Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück SS 2021

Einführung in die mathematische Logik

Vorlesung 24

Aristoteles (384-322 v.u.Z) ist der Begründer der Modallogik. Das achte Kapitel seiner ersten Analytik leitet die modallogische Problematik ein: „Da das einfache Sein und das nothwendige Sein und das statthafte Sein verschieden sind (denn Vieles ist zwar, aber nicht aus Nothwendigkeit und Anderes ist weder aus Nothwendigkeit, noch ist es überhaupt, aber das Sein desselben ist statthaft), so erhellt, dass auch die aus diesen unterschiedenen Arten zu sein gebildeten Schlüsse von einander verschieden sein werden, und zwar auch dann, wenn die beiden Vordersätze in einem Schlüsse nicht gleichartig lauten, sondern der eine das nothwendige, der andere das einfache Sein oder das blos statthafte Sein ausdrückt.“

Modallogik

Die *Modallogik* beschäftigt sich mit der Logik der Notwendigkeit und Möglichkeit und allgemeiner mit Modalitäten von Aussagen. Sie baut auf der Aussagenlogik auf. Während diese die logische Abhängigkeit von mittels aussagenlogischer Junktoren definierten Ausdrücken in den Aussagenvariablen studiert, und für eine Aussagenvariable nur die beiden Wahrheitswerte wahr oder falsch kennt, erlaubt die Modallogik, auch modalisierte Aussagenvariablen zu untersuchen. Modalisierte Aussagen kommen häufig vor, typische Beispiele sind:

(1) p gilt notwendigerweise.
(2) Es ist moralisch geboten, dass p gilt.
(3) Ich möchte, dass p gilt.
(4) Ich weiß, dass p gilt.
(5) p ist beweisbar.
(6) p gilt überall (in allen Fällen, in allen Welten).

Die Negationen dieser Aussagen sind (es ist nicht der Fall, dass ...)

(1) p gilt nicht notwendigerweise.
(2) Es ist moralisch nicht geboten, dass p gilt.
(3) Ich möchte nicht, dass p gilt (im Sinne von, es ist mir egal).
(4) Ich weiß nicht, ob p gilt.
(5) p ist nicht beweisbar.
(6) p gilt nicht überall (nicht in allen Fällen, nicht in allen Welten).

Man kann aber auch die gleiche Modalität auf die Negation zu p anwenden, das ergibt.

(1) $\neg p$ gilt notwendigerweise.
(2) Es ist moralisch geboten, dass $\neg p$ gilt (also p ist moralisch verwerflich/verboten).
(3) Ich möchte, dass $\neg p$ gilt.
(4) Ich weiß, dass $\neg p$ gilt.
(5) $\neg p$ ist beweisbar.
(6) $\neg p$ gilt überall (in allen Fällen, in allen Welten), also p gilt nirgendwo.

Diesen Aussagen können wiederum als Ganzes negiert werden.

(1) Es ist nicht der Fall, dass $\neg p$ notwendigerweise gilt.
(2) Es ist nicht moralisch geboten, dass $\neg p$ gilt.
(3) Ich möchte nicht, dass $\neg p$ gilt.
(4) Ich weiß nicht, dass $\neg p$ gilt.
(5) $\neg p$ ist nicht beweisbar.
(6) $\neg p$ gilt nicht überall (nicht in allen Fällen).

Davon sind die folgenden Aussagen Paraphrasierungen.

(1) p gilt möglicherweise.
(2) p ist (moralisch) erlaubt.
(3) Ich kann p akzeptieren.
(4) Ich kann von meinem Wissen her nicht ausschließen, dass p gilt (p ist denkbar).
(5) p ist nicht ausschließbar.
(6) Es gibt Fälle bzw. Welten, wo p gilt.

