
EUCLIDES
PHORONOMIA
Autore
1715
J. Wandelaar. inv. et fecit.

PHORONOMIA,

SIVE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS

CORPORUM

SOLIDORUM ET FLUIDORUM

LIBRI DUO,

AUTORE

JACOBO HERMANNO Basil.

antehac in Illustri Patavino Lyceo; *nunc vero*
in Regio Viadrino *Math. Prof. Ord.*
& Reg. Scientiarum Societatis, quæ Berolini *est, Sodali.*

AMSTELÆDAMI,
Apud ROD. & GERH. WETSTENIOS H.FF.

M. D. CCXVI.

VIRO

PERILLUSTRI

ATQUE

CONSULTISSIMO

GODOFREDO GULIELMO

LEIBNITIO,

CONSILIARIO IMPERIALI AULICO,

ET MAGNÆ BRITANNIÆ REGIS, PRINCIPISQUE
ELECTORIS BRUNSVICENSIS

INTIMO &c.

REGIÆ SOCIETATIS BORUSSICÆ

PRÆSIDI.

ITEM ET RELIQUIS

EJUSDEM SOCIETATIS

MEMBRIS,

VIRIS CLARISSIMIS

SUIS QUIQUE TITULIS

CONDECORATISSIMIS,

OPUS HOC

PHYSICO-MATHEMATICUM

IN SUÆ ERGA COLLEGAS OBSERVANTIÆ

TESTIMONIUM

DICAT

JACOBUS HERMANNUS.

AD BENEVOLUM

LECTOREM.

CUm ante hoc quinquennium circiter in Illuſtri Lyceo Patavino Hydroſtaticam publicis meis Lectionibus exponendam eligerem, tam ob argumenti jucunditatem, quam ob utilitatem non contemnendam in Philoſophia Naturali, cogitatio ſimul animum ſubiit, forte non ab re futurum, ſi, quæ auditoribus meis explicuiſſem, in publicum mitterem. In hoc deinceps propoſito eo magis confirmatus fui firmiusque perſtiti, quo id magis amicis harum rerum intelligentibus probari cognovi.

Archimedes primus, quod conſtet, Hydroſtaticæ rudimenta tradidit in ſuis *De Inſidentibus Humido* Libris, ſed optima ab ipſo in Philoſophiam Naturalem ſparſa ſemina magno temporis tractu ſterilia jacuere, usque dum ſagaci Galilæi ingenio fœcundata germinare inciperent. Etenim magnum hoc Philoſophiæ lumen Archimedea principia non ſolum luculentius expoſuit, explanavit, nonnullisque novis ſpeculationibus auxit, ſed etiam ſingulare phænomenon, ab aquilege tamen acceptum, Philoſophos docuit, non poſſe aquam in antliis ſuctoriis ultra octodecim cubitorum altitudinem attolli, &, quanquam veram ejus rationem non aſſequutus eſſe videtur, de elegantiſſimo tamen invento optime eſt meritus, cum hoc ejus phænomenon, ſeu obſervatio, non tantum tubi Torricelliani experimentum pepererit, ſed etiam occaſio fuerit, qua Hydroſtaticæ principia ad aërem ipſum traducerentur. Nam Euangeliſta Torricellius Magni Ducis Hetruriæ FERDINANDI II. Mathematicus, & Galilæi in hoc munere ſucceſſor, obſervationem illam attenta men-

te

te revolvens pro ea, qua erat ingenii ſagacitate, limitatam illam duodeviginti cubitorum altitudinem in antliis à determinata atmoſphæræ preſſione provenire poſſe demum ſuſpicari cœpit, qua de re ut certior fieret, cum hydrargyro experimentum tentavit, &, ut præſagiebat, reſpondit eventus. Tam nobile inventum diu deliteſcere non poterat, nam paulo poſt ejus ortum ſtatim in Gallia aliiſque regionibus percrebuit, & curioſorum animos in ſe convertit. Hinc Blaſius Paſcalius ſagaciſſimi ingenii juvenis, quæ fama ex Italia attulerat experiundi cupidus, non ſine inſigni voluptatis ſenſu ea omnia iteratis experimentis veritati conſentanea invenit, & experimenti proceſſum atque eventum in peculiari libello De Gravitate Atmoſphæræ (*De la Peſanteur de la Maſſe de l'Air*) expoſuit, cui alium ingenioſum tractatum De Æquilibrio Liquorum præmiſit. Paſcalii conatus deinceps Anglorum ingenia excitavit, atque inter ea Celeberrimum Philoſophiæ experimentalis cultorem Robertum Boylium, qui in Paradoxis ſuis Hydroſtaticis experimenta captu facillima, atque ab innumeris cum ſucceſſu repetita, memoriæ prodidit; hæc vero omnia latius pertractata multiſque aucta fuere à Borellio & Mariotto, quorum opera notiora ſunt, quam ut ulla recenſione indigeant, ambo enim hi Autores, præter Hydroſtatica, etiam plura ad hydraulicam pertinentia attigerunt, de motibus aquarum aliiſque, in quibus, quem antea laudavi, Torricellius, & Benedictus Caſtellus ipſis facem prætulerunt; Gulielminus verò doctrinam de motu aquarum magis deinceps auxit, atque fluminibus feliciter applicuit; verum laudatis hiſce viris ulterius longe proceſſit Celeberrimus Petrus Varignon, qui eam Hydraulicæ partem, quæ menſuram liquorum fluentium reſpicit, plurimum protendit in duobus præclaris ſpeciminibus Actis Academiæ Regiæ Pariſienſis inſertis, quorum prius circa conſtructionem omnis generis Clepſydrarum verſatur; alterum verò argumentum de liquoribus effluenfluentibus eorumque menſuris ex profeſſo excolit. Ante hosce duos poſtremos laudatiſſimos viros Summus Geometra Iſaacus Newtonus in aureo opere, quod *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica* inſcripſit, plura tradidit corporum fluidorum vires & affectiones concernentia, quo referenda ſunt ea, quæ circa vim elaſticam aëris, denſitates atmoſphæræ; quæ circa reſiſtentias figurarum in fluidis incedentium, circa motus corporum in mediis reſiſtentibus, circa agitationem aëris in productione ſoni, atque alia demonſtrata exhibuit: ejusque exemplo permoti Illuſtris Leibnitius atque Nobiliſſimus Hugenius meditationes ſuas circa motus corporum in medio reſiſtenti publico diutius invidere noluerunt; quod argumentum poſtea generaliter pertractavit ſupra laudatus Varignonius. Celeberrimi vero deque reconditiori Geometria optime meriti Bernoullii Fratres diverſa Problemata circa fluidorum actiones in corpora dura, ſed flexibilia, contemplati ſunt, atque interiori Geometria ipſis opem ferente, elegantes curvas velariæ at lintei intus ſtagnantem liquorem continente, in apricum produxerunt, ut alia multa taceam.

Sed, quia eximia hæc inventa in variis Diariis aliisque libris diſperſa & ex diverſis ſæpe principiis elicita ſunt, gratum me iis facturum, qui hisce rebus delectantur, exiſtimavi, ſi omnia juxta genuinum ordinem in unum collecta, ex paucis iisque ſimplicibus principiis deducta & aucta publicæ luci ſiſterem. Verum hunc vix ingreſſus campum illicò perſpexi, propoſitum iſtud me nunquam feliciter ad exitum deducturum, niſi omnia altius repeterem, pluraque ex Mechanica corporum ſolidorum mutuarer, ad id ut tyrones opusculum citra offenſionem percurrere poſſent, nec ad ejus intelligentiam auxilia aliunde conquirere neceſſum haberent. Cum verò in rebus hisce ſubſidiariis explicandis materia in tantum excreverit, ut non contemnendam opusculi partem conſtitueret;

 natus

ris pressiones perferre queant. De æquilibriis liquorum cum inter se, tum cum corporibus solidis ipsis immissis. De figuris, quas fluida corporibus flexibilibus, in quibus stagnant, inducunt. De gravitate & elasticitate aëris ac densitatibus atmosphæræ in omnia tellure distantia & in quacunque elasticitatis lege. De motu & mensura aquarum fluentium ex vasis quibuscunque erumpentium, aut in canalibus devolutarum. De effectibus fluidorum ex percussione, quò pertinent resistentiæ, quas figuræ in fluidis latæ patiuntur, harumque resistentiarum mediæ directiones, item problema velariæ & id genus alia. De motibus corporum in mediis resistentibus tam rectilineis quam curvilineis. De motu navium vento impulsarum. De motu circulari fluidorum. De motu aëris in productione soni; ac denique de motu intestino seu interno fluidorum, à quo calor pendet. Hiscé summatim recensitis totum opusculum absolvitur.

Cum brevitati in omnibus studuerim, id cumprimis operam dedi, ut, quantum fieri poterat, cuncta generalibus theorematis comprehenderentur; ex quibus deinde particularia, tanquam Corollaria, possent deduci. Propterea liquores tanquam heterogeneos statim spectavi, atque eorum leges pressionis atque æquilibrii investigavi, ex quibus deinceps leges æquilibrii fluidorum homogeneorum facillime elicui. Sic etiam vectem rectilineum vel curvilineum in omnibus suis punctis à potentiis quomodocunque variantibus impulsum mihi proposui, in quo mediam potentiarum directionem investigarem, hocque modo in insignem proprietatem centrorum gravitatis, quam me primum invenisse putabam, incidi; sed quam etiam Celeb. Joh. Bernoulli in Libro nuper edito (*Essay d'une Nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux*) Cap. XII. §. VI. proponit. Sed Cl. hic Geometra recordabitur haud dubie se MStum meum vidisse, in quo theoremata huc facientia continebantur, priusquam laudatus suus liber editus esset, quemadmodum ego eius Proposi-

sitio-

ſitionem propriam in eius libro, tunc adhuc inedito, pariter videram. Sic etiam problemata catenariæ, velariæ, &c. ad hoc generale reduxi: invenire figuram manentem lineæ flexilis in ſingulis punctis à potentiis ſecundum directiones quascunque impulſæ, cujus ſolutionem ſimpliciſſimam, ut mihi ſaltem videtur, exhibui. Et hoc modo in aliis procedere conatus ſum. Perſpicuitati, quantum potui, litavi; propterea multæ demonſtrationes provectioribus Geometris nimis prolixæ fortaſſe videbuntur, ſed ſciant velim Tyronum quoque rationem habendam mihi fuiſſe, quibus non ſemper in poteſtate eſt ea ſupplendi, quæ ſubinde ex demonſtrationibus brevitatis & elegantiæ gratia reſecantur mente neceſſario ſupplenda. Interim diffiteri nolo me etiam, quantum potui, elegantiam ſectatum eſſe, atque propterea demonſtrationes lineares algebraicis prætuliſſe, experientia multiplici edoctum, meditationem figurarum ſæpiſſime ſimpliciores & elegantiores ſuppeditare ſolutiones ac conſtructiones, quam Analyſin ſpecioſam. Specioſam dico, nam ſubinde utor analyſi geometrica, ſeu lineari absque ſymbolis algebraicis procedente, cujus beneficio multa elegantius obtinentur quam calculis analyticis, etſi non ſemper. Ejusmodi analyſi geometrica veteres uſos exiſtimo, quemadmodum ex Euclidis datis & Apollonii libello *de Sectione Rationis* à Celeberrimo Edmundo Hallæo edito non obſcure colligitur; ſimili etiam analyſi ſummus Newtonus ad ſtuporem usque uſus eſt in ſuis *Principiis*. In applicatione verò theorematum, tanquam loco magis idoneo, calculo algebraico ſubinde utor.

In his libris frequens curvarum eſt uſus ad repræſentandas virium, temporum, celeritatum, aliarumque ejusmodi affectionum proportiones, quas propterea curvas vocabulo *ſcalarum* inſignire ſoleo, prout Cavallerius & Vivianus Celeberrimi Geometræ diu ante me circa varios gravitatis gradus & momentorum corporum, Architectos imitati, qui lineam rectam in plures particulas æquales interſtinctam (ad id, ut ex ea præconceptorum operum ideas proportionaliter delineare poſſint) *ſcalam* Geometricam vocant. Patet ergo curvarum linearum contemplationem non ſolum non eſſe inutilem, ſed abſolute neceſſariam ad accuratam phænomenorum atque virium naturæ repræſentationem.

Quantum ad notationis formam attinet, cum duæ pluresve lineæ cum interjectis punctis conjunguntur, hoc ſignificat lineas in ſe mutuo ductas eſſe, ut AB. CD ſignificat rectangulum ſub AB in CD, quod aliis ſic deſignari ſolet $AB + CD$. Sic etiam §. 172. *num.* 11. $tBE = N.\surd A.$ ang. ICD indicat tempus per BE exponi, facto ex N & radice ipſius A in angulum ICD, & ſic in reliquis hujus Propoſitionis demonſtrationisque locis, & in Propoſitionibus duabus ſequentibus. Fractiones ſeu rationes ad Typothetarum commoditatem exprimuntur per duo puncta. Sic $AB : CD$ idem eſt ac communiter $\frac{AB}{CD}$, & $AB : CD = EF : MN$ idem ac vulgo AB. CD :: EF. MN. Cum plures fractiones ſibi invicem adduntur, eæ vel commate, aut commate cum puncto, aut etiam parentheſibus diſtinguuntur: ſic $f = a : b, + c : d.$ aut $f = a : b; + c : d$ idem eſt quod ordinarie $f = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Subinde quantitatibus aliæ parentheſibus incluſæ ſine ullo interpoſito ſigno annectuntur, quod indicat quantitates eſſe æquales; ſic, ſi haberetur $A(a)$ id indicaret æquales eſſe vel æquivalentes magnitudines A & a, ſin verò cum puncto interpoſito diſtinguantur ut $A.(a)$ hoc denotat factum ex A in a; & ſic in aliis. Expreſſiones vero $\surd(aa + bb)$; $(aa + bc)^m$ denotant $\surd\overline{aa + bb}$, & $\overline{aa + bc}^m$ reſpective. Reliqua ſigna uſitato ſenſu adhibentur.

HO-

HONORI AC MERITIS

Viri CL.

JACOBI HERMANNI,

LIBROS DUOS

DE VIRIBUS & MOTIBUS

CORPORUM

edentis.

Sublimioris qui ſapientiæ
Arces reviſis pectore candido,
HERMANNE, Rauracis ab oris
Pruteniæ ſociate Muſæ.

Nuper retentus non fueras, ubi
Olim penates fixerat inclitus
Antenor, in ſacro receſſu
Italiæ Patavinus hoſpes.

Nec Te jocoſi dulcis amœnitas
Rheni reluctantem in patrio ſolo,
Nec rura, nec clari ſodales
Ingenii tenuere nexu,

Carum POLENVS ſideribus caput
Et LAZARINI flumina, nec ſolum
Dives Camœnarum, aut ſtupendum
Adriaci regimen Senatus;

Quin Te citato proriperes gradu
Linquens amœni compita Livii, &
Rheni Padique obliviosſo
Anteferens Viadrum ſuſurro.

Sic

Sic Tu beato ſaucius æthere
Prudens amicos deſeris hoſpites,
Et porrigens lumen per orbem
Sidereos imitaris ignes.

Quæ cura vaſtum tendere limitem
Mortalis ævi & viſere cœlites
Immane pandentes theatrum
Per ſuperûm ſpatioſa regna!

Quæ mater artis conſcia lubricæ
Natura cœco clauſerat in ſinu,
Tu prodis & vires moventes
Cuncta jubes numeros ſubire;

Centrique amores latius explicas,
Pulchroque cingens æthereæm facem,
Ductis per artem ceu choreis,
Ordine circumagis planetas.

Duris inhærens & fluidis onus
Tu curioſis in rationibus
Ducis, pererrans atque olympum
Cuncta domas abaco Minervæ.

Newtonus hoſpes divitis inſulæ,
Sed nil habentis ſe magis aureum,
Hac primus ivit, Tuque forte
Nil populis dederis ſecundum.

Felicis ævi pignora! queis amor
Rebus creatis lumina reddere,
Et, quæ potenti more luſit,
Subdere jura Patris papyro

Porrecta ponto, fuſa per ætherem
Terræque gyris indita: diſcite,
Mortalium cœtus moveri &
Centra ſequi potiora ſole,

Atque

Atque ordinatis doctius ignibus;
Huc mentis alas atque animum vagum
Conferte, nec ſoli cadente
Sub numerum effluitote motu.

Poſtquam volatum mentis, & igneos
Sic appetitus rite ſub orbitam
Egiſtis, ad naves regendas
Vertite & ad gravium librandam

Molem ruentum pondere corporum,
Aeſtus marinos & celerem fugam,
Sinas & Indos computate,
Subſidium decus atque vitæ.

Hæc in Poëſi Caſtalidum nemus
Aut in puellarum ordinibus novem
Non pandit, aut roſtra, aut tribunal
Mobile fulminibus Periclis.

Ite ergo Muſæ turba minor meæ, &
Humanitatis docta volumina
Submittite HERMANNO ſagaci,
Hunc hedera redimite veſtra.

COLLEGAE CONIVNCTISSIMO

POS.

NICOLAVS WESTERMAN,
Eloq. Profeſſor Ord. & Bibliothecarius Regius.

INDEX
SECTIONUM & CAPITUM.

CA-

CAPUT IV.

CAPUT V.

CAPUT VI.

CAPUT VII.

CAPUT VIII.

SECTIO SECUNDA.

CAPUT IX.

CAPUT X.

SECTIO TERTIA.

CAPUT XI.

CAPUT XII.

DE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM

PRÆNOTANDA.

1. Corpora abſolute *moveri* dicuntur, cum contiguitas eorum cum partibus ſpatii undequaque infiniti & immobilis continue mutatur; atque adeo *Motus* ipſe conſiſtit in iſtiusmodi contiguitatis mutatione.

2. Partes illæ ſpatii infiniti & immobilis corpori contiguæ ſunt, quæ ipſum immediate contingunt & ambiunt; ſpatiumque immobile dicitur, quia ſingulæ ejus partes eandem conſtanter diſtantiam, atque adeo eundem mutuo reſpectu ſitum ſervare intelliguntur, totumque ſpatium utpote undique in infinitum excurrens extra ſe ipſum vagari atque ſitum mutare, intelligi non poteſt.

3. Quia contiguitatis mutatio non niſi tractu temporis fieri poteſt, implicat enim ut unum idemque corpus ſimul & eodem tempore diverſis ſpatii partibus contiguum ſit, id eſt, in diverſis locis exiſtat; ideo omnis motus tempus involvit.

4. Tempus conſiderari poteſt tanquam æquabilis fluxus unius ejus ſigni indiviſibilis, quod Momentum vel Inſtans nominabimus; eodem ferme modo quo Geometræ lineas motu puncti generari intelligunt, hoc tamen cum diſcrimine; quod puncti lineam deſcribentis motus modo concitatior modo remiſſior fingi poſſit, cum è contrario fluxus momenti noſtri æquabili, ut ita dicam, paſſu fiat, ita ut æquales temporis partes æquales fluentis momenti diſtantias, ſeu intervalla, à prima ſtatione in qua ea incipiunt, ſibi vindicent.

5. Hinc eſt, quod fluxus momenti noſtri ſeu tempus ſoli intellectui hoc modo perceptibile, periodicis Corporum cæleſtium motibus vel Horologiorum uſu aliorumve inſtrumentorum ope, & ſenſibile quodammodo reddatur, atque ad menſuram qualemcunque revocetur. Sed tales temporis menſuræ & repræſentationes non ſunt exactæ in ultimo rigore, quandoquidem nec motus annuus ſolis,

nec qui ex eo atque diurno componitur, nec forte ipse diurnus, ut nonnulli Astronomi suspicantur, perfecte æquabiles sunt, ac propterea non nisi temporis apparentis mensuræ esse possunt. Ideo etiam Astronomi, qui temporis veri & æquabilis mensuram exquirunt, subinde apparens tempus ad tempus, quod vocant medium, quodque pro uniformi habent, reducere necessum habent. Et quanquam Horologiis oscillatoriis, prout ad insignem perfectionis gradum ab Hugenio perducta sunt, accurata veri seu æquabilis temporis mensura haberi posse videtur, eorum tamen motus Mathematice accurati & uniformes esse nequeunt, non quidem ob principiorum defectum, in quibus constructio eorum fundata est, sed ob defectum executionis; constat enim machinas nunquam in ultimo rigore tales parari posse, quales theoria construendas jubet, quia in theoria ab illis impedimentis atque circumstantiis tantum non semper abstrahi solet, quæ tamen in ipsa praxi nunquam abesse solitæ sunt, successum machinæ accuratissimum eludentes.

6. Si fluens nostrum punctum, aut etiam corpus quodvis, uniformi passu incedit, perinde ac momentum temporis uniformiter fluere intelligitur, tunc motus puncti vel corporis *æquabilis* vocatur. Et iter seu longitudo, quæ etiam spatium vocari solet motu corporis descriptum, ad tractum temporis à fluente momento interea confectum, hoc est, ad tempus lationis applicatum seu divisum *Celeritas* vel *Velocitas*, appellatur.

7. Id, quod corpus ad motum concitat, seu ex quo motus corporis resultat, id est quo posito ponitur motus corporis, vocatur *Vis motrix*, quæ dividi potest, in *Vivam* & *Mortuam*.

8. *Vis viva* est, quæ cum motu actuali conjuncta est. Sic corpus, quod dato tempore datam lineam transmittit, vi viva præditum dicitur.

9. *Vis Mortua* verò est, ex qua nullus motus actualis resultat, nisi aliquamdiu in corpore continuata vel replicata fuerit. Talis vis foret unicus tantum gravitatis impulsus nullis aliis ei succedentibus, etenim non, nisi post infinitos demum gravitatis ictus indesinenter replicatos seu unos aliis continue succedentes, motus sensibilis gravi acquiritur. Sic etiam conatus centrifugi ex circulari motu oriundi, perinde ac gravitatis impulsus, sistunt exemplum vis mortuæ.

10. Majoris distinctionis gratia Vim Vivam simpliciter Vim, Mortuam verò cujuscunque demum generis fuerit, *Solicitationem* posthac vocabimus.

Præ-

Præcedentes virium definitiones ſatis aperte indicant in iis agi de *Vi activa* corporum.

11. Sed ineſt etiam corporibus *Vis* quædam *paſſiva*, ex qua nullus motus nec tendentia ad motum reſultat; ſed conſiſtit in *Renixu* illo, quo cuilibet vi externæ mutationem ſtatus, id eſt motus vel quietis, corporibus inducere conanti reluctatur. Quæ reſiſtentiæ vis ſignificantiſſimo vocabulo à ſummo Aſtronomo Joh. Keplero *Vis inertiæ* dicta eſt. Hæc Vis inertiæ in corporibus quieſcentibus ſe ſatis prodit; etenim corpus quodcunque A in aliud, ſed quieſcens, B impactum aliquid de ſua vi & motu amittet, excipienſque B aliquid virium & motus ab impellente A acquiret. Ex quo claret, quieſcens corpus B reapſe vim aliquam paſſivam habere à vi in id incurrentis corporis A frangendam atque ſuperandam; alioqui impellens A poſt occurſum nihil de ſuo motu amiſiſſe debuiſſet, cum corpus quieſcens B, ſi reſiſtendi facultate careret, alterius motui nullam remoram afferre poſſit, adeo ut ambo, impellens A & impulſum B, ea ipſa celeritate, qua corpus A ante occurſum ferebatur, etiam poſt contactum incedere deberent, quod phænomenis adverſari nemo non videt.

12. In hac Vi inertiæ materiæ fundata eſt Naturæ lex, qua *Cuilibet actioni æqualis & contraria eſt reactio.* In omni enim actione eſt luctatio inter corpus agens & patiens, & ſine ejusmodi luctatione nulla actio, proprie ſic dicta, agentis in patiens concipi poteſt, alioqui nulla ſtabilia haberentur Mechanicæ fundamenta, ſed quilibet effectus à qualibet cauſſa oriretur.

13. *Vires activæ*, cujuſcunque generis fuerint, gemino modo inter ſe collatæ variare poſſunt. Aliæ enim aliis intenſive majores ſunt, nulla habita ratione ſubjecti recipientis; cum duo corpora, quoad materiam æqualia, viribus inæqualibus pollent. Aliæ porro aliis etiam majores eſſe poſſunt, cum vires intenſive æquales corporibus quoad materiam inæqualibus applicatæ ſunt. Nam in genere vis cujuſque corporis eſt ea, quæ reſultat ex omnibus viribus partialibus, quibus ſingula corporis elementa ſeu minimæ particulæ pollent. Sic ſi vires, quibus ſingula corporis elementa afficiuntur, conſpirantes ſunt, *Vis totalis* erit complexus ſeu aggregatum omnium virium partialium.

14. *Quantitas materiæ* cujuſque corporis, quam *Maſſam* deinceps vocabimus, eſt complexus (aggregatum) omnium particularum, quibus corpus compoſitum eſt. Ipſæ verò particulæ corporis

conſtitutivæ, ejus *elementa* brevius dicentur. Idcirco materia fluida, quæ in corporum meatibus latere poteſt, ad corporis ſubſtantiam pertinere non cenſetur, perinde ac aqua in ſpongiæ poris deliteſcens ad ſpongiæ ſubſtantiam non refertur.

15. *Volumen* cujuſque corporis eſt ſpatium, quod corporis Materiam cum interſperſis poris occupat. Ex collatione Maſſæ ſeu quantitatis materiæ cum Volumine reſultat

16. *Denſitas*, quæ eſt ratio quam materiæ quantitas in quolibet corpore habet ad corporis Volumen. Ut, ſi corpus in maſſam poris carentem colliquatum intelligatur, facile etiam intelligitur ejusmodi maſſam minus ſpatium occupaturam, quam antea cum intermixtis poris occupârat: Ratio talis Maſſæ poris deſtitutæ ad corporis Volumen nobis eſt *Denſitas corporis.* Aliis denſitas major minorve conſiſtit in majore vel minore pororum amplitudine, quod cum noſtra definitione ſatis convenit; nam quo major eſt ratio maſſæ poris expertis ad corporis Volumen, eò minor erit meatuum amplitudo, atque adeo major corporis denſitas.

17. *Raritas* eſt corporum qualitas reciproca denſitati, conſiſtens in ratione Voluminis ad Maſſam ſeu Materiæ quantitatem, hæc enim duo ſemper unum idemque ſignificare ſciendum eſt.

Ex hiſce definitionibus prono alveo fluunt ſequentia conſectaria, quæ, quia in ſequentibus maximo uſui erunt, breviter hoc loco ſunt indicanda. Dicantur Corpora inter ſe collata C, c; eorum Maſſæ M, m; Volumina V, v; Denſitates D, d; Raritates R, r; atque, hiſce nominibus poſitis, erunt

18. *Quantitates Materiæ ſeu Maſſæ* (M, m) *in compoſita ratione Denſitatum* (D, d) *& Voluminum* (V, v). Id eſt, $M : m = D.V : d.v.$ Nam (§. 16.) $D = M : V$ & $d = m : v$, ergo $M : m = D.V : d.v.$

19. *Volumina* (V, v) *erunt in compoſita ratione ex directa Maſſarum & inverſa Denſitatum.* Id eſt, $V : v = (M : D) : (m : d)$. Liquet ex §. 17.

Volumina ſunt etiam in compoſita ratione ex directa Maſſarum & directa Raritatum. Hoc eſt $V : v = M.R : m.r.$ Nam (§. 16.) $R = V : M$, & $r = v : m$ ergo $V : v = M.R : m.r.$

20. *Denſitates Raritatibus ſunt reciproce proportionales*, *ſeu* $D : d = r : R.$ Nam (§. 16. 17.) eſt $D = M : V$, & $R = V : M$, erit $1 : R = M : V = D$ atque adeò $D.R = 1$, & $d.r = 1 = D.R$; hinc $D : d = r : R.$

21. *Directio* cujuslibet vis motricis eſt linea, juxta quam hæc vis

vis in corpus agit, eſtque illa recta, quam mobile hac vi citatum actu deſcribit aut ſaltem deſcribere conatur.

22. *Vires* & *Motus conſpirantes* ſunt, quorum directiones congruunt, aut ſaltem parallelæ ſunt, & easdem ad partes tendunt.

23. *Vires* verò & motus *Contrarii* hoc eſt, *directe* oppoſiti, quorum directiones quidem congruunt aut ſaltem æquidiſtantes ſunt, ſed in oppoſitas partes vergunt.

Hactenus generales corporum affectiones, quibus recenſitæ virium ſpecies applicari poſſunt, breviter attigimus. Ordinis ratio inſuper requirit ut corporum ſpecies, quibus vires illæ variè poſſunt applicari, ab invicem diſtinguantur; corpora enim ſunt vel ſolida vel fluida; & ex diverſis hiſce ſpeciebus diverſa reſultant phænomena.

24. *Corpora ſolida* aut *conſiſtentia* dicuntur ea, quorum elementa ſaltem eousque cohærent, ut nulla corporis pars ſenſibiliter moveri poſſit, quin tota maſſa eundem motum participet. Cæterum ex obſervationibus Celeb. Dominici Caſſini conſtat metalla frigori expoſita nonnihil contrahi, & vice verſa, quoad Volumen, extendi in locis calidis; & ejusmodi metallorum extenſiones & contractiones, quibus haud dubie duriſſima quæque alia corpora plus minus obnoxia ſunt, absque interno partium motu fieri nequeunt: ſed quia hi motus, ex ſolis phænomenis per ratiocinia colligendi, in ſenſus immediate non incurrunt, definitioni iſti nihil officere poſſunt; quandoquidem in ea corporum durorum, ſeu ſolidorum, elementa non abſolute cohærere dicuntur, ſed tantum eousque, ut ea ab invicem avelli aut moveri ſenſibiliter nequeant, quin totum corpus eodem motu abripiatur.

25. *Fluida* verò corpora ſunt, quorum particulæ agiliſſimæ non cohærent, ſed facile moveri poſſunt non motâ univerſâ fluidi maſſâ. In fluidis viſcidis particulæ nonnihil cohærere videntur, ſed talis earum adhæſio miram earumdem inter ſe mobilitatem non tollit, ac propterea talia fluida ex allata hac definitione non excluduntur.

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM

LIBER PRIMUS.

HIc Liber respicit *Corpora solida* dividiturque in duas sectiones, quarum prima versatur circa Æquilibra solicitationum gravitatis aliaque huc pertinentia, & sectio altera expendit motus, qui ex ejusmodi solicitationibus, ut libet variatis, resultant.

SECTIO I.

De Solicitationum Corporibus varie applicatarum Æquilibriis & Mediis Directionibus.

26. CUm Solicitationes variis corporibus applicatæ ita inter se committuntur, ut nulla earum reliquas vincere queat, ipsæ in *Æquilibrio* consistere dicuntur. Ejusmodi Solicitationes *Potentiarum Mechanicarum* nomine apud veteres insigniebantur, quam nomenclationem nos etiam passim retinebimus. Quæ igitur ad harum Solicitationum seu Potentiarum mechanicarum Æquilibria, Medias Directiones, & id genus alia, pertinent, hac prima sectione excutiemus, sive corpora, ad quæ tales potentiæ pertinent, rigida sint sive flexibilia.

CAPUT I.

De proportione inter Solicitationes gravitatis, seu pondera corporum, cum proportione Massarum eorundem corporum collata.

APud Philosophos Geometras elegans corporum proprietas celebratur, in eo consistens quod corporum pondera in eadem prorsus ratione crescant in qua ipsorum Massæ seu Quantitates Materiæ;

teriæ ; aut Geometrica phrasi eandem proferendo ; *quod corporum gravitates seu pondera Massis ipsorum proportionalia sint.* Illustr. Newtonus, sumtis accuratissimis pendulorum experimentis hanc, gravium proprietatem se semper comperisse testatur pag. 305. Princ. Phil. Nat. Math. primæ edit. quam etiam ex Coroll. I. Prop. XXIV. Lib. II. eleganter elicuit. Nobiliss. Hugenius hanc proprietatem non solum admittit, sed etiam pag. 140. Diatribæ De Caussa Gravitatis ex regulis motus deducit. Et quia hæc corporum affectio per universam Philosophiam Naturalem magni momenti est, aliam adhuc ejus demonstrationem adducere tentabo, admissâ unicâ quæ sequitur hypothesi.

HYPOTHESIS.

27. *Eadem manente Materiæ quantitate, & directionibus gravium existentibus parallelis, seu in Centro indefinite distanti convergentibus, pondera corporum non mutantur, variatis eorum positione respectu horizontis & figuræ.*

Hoc est, corpus quodvis idem pondus retinet, quocunque modo id positum sit respectu horizontis, nec ejus pondus mutari censendum, si ejus figura in aliam, quamcunque scilicet, in globum, cylindrum, conum &c. mutata sit, modo eadem manserit materiæ quantitas, seu massa.

PROPOSITIO I. Lemma.

28. *Caussa gravitatis, quæcunque ea sit, non tantum agit in partes exteriores corporum, sed etiam in interiores omnes.*

Nam si gravitatis caussa in exteriores tantum corporum partes ageret, in eas solum ageret, quæ horizonti aversæ sunt corporum superficies, atque adeo corporum pondera hisce superficiebus proportionalia essent: atqui, pro varia corporis positione & situ, superficies horizonti aversa modo major modo minor est; ergo, si gravitatis impressiones superficiebus hisce proportionales essent, sequeretur, mutari corporis pondus, pro alio atque alio ejus situ, contra hypothesin.

Deinde, si gravitas tantum ageret in exteriores corporum partes, non verò in interiores omnes, sequeretur, quod, mutatâ figurâ corporis, sed eadem manente materiæ quantitate, aliud atque aliud inde resultet corporis pondus ; quandoquidem variatis figuris varianriantur ſimul particularum & ſuperficierum horizonti averſarum poſitiones ac quantitates, atque adeo variarent corporum pondera eadem manente eorum materiæ quantitate. Quæ omnia ſunt contra hypotheſin articulo 27. aſſumtam.

Corollarium.

29. Idcirco nullius corporis pondus in omni poſitione & figura idem manere poteſt, niſi ſingula ejus elementa æqualia æquales gravitatis impulſus excipiant. Quo poſito facilis erit probatu ſequens

PROPOSITIO II. Theorema.

30. *Pondera corporum quantitatibus materiæ ſeu maſſis eorum proportionalia ſunt.*

Sint primùm duo corpora commenſurabilia C, c, unum eorum elementum e, numerus elementorum in Corpore C, N & numerus in altero c, dicatur n, & denique maſſæ corporum ſeu materiæ quantitates dicantur reſpective M, m. Quibus poſitis, quia (§. 29.) ſingula utriusque corporis elementa æqualem à gravitate impreſſionem ſubeunt, ſi una ejusmodi impreſſio nominetur i, pondus corporis C ſeu ſolicitatio totalis à gravitate, qua corpus ad deſcenſum urgetur (§. 13.) eſt aggregatum ſolicitationum, quibus ſingula elementa urgentur, & quoniam harum ſolicitationum directiones ex hypotheſi parallelæ ſunt, ipſæ ſolicitationes ſeu gravitatis impreſſiones conſpirantes erunt; atque adeo ſolicitatio totalis gravitatis in corpore C erit una ſolicitatio ſeu impreſſio i ducta in numerum N elementorum, quæ in hoc corpore continentur, hoc eſt pondus ipſius C quod indicabo per pC fiet $= N.i$ ac $pc = ni$. Eſt verò $N.i : n.i = N.e : n.e$; ergo quia N. e eſt aggregatum particularum e in corpore C, ſeu hujus corporis maſſa M, & n. e maſſa alterius c ſeu m, erit omnino $pC : pc = M : m$ hoc eſt pondera corporum C, c ſunt maſſis eorum proportionalia. Q. E. D.

Corollarium I.

31. Si corporis maſſa, quæ ſubinde eâdem literâ deſignabitur, qua ipſum corpus ſignatur, ducetur in ſolicitationem ſeu gravitatis impreſſionem (hæc enim duo hoc loco & ubique unum idemque ſignificant) qua unum corporis elementum urgetur, factum exponet ſemper

per

per pondus absolutum corporis, ut si corpus fuerit C, & gravitatis solicitatio, qua singula ejus elementa afficiuntur, nominetur G, quantitas seu factum C.G exponit pondus absolutum corporis C, intelligendo per hanc literam C massam hujus corporis.

Corollarium II.

32. Hinc si, ut supra, Corporis hujus volumen & densitas dicantur V & D, & pondus pC, erit pC ut G.D.V. Id est, pondus cujusque Corporis est ut factum ex solicitatione gravitatis G, qua singula ejus elementa *e* urgentur, & densitate D in Volumen V. Nam (§. 31) pC est ut CG, & (§. 18) C, quæ hoc loco idem significat ac illic M, scilicet massam corporis, est ut D.V, ergo pC seu CG est sicut G.D.V.

Corollarium III.

33. Et quia gravitas specifica corporum consistit in proportione ponderum absolutorum corporum, sub voluminibus æqualibus, ideo gravitates specificæ densitatibus proportionales erunt, cum (§. 16.) massæ corporum volumine æqualium densitatibus proportionales sint, & per præsentem propositionem pondera corporum, eorum massis. Idcirco si corporis nostri C gravitas specifica dicatur S, erit ejus pondus absolutum seu pC ut S.V, quandoquidem S est ut D.G.

Scholion.

34. Hæc ipsa propositio ex theoria motus pendulorum aliter adhuc demonstrari potest, ut à Cel. Newtono, in loco supra in proœmio hujus capitis jam indicato, præstitum. Similem propositionem ex principiis, quibus ad derivanda symptomata motuum acceleratorum gravium utemur, facillimo etiam negotio eliciemus.

CAPUT II.

De Solicitationibus quibus Corpora rigida, id est inflexibilia, urgentur, earumque mediis directionibus.

DEFINITIONES.

I.

Fig. 1. 35. CUm quælibet vires, ac per consequens etiam solicitationes sint ex genere quantitatis, per lineas rectas hisce solicitationibus proportionales rectè possunt exponi. Idcirco si puncta A, C, E a rectæ A E a solicitationibus secundum directiones AB, CD, EF agentibus urgentur, hæ solicitationes seu potentiæ exprimentur rectis AB, CD, EF in ipsis earundem directionibus homologe sumtis, adeo ut hæ lineæ solicitationes vel potentias earumque directiones simul designent, & hoc in sequentibus tantum non semper observabitur.

II.

Fig. 1. 36. Si plurium solicitationum vel potentiarum, in æquilibrio consistentium, nonnullæ positæ sint ad unam partem corporis ad quod pertinent, reliquæ verò vel reliqua ad partem oppositam, Solicitationes, quæ sunt ad unam partem, reliquis in parte opposita *æquipollere* dicentur. Ut si rectæ A E, aut cuilibet alii corpori potentiæ AB, CD, EF applicatæ sint ab una parte, in parte verò oppositâ potentia GH agens ex G in H, & hæc cum reliquis ipsi oppositis in æquilibrio consistat. Potentia unica GH, reliquis omnibus AB, CD, EF æquipollere dicitur. Cæterùm monendus est tyro, quod potentia vel solicitatio, quæ reliquis æquipollere dicitur, ipsis ideo æqualis censenda non sit; etenim *æquipollere* & *æquale esse* in Mechanicis non sunt phrases synonimæ. Unicus enim est Fig. 2. casus, quo potentia GH oppositis AB, CD, EF æquipollens ipsis simul sumtis æqualis est, tunc scilicet, cum hæ conspirantes sunt (§. 22.) ipsisque altera GH (§. 23.) directè contraria.

III.

37. Producta GH in I, ejus continuatio G I *media directio* vel *axis*

axis æquilibrii deinceps nominabitur potentiarum AB, CD, EF, Fig. 1, 2. & denique punctum G, in quo media directio corpori occurrit, & cui impedimentum O suppositum potentias ad æquilibrium compositas sustinet, quod impedimentum seu sustinaculum aliàs *hypomochlium* vocari solet, *centrum æquilibrii* posthac appellabitur.

AXIOMA.

38. *Solicitatio quæ ex aliis solicitationibus conspirantibus juxta directiones congruentes nascetur, hisce omnibus æquabitur directionemque habebit congruentem pariter ipsarum directionibus.*

Solicitatio vero ex directè oppositis resultans, æquivalebit excessui quo fortiores superant oppositas debiliores.

PROPOSITIO III. Theorema.

39. *Solicitatio ex duabus non conspirantibus, nec directe oppositis, mobili cuidam impressis, nascens, se habet ad alterutram earum ex quibus resultat, ut diameter parallelogrammi, cujus latera exponunt has solicitationes earumque directiones, ad latus quod solicitationem exponit.*

Citetur mobile A solicitationibus quibuscunque AB, AC quarum directiones angulum quemcunque CAB contineant: Fig. 3. descripto parallelogrammo ABCD, ejus diameter AD directionem & solicitationem exponet, quæ ex lateralibus AC & AB resultat.

Demonstr. Cogitetur mobile A rectæ mobili AB inhærere; sed ita tamen ut in ea liberè moveri queat ex A versus B, lineam verò AB duntaxat motu parallelo sibi ipsi & rectæ CD super AC ferri posse, deinde rectam mobilem AB corpus A secum deferentem urgeri versus CD solicitatione AC; mobile vero A in linea AB urgeri solicitatione AB; & manifestum erit conatum A2A, quo linea mobilis AB ad rectam ipsi parallelam CD accedere conatur, urgente solicitatione AC, se habere ad conatum 2A2D urgente solicitatione AB corpus A in hac rectâ mobili, ut AC se habet ad AB vel CD; jam quia ex hypothesi 2A2B ipsi CD parallela est, &, ut modo vidimus, $A2A : 2A2D = AC : CD$, erit punctum 2D in diametro AD parallelogrammi BC: Porrò, quia mobile A participat motum A2A, vel potius conatum ad motum lineæ mobilis AB, in qua moveri posse intelligitur, & motum proprium, seu potius conatum, ad hunc motum

tum 2A2D, ac quia, ſi linea mobilis & corpus ſpatiola utlibet parva A2A & 2A2D ſimul deſcribere potuiſſent, idem id fuiſſet quam ſi corpus A ſpatiolum A2D tranſmiſiſſet; liquet utique, ex conatibus lineæ mobilis & corporis, A2A & 2A2D naſci conatum A2D juxta directionem AD, qui ſe habeat ad A2A vel ad 2A2D ſicut AD ad AC, vel ad AB; ergo ex ſolicitationibus AC & AB reſultat ſolicitatio AD in directione A2D. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

40. Solicitationes, quæ exponuntur lateribus AC, AB parallelogrammi BC, ideo dici poſſunt ſolicitationes *laterales*. Deinde in communi Mechanicæ ſcriptorum phraſeologia motus vel ſolicitatio juxta diagonalem AD ex motibus ſeu ſolicitationibus lateralibus AC, AB componi dicitur. Sed quia video non deeſſe Autores, qui neſcio quæ difficultatum ſpectra in hac re ſibi ſomnient, perperam exiſtimantes per compoſitionem & reſolutionem, additionem vel ſubductionem motuum vel potentiarum componentium intelligendas eſſe, ne ejusmodi æquivocatio tyronibus negotium faceſſeret, motus vel potentias ex aliis componi dici ſolitas, ex iis naſcentes vel reſultantes appellare, conſultius duxi.

COROLLARIUM I.

41. Producta parallelogrammi diametro in M, ac facta AM = AD, ſolicitatio AM in hac directione AM reliquis AC & AB æquipollebit. Nam ſolicitatio AM alteri æquali & directè contrariæ AD æquipollet, atqui AD naſcitur ex lateralibus AC & AB; neque plus aut minus præſtare poteſt quam ſolicitationes hæ laterales ſimul agentes, propptereaque perinde eſt ſive mobile A unica ſolicitatione AD, ſive duabus collateralibus AC, AD urgeatur, ergo AM ipſi AD contraria & æqualis lateralibus AC & AB omnino æquipollet.

COROLLARIUM II.

Fig. 4. 42. Hinc ſi tres ſolicitationes eidem mobili impreſſæ AM, AB, AC in æquilibrio conſiſtant, erit quælibet earum ad alterutram ex reliquis, id eſt AM ad AB, ut ſinus anguli BAC à reliquis comprehenſi, ad ſinum anguli MAC à ſolicitatione AM & altera AC ex reliquis formati. Nam (§. 41.) AM = AD, atque adeo

AM:

AM : AB ſicut AD ad AB, verum ex trigonometria conſtat, eſſe AD ad AB, ut ſinus anguli ABD ad ſinum anguli BDA, ergo etiam AM eſt ad AB ut ſinus anguli ABD, vel ejus ſupplementi ad duos rectos BAC ad ſinum anguli BDA, vel ejus alterni æqualis DAC, aut etiam hujus ad duos rectos ſupplementi MAC. Et ſic ex ternis ſolicitationibus, ad æquilibrium compoſitis, duæ quælibet ſunt inter ſe ut ſinus angulorum ipſis oppoſitorum, hoc eſt AB : AC = ſin. MAC : ſin. MAB, & AM : AC = ſin. BAC : ſin. MAB. Et ſic ubique.

Elegans hoc theorema à Cel. Petro Varignon primùm, quod ſciam, demonſtratum eſt, cui ferme totam ſuam novam Mechanicam, anno 1687. Lutetiæ editam, ſuperſtruxit.

Corollarium III.

43. Ex hiſce etiam patet ratio theorematis non inelegantis, quod Robervallius Torricellio quondam propoſuit, ſed ſine demonſtratione, ut videre eſt in Opere Academiæ Regiæ Scientiarum Pariſienſis, quod inſcribitur *Divers Ouvrages de Mathematique & de Phyſique de Meſſieurs de l'Academie Royale des ſciences*, fol. 301. Theorema vero noſtris loquendi phraſibus expreſſum, eſt hujusmodi: Si per terminos rectarum AM, AB, AC trium ſolicitationum eidem puncto A applicatarum, repræſentatricium, ducantur rectæ MB, BC & MC, punctum A, cui ſolicitationes in æquilibrio conſiſtentes impreſſæ ſunt, exiſtet in centro gravitatis trianguli MBC. Circa AM, AB & AM, AC deſcripta ſint parallelogramma AMSB, ARMC, quibus deſcriptis, & quia tres ſolicitationes AM, AB, AC in æquilibrio ſunt, ſecundùm hypotheſin AC æquipollebit (§. 36.) ipſis AM & AB atque adeo (§. 41.) AC = AS, & hæ duæ in directum poſitæ erunt, unde CA producta latus trianguli MB ſecabit in medio Q, ſimiliter AB producta ſecabit latus trianguli MC in ejus medio P; jam ex ſtaticis conſtat trianguli MBC centrum gravitatis eſſe in ſingulis lineis CQ, BP ex quibusvis trianguli angulis C & B ad puncta Q & P in medio laterum BM ac CM angulis illis oppoſitorum ductis, propterea centrum gravitatis trianguli BMC, eſt in communi interſectione A harum linearum CQ & BP.

Propositio IV. Lemma.

44. *Si ſingula corpora poſitione data* A, B, C, D &c. *in ſuam quod-*

que distantiam à plano positione dato a P d *ducantur, erunt omnium facta æqualia facto ex aggregato omnium corporum in distantiam* E e *centri eorum gravitatis* E *à dato plano, in casu quo omnia corpora ad eandem plani* a P d *partem sita sunt.*

Sin verò nonnulla corpora A, B &c. *posita fuerint ad unam plani* PQ *partem, & reliqua* C, D *ad alteram partem; Excessus, quo facta ex corporibus ad partes centri omnium gravitatis* E *sitis, in suas homologas à plano* PQ *distantias, superant facta ex corporibus reliquis in suas ab eodem plano distantias, æquabitur facto ex omnibus corporibus simul sumtis in distantiam* e P, *communis omnium centri gravitatis* E *à plano* PQ.

Fig. 5. Casu primo ostendi debet, quod, positis $A + B + C + D +$ &c. $= M$, sit $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee$. Et secundo casu, esse $C. cP + D. dP - A. aP - B. bP = M. eP$, designantibus cP, dP, aP, bP distantias corporum C, D, A, B &c. à plano PQ.

Demonstr. I. Per centrum gravitatis E omnium corporum transeant $\alpha\delta$ parallela plano *ae*, & eE parallela plano PQ alteri *ad* recto, & $\alpha\delta$ considerari potest tanquam axis æquilibrii ponderum A, B, C, D, atque adeò erit ob casum æquilibrii $A. A\alpha + D. D\delta = B. B\beta + C. C\kappa$, vel quod eodem recidit, $B. B\beta + C. C\kappa - A. A\alpha - D. D\delta = o$. Item $A. ae + B. be = C. ce + D. de$, vel $C. ce + D. de - A. ae - B. be = o$ respectu axis æquilibrii eE.

II. Quia $Aa = \alpha a - \alpha A = Ee - A\alpha$, $Bb = Ee + B\beta$, $Cc = Ee + C\kappa$, & $Dd = Ee - D\delta$, erit $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = A. Ee + B. Ee + C. Ee + D. Ee + B. B\beta + C. C\kappa - A. A\alpha - D. D\delta = M. Ee$, quia $A + B + C + D = M$, & (num. 1 hujus.) $B. B\beta + C. C\kappa - A. A\alpha - D. D\delta = o$. Quod est primùm.

III. Quia $aP = ae - eP$, $bP = be - eP$, $cP = ce + eP$; & $dP = de + eP$, erit $C. cP + D. dP - A. aP - B. bP = C. eP + D. eP + A. eP + B. eP + C. ce + D. de - A. ae - B. be = M. eP$, quia (num. 1 hujus.) est $C. ce + D. de - A. ae - B. be = o$, & $C + D + A + B = M$ ut antea. Quæ omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

Fig. 6. 45. Si corpora rectà ascendant in lineis Aa, Bb, Cc, Dd &c. horizonti perpendicularibus, eorumque centrum gravitatis E in recta Ee illis parallela, erit $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee$. Nam ducta ut libet recta $\alpha\delta$ ipsis Aa, Bb &c. perpendiculari, eritque (§. 44.) $A. A\alpha + B. B\beta + C. C\kappa + D. D\delta = M. E\epsilon$, & $A. \alpha a +$

B.

B. βb + C. κc + D. δd = M. ϵe, ergo A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee.

Corollarium II.

46. Si omnia corpora A, B, C, D &c. ſint æqualia, omnes eorum diſtantiæ à plano aPd, erunt multiplum diſtantiæ communis eorum centri gravitatis E ab eodem plano ſecundum ponderum numerum. Exceſſusque quo diſtantiæ illorum à plano PQ ſecundi caſus, quæ ad partes centri omnium gravitatis poſita ſunt, excedunt diſtantias illorum, quæ ſunt in parte oppoſita, eſt diſtantiæ centri omnium gravitatis E ab eodem plano PQ multiplum, ſecundùm corporum A, B, C, D &c. numerum. Fig. 5.

Scholion I.

47. Ex hisce nunc tam facile deduci poteſt regula Guldini jam à Pappo diſertè indicata, ut haud abs re futurum exiſtimem, ſi eam hoc loco demonſtratam darem, quanquam ea à pluribus jam demonſtrata ſit. Guldini Regula ita habet: *Figuram ex converſione cujuslibet magnitudinis circa aliquam rectam poſitione datam oriundam, æquari facto ex Magnitudine genitrice in viam centri ejus gravitatis.* Figura genitrix dicatur F, diſtantia centri ejus gravitatis ab axe rotationis D, ordinata figuræ y ad axem rotationis, dx elementum axis, ſolidum ex converſione figuræ F circa axem x dicatur S, ejus elementum dS; quibus poſitis per præſentem propoſitionem erit D. F = ſummæ momentorum elementorum magnitudinis F = $\int \frac{1}{2} yydx$, nam elementum ipſius F eſt ydx, & hujus momentum $\frac{1}{2}yydx$. ſit p circumferentia circuli cujus radius eſt I, & ducatur antecedens æquatio in p, ut fiat pD. F = $\int \frac{1}{2} pyydx$. Jam pD eſt circumferentia radii D, & py circumferentia radii y, atque adeò $\frac{1}{2}pyy$ area circuli ejusdem radii y, & per conſequens $\frac{1}{2}pyydx$ cylindrulus ſolido S inſcriptus, ſeu ejus elementum dS; ergo pD. F = $\int$dS = S. Quod erat oſtendendum pro ſolidis rotundis; eadem eſt demonſtratio in aliis.

Scholion II.

48. Quanquam in hac propoſitione gravitas in ſingulis corporibus A, B, C, D eadem ſeu uniformis ſumta ſit, ita ut pondera eorum abſoluta maſſis proportionalia ſint, quoniam tamen gravitas di-

diversa esse posset, & hoc lemma etiam generaliter verum est, scilicet tunc etiam, cum revera gravitatis solicitationes ipsis corporum massis A, B, C, D proportionalia non existunt, id saltem indicandum fuit hoc loco. Nam si per A, B, C &c. non amplius, ut in propositione, massæ horum corporum, sed pondera eorum absoluta intelligantur, canon propositionis adhuc obtinebit. Verum satius foret, per A, B &c, ut in propositione, intelligere massas horum corporum, &, juxta articulum 31, eorum pondera designare per facta ex massis in gravitatis solicitationes P, Q, R, S quibus singula A, B, C, D respectivè urgentur, id est per AP, BQ, CR, & D. S &c. Quod alibi in applicatione observabimus.

PROPOSITIO V. THEOREMA.

Fig. 7. 49. *Solicitationum quarumlibet* PA, PB, PC, PD &c. *eidem mobili* P *impressarum media directio* PE *est recta jungens centrum gravitatis mobilis* P *&* *centrum gravitatis* E *omnium punctorum* A, B, C, D &c. *quibus rectæ solicitationum repræsentatrices terminantur; & solicitatio ex omnibus corpori impressis resultans exponi debet multiplo rectæ* PE, *secundum punctorum seu solicitationum impressarum numerum.*

Per mobilis P centrum gravitatis ducta intelligantur plana PS & aPd sibi invicem recta, & per terminos rectarum PA, PB &c. perpendiculares ad planum ad demittantur Aa, Bb, Cc, Dd, & ex centro gravitatis E punctorum A, B, C &c. normalis Ee. Solicitationum numerus dicatur N, & in producta PE sumatur PR $=$ N, PE. Dico PR exponere solicitationem ex omnibus mobili P impressis PA, PB, PC, PD &c. nascentem.

I. Per E & R agantur EL & RS plano aPd æquidistantes, ob triangulorum PLE & PSR similitudinem, & propter PR $=$ N, PE, erunt PS $=$ N, PL & SR $=$ N, LE.

II. Quia E est centrum gravitatis punctorum A, B, C, D &c. quorum numerus secundum hypothesin est N, erit (§. 46.) $aA + bB + cC + dD +$ &c. $=$ N. eE, & Pc + Pd + &c. $-$ Pa $-$ Pb $-$ &c. $=$ N. Pe.

III. Quia singulis solicitationibus obliquis (§. 39.) æquipollent solicitationes earum laterales plano aPd perpendiculares & parallelæ, scilicet ipsi PA æquipollent laterales aA, Pa, ipsi PB verò laterales bB & Pb & sic in cæteris, omnibus obliquis æquipollebunt omnes earum laterales solicitationes, id est conspirantes aA, bB,

cC,

cC, dD, & oppositæ Pa, Pb ex una & Pc ac Pd ex altera plani PS parte; atqui ex conspirantibus resultat solicitatio ipsis omnibus (§. 38.) æqualis id est solicitatio $aA + bB + cC + dD +$ &c. (n. 11.) $= N.eE$ (n. 1.) $= PS$, & ex omnibus contrariis (§. 38.) nascitur solicitatio æqualis excessui quo fortiores excedunt debiliores, id est ipsi $Pc + Pd +$ &c. $- Pa - Pb -$ &c. (num. 11.) $= N.Pe$ (num. 1.) $= SR$, ergo omnibus obliquis PA, PB &c. æquipollent duæ laterales PS & SR, & (§. 39.) hisce unica PR: hæc ergo denotat mediam directionem solicitationum PA, PB, PC, PD &c. & solicitationem ex ipsis nascentem, vel quod idem est, ipsis æquipollentem. Quod erat demonstrandum.

Elegans hoc theorema Illustri Leibnitio acceptum est ferendum, utpote quod in aliqua ejus epistola, jam pridem ad Wallisium data, sine demonstratione exhibetur. Vid. Tom. III. Oper. Wallisii fol. 687.

Corollarium I.

50. Hinc punctum P, cui quatuor solicitationes PA, PB, PC, PT ad æquilibrium quidem compositæ; sed non in eodem plano existentes, impressæ sunt, erit in centro gravitatis pyramidis TAC, in cujus angulis solicitationum repræsentatrices lineæ terminantur. Sit E centrum gravitatis punctorum A, B, C & jungatur PE, quæ media directio erit solicitationum PA, PB & PC, ac hisce æquipollebit solicitatio 3.PE; hinc quia omnes in æquilibrio sunt, erit $PT = 3.PE$; atque adeo est $PT : PE = 3 : 1 = A + B + C : T$ considerando hæc puncta tanquam ponduscula æqualia, ac proinde P est in centro gravitatis punctorum quatuor angularium pyramidis A, B, C, T. Sed idem est centrum gravitatis pyramidis, quod punctorum ejus angularium. Ergo liquet assertio. Fig. 8.

Hoc est alterum theorema, quod Robervallius Torricellio olim proposuerat in loco supra (§. 43.) jam indicato.

Corollarium II.

51. Hinc etiam, si mobile P ad singula superficiei curvæ ABC puncta urgeatur solicitationibus expressis punctorum superficiei distantiis à mobilis centro; media omnium solicitationum directio erit recta PE, jungens centra gravitatis mobilis P & superficiei curvæ ABC, ac solicitatio ex omnibus nascens ipsisque æquipollens Fig. 9.

est,

est, ut factum ex superficie ABC in distantiam EP centri ejus gravitatis à centro corporis P. Nam numerus punctorum seu solicitationum est ipsa superficies ABC, ejusque centrum gravitatis est centrum omnium punctorum, quibus rectæ solicitationum repræsentatrices terminantur.

Corollarium III.

Fig. 10. 52. Quinimo si idem mobile P, ad singula curvæ ABC puncta urgeatur, sed solicitationibus non ipsis PB distantiis punctorum à mobili, sed ipsis LP in singulis BP sumtis, & in curva quacunque DLH terminatis, proportionalis. Erit etiam nunc omnium solicitationum PL media directio PE recta jungens centra mobilis P & curvæ DLH, ac solicitatio ex illis omnibus resultans, factum ex gravitate curvæ DLH in rectam EP; sed hujus curvæ partes non uniformiter graves intelligendæ, verùm difformiter; ita ut ductis per homologa utriusque curvæ AB & DLH puncta B, L tangentibus BM & LM in puncto M concurrentibus, gravitas puncti B curvæ ABC uniformiter gravis, sit ubique ad homologi puncti L curvæ DLH, gravitatem ut rectangulum MBP ad rectangulum MLP.

PROPOSITIO VI. Problema.

Fig. 11. 53. *Invenire mediam directionem solicitationum quarumvis* AG, BG, CG, DG *quibus puncta* A, B, C, D *lineæ rectæ inflexilis* AD *urgentur.*

Ex quolibet extra lineam AD puncto O agantur per singula lineæ puncta A, B, C, D in quibus linea juxta directiones AG, BG &c. urgetur, rectæ indefinitæ OAF, OBF, OCF, ODF, ductisque per singula puncta G in quibus lineæ solicitationum aut potentiarum applicatarum repræsentatrices terminantur rectis indefinitis FG lineæ AD parallelis & lineis OA, OB, OC, OD &c. quantum opus est productis in punctis F occurrentibus. Dehinc singulis AF, BF, CF, DF &c. in suis directionibus transferantur à puncto concursus O, respectivè æquales O*a*, O*b*, O*c*, O*d* &c. punctorumque *a*, *b*, *c*, *d* centrum gravitatis *e* inveniatur atque in linea OM per hoc centrum *e*, & punctum O ducta lineæque AD occurrente in E, sumatur EM, quæ sit ad O*e* ut numerus punctorum *a*, *b*, *c*, *d* ad unitatem; ductaque per punctum M recta NL æquidistante ipsi AD, assumatur in ea ML omnibus FG inter AF,

BG,

BG, & BF, BG &c. interceptis, æqualis, eo casu, quo omnes GF conspirantes sunt, vel juxta ordinem literarum ex F versus G sumtæ omnes ad eandem plagam vergunt, tunc enim ML in eandem plagam & omnibus FG æqualis sumenda est; sin vero nonnullæ FG vergerent ad unam plagam, reliquæ vero FG in plagam oppositam, eo casu ML æqualis facienda esset excessui quo fortiores FG simul sumtæ, excedunt reliquas FG in plagam priori oppositam agentes, eamque in partem ducenda esset in quam agunt fortiores FG: Linea EL jungens puncta E, L dabit mediam directionem omnium solicitationum AG, BG, CG, DG &c. ejusque longitudo EL exponet solicitationem omnibus applicatis æquipollentem in hac media directione EL, seu etiam onus quod sustinaculum V puncto E subjectum ab iisdem applicatis potentiis AG, BG, CG &c. sustineret. Quod erat inveniendum.

Demonstratio. Quælibet solicitatio vel potentia applicata AG æquipollet (§. 39.) lateralibus AF & FG; atque adeo omnes AG, BG, CG &c. æquipollebunt omnibus AF, BF, CF, DF secundum hypothesin in puncto O convergentibus, omnibusque harum collateralibus FG. Cogitetur jam virga seu linea AD, cui potentiæ applicatæ vel solicitationes AG, BG &c. impressæ sunt, plano gravitatis experti, perinde ac ipsa linea, infixa esse, ita ut linea moveri nequeat, quin planum simul moveatur; hoc enim modo fiet ut potentia AF eandem vim habeat movendi planum, in quocunque directionis OA puncto ipsi plano applicata sit, sive in puncto A, aut in quovis alio *a*, O &c. hoc per se satis evidens est; nam si potentia AF rectæ AD in A applicata in directione OA majorem vim haberet ad movendum planum AODF quam hæc eadem potentia AF ac in eadem directione OA sed plani AOD puncto O applicata, sequeretur potentiam AF cum alia ipsi æquali, puncto O applicata in eadem directione, sed in partem oppositam ex *a* versus O, vel potius in linea AO extrorsum trahente punctum plani O, non esse in æquilibrio, sed ipsi prævalere, aut hanc illa fortiorem existere; atque adeò duæ potentiæ æquales AF & *a*O juxta eandem lineam AO in oppositas partes agentes se mutuo in æquilibrio non tenerent, quod est absurdum. Ergo potentia AF rectæ AD applicata eundem effectum præstat ac potentia O*a* ipsi AF æqualis & in eadem directione OA puncto plani O applicata, quod de reliquis BF, CF &c. etiam intelligendum: ac proinde potentiarum AF, BF, CF, DF eadem est media directio, quæ potentiarum hisce æqualium Oa, Ob, Oc, & Od &c. atqui harum media directio OeM (§. 49.) est linea jungens punctum O & centrum gravitatis e punctorum a, b, c, d &c. & potentia omnibus applicatis puncto O, aut rectæ in punctis A, B, C, D &c. æquipollens est multipla ipsius Oe secundum punctorum a, b, c, d &c. numerum, atque adeo exponitur recta EM, quæ (constr.) est ad Oe ut numerus punctorum a, b, c &c. ad unitatem. Æquipollet ergo potentia EM omnibus AF, BF, CF & DF, ex omnibus vero FG lineæ AD parallelis nascitur solicitatio ipsis omnibus æqualis, si conspirantes fuerint, vel æqualis excessui, quo fortiores FG superant debiliores & oppositas FG, ac proinde utroque casu exponitur recta ML quæ pro varietate circumstantiarum (constr.) æqualis est summæ omnium FG eandem plagam respicientium, vel differentiæ earum quæ in diversas plagas tendunt, unde cum omnibus AF, BF, CF, DF & omnibus FG æquipolleant duæ laterales EM & ML & hisce duabus (§. 39.) unica EL, omnino patet hanc EL etiam æquipollere omnibus AG, BG, CG, & DG, quæ lineæ AD applicatæ sunt. Propterea EL significat mediam directionem potentiarum applicatarum & solicitationem in hac media directione ipsis omnibus æquipollentem. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Fig. 11. 54. Si lineæ AD perpendiculares AH, BH, CH, DH agantur ipsis FG occurrentes in punctis H, hæ perpendiculares totidem potentias lineæ AD applicatas repræsentabunt, momentaque omnium earum, quæ sunt ex una parte puncti E, æquabuntur momentis earum, quæ sunt ex altera parte, id est, AH. AE + BH. BE = CH. CE + DH. DE. Ductis enim af, bh, dg, ci rectæ AD & AI, BI, CI, DI &c. rectæ OM parallelis, eritque propter centrum gravitatis e, $af + bh = dg + ci$, vel adscita communi altitudine OE erunt facta seu rectangula OE. af + OE. bh = OE. dg + OE. ci. Vel Of. AE + Oh. BE = Og. DE + Oi. CE, quia OE. af = Of. AE propter triangula similia OAE & Oaf, item OE. bh = Oh. BE, ob triangulorum OBE & OBh similitudinem, & quia ob similes rationes rectangula reliqua OE. dg, OE. ci rectangulis Og. DE, OI. CE respective æquantur. Porro ob AI, BI, CI &c. parallelas (constr.) rectæ OM, & singulas Oa, Ob, Oc, Od æquales singulis AF, BF, CF, DF, æquabuntur etiam Of, Oh, Oi, Og ipsis AI, BI, CI, DI,

quia

quia quodvis triangulum Oaf respectivo AFI simile & æquale est, propterea substitutis in rectangulis æqualibus $Of.AE + Oh.BE = Og.DE + Oi.CE$, loco rectarum Of, Oh, Og & Oi, æqualibus AI, BI, DI ac CI eodem ordine sumtis, fiet $AI.AE + BI.BE = DI.DE + CI.CE$. Vel substitutis adhuc loco ipsarum AI, BI, CI, DI, aliis rectis AH, BH, CH, & DH, quæ ipsis propter triangula similia AHI, BHI, CHI, DHI analoga sunt, hoc est, proportionalia, erunt tandem $AH.AE + BH.BE = DH.DE + CH.CE$. Porrò sicut $EM = Of + Oh + Og + Oi, = AI + BI + DI + CI$, ita etiam EN rectæ ML perpendicularis, erit $= AH + BH + DH + CH$.

Corollarium II.

55. Ex centro æquilibrii E demissis ad directiones potentiarum AG, BG, CG, DG productas perpendicularibus EP, EQ, ER & ES, momenta potentiarum obliquarum ex una parte, æqualia erunt momentis potentiarum in parte altera. Hoc est, $AG.EP + BG.EQ = DG.ES + CG.ER$. Nam quia quælibet triangulorum PAE, & HAG paria similia sunt, fient rectangula AH.AE, BH.BE, DH.DE ac CH.CE æqualia homologè rectangulis AG.EP, BG.EQ, DG.ES & CG.ER, unde quia (§. 54.) $AH.AE + BH.BE = DH.DE + CH.CE$, erit etiam $AG.EP + BG.EQ = DG.ES + CG.ER$. Fig. 12.

Scholion.

56. Casus Corollarii hujus secundi obtinet non solum tunc, cum linea AD est recta, cui potentiæ obliquæ AG, BG &c. applicantur; sed etiam in casu, quo ipsa linea applicatas potentias habens est curva, imo etiam in rotis aliisque ejusmodi organis. Uno verbo, si circa aliquod punctum potentiæ aut solicitationes quæcunque in æquilibrio sunt, momenta potentiarum, quæ agunt in unam partem, æqualia sunt momentis potentiarum, quæ agunt in partem oppositam; atque sic inopinatò incidimus in demonstrationem directam & immediatam principii Archimedei de æqualitate momentorum, in casu æquilibrii potentiarum inter se commissarum, quod varii varie demonstrare conati sunt. Cæterum ope Corollarii primi hujus, ipsum problema hujus propositionis multo simplicius jam solvetur, imò plura alia præstabuntur quam antea, ut ex sequentibus facile patescet.

PROPOSITIO VII. THEOREMA.

57. *Si lineæ inflexili & gravitatis experti (qualis etiam in præcedenti Propositione est ponenda)* AD *quotcunque solicitationes seu potentiæ obliquæ* A1A, B1B, C1C, D1D *applicatæ, atque hæ potentiæ omnes in suas laterales potentias lineæ* AD *perpendiculares & parallelas resolutæ fuerint, erit, ductis per centrum æquilibrii* H *potentiarum lineæ* AD *perpendicularium* A2A, B2B, C2C, D2D, *rectâ* HI *ipsis omnibus simul sumtis æquali & parallela, & per punctum* I *recta* IK *lineæ* AD *parallela ac æquali excessui, quo potentiæ lineæ æquidistantes, quæ sunt ad unam lineæ* HI *partem ut* 2D1D, *superant eas, quæ ipsi in parte contraria oppositæ sunt* 2A1A, 2B1B, 2C1C, *recta jungens puncta* H, K *erit media directio potentiarum obliquarum virgæ seu lineæ* AD *applicatarum, ejusque magnitudo exponet onus, quo hypomochlion, seu sustinaculum puncto virgæ* H *subjectum, juxta mediam directionem* HK *ab omnibus potentiis urgetur.*

Fig. 13. Cum quælibet solicitatio seu potentia obliqua A1A (§. 39.) spectari possit, tanquam nascens ex suis lateralibus solicitationibus A2A & 2A1A virgæ AD perpendiculari & parallela, omnes potentiæ obliquæ considerari possunt tanquam nascentes ex omnibus perpendicularibus A2A, B2B, C2C, D2D, & ex omnibus parallelis 2D1D, 2C1C, 2B1B, & 2A1A. Atqui (§. 54.) ex omnibus perpendicularibus resultat solicitatio vel potentia ipsis omnibus simul sumtis æqualis & parallela, transiens per earum centrum æquilibrii H, id est (constr.) solicitatio $HI = A2A + B2B + C2C + D2D$, ex parallelis verò nascitur solicitatio æqualis (§. 38.) excessui, quo fortior vel fortiores excedunt debiliores ipsis contrarias, unde cum (constr.) sit $IK = 2D1D - 2A1A - 2B1B - 2C1C$, hæc IK exponet solicitationem ex solicitationibus virgæ parallelis nascentem; adeoque cum ex omnibus potentiis lateralibus virgæ perpendicularibus & parallelis nasci intelligantur, tum omnes obliquæ A1A, B1B &c. tum etiam duæ laterales HI & IK & ex hisce (§. 39.) unica HK, patet hanc solicitationem HK omnibus obliquis æquipollere ejusque directionem harum esse Mediam directionem, atque adeo punctum virgæ H in hac media directione urgeri solicitatione seu onere, quod exponitur magnitudine rectæ HK. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

Scholion.

58. Eadem methodo, mutatis mutandis, obtinetur media directio potentiarum lineæ curvæ DAA utlibet applicatarum. Nam si potentiæ vel solicitationes applicatæ repræsententur per lineas AB, quarum unaquæque resolvatur in suas laterales potentias AC, axi curvæ DE perpendiculares, & CB eidem æquidistantes, productisque CA ultra axem DE, ut singulæ EF singulis AC æquales fiant, potentia IN singulis EF simul sumtis æqualis & per earum centrum æquilibrii ducta axique perpendicularis (§. 54.) erit potentia seu solicitatio omnibus EF æquipollens, unde cum singulæ hæ EF singulis AC æquales atque directæ oppositæ sint, omnes EF cum omnibus AC in æquilibrio manebunt, ergo etiam unica potentia IN universis EF æquipollens cum iisdem AC in æquilibrio consistet; pariter ductis DG axi DE normali, & rectis indefinitis AH eidem axi parallelis, & in iis factis GH singulis CB respectivè æqualibus, erit potentia IL universis GH æqualis & parallela transiens per centrum æquilibrii K harum GH, cum iisdem GH (§. 54.) in æquilibrio, ergo duæ potentiæ laterales IN & IL cum universis AC & universis CB in directionibus AG agentibus, id est, universis GH in æquilibrio consistent, atque adeo cum omnibus obliquis; at vero ex potentiis IN & IL (§. 49.) nascitur potentia, cujus directio IO transit per punctum I & centrum gravitatis O punctorum L & N, & quæ exponitur per multiplum rectæ IO secundum punctorum L & N numerum, hoc est per 2.IO; ergo talis potentia sola in æquilibrio erit cum universis AB curvæ DAA applicatis, idcirco (§. 37.) recta OI producta in M, dat mediam directionem IM omnium potentiarum AB, & hypomochlium R curvæ DAA applicatum sustinebit onus æquale 2.OI ab omnibus applicatis potentiis AB. Quod erat inveniendum. Cæterum etsi punctum I, quod est communis intersectio rectarum KL & SN in curva DA esse videtur, in eam tamen incidere non debet, ac propterea puncta I & R sunt semper diversa. Fig. 14.

Constructioni hujus Scholii non multum absimilem etiam reperit Cl. Varignon. Verum in hac constructione non omnia curvæ puncta ab applicatis potentiis urgentur, nam casus quo singulis ejus punctis potentiæ applicantur, pendet à quadraturis & centris gravitatis quarundam figurarum curvilinearum, ut ex sequenti Propositione elucescet.

PRO-

PROPOSITIO VIII. THEOREMA.

Fig. 15. 59. *Si Vectis curvilineus* ABB, *cujus axis* AT *ordinatas* BC *ad angulos rectos excipit, à potentiis vel solicitationibus utlibet obliquis* BG, BG &c. *in singulis punctis urgeatur, protracta* GB *in* T, *ductisque per* B *rectis* BS *curvæ* ABB *normali, & BE axi* AT *parallela, demissaque ex* S *normali* SV *super* BT, *in ordinata* BC *producta sumatur* CD, *quæ sit ad* BG *potentiæ curvæ puncto* B *applicatæ repræsentatricem, ut* BV *ad* BT, *& in recta* BE *producta accipiatur* EF, *quæ sit ad eandem* BG, *ut rectangulum* BV.CT *ad rectangulum* SC.BT, *& hoc respectu cujusvis alius curvæ puncti* B *fieri intelligatur, indeque nascentur figuræ mixtilineæ* AXDC, AXFE, *quarum centra gravitatis sint in* R *&* Q, *per quæ agantur* MR *rectæ* AN, *&* QO *axi* AT *æquidistantes, seque mutuo secantes in* M; *si rectangulum sub* MO *& data recta* A *æquale areæ* AXFE, *& rectangulum sub recta* MR *& eadem data* A *æquale areæ* AXDC *facta fuerint, linea recta* IM *per punctum concursus* M *rectarum* QO *&* LR, *& per medium* I *rectæ* OR *jungentis puncta* O *&* R *ducta atque versus* P *protracta, dat mediam directionem* MP, *omnium potentiarum* BG *curvæ* AB *applicatarum, & Onus quod hypomochlion* Z *ab omnibus potentiis sustinebit, exponetur rectangulo* 2MI.A *sub dupla* MI *& data* A.

Sic B*b* elementum curvæ AB, per cujus terminum *b* ducantur *bd* rectæ BD & *bf* lineæ BF parallelæ, tum etiam per terminum G potentiæ BG recta GH axi parallela, quæ ordinatæ CB productæ occurrat in H, & denique demittatur *ba* perpendicularis ad GT, quibus positis,

I. Quia (constr.) CD : BG = BV : BT, & propter triangula similia BHG & BCT, est BG : BH = BT : BC, erit etiam ex æquo CD : BH = BV : CB. Porrò quia triangula BVS & B*ba*, propter angulos *b*B*a*, VBS recto æquales, atque adeò ipsis VBS & VSB (qui simul sumti etiam recto æquantur) æquales, adeò ut ablato communi VBS remaneant æquales *b*B*a* & VSB, & propter angulos ad *a* & V rectos, similia sunt; habebimus insuper BV : BS = *ba*: Bb, triangula verò similia *b*Bβ & BCS præbent BS : BC = B*b*: Bβ, igitur denuo ex æquo BV : BC = *ba* : Bβ. Sed initio hujus inveniebatur etiam BV : BC = CD : BH, ergo CD : BH = *ba* : Bβ, adeoque BH.*ba* = CD.Bβ = rectangulo Cδ areæ AXDC inscripto.

II. Quoniam (constr.) EF : BG = BV.CT : SC.BT, & BG :

GH

GH = BT : CT = SC. BT : SC. CT, erit ex æquo EF : GH = BV. CT : SC. CT = BV : SC. Præterea, ut num. I. oſtenſum, eſt etiam BV : BS = *ba* : B*b*, & BS : SC = B*b* : *bβ*, ergo iterum ex æquo BV : SC = *ba* : *bβ*, at modo habuimus etiam BV : SC = EF : GH, ergo EF : HG = *ba* : *bβ*, atque adeò HG. *ba* = EF. *bβ* = rectangulo Eφ areæ AXFE inſcripto.

III. Jam quia potentia BG curvæ puncto B applicata (§. 39.) reſultat ex lateralibus BH axi AT perpendiculari, & HG eidem parallela, & ſingula puncta elementi B*b* ab eadem potentia obliqua BG urgentur, potentia, qua totum elementum afficitur, eſt ut rectangulum BG. *ba* cujus altitudo *ba* multitudinem potentiarum obliquarum omnibus elementi B*b* punctis applicatarum exponit, rectangulum BH. *ba*, exponet potentiam axi perpendicularem, & HG. *ba* potentiam eidem axi parallelam, quæ ex obliqua BG. *ba* ad elementum curvæ B*b* pertinente derivantur, & ex quibus hæc (§. 40.) reſultat. Unde, quia (num. I. & II.) oſtenſum BH. *ba* = rec-lo Cδ & HG. *ba* = rec-lo Eφ, omnes potentiæ BG. *ba* reſultabunt ex omnibus Cδ areæ AXDC inſcriptis, & ex omnibus Eφ areæ AXFE inſcriptis, cum ſingulæ BG. *ba* ex ſingulis Cδ & Eφ naſcantur. Atqui ex omnibus potentiis Cδ (§. 54.) reſultat potentia A. MR cum hoc rec-lum (conſtr.) æquale ſit omnibus Cδ, ſeu areæ AXDC, cui inſcripta ſunt, & potentiæ A. MR directio tranſeat per centrum gravitatis areæ AXDC; & ex omnibus potentiis Eφ reſultat potentia A. OM, quoniam (conſtr.) hoc rec-lum A. MO = AXFE ejuſque directio OQ tranſit per centrum gravitatis Q ejuſdem areæ AXFE. Propterea potentiæ A. MO & A. MR in directionibus ſuis MO, MR in æquilibrio conſiſtent cum omnibus potentiis obliquis BG, BG, &c. curvæ AB in ſingulis punctis applicatis. Sed ex potentiis A. MO & A. MR reſultat (§. 49.) potentia 2. MI. A cujus directio MI tranſit per centrum gravitatis I punctorum O & R, quorum gravitas fingitur eſſe A. Ergo etiam hæc potentia 2. MI. A in æquilibrio erit cum omnibus BG, &c., atque adeo ejus directio MI in contrariam partem P producta MP (§. 37.) erit media directio omnium potentiarum BG, BG &c. & 2. MI. A exponet onus quod hypomochlium Z in media directione MP à potentiis rectis ſuſtinebit. Quod erat demonſtrandum. In figura male confunduntur puncta Z & M, quorum hoc non in curva AB, ſed intra figuram ABC ſitum eſſe debet.

COROLLARIUM I.

60. Si omnes potentiæ BG curvæ AB perpendiculares ſint, evaneſcent anguli TBS, eritque ubique CD = EF = BG. Nam coincidentibus BF & BS, rectæ BV & BT æquales fient ipſi BS, & CT = CS; unde cum (conſtr.) ſit CD : BG = BV : BT fiet omninò CD = BG. Sic etiam quia TE : BG = BV . CT : SC . BT, & hoc caſu BV = BS, CT = CS, & BT = BS, ratio BV . CT ad SC . BT erit ratio æqualitatis, atque adeo EF = BG.

COROLLARIUM II.

61. Et ſi præterea omnes BG inter ſe æquales fuerint, figuræ mixtilineæ AXCD & AXFE mutabuntur in parallelogramma rectangula CAX & EAX.

COROLLARIUM III.

Fig. 16. 62. Unde ſi ſingulis curvæ AOM punctis potentiæ perpendiculares curvæ, & omnes inter ſe æquales BG applicatæ ſint; vis totalis qua curva AOM urgebitur, eadem erit ac vis totalis, qua urgeretur curvæ baſis AM, ſi etiam ſingulis ejus punctis potentiæ æquales ipſis BG, & baſi AM etiam perpendiculares applicatæ eſſent, atque adeo exponetur rectangulo MAXZ. Nam deſcriptis circa curvam rectangulo ME, EA, cujus latus EE baſi æqualis tangat curvam in O, & ad latera ME, AE rectangulis MXFE, AXFE, conſideretur baſis MA inſtar axis curvæ AOM, & quoniam ſecundùm hypotheſin omnes potentiæ BG curvæ normales ſunt atque inter ſe æquales, erunt (§. 61.) ef = CD = BG & hisce æquales exiſtent homologæ lineæ reſpectu cujusvis alius curvæ puncti B; adeoque omnes potentiæ curvæ parti ABO normales, æquipollebunt duabus potentiis, quarum una axi perpendicularis exponitur rec-lo AXQP, alteraque axi parallela exponitur rectangulo AXFE. Sic etiam omnes curvæ OBM potentiæ æquipollent duabus, quarum una axi perpendicularis alteraque eidem parallela, & quarum hæc rec-lo MXFE, illa verò rec-lo PQZM exponitur. Atqui ob æqualia rec-la MEFX & AEFX, potentiæ axi AM parallelæ & directe oppoſitæ pertinentes ad curvæ partes ABO, MBO, utpote inter ſe æquales, ſe mutuo elidunt, ſolæque potentiæ axi perpen-

pendiculares considerandæ veniunt; illæ scilicet, quæ exprimuntur rec-lis XAPQ, & ZMPQ; ergo vis, qua tota curva AOM ab omnibus ipsi applicatis potentiis BG urgetur, exponitur rectangulo AXZM. Sed eandem vim basis AM quoque subibit, sicubi in singulis suis punctis ejusmodi æqualibus potentiis perpendiculariter premitur vel trahitur. Potentia enim, qua tota basis afficitur, est, ut hæc basis ducta in potentiam, qua singula ejus puncta urgentur, id est ut rectangulum AMXZ.

Corollarium IV.

63. Pariter, si loco curvæ AOM intelligatur superficies cylindri recti, cujus altitudo sit Mm; ac superficiei isti in singulis punctis potentiæ perpendiculares & æquales BG applicatæ cogitentur; tunc potentia, qua cylindrica superficies ab omnibus ipsi applicatis potentiis urgetur, sive id fiat pressione ejus contra planum *m*M, A*a*, sive tractione ab eodem plano, exponetur per parallelepipedum baseos AZ altitudinisque M*m*; adeoque æquatur potentiæ, qua afficeretur planum *m*MA*a*, si pariter singula ejus puncta æqualium potentiarum impressiones subirent. Nam in superficie cylindrica tot curvæ intelligi possunt ipsi AOM parallelæ similes & æquales, quot puncta sunt in altitudine cylindri vel prismatis *Mm*, quarum quælibet urgetur à potentia exprimenda rec-lo æquali AZ. Adeoque vis, qua omnes curvæ, id est cylindrica superficies, urgentur, exponetur per omnia rec-la ipsi AZ æqualia, quæ in parallelepipedo continentur, id est per parallelepipedum ipsum, sub basi AZ & altitudine M*m*. Et tanta potentia etiam urgetur rec-lum M*ma*A à potentiis æqualibus, singulis ejus punctis applicatis.

Definitiones.

IV.

64. *Solidum patiens* dicitur omne solidum ABCD, cujus singula superficiei curvæ CBAD puncta à potentiis quibuslibet superficiei perpendicularibus, BM, *bu* &c. urgentur, sed ita tamen, ut singula puncta curvæ *cbd*, sectionis solidi basi parallelæ, eadem potentia *bu* vel huic æqualibus afficiatur. Potentiarum verò *actio* in solidum patiens generali nomine *Pressionis* deinceps insignietur. Fig. 19. 20.

V.

65. *Pressio interna* est, cum potentiæ BM, *bu*, &c. cavæ superficiei punctis B, *b* &c. applicatæ, eam extrorsum juxta BM, *bu* premunt.

VI.

66. *Pressio externa* verò, cum convexæ superficiei puncta B, *b* &c. à potentiis ipsis applicatis introrsum premuntur, juxta MB, *ub* &c.

Ex ordine igitur literarum, quibus lineæ potentiarum applicatarum repræsentatrices signantur, statim dignosci poterit utrum applicatæ potentiæ introrsum, an verò extrorsum premant. Nam si litera vel signum, quo punctum superficiei signatur, cui potentia applicata est, primum locum tenet, pressio est interna, externa verò, si secundum locum. Sic BM, *bu* &c. denotant pressiones internas, quia puncta applicationis B, *b* &c. primum locum tenent, & MB, *ub*, &c. significant pressiones externas.

VII.

67. Per *Basin solidi patientis* intelligo quodvis ejus planum vel sectionem planam CBD horizonti æquidistantem.

VIII.

68. *Sectio* verò *recta solidi patientis* nobis est figura plana CAD solidi nostri, basi ejus recta, cujus sectionis rectæ *vertex* est punctum curvæ CAD à sua basi CD maxime distans, & linea AE ex vertice A ad CD perpendiculariter ducta dicetur *axis sectionis rectæ*, & forte etiam ipsius solidi patientis.

IX.

69. *Scala potentiarum* solido patienti applicatarum, est figura mixtilinea KL*r*QP in plano sectioni rectæ solidi patientis recto, atque per axem sectionis rectæ AE, transeunti, cujus figuræ ordinata quælibet 3*er* ejus axi KP, qui ipsi AE æquidistans ponitur, perpendicularis, exponit potentiam, qua unumquodque punctum curvæ *cbd* sectionis *cbdc* basi CBDC parallelæ, afficitur. *Origo* seu *vertex* hujus curvæ O est punctum occursus curvæ Q*r*L cum suo axe KP.

X.

X.

70. *Planum ſublime* eſt GFI, quod baſi patientis ſolidi æquidiſtans, per originem O ſcalæ potentiarum tranſit.

XI.

71. *Planum humile* eſt, quod ſublimi parallelum, per maximam ordinatam PQ, ſcalæ potentiarum tranſit.

XII.

72. *Priſma redundans* eſt ſolidum GFBADIG, quod componitur Fig. 19. ex ſolido patiente CBAD vertice ejus deorſum reſpiciente, & ex priſmate recto GFBDI ſuper baſi CBD & terminato ad planum ſublime GFI.

XIII.

73. *Priſma deficiens* eſt ſolidum GFBADIG, quod remanet detra- Fig. 20. cto ſcilicet ſolido patiente CBAD, vertice ejus A nunc ſurſum converſo ex priſmate recto GFBDI ſuper baſi CBDC, & terminato itidem ad planum ſublime GFI.

XIV.

74. *Solidum patienti analogum* juxta ſcalam potentiarum eſt ſoli- Fig. 19, 20. dum 2C2B2A2D, cujus quælibet ſectio *2c2b2d* homologæ ſectioni *cbd* in ſolido patienti ſimilis, æqualis & parallela intervallo 2H2e æquali reſpectivæ ordinatæ 3*er* ſcalæ potentiarum à plano humili 2G2F2I diſtat, dum homologa ſolidi ipſius patientis ſectio cbd, intervallo He æquali abſciſſæ O3e ad ordinatam 3*er* pertinenti, diſtat.

XV.

75. *Solidum priſmati redundanti analogum* eſt ſolidum 2G2F2B Fig. 19. 2A2D2I, quod componitur ex ſolido patienti analogo 2C2B2A2D & ex Priſmate recto 2G2F2B2D2I, ſuper baſi 2C2B2D atque terminato ad planum humile 2G2F2I.

XVI.

76. *Solidum priſmati deficienti analogum* eſt ſolidum 2G2F2B2A Fig. 20. 2D2I, quod relinquitur ablato ſolido 2C2B2A2D patienti analogo ex priſmate recto 2G2F2B2D2I ad planum humile 2G2F2I etiam terminato.

 XVII.

XVII.

Fig. 19, 20. 77. *Pseudo-cuneus* sectionis rectæ solidi patientis est solidum, cujus sectiones, plano humili vel sublimi parallelæ, sunt rectangula, quorum bases sunt ordinatæ figuræ cujusdam similis & æqualis sectioni rectæ solidi patientis; altitudines verò ordinatis modo nominatis respondentes ordinatæ Scalæ Potentiarum.

Circa axem KP sit figura 3C3A3D similis & æqualis sectioni rectæ CAD solidi patientis, cujus ordinata quælibet 3c3d proinde æquabitur ordinatæ cd transienti per punctum e, quod respondet puncto 3e, per quod ordinata 3c3d ducta est, quæ ordinata in scala potentiarum respondentem habet 3*er*. Pseudo-cuneus sectionis rectæ CAD est solidum, cujus singulæ sectiones plano GFI parallelæ sunt parallelogramma rectangula, quorum bases sunt ordinatæ 3c3d & altitudines ordinatæ 3*er* scalæ potentiarum, in eodem plano secante positarum, id est rectangula 3c3d. 3*er*. &c.

Hi Pseudo-cunei hac etiam ratione generari intelligentur: super figuris 3C3A3D & PLQ, tanquam basibus, erecta intelligantur prismata recta, quæ, ob bases suas ad angulos rectos sibi invicem occurrentes, se mutuo perforabunt. Solidum illud, quod à prismatis ad angulos rectos transversim se invicem perforantibus intercipitur, est Pseudo-cuneus, de quo agitur.

Si scala potentiarum est triangulum vel trapezium, tunc ex Pseudo-cuneo fit verus Cuneus.

XVIII.

78. *Projectio* cujusque figuræ in plano quodam, quod ideo etiam *projectionis planum* audit, est figura, quæ in plano projectionis formatur, demittendo ex singulis figuræ projectæ punctis perpendiculares ad planum projectionis. Sic curvæ *kim* projectio in plano projectionis 2G2F2I est curva 1*p*1*n*1*q*, quæ à perpendiculis ex singulis punctis curvæ *kim* ad planum 2G2F2I demissis, formatur.

PROPOSITIO IX. Theorema.

Fig. 17, 18. 79. *Si in singulis punctis conicæ superficiei* kcbimd *duobus planis* cbd *&* kim, *ad distantiam indefinite parvam* el *vel* ni *aut* pk *à se invicem distantibus, interjectæ, atque lineolis* ck *&* dm *terminatæ, potentia* fg *ad angulos rectos applicata fuerit, pressio, quam universa superficies*

ficies

ficies conica subibit, æquipollebit pressionibus, quas armilla pbq *duabus curvis* cbd *&* pnq *(quæ alterius* kim *projectio est in plano* cbd*) intercepta, & lineolis* cp, dq *terminata; & cylindrica superficies* knm *ad basin* kigm *& ad altitudinem* el *vel* ni *erectam terminatamque lineolis* pk *&* qm, *paterentur ab eadem potentia* gf, *in singulis armillæ & cylindricæ superficiei punctis perpendiculariter applicata.*

Sumatur in curva exteriore *cbd* quilibet arcus infinitesimus *sx* & per puncta *s*, *x* curvæ perpendiculares ductæ *st*, *xy* intelligantur curvæ interiori *pnq* occurrentes in punctis *t*, *y*. Porrò solidum *cbmd* sectum cogitetur duobus planis per lineolas *st*, *xy* ductis & plano *cbd* rectis, eruntque solidi *cbmd*, & planorum secantium communes sectiones triangula rectangula *stg*, *xyh* ac solidum hisce triangulis interjectum *txg* prisma erit. Quibus intellectis, pressiones, quas subibunt facies *tghy* & *styx* (quæ considerandæ sunt, tanquam continuam superficiem in *ty* incurvatam *stghyxs* basin *sghx* habentem) componentes æquipollent (§. 63.) pressioni, quâ ab eadem potentia *gf* afficietur basis *sghx*. Et cum hoc accidat, respectu cujuslibet alius *sghx* in superficie conica *kbm*; & homologarum areolarum *styx* in armilla, & *tghy* in superficie cylindrica; perspicuum est, pressiones quas omnes areolæ *sghx* in superficie conica subeunt, æquipollere pressionibus, quas sustinent omnes areolæ *tsxy*, quæ sunt in armilla, & quas sustinent omnes *tghy*, quæ in cylindrica superficie *knm* continentur. Ac propterea pressio, quam subit zona conica *kbm* ab omnibus ipsi perpendiculariter applicatis potentiis æqualibus *gf*, æquipollet pressionibus, quas ab omnibus perpendiculariter applicatis potentiis ipsis *gf* æqualibus patientur armilla *pbq* & superficies cylindrica *knm*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X. Theorema.

80. *Si singulis punctis superficiei convexæ aut cavæ* CBAD, *qua solidum patiens* CBADC *ex parte terminatur, potentiæ inæquales quidem & superficiei perpendiculares* MB, ub &c. *vel* BM, bu &c. *applicatæ sint, sed quarum eæ saltem omnes, quæ singulis punctis cujusque sectionis* bcd *basi* CBD *parallelæ applicantur, æquales sint, & exponantur per homologam ordinatam* 3er *scalæ potentiarum; Pressio, quam superficies curva solidi patientis ab omnibus potentiis patietur, æquivalebit pressioni, qua urgeretur basis solidi patientis* CBD *juxta directionem basi perpendicularem* αβ *per centrum gravitatis* δ *solidi* Fig. 19, 20.

2G

2G2F2B2A2D2I *quod prismati redundanti (deficienti)* GFBADI *analogum est, ductam, quam pressionem idem hoc solidum analogum exponat; & simul etiam pressioni, quam exponit pseudocuneus sectionis rectæ in solido patienti, seu solidum* 3C3ALQ3D *exserendæ in sectionem solidi patientis rectam* CAD *juxta directionem* er *huic sectioni perpendicularem, & per centrum gravitatis* ω *pseudocunei ductam.*

Hoc est, si β designet solidum illud prismati redundanti (deficienti) analogum, & ω pseudocuneum memoratum in propositione; Potentiæ β & ω in directionibus $\alpha\beta$, $e\omega$, vel in directionibus $\beta\alpha$ & ωe patienti solido applicatæ, in æquilibrio consistent cum omnibus potentiis BM, *bu* &c. cavæ superficiei CBAD, vel cum omnibus MB, *ub* convexæ applicatis.

Solidum patiens sectum intelligatur duobus planis *cbd*, *kim* basi CBD æquidistantibus & indefinite vicinis. Portio superficiei curvæ solidi patientis duobus planis secantibus intercepta, quam deinceps per *kbm* designabimus, est instar superficiei conicæ duabus curvis *cbd*, & *kim* atque lineolis *ck*, *dm* terminatæ. Curvæ *cbd* projectio in plano humili 2G2F2I sit 1*c*1*b*1*d*, & curvæ *kim* projectio in eodem plano humili 1*p*1*n*1*q*, in plano vero *cbd*, curva *pnq*.

Jam pressio quam superficies conica *kbm* subibit à potentia *bu* (secundum hypothesin) = 3*er*, in singulis ejus punctis perpendiculariter applicata (§. 79.) æquipollet pressionibus, quas paterentur armilla *pbq* (qualis in præcedenti propositione considerata) & Cylindrica superficies *knm*, si etiam singula armillæ & cylindricæ superficiei puncta eadem potentia *bu* = 3*er* perpendiculariter afficerentur; atqui potentia qua armilla *pbq* afficietur erit, ut hæc armilla ducta in potentiam *bu* vel 3*er*, qua singula ejus puncta urgentur, id est, exponi debet per solidum *pbq*. 3*er*, vel quia armilla *pbq* = suæ projectioni 1*p*1*b*1*q*, ac 3*er* (§. 74.) = 2H2*e* = 1*b*2*b*, per solidum 1*p*1*b*1*q* in 1*b*2*b*, id est per semitubum 1*p*1*b*2*b*1*q*1*d*, solido 2G2B2A2I inscriptum. Pressio verò quam superficies cylindrica *knm* ab applicatis potentiis pateretur, æqualis (§. 63.) pressioni, quam subiret rectangulum *kpqm*, quod cylindricam superficiem subtendit, exponetur solido seu parallelepipedo *km*. *el*. 3*er*, vel parallelepipedo 3*k*3*m*. 3*e*β*l*. 3*er*, quod alteri æquale est atque pseudocuneo inscriptum. Unde, quia pressio, quam quælibet alia zonula conica *kbm* solidi patientis ab applicatis potentiis patietur, similiter æquipollet pressionibus, quibus homologa armilla *pbq*, & homologa superficies cylindrica *knm* ab eadem potentia singulis zonulæ conicæ punctis perpendicu-

lariter

lariter applicata, urgentur: ultrò sequitur fore, ut pressiones, quas subibunt omnes zonulæ conicæ, quæ in universa superficie curva solidi patientis continentur, id est pressio, quam ipsa hæc solidi patientis superficies curva patietur, æquipolleant pressionibus, quas omnes armillæ, & omnes cylindricæ superficies zonulis conicis homologæ ab applicatis potentiis patientur; atqui cum paulo ante ostensum sit, pressionem à qualibet armilla *pbq* exceptam exponi homologo semitubo cylindrico *1p1b2b1q* cujus basis *1p1b1q* duabus curvis *1p1n1q* lineolisque *1c1p* & *1q1d* intercepta æqualis est ipsi armillæ *pbq*, cujus projectio est, altitudo verò *1b2b* (§. 74.) æquatur ordinatæ *3er* scalæ potentiarum, pressionemque cujusque superficiei cylindricæ *knm* exponi parallelepipedo *3k3m. 3el. 3e3l* Pseudocuneo inscripto; pressio omnium armillarum exponetur per omnes semitubos cylindricos *1p1b2b1q*, qui in solido 2G2F2A2D2I prismati redundanti (deficienti) analogo continentur, id est per ipsum hoc solidum analogum, & potentia, quæ ex omnibus illis quæ superficies cylindricas *knm* in solido patienti urgent, nascitur, exponetur per omnia parallelepipeda Pseudocuneo inscripta; seu quia ejusmodi parallelepipeda collective sumta figuræ, cui inscripta sunt, & in quam ultimo evanescunt, (perinde ac omnes semitubi solido analogo inscripti, in hoc solidum prismati redundanti vel deficienti analogum) æquantur, per ipsum Pseudocuneum. Ergo omnes potentiæ singulis punctis universæ superficiei curvæ CBAD applicatæ BM, *bu* &c. vel MB, *ub* &c. æquipollent duabus potentiis, quarum una, per solidum 2G2F2B2A2D2I exponenda, agat juxta directionem $\alpha\delta$ (§. 54.) basi CBD solidi patientis perpendicularem & transeuntem per centrum gravitatis δ solidi modo nominati, quod brevitatis gratiâ unica litera δ, qua ejus centrum gravitatis signatur, deinceps indicabimus, vel, quod idem est, omnium potentiarum conspirantium planoque CBD perpendicularium, quæ per semitubos *1p1b1q* solido illi δ inscriptos exponuntur; altera verò per Pseudocuneum Q3C3A3D (unica itidem litera ω qua centrum ejus gravitatis signatur posthac indicandum) juxta directionem *re* vel $b\gamma$ per centrum gravitatis ω Pseudocunei ductam, sectionique rectæ CAD solidi patientis perpendicularem, quandoquidem parallelepipeda Pseudocuneo ω inscripta repræsentant potentias conspirantes planoque CAD perpendiculariter applicatas, quarum media directio (§. 54.) per centrum earum gravitatis ω transibit. Propterea potentia δ in directione $\alpha\delta$ plano CBD perpendiculariter applicata, & po-

 tentia

tentia ω plano CAD normaliter applicata in directione $e\gamma$, simul agentes eundem effectum præstabunt ac potentiæ BM, bu &c. atque adeò eædem potentiæ δ & ω contrario sensu agentes, secundum directiones $\alpha\beta$ & $e\omega$, quæ omninò contrariæ sunt directionibus $\alpha\delta$ & b , consistent in æquilibrio cum potentiis BM, bu &c. singulis punctis B, b universæ superficiei curvæ CBAD applicatis. Sed potentiæ eædem δ & ω agentes juxta directiones $\alpha\delta$ & $e\gamma$ etiam in æquilibrio manebunt cum omnibus potentiis MB, ub &c. Quæ erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

Fig. 21. 22. 81. Si nunc loco solidi BAE superficie curva BbA duobusque planis AE & BE invicem rectis terminati, intelligatur solidum BAS superficie curva BbAsS unicoque plano BS terminatum, quod totius solidi (§. 67.) basis sit, & planum EA (§. 68.) ejus sectio recta, sitque pro altera solidi parte EAsS eadem scala potentiarum, quæ partis solidi patientis EAbB, ita ut potentiæ bu, su singulis punctis sectionis bs parallelæ BS applicatæ inter se æquales sint & ordinatæ $3er$ hujus scalæ potentiarum; signentur, ut in propositione, in solido analogo omnes lineæ iisdem litteris, quibus homologæ lineæ in solido patienti, sed præposito binario tanquam nota diacritica, eruntque adeò solida 2F2B2b2A2H, & 2R2S2s2A2H analoga prismatis redundantibus (deficientibus) FBbAH, RSsAH. Analoga illa solida notentur literis δ & κ, quibus eorum centra gravitatis signantur, &, ut in præcedenti articulo, ω designet & pseudocuneum sectionis rectæ AE in solido patiente BAS, ejusdemque pseudocunei centrum gravitatis: quibus positis omnes potentiæ SM, su solido EAS applicatæ non aliam vim in solidum exserent, quam potentia κ trahens curvam AS secundum directionem $\xi\kappa$ sectioni rectæ AE parallelam & per centrum gravitatis κ transeuntem, una cum potentia ω trahente solidum juxta $e\omega$ basi BS parallelam, adeoque omnes potentiæ BM, su, bu, SM &c. toti solido BAS applicatæ æquivalent potentiis δ, & κ solido in directionibus $\alpha\delta$ & $\xi\kappa$ applicatis, cum ejus vertex A deorsum respicit ut fig. 21, vel in directionibus $\alpha\beta$ & $\xi\theta$ cum solidi vertex sursum conversus est ut fig. 22; ac insuper potentiæ ω solidi alis AbB, AsS hinc inde applicatæ in directionibus $b\gamma$ $s\omega$ utroque casu. Sed si potentiæ solido patienti applicatæ sunt exterius prementes, eæ spectandæ sunt tanquam agentes juxta MB, ub, MS, us &c. eoque casu hæ potentiæ æquipollebunt

iisdem

iisdem ac prius δ, $\varkappa$, ω sed in directionibus, $\delta\alpha$, $\varkappa\xi$, γb, & ωs prementibus solidum BAS in casu figuræ 21, & juxta directiones $\beta\alpha$, $\theta\xi$ in figura 22.

COROLLARIUM II.

82. Adeoque, si solidi BAS partes B*b*A & S*s*A circa verticem A converti atque instar alarum alicujus follis ab invicem diduci atque iterum ad se mutuo constringi queant, erit $\gamma.\ Ae + \delta.\ \alpha E$ momentum totale potentiarum γ vel ω, & δ, quæ æquipollent potentiis curvæ superficiei A*b*B in singulis perpendiculariter applicatis BM, *bu*, &c. vel MB, *ub* &c. Et $\omega.\ Ae + \varkappa.\ \xi E$ momentum totale potentiarum ω & $\varkappa$ solidi parti A*s*S applicatarum & æquipollentium potentiis SM, *su* &c. vel MS, *us* &c. singulis punctis superficiei curvæ A*s*S applicatis.

COROLLARIUM III.

83. Si nunc solidum patiens *a*BAS unica superficie curva terminatum sit, cujus singula puncta à potentiis ipsi perpendicularibus urgentur & quæ potentiæ determinentur scala potentiarum KLQP, ita ut supremum punctum *a* urgeatur à potentia $ba = KL$, infimum A à potentia $2A2H = PQ$, singulaque puncta circumferentiæ sectionis BS à potentia $MB = MS = 3er$ & sic de cæteris respective: tale solidum *a*BAS in altum urgebitur juxta directionem planis FO, vel 2FQ perpendicularem, vi quam exponit solidum 2*a*2B 2A2S. quod (§. 74.) patienti analogum est. Nam sicut supra (§. 81.) vis seu potentia æquipollens singulis potentiis toti superficiei curvæ BAS (figuris 21. & 22.) perpendiculariter applicatis, constat potentiis contrariis atque æqualibus γ & ω perpetuo in eadem directione $\gamma\omega$ basi BS parallela in contrarias partes agentibus, & potentiis δ & $\varkappa$ conspirantibus atque juxta directiones $\delta\alpha$, $\varkappa\xi$ basi normales agentibus; quarum potentiæ γ & ω toties se mutuo destruunt, quoties totum corpus BAS firmum est, nec ejus partes BAE, SAE ab invicem deduci possunt, adeo ut solæ potentiæ $\varkappa$ & δ conspirantes supersint considerandæ, reliquis γ & ω, quasi non essent, sepositis; jam hæ potentiæ, quæ potentias efficaces significant, δ & $\varkappa$ simul sumtæ significant totum solidum 2F2B2A2S2R quod prismati redundanti (fig. 21.) vel deficienti (fig. 22.) FBASR analogum est. Ita etiam in solido nostro *a*BAS potentiæ directe contrariæ per pseudocu- Fig. 25.

 neum

neum ω expositæ se mutuo elidunt, ipsæ verò, quæ juxta directiones planis BS vel FR perpendiculares agunt, hoc loco considerandæ veniunt; nam pars superior BaS solidi nostri deorsum urgebitur vi seu potentia 2F2B2a2S2R, & inferior BAS potentia, quam exponit solidum 2F2B2A2S2R, quod prismati redundanti FBASR analogum est, in altum urgetur juxta directionem plano BS rectam. Adeoque (§. 38.) detracta potentia minore, quæ exponitur solido 2F2B2a2S2R analogo prismati deficienti FBaSR, ex potentia majore, quam solidum redundanti prismati FBASR analogum exponit, quandoquidem minor potentia corpus patiens perpendiculariter deorsum, major verò verticaliter in altum urget; & remanebit vis corpus in altum cogens exponenda solido 2a2B2A2S, quod patienti solido aBAS analogum est.

CAPUT III.

De Figuris, quas Corpora flexibilia induere debent à potentiis ipsis quomodocunque applicatis; & de Mediis directionibus harum potentiarum.

EGimus hactenus de potentiis corporibus inflexibilibus applicatis, earum medias directiones assignavimus; in hoc verò capite potentias corporibus cedentibus seu flexibilibus appendemus, quæ circumstantia flexibilitatis duo indaganda jubet. Primum quamnam corpus flexile figuram debeat acquirere ab applicatis potentiis, vel potius, quamnam retinere debeat formam, ubi potentiæ ad æquilibrium sese composuerunt. Secundum respicit mediam directionem ejusmodi potentiarum in æquilibrio consistentium, & vim impulsûs secundum hanc mediam directionem.

DEFINITIONES.

I.

84. Corporis perfectè flexilis ZAX terminis suis Z, X alicubi affixi *Figura* ZBABX *manens* dicitur, quam corpus retinet, posteaquam omnes potentiæ BH, βH &c. curvæ, punctis per totam ejus longitudinem quomodocunque applicatæ, ad æquilibrium se composuerunt.

II.

II.

85. *Tenacitas* vel *Firmitas* fili aut corporis in quolibet ejus puncto seu elemento curvæ, est vis illa fili aut corporis, qua potentiæ illi aut vi ex omnibus applicatis potentiis nascenti, atque filum in contrarias partes trahendo id dilacerare conanti, resistit; atque adeo æquipollet, vel æquatur, ipsi vi dilaceranti, ex omnibus corpori applicatis potentiis resultanti.

III.

86. *Potentiæ laterales* ex fili aut corporis tenacitate in quolibet ejus elemento, *derivatæ*, sunt duæ potentiæ secundum directiones sibi invicem ad angulum rectum occurrentes, ex quibus conjunctim agentibus resultaret vis aut potentia æqualis corporis tenacitati in dicto ejus elemento, aut etiam vi ejus dilaceranti.

Sic cum filum, vel potius fili elementum B*b*, vi quadam ex omnibus applicatis BH, βH &c. resultante tenditur, idque sua tenacitate æquali vi tendenti impedit ne extendatur aut prorsus rumpatur, hæc tenacitas, aut vis illa tendens tenacitati æqualis, intelligi potest, tanquam potentia resultans ex potentiis lateralibus, secundum BM & B*l* simul agentibus. Et vis qua tenditur elementum Bβ, cui tensioni id sua tenacitate resistit, spectari potest tanquam nascens ex duabus lateralibus potentiis juxta directiones BN & B*k*. Ejusmodi potentias laterales juxta BM vel B*l*, & juxta BN aut B*k* deinceps designabimus per *p*BM, *p*Bl, *p*BN & *p*Bk. Tenacitates vero duorum elementorum contiguorum B*b* & Bβ indicabimus per T & *t*. Fig. 29.

Cæterum in hisce supponimus filum quidem flexile esse in omnibus suis partibus, non vero extensibile.

PROPOSITIO XI. Lemma.

87. *Si fuerint quotcunque decrescentes magnitudines* A, B, C, D, E, *erunt omnium differentiæ simul sumtæ æquales excessui maximæ supra minimam.* Nam ultro liquet, esse A — B, + B — C, + C — D, + D — E = A — E, unde si E = o, erit summa differentiarum maximæ A æqualis.

Scholion.

88. Quanquam hoc lemma ſimplicitate ſua nullius uſus prima fronte videatur, in eo tamen omnes quadraturarum methodi fundantur, quod prolixius quidem oſtendi poſſet tam in antiquorum methodis quam recentiorum; ſed brevitatis gratia id tantum in uſu Calculi integralis uno alteroque exemplo illuſtrabitur. Calculus integralis vel ſummatorius eſt inverſus calculi differentialis, & conſiſtit in eo, ut inveniatur quantitas A ex indeterminata quadam & conſtantibus compoſita, ejus indolis, ut, ſi loco indeterminatæ in ea ſubſtituantur ſucceſſive eadem indeterminata, ſed elemento ſuo ſimplici, ejusve 2plo, 3plo, 4plo, 5plo &c. mulctata inde exſurgant quantitates B, C, D, E &c. quarum differentiæ A—B, B—C, C—D, D—E, &c. ſint ejusdem formæ cum elemento ſeu quantitate infiniteſima ſummanda, ita ut prima differentia A—B, exhibeat ipſam quantitatem differentialem, cujus ſumma ſeu integrale quæritur. Ut ſi curva quædam ſit quadranda, cujus axis dicatur x, & ordinatæ ad hunc axem y, ita ut areæ elementum futurum ſit ydx. Area ipſa invenietur, ſi haberi poſſit, quædam quantitas A ex indeterminata x & quantitatibus datis ſeu conſtantibus compoſita, itaque comparata, ut, ſi in ea ſubſtituantur loco indeterminatæ x, aliæ $x-dx$, $x-2dx$, $x-3dx$, $x-4dx$ & ſic deinceps in infinitum, inde proveniant magnitudines B, C, D, E, &c. quarum prima differentia A—B det ydx, ſecunda B—C det ſecundum elementum areæ ydx in quo ordinata y jam reſpondeat non axi x ſed axi $x-dx$, ſuo ſcilicet elemento dx imminuto, atque ſic de reliquis reſpective. Hac enim ratione perſpicuum eſt, omnes A—B, B—C, C—D &c. exhibere aggregatum omnium ydx, quæ in area continentur, ſeu hanc aream ipſam; jam ſi in ſerie quantitatum decreſcentium A, B, C, D, E &c. minima dicatur M, area quæſita, juxta Lemma (§. 87.) perpetuo erit A—M, & ſi contingat, ut aliquando M ſit O, tunc area æquatur ipſi A. Minima vero quantitas M ſemper habebitur ex Maxima A, ſi ſcilicet loco indeterminatæ x ſubſtituatur in ea $x-ndx$, ubi n eſt numerus elementorum, in quæ axis diviſus eſt, adeo ut ndx ſit $=x$, vel quod eodem recidit, ſi loco x ibi ſubſtituatur o, quandoquidem $x-ndx$ eſt o; quantitasque ex hac ſubſtitutione reſultans erit minima M. Unde ſi contigat ut, facta ſubſtitutione ipſius o loco indeterminatæ x in quantitate A, hæc evaneſcat, tunc M erit $=$ o, atque adeo area quæ-

quæſita, ſeu ſumma omnium ydx, erit A compoſita ex indeterminata x varie affecta & cum conſtantibus implicata. Pro inveniendo vero valore ipſius A, ex dato elemento ydx, loco ipſius y ſubſtitui debet ejus valor in x & conſtantibus, quem æquatio curvæ quadrandæ præbet. Quod de quadratura ſpatiorum ſeu arearum dictum eſt, id etiam de dimenſione ſolidorum imò, de omnibus ſummationibus, pariter eſt intelligendum.

89. In hiſce ſuppoſuimus literas A, B, C, D, E &c. uſque ad M denotare ſeriem magnitudinum decreſcentium, ſed infiniti etiam ſunt caſus, in quibus eædem literæ iisdem ac præcedenti articulo factis ſubſtitutionibus indeterminatarum $x - dx$, $x - 2dx$ &c. loco ipſius x in magnitudine A, proveniant B, C, D &c. majores quam A, adeo ut tota earum ſeries repræſentet progreſſionem earundem creſcentem ita ut differentiæ futuræ ſint B − A, C − B, D − C, E − D, &c. quo caſu M, quæ antea minimam ſeriei magnitudinem denotabat, nunc ſit maxima, & quæ antea erat maxima A nunc ſit minima, neceſſe eſt. Utriusque caſus exemplum eſt adducendum.

90. *Exempl.* 1. Sit ſummanda quantitas $mdm : \sqrt{(aa + mm)}$, in qua m eſt variabilis & a data ſeu conſtans. Eritque hoc caſu $A = \sqrt{(aa + mm)}$, adeoque $B = \sqrt{(aa + mm - 2mdm + dm^2)}$ $= \sqrt{(aa+mm)}, - mdm : \sqrt{(aa+mm)} +$ &c. Hinc $A - B = \sqrt{(aa+mm)}$ $- \sqrt{(aa + mm)}, + mdm : \sqrt{(aa + mm)} = mdm : \sqrt{(aa + mm)}$, unde ſeries magnitudinum A, B, C, usque ad M eſt deſcendens: & ſi loco ipſius m in quantitate A (§. 89.) ponatur o, fiet eo caſu $A = a = M$; cum igitur ſumma omnium A − B, B − C &c. vel omnium $mdm : \sqrt{(aa+mm)}$ ſit (87.) A − M, erit $\int mdm : \sqrt{(aa + mm)} = \sqrt{(aa + mm)}, - a$.

91. *Exempl.* 2. Sin detur elementum ſummandum $aamdm : \overline{aa+mm}\sqrt{aa+mm}$, tunc erit $A = aa : \sqrt{aa+mm}$, atque adeo $B = aa : \sqrt{aa+mm-2mdm\ dm^2}$ hoc eſt extrahendo revera radicem ex denominatore $= aa : (\sqrt{aa+mm} - mdm : \sqrt{aa+mm})$ quæ fractio ob denominatorem minorem, quam in fractione A, hac ipſa fractione major eſt, atque adeo hoc caſu erit $B - A = aamdm : \overline{aa+mm}\sqrt{aa+mm}$. Hinc progreſſio quantitatum A, B, C, D &c. eſt aſcendens ſeu creſcens; atque adeo ſumma omnium (87.) B − A, C − B, &c. eſt M − A, verum hoc caſu M iterum eſt a, quoniam facta $m = o$ in æquatione A = fiet $\sqrt{(aa + mm)} = a$, atque adeò $M - A = a, - aa : \sqrt{aa+mm}$. $aa : \sqrt{aa+mm}$

92.

92. *Exempl.* 3. Pari ratione infinitæ hyperbolæ intra aſymptotas poſſunt quadrari. Sit earum æquatio generalis $x^\alpha y = 1$, in qua x abſciſſas à centro in alterutra aſymptotarum, & y ordinatas ſignificant; elementum areæ abſciſſæ adjacentis erit $ydx = x^{-\alpha}dx$. Invenietur verò $A = 1 : (\overline{\alpha - 1}) . x^{\alpha - 1}$, & $B = 1 : \overline{\alpha - 1} . (\overline{x - dx})^{\alpha - 1} = 1 : (\alpha - 1) . x^{\alpha - 1} - (\overline{\alpha\alpha + 2\alpha - 1}) . x^{\alpha - 2} dx + \&c.$ hinc B major eſt quam A ob denominatorem minorem quam in A, atque adeo invenietur $B - A = dx : x^\alpha = x^{-\alpha}dx = ydx$, unde cum A, B, C, D ſit ſeries aſcendens, fient omnes $B - A$, $C - B$, $D - C$ &c. id eſt omnia ydx, $= M - A$, At verò ſubſtituendo in æquatione $A = 1 : \overline{\alpha - 1} . x^{\alpha - 1}$ vel $= (1 : x)^{\alpha - 1} : \alpha - 1$, loco x, o fiet $M = (1 : 0)^{\alpha - 1} : \alpha - 1$, at verò $1 : 0$ eſt magnitudo infinita, quam deſignabimus per ∞, ergo $M = \infty^{\alpha - 1} : \alpha - 1$, atque adeò $M - A$ ſeu area hyperbolarum abſciſſæ adjacens, erit $= \infty^{\alpha - 1} : \alpha - 1, - 1 : \overline{\alpha - 1}\, x^{\alpha - 1}$, vel quia $1 : x^{\alpha - 1} = xy$, erit $M - A = (\infty^{\alpha - 1} - xy) : \alpha - 1$. Ex quo apparet ejuſmodi areas juxta diverſos gradus infinite magnas eſſe, ſiquidem α ſit quilibet numerus poſitivus & unitate major. Sed de his ſufficit.

PROPOSITIO XII. Theorema.

Fig. 29. 93. *Tenacitas fili* ZBABX *ad figuram manentem redacti à potentiis* BH, βH &c. *ipſi applicatis, æquatur in quolibet fili elemento* Bb, *tenacitati fili in vertice* A *auctæ omnibus* GH, *quæ ex ſingulis potentiis* BH, βH &c. *curvæ* AB *applicatis derivantur, reſolutione illarum* BH *in æquipollentes potentias laterales* BG *&* GH *ſingulis curvæ* AB *elementis* Bb *perpendiculares & parallelas. Hoc eſt exponendo tenacitatem fili in* A; *erit* $T = A + \int GH$.

per A

Et demiſſa ex elementi curvæ Bb *termino* b *perpendiculo* bg *ad tangentem* Bg *curvæ in* B, *ſumatur in hac tangente,* B*h æqualis elemento curvæ* Bβ, *& agantur* hm *parallela ordinatæ* BC, bf *verò æquidiſtans axi curvæ* AC, *& per curvæ punctum* B, *indefinita* BME *eidem* AC *etiam parallela, in quam* ME *cadat perpendicularis* HF *ex termino* H *lineæ* BH *potentiæ curvæ puncto* B *applicatæ repræſentatricis: ac denique jungantur lineola* bh, *atque hiſce factis habebitur in angulo contactus* bBg *figura* bfhg *ſimilis, & ſimiliter poſita cum figura majore* BFHG, *ſi elementum* Bb *fuerit ad elementum* Bβ *ut illius tenacitas* T *ad hujus tenacitatem* t; *atque adeo erit quælibet lineola in*

figu-

figura bfhg *ad elementum curvæ* Bb, *ſicut homologa linea in figura majore* BFHG *ad lineam* T, *quæ tenacitatem ejusdem curvæ elementi* Bb *exponit.*

Demonſtr. I. Quoniam potentiæ BH (§. 39.) laterales BG & GH æquipollent, & ex hisce potentia GH curvæ puncto B in directione tangentis vel elementi Bβ applicata potentia conſpirans eſt cum potentia, qua idem elementum Bβ tenditur, cui tenſioni (§. 86.) tenacitas elementi *t* æqualis dicta eſt, hæ potentiæ conſpirantes ſcilicet GH & *t* æquales erunt directe contrariæ vel oppoſitæ potentiæ T, qua elementum B*b* tenſioni reſiſtit, cum (ſecundum hypotheſin) omnia in ſtatu manenti ſeu æquilibrii exiſtant, atque adeo T = t + GH, vel T − t = GH. Atqui (§. 87.) omnes differentiæ T − t, inter ſingulorum curvæ contiguorum elementorum tenacitates, æquantur exceſſui maximæ T ſupra minimam, quæ eſt tenacitas in vertice, A, ergo T − A = ∫GH, vel T = A + ∫GH.

II. Quia (§. 39.) *p*BM : *p*Bb quæ eſt T, = BM : Bb, per hypotheſin verò T : t = Bb : Bβ, & *p*Bβ id eſt t ad *p*Bk = Bβ : Bk, erit ex æquo *p*BM : *p*Bk = BM : B*k* vel B*m* (quoniam in triangulis ſimilibus βBN & Bhm hypothenuſæ Bh, Bβ æquales ſunt; atque adeo ipſa triangula æqualia), & convertendo *p*BM − *p*Bk : *p*BM = M*m* vel *bf* : BM. Atqui, quoniam omnia in æquilibrio ſunt, duæ potentiæ conſpirantes *p*Bk & BF, quæ (§. 40.) ex potentia BH derivatur, æquales erunt directe oppoſitæ *p*BM, unde *p*BM − *p*Bk = BF, atque adeo, ponendo hunc valorem in antecedenti analogia, habebimus BF : *p*BM = *bf* : BM, ſed *p*BM : *p*Bb, id eſt T = BM : Bb ergo ex æquo BF : T = *bf* : B*b*.

Simili prorſus argumento probabitur, quod *p*BN − *p*Bl = FH, & (*p*BN − *p*Bl) vel FH : *p*Bl = *fh* : Mb; unde quia etiam (§. 39.) *p*Bl : *p*Bb vel T = Mb : Bb; erit pariter ex æquo FH : T = *fh* : Bb; vel invertendo T : FH = Bb : *fh*, & quia paullò ante habuimus BF : T = bf : Bb, erit denique ex æquo BF : FH = bf : fh, atque adeo triangula BFH, *bfh* ſunt ſimilia & propter parallelas *bf* ac BF ſimiliter poſita. Præterea, quia ipſæ BG, & *bg* utpote eidem tangenti B*g* perpendiculares inter ſe parallelæ ſunt, æque ac lineæ BH & bh, liquet etiam triangula BGH & *bgh* ſimilia eſſe, ac propterea figuræ BGHF & *bghf* ex triangulis ſimilibus compoſitæ, ſimiles erunt & ſimiliter poſitæ. Porrò cum invenerimus ſupra FH : T = *fh* : Bb, erit permutando FH : fh = T : Bb, atque adeo duæ quælibet aliæ lineæ homologæ in figuris ſimilibus BFHG & *bfhg* erunt in hac

 eadem

eadem ratione T ad Bb, vel permutando, quælibet lineola in figura minore erit ad elementum curvæ Bb, ſicut homologa linea in figura majore ad tenacitatem T ejusdem curvæ elementi. Quæ erant demonſtranda.

COROLLARIUM I.

94. Ducta, ſi placet, per verticem A recta AO arbitrariæ magnitudinis, axi AC perpendiculari, ac ſuper ea deſcripto ſemicirculo APO, agantur AP parallela elemento Bb, & Ap æquidiſtans alteri curvæ elemento contiguo Bβ, & jungantur cum Po rectam Ap ſecans in Q, tum etiam pO; quibus peractis, erit BG : T = PQ : AP. Nam (§. 93.) eſt BG : T = bg : Bb, atque ob parallelas AP, B*b* & A*p*, Bβ, ſectores ſeu triangula B*bg* & APQ ſimilia ſunt, atque adeo *bg* : B*b* = PQ : AP; ergo etiam BG : T = PQ : AP.

COROLLARIUM II.

95. Quælibet recta in figura BGHF eſt ad homologam in figura *bghf*, ut alterutra ex potentiis pBl vel pBM, quæ elementi Bb tenacitati T æquipollent, ad homologum, id eſt reſpondens latus in triangulo characteriſtico BMb: hoc eſt, quælibet linea in figura majori eſt ad homologam in minori ſicut *p*Bl ad Bl, vel ſicut *p*BM ad BM. Nam quia in utraque figura duæ quælibet lineæ homologæ ſunt inter ſe, ſicut T ad Bb, & quia T ad Bb, ſicut *p*Bl ad Bl vel Mb, aut ſicut *p*BM ad BM, liquet aſſertio hujus corollarii.

COROLLARIUM III.

96. Si omnes applicatæ potentiæ BH curvæ perpendiculares ſint, ut BD; puncta G & H confundentur cum puncto D, evaneſcentibus GH, *gh* in utraque figura majore & minore; atque adeo tenacitas curvæ ubique æqualis erit tenacitati in vertice A, atque adeo conſtans ſeu data. Id eſt habebitur ubique T = A.

COROLLARIUM IV.

97. Idcirco, cum (§. 94.) ſit BG : T = PQ : AP = ſin. anguli PAQ ſeu anguli gBb, id eſt ſinus curvitatis in B ad radium; erit in caſu potentiarum curvæ perpendicularium una earum BD cuilibet curvæ puncto B applicata ad tenacitatem fili (§. 96.) conſtan-

tem

tem A, sicut sinus curvitatis in curvæ puncto, cui potentia applicata est ad radium; & permutando erit potentia applicata BD ad sinum curvitatis in B sicut A ad radium, id est, in ratione data.

Elegans hæc proprietas ab Acutissimo Geometra Joh. Bernoulli primùm animadversa est; sed eam, quantum ex Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris. 1706. ad diem 12. Maji apparet, ex alio fundamento deduxit.

Corollarium V.

98. Iisdem adhuc positis, quæ in duobus proxime antecedentibus Corollariis, quia (§. 93.) $HF : hf = BF : bf = T : Bb$ (vel §. 96.) $= A : Bb$, erit $\int FH : \int fh = \int BF : \int bf = A : Bb$, si singula curvæ elementa æqualia assumta fuerint. Atqui (§. 87.) $\int hf$, seu omnes hf vel Nn, posita $Bn = bM$, respectu curvæ portionis $A\beta B$ æquantur excessui maximæ ordinatarum differentiæ ae (posito arculo curvæ $Aa = Bb = B\beta = Zz$) supra minimam bM, id est, $ae - bM$ (vel etiam, quia ae ac aA æquales fiunt cum axis CA curvæ perpendicularis est in A) $Aa - bM = Bb - bM$; & $\int bf = \int Mm = BM - Ae$ (vel quia Ae hoc casu evanescit præ Aa vel Bb) $= BM$. Ergo $\int FH : Bb - bM = \int BF : BM = A : BC$. Ubi omnes FH seu $\int FH$, & $\int BF$ pertinent ad arcum curvæ $A\beta B$.

Sin verò $\int FH$ & $\int BF$ pertinuerint ad arcum curvæ BZ & tangens hujus arcus in Z axi AC parallela fuerit, erit $Zy = 0$, posita ut supra $Zz = Bb = B\beta$ &c. atque adeo $zy = Zz = B\beta$; unde $\int hf$ vel $\int Nn$ erit hoc casu (§. 87.) $BN - Zy = BN$, & $\int bf - \int Mm = yz - N\beta = Z\gamma - N\beta = B\beta - N\beta$, atque adeò $\int FH : BN = \int BF : B\beta - N\beta = A : B\beta$.

Corollarium VI.

99. Si potentiæ curvæ applicatæ BH, βH &c. axi AC æquidistantes sunt, coincident BH, BE, & *bh* ac *bf* evanescentibus HF, *hf*; atque adeò omnia ordinatarum elementa bM, BN &c. hoc casu æqualia sumenda sunt; ac proinde omnes potentiæ secundùm directiones ordinatarum ex tenacitate elementorum curvæ derivatæ in ista hypothesi æquales existent. Propterea, vocando unamquamque harum æqualium potentiarum B, fiet nunc (§. 95.) $BE : bf$ vel $Mm = B : bM$, adeoque cum B & bM constantes sint hoc casu, erit $\int BE : \int Mm = B : bM$, vel quia (§. 98.) $\int Mm = BM - Ae = BM$ evanescente Ae præ Aa; fiet $\int BE : BM = B : bM$ & permutando

 $\int BE :$

$\int BE : B = BM : bM$. Porro, quia ordinata ae vertici A proxima in ipsam curvam Aa desinit, & B generaliter constantem potentiam juxta ordinatarum directiones denotans, etiam eam, quæ juxta directionem ea vel Aa agit, exponet, sed potentia juxta Aa est tenacitas curvæ in vertice A, ergo $A = B$, atque adeo $\int BE : B = \int BE : A = BM : bM$.

SCHOLION.

100. Ex Corollariis theorematí nostro adjectis satis constare potest quam latè pateat ejus usus, revera enim infinitorum id problematum solutionem continet, quorum Problemata *Catenariæ*, *Velariæ*, & figuræ lintei ab incumbente liquore inflexi nonnisi casûs sunt specialissimi nostri theorematis. Sed priusquam ad applicationem ejus nonnullis specialibus ejusmodi casibus accedam, monendum est atque notandum, potentias applicatas BH, βH, etsi simplicibus & finitæ magnitudinis lineis expressas, nonnunquam lineolas tantum infinitè parvas, quandoque etiam rectangula infinitesima significare; & tenacitates fili in singulis punctis ejusdem semper generis magnitudines existere quidem cum potentiis applicatis, sed præ hisce infinitas; ut id ex ipsa applicatione clarius elucescet.

101. Sint ergo $AC = x$, $CB = y$, $BM = dx$, $bM = dy$, $Bb = ds$, $AO = a$, $AP = m$ & $PO = n = \sqrt{(aa - mm)}$. Hinc $PQ = dn$, & $Qp = dm$. Hisce positis, triangula similia BbM, & OAP præbent $ds = adx : n$, & $dy = mdx : n$. Idcirco substitutis his valoribus in analogia $BG : T = PQ : AP$, §. 94. reperta, erit $BG : T = dn : m$, primus Canon. Et $T = A + \int GH$, altera formula generalis.

102. Sint potentiæ applicatæ BH curvæque perpendiculares $= bds$, ubi b est magnitudo data, eritque hoc casu (§. 96.) $T = A$, & A (§. 100.) ejusdem generis magnitudo cum potentia applicata, atque adeo dicatur $= ab$. Hinc ex $BG : T$ fiet $bds : ab$, vel $ds : a$ atque adeo $ds : a = dn : m = BG : T$, vel quia (§. 101.) $ds = adx : n$, erit $(adx : n) : a = dn : m$, atque adeò $dx : n = dn : m$ ergo $mdx = ndn = -mdm$, & $dx = -dm$, & integrando $x = a - m$ vel $m = a - x$, ergo $n = \sqrt{(aa - mm)} = \sqrt{(2ax - xx)}$, hinc $dy (= mdx : n) = adx - xdx : \sqrt{(2ax - xx)}$, ergo $y = \sqrt{(2ax - xx)}$ quæ est æquatio ad circulum.

103. Si potentia curvæ perpendicularis BD vel BG aut BH (hæ tres in hoc casu unum idemque significant) sint $= dy^2 : ds$, qui est casus

casus *Velariæ*, ut suo loco plenius ostendetur, erit, factis debitis substitutionibus, BD $= mmdx : an$, atque posita A ($=$ T.) $= a$, analogia (§. 101.) BG : T $= dn : m$, nunc fiet $mmdx : aan = dn : m$, hinc $aandn = m^3dx$ & $m^3dx = aamdm$ vel $dx = -aadm : mm$, hinc $x = aa : m, -a$. atque $m = aa : a + x$ & $n = \surd(aa - mm) = a\surd(2ax + xx) : a + x$, ergo $dy (= mdx : n) = adx : \surd(2ax + xx)$. Pro æquatione *Velariæ*.

104. Si potentia applicata curvæ itidem perpendicularis BD sit kds, ubi k denotat quantitatem utlibet datam in x & constantibus, ponatur juxta superiorem (§. 100.) notam T $=$ A $= \frac{1}{2}aa$; factisque ex (§. 101.) convenientibus substitutionibus analogia BG : T $= dn : m$, mutabitur in $2kdx : an = dn : m$, hinc $2kdx = andn : m = -adm$, vel $2kdx = adm$. Ponatur $x + u =$ constanti b, ergo $du = -dx$, & $2kdu = -2kdx = adm$. Unde si fiat $2kdu = adp$, erit $dp = dm$, atque adeo $p = m$ & $dy = pdx : \surd(aa - pp)$. Quæ ex aliis principiis reperta est à Celeberrimis Bernoulliis. Si $k = u$, fiet $dy = -uudu : \surd(a^4 - u^4)$ pro æquatione figuræ lintei vel Elasticæ Acutissimi Jac. Bernoullii.

105. Si applicatæ potentiæ BH sunt axi AC parallelæ, ut BE, ducatur EI perpendicularis ad BD, unde si BE $= dq$, propter triangulorum BIE, APO similitudinem invenietur latus EI $= ndq : a$, & BI $= mdq : a$. Idcirco loco BG nunc est sumenda BI, in analogia BG : T $= dn : m$, fietque $(mdq : a) : t = dn : m$, vel $atdn = mmdq$, sed $a + \int$IE $= a + \int ndq : a =$ T $=$ t, & differentiando $ndq : a = dt$, vel $dq = adt : n$, quod in æquatione $atdn = mmdq$ suffectum, præbet $atndn = ammdt$ vel $dt : t = ndn : mm = -mdm : mm = -dm : m$; hinc $t = aa : m$, quod in superiori analogia substitutum, dat $(mdq : a) : (aa : m) = dn : m$, ex quâ elicitur $dq = a^3dn : m^3$ (vel propter $aa = mm + nn$) $= ammdn + anndn : m^3 = ammdn - amndm : m^3 = amdn - andm : mm$; unde, facta summatione, invenietur $q = an : m$, id est $mq = an$, vel substitutis loco m & n ipsarum proportionalibus dy, dx; reperietur $dy = adx : q$. Quæ æquatio omnis generis *Catenarias* continet.

Etsi vero modo inventa æquatio jam continetur in Corollario sexto, quod dat analogiam $\int$BF : A $=$ BM : bM, in qua si $\int$BF $= \int dq = q$, A $= a$, BM $= dx$, & bM $= dy$, habebitur $q : a = dx : dy$, atque adeò $dy = adx : q$. Non tamen abs re mihi visum est, si usum analogiæ BG : T $= dn : m$ etiam hoc casu illustrarem.

106. Sit $q = s$, per s intelligendo curvam AβB, erit $dy = adx : s$, qui casus est simplicissimus problematis *Catenariæ*. Foret enim

$ms = an$, & $s = an : m$, ac $ds = \frac{amdn - andm}{mm}$, vel quia $ds = adx : n$, erit $dx = mndn - anndm : mm = - mmdm - nndm : mm = - aadm : mm$, ergo ut supra (§. 103.) invenietur $dy = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$, æquatio *Catenariæ*, quæ eadem prorsus est cum *Velaria*. Sin verò gravium directiones in puncto ad distantiam finitam ponantur convergere, *Catenaria* erit *hyperbola æquilatera*, cujus demonstratio brevitatis gratia aliis relinquenda est, quanquam cæteroquin non longa sit, sed ferme una linea & absque calculo potest perfici.

PROPOSITIO XIII. Problema.

107. *Inventa curva manente, in quam velum, linteum, aut quodvis aliud corpus flexile à potentiis applicatis arcuatur, assignare mediam directionem potentiarum & impressionem earum, juxta hanc mediam directionem.*

Fig. 30. Sit AeD inventa curva terminis suis tigillo seu lineæ inflexili ACD alligata, quæritur media directio omnium potentiarum *eb*, *db* &c. curvæ applicatarum, & quantitas impulsus, seu impressionis, quæ secundùm mediam directionem CB in tigillum DCA exeri debet.

Solutio. Per terminos curvæ A, D ductæ sint tangentes curvæ AB, DB convenientes in puncto B, in quarum alterutra, ut AB, capiatur segmentum AF, quod sit ad reliquam tangentem totam DB, ut tenacitas curvæ in A ad tenacitatem ejus in D, quæ tenacitates ex superius (§. 93.) demonstratis habentur. Per puncta A & D agantur perpendiculares AG, DM, rectæ DA, & per F ac B eidem AD æquidistantes FG, BE perpendicularibus occurrentes in G & E. Dividatur AD in C, ut sit AC : DC = DE : AG, & in perpendiculari lineæ AD per punctum C sursum ducta sumatur portio CH = AG + DE, & in parallela eidem AD per punctum H ducta sumatur HI = BE − FG, & jungatur denique IC, ejusque continuatio CB erit media directio quæsita, impulsus vero ex omnibus curvæ applicatis potentiis resultans, secundùm hanc mediam directionem, erit ad tenacitatem fili in A vel D, sicut IC est ad AF vel ad DB.

