisor um eine endliche Summe handelt.

Lemma 22.2. *Es sei X ein normales noethersches integres Schema mit Funktionenkörper K und sei $f \in K$, $f \neq 0$. Dann gibt es nur endlich viele Primdivisoren Y mit*

$$\operatorname{ord}_Y(f) \neq 0,$$

Beweis. Es sei $U \subseteq X$ eine nichtleere offene affine Teilmenge mit

$$f \in R = \Gamma(U, \mathcal{O}_X).$$

Da der generische Punkt von X zu U gehört, sind die Primdivisoren, die U nicht treffen, irreduzible Komponenten von $X \setminus U$. Da $X \setminus U$ eine abgeschlossene Teilmenge von X und damit noethersch ist, gibt es dort nur endlich viele

Komponenten. D.h. wir müssen nur noch diejenigen Primdivisoren betrachten, die U treffen. Deren generische Punkte entsprechen dann Primidealen der Höhe 1 von R. Es ist

$$\operatorname{ord}_Y(f) = \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(f) \geq 0$$

und dies ist nur dann positiv, wenn $f \in \mathfrak{p}$ ist. Die Primideale $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 oberhalb von f sind die minimalen Primideale von $R/(f)$, und wegen noethersch gibt es davon nur endlich viele. □

Definition 22.3. Es sei X ein normales noethersches integres Schema. Dann nennt man eine formale Summe $\sum_Y n_Y \cdot Y$, wobei Y die Primdivisoren von X durchläuft und nur endlich viele der n_Y von 0 verschieden sind, einen *Weildivisor* auf X.

Ein Weildivisor ist eine freie Vorgabe für das „theoretisch mögliche“ Nullstellen- bzw Polverhalten einer rationalen Funktion, allerdings muss ein solche Vorgabe nicht durch eine Funktion realisiert werden können. Einen Divisor, bei dem sämtliche Zahlen $a_Y \geq 0$ sind, nennt man *effektiv*. Auf einer irreduziblen normalen (also glatten) Kurve X ist ein Primdivisor einfach ein abgeschlossener Punkt. Ein Weildivisor ist also in diesem Fall einfach eine endliche Summe $\sum_{P \in X} n_P \cdot P$.

Definition 22.4. Es sei X ein normales noethersches integres Schema. Dann nennt die Gruppe aller Weildivisoren mit komponentenweiser Addition die *Weildivisorengruppe* von X. Sie wird mit $\operatorname{Div}(X)$ bezeichnet.

Lemma 22.5. *Es sei X ein normales noethersches integres Schema mit Funktionenkörper K. Dann ist die Zuordnung*

$$K^\times \longrightarrow \operatorname{Div}(X),\ f \longmapsto \operatorname{div}(f),$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Nach Lemma 22.2 ist der Hauptdivisor zu f in der Tat ein Weildivisor. Die Homomorphieeigenschaft folgt, bezogen auf einen fixierten Primdivisor Y mit dem zugehörigen diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_Y$, aus Lemma 21.7 (1). □

Die Divisorenklassengruppe

Definition 22.6. Es sei X ein normales noethersches integres Schema mit Funktionenkörper K. Dann nennt man die Restklassengruppe

$$\operatorname{KG}(X) = \operatorname{Div}(X)/\operatorname{HDiv}(X)$$

die *Divisorenklassengruppe* von X.

Für einen noetherschen normalen Integritätsbereich R nennt man entsprechend $\mathrm{KG}\,(R) \,=\, \mathrm{KG}\,(\mathrm{Spek}\,(R))$ die *Divisorenklassengruppe* des Rings R. Im zahlentheoretischen Kontext, wenn R der Ring der ganzen Zahlen in einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist, spricht man auch von der *Idealklassengruppe*. Divisoren, die die gleiche Divisorenklasse definieren, heißen *linear äquivalent*.

SATZ 22.7. *Es sei R ein normaler noetherscher Integritätsbereich und es bezeichne* $\mathrm{KG}\,(R)$ *die Divisorenklassengruppe von R. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *R ist faktoriell.*
(2) *Jedes Primideal der Höhe* 1 *ist ein Hauptideal.*
(3) *Jeder Divisor ist ein Hauptdivisor.*
(4) *Es ist* $\mathrm{KG}\,(R) \,=\, 0$.

