

實變分析 上卷

(高等微積分)

序

不佞猥以樸駘承乏講席自愧述而不作不克有所舉論今編次講義又復不能信而好古此其尤不可者也

孔子嘗云吾道一以貫之研討數學不啻尋其一以貫之者輒近集論肇興數學遭未曾有之變革誠以非經集論考察理論不能目爲有確切之基礎集論其殆近乎一以貫之之數學者歟

潮流所趨即大學教本亦不能百年一日墨守成規置集論於不顧且也吾國學術落後無須諱言譬之病軀乃大虛之證亟待峻補必使學者從速領會基本概念以爲深造之階遍觀行於我學界之海內外教本鮮有愜意者不佞自謂不能信而好古者此也

分析入門以闡明極限爲首要本卷於此再三致意舉凡變分法三角函級幾何學上諸應用向見於高等微積分者與其語焉不詳不如求諸專籍概不論及微分一語略而未言蓋露而見醜不若晦之藏拙又如「一函於積分之應用等以其無關大體並見於十九世紀傳統諸書俱付闕如 MACH 所

謂思惟經濟今則約略述其端倪俾得稍習近世抽象數學舉
一反三之長

不佞學識謏陋謬不違古寧免洪鑪躍冶之譏然愚者千
慮亦不得盡斥爲狂妄大雅幸不棄而教正之。

民國三十三年夏

楊宗磐識

目 次

第一章 集

§1. 集之基本運算

2. 函

3. 員

4. 序集

第二章 實數及極限

§1. 連續性

2. 優劣限

3. 數級

4. 無理數論

第三章 點集

§1. 歐氏空間之定義

2. 點集之重要性質

3. 連集

第四章 變及函

§1. 連續函

2. 函列之斂

3. 圍變函

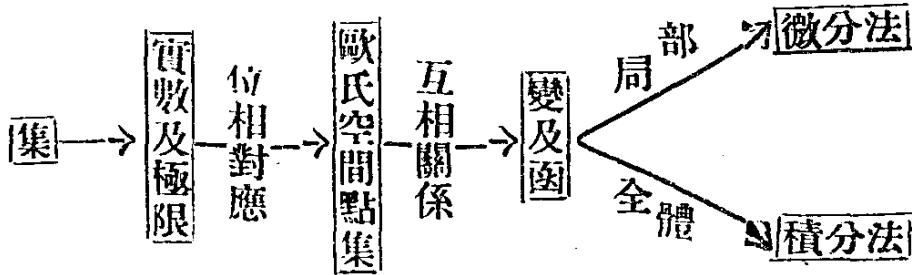
第五章 微分法

- §1. 導函
- 2. 中值定理
- 3. 昇降函
- 4. 隱函

第六章 積分法

- §1. 測度
- 2. 定積分
- 3. 一致斂及重積分
- 4. 廣義積分
- 5. 積域之更換

本卷內容論理統系圖示



第一章 集

整數，有理數，實數之定義均視為已知，由有理數做實數當於第二章論及之

§1. 據 G. Cantor 集是由總括個體成一整個的而成。對於每個個體只假設其可為思考對象辨別其異同。個體之間並沒有關係。任一個體 a 與集 A 之間有下面兩種關係：

- i) a 屬於 A $a \in A$
 ii) a 不屬於 A $a \notin A$
- 用符號 表示之

任意兩集 A, B 之間有下面四種關係：

- i) A 之元均含於 B 稱 A 含於 B 用 $A \subset B$ 表示之
 ii) $B \subset A$
 iii) $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 同時 B 之元均含於 A 稱 A 等於 B
 用 $A = B$ 表示之
 iv) 有 $a \in A$ 而 $a \notin B$ 同時有 $b \in B$ 而 $b \notin A$ 稱 A 不等於 B
 用 $A \neq B$ 表示之

由此知道 $A = B$ 是 $A \subset B, B \subset A$ 同時成立的又一個表示方法。由定義知道集由所含個體確定。因此有時將個體明白寫出例如：

$$\text{自然數集： } N = \{ 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots \}$$

一, + 間之奇數集: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

A 含於 B 的時候或稱 A 爲 B 之下集, B 爲 A 之上集, 若知道此時確有一個 $b \in B$ 而 $\bar{b} \in A$ 則稱 A 爲 B 之真下集, 由 B 取去屬於 A 所剩下的, 叫做 B 中 A 之餘集, 以符號 $B - A$ 表示之。

若 A 與 B 相等 $B - A$ 不含任一個體爲便利起見, 叫做空集, 以 0 表示之。屬於 A 或屬於 B 所構成之集叫做 A, B 之和, 以

符號 $A + B$ 或 $A \vee B$ 表示之。

同時屬於 A 而屬於 B 之元所構成之集叫做 A, B 之交, 以符號 AB 或 $A \cdot B$ 或 $A \wedge B$ 表示之。

前者或用 Σ 後者或用 Π 表示和與交兩種運算滿足交換結合及二者之間之分配諸律:

$$A + B = B + A \quad AB = BA,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C,$$

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

$$(A + B)C = AC + BC,$$

$$AB + C = (A + C)(B + C).$$

De Morgan 定律 A_1, A_2 同爲 E 之下集, 設 $B_1 = E - A_1, B_2 = E - A_2$, 則有

(1)

$$E = \sum_i A_i + \prod_i B_i = \prod_i A_i + \sum_i B_i$$

以上所說概念可推廣到任意個集。

§2. 以下預備介紹函概念先做由兩個體所構成之元二者之間有一定秩序不得變動稱曰序對 (a, b) 。兩個序對

當 $a = a', b = b'$ 時而只此時 $(a, b) = (a', b')$

(a, b) 與 $\{a, b\}$ 不同 $\{a, b\}$ 沒有秩序關係

設 P 為序對之集， $(a, b) \in P$ ，我等稱 b 為 a 之像。 a 為 b 之原像。令屬於 P 之序對中第一個元之集叫做 A ，第二個元之集叫做 B 。於是由屬於 A 之每個元確定其像，由屬於 B 之每個元確定其原像。兩集 A, B 之間由序對集 P 所確定之關係叫做由 A 至 B 上之變換。若每個 a 只有一個像 b 用符號

$$b = f(a)$$

表示這個關係。稱 f 為在集 A 定義之一意函。 A 是 f 的義域， B 是 f 的值域。若 b 更只有一個原像 a 。再用符號

$$a = g(b)$$

表示這個關係。於是得到一個在集 B 定義之一意函。二

(4)

者互為反函。或稱 f (g 亦然) 為一價。或稱 A, B 間有一對一關係。以符號 $A \sim B$ 表示之。

若每個 a 確定不止一個像，符號 $b = f(a)$ 也可以保留。 $f(a)$ 則代表多數 B 中之元。此時稱 f 為多意函。對於 g 亦同。應用最多的是 f 一意而多價。

利用序對概念及其推廣更可得集之積及冪(以下簡作 \rightarrow)。今有 A, B 做序對 (a, b) a 則動於所有 A 之元 b 則動於所有 B 之元。序對之集 P 叫做 A, B 之積以

符號 $P = (A, B)$ 或 $A \times B$ 表示之

若就變換考之，知道一般是多意多價

兩個以上因子之積也不難。例如 A, B, C 時做複元(a, b, c)就成。

$a = a', b = b', c = c'$ 成立時而只此時謂 $(a, b, c) \sim (a', b', c')$

交換，結合兩律則於 \sim 關係下成立

$(A, B) \sim (B, A)$ $((A, B), C) \sim (A, (B, C)) \sim (A, B, C)$

由 B 至 A 之一意變換 φ 確定 $b \in B$ 之像稱之曰 af 。所以由 φ 確定一集 $P_\varphi = \{ ab \}$ ， $\varphi \neq \varphi'$ 時 $P_\varphi \neq P_{\varphi'}$ $\{ P_\varphi \} = AB$ 稱之曰(以 A 為底 B 為指之) \rightarrow 。

定理 $A = \{ a, b \}$ AH 與 M 之下集所構成集系有一對一關

(1)

係。

證明. A^m 爲 $f(m)=a$ 或 b 之集。每個變換 $f(m)$ 確定一個 M_a 其中 m 滿足 $f(m)=a$, M_a 之餘集 M_b 其中 m 滿足 $f(m)=b$, 顯然

$$M = M_a + M_b \quad \text{且} \quad M_a M_b = 0.$$

反之 M_a 爲 M 任一下集, $M_b = M - M_a$. 我等可定義一變換

$$f(m) = a \quad (m \in M_a), \quad f(m) = b \quad (m \in M_b) \text{ (畢)}$$

§3. 在前 §2 得到 \sim 概念。這個概念滿足等值之律

I. $A \sim A$;

II. $A \sim B$ 時 $B \sim A$;

III. $A \sim B, B \sim C$ 時 $A \sim C$.

因此又可將集分類。簡稱屬於一類之集叫做同員。換言之對於每個 M 對應一個 m 。 $M \sim N$ 時只此時對應者相同。或說 m 是 M 的員。空集的員以 0 代表。與 $\{1, 2, \dots, n\}$ 同員的以 n 代表。這樣的叫做有限集。自然數集的員叫做 \aleph 。或 ω 或稱可數。實數的員叫做 \aleph , 或 \mathbb{C} 或稱連續員。

Dedekind 無限集定義, 凡含一可數下集者謂之無限集。無限與非有限相同之證明從略。

例 (i) 數列即一個員是 \mathcal{A} 的數集所以可以寫成

$$\{ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \}.$$

(ii) 集列同 (i) 可以寫成

$$\{ A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \}$$

由一集列可以得兩新集

優限集 $\lim A_n$

爲含於無窮個 A_n 之 x 所成的集

劣限集 $\overline{\lim} A_n$

爲含於差不多所有 A_n 之 x 所成的集。由定義顯然得

$$\overline{\lim} A_n \supseteq \lim A_n, \quad \overline{\lim} A_n = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\overline{\lim} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{u=n}^{\infty} A_k,$$

$\lim A_n = \overline{\lim} A_n$ 時稱之爲 $\{ A_n \}$ 之限集用 $\overline{\lim} A_n$ 表示之。

定理 1 (F. Bernstein) 兩集 $A_1 B$ 。A 有一個下集 A_1 與 B 同員。B 有一個下集 B_1 與 A 同員則 $A_1 B$ 同員。

證明：若定理所云下集不是真下集已不需證。

由 $B \sim A_1$ 得 $B_1 \sim A_2$ 。 A_2 爲 A_1 之真下集，所以 $A \supset A_1 \supset A_2$ ，
 $A_2 \sim B_1 \sim A$ ，因此將下云事實證明就成。

(1)

$$A \supset A_1 \supset A_2, A \sim A_2 \text{ 時 } A \sim A_1$$

由 $A \sim A_2$ 得 $A_1 \sim A_3 \sim A_2$, 於是輾轉得 $A_3 \sim A_1, A_5 \sim A_4,$
並且

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \dots$$

設
$$D = A \cap \bigcap_i A_i$$

於是
$$A = D + (A - A_1) + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \dots$$

$$A_1 = D + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \dots$$

但是
$$A - A_1 \sim A_2 - A_3; \quad A_2 - A_3 \sim A_4 - A_5; \dots$$

$$\therefore A \sim A_1 \quad (\text{畢})$$

由這個定理可以想到任兩集之間有下面四種情形：

(i) 沒有 $A_1 \sim B$, 但有 $-B_1 \sim A$.

(ii) 有 $-A_1 \sim B$, 沒有 $B_1 \sim A$.

(iii) 有 $-A_1 \sim B$, 有 $-B_1 \sim A$.

(iv) 既沒有 $A_1 \sim B$ 又沒有 $A \sim B_1$.

若用 σ_a, b 分別表示 A, B 員時我等定義(i)表示 $\sigma_a < b$,
 (ii) 表示 $\sigma_a > b$ (iii) 正是定理的情形表示 $\sigma_a = b$. (iv) 與
 前三者均不合, 但更利用其他公理及概念等可證無 (iv)
 之出現。

員之和的定義 集 M 與 N 的員分爲 m, n 和 $m+n$

$$(1)$$

是和集 $M+N$ 的員，但是 M 及 N 互無相同的元，本定義中代 M, N 以 $M_1 \sim M, N_1 \sim N$ 顯然無關。

例：自然數集可以分成 $\{1, 2, \dots, n\} + \{n+1, n+2, \dots\}$ 所以

$$n + \aleph_0 = \aleph_0 + n = \aleph_0.$$

又可以分成偶數奇數兩部所以

$$\aleph + \aleph_0 = \aleph_0.$$

用 $y = z/(1 - |z|)$ 可將含於 $-1, 1$ 之間的實數 z 一對一的變換到所有的實數上，任意兩個不等的實數 $a < b$ 之間的實數 x 用

$$z = 2x/(b-a) + (a+b)/(a-b)$$

一對一的變換到 $-1, 1$ 間的實數，所以員全相等。

$-1, 1$ 之間的實數可以分成三部 $-1, 0$ 之間， 0 本身 0 與 1 之間之實數，所以

$$\aleph = \aleph + 1 + \aleph \geq \aleph + \aleph \geq \aleph + \aleph_0 \geq \aleph + \aleph \geq \aleph.$$

由定理 1 全相等。

員之積的定義 M, N 的員分爲 m, n 積 $m \cdot n$ 就是集積 (M, N) 的員。

員之 \rightarrow 的定義，兩員 σ, m 之 $\rightarrow \sigma^m$ 就是集 $\rightarrow A^m$ 的員。

又 $(\mathcal{K})\mathcal{K}_0 = (2\mathcal{K}_0)\mathcal{K}_0 = 2\mathcal{K}_0\mathcal{K}_0 = 2\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$.

所以 $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}_0, \mathcal{K} \leq \mathcal{K}^2 \leq \mathcal{K}^3 \leq \dots \leq \mathcal{K}^r \leq \dots \mathcal{K}\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$

又 $\mathcal{K}s' = (2s'_0)s' = 2s'_0s' = 2s'$.

§4. 集 E 內設有一規則其中任兩元 a, b 有 $a < b$ 關係時稱 E 為序集，但此規則必須合

1. $a < b$ 與 $b < a$ 不兩立。

2. $a < b, b < c$ 時 $a < c$.