Demonstr. Linea AD non aliam à potentiis *eb*, *db* &c. curvæ AeD applicatis impressionem subire potest, quam quæ resultat ex potentiis, quibus in directionibus tangentium curvæ AB, DB urgetur, seu ex tenacitatibus curvæ in A & D, quandoquidem in his

tan-

tantum punctis curva AeD lineæ inflexili ACD alligata est. Verùm resolvendo potentias AF & DB in suas æquipollentes laterales AG & GF, atque DE & EB, quia ex conspirantibus AG & DE (§. 54.) nascitur potentia ipsis æqualis AG + DE in directione per C transeunte scilicet per ipsarum AG & DE centrum gravitatis, & rectæ AD perpendiculari, & quia potentia CH = AG + DE per constructionem contrario sensu agit, hæc CH in æquilibrio consistet cum potentiis AG & DE. Potentia vero, quæ ex contrariis EB, & GF resultat (§. 38.) æquabitur excessui majoris EB supra minorem GF, atqui etiam (constr.) HI = EB − GF, ergo ex contrariis & lineæ AD parallelis potentiis resultat potentia HI, quæ in recta AD agens ex C versus D in æquilibrio foret cum contrariis EB & GF, ergo duæ potentiæ CH & HI in æquilibrio consisterent cum potentiis AG, DE, GF & EB, quibus obliquæ AF & DB æquipollent atque adeo cum hisce obliquis, vel quia (§. 39.) ex lateralibus CH & HI unica potentia CI nascitur, hæc etiam in æquilibrio maneret cum potentiis obliquis AF & DB. Hinc (§. 37.) rectæ IC continuatio CB dat mediam directionem obliquarum AF, DB, vel, quod idem est, omnium potentiarum *eb*, *db* curvæ AeD applicatarum; ipsa vero IC exponit impressionem secundùm mediam directionem CB ex omnibus applicatis potentiis provenientem. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

108. Recta IC producta transit per concursum B tangentium AB, & DB. Protrahatur enim AB in N ut fiat BN = AF, ostendetur DN æqualis & parallela ipsi IC. Nam si per punctum N agantur NM, NO rectis DA vel BE & DE æquidistantes, propter parallelas NO, AG & OB, FG ac (constr.) BN = AF, erunt triangula AFG, NBO similia & æqualia, adeoque NO = ME = AG, totaque DM = DE + AG (constr.) = HC; sic etiam MN = EO = EB − OB = EB − FG (constr.) = IH; idcirco etiam DN = CI, atque propter parallelas DM & CH atque angulos æquales MDN & ICH ipsæ DN & IC parallelæ erunt. Porro quia (constr.) AC : DC = DE : AG vel EM (& propter parallelas EB ac MN) = AB : BN, atque adeo AC : DC = AB : BN, lineæ DN & CB non tantùm sunt æquidistantes, sed etiam DN & IC parallelæ ostensæ sunt; ergo IC & CB in directum positæ sunt, ac proinde ipsa IC producta per concursum B tangentium AB & DB transibit.

Co-

COROLLARIUM II.

109. Hinc AF eſt ad DB, ſicut ſinus anguli ABC ad ſinum anguli DBC. Nam in triangulo DBN, ſinus angulorum NDB, DNB lateribus oppoſitis NB, DB ſunt proportionales, & anguli illi propter parallelas DN & CB angulis DBC, ABC æquantur. Propterea præcedens, & hoc alterum corollarium, hanc facillimam problematis ſuppeditant conſtructionem. Producta tangente AB in N, ut ejus continuatio BN ſit ad alteram tangentem totam DB, ſicut tenacitas curvæ in A, quæ exponitur per rectam AF, ad tenacitatem ejusdem in D, quam exponit DB, recta BC per punctum concurſus B tangentium AB, DB tranſiens & parallela lineæ DN, jungenti puncta D & N, erit media directio quæſita.

COROLLARIUM III.

110. Si tenacitates fili in A & D æquales ſint, media directio BC angulum tangentium ABD bifariam dividit. Nam quia AF æqualis DB hoc caſu, & AF ad DB, ut ſinus anguli DBC ad ſinum anguli ABC per præcedens Corollarium, erit omnino angulus ABC æqualis angulo DBC.

SCHOLION.

111. Corollarium tertium nos manuducit ad novum illud curvarum genus, quod apud Cel. Jac. Bernoulli in Act. Lipſ. 1695. Fig. 31. pag. 548. *Linearum mediarum directionum* nomine venit. Nam ſi filum aliudve corpus flexile à potentiis *ae*, R*e* &c. in ſingulis punctis ipſi perpendiculariter applicatis in lineam ERA arcuatur, recta BD angulum ABE à tangentibus curvæ in utroque ſui termino formatum bifariam dividens (§. 110.) eſt media directio omnium potentiarum *ae* &c. toti curvæ ERA applicatarum, & ducta tangente ab per punctum aliud curvæ *a*, recta *b*D, angulum abE bifariam dividens, eſt media directio potentiarum arcui ERa applicatarum. Jam omnes mediæ directiones BD, bD &c. contingent aliquam curvam CVD, quæ ideò *Linea mediarum directionum* vocatur.

PRO-

PROPOSITIO XIV. Theorema.

112. *Recta* AD *curvæ* ERA *perpendicularis, mediæ directioni* BD *potentiarum curvæ perpendiculariter applicatarum, occurret in puncto* D *lineæ mediarum directionum* CVD. Fig. 31.

Sit Aa curvæ elementum, & *ab* tangens curvæ in *a*, & bD linea bisecans angulum, *ab*E erit media directio potentiarum arcui curvæ ER*a* applicatarum: unde cum *b* ipsi B infinite vicinum sit, sequitur unam *b*D alteram BD secare in puncto D curvæ quæsitæ. Igitur probandum tantum restat, perpendicularem curvæ AD transire per punctum illud interfectionis D, duarum infinite vicinarum BD, *b*D. Centro quolibet F in tangente BE assumto, & radio FE descripto semicirculo EGH, agantur radii FG tangenti AB, & F*g* tangenti *ab* paralleli, junctisque EG, E*g*, agatur G*m* radio FE parallela, rectæ E*g* productæ occurrens in *h*, & radio Fg prolongato in *m*: denique ductæ sint semicirculi tangens GK in puncto G, & EM eidem tangenti parallela, quæ proinde radio FG perpendicularis erit. Jam quia FG tangenti AB parallela est, erit angulus ABH = EFG, & duo FEG & FGE simul æquales angulo ABE, seu duplo anguli DBE, quandoquidem BD angulum ABE bifariam dividit, igitur FEG = DBK, unde rectæ BD & GE sunt parallelæ. Pari argumento probatur, parallelas esse *b*D & *g*E. Igitur ducta *m*L parallela ipsi *h*E, vel *g*E, figura AB*b*D & FG*m*L erunt similes, cum compositæ sint ex triangulis similibus AB*b*, BD*b*, & FG*m*, GL*m*. Hisce positis, parallelæ FK & G*m* à media E*h* proportionaliter dividentur, atque adeò G*m* : G*h* = FK : EK (vel propter parallelas ME & GK) = FG : MG. Triangula vero similia GE*h*, & GL*m* (nam per constr. E*h* & L*m* parallelæ sunt) præbent, G*m* : G*h* = GL : GE. Igitur FG : MG = GL : GE; atque adeo FL jungens puncta F, L parallela est rectæ ME, ac proinde LFG est rectus, cum EM perpendicularis sit ipsi FG. Unde propter similitudinem figurarum AB*b*D, & FG*m*L, erit AB : BD = FG : GL, hinc, quia angulus LFG rectus est, angulus DAB itidem rectus erit, atque adeo AD curvæ ERA perpendicularis in A. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

113. Adeoque etiam triangula ADB & MEG similia sunt, ex

quo facile elicitur valor lineæ AD. Nam si $FE = a$, $AP = y$, $Af = dy$, $EP = x$, $Pp = dx$, & $Aa = ds$: erit $AB = xds : dx$; & quia angulus $MFE = aAf$, atque adeò triangula rectangula FME, & Aaf similia sunt, invenietur $FM = ady : ds$; & $MG = (ads - ady) : ds$, tum etiam $ME = adx : ds$; hinc quia $MG : ME = AB : AD$, invenietur $AD = xds : ds - dy$.

Cl. Jac. Bernoullius (Act. Lipf. loco supra citato) calculo analytico usus, quem tamen illic non apposuit, reperit $AD = xds^2 + xdyds : dx^2$, ex qua formula nostra paulò simplicior & nonnihil diversa ratione à Bernoulliana ex præcedentibus elicita, nullo negotio derivatur, substituendo tantum loco dx^2 æqualem quantitatem $ds^2 - dy^2$, & numeratorem ac dominatorem dividendo per $ds + dy$.

SECTIO II.

POsteaquam ea, quæ ad æquilibria solicitationum, quibus unum idemque mobile urgeri potest, spectant, excussimus: ipsi etiam motus varie accelerati atque retardati examinari debent, qui ex solicitationibus continue replicatis, & utlibet variabilibus, resultare possunt. Propterea in hac secunda Sectione Motus Corporum acceleratos & retardatos generalissime contemplabimur tanquam oriundos ex solicitationibus continue quidem replicatis, non tamen utique uniformiter, ut in Galilæi systemate, in quo gravia in quacunque distantia à centro gravium eadem gravitatis solicitatione urgeri intelliguntur; sed quacunque ratione variabilibus, sive corpora rectà ad centrum gravium seu solicitationum acceleratricium ferantur, sive in lineis curvis incedant. Hæc igitur Sectio complectetur quæcunque ad motus acceleratos, retardatos, ad motus projectorum in vacuo, quæ ad isochronismum motus corporum in lineis quibuscunque curvis, quæ ad motus pendulorum &c. pertinent, in omni possibili gravitatis, seu solicitationum centralium, hypothesi, demonstrata, methodo non minus universali, quam perspicua atque facili: nam præter solutionem generalem Problematis inveniendi ex lege gravitatis, utlibet variabilis, semitam curvilineam projectorum in spatiis resistendi vi carentibus, tradet etiam hæc secunda Sectio regulam generalem, secundum quam gravitatem variare oportet ad id, ut curvæ projectorum semper algebraicæ, atque adeò geometrica construibiles evadant, ex qua multa deinceps curiosa atque utilia deducentur.

tur. Theoriam centri oſcillationis proponet multo magis quam antea generalem, iis namque corporibus applicabilem, quæ in diverſis fluidis oſcillantur, vel in quocunque ſyſtemate gravitatis variabilis; loco ejus, quod Hugenius, & qui eum ſequuti ſunt, tantum egerunt de centro oſcillationis in caſu ſpeciali gravitatis uniformis, excepto ſolo, quod ſciam, Cel. Joh. Bernoulli qui nobis in Act. Lipſ. 1713. pag. 88. regulam generaliorem ex ſuis principiis eliciendam promittit, ſed quæ nondum, ni fallor, lucem publicam aſpexit, quamque ex fundamentis, à noſtris diverſis, aut ſaltem diverſa methodo ab incomparabili Geometra erutam exiſtimo, tametſi ipſam regulam nondum vidi. Nec reticendum hanc Sectionem ſecundam etiam acturam de ſolicitationibus requiſitis ad id, ut mobilia in orbibus mobilibus revolvi queant, & de motu qui dicitur Apſidum; ſed diverſa ratione ab ea, qua Ill. Newtonus Sect. IX. Lib. I. Princip. Phil. Nat. Math. uſus eſt. Sectionem denique claudet diſſertatio de regulis motus ex percuſſione, quas ex unico fundamento æqualitatis virium ante & poſt conflictum corporum, nova, ut nobis videtur, ratione deducemus.

CAPUT I.

De generalibus Solicitationum continuatarum affectionibus, & de motibus in Vacuo inde oriundis.

DEFINITIONES.

I.

114. PEr vacuum deſignatur omne medium, quod corpora absque impedimento aut adjumento liberè trajicere poſſunt, ſolo ſuo motu à vi motrice accepto.

II.

115. Si mobilia quæcunque, quæ in lineis rectis feruntur, aut in curvis lineis incedunt, ſolicitationibus citantur, quarum directiones in aliquo puncto, poſitione dato, concurrunt, ſolicitationes ejusmodi vocentur centrales, vel etiam ſolicitationes gravitatis variabilis. Et punctum poſitione datum ad quod gravia ſolicitantur, centrum ſolicitationum. Solicitationes centrales ab Ill. Newtono vires centripetæ vocantur.

III.

116. Solicitationes continuari vel continue mobili applicari dicuntur, cum corpus in ſingulis ſpatii percurrendi punctis ad motum recens citatur, ſeu, quod idem eſt, à quadam ſolicitatione urgetur.

IV.

117. *Scala ſolicitationum centralium* ſeu *gravitatis variabilis* appellatur quælibet linea curva, ad aliquem axem per centrum ſolicitationum transeuntem relata, cujus ordinatæ axi rectæ ſolicitationes exponunt, quibus mobile in illis axis punctis, per quæ ordinatæ ductæ ſunt, verſus centrum urgetur, ſi ſcilicet corpus in axe feratur; vel, ſi ipſum in curva aliqua incedat, in illis curvæ punctis, quæ cum punctis in axe, per quæ ordinatæ transeunt, à centro ſolicitationum æque diſtant:

V.

118. *Solicitatio* gravitatis *tangentialis* vocatur quælibet ſolicitatio ex centrali derivata, qua mobile, in qualibet curva delatum, juxta directionem tangentis curvæ ſolicitatur.

VI.

119. *Solicitatio* gravitatis curvæ mobili deſcribendæ *perpendicularis*, eſt ea, quæ ex centrali derivatur, cujusque directio ubique curvæ perpendicularis eſt. Hæc ſolicitatio perpendicularis conatui mobilis à directione tangentis recedere nitentis ubique æqualis eſt, alioqui corpus non moveretur in curva, quam deſcribere ponitur, etenim, ſi hac vi perpendiculari conatus à curva receſſorius major eſſet, mobile revera à curva recederet, recederet itidem accedendo magis quam par eſt ad centrum ſolicitationum, ſi minor exiſteret, utrumque contra hypotheſin. Igitur ut conatus receſſorius à curva retundatur & inutilis reddatur, tantam ſolicitationem coërcentem mobili applicari oportet, quantus eſt conatus deſtruendus; adeo ut ejusmodi conatus & ſolicitatio, juxta eandem directionem curvæ perpendicularem, ſed in oppoſitas partes agentes in æquilibrio detineantur impedianturque quominus alterutra ejusmodi ſolicitationum ſuper alteram effectum aliquem ſortiatur, atque adeò mobile curvam, in qua incedere debet, deſerat.

VII.

120. *Scala* ſolicitationum *tangentialium* eſt curva quælibet ad axem per centrum ſolicitationum centralium transeuntem relata, cujus ordinatæ ſolicitationes tangentiales exponunt in curvæ punctis, à centro ſolicitationum tantundem diſtantibus, ac ordinatæ.

121. Feratur mobile M in curva MON, alterumque A in recta AD per centrum D, ad quod ſolicitationes gravitatis centrales diriguntur, atque mobile M ad quodlibet curvæ punctum N delatum urgeatur verſus D ſolicitatione centrali Nα, & hac eadem ſolicitatione urgeatur etiam mobile A delatum in punctum E rectæ AD, quod punctum E tantum diſtet à centro D, quantum curvæ punctum N, adeo ut ambo puncta N & E reperiantur ubique in aliquo arcu circulari EN centro D deſcripto, ductisque per ſingula puncta axis E, perpendicularibus EB ipſi AD & æqualibus ubique homologis lineis Nα, per ſingularum puncta B transibit curva ABC, quæ vocatur ſcala ſolicitationum centralium, quoniam quælibet ejus ordinata BE reſpectivæ Nα (ſecundùm hypotheſin) æqualis repræſentat ſolicitationem centralem in rectæ AD & curvæ MO punctis E & N centro D æquidiſtantibus. Porrò, quia ſolicitatio cantralis Nα in quolibet curvæ MO puncto N (§. 39. 40.) æquipollet lateralibus Nβ & $\beta\alpha$, quarum hæc ſit in directione tangentis curvæ Nq, alteraque eidem perpendicularis $\beta\alpha$, per ſe patet illam, ſcilicet Nβ, vocandam eſſe ſolicitationem tangentialem ex centrali Nα derivatam; propterea ſi in qualibet ordinata BE reſpondenti cuique Nα, ſumatur SE $=$ Nβ, & idem factum intelligatur reſpectu omnium reliquorum curvæ MON punctorum, reſultabit inde curva RSC, quæ ſcala ſolicitationum tangentialium mobilis M in curva MON audit. Solicitatio perpendicularis $\beta\alpha$ nullam habet ſcalam, vel ſaltem nulla indigemus, quandoquidem in ſingulis punctis deſtruendo conatui receſſorio mobilis M à curva (§. 119.) adhibetur, nec proinde alia ſub ratione in conſiderationem venit. Fig. 32.

VIII.

122. Quoniam ſolicitationes centrales BE æque ac tangentiales SE continuantur, atque in mobili continue replicantur effectu præcedentium in ſuccedentibus non ſublato, quandoquidem per ſingula rectæ AD puncta ordinatæ ejusmodi BE transeunt: neceſſe eſt, ut ab hujusmodi ſolicitationibus indeſinenter replicatis proveniant

motus continue *accelerati*, cum mobilia A, M in recta AD & curva MON descendentia ad solicitationum centrum D accedunt; *retardati* verò cum certis quibusdam celeritatibus, quas *initiales* deinceps nominabimus, ex punctis E & N ascendere incipientia in recta & curva ab eodem centro D recedunt. Propterea solicitationes gravitatis centrales vel tangentiales vocantur *acceleratrices* mobilis in recta vel curva descendentis; eædemque solicitationes vocantur *retardatrices* mobilis ascendentis, vel à solicitationum centro recedentis.

IX.

123. *Momentum cujusque solicitationis* quocunque hæc nomine veniat, est rectangulum sub recta, quæ solicitationem exponit, & elemento spatii quod mobile ejusmodi solicitatione continue urgente transmittit. Sic rec-lum BEe est momentum solicitationis acceleratricis BE vel Nα, durante descensu mobilis A in spatiolo E*e* ordinatæ BE adjacente; rec-lum verò *be*E momentum solicitationis retardatricis *be* mobilis ejusdem in spatiolo eE ascendentis. Sic etiam facta E*m* = N*n* elemento curvæ MON, rec-lum SE*m* vel SE. N*n*, est momentum solicitationis tangentialis & acceleratricis SE vel Nβ, cum mobile in curva per ejus arculum N*n* descendit, & rec-lum *se*. *m*E vel *se*. *n*N est momentum solicitationis tangentialis retardatricis *se*, cum mobile in curvæ arculo *n*N ascendit.

X.

124. *Scala celeritatum* est curva circa axem scalæ solicitationum centralium, vel saltem huic parallelum descripta, cujus ordinatæ ordinatis in scala solicitationum in directum positæ, vel iisdem saltem respondentes, celeritates mobili in illis rectæ AD, vel curvæ MON punctis, ad quæ ordinatæ scalæ solicitationum respiciunt, acquisitas exponunt. Sic, si ordinatæ PV, EF &c. scalæ solicitationum ordinatis ZP, BE in directum positæ, significant celeritates acquisitas, vel residuas mobilis descendentis accelerato, vel ascendentis retardato motu in punctis P, E rectæ AD, vel in punctis curvæ O & N &c. Curva AVF erit Scala celeritatum mobili A in recta AD, vel Mobilis M in curva MDN descendentis, vel ascendentis.

XI.

125. *Momentum celeritatis* est factum ex celeritate mobilis in recta

cta vel curva incedentis in celeritatis crescentis vel decrescentis elementum. Sic in scala celeritatum AVF, rectangulum EF. *af*, vel rec-lum *eaf* est momentum celeritatis EF elemento *af* crescentis, qua mobile spatiolum E*e*, transmittit, & rectangulum *ef*. *fa* est momentum celeritatis decrescentis *ef*, qua mobile A ex puncto axis *e*, vel in curva MON mobile M ex puncto *n* in altum feruntur retardato motu, & *fa* decrementum infinitesimum celeritatis decrescentis *ef*, cum mobilia ascendunt in spatiolis *e*E & *n*N, & EF celeritas residua erit in rectæ puncto E aut curvæ puncto N.

XII.

126. Ad designandum tempus quo unusquisque motus absolvitur, utemur nota characteristica temporis *t* spatio percurso aut conficiendo præfigenda. Sic *t*AE denotabit tempus, quo mobile A spatium AE accelerato suo motu cadendo absolvit, & *t*Ee significabit tempus quo elementum Ee axis AD uniformi motu percurritur. Et sic de reliquis.

POSTULATUM.

127. Petitur ut concedatur, motum descensus ascensusve per axis elementum E*e*, vel curvæ N*n*, sumi posse tanquam uniformem & æquabilem, quoties mobilia A & M hæc spatiorum elementa celeritate finitæ magnitudinis, præ incremento vel decremento ejus infinitesimo percurrere incipiunt, licet motus in iisdem spatiis reapse variati sint, quoniam celeritatum incrementa vel decrementa infinitesima, durante descensu vel ascensu mobilibus A & M superaddita vel ademta, evanescunt præ velocitatibus finitis, quibus corpora spatiola Ee, Nn transmittunt.

Corollarium.

128. Hinc quia spatia æquabili motu percursa sunt in composita ratione temporum & velocitatum, ipsa tempora, quibus prædicta rectæ vel curvæ elementa percurruntur, erunt, ut hæc elementa applicata ad celeritatem, quâ percurruntur; sic $t\mathrm{E}e = \mathrm{E}e : \mathrm{EF}$, & $t\mathrm{N}n = \mathrm{N}n : \mathrm{EF}$; unde $\mathrm{E}e = \mathrm{EF}.t\mathrm{E}e$, & $\mathrm{N}n = \mathrm{EF}.t\mathrm{N}n$.

PRO-

PROPOSITIO XV. Lemma.

Fig. 33. *Anguli rectilinei* VDF *&* TD*m sunt directe ut arcus* VF *&* Tm *qui angulos subtendunt, & reciproce ut arcuum radii* DV *&* DT. Hoc est angulus VDF : ang. TDm $= \frac{VF}{DV} : \frac{Tm}{DT}$. Est enim ang. VDF : ang. TDm = (Tg : DT) : (Tm : DT), atqui ob arcus similes VF & Tg, erit Tg : DT = VF : DV, ergo angulus VDF : angulum FD*m* = (VF : DV) : (Tm : DT). Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

129. Hinc 1°. quilibet angulus VDF exprimi potest arcu VF, qui ipsum subtendit, diviso per radium DV, id est fractione VF : DF. 2°. Quilibet arcus VF est ut factum ex angulo VDF in radium DV, atque adeo hoc facto exprimi potest.

PROPOSITIO XVI. Lemma.

130. *Omnis solicitatio uniformiter agens æquivalet motui genito, applicato ad tempus, quo motus iste producitur.*

Dicantur massa corporis movendi M, celeritas acquirenda V, adeoque motus generandus MV, tempus quo produci debet T, solicitatio, à qua uniformiter hoc tempore agente generari debet G, ostendendum, fore G = M. V : T. Cum solicitatio (§. 9.) utpote ex genere vis mortuæ nullum motum producat, nisi aliquo tempore in corpore continuata vel replicata fuerit, atque nunc solicitatio uniformiter agere ponatur, ita ut temporibus æqualibus æquales motûs quantitates in corpore producat, atque adeo motus geniti sint ut tempora, quibus generantur, ex se ipso clarum est, id quod in tempus T ductum producit motum M. V. æquivalere solicitationi G, unde cum M. V : T ductum in T producat M. V, sequitur G = MV : T. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

131. Res universaliter se habet, ut propositio indicat, sive velocitas acquisita & tempus finita aut infinite parva fuerint, modò solicitatio G toto tempore uniformiter agat. Sin verò ea difformiter operetur, propositio generaliter respectu cujuscunque temporis non am-

amplius obtinet; sed duntaxat per temporis tractum indefinite parvum dT, quo mobili tantum celeritas infinitesima dV acquiritur, quia non nisi per tempusculum ejusmodi infinitesimum dT solicitatio variabilis G (§. 127.) tanquam uniformis spectari potest; est ergo hoc casu G = MdV : dT, atque adeò dT = MdV : G. Ubi G significat pondus seu gravitatem utcunque variabilem massæ M.

PROPOSITIO XVII. Theorema.

132. *Momentum solicitationis cujusque æquale est momento celeritatis mobilis ducto in corporis massam.*

Positis iis, quæ in §§. 121, 123 & 125 dicta sunt, ponatur mobile M descendere super curva MON, atque per initium A scalæ celeritatum AVF ducta sit recta AH indefinita, angulum semirectum HAG continens, cum indefinita AG axi AD normali, & per puncta F, f &c. scalæ celeritatum agantur *a*H, *fh* eidem axi æquidistantes rectæ AH, occurrentes in punctis H, *h*, alteri vero AX in punctis G, *g*; ductaque H*i* parallela AG, propter angulum semirectum HAG erunt HG & AG; atque adeò EF æquales, & rec-lum H*g* = EF. *af* seu momento celeritatis crescentis. Probandum est, fore M. EF. *af* = N*n*. ES seu momento solicitationis tangentialis ES vel Nβ.

Demonstr. Per §. 131. est *t*N*n* = M. *af*: ES; nam, quæ ibi sunt dT, dV & G, hoc loco dicuntur tN*n*, *af* & ES vel Nβ, ergo ES. *t*N*n* = M. *af*, vel etiam ES. EF. *t*N*n* = M. EF. af; atqui (§. 128.) EF. *t*N*n* = N*n*, ergo ES. N*n* = ES. E*m* = M. EF. *af* = M. HG*g*. Quod erat demonstrandum.

Similiter si grave A in recta AD deorsum feratur, erit BE. E*e* = A. 2H2G2*g*, ponendo A denotare massam corporis, & 2H2G celeritatem in E acquisitam post casum ex altitudine AE, & rectangulum 2H2G2*g* triangulo rectangulo isosceli 2H2A2G inscriptum; momentum velocitatis 2A2G vel 2H2G.

Ratione solicitationum retardatricium habetur etiam *se*. *n*N = M. *ef*. *fa* = M. *hg*G, & *be*E = A. 2h2g2G.

PROPOSITIO XVIII. Theorema.

133. *Si duo mobilia* A, M *æqualia, quorum hoc in curva* MON, *illud in recta* AD *feratur, in singulis punctis* E *&* N *à centro* D *æ-*

H quа-

qualiter distantibus eadem solicitatione centrali BE *urgentur*, *erit ubique momentum solicitationis centralis seu rectangulum* BEe *æquale homologo rectangulo* Nn. SE *vel* Nn. Nβ, *quod exponit momentum solicitationis tangentialis in curvæ puncto quolibet* N.

Arcus circuli *epn* centro D descripti secet rectam DN, in puncto *p*, & triangulum N*np* tanquam rectilineum ob suam infinitam parvitatem spectari potest rectangulum ad *p*, atque adeo simile triangulo Nαβ. Idcirco erit Nα vel BE : Nβ (SE) = Nn : E*e* (N*p*), & BE. E*e* = Nα. E*e* = SE. N*n* = Nβ. N*n*. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

134. Hinc si scalæ celeritatum AVF ad punctum F perpendicularis ET ducatur axi occurrens in T, subnormalis ET æqualis ubique erit respectivæ BE, quæ solicitationem centralem exponit in distantiis ED, ND à centro D æqualibus; nam quia TFf rectus est, triangula FTE & F*fa* similia erunt, atque adeò FE : ET = F*a* (E*e*) : *af*. Ergo EF. *af* = TE. E*e*; atqui (§. 133.) SE. N*n* = BE. E*e* & (§. 132.) SE. N*n* = M. EF. af, aut sumta M instar unitatis, = EF. *af*, erit TE. E*e* = BE. E*e* atque adeò TE = BE.

Corollarium II.

135. In quibuslibet punctorum E, N distantiis æqualibus ED & ND à centro D, momenta celeritatum cadendo acquisitarum erunt æqualia. Nam sicut (§. 132.) AG vel GH celeritatem acquisitam mobilis M in curva MON descendentis, & rectangulum Hg triangulo HAG inscriptum celeritatis momentum in N exponunt, ita etiam 2A2G & rectangulum 2H2*g* triangulo 2H2A2G inscriptum, exponent celeritatem ex descensu mobilis A per spatium AE in puncto E acquisitam, ejusque momentum. Verum (§. 132.) est SE. N*n* = M. EF. *af* = M. HG*g*, item BE. E*e* = A. 2H2G2*g*. atque (§. 133.) SE. N*n* = BE. E*e*; propterea fiet M. HG*g* = A. 2H2G2*g*, vel quia (secundùm hypothesin) ipsæ M & A æquales HG*g* = 2H2G2*g*.

Propositio XIX. Theorema.

Fig. 32. 136. *Si mobilia* M *&* A *ex punctis* M *&* A *in curva* MON *& recta* AD *à quiete cadere incipiant*, *celeritates ipsorum in punctis* N *&*

& E *acquisitæ erunt æquales distantiis punctorum à centro* D *positis æqualibus, celeritasque uniuscujusque mobilis poterit duplum areæ* AZBEA.

Totum spatium AE in innumera elementa, quale est Ee, divisum cogitetur, & per singulorum terminos arcus ex centro D descripti intelligantur; adeo ut singulis elementis rectæ AE totidem elementa curvæ MON respondeant. Jam cum (§. 135.) ubique momentum celeritatis in curvæ puncto N æquetur momento celeritatis in rectæ puncto E, alteri N à centro D æquidistanti, habebitur semper & ubique HGg = 2H2G2g, ergo omnia HGg, quæ in triangulo HAG continentur æqualia omnibus 2H2G2g, quæ in triangulo 2H2A2G, id est triangulum HAG triangulo 2H2A2G æquabitur. Unde cum hæc æqualia triangula similia sint, sequitur latera in illis homologa æqualia esse, atque adeò AG = 2A2G; id est celeritates in E & N acquisitæ, quæ per æquales 2A2G & AG exponuntur, æquales sunt.

Porrò, quia (§. 132.) HGg = BE. Ee & sic ubique, erunt omnia HGg = omnibus BE. Ee, atqui omnia rec-la HGg componunt triangulum HAG, vel hAg, quandoquidem motus in A & M punctis nullus est, atque adeò etiam momenta celeritatum in illis punctis nulla sunt, id est cum triangulorum HAG, & 2H2A2G verticibus A & 2A confunduntur, & in illis, ut ita dicam, nullescunt: omnia verò rectangula elementaria BEe, quæ in tota area AAZBE continentur, huic areæ ultimò æqualia fiunt, atque adeò area AAZBE æquatur ubique triangulo homologo HAG, & duplum areæ illius duplo hujus trianguli, sed hoc trianguli duplum æquale est quadrato lateris AG vel GH, quoniam hoc triangulum rectangulum isosceles est; ergo $AG^2 = 2.$ AAZBE, vel quia AG æqualis est EF, $EF^2 = 2.$ AAZBE, id est celeritas in E vel N acquisita potest duplum areæ AAZBE. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

137. Pariter si corpora A & M in curva & recta ex punctis O & P celeritate æquali cadere incipiant, & quidem ea, quam mobile A spatium AP à quiete perlabens in puncto P acquirere potest; eadem corpora in quibusvis aliis punctis N & E, à centro sollicitationum æquidistantibus, æqualem celeritatem acquirent, tantam scilicet quantam mobile A, in hoc puncto A casum à quiete incipiens,

 lapsu

lapſu accelerato per ſpatium AE in puncto E acquirere poſſet. Nam quia (§. 135.) generaliter eſt $HGg = 2H2G2g$, erunt etiam nunc omnia HGg æqualia omnibus $2H2G2g$, verùm hoc caſu omnia HGg ſunt ea, quæ ſoli trapezio YXGH inſcripta ſunt, ducta ſcilicet per V recta VY axi AD parallela, quia celeritas, qua mobile M ex curvæ puncto O moveri incipit, non eſt nulla; ſed (ſecundùm hypotheſin) æqualis PV ſeu AX vel XY, atque adeo nunc omnia HGg æquantur trapezio YXGH, & eandem ob rationem omnia $2H2G2g$ æquantur trapezio 2Y2X2G2H, quoniam mobile A caſum ſuum in puncto P cum celeritate 2X2Y (ſecundùm hypotheſin) æquali XY vel AX incipit; æquantur igitur hæc trapezia YXGH & 2Y2X2G2H; verùm quia (ſecundùm hypotheſin) celeritas in P eadem eſt cum celeritate in O, & illa tanta eſt quanta mobili ex A in P cadenti illic in P acquiri poteſt, ſequitur triangula AXY & 2A2X2Y itidem æqualia eſſe, & addendo hiſce æqualibus triangulis trapezia illa æqualia YXGH, & 2Y2X2G2H, fient etiam triangula AGH & 2A2G2H æqualia; unde cum eadem & ſimilia ſint, neceſſum eſt, ut latera AG & 2A2G æquentur, atque adeò liquet celeritates in N & E acquiſitas mobilibus ex punctis O & P, à centro D æquidiſtantibus cum celeritate PV vel AG caſum incipientibus, æquales eſſe cum inter ſe, tum celeritati EF in E acquiſitæ (§. 136.) poſt caſum à quiete in A, per ſpatium AE, quæ potentiâ æquetur duplo areæ AAZBE.

Corollarium II.

Fig. 37. 138. Propterea, ſi mobile quoddam A ſecundum quamlibet directionem datam AR impulſum celeritate ea, quam idem mobile ſpatium HA à quiete in H perlabens acquireret in A, & ſolicitationibus ordinatis curvæ GBb expreſſis ad centrum D continue ipſum urgentibus curvam AN*n* in vacuo deſcribat, celeritas ejus in quolibet curvæ projectionis puncto N ea erit, quam corpus ex H à quiete cadere incipiens in linea recta HD accelerato ſuo motu acquirere poſſet in puncto E, cum altero in curva N æqualiter à centro D diſtanti.

Corollarium III.

Fig. 32. 139. Si corpora ex curvæ & rectæ punctis *n* & *e* à centro D æquidiſtantibus celeritate initiali *ef*, quam poſt deſcenſum per curvam

vam MOn & rectam Ae in punctis M & A motum à quiete incipientia accelerato motu illic in n & e acquirere queunt, in altum ferantur; illa in quibusvis aliis punctis O & P eidem centro D æquidistantibus celeritates residuas æquales habebunt, tantam scilicet, quantam in illis punctis O & P acquisivissent, si accelerato motu à quiete in M & A incipiente in curvæ arcu MO & recta AP descendissent. Nam quia mobilia ascendunt, atque adeò à centro solicitationum BE deorsum ad hoc centrum urgentium recedunt, tam hæ solicitationes centrales BE, quam tangentiales SE vel Nβ, quæ ex illis derivantur (§. 122.) nunc spectandæ sunt tanquam solicitationes *retardatrices*. Earum tamen momenta $be.e$E & $fe.n$N (§. 133.) erunt æqualia, & per §. 132. huic æquatur suum momentum $hg.g$G celeritatis decrescentis hg, illi verò celeritatis $2h2g$ momentum $2h2g.\,2g2$G, propterea hæc ipsa celeritatis decrescentis momenta sunt æqualia, & hoc respectu cujuslibet alius curvæ elementi nN omnium eorum, quæ in curvæ arcu nO, & homologi elementi eE rectæ DA, omnium eorum, quæ in hujus rectæ segmento eP continentur. Hinc etiam universa $hg.g$G, quæ in trapezium hgXY desinunt, æquabuntur universis $2h2g.\,2g2$G, quæ trapezio $2h2g2$X2Y circumscripta in hoc trapezium desinunt, id est, hæc duo trapezia æqualia erunt. Unde, si ex triangulis hgA & $2h2g2$A, quæ ob celeritates initiales Ag & 2A$2g$ in n ac e (secundùm hypothesin) inter se æquales etiam æqualia sunt, auferentur trapezia illa æqualia hgXY & $2h2g2$X2Y, remanebunt triangula æqualia YAX & 2Y2A2X, in quibus, utpote similibus, latera homologa AX & 2A2X æqualia existent, atqui hæc æqualia latera celeritates in O & P mobilibus ascendentibus residuas exponunt, quæ velocitates proinde æquales sunt, & unaquæque earum (§. 136.) ea est, quæ mobili ex A à quiete descensum incipienti acquireretur in P, utpote quæ potest duplum areæ AAZP, dum celeritas initialis ef potest duplum areæ AAZbe. Propterea GX & 2G2X sunt initialis velocitatis partes *amissæ*, vel à solicitationibus centralibus Be, BE &c. in ascensu mobilium *absorptæ*, adeò ut corporum ad curvæ & rectæ puncta M & A ascendendo delatorum motus ascensionalis penitus extinguendus sit, cum celeritates *absorptæ* gA & $2g2$A initialibus æquales sint.

Corollarium IV.

140. Hinc mobilia ascendentia cum celeritatibus initialibus quibuscunque successive omnes celeritatis gradus servant in illis ipsis lineæ percurrendæ punctis, in quibus cadendo hos celeritatis gradus acquisiverunt. Sic mobile cum celeritate *ef* ascensum in *e* incipiens, in reliquis spatii *e*A ascensu conficiendi punctis E, P, A easdem celeritates retinet, quas in puncto A casum inchoans descensu suo accelerato acquisivisset, in iisdem punctis scilicet, celeritates EF, PV & o. Quod etiam de mobili in curva MON ascendenti intelligendum est.

Corollarium V.

141. Hinc etiam in omni possibili solicitationum centralium hypothesi; *corpora rectà in altum lata, vel in curvis quibuscunque ascendentia, ad eam ipsam altitudinem in vacuo assurgunt, quam, ubi descendendo percurrunt, celeritatem acquirunt initiali æqualem.*

Corollarium VI.

142. Si centrum solicitationum gravitatis D infinite distat à recta AG, arcus concentrici AM, PO, EN &c. abibunt in lineas rectas in directum positas ordinatis AA, ZP, BE scalæ solicitationum centralium, unde quæ universaliter in antecedentibus ostensa sunt, etiam obtinebunt in hoc casu, quo gravium directiones rectæ AG perpendiculares vel axi AD parallelæ sunt. Adeoque *celeritates in diversis planorum* (adde & *curvarum* continuam curvaturam habentium) *inclinationibus descensu acquisitæ, æquales sunt in omni gravitatis variabilis & uniformis hypothesi, si planorum vel curvarum elevationes æquales fuerint, vel quod idem est, si planorum horizontalium per terminos planorum inclinatorum vel curvarum transeuntium distantiæ æquales fuerint.*

Hoc ipsum corollarium Torricellius primus geometrice suo more demonstravit, & post ipsum Hugenius in suo Horologio Oscillatorio Parte secunda Prop. VI. sed ambo tantum in Galilæana hypothesi gravitatis uniformis atque demonstrationibus indirectis. Galilæus vero id in prima Dialogorum editione tanquam per se evidens sibi concedi postulavit; sed quia hoc forte magnum postulatum ipsi postea visum, id in posteriori operum suorum editione 1656. Bonononiæ facta utcunque demonstrare tentavit; sed ejus demonstratio, quæ ibi affertur, Hugenii judicio parùm concludit.

Scholion I.

143. In hac propositione, perinde ac in antecedente XVIII. mobilia æqualia ponuntur tam ratione quantitatis materiæ quam ratione texturæ particularum, vel quod idem est, corpora M & A, quoad volumen & massam, æqualia esse debent, ut recensitæ propositiones generaliter obtineant, scilicet eo etiam casu, quo eorum pondera in æqualibus à centro solicitationum D distantiis proportionalia non sunt. Semper enim verum erit celeritates in E & N acquisitas post descensus corporum à quiete in A & M, per spatia AE & MON æquales esse, sive massæ corporum eorum gravitatibus seu solicitationibus centralibus aut ponderibus proportionales sint, sive non.

144. Sed si mobilia M & A massas non habent ponderibus suis proportionatas, nec pondere & massa æqualia sunt, propositio præsens ad talia corpora non est extendenda; hoc enim casu prædictæ celeritates, in punctis illis N & A acquisitæ, non sunt æquales, sed velocitas in curvæ puncto N se habebit ad velocitatem in rectæ puncto E acquisitam, ut latus quadratum areæ AABE, cujus ordinatæ BE gravitates seu solicitationes centrales mobilis M, in curva MON discurrentis, exponunt in homologis punctis N, applicatum ad radicem massæ mobilis M; ad latus quadratum areæ A3A3BE, cujus ordinatæ E3BE exponunt gravitates corporis A in locis quibusvis E, per quæ ordinatæ transeunt, applicatum ad radicem massæ seu quantitatis materiæ mobilis A, quod in recta AD fertur. Nam si, ut supra, latus AG vel æquale GH in triangulo rectangulo isosceli HAG, celeritatem mobili M ex descensu per arcum curvæ MON in puncto N acquisitam, & latera æqualia 2A2G vel 2H2G trianguli rectanguli isoscelis 2H2A2G celeritatem mobilis A ex casu ejus per spatium AE in puncto rectæ E acquisitam, exponant, erunt velocitatum AG, 2A2G momenta rectangula HGg & 2H2G2g triangulis illis inscripta &, per §§. 132. 133, erit BE. Ee = SE. Nn = M. HGg, ergo omnia BE. Ee, hoc est, ut in demonstratione articuli 136. ostensum, area AAZBE æquatur omnibus M. HGg, id est facto ex massa corporis M in triangulum, atque adeò AG^2. M = 2. AAZBE & AG = GH = EF = $\sqrt{}$(2. AAZBE) : $\sqrt{}$M. Et (§. 132.) est pariter 3BE. Ee = A. 2H2G2g, atque adeo omnia 3BE.

Ee,

Ee vel omnia $E3B.Ee$, hoc eſt, area $A3A3BE$ æquatur omnibus $A.2H2G2g$ id eſt facto ex triangulo $2H2A2G$ in corporis maſſam A; ergo etiam $2A2G = 2H2G = \sqrt{(2.A3A3BE)} : \sqrt{A}$. Adeoque AG eſt ad $2A2G$, hoc eſt, celeritas acquiſita mobili M in curvæ puncto N eſt ad celeritatem mobili A in rectæ puncto E alteri à centro D æquidiſtanti acquiſitam, ſicut $\sqrt{(2.AAZBE)} : \sqrt{M}$ ad $\sqrt{(2.A3A3BE)} : \sqrt{A}$, vel etiam, ſicut $\sqrt{(AAZBE)} : \sqrt{M}$ ad $\sqrt{(A3A3BE)} : \sqrt{A}$, hoc eſt, dictæ velocitates ſunt in compoſita ratione ex directa ſubduplicata proportione areæ $AAZBE$ ad aream $A3A3BE$, & ex reciproca ſubduplicata ratione maſſæ M ad maſſam A. Atqui hæc ratio compoſita æqualitatis ratio fieri non poteſt, niſi area $AAZBE$ fuerit ad aream $A3A3BE$, ut maſſa M ad maſſam A; id eſt, niſi pondera mobilium ipſorum maſſis proportionalia fuerint. Etenim area $AAZBE$ ad aream $A3A3Z3BE$ in eadem altitudine AE non poteſt eſſe in data ubique ratione maſſæ M ad maſſam A, niſi ſingulæ ordinatæ BE ſint ad ſingulas homologas ordinatas $3BE$ in eadem ratione M ad A, atque adeò cum BE & $3BE$ exponant pondera corporum M & A, in diſtantiis ND & ED à centro D æqualibus, liquet celeritates in N & E acquiſitas æquari non poſſe, niſi pondera corporum M & A in æqualibus à centro gravium diſtantiis maſſis ipſorum proportionalia ſint.

Scholion II.

145. Hactenus oſtenſa circa motus gravium adeò generalia ſunt, ut ea non ſolum omnia, quæ circa motus quomodocunque acceleratos excogitari poſſunt, attingant; ſed etiam facili negotio oſtendant quænam hypotheſes poſſibiles ſint, & quas vice verſa natura ferre recuſet. Nam, ut ab his incipiam, omnis ſolicitationum ſeu gravitatis hypotheſis impoſſibilis & imaginaria eſt, cujus ſcala per deſcenſus initium tranſit, adeò ut illic ordinata ejus nulla ſit; cujus rei ratio, me etiam tacente, ſatis in propatulo eſt. Mobile enim quieſcens, quod grave non eſt, ſeu à nulla ſolicitatione centrali citatur (quod contingit in puncto, in quo ſcala ſolicitationum rectæ, in qua mobile cadere deberet, occurrit) non poteſt ſe ipſum movere. Verum hæc ipſa impoſſibilitas etiam in conſideratione temporis ſe manifeſtat, quo aliquod ſpatium deberet percurri in imaginariis ejusmodi hypotheſibus, quandoquidem ad percurrendum ſpatium quantumlibet parvum requireretur in hiſce hypotheſibus tempus infinitum,

tum, quod uſu formularum ex præcedentibus mutuo ſumendarum quilibet poterit experiri. Gravitas utlibet variabilis dicatur g, ſpatium perpendiculariter à corpore cadente deſcribendum x, tempus quo percurri debet t, velocitas in fine hujus temporis acquiſita u; elementa ſpatii, temporis, & velocitatis dx, dt & du, quibus poſitis (§. 132.) erit prima formula $gdx = udu$, & (§. 131.) habetur $dt = mdu : g$, ubi m ſignificat maſſam mobilis & g ejus pondus: quoniam vero mobile cum nullo alio comparatur, ſed ejus tantum motus exquiruntur, loco ipſius m unitas poni poteſt, eritque $dt = du : g$. Secunda formula.

146. Sint nunc celeritates acquiſitæ, ut ſpatia confecta, ut vult Balianus, id eſt $u = x$, & $uu = xx$ ac $udu = xdx$, eritque propter $gdx = udu$, etiam $gdx = xdx$ id eſt $g = x$, ergo exiſtente $x = 0$ erit etiam $g = 0$, ergo in principio deſcenſus gravitas mobilis nulla foret, atque adeò ipſum per ſpatium x nunquam delabi poſſet. Porro, quia ſecunda formula $dt = du : g$ & $g = x$, præbent $dt = dx : x$, unde $t = \log. x$, jam exiſtente $x = 0$, & log. ipſius 0 infinito, quod per ∞ ſignificabimus, erit $t = \infty$, hoc eſt, infinitum tempus requiritur ad percurrendum ab initio nullum ſpatium, adeoque grave ibi perpetuo quieſcet, & conſequenter Baliani hypotheſis impoſſibilis & imaginaria eſt. Hoc ipſum alia adhuc ratione oſtendi in Actis Lipſ. 1709. pag. 404. ſeq.

147. Si celeritates acquiſitæ u ſunt ut x^m, ubi m eſt quilibet numerus integer & poſitivus index poteſtatis ſpatii, cui celeritas proportionatur, fiet $uu = x^{2m}$ & $udu = mx^{2m-1}dx = gdx$, atque adeò $g = mx^{2m-1}$, atqui exiſtente $x = 0$, erit etiam $mx^{2m-1} = g = 0$, ergo ejusmodi hypotheſis impoſſibilis & imaginaria eſt.

Porrò $dt\,(= du : g = mx^{m-1} : mx^{2m-1}) = dx : x^m$. Verum juxta articulum 92. ſummationem ineundo, invenietur $t = (\infty^{m-1}, -x^{1-m}) : m-1 = \infty^{m-1} : m-1$. Hoc eſt, tempus deſcenſus per minimam quamcunque altitudinem eſt in hac hypotheſi, ut poteſtas infiniti ∞, cujus exponens eſt numerus integer $m-1$. Ergo hæc hypotheſis, multo magis quam præcedens, imaginaria eſt & impoſſibilis.

Hactenus generalia motuum acceleratorum habuimus, diſpiciendum reſtat, quid ex una alteraque gravitatis hypotheſi ſequi debeat.

HYPOTHESIS I.

Fig. 33. 148. *Si ſolicitationes gravitatis ſint ut diſtantiæ à centro gravium* D, *earum ſcala erit linea recta* QCD *per centrum* D *ducta cum axe* AD *angulum quemlibet* QDA *continens, & ſcala celeritatum linea elliptica* ASR, *cujus ſemiaxis transverſus eſt* AD, *& ſemiſſis axis conjugati* DR *par mediæ proportionali inter* DA *vel æqualem* Aα, *&* QA. Nam deſcripto circa centrum D quadrante circuli AVL, ductisque αD, & BEF parallela DL vel αA; quia DR (conſtr.) media eſt proportionalis inter DL vel αA & QA, erit propter Ellipſin ASR; $EF^2 : ES^2$ (= αA : QA) = 2. trapezii αBEA ad 2. trap. QCEA; atqui duplum trapezii αBEA eſt exceſſus quadrati AD vel DF ſupra quadratum DE, atque adeo æquatur EF^2; ergo æquantur etiam duplum trapezii QCEA, quod eſt duplum areæ in ſcala ſolicitationum centralium QCD, & quadratum ES, atque adeò (§. 136.) ES exponit celeritatem acquiſitam in E ex deſcenſu per AE; ergo ellipſis ASR eſt ſcala celeritatum acquiſitarum. Quod erat demonſtrandum.

149. *Si fiat angulus* X *ad angulum* ADF, *in ratione* DL *ad* DR, *ipſe angulus* X *exponet tempus deſcenſus mobilis per* AE, hoc eſt X = *t*AE. Sit enim x elementum ipſius X homologum elemento anguli ADF, quod eſt angulus FDf, ducta ſcilicet *bf* alteri BF indefinite vicina. Erit ergo x : FDf = DL : DR = EF : ES, ergo x. ES = EF. ang. FDf, vel x. ES. DF = EF. DF. ang. FDf, atqui (§. 129.) DF in ang. FDf exprimit arculum Ff, ergo x. ES. DF = EF. Ff, at verò FE. Ff = DF. Ee, quod ex ſimilitudine triangulorum Ffa & FDE facile colligitur, igitur x. ES. DF = DF. Ee, vel deleta DF, erit x. ES = Ee, & x = Ee : ES. Verum (§. 128.) Ee : ES = tEe, ergo x = tEe, atque adeò omnes x hoc eſt X = omnibus tE*e*, hoc eſt tAE. Quod erat demonſtrandum.

Hinc ducto quolibet radio DV, qui quadrantes concentricos AVL & ETK ſecet in V & T, ductisque arcuum AV & ET ſinibus VW & T*e* (per accidens eſt, quod T*e* cadat ſuper *bf*, res utcunque aliter ſe habere poteſt) ſpatia AW & E*e* eodem tempore à mobilibus æqualibus A & E ſimul cadere incipientibus, deſcribentur; eodemque tempore ambo ad centrum D pervenient.

HY-

HYPOTHESIS II.

150. *Si Gravitas corporum ubique uniformis est, ut in Galilei hypothesi, scala Celeritatum erit Parabola conica, cujus abscissæ axis spatia mobili percurrenda, & ordinatæ celeritates acquisitas exponunt. Eruntque propterea celeritates in subduplicata ratione spatiorum confectorum.* Fig. 34.

Nam scala solicitationum gravitatis erit, hoc casu, recta βC axi AC parallela, atque adeò (§. 144.) $2. A\beta. AE : M = EF^2$, ubi M denotat massam mobilis, $A\beta$ ejus pondus, & AE spatium cadendo confectum, atque EF celeritatem acquisitam. Unde ob constantem $A\beta$ scala celeritatum est parabola conica, atque adeo spatia mobili descripta sunt ut quadrata celeritatum acquisitarum, & hæ velocitates in subduplicata ratione spatiorum. Parameter verò Parabolæ est $2. A\beta : M$.

151. *Tempus verò quo spatium quodlibet* AE *cadendo conficitur est* 1°. *ut duplum spatium* AE *applicatum ad celeritatem* EF *hoc tempore acquisitam.* 2°. *Ut radix ex facto massæ corporis in duplum spatium applicato ad mobilis pondus seu gravitatem. Et denique* 3°. *ut factum ex Massa corporis in celeritatem acquisitam applicatum ad gravitatem ejusdem corporis.* Signetur, ut antea, tempus per AE, per tAE.

Jam (§. 131.) $tEe = M. af : A\beta$, ergo summando $tAE = M. EF : A\beta$, quod est tertium. Porrò quia $tAE = M. EF : A\beta$, erit etiam $= M. EF^2 : EF. A\beta$ (§. 150.) $= 2. A\beta. AE : A\beta. EF = 2. AE : EF$. Et hoc est primum. Denique, quia ordinata parabolæ est ad dimidium parametrum in subduplicata ratione dupli abscissæ ad semissem parametri, erit $tAE (= M. EF : A\beta) = \sqrt{(M. 2AE : A\beta)}$. Quod erat secundum.

152. Idcircò, vocando duorum mobilium massas M, *m*; gravitates seu pondera G, *g*; spatia cadendo descripta S, *s*; & denique tempora descensuum T, *t*. Erit $T = \sqrt{(2 MS : G)}$ & $TT = 2MS : G$, vel $G. T^2 = 2. M. S$; & $gtt = 2ms$. Adeoque, si spatia ab ambobus mobilibus diversis temporibus confecta sunt in duplicata ratione temporum, corporum pondera massis eorum proportionalia erunt; nam si $TT : tt = S : s$ erit $T.^2 s = tt S$; adeoque $G. T^2 = 2. MS$ fiet $tt. GS : s = 2. MS$, vel $Gtt = 2. Ms$, seu $gtt = \frac{2. gMs}{G} = 2ms$, adeoque $gM = Gm$, vel $G : g = M : m$.

Propterea hujus paragraphi ope secunda Propositio per experimenta confirmari potest. Videatur §. 30.

CAPUT II.

De Motibus curvilineis in Vacuo, in quacunque gravitatis variabilis Hypothesi.

PROPOSITIO XX. Lemma.

153. *Si magnitudinis continue crescentis (cujus prima magnitudo* AI *ea dicitur, à quâ crescere incipit) incrementum infinitesimum* Ff *semper fuerit ad decrementum* qr, *alterius decrescentis* Dq, *cujus prima magnitudo, à qua scilicet decrescere incipit, sit* DR, *sicut crescens* EF *ad decrescentem* Dq, *erit crescens* EF *ad suam primam magnitudinem* AI, *ut decrescentis prima magnitudo* DR *ad ipsam decrescentem* Dq.

Fig. 35.

In Fig. 36. circa axem DR descripta sit aliqua curva IF, cujus abscissæ Dq, DR decrescentem primamque ejus magnitudinem referant, ordinatæ verò FE & IA, crescentem ejusque primam magnitudinem, ut adeò signa q, E ad idem punctum pertineant perinde ac signa A, R. Per curvæ punctum F tangens FO ducta sit axi occurrens in O, factaque ordinata *fe* alteri FE infinite vicina, erit *fa* crescentis FE incrementum, & F*a* vel *qr* seu E*e* decrementum infinitesimum decrescentis Dq. Eritque adeo (secundùm hypothesin) *fa* : *qr* = FE : D*q*. Verùm triangula similia faF, FEO præbent etiam *fa* : *qr* = FE : EO, ergo FE : D*q* = FE : EO, atque adeo D*q* = EO, hinc producta tangente OF, erit etiam OF = FS. Est ergo punctum contactus F ubique in medio rectæ OS, angulum rectum SDO subtendentis, ut adeò per conversam Prop. III. Secundi Conicorum Apollonii curva IF Hyperbola sit inter asymptotas SD & DO, atque adeo EF sit ad AI, sicut DR ad D*q*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI. Theorema.

154. *Existentibus* GBb *scala solicitationum centralium &* AIF *scala celeritatum mobili, ex quiete in* H *in recta* HD *cadere incipienti, acquisitarum; atque hoc ipsum mobile in directione* AR *celeritate* AI *propulsum, quam grave post casum ex altitudine* HA *in* A *acquirere potest, urgentibus solicitationibus illis centralibus per ordinatas curvæ* GB *significatis, curvam quandam* AN *in Vacuo describat. Erit* FE

seu

seu celeritas mobilis in quolibet curvæ puncto N *potentia æqualis rectangulo sub radio* nZ *circuli osculatoris in hoc puncto, & sub* $\beta\alpha$ *quæ solicitationem curvæ perpendicularem ex centrali* Nα *vel* BE *derivatam significat.* Hoc est, $EF^2 = nZ.\beta\alpha$. Fig. 37.

Mobile A projectum secundum AR celeritate AI describens curvam AN in ejus puncto N (§. 138.) acquiret celeritatem EF, quam idem mobile in puncto E, æque remoto à centro D, ac curvæ punctum N, consequutum esset post lapsum ex altitudine HE, atque hac celeritate EF in directione tangentis curvæ Nq æquabili motu incedere conatur, verùm à solicitatione centrali Nα vel EB durante tempusculo quam minimo uniformiter agente indesinenter à directione Nq retractum in curva Nn detinetur, adeò quidem ut lineola gn ipsi ND parallela sit spatiolum à solicitatione respectu curvæ elementi Nn uniformi Nα vel BE genitum, atque adeo (§. 151.) tempus, quo grave quoddam tale spatiolum à gravitate Nα conficeret, foret $\sqrt{(2gn : N\alpha)}$ sumta mobilis massa A instar unitatis; at verò eo tempore, quo gn à solicitatione centrali generatur, mobile in tangente describit æquabili motu celeritate EF spatiolum Ng vel Nm; quod tempus (§. 128.) est etiam $Nm : EF$; ergo $\sqrt{(2gn : N\alpha)} = Nm : EF$, atque adeò $2gn : N\alpha = Nm^2 : EF^2$, vel etiam $2gn.nZ : N\alpha.nZ = Nm^2 : EF^2$, & permutando, $2gn.nZ : Nm^2 = N\alpha.nZ : EF^2$. Atqui considerando elementum curvæ Nn instar arculi circuli osculatoris centri Z, cujus Nm tangens, erit $Nm^2 = 2nZ.nm$ vel $= 2mn.nZ$, ergo $2gn.nZ : 2mn.nZ\ (Nm^2) = gn.nZ : mn.nZ = N\alpha.nZ : EF^2$; vel substitutis loco lineolarum gn, & mn, rectis Nα, $\beta\alpha$, quæ ipsis propter triangulorum N$\alpha\beta$ & gnm similitudinem proportionales sunt, fiet $N\alpha.nZ : \beta\alpha.nZ = N\alpha.nZ : EF^2$. Ergo $EF^2 = nZ.\beta\alpha$. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA.

155. *Iisdem positis, erit celeritas projectionis* AI *ad celeritatem mobilis in curvæ puncto* N, *reciproce, ut perpendicularis* Dq *super tangente* Nq *in curvæ puncto* N, *ad perpendicularem* DR *ex centro* D *ad directionem jactus* AR *ductam. Atque adeò singula rectangula* Dq. EF; *dato rec-lo* DR. AI *æquabuntur.* Fig. 37.

Nam ductis per punctum n tangente ns, & arcu circulari ne ex centro D descripto, ac denique ordinata ef, jungatur NZ, & ad tangentem curvæ ns demittatur perpendicularis Ds. Quibus positis,

 erit

erit $N\beta$ solicitatio tangentialis, ejusque momentum (§. 132.) æquatur momento velocitatis in N acquisitæ, atque adeò $N\beta . Nm$ vel $Nn = EF . af$; & quia (§. 154.) $EF^2 = nZ . \beta\alpha$, fiet $EF . af : EF^2 = N\beta . Nm : nZ . \beta\alpha$. vel substitutis loco $N\beta$, & $\beta\alpha$ proportionalibus Nq & Dq, & loco Nm & mZ vel nZ proportionalibus qr & hq vel Nq, invenietur $EF . af : EF^2 = Nq . qr : Nq . Dq$. Nam quia ZN & Zn tangentibus Nq & ns perpendiculares sunt, anguli NZn & ghs, quem tangentes continent, necessariò æquales sunt; atque adeò triangula NZm & qhr ad N & q rectangula similia sunt, ac lateribus Nm & NZ vel nZ proportionalia, latera homologa qr & hq, vel Nq in triangulo qhr. Verum in postrema analogia deletis EF ex primo & secundo, & Nq ex tertio & quarto terminis, fit $af : EF = qr : Dq$ & permutando $af : qr = EF : Dq$, id est incrementum crescentis FE est ad decrementum decrescentis Dq, sicut ipsa crescens ad decrescentem, adeóque erit (§. 153.) crescens FE ad suam primam magnitudinem AI, sicut decrescentis Dq prima magnitudo DR ad decrescentem, & invertendo, AI celeritas jactus est ad EF celeritatem mobilis in quolibet curvæ puncto N, ut perpendicularis Dq ad DR. Propterea erunt singula rectangula $FE . Dq$ æqualia dato $AI . DR$. Quæ erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

156. Quia $EF : AI = DR : Dq$, vel $EF^2 : AI^2 = DR^2 : Dq^2$, & $EF^2 = \beta\alpha . nZ$, erit $\beta\alpha . nZ : AI^2 = DR^2 : Dq^2$. sed $\beta\alpha . nZ : N\alpha . nZ = \beta\alpha : N\alpha = Dq : DN$ vel invertendo, $N\alpha . nZ : \beta\alpha . nZ = DN : Dq$: ergo ex æquo & per compositionem rationum invenietur $N\alpha . nZ : AI^2 = DR^2 . DN : Dq^3$, atque adeò $N\alpha = AI^2 . DR^2 . DN : nZ . Dq^3$; ergo solicitatio centralis in quolibet curvæ puncto N est ut $DN : nZ . Dq^3$. Ut Celeberrimi viri Joh. Bernoulli, Abr. Moyvræus, & Guido Grandus invenerunt, insistentes omnes principio isti, quòd tempora lationum in curvis sunt areis proportionalia, quod nos nondum supposuimus; sed in sequenti Corollario ex positis fundamentis nostris deducemus.

COROLLARIUM II.

157. Erit jam tempus, quo quilibet arcus curvæ AN describetur, id est $tAN = areæ\ ADN : \frac{1}{2} AI . DR$. Nam (§. 128.) est $EF . tNn = Nn$; & $Dq . EF . tNn = Dq . Nn = 2$. trianguli NDn, atqui (§. 155.)

Dq.

$Dq.EF = AI.DR$, ergo $AI.DR.tNn = 2$ trian. NDn atque adeo $\int AI.DR.tNn = AI.DR.tAN = 2\int NDn = 2$. areæ ADN, hinc tAN $=$ areæ $ADN : \frac{1}{2} AI.DR$. Atque hinc liquet tempora quibus diversi arcus AN, An describuntur, areis homologis AND, $ANnD$ proportionalia esse; prout Illustris Newtonus id primus demonstravit Prop. I. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* sed ex diversissimo fundamento.

Scholion.

158. Elegans est formula corollarii ~~secundi~~, quod valorem solicitationis centralis in qualibet curva exhibeat quantitatibus finitis expressum; sed quia valor radii evolutæ eandem ingreditur, id efficit, ut nonnunquam paulo prolixior evadat calculus. Propterea mallem in praxi sequi canonem $g = dp : p^3 dz$, in quo g significat gravitatem seu solicitationem centralem, p. perpendicularem ex centro solicitationum ad tangentem curvæ in dato puncto demissam, & z radium rectorem, seu distantiam puncti curvæ, in quo solicitationis centralis quantitas quæritur à centro. Demonstratio ejus facilis est, etenim ponendo rectangulum $AI.DR = 1$, fiet etiam $FE.Dq = 1$, id est vocando insuper FE, u, cum Dq jam dicta sit p, erit $pu = 1$ & $ppuu = 1$, vel $uu = 1 : pp$, atque adeò $udu = -dp : p^3$. Jam quia momentum celeritatis æquatur momento solicitationis centralis $-gdz$ (pono autem $-dz$, quia crescente u decrescit p, & per consequens z, atque adeò ipsi $+du$ homologa dz debet habere signum privativum) hinc $-gdz = -dp : p^3$, & $g = dp : p^3 dz$. primi

159. Usus hujus formulæ satis expeditus est; nam ex æquatione curvæ datæ quæritur valor ipsius p in z & constantibus; cujusmodi determinatione etiam opus est in formula supra laudata. Exempli gratia in hyperbola & ellipsi reperitur sequens æquatio $pp = ccz : 2a \pm z$, ubi a denotat semilatus transversum, b distantiam centri sectionis ab alterutro foco, & $cc = bb - aa$ in hyperbola, & $cc = aa - bb$ in ellipsi. In denominatore fractionis superius signum hyperbolam, ellipsin vero inferius respicit. Igitur $1 : pp = (2a \pm z) : ccz = 2a : ccz, \pm 1 : cc$, & differentiando, erit $-2dp : p^3 = -2adz : cczz$, & $g = 2dp : 2p^3 dz = a : cczz$; vel omissa data $a : cc$, erit g ut $1 : zz$; hoc est solicitatio centralis, ad focum sectionum Conicarum directa, est ubique ut quadratum distantiæ mobilis à foco inverse, quod jam passim constat ex aliis.

160. Porro si elementum curvæ Nn dicatur ds, arculus pn, dt, reli-

reliquis manentibus, ut supra, (§. 158) Triangula similia Nnp & NDq suppeditant $p = zdt : ds$, atque adeò $g = dp : p^3dz = (ds^2dtdz + zds^2ddt - zdsdtdds) : z^3dt^3$. Quæ formula non, nisi in nominibus, differt à formulis Varignonianis, quales in Commentariis Academiæ Regiæ Parif. Scientiarum 1701. & 1706. habentur, in quibus non magis quam in præsenti ullum differentialium dt, dz, ds constans assumtum est, sed omnia variabilia.

161. Eadem facilitate habetur, aut saltem invenitur insistendo principiis supra positis, formula admodum expedita & generalis pro radiis evolutarum. Nam triangula NZm & qhr, quæ supra (§. 155.) similia esse ostensa sunt, præbent hq vel $Nq : qr = NZ : Nm$, & triangula similia Nnp, ac NqD hanc alteram analogiam $ND : Nq = Nm : Np$, ergo ex æquo $ND : qr = NZ : Np$, atque adeò $NZ = ND . Np : qr$, id est in symbolis supra assumtis, & vocando insuper NZ, r; erit $r = zdz : dp$, nam qr in figura est dp in hisce symbolis; unde cum p sit $= zdt : ds$, invenietur $r = zdz : dp = zdzds^2 : dsdtdz + zdsddt - zdtdds$ formula generalis radii osculatoris, in qua nullum differentiale constans assumtum est, quæ proinde in infinitas alias facile transformari potest. Atque deleto membro in denominatore $dsdtdz$, habebitur $r = ds^2dz : dsddt - dtdds$ formula itidem generalis pro curvis quarum ordinatæ parallelæ axique perpendiculares sunt, in quibus dt sunt elementa abscissarum.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA.

162. *Datis scala solicitationum centralium* GBb, *celeritate* AI, *&*
Fig. 37. *directione jactus* AR, *definire & construere curvam, quam missile in vacuo describet, concessis figurarum quadraturis.*

I. Centro D intervalloque arbitrario DP describatur circulus PO, radios DN, Dn secans in punctis O, o; assumaturque Q quarta proportionalis ad DN, DR, & AI, ita ut $DN . Q (= DR . AI) = EF . Dq$, hoc est $DN : Dq = EF : Q$, & $DN^2 : Dq^2 = EF^2 : QQ$, ut dividendo habeatur $Nq^2 : Dq^2 = EF^2 - QQ : QQ$, atque adeò $Nq : Dq = \sqrt{(EF^2 - QQ)} : Q$, sed $Nq : Dq$ sicut radius ad tangentem anguli DNq, quæ tangens dicatur T, & radius DP vel DO, hinc $\sqrt{(EF^2 - QQ)} : Q = DP : T$ atque adeò $T = Q . DP : \sqrt{(EF^2 - QQ)}$.

II. Propter arcus similes np & Oo, est $Oo : pn = DP : DN$, & $pn : Np = T : DP$, ergo ex æquo $Oo : Np = T : DN$, hinc $Oo = T . Np$:

$Np : DN$ (num. 1.) $= Q.DP.Np : DN\sqrt{(EF^2 - QQ)}$, ergo $PO = \int DP.Q.Np : DN\sqrt{(EF^2 - QQ)}$. Hoc est, si intelligatur aliqua curva, cujus abscissa DN, ordinata $DP^2.Q : DN\sqrt{(EF^2 - QQ)}$ area, hujus curvæ ordinatis abscissarum DA & DE interjecta ad datam lineam DP applicata præbebit lineam, cui si æqualis ubique factus fuerit arcus PO, recta DON per hujus arcus terminum O ducta æqualis abscissæ DE sua extremitate N in curva quæsita erit. Jam quia quadratum ordinatæ EF æquatur duplo areæ GBEH datæ per abscissam DE vel DN & constantes, si non algebraicè, saltem transcendenter, atque Q est quarta proportionalis ad DE vel DN, & datas DR, AI, ea pariter data erit in DE & constantibus, unde cum omnes quantitates, quæ ipsam $DP^2.Q : DN\sqrt{(EF^2 - QQ)}$ ordinatam scilicet figuræ quadrandæ ingrediuntur, dentur in DN & constantibus, & figurarum quadraturæ concessæ sint; factum esse liquet, quod erat faciendum.

Corollarium.

163. Si nunc dicantur DR, b; AI, c; DE vel DN, z, velocitas in curvæ puncto N, seu FE, u; arcus circuli PO, θ; ejus radius DP, r; at elementum arcus crescens OO, $+ d\theta$, elementum verò decrescens Np, indeterminatæ ND, $- dz$. Adeoque $Q = cb : z$ & tota formula $Oo = Q.DP.Np : DN\sqrt{(EF^2 - QQ)}$ mutabitur factis debitis substitutionibus in $d\theta = - bcrdz : z\sqrt{(uuzz - bbcc)}$, quæ est æquatio differentialis curvæ quæsitæ ANn.

Scholion.

164. Hoc problema primùm solutionem accepit à Cel. Newtono Prop. 41. Lib. Princ. Phil. Nat. Math. & postea à Perspicacissimo Geometra Joh. Bernoulli gemino modo, tum etiam à Cl. Viro P. Varignon diversis modis, quo etiam referri posset & nostra solutio quam in Diario Veneto Tom. V. pag. 318. seq. exhibui cum nonnullis aliis, & Tom. VII. pag. 194. Præsens nostra solutio à Newtoniana non differt, nisi in levibus nec essentialibus circumstantiis, nam nostra EF significat latus quadratum areæ apud Newtonum ABFD bis sumtæ, quam tamen ille semel tantum accipit, ejusque Q nobis est rectangulum sub datis DR & AI in nostra figura, Q verò nobis est idem quod illi Q : A seu Z.

Cæterum, quia generalis hæc solutio quadraturas præsupponit earum etiam curvarum, quæ quadrabiles non sunt, ideo problema istud generaliter sumtum est transcendens, nec algebraicum fit, nisi pro certis legibus solicitationum centralium. Quænam vero debeant esse in genere hæ leges gravitatis variabilis, ut illis positis curvæ projectorum algebraicæ evadant, problema est satis curiosum & elegans, sed prima fronte admodum difficile, de quo, quod sciam, nemo adhuc cogitavit. Quomodo verò debeat expediri, id in sequenti apparebit propositione, post lemma mox afferendum.

PROPOSITIO XXIV. Lemma.

165. *Elementum* Ss *tangentis* LS *arcus circularis* LM *est ad elementum hujus arcus* Mm, *ut* AS^2 *quadratum secantis ad* AM^2 *quadratum radii, vel etiam, ut* AL^2 *quadratum radii, ad* AG^2 *quadratum sinus complementi arcus* LM.
Fig. 38.

Nam, quia triangula SA*s* & MA*m* communem angulum MA*m* continent, erit triangulum SA*s* ad triangulum MA*m*, ut rec-lum SA.*s*A ad rec-lum MA.*m*A, id est, ut quadratum SA ad quadratum MA. At quia trianguli SA*s* altitudo est AL, existente basi S*s*, & trianguli MA*m* basin M*m* habentis altitudo est MA æqualis alteri AL, liquet triangulum SA*s* se habere ad triangulum MA*m*, ut basis S*s* ad basin M*m*, ergo etiam S*s* ad M*m* ut AS^2 ad AM^2, vel propter parallelas SL & MG, sicut AL^2 ad AG^2. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

166. Idcirco, si dicantur radius AL, r, tangens LS, t; arcus LM, α, erit secans $AS = \sqrt{(rr + tt)}$, atque adeo $d\alpha = rrdt : rr + tt$. Et conversa hac æquatione in seriem, singula seriei membra erunt summabilia, adeò ut summatione eorum actu instituta habeatur expressio arcus circularis α, serie infinita tangente & radio expressa.

PROPOSITIO XXV. Problema.

167. *Invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis, seu legis solicitationum centralium, pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitatibus finitis expressum.*
Fig. 37, 38.

I. In figura 38. fiat AD æqualis AD in fig. 37, atque in fig. 38. circa

circa axem DA descripta intelligatur curva quæcunque algebraica LHh: descriptoque super ordinata ejus AL quadrante LMΘ circuli, ex quolibet hujus circumferentiæ puncto M agatur quædam MH parallela axi AD, curvæ LH alicubi occurrens in H subter ordinatam AL, per curvæ LH punctum H tangens HΔ ducta intelligatur axi occurrens in Δ, & ordinata HE axi AD perpendicularis, in qua, ordinata HE ad alteram axis partem protracta, sumatur ubique EΛ = subtangenti EΔ, adeò ut puncta Λ futura sint in quâdam curva ΛΞ, cujus subtangens sit in ejus puncto Λ linea EΩ, ducta scilicet tangente ΛΩ. Quibus positis, si in altera figura (37.) angulus ADN ubique fuerit ad angulum MAL, ut unitas ad quemlibet numerum positivum & rationalem n, atque in figura 37. longitudo DN semper æqualis fuerit abscissæ DE in figura 38. manifestum, singula puncta N locatum iri in curva algebraica ANn; quandoquidem omnia hæc puncta algebraice definiri possunt, cum sectio anguli in ratione numeri ad numerum omnino geometrice fieri possit. Jam, sicut ex alia atque alia curva LH alia atque alia AN oritur, ita quælibet curva AN aliquam generatricem LH admittet, adeo ut hac curva considerata duntaxat in genere, absque ulla attentione ad particularem aliquam speciem, etiam suppeditare possit omnes possibiles curvas ANn. Idcirco, cum canon generalis quæritur, quo lex gravitatis variabilis in omnibus curvis algebraicis determinetur, res eò deducetur, ut inveniatur formula solicitationum centralium G pro hac curva generali AN, quatenus ea ex curva itidem generali & algebraica LH resultat. In hac verò disquisitione ita porrò est procedendum.

II. Assumto scilicet in curva LH ejus elemento Hh, per punctum h agantur $h\lambda$ & hm rectis ΛH & HM æquidistantibus, ac ductis per puncta M, m secantibus AS, As; centro A & radio AX = DP in figura 37, descriptus sit arculus Xx, quo fiet ut, quoniam (secundùm hypothesin) ang. ADN : ang. MAL = 1 : n, etiam ODo: MAm vel XAx, hoc est arculus Oo sit ad arculum Xx sicut 1 ad n. Quibus positis sic arguo.

III. Triangula similia Hih & HEΔ præbent Ee (ih) : Gg (Hi) = EΔ : AG (EH), & triangula similia AMG & M$m\mu$, dant Gg (Mμ) : Mm = GM : AL (AM) & Mm : Xx = AL (AM) : AX (DP), ac denique, num. 1. hujus Xx : Oo = n : 1, ergo ex æquo & per compositionem rationum, fiet Ee : Oo = n. EΔ. GM : AG. DP (vel quia ob triangulorum AGM & ALS similitudinem GM : AG = LS : AL)

 = n.

$= n.E\Delta.SL : DP.AL$. Atqui (§. 162. n. 11.) erat etiam Ee (ibi Np) : $Oo = DE : T$, ergo $n.E\Delta.SL : DP.AL = DE : T$, atque adeò fiet $T = DP.AL.DE : n.E\Delta.SL$. (§. 162. n. 1.) $= Q.DP : \sqrt{(EF^2 - QQ)}$ atque adeo $\sqrt{(EF^2 - QQ)} = n.Q.E\Delta.SL : AL.DE$, ac denique $EF^2 = (nn.E\Delta^2.SL^2 + AL^2.DE^2).QQ : AL^2.DE^2$, vel quia $Q = DR.AI : DE$, & omittendo instar unitatis factum constans DR, AI, est $QQ = 1 : DE^2$, fiet etiam $EF^2 = nn.E\Delta^2.SL^2 : AL^2.DE^4 ; + 1 : DE^2$.

IV. Sumantur elementa singulorum membrorum hujus ultimæ æqualitatis, atque singulis elementis per 2 divisis (bifariam ea dividi posse ex calculo ilico patet) proveniet $EF.af = (nn.E\Delta.SL^2.\Lambda\xi : AL^2.DE^4) + (nn.E\Delta^2.SL.Ss : AL^2.DE^4) + (2nn.E\Delta^2.SL^2.Ee : AL^2.DE^5) + (Ee : DE^3)$. Verum quia (§. 165.) $Ss : Mm = AL^2 : AG^2$, nec non $Mm : Gg = AL : MG$ ac denique $Gg : Ee = AG : E\Delta$, erit $SL.Ss = AL^4.Ee : AG^2.E\Delta$, triangulaque similia $\Lambda\xi\lambda$, ac $\Lambda E\Omega$ suppeditant $E\Delta\,(\Lambda E).\Delta\xi = \Delta E^2.Ee : E\Omega$, quibus valoribus in superiore æqualitate $EF.af = (nn.E\Delta.SL^2.\Lambda\xi : AL^2.DE^4) +$ &c. substitutis, proveniet $EF.af$ (§. 132.) $= BE.Ee = G.Ee = (nn.E\Delta^2.SL^2.Ee : E\Omega.AL^2.DE^4) + (nn.E\Delta.AL^2.Ee : AG^2.DE^4) + (2nn.E\Delta^2.SL^2.Ee : AL^2.DE^5) + (Ee : DE^3)$. In qua, si loco rationis $SL^2 : AL^2$ substituetur æqualis ratio $MG^2 : AG^2$, atque omnia ad Ee applicentur, erit BE seu $G = (nn.E\Delta^2.MG^2 : E\Omega.AG^2.DE^4) + (nn.E\Delta.AL^2 : AG^2.DE^4) + (2nn.E\Delta^2.MG^2 : AG^2.DE^5) + (1 : DE^3)$, formula generalis solicitationis centralis in puncto curvæ N, quæ rite ordinata reductis scilicet tribus primis fractionibus ad idem nomen, demum erit
$$G = \frac{1}{DE^3} + \frac{(DE.E\Delta.MG^2 + 2.E\Omega.E\Delta.MG^2 + DE.E\Omega.AL^2).nn.\Delta E}{E\Omega.AG^2.DE^5}.$$
In qua existente curva LH algebraica, altera $\Delta\Xi$ algebraica erit, atque adeò omnes $E\Omega$, $E\Delta$, EH & GM algebraice dabuntur; hinc etiam, juxta dicta numero 1. hujus, altera curva AN algebraica sit, necesse est; & quia cuilibet curvæ algebraicæ imaginabili AN aliqua LH respondet, & hæc LH omnes curvas generaliter repræsentat, quæ ex omnibus ANn resultare queunt; ideò præcedens canon exhibet formulam generalem solicitationum centralium pro omnibus, quæ concipi possunt, curvis algebraicis ANn in infinitum. Quæ erat invenienda.

Corollarium I.

168. Si nunc præterea ponatur $1 : n = \mu : \nu$, ita ut μ & ν significent quoslibet numeros integros & positivos, dicanturque tangens anguli MAL, T, ejus secans S, in fig. verò 37, coordinatæ DQ & QN, x & y respective, & $DN = z = \sqrt{(xx + yy)}$; quibus positis erit tangens anguli $ADN = ry : x$, & secans $= rz : x$, existente radio $DP = r$. Eritque adeò per regulam generalem multisectionis anguli vel arcus per secantes in Act. Erud. Lips. 1706. pag. 263. traditam, secans anguli $\nu . ADN = rz^{\nu} : (x^{\nu} - 02\nu x^{\nu-2} yy + 04\nu x^{\nu-4} y^4 - 06\nu x^{\nu-6} y^6 + \&c.)$ & secans anguli $\mu . MAL = S^{\mu} : (r^{\mu-1} - 02\mu r^{\mu-3} T^2 + 04\mu r^{\mu-5} T^4 - 06\mu r^{\mu-7} T^6 + \&c.$ in quibus numeri ficti 02ν, 04ν, 06ν, &c. significant, $\frac{\nu . \nu-1}{1.2.}$; $\frac{\nu . \nu-1 . \nu-2 . \nu-3}{1.2.3.4}$; $\frac{\nu . \nu-1 . \nu-2 . \nu-3 . \nu-4 . \nu-5}{1.2.3.4.5.6}$ seu coëfficientes membrorum binomii ad potestatem ν sublati, per saltum excerptas; & numeri 02μ, 04μ, 06μ, &c. significant ordine, $\frac{\mu . \mu-1}{1.2}$; $\frac{\mu . \mu-1 . \mu-2 . \mu-3}{1.2.3.4}$; $\frac{\mu . \mu-1 . \mu-2 . \mu-3 . \mu-4 . \mu-5}{1.2.3.4.5.6}$; &c. coëfficientes binomii cujusdam ad potestatem μ evecti, itidem per saltum excerptas.

Jam, quia (secundùm hypothesin) ang. ADN est ad ang. MAL, sicut 1 ad n seu μ ad ν, erit omninò multiplicando extrema & media $\mu . MAL = \nu . ADN$, ergo horum secantes æquales erunt. Propterea multiplicatione in crucem instituta, erit $S^{\mu} . (x^{\nu} - 02\nu x^{\nu-2} yy + 04\nu x^{\nu-4} y^4 + \&c.) = rz^{\nu} . (r^{\mu-1} - 02\mu r^{\mu-3} T^2 + 04\mu r^{\mu-5} T^4 - 06\mu r^{\mu-7} T^6 + \&c.)$ generalis æquatio curvarum algebraicarum AN, nam existentibus μ & ν numeris integris & positivis, hæ series indefinitæ semper abrumpentes erunt, atque adeo finito terminorum numero constabunt.

Corollarium II.

169. Si in Canone articuli 167. loco ordinatæ EH ponatur ..e...A, quælibet quantitas composita ex data seu constante e, & variabile A, data tamen utlibet in z, & quantitatibus constantibus, adeo ut A, infinitas numero diversas quantitates ex z & datis quomodocunque compositas, immò omnes, quæ cogitari possint significet. Puncta quantitatibus præfixa omnem possibilem signorum + & − ad quantitates illas respicientium variationem denotant, adeò ut Fig. 38.

ut per quantitates punctis invicem adjunctas non solum summa quantitatum; sed etiam differentia earundem intelligenda sit in genere, hoc est differentia ipsarum, sive e excedat alteram A, sive ab eadem deficiat. Data ordinata EH, in quantitatibus algebraicis, facile invenietur subtangens EΔ curvæ LH, seu ordinata ΔE alterius curvæ $\Delta\Xi$, cujus subtangens EΩ etiam habebitur in quantitatibus algebraicis. Idcirco substitutis valoribus subtangentium EΔ, EΩ, ordinatæ EH vel æqualis AG, tum etiam rectæ GM, quæ ex altera AG & data AL facile reperitur, in canone supra citato & habebitur generalis formula solicitationum centralium in omnibus curvis algebraicis. Ponendo igitur elementum ipsius A seu dA esse Bdz, & elementum dB quantitatis B esse cdz, existente DE $=$ z, item AL $= r$, & $rr - ee = ss$. Si calculus recte initus fuerit, reperietur pro solicitatione centrali G in quolibet curvæ AN puncto N,

$$G = \frac{1}{z^3} + \frac{(2ssB + ssCz \mp eB^2z \pm 4eAB \pm 2eACz + AB^5z - 2A^2B - A^2Cz).\, nn}{B^3z^5}.$$

Quam late pateat usus hujus formulæ exinde potest colligi, quod, præterquam quod quantitas A omnem quantitatem per z & constantes datam designet, numerus n omnes numeros rationales atque positivos integros & fractos significet.

Scholium.

170. Ut appareat usus insignis nostræ formulæ, exemplo cuidam particulari eandem applicare libet. Sic si fuerit $A = z^m : a^{m-1}$ ubi m significet quemlibet numerum rationalem, fractus ne sit an integer nil refert, eritque $B = mz^{m-1} : a^{m-1}$, & $C (= mm - m)\, z^{m-2} : a^{m-1}$. Qui valores, in formula superioris Corollarii substituti, dabunt formulam quæ etsi particularis est alterius respectu, ex qua deducta est, infinitas tamen diversas curvas algebraicas suppeditare potest, immò infinities infinitas. Formula autem ipsa erit talis quæ sequitur

$$G = \frac{mm - nn}{mmz^3} \pm \frac{\overline{m \pm 2}.\, nnea^{m-1}}{mmz^{m+3}} + \frac{\overline{m+1}.\, nnssa^{2m-2}}{mmz^{m+3}}.$$

Hinc 1°. Si $m = -1$, & $n = 1$, erit $G = \pm e : aazz$, atque adeò solicitatio gravitatis ubique in reciproca duplicata ratione distantiæ mobilis à centro D. Videamus quænam curva ex ista hypothesi debeat resultare. In corollario primo fecimus $1 : n = \mu : \nu$, unde cum hoc casu sit $n = 1$, erit etiam $\mu = \nu = 1$, unde si valores

Fig. 37.

hosce

hosce in æquatione generali §. 168. circa finem, substituas, evanescent omnes coëfficientes $o2\mu$, $o4\mu$, &c. & omnes $o2\nu$, $o4\nu$, $o6\nu$, &c. adeò ut hoc casu curvæ æquatio sit $Sx = rz$. Jam quia A $(= z^m : a^{m-1})$ hoc casu est $= aa : z$, atque adeò in fig. 38, ordinata EH, quæ assumenda est æqualis differentiæ quantitatum e & A, non summæ, quia in ambiguo signo superius in formula retinuimus quod indicat talem differentiam, atque inferius summam; ordinata inquam EH hoc casu erit $= \pm e \mp A = \pm e \mp \frac{aa}{z} = (\pm ez \mp aa) : z$, atqui S, seu secans anguli MAL, est tertia proportionalis ad AG seu EH, & radium AM vel AL $= r$, ergo $S = rrz : \pm ez \mp aa$, adeoque æquatio $Sx = rz$, mutatur in $\frac{rrzx}{\pm ez \mp aa} = rz$, ex quâ elicitur $rx = \pm ez \mp aa$ vel potius $ez - aa = + rx$, aut $ez = aa \pm rx$, quæ est æquatio *Sectionum Conicarum*, in quibus abscissæ x sumuntur sursum & deorsum à foco. Ergo in hac hypothesi centrum virium, seu solicitationum gravitatis, sunt umbilici sectionum conicarum, quod jam omnibus constat egregie conspirare cum iis, quæ demonstrata sunt ab Illustr. Newtono, Leibnitio, Varignonio & aliis, circa vires, quas vocant centripetas in sectionibus conicis methodis directis.

2°. Sit $m = -2$, & $n = 2$, atque e major quam r, ita ut $ss = rr - ee$ sit quantitas negativa, erit $G = -ssz : a^6$, atque adeò solicitationes erunt ut distantiæ à centro. Æquatio curvæ pro hac hypothesi sic indagabitur. Quoniam $n = 2$, & $1 : n = \mu : \nu$ erit $\nu = 2\mu$, atque adeò æquatio generalis (§. 168.) huic casui applicata mutabitur in hanc sequentem $Sxx - Syy = rzz$. seu, quia A $(= z^m : a^{m-1})$ hoc casu est $= a^3 : zz$, & $S = rr : e - A = rrzz : ezz - a^3$, fiet $(rrxxzz - rryyzz : ezz - a^3 = rzz$, atque adeò $rxx - ryy = ezz - a^3 = exx + eyy - a^3$; hinc $a^3 + \overline{r - e}.xx = \overline{e + r}.yy$. Jam quia e (secundum hypothesin) major est quam r, quantitas $r - e$ erit negativa, atque adeò æquatio erit ad ellipsin, cujus axis transversus est ad conjugatum sicut $\sqrt{(e + r)}$ ad $\sqrt{(e - r)}$; & in qua abscissæ x originem in centro habent. Idcirco solicitationes gravitatis, quæ in ellipsi sunt ut distantiæ à centro solicitationum, diriguntur ad centrum ellipseos, quod iterum ex demonstratis Newtonianis constat verum esse; nam si, ut Excell. hic Autor, & postea Cl. Varignon fecerunt, quæratur qualem gravitates mobilis, perimetrum ellipseos circumeuntis, legem sequi debeant, si earum directiones in centro ellipseos concurrant, re-

pe-

perietur ejusmodi ſolicitationes diſtantiis mobilis à centro ellipſeos proportionales eſſe. Sin verò r major ſit quam e, inventa noſtra æquatio erit ad hyperbolam, & ſolicitatio centralis erit negativa atque adeò centrifuga.

3°. Si $m = 1 = n = \mu = \nu$, & $e = 0$, erit $G = 2ss : z^5$. Atque æquatio generalis (§. 168.) mutabitur in hanc particularem $Sx = rz$, in qua erit $S = rr : z$, hinc $rrx : z = rz$, vel $rx = zz = xx + yy$. Ergo hoc caſu centrum ſolicitationum eſt in circumferentia circuli, curvaque quæſita ipſa circuli circumferentia, quod à poſteriori hactenus laudati viri Newtonus atque Varignonius oſtenderunt. Vid. Lib. I. *Pr. Phil. Nat. Math.* Prop. VI. & Comm. Acad. Reg. Sc. Par. 1700. die 31. Martii art. XI.

4°. Generaliter, ſi G ſit ut z^p, ubi p eſt quilibet numerus rationalis poſitivus vel negativus; excepto ſolo -1, curva ſemper algebraica haberi poteſt tali ſolicitationum centralium legi ſatisfaciens, in qua tamen vel e aut s evaneſcunt ſeu nihil ſunt, alioqui nullæ curvæ algebraicæ talibus hypotheſibus inveniri poſſent ſatisfacientes, exceptis caſibus ipſius p ſignificantis numeros 1 & -2, quibus ſectiones conicas convenire in præcedentibus exemplis oſtenſum. Si $p = 0$, reperietur curvæ ANn æquatio $x^3 - 3xyy + z^3 = \frac{2a^5}{rr}$, in cujus curvæ ſingulis punctis ſolicitatio centralis conſtans quidem ſed negativa eſt, mobile à centro repellens. Sin verò ponatur in formula §. 170, $m = -1$, & $e = 0$, fiet G ut $\frac{1 - nn}{z^3}$, hoc eſt reciproce, ut cubus diſtantiæ mobilis à centro ſolicitationum, & huic caſui infinitæ conveniunt curvæ, infinitæ ſcilicet geometricæ infinitiesque infinitæ Mechanicæ ſeu tranſcendentes, prorſus ut à Cel. Joh. Bernoullio animadverſum in Act. Lipſ. 1713. Menſ. Mart. p. 129, ubi infinitas exhibet diverſas ſpiralium ſpecies, quarum unæ continent curvas algebraicas, aliæ vero tranſcendentes. Nam quia (ſecundùm hypotheſin) $m = -1$, erit $A (= z^m : a^{m-1}) = aa : z$, ideoque curva LH erit hoc caſu hyperbola inter aſymptotas per centrum ſolicitationum, vel potius per punctum D ad angulos rectos ductas; ita ut una earum exiſtente DA altera ſit ipſi AL parallela. Adeoque cum ſecans AS ſit tertia proportionalis ad AG, vel $EH = aa : z$, & radium AL, erit $AS = rrz : aa = z$ ſi AL ſit $= a$. Unde ſi in fig. 37. fiat angulus ADN ad angulum MADL (§. 167.) ſicut 1 ad n, atque in recta Dp ſumatur ubique DN æqualis ſecanti

Fig. 38.

canti AS, punctum N erit in curva quæsita ANn, quæ proinde erit algebraica quoties *n* numerus fuerit rationalis & affirmativus, atque talis constructio coincideret fere cum eâ quam Celeb. Newtonus dedit in Corollario 6. post Prop. 44. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* Imò etiam cum Bernoulliana, quæ habetur loco supra citato, quanquam ejusmodi curvæ apud Acutissimum Virum aliter positæ sint, quam in Newtoniana vel nostra constructione. Nam ducta in figura 37. linea Dd axi DA normali, si jam ubique fiat angulus dDN ad angulum ⊖AM, sicut 1 ad n, atque ut antea, in recta Dp sumatur DN æqualis ipsi DS, punctum N etiam nunc erit in curva optata, quæ asymptotam habebit ipsi Dd parallelam, cujus ab hac Dd distantia erit ad DP, ut 1 ad *n*: curva verò per punctum A non transibit; in altera vero constructione nostra curva transit per A, atque asymptotam habebit per D transeuntem, facientem cum DA angulum, qui se habet ad angulum rectum, ut 1 ad *n*. Et quidem hæc pauca exempla ad illustrationem formulæ ab initio hujus articuli allatæ adduxisse sufficiat; ex quibus satis jam perspicax Lector animadvertere potest, quam immensi pene usus sit generalis solutio problematis articulo 167. propositi & soluti, quandoquidem sola formula particularis articuli 170. paulo ante memorata justo tractatui conscribendo abundantem materiam subministrare posset.

CAPUT III.

De Motu Isochrono corporum in curvis descendentium juxta quamlibet gravitatis variabilis hypothesin, atque gravium directionibus etiam in centro gravium convergentibus; & de Motu Pendulorum

DEFINITIO.

Cum corpus grave motu suo ex quiete arcus quoscunque inæquales alicujus curvæ, sed terminatos tamen omnes ad infimum curvæ punctum eodem vel æquali tempore, perlabitur, talis linea curva *Isochrona* dici solet. Ut si grave A, ex quolibet curvæ BFA puncto B, F, E &c. à quiete descensum incipiens motu suo quomodocunque accelerato, eodem seu pari tempore arcus utlibet inæ- Fig. 40.

quales

quales BeA, FeA, EXA, ſed terminatos omnes ad infimum curvæ punctum A, abſolvat; curva hæc BEA Iſochrona vocabitur.

PROPOSITIO XXVI. LEMMA.

171. *In quolibet triangulo rectilineo, cujus baſis à linea intra triangulum ex angulo baſi oppoſito ducta, pro libitu in duo quæcunque ſegmenta dividitur, ſolida quæ fiunt ex quadratis laterum in alterna baſeos ſegmenta ſimul ſumpta æquantur duobus ſolidis, quorum unum fit ex quadrato lineæ baſin dividentis in hanc baſin, alterum ex rectangulo*
Fig. 39. *ſegmentorum baſis in totam pariter baſin.*

Sit triangulum quodvis ABC, cujus baſis BC dividatur in D à recta AD pro libitu intra triangulum ducta. Probari debet eſſe $AB^2. DC + AC^2. BD = AD^2. BC + BD. DC. BC$.

Demonſt. I. Deſcripto circa triangulum circulo ABE, producatur AD in E, & jungantur BE, CE, & triangula ſimilia BAD ac ECD præbent analogiam $AB : AD = EC : DC$ atque adeò $AD. EC = AB. DC$. Atque à triangulorum ACD, BED ſimilitudine elicitur $AC : AD = BE : BD$, & rec-lum AD. BE æquale rec-lo AC. BD.

II. In quadrilatero ABEC circulo inſcripto, eſt $AB. EC + AC. BE = AE. BC = AD. BC + DE. BC$. Vel aſcita communi altitudine AD, fiet $AB. EC. AD + AC. BE. AD = AD^2. BC + AD. DE. BC$. Adeoque ſubrogando loco rectangulorum EC. AD & BE. AD hæc rec-la AB. DC & AC. BD quæ illis (num. 1) æqualia oſtenſa ſunt, & loco rectanguli AD. DE æquale rec-lum BD. DC; erit $AB^2. DC + AC^2. BD = AD^2. BC + BD. DC. BC$. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA.

Fig. 40. 172. *Si gravium directiones convergant in centro* O, *atque circa axem* OC *deſcriptæ ſint tres curvæ, ſcilicet ſcala ſolicitationum gravitatis variabilis* cha, *deinde curva* ARD, *cujus quælibet ordinata* HR *poſſit duplum homologæ areæ* AHha *in ſcala gravitatis, ac denique tertia curva* AEB, *cujus arcus quilibet* AXE, *à circulo* HE *radio* OH *deſcripto, terminatus ſit ad homologam ordinatam* HR *in curva* ARQ, *ut aliquis datus numerus* N, *ad unitatem, erit hæc tertia curva* BEA, iſochrona.

Pona-

Ponatur grave delapſum eſſe per arcum curvæ BEA motum à quiete in B incipiendo; atque Ee elementum eſſe curvæ AE, per cujus terminum e deſcriptus centro O arcus eV axi occurrat in V, per quod punctum ducatur ordinata Vr in curva ARD; atque ſuper hujus curvæ baſi CD deſcripto quadrante circuli CDIK, per puncta R, r agantur RI, & ri circulo occurrentes in I, i, ejusque radio DP in punctis P, p, ductaque per I lineola Io parallela CD, jungantur denique CI, Ci. Quibus poſitis

I. Quia (ſecundùm hypotheſin) $CD^2 = 2.ACchaA$, & $HR^2 = 2.AHhaA$, erit $CD^2 - HR^2$, hoc eſt $CD^2 - CP^2$, vel $CI^2 - CP^2$, id eſt $IP^2 = 2.CHhgc = 2.ACchaA - 2.AHhaA$, ergo $IP = \sqrt{(2.CHhgc)}$ Item quia (ſecundum hypotheſin) $AE : HR = N : 1$, erit $AE = N.HR$, adeoque $Ee = N.\rho R = N.Pp = N.Io$.

II. Supra (§. 136.) oſtenſum, eandem vel æqualem acquirere celeritatem duo mobilia pondere & maſſa æqualia in duobus punctis E, H centro O æquidiſtantibus; ſi ex punctis pariter æque altis B, C unum in curva BEA alterumque in recta CA à quiete moveri cœperint, atque ſpatia BE & CH deſcripſerint. Et vocando corporis A maſſam per hanc eandem literam A, celeritas acquiſita in H ex deſcenſu per CH, vel in E ex deſcenſu per BE (§. 144.) erit $\sqrt{(2.CHhc)} : \sqrt{A}$, ſeu (num. 1 hujus) $= IP : \sqrt{A}$. Unde, quia (num. 1) $Ee = N.Io$ atque ſpatiolum Ee applicatum ad velocitatem qua percurritur, denotat tempus quo abſolvitur ſeu tEe, erit propterea $tEe = N.Io.\sqrt{(A)} : IP$. Atqui propter triangula ſimilia CIP, & I*io*, ratio Io ad IP æqualis eſt rationi $Ii : CI$, hoc eſt (§. 129.) angulo ICi; idcirco $tEe = N.\sqrt{A}$. ang. ICi: ergo omn. tEe, hoc eſt, $tBE = N.\sqrt{A}$. omn. ICi ſeu ICD, atque adeo $tBE = N.\sqrt{A}$. ang. ICD. & $tBEA = N.\sqrt{A}$. ang. KCD.

III. Si jam mobile non amplius in B, ſed in alio quocunque curvæ puncto F deſcenſum incipiat; centro O per hoc punctum F ducatur circulus FG & per G ordinata GQ curvæ ARD occurrens in puncto Q, per quod agatur QN axi AC parallela ac denique radio CN deſcripto quadrante MLN, jungatur LC; atque hisce poſitis eodem quo in antecedente numero, conficitur argumento exiſtere $tFE = N.\sqrt{A}$. ang. LCN. Cogitatione tua abſcinde vel aufer totum ſpatium, quod eſt inter lineas mixtas BCD & FGQ, ac quadrantem MCN admove pariter ordinatæ GQ, & hac ratione hunc caſum, quo mobile ex F deſcendere incipit, reducis præciſe ad caſum præcedentem; cum AEF nunc ſpectetur velut integra curva, ex cujus principio F proficiſcatur mobile & analogæ curvæ ARQ baſis GQ quadrantem habet ſibi inſiſtentem, quemadmodum baſis CD ſuum quadrantem KID, idcirco tempus per FE, hoc eſt $tFE = N. \sqrt{A}$. ang. LCN, atque adeo $tFEA = N. \sqrt{A}$. ang. MCN. Eſt ergo tBEA ad tFEA, ut $N. \sqrt{A}$. ang. KCD ad $N. \sqrt{A}$. ang. MCN hoc eſt, ſicut angulus rectus KCD ad angulum rectum MCN, atque adeo in ratione æqualitatis; ergo æquali tempore omnes arcus BA, FA, XA &c. percurrentur, atque adeò curva propoſitionis noſtræ BEA eſt iſochrona. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

173. Si ΘA fuerit radius oſculi ſeu curvaturæ iſochronæ in vertice A, erit generaliter $N = \sqrt{(\Theta A. OA : \Theta O. Aa)}$. Sumto enim arculo AX indefinite parvo vertici contiguo, ductisque ex centro O arculo XY, & per Y ordinata Yy curvam AR ſecante in z. Jam quia (ſecundùm hypotheſin) $AX = N. YZ$, vel $AX^2 = NN. YZ^2$ (ſecundùm hypotheſin) $= NN$. dupl. areæ $AYya = 2NN. AY. Aa$; & quia AY eſt aggregatum ſinuum verſorum arculorum AX & XY inſtar æqualium accipiendorum, quorum centra ſunt Θ & O, fiet $AY = \frac{AX^2}{2\Theta A} + \frac{AX^2 (XY^2)}{2OA}$, atque adeò $2AY = AX^2. \Theta O : \Theta A. OA$, ac proinde ſubſtitutione facta, proveniet $AX^2 = NN. AX^2. \Theta O. Aa : \Theta A. OA$, ex qua facile elicitur $NN = \Theta A. OA : \Theta O. Aa$, & $N = \sqrt{(\Theta A. OA : \Theta O. Aa)}$.

COROLLARIUM II.

174. Si jam minimus iſochronæ arculus XA vertici A adjacens conſideretur inſtar arcus circularis radii ΘA à pondere A filo ΘA appenſo deſcripti; erit tempus, quo arculus XA vel tota curva BEA deſcribi poteſt, ſemiſſis unius oſcillationis penduli ΘA. Unde, quia (§. 172.) $tXA = N. \sqrt{A}$. ang. rectum, erit 4tXA, ſeu duratio duarum penduli cujusque oſcillationum minimarum, quod deinceps dicatur T, erit inquam $T = N. \sqrt{A}$. 4 rectos ſeu nominando peripheriam p, cujus radius 1 erit $T = pN. \sqrt{A}$, vel ſubſtituendo valorem ipſius N articulo præcedenti definitum, reperietur $T = p\sqrt{(A. \Theta A. AO : \Theta O. Aa)}$. Qui eſt canon valde generalis, in quo ΘA ſignificat longitudinem penduli, AO ponderis minimam diſtantiam à centro

tro gravium O, ΘO distantiam puncti suspensionis Θ ab eodem centro O, Aa pondus corporis oscillantis A in infimo loco positi, & T tempus duarum penduli ΘA vibrationum minimarum. Hæc determinatio probe consentit cum assertionibus paulo specialioribus Newtoni Prop. 52. *Lib. I. Pr. Ph. Nat.*

Corollarium III.

175. Si centrum O sit infinite distans à puncto Θ, æquabuntur ipsæ ΘO & AO, atque formula præcedentis corollarii mutabitur in sequentem $T = p\sqrt{(A.\Theta A : Aa)}$. Hinc 1°. tempora oscillationum diversorum pendulorum sunt in composita ratione ex subduplicata massarum & longitudinis pendulorum directe & subduplicata itidem sed inversa ponderum. 2°. Tempora oscillationum pendulorum æqualium sunt in composita ratione ex subduplicata directa ratione massæ corporum & subduplicata inversa ratione ponderum. 3°. Si solicitationes, quibus pendula agitantur, id est pondera corporum longitudini pendulorum proportionalia sint, tempora oscillationum erunt in subduplicata ratione massarum corporum agitatorum, & hæc tempora erunt æqualia, si, iisdem positis, massæ insuper corporum ponderibus proportionales fuerint. 4°. Massæ vero, seu materiæ quantitates, erunt in composita ratione ex ponderum ratione pendulis æqualis longitudinis appensorum, & ex duplicata ratione temporis oscillationum. Atque hoc ipsum est Prop. 27. *Lib. II. Pr. Ph. Nat.* qua usus est Cl. Vir ad explorandum utrum pondera corporum ipsorum massis proportionalia sint, nec ne; ac reperit hic Author experimentis, accuratissime pendulorum ope sumtis, pondera corporum massis constanter proportionata esse. Sed hoc loco sermo est de ponderibus absolutis corporum; non vero de relativis, qualia habent cum fluidis diversis demersa sunt; hoc enim casu pondus portionis cujusdam fluidi volumine æqualis corpori demerso à pondere absoluto hujus corporis debet auferri, ut habeatur ejus pondus relativum, quod intra fluidum, cui immersum est, habet.

Corollarium IV.

176. Cum multitudines oscillationum æqualibus temporibus à diversis pendulis absolvendarum sint in contraria ratione temporum, quo unumquodque pendulum unam oscillationem peragit, multi-

tudines oscillationum æqualibus temporibus peractarum erunt proinde in composita ratione ex ratione subduplicata directa ponderum & subduplicatis rationibus inversis massarum & longitudinum pendulorum. Aut, si pondera massis proportionalia sint, ut tuto id assumi potest; erunt prædictæ oscillationum multitudines, ut radices ex lineis, quæ pondera seu vires gravitatis exponunt, quibus pendula agitantur, applicatis ad pendulorum longitudines. Atque adeò, 1°. pendulorum inæqualium, sed eadem gravitatis solicitatione agitatorum, vibrationes eodem tempore absolvendæ sunt in reciproca subduplicata ratione longitudinis pendulorum. 2°. Numerus oscillationum unius penduli erit ad numerum oscillationum eodem tempore peractarum in alio pendulo ejusdem longitudinis cum primo, in subduplicata ratione solicitationis gravitatis, qua primum ad solicitationem gravitatis, qua alterum pendulum primo quoad longitudinem æquale agitatur. Atque hoc posterius ad amussim convenit cum regula quam Bernoullius in elegantissimo suo schediasmate Act. Lipf. 1713. M. Februario inserto, tradit paragrapho 16, ex qua deinceps gravitates specificas eruere docet ex pendulorum experimentis modo plane novo nec antea cognito.

Scholion.

177. Ex corollariis proxime antecedentibus satis elucere existimo, quantæ utilitatis sit theorema nostrum generale isochronismi corporum in curvis, assignata lege descriptis, descendentium, cum ex ea omnia, quæ ad pendulorum motus spectant, tanta facilitate deducantur: interim oscillationes pendulorum quam minimas considerare convenit propter rationes §. 174. indicatas, scilicet quia tum demum pendulum vel penduli pondus arculum isochronæ, cujus tempus dimensi sumus, percurrere censetur, cum minimum arculum circularem ipsum describit, quoniam, eo casu, talis arculus circularis osculatur arculum isochronæ duplum ipsius XA seu arculum XAX; posito arcu AX in curva BEA, ex altera axis AC parte constituta æquali arculo AX, & quia osculari atque congruere in Geometria unum idemque significant, saltem in ea parte, in qua osculum contingit. Sin verò arculi AX non sunt minimi, hæc tamen omnia adhuc subsistent, si pendula inter se collata vel eorum pondera curvas similes descripserint.

178. Ut igitur quæ in antecedentibus corollariis sparsim dicta

sunt

ſunt in compendium colligantur; nominentur numerus oſcillationum aliquo tempore peractarum à primo pendulo N, ejus longitudo L, quæ in ſchemate repræſentatur linea ⊖A, corporis A gravitas abſoluta G, ejus maſſa M, adeoque M nunc ſignificat idem ac A, & G idem ac linea A*a* in ſchemate; atque retenta T pro deſignando tempore duarum oſcillationum minimarum hujus penduli. In ſecundo pendulo eædem res iiſdem, ac in primo, literis; ſed minuſculis exprimantur, atque adeò corollarium 3. præbebit has regulas $T = p\sqrt{}(M. L : G)$ & $t = p\sqrt{}(m. l : g)$. Corollarium vero 4. exhibet $N : n = t : T$, vel $NT = nt$. Unde quot diverſis modis ſingulæ literæ T, G, L, M, N & homologæ *t*, *g*, *l*, *m*, *n* inter ſe conferri poſſunt, tot inde reſultabunt alia atque alia theoremata, à quibus omnibus ſigillatim recenſendis brevitatis gratia abſtineo. Hactenus iſochroniam tantum in genere conſideravimus nulli particulari hypotheſi gravitatis inhærentes. Quid verò ex una alterave ejuſmodi hypotheſeon reſultare debeat, indagabimus in ſequentibus problematibus.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA.

179. *Invenire iſochronam in hypotheſi gravitatis uniformis atque directionum gravitatis inter ſe parallelarum ſeu in centro infinite diſtanti coeuntium.* Fig. 41.

Quoniam centrum ſolicitationum gravitatis O infinite diſtat à baſi CD curvæ ARD, lineæ BC, EH, quæ antea (§. 172.) erant arcus circulares centro O deſcripti, nunc fient rectæ inter ſe parallelæ & axi AC perpendiculares: & quia (ſecundùm hypotheſin) gravitas uniformis, ejus ſcala erit linea recta *cha* axi AC parallela, & quia (§. 172.) $HR^2 = 2. HAah$, curva ARD hoc caſu parabola erit, cujus parameter 2Aa. At propter ⊖O & AO æquales, fiet $N = \sqrt{}(\Theta A : Aa)$. Jam quia (§. 172.) $AE = N. HR = N. \sqrt{}(2Aa. AH) = \sqrt{}(2\Theta A. AH)$, erit $\frac{1}{2} AE = \sqrt{}(\frac{1}{2}\Theta A. AH)$, vel biſecta ⊖A in C, erit $\frac{1}{2} AE = \sqrt{}(AC. AH)$, id eſt, ſuper diametro AC deſcripto ſemicirculo ASC, lineam EH ſecante in S, = ſubtenſæ AS, quandoquidem hæc media eſt geometrica inter diametrum AC & abſciſſam AH. Sic etiam $\frac{1}{2} Ae = As$, atque adeo $\frac{1}{2} Ee = AS - As$, id eſt demiſſa S*m* perpendiculari ſuper A*s* productam, = *sm*, adeoque $Ee = 2.sm$, in ſuppoſitione infinitæ parvitatis arculi E*e*, quo caſu *sm* eſt differentia ſeu exceſſus ſubtenſæ AS ſupra ſubtenſam mino-

rem

rem As. Verum quia ductis per puncta A & S tangentibus AT & ST occurrentibus in T, hæ tangentes erunt æquales, etiam *u*S æquabitur S*s*, atque adeò perpendicularis S*m* bifariam dividet basim *su* trianguli isoscelis *s*S*u*, adeò ut *su* sit $= 2sm$, atque adeo E*e* $= su$; idcirco quadrilaterum E*esu*, in quo latera opposita E*u* & *es* sunt æquidistantia & reliqua opposita latera E*e*, *us* æqualia, erit parallelogrammum, atque adeò ES $- es = u$S $=$ S*s*, hinc (§. 87.) omnes differentiæ ES $- es$ seu excessus maximæ ES supra minimam, quæ in vertice A nulla est, hoc est sola ES æquatur omnibus S*s* seu arcui circuli AS & sic ubique, propterea Isochrona quæsita BEA est *Cyclois* ordinaria, cujus semibasis BC æquatur peripheriæ semicirculi ASC. Quod erat inveniendum.

Corollarium.

180. Tempus descensus per cycloidis arcum BE, erit ad tempus per axis partem æquealtam CH, sicut arcus CS circuli generatoris interceptus inter parallelas BC & EH, ad subtensam CS ejusdem arcus. Nam propter parabolam ARD & circulum ASC, est CI(CD) : CP(HR) $=$ CA : AS, atque adeò anguli ICP & CAS vel CSH æquales sunt, adeò ut SC & CI in directum jaceant. Jam quia (§. 172. n. 11.) tBE $=$ N. ang. ICD erit etiam tBE $=$ N. ang. SAC, atqui (§. 129.) angulus SAC $= \frac{1}{2}$ arc. SC : $\frac{1}{2}$ CA $=$ arc. CS : CA, ergo tBE $=$ N. arc. CS : CA, vel quia N $= \sqrt{}(\Theta$A : Aa), erit tBE $=$ arc. CS. $\sqrt{}\Theta$A : CA$\sqrt{}$Aa, aut quia ΘA $=$ 2CA, fiet tBE $=$ 2.arc. CS : $\sqrt{}$(2CA. Aa) $=$ 2arc. CS : CD, propter parabolam ARD; & tCH (§. 151.) $= \sqrt{}$(2CH : Aa) nulla habita ratione massæ corporis, cum hoc loco mobile non conferatur cum aliis; sed unum idemque corpus tantum in linea curva BEA vel in axe CA moveri intelligatur, adeò ut loco ipsius M, quæ formulam articuli citati 151. ingreditur, poni possit unitas. Sed tCH $= \sqrt{}$(2CH : Aa) reducitur ad tCH $= \sqrt{}$(4AC. CH : 2CA. Aa) $=$ 2CS : CD; ergo tBE : tCH, ut fractio $\frac{2\text{arc. CS}}{\text{CD}}$ ad $\frac{2\text{subt.CS}}{\text{CD}}$; atque adeò tempus per BE est ad tempus per CH sicut arcus CS ad ejus subtensam CS.

Propterea tempus per totam semicycloidem BEA ad tempus descensus mobilis per axem ejus CA se habet, ut semicircumferentia CSA ad diametrum CA. prout primùm ab Hugenio, dein à multis aliis demonstratum est; sed ex fundamentis ab hisce nostris multum diversis.

PRO-

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA.

181. *Si scala solicitationum gravitatis centralium fuerit linea recta* ha, *quæ deorsum producta transeat per centrum* O *solicitationum gravitatis; invenire isochronam* BEA *in hac hypothesi.* Fig. 42.

Quia (§. 172.) $HR^2 = 2.HAah = (HO^2 - AO^2).Aa : AO$ propter trapezium $HAah$, curva AR invenitur hyperbola esse, in quâ $HR^2.AO : Aa = HO^2 - AO^2$.

II. Ex aliquo axis puncto G, tanquam centro, descriptus circulus AMN ab arcubus concentricis indefiniteque vicinis EH, eK secetur in punctis I & q actisque ex centro G ad hæc puncta radiis GI & Gq, tum etiam rectis AI & Aq, illa seu AI secet arcum eK in p, sitque arculus qr centro A descriptus, junganturque demum IO, qO & pO.

Jam in triangulo IGO, si GO consideretur instar baseos, erit ut supra (§. 171.) ostensum $IG^2.AO + IO^2.AG = AI^2.GO + GA.AO.GO$, atque adeo $AI^2.GO = IO^2.AG + IG^2.AO - GA^2.AO - AO^2.AG = HO^2.AG - AO^2.AG$, & per consequens $HO^2 - AO^2 = AI^2.GO : AG$ (vel num. 1. hujus) $= HR^2.AO : Aa$; hinc fiet $HR^2 : AI^2 = Aa.GO : AG.AO$, & (§. 172.) $AE^2 : HR^2 (= NN : I) = \Theta A.OA : \Theta O.Aa$, ergo ex æquo & per compositionem rationum fiet $AE^2 : AI^2 = Aa.GO.\Theta A.OA : AG.AO.\Theta O.Aa = \Theta A.GO : \Theta O.AG$, hinc $AE : AI = \sqrt{(\Theta A.GO)} : \sqrt{(\Theta O.AG)}$ atque adeò est curva AE ad homologam AI in data ratione, ac propterea $Ee : Ir = \sqrt{(\Theta A.GO)} : \sqrt{(\Theta O.AG)}$.

III. Ergo inter circulos concentricos EH & eqK ad punctum I aptanda esset quædam lineola, quæ sit ad Ir, differentiam inter subtensas IA & qA, in data ratione $\sqrt{(\Theta A.GO)}$ ad $\sqrt{(\Theta O.AG)}$. Verum quia facile videtur esse Ip portiunculam subtensæ AI à præfatis circulis concentricis interceptam ad prædictam subtensarum differentiam Ir in data ratione duplæ GD ad CF, demissis scilicet ex punctis G & C perpendicularibus ad lineam OI productam, vel duplæ GO ad CO; elementum ergo curvæ Ee lineolæ Ip æquale poni potest ex eo ipso, quòd Ip & Ee habeant ad Ir datam rationem, quod respectu rationis Ip ad Ir ita esse demonstrandum est. Agantur MC, IC, & MN, quo facto, erunt primum triangula Ipi & CIF similia, quandoquidem angulus CIA in semicirculo rectus efficit, ut duo pIi & CIF simul rectum æquent, ut adeò angulus pIi

æqua-

æqualis ſit angulo FCI & cum anguli ad i & F ſint (ſecundùm hypotheſin) recti, neceſſe eſt, ut tertius tertio atque adeo triangulum triangulo ſimile ſit. Secundo, quia angulus qIi ſub tangente Iq & ſecante IO, vel ejus verticaliter oppoſitus æqualis angulo MNI, in alterno ſegmento ipſius IM, angulique i & IMN recti ſunt, triangula ipſa INM & qIi ſimilia exiſtent. Tertiò, triangula etiam Iqr & CAI ſimilia erunt, quoniam angulus qIA ſub tangente Iq & ſecante IA æquatur angulo ICA in alterno ſegmento, & anguli ad r & AIC recti; adeoque tria hæc triangulorum ſimilium paria ſuppeditabunt has analogias $Ip : Ii = IC : CF$, item $Ii : Iq = MN : IN$, & denique $Iq : Ir = AC$ vel $IN : IC$; ergo ex æquo fiet $Ip : Ir = MN : CF = 2DG : CF = 2GO : CO$.

IV. Adeoque, cum ſit (num. II.) $Ee : Ir = \sqrt{(\Theta A . GO)} : \sqrt{(\Theta O . AG)}$ & num. III. $Ip : Ir = 2GO : CO$, erit $Ee = Ip$, ſi fuerit $\sqrt{(\Theta A . GO : \Theta O . AG)} = 2GO : CO$; hæc ergo rationum æqualitas aſſumatur, quoniam recta ΘA ad nullam adhuc magnitudinem eſt reſtricta, ſuamque magnitudinem etiam ad diametrum circuli CA relatam habere debet; fietque hoc caſu $\Theta A = 2OG . AC : AO$; nec non $Ip = Ee$ atque adeo $ip = fe$; porro (§. 129.) eſt $qp = pO$. ang. pOq, & $qr = Aq$. ang. $qAI = Aq . \frac{1}{2}$ ang. IGq. Verùm quia $pq : qr$ ($= Ip : Ii = IC : CF$) $= AC : MC$, ideò $MC . pq = AC . qr$, vel $pO . MC$. ang. $pOq = Aq$. AC. ang. $qAI = AI . AC . \frac{1}{2} IGq = AI . AG . IGq$, ergo $pOq = AI . AG . IGq : KO . MC$, ſed propter triangula ſimilia OIA & OCM, erit $IA : MC = IO : CO = HO$ vel $KO : CO$; propterea ponendo loco AI & MC, homologas proportionales KO & CO, fiet ang. $pOq = KO . AG$. ang. $IGq : KO . CO = AG . IGq : CO$, atque adeò omnes pOq, qui ſingulis IGq reſpondent $= AG$. omn. $IGq : CO = AG$. ang. $IGA : CO$, aut poſito angulo SOC $=$ omnibus qOp, fiet SOC $= AG . IGA : CO$, ſeu CO. ang. SOC $= AG$. ang. IGA, verùm (§. 129.) CO. ang. SOC $=$ arcui SC, & AG. ang. IGA $=$ arcui IA; ergo arcus SC $=$ arcui IA, atque BC $=$ AIMC. Jam $EOe = IOp = IOq + qOp$; ergo $\int EOe = \int IOq + \int qOp$, id eſt, EOA $=$ IOA $+$ SOC, ſed EOA $=$ EOT $+$ SOC, ergo EOT $+$ SOC $=$ IOA $+$ SOC, atque adeò EOT $=$ IOA; idcirco ſuper diametro ST $=$ CA deſcriptus ſemicirculus SET tranſibit per curvæ AB punctum E, eritque arcus SVE $=$ arcui SB, quandoquidem jam arcus AI vel TE ipſi CS, & AMC vel TVS toti CSB æquales ſunt oſtenſi. Propterea curva quæſita in hac hypotheſi particulari BEA eſt *Epycyclois* quæ deſcribitur motu puncti in circumferentia circuli SVT fixi E, cum ſcilicet

licet hic circulus in cava parte alterius circuli BSC ex B per S versus C volvitur; ita tamen ut initio motus punctum describens E in circulo mobili SVT punctum B immobilis tetigerit, atque ab hoc puncto B moveri cœperit, curvam BEA deinceps descripturum rotatione circuli SVT super BSC. Quod erat inveniendum.

Corollarium.

182. Si diameter circuli generatoris AC fiat infinita, cyclois BEA mutabitur in lineam rectam axi OC perpendicularem, idcirco etiam in hac recta corpora eodem tempore ad punctum A appellent, sive initium motus puncto A viciniſſimum ſit, ſive etiam ab eodem remotiſſimum fuerit.

Scholion.

Post Propositionem XXI. commodus locus fuiſſet de conatu centrifugo ex motu circulari oriundo aliqua adjiciendi: ſed quia ejusmodi conatuum centrifugorum theoria nonnulla circa motum pendulorum præſupponit, ſiquidem plene ſit tractanda, ideo etiam in hunc locum erat differenda. Poſtquam Hugenius veras horum conatuum leges aperuit ad calcem Horologii ſui Oſcillatorii, Illuſtr. Marchio Hoſpitalius Hugeniana theoremata, absque demonſtratione ab Autore ſuo propoſita, demonſtrata dedit in Actis Acad. Reg. Par. Scient. 1700, loquor de omnibus Hugenianis theorematibus de vi centrifuga: nam diu ante Hoſpitalium Newtonus nonnulla eorum demonſtraverat in *Philoſoph. Nat. Princ. Math.* viamque aperuerat, cui inſiſtendo reliqua omnia poſſent expediri; poſt laudatiſſimos hosce Geometras plures alii Autores Hugenii 13. theoremata de vi centrifuga demonſtrare conati ſunt, nonnulli laudabili ſucceſſu, alii vero non item, utpote qui paralogismis nonnullis demonſtrationes ſuas fœdarunt, ut facile oſtendi poſſet, ſi modo id è re eſſet. Sed ad rem: cum filum quoddam alicubi affixum alterique ſuo capiti annexum habens ponduſculum, circa punctum fixum converſum deſcribit circulum, id in plano moveri dicetur, cum reapſe in plano circuli moveatur; ſin verò filum motu ſuo ſuperficiem conicam deſcribit; id *Pendulum conicum* deinceps dicetur.

183. Sit ergo filum DM clavo in D affixum, in cujus extremitate annexum ſit corpus M, atque filum circa punctum D in plano Fig. 43.

conversum describat circulum RQM, cujus radius DM dicatur simpliciter R, conatus centrifugus C, velocitas qua mobile M in sua circumferentia æquabiliter revolvitur, V, & hæc velocitas, tanta sit quantam idem mobile M acquireret motu naturaliter accelerato à quiete in F post casum perpendicularem ex altitudine FM, quam *Altitudinem determinatricem* posthac vocabimus, atque litera D insigniemus. Tempus, quo mobil ecircumeundo peripheriam RQM unum circuitum absolvit, sit T; ac denique ratio peripheriæ ad semidiametrum sit ut p ad 1, adeò ut peripheria radii R, sit pR. Ipsa vero gravitas, ut jam alibi factum, dicetur G, quæ in præsenti materia non variabilis sed uniformis est consideranda.

Hisce jam positis, supra (§. 119.) dictum est solicitationem gravitatis cuilibet curvæ normalem coërcere conatum mobilis à curva juxta directionem tangentis recedendi, atque adeo ejusmodi conatui generaliter æqualem esse in omni curva; ac propterea etiam in circulo. Generaliter itidem (§. 154.) demonstratum est, respectu cujuslibet curvæ à mobili quodam describendæ, quadratum celeritatis in quolibet curvæ puncto æquivalere rectangulo sub radio osculi seu curvaturæ & rectæ, quæ solicitationem curvæ perpendicularem ex centrali derivatam exponit; necesse est ut hoc idem etiam valeat in circulo in *specie;* verum in circulo radius curvaturæ est ejus radius R, & solicitatio circumferentiæ perpendicularis conatui centrifugo C æqualis est, ac velocitas in quolibet peripheriæ puncto nobis dicitur V. Propterea vi citati theorematis (§. 154.)
Æq. I. $V^2 = R.C..$ I. Deinde quia motus æquabilis est in circulo erit $T = pR : V$, hoc est, tempus innotescit applicando peripheriam tanquam spatium transmissum ad velocitatem, qua id percurri-
Æq. II. tur, ergo etiam $T = pR : \surd RC = p.\surd(R:C)..$ Denique, si cona-
Æq. III. tus centrifugi conferendi sint cum gravitate G, tertia formula opus est, quam articulus 150. suppeditat $2.D.G = V^2..$

Hinc 1°. formulæ prima & tertia efficiunt $R.C = 2D.G$ atque adeò $C : G = 2D : R$ hoc est, conatus centrifugus se habet ad gravitatem, ut dupla lineæ determinatricis ad radium circuli; atque adeò ubi hæc determinatrix altitudo D semissem radii R æquaverit, conatus centrifugus gravitati æqualis erit. Quod est theor. 5. Hugenii.

2°. Si in diversis circulis tempora periodica T sunt æqualia etiam ipsæ $p\surd(R:C)$ æquabuntur, atque adeò conatus centrifugi radiis directe proportionales erunt.

3°. Si T ut R^n, erit V seu $pR : T$, ut R^{n-1} inverse, atque adeò

C

C seu $ppR:T^2$ erit reciproce ut R^{2n-1}. Proinde si conatus centrifugus fuerit reciproce ut T^2, erit tempus periodicum in ratione sesquiplicata radii R, & in hoc consistit celebre Kepleri theorema. Reliqua, quæ eadem facilitate ex tribus præcedentibus formulis elici possunt, Lectoris industriæ relinquimus, atque adeò ad contemplationem pendulorum conicorum absque ulterioribus ambagibus accedimus.

184. Si filum AM motu conico moveatur circa axem AD horizonti rectum, adeo ut pondus ipsi annexum M circumferentiam circuli MQR describat; id fieri non potest, quin præter gravitatem secundùm directionem ipsi AD parallelam in corpus M agentem eidem mobili insit conatus alius secundùm directionem DM agens. Nam ut filum AM in situ hoc sub angulo DAM ad axem inclinato detineatur duabus viribus aut solicitationibus lateralibus AB & BC opus est, quarum prior gravitatem exponit, altera verò BC nonnisi à motu circulari provenire potest, ex motu vero centrali resultat conatus centrifugus, ergo BC repræsentat ejusmodi conatum centrifugum. Agatur igitur BE æquidistans lateri AM, fietque $EM = BC$. Ponantur insuper $AD = A$, $AM = L$, $AB = G$, & $BC = EM = C$, radius $DM = R$, peripheria $MRQ = pR$, & perinde ac supra V celeritas mobilis in circumferentia MQ; quibus præsuppositis, erit iterum, ut in antecedenti paragrapho, tempus unius circuitus T mobilis M in peripheria MQR, dum filum AM superficiem conicam describit $= p\sqrt{(R:C)}$ verum ob parallelas AM & BE, est $AD:AB = DM:EM$, hoc est; $A:G = R:C$, ergo etiam $T = p\sqrt{(A:G)}$, hæc verò expressio etiam significat (§. 175. 178.) tempus duarum oscillationum minimarum lateralium penduli cujus A sit longitudo; magnitudo vero $\sqrt{(A:G)}$ significat tempus descensus perpendicularis alicujus gravis ex altitudine $\frac{1}{2}A$. Propterea tempora circuitus pendulorum conicorum sunt in subduplicata ratione altitudinum A conorum. Superfluum duco reliqua, circa ejusmodi pendula ab Hugenio indicata, theoremata operose demonstrare, cum ex hisce positis principiis sponte sua facillime fluant, ceu quilibet videbit, qui animum iis advertere velit. Priusquam tamen ad alia transeam, contemplabimur paulisper problema ab ingeniosissimo Joh. Bernoullio olim propositum quodque ab Illustr. Hospitalio solutionem nactum est; sed quoad arguendi formam à nostra differentissimam.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA.

Fig. 44. 185. *Invenire curvam* ABN *ejus conditionis, ut in ea descendens grave* A *motu naturaliter accelerato, eandem in singulis punctis premat vi ubique æquali ponderi corporis absoluto.*

I. Sint CD axis curvæ quæsitæ, CA prima ordinata in cujus continuatione AF exponat gravitatem seu pondus absolutum mobilis A, atque super ea descripto semicirculo AGF, agantur FG tangenti curvæ in puncto B, & Fg tangenti in b æquidistantes, junganturque AG, Ag. Radius deinde circuli osculatoris curvæ in puncto B, id est, BZ producatur in L, usquedum $BL = AF = BI$ quæ sumta est in ordinata curvæ DB ultra curvam prolongata. Ipsis AG, Ag fient æquales AM, Am, & denique ex puncto I demittatur perpendicularis IK ad lineam BL, eritque $BK = AG = AM$, atque adeò $MF = KL$.

II. Quoniam BI exponit pondus absolutum mobilis A vel B, ipsa BK exponet pressuram, quam pondus in curvæ punctum B exeret secundum directionem BL, sed præter hanc pressionem aliam insuper sustinebit idem curvæ punctum B à conatu centrifugo mobilis, ac per consequens hic conatus exponi debebit per KL, quandoquidem pressio totalis BL æquari debet (secundùm hypothesin) ipsi AF vel BI. Dicatur celeritas acquisita in B, V; eritque (§. 154.) $V^2 = BZ.KL = BZ.MF$, verùm (§. 150.) est etiam $V^2 = 2AF.DB$, ergo $BZ.MF = 2AF.DB$; hinc $Bb.MF : BZ.MF = Bb.MF : 2AF.DB$. Atqui similitudo sectorum BZb, GAh, & gFh præbet $Bb : BZ = Mm\ (gh) : gF$, atque ex similitudine triangulorum BbE, & FAG elicitur $Bb : AF = Eb : FG$; propterea subrogando in antecedenti analogia loco Bb, & BZ proportionales Mm & FG, atque loco Bb & AF, proportionales Ee & FG, eaque mutabitur in hanc alteram $Mm.MF : FG.MF = Eb.MF : 2DB.FG$, vel $2MF.Mm : FG.MF = 2Eb.MF : 2DB.FG$ vel ductis consequentibus in MF : FG, erit $2MF.Mm : MF^2\ (= 2Eb.MF : 2DB.MF) = Eb : DB$. Unde, quoniam decrementum $2MF.Mm$ est ad decrescentem MF^2 sicut incrementum Eb crescentis DB ad hanc crescentem, erit (§. 153.) crescens DB ad suam primam magnitudinem CA, ut decrescentis prima magnitudo, quæ est FA^2 ad decrescentem MF^2; adeoque sumta P media proportionali inter AC & DB, fiet $P^2 : AC^2 = AF^2 : MF^2$ vel $P : AC = AF : MF$, & convertendo $P - AC$:

P

$P = AG : AF$, hinc $AF^2 : AG^2 = P^2 : P^2 - 2AC.P + AC^2$, & dividendo $FG^2 : AG^2 = 2AC.P - AC^2 : P^2 - 2AC.P + AC^2$, & $FG : AG = \sqrt{(2AC.P - AC^2)} : P - AC = Eb : BE$: adeoque, si dicantur AC, a; CD, x; DB, y; Eb, dy, erit $p = \sqrt{ay}$, & $2pdp = ady$, & $FG : AG = \sqrt{(2AC.P - AC^2)} : P - AC$, fiet in his symbolis $dy : dx = \sqrt{(2ap - aa)} : p - a$, ergo $pdy - ady = dx\sqrt{(2ap - aa)}$, vel $apdy - aady = 2ppdp - 2apdp = adx\sqrt{(2ap - aa)}$, atque adeò $dx = (2ppdp - 2apdp : a\sqrt{(2ap - aa)})$ quæ mutatur in $dx = (q^4dq - a^4dq) : 2a^4$, cujus integralis est $10a^4x = q^5 - 5a^4q + 4a^5$ si scilicet positum fuerit $q = \sqrt{(2ap - aa)}$, atque retrogradiendo invenietur $q = \sqrt{(2a\sqrt{ay} - aa)}$ atque adeò æquatio curvæ quæsitæ $(aa, + (y - a - \sqrt{ay})$ in $\sqrt{(2a\sqrt{ay}, - aa)} = \frac{5}{2}ax$. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

186. Quoniam invenimus $BZ : DB = 2AF : MF$ & $P : CA = AF : MF$, vel $2P : CA = 2AF : MF$, erit pariter $2P : CA = BZ : DB$ & invertendo $CA : P = DB : BZ$, atque adeò radius evolutæ in quolibet curvæ puncto ope hujus analogiæ innotescit, quæ analogia consentit cum ea, quam Ill. Marchio Hospitalius tradidit in Actis Acad. Reg. Scient. Paris. 1700. ab initio.

Caput IV.

De Solicitationibus centralibus quibus corpora in orbibus mobilibus detinentur, & de motu Apsidum.

Definitio.

187. Sit ABE quilibet orbis *immobilis*, cui figura *abe* similis & æqualis dicatur orbis *mobilis*, quia circa punctum C ad quod solicitationes centrales diriguntur, reapse moveri intelligendus est; ea tamen ratione ut angulus AC*a*, quem axis ejus *ae* aliquo tempore descripsit, sit ad angulum *a*C*b*, quem arcus curvæ mobilis *ab* à mobili in curva incedente eodem hoc tempore descriptus subtendit, in ratione data. Axis *ae* motus, dicitur motus Apsidum. Fig. 45.

Co-

Corollarium I.

188. Quia angulus *a*CA ponitur ubique ad angulum *b*C*a* in data ratione, erit etiam componendo angulus *b*CA ad angulum *b*C*a*, vel descripto per orbis mobilis punctum *b* circulo *b*B immobilem orbem secante in puncto B, angulus *b*CA ad angulum BCA in data ratione. Cum Illustri Newtono nominemus rationem anguli BCA ad angulum *b*CA æqualem datæ F ad G.]

Corollarium II.

189. Cum mobile *a*, orbem mobilem *abe* circumeundo describens, duplicem habeat motum, scilicet eum, quo in suo orbe mobili incedit, tum etiam motum ipsius orbis, ex gemino hoc motu liquet compositum iri motum secundum lineam curvam AN*b*. Idcirco idem est, si mobile in curva immobili AN*b* movetur, quam si in orbe mobili *abe* incederet, & vis centripeta aut solicitatio centralis in curvæ AN*b* puncto *b* requisita prorsus eadem erit cum ea qua opus est ut mobile in curva mobili *abe* semper incedere possit absque eo, ut unquam à curva *ab* recedat, durante motu plani ejusdem *abea*. Propterea ad determinationem solicitationis centralis, quæ corpus semper in perimetro orbitæ mobilis retinere possit, tantum quærenda esset expressio solicitationum centralium pro singulis curvæ immotæ AN*b* ex duplici motu resultantis, scilicet ex motu orbitæ & ex motu corporis in orbita, punctis; ut Cel. Varignon id egit in Actis Acad. Scient. Paris. 1705. ad d. 5 Dec. Verum, quia tota res non ineleganter ex theoria conatuum centrifugorum derivari potest, id paucis ostendere libet.

PROPOSITIO XXXI. Theorema.

Fig. 45. 190. *Excessus solicitationis centralis requisitæ ad id ut corpus aliquod in orbita mobili circa punctum* C, *ut* abe *revolvi queat, supra solicitationem centralem, qua idem corpus in orbe immobili* ABE *delatum in pari distantia* BC, *vel* bC *urgetur, æquatur excessui conatus centrifugi puncti* b, *in orbe mobili arculum* bh *describentis, supra conatum centrifugum mobilis cujusdam extremitati* B *radii vectoris* CB *annexi atque arculum* BH *describere nitentis eo tempusculo, quo punctum* b *suum arculum* bh *conficeret.*

Quia

Quia corpus in orbita mobili movendum à rotatione seu motu circulari plani *abe* acquirit conatum recedendi à centro C, atque adeò à curva ipsa *ab*, necessum est, ut quædam solicitatio ad punctum C directa conatum ejusmodi excussorium retundat, ad id ut corpus in orbita mobili gyrari queat, nec extra eam vagetur; hancque solicitationem præcise æqualem esse oportet conatui illi centrifugo à solo plani motu orto, alioqui corpus in orbita mobili non detineretur, si solicitatio conatu centrifugo major vel minor esset: sed conatus centrifugus à motu plani *abe* oriundus est excessus conatus centrifugi puncti *b*, à motu radii vectoris *b* angulum *bCh* describere molientis, supra conatum centrifugum puncti B in orbita quiescenti ABE, arculum BH describere conantis; nam motus angularis *bCh* non solum involvit motum angularem BCH radii vectoris BC in orbita quiescenti alteri *bCh* contemporaneum, sed etiam motum ipsius orbitæ plani, ac propterea conatus centrifugus, qui resultat à motu puncti *b* in radio vectore *bC*, angulum *bCh* describente, non solum in se continet conatum centrifugum puncti B in radio vectore BC orbitæ quiescentis, angulum BCH describente, sed etiam conatum centrifugum, qui provenit à motu plani *abe*, adeoque hic conatus æquivalet excessui conatus centrifugi puncti *b*, supra conatum centrifugum puncti B in orbita immobili; atqui idem conatus centrifugus à motu plani *abe* ortus æqualis est solicitationi centrali, à qua retundi debet; & hæc solicitatio coërcens conatum centrifugum æquatur excessui solicitationis centralis in puncto orbitæ mobilis *b* supra solicitationem centripetam in orbitæ immobilis puncto B cum altero *b* æquè alto. Ergo hic excessus solicitationum centripetarum æquatur excessui conatuum centrifugorum in *b* & B. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII. Theorema.