Beweis. Sei (1) erfüllt und $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1. Es gibt ein Element $f \in \mathfrak{p}$, $f \neq 0$. Dieses hat eine Primfaktorzerlegung $f \,=\, p_1 \cdots p_n$ und aufgrund der Primeigenschaft muss $p_i \,\in\, \mathfrak{p}$ für ein i sein. Dann ist aber wegen der Höhenbedingung $(p_i) \,=\, \mathfrak{p}$. Sei nun jedes Primideal der Höhe 1 Hauptideal. Dann gilt mit

$$\mathfrak{p} \,=\, (p)$$

die Divisorbeziehung

$$\mathrm{div}\,(p) \,=\, 1 \cdot \mathfrak{p},$$

da p in keinem anderen Primideal der Höhe 1 enthalten ist und da p auch in $R_\mathfrak{p}$ ein Erzeuger von $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ ist. Somit sind die Gruppenerzeuger der Divisorenklasengruppe Hauptdivisoren und damit sind überhaupt alle Divisoren Hauptdivisoren. Die Äquivalenz von (3) und (4) ist klar. Sei nun vorausgesetzt, dass jeder Divisor ein Hauptdivisor ist. Dann gibt es zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ der Höhe 1 ein $f \in Q(R)$, $f \neq 0$, mit

$$\mathrm{div}\,(f) \,=\, 1 \cdot \mathfrak{p}.$$

Wegen der Nichtnegativität des Hauptdivisors ist nach Satz 21.12 $f \,\in\, R$. Somit ist f nur in $\mathfrak{p}$ als einzigem Primideal der Höhe 1 enthalten. Sei $\mathfrak{p} \,=\, (g_1, \ldots, g_n)$. Dann ist

$$\mathrm{div}\,(g_i) \,\geq\, \mathrm{div}\,(f)$$

und somit ist $\frac{g_i}{f} \in R$, also $g_i \in (f)$ und damit $\mathfrak{p} \,=\, (f)$.

Sei schließlich (2) erfüllt, und $f \in R$, $f \neq 0$. Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ die minimalen Primoberideale von f. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz besitzen diese alle die Höhe 1. Sei $\mathfrak{p}_i \,=\, (p_i)$ mit Primelementen p_1. Es ist

$$\mathrm{div}\,(f) \,=\, \sum_{i=1}^{s} n_i \mathfrak{p}_i.$$

Das Element $\prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i}$ besitzt den gleichen Hauptdivisor. Deshalb ist der Quotient $f / \prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i}$ eine Einheit und

$$f = u \prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i}$$

mit einer Einheit u. Daher ist R faktoriell. $\square$

Beispiel 22.8. Wir wollen die Weildivisoren und die Divisorenklassengruppe des projektiven Raumes $\mathbb{P}_K^d$ über einem Körper K verstehen ($d \geq 1$). Wir betrachten die disjunkte Zerlegung

$$\mathbb{P}_K^d = D_+(X_0) \cup V_+(X_0) = \mathbb{A}_K^d \cup \mathbb{P}_K^{d-1},$$

d.h. wir fixieren die Hyperebene

$$H = V_+(X_0) \cong \mathbb{P}_K^{d-1}$$

im „Unendlichen". Ein Primdivisor des projektiven Raumes stimmt also entweder mit der Hyperebene rechts überein oder sie schneidet den affinen Raum links nichtleer und kann als ein Primideal der Höhe 1 im Polynomring $K[\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_d}{X_0}]$ aufgefasst werden. Jede Funktion f des Funktionenkörpers lässt sich (bis auf Skalierung und kürzen) eindeutig als $f = \frac{P}{Q}$ mit Polynomen $P, Q \in K[\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_d}{X_0}]$ schreiben. Mit den Primfaktorzerlegungen zu P und Q kann man direkt

$$f = \prod_{i=1}^{n} c P_i^{\nu_i}$$

(mit einer Konstanten $c \neq 0$ und $\nu_i \in \mathbb{Z}$) schreiben und daraus den Hauptdivisor zu f ablesen, sofern er such auf die Komponenten im affinen Raum bezieht. Die („unendlich ferne") Ordnung von f an $V_+(X_0)$ ergibt sich folgendermaßen. Der lokale Ring zu diesem Primdivisor ist

$$\begin{aligned} & K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{((X_0))} \\ = \ & \left(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{K[X_0, X_1, \ldots, X_n] \setminus (X_0) \cap \text{ homogene Elemente }}\right)_0 \\ = \ & K\left(\frac{X_2}{X_1}, \ldots, \frac{X_d}{X_1}\right)[\frac{X_0}{X_1}]_{\left(\frac{X_0}{X_1}\right)}. \end{aligned}$$