如數之大小關係即其一例， E 中某元 a 更無 $x < a$ 時稱 a 為最前元，同理得最後元，兩集 A, B 間有一對一之變換且此變換使相對應之每對秩序關係不變時稱 A, B 兩集相似用符號 $A \cong B$ 表示之，顯然 \cong 關係滿足等值三律故可分類，屬於一類之集稱之曰同型，集 E 之序型依 Cantor 以 \bar{E} 表示之。

E 中任兩元間至少又有一 E 的元時稱 E 為稠。

今將 E 分成兩部 A, B , A 中各元 a 均 $a < b$ ($b \in B$), 用符號 (A, B) 表示稱之曰劃，可具有下列四種情形。

- 1° A 有一最後元， B 有一最前元。
- 2° A 無最後元， B 無最前元。
- 3° A 無最後元， B 有一最前元。
- 4° A 有一最後元， B 無最前元。

(1)

1° 時稱由此割得一『躍』2° 時由此割得一『隙』， E 之割永爲 3°，4° 時稱 E 爲連續。

今有集稠而非連續，可用下法加以新元使之連續，設此稠集爲 D ，主隙之割入 $\lambda = [A_1 B]$ 所成之集爲 L ，做新集

$$C = D + L.$$

賦 C 以秩序如下法，屬於 D 之兩元秩序關係仍舊，對於 $\lambda = [A_1 B] \in L$ 及 $d \in D$ 則

$$d \in A \text{ 時} \quad d < \lambda.$$

$$a \in B \text{ 時} \quad \lambda < d.$$

對於不相同的 $\lambda = [A, B], \lambda_1 = [A_1, B_1], A, A_1$ 亦不相同，此時必得 $A < A_1$ 或 $A_1 < A$ 的關係於是由

$$A < A_1 \text{ 時} \quad \lambda < \lambda_1$$

$$A_1 < A \text{ 時} \quad \lambda_1 < \lambda$$

規定之

C 之任兩元間至少有一 D 之元已甚明顯，更證 C 無一隙假若不然由 C 之割 (σ, α) 得一隙，做 $A = \sigma, D = B$ 於是得一割 $[A_1 B]$ ，取 $a \in A, a$ 同時屬於 σ ， (σ, α) 既爲一隙 σ 中必有 $\alpha > a$ ，於是 a, α 之間必有一 D 之元， a_1 滿足 $a < a_1 < \alpha$ ，所以 $a_1 \in A$ 因此知道 A

(1)

無最後元，同理可證 B 無最前元，割入 $= (A_1 B)$ 屬於 L 故屬於 C ，所以屬於 σ_1 或 σ_2 ，假設 $\lambda \in \sigma_2$ σ_2 中既無最後元故有一屬於 σ_2 之 λ_1 ，而 $\lambda_1 > \lambda$ 於是更有一 $a' \in D$ 滿足 $\lambda < a' < \lambda_1$ 關係是不合理。

第二章 實數及極限

§ 1. 由自然數出發用四則得有理數為讀者所熟知，現在將有理數的重要性質再重複一遍。

秩序性 a, b 代表兩個相等的有理數我們寫做 $a = b$ ，不然的時候 $a \neq b$.

i. $a \neq b$ 的時候 $a < b$ 或 $a > b$ 但不同時成立

ii. $a < b, b < c$ 時 $a < c$.

稠密性 $a \neq b$ 時 a, b 之間至少有一有理數.

Archinudes 定理, a 正(負)有理數, 一定有一個正(負)整數 n 滿足 $n > a (n < a)$. 四則. 和 a, b 有理數, $a + b$ 也是有理數, 由 a, b 一意確定且滿足

$$a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a + 0 = a.$$

$$a < b \text{ 的時候 } a + c < b + c.$$

差 $a - b$ 也是有理數, 由 a, b 一意確定, 簡寫 $0 + b$ 做 $-b$

積 a, b 也是有理數由 a, b 一意確定並且滿足

$$ab = ba, \quad a(bc) = (ab)c, \quad 1 \cdot a = a, \quad a \cdot 0 = a,$$

$$(a + b)c = ac + bc.$$

$$a < b, \quad c > 0 \text{ 時 } ac < bc$$

商 $b \neq 0, a/b$ 也是有理數, 由 a, b 一意確定, $b \frac{a}{b} = a$

(1)

有理數缺下面所說的連續性極限算法在有理數範圍內不方便，實數滿足這個性質，直接不能証，我們的方法是認有理數為已知由有理數造實數使他滿足這個性質，就是所謂無理數論(見本章§4)

一個數集所有的數都比一個固定的數小(大)或相等的時候，我們叫這個數集囿於上(下)，這個固定的數叫做高(低)界，數列 $\{ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \}$ 若有

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \quad (a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots)$$

關係的時候我們叫他做遞昇(降)數列，

連續性I. 囿於上(下)的遞昇(降)數列有一個限數，(或簡稱曰限)

限數的意思是一個數 a 滿足下云關係，任給一個 $\epsilon > 0$ 可找一正整數 N

$$| a_n - a | < \epsilon \quad (n > N),$$

顯然不能再有一個 $a' \neq a$ 滿足這個關係， a 是 $\{ a_n \}$ 的限時用符號 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 表示之

滿足連續性 I 的數集(固認為四則已知，並包括有理數)一定滿足

Archimedes 定理， ϵ, a 任意兩正數，一定有一個自然數 n 滿足 $n\epsilon > a$

(1)

證明，假若定理不能成立於是

$$\epsilon \leq ? \epsilon \leq 3 \epsilon \leq \dots \leq n \epsilon \leq \dots \leq a$$

由連續性 I 得到一數 l 滿足

$$|n\epsilon - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad (n > N)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= |(n+1)\epsilon - n\epsilon| \\ &\leq |(n+1)\epsilon - l| + |l - n\epsilon| \\ &< 2 \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad , \quad n > N \end{aligned}$$

是不合理 (畢)

由連續性 I 可以得到

連續性 II 圍於上(下)的數集 S 有一個上(下)限 $a(a')$ 滿足

- 1° $x \in S$ 永遠 $x \leq a (x \geq a')$
- 2° 對於任一 $t < a (t > a')$ 有一個 $x \in S$ 滿足 $t < x (x > t)$

顯然不能再有與 a 不同的數滿足 1°, 2° 上(下)限用符號 $\sup(\inf)S = a(a')$ 表示之

證明. S 既圍於上，我們叫他一個高界作 β . 由 S 取一數 α ，只討論 $\alpha < \beta$ 的情形就夠，做 $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ 得出

$$(1)$$

兩種情形

(i)₁ $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ 是 S 高界改寫 $\alpha = \alpha_1,$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \beta_1$$

(ii)₁ $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ 不是 S 的高界改寫 $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) =$

$$= \alpha_1, \beta = \beta_1$$

但是只成立一種情形，設已得出 $\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$ 用完全歸

納法做 α_n, β_n 做上做 $\frac{1}{2}(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})$

(i)_n $\frac{1}{2}(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})$ 是 S 的高界改寫 $\alpha_{n-1} = \alpha_n$

$$\frac{1}{2}(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) = \beta_n.$$

(ii)_n $\frac{1}{2}(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})$ 不是 S 的高界改寫 $\frac{1}{2}(\alpha_{n-1}$

$$+ \beta_{n-1}) = \alpha_n, \beta_{n-1} = \beta_n,$$

於是得出兩個數列

$$\alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots \leq \dots \leq \beta_n \leq \dots$$

$$\leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta$$

由連續性 I 得 A, B 兩數

$$|\alpha_n - A| < \epsilon, \quad (n > N_1); \quad |\beta_n - B| < \epsilon,$$

$$(n > N_2)$$

(4)

但是 $|\Lambda - B| \leq |\Lambda - \alpha_n| + |\alpha_n - \beta_n| + |\beta_n - \beta| < \epsilon$
 $+ \frac{1}{2^n}(\beta - \alpha) + \epsilon < 3\epsilon$

$$n > \max(N_1, N_2, \frac{\beta - \alpha}{\epsilon}).$$

$\therefore \Lambda = B = a$ 這就是所欲求的上限，

先証 1°. 若不然至少有一個 $x > a$ 於是選相當大 n

$$\beta_n - a < x - a$$

與 β_n 原定義不合 $\therefore \beta_n < x$.

次証 2°. 任取一 $t < a$ 可選一相當大 n

$$a - x_n < a - t$$

$$\therefore t < \alpha_n$$

α_n 不是高界至少有一 $x \in S, x \geq \alpha_n > t$. (畢).

由連續性 II 得到

連續性 III. 將數集分為下組 A 及上組 B 兩組都不空，下組的數都比上組的數小，每個數或屬於 A 或屬於 B 但只屬於一組，於是有一數 a 凡比 a 大的數都屬於 B ，比 a 小的數都屬於 A ， a 本身看做屬於 $A(B)$ 是 $A(B)$ 中最大(小)的。

證明：由假設 A 囿於上， B 囿於下，稱 A 的上限

(1)

做 n, B 的下限做 l . 倘

1° $n > l$. 由下限 l 的性質有一 $\beta \in B, \beta < n$ 再由 u 的性質有一 $\alpha \in A, \alpha > \beta$ 與原假設不合,

2° $n < l$ 任取一正有理數 $\eta < l - n$. 自下組 A 取一數 α 由 Archimedean 定理

$$\alpha, \alpha + \eta, \alpha + 2\eta, \dots, \alpha + n\eta, \dots$$

不固於上, 所以自某 n 以後全屬於 B . 設最初屬於 B 的是 $\alpha + m\eta, \alpha + (m-1)\eta \in A$. 換言之對任一 $\eta > 0$ 可自 A 取一 a', B 取一 b'

$$l - n > \eta = b' - a' > 0.$$

是不合理, 故只可 $l = u = a$ 這就是所欲求的(畢)

更有意思的是由連續性 III 又可以得到連續性 I. 由此知道三種連續性內容完全相同。

證明: 把可做遞昇數列 $\{a_n\}$ 高界的數全歸為上組其他的數做下組, 顯然滿足連續性 III 假設, 所確定的數 a 是下組最大的, 所以

倘若對某一 $\epsilon_0 > 0$ 有 $a_n \leq a - \epsilon_0 \quad (n=1, 2, \dots)$

$$a_n \leq a - \epsilon_0 < a \quad (n=1, 2, \dots)$$

時與 a 是上組最小的性質衝突, 所以對任一 $\epsilon < 0$ 必有一 N , 凡 $n > N$ 必

(1)

$$a - \epsilon < a_n \leq a \quad (n > N)$$

亦即 $|a - a_n| < \epsilon \quad (n > N)$. (畢)

§2. 本 § 及下 § 所云數集均為滿足連續性數集的下集，任一數列不一定有限數但是圍於上下的時候一定有一個優限及劣限，優限的定義是

$$b_n = \text{Anp} \{ a_n, a_{n+1}, \dots \}$$

$$\therefore b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots > K.$$

$\{b_n\}$ 的限叫做 $\{a_n\}$ 的優限，用符號 $\lim a_n$ 代表之，劣限的定義是

$$b'_n = \text{inb} \{ a_n, a_{n+1}, \dots \}$$

$$\therefore b'_1 \leq b'_2 \leq \dots \leq b'_n \leq \dots < K'.$$

$\{b'_n\}$ 的限叫做 $\{a_n\}$ 的劣限，用符號 $\lim a_n$ 代表之，顯然 $\overline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} a_n$.

特別若等號成立時叫做 $\{a_n\}$ 的限，這樣的數列叫做斂。

$$\lim a_n = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n.$$

究竟這個定義與前 § 定義是否相符請證

定理1. $\overline{\lim} a_n = a, \underline{\lim} a_n = a', \epsilon > 0$

1° $a_n < a + \epsilon \quad a_n > a' - \epsilon$ 差不多所有的 n .

2° $a_n > a - \epsilon \quad a_n < a' + \epsilon$ 無窮個 n .

(1)

證明： a 是 $\{b_n\}$ 的限所以對於 $\epsilon > 0$ 可選 $-N, >N$ 時

$$b_n < a + \epsilon$$

由 b_n 定義知道 $a_n < a + \epsilon \quad (n > N)$

又 $b_n > a - \epsilon/2$

所以 $\{a_1, a_2, \dots\}$ 中至少有一 $a_{i_1} > a - \epsilon$. 假設已取好 i_k 用歸納法取 $a_{i_{k+1}}$ 由 $b_{i_{k+1}}$ 的定義知道 $\{a_{i_k+1}, a_{i_k+2}, \dots\}$ 中至少有一個 $a_{i_{k+1}} > a - \epsilon$. 由此得出 $\{a_{i_k}\}$ 滿足。

次證充要，由 1° $a_k > a + \epsilon \quad n > N$

$\therefore b_n \leq a + \epsilon \quad u > N$

由 2° $a_{i_k} > a - \epsilon \quad (k = 1, 2, \dots)$

$\therefore b_{i_k} > a - \epsilon \quad (k = 1, 2, \dots)$

但是 $\{b_n\}$ 是遞降所以 $a - \epsilon < b_n \leq a + \epsilon$
 $n > \max(N, i_1) \quad (\text{畢}).$

定理 2 (Cauchy) 數列 $\{a_n\}$ 斂的必須充分條件是對任一 $\epsilon > 0$ 可選一 N 滿足

$$|a_p - a_q| < \epsilon \quad p, q > N.$$

證明：設 $\{a_n\}$ 的限是 a . 於是

$$|a_m - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad m, n > N$$

(1)

$$\therefore |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \epsilon,$$

次使 q 不動於是由

$$|a_p| < |a_q| + \epsilon \quad p > N$$

知 $\{a_n\}$ 中之數的絕值均小於

$$k = \max \{ |a_1|, \dots, |a_N|, |a_q| + \epsilon \}$$

設 $\overline{\lim} a_n = \alpha, \lim a_n = \beta$

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - a_p| + |a_p - a_q| + |a_q - \beta|$$

$$< \epsilon \quad p, q > N$$

$$\therefore \alpha = \beta, \quad (\text{畢})$$

以上只對於數列得到優(劣)限的概念，對任一數集亦可，今由囿於上下數集 S 任意選一由不同數組成之數列，求這個數列的優(劣)限，換種種數列一般得出種種不同的優(劣)限，這個優(劣)限囿於上(下)，叫這個集的上(下)限做 S 的優(劣)限，同樣得

定理3，設集 S 的優劣限分爲 $a, a' \quad \epsilon > 0, x \in S$

$$1^\circ \quad x < a + \epsilon, \quad x > a' - \epsilon \quad \text{差不多所有的 } x$$

$$2^\circ \quad x > a - \epsilon, \quad x < a' + \epsilon \quad \text{無窮個 } x,$$

證明，倘若有無窮個 $x \geq a + \epsilon > a$ ， S 的下集 $\{x\}$ 的優限顯然 $\geq a + \epsilon > a$ ，與 a 之原定義不合，

由 a 的定義至少有一個數列的優限 α 滿足 $\alpha > a -$

(1)

$\frac{\epsilon}{2}$ ，所以

$$\alpha > \alpha - \frac{\epsilon}{2} > a - \epsilon$$

由 α 的定義得 2° ，

次證充要，設集 S 的優限是 Λ ，假若

$$\Lambda > a + \epsilon，$$

至少有一個數列的優限

$$\alpha > a + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\alpha > \alpha - \frac{\epsilon}{4} > a + \frac{\epsilon}{4}$$

所以有無窮個 $x > a + \frac{\epsilon}{4}$ 與 1° 不合， $\therefore \Lambda \leq a + \epsilon$ 。

今若

$$\Lambda < a - \epsilon$$

$$\Lambda + \frac{\epsilon}{2} < a - \frac{\epsilon}{2}$$

但 Λ 既為優限由本定理前半滿足 1° 與此不等式相衝突

(1)

$$\therefore \Lambda \geq a - \epsilon,$$

ϵ 任意故 $a = \Lambda$, (畢)