191. *Iisdem positis, excessus solicitationis in orbitæ mobilis puncto* b, *supra solicitationem centripetam in orbitæ quiescentis puncto* B *æquealto, erit ad solicitationem centripetam in puncto* A *orbitæ immobilis in composita ratione ex ratione* $F^2 - G^2$ *ad* G^2 *& ratione solidi* $AC^2 . AO$ *ad solidum* BC^3; *existente* AO *radio circuli ejusdem curvitatis cum curva* ABE *in* A, *seu radio circuli curvam osculantis in* A.

Compendii gratia velocitates circulationis radiorum *b*C, BC, AC designabimus respective per *u*b, *u*B, *u*A; conatusque centrifugos Fig. 45.

pun-

punctorum b, B, A; gyrantium per cfb, cfB, cfA, ac denique sollicitationes centripetas in iisdem punctis per, cpb, cpB, cpA.

Jam I. quia velocitates radiorum Cb, CB sunt ut anguli eodem tempore ab ipsis descripti, erit ub : uB = ang. bCb : ang. BCH (§. 188.) = F : G, ergo $(u\mathrm{b})^2 : (u\mathrm{B})^2 = \mathrm{F}^2 : \mathrm{G}^2$. Atqui in circulis æqualibus conatus centrifugi sunt in duplicata ratione velocitatum, ergo $cf\mathrm{b} : cf\mathrm{B} = \mathrm{F}^2 : \mathrm{G}^2$, & dividendo $cf\mathrm{b} - cf\mathrm{B} : cf\mathrm{B} = \mathrm{F}^2 - \mathrm{G}^2 : \mathrm{G}^2$.

II. Porro cum in orbita quiescenti æqualibus temporibus æquales areolæ BCD vel BCH, & ACα describantur, velocitates radiorum BC, AC hisce radiis erunt reciproce proportionales, hoc est $u\mathrm{B} : u\mathrm{A} = \mathrm{AC} : \mathrm{BC}$, & $(u\mathrm{B})^2 : (u\mathrm{A})^2 = \mathrm{AC}^2 : \mathrm{BC}^2$. atqui (§. 183. æqu. 1.) est $(u\mathrm{B})^2 = \mathrm{BC}.cf\mathrm{B}$, & $(u\mathrm{A})^2 = \mathrm{AC}.cf\mathrm{A}$. Ergo $\mathrm{BC}.cf\mathrm{B} : \mathrm{AC}.cf\mathrm{A} = \mathrm{AC}^2 : \mathrm{BC}^2$, vel etiam ductis in hac ultima analogia antecedentibus in AC & consequentibus in BC, eritque $\mathrm{AC}.\mathrm{BC}.cf\mathrm{B} : \mathrm{AC}.\mathrm{BC}.cf\mathrm{A} = cf\mathrm{B} : cf\mathrm{A} = \mathrm{AC}^3 : \mathrm{BC}^3$, verum (num. 1.) erat $cf\mathrm{b} - cf\mathrm{B} : cf\mathrm{B} = \mathrm{F}^2 - \mathrm{G}^2 : \mathrm{G}^2$, ergo per rationum compositionem & ex æquo fiet $cf\mathrm{b} - cf\mathrm{B} : cf\mathrm{A} = (\mathrm{F}^2 - \mathrm{G}^2).\mathrm{AC}^3 : \mathrm{G}^2.\mathrm{BC}^3$. Porrò quia (§. 183.) $(u\mathrm{A})^2 = \mathrm{AC}.cf\mathrm{A}$, & (§. 154.) $(u\mathrm{A})^2 = \mathrm{AO}.cp\mathrm{A}$, existente AO radio circuli curvam ABE in puncto A osculantis, erit $\mathrm{AC}.cf\mathrm{A} = \mathrm{AO}.cp\mathrm{A}$, atque adeò $cf\mathrm{A} : cp\mathrm{A} = \mathrm{AO} : \mathrm{AC}$; ergò denuo ex æquo $cf\mathrm{b} - cf\mathrm{B} : cp\mathrm{A} = (\mathrm{F}^2 - \mathrm{G}_2).\mathrm{AC}^2.\mathrm{AO} : \mathrm{G}^2.\mathrm{BC}^3$; atqui per Prop. præc. est $cf\mathrm{b} - cf\mathrm{B} = cp\mathrm{b} - cp\mathrm{B}$, ergo excessus solicitationis centripetæ in b solicitationem in B, est ad solicitationem centripetam in A; in composita ratione, ex ratione $\mathrm{F}^2 - \mathrm{G}^2$ ad G^2 & ratione solidi $\mathrm{AC}^2.\mathrm{AO}$ ad solidum BC^3. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

192. Adeoque in quolibet puncto b orbitæ mobilis abe, solicitatio centralis erit ut $cp\mathrm{B}, + (\mathrm{F}^2 - \mathrm{G}^2).\mathrm{AC}^2.\mathrm{AO}.cp\mathrm{A} : \mathrm{G}^2.\mathrm{BC}^3$.

Corollarium II.

193. Hinc si orbita ABE, abe, fuerit elliptica, ita ut $cp\mathrm{B} : cp\mathrm{A} = \mathrm{AC}^2 : \mathrm{BC}^2$, atque adeò $cp\mathrm{B} = \mathrm{AC}^2.cp\mathrm{A} : \mathrm{BC}^2$, erit $cp\mathrm{b} = \mathrm{AC}^2.cp\mathrm{A} : \mathrm{BC}^2, + (\mathrm{F}^2 - \mathrm{G}_2).\mathrm{AC}_2.\mathrm{AO}.cp\mathrm{A} : \mathrm{G}^2.\mathrm{BC}^3$.

Scholion.

194. Inventa jam generali lege solicitationum centralium in orbitis

bitis mobilibus, problema, inveniendi ex data lege ſolicitationum centripetarum rationem F ad G, qua motus apſidis *ae* determinatur, ſolutu difficile non erit per methodum mox exponendam. Ingenioſa eſt via & oppidò elegans quam Cel. Newtonus ſequutus eſt in ſolutione ejusdem Problematis, ſupponens orbitas propemodum circulares, quamque fuſius explicat Sect. IX. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* & poſtea prolixo commentario illuſtravit Dav. Gregorius in ſuis Aſtronomiæ Phyſicæ & Geometricæ Elementis Lib. IV. Sect. II. Laudata Newtoni methodus conſiſtit in comparatione terminorum alicujus ſeriei infinitæ cum homologis terminis in Canone pro determinatione ſolicitationum centripetarum in orbita mobili, eaque pro ſingulis novis exemplis novas ſeries novumque calculum ſubducendum depoſcere videtur. Sed quid, ſi modum facillimum aperuero, quo idem absque ullo ſerierum infinitarum auxilio obtineri queat, imo longe plura; quandoquidem præbet canonem generalem, quæcunque ſolicitationis centripetæ ſit lex, rationem F ad G manifeſtantem?

195. Sit generaliter ſolicitatio centripeta in orbitæ mobilis puncto b, ut $P : BC^3$, eritque (§. 193.) $P = AC^2 . BC . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^2 . AO . cpA : G^2$; &, ſi decrementum infiniteſimum magnitudinis P, dicatur $Q . bm$; formula determinans ſolicitationem centripetam in orbitæ mobilis puncto d, erit $P, - Q . bm = AC^2 . dC . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^2 . AO . cpA : G^2 = AC^2 . BC . cpA - AC^2 . bm . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^2 . AO . cpA : G^2$, quæ ex priore ſubducta relinquet $Q . bm = AC^2 . bm . cpA$, vel $Q = AC^2 . cpA$; qui valor in prima hujus articuli æquatione ſubſtitutus, efficiet $P = Q . BC + (F^2 - G^2) . Q . AO : G^2$, ex quâ elicietur $F : G = \surd(P - Q . BC + Q . AO : Q . AO)$. Verum, quia ellipſin ABE ad formam circularem quam proxime accedere cum Newtono ſupponimus, ideo ipſæ BC, AC & AO tanquam æquales tractandæ ſunt, nam ſemiſſis parametri ellipſeos, ſeu AO, à ſemidiametro AC vel BC circuli in quem deſinit, non differet; ac propterea præcedens analogia abit in hanc ſimplicem $F : G = \surd P : \surd Q . AO$. Qui eſt Canon generalis, qui quærebatur atque promittebatur ſupra, pro orbita mobili elliptica.

196. Regulam præcedentem unico exemplo illuſtrare libet, quod nobis omnium inſtar erit, idque ab Illuſtri Newtono mutuabimur. Sit ergo ſolicitatio centripeta in orbitæ mobilis puncto b, ut quantitas $\frac{az^m + bz^n}{z^3}$, ubi z ſignificat bC vel BC in fig. 45, eritque proinde

de $P = az^m + bz^n$, & $Q . bm \neq Q . dz = amz^{m-1}dz + bnz^{n-1}dz$, hoc est $Q = amz^{m-1} + bnz^{n-1}$, hinc $F : G (= \sqrt{P} : \sqrt{Q . AO}) = \sqrt{(az^m + bz^n : amz^{m-1} AO + bnz^{n-1} AO)}$. Verùm, quia juxta monita in articulo præcedenti, z vel $bC = AC = AO$, cum Newtono æquales unitati poni possunt, reperitur $F : G = \sqrt{(a + b : am + bn)}$ prorsus ut habet Newtonus in exemplo 3. post Prop. 45. *Lib. I. Princ. Phil. Nat.* Sin vero fuisset $P = az^m - bz^n$, invenissemus pariter ut Laudatiss. Vir, $F : G = \sqrt{(a - b : am - bn)}$.

Denique si solicitatio centralis $P : BC^3$ fuerit ut BC^m, atque adeò $P = BC^{m+3}$, ex motu apsidum, seu ex ratione $F : G$, invenietur index m potestatis BC^m. Nam reperietur hoc casu $Q = \overline{m+3}\, BC^{m+2}$, unde si $AO = AC = BC = 1$, erit $F : G = \sqrt{(1 : m + 3)}$ atque adeò $m = (G^2 - 3F^2) : F^2$.

CAPUT V.

De Motibus gravium inter se connexorum atque in arcubus circularibus concentricis junctim delabentium; seu de motu Pendulorum compositorum eorumque centro oscillationis in omni possibili gravitatis variabilis hypothesi.

THeoriam centri oscillationis Hugenius primus, quod sciam, aperuit in parte quarta eximii Tractatus de Horologio Oscillatorio. Sed quia is principio institit, quod indemonstratum supposuit, verissima ejus doctrina ab omnibus integrum assensum non impetravit. Petebat enim, ut sibi concedatur, fore ut centrum commune gravitatis omnium, compositi cujusque penduli, partium non possit altius assurgere, cum unaquæque particula diffracto vinculo, quo cum reliquis connexa erat, ea celeritate ascensum suum liberum incipiet, quam junctim cum reliquis descendendo acquisiverat, quin unde delapsum erat descensu totius penduli compositi. Celeb. Jac. Bernoulli alia via longitudinem penduli simplicis composito isochroni generaliter determinans, demonstrationem postulati Hugeniani inde deduxit, sed tantum in hypothesi gravitatis in singulas penduli partes uniformiter agentis. Nos verò rem generalius concipiemus, fingentes gravitatem in partes illas utcunque difformiter agere at-

que

que hoc non obstante methodo directa & facili memorabilem naturæ legem demonstrabimus; ascensum scilicet centri gravitatis omnium penduli compositi partium, modo paulo supra memorato, æqualem esse descensui ejusdem, tametsi, pro variante in singulis penduli partibus gravitate, centrum earum gravitatis multum diversum sit ab eo, quod est in hypothesi communiori gravitatis uniformis & proportionalitatis ponderum cum massis corporum.

DEFINITIONES.

I.

Pendulum compositum vocatur, quod pluribus corporibus seu partibus inter se connexis instructum est. Simplex verò quod unico pondere constat.

II.

Axis penduli compositi est recta, quæ ex puncto suspensionis immobili, circa quod scilicet totum pendulum reciproco motu eundo & redeundo oscillatur, per commune centrum gravitatis omnium partium penduli compositi transit.

III.

Axis oscillationis est linea penduli axi perpendicularis per punctum suspensionis transiens, circa quam pendulum vibrationes suas peragit.

IV.

Centrum oscillationis est punctum in axe penduli, cujus distantia ab axe oscillationis æquatur longitudini penduli simplicis composito synchroni.

V.

Pendulum simplex composito synchronum dicitur, cum hujus axis & illud ex situ horizontali, vel quolibet alio ad horizontem similiter inclinato, simul exire incipientes æquales constanter angulos simul oscillando conficiunt.

197. Penduli compositi CPQ, circa punctum suspensionis C convertibilis, lineæ omnes CP, CM, CQ, PQ gravitatis expertes sint; in terminis vero rectæ PQ ponduscula quæcunque P, Q affixa existant, quorum commune centrum gravitatis sit M, recta CM per Fig. 46.

pun-

punctum suspensionis C & centrum gravitatis ponderum M ducta, vocatur *axis* penduli compositi PQC, recta vero CW axi CM perpendicularis per suspensionis punctum C ducta, est axis oscillationis. Porro si penduli compositi axis CM ex situ horizontali CA delapsus venerit in situm CN eo tempore, quo pendulum simplex etiam ex situ horizontali in CN ceciderit, angulosque perpetuo æquales ACM & ACN confecerint compositum CPQ & simplex pendulum CN, hoc illi *synchronum*, vel subinde etiam *isochronum* dicetur; pondusculum verò in pendulo simplici N, instar puncti gravis consideratum, ad axem penduli compositi adductum atque applicatum, in eo signat *centrum oscillationis* N.

VI.

198. *Solicitationes vicariæ* solicitationum gravitatis centralium sunt solicitationes tangentiales loco centralium gravitatis cogitatione substituendæ, atque solicitationibus hisce æquipollentes. Sic solicitationes tangentiales expositæ per facta ex magnitudinibus R, S, &c. & V in massas P, Q &c. & N; hoc est solicitationes R. P, S. Q, &c. & V. N in directionibus PR, QS &c. & NV, quæ tangentes sunt arcuum P*e*, Q*f*, &c. N*n* à corporibus P, Q &c. & N oscillando descriptorum, in sua respectiva corpora agentes, sunt vicariæ solicitationum gravitatis centralium secundum directiones horizonti normales AP, BQ &c. YN in corpora P, Q, &c. & N agentium, si eundem cum hisce effectum producere valent, atque adeò in oppositas partes secundum P*r*, Q*s* &c. & N*u* agentes in æquilibrio consistunt cum solicitationibus gravitatis centralibus, quas deinceps etiam exponam per facta E. P, F. Q &c. & G. N ex magnitudinibus E, F, &c. & G in massas P, Q, &c. & N.

VII.

199. Ac denique *Solicitationes vicariæ similes* dicentur, quoties magnitudines R, S, &c. & V, homologis distantiis PC, QC &c. & NC proportionales erunt.

VIII.

200. Motus penduli compositi CPQ & simplicis CN similiter accelerari dicuntur, cum celeritatis incrementa infinitesima à solicitationibus gravitatis centralibus quolibet tempusculo minimo in singulis penduli particulis P, Q &c. & simplicis pondusculo N simul

mul producta, ubique proportionalia sunt homologis distantiis PC, QC &c. & NC particularum oscillantium & corpusculi N ab axe oscillationis.

201. Celeritates actuales & jam acquisitas particularum P, Q &c. penduli compositi, deinceps vocabimus p, q &c. respective, earumque elementa seu incrementa momentanea dp, dq &c. Celeritatem verò corpusculi N penduli simplicis nominabimus n, ejusque incrementum momentaneum dn. Ac tandem solicitatio gravitatis centralis, qua particula P in directione AP urgetur, sit E. P, solicitatio verò centralis particulam Q secundum directionem BQ urgens dicatur F. Q; ac solicitatio gravitatis, qua particula N in directione YN afficitur, G. N.

PROPOSITIO XXXIII. LEMMA.

202. *Solicitationes vicariæ* R, S, &c. *juxta directiones* PR, QS, &c. *in particulas* P, Q, &c. *penduli compositi agentes eadem velocitatis incrementa singulis hisce particulis imprimere valent, quæ solicitationes gravitatis centrales* E, F, &c. *juxta* AP, BQ, &c. *in easdem particulas* P, Q, &c. *agentes; atque adeo vicariæ illæ eodem, quo hæ centrales solicitationes, modo penduli compositi motum accelerabunt.* Fig. 46.

Quia compositi penduli partes inter se connexæ sunt; similes arcus simul cunctæ describent, atque suum motum semel conceptum absque ulla mutatione continuarent, nisi gravitas indesinenter in eas agens motum penduli acceleraret. Ad rem nostram motus actualis consideratio nihil confert, quandoquidem in præsenti negotio hic motus jam acquisitus tanquam motus *communis* considerari debet, quo singulæ penduli particulæ abripiuntur; sed celeritatis incrementa particulis istis recens imprimenda tanquam motum earundem particularem nunc spectabimus, & hunc motum nascentem perinde oriri posse à solicitationibus vicariis R, S, &c. ut à centralibus gravitatis E, F, &c. probandum.

Etenim si hoc negetur, imprimant, si fieri potest, gravitatis solicitationes E, F, &c. particulis P, Q, &c. majorem celeritatem quam solicitationes vicariæ R, S, &c. ergo hæ solicitationes, secundum Pr, Qs, &c. agentes, non consisterent in æquilibrio cum solicitationibus E, F, &c. iisdem particulis P, Q, &c. applicatis, quod est contra hypothesin. Idem absurdum sequetur, si dicatur solicitationes gravitatis E, F, &c. minores particulis P, Q, &c. celeritates imprimere posse quam vicariæ. Ergo &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV. Lemma.

203. *Si singulæ particulæ* P, Q, &c. *alicujus penduli compositi à solicitationibus* P. R, S. Q, &c. *quarum* R, S, &c. *similes sint ipsi* V, *denotante* V. N *solicitatione tangentiale mobilis* N, *juxta directiones* PR, QS, &c. *urgentur, celeritates infinitesimæ* dp, dq, &c. *&* dn *ipsis* P, Q, &c. *&* N *impressæ erunt similes, hoc est radiis* PC, QC, &c. *&* NC *proportionales.*

I. Sint radii NC, PC, QC &c. libere atque independenter uni ab aliis volubiles circa axem C, & quia (§. 131.) quælibet solicitatio æquivalet motui genito applicato ad tempusculum infinitesimum, quo motus iste producitur, & quia in casu nostro omnes solicitationes vicariæ R, S, V, simul seu eodem tempore agunt, erunt hæ solicitationes ut motus P. *dp*, Q. *dq* &c. & N. *dn*; atque adeò ipsæ R, S, & V, ut *dp*, *dq* &c. & *dn*, atqui ipsæ R, S, &c. & N, (secundùm hypothesin) sunt, ut radii PC, QC, &c. & NC, ergo & celeritates nascentes *dp*, *dq*, &c. & *dn* iisdem PC, QC, &c. & NC proportionales sunt.

II. Cum igitur celeritates *dp*, *dq*, &c. & *dn* similes sint; motus angulares PC*e*, QC*f*, &c. & NC*l* æquales, hoc est anguli simul descripti PCQ & *e*C*f* æquales erunt, perinde ac rectæ PQ & *ef* particulas PQ connectentes; adeò ut tali motu nulla variatio ratione mutuæ positionis particularum P, Q, &c. accidere possit. Propterea solicitationes tangentiales similes R, S, &c. & V particulis P, Q, &c. similes motus impriment, sive particulæ illæ P, Q, inter se connexæ sint, ut in pendulis compositis, sive non. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

204. Hinc quia (§. 202.) solicitationes vicariæ similes R, S, &c. & V in directionibus PR, QS, &c. & NV corporibus P, Q, &c. & N applicatæ eodem modo pendulorum simplicis CN & compositi CPQ motus accelerant, quo fieret à solicitationibus gravitatis E, F, &c. & G in particulas P, Q, &c. & N agentibus; liquet omninò ambo pendula simplex & compositum, ex simili situ respectu horizontis moveri incipientia, similiter deinceps & constanter motum iri, ita ut æquales semper angulos YCN, ACM simul conficiant,

ficiant atque adeo (§. 197.) unum CN alteri CPQ *synchronum* aut *isochronum* sit; & conversim, si hæc pendula synchrona sint, solicitationes vicariæ R, S, &c. & V similes erunt.

PROPOSITIO XXXV. Theorema.

205. *Si singulæ particulæ cujusque penduli compositi derepente alicubi vinculo solutæ motum in altum convertant, unaquæque ea celeritate quam cum reliquis connexa oscillando acquisivit, commune omnium penduli partium gravitatis centrum ad eam ipsam altitudinem ascendet, ex qua delapsum erat descensu totius penduli compositi, cum scilicet omnes penduli partes adhuc connexæ essent.*

I. Axis penduli compositi ex situ horizontali CA in situm CM delapsum esse ponatur motu accelerato, particulas vero P, Q, &c. vinculis solutæ ascendere in rectis P2P, Q2Q, &c. unamquamque celeritate initiali, quam cum reliquis oscillando acquisivit; ita ut commune omnium gravitatis centrum M ascendat per lineam M2M. Probandum est hanc M2M æqualem fore ipsi DM, quæ profunditatem denotat, ex qua omnium penduli partium centrum gravitatis cecidit motu totius penduli compositi. Quia nunc P, Q, N denotant massas corporum & E. P, F. Q, &c. G. N eorundem pondera, horum summa, excepto pondere N, dicatur M, hoc est, M = E. P + F. Q + &c., eritque (§. 48.) propter centrum gravitatis M; E. P. AC + F. Q. BC = M. DC, nec non E. P. AP + F. Q. BQ + &c. = M. DM; ac denique E. P. P2P + F. Q. Q2Q + &c. = M. M2M.

II. Sit insuper pendulum simplex CN composito *synchronum*, adeò ut id cum CM congruat atque celeritates ponduscolorum N, P, Q, &c. similes sint; eruntque adeò (§. 204.) solicitationes vicariæ R, S, &c. V similes, verùm quia (§. 198.) solicitationes vicariæ solicitationibus gravitatis centralibus E, F &c. G æquipollent, atque cum hisce in æquilibrio consistere queunt, erit (§. 56.) E. P. AC + F. Q. BC + &c. id est (num. 1.) = M. DC = R. P. PC + S. Q. QC + &c. & G. N. YC = V. N. NC, atque hinc resultat analogia M. DC : G. N. YC = R. P. PC + S. Q. QC + &c. : V. N. NC (vel quia R, S, &c. & V radiis PC, QC, &c. NC proportionales sunt) = P. PC² + Q. QC² + &c. : N. NC²; at celeritates p, q, &c. n corpusculorum P, Q, N etiam radiis PC, QC, NC proportionantur, ergo M. DC : G. N. YC, vel (propter triangula

 simi-

similia CDM & CYN) ratio M.DM : G.N.YN = P.*pp* + Q.*qq* + &c. : N.*nn*.

III. Quoniam (secundùm hypothesin) corpuscula P, Q, &c. celeritatibus initialibus *p*, *q*, ascendentia spatia P2P, Q2Q ascendendo emetiri possunt, (§. 141.) eadem corpuscula spatia 2PP, 2QQ à quiete perlabentia celeritates suas *p*, *q* &c. acquirere queunt, adeò ut (§. 150.) 2E. P2P = *pp*; 2.F. Q2Q = *qq*, & 2.G. NY = *nn*; loco *pp*, *qq*, *nn* substituendo valores inventos in ultima analogia numeri secundi hujus, erit M. DM : G. N. YN = 2.E.P. P2P + 2.F. Q.Q2Q + &c. hoc est (num. 1. hujus) 2M. M2M : 2G. N. NY = M. M2M : G. N. YN. Ergo cum consequentes primæ & ultimæ rationis æquales sint, antecedentes etiam æquabuntur; atque adeò M. DM = M. M2M, vel DM = M2M. Id est centrum gravitatis ad eandem altitudinem ascendit, ex qua delapsum erat. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

206. Resumendo ex num. 11 articuli præcedentis analogiam M. DC : G. N. YC (= R. P. PC + S. Q. QC + &c. : V. N. NC) = P. PC^2 + Q. QC^2 + &c. : N. NC^2, si loco rectarum DC, YC earum proportionales MC & NC in eadem analogia substituantur, fiet M. MC : G. N. NC = P. PC^2 + Q. QC^2 + &c. : N. NC^2, ex quâ facile elicitur sequens formula generalis NC = (P. PC^2 + Q. QC^2 + &c.). G : M. MC pro determinatione penduli simplicis CN composito CPQ *isochroni*, in qua formula M = E. P + F. Q + &c. & E. P, F. Q &c. pondera corporum P, Q &c. denotant, ac punctum M ipsorum centrum gravitatis.

COROLLARIUM II.

207. Si singulæ E, F, &c. & G æquales fuerint, formula præcedentis corollarii fit NC = (P. PC^2 + Q. QC^2 + &c.) : M. MC, ubi nunc M = P + Q + &c. Atque hæc foret generalis formula pro omnibus figuris in systemate vulgari gravitatis uniformis in omnibus penduli partibus, quod secuti sunt Celeberrimi Geometræ Hugenius & Jac. Bernoullius sua methodo particulari.

Corollarium III.

208. Iisdem positis, quæ in corollario antecedenti, si duæ tantum particulæ P, Q penduli compositi spectentur, quarum M etiamnunc centrum gravitatis & aggregatum designet. Habetur (§. 171.) $PC^2.MQ + QC^2.MP = MC^2.PQ + MP.MQ.PQ$. Vel substitutis loco rectarum MQ, MP, & PQ ipsarum proportionalibus, quæ propter centrum gravitatis M particularum P, Q, eodem ac illæ ordine sumta, sunt P, Q, & P + Q seu M; fiet $P.PC^2 + Q.QC^2 = M.MC^2 + M.MP.MQ$, atque adeò formula præcedentis corollarii $CN = (P.PC^2 + Q.QC^2) : M.MC$, nunc fiet $CN = (M.MC^2 + M.MP.MQ) : M.MC$. Adeoque, si innumera sumantur particularum P, Q paria, quibus totum pendulum compositum sit, longitudo penduli simplicis CN composito isochroni tunc erit $\int(M.MC^2 + M.MP.MQ) : \int M.MC$, ubi $\int$ significat summam seu integrale illius quantitatis, cui litera $\int$ præfixa est. Idcirco, si cum Cel. Jac. Bernoullio particulæ P, Q inter se æquales, dicantur dp, & CM, x; MP verò vel MQ, y, hæ enim æquales erunt cum ipsæ P & Q æquentur, earumque centrum gravitatis sit in puncto M; erit $CN = \int(2xxdp + 2yydp) : \int 2xdp = \int(xx + yy).dp : \int xdp$; quæ est ipsissima formula, quam Acutiss. Vir in Actis Academiæ Reg. Paris. Scient. 1703. ad diem 25. Apr. ex sua methodo elicuit. Quomodo vero formula hæc figuris & solidis debeat applicari, non est hujus loci ostendere, cum id pendeat à calculo summatorio, quem non patitur institutum nostrum prolixius exponere; legi interim possunt, quæ habet super hanc rem Vir laudatissimus loco modo indicato.

Scholion.

209. Universalitas Canonis in corollario primo (§. 206.) exhibiti melius non poterit probari, quam si ostendatur illum jam continere regulam definiendi centrum oscillationis in quolibet pendulo composito, cujus partes diversæ specificæ gravitatis oscillentur in fluido quodam homogeneo, aut, quod eodem recidit, cujus particulæ ex materia eadem ejusdemve specificæ gravitatis vibrationes suas in fluido diversæ densitatis peragant; qualem regulam nobis promittit Celeb. Joh. Bernoullius Act. Lips. 1713. pag. 88. Nam si ratio gravitatis specificæ ponduscuii P ad fluidum, in quo oscil-

latur, sit ut G ad G—E, & ratio gravitatis specificæ ponduscuIi Q liquorisque ut G ad G—F, prædicta formula articuli 206. exhibebit longitudinem penduli simplicis CN in vacuo oscillantis atque composito CPQ, quod in fluido vibrationes suas peragit, isochroni.

Exempli causa sit P globulus aureus, Q ferreus, atque pendulum CPQ oscilletur in aqua; & quia gravitates auri, ferri & aquæ sunt ut numeri 100, 42 & 5 ad invicem quam proxime, erit $G:G-E=100:5$, atque adeo $E=\frac{95}{100}G$; & $G:G-F=42:5$, adeoque $F=\frac{37}{42}G$; hinc quia (secundùm hypothesin) $M=E.P+F.Q$, erit M hoc casu æquale $(\frac{95}{100}P+\frac{37}{42}Q).G$; atque adeo formula generalis corollarii primi substitutione valoris M, fiet $NC=(P.PC^2+Q.QC^2).G:(\frac{95}{100}P+\frac{37}{42}Q).G=(P.PC^2+Q.QC^2):(\frac{95}{100}P+\frac{37}{42}Q)$. In qua P & Q denotant massas harum particularum, seu etiam pondera earum absoluta, quæ (§§. 30, 152, 175.) massis semper proportionalia sunt. Punctumque M est centrum gravitatis, non ipsorum corpusculorum P, Q sed eorum partium $\frac{95}{100}P$ & $\frac{37}{42}Q$. Hinc ergo liquet, centrum percussionis differre in hoc casu à centro oscillationis. Errant ergo, qui nulla habita ratione gravitatis subitò identificant, atque confundunt hæc duo centra oscillationis & percussionis.

Si formula corollarii primi applicetur corporibus P, Q, quæ liquore specificè leviora sunt, totus formulæ denominator migrabit in quantitatem negativam, quod indicat pendulum situ inverso respectu præcedentis casus oscillationes suas intra liquorem absolvere describendo arcus versus fundum vasis cavos existente oscillationis axe prope fundum. Quomodo prædicta formula pendulis compositis debeat applicari, in quibus singulæ partes in una eademque linea recta dispositæ sunt, nimis planum esse existimo, quam ut ulla explicatione indigeat.

PROPOSITIO XXXVI. Theorema.

Fig. 47. 210. *Identitas centri oscillationis & percussionis eo casu, quo singularum penduli compositi partium pondera massis earundem proportionalia sunt.*

Si

Si particulæ P, Q &c. virgis inflexilibus CP, CQ, PQ inter se connexæ convertantur circa axem CW, punctum in axe CN penduli N, in quo maxima vis in obstaculum ipsi objectum eo exeretur, vocatur centrum percussionis, ostendendumque est hoc punctum tantumdem ab axe oscillationis CW distare, quantum centrum oscillationis in casu Coroll. 2 Prop. anteced. (§. 207). Radiis CP, CQ agantur normales PB, QE axi CM occurrentes in punctis A & D, per quæ & per centra corpusculorum P, Q ducantur normales AO, DF, PG & QH ad axem CM. Atque hisce positis statim manifestum est conversione totius figuræ CPQ circa axem CW, particulas P, Q motum iri celeritatibus proportionalibus earum distantiis PC, QC ab hoc axe; atqui juxta ea, quæ supra (§. 53.) dicta sunt, axis penduli CM eandem à particulis P, Q circa C in gyrum actis impressionem accipiet, quam si ejus puncta A & D, in quibus scilicet directiones ponderum in quolibet arcus ab ipsis describendi puncto motum suum prosequi nitentium axi occurrunt, juxta directiones AB & DE illis ipsis celeritatibus impellantur, quas particulæ P & Q &c. habent; propterea factis AB, DE &c. æqualibus vel saltem proportionalibus homologe radiis CP, CQ qui velocitates exponunt, quibus particulæ P, Q in gyrum aguntur, quæstio reducetur ad id, ut inveniatur centrum æquilibrii potentiarum P. AB & Q. DE; sit N hoc centrum, quod ita comparatum esse debet, ut ductis ex eo ad singulas PB, DE, &c. perpendicularibus Na, Nd &c. omnia facta P. AB. Na æqualia sint omnibus factis Q. DE. Nd. Sed ductis BO & EF parallelis CM, triangula AOB, Na A similia præbent AB. Na = AO. AN & triangula similia DFE & NdD efficiunt DE. Nd = DF. DN; oportet ergo ut omnia P. AO. AN sint æqualia omnibus Q. DF. DN; considerentur tantum duæ P, & Q, eritque P. AO. AN = Q. DF. DN, vel P. AO. AC − P. AO. NC = Q. DF. NC − Q. DF. DC, atque adeò P. AO. AC + Q. DF. DC = (P. AO + Q. DF). NC; verum quia AO = CG & DF = CH propter triangula similia & æqualia ABO & CPG, utpote in quibus hypothenusæ AB & CP æquantur, ac propter similia & æqualia triangula DEF & CQH, in quibus pariter DE & CQ sunt æquales, fiet P. AO. AC + Q. DF. DC (= P. GC. AC + Q. HC. DC) = P. PC^2 + Q. QC^2; & P. AO + Q. DF = P. GC + Q. HC, hoc est (§. 44) = M. MC; existente puncto M centro gravitatis particularum P, Q & M = P + Q. Idcirco factis substitutionibus debitis in P. AO. AC + Q. DF. DC = (P.

AO + Q. DF). NC, habebitur $P.PC^2 + Q.QC^2 = M.MC.NC$, atque adeo $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2) : M.MC$. Quæ expreſſio prorſus eadem eſt cum ea, quam ſupra (§. 207.) reperimus pro centro oſcillationis in hypotheſi communi, qua particularum P, Q pondera maſſis ipſarum proportionalia ſunt, vel, quod eodem recidit, in qua ſingulæ E, F, G &c. quales ſupra (§. 198.) pro ſignificandis juxta maſſas P, Q, N gravitatis ſolicitationibus centralibus adhibuimus, æquales ſunt. In omni verò alia gravitatis hypotheſi different ab invicem centra oſcillationis & percuſſionis. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

211. Hinc ſi fuerint infinita particularum æqualium P, Q paria, tunc fiet $CN = \int(P.PC^2 + Q.QC^2) : \int M.MC$, adeoque nominando CN, t, atque retentis ſymbolis paragraphi 208. fiet $t = \int(xx + yy.dp) : \int xdp$, quæ eſt ipſiſſima iterum formula, in quam dicto loco incidimus, quamque alia methodo etiam reperit Cl. Jac. Bernoulli in Actis Acad. Reg. Pariſ. Scient. Acad. 1704. ad diem 14 Apr.

CAPUT VI.

De Regulis motus in colliſione Corporum.

DEFINITIONES.

I.

Corpora duo ſibi directe occurrere dicuntur, cum moventur in lineâ rectâ centra gravitatis jungente, atque per contactum eorumdem corporum transeunte.

II.

Velocitates corporum *propriæ* ſunt illæ, quibus corpora moventur. *Velocitas* vero eorundem *relativa* eſt ea, qua cum ad ſe mutuo accedunt. Idcirco celeritas relativa corporum ex oppoſitis plagis ſibi mutuo obviam venientium eſt *aggregatum* celeritatum eorundem propriarum. Sin vero velocius corpus alterum tardius ad eandem partem latum inſequatur, velocitas eorum relativa erit *exceſſus* velocitatis majoris propriæ ſupra minorem.

III.

III.

212. Corpora A, B in planis horizontalibus moveri atque inter se collidi intelliguntur ad id, ut motus eorum ante & post occursum æquabiles evadant, nec iidem motus à gravitatis actione à plano utpote sufflaminanda, in quo mobilia incedunt, quicquam alterentur. Celeritates mobilium propriæ ante occursum designabuntur posthac per lineas rectas AD, BD in ipsorum directionibus sumtas, adeò ut quocunque modo mobilia A, B, incedant, dummodo non in rectis angulum continentibus ferantur, ipsorum celeritas relativa futura sit AB. Directiones verò particulares corporum, aut potius directionum plagæ, designentur deinceps per ordinem, quo literæ A, D & B, D scribuntur. Proinde AD significat mobile A ferri celeritate uniformi AD ex A versùs D, & B ferri velocitate hac linea BD expressa ex B etiam versus D. Adeoque quoties signum D inter A & B cadit, toties ambo hæc corpora contrario sensu moventur, id est, ex oppositis partibus sibi invicem obviam veniunt celeritate relativa AB, quæ hoc casu composita est ex particularibus AD, BD; sin verò signum D cadit extra AB, ambo corpora movebuntur ad eandem partem, in qua signum D positum est celeritate relativa AB æquali in tali casu excessui velocitatis propriæ alterutrius mobilis supra celeritatem propriam alterius. Fig. 48.

213. Et quia motuum plagæ etiam per signa + & − subinde designari solent, probe sciendum + AD idem esse ac − DA, & + DA idem ac − AD, & sic de ceteris. Nam motui + AD contrarius est, seu in plagam contrariam dirigitur, tum − AD, tum etiam DA, atque adeo hæ duæ expressiones sunt æquivalentes; pariter quia & + DA & − AD eidem motui + AD contrarii sunt, notationes + DA & − AD unum idemque significant, adeò ut una alteri semper sufficere liceat, quod aliquando bene notatum, utile esse comperietur.

IV.

214. Celeritates corporum inter se collisorum ante conflictum considerabimus quandoque tanquam acquisitas lapsu verticali à quiete incepto motu gravium naturaliter accelerato; & celeritates eorundem post occursum tanquam velocitates initiales corporum, quæ verticaliter in altum lata motu naturaliter retardato certas altitudines emeteri valent priusquam motus eorum ascensionalis penitus extinguatur.

V.

215. Vis corporum absoluta ante conflictum est altitudo, quam centrum gravitatis commune mobilium perlabi potest, quando unumquodvis corpus per suam altitudinem cadendo velocitatem suam propriam acquirit. Visque mobilium absoluta post collisionem, est altitudo, ad quam assurgere potest idem commune centrum gravitatis corporum, quando unumquodque horum corporum celeritate initiali ea, quam in conflictu acquisivit, suam altitudinem ascendendo absolvit.

Fig. 50. 216. Sic posito mobile A acquirere celeritatem suam propriam AD lapsu accelerato ex altitudine EA, & B suam celeritatem propriam descensu accelerato ex altitudine FB, centrum gravitatis G mobilium A, B in punctis E, F existentium cadet ex altitudine GC. Et si mobilis A post conflictum celeritas uniformis sit D*a* talis, ut eâ tanquam velocitate initiali rectam *ae* ascendendo conficere possit mobile A, alterumque B altitudinem *bf* celeritate initiali D*b*, quæ est velocitas uniformis, quam mobile istud B, in ipso conflictu acquisivit; commune corporum A, B gravitatis centrum *c* censetur ascendere posse vi absoluta mobilium post conflictum in recta verticali *cg* usque ad *g*.

VI.

217. Corpora, quæ nonnisi vi inertiæ materiæ prædita sunt, dicantur deinceps corpora inertia. Corpora verò, quæ vim actuosam habent repellendi corpora ea ipsa vi qua impulsa fuerunt, dicantur corpora actuosa. Corpora inertia alias etiam nominari solent *non elastica*, ac corpora actuosa *elastica*.

HYPOTHESIS.

218. *Cum corpora actuosa inter se colliduntur eadem manet vis eorum absoluta post conflictum, quæ erat ante eundem conflictum.*

Excipimus corpora inertia, quorum vis absoluta post collisionem nunquam eadem est, quæ erat ante concursum, quandoquidem hæc vis in ipso conflictu quandoque penitus absorbetur, scilicet cum mobilia celeritatibus massis suis reciproce proportionalibus sibi invicem obviam veniunt. Sed ejusmodi corpora penitus inertia forte nulla dantur, nam etiamsi pleraque corpora perfecta actuositate vel elasti-

elasticitate prædita non sunt, quod particulæ eorum compressæ sese in pristinum statum restituere non valeant, eorum saltem elementa perfecte elastica esse queunt, à quo statuendo nullus ex præstantioribus Geometris hujus ævi abhorrere videtur. Verum quicquid rei sit, revertor ad corpora actuosa, quorum vis absoluta eadem manet vi hujus hypotheseos, si commune eorum centrum gravitatis ad eandem altitudinem *cg* ascendit post conflictum, ex qua delapsum erat ante occursum eorum, hoc est, positis quæ supra (§. 216.) si $cg = GC$.

219. Vires absolutas corporum æstimamus juxta altitudines, ad quas retardato suo à gravitate motu pertingere possunt, vel accuratius per facta ex his altitudinibus in massas corporum; in hac virium æstimatione præeuntem habemus Illust. Leibnitium, qui eandem non uno loco in Actis Eruditorum Lips. indicavit quidem, non tamen demonstravit, etsi apodictice demonstrari potest, ut forte alia id occasione ostendemus. Non ignoro perplures esse insignissimos viros, quibus talis vires æstimandi ratio non arrideat, existimantes eam à quantitatibus motus petendam esse. Celeb. Papinus sane diu multumque cum Leibnitio disputans rotunde negavit corporum vires altitudinibus, quas corpora ascendendo conficere possunt, proportionales esse; quin imo vires eas temporibus proportionari putat, quibus altitudines modo nominatæ absolvuntur vel etiam celeritatibus initialibus mobilium æqualium. Sed in probando hoc suo asserto incautus labitur ipse, principium assumens aperte falsum; & hoc principium falsum est, quod existimet corpora cum diversis velocitatibus initialibus ascendentia æqualem à gravitate ipsis resistente ictuum numerum exceptura esse temporibus æqualibus. Sed si plures docti Geometræ, præjudicatâ opinione communis vires æstimandi rationis per quantitatem motus detenti, à nobis diversa sentiunt, adsunt tamen alii acutissimi Geometræ, qui Leibnitianam ultro admittunt, quin imo jam ante complures annos Nob. Hugenius eadem quodammodo usus est in demonstrationibus suarum regularum motus ex percussione, principii loco in iis assumens, non posse commune centrum gravitatis corporum inter se collisorum altius ascendere post occursum, quam descenderat ante conflictum; non tamen supponit ascensum centri gravitatis descensui ejusdem æqualem esse; alias vero assumsit hypotheses, quæ æquivalentes sunt nostræ de æqualitate ascensus atque descensus centri gravitatis post & ante conflictum corporum. Idcirco hac nostra hypothesi posita

 regu-

regulas motus corporum actuosorum facili ratione inde derivabimus; sed priusquam hanc tractationem aggrediamur, unicam propositiunculam præmittere libet circa motum corporum inertium post conflictum.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA.

220. *Corporum inertium, atque sibi invicem directe occurrentium, celeritas & directio post conflictum est eadem, quæ erat ante communis ipsorum centri gravitatis occursum.*

Fig. 48. Sint AD celeritas uniformis corporis A, & BD velocitas corporis B ante conflictum, probandum est utrumque corpus A & B motum iri post occursum celeritate CD, quæ est celeritas, qua centrum gravitatis C mobilium A, B ferebatur ante collisionem, existente AC ad BC, sicut massa B ad massam A, seu ut pondus B ad alterius A pondus.

Demonstr. Quia motus corporum in collisione aliter non variantur quam pro ratione inertiæ materiæ, in ipso conflictu res eodem recidit, ac si corpora conjuncta, ac velut sibi invicem agglutinata movenda essent quantitate motus æquali excessui, quo motus major alterutrius ex mobilibus minorem alterius excedit, si corpora ex oppositis partibus sibi invicem obviam veniant, vel etiam æquali aggregato quantitatum motus utriusque corporis, si ambo ad easdem partes tendant. Unde cum in motus oppositione & casu, quo corporum centrum gravitatis C cadit inter puncta D & B (§. 44.) sit $B.BD - A.AD = (A+B).CD = A.CD + B.CD$, cumque $B.BD - A.AD$ sit excessus, quo motus $B.BD$ fortioris B excedit motum alterius A, patet ambo corpora A & B post contactum celeritate æquali CD latum iri ex C versus O, id est celeritate & directione, qua centrum eorum gravitatis ante impactum ferebatur.

Sin vero ambo corpora A, B ad eandem partem versus O suis celeritatibus particularibus AD, BD moveantur, erit $A.AD + B.BD = (A+B).CD = A.CD + B.CD$, hoc est aggregatum motuum corporum A, B ante conflictum æquatur quantitati motus eorundem, sed celeritate CD centri gravitatis ante ictum movendorum; feretur ergo utrumque hac celeritate CD versus O. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII. Theorema.

221. *Si mobilia* A, B *in directionibus obliquis* AD, BD *quemlibet angulum* ADB *continentibus, atque celeritatibus hisce ipsis lineis* AD, BD *expressis sibi mutuo occurrant, commune illorum gravitatis centrum* C *eadem velocitate cum* CD *atque in directione hujus* CD *productæ in* d *post conflictum feretur.* Fig. 49.

Sit MN linea jungens centra mobilium A, B in casu contactus, atque ad eam demissæ sint ex centris corporum A, B eorumque communi centro gravitatis C normales Aa, Bb, & Cc, motus juxta AD resolvetur in laterales Aa, & aD, motusque BD in laterales Bb, bD; at verò, cum motus juxta Aa & Bb paralleli sint, corpora hisce motibus in se invicem agere nequeunt, restant ergo soli motus aD & bD, quibus in se mutuo agunt. Jam si corpora A & B existerent in a & b, atque celeritatibus aD, bD sibi mutuo obviam venirent, post contactum utrumque moveretur (§. 220.) celeritate $D\varkappa = c$D, existente c eorum centro gravitatis, cum sit $AC : BC = ac : bc = B : A$, unde quia motus aD & bD in obliquis virtualiter continentur, ideò hæc motuum modificatio etiam in conflictu virtualiter accidisse censenda est: propterea ducta per punctum $\varkappa$ indefinita $\varkappa P$, in ea sumantur $\varkappa\alpha = Aa$ & $\varkappa\beta = Bb$, ac quia motus Aa, Bb in ipso conflictu nullam mutationem subierunt, mobile A post conflictum movebitur, aut moveri nitetur, motibus lateralibus $D\varkappa$, & $\varkappa\alpha$, ex quibus resultat motus $D\alpha$; alterum verò B motibus lateralibus $D\varkappa$ & $\varkappa\beta$, ex quibus nascitur motus $D\beta$. Sit d centrum gravitatis corporum A, B in α & β existentium, eritque (§. 44.) $A.\varkappa\alpha + B.\varkappa\beta = (A+B).\varkappa d$. item $A.Aa + B.Bb = (A+B).Cc$, & (constr.) $A.\varkappa\alpha + B.\varkappa\beta = A.Aa + B.Bb$, ergo etiam $(A+B).\varkappa d = (A+B).Cc$, vel $\varkappa d = Cc$: atqui per præcedentem est etiam $Cc = D\varkappa$, ergo $Dd = CD$, atque adeò post conflictum centrum gravitatis mobilium A, B movetur celeritate Dd æquali illi Cc, quà ante occursum incedebat. Quod erat demonstrandum.

Tantum de corporibus inertibus seu vi elastica carentibus, sequuntur leges motus corporum elasticorum.

PROPOSITIO XXXIX. Theorema.

222. *Posita eadem quantitate vis absolutæ corporum inter se collisorum ante & post occursum eorum directum, facta ex massis corporum*

in quadrata velocitatum collective sumta ante & post conflictum æquantur.

Hoc est $A.AD^2 + B.BD^2 = A.Da^2 + B.Db^2$, existentibus Da, Db celeritatibus corporum A, B post collisionem, & AD ac BD velocitatibus ante conflictum.

Demonstr. Posito A acquisivisse celeritatem suam AD casu ex altitudine EA, alterumque B ex altitudine FB, divisaque recta EF jungente puncta E, F in ratione reciproca ponderum A, B, linea GC denotabit descensum centri gravitatis mobilium A, B; & *ea*, *fb* denotent altitudines, quibus accelerato motu transmissis mobilibus acquiruntur celeritates Da, Db, cum quibus deinceps in altum ferri incipientia iterum ad easdem altitudines *ae*, *bf* assurgere possunt; quo motu ascensionali eorum centrum gravitatis *c* ascendet per altitudinem *cg*. Jam quia (§. 218.) eadem manet vis absoluta corporum A, B ante & post conflictum eorum, erit $GC = cg$, vel posito C significare $A + B$, erit $C.GC = C.cg$; atqui (§. 44.) $C.GC = A.EA + B.FB$, & $C.cg = A.ae + B.bf$, ergo etiam $A.EA + B.FB = A.ae + B.bf$; verum (§. 150.) rectis EA, FB, *ae*, *bf* proportionalia sunt AD^2, BD^2, Da^2, & Db^2, unde sufficiendo hæc illarum loco in proxime antecedenti analogia, reperietur $A.AD^2 + B.BD^2 = A.Da^2 + B.Db^2$. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

223. Idcirco erit etiam $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$. Nam $A.AD^2 = A.AC^2 + 2.A.AC.CD + A.CD^2$, & $B.BD^2 = B.BC^2 - 2.B.BC.CD + B.CD^2$, ergo $A.AD^2 + B.BD^2 = A.AC^2 + B.BC^2 + (A + B).CD^2, + 2.A.AC.CD - 2.B.BC.CD$ (vel quia centrum gravitatis C efficit $A.AC = B.BC$ vel $2A.AC - 2B.BC = 0$, & $C = A + B$, erit) $= A.AC^2 + B.BC^2 + C.CD^2$ (seu quia $B.BC = A.AC$ vel $B.BC^2 = A.AC.BC$, etiam) $= A.AC.AB + C.CD^2$. Pari argumento inferetur $A.Da^2 + B.Db^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$. Adeoque cum habeamus $A.AD^2 + B.BD^2 = A.Da^2 + B.Db$; erit etiam $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$.

PROPOSITIO XL. Theorema.

224. *Centrum gravitatis corporum actuosorum inter se collisorum eadem post occursum celeritate ac directione feretur, qua ante incedebat,*

ea-

eademque erit post impulsum à se mutuo recedentium corporum celeritas relativa, quæ ante conflictum erat accedentibus.

Positis quæ in præcedenti propositione, probandum est fore $Dc = CD$ & $ab = AB$, nam AB est celeritas relativa ante, & ab celeritas relativa eorundem corporum A, B, post occursum, punctaque C, c centra gravitatis indicant in utroque casu. Fig. 50.

Demonstr. Fingatur lineam rectam, in qua corpora moventur, infinite longam esse, atque moveri versus m velocitate infinite parva Am, huncque motum communem etiam corpora A, B in linea infinita incedentia participabunt; unde factis singulis $D\delta$, $a\alpha$, $c\varkappa$, $b\beta$ æqualibus Am, globus A movebitur tantum celeritate absoluta $A\delta$ loco ipsius AD ante occursum; quandoquidem ex motu ejus proprio AD communis $D\delta$ utpote contrarius est auferendus: B verò incedet velocitate $B\delta$ ante conflictum, accedente ejus motui proprio BD communi $D\delta$ alteri BD conspirante. Post conflictum autem celeritates Da, Db, mutabuntur in $D\alpha$ & $D\beta$; verùm quia omnes $b\beta$, $c\varkappa$, $a\alpha$, $D\delta$ (secundùm hypothesin) æquales, erunt $\alpha\varkappa = ac$, & $\alpha\beta = ab$; atque adeò velocitates AC, ac, nec non AB & ab inalteratæ manent in æqualitate superiore (§. 223.) solis CD & Dc variationem subeuntibus. Idcirco si in ea æqualitate $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$ loco CD & Dc substituantur $C\delta$ & $D\varkappa$, fiet $A.AC.AB + C.C\delta^2 = A.ac.ab + C.D\varkappa^2$, quæ ex altera subducta relinquet $C.CD^2 - C.C\delta^2 = C.Dc^2 - C.D\varkappa^2$, vel $CD^2 - C\delta^2 = Dc^2 - D\varkappa^2$, aut etiam $2CD.D\delta - D\delta^2 = 2Dc.c\varkappa - c\varkappa^2$, hoc est quia $D\delta = c\varkappa$, erit $2CD.D\delta = 2Dc.c\varkappa$, atque adeò $CD = Dc$. Fig. 51.

Porrò ex æqualitate $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$ abjectis æqualibus $C.CD^2$ & $C.Dc^2$, restabit $A.AC.AB = A.ac.ab$, vel $AC.AB = ac.ab$. Verum est $AB:AC = ab:ac$, vel $AB^2:AC.AB = ab^2:ac.ab$, igitur propter $AC.AB = ac.ab$, erit $AB^2 = ab^2$ atque adeò $AB = ab$. Quæ erant demonstranda.

PROPOSITIO XLI. Problema.

225. *Datis corporibus* A, B *utcunque inæqualibus sibi directè occurrentibus cum datis celeritatibus, invenire velocitates eorumdem corporum post conflictum.* Fig. 52.

Ex præcedenti propositione hujus Problematis solutio facillima est. Nam factis $Dc = CD$, item $ca = CA$, & $cb = CB$, ubi observandum punctum D, quo rectæ velocitatum ante occursum repræ-

 sen-

sentatrices terminantur, semper cadere debere inter puncta C, c, quibus centrum mobilium ante & post occursum signatur, punctaque a & b respectu puncti c, eodem ordine posita esse, quo alterum C situm est respectu corporum A, B. Quibus observatis erit semper Da, velocitas corporis A, & Db corporis B post conflictum.

Demonst. Quia (constr.) $ac = AC$, & $bc = BC$, erit $ab = AB$, & quia porrò (constr.) $Dc = CD$, hoc est, quia celeritas relativa corporum post collisionem æqualis relativæ ante eandem, & pariter celeritas atque directio centri gravitatis utroque casu eadem est, per præcedentem corpora A, B non aliis quam velocitatibus Da, Db moveri possunt post collisionem. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

226. Hinc 1°. si mobilia A, B ad eandem partem ferantur, adeò ut punctum D cadat extra AB, sed ad partes corporis B; erit $Da = CD - AC$ & $Db = CD + CB$. Sin verò punctum D ad partem corporis A extra AB cadat; fient $Da = CD + AC$, & $Db = CD - CB$. 2°. Si corpora A, B ex adversis partibus venientia inter se collidantur, ita ut D cadat inter A & B, & punctum C sit inter D & A, erit $Da = CD - AC$, & $Db = CD + CB$. Ac vice versa erit $Da = CD + AC$, & $Db = CD - CB$, quoties centrum gravitatis corporum situm est inter D & B.

COROLLARIUM II.

227. Adeoque si corpus A celeritate AD impingatur in quiescens B, ita ut puncta D & B confundantur, huic quiescenti B dabit impellens A celeritatem duplam ipsius CB. Atque adeò si ambo A & B fuerint æqualia, in ipso conflictu sistetur motus corporis impellentis A, alterumque B tota velocitate AB deinceps feretur, qua agens A in ipsum impegerat.

COROLLARIUM III.

228. Sin vero corpora ex oppositis partibus obviam veniant celeritatibus propriis AD, BD corporibus B, A reciproce proportionalibus, ita ut D incidat in C, utrumque corpus, qua advenerat velocitate, resiliet. Etenim hoc casu evanescit CD.

Co-

COROLLARIUM IV.

229. Generaliter, si corpora A, B dicantur m, n, eorum velocitates propriæ ante occursum u & r, invenietur Da celeritas corporis A post conflictum $=(mu-nu+2nr):m+n, =u, +(u-r).2n:m+n$, & Db vel celeritas corporis B post conflictum $=(2mu+mr-nr):m+n, =r, +(u-r).2m:m+n$. Hæ expressiones elicitæ sunt ex debitis substitutionibus valorum linearum CD, AC & BC in expressionibus Corollarii I. Da = CD − AC, & Db = CD + CB, pro casu, quo mobilia ante concursum ad easdem partes moventur. Formulæ pro altero casu corporum ex oppositis partibus in se mutuo irruentium ex hisce jam exhibitis elicientur mutando duntaxat signa quibus litera r affecta est, eritque D$a=u, +(u+r).2n:m+n$, & D$b=-r, +(u+r).m+n$.

PROPOSITIO XLII. THEOREMA.

230. *Corpus* A *celeritate* AD *latum interventu corporis medii* X *eandem corpori quiescenti* B *velocitatem dabit, quam interventu alterius cujusdam corporis medii* Y, *si ipsum impellens* A *fuerit ad* X *sicut alterum* Y *ad quiescens corpus* B.

Hoc est, si corpus A celeritate AD primum in corpus X irruat, & hoc celeritate ab impellente accepta deinceps incurrat in corpus quiescens B; dico hoc corpus B eandem celeritatem accepturum, quàm si ab alio corpore Y impulsum fuisset celeritate ea, quam Y pariter quiescens à corpore A itidem celeritate AD ipsi occurrente accepisset, existente scilicet A ad X ut Y ad B. Ut propositum demonstretur, constructio Propositionis XL. est geminanda, & pro utroque corpore intermedio X & Y seorsim ponenda: propterea figura, in qua lineæ majusculis litteris signantur, respicit corpus intermedium X, & quæ iisdem, sed minusculis literis notantur, pertinent ad figuram corporis alterius intermedii Y,

Jam ex §. 227. constat corpus X accepturum ab impellente A celeritatem DB duplam ipsius CD, existente C centro gravitatis corporum A, X, atque adeò AC ad CD in ratione corporis X ad corpus A; ac divisa DB in puncto E, ita ut DE sit ad EB sicut corpus B ad medium X, mobile X daturum alteri quiescenti B, in quod impingat velocitate DB, celeritatem duplam ipsius EB. Similis con-

constructio, sed respectu corporum a, Y & b, inter quæ ipsa a & b corporibus A & B æquantur, repetita intelligatur, accipietque corpus b à medio Y celeritatem $2eb$. Probandum fore $EB = eb$.

Demonstr. Quia (secundùm hypothesin) est $A : X = Y : B$, & propter centrum gravitatis C, $A : X = CD : AC$; nec non $Y : b(B) = be : de$, erit $CD : AC = be : de$, vel invertendo & componendo $AD : CD = 2.cd(db) : be$; adeoque etiam duplicatis consequentibus $AD : DB(2.CD) = 2cd : 2.be = cd : be$. Verùm est etiam $B : X = Y : A$, hoc est $DE : BE = ac : cd$, ergo & componendo $DB : BE = ad : dc$, hinc etiam $ad\ (AD) : DB = cd : BE$, sed paulò ante erat $AD : DB = cd : be$; ergo etiam $cd : be = cd : BE$, atque adeò $be = BE$. Quod erat demonstrandum.

231. *Aliter.* Sint $LN = AD = ad$, $PN = CD$; ac $pN = cd$, & denique dividatur LN in Q & q, ut LN sit ad QN sicut $B + X$ ad X, & LN ad qN ut $B + Y$ ad Y, & ostendetur puncta P, q, item & p, Q coincidere. Nam quia (secundùm hypothesin) $A : X = Y : B$, erit $A + X : A = B + Y : Y$, id est $AD : CD = LN : PN = LN : qN$, ergo $PN = qN$ atque adeo coincidunt puncta P & q. Item quia $B : X = Y : A$, & $B + X : X = A + Y : A$, erit (constr.) $LN : QN\ (= ad : cd) = LN : pN$, ac proinde etiam $QN = pN$; coincidunt ergo puncta p, Q. Hisce positis, & quia $AD : DB\ (2.CD) = LN : 2.PN$; & $DB : 2.EB = LN : 2.QN$; erit ex æquo $AD : 2.EB = LN^2 : 4.PN.QN$. Eodem argumento invenietur $ad : 2.eb = LN^2 : 4.pN.qN$, ergo invertendo erit ex æquo $2.eb : 2.EB = 4.pN.qN : 4.PN.QN$, vel $eb : EB = pN.qN : PN.QN$: unde cum ostensum sit esse $pN = QN$ & $qN = PN$, erit omninò $eb = EB$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

232. Si loco alterutrius ex mediis X, Y sumatur corpus M medium proportionale inter A & B, atque adeo inter X, & Y, cum A sit ad $X = Y : B$; atque LN dividatur in R, ut tota LN sit ad RN sicut $A + M$ ad A, celeritas initialis mobilis A erit ad celeritatem corpori B interventu medii M acquisitam, sicut LN^2 ad $4.RN^2$. Atque adeò celeritas, quam acquiret corpus B interventu alterutrius X vel Y erit ad celeritatem, quam acquiret interventu medii M, sicut $4.PN.QN$ ad $4.RN^2$, vel sicut $PN.QN$ ad RN^2. Nam quia $A + M : M = LN : RN$, & $A + M : A = B + M : M$, erunt

hoc

hoc casu ambæ PN, QN cum inter se, tum etiam RN æquales, unde cum generaliter sit $AD : 2EB = LN^2 : 4. PN. QN$, erit in hoc casu particulari celeritas corporis A, ad celeritatem ipsius B abs M acceptam $= LN^2 : 4. RN^2$, & quia (§. 231.) velocitas ipsius B ab alterutro X vel Y accepta, est ad celeritatem initialem corporis A, sicut $4. PN. QN$ ad LN^2; erit ex æquo celeritas corporis B ab alterutro X vel Y accepta, ad celeritatem ejusdem à corpore M acquisitam sicut $4. PN. QN$ ad $4. RN^2$ hoc est, sicut $PN. QN$ ad RN^2.

Corollarium II.

233. Quia (constr.) $PN : LN = A : A + X$, & $LN : RN = A + M : A$, erit ex æquo $PN : RN = A + M : A + X$. Similiter invenietur $QN : RN = A + M : A + Y$, ergo per compositionem rationum erit $PN.QN : RN^2 = (A + M)^2 : (A + X. A + Y) = AA + 2.AM + MM : AA + (X + Y). A + XY = AA + 2. A. M + AB : AA + (X + Y). A + AB = A + 2M + B : A + X + B$, nam $A. B = MM = XY$, adeoque unum alterius loco, ut factum est, substituere licet. Jam quia X, M & Y sunt in ratione continua, erit $X + Y$ major quam $2. M$ atque adeo $A + X + Y + B > A + 2M + B$; hinc erit $RN^2 > PN. QN$; unde cum (§. 232.) celeritas corporis B ab alterutro X vel Y accepta, sit ad ejusdem celeritatem a corpore M ipsi impressam, sicut $PN. QN$ ad RN^2, liquet hanc celeritatem illa perpetuo majorem esse. Imò hæc velocitas mobili B a corpore M collata major erit ea, quam idem B a corpore A celeritate AD ipsum impulisset, nam loco corporis X intelligi potest quodvis corpus; atque adeo unum ipsi A æquale, quod ab impellente A totam celeritatem (§. 227.) CD accipiet, adeò ut idem sit, sive mobile A cum sua celeritate AD immediate impingat in quiescens B, sive id impellat ope intermedii ipsi A æquali, cui totam suam celeritatem contulerit; unde cum generaliter ostensum sit, interventu cujusvis corporis X, diversi ab M, minorem corpori B velocitatem collatum iri quam a medio proportionali M inter extrema A, & B; sequitur necessario etiam corpus A alteri B minorem daturum esse celeritatem quam M, etiamsi immediate in id impingat. Atque hoc corollarium continet demonstrationem facilem Propositionis penultimæ tractatus *Hugenii* de Motu corporum ex Percussione.

COROLLARIUM III.

234. Hinc primum ex corporibus continue proportionalibus ultimo majorem celeritatem dabit per corpora quotcunque interposita continue proportionalia, quam si eidem quiescenti immediate occurrisset.

SCHOLION.

Fig. 54. 235. Ex præcedentibus jam facile elicietur regula determinandi velocitatem, quam ultimum corpus quiescens ex serie quotcunque continue proportionalium accipiet transmisso motu à primo in secundum, tertium, quartum &c. Primum corpus dicatur A, ejusque celeritas ab initio AD, ultimum V: dividatur celeritas initialis AD in puncto C, in reciproca ratione secundi corporis ad primum, vel, quod idem est, in ratione cujuslibet corporis in serie proportionalium ad corpus, quod illud in eadem serie proxime præcedit, ita ut AC ad CD sit in hac eadem ratione, deinde ratio totius AD ad duplam CD continuetur in tot terminis uno minore quot sunt seriei corporum proportionalium, quorum ultimus sit Q, dico hanc Q exponere celeritatem ultimo corpori V collatam ab omnibus præcedentibus. Adeoque si numerus terminorum fuerit $n+1$, celeritas initialis AD primi corporis erit ad Q celeritatem ultimo U acquisitam, sicut AD^n ad $(2CD)^n$, hinc habebitur $Q=(2CD)^n : AD^{n-1}=(2CD)^n$, sumta scilicet AD instar unitatis, quod hoc loco fieri licet.

236. *Exempl.* Sint centum corpora in continua ratione dupla, motusque primum incipiat à maximo, quæritur Q seu celeritas minimo V conferenda. Hoc casu erunt $AC=\frac{1}{3}$, et $CD=\frac{2}{3}$, atque adeo $(2.CD)^n=(\frac{4}{3})^{99}$, est enim $n=99$. Igitur habemus $Q=(\frac{4}{3})^{99}$, & Log-us $Q=99.$ Log-um $\frac{4}{3}$; atqui Log-us $(4:3)=0.1249388$ qui Logarithmus ductus in 99 dat $99.$ Log. $(4:3)=12.3689412=$ Log. Q, ergo $Q=2338520732310$ quam proxime, nam hic numerus log-mo illi, cujus characteristica est 12. proxime convenit; atque adeo celeritas, quam corpus centesimum accipere debet, est ad celeritatem primi A ut 2338520732310 ad 1 proxime.

Sin vero motus a minimo incipiat, erit hujus celeritas ab initio ad velocitatem, quam centesimo & maximo dabit interpositis 98. reliquis continue proportionalibus, sicut numerus 27103713483146067

ad

ad unitatem proxime. Hugenius in poſtrema propoſitione tractatus ſupra (§. 233.) laudati numeros pro hisce caſibus noſtris minores exhibet, transſcriptorum forte aut calculi lapſu.

PROPOSITIO XLIII. Theorema.

237. *Centrum gravitatis duorum corporum ſphæricorum elaſticorum ſibi invicem oblique occurrentium, eadem directione & celeritate feretur poſt conflictum, quibus ferebatur ante concurſum.* Fig. 55.

Globi elaſtici P, Q ſibi mutuo occurrant in D celeritatibus propriis PD, QD, & poſt occurſum reſiliant celeritatibus propriis Dp, Dq, ita ut hæ lineæ eodem tempore æquabili motu abſolvantur, quo rectæ PD, QD ante ſynodum; ſintque puncta M & m centra gravitatis globorum in P & Q, item in p, q exiſtentium; probandum eſt rectas MD & Dm tum æquales, tum etiam in directum poſitas eſſe; quandoquidem MD exponit velocitatem & directionem centri gravitatis M ante conflictum, Dm vero velocitatem & directionem centri communis gravitatis poſt colliſionem. Sit D punctum contactus globorum, & BA recta jungens centra eorundem, quæ, ubi globi ſe mutuo contingunt, per punctum contactus transibunt; ex centris Globorum P, Q demiſſæ ſint ad AB perpendiculares PA, QB, & ex M recta MC reliquis QB, AP parallela, quibus poſitis, manifeſtum eſt ex art. 29, motui juxta PD æquipollere laterales PA & AD, & motui QD laterales QB & BD. Jam quia motus juxta PA & QB paralleli ſunt, globi quatenus motibus hisce agitantur, in ſe mutuo agere non poſſunt, ſed ſoli motus juxta AD & BD, utpote directe contrarii, in caſu conflictus conſiderandi veniunt reliquis tantisper ſepoſitis & poſtea iterum reſumendis. Porrò quia M eſt centrum gravitatis globorum in P & Q exiſtentium, etiam C eorundem globorum in A & B poſitorum erit centrum gravitatis; adeoque factis Dc = CD, nec non ca = CA & cb = CB, erit (§. 225.) Da celeritas propria globi A, & Db celeritas alterius B, poſt colliſionem in indefinita linea ab. Porro per a & b ductæ ſint rectæ ap = AP, & bq = BQ ipſi AB normales, quo poſito & quia in ipſo conflictu motus juxta PA & QB, utpote paralleli, nullam mutationem ſubire potuerunt, hi motus poſt impulſum illibati ſunt conſervandi; atque adeo poſt congreſſum corpus P à puncto D recedet motu Dp reſultante ex lateralibus Da & ap, alterumque Q motu Dq naſcente ex lateralibus Db & bq. Verum

quia

quia (constr.) $ca = CA$; $cb = CB$; $ap = AP$; & $bq = BQ$, figura *abqp* similis & æqualis erit figuræ alteri ABQP, atque adeo $cm = CM$: unde cum (constr.) etiam sit $Dc = CD$, triangulum Dcm simile & æquale erit triangulo DCM, atque adeo lineæ MD & Dm in directum positæ erunt, hinc centrum gravitatis globorum P, Q post conflictum eadem celeritate & directione quâ ante, progredietur. Quod erat demonstrandum.

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

DE CORPORIBUS FLUIDIS.

SECTIO I.

De Viribus Fluidorum à Gravitate.

SI corpora fluida cum duris & consistentibus in hoc conveniunt, quod extensa sunt & particulis seu moleculis duris componuntur; ab iisdem tamen differunt, quod moleculæ fluidorum non solum exilissimæ sunt eousque, ut omnem oculorum etiam microscopiis armatorum aciem fugiant, sed etiam disjunctæ & valde mobiles, quæ cuilibet corpori solido trajicienti facile cedere atque varie inter se agitari queunt: cum ex adverso dura corpora constent partibus sibi invicem varie implexis atque adeo ægre separandis, ita ut nulla particularum sensibiliter moveri possit, quin totum partium aggregatum, hoc est corporis Massa eundem motum participet.

238. Est igitur *Corpus Fluidum, cujus elementa* (§. 14.) *à vi quacunque in ea agente commoveri possunt quantumque tota fluidi Massa oculorum judicio quiescere videatur*, ut jam supra §. 25. dictum. Sic Aqua, Aer, Oleum, Hydrargyrus &c. sunt corpora fluida, item metalla fusa, quandiu in fluore sunt.

Adeoque distinctus fluidorum corporum conceptus summam involvit molecularum exilitatem, talemque earum configurationem, ut ut par inde agilitas provenire queat. Et hisce ſpecificis proprietatibus fluida diſtinguuntur à ſolidis in minutiſſimas itidem particulas diſcerptis, non tamen tantæ agilitatis nec parvitatis, ut eadem qua fluidi elementa inter ſe agitari queant facilitate. Sic frumenta in ſubtiliſſimum pollinem contrita in corpus fluidum ideo non abeunt, quia hujusmodi pollinis particulæ ad eam exilitatem non accedunt; nec proinde ad eam mobilitatem perveniunt quam fluidorum natura requirit.

239. Cum de fluidorum viribus agere ſuſcipimus, non ea nobis eſt mens, ac ſi particularum ſeu elementorum figuras definiri atque digito, ut ita dicam, monſtrari poſſe crederemus, nec proinde curioſius in has elementorum corporum figuras inquiram, quia hæ nimis forte variare ſolent quam ut commode redigi poſſint ſub mathematicos conceptus; nil enim impedire exiſtimo, quominus unius ejusdemque fluidi particulæ tam ratione magnitudinis, quam ratione figuræ, infinitis modis variare poſſint. Idcirco figurarum indagationem, quibus cujuslibet fluidi particulæ circumſcriptæ eſſe debent, Phyſicis relinquam, mihique deinceps ſufficiet noſſe, figuras particularum cujusque fluidi, qualescunque eæ fuerint, mobilitati earum nihil officere ipſo facto, cum particulæ ſint (ſecundùm hypotheſin) alicujus fluidi, id eſt ſumme mobiles.

240. Nec etiam ad inſtitutum noſtrum pertinet anxie disquirere, num vera ſit illorum opinio, qui fluidis quibuslibet motum quendam, quem *inteſtinum* vocant, tribuunt, quo fluidi particulæ variis irregularibus motionibus ultro citroque cieri finguntur; ad diſtinctionem motus progreſſivi fluidi, quo tota ejus maſſa de loco in locum transfertur. Sic cum labitur amnis, motus quo aqua in alveo ſuo ad inferiora devolvitur, eſt progreſſivus; motus vero aquæ calidæ, id eſt internus motus ejus molecularum, vocatur motus inteſtinus: exemplum adduco aquæ calidæ, quia certo certius ejusmodi motu inteſtino particulæ ejus agitantur, etſi motus ipſe in oculos non incurrit; atque adeo tota aquæ maſſa quieſcere videtur. Num vero omnia omnino fluida tali motu inteſtino agitentur philoſophis pariter, ut dixi, expendendum relinquam; nec enim animus mihi eſt Philoſophicis controverſiis me quoquo modo irretire.

241. Corpora fluida à liquidis differunt ut genus à ſpecie, cum liquida quidem fluida ſint, non tamen vice verſa. Liquida enim ſunt, quæ in volumine non nimium exiguo fluunt donec eorum ſuperficies in ſitum horizontalem ſe compoſuerit; unde, quia hæc pro-

prie-

prietas non flammæ nec aëri aut ætheri competit; ideo hæc corpora tantum fluida, non vero liquida dicuntur. Nos in sequentibus etiam liquoribus fluidi nomen tribuemus, quia revera liquores sunt corpora fluida: idcirco

242. *Fluida homogenea*, seu *uniformiter gravia* sunt, quorum densitas per universam massam uniformis est, adeo ut pondera ipsorum absoluta massis eorum proportionalia sint. Talia sunt præterpropter omnes liquores nobis cogniti.

243. *Fluida heterogenea*, seu *difformiter gravia*, sunt, quorum densitas per universam fluidi massam non eadem est nec propterea pondera fluidi massis proportionantur. Tale fluidum est athmosphæra, cujus partes altiores, hoc est à terræ superficie remotiores rariores comperiuntur; etenim experimenta aëra in montium editiorum jugis rariorem produnt quam in vallibus. Variæ vero athmosphæræ densitates variis lineis exprimi possunt, atque hinc nascuntur,

244. *Scala densitatum* cujusque Fluidi heterogenei est figura mixtilinea, cujus ordinatæ horizonti parallelæ fluidi densitatem exponunt in planis illis, in quibus ordinatæ existunt. Idcirco axis scalæ, ordinatas ad angulos rectos excipiens, horizonti perpendicularis erit.

245. *Densitas media* cujusque fluidi heterogenei est densitas uniformis alicujus fluidi homogenei, quod in eadem altitudine cum fluido heterogeneo eandem pressuram exerere valet in subjectum sibi planum horizontale ac fluidum heterogeneum. Talis media densitas innotescit applicando aream scalæ densitatum ad ejus axem, seu fluidi altitudinem super plano, quod ejus pressuram subit.

246. *Scala pressionum* seu *gravitationum* liquoris heterogenei est figura, cujus ordinatæ exponunt gravitationes seu pressuras fluidi in plana horizontalia exercitas, in quibus ordinatæ positæ sunt, abscissæ vero ordinatis respondentes designant distantias planorum, quæ pressiones subeunt à suprema liquoris superficie. Scala pressionum etiam definiri posset, quòd sit quadratrix scalæ densitatum; quandoquidem postmodum (§. 258.) demonstrabitur areas scalæ densitatum homologis ordinatis scalæ gravitationum proportionales existere.

247. *Liquores in statu manente*, seu *in æquilibrio consistere* dicuntur, cum nulla liquoris pars vicinarum actione situ suo expellitur, sed omnes partes perfectum inter se æquilibrium servant.

248. Infinitesimæ plani cujusque aut etiam superficiei particulæ gra-

gravitationem vel pressuram cujusvis liquoris subeuntes *puncta* deinceps à nobis compendii gratia nominabuntur.

Pressionis verò vel *gravitationis* nomine intelligimus impressionem, quam fluidum gravitate sua in sibi subjectum planum exerit. Idcirco, ut rem generaliter possimus tradere, prout in primo libro tantum non ubique id fecimus, fluida utcunque heterogenea esse concipimus, atque quænam pressiones atque effecta ab ejusmodi fluidis resultare debeant, generalibus theorematibus complectemur; ex quibus deinceps omnia derivari poterunt, quæ ad liquores homogeneos spectant.

CAPUT I.

De generalibus legibus gravitationis Liquorum in subjecta plana.

PROPOSITIO I. Lemma.

249. *Pressiones, quas corpora quæcunque solida vel fluida in se invicem exercent, fiunt juxta directiones communi plano contingenti corpora perpendiculares, atque transeunt per contingentiæ punctum eorundem* Fig. 56. *corporum.*

Sit MN corpus quodcunque, in quod aliud corpus CD juxta directionem FC impingat; per commune contingentiæ punctum D utriusque corporis transeat planum AB, ambo corpora in hoc eodem puncto D tangens, quod ideo commune eorum contingentiæ punctum vocatur. Dico impressionem impellentis CD in patiens MN exeri tantum juxta directionem CE plano contingentiæ AB perpendicularem, quæ per commune utriusque corporis punctum contactus D transeat.

Demonstr. Producatur FC usque ad occursum H cum plano AB, & circa diametrum CH descriptum intelligatur parallelogrammum rectangulum CDHI, cujus latera CD, IH plano AB normalia & CI eidem æquidistans sunt. Jam (§. 39.) conatus seu pressio juxta CH æquipollet impressionibus juxta CD & CI. Verum, quia CI plano AB parallela est, nulla in planum istud impressio juxta hanc directionem exeri potest, sed duntaxat impressio juxta CD plano perpendicularem tota in hoc planum redundabit. Ergo impressio, quam corpus impellens C, in planum AB seu in corpus MN exerit

rit tantum fieri poteſt juxta directionem CD plano AB perpendicularem, quæ per punctum contactus D tranſit. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II. Theorema.

250. *Liquor vaſi cuicunque inditus non poteſt in ſtatu manenti conſiſtere, priusquam ejus ſuperficies ſitum horizontalem acquiſiverit.* Fig. 57.

Sit vas BAC figuræ cujuscunque & quomodocunque poſitum; dico liquorem ei infuſum HGIA non poſſe ſitum manentem habere, niſi ſuperficies ejus HGIF horizontalis fuerit. Habeat enim hæc ſuperficies in ſtatu manenti poſitionem EGCF horizonti inclinatam: quo poſito, quia liquidi moles GCIF plano horizontali HGIF imminens gravis eſt, atque in ſpatium GHEF defluere poteſt, nec quicquam adeſt quod hunc fluxum impedire queat, ea actu defluet ſpatium illud GHEF repletura; idcirco cum liquoris ſuperficies GCE plano horizontali HGF inclinata eſt, non eſt in ſtatu manenti, contra hypotheſin.

Corollarium.

251. Hinc ſi univerſa terra Oceano circundata eſſet, nec in ſe ipſam converteretur, ejus ſuperficies perfecte ſphærica foret. Sed quia motu diurno circa centrum ſuum revolvitur, aquæ ſuperficies ſphærica non erit, ſed figuram habebit ſphæroidis latæ, quia aquæ partes quo propiores ſunt æquatori, eo majorem habent conatum à centro recedendi, atque adeo minus graves ſunt, quandoquidem conatus centrifugi tanto magis de corporum gravitate detrahunt quanto majores ſunt. Ob hanc vero gravitatis inæqualitatem accidit, ut ad obtinendum partium æquilibrium, ad eandem ubique altitudinem aquæ pervenire nequeant, ut aliàs fieret, ſi terra motu illo diurno, ex quo conatus centrifugi partium aquæ reſultant, careret, ſed ſub Æquatore altiſſima & in polis maxime depreſſa exiſtat. Hinc eſt, quod Newtonus, Hugenius aliique telluris ſuperficiei figuram alicujus ſphæroidis aſſignarint, oriundæ ex revolutione alicujus Ellipſeos circa axem minorem, exiſtente axe majore diametro æquatoris terreſtris. Sed de hisce ſuo loco ſermo recurret.

PROPOSITIO III. Theorema.

252. *Partes æquales* (HI, IK) *cujuslibet plani horizontalis* (FG)
Fig. 58. *intra liquorem quemcunque* (DBCE) *in statu manenti consistentem, vasique, ut libet irregulari,* (ABC) *inditum, æquales pressiones subeunt ab imminente liquore* (DFGE). *Et partes minimæ laterum vasis* (LF, MG) *ad idem planum horizontale* (FG) *terminatæ easdem pariter pressiones ab incumbente liquore patientur juxta directiones* (FP, GQ) *iisdem partibus* (FL, GM) *perpendiculares, quas patiuntur æquales particulæ* (FR, GK) *plani horizontalis juxta directiones ipsis normales.*

I. Quoniam (secundùm hypothesin) liquor vasis est in statu manenti, superficies ejus DE (§. 251.) horizontalis ac proinde plano FG parallela erit, & remoto cogitatione liquore DFG plano FG incumbente, residui in vase FBCG superficies FG etiamnunc in statu manenti consistet, quia horizontalis est. Adeoque si, restituto quem cogitatione removimus liquore DFGH, pars aliqua IK plani FG minorem pressionem subiret quam contigua & æqualis particula HI, liquor in loco IK deberet attolli, aut deprimi, vel ad latera dextrorsum aut sinistrorsum deflecti sive alicubi condensari, quandoquidem vis minor majori semper cedere debet, & aquæ vel liquoris particulæ per naturam fluidi cedere possunt, atqui talia sine motu partium, quo unæ ab aliis situ suo pelluntur, contingere nequeunt, ergo liquor non maneret in statu manenti, contra hypothesin. Partes igitur HI, IK omnesque reliquæ æquales plani FG, æquales pressiones sustinent. Quod est primum.

II. Sit planum LM alteri FG æquidistans, & (§. 250.) omnes ejus æquales particulæ NO, OM æquales itidem pressuras ab imminente liquore DLME subibunt. Idcirco liquor inter duo plana æquidistantia LM & FG, velut in prælo, fortiter constringitur & quidem viribus æqualibus in partes oppositas, scilicet à liquore incumbente DLME perpendiculariter deorsum atque à reactione plani inferioris FG perpendiculariter in altum; nam quanta vi planum istud premitur, tanta vi in rem prementem reagit. Unde cum plana NO & IK æqualibus viribus in oppositas partes urgeantur, necesse est ut in quolibet plano NI vel OK tantam pressuram subeat quantam in NO vel IK, alioqui si minorem pateretur, ibi elaberetur per planum NI liquor ONIK contra hypothesin. Et quia ob

con-

contiguitatem partium aquæ particulæ laterales LF & MG vaſis preſſuras ſubire debent æquales illis, quas ſubeunt plana NI vel OK, & hæc preſſiones pares illis, quas plana NO, IK, &c. patiuntur, liquet preſſuras liquoris DFGE in particulas laterales vaſis FL & MG æquales eſſe preſſionibus, quas ab eodem liquore patiuntur particulæ illis æquales HI, IK plani horizontalis FG, (§. 249.) juxta directiones FP, GQ particulis illis FL & GM perpendiculares, perinde ac particulæ HI & IK, &c. itidem perpendicularibus plano FG directionibus urgentur. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV. Theorema.

253. *Preſſiones ſeu Gravitationes cujuslibet liquoris homogenei in quæcunque plana horizontalia proportionales ſunt altitudinibus liquoris ſuper his planis.* Fig. 59.

Sit DE ſuperficies liquoris DBCE vaſi cuilibet ABC infuſi, fundoque vaſis BC horizontali, quantum opus eſt, protenſo, demittatur ad eum perpendicularis ET; intelligatur inſuper quodvis planum FG fundo BC & DE æquidiſtans, quod productum occurrat rectæ ET in puncto S. Preſſiones liquoris in plana FG & BC exercitæ deſignentur per *pr.* FG & *pr.* BC, probari debet fore *pr.* FG : *pr.* BC = ES : ET. Nam ES eſt altitudo liquoris DFGE ſuper plano FG, & ET altitudo liquoris ſuper BC.

I. Sit ES alteri ET commenſurabilis, & E*p* communis utriusque menſura tantæ magnitudinis, ut ducto per punctum *p* plano *dp*, intra ſpatium vaſis D*de*E duci queat rectula *eo* parallela E*p* vel perpendicularis ipſis DE & *de*, quod ſemper fieri poteſt quantumvis irregulare & ſuperius anguſtum eſſe queat ipſum vas ABC. Factis porro ſingulis *p2p*, *2p3p*, &c. æqualibus ipſi E*p*, ductisque per ſingula diviſionis puncta *2p*, *3p*, &c. planis *2d2p*, *3d3p*, &c. quibus poſitis, & quia puncto *e* primi ſtrati liquoris imminet *eo*, hoc punctum *e* tantam preſſuram ſuſtinebit, quantum eſt pondus columnulæ *eo*, & (§. 252.) omnia reliqua plani *de* puncta preſſionem patientur æqualem preſſioni puncti *e*; punctum *2f* in baſi *2d2e* ſecundi ſtrati *e2d* patietur preſſionem compoſitam ex preſſione, qua punctum ejus ſupremum d urgetur, & ex pondere columnulæ *d2f* æqualis ipſi *oe*, atque adeo gravitatio liquoris in punctum *2f* & omnia reliqua plani *2d2e* erit dupla ipſius in plano *de*, & propterea æquivalet ponderi columnarum *oe* + *d2f*, hoc eſt E*2p*; ſimili argumento

con-

conficietur pressionem liquoris in quodlibet punctum plani $3d3e$ æquivalere ponderi columnæ ipsi $E3p$ æqualis in altitudine; hinc pressiones seu gravitationes liquoris in plano FG & BC æquivalebunt columnis, quarum altitudines sunt æquales lineis ES & EF, ergo erit omnino *pr.* FG : *pr.* BC = ES : ET.

II. Sit ES alteri ET incommensurabilis, &, si fieri potest, ratio *pr.* FG ad *pr.* BC major quam ES ad ET, puta æqualis rationi ES : EX cujus consequens EX minor quam ET defectu XT, ex quo defectu auferri poterit quædam TV minor quam XT, ita ut EV commensurabilis fiat ipsi ES. Quo posito, per punctum V planum *b*V transire intelligatur, eritque pr. *bc* minor quam *pr.* BC, cum EV minor sit quam ET, & pr. FG : pr. bc > pr. FG : pr. BC. Jam quia (constr.) EV commensurabilis est ipsi ES, erit per partem primam hujus, pr. FG : pr. bc = ES : EV, & (secundùm hypothesin) est pr. FG : pr. BC = ES : EX, ergo ES : EV > ES : EX, atque adeo EX major quam EV, contra hypothesin. Adeoque nequit pr. FG : pr. BC major esse quam ES : ET.

Sit igitur ratio pr. FG : pr. BC minor quam ES : ET, scilicet æqualis cuidam ES : EY cujus consequens EY major quam ET, excessu TY, auferatur iterum ex hac TY portio YZ talis ut residua EZ alteri ES commensurabilis evadat, per Z transire fingatur planum Z$\kappa\beta$ fundo BC parallelum in quo $\kappa\beta$ instar fundi nunc considerabimus. Unde quia EZ (constr.) major est quam AT, erit pr. $\beta\kappa$ > pr. BC, adeoque pr. FG : pr. $\beta\kappa$ < pr. FG : pr. BC; & quia (constr.) EZ commensurabilis est ipsi ES, erit (num. 1 hujus) pr. FG : pr. $\beta\kappa$ = ES : EZ, ex hypothesi verò est pr. FG : pr. BC = ES : EY, ergo ES : EZ < ES : EY, eritque adeo EZ major quam EY, iterum contra hypothesin, nam EZ necessario minor erat quam EY, quandoquidem ex hac EY ablata ZY relinquebatur EZ; nequit ergo ratio pr. FG : pr. BC minor esse quam ratio ES : ET & quia nec major, sequitur pr. FG : pr. BC = ES : ET. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

254. Hinc ultrò sequitur, quod quælibet portio FM plani cujuslibet horizontalis FG ab incumbente liquore DFGE tantam pressionem subire debeat, quantam sustineret à columna ejusdem liquoris portioni illi FM ad altitudinem ES perpendiculariter imminentis. Nam, quod in propositione universaliter ostensum est, nulla habita

bita ratione figuræ vasis, idem valet etiam de vasis cylindricis, in quibus illicò liquet gravitationes liquoris altitudinibus ejus proportionales esse. Unde, si altitudines liquoris super plano aliquo horizontali in vase prismatico & in vase irregulari utrinque æquales sint, æquales utriusque plani partes æquales pressiones sustinebunt. At in vase prismatico quælibet cujusque horizontalis plani portio sustinet pondus totius columnæ ipsi perpendiculariter imminentis; atque adeo portio quæcunque FM plani FG tantum onus sustinebit, quantum est pondus alicujus prismatis, cujus basis FM & altitudo ES. Adeoque totum planum FG sustinebit onus æquale massæ liquoris in prisma conformatæ, quæ planum FG pro basi habeat & ES pro altitudine.

Corollarium II.

255. Et quia supra (§. 252.) demonstratum est, æquales particulas quam minimas FM & FL plani FG & lateris vasis, æquales pressiones sustinere, unamquamque juxta directionem sibi normalem, scilicet FM verticaliter deorsum, & FL juxta FR superficiei BFD in F perpendicularem, hinc sequitur *quamlibet particulam minimam in vasorum lateribus pressuram subire debere ab incumbente liquore æqualem ponderi columnæ, cujus basis est particula, quæ pressionem sustinet, & altitudo est distantia particulæ à liquoris superficie.*

Atque hæc est generalis hydrostaticæ regula ex suis genuinis principiis eruta, quæ etsi tantum in liquoribus homogeneis valere videtur, sese tamen ad quoscunque liquores, etiam heterogeneos, extendere in sequentibus probabitur.

Scholion.

256. Ex his ergo liquet, quod liquores homogenei gravitant in sua subjecta plana pro ratione altitudinis eorum super planis, in quæ gravitant. Ex qua fluidorum proprietate sequens nascitur paradoxum; quod scilicet parva liquoris cujusque copia tantundem in sibi subjectum planum gravitet, quantum ejusdem liquoris massa centies imo millies major in eadem altitudine. Etenim si vasi acuminato BAC, cujus basis BC notabilis sit amplitudinis, aqua infundatur pertingens usque in A, & per Corollarium I. hujus, aqua tantam pressionem in fundum BC exeret, quantam exereret cylindrus aqueus Fig. 60.

 IBCK

IBCK in eadem altitudine cum vasis liquore. Idcirco pauxilla aqua in tubo acuminato gracilique ABC tantum effectum præstare potest, quantum aquæ moles centuplo, imo pluries, major in eadem altitudine; quod haud dubie non paucis paradoxum videbitur. Ejus tamen veritas ipsa experientia comprobata est, atque deinceps probari potest; nam si fundo vasis stricti ABC orbiculus *a*BC*f* inditus sit vasi tam accurate quadrans, ut nullas rimas relinquat, per quas infusa aqua infra orbiculum transire queat, in centro Q affixum habens filum QM quo attolli possit, cujus fili alterum caput stateræ MDO annexum sit in M; ex altera bilancis parte applicetur pondus P eousque augendum minuendumve dum orbiculus B*f* nonnihil attollere incipiat stateram MO eam in partem flectendo, cui pondus appensum est; reperieturque hoc pondus P orbiculum paulisper attollere valens satis accurate æquari ponderi cylindri aquei BIKC, existentibus jugi brachiis DM, DO æqualibus. Unde cum pondus P tantillo majus esse debeat resistentia, quam in parte opposita superare potest, & hæc resistentia sit ipsa paucæ aquæ ABC gravitatio in orbiculum *a*BC*f*, omninò concludi debet hanc aquæ ABC gravitationem æquivalere gravitationi cylindri aquei I*af*K.

257. Sed inquies forte, si aqua ABC tantam gravitationem in suam basim exerceret, sequeretur fore, ut vas cum infusa aqua tantum ponderare debeat, quantum cylindrus aqueus IC auctus pondere vasis. Nam vas cum infusa aqua lanci impositum atque erecto situ detentum tantum ponderare debet, quanta vi lancem premet; sed lancem urgebit ea vi, qua basis vasis ab interno liquore urgetur aucta pondere vasis, hoc est pondere cylindri KB & vasis simul: interim tamen, si experimentum capiatur, comperietur semper pondus totius non fore majus quam infusæ aquæ & vasis pondera simul sumta, atque adeo regula nostra hydrostatica phænomenis adversari videtur. Sed objectio falsæ innititur hypothesi, quasi liquoris ABC in basin gravitatio etiam tota redundare atque exeri debeat in libræ lancem; quod tamen est falsum, nam si fundus BC urgetur onere IBCK à solo liquore ABC etiam latera tubi acuminati BRA & CSA in altum prementur, nam unumquodque horum laterum punctum tanta vi premitur (§. 255.) quantum est pondus filamenti aquæ æqualis distantiæ puncti ab aquæ superficie, juxta directionem superficiei vasis perpendicularem, adeoque applicando ea, quæ supra (§. 81.) generaliter & in abstracto ostensa sunt, casui præsenti, comperietur prædicta illa latera BRA, CSA vel potius inter-

ternam tubi acuminati superficiem convexam, tanta vi à liquore verticaliter in altum agi, quantum est pondus aquæ illius, qua cylindrus IC aquam in tubo ABC excedit. Unde, quia latera vasis & fundus cohærent, ea sola vis in lancem libræ MO redundare potest, quâ gravitatio aquæ ABC in basin BC excedit vim attollere conantem latera BRA & CSA vasis ABC ab aquæ pressionibus provenientem, aucta pondere vasis; vis vero illa, seu excessus cylindri IC supra massam aquæ, quæ modo nominatam vim attollentem exponit, est pondus solius aquæ in tubo acuminato ABC, ergo vis, qua lanx deprimi atque urgeri debet, est solum pondus aquæ ABC auctum pondere vasis, prorsus ut experientia id manifestat. Idcirco tantum abest, ut objectio ab experientia petita vim propositionis nostræ quicquam infringat, ut eam potius egregie confirmet.

PROPOSITIO V. Theorema.

258. *Gravitationes quorumcunque liquorum in subjecta plana horizontalia, sunt areis homologis in scala densitatum vel etiam ordinatis scalæ pressionis liquorum proportionales.* Fig. 61.

Sit vas quodcunque irregulare ABC liquoris heterogenei plenum usque ad DE, & circa axem ET superficiei liquoris DE fundoque BC perpendicularem, atque adeò fluidi altitudinem super fundo designantem, extructæ sint curvæ HKN & EIX, quarum illa sit scala densitatum liquoris, utpote cujus ordinatæ EH, $3p3h$, SK, TN densitates liquoris exponunt in illis planis, in quibus ordinatæ reperiuntur, hæc vero EIX scala pressionis liquoris, cujus scilicet ordinatæ $3p3q$, SI, &c. gravitationes liquoris denotant in plana $3d3e$, FG, &c. Ac denique area EHKNT applicata ad ejus altitudinem ET præbet mediam densitatem TV fluidi heterogenei. Ordinatæ verò scalæ gravitationum EIX (§. 246.) areis homologis scalæ densitatum HKN proportionales sunt, ultimaque TX toti axi AT æqualis esse ponitur. Quibus intellectis probandum est, fore gravitationem liquoris DFGE in planum FG ad gravitationem liquoris DBCE in fundum BC, ut area ESKH ad aream ETNKH, vel sicut SI ad TX, &c.

Vasis liquor divisus intelligatur, ut in præcedenti, in sua strata horizontalia æque alta quidem omnia, sed infinitesimæ altitudinis, per plana de, $2d2e$, $3d3e$, &c. fundo BC æquidistantia. Quia igitur cujusque strati altitudo insensibilis seu indefinite parva est, den-

densitas liquoris per totum stratum tanquam uniformis spectari potest, scilicet EH significabit densitatem primi strati *de*ED, ordinata *ph* densitatem uniformem secundi 2d2ed, atque ita porrò de reliquis. Jam puncto e primi strati perpendiculariter imminet columnula seu filamentum eo, ejusque adeò pondus sustinebit: atqui pondus ipsius *eo* (§. 33.) est ut ejus volumen & densitas seu gravitas specifica conjunctim, hoc est $= eo.EH = Ep.EH$ seu = rec-lo ω areæ SHK inscriptum ordinatæ EH adjacens, eademque est pressio, quam subeunt omnia reliqua puncta plani *de*; pressio verò, quam sustinebunt puncta baseos *2d2e* secundi strati *2d2ed*, erit aggregatum ponderum filamenti cujusdam secundi strati, & æque alti filamenti *eo* in primo, quorum hoc, ut modo dictum, exponitur rec-lo ω, illud verò rec-lo 2ω seu $p2p.ph$: atque adeò erit talis pressio in *2d2e*, $= \omega + 2\omega$. Eodem argumento conficietur gravitationem liquoris in tertium planum *3d3e* exponi aggregato rectangulorum $\omega + 2\omega + 3\omega$; atque adeo pressio, quam plani FG puncta sustinebunt, exponetur omnibus rectangulis $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega$ quæ areæ ESKH inscripta sunt, atque ob infinitesimam cujusque altitudinem in hanc aream evanescunt, ita ut loco aggregati omnium area ipsa ESKH intelligenda sit, ac propterea pressio, quam planum FG à liquore incumbente subire debet, exponitur area homologa ESKH, & gravitatis liquoris in fundum BC per aream ETNKH; est ergo omnino *pr.* FG : *pr.* BC = ESKH : ETNKH = SI : TX per §. 246. Quæ erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

259. Hinc pressio, quam particula quævis FR plani FG ab imminenti liquore patitur, æquivalet ponderi absoluto massæ liquoris cujusdam homogenei, cujus densitas æqualis sit densitati mediæ TV liquoris heterogenei, volumen vero prisma rectum super basi FR & altitudine æquali SI homologæ ordinatæ scalæ pressionum SIX. Nam, juxta Propositionem præsentem, pressio, quam subit particula FR, exponi debet facto ex area SEHK in particulam FR plani FG; & (secundùm hypothesin) SEHK : TEHKN = SI : TX = SI. TV : TX. TV, atque (§. 245.) area ETNKH = ET. TV, cum ipsa TV seu media liquoris densitas sit ea, quæ oritur applicando dictam aream ad altitudinem ET, atque adeò facta, uti posthac semper factum supponemus, TX æquali ET, etiam rectangulum TX. TV

areæ

areæ ETNKH æquetur; reperietur rectangulum SI. TV ubique æquale homologæ areæ ESKH, & factum ex hac area in FR, exponens gravitationem seu pressionem in hanc particulam, erit æquale facto SI. TV. FR, quod designat prisma, cujus basis FR est planum pressionem sustinens; altitudo verò SI ordinata scalæ gravitationum, ductum in mediam densitatem TV liquoris heterogenei: atqui (§. 33.) prisma SI. FR ductum in TV exponit pondus liquoris homogenei, cujus densitas est TV & volumen ipsum prisma SI. FR; ergo particula FR plani FG ab incumbente liquore heterogeneo pressionem subit æqualem ponderi prismatis fluidi, cujus basis sit ipsa particula pressionem sustinens, altitudo ordinata homologa SI scalæ pressionum, & densitas uniformis TV media densitas liquoris heterogenei.

Corollarium II.

260. Unde, quia æquales & minimæ particulæ lateris FL & contigua FR in plano horizontali FG (§. 252.) æquales ab imminente liquore heterogeneo pressiones sustinent, quælibet, juxta directionem ipsi perpendicularem, etiam FL pressionem subibit æqualem ponderi prismatis liquidi, cujus basis sit particula hæc ipsa FL fluidi impressionem excipiens; altitudo vero SI ordinata homologa scalæ pressionum & denique TV media densitas liquoris heterogenei.

Corollarium III.

261. Si liquor est homogeneus, cujus densitas sit HE scala densitatum fiet recta axi ET parallela per punctum H ducta, eritque adeo hoc casu TV = EH, & curva EIX mutabitur in lineam rectam angulum semirectum cum axe ET continentem; adeò ut iterum hinc liqueat, cujusque liquoris homogenei gravitationes altitudinibus liquoris super planis, quæ pressiones subeunt, proportionales esse. Nam in triangulo rectilineo ETX ordinatæ SI, TX, quæ gravitationes liquoris in plana FG, BC significant, abscissis ES, ET proportionales erunt existente linea EIX recta, qualem nunc esse supponemus, ne pro hoc casu particulari novum schema delineare necessum habeamus.

Corollarium IV.

262. Sed si liquores homogenei diversæ densitatis vel gravitatis specificæ inter se conferuntur, gravitationes sunt in composita ratione densitatum & altitudinem; adeoque si in syphonis AB*d* crure ABC insit liquor DC cujus densitas uniformis sit EH, & altitudo super fundum æqualis HN; alteri verò cruri *ab* insit liquor *dt* densitatis *eh* vel *nc* ad altitudinum *ce* in crure assurgens, erit hujus liquoris gravitatio exprimenda rectangulo *he*. *et*, & liquoris DEC gravitatio exponi debet rectangulo EH. HN, adeoque, si tubi per horizontalem *b*B communicantes, atque rectangula EH. HN, *he*. *et* æqualia fuerint, liquores in æquilibrio consistent; quod proinde continget, ubi altitudines liquoris EC, *ec* densitatibus seu (§. 33.) gravitatibus specificis *he*, HE fuerint reciproce proportionales.

Fig. 62.

CAPUT II.

De gravitationibus Liquorum in Vasorum latera, & de Tuborum firmitatibus requisitis ad perferendas liquorum pressiones.

In Capite proxime antecedenti eas solùm gravitationes liquorum contemplati sumus, quæ in plana horizontalia exeruntur; in hoc verò examinandæ veniunt pressiones liquorum laterales, quibus parietes seu spondæ vasorum afficiuntur. Talis enim indago præbebit regulam pro definiendis tuborum firmitatibus ad resistendum aquæ pressionibus & viribus, quibus liquores vasorum latera ab invicem diducere conantur.

PROPOSITIO VI. Theorema.

263. *Vasis vel tubi* EAQP *ex utraque parte* ETPS *&* AYQV *aperti, & liquori* βαθδ *immissi usque ad* ETP, *superficies externa & convexa ab ambiente liquore eadem vi introrsum versus axem premetur, qua cava vasis superficies extrorsum urgetur ab interno vasis liquore.*

Fig. 63.

Nam si loco vasis EAQP intelligatur moles liquoris ejusdem constitutionis cum liquore ambiente, ejusdemque figuræ, magnitudinis

dinis & positionis cum vase; quia (secundùm hypothesin) omnia sunt in statu manenti, massæ liquidæ EAQP superficies externa eadem vi ab ambiente liquore βαθδ urgebitur, quâ superficies ejus cava à liquore EAYQP; alioqui, si alterutra pressio alteri prævaleret, partes liquoris ad motum concitarentur, nec proinde aqua vel liquor foret in statu manenti, contra hypothesin. Jam eandem impressionem exercebit liquor ambiens in superficiem vasis rigidam convexam, quam in similem æqualem & similiter positam superficiem aquæ EAYQP; ac pariter hic liquor vel aqua in suam cavam superficiem eandem impressionem exseret, quam exsereret in similem & æqualem superficiem cavam, sed rigidam vasis. Ergo externa & interna vasis superficies à liquore ambiente & interno, in vasis cavitate existente, æqualibus viribus in oppositas partes, juxta directiones superficiei vel superficiebus perpendiculares, urgentur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII. THEOREMA.

264. *Si Prisma rectum* NEABL *terminatum superficie curva* NCEBL, *rectangulo* NLBC *& duabus figuris similibus ac æqualibus quibuscunque* BAC, LEN, *cujuslibet liquoris heterogenei plenum sit, & planum* cba *basi* CAB *parallelum, ab eadem distet intervallo* Aa, *insensibili respectu totius liquoris altitudinis* EA *vel* MD. *Superficies cava* CcaABb *& rectangulum* BCcb *viribus æqualibus in partes directe oppositas prementur; ipsaque potentia, qua superficies & rectangulum afficiuntur, æquabitur ponderi prismatis liquidi, cujus basis est rectangulum* BbcC, *& altitudo ordinata* af *scalæ gravitationum* EZα *liquoris heterogenei, densitas verò uniformis* Aω *eadem cum media densitate ejusdem liquoris heterogenei.* Fig. 63.

Singula curvæ *cab* puncta eandem pressionem sustinent, æqualem (§. 260.) scilicet ponderi filamenti liquoris homogenei, cujus altitudo est *af* ordinata scalæ gravitationum, & densitas uniformis recta Aω, quæ liquoris heterogenei mediam densitatem repræsentat: & singula puncta curvæ CAB pressionem subeunt æqualem ponderi (§. 260.) filamenti ejusdem ac modò liquoris homogenei, cujus densitas uniformis sit iterum Aω, altitudo verò Aα homologa ordinata scalæ pressionum. Verum, quia differentia αg ordinatarum *fa*, αA (secundùm hypothesin) insensibilis est atque adeo contemnenda præ his ordinatis, singula puncta superficiei cavæ CaB una eademque

 po-

potentia, quam exponit pondus filamenti liquidi altitudinis *af* vel A*α* & densitatis A*ω* affici censeri debent, adeoque impressio, quam à fluido vasi indito patietur dicta superficies curva & cylindrica (§. 63.) æquivalet pressioni, quam subiret rectangulum BC*eb*, si etiam singulis ejus punctis potentia *af* applicata esset, atque gravitatio in hoc rectangulum est ut *af*. BC. B*b*, vel *af*. BC. A*a*, ductum in A*ω*, cum pondus cujusque filamenti *af* sit ut hoc filamentum, tanquam volumen, ductum in densitatem seu specificam gravitatem A*ω*. Atqui solidum *af*. BC. Bb ductum in A*ω* denotat (§. 33.) pondus massæ fluidæ solido isti quoad volumen æquali, cujus uniformis densitas æquetur mediæ densitati A*ω* liquoris nostri heterogenei. Ergo superficies cava C*a*B & rectangulum C*b* æquali vi in oppositas partes urgentur, & tanta quantum est pondus prismatis liquoris homogenei, cujus prismatis basis sit ipsum rec-lum B*c* superficiem curvam C*a*B subtendens, altitudo verò *af* ordinata scalæ gravitationem EZ*α*; & liquoris homogenei densitas sit media densitas A*ω* liquoris heterogenei. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

265. Vires, quibus altera superficies cava C*cqyb*B & rectangulum ipsam subtendens CBb in oppositas partes urgentur, etiam æquales erunt, si toti prismati EAQP idem liquor heterogeneus inditus fuerit, utpote quæ vires exponuntur una eademque re, scilicet pondere prismatis liquidi basin rectangulam CBb & altitudinem *af* habentis, cujus densitas uniformis eadem est ac prius, media densitas A*ω* fluidi heterogenei.

COROLLARIUM II.

266. Propterea gravitatio liquoris heterogenei in totam superficiem cavam CNEABL vel in rec-lum NCBL, item in superficiem NCVQPTLB & idem rectangulum NCBL æquivalebit ponderi prismatis recti & liquidi, cujus basis sit area seu trilineum EZ*α*AE altitudo CB, densitasque uniformis A*ω*.

Nam si altitudo AE vasis in innumeras particulas indefinite parvas qualis A*a* divisa, & per singula divisionum puncta *a* plana horizonti parallela, quale *acqb*, ducta intelligantur, per art. 264. quælibet superficiecula cava *c*A*b* vel *c*Q*b* & rec-lum CB*b* pressionem subibunt

bunt æqualem ponderi liquoris homogenei, cujus volumen ſit parallelepipedum ſeu priſma rectum, cujus baſis rec-lum CBb ac altitudo af, ſcilicet homologa ordinata ſcalæ preſſionum EZα, & cujus liquoris homogenei denſitas ſit Aω par mediæ denſitati liquoris heterogenei vaſis EQ vel ECB, atque pondus liquoris homogenei ſub dicto volumine (§. 33.) exponitur facto & volumine in denſitatem liquoris, quæ eſt Aω, ſeu media denſitas liquoris heterogenei, hoc eſt per af. BC. Dd. Aω; = Aω. BC. rec-lum fA; & preſſio omnium ſuperficiecularum CaB vel omnium CqB, quæ in tota CNELB, vel in tota CNPLB continentur, exponetur per factum ex Aω. BC in omnia rec-la fA, quæ areæ EzαA inſcribi poſſunt, vel quia hæc rec-la areæ inſcripta in hanc ipſam aream deſinunt, per factum ex Aω. BC in aream EZαA. Atqui hoc factum (§. 33.) æquivalet ponderi quam habet maſſa liquoris homogenei, cujus denſitas eſt Aω & volumen eſt priſma ex baſi EZαA & altitudine BC. Ergo etiam preſſio liquoris heterogenei in ſuperficiem curvam CNELB, vel in CNPLBQ æquivalet ponderi ejusdem liquoris homogenei maſſæ.

267. Zonæ vero CcabB vel CcqbB, quorum communis altitudo Aa nunc ponatur finitæ magnitudinis, preſſionem ſubibunt exponendam pondere priſmatis liquidi, cujus baſis ſit trapezium vel quadrilineum $af\alpha$A, altitudo BC, & denſitas uniformis Aω.

Corollarium III.

268. Unde ſi planum EMDA rectangulo NCBL in medio MD occurrat ad angulos rectos, in hoc plano reperietur media directio preſſionum, quas ſingula puncta ſuperficierum NAL & NQL ſubeunt à liquore heterogeneo, cum in dicto plano EMDA media ſit directio preſſionum, quas ſingula puncta rectanguli NCBL ab eodem in vaſe liquore heterogeneo ſuſtinent, & preſſiones hujus liquoris in ſuperficies curvas NAL & NQL eædem ſint cum preſſione, quam ſuſtinere debet rectangulum NCBL. Idcirco, ſi per centrum gravitatis areæ EZαA planum rec-lo NB perpendiculare ductum intelligatur, cujus & plani EMDA prolongati communis ſectio ſit ZK, hæc KZ (§. 54.) erit media directio gravitationum liquoris in ſuperficiem cavam NAL. Et punctum K vocari nunc poteſt *Centrum preſſionum* vel *gravitationum* liquoris heterogenei.

COROLLARIUM IV.

269. Hinc liquoris heterogenei preſſio lateralis, quam ſuſtinent ſuperficies cavæ NAL vel NQL aut etiam rec-lum æquealtum CBL, eſt ad pondus abſolutum liquoris heterogenei NLBCE, ſicut factum ex prismate recto, cujus baſis eſt figura $Ez\alpha A$, & altitudo BC in $A\omega$ ad factum ex prismate NEABL in $A\omega$, vel omiſſa hac $A\omega$, velut prisma illud ex $EZ\alpha A$ in BC ad hoc prisma NEABL. Nam (§. 266.) prisma $EZ\alpha A$. BC ductum in $A\omega$ ſignificat preſſionem, quam ſuperficies curva CEB vel CQPB ab interno liquore heterogeneo patitur, & prisma NEABL ductum in eandem $A\omega$ (§§. 245. & 33.) ſignificat pondus abſolutum liquoris heterogenei ſub volumine NEABL. Propterea, ſi area $A\alpha ZE$ fuerit ad bilineum BACB, baſin prismatis ſeu vaſis NEAB, ſicut AE ad BC, presſio lateralis, quam ſuperficies cava NAL vel NQL ſive rectangulum NCB ſubeunt, æquabitur ponderi abſoluto maſſæ liquoris heterogenei NEAB; & presſio illa lateralis hoc pondere abſoluto major minorve exiſtet, prout ratio trilinei $EZ\alpha A$ ad bilineum BACB major aut minor fuerit ratione AE ad BC.

COROLLARIUM V.

270. Adeoque, ſi vas noſtrum ponatur eſſe tubus SAYPQ, in quo rectangulum SVYT ſit maxima ſectio baſi AYQV recta; duæ partes ſuperficiei cavæ SEAT & SPQT, rectangulo SVYT adjacentes, *maximam* presſionem à liquore heterogeneo, tubo indito, patientur, atque adeò hic liquor, recenſitas tubi partes à ſe invicem avellere conans, *maximam* impresſionem in lineas SV & TY, in quibus duæ partes SEAT & SPQT ſibi invicem adhærent, exſeret; adeò ut, ni tubus ſatis firmus ſit, qui liquoris presſionibûs reſiſtere valeat, in loco infimo linearum SV vel TY rumpi, vel ſaltem rimis pertundi debeat à liquoris preſſurâ. Nam quia factum $EZ\alpha A$. VY. $A\omega$ exponit preſſuram, quam ſemitubus SAT vel SQT à latere ſubit, & propter maximum rectangulum SVYT, baſis ejus VT major eſt baſi CB cujuslibet alius rectanguli NCBL, ultrò liquet veritas aſſerti.

COROLLARIUM VI.

271. Si ergo ſemel conſtiterit juxta quam proportionem procedant firmitates tuborum varias crasſities habentium, ex collatione harum firmitatum cum liquorum gravitationibus innoteſcent facili negotio crasſities tubi ſeu ſpiſſitudo materiæ, ex qua tubus paratus eſt, quæ requiritur ad id, ut tubus citra ſui rupturam liquoris ei inditi presſionem perferre posſit. Firmitatum vero ratio, quibus duo diverſi tubi pollent, demonſtrabitur in ſequenti propoſitione.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA.

272. *Reſiſtentiæ ſeu firmitates tuborum ſunt in compoſita ratione ex ratione tenacitatis materiæ unius ad tenacitatem materiæ alterius tubi, ex ratione craſſitiei ad craſſitiem, & denique ex altitudinis tubi unius ratione ad altitudinem alterius.* Fig. 64.

Sit tubus, cujus orificium figura interior AVQY, crasſities materiæ, ex qua tubus paratus eſt, VV vel AA aut QQ, & altitudo tubi V*u* ſeu Y*y*; erunt rectangula *u*VV & *y*YY partes, in quibus ſemitubi *u*A*y* & *u*Q*y* à ſe invicem avellendi juxta directiones VF & YF à potentiis in contrarias partes agentibus, ſibi mutuo adhærent. Jam quia tot vinculis ſemitubi conjunguntur, quot ſunt puncta phyſica in rectangulis illis uVV & yYY, manifeſtum eſt reſiſtentiam tubi æqualem eſſe vi requiſitæ ad omnia vincula ſeu fibras dilacerandas, atqui vis ejusmodi ſeu reſiſtentia tubi eſt ut vis, qua unum vinculum ſeu una fibra rumpi poteſt & numerus fibrarum conjunctim; vis verò, qua opus eſt ad rumpendum unam fibram, eſt nobis tenacitas materiæ tubi vel ſaltem huic tenacitati proportionalis; numerus verò fibrarum eſt ut ſumma rectangulorum *u*VV & *y*YY, ergo vocando tenacitatem materiæ tubi T, erit ejusdem tubi reſiſtentia ſicut factum ex T in duplum rectangulum *u*VV, hoc eſt ut 2.T.VV.V*u*, vel etiam ut 2.A.C.T, vocando altitudinem tubi V*u*, A & crasſitiem materiæ ſeu VV vel YY, C. Sic etiam in alio tubo, cujus firmitas, crasſities materiæ ejusdemque tenacitas, ac denique tubi altitudo dicantur, *f*, *c*, *t* & *a*, & F indicet pariter firmitatem primi tubi, erit *f* ut 2*act*, & cum paulo ante fuerit F ut 2ACT erit omnino $F : f = TCA : tca$. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

273. Hinc figuras 63 & 64, junctim inspiciendo, quia (§. 267.) pressio liquoris heterogenei, quæ in partes uAy & uQy exseritur, est $afuA.VY.A\omega$, hæc pressio etiam erit $=AMDS$, nominando altitudinem zonæ qua ABQ, quæ est Aa ut supra, A, quadrilineum $afuA = A.M$, diametrum VY vel $AQ = D$. adeoque pr. uAy + pr. $uQy = 2AMDS$, existente $A\omega = S$. Ponendo igitur liquoris pressionem in zonam aAQq præcise æqualem esse ejus firmitati, seu $F =$ pr. uAy + pr. uQy, erit (§. 272.) $2.TCA = 2.AMDS$, vel $CT = MDS$, & in alio tubo $ct = mds$, indicando similes res per similes litteras in utroque tubo majusculis in primo, & minusculis in altero. Ergo $CT : ct = MDS : mds$.

Corollarium II.

274. Habeant insuper tubi nostri orificia circularia, atque contineant liquores homogeneos, eritque eo casu linea $EZ\alpha$ recta angulum semirectum continens cum EA, adeo ut sit $af = Ea$, $A\omega$ verò, quæ dicta est S, designat densitatem seu gravitatem specificam liquoris, & M erit Ei bisecta scilicet Aa in i; quandoquidem $M.Aa = afuA$, & hoc casu hoc quadrilineum abit in trapezium æquale rectangulo sub Ei & Aa. Hisce positis analogia corollarii præcedentis transformabitur in sequentes I°. $C : c = (M.S.D : T) : (m.s.d : t.)$. Hoc est, crassities materiæ in ambobus tubis firmitates habentibus liquorum pressionibus æquipollentes, sunt ut facta ex altitudinibus liquorum mediis & gravitatibus eorundem specificis in diametros orificiorum applicata ad tenacitatem materiæ, ex qua tubi fabrefacti sunt.

275. Adeoque si liquores ejusdem speciei & tubi ex eadem materia facti fuerint, crassities tuborum æqualiter firmorum erunt in composita ratione altitudinum, liquorum, & diametrorum tuborum, hoc est in ratione rectangulorum per axem tuborum.

276. II°. $T : t = (M.S.D : C) : (m.s.d : c)$. Hoc est tenacitates materiæ tuborum æqualis roboris, sunt ut facta ex altitudinibus liquorum mediis & gravitatibus eorum specificis in diametros tuborum applicata ad crassities materiæ, ex qua tubi parati sunt.

Scho-

Scholion.

227. Ut usus præcedentium regularum innotescat, unum atque alterum exemplum afferre libet. *Exempl.* I. Ad Calcem Operis nonnullorum Academiæ Reg. Parif. Scientiarum sociorum, quod inscribitur, *Divers Ouvrages de Mathematique & de Physique de Messieurs de l'Academie Royale des sciences*, extat dissertatiuncula Celeb. Olai Romeri Pani De Crassitie & Viribus tuborum in aquæductibus, secundum diversas fontium altitudines, diversasque tuborum diametros, in qua dissertatione fol. 517. relatum legitur, tubum plumbeum diametri 16 pollicum, cum crassitie $6\frac{1}{3}$ linearum (linea ipsi est 12^a. pollicis vel 144^a. pedis Parisiensis pars) pressioni aquæ 50 pedum in altitudine sufficienter restitisse in experimento quodam Versaliis olim sumpto, qua observatione posita, quærit Autor qualis crassities alii tubo plumbeo tribui debeat orificium habenti 10 digitorum, ut aquæ pressionem 40 pedum perferre queat. Canon articuli superioris 275 quæstioni illico satisfaciet, cum hoc casu crassities sint ut rectangula per axem, nam in tubo observationis multiplicando aquæ altitudinem 50 pedum in diametrum tubi 16 pollicum, productum 800 denotat rectangulum per axem in tubo observationis, & ducendo altitudinem aquæ 40 pedum in diametrum 10 pollicum alterius tubi proveniet 400 pro rectangulo per axem in hoc tubo, quod cum illius 800 tantum dimidium sit, hujus tubi crassities juxta canonem tantum dimidia erit crasfitiei in tubo observationis, quæ erat $6\frac{1}{3}$ linearum; ergo quæsita alterius tubi crasfities erit tantum $3\frac{1}{6}$ linearum, loco $4\frac{1}{2}$ lin. circiter, quam Dn. Romerus repererat, quia resistentias tuborum statuit esse in duplicata ratione crassitierum cæteris existentibus paribus, quas supra in propositione apparet esse in simplice non duplicata illa ratione.

278. *Exempl.* II. Mariottus censet, ut habetur in eodem Opere quod in antecedenti exemplo memoravi fol. 513, tubum cupreum sex pollicum in diametro aquæ presfionem 30 pedum perferre posse cum crasfitie dimidiæ lineæ. Ponamus has tuborum plumbei & cuprei resistentias aquæ presfionibus præcise æquari, invenienda-que sit proportio tenacitatis plumbi & cupri. In formula superiore (§. 276.) elisis S & s utpote æqualibus provenit $T : t = (M.D : C) : (m.d : c)$. ubi majusculæ ad tubum plumbeum, minusculæ verò ad cupreum pertinent, hinc subrogatis ordine loco M, D, C, nu-

 meris

meris 50, 16, $6\frac{1}{3}$; & loco m, d, c, numeris 30, 6 & $\frac{1}{2}$; invenietur $T : t = \frac{2400}{19} : 360 = 240 : 684 = 20 : 57$, atque adeo tenacitas plumbi foret, juxta has observationes, paulo major quam subtripla tenacitatis cupri.

PROPOSITIO IX. Theorema.

279. *Si vasis* BAS, *liquoris cujuscunque heterogenei pleni, partes* BAE, SAE *instar alarum follis circa verticem* A *ab invicem diduci queant, earundemque partium vel complementorum* OBbA, OSsA *solida analoga*
Fig. 23, 24. 2B2A2E, 2S2A2E, *vel* B2B2b2A, S2S2s2A *indicentur iisdem signis* δ, κ, *quibus eorundem solidorum analogorum centra gravitatis signantur, signoque* ω *pseudocuneus* LPQ *scalæ gravitationum* LrQ *utrique vasis alæ communis, quo ejusdem pseudocunei centrum gravitatis signatur, potentiæ quædam æquales ponderi massarum* δ, κ *liquoris cujusdam homogenei, cujus densitas eadem sit cum* PV *media densitate liquoris in vase heterogenei, in directionibus suis homologis* $\alpha\delta$, $\xi\kappa$ *vel* $\delta\alpha$ *&* $\kappa\xi$ *per centra gravitatis solidorum* δ, κ *transeuntibus planisque* BS *normalibus vasi applicatæ, & aliæ potentiæ* γ *&* ω *inter se æquales, utpote singulæ æquales ponderi molis liquidæ* ω, *cujus densitas uniformis etiam sit* PV *æqualis mediæ densitati liquoris heterogenei, vasi applicatæ in directionibus* $b\gamma$, $s\omega$, *plano* BS *æquidistantibus, & per centrum gravitatis* ω *pseudocunei scalæ gravitationum transeuntibus; hæ quatuor potentiæ* δ, κ, γ *&* ω *simul agentes, quælibet scilicet secundum suam directionem, eadem vi pollent ad diducendas vasis alas, quam habet eidem vasi inditus liquor heterogeneus.*

Hæc propositio tantum est casus particularis corollarii primi Propositionis X. libri primi, nam quæ in hac propositione generaliter dicitur scala potentiarum solido patienti perpendiculariter applicatarum, nunc est scala gravitationum L*r*Q, quandoquidem quodvis punctum *b* in superficie A*b*B urgetur juxta directionem *bu* superficiei perpendicularem (§. 260.) potentia æquali ponderi filamenti liquidi voluminis 3*er* & densitatis PV æqualis mediæ densitati liquoris heterogenei, quod pondus filamenti *r*3*e* exponitur (§. 33.) facto *r*3*e*. PV ex volumine scilicet in densitatem liquoris, atque adeò liquoris gravitationes in cavam vasis BAS superficiem idem præstant ac potentiæ singulis punctis cavæ isti superficiei applicatæ, quas designant ordinatæ respectivæ *r*3*e* scalæ gravitationum L*r*Q ductæ in datam PV. Propterea (§. 81.) liquor heterogeneus

vasis

vasis eundem effectum præstabit, quem potentiæ expressæ per solida $\delta, \varkappa$, & ω ducta in PV, atque adeò æquales ponderi liquoris homogenei densitatis PV sub voluminibus illis $\delta, \varkappa, \omega$, applicatæ solido BAS in directionibus $\alpha\delta$, $\xi\varkappa$ vel $\delta\alpha$, $\varkappa\xi$ & $b\gamma$, $s\omega$. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

280. Adeoque momenta fluidi heterogenei vasis alas diducere conantis circa hypomochlion A (§. 82.) pro ala BAE erunt PV. $\delta . \alpha E$ + PV. $\gamma . Ae$, & pro ala SAE erunt PV. $\varkappa . \xi E$ + PV. $\omega . Ae$. Hæc enim facta PV. δ, PV. γ, PV. ω, PV. $\varkappa$ significant pondera liquoris densitatem PV habentis sub voluminibus δ, γ, ω, & $\varkappa$.

Corollarium II.

281. Antecedens corollarium juxta §. 263. etiam obtinet, cum vasis alæ ab aliquo fluido ambiente extus premuntur, sed permutatis gravitationum directionibus, hoc est, sicut interni liquoris gravitationes vasis alas ab invicem diducere conantur, ita vice versa ambientis fluidi pressione fit, ut eædem alæ ad se invicem constringantur fortiter. Unde eædem formulæ, quæ in corollario præcedenti momenta liquoris interni vasis alas dilatare conantis designabant, momenta pariter liquoris ambientis alasque constringere conantis exprimerent, sed scalæ gravitationum liquoris exterioris applicatæ.

Scholion.

Adeoque, ad æstimandas liquoris pressiones in vasis diducibilibus, tota difficultas eo reducitur, ut habeatur regula calculum subducendi pro inventione momentorum solidorum δ & $\varkappa$ respectu plani recti AE, & pseudocunei ω respectu plani PQ, vel subinde etiam respectu plani OAO figuræ 24, quoties scilicet vasis vertex A sursum respicit. Calculus vero facile reduci potest ad quadraturas figurarum, ut ex sequentibus duobus theorematibus haud difficulter perspicietur.

PROPOSITIO X. THEOREMA GEOMETRICUM.

Fig. 27. 282. *Solidi cujusvis* CBAD, *cujus ſectiones* cbd *baſi* CBD *parallelæ ſint, figuræ ſimiles & ſimiliter poſitæ, momentum reſpectu plani* CAD *baſi* CBD *recti, æquabitur facto ex trilineo quodam* AEFfA *in rectangulum ſub* EF, *quam ipſi* BE *rectæ* CD *normali æqualem ponimus, & data recta* D *ejus magnitudinis, ut parallelepipedum ſub quadrato rectæ* BE *vel* EF *& hac data* D, *æquale fiat ſolido ex bilineo* CBD *in* XE, *exiſtente hac* XE *diſtantia centri gravitatis* X *bilinei* CBD *ab ejus baſi* CD, *ipſum verò trilineum ea lege deſcriptum ſit, ut ejus ordinatæ* EF, ef *ſint in triplicata proportione ordinatarum ipſis in directum poſitarum* BE, be, *in figura* AbBE, *quæ plano* CAD *recta eſt, & per axem* AE *figuræ* CAD *tranſit.*

Sit *x* centrum gravitatis figuræ *cbd*, eritque *xe* diſtantia hujus centri à baſi *cd* bilinei *cbd* in plano figuræ AbBE, quandoquidem figuræ CBD, *cbd* (ſecundùm hypotheſin) ſimiles & ſimiliter poſitæ ſunt, eritque adeò CBDC. XE : *cbdc*. xe $=$ BE^3 : *be*^{3} id eſt conſtr. $=$ EF : ef $=$ D. EF^2 : D. EF. ef; atqui (conſtr.) eſt D. EF^2 vel D. BE^2 æquale ſolido ex CBDC in XE, ergo etiam D. EF. *ef* æquabitur ſolido ex *cbdc* in *xe*, ſeu momento bilinei *cbd* axi *cd* appenſi. Jam, quia momentum ſolidi totius CBAD reſpectu plani CAD æquatur momentis omnium bilineorum *cbdc*, quæ in hoc ſolido continentur, id eſt, omnibus *cbdc* in *xe*, idem ſolidi momentum etiam æquale erit omnibus D. EF. *ef*, quorum ſingula ſingulis *cbdc*. *xe* æqualia ſunt; atqui omnia D. EF. *ef* $=$ D. EF. omn. *ef* $=$ D. EF. aream EAfF. Ergo momentum ſolidi CBAD æquatur facto ex area EA*f*F in rectangulum D. EF. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

283. Adeoque momentum complementi ſolidi CBAD reſpectu ejuſdem plani CAD, ſeu ſolidi reſidui poſt detractionem ipſius CBAD à priſmate recto & æquealto CDBG, æquabitur facto ex trilineo AFH in rec-lum D. EF. Nam momentum priſmatis CDBG eſt factum ex rec-lo EH in rec-lum D. EF, & ſolidi CBAD momentum æquatur facto AEF*f*A. D. EF, adeoque momentum complementi hujus ſolidi CBAD æquatur omninò facto ex rec-lo EH, demto trilineo EAF, in rectangulum D. EF, hoc eſt facto ex AFH in D. EF.

Co-

Corollarium II.

284. Unde, si solidum nostrum CBAD fuerit analogum solido patienti BAE propositionis præcedentis, atque adeò idem sit cum solido δ, erit hoc casu $\delta.\alpha$E seu momentum solidi $\delta =$ EAfF, D.EF, in casu figuræ 23. quo vertex solidi BAS deorsum respicit, & $\delta.\alpha$E $=$ HFfA. D. EF in casu figuræ 24, quo vertex sursum respicit.

PROPOSITIO XI. Theorema Geometricum.

285. *Si prisma rectum super basi* CAD *sectum intelligatur superficie quadam curva* QrLCD, *nascetur inde cunei species* QACD, *cujus acies erit in linea* CD, *ejusque facies curva aciei* CD *adjacens oritur motu parallelo lineæ* CD, *ita ut fixum in ea punctum* E *semper in curva* LrQ *existat inter movendum, lineaque* CD *plano* LPQ *perpendicularis sit, hujus cunei momentum respectu plani* PQ *alteri* CAD *recti æquabitur facto areæ seu bilinei* EiA *in rec-lum* AE. CD; *ubi bilinei ordinata quæcunque* ei *fuerit ad ordinatam homologam* er *figuræ* PLQ, *sicut rectangulum coordinatarum* Ae, cd *in figura* CAD, *ad rectangulum ex datis* AE, CD. Fig. 28.

Nam quia (secundùm hypothesin) *ei* : er $=$ *Ae. cd* : AE. CD, erit *Ae. cd. er* hoc est momentum rec-li cd. er ad distantiam Ae plano PQ appensi $=$ solido AE. CD. *ei*. Atqui momenta omnium rectangulorum *cd. er* contentorum in pseudocuneo æquivalent momento istius pseudocunei, ergo etiam omnia EA. CD. *ei*, hoc est, factum ex rec-lo AE. CD in bilineum E*i*A, æquantur momento pseudocunei QACD. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

286. Quoties figuræ CAD vertex A deorsum conversus est, atque adeo cum puncto P congruit, toties curva EiA per puncta L & P transibit, adeo ut ordinatæ ejus in his punctis nullæ sint. Sed si vertex A ejusdem figuræ CAD sursum respicit, adeo ut basis CD per punctum P transeat & vertex cum puncto L confundatur, curva LηI transibit quidem per punctum L, non verò per punctum P, cum ordinata ejus in hoc puncto PI ipsi PQ seu PL æqualis futura sit; nam si CD est in P & A in L, analogia *eη* : *er* $=$ *Ae. cd* : AE. CD,

 fiet

fiet PI : PQ = AE. CD : AE. CD, atque adeò PI = PQ = PL, ubi scilicet *Ae* facta fuerit AE. Hocque casu erit momentum solidi respectu plani per L transeuntis alterique PQ æquidistantis, æquale facto ex rec-lo AE. CD in aream PLηI.

COROLLARIUM II.

287. Hinc, si figura CAD fuerit sectio recta in solido patiente BAS figurarum 23 & 24, & curva LrQ scala gravitationum liquoris heterogenei, solidum QPCD erit pseudocuneus scalæ gravitationum, & momentum ejus, seu $\omega. Ae$, in casu figuræ 23 = AE. CD. L*i*PL, & $\omega. Ae$ in casu figuræ 24, = AE. CD. LηIP.

SCHOLION.

288. Patet ergo computum momentorum liquorum in vasis diducibilibus gravitantium totum deduci ad investigationem arearum AEF*f*A, L*i*P & LηIP in figuris 27, 28. quæ in particularibus exemplis semper haberi possunt, si non algebraïce, saltem transcendenter. Sit enim vas BAS conicum liquore homogeneo plenum, adeò ut curva LrQ abeat in lineam rectam, quo casu solida δ & $\varkappa$ erunt similia & æqualia solidis BAE & SAE, & solidum CBAD erit semissis coni recti, in quo cum sit $EA^3 : eA^3 (= BE^3 : be^3) = EF : ef$, liquet curvam *AfF* fore hoc casu parabolam cubicam, atque adeo trilineum EAF erit $= \frac{1}{4}$ AE. EF, & AFH $= \frac{3}{4}$ AE. EF. Et quia CBD est semicirculus, cujus centrum in E, erit CBDC. XE $= \frac{2}{3} BE^3 =$ D. BE^2, atque adeo D $= \frac{2}{3}$ BE. Hinc (§. 284.) $\delta. \alpha E = \varkappa. \xi E =$ D. EF. AEF $= \frac{2}{3}$ BE. EF. AEFA $= \frac{2}{3}$ BE. EF. $\frac{1}{4}$ AE. EF $= \frac{1}{6}$ AE. BE^3.

Fig. 23, 24.

Fig. 27.

Fig. 28.

Porrò existente linea LrQ recta & LP = PQ, erit etiam L*e* = *er*, & sic ubique: unde cum (§. 285.) *ei* sit ad *er* ut *Ae. cd* ad AE. CD, erit ubique ordinata $ei = Ae. eE. cd : AE. CD = Ae^2. eE : AE^2$, substituendo loco rationis *cd* : CD æqualem rationem Ae : AE propter similitudinem triangulorum *Acd* & ACD, quandoquidem in præsenti casu figura ACD est triangulum. Hinc reperietur per notissimas quadraturarum methodos bilineum E*i*A $= \frac{1}{12} AE^2$: hinc in casu figuræ 23. habebitur (§. 287.) $\omega. Ae$ (= AE. CD. LiAL) = AE. CD. $\frac{1}{12} AE^2$, seu, quia CD tantundem est ac 2BE, $= \frac{1}{6}$ BE. AE^3.

Erit ergo $PV.\delta.\alpha E + PV.\omega. Ae = \frac{1}{6}. PV. AE. BE^3 + \frac{1}{6}. PV. BE. AE^3 = \frac{1}{6} PV. AE. BE. AB^2 = PV. \kappa.\xi E + PV. \omega. Ae$ quia in præsenti casu alæ BAE & SAE, utpote semisses coni recti BAS, similes & æquales sunt. Fig. 23.

289. Si conus BAS ab aëre etiam extus premi ponatur, & quæratur altitudo AE ipsius coni, in suppositione æquilibrii internæ liquoris pressionis in cavam coni superficiem cum externa aëris in convexam, erit hoc casu scala gravitationum LrQ linea recta axi LP seu AE parallela, cujus ab hac AE distantia sit PQ in figuris 23, 24, & 28, & EM vel AN in figura 27. Hoc casu solidum δ vel κ erit prisma baseos CBDC & altitudinis EM seu PQ, hujusque prismatis momentum seu $\delta.\alpha E$ nunc fiet $=$ CBDC. XE. EM (vel quia supra inventum est $CBDC. XE = \frac{2}{3} BE^3) = \frac{2}{3} EM. BE^3$. Loco pseudocunei ω nunc habebimus prisma ex basi CAD & altitudine PQ, unde, quia generaliter est $ei : er = Ae.cd : AE. CD$ (vel propter triangula similia CAD & $cAd) = Ae^2 : AE^2$, & propter æquales er & PQ, cum linea LrQ ipsi EA parallela supponenda sit, atque per Q transiens, erit $ei = Ae^2. PQ : AE^2$, hocque casu foret curva EiA parabola conica, cujus parameter est $AE^2 : PQ$, adeò ut area $EiAE$ hoc casu futura sit $= \frac{1}{3} AE. PQ = \frac{1}{3} AE. EM$; atque adeò $\gamma. Ae = \omega. Ae$ (= AE. CD. EiAE) $= \frac{1}{3} AE^2. CD. EM = \frac{2}{3} BE. EM. AE^2$. Idcirco vocando athmosphæræ densitatem mediam Z, erit summa momentorum pressionis aeris, seu $Z.\delta.\alpha E + Z.\omega. Ae = \frac{2}{3} Z. BE. EM. BE^2 + \frac{2}{3} Z. BE. EM. AE^2 = \frac{2}{3}. Z. BE. EM. AB^2$. Hinc, quia (secundùm hypothesin) in casu æquilibrii $PV.\delta.\alpha E + PV.\omega. Ae = Z.\delta.\alpha E + Z.\omega. Ae$, erit etiam $\frac{1}{6} PV. AE. BE. AB^2 = \frac{2}{3} Z. BE. BM. AB^2$, adeoque $PV. AE = 4. Z. BM$. Invenimus enim supra, $PV.\delta.\alpha E + PV. \omega. Ae = \frac{1}{6} PV. AE. BE. AB^2$, & paulò ante pro momentis aeris extus prementis, seu pro $Z.\delta.\alpha E + Z.\omega. Ae$ invenimus $\frac{2}{3} Z. BE. BM. AB^2$. Atqui PV. AE denotat pondus columnæ liquidæ, cujus altitudo AE & media densitas PV, & Z. BM gravitationem totius atmosphæræ, quam simplicius per p indicabimus; ergo si vas conicum BAS hydrargyri plenum sit, oportet altitudinem AE quadruplo majorem esse altitudine columnæ mercurialis æquivalentis atmosphæræ pressioni, atque adeò minimum 120. digitorum, cum atmosphæræ gravitatio æquivaleat 30. digitis Mercurii, ad obtinendum æquilibrium inter externam atmosphæræ pressionem & internam Mercurii gravitationem follis conici alas ab invicem diducere conantem.