Man schreibt P (bzw. Q oder f), indem man überall $\frac{X_i}{X_0}$ durch $\frac{X_i}{X_1} \cdot \frac{X_1}{X_0}$ ersetzt. Dies betrachtet man als rationale Funktion über dem Körper $K\left(\frac{X_2}{X_1}, \ldots, \frac{X_d}{X_1}\right)$ in der einen Variablen $\frac{X_0}{X_1}$. Der (typischerweise negative) Grad bezüglich $\frac{X_0}{X_1}$ ist die Ordnung.

Beispielsweise ist bei

$$\begin{aligned} P &= \frac{X_1}{X_0} + \left(\frac{X_2}{X_0}\right)^3 \\ &= \frac{X_1}{X_0} + \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^3 \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^3 \end{aligned}$$

$$= \left(\left(\frac{X_0}{X_1} \right)^2 + \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^3 \right) \left(\frac{X_0}{X_1} \right)^{-3}$$

und die Ordnung ist -3. Da jeder Weildivisor mit einem Hauptdivisor auf dem affinen Raum wegen der Faktorialität des Polynomringes übereinstimmt, ist jeder Weildivisor linear äquivalent zu einem Divisor der Form $nV_+(X_0)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ (die Klasse zu $V_+(X_0)$ nennt man auch die *Hyperebenenklasse.*). Ein solcher Divisor ist aber bei $n \neq 0$ kein Hauptdivisor, da ein solcher Hauptdivisor auf dem affinen Raum trivial ist und daher von einer Konstanten herrühren muss. Eine solche besitzt aber auch im Unendlichen die Ordnung 0. Die Divisorenklassengruppe des projektiven Raumes ist also $\mathbb{Z}$, als Erzeuger kann man jede Hyperebene nehmen.

Divisorenklassengruppe und Picardgruppe

Wir besprechen nun den Zusammenhang zwischen Divisoren und invertierbaren Untergarben der Funktionenkörpergarben $\mathcal{K}$ und zwischen der Divisorenklassengruppe und der Picardgruppe. Eine invertierbare Untergarbe $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ definiert für jeden Punkt $x \in X$ einen freien $\mathcal{O}_{X,x}$-Untermodul $\mathcal{L}_x \subseteq \mathcal{K}_x = K$ vom Rang 1. Wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ ein diskreter Bewertungsring mit Ortsuniformisierender π ist, was bei einem normalen Schema für jeden generischen Punkt zu einem Primdivisor der Fall ist, gilt

$$\mathcal{L}_x = \pi^n \mathcal{O}_{X,x}$$

mit einem eindeutigen $n \in \mathbb{Z}$. Dieses n bezeichnen wir mit $\operatorname{ord}_Y(\mathcal{L})$, wenn Y den Primdivisor bezeichnet.

Satz 22.9. *Es sei X ein lokal faktorielles noethersches integres Schema. Dann entsprechen sich die invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Untermoduln der konstanten Funktionenkörpergarbe $\mathcal{K}$ und die Weildivisoren über die Korrespondenz*

$$\mathcal{L} \longmapsto \sum_Y \operatorname{ord}_Y(\mathcal{L})$$

und

$$D = \sum_Y a_Y Y \longmapsto \mathcal{L}_D$$

mit

$$\mathcal{L}_D(U) = \{f \in K \mid \operatorname{ord}_Y(f) \geq D \text{ für alle } Y \in U\}$$

für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$. Diese Zuordnungen sind mit den Gruppenstrukturen verträglich und dabei entsprechen sich trivale Untergarben und Hauptdivisoren. Invertierbare Ideale $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{K}$ entsprechen den effektiven Divisoren.