定理4, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 斂

$$(i) \lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$$

$$(ii) \lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n)$$

$$(iii) \lim(a_n/b_n) = (\lim a_n)/(\lim b_n) \quad (b_n \neq 0, \lim b_n \neq 0),$$

對於非圓數列爲便利起見設約束如下,

$\{a_n\}$ 不圓於上時 $\overline{\lim} a_n = +\infty$, $\underline{\lim} a_n$ 或有限或 $= +\infty$

$\{a_n\}$ 不圓於下時 $\underline{\lim} a_n = -\infty$, $\overline{\lim} a_n$ 或有限或 $= -\infty$

對於任一數集亦然茲從簡

§3, 有數列 $\{a_n\}$ 時做前 n 項之和, 得新數列

$$\{S_n\} = \{a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i\}$$

若 $\{S_n\}$ 斂其限是 S 的時候, 我們說數級,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

(1)

斂，他的和是 S ，沒有限（ $\pm\infty$ 在內）時稱之曰散，由這個定義知道論數級完全歸於論數列，由 §1 連續性 I 得到

固於上的正項數級（ $a_n \geq c$ ）必斂，

由 §2 定理 2 得到

數級斂的充分必須條件是對任一 $\epsilon > 0$ 可選一 N

$$|S_p - S_q| = |a_p + a_{p+1} + \dots + a_q| < \epsilon$$

$$q > p > N,$$

$\sum |a_n|$ 斂的時候 $\sum a_n$ 也斂，這時我們說 $\sum a_n$ 絕斂，絕斂數級變換通項 a_n 秩序其限不變，

$$\text{證明， } \left| \sum_{n=1}^m a_n \right| \leq \sum_{n=1}^m |a_n| < \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$$\therefore \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

a_n 中 ≥ 0 叫做 $p\nu$ ， < 0 的叫做 $-q\mu$ ，顯然

$$0 \leq \sum p\nu, \quad \sum p\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

(1)

但是

$$S_n = \sum_{\nu=1}^l p_\nu - \sum_{\mu=1}^m q_\mu$$

右端是兩個斂級，

$$\therefore S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^l p_\nu - \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^m q_\mu \quad (\text{畢})$$

斂級之加減無庸贅述，茲舉乘法定理如下，

定理1， $\sum a_n, \sum b_n$ 絕斂於是

$$(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1)$$

右端並絕斂，

證明 寫 $\sum a_m b_n$ 有限項和如 $\sum k a_m b_n$

$$\sum |a_m b_n| \leq \left(\sum_{m=1}^{\mu} |a_m| \right) \left(\sum_{n=1}^{\nu} |b_n| \right)$$

式中 μ, ν 為 \sum 中 m, n 最大號數，由假設知左端絕斂，

因得定理 (畢)

定理2，(D'Alembert) $\sum a_n$

$$\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \text{ 時 } \quad \text{絕斂}$$

(1)

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \text{ 時 散,}$$

證明, 取 $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < k < 1$ 由優限定義自某號

以上

$$|a_{n+1}| < k |a_n|$$

$$\therefore \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \sum_{n=N}^{\infty} k^n$$

若 $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ 自某號數以上 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > k > 1$ 不

滿足 $\lim a_n = 0$ (畢),

定理3, (Cauchy) $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ 時 絕斂,

$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ 時 散,

定理4, 交項數級 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots (a_n \geq 0) a_n \geq a_{n+1}$

且 $\lim a_n = 0$ 時效,

由依於兩個號數的數集 $(a_{m,n})$ 可以得到二重數級

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$$

(1)

已知 $(m \cdot n)$ 可數，由某一數法設 $a_{m, n}$ 的號數是 λ 改寫 $a_{m, n} = b_\lambda$ ，於是 $\sum b_\lambda$ 或斂或散，對於任一數法都斂且極限都相等的時我們說 $\sum a_{m, n}$ 斂，那極限稱爲 $\sum a_{m, n}$ 的和，其餘的情形都叫散，如在某一數法絕斂必斂，

例 1° $a > 0, \lim \bar{a} = 1,$

$$a > 1 \quad \bar{a} > 1 \quad \text{又} \quad \bar{a} > \bar{a} \quad \therefore \lim \bar{a} \geq 1,$$

倘 $\lim \bar{a} > 1$

$$\bar{a} > 1 + k (k > 0)$$

$$\therefore a > (1+k)^n > nk \quad \text{不合,}$$

$a = 1$ 不待證，

$$a < 1 \quad a' = \frac{1}{a} > 1, \quad \bar{a} = \frac{1}{\bar{a}},$$

$$2^\circ a > 0, \lim \frac{a^n}{n!} = 0,$$

取自然數 $k > 2a$ 設 $a^k/k! = c, \quad n > k$ 時

$$\frac{a^n}{k!} = c \frac{a}{k+1} \cdot \frac{a}{k+2} \cdots \frac{a}{n} < \frac{c}{2^{n-k}} < \epsilon$$

$$(n > k + \frac{c}{\epsilon}).$$

(1)

$$3^\circ \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \text{散},$$

$$n \text{ 任意, } \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} > n, \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

與§2定理2不合，

4° 由定理2 a知對任一數級 $\sum \frac{a^n}{n!}$ 斂，定義此數為 e^a

顯然 $a \geq 0$ 時

$$e^a \geq 1 + a$$

由數列更可得無限積，為方便起見設 $\{a_n\}$ 每數均不等零，做

$$\{p_n\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

$\{p_n\}$ 斂於不等於零之固定數時稱 $\{p_n\}$ 斂寫做 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ ，

今設上云固定值為 α 時由定義 $\lim p_n = \alpha$ ， $\lim p_{n+1} = \alpha$ 故

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1,$$

因此改書 $a_n = 1 + u_n$ 較便，

(1)

定理5. $u_n \geq 0$, $\prod (1+u_n)$, 斂之必須充分條件為

$$\sum_n u_n < \infty,$$

證明, u_n 既正, 故 $\{p_n\}$ 為遞昇能證其圍於上即可
 已知 $1+u_n \leq eu^n$

$$\therefore p_n \leq e^{\sum_{i=1}^n u_i} \leq e^{\sum_{i=1}^{\infty} u_i}$$

一方

$$p_n = \prod_{i=1}^n (1+u_i) = 1 + \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{1,n} u_i u_j$$

$$+ \dots > \sum_{i=1}^n u_i \quad (\text{畢})$$

§4, 由§2 知三種連續性內容完全相同, 故可利用其中任意一個由有理數造實數, 在本§仍遵 Uedekind 用連續性 III, 前章§4 所云秩序今以大小代替之, 以 D 為有理數集, L 則為生隙之 hledekind 劃, C 為實數, 於是得實數之秩序, 稠密連續等性, 有該節 4° 情形轉變之成 3° 以歸劃一, 今往定義四則,

加法, 由 α, β 下組的有理數 a, b 做 $a+b$ 稱此集

(1)

爲 G ，以 G 爲下組其餘的上組 G' ，劃 $[G, G']$ 所確定的數 $\gamma = \alpha + \beta$ ，

減法， $\alpha = [A_1, A']$ 時定義 $-\alpha = [-A', -A]$ 則

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta),$$

加減法滿足演算諸律， $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$

稱爲 α 之絕值，

定理，對任一實數 α 一定有斂於 α 的有理數列，

證明，根據十進法， n 一個自然數，有理數

$$\dots, \frac{-3}{10^n}, \frac{-2}{10^n}, \frac{-1}{10^n}, 0, \frac{1}{10^n}, \frac{2}{10^n}, \frac{3}{10^n}, \dots$$

中滿足 $\frac{a_n}{10^n} \leq \alpha < \frac{a_n+1}{10^n}$

關係的整數 a_n 由實數的定義因 α 而定，於是

$$0 \leq \alpha - \frac{a_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}$$

任與一 $\epsilon > 0$ 可找一有理數 γ ， $\epsilon > \gamma > 0$ ，於是由 Archimedes

定理 $n > \frac{1}{\gamma}$ ， $10^n > n > \frac{1}{\gamma}$ 所以 $\gamma > \frac{1}{10^n}$ ，換

(1)

言之，

$$0 \leq \alpha - \frac{a_n}{10^n} < \epsilon \quad n > \frac{1}{\delta} \quad (\text{畢})$$

既知本定理後乘除法可由下法簡單得之，

乘法 $\lim a_n = \alpha$ ， $\lim b_n = \beta$ 時 $\lim(a_n b_n) = \alpha \beta$ ，

是為 α ， β 之積，

$\alpha \neq 0$ ，取 $a_n \neq 0$ ，而 $\lim a_n = \alpha$ 之有理數列， α 之倒數 α^{-1} 乃

$$\alpha^{-1} = \lim \frac{1}{Q_n}$$

除法， $\alpha \neq 0$ ， β 兩實數，

$$\beta / \alpha = \overline{\alpha^{-1} \beta}$$

乘除法滿足演算諸律，且上云定義與特殊數於 α ， β 之數列無關，

第三章 點集

本章討論 Euclid 一度，二度三度空間點集作第四章以下的基礎，

§1，在一個集 E 裏面設一位相對應意思說使每個 $A \subseteq E$ 對應一個 $A' \subseteq E$ 。這時改稱 E 為(位相)空間改寫之做 R ， E 的元改稱為點 $A \subseteq E$ 的 A 叫做點集，位相對應最普通用計量的概念得到，詳細見下，

Euclid 一度空間就是實數集點 p 與實數 x 一一對應，稱 x 為 p 之座標。每兩點 p, p' 間我們定義一個計量

$$\rho_1(p, p') = \sqrt{(x - x')^2} = |x - x'|,$$

Euclid 二度空間是實數集與實數集之積，點 p 與序對 (x_1, x_2) 一一對應， x_i 叫做 p 的第 i 座標，這時的計量是

$$\begin{aligned} \rho_2(p, p') &= \sqrt{\rho_1^2(x_1, x'_1) + \rho_1^2(x_2, x'_2)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - x'_i)^2}, \end{aligned}$$

同理 Euclid 三度空間是三個實數集的積，所以點 p 與複元 (x_1, x_2, x_3) 一一對應，這時的計量是

$$(1)$$

$$\begin{aligned} \rho_3(p, p') &= \sqrt{\rho_1^2(x_1, x'_1) + \rho_1^2(x_2, x'_2) + \rho_1^2(x_3, x'_3)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2} \end{aligned}$$

爲便利起見常用幾何表示，但需要

對應公理(G.cantor) 在一無限直線上取一點 0 作原點對應 0，又一點 U 作單位點對應 1，其他每點 p 對應 $x = Op: 0U$ ，由這個對應每有限數只對應一點，借這個公理的幫助，用解析幾何常用的方法，得到 Euclid 二度，三度空間的幾何表示，以下 Euclid 一度，二度，三度空間點集的性質，可以總括討論，點均用 p, q, ... 計量均用 $\rho(p, q)$ 表示之。

計量之三基本性質，

- 1° $\rho(p, q) \geq 0$ 等號只限於 p, q 時成立
- 2° $\rho(p, q) = \rho(q, p)$
- 3° 任意三點 p, q, r 間有 $\rho(p, r) \geq \rho(p, q) + \rho(q, r)$ (三角形律)，

證明只證 3° 設 $p = (a_1, \dots)$, $q = (b_1, \dots)$, $r = (c_1, \dots)$

$$(1) \quad \lambda^2 \sum (a_i - b_i)^2 + 2\lambda\mu \sum (a_i - b_i)(b_i - c_i)$$

(1)

$$\begin{aligned}
& + \mu^2 \sum_1 (b_i - c_i)^2 \\
& = \sum \{ \lambda(a_i - b_i) + \mu(b_i - c_i) \}^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

所以二次式(1)的判別式應 ≤ 0 ,

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_1 (a_i - b_i)(b_i - c_i) \right]^2 - \left[\sum_1 (a_i - b_i)^2 \right] \\
& \left[\sum_1 (b_i - c_i)^2 \right] \leq 0,
\end{aligned}$$

$$\therefore \sum (a_i - b_i)(b_i - c_i) \leq \sqrt{\sum (a_i - b_i)^2} \sqrt{\sum (b_i - c_i)^2}$$

題斷是

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\sum (a_i - b_i)^2} + \sqrt{\sum (b_i - c_i)^2} \geq \sqrt{\sum (b_i - c_i)^2} = \\
& \sqrt{\sum \{ (a_i - b_i) + (b_i - c_i) \}^2}
\end{aligned}$$

平方之得

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\sum (a_i - b_i)^2} + \sqrt{\sum (b_i - c_i)^2} \geq \sum \\
& \geq \sum (a_i - b_i)(b_i - c_i)
\end{aligned}$$

與前得下等式相合 (畢)

諸定義, 點集 A 之直徑 d : $d(A) = \sup_{p, q \in A} \rho(p, q)$

點集 A, B 之距離 r : $r(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \rho(a, b)$

(1)

$R - A = CA$ 稱爲 A 的餘集.

§2. 聚點 一點 p ，一集 A 對於任一 $\epsilon > 0$ 可尋一 $a \in A$ ， $a \neq p$ 且滿足 $\rho(p, a) < \epsilon$ 時叫 p 爲 A 之聚點，

集 A 的聚點所構成的集叫做 A 的導集用符號 A' 表示之，求導集就是前 § 所說的位相對應，

- i) $A' \subseteq A$ A 閉
- ii) $A' \supseteq A$ A 自稠
- iii) $A = A'$ A 全

凡是可成一閉集之餘集的叫作開集，

定理1. 任意個閉(開)集之交(和)及有限個閉(開)集之和(交)仍是閉(開)集，

包含一點 p 的任一開集叫做這點的近傍用符號 $U(p)$ 表示之，例如以 p 爲中心滿足 $\rho(p, q) < \epsilon$ 的 p 所成的集就是一種近傍，在一度歐氏空間是以 p 爲中心的開隔間，二度是開圓，三度是開球，今統稱做開球用 $S(p, \epsilon)$ 表示之，

定理2: 點 p 是集 A 的聚點的必須而充分的條件是 p 的任意近傍內均含有與 p 不同 A 的點，

證明，充分以 p 爲中心任意半徑的開球內亦應有

(1)

與 p 不同 A 的點，

必須我們先證 $p \in U$ ， U 是一個開集的時候，我們可以取相當小 $\epsilon > 0$ 作 $S(p, \epsilon)$ 完全含於 U ，假若不能的時候無論取多小的 ϵ 半徑 ϵ 的開球總含有 CU 的點的話，顯然 $p \in (CU)' \subset CU$ 是不合，既是如此倘 U 內沒有 A 的點，於是在 U 內一個半徑 ϵ_0 的開球內也沒有 A 的點，這個 ϵ_0 不合聚點的定義， (畢)

$p \in A$ ，可以找一 $U(p) \subseteq A$ 的時候我們叫 p 是 A 的內點，由定理 2 證明我們知道開集由內點組織而成， CA 的內點稱為 A 的外點， $A(CA)' + A'CA$ 稱為 A 及 CA 的界點，

定理 3. 閉(開)集可表示成開(閉)集列之交(和)，

證明 $\epsilon > 0$, $U(A, \epsilon) = \sum_{p \in A} S(p, \epsilon)$

今設 A 為開集，做

$$D = U(A, 1) \cap U(A, \frac{1}{2}) \cap \dots \cap U(A, \frac{1}{n}) \cap \dots$$

顯然 $A \subseteq D$ ，次取 $p \in D$ ， p 既 $\in U(A, \frac{1}{n})$ 定有 $p_n \in A$ 滿

足 $\rho(p, p_n) < \frac{1}{n}$ ，由是知 $p \in A$ ，所以 $D \subseteq A$ ，取餘集得

(1)

定理第二部份 (畢)

定理4. (Bolzano-Weierstraß) 直徑有限的無限點集導集不空，

證明. 由假設知點集每個座標所構成的數集都是閉集，求每個的優限，以優限為座標的點就是聚點，

(畢)

定理5. (Cantor) 直徑有限的閉集列 $(\neq 0)$ 並且滿足

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$$

可得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

證明，只討論 A_n 確比 A_{n+1} 大的情形就可以，自 $A_n - A_{n+1}$ 取 a_n $\{a_n\}$ 由定理 4 必有一個聚點 a 但是

$$\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \subseteq A_n$$

$$\therefore a \in A'_n \subseteq A_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\therefore a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad (\text{畢})$$

若 $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$ 則 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 是一點.