Sin

Sin vero coni vertex sursum conversus esset, ut in fig. 24. eo casu præcedentia theoremata præberent PV. AE = $\frac{4}{3}$ Z. BM pro casu æquilibrii inter pressuram externam aëris & internam Mercurii, atque adeò pro hoc æquilibrio obtinendo nunc sufficeret altitudo AE 60. digitorum. Atque hæ determinationes ad amussim consentiunt cum iis, quæ Celeb. Jac. Bernoullius super hac re prodidit in Actis Erudit. Lipf. 1686. & 1687. occasione alicujus perpetui Mobilis in Novellis Reipublicæ literariæ D. Bælii 1685. propositi, quod consistebat in quadam follis specie triangularis, circa axem horizontalem alterutrius alæ medio affixum mobilis, Mercurio modo implendi, modoque etiam in situm rectum deducti iterum aliquo usque deplendi &c. Hujus machinæ successum irritum fore ex principiis hydrostaticis & vectis natura ostendit eleganter modo laudatus Bernoullius. Papinus verò, etsi successum pro dubio habuisse videtur atque imperfecta pressionum æstimatione impossibilitatem motus ejus utcunque ostenderit, nihilominus tamen Bernoullianam machinæ discussionem eludi posse existimavit, motum parallelum alis tribuendo, quo vectis rationem, in qua Bernoullii impugnatio fundata erat, cessaturam esse confidebat perperam. Ea vero, quæ super prædictam machinam in utramque partem agitata fuere, legi possunt in Actis Lipf. supra citatis.

CAPUT III.

De Æquilibrio Corporum solidorum in Fluidis quibuscunque demersorum, vel iisdem Fluidis innatantium.

PROPOSITIO XII. THEOREMA.

290. *Omne fluidum heterogeneum corpus quodcunque solidum in ipso demersum, vel eidem innatans, tanta vi in altum pellere conatur, quantum est pondus massæ liquoris cujusdam homogenei sub volumine solidi analogi corpori demerso ejusve parti immersæ, cujus densitas æquet mediam densitatem fluidi heterogenei, secundum directionem fluidi superficiei normalem per centrum gravitatis solidi analogi transeuntem.*

Fig. 25. Generale istud theorema aliud non est quam §. 83. in concreto sumtus; idcirco resumendo schema dicti paragraphi ponendoque lineam OLQ, quæ illic dicebatur scala potentiarum solido patienti appli-

applicatarum nunc esse scalam pressionum seu gravitationum fluidi heterogenei, planumque FO, quod supra in citato loco planum sublime vocabatur, nunc in concreto erit superficies fluidi, in quo corpus AB*a*S demersum est, & ex dicto paragrapho 83. illicò liquebit solidum corpus *a*BAS ea vi in altum urgeri, quæ æquetur ponderi massæ liquidæ 2*a*2B2A2S sub volumine solidi demerso corpori analogi, cujus densitas uniformis æqualis sit PV seu mediæ densitati fluidi heterogenei. Nam (§. 260.) singula puncta superficiei corporis *a*BAS pressionem subeunt æqualem gravitati seu ponderi filamenti cujusdam fluidi homogenei, cujus filamenti longitudo eadem est cum homologa ordinata scalæ gravitationum OLQ, & fluidi homogenei densitas uniformis æqualis mediæ densitati PV fluidi heterogenei in quo corpus *a*BAS demersum est, quod pondus filamenti (§. 33.) æquatur perpetuo facto ex volumine ejus exposito per ordinatam scalæ gravitationum in densitatem ejus PV, unde, quia in casu præsenti potentiæ singulis punctis superficiei *a*BAS perpendiculariter applicatæ sunt ordinatæ respectivæ scalæ OLQ in datam PV ductæ, liquet (§. 83.) potentiam corpus *a*BAS in fluido heterogeneo attollere conantem facto ex solido 2*a*2B2A2S in PV exponendam esse, hoc est (§. 33.) pondere massæ liquoris homogenei, cujus densitas PV & volumen sit modo recensitum solidum, dictæque potentiæ directionem *xy* plano FO, hoc est fluidi superficiei normalem, transire per centrum gravitatis solidi 2*a*2B2A2S. Quod primùm de corpore demerso *a*BAS erat demonstrandum.

Non diversa erit demonstratio circa corpus *a*BAS fluido heterogeneo XZ innatans. Sit enim hujus fluidi scala gravitationum curva LQ, & 2B2A2S solidum analogum parti immersæ BAS, potentia solidum *a*BAS attollere connitens etiamnunc erit pondus molis fluidæ 2B2A2S, cujus densitas uniformis PV æquatur mediæ densitati liquoris heterogenei, ejusque directio superficiei liquoris heterogenei FL perpendicularis, transibit per centrum gravitatis ejusdem solidi 2B2A2S per §. 83. Quod erat demonstrandum. Fig. 26.

Corollarium I.

291. Hinc corpora in fluidis existentia non gravitant totâ suâ absolutâ gravitate, seu pondere absoluto, sed duntaxat pro quantitate, qua pondus illorum absolutum superat pondus massæ fluidi homogenei, cujus volumen sit solidum corpori dato analogum, densitas-

que par mediæ denſitati fluidi, in quo corpus demerſum eſt. Adeoque, ſi pondus maſſæ fluidæ modo dictæ æquetur ponderi abſoluto corporis, hoc corpus in fluido non gravitabit, hoc eſt, non deſcendet nec aſcendet; & tantum negative gravitabit, hoc eſt, in fluido aſcendet, ſi nominata fluidi moles gravior fuerit quam demerſum corpus, vi æquali exceſſui, quo fluidi pondus ſub volumine ſolidi, dato corpori analogi, hujus pondus excedit.

COROLLARIUM II.

292. In corollario præcedenti jam ſupponitur lineam jungentem centra gravitatis corporis dati & ſolidi eidem analogi, juxta ſcalam gravitationum, fluidi ſuperficiei normalem eſſe, alioqui corpus in fluido demerſum in omni caſu circa ſeipſum convertetur, usque dum dicta linea centra gravitatis conjungens fluidi ſuperficiei perpendicularis facta fuerit. Nam ſi linea xy producta ſuperficiei fluidi FO (Fig. 25.) ad angulos rectos occurrat, atque per centrum gravitatis ſolidi $2a2B2A2S$ transeat, vi præſentis propoſitionis ſolidum $aBAS$ juxta directionem hanc xy ſurſum agetur, ipſum verò proprio pondere deſcendere nititur juxta directionem tu parallelam xy per centrum gravitatis corporis $aBAS$ transeuntem. Jam, ſi linea connectens centra gravitatis corporum $aBAS$ & $2a2B2A2S$ plano FO obliqua ſit, neceſſe eſt ut directio tu corporis $aBAS$ deſcendere conantis & xy directio potentiæ attollentis ſint diverſæ, ſeu non congruentes, unde, quia idem corpus $aBAS$ à duabus potentiis oppoſitas in partes agentibus juxta tu & xy urgetur, liquet id in ſe ipſum converſum iri juxta ordinem literarum $aBAS$, nec motum ejusmodi converſionis prius poſſe ceſſare, quam corpus eum intra fluidum ſitum nactum ſit, quo directiones tu & xy ſibi invicem congruant, atque adeò linea jungens centra gravitatis ſolidorum $aBAS$ & $2a2B2A2S$ plano FO perpendicularis facta ſit.

Hactenus generalia circa æquilibria & motus corporum in omnis generis fluidis poſitorum, ſequuntur unum alterumve corollarium circa fluida homogenea, & faciliora aliquot problemata.

COROLLARIUM III.

293. Si corpus $aBAS$ fluido homogeneo immerſum eſt, fluidi ſcala gravitationum erit triangulum rectangulum iſoſceles OPQ, &

& solidum $2a2B2A2S$, corpori aBAS analogum, eidem simile & æquale erit; atque adeò fluidum homogeneum tanta vi seu potentia corpus in ipso demersum vel innatans attollere conatur, quantum est pondus massæ liquoris sub volumine corporis demersi simili & æquali vel partis fluido immersæ. Idcirco cuilibet corpori tantum de suo pondere intra ejusmodi fluidum decedit, quantum ponderat massa fluidi modo recensita. Atque in hoc corollariolo fundantur ferme omnes regulæ, quas Autores circa æquilibria solidorum cum fluidis homogeneis subinde tradunt.

Corollarium IV.

294. Hinc etiam (§. 292.) linea jungens centra gravitatis corporis cujusque fluido homogeneo innatantis & in eo in æquilibrio consistentis, ejusque partis fluido immersæ superficiei fluidi normalis existet. Alioqui corpus fluido innatans hinc & inde vacillaret, donec in hunc situm se composuerit.

Corollarium V.

295. Diversæ partes unius ejusdemque corporis diversis liquoribus homogeneis immersæ in casu æquilibrii, sunt in reciproca ratione densitatum seu gravitatum specificarum liquorum, quibus idem corpus successive immersum esse ponitur.

Dicantur liquores L, l, eorum gravitates specificæ S, s, corporis liquoribus successive immissi partes immersæ P, p; & dico fore $P : p = s : S$. Nam quia corporis liquori L immersa pars est P & S specifica gravitas liquoris, factum ex P in S (§. 33.) exprimet pondus absolutum massæ liquidæ sub volumine P, & eandem ob rationem $p . s$ denotabit pondus massæ liquoris l sub volumine p; sed pondera $P . S$ & $p . s$, quæ in casu æquilibrii uni eidemque corpori liquoribus L, l immerso æqualia sunt, etiam inter se æquabuntur; adeò ut $P . S = p . s$, & per consequens $P : p = s : S$.

Scholion.

296. Corollarium præcedens fundamentum continet diversarum machinularum hygrostathmicarum, quibus diversorum liquorum specificæ gravitates explorari solent. Usitatissima constat bulla vitrea M collo tereti & cavo MA instructa, cui subinde pauxillum Mercu- Fig. 67.

 rii

rii infundi solet, ut machinula in liquoribus situ semper erecto consistat; bulla verò M ut plurimum desinit in sacculum N, in quo infusus Mercurius se colligere possit. Machinulæ collum MA ab artificibus in partes æquales dividi solet, sed perperam, ad indicandas æquales gravitatis liquorum differentias. Verùm quâcunque ratione collum divisum sit, ope nonnullarum observationum machinula apta redditur indicandis omnium liquorum specificis gravitatibus. Ipsæ vero observationes sequenti ratione peragi debent.
Fig. 67. Notetur primùm totius machinulæ cum indito Mercurio pondus, quod nominabimus P, idque granis expressum supponemus. Machinula deinde liquori cuidam L immissa mergatur usque ad primam divisionem, seu usque ad GG, quod semper fieri potest addendo vel demendo nonnihil Mercurii. Appendantur porro machinulæ successivis vicibus tot grana, usque dum eadem liquori L immergatur ad divisiones omnes sequentes 2, 3, 4, 5, 6, ponderaque totalia, quæ machinulam in eodem liquore usque ad dictas divisiones descendere faciunt, sint P, P + a, P + b, P + c, &c. qualia in adjecto laterculo conspiciuntur, & quæ pondera in hoc laterculo etiam signantur per P, 2P, 3P, 4P respective; in quibus expressionibus numeri literæ P præfixi non denotant multipla ponderis P, sed sunt duntaxat notæ generales characteristicæ significantes ad quamnam colli divisionem referendus sit granorum numerus per literam P cum suo præfixo numero significatus. Adeoque P, 2P, 3P, 4P &c. significant quidem diversos numeros granorum P, P + a, P + b, P + c qui ex observatione innotescunt, atque adeò in tabella quadam, ut in superiori laterculo, diligenter notandi sunt, sed minime progressionem arithmeticam, qualem series P, 2P, 3P, &c. exhibere videtur; ex ejusmodi observationibus parata tabella machinulam omnium reliquorum liquorum gravitati investigandæ aptam reddunt; nam remotis omnibus granis *a*, *b*, *c*, *d*, &c. ut sola machinula cum indito Mercurio remaneat, immergatur ea in liquore quodam A, usque in BB, id est ad quartam colli divisionem, & in alio liquore O immergatur usque ad 6 seu in CC, eritque gravitas specifica liquoris A ad gravitatem specificam alterius O, ut numerus granorum 6P conveniens sextæ colli divisioni ad numerum granorum 4P, qui convenit quartæ divisioni; id est gravitates specificæ liquorum sunt

Divisiones colli.	Pondera machinulam liquori immergentia.
1 . . .	P = P
2 . . .	2P = P + a
3 . . .	3P = P + b
4 . . .	4P = P + c
5 . . .	5P = P + d
6 . . .	6P = P + e
&c.	&c.

in

in reciproca ratione numerorum ex constructa tabula excerptorum, qui colli divisionibus, ad quas in liquoribus machinula descendit, conveniunt. Demonstratio facilis est; nam (§. 295.) gravitas specifica liquoris A est ad gravitatem specificam alterius O sicut N6 ad N4 hoc est, in reciproca ratione partium machinulæ liquoribus immersarum, atqui N6 est ad N4, ut massa liquoris L cujus volumen est N6 ad massam ejusdem liquoris cujus volumen est N4; hæ verò massæ N6 & N4 liquoris L ponderabunt 6P & 4P grana respective, cùm tot grana cum fluidi L massis modo indicatis in æquilibrio fuerint vi observationis paulo ante descriptæ; ergo gravitas specifica liquoris A est ad gravitatem specificam liquoris O, ut 6P ad 4P, prout dicebatur. Hujus generis aliæ machinæ ex iisdem principiis construi possunt.

Scholion II.

297. Etsi me non lateat æquilibria fluidorum cum inter se, tum etiam solidorum corporum cum fluidis homogeneis ex aliis principiis nonnihil brevius posse deduci, scilicet ex fundamento maximi descensus centri gravitatis, quem omnia corpora inter se commissa affectant; seu, quod ferme eodem redit, ab æqualitate momentorum corporum inter se agitandorum, cujusmodi principiis Pascalius aliique usi sunt. Verùm, præterquam quod talia principia indirecta sunt, ea vix ac ne vix quidem absque longis ambagibus fluidis heterogeneis applicari posse videntur in ea universalitate, in qua præcedentes propositiones ex principiis suis proximis directe deduximus; malui methodo & fundamentis circa potentias singulis punctis cujusque corporis applicatis, quæ in primo libro exposuimus, insistere, utpote quæ modum non inelegantem subministrarunt pressiones fluidorum heterogeneorum ad æquivalentes pressiones fluidorum homogeneorum reducendi.

PROPOSITIO XIII. Problema.

298. *Datis diametro alicujus pilæ metallicæ cavæ, & ratione specificæ gravitatis metalli, ex quo pila parata est, ad aliquem liquorem homogeneum, invenire diametrum cavitatis pilæ ad id requisitæ, ut pila in liquore illo homogeneo ad datam profunditatem immergatur.*

Sit pila FDE, & ex diametro ejus FM, profunditate LM, ad quam pila liquori APB immergi debet, & ex ratione 1 ad n scilicet gravitatis ſpecificæ metalli ad liquoris gravitatem, invenire oportet diametrum HN cavitatis pilæ HIK ſuperficiei FDE concentricæ.

Quia in caſu æquilibrii pilæ cum liquore pondus pilæ (§. 293.) æquari debet ponderi, ſeu gravitati maſſæ fluidæ DME, atqui pilæ gravitas eſt factum ex ſphæra FDE − ſphær. HIK in ſpecificam metalli gravitatem, quæ eſt ut 1, & gravitas maſſæ liquoris, eſt ut factum ex ejus volumine DME in gravitatem ejus ſpecificam n, ergo ſphær. FDE − ſph. HIK $= n$. ſegm. DME. Dicantur FM, a; circumfer. FDE, b; LM, c & denique HN, x; eritque ſphæra FDE − ſph. HIK $= (a^3b - bx^3) : 6a$; & ſegmentum ſphæricum DME $= (3abcc - 2bc^3) : 6a$, quod ſegmentum ductum in n, præbet $(3abccn - 2bcn^3) : 6a = (a^3b - bx^3) : 6a$, ex qua elicitur $x^3 = a^3 - 3accn + 2c^3n$, vel $\sqrt[3]{(a^3 - 3accn + 2c^3n)} = x$, ſeu poſita $c = a : m$, exiſtente m numero quocunque, erit etiam $x = a\sqrt[3]{(m^3 - 3mn + 2n : m^3)}$. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

299. Hinc, ſi tota pila fluido debet immergi, fiet $c = a$, ſeu $m = 1$, & poſtrema æquatio mutabitur in $x = a\sqrt[3]{(1 - n)}$. Idcircò, ſi pila ænea in aëre octingenties aquâ leviore natare ponatur, erit, poſita gravitate ſpecifica æris noncupla gravitatis aquæ, $n = 1 : 7200$, atque adeò formula $x = a\sqrt[3]{(1 - n)}$ abit in $x = a\sqrt[3]{(7199 : 7200)}$, atqui per compendium logarithmorum invenietur valor rationalis ipſius $a\sqrt[3]{(7199 : 7200)}$ inter fractiones decimales $0.99995a$ & $0.99996a$, adeòque $a - x$ ſeu dupla metalli craſſities eſt minor quinque centies milleſimis diametri FM, atque adeò craſſities ipſa FH vel MN minor una quadrageſies milleſima ejuſdem diametri FM particula. Unde, ſi globus æneus cavus parari deberet, cujus craſſities MN tantum ſit unius ſcrupuli ſeu 144$^{\text{mæ}}$ pedis partis, pilæ diametrum majorem 277 pedibus eſſe oporteret, ut in aere librata conſiſtere poſſit. Sin vero cum P. Franciſco de Lanis Pilæ æneæ diametrum 8. pedum aſſumere velimus, ejus craſſities minor requireretur, quam una quinquies milleſima pedis pars; ac denique ſi diameter ſtatuatur cum eodem Autore Tom. II. fol. 291. *Magiſterii Naturæ & Artis*, 25 pedum, craſſities metalli foret minor quam tres quadringenteſimæ pollicis partes. Hiſce ſimilia etiam exhibere digna-

dignatus est Illustris Leibnitius Tom. I. *Miscellaneorum Berolinensium* pag. 127. ex quibus omnibus abunde liquet, spem abjiciendam esse omnem, fore ut navigatio aërea fortunato aliquando eventu suscipi queat, in quam egregius ille de Lanis nos erigere voluisse videtur.

PROPOSITIO XIV. Problema.

300. *Data specificâ gravitate bacilli teretis & gracilis* AB *& liquoris cujusque homogenei, determinare quousque bacillus extremitate sua* A *è filo suspensus, ita ut altera extremitate* B *libere pendeat, liquori debeat immergi.* Fig. 68.

Ponatur gravitatem specificam bacilli AB se habere ad gravitatem specificam liquoris ENF ut BD ad bacilli longitudinem AB, atque bacilli partem BC liquori immergi, quæritur magnitudo ipsius AC vel BC ex datis AB & DB.

Analysis Geometrica. Per §. 293. bacillus liquori immersus usque ad C perpendiculariter sursum agitur vi æquali ponderi liquoris sub volumine BC partis bacilli liquori immersæ juxta directionem IK per centrum gravitatis, seu per medium I ejusdem BC transeuntem liquorisque superficiei EF normalem; adeoque si filo IKP trochleam K amplectens appensum fuerit pondus P, æquale gravitati massæ liquidæ BC, hoc pondus P in directione KP descendere nitens eandem vim in bacillum juxta directionem IK exeret ac fluidum ENF bacillum attollere connitens; ipse vero bacillus proprio suo pondere descendere conatur juxta directionem OQ superficiei liquoris EF itidem perpendicularem & per centrum gravitatis bacilli, quod est in ejus medio O transeuntem; idcircò liquor baculum attollere conans & gravitas eundem effectum præstabunt, quem præstarent pondera P & Q, quorum hoc bacilli gravitatem absolutam, illud verò, ut jam dictum, pondus liquoris sub volumine BC designant, lineæ inflexili & gravitatis experti AB in directionibus IK & OQ inter se parallelis ac superficiei liquoris EF normalibus, applicata; unde, cum bacillus liquori aliquousque immersus (secundùm hypothesin) in statu manenti, seu in æquilibrio, consistat, ex principio vectis erit (§. 55.) $P.SU = Q.TV$, demissa scilicet ex A normali AU super EF, vel $P:Q = TV:SV = 2OA:2JA$ (seu producta BA in M, ut AM æqualis sit CA) $= BA:BM$. Nam, quia IA est media arithmetica inter BA & CA vel AM, ejus dupla seu 2IA æquabitur

tur aggregato extremarum BA & CA vel AM, hoc eſt rectæ BM, & dupla ipſius OA eſt BA. Verùm pondus P eſt ad pondus Q (§. 33.) ut factum ex illius volumine BC in gravitatem ejus ſpecificam AB ad factum ex volumine alterius Q ſeu AB in denſitatem ſeu gravitatem ſpecificam ejusdem BD, hoc eſt $P : Q = BC.BA : AB.BD = BC : BD$. Atqui paulo ante habuimus $P : Q = BA : BM$, ergo inde naſcitur $BA : BM = BC : BD$; & $BM.BC = BA.BD$. Hinc ſi centro O & intervallo OB vel OA deſcriptus ſemicirculus BNA, atque per punctum in ejus diametro datum D perpendicularis diametro DN ducta ſit ſemicirculum DNA ſecans in N, erit BN^2 $(= BA.BD) = BM.BC$, atque adeò recta BN tanget ſemicirculum CNM centro A & intervallo AC vel AM deſcriptum in puncto N, quod proinde communis erit interſectio ſemicirculorum BND & CNM; atque adeò æquales exiſtent AC & AN; atqui hæc AN eſt media proportionalis inter datas BA & DA, ergo etiam AC, atque adeò hæc AC data eſt. Quod erat inveniendum.

COROLLARIUM.

301. Adeoque etiam ex parte bacilli BC cuilibet liquori immerſa & bacilli ipſius longitudine AB, ſemper innoteſcet ratio gravitatis ſpecificæ liquoris ad gravitatem ſpecificam bacilli; etenim ad longitudinem bacilli BA ejusque partem CA extra liquorem extantem duntaxat ſumenda eſt tertia proportionalis DA, eritque BA ad BD ſemper ut gravitas ſpecifica liquoris ad gravitatem ſpecificam bacilli liquori aliquousque immerſi. Atque adeò portiones diverſæ BD, quæ reſultant à diverſitate liquorum, quibus bacillus ſucceſſive immergi poteſt, erunt in reciproca ratione gravitatum ſpecificarum ipſorum liquorum. Liquet ergo talem bacillum aptum exhibere inſtrumentum hygroſtathmicum (Gallis *Peſe-liqueur* dici ſolitum) quo liquorum ſpecificæ gravitates examinari queant. Qua ratione bacillus dividi debeat, ut ex partibus ejus immerſis gravitates liquorum dignoſci queant, facile colligitur ex hoc corollario, adeoque eidem ulterius explicandæ ſuperſedeo.

Hactenus aliquot exemplis illuſtravimus hydroſtaticæ regulam indicantem quousque corpora ſolida liquidis immergi debeant, ut cum hisce liquidis æquilibrium faciant; reſtat adhuc unicum exemplum adducendum, quo alia hydroſtaticæ regula, ſitum corporum ſolidorum in fluidis conſiſtentium reſpiciens, illuſtretur, hunc in

finem

finem facillimum omnium eligemus propositione sequenti excutiendum.

PROPOSITIO XV. Problema.

302. *Datâ ratione specificæ gravitatis prismatis triangularis* ABG *ad gravitatem alicujus liquoris* XBZ, *determinare situm prismatis, in quo præcedente vertice* B *trianguli* ABG, *id liquori immissum cum eo in æquilibrio maneat.* Fig. 65.

Sit MBN pars liquori immersa & punctum D ejus centrum gravitatis, C vero centrum gravitatis trianguli totius ABG, adeoque (§. 294.) lineam DC, jungentem centra gravitatis totius & partis immersæ triangulorum, oportet esse liquoris superficiei XZ perpendicularem in casu æquilibrii. Jam ex centrobaricis constat, centra gravitatis C, D triangulorum ABG & MBN reperiri in lineis BP & BQ, bases AG & MN triangulorum bifariam dividentibus in punctis P & Q, lineasque vel intervalla PC, QD trientes esse totarum PB & QB; hinc ductis PQ, PM & PN, ipsæ PQ & CD æquidistantes erunt, cum PC & QD sint partes similes ipsarum PB & QB. Jam cum oporteat ipsam CD perpendicularem esse rectæ XZ, necesse est ut etiam PQ eidem XZ vel MN normalis sit, unde, quia jam QM & QN æquales ostensæ sunt, ipsas PM & QNP pariter æquari oportet.

Porrò, quia in casu æquilibrii massæ liquoris MBN pondus (§. 293.) æquale est ponderi absoluto prismatis ABG, per §. 33. erit gravitas specifica liquoris ad gravitatem prismatis ut triangulum ABG ad triangulum MBN; atque adeo hæc triangulorum ratio data, quandoquidem ratio gravitatis specificæ liquoris ad prisma ABG (secundùm hypothesin) data est. Propterea problema eo reducitur, ut describatur centro QP & intervallo quodam PM vel PN circulus MON, qui ex lateribus AB & GB abscindat segmenta MB & NB talia, ut ducta linea MN, triangulum ABG sit ad triangulum MBN, vel rectangulum ABG ad rec-lum MBN in ratione data specificæ gravitatis liquoris ad gravitatem prismatis ABG, quam dicemus $a:f$. Idcirco demissis ex P perpendicularibus PR ad BA, PS ad BG ac denique BV ad AG, si dicantur AB, a; BG, b; BR, l & BS, m; incognita verò BM, x; ex comparatione triangulorum rectangulorum PRM & PSN, in quibus juxta superius ostensa hypothenusæ PM & PN æquantur, elicietur æquatio, quæ reducta exhibe-

 bit

bit istam biquadraticam $x^4 - 2lx^3 + 2bfmx - bbff = 0$, cujus radices determinabunt BM vel BN, atque adeò punctum M vel N & radium PM circuli describendi MON, cujus intersectiones M & N cum rectis BA & BG determinant positionem rectæ MN. Quod erat inveniendum.

Similiter incidissemus in æquationem biquadratam, si loco prismatis ABG sumsissemus conum scalenum.

CAPUT IV.

De Figuris, quas fluida in corporibus flexibilibus stagnantia hisce corporibus flexibilibus inducere debent.

CОnsideravimus hactenus vasa liquores continentia tanquam rigida & inflexibilia, quorum figuræ à liquorum gravitationibus mutari nequeant. Sed si vasa materia molli & flexili constent, non continget, ut liquor intra eorum cavitatem stagnans in statu manenti statim consistere queat, quæcunque figura ipsis tributa fuerit, sed posteaquam ipsorum latera variis modis inflexa fuerint, eam liquoris pressuræ figuram vasis inducent, quam perfectum inter omnes potentias gravitantes æquilibrium deposcet.

Ejusmodi vasa in œconomia animali magno numero occurrunt, cum pleraque flexilia & mollia, utpote ex fibris carnosis contexta, sint, in quibus vasis varii humores & fluida periodicis motibus circumeunt. Quales igitur figuras ejusmodi vasa induere debeant non injucunda nec inutilis est disquisitio. Revera enim talis indagatio non contemnenda Celeb. Joh. Bernoullio produxit circa Vires & Motus musculorum in Dissertatione ejus super hac materia oppidò eleganti, cujus præcipua contenta in Actis Lipf. 1694. pag. 200. seq. continentur. Sic etiam insignis Medicus & Geometra Scotus Archibaldus Pitcarnius illius generis speculationes in Physiologiam loco multiplicium illorum fermentorum, quibus secretionum in œconomia animali negotium antehac transigi credebatur, ad Garamantas procul & Indos ablegandarum, invehere conatus totus in eo est, ut probet in sua docta Dissertatione de *Circulatione Sanguinis*, orificia vasorum & poros glandularum partiumque corporis nostri alias quam circulares figuras non habere, nec proinde figuris, sed figurarum amplitudine inter se differre; ex quo deinceps conclu-

dit,

dit, *nulla fermentis peculiaria supereſſe promptuaria, fermentaque ipſa in Animali nulla.*

Figuram vaſorum circularem ex generali Mechanicæ principio, *Quod fluida quæcunque preſſionem ſuam communicent per lineam corpori continenti & fluidi actionem ſuſtinenti in quovis puncto impulſus perpendicularem*, ſupra etiam (§. 249.) à nobis demonſtrato, derivare contendit, ſectionem canalis axi rectam tanquam polygonum infinitilaterum reſpiciens, cujus polygoni latuſcula indefinite parva impreſſiones fluidi juxta directiones ipſis normales ſuſtineant, & quia hæ impreſſiones in ſingula latera æqualia poligoni in circumſtantiis apud Autorem æquales ſunt, eas per lineolas rectas & poligoni lateribus perpendiculares repræſentat. Hucusque omnia bene, ſed dum ex eo, quòd hæ perpendiculares laterum poligoni cum ſe invicem angulos efficiunt, concludere vult, aut ſaltem inferre videtur, omnes dictas perpendiculares in uno eodemque puncto concurrere debere, fallitur, etſi cæterum certiſſimum ſit perpendiculares illas reapſe in uno eodemque puncto convergere; nam ex eo, quod duæ quæque perpendiculares concurrunt, non ſequitur omnes in uno puncto coire. In omni curva rectæ, quæ duobus curvæ contiguis elementis perpendiculares ſunt, angulos continebunt, hoc eſt, concurrent, ſed quis inde inferret omnes perpendiculares curvæ in uno eodemque puncto convenire? Ex principiis ergo illis, quæ Cl. Vir poſuit, & quæ tanquam vera ultro admittenda puto, nondum ſatis oſtendit rem eò deduci, *ut inveniatur curva cujus omnes ſubtangentes in puncto concurrant*, prout ſcribit pag. 28. *Diſſert. Medic.* Voluit dicere rem deduci ad inventionem ſeu inveſtigationem curvæ, cujus omnes *ſubperpendiculares* curvæ ad unum idemque punctum terminentur; nulla enim datur curva, cujus ſubtangentes concurrant, quandoquidem omnes ſubtangentes ſumuntur in eadem linea, id eſt, in axe datæ curvæ, ſeu in alia linea, quæ inſtar axis ſit. Fateor quidem, quòd, ſi omnes curvæ perpendiculares in puncto concurrant, omnes ſubnormales ad unum idemque punctum quoddam terminatum iri, aſt etiam eſt fatendum, tunc ea reductione problematis ad conſiderationem ſubnormalium non opus eſſe; nam ſi omnes curvæ perpendiculares in quodam puncto convergant, ilicò concludendum hanc curvam eſſe circulum; adeò ut problema jam ſolutum ſit abſque ulteriore reductione, ſive ad proprietatem nominatam ſubperpendicularium, ſive ad methodum, quam Pitcarnius dicit inverſam fluxionum. Idcirco nos ſequenti Problemate perſpicue oſtendere conabimur curvam quæsitam reapse eam esse, cujus cunctæ perpendiculares in idem punctum seu centrum vergant, non obstante, quòd hoc idem problema jam supra (§. 102.) solutum sit, sed diversa ratione ad illustrationem generalis theorematis, quod infinita ejusmodi alia problemata solvit.

PROPOSITIO XVI. Problema.

Fig. 69. 303. *Dato tubo* AB *ex materia molli seu flexili clauso in* B, *apertoque in* A *ad horizontem verticaliter erecto, & aquæ aliusve liquoris pleno, determinare figuram, quam sectio quælibet horizontalis in tubo à liquoris pressuris acquiret.*

Fig. 70. Sit AZBX figura quæsita, cui rectæ ZX, AB ad angulos rectos in R se invicem decussantes perpendiculariter occurrant in punctis A, Z, B, X. Sint contigua curvæ elementa DC, DE & Z*z*, A*a*, punctis Z, A adjacentia singula inter se æqualia, ducanturque *zy*, DK rectæ ZX normales, ipsisque æquidistans EN, nec non per puncta C & D rectæ CM & DN ipsi ZX parallelæ, & per *a* lineola *ab* eidem ZX æquidistans; ac denique fiant D*m* = EN & Dg = CM. Quibus positis, quia sectionis tubi ZAXB singula puncta à liquoris superficie æqualiter distant, singula puncta æqualem pressionem subibunt, & quodvis ejus punctum D (§. 255.) pressionem sustinebit æqualem ponderi filamenti liquoris, cujus longitudo, quam per lineam DH curvæ perpendicularem in puncto D indicabimus, æquetur fluidi altitudini super sectione ZAXB, juxta directionem curvæ ubique normalem Dδ; ergo singulæ DH, quæ sumuntur in lineis curvæ perpendicularibus, potentias eidem curvæ applicatas repræsentabunt, atque adeo rec-lum DH. DC refert potentiam in totum elementum DC agentem. Verum potentia DH (§. 39.) æquipollet lateralibus DF & FH, quarum hæc ipsi ZX parallela, illa verò eidem perpendicularis est; ergo etiam potentia agens in totum curvæ elementum CD, quæ exponitur rec-lo DH. DC, æquipollet potentiis lateralibus CD. DF & CD. FH, vel quia triangula similia CDM & DHF præbent CD. DF = CM. DH & CD. FH = DM. DH potentiis lateralibus per rectangula CM. DH ac DM. DH exponendis juxta directiones DF & FM vel huic parallelam, agentibus.

Jam (§. 98.) est generaliter $\int$FH, hoc est aggregatum potentiarum juxta directiones FH, seu juxta directiones rectæ ZX paralle-

las.

las agentes in omnia elementa curvæ CD vel DE in curvæ arcu ZDE vel ZD contenta, id eſt per modò oſtenſa, omnia rectangula DM.DH reſpectu arcus ZD, quæ componunt rectangulum DK.DH, ad DN — Zy, ſeu CM — Zy, ſicut firmitas curvæ in puncto A, quam firmitatem hac litera A deſignamus, ad conſtans curvæ elementum CD; hoc eſt DK.DH : CM — Zy = A : CD, vel quia (ſecundùm hypotheſin) ZX curvæ ad angulos rectos occurrit in Z, atque adeò Zy reſpectu Zz & CM evaneſcit, fiet DK.DH : CM = A : CD & permutando DK.DH : A = CM : CD.

Item omnes DF ſeu ∫DF, hoc eſt, in præſenti caſu omnia rectangula CM.DH pertinentia ad arcum curvæ DA, hoc eſt, rectangulum KR.DH, quandoquidem omnes CM componunt KR, ſeu ſinum arcus DA, ſunt ad DM — Ab ſicut A ad CD, vel quia etiam RA (ſecundùm hypotheſin) curvæ normalis eſt in A, atque adeo Ab præ Aa vel CD aut MD evaneſcit, erit etiam KR.DH : DM = A : DC, & permutando KR.DH : A = DM : DC; atqui paulo ante etiam habuimus DK.DH : A = CM : CD ſeu invertendo A : DK.DH = DC : CM ergo ex æquo KR.DH : DK.DH = KR : DK = DM : CM = FH : DF, adeoque juncta DR triangula DKR & DFH ſimilia ſunt, atque adeo rectæ DR & DH ubique in directum jacent, ac proinde omnes DH curvæ ZDA normales productæ in eodem puncto R concurrunt, hinc curva quæſita ZDA eſt circulus. Quod erat inveniendum & demonſtrandum.

Corollarium I.

304. Analogia præcedentis paragraphi DK.DH : A = CM : CD, elemento curvæ Aa vertici A adjacenti applicata, præbebit bR.DH : A = ab : aA, verum quia RA curvæ perpendicularis eſt, fiet ab = aA ergo etiam A = bR.DH ſeu AR.DH. Eſt igitur firmitas tubi in quolibet ſectionis puncto, ut rectangulum ex radio ſectionis AR vel ZR in potentiam ſectionis puncto applicatam DH, hoc eſt in liquoris altitudinem ſuper hoc punctum. Propterea 1°. in tubis æqualium orificiorum tenacitates ſeu firmitates requiſitæ ad perferendas fluidi preſſuras erunt ut altitudines fluidi homogenei ductæ in ſuas denſitates ſeu gravitates ſpecificas. 2°. Si facta ex altitudinibus liquorum in denſitates æqualia fuerint, firmitates tuborum erunt ut radii orificiorum. 3°. Si ejuſmodi facta radiis ſectionum tuborum axibus normalium reciproce proportionalia fuerint, firmitates erunt æquales.

Corollarium II.

305. Quia vires æquales eidem vel ſimilibus ſubjectis ſimiliter applicatæ non niſi ſimiles effectus producere poſſunt, ideo nihil refert, an tubus ſeu vas flexile à pondere liquoris in ejus cavitate gravitantis, an vero à fluido quodam elaſtico extrorſum prematur juxta directiones, perinde ac fluidum facit, curvæ perpendiculares. Nam fluidi elaſtici preſſiones ſemper revocari poſſunt ad æquivalentes preſſiones alicujus liquoris, cujus altitudines per DH repræſentabantur. Hinc enim eſt, quod bullæ aqueæ, quas pueri loturam ſaponis per fiſtulas ſtramineas flatu ſuo protrudentes ſubinde ludendo formant, in globulos intus cavos rotundentur. Idcirco viſcoſitatis aquæ in ejuſmodi bullis vis requiſita ad reſiſtendum aëris incluſi elaſticitati eſt ut hæc vis elaſtica, ducta in radium bullæ vel potius in radium cavitatis ejuſdem.

Scholion.

306. Non abs re fuerit hoc loco obſervaſſe firmitates tuborum flexibilium eodem prorſus modo ſe habere, quo firmitates tuborum rigidorum, has enim oſtendimus eſſe (§. 275.) ut rectangula tuborum per axes, ſeu ut facta ex altitudinibus liquorum inter ſe & abſolute homogeneorum in diametros tuborum, quoniam craſſities tuborum in hac factorum ratione eſſe oportere oſtendimus, &, cæteris paribus, reſiſtentiæ ſunt ut craſſities, in flexibilibus vero reſiſtentia ſeu firmitas in quolibet puncto eſt ut vis inflans, ſeu ut liquoris altitudo ducta in tubi ſemidiametrum, adeoque firmitas tubi in duobus punctis diametraliter oppoſitis perinde ac in rigidis eſt factum ex liquoris altitudine in totam diametrum. Hinc non video, quibus rationibus Vir ingenioſus D. Parent rationem peripheriæ ad diametrum formulis ſuis pro firmitatibus tuborum rigidorum æſtimandis introduxerit in Commentariis Academiæ Reg. Scientiarum 1707.

PROPOSITIO XVII. Problema.

Fig. 71. 307. *Si in linteo ZDAX in terminis ſuis Z & X fixo ſtagnet quilibet liquor heterogeneus, cujus ſcala gravitationis ſit curva ROS; invenire figuram lintei manentem.*

Sint

Sint iterum, ut in præcedenti problemate, Zz, CD, DE, Aa elementa curvæ ZDA æqualia, & DL, El ordinatæ axi AR rectæ, Dπ vero & Eρ eidem axi parallelæ, & reliquis ductis quales in figura apparent. Jam, quia omnia in æquilibrio sunt per hypothesin & (§. 260.) elementum curvæ CD pressuram sustinet æqualem ponderi prismatis liquidi CD. LO, cum LO sit ordinata scalæ gravitationum, potentia qua elementum CD urgetur juxta directionem perpendicularem erit DC. DH facta DH ubique æquali homologæ LO, & quia insuper ob omnes potentias curvæ perpendiculares (§. 96.) firmitas lintei in omnibus punctis eadem est, atque adeo per datam quantitatem A designari potest, erit (§. 98.) $\int$FH seu omnes FH : DN $-$ Zy $=$ A : DC; vel quia Zy evanescit præ ipsa DN, fiet $\int$FH : DN $=$ A : DC, & permutando $\int$FH : A $=$ DN : DC. Jam, quia potentia FH, quæ ex DH derivata est, non solum punctum D, sed integrum elementum DC respicit, loco FH poni debet FH. DC perinde ac loco DH in hoc casu intelligi debet DH. DC, & quia præterea FH. DC (propter triangulorum DHF & CDM similitudinem) æquale est rec-lo DH. MD, vel DH. NE, id est, LO. Ll, erunt omnia LO. Ll areæ RLO inscripta æqualia huic areæ; ergo $\int$FH, id est, area RLO : A $=$ DN : DE vel DC, & hæc analogia respectu elementi curvæ Aa fiet area ROsb vel ROSA : A $=$ ab : aA, unde, quia in A, elementum aA $=$ ab, erit etiam A $=$ areæ ROSA, adeoque præcedens analogia RLO : A $=$ DN : NE mutabitur in RLO : RAS $=$ DN : NE.

Sit denique curva RQT ejus naturæ, ut rec-lum SA. AT sit $=$ trilineo ROSA, & SA. LQ $=$ trilineo ROL, eritque ROL : RAS $=$ AS. LQ : AS. AT $=$ LQ : AT : unde cum invenerimus ROLR : BASR $=$ DN : NE, erit etiam LQ : AT $=$ DN : NE. Hinc centro A intervalloque AT descripto quadrante circuli TKV, ductaque per Q rectæ RA parallela QK quadranti occurrente in K, ac denique acta AK, erit etiam AI : AK $=$ DN : DE, atque adeo triangula DNE & AIK sunt similia & similiter posita, ac proinde radius AK parallelus erit tangenti curvæ quæsitæ in puncto D. Eritque pariter DN : NE $=$ AI : IK. Quæ erant invenienda.

Corollarium I.

308. Ductâ per quadrantis punctum K tangente Kα, si in recta LO sumatur Lβ $=$ Kα & sic respectu cujusvis alius curvæ puncti, omnia

omnia puncta β erunt in curva quadam, $R\beta\omega$ asymptotam AS habente, cujus area $SAL\beta\omega$ ad partes asymptotæ æquabitur rectangulo sub radio AT & ordinata DL curvæ ZDA. Nam triangula similia AIK & $AK\alpha$ præbent $AI : IK = K\alpha : AK$, sed $AI : IK = DN : NE$, ergo $K\alpha : AK$ vel $AT = DN : NE$, ergo $AT . DN = K\alpha . NE = L\beta . Ll$, ergo omnia $AT . DN$ hoc est rec-lum $AT . DL =$ omnibus rec-lis $L\beta . Ll$, quæ areæ $AL\beta\omega S$ inscripta sunt, id est, huic areæ $AL\beta\omega S$; atque adeò $DL = AL\beta\omega S : AT$.

COROLLARIUM II.

309. Analogia, in quam paragrapho 307. circa finem incidimus, $DN : NE = AI : IK$ immediate præbet æquationem differentialem curvæ quæsitæ $DN = NE . AI : IK$. Nam si dicantur $Z\pi = y$, $\pi D = RL = x$, $AI = LQ = p$, adeoque $IK = \sqrt{(bb - pp)}$ existente $AT = AK = b$, $RA = AS = a$, & denique $\pi\rho = DN = dy$, $NE = Ll = dx$, superiorque æquatio $DN = NE . AI : IK$ factis debitis substitutionibus juxta denominationes linearum modo institutas, mutabitur in $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$. quæ est æquatio differentialis curvæ quæsitæ ad amussim conveniens cum æquationibus, quas Celeberrimi Bernoullii Fratres, quisque sua methodo, invenerunt. Si linea ROS fuerit recta, curva RQT erit parabola conica æquationem habens $aap : b = xx$; & substituto valore $bxx : aa$, loco p in æquatione differentiali ante inventa $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$, habebitur $dy = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ quæ iterum coincidit cum eâ quam supra (§. 104.) dedimus.

COROLLARIUM III.

310. Quoniam (§. 96.) tenacitas lintei in omnibus punctis eadem est, recta 12 angulum DiA à tangentibus curvæ DI & Ai formatum bisecans (§. 110.) erit media directio omnium fluidi gravitationum in curvam DA, & subtensa anguli TAK æqualis angulo LDI (§. 112.) parallela existet mediæ directioni 12; adeoque (§. 110.) erit potentia juxta mediam directionem 21. ad tenacitatem lintei in D ut sinus anguli D1A ad sinum A12, hoc est, ut sinus KAT ad sinum KTA, id est, sicut KT ad AK. Unde cum tenacitas lintei (§. 307.) sit trilineum ROSA (constr.) $= AS . AT$. vel AK, erit potentia juxta $21 = AS . AK . KT : AK = AS . KT = AR . KT$. Et quia in symbolis corollarii antecedentis $KT = \sqrt{(2bb - 2bp)}$ & $AR = a$, erit potentia juxta mediam directionem $21 = a\sqrt{(2bb - 2bp)}$.

SCHO-

Scholion.

311. Curva hujus propositionis ZAX uni parti famosi problematis circa isoperimetras ab ingeniosissimis Bernoulliis soluti, satisfacit. Nam si ex singulis ejus punctis D, E, &c. indefinitæ $D\sigma$, $E\theta$, &c. axi AR parallelæ agantur, & in iis fiat $\pi\sigma = LQ$; $\rho\theta = lq$, &c. nascetur curva $Z\xi X$, quæ cum basi ZX majus spatium continebit quam quælibet alia curva ex alia isoperimetra ZDAX simili lege descripta, ut in Actis Lipſ. 1701. pag. 213. & Comm. Acad. Reg. Scient. Parif. 1706. d. 17. Apr. ab eximiis Geometris est ostensum.

Præter æquationem $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$ Dn. Jac. Bernoullius invenit aliam hujus formæ $dy = (b - p). dx : \sqrt{(2bp - pp)}$ quæ *minimum* continet, & altera *maximum*. Sed una ex altera nullo negotio elicitur, etenim, si in priore $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$ loco p ponatur $b - p$, seu complementum ejus ad maximam b, orietur altera æquatio, & si in altero pro $b - p$ substituatur p, redibit prior.

312. Radius circuli curvam osculantis in ejus puncto quolibet D, seu radius evolutæ $D\gamma$, est quarta proportionalis ad LO homologam ordinatam scalæ gravitationum ROS, & datas RA & AT. Cujus rei demonstratio ex nostra constructione facilis est.

CAPUT V.

De Pressionibus Aeris ex Gravitate.

Quæ Capitibus I. & II. hujus libri secundi circa pressiones omnis generis fluidorum *generaliter* ostensa sunt, etiam de *Aëre* in *specie* intelligenda esse nemo non videt, quandoquidem etiam Aër gravis est, atque adeò legibus fluidorum gravitate sua agentium subjici debet. Propterea supersedere particulari deductione phænomenorum ex aeris gravitate provenientium, eamque ex superioribus à nobis adductis Lectoris industriæ eliciendam relinquere potuissemus, nisi argumenti præstantia ejusmodi deductionem vendicare sibi videretur.

312. Aëra gravem esse extra omne dubitum est positum, cum experimenta omni exceptione majora gravitatem ejus invincibiliter adstruant. Talia experimenta apud Galilæum, Boylium, Mariottum, Borellum & alios dilucide describuntur, qui proinde consuli possunt.

Huc etiam facit schediasma Celeb. Jac. Bernoulli Actis Lipſ. 1685. pag. 430. inſertum, quo peringenioſum ponderandi aeris modum aperuit, cum ſucceſſu aliquando in opus deductum.

313. Antiquiſſimum probandæ gravitatis aëris experimentum Ariſtotelis illud videtur eſſe, quo Philoſophus *Utrem inflatum plus trahere quam compreſſum & flaccidum exiſtimavit*, & poſt eum plerique etiam ex recentioribus Philoſophis, quorum nemo ante Jac. Bernoullium experimenti fallaciam cognoviſſe videtur, tametſi omnes idem experimentum parum accuratum judicarunt. Aſt Bernoullius in Actis Lipſ. 1685. pag. 436. luculenter oſtendit, atque deduxit ex principiis hydroſtaticis, *Utrem ſeu veſicam inflatam non eſſe gravioris ponderis, quam complicatam, licet aërem gravitate haud deſtitui præſupponas.* Quod mirum eſt ante ipſum neminem vidiſſe, aut ſaltem à ſe obſervatum monuiſſe illis occaſionibus, quibus de aëris gravitate ejusve probandæ rationibus agebatur; cum illius ratio vel leviter attendenti ſatis manifeſta ſit, atque duobus verbis explicari poſſit. Nam cum veſica tumida cum aëre incluſo ponderatur, id contingit in aëre cujus columna lancibus imminet, adeò ut pondus in unam trutinæ lancem agens ſit hæc columna aërea & veſicæ pondus; ſi poſtea expreſſo ſeu expulſo è veſica aëre veſica denuo ponderatur, lanci eadem ac prius columna aërea imminebit, adeò ut & hoc quoque caſu pondus in lancem agens futurum ſit eadem ac prius columna aërea atque veſicæ pondus. Adeoque utroque caſu, ſive tumida ſive compreſſa & flaccida veſica trutinæ appendatur, ſemper idem pondus ut reperiatur neceſſe eſt, vel ſi quando contingat ut poſtquam aërem è veſica expreſſimus, ejus pondus tantillo minus quam ante reperiatur, ejusmodi ponderis decrementum non aëris expulſi gravitati debet tribui, ſed particulis pinguibus inter contrectandum & comprimendum veſicam ab ea abraſis, vel alia de cauſa exhalantibus. Sed ut hæc omnia verbo complectar, aëris ponderatio ope veſicæ, perinde ſe habet, ac ſi quis aquæ phialæ incluſæ pondus exploraturus primum phialam cum incluſa aqua ponderaret, & deinceps effuſâ in lancem trutinæ aquâ, hujus aquæ effuſæ & phialæ pondus eadem trutina conjunctim quæreret, quis non videt idem pondus utroque caſu repertum iri, ſive phiala cum infuſa aqua, ſive etiam vacua phiala, ſed aquâ, quam capiebat, lanci infuſa, ſimul ponderentur?

314. Idcirco ſi ponderandi aeris modus fallacia vacare debet, *oportet vaſis volumen poſt expulſum aërem non mutari*, & deinde aeris

ejecti

ejecti pondus satis accurate innotescet. Ad hoc proinde Celeb. Joh. Bernoullius ex amplo recipiente vitreo aërem, quantum fieri potest, diligenter eduxit, & aquæ in aëris expulsi locum ingressum permisit; quo experimento comperit gravitatem aëris ad aquam esse ut 1 ad 740 circiter. Sed alio postea, eoque magis accurato, experimento per condensationem aëris in amplo vase æneo tentato invenit gravitatem aëris ad aquam, ut 1 ad $774\frac{6}{41}$. Hinc, quia hæc ratio rationi 1 : 800 proxime æquatur, ob numerorum commoditatem hanc posteriorem loco alterius 1 : $774\frac{6}{41}$ deinceps adhibebimus, ad exprimendam rationem specificæ gravitatis aëris ad gravitatem aquæ.

Aëris gravitas etiam probari solet, & recte, phænomeno Barometrorum. Sed ut argumenti vis melius capiatur, sequentem propositionem facilem præmittam, ex qua deinde præcipuum Barometri symptoma, item & Antliæ Ctesibianæ, Siphonum reflexorum, aliorumque ejusmodi instrumentorum phænomena, per modum corollariorum, deducam. Et denique in Scholio annexo Barometrum novæ constructionis à Celeb. Joh. Bernoullio excogitatum proponam, quo atmosphæræ variantes pressiones, magis quam ullo alio barometro, sensibiliter indicari queunt.

PROPOSITIO XVIII. Theorema.

315. *Si in vase amplo* MON *liquoris cujuscunque pleno, usque ad* MN *demittatur vasculum* BE *argentum vivum continens, cum tubo vitreo* AB *utraque sui extremitate aperto & vasculo* BE *perpendiculariter insistente; sed ita tamen, ut orificium ejus apertum* A *semper extra liquorem* MON *extet, hydrargyrus per orificium tubi inferius* B *ascendet, usque dum altitudo ejus in tubo* CD, *sit ad altitudinem* PC *liquoris super superficie residui in vasculo Mercurii, ut specifica gravitas liquoris* MON *ad specificam gravitatem Mercurii.* Fig. 73.

Id est, posito liquorem MON aquam esse, decies quater argento vivo leviorem, altitudo DC Mercurii in Tubo AB constanter decima quarta pars erit altitudinis aquæ PC.

Hæc propositio tantum casus est particularis Propositionis V. hujus secundi libri, & coincidit cum corollario IV. ejusdem Propositionis, in quo indicatur pressiones liquorum homogeneorum in se, sed heterogeneorum inter se æquales fore, atque adeò liquores ipsos in se invicem gravitantes in æquilibrio consistere, quoties facta ex

 co-

eorum altitudinibus in ſpecificas eorum gravitates æqualia, atque adeò altitudines ſpecificis gravitatibus reciproce proportionales fuerint. Unde, quia (ſecundùm hypotheſin) argentum vivum in tubo AE in altitudine CD preſſioni liquoris in altitudine MO æquilibratum eſt, erit (§. 262.) altitudo Mercurii CD ad altitudinem liquoris tubum ambientis MO, ſicut hujus liquoris ſpecifica gravitas ad gravitatem ſpecificam hydrargyri. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

316. Cum tubi AB liquor ambiens MON quodcunque fluidum grave repræſentare poſſit, ponamus eum ſignificare aërem atmoſphæræ, tubique foramen ſuperius A extra atmoſphæram extare; vel, quia hæc conditio in praxi impoſſibilis eſt, ſumemus aliam, quæ
Fig. 72. ipſi æquivaleat, ſupponendo tubum AB una ſui extremitate A hermetice ſigillatam eſſe, adeò ut orificio ejus aperto B ſurſum converſo & tubo Mercurio impleto per hoc orificium, poſteaque eodem digiti pulpa obſtructo, atque Mercurio in vasculo CE ſtagnanti immiſſo, poſt retractum digitum orificium inferius B intra argentum vivum vaſis CE obſtruentem, nullus aër forinſecus adveniens tubi partem ſuperiorem AD à Mercurio deſcendente ad D usque relictam ingredi poſſit, & hoc pacto jam obtinetur ſcopus conditionis, quâ requiritur in propoſitione ut orificium apertum A extra liquo-
Fig. 73. rem MON promineat eo ſolo fine, ut liquor ambiens fiſtulam ingredi nequeat; quibus poſitis, & quia argentum vivum in fiſtula AB ad altitudinem plus minus 28. digitorum pedis Pariſienſis ſuſpenſus hæret, oportet atmoſphæræ gravitationem æquivalere preſſioni iſti Mercurii ad altitudinem 28. ſuſpenſi, etenim ſi aër gravis non eſſet in nulla prorſus intra fiſtulam AB altitudine elatus conſpiceretur; ſed in eadem cum Mercurio vasculi CE ſuperficie terminatus; eodem plane modo, quo argentum vivum in fiſtula AB figuræ 73. plane ad nullam altitudinem CD attolleretur, ſi nullus eſſet liquor ambiens, qui in Mercurium vasculi CE gravitare poſſit.

Corollarium II.

317. Ut ſciatur, in qua altitudine preſſio aquæ æquivaleat preſſioni atmoſphæræ, reſumi debet caſus propoſitionis præſentis & per liquorem MON intelligenda eſt aqua decies quater levior quam Mer-

Mercurius, atque dispiciendum est, quousque tubus AB cum vasculo CE vasi MON debeat demergi, ut Mercurius in fistula utrinque aperta assurgat ad altitudinem 28. digitorum. Jam quoniam (§. 315.) demerso vasculo ad profunditatem 28. pollicum infra superficiem aquæ MN Mercurius assurgit in tubo AB ad altitudinem CD unius digiti; demergendum erit vasculum CE in liquore seu aqua MON ad profunditatem quater & decies 28. pollicum id est ad profunditatem 392. pollicum, hoc est, paulo minus quam 33. pedum, ut Mercurius ad altitudinem 28 pollicum elevetur. Igitur *pressio atmosphæræ æquivalet pressioni aquæ in altitudine* 33. *pedum circiter*. Ac per consequens, si aër atmosphæræ uniformis ubique densitatis esset, altitudo atmosphæræ foret 26400. pedum; sed multo major erit, quandoquidem aër, quo altior est, eò etiam rarior deprehenditur.

Corollarium III.

318. Ex hisce principiis peti etiam debent rationes phænomenorum antliæ Ctesibianæ. Hæc antlia consistit in Cylindro ligneo vel subinde etiam metallico BA cylindrice excavato, ab utraque parte aperto quidem, sed inferius orificium B aquæ immergendum nonnihil angustius habens cavitate antliæ. Cavitati huic intruditur, ope virgæ ferreæ, embolus coriaceus CD, attollendus per vices atque deprimendus, qui per totam antliæ longitudinem antliæ cavitati tam affabre quadrare debet, ut omnem aëri ex superiori cavitatis parte in inferiorem transitum præcludat. Ejusmodi organon *Antlia suctoria* vel *Aspirans* subinde vocatur, quod in ea quadam attractionis specie attolli aqua videatur. Sed ascensionis aquæ causa eadem est, quæ Mercurium etiam in Barometris suspensum tenet, *pressio* scilicet *atmosphæræ*. Nam retracto embolo CD in *mn*, necesse est aquam vigore hujus atmosphæræ pressionis per orificium B antliam ingredi & cavitatem *m*B*n* ab aëre vacuam implere, siquidem (secundùm hypothesin) ex superiore antliæ parte A*mn* aër embolo *mn* impeditus in cavitatem *m*B*n* transire nequit, nec proinde quicquam est in spatio *m*B*n*, quod externæ aëris pressioni aquam per orificium intrudenti resistat. Hinc, quo altius attolletur embolus, eò altius etiam aqua, ipsum pone insequens, in antlia assurget; usque dum embolo delato in MO ad distantiam ab aqua IK 33. pedum circiter, aquæ altitudo super IK totidem pedum fuerit, adeò ut per corol- Fig. 74.

larium præcedens ejus preſſio æquivaleat preſſioni atmoſphæræ. Nam ſi embolum quantum voles ulterius eleves in *cd*, aqua non ideo altius enitetur, ſed in altitudine ſua 33. pedum ſubſiſtet, quæ altitudo aquæ maxime limitata eſt, ut aquilex quondam Galilæo retulit, utpote quæ atmoſphæræ preſſioni æquivalet.

Corollarium IV.

319. Quod ad ſiphones reflexos attinet, eorum vires ex præcedentibus commode deducentur. Sit ABC ejusmodi tubus in B inflexus inæqualium crurum AB & CB; & in vulgus notum eſt, quod immiſſo breviori crure AB vaſculo EF, aquæ aliusve liquoris pleno, ſi ſuctionis ope aqua ex longiore brachio BC eliciatur, fore, ut aquæ aut liquoris fluxus juxta ABC ex breviore in longius brachium tamdiu continuetur, donec vaſculum EF penitus exhauſtum fuerit, modò crus brevius AB altitudinem in aqua 33. pedum circiter non ſuperet, ſed eâdem minus ſit, & orificium C cruris BC humilius ſit orificio A alterius cruris AB. Hujus phænomeni ratio ſtatim apparebit conſiderando hunc ſiphonem aliud non eſſe, quam geminum barometrum, cujus utrumque crus ſimplicis barometri vices obeat. Etenim cogitando crus AB aquæ plenum in vaſculo EF itidem aquam continenti inſiſtere, concipitur barometrum ſimplex BAEF, & crus CB aquæ plenum in vaſculo GCH aqua pariter impleto erectum, efficit alterum barometrum BCGH. Repræſentet nunc KL columnam aquæ 33. pedum æquivalentem atmoſphæræ preſſioni, & in ea ſumantur KM = AB cruri minori, & KN = CB cruri majori. Jam, quia gravitatio atmoſphæræ in aquam EF eſt KL, & gravitatio aquæ BA in crure ſiphonis minoris eſt tantum KM, prævalebit externa aëris preſſio KL internæ preſſioni aquæ in tubo BA, quæ eſt KM, vi LM, quam vim ideò *attollentem* atmoſphæræ in tubo BA deinceps dicemus, quia tanta præciſe vi atmoſphæræ preſſio aquam AB in crure minori ſiphonis elevare conatur. Eodem argumento erit LN vis attollens atmoſphæræ in crure longiori BC, nam hæc vis attollens eſt exceſſus preſſionis externæ KL ſupra internam BC, quæ eſt KN ex conſtructione, atque adeò aqua in tubo BC revera attolletur, aut ſaltem preſſio atmoſphæræ eam attollere conabitur, vi illa LN. Verum, quia vis attollere conans aquam in tubo AB eſt LM, & vis attollens aquam in tubo BC eſt LN, & minor majori cedere debet, liquet aquam revera in tubo AB

in

in altum coactum iri vi MN, æquali differentiæ virium attollentium LM & LN. Hanc ergo differentiam MN appellare possumus *vim motricem* aquæ in tubo reflexo juxta ordinem AQBC; propterea aqua ex vasculo EAF per tubum recurvum ABC fluet, & per orificium C sese exonerabit, & effluet, donec totum vasculum EAF depletum fuerit.

Corollarium V.

320. Quia MN est vis motrix aquæ in siphone ABC circulantis; & hæc vis MN est differentia inter KN & KM, id est inter BC & BA, hoc est DC, facta scilicet BD = BA. Fig. 75.

Hinc 1°. vis motrix nulla est, nec proinde aqua in siphone juxta ABC fluere potest, ubi crura BA & BC æquantur. 2°. Nec fluere potest, cum crus brevius AB excesserit vel æquaverit altitudinem 33. pedum atmosphæræ pressioni æquipollentem. Sint enim K*m* major quam KL & æqualis AB, & K*n* = BC, & quia nunc interna pressio aquæ BA est *m*K; externa verò atmosphæræ est LK, prævalebit externæ interna vis *m*L, quæ nunc est *vis extrudens*, quoniam hac vi *m*L aqua aliquousque ex tubo BA hoc casu extrudetur, tantum abest, ut externa aëris pressio vim habeat attollendi aquam ut in corollario antecedenti; sic etiam *n*L est vis extrudens aquam ex tubo BC. Adeoque hæ vires extrudentes efficient, ut in crure minori aqua se demittat usque in Q ita ut QA nunc æquetur ipsi LK, perinde ac PC in altero crure, aqua in eo sese demittente in P; scilicet in utroque crure eousque, quo vires extrudentes evanuerint.

Corollarium VI.

321. Sed si AB fuerit minus 33. pedum & BC multò majus, fluet quidem ex minori AB per majus BC, sed absque eo, ut in toto tubo aqua continua sit, sed in summitate formabitur subinde vacuum. Sit enim ut prius KL, 33 pedum, AB vel KM minor quam KL & BC, cui æqualis sit K*n* major quam KL; quibus positis, si L*n* major fuerit quam LM plus aquæ effluet ex tubo BC quam influere potest per crus AB, atque adeo in summitate B erit vacuum, nec proinde aqua inter fluendum per totum siphonem contigua erit. Nam quia K*n* hoc casu exprimit pressionem aquæ in tubo BC & KL pressionem atmosphæræ minorem, *n*L exponit vim extrudentem aquam

aquam ex tubo BC; in altero verò AB, vis attollens est LM, major ideo erit vis extrudens nL vi attollente LM, atque adeò plus aquæ egredietur atque expelletur ex tubo BC, quam ingreditur in tubum AB. Idcircò ubi fluxus ad statum manentem perductus fuerit, relinquetur in summitate vacuum BP æquale excessui, quo vis extrudens nL superat vim attollentem LM, seu æquale nL — LM. Idcirco existente nL — LM $=$ o, vel vi extrudente æquali vi attollenti, aqua in siphone contigua erit.

COROLLARIUM VII.

322. Ope corollarii præcedentis jam facile derivabitur solutio sequentis Problematis. *Dato minore siphonis crure* AB *invenire longitudinem majoris* BC, *ut aqua in siphone fluens in summitate siphonis vacuum* BP *relinquat datæ magnitudinis* R. Nam positis KM cruri minori, KL atmosphæræ pressioni seu 33. pedum, & Kn cruri majori æqualibus, per corollarium 6. hujus aqua per siphonem ABC fluens relinquet vacuum BP $=$ nL — LM, unde cum hoc vacuum debeat esse æquale R, erit nL — LM $=$ R, vel nL $=$ R $+$ LM, hinc nK $=$ LK $+$ R $+$ LM $=$ 2LK $+$ R — MK, hoc est, crus majus BC æquari debet residuo detracti minoris cruris AB ex dupla atmosphæræ pressione data R aucta. Adeoque, si AB fuerit 16. pedum & R, 10. pedum, erit BC $=$ 60. pedum. Sed in ejusmodi casu adhibenda foret aqua ab aëre, quantum fieri potest, purgata; aliàs aër ex aqua transspirans ac sese in spatio BP sensim sensimque colligens liberum aquæ fluxum ex crure AB in alterum BC impediet.

SCHOLION.

323. Quanquam supra dictum sit in Barometris ordinariis Mercurium in altitudine 27. vel 28. pollicum certorum locorum respectu subsistere, id tamen non in mathematico rigore est accipiendum quasi argentum vivum barometri, in eodem semper loco constituti, in eadem altitudine constanter hæreret; nam ejusmodi Mercurii altitudines subinde variant, & ex hisce variationibus variationes in atmosphæræ pressionibus utcunque dignoscuntur. Dico *utcunque*, nam ut Celeb. *Wolfius* in sua *Aërometria* optime notavit, variationes Barometrorum non satis accurate diversitatem gravitationis atmosphæræ indicant, & propterea, quæ aliàs barometra vocari solent instrumenta,

menta, duntaxat *Baroſcopii* appellatione digna cenſuit, *Barometri* nomen inſtrumento illi reſervaturus, ſi quod unquam inveniri poſſit, quod aëris gravitationes accuratiſſime monſtret.

Inter alios defectus, quibus communia baroſcopia laborant, forte præcipuus eſt, quod variationes eorum non ſatis ſenſibiles ſunt: hanc ob rem eximii Philoſophi Hugenius, De la Hire, & Joh. Bernoullius alias baroſcopiorum conſtructiones excogitarunt, quibus inſtrumentis minimæ in aëris gravitate mutationes ſenſibiliter exprimerentur; hinc nata ſunt gemina, quæ vocantur barometra Hugenii & Hirei, quorum conſtructionibus explicandis nunc non immorabor, cum Hugenii barometrum compoſitum in Ephemeridibus Gallicis deſcriptum habeatur, & apud alios paſſim Autores de rebus hisce agentes, & Celeb. Hireus baroſcopii à ſe excogitati deſcriptionem etiam tradiderit in Actis Academiæ Regiæ Pariſ. Scient. 1708. d. 21 Martii. Sed quia barometrum, quod Acutiſſ. Geometra Joh. Bernoullius jam à multis retro annis excogitavit publico nondum innotuit, nec à ſimplicitate ſua contemnendum eſt, ejus deſcriptionem, ab Ingenioſiſſ. Autore mihi benigne communicatam, hoc loco afferre non pigebit; conſtructio itaque barometri Bernoulliâni ita habet.

324. Sit ABC tubus è duobus ramis inæqualium diametrorum compoſitus, figuram gnomonis præ ſe ferens; rami horizontalis BC in C aperti diameter lineam ſeu duodecimam digitis Pariſini partem non excedat; rami verò verticalis AB in ſummitate obſtructi diameter eſto 4. linearum vel amplius adhuc, prout variationum gradus in hoc barometro magis ſenſibiles ſunt exprimendi, & rami hujus altitudo ſit, qualis in baroſcopiis communioribus, 30. aut 31. pollicum; longitudo verò rami horizontalis BC, quæ à proportione diametrorum ramorum pendet, 3. pedum minimùm eſſe debet. Si tubo ſic parato Mercurius infundatur, & ramus ejus horizontalis pariter plenus ſit Mercurio ad medietatem usque E circiter, aëre exiſtente mediæ conſiſtentiæ, habebitur barometrum, quod 16. vicibus magis ſenſibiles exhibebit variationes, quam ordinaria barometra. Liquet enim, quod, deſcendente Mercurio in ramo verticali ex ſpatio unius pollicis, progredietur in ramo horizontali ex E in F per ſpatium 16. pollicum; nam ramus verticalis aliud non eſt, quam ſimplex ſeu commune baroſcopium. Fig. 76.

Quod ſi verò ramus horizontalis anguſtior aut verticalis amplior fieret, nemo non videt fore, ut variationes creſcant in duplicata

 ra-

ratione diametrorum, adeò ut hæ variationes in infinitum magis magisque ſenſibiles reddi queant. Sed quia praxis talia ſemper incommoda ſecum trahere ſolet, quæ theoriæ ſucceſſum difficilem efficiant, nimia eſt fugienda horizontalis rami anguſtia, quia aëris preſſio non ſatis commode agit in tubo valde anguſto, nec in eo Mercurius facile movetur. Horizontali igitur ramo vix minor quam unius lineæ diameter tribui debet. Propterea, loco imminutionis ejus diametri, ſatius eſt verticalem ramum majoris amplitudinis aſſumere, non quidem per totam ejus longitudinem, ſed tantum in
Fig. 77. ſummitate, addendo ſcilicet tubo BM, qui ejusdem ac in vulgaribus barometris craſſitiei eſſe poteſt, capſulam vitream AM, in qua Mercurius perinde ac in Hugenii geminato deſcendet atque aſcendet. Verum exiſtente hac capſula valde laxa, inſignis rami horizontalis longitudo, quæ hoc caſu requiritur, inſtrumentum inconcinnum uſuique parum accommodatum redderet, niſi incommodo iſti promptum eſſet remedium, contorquendo ramum horizontalem in ſpiralem vel quoquo alio modo in minus ſpatium redigendo flexuris illis, quas figura 78. exhibet, dummodo hæ flexuræ omnes in eodem plano horizontali exiſtant.

Ad commodiorem hujus Barometri impletionem non abs re fore notat Autor, ſi ramus perpendicularis AB in exiguum tubulum in L apertum deſinat, ita ut per ejus orificium argentum vivum infundi poſſit, dum orificium rami horizontalis C, obſtructum tenetur. Ambobus ramis hoc pacto impletis orificium L hermetice eſt ſigillandum & obturamentum, quo orificium C obſtruebatur, demendum, ut argentum vivum in verticali tubo AB ad conſuetam in communioribus barometris altitudinem ſe demittere poſſit ſcilicet ad terminum D, & ex horizontali ramo ſuperfluus effluere hydrargyrus; ſed quia hac ratione ramus horizontalis Mercurii plenus manebit, ſuctione pars ejus conveniens eſt adimenda vel beneficio tubi capillaris ampullula inſtructi, quæ calefacta atque tubo horizontali intruſa atque in eo refrigeſcens Mercurium in ſuam cavitatem trahet. Hac ratione barometrum conſtructum uſuique paratum erit.

Cæterum non inutile fuerit, ſi tubus verticalis in loco, quo horizontali jungitur, exigua curvatura inſtar receptaculi H inſtruatur, ad impediendum ex horizontali in verticalem ramum aëris ingreſſum, ſi quando horizontalem forte Mercurius deficeret, aut fortaſſe etiam ex nimia atmoſphæræ preſſione ſeu à vibrationibus Mercurii

ex

ex translatione barometri de loco in locum orta, quod poſtremum inconveniens ſi non tolli penitus, ſaltem obſtruendo orificium C, minui poteſt.

Præter ſimplicitatem, qua Bernoullianum iſtud barometrum ſe commendat, aliis inſuper prærogativis præſtare videtur barometris compoſitis hactenus inventis. Nam tubi pro Bernoulliano & facile parantur facileque etiam implentur, nec liquores in eo adhibentur in vapores ſenſibiliter abeuntes, quibus barometri effectus mirum quantum alterari ſolent. Nam in baroſcopio à nobis deſcripto ſolus adhibetur Mercurius, qui in vapores ſenſibiliter non ſolvitur. Geminatum vero Hugenii barometrum, præterquam quod tubos requirat ægre parabiles & difficillime liquoribus implendos, liquores depoſcit evaporationi obnoxios, cui incommodo illud etiam quod à Celeberrimo De la Hire ingenioſe excogitatum & in Actis Acad. Reg. Pariſ. Scient. loco jam ſupra indicato ſubjectum eſt, aliudque præterea incommodum ſecum trahit, quod liquores ejuſdem ſpecificæ gravitatis ſed impermiſcibiles requirat, alioqui variationes ejus non indefinite augeri poterunt, ſed intra certos terminos conſiſtent quos transgredi nequeunt. Nam vocando ſpecificas gravitates argenti vivi, & ex liquoribus in barometro iſto adhibendis gravioris ſcilicet & levioris m, t, p; capſularum vitrearum diametrum a, diametrum tubi anguſtioris b; invenio poſt Clariſ. Bernoullium, variationes in barometro Hireano ſe habere ad variationes in barometro ordinario ſeu communi, ut quantitas maa ad $2mbb, + (aa - bb . t - p)$. Jam quo minor eſt b quam a, eo propius accedit hæc ratio, rationi m ad $t - p$, quæ limitem exprimit, intra quem variationes barometri à Cl. De la Hire inventi collatæ cum variationibus Barometri communis continentur, quæ data ratio m ad $t - p$ eo ſolùm caſu infinita fit, quo $t = p$, hoc eſt eo caſu, quo liquores in Hireano barometro adhibiti ejuſdem ſunt ſpecificæ gravitatis, ſed qui invicem permiſceri nequeant.

Poſteaquam deſcriptio Bernoulliani barometri coram Concilio Academiæ Scientiarum Regiæ Pariſienſis prælecta fuit, nuntiatum eſt Celeb. ejus Autori ſimilem barometri conſtructionem jam ante complures annos excogitatam fuiſſe à Celeberrimo Aſtronomo Joh. Dominico Caſſino, ſed poſtea neglectam ab ipſo jacuiſſe, quod in praxi non ſucceſſiſſet ob aërem, qui Mercurio in tubo ſeu ramo horizontali ſe miſcuiſſe ejuſque liberum fluxum impediiſſe ſcribitur. Sed quia, quid hac in re laudatus Vir molitus ſit, nusquam memo-

 riæ

riæ proditum ſit, nec Bernoullius de ejus tentaminibus quicquam fando audiverit, inventionis laus ipſi denegari non poteſt, maxime quod ejus cum ſucceſſu in Belgio factum eſſe periculum teſtari poteſt; & incommodum illud, quod Caſſino remoram injecit, tolli poſſe arbitratur, tubum horizontalem ſuctione implendo; vel etiamſi compreſſione crumenæ cujusdam coriaceæ argenti vivi plenæ tubique horizontalis orificio applicatæ Mercurius tubo intruſus aſcendere cogatur usque ad ſummitatem tubi verticalis, orificium ſuperius apertum habentis; hac Mercurii intruſione peracta, & obturato ſummo verticalis tubi orificio, crumena à tubo horizontali eſt removenda, ut argentum vivum in tubo verticali ad conſuetam altitudinem delabi poſſit. Denique ut Mercurii fluxus in tubo horizontali commode fiat, tanta tubo iſti amplitudo eſt tribuenda, quantâ opus eſt ut Mercurius in eo contineatur, absque eò ut diffluat.

CAPUT VI.

De Vi Elaſtica Aëris in Genere.

325. Aër, quantum experimentis conſtat, nullo alio in cæteris fluidis & liquoribus exemplo, ſibi peculiarem habet affectionem, quâ non ſolum continuo ſe expandere conatur, ſed etiam ad majus, quam antea occuparat, ſpatium ſeu volumen reapſe ſe expandit quoties nullo corpore ambiente impeditur. Conatus ejusmodi expanſivus aëris *Elater* ſeu *Vis elaſtica* ejus nuncupatur. Experimenta, quæ hanc aëri *elaſticitatem* ineſſe evincunt, plura à Boylio, Mariotto, Jac. Bernoullio aliisque cautis obſervatoribus tentata & feliciter ad exitum deducta ſunt, quæ apud laudatos Autores legi poſſunt, vel etiam in Aërometria Clariſſ. Wolfii, in qua ſelectiſſima quæque experimenta accurate deſcribuntur. Inter hæc experimenta unum alterumve hoc loco recenſebo, quod aëris vim elaſticam ad oculum demonſtrare exiſtimo.

I. Veſica bubula vel porcina flaccida & complicata, ſed obſtructum habens orificium ope circumligati fili, in recipiente ſenſim ſenſimque intumeſcere conſpicitur, ſimul atque aër ex recipiente educitur ope antliæ pneumaticæ, & ſi veſica tenera ſit, rumpi ſubinde obſervatur à ſolo elatere pauxilli aëris in veſicæ rugis latentis.

II.

II. Ab eodem aëris elatere phiala vitrea tenuiorum parietum & probe obſtructa in recipiente ab aëre evacuato in minuta ſubinde fragmenta diſſilit; & huic ſimile phænomenum bibulos quandoque terret, cum generoſum vini hauſtum facere volentes lagenam ſuam vitream hiſcentibus labris tam arcte admovent, ut præ metu vel unius ſolum nectaris ſui guttæ effuſionis, communicationem aëris externi cum eo, qui lagenæ ineſt, tollant, atque ſtrenue ſugendo lagenæ aër rarefiat, quo fit, ut prævalente externi aëris preſſione lagena in fruſtula conteratur, & merum pereat.

III. Vis elaſtica aëris probatur etiam experimento hæmiſpheriorum æneorum, quæ educto ex eorum cavitate aëre, tam pertinaciter ſibi invicem adhærere comperiuntur, ut maximis etiam ponderibus ipſis appenſis, vel in oppoſitas partes trahentibus, vix ſeparari poſſint, quæ tamen aëris plena nullo ferme negotio ab invicem diducuntur.

326. Verum, recenſitis experimentis non obſtantibus, D. Parent Elaſticitatem aëris in Hiſtoria Acad. Reg. Pariſ. Scientiarum Academiæ 1708. in dubium vocare velle videtur, ſi Hiſtoriæ verba obiter tantum expendantur; aſt textus diligentius inſpectus poſtea manifeſtat, elaterem aëris in ſenſu paragraphi præcedentis non denegari. Nam Autor modo nominatus tantum negat particulas aëris concipiendas eſſe inſtar lamellarum plicatilium, vel inſtar filamentorum in ſpiras contortarum, & ſeſe poſtea evolventium, aut ullius rei inſtar hisce æquivalentis. Sed eas potius tanquam moleculas conſiderandas arbitratur, materiæ æthereæ, ultra quam cogitari poſſit, exili & agitatiſſimæ innatantes. Idcirco juxta laudatum Autorem moleculæ aëreæ tanto magis ab invicem diſtant, &, quod elateris ſpeciem præ ſe ferre dicit, tanto magis à ſe invicem recedere conantur, quo abundantior fuerit ætherea materia meatus aëris transfluens, & quo pernicior ejus motus. Ab hac enim materia ætherea vim omnem derivandam eſſe putat, qua aëris moleculæ in alia corpora agere poſſint. Ex quibus omnibus abunde liquet Cl. Parent tendentiam illam molecularum aërearum, qua à ſe invicem diſcedere conantur, non negare, nec proinde vim illam elaſticam noſtro ſenſu ſumtam in dubium vocare. An autem hæc aeris Elaſticitas, ſeu conatus particularum ejus à ſe invicem recedendi, proveniat ab elaſticitate propria particularum compreſſarum, & deinceps in priſtinum ſtatum ſe reſtituere molientium, an vero ab æthere interfluente, quæſtiones ſunt phyſicæ, quæ in utramque par-

 tem

tem disputari possunt, quæque omnes suis difficultatibus circundatæ sunt.

327. Hypothesi Parentianæ explicandæ elasticitatis aëris similem ante plures annos etiam excogitaram, sed cui postea nuncium misi, quod eadem posita, non aëra tantum, sed omnes prorsus liquores vi elastica præditos esse debere, qua tamen liquores carent, ex ea sequi viderim. Nam si aëreæ moleculæ ideo à se invicem recedere conantur, quod rapidissimo ætheris motu per poros aëris indesinenter circulantis ejusdem aëris moleculæ à se invicem abigantur & repellantur, cur quæso in reliquis liquoribus moleculæ non eodem modo ab invicem repelluntur ab interfluente æthere, qui non minus trans liquorum poros, quam trans aëris meatus fluere & moveri debet? Respondebitur forte disparitatem provenire à crassitie molecularum, quibus liquores componuntur, nec non à longe majori liquorum densitate, quam sit aëris densitas, & ob has duas rationes fieri, ut moleculæ liquorum non eo successu, quo aëris particulæ à se invicem ab interfluente æthere abigantur, cum ipsæ particulæ abigendæ valde magnæ & ætheris trans liquorum poros fluentis copia valde parva sint respectu aëris. Ast valde dubito, an hæ rationes sincere philosophantibus satisfacturæ sint; nam angustia pororum in liquoribus, quæ adducitur ad reddendam rationem, cur liquores vi elastica careant, potius contrarium probare videtur. Notum enim est, fluida eò velocius moveri solere quo angustiora sint loca, per quæ fluant, sic fluminis in diversis sectionibus fluentis velocitates sunt sectionibus reciproce proportionales; ac propter hanc rationem, velocitas ætheris fluentis per porum alicujus liquoris L erit ad velocitatem ejusdem fluentis per porum aëris A, ut amplitudo pori aëris ad porum liquoris; atqui in diversis liquoribus pororum similiter positorum amplitudines, hoc est, distantiæ duorum vicinorum elementorum in liquoribus, sunt in reciproca subtriplicata proportione densitatum; nam duæ massæ similes & æqualis ponderis diversorum liquorum volumina habent densitatibus suis reciproce proportionalia, & volumina, quæ (secundum hypothesin) sunt solida similia, sunt in triplicata proportione laterum homologorum, adeoque & densitates erunt in reciproca triplicata ratione laterum homologorum in solidis similibus, atque adeo latera ejusmodi homologa in reciproca subtriplicata ratione densitatum; verum particulæ in ambobus liquoribus, præter propter similiter positæ, admittunt interstitia lateribus solidorum homologis proportio-

nalia,

nalia, unde cum latera solidorum sint in reciproca subtriplicata ratione densitatum, erunt etiam pororum amplitudines seu particularum fluidorum sibi invicem proximarum distantiæ in reciproca subtriplicata ratione densitatum. Atqui velocitas ætheris fluentis trans porum liquoris L est ad celeritatem ejusdem fluentis trans porum aëris A, reciproce, ut porus aëris seu interstitium duarum ejus molecularum vicinarum ad porum liquoris, atque adeo directe in subtriplicata ratione densitatis liquoris L ad densitatem aëris A, id est, in subtriplicata ratione gravitatis specificæ liquoris ad gravitatem specificam aëris. Jam cum, ut supra (§. 314.) dictum, gravitas aquæ ad gravitatem aëris sit ut 800. ad 1, & radix cubica ex 800. sit quam proxime $\frac{92}{10}$; erit velocitas ætheris trans aquam ad celeritatem ejusdem trans aërem proxime ut 92. ad 10; hinc, quia fluidorum impressiones in corporibus, in quæ agunt, sunt in duplicata ratione velocitatum, ut id suo loco ostendetur, erit hoc casu vis ætheris ad abigendas moleculas aquæ ad vim ejusdem ad abigendas à se invicem moleculas aëris, ut quadratum ex 92. ad quadratum ex 10. proximè, id est ut 8464. ad 100; adeoque aquam oporteret habere in Parentii Hypothesi plus quam octoginta vicibus majorem vim elasticam quam aër, cur igitur nulla in aqua elasticitas deprehenditur? multò major adhuc deberet esse elasticitas hydrargyri & aliorum fluidorum aquâ specifice graviorum.

Verùm quicquid sit de causa physica elateris aëris, ad institutum nostrum sufficit aëri vim elasticam inesse, quod præter experimenta ab initio hujus capitis relata, etiam probari potest effectibus antliæ Guerikianæ à Roberto Boylio postea magis perfectæ, cujus opera aër in vasis quibuscunque, quæ eidem rite applicari queunt, quantum velis rarefieri, atque adeò pars aëris quantacunque repetitis haustibus educi potest, quod minime succederet si aër virtute illa expansiva careret.

328. Est vero ejusmodi *Antlia Pneumatica* tubus æneus in tota sua cavitate perfectè lævigatus, ita ut embolus, qui ultro citroque in eadem cavitate agitandus antliæ cavitati ubique accuratissime quadret, nec ullas rimas relinquat per quas aër transpirare possit.

Embolus est pistillum ex circulis coriaceis orificio antliæ perfecte quadrantibus conflatum, quod antliæ cavitati ope manubrii centro ejus inserti ad fundum antliæ intrudi & dehinc iterum ad caput ejusdem seu orificium retrahi possit.

Epistomium Antliæ est clavicula cylindrica tubo incurvato antliæque

que fundo afferruminato ad angulos rectos inserta, libere hinc inde volvenda, foramine rotundo amplitudinis circiter tubi recurvi pertuso, eum in finem, ut foramen istud cum cavitate tubi recurvi antliæ communicans liberum aëri ex vase, ex quo aër expelli debet (quod vas *Recipiens* cum aliis brevius deinceps vocabitur) per tubum recurvum in antliam transitum permittat, & in alium sensum conversa, & cum sæpius jam nominato tubo recurvo non communicans modo commemoratum aëris transitum ex recipiente in antliam impediat atque tollat.

Spiraculum est cavitas ex summitate epistomii in foramen ejus transversum desinens, & cum tubi recurvi cavitate subinde communicans; hians acicula ænea pro rei indigentia obturanda, ejus úsus, ut spiraculum apertum cavitati antliæ cum aëre subtili liberam communicationem permittat.

Tubus inflexus fundo antliæ afferruminatus plerumque desinit in cochleam marem, cui catinus æneus in centro cochlea fœmina excavatus circumvolvitur. Catino applicatur circulus coriaceus madefactus, cui recipiens utplurimum campaniforme imponitur, & circumcirca aqua affunditur marginibus catini, ad margines ejus elatis contenta, ad impediendum externi aëris ingressum.

Agitatio emboli constat uno ejus *itu* ex fundo antliæ usque ad orificium seu caput ejus, unoque *reditu* ab orificio usque ad fundum.

329. In figura 79. AB est corpus antliæ, EF embolus cavitati antliæ affabre adaptatus, ut antlia nusquam perfluere queat; BOH est tubus ad O inflexus antliæ fundo in B afferruminatus, & cum ejus cavitate & cum recipiente M communicans per foramen H; hujus tubi foramini inseritur epistomium IK, quod, prout in hunc vel illum sensum convertitur, tollit vel aperit communicationem antliæ cum recipiente M. Hoc epistomium IK perforatum est usque ad ejus foramen transversum, ac hæc cavitas vocatur spiraculum cui acicula I inseritur, ut communicatio antliæ cum externo aëre tollatur, acicula verò removetur iterumque extrahitur, quoties hac communicatione opus est, vel ad expellendum aërem ex antliæ cavitate, vel etiam ad admittendum externum aërem, eo casu, quo aër recipientis est condensandus. CD est catinus, cujus margines in C & D nonnihil elevati marginum instar sunt, aquam circa recipiens affusam continentes; catino circulus coriaceus in centro perforatus & madefactus applicatur, cui deinceps recipiens M imponitur

mani-

manibusque fortiter astringitur, &, ut modo dictum, circumcirca aqua affunditur in catino, omnia ad id, ne aër exterior per ullam rimam in recipiens se insinuare queat. Et sic omnia ad usum erunt parata. Non me latet artifices nonnihil aliter antlias construere solere, quoad nonnullas circumstantias, cum ejus corpori situm inclinatum dent, qui tamen in schemate nostro est horizontalis; sed hoc accidentale est, nec ad ejus essentiales usus facit. Sic etiam spiraculum subinde aliter quam à nobis descriptum est parare consueverunt & tubum BOH; sed quocunque modo id construant, idem semper effectus debebit præstari, cum eo qui est in antlia hujus descriptionis. Imò vero, si quæ aliter parant, id duntaxat respicit faciliorem antliæ usum.

330. Præparatis omnibus quæ §. præcedenti descripta sunt, aperiatur epistomium IK, ut recipiens M cum antlia AB per tubum HOB communicare possit, obturato scilicet spiraculo I, & retrahatur embolus EF usque ad orificium antliæ A in *ef*, quo fiet ut aër qui cavitatem recipientis M & tubi HOB impleverat, se diffundat per totum spatium MHOB*ef*, compositum ex cavitatibus recipientis M, tubi HOB & antliæ B*ef*, atque adeò residuus recipientis aër se habebit ad aërem, quem antea continebat, ut recipientis M tubique HOB cavitates simul ad cavitates M, BOH & B*ef* simul sumtas, ac propterea raritas ejusdem aëris residui erit ad raritatem aëris totalis, qui antea recipienti inerat, ut MHOB*ef* ad MHOI. Dehinc clauditur epistomium IK, extrahiturque spiraculi I obturamentum, atque intrusione emboli *ef* versus fundum antliæ B aër ex antliæ cavitate per apertum spiraculum expellitur, ac clauso denuo spiraculo I prima emboli agitatio peracta erit, eodem tenore repetentur secunda, tertia, quarta, &c. agitationes; ex quibus ultro fluit sequens

PROPOSITIO XIX. Theorema.

331. *Si cavitates antliæ* Bef, *tubi* BH *&* *recipientis* M *simul, fuerint ad cavitatem solius recipientis* M *ut recta* Q *ad aliam* P, *raritas aëris residui post quamlibet emboli agitationem erit ad raritatem ejus ante hanc agitationem, ut* Q *ad* P. Fig. 79.

Nam, quia post emboli itum ex B in *ef* aër recipientis M (§. 330.) se diffundit per totum spatium MHOB*ef*, raritas aëris residui in cavitate M post emboli itum, ad raritatem ejus ante hunc itum,

 erit

erit, ut spatium MHB*ef* compositum ex cavitatibus recipientis M tubi HOB & antliæ B*ef* ad cavitatem recipientis solius M, id est (secundùm hypothesin) ut Q ad P. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

332. Si ratio P ad Q continuetur in quotcunque terminis R, S, T, &c. & primus P exponat raritatem aëris in recipiente M in statu naturali existentis, termini sequentes progressionis nostræ Q, R, S, T, &c. indicabunt raritatem aëris in recipiente residui, post primam, secundam, tertiam, quartam, &c. emboli agitationem. Nam, quia raritas aëris post primam emboli agitationem est ad raritatem ejus ante hanc agitationem ut Q ad P, & hic terminus P exponit raritatem aëris in statu naturali qualis erat ante primam agitationem, ideo exponet Q raritatem aëris in recipiente residui post primam emboli agitationem; sic quia raritas aëris post primam ad raritatem post secundam emboli agitationem est ut P ad Q, vel ut Q ad R, & Q exponit raritatem aëris post primam emboli agitationem, exponet R raritatem aëris residui post secundam emboli agitationem; eodemque argumento conficitur exponere S, T, &c. raritates residui in recipiente aëris post tertiam, quartam, &c. agitationem.

Corollarium II.

333. Hæc etiam obtinent, mutatis mutandis, in condensationibus aëris recipientis. Quo casu loco itus, quem diximus esse eductionem emboli ex fundo antliæ B usque in *ef*, nunc per itum intelligam intrusionem emboli *ef* usque ad antliæ fundum. Propterea, si progressio T, S, R, Q, P continuetur in totidem terminis *q*, *r*, *s*, *t*; &c. hi termini significabunt raritatem aëris in recipiente M, post primum, secundum, tertium, quartum, &c. emboli itum seu in antliam intrusionem. Nam aër, qui ante primam intrusionem diffusus erat in spatio MOef, post primam intrusionem redigetur in spatium multo angustius BOHM, vel neglecta cavitate tubi BOH (quæ insensibilis est præ cavitate recipientis M, & quæ tubi cavitas etiam subinde tollitur, spatium EFOH aqua implendo) raritas aëris ante primam emboli intrusionem, quæ dicitur P, ad raritatem ejusdem aëris post primum itum est ut spatium MHOef ad spatium M,

M, hoc eſt, ut Q ad P ſeu P ad *q*; ergo *q* repræſentat raritatem aëris in recipiente M poſt primam emboli intruſionem, & pari argumento termini ſequentes *r*, *s*, *t*, &c. indicabunt raritates poſt ſecundam, tertiam, quartam, &c. emboli intruſiones.

Corollarium III.

334. Unde, cum (§. 20.) denſitatibus raritates reciprocè ſint proportionales, magnitudines Q, R, S, T, &c. quæ à magnitudine P æquè remotis *q*, *r*, *s*, *t*, &c. etiam reciproce proportionales exiſtunt, exponent denſitates aëris in recipiente M, poſt primam, ſecundam, tertiam, &c. emboli intruſionem in antlia AB.

PROPOSITIO XX. Problema.

335. *Cavitatibus antliæ & recipientis, vel ſaltem ratione unius ad alteram datis, definire, quot emboli agitationibus opus ſit ad reducendum recipientis aërem ad datum raritatis vel denſitatis gradum.* Fig. 80.

Ad axem AZ extructa ſit quæcunque log-mica B1*n*, in qua magnitudines P, Q, R, S, &c. aptentur tanquam ordinatæ, ut in P0, Q1, R2, S3, T4, &c. quæ cum (ſecundùm hypotheſin) ſint in progreſſione geometrica, intervalla axis PQ, QR, RS, ST, &c. erunt æqualia. Numeri ordinatis adſcripti indicant, quot emboli agitationibus opus ſit ad redigendum recipientis aërem ad eum raritatis gradum, quem ordinata quæque exponit; ſic P0 ſignificat nulla emboli agitatione aërem reduci ad raritatem P0 ſeu P, S3 verò innuit 3 emboli agitationibus aërem reduci ad raritatem S3 vel S, & ſic de reliquis; litera verò *n* denotat numerum quæſitum emboli agitationum, quibus aër Recipientis reducitur ad raritatem datam Z quæ ordinata Z*n* repræſentatur. Hac raritates repræſentandi ratione fit, ut quælibet abſciſſa PS ſit ad abſciſſam PQ ut numerus 3 ordinatæ S3 adſcriptus ad unitatem 1 ordinatæ P1 adſcriptam, hinc erit etiam PZ : PQ = n : 1, vel ſimpliciter *n* = PZ : PQ. Atqui PZ eſt log-us rationis Zn ad P0 ſeu Z ad P, & PQ log-us rationis Q1 ad P0 ſeu Q ad P; ergo numerus quæſitus *n* = log. (Z : P) : log. (Q : P). Atque hinc reſultat regula Bernoulliana.

Log-us rationis (Z : P) quam habet raritas aëris deſiderati ad raritatem aëris naturalis, dividatur per log-um rationis (Q : P) quam *habent antlia & recipiens ſimul, ad cavitatem ſolius recipientis, indicabit quotiens quæſitum agitationum numerum n.* Qui erat inveniendus.

Hujus regulæ à Celeb. Jac. Bernoullio olim ſine demonſtratione publicatæ analyſin ex calculo exponentialium petitam jam anno ni fallor 1693. promulgavit Cl. Varignon in Actis Acad. Reg. Scientiarum, eamque poſtea multis acceſſionibus auctam in Actis ejusdem Academiæ anni 1705. denuò cum publico communicavit.

Corollarium I.

336. Cum log-us cujusque fractionis ſit differentia log-orum numeratoris & denominatoris, erit log-us $Z:P = \log. Z - \log. P$, & $\log. Q:P = \log. Q - \log. P$. adeoque n ($= \log. (Z:P):\log. Q:P) = (\log. Z - \log. P):(\log. Q - \log. P)$.

Hinc ſi $Q:P = 2:1$, & $Z:P = 6:1$, erit $\log. Z - \log. P = 0.7781512$, & $\log. Q - \log. P = 0.3010300$, adeoque $n = 0.7781512 : 0.3010300 = 2\frac{3}{5}$ circiter.

Porrò ope canonis ſuperioris ex tribus quantitatibus $Z:P$; $Q:P$ & n, datis quomodocunque duabus, tertia ſemper per log-os haberi poteſt. Sed hisce non vacat diutius immorari.

Corollarium II.

337. Quanquam hoc Problema tantum de rarefactione aëris agit, canon tamen, in quem circa finem §. 335. incidimus, etiam caſibus illis applicari poteſt, quibus aër recipientis non quidem rarefaciendus ſed condenſandus eſt. Ut ſi quæratur, quot emboli pulſibus aër recipientis in naturali vel quocunque alio ſtatu conſtitutus, cujus denſitas ad denſitatem aëris in naturali ſtatu data ſit, ad gradum denſitatis X reduci poſſit. Fiat ut X ad P ita P ad Z, & hæc Z exponet (§. 20.) raritatem aëris cujus denſitas eſt X, quandoquidem P repræſentat denſitatem & raritatem aëris in ſtatu naturali. Jam datis $Q:P$, & $Z:P$ invenietur per canonem citatum numerus quæſitus n pulſuum emboli, quibus aëri raritas $Z = P^2 : X$ ſeu denſitas X inducitur. Verùm hoc caſu, quo aër recipienti eſt intrudendus, magnitudo Z eſt infra ipſam P, atque adeo log-us rationis $Z:P$ erit negativus, hinc etiam valor numeri n negativus exiſtet, quo tamen aliud non indicatur, niſi emboli itus in caſu condenſationis con-

contraria ratione ſe habere, quam in caſu, quo recipientis aër eſt rarefaciendus, adeò ut ad ſigna non debeat attendi.

Scholion.

338. Modus eſt expeditus explorandi rationem cavitatis antliæ ad cavitatem recipientis, ſi vas quoddam cylindriforme ſuper baſi ſeu fundo ſuo rectum aqua impleatur tanta, quantam recipiens & antlia ſimul capere poſſunt & dehinc aquæ altitudo notetur per A; deinde ope ſiphonis tantum aquæ exhauriatur ex vaſe cylindrico, quantum aquæ capere poteſt antlia, reſiduæque in vaſe cylindrico altitudo ſignetur B, dico A fore ad B ſicut Q ad P; nam cylindrus ex altitudine B æquatur cavitati recipientis ſolius, unde cum ſit altitudo A ad altitudinem B, ut cylindrus A ad cylindrum B, id eſt, ut cavitates antliæ & recipientis ſimul ad cavitatem ſolius recipientis, hoc eſt (ſecundùm hypotheſin) ut Q ad P, liquet propoſitum.

CAPUT VII.

De Viribus elaſticis aëris cum denſitatibus ejus comparatis.

NOn ſolum per experimenta, quorum nonnulla initio capitis proxime antecedentis recenſui, conſtitit aëra vi elaſtica præditum eſſe; ſed etiam Philoſophis innotuit hanc vim expanſivam aëris eo majorem eſſe, quo major ſit aëris denſitas, & vice verſa; idcirco examinandum adhuc reſtat an elaſticitates creſcant præciſe juxta proportionem denſitatum, an vero ſecundum aliam quamcunque rationem. In hoc capite nonnulla exhibebimus theoremata ad hanc rem facientia.

339. Cum aëris elaſticitas conſiſtat in niſibus illis, quibus aëris moleculæ à ſe mutuo recedere conantur, manifeſtum eſt, quod preſſio, quam quodlibet planum, quo aëris expanſio impeditur, à particulis aëris plano contiguis ſubit, æqualis eſt univerſæ vi ſingularum particularum urgentium.

PROPOSITIO XXI. Theorema.

340. *Si aër ſub volumine cujusvis prismatis* BOF *redigatur in mi-* Fig. 81.

 nus

nus volumen GOF, *nisusque, quibus proximæ quæque moleculæ* C, c & I, i *à se invicem recedere conantur, sint in reciproca ratione densitatis, cujus exponens est* n, *intervallorum* Cc & Ii *earundem molecularum, hoc est, in ratione* Cc^{-n} *ad* Ii^{-n}, *vel* Ii^{n} *ad* Cc^{n}. *Erunt vires, quibus plana* BC & GI *ab aëre elastico* BF & GF *premantur, ut potestas* n *densitatis aëris* BF *ad similem potestatem aëris* GF. *Hoc est, ut* d^{n} *ad* D^{n} *vocando densitatem aëris in volumine* BF, d & *densitatem in volumine* GF, D.

Nam vis, quâ planum BC à particulis aëris ipsum tangentibus urgetur, est ad vim, qua planum GHI à particulis aëreis ipsi contiguis urgetur, est ut omnes particulæ in plano BC ad omnes, quæ sunt in plano GHI, vel potius, ut vis ex omnibus, quibus particulæ plano illi adhærentes pollent, resultans, ad vim resultantem ex viribus, quibus omnes moleculæ plani hujus GHI præditæ sunt, atqui vis omnium C, quæ sunt in plano BC, est ad vim omnium I, quæ sunt in plano GHI, ut vis unius C ad vim unius I, id est (secundùm hypothesin) ut Ii^{n} ad Cc^{n}; ergo vis, qua planum BC est ad vim, qua planum GHI urgetur, ut Ii^{n} ad Cc^{n}. Verum est Ii ad Cc ut IF ad CF, seu ut prisma BF ad prisma GF, id est, ut densitas aëris BF ad densitatem aëris GF vel, sicut *d* ad D, ergo Ii^{n} ad Cc^{n}, id est, vis, qua urgetur planum BC, ad vim, qua ab incluso aëre GF planum GHI urgetur, est ut d^{n} ad D^{n}, seu directe, ut densitatum dignitas cujus index est *n*. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

341. Adeoque, si vires, quibus particulæ C, *c*, & I, *i* à se invicem aufugere conantur, fuerint interstitiis Cc, Ii reciprocè proportionales, vires elasticæ aëris erunt densitatibus proportionales.

PROPOSITIO XXII. Theorema.

Fig. 82. 342. *Si aër, qui est sub volumine* CFE, *redigatur in volumen minus* cfe *priori simile, ac vires, quibus moleculæ aëreæ in utroque volumine à se invicem recedere conantur, sint, ut in propositione præcedenti, in reciproca ratione potestatis ex indice* n *intervallorum* GH, gh *quibus moleculæ*, G, g *planis* BAE & bae *adjacentes à proximis* H & h *distant, erit vis, qua totum planum* BAE *ab aëre elastico* FCE *urgetur, ad vim, qua planum* bae *ab aëre elastico* fce *premitur, ut latus cubicum ex potestate*

testate densitatis d *aëris* FCE *ab indice* n *denominata, ad latus cubicum ex pari dignitate densitatis* D *aëris* cfbe; *hoc est, ut radix cubica ex* d^n *ad radicem cubicam ex* D^n.

Quia volumina CFE, *cfe* sunt solida similia, etiam plana BAE, *bae* erunt figuræ similes, & particulæ aëreæ in iis similiter positæ erunt. Propterea vis elastica aëris CFE, quæ exeritur in planum BAE, erit ad vim elasticam aëris *cfe* redundantem in planum *bae*, ut vis, qua unica particula G premit planum BAE ad vim unius particulæ *g* urgentis planum *bae*, id est (secundùm hypothesin) ut gh^n ad GH^n, seu quia GH & *gh* in solidis similibus CFE & *cfe* sunt lineolæ similiter positæ, ut ab^n ad AB^n. Jam quia solidum *cfe* est ad solidum CFE ut densitas aëris in FA ad densitatem aëris in volumine *fa*, id est, ut *d* ad D, tum etiam ut solidum *fa* ad solidum FA, vel quia hæc solida (secundùm hypothesin) similia sunt, ut ab^3 ad AB^3, erit $ab : AB = \sqrt{C}.\, d : \sqrt{C}.\, D$ & $ab^n : AB^n = \sqrt{C}.\, d^n$, ad $\sqrt{C}.\, D^n$. Ergo vis aëris, quæ exeritur in planum BAE, est ad vim, quæ exeritur in planum *bae*, ut latus cubicum ex d^n ad latus cubicum ex D^n. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

343. Figura verò KIE in plano BAE similis & æqualis figuræ *bae* pressionem subibit ab aëre elastico FA, se habentem ad pressionem, quam aër elasticus *fa* exerit in planum *bae*, ut latus cubicum ex d^{n+2} ad D^{n+2}. Nam pressio figuræ KIE est ad pressionem figuræ BAE, ut figura KIE, vel æqualis *bae* ad figuram BAE, id est, propter figurarum similitudinem ut ab^2 ad AB^2, & (§. 342.) pressio figuræ BAE ad pressionem figuræ *bae*, ut $\sqrt{C}.\, d^n$ ad $\sqrt{C}.\, D^n$, ergo ex æquo & per compositionem rationum pressio in figura KIE ad pressionem in figura *bae* se habet, ut latus cubicum ex d^{n+2} ad D^{n+2}. Ut habet Celeb. Newtonus Sch. Prop. 23. Lib. II. Pr. Ph. Nat. Math.

Corollarium II.

344. Hinc, si iterum fuerit $n = 1$, aut vires centrifugæ moleculàrum aëris suis distantiis ab invicem reciproce proportionales, erunt vires elasticæ, seu pressiones, quas æquales figuræ KIE & *bae* à suo quæque aëre subibunt, in ratione densitatum, atque in hac circumstantia res convenit cum Corollario Propositionis præcedentis. Et con-

conversim, si vires elasticæ densitatibus proportionales fuerint, molecularum vires, seu conatus centrifugi, distantiis suis à proximis moleculis reciproce proportionales erunt.

PROPOSITIO XXIII. Theorema.

Fig. 83. 345. *Si vires elasticæ aëris fuerint, ut rationes, quas habent quantitates aëris ad residua voluminum, sub quibus aër continetur, eædem vires erunt ut ordinatæ ad lineam alterutri hyperbolæ æquilateræ asymptotam æquidistantem, densitates vero, ut abscissæ ordinatis homologæ, quarum abscissarum origo sit in ipsa hyperbolæ curva.*

Si segmenta AD lineæ datæ AB exponant quantitates aëris in eodem volumine, per totam AB exposito, contentas, eædem AD densitates aëris simul indicabunt; nam juxta §. 16, densitates sunt ut rationes, quas materiæ quantitates habent ad volumina, in quibus continentur, & hoc loco diversæ aëris quantitates eidem volumini inclusæ spectantur. Segmenta vero DB ipsius AB sunt residua voluminis AB, detractis scilicet ex hoc volumine aëris quantitatibus AD, AD, &c. In punctis D ad AB excitatæ sint perpendiculares DC exponentes vires elasticas aëris, densitates AD homologas habentis; quibus positis, & quia (secundùm hypothesin) elasticitas aëris sub densitate AD est, ut ratio AD ad DB; fiat, assumta quadam data H, ratio $DC : H = AD : DB$, eritque componendo $DC + H : H = AB : DB$, atque adeò producta recta EB datæ AB normali in G, ut GB fiat æqualis assumtæ datæ lineæ H, ductaque per punctum G linea GF alteri AB æquedistanti, erit $CF : DF = AB : DB$; vel ducta per C parallela CE ipsi AB, fiet $EG : BG = AB : CE$, unde curva AC cujus ordinatæ DC exponunt vires elasticas aëris, abscissæ verò AD densitates respectivas, est hyperbola inter asymptotas GF & GE. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

346. Si ipsæ AD fuerint exiguæ magnitudinis, respectu totius AB, trilineum, vel trilinea, ADC spectari possunt tanquam rectilinea absque errore sensibili, ac hoc casu elasticitates DC ejusmodi densitatibus AD quam proxime proportionales existerent; sin verò densitates majores sint, quam ut AD præ tota AB evanescat, elasticitates aëris in longe majori crescent proportione quam densitates.

Hy-

Hypothesin præsentem excogitavit Celeb. Jac. Bernoullius ejusque rationem physicam dare conatus est in tractatu suo de *Gravitate Aetheris* pag. 97. seqq. quas Lector ibi legere atque examinare poterit. Ex hac hypothesi etiam Celeb. ejus Frater Johannes hanc nostram Propositionem XIII. proposuit in eleganti sua Dissertatione *De Motu Musculorum* jam supra laudata.

Scholion.

347. Leibnitiana hypothesis, qua Illustris Vir statuit aërem ut plurimùm mixtum esse ex materia *comprimibili* & *incomprimibili* fortasse non incongrue ad præsentem propositionem exigi potest. In ista hypothesi aëris puri seu materia tantum comprimibili constantis elasticitates essent densitatibus proportionales, in aëre verò mixto ex comprimibili & incomprimibili vires elasticæ non sequuntur rationem densitatum, sed in majori harum ratione existunt inter se, ita ut pro varia proportione mixturæ ex comprimibili materia & incomprimibili elasticitatum cum densitatibus collatarum lex variare debeat, atque adeò rationi consentaneum sit, vires elasticas inter se esse in proportione rationum, quas quantitates materiæ comprimibilis sub aliquo volumine côntentæ habent ad residua hujus voluminis materiæ incomprimibilis plena, ut habet hypothesis hujus Propositionis XXIII. Cæterum Boylius, Mariottus, Bernoullii, Amontonius, Joh. Polenus & alii accuratis experimentis compererunt densitates aëris viribus comprimentibus, seu elasticitatibus ejus quam proxime proportionales existere. Modus unus inter alios quo experimentum sumserunt, est qui sequitur.

348. Sit tubus ABC instar siphonis reflexus apertus in A & hermetice sigillatus in C, per orificium A argentum vivum infunditur in breviore crure pertingens usque in E, & in longiore AB usque in H, & ubi omnia in statu manente fuerint, basis D ab incumbente Mercurio HD, aucto pressione totius atmosphæræ, seu 28. digitorum, eandem pressuram subibit, quam basis E ab elasticitate aëris spatio CE inclusi; si porrò Mercurius infundatur per orificium A ut tandem subsistat in I, & in altero ramo CB pertingat usque ad G, ita ut aër CE in spatium angustius CG redactus sit, basis F pressuram sustinebit columnæ IF auctæ atmosphæræ gravitatione 28. digitorum, alteraque G ab aëre elastico CG parem pressionem subibit. Idcirco si IF + 28. digit. Mercurii ad HD + 28. digit. fuerit, ut Fig. 84.

CE ad CG, erunt vires comprimentes seu elasticitates aëris ejusdem densitatibus directe proportionales, ut à Mariotto, Amontonio & Poleno pluribus experimentis comprobatum est. Vid. Mariotti *Tentamen de Natura Aëris*, tum etiam Tractatus de Motu Aquarum, in quibus ejusmodi experimenta à se capta distincte exponit, perinde ac post ipsum fecit Amontonius in Commentariis Acad. Scient. Paris. Sed quia communiter spatia CE, CG, &c. perexigua sunt in eorundem mensuris & proportionibus explorandis, facile est errorem committere; idcirco Mariottus modo isti proportiones investigandi inter vires elasticas, seu vires comprimentes, & densitates aëris, merito alium adjecit ex observationibus barometri petitum, quem Jac. Bernoullius deinceps magis excoluit in suo Tractatu de Gravitate Ætheris. Hic modus est indirectus, quia in eo assumitur id, quod est probandum instar principii, & conclusio confertur cum phænomenis, cum quibus si conspiraverit retrogrado ordine concluditur principium assumtum esse verum. Nam fistulæ barometri in hoc altero experimentali modo infunditur Mercurius ad certum signum usque, reliquo tubi aëri naturalis consistentiæ relicto, non verò, ut in communi barometrorum constructione fieri solet, totus tubus hydrargyro impletur; dehinc inverso tubo, obstructo ejus orificio, & demisso infra superficiem Mercurii in vasculo quodam stagnantis, aperitur obstructum orificium, ut Mercurius in fistula vasculo perpendiculariter insistenti descendere queat, qui non totus quidem ex tubo effluet, sed tamen humilius se in fistula demittet, propter aërem fistulæ introductum, quam in barometro ordinario; ex quo, quantum fieri potest, omnis aër diligenter excludi solet. Jam si mercurius hac operatione posita, ad illud ipsum signum delabitur, & in eo subsistit, in quo ipsum subsistere debere calculus indicavit, qui in hypothesi fundatur, quod densitates sint viribus comprimentibus proportionales, ecquis de bonitate hypotheseos ambiget? Quod vero Mercurius ad ea præcise signa perveniat, quæ ipse calculus in hac memorata hypothesi fundatus determinavit, id constitit Mariotto & Jac. Bernoullio ex observationibus accuratis. Quousque vero Mercurius in præmemoratis circumstantiis se demittere debeat, manifestabit sequens Problema.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA.

Fig. 85. 349. *Datis atmosphæræ pressione, & longitudine alicujus fistulæ* AB *apertæ*

apertæ in B, *clausæ verò in* A, *definire ad quam altitudinem intra fistulam suspensus manere debeat Mercurius, si, post impletionem fistulæ eo usque ut sola pars longitudinis datæ,* V *æqualis, Mercurii vacua, sed aëris naturalis plena retineatur, & postquam apertum orificium* B *digiti pulpa vel alia ratione obstructum, inversoque tubo idem obstructum orificium argento vivo in vasculo* D *stagnanti immersum fuerit, tubo existente in situ perpendiculari, ita ut aër tubo inclusus in summitate fistulæ* AB *æquali* V *primùm se colligere possit, dein remoto digito orificium* B *obstruente, Mercurius libere descendere queat.*

Fiat AG æqualis columnæ argenti vivi æquivalentis atmosphæræ, seu 28. digitorum circiter, eique in G ad angulum rectum AGO aptetur linea indefinite longa GH, & in recta AL per A transeunte, ipsi GH parallela sumatur AL æqualis V, seu columnulæ aëreæ AC tubo AB Mercurii pleno usque in C intromissæ, descriptaque intra asymptotas AGH hyperbola LKN per punctum L, sumtaque in asymptota AG linea AB æqualis fistulæ AB longitudini datæ, ducatur per punctum B linea BK angulum semirectum constituens cum asymptota AG, agaturque ex puncto K hyperbolæ, in quo recta BK ei occurrit, linea IK parallela asymptotæ GH, eritque AI æqualis altitudini columnæ argenti vivi BM, in qua in æquilibrio existet cum externa atmosphæræ pressione, & BI vel IK exponet spatium AM, in quod aër naturalis consistentiæ in fistula AC sese extendet. Fig. 86. Fig. 85.

Demonstr. Quia densitas aëris AM est ad densitatem aëris AC ut AC ad AM, id est, ut AL ad IK, seu propter hyperbolam LKN, ut GI ad GA, & densitates aëris viribus elasticis ejus sub illis densitatis gradibus sunt (secundùm hypothesin) ut hæ densitates, erit vis elastica aëris AM ad vim elasticam aëris AC, ut GI ad AG; atqui aër naturalis consistentiæ AC vim elasticam habet atmosphæræ pressioni per AG expositæ æqualem, ergo vis elastica aëris AM æquipollet columnæ Mercuriali GI, atque adeo pressio composita ex elasticitate aëris AM & gravitatione columnæ BM = AI, est AG composita ex AI & IG; æqualis ergo est interna pressio, resultans ex vi elastica aëris AM & gravitatione Mercurii MB, externæ atmosphæræ AG, ac propterea columna argenti vivi in altitudine MB intra fistulam librata hæret. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

350. Ex hisce nunc facile elicietur valor rectæ BI aut æqualis IK vel AM. Sed in hac determinatione casus distingui debent. Nam fistulæ longitudo AB major esse potest quam AG, vel minor. Si illud, & quia angulus semirectus IBK lineam BI alteri IK æqualem efficit, adeo ut figura IKPB sit quadratum æquale duobus rectangulis IO & GP simul, hoc est $IK^2 = IK.BG + GH.HN = IK.BG + AG.AL$, ergo $IK = \frac{1}{2}BG + \sqrt{(\frac{1}{4}BG^2 + AG.AL)}$. Hinc existente BG nulla coincidentibus punctis B & G, fiet $IK = \sqrt{(AG.AL)}$.

Sin vero iisdem positis fistulæ AB longitudo minor fuerit quam AG, fiat $A\beta$ eidem fistulæ longitudini æqualis, positaque constructione problematis antecedente paragrapho tradita, simili fere argumento invenietur $ik = -\frac{1}{2}\beta G + \sqrt{(\frac{1}{4}\beta G^2 + AG.AL)}$.

COROLLARIUM II.

351. Si jam cum Cl. Jac. Bernoulli, qui etiam in suo Tractatu *De Gravitate Ætheris* pag. 117. seqq. hoc problema tractavit, ponamus AC vel AL, a; BC, b; adeòque $AB = a + b$, $AG = b + c$, unde $AG - AB = \beta G = c - a$, & denique $CM = y$; substitutis hisce valoribus in ultima æqualitate paragraphi proxime antecedentis, invenietur $ik = a + y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab)}$ adeoque $y = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab)}$, quæ est ipsissima æquatio, quam insignis vir etiam reperit. In eandem incidissemus æquationem, si in altera formula corollarii præcedentis loco BG substitutum fuisset $a - c$.

In numeris sit fistula AB, 21. digit. AG nunc 27. digit. AC, 1. dig. invenieturque ik vel AM, 3. digitorum adeòque BM, 18. digitorum.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA.

Fig. 85, 86. 352. *Datis columna* AG *argenti vivi, æquivalente pressioni atmosphæræ, & longitudine fistulæ* AB, *definire quantum spatium* AC *aëris naturalis consistentiæ plenum in summitatem fistulæ debeat introduci, ut, postquam aër ex* AC *se extendit in spatium* AM, *Mercurius in data altitudine* BM *intra fistulam suspensus maneat.*

In

In hoc problemate ex datis AG, AB, AI vel BM quæritur AL vel AC aut V. Idcirco facto iterum angulo semirecto ABK, & AI = datæ, in fistula altitudine Mercurii manentis BM, agatur IK parallela asymptotæ GH rectæ BK occurrens in K, per quod punctum nunc ducenda est hyperbola NKL, rectæ AL ipsi GH parallelæ occurrens in L, erit AL spatium quæsitum. Demonstratio eadem penitus est cum demonstratione propositionis antecedentis, atque adeo hoc loco non repetenda. In numeris habebitur AL applicando rectangulum datum GIK ad lineam AG, quæ atmosphæræ pressionem exponit: nam GI est excessus, quo AG excedit datam AI vel BM, & IK vel BI aut AM est etiam (secundùm hypothesin) data, adeoque & rec-lum GI.IK eique æquale rec-lum AG.AL datum erit; adeo ut diviso rec-lo GI.IK per AG, quotiens, vel in geometrica phrasi quarta proportionalis ad AG, IG & IK futura sit AL denotans quantitatem quæsitam aëris in fistulam AB intromissi, ut Mercurius in data altitudine BM consistat. Quod erat inveniendum.

Scholion.

353. Si jam determinationes hujus & antecedentis propositionis cum phænomenis convenerint, ut satis egregie cum iis conspirare deprehensæ sunt; omnino inferri debet, assumptam hypothesin, quod densitates aëris viribus comprimentibus seu elasticitatibus ejus proportionales sint, naturæ satis consentaneam esse, modo ea non in majore latitudine sumatur, quam experimenta, cum quibus convenire videtur. Ejusmodi verò experimenta cum aëre mediocris densitatis capta sunt; idcirco, si quis præmemoratam hypothesin ad aërem densissimum vellet extendere, insigniter hallucinaretur, quandoquidem juxta superius dicta (§. 346.) in aëre densiore elasticitates majorem habent inter se proportionem quam densitates ipsis convenientes.

Caput VIII.

De Densitatibus aëris in diversis Atmosphæræ locis in omni possibili elasticitatum hypothesi.

In hoc capite non agetur de aliis aëris densitatibus quam quæ aëri à pondere incumbente inducuntur; propterea in hisce sermo non erit de rarefactione & condensatione aëris, quæ à calore & frigore proveniunt.

DEFINITIONES.

I.

Fig. 87, 88. 354. Curva C1C2C circa axem OA2A extructa, cujus ordinatæ AC, 2A2C, &c. exponunt gravitatem variabilem cujusque corporis in locis A, 2A, &c. per quæ ordinatæ transeunt, dicatur *scala gravitatis variabilis*.

II.

355. Curva verò B1B2B circa eundem axem A2A descripta esto *scala densitatum* atmosphæræ, quia ordinatæ ejus AB, 2A2B, &c. exponunt densitates atmosphæræ in locis A, 2A, &c. per quæ ordinatæ ductæ sunt.

III.

356. Et curva A2DD subter CB horizontem circa eundem axem AO descripta, sit *scala elasticitatis* aëris, cujus scilicet abscissæ AO, A2O, A1O repræsentent elasticitates aëris sub densitatibus OD, 2O2D, 1O1D.

IV.

357. Productis ordinatis scalæ elasticitatis aëris DO, 1D1O, 2D2O in E, 1E, 2E, &c. si singula rectangula DOE, 1D1O1E, 2D2O2E inter se & dato plano æqualia fuerint, puncta E, 1E, 2E, &c. erunt in curva E1E2Ee, quam *reciprocam scalæ elasticitatis* deinceps vocabimus.

AXIOMA.

358. Elater aëris æqualis semper est vi comprimenti, atque adeo in quolibet atmosphæræ loco aëris vis elastica æquivalet ponderi aëris incumbentis. Nam vires directe contrariæ, ut vis aërem comprimens & elater aëris, æquales sunt, quia omnia in statu manenti posita esse intelliguntur.

PRO-

PROPOSITIO XXVI. Theorema.

359. *Ordinatæ quæcunque æquales* ab *&* od *in ſcalis denſitatum & elaſticitatum aëris ultra communem ſcalarum axem* AT *productæ, in ſcala gravitatis variabilis & curva ſcalæ elaſticitatis aëris reciproca perpetuò areas æquales* ACca *&* OEeo *abſcindent.* Fig. 87.

Ordinatæ $\alpha\beta$ & $\omega\delta$ ſuis reſpectivis *ab* & *od* indefinite vicinæ protrahantur in κ & *f*. Jam gravitas aëris *a*T loco *a* incumbentis, aërique in hoc loco denſitatem *ab* vel *od* inducens (§. 358.) æquatur elaſticitati aëris expoſitæ per abſciſſam A*o*, & pondus aëris loco α incumbentis æquatur elaſticitati aëris in α, quæ repræſentatur abſciſſa Aω; adeoque differentia ponderum αT & *a*T, id eſt, pondus columnulæ aëreæ αa æquabitur differentiæ elaſticitatum Aω & A*o* hoc eſt ωo. Atqui (§. 32.) pondus columnulæ αa exponitur ſolido $ab.ac.a\alpha$; ergo hoc ſolidum æquatur alii ſolido ex ωo in datum planum EO.OD, vel (§. 357.) ipſi æquale planum $eo.od$, id eſt, $ab.ac.a\alpha = eo.od.\omega o$; ſeu deletis (ſecundùm hypotheſin) æqualibus *ab* & *od*, rec-lum $ac.a\alpha =$ rec-lo $oe.\omega o$, & cum deſcendendo verſus CB & ED hoc ubique eveniat, ut ſingula elementa arearum AC*ca* & OE*eo* æqualia ſint, æquabuntur etiam univerſa, id eſt omnia $ac.a\alpha$ ſeu area AC*ca*, quam illa exhauriunt, erunt æqualia omnibus $oe.\omega o$, ſeu areæ OE*eo*. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

360. Si nunc ſcala elaſticitatum aëris A1D2D ponatur eſſe parabola indefiniti gradus, cujus quælibet ordinata 1O1D ſit ut A1O^m, ſeu ut dignitas abſciſſæ A1O ab exponente *m* denominata, erit propter rec-lum D1O1E, æquale dato rectangulo DOE, atque adeo propter 1E1O alteri 1D1O reciproce proportionalem, 1E1O reciproce ut A1O^m. atque adeo curva E1E2E hyperbola indefiniti gradus m. Sit inſuper curva C1C2C alia hyperbola indefiniti gradus *n*, adeo ut quælibet ejus ordinata 1C1A ſit reciproce ut abſciſſæ dignitas *n*, id eſt, reciproce ut O1A^n. Jam ſi æquales ordinatæ 1A1B vel 1O1D exponunt denſitatem aëris in 1A, (§. 359.) quadrilinea A1A1CC & O1O1EE æqualia erunt, atqui juxta methodum ſupra (§. 92.) expoſitam invenitur Quadrilineum A1A1CC $=$ (OA. AC $-$ O1A.1A1C) : n $-$ 1, & quadrilineum hyperbolicum OE1E1O $=$ (A1O.

$= (A1O.\, 1O1E - AO.\, OE) : m - 1 = (AO.\, OE - A1O.\, 1O1E) : 1 - m$. Ergo $(OA.\, AC - O1A.\, 1A1C) : n - 1 = (AO.\, OE - A1O.\, 1O1E) : 1 - m$. Jam, quia ipſæ AC & OE nullius ſunt determinatæ magnitudinis, fiat $AC : EO = n - 1 : 1 - m$, eritque rec-lum OA. AC ad rec-lum AO. OE in hac eadem ratione ac conſequenter etiam rec-lum O1A. 1A1C ad rec-lum A1O. 1O1E in eadem erit ratione $n - 1$ ad $1 - m$ ſeu AC ad OE. At vero in hyperbola C1C2C eſt rec-lum $OA.\, AC : O1A.\, 1A1C = O1A^{n-1} : OA^{n-1}$; ergo ex æquo & per compoſitionem rationum erit $OA.\, AC : A1O.\, 1O1E = AC.\, O1A^{n-1} : OE.\, OA^{n-1}$, item in hyperbola E1E2E, eſt $A1O.\, 1O1E : AO.\, OE = AO^{m-1} : A1O^{m-1}$ (hoc eſt propter parabolam A2D1D) $= OD^{m-1:m} : 1O1D^{m-1:m}$, ergo denuo ex æquo habetur $OA.\, AC : AO.\, OE = AC.\, O1A^{n-1}.\, OD^{m-1:m} : OE.\, OA^{n-1}.\, 1O1D^{m-1:m}$. Ex hac vero deducitur $O1A^{n-1}.\, OD^{m-1:m} = OA^{n-1}.\, 1O1D^{m-1:m}$, & rejectis quantitatibus datis, ſeu conſtantibus, quæ proportiones non alterant, ſcilicet $OD^{m-1:m}$, & OA^{n-1}, erit $O1A^{n-1}$ ut $1O1D^{m-1:m}$, vel dividendo exponentes per $m - 1 : m$, reſultabit ſequens 1O1D ut $O1A^{mn-m:m-1}$. Hinc

1°. Si cubus vis comprimentis proportionetur quadrato-quadrato denſitatis, & gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ à centro gravium, erunt $m = \frac{3}{4}$, & $n = 2$, adeoque $mn - m : m - 1 = -3$, ergo 1O1D erit hoc caſu, ut $O1A^{-3}$, hoc eſt, denſitas erit reciproce ut cubus diſtantiæ.

2°. Si cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & gravitas reciproce ut quadratum diſtantiæ, fient $m = \frac{3}{5}$ & $n = 2$, ergo $mn - m : m - 1 = -\frac{3}{2}$, id eſt, denſitas 1O1D erit in reciproca ſeſquiplicata ratione diſtantiæ O1A.

3°. Si vis comprimens ſit ut quadratum denſitatis, & gravitas in reciproca duplicata ratione diſtantiæ, fient $m = \frac{1}{2}$ & $n = 2$, ergo $mn - m : m - 1 = -1$, quod indicat denſitatem hoc caſu eſſe in reciproca ratione diſtantiæ.

Ex hiſce ergo liquet veritas aſſertionum nonnullarum ſine ulla demonſtratione prolatarum ab Illuſtr. Newtono in Scholio poſt Prop. 22. Lib. II. *Pr. Phil. Nat. Math.* Et, quanquam hoc corollarium tantum caſus ſit particularis propoſitionis noſtræ generaliſſimæ, idem tamen infinities infinitos caſus diverſos in ſe continet.

Co-

Corollarium II.

361. Nam si scala elasticitatum aëris A2D1D fuerit linea recta, hoc est, si elasticitas aëris, aut vis comprimens, est ut densitas, curva E1E2E erit hyperbola conica intra asymptotas CA & AO descripta; est enim 1E1O : EO = OD : 1O1D (propter rectam A2D1D) = AO : A1O. Hinc, si hyperbolæ quadrilineæ EO1O1E, 1O2O2E1E, &c. sint æquales inter se, & hisce æqualibus quadrilineis æquentur totidem in scala gravitatis variabilis AC1C1A, 1A1C2C2A, &c. homolgæ ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. in scala densitatum B1B2B erunt continue proportionales. Nam propter æqualitatem trapeziorum hyperbolicorum O1E, 1O2E, &c. abscissæ AO, A1O, A2O, &c. vel abscissis hisce respectivæ ordinatæ in scala elasticitatis OD, 1O1D, 2O2D, &c. hoc est AB, 1A1B, 2A2B, &c. ipsis eodem ordine sumtis æquales erunt in continua ratione. Idcirco, si vires comprimentes, vel æquivalentes vires elasticæ aëris densitatibus ejus proportionales, in scala vero gravitatis quadrilinea AC1C1A, 1A1C2C2A, &c. æqualia fuerint, densitates aëris in locis A, 1A, 2A, &c. erunt semper in continua ratione.

Corollarium III.

362. Propterea si gravitas in loco quolibet 1A, seu ordinata 1A1C fuerit reciproce ut $O1A^n$, existente curva C1C2C hyperbola indefiniti gradus exponentis n, & magnitudines OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. sumantur in progressione arithmetica ascendente, ordinatæ scalæ densitatum AB, 1A1B, 2A2B, &c. erunt continue proportionales. Nam quia OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. proportionales sunt hisce sequentibus eodem ordine sumtis $O2A^{n-1}$, $O1A^{n-1}$; OA^{n-1}, &c. hisce jam proportionantur rectangula OA. AC, O1A. 1A1C, O2A. 2A2C, &c. ergo hæc rectangula sunt etiam in progressione arithmetica, atque adeo (O1A. 1A1C − OA. AC) : n − 1 id est, juxta ea quæ §. 360. dicta sunt, quadrilineum AC1C1A æquatur (O2A. 2A2C − O1A. 1A1C) : n − 1, seu quadrilineo 1A1C2C2A, adeoque (§. 361.) ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. erunt continue proportionales.

COROLLARIUM IV.

363. Si nunc n ſit 1, adeoque curva C1C2C hyperbola conica centrum habens in O, quadrilinea æqualia A1C, 1A2C, &c. habebunt abſciſſas OA, O1A, O2A, &c. continue proportionales, & vice verſa, ſi hæ abſciſſæ fuerint in progreſſione geometrica, quadrilinea prædicta erunt æqualia, ac conſequenter denſitates AB, 1A1B, 2A2B, &c. erunt continue proportionales, plane ut habet Prop. 21. Lib. II. *Princ. Ph. Nat. Math.* Cel. Newtoni, quam ſeorſim demonſtravit.

COROLLARIUM V.

364. Si n ſit 2, atque adeo curva C1C2C hyperbola quadratica; id eſt, ſi gravitates corporum ſint in reciproca duplicata ratione diſtantiarum à centro, & OA^{-1}, $O1A^{-1}$, $O2A^{-1}$, &c. in progreſſione arithmetica, atque adeò ſeriei hujus reciproca OA, O1A, O2A, in progreſſione harmonica, (§. 361. 362.) ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. erunt in progreſſione Geometrica. Hoc ipſum demonſtratum dedit alia ratione Cel. Newtonus Prop. 22. Lib. II.

COROLLARIUM VI.

365. Si $n = -1$, hoc eſt, ſi gravitas eſt ut diſtantia corporis à centro O, curva C1C2C mutabitur in lineam rectam transeuntem per centrum O, ſeriesque, quæ juxta §. 362. debet eſſe in arithmetica progreſſione OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. nunc fiet OA^2, $O1A^2$, $O2A^2$, &c. adeoque, ſi quadrata diſtantiarum OA, O1A, O2A, &c. fuerint in progreſſione arithmetica, trapezia rectilinea, A1C, 1A2C, &c. erunt æqualia, atque adeo (§. 361.) ordinatæ ſcalæ denſitatum AB, 1A1B, 2A2B, erunt continue proportionales. Ut aſſeruit, ſed absque ulla demonſtratione, laudatiſſimus Newtonus in Scholio poſt Prop. XXII. Lib. II. *Princ. Phil. Nat. Math.*

COROLLARIUM VII.

366. Sin verò n fuerit o, id eſt, ſi gravitas corporum uniformis ſeu conſtans fuerit, qualis communiter conſiderari ſolet, tunc ſcala gra-

gravitatis C1C2C erit linea recta axi AT parallela, ut in fig. 88. & series OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. quæ constituere debet progressionem arithmeticam ad id, ut ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. sint in continua proportione, nunc erit simpliciter OA, O1A, O2A, &c. in progressione arithmetica, atque adeò ipsæ distantiæ A1A, 1A2A ordinatarum scalæ densitatum atmosphæræ erunt æquales, scalaque ipsa B1B2B proinde erit logarithmica. Huic corollario simile quid jam olim primus, quod sciam, observavit acutissimus Edmundus Hallejus.

Corollarium VIII.

367. Iisdem, quæ in corollario præcedenti, positis, si scala gravitatis uniformis tC producatur usque ad occursum E hyperbolæ E1E2E, & per hoc punctum E agatur EOD scalæ elasticitatis aëris A2D1D occurrens in D, erit subtangens *ab* log-micæ B1B2B æqualis abscissæ AO scalæ elasticitatis, ordinatæ OD correspondenti. Nam (§. 359.) est $ac.a\alpha = eo.o\omega$ atque adeò $o\omega : a\alpha = ac : eo = EO : eo = od : OD = Ao : AO$. atqui $g\delta$ vel $\gamma\beta$ est ad dg vel $o\omega = od$ vel $ab : Ao$, ergo ex æquo $\gamma\beta : a\alpha = ab : AO$. & propter triangula similia $\beta\gamma b$ & bah, est $\gamma\beta : a\alpha$ vel $b\gamma = ab : ah$, ergo etiam $ab : AO = ab : ah$, atque adeò AO æquatur subtangenti *ah* logarithmicæ B1B2B.

Corollarium IX.

368. Præterea erit, iisdem positis, quodlibet quadrilineum hyperbolicum OE1E1O ad datum rec-lum AOE, ut A1A distantia ordinatarum AB & 1A1B æqualium ordinatis OD, 1O1D scalæ elasticitatis applicatis hyperbolæ OE, 1O1E, in directum positis, ad subtangentem *ah* log-micæ B1B2B. Nam, quia (secundùm hypothesin) OE1E1O = rec-lo AC1C1A, erit quadrilineum OE1E1O : AO. OE = A1A. AC : AO. AC = A1A : AO = A1A : *ah*.

Corollarium X.

369. Quia altitudines Mercurii in barometro sunt, ut pressiones atmosphæræ in diversis ab horizonte distantiis, & pressiones atmosphæræ & elasticitates aëris pressiones illas sustinentis, si elasticitates densitatibus aëris proportionales fuerint, ut quidem in corol-

 lariis

lariis 2, 3, 4, 5, & 6. hujus Propositionis supposuimus, altitudines Mercurii in barometro in locis A, 1A, 2A, &c. positi, erunt ut ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. in scalâ densitatum B1B2B, si scilicet gravitas corporum uniformis, seu in omni à centro terræ O distantia eadem fuerit, ut tuto id assumere licet. Propterea datis quantitatibus Mercurii in barometro in locis A, 1A, & 2A existente, & altitudine A1A; invenietur logarithmorum ope altera distantia seu altitudo A2A. Nam, quia A1A est ad A2A ut log-us rationis AB ad 1A1B, ad log-um rationis AB ad 2A2B; si log-us rationis AB: 2A2B ducatur in datam altitudinem A1A, & productum dividatur per log-um rationis AB: 1A1B; quotiens manifestabit altitudinem quæsitam A2A. Sin verò ex datis altitudinibus A1A, A2A & ratione AB: 1A1B quæratur ratio AB: 2A2B, seu ratio Mercurii in barometro collocato in A ad quantitatem Mercurii barometro existente in 2A; log-us rationis AB: 1A1B tantum multiplicandus est per A2A & productum dividendum per A1A, & manifestabit quotiens log-um rationis quæsitæ AB: 2A2B; invento verò log-mo ipsa ratio ex tabulis usualibus logarithmorum illicò innotescet.

SCHOLION.