Wenn man die zu Beginn genannten Modalitäten mit $\Box p$ (Notwendigkeit) bezeichnet, so haben wir nach $\Box p$ die Varianten $\neg\Box p$, $\Box\neg p$, $\neg\Box\neg p$ aufgelistet, und die letzte Variante konnten wir durch eine neue Modalität (Möglichkeit) ausdrücken, nämlich

$$\Diamond p \Leftrightarrow \neg\Box\neg p\,.$$

Möglich bedeutet also, dass das Gegenteil nicht notwendig ist, erlaubt bedeutet, dass das Gegenteil nicht verpflichtend ist, u.s.w. Diese Äquivalenz wird etwas weniger verschachtelt, wenn man sie als

$$\neg\Diamond p \Leftrightarrow \Box\neg p$$

schreibt. Dass etwas nicht erlaubt ist bedeutet, dass das Gegenteil davon verpflichtend ist. In der formalen Modallogik untersucht man strukturelle Gesetzmäßigkeiten von Aussagen, die durch einen Operator $\Box$ modalisiert werden können. Philosophisch relevante Interpretationen sind die Notwendigkeitslogik, die Deontik (Moral, Recht), epistemische Logik (Wissen), Beweisbarkeitslogik. In der letzten Vorlesung haben wir in Bemerkung 23.7 für das einstellige Ableitungsprädikat einige strukturelle Eigenschaft formuliert. Wenn man dabei $\alpha(GN(s))$ als „s ist beweisbar“ liest und als $\Box s$ schreibt, wobei s nicht weiter hinterfragt wird und als Aussagenvariable aufgefasst wird, so kann man diese Eigenschaften modallogisch untersuchen.

Die formale Sprache der Modallogik

Definition 24.1. Zu einer Menge von Aussagenvariablen V besteht die *modallogische Sprache* aus diesen Aussagenvariablen, aus allen rekursiv-konstruierbaren aussagenlogischen Verknüpfungen und aus allen rekursiv-konstruierbaren Ausdrücken der Form $\Box(\alpha)$.

Wie im aussagelogischen Kontext arbeiten wir mit $\neg, \wedge, \rightarrow$, wobei wir auch die Symbole $\vee$ und $\leftrightarrow$ in ihrer üblichen Bedeutung als Abkürzungen verwenden. Wir verzichten auch auf Klammern, um die Lesbarkeit der Ausdrücke zu erhöhen. Ein weiteres wichtiges sekundäres Symbol ist $\Diamond$. Es wird als

$$\Diamond\alpha \leftrightarrow \neg\Box(\neg\alpha)$$

eingeführt. Wir lesen $\Box\alpha$ als „α ist notwendig“ und $\Diamond\alpha$ als „α ist möglich“.

Definition 24.2. Eine unter aussagenlogischen Ableitungen abgeschlossene Teilmenge der modallogischen Sprache heißt (formale) *Modallogik*.

Das System K

Definition 24.3. Eine Modallogik heißt eine *K- Modallogik* , wenn das Axiomenschema

$$\vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$$

für beliebige Ausdrücke α, β und die Ableitungsregel *Nezessisierungsregel*

aus $\vdash \alpha$ folgt $\vdash \Box\alpha$

für alle α gilt.

Das Axiomenschema K ist äquivalent zum Axiomenschema

$$\Diamond\gamma \rightarrow (\Diamond\neg\alpha \vee \Diamond(\alpha \wedge \gamma)),$$

siehe Aufgabe 24.2.