(1)

點的每個座標都是有理數的時候我們叫做有理點，由實數的性質知道任一點 p 的近傍內可找出有理點，對於有理數 r 可以找一個有理點 q 使 $p \in S(r, r)$ ，包含 p 的以有理數為中心有理數為半徑的開球以 $V(p)$ 表示之；可證

對任一 $U(p)$ 可找一 $V(p)$ 使 $V(p) \subseteq U(p)$

對任一 $V(p)$ 可找一 $U(p)$ 使 $U(p) \subseteq V(p)$

滿足此條件之兩近傍系叫做等值，等值近傍系所規定之聚點完全一致，最應注意的是 $V(p)$ 共可數個，

定理 6. (Lindelof) 集 A 之點 p 為某集系所含集 $B(p)$ 之內點，於是可選可數個 $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ 每點為

$$B(p_1) + B(p_2) + \dots + B(p_n) + \dots$$

之內點

證明，由本定理前注意一定有合適的 $V(p) \subseteq U(p) \subseteq B(p)$ ，這樣的 $V(p)$ 至多可數個，叫他是 V_1, V_2, V_n, \dots

$$A \subseteq V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots$$

滿足 $V_n \subseteq B(p)$ 的 p 中一個叫 p_n 的時候得所欲證 (畢)

定理 7 (Borel-Lebesgue) A 閉，直徑有限， A 的每點是某開集系所含集 $B(p)$ 之內點，有是可選出有限個 $B(p_i)$ ，

(1)

$\dots, B(p_n)$

$$A \subseteq B(p_1) + \dots + B(p_m)$$

證明，由定理6 可以選出 $B(p_1), \dots, B(p_n), \dots$

設

$$F_k = C\left(\sum_{i=1}^k B(p_i)\right) \cdot A$$

於是 $F \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$

F_1 直徑有限， F_k 均是閉集，但是 $\cap F_k = 0$ 。由定理5 在某號數 m 時 F_m 已是空集，

$$A \subseteq C\left(\sum_{i=1}^m B(p_i)\right) = 0$$

$$\therefore A \subseteq \sum_{i=1}^m B(p_i) \quad (\text{畢})$$

§3. 集 M 對於 A 有

$$M' \cap A \subseteq M$$

關係時叫做閉於 A 。閉於 A 的集未必是前 § 所說的閉集，

集 M 決不能滿足下列條件時叫做連集：

$$(1)$$

$$(H) \quad M = A + B, \quad A \cdot B = A' \cdot B = A \cdot B' = 0, \\ A \neq 0 \neq B.$$

定理1. 連集的條件可以改云如下：

$$(H') \quad M = A + B, \quad A \neq 0 \neq B, \quad A \cdot B = 0, \quad MA' \subseteq A, \\ MB' \subseteq B.$$

證明. 必須. $A' \cdot M = A'(A + B) = A' \cdot A + A' \cdot B$
 $= A' \cdot A \subseteq A$ 同理 $B' \cdot M \subseteq B$.

充分 $AB' = AMB' \subseteq A, B = 0$ 同理 $A' \cdot B = 0$. (畢)

定理2. M 連集, $M \subseteq A + B$, 若 A, B 兩集滿足(H) 時 $M \subseteq A$ 或 $M \subseteq B$. 因之得集 E 若其任兩點含於一含於 E 之連集則 E 本身是連集.

證明, $M = M(A + B) = MA + MB$. 設 $MA \neq 0 \neq MB$.

$$MA \cdot MB \subseteq A \cdot B = 0. \quad (MA)' \cdot MB \subseteq A' \cdot MB \subseteq A' \cdot B = 0$$

同理 $(MB)' \cdot MA = 0$.

MA, MB 滿足 (H) 與 M 之原假設不合, 所以或 $MA = 0$ 或 $MB = 0$. 由前者得 $M \subseteq B$ 由後者得 $M \subseteq A$.

若 $E = E_1 + E_2$, E_1, E_2 滿足 (H). 自 E_1, E_2 各取一點 p, q 由假設有一連集 $C(p, q)$ 且 $\subseteq E$. 由本定理前段 $C(p, q)$ 只含於 E_1 或 E_2 . 是不合, (畢)

定義開連集簡稱之曰域

(1)

定理3. 一度歐氏空間是連集，

證明， 假設 $R_1 = F_1 + F_2$ F_1, F_2 滿足 (H')

自 F_1, F_2 各取一點 a_1, a_2 設 $a_1 < a_2$ 稱 c 為線段 a_1, a_2 與 F_2 相共點之下限， $c \neq a_1$ ， 但 $a_1 < x < c$ 完全是 F_1 的點所以 $c \in F_1$ ， 又由上面的定義原屬於 F_2 ， 所以 $F_1 F_2 \neq \emptyset$ 是不合， (畢)

同理可證任一線段是連集，

定理4. $R^n (n \geq 2)$ 內開集 G 連的必須充分的條件是其中任兩點可用有限個線段連結之，

證明， 倘有兩點 p, q 不能用線段連結， 書 P 為由 p 起始 G 內可聯之點集， 書 $Q = G - P, p \in P, q \in Q, P + Q = G, p, Q = \emptyset, a \in P$ 作 $S(a, \eta) \subset G, a' \in S(a, \eta), p, a'$ 均可聯， 故 P 開， $a \in P, G$ 於是 p, a 亦可聯 $G - P \subset P$ 是不合， 充分由定理2 已不需證 (畢)

由此知道一度歐氏空間的域只是下列四種隔間

$$\begin{aligned} -\infty < x < +\infty & \quad (-\infty, +\infty), \\ -\infty < x < b & \quad \text{或用符號} \quad (-\infty, b), \\ a < x < +\infty & \quad (a, +\infty), \\ a < x < b & \quad (a, b) \quad \text{表示之,} \end{aligned}$$

把域的界點加入時叫做閉域， R' 中有四種

(1)

$$-\infty < x < +\infty \quad (-\infty, +\infty)$$

$$-\infty < x \leq b \quad \text{或用符號} \quad (-\infty, b>$$

$$a \leq x < +\infty \quad <a, +\infty)$$

$$a \leq x \leq b \quad <a, b> \quad \text{表示之}$$

又知矩形，立方體，球不算邊或表面時都是域，

第四章 變及函

本章以下討論第一章 §2 爲 R^1, R^2 或 R^3 之下集， B 爲 R^1 之下集，由 A 至 B 上之一意函 f ，其反函又用 f^{-1} 表示，此則多意或一意，普通寫做

$$y=f(x), \quad z=f(x,y), \quad w=f(x,y,z)$$

總括之寫做 $f(p)$

稱 $x(y,z)$ 爲變，

§1. 性質比較單簡的是連續函，這個是局部概念，最初須說明在某一點連續的意義， $f(p)$ 定義於空間一直徑有限的集 D ， $f(p)$ 在 D 之點 p 連續是說

任與一 $\delta > 0$ 可尋一 $S(p, \epsilon)$ ($\epsilon > 0$)

凡 $q \in S(p, \epsilon) \cap D$ 均滿足 $|f(p) - f(q)| < \delta$.

$f(p)$ 在 D 之每點均滿足這個性質叫做 D 內連續函， $f(p)$ 的值域是 R^1 都是有限實數。嚴格言之應當叫做有限連續，以下只討論這個情形，有限兩字姑從略。

取各種斂於 p 之點列，限各點均在 $S(p, \epsilon) \cap D$ 內，得數集 $\{f(p'_n)\}$ ，應用第二章 §2 的概念知道一定有一個優限及劣限用符號

(1)

$$\overline{\lim}_{p' \rightarrow p} f(p') \quad \lim_{p' \rightarrow p} f(p')$$

表示之，由該 § 定理 3 對任一 $\delta > 0$ 及含於 $S(p, \epsilon), D$ 內之 q, q'

$$f(q) < \overline{\lim}_{p' \rightarrow p} f(p') + \delta \quad ; \quad f(q') > \underline{\lim}_{p' \rightarrow p} f(p') - \delta$$

差不多所有的 q, q'

$$f(q) > \overline{\lim}_{p' \rightarrow p} f(p') - \delta \quad ; \quad f(q') < \underline{\lim}_{p' \rightarrow p} f(p') + \delta$$

無窮個 q, q'

f 在點 p 連續的時候

$$\begin{aligned} & \left| \overline{\lim}_{p' \rightarrow p} f(p') - \lim_{p'' \rightarrow p} f(p'') \right| \leq \left| \overline{\lim} f(p') - f(q) \right| \\ & + \left| f(q) - f(p) \right| + \left| f(p) - f(q') \right| \\ & + \left| \underline{\lim} f(p'') - f(q') \right| < 4\delta. \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{p' \rightarrow p} f(p') = \overline{\lim}_{p' \rightarrow p} f(p') = \lim_{p' \rightarrow p} f(p')$$

取 $\eta \leq \epsilon$ 將不合適的 q, q' 逐於 $S(p, \eta)$ 之外

$$\left| \lim_{p' \rightarrow p} f(p') - f(p) \right| < \delta \quad \therefore \lim_{p' \rightarrow p} f(p') = f(p)$$

(1)

反理則更顯明，這就是用極限表示連續應具有的條件，

f 在點 p 未定義而 $\lim_{p' \rightarrow p} f(p')$ 存在即以此為 f 在點 p 的值 f 之

義域因而推廣且保持連續，點 p 的某一座標絕值陸續增大 $f(p)$ 也有極限的意思，此時 D 的直徑自然不能有限，我們求 $\{f(q)\}$ 的優限劣限以解釋極限， q 是屬於 S, O, N 外部與 D 之交內合乎條件的點， N 是相當大數，此極限

以 $\lim_{p \rightarrow \infty} f(p)$ 表示之，當於第二章 §2 定理 4 的定理是連續

函之和差，積，商(除函 $\neq 0$)也是連續函，

例 Peano 曲線，取線段 I ，等邊直角三角形 Δ ，將 I 平均分爲 I_0, I_1 ，自 Δ 之直角頂點作垂線分爲 Δ_0, Δ_1 兩部，以 I_0, I_1 對應 Δ_0, Δ_1 ，次將 I_0 平均分爲 $I_{00}, I_{01}; I_1$ 分爲 I_{10}, I_{11} ，同時如前法分 Δ_0 爲 Δ_{00}, Δ_{01} ；分 Δ_1 爲 $\Delta_{10}, \Delta_{11}, \dots$ 小三角形與小線段之排列方法令其相同，今設 I 爲 $\langle 0, 1 \rangle$ ，其中任一 t 可用二進法表示成

$$t = 0.C_1C_2C_3 \dots C_n \dots \quad (C_n = 0 \text{ 或 } 1).$$

t 亦爲

$$I_{c_1} I_{c_1 c_2} I_{c_1 c_2 c_3} \dots I_{c_1 c_2 \dots c_n} \dots$$

(1)

之交，於是由

$$\triangle_{c_1} \triangle_{c_1 c_2} \cdots \triangle_{c_1 c_2 \cdots c_n} \cdots$$

得一點 p 。今取斜邊為 x 軸，以直角頂點 $(0,1)$ ， t 與 p 之對應可寫成

$$x = \varphi(t), \quad y = \Psi(t)$$

$t = \frac{n}{2^n}$ 之二進法表示有兩種，所得 p 點位置一意確定

，因小線段及小三角形排列方法一樣，例如

$$t = 0.010100 \cdots = 0.0100111 \cdots$$

所對應的 $p = (0, \frac{1}{2})$ 。

$\varphi(t), \Psi(t)$ 是連續， $|t-t'| < \frac{1}{2^{3n}}$ 時 t, t' 所對應的

p' 距離小於 $\frac{2}{(\sqrt{2})^{2n}} = \frac{1}{2^{n-1}}$ 。三角形一點可至少確定

一組三角形，所以總有一個 t 。所謂至少一個者

例如 $p = (0, \frac{1}{2})$ 對應 $t = 0.0101; 0.0111; 0.1001; 0.1011$ 四點，

注意，對兩變連續對其中一個必連續，反之不然可由

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x=y=0) \\ 0, & (x=y=0) \end{cases}$$

(1)

明之，

$f(p)$ 滿足性質 Z 的點 p 的集用符號 $E\{f(p) \in Z\}$ 表示，

示，

定理1. $f(p)$ 定義於集 D 的連續函： F, R^1 之閉集，

$$A = E\{f(p) \in F\}$$

閉於 D .

證明， $A'D=0$ 則無需證，今 $A'D \neq 0$ 由 $A'D$ 取一點 q . f 在點 q 連續，任與一 $\delta > 0$ 可尋一 $S(q, \epsilon)$

凡 $t \in S(q, \epsilon) \cap D$ 均滿足 $|f(q) - f(t)| < \delta$.

$S(q, \epsilon)$ 內只有有限個 A 的點，或無窮個 A 的點，而 $f(t) \equiv f(q)$ 則無須證，今 δ 任意顯然 $S(q, \epsilon)$ 中 A 之點亦滿足此不等式，所以 $f(q) \in F' \subseteq F$ 所以 $q \in A$ (畢)，

系， $f(p)$ 定義於連集 G 之連續函 $f(p_1) = a, f(p_2) = b$ ，至少有一 $q \in G, f(q) = \mu, a < \mu < b$.