370. Ut regula noni corollarii exemplo aliquo illustretur, ponatur altitudinem Mercurii in A seu AB esse 28. digitorum, & in altitudine loci 1A supra A, id est A1A, 63. pedum Mercurium una linea deficere, ita ut 1A1B tantum sit 335. linearum, cum AB, seu 28. pollices, contineant 336. lineas. In altitudine vero A2A seu in loco 2A quantitas argenti vivi $16\frac{1}{3}$ lineis deficiat à quantitate in A seu AB, adeo ut 2A2B tantum sit $319\frac{2}{3}$ lin. Quæritur in hisce datis altitudo A2A. Juxta canonem (§. 369.) log-us rationis AB: 2A2B seu nunc log-us $336 : 319\frac{2}{3}$ multiplicari debet per A1A seu 63. & productum dividi per log-um AB: 1A1B seu log. 336 : 335, & quotiens indicabit quæsitum; atqui productum ex log. 336 — log. $319\frac{2}{3}$ in 63. divisum per log. 336 — log. 335, præbet $1053\frac{1}{4}$, ergo hic numerus exprimit, quot pedum sit altitudo quæsita. Hoc exemplum sumsimus ex Mariotti *Tentamine De Natura aëris*, qui pag. 194. & 195. refert, Celeberrimum Cassinum observasse olim in summitate alicujus Montis in Provincia Galliæ, cujus altitudinem diligenti dimensione 1070. pedum invenerat, Mercurium barometri $16\frac{1}{3}$ lineis depressiorem fuisse, quam ad radicem montis ubi ad 28. digit.

digit. ſubſiſtebat, idcirco altitudo montis calculo noſtro elicita 17. circiter pedibus deficit ab obſervata 1070. pedum, ſed hæc differentia forte inde venit, quod cum Mariotto poſuimus in altitudine 63. pedum argentum vivum una linea deficere à Mercurio barometri in horizonte ad 28. digitos ſublato. Verùm ſi altitudinem in qua Mercurius una linea in barometro decreſcit, vel uno tantum pede major fiat, ſcilicet 64. pedum, calculus, juxta Canonem ſuperiorem ſubductus, præbebit altitudinem Montis $1069\frac{44}{95}$, adeò ut unica 95^{ma} pedis ab obſervata altitudine deficiat.

371. Cl. Mariottus, etſi hypotheſin quod denſitates aëris viribus comprimentibus proportionales ſint, ſuam fecit, atque logarithmico calculo altitudines locorum ex argenti vivi differentiis eliciendas cenſuit, in calculo ſuo, eidem exemplo paragraphi præcedentis aptato, logarithmis tamen non eſt uſus, ſed faciliori quidem, minus exacto verò computo altitudinem montis elicuit 1080. pedum, idque ſequenti ratione. Quoniam atmoſphæræ preſſio in loco infimo æquivalet 28. digitis Mercurii ſeu 336. lineis, totam atmoſphæram in 336. partes æquiponderantes dirimit, quarum unaquæque unius lineæ Mercurii gravitationi æquipollet; ſed harum aëris partium altitudines inæquales erunt, adeo quidem, ut ea, quæ diviſioni 168. ſemiſſi ipſius 336. reſpondet, duplo altior ſeu major futura ſit quam infima altitudo 63. ped. primæ Mercurii lineæ verſus horizontem conveniens, atque adeo ſit 126. pedum; altitudinum ſeu partium atmoſphæræ differentias, ſingulis Mercurii lineis homologas, ſurſum creſcere fingit in arithmetica progreſſione, quam à geometrica, juxta quam incrementa partium fieri recte judicat, perparum abludere arbitratur; idcirco dividendo 63. per 168, ſecundæ atmoſphæræ diviſionis incrementum ſupra primam horizonti proximam reperit $\frac{63}{168}$, & ducendo 63. in $16\frac{1}{3}$, invenit 1029. ped. pro altitudine totali, ſeu montis altitudine, ſi modò ſingulæ atmoſphæræ diviſiones $16\frac{1}{3}$ lineis Mercurii reſpondentes æquales extitiſſent, verum quia creſcunt in proportione arithmetica, ideò omnia incrementa repertæ altitudini 1029. pedum adjicit; hunc in finem numerum 136. qui eſt aggregatum omnium numerorum naturalis progreſſionis 1, 2, 3. uſque ad 16. incluſive, ducit in $\frac{63}{168}$, & productum 51. ipſi exhibet ſummam omnium incrementorum, atque adeo hic numerus 51. alteri 1029. additus dedit ſummam 1080. exprimentem altitudinem montis quæſitam.

372. Cl. Maraldus atmoſphæram itidem in 336. partes æquiponderan-

derantes distinguit perinde ac Mariottus, & harum partium altitudines in progressione arithmetica crescere fingit, agnoscens tamen extensiones aëris non esse præcise in reciproca ratione ponderum incumbentium, ut Mariotti hypothesis requirit, deinde etiam à Mariotti numeris discessit, statuens primam eamque horizonti contiguam atmosphæræ partem gravitati unius lineæ Mercurii convenientem esse 61. pedum, & post hanc sequentes crescere juxta numeros 1, 2, 3, 4, &c. ita ut partes secunda, tertia, quarta, &c. futuræ sint 62, 63, 64, &c. pedum. Hanc progressionem omnibus observationibus barometro factis super diversis Galliæ montibus, satis prope quadrare se deprehendisse indicat laudatus vir, cum protrahendæ inde ab Observatorio Regio per Meridionalem Galliæ partem Meridianæ Cel. Cassino opus dirigenti operam suam juxta alios commodaret; atque adeo intra limites semissis Milliaris Gallici, quibus observationes suas terminari dicit, hujus progressionis beneficio locorum altitudines satis accurate haberi posse errore vix unam alteramque hexapodam excedente; ac juxta eandem progressionem altitudo atmosphæræ foret 12796. hexapodarum, seu, quod idem fere est, 6. Milliarium Gallicorum cum semisse. Hæc Cel. Maraldi progressio calculo aptissima est, sed cum observatione Cassiniana, ex Mariotto supra §. 370. relata, non satis convenire videtur, nam altitudo ex omnibus 16½ divisionibus seu partibus composita invenietur esse 1122. pedum; & tamen altitudo montis inventa erat 1070, excessus est 52. pedum, seu plus quam 8. hexapodarum.

Ut autem certò constet, quantum hypothesis partium atmosphæræ uni Mercurii lineæ æquiponderantium, & juxta arithmeticam progressionem sursum crescentium, conspiret aut discrepet à Mariotti & Boylii Hypothesi, quâ densitates atmosphæræ in diversis locis sunt, ut vires comprimentes seu elasticitates aëris; quærenda prius est curva, cujus axis in partes arithmeticam progressionem constituentes divisus sit, ordinatæ verò per singulas axis divisiones ductæ efficiant progressionem itidem arithmeticam, sed descendentem; dehinc inventa hac curva, definienda est scala elasticitatis aëris, & ex hac elicienda scala densitatum atmosphæræ. Huc faciunt sequentia Problemata.

PROPOSITIO XXVII. Problema.

Fig. 89. 373. *Si axis, seu linea* AH, *divisus sit in partes* AC, C1C, 1C2C, &c. *arithme-*

arithmeticam progressionem ascendentem constituentes, & per singularum terminos transeant ordinatæ AB, CD, 1C1D, 2C2D, *&c. juxta progressionem arithmeticam decrescentes, definire curvam* BD1D2D *per singularum ordinatarum terminos* B, D, 1D, 2D, *transeuntem.*

Per puncta D agantur parallelæ ipsi AH, & in prima DE producta sumatur EF = DE, ac per F ducta FP parallela AB, in linea 1E1O à linea FP deorsum ponatur 1O1F æqualis excessui, quo secunda divisio C1C primam AC, vel tertia secundam, seu quarta tertiam, atque ita deinceps, excedunt, ducaturque per puncta F & 1F, recta FG; eruntque AC = DE = EF, item C1C = 1E1F, & 1C2C = 2E2F, atque sic porrò. Adeoque A2C = 2E2F + 1E1F + EF. Verùm 2E2F = rec-lo 2E2F. 2E1E : 2E1E, & 1E1F = rec-lo 1E1F. 1EE : 1EE; ergo quia 2E1E = 1EE = EB ex hypothesi quandoquidem AB, CD, 1C1D, 2C2D (secundùm hypothesin) sunt in progressione arithmetica, erit 2E2F + 1E1F = (rec-lum K2E + rec-lo I1E) : BE; hæc vero rectangula simul sumpta quotcunque eorum fuerint, æquantur trapezio EF2F2E simul cum triangulis IF1F, K1F2F, quæ sunt extra trapezium EF2F2E, & dicta triangula simul æquantur rec-lo sub dimidia 2O2F & 2E1E vel BE: ergo 2E2F + 1E1F = (EF2F2E + $\frac{1}{2}$. 2O2F. BE) : BE = EF2F2E : BE, + $\frac{1}{2}$. 2O2F; ac proinde A2C = EF2F2E : BE, + $\frac{1}{2}$. 2O2F + EF = 2E2F + 1E1F + EF; eodem argumento probatur esse indefinite *Ac* vel *ed* = EF*fe* : BE, + $\frac{1}{2}$.*pf* + EF vel *ep*, vel bisecta *pf* in *q* ductaque per *q* rectâ F*q*Q, erit *ed* = EF*fe* : BE, + *pq* + *ep* = EF*fe* : BE, + *eq*; adeoque *ed*. BE = EF*fe* + *eq*. BE; atqui trapezium EF*fe* = rec-lo *eq*. *e*E; ergo *ed*. BE = *eq*. E*e* + *eq*. BE = B*e*. *eq*; hinc curvæ quæsitæ hæc est proprietas, ut *de* vel *c*A ubique sit ad homologam *eq* ut B*e* ad BE, quæ proprietas parabolæ communi competit.

II. Nam si quædam T fiat ad EB, sicut EM (quæ resultat à concursu M rectæ QF productæ cum recta AB itidem protensa) ad EF; hinc erit etiam *eq* : *e*M (= EF : EM) = BE : T, curvæ vero modo recensitæ proprietas exhibet *de* : *eq* = B*e* : BE, ergo ex æquo *de* : *e*M = B*e* : T, & *de*. T = M*e*. B*e* = Ne^2 − NB^2, bisecta scilicet BM in N; hinc *de*. T + NB^2 = Ne^2 = rd^2; & si V sit tertia proportionalis ad T & BN erit T. V = BN^2, atque adeò *de*. T + T. V (= *de*. T + NB^2) = rd^2, idcirco, si in *r*N perpendiculari ad AB producta versus S, sumatur NR = V, erit T. R*r* = rd^2, atque adeò curva quæsita RBD1D est parabola, cujus parameter est T, & vertex in R; in quâ T est quarta proportionalis ad datas EF, EM

&

& EB, & V tertia proportionalis ad T & datam BN. Propterea parabola eſt ſpecie & magnitudine data, ejusque portio BD2DH quæſito ſatisfacit. Quod erat inveniendum.

COROLLARIUM I.

374. Quoniam partes AC, C1C, 1C2C, &c. ſunt arithmetice proportionales, adeò ut earum differentiæ æquales ſint, ordinatæque AB, CD, 1C1D, 2C2D, &c. etiam juxta proportionem arithmeticam, id eſt, per æqualia decrementa imminuuntur, partes illæ AC, C1C, 1C2C, &c. repræſentabunt atmoſphæræ diviſiones, quarum unaquæque æquivalet ponderi columnulæ liquoris homogenei altitudinis BE, vel E1E, &c. in methodo Mariotti & Cl. Maraldi, ipſæque BE, E1E, &c. denotabunt æqualia decrementa liquoris in barometro adhibiti, ac denique ordinatæ AB, CD, 1C1D, 2C2D, &c. exponent quantitates Mercurii ſeu liquoris in barometro in locis, A, C, 1C, 2C, &c. verſante.

COROLLARIUM II.

375. Quoniam in hypotheſi Mariotti denſitates aëris ponderibus incumbentibus proportionales ſunt, & quantitates argenti vivi in barometro æquivalent ponderibus aëri compreſſo in diverſis locis incumbentibus, & quoniam (§. 374.) ordinatæ *cd* exponunt quantitates argenti vivi in locis *c*, ſequitur (§. 355.) portionem parabolæ B2DH eſſe ſcalam denſitatum atmoſphæræ in ſuppoſitionibus Mariotti; & tamen ſupra (§. 366.) eſt oſtenſum, hanc ſcalam denſitatum in hypotheſi Mariottiana logarithmicam eſſe; ex quo liquet progreſſionem arithmeticam, quam Vir alioqui perſpicaciſſimus loco progreſſionis geometricæ facilioris calculi ergo aſſumſit, atque à geometrica parum abludere exiſtimavit, curvam ſuppeditare toto cœlo diverſam à log-mica, quam progreſſio geometrica in hypotheſi ejus, ipſo etiam conſentiente, adhibenda produxiſſet. Quoniam igitur, ſtantibus progreſſionibus à Celeb. viris Mariotto & Maraldo adhibitis, denſitates aëris viribus comprimentibus aut elaſticitatibus ejus nequeunt proportionales eſſe, disquirendum ſupereſt, juxta quam denſitatum progreſſionem elaſticitates creſcant, vel, quod idem eſt, quæri debet ſcala elaſticitatum atmoſphæræ, quæ ubi data fuerit, ſcala denſitatum ultrò determinabitur.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII. Problema.

376. *Si in arabola* BDH *propositione præcedenti reperta* AC, A1C, A2C, &c. *designent altitudines locorum, & ordinatæ* CD, 1C1D, 2C2D *repræsentent quantitatem Mercurii barometro versante in locis* C, 1C, 2C, &c. *invenire scalas elasticitatis aëris & densitatum.* Fig. 89.

In figura 90. sint linea recta $am = AM$, $an = AN$, $ab = AB$, & $ad = Ae$, eritque $db = eB$, & ipsæ bn, mn respectivis BN & MN æquabuntur. Per punctum b agatur rectæ ab normalis ib, quæ sit ad mb ut data recta A, quæ gravitatem uniformem exponit ad T parametrum parabolæ B2DH, linea recta nih jungens puncta n & i erit reciproca scalæ elasticitatis, idcirco producendo ib in β & per hoc punctum ducendo hyperbolam $l\delta\beta$ intra asymptotas an & nk, hyperbola ista erit scala elasticitatis aëris in suppositionibus Mariotti atque Maraldi, & applicando trapezium $bigd$ ad datam rectam A, resultabit altitudo ed, in cujus termino d densitas aëris atmosphæræ est sicut $\alpha\delta$.

Demonstr. I. Ducatur linea mix per puncta m & i, & hæc singulas hu, gz, &c. ipsi ib parallelas bifariam dividet in x, y, &c. si scilicet recta iu alteri am æquidistans ducta fuerit; hinc quælibet yd erit media arithmetica inter gd & zd, vel inter gd & ib, atque adeò rec-lum bdy æquabitur ubique trapezio homologo $bdgi$: quibus positis triangula similia mdy & mbi suppeditant analogiam $md : dy$ ($= mb : bi$, constr.) $=$ T : A, atque adeo $md.bd : dy.bd = de.$ T : $de.$ A. atqui cum md & bd in fig. 90. æquales sint homologis Me & Be in fig. 89. & (§. 373, n. 11.) rec-lum Me. Be = T.ed, erit etiam $md.bd = de.$ T; ergo æquabitur quoque rec-lum $dy.bd$, id est, ut paulo ante, dictum trapezium $bdgi$, cui rec-lum bdy æquale est, rec-lo A. de ex gravitate uniformi A in altitudinem alicujus loci de, & cum hoc ita sit de reliquis, (§. 359.) linea nih, vel ejus portio ih, erit reciproca scalæ elasticitatis aëris.

II. Propter hyperbolam $l\delta\beta$ habetur $b\beta : d\delta = nd : nb = gd : ib$, atque adeo singula rec-la, $gd\delta$, $ib\beta$, hal, &c. sunt æqualia, ac proinde (§. 357.) curva $l\delta\beta$ est scala elasticitatis, cum lineam ih ejus reciprocam esse ostensum sit.

III. Quia (num. 1. hujus) $ibdg =$ A.de, erit $de = ibdg :$ A $= bd.yd :$ A, eritque adeò altitudo loci d, in quo densitas est $d\delta$, quarta proportionalis ad A, bd seu Be, & yd. eaque semper haberi potest, ac

Dd proin-

proinde ſcala denſitatis atmoſphæræ in hac hypotheſi ſemper per puncta deſcribi geometrice poterit. Quæ omnia erant invenienda.

Corollarium I.

377. Patet iterum multum abeſſe, ut vires comprimentes aëris ejusve elaſticitates denſitatibus proportionales ſint, ſtante progreſſione arithmetica altitudinum AC, C1C, 1C2C æquivalentium æqualibus cylindris Mercurii aliusve liquoris homogenei, quorum altitudines exponuntur per BE, E1E, 1E2E, &c.

Corollarium II.

378. Denſitas aëris ad horizontem erit ad denſitatem ejus in extremitate atmoſphæræ ſicut $b\beta$ ad al, vel ſicut an ad bn, hoc eſt in altera figura (89.) ſicut AN ad BN vel MN.

Corollarium III.

379. Hinc ſi dicantur AC vel AP aut 1E1O, a; exceſſus ipſius 1E1F ſupra EF, hoc eſt 1O1F, e; tum $AB = b$, & $BE = E1E = l$, invenietur $BN = NM = 2al - el : 2e$, & $AN = b, + (2al - el) : 2e$, $= (2be + 2al - el) : 2e$; eritque proinde AN ad BN, hoc eſt, denſitas atmoſphæræ in horizonte ad denſitatem ejusdem in confinio atmoſphæræ totius ejusve termino, ut $2be + 2al - el$ ad $2al - el$. Igitur ſi in hac ratione generali cum Cel. Maraldo loco a, e, b & l ponatur 61, 1, 336 & 1, fiet AN ad BN ut 793 ad 121. Sin verò cum Mariotto ſint $a = 63$ ped., $e = \frac{63}{168}$, $b = 28$ poll. $= 336$ lineis & $l = 1$ lin. erit $2be + 2al - el$ ad $2al - el$, ut 1007 ad 335 ſeu quam proxime in ratione tripla.

Scholion.

380. Liquet igitur, in ſuppoſitionibus D. Maraldi, aërem prope horizontem non ſeptuplo denſiorem eſſe aëre in termino atmoſphæræ, nec Mariotti ſuppoſitiones eundem quadruplo denſiorem facere ad horizontem, quam ſit in ſummitate atmoſphæræ, & tamen omni illic elaſtica virtute deſtitui oportere; quandoquidem nihil ipſi incumbit, quod ejus expanſionem, ſi quam haberet, impedire valeat; quod procul omni dubio paradoxum eſt. Nam ſi experi-

mentis

mentis Academiæ Florentinæ *Del Cimento*, Roberti Boylii, aliorumque constat, aërem vi elaterii 60^{es}, 152^{es} imo & millies rariorem fieri posse, quam in statu naturali, quî fit, ut in suppositionibus Maraldi non septies, in Mariotti verò non quidem quater rarior in summitate atmosphæræ quam in statu naturali, omni vi elastica destituatur? Verum quidem est, Clariss. Maraldum non ultra extensionem semissis Milliaris Gallici progressionis suæ periculum fecisse, nec adeò ulterius eam extendi debere, expresse monuisse.

PROPOSITIO XXIX. Problema.

381. *Si scala elasticitatis aëris* A1DD *fuerit hyperbola communis inter asymptotas* FPQ *angulum rectum continentes, atque singula rectangula* EOD, 1E1O1D *dato rectangulo* PFA *æqualia fuerint, quæritur reciproca linea* E1E *scalæ elasticitatum, & scala densitatum atmosphæræ* B1B *in suppositione gravitatis uniformis seu constantis, cujus scala sit* C1C *axi* A1A *parallela.* Fig. 91.

In recta indefinita AM sumatur AI æqualis datæ AF, ductaque per punctum I recta IT parallela AO, intra lineas MI & IT tanquam asymptotas descripta intelligatur hyperbola E1E, ita ut quodlibet in ea rec-lum ILE æquetur quadrato datæ AI; eritque hæc hyperbola E1E reciproca scalæ elasticitatis A1DD; adeò ut facto rec-lo AC1C æquali quadrilineo OE1E1O, densitas aëris in loco 1A futura sit per §. 359, 1O1D vel 1A1B.

Demonstr. Quia (secundùm hypothesin) EO. OD = FP. FA, erit EO : FA seu LO = FP : OD seu FG, ergo convertendo EO : EL = FP : GP (id est propter hyperbolam A1DD) = GD seu FO : FA, ac dividendo LO : EL = AO vel IL : AF seu AI vel LO : ergo rec-la extremorum & mediorum æquabuntur, id est $LO^2 = AI^2 =$ IL. LE, atque adeò punctum E est in hyperbola E1E inter asymptotas MI & IT; ac propterea reciproca scalæ elasticitatis in præsenti hypothesi est hyperbola communis. Hinc, si rectangulum quoddam A1C cuilibet in hac hyperbola quadrilineo O1O1EE æquale factum, atque linea 1C1A protensa ad alteram axis partem 1A1B æqualis facta fuerit ordinatæ 1O1D, punctum 1B (§. 359.) erit in scala densitatis atmosphæræ B1B. Quæ erant demonstranda.

 Scho-

Scholion.

382. Hoc problema est tantum applicatio theorematis nostri generalis, supra (§. 359.) exhibiti, hypothesi particulari, quam Propositione 23. hujus excussimus; quoniam in superioribus jam vidimus, densitates aëris viribus comprimentibus non semper proportionales existere; sed præsentem hypothesin cum observationibus propius conspirare. Cæterum liquet etiam, quod, quia scalæ densitatum reciproca E1E etiam est hyperbola, perinde ac in hypothesi densitatum viribus comprimentibus proportionalium, hoc solo cum discrimine, quod in hac hypothesi ejus asymptota una sit ipsa AO, in præsenti vero recta IT, modo nominatæ AO æquidistans, linea seu scala densitatum B1B ope log-micæ cujusdam per puncta describi possit. Nam ad asymptotam AM ducta per punctum L logarithmica L1SS, cujus subtangens sit æqualis AI, perinde ac AC, quæ gravitatem uniformem exponit, fiat recta LR angulum semirectum ILR continens cum IL, atque ipsam 1L1D secans in 1R; si C1C constanter æqualis fiat ipsi 1R1S interceptæ inter log-micam L1SS & rectam L1RR, atque per punctum 1C ducta indefinita 1C1B in ea ultra axem abscindatur, ut prius 1A1B æqualis ordinatæ 1O1D in scala densitatum atmosphæræ B1B. Hisce diu nonnihil institimus, quia cognitio densitatum atmosphæræ utilitate sua non caret; nam præterquam quod accuratissimus haberetur modus mensurandarum altitudinum montium aliorumque in superficie terræ altiorum objectorum ope barometrorum, cognita lege, juxta quam densitates atmosphæræ sursum decrescunt, accuratius innotesceret linea in quam radii solares siderumve atmosphæram trajicientes incurvantur, quod utique utilitatem haberet eximiam in astronomicis. Cæterum difficillimum, si non impossibile, est à priori noscere quamnam densitates atmosphæræ cum ponderibus incumbentibus collatæ, legem sequi debeant propter mille anomolias, quæ in atmosphæra contingunt, idcirco res ex observationibus bene multis & diligenter institutis derivari debet modo sequenti.

383. In recta quadam indefinita abscindantur lineæ eandem inter se proportionem habentes, quam altitudines locorum diligentissime observatæ, & per singula divisionum puncta agantur perpendiculares eandem inter se proportionem habentes, quam quantitates Mercurii in barometro in prædictis locis versante, & sic tot habebuntur

tur puncta, quot sunt observatæ locorum altitudines, per quæ puncta proinde duci potest linea quædam regularis eo prorsus modo, quem Celeb. Newtonus Lemm. V. Lib. III. *Pr. Ph. Math.* absque ulla demonstratione exponit; & talis curva apta nata esset ad exprimendam relationem, quæ est inter altitudines locorum & argenti vivi quantitatem barometro successive in his locis versante. Ex hac curva elici potest linea reciproca scalæ elasticitatum, & ex figura hujus scalæ reciproca deduci potest ipsa scala elasticæ virtutis in aëre; dehinc, ope theorematis nostri §. 359. ipsa etiam scala densitatum atmosphæræ per puncta describi potest. Verum multis observationibus opus est, quia, quo plura sunt puncta positione data, eo accuratius definietur ipsa curva, de qua ante dixi; quomodo verò calculus subducendus sit pro hac curva aliàs commodius aliquando dicetur, quando demonstrationem præfati V. Lemmatis Newtoniani demonstratum dabimus cum aliis nonnullis affinibus materiis.

SECTIO II.

De Motibus Aquarum.

IN Sectione præcedenti pressiones tantum fluidorum ex gravitate, quas tum in subjecta plana tum etiam in vasorum latera exercent, contemplati sumus. In hac vero secunda Sectione, quæ ad motus liquorum per foramina, utlibet vasis insculpta, erumpentium pertinent, breviter excutiemus. Hoc argumentum utilitate suâ celeberrimis Geometris Castello, Baliano, Torricellio, Borellio, Mariotto aliisque se probavit, atque ab ipsis diligenter nec sine fructu examinatum est quidem, non verò exhaustum, quandoquidem Cel. Gulielminus ipsorum repertis nonnulla adjecit; ipsorumque, maxime verò Torricellii, doctrinam motui fluminum ingeniose applicuit. Nemo tamen hanc materiam adeò generaliter pertractavit ac Celeb. Varignonius, qui præclara atque universalia exhibuit theoremata, quibusvis liquoribus applicabilia, & quæ hac in re assequutus est, velut Iliada nuci, simplicibus formulis inclusit.

CAPUT IX.

De motibus Liquorum per minora foramina erumpentium.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA.

Fig. 92. 384. *Quantitates, seu filamenta liquorum, æquali tempore per quælibet orificia æquabili motu effluentia, sunt in composita ratione ex rationibus orificiorum & velocitatum, quibus liquores, quisque per suum foramen, erumpunt.*

Sint DEF, GH vasa quælibet foraminibus quibuslibet K & I pertusa, exeantque dato quodam tempusculo motu uniformi filamentum KN ex vase DEF & filamentum IO ex vase GH, ita tamen, ut superne tantum liquoris restituatur, quantum effluit, atque adeo in utroque vase liquor in eadem altitudine constanter conservetur; & hisce positis ultro liquet longitudines filamentorum KN & IO utpote æquali tempore uniformi motu descriptas, velocitatibus aquæ ex foraminibus K & I erumpentis proportionari, vel potius has velocitates repræsentare. Ex Geometriæ vero elementis constat, ipsa filamenta esse in composita ratione foraminum K & I tanquam basium prismatum, & longitudinum KN & IO, id est, velocitatum, quibus hæ longitudines describuntur, quare constat Propositum.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA.

Fig. 92. 385. *Quantitates motus, seu impetus liquorum quorumcunque & per quævis foramina erumpentium, sunt in ratione composita ex rationibus duplicata celeritatum, simpla densitatum seu gravitatum specificarum liquorum, & denique simpla foraminum.*

Ex vasis ABC & DEF erumpant eodem vel æquali tempore, per foramina B & K filamenta BM & KN, quorum longitudines celeritates exponent, quibus hæc filamenta e vasis egrediuntur. Gravitas specifica, seu densitas liquoris in vase ABC exponatur per magnitudinem R, densitasque liquoris DEF per S. In KN sumatur tertia proportionalis ad BM & KN & sit ea KV, & probari debet, quantitatem motus filamenti BM se habere ad quantitatem motus filamenti KN ut $B.BM^2.R$ ad $K.KN^2.S$, aut propter rectas BM, KN, KV continue proportionales, sicut $B.BM.R$ ad $K.KV.S$.

De-

Demonstr. Quoniam per quantitatem motus alicujus corporis intelligitur factum ex maſſa hujus corporis in celeritatem, qua id fertur, erunt quantitates motus filamentorum BM & KN in compoſita ratione ex rationibus maſſæ ad maſſam, & celeritatis unius ad celeritatem alterius, ſunt verò maſſæ BM & KN inter ſe (§. 18.) ut volumina BM & KN, id eſt, ut facta B.BM & K.KN ducta in denſitates liquorum, ſeu (§. 33.) in gravitatem eorundem ſpecificam R & S; velocitates verò ſunt ut longitudines BM & KN, eſt ergo quantitas motus filamenti BM, quam ſimpliciter ejus motum deinceps dicemus, ad motum filamenti KN, ut $R.B.BM^2$ ad $S.K.KN^2$, hoc eſt, ſicut R.B.BM ad S.K.KV. Quod erat demonſtrandum.

Literæ B & K denotant orificia Vaſis ABC & DEF quomodocunque inſculpta.

PROPOSITIO XXXII. Theorema.

386. *Velocitates liquorum quorumlibet ſunt in ſubduplicata ratione altitudinis liquorum ſuper orificiis, per quæ erumpunt, ſi liquorum ſuperficies eandem ſemper, durante effluxu, poſitionem ſervarint.* Fig. 92.

Iisdem poſitis, quæ in præcedenti, ſint BQ & KD liquorum altitudines, & ſumatur Kβ media proportionalis inter QB & DK, probari debet fore $BM : KN = BQ : K\beta = \sqrt{BQ} : \sqrt{KD}$.

Demonſtr. Motus ſunt ut eorundem cauſæ genitrices, & hæ cauſæ ſunt preſſiones liquorum foraminibus incumbentium, atqui gravitatio liquoris QB (§. 255.) æquivalet ponderi columnæ BQ. B, & (§. 33.) ejus pondus eſt ut factum ex volumine in gravitatem ſpecificam R, adeoque B.BQ.R eſt ut gravitatio filamenti QB, & K.KD.S propter eandem rationem erit ut gravitatio filamenti DK, adeoque gravitatio QB : gravit. DK = B.BQ.R : K.KD.S, unde, cum gravitatio QB ſit ad gravitationem ſeu preſſionem DK, ut motus BM ad motum KN, erit B.BQ.R : K.KD.S = motus BM : mot. KN (§. 385.) = B.BM.R : K.KV.S, adeoque BQ : KD = BM : KV, atqui eſt ratio BQ ad KD duplicata rationis BQ ad Kβ, & BM : KV duplicata rationis BM : KN, ergo $BQ^2 : K\beta^2 = BM^2 : KN^2$, & $BQ : K\beta = BM : KN = \sqrt{BQ} : \sqrt{KD}$. Quod erat demonſtrandum.

Hæc propoſitio generaliter obtinet, ubicunque foramina B, K vaſis inſculpta fuerint in fundo vel ad latera vaſis, abſtrahendo tamen à frictionibus, quas liquores in foraminibus exeundo ſubeunt, aliisque motus impedimentis, ut reſiſtentiâ aëris, &c.

Co-

Corollarium.

387. Quoniam quantitates liquorum ſimul effluentes BM & KN (§. 384.) ſunt in compoſita ratione ex rationibus foraminum B & K & velocitatum, hæ quantitates erunt in compoſita ratione ex ratione foraminum, & ſupduclicata ratione altitudinis liquorum in vaſis, abſtrahendo à denſitatibus liquorum exeuntium; nam quantitates abſolutæ filamentorum BM & KN ſeu maſſæ eorundem, ſunt in compoſita ratione ex ſubduplicata altitudinum BQ & KD, ex ſimpla denſitatum R & S, & denique ex ſimpla itidem foraminum B, K.

Scholion.

388. Celeberrimus Varignon in Comment. Acad. Reg. Scient. 1703, 14 Nov. velocitates liquorum erumpentium in circumſtantiis hujus propoſitionis demonſtrat eſſe, ut radices ex factis altitudinum in ſpecificas gravitates liquorum, diviſis per denſitates homologas, quod cum præſenti proportione probe conſpirat, cum (§. 33.) denſitates gravitatibus ſpecificis liquorum directe proportionales ſint.

PROPOSITIO XXXIII. Problema.

389. *Definire quantum liquoris effluere debeat ex dato vaſe per datum foramen tempore dato, ſi liquor vaſis conſtanter in eadem altitudine data conſervetur.*

Sint data altitudo liquoris a, foramen vaſis f, tempus datum t, m ſpatium quod grave accelerato motu, alio dato tempore d, perlabitur. Jam, quia tempora deſcenſuum gravium (§. 151.) ſunt in ſubduplicata ratione ſpatiorum confectorum, erit $\sqrt{m} : \sqrt{a} = d : n$, ubi n denotat tempus, quo grave altitudinem a accelerato motu cadendo abſolveret, adeoque $n = d\sqrt{a} : \sqrt{m}$. Jam quia liquor ea velocitate effluit, quam grave caſu ex altitudine a acquirere poteſt, &, hac velocitate ſemel acquiſita, duplum ſpatium deſcribit æquabili motu eo tempore n, quo accelerato motu ſimplex a percurrebatur; filamentum liquoris hoc tempore n, æquabiliter effluens celeritate æquali, quam grave acquirit ex caſu accelerato ex altitudine a erit $2af$. Unde ſi tempore n effluit filamentum liquoris $2af$, tempore t effluet

effluet filamentum $2aft:n$ vel substituendo $d\sqrt{a}:\sqrt{m}$ pro n, quantitas $2aft\sqrt{m}:d\sqrt{a}=2ft\sqrt{(am)}:d$. Quod erat inveniendum.

Scholion.

390. Dicatur quantitas liquoris dato tempore t per foramen f effluens x, sitque foramen circulus diametri e; eritque $f=\pi ee:4\delta$, qui valor substitutus in $x=2ft\sqrt{(am)}:d$ exhibet $x=\pi fteе\sqrt{(am)}:2\delta d$, ponendo $\delta:\pi$ pro ratione diametri ad circumferentiam circuli.

Exempl. Quæritur quantum aquæ effluere debeat ex vase cylindrico indesinenter pleno 15 ped. 5 poll. 7 lin. alto, per foramen circulare in fundo pollicis unius in diametro, tempore 6 secundorum. Erunt ergo $a=15$ ped. 5 poll. 7 lin. $t=6''$ $e=1$ poll. $=12$. lin. $\delta=113$ & $\pi=355$. Jam, cum Hugenius observarit grave aliquod altitudinem 15 ped. & 1 poll. tempore minuti secundi perlabi, d significare potest $1''$, & m, 15 ped. 1 poll. seu 2172 lin. Loco literarum adhibendo numeros hactenus indicatos & operationem logarithmis perficiendo invenietur log-mus x, seu quantitatis $\pi fteе\sqrt{(am)}:2\delta d=6.4811958$ log-us numeri quæsiti in lineis cubicis; idcirco si ex hoc log-mo log-us ipsius 12 triplicatus, seu log-us cubi ex 12, auferetur, remanebit log. $x=3.2436522$ log-us numeri quæsiti in pollicibus cubicis expressi, cui log-mo convenit proxime numerus 1752 ergo tot pollicum cubicorum erit aqua effluens ex vase 6 secundis temporis, vel unius pedis cubici, & 24 pollicum.

391. Vicissim ex aquæ quantitate tempore dato effluente & observatione data elicietur altitudo vasis, ad id requisita, ut quocunque alio tempore determinata quædam aquæ copia effluat, nam ex formula superiore $x=\pi feet\sqrt{(am:)}2\delta d$ elicietur $a=4\delta\delta ddxx:\pi\pi ffe^4ttm$, in qua excepta a omnes reliquæ sunt quantitates datæ.

PROPOSITIO XXXIV. Theorema.

392. *Si ex vase quocunque liquore pleno* BAD *liquor per foramen* F *effluat, & circa lineam* AC *liquoris superficiei* BD *normalem descripta sit parabola* EGS, *verticem suum habens in puncto* E *tantum distanti à liquoris superficie quantum foramen vasis* F, *& curvæ* AID *ac* OMN *ejus indolis, ut singula rectangula sub data recta* V *& ordinata* HI *curvæ* AID, *tum etiam sub ordinatis* GH *parabolæ &* HM

curvæ

curvæ OMN *æqualia ubique sint sectioni vasis respectivæ* KL, *dico fore* I°. *ut tempus descensus superficiei* BD *in* XX *per spatium* CY *ad*
Fig. 93. *tempus descensus in* KL *per spatium* CH *sit, ut area* COZY *ad aream* COMH. II°. *Ut velocitas superficiei* KL *sit in composita ratione ex directa ordinatæ parabolæ* GH, *& reciproca ordinatæ* HI *curvæ* AID, *id est, ut* GH : HI.

Demonstr. Quia in parabola est PC : GH $= \sqrt{}$EC : $\sqrt{}$EH (§. 386.) $=$ velocitas liquoris effluentis sub altitudine EC ad celeritatem effluentis sub altitudine HE; ideò, si PC exponat celeritatem illius liquoris, qui habet altitudinem EC super foramen F, ordinata GH exponet celeritatem, qua filamentum liquoris indefinite parvum FH tempusculo itidem indefinite exiguo erumpit, existente liquoris altitudine super foramen F linea EH. Sed eo tempusculo, quo effluit filamentum FT, superficies KL descendens spatiolo infinitesimo Hh se demittet in kL, ita quidem ut duo prismata sub sectione KL & altitudine Hh, & FT necessario æqualia sint, unde quia (constr.) sectio KL $=$ GH. HM, erit GH. HM. Hh $=$ F. FT, vel HM. Hh : F $=$ FT : GH. Atqui FT, seu longitudo filamenti, applicata ad celeritatem, qua id effluit æquabili motu, exponit tempus effluxus hujus filamenti, seu synchroni descensus superficiei KL ex hoc situ in kl per spatiolum Hh, ergo etiam HM. Hh : F exponit hoc idem tempusculum descensus, & omnia rectangula HM. Hh, quæ in area CHMO continentur: seu hæc ipsa area, divisa per F, exponet tempus descensus superficiei KL ex BD in KL per spatium CH; eodemque argumento colligitur tempus descensus BD in XX per spatium CY exponi area CYZO, divisa per F; ergo tempus per CH : tCY $=$ CHMO : CYZO. Quod est primum.

II°. Quia velocitas superficiei KL est ad velocitatem GH filamenti FT, ut Hh ad FT, hoc est, ob æqualitatem prismatis ex KL in Hh & prismatis ex F in FT, sicut F ad planum KL, quod (constr.) æquatur rectangulo V. HI, erit velocitas superficiei KL ad GH $=$ F : V. HI, atque adeo cel. superficiei KL $=$ F. GH : V. HI, id est, omissa ratione constanti F : V, quæ proportiones indeterminatarum magnitudinum non alterat, velocitas superficiei KL est ut GH : HI. Quod erat secundum.

Corollarium I.

393. Si itaque area tota COMNNE dividatur in quadrilinea æqua-

æqualia CYZO, YHMZ, HMNNE, aut quamcunque aliam inter ſe rationem habentia, tempora deſcenſus ſuperficiei liquoris BD per ſpatia CY, YH, HE aut æqualia, vel aliam inter ſe datam rationem, quam habent homologæ areæ. Atque hinc liquet, quodlibet vas adhiberi poſſe loco clepſydræ, dummodo figura ECOMN figuræ vaſis conveniens in ſuas partes æquales diviſa fuerit per lineas ſuperficiei horizontali aquæ BD parallelas, atque diviſionum puncta in latere vaſis rite notata fuerint. Sed hisce diutius non immorabor, quandoquidem Celeb. Varignon hoc argumentum pene exhauſiſſe videtur in Comment. Reg. Scient. Pariſ. Academ. 1699, 29 Apr.

Corollarium II.

394. Pariter datis curvis EGP, OMN dabitur tertia AID, atque adeo curva BKALD genitrix vaſis, idque ex ſectione KL = V. HI = GH. HM. Adeoque, ſi vas ſit ſolidum rotundum ex converſione figuræ BAD circa axem CA, vel etiam ſi ſingulæ vaſis ſectiones BD, KL, &c. figuræ ſimiles & ſimiliter poſitæ fuerint, ordinatæ HI erunt, ut quadrata ordinatarum homologarum KL.

Corollarium III.

395. Idcirco, ſi quæratur vas BAD tale, ut deſcenſus CY ſuperficiei liquoris BD ſint ut tempora deſcenſus, erit curva OMN hoc caſu linea recta axi AR parallela, unde cum planum KL, ſeu circulus ex diametro KL æquatur rec-lo GHM, erit quadratum ex KL ut rec-lum ex HG in datam HM, vel ſimpliciter ut GH, vel quadrato-quadratum rectæ KL ut quadratum HG, unde cum hoc quadratum ſit ut abſciſſa HE, erit quadrato-quadratum ut HE, atque adeo curva quæſita BAD erit parabola biquadratica. Ut ab aliis ſæpius jam demonſtratum eſt.

In hisce areæ CYZO, CHMO tantum proportionem temporum indicant, quibus ſuperficies liquoris BD ſpatia CY, CH deſcendendo deſcribit. Sed ſi tempus abſolutum ſit definiendum, quo quilibet deſcenſus contingit, conſuli debet ſequens

PROPOSITIO XXXV. Theorema.

396. *Si parabolæ* EGS *parameter æqualis fuerit altitudini* RE, *quam grave, caſum à quiete in* R *incipiens, motu naturaliter accelerato perlabi*

poteſt

potest uno minuto secundo temporis, positisque omnibus, quæ in Propositione præcedenti, numerus minutorum secundorum, quibus superficies BD *spatium* CH *cadendo conficit, æquabitur numero, qui oritur ex divisione areæ* CHMO *per duplum foraminis* F.

Si liquor constanter maneret in altitudine ER, ejus prima gutta, prope foramen F, ea celeritate erumperet, qua motum in altum convertens tempore eodem minuti secundi per altitudinem ER ascendere potest, quo cadendo eandem celeritatem acquirit, atque gutta erumpens motum suum uniformem prosequens hoc tempore describet spatium duplum ipsius ER, unde cum effluentis liquoris particulæ contiguæ sint, tempore unius minuti secundi effluet per foramen F filamentum 2F.RE, & si liquor maneret in altitudine HE per idem foramen effluet tempore, quod se habet ad unum minutum secundum in subduplicata ratione HE ad RE, id est, in ratione GH ad SR, filamentum 2F. HE; unde si massa liquoris 2F. HE effluit tempore (GH : SR) quanto tempore effluet massa KL. Hh (constr.) $=$ GH. HM. Hh? Id per regulam auream invenietur fieri tempore GH^2. HM. Hh : 2F. HE. SR; jam quia RS vel RE est parameter parabolæ, atque adeò GH^2 æquale rec-lo HE. SR, erit tHh $=$ HM. Hh : 2F. ergo tCH $=$ areæ CHMO : 2F, id est numerus secundorum temporis, quo liquoris quantitas BKLD per foramen F effluit, præscindendo à frictionibus aliisque motus impedimentis, reperietur, applicando aream homologam CHMO ad duplum foraminis F. Quod erat inveniendum & demonstrandum.

Aliter & brevius.

397. Supra (§. 392. n. 1.) incidimus in hanc analogiam HM. Hh : F $=$ FT : GH, unde duplicatis consequentibus provenit HM. Hh : 2F $=$ FT : 2GH. Atqui FT : 2GH indicat particulam minuti secundi temporis, qua filamentum FT vel ei æqualis massa KL. Hh vel KklL effluit. Nam 2RE vel 2RS exponere debet velocitatem acquisitam tempore unius minuti secundi ex lapsu gravis per altitudinem RE, quia hæc altitudo duplicata 2RE divisa per celeritatem 2RE, dat I, seu unum minutum secundum, & quia velocitates & descensu per RE & HE acquisitæ & hisce æquales celeritates, quibus aqua per foramen F erumpit, existente ea in vase in altitudinibus RE & HE manentibus, sunt in subduplicata ratione RE

ad

ad HE seu SR ad GH, id est, 2SR vel 2RE ad 2GH; hæ enim SR & ER æquales sunt, cum RE (secundùm hypothesin) parameter sit parabolæ, unde cum 2SR exponat celeritatem aquæ erumpentis sub altitudine RE, altera 2GH exponet celeritatem aquæ erumpentis sub altitudine HE, hinc filamentum FT æquabili motu effluens, applicatum ad suam celeritatem 2GH, exponit tempus effluxus hujus filamenti, seu tempus effluxus massæ liquidæ HklL, id est, $tHh = FT : 2GH$, & cum supra inventum sit $HM.Hh : 2F = FT : 2GH$, erit $tHh = HM.Hh : 2F$; atque adeò $tCH = CHMO : 2F$, ut supra. Quod erât demonstrandum.

Corollarium.

398. Ergo præsens propositio ex antecedenti facile elicitur parametro parabolæ EGS tantum eum valorem assignando, quem Propositio indicat, & semper continget, ut areæ CYZo, &c. applicatæ ad duplum foraminis præbituræ sint tempora minutis secundis expressa, quibus homologæ liquoris quantitates effluere debent.

Propositio XXXVI. Theorema.

399. *Si liquor ex vase amplo & constanter pleno* ADC *effluat per lumen* EGHF *plano* BDIC *horizonti utcunque obliquo insculptum, descripta circa axem* BD *parabola* BLO, *cujus parameter* P *sit ad lineam* A, *quam grave quoddam dato tempore* t *motu a quiete incipiente, sed naturaliter accelerato, perlabi potest, ut sinus anguli* ABD *inclinationis planorum* ABC, *&* BDI *ad sinum totum, hoc est, sicut* RG *ad* BG; *quantitas* Q *liquoris tempore quolibet dato* T *per lumen illud* EGHF *effluentis exponetur frusto* EIKMLGHFE *prismatis parabolici* BDOPMNV *ducto in duplum exponentis rationis temporum, hoc est in* $2T : t$. Fig. 94.

Quia manente vase liquoris pleno, per quodlibet punctum physicum G sectionis seu luminis EGHF filamentum liquoris 2RG effluere debet æquabili motu, tempore eo, quo grave quoddam altitudinem RG accelerato motu descendens conficere potest, & quia tempora descensus gravium sunt in subduplicata proportione spatiorum, juxta ea quæ articulo 151. ostensa sunt, erit tempus descensus gravis in altitudine A, quod tempus nominatum est t, ad tempus per altitudinem RG, sicut $\sqrt{A}$ ad $\sqrt{RG}$; vel sicut A ad $\sqrt{(A.RG)}$ $= \sqrt{(P.BG)}$

$=\sqrt{(P.BG)}$ quandoquidem $A:P=BG:RG$, vel ſicut A ad GL ob parabolam BLO, in qua eſt $GL=\sqrt{(P.BG)}$; adeoque tempus deſcenſus per altitudinem RG alicujus gravis reperitur eſſe $GL.t:A$. Jam, quia hoc tempore punctum G effundit filamentum liquoris $2RG$, idem punctum effundet tempore T, filamentum $2A.T.RG:GL.t=2T.GL^2:GL.t=2T.GL.t$. Similiter punctum phyſicum F effundet, eodem tempore T, filamentum $2T.FK:t$, atque ſic reſpective reliqua luminis puncta. Igitur quantitas Q liquoris per univerſum lumen GEFH dato tempore T effluentis eſt factum ex omnibus GI, FK, &c. quæ in ſolido EILMKFHGE continentur in $2T:t$; id eſt, factum ex hoc ſolido in $2T:t$. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

400. Si planum BDI lumine EGH pertuſum, rectum fuerit horizonti, rectæ BG & RG, atque adeo P ac A æquales fient; adeo ut magnitudo ipſa, ſeu ſpatium A, quod grave tempore t accelerato motu à quiete incepto percurrere poteſt, parameter ſit parabolæ BLO.

COROLLARIUM II.

401. Dicantur porrò ſinus anguli RBG, i; ſinus totus r, parabolæ BLO parameter p, qui antea P nominabatur, ſimiliterque longitudinem A litera a inſigniat, fiantque inſuper $GE=b$, $GH=c$, $BG=z$, $BE=x$, eruntque $EI=\sqrt{px}$ & $GL=\sqrt{pz}$, adeoque quadrilineum parabolicum EGLI, ſeu trilineum BLG — trilineum BIE $=\frac{2}{3}z\sqrt{pz}-\frac{2}{3}x\sqrt{px}$ (id eſt, ſi ad contrahendam formulam pro $\frac{2}{3}z\sqrt{z}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ ponatur u) $=u\sqrt{p}$, adeoque ſolidum $EKLGF=cu\sqrt{p}$, adeò ut ſit $Q=2Tcu\sqrt{p}:t$.

COROLLARIUM III.

402. Sed, ſi ipſæ BG, BE datæ non ſint, ſed earum tantum proportio, quæ ſit eadem cum m ad 1, ſolidum parabolicum præcedente paragrapho inventum habebitur in ſolis quantitatibus b, c, & m. Nam quia (ſecundùm hypotheſin) $z:x=m:1$ erit $z=mx$ & $z\sqrt{z}-x\sqrt{x}=mx\sqrt{mx}-x\sqrt{x}=(m\sqrt{m},-1)$ in $x\sqrt{x}$. Sed $z-x=mx-x=b$, ſeu $x=b:m-1$, & $x\sqrt{x}=b\sqrt{b}:m-1\sqrt{(m-1)}=b\sqrt{b}:n\sqrt{n}$ ſi ſci-

ſcilicet loco $m-1$ ponatur n. ergo $z\sqrt{z}-x\sqrt{x}=(m\sqrt{m},-1).b\sqrt{b}:n\sqrt{n}$. Hinc u ſeu $\frac{2}{3}z\sqrt{z}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}=(\frac{2}{3}m\sqrt{m}-\frac{2}{3}).b\sqrt{b}:n\sqrt{n}=(2m\sqrt{m},-2).b\sqrt{b}:3n\sqrt{n}$.

Scholion.

403. Sed, quia A vel a denotat altitudinem, quam grave quoddam accelerato motu à quiete incepto cadendo deſcribere poteſt tempore dato t, & quia propter frictiones aliaque impedimenta fieri nequit, ut filamenta fluidi eodem tempore effluentia per puncta phyſica G, E, F, &c. præciſe dupla ſint altitudinum GR, EQ, EQ, &c. ideo propoſitio Mathematica eſt potius quam Phyſica. Etſi enim ſcitur quantam oporteat eſſe altitudinem A tempore unius minuti ſecundi, vel quolibet alio à gravi decidenti in vacuo deſcribendam, non tamen in praxi talem altitudinem adhibere licet, quandoquidem ab omnis generis reſiſtentiis abſtrahere non ſemper convenit, ſed dicta altitudo A ex phænomenis eſt elicienda ſequenti modo:

PROPOSITIO XXXVII. Problema.

404. *Iisdem poſitis, quæ in præcedenti Propoſitione, invenire magnitudinem* A, *atque adeò parametrum* P *parabolæ* BIO *ex obſervationibus ſeu phænomenis.* Fig. 94.

Quia (§.§. 384. & 386.) quantitates fluidi per puncta quælibet phyſica G, E, F, &c. fluentia ſunt in ſubduplicata ratione homologarum GR, EQ, &c. ſeu ipſarum GB, EB, &c. quantitates illæ per ordinatas parabolæ GL, EI, &c. recte exponi poſſunt, adeo ut quantitas fluidi, per univerſum lumen EGHF effluentis, debeat exponi ſolido ELKFG. Atqui retentis ſymbolis ſuperioribus, erit ſolidum iſtud $=cu\sqrt{p}$, ut ſupra inventum, ergo $Q=cu\sqrt{p}$, & $QQ=ccuup$, id eſt $p=QQ:ccuu$, atqui (§. 399.) eſt $p=ai:r$, ergo $a=rQQ:iccuu$. Jam, quia (ſecundùm hypotheſin) Q ex obſervatione, & reliquæ r, i, c, u, etiam datæ ſunt, ipſa altitudo quæſita a ex hiſce datis ope repertæ æquationis facili negotio haberi poteſt. Quod erat inveniendum.

Scholion I.

405. Ad illustrationem hujus canonis, & inventionem altitudinis a, nullam præstantiorem novi observationem, quam quæ relata est circa finem Tractatus *De Mensura aquarum fluentium* Celeberrimi Gulielmini, qui merito suo primum locum in Miscellaneis Italicis Physico-Mathematicis à P. Gaudentio Roberti editis, occupat. Adhibuerat sagacissimus Gulielminus vas cylindricum bipedalis diametri alicubi ad latus horizonti rectum lumine quadrato pertusum, cujus singula latera erant 3 linearum pedis Bononiensis, & ejusdem luminis basis horizonti parallela 3 pedibus cum 11 unciis (pollicibus) ab aquæ superficie distabat in vase. Experimento octies repetito sine ulla variatione invenerat Doctissimus Vir, 32 libr. & 10 uncias per lumen illud tempore unius minuti horarii effluxisse; & pollicem cubicum continere unciam unam aquæ cum granis 146, id est, in universum grana 786. Divisit postea 32 libr. 10 uncias, id est, 252160 grana per 786 grana unius pollicis cubici, invenitque $320\frac{320}{393}$ pollices ejusdem generis prædicto illo tempore effluxisse. Jam, si formulam superiorem observationi isti velimus applicare, sciendum i & r hoc casu æquari, quia lumen plano aut superficiei cylindri horizonti rectæ insculptum est; ac proinde erit hoc casu $p = a$. Ut altitudinem quæsitam a in numeris inveniamus totam operationem logarithmis perficiemus, ponentes $Q = 320\frac{320}{393}$ poll. cub. $c = 3$ lin. $z = 3\frac{11}{12}$ ped. $= 564$ lineis & $x = 561$ lineis. Quibus positis, erunt

Log. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z})$ - - - -	3.9508274	Subtr.
Log. $(\frac{2}{3}x\sqrt{x})$ - - - -	3.9473531	

Log. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} : \frac{2}{3}x\sqrt{x}) =$ log. numeri 1.008033 ... 0.0034743

Ergo $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}) = 1008033 : 1000000$, adeoque $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} - \frac{2}{3}x\sqrt{x})$ seu $u : \frac{2}{3}x\sqrt{x} = 8033 : 1000000$, & $\log. u = \log. (\frac{2}{3}x\sqrt{x}) + \log. 8033 - \log. 1000000$. Jam

Log. $(\frac{2}{3}x\sqrt{x})$ - - - - -	3.9473531	Add.
Log. 8033 - - - - -	3.9048778	
	7.8522309	Subtr.
Log. 1000000 - - - -	6.0000000	
Log. u - - - - -	1.8522309	

Log. u

Log. u - - - - - -	1.8522309	Add.
Log. $c = 3$ lin. - - - - -	0.4771212	
Log. cu - - - - - -	2.3293521	
Log. Q lineis cubicis expressæ - -	5.7437973	Subtr.
Log. cu, - - - - - -	2.3293521	
Log. $(Q:cu)$ - - - - -	3.4144452	Dupl.
Log. $(QQ:ccuu) =$ log. a in lineis -	6.8288904	Subtr.
Log. 144, - - - - - -	2.1583625	
Log. a seu $(QQ:ccuu)$ in pedibus, -	4.6705279	

Hic inventus log-us ipsius a est fundamentalis numerus in calculo quantitatis aquæ per datum foramen effluentis deinceps adhibendus, loco Tabulæ, eundem in finem, à supra laudato Guilielmino improbo laboris tædio confectæ. Nos enim, qui logarithmis semper calculum absolvi posse jam ostendimus, & uno adhuc exemplo clarius id probabimus, Tabula Guilielminea plane non indigemus; nec eadem Clariss. ejusdem Autor opus habuisset, sibique ipsi multo tædio pepercisset, si animum advertisset, calculum eo modo eaque methodo subduci posse, quam hoc loco exposuimus.

Scholion II.

406. Videamus nunc præcedentium usum in aliquo exemplo. Ponamus igitur cum Guilielmino sectionem FG, seu luminis planum angulo 88 grad. inclinatum esse ad horizontale planum, atque luminis rectanguli basin GH esse 50 ped. altitudinem vero GE, 10 ped. ac denique proportio celeritatum in G & E sit eadem quæ 4 ad 1. Jam quia (§. 386.) velocitates in G & E sunt in subduplicata proportione ipsarum GR & EQ seu ipsarum GB & EB, hæ lineæ ipsæ erunt ut quadrata velocitatum in G & E, id est, $GB : EB = 16 : 1$, atqui supra (§. 402.) erat posita $z : x$ seu $GB : EB = m : r$, ergo $m = 16$, adeoque $n = m - 1 = 15$. Item $b = 10$ ped. & $c = 50$ ped. Ergo $u = (2m\sqrt{m}, -2) : b\sqrt{b} : 3n\sqrt{n} = 28\sqrt{10} : \sqrt{15}$ ergo $cu = 1400\sqrt{10} : \sqrt{15}$. Hisce positis Fig. 94.

Quia Log. a - - -	4.6705279	Add.
Log. i sin. 88 grad. - -	9.9997354	
	14.6702633	

$$\begin{array}{lll} \text{Log.}(ai:r)=\text{log.}p & - \quad - & 4.6702633 \\ \text{Log.}\sqrt{p}, & - \quad - \quad - & 2.3351316 \\ \text{Log.}(cu)=1400\sqrt{10}:\sqrt{15} & - & 3.0580824 \end{array} \Big\} \text{Add.}$$

$$\text{Log.}(cu\sqrt{p})=Q \quad - \quad - \quad - \quad 5.3932140.$$

Huic log-mo numerus 247285 quam proxime convenit. Gulielminus suo calculo invenit 247321, differentia 36 est insensibilis præ numero 247285, denotante quot pedes cubici tempore unius minuti horarii effluere debeant per lumen illud seu sectionem horizonti inclinatam. Atque sic in aliis procedendum.

CAPUT X.

De Cursu Fluminum.

DEFINITIONES.

I.

GEnerali *Fluminis* vocabulo indigitatur hoc loco aqua in superficie terræ itinere plerunque varie inflexo è locis altioribus intra alveum suum ad depressiora indesinenter fluens.

II.

Alveus fluminis est cavitas in superficie telluris, intra quam aquæ decurrunt.

III.

Sectio Fluminis est communis sectio alvei & plani secantis alvei fundo perpendicularis. Ejusmodi sectio ordinarie est figura aliqua irregularis ac propterea vocari solet *Sectio naturalis* ad distinguendam eam ab *artificiali*: nam

IV.

Sectio artificialis est semper parallelogrammum rectangulum, quia intelligitur esse sectio alvei artificialis, seu parallelepipedi formam habentis.

V.

Altitudo viva fluminis est distantia cujusque puncti in superficie fluminis à fundo ejusdem. Et *latitudo viva* est basis alicujus sectionis artificialis.

VI.

VI.

407. Flumen in eodem dicitur ſtatu manere, vel in ſtatu manenti eſſe, cum inter fluendum nusquam attollitur ejus ſuperficies & intumeſcit, nec alibi deprimitur vel decreſcit, ſed eodem ſemper tenore, durante fluxu, ſe habet; abſtrahendo tamen ab inæqualitatibus accidentalibus, ſcilicet à vorticibus &c. quæ à fundi & ſpondarum aſperitatibus provenire ſolent.

PROPOSITIO XXXVIII. Theorema.

408. *Exiſtente flumine in ſtatu manenti, temporibus æqualibus æquales aquæ copiæ per omnes fluminis ſectiones transfluent.* Fig. 95.

Si negas, transeat ergo plus aquæ per ſectionem AB quam per vicinam ſectionem CD, & intumeſcet aqua inter has ſectiones in *bm*D exempl. gratia; ſin verò plus aquæ transiret per ſectionem CD quam per AB, aqua inter has ſectiones decreſceret in β*n*D; atque adeo flumen non maneret in eodem ſtatu, contra hypotheſin.

Corollarium.

409. Et converſim etiam, ſuperficies fluminis manens erit, ſi per ſingulas fluminis ſectiones AB, CD, EF, &c. eadem aquæ quantitas temporibus æqualibus perfluit.

PROPOSITIO XXXIX. Theorema.

410. *Si caſtellum aquæ plenum* ABCD *communicet cum lacu* ζωα *indefinite amplo per canalem inclinatum* IFθ *ſuperne opertum ſuperficie curva* IHFζ, *atque exitu aquæ ex caſtello per lumen* CI, *in canali aqua ita fluat, ut in punctis quibusvis* F, E *ſectionis* EF *celeritates pendeant à preſſionibus aquæ incumbentis juxta altitudines* SL, *r*O; *quibus puncta illa à ſuprema aquæ in caſtello ſuperficie manente* AD *diſtant, faciantque preſſiones illæ, ut per ſingulas canalis ſectiones* GH, EF, &c. *eadem temporibus æqualibus aquæ copia fluat. Dico fore, ut eodem tenore aqua in canali inclinato fluat remoto operimento* IHFζ *curvilineo, quo faceret operta canalis aqua indicata iſta ſuperficie operiente, modò tantum aquæ caſtello influat, quantum per ſingulas canalis ſectiones jugiter transit.* Fig. 96.

 Si

Si negas, attollatur ergo aqua, amoto operimento curvo IFξ, quam inter sectiones GH & EF, ergo minus aquæ fluit per sectionem EF quam per præcedentes versus CI vi pressionis naturalis aquæ incumbentis, contra hypothesin.

Scholion.

411. *Pressionum naturalium* nomine intelligimus eas, quarum ope velocitates aquæ, ut in E & F, sunt in subduplicata proportione altitudinum O*r*, L*s*, vel ipsarum OD, & LD. Nam quæcunque sit superficies IHFξ, eadem aquæ copia per singulas sectiones GH, EF, &c. fluet propter contiguitatem partium aquæ, quandiu canalis superficie illa curva opertus manet, nec tamen ideo celeritates aquæ reguntur à partibus incumbentibus, juxta tenorem & legem pressionum naturalium; hoc est, velocitates, ex. gr. in E & F, non sunt hoc casu generali ex necessitate in ratione subduplicata O*r*, ad L*s*. Ac propterea contingeret ut remoto operimento canalis superficies tamdiu mutetur, usque dum aqua defluens in canali eam nacta sit, quæ à pressionibus aquæ naturalibus unice dirigatur, ac manens fiat; & hæc proinde ea ipsa est, quam operimento IFξ attribuimus, adeò ut aqua continue in canali fluere queat, si ejus superficies figuram habeat istius operimenti, sive aqua tecta sit isto operimento sive non.

Corollarium I.

412. In hac pressionum naturalium hypothesi innotescere potest, quantum aquæ per singulas sectiones canalis dato tempore fluere debeat. Nam producta prima sectione IC in D usque ad occursum cum superficie aquæ in castello AD, & indefinite deorsum in O, & juxta conditiones paragraphi 404, vertice D circa axem DO descripta
Fig. 96. parabola DTV, ordinatæ ejus LT & OV, quæ transeunt per puncta L & O, in quibus lineæ FL & EO superficiei aquæ in castello AD parallelæ, & per terminos cujuscunque sectionis FE ductæ, axi parabolæ DO occurrunt, exhibebunt quadrilineum parabolicum LTVO, quod in latitudinem sectionis artificialis ductum manifestabit quantitatem aquæ per sectionem FE unius minuti horarii tempore fluentis, quia calculus propositionis 37. ad hoc tempus est aptatum. Ipsius regulæ ratio patet ex hac ipsa propositione recensitâ.

Co-

Corollarium II.

413. Et data prima canalis sectione IC dabitur quælibet alia EF. Etenim ductis per I, C ordinatis parabolæ IZ, CG, & per punctum E recta EO parallela AD, ac ordinata OV, fiat quadrilineum VOLT æquale quadrilineo IZGC, determinabitque OL, intercepta ab ordinatis OV, LT, altitudinem vivam sectionis EF. Nam, quia hæc nominata quadrilinea parabolica (constr.) æquantur, hæc quadrilinea ducta in canalis latitudinem producunt solida æqualia, quæ (§. 404.) quantitatem aquæ fluentis per quamlibet sectionem canalis IC vel EF, &c. exponunt; unde cum hac ratione per singulas sectiones eadem aquæ copia fluit, patet (§. 409.) superficiem aquæ manentem esse. Vicissim data qualibet sectione EF, semper invenire licet primam IC.

PROPOSITIO XL. Problema.

414. *Datis superficie aquæ in castello AD, & uno puncto I in superficie manente aquæ in canali defluentis IHξ, invenire quotlibet alia.* Fig. 96.

Hoc problema jam solutum est in corollario ultimo præcedentis propositionis; sed, quia constructio per quadrilinea parabolica procedens nonnihil incommoda est, ope parabolæ cubicæ secundæ res paulò elegantius confici potest.

Describatur itaque per puncta D & G parabola cubica DPG, in qua cubus abscissæ cujuscunque DL æquetur parallelepipedo ex quadrato ordinatæ respondentis LR in parametrum Q, ita ut sit ubique $DL^3 = Q.LR^2$: Sitque P parameter parabolæ conicæ DZT, & $R = \frac{2}{3}DC$. Et hisce positis, data prima sectione IC, reliquæ omnes inveniri possunt ope parabolæ cubicæ, atque adeò curva IHF per puncta describi. Nam ductis ordinatis IP, CG parabolæ cubicæ per superioris IP terminum P, agatur PQ parallela DC, & si sectio canalis in E expetatur, acta EO parallela AD per punctum O, & ducta ordinata paraboloidis OS, in quâ, sumtâ SY æquali GQ, agatur per Y recta YR parallela DO, hæc YR exhibebit altitudinem vivam sectionis EF per punctum E transeuntis, ita ut EF sit = YR; ergo puncta omnia F geometrice inveniri possunt.

Demonstr. I. Parabola cubica, quam paraboloidem dicam, præbet $DC^3 = Q.CG^2$; parabola verò conica $CG^2 = P.DC$, & $Q.CG^2 =$

 P.Q.DC,

P.Q.DC; ergo $DC^3 = P.Q.DC$, vel etiam $P.Q = DC^2$. Eſt ergo DC media geometrica inter parametros parabolæ & paraboloidis.

II. In paraboloide eſt $Q.LR^2 = DL^3$, vel $P.Q.LR^2$, id eſt (num. 1. hujus) $DC^2.LR^2 = P.DL^3$, vel quia parabola efficit P.DL æquale LT^2, $= LT^2.DL^2$; hinc $DL^2 : LR^2 = DC^2 : LT^2$, atque adeò $DL : LR = DC : LT$, hinc $DL.LT = DC.LR$, & per conſequens $\frac{2}{3}DL.LT$ ſeu parabola $DZTL = \frac{2}{3}DC.LR$ (ſecundùm hypotheſin) $= R.LR$. Similiter reperietur parabola, ſeu area parabolica, $DGVO = R.OS$; ergo quadrilineum $LTVO = R.YS$. Sic etiam quadrilineum $IZGC = R.QG$; unde quia (conſtr.) $YS = QG$, adeoque quadrilineum LTVO æquale quadrilineo IZGC, (§. 413.) eadem aquæ copia per ſectiones IC & EF fluet, atque adeo ſuperficies aquæ IHF ξ manens erit. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

415. Ope præſentis, ejusque quæ eam præcedit, ex datis inclinatione canalis ſeu angulo CAD, ſectione qualibet EF ejusque diſtantia AE à ſuperficie aquæ in caſtello AD, vel ab origine canalis, innoteſcent proportio velocitatum E & F, & reliquæ ſectiones omnes. Nam ex dato angulo DAC & diſtantia AE, innoteſcet ipſa Or, & ex hac & angulo ABC, complemento anguli CAD, elicietur OD; unde, cum ſectio EF eique æqualis OL data ſit ex hypotheſi, ea ex OD ſubtracta relinquet LD cognitam. Jam deſcripta circa axem DO & vertice D parabola DGV, ordinatæ LT & OV exponent proportionem celeritatum aquæ in E & F. Sed, quia multi ſunt caſus, quibus diſtantia EA actuali dimenſione haberi nequit, ſæpiſſime hic modus determinandi præmemoratas celeritates in praxi minime ſuccedit, & mechanice eas velocitates inveſtigare convenit.

PROPOSITIO XLI. Problema.

Fig. 97. 416. *Invenire per obſervationes artificio mechanico proportionem velocitatum in* E *&* F *cujusque ſectionis fluminis canalisve* EF.

Habeatur filum GP cum pondere P, aquâ aliquantum ſpecifice graviore, altero ejus capiti annexo, demiſſoque pondere P usque ad fundum canalis Cθ, id pondus ab aqua per punctum E ſectionis

FE

FE fluente nonnihil abripietur, & aquæ impreſſiones in hoc pondus efficient ut filum GP à ſitu verticali GE angulo quodam EGP declinet. Dehinc extracto pondere ex fundo, & aquæ eum in modum immiſſo, ut prope ſuperficiem ad punctum F ut in *p* conſiſtat, declinatio fili *gp* à ſitu verticali *ge*, in quem pondus cum filo ſe alioqui compoſuiſſet, niſi aquæ prope F currentis impreſſionibus à ſitu perpendiculari abductum fuiſſet, ſit angulus *egp*, quem ſimplici litera *g* indicabimus, & angulum priorem EGP litera ſimili G. Horum angulorum complementa ad rectum dicantur C & *c*, inclinatio canalis, ſeu angulus GEF, autem I; dehinc aſſumatur quædam N, quæ ſit ad tangentem anguli G, ut ſinus complementi C eſt ad ſinum anguli C − I; item *n* ad tangentem anguli *g* in ratione ſinus anguli *c* ad ſinum anguli *c* − I, eritque velocitas aquæ in E ad velocitatem in F in ſubduplicata ratione magnitudinis N ad *n*.

Demonſtr. I. In altera figura 98. repræſentent MN vel MP, aut M*p* longitudinem fili GP vel *gp*, & MN horizonti verticalis contineat cum recta NQ angulum MNQ æqualem angulo GEθ in fig. 97, ſintque anguli NMQ, NM*q* æquales angulis EGP, *egp*, ſeu G & *g* reſpective, ductaque NR perpendiculari ad MN, erunt NR tangens anguli G, & N*r* tangens anguli *g*: Et NRM erit C ſeu complementum anguli G, ac N*r*M complementum alterius *g*, id eſt *c*. Quin etiam angulus RNQ æquabitur angulo GEF, ſeu angulo I, nam ſi ex æqualibus GEθ & MNQ auferentur recti FEθ & MNR remanebunt æquales GEF, RNQ. Eritque adeò angulus RQN = C − 1, & r*q*N = *c* − I. Fig. 98.

II. Quia gravia in ſitum horizonti rectum ſe componere affectant, atque in talem ſe reapſe reducunt, quoties filo annexa à perpendiculari ſitu abducta, atque ſui iterum juris facta ſunt. Idcirco filum GP non poteſt in hoc ſitu conſiſtere, niſi impreſſionibus aquæ fluentis per E juxta directionem ſectioni EF normalem, vel fundo Eθ parallelam, in eo detineatur; neceſſe igitur eſt, ut præter gravitatis actionem in corpus P, quæ ſe in hoc exſerit juxta directionem ipſi GE parallelam, alius cujusdam potentiæ actio accedat, quam hoc caſu concipimus fieri, ut dictum, juxta directionem ipſi Cθ parallelam. Jam ſi in figura 98. MN exponit gravitatem ponderis P, quam in aqua habet, altera potentia, quæ fundo canalis parallela eſt, exponetur linea NQ, quandoquidem (ſecundùm hypotheſin) angulus MNQ æqualis eſt angulo GEθ, atque actione duarum potentiarum collateralium MN & NQ (§. 39, 40.) detinetur pondus P filo an-

nexum

nexum in situ MP, cum MN angulum NMQ seu angulum G continente; similiter repræsentat Nq vim abducentem aquæ filumque angulo g seu egp à verticali ge declinare facientis: adeo ut vires abducentes sint ad se invicem ut NQ ad Nq. Atqui in triangulo NRQ, est NR ad NQ ut sinus anguli NQR seu C − I ad sinum anguli NRQ seu NRM, id est C, & ex hypothesi est tangens anguli G seu NR ad magnitudinem N, sicut sinus C − I ad sinum C, ergo N = NQ. Eodem probabitur argumento esse n = Nq. Itaque vis abducens filum GP à situ perpendiculari GE, est ad vim abducentem fili ge ut N ad n.

III. Sunt vero vires abducentes ut impressiones aquæ in globum P, exsertæ juxta directiones fundo Cθ parallelas: impressiones vero sunt in duplicata ratione velocitatum in E & in F, ut in sequentibus demonstrabitur, ergo quadratum velocitatis in E est ad quadratum velocitatis in F, ut N ad n, ac per consequens velocitas in E est ad velocitatem aquæ in F, in subduplicata ratione magnitudinis N ad magnitudinem n. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

417. Si angulus GEF, seu inclinatio canalis ad horizontem, nullus est, erit N ad n eo casu, ut tangens anguli G ad tangentem anguli g; atque adeo velocitates aquæ in summo & imo sectionis FE erunt in subduplicata ratione tangentium angulorum g & G.

SCHOLION.

Fig. 96. 418. Hæc omnia, quæ de canali Iθ ostensa sunt, fluminibus quoque applicari possent, si hæc per totam suam longitudinem eandem latitudinem sectionesque artificiales admitterent, & aquæ fluentes à spondis & fundi inæqualitatibus nullam resistentiam paterentur. Verum quia tales fluvii mathematici in rerum natura non existunt, dispiciendum est, num præcedentia nullum præbere queant adminiculum, quo fluminum aquæ fluentes ad mensuram revocari, eorumque affectiones generaliores explicari queant. Hac in re non inelegantem rationem pro fluviis mediocris altitudinis & latitudinis excogitavit Castellus quam Celeb. Gulielminus deinceps magis perfecit. Hæc methodus ita habet.

Fig. 99. 419. Intelligatur *Cataracta* seu *Regulator* ABDA constans duobus tignis

tignis parallelis & verticalibus AB, AD horizontali BD conjunctis, & crenis suis instructis, adeò ut his crenis tabula EH inseri, quæ pro re nata attolli & demitti queat ope funis VS unco V alligati, atque adeo lumen FBDH modo arctari modo etiam ampliari queat. Hæc Cataracta seu Regulator in loco commodo fluvii mediocris transversim debet aptari, ita ut tignum BD ripis perpendiculare sit fundoque contiguum, ac denique tigna AB & AD fundo normalia, adeo ut totum planum ABDA fundo ripisque perpendiculare sit.

Si jam quæratur, quantum aquæ per sectionem BM fluminis PQ dato tempore fluere debeat? In hac sectione vel alio commodiore loco collocandus est Regulator eo modo, ut dictum, & tabula EF mobilis demittenda est, ut sectio MB reducatur ad minorem FB, quo fiet, ut minore aquæ copia fluente per lumen arctum FB quam antea per MB, aqua supra sectionem MB intumescat sensim, atque sensim attollatur, usque dum aqua superficiem manentem PN adepta sit, quo casu tantum aquæ fluet per lumen FB, quantum ante fluxerat per MB & quantum per quamlibet aliam sectionem PR fluit, alioqui superficies PN manens non esset. Sed eam ponimus esse manentem, ut sane ad talem statum de necessitate se aliquando componet; quo casu corpus aquæ PRNB tanquam amplo castello seu receptaculo inclusa considerari potest, cui tantum aquæ influit superne per PR, quantum effluit per lumen FB. Atque hisce jam positis calculus facili negotio absolvetur pro obtinenda quantitate aquæ effluentis, dato quodam tempore, per lumen FB. Nam si vertice N & circa axem NB parabola descripta intelligatur NSQ, cujus parameter p sit $= ai : r$ retentis symbolis, quæ supra (§. 401.) significante i sinum anguli observatione dati PNB, r sinum totum & a eam magnitudinem, cujus log-us jam antea (§. 405.) repertus est. Unde, quia etiam BN & FN seu z & x ex observatione datæ sunt, quantitas Q aquæ per lumen FB effluentis juxta normam paragraphi 406. facile calculo subducetur. Fig. 100.

In Propositionibus præcedentibus consideravimus ut plurimum motus aquarum tanquam liberrime factos absque ulla resistentia ex frictionibus. Verum, quia aquæ in fluviorum alveis decurrentes varias resistentias à fundo & spondis subeunt, ejusmodi resistentiarum omnino ratio habenda, atque in certis resistentiarum hypothesibus velocitates singulorum alicujus sectionis punctorum determinandæ sunt.

PROPOSITIO XLI. Problema.

Fig. 101. 420. *Resistentiis aquæ fluentis existentibus proportionalibus aquæ velocitatibus in singulis sectionis punctis, invenire ipsas velocitates.*

Sit flumen BHK, atque EG sectio ejus, AB superficies manens horizontalis, seu initium canalis aut fluminis. Producatur EG in Q usque ad occursum ejus cum plano AB itidem producto; & denique ex quibuslibet punctis E, F, G sectionis EG ad AQ demissæ sint perpendiculares EL, FM, & GN, &c. atque ordinatæ EH, FI, GK &c. alicujus curvæ KIH ipsi GE perpendiculares exponant velocitates aquæ per puncta E, F, G fluentis. Sint jam LE, a, QE, b; ordinata EH, quæ aquæ per punctum E fluentis quantitatem designat $=c$; resistentia fundi ex contactu $=m$, resistentia spondæ $=n$; QF, x & FI, y atque hæc ordinata pariter quantitatem aquæ per punctum F fluentis indicat ejusque celeritas est $y:c$, ac motus $=yy:c$. Et, quia (secundùm hypothesin) resistentia in E, hoc est m, ad resistentiam in F se habet ut EH ad FI, erit resistentia in F, quatenus hæc participat resistentiam in fundo, $=my:c$, & resistentia in eodem loco proveniens à resistentia spondæ $=ny:c$. Detractis nunc resistentiis à quantitate pressionis aquæ puncto cuilibet F incumbentis, quæ quantitas per MF, seu $ax:b$ exponitur, & reliquum $(ax:b)-(my-ny):c$, exponet vim extrudentem aquam per punctum physicum F, & cum hæc vis extrudens constanter proportionalis sit motui aquæ genito, erit $(ax:b)-(my-ny):c=yy:c$, id est $acx-bmy-bny=byy$, quæ est æquatio ad parabolam, cujus axis principalis ab EQ distat, propius accedens ad B, intervallo $\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n$, & vertex in hoc axe à fundo DH distat intervallo $b+\frac{bpp}{4ac}$, facta scilicet $p=m+n$; ac denique parabolæ hujus parameter erit $\frac{ac}{b}$. Quod erat inveniendum.

Fortasse aliæ possunt excogitari resistentiæ hypotheses, quæ præsente veriores sint, hanc enim à nobis assumptam non pro certissima vendito, sed duntaxat uno exemplo facili ostendere placuit, quo pacto velocitates aquarum fluentium assignari debeant, non neglectis resistentiis, quæ à frictionibus proveniunt.

SECTIO III.

De Effectis Fluidorum ex percussione.

Expendimus hactenus motus fluidorum, qui resultant ex pressione gravitatis, modo etiam excutiendi sunt effectus eorundem ex percussione, quoties ad alia fluida, aut ad dura corpora, alliduntur; vel etiam, quoties solida fluidis impinguntur. Ad hujus generis effectus referri debent motus imminutiones, quas corpora solida in fluidis protrusa tum ratione figuræ, tum etiam ratione motus ipsius subeunt, id est, resistentiæ corporum in fluidis delatorum. Quæ omnia, & nonnulla alia huc spectantia, sigillatim in hac tertia Sectione ad examen revocabuntur.

DEFINITIO.

421. Cum fluidum in aliud fluidum aut solidum corpus impingitur, fluidi actio in alterum corpus dicitur *Percussio*, & effectus, qui in corpore excipiente percussionem editur, dicitur *Impressio*.

In superioribus subinde impressionis vocabulum latiori paulò sensu sumsimus, etiam pro designando effectu, qui à *pressione* fluidorum provenit.

AXIOMA.

422. Eandem à fluido impressionem excipiet corpus quodcunque solidum, sive id data cum celeritate dataque in directione in fluido feratur, sive fluidum eadem celeritate & directione in idem corpus solidum, sed quiescens, impingat.

CAPUT XI.

De generalibus Affectionibus percussionis fluidorum.

PROPOSITIO XLII. Theorema.

423. *Fluidorum* ABb, CDd *plano* MN *æquabili motu ad angulos rectos occurrentium, ita tamen, ut partes eorum à plano repercussæ libere recedere queant, absque eo quod advenientes impediant, quantitates, æqua-* Fig. 102.

libus temporibus ad planum MN *accedentes, erunt in composita ratione celeritatum* AB, CD, *latitudinum* Bb, Dd *& densitatum* M, N.

Sint AB*b*, & CD*d* quantitates fluidorum æqualibus temporibus ad planum MN æquabili motu accedentes, eruntque celeritates accessus ut AB ad CD. Quantitates verò fluidorum ad planum MN simul appellentium sint in composita ratione voluminum & densitatum, & volumina in composita ratione celeritatum AB, CD & latitudinum, ergo massa ABb est ad massam CDd, sicut AB. Bb. M ad CD. Dd. N. seu in composita ratione ex rationibus celeritatis AB ad celeritatem CD, latitudinis Bb ad latitudinem D*d*, & denique densitatis M ad densitatem N. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

424. Hinc impressiones, quas massæ fluidæ AB*b*, CD*d* in planum MN exerent, erunt in composita ratione ex duplicata velocitatum AB, CD, & ex simplici tum latitudinum B*b*, D*d*, tum densitatum M, N, id est, impressio massæ AB*b* erit ad impressionem alterius CD*d*, sicut AB^2. B*b*. M ad CD^2. D*d*. N, vel sumta ED tertia proportionali ad AB & CD, sicut AB. B*b*. M ad ED. D*d*. N. Nam impressiones sunt ut motus fluidorum & motus in composita ratione massarum & velocitatum.

COROLLARIUM II.

425. Hinc etiam, si fuerint tubi AB, DE liquoribus quibuslibet pleni, quorum liquorum densitates sint M & N, effluantque liquores per foramina æqualia B, E, impingantque in extremitates vectis EB circa O convertibilis, erit momentum liquoris CB ad momentum alterius FE, ut M. CB. BO ad N. FE. EO.

Fig. 103. Nam percussiones in B & E sunt ut motus fluidorum, adeoque (§. 424.) in composita ratione ex duplicata velocitatum & simpla densitatum, existentibus tuborum foraminibus æqualibus; velocitates vero fluidorum ex tubis erumpentium (§. 386.) sunt in subduplicata ratione altitudinum CB & FE, seu duplicata velocitatum eadem, quæ altitudinum CB & FE; ac propterea percussio in B erit ad percussionem in E sicut CB. M ad FE in N. Verum hæ percussiones, quatenus in vectem BE circa O convertibilem agunt, habent rationem potentiarum motricium vecti applicatarum, ergo cum poten-

tentiæ vectis habeant momenta proportionalia factis ex potentiis ipsis in distantias earum ab hypomochlio O, habetur momentum percussionis in B ad momentum percussionis in E, sicut M. CB. BO ad N. FE. EO.

Corollarium III.

426. Propterea torrentes DG, HL, celeritatibus aA, bB ad planum EL accedentes, in æquilibrio consistent cum tertio ON celeritate Cc in idem planum EL impingente, si positis torrentum densitatibus R, S, T, & latitudinibus EG, KL, MN, fuerint $R. Aa^2. EG. AC = S. Bb^2. KL. BC$, & $R. Aa^2. EG + S. Bb^2. KL = T. Cc^2. MN$. Nam si planum EL consideretur instar vectis, erunt (§. 425.) $R. Aa^2. EG. AC$ & $S. Bb^2. KL. BC$, momenta percussionis æqualia, atque adeò in æquilibrio consistent cum tertio OMN quandoquidem (secundùm hypothesin) ejus media directio cC transit per C, & ejus percussio, seu $T. Cc^2. MN$, æquatur duabus oppositis potentiis simul sumtis, scilicet $R. Aa^2. EG + S. Bb^2. KL$. Fig. 104.

In hoc corollario præcipua continentur quæ circa collisiones & percussiones fluidorum inter se notatu digna occurrere possunt.

Corollarium IV.

427. Resistentiæ, quas corpora solida in fluidis delata patientur, erunt in composita ratione densitatum & duplicatæ velocitatum: adeoque hæ resistentiæ in uno eodemque fluido erunt in duplicata ratione celeritatum. Nam, quia (§. 422.) corpora in fluidis incedentia easdem à fluido impressiones subeunt, quas subirent, si fluidum ea celeritate, qua corpora in eo feruntur, in hæc corpora quiescentia impingeret, & quia hæ impressiones sunt ut percussiones fluidi, id est in composita ratione ex duplicata celeritatum & simplici densitatum, resistentiæ vero ut impressiones, quas corpora, quibus resistitur, in fluido subeunt; liquet omnino resistentias, quas corpora in medio fluido mota patientur, esse in composita ratione densitatum & duplicatâ velocitatum, aut si corpora in eodem medio ferantur, in duplicata ratione celeritatum.

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA.

Fig. 105. 428. *Si fluidum, seu torrens* CABD, *data quadam celeritate impingat perpendiculariter in planum* AB, *deinde etiam eadem celeritate, sed sub angulis obliquis* KOF, KOE *alteri plano* EF *primo* AB *æquali, erit impressio, quam subibit planum* AB, *ad impressionem alterius plani* EF *juxta directiones* OP, OQ *planis normales, in duplicata proportione sinus totius ad sinum anguli incidentiæ* KOE; *vel, ductis per* E, O *&* F *perpendicularibus* HL, KOP, IMF *ad planum* AB, *&* MN *normali plano* EF, *sicut* OF *ad* ON.

Quod fluida CABD, HEFI impressiones in plana AB & EF exerant juxta directiones OP, OQ planis normales, constat ex §. 249. Ex puncto R agantur RS, RT perpendiculares & parallelæ plano EF. Jam, quia filamentum fluidi KO ad angulos rectos in planum LM incidit, sub obliquis verò KOE, KOF in planum EF; & si RO celeritatem filamenti exponat, per se claret fore, ut filamentum totam suam vim in planum obliquum EF exerere nequeat, quia directio RO plano isti directe opposita non est, sed resoluta celeritate RO in laterales æquipollentes RS & RT, duntaxat aget in planum EF celeritate RS plano isti directe opposita atque contraria, cum altera RT utpote cujus directio plano EF parallela est, nullam prorsus impressionem in idem planum exerere possit. Est igitur impressio filamenti KO in plano LM ad impressionem ejusdem in plano EF ut RO ad RS, seu ut OF ad OM; unde quia idem est filamentorum numerus binis planis LM & EF allabentium, erit impressio torrentis HLMI in plano LM ad impressionem ejusdem in plano EF, sicut OF ad OM; impressio vero torrentis CABD in plano AB est ad impressionem torrentis HLMI in plano LM, sicut AB ad LM, id est, sicut OF ad OM, aut OM ad ON; ergo ex æquo impressio torrentis CABD in plano AB est ad impressionem torrentis HEFI in plano EF, sicut OF ad ON, id est, in duplicata ratione sinus totius OF ad sinum anguli incidentiæ IFO vel KOE. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Fig. 106. 429. Hinc si fluidum MABN plano AB allabatur celeritate data V, erit impressio, quam planum istud à fluido in id impingente exci-

excipiet, factum ex quadrato velocitatis in rectam AD; ducta scilicet AC perpendiculari ipsis AM, BN & demissa ex C super AB perpendiculari CD. Nam (§. 424.) impressio, quam subiret planum AB à fluido perpendiculariter impingente, est ut $V^2.AB$, per propositionem verò præsentem est impressio perpendicularis fluidi in plano AB ad impressionem ejusdem, sed oblique impingentis plano AB, ut AB ad AD, seu $V^2.AB$ ad $V^2.AD$; ergo $V^2.AD$ exponit impressionem fluidi oblique incidentis MABN in planum AB celeritate V, hæcque impressio exseritur juxta directionem EF plano perpendicularem & per ejus centrum gravitatis transeuntem, per §. 249. & §. 54.

Scholion I.

430. Ex præsenti propositione facile deducitur vis clavi seu gubernaculi, cujus ope naves, in quem volueris situm, converti possunt; quod paucis est indicandum. Sint itaque AB navis, B puppis cujus cardini inseritur clavus BH convertibilis circa B, cui per centrum gravitatis X normalis ducta sit Xy. Ponamus jam navem progredi juxta BA ex B versus A quacunque data velocitate, clavumque BH firmatum esse, ut cum AB producta in T quemcunque angulum acutum HBΓ constituat. Progrediente igitur navi versus E, aqua ABHG, juxta directiones rectæ AB parallelas, ea ipsa celeritate in clavum BH impinget, qua navis contrario sensu versus E fertur; & quia (§. 422.) idem effectus resultat, si aqua ABHG data celeritate in clavum navis quiescentis impingat, quam si navi progrediente clavus eadem illa celeritate aquæ allidatur, & aquæ clavo impingentis impressio est BS, posita unitate pro velocitate, ductisque BR normali ipsi GH, & RS normali BH, quæ impressio exponenda per BS exeritur in clavum juxta directionem XY per centrum gravitatis clavi BH ductam. Idcirco progrediente navi juxta BA, aqua resistens eundem effectum præstabit, ac si clavus impelleretur juxta XY potentia quadam BS; atque adeò hinc liquet, hac potentia BS navim in seipsam conversum iri. Sed quia directio XY alteri HG, juxta quam navis progreditur, non conspirans nec directe contraria, nec etiam perpendicularis est, potentia BS quatenus directioni XY applicatur, non est absoluta potentia, quæ navis conversionem causetur; sed ductis BN perpendiculari BH, æqualique facta ipsi BS, & NO parallela BV, hæc NO exponet vim ple- Fig. 167.

nam

nam conversionis navis; quoniam ON normalis est directioni navis OA, & potentia BN = BS resolvitur in æquipollentes BO & ON, quarum BO, in directum posita ipsi OA, nihil ad gyrationem navis conferre, sed tantummodo ejus motum progressivum aliquantum morari potest, adeo ut sola potentia ON restet, quæ conversionis effectum præstet. Similiter si clavus habeat situm BF, denotabit KI vim rotationis navis, si scilicet ductis QL & BI normalibus clavo BF, factaque BI = BL, etiam IK rectæ AT perpendicularis ducta fuerit.

431. Ex contemplatione figuræ statim apparet, ipsas KI & ON æquales esse posse, etsi anguli IBK & NBO diversi sint. Ex quo sequitur, duas diversas clavi positiones æqualiter aptas esse posse ad navis conversionem circa se ipsam. Agantur enim SP & LM parallelæ TB, quæ ipsis ON & KI respective æquales erunt, quandoquidem triangula PSB & ONB, nec non MLB & KIB similia & æqualia existunt. Jam $HR : PS \,(= HB : SB) = HB^2 : RB^2$, & $ML : QF = QB^2 : FB^2$; ergo si PS & ML vel KI & ON æquales sint, erit ex æquo $HR : FQ = QB^2 : RB^2$, atque adeò $HR.RB^2 = FQ.QB^2$. Hinc, si BH vel BF dicatur a; RH, t; QF, u, erunt $RB^2 = aa - tt$, & $QB^2 = aa - uu$, adeòque $HR.RB^2 = FQ.QB^2$ fiet $aat - t^3 = aau - u^3$; seu $u^3 - t^3 = aau - aat$, adeòque dividendo per $u - t$, erit $uu + ut + tt = aa$, quæ est æquatio indeterminata infinitas suppeditans diversas clavi positiones, quarum binæ & binæ æqualiter aptæ sunt ad navis conversionem.

432. Idcirco, si $u = t$, habebitur $3tt = aa$, atque adeò $t = \sqrt{\tfrac{1}{3}aa}$; & hic valor sinus anguli VBH dabit positionem gubernaculi BH, in qua vis rotationis navis *maxima* existet. Unde si angulus VBH fuerit graduum 35, 16′ circiter, vel angulus HBT graduum 54, min. 44, positio clavi BH ad conversionem navis aptissima erit.

SCHOLION II.

433. Quæ in præcedenti scholio ostensa sunt, etiam molis alatis
Fig. 108, 109. facili negotio possunt applicari. Sit enim DE ala verticalis vento circumagenda, cum axicula molæ AB quemlibet angulum acutum ECB continens; ventusque celeritate ut 1, & in directione nN parallela CB, alæ DE allabatur, sintque E*e*, F*f* parallelæ AB, & FC = CE, ductisque EM, ML normalibus ad F*f* & FE, & LV parallela rectæ F*f*. Per alæ centrum N ducta intelligatur N 1 æqualis

LE

LE plano alæ DE perpendicularis, & exponet hæc N1 venti impressionem ejusque directionem, quam quælibet linea 2F2E alteri FE parallela subibit, adeò ut totalis impressio, quam ala à vento excipiet, juxta directionem alæ normalem, futura sit PC. N1. Porrò si per punctum 1 transeat recta 13 parallela Nn vel AB, & per punctum N recta N3 eidem Nn normalis, impressioni N1 æquipollebunt laterales 31 & N3, quarum prima 31, utpote AB seu axiculo parallela, ad alæ conversionem nihil confert; sed tantum N3 eidem axiculo molæ AB perpendicularis: adeoque vis rotationis alæ ex impressione juxta N1 derivata erit PC. N3. Verum, quia rectæ N1, 13 & N3 totidem aliis LM, LV & MV parallelæ sunt in plano EFM, & triangula LEV & MLV similia, erunt etiam MLV & 1N3 æquiangula & æqualia, quoniam insuper est LE = N1. Hinc etiam LV = N3 = vi rotationis alæ DE. Hinc itidem PC. N3 = PC. LV.

Igitur si dicantur FE, a; PC, b; FM, t; reperietur LV = $(aa-t^3):aa$, & PC. LV = $(aabt-bt^3):aa$. Intelligatur insuper alam DE aliam habere positionem ac modo habuit, cui respectiva FM sit u, reliquis iisdem manentibus, quæ antea, erit hoc casu homologa PC. LV = $(aabu-bu^3):aa$. Unde, si in binis hisce diversis positionibus ala debeat eadem vi circumagi, ponendum $(aabt-bt^3):aa = (aabu-bu^3):aa$. Hinc $u^3-t^3 = aau-aat$, quæ divisa per $u-t$, præbet $uu+tu+tt=aa$, quæ est eadem æquatio ac antea (§. 431). Adeòque facta $t=u$, reperitur iterum $t=\sqrt{\tfrac{1}{3}aa}$, atque adeò angulus FEM graduum 35 min. 16; alaque DE in hac positione à vento efficacissime circumagetur. Unde, si alæ DE & GI verticales sub- Fig. 108.
contrario situ eodem angulo seu æquali ECB & HCB scilicet 54$^{gr.}$ 44′ ad AB inclinentur, idemque de horizontalibus, in schemate non expressis, intelligatur; mola alata efficacissime versabitur & circumducetur à vento juxta directiones AB parallelas in alas impingente. Alas autem oppositas situm subcontrarium habere oportet, alioqui, si in eodem plano existerent, prorsus circumagi non possent, quandoquidem venti impressio in una ala destrueretur æquali impressione in ala opposita.

CAPUT XII.

De Resistentiis figurarum in fluidis motarum.

DEFINITIO.

Fig. 110. 434. SI fuerit figura quæcunque CBABC, linea CBABC ex curvis vel rectis composita, & recta CC terminata, & hæc figura in directione axis MA in fluido feratur ex A versus S; à postica parte verò super basi CC apposita sit alia figura CYC, cujus area curva CYC & recta CC comprehensa, sit ad rec-lum ex basi eadem CC in CL vel MO, quæ quadratum celeritatis exponit, qua figura in fluido incedit, sicut resistentia quam patitur figura CAC in fluido, præeunte ejus vertice A in recta MA, ad resistentiam, quam eadem figura subiret præeunte ejus basi: vel, quod eodem recidit, sicut resistentia figuræ aut potius lineæ curvæ CBABC ad resistentiam rectæ FF basi CC parallelæ & æqualis fluidi impressiones ad angulos rectos excipientis. Linea CBABC dicetur *patiens*, lineaque CIYIC *scala resistentiæ figuræ patientis.*

PROPOSITIO XLIV. Theorema.

Fig. 110. 435. *Si, ductâ per terminum* R *rectâ*, AR *axi* AM *curvæ patientis* CBABC *perpendicularis lineâ* RS, *parallelâ tangenti* Bα *curvæ patientis in* B, *deinde ex* A *normali* AT *super* RS, *& per* T *recta* TV *æquedistanti axi* AM, *in* BH *eidem axi parallela, sumatur ubique* HI *æqualis respectivæ* RV, *puncta* I *erunt in scala* CIYIC *resistentiarum figuræ patientis* CBABC; *erit resistentia curvæ* CBABC *in directione* MA *versus* S *promotæ, ad resistentiam lineæ rectæ* FF *axi normalis, sicut bilineum* CIYIC *ad rectangulum* CCLL. *Et resistentia superficiei rotundæ ex conversione curvæ* CBA *circa* AM *ad resistentiam circuli ex conversione rectæ* AT *circa eandem* AM, *ut solidum ex revolutione figuræ* CIYM *circa* MY *ad cylindrum ex conversione rec-li* CMOL *circa eandem* MY *seu* MO.

I. Curva ABC in sua elementa divisa intelligatur, quorum Bb unum, per cujus terminos agantur ZK, zk axi AM æquidistantes, rectæ AF in punctis G, g; ipsi zb ordinata BN occurrat in puncto β, ex quo ad elementum curvæ Bb perpendicularis βe demissa sit.

Po-

Ponantur insuper BD curvæ normalis, & ED axi AM parallela, ac ductis per puncta R & S lineis QR, QS parallelis AS & AR, & ex Q cadat Qθ perpendicularis super RS, & θω perpendicularis super AS. Adeo ut, si insuper lineola *ef* ordinatæ BN parallela ducta fuerit, figuræ *b*βB*fe* & RQSωθ similes futuræ sint, quandoquidem singula latera unius singulis alterius parallela sunt & similiter posita.

II. Adeoque in figuris similibus *b*βB*fe* & RQSωθ erit RA : θω = Bβ : *fe*, atque RA. *fe* = θω. Bβ. Verum, quia triangula QSθ & RAT similia & QS ac RA æquales sunt, erit etiam Sθ = RT, & per consequens θω = RV, ergo etiam θω. Bβ = RV. Bβ, id est, per constructionem = HI. H*h*; ac proinde RA. *fe* = rec-lo IH*h* areæ CIYIC inscripto.

III. Igitur, quia filamentum fluidi ZB*bz* in curvæ elementum B*b* impingentis impressio in hoc elementum juxta directionem BD est (§. 429.) AR. B*e*, quia AR exponit (secundùm hypothesin) quadratum celeritatis fluidi curvæ allabentis. Impressio verò, juxta BD, virtualiter continet impressiones ipsi æquipollentes laterales, juxta BE & ED directiones axi AM perpendicularem & parallelam, quarum perpendiculares axi BE, utpote quæ contrariæ & directe oppositæ sunt, quatenus ex duobus elementis circa axem AM similiter, sed ad oppositas partes sitis Bb, Bb derivantur, se mutuo elidunt, ut adeò nulla earum ratio habenda sit, sed solæ impressiones, juxta directiones ED axi parallelas, considerandæ veniant. Est verò (§. 39.) impressio juxta BD ad impressionem juxta ED ut BD ad ED, seu, propter triangula similia, EBD & *f*B*e*, sicut B*e* ad *ef*, id est, ut RA. B*e* ad RA. *fe* seu (num. II hujus) rec-lum IH*h*. Atqui, ut initio hujus numeri dictum, impressio fluidi, juxta BD est RA. B*e*; ergo impressio fluidi in elementum B*b*, juxta directionem axi AM parallelam, est rec-lum IH*h*. Atque adeò impressio, quam omnia B*b*, seu tota curva CBABC à fluido subibit, id est, resistentia hujus curvæ exponetur omnibus rectangulis IH*h*, quæ in bilineo CIYIC continentur, & in bilineum istud evanescunt; hoc est, resistentia curvæ CBABC, juxta directionem MA, motæ in fluido exponenda est bilineo CIYIC. Impressio vero, quam linea FF à fluido ad angulos rectos excipit, exponitur rectangulo ex FF in RA, seu (quia constr. CL = RA) rec-lo CLLC. Ergo resistentia, quam curva CBABC in fluido patietur, erit ad resistentiam lineæ FF, ut area CIYIC ad rectangulum CLLC. Quod erat primùm.

 Quoad

Quoad secundam partem Propositionis, cum impressio, quam elementum curvæ Bb à fluido subit juxta directionem ED axi parallelam, (num. 111 hujus) exponatur rec-lo IHh, atque revolutione plani CACY circa axem AY, elementum curvæ Bb describat zonulam conicam, quæ pariter elementum existet superficiei ex conversione curvæ CBA circa AM ortæ, rec-lum vero IHh eadem conversione describat tubum cylindricum solido ex figura CIYM circa MY conversa inscriptum; liquet omninò impressionem fluidi, quam zona conica ex Bb circa AM subibit, in directione axi AM parallela, exponi debere tubo ex rec-lo IHh circa MY. Ergo resistentia, quam universa superficies ex curva CBA circa AM excipiet, juxta AM à fluido impingente, exponitur omnibus tubis cylindricis ex rec-lis IHh circa MY, id est, solido ex figura CIYM circa MY revolvente, in quod omnes evanescunt. Impressio verò quam circulus ex conversione lineæ AF circa AM ortus subibit, exponetur cylindro, cujus basis sit ipse circulus, impressionem fluidi ad angulos rectos excipiens, altitudo verò AR vel CL, seu MO, quæ quadratum celeritatis fluidi allabentis exponunt; vel etiam cylindro ex conversione rectanguli CMO circa MO. Adeoque est resistentia solidi rotundi in fluido CBABC ad resistentiam circuli FF, ut solidum rotundum CIYIC ad cylindrum CLLC. Quod erat secundum.

Corollarium.

436. Cum (constr.) sint $RA = HK$ & $RV = HI$, & $AR : RV = RS : RT = RS^2 : RA^2$, erit etiam $HK : HI = RS^2 : RA^2$; & dividendo $IK : HI = AS^2 : AR^2$, propterea erit $RA : AS = \surd HI : \surd KI$. Adeoque, data alterutra ex duabus curvis patiente, vel scala resistentiarum ejus, innotescet semper altera, si non algebraice saltem transcendenter; & quidem scala resistentiarum semper algebraica erit, si patiens curva fuerit.

Scholion.

437. Ergo, si vocentur AN, x; BN seu HM, y; HI, t; HK vel RM, a; AS, m analogia præcedentis corollarii $RA : AS = \surd HI : \surd KI$, præbebit $a : m = \surd t : \surd \overline{a - t}$ & $t = a^3 : aa + mm$. I°. Tum etiam $m = a\surd(a - t : t)$.. II°. Et quia triangula $b\beta B$ & ASR similia sunt, erit etiam $dx = dy\surd(a - t : t)$.. III°. Ac denique etiam $dy = dx\surd(t : a - t)$.. IV°.

IV°. Hæ postremæ nullo negotio ex secunda eliciuntur, substituendo duntaxat loco *a* & *m* elementa proportionalia *dy* & *dx*. Jam ope harum quatuor æquationum generalium varia problemata solvi possunt, quorum nonnulla proponere libet.

PROPOSITIO XLV. Problema.

438. *Assignare proportionem inter resistentias, quas triangulum isosceles* BER *in fluido patietur, si, ut in præcedente, modo basi* BR, *modo vertice* E *directione* AE *in id feratur.* Fig. 113.

Exstructo super dimidia basi AB quadrato, AM demittatur ex A perpendicularis AF ad latus trianguli EB, & per punctum F agatur FG parallela axi EA, & facta AI vel BH æquali BG, erit recta HI scala resistentiarum lineæ EB, eritque adeo resistentia lineæ EB ad resistentiam lineæ BA ut rec-lum BI ad rec-lum BP, seu ut AI ad AP; atque adeò in duplicata ratione lineæ EB ad BA, vel aggregati laterum BE & ER ad basin BR trianguli isoscelis BER; atqui, ut resistentia lineæ EB ad resistentiam lineæ BA, ita resistentia linearum BE, RE simul, seu totius trianguli, præcedente ejus vertice E, ad resistentiam basis BR, ergo harum resistentiarum ratio æquivalet duplicatæ rationi laterum BE, RE ad basin BR. Nam, si BA repræsentet quadratum celeritatis trianguli, BG vel AI (§. 435.) exponet ordinatam constantem scalæ resistentiarum HI trianguli, vel potius lineæ rectæ patientis BE. Quod erat inveniendum & demonstrandum.

Corollarium I.

439. Adeoque resistentia quadrati, juxta directionem lateris in fluido delati, erit ad resistentiam ejusdem, sed in directione diagonalis pari celeritate incedentis, ut diameter quadrati est ad latus ejusdem. Nam si triangulum isosceles BER cogitetur rectangulum esse in E, erit (§. 438.) resistentia laterum BE, ER juxta AE ad resistentiam basis BR, quæ diameter est quadrati cujus triangulum BER est semissis, ut AI ad AP, seu BF ad BE; resistentia verò diametri quadrati BR perpendiculariter incedentis super AE, est ad resistentiam lateris quadrati BE itidem normaliter super AE delati, sicut BR ad BE seu 2BA ad BE, seu 2BE ad BR, id est BE ad BA; ergo ex æquo resistentia laterum BER, seu quadrati, juxta directionem

 dia-

diagonalis AE promoti in fluido, præcedente quadrati vertice E, ad resistentiam lateris BE fluidi, impressionem ad angulos rectos excipientis, est ut BF ad BA, seu ut latus BE ad diagonalem BR, adeoque invertendo, resistentia lateris BE super AE perpendiculariter in fluido delati, ad resistentiam quadrati juxta diagonalem incedentis, est ut diameter ad latus.

COROLLARIUM II.

440. Resistentia coni recti BER juxta directionem axis AE in fluido delati, præcedente tamen ejus vertice E, erit ad resistentiam ejusdem, præeunte ejus basi BR, iterum ut AI ad AP, seu ut BF ad BE. Nam (§. 435.) resistentia primi casus est ad alteram, ut cylindrus ex rectangulo AH circa AP ad cylindrum ex quadrato AM circa eandem AP, sed prior cylindrus est ad alterum ut AI ad AP, cum utriusque cylindri basis sit eadem. Ergo &c.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA.

Fig. 110. 441. *Assignare resistentias Sectionum Conicarum juxta directionem axis in fluido motarum.*

Si ABC sit *ellipsis* vel *hyperbola*, cujus centrum sit in M; dicanturque semilatus transversum AM, b; parameter c; abscissæ AN, x; semiordinatæ NB, y; æquatio ellipseos & hyperbolæ erit $byy = 2bcx \mp cxx$, in differentiata æquatione $bydy = bcdx \mp cxdx$, loco differentialium dy, dx earum proportionales a & m substituantur, quæ sunt nomina linearum RA & AS, fietque $aby = bcm \mp cmx$, atque adeò $m = aby : bc \mp cx$, & $mm = aabbyy : bbcc \mp 2bccx + ccxx$ (vel substituto ex æquatione curvæ valore ipsius $\mp 2bccx + ccxx$, in y) $= aabbyy : bbcc \mp bcyy$; hinc $aa + mm = (aabyy + aabcc \mp aacyy) : bcc \mp cyy$; hinc, quia (§. 437.) $t = a^3 : aa + mm$, erit $t = abcc \mp acyy : bcc + byy \mp cyy$ (seu ponendo e pro $b \mp c$) $= abcc \mp acyy : bcc + eyy$, & hæc foret æquatio scalæ resistentiarum CIY; ponatur insuper $bcc = eff$, & æquatio curvæ CIY erit $t = aeff \mp acyy : eff + eyy = \mp ac : e; \pm acff + aeff : eff + eyy$ (& substituendo in numeratore postremæ fractionis, loco $\pm c + e$ suum valorem b) $= \mp ac : e; + abff : eff + eyy$.

Igitur elementum areæ MHIY, seu rec-lum IH$h = \mp acdy : e; + abffdy : eff + eyy = \mp acdy : e; + abd\alpha : e;$ nominando arcum circularem α, cujus tangens est y & radius f; quandoquidem (§. 166.) hujus arcus

cus elementum, seu du, est $= ffdy : ff + yy$. Ergo area ipsa erit MHIY $= (abu \mp acy) : e$. Adeoque, si basis CM dicatur g; & arcus radio f descriptus, cujus tangens est g, nominetur A, erit universa area MCIY $= (ab\mathrm{A} \mp acg : e$. Rectangulum verò CO $= ag$. Ergo resistentia, quam curva CBABC in fluido patietur, erit ad resistentiam lineæ FF, sicut quantitas $ab\mathrm{A} : e ; \mp acg : e$ ad ag; id est, sicut $b\mathrm{A} \mp cg$ ad eg. Quod erat inveniendum.

Hæc ipsissima est resistentiarum ratio, quam Celeb. Jac. Bernoullius pluribus verbis, ast sine demonstratione & analysi, declarat Act. Erudit. Lipf. 1693. pag. 253, art. 5. Hæc proportio tantum obtinet, cum sectio conica juxta directionem axis majoris movetur, signumque superius ellipsin, hyperbolam verò inferius respicit.

COROLLARIUM I.

442. Si b fit infinita præ parametro c, fiet $e = b \mp c = b$, atque adeò ratio $b\mathrm{A} \mp cg$ ad eg, erit eadem, quæ $b\mathrm{A}$ ad bg vel A ad g. Unde cum ellipsis cujus latus transversum est infinitum, abeat in *parabolam*, manifestum est, parabolæ in fluido latæ juxta directionem axis, præeunte modo vertice mox basi, resisti in ratione arcus circuli radio semiparametro parabolæ descripti, cujus arcus tangens æquetur dimidiæ basi parabolæ, ad dimidiam hanc basin.

COROLLARIUM II.

443. Sin vero ABC fuerit *circulus*, ratio $b\mathrm{A} \mp cg$ ad eg abit in rationem cujus termini algebraice dati sunt, quod omnino meretur, ut hoc loco ostendatur. Quia circulus est ellipsis, cujus latus rectum æquatur parametro, fit hoc casu $b = c$, atque adeò $b - c = e = 0$; & hoc casu adhibenda est ratio $b\mathrm{A} - cg$ ad eg, seu $\frac{b\mathrm{A}}{e} - \frac{cg}{e}$ ad g, verùm $-\frac{cg}{e} = -cg : b - c = g - \frac{bg}{b-c} = g - \frac{bg}{e}$, ratio $\frac{b\mathrm{A}}{e} - \frac{cg}{e}$ ad g æquabitur rationi $\frac{b\mathrm{A}}{e} + g - \frac{bg}{e}$ ad g. Atqui, juxta paragraphum 166, est $\mathrm{A} = g - \frac{g^3}{3ff} + \frac{g^5}{5f^4} -$ &c.; ergo $\frac{b\mathrm{A}}{e} + g - \frac{bg}{e} = g - \frac{bg^3}{3eff} + \frac{bg^5}{5f^4e}$ vel (quia $bcc = eff$) fiet etiam $= g - \frac{bg^3}{3bcc} + \frac{bg^5}{5bccff} -$ &c. $= g - \frac{g^3}{3cc} + \frac{g^5}{5ccff} -$ &c. seu, (quia ff respectu cc aut gg infinita, atque adeò fractio $g^5 : 5ccff$ inde-

definite parva seu evanescens est) $= g - \frac{g^3}{3cc}$. Erit ergo resistentia segmenti circularis CBABC ad resistentiam ejus basis, seu ei æqualis rectæ FF, sicut $g; -g^3 : 3cc$, ad g, id est, ut $cc - \frac{1}{3}gg$ ad cc, vel $bb - \frac{1}{3}gg$ ad bb; aut, quod eodem recidit, velut quadratum diametri, demta una triente quadrati baseos segmenti, ad quadratum diametri; prorsus ut invenit Cl. Bernoullius in loco supra (§. 141.) citato.

Scholion.

444. Solidum rotundum CIYIC est ad cylindrum CLLC sicut omnia MH. HI. Hh ad $\frac{1}{2}$MC². CL, vel sicut $\int tydy$ ad $\frac{1}{2}ayy$. Atqui cum t sit (§. 441.) $= \mp ac : e; + abff : eff + eyy = a - \frac{ab}{e} + abff : eff + eyy$, erit $tydy = aydy; - abydy : e; + abffydy : eff + eyy$; ergo $\int tydy = \frac{1}{2}ayy; - abyy : 2e; + \frac{abff}{e}. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$. Nam integrale ipsius $ydy : ff + yy$ est $\log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$. Ergo solidum rotundum, ex MHIY circa MY, ad cylindrum HKKH, vel ratio resistentiæ solidi BAB ad resistentiam baseos BB, præeunte modo vertice A, modo basi BB in directione MA, est sicut $\frac{1}{2}ayy; - \frac{1}{2}abyy : e; + \frac{abff}{e}. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$ ad $\frac{1}{2}ayy$, vel sicut $yy; - byy : e; + \frac{2bff}{e}. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$ ad yy; aut denique etiam, ut $\frac{2bff}{e}. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)} \mp \frac{cyy}{e}$ ad yy. Ubi iterum signum superius respicit ellipsin, hyperbolam verò inferius.

Idcirco conöidi parabolico in directione axis suæ lato resistitur, præeunte modo vertice modo basi, in ratione $2ff. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$ ad yy, vel $2cc. \log. \sqrt{(cc + yy : cc)}$ ad yy.

445. Sphæræ segmento resistitur, in iisdem ac in præcedentibus circumstantiis, in ratione $cc - \frac{1}{2}yy$ ad cc; atque adeò resistentia hemisphærii, juxta directionem axis MA lati, erit tantum semissis resistentiæ lineæ FF.

Nam in sphæra fit $b = c$ & $e = 0$, at $\log. \sqrt{(ff + yy : ff)} = \frac{yy}{2ff} - \frac{y^4}{4f^4} +$ &c. hinc ratio $yy; - byy : e; + \frac{2bff}{e}. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$ ad yy abibit in rationem

tionem $yy - \frac{by^4}{2eff}$ ad yy; vel $2eff - byy$ ad $2eff$ (aut quia $eff = bcc$), in $2bcc - byy$ ad $2bcc = 2cc - yy$ ad $2cc = cc - \frac{1}{2}yy$ ad cc.

PROPOSITIO XLVII. Problema.

446. *Invenire curvam patientem* ABC, *quæ sui ipsius sit scala resistentiarum.* Fig. 110.

Oportet ergo curvas CAC & CYC similes & æquales esse, adeò ut BH = HI, & AM = MY, ut & AN = PY. Positaque, ut in præcedentibus, RS parallela elemento curvæ quæsito Bb, erit RV = HI = BH, & Ru = hi = bh, adeoque βb = Vu, ductisque per u recta $u\sigma$ ipsi RS occurrente in puncto σ, & per hoc rectula $\sigma\pi$ parallela RA; & super diametro RA descriptus circulus transibit per punctum T, cum angulus RTA (constr.) rectus sit; quibus positis, & cum jam dictum sit Vu = $\sigma\pi$ æquari $b\beta$, erit Tπ = Bβ = Hh; atqui producta $u\sigma$ usque ad occursum cum semicirculo Φ ex hoc puncto agatur $\Phi\rho$ parallela RA; Tπ = Tρ + $\rho\pi$ = Tρ + $\Phi\sigma$, seu, ut alibi (§. 463, num. 111.) ostendetur = Tρ + TΦ, unde omnes Tπ seu Bβ id est ordinata BN = omn. Tρ, seu ordinatæ TV + omnibus arculis TΦ, seu arcui AT, est ergo ordinata curvæ quæsitæ BN aggregatum arcus AT ejusque sinus, atque adeò curva ABC est cyclois ordinaria. Quod erat inveniendum.

Hinc resistentia cycloidis CBABC erit ad resistentiam basis ejusdem, ut area cycloidis ad rec-lum circumscriptum, atque adeò ut 3. ad 4.

PROPOSITIO XLVIII. Problema.

447. *Ex omnibus frustis conicis* BCSR *super eadem data basi* BR *ejusdemque altitudinis* AD *invenire verticem* E *illius, cui minime resistatur, si in directione axis* AD *in fluido incedat data quadam celeritate.* Fig. 111.

Super AB, facto quadrato AM ex A super EB, demittatur perpendicularis AF, & ducatur FG parallela axi coni EA, factaque BH = BG agatur HI parallela BA, & (§. 435.) HI erit scala resistentiarum trianguli BER, cylindrusque ex conversione rec-li AH circa AI exponit resistentiam coni BER in fluido, & cylindrus ex AL resistentiam coni CES, atque adeo annulus ex conversione rectanguli KH circa AP exponet resistentiam curticoni BCSR, ex-

 cepta

cepta resistentia, quam circulus CS subibit in fluido, cujus impressiones ad angulos rectos excipit, quæ circuli CS resistentia exponitur cylindro ex AN circa AP. Ergo resistentia universi frusti conici BCSR exponi debet duobus solidis, scilicet annulo ex KH circa AP, & cylindro ex AN circa eandem, & (secundum hypothesin) hæc duo solida *minimum* quoddam efficere debent. Sit V punctum medium ipsius BK, eritque VA distantia centri gravitatis rectanguli BL ab axe AP, adeoque $p.$ AV exprimet circumferentiam, quam centrum gravitatis una rec-li conversione describet circa DA, ubi p significat exponentem rationis peripheriæ circuli ad radium. Unde cum solida rotunda (§. 47.) inveniantur ex ductu figuræ rotantis circa aliquem axem in viam centri ejus gravitatis, factum ex rec-lo BL in $p.$ AV, id est $p.$ AV. CK. BH æquabitur annulo ex rec-lo BL circa AP, peripheria vero, quam centrum gravitatis rectanguli AN describit, erit $\frac{1}{2}p.$ AK, adeoque $\frac{1}{2}p.$ AK². KN erit valor cylindri ex AN circa AP. Atque adeò $p.$ AV. BK. BH + $\frac{1}{2}p.$ AK². NK exponit resistentiam quam curticonus BCSR in fluido subibit, ac propterea efficere debet aliquod *minimum.* Aut etiam annulus ex rectangulo LM circa AP rotato debet esse in suo genere *maximus*, quandoquidem prædictorum solidorum ex KH & AN complementum est ad datum cylindrum ex quadrato AM circa AP rotato. Adeoque $p.$ QI. HL. HM quod solidum annulum illum ex LM exprimit, debet esse *maximum.* Jam, si dicantur AB, a; AD, $2b$, seu AO & OD, unaquæque seorsim b; AE, x; facili calculo reperietur solidum $p.$ QI. HL. HM $= (x-b). 2a^3bp : aa + xx$, unde omissa quantitate constante in numeratore, quacum indeterminata $x-b$ multiplicata est, $(x-b) : aa + xx =$ maximo. Hinc log. $(x-b)$ − log. $(aa+xx) =$ constructio, atque adeò $dx : x-b = 2xdx : aa+xx$, hinc $aa + xx = 2xx - 2bx$, id est, $xx - 2bx = aa$, vel $xx - 2bx + bb = aa + bb$, vel extrahendo radicem $x - b = \sqrt{(aa+bb)}$, seu $x = b + \sqrt{(aa+bb)}$. Quæ æquatio ipsissimam constructionem suppeditat, quam Celeb. Newtonus sine analysi & demonstratione tradidit in Schol. post Prop. 35. Lib. Sec. *Princ. Phil. Nat. Math.* quæ ita habet: ex puncto medio O altitudinis AD frusti conici ducatur OB, cui æqualis fiat OE, eritque E vertex coni quæsiti BER.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA.

Fig. 112. 448. *Datis positione recta* CI *duobusque punctis* A *&* B, *invenire in*

in hac recta positione data tertium punctum C, *ut lineæ ex eo ad data puncta ductæ* AC, CB *cum rectis* AD, BF *rectæ* CI *ejusque parallelæ* DF *normalibus, figuram rectilineam* DACBF *forment, quæ circa axem* DF *in gyrum acta producat solidum, cujus superficies exclusis circulis à lineis* AD, BF *descriptis*, minimam *in fluido resistentiam patiatur, incedente solido juxta directionem axis* FD.

Analys. Puncta data A, B à rectâ CI æqualiter distare ponantur, ut sint æquales CG & BI. Ex puncto T medio datæ lineæ LM (quadratum celeritatis exponentis, quâ fluidum solido patienti alliditur) tanquam centro descriptus sit semicirculus LPM, quem linea MO alteri DF in directum posita contingat in M, eritque adeò LM parallela ipsis AD & BF. Per L agantur LO, LN parallelæ lineis AC, BC, secantes semicirculum in P & Q, per quæ puncta transeant PR, QS parallelæ MN; rectæ MP & MQ ipsis PL & QL perpendiculares erunt. Puncto C, aliud c indefinite vicinum intelligatur, tum etiam rectæ cA, cB ductæ sint, & hisce parallelæ Lo, Ln semicirculum secantes in punctis q & p, per quæ pariter transeant ordinatæ qs & pr, ductisque Pπ & Qρ parallelis diameter LM, $p\pi$ & $q\rho$ erunt elementa ordinatarum PR & QS. Sit iterum p exponens rationis circumferentiæ circuli ad radium, bisectisque CG in α, & BI in β, denotabunt p. Eα circumferentiam radii Eα, & p. Fβ circumferentiam radii Fβ, adeoque annuli à lineis CG, Bi circa DF revolventibus geniti, erunt p. Eα. CG, & p. Fβ. BI.

II. Jam per ea, quæ in præcedentibus (§. 435.) sunt ostensa, resistentia, quam in fluido subibit annulus conicus à recta AC circa DF in orbem acta descriptus, exponitur per p. Eα. CG. LS & resistentia annuli ex BC circa DF per p. Fβ. BI. LR, adeoque resistent. annuli AC + resistent. annuli BC = p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. LR. Similiter resistent. annuli ex Ac + resistent. annuli Bc = p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. Lr. Jam, quia ex natura *minimi* resistentia annuli AC + resistent. annuli BC = resistent. annuli Ac + resistent. annuli Bc, erit etiam p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. LR = p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. LS, vel quia (secundùm hypothesin) CG & BI æquales sunt, dividendo per p. CG aut p. BI; erit Eα. LS + Fβ. LR = Eα. Ls + Fβ. Lr atque adeò Eα. Ss = Fβ. Rr, vel Ss : Rr = Fβ : Eα.

III. Ob parallelas LO, AC, & Lo, Ac; erit Oo : LM = cC : CG, vel Oo : Cc = LM : CG & Nn : Cc = LM : BI vel CG, ergo Oo = Nn. Atqui Nn : Pp ut triangulum NLn ad 2. triangula PTp, quorum scilicet basis Pp, altitudo verò pT; nam trianguli hujus PTp duplum

est

eſt triangulum, cujus baſis etiam Pp, ſed altitudo dupla ipſius pT, ſeu diametro LM æqualis; atque adeò ejusdem altitudinis cum triangulo LNn: & angulus NLn = angulo (modo nominati trianguli) ad verticem in circumferentia alterius ſemicirculi in figura non expreſſi; ergo $Nn : Pp = NL^2 : LM^2 = NL : PL = LM : LR$. Eodem argumento eſt $Oo : Qq = LM : LS$, ſeu invertendo $Qq : Oo$ vel $Nn = LS : LM$; ergo ex æquo $Qq : Pp = LS : LR$. Sed propter triangula ſimilia $Qq\rho$ & TQS, eſt Ss vel $Q\rho : Qq = QS : QT$, ergo ex æquo $Ss : Pp = LS.QS : LR.QT$. Item propter triangula ſimilia $Pp\pi$, TPR eſt $Pp : P\pi$ vel $Rr = PT$ vel $QT : PR = LR.QT : LR.PR$, ergo denuo ex æquo fit, $Ss : Rr = LS.QS : LR.PR$; atqui ſupra (num. 11. in fine) invenimus $Ss : Rr = F\beta : E\alpha$, ergo $F\beta : E\alpha = LS.QS : LR.PR$, & $E\alpha.LS.QS = F\beta.LR.PR$.

IV. Igitur, ſi dicantur LM, a; $E\alpha$, e; $F\beta$, f & MO, m; quarta proportionalis MZ ad datas BH, HA & LM dicatur g, & hæc g vel MZ deprehendetur eſſe media arithmetica inter incognitas MO & MN; unde, cum MO ſit m, altera MN invenietur $= 2g - m$. Et ſubſtitutis his valoribus in canone paulo ante reperto $E\alpha.LS.QS = F\beta.LR.PR$, pervenietur ad æquationem quinque dimenſionum, quæ, ſalvo calculo, erit ut ſequitur:

$$\begin{array}{llllll} +em^5 & -8eg.m^4 & +24egg.m^3 & -8aage.mm & +a^4e.m & -2a^4fg = 0. \\ +f & -2fg & +2aaf & -4aafg & +a^4f & \\ & & +2aae & -32g^3e & +16g^4e & \\ & & & & -8aaegg & \end{array}$$

Cujus radices determinant valores quæſitæ MO; qua inventa ductaque OL, ſi per datum punctum A ducetur AC parallela ipſi OL, quæ AC occurrat rectæ CI, ei occurret in optato puncto C. Quod erat inveniendum.

Exiiſſet pariter æquatio 5. dimenſionum, ſi vel maxime lineas CG & BI inæquales aſſumpſiſſemus.

COROLLARIUM I.

449. In canone ſupra invento $L\alpha.LS.QS = F\beta.LR.PR$ jam continetur ſolutio problematis de *ſolido minimæ reſiſtentiæ*. Hoc enim caſu CG & BI perinde ac AG & CI ſupponendæ ſunt indefinite parvæ, quo fiet, ut αE & AD, item βF & CE inſtar æqualium tractari debeant; & cum omnia ſolida $L\alpha.LS.QS$; $F\beta.LR.PR$, &c. ſingula ſcilicet cur-

curvæ elementa AC, CB, &c. respicientia, æqualia sint, ponatur unumquodque eorum dato cubo LM^3 æquale, eritque adeo $L\alpha . LS . QS = LM^3$, aut vocando $E\alpha$ vel DA, y; CG, dy; AG, dx; & ut prius LM, a, & denique MO, m; $a^5my:(aa+mm)^2 = a^3$, hinc $y=(aa+mm)^2 : aam = aa:m; +2m; +m^3:aa$, & $dy = -aadm:mm; +2dm; +3mmdm:aa$, & quia propter similitudinem triangulorum CGA & LMO, est $mdy = adx$, ideo invenietur quoque $dx = -adm: m; +2mdm:a; +3m^3dm:a^3$; ergo $x = mm:a; +3m^4:4a^3 - lm$, ubi lm significat log-um indeterminatæ m in log-mica, cujus subtangens est a. Et hæc solutio ad amussim convenit cum ea, quam Celeb. Joh. Bernoullius in Act. Erud. Lipf. 1699. p. 515. exhibuit, & in Actis anni sequentis uberius explicuit.

Corollarium II.

450. In æquatione $y=(aa+mm)^2:aam$, vel $y:a=(aa+mm)^2: a^3m$, si loco $aa+mm$, a, & m substituantur differentialia ds^2, dy, & dx, quæ illis proportionalia sunt, proveniet $y:a = ds^4 : dxdy^3$; adeòque $ads^4 = ydxdy^3$, quæ est æquatio differentialis curvæ quæsitæ in quam laudatissimus Bernoullius citato loco incidit, & ex ea postea expressiones coordinatarum in præcedenti corollario repertas elicuit. Hisce omnibus Illustris Marchionis Hospitalii solutio etiam consona est, quam in Actis Lipf. & in Commentariis Acad. Reg. Scient. anni 1699. publicari voluit.

Solas hactenus resistentias illas contemplati sumus, quas corpora in fluidis delata subeunt, cum juxta directionem axis moventur. Sed si in aliis directionibus incedant, res evadet paullò altioris indaginis, ut ex sequenti problemate eleganti abunde patebit.

Propositio L. Problema.

451. *Si datum trilineum quodcunque* ABH, *curva* AVB *ejus axe* AH *& ordinata* BH *terminatum, quomodocunque in fluido feratur juxta directionem* SM *ex* S *versus* M, *invenire mediam directionem* $X\omega$ *fluidi curvæ* AVB *allabentis, & impressionem, quam fluidum juxta inventam mediam directionem in trilineum exseret.* Fig. 113.

Analysis Geometrica. I. Per quodlibet curvæ AVB elementum Bb agantur BB, bb rectæ ipsi SM parallelæ, ductisque BC & Ce rectæ bb & elemento curvæ Bb normalibus, exponatque MO perpendicucularis ad axem curvæ AH quadratum celeritatis, quâ trilineum in fluido incedit, vel quod idem est, quadratum velocitatis, quâ filamentum *b*BB*b* elemento curvæ B*b* allabitur, exponetque (§. 429.) MO. B*e* impressionem, quam filamentum *bb*BB, juxta directionem BF in elementum B*b* exseret, sed impressioni isti æquipollent laterales juxta BG & GF, quarum hæc axi AH parallela, illa verò perpendicularis est; & quia impressiones juxta BF, BG & GF sunt ut hæ lineæ respective, vel propter triangulorum BFG & B*ef* similitudinem, sicut B*e*, B*f* & *ef*, atque impressio juxta BF = MO. B*e*, erit impressio juxta GF = MO. *ef*, & impressio juxta BG, = MO. B*f*. Et sic respective in quolibet alio curvæ elemento.

II. Agantur porrò per M recta MN parallela elemento curvæ B*b*, vel tangenti curvæ in B, ex N perpendicularis NP ad lineam SM, quantum opus est productam, PQ normalis MN, & denique QR parallela MO; eritque figura NPMO similis figuræ BC*b*E, cum singula latera unius figuræ parallela sint singulis alterius. Propterea latera in hisce duabus figuris similiter posita proportionalia erunt; hoc est, *b*E : *ef* = MO : QR, atque adeò MO. *ef* = QR. *b*E. Vel etiam, ducta per B recta indefinita BL parallela axi AH, atque in ea sumta KL ubique æquali respectivæ QR, ita ut inde nova curva δ*u*L resultet, erit MO. *ef* (= QR. *b*E) = KL. K*k* seu rec-lo figuræ AδLK inscripto.

Item EB : *f*B (= ON : RN) = MO : QR, ac consequenter MO. Bf = QR. EB, vel etiam = rec-lo IH*h* areæ AαIH inscripto, si, etiam in singulis ordinatis BH ultra axem AH productis, sumta fuerint segmenta HI æqualia homologis QR seu KL.

III. Quoniam igitur singulæ fluidi impressiones in curva AVB juxta directiones curvæ perpendiculares æquipollent lateralibus axi curvæ parallelis exponendis (num. I. hujus) rec-lis MO. *ef*, vel (num. II.) rec-lis LK*k*, & perpendicularibus axi exponendis (num. I.) per rec-la MO. B*f*, seu (num. II.) per rec-la IH*h*, impressio, quam universa curva AVB à fluido subibit, æquipollebit omnibus LK*k* & omnibus IH*h*; atqui omnium potentiarum *k*KL axi AH parallelarum media directio Z*u*, axi itidem parallela, (§. 56.) transit per centrum gravitatis areæ AδLK, quæ omnia LK*k* continet; & omnium potentiarum IH*h* axi AH perpendicularium media directio VY, axi AH normalis, seu ordinatis HI curvæ αYI æquidistans, transit per centrum gravitatis figuræ AαIH, quæ omnia IH*h* continet. Ergo impressio, quam fluidum in curvam AVB exerit

rit, eundem effectum præstat, quem præstaret potentia, quam exponit rec-lum MO. XZ, æquale areæ AδLK, agens in curvam juxta directionem XZ, simul cum potentia MO. XY, æquali areæ AαIH, agente in curvam AVB juxta directionem XY; quandoquidem hæ potentiæ MO. XZ & MO. XY æquivalent omnibus LKk & omnibus IHh, & in harum omnium mediis directionibus XZ & XY curvæ AVB applicatæ intelliguntur. Sed (§. 49.) media directio potentiarum MO. XZ & MO. XY est Xω, transiens per centrum gravitatis ω punctorum Z & Y, quibus rectæ XZ & XY terminantur, & quorum punctorum gravitas exponitur per datam MO, & impressio, quam proinde fluidum juxta hanc mediam directionem Xω in curvam AVB exeret, exponetur rec-lo 2MO. Xω.

IV. Sin verò curva A2V2B sit subter axem AH constituta, quæ juxta directionem eidem ac in præcedenti casu SM, parallelam feratur, transferenda erit OS ad oppositam partem O2S, & ducenda M2S, tum ex puncto N demitti debet super M2S perpendicularis N2P, & 2P2Q super MN, ac denique 2Q2R parallela MO; posita scilicet MN parallela tangenti curvæ A2V2B ad alteram axis AH partem translatæ in puncto 2B, erit 2Q2R communis ordinata curvarum δuL & αYI, sed ad curvam inferiorem A2V2B pertinentium, quas deinceps, confusionis vitandæ gratia, per 2α2u2L & 2A2α2Y2I insigniemus, quanquam in schemate expressæ non sunt, quia mente facile supplentur. Erit ergo impressio fluidi in curva inferiore A2V2B, juxta mediam directionem ejus 2X2ω, exponenda per 2.MO. 2X2ω, eandem prorsus ob rationem, propter quam impressio in curva AVB juxta mediam directionem Xω ostensa est exponi rec-lo 2.MO in Xω. Quod verò loco ipsius SM in curva AVB nunc sumenda sit 2SM inde est, quia revolutione figuræ A2V2B cum lineis 2B2B ipsis BB (secundùm hypothesin) parallelis circa axem AH, adeo ut si curva A2V2B alteri AVB similis & æqualis fuerit, cum ea congruat, lineæ 2B2B veniunt in situm B2B subter rectam BL, eosdem vel æquales angulos constituentes cum angulis BBL, quos lineæ BB supra BL extantes cum hac BL continent, adeò ut anguli quilibet homologi BBL & LB2B vel anguli MSO & M2SO æquales futuri sint.

V. Si jam bilineum BVA2V2B juxta directionem ipsis BB, 2B2B vel AT parallelas in fluido incedat, & quæratur media directio Cσ impressionum fluidi in curva BA2B, sic res expediri potest beneficio numerorum quarti & tertii hujus propositionis. Per numerum Fig. 114.

rum tertium etiam habentur media directio $X\beta$ & impressio fluidi in curva AVB, quæ illic exponebatur per $2.MO.X\omega$. Sit igitur $X\beta = 2M\omega$ in fig. 113. eritque $MO.X\beta$ impressio fluidi, juxta mediam directionem in curva AVB, designante MO ubique velocitatis quadratum, qua celeritate videlicet fluidum curvæ prædictæ alliditur. Similiter, juxta numerum quartum hujus, invenientur media directio $2X2\beta$ & impressio fluidi, juxta hanc mediam directionem 2 in $2X2\omega.MO$, vel (si $2X2\beta$ sit dupla ipsius $2X2\omega$) $MO.2X2\beta$. A puncto intersectionis C duarum $X\beta$ & $2X2\beta$ sumantur in hisce æquales $C\theta$ & $C2\theta$, scilicet $C\theta = X\beta$ & $C2\theta = 2X2\beta$, jungaturque $\theta 2\theta$, adeoque per §. 49. media directio potentiarum $MO.C\theta$ & $MO.C2\theta$, quæ æquipollent fluidi impressionibus, quas ambæ curvæ AVB & A2V2B subeunt, transit per centrum gravitatis punctorum θ & 2θ, id est, per punctum medium σ rectæ $\theta 2\theta$, & per punctum C, atque adeo hæc media directio est $C\sigma$, potentiaque seu impressio fluidi in universa curva BVA2V2B erit $2.MO.C\sigma$. Quæ omnia erant invenienda.

Aliter & brevius.

Numerus tertius hujus propositionis, ac consequenter quæ post eum sequuntur, omnia velut corollarium duntaxat deduci possunt ex Propositione VIII. Libri Primi §. 59. Nam figuræ similes NPMO & BC*b*E præbent *b*B : *e*B (= MN : QN) = MO : QR atque adeò MO. B*e* = B*b*. QR. Atqui MO. B*e* (num. 1. hujus) exponit impressionem filamenti fluidi *bb*BB in curvæ elemento B*b*, ergo hæc impressio etiam exponi potest per B*b*. QR, atque adeo fluidum eandem vim in elementum B*b* exserit, quam si singula elementi puncta juxta directiones eidem perpendiculares urgerentur potentia QR, adeo ut tota res reducatur ad Coroll. 1. prædictæ Prop. 8. Lib. I. Idcirco duntaxat propositionis ejusque corollarii constructiones forent relegendæ, atque loco curvarum ABB, XF & XD in figura 15. substituendæ AVB, *u*YI & δuL figuræ 113. ac denique, loco potentiarum BG in illa, subrogandæ potentiæ QR in hac figura, incideremusque in easdem penitus conclusiones, quas in præcedentibus numeris præsentis propositionis elicuimus.

Co-

Corollarium I.

452. Idcirco, ducta per punctum C recta Co parallela axi AH, invenietur sinus totus ad tangentem anguli $oC\sigma$, quem media directio $C\sigma$ bilinei BA2B cum axe AH, seu linea huic axi parallela Co continet, ut aggregatum arearum $A\delta LK$ & $2A2\delta 2L2K$ ad differentiam arearum $A\alpha IH$ & $2A2\alpha 2I2H$. Nam demissis ex punctis θ, σ, 2θ perpendicularibus θo, $\sigma\xi$, $2\theta 2o$ ad Co, & quia σ est punctum medium rectæ $\theta 2\theta$, seu centrum gravitatis punctorum θ, 2θ, erunt (§.46.) $2.C\xi = Co + C2o$, & $2.\xi\sigma = \theta o - 2\theta 2o$; adeoque $C\xi : \xi\sigma$, vel sinus totus ad tangentem anguli $\xi C\sigma = Co + C2o : \theta o - 2\theta 2o = MO.\,Co + MO.\,C2o : MO.\,\theta o - MO.\,2\theta 2o = A\delta LK + 2A2\delta 2L2K$ ad $A\alpha IH - 2A2\alpha 2I2H$. Nam (constr.) $MO.\,Co$; $MO.\,C2o$; $MO.\,\theta o$ & $MO.\,2\theta 2o$ æquantur areis $A\delta LK$, $2A2\delta 2L2K$; $A\alpha IH$ & $2A2\alpha 2I2H$.

