Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 49

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 49.1. Berechne das Polynom

$(3X^2 - 5X + 4) \cdot (X^3 - 6X^2 + 1) - (4X^3 + 2X^2 - 2X + 3) \cdot (-2X^2 - 5X)$

im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 49.2.*

Bestimme für das Polynom

$$P = 7X^{11} - 3X^8 + \frac{3}{2}X^6 - X + 5$$

den Grad, den Leitkoeffizienten, den Leitterm und den Koeffizienten zu X^5.

Aufgabe 49.3. Berechne das Produkt

$$(X^6 + X^3 + X^2 + X + 1) \cdot (X^5 + X^4 + X^2 + 1)$$

im Polynomring $\mathbb{Z}/(2)[X]$.

Aufgabe 49.4. Berechne das Produkt

$$(2X^3 + 4X + 5) \cdot (X^4 + 5X^2 + 6)$$

im Polynomring $\mathbb{Z}/(7)[X]$.

Aufgabe 49.5. Beweise die Formel

$$X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + X^{n-3} + \cdots + X^2 + X + 1).$$

Aufgabe 49.6. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich 0 sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

Aufgabe 49.7. Zeige, dass eine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

über einem Körper K maximal zwei Lösungen besitzt.

Aufgabe 49.8. Es sei K ein angeordneter Körper und $R = K[X]$ der Polynomring über K. Sei

$$P = \{F \in K[X] \mid \text{Der Leitkoeffizient von } F \text{ ist positiv}\}.$$

Zeige, dass P die drei folgenden Eigenschaften besitzt

(1) Entweder ist $F \in P$ oder $-F \in P$ oder $F = 0$.
(2) Aus $F, G \in P$ folgt $F + G \in P$.
(3) Aus $F, G \in P$ folgt $F \cdot G \in P$.

Aufgabe 49.9. Löse die quadratische Gleichung $3x^2 - 6x + 2 = 0$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 49.10. Löse die quadratische Gleichung $4x^2 + 5x + 2 = 0$ über $\mathbb{Z}/(7)$.

Aufgabe 49.11. Löse die reelle quadratische Gleichung $7x^2 + 5x - 4 = 0$ durch quadratisches Ergänzen.

Aufgabe 49.12. Lucy Sonnenschein möchte sich ein quadratisches Grundstück kaufen. Drum rum möchte sie einen Heckenzaun pflanzen. Der Quadratmeterpreis beträgt 200 Euro, ein Meter Hecke kostet 30 Euro und die Eintragung ins Grundbuch kostet 1000 Euro. Lucy möchte eine Million Euro investieren. Welche Seitenlänge hat das Grundstück?

Aufgabe 49.13.*

Bestimme den minimalen Wert der reellen Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{4}{3}.$$

Eine Gleichung der Form

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

heißt *biquadratische Gleichung*.

Aufgabe 49.14. Löse die biquadratische Gleichung $x^4 + 7x^2 - 11 = 0$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 49.15.*

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$x^2 = x$$

über $\mathbb{Z}/(6)$.

Aufgabe 49.16. Eliminiere in der kubischen Gleichung

$$x^3 + 6x^2 - 5x - 2 = 0$$

den quadratischen Term.

Aufgabe 49.17.*

Forme die Gleichung

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^4 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Aufgabe 49.18.*

Forme die Gleichung

$$x^5 + 10x^4 + x - 5 \,=\, 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^5 + b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 \,=\, 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Aufgabe 49.19.*

Es sei

$$x^2 + px + q \,=\, 0$$

eine quadratische Gleichung über einem Körper K, und es sei $r \neq 0$ eine Lösung davon. Zeige, dass auch $\frac{q}{r}$ eine Lösung der Gleichung ist.

Bei den folgenden Aufgaben überlege man sich auch, was die Äquivalenzrelationen für die Graphen der Funktionen bedeuten.