定理2. $f(p)$ 定義於直徑有限 $\bar{D} = D + D'$ 之連續函， f 在 \bar{D} 一致連續，意思說對於 \bar{D} 任何點 p 可尋一共通 $\epsilon > 0$

$$\rho(p_1, p_2) < \epsilon \quad |f(p_1) - f(p_2)| < \delta.$$

(1)

證明，固定 $\delta > 0$ ，由定義每點可對應一近傍 $S(p, \epsilon_p)$

$$q \in S(p, \epsilon_p) \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \delta/3$$

由前章 §2，定理 7 可選有限個

$$D \subseteq S(p_1, \frac{\epsilon_{p_1}}{2}) + \dots + S(p_n, \frac{\epsilon_{p_n}}{2}).$$

設 $\epsilon \leq \min(\epsilon_{p_1}, \dots, \epsilon_{p_n})$

今 $\rho(p', p'') < \frac{\epsilon}{2}$ 則兩點同時含於某一 $S(p_i, \epsilon_{p_i})$ 內，所

以

$$\begin{aligned} |f(p') - f(p'')| &\leq |f(p') - f(p_i)| + |f(p_i) \\ &\quad - f(p'')| < \delta \end{aligned} \quad (\text{畢})$$

系此時 $|f| \leq K$ ，用歸謬法證，

定理 3. 對於 f 之假設同前設 $M = \sup f(p)$, $m = \inf f(p)$ ，
則至少有一 s , $f(s) = M$, 一 t , $f(t) = m$.

證明，由前定理 M, m 是兩有限數，

任取一 $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_n > \dots$, $\epsilon_n > 0$, $\epsilon_n \rightarrow 0$ 之數
列，

取滿足 $0 \leq M - f(p) < \epsilon_n$ 之任一點曰 p_n .

數列 $\{p_n\}$ 中有無窮個等於 p 時顯然 $f(p) = M$. 今設差
不多所有 p_n 都不一樣，由第三章 §2 定理 4 $\{p_n\}$ 有聚

(4)

點 $p \in \bar{D}$. 稱收斂於 p 之下列做 $\{p_{n_i}\}$

$$|M - f(p)| \leq |M - f(p_{n_i})| + |f(p_{n_i}) - f(p)| < \epsilon_{n_i} + \eta$$

右端兩數均可任意小

$$\therefore f(p) = M \quad (\text{畢})$$

由本 § 最初所述知在集 D 的連續函 $f(p)$ 的值由任一 $S' \subset D, D' \subset S' + S$ 上的數值所確定，我等可證 D 內必有如此之 S 並且 S 的員是 \mathcal{R} 。所以由第一章，§3 定理 2 得

定理 4. 任一集 D 中所定義連續函的員是 $\mathcal{R}^{\mathcal{R}_0} = \mathcal{R}$.

證明， D 之員為 \mathcal{R} 。時已不待證，對於 D 之每點 p 做 $V(p)$ (第三章 §2) 所得乃可數個 $V_1, V_2, \dots, V_p, \dots$ 自每 $B.V_n$ 取一點 p_n . $S = \{p_n\}$ 即所欲求， (畢)

§2. 函列 $\{f_n(p)\}$ 對於一點 $p = p_0$ 滿足第二章 §2, 定理 2 即在 $p = p_0$ 對任一 $\delta > 0$ 可選一相當大 N

$$|f_m(p_0) - f_n(p_0)| < \delta \quad m, n > N(\delta, p_0)$$

時說 $\{f_m(p)\}$ 在 $p = p_0$ 斂，

假若對於義域任何點 p 可選相同的 N 滿足

$$|f_m(p) - f_n(p)| < \delta \quad m, n > N(\delta)$$

時說 $\{f_n(p)\}$ 一致斂，

(1)

定理1. $\{f_n(p)\}$ 在集 D 一致斂，每 $f_n(p)$ 在 D 連續，則限函 $f(p)$ 也連續，

證明， $|f_m(p) - f(p)| < \frac{\delta}{3} \quad m > N,$

$$|f_m(p) - f_m(p')| < \frac{\delta}{3} \quad p' \in S(p, \epsilon) \cap D$$

$$\begin{aligned} \therefore |f(p) - f(p')| &\leq |f(p) - f_m(p)| + |f_m(p) - f_m(p')| \\ &\quad + |f_m(p') - f(p')| < \delta. \quad (\text{畢}) \end{aligned}$$

定理2. $C_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 斂， $|f_{n+1}(p) - f_n(p)| \leq C_n$

時 $\{f_n(p)\}$ 一致斂，

證明， $m > n$

$$\begin{aligned} |f_m(p) - f_n(p)| &\leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(p) - f_{k-1}(p)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m C_{k-1} < \epsilon \quad (n > N(\epsilon)) \quad (\text{畢}) \end{aligned}$$

定理1 爲充分條件並非必須條件可自函列

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x < \infty \end{cases}$$

(1)

明之，又非一致 $f(p)$ 不一定連續可用

$$f_n(x) = x^n \quad 0 \leq x \leq 1$$

明之，

例， $\{f_n\} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)$

設 $|x| \leq K$ 每個 f_n 皆連續函，且

$$|f_{n+1} - f_n| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\sum \frac{K^n}{n!}$ 斂，所以 $f = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ 是連續函，

K 任意所以 x 取任意有限值均可，稱此限函曰 e^x 或 $\exp(x)$.

同理 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ， $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 兩級

亦然，稱前者曰 $\cos x$ ，後者曰 $\sin x$ 。是否與我等所熟知者相同姑俟下章但知其絕斂故得

$$(a) \quad \cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

$$(b) \quad \sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

置 $x_1 = -x_2 = x$ 於(a)得

$$(1)$$

$$(c) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

置 $x_1 = x_2 = x$ 於(a)及(b)得

$$(d) \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\cos x \sin x.$$

§3. 本 § 只討論一變函 $f(x)$. $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 滿足

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b \quad (x_1 > x_2) \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

時叫 $f(x)$ 做昇(降)函,

定理1. $f(x)$ 在 $\langle a, b \rangle$ 之昇函, 對

$$a < x_0 \leq b \quad (a \leq x_0 < b) \text{ 之 } x_0.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = f(x_0 + 0) \right)$$

一定存在,

證明, 稱
$$G = \sup_{a \leq x < x_0} f(x)$$

$\{x_v\}$ 一斂於 x_0 之數列且 $a \leq x_v < x_0$. 自然

$$\begin{aligned} f(x_v) &\leq G \\ \therefore \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} f(x_v) &\leq G. \end{aligned}$$

由上限定義一定有 $a \leq \xi < x_0$ 而 $f(\xi) > G - \epsilon$ ($\epsilon > 0$)

差不多所有的 $x_v > \xi$ 所以

$$\begin{aligned} f(x_v) &\geq f(\xi) > G - \epsilon \\ \underline{\lim}_{v \rightarrow \infty} f(x_v) &\geq G - \epsilon \end{aligned}$$

(1)

任取 ϵ 任意 $\liminf_{v \rightarrow \infty} f(x_v) \geq G$

$\therefore \lim f(x_v) = G.$

$\{x_v\}$ 任意，明所欲證， (畢).

定理2. 假設同前， $f(x)$ 在 $\langle a, b \rangle$ 之不連續點至多可數。

證明. 若 $a < x < b$, x 為不連續點由定理1.

$$f(x+0) - f(x-0) > 0$$

故取相當大 $v \quad \frac{1}{v-1} \geq f(x+0) - f(x-0) > \frac{1}{v}.$

叫滿足這個不等式的 x 所成的集做 B_v 顯然不連續點集正是

$$B_1 + B_2 + \dots + B_k + \dots$$

取 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in B_k$, 再取 x_i

$$a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < \dots < \xi_i < x_i < \xi_{i+1} < \dots < \xi_k < x_k = b_0$$

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \geq f(\xi_i + 0) - f(\xi_i - 0) > \frac{1}{v}$$

$$(i = 1, 2, \dots, k)$$

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^k (f(x_i) - f(x_{i-1})) \geq \sum_{i=1}^k \left\{ f(\xi_i) \right\}$$

(1)

$$\{ +0) - f(\xi_i - 0) \} > \frac{k}{v}$$

$$\therefore k < v(f(b) - f(a)).$$

B_v 是有限集，明所欲證， (畢)

在 $\langle a, b \rangle$ 設分點， $f(x)$ 定義於 $\langle a, b \rangle$ 。

分法 Δ : $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$

$$\sup_{\Delta} v_{\Delta} = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

若此數有限稱之曰全變分 V , $f(x)$ 爲固變函。

設 $\varphi(x)$, $\Psi(x)$ 兩昇函。 $f(x) = \varphi(x) - \Psi(x)$

$$\begin{aligned} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= |\varphi(x_i) - \Psi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) \\ &\quad + \Psi(x_{i-1})| \\ &\leq |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| + |\Psi(x_i) \\ &\quad - \Psi(x_{i-1})| \\ &= \{ \varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) \} + \{ \Psi(x_i) \\ &\quad - \Psi(x_{i-1}) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{任一 } v_{\Delta} = \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^k \{ \varphi(x_i) \\ &\quad - \varphi(x_{i-1}) \} + \sum_{i=1}^k \{ \Psi(x_i) - \Psi(x_{i-1}) \} \\ &= \{ \varphi(b) - \varphi(a) \} + \{ \Psi(b) - \Psi(a) \}. \end{aligned}$$

(1)

所以 $f(x)$ 是圍變，反之設 $f(x)$ 在 $\langle a, b \rangle$ 圍變，

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

中正的叫 p 負的叫 n

$$\begin{aligned} V &= p + n, \quad f(b) - f(a) = \sum \{ f(x_i) - f(x_{i-1}) \} \\ &= p - n. \end{aligned}$$

$$V = 2p + f(a) - f(b) = 2n + f(b) - f(a).$$

所以 V 存在時 $\sup p = P, \sup n = N$ 也存在，並且

$$V = 2p + f(a) - f(b) = 2N + f(b) - f(a).$$

今以 $\langle a, b \rangle (x < b)$ 之 $f(x)$ 的 P, V, N 叫做 $P(x), V(x), N(x)$ 時同理得

$$V(x) = 2P(x) + f(a) - f(x) = 2N(x) + f(x) - f(a).$$

$$\therefore f(x) = f(a) + P(x) - N(x).$$

$P(x), N(x)$ 是昇函，所以得

定理 3. 函圍變的必須充分條件是可表示成兩昇函之差，

$x = \varphi(t), y = \Psi(t)$ 定義於 $\langle a, b \rangle$ 之兩函，點集 (x, y) 叫做平面曲線，取分法 Δ 做

$$L_{\Delta} = \sum_{i=1}^k \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\Psi(t_i) - \Psi(t_{i-1}))^2}$$

右端每項

(1)

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \cdot |\Psi(t_i) - \Psi(t_{i-1})| \leq$$

$$\text{每項} \leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + |\Psi(t_i)$$

$$- \Psi(t_{i-1})|.$$

所以 $\sup_{\Delta} L_{\Delta}$ 存在必須而充分的條件是 $\varphi(t), \Psi(t)$ 圍變，

我們叫 $\sup L_{\Delta}$ 做曲線 $x = \varphi(t), y = \Psi(t)$ 的長

定理 4 曲線 $x = \varphi(t), y = \Psi(t)$ 有長的必須而充分條件是 φ, Ψ 圍變。

今進而證

$$\sup_{\Delta} L_{\Delta} = l, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} L_{\Delta} = l$$

式中 δ 為分法 Δ 中小隔間之最長者，但設 φ, Ψ 均連續。

照定義任與一 $\epsilon > 0$ 必有一分法 Δ ：

$$a = a_0 < t_1 < \dots < a_p = b \quad \text{其對應之 } L_{\Delta_1} > l - \frac{\epsilon}{2}.$$

次做一分法 Δ_1 ：

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

$$\min(a_j - a_{j-1}) < \eta < \max(t_i - t_{i-1}).$$

今合併 t_i 及 a_j 照大小排列之，由此分法所得析線長設

(1)

爲 L 由計量之性質得 $L \geq L_{\Delta_2} \cdot L_{\Delta_1}$ 自然 $L > 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

由 L_{Δ_2} 做 L 時我等乃當 a_k 在 (t_{i-1}, t_i) 時代 t_{i-1}, t_i 對應之頂點之邊以兩對應 $t_{i-1}, a_k; a_k, t_i$ 者，被換之邊數至多 $p-1$ 。充分小則 $|t' - t''| < \eta$ 時下式可成立。

$$\frac{\sqrt{(g(t') - g(t''))^2 + (\Psi(t') - \Psi(t''))^2}}{\epsilon / (p+1)}$$

所以 $L - L_{\Delta_2} < \frac{\epsilon}{2}$ ，所以 $L_{\Delta_2} > 1 - \epsilon$ 換言之

$$0 < 1 - L_{\Delta_2} < \epsilon$$

明所欲證。

第五章 微分法

§1. 先討論一變函. 設 $f(x)$ 定義於點 x 近傍, 依 U. Dini 稱

$$\overline{D}_+ f(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$\overline{D}_- f(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow -0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$\underline{D}_+ f(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$\underline{D}_- f(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow -0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

分爲上右, 上左, 下右, 下左導數, 照第二章 §2 優劣限之推廣四數恆存在.

$$\overline{D}_+ f(x) = \underline{D}_+ f(x) = D_+ f(x),$$

$$\overline{D}_- f(x) = \underline{D}_- f(x) = D_- f(x)$$

時分稱做右, 左導數.

$$D_+ f(x) = D_- f(x)$$

時稱做在點 x 之 f 之導數其代表符號已爲讀者所熟知, 視導數爲變 x 之函時稱曰導函, 由是知導數之存在實爲特

(1)

殊情形， $f'(x)$ 有限時特稱之曰可微，此時 $f(x)$ 在點 x (有限) 連續，反之不然可用 $f'(x) = (x)$ 在 $x=0$ 明之，此乃據局部言由全體言之亦然，可依 *vau der Waerden* 由下法行之：

令 $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 表示 x 距 $\frac{m}{10^n}$ (m 正整數小於 10^n)

形狀最近數之距離， $f_n(x)$ 連續且 $0 \leq f_n(x) \leq 10^{-n}$ 故

$$f(x) = \sum_n f_n(x)$$

仍為連續函。若 x 之 q 位數字為 4 或 9 時設 $x' = x - 10^{-q}$ ，否則設 $x' = x + 10^{-q}$ ， $n < q$ 對於 x, x' 之最近數 $m/10^n$ 相同， x, x' 同在其右方或左方， $n \geq q$ 則對於 x, x' 之最近數相差恰等於 $x - x'$ 。

因之

$$f_n(x') - f_n(x) = \begin{cases} \pm(x' - x) & (n < q) \\ 0 & (n \geq q) \end{cases}$$

$$\therefore f(x') - f(x) = \sum_{n=1}^{q-1} \pm(x' - x) = p(x' - x).$$

p 或正或負或零或偶或奇隨 $q-1$ 而定故 $\{f(x') - f(x)\}$ $f(x' - x)$ 不能有固定限數，在任何點皆然故 $f'(x)$ 不能存在，

(1)

定理1. $\overline{D}_+f(x)$, $\underline{D}_+f(x)$ 在 x 有限時則 $f(x)$ 在 x 右連續.