Corollarium II.

453. Sin verò bilineum fuerit ABE2BA, cujus partes, superior ACB & inferior A2B, inæquales sint, punctumque altissimum C arcus curvæ superioris ACB non existat in arcus termino B, sinus totus erit ad tangentem anguli, quem media directio impressionis fluidi in bilineo B2B cum axe AE continet, ut $A\delta LK + A2\delta 2L2K - FKL$ ad $A\alpha YI - A2\alpha 2Y2I$. Ubi δL est scala impressionum fluidi axi bilinei AE parallelarum, quæ ex perpendicularibus curvæ arcui AC derivantur, & FL est scala impressionum axi etiam parallelarum, sed derivatarum ex perpendicularibus arcui curvæ BC; & quia impressiones illæ axi parallelæ, quibus arcus BC afficitur, directe contrariæ sunt parallelis axi AE, quibus AC urgetur, ideo differentia arearum $A\delta LK$ & FLK sumenda est ad habendam expressionem impressionum axi AE parallelarum, quibus tota curva ACB supra axem extans afficitur. Curvæ verò αYI, $2\alpha 2Y2I$ ad axem IA exstructæ sunt scalæ impressionum axi AE normalium ex perpendicularibus curvarum ACB & A2B impressionibus derivatarum, ac denique $2\delta 2L2K$ est scala impressionum axi parallelarum pertinentium ad curvam A2B. Curvarum αYI & $2\alpha 2Y2I$ ordinatæ in punctis axis I & 2I nullæ sunt, quia lineæ BB & 2B2B, quæ fluidi bilineo allidentis directionem denotant, bilineum in punctis B & 2B contingunt. Propter eandem rationem etiam curvæ FL ordinata Fig. 115.

 in

in puncto F, in quo scilicet recta BF axi parallela alteri AK occurrit, nulla est.

COROLLARIUM III.

Fig. 113. 454. Si jam dicantur MO, a; OS, b; MS, c; coordinatæ AH, x; BH, y, & ON, m; ac MN, n: erunt SN $= b + m$, vel N2S respectu curvæ inferioris $= b - m$. Hinc similitudo triangulorum SMO, SNP præbebit PN vel N2P $= (ab \pm am) : c$, ubi signum superius respicit curvam superiorem AVB, inferius verò inferiorem. Porrò habetur MO : QR ($=$ MN : QN) $= MN^2 : PN^2$, atque adeò QR $=$ MO. $PN^2 : MN^2 = (b \pm m)^2 . a^3 : aacc + ccmm$, vel assumendo magnitudinem e, atque ponendo ecc æquale a^3, $= (b \pm m)^2 . e : aa + mm = (bbe \pm 2bem + emm) : aa + mm = e, \pm 2bem : nn; + (bb - aa) . e : nn$, vel ponendo denique $bb - aa = ff$, invenietur tandem scalarum resistentiæ seu fluidi impressionum communis ordinata QR $=$ KL $=$ HI $= e; \pm 2bem : nn; + eff : nn$.

Fig. 116. Jam data æquatione curvæ patientis AVB vel A2V2B, eaque differentiata, si loco elementorum dy & dx ordinatæ & abscissæ substituentur eorum proportionales a & m, seu MO & ON, habebitur æquatio expressa indeterminatis x, y & m, & quantitatibus datis seu constantibus, ex qua elicietur valor ipsius m in x & y ac constantibus, in quo ope æquationis curvæ patientis AVB vel A2V2B alterutra ex indeterminatis x vel y semper eliminari potest. Invento verò valore ipsius QR in y & constantibus, areæ AδLK, 2A2δ2L2K; & AαIH, 2A2α2I2H inveniri poterunt, si non algebraice saltem transcendenter per series, aut etiam approximationibus. Sed horum omnium usus uno atque altero exemplo illustrari debet.

455. EXEMPLUM I. Esto rectangulum BA2B incedens juxta directionem AT in fluido resistente; quæritur media directio SA impressionum hujus fluidi rectangulo allabentis. Angulus BA2B recta AH bisectus sit, & hæc linea AH versus W producta consideretur instar axis linearum AB & A2B, quarum hæc repræsentat curvam patientem inferiorem, illa vero superiorem; atque demissis ex B, 2B & ex puncto T in recta AT, pro libitu accepto, perpendicularibus BH, 2B2H ac TW secante AN in puncto S, erunt AH $=$ BH & A2H $=$ 2B2H, propter angulos semirectos BAH & 2B2A2H. Sint insuper AH $=$ BH $=$ X & A2H $=$ 2B2H $= x$, & BH $=$ Y, 2B2H $= y$, unde X $=$ Y & $x = y$; hinc dX $= d$Y, & $dx = dy$; unde utroque casu erit $a = m$,

atque

atque adeò $nn (= aa + mm) = 2aa$. Ergo substitutis hisce valoribus in formula ipsius QR valores determinante, invenietur pro linea AB ejus valor huic casui applicatus QR $(= e, + 2bem : nn; + eff : nn) = e; + be : a; + eff : 2aa$, (seu restituendo $a^3 : cc$, & $bb - aa$ valores quantitatum e & ff) $= (a^3 + 2aab + abb) : 2cc$. Adeoque elementum areæ $A\delta LK$ seu rec-lum $Lk = (aa + 2ab + bb). adY : 2cc$, & area ipsa $= (aa + 2ab + bb.) a. AH : 2cc$. Similiter area $2A2\delta 2L2K$ erit $= (aa - 2ab + bb). a. A2H : 2cc$. Area $A\alpha IH$ pro linea AH $= (aa + 2ab + bb). a. AH : 2cc$; & area $2A2\alpha 2I2H = (aa - 2ab + bb). a. A2H : 2cc$. Hinc (§. 452.) AW : SW seu sinus totus ad tangentem anguli SAW $= A\delta LK + 2A2\delta 2L2K : A\alpha IH - 2A2\alpha 2I2H$, atque adeo analytice erit $AW : SW = (aa + 2ab + bb). a. AH, + (aa - 2ab + bb.) a. A2H$ ad $(aa + 2ab + bb). a. AH, - (aa - 2ab + bb). a. A2H = (2ab + cc). AH, + (cc + 2ab). A2H$ ad $(cc + 2ab). AH, - (cc - 2ab). A2H$. Ducatur TV parallela AL, eritque ob angulos semirectos MTW & WTV, $MW = TW = WV$, atque adeò cum AW (§. 454.) dicatur b & TW, a; erunt $a + b = AV$, seu $aa + 2ab + bb = AV^2 = cc + 2ab$, & $aa - 2ab + bb = cc - 2ab = AM^2$; hinc $AW : SW = AV^2. AH + AM^2. A2H : AV^2. AH - AM^2. A2H = TL^2. AH + ML^2. A2H : TL^2. AH - ML^2. A2H = R.T^2 + R^2.t : R.T^2 - R^2.t = T^2 + Rt : T^2 - Rt$. Positis $AL : TL = R : T$ & $AH : A2H = R : t$; ita ut T & t tangentes sint angulorum datorum TAL & AB2B, ducta scilicet rectanguli diametro B2B, existente sinu toto seu radio R. Ducatur adhuc NX parallela TV vel AL, eruntque etiam MQ, NQ, & QX æquales; jam quia $AW : SW = AQ : NQ$ vel QX, erit etiam $= AX + AM : MX = LN + LM : LN - LM$, atque adeò $AW + SW : AW - SW = 2LN : 2LM = LN : AL$ vel LM. Verum, quia paulò ante reperiebatur $AW : SW = T^2 + Rt : T^2 - Rt$, erit etiam $AW + SW : AW - SW = T^2 : Rt$; ergo etiam $LN : AL = T^2 : Rt$: sed est $AL : LT = R : T = Rt : Tt$; ergo ex æquo $LN : LT = T^2 : Tt = T : t$. Ducatur diagonalis rectanguli 2AA, eaque producatur in Z, & existente AL radio, seu sinu toto, erunt TL & ZL tangentes angulorum TAL & ZAL vel A2A2B, quæ tangentes dicebantur T, & t; atque adeò $LN : LT = LT : LZ$; sunt ergo NL, TL & ZL in continua ratione, ac per consequens NL ad TL in subduplicata ratione NL ad ZL, sed hæc ratio NL ad ZL componitur rationibus NL ad AL, & AL ad ZL, id est, 2A2B ad A2B; ergo ratio NL ad TL est subduplicata ejus, quæ componitur ex NL ad AL & longitudinis rectanguli AB ad latitudinem A2B;

 atque

atque hæc eſt analogia, quam Celeb. Jac. Bernoullius in Actis Lipſ. 1696. pag. 336. ſine ulla analyſi & demonſtratione exhibuit, & in quam haud dubie via multo breviore incidit. Nam licet hunc caſum particularem non parum brevius, quam hoc loco à nobis factum ſit, ſolvi poſſe non ignoro, non abs re tamen fore arbitratus ſum, ſi methodum noſtram generalem talia tractandi etiam in aliquo caſu fuſius illuſtrarem, de cujus veritate aliunde conſtare poſſit.

456. Præſens exemplum particulare ſic brevius etiam expedietur: per angulos rectanguli B & 2B agantur BC, 2B2C æquidiſtantes ipſi AT, & per punctum A eidem perpendicularis C2C, ac denique ex punctis C, 2C demittantur ad latera rectanguli perpendiculares CD2C2D, ac aſſumta unitate pro deſignanda celeritate, qua rectangulum in fluido incedit, vel quod idem eſt, pro velocitate, qua fluidum lateribus rectanguli AB, A2B allabitur, & (§. 429.) A2D exponet impreſſionem fluidi, quam latus A2B in directione ipſi normali excipiet, & AD exponet impreſſionem, quam latus AB excipiet juxta directionem lateri A2B parallelam, ſeu AB perpendicularem. Unde cum media directio AN impreſſionum fluidi in lateribus AB & A2B naſcatur à potentiis lateralibus AL & LN, neceſſe eſt ut habeatur, $AL : LN = A2D : AD$; atqui $A2D : A2B = (A2B)^2 : (A2C)^2 = AL^2 : AT^2$, & $A2B : 2A2B$ vel $AB = ZL : AL = AL.ZL : AL^2$, ergo ex æquo $A2D : AB = AL.ZL : AT^2$; eſtque porrò $AB : AD = AB^2 : AC^2 = AT^2 : TL^2$, adeoque iterum ex æquo $A2D : AD = AL.ZL : TL^2$. Atqui (ſecundùm hypotheſin) $AL : LN = A2D : AD$, ergo $AL : LN = AL.ZL : TL^2$, & quia $TL : AL = TL^2 : AL.TL$, erit denique ex æquo $TL : NL = AL.ZL : AL.TL = ZL : TL$, atque adeo TL eſt media proportionalis inter tangentes angulorum datorum ZAL vel A2A2B & NAL, ut ſupra invenimus. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 113, & 114. 457. EXEMPL. II. Reſumatur bilineum BA2B, quod ponatur eſſe parabolicum, cujus æquatio $2ax = yy$; exiſtentibus coordinatis ad axem AH, x & HB vel 2H2B, y ac parametro $2a$. Æquatio bilinei differentiata præbet $adx = ydy$, vel ſubſtitutis loco elementorum dx & dy lineis proportionalibus m & a; $am = ay$ atque adeò $m = y$; hinc $nn = aa + yy$. Idcirco $QR = KL = HI$ ($= e$; $\pm 2bem : nn$; $+ eff : nn$) $= e$; $\pm 2bey : aa + yy$; $+ eff : aa + yy$. Hinc (§. 454.) rec-lum $Lk = edy$; $\pm 2beydy : aa + yy$; $+ effdy : aa + yy$.

Atqui omnia edy ſeu ſumma $edy = ey$; ac omnia $ydy : aa + yy$ æquantur log-mo rationis $aa + yy$ ad aa qui log-us dicatur $z : a$; reſpicitque lo-

logarithmicam, cujus subtangens est unitas. Et denique omnia $dy : aa + yy$ æquantur arcui circulari ω applicato ad aa quadratum radii, cujus arcus tangens sit y; nam ejusmodi arcus elementum seu $d\omega = aady : aa + yy$. Propterea invenietur area $A\delta LK$ $(2A2\delta 2L2K) = ey$; $\pm 2bez : a$; $+ ff\omega : aa$; adeoque addendo $A\delta LK + 2A2\delta 2L2K$; $= 2ey$; $+ 2eff\omega : aa$ (vel loco ff restituendo suum valorem $bb - aa$) $= 2ey$; $+ 2bbe\omega : aa$; $- 2e\omega = 2eg$; $+ 2bbe\omega : aa$; positâ ad abbreviandum $g = y - \omega$.

Arearum $A\alpha IH$ $(2A2\alpha 2I2H)$ elementum est $= edx$; $\pm 2beydx : aa + yy$; $effdx : aa + yy = eydy : a$; $\pm 2bey^2dy : a^3 + ayy$; $+ effydy : a^3 + ayy$; quia $ydy = adx$. Atqui $yydy : aa + yy = dy$, $- aady : aa + yy = dy - d\omega$, & ut antea, $ydy : aa + yy = dz : a$, ac propterea,

$A\alpha IH$ $(2A2\alpha 2I2H) = eyy : 2a$; $\pm (2bey - 2be\omega) : a$; $+ effz : aa$; adeoque $A\alpha IH - 2A2\alpha 2I2H = (4bey - 4be\omega) : a = 4beg : a$, posita scilicet $y - \omega = g$.

Ducantur per A rectæ AT parallela BB, & AS æquidistans $C\sigma$, eritque $AW : WS = C\xi : \xi\sigma = A\delta LK + 2A2\delta 2L2K : A\alpha IH - 2A2\alpha 2I2H = (2eg$; $+ 2bbe\omega : aa) : (4beg : a) = aag + bb\omega : 2abg$; & $TW : AW = a : b = 2abg : 2bbg$; ergo ex æquo fiet $TW : WS = aag + bb\omega : 2bbg$. Dicantur insuper TW, θ & SW, t; radiusque AW, r; eritque $\theta : t = aag + bb\omega : 2bbg$, & quia $r : \theta = b : a$, substitutis loco b & a proportionalibus r & θ, proveniet $\theta : t = \theta\theta g + rr\omega : 2rrg$; ex quâ elicietur $\theta\theta = \frac{2rr\theta}{t} - \frac{rr\omega}{g}$; adeoque ipsæ æquationis radices erunt $\theta = \frac{rr}{t} \pm \sqrt{\left(\frac{r^4}{tt} - \frac{rr\omega}{g}\right)}$. Jam quia singulæ r, g, ω & t datæ sunt, etiam θ data erit, quæ est tangens anguli TAW, quem directio figuræ BA2B in fluido incedentis cum axe AH continet, cum figurâ itinere permanente fertur absque conversionibus circa seipsam; qui angulus TAW angulus declinationis figuræ audit, ejusque tangens, TW declinatio ipsa; linea vero σC est directio, juxta quam figura in fluido ideo impelli debet, ut in directione ipsis BB, AT, &c. parallela itinere seu via manenti ea in fluido ferri queat; quæ omnia suo loco uberius explicabuntur. Fig. 114.

Cæterum exempla eorum casuum, in quibus curvæ, superior AB & inferior 2A2B, sunt similes & æquales, adeò ut hæ curvæ fluidi impressionibus expositæ communem abscissam AH, ordinatasque æquales BH & 2B2H habeant. Sed ea, ratione calculi, intricatiora evadunt, si curvæ AB & A2B, ut fig. 115. inæquales & tamen similes seu totæ ACE, A2BE æquales sunt, tunc enim punctorum B & 2B positio, atque adeò abscissarum AH, A2H, & ordinatarum BH & 2B2H magnitudo pendet à positione rectæ AT, seu ab angulo quæsito TAW. Quomodo vero pro casibus hisce calculus debeat subduci, ex sequenti elucescet corollario.

COROLLARIUM IV.

Fig. 115. 458. Sint $\int mdy : nn = A1 : a$; vel $A2 : a$; vel $A3 : a$ pro curvis AC, A2B & CB, item $\int dy : nn = B1 : aa$ vel $B2 : aa$; aut $B3 : aa$, respectu earundem curvarum AC, A2B, & CB. $\int mdx : nn = C1 : a$, vel $C2 : a$, vel $C3 : a$; respectu earundem curvarum, & denique $\int dx : nn = D1 : aa$, vel $D2 : aa$ vel $D3 : aa$. Ubi numeri, literis A, B, C, D postpositi non sunt potestatum indices, sed tantum indicant quamnam ex curvis AC, A2B & BC hoc ordine, quo recensentur, respiciant in figura 115. Unde, quia in fig. 113, QR vel KL aut HI $= e$; $\pm 2bem : nn$; $+ eff : nn = e$; $\pm 2bem : nn$; $+ (bb - aa). e : nn$; quia $ff = bb - aa$ ut supra (§. 454.) invenimus. Hinc area $A\delta LK = e. CD$; $+ 2be. A1 : a$; $+ (bb - aa). eB1 : aa$, respectu curvæ AC fig. 115. Area $2A2\delta 2L2K = e. 2B2H$; $- 2be. A2 : a$; $+ (bb - aa). eB2 : aa$, respectu curvæ A2B. Area $FKL = e. KF$; $- 2be. A3 : a$; $+ (bb - aa). eB3 : aa$, respectu curvæ CB. Area $A\alpha Yd = e. AD$; $+ 2be. C1 : a$; $+ (bb - aa). eD1 : aa$, respectu curvæ AC. Area $2A2\alpha 2Y2I = e. A2H$; $- 2be. C2 : a$; $+ (bb - aa). eD2 : aa$; respectu curvæ A2B, & Area $dYI = e. DH$; $- 2be. C3 : a$; $+ (bb - aa). eD3 : aa$; respectu curvæ BC. Ergo $A\delta LK + 2A2\delta 2L2K - FLK = e. F2K$; $+ 2be. (A1 - A2 + A3) : a$; $+ \overline{bb - aa}. (B1 + B2 - B3) e : aa$, & $A\alpha Yd + YdI - 2A2\alpha 2Y2I = e. H2H$; $+ 2be. (C1 + C2 - C3) : a$; $+ bb - aa. (D1 - D2 - D3) e : aa$. Atqui (§. 453) est $AW : WS = A\delta LK + 2A2\delta 2L2K - FLK : A\alpha Yd + YdI - 2A2\alpha 2Y2I$, ergo etiam $AW : WS = e. F2K$; $+ 2be. (A1 - A2 + A3) : a$; $+ \overline{bb - aa}. (B1 + B2 - B3) e : aa$, ad $e. H2H$; $+ 2be. (C1 + C2 - C3) : a$; $+ bb - aa. (D1 - D2 + D3) e : aa$. Unde, cum TW sit ad $AW = a : b$; habebitur ex æquo analogia, quæ suppeditabit æquationem quæsitam anguli TAW tangentem manifestaturam; sed quia ipsæ A2H, 2H2B, EH, HB ac per consequens ipsæ quoque HD & 2HD pendent à quantitatibus a & b, quarum hæc adhuc incognita est, ideo etiam ipsæ A2, A3, B2, B3, C2, C3 & D2 & D3 ab iisdem pendent; quod calculum perplexum reddit; præsertim si curvæ ACE & A2BE fuerint dissimiles seu diversæ.

459. Po-

459. Ponamus verò nominatas curvas ACE & A2BE similes & æquales esse, quo fiet ut arcus EB & A2B æquales sint, cum lineæ BB & 2B2B, ipsi AT (secundùm hypothesin) parallelæ, arcus in B & 2B contingant, propterea erunt $EH = A2H$, item $BH = 2B2H$, atque adeò $HD = D2H$, nec non producta 2B2H usque ad occursum ejus curvæ ECA in 3B, fiet $2H3B = 2B2H = BH$, ac per consequens linea BF, ipsi EA parallela, secabit curvam ECA in puncto 3B, adeo ut arcus BC & C3B similes & æquales futuri sint. Hisce positis reperietur $A1 = A2 + A3$; $B1 = B2 + B3$; $C1 = C2 + C3$ & $D1 = D2 + D3$; ac proinde hoc casu habebimus

$A1 - A2 + A3 = 2.A3$ seu dupla A3.

$B1 + B2 - B3 = 2.B2$.

$C1 + C2 - C3 = 2.C2$.

$D1 - D2 + D3 = 2.D3$. Adeoque hi valores, in analogia præcedentis paragraphi subrogati, præbebunt $AW : WS = e.F2K + 4be.A3 : a; + (2bbe - 2aae).B2 : a^2$, ad $e.H2H; + 4be.C2 : a; + (2bbe - 2aae).D3 : aa$, vel dividendo terminos per $2e$, sicut $FA; + 2bA3 : a; + (bb - aa).B2 : aa;$ ad $DH; + 2bC2 : a, + (bb - aa).D3 : aa$; & $WT : AW = a : b$; ergo ex æquo erit $WT : WS = a.FA + 2b.A3; + (bb - aa).B2 : a$, ad $b.DH; + 2bb.C2 : a; + (b^3 - aab).D3 : aa$; vel vocando tangentem anguli dati SAW, t; & tangentem quæsiti TAW, θ; habebimus $\theta : t = a^3.FA + 2aab.A3; + (abb - a^3).B2 : aab.DH, + 2abb.C2, + (b^3 - aab) D3$; adeoque, multiplicando extrema & media, habebimus æquationem sequentem generalem $a^3t.FA + 2aabt.A3 + (abbt - a^3t).B2 = aab\theta.DH, + 2abb\theta.C2, + (b^3\theta - aab\theta).D3$. In qua æquatione loco magnitudinum FA, DH, A3; B2, C2 & D3 subrogandi sunt earum valores, quos præbebit natura curvæ A3BC expressi quantitatibus a, b; aliisque constantibus; positisque loco b, radii seu sinus totius nomine r, & loco ipsius a nomine tangentis quæsitæ θ, habebitur æquatio in sola θ & quantitatibus constantibus seu cognitis data, cujus æquationis radices manifestabunt valorem tangentis anguli quæsiti TAW.

460. Exempl. Sint curvæ ACE & A2BE arcus æquales alicujus circuli, cujus radius $= e$, ac sinus complementi arcus AC, qui est semissis totius ACE vel A2BE, dicatur h, sintque $h^3 : 3ee = k$, & $k - h = l$, invenienturque $A3 = a^3e : 3c^3$, $B2 = l; + be : c; - b^3e : 3c^3$; $C2 = b^3e : 3c^3; - k$, ac denique $D3 = a^3e : 3c^3$. Erunt porrò AF vel $BH = be : c; - h$, & DH vel $D2H = ae : c$; qui valores in æquatione generali substituti, fractionum reductionibus ad nomen $3c^3$ rite

per-

peractis, præbebunt $bblt - aalt - aaht; + 2.(aa + bb)^2.bet : 3c^3 = - 2bbk\theta; + 2.(aa+bb)^2 : be\theta : 3c^3$. Atqui (secundùm hypothesin) est $l + h = k$, & (§. 454.) $cc = aa + bb$, ergo hi valóres, in postrema æquatione suffecti, præbebunt $bblt - aakt + \frac{2}{3}bcet = - 2bbk\theta + \frac{2}{3}bce\theta$. Hinc etiam $3bblt + 6bbk\theta - 3aakt = 2bce\theta - 2bcet$, & quadrando $9b^4lltt + 36b^4lkt\theta - 18aabblktt + 36b^4kk\theta\theta - 36aabbkktt + 9a^4kktt = (4bbee\theta\theta - 8bbeet\theta + 4bbeett)$ in cc. Unde substituendo $aa + bb$ loco cc, fiet $4aabbee\theta\theta - 8aabbeet\theta + 4aabbeett + 4b^4ee\theta\theta - 8b^4eet\theta + 4b^4eett = 9b^4lltt + 36b^4lkt\theta - 18aabblktt + 36b^4kk\theta\theta - 36aabbkktt + 9a^4kktt$. Vel positis loco b & a proportionalibus r & θ, in hac postrema æquatione, proveniet $4rree\theta^4 - 8rreet\theta^3 + 4rreett\theta\theta + 4r^4ee\theta\theta - 8r^4eet\theta + 4r^4eett = 9r^4lltt + 36r^4kt\theta - 18r^4lktt\theta\theta + 36r^4kk\theta\theta - 36rrkktt\theta\theta + 9kktt\theta^4$. Ex qua liquet problema esse solidum, nam radices hujus æquationis biquadraticæ exhibent valorem tangentis quæsitæ θ, seu tangentis anguli TAW, seu anguli declinationis bilinei 2BAC.

COROLLARIUM V.

461. Si curvæ AB & A2B sunt æquales, adeò ut communem abscissam AH habeant & ordinatas æquales BH & 2B2H, ut in figura 113. erunt A1 = A2 & A3 = 0; B1 = B2, & C1 = C2; D1 = D2, singulæ verò B3, C3 & D3 perinde ac A3 æquales 0; evanescet pariter linea, quæ in figura 115. repræsentatur per DH vel D2H, alteraque, quæ erat in hac eadem figura FA, in priore scilicet fig. 113. erit BH. Hoc ergo casu formula generalis paragraphi 459. mutabitur in $aat.BH + (bbt - aat).B2 = 2bb\theta.C2$. In exemplo proinde superiore (§. 457.) curvæ parabolicæ, retentis symbolis illic positis, erunt $BH, = y$; $B2 = \omega$ & $C2 = y - \omega = g$, atque adeò æquatio $aat.BH + (bbt - aat).B2 = 2bb\theta.C2$, abibit in $aaty + bbt\omega - aat\omega = 2bb\theta g$, vel $aatg + bbt\omega = 2bb\theta g$; atque adeò subrogatis loco a & b proportionalibus θ & r, erit $tg\theta\theta + rrt\omega = 2rrg\theta$, ac proinde $\theta\theta = \frac{2rr\theta}{t} - \frac{rr\omega}{g}$; quæ est eadem æquatio, quam citato loco reperimus. At sciendum hanc solutionem imperfectam esse, quoniam æquatio amplius non inservit, si ratio tangentis y ad arcum ω minor fuerit duplicata ratione secantis anguli SAW ad radium in fig. 114. Sed eo in casu ipsa θ, ne quidem supposita arcuum circularium rectificatione, nulla æquatione algebraïca exhiberi potest.

Scholion.

462. Ex allatis exemplis ſatis conſtare poteſt, quam late pateat ſolutio problematis in præſenti propoſitione exhibita. An verò & quousque ea cum ſolutione ejusdem problematis conveniat, quam ſummus geometra Joh. Bernoullius in tractatu, Gallico idiomate ſub titulo *Eſſay d'une nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux*, nuperrime edito dedit, utriusque collatio oſtendet.

Si angulus TAW datus ſit, & alter angulus SAW quæratur, problema facile eſt; tunc enim in ſuperioribus θ & r cum reliquis ſcilicet a, b, c, ſunt magnitudines cognitæ, & quæſita èſt t.

CAPUT XIII.

De Figuris, quas ſuperficies flexiles induere debent, cum Venti allapſus directe excipiunt, ſeu de curva Velaria.

QUamnam curvam induere debeat *velum* vento tumidum ante Celeberrimos Bernoullios nemo aſſignavit; ſed eximii hi geometræ invenerunt velum ab allabente vento in eam ipſam curvam flecti debere, quam Joh. Bernoullius & Leibnitius atque Hugenius funi laxo atque flexili, vel catenulæ ab ambobus ſui terminis pendenti convenire docuerunt, etſi eorum analyſis velariæ nusquam publici facta ſit juris. Sed quanquam *catenaria* atque *velaria* una eademque ſint curva, non tamen ideo putandum, unius inveſtigationem ſimul alterius quoque inventionem includere, adeò ut, qui catenariam geometrice invenerit, etiam velariæ problema ſolutum dediſſe cenſendus ſit, quod tamen Clariſſ. Vir David Gregorius inſinuare videtur, in ſua Catenaria Coroll. 7. poſt Prop. 2. ſic ſcribens: *Quod ſi loco gravitatis alia quælibet vis ſimiliter agens in lineam flexilem vires ſuas exerat, eadem producetur linea v. g. Si ventus æquabilis ſupponatur, & ſecundum rectas datæ poſitione rectæ parallelas ſpirans, linea vento inflata eadem erit cum catenaria.* Fateor quidem in theſi, ut ajunt, veram eſſe Egregii Viri aſſertionem, ecquis enim ambiget, quin alia quæcunque vis, loco gravitatis ſubſtituta, ſimiliter applicata, ac eodem prorſus ac gravitas modo agens, eundem

 eſſe-effectum, eandemque adeo curvam ac gravitas, productura sit? Sed theseos applicatio in negotio velariæ claudicat, cum notabilis disparitas intercedat inter actionem gravitatis in catenaria, & venti actionem in velaria. Nam æquales catenariæ particulæ æqualibus nisibus descendere conantur juxta directiones horizonti perpendiculares, secus quam in velaria, cujus particulæ etiamsi æquales à filamentis aëreis eadem etiam velocitate in eas impingentibus inæquales tamen impressiones subeunt, & quidem juxta directiones non horizonti, sed curvæ elementis perpendiculares. Cum igitur circumstantiæ, quibus gravitas in catenariam ventusque in velariam agunt, toto cœlo differant, nemo non videt, quod ea, quæ de catenaria demonstrata sunt, non magis velariæ quadrare queant, quam analysis curvæ lintei convenire possit indagini curvæ elasticæ, etsi notante Clar. Jac. Bernoullio elastica etiam eadem sit cum curva lintei. Quoniam igitur problematis catenariæ solutio non involvit solutionem velariæ, & quoniam hujus problematis solutio, vel rectius dicendo analysis, nusquam adhuc publice, quod sciam, exhibita est præterquam §. 103. ubi ad illustrationem generalissimi nostri theorematis problematis de velaria solutionem obiter elicuimus, partem physicam problematis alibi excutiendam illic relinquentes; nunc vero ex professo problema tractabimus, analysin ejus geometricam traditurі intelligentibus, ut opinor, non displicituram, præmissis tamen prius duobus lemmatis in aliis etiam usui futuris.

PROPOSITIO LI. LEMMA.

Fig. 117. 463. *Centro* O *& semilatere transverso* OA *descripti sint quadrans circuli* AGK, *& hyperbola æquilatera* ABM, *tum etiam logarithmica* AC *circa asymptotam* LK, *cujus subtangens sit* OL *æqualis radio quadrantis* OA, *quæ log-mica per punctum* A *transeat, ductisque ex quolibet hyperbolæ puncto* B *ad centrum* O *recta* BO, *tangente hyperbolam in vertice* AP, *secante in puncto* F, *& per hoc punctum* F *recta* FH *parallela radio* AO, *quadrantem secante in* G, *&* OK *in* H. *Si* KG *recta jungens puncta* K *&* G *producatur usque dum cum radio* OA *itidem protenso concurrat in puncto* D, *atque per hoc punctum ducta fuerit recta* DC *ipsi* LK *æquidistans. Rectangulum sub hac* DC *& radio* OA *æquabit ubique duplum respondentis sectoris hyperbolici* ABO.

Sumto alio in hyperbola puncto b, alteri B indefinite vicino, ducantur bO secans AP in f, item fh, parallela FH, circulum in g,

re-

rectam KG in a, & OK in puncto h interfecans; jungaturque Kg & producatur in d, per quod punctum alia de ducta fit priori DC æquidiſtans: agantur pariter dL & OG, item C$\varkappa$ parallela Od, & γg parallela OK, hyperbolæ ordinata EB continuetur usque in β, & CD usque in δ; quibus factis per quadrantis puncta G & K ductæ ſint tangentes GI & KI, quæ æquales erunt; quibus præparatis

I. Liquet fore dL parallelam tangenti log-micæ in puncto C, quandoquidem hujus log-micæ ſubtangens (ſecundùm hypotheſin) æqualis eſt OL; atque adeò $d\delta$ parallela & æqualis erit particulæ log-micæ Cc, ac etiam $c\varkappa = D\delta$.

II. Triangula ſimilia OEB, OAF præbent $OE^2 : EB^2 = OA^2 : AF^2$. Vel, quia in hyperbola quadratum OE æquatur binis quadratis OA & EB collective ſumtis, erit etiam $OA^2 + EB^2 : EB^2 = OG^2 : OH^2$; & dividendo $OA^2 : EB^2 = GH^2 : OH^2$ vel AF^2, vel invertendo ac permutando $EB^2 : AF^2 = OG^2 : GH^2$. Atqui $EB^2 . AF^2 = OB^2 : OF^2 = 2$. triang. BO$\beta$ ad 2. triang. FOf, id eſt, ad rec-lum FH. Hh, ergo 2. triangulum $BO\beta : FH . Hh = OG^2 : GH^2$.

III. Triangula ſimilia Gga & GIK exhibent $Gg : ga = GI : IK$, unde, quia tangentes IK & GI æquantur, etiam Gg & ga æquales erunt.

IV. Propter parallelas Od & hg, erit $Od : Dd = hg$ vel $HG : ag$ vel (num. III.) Gg, & invertendo ac permutando $Dd : Gg = Od : GH$, at $D\delta : Dd = OL$ vel $OG : Od$, ergo ex æquo $D\delta : Gg = OG : GH$, & propter triangula ſimilia OGH & G$g\gamma$, fit $Gg : \gamma g$ vel $Ff = OG : GH$ ergo ex æquo & per rationum compoſitionem, $D\delta : Ff = OA . D\delta : FH . Ff = OG^2 : GH^2$ (num. II.) $= 2$.triangulum $BO\beta : FH . Ff$ vel $FH . Hh$. Adeoque 2. triang. $AO\beta = OA . D\delta$ (num. I.) $= OA . c\varkappa$. ergo omnia 2. BOβ id eſt duplus ſector BAO = omnibus $c\varkappa$ in AO, id eſt rec-lo DC in AO. Quod erat demonſtrandum.

Aliter.

464. Per hyperbolæ punctum B ducta ſit tangens BT, ac per punctum T recta TV parallela OK rectæ OB occurrens in puncto V, ac denique agatur Bθ parallela AD.

I. Oſtendam, quod TV producta transibit per punctum G, adeo ut TO = GH. Nam in hyperbola lineæ GH, OA & OE ſunt in continua ratione, atqui propter tangentem BT, etiam OT, OA & OE ſunt in continua ratione, ergo OT = GH.

 II. Ele-

II. Elementum quadrantis Gg æquabitur lineolæ $B\beta$. Nam $Gg : \gamma g$ vel $Ff = OG : GH = AO : TO = EO : AO$, atqui etiam $B\beta : Ff = EO : AO$, ergo $Gg : Ff = B\beta : Ff$, atque adeò $Gg = B\beta$.

III. Figuræ ſimiles $b\theta B\beta$ & $BETV$, utpote quæ circa eandem rectam bT conſtitutæ, & è triangulis ſimilibus $b\theta B$, BET, & $bB\beta$, BTV compoſitæ ſunt, præbent analogiam $b\theta : B\beta$ vel (num. II. hujus) Gg aut (num. III. §. 463.) $ga = EB : TV = EO : TO$, atqui $ga : Dd = GH$. (num. I. hujus) $OT : Od$, & $Dd : D\delta = Od : OL$ vel OA, ergo ex æquo habetur $b\theta : D\delta = EO : AO = AO : TO$; atque adeò $b\theta . TO = AO . D\delta = AO . c\varkappa$.

IV. Eſt vero duplum trianguli $bTO = be . TO$, duplumque trianguli $BTO = BE . TO$, ergo duplum trianguli $BOb = b\theta . TO$ (num. III. hujus) $= AO . c\varkappa$, & per conſequens etiam areæ BAO duplum æquabit rectangulum ſub $AO . DC$. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

465. Ductis ex logarithmicæ puncto C ad puncta A & O rectis CA & CO, triangulum rectilineum CAO æquabitur ubique homologo ſectori hyperbolico BAO.

Corollarium II.

466. Jungatur OI, eaque producatur in P, eruntque $AP = OD$, & $OP = KD$. Nam, quia OS ipſi KD normalis eſt, erunt anguli SOK ejusve alternus APO & ODK æquales, atque adeo triangula rectangula AOP & OKD ſimilia, ob latera verò AO & OK æqualia erunt etiam hæc triangula æqualia, ac proinde $AP = OD$ & $OP = KD$. AP autem eſt tangens arcus AR compoſiti ex arcu AG, cujus ſinus OH æquatur tangenti AF anguli ſectoris AOB, & ex ſemiſſi GR complementi ejusdem. Et DC eſt log-us rationis DO ad AO, id eſt, log-us rationis tangentis AP prædicti arcus ſeu anguli compoſiti AOR ex angulis AOG & GOR ad radium ſeu ſinum totum AO. Atqui ratio AP ad $AO =$ rationi OK ad IK, id eſt, rationi, quam habet radius OK ad tangentem IK ſemiſſis complementi anguli AOG, cujus ſinus æquatur tangenti anguli ſectoris AOB.

Scho-

Scholion.

467. Hæc propositio plurimum conducit reductioni elementorum sectorum hyperbolicorum ad simpliciora elementa log-mica. Nam si $AO = a$; $OD = m$; $OE = x$; $EB = y$; $AF = z$, & $AE = u$. Atque his positis, erit

I. $y = \sqrt{(xx - aa)}$, $AF = a\sqrt{(xx - aa : xx)}$; adeòque $Ff = a^3 dx : xx\sqrt{(xx - aa)}$, & $FH . Hh = a^4 dx : xx\sqrt{(xx - aa)}$. Unde quia triang. $BO\beta$: triang. $FOf = OE^2 : OA^2$, reperietur duplum trianguli $BO\beta = aadx : \sqrt{(xx - aa)}$. Hoc idem brevius inventum fuisset ope num. IV. §. 466. uti ostendimus $2 . BOb = OT . b\theta$; nam $b\theta = xdx : \sqrt{(xx - aa)}$ & $OT = aa : x$, ergo $OT . b\theta = aaxdx : x\sqrt{(xx - aa)} = aadx : \sqrt{(xx - aa)}$. Jam $KH = (ax - a\sqrt{(xx - aa)}) : x$, & GH vel $OT = aa : x$; atque triangula KHG & KOD similia sunt, ergo $m = aa : x - \sqrt{(xx - aa)}$ & $x = (aa + mm) : 2m$, qui valor substitutus in præcedenti expressione elementi $BO\beta$, producet $2BOb = aadm : m$.

II. Quia $x = a + u$ & $dx = du$, erit $2BOb = aadx : \sqrt{(xx - aa)} = aadu : \sqrt{(2au + uu)}$, & $u + a = (aa + mm) : 2m$, vel $u = (m - a)^2 : 2m$, qui valor in formula $aadu : \sqrt{(2au + uu)}$ suffectus, dabit iterum $2BOb = aadm : m$.

III. Propter triangula similia OAF & OEB invenietur $ay = xz$, hyperbola verò præbet $y = \sqrt{(xx - aa)}$; unde $x = \sqrt{(aa - zz)}$, ex triangulis verò similibus KHG & KOD elicitur $am - mz = a\sqrt{(aa - zz)}$ & $z = amm - a^3 : mm + aa$, qui valor ipsius z ejusque elementi $a^3 dz : aa - zz = 2BOb$ substitutus, dabit etiamnum $2BOb = aadm : m$.

Similes regulas reducendorum sectorum hyperbolicorum ad logarithmos ex sua methodo generali reducendi quadraturas curvarum, quarum ordinatæ fractionibus rationalibus per abscissam varie affectam & datas, exhibitis exprimuntur, ad logarithmos, jam pridem elicuit Vir Celeb. Joh. Bernoulli in Comm. Acad. Reg. Scient. Paris. 1702. d. 13 Decemb. & in Act. Lips. 1703. pag. 30. & 31. Cæterum, etsi præcedens theorema nostrum de hyperbola tantum æquilatera agit, paucis tamen mutatis ad quascunque hyperbolas potest extendi.

PROPOSITIO LII. LEMMA.

468. *Si rectæ* AM *positione datæ alia* AB *magnitudine data perpendiculariter insistat, per cujus terminum* B *rectæ quæcunque* BM, Bm *ad alteram* AM *ducantur, & per puncta* M, m, &c. *in quibus huic occurrunt, perpendiculares* MN, mn, &c. *ipsis* BM, Bm, &c. *respective æquales, omnia puncta* N, n, &c. *in curva* LNn *hyperbolæ æquilateræ sita erunt, cujus centrum* A, *& semilatus transversum* AL.

Fig. 118. *Positisque punctis* M, m *indefinite vicinis, ac descripto centro* B *intervallo* BM *arculo* $M\mu$, *junctisque* AN, An, *rectangulum sub radio* BA *& arculo* $M\mu$ *duplum erit trilinei* ANn *seu elementi sectoris hyperbolici* ANL.

I. Ducatur NX parallela AM, & quia (secundùm hypothesin) $MN = BM$, & $AB = AL$, erit $AX^2 = XN^2 + AL^2$, vel $XN^2 = AX^2 - AN^2 =$ rec-lo BXL, ergo punctum N est in hyperbola æquilatera LN, cujus latus transversum est BL & centrum A. Curva LN etiam hyperbola erit, si MN ad BM fuerit in quacunque data ratione.

II. Per punctum N ducta sit tangens hyperbolæ Nq, eruntque tres MN vel BM, AL vel BA & Aq in continua ratione, atque adeò $BM : BA = BA : Aq$, atqui propter triangula similia ABM & μMm, est etiam $BM : BA = Mm$ vel $No : M\mu$; ergo $No : M\mu = BA : Aq$, atque adeo $BA . M\mu = No . Aq$ (num. IV. §. 464.) $= 2 . ANn$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

469. Adeoque, si tota AM infinitis composita sit particulis infinitesimis qualis Mm, & per singularum terminos rectæ BM ductæ intelligantur, erit factum ex omnibus arculis $M\mu$, quos vicinæ quæque BM intercipiunt, & radio BA æquale duplo omnium triangulorum ANn, quæ in sectore hyperbolico ANL continentur, id est, duplo ipsius sectoris.

COROLLARIUM II.

470. Ducendo igitur per punctum intersectionis t rectæ AN & tangentis hyperbolæ At in vertice, lineam tsr parallelam AL, & usL,

us L, quæ ipſam AL productam ſecet in puncto P; ac denique per punctum L logarithmicam LO, quæ ſubtangentem habeat æqualem radio AL, & per P agatur PO parallela AM log-micæ occurrens in puncto O; erunt omnes arculi $M\mu$ collective ſumpti, æquales rectæ PO. Nam quia (§. 469.) omnes $M\mu$ in AB $=$ 2. areæ ANL & (§. 463.) 2 ſect. ANL $=$ AB vel AL in PO, erunt omnes $M\mu$. AB $=$ AB. PO, atque adeo omnes $M\mu$ $=$ PO.

PROPOSITIO LIII. Problema.

471. *Si filum perfecte flexile* HA2H *ambobus ſuis terminis* H, 2H *fixum, ſpiranti vento juxta directiones* cc, CC, GG *datæ poſitione rectæ* AW *parallelas expoſitum ſit, aſſignare curvam, quam filum induere debet.* Fig. 118.

Analyſis Geometrica. I. Quia ventus impreſſiones in velariam exſerit (§. 249.) juxta directiones Cl curvæ quæſitæ ACH normales, atque adeò (§. 96.) conſtat tenacitatem veli in ſingulis ejus punctis eandem eſſe oportere; talis tenacitas conſtans per datam rectam AB axi AW normalem exponi poteſt, ſi venti velocitas ſit 1, ſin verò velocitas exponatur linea recta V, (§. 100.) tenacitatem per hoc factum V^2. AB repræſentare oportebit, ut mox videbimus. Nam ſumtis æqualibus & contiguis curvæ elementis Cc, & CG, per eorum terminos ordinatæ ad axem curvæ AW ductæ intelligantur cW, CI & GK, quæ rectas CC & GG ſecabunt in f & F; & demiſſa ex puncto f perpendiculari ad elementum curvæ cC, quæ ſit fd, per punctum d agatur de æquidiſtans axi AW, & denique eſto Ch $=$ GF, adeò ut fh differentia ſit inter fC & Fg; & his poſitis impreſſio, quam filamentum aëris ccCC celeritate V lati & in curvam impingentis in elementum Cc exſeret (§. 429.) exponitur per factum $V^2.cd$; ejusque directio Cl, ut jam dictum, eſt ubique curvæ perpendicularis; propterea, & juxta ea quæ alibi (§. 100.) dicta ſunt, tenacitas fili exponi debet magnitudine V^2. AB ejusdem generis cum $V^2.cd$, ſeu impreſſione quam elementum Cc excipit juxta Cl, vel quodlibet aliud juxta directionem ipſi normalem. Exponat jam Cl magnitudinem $V^2.cd$ vel potentiam curvæ in puncto C normaliter applicatam, ductisque Ck & lk axi AW parallela & normali, & potentia Ck erit $V^2.ce$; nam in triangulis ſimilibus Clk & cde, lineola ce alteri Ck homologa eſt, cum ſit $Cl : Ck = cd : ce$; atqui $Cl = V^2.cd$, ergo etiam $Ck = V^2.ce$. Jam, cum alibi (§. 93.) oſten-

ostensum sit, Ck esse ad fh ut tenacitas fili in elemento Cc, ad hoc elementum Cc, vel permutando Ck ad dictam tenacitatem ut fh ad Cc; erit $V^2.ce : V^2.AB = ce : AB = fh : Cc$, & permutando $ce : fh = AB : Cc$.

II. Per terminum B datæ BA ducantur BM, Bm parallelæ elementis curvæ CG, Cc, centroque B intervallo $BQ = CG = Cc$ descripto arculo QR, agantur QS, $R\sigma$ parallelæ AM, item Rx æquidistans BA; ST perpendicularis ipsi BQ, & denique TV parallela SQ, quibus positis, ultrò liquet, triangulum BQS triangulo cCf, & $BR\sigma$ triangulo CGF similia, æqualia, & similiter posita esse; adeò ut sint $xQ = fh$, $BV = ce$, & $Cc = BQ$ vel BR; adeòque analogia præcedentis numeri $ce : fh = AB : Cc$, eadem est cum $BV : xQ = AB : BQ$; in triangulis verò rectangulis similibus yQR & BTS, bases yQ & BS à perpendiculis Rx & TV proportionaliter dividentur, adeò ut sit $xQ : yQ = BV : BS$, & permutando ac invertendo $BV : xQ = BS : yQ = BA : Mm$; antea verò habuimus $BV : xQ = AB : BQ$; ergo etiam $AB : Mm = AB : BQ$, atque adeò $Mm = BQ = Cc$; quod cum de singulis Mm, quæ in tota Am & de singulis Cc, quæ in tota curva cGA continentur, respective valeat, liquet omnes Mm, seu totam Am vel AM omnibus Cc, seu toti cGA vel CGA æquari. Unde, quia BM tangenti velariæ in puncto C (secundùm hypothesin) parallela est, erit data BA ad AM seu ipsi æqualem curvam AGC, sicut ordinata CI ad subtangentem velariæ respicientem ejus punctum C. Hæc proprietas etiam catenariæ convenit, ut alibi velariæ atque catenariæ identitas jam (§. 106.) ostensa est.

III. Constructio autem curvæ hactenus ex ostensis facile elicietur: nam cum Mm sit $= Cc$, & Bm (secundùm hypothesin) parallela Cc, descripto centro B arculo $M\mu$, triangulum $Mm\mu$ triangulo cCf simile & æquale erit, ac proinde $Cf = m\mu$, & omnes Cf, id est, $WA =$ omnibus $m\mu$ seu mi, descripto scilicet centro B radioque BA circulo $A\omega$. Sic etiam abscissa AI æqualis existet $M\omega$ posita, ut antea, BM parallela tangenti curvæ in C.

Elementum verò ordinatæ $cf = M\mu$ & omn. cf, seu cW aut $CI =$ omnibus $M\mu$ (§. 470.) $=$ PO posita constructione in citato hoc paragrapho 470. Est ergo quælibet ordinata CI æqualis homologæ PO. Quæ omnia erant invenienda.

Co-

COROLLARIUM I.

472. Quia in hyperbola æquilatera LN tres AX, AL & Aq sunt continue proportionales propter tangentem hyperbolæ Aq, & ex natura hyperbolæ etiam tres AX, AL & rs, adeò ut Nq & rs æquentur; erunt, ducta As, triangula ABM & Asr similia; nam $AX = MN$ (constr.) $= BM$ est ad AL vel AB, sicut AL vel As ad Aq vel rs, atque adeò triangula ABM & rsA similia sunt, ac per consequens As ipsi BM seu etiam tangenti velariæ in C parallela est, angulusque uAs æquabitur illi, quem tangens velariæ modo nominata, & quantum opus est producta, cum axe AW constituit, cujus semissis est angulus rsu; unde cum PO sit log-us rationis PA ad LA, seu PA ad Au, hoc est, rationis rs ad ru; sequitur PO esse log-mum rationis, quam radius habet ad tangentem anguli rsu vel dimidii anguli uAs, in logarithmica, cujus subtangens par est radio AL; & in omni alia logarithmica, si sumatur quarta proportionalis ad log-micæ subtangentem AL, & ad log-um prædictæ rationis radii ad tangentem semissis anguli uAs, manifestabit ea ordinatam velariæ CI in puncto C, si scilicet angulus uAs æqualis fuerit angulo, quem tangens velariæ in C producta cum axe AW continet.

COROLLARIUM II.

473. Circulus centro B radioque BA descriptus rectam BM productam secet in Ω, eritque propter tangentem circuli AM & secantem $M\Omega$, $M\Omega : MA = MA : M\omega$, seu $2AB + M\omega : AM = AM : M\omega$, adeoque $2AB + M\omega : M\omega = AM^2 : M\omega^2$, & dividendo $2AB : M\omega = 2.AB.M\omega : M\omega^2 = AM^2 - M\omega^2 : M\omega^2$, atque adeò $2AB.M\omega = AM^2 - M\omega^2$. Innotescit ergo ex datis AM vel AC & $M\omega$ vel AI parameter velariæ AB seu Au.

Porro quia (§. 472.) $Ar : rs = AM : AB = 2AM.M\omega : 2AB.M\omega = 2AM.M\omega : AM^2 - M\omega^2$, erit As vel $Au : Ar = AM^2 + M\omega^2 : 2AM.M\omega$, & dividendo $Au - Ar$ vel ru ad $Ar = (AM - M\omega)^2 : 2AM.M\omega$, & $Ar : rs = 2AM.M\omega : AM^2 - M\omega^2$, ergo ex æquo $ru : rs = (AM - M\omega)^2 : AM^2 - M\omega^2 = AM - M\omega : AM + M\omega =$ curva AC abscissa ejus AI, ad AC + AI. Unde, cum sit $PA : LA = rs : ru = AC + AI : AC - AI$, & PO log-us rationis PA ad LA; erit etiam PO log-us rationis AC + AI ad AC − AI, cujus rationis termini, scilicet aggregatum & differentia curvæ AC & ejus abſciſſæ vel ſagittæ AI, dati ſint. Idcirco, ſi fiat ut 2Mω ſeu 2AI ad AC + AI ita AC − AI ad quartam magnitudinem Q, deinde ut ſubtangens log-micæ cujuscunque ad log-mum rationis AC + AI ad AC − AI in hac logarithmica, ita magnitudo vel linea Q ad aliam R, hæc linea, juxta præcedens corollarium, dabit ordinatam CI noſtræ velariæ AC.

COROLLARIUM III.

474. Juxta §. 110. erit media directio impreſſionis venti filum CAC inflantis in axe AW, nam hæc media directio angulum à tangentibus velariæ ductis per puncta C, C ad utramque axis partem ſimiliter ſita contentum, bifariam dividit, quod etiam axis AW præſtat; eſtque adeò (§. 110.) impreſſio venti in velaria, juxta ejus mediam directionem WA, ad tenacitatem velariæ in omnibus ejus punctis eandem, ſicut dupla Ar ad As, id eſt, ut ſupra (§. 473.) habuimus, ſicut $4AM.M\omega$ ad $AM^2 + M\omega^2$, id eſt, ſicut $4AC.AI$ ad $AC^2 + AI^2$. Unde, quia tenacitas velariæ (num. 1. §. 471.) eſt $V^2.AB = (AC^2 - AI^2 : 2AI).V^2$, erit impreſſio venti in velariam juxta ejus mediam directionem $WA = V^2.2AC.(AC^2 - AI^2) : AC^2 + AI^2$.

COROLLARIUM IV.

475. Velariæ verò æquatio differentialis ex allata conſtructione facillime elicietur; nam ſi dicantur BA, a; AI, x; CI, y; Cf, dx; cf, dy; $Cc = CG = ds$; $fh = ddx$, erit $ce = dy^3 : ds^2$, & analogia, in quam ſupra (num. 1. §. 471.) incidimus ce vel $dy^3 : ds$ ad fh ſeu ddx, ut AB vel a, ad Cc ſeu ds; quæ, multiplicatis extremis & mediis, dabit æquationem velariæ differentio-differentialem $dy^3 = adsddx$, in quam Celeberrimi Bernoullii etiam inciderunt, ut videre licet in Act. Erudit. Lipſ. 1695. pag. 546.

Æquatio differentialis velariæ elicitur ex ſimilitudine triangulorum ABM & $Mm\mu$; eſt enim $m\mu : M\mu = AM : AB$; unde quoniam $AB = a$, $M\omega = AI = x$, atque adeo $AM = \sqrt{(2ax + xx)}$, $m\mu = dx$ & $M\mu = CF = dy$; erit $dy = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$ prima æquatio differentialis primi gradus, naturam velariæ explicans.

Sin verò BM vel uI fuerit $= x$, tunc erit $AM = \sqrt{(xx - aa)}$, & $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$, quæ eſt altera velariæ æquatio differentialis.

Et

Et hæ ſunt æquationes, in quas laudati Bernoullii jam pridem inciderunt, quisque eorum ſua methodo propria uſus.

Scholion.

476. Ex noſtra conſtructione atque analyſi jam ſponte naſcuntur præcipuæ proprietates velariæ, & maxime notabiles. Nam

1°. Curva AC æqualis eſt ubique reſpectivæ ordinatæ XN hyperbolæ æquilateræ LN, cum hæc ordinata ſit æqualis MA, cui curva AC æqualis oſtenſa.

2°. Facta ubique AM = curvæ AC, ſi per velariæ punctum C parallela ducatur rectæ BM, ea velariam in puncto C continget.

3°. Area $uAC2f$ æquatur ubique rec-lo BAM ſeu rec-lo ſub curva AC & recta AB, quæ inſtar parametri eſt; atque adeò areæ $uAC2f$ ſuis homologis curvis AC proportionantur. Nam elementum areæ prædictæ eſt $f2f.fc = Bm.M\mu = 2.$trianguli BMm; ſunt enim $f2f$ vel $uW = Bm$, & $cf = M\mu$, ergo omnia $f2f.cf$ ſeu area $uAC2f =$ omnibus $2.MBm$, hoc eſt, duplo trianguli BAm, id eſt, rec-lo AB in Am, vel AB. AM ſeu AB. AC.

4°. Si in MI ſumatur $u\xi$ ejus magnitudinis, ut rec-lum $u\xi.AM$ æquet aream hyperbolicam ALNM, punctum ξ erit centrum gravitatis curvæ CAC. Sit enim centrum hujus curvæ in aliqua recta $\xi\gamma$ parallela ipſi AB, ponaturque curvam AC libratam pendere ad axem librationis $u2c$; erit (§. 44.) $AC.u\xi =$ omnibus $uI.Cc =$ omn. $BM.Mm =$ omn. $MN.Mm =$ areæ ALNM, atque AC = AM; ergo $AM.u\xi = ALNM$, unde cum centrum gravitatis curvæ CAC ſit etiam in axe AW, erit omnino in puncto ξ.

5°. Sin verò centrum gravitatis curvæ AC fuerit in recta $\delta\gamma$, erit (§. 44.) $A\delta.AC =$ omn. CI. Cc. Atqui omn. CI. Cc = AC. CI − omn. AC. cf = AC. CI − omn. AM. $M\mu$, & triangula ſimilia ABM & $Mm\mu$ præbent AM. $M\mu$ = AB. $m\mu$, atque adeo omn. AM. $M\mu$ = AB. ωM = AB. AI; ergo omn. CI. Cc = AC. CI − AB. AI = AM. CI − AB. AI; atque adeò $A\delta$ vel $\xi\gamma$ in AC = AC. CI − AB. AI = AC. CI − AC. $A\lambda$; ducta ſcilicet tangente $\omega\lambda$; adeòque $\xi\gamma$ = CI − $A\lambda$; adeòque centr. grav. curvæ AC diſtat à recta $c2c$ intervallo $A\lambda$ vel $\omega\lambda$.

6°. Adeòque ſuperficies genita ex converſione curvæ AC circa axem AI æquatur circulo, cujus radius poteſt duplum rec-li $\xi\gamma$. AC ſeu 2AC. CI − 2AB. AI. Nam ſupra (§. 47.) demonſtratum eſt, magnitudinem *genitam* ex rotatione alicujus *genitricis* circa axem positione datum, æquari facto ex magnitudine genitrice in viam centri ejus gravitatis; & viæ centri gravitatis sunt circumferentiæ circulares, à centro descriptæ, atque adeo radiis suis proportionales. Propterea magnitudines genitæ sunt in composita ratione magnitudinum genitricium & distantiarum centri earum gravitatis ab axe rotationis. Idcirco erit superficies ex conversione curvæ AC circa AI ad circulum quemcunque, cujus radius est R, in composita ratione magnitudinis AC superficiei genitricis ad magnitudinem R circuli genitricem, & distantiæ centri gravitatis γ illius magnitudinis ab axe AI seu $\gamma\xi$ ad distantiam centri gravitatis hujus, seu $\frac{1}{2}$R, hoc est, sicut AC. $\xi\gamma$ ad R. $\frac{1}{2}$R, id est, sicut 2AC. $\xi\gamma$ vel 2AC. CI — 2AB. AI ad R^2; adeoque si $R^2 = 2AC.CI - 2AB.AI$, erit superficies genita circulo æqualis.

7°. Eodem argumento circulus, cujus radius R potest duplum areæ hyperbolicæ, AMNL, æquatur superficiei ex conversione AC circa axem $u2c$ genitæ. Nam dicta superficies erit ad circulum, ut AC. $u\xi$ ad $\frac{1}{2}R^2$; vel ut 2AC. $u\xi$ ad R^2; atqui (num. 4.) AC. $u\xi$ = AMNL, ergo superficies ex curva AC circa $u2c$ est ad circulum radii R = $\sqrt{2}$AMNL, ut 2AMNL ad 2AMNL, id est in ratione æqualitatis.

8°. Sin verò ρ centrum fuerit gravitatis areæ uAC$2f$, ducatur $\rho\theta$ parallela AB, eritque (§. 44.) $u\theta$ in aream uAC$2f$ = omnibus momentis rec-lorum $f2c$ ad axem $u2c$ appensorum; hoc est $u\theta$. AM. AB = omnibus $\frac{1}{2}$. $c2c$. $c2c$. cf; nam (num. 3.) est area uAC$2f$ = AM. AB. Atqui $\frac{1}{2}c2c.\ c2c.\ cf = \frac{1}{2}$BM. BM. M$\mu$ = $\frac{1}{2}$AB. BM. Mm = $\frac{1}{2}$AB. MN. Mm, ergo omn. $\frac{1}{2}c2c.\ c2c.\ cf = \frac{1}{2}$AB in aream ALNM; atque adeò $u\theta$. AM. AB = $\frac{1}{2}$ AB. ALNM, vel $2u\theta$. AM = ALNM. Sed (num. 4.) habuimus etiam $u\xi$. AM = ALNM, ergo $u\xi$. AM = $2u\theta$. AM, vel $u\xi = 2.u\theta$; adeoque centrum gravitatis curvæ AC duplo longius distat à linea $u2c$, quam centrum gravitatis areæ uAC$2f$.

9°. Hinc solidum ex rotatione figuræ uAC$2f$ circa axem $u2f$, semissis est cylindri, cujus altitudo AB, & baseos radius potest duplum areæ hyperbolicæ ALNM. Nam hoc solidum (§. 47.) æquatur facto ex area uAC$2f$ in circumferentiam radii $u\theta$, cum ρ sit centrum gravitatis areæ, hoc est = AB. AM in circumf. radii $u\theta$ (num. 8.) = $\frac{1}{2}$AB. AM in circumf. $u\xi$. Atqui AC vel AM in circumf. $u\xi$ est superf. ex AC circa $u2c$ (num. 7.) = circulo cujus radius = $\sqrt{2}$ALMN; ergo solidum areæ uAC$2f$ circa $u2f$ rotatæ = cylindro, cujus radius potest 2ALMN, & altitudo est $\frac{1}{2}$AB; adeoque prædictum solidum dimidium est cylindri, cujus altitudo AB baseosque radius potest 2ALNM.

10°. Hinc ultrò sequitur, solida à figuris $uAC2f$, $uAc2c$ circa $u2c$ rotatis genita proportionari superficiebus ex curvis homologis AC, Ac circa eundem axem $u2c$, sicut areæ $uAC2f$, $uAc2c$ curvis AC, Ac proportionales sunt; quæ proprietas, & ea qua centrum gravitatis curvæ AC duplo magis à recta $u2c$ distat quam centrum gravitatis ρ areæ $uAC2f$, & ambo hæc centra γ & ρ ab axe AI æqualiter distant, Illustri Leibnitio, qui primus eam advertit, meritò memorabilis visa est.

11°. Centra gravitatis ρ & γ areæ $uAC2f$ & curvæ AC æqualiter distant ab axe velariæ. Nam (§. 44.) $\theta\rho$ in $uAC2f = \theta\rho . AB . AM$ $=$ omnibus $CI . f2f . cf = $ omn. $CI . BM . M\mu = $ omn. $CI . AB . Mm = AB . CI . AM -$ omn. $AB . AM . cf = AB . CI . AM -$ omn. $AB . AM . M\mu = AB . CI . AM -$ omn. $AB^2 . m\mu = AB . CI . AM - AB^2 . M\omega$, ergo etiam $\theta\rho . AM = AM . CI - AB . M\omega$. Sed (num. 5.) etiam habuimus $AM . \xi\gamma = AM . CI - AB$ in $M\omega$ vel AI, ergo $\theta\rho . AM = AM . \xi\gamma$, vel $\theta\rho = \xi\gamma$.

12°. Adeoque solidum ex conversione figuræ $uAC2f$ circa uI æquatur cylindro, cujus radius potest duplum spatium $2CI . AC - 2AB . AI$ & altitudo est AB. Hinc iterùm, solida ex figuris $uAC2f$, $uAc2c$ circa axem AI rotatis proportionalia sunt superficiebus ex curvis AC, Ac circa eundem axem in gyrum actis.

13°. Radius circuli osculatoris $C\beta$ in curvæ puncto C, est tertius proportionalis ad uA & uI. Nam, quia Bm & BM parallelæ sunt particulis curvæ Cc, & CG, sectores evanescentes $MB\mu$ & $C\beta c$ similes erunt; unde $M\mu : BM = Cc : C\beta$ vel permutando $M\mu : Mm$ vel $Cc = BM : C\beta$; atqui $M\mu : Mm = AB : BM$, ergo $AB : BM = BM : C\beta$, seu, quia $BM = uI$, erit $uA : uI = uI : C\beta$. Hinc curvæ $\alpha\beta$, ex cujus evolutione velaria describitur, initium α à vertice velariæ A æque distat ac punctum u in circuli quadrante uSL.

SECTIO IV.

De Motibus corporum in mediis resistentibus.

QUoties Galilæus, Torricellius aliique illius ævi Celeberrimi geometræ de motu egerunt, corpora in vacuo, id est, in medio, quod nec motum accelerare nec retardare queat, ferri supposuerunt; non quod nescirent ejusmodi medium resistendi facultate carens apud tellurem nostram non dari, sed quod non satis viderent, quo pacto resistentiæ geometriæ legibus possent subjici. Ab his ergo resistentiis medii tanto libentius animum abstraxerunt, quod existimarent non nisi per exiguos eas errores vixque sensibus perceptibiles determinationibus suis, ex suppositione vacui, inducere posse. Inter recentiores verò summi quique geometræ præclara Galilæi reperta circa motus doctrinam perfecisse & mirum quantum amplificasse non contenti, difficilem de motibus in mediis resistentibus materiam ad geometriæ, sed reconditioris, normam exigere fortunato successu aggressi & in regiones non antea cognitas delati sunt. Extant enim eximia hac de re Virorum Celeberrimorum *Newtoni*, *Leibnitii*, *Hugenii* & *Wallisii* meditata ante complures annos partim sine demonstrationibus edita, & breviter tantum indicata, partim etiam demonstrationibus munita, sed perbrevibus, nec ideò tyronum captui satis accommodatis, nisi Wallisium excipias, qui in suo schediasmate super hac re omnia minutim exponit, sed tantum in hypothesi particulari substitit resistentiarum in ratione celeritatum corporibus remoram afferentium. Post laudatos viros Cl. *Varignon* idem argumentum fuse, docte, atque perspicue pertractat in Actis Academ. Reg. Parif. Scient. annorum 1707, 1708, 1709 & 1710. adeò ut secuturis Mathematicis otium hac in re fecisse videatur; verùm, quia hæc materia tam directe ad institutum nostrum pertinet, ut si de ea agere omitterem, ex præcipuis aliquid opusculo meo deesse putarem, ideò non detrectabo post tot præclaros Autores etiam hanc doctrinam, quantum potero breviter simul & perspicue, proponere. Illorum inventis nonnulla propria addam, atque simplici principio insistam, cui ferme omnia, quæ ad motum actualem corporum attinent, superstruxi, scilicet *momentum cujuslibet solicitationis indesinenter agentis æquivalere momento celeritatis.* Quo principio nemo ex laudatissimis viris usus est in doctrina motuum corporum in mediis resistentibus latorum, saltem quatenus ex publicis eorum scriptis judicare licet, etsi hoc principio multa brevius & naturalius, quam ab aliis fundamentis, obtineantur.

C A-

CAPUT XIV.

Complectens generalia, quæ ad theoriam motus corporum in mediis resistentibus pertinent, & nonnulla Lemmata Geometrica in hac theoria necessaria.

DEFINITIONES.

Duæ sunt resistentiæ species, una *absoluta* altera *respectiva*.

I.

477. *Resistentia absoluta* est, quæ tantundem virium mobili detrahit, sive magna sive parva velocitate idem mobile feratur. Hujusmodi resistentiæ absolutæ exempla præbent media glutinosa & superficies asperæ: nam in fluido glutinoso eadem vi opus est ad separandas ejus partes, quâcumque demum celeritate mobile partes eas separare conetur. Sic etiam in frictionibus corporis in plano aspero incedentis eadem obstacula sunt superanda, sive magna sive parva velocitate mobile in plano aspero moveatur, & quocunque modo ipsa motus impedimenta se habeant, sive instar pilorum elasticorum deprimendorum, & postea sponte suâ sese iterum erigentium; sive filorum perrumpendorum ad instar, vel quoquo alio modo hisce æquivalente, ad hæc omnia definita quadam & determinata vi opus est, nec refert quæ sit agentis velocitas.

II.

478. *Resistentia* verò *respectiva* est, quæ provenit ab allisione medii fluidi partibus anterioribus mobilis. Hæc resistentia pendet à densitate medii & celeritate mobilis; partes enim fluidi (§. 422.) ea ipsa celeritate corpori in eo fluido delato allabi censendæ sunt, quâ corpus hisce particulis impingit, & quantitates fluidi corporibus allabentis (§. 423.) sunt in composita ratione densitatum & celeritatum.

III.

479. Medium fluidum atque resistens *aëris* nomine simpliciter insignietur, cum aër tantæ subtilitatis intelligi possit, ut eundem effectum præstare valeat, quem medium resistens.

IV.

480. *Motus primitivi* ſunt illi, qui in vacuo fierent. Sic motus primitive uniformis eſt motus æquabilis, quo corpus vi quacunque impulſum in vacuo incederet. Et motus primitive accelerati vel retardati à gravitate uniformi, ſunt motus illi, quos gravi in vacuo cadenti vel aſcendenti convenire Galilæus demonſtravit, cujusmodi motus Lib. I. Sect. II. Cap. I. §. 150, 151. conſideravimus.

V.

481. *Solicitatio acceleratrix* gravi in aëre deſcendenti applicata, eſt exceſſus, quo gravitas medii reſiſtentiam ſuperat, & *reſiſtentia totalis* ſeu *abſoluta* corpori in aëre aſcendenti oppoſita, eſt aggregatum ſolicitationis gravitatis & reſiſtentiæ aëris. Nam hæc duo corpori in aëre aſcendenti conjunctim renituntur. Grave verò cadens non alia vi deorſum ruit, quam eâ, quâ gravitas reſiſtentiam aëris, in quo corpus movetur, ſuperat: propterea hic *exceſſus* ſolicitatio acceleratrix gravis in aëre decidentis audit.

VI.

482. Et, quia hæ ſolicitationes acceleratrices in aëre continue decreſcunt ob creſcentem cum velocitate mobilis reſiſtentiam aëris, absque tamen eo, ut unquam penitus extinguatur, ut in ſequentibus fuſius demonſtrabitur, ideò etiam celeritas continue quidem creſcet, non tamen certum quendam velocitatis gradum unquam attinget, nedum prætergredietur. Talis velocitas quam gravia nunquam cadendo aſſequi poſſunt, etſi ei ſemper magis magisque accedunt, Hugenio *velocitas terminalis* audit, Leibnitius verò *celeritatem maximam* excluſivè eandem appellat.

Scalæ ſolicitationum acceleratricium, reſiſtentiarum totalium, & celeritatum acquiſitarum vel reſiduarum, eodem ſenſu ſumuntur, quo in Sectione ſecunda Libri primi; adeò ut nulla ambiguitas vocabulorum in hac materia irrepere queat. Idem pariter intelligendum de momentis harum ſolicitationum aut reſiſtentiarum totalium, & celeritatum creſcentium aut decreſcentium.

VII.

483. Si lineæ rectæ indefinitæ longitudinis æquabili motu ferri ſubinde dicentur, atque in hisce lineis corpora libere etiam ultro citro-

traque incedere ponentur, ipsæ lineæ mobiles *lineæ deferentes*, earum motus, *motus communis*, scilicet lineæ mobilis & corporis secum abrepti, & denique corporis in deferenti linea motus, ejus *motus proprius* deinceps dicentur, corporisque ejusdem *motus absolutus* est is, qui resultat ex motu communi & proprio, estque horum aggregatum, si linea deferens & in ea corpus proprio motu ad easdem partes feruntur, differentia verò si in partes oppositas. Idcircò, ex motu proprio & communi corporis ejus motus absolutus semper innotescet.

PROPOSITIO LIV. Lemma.

484. *Momentum cujuslibet solicitationis acceleratricis corporis in aëre cadentis, aut resistentiæ totalis ejusdem corporis in aëre quomodocunque ascendentis, æquatur momento celeritatis acquisitæ crescentis, vel momento celeritatis residuæ & decrescentis.*

Hæc propositio eadem est cum prop. XVII. Lib. I. §. 132. ut adeo nova demonstratione non indigeat, nam solicitationum nomine quæcunque vires mortuæ, sed continue applicatæ, intelligi queunt. Propterea, si facilitatis gratia corpus in linea verticali moveri ponatur, spatiaque transmissa dicantur x, gravitas g, resistentia aëris r, velocitas acquisita corpori decidenti vel residua ascendentis u; solicitatio acceleratrix gravis cadentis (§. 481.) erit $g-r$, & momentum hujus solicitationis $gdx-rdx$ æquatur momento velocitatis crescentis udu. Hinc $gdx-rdx=udu$.

Resistentia verò totalis corporis ascendentis (§. 481.) est $g+r$, momentumque hujus resistentiæ $gdx+rdx$ æquale est momento celeritatis decrescentis $-udu$, adeò ut habeatur $gdx+rdx=-udu$. Vel etiam sumendo spatia non actu percursa, sed deinceps percurrenda, usque ad totalem motus ascensionalis extinctionem, erit $-gdx-rdx=-udu$, seu $gdx+rdx=udu$, hoc enim pacto spatia absolvenda, post jam percursa, decrescent cum celeritatibus.

Idcirco utrumque casum descensus ascensusque verticalis corporum in aëre uni generali formulæ includendo, invenietur $gdx\mp rdx=udu$. Ubi signum superius $-$ descensum, alterum verò $+$ ascensum corporum in aëre resistente respicit; ubi meminisse oportet spatia x non esse spatia actu transmissa à corpore ascendente, sed eorum complementa ad totam seu maximam altitudinem, quam ascendens mobile percurrere potest.

COROLLARIUM.

485. Si jam elementum temporis, quo ſpatiolum dx transmittitur, dicatur dt, erit $dt = du : g \mp r$. Nam, quia (§. 128.) $dt = dx : u$, & (§. 484.) $gdx \mp rdx = udu$, erit $dt\ (= dx : u) = du : g \mp r$. Adeoque $t = \int du : g \mp r$, ubi t ſignificat tempus, quo grave motu à quiete incepto ſpatium x perlabitur, vel tempus quo grave aſcendens complementum ſpatii actu jam transmiſſi aſcendendo conficere poſſet; unde, ſi tempus, quo maxima altitudo A, quam grave data celeritate in altum projecti emetiri poteſt, dicatur T, quantitas $T - t$ exponet tempus, quo mobile ſpatium aſcendendo actu abſolvit.

SCHOLION.

486. Cum nulla adhuc attentio habita ſit ad originem reſiſtentiæ medii, an pendeat à celeritatibus mobilis actualibus, an verò aliunde, ſatis manifeſtum eſt, in præcedentibus canonibus generalibus contineri leges motuum variatorum pro quacunque reſiſtentiæ medii abſolutæ vel reſpectivæ hypotheſi.

PROPOSITIO LV. LEMMA.

487. *Motus variati corporis in aëre quacunque lege reſiſtente ex motu primitive uniformi ſunt iidem, qui reſultarent ex motu communi ac uniformi lineæ mobile ſecum deferentis, & ex motu proprio mobilis in linea deferente, orto ab alliſione aëris corpori in linea deferente delato.*

Mobile M incipiat moveri ex N verſus O velocitate data AN, ita quidem, ut ſi in vacuo incederet, motus perfecte æquabilis eſſet; ſed, quia in medio reſiſtente fertur, mobilis noſtri motus in recta NO continue variatus exiſtet, ita ut ſemper magis magiſque langueſcat. Probari debet hunc motum variatum eundem fore cum eo, qui reſultaret ex motu communi lineæ NO celeritate AN ex N verſus Q æquabili motu latæ, atque mobile M ſecum abripientis, & ex motu proprio mobilis M in deferenti linea NO, ſed contrario motui æquabili lineæ deferentis, tendente ſcilicet ex N verſus O, utpote orto ex continuo allapſu aëris mobili M, quod (ſecundùm hypotheſin) ultro citroque in linea deferente liberrime moveri poſſe ſupponitur, absque ullo impedimento ratione motus communis ſeu motus lineæ deferentis.

De-

Demonstratio. Quatenus linea deferens NO æquabili motu versus O fertur, eatenus ea mobile M ipsi inhærens secum abripit, sed quia aër mobili isti continue alliditur, & corpus ipsum (secundùm hypothesin) libere in deferenti linea NO moveri potest, aërque eandem in mobile impressionem exserit, (§. 422.) ac si in ipsum quiescens ea ipsa celeritate impingeret, quâ mobile in aëre motu absoluto fertur; ideo per se liquet corpus M ab aëre continue versus O impulsum omnino motum iri ex N versus O, motu proprio in linea deferente, sed contrario motui hujus lineæ deferentis; ac constat insuper motus proprios mobilis M ab impulsu aëris ortos, esse decrementa motus absoluti corporis in aëre, atque adeò effecta resistentiæ aëris, ut adeò hinc manifestum sit motum absolutum corporis M in aëre haberi, si à motu lineæ deferentis NO subducatur motus proprius corporis M in hac deferente, adeò quidem, ut si, exacto quodam tempore atque motu proprio, mobile spatium NE in linea deferente transmiserit, & in ejus termino E gradum velocitatis DE acquisiverit, velocitas absoluta mobilis in aëre (§. 483.) futura sit BD, excessus scilicet celeritatis BE vel AN, qua linea deferens movetur, supra celeritatem DE in linea deferente mobili acquisita ab aëris resistentis impressionibus. Propterea motus absolutus & variatus mobilis M in aëre idem erit cum eo, qui resultaret ex motu communi lineæ deferentis NO, & ex proprio mobilis in hac linea deferente. Quod erat demonstrandum. Fig. 119.

Corollarium I.

488. Sit jam curva NDO scala celeritatum mobilis M in linea deferente NO acquisitarum, & curva PFO scala impressionum aëris in mobile M exertarum; & velocitas initialis mobilis M, quæ erat AN, reducta erit ad celeritatem BD eo tempore, quo mobile in linea deferente spatium NE transmittit. Adeoque per præcedentem habetur generaliter $EF.Ee = DE.ad$. Id est *momentum solicitationis acceleratricis* EF *in linea deferente æquivalet momento celeritatis* ED *in eadem linea deferente acquisitæ.*

Tempus vero per NE seu (§. 128.) $\int Ee : DE = \int ad : EF$.

Corollarium II.

489. Hinc spatium absolutum, quod mobile M hoc tempore $\int ad$:

EF in aëre absolvit, reperietur generaliter $AN.\int da:EF-NE$. Nam linea deferens NO absolvit motu suo æquabili & velocitate AN spatium $AN.\int da:EF$ tempore $\int da:EF$, & mobile M in linea deferente spatium NE.

SCHOLION.

490. Si resistentia medii absoluta in omnibus spatii percurrendi punctis eadem assumatur, linea PFO erit recta ipsi NO vel AO parallela; & scala celeritatum NDO parabola erit. Nam momentum vis acceleratricis EF fit hoc casu $NP.Ee=DE.ad$, & omnia $NP.Ee$ hoc est $NP.NE$ æqualia omnibus $DE.da$ seu $\frac{1}{2}DE^2$, hinc $2NP.NE=DE^2$, ergo NDO est parabola, cujus parameter est 2NP.

Hinc, quia $tNE=\int ad:EF=\int ad:NP$, erit $tNE=DE:NP=DE^2:DE.NP=2NP.NE:DE.NP=2NE:DE$. Hinc $NA.\int ad:EF$ seu $NA.tNE=2AN.NE:DE$, & spatium absolutum, quod mobile in medio hoc absolute resistente tempore $2NE:DE$ transmittit, erit $NA.tNE-NE=2AN.NE:DE-NE=(2AN-DE).NE:DE=(2NA.DE-DE^2):2NP$.

Celeritas verò mobilis, elapso tempore $DE:NP$ vel $2NE:DE$, residua erit BD, ut jam supra (§. 488.) dictum. Propterea in ista hypothesi mobile M celeritate AN impulsum tempore $AN:NP$ ad quietem redigetur. Hæc probe consentiunt cum iis, quæ Cl. Varignon Probl. III. Coroll. I. Act. Acad. Reg. Scient. 1707. d. 13. Aug: diversa tamen methodo, tradidit.

Ubi verò resistentia medii respectiva obtinet, atque adeò resistentiæ aëris ab ejus densitate & velocitatibus mobilis pendent, ipsæ EF semper aliquam relationem habebunt cum lineis BD velocitatum mobilis in aëre repræsentatricibus, ut ex sequentibus dilucide patebit.

PROPOSITIO LVI. LEMMA.

Fig. 119. 491. *Exhibens nonnullas logarithmicæ proprietates deinceps adhibendas.*

I. Elementum cujusque ordinatæ logarithmicæ est ad ipsam ordinatam ut elementum axis ad subtangentem log-micæ.

Sit enim HI ordinata quæcunque log-micæ NHT, cujus subtangens

gens sit IR, positóque Hm elemento ordinatæ HI, agatur hi parallela HI, & mh parallela axi AR, quibus positis, triangula similia Hmh & HIR præbent $Hm : HI = Ii : IR$. Quod erat demonstrandum.

II. Rectangulum HIi, sub ordinata HI & elemento axis Ii ordinatæ HI adjacenti, æquatur ubique rectangulo sub subtangente IR & elemento Hm ordinatæ HI. Nam analogia præcedentis numeri $Hm : HI = Ii : IR$, præbet $HI . Ii = IR . Hm$.

III. Tertia proportionalis ad subtangentem & quamlibet ordinatam log-micæ cum adjacente axis elemento efficit rectangulum æquale rectangulo sub ordinata ejusque elemento. Esto VI tertia proportionalis ad IR & IH, ac resumatur analogia numeri primi $Hm : HI = Ii : IR$, vel permutando $Hm : Ii = HI : IR$ (secundùm hypothesin) $= IV : HI$. Ergo $VI . Ii = HI . Hm$.

IV. Si in duabus logarithmicis NHT & 2N2H2T ordinata NA fuerit ad HI, sicut 2N2A ad 2H2I, erit AI ad 2A2I sicut subtangens IR ad subtangentem 2I2R. Sint enim Ii & $2I2i$ elementa similia totarum AI & 2A2I, eritque $HI : hi = 2H2I : 2h2i$; quoniam hæ rationes sunt submultiplices æqualium rationum secundum eundem multiplicitatis numerum; idcirco erit $Hm : HI = 2H2m : 2H2I$, atqui (num. 1. hujus) $Hm : HI = Ii : IR$, & $2H2m : 2H2I = 2I2i : 2I2R$, ergo $Ii : IR = 2I2i : 2I2R$, & permutando $Ii : 2I2i = IR : 2I2R$; verum, quia Ii & $2I2i$ sunt particulæ similes totarum AI, 2A2I, erit $Ii : 2I2i = AI : 2A2I$, ergo etiam $AI : 2A2I = IR : 2I2R$. Quod erat demonstrandum. Fig. 119. & 120.

Corollarium.

492. Hinc log-us rationis duarum magnitudinum divisus per subtangentem logarithmicæ, ex qua log-us dictæ rationis desumtus est, est idem cum log-mo ejusdem rationis desumto ex qualibet alia logarithmica, sed diviso per subtangentem hujus alterius logarithmicæ. Atque hinc liquet, quâ ratione logarithmi desumti ex data quadam log-mica transferri queant in log-micam, quæ vulgares tabularum logarithmos continet, & vicissim.

Propositio LVII. Lemma.

493. *Si ex eodem centro* M, *& semilatere transverso* MI *descriptus* Fig. 121.

 sit

ſit quadrans circuli ILA *& hyperbola æquilatera* IL, *quorum ordinatæ* LS *referantur ad axem* MS, *erit in circulo & in hyperbola rec-lum* MS. Ss, *ſub abſciſſa ejusque elemento, æquale homologo rec-lo* LS. Lm *vel* lm *ſub ordinata ejusque elemento.*

In circulo. Juncta ML, triangula ſimilia MLS & L*lm* præbent MS : LS = L*m* : *lm* vel S*s*; adeoque MS. S*s* = LS. L*m*.

In hyperbola. Jungantur IS & I*s*, & centro I intervalloque IS deſcriptus intelligatur arculus S*u*. Jam ex natura hyperbolæ eſt LS = IS, & *ls* = I*s*; ergo *us* = *lm*. Atqui triangula ſimilia ISM & S*su* ſuppeditant analogiam S*s* : *su* vel *lm* = IS vel LS : MS. Ergo MS. S*s* = LS. *lm*. Quod erat demonſtrandum.

Scholion Generale.

494. Traditis jam generalibus principiis, ex quibus quicquid ad motus corporum in mediis reſiſtentibus pertinet, deduci poteſt, & nonnullis lemmatis geometricis in applicatione principiorum neceſſariis; ad hanc applicationem jam veniendum reſtat. Et primùm quidem, quod motus ex reſiſtentia abſoluta concernit, id cum in paragrapho ſuperiore 490, tum etiam in ſecunda ſectione Libri primi quadantenus jam præſtitum eſt, etenim in citato paragrapho definitus eſt motus variatus reſultans ex primitive uniformi in hypotheſi reſiſtentiæ abſolutæ; in Capite verò primo Sect. Sec. Libr. I. §.§. 150, 151. determinati ſunt motus gravium in hypotheſi gravitatis uniformis, ad quem caſum etiam revocari poteſt reſiſtentia abſoluta, qua in ſingulis percurrendi ſpatii punctis eadem quantitate corporibus reſiſtitur; unde ſi conſtans ubique reſiſtentia à conſtanti gravitate ſubducetur, reſidua ſolicitatio acceleratrix etiam conſtans erit, unde quæ citato loco reſpectu gravitatis uniformis demonſtrata ſunt, ea ſolicitationi ejusmodi acceleratrici etiam applicari poſſunt & debent. Idcirco non eſt quod reſiſtentiæ abſolutæ ſeu motibus inde orituris diutius immoremur. Reſiſtentia medii reſpectiva pendet à velocitate, qua mobile in ejusmodi medio incedit. Tres ſunt præcipuæ hujus reſiſtentiæ hypotheſes, quas in ſequentibus capitibus primùm ſigillatim percurremus, deinde analyſin trademus, qua motus in ejusmodi mediis variati generaliter determinabuntur.

CAPUT XV.

De motibus Corporum, quibus aër resistit in ratione celeritatum mobilis.

PROPOSITIO LVIII. Theorema.

495. *Spatium, quod mobile quoddam in aëre, juxta proportionem celeritatum ejus actualium, variato motu ex primitive uniformi certo quodam tempore transmittit, exponitur eadem linea, quâ velocitatis mobilis initialis pars hoc tempore amissa repræsentatur. Et tempus absolutum, quo dictum spatium absolvitur, exponi debet per logarithmum rationis, quam habet velocitas initialis mobilis ad velocitatem absolutam ejusdem elapso hoc tempore, applicatum ad subtangentem illius logarithmicæ, ex qua prædictus logarithmus desumtus est.* Fig. 119.

Sit M mobile in plano quodam horizontali celeritate AN impulsum, juxta rectam NQ, in qua deinceps æquabiliter incederet celeritate eadem AN, si in vacuo ferretur, sed quia in aëre juxta proportionem celeritatum suarum resistente movetur, singulis momentis aliquid de suâ velocitate actuali decedet. Ipsi verò motus ope propositionis 55. hujus secundi libri facile determinantur; quandoquidem, juxta hanc propositionem, iidem sunt motus variati ex primitive uniformi in aëre resistente, qui resultarent ex motu communi alicujus lineæ deferentis, & ex motu proprio mobilis in hac deferenti linea orto ab appulsu aëris corpori in linea deferente delato.

Sit ergo NO hæc linea deferens celeritate mobilis initiali AN, æquabili motu tendens versus Q, & post aliquod tempus mobile M in hac linea deferente spatium NE percurrisse intelligatur, atque in ea celeritatem DE exacto dicto tempore acquisivisse, quo fiet, ut velocitas ejus initialis AN reducta sit ad velocitatem actualem (qua scilicet in aëre movetur) BD; hac ergo velocitate aër mobili allabitur & resistentia est ut hæc celeritas, ergo impressio seu solicitatio acceleratrix mobilis in linea deferenti, quæ generaliter est EF, jam erit BD. Propterea curva PFO erit similis & æqualis curvæ NDO, adeò ut tantùm (§. 488.) determinandum restet, quænam sit curva NDO, ut in ea BD. Bb seu EF. Ee æquetur rec-lo ead seu ED. ad. Ubi Ee vel Bb est elementum spatii NE, & ad elementum ordinatæ DE.

Per

Per punctum N ducta sit log-mica NHT, cujus subtangens AK (posito scilicet rectam NK ipsam contingere in puncto N) æqualis AN, atque in ea ad asymptotam AR aptetur ordinata IH æqualis BD, eaque producatur in S; ductaque per logarithmicæ punctum H recta indefinita HCD parallela OQ, tangentem log-micæ NK in G, rectamque NA in C secante, si in ea sumatur ubique CD æqualis GH, interceptæ inter tangentem NK & log-micam NHT, erit semper punctum D in scala celeritatum propriarum mobilis in linea deferente NO.

Ducantur enim per punctum log-micæ H tangens HR & linea HL parallela tangenti NK, eruntque HI & IL, item LR & HS vel DE æquales, ductaque insuper dh alteri DH indefinite vicina lineola mh & IR à media HL proportionaliter secentur, eritque adeò HI vel BD aut EF ad LR vel HS seu DE, sicut Hm seu da ad nh; adeoque EF.nh = DE.da. Jam, quia (constr.) DC vel EN = GH & Ne = ch, erit nh, differentia inter GH & gh, æqualis Ee; nam Hn est parallela ipsi Gg. Ergo EF.nh = EF.Ee = DE.da. Quod erat demonstrandum.

Porro est nh : LR = mh : IR, atqui nh : LR = Ee : DE (§. 128.) = tEe, ergo tEe = Ii vel mh : IR; ergo omnia tEe, id est, tempus per NE = omnibus Ii : IR = AI : IR = log. (AN : HI) applicatus ad IR vel AN. Hoc est, tempus absolutum, quo mobile percurrit spatium NE in linea deferente, exponitur log-mo rationis, quam habet celeritas initialis AN ad celeritatem mobilis residuam IH elapso hoc tempore, applicato ad log-micæ subtangentem.

Hinc, quia (§. 489.) spatium absolutum, quod mobile M dato illo tempore in aëre transmittit, est AN.tNE − NE, erit hoc spatium AI − NE = CH − GH = CG = NC, quoniam (constr.) AN = AK, item tNE = AI : AN, & NE (constr.) = GH. Ergo spatium absolutum, quod mobile nominato tempore percurrit, in aëre repræsentatur per eam lineam NC vel DE, quæ velocitatis amissam partem exhibet. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

496. Ergo si mobilis celeritates actuales BD seu IH sumantur in progressione geometrica, tempora respectiva AI : AN erunt in progressione arithmetica.

Corollarium II.

497. Adeoque velocitas mobilis non nisi tempore infinito extingui potest, cum log-us rationis AN ad o, seu ad quantitatem quaIibet data minorem, sit infinitus. Propterea mobile M ejusmodi motu ex primitive uniformi derivato in aëre nunquam percurrere potest spatium AN datæ magnitudinis.

Hæc omnia ad amussim conveniunt cum determinationibus Newtoni Prop. 2. Lib. 2. Pr. Phil. Nat. Leibnitii Act. Erud. 1689. art. 1. Wallisii Algebr. cap. 101. Et Varignonii Act. Acad. Reg. Paris. Scient. 1707. die 13 Aug. probl. 1. & coroll. annexis.

PROPOSITIO LIX. Theorema.

498. *Si grave in aëre juxta rationem celeritatum resistente verticaliter à quiete descendat, spatium, quod mobile aliquo tempore perlabitur, exponetur excessu, quo factum ex tempore descensus in velocitatem corporis terminalem excedit lineam, quæ celeritatem mobili acquisitam repræsentat. Tempus vero ipsum exponetur log-mo rationis, quam gravitas absoluta mobilis habet ad solicitationem acceleratricem in termino dicti spatii, applicato ad log-micæ subtangentem.* Fig. 122.

Sin verò grave in aëre eodem verticaliter in altum projiciatur data cum celeritate initiali, altitudo totius ascensus mobilis exponetur excessu, quo velocitas initialis excedit factum ex tempore ascensus in velocitatem terminalem. Et tempus ipsum exponetur log-mo rationis resistentiæ totalis initio ascensus ad gravitatem absolutam mobilis applicato ad subtangentem logarithmicæ.

I. Sit B*t*C log-mica ad axem FI extructa, cujus subtangens FH sit quæcunque, & BH tangens log-micæ in puncto B. Ducatur pro lubitu linea DC æquidistans ipsi FI, rectæ BF in puncto D, tangenti BH in E, & denique log-micæ in puncto C occurrens. Eritque EC intercepta inter tangentem BH & log-micam BC spatium percursum descensu mobilis, ratio DC : FH exponet tempus, quo spatium EC conficitur, & denique DE intercepta inter BF & BH exponet celeritatem mobili acquisitam tempore prædicto DC : FH. FH verò exponet celeritatem terminalem, seu maximam, exclusive. Hinc ducta EG parallela BF, recta GH repræsentabit solicitationem acceleratricem in fine spatii percursi EC. Nam quoniam FH repræsentat gravitatem absolutam, & (secundùm hypothesin) DE vel FG resistentiam medii, residua GH exponet omnino solicitationem acceleratricem mobilis, ut adeò aliud non restet faciendum, quam (§. 484.) ut probetur hanc constructionem præbere GH. $\delta c =$ DE. gh, seu *momentum solicitationis acceleratricis* GH *æquari momento celeritatis* DE, ductis dc parallela DC, & δC parallela BH, adeo ut δc sit elementum lineæ EC, & gh elementum lineæ DE. Ubi obiter notandum, punctum C in figura per accidens tantum reperiri in communi intersectione rectæ HP, æquidistantis FO per datum positione punctum H ductæ & log-micæ BC, cum dictum punctum C quodlibet aliud log-micæ punctum esse possit.

Demonstr. Fiat GI = FH, eritque HI = FG = DE, & acta EI erit parallela tangenti log-micæ in C, atque adeò Ei erit parallela & æqualis elemento logarithmicæ Cc, & $\delta c = hi$. Jam, quia GH : HI vel DE, $= gh : hi$ seu $c\delta$ erit GH. $\delta c =$ DE. gh. Quod erat unum.

Porrò gi vel κc : GI $= gh$: GH (§. 128.) $= t\delta c$, ergo omnia κc : GI, seu DC : GI = tempori descensus in spatio EC. Atqui DC est log-us rationis FB ad GE seu HF ad GH, hoc est, rationis, quam habet velocitas terminalis FH ad solicitationem acceleratricem GH. Nam, quia DE exponit (secundùm hypothesin) velocitatem mobili acquisitam, & quia hæc fit FH, ubi DC facta fuerit infinita, manifestum est celeritatem terminalem per subtangentem FH exponendam esse, qua etiam gravitas absoluta mobilis repræsentatur. Idcirco tempus descensus per spatium EC est log-us rationis FH : GH divisus per subtangentem FH. Adeoque DC est factum ex tempore descensus per EC in velocitatem terminalem FH, & spatium EC est excessus facti modo nominati, supra rectam DE, quæ celeritatem acquisitam exponit. Quæ omnia erant demonstranda.

499. Ponatur secundò mobile ascendere in linea verticali ak vel AN celeritate initiali NO, ostendendum restat, altitudinem, ad quam mobile pertingere possit, esse ak vel AN interceptam inter tangentem BN & log-micam BTA, tempusque, quo altitudo ista conficiatur, esse AO : FH. Linea ak alteri AN indefinite vicina ponitur, unde ducta Aα parallela BN, lineola $a\alpha$ erit decrementum spatii ak versus B continue decrescentis cum velocitate NO. Initio motus resistentia aëris (secundùm hypothesin) est NO, & gravitas FH vel OP corpori ascendenti etiam opponitur, adeoque (§. 481.) resistentia totalis est NP. Propterea ostendendum, constanter esse

NP:

NP. *aα momentum scilicet resistentiæ totalis* NP *æquale* NO. kl *momento celeritatis decrescentis* NO.

Si enim iterum LM = FH & NM ducta fuerit, erunt MH = NO, & *km* = *aα*, & LH : MH = NP : NO = *kl* : *km* vel *aα*, adeòque NP. *aα* = NO. *kl*. Idcircò omnia decrementa *aα*, id est *ak*, seu AN, sunt altitudo, quam ascendens mobile absolvere potest.

Item *ml* : LM = *km* seu *aα* : MH vel NO. (§. 128.) *taα*; ergo omnia *ml* : LM, seu omnia *ab* : LM, hoc est, AO : LM æquantur omnibus *taα*, seu tempori ascensionis mobilis in spatio *ak* vel AN. Atqui AO est log-us rationis A2F ad BF, seu rationis æqualis NP ad OP, id est, rationis, quam habet resistentia totalis initio motus ad gravitatem. Adeoque temp. per AN = log. (NP : OP) divis. per LM vel FH, & LM in *t*AN = AO = log. (NP : OP). Ergo, cum AN sit NO − AO, erit altitudo, quam mobile ascendens percurrere potest, excessus, quo celeritas initialis NO excedit factum ex tempore ascensionis in celeritatem terminalem FH vel LM.

COROLLARIUM I.

500. Tempus, quo ascendens grave suam altitudinem AN vel QB emetietur, est ad tempus descensus ejusdem ex eadem altitudine BQ, sicut AO ad OP. Hoc per se satis clarum. Nam tempus descensus per BQ vel EC (§. 498.) est DC : FH seu OP : FH, & tempus ascensus in AN (§. 499.) est AO : FH. Ergo &c.

COROLLARIUM II.

501. Tempus quo mobile spatium AN ascendendo trajicit celeritate initiali NO, est ad tempus, quo idem grave in vacuo & celeritate eadem initiali NO suam altitudinem, quousque pertingere potest, absolveret, ut AO ad NO vel A2Q; ducta scilicet per Q recta Q2Q parallela FO. Nam tempus ascensionis in aëre per altitudinem AN est, ut vidimus, AO : TH; grave verò in vacuo ascendens emetietur (§. 139.) suam altitudinem eo tempore, quo id à quiete cadere incipiens accelerato motu celeritatem NO initiali æqualem acquirere potest; atqui (§. 151.) hoc tempus est, ut celeritas acquirenda NO applicata ad rectam FH, quæ gravitatem uniformem exponit; atque adeò NO : FH exponit dictum tempus ascensionis mobilis in vacuo. Est ergo tempus ascensionis in aëre ad

tempus ascensionis in vacuo ut AO : FH ad NO : FH, id est, sicut AO ad NO seu A2Q; nam ob æquales & parallelas BN & QA, etiam æquales erunt NO & A2Q.

COROLLARIUM III.

502. Altitudo AN, quam grave celeritate NO verticaliter in altum projectum percurrere potest, erit ad altitudinem, quam eadem celeritate in vacuo sursum projectum absolvere posset, ut rec-lum FBQ vel FB. AN ad triangulum BNO. Nam (§. 150.) altitudo in vacuo absolvenda exponitur quadrato velocitatis initialis NO, applicato ad duplum gravitatis, seu 2FH; ergo altitudo in aëre est ad altitudinem in vacuo absolvendam sicut AN vel BQ ad NO^2 : 2. FH; vel sicut QB ad OB. ON : 2. FB, cum NO sit ad FH sicut BO ad BF; ergo prædictæ altitudines sunt ut BF. BQ ad BO. ½ON id est, ut rec-lum FBQ ad triangulum BON. Verùm rec-lum FBQ æquatur trilineo BA2B; nam quadrilineum FBA2F, indicante Hugenio & demonstrante Cel. Viro Guidone Grando in suis Hugenianis cap. 8. num. 14, æquatur rec-lo BO. FH, quod quidem ex superioribus (§. 491. num. 11.) facillime probari potest; nam quia fig. 119. rec-lum HI. I*i* = rec-lo IR. H*m*, erunt omnia HI*i*, quæ in area NAIH continentur, id est hæc area ipsa = omnibus IR. H*m* seu
Fig. 122. IR. NC. Eodem ergo argumento sequitur quadrilineum FBA2F æquari rec-lo FH. BO seu rec-lo ex subtangente log-micæ in differentiam ordinatarum A2F & BF. Atqui propter similitudinem triangulorum HFB & NOB, est FH. BO = FB. NO = rec-lum LFB, ergo LFB = FBA2F, & ablato communi rec-lo BF2F, restabit L2F2B = FBQ = trilineo BA2B.

Hinc, quia altitudo in aëre conficienda est ad altitudinem in vacuo percurrendam, sicut rec-lum FBQ ad triangulum BNO, erit etiam prior altitudo ad alteram ut trilineum BA2B ad triangulum BNO.

COROLLARIUM IV.

503. Celeritas initialis gravis spatio AN vel QB in aëre ascendentis, est ad celeritatem quacum in terram recideret, emenso eodem spatio NA vel BQ, sicut NO ad DE, vel propter triangula similia BON & BDE, sicut BO seu RP ad BD vel RC.

Hæc

Hæc quatuor corollaria continent omnia, quæ Nobil. Hugenius circa motus corporum in lineis rectis verticaliter ascendentium & descendentium in præsenti resistentiæ aëris hypothesi absque omni demonstratione simpliciter indicavit, ad calcem suæ Diatribæ *De Causa gravitatis* pag. 171, & quæ Cl. Varignonius postea eleganter etiam demonstravit in Actis Acad. Reg. Parif. Scient. 1708.

COROLLARIUM V.

504. Cum tempora ascensus per spatia AN, & TS vel YN ducta, scilicet parallela TY ad BN vel QA, sint AO : FH, & TW : FH, existentibus celeritatibus initialibus NO & SW; erit ideo $tAY =$ (AO − TW) : FH = log. (OF : WF) : FH, in log-mica, cujus subtangens est FH, vel §. 492. simpliciter = log. (OF : WF) in log-mica, cujus subtangens est unitas.

COROLLARIUM VI.

505. Sic etiam tempus, quo grave spatium st in aëre perlabitur, est log. (BF : WF) in log-mica, cujus subtangens est unitas. Nam tempus per $st = wt$: FH, & $wt =$ log. (BF : wF), ergo (§. 492.) wt : FH = log. (BF : wF) in log-mica, cujus subtangens est unitas.

COROLLARIUM VII.

506. Unde, si grave quoddam projiciatur in aëre resistente juxta præsentem hypothesin, secundum directionem tangentis BH log-micæ BtC in puncto B, & celeritate ea, ut celeritas verticalis FH ex obliqua jactus BH derivata par sit celeritati *terminali gravis* seu *maximæ* exclusive, corpus projectum arcum log-micum BtC in aëre describet. Fingatur enim rectam sx ex situ BR versus C sibi semper parallelam moveri, ita ut ejus extremitas s semper in recta BH existat, ejusque velocitas, juxta lineam BH, hac ipsa BH exponatur; idcirco, si ponatur puncto intersectionis s rectæ sx & BH resisti in ratione celeritatum, hoc punctum s tempore, quod exponitur per log. (BH : sH) : FH vel (§. 492.) per log. (BH : SH) vel propter triangula similia BFH & Bws, per log. (BF : wF) in log-mica, cujus subtangens est unitas, percurret spatium Bs; grave verò hoc eodem tempore log. (BF : wF) in linea deferente perlabetur spatium st,

ut in coroll. VI. (§. 505.) dictum; eo ergo tempore, quo deferens linea *sx* ex situ BR venit in situm *sx*, grave in ea motu accelerato perlabitur spatium *st*, adeò ut id semper incessurum sit in linea logarithmica B*t*C, prorsus ut Hugenius absque demonstratione asseruit, & Varignonius analytico id calculo in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. 1708. eleganter demonstravit.

507. Hugenius addit pag. 173. Dissertationis *De la Cause de la Pesanteur* hujus log-micæ speciem eo determinari, quod ejus subtangens dupla sit altitudinis, ad quam grave celeritate initiali terminalem æquante ascendens, in vacuo pervenire possit. Hoc facile deducitur ex §. 150. Nam si quadratum subtangentis FH, quæ exponit celeritatem terminalem, applicetur ad duplum subtangentis ejusdem, quæ etiam gravitatem uniformem exponit, resultabit inde altitudo maxima, ad quam mobile in vacuo ascendens velocitate initiali terminalem in aëre æquante, pervenire potest, æqualis semissi subtangentis log-micæ.

508. Addam & ego mobilis celeritate & directione BH in aëre projecti, & log-micam B*t*C describentis velocitatem in quolibet log-micæ puncto *t*, exponi debere tangente log-micæ *tu* in hoc puncto *t*; ut adeò mobilis celeritas in logarithmica terminali semper major futura sit, etsi decrescat, eique semper magis magisque accedat. Assertionis demonstrationem utpote facillimam non adduco.

Corollarium VIII.

509. Si grave, data cum celeritate, verticaliter deorsum projiciatur in aëre resistente juxta proportionem celeritatum, motus corporis ex duabus præcedentibus propositionibus facili negotio determinabuntur, perinde ac præcedens corollarium ex iisdem elicuimus.
Fig. 119. Esto enim AN celeritas initialis seu velocitas projectionis, & quia si mobile in vacuo ferretur, ejus motus mixtus foret ex æquabili projectionis & ex motu accelerato gravitatis, ita etiam ejus motus in aëre mixtus est duplici motu variato, scilicet ex eo, qui resultat a motu primitive uniformi, & ex eo qui nascitur à primitive accelerato; ambo hi motus seorsim considerari possunt. In figuris 119. & 122. sint ordinatæ logarithmicæ AN, HI, BF atque HC proportionales, atque adeò erit (§. 491. num. IV.) AI : DC = AK : FH, atque adeò DC : FH = AI : AK, atqui (§. 498.) DC : FH, seu logarithmus

rithmus rationis BF ad DF, seu FH ad GH, id est, log-us rationis, quam gravitas habet ad solicitationem acceleratricem in aëre divisus per subtangentem FH, exponit tempus descensus gravis in aëre per spatium EC, idque à sola gravitate. Altera verò ratio AI: AK (§. 495.) exponit tempus, quo mobile motu ex primitivo æquabili variato in aëre transmittit spatium NC, sed quia ostensum est DC : FH = AI : AK, hæc tempora erunt æqualia; propterea tempore DC : FH mobile describet in aëre, motu mixto motibus ex æquabili & accelerato à gravitate uniformi derivatis, spatium NC + EC (inspiciendo utramque figuram 119. & 122.): atque in fine prædicti temporis celeritas mobilis erit HI + DE. Est verò NC = AN − HI, & EC = DC − DE, ergo NC + EC = AN + DC − HI − DE, atque adeò spatium indicato tempore transmissum erit DC + AN − HI − DE, & celeritas, in termino hujus spatii acquisita vel residua, HI + DE = HI + FH − GH = AN + FH − NC − GH. Quæ quantitas crescente tempore AI : AK vel DC : FH, atque adeo decrescente HI aut crescente NC, continue decrescit, quandiu AN major est quam FH; ita tamen, ut minima exclusive, cui semper magis magisque appropinquatur, futura sit FH, æqualis velocitati terminali. Sin verò AN, seu velocitas jactus, minor fuerit terminali FH, summa HI + DE continue crescit, usque dum HI in infinitum imminuta evanuerit, alteraque DE facta fuerit FH, æqualis scilicet velocitati terminali.

PROPOSITIO LX. Problema.

510. *Invenire curvam 2M2T2C, quam grave secundum directionem 2M2R, dato angulo 2R2M2L, ad horizontem inclinatam celeritate 2M2G projectum, in aëre, juxta proportionem celeritatum resistente, describet.* Fig. 123.

Solutio. In puncto 2G excitata normali 2G2D ad 2M2G, circa 2G2D tanquam axem descripta sit per punctum 2M log-mica 2M2B2Q, subtangentem habens 2G2*u*, quæ juxta præcedentia, gravitatem uniformem seu etiam velocitatem terminalem exponit. Jungatur 2M2*u*, quæ log-micam in puncto 2M continget; tunc per quodlibet punctum 2*r* directionis jactus ductis 2*r*2*l* & 2*r*2*b* rectis 2G2E, & 2G2D æquidistantibus, quarum altera tangenti log-micæ in 2*s* & log-micæ ipsi in 2*b* occurrat: denique fiat ubique in qualibet 2*r*2*l* ejus pars 2*r*2*t* æqualis homologæ 2*s*2*b*, interceptæ inter

tan-

tangentem & log-micam, eritque semper punctum $2t$ in curva quaesita $2M2T2C$.

Demonstr. Intelligatur iterum quaedam linea $2M2N$, grave projectum secum deferens, motu sibi ipsi & $2G2E$ semper parallelo ferri, & quidem motu variato ex primitive uniformi in aëre secundum celeritatum rationem resistenti, existente celeritate initiali eadem cum celeritate jactus $2M2G$; atque in hac linea deferente $2M2N$ grave libere cadere motu eadem ratione accelerato, quam qui in propositione antecedente definitus est; quibus positis, linea deferens $2M2N$ ex hoc suo primo situ veniet in situm $2r2l$, describendo in directione jactus spatium $2M2r$, (§. 495.) tempore, quod exponitur per log. $(2M2G : 2r2G) : 2G2u = 2r2b : 2G2u$, atqui hoc eodem tempore (§. 505.) grave in linea deferente perlabitur spatium aequale $2s2b$ seu (constr.) $2r2t$. Ergo simulatque linea deferens $2r2l$ percurrit spatium $2M2r$, grave perlabitur in ea spatium $2r2t = 2s2b$, atque adeò id semper durante ejusmodi motu mixto invenietur incedere in curva $2M2T2C$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

511. Tangens $2g2t$ per quodlibet curvae punctum $2t$ ducta, exponet celeritatem mobilis in eodem curvae puncto. Nam elementa rectae $2M2r$ & curvae $2M2t$ duabus rectis indefinite vicinis & parallelis interjecta, quarum $2r2t$ esset altera, eodem tempore describentur, atque adeò velocitates, quibus dicta elementa percurruntur, erunt ut haec ipsa elementa; sed haec elementa sunt lineis $2r2G$ & $2t2g$ proportionalia, ergo hae rectae etiam velocitatibus, quibus praedicta elementa percurruntur, proportionari debent. Unde, quia (§. 495.) $2r2G$ exponit celeritatem, qua percurritur elementum rectae $2M2r$, ideò tangens $2t2g$ exponet celeritatem mobilis in curvae $2M2T2C$ puncto $2t$.

COROLLARIUM II.

512. Recta $2E2G$ asymptota erit curvae projectionis $2M2T2C$. Nam si $2O2Q$ cadat super $2G2D$, fiet $2P2Q$ infinita, ergo etiam $2O2C$ ipsi $2P2Q$ aequalis infinita erit, ubi ceciderit super lineam $2G2E$.

Corollarium III.

513. Si 2*u*2D par fiat 2G2E, jungaturque 2M2D log-micam ſecans in 2Q, ductaque ex 2Q recta 2Q2O parallela 2D2G, & per 2O recta 2O2C æquidiſtanti 2G2E; recta 2M2C erit amplitudo curvæ projectionis 2M2T2C.

Corollarium IV.

514. Sic etiam amplitudo curvæ projectionis, in quolibet plano ad horizontem inclinato, 2M2F invenietur, ſumendo 2*u*2*x* = 2F2G, & ducendo 2M2X log-micam ſecantem in puncto 2V. Nam, ſi ex hoc puncto agatur 2V2I parallela 2G2D, & 2I2H æquidiſtans rectæ 2E2G, intercepta 2M2H erit amplitudo quæſita in plano 2M2F ad horizontem inclinato. Erit enim 2X2*u* : 2V2K = 2G2F : 2I2H, unde cum (conſtr.) 2X2*u* ſit = 2G2F, erit etiam 2I2H = 2V2K. Simili ferme ratione demonſtratur præcedens corollarium.

Corollarium V.

515. Quinimo datis amplitudine 2M2C atque celeritate jactus 2M2G, inveniri poteſt angulus 2G2M2E hiſce datis conveniens. Nam ſi coordinatis 2M2O & 2O2Q, nominatis x & y reſpective, conſtruatur curva 2Y2Q, cujus æquatio ſit $y = \frac{cx}{a} + \sqrt{(xx - bb)}$, quam proinde liquet eſſe aliquam ſectionem conicam, ſcilicet hyperbolam, in qua a ſignificat 2M2G, dein c & b denotant log-micæ ſubtangentem datam 2G2*u*, & datam curvæ projectionis amplitudinem 2M2C. Communis interſectio curvæ 2Y2Q & log-micæ 2M2B2Q ſit 2Q, per quam & per punctum 2M ducatur linea 2M2D rectæ 2G2D occurrens in puncto 2D, linea 2*u*D dabit ſinum 2G2E anguli quæſiti 2G2M2E, exiſtente 2G2M radio ſeu ſinu toto.

Corollarium VI.

516. Nec amplius arduum erit determinatu, quinam angulus elevationis 2G2M2E conveniat maximæ omnium amplitudini 2M2C poſſibili. Nam, poſitis iiſdem, quæ in coroll. præc. ſymbolis, ſi hoc

casu curvæ $2Y2Q$ æquatio fuerit $y = \frac{aax - axx}{cx - 2ac} + \frac{cx}{a}$, quam proinde liquet esse aliquam Sectionem conicam, novæ curvæ hujus & log-micæ communis intersectio $2Q$ præbebit lineam $2u2D$, quæ perpetuo æqualis est sinui anguli $2G2M2E$ quæsiti. Sed, si curva $2Y2Q$ log-micam nusquam intersecat, problema impossibile est, quod præsertim de corollario antecedente intelligendum, in quo sæpe contingere potest, ut b, seu amplitudo jactus, tanta assumatur, ut hyperbola inde resultans log-micam nusquam secare queat, atque adeò problema solutu impossibile sit, cum contra problema corollarii hujus sexti semper possibile existat. Nonnunquam etiam hyperbola corollarii V. hujus log-micam in duobus punctis secare potest, quo fiet ut problema duas elevationes diversas $2G2M2E$ admittat. Horum duorum corollariorum fundamentum consistit in corollariis III. & IV. Calculum verò Lectoris industriæ relinquo.

COROLLARIUM VII.

517. Per log-micæ punctum $2b$ ducta sit tangens $2b2p$, eritque primo $2u2p = 2G2g$. Nam elementum lineæ $2s2b$ est ad elem. lineæ $2M2s$ ut $2u2p - 2s2b$ ad $2u2s$, & elem. lineæ $2M2s$ ad elem. $2M2r$ ut $2u2s$ ad $2G2r$, ergo ex æquo elem. lineæ $2s2b$ ad elem. lineæ $2M2r$ se habet sicut $2u2p - 2s2b$ ad $2G2r$; atqui elementum lineæ $2s2b$ vel (constr.) æqualis $2r2t$ est ad element. $2M2r$ sicut $2G2g - 2r2t$ vel $2s2b$ ad $2G2r$, ergo $2u2p - 2s2b : 2G2r$ se habet ut $2G2g - 2s2b : 2G2r$, atque adeò $2G2g - 2s2b = 2u2p - 2s2b$, hoc est, $2G2g = 2u2p$, & sic ubique. Secundò est $2u2p$ ubique æqualis respectivæ $2r2b$. Nam ducta per $2b$ recta $2b2q$, parallela rectæ $2M2G$, erit $2p2q$ subtangens, atque adeo æqualis ipsi $2G2u$, hinc ablata (vel addita subinde) communi $2q2u$, remanebunt æquales $2u2p$ & $2G2q$ vel $2r2b$, ergo etiam $2G2g = 2r2b$, unde $2G2g - 2r2t = 2r2b - 2s2b = 2r2s$. Propterea est elementum $2t2r$ ad elem. rectæ $2M2r$, sicut $2r2s$ ad $2r2G$. Jam $2s2r : 2r2M = 2G2u : 2G2M$, & $2r2M : 2r2G = 2r2M : 2r2G$, ergo per rationum compositionem, & ex æquo $2s2r : 2r2G = 2r2M . 2G2u : 2G2M . 2r2G$. Erit ergo etiam elementum rectæ $2r2t$ ad element. rectæ $2M2r = 2r2M . 2G2u : 2G2M . 2r2G$. Hinc, si lineæ nominentur, ut sequitur, scilicet $2M2G$, b; subtangens $2G2u$, a; indeterminatæ $2M2r$, y; $2r2t$, x, harum elementa dy & dx, & analogia modò reperta element. $2r2t$: elem. $2M2r = 2r2M . 2G2u : 2G2M . 2r2G$ præbebit hanc alteram, in terminis

minis analyticis, $dx : dy = ay : bb - by$; adeoque æquatio differentialis curvæ erit $dx = aydy : bb - by$. Quam Celeb. Varignon primus reperit in Act. Acad. Scient. Parif. 1708. ad diem 18. Julii, coroll. III; Clariff. hic Autor etiam in citato hoc fchediasmate conftructionem tradidit problematis in præfenti propofitione exhibiti fimillimam illi, quam fupra (§. 510.) adduximus, fed aliter quam à nobis factum, demonftratam. Et denique in fchediasmate die 22. Augufti ejusdem anni 1708. coram focietate prælecto, identitatem curvarum projectionis à fummis geometris Newtono & Hugenio conftructarum cum effectione à fe adducta (quam ab ea, quam nos attulimus, non nifi in demonftratione differre jam diximus) analytico calculo eleganter commonftravit. Verùm, quia eadem identitas curvarum, quas conftructiones Newtoni atque Hugenii cum inter fe, tum etiam à conftructione Varignonii prima fronte non parum difcrepantes præbent, absque calculo eleganter etiam demonftrari poteft, eandem identitatem geometrica demonftratione hoc loco confirmare non gravabor. Ad demonftrationis facilitatem à conftructione Hugeniana rem ordiar.

PROPOSITIO LXI. Theorema.

518. *Curva projectionis, cujus conftructio in propofitione præcedenti exhibita eft, fimilis & æqualis eft curvæ, quæ refultat ex conftructione Hugeniana (vide* Difcours de la Caufe de la Pefanteur pag. 171.) *in hypothefi refiftentiarum mediis velocitatibus actualibus mobilis proportionalium.* Fig. 124.

Hugenii conftructio ita habet. Sint MG directio jactus, ME horizontalis, DE horizonti perpendicularis, circa quam velut axem defcripta fit log-mica ABC fubtangentem habens $D\omega$ vel FO, divifaque qualibet AD alteri EM parallela in K, ut AK fit ad KD, ficut celeritas jactus verticalis ex obliqua MG derivata, ad celeritatem terminalem, feu maximam exclufive, quam fcilicet grave nunquam attingere poteft, etfi ei magis magisque femper cadendo accedat. Per K agatur KBL æquidiftans DE log-micam in B, & horizontalem in L fecans; ductisque porrò per log-micæ puncta A, B tangentibus $A\omega$, BO, tum etiam AC tangenti BO parallela, quæ KL fecet in P, & logarithmicam in C; fi fiat in qualibet KL, rectas $A\omega$, AC, MG & ME fecante in punctis S, P, R & L, logarithmicam verò in B, ut RL ad TL ita SP ad BP, & $rl : tl =$

$sp:bp$, erunt puncta T, t, &c. in curva optata MTC, quam dico eandem esse cum curva 2M2T2C in propositione LX. §. 510. constructa, si anguli GME, 2G2M2E, subtangentes logarithmicarum $D\omega$ & $2G2u$, & denique celeritates jactus MG, & 2M2G, æquales fuerint.

Fig. 124. & 123. *Demonstr.* Sint præterea Mr & $2M2r$ æquales, & æquabuntur pariter rl ac $2r2l$. Jam, quia MG exponit celeritatem jactus, EG denotabit velocitatem verticalem ex obliqua MG derivatam, & $D\omega$ vel FO (§. 498.) exponit celeritatem terminalem, erit (constr.) $AK:DK = EG:D\omega$; &, quia si æqualibus $D\omega$ & FO communis ωF addatur, provenientes inde DF seu KB & ωO æquales, atque adeò rectæ ωK, HB & AI parallelæ sunt, erit etiam $AK:DK = \omega I:D\omega = EG:D\omega$; & per consequens $\omega I = EG$, & sic ubique $sp = rl = 2r2l$, cùm Mr & $2M2r$ anguliqe GME, 2G2M2E (secundùm hypothesin) æquentur; porrò $AD:kD$ ($= MG:rG$) $= 2M2G:2r2G$, ergo (§. 492.) $kb:D\omega = 2r2b:2G2u$; sunt enim kb log-mus rationis AD ad kD in log-mica ABC, & $2r2b$ log-mus rationis alteri æqualis 2M2G ad $2r2$G in log-mica 2M2B2Q. Vel, quia (secundùm hypothesin) $D\omega = 2G2u$, fiet $kb = 2r2b$, & quia $2G2u:2r2s$ ($= 2G2M:2r2M = GM:rM = DA:kA$) $= D\omega:ks$ atque $2G2u = D\omega$, erit $2r2s = ks$ & $sb = 2s2b$; hinc etiam ex æqualibus sp & $2r2l$ ablatis æqualibus sb & $2s2b$ vel $2r2t$, remanet $bp = 2t2l$; sed constructio præbet $rl:tl = sp:bp$; seu quia $rl = sp$, fit etiam $tl = bp$, ergo pariter habebitur $tl = 2t2l$, & sic ubique, ergo curva Hugeniana MTC eadem est cum altera 2M2T2C. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

519. Hinc liquet Hugenium suam constructionem nonnihil simpliciorem traditurum fuisse, si loco analogiæ $RL:TL = SP:BP$ simpliciter jussisset sumere ubique applicatam TL æqualem homologæ BP interceptæ inter log-micam ABC & ejus subtensam AC.

COROLLARIUM II.

520. Parameter parabolæ, quam missile juxta directionem MG & celeritate hac recta expressa in vacuo describeret, foret $2.EM^2:D\omega$. Nam, quia celeritas verticalis ex obliqua derivata est EG, & gravitas uniformis exponitur per subtangentem log-micæ $D\omega$, maxima alti-

altitudo, ad quam grave celeritate initiali EG pervenire poteſt, erit (§. 150.) $EG^2 : 2.D\omega$. Sed GE eſt ad EM, ut dupla parabolæ altitudo ad ſemiſſem amplitudinis, ac propterea hæc dimidia amplitudo eſt $EM.EG:D\omega$. Atqui quadratum dimidiæ amplitudinis parabolæ applicatum ad ejus altitudinem præbet parametrum, ergo hic parameter eſt $2.EM^2:D\omega$. Quod Hugenianæ & Varignonianæ determinationibus, utut aliis terminis expreſſis, conſonum eſt.

PROPOSITIO LXII. THEOREMA.

521. *Eadem adhuc reſiſtentiæ hypotheſi poſita, curva projectionis, quæ ex conſtructione à Cel. Newtono* (Princ. Phil. Nat. Math. Lib. II. Prop. IV.) *exhibita naſcitur, eadem eſt cum Hugeniana, de qua in propoſitione proxime antecedenti egimus, aut cum curva propoſitionis noſtræ ſexageſimæ primæ.*

Ne Lectori Newtoni conſtructionem alibi quærere opus ſit, eam, ſed aliis quam apud Autorem litteris ſignatam, huc afferre libet. Eadem vero ita habet: Fig. 124.

Aſſumpta MG pro celeritate & directione jactus, ductisque per terminos ejus horizontali ME, ac verticali ED, in qua ejus ſegmentum EG celeritatem verticalem ex obliqua MG derivatam exponit; inter aſymptotas DEM hyperbola quæcunque QVd deſcripta intelligatur rectam AM in Q ſecans, per quod punctum agatur inſuper QH æquidiſtans horizontali ME, diviſaque hac ME in L, ut ML ſit ad LE ſicut reſiſtentia medii renitens motui in altum initio projectionis, ſeu velocitas verticalis EG ad gravitatem, ſeu celeritatem terminalem, antea expoſitam per ſubtangentem FO log-micæ ABC, ducatur LK parallela AM, hyperbolam in V ſecans, quæ log-micæ occurret in B & AD in K, quandoquidem in conſtructione Hugeniana (§. 518.) AK etiam eſt ad KD ſicut EG ad FO vel $D\omega$. Per hyperbolæ punctum V agatur Zz parallela EM, ſumaturque in ea portio gz, quam Newtonus per litteram N deſignat, quæ ſit ad zQ vel VN, ſicut ME ad EG, aut ſimplicius, ducatur Qg æquidiſtans ipſi MG. Quibus poſitis, ſi in qualibet rl parallela KL capiatur rt æqualis trilineo hyperbolico Qun applicato ad datam gz, punctum t erit in curva, quæ eadem prorſus eſt cum ea, quam conſtructiones propoſitionum antecedentium LX & LXI, præbent.

Demonſtr. I. Hyperbola QVd præbet, $EM:EL = VL:QM$ & dividendo $LM:EL = zQ:QM$, & (conſtr.) $LM:EL = EG:D\omega = rl:$

ks, ergo etiam $zQ : QM = rl : ks$, tum etiam (conftr.) $gz : zQ$ ($= ME : EG$) $= Ml : rl$, ergo ex æquo $gz : QM = Ml : ks$; atque adeò $Ml . QM = gz . ks$.

II. Refumatur analogia $zQ : QM = GE : D\omega$, & $gz : zQ = EM : GE$, ergo ex æquo $gz : QM = EM : D\omega$. Atque adeò $EM . QM = D\omega . gz$.

III. Conftructione eft trilineum hyperbolicum $Qnu = gz . rt$, additisque $Ml . QM$ (num. 1. hujus) $= gh . ks$, fiet $QulM = rt . gz + ks . gz$. Atqui (§. 368.) $QMlu : EM . MQ = kb : D\omega$ & (num. 11. hujus) $EM . QM = D\omega . gz$; ergo $rt . gz + ks . gz : D\omega . gz = rt + ks : D\omega = kb : D\omega$; atque adeò $rt + ks = kb = sb + ks$: hinc tandem $rt = sb$, ut habent conftructiones propofitionum LX & LXI; propterea tres diverfæ conftructiones propofitionum trium poftremarum unam eandemque curvam fuppeditant. Quod erat demonftrandum.

CAPUT XVI.

De motu Corporum, in aëre refiftente in duplicata ratione celeritatum mobilis.

HÆc refiftentiæ hypothefis convenit fluidis perfectis atque raris, quorum fcilicet partes prorfus non cohærent, fed liberrime, ubi corporibus folidis impegerunt, recedere queunt; ipfius vero hypothefeos ratio alibi (§. 427.) jam data eft.

PROPOSITIO LXIII. THEOREMA.

Fig. 125. 522. *Motus variati ex primitive uniformi in aëre juxta duplicatam celeritatum rationem refiftente ita fe habent, ut fpatium transmiffum aliquo tempore exponatur log-mo rationis, quam habet celeritas initialis mobilis ad refiduam eidem mobili poft dictum tempus. Hoc verò tempus, ratione celeritatis amiffæ mobilis ad refiduam.*

I. Sit nunc linea MO deferens, quæ juxta NQ quiefcentem æquabiliter incedere intelligatur eodem modo, quo ad propofitionem LVIII. dictum eft (§. 495); mobile vero M feratur ad oppofitam partem fcilicet verfus O in deferenti linea, quæ verfus Q æquabiliter procedit; fint præterea MDO fcala celeritatum mobilis motu proprio in deferente linea currentis, & PFO fcala folicitationum acceleratricium feu impulfuum aëris mobili allidentis. Unde, fi aliquo tempore

pore mobile M confecerit in linea deferenti ſpatium ME, & in ejus termino acquiſiverit celeritatem DE, velocitas abſoluta mobilis in aëre erit BD, quâcum aër mobili M allabetur, unde per hypotheſin erit MP ad EF in duplicata ratione AM ad BD; hoc eſt $MP : EF = AM^2 : BD^2$. Ponitur enim AM, ſeu MN vel NT, pro deſignanda velocitate initiali. Jam ductis per punctum N intra aſymptotas MA & AR hyperbolâ NHK, & log-micâ NGK ſubtangentis NT; in linea indefinita DCH parallela OQ & quomodocunque inter parallelas OR ac OQ ducta, fiat VD æqualis interceptæ GH inter hyperbolam NHK & log-micam NGK, eritque punctum D in ſcala celeritatum mobilis propriarum MDO. Per punctum *d* alteri D indefinite vicinum agantur *dh* parallela OQ, & *bf* æquidiſtans alteri BF; ac ductis per punctum hyperbolæ H rectis IS & HL, ita ut $IL = NT$ (ſeu = ſubtangenti logmicæ NGK in puncto G, atque adeò HL parallela ſit tangenti log-micæ in G, ſeu elemento Gg) ac denique tangente hyperbolæ HR, adeo ut AI ſit = IR, & $LR = TI = NS$; quibus factis erit $nh = Ee = Da$, & $Hm = da$.

II. Hyperbola præbet, $AI : AT = TN : IH$, & dividendo LR vel $TI : AT = DE$ vel $HS : BD$ ſeu IH, ex hypotheſi verò AT vel AM aut $MP : BD = BD : EF$, ergo ex æquo $LR : IH$ vel $BD = DE : EF$; eſt verò $LR : IH = nh$ vel $Ee : Hm$ ſeu da, ergo etiam $DE : EF = Ee : da$; atque adeò $EF . Ee = DE . da$. Hoc eſt *momentum ſolicitationis acceleratricis* EF *æquatur momento celeritatis in deferenti linea mobili* M *acquiſitæ* DE. Ergo (§. 488.) curva MDO eſt ſcala celeritatum, & PFO ſcala reſiſtentiarum, ſeu impulſuum aëris vel ſolicitationum acceleratricium mobilis in linea deferenti, hæc enim omnia idem ſignificant.

III. Agatur SR eritque ea parallela HL; nam $IH : IS$ vel $TN = IL$ vel $AT : IR$ vel AI. Adeoque $IS : HS = AM : DE = IR : LR = mh : nh$ vel Ee, hinc $Ee : DE$ (§. 128.) $= tEe = mh : AM$; ergo omnia tEe id eſt $tME = CH : AM$, hinc $AM . tME = CH$, & $AM . tME, - ME$ ſeu (§. 489.) ſpatium abſolutum, quod mobile in aëre transmittit, erit $= CH - GH = CG$; adeòque exponi debet logarithmo rationis, quam celeritas initialis mobilis TN habet ad IH vel BD in logarithmica NGK, cujus ſubtangens NT. Quod erat primùm.

IV. Num. III. erat $tME = CH : AM = LR : IL = SH : HI = DE : BD$, id eſt, tempus quo mobile ſpatium ſuum abſolutum in aëre abſolvit, ſeu motu proprio in linea deferenti ſpatium ME, exponitur

ra-

ratione, quam habet celeritatis initialis AM pars hoc tempore extincta DE ad residuam BD. Quod erat secundum.

Corollarium I.

523. Adeoque, si tempora fuerint in progressione geometrica ascendente, atque adeò velocitates mobili post hæc tempora residuæ etiam in progressione geometrica, sed descendente, & quidem reciproca progressionis temporum, spatia transmissa erunt in progressione arithmetica. Nam, si AT, AI sint in progressione geometrica, differentiæ TI, quæ sunt ut tempora, erunt in eadem progressione ascendente; ipsæ verò HI, seu celeritates mobili residuæ ipsis AI reciproce proportionales, erunt in progressione geometrica descendente, spatia vero, seu CG, existent in progressione arithmetica. Atque cum hoc corollario penitus consentit Prop. V. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Celeberr. Newtoni.

Corollarium II.

524. Idcirco in ista resistentiæ hypothesi mobile in infinitum excurrens, tempore infinito ut CH, ubi infinite accesserit ad asymptotam TR, percurret etiam spatium infinitum CG; nam, si CG confunditur cum asymptota TR, fit infinita. In hypothesi verò capitis præcedentis, mobile tempore infinito ne quidem spatium finitæ magnitudinis, quod per rectam celeritatem initialem indicantem exponitur, absolvere potest, ut supra (§. 497.) ostensum. Quod Hugenio notatu dignum meritò visum est in Tractatu *De la Cause de la Pesanteur* pag. 175. circa finem.

PROPOSITIO LXIV. Theorema.

525. *Si grave vi gravitatis uniformis in aëre juxta duplicatam rationem celeritatum mobilis resistente verticaliter descendat à quiete motum suum incipiendo,*

Spatium *descensu confectum exponetur log-mo rationis sinus totius ad sinum complementi illius anguli, cujus sinus rectus celeritatem mobili acquisitam repræsentat;*

Tempus *verò, quo spatium illud pertransitur, aut prædicta velocitas mobili acquiritur, exponetur log-mo rationis sinus totius ad tangentem se-*

semissis complementi præmemorati anguli, applicato ad logarithmicæ subtangentem.

Grave M descendere incipiat à quiete in recta verticali MX, cui alia AO ad angulos rectos aptata sit; in hac AO capiatur MA, quæ gravitatem uniformem exponat, ac descriptis centro M intervallo MA quadrante circuli ILA & hyperbola æquilatera IKk, necnon log-mica NIQ, cujus subtangens æquet radium quadrantis vel semilatus transversum MI hyperbolæ; per hyperbolæ & quadrantis punctum I agatur tangens communis IU, quæ æquidistans erit ipsi MA. Tum etiam per quodvis quadrantis punctum L ducatur LN parallela AO log-micæ occurrens in puncto N, & recta ALP radio MI producto occurrens in P, per quod punctum ducatur insuper PQ æquidistans MA & log-micæ occurrens in puncto Q, sitque adhuc NO ordinata log-micæ per punctum N ducta. Dein fiat porrò in recta indefinita MX segmentum ME = MO, & sic ubique respective; eritque ductis per puncta E & L rectis EG, LS radiis MA & MI respective parallelis, communis earum intersectio D in *scala celeritatum acquisitarum* MDX, adeo quidem, ut mobile postquam spatium ME perlapsum fuerit, in termino E hujus spatii acquisiverit celeritatem ED vel MS. Factaque ubique EF tertia proportionali post rectas EG & ED, punctum F erit in *scala resistentiarum* aëris MFX, quæ scala etiam erit *scala solicitationum acceleratricium* mobilis cadentis in recta MX, sed quatenus ea refertur ad axem AX, versus quem curva MFX convexa est; nam, quia EF, seu $ED^2 : EG$, exponit resistentiam medii in puncto E & EG = MA gravitatem uniformem, exponet FG omnino solicitationem acceleratricem in puncto eodem E, ut alibi (§. 481.) jam dictum est. Igitur ductis eg parallela EG & ab ea elemento spatii Ee distante; dlr parallela DL productæ in a, & sursum in R, per punctum quadrantis l, recta Alp, & per p linea pq æquidistante PQ; ac denique ordinata no distantia Oo = Ee distante ab altera NO, in qua NO sit VO tertia proportionalis ad IM & NO; & his positis juxta alibi (§. 484.) ostensa, tantum probandum superest, FG. Ee, seu rec-lum FGg, *momentum solicitationis acceleratricis* FG æquari rec-lo ED. $a\,d$, seu *momento celeritatis* ED *casu mobilis ex altitudine* ME *acquisitæ*. Quo probato reliqua sponte sua obtinebuntur, scilicet expressio temporis descensus in spatio ME, & natura curvarum MDX, MFX, &c.

Demonstr. I. Est (secundùm hypothesin) EG : EF (= $EG^2 : ED^2$) = ML^2:

$= ML^2 : MS^2$,& convertendo fit $EG : FG$ ($= ML^2 : LS^2 = IM^2 : NO^2$, seu quia IM, NO & VO sunt in continua ratione) $= IM : VO$, hinc $VO = FG$, & $VO . Oo = FG . Ee$. Atqui (§. 491. num. III.) $VO . Oo = NO . Np = LS . Lm$ (§. 493.) $= MS . Ss = ED . ad$; ergo $FG . Ee = ED . ad$. Quod erat primùm.

II. Propter similitudinem triangulorum MLS & Mlm, fit ad (vel ml) : $l\lambda$ (vel, §. 463. num. III, Ll) est $= LS : ML = NO : IM = VO : NO$; & $l\lambda : Pp = NO$ (vel LS) : MP; ac denique ex natura log-micæ (§. 491. num. I.) $Pp : q\rho = MP : IM$, erit ex æquo $ad : \rho q = VO : IM$, seu permutando $ad : VO = \rho q : IM$. Atqui (§. 131. & 485.) $ad : VO = tEe$, hoc est, incrementum celeritatis elementare, applicatum ad solicitationem acceleratricem VO, exponit tempusculum, quo elementum spatii Ee percurritur; ergo etiam $\rho q : IM = tEe$, atque adeò omnia $\rho q : IM$, id est, $PQ : IM$ = omnibus tEe, seu tempori descensus per spatium ME.

III. Jam MO seu ME, id est, spatium descensu confectum, est log-us rationis IM ad NO, seu IM ad LS, hoc est log-us sinus totius ad sinum complementi anguli IML, cujus sinus rectus MS celeritatem in E acquisitam exponit. PQ verò est log-us rationis PM ad IM, seu IU ad IM; ducta scilicet ex centro M super AP perpendiculari, eaque producta usque ad occursum cum tangente IU; aut denique rationis MA ad AZ, id est, sinus totius ad tangentem semissis anguli LMA, id est, semissis complementi anguli IML, cujus sinus MS celeritatem acquisitam exponit. Idcirco tempus per ME, quod num. II. hujus exponitur per $PQ : IM$, exponi debet per log-mum rationis ($MA : AZ$) sinus totius ad tangentem semissis complementi anguli IML applicatum ad radium IM, seu ad log-micæ subtangentem. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

526. Igitur ducta MR usque ad occursum K cum hyperbola IK, trilineum hyperbolicum IMK applicatum ad semissem quadrati IM, exponet etiam tempus descensus per spatium ME. Nam (§. 463.) est duplum trilinei IMK = rec-lo $PQ . IM$, ergo trilineum $IMK = PQ . \frac{1}{2}IM$. Jam, quia (§. 525. num. II.) $tME = PQ : IM = PQ . IM : IM^2$, erit tME = dupl. trilin. $IMK : IM^2$ = trilin. $IMK : \frac{1}{2}IM^2$.