Beweis. Es gibt eine endliche offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit

$$\mathcal{L} = (f_i)\mathcal{O}_X|_{U_i}$$

mit $f_i \in K$, $f_i \neq 0$. Nach Lemma 22.2 gibt es jeweils nur endlich viele irreduzible Weildivisoren in U_i mit

$$\mathrm{ord}_Y(f_i) \neq 0.$$

Daher ist $D = \sum_Y \mathrm{ord}_Y(\mathcal{L})Y$ in der Tat ein Weildivisor.

Sei umgekehrt D ein Weildivisor und $\mathcal{L}$ die zugehörige Untergarbe der konstanten Garbe zum Funktionenkörper. Es ist zu zeigen, dass diese invertierbar ist. Sei $x \in X$ ein Punkt und $x \in U \subseteq X$ eine affine offene Umgebung. Im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$, der nach Voraussetzung faktoriell ist, ist nach Satz 22.7 der Divisor D_x, der aus allen irreduziblen Komponenten von D besteht, die durch x verlaufen, ein Hauptdivisor. Indem man die Komponenten von D, die nicht durch x verlaufen, entfernt, kann man U durch eine kleinere affine Umgebung V von x ersetzen, auf der der Divisor ein Hauptdivisor ist. Dort gilt also

$$D|_V = \mathrm{div}\,(f)|_V$$

mit einem $f \in K$. Es ist dann

$$\mathcal{L}_D|_V = (f)\mathcal{O}_X|_V.$$

Wir müssen nun zeigen, dass diese Zuordnungen invers zueinander sind. Wir beginnen mit einer invertierbaren Untergarbe und übernehmen die Bezeichnungen von oben. Auf U_i ist $D|_{U_i} = \mathrm{div}\,(f_i)|_{U_i}$. Daher gilt für $g \in K$ die Zugehörigkeit

$$g \in \{f \in K \mid \mathrm{ord}_Y(f) \geq D \text{ für alle } Y \in U\}$$

genau dann, wenn auf U für die Hauptdivisoren die Beziehung

$$\mathrm{div}\,(g) \geq \mathrm{div}\,(f_i)$$

gilt, was wegen Satz 21.12 wiederum zu $g \in f \cdot \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ äquivalent ist.

Wenn man mit einem Weildivisor startet, so stimmt dieser lokal mit einem Hauptdivisor überein. Dann erzeugt ein Element des Funktionenkörpers, das diesen Hauptdivisor besitzt, lokal die zugehörige invertierbare Garbe, und dieses Element wird auch verwendet, um den zugehörigen Divisor auszurechnen. □

Bei der vorstehenden Korrespondenz entsprechen die Ideale den effektiven Divisoren, das Hauptideal (f) entspricht dem Hauptdivisor $\mathrm{div}\,(f)$. Es gibt aber auch gute Gründe, die Korrespondenz abzuändern, indem man Negationen miteinarbeitet. Dann entspricht ein effektiver Divisor einem globalen Schnitt in der zugehörigen invertierbaren Garbe.

Satz 22.10. *Es sei X ein lokal faktorielles noethersches integres Schema. Dann stimmt die Divisorenklassengruppe von X mit der Picardgruppe von X überein.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 20.6 und Satz 22.9. □

KOROLLAR 22.11. *Es sei X ein glattes Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann stimmt die Divisorenklassengruppe von X mit der Picardgruppe von X überein.*

Beweis. In einem glatten Schema sind die lokalen Ringe nach Satz 18.16 regulär und diese sind nach Satz 25.12 (Singularitätentheorie (Osnabrück 2019)) faktoriell. Daher folgt die Aussage aus Satz 22.10. □

SATZ 22.12. *Die Picardgruppe des projektiven Raumes $\mathbb{P}^d_K$ mit $d \geq 1$ über einem Körper K ist $\mathbb{Z}$. Die invertierbaren Garben auf dem projektiven Raum werden repräsentiert durch die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(\ell)$, $\ell \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 22.10 und Beispiel 22.8. Aufgrund der expliziten Übersetzung in Satz 22.9 entspricht die negierte Hyperebenenklasse dem tautologischen Bündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(1)$. □

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9