Definition 24.4. Man sagt, dass ein modallogischer Ausdruck α aus dem K-System *ableitbar* ist, wenn sich α aus aussagenlogischen Tautologien und aus Instanzen des K-Axioms mit Hilfe des Modus ponens oder der Nezessisierungsregel ergibt. Dafür schreibt man

$$\vdash \alpha.$$

Lemma 24.5. *In einer K-Modallogik sind folgende Aussagen ableitbar.*

(1) *Aus*
$$\vdash \alpha \rightarrow \beta$$
folgt
$$\vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\beta.$$

(2) *Aus*
$$\vdash \alpha \rightarrow \beta$$
folgt
$$\vdash \Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta.$$

(3)
$$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha.$$

(4)
$$\vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$$

(5)
$$\vdash \Box\neg\neg\alpha \leftrightarrow \Box\alpha.$$

Beweis. (1). Nach der Nezessisierungsregel gilt

$$\vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$$

und nach dem K-Axiom gilt

$$\vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta).$$

Durch Modus ponens ergibt sich

$$\vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\beta.$$

(2). Aus

$$\vdash \alpha \rightarrow \beta$$

folgt durch Kontraposition zunächst

$$\vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$$

und daraus nach Teil (1)

$$\vdash \Box\neg\beta \rightarrow \Box\neg\alpha$$

Erneutes kontraponieren ergibt

$$\vdash \neg\Box\neg\alpha \to \neg\Box\neg\beta\,,$$

was

$$\vdash \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$$

bedeutet.

(3). Aus der aussagenlogischen Tautologie

$$\vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$$

ergibt sich aus (1) direkt

$$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha\,.$$

(4). Aus der aussagenlogischen Tautologie

$$\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$$

ergibt sich mit (1) zunächst

$$\vdash \Box\alpha \to \Box(\beta \to \alpha \wedge \beta)\,.$$

Aufgrund des K-Axioms gilt

$$\vdash \Box(\beta \to \alpha \wedge \beta) \to (\Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta))\,.$$

Der Kettenschluss liefert

$$\vdash \Box\alpha \to (\Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta))\,,$$

was aussagenlogisch äquivalent zu

$$\vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$$

ist.

(5) ergibt sich aus der aussagenlogischen Tautologie

$$\vdash \alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$$

und Teil (1). $\Box$

Die erste der eben bewiesenen Eigenschaften der K-Modallogik bedeutet insbesondere, dass man in der Reichweite eines Notwendigkeitsoperators einen Ausdruck durcj einen jeden aussagenlogisch äquivalenten Ausdruck ersetzen kann.

Einige modallogische Axiomenschemata

Wir besprechen einige modallogischen Axiomenschemata, die über das K-System hinausgehen. Die inhaltliche Relevanz der Systeme ist sehr unterschiedlich.

Definition 24.6. Das modallogische Axiomenschema

$$\Box\alpha$$

nennt man *Leerheitsaxiom.*

Dies ergibt keine interessante Modallogik, da einfach jede Aussage der Form $\Box\alpha$ gilt, auch dann, wenn α eine Kontradiktion ist, und jede Aussage der Form $\Diamond\alpha$ nicht gilt.

Definition 24.7. Das modallogische Axiomenschema

$$\Box\alpha \to \Diamond\alpha$$

nennt man *Möglichkeitsaxiom.*

Dies bedeutet also $\Diamond\alpha \vee \Diamond\neg\alpha$, es muss also die Aussage oder ihre Negation möglich sein, oder beides. Man spricht auch vom *Seriellitätsaxiom* oder *D*-Axiom. Die Bezeichnung D kommt von deontisch. Was verpflichtend ist, sollte insbesondere erlaubt sein.

Definition 24.8. Das modallogische Axiomenschema

$$\Diamond\alpha \to \Box\alpha$$

nennt man *Phantasiearmutsaxiom.*

Das Möglichkeitsaxiom bedeutet, dass es mindestens eine Vorstellungswelt gibt und das Phantasiearmutsaxiom bedeutet, dass es höchstens eine Vorstellungswelt gibt. Solche Charakterisierungen werden wir später im Rahmen der semantischen Interpretation mit gerichteten Graphen präzisieren.

Definition 24.9. Das modallogische Axiomenschema

$$\Diamond\alpha \leftrightarrow \Box\alpha$$

nennt man *Ideologieaxiom.*

In einer Ideologie stellt man sich genau eine Welt vor, die im Allgemeinen mit der Realität nichts zu tun hat.

Lemma 24.10. *Für eine K-Modallogik sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(1) *Es gilt das Phantasiearmutsaxiom.*
(2) *Es gilt die Umkehrung des K-Axioms, also*

$$\vdash (\Box\alpha \to \Box\beta) \to \Box(\alpha \to \beta)\,.$$

(3) *Es gilt das Axiomenschema*

$$\vdash \Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta \to \Diamond(\alpha \wedge \beta)\,.$$

Beweis. Von (1) nach (2). Aus den aussagenlogischen Tautologien

$$\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

und

$$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

ergeben sich mit Lemma 24.5 (1) die Ableitungen

$$\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \rightarrow \beta)$$

und

$$\Box\neg\alpha \rightarrow \Box(\alpha \rightarrow \beta)\,.$$

Das Phantasiearmutsaxiom liefert

$$\vdash \Diamond\neg\alpha \rightarrow \Box\neg\alpha$$

und über den Kettenschluss

$$\vdash \Diamond\neg\alpha \rightarrow \Box(\alpha \rightarrow \beta)\,.$$

Daher gilt

$$\vdash (\Diamond\neg\alpha \vee \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \rightarrow \beta)\,,$$

was eben

$$\vdash (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \rightarrow \beta)$$

bedeutet.

Von (2) nach (1). Aus der aussagenlogischen Tautologie

$$\vdash (\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$$

ergibt sich mit Lemma 24.5 (1) direkt

$$\vdash \Box(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \Box\neg\alpha\,.$$

Die Umkehrung des K-Axioms mit $\beta = \neg\alpha$ liefert

$$\vdash (\Box\alpha \rightarrow \Box\neg\alpha) \rightarrow \Box(\alpha \rightarrow \neg\alpha)\,.$$

Eine einfache aussagenlogische Überlegung zeigt

$$\vdash \Diamond\neg\alpha \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\neg\alpha)\,.$$

Der doppelte Kettenschluss liefert

$$\vdash \Diamond\neg\alpha \rightarrow \Box\neg\alpha\,.$$

Da diese Beziehung für jedes $\neg\alpha$ gilt, gilt es nach Lemma 24.5 (5) überhaupt für jede Aussage.

Aus (1) folgt (3). Das K-Axiom liefert

$$\vdash \Box(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\neg\beta)$$

und das Phantasiearmutsaxiom liefert

$$\vdash \Diamond\alpha \rightarrow \Box\alpha\,.$$

Dies zusammen ergibt

$$\vdash \Box(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \rightarrow \Box\neg\beta)\,.$$

Wir schreiben dies als

$$\vdash \Box(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow (\neg\Diamond\alpha \vee \Box\neg\beta)\,.$$

Durch Kontraposition bedeutet dies

$$\vdash (\Diamond\alpha \wedge \neg\Box\neg\beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \wedge \beta)\,.$$

Von (3) nach (1). Wir betrachten den Spezialfall

$$\vdash \Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha \rightarrow \Diamond(\alpha \wedge \neg\alpha)\,.$$

Durch Kontraposition ist dies

$$\vdash \Box\neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha)$$

und durch eine aussagenlogische Umstellung

$$\vdash \Box(\neg\alpha \vee \alpha) \rightarrow (\neg\Diamond\alpha \vee \neg\Diamond\neg\alpha)\,.$$

Aus der aussagenlogischen Tautologie

$$\vdash \neg\alpha \vee \alpha$$

folgt mit der Nezessisierungsregel

$$\vdash \Box(\neg\alpha \vee \alpha)$$

und somit

$$\vdash \neg\Diamond\alpha \vee \neg\Diamond\neg\alpha\,.$$

Dies bedeutet

$$\vdash \Diamond\alpha \rightarrow \Box\alpha\,.$$

$\Box$

Abbildungsverzeichnis