Pariter ducta asymptota My hyperbolæ IKk, atque ex K demissa ad asymptotam ordinata KY, ad quam alia quædam ky se habeat, ut ut LS ad IM, quadrilineum hyperbolicum K*ky*Y applicatum ad semissem IM exponet spatium percursum ME. Nam, quia (constr.) KY : *ky* = IM : NO, erit (§. 368.) K*ky*Y : MY . KY seu $\frac{1}{2}IM^2$ = OM : IM, adeoque OM = ME = K*ky*Y : $\frac{1}{2}$IM.

Corollarium II.

527. Scala solicitationum acceleratricium MFX est log-mica, cujus subtangens est semissis ipsius IM. Nam, quia supra (§. 525. num. 1.) ostensum VO = FG & (constr.) OM = ME = AG, sequitur curvam MFX similem & æqualem esse curvæ IV; atqui hæc curva est log-mica, cujus subtangens est dimidia ipsius IM subtangentis logarithmicæ IN; quandoquidem quælibet VO est tertia proportionalis ad IM & NO; ergo etiam MFX est log-mica, cujus asymptota est AX. Propterea, si solicitationes acceleratrices FG sunt in progressione geometrica descendente, spatia transmissa sunt in progressione arithmetica ascendente.

Corollarium III.

528. Adeoque velocitas *terminalis* seu *maxima*, est MA, quæ gravitatem uniformem repræsentat, cum linea AX parallela MX asymptota sit utriusque curvæ MFX & MDX.

Corollarium IV.

529. Tempus, quo grave in aëre celeritatem DE acquirit, est ad tempus, quo eandem celeritatem in vacuo acquireret, ut PQ ad DE. Nam (§. 151.) tempus, quo celeritas DE in vacuo acquiritur, est DE : IM vel AM, & tempus, quo in aëre eadem DE acquiritur, PQ : IM.

Corollarium V.

530. Vicissim celeritas, quæ tempore PQ : IM in aëre acquiritur, est ad celeritatem, quæ eodem tempore in vacuo acquiri potest, ut DE ad PQ. Nam (§. 151.) tempore PQ : IM acquiritur in vacuo celeritas PQ.

SCHOLION.

Fig. 127. 531. Si grave M perpendiculariter deorsum projiciatur in recta MX celeritate MI, majore ipsâ terminali MA vel MP; positoque, mobilis velocitatem reductam esse ex MI ad MS (nam, quia velocitas projectionis MI major est quam AM, resistentia medii major erit gravitate, ac propterea motus continuo debet retardari) erit spatium percursum ME exponendum per log. $\sqrt{(PIA:PSA)}$ seu log-mum subduplicatæ rationis rectanguli PI. AI ad PS. AS; tempus verò, quo mobile spatium ME percurrit, seu quo velocitas initialis MI reducitur ad ED vel MS, exponitur per log. $\sqrt{(AI:AS)}$ — log. $\sqrt{(PI:PS)}$. Ponitur verò MP = MA, hi posteriores log-mi sumuntur in log-mica, cujus subtangens est unitas, log. vero ex $\sqrt{(PIA:PSA)}$ sumitur in log-mica, cujus subtangens est AM vel MP. Sin verò celeritas projectionis MI minor fuerit quam MA, hic casus jam continetur in præsenti propositione, ut adeo eidem diutius immorari plane necessum non sit.

PROPOSITIO LXV. Theorema.

532. *Lineâ rectâ, quæ celeritatem terminalem seu gravitatem uniformem exponit, sumtâ pro sinu toto seu radio; si mobile quoddam, celeritate initiali, expressa tangente alicujus anguli, verticaliter in altum projiciatur*, maxima altitudo, *ad quam mobile in aere pervenire potest, exponetur log-mo rationis secantis anguli ad radium*, & tempus *hujus ascensionis exponetur per ipsum angulum, cujus tangens celeritatem initialem exponit.*

Fig. 128. Ascendat mobile celeritate initiali EC ex E in M in linea verticali EM, centroque M describantur, ut in præcedenti, circuli quadrans IKA, hyperbola æquilatera IL, & logarithmica FN. Producatur CE in H factaque EH tertia proportionali ad EG & EC, eritque EH resistentia, quam ascendens mobile ab aëre patietur in E; & quia præterea EG, seu MA, gravitatem uniformem exponit, quæ mobili in altum lato quoque resistit, erit ideo (§. 481.) *resistentia totalis* mobili opposita in E æqualis GH. Adeoque curva quædam HM erit scala resistentiarum totalium, curva verò CM scala celeritatis decrescentis EC. Adeoque (§. 484.) res eo deducitur, ut construantur hæ nominatæ curvæ ejus proprietatis, ut sit ubi-

ubique HE. $Ee = EC.bC$. Ad id; ductis CL, LN atque NO parallelis rectis MI & MA respective, fiat $ME = MO$, & sic ubique, dabunturque tot puncta in curva C2CM, quot libuerit, ex qua deinceps alteram HM construere non erit difficile. Ducantur *cl*, *ln*, *no* prioribus CL, LN & NO æquidistantes & indefinite vicinæ, sumaturque in qualibet ON major OV, quæ sit ad homologam ON, ut hæc NO ad MI; quæ MI simul etiam log-micæ IN subtangentem significat, & hac ratione resultabit nova log-mica IV, cujus subtangens erit semissis IM subtangentis log-micæ IN.

Demonstr. I. Quia rectæ EG, EC & EH (secundùm hypothesin) sunt in continua ratione, erit $EG : EH = EG^2 : EC^2$, vel invertendo & componendo $HG : EG = IS^2 : IM^2 = LS^2 : IM^2 = NO^2 : IM^2$ (vel ob continue proportionales VO, NO & IM) $= VO : IM$ vel EG, ergo $HG = VO$; & quia $OM = EM$, ac $oM = eM$, & proinde $Oo = Ee$; erit $HG.Gg$, vel $HG.Ee = VO.Oo$ (§. 491. num. III.) $= NO.Np = LS.Lm$ (§. 493.) $MS.Ss = EC.Cb$. Id est *momentum celeritatis decrescentis* EC *æquatur momento resistentiæ totalis* HG. Jam ME vel MO est log-us rationis NO ad IM, seu IS ad IM, id est, log-us rationis secantis anguli MIS, cujus tangens $MS = EC$ celeritatem initialem exponit, ad radium IM vel MA. Quod erat primum.

II. Quia $VO : IM = NO^2 : IM^2 = LS^2 : IM^2 = MR^2 : MK^2$ (§. 165.) $= Rr : Kk$, atque adeò, quia $Rr = Cb$, erit $Kk : IM = Cb : VO = Cb : HG$ (§. 131, 485.) $= tEe$, & $Kk : MK$ vel IM (§. 129.) $=$ angulo KMk, adeoque $tEe =$ angulo KMk, ac proinde tempus totius ascensus per spatium EM exponi debet angulo KMI, cujus tangens est IR vel EC. Quod erat alterum.

COROLLARIUM I.

533. Nunc iterum curva resistentiarum totalium M2HH erit log-mica similis & æqualis log-micæ IV. Atque adeo si resistentiæ totales sumantur in progressione geometrica descendente, spatia ascendendo confecta erunt in progressione arithmetica descendente, scilicet spatia toto ascensu descripta. Horum demonstratio eadem ferme est cum ea coroll. II. prop. præced. §. 527.

COROLLARIUM II.

534. Velocitas initialis mobilis suam maximam in aëre altitudinem EM absolventis, est ad celeritatem initialem, qua mobile pari tempore suam in vacuo maximam altitudinem conficeret, ut tangens IR ad arcum IK. Nam, si corpus in vacuo celeritate initiali IK ascendit, tempore IK : IM id (§. §. 141. 151.) ascendet quousque potest, sed hoc ipso tempore IK : IM expositum angulo KMI, ascendet in aëre spatio EM, celeritate initiali EC vel IR. Ergo, &c. Atque hoc consentit cum coroll. 4. prop. 9. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Cel. Newtoni.

COROLLARIUM III.

535. Tempus, quo mobile suam in aëre altitudinem, ad quam celeritate initiali IR pervenire potest, absolvit, est ad tempus, quo in vacuo suam altitudinem, celeritate initiali existente eadem IR, absolveret, sicut arcus IK ad tangentem IR, seu, quod idem est, ut sector IMK ad triangulum IMR. Nam tempus ascensionis in aëre est angulus IMK, seu IK : IM, & tempus ascensionis in vacuo (§. 151.) IR : IM.

COROLLARIUM IV.

536. Adeoque, si celeritas initialis, qua corpora in aëre & in vacuo ascendunt, terminalem æquaverit, erit tempus, quo altitudo illius quod in aëre, ad tempus, quo altitudo ejus, quod in vacuo ascendit, conficitur, ut circulus ad quadratum circumscriptum; nam, si IR = IM, erit sector IMK octava circuli & triangulum IMR octava quadrati circulo circumscripti pars, adeoque ille ad hoc, ut circulus totus ad quadratum circulo circumscriptum.

COROLLARIUM V.

537. Iisdem adhuc positis, quæ in coroll. III. altitudo, quam mobile in aëre absolvit, est ad altitudinem in vacuo percurrendam, ut duplum rec-lum IMO ad quadratum tangentis IR. Nam (§. 150.) altitudo in vacuo describenda erit $IR^2 : 2IM$, & ME est ad $IR^2 : 2IM$, ut duplum rec-lum IMO ad IR^2.

Co-

Corollarium VI.

538. Adeoque, si celeritas initialis IR terminali IM par fuerit, erit altitudo in aëre ad altitudinem in vacuo absolvendam, vel $2.IMO$ ad IR^2, sicut $2MO$ ad IM, id est, sicut log. $(2.IM^2 : IM^2)$ ad IM, hoc est, sicut log-us rationis duplæ ad subtangentem log-micæ, vel etiam (§. 368.) ut quadrilineum hyperbolicum alterutri asymptotæ adjacens, cujus ordinatæ sunt in ratione dupla, ad rec-lum hyperbolæ inter asymptotas. Ut Celeb. Hugenius (pag. 174. Diss. *De Causa Gravitatis*) sine demonstratione asseruit.

Corollarium VII.

539. Celeritas initialis mobilis spatium EM ascendendo describentis, est ad celeritatem, quacum denuo in terram recidit, sicut tangens anguli IMR ad ejusdem sinum. Nam, quia in figuris 126. & 128. spatia ME utrinque sunt (secundùm hypothesin) æqualia, erit ratio ON : IM, in fig. 126. seu LS : LM = in fig. 128. IM : NO = RS : MR; adeoque triangulum rec-lum LMS in fig. 126. est simile triangulo RMS, adeo ut angulus IML in fig. 126. = IMK, atqui IR est tangens & MS in fig. 126. sinus unius ejusdemque anguli IMK vel IML, ergo &c.

Fig. 126. & 128.

Fig. 126.

Hisce multa alia potuissent addi corollaria, sed brevitati consulens talia Lectoris industriæ ex præcedentibus elicienda relinquo.

Caput XVII.

De motibus Corporum in aëre resistente, partim juxta proportionem celeritatum mobilis, partim etiam juxta duplicatam proportionem earundem.

540. Hæc resistentiarum hypothesis illis fluidis convenit, quorum partes nonnihil instar visci cohærent: etenim, si tale fluidum tanquam medium concipiamus mobili trajiciendum, ilicò apparebit, ad separandas ejusmodi viscidi fluidi partes, aliquam vim adhibendam esse, diversam ab ea, quæ in mobili tollitur ab allapsu continuo particularum fluidi; & hanc vim separatricem partium fluidi proportionari quantitatibus fluidi trajiciendi. Quantitates verò ipsæ fluidi trajiciendæ velocitatibus mobilis proportiona-

les

les existunt. Igitur tenacitas absoluta fluidi ducta in celeritatem mobilis, seu, quod idem est, in quantitatem materiæ separandæ vel trajiciendæ, erit una pars resistentiæ, quam mobile in ejusmodi fluido latum subibit, altera provenit à fluiditate, qualem in præcedenti capite contemplati sumus. Idcirco resistentia totalis, quam mobile in hujusmodi medio patietur, est ut velocitas in datam quantitatem ducta, cum quadrato ejusdem velocitatis. Idcirco tenacitatem dictam considerabimus deinceps tanquam vim mortuam gravitatique comparabilem, perinde ac resistentias, quæ ab allapsu fluidi ad corpus mobile proveniunt.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA.

541. *Si mobile in aëre dicta ratione resistente motu variato ex primitive uniformi seu æquabili feratur;* spatium, *quod id aliquo effluxo tempore describet, exponetur tertia proportionali ad celeritatem mobilis initialem, tenacitatem fluidi & log-um rationis, quam habet dicta velocitas initialis tenacitate aucta, ad hanc tenacitatem auctam pariter, sed celeritate actuali mobilis.* Tempus, *quo hoc spatium percurritur, exponi debet excessu, quo log-us rationis, quam celeritas initialis habet ad actualem, superat log-um rationis earundem celeritatum, sed tenacitate aëris auctarum, applicato ad celeritatem initialem. Posito scilicet log-mos desumtos esse ex log-mica, cujus subtangens se habet ad celeritatem mobilis initialem, sicut rectangulum ex aggregato tenacitatis fluidi & velocitatis initialis corporis in hanc celeritatem initialem ad rec-lum sub dicta tenacitate & resistentia medii totali initio motus.*

Fig. 129. I. Esto MS linea deferens, quæ, ut in propositione LVIII. explicuimus, uniformiter moveatur versus T celeritate AM, quæ proinde est celeritas initialis, mobile verò M proprio suo motu ab allisione continua aëris feratur ex M versus S, ponaturque certo tempore acquisivisse in linea deferenti celeritatem AQ, postquam scilicet spatium ME in ea transmisit, adeoque detracta celeritate AQ ab initiali AM, quâ deferens linea MS versus T æquabiliter incedit, erit residua QM velocitas absoluta mobilis, quam revera in aëre habet; sit porrò OM, vel æqualis IA, tenacitas fluidi proveniens ex viscositate ejus; item ponatur MP pro resistentia aëris initio motus, & EF pro resistentia aëris, ubi actualis mobilis velocitas fuerit QM; eritque adeò (secundùm hypothesin) EF ut OM.QM + QM^2, seu facta OG = MQ, ut rec-lum GM.QM, & MP ut IM.AM,

atque

atque adeo habetur MP : EF = IM. AM : GM. QM, atque MP. GM. QM = EF. IM. AM. Æqu. I.

Per punctum A ducta sit log-mica HAB, cujus subtangens quælibet RC sit ad AM (secundùm hypothesin) = IM. AM : OM. MP; atque adeò RC. OM. MP = IM. AM². Æqu. II. Et per puncta I, G, O, Q agantur rectæ IK, GH, OX, & QB asymptotæ log-micæ ST parallelæ, log-micæ occurrentes in punctis K, H, X & B, per quæ ordinatæ KL, HN, XY & BC ductæ sint; fiat ME = MC $- \frac{IM.LN}{AM}$, eritque PFS scala resistentiarum & tempus, quo spatium ME in linea deferenti MS percurritur, seu tME = (MC = LN) : AM.

II. *Demonstr.* Cum (constr.) sit ME = MC $- \frac{IM.LN}{AM}$, erit etiam Ee = Cc $- \frac{IM}{AM}$. Nn, sunt enim Ee, Cc, & Nn elementa linearum ME, MC & LN. Præterea, quia etiam (constr.) OG = MQ, erit pariter Gg = Hi = Qq = Bd, adeòque (§. 491. num. 11.) rec-lum HNn = rec-lo BCc, ac proinde Cc : Nn = GM : QM, & Cc : $\frac{IM}{AM}$. Nn = GM : $\frac{IM}{AM}$. QM = GM. AM : IM. QM, & convertendo Ee seu Cc $- \frac{IM}{AM}$. Nn : Cc = GM. AM − IM. QM : GM. AM (vel quia OM. AQ æquatur GM. AM − IM. QM) = OM. AQ : GM. AM, & propter triangula similia RCB ac bdB est, Cc : Qq = RC : QM, ergo ex æquo & per rationum compositionem Ee : Qq = RC. OM. AQ : GM. QM. AM = RC. OM. MP. AQ : MP. GM. QM. AM, (vel substitutis loco RC. OM. MP & MP. GM. QM ope Æqu. II. & I. solidis respective æqualibus IM. AM² & EF. IM. AM) = IM. AM². AQ : IM. AM². EF = AQ : EF, adeoque comparando primam cum ultima ratione, habetur Ee : Qq = AQ : EF, atque adeò EF. Ee = AQ. Qq. Id est *momentum solicitationis acceleratricis* EF in linea deferenti MS *æquatur momento celeritatis acquisitæ* AQ in hac linea deferente.

III. Ut antea (num. 11. hujus) erit Cc : Nn = GM : QM, & convertendo Cc − Nn : Cc = OM (seu GQ) : GM, & Cc : Qq = RC : QM, ergo Cc − Nn : Qq = RC. OM : GM. QM = RC. OM. MP : MP. GM. QM = IM. AM² : EF. IM. AM, substitutis scilicet loco solidorum RC. OM. MP & MP. GM. QM æqualibus IM. AM² & EF. IM. AM, quæ æqualitates secunda & prima num. 1. exhibent;

 est

est ergo $Cc - Nn : Qq = IM . AM^2 : EF . IM . AM = AM : EF$, & permutando $Cc - Nn : AM = Qq : EF = Ee : AQ = tEe$, ergo omnia tEe seu tempus per $ME = (MC - LN) : AM$.

IV. Ergo, assignato hoc tempore, linea deferens MS describet in aëre cum velocitate AM motu suo æquabili spatium $MC - LN$, motu verò proprio in hac deferente corpus simul describit spatium $ME = MC - \frac{IM}{AM} . LN$, adeòque spatium absolutum, quod mobile in aëre absolvet, erit excessus spatii motu communi & æquabili lineæ deferentis supra motum isti contrarium mobilisque in deferenti proprium, seu $MC - LN - MC + \frac{IM}{AM} . LN = IM . LN : AM$. Hoc ergo spatium absolutum exponitur tertia proportionali ad celeritatem initialem AM, tenacitatem fluidi OM vel IA, atque ad log-mum rationis, quam KL & HN, id est, celeritates initialis & actualis, mobilis tenacitate auctæ, ad invicem habent. Quæ omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

542. Apparet igitur in præsenti resistentiarum hypothesi mobile non solum non posse in infinitum excurrere, sed ne quidem posse terminum finiti spatii $SM . LY : AM$ tempore quantumlibet magno attingere. Nam evanescente QM, ipsa MC fit infinita, GM fit OM, adeoque LN mutatur tunc in LY, adeo ut $MC - LN : AM$ abeat in $MC - LY : AM$ seu in $MC : AM$, quia finita LY præ infinita MC evanescit. Idcirco spatium $IM . LN : AM$ tempore finito $MC - LN : AM$ percursum, mutabitur in $IM . LY : AM$, quod tempore infinito tantum $MC : AM$, id est nunquam, absolvi potest.

COROLLARIUM II.

543. Si spatia $IM . LN : AM$ sumantur in progressione arithmetica, erunt ipsæ LN abjectis $IM : AM$ ejusdem ubique magnitudinis, etiam in progressione arithmetica, atque adeò ordinatæ log-micæ HN vel æquales hisce GM, seu velocitates actuales mobilis QM tenacitate medii OM vel AI auctæ, in progressione geometrica.

Co-

Corollarium III.

544. Quia $CM = \log. (AM : QM)$ & $LN = \log. (IM : GM)$ erit $MC - LN = \log. (GM. AM : IM. QM) = \log. (AM. OM + AM. QM : IM. QM)$. In recta MP ſumatur MZ, quæ ſit ad OM vel $AI = AM : QM$, eritque $QM. MZ = AM. OM$, atque adeò $AM. OM + AM. QM : IM. QM = AM + MZ$ ſeu $AZ : IM$, & conſequenter $MC - LN = \log. (AM + MZ : IM)$, atque $(MC - LN) : AM = \log. (AM + MZ : IM)$ applicatus ad AM. Adeoque, ſi hæ $MC - LN : AM$, hoc eſt, tempora ſumantur in progreſſione arithmetica, erunt ipſæ $AM + MZ$, ſeu magnitudines MZ velocitatibus QM reciproce proportionales celeritate initiali AM auctæ in progreſſione geometrica.

Hæc duo poſtrema corollaria probe conſpirant cum propoſitionibus XI. & XII. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Cl. Newtoni, & cum iis, quæ Cl. Varignon in Actis Acad. Scient. 1707. d. 13. Auguſti probl. IV. coroll. 11. & 14. exhibuit.

Scholion.

545. Satis prævideo fore, ut mihi objiciatur nimia prolixitate in hac propoſitione noſtra ea tradita eſſe, quæ multo brevius atque facilius potuiſſent perfici, ſi pro linea OM, tenacitatem fluidi denotante, aſſumſiſſem rectam AM, quæ velocitatem initialem exponit. At reſpondeo hoc pacto propoſitionem minus generalem futuram fuiſſe, etſi non negem, multò brevius atque ſimplicius tunc demonſtrari potuiſſe. Nam talem adducere volui, quæ etiam caſum propoſitionis noſtræ LXIII. contineret; quod revera præſtat, nam evaneſcente OM vel AI, ex conſtructione præſentis propoſitionis, naſcuntur omnes determinationes propoſitionis LXIII, adeo ut illa caſus tantum ſit ſeu corollarium præſentis. Sed, ſi pro linea tenacitatem fluidi repræſentatrice accepiſſem tantum rectam AM, quæ velocitatem initialem mobilis exponit, talis deductio non ſucceſſiſſet, quia AM, quatenus velocitatem initialem exprimit, nunquam poteſt evaneſcere. Sed, quia deductio propoſitionis ſuperioris LXIII. ex præſenti non adeò obvia eſſe videtur, eam hoc loco diſtinctius explicare libet. Si IA vel OM evaneſcit, etiam $AI. LN : AM$ evaneſcere videtur, ſeu ſpatium à mobili in aëre juxta duplicatam pro-

portionem celeritatum resistente in nihilum abire, tum etiam MC − LM : AM. Hoc enim casu IM abiret in AM, & GM in QM, id est, ratio IM : GM fieret AM : QM, adeoque LN log-us illius rationis fieret MC, adeò ut MC − LN futura sit MC − MC = o. Quomodo ergo ex constructione præsentis propositionis elici potest constructio propositione LXIII. in casu ipsius AI = MO = o?

546. Quia in dicta propositione (§. 522.) log-micæ subtangens exponit celeritatem initialem, sumatur log-us rationis IM : GM in ea log-mica, eritque (§. 492.) log. (IM : GM) : AM = LN : RC, adeoque LN = RC. log. (IM : GM) : AM, & IA. LN : AM = RC. IA. log. (IM : GM) : AM^2 = RC. OM, MP. log. (IM : GM) : AM^2. MP. Atqui (§. 541. num. 1. æqu. I. II.) est RC. OM. MP = IM : AM^2, ergo IA. LN : AM = IM. AM^2. log. (IM : GM) : AM^2. MP = IM. log. (IM : GM) : MP, & hæc est nova expressio spatii in aëre decursi, sive IA sit quantitas realis sive non. Jam, si IA = o, erit ratio IM : GM = AM : QM, evanescente scilicet OM = IA, & existente OG = QM. Ergo spatium in aëre percursum erit hoc casu AM. log. (AM : QM) : MP = log. (AM : QM) in casu propositionis LXIII. ubi MP revera æqualis facta erat AM celeritati initiali. Est ergo spatium absolutum à mobili in aëre percursum exponendum log-mo rationis, quam celeritas initialis AM habet ad residuam mobilis seu actualem QM, prorsus ut habet propositio citata.

547. Determinatio temporis est paulò altioris indaginis. Hoc tempus exponitur juxta præsentem propositionem per (MC − LN) : AM. Jam (§. 544.) est MC − LN = log. (AM + MZ : IM) = log. AM + MZ, − log. IM. Et log. (AM + MZ) = $\left(\frac{MZ}{MA} - \frac{MZ^2}{2.AM^2} + \frac{MZ^3}{3.AM^3} - \&c.\right)$ in RC, = $\left(\frac{MZ.QM}{AM.QM} - \frac{MZ^2.QM^2}{2.AM^2.QM^2} + \frac{MZ^3.QM^3}{3.AM^3.QM^3} - \&c.\right)$. RC, seu quia ex constructione rec-lum MZ. QM æquatur dato rectangulo AM. OM, erit log. (AM + MZ) = $\frac{RC.OM.AM}{AM.QM} - \frac{RC.OM^2.AM^2}{2.AM^2.QM^2} + \frac{RC.OM^3.AM^3}{3.AM^3.QM^3} - \&c. = \frac{RC.OM.MP}{MP.QM} - \frac{RC.OM^2.MP}{2.MP.QM^2} + \frac{RC.OM^3.MP}{3.MP.QM^3} - \&c.$ (aut, quia solidum RC. OM. MP æquatur solido IM. AM^2, ut aliquoties jam vidimus) = $\frac{IM.AM^2}{MP.QM} - \frac{IM.AM^2.OM}{2.MP.QM^2} + \frac{IM.AM^2.OM^2}{3.MP.QM^3} - \&c.$ Atqui in hac ultima serie infinita, ob evanescentem (secundùm hypothesin) OM,

OM, evanescent omnia post primum terminum membra, propterea erit hoc casu log. $(AM + MZ) = \frac{IM.AM^2}{MP.QM}$.

Quia $IM = AM + IA = AM + OM$, erit log. $IM = (\frac{OM}{AM} - \frac{OM^2}{2.AM^2} + \frac{OM^3}{3.AM^3} - \&c.) RC$, quæ est eadem series cum prima, excepta sola OM, quæ hoc loco est posita loco MZ, in prima. Ergo etiam log. $IM = \frac{RC.OM.MP}{AM.MP} - \frac{RC.OM^2.MP}{2.AM^2.MP} + \&c. = \frac{IM.AM^2}{AM.MP} - \frac{IM.AM^2.OM}{2.AM^2.MP} + \&c. = \frac{IM.AM}{MP} - \frac{IM.OM}{2.MP} + \&c. = \frac{IM.AM}{MP}$, quia etiam in hac serie infinita omnes, post primum, termini evanescunt, existente (secundùm hypothesin) OM vel $AI = 0$. Hinc $MC - LN =$ log. $(AM + MZ) -$ log. $(IM) = \frac{IM.AM^2}{MP.QM} - \frac{IM.AM}{MP} = \frac{IM.AM^2 - IM.AM.QM}{MP.QM} = \frac{IM.AM.AQ}{MP.QM} = \frac{AM^2.AQ}{MP.QM}$, quia in præsenti hypothesi IM fit AM evanescente IA, & quia insuper, in propositione LXIII, MP æqualis erat AM, erit $MC - LN = \frac{AM.AQ}{QM}$, & $MC - LN : AM$, seu tempus, quo mobile suum spatium log. $(AM : QM)$ in aëre absolvit fit $= AQ : QM$, exponendum scilicet ratione celeritatis initialis partis amissæ ad residuam, seu velocitatem mobilis actualem in aëre, prorsus ut habet citata propositio LXIII. §. 522.

548. Quin imò res universalius adhuc quam illic tradi potest, supponendo resistentiæ ab initio motus repræsentatricem MP diversam esse à recta AM, quæ celeritatem initialem exponit; etenim spatium absolutum in aëre confectum eo casu exponetur, ut supra (§. 546.) invenimus, per AM. log. $(AM : QM) : MP$, & tempus, quo hoc spatium absolvitur per $AM. AQ : MP. QM$. Idcirco potuisset sæpius jam memorata propositio penitus omitti, quemadmodum & eæ, quæ post eam in eodem capite XVI. immediate sequuntur, quod pariter ex iis deduci possint facillimo negotio illæ, quæ mox sequentur. Sed demonstrationum diversitas atque in conclusionibus concentus omnino digna sunt, quæ distinctius curiosi Lectoris oculis exponantur.

PROPOSITIO LXVII. Theorema.

549. *Si gravitas uniformis exponatur ſinu complementi alicujus anguli acuti & dati, & grave in linea recta horizonti normali cadat in aëre, juxta indicatam in titulo hujus capitis hypotheſin, reſiſtente; aſſumaturque quædam magnitudo, quæ ſit ad log-mum rationis, quam tangens ſemiſſis complementi dati anguli habet ad tangentem ſemiſſis complementi alicujus anguli variabilis & majoris dato, ut ſinus dati anguli ad ſinum totum. Sumptis ſcilicet log-mis in logarithmica, cujus ſubtangens eſt æqualis ſinui complementi dati anguli præmemorati, quibus poſitis,*

1°. Spatium, *quod grave aliquo tempore perlabitur accelerato motu, eſt exceſſus log-mi rationis, quam habet ſinus complementi dati anguli ad ſinum complementi variabilis, ſupra aſſumptam magnitudinem:*

2°. Tempus, *quo ſpatium iſtud abſolvitur, exponetur aſſumpta magnitudine applicata ad ſinum rectum anguli dati:*

3°. Celeritas, *in fine cujusque temporis acquiſita, eſt, ut exceſſus ſinus anguli variabilis ſupra ſinum rectum anguli dati.*

Fig. 130. Cadat grave à quiete ex M in linea recta Mα horizonti perpendiculari, ac centro A deſcripto circuli quadrante BLCA, exponat in eo recta IM, quæ eſt ſinus complementi cujusdam dati anguli BAI, gravitatem uniformem, & ductâ porrò qualibet SL parallela IM, jungatur AL; eritque angulus BAL is, qui in propoſitione variabilis dicitur, cujus recta LS eſt ſinus complementi. Circa axem MR & per ſupremum quadrantis punctum transeat log-mica BGN, cui linea LN parallela radio CA occurrat in N, recta verò IG eidem MC æquidiſtans in puncto G, per hæc duo log-micæ puncta transeant ordinatæ GH & NO; dein aſſumatur quædam XZ, quæ ſit ad log-um rationis QA : AP ſicut AM ſinus dati anguli BAI ad radium AI. Ductis enim per puncta I & L ex puncto C rectis CP & CQ, erit QA : PA, ut tangens dimidii anguli IAC ad tangentem dimidii LAC, ſeu ut tangens ſemiſſis complementi anguli dati BAI ad tangentem ſemiſſis complementi anguli variabilis BAL; nam AQ : AP = tang. LCA : tang. ang. ICA = tang. MIC : tang. SLC = tang. $\frac{1}{2}$IAC : tang. $\frac{1}{2}$LAC. Ipſa verò HO, ſeu log-us rationis GH : NO, ſeu IM : LS, eſt log-us rationis, quam habet ſinus complementi IM anguli dati BAI ad ſinum complementi LS variabilis BAL; propterea oſtendi debet 1°. ſpatium cadendo deſcriptum

ME,

ME, esse $= HO - XZ$; deinde 2°. tempus, quo spatium istud percurritur, seu $t ME = XZ : AM$, ac denique MS differentiam sinuum AS, AM angulorum variabilis & dati, celeritatem in E acquisitam, adeo ut productis FE & LS in D hoc punctum futurum sit in scala celeritatum MD, ducta scilicet FD per punctum E parallela RS. Esto insuper RF scala solicitationum acceleratricium, ductisque *dl*, *ln*, *no* ac *df* ipsis DL, LN, NO ac DF parallelis ac indefinite vicinis productaque LD in *a*; probari debet momentum solicitationis acceleratricis FE æquari momento celeritatis acquisitæ ED, seu $EF. Ee = ED. ad$, posita constructione supra exposita. Fiat $AT = AM$, & VO tertia proportionalis ad GH & NO, adeò ut inde nova log-mica GV exurgat. Log-micæ BN subtangens quælibet æquetur IM vel GB.

Demonstr. I. Esto resistentia in E, quam simplici litera R indicabimus, ut gravitatem per G, esto inquam $G : R = IM^2 : 2 AM. MS + MS^2$, seu, quia (constr.) $AM = AT$, ponatur $G : R = IM^2 : TS. MS$, eritque convertendo $G - R : G$, id est, solicitatio acceleratrix in E ad gravitatem, hoc est, $EF : IM = IM^2 - TS. MS : IM^2 = IM. EF : IM^2$, atque adeò $IM. EF = IM^2 - TS. MS = AI^2 - AM^2 - TS. MS = AI^2 - AM^2 - 2. AM. MS - MS^2 = AL^2 - AS^2 = LS^2 = NO^2$, aut (quia NO est media proportionalis inter GH vel IM & VO) $= IM. VO$, atque adeò $EF = VO$.

II. Quia (constr.) $ME = HO - XZ$, & $Me = Ho - Xz$, erit etiam $Ee = Oo - Zz$; propterea si $E\varepsilon$ ponatur $= Oo$, erit $e\varepsilon = Zz$, ubi Zz est elementum lineæ assumtæ XZ.

III. Propter triangula similia *Llm* & ALS habetur $Ss : rl$ (vel æqualem Ll) $= LS : AL$, & $rl : Qq = rs$ (vel LS) $: QA$; ergo ex æquo $Ss : Qq = LS^2 : AL. AQ = NO^2 : AL. AQ = IM. VO : AI. AQ$. Verùm Qq : elementum log-mi $(QA : PA) = QA$: subtang. log-micæ $IM = QA. VO : IM. VO$, ergo ex æquo Ss : elem. log-mi $(QA : RA) = AQ. VO : AI. AQ = VO : AI$. Et (constr.) element. log-mi $(QA : PA) : Zz = AI : AM$, ergo denuo ex æquo $Ss : Zz = VO : AM$. Atque adeò $FE. e\varepsilon$ (num. I. & II. hujus) $= VO. Zz = AM. Ss$.

IV. Rursus $EF. E\varepsilon$ (seu $VO. Oo$) $= NO. Np$ per §. 491. num. III. Et $NO. Np = LS. Lm$ (§. 493.) $= AS. Ss$, hinc, quia (num. III. hujus) $FE. e\varepsilon = AM. Ss$, erit $FE. E\varepsilon - FE. e\varepsilon = AS. Ss - AM. Ss$, hoc est, $FE. Ee = MS. Ss$. Id est, *momentum solicitationis acceleratricis* EF *est æquale momento celeritatis acquisitæ* MS.

V. Quoniam supra (num. III. hujus) invenimus $VO. Zz = AM.$

Ss,

Ss, erit $Zz : AM = Ss : VO = da : FE$ (§. 485.) $= tEe$; adeoque omnia tEe, hoc eſt, tempus caſus perpendicularis per ſpatium ME, quod tempus deſignavimus per tME, = omnibus Zz, quibus tota XZ componitur, diviſis per AM, ſeu $= XZ : AM$. Ergo tempus per ſpatium ME exponitur per aſſumtam magnitudinem XZ applicatam ad ſinum AM anguli dati BAI. Quæ omnia erant demonſtranda.

COROLLARIUM I.

550. Cum celeritas in E acquiſita ſit ED vel MS, celeritas terminalis erit MC ſinus verſus complementi IAC anguli dati BAI, & ſcala celeritatum MD aſymptotam habebit parallelam ipſi $M\alpha$, ſed per punctum C transeuntem.

COROLLARIUM II.

551. Spatium, quod grave in vacuo abſolveret cadendo eo tempore, quo in aëre ſpatium ME perlabitur, eſt ad ſemiſſem MI, quæ gravitatem exponit in duplicatâ ratione aſſumtæ XZ ad datam AM. Nam, quia tempus (§. 151.) deſcenſus in vacuo exponitur radice ex duplo ſpatio applicato ad magnitudinem, quæ gravitatem uniformem repræſentat, erit, vocando ſpatium tempore $XZ : AM$ in vacuo percurrendum S, erit inquam $\sqrt{(2S : IM)} = XZ : AM$, ſeu $2S : IM = S : \frac{1}{2}IM = XZ^2 : AM^2$.

COROLLARIUM III.

552. Velocitas, quam mobile in termino E ſpatii ME in vacuo deſcripti acquireret, erit ad celeritatem in aëre acquiſitam percurſo eodem ſpatio ME, ſicut $\sqrt{(2ME . IM)}$ ad MS, id liquet ex §. 150.

COROLLARIUM IV.

553. Celeritas vero in aëre erit ad celeritatem in vacuo mobili acquiſitam tempore $XZ : AM$, ſicut rec-lum $AM . MS$ ad rec-lum $IM . XZ$. Nam (§. 551.) in vacuo percurritur ſpatium $S = IM . XZ^2 : 2 . AM^2$ tempore $XZ : AM$; atqui (§. 150.) eſt velocitas in termino hujus ſpatii acquiſita $= \sqrt{(2 . S . IM)} = \sqrt{(2 . IM^2 . XZ^2 : 2 . AM^2)} = IM . XZ : AM$; ergo celeritas in aëre eſt ad celeritatem in vacuo acquiſitam,

tam, ſicut MS ad IM. XZ : AM, vel ſicut rec-lum AMS ad rec-lum IM. XZ.

COROLLARIUM V.

555. Quia recta TA tenacitatem medii & AM dimidium hujus tenacitatis exponit, erit hæc tenacitas ad gravitatem, ſicut ſinus anguli dati BAI ad ſemiſſem ſinus complementi.

COROLLARIUM VI.

556. Idcirco evaneſcente angulo BAI fluidum omni tenacitate carebit, eritque perfecte fluidum, adeò ut redeat caſus propoſitionis LXIV, quæ propoſitio proinde tantum corollarium eſt præſentis. Evaneſcent enim eo caſu AM & XZ, adeo ut tunc ME ſimpliciter æqualis fiat ipſi HO. Tempus vero per ME, quod in hac propoſitione LXVII. eſt XZ : AM (conſtr.) = log. (QA : PA) : AI, in caſu coincidentiæ ipſarum BA & IM, fiet XZ : AM = log. (QA : BA) : AB = tME; prorſus ut §. 525. num. III. oſtenſum.

SCHOLION I.

557. Propoſitio etiam analyſi geometrica ſequenti ratione expediri poteſt. Poſitis iis, quæ in præparatione ad demonſtrationem propoſitionis, numero I. erit FE vel VO = NO^2 : IM = LS^2 : IM (vel poſita KC diametro circuli BIC) = KS. SC : IM; unde, quia generaliter eſſe debet EF. Ee = MS. Ss = ED. ad, erit etiam KS. CS. Ee : IM = MS, Ss, atque adeo Ee : IM = MS. Ss : KS. CS. Sed MS = $\frac{1}{2}$KS − $\frac{1}{2}$KM + $\frac{1}{2}$MC − $\frac{1}{2}$SC, quo valore ſubrogato reperietur $Ee : IM = \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{\frac{1}{2}KM.Ss + \frac{1}{2}CM.Ss}{KS.CS} = \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM.Ss}{KS.CS}$; nam KM − CM = 2.AM. Atqui $\frac{AM\,Ss}{KS.CS} = \frac{AM}{AC}.\left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right)$ ergo $Ee : IM = \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM}{AC}.\left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right)$. Verum $\frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS}$ = elem. log-mi ex $\sqrt{\left(\frac{CM}{CS} : \frac{KS}{KM}\right)}$ = elem. log. $\sqrt{\left(\frac{CM.KM}{CS.KS}\right)}$ = elem. log. $\sqrt{\left(\frac{IM^2}{LS^2}\right)}$ = elem. log. (GH : NO) in log-mica, cujus ſubtangens eſt unitas.

Et $\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}$ = elem. log-mi ex $\sqrt{\left(\frac{KS}{KM} : \frac{CM}{CS}\right)}$ = elem. log. $\sqrt{\left(\frac{KS}{CS} : \frac{KM}{CM}\right)}$.

Sed

Sed quia SL & MI ſunt mediæ proportionales inter KS & CS, atque inter KM & CM, erit $KS : CS = LS^2 : SC^2 = QA^2 : AC^2$, & $KM : CM = IM^2 : MC^2 = PA^2 : AC^2$, atque adeò $\frac{KS}{CS} \cdot \frac{KM}{CM} = \frac{QA^2}{AC^2} \cdot \frac{PA^2}{AC^2} = \frac{QA^2}{PA^2}$; ac propterea erit $\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} =$ elem. log. $(\frac{QA}{PA})$ etiam in log-mica, cujus ſubtangens eſt æqualis unitati. Hinc $\frac{AM}{AC} \cdot (\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}) = \frac{AM}{AC}$ in elem. log. (QA : PA); ac proinde habebitur etiam $Ee : IM$ $\left(= \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM}{AC} \cdot (\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS})\right) =$ elem. log. (GH : NO) $- \frac{AM}{AC}$. elem. log. (QA : PA) ergo $\int Ee : IM = ME : IM =$ log. (GH : NO) $- \frac{AM}{AC}$. log. (QA : PA), vel ducendo omnia in IM, erit $ME = IM$. log. (GH : NO) $- \frac{AM.IM}{AC}$. log. (QA : PA). At verò IM. log. (GH : NO) juxta §. 492. = HO, quandoquidem log. (GH : NO) primùm ſumebatur in log-mica, cujus ſubtangens erat unitas; ſic etiam IM. log. (QA : PA) ſumenda eſt in log-mica BN, quia ejus ſubtangens eſt IM. In conſtructione propoſitionis erat XZ : log. (QA : PA) = AM : AC, & quia log. (QA : PA) jam ſumitur in log-mica, cujus ſubtangens eſt IM, quæ antea erat unitas, erit proinde hoc caſu $XZ = \frac{AM.IM}{AC}$. log. (QA : PA), atque adeo $ME = HO - XZ$ ut ſupra (§. 549.)

Similiter pro expreſſione temporis caſus ex altitudine ME invenietur XZ : AM, ut in jam citato loco. Quæ omnia analytice erant invenienda.

SCHOLION II.

558. Eadem methodo ſolvi poteſt caſus, quo mobile data velocitate, majore tamen terminali, perpendiculariter deorſum projicitur in aëre reſiſtente juxta præſentem reſiſtentiarum hypotheſin. Nam, ſi celeritas projectionis terminali minor ſit, problema jam ſolutum continetur in propoſitione poſtrema; abſque eo, ut alia ſolutione opus ſit; ſin verò, ut nunc ſupponemus, celeritas projectionis major ſit quam terminalis, nonnihil alia inde prodibit conſtructio, quam nunc adducam omiſſa demonſtratione, quam induſtriæ

Lecto-

Lectoris ex præcedentibus eliciendam relinquo. Esto KO linea indefinitæ longitudinis, cui perpendicularis insistat IME ad partes α indefinita, in hac perpendiculari portio IM exponat gravitatem uniformem, & AM = AT semissem tenacitatis medii, ductaque AI factisque AC = AK = AI, centro A & latere transverso KC descripta sit hyperbola æquilatera CLP, in qua, si MO accipiatur pro celeritate initiali projectionis, & MS pro velocitate mobili post aliquod tempus residua, agantur ordinatæ OP & SL hyperbolæ occurrentes in P & L, per quæ puncta ducantur denique ex K rectæ KP, KLQ. Spatium ME, in cujus termino E mobili relinquitur celeritas MS vel ED, erit $= \log.\,(PO:LS) - \frac{AM}{AC}.\log.\,(PO:QO)$, & tempus per spatium ME $= \log.\,(PO:LS):IM$. Omnes hi logarithmi sunt ex log-mica, cujus subtangens est æqualis IM. Ex hac constructione jam satis apparet, scalam celeritatum ODα asymptotam habere Cα, atque adeò mobilis celeritatem quidem continuò decrescere, nunquam verò ad celeritatem MC reduci posse. Fig. 131.

PROPOSITIO LXVIII. Theorema.

559. *Si gravitas exponatur per secantem alicujus arcus dati, & corpus grave verticaliter in altum projiciatur in aëre præsentis resistentiæ hypotheseos, ac celeritate, quæ exponitur excessu tangentis arcus cujusdam variabilis supra tangentem dati arcus; assumaturque magnitudo quædam, quæ sit ad differentiam arcuum variabilis & dati, ut rec-lum ex secante & tangente dati arcus ad quadratum radii.*

Erit 1°. Spatium, *quod mobile, ascendendo quousque potest, conficiet, ut log-us rationis, quam secans arcus variabilis habet ad secantem dati arcus, dempta magnitudine assumta.*

2°. Tempus, *quo mobile hanc altitudinem absolvet, erit ut magnitudo assumta applicata ad tangentem dati arcus.*

Sint ABKC quadrans circuli, BIL hyperbola æquilatera ex centro A & semilatere AB descripta. Exponat IM seu AW secans dati arcus Bω gravitatem uniformem, ac mobile ex E in altum projici intelligatur celeritate ED vel WQ, quæ est differentia tangentium BQ, BW arcuum variabilis BK & dati Bω. Descriptaque circa axem AT log-mica BGN, cujus subtangens sit GH vel IM; agantur IG, LN parallelæ AS, ac per puncta G, N, &c. transeant ordinatæ log-micæ GH & NO; in NO producta sit OV tertia pro- Fig. 132.

 por-

portionalis ad GH & NO, & per omnia puncta V transibit nova log-mica GV, cujus subtangens dimidia erit subtangentis prioris log-micæ GN. Accipiatur deinde XZ, quæ sit ad arcum ωK, ut rec-lum IMA ad quadratum radii AB, quibus positis dico fore I. ME vel potius $EM = HO - XZ$, & temp. per $EM = XZ : AM$.

Demonstr. Ductis lineis *dl*, *ln*, *no* prioribus cognonimis DL, LN, NO ad distantias indefinite parvas parallelis, fiatque ut supra (§. 549. num. I.) $AT = AM$, & resistentia aëris in E ut TS. MS.

I. Eritque adeò resist.: grav. $= TS.MS : IM^2$, & componendo R + G, seu resistentia totalis $EF : IM$, seu $G = IM^2 + TS.MS : IM^2$ (seu quia $AM^2 + TS.MS = AS^2$, seu $TS.MS = AS^2 - AM^2$) $= AS^2 + IM^2 - AM^2 : IM^2 = AS^2 + QS^2 : IM^2 = LS^2 : IM^2 = NO^2 : GH^2$ (aut quia VO, NO & GH sunt in continua ratione) $= VO : IM$ vel GH; habemus ergo $EF : IM = VO : IM$ atque adeò $EF = VO$.

II. Ex constructione est $EM = HO - XZ$, & $eM = Ho - Xz$, adeoque $Ee = Oo - Zz$, unde, si εe fuerit $= Oo$, & $\varepsilon E = Zz$, erit omninò $Ee = Oo - Zz$. Jam (§. 165.) $Qq : Kk = AQ^2 : AK^2 = LS^2 : AB^2 = NO^2 : AB^2 = VO.GH : BA^2$, & (constr.) $Kk : Zz = AB^2 : GH.AM$, ergo ex æquo $Qq : Zz = VO.GH : GH.AM = VO : AM$ (num. I. hujus) $= EF : AM$. Adeoque $EF.Zz = EF : \varepsilon E = AM.Qq = AM.Ss$.

III. Est verò etiam (§. 491. num. III.) $VO.Oo (= EF.\varepsilon e) = NO.Np = LS.Lm$ (§. 493.) $= AS.Ss$. Adeoque $EF.Ee (= EF.\varepsilon e. - EF.\varepsilon E) = AS.Ss - AM.Ss = MS.Ss$. Hoc est, momentum resistentiæ totalis EF æquatur momento celeritatis MS.

IV. Numerus secundus hujus demonstrationis præbet, $Ss : EF$ (num. III. hujus) $= Ee : MS = Zz : AM$, atqui, ut toties jam dictum $Ss : EF = Ee : MS = tEe$; ergo $tEe = Zz : AM$, & omnia $tEe =$ omnibus $Zz : AM$ seu $= XZ : AM$. Hoc est, tempus ascensionis in spatio EM, est $XZ : AM$, exponitur ergo per magnitudinem assumtam applicatam ad tangentem anguli BAW. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

560. Altitudo, ad quam grave in altum projectum pertingere potest, eodem tempore, quo in aëre altitudinem EM absolvet, erit iterum ad semissem IM, quæ gravitatem exponit in duplicata ratione assumtæ XZ ad datam AM. Celeritas verò projectionis in vacuo est ad celeritatem projectionis in aëre, sicut IM. XZ ad AM. MS.

De-

Demonſtratio continetur in corollariis II. & IV. propoſitionis præcedentis.

Corollarium II.

561. Evaneſcente AM vel AT, atque adeò coincidentibus rectis IM, BA & GH, redibit iterum caſus propoſitionis LXV. adeò ut omnia, quæ in propoſitione illa exhibita ſunt, tantum corollaria ſint præſentis.

Ut brevitati conſulerem omiſi perplura corollaria, quæ ex hac propoſitione adhuc elici potuiſſent, tum etiam calculum arithmeticum, quo ope tabularum ſinuum tangentium & log-morum, celeritates, ſpatia percurſa, & tempora lationis determinari potuiſſent. Intelligens Lector omnia ſua ſponte ſupplebit. Sed, priusquam ad contemplationem motuum curvilineorum in mediis reſiſtentibus me conferam, forte haud abs re fuerit, ſi calculo algebraico regulas generales tradidero pro motibus rectilineis in mediis denſitate variantibus.

Caput XVIII.

Methodus inveniendi ſymptomata motuum corporum in mediis utlibet reſiſtentibus, atque denſitate pro libitu variantibus.

In præcedentibus capitibus celebriores reſiſtentiarum aëris hypotheſes excuſſimus, & quinam motus, iisdem hypotheſibus poſitis, naſci debeant, definivimus, ſupponentes tamen medium reſiſtens ejusdem ubique denſitatis eſſe. Quia verò denſitates ſubinde variare poſſunt, canones motuum etiam exhibendi ſunt pro ejusmodi mediis denſitate variantibus, quod in hoc capite reſpectu motuum rectilineorum præſtabimus, de curvilineis in ſequentibus duobus capitibus acturi.

Propositio LXIX. Lemma.

562. *Exhibens nonnullas elementorum logarithmicorum proprietates; ſcilicet, 1°. Elementum log-micum* poſitivum, *eſt elementum log-mi rationis majoris inæqualitatis, quam* magnitudo quæcunque variabilis *habet ad ſuam* minimam magnitudinem.

Elementum vero log-micum privativum *est elementum log-mi rationis majoris itidem inæqualitatis, quam* maxima magnitudo alicujus variabilis *habet ad hanc* variabilem.

2°. Multiplum *quodcunque vel* submultiplum *elementi cujuscunque magnitudinis variabilis applicatum ad ipsam magnitudinem, cujus est elementum, est elementum log-mi rationis* multiplicatæ *vel* submultiplicatæ *rationis, quam variabilis magnitudo habet ad summi minimam magnitudinem, aut quam maxima magnitudinis variabilis habet ad ipsam variabilem, prout elementum log-micum positivum aut privativum fuerit.*

Fig. 133. Esto 1°. quantitas variabilis u, ejusque *minima* magnitudo a, elementum log-micum $+du:u$ erit elementum log-mi rationis $(u:a)$. Sin verò magnitudo u, cum *maxima* est, sit $=a$; erit $-du:u=$ elem. rationis $(a:u)$. 2°. Iisdem positis, si habeatur $mdu:u$ erit hoc elementum log-mi rationis $(u:a)$ multiplicatæ juxta m, id est, $mdu:u=$ elem. rationis $(u^m:a^m)$ ubi m significat quemlibet numerum integrum vel fractum, rationalem aut irrationalem, &c. & $-mdu:u=$ elem. rationis $(a^m:u^m)$. in log-mica, cujus subtangens est unitas.

Sit IAE log-mica circa axem MF, cujus subtangens DO æquetur unitati 1, sintque CD magnitudo variabilis ac continue crescens ejusque *minima* magnitudo AB, ordinata verò variabilis GH sit magnitudo continue decrescens, ejusque *maxima* etiam AB; ponantur cd & gh ordinatæ ipsis CD & GH indefinite propinquæ, ductisque Ck, $g\gamma$, axi MF parallelis, erunt $c\kappa$ incrementum ipsius CD adeoque $c\kappa$ erit positivum; ipsum verò $G\gamma$ erit decrementum ordinatæ GH, atque adeò privativum. Hisce positis,

Fig. 133. I. Quia (§. 491.) $+c\kappa:CD=Dd:OD$ (aut quia subtangens OD æquivalet unitati) $=Dd$, & quia Dd est elementum ipsius BD seu log-mi (CD : AB), erit omninò $c\kappa:CD=$ elem. log-mi rationis (CD : AB) hoc est $+du:u=$ elem. log-mi rat. $(u:a)$, positis AB, a; CD, u & $c\kappa$, du.

Eodem argumento probatur esse $-G\gamma:GH=$ elem. log-mi rationis AB : GH, hoc est $-du:u$, $=$ elem. log. $(a:u)$ seu log-mi (AB : GH), vocatis nunc GH, u; ac $G\gamma$, du existente AB, etiamnunc a.

II. Ostendendum, esse $m.c\kappa:CD=$ elemento log-mi $(CD^m:AB^m)$. Sit enim $BD:BF=1:m$, atque adeò $BF=m.BD$, adeo ut excitata in F ordinata FE, ex natura log-micæ sit $CD^m:AB^m=EF:AB$. Verum $m.c\kappa:CD=m.Dd:DO$, & omn. $m.c\kappa:CD=$ omnibus $m.Dd:$

DO

$DO = m.BD:DO$ (seu constr.) $BF:DO$ (vel si DO æquivalet unitati) $= BF = \log.(EF:AB) = \log.(CD^m:AB^m)$. Adeoque $mdu:u$, $=$ elem. log. $(u^m:a^m)$.

Nec dissimili ratione evincitur, quod, facta $BM = m.BH$ erectaque ordinata MI, futurum sit, $-m.G\gamma:GH =$ elem. log-mi $(AB:IM) =$ elem. log. $(AB^m:GH^m)$ seu, quod idem est, $-mdu:u =$ elemento log-mi $(a^m:u^m)$. Quæ duo erant demonstranda.

PROPOSITIO LXX. Problema.

563. *Exhibere canonem generalem motuum rectilineorum ex primitive uniformibus derivatorum, quibus corpora in aëre densitatis variabilis, & juxta quamlibet legem resistente, ferantur.*

Positis iis, quæ ad propositionem LV. hujus Libri Secundi dicta sunt, vocetur spatium NE in linea deferenti percursum x, tempus, quo absolvitur t, celeritas mobili residua DB post effluxum hoc tempus u; adeoque celeritas DE mobilis in linea deferenti hoc tempore acquisita erit $a-u$, si, quod supponimus, a significet velocitatem mobilis initialem AN, quâ scilicet linea deferens æquabili motu (secundùm hypothesin) in aëre progreditur. Spatium absolutum, quod mobile tempore memorato t, in aëre transmittit S. Solicitatio acceleratrix, in quolibet lineæ deferentis puncto E, seu recta EF resistentiam aëris generaliter indicans, R; ac denique densitas aëris Δ. Hisce denominationibus factis, paragraphi 489. & 488. sequentes præbent formulas: I. $Rdx = udu - adu$. II. $t = \int -du:R$. III. & $S = at - x$. Quæ erant exhibendæ. Fig. 119.

Exemplum.

564. Sit generaliter $R = (abu^m + cu^{m+1}).\Delta:a^{m+1}$, ubi a, b, c sunt magnitudines constantes, & m quilibet numerus rationalis vel surdus. Formula prima generalis, reductionibus factis, dat $\Delta dx = (a^{m+1}udu - a^{m+2}du):abu^m + cu^{m+1}$. Ex qua liquet abscissas x inveniri per quadraturas duarum curvarum.

565. Si $m = 1$, fiet $R = (abu + cuu).\Delta:aa$; & $\Delta dx = (aaudu - a^3du):(abu + cuu)$.

566. Igitur, si præterea $c = 0$, erit $R = bu\Delta:a$, hoc est, resistentiæ aëris erunt in composita ratione densitatum & velocitatum mobilis actualium, alteraque æquatio §. 565, mutabitur in $\Delta dx = adu:b, -$

aadu::

$aadu:bu$. Atqui (§. 88.) summa omnium $adu:b=(au-aa):b$, & $\int -aadu:bu$ (§. 562.) $=\frac{aa}{b}.$ log. $(a:u)$ in log-mica, cujus subtangens 1, vel $=\frac{a}{b}$ log. $(a:u)$ in log-mica, cujus subtangens est a. Propterea $\int \Delta dx = \frac{a}{b}$ log. $(a:u)-(aa-au):b$. Hinc, si $\Delta = 1$, & $b=a$, erit $\int \Delta dx = x =$ log. $(a:u)-a+u$. Atque adeò, si in fig. 119. AN $=$ AK $= a = b$, BD $=$ IH $= u$, ac NE $= x$, erit CG $=$ CN $= a-u$, & CH $=$ log. $(a:u)=$ log. (AN : IK), ergo x, seu NE $=$ CH $-$ CG $=$ GH, prorsus ut constructio propositionis LVIII. habet.

567. Si in æquationibus superioribus (§. 565.) $b=0$, habebitur R $= cuu\Delta:aa$, id est, resistentiæ aëris sunt in composita ratione densitatum & duplicatæ velocitatum mobilis, & $\Delta dx = aaudu - a^3du : cuu$, $= aadu:cu$, $-a^3du:cuu$. At verò (§. 562.) est $\int -aadu:cu = \frac{a}{c}.$ log. $(a:u)$ in log-mica, cujus subtang. $= a$, & $\int -a^3du:cuu$ (§. 88.) $= (a^3-aau):cu$. Ergo $\int \Delta dx = a^3aau:cu$; $-\frac{a}{c}.$ log. $(a:u)$; vel factis $\Delta = 1$, & $a=c$; fiet $x = aa-au:u$, $-$log. $(a:u)$. Hinc, si in fig. 125. AM $=$ AT $= a$, BD $=$ IH $= u$, & ME $= x$, erit, propter hyperbolam NHK, $(aa-au):u=$ CH, & log. $(a:u)=$ log. (NT : IH) $=$ CG, cum NGK (constr.) sit log-mica, cujus subtangens $=$ NT $= a$; adeoque ME $=$ CH $-$ CG $=$ GH, iterum ut habet constructio propositionis LXIII.

568. Tandem, si æquatio ipsa paragraphi 565. $\Delta dx = aaudu - a^3du:abu+cuu$ construenda sit, dividatur numeratoris membrum $-a^3du$ per membrum abu denominatoris, reductisque reducendis, erit $\Delta dx = (\frac{aa}{b}+\frac{aa}{c}).\ du:(\frac{ab}{c}+u)-\frac{ab}{b}du:u$. Et horum integralia (§. 562.) invenientur, scilicet $\int \Delta dx =$ log. $(a:u)-\frac{b-c}{c}.$ log. $(\frac{ab}{c}+a:\frac{ab}{c}+u)$ in logarithmica, cujus subtangens est $\frac{aa}{b}$. Jam, in figura 129. propositionis LXVI. si fiat PW : MP $=$ OM : IM, & PV : MP $=$ AM : IM, ac dicantur PW $= b$, PV $= c$, & AM $= a$, $=$ OI; indeterminatæ QM $=$ OG $= u$, ac ME $= x$. Invenieturque $\frac{aa}{b} =$ IM. AM^2 : OM. MP (constr.) $=$ RC. Nam (§. 541. num. 1.) RC : AM $=$ IM.

AM :

AM : OM. MP, atqui propter (constr.) PW : MP = OM : IM, atque adeo OM. MP = IM. PW, ergo RC : AM (= IM. AM : OM. MP) = IM. AM : IM. PW = AM : PW, ac proinde RC = AM^2: PW = $aa : b$, ut dicebatur. Item $\frac{b+c}{c} = \frac{IM}{AM}$, & $\frac{ab}{c}$ = OM, adeoque $\frac{ab}{c} + a$ = IM, & $\frac{ab}{c} + u$ = GM; hinc $\int \Delta dx$ = log. (AM : QM) $- \frac{IM}{AM} \cdot$ log. (IM : GM), atque adeò existente $\Delta = 1$, x = ME = log. (AM : QM) $- \frac{IM}{AM}$ log. (IM : GM) prorsus ut habet constructio recensitæ propositionis LXVI.

569. Pro inventione temporis consulenda est secunda formula generalis (§. 563.) seu $t = -\int du : R$, vel $dt = -du : R$, vel substituendo ex §. 565. valorem ipsius R erit $\Delta dt = -aadu : abu + cuu = -adu : bu; + \frac{acdu}{b} : ab + cu = -adu : bu, + \frac{a}{b} du : \frac{ab}{c} + u$. hinc $\int \Delta dt = \frac{1}{a} \cdot$ log. $(a : u) - \frac{1}{a}$ log. $\left(\frac{ab}{c} + a : \frac{ab}{c} + u\right) = \frac{1}{AM}$ log. (AM : QM) $- \frac{1}{AM} \cdot$ log. (IM : GM) = (MC − LN) : AM; prorsus ut in præmemorata propositione LXVI. jam ostensum, ubi tamen Δ est 1, atque adeo $\int \Delta dt = t$.

Atque hæc pauca exempla particularia ad illustrationem formularum generalium sufficiant.

PROPOSITIO LXXI. PROBLEMA.

570. *Exhibere generales formulas pro descensu & ascensu gravium rectilineo & horizonti perpendiculari in aëre densitatis variabilis & secundùm quamcunque legem resistente.*

Retentis symbolis supra (§.§. 484, 485.) jam adhibitis: propositio LIV. nobis suppeditat formulas pro utroque casu descensus ascensusque gravium; scilicet, I. $x = \int udu : g \mp r$. & II. $t = \int du : g \mp r$. Ubi signum superius respicit descensum & inferius descensum corporum. In hisce formulis g significat gravitatem, r resistentiam medii, u velocitates mobili acquisitas vel residuas, & x spatia à quiete descendendo percursa, vel complementa spatiorum ascensu jam actu confectorum ad maximam altitudinem A, quam gravia certa quadam velocitate initiali ascendentia percurrere valent, ac denique t denotant tempora descensus in spatiis x, vel quibus complementa præmemorata ad maximam altitudinem describi possunt. Idcirco spatia actu mobili ascendendo percursa erunt $A - x$, & tempora, quo hæc spatia absolvuntur $T - t$, posita T pro tempore, quo maxima altitudo A conficitur. Quæ erant exhibenda.

EXEMPLUM.

571. Sit $r = (abu + cuu)\Delta : aa$, eritque $x = \int aaudu : aag \mp abu\Delta \mp cuu\Delta$, & $t = \int aadu : aag \mp abu\Delta \mp cuu\Delta$. Utut hæ formulæ particulares sint, infinitos tamen casus particulares complectuntur, tam pro descensu quam pro ascensu gravium; scilicet pro varietate densitatum Δ. Nos primum simplicissimum casum considerabimus, supponentes $\Delta = 1$, & formulæ nostræ redigentur ad casus, quos in capitibus proxime antecedentibus jam excussimus.

572. Propterea, substituatur tantum loco Δ, 1, & retinendo signa superiora pro descensu gravium, & habebimus $x = \int aaudu : aag - abu - cuu$, alteramque $-t = \int (aadu : aag - abu - cuu)$. Ut hæ æquationes construi queant, ponantur $aag = chh - cff$, item $ab = 2cf$, ac denique $y = f + u$; ubi a, b, c, f, g, & h sunt quantitates constantes, ac x, y, u, t, variabiles. Factis hisce substitutionibus reperietur $aaudu : aag - abu - cuu = aaudu : chh - cff - 2cfu - cuu = \frac{aa}{c} udu : hh - (f + u)^2 = (\frac{aa}{c} ydy - \frac{aaf}{c} dy) : hh - yy$. Atqui (§. 562.) omnia $\frac{aa}{c} ydy : hh - yy = \log. \sqrt{}(hh - ff : hh - yy)$ in logarithmica, cujus subtangens est $\frac{aa}{c}$. Nam ydy est dimidium elementi denominatoris $hh - yy$, sed sub signo contrario, & $hh - ff$ est maxima magnitudo omnium $hh - yy$, quia f est minima omnium $y = f + u$, quæ habetur ubi u evanuit.

Porrò $\int \frac{aaf}{c} dy : hh - yy =$ (§. 467. num. 111.) $\frac{f}{h} \log. \sqrt{}(h + y : h - y)$, vel potius, quia evanescente u ipsum etiam integrale evanescere debet, & existente $u = 0$, seu $y = f$, inventum integrale abit in $\frac{f}{h} \log. \sqrt{}(h + f : h - f)$, quæ quantitas detrahenda est à priore, & habebitur $\int \frac{aaf}{c} dy : hh - yy = \frac{f}{h} \log. \sqrt{}(h + y : h - y) - \frac{f}{h} \log. \sqrt{}(h + f : h - f)$.

573. Eadem facilitate resolvetur altera æquatio paragraphi 572, seu

seu $t = \int aadu : aag - abu - cuu$ (seu factis iisdem substitutionibus, quæ in præcedenti articulo factæ sunt) $= \int \frac{aa}{c} dy : hh - yy$. Hæc enim quantitas æquatur integrali invento in ultima periodo articuli præcedentis, sed diviso per f; propterea invenietur $t \left(= \int \frac{aa}{c} dy : hh - yy\right) = \frac{1}{h} \log. \sqrt{(h + y : h - y)} - \frac{1}{h} \log. \sqrt{(h + f : h - f)}$.

574. Hæ repertæ æquationes reductæ accuratissime nos ducunt ad constructionem propositionis LXVII. Sint enim $a = g = c$, & quia (secundùm hypothesin §. 572.) $aag = chh - cff$, ac $ab = 2cf$, erunt $aa = hh - ff$, & $b = 2f$. Si itaque in fig. 130. fiant $IM = a$, $AM = \frac{1}{2}b = f$, adeòque $TM = b$, erit $IA^2 = aa + ff = hh$, atque adeò $AI = AB = AL = h$, factaque $MS = u$, erit $AS = f + u = y$, & $LS^2 = hh - yy$, nec non $IM^2 = hh - ff = aa$, adeoque $\log. \sqrt{(hh - ff : hh - yy)} = \log. \sqrt{(IM^2 : LS^2)} = \log. (IM : LS) = \log. (GB : NO) = HO$. In log-mica BN, cujus subtangens æquatur $\frac{aa}{c}$ seu a, quia (secundùm hypothesin) $a = c = IM = GH$.

Præterea, si $AK = AC = AI = h$, erit $KS = h + y$, & $CS = h - y$; ergo ratio $h + y : h - y = KS : CS$ (vel, quia KS, LS, & SC in circulo sunt in continua ratione) $= LS^2 : SC^2 = QA^2 : AC^2$; atque adeò $\sqrt{(h + y : h - y)} = QA : AC$. Simillimo argumento invenitur $\sqrt{(h + f : h - f)} = IM : MC = PA : AC$. Adeoque $\frac{f}{h} \log. \sqrt{(h + y : h - y)} - \frac{f}{h} \log. \sqrt{(h + f : h - f)} = \frac{AM}{AI} \log. (QA : AC) - \frac{AM}{AI} \log. (PA : AC) = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA)$. Atqui (§. 549.) assumta est $XZ : \log. (QA : PA) = AM : AI$, ergo $XZ = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA)$, atque adeo $x = \log. \sqrt{(hh - ff : hh - yy)} - \frac{f}{h} \log. \sqrt{(h + y : h - y)} + \frac{f}{h} \log. \sqrt{(h + f : h - f)} = HO - XZ$, ut in citata propositione LXVII.

575. Quantum ad alteram (§. 573.) $t = \frac{1}{h} \log. \sqrt{(h + y : h - y)} - \frac{1}{h} \log. \sqrt{(h + f : h - f)}$, hæc $t = XZ : AM$. Quandoquidem $\frac{f}{h} \log. \sqrt{(h + y : h - y)} - \frac{f}{h} \log. (h + f : h - f) = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA) = XZ$, adeoque

 $t =$

$t = \frac{1}{h}\log.\sqrt{(h+y:h-y)} - \frac{1}{h}\log.\sqrt{(h+f:h-f)} = XZ:f = XZ:AM.$ Iterum ut in citata propositione asseritur.

576. Pro ascensu gravium faciunt formulæ paragraphi 571. cum signis inferioribus, unde si iterum Δ sit $= 1$, erit $x = \int aadu : aag + abu + cuu$ (vel, si nunc fiat $aag = chh + cff$, item $2cf = ab$, & $f + u$ æquale y) $= \int (\frac{aa}{c}ydy - \frac{aaf}{c}dy) : hh + yy$. Atqui $\int \frac{aa}{c}ydy : hh + yy$ (§. 562.) $= \text{Log.}\sqrt{(hh+yy:hh+ff)}$, quia ydy est dimidium elementum denominatoris $hh+yy$, & $hh+ff$ est minima omnium $hh+yy$, cum f sit minima omnium $y = f+y$. Hic log-us sumitur in log-mica, cujus subtangens est $\frac{aa}{c}$.

Altera pars æquationis, seu $\int \frac{aaf}{c}dy : hh+yy = \frac{aaf}{chh}.\int hhdy : hh+yy$. Atqui (§. 166.) est $hhdy : hh+yy =$ elemento arcus circularis, cujus radius h, & tangens y, quod elementum dicatur $d\omega$, atque adeò arcus ipse ω; unde $\int hhdy : hh+yy = \omega$, ergo $\int \frac{aaf}{c}dy : hh+yy = \frac{aaf}{chh}.\omega$. Ergo utrumque integrale, ut decet, conjungendo, habetur $x = \int aadu : aag + bau + cuu = \int (\frac{aa}{c}ydy - \frac{aaf}{c}dy) : hh+yy = \log.\sqrt{(hh+yy:hh+ff)} - \frac{aaf\omega}{chh}$.

577. Altera æquatio tempus respiciens est $t = \int aadu : aag + abu + cuu = \int \frac{aa}{c}dy : hh+yy$ (§. 166.) $= \frac{aa}{chh}.\omega$. Positis iis, quæ in periodo paragraphi proxime antecedentis ultimo.

578. Etiam hæ postremæ determinationes cum propositione LXVIII. probe conspirant; nam si, ut supra (§. 574.) $a = g = c$, atque adeò $2f = b$, erit $aa = hh + ff$. Unde, si dicantur $AW = IM = a$, $AM = f = \frac{1}{2}TM = \frac{1}{2}b$, erit $WM = BA = h$, adeoque $\sqrt{(hh+ff)} = a = MI$, & quia iterum $AS = f + u = y$, existente $MS = u$; erit $LS = \sqrt{(hh+yy)}$ adeòque $\log.\sqrt{(hh+yy:hh+ff)} = \log.(LS:IM) = \log.(NO:GH) = HO$. Cum log-micæ subtangens $\frac{aa}{c}$ sit $= a$, existente (secundùm hypothesin) $c = a$.

Fig. 132.

Et quia $AS = BQ = y$, & $AB = h$, erit arcus $BK = \omega$, atque adeò

$\frac{aaf}{chh}$.

$\frac{aaf}{cbb} \cdot \omega = \frac{af}{bb} \omega = \frac{WM.AM}{IM^2}$ in BK, sed in propositione LXVIII. §. 559. est $XZ : BK = WM.AM : IM^2$ ergo $\frac{af\omega}{bb} = XZ$; ac proinde x ($=$ log. $\sqrt{(bb+yy : bb+ff)} - \frac{aaf\omega}{cbb}$) $= HO - XZ$. ut in memorata propositione dictum.

$t = \frac{aa}{cbb} \omega = \frac{a\omega}{bb}$, erit $= XZ : AM$, pariter ut in dicta propositione ostensum.

SCHOLION.

579. Plura alia exempla ad illustrationem canonum generalium non affero, ac multa alia silentio prætereo, quæ ex soluto exemplo potuissent elici. Id tamen minime videtur subticendum, quod densitates medii varie modificando effici possit, ut gravia, juxta quamlibet accelerationis retardationisque legem, possint descendere vel ascendere in lineis horizonti perpendicularibus. Galilæus olim primus demonstravit, celeritates gravi in vacuo cadenti acquisitas esse in subduplicata ratione spatiorum, quod etiam in antecedentibus (§. 150.) ostensum est, sed ex principiis à Galilæanis diversis. Hæc accelerationis lex solis corporibus in vacuo cadentibus convenire hactenus credebatur, sed, ut mox probabitur, perperam, cum etiam in aëre resistente juxta hanc eandem accelerationis legem descendere possint gravia, modò aëris densitas certa quadam ratione ubique varietur.

580. Ut res generaliter tradatur, sit nunc $r = (a^{m+2} + abu^m + cu^{m+1}) . \Delta : a^{m+2}$, adeo ut formula prima §. 570. $x = \int udu : g \mp r$, vel differentiando $(g \mp r) . dx = udu$, nunc futura sit $(a^{m+2} g \mp a^{m+2} \Delta \mp abu^m \Delta \mp cu^{m+1} \Delta) . dx = a^{m+2} udu$, fiat $a^{m+2} g \mp a^{m+2} \Delta \mp abu^m \Delta \mp cu^{m+1} \Delta = \frac{1}{2} a^{m+2} e$, eritque $\frac{1}{2} a^{m+2} edx = a^{m+2} udu$, vel $edx = 2udu$, ac integrando, $ex = uu$, seu $u = e^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, ac $u^m = e^{m:2} x^{m:2}$, nec non, $u^{m+1} = e^{m+1:2} x^{m+1:2}$, qui valores, in æquatione $a^{m+2} g \mp$ &c. $= \frac{1}{2} a^{m+2} e$ substituti, præbent æquationem $a^{m+2} g \mp a^{m+2} \Delta \, abe^{\frac{1}{2}m} x^{\frac{1}{2}m} \Delta \mp ce^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}} \Delta = \frac{1}{2} a^{m+2} e$. Quæ æquatio relationem inter densitates aëris & spatia percursa, seu inter indeterminatas Δ & x, declarat, ad id, ut grave in

hoc aëre eadem accelerationis lege feratur ac in vacuo; etenim hæc accelerationis norma exhibetur æquatione $uu = ex$, vel $u = \sqrt{ex}$. Jam, cum e ſit quantitas conſtans liquet celeritates acquiſitas (u) eſſe ut ($\sqrt{x}$) id eſt, in ſubduplicata ratione ſpatiorum percurſorum. Ad hoc ne quidem neceſſe eſt, ut gravitas (g) ſit conſtans ſeu uniformis, res etiamnum obtinebit, dummodo g datæ ſint per x & conſtantes.

Non immorabimur particularibus exemplis illorum caſuum, quibus aër gravibus reſiſtit in ratione compoſita denſitatum & velocitatum, vel in compoſita ratione ex denſitatum ratione & duplicata celeritatum, vel etiam juxta reſiſtentiæ legem, quæ ex utraque memoratarum participat, ad hæc enim duntaxat in æquatione ponendus eſt exponens $m = 1$, & $c = 0$ primo, vel $b = 0$, ſecundo, aut vero utramque b, c, &c. retinendo tertio caſu, inde tot reſultabunt diverſæ æquationes, quot hi diverſi caſus exigunt.

CAPUT XIX.

De deſcenſu & aſcenſu gravium in lineis quibuscunque curvis, poſita medii reſiſtentia quadratis celeritatum proportionali.

581. Gravia, quæ in vacuo feruntur atque in lineis curvis incedunt, in quolibet curvæ puncto, quam accelerato motu perlabuntur, eam celeritatem acquiſiviſſe cenſentur, quam acquiſiviſſent, ſi via breviſſima à linea horizontali per initium deſcenſus in curva ducta, in datum curvæ punctum, id eſt, juxta lineam rectam horizontali perpendicularem, cecidiſſent, ut in primo Libro §. 142. id generaliter oſtenſum. Sed res aliter ſe habet cum corporibus, quæ in aëre moventur; eorum enim celeritates aliter, quam per quadraturas & rectificationes curvarum exhiberi nequeunt, idque in ſola hypotheſi, qua reſiſtentiæ aëris quadratis celeritatum mobilis proportionantur, ut quidem ex ſequentibus id eluceſcet.

PROPOSITIO LXXII.

582. *Si, extenſa tota curva, quam grave deſcenſu ſuo & ſubſequente aſcenſu deſcribit in lineam rectam, in ſingulis hujus rectæ punctis perpen-*

pendiculares excitentur proportionales resistentiis aëris, quas mobile in homologis curvæ punctis subit. Area curvilinea, quæ omnes ejusmodi perpendiculares continet, æquabitur rectangulo, à recta, quæ gravitatem uniformem exponit, in differentiam abscissarum arcuum descensu & ascensu descriptorum.

Esto ADB curva descensu mobilis & BEC ascensu descripta, curvæ hujus BEC abscissa est BH, illius verò BG, adeoque GH erit differentia abscissarum. Extensa deinde tota curva ABC in lineam rectam ABC, atque in singulis hujus rectæ punctis D, erectæ sint perpendiculares DT exponentes resistentiam medii in homologis curvæ punctis B, formantesque figuram curvilineam ATRC, quam æquari ostendam rec-lo βB in GH, supponendo rectam βB exponere gravitatem uniformem. Fig. 134.

In eadem DT producta sumatur, ubi DN, quæ solicitationem tangentialem gravitatis in curvæ puncto D ex centrali derivatam exponet ND — TD excessus solicitationis tangentialis gravitatis supra resistentiam aëris, solicitationem acceleratricem mobilis in curva ADB descendentis. Jam momentum hujus solicitationis acceleratricis, hoc est, (ND — TD.) Dd, vel ND. Dd — TD. Dd, hoc est, elementum areæ AMND — elem. areæ ATD (§.§. 132, 484.) æquatur momento celeritatis mobili in curvæ puncto D acquisitæ, seu elemento dimidii quadrati ex dicta celeritate acquisita; unde, cum in A omnia à nihilo incipiant, & omnia momenta solicitationis acceleratricis æquentur omnibus momentis celeritatis, erit area AMND — area ATD = dimid. quadr. velocitatis in D, & area AMNSB — area ATRB = dimid. quadrat. velocitatis acquisitæ in B.

Si porro mobile in curva BEC ascendit, resistentia totalis, in quolibet ejus puncto E (§. 481.) erit NE + TE, & momentum hujus resistentiæ totalis seu (NE + TE). eE = NE. eE + TE. eE = elem. areæ MNEC — elem. areæ CTE æquatur momento celeritatis decrescentis mobilique in curvæ puncto E residuæ, seu elemento dimidii quadrati ex celeritate in E; unde, quia delata NE in MC, omnia in nihilum desinunt, erit area MNEC + area CTE = dimid. quadr. ex veloc. in E, adeoque etiam MNSBC + CTRB = dimid. quadrato ex celeritate initiali in B. Atqui hæc celeritas initialis in B, eadem est cum velocitate acquisita in B, post descensum mobilis in curva ADB; ergo AMNSB — ATRBA (= dimid. quadrato celeritatis in B) = CMNSBC + CTRBC, adeoque tota figura resistentiarum ATRCA = AMNSB — CMNSB.

Atqui

Atqui area AMNSB æquatur perpetuo rectangulo sub βB recta, quæ gravitatem uniformem exponit, & abscissa BG curvæ ADB descensu mobilis descriptæ, cum quodlibet elementum areæ NDd æquetur rec-lo βB. Ff, seu momento gravitatis centralis βB. Eodem argumento sequitur fore aream CMNSBC $=$ βB. BH, ergo AMNSB $-$ CMNSB, quod areæ ATRCA æquari ostensum, æquabitur etiam rec-lo βB. GH. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

583. Si resistentiæ aëris sint ut celeritates mobilis acquisitæ, erit AMND $=$ areæ ATD $+ \frac{1}{2}$TD². Nam TD (secundùm hypothesin) est ut celeritas in D acquisita, adeoque, per præcedentem paragraphum, erit momentum solicitationis acceleratricis, seu ND. Dd $+$ TD. Dd $=$ elem. AMND $+$ elem. ATD, æquale momento celeritatis, seu TD. $t\theta$, quod æquatur elem. ex $\frac{1}{2}$TD². Ergo summando, erit omninò area AMND $-$ area ATD $= \frac{1}{2}$TD², atque adeò AMND $=$ ATD $+ \frac{1}{2}$TD². Eodem argumento concludetur esse NECM $= \frac{1}{2}$TE² $-$ CTE.

Corollarium II.

484. Sin verò resistentiæ aëris fuerint in duplicata ratione celeritatum acquisitarum, quæ verior est hypothesis, erit area AMND $=$ AQ. TD $+$ ATD, & area CMNE $=$ AQ. TE $-$ CTE. Ubi AQ est magnitudo data seu constans.

Hoc enim casu celeritatis in D acquisitæ quadratum erit $=$ 2AQ. TD, cum resistentiæ sint ut quadrata celeritatum; & dimidium celeritatis quadratum AQ. TD, hujusque elementum, id est momentum celeritatis acquisitæ in D, reperietur AQ. $t\theta$; unde, quia momentum solicitationis acceleratricis ND $-$ TD æquatur momento celeritatis in D acquisitæ, fiet ND. Dd $-$ TD. Dd $=$ AQ. $t\theta$, & summando, omnia ND. Dd, seu area AMND $-$ omn. TD. Dd, seu area ATD $=$ omnibus AQ. $t\theta$, id est, rec-lo AQ. TD; adeoque AMND $=$ ATD $+$ AQ. TD. Eadem ferme ratione probatur esse CMNE $=$ AQ. TE $-$ CTE.

Co-

Corollarium III.

585. Si resistentia est uniformis, curva ARC abit in lineam rectam ipsi AC parallelam, eritque hoc casu $AMNSB - CMNSB = \beta B.GH = AC.BR$, ac per consequens resistentia medii BR uniformis ad gravitatem uniformem se habebit, ut GH differentia abscissarum BG & BH arcuum curvæ AB & BC descensu & subsequente ascensu descriptorum ad AC aggregatum ipsorum arcuum ABC.

Corollarium IV.

586. Si curva ABC est cyclois ordinaria, cujus axis vel diameter circuli generatoris est bB & basis ac; semissis differentiæ quadratorum ex arcubus cycloidis ADB & BEC descensu & ascensu descriptis æquabitur areæ ATRTC.

Nam, quia βB exponit gravitatem uniformem juxta ea, quæ §. 179. dicta sunt, hæc βB erit dupla diametri bB; hinc $\beta B.BG = 2.bB.BG = 2.BK^2$ (vel, quia arcus cycloidis ADB æquat duplam subtensam BK) $= \frac{1}{2}.AB^2$, & $\beta B.BH = 2.bB.BH = \frac{1}{2}.BC^2$, ergo $\beta B.GH = \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}BC^2 = ATRTC$. Hoc est, rectangulum ex semisse differentiæ arcuum ADB & BEC descensu & subsequente ascensu in cycloide descriptorum, in aggregatum ABC eorundem arcuum, æquat aream ATRTC.

Hoc corollarium coincidit cum propositione XXX. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Illustr. Newtoni, cujus tamen demonstrationem ex aliis principiis hausit, ut demonstrationem illam inspicienti cuilibet patebit.

Corollarium V.

587. Ergo, in casu corollarii III. hujus, resistentia uniformis in cycloide erit ad gravitatem, id est, RB ad βB in fig. 134. sicut dimidia differentia arcuum ADB & BEC ad βB, seu hemicycloidem aDB, vel, sicut differentia dictorum arcuum ad integram cycloidem, aBc. Est enim (§. 585.) $BR : \beta B = GH : AC = \beta B.GH : \beta B.AC$ (§. 586.) $= (\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}BC).AC : \beta B.AC = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}BC : \beta B$ vel aDB, $= AB - BC :$ cycloid. aBc.

SCHOLION.

588. In aliis resistentiæ hypothesibus res evadit paullo altioris indaginis, quam in corollariis III. & V. hujus; cum in omni alia hypothesi curva ATRTC adhuc invenienda sit. Illustris Newtonus statim post propositionem in corollario IV. hujus citatam asserit, hanc curvam ARC ad ellipsin proxime accedere, si, curva ABC existente cycloide, resistentiæ aëris fuerint celeritatibus proportionales, vel ad parabolam, si resistentiæ fuerint in duplicata proportione celeritatum. Sed, accurate & mathematice rem sumendo, prænominata ATRTC non est ellipsis in prima, nec parabola in altera resistentiæ hypothesi; sed, quantum conjicere licet, utroque casu erit transcendens. Etenim, si resistentiæ sunt ut celeritates acquisitæ, nondum constat, quâ ratione curva ARC construi debeat, ne quidem concessis quadraturis figurarum curvilinearum. Pro altera vero hypothesi ac naturæ magis consentaneâ nominatæ curvæ constructio haberi potest per quadraturas & rectificationes curvarum. Ex propositione XXIX. laudatissimi Newtoni Lib. II. ejusmodi constructio peti potest in casu particulari, quo curva descensus ABC est cyclois. Hoc loco vero generalem constructionem adducam pro quacunque curva ABC, idque gemino modo.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA.

589. *Per quodlibet in linea* AM *producta punctum* V, *descripta logarithmica* VXY *subtangentem habente æqualem datæ lineæ* AQ, *&* *asymptotam* CQ, *ac protensa* ND *usque ad occursum* P *cum log-mica* VX; *si omnia elementa* PD. DN. Dd *alicujus solidi duobus planis* MAV *&* NDP *interjecti erecto scilicet ad angulos rectos plano* MABS *super plano* VAB, *æqualia fuerint parallelepipedo* AQ^2. DO, *sub quadrato subtangentis log-micæ & ordinata* DO *cujusdam curvæ* AOΔC; *homologa ordinata* DT *scalæ resistentiarum* ARC *erit quarta proportionalis ad ordinatas* PD, DO *&* AQ *subtangentem log-micæ* VX.

I. Esto linea pn alteri PN indefinite vicina, atque per puncta T, O & P curvarum AT, AO & VP ductæ sint lineolæ $T\theta$, $O\omega$, & $P\pi$; ac denique, sit DT quarta proportionalis ad PD, DO & AQ, vel, quod eodem recidit, rec-lum PD. DT = AQ. DO, & $pd.dt$ = AQ.do, id est, PD.$dt + p\pi.dt$ = PD.DT + PD.$t\theta + dt.p\pi$ = PD.DT + PD.

PD. $t\theta$ + DT. $p\pi$ = AQ. DO + AQ. ωo; subductis igitur PD. DT & AQ. DO, remanebit PD. $t\theta$ + DT. $p\pi$ = AQ. ωo, ductisque singulis partibus in AQ; fiet AQ. PD. $t\theta$ + DT. AQ. $p\pi$ = AQ^2. $o\omega$.

II. Atqui AQ^2. ωo = PD. DN. Dd, cum omnia PD. DN. Dd sint (constr.) = AQ^2. DO; item (§. 491. num. II.) AQ. $p\pi$ æquatur PD. Dd, vel AQ. DT. $p\pi$ = DT. PD. Dd; ergo, subrogatis his valoribus in postrema æqualitate num. I. hujus, invenietur PD. AQ. $t\theta$ + PD. DT. Dd = PD. DN. Dd, &, applicando singula membra ad PD, AQ. $t\theta$ + DT. Dd = DN. Dd. Adeoque omnia AQ. $t\theta$, id est, AQ. TD + omn. DT. Dd, id est, area ATD = omnibus DN. Dd, seu areæ AMND. Est proinde AQ. TD + ATD = AMND; atque adeò (§. 584.) curva ATR est scala resistentiarum mobilis in curva ADB cadentis. Fig. 134.

III. Eodem modo probatur PE. $t\theta$ − ET. Pπ æquari AQ. $o\omega$ atque inde, ut ante, inferetur esse AQ. TE − CTE = CMNE, ac per consequens (§. 584.) curvam CTR scalam resistentiarum aëris mobili in curva BEC ascendenti oppositarum. Propterea curva ATRTC est scala resistentiarum aëris, cum corpus in curva quacunque ADB descendit, atque dehinc in altera BEC ascendit. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

590. Celeritas mobilis, in quolibet curvæ puncto D acquisita, est $\sqrt{(2AQ.DT)}$, atque velocitas eidem mobili per arcum curvæ BE ascendenti residua in E erit $\sqrt{(2.AQ.ET)}$ quorum ratio ex superioribus (§. 484.) satis constat.

Corollarium II.

591. Omnia parallelepipeda PD. DN. Dd continentur in solido quodam MAVN, cujus singulæ sectiones plano BAV rectæ planoque MAV parallelæ, sunt rectangula PDN. Planum enim AMSB super plano VAB erectum concipiendum est.

Corollarium III.

592. Si linea descensus mobilis ABC est cyclois ordinaria, linea MNS erit recta transiens per B, angulumque MBA, semirecto æqualem continens cum linea AB. Propterea solidum prædictum MAVN erit truncus log-micus super basi ADPV interjectus plano VAB

 alii-

aliique per BX transeunti, atque angulo semirecto ad planum VAB inclinato.

Fig. 134. Nam, quia subtensa BL arcus circularis BL parallela est tangenti cycloidis in puncto D, erit gravitas ad solicitationem ejus tangentialem in cycloidis puncto D, sicut bB ad BL $=\beta$B : 2.BL $=\beta$B : arcum cycl. BD, atqui βB exponit gravitatem, ergo BD exponet solicitationem gravitatis tangentialem in D, atque adeo in fig. 135. BD quæ eadem est cum arcu cycloidis BD in fig. 134. in rectam extenso æquabitur ordinatæ ND, & AB = AM; hinc linea MNS est recta, seu figura AMNS erit triangulum rectangulum isosceles, atque adeò solidum MAVNP truncus resectus ex prismate recto super basi ADPV à plano secante per BX ducto, atque angulo semirecto ad planum baseos BAV inclinato.

Corollarium IV.

593. Unde, si Ω sit centrum gravitatis quadrilinei log-mici ADPV, demissa perpendiculari $\Omega\Delta$ ad AB, solidum ex quadrilineo prædicto ADPV in BΔ æquabitur trunco MAVNP, atque adeo (constr.) parallelepipedo; atqui ducta per VZ parallela AC, quadrilineum AVPD reperietur = AQ. PZ, ergo solidum MAVNP = AQ. PZ. BΔ (constr.) = AQ^2. DO, & PZ. BΔ = AQ. DO (num. 1. §. 589.) = PD. DT. Est proinde resistentia DT in quolibet cycloidis puncto = PZ. BΔ : PD.

Scholion.

594. Quia ad obtinendam expressionem ordinatarum DT etiam expressio requiritur ipsarum BΔ, seu distantiarum centri gravitatis quadrilineorum ADPV, idcirco duobus verbis indicabo, qua ratione investigari debeant.

In log-mica est DP. Dd = AQ. $p\pi$, & AD. DP. Dd = AQ. AD. $p\pi$ (vel ducta PW parallela VZ) = AQ. PW. $p\pi$, ergo omnia AD. DP. Dd = omnibus AQ. PW. $p\pi$ id est = AQ in trilineum VPW. Atqui (§. 44.) est quadrilineum ADVP in AΔ = omnibus AD. DP. Dd; ac per consequens = AQ. VPW. Verum ADPV = AQ. PZ, & VPW = AD. DP − AQ. PZ; ergo AQ. PZ. AΔ = AQ. AD. DP − AQ^2. PZ. seu PZ. AΔ = AD. DP − AQ. PZ; hinc PZ. BΔ = AB. PZ − AD. DP + AQ. PZ = BQ. PZ − AD. DP (vel ponendo DP − AV loco ipsius PZ) = BQ. DP − BQ. AV − AD. DP.

Hinc,

Hinc, ut saltem in transitu dicam, centrum gravitatis areæ log-micæ ultra ordinatam DP versus Q in infinitum excurrentis intervallo subtangentis AQ distat à sua prima ordinata DP.

Corollarium V.

595. Cum DT (§. 593.) sit $PZ.B\Delta : PD$, substituto invento valore ipsius $B\Delta$, reperietur $DT = (BQ.DP - AD.DP - BQ.AV) : PD = BQ - AD, - BQ.AV : DP$. Adeoque solicitatio acceleratrix mobilis in cycloidis puncto D, hoc est, DN seu DB, $-$DT erit $BD - BQ + AD, + BQ.AV : DP = AV.BQ : DP, - AQ$.

Scholion II.

596. Supra jam indicavi (§. 588.) resistentias in cycloide jam pridem definitas esse à Cel. Newtono Prop. XXIX. Lib. II. Princ. Phil. Nat. idque præstitit per spatia hyperbolica, expressionibus à nostris diversissimis quoad apparentiam, sed revera cum nostris conspirantibus; sed, quia assertionis meæ veritas non statim in oculos incurrit, consensum inter Newtonianam atque meam determinationem resistentiarum, paucis ostendere libet. In figura 136. afferam Newtoni schema ipsiusmet literis, ast confusionis vitandæ gratia minusculis insignitum, atque propria ejus verba nulla mutatione facta, nisi quod hoc loco, quæ cycloidem respiciunt, nostræ figuræ 134. applicaturus sim, quæ ille indicat circa figuram propos. XXV. citati libri.

„ 597. Sit ABC arcus oscillatione integra descriptus, sitque B Fig. 134.
„ infimum cycloidis punctum, & B*a* semissis arcus cycloidis totius,
„ longitudini penduli æqualis, & quæratur resistentia corporis in
„ loco quovis D. Secetur recta infinita *oq*, in punctis *o*, *c*, *p*, *q*, Fig. 136.
„ ea lege, ut (si erigantur perpendicula *ok*, *ct*, *pi*, *qe*, centroque
„ *o*, & asymptotis *ok*, *oq* describatur hyperbola *tige* secans perpen-
„ dicula *ct*, *pi*, *qe* in *t*, *i* & *e*, & per punctum *i* agatur *kf* paral-
„ lela asymptoto *oq* occurrens asymptoto *ok* in *k*, & perpendiculis *ct*
„ & *qe* in *l* & *f*) fuerit area hyperbolica *pieq* ad aream hyperboli-
„ cam *pitc*, ut arcus AB, descensu corporis descriptus, ad arcum BC
„ ascensu descriptum, & area *ief* ad aream *ilt* ut *oq* ad *oc*. Dein per-
„ pendiculo *mn* abscindatur area hyperbolica *pinm*, quæ sit ad aream
„ hyperbolicam *pieq*, ut arcus *a*B ad arcum AB descensu descriptum.
„ Et si perpendiculo *rg* abscindatur area hyperbolica *pigr*, quæ sit

 „ ad

„ ad aream *pieq*, ut arcus quilibet BD ad arcum AB descensu to„ to descriptum; erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut „ area $\frac{or}{oq}\, ief - igh$ ad aream *pienm*. Hactenus Newtonus.

598. Consulantur omnino tres figuræ 134, 135 & 136: &, quia (constr.) spatia hyperbolica *pinm*, *pieq*, *pigr* & *rgeq* arcubus cycloidis *a*B, AB, DB & AD proportionalia sunt, & logarithmicæ ordinatæ DP, & AV abscissis hyperbolæ *oq* & *or* respective, adeo ut habeatur $AV : DP = or : oq$. & $AB : AQ = pieq : piko$ & componendo $BQ : AQ = okieq : okip$, erit $BQ - AD$ ut $okieq - rgeq$ seu *okigr* & $AV.BQ : DP$ ut $\frac{or}{oq}\, okieq$, ergo $BQ - AD - \frac{AV.BQ}{DP}$ ut $okigr - \frac{or}{oq}\, okieq$, atqui $okigr = orhk - igh$, & $\frac{or}{oq}\, okieq = (oq.pi - ief).\frac{or}{oq} = or.pi - \frac{or}{oq}\, ief$, ergo $okigr. - \frac{or}{oq}\, okieq = or.pi - igh - or.pi + \frac{or}{oq}\, ief = \frac{or}{oq}\, ief - igh$, atque adeo $BQ - AD - \frac{AV.BQ}{DP}$ est, ut $\frac{or}{oq}\, ief - igh$, & $BQ - AD - \frac{AV.BQ}{DP}$ ad βB seu *a*B, id est, resistentia aëris ad gravitatem ut $\frac{or}{oq}\, ief - igh$ ad aream *pienm*. Quod erat demonstrandum.

Hoc ergo modo Newtoniana determinatio reducitur ad simpliciorem meris lineis à nobis exhibitam, & vice versa nostra facile reducitur sub formam Newtonianæ; propterea etsi ambæ plurimum inter se differre prima fronte videntur, inter se jam egregie conspirare apparent. Resistentiæ aëris in cycloide, imò in qualibet data curva, aliter adhuc determinari possunt, vel potius celeritates acquisitæ in quolibet curvæ puncto concessa quadratura cujusdam spatii curvilinei ope theorematis sequentis.

PROPOSITIO LXXIV. Theorema.

Fig. 137. 599. *Inter asymptotas* AZ, AF *angulum rectum continentes describatur hyperbola quadratica* MO, *cujus scilicet quælibet ordinata* MK *sit ut quadratum abscissæ* AK *inversè, ordinataque* FO *gravitatem uniformem exponat, ductaque per* F *log-mica* FSQ, *cujus subtangens æquet rectam* AF, *atque in hac log-mica ordinata* ID, *cujus abscissa* AD *æqualis sit arcui curvæ* aB *descensu mobilis descripto* AD; *agantur* IM *parallela* AD *&* MZ *parallela* AF, *atque in* MZ *producta infra axem* AT, *ca-*

capiatur ZN æqualis GF in fig. 134. eruntque puncta N in linea quadam curva YN. Esto porrò rec-lum ex ordinata AF aliaque QR in log-mica, æquale duplo areæ AYNP, & in medio T intervalli AR ordinatarum AF & RQ, ducta ordinata TS, atque ad distantiam TX æqualem AD, alia ordinata XV; hæc XV exponet celeritatem acquisitam mobili in curvæ descensus ADB puncto D post lapsum per ejus arcum AD. Fig. 134.

Ductis ordinatis aliisve lineis, videlicet *pn, nm, mi, id, st, ux*, & *qr* lineis cognominis PN, NM, &c. parallelis & indefinite vicinis, item per puncta Q, V & S lineolis Qe, $V\upsilon$, & $S\sigma$ axi AR parallelis.

I. Constructio, quæ præbet $2.AYNP = AF.QR$ & $2.AYnp = AF.qr$, etiam efficiet $2NP.Pp = AF.qe$ (§. 491. num. II.) $QR.Rr$.

II. Quia (constr:) $AT = TR$ & $At = tr$, erit $Rr = 2.Tt$, atque adeò $ST.Tt : QR.Rr = ST : 2.QR$ (seu, propter continue proportionales AF, TS & RQ ob æqualia harum ordinatarum log-micæ intervalla AT & TR, erit etiam) $= AF : 2.TS = AF.s\sigma : 2.ST.s\sigma = ST.Tt : 2ST.s\sigma$; ergo $2.ST.\sigma s = QR.Rr$ (num. I. hujus) $= 2.NP.Pp$, ergo etiam $ST.s\sigma = NP.Pp$; vel $Pp : s\sigma = ST : NP$.

III. Hyperbola verò MO præbet $AF^2 : AK^2$ (aut, quia ob æqualia intervalla AD & TX ordinatæ AF, ID, seu AK, ST ac VX per naturam log-micæ proportionales sunt) $= ST^2 : VX^2$ ($= MK : OF$) $= AF.MK : AF.OF$, erit, permutando, $ST^2 : AF.MK = VX^2 : AF.OF$, sed (num. II. hujus) erat $Pp : s\sigma = ST : MK$, vel NP; & log-mica exhibet $s\sigma : Tt = ST : AF$, ergo ex æquo $Pp : Tt = ST^2 : AF.MK = VX^2 : AF.OF$, & $VX^2.Tt = AF.OF.Pp$.

IV. Cum (constr.) sit $AD = TX$, & $Ad = tx = tT + TX - Xx$, erit $Dd = Tt - Xx$, vel $Xx = Tt - Dd$, id est, $VX^2.Xx = VX^2.Tt - VX^2.Dd$; atqui, loco $VX.Xx$ substituendo (§. 491. num. II.) æquale $AF.u\upsilon$, locoque $VX^2.Tt$ (num. III. hujus) æquale solidum $AF.OF.Pp$, ac denique faciendo $VX^2 = R.AF$, fiet $AF.VX.u\upsilon = AF.OF.Pp - AF.R.Dd$; vel, applicando omnia ad AF, reperietur $VX.u\upsilon = OF.Pp - R.Dd$ (seu ponendo $T.Dd$ æquale $OF.Pp$) $= VX.u\upsilon = T.Dd - R.Dd = (T - R).Dd$. Jam, quoniam Dd est elementum spatii AD, si $T - R$ sit solicitatio quæcunque acceleratrix, erit momentum hujus solicitationis æquale momento velocitatis acquisitæ in curvæ puncto D, & cum idem solicitationis momentum repertum sit æquale momento ordinatæ XV, sequitur hanc ordinatam exponere celeritatem in D acquisitam. Atqui, quoniam Fig. 134.

(se-

(secundùm hypothesin) $T . Dd = OF . Pp$, atque OF gravitatem uniformem exponit, & $OF . Pp$ (constr.) $OF . Ff$ sit momentum gravitatis centralis, cui momentum ejusdem tangentialis, seu rec-lum ex hac tangentiali & elemento curvæ Dd (§. 133.) æquatur, perinde ac $T . Dd$, liquet T esse solicitationem gravitatis tangentialem in curvæ puncto D, &, quia VX, ut jam ostensum, est celeritas acquisita in D quæcunque sit solicitatio acceleratrix $T - R$, atque $AF . R = VX^2$, id est, R ut VX^2; & cum resistentia medii (secundùm hypothesin) etiam sit ut quadratum celeritatis acquisitæ, magnitudo R exponet resistentiam aëris in curvæ puncto D, atque adeò $T - R$ detracta scilicet resistentia aëris à solicitatione gravitatis tangentiali, exponit solicitationem acceleratricem mobili descendenti continue applicatam, cui vigore ejusmodi solicitationum acquiritur in D celeritas XV. Quod erat demonstrandum.

600. Si grave in altera curvæ parte BEC, fig. 134. ascendit; curva YN semper magis magisque ad AP accedit, ut ab eadem recedit in casu descensus, constructio vero eadem est utroque casu, hac sola cum differentia, quod in casu descensus hyperbolæ portio OM, quæ est subter ordinatam OF, in constructione illa adhiberi debet, & portio, quæ supra ordinatam OF, in casu ascensus. Quonam vero artificio in præcedentes constructiones inciderim, ex demonstrationis filo facile intelliget perspicax Lector, propterea, ut brevitati consulam, eidem explicando non diutius immorabor.

Corollarium.

Fig. 134. 601. Si linea descensus mobilis aDB est iterum cyclois, area AYNP in figura 137. erit quadrabilis ope logarithmorum; nam inspiciendo utramque figuram 137, & 134. erit area $AYNP = (AB . YZ + \frac{1}{2}AF . YZ - AD . AZ) . AF : 4bB$. (constr.) $= \frac{1}{2}AF . QR$ (seu ex natura log-micæ) $= \frac{1}{2}ST^2$. Verùm, quia, ob æqualia intervalla AD & TX, ordinatæ AF, DI vel AK, ST & VX proportiones sunt, fit $AF^2 : AK^2$ vel (propter hyperbolam OM) $= AZ : AY = ST^2 : VX^2 = (AB . YZ + \frac{1}{2}AF . YZ - AD . AZ) . AF : 2bB$, ad VX^2, seu (constr.) $AF . R . = (AB . YZ + \frac{1}{2}AF . YZ - AD . AZ) : 2bB$ ad R; seu $AB . YZ - \frac{1}{2}AF . YZ - AD . AZ$ ad $R . 2bB$; atque adeò erit resistentia medii, seu $R = (AB . YZ - \frac{1}{2}AF . YZ - AD . AZ) . AY : 2bB . AZ$. Quod præcedentibus determinationibus (§. §. 595, 596, & 597.) probe consonum est.

CA-

CAPUT XX.

De motu projectorum in aëre, qui missili in duplicata ratione celeritatum resistit, cum corpus à solicitationibus gravitatis non ad aliquod centrum positione datum, ut hactenus considerari solebant, tendentibus, urgetur, sed secundum directiones lineam quamcunque curvam positione datam contingentes.

IN præcedenti Capite celeritates mobili in curva quacunque cadenti acquisitas, vel ascendenti residuas, assignavimus, cum scilicet à gravitate uniformi recta ad horizontem tendente urgetur in aëre secundum duplicatam proportionem celeritatum resistente. In hoc verò Capite examinandi restant motus projectilium in ejusmodi aëre resistente, sed pro gravitate variante, tam ratione ipsarum gravitatis solicitationum, quam ratione directionum; quas directiones ad nullum determinatum punctum tendere, sed quamcunque lineam curvam contingere supponemus. Ab omnibus, quotquot de viribus centralibus scripserunt, geometris, harum virium centralium, vel ut nos eas vocare solemus, solicitationum gravitatis centralium meta vel centrum positione datum & immutabile, considerari consuevit, veluti id nomen ipsum hisce viribus inditum satis superque declarat. Nos verò rem generalissime pertractaturi, solicitationum illarum centrum in una eademque curva mutabile assumemus, ita quidem, ut mobile in singulis curvæ percurrendæ punctis ad aliud atque aliud centrum solicitationum urgeatur. Hoc modo centra omnia posita erunt in quadam linea curva, quam solicitationum gravitatis directiones contingunt. Problema harum virium, pro centris, quæ dixi, variabilibus, prima fronte difficillimum, si non prorsus intractabile, videtur. Veruntamen, principiis in primo libro jam expositis insistentes, solutionem non minus simplicem quam facilem trademus, ex qua deinceps omnia instar corollariorum deducentur, quæ solicitationes ad unicum tantum centrum directas respiciunt symptomata, aut saltem eorum præcipua.

602. Adeoque, si AM*m* sit curva, quam projectile M data cum celeritate exiens ex puncto A secundum directionem tangentis AC Fig. 138.

 descri-

deſcribat in aëre ſecundum rationem duplicatam ipſi reſiſtente, cum ſcilicet directiones ſolicitationum gravitatis AB, MN, *mn*, ubique ad diverſa puncta ſeu centra B, N, *n* reſpiciunt, atque adeo curvam quamcunque BN*n* in præfatis punctis B, N, *n*, &c. contingunt. Solicitationem mobilis M ad punctum N directam deinceps repræſentabimus per MX, in ejus directione MN ſumptam, ductaque MR normali ad curvam AM in puncto M, & per X parallela XZ tangenti curvæ MP in dicto curvæ puncto, exponetque XZ (§. 118.) ſolicitationem gravitatis tangentialem in M.

603. Talis ſolicitationes gravitatis conſiderandi modus jam continet ſub ſe caſum, quo corpus M in curva AM incedens ad plura
Fig. 139. diverſa centra poſitione data ω, 2ω, 3ω, 4ω, &c. urgetur ſolicitationibus My, $M2y$, $M3y$, $M4y$; &c. Nam exiſtente Ω centro gravitatis punctorum y, $2y$, $3y$, $4y$, &c. quorum numerus ſit n, ſolicitatio ex omnibus lateralibus My, $M2y$, &c. reſultans (§. 49.) erit $n.M\Omega$, cui æqualem faciamus MX. Hæc MX erit ſolicitatio gravitatis centralis, quâ mobile in puncto curvæ M afficietur, & centrum, ad quod hæc ſolicitatio MX dirigitur, erit punctum N, in quo media directio omnium My, $M2y$, $M3y$, $M4y$, &c. curvam quandam N*n* (quam proinde curvam mediarum directionum nominare licet) contingit. Propterea, loco omnium illarum ſolicitationum lateralium My, $M2y$, &c. unicam illarum mediam ſolicitationem $MX = n.M\Omega$ conſiderare convenit, ut adeò tota res reducatur ad caſum articuli præcedentis.

HYPOTHESIS.

604. In hisce autem ſupponendum, reſiſtentiam aëris tantum exſeri in motum corporis M in curva AM incedentis, non verò in gravitatis impreſſiones juxta directiones MN.

PROPOSITIO LXXV. LEMMA.

605. *Si in hyperbola* TKΘ *inter aſymptotas* SB, BΦ, *ductis ordinatis* IK, GH, AD *&* ST *ad aſymptotam* SB, *ad alteram verò* BΦ, *ordinatis* $\Delta\Pi$, $\Theta\Phi$, *&* WV; *quadrilineum* $\Theta\Phi$VW *æquaverit exceſſum, quo quadrilineum* $\Phi\Theta\Delta\Pi$ *ſuperat duo ſimul quadrilinea* GHKI *&* ADTS, *ratio* BV *ad* BΦ *componetur ex tribus rationibus* BΦ *ad* BΠ, IB *ad* GB, *&* AB *ad* BS. *Hoc eſt, erit* BV *ad* BΦ, *ut* BΦ.IB.AB, *ad ſolidum ex* BΠ.GB.BS.

Facta

Facta Bh tertia proportionali ad $B\Pi$ & $B\Phi$, erectaque ordinata gh, sit insuper quadrilineum $g\sigma\theta h = GHIK$, eritque $WV\theta\sigma = SADT$. Nam, quia $\Theta\Phi VW = \Theta\Phi\Pi\Delta - GHIK - SADT$ (constr.) $= \Theta\Phi hg - \theta\sigma gh - SADT = \Theta\Phi\theta\sigma - SADT = \Theta\Phi\theta\sigma - WV\theta\sigma$, erit omninò $WV\theta\sigma = SADT$.

Atqui ratio BV ad $B\Phi$ componitur ex rationibus BV ad $B\theta$, $B\theta$ ad Bh, & Bh ad $B\Phi$, (seu, quia propter quadrilinea æqualia $WV\theta\sigma$, $SADT$; BV est ad $B\theta$, ut BA ad BS; propter $\sigma\theta hg = GIKH$ habetur $B\theta : Bh = BI : BG$, ac denique propter $\Theta\Phi hg = \Theta\Phi\Pi\Delta$, est $Bh : B\Phi = B\Phi : B\Pi$) ex rationibus BA ad BS, BI ad BG & $B\Phi$ ad $B\Pi$; atque adeò $BV : B\Phi = B\Phi . BI . BA : B\Pi . BG . BS$. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

606. Sed, si quadrilineum $\Theta\Phi VW$ fuerit æquale $\Theta\Phi\Pi\Delta - GHKI + ADTS$, erit $BV : B\Phi = B\Phi . BI . BS : B\Pi . BG . BA$. Demonstratio eadem ferme est.

Propositio LXXVI. Problema.

607. *Si mobile in directione* AC *datâ cum celeritate ex puncto* A *exiens, & solicitationibus acceleratricibus* MX *secundum directiones* MN, *curvam quamcunque* BNn *contingentes, citatum, in aëre secundum rationem compositam ex rationibus densitatum medii & duplicatæ velocitatum mobilis resistente, curvam* AMm *describat, definire proportionem celeritatis mobilis in quolibet curvæ puncto* M *acquisitæ ad celeritatem initialem in* A, *ac proportionem solicitationum acceleratricium in iisdem curvæ punctis* M *&* A.

I. Sunto Mm elementum curvæ AM, per cujus elementi terminos transeant tangentes MN, mn curvæ BNn sese intersecantes in puncto o; MP & mp tangentes curvæ AMm in punctis M, m convenientes in c, super quas tangentes demittantur ex punctis N, o & n normales NP, oa (tangentem interiorem cb secans in α) ob & np, ac denique MR, mR perpendiculares curvæ AM in punctis M & m, adeò ut, coeuntibus his punctis, hæ perpendiculares curvæ futuræ sint radius circuli osculatoris curvi in puncto M vel m, seu circuli æque curvi in his punctis. Sint porrò curvæ MF, $m\mu f$ evolutæ arcuum BN, BNn; rectæ verò $B\Phi$ & BV in linea indefinita

BQ ipsi BA normali abscissæ exponant velocitates mobilis in punctis A & M, & Vu elementum ipsius BV; extensaque curva AM in rectam BQ, erectaque QY perpendiculari ad BQ, ac densitati aëris in omni curvæ AM termino proportionali, orietur figura, vel potius curva βY, quam scalam densitatum aëris deinceps vocabo. Denique assumtis D & R pro nominibus densitatis & resistentiæ aëris, ponatur ubique R ut $D.BV^2$, vel, ad complenda homogenea, adscito AB.AD rectangulo dato, sit ubique $AB.AD.R = D.BV^2$. Ac fiant $BI = MN$, $Bi = mn$, $B\Phi = BC$, $B\Pi = NP$ & $B\pi = np$, ducanturque ordinatæ IK, ik, $\Phi\Theta$, $\Pi\Delta$ ac $\pi\delta$ in hyperbola intra asymptotas AB, BQ per punctum D descripta. Hisce omnibus præparatis sequitur

II. *Analysis Geometrica.* Cum (§. 602.) ZX solicitatio sit tangentialis ex centrali MX derivata, erit (§. 481.) $ZX - R$ solicitatio acceleratrix mobilis in puncto M curvæ AM descensu descriptæ, & $ZX + R$ resistentia totalis mobilis ex puncto M super curva MA ascendentis: sed seposito tantisper casu ascensionis, examinabimus alterum, qui est descensus: Erit igitur (§. 484.) momentum solicitationis acceleratricis $ZX - R$ æquale momento celeritatis crescentis BV, id est $(ZX - R).Mm = BV.Vu = ZX.Mm - R.Mm$, vel ducendo omnia in datum rec-lum BAD, habetur $BA.AD.ZX.Mm - AB.AD.R.Mm = AB.AD.BV.Vu$, & quia (secundum hypothesin) $AB.AD.R = D.BV^2$, ac $BAD = BVW$, erit $AB.AD.ZX.Mm - D.BV^2.Mm = BV^2.WV.Vu$. Et, quia (§. 604.) aër gravitatis solicitationibus non resistit, habetur (§. 154.) $BV^2 = MZ.MR$; idcirco, applicando æqualitatem præcedentem ad hanc postremam, proveniet $AB.AD.ZX.Mm : MZ.MR, - QY.Qq = VW.Vu$. Cum (num. 1. hujus) $QY = D$ & $Qq = Mm$.

III. At, quia triangula similia Moa, BZX præbent $ZX : MZ = Ma : ao$, & sectores similes $ca\alpha$ ac RMm; $Mm : MR = a\alpha : ac$ (& quia, coeuntibus punctis M, m, ratio Ma ad ca in rationem æqualitatis desinit) $= a\alpha : Ma$, erit ex æquo $ZX.Mm : MZ.RM = a\alpha : ao = a\alpha : PN$ (constr.) $= a\alpha : B\Pi$, ergo $AB.AD.ZX.Mm : MZ.MR = AB.AD.a\alpha : B\Pi$, hoc est (propter omnia rectangula in hyperbola æqualia) $= \Pi\Delta.a\alpha$.

IV. Ducantur porrò per punctum o lineola $o1$ parallela tangenti MP, & per punctum n lineolæ 34, $n2$ parallelæ respective tangentibus MP, mp, & coeuntibus punctis n, o, N, lineolæ evanescentes O2, 14 & N3 ac arculus Nn in rationes æqualitatis desinent,

per-

perinde ac $o\alpha$ & ob. Quo posito, quia NP $-np$ (constr.) $=$ BΠ $-$ Bπ $=$ $\Pi\pi$ $=$ PN $-ao$, $+ao-\alpha o+bo$ (seu αo ipsi æqualis) $-pn=$ N1 $+$ $a\alpha+14$ (vel $o2$) $=a\alpha+$ N4, erit $a\alpha=\Pi\pi-$ N4, & $\Pi\Delta.a\alpha=\Pi\Delta.\Pi\pi-\Pi\Delta$: N4.

Triangula verò similia N43 & NPM, præbent N4 : NP $=$ N3 : NM $=$ Nn : NM $=$ Ii $-$ Ff : NM. Nam $mn+n$N $=$ MN $-$ Mμ $=$ BI $-$ Ff; ergo nN $=$ BI $-$ Bi $-$ Ff $=$ Ii $-$ Ff. Hinc, quia BI. IK $=$ B$\Pi.\Pi\Delta$, erit B$\Pi.\Pi\Delta$. N4 : BΠ, vel NP $=\Pi\Delta$. N4 $=$ (BI. IK. Ii $-$ BI. IK. Ff) : BI, $=$ IK. Ii $-$ IK. Ff (seu ductis per singula hyperbolæ puncta K, k parallelis KE, ke rectæ AB, lineis FE, fe eidem AB normalibus, occurrentes in punctis E, e alicujus curvæ DE) $=$ IK. Ii $-$ FE. Ff, erit $\Pi\Delta.a\alpha$ ($=\Pi\Delta.\Pi\pi-\Pi\Delta$. N4) $=\Pi\Delta.\Pi\pi-$ IK. Ii $+$ FE. Ff.

V. Hinc cum supra (num. II. hujus) reperta sit VW. Vu $=$ AB. AD. ZX. Mm: MZ. MR $-$ QY. Qq (num. III. hujus) $=\Pi\Delta.a\alpha-$ QY. Qq; erit (num. IV.) WV. Vu $=\Pi\Delta.\Pi\pi-$ IK. Ii $+$ FE. Ff $-$ QY. Qq, & sic ubique; ergo omnia WV. Vu $=$ omn. $\Pi\Delta.\Pi\pi$ $-$ omn. IK. Ii $+$ omn. FE. Ff $-$ omn. QY. Qq. Hoc est, $\Theta\Phi$VW $=$ $\Theta\Phi\Pi\Delta$ $-$ AIKD $+$ AFED $-$ BβYQ; nam, si punctum M est in A, omnes hæ areæ simul à nihilo incipient. Areis AFED & BβYQ capiantur æqualia quadrilinea hyperbolica AGHD & ASTD, eritque $\Theta\Phi$VW $=$ $\Theta\Phi\Pi\Delta$ $-$ GIKH $-$ ASTD, ac per consequens (§. 605.) BV : BΦ $=$ BΦ. BI. BA : BΠ. GB. SB (vel restitutis BC, MN, NP loco BΦ, BI, & BΠ) $=$ BC. MN. AB : NP. GB. SB. Jam, quia BC : AB $=$ sinus anguli BAC : radium vel sinum totum, & NP : MN $=$ $\int$NMP : rad., erit BV : BΦ, id est, celeritas mobilis in M ad celeritatem initialem in A, sicut AB^2 in $\int$BAC ad GB. SB in $\int$NMP. Unde, si vA significet velocitatem in A, erit BV, seu celeritas in M, quam etiam exprimam per vM $=$ AB^2. vA. $\int$BAC : GB. SB. $\int$NMP.

VI. Porrò, quia MX. MR : MZ. MR, seu MX : MZ $=$ rad. : $\int$MXZ vel $\int$NMP, & (§. 154.) MZ. MR $=v$M^2; erit ex æquo MX. MR : vM^2 $=$ rad. : $\int$NMP; atqui (num. V.) vM^2 : vA^2 $=$ AB^4. $\int$BAC^2 : GB^2. SB^2. $\int$NMP^2, & (ponendo AR & A pro radio osculi, & solicitatione centrali initio motus in curvæ puncto A) vA^2 : A. AR $=$ $\int$BAC : rad. Ergo ex æquo & per compositionem rationum MX. MR : A. AR $=$ AB^4. $\int\overline{\text{BAC}}^3$: SB^2. GB^2. $\int\overline{\text{NMP}}^3$. Assumatur quædam magnitudo M, talis, ut M. MR sit ad A. AR, sicut AB^2. $\int\overline{\text{BAC}}^3$ ad GB^2. $\int\overline{\text{NMP}}^3$, seu M $=$ A. AR. AB^2. $\int$BAC^3 : MR. GB^2.

$GB^2.\int\overline{NMP^3}$, & reperietur $MX:M = AB^2:SB^2$, id est, solicitatio centralis in aëre resistente est in quolibet curvæ puncto $M, = M.AB^2:SB^2$, cum scilicet mobile ex A profectum curvæ arcum AM descendendo, seu ad curvam nNB accedendo describit.

VII. Sin verò ascendat super arcum MA ex M versus A, id est à curva nNB recedendo, invenietur hoc casu $\Theta\Phi VW = \Theta\Phi\Pi\Delta - GIKH + ASTD$, atque adeò, vi paragraphi 606, & eorum quæ in præcedentibus numeris hujus ostensa sunt, $MX = M.SB^2:AB^2$. Quæ omnia erant invenienda.

608. Notandum autem literam $\int$ in hac propositione esse notam characteristicam sinuum illorum angulorum, quibus præfigitur, & $\int\overline{BAC^3}$, $\int\overline{NMP^3}$ significare cubos ex sinubus angulorum BAC, NMP, & reliqua signa, scilicet A, denotare solicitationem gravitatis centralem in curvæ puncto initiali A, & AR (quam in figura confusionis vitandæ gratia non expressi) radium circuli osculatoris, seu ejusdem curvitatis cum curva in eodem puncto A. Ratio verò SB ad AB, in qua SB semper major ponitur quam AB, eadem est cum ratione abscissarum alicujus quadrilinei hyperbolici ASTD (constr.) æqualis areæ $B\beta YQ$ scalæ densitatum aëris. Propterea termini ipsi rationis SB ad AB, ad nullam determinatam magnitudinem restricti sunt, sed, pro re nata, modò majores minoresve accipi possunt, dummodo ratio inter hos terminos ea maneat, quæ est inter abscissas cujuscunque trapezii hyperbolici prædictæ areæ in scala densitatum aëris æqualis.

Corollarium I.

609. Adeoque in medio nullius densitatis, id est, in vacuo evanescent areæ $B\beta YQ$ vel ASTD, atque adeò ratio SB ad AB mutabitur in rationem æqualitatis, fietque $vM:vA = AB.\int BAC:GB.\int NMP$. Et MX ($= M.AB^2:SB^2$, vel $M.SB^2:AB^2$) $= M$. Idcirco M, cujus valor jam (§. 607. num. VI.) determinatus est, exponit generalissime solicitationem gravitatis centralem in vacuo.

Corollarium II.

Fig. 139. 610. Si mobile M solicitationibus quotcunque lateralibus, My, $M2y$, $M3y$, $M4y$, &c. ad diversa centra ω, 2ω, 3ω, 4ω, &c. simul agentibus urgetur; earum media directio MN, quæ (§. 603. & 49.)

per

per centrum gravitatis Ω omnium punctorum y, $2y$, $3y$, $4y$, &c. transibit, continget aliquam curvam NN, quam proinde curvam mediarum directionum solicitationum lateralium vocare licet. Idcirco, quia (§. 603.) $MX = n. M\Omega$ (§. 607. num. VI. & VII.) $= M. AB^2 : SB^2$ vel $= M. SB^2 : AB^2$; hoc in casu ascensionis, illud verò in casu descensus mobilis in curva AM, erit $M\Omega : M = AB^2 : n. SB^2$ in primo casu, qui est descensus, vel $M\Omega : M = SB^2 : n. AB^2$. Adeoque circumstantia problematis, solicitationum acceleratricium vel retardatricium ad plura diversa centra simul agentium, continetur jam in problemate harum solicitationum, si earum meta seu centrum in quolibet mobili describendæ curvæ puncto variabile est.

Corollarium III.

611. Quia (§. 607. num. I.) assumsimus $AB. AD. R = D. BV^2$, & (§. 154.) $BV^2 = MZ. MR$, erit $R : MZ = D. MR : AB. AD$. Atqui $MZ : MX = NP : NM = \int NMP$: rad. ergo ex æquo resist. R, ad solicit. centr. $MX = D. MR. \int NMP : AB. AD$. radium.

Item quia $MX : ZX = MN : MP =$ rad. $: \int MNP$, erit iterum ex æquo resistentia R ad solicitat. gravitatis tangentialem $ZX = D. MR. \int NMP : AB. AD. \int MNP = D. MR.$ tang. $NMP : AB. AD.$ radium.

Corollarium IV.

612. Si solicitationes gravitatis MX diriguntur ad centrum positione datum B, qui est casus harum solicitationum seu virium centripetarum, qualis hactenus geometris considerari consuevit, tota curva NB contrahetur in punctum B, ejusque evolutæ MF, $m\mu f$ abibunt in arcus circulares concentricos ex centro B descriptos, propterea singulæ NM, BI & BF, immò & GB, æquales fient, coincidente tunc curva DE respectivo arcui hyperbolico DK. Adeoque formula numeri VI. §. 607. etiam mutabitur in $M = A. AR. AB^2. \int \overline{BAC^3} : MR. MN^2. \int \overline{NMP^3} = A. AR. BC^3. MN : AB. MR. NP^3 = BC^2. vA^2. MN : MR. NP^3$, quia quadratum velocitatis in A, seu $vA^2 = A. BC. AR : AB$. Hæc postrema formula pro solicitationibus centralibus in vacuo, & uno duntaxat existente centro solicitationum, egregie conspirat cum eâ, quam supra (§. 156.) jam demonstratam dedi, simulque retuli citato loco Clarissimos Geometras Joh. Bernoullium, Abr. Moyvræum, & Guid. Grandum in similem canonem incidisse, Fig. 138. & 140.

sed

ſed alia via. In figura enim 37., lineæ $N\alpha$, AI, DR, DN, nZ, Dq, idem ſignificant ac in figura 138. litteræ A, vA, & lineæ reſpectivæ BC, NM, MR & NP.

SCHOLION I.

Fig. 140. 613. Sit nunc curva AM ſpiralis logarithmica, in qua ſolicitationes gravitatis MX ad polum B dirigantur, ita ut puncta N, B unum idemque ſint, unde, quia ſinguli anguli BAC, NMP, æquales ſunt, ratio linearum MP, MN & NP ubique data erit. Ponatur denſitas aëris in M, ut $h.MP : MN^2$, ubi h quemlibet numerum ſignificat, adeòque erit, propter rationem datam, MP ad MN reciproce, ut MN, diſtantia mobilis à centro N vel B; poſitâ itaque $D = h.AB.\ AD.\ MP : MN^2$, invenietur $D.\ Mm = QY.\ Qq = ST.\ Ss = h.IK.\ Ii$, & conſequenter $ASTD = h.AIKD$, ac propterea $AB : SB = BI^h : AB^h = MN^h : AB^h$, & $AB^2 : SB^2 = MN^2 : AB^{2h}$.

Porrò, quia ſinguli anguli BAC, NMP, &c. & per conſequens eorum ſinus, æquales ſunt, & radii oſculi AR, MR in A, M diſtantiis AB, MN proportionales, erit nunc (§. 612.) $M : A (= AR.\ AB^2.\ s\overline{BAC^3} : MR.\ MN^2.\ s\overline{NMP^3}) = AB^3 : MN^3$. Atqui (§. 607. num. VI.) erat $MX : M (= AB^2 : BS^2) = MN^{2h} : AB^{2h}$; ergo ex æquo $MX : A = MN^{2h-3} : AB^{2h-3}$. Eſt propterea vis centripeta, id eſt, ſolicitatio centralis MX in logarithmica ſpirali ubique, ut MN^{2h-3}. ſi corpus deſcendendo arcum AM deſcribit; & reciproce, ut MN^{2h+3} ſi aſcendendo incedit per M verſus A ſuper arcum MA.

Hinc, quia generaliter eſt (§. 611.) $R : MX = D.\ MR.\ sNMP : AB.\ AD.\ \text{rad.}$ & D (ſecundùm hypotheſin) $= h.AB.\ AD.\ MP : MN^2$; erit $R : MX = h.MR.\ MP.\ sNMP : MN^2.\ \text{rad.}$ (vel, quia NP eſt ad NM, ut $sNMP : \text{rad.}$ & rec-lum $NP.\ MR$ æquale MN^2) $= h.MP : MN$, id eſt, ratio R ad MX erit ubique conſtans ſeu data.

Ergo, ſi $h = \frac{1}{2}$, erit MX reciproce in duplicata ratione diſtantiæ MN, & reſiſtentia R ad ſolicitationem centralem MX, ſicut $\frac{1}{2}MP$ ad MN.

Sin verò h fuerit $= 1 - \frac{1}{2}n$, reperietur MX reciproce, ut MN^{n+1}; & $R : MX = (1 - \frac{1}{2}n).\ MP : MN$.

COROLLARIUM V.

614. Si solicitationes centrales diriguntur ad centrum infinite distans, ut in fig. 141. ita ut directiones AB, MN parallelæ, axique EF curvæ EMA perpendiculares sint, rectæ MN, AB hoc casu infinitæ atque adeò æquales erunt, elisis ergo AB^2, MN^2 ex canone paragraphi 612. habebitur $M : A = AR. \int \overline{BAC}^3 : MR. \int \overline{NMP}^3$, vel $M = A. AR. \int \overline{BAC}^3 : MR. \int \overline{NMP}^3$. Fig. 141.

Sed si directiones solicitationum MX axi EF æquidistantes sunt, reperietur eo casu $M : A = AR. \int \overline{DAa}^3 : MR. \int \overline{QMO}^3$; ducta scilicet MO parallela EF.

Et quia (§. 607. num. VI.) generaliter inveniebatur $MX : M = AB^2 : SB^2$ in casu descensus vel $MX : M = SB^2 : AB^2$ in casu ascensus mobilis, habebuntur ipsæ MX utroque casu hujus corollarii, scilicet cum earum directiones axi EF normales, & cum eidem parallelæ sunt.

COROLLARIUM VI.

615. Iisdem positis, & gravitate uniformi, facili negotio invenietur secundùm quam legem densitatem aëris variare oporteat, ut projectile datam curvam in medio resistente describat. Sit enim A gravitas uniformis in aëre resistente, atque inter asymptotas AF, Ff descripta hyperbola TDL quacunque, fiat ubique SF^2 ad AF^2 ut $AR. \int \overline{FAC}^3 : MR. \int \overline{NMP}^3$, in casu descensus, vel $AF^2 : SF^2 = AR. \int \overline{FAC}^3 : MR. \int \overline{NMP}^3$, eritque ubique $D = \pm ST. Ss : Mm$. ubi signum + est pro descensu & — pro ascensione. Demonstratio hujus ex præcedenti corollario facilis est. Fig. 142.

SCHOLIUM II.

616. Sit AME quadrans circuli cujus centrum in F vel H, adeoque $AR = MR = MF$, & $AR. \int \overline{FAC}^3 : MR. \int \overline{NMP}^3 = AF^3 : MG^3$. Ergo $AF^2 : SF^2 = AF^3 : MG^3$, & per consequens $2. ASTD = 3. AOLD$, vel $2. ST. Ss = 3. OL. Oo$, & $D\,(= ST. Ss : Mm) = 3 OL. Oo : 2 Mm$, vel (propter triangulorum $Mm\mu$ & MHG similitudinem) $= 3 OL. GH : 2 AF = 3 OL. OF. GH : 2. OF. AF = 3 AF. AD. GH : 2 OF. AF = 3 AD. GH : 2 OF = 3 AD.$ tang. AFM : 2 rad. Est ergo

Yy den-

densitas in M, ut tangens anguli AFM. Vel etiam D = 3 AD. rad. : 2. tang. MFE, vel NMP = 3. AF. AD. rad. : 2. AF. tang. NMP.

Est verò R : ZX (§. 611.) = D. MR. tang. NMP : AB. AD. rad. (vel hoc loco, ubi AF assumenda loco AB in fig. 138.) = D. AF. tang. NMP : AF. AD. rad. (seu substituto valore ipsius D) = 3 AF. tang. NMP : 2 AF. tang. NMP = 3 : 2. Propterea etiam R : MX = $3\int$ MFA : 2 rad. = 3. GH : 2. MF. Quæ omnia inventis Bernoullianis (Act. Lips. 1713. mens. Febr. pag. 93.) & partim Newtonianis conformia sunt, etsi ex alio fundamento deducta. Loquor de casu descensus, quandoquidem casus ascensûs in circulo impossibilis est, ut eleganter ab Illust. Newtono animadversum; etenim foret hoc casu resistentia ad gravitatem, ut − 3GH ad 2MF, id est, ut magnitudo privativa ad positivam.

Corollarium VII.

617. Corollarium VI. nobis etiam præbet fundamentum inveniendi constructionem curvæ projectilium in aëre uniformis densitatis, sed resistentis in duplicata ratione celeritatum mobilis, posita scilicet, ut ibi, gravitate etiam uniformi & directiones ejus supponendo parallelas. Nam facta quadam $Q = \int -2dm\sqrt{(1+mm)} : m^3$, erit $y = AF + \int dm : m^3 Q$, & $FG = x = \int dm : mmQ$.

Scholion III.

618. Problema, quod in particulari tantum hypothesi resistentiarum aëris secundùm compositam rationem densitatum & duplicatæ velocitatis, solutum exhibuimus, generalius perfici poterat pro composita ratione resistentiarum ex ratione densitatum & quacunque multiplicata vel submultiplicata celeritatum mobilis, idque tam levi opera, posita præcedenti problematis analysi geometrica, ut nulla mutatio in ea facienda sit, præterquam in sola curva Bβ, quæ in hypothesi generaliori non amplius est scala densitatum aëris, sed curva alterius generis, quod paucis est ostendendum.

Fig. 138. 619. Esto curva βY ejus naturæ, ut existente ejus abscissa BQ æquali ubique arcui curvæ AM, ordinata ejus QY sit ad R resistentiam aëris in curvæ puncto M, sicut rectangulum datum AB. AD ad BV^2 quadratum velocitatis acquisitæ in M, & hæc curva Bβ generaliter usurpanda est loco scalæ densitatum aëris antea in analysi pro-

problematis adhibita, & reliqua sunt absolvenda prorsus ut in §. 607, scilicet areæ $B\beta YQ$ novæ curvæ βY æquale faciendum quadrilineum hyperbolicum $ASTD$; eritque etiam nunc celeritas acquisita in M, seu $vM = AB^2 . vA.$ sin. $BAC : GB. SB. \int NMP$, prorsus ut supra (§. 607. num. v.) reperiebatur, hoc solo cum discrimine quod SB nunc alius magnitudinis quam citato loco futura sit, quæ adhuc quæratur. Ad abbreviandum assumatur $V = AB. vA.$ sin. $BAC : GB.$ sin. NMP, eritque V velocitas, quam mobile in vacuo acquisivisset ex descensu super arcu curvæ AM in ejus extremitate M, & vM vel $BV = AB. V : SB.$ in casu descensus, vel $BV = SB. V : AB$ in casu ascensionis.

620. Jam, quia (constr.) $B\beta YQ = ASTD$, & $B\beta yq = AstD$, erit $QY. Qq = ST. Ss$, sed $QY = AB. AD. R : BV^2$ (vel subrogando valorem $AB. V : SB$, ipsius BV) $= AD. R. SB^2 : AB. V^2$, & $Qq = Mm$, erit $AD. R. SB^2. Mm : AB. V^2 = ST. Ss$, vel omnia ducendo in SB, $AD. R. SB^3. Mm : AB. V^2 = SB. ST. Ss = AB. AD. Ss$, atque adeo hinc elicietur $R. Mm : V^2 = AB^2. Ss : SB^3$. Adeoque omnia $(R. Mm : V^2) =$ omnibus $(AB^3. Ss : SB^3)$ id est $= (SB^2 - AB^2) : 2SB^2$, adeoque designando omnia $(R. Mm : V^2)$ per $\int R. Mm : V^2$, erit $2\int R. Mm : V^2 = (SB^2 - AB^2) : SB^2$. Hinc $SB^2 : AB^2 = 1 : 1 - 2\int R. Mm : V^2$; pro casu descensus.

621. Pro casu ascensionis loco ipsius BV (§. 619.) substituere oportet $SB. V : AB$ in QY, quæ pro utroque casu est $= AB. AD. R : BV^2$, fietque $QY. Qq = AB^3. AD. R. Mm : SB^2. V^2 = ST. Ss$, vel ducendo iterum singula in SB; $AB^3. AD. R. Mm : SB. V^2 = SB. ST. Ss = AB. BD. Ss$, hinc dividendo per $AB. AD$, invenietur $AB^2. R. Mm \cdot V^2 = SB. Ss$. Propterea omnia $AB^2. R. Mm : V^2 =$ omnibus $SB. Ss = \frac{1}{2}SB^2 - \frac{1}{2}AB^2$, ergo $2AB^2. \int R. Mm : V^2, = SB^2 - AB^2$. Atque adeo $SB^2 : AB^2 = 1 + 2\int R. Mm : V^2$. In casu ascensionis.

Hi sunt duo generales canones pro quacunque resistentiæ specie, sive hæc resistentia pendeat à velocitatibus & densitate aëris, sive non.