證明：取任意數列 $x_n > x$, $\lim x_n = x$.

$$\begin{aligned} \underline{D}_+f(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \leq \liminf_n \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \\ &\leq \underline{D}_+f(x). \end{aligned}$$

故 $n > N$

$$\begin{aligned} (x_n - x)(\underline{D}_+f(x) - 1) &< f(x_n) - f(x) \\ &< (x_n - x)(\overline{D}_+f(x) + 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \liminf_n f(x_n) = f(x). \quad (\text{畢}).$$

反之，由 $f(x) = (x)^{\frac{1}{2}}$ 知不能成立蓋 $D+f(0) = +\infty$, $D-f(0) = -\infty$. 由全體觀時間題較難，但已有解決惟論文在國內無有.

定義. $f(x)$ 較對於 x 以外某一近傍所對應數值均大(小)時稱 $f(x)$ 為極大(小)值.

定理2. $f(x)$ 於 x 取極大(小)時

$$D+f(x) \leq 0 \leq \underline{D}-f(x) \quad (\underline{D}-f(x) \leq 0 \leq D+f(x)).$$

定理3. 於 x 點

$$\overline{D}_+f(x) < 0 < \underline{D}-f(x) \quad (\overline{D}-f(x) < 0 < D+f(x))$$

時 $f(x)$ 取極大(小).

次就二變言之(多變時亦同), 與 y 以某定值設

$$g(x) = f(x, y)$$

$$\text{若 } D_+ g(x) = D_+ f(x, y), \quad D_+ g(x) = D_+ f(x, y),$$

$$D_- g(x) = D_- f(x, y), \quad D_- g(x) = D_- f(x, y).$$

四者一致時書如 \searrow

$$f'_x(x, y) \text{ 或 } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

稱之曰對於 x 之偏導數, 於 (x, y) , $f'_x(x, y)$ 存在而有限時稱之曰對於 x 可偏微.

今

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = Ah + Bk + \epsilon \sqrt{h^2 + k^2}$$

式中 A, B 為與 h, k 無關之有限數, ϵ 乃與 $\sqrt{h^2 + k^2}$ 同時趨於零之數, 此時稱 $f(x, y)$ 為在 (x, y) 可全微 (stolz).

此時 $f(x, y)$ 在 (x, y) 連續不待言, 設 $k=0$, 使 h 任意小, 得 $A=f'_x(x, y)$ 同理 $B=f'_y(x, y)$. 逆理不能成立 (Rademacher (1919)).

對於二變之極值定義亦同.

定理4. $f(x, y)$ 於 (x, y) 取極大時

$$D_+ f(x, y) \leq 0 \leq D_- f(x, y).$$

(4)

$$D_y + f(x, y) \leq 0 \leq D_y - f(x, y).$$

定理5. 於 (x, y) 點有關係，

$$D_{x+}f(x, y) < 0 < D_{x-}f(x, y),$$

$$D_{y+}f(x, y) < 0 < D_{y-}f(x, y)$$

時 $f(x, y)$ 在該點取極大

定理 2-5 於可微情形時之討論讀者已知，茲不具論

§2. 由 §1 知微分云云不能離開近傍，所以一變時可就隔間 (a, b) 討論之，二變時可就矩形討論之，有時或將其界點加入。

定理1. (Rolle) $f(x)$ 在 $\langle a, b \rangle$ 連續，在 (a, b) 可微若 $f(a) = f(b)$ 則必有 $a < \xi < b$ 而 $f'(\xi) = 0$.

證明: $f(a) = f(b) = 0$ 若恒等於 0 則不必證。若於 $\langle a, b \rangle$ 取正值其最大值 $f(\xi) > 0$ 由 §1 定理 2 $f'(\xi) = 0$ 且 $a < \xi < b$.

取負值時考察其最小值， $f(a) = f(b) = k \neq 0$ 時考察 $f(x) - k$ 即可(畢)。

定理2. (Cauchy-l'Hospital 不定形定理). $f(x), g(x)$ 在 $\langle a, b \rangle$ 連續，於 (a, b) 可微，且 $g(a) \neq g(b), f'(x), g'(x)$ 不同時在 (a, b) 等於零，則必有 $a < \xi < b$

(1)

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

證明. 設 $F(x) = \mu f(x) - \lambda g(x)$. 取 $\lambda = f(b) - f(a)$,
 $\mu = g(b) - g(a)$ 則 $F(b) = F(a)$. 由定理 2

$$\{g(b) - g(a)\} f'(\xi) - \{f(b) - f(a)\} g'(\xi) = 0$$

$$a < \xi < b.$$

若 $g'(\xi) = 0$, $g(b) \neq g(a)$ 則 $f'(\xi) = 0$ 與假設不合, 故
 $g'(\xi) \neq 0$. 全體用 $\{g(b) - g(a)\} g'(\xi)$ 除得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

系 1 (Lagrange 中值定理) $f(x)$ 在 $\langle a, b \rangle$ 連續, 在
 $[a, b]$ 可微, 於是必有一 $a < \xi < b$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

系 2 (Taylor 定理) 在某隔 $f(x)$ n 階可微, 設 a 為
 其中某定點 x 為任意一點則

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + \dots + (x-a)^{n-1}$$

$$\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

(1)

$$(\xi = a + \theta(x-a), 0 < \theta < 1)$$

證明，設

$$F(x) = f(x) - \left\{ f(a) + (x-a) \frac{f'(a)}{1!} + \dots + (x-a)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \right\}$$

則 $F(a) = F'(a) = \dots = F^{(n-1)}(a) = 0, F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$.

應用定理 2 於 $f(x) = F(x), g(x) = (x-a)^n$ ，得

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n} = \frac{F^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad (\xi = a + \theta(x-a))$$

代入上式得所欲求(畢)

定理 3. 在矩形 $(x, y), (x+h, y), (x, y+k), (x+h, y+k)$ 內 $f(x, y)$ 存在於 (x, y, I) 連續時則 $f(x, y)$ 可全微，

證明. $f(x+h, y+k) - f(x, y) = \{ f(x+h, y+k) - f(x, y+k) \} + \{ f(x, y+k) - f(x, y) \}$

應用定理 2 系 1 於右端前半

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y+k) &= hf'_x(x+\theta h, y+k), \\ &0 < \theta < 1, \\ &= h \{ f'_x(x, y) + \epsilon \}, \end{aligned}$$

又照假設

$$(4)$$

$$f(x, y+k) - f(x, y) = k (f'_y(x, y) + \epsilon)$$

$$\therefore f(x+h, y+k) - f(x, y) = hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y) + b\epsilon + k\epsilon' \quad (\text{畢}).$$

定理4. (Schwarz) 在前定理矩形 f'_x, f'_y, f''_{xy} 存在於 (x, y) f''_{xy} 連續時 f''_{yx} 亦存在且 $f''_{xy} = f''_{yx}$.

證明. 設 $\Delta = \{ f(x+h, y+k) - f(x+h, y) \}$
 $= \{ f(x, y+k) - f(x, y) \}$

f'_x 既存在得

$$\Delta = h \{ f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y) \}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

$$= hkf''_{xy}(x+\theta h, y+\theta'k) \quad (0 < \theta' < 1).$$

f''_{xy} 既連續

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk} = f''_{xy}(x, y).$$

於左方極限先使 k 趨於零

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk} = \frac{1}{h} \{ f'_x(x+h, y) - f'_x(x, y) \}$$

次使 h 趨於零

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk} = f''_{xy}(x, y)$$

(1)

故得所欲證(畢)

定理 5. 可微連續函列 $\{f_n(x)\}$ 斂於 $f(x)$, 且 $\{f'_n(x)\}$ 一致斂於 $g(x)$ 於是 $f'(x) = g(x)$. 函之義域同定理 2 系 1.

證明 設 $\Delta = f_{n+p}(x) - f_n(x)$ n, p 兩正整數,

$$\begin{aligned}\Delta'(x) &= f'_{n+p}(x) - f'_n(x) = [g(x) - f'_n(x)] \\ &\quad + [f'_{n+p}(x) - g(x)]\end{aligned}$$

$$\therefore |\Delta'(x)| < \epsilon \quad n \geq N(\epsilon).$$

在 $\langle a, b \rangle$ 任取 $x, x+h$ 二值, 且 $n \geq N$

$$\begin{aligned}f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x) &= f_n(x+h) - f_n(x) \\ &\quad + \Delta(x+h) - \Delta(x)\end{aligned}$$

對於 $\Delta(x)$ 應用定理 2 系 1 上式右端成

$$= f_n(x+h) - f_n(x) + h\Delta'(v + \theta h) \quad (0 < \theta < 1).$$

使 n 固定, 設 p 無限增大, 得

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} + \lambda(x, h)$$

$$|\lambda(x, h)| \leq \epsilon$$

自兩方減 $g(x)$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) = \left[\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right]$$

(1)

$$-f'_n(x)] + [f'_n(x) - g(x)] + \lambda(x, h)$$

照假設得

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| < 3\epsilon \quad (\text{畢}).$$

例1). 以級之部和作 $f_n(x)$ 時在其斂域滿足定理 5 所云故級之微分可於斂域任意求之.

$$(e^x)' = e^x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x.$$

2). 本定理之 $\{f'_n(x)\}$ 之一致收斂不成立時確有

反例例如 $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right\}$ 此時 $\{f_n(x)\}$ 且一致

收斂.

§3. 定理 $f(x)$ 在 $\langle a, b \rangle$ 連續, 除去可數個點外恒

$$\overline{D}+f(x) \geq 0 \quad \text{或} \quad \overline{D}-f(x) \geq 0 \quad (\underline{D}+f(x) \leq 0$$

$$\text{或} \quad \underline{D}-f(x) \leq 0)$$

時 $f'(x)$ 在 $\langle a, b \rangle$ 爲昇(降)函.

證明. 用歸謬法, 倘有二點 $a \leq x' < x'' \leq b$

$$f(x') > f(x'')$$

取滿足

$$0 < h(x'' - x') < f(x') - f(x'')$$

之 h 做

(1)

$$\varphi(x) = f(x) + hx$$

於是

$$\varphi(x') > \varphi(x'')$$

取滿足

$$\varphi(x') > \alpha > \varphi(x'')$$

之 x 令

$$\begin{aligned} \xi\alpha &= \sup \{ \bar{x} \} \\ x' &< x < x'' \\ \varphi(x) &= \alpha \end{aligned}$$

$\varphi(x'') < \alpha$ 所以若有 ξ

$$\varphi(\xi) > \alpha, \quad \xi\alpha < \xi < x''$$

必定有 $\xi < x < x''$ 且 $\varphi(x) = \alpha$ 與 $\xi\alpha$ 之定義不合，所以對於

$$\xi\alpha < x < x'' \quad \varphi(x) < \alpha = \varphi(\xi\alpha)$$

$$\therefore \bar{D} + \varphi(\xi\alpha) \leq 0$$

故如此之點不止可數個今

$$\bar{D} + \varphi(\xi\alpha) = \bar{D} + f(\xi\alpha) + h \leq 0 \quad \therefore \bar{D} + f(\xi\alpha) < 0$$

是與假設不合所以

$$f(x') \leq f(x'') \quad (\text{畢}).$$

系1. 如 $f(x)$ 可微且 $f'(x) > 0$ 可知 $f(x') < f(x'')$.

例. 由 $\cos x, \sin x$ 之定義

$$(1)$$

$$\cos 0 = 1 > 0$$

$$\begin{aligned} \cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!} \right) \\ - \left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!} \right) - \dots \end{aligned}$$

括弧內諸項皆正 $\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3} < 0.$

一方 $\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} \right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7} \right) + \dots$

故對於 0 與 2 之間之數恒正，已知 $(\cos x)' = -\sin x$ 故於 $(0, 2)$ $(\cos x)' < 0$. 由本 § 定理及連續函之性質在 0 與

2 之間 $\cos x$ 只有一個零點，稱之曰 $\frac{\pi}{2}$.

由前章 §2 式(c)得

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{但應正} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

再由該處(d)得

$$\begin{aligned} \cos \pi = -1, \quad \sin \pi = 0; \\ \cos 2\pi = 1, \quad \sin 2\pi = 0. \end{aligned}$$

再由該處(a, b)得

(1)

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x \text{ 等.}$$

做 $\xi = \cos x, \eta = \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$

$P = (\xi, \eta)$ 所畫軌跡由前章 §2 式 (c) 恒在 $\eta^2 + \xi^2 = 1$ 上，即半徑 1 之圓周上， x 由 0 增至 π 時 $\cos x$ 自 +1 遞減至 -1， $\sin x$ 恒正 P 點動於上半圓周， x 由 π 增至 2π 時 P 動於下半圓周且只一次。

$\cos x, \sin x$ 在 $\langle 0, 2\pi \rangle$ 一致連續，在分法相當細緻時

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \sqrt{(\cos x_i - \cos t_{i-1})^2 + (\sin t_i - \sin t_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^h \sqrt{h^2_{i-1} (\sin^2 t_{i-1} + \cos^2 t_{i-1}) - \epsilon_{i-1}} \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} \sqrt{h^2_i - \epsilon_i} \leq \sum_{i=1}^h (h_i - \frac{\epsilon_i}{3}) \leq 2\pi. \end{aligned}$$

$$\therefore \sup_{\Delta} L_{\Delta} = 2\pi.$$

即由 $\xi = \cos x, \eta = \sin x$ 所表示半徑 1 圓周之長適等於 2π 。故知 π 與已知者相同。

故第四章 §2 用級定義之 $\cos x, \sin x$ 確與在三角法所遇

(1)

者相一致.

系2. $f(x)$ 之導函 $f'(x)$ 除可數個點外存在而等於零則 $f(x)$ 恒等於常數.

注放寬可數個本系未必成立.

系3. $f(x,y)$ 在 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 連續對於每個 $y(x)$ 除去可數個 $x(y)$ 恒

$$\bar{D}_x + f(x,y) \geq 0 \text{ 或 } \bar{D}_x - f(x,y) \geq 0$$

時 $f(x,y)$ 確定 $y(x)$ 時為 $x(y)$ 之昇函.

系4. 在域 D 之 $f(x,y)$ 對於每個 y 除去可數個 x 及每個 x 可數個 y 可偏微而

$$f'_x(x,y) = 0, f'_y(x,y) = 0$$

則 $f(x,y)$ 於 D 恒等於常數.

證明：由系 3 於某點近傍 $f(x,y) = K$. 故此類點集乃開集設有 $f(x,y) \neq K$ 之點亦是開集與 D 乃域之定義不合(畢).

§4. 有二變之連續函 $F(x,y)$. 定義於 (x,y) 平面且不恒等於零時稱 $F(x,y)$ 為關係函. 今若有函 $y=f(x)$ 定義於域 D 者代入後滿足 $F(x,f(x))=0$. 稱 $f(x)$ 為由 $F(x,y)=0$ 在域 D 所確定之隱函, 若有兩個以上 $f(x)$ 適合此條件時稱之曰隱函之枝 (定義隱函所用關係函之限制尙

可放寬.)

