Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 7

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 7.1. Man gebe im $\mathbb{R}^3$ drei Vektoren an, so dass je zwei von ihnen linear unabhängig sind, aber alle drei zusammen linear abhängig.

Übungsaufgaben

Aufgabe 7.2. Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^2$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Aufgabe 7.3. Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^3$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Aufgabe 7.4. Entscheide, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind.

(1) $(-1, 1, -1)$, $(0, 6, 4)$, $(1, 2, 3)$, im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.
(2) $1 + \mathrm{i}$, $1 + 2\mathrm{i}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.
(3) $1 + \mathrm{i}$, $1 + 2\mathrm{i}$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.
(4) 1, $\sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

Aufgabe 7.5. Zeige, dass die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 7.6.*

Es sei V ein K-Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn es einen Untervektorraum $U \subseteq V$ gibt, für den die Familie eine Basis bildet.

Aufgabe 7.7. Bestimme eine Basis des Untervektorraums $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7.8. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$3x + 4y - 2z + 5w \;=\; 0.$$

Aufgabe 7.9. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$-2x + 3y - z + 4w = 0 \text{ und } 3z - 2w = 0\,.$$

Aufgabe 7.10. Zeige, dass im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.11. Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 + 7\mathrm{i} \\ 3 - \mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 15 + 26\mathrm{i} \\ 13 - 7\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.12. Es sei K ein Körper. Man finde ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgabe 7.13.*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Untervektorräume

$$U = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$V = \left\{ p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Aufgabe 7.14. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.
(2) Die leere Familie ist linear unabhängig.
(3) Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.
(4) Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.
(5) Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.
(6) Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.

Aufgabe 7.15.*

Es sei $U \subseteq \mathbb{Q}^n$ ein Untervektorraum. Zeige, dass U eine Basis aus Vektoren besitzt, deren Einträge allesamt ganze Zahlen sind.

Aufgabe 7.16. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Es sei λ_i, $i \in I$, eine Familie von Elementen $\neq 0$ aus K. Zeige, dass die Familie v_i, $i \in I$, genau dann linear unabhängig (ein Erzeugendensystem von V, eine Basis von V) ist, wenn dies für die Familie $\lambda_i v_i$, $i \in I$, gilt.

Aufgabe 7.17. Es sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und

$$\psi_{\mathfrak{v}} \colon K^n \longrightarrow V, \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \longmapsto s_1 v_1 + s_2 v_2 + \cdots + s_n v_n,$$

die zugehörige bijektive Abbildung im Sinne von Bemerkung 7.12. Zeige, dass diese Abbildung die komponentenweise Addition im K^n in die Vektoraddition in V überführt, dass also

$$\psi_{\mathfrak{v}}\left(\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}\right) = \psi_{\mathfrak{v}}\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} + \psi_{\mathfrak{v}}\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 7.18. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des K^n und

$$\psi_{\mathfrak{v}} \colon K^n \longrightarrow K^n, \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \longmapsto s_1v_1 + s_2v_2 + \cdots + s_nv_n,$$

die zugehörige bijektive Abbildung im Sinne von Bemerkung 7.12. Zeige, dass diese Abbildung im Allgemeinen nicht mit der komponentenweisen Multiplikation im K^n verträglich ist.

Aufgabe 7.19. Es sei V ein K-Vektorraum und sei v_n, $n \in \mathbb{N}_+$, eine Basis von V. Es sei u_n, $n \in \mathbb{N}_+$, eine weitere Vektorenfamilie aus V. Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ gelte

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle.$$

Zeige, dass auch u_n, $n \in \mathbb{N}_+$, eine Basis von V ist.

Aufgabe 7.20. Es sei $\mathbb{R}[X]$ der Polynomring über $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$F_n = 1 + 2X + 3X^2 + \cdots + (n+1)X^n.$$

Zeige, dass F_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis des $\mathbb{R}[X]$ bildet.

Aufgabe 7.21. Formuliere und beweise Satz 7.11 für eine beliebige (nicht notwendigerweise endliche) Vektorenfamilie v_i, $i \in I$.

Aufgabe 7.22.*

Betrachte die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen $\ln p$, wobei p durch die Menge der Primzahlen läuft, linear unabhängig ist. Tipp: Verwende, dass jede positive natürliche Zahl eine eindeutige Darstellung als Produkt von Primzahlen besitzt.

Aufgabe 7.23. Man mache sich an den folgenden Beispielen klar, dass der Satz von Hamel keineswegs selbstverständlich ist.

(1) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum betrachtet.
(2) Die Menge der reellen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,|\, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

(3) Die Menge aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Aufgabe 7.24.*

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = K^{\mathbb{N}_+}$$

der Vektorraum aller Folgen in K (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

a) Zeige (ohne Sätze über konvergente Folgen zu verwenden), dass die Menge der Nullfolgen, also

$$U = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \,|\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ konvergiert gegen } 0 \right\}$$

ein K-Untervektorraum von V ist.

b) Sind die beiden Folgen

$$(1/n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ und } (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}_+}$$

linear unabhängig in V?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.25. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.26. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 - 7\mathrm{i} \\ -3 + 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 5 + 6\mathrm{i} \\ 3 - 17\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.27. (2 Punkte)

Zeige, dass im Raum der $m \times n$-Matrizen $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ die Matrizen E_{ij}, die genau an der Stelle (i,j) den Eintrag 1 und sonst überall den Eintrag 0 haben, eine Basis bilden.

Aufgabe 7.28. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{Q}^n$ der n-dimensionale Standardraum über $\mathbb{Q}$ und sei $v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{Q}^n$ eine Familie von Vektoren. Zeige, dass diese Familie genau dann eine $\mathbb{Q}$-Basis des $\mathbb{Q}^n$ ist, wenn diese Familie aufgefasst im $\mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet.

Aufgabe 7.29. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ein von 0 verschiedener Vektor. Man finde ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit $n-1$ Gleichungen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgabe 7.30. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{R}[X]$ der Polynomring über $\mathbb{R}$. Wir setzen $P_0 = 1$ und für $n \in \mathbb{N}_+$ setzen wir

$$P_n = (X-1)(X-2)\cdots(X-n).$$

Zeige, dass P_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis des $\mathbb{R}[X]$ bildet.

Tipp: Verwende Aufgabe 7.19