622. Sed, si resistentia sit in composita ratione ex densitate aëris & quacunque multiplicata ratione celeritatis, id est, si R sit ut $D. BV^h$, ubi h est numerus quilibet pro libitu assumptus. Vel, ad supplenda homogenea, sit $R = D. BV^h : AB^h$. Jam, quia (§. 620.) $AB^2 : SB^2 = 1 - 2\int R. Mm : V^2$, pro casu descensus erit, sumtis utrinque quantitatum elementis $- 2AB^2. Ss : SB^3 = 2R. Mm : V^2$, vel (substituto valore ipsius R & divisa æqualitate per -2) proveniet $AB^2.$

 Ss:

$Ss : SB^3 = V^{h-2} D.Mm : SB^h$, atque adeò $SB^{h-3}.Ss = V^{h-2} D.Mm : AB^2$. Ergo omnia $V^{h-2} D.Mm : AB^2$, id est, $\int V^{h-2} D.Mm : AB^2$, = omnibus $SB^{h-3}.Ss$, id est, $= \frac{1}{h-2} SB^{h-2} - \frac{1}{h-2} AB^{h-2}$; atque adeò hinc elicitur canon $SB = \sqrt[h-2]{(AB^{h-2}, + \overline{h-2}\int V^{h-2} D.Mm : AB^2)}$. Pro descensu corporis in curva AM. Simili modo reperietur $SB = AB^2 : \sqrt[h-2]{(AB^{h-2}, + \overline{2-h}\int V^{h-2} D.Mm : AB^2)}$ pro casu ascensionis, cum mobile incedit ex M versus A.

623. Ut ergo, quæ in solutione hujus problematis sparsim inventa sunt, omnia conjunctim in conspectum producantur, num. v. §. 607, præbet velocitatem in $M = AB.V : SB$ & $SB.V : AB$, hoc in casu ascensionis illud in descensu mobilis, ubi V est (§. 619.) $AB.vA.\int BAC$ applicatum ad $GB.\int NMP$, hoc est, expressio celeritatis mobilis ad punctum curvæ M delati in vacuo. Propterea est celeritas in aëre mobili acquisita in quolibet curvæ puncto M ad celeritatem ejusdem in vacuo in eodem curvæ puncto, ut AB ad SB; & celeritas mobili residua in M à medio resistente ad celeritatem in vacuo, ut SB ad AB, cum in curva ascendit. Et num. VI. §. 607. Est solicitatio centralis in aëre ad solicitationem gravitatis in vacuo mobili versante in utroque casu in quocunque curvæ puncto M, ut AB^2 ad SB^2, cum mobile curvam AM descendendo describit, vel, sicut SB^2 ad AB^2, si ascendendo, eundo per M versus A. Ipsæ vero V & M, scilicet velocitas in vacuo & solicitatio centralis respectu curvæ puncti M, generalissime jam repertæ sunt, scilicet ut paulo ante $V = AB.vA.\int BAC : GB.\int NMP$, & $M = A.AR.AB^2.\int \overline{BAC}^3 : MR.GB^2.\int \overline{NMP}^3$, in qua formula GB, concessis figurarum curvilinearum quadraturis, semper dantur. Ipsæ vero SB in paragraphis 620, 621 & 622. etiam generaliter exhibitæ sunt. Ex solutione nostra generalissima innumera alia corollaria potuissent deduci, quæ tamen brevitatis studio suppressi.

CAPUT XXI.

De Motu Navium vento impulsarum.

MOtus Navium, hoc est eorum celeritates, spatia percursa & tempora lationis, eadem methodo & ex iisdem principiis deduci

duci possunt, quibus in præcedentibus capitibus motus corporum in mediis resistentibus definivimus. Est enim venti velo allabentis virtus spectanda instar solicitationis acceleratricis navi continue applicatæ, & aquæ, in quibus navis incedit, instar medii resistentis. Verumtamen motus navium nonnihil difficilius assignantur quam in præcedentibus motus corporum in medio resistenti incedentium, quia præter motus absolutos etiam directiones, tum solicitationum acceleratricium, seu lineæ, secundùm quas vela impressiones venti excipiunt, tum etiam itinera navis permanentia, quæ à figuris navium pendent, primùm determinanda sunt. Quæ tamen omnia, ut dictum, ex principiis hactenus à nobis explicatis derivari queunt.

DEFINITIONES.

I. Iter navis manens A*a* (Gallis *la Route du Vaisseau*) dicatur linea, quam navis BC vento impulsa in mari permanenter describit, absque rotationibus circa se ipsam. Fig. 142.

II. Axis navis esto spina carinæ BAC cui inseritur stereobates mali principis (Gallis *la Quille*).

III. Deviatio navis (Gallis *la Derive*) est recta *a*K, ex quolibet itineris manentis puncto *a* ad axem navis productum CK perpendiculariter demissa.

IV. Angulus deviationis (*l'Angle de la Derive*) est angulus *a*AK, quem iter navis permanens A*a* cum axe navis CB continet versus K.

PROPOSITIO LXXVII. Theorema.

624. *Si navis* ABC *itinere permanenti* Aa *feratur, media directio* AG *impressionum venti in velo* DAE, *vel in velis, si plura adsint, in directum posita erit cum directione* AO *aquæ resistentis, & secundùm directiones lineæ* Aa *parallelas lateri navis* BDC *clavoque in* C *allabentis.* Fig. 142.

Si negas, sit media directio impressionis venti secundum mediam directionem velariæ DAE recta AF diversa à linea AM, quæ est prolongatio mediæ directionis AO aquæ, navi BDC impingentis dum incedit itinere A*a*. Exponat AF impressionem venti in hac linea, & AH resistentiam aquæ in directione AO, & demittatur ad OA protractam in M, perpendicularis FG, & in AG sumatur GI = AH. Quibus positis, quia viribus AF æquipollent laterales AG & GF,

& à vi AG auferenda eſt vis aquæ reſiſtentis AH (conſtr.) GI, venti efficacia ad navim movendam æquipollebit duabus viribus reſiduis AI & FG; unde, quia FG nulla contraria vi retunditur, ideo ſuum effectum edet, propterea vi FG, juxta alteram AI, quæ motum navis accelerat, navis circa ſe ipſam convertetur ſecundum ordinem literarum K, F, G, dum ea progreſſivo motu fertur in recta A*a*, ergo hæc linea non eſt iter navis manens, contra hypotheſin.

Corollarium.

625. Adeoque ex media directione impreſſionum venti in velis innoteſcere poteſt media directio aquæ navi reſiſtentis, & vice verſa. Et ex aquæ reſiſtentis media directione ope Propoſ. L. Lib. hujus ſecundi, invenietur iter navis permanens. Mediæ vero directiones venti vela inflantis obtineri poſſunt eo fere modo, quo §. 474. oſtenſum eſt.

PROPOSITIO LXXVIII. Problema.

Fig. 142. 626. *Datis directione & celeritate venti velo* DAE *impingentis, atque adeò media directione veli* AM, *definire celeritates navis* BDC *itinere permanente* Aa *in aqua ſtagnante ſeu mari latæ.*

I. Quia (ſecundùm hypotheſin) AM eſt media directio venti velo DAE impingentis, ejus prolongatio AO (§. 624.) dabit mediam directionem aquæ in directione aA, vel huic parallela navi BDC allabentis, adeo ut, durante motu navis, angulus MAa conſtanter idem maneat.

Sint ergo ratio Aa : AM, ſeu ſinus compl. anguli MAK ad ſin. compl. ang. aAK, ut b ad a; & celeritas venti, juxta mediam directionem AM initio motus, a, celeritas verò navis in termino a cujusvis ſpatii emenſi Aa, u; adeoque $au:b$ exponet celeritatem juxta AM, qua ſcilicet navis inſequentis venti velocitati initiali ſeſe ſubducit, ut adeò celeritas, quâcum in velum agit, juxta AM eo momento, quo navis in ſuo itinere velocitatem u, acquiſivit, futura ſit $a-, au:b$; adeoque $(a, -au:b)^2$. M exponet impreſſionem venti in velo ſecundum AM, ubi M inveniri poteſt ope §. 474. Aquæ verò reſiſtentis impreſſio, ſecundum directionem AO, eſt Nuu, ubi N per Propoſ. L. etiam inveniri poteſt, ſi non algebraïcè

ſal-

ſaltem tranſcendenter & per approximationes. Propterea eſt $(a, - au:b)^2 . M - N . uu$ ſolicitatio acceleratrix navis.

II. Eſto porrò $(a, - au:b)^2 . M, - N . uu = N . SL^2$, ubi SL eſt ordinata alicujus curvæ CLP ſequenti modo inveniendæ, exiſtentibus AM, b; MS, u, Mn ipſi AM perpendiculariter inſiſtens, a. His poſitis, & quia $a, - au:b = (b - u) . a:b = AS . Mn : AM$ erit $(a, - au:b)^2 . M = AS^2 . Mn^2 . M : AM^2 = AS^2 . MN^2 . N : AM^2 = N . ST^2$, ſcilicet ſi MN fuerit ad Mn in ſubduplicata ratione M ad N, atque ducta ſit AN, ita ut triangula AST & AMN ſimilia exiſtant. Hinc, $(a, - au:b)^2 . M - Nuu = N . ST^2 - N . SM^2 =$ (ſecundùm hypotheſin) $N . SL^2$, atque adeò $ST^2 - SM^2 = SL^2$. Ducatur MD angulum rectum AMN biſecans, & ex D demittatur DC normalis ad AM, & ob angulum ſemirectum CMD erunt æquales DC & CM, perinde ac SM & SV; propterea habetur $SL^2 = ST^2 - SM^2 = ST^2 - SV^2$. Atqui diviſa qualibet intercepta TV bifariam in R ductaque DR, eaque producta uſque ad occurſum B cum recta AM producta itidem quantum opus eſt, & hæc DR etiam per medium O ipſius MN tranſibit; ac $ST^2 - SV^2$ erit $= 4SR . VR$. Ergo etiam $SL^2 = 4SR . RV$. Verùm propter $SR : MO = SB : MB$, & $RV : OM = CS : CM$ erit per compoſitionem rationum $SR . RV : MO^2 = 4SR . RV$, id eſt, $SL^2 : NM^2 = SB . SC : MB . MC = SX^2 : MQ^2$, deſcripto ſcilicet ſuper diametro CB ſemicirculo CQB; habemus ergo $SL^2 : NM^2 = SX^2 : MQ^2$; vel permutando $SL^2 : SX^2 = NM^2 : MQ^2$, ſeu $SL : SX = NM : MQ$; idcirco ordinatæ quæque homologæ curvæ quæſitæ & ſemicirculi ſunt in data ratione, atque adeò curva CLP eſt ellipſis, cujus ordinata MP æquatur MN. Fig. 143.

III. Sint nunc Aa ſpatium certo tempore navi percurrendum, $a\alpha$ elementum illius ſpatii & $MS = u$ celeritas navi acquiſita in termino ſpatii Aa, Ss velocitatis elementum, & quia (num. 1. hujus) invenimus ſolicitationem acceleratricem navis eſſe, ut $N . SL^2$, ponamus eam $= N . SL^2 : N . D$, vel $= SL^2 : D$, ubi D, ſeu data magnitudo, aſſumitur ad ſupplenda homogenea, eritque (§. 484.) momentum ſolicitationis acceleratricis ſeu rec-lum $SL^2 . a\alpha : D$, ex hac ſolicitatione $SL^2 : D$ in elementum ſpatii $a\alpha$, æquale momento celeritatis acquiſitæ MS . Ss ſeu rec-lo ex hac celeritate MS in ſuum elementum Ss. Hinc, cum ſit $SL^2 . a\alpha : D = MS . Ss$ vel $SL^2 . a\alpha = D . MS . Ss$, erit $MS . Ss : SL^2 = a\alpha : D$. Eſt verò etiam $SL^2 : SX^2 = MP^2$ vel $NM^2 : MQ^2$, ergò ex æquo $MS . Ss : SX^2 = NM^2 . a\alpha : D . MQ^2$;

Et

Et, si AK fiat ubique ad Aa, ut MN^2 ad D. MQ, erit $Kk : aa = NM^2 : D. MQ$, & $NM^2 : aa = D. MQ. Kk$, atque $MS. Ss : SX^2 (= NM^2. aa : D. MQ^2) = D. MQ. Kk : D. MQ^2 = Kk : MQ$. Et, si denique SX ponatur media proportionalis inter MQ & quandam Z, ita ut Z futura sit $= SX^2 : MQ$, fiet $MS. Ss : Z. MQ$ (seu SX^2) $= Kk : MQ$; atque adeò $Z. Kk = MS. Ss$, & problema præcise ad casum propositionis LXVII. hujus secundi Libri reductum est, quandoquidem Z est, ut quadratum ordinatæ SX in circulo, & jam AK consideranda instar spatii mobili transmittendi. Propterea, si juxta præceptum citatæ propositionis rectæ $C\beta$ & $C\delta$ sint tangentes angulorum $CZ\beta$, $CZ\delta$ dimidiorum ipsorum CZX & CZQ, erit (§. 549) $AK = \log. (MQ : SX) - MZ. \log. (C\delta : C\beta) : CZ$. Et, quia (constr.) $AK : Aa = MN^2 : D. MQ$, invenietur $Aa = D. MQ. \log. (MQ : SX) : MN^2 - D. MQ. MZ. \log. (C\delta : C\beta) : CZ. MN^2$, in logarithmica, cujus subtangens est MQ.

Per secundam partem propositionis ejusdem (§. 549.) erit tempus per spatium $AK = \log. (C\delta : C\beta) : CZ$; atqui $tAK : tAa = AK : Aa = MN^2 : D. MQ$, ergo tempus per spatium Aa navi transmissum erit $D. MQ. \log. (C\delta : C\beta) : CZ. MN^2$. Quæ erant invenienda.

Corollarium I.

627. Quia solicitatio acceleratrix navis est ubique ut SL^2, & quia SL in puncto C nulla est, ipsa MC designabit maximam velocitatem, quam navis acquirere queat. Est vero propter triangula similia ACD & AMN & propter $CD = CM$; $AC : CM$ (vel DC) $= AM : MN = AM\surd N : MN\surd N$ (aut, quia $nM : NM$ (constr.) $= \surd N : \surd M$ atque adeo rec-lum $NM. \surd N$ æquale $nM\surd M$) $= AM\surd N : nM\surd M$, adeoque componendo $AM : CM = AM\surd N + nM\surd M : nM\surd M$, id est, $b : CM = b\surd N + a\surd M : a\surd M$, atque adeò $MC = ab\surd M : a\surd M + b\surd N$. Nam (constr.) est $AM = a$, & $nM = b$.

Corollarium II.

628. Si D est finitæ magnitudinis, tempus, quo navi maxima celeritas MC acquiritur, erit infinitum, perinde ac spatium Aa hoc tempore percurrendum, ut id jam alibi (§. 550.) quadantenus est ostensum.

Sed si D est indefinite parva, cum spatium tum etiam tempus, quo

quo id mobile transmittens celeritatem maximam MC acquirit, erunt finitæ magnitudinis.

Scholion.

629. Quoniam navi plerunque tempore finito maxima celeritas acquiritur, ideo in hisce casibus magnitudo D, ad supplenda homogenea assumta, semper erit indefinite parva; sed hoc non obstante proportiones inter spatia transmissa & inter tempora per logarithmos semper exhiberi possunt.

SECTIO V. ET ULTIMA,

Continens Miscellanea de motu circulari fluidorum, de motu aëris in producendo sono, & de motu interno fluidorum.

CAPUT XXII.

De motu circulari fluidorum.

Posteaquam præcipua capita ad motum fluidorum rectilineum attigimus, contemplandus superest motus circularis eorundem fluidorum, idque tanto magis quanto majori cum cura nonnulli ex præstantissimis philosophis Geometris difficiliora naturæ phænomena inde derivare conati sunt.

PROPOSITIO LXXIX. Theorema.

630. *Si globus Terraqueus æquabili motu circa axem suum conversus materia fluida in tota sua superficie circundatus esset; fluidi vel potius totius globi aquei superficies sphærica manere non posset, sed figuram indueret sphæroïdis cujusdam, cujus axis minor futurus esset diametro æquatoris.*

Sit PEpA globus fluidus revolvendus circa axem Pp, cujus poli sint P, p, & recta AE axi Pp normalis per centrum C transiens diameter æquatoris. Probari debet fore, ut manens corporis fluidi & circa Pp in gyrum acti superficies sit sphæroidea, cujus Pp axis minor sit diametro æquatoris AE. Fig. 144.

Demonstr. Ex centro corporis fluidi C exeant tubi CP, CE & CD ad centrum C inter se communicantes & pleni liquoris seu fluidi, quorum primus PC axi P*p* congruat, & CE eidem axi perpendicularis sit, tertius verò CD ad ambos ut libet inclinatus. Si moles fluida in quiete stet, constat (§. 251.) ejus superficiem sphæricam fore, atque adeò CE = CD = CP. Sed cogitemus jam eam æquabili motu revolvi circa P*p*, singulæ fluidi partes E, I, G, D, &c. suas revolutiones simul absolvent, atque adeò earum celeritates radiis CE, CI, HG, FD, &c. proportionales erunt.

Verùm, quia cum omni motu circulari conatus centrifugus mobilis circulantis conjunctus est, & ejusmodi conatus centrifugi radiis proportionales sunt circulorum, quos mobilia in orbem lata pari tempore describunt, conatus centrifugi omnium partium tubi DC minores erunt omnibus conatibus partium tubi EC; unde ii conatus centrifugi conatibus gravitatis contrarii sunt, atque adeò pressio cujusque columnæ fluidæ æquivalet excessui, quo conatus gravitatis, seu pondus absolutum columnæ, excedit conatum ejus centrifugum, & si, existentibus DC & EC æqualibus, excessus ponderis EC supra ejus conatum centrifugum minor est excessu ponderis DC supra ejus conatum centrifugum, erit pressio columnæ EC minor pressione columnæ DC, unde, cum communicantes sint, non poterunt in æquilibrio consistere, sed debilior pressio columnæ EC cedet fortiori DC, atque adeò aqua in columna EC attolletur, adeò ut EC major fiat quam DC. Pari argumento conficitur, columnam DC majorem esse quam PC, quandoquidem hæc columna PC utpote axi P*p* congruens, motum revolutionis massæ fluidæ non participat, neque adeò ullo conatu centrifugo pollet, pondere suo æquat differentiam, qua pondus columnæ DC excedit ejus conatum centrifugum. Sunt ergo CE major quam CD, & hæc major quam CP vel C*p*, ac proinde figura *p*EPA circa P*p* in gyrum acta producit sphæroidem, cujus P*p* erit axis minor, & massa fluida hujus sphæroidis figuram induet. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

631. Hinc gravia circa ejusmodi sphæroidem non tendunt ad ejus centrum, ergo nec ad telluris centrum tendunt, si in primordiis rerum terra materia fluida & gravi constiterit, & in se ipsam Fig. 145. converti cœperit. Sit enim in altera figura PEA figura telluris flui-

dæ,

dæ, item filum NM cum annexo ponduſculo M, & hoc filum in N fixum ope ponduſculi M in ſitum ſuperficiei PDE normalem ſeſe componet. Nam corpuſculum M deſcendet quantum poteſt, tantum autem deſcendere poteſt, usque dum ſuperficie PDE viciniſſimum ejusque directio NM eidem ſuperficiei perpendicularis fuerit. Atqui NM, vel ei parallela RDQ curvæ perpendicularis in D, angulo DNM à recta DC ex puncto ſuſpenſionis N ad centrum C ducta, deflectit, ut adeò hinc appareat ponduſculum M non tendere ad centrum ſphæroidis EPA.

Corollarium II.

632. Propterea ND erit ad lineolam DM æquatoris diametro CE parallelam, ſicut pondus abſolutum corporis M ad ejus conatum centrifugum in D. Nam ſi ND exponit pondus corporis, lineola DM exponet vim, qua à directione ND retrahitur detineturque in directione NM. Vi enim ND æquipollent laterales NM & DM, & ceſſante motu converſionis circa axem Pp pendulum NM ſe componet in ſitum ND, unde, ut detineatur in poſitione NM, ad id alia vi laterali juxta DM agente opus eſt; hæc verò vis lateralis eſt conatus centrifugus ex circulari motu ſphæroidis oriundus, qui ſe in mobile exſerit, ſecundùm directionem LDM radii illius circuli, quem ſphæroidis punctum D una converſione circa Pp deſcribit; ac, per conſequens, gravitas corpuſculi M ſe habet ad conatum ejus centrifugum ſub æquatore in D, ſicut ND ad DM.

Corollarium III.

633. Si pondus corpuſculi M ſit ad conatum ejus centrifugum ſub æquatore in E, ut P ad N, & recta DQO curvæ PDE perpendicularis in D, erit $LO : CO = P.EC : N.DC$. Nam gravitas eſt ad vim centrifugam in E, ſicut P ad N, & conatus centrifugus in E ad conatum centrifugum in D, ut EC ad DL, ergo ex æquo gravitas ad conatum centrifugum in D, id eſt (§. 632.) $ND : DM$, vel $DC : CQ = P.EC : N.DL$, adeoque etiam $N.DC : N.CQ = P.EC : N.DL$, vel permutando $N.DC : P.EC = N.CQ : N.DL = CQ : DL$ (vel propter parallelas EC, DL) $= CO : LO$, ergo invertendo fit $LO : CO = P.EC : N.DC$.

PRO-

PROPOSITIO LXXX. PROBLEMA.

Fig. 146. 634. *Posita proprietate curvæ* PDE *corollario præcedente* (§. 633.) *elicita, construere curvam, ejusque speciem definire.*

I. Sit PDE curva quæsita, & CB rectangulum ei circumscriptum, & hujus rectanguli latera producantur in A & M, ita ut BA = BP = EC, & PM = PC, & jungantur PA ac CM. Dein in AE producta sumatur EF ad EC in data ratione P ad N, ductaque per F recta FT parallela EC protendatur EF in G, ita ut FG = FT = EC. Sumto postea ubilibet curvæ elemento D*d*, ac centro C per elementi D*d* terminos descriptis arcubus circularibus DK, *dk*, agantur per K, *k* parallelæ KS, *ks* ipsi PT. Quibus præparatis & ducta TG, erunt

II. Propter quadrata DL, LC æqualia quadrato DC vel TR, etiam triangula, quæ sunt quadratorum dimidia, scilicet PIH & CLN simul æqualia triangulo TRS, & triangula P*ih*, C*ln* simul æqualia triangulo T*rs*; idcirco, facta subductione minorum ex majoribus, erit trapez. *h*I — trapez. N*l* = trapez. R*s*, vel etiam rec-lum *g*I — rec-lo N*l* = rec-lo S*r*, quia coeuntibus punctis D, *d* recensita trapezia & respondentia rectangula in rationes æqualitatis evanescunt.

III. Quia (secundùm hypothesin) DO curvæ normalis est, triangula elementaria D*de* & DLO similia erunt, atque adeò LO : LD (= *de* : D*e*) = I*i* : L*l*, & LD : LC = HI : LN, ergo ex æquo, LO : LC = HI. I*i* : LN. L*l*, vel convertendo LO : CO = HI. I*i* : HI. I*i* — LN. L*l* (seu num. 11. hujus) = HI. I*i* : RS. R*r*. Atqui (§. 633.) LO : CO = P. EC : N. DC, ergo P. EC : N. DC = rec-lum H*i* : rec-lum R*t*, sed, quia EF : FG (secundùm hypothesin) = P : N, atque adeo P. FG = P. EC = N. EF; erit N. EF : N. DC = EF : DC (RT) = rec-lum K*r* : rec-lo R*t*, ac per consequens etiam H*i* : R*t* = K*r* : R*t*, hinc rec-lum HI. I*i*, seu H*i* æquatur ubique rec-lo KR. R*r* seu K*r*; ergo omnia H*i*, quæ in trapezio AHIB continentur, æquantur omnibus K*r*, quæ in rec-lo EKRF; id est, trapezium AHIB = rec-lo EKRF. Hinc assumto quolibet trapezio AHIB in triangulo APB, eique rec-lum EKRF æquale fiat, & arcus KD centro C intervalloque CK descriptus ordinatæ HI productæ ad partes I occurret in curvæ quæsitæ puncto D; ut adeò hinc constet, curvam PDE algebraïcam esse, cum omnia ejus puncta geometrice inveniri queant. Quod erat inveniendum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXI. Problema.

635. *Deducere constructionem curvæ* PDE *præcedente propositione exhibitam ex principio æquilibrii canalium, seu columnarum fluidi* DC, PC *secundum explicationem propositione* LXXIX. *traditam.*

Posita constructione propositionis præcedentis, quia EF ad FG vel AB est ut P ad N, seu ut gravitas ad conatum centrifugum in E, conatus vero centrifugus in E ad conatum centrifugum in D, sicut EC ad DL, seu BP ad IP, id est, sicut AB ad HI; erit ex æquo gravitas ad conatum centrifugum in D, sicut EF ad HI, adeò ut HI semper significet conatum centrifugum particulæ D in canali DL vel DC, adeoque omnes ordinatæ HI, quæ in triangulo HIP continentur, seu hoc ipsum triangulum, exponet conatum centrifugum totius canalis DL vel DC. Atqui excessus ponderis columnæ DC supra pondus columnæ PC æquivalet conatui centrifugo columnæ DC vel DL (harum enim duarum conatus centrifugi in singulis punctis ab axe PC æqualiter distantibus æquales, atque adeò ipsarum columnarum DC & DL conatus centrifugi æquabuntur), ergo rec-lum KVXR æquale est triangulo HIP, quandoquidem EF vel KR exponit gravitatis solicitationem, & facta CV = CP recta KV, differentiam, quâ columna DC excedit alteram PC & (§. 31.) volumen KV in gravitatem EF seu KR ductum, exponit ejus pondus, id est, excessum ponderum DC & PC. Propterea erit etiam totum triangulum PAB æquale rec-lo VF, ac per consequens ablatis ex hisce spatiis æqualibus PHI & VX, remanebit trapezium AHIB = rec-lo EKRF, ut in propositione antecedenti reperiebatur.

Corollarium I.

636. Quoniam ergo triang. PBA = EKRF, erit $EF : \frac{1}{2}AB \; (= P : \frac{1}{2}N) = EC : EV = CE : CE - CP$, erit convertendo $CE : CP = P : P - \frac{1}{2}N$.

Corollarium II.

637. Si dicantur CE, a; PC, b; CL, x; LD, y, & EF erit $ap : n$, quam vocabimus cum Hugenio f, & quia (§.§. 634, & 635.) $\frac{1}{2}AB^2 = EV.\, EF$, fiet analytice $af - f\sqrt{(xx + yy)} = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}yy$, quæ

ab

ab asymmetria liberata præbet $y^4 = 4ffyy - 4afyy + 2aayy - 4aaff + 4a^3f - a^4 + 4ffxx$. Quæ ipsissima est æquatio, in quam Illustr. Hugenius incidit, calculum suum fundans in æquilibrio canalium DC & EC, non verò, ut nos fecimus in præsenti propositione, in æquilibrio columnarum PC & DC, quo calculus nonnihil simplicior emersisset. Vid. *Discours de la Cause de la Pesanteur par Mr. Huygens* pag. 157.

Scholion.

638. Supposuimus verò in hisce cum laudato Hugenio gravitatem corporum uniformem seu ubique æqualem. Quod si verò gravitates ponantur in directa ratione distantiarum à centro C, curva PDE diversa erit ab ea, quam in duabus postremis propositionibus exhibuimus. Nam,

Propositio LXXXII. Theorema.

639. *Si gravitas corporum distantiis locorum* D *à centro* C *proportionalis est, curva* PDE *erit ellipsis conica, cujus semiaxis* PC *erit ad radium æquatoris* EC *in subduplicata proportione* P — N *ad* P, *ubi* P *ad* N *est etiamnunc, ut gravitas sub æquatore in* E *ad vim centrifugam in eodem puncto.*

Fig. 145. Est (§. 632.) ND ad DM, vel DC ad CQ, ut gravitas in D ad vim centr. in D, at (secundùm hypothesin) grav. in D : grav. in E = DC : CE, & grav. in E ad conat. centr. in E (secundùm hypothesin) = P : N, ergo ex æquo grav. in D ad conat. centr. in E = P.DC : N.CE, & conat. centr. in E ad conat. in D = EC : DL = N.EC : N.DL, ergo denuo ex æquo gravit. in D ad conat. centrif. in D. DC : CQ vel P.DC ad P.CQ = P.DC : N.DL, ergo P.CQ = N.DL; atque adeò DL : CQ = LO : CO = P : N, estque adeò ratio LO ad CO ubique eadem seu data.

Fig. 146. Posita ergo constr. §. 634. num. 1. eritque (num. III. §. 634.) LO : CO = H*i* : R*t* (id est num. præc. hujus) = P : N, ergo omn. H*i*, seu AHIB ad omnia R*t* seu RFGS = P : N, vel 2.AHIB : 2.RFGS = $EC^2 - DL^2 : EC^2 - DC^2$ = P : N, & convertendo $EC^2 - DL^2 : CL^2$ = P : P — N. Ex quo constat, curvam PDE hoc casu esse ellipsin conicam, cujus semiaxes conjugati PC, CE sint ad se invicem in subduplicata proportione P — N ad P. Quod erat demonstrandum.

Ali-

Aliter ex Principio Æquilibrii canalium DC; PC.

640. Ducatur CF, &, quia EF : FG (constr.) $=$ P : N; recta EF gravitatem in E exponere potest, & quoniam gravitas est distantiis à centro proportionalis, KY exponet gravitatem in D, & reliquæ ordinatæ in triangulo CKY exponent gravitatem in reliquis locis canalis DC, ergo gravitas totius canalis DC exponetur triangulo CKY. Pari argumento, si CV fuerit $=$ CP, exponet triangulum CVZ pondus seu gravitas canalis PC; differentia verò ponderum DC & PC, quæ exponitur per trapezium VKYZ, æquivalet conatui centrifugo totius canalis DL vel DC (§. 635.) exponendo per triangulum PHI, ergo KYZV $=$ triang. PIH, adeoque 2.KYZV $=$ DL². Atqui 2.KYZV est ad $KC^2 - VC^2$ seu ad $DC^2 - PC^2$, vel quod idem est, ad $LC^2 + DL^2 - PC^2$, ut EF ad FG, seu P ad N. Ergo $DL^2 : DL^2 + LC^2 - PC^2 = P : N$, & convertendo $DL^2 : PC^2 - LC^2 = P : P - N$. Ex quo nunc iterum liquet id, quod præcedenti paragrapho ostensum, scilicet curvam PDE ellipsin conicam esse, cujus semiaxis PC sit ad EC in subduplicata ratione P $-$ N ad P. Quod erat demonstrandum.

Scholion.

641. Superest, ut rationem gravitatis absolutæ ad conatum centrifugum sub æquatore, id est, rationem P ad N numeris expressam exhibeamus, quod log-morum beneficio facile præstabitur. Sit A altitudo, quam grave à quiete casum incipiens motu naturaliter accelerato tempore unius minuti secundi in linea verticali & in vacuo perlabitur, quam Hugenius reperit esse 15. ped. 1. lineæ; atque R significet radium æquatoris terrestris, retentisque P & N pro nominibus gravitatis & conatus centrifugi sed æquatore. Per (§. 151.) $\sqrt{(2A : P)}$ exponit tempus, quo altitudo A motu naturaliter accelerato conficitur, quod tempus, (secundùm hypothesin) est unius minuti secundi; &, quia una revolutio diurna telluris, respectu fixarum, est 23. hor. 56. min. seu 86160. secundorum, nominetur hic numerus n, eritque $n\sqrt{(2A : P)}$ expressio unius revolutionis diurnæ in minutis secundis, & quia hoc idem tempus (§. 183.) etiam exponitur per $p\sqrt{(R : N)}$, uti p est exponens rationis circumferentiæ ad radium, habebimus æquationem $n\sqrt{(2A : P)} = p\sqrt{(R : N)}$, atque adeò $P : N = 2nnA : ppR$. Jam, quia n significat 86160″; A, 15. ped. 1. lin. $p = 2.355 : 113 = 710 : 113$, & quia, secundum Piccarti dimensionem, terræ

terræ unus gradus in Meridiano est 57060. hexapedarum, totius terræ ambitus log-us facile habebitur log-mo ex 57060. addendo log-um numeri 360; atque exinde etiam innotescet nullo ferme negotio log-us radii æquatoris R. Substitutis igitur numerorum logarithmis, erit log-us ex $2nnA = 10.5720475$, & log. $ppR = 8.1108142$; ergo differentia horum log-morum, id est, log-us rationis $2nnA : ppR = 2.4612333$. cui log-mo in tabulis proxime convenit numerus 289. Propterea est $2nnA : ppR$, vel $P : N = 289 : 1$. Quod erat inveniendum.

642. Hæc ratio $P : N = 289 : 1$, eadem est cum ea, quam primùm Hugenius in tractatu De Caussâ Gravitatis, pag. 146. & postea Illustris Newtonns in novissima editione Cantabrigiensi suorum Princ. Phil. Nat. Math. pag. 379, exhibuerunt. Quoniam igitur in casu propos. LXXX. & LXXXI, CE (§. 636.) est ad PC, ut P ad $P - \frac{1}{2}N$, erit $CE : CP = 578 : 577$. etiam ut Hugenius reperit pag. 156. citati libri. In casu vero propositionis LXXXII. erat $PC : EC = \sqrt{P - N} : \sqrt{P}$, seu $= \sqrt{288} : \sqrt{289}$, quæ etiam æquatur rationi $577 : 578$. Nam ratio $\sqrt{P - N} : \sqrt{P} = \sqrt{(PP - PN)} : P$, atqui $\sqrt{(PP - PN)} = P - \frac{PN}{2P} + \&c. = P - \frac{1}{2}N$ proxime, ergo $\sqrt{(P - N)} : \sqrt{P} = P - \frac{1}{2}N : P = 577 : 578$. Verùm Newtonus non determinata curvæ suæ PAQB, seu sectionis telluris per axem PQ, specie, & multiplici usus calculo in prima editione Princ. Phil. Nat. pag. 424. invenit diametrum terræ secundùm æquatorem ad diametrum per polos, ut 692. ad 689; in novissima vero invenit illam ad hanc ut 230. ad 229. Utraque multum abludit ab Hugeniana & nostra determinationibus; nec mirum, cum calculum suum in principiis à nostris diversis fundarit, attractionibus illis usus, quarum leges, elegantibus theorematis in primo libro traditis, complexus est. In Propos. XX. Lib. III. diserte ponit, pondera corporum æqualium in superficie telluris collocatorum, distantiis eorundem à centro reciproce proportionalia existere, idque ex eo deducit, quòd canales EC & PC æquiponderantes sint, atque adeò earum particulæ quælibet similes & similiter positæ etiam ejusdem sint ponderis. Nam, quia pondera corporum sunt ut massæ & solicitationes gravitatis conjunctim, erunt solicitationes gravitatis omninò in reciproca ratione massarum; unde, cum massæ ipsis EC & PC proportionales sint, erit solicitatio acceleratrix in E ad solicitationem acceleratricem in P, ut PC ad EC, & sic de reliquis.

Fig. 145.

Huic

Huic eidem proprietati etiam institit Clar. David Gregorius in suis Elem. Astr. Phys. Propos. LII. fol. 269. sed nec ipse figuram sectionis terræ per axem definire curavit.

643. Hac verò proprietate posita, quod scilicet solicitationes gravitatis acceleratrices in E & D figuræ EPp circa Pp revolventis, distantiis à centro EC, DC reciproce proportionales sunt, quis crediderit gravitates absolutas corporum in iisdem punctis E & D eorum distantiis EC & DC directe proportionales esse? Id tamen ita est; nam solicitationes illæ acceleratrices distantiis locorum à centro reciproce proportionales, sunt gravitates corporum absolutæ in iis locis de quibus agitur, demtis conatibus centrifugis eorundem corporum, quatenus hi conatus exeruntur in corpora secundum illas directiones, secundus quas gravitas, sed contrario sensu, agit. Id est, si gravitas in E, demta vi centrifuga in eodem puncto, fuerit ad gravitatem in D, demta pariter vi centrifuga in hoc puncto D, sed ea, quæ in corpus exeritur secundum directionem CD eandem, secundum quam gravitas in corpus agit, ut DC ad EC, erit vis absoluta gravitatis in E ad vim absolutam in D, ut EC ad DC. Ad hoc demonstrandum oportet prius speciem curvæ PDE definire, cuius analysis sic est ineunda. Gravitates absolutæ in E & D indicentur per gE, gD, & conatus centrifugi juxta directiones CE, CD in iisdem punctis per cE, cD. Eritque ex hypothesi $g\mathrm{E}-c\mathrm{E}:g\mathrm{D}-c\mathrm{D}=\mathrm{DC}:\mathrm{EC}$, atqui est $g\mathrm{E}:g\mathrm{E}-c\mathrm{E}=\mathrm{P}:\mathrm{P}-\mathrm{N}$, & $c\mathrm{E}:g\mathrm{E}=\mathrm{N}:\mathrm{P}$, item conatus centrifugus in D secundum directionem DM est ad conatum centrifugum in E, ut DL ad EC, ac denique conatus centr. in D secundum DN est, ad conatum centr. secundum DM, ut DL ad DC; ergo ex æquo, id est, ductis omnibus antecedentibus in antecedentes ac consequentibus in consequentes, atque elisis elidendis, habebitur $c\mathrm{D}:g\mathrm{D}-c\mathrm{D}=\mathrm{N}.\mathrm{DL}^2:(\mathrm{P}-\mathrm{N}.)\mathrm{EC}^2$, vel invertendo & componendo $g\mathrm{D}:c\mathrm{D}=(\mathrm{P}-\mathrm{N}).\mathrm{EC}^2+\mathrm{N}.\mathrm{DL}^2:\mathrm{N}.\mathrm{DL}^2$, sed $c\mathrm{D}:g\mathrm{E}=\mathrm{N}.\mathrm{DL}^2:\mathrm{P}.\mathrm{DC}.\mathrm{EC}$, ergo denuo ex æquo fiet $g\mathrm{D}:g\mathrm{E}=(\mathrm{P}-\mathrm{N}.)\mathrm{EC}^2+\mathrm{N}.\mathrm{DL}^2:\mathrm{P}.\mathrm{DC}.\mathrm{EC}$. Est ergo gravitas in D ut hæc fractio $(\mathrm{P}-\mathrm{N}).\mathrm{EC}^2+\mathrm{N}.\mathrm{DL}^2:\mathrm{P}.\mathrm{DC}.\mathrm{EC}$, adeoque, juxta methodum supra §. 633. expositam, est gravitas in D ad conatum centrifugum in D juxta DM, id est, $\mathrm{DC}:\mathrm{CQ}=(\mathrm{P}-\mathrm{N}).\mathrm{EC}^2+\mathrm{N}.\mathrm{DL}^2:\mathrm{N}.\mathrm{DC}.\mathrm{DL}=(\mathrm{EF}-\mathrm{EC}).\mathrm{EC}+\mathrm{DL}^2:\mathrm{DC}.\mathrm{DL}$, quia (constr.) in fig. 146. $\mathrm{EF}:\mathrm{EC}=\mathrm{P}:\mathrm{N}$, seu in ratione gravitatis sub æquatore in E ad conatum centrifugum. Hinc DL : CQ, vel $\mathrm{LO}:\mathrm{CO}=(\mathrm{EF}-\mathrm{EC}).\mathrm{EC}+\mathrm{DL}^2:\mathrm{DC}^2$ (§. 634. num. III.) = rec-lum Hi : rec-lum Rt. Fig. 145. & 146.

Et permutando ac invertendo $PI.Ii : (EF - EC).EC + DL^2 = CK.Kk : CK^2$ (vel CD^2). Hinc ultrò ſequitur $\overline{EF.EC} : (\overline{EF - EC}).EC, + DL^2 = EC^2 : DC^2$, atque inde elicitur $\overline{EF - EC}$ in $\overline{EC^2 - DL^2} = EF.CL^2$ (vel, quia $EF - EC : EF = P - N : P$) æquatio $\overline{P - N}.\overline{EC^2 - DL^2} = P.CL^2$. Quæ eadem eſt cum ea, in quam ſupra (§. 639.) incidimus; unde, quia in inquiſitione curvæ PDE, quam citato loco ellipſin conicam eſſe vidimus, ſuppoſuimus gravitates abſolutas in E, D, &c. diſtantiis EC, DC proportionales eſſe, nunc illud ipſum, quod illic ſuppoſitio vel hypotheſis erat, tanquam concluſio potuiſſet derivari ex principio, quod ſolicitationes acceleratrices in E & D diſtantiis EC, DC horum punctorum à centro C reciproce proportionales ſint. Sed hac indirecta deductione non eſt opus, cum res directe probari poſſit. Nam, quia invenimus $(P - N).EC^2 - DL^2.(P - N) = P.CL^2$, erit $(P - N).EC^2, + N.DL^2 = P.DL^2 + P.CL^2 = P.DC^2$; &, quia ſupra habuimus $gD : gE = (P - N).EC^2, + N.DL^2 : P.DC.EC$, erit omnino $gD : gE = P.DC^2 : P.DC.EC = DC : EC$. Quod erat demonſtrandum.

644. Idcirco inſiſtendo principiis Illuſtris Newtoni, atque Celeb. Gregorii, ſectio telluris per axem erit ellipſis conica, quam Propoſ. LXXXII. determinavimus, eritque adeò diameter terræ ſecundum æquatorem ad diametrum per polos in ſubduplicata ratione P ad P − N, id eſt (§. 642.) $= P : P - \frac{1}{2}N$, id eſt, $= 578 : 577$. Quæ ellipſis perparum differt à curva Hugeniana, quam propoſitionibus LXXX. & LXXXI. duabus diverſis viis demonſtratam dedimus.

645. Facta iterum $CV = CP$, ductaque Vb æquali longitudini penduli in polo P ſecunda minuta notantis, atque per punctum b deſcripta hyperbola bc inter aſymptotas CE, CT, ejus ordinatæ Ka, EF præbebunt longitudines pendulorum iſochronorum, atque vibrationibus ſuis ſecunda minuta indicantium in locis D & E. Nam (§. 178.) vires centrales, quibus pendula iſochrona agitantur, ſunt pendulorum longitudinibus directe proportionales, unde cum (ſecundùm hypotheſin) ſolicitationes acceleratrices in P, D & E diſtantiis horum punctorum à centro C reciproce proportionales ſint vel ex natura hyperbolæ Fab, directe, ordinatis reſpectivis Vb, Ka, Ef; & cum ordinata Vb jam repræſentet longitudinem penduli in polo P ſecunda notantis, reliquæ Ka, Ef, &c. omninò indicabunt longitudines pendulorum iſochronorum in locis D, E, &c.

Hoc

Hoc igitur principio haud difficulter tabulam construere liceret, qua penduli secunda minuta vibrationibus suis notantis longitudo ad singulos gradus latitudinis definiretur, si modo satis otii ad hunc ineundum calculum nobis suppeteret, & nisi summus Newtonus nos labore isto sublevasset, qui talem in propositione XX. Lib. III. Princ. Phil. Nat. novissimæ editionis exhibuit.

646. In hypothesi verò Hugeniana gravitatis uniformis, qualem in propositionibus LXXX. & LXXXI. sequuti sumus, longitudo penduli in polo P se habebit ad longitudinem penduli isochroni in quolibet loco D, ut $EF.PC + \frac{1}{2}DL^2$ ad $EF.PC - \frac{1}{2}DL^2$. Cujus demonstratio ex antecedentibus facilis est. Nam in quolibet loco longitudo penduli est proportionalis solicitationi acceleratrici penduli in eo loco, & hæc solicitatio acceleratrix semper est excessus gravitatis absolutæ supra conatum centrifugum in eodem loco, sumtum in directione gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIII. Theorema.

647. *Si tubus* ABDE *aquæ plenus usque ad* H *circa axem* FP *æquabili motu converti intelligatur, aqua hoc motu circulari ad latera tubi* BA, DE *attolletur, in medio vero deprimetur ad* M; *adeò ut superficies ejus, quæ in tubo quiescente sensibiliter plana erat, in superficiem cavam* LMN *abeat, quam retinebit quousque motus aquæ eodem tenore perseveraverit.* Fig. 147.

Nam, quia aquæ partes in gyrum actæ conatus habent recedendi à centro, & eo majores habet conatus à centro recedendi, quo majores fuerint circulationis celeritates, majores autem sunt prope latera vasis quam in medio velocitates aquæ in orbem actæ, ergo & majores conatus centrifugi, qui, quoniam à lateribus istis impediuntur & aqua fluida est, exeruntur secundum directiones plano basis perpendiculares, ac per consequens, cum in lineis basi perpendicularibus prope latera conatus centrifugi maximi sint, sequitur illic aquam altiorem esse debere quam in medio, ad id ut excessus pressionis à gravitate aquæ supra conatum centrifugum in ea linea æqualis manere queat pressioni aquæ in medio cylindri, alioqui aqua non posset in statu manenti consistere; propterea liquet, quod cum lineæ *bl*, lateribus vasis BL propiores, majores sint mediâ MP, superficies aquæ LMN cava futura sit.

648. Ductis itaque ad axem PM ordinatis LI, *li*, abscissæ MI,

Mi exponent conatus centrifugos filamentorum aqueorum BL, bl circa axem PM revolventium, unde, si velocitates circulationis fuerint, ut dignitas quælibet m radiorum PB, Pb &c. erit $MI : Mi = PB^{2m-1} : Pb^{2m-1}$, atque adeò curva M$l$L una ex infinitis parabolis. Nam est generaliter quadratum circulationis in composita ratione conatus centrifugi & radii circulationis per formulam primam, §. 183. adeoque conatus centrifugi MI erunt, ut quadrata celeritatum, seu (secundum hypothesin) ut PB^{2m} applicata ad radios PB circulationis, atque adeò sunt directe, ut respectivæ quantitates PB^{2m-1}. Hinc, si $m = \frac{3}{2}$, id est, celeritates circulationum sint in sesquiplicata ratione radiorum, curva MlL erit parabola conica.

SCHOLION I.

649. Præsens propositio etiam experimento facili probari potest. Nam si situla ex fune prælongo pendens & aquæ semiplena, eo usque in orbem vertatur, dum funis valde rigescat; tum situla, sibi relicta vel derepente in contrarium sensum dextre impulsa, magna pernicitate motum circularem sequetur, talemque etiam aquæ imprimet; hoc proinde motu vorticoso aquæ in situla impresso, statim contingere observabitur, ut aqua ad parietes situlæ attollatur & in medio subsidat, atque adeò ejus superficies figuram cavam induat loco planæ superficiei, qualis prius erat.

SCHOLION II.

650. Quin imo ex propositione hac nostra facilis modus deduci potest explicandi, cur in quolibet vertice corpora solidiora quam vorticis partes ad vorticis centrum pellantur. Nam, quia in vase cylindrico AD aqua HBDK in gyrum acta ad parietes vasis nonnihil se attollit, adeò ut superficiem cavam LMN induat; ideo manifestum esse potest cuique, quod, si aqua operculo rigido KH operta esset, singula puncta operimenti rigidi excepto medio O ab aqua circulante ac propterea sese attollere conante pressiones diversas sint subitura, scilicet eo majores quo remotiora fuerint puncta à centro operimenti O. Atqui ea vi, qua puncta operimenti ab aqua sese attollere conante premuntur, eadem vi reactione sua in aquam aget, quod sane etiam de superficie cava cylindrica itidem est intelligendum; id est, qua vi hæc superficies cylindrica ab aqua HD in gyrum

rum acta atque adeò axem MP fugiente, premitur, tanta etiam eſt ejus reactio, cujus vi verſus axem MP aqua repellitur; adeò ut, ſi corpus aliquod in aqua ſit, ut *b*, id pellendum ſit verſus P in directione BP ſuperficiei cylindri perpendiculari.

Sic etiam, in vorticibus magna pernicitate in gyrum actis, fluidum elabendi conatum habens à vorticum ſuperficiebus repellitur, & à repulſo fluido corpora ſolida, quæ in vortice ſunt, ſecundum directiones ſuperficiei vorticum normales, atque hoc modo gravitas in hypotheſi vorticum utcunque adumbratur. Utinam verò reliqua gravitatis phænomena eadem facilitate in hoc vorticum ſyſtemate explicare liceret!

CAPUT XXIII.

De Agitatione aëris in productione ſoni.

651. ANte Illuſtrem Newtonum nemo theoriam ſonorum geometrice tractare auſus eſt, nec mirum, cum ejusmodi disquiſitio iis difficultatibus circumſepta ſit, quæ non niſi à ſagaciſſimo Viro aliisve ſimilibus geometris ſuperari poſſe videbantur. Veruntamen elegantiſſimum nobis exhibuit theorema ſummus Geometra accelerationes pulſuum in aëre elaſtico concernens Propoſ. XLVIII. Lib. Sec. Princ. Phil. Nat. Math. in veteri & Propoſ. XLVII. in noviſſ. editione, poſteaquam ſuam hypotheſin de productione ſonorum Propoſ. XLIII. expoſuit. Ejus doctrina, ni fallor, huc redit.

652. Scilicet intelligit vibrationibus partium corporis ſonori alternis circumjectum aërem elaſticum propelli atque adeo denſari nonnihil, dehinc relaxari & in partes contrarias regredi. Nam itu partium corporis tremuli contiguæ aëris partes propulſæ denſabuntur, regreſſu verò, atque adeo amota vi comprimente, denſatus aër iterum ſeſe in omnes partes, quantum poteſt, elatere ſuo expandet, ita ut itu partium corporis tremuli aër condenſetur & in reditu atque regreſſu iterum rareſcat. Quod partes corporis tremuli in aëre ipſis contiguo efficiunt, idem etiam præſtabunt aëris partes jam propulſæ in aëre ipſis contiguo, & hic in ſibi proximo atque ſic deinceps, ſed non eadem ubique harmonia, ita ut, ſi quædam aëris partes propulſæ ſint, propellantur & omnes reliquæ atque progrediantur, ſed cum unæ propellantur atque denſentur, aliæ redeant

atque posteaquam densatæ erant, iterum rarescant & regrediantur, idque vicibus permutatis. Ejusmodi motus partium aëris propulsarum atque iterum, unde venerant, regredientium, seu intervalla progressus atque regressus, vocentur pulsus aëris, quæ intervalla ob æqualia temporis intervalla præterpropter æqualia existent. Hisce positis sequens solvendum occurrit problema.

PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA.

Fig. 148. 653. *Si elasticitates aëris densitatibus respectivis proportionales fuerint, determinare celeritates aëris elastici in uno ejus pulsu à vibratione corporis tremuli vel alia ratione excitato.*

I. Sit EF latitudo unius pulsus, scilicet intelligatur uno itu vibrationis corporis tremuli contiguum aërem propulsum redactum esse in spatium AB, ex cujus puncto medio E excitata sit perpendicularis EP, atque in ea recta ME exponat elasticitatem aëris condensati AB. Regrediente parte corporis tremuli, vel potius remota vi comprimente, quæ aëri AB densitatem naturali majorem induxit, aër AB sui juris factus, in utramque partem (§. 652.) æqualiter se diffundere conabitur; sed considerando ejus dilatationem tantum quæ versus D fit, aërem BC ante se propellet, atque eum condensando rediget in volumen CD ipsi AB circiter æquale. Intervallum EF, inter puncta media portionum aëris densarum AB, CD, est intervallum unius pulsus, quoniam æquivalet itineri, quod eundo & redeundo conficitur. Ut innotescant celeritates aëris in singulis punctis intervalli EF, procedendum porrò ut sequitur:

II. Dividatur EF bifariam in O, jungatur OM, ductaque per quodlibet punctum G intervalli EF rectâ GH parallela EP lineæ OM occurrente in H, fiat denique $Fg = EG$. Ponatur aërem EB se extendisse in EG: quæritur vis acceleratrix puncti progredientis G; hæc verò vis est virtus elastica aëris EG demta virtute elastica aëris FG, qui progredienti resistit. Jam aëris progredientis EG raritas est ut EG, & resistentis raritas ut FG, & quia densitates raritatibus sunt reciproce proportionales, & elasticitates directe densitatibus; elasticitates aëris raritatibus ejus erunt reciproce proportionales, unde, cum (secundùm hypothesin) aëris AB elasticitas sit EM, aëris expansi EG elasticitas erit $EM.EB : EG$, aërisque expansi FG elasticitas $EM.EB : FG$. Ergo vis acceleratrix puncti G seu differentia elasticitatum $= EM.EB : EG, - EM.EB : FG$ (vel quia gF & EG æquales) $= EM.$

EB.

EB. Gg : EG. FG. Jam, si ob angustiam pulsuum eorumque partium rec-lum EGF assumere licet æquale dato rec-lo BEF, erit vis acceleratrix puncti progredientis G = EM. EB. Gg : EB. EF = EM. Gg : EF = EM. GO : EO, seu (propter triangula similia OEM & OGH) = GH. Est igitur vis acceleratrix puncti G circiter ut ordinata GH trianguli rectanguli OEM, hoc est, ut distantia ejus GO à medio vibrationis, ut Celeb. Newtonus, loco supra citato, primus invenit. Unde si centro O & radio OE descriptus sit semicirculus ENF, & EP media proportionalis inter EM & EO. Erit (§. 148.) celeritas puncti G, ut GN. EP : EO. Tempus verò, quo aër EB se extendit in spatium EG (§. 149.) exponetur arcu EN : EP. Quæ omnia erant invenienda.

Corollarium I.

654. Hinc celeritates pulsuum erunt in composita ratione ex subduplicata intervallorum pulsuum & ex subduplicata densitatum. Vel brevius, celeritates sunt ut EP. Nam velocitates punctorum G in diversis EF similiter positorum, sunt ut homologæ EP, quia similitudo circulorum rationes omnes GN : NO vel EO æquales facit.

Corollarium II.

655. Tempora vero pulsuum sunt in reciproca ratione celeritatum, seu ut EO : EP.

Corollarium III.

656. Pendulum, cujus longitudo sit tertia proportionalis ad EM & EO, unam oscillationem ex itu & reditu compositam eodem tempore conficiet, quo unus pulsus eundo & redeundo absolvitur.

Scholion.

657. Præcedentes determinationes circa vim acceleratricem, velocitatem, & tempus lationis puncti progredientis G, non nisi tanquam physicè accuratæ haberi debent, non verò mathematicè. Nam quia memorata vis acceleratrix puncti G reperta est supra propor-

tio-

tionalis quantitati $EM.EB.Gg:EG.FG = 2EM.EB.GO:GN^2$, erit momentum ſolicitationis acceleratricis, ut $2EM.EB.GO.-dGO:GN^2 = 2EM.BE.GN.dGN:GN^2 = 2EM.EB.dGN:GN$ proportionale momento celeritatis acquiſitæ, ſeu VdV, vocando hanc celeritatem V, & dV ejus elementum, & $-dGO$ ſignificat elementum decreſcens lineæ GO, alterum vero dGN elementum ordinatæ GN. hinc $EM.\log.(GN^2:BQ^2)$ eſt, ut quadratum celeritatis puncti progredientis G.

CAPUT XXIV.

De Motu inteſtino fluidorum.

658. Hoc nomine non intelligitur hoc loco internus moleculárum motus fluidi cujuscunque in ſuo ſtatu naturali conſiſtentis, ſed is particularum motus, qui in fluidis à cauſis externis & accidentalibus excitari ſolet, quò calor præſertim eſt referendus, qui dubio procul ex concitatiore particularum motu in corpore calido à cauſis externis producitur. Utut verò ejusmodi motus inteſtinus admodum perturbatus ſit, nihilo tamen minus regula phyſicè ſatis accurata pro ejus menſura media tradi poteſt.

PROPOSITIO LXXXV. Theorema.

659. *Calor, cæteris paribus, eſt in compoſitâ ratione ex denſitate corporis calidi, & duplicatâ ratione agitationis particularum ejusdem.*

Agitatio particularum eſt celeritas media inter celeritates particulares, quibus calidi corporis particulæ agitantur. Vocetur hæc celeritas media V, & corporis denſitas D. Jam, quia calor conſiſtit in concitatiore particularum motu, calor erit, ut impreſſiones particularum corporis calidi in quopiam objecto corpore calorem excipiente, ſed hæ impreſſiones ſunt in compoſita ratione ex duplicata celeritatum & ſimpla denſitatum, ſeu, ut $D.V^2$. Ergo etiam calor eſt ut $D.V^2$. Quod erat demonſtrandum.

Dictum in propoſitione *cæteris paribus*, id eſt, in corporibus ſimilis texturæ.

Scholion.

660. Ex hac propoſitione jam elicere licebit modum metiendi agitationem particularum aëris. Habeatur tubus ADM inſtar ſiphonis reflexus, cujus crus minus AD capſula vitrea ABC inſtructum ſit, & majus DM hermetice ſigillatum in M non nihil excedat longitudinem fiſtularum in ordinariis barometris adhiberi ſolitarum. Tempore hyberno tubus mercurio impleatur orificio aperto A deorſum ſpectante, atque ramo DM in verticali ſitu detento, parte D ſurſum reſpiciente, quod ope alius tubi inflexi atque aperto orificio A inſerendi rite præſtari poteſt. Totus tubus mercurio plenus inverti debet, ut denuo in ſitum, quem ſchema monſtrat, reducatur, mercuriusque in ramo MD ad conſuetam in ordinariis barometris altitudinem DH, 27. vel 28. digitorum ſe demittet, effluente per apertum orificium A ſuperfluo hydrargyro. Sed, quia capſula ABC adhuc mercurio plena erit, ſuctionis modo tanta ejus copia extrahenda, usque dum reſidui ſuperficies FF ſit circiter in medio capſulæ, vel paulò altior, ita ut BF aut CF ſint $\frac{2}{3}$ totius altitudinis capſulæ BG. Clauſo poſtea orificio A, atque adeò ſublata communicatione aëris in ampulla cum exteriore, inſtrumentum uſui aptum atque paratum erit. Ponamus enim aërem AFF calore extendi in ſpatium AEE, ita ut hydrargyrus in altero tubo ex H aſſurgat in I, columnæ IE preſſio æquivalebit impreſſioni aëris AEE in ſua baſi EE, atqui hæc impreſſio (§. 659.) eſt, ut factum ex quadrato celeritatis mediæ particularum aëris in denſitatem aëris. Vocetur, ut in propoſitionis expoſitione loco citato, velocitas media V, eritque aëris impreſſio in ſuperficiem EE, ut $V^2 : GE$, nam denſitas aëris AEE eſt ut $I : AE$ vel $I : GE$; eſt ergo $IE = V^2 : GE$, vel $IE . GE = V^2 = IG . GE + GE^2 = V^2$. Hinc $V = \sqrt{(IE . GE)}$ aut etiam $= \sqrt{(IG . GE + GE^2)}$. Propterea, ſi vocentur $FH = a$, $EE = b$. Diameter tubi $MD = c$, & $GF = e$, ac denique variabilis $HI = x$, invenietur V, ſeu velocitas media particularum aëris, ut $\sqrt{(ab^4c + b^4cx + bbccx + abbccx + bbccxx + c^4xx)} : bb$. Hinc data x in aliqua obſervatione, innoteſcet ultro ipſa V. Quod erat demonſtrandum. Fig. 149.

FINIS.

APPENDIX.

POstquam præcedens tractatus Typographo jam missus esset, varia subinde in mentem venerunt, quæ tum ad illustrationem Operis, tum etiam ad qualemcumque doctrinæ profectum facere videntur. Eorum pauca in hac Appendice præcedentibus libris addere constitui, quando temporis angustia atque Bibliopolæ festinatio non concedunt mihi oportunitatem omnia ad umbilicum deducendi.

I. Circa notissimam naturæ legem, quâ *cuilibet actioni æqualis & contraria esse dicitur reactio*, quam ex §. 11. derivatam in sequenti §. 12. retuli, egregii nonnulli viri hærere videntur, existimantes nunquam motum sequi debere actionem, si huic æqualis semper & contraria sit reactio; nam si, ut in exemplo à Celeb. Newtono inter alia adducto, equus lapidem funi alligatum trahens æqua vi retrahitur in lapidem, quomodo, inquiunt, progredi equus lapidemque movere potest, si vis agens ab æquali & contraria resistentia absorbetur tota atque retunditur? Sed hæc objectio ab æquivocatione circa nomina *vis* & *actionis* nata esse videtur, quæ tamen duo accurate debent distingui. Vis corporum non est actio ipsa; nam actio est applicatio vis cujusdam subjecto habili, seu cui applicari potest: illi verò soli corpori applicari censetur, quod resistit, quod renititur, quod reagit. In rebus materialibus nulla est actio proprie sic dicta, ubi nulla est reactio; equus enim, qui corpus *nihil* resistens post se trahit, *nihil* trahere vel *non* trahere, id est, nil aliud agere, quam simpliciter incedere, censetur. In omni ergo actione corporea est collisio inter vim agentem & renixum corporis patientis, applicatio vis agentis in corpore actionem suscipiente, hoc est, actio ipsa æqualis est & contraria renixui patientis, qui est ejus reactio, quia hic renixus vel hæc vis inertiæ corporis patientis debet tolli ad id ut corpus moveri possit ab agente. Non tamen ideo sequitur *vim totalem* corporis agentis totam impendi superandæ rectioni patientis, sed ejus partem tantum, & hæc pars vis totalis corporis, quæ tollendæ resistentiæ corporis patientis insumitur, ea est vis, à qua actio proprie manat; *residuum* enim ejusdem vis totalis, cum nullam habeat resistentiam vel renixum absorbendum, in actionem minime influit. Idcirco cum actio quæcunque æqualis & contraria dicitur reactioni corporis patientis, hoc aliud non significat quam istud,

iſtud, *in omni actione corporea tantum virium corpori agenti decedere, quantum corpus actionem ſuſcipiens lucratum ſit.*

II. Propoſitio IV. Lib. I. §. 44. facilem ſuppeditat modum demonſtrandi centrum gravitatis *dari* in unoquoque corpore, & hoc centrum *unicum* eſſe, ſi gravium directiones parallelæ fuerint. Nam, ſi fuerint corpuscula quotcunque quam minima A, B, C, D, &c. Fig. 150. quomodocunque poſita, & tanquam elementa corporis etiam cujuslibet ſpectata, à quibus demiſſæ ſint ad planum Pc poſitione datum perpendiculares Aa, Bb, Cc, Dd, &c. & plano Pc aliud parallelum ducatur GH, cujus diſtantia Ee à plano Pc ea ſit, ut factum ex Ee in aggregatum corporum $A+B+C+D+$ *&c.* æquet ſummam factorum $A.Aa+B.Bb+C.Cc+D.Dd+$ *&c.* Corporum A, B, C, D, *&c.* in ſuas reſpectivas à plano Pc diſtantias Aa, Bb, Cc, *&c.* & in Pc ſumatur Pe, talis ut $(A+B+C+D+$ *&c*$).\ Pe$ ſit $=A.Pa+B.Pb+C.Pc+D.Pd+$ &c. ductaque per e recta eE occurret GH in puncto E, quod eſt commune centrum gravitatis corpusculorum A, B, C, D, *&c.* vel corporis totalis, quod ex hisce corpusculis componitur. Hoc punctum E ideo dicitur corporis totalis centrum gravitatis, quia ejus partes ſeu corpuscula A, B, ex una parte lineæ, vel plani GH, æqualium ſunt momentorum cum corpusculis C, D, &c. ex altera parte ejusdem plani vel lineæ GH, & quia hoc idem accidit reſpectu cujuslibet alius lineæ LM, quæ per hoc idem punctum E duci poteſt. Nam ducta per P linea $P\varkappa$ parallela LM, & productis Aa, Bb, Cc, Dd, &c. & Ee, in α, β, $\varkappa$, δ, *&c.* & ε. reperietur $(A+B+C+D+$ *&c*$).\ E\varepsilon=A.A\alpha+B.B\beta+C.C\varkappa+D.D\delta+$ &c. & $(A+B+C+D+$ &c$).\ P\varepsilon=A.P\alpha+B.P\beta+C.P\varkappa+D.P\delta+$ *&c.* quandoquidem omnia triangula $Pa\alpha$, $P\beta b$, $Pc\varkappa$, &c. ſimilia ſunt. Jam ex hisce duabus æqualitatibus ultrò ſequitur, omnia momenta corporum A, B, C, D, &c. reſpectu utriusque plani $P\varkappa$ & PV ejus normalis ſimul æqualia eſſe reſpective factis ex aggregato corporum in diſtantias centri E ab utroque plano vel linea $P\varkappa$, PV, quod cum ita ſit, neceſſum etiam eſt ut corpuscula, quæ ſunt ad unam partem rectæ LM æqualium ſint momentorum cum ponduſculis, quæ ſunt in altera parte ejusdem LM. Cum itaque omnes lineæ, quæ per punctum E duci poſſunt, ſint axes æquilibrii ponduſculorum A, B, C, D, &c. liquet corporis ex hisce corpusculis tanquam ſuis elementis conflati centrum gravitatis *unicum* eſſe in E. Quod erat demonſtrandum.

Hanc eandem propoſitionem Walliſius ex aliis principiis etiam elicuit.

 III. Cir-

III. Circa regulam Guldini, cujus demonſtratio ſupra (§. 47.) allata eſt, duo notanda ſunt. 1°. Eam non ſolum in figuris aut ſolidis rotundis obtinere, ſed generaliter in omnibus aliis, quæ generari poſſunt figuræ genitricis motu hac lege facto, ut figuræ planum ſemper perpendiculare maneat lineæ, quam centrum gravitatis figuræ genitricis motu ejus deſcribit. Hoc enim caſu *ſolidum figuræ motu genitum ſemper æquale eſt facto ex figura in viam centri gravitatis ejusdem.*

Fig. 151. Nam ſi ponatur centrum gravitatis C figuræ cujuslibet AB incedens in curva DEF, cui figura ubique normalis ſit, deſcripſiſſe arculum curvæ C*c*, atque ex ſitu BA veniſſe in ſitum *ba* priori indefinite vicinum, adeo ut rectæ CO & *c*O, quæ ſint in planis figurarum AB, & *ab*, & in plano curvæ DEF, eritque O centrum circuli oſculatoris curvæ datæ DF in ejus puncto C vel ejus proximo *c*. Adeoque ſolidum, quod figura AB deſcribit cum ejus centrum C percurrit arculum C*c*, per §. 47. æquatur facto ex figura AB in arculum C*c*, ergo omnia ejusmodi ſolida vel ſolidum, aut figura, quæ producitur inceſſu figuræ AB per totam curvam DEF, æquabitur facto ex eadem AB in omnes arculos, qui in curva DF continentur, id eſt, facto ex figura AB in curvæ DEF longitudinem. Quod erat demonſtrandum.

2°. Notandum, hæc tantum ita ſe habere, ſi figura genetrix gravitatis ſit uniformis, & fallere Guldini regulam, figura genitrice exiſtente difformiter gravi.

IV. Propoſitio VIII. Lib. I. (§. 59.) etiam deduci poteſt vel ſaltem ipſi æquivalens ex proprietate univerſali vectis recti in ſingulis punctis à potentiis obliquis impulſi, quam hoc loco explicare
Fig. 152. placet. Sit linea recta inflexilis AC, quæ in ſingulis punctis C, C, &c. urgeatur potentiis CD, CD uniformi lege ad ipſam inclinatis, & circa eam tanquam axem conſtitutæ intelligantur figuræ ACGIP, & ACHKA, ea conditione, ut ordinata quælibet CG (CI) ſit ad homologam potentiam CD in duplicata proportione ſinus anguli reſpectivi BCA ad ſinum totum; ac ordinata CH (CK) alterius figuræ ACH ſe habeat ad ordinatam CG (CI) primæ ACGP, ut ſinus complementi anguli BCA ad ejusdem ſinum rectum, & ſic ubique, poſitis hiſce, per centrum gravitatis areæ ACGP agatur RS axi AC recta huic lineæ AC occurrens in R, eritque linea RT cum RS angulum TRS continens, cujus ſinus eſt ad ſinum complementi, ut area AHC ad aream ACGP, media directio omnium

po-

potentiarum CD, CD lineæ AC applicatarum, & onus quo hypomochlion in R urgetur, erit ad omnes potentias lineæ AC rectas ex obliquis CD, CD derivatas, ut ſinus totus ad ſinum complementi anguli TRS. Demonſtratio hujus Lectoris induſtriæ relinquitur brevitatis amore. Hoc tamen minime reticendum eſt, in iisdem directionibus BD, BD potentias, curvæ cuilibet AB applicatas, quæ ſint ad homologas CD ad lineam AC pertinentes, ut reſpectivæ CV ad BV (ſupponendo directiones BD, BD tangere curvam quandam CV) eandem habere mediam directionem ZT cum potentiis CD, CD, &c. rectæ AC applicatis, ut demonſtratu id facile eſt. Unde ſi curvæ cuicunque AB potentiæ quæcunque in directionibus BC, BC, &c. applicatæ ſint, facili negotio invenietur earum media directio, ducendo per curvæ verticem A tangentem AC, vel quamlibet aliam rectam, & disquirendo quænam potentiæ CD in directionibus BC huic rectæ AC applicandæ ſint ad id, ut harum potentiarum media directio RT etiam præbeat mediam directionem potentiarum in directionibus BC, BC, &c. datæ curvæ ABB applicatarum; ad id facienda ubique eſt CD ad homologam potentiam curvæ AB applicatam, ſicut BV ad CV.

V. Uſum univerſalem propoſitionis XII. Lib. I. In ſubjunctis ejus corollariis & ſcholio jam utcunque oſtendimus. Ad majorem tamen propoſitionis & applicationis ejusdem illuſtrationem, pauca hæc, quæ ſequuntur, addidiſſe forte juvabit. Præter ſymbola §. 101. jam explicata, firmitatem cujusque curvæ elementi Bb vel Bβ nominabimus t, quæ illic inſigniebatur litera T; potentias juxta BH & BG, dq & dp reſpective, tangentem & ſecantem anguli GBH, h & k, ac denique radium oſculi ſeu curvitatis in B, r; item per a ſinum totum deſignabimus. Hisce poſitis, erit (num. 1. §. 93.) GH $= dt$, & tria elementa dp, dq, & dt, ipſis a, k & h proportionalia erunt, ſic etiam AP : PQ $=$ $r : ds$, atqui (§. 103.) eſt BG (dp) : T(t) $=$ PQ : AP, ergo $dp : t = ds : r$, item $dp : dt = a : h$, ergo $dt : t = hds : ar$, & $log.\, t = \int (hds : ar)$, adeoque ex hisce analogiis quatuor habentur æquationes, quales in hoc adjecto laterculo notantur. Hinc ex quantitatibus dp, dq, dt vel t & h datâ qualibet in indeterminatis curvæ x, y, dx, dy, &c. & quantitatibus conſtantibus, invenientur reliquæ, ſi non algebraice, ſaltem transcendenter. Fig. 29.

1. $dt = hdp : a = hdq : k.$
2. $t = rdp : ds.$
3. $log.\, t = \int hds : ar.$
4. $h = ardt : tds.$

Exempl. Sit curva data ABZ hyperbola æquilatera, cujus æquatio

tio $yy = xx - aa$, in qua abſciſſæ x ſumantur à centro, ſemilatere transverſo exiſtente $= a$, ſintque tenacitates aut firmitates curvæ proportionales diſtantiis punctorum curvæ à centro, hoc eſt, $t = \surd(xx + yy)$. Et §. 161. præbebit $r = t^3 : aa$, & $h (= ardt : tds) = \frac{2xy}{a}$, nec non $k = tt : a$; hinc æquatio prima $dt = hdq : k$ præbebit $dq = ttdt : 2xy = 2txdx : 2xy = tdx : y$; atqui $tdx = yds$, ergo $dq (= tdx : y) = yds : y = ds$. Idcirco potentiæ BH, ſeu dq, ſunt ut elementa curvæ Bb, earumque directiones in centro hyperbolæ coëunt, quoniam tangens anguli DBH inventa eſt $= 2xy : a$, & hæc expreſſio etiam tangentem anguli, quem normalis hyperbolæ BD cum recta ex puncto B ad centrum hyperbolæ ducta continet. Propterea eſt hyperbola æquilatera *catenaria*, ſi gravium directiones in centro hyperbolæ concurrere ſupponuntur, ut ſupra circa finem §. 105. ſine demonſtratione dictum eſt. Pariter ſi poſuiſſem $dq = ds$ & $h = 2xy : a$ in hyperbola eadem, inveniſſemus $t = \surd\overline{xx + yy}$.

Generalius, ſi directiones gravium convergunt in punctum, abſciſſæque ſumantur in axe ab hoc centro gravium, erit $h = axdx + aydy : xdy - ydx$, & hujus ac alterius $dt = hdq : k$ ope, in ſuppoſitione $dq = ds$ inveniſſemus $t = \surd\overline{xx + yy}$ & $yy = xx - aa$.

Si directiones gravium axi AC parallelæ ſunt, erit $h = adx : dy$, ac ſubſtituendo loco dx, & dy earum proportionales n & m, fiet $h (= adx : dy) = an : m$. Item in æquatione quarta, ſurrogando m & dn pro r & ds, quibus proportionales ſunt, fiet $an : m = amdt : tdn$, & $dt : t = ndn : mm$ (aut, quia $mm + nn = aa$, & $ndn = - mdm) = - mdm : mm = - dm : m$, ergo $lt = l(aa : m)$, id eſt, $t = aa : m = ads : dy$, ut habet æquatio nona. Subſtituendo igitur valorem inventum ipſius t in æquatione ſecunda invenietur æquatio ſeptima, & ex hâc ope analogiæ $dp : dq = a : k, = dy : ds$, elicietur æquatio octava. Hinc, ex hiſce tribus dp, dq & t una data in indeterminatis curvæ & conſtantibus utlibet invicem permixtis, facile invenientur reliquæ duæ, ſi non algebraice, ſaltem transcendenter.

5. $h = adx : dy$
6. $k = ads : dy$
7. $dp = ads^2 : rdy$
8. $dq = ads^3 : rdy^2$
9. $t = ads : dy$

Si directiones potentiarum BH ſunt curvæ normales, erit $h = 0$, & $k = a$, & ſola æquatio ſecunda ſufficit; hunc caſum particularem Celeb. Joh. Bernoullius ſolutum dedit jam pridem in Commentariis Academiæ Reg. Pariſ. Scientiarum 1706, & nuper adhuc in Li-

Libro cui titulum fecit *Essay d'une Nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux.*

VI. *De sublimitate gravitatis difformis, quâ projectilia sectiones conicas in vacuo describunt.* Quoniam mobile perimetrum alicujus sectionis conicæ AQa describens citatur solicitationibus, quæ quadratis distantiarum mobilis à centro sunt reciproce proportionales, *scala* harum solicitationum GB erit hyperbola quadratica, cujus applicatæ HG, AB, quæ solicitationem gravitatis in H & A exponunt, quadratis abscissarum DH, DA sunt reciproce proportionales, centro hyperbolæ existente in D. Quæritur jam quantam assumere oporteat *sublimitatem*, hoc est, lineam HA talem, ut in ea descendens grave motum à quiete in H incipiens, & solicitationibus, quas ordinatæ hyperbolæ in quadrilineo HGBA exponunt, celeritatem acquirat in A, cum qua propulsum mobile, secundum lineam Aα alteri BA in directum positam, datam sectionem conicam AQa in vacuo describat. Fig. 153.

Ponitur punctum A pro alterutra apside, ac propterea DA erit sectioni perpendicularis in A, atque adeo hoc punctum A alteruter vertex erit sectionis conicæ AQa, & radius curvitatis in A æquabitur $\frac{1}{2}$L, id est, semilateri recto sectionis conicæ, & solicitatio curvæ in A normalis ex centrali AB derivata eadem erit cum hac centrali; idcirco indicando celeritatem mobilis in puncto A, per V, vi §. 154. habebitur $V^2 = \frac{1}{2}L.AB$. Atqui eadem velocitas V, sed (secundùm hypothesin) descensu in HA acquisita, exponitur etiam (§. 136.) latere quadrato ex duplo areæ HGBA, ergo $V^2 = 2.HGBA$, atqui $AHGB = AD.AB - HD.HG$, ergo etiam $\frac{1}{2}L.AB = 2AD.AB - 2HD.HG$, vel, propter hyperbolam, subrogando loco AB & HG earum proportionalia quadrata HD^2, AD^2, fiet $\frac{1}{2}L.HD^2 = 2AD.HD^2 - 2HD.AD^2 = 2HD.AD.HA$, hinc etiam $L.HD = 4.HA.AD$, vel $L.Aa.HD = 4Aa.HA.AD$. Verum ex conicis est $4QO^2 = L.Aa = AD.Ad$, ergo $4Aa.HA.AD = 4AD.Ad.HD$, id est, $Aa.HA = Ad.HD$, & $HD:HA = Aa:Ad$. & dividendo, $AD:HA = AD$ (vel ad)$:Ad$, propterea est $HA = Ad$, atque adeo $HD = Aa$. *Est ergo sublimitas in sectionibus conicis æqualis distantiæ apsidis remotioris à centro solicitationum, à foco ejus propiore.* Hinc varia deduci possunt, quorum nonnulla sequuntur.

1°. Uni eidemque sublimitati HA convenire quidem possunt infinitæ sectiones conicæ AQa; cum eadem manente Ad distantia focorum dD possit esse magnitudinis cujuscunque; sed non ideò una ea-

eademque omnibus competet celeritas jactus secundum Aa. Nam, quia $V^2 = \frac{1}{2}L.AB = \frac{1}{2}L.AD^2.AB : AD^2$ (seu, quia $AD^2.AB$ est solidum constans) est $\frac{1}{2}L : AD^2$, erit V ut $\sqrt{\frac{1}{2}L}, : AD$. Id est, in diversis sectionibus conicis velocitates mobilis in alterutra apside erunt in composita ratione ex subduplicata directa ratione laterum rectorum sectionum, & reciproca ratione distantiarum apsidis à centro solicitationum.

2°. Si umbilicorum distantia Dd fuerit infinita, sectio conica AQa est parabola focum habens in d, ac proinde sublimitas $HA = Ad$ fit æqualis quartæ parti lateris recti L, ut Galilæus, aliique post ipsum plures ex aliis fundamentis demonstrarunt. In hoc ergo consectario continetur universa doctrina motus projectorum in hypothesi gravitatis parallelarum.

3°. Si mobile eadem velocitate V in A acquisita post descensum in HA circulum ex centro I, radiumque $AI = \frac{1}{2}L$ habentem describat, conatus centrifugus mobilis in circulo eadem erit cum solicitatione centrali AB in apside A sectionis conicæ AQa.

4°. Gravitas uniformis, qualis apud nos est, se habet ad conatum centrifugum in dicto circulo, seu ad solicitationem centralem AB in A, ut $\frac{1}{2}AI$ seu $\frac{1}{4}L$ ad HA seu Ad. Adeoque in parabola ex foco d & vertice A descriptâ missilis gravitas in vertice ejus A, æquabitur conatui centrifugo in circulo prædicto.

VII. *De tempore Periodico in Sectionibus Conicis.* Vocentur tempus unius circuitus in sectione AQa, T, diameter Aa, D; ejus conjugatus Qq, d; latus rectum l, distantia seu altitudo AD, A, solicitatio centralis AB in apside A, G. Eruntque $d = \sqrt{lD}$, & area totius ellipseos, hoc est, $2.AQa = \frac{1}{2}pDd$, ubi p est exponens rationis circumferentiæ circuli ad radium. Est verò (§. 157.) $T = 2.AQaA : \frac{1}{2}AD.V$, ergo substituendo valores analyticos loco areæ & linearum AD, V; habebitur $T = pDd : Au$, seu $T^2 = ppD^2d^2 : A^2uu$, est vero $dd = lD$, & $uu = \frac{1}{2}lG$, ergo $T^2 (= ppD^3l : \frac{1}{2}lA^2G) = 2ppD^3 : A^2.G$. Hinc *quadratum ex tempore periodico est in composita ratione ex directa triplicata ratione lateris transversi, & reciproca composita ratione duplicatæ distantiæ apsidis à foco, seu centro solicitationis, & simplæ solicitationis* G *in apside.* Unde, quia solicitationes gravitatis sunt in reciproca duplicata ratione distantiarum mobilis à centro, rationes compositæ ex duplicata distantiæ apsidum à centro & simpla gravitatis in apsidibus sunt rationes æqualitatis, propterea sunt quadrata temporum periodicorum, ut cubi diametrorum principalium in sectio-

sectionibus conicis. Et hæc est demonstratio Celebris Kepleri canonis.

VIII. *De Centro Oscillationis.* In theoria centri oscillationis Cap. V. Lib. I. exposita brevitatis tantum gratia posui, non verò ex necessitate, centrum oscillationis reperiri in linea centri, hoc est, in recta ex puncto suspensionis per centrum gravitatis figuræ oscillantis ducta. Methodus enim nostra perinde valet quæcunque linea accipiatur per punctum suspensionis, in qua centrum oscillationis existat, invenietur semper hanc lineam per centrum gravitatis figuræ oscillantis transire debere, prorsus ut idem etiam Celeb. Joh. Bernoullius in eleganti suo Schediasmate Act. Lips. 1714. mens. Junii §. 28. ostendit. Nam si in fig. 46. pendulum simplex CN composito isochronum per aliud punctum m quam per centrum gravitatis M figuræ oscillantis transire ponatur, quod tamen ita comparatum, seu positum, esse debet, ut linea ex hoc puncto m (in figura quidem non signato sed calamo aut mente facile supplendo) per centrum gravitatis M ducta horizontali CY ad angulos rectos semper occurrat, invenietur, semper, ut in §. 206, $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2 + \&c.).G : M.mC$, ubi M, ut in citato loco, significat E. $P + F.Q + \&c.$ seu aggregatum ponderum omnium figuræ oscillantis partium. Jam verò, mutato utlibet angulo YCN, mutabitur simul magnitudo ipsius mC, ac propterea quantitas $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2 + \&c.).G : M.mC$ constans & invariata fieri nequit, nisi coincidente mC, cum MC, atque adeò puncta m & M ubique confundantur, adeò ut hinc appareat centrum oscillationis necessariò in linea centri existere. Quod erat demonstrandum. Fig. 46.

IX. Applicatio hujus novæ theoriæ centri oscillationis nunc paulò uberius declaranda est, quam in §. 208, ubi formula tantum exhibetur pro figuris uniformis gravitatis. Designando particulas P, Q, &c. ut ibi per dp, earumque pondus per βdp, ita ut β gradum gravitatis denotet, &, si g significet gravitatem, qua simplex pendulum agitatur, & z distantiam particulæ oscillantis ab axe oscillationis, canon §. 206. $CN = (P.PC^2 + \&c.).G : M.MC$ præbebit $t = g\int zzdp : \int \beta xdp$. Hinc, si $\beta = gzz : ax$, fiet $t = ag\int zzdp : g\int zzdp = a$.

Oscilletur jam figura BAD in *planum*, seu ita ut axis oscillationis semper maneat in plano figuræ oscillantis, atque adeò ordinatæ figuræ BD axi oscillationis QQ constanter parallelæ sint; erunt hoc casu ipsæ z, seu distantiæ punctorum ordinatæ, $BD = QC = x$, atque adeò $\int zzdp = \int xxdp$, &, quia $dp = BC.Cc = ydx$, erit $\int zzdp =$ Fig. 154.

 $\int xxydx$,

$\int xxydx$; & $t(=g\int zzdp:\int \beta xdp)=\int gxxydx:\int \beta xdp$, vel, si omnes partes ordinatæ BD sint uniformis gravitatis, $=g\int xxydx:\int \beta xydx$.

Si eadem figura movetur in latus, id est, si planum figuræ oscillationis axi oscillationis rectum est; sit quælibet in ordinata BC ejus portio CI $=u$, & $dp=dudx$, erit $z=\sqrt{(QC^2+CI^2)}=\sqrt{xx+uu}$, hinc $zzdp=xxdudx+uududx$, & integrando, positis x & dx constantibus, invenietur $\int zzdp=uxxdx+\frac{1}{3}u^3dx$, vel (facta $u=y$) $=xxydx+\frac{1}{3}y^3dx$, sed hoc est tantum elementum respectu totius figuræ ABD. Et $\int \beta xdp=\int \beta xydx$, adeoque $t(=\int gzzdp:\int \beta xydx)=(\int xxydx+\int \frac{1}{3}y^3dx).g:\int \beta xydx$.

Fig. 154. Pro solidis rotundis sic est indaganda formula: sit BEAD ejusmodi solidum, cujus basis sit circulus BEDH, cujus diameter EF axi oscillationis QQ parallelus supponitur. Ad hanc diametrum EF demissis perpendiculis GL, gl, fiant CL $=t$, & ut antea LG seu CI $=u$, requiruntur primum omnia $zzdp$, quæ in rectangulo GLl continentur. Quia omnia $zzdp$, quæ in ordinata GL reperta sunt $xxu+\frac{1}{3}u^3$, omnia $zzdp$, quæ in rectangulo GLl sunt, erunt $=xxudt+\frac{1}{3}u^3dt$. Ponantur jam $udt=d\alpha$, & $u^3t=\omega$, atque adeo $d\omega=u^3dt+3uutdu$. Sed circulus EBF præbet $tt+uu=yy$, vel ducendo hanc in udt, fiet $ttudt+u^3dt$, seu (ob $tdt=-udu$) $=-uutdu+u^3dt=yyudt=yyd\alpha$, vel etiam $3u^3dt-3uutdu=3yyd\alpha$, & addatur hæc æquatio ad alteram $u^3dt+3uutdu=d\omega$, fietque $4u^3dt=3yyd\alpha+d\omega$, vel $u^3dt=\frac{3}{4}yyd\alpha+\frac{1}{4}d\omega$, qui valor substituatur in $xxudt+\frac{1}{3}u^3dt$, atque $d\alpha$ pro udt, fietque $zzdp(=xxudt+\frac{1}{3}u^3dt)=xxd\alpha+\frac{1}{4}yyd\alpha+\frac{1}{12}d\omega$. Adeoque omnia $zzdp$, quæ in segmento circulari CBGL, seu α, continentur sunt $=xx\alpha+\frac{1}{4}yy\alpha+\frac{1}{12}\omega$, nam ipsæ QC, CB invariatæ, seu constantes, manent, utlibet variatis ipsis CL & GL, seu t ac u, adeo ut istarum respectu indeterminatæ x, y constantes sint. Jam, quia α significat segmentum CBGL, & ω factum CL. GL^3; erunt omnia $zzdp$ quæ in quadrante CBE continentur $=(xx+\frac{1}{4}yy)$. CBEC, cum evanescente GL in E, etiam factum CL. GL^3 seu ω evanescat. Hinc, si π designet exponentem rationis peripheriæ cujusque circuli ad radium, reperietur CBEC $=\frac{1}{8}\pi yy$, ac solidum CBEC. C$c=\frac{1}{8}\pi yydx$, adeoque $\int zzdp$ in hoc solido, $=(\frac{1}{8}xxyydx+\frac{1}{32}y^4dx).\pi g$. Propterea erit $t=(\frac{1}{2}\int xxyydx+\frac{1}{8}\int y^4dx,).\pi g:\int \beta xdp$. Atque ex hisce jam omnibus emergent canones generalissimi, quales sequens tabella exhibet:

si po-

si ponantur $A = \int y dx$, $I = \int xyy dx$.
$B = \int xy dx$, $K = \int xxyy dx$.
$C = \int xxy dx$, $L = \int y^4 dx$.
$D = \int y^3 dx$. $N = y^3 x$.

In figuris agitatis in $\left\{\begin{array}{l}\text{Planum } t = gC : \int \beta x dp. \\ \text{Latus } t = (gC + \frac{1}{3} gD) : \int \beta x dp.\end{array}\right.$

In solidis rotundis $t = (\frac{1}{2}\pi g K + \frac{1}{8}\pi g L) : \int \beta x dp$.

Hi canones sunt generales, quia deserviunt in omni casu gravitatis uniformis aut pro libitu variabilis, nam, ut jam supra dictum, βdp generaliter indicat pondus absolutum cujusque elementi dp figuræ oscillantis, unde cum β infinitis modis variare possit, exinde satis in propatulo est, hos canones infinities infinitos diversos casus omnes complecti.

Si β est constans, præcedentes canones mutabuntur in eos, quos hæc altera tabella repræsentat.

$t = gC : \beta B$ - - - - - - - $\left.\left\{\begin{array}{l}\text{Planum} \\ \text{Latus}\end{array}\right.\right\}$ agitatis.
$t = (gC + \frac{1}{3} gD) : \beta B$ pro figuris in
$t = (gK + \frac{1}{4} gL) : \beta I$. Pro solidis rotundis.

Ut saltem usum horum posteriorum canonum ostendam, esto figura BAD circa axem QQ oscillans sectio conica, cujus æquatio generalis sit $\pm aa \mp ee \pm 2ex \mp xx = \frac{aa}{bb} yy$, in qua a designat semilatus transversum, b semiaxem conjugatum, e distantiam puncti suspensionis Q à centro sectionis, ac denique x, y coordinatas QC, CB. Si æquatio curvæ differentialis $\pm edx \mp xdx = \frac{aa}{bb} ydy$, ducatur in y, habebitur $\pm edx \mp xdx$ in $y = \frac{aa}{bb} yydy = \pm eydx \mp xydx = \frac{aa}{bb} yydy = \pm edA \mp dB$, &

per antithesin - - - - - - $\pm dB = \mp edA - \frac{aa}{bb} yydy$. Et

integrando - - - - - - - $\pm B = \pm eA - \frac{aa}{3bb} y^3$.

Porro, quia (secundùm hypothesin) $N = y^3 x$, cujus differentialis ducta in $\frac{aa}{bb}$ præbet - - - $\frac{aa}{bb} dN = \frac{aa}{bb} y^3 dx + \frac{3aa}{bb} xyydy$.

Ducatur æquatio curvæ in ydx, & fiet $\frac{aa}{bb}y^3dx = (\pm aa \mp ee).$
$dA - \frac{2aae}{bb}yydy \mp dC$

Aqu. verò differentialis in $3xy$ ducta præbet $\frac{3aa}{bb}xyydy =$ Add.
$\pm 3eedA - \frac{3aae}{bb}yydy \mp 3dC$

Eritque summa $\frac{aa}{bb}y^3dx + \frac{3aa}{bb}xyydy = \frac{aa}{bb}dN = (\pm aa \pm 4ee).\ dA - \frac{5aae}{bb}yydy \mp 4dC$. Hujus integralis divisa per 4. præbebit $C = (ee + \frac{1}{4}aa).\ A \mp \frac{5aae}{12bb}y^3 \mp \frac{aa}{4bb}xy^3$ (vel N).

Atqui B supra inventa est, scilicet $B = eA \mp \frac{aa}{3bb}y^3$.

Supra verò erat $\frac{aa}{bb}dD \left(= \frac{aa}{bb}y^3dx\right) = (\pm aa \pm ee).\ dA - \frac{2aae}{bb}yydy \mp dC$.

Et integrando reperietur $\frac{aa}{bb}D = (\pm aa \pm ee).\ A - \frac{2aa}{3bb}y^3 \mp C$ (vel substituendo hujus C valorem inventum) $= \pm \frac{3}{4}aaA - \frac{aae}{4bb}y^3 - \frac{aa}{4bb}xy^3$.

Atque adeo multiplicando æquationem per $\frac{bb}{aa}$, invenietur $D = \pm \frac{3}{4}bbA - \frac{1}{4}ey^3 - \frac{1}{4}xy^3$.

In hisce formulis omnibus A significat aream ABC, unde, si valores reperti literarum B, C, D substituantur in duabus primis æquationibus posterioris tabellæ, habebitur valor incognitæ t pro omni sectione conica in planum & in latus agitata tam in aëre vel in vacuo, quam intra quemlibet liquorem; si in vacuo, erit $g = \beta$, & si in aliquo liquore, cujus gravitas specifica sit ad gravitatem specificam figuræ oscillantis, ut 1 ad n, erit $\beta = \frac{n-1}{n}g$.

Ex hisce repertis facili negotio deduci possunt omnia, quæ Celeb. Jac. Bernoulli tribus tabellis complexus est in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. 1703. ad 1. Dec. cui propterea non diutius immorabor, nec etiam ostendere necessum duco, quomodo in sectionibus conicis valores literarum I, K, L, inveniri debeant, cum hæc res ne tyronibus quidem negotium facessere possit, quandoquidem y in harum quantitatum elementis ubique ad duas dimensiones ascendit, adeo

ut

ut quantitates inde resultent, quæ absque ulla alia reductione integrabiles existant.

IX. *De Curvis Algebraicis per quotlibet data puncta ducendis.* Circa finem capitis VII. Lib. II. §. 283. mentionem feci problematis ducendæ curvæ algebraicæ per quotcunque puncta positione data, cujus solutionem Summus Newtonus primus invenit: ejus tamen solutionem mihi videre non contigit, excepta ea, quam in Lemmate V. Lib. III. Princ. Phil. Natur. sine omni analysi & demonstratione tradit, ubi lineam parabolici generis per quotlibet data puncta ducere docet. Hujus problematis ego solutionem annis 1704. & 1705. aggressus sum & obtinui, quam cum Illust. Leibnitio per literas communicavi, quæ solutio summo viro non prorsus displicuit, ut ex literis ejus annis 1705. & 1706. perhumaniter ad me datis colligi potest. Occasionem de hoc problemate cogitandi mihi præbuit epistola Newtoni ad Oldenburgium, in quâ hujus problematis meminit, & ex pulcherrimis id prædicat eorum, quæ solvere desiderasset. Sed ad rem:

Si ergo per puncta quotcunque A, 1A, 2A, 3A, &c. & C ducenda sit curva algebraica, seu analytici generis, CDA, per alterutrum C extremorum punctorum linea duci potest quæcunque CB, quæ instar axis sit, ad quem ex singulis datis punctis ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. demittantur, producendæ subter axem in L, 1L, 2L, &c. & ad alteram axis partem sint curvæ quæcunque CFL, CGM, CHN, CIO, CKP, &c. Considerentur jam singulæ AL, 1A1L, 2A2L, &c. tanquam totidem vectes ponduscu lis A, L, M, N, O, P, &c. in punctis, hisce literis indicatis, onusti, sed quorum centra æquilibrii singula reperiantur in axe CB, scilicet in punctis ejus B, 1B, 2B, 3B, &c. & sequetur, quòd, ducta qualibet DF reliquis AL, &c. parallela, atque curvis subter axem occurrente in punctis F, G, H, I, K, &c. axique in E, hujus lineæ seu vectis DF, in punctis D, F, G, H, I, K, &c. ponduscula eadem ac prius A, L, M, N, O, P, &c. appensa habentis, & centrum æquilibrii horum ponduscu lorum in E, brachium ED futurum sit ordinata curvæ regularis CDA per singula puncta A, 1A, 2A, 3A, &c. C transeuntis, perinde ac brachia EF, EG, EH, &c. ordinatæ sunt curvarum CL, CM, CN, &c. Atqui ex datis EF, EG, EH, EI, EK, &c. & ponderibus A, L, M, N, O, P, &c. invenietur ordinata ED in curva quæsita CDA. Tota ergo difficultas reducitur ad inventionem ponderum A, L, M, N, O, P, &c. Fig. 155.

 vel

vel proportionis horum. Atqui principium vectis præbet sequentes æquationes

1. $A.AB = L.LB + M.MB + N.NB + O.OB + P.PB.$
2. $A.1A1B = L.1L1B + M.1M1B + N.1N1B + O.1O1B + P.1P1B.$
3. $A.2A2B = L.2L2B + M.2M2B + N.2N2B + O.2O2B + P.2P2B.$
4. $A.3A3B = L.3L3B + M.3M3B + N.3N3B + O.3O3B + P.3P3B.$
5. $A.4A4B = L.4L4B + M.4M4B + N.4N4B + O.4O4B + P.4P4B.$
6. $A.5A5B = L.5L5B + M.5M5B + N.5N5B + O.5O5B + P.5P5B.$

Hæ æquationes continuò à se invicem subductæ, scilicet secunda à prima, tertia à secunda, quarta à tertia & sic deinceps, atque residuæ divisæ per respectivas differentias ordinatarum AB, 1A1B; 1A1B, 2A2B; 2A2B, 3A3B, &c. habebuntur quinque æquationes, in quibus singulis A erit ex una parte sola, & si in reliquis membris, pro singulis $BL - 1B1L$; $BM - 1B1M$; $BN - 1B1N$, & sic deinceps, divisis per $AB - 1A1B$, scribantur Q, R, S, T, V, in quinque residuis æquationibus, & eæ eodem modo tractentur ac sex primæ, sequentes scilicet ab antecedentibus subducendo, relinquentur quatuor novæ, quæ per respectivas $Q - Q1$, $Q1 - Q2$, $Q2 - Q3$, $Q3 - Q4$ dividantur & pro $R - R1 : Q - Q1$; $S - S1 : Q - Q1$; $T - T1 : Q - Q1$; $V - V1 : Q - Q1$; scribantur r, s, t, u; item pro $R1 - R2 : Q1 - Q2$; $S1 - S2 : Q1 - Q2$, &c. $r1, s1, t1, u1$. Pro $R2 - R3 : Q2 - Q3$; $S2 - S3 : Q2 - Q3$, &c. $r2$, $s2$, $t2$, $u2$; & sic porro eodem ordine, & hæ subductiones ac divisiones continuentur usque dum unica tantum supersit æquatio, poterunt in quantitatibus datis omnes A, L, M, N, O, P, &c. exhiberi, aut saltem omnes excepta ultima P, quæ arbitrariæ magnitudinis est, nam factis debitis reductionibus invenietur

$O = -P\omega.$
$N = -O\tau - P\eta.$
$M = -N\sigma - O\theta - P\upsilon.$
$L = -Mr - Ns - Ot - Pu.$

$A = LQ + MR + NS + OT + PV.$ In his æquationibus est $dLB : dAB = Q$; $dMB : dAB = R$; $dNB : dAB = S$, $dOB : dAB = T$; $dPB : dAB = V$. Sic $d1L1B : d1A1B = Q1$; $d1M1B : d1A1B = R1$; $d1N1B : d1A1B = S1$, &c. Nec non $d2L2B : d2A2B = Q2$; $d2M2B : d2A2B = Q2$; &c. Ubi notandum literam d cuilibet ordinatæ præpositam significare differentiam, inter hanc ordinatam ipsique proximam versus

ſus C in eadem curva; reliquæ quantitates ſic etiam facile definiuntur, ſcilicet:

$r = dR : dQ;\ r1 = dR1 : dQ1$, &c.			
$s = dS : dQ;\ s1 = dS1 : dQ1$, &c.	$\sigma = ds : dr;\ \sigma 1 = ds1 : dr1$ &c.		
$t = dT : dQ;\ t1 = dT1 : dQ1$; &c.	$\theta = dt : dr;\ \theta 1 = dt1 : dr1$ &c.	$\tau = d\theta : d\sigma;\ \tau 1 = d\theta 1 : d\sigma 1$	
$u = dV : dQ;\ u1 = dV1 : dQ1$; &c.	$\upsilon = du : dr;\ \upsilon 1 = du1 : dr1$ &c.	$\eta = d\upsilon : d\sigma;\ \eta 1 = d\upsilon 1 : d\sigma 1$	$\omega = d\eta : d\tau$.

Hoc loco litera d ſignificat differentiam inter magnitudinem, cui præfigitur & alteram eadem litera, ſed cum unitate adſcripta indicatam, ſic $dR = R - R1$, $dQ = Q - Q1$; $dR1 = R1 - R2$, & ſic de reliquis. Inventis ita valoribus ponderum A, L, M, N, O, &c. iidem ſubſtituendi ſunt in æqualitate A. DE = L. FE + M. GE + N. HE + O. IE + P. KE, atque ſic per ordinatas FE, GE, HE, IE, KE, &c. & alias datas quantitates aſſignari poteſt ubique ordinata DE curvæ CDA per data puncta A, 1A, 2A, &c. transeuntis. Quod erat inveniendum.

Coroll. I. Curva genita CDA ejusdem ſemper eſt gradus cum curva gradus altiſſimi ex generatricibus CFL, CGM, CHN, &c.

Coroll. II. Area genitæ CDA ex areis generatricium ſemper inveniri poteſt. Eſt enim generaliter A. CDE = L. CFE + M. CGE + N. CHE + O. CIE + P. CKE. Unde, ſi hæ areæ curvarum generatricium ſint quadrabiles, etiam figura genita quadrabilis erit.

Coroll. III. Si curvæ genitrices ſunt generis parabolici, earum areæ ſunt quadrabiles, ac proinde etiam genita quadrabilis exiſtet: cum igitur pro generatricibus curvæ quæcunque eligi poſſint, atque adeò curvæ quadrabiles, inde clarum eſt omnes curvas per appropinquationem quadrabiles eſſe, tot enim, quot libuerit, in ea poſſunt puncta aſſumi, & per ea curva quadrabilis duci, cujus area curvæ propoſitæ areæ quam proxime æqualis erit.

Coroll. IV. Imò omnis curva per appropinquationem rectificari poteſt. Curvarum enim rectificatio ad quadraturas reducitur, quæ per præcedens corollarium, per appropinquationem, ſemper habentur. Idem intelligendum de centris gravitatis figurarum & ſolidorum, tum etiam de hisce ſolidis ipſis aliisque. Hæc enim omnia quam proxime vero haberi queunt.

Coroll. V. Ex hisce etiam cognoſcitur *maximus* punctorum datorum numerus, per quæ curva dati gradus duci poteſt. Hic enim numerus *eſt ſemiſſis producti ex exponente gradus curvæ in eundem exponentem ternario auctum.* Hoc modo ſcimus lineam primi gradus, ſeu rectam, non niſi per 2. puncta, poſitione ut libet data, duci poſſe; eſt enim

enim $2 = \frac{1.4}{2}$, sectionem conicam per quinque, nam $5 = \frac{2.5}{2}$. Curvam tertii gradus per novem, nam $9 = \frac{3.6}{2}$.

Fig. 156. *Aliter*. Loco generatricium assumi possunt lineæ rectæ AF, 1A1F, 2A2F, &c. inter se parallelæ, & quemlibet angulum cum axe CA continentes atque, necessitate ita postulante, supra axem producendæ, ut schema ostendit. Sint ergo puncta, per quæ curva duci debet B, 1B, 2B, &c. C. Per B agatur BN æquidistans AC, & ex singulis punctis datis B agantur perpendicula BA, 1B1A, &c. producenda sursum in 1O, 2O, &c. deinde ducta ubilibet recta MG parallela AB obliquas AF secante in punctis, G, H, I, K, L, &c. & axem AC in E. Quibus peractis fiat ubilibet $MD = G.EG + H.EG.EH + I.EG.EH.EI + K.EG.EH.EI.EK - L.EG \ldots EL$, in qua valores assumtarum G, H, I, K, L sunt definiendi sequenti ratione. Si punctum E cadit in A, linea EG evanescet, & reliquæ HE, IE, &c. supra axem erunt, verum quoniam EG jam in punctum A contracta nullescit, & in omnia reliqua membra influit, erit MD in BA nulla. Sin vero E cadit in punctum 1A, fiet EG tunc $= 1A1P$, & $EH = 0$, adeoque eo casu, quo MD fit 1O1B, erit $1O1B = G.1A1P$, seu $G = 1O1B : 1A1P$. dicatur $G1 = 2O2B : 2A2P$, $G2 = 3O3B : 3A3P$, &c. Porrò si punctum E cadit in 2A, fiet $MD = 2O2B$, & $EG = 2A2P$, $HE = 2A2Q$, & $IE = 0$, ergo $2O2B = G.2A2P + H.2A2P.2A2Q$, $3O3B = G.3A3P + H.3A3P.3A3Q + I.3A3P.3A3Q.3A3R$, atque ita deinceps; ex quibus omnibus sequens resultat tabella, postquam scilicet singulæ æquationes ad respectivas AP applicatæ fuerunt:

$$G (= 1O1B : 1A1P) = G$$
$$G1 (= 2O2B : 2A2P) = G + H.2A2Q$$
$$G2 (= 3O3B : 3A3P) = G + H.3A3Q + I.3A3Q.3A3R$$
$$G3 (= 4O4B : 4A4P) = G + H.4A4Q + I.4A4Q.4A4R + K.4A4Q.4A4R.4A4S$$
&c. &c. &c. &c.

Si porro prima à secunda, secunda à tertia, tertia à quarta, atque ita porro subducantur, erit $G1 - G = H.2A2Q$; $G2 - G1 = H.3A3R + I.3A3Q.3A3R$; &c. Et ponendo dG, $dG1$, $dG2$ pro $G1 - G$, $G2 - G1$, $G3 - G2$, &c. fient $H = dG : 2A2Q$; $H1 = dG1 : 3A3R$; $H2 = dG2 : 4A4S$; &c. & $I = dH : 3A3Q$; $I1 = dH1 : 4A4R$; &c. ac denique $K = dI = 4A4Q$. Et sic porrò; nam ex hisce continuationis lex satis patet. Inventi valores magnitudinum G, H, I, K, &c.

K, &c. in superiori æqualitate MD = G. GE + H. GE. HE + I. GE. HE. IE + K. GE. HE. IE. KE, &c. substituantur, dabitur sic ipsa MD in lineis GE, HE, IE, KE, LE, &c. & magnitudinibus datis, atque adeò punctum D in curva quæsita. Quod erat secundo inveniendum.

Coroll. I. Si rectæ AF, 1A1F, &c. angulo semirecto ad AC inclinatæ sunt, provenit casus secundus hujus problematis ab Illustr. Newtono solutus Lemm. V. Lib. III. Princ. Phil. Nat. in ejus solutione enim a, b, c, d, e, f, &c. idem prorsus sunt cum G, H, I, K, L, &c.

Coroll. II. Iisdem positis, quæ in præcedenti corollario, si intervalla singula A1A, 1A2A, 2A3A, &c. sint æqualia & dicantur p, & differentiæ ordinatæ AB, prima, secunda, tertia, &c. erunt $G = \delta : p$; $H = \delta 2 : 2.pp$; $I = \delta 3 : 2.3.p^3$, &c. quod congruit solutioni Newtonianæ primi casus in Lemmate citato.

Coroll. III. Si insuper AE vel EG dicatur z, DE, u, & AB $= y$, erit $u = y - Gz - H.(zz - pz) - I.(z^3 - 3pzz + 2ppz) - K.(z^4 - 6pz^3 + 11ppzz - 6p^3z) -$ &c. & area ABDE $= yz - \frac{1}{2}Gzz - H.(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}pzz) - I.(\frac{1}{4}z^4 - pz^3 + ppzz) - K.(\frac{1}{5}z^5 - \frac{3}{2}pz^4 + \frac{11}{3}ppz^3 - 3p^3zz) -$ &c. Hoc loco enim y est constans, & z ac u sunt variabiles. Hinc, si p sunt indefinite parvæ, erunt singulæ $p = dz$, & ipsæ δ, $\delta 2$, $\delta 3$, &c. hoc casu fient dy, $-ddy$, $+dddy$, $-d^4y$, &c. & in præcedenti serie membra omnia, quæ p continent, evanescent, totaque series abibit in $yz - \frac{1}{2}Gzz - \frac{1}{3}Hz^3 - \frac{1}{4}Iz^4 +$ &c. $=$ areæ ABDE, atqui sunt $G = \frac{dy}{dz}$, $H = \frac{-ddy}{2.dz^2}$, $I = \frac{+dddy}{2.3.dz^3}$; &c. ergo area ABDE $= yz - \frac{zzdy}{2dz} + \frac{z^3ddy}{2.3dz^2} + \frac{z^4dddy}{2.3.4dz^3} +$ &c. Quæ est ipsissima series universalis pro quadraturis, quam Celeb. Joh. Bernoulli in Actis Lips. 1694. exhibuit, quamque haud dubie ex alio fundamento elicuit.

Cæterum, loco rectarum transversalium AF, 1A1F, curvæ quæcunque parallelæ assumi possunt, vel una eademque curva axem in linea CF, verticem verò successive in punctis diversis ipsius CF habens.

X. *De velocitate liquorum per foramina quæcunque ex vasis erumpentium.* In Propositione XXXII. Lib. II. demonstravimus quidem post Clar. Varignonium aliosque celeritates liquorum ex vasis effluentium in subduplicata esse ratione altitudinis liquorum supra foramina vasis aquam emittentia, sed non demonstravimus, nec quisquam alius quod sciam, *aquam aliumve liquorem ea velocitate ex vase erumpere,*

pere, eadem conſtanter manente aquæ altitudine ſupra foramen, *quam aquæ guttula orificio proxima acquirere poteſt caſu accelerato ex altitudine liquoris ſupra orificium.* Nam hoc principium, inſtar hypotheſeos, ſuppoſuerunt Torricellius, Borellus, Gulielminus aliique, atque exinde recte deduxerunt, aquas eodem tempore per foramina æqualia effluentes, ſeu etiam celeritates effluxus in ſubduplicata eſſe ratione altitudinis aquarum ſupra foramina. Sed hæc ſuppoſitio tantæ non videtur evidentiæ, ut nulla demonſtratione egeat; nam præterquam quod Celeb. Newtonus, Propoſ. XXXVII. Lib. II. Princ. Math. primæ editionis, demonſtrare conatur, aquam ea cum velocitate erumpere ex vaſis, quâ motu ſuo in altum converſo ad dimidiam altitudinem aquæ ſupra foramen evehi poſſit, ſed quam propoſitionem in noviſſimis editionibus omiſit. Torricellius ſuppoſitioni ſuæ, non propter evidentiam, ſed potius propter conſenſum ejus, cum experientia acquievit.

Fig. 157. Eſto vas quodcunque BFC aquæ vel cujusvis alius liquoris homogenei plenum, F foramen ejus, FA altitudo aquæ ſupra foramen F. Concipio columnam aqueam *Ap* per temporis tractum indefinite parvum dt, uniformiter urgere particulam aquæ infiniteſimam *p*F, eo ſcilicet tempusculo, quo hæc particula, quam *p* nominabimus, proprio pondere ſeu gravitate, longitudinem F*f* particulæ *p*F ſeu *p* æqualem acquirere poteſt celeritatis gradum infiniteſimum u. Et ſint g ſignum gravitatis naturalis, qua ſingula corpora apud nos agitantur, A altitudinis aquæ AF, & denique V velocitatis, qua per foramen F erumpit; M maſſæ tempusculo dt effluentis, ac m maſſa particulæ *p*F. Hisce poſitis per §. 31. pondus columnæ *Ap* vel AF exponetur per $A.F.g$; & pondus elementi *p*F per $p.F.g$. Sed hæc facta ſunt ut ſolicitationes acceleratrices motus $M.V$ & $m.u$, tempusculo dt generantes; idcirco habemus (§. 130.) $A.F.g.dt : p.F.gdt = M.V : m.u$, id eſt, $A.g : p.q = M.V : m.u$; atqui $M : m = \frac{1}{2}Vdt : \frac{1}{2}udt = V : u$ ex natura motus accelerati in fluidis, ergo $Ag : pg = VV : uu$, atqui $2pg$ (§. 150.) $= uu$, ergo $VV = 2.A.g$; hoc, eſt velocitas V, quâcum aqua per foramen F erumpit (§. 150.) ea eſt, quam particula infiniteſima aquæ *p*F acquirere poſſet motu naturaliter accelerato per deſcenſum ex altitudine A ſeu AF. Quod erat demonſtrandum.

Atque hinc jam tutiſſime deducitur, *quantitates aquæ per idem vel æqualia foramina effluentis, vel etiam celeritates ejus, eſſe in ſubduplicata proportione altitudinum.*

XI. Ca-

XI. Capite XX. Lib. II. exposui generalem theoriam gravitatis variabilis, cum scilicet corpora solicitantur secundum directiones quascunque uniformi tamen lege procedentes, propterea consideravi has directiones contingere curvam quamlibet, vel, quod eodem recidit, suppoſui easdem directiones curvæ cuicunque pro libitu assumtæ normales esse, ad id ut lex continuitatis in hisce observaretur. Sed, quia solutio problematis in propositione LXXVI. evoluti ea est, in quam primum incidi, ideo, quod plerumque accidere solet, ejus analysis geometrica paulo longior atque difficilior evasit. Verùm postea quam hoc opusculum jam sub prælo esset, faciliorem paulo &, ni fallor, elegantiorem ejusdem problematis nactus sum solutionem, quam cum analysi ipsa vel potius demonstratione cum Benevolo Lectore hoc loco communicare placet. Esto curva quæcunque AMΩ mobili describenda, ac solicitationum gravitatis MX directiones MN ubique normales sint curvæ cuicunque AYy descriptæ evolutione BN, quam proinde directiones MN ubique contingent. Tangenti AB sursum productæ in Δ curvæ BN in B, agatur per A perpendicularis indefinita CAV, & in quadrante CKΦ centro A & radio quocunque descripto ductis AI & AK radiis cum AC angulos CAI, CAK continentibus æquales angulis BAα, NMP, in quibus lineæ AB, MN curvæ AMΩ occurrunt, agantur rectæ Ia, KQ parallelæ AC & producantur usque ad occursum in d & L cum hyperbola OdT inter asymptotas ΔA, AV descripta. Circa axem verò AB descripta sit curva quædam DE hâc lege, ut abscissa ejus AF æquet ubique homologam interceptam YM inter curvam AY & datam curvam AM mobili describendam, ordinatæ verò FE ordinatam ΔO in hyperbola abscissa ejus AΔ posita = MN. Et, si mobile incedat in medio resistente, cujus resistentiæ sint in composita ratione densitatum & duplicatæ celeritatum, fiat in hyperbola quadrilineum dDST vel dDΣΘ æquale superficiei cylindricæ, cujus basis arcus AM curvæ describendæ, quæ cylindrica superficies oritur, si in singulis punctis arcus AM ad ejus planum perpendiculares erigantur proportionales densitati medii D, in respectivis curvæ punctis, inservietque quadrilineum dS descensui mobilis ex A in M, alterumque dΣ ascensui ejusdem mobilis ex M in A. Hisce præparatis, Fig. 158.

Dico velocitatem mobili in M *acquisitam post descensum per arcum* AM *fore ad celeritatem initialem in* A *in composita ratione, ex hisce tribus* Aa *ad* AQ, *seu reciproca sinus anguli* NMP *ad sinum anguli* BAα, *ex* Aa *ad* AG, *seu abscissæ minoris ad majorem quadrilinei hyper-*

bolici aGHd *æqualis areæ* DEFA, *ac denique ratione* AD *ad* AS *vel* AΣ.

Demonstr. 1°. Exponant, sicut in §. 607. MR vel *m*R radium evolutæ curvæ AM in puncto M vel *m*. & MX solicitationem gravitatis mobile secundum MN urgentem, & agatur XZ parallela tangenti curvæ MP in puncto M, eruntque triangula AKQ, MXZ & Mμ*m* similia, posteaquam centro *v* arculus *m*μ descriptus fuerit, cum in triangulis rectangulis AKQ, MXZ, angulus AKQ alternus ipsius KAC (constr.) æqualis sit angulo PMX, vel ejus alterno MXZ; hinc ZX : MZ = KQ : AQ.

2°. Ducta per *m* alia tangente *mp*, anguli recti RMP & R*mp* præbent *nmp* + *nm*R = NMP + NMR, & KA*k* (= *nmp* − NMP) = NMR − *nm*R = Rωv − *nm*R, Rωv + NMR = Mv*m* − MR*m*. Ergo (§. 129.) $\frac{Kk}{KA}$ (vel propter triangulorum AKQ & K*k*κ similitudinem) $\frac{Qq}{KQ} = \frac{m\mu}{mv} - \frac{Mm}{RM}$, atque adeò $\frac{Mm}{MR} = \frac{m\mu}{MN} - \frac{Qq}{KQ}$. Ducantur rationes M*m* : MR; *m*μ : MN, & Q*q* : KQ in sequentes, quæ (num. 1. hujus) omnes inter se æquales sunt ZX : MZ; Mμ : *m*μ & KQ : AQ, prima in primam, secunda in secundam, &c. fietque ZX . M*m* : MZ . MR = Mμ : MN, − Q*q* : AQ. Hæ verò postremæ rationes ducantur etiam pari ordine in hæc sequentia rectangula *Aa*. *ad*; AΔ. ΔO; AQ. QL, quæ in hyperbola omnia inter se æquantur, eritque *Aa*. *ad*. ZX. M*m* : MZ. MR = ΔO. Mμ − QL. Q*q* (constr.) = FE. F*f* − QL. Q*q*.

3°. Significent porrò AV celeritatem in M acquisitam, V*u* ejus elementum, R verò resistentiam medii in M & D, ut antea ejus densitatem; & hisce positis (§. 607. num. 11.) habetur, AV. V*u* = ZX. M*m* ∓ R. M*m*, seu ducendo unam partem in *Aa*. *ad*, alteramque in AV. VW, reperietur *Aa*. *ad*. ZX. M*m* ∓ *Aa*. *ad*. R. M*m* = AV^2. WV. V*u*. Verùm, cum (secundùm hypothesin) R sit ut D. AV^2, fiat *Aa*. *ad*. R = D. AV^2; eritque AV^2. WV. V*u* = *Aa*. *ad*. ZX. M*m* ∓ D. AV^2. M*m*, quia verò (§. 154.) AV^2 = MZ. MR, applicando præcedentem æquationem ad hanc alteram, scilicet membra ejus AV^2 continentia ad hoc quadratum AV^2, & reliquum ad MZ. MR, fiet WV. V*u* = *Aa*. *ad*. ZX. M*m* : MZ. MR, ∓ D. M*m*. Atqui num. 2. in fine reperimus jam *Aa*. *ad*. ZX. M*m* : MZ. MR = FE. F*f* − QL. Q*q*; ergo WV. V*u* = FE. F*f* − QL. Q*q* ∓ D. M*m* (vel, quia D. M*m* per constr. æquatur vel S*s*. ST ut in descensu, aut − ΣΘ. Σσ, ut in casu ascensionis, cum quadrilinea *d*S & *d*Σ singula æquentur, (constr.) omnibus D, M*m*, quæ in arcu curvæ describendæ AM continentur)

WV.

$WV.Vu = FE.Ff - QL.Qq - ST.Ss$ (vel $\Sigma\Theta.\Sigma\sigma$). Unde, cum hoc idem eveniat respectu cujusvis alius curvæ elementi, erit $dDVW = AFED - aQLd = dDST$ ($dD\Sigma\Theta$), vel, quia (constr.) quadrilineum $aGHd$ æquatur areæ $AFED$, $= aGHd - aQLd - dDST$ ($dD\Sigma\Theta$). Hæc enim quadrilinea omnia evanescunt cum punctum M cadit in A, vel punctum K in I. Idcirco ratio AV ad AD (§§. 605, 606.) componetur ex directa aA ad GA & duabus reciprocis rationum QA ad aA, & AS vel $A\Sigma$ ad AD, ac propterea velocitas acquisita in M est ad velocitatem in A seu $AV : AD = aA . aA . AD : GA . QA . SA$ (ΣA). Quod erat demonstrandum.

Iisdem positis *erit solicitatio gravitatis* MX *secundum* MN *ad solicitationem* AX *in puncto* A *secundum* AB *in composita ratione ex directa duplicata ratione* AV *ad* AD, *& inversa rectanguli ex* MR *in sinum anguli* NMP *ad rectangulum ex* AR *in sinum anguli* BAA, *id est*, $MX : AX = (AV^2 : MR . AQ) : (AD^2 : AR . Aa)$.

Nam, quia (§. 154.) $AV^2 = MZ . MR$, vel $AK . AV^2 = AK . MZ . MR$ (vel propter triangula similia AKQ & MXZ rectangulum $AQ . MX$ æquatur rec-lo $AK . MZ$) $= AQ . MX . MR$, & $AK . AD^2 = Aa . AX . AR$, erit omnino $AQ . MR . MX : Aa . AR . AX = AV^2 : AD^2$, atque adeo $MX : AX = (AV^2 : MR . AQ) : (AD^2 : AR . Aa)$. Idcirco erit etiam $MX : AX = Aa^5 . AD^2 . AR : AQ^3 . AG^2 . AS^2 (A\Sigma^2) . MR$. Qui est canon generalis, quoties resistentiæ sunt ut D in AV^2, sin verò hæ resistentiæ sint generaliores, ut $D . AV^h$, existente h numero quolibet rationali, ratio AD ad AS obtinebitur methodo jam §. 622. exposita. In vacuo fit hæc ratio AD ad AS æqualitatis, eoque casu erit $MX : AX = Aa^5 . AR : AQ^3 . AG^2 . MR$.

XII. *Iisdem adhuc positis* D *est generaliter, ut* $(3KQ : 2AQ . MR) - (QK : 2AK . MN) - (P : 2MX) - (R\Gamma : 2MR^2)$ *& resistentia ad gravitatem, seu* $\pm R : MX = (3KQ : 2AK) - (R\Gamma . AQ : 2AK . MR) - (KQ . AQ . MR : 2AK^2 . MN) - (P . AQ . MR : 2AK . MX)$. In quibus formulis $R\Gamma$ significat radium osculi in puncto R curvæ RR, cujus evolutione curva data AM describitur, & P significat exponentem rationis, quam elementum magnitudinis MX gravitatis in M secundum MN, habet ad elementum Mm curvæ mobili describendæ. Fig. 158.

Demonstrationem horum duorum canonum non addo, cum ea ad præcedentium imitationem & normam facile haberi queat. Sed, ut eorum consensus cum aliorum inventis appareat, eos casibus particularibus nonnullis Celeberrimorum virorum Newtoni & Joh. Bernoullii applicabimus.

1°. Sit curva AM ipſe circulus ΦKC mobili deſcribendus à gravitate uniformiter agente ſecundum directiones ipſi AQ parallelas, quo caſu P, & Rr evaneſcunt, MN fit infinita, & MR $=$ AK, propterea erit D, ut 3KQ : 2AQ. AK, hoc eſt, ſicut tangens anguli KAQ & reſiſtentia ad gravitatem, ut 3KQ ad 2AK, plane ut laudatiſſimi Autores invenerunt.

2°. Si loco curvæ AM ſumatur curva, in quâ directiones gravitatis uniformis MN parallelæ ſint inter ſe, erit D ut (3KQ : 2AQ. MR) $-$ (Rr : 2MR^2), & $\frac{\pm R}{MX} =$ (3KQ : 2AK) $-$(Rr.AQ : 2AK.MR). Nam, quia MN in hisce ſuppoſitionibus ſunt infinitæ, ſingulæ fractiones, in quarum denominatoribus hæ MN reperiuntur, evaneſcent. Vocentur itaque ordinatæ curvæ datæ y, ſecundum quas gravitas uniformis operatur, abſciſſæ reſpectivæ x, radius curvaturæ in M ſeu MR $= r$, exiſtentibus $M\mu = dy$ & $m\mu = dx$, poſitis ſcilicet omnibus MN inter ſe parallelis, ratio vero Rr : MR $= dr : ds$, facto elemento curvæ $Mm = ds$. Adeoque in hisce ſymbolis erit D ut $\frac{3dy}{2rdx} - \frac{dr}{2rds}$, & $\frac{\pm R}{G} = \frac{3dy}{2ds} - \frac{drdx}{2ds^2}$. Sed exiſtentibus dx conſtantibus erit $r = ds^3 : dxddy$, & $dr = \frac{3dsdy}{dx} - \frac{ds^3dddy}{dxddy^2}$, quibus valoribus in formulis ſubſtitutis reſultat D, ut $dddy : 2dsddy$; & $\pm$ R : G $= dsdddy : 2ddy^2$ qui duo poſtremi canones ad amuſſim conſpirant cum formulis Celeb. Newtoni Propoſ. X. Lib. II. Edit. noviſſimæ Princip. Phil. Nat. Nam, ſi in hisce noſtris loco dy, ds, ddy & $dddy$ ordine ſubſtituantur Qo, $o\sqrt{1+QQ}$, $2Roo$, & $6So^3$, quæ in expreſſionibus Newtonianis elementis illis æqualia ſunt, erit omninò D, ut $\frac{3S}{2R\sqrt{1+QQ}}$, & $\frac{\pm \text{Res.}}{\text{Grav.}} = \frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Prorſus ut habet Newtonus loco citato.

Fig. 38. XIII. In demonſtratione Propoſ. XXV. Lib. I. §. 167. irrepſit error, dum elementum ordinatæ ΛE tanquam poſitivum ſpectavimus, idcirco in progreſſu demonſtrationis illius ſigna ipſius Λξ ubique ſunt invertenda, quo facto invenietur $G = \frac{1}{DE^3} + \frac{(-DE.E\Delta.MG^2 + 2.E\Omega.E\Delta.MG^2 + DE.E\Omega.AL^2).nn.\Delta E}{E\Omega.AG^2.DE^5}$. Ponendoque HE $= A \mp e$, atque adeo $\Delta E = \Lambda E =$ HE : B, & E$\Omega =$ B.HE : B$^2 -$ C. HE,

HE, ubi $B = dA : dz$; $C = dB : dz$ & $DE = z$, item $AL = r$, ac $rr - ee = ss$, hæc appoſita formula factis in ea ſubſtitutionibus valorum linearum DE, EΔ, EΩ, prodibit æquatio circa finem §. 169. exhibita. Verum, quia nonnihil elegantior, ut mihi videtur, ſolutio ejusdem problematis ſeſe mihi obtulit, eam hoc loco apponere placet. Circa rectam AC, tanquam axem, deſcripta ſit curva quæcunque ΠB, radioque etiam pro lubitu ſumto AC, atque adeo centro C circulus AG, cujus tangens in A erit linea recta indefinita OAΠ, ac per quodlibet punctum B curvæ ΠB ductis tangente BV ordinataque BR producenda usque ad occurſum ejus cum circulo in G, dividatur ſubtangens RV in S, ut RS ſit ad totam RV ut 1 ad numerum quemcumque rationalem n, ac jungatur SG, tum ducatur per A recta AL cum CAa continens angulum PAQ æqualem, ubique reſpectivo angulo GSR, atque hoc idem ſi factum fuerit cum tangente & ſubtangente ad punctum curvæ Π, reſultet recta Aλ, quemadmodum in ordine ad punctum B curvæ ΠB provenit AL. Exponat AI celeritatem mobilis curvam AN deſcribentis in puncto A exiſtente centro ſolicitationum centralium D, per punctum I ducta indefinita IK parallela AC, ſumatur in Aλ ſegmentum $A\alpha = A\Pi$ & per α agatur αK parallela AI, rectæ IK conveniens in K, per quod punctum deſcripta intelligatur hyperbola KM inter aſymptotas Aa & AI. Porro in AL ſumta AQ æquali reſpectivæ ordinatæ RB curvæ ΠB ducatur QP parallela AΠ, quæ producta occurrat hyperbolæ in M, ac denique in ordinata MO per hoc punctum M ad aſymptotam AO ducta ac deorſum producta, fiat OF æqualis differentiæ ordinatarum AΠ, RB & punctum F erit in ſcala celeritatum mobilis in curva altera AN incedentis. Hæc autem curva AN ita comparata eſt, ut radii vectores $AD = A\Pi$, & $ND = RB$, per ejus terminos ducti, angulum ADN contineat, qui ſit ad angulum in circulo ACG, ut 1 ad numerum qui antea n. Eſto Nq curvæ AN tangens in N, ſuper quam cadat perpendicularis Dq, ac centro D deſcripti ſint arcus EN arculusque np, poſitoque in fig. 159. angulo GCg ad ang. $NDn = n : 1$ agatur gb parallela GB. Fig. 160.

Demonſtr. Quia angulus infiniteſimus NDn eſt ad GCg ut 1 ad n, ſeu (conſtr.) $= RS : RV$, & (§. 129.) arculus pn ad Gg in compoſita ratione anguli NDn ad angulum GCq, vel 1 ad n, ſeu RS ad RV, & radii DN vel ordinatæ RB ad radium GC, erit $pn : Gg = RS . RB : GC . RV$; atqui eſt $Gg : b\beta (= GC : GR) = GC . RV : GR . RV$;

RV; & $b\beta : Np$ (vel $B\beta$) $= RV : RB = GR.RV : GR.RB$. Ergo ex æquo $pn : Np = RS.RB : GR.RB = RS : GR$, vel (quia PAQ angulo GSR æqualis factus eſt) $= AP : PQ$, eſt verò etiam $pn : Np = Dq : Nq$, ergo $AP : PQ = Dq : Nq$. hinc, quia AQ (conſtr.) $= DN$, erit AP vel $MO = Dq$, & $Aa = IK = D\delta$. Unde, cum (§. 155.) Dq ſit ad $D\delta$, ut velocitas in A repræſentata per AI ad velocitatem in N, & in hyperbola KM, ordinata MO ſit ad KI ut AI ad AO, hæc AO omnino exponit celeritatem in N, & cum OF vel AE (conſtr.) æquet differentiam ordinatarum $A\Pi$, RB, id eſt, ordinatarum AD, ND, in utraque figura erunt æquales ipſæ AE, atque adeo curva HIF erit ſcala celeritatum mobilis in curva AN deſcendentis vel aſcendentis, adeoque ducta ejus normali ET exponet ſubnormalis ET (§. 134.) ſolicitationem gravitatis ſecundum ND in curvæ AN puncto N. Quod erat demonſtrandum.

Coroll. Si D fuerit origo abſciſſarum DR, atque hæ abſciſſæ dicantur A, ordinatæ reſpectivæ RB, z, radius AC, r, diſtantia originis abſciſſarum curvæ ΠB à centro circuli AH, ſeu DC, e; erit $CR = e + A$, ſi punctum D cadit inter C & R, ut in figura, vel $e = A$, ſi inter A & R, ac denique $A - e$, ſi punctum D cadit extra radium AC; ponamus ergo $CR = e \pm A$, eritque $GR = \sqrt{(ss \mp 2eA - A^2)}$ ubi $ss = rr - ee$, dicatur pariter elementum abſciſſæ DR ſeu $Rr = B.dz$, eritque $RV = Bz$, & $RS = \frac{1}{n} Bz$, ſubſtitutiſque omnibus hisce ſymbolis in præcedenti constructione, reperietur $AO^2 = FE^2 = \frac{1}{zz} + \frac{(ss \mp 2eA - A^2).nn}{B^2 z^4}$, & ex hac elicietur ipſiſſima formula circa finem §. 169. Patet ergo hanc poſteriorem cum priori egregie conſentire.

Hinc, ſi puncta D, C coincidunt, curvaque ΠB eſt hyperbola inter aſymptotas orthogonales in C convenientes, quarum AC una, erit in curvæ AN puncto N gravitas, ſecundum ND, ut $\frac{1 - nn}{z^3}$ & ipſa curva AN erit ea, cujus Newtonus & Joh. Bernoullius constructiones diverſas in ſpeciem, re vera tamen conſpirantes, exhibuerunt, hic in Act. Lipſ. 1713. pag. 129. ille verò Propoſ. XLIV. Lib. I. Princ. Phil. Nat., ut ſupra pag. 80. indicavimus. Hæc curva AN duas aſymptotas habet à centro virium D æqualiter diſtantes; & quidem diſtantia quælibet eſſe debet $\frac{1}{n}$ radii AC in fig. 159, & 160. vel $\frac{1}{n}$ DP

in

in fig. 37. ac proinde altera aſymptota per centrum ire non poteſt, ut per inadvertentiam pag. 81. ſcripſeram. Reliquæ proprietates ejusdem curvæ AN fig. 160. à Bernoullio commemoratæ nullo negotio ex noſtris conſtructionibus eliciuntur, propterea iisdem fuſius explicandis ſuperſedeo.

Cæterum, quæ pag. 80. num. 4. habetur exceptio ipſius caſus, quo p eſt -1, prorſus inutilis eſt, & propoſitio illic memorata absque hac exceptione generaliter obtinet, ſi e vel s ſunt o, ſed hæc exceptio tantum valet in contradictoria ejusdem propoſitionis, ſcilicet non niſi hoc caſu $p = -$, duobusque reliquis $p = +1$, ac $= -2$ exceptis, curvam AN unquam fieri poſſe algebraicam in hypotheſi quod G ut z^p, neutra ex duabus e vel s evaneſcente.

Conſtructio præcedens adhuc elegantior reddi poteſt ducendo RW parallelam GS, & demittendo ſuper eam ex puncto B perpendicularem BW, tum ductis per B & Π parallelis axi AC, ut $B\Phi$ & $\Pi\Theta$, ſumendoque in priore ſegmentum $\Delta\Phi$ æquale perpendiculo BW, orieturque curva $\Theta\Phi$, in cujus ordinatis, ſi $\Pi\pi = AI$ fuerit ad $\Delta\Omega$ ut $\Phi\Delta$ ad $\Theta\Pi$, ita ut curva $\pi\Omega$ reciproca fuerit alterius $\Theta\Phi$. Hæc reciproca $\pi\Omega$ erit etiam nunc ſcala celeritatum, atque adeo eadem cum curva HIF, ſed ad axem $A\Pi$ relata, loco axis HE, ad quem altera HIF exſtructa eſt. In hac conſtructione neque lineis Al neque hyperbola KM opus eſt, atque adeo nonnihil ſimplicior facta eſt.

FINIS.

EMENDANDA.

CUm, propter absentiam à Typographica officina & locorum intervallum typorum correctioni egomet attendere non potuerim, quod in hujus generis operibus vitari vix potest, accidit, ut nonnulla sphalmata in hanc editionem irrepserint, quorum ea, quæ sensum turbare possent, ut calamo saltem corrigere velit Benev. Lector etiam atque etiam rogo priusquam Opusculi lectionem incipiat. Reliquos vero minoris momenti errores, qui forte contra dictionis puritatem mihi materiis ipsis magis attento exciderunt, Lector ipse facile emendabit me non monente, eosque proinde ejus humanitati corrigendos relinquo.

Pag. 9. lin. 23. Molis lege Motus.
Pag. 10. lin. 9. leg. rectæ AE à solicitationibus &c.
Pag. 16. lin. 13. PR leg PA.
Pag. 19. lin. 31. leg. trahente.
Pag. 26. lin. 4. BF leg. BT.
Pag. 31. l. 15. leg. superficiem componentes in *ty* incurvatam.
Pag. 39. l. 32. minor. leg. major. Ibid. l. ult. leg. $A = aa : \sqrt{aa+mm}$ fiet $\sqrt{aa+mm} = a$.
Pag. 40. lin. 2. leg. $x^{\alpha}y = 1$. lin. 4. leg. $ydx = x^{-\alpha}dx$. Et lin. 25. post *tenacitatem fili in* A, adde, *per* A.
Pag. 43. l. 19. A : BC. leg. A : B*b*. lin. 24. $\int bf - \int Mm$ leg. $\int bf = \int Mm$. Ibid. lin. 25. $Zy - N\beta$, leg. $Zz - N\beta$.
Pag. 45. lin. 4. $m^3dx = aamdm$ leg. $m^3dx = -aamdm$.
Pag. 46. lin. 2. $-anndm$ leg. $-nndm$.
Pag. 55. l. 2. Si lege Sic. Pag. 58. l. 9. $N\beta.Ee$, leg. $N\alpha.Ee$.
Pag. 66. lin. 8. αL leg. αD. Ibid. l. 23. ang. FA*f* leg. FD*f*.
Pag. 71. lin. 9. Secundi leg. Primi. Pag. 75. l. 28. leg. æquidistantes.
Pag. 78. l. 15. $+AB^3z$ leg. AB^2z. Pag. 80. l. penult. MAD leg. MAL.
Pag. 85. l. 22. leg. Prop. 24. Pag. 94. l. 28. E*e* leg. E*b*.
Pag. 98. l. 23. leg. supra solicitationem in B.
Pag. 110. l. 19. l. *Corporum*.
Pag. 114. l. 7. leg. *quæ erat communis ipsorum centri gravitatis ante occursum.*
Pag. 119. Propos. XLII, scrib. in margine Fig. 53.
Pag. 121. l. 16. A+X+B. leg. A+X+Y+B.
Ibid. l. 24. leg. quam idem B à corpore A celeritate AD ipsum immediate impellente, accepisset.
Pag. 132. l. 4. EF leg. ET. Pag. 140. l. 16. leg gravitationis.
Pag. 145. l. 7. leg. Dani. Pag. 159. l. 20. leg. amplectenti.
Pag. 157. Prop. XIII. scrib. ad marg. Fig. 66.
Pag. 161. l. 20. in fin. QN, leg. PN. & lin. 28. leg. centro P.
Pag. 167. l. 23, 24 & 28. NE, leg. DE. Pag. 179. l. ult. quia, leg. cum.
Pag. 184. l. 12. dele, hians, l. 13. subtili, leg. subdiali seu externo
Ibid. l. 19. ad margines, leg. in circumferentia ejus.
Ibid. l. 37. marginum, leg. arginum.
Pag 190. l. 2. densitatis, leg. potestatis. Ibid. l. 19. permuta EF & GF.
Pag. 191. l. 13. dele posteriorem, & lin. 14. dele vel.
Pag. 195. lin. 27. ut densitates, lege proportionales.
Pag. 197. l. 3. lege, altitudini. Pag. 200. l. 26, $-\frac{2}{3}$ leg. $-\frac{3}{2}$.
Pag. 201. l. 6. leg. Quadrilinea, & lin. 7. leg. æqualia.
Pag. ead. l. 26. leg. Nam quia OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. proportionales sunt rec-lis OA. AC, O1A1C, O2A2C, &c. ideo hæc rec-la erunt in progressione arithmetica, atque adeo &c. sequendo ut habetur linea 30. post, atque adeo &c.
Pag. 203. l. pen. & leg. ut. Pag. 205. l. 5. leg. altitudo.
Pag. 209. l. 16. leg. $d\delta$. Pag. 213. l. 14. leg. constructionