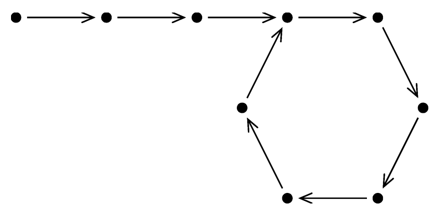
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 7

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 7.1. Es sei $N_1 = (\mathbb{N}, 0, ')$ und es sei N_2 die rechts angegebene Menge mit dem Startsymbol oben links und der durch die Pfeile ausgedrückten Nachfolgerabbildung. An welcher Stelle bricht der Beweis von Satz 7.2 in dieser Situation zusammen.



Übungsaufgaben

Aufgabe 7.2. Man gebe Beispiele $(M, 0, ')$ für Mengen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in M$ und einer Abbildung $' \colon M \to M$ an, die je zwei der Dedekind-Peano-Axiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 7.3. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge

$$\mathbb{N}_{\geq n} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n\}$$

ebenfalls die Dedekind-Peano-Axiome (mit welchem ausgezeichneten Element und mit welcher Nachfolgerabbildung?) erfüllt.

Aufgabe 7.4. Es sei N ein Modell für die natürlichen Zahlen und es sei W die Menge der Wochentage mit dem Montag als Starttag und dem Nachfolgetag als Nachfolgerabbildung.

(1) Zeige, dass der Beweis zu Satz 7.2 eine wohldefinierte Abbildung

$$\varphi\colon N \longrightarrow W$$

festlegt, die 0 auf Montag abbildet und die Nachfolgerabbildung respektiert. Ist diese Abbildung surjektiv, ist sie injektiv? Wenn nicht, an welcher Stelle bricht der Beweis zusammen?

(2) Zeige, dass der Beweis zu Satz 7.2 keine wohldefinierte Abbildung

$$\varphi\colon W \longrightarrow N$$

festlegt, die die Nachfolgerabbildung respektiert und den Montag auf 0 abbildet. An welcher Stelle bricht der Beweis zusammen?

Aufgabe 7.5. Für $k \in \mathbb{N}_+$ sei

$$a_k = \frac{k-1}{k}.$$

Berechne

$$\sum_{k=1}^{4} a_k \,.$$

Aufgabe 7.6. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,,$$

(2)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$

(3)

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

Aufgabe 7.7.*

Zeige mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{bei } n \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

AUFGABE 7.8.*

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

AUFGABE 7.9. Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in eine Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

AUFGABE 7.10. Analysiere den Beweis zu Satz 6.9 als Induktionsbeweis.

Die beiden folgenden Aufgaben sind intuitiv klar. Es geht darum, die Endlichkeit durch Angabe einer bijektiven Abbildung zwischen der Menge und einer Menge der Form $\{1, \ldots, k\}$ zu begründen. Für die folgende Aufgabe ist Lemma 6.8 hilfreich.

AUFGABE 7.11. Zeige durch Induktion nach n, dass jede Teilmenge T von $\{1, \ldots, n\}$ endlich ist.

AUFGABE 7.12. Es sei M eine endliche Menge und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T ebenfalls endlich ist.

AUFGABE 7.13. Die Schüler und Schülerinnen der Klasse 4c machen auf der Insel Juist eine Wattwanderung mit Wattführer Heino. Heino sagt, dass die Sandklaffmuschel, die eingegraben im Sand lebt, besonders schwer zu finden ist und er deshalb an der Stelle immer einen Pfeil in den Sand zeichnet, um sie das nächste Mal wiederzufinden. Die aufmerksamen Schüler und Schülerinnen fallen da natürlich nicht drauf rein und sagen, dass das nicht sein kann, da ja dann immer die Flut kommt und den Pfeil wegwischt. Gabi Hochster hingegen kommt mit dem Einwand, wie er denn dann zum ersten Mal überhaupt die Muschel gefunden hat.

Bringe die Einwände der Klasse mit dem Begriff der vollständigen Induktion in Zusammenhang.

Aufgabe 7.14. In der folgenden Argumentation wird durch Induktion bewiesen, dass alle Pferde die gleiche Farbe haben. „Es sei $A(n)$ die Aussage, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Wenn nur ein Pferd da ist, so hat dieses eine bestimmte Farbe und die Aussage ist richtig. Für den Induktionsschritt sei vorausgesetzt, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Es seien jetzt $n+1$ Pferde gegeben. Wenn man eines herausnimmt, so weiß man nach der Induktionsvoraussetzung, dass die verbleibenden n Pferde untereinander die gleiche Farbe haben. Nimmt man ein anderes Pferd heraus, so haben die jetzt verbleibenden Pferde wiederum untereinander die gleiche Farbe. Also haben all diese $n+1$ Pferde überhaupt die gleiche Farbe."

Aufgabe 7.15. Eine natürliche Zahl heißt *besonders*, wenn sie eine für sie spezifische, benennbare Eigenschaft erfüllt. Die 0 ist als neutrales Element der Addition und die 1 ist als neutrales Element der Multiplikation besonders. Die 2 ist die erste Primzahl, die 3 ist die kleinste ungerade Primzahl, die 4 ist die erste echte Quadratzahl, die 5 ist die Anzahl der Finger einer Hand, die 6 ist die kleinste aus verschiedenen Faktoren zusammengesetzte Zahl, die 7 ist die Anzahl der Zwerge im Märchen, u.s.w., diese Zahlen sind also alle besonders. Gibt es eine Zahl, die nicht besonders ist?

Aufgabe 7.16. In der Planung für einen Laufwettbewerb wurden die folgenden Bahnen vergeben.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(k)$	N	C	Z	G	R	D	M	S

Leider wurden C und R des Dopings überführt und dürfen nicht teilnehmen. In dieser Situation möchte man auf die Außenbahnen 7 und 8 verzichten. Erstelle aus der Nummerierung F eine möglichst einfache neue Nummerierung (also eine bijektive Abbildung) für die neue Situation.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.17. (2 Punkte)

Für $k = 1, \ldots, 8$ sei

$$a_k = 2^k - 5k.$$

Berechne

$$\sum_{k=1}^{8} a_k \,.$$

Aufgabe 7.18. (2 Punkte)

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei

$$a_k = \frac{k}{2k+1}.$$

Berechne

$$\sum_{k=0}^{5} a_k \,.$$

Aufgabe 7.19.* (3 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 7.20. (3 Punkte)

Sei x eine reelle Zahl, $x \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

AUFGABE 7.21. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N}_+)$ mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

Abbildungsverzeichnis