Aufgabe 49.20. Es sei K ein Körper und sei

$$\text{Abb}\,(K, K) \,=\, \{f : K \to K |\, f \text{ Funktion}\}$$

die Menge der Abbildungen von K nach K. Wir betrachten die Relation auf Abb (K, K), die durch $f \sim g$, falls es ein $d \in K$ mit

$$f \,=\, g + d$$

gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 49.21. Es sei K ein Körper und sei

$$\text{Abb}\,(K, K) \,=\, \{f : K \to K |\, f \text{ Funktion}\}$$

die Menge der Abbildungen von K nach K. Wir betrachten die Relation auf Abb (K, K), die durch $f \sim g$, falls es ein $c \in K$ mit

$$f(x) \,=\, g(x + c)$$

für alle $x \in K$ gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 49.22. Es sei K ein Körper und sei

$$\text{Abb}\,(K, K) \,=\, \{f : K \to K |\, f \text{ Funktion}\}$$

die Menge der Abbildungen von K nach K. Wir betrachten die Relation auf Abb (K, K), die durch $f \sim g$, falls es ein $c, d \in K$ mit

$$f(x) \,=\, g(x + c) + d$$

für alle $x \in K$ gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 49.23. Wir betrachten auf der Menge der quadratischen Polynome über dem Körper K die Äquivalenzrelation aus Aufgabe 49.22. Finde für jedes quadratische Polynom einen besonders einfachen Repräsentanten.

Aufgabe 49.24. Beweise die Umkehrung des Satzes von Vieta: Wenn eine normierte quadratische Gleichung

$$X^2 + pX + q = 0$$

gegeben ist und wenn $r, s \in \mathbb{R}$ Zahlen sind mit

$$r + s = -p$$

und

$$rs = q,$$

so sind r und s die Lösungen der Gleichung.

Aufgabe 49.25. Finde ganzzahlige Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

mit Hilfe des Satzes von Vieta.

Aufgabe 49.26. Finde ganzzahlige Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 101x + 100 = 0$$

mit Hilfe des Satzes von Vieta.

Aufgabe 49.27. Sei $d \in \mathbb{R}$. Finde ganzzahlige Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - (d+1)x + d = 0$$

mit Hilfe des Satzes von Vieta.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 49.28. (2 Punkte)

Berechne das Polynom

$$(3X^4 + 4X + 5) \cdot (2X^4 + 7X^3 + 10X^2 + 6X + 8) + 3X^2 \cdot (4X^2 + 5)$$

im Polynomring $\mathbb{Z}/(11)[X]$.

Aufgabe 49.29. (2 Punkte)

Löse die reelle quadratische Gleichung $\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{4}{5} = 0$ durch quadratisches Ergänzen.

Aufgabe 49.30. (1 Punkt)

Löse die quadratische Gleichung $2x^2 + 3x + 3 = 0$ über $\mathbb{Z}/(5)$.

Aufgabe 49.31. (3 Punkte)

Forme die Gleichung

$$x^3 - 7x^2 + 3x + 4 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^3 + b_1 y^1 + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Aufgabe 49.32. (1 Punkt)

Finde ganzzahlige Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 12x + 27 = 0$$

mit Hilfe des Satzes von Vieta.

Aufgabe 49.33. (8 Punkte)

Zwei Personen A und B spielen Polynome-Erraten. Dabei denkt sich A ein Polynom $P(x)$ aus, wobei alle Koeffizienten aus $\mathbb{N}$ sein müssen. Person B darf fragen, was der Wert $P(n_1), P(n_2), \ldots, P(n_r)$ zu gewissen natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist. Dabei darf B diese Zahlen beliebig wählen und dabei auch vorhergehende Antworten berücksichtigen. Ziel ist es, das Polynom zu erschließen.

Entwickle eine Fragestrategie für B, die immer zur Lösung führt und bei der die Anzahl der Fragen (unabhängig vom Polynom) beschränkt ist.