定理. 在某域 $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ 連續, 在域內點 (x_0, y_0) , $F(x_0, y_0) = 0$ 而 $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 於是有一意之 $y = f(x)$ 滿足

- 1) $y = f(x)$ 連續於含 x_0 之某隔間, 且 $F(x, f(x)) = 0$
- 2) $y_0 = f(x_0)$
- 3) $f'(x) = -F'_x(x, y)/F'_y(x, y)$.

證明. 設 $F'_y(x_0, y_0) > 0$, 故在含 (x_0, y_0) 之某域 K $F'_y(x_0, y_0) > 0$ 固定 $x = x_0$ 變化 y 則 $F(x_0, y)$ 為 y 之昇函. $F(x_0, y_0) = 0$ 所以在 K 某點 $A = (x_0, y_1)$ ($y_1 < y_0$) $F(x_0, y_1) < 0$ 在 $B = (x_0, y_2)$ ($y_2 > y_0$) $F(x_0, y_2) > 0$. $F(x, y)$ 連續故在含 x_0 之 $\xi_1 \leq x \leq \eta_1$ $F(x, y_1) < 0$. 含 x_0 之 $\xi_2 \leq x \leq \eta_2$, $F(x, y_2) > 0$. 取 $x_1 = \max(\xi_1, \xi_2)$, $x_2 = \min(\eta_1, \eta_2)$ 於於對於 $x_1 \leq x \leq x_2$

$$F(x, y_1) < 0, \quad F(x, y_2) > 0.$$

已知 $F'_y(x, y) > 0$ 故對於 $x_1 \leq x \leq x_2$ 之每個 x 在 $y_1 < y < y_2$ 且滿足 $F(x, y) = 0$ 之 y 只有一個 以此 x 與 y 之對應為 $y = f(x)$. $F(x, f(x)) = 0$ 及 2) 已明顯

在 $\langle x_1, x_2 \rangle$ 取斂於 x 之列 $\{x_n\}$ 同時得一 $\{y_n = f(x_n)\}$, $\{x_n, y_n\}$ 有界至少有一個聚點設為 (x, η) , $\{x_n, y_n\}$ 中

(4)

必有一下列 $\{x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}\}$ 斂於 (x, η) , 顯然 $F(x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}) = 0$ 由其連續性 $F(x, \eta) = 0$. 故 η 必與 $y = f(x)$ 相同. 換言之

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

次證3)

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = h F'_x(x+\theta h, y+\theta k) + k F'_y(x+\theta h, y+\theta k)$$

今取 (x, y) 及 $(x+h, y+k)$ 均滿足 $F(x, y) = 0$ 時

$$h F'_x(x+\theta h, y+\theta k) + k F'_y(x+\theta h, y+\theta k) = 0$$

$h \neq 0, F'_y \neq 0$

$$\therefore \frac{k}{h} = -\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{F'_x(x+\theta h, y+\theta k)}{F'_y(x+\theta h, y+\theta k)}$$

F'_x, F'_y 連續

$$f'(x) = -F'_x(x, y)/F'_y(x, y) \quad (\text{畢})$$

系1. 在某域 $y = f(x), f'(x)$ 連續, 在 $(x_0, y_0), y_0 = f(x_0), f'(x_0) \neq 0$. 於是有一一意一價之 $x = \varphi(y)$ 滿足

1) $x = \varphi(y)$ 連續於含 y_0 之某隔間, 且 $y = f(\varphi(y))$.

2) $x_0 = \varphi(y_0)$

3) $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

(4)

系2. 連續函 $y=f(x)$ 滿足系1 條件時將 x_0 點近傍一對一兩連續變換於 y_0 點近傍.

例. x 項係數 $\neq 0$ 之級於其斂域內滿足系1 所云.

第六章 積分法

§1. 以下所云點集在一，二或三度歐氏空間，統稱隔間，矩形，立方體為矩形。設 K 為直徑有限之集在空間內做矩形使 K 完全包含在內作矩形網 Δ 以完全在 K 內部者作和稱曰 s_{Δ} ，至少有一點與 K 相共之矩形做和稱之曰 S_{Δ} ，又稱

$$s = \sup_{\Delta} s_{\Delta}, \quad S = \inf_{\Delta} S_{\Delta}$$

分爲 K 之內 J 測度，外 J 測度。添分點於 Δ 得 Δ' 顯然

$$s_{\Delta} \leq s_{\Delta'}, \quad S_{\Delta'} \leq S_{\Delta}.$$

故有兩分法 Δ, Δ' 時合併 Δ, Δ' 成 Δ'' 則

$$s_{\Delta} \leq s_{\Delta''} \leq S_{\Delta''} \leq S_{\Delta},$$

$$\therefore s \leq S.$$

$s = S$ 時以此值爲 K 之 J 測度，稱 K 爲 J 可測，今進而證

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s_{\Delta} = s, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} S_{\Delta} = S.$$

按上限定義必有一分法 D 滿足

$$s - \epsilon < S_D \leq s.$$

分法 D 之矩形頂點數目設爲 p 另選一分法 Δ 矩形之容

(1)

積最大者已小於 δ 其每個小矩形內至多含屬於 D 之矩形頂一個，故合 D, Δ 成 Δ' 時

$$s_{\Delta} \leq s_{\Delta'}, \quad s_{\Delta'} \leq s_{\Delta} + p\delta, \quad s_{\Delta'} - s_{\Delta} \leq p\delta$$

p 固定數 δ 可任意小亦即對任一 $\epsilon > 0$

$$s_{\Delta'} - s_{\Delta} < \epsilon.$$

$$\therefore 0 \leq s - s_{\Delta} < 2\epsilon \quad (\text{畢})$$

故 K 之 J 可測條件乃

$$(I) \quad s - s = \lim_{\delta \rightarrow 0} (S_{\Delta} - s_{\Delta}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathfrak{R}_{\Delta} = 0$$

亦即含 K 界點小矩形之總面積可任意小之謂。

定理. 平面上點集 K 之界乃有長之閉曲線. K 必 J 可測.

證. 設長為 l , n 等分之 $l/n = \delta$ 各小弧完全含於以其中點為中心邊長 δ 之正方形內. 換言之曲線之面積較

$$n\delta^2 = n \frac{l^2}{n^2} = l^2/n \text{ 小. } (\text{畢})$$

系. K 之界乃閉曲線, $x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$, φ', Ψ' 存在而圍則 K J 可測.

由此知矩形 J 可測, 並與已知者相等:

又 J 測度為 x 之點集 K 由合條件 (I) 之分割線 L 分

(1)

爲 K_1, K_2 兩部，於是 K_1, K_2 亦有 J 測度 K_1, K_2 ，且 $s_K = s_{K_1} + s_{K_2} + s_{\emptyset}$ 。由定義 $s_{K_1} \rightarrow x_1, s_{K_2} \rightarrow x_2, s_{\emptyset} \rightarrow 0, s_K \rightarrow x$ 。

$\therefore x = x_1 + x_2$ 。既有定理及此注意足以應付日常所遇者。

尙有一問題即由歐氏空間等長運動相重合之點集 J 可測時是否相等，問題所由生乃因最初依賴與座標平面平行之矩形過甚所致，故將 J 可測之點集固定而變換座標時能證 J 測度不變即可。

圓乃 J 可測且變換座標時測度亦不變。今利用圓先證條件 (I) 與座標軸無關，邊長較 δ 小之矩形含於直徑 $\sqrt{2}\delta$ 之圓內，與此圓外切之正方形容積爲 $2\delta^2$ 。故對一座標是 Ω_Δ 時座標變換後小於 $2\Omega_\Delta$ 。故 (I) 恒合。新座標之矩形網含於 K 內者，其容積之和設爲 s'_Δ 時 $s'_\Delta \leq \sum$ 。 $\therefore \sum' \leq \sum$ 。同理 $\sum \leq \sum'$ 。 $\therefore \sum = \sum'$ 。用同樣方法可證包 K 之矩形雖不同 J 可測之條件不變並數值相等。

§2. 設點集 K 直徑有限並有測度 J 。矩形網 Δ 中各矩形容積之最大者不超過 δ 。在每個矩形 ω_i 圍函 $f(p)$ 之上，下限分爲 M_i, m_i 。（矩形不完全在 K 內時，取 K 及矩形之交），對於至少含 K 一點之矩形做

$$T_\Delta = \sum M_i |\omega_i|, \quad t_\Delta = \sum m_i |\omega_i|.$$

(1)

$|\omega|$ 表示 ω 之容積，兩和內含界點矩形部分之絕值不大於 $G\mathcal{R}_\Delta$ ($|f(p)| < G$)。故此時取完全在 K 內之小矩形亦無妨

$$-2GJ \leq t_\Delta \leq T_\Delta \leq 2GJ.$$

故可書

$$t = \sup_{\Delta} t_\Delta, \quad T = \inf_{\Delta} T_\Delta.$$

加分點於分法 Δ 時新上(下)限減小(增大)故 t_Δ 不減小 T_Δ 不增大。有任意兩分法 Δ, Δ' 時同 §1 得

$$t_\Delta \leq T_{\Delta'}, \quad \therefore t \leq T.$$

稱 $t(T)$ 爲 $f(p)$ 在 K 之 R 下(上)積分， $t=T$ 時稱此值爲 $f(p)$ 在 K 之 R 定積分用符號 $\int_K f(p) dp$ 表示，稱 K 爲積域。

Darboux 定理:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} t_\Delta = t, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} T_\Delta = T.$$

其證法與前 § 完全相同，故同時得

(可積條件)

$$T - t = \lim_{\delta \rightarrow 0} (T_\Delta - t_\Delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum (M_i - m_i) |\omega_i| = 0.$$

$M_i - m_i$ 或稱爲 $f(p)$ 在 ω_i 之振動。

(1)

$f(p)$ 如可積，積分可由下式求之：

$$\lim \sum f(\xi_i) |\omega_i|$$

ξ_i 爲 ω_i 中任一點，蓋

$$t_\Delta \leq \sum f(\xi_i) |\omega_i| \leq T_\Delta$$

$$\therefore \int_K f(p) dp = \lim \sum f(\xi_i) |\omega_i|.$$

最單簡之可積函有如

i) 在閉而 J 可測之 K 上之連續函，蓋分法相當細微後

$$0 \leq M_i - m_i < \epsilon.$$

$$\therefore 0 \leq \sum (M_i - m_i) |\omega_i| < \epsilon J.$$

ii) 在 i) 之 K 中只有有限個不連續點之 $f(p)$

iii) R^1 中任一閉隔間之圈昇函，蓋對任一分法

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

$$M_i = f(x_i), \quad m_i = f(x_{i-1})$$

$$\therefore T_\Delta = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1)$$

$$+ \dots + f(x_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$t_\Delta = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$+ \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

$$T_\Delta - t_\Delta = \sum_1^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1})$$

(1)

$$\leq (f(b) - f(a))\delta,$$

iv) 閉隔間中之固變函亦可積。

由 iii) 及 iv) 可知有相當多之不連續點之函亦可積。
反之有

定理，可積函之連續點稠於 K 。

證明。由可積條件任與 $\epsilon \in J, \epsilon > 0$ 必有一分法可使

$$\epsilon \in J > \sum (M_i - m_i) |\omega_i| \geq 0$$

令 $M_i - m_i$ 中最小者為 v 時

$$\epsilon \in J > vJ \quad \therefore \epsilon > vJ$$

故必有一小矩形 ω 內函之振動小於 ϵ 。對 ω 及 $\epsilon > \epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_n \rightarrow 0$ 繼續行之得

$$\omega^1 \supset \omega^2 \supset \dots \supset \omega^n \supset \dots \text{在 } \omega^n \text{ 之振動小於 } \epsilon_n.$$

其所確定之一點 ρ_0 即連續點 (畢)

今將 R 積分之最重要性質列舉如下，以下所云積域當然假設其 J 可測。

1°. f 可積 (§1)。

2°. f, g 可積時 $f \pm g$ 亦可積。

$$\lim \sum (f(\xi_i) \pm g(\xi_i)) |\omega_i| = \lim \sum f(\xi_i) |\omega_i| \pm \lim \sum g(\xi_i) |\omega_i|$$

3°. C 常數

(4)

$$\int_K cf(p)dp = c \int_K f(p)dp.$$

4°. $f(p) \geq 0$ 於 K $\int_K f(p)dp \geq 0$.

$f(p) \geq g(p)$ 於 K $\int_K f(p)dp \geq \int_K g(p)dp$.

5°. $f(p) > 0$ 於 K 則 $\int_K f(p)dp > 0$.

由定理知 $f(p)$ 至少有一連續 p_0 , $f(p_0) = k > 0$ 故在

一小矩形內 $f(p) > \frac{k}{2}$.

$$\therefore \int_K f(p)dp > \frac{k}{2} |\omega_i| > 0.$$

6°. $f(p)$ 可積時 $|f(p)|$ 可積且

$$|\int_K f(p)dp| \leq \int_K |f(p)|dp.$$

$$\therefore ||f(p)| - |f(p')|| \leq |f(p) - f(p')|$$

故 $|f(p)|$ 亦合可積條件，且

$$|f(p)| \geq f(p), -f(p).$$

7°. $f(p), g(p)$ 可積時 $f(p) \cdot g(p)$ 亦可積，若 $|g(p)| > c > 0$ $f(p)/g(p)$ 亦然

$$|f(p)g(p) - f(p')g(p')| = |(f(p) - f(p'))g(p) + (g(p) - g(p'))f(p')|$$

8°. (第一平均值定理) $\sup_K f(p) = M, \inf_K f(p) = m.$

(1)

$$|m| \leq \int_K f(p) dp \leq MJ$$

故 f 連續，且 K 連時

$$\int_K f(p) dp = f(\xi) \cdot J.$$

§3. 定理1. 連續函列 $\{f_n(p)\}$ 一致斂於 $f(p)$ 則

$$\lim \int_K f_n(p) dp = \int_K f(p) dp.$$

證明. 按題設 $|f_n(p) - f(p)| < \epsilon \quad n > N(\epsilon)$

由§2

$$\begin{aligned} \left| \int_K f_n(p) dp - \int_K f(p) dp \right| &\leq \int_K |f_n(p) \\ &\quad - f(p)| dp < \epsilon \cdot J. \quad (\text{畢}) \end{aligned}$$

如取消一致斂時定理1未必成立可由第四章 §3 之 $\{f_n(x)\}$ 明之，但可將 x 限於 $(0, 2)$.

今推廣以往之一致收斂，有定義於 (p, α) 空間某集之函 $f(p, \alpha)$ (α 實數) 如對 $\epsilon > 0$ 選一與 p 無關之 $\delta(\epsilon)$

$|\alpha - \alpha_0| < \delta$ 時牽涉 $|f(p, \alpha) - g(p)| < \epsilon$. 稱 $f(p, \alpha)$ 於 $\alpha \rightarrow \alpha_0$ 時一致斂於 $g(p)$. 若 α_0 非有限數則代 $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ 以 $\alpha > R$ 或 $\alpha < -R$. 顯然於定理1代 $\{f_n(p)\}$ 以 $\{f(p, \alpha)\}$ 亦成立.

點 (p, α) 屬於 (p, α) 空間之點集 $(K, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2)$ K, J 可測閉集， $f(p, \alpha)$ 定義於此處且對 p, α 連續，設

(1)

$$F(\alpha) = \int_K f(p, \alpha) dp$$

定理2. $F(\alpha)$ 連續於 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$.

證明. 取分法 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots, \Delta_n$ 中矩形直徑隨

$\frac{1}{n}$ 趨於零.

做

$$\sum_{\substack{p_{ni} \in \omega_{ni} \\ \omega_{ni} \in \Delta_n}} f(p_{ni}, \alpha) |\omega_{ni}| = F_n(\alpha)$$

$f(p, \alpha)$ 連續故一致連續即 n 相當大時, 凡

$$p, p' \in \omega_{ni}$$

對任意 ϵ

$$|f(p, \alpha) - f(p', \alpha)| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \sum \int_{\omega_{ni}} f(p, \alpha) dp + \int_{K - \sum \omega_{ni}} f(p, \alpha) dp \\ &= \sum f(\xi_{ni}, \alpha) |\omega_{ni}| + \int_{K - \sum \omega_{ni}} f(p, \alpha) dp. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |F(\alpha) - F_n(\alpha)| &\leq \sum |f(\xi_{ni}, \alpha) - f(p_{ni}, \alpha)| \\ &|\omega_{ni}| + C(J - \sum |\omega_{ni}|) < \epsilon(J + C). \end{aligned}$$

故 $F_n(\alpha)$ 一致斂於 $F(\alpha)$. (畢).

定理3.
$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha) d\alpha = \int_K dp \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(p, \alpha) d\alpha$$

(1)

證明 由定理1

$$\lim_n \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_n(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha) d\alpha$$

由 $F_n(\alpha)$ 定義

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_n(\alpha) d\alpha = \sum |\omega_{ni}| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(p_{ni}, \alpha) d\alpha$$

設

$$\varphi(p) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(p, \alpha) d\alpha$$

於是

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_n(\alpha) d\alpha = \sum_i \varphi(p_{ni}) |\omega_{ni}|$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha) d\alpha = \lim_n \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_n(\alpha) d\alpha = \lim_n \sum_i \varphi(p_{ni})$$

$$|\omega_{ni}| = \int_K \varphi(p) dp.$$

$$= \int_K dp \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(p, \alpha) d\alpha. \quad (\text{畢})$$

定理4. 偏導函 $f_\alpha(x, \alpha)$ 連續於 $(K, \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle)$ 則

$$F'(\alpha) = \int_K f_\alpha(p, \alpha) dp.$$

(1)

證. 設 $G(\alpha) = \int_K f_\alpha(p, \alpha) dp$.

$$\begin{aligned} \text{由定理 3. } \int_{\alpha_0}^{\alpha} G(\alpha) d\alpha &= \int_K dp \int_{\alpha_0}^{\alpha} f_\alpha(p, \alpha) d\alpha \\ &\quad (x_1 \leq \alpha_0, \alpha \leq \alpha_2) \\ &= \int_K (f(p, \alpha) - f(p, \alpha_0)) d\alpha = F(\alpha) - F(\alpha_0) \end{aligned}$$

由定理 2 知 $G(\alpha)$ 連續，行微分之手續

$$F'(\alpha) = G(\alpha) = \int_K f_\alpha(p, \alpha) dp \quad (\text{畢})$$

定理 3 更可推廣為簡明起見證

定理 5. $f(x, y)$ 可積於 $K(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ 又 $c < y < d$

時 $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ 存在時

$$\int_K f(p) dp = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

證明. 將矩形 K 細分之

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j$$

由第一平均值定理

$$m_{ij}(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \eta_j) dx \leq M_{ij}(x_i - x_{i-1}).$$

$$\sum_1 m_{ij}(x_i - x_{i-1}) \leq E(\eta_j) \leq \sum_1 M_{ij}(x_i - x_{i-1})$$

(1)

乘 $(y_i - y_{i-1})$ 然後相加

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) &\leq \sum_j F(\eta_j)(y_i - y_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i,j} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}). \end{aligned}$$

按假設 $f(x, y)$ 在 K 可積

$$\therefore \sum_j F(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) \rightarrow \int_K f(p) dp. \quad (\text{畢})$$

注. 若 K 非矩形乃

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 連續於 $\langle a, b \rangle$. 可做一

$$f^* = \begin{cases} f & \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \\ 0 & y \text{ 在含 } K \text{ 之一矩形內} \end{cases}$$

對 f^* 應用定理 5. 知其值與對 f 求者相同.

§4. 以上我等假設積域直徑有限. 且 J 可測又被積函圍於積域, 今推廣之如下, 在某點近傍 $f(p)$ 不圍時將此點算做 K 之界點. 如此則在 K 內有界閉集 (p) 恒圍. 如 K 直徑不有限, 我等則另加 K 與以原點為中心之任意大球或矩形之交為可測. 今有 K 下可測有界閉集之列 $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ 任與一 K 下有界閉集 H 可找一 N 凡 $n > N$

(1)

$$K_n \supseteq K_{n+1}.$$

時稱 $\{K_n\}$ 斂於 K .

今設 $f(p)$ 在 K 下任一可測有界點集可積。於是

$$J(K_n) = \int_{K_n} f(p) dp$$

有意義，若對任一斂於 K 之 $\{K_n\}$ ， $J(K_n)$ 之限均一定時稱之為 f 在 K 之(廣義)積分。

在一度歐氏空間對於隔間上積分我等緩和上述限制，
 $\langle a, b \rangle$ 之 a 發生問題時

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

a, b 同時發生問題時

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon' \rightarrow 0}} \int_{a+\epsilon}^{b'-\epsilon'} f(x) dx.$$

$\langle a, b \rangle$ 中有一點 c 發生問題時

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon'}^b f(x) dx.$$

隔間非有限時

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

(1)

定理1. $f(p) \geq 0$ 於 K . 此時 $\int_K f(p) dp$ 斂之必須充分條件爲對於斂於 K 之任一遞昇集列 $\{K_n\}$ 所做 $\{J(K_n)\}$ 固於上.

證明. 按假設 $\{J(K_n)\}$ 遞昇且固於上故斂. 對另一斂於 K 之 $\{K'_v\}$ 可選一 n

$$K'_v \subset K_n \quad \therefore \quad J(K'_v) \leq J(K_n).$$

$$\overline{\lim}_{K'_v} \int_{K'_v} f(p) dp \leq \lim_{K_n} \int_{K_n} f(p) dp$$

同理逆不等式亦成立故相等, 必須更明顯. (畢)

定理2. $f(p)$ 在 K 之符號若不一定時倘 $\int_K |f(p)| dp$ 斂則 $\int_K f(p) dp$ 亦然.

證明. $f(p) \geq 0$ 時 $f_1(p) = f(p), f_2(p) = 0$;
 < 0 時 $f_1(p) = 0, f_2(p) = -f(p)$.

換言之乃

$$f_1(p) = \frac{1}{2} (|f(p)| + f(p)),$$

$$f_2(p) = \frac{1}{2} (|f(p)| - f(p)).$$

在任一 K 下有界閉可測集 H

$$\int_H f_i(p) dp \leq \int_H |f(p)| dp \quad (i=1,2)$$

$$\therefore \int_H f(p) dp = \int_H f_1(p) dp - \int_H f_2(p) dp$$

(1)

亦斂. (畢)

二度以上空間更可得上述定理之逆.

定理3. 廣義積分斂時絕斂.

證明. K 內任一閉可測 H 上所做積分之絕值恒小於一與 H 無關之常數, 倘不然對任一正數 N 可自 $K-K$ (K 任意) 內選一 H .

$$\left| \int_{H_0} f(p) dp \right| > N.$$

有斂於 K 之集列 $\{K_n\}$ 自每 $K-K_n$ 可選一 H_n 使

$$\left| \int_{H_n} f(p) dp \right| > N.$$

加 H_n 於 K_n , 書新集列為 $K_n^* \{K_n^*\}$ 亦斂於 K . 廣義積分收斂

$$\int_{K_n} f(p) dp \rightarrow \int_K f(p) dp, \quad \int_{K_n^*} f(p) dp \rightarrow \int_K f(p) dp.$$

但

$$\left| \int_{K_n^*} f dp - \int_{K_n} f dp \right| = \left| \int_{H_n} f dp \right| > N.$$

是不合, 設 K_n 為矩形網 Δ_n 與 K 有共點之矩形群且其直徑已充分小

$$0 \leq \sum_{K_n} M_n |\omega_n| - \int_{K_n} f(p) dp > \epsilon.$$

(1)

代 $f(p)$ 以 $f_1(p)$ 時，含有 $f(p) \geq 0$ 之點 $M'_i = M_i$ ，否則等於零

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{K_n} f_1(p) dp &\leq \sum_{K_n} M'_i |\omega_i| \\ &= \sum_i M_i |\omega_i| < \epsilon + \epsilon \end{aligned}$$

故 $\int f_1(p) dp$ 斂，同理 $\int f_2(p) dp$ 亦斂。 (畢)

但一次空間時我等曾放寬限制，故定理 3 不一定成立可由

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

明之。

§5. 爲簡明起見只討論二度空間之變換

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \Psi(u, v)$$

φ, Ψ 連續可微點 (u_0, v_0) 與 (x_0, y_0) 對應並先假設

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \Psi_u & \Psi_v \end{vmatrix} \text{ 於 } (u_0, v_0) \text{ 不等於零. } u, v \text{ 變動}$$

$\Delta u, \Delta v$ 時 x, y 變動 $\Delta x, \Delta y$.

$$\begin{aligned} \Delta x &= \varphi(Q) - \varphi(Q_0) \doteq \varphi_u(Q_0) \Delta u \\ &\quad + \varphi_v(Q_0) \Delta v + \rho \rho_1 \end{aligned}$$

(1)

$$\Delta y = \Psi(Q) - \Psi(Q_0) = \Psi_u(Q_0) \Delta u + \Psi_v(Q_0) \Delta v + \rho \rho_2$$

$\Delta u, \Delta v$ 動於 $\langle 0, \rho \rangle$. ρ 相當小時 $|\rho_i| < \epsilon$ ($i=1, 2$) 暫不考慮 ρ_1, ρ_2 影響得

$$x^* = x_0 + \varphi_u(Q_0) \Delta u + \Psi_v(Q_0) \Delta v$$

$$y^* = y_0 + \Psi_u(Q_0) \Delta u + \Psi_v(Q_0) \Delta v$$

(u, v) 動於以 (u_0, v_0) 為頂點邊長 ρ 之正方形時，由此變換 (x^*, y^*) 畫以下列四點為頂點之平行四邊形 H_0

$$(x_0, y_0), (x_0 + \varphi_u(Q_0)\rho, y_0 + \Psi_u(Q_0)\rho),$$

$$(x_0 + \varphi_v(Q_0)\rho, y_0 + \Psi_v(Q_0)\rho)$$

$$(x_0 + \varphi_u(Q_0)\rho + \varphi_v(Q_0)\rho, y_0 + \Psi_u(Q_0)\rho + \Psi_v(Q_0)\rho).$$

平行四邊形之面積等於

$$\rho^2 \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = |J| \cdot \rho^2$$

加入 ρ_1, ρ_2 影響後設其所畫圖形為 Ω 相同 $Q = (u, v)$ 所對應之 $P = (x, y)$ 及 $P^* = (x^*, y^*)$ 相差

$$|x - x^*| = |\rho \rho_1| < \epsilon \rho,$$

$$|y - y^*| = |\rho \rho_2| < \rho \epsilon$$

故 P, P^* 相距小於 $2\epsilon\rho$. 在 H_0 內部及外部作距 H_0 各

邊 $2\epsilon\rho$ 之平行線得 H', H'' 兩平行四邊形, H_0 及 Ω 完全含於 H' 其周界含於 $H' - H''$. 蓋 φ, Ψ 連續可微 ϵ 可盡量小, 以同一符號表示各該區域面積時

$$|\Omega - H_0| < H' - H''.$$

H_0 之周長為 $p\rho$ 時 $H' - H''$ 之面積等於 $p\rho \cdot 2\epsilon\rho$.

$$\therefore |\Omega - H_0| < 2\epsilon p\rho^2.$$

式中 $P = (\sqrt{\varphi_u(Q_i)^2 + \Psi_u(Q_i)^2} + \sqrt{\varphi_v(Q_i)^2 + \Psi_v(Q_i)^2}) \times 2$. 今 $H_0 = |J| \cdot \rho^2$

$$\therefore \left| \frac{\Omega}{\rho^2} - |J| \right| < 2\epsilon p.$$

今如 φ, Ψ 連續可微於有界閉域則 p 在全域有最大故上列不等式一致成立

$$\left| \frac{\Omega}{\rho^2} - |J| \right| < 2M\epsilon = \eta.$$

如 $J=0$, H'' 雖不可得而 $0 < \Omega < H'$ 是 $\lim \frac{\Omega}{\rho^2} = 0$.

(u,v)平面上 K' 被矩形 ω'_i 佈滿時, (x,y)平面之 K 為曲線網 ω_i 所佈, 含於 K 之小矩形 ω_i 之面積之和與對應者面積之和相差

$$\left| \sum_i |\omega_i| - \sum_i |J_i| \rho_i^2 \right| < \epsilon \sum \rho_i^2.$$

(1)

但

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sum \omega_i = \Omega = \iint_{K'} dx dy .$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sum |J_i| \rho' = \iint_{K'} |J| du dv$$

$$| \Omega - \iint_{K'} |J| du dv | = \epsilon \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum \rho' = \epsilon \Omega .$$

ϵ 仍任意

$$\Omega = \iint_{K'} |J| du dv$$

面積之求法既已知道則一般積域更換可迎刃而解 設
 ω'_i 內 $f(\varphi, \Psi)$ 之上、下限分爲 M_i, m_i 時

$$\begin{aligned} m_i \iint_{\omega'_i} |J| du dv &\leq \iint_{\omega'_i} f(\varphi, \Psi) |J| du dv \\ &\leq M_i \iint_{\omega'_i} |J| du dv . \end{aligned}$$

由上述

$$m_i \omega_i \leq \iint_{\omega'_i} f(\varphi, \Psi) |J| du dv \leq M_i \omega_i ,$$

(1)

總和之

$$\sum_i m_i \omega_i \leq \sum_i \iint_{\omega'_i} f(\omega, \Psi) |J| du dv \leq \sum_i M_i \omega_i.$$

兩端之限乃

$$\iint_K f(x, y) dx dy.$$

普通之座標更換可視為積域更換之一例，已為讀者所熟知。

——卷終——

參考書

- I. Hardy, G.H. A Course of pure mathematics.
- II. Hansdorff, F. Mengenlehre
- III. 熊慶來 (K. L. Hiong) 高等算學分析.
- IV. Sierpinski, w. Leçons sur les nombres transfinis.
- V. 高木貞治 (T. Takagi) 解析概論.
- VI. 吉田洋一 (Y. Yosida) 實變數函數論

3

6/15/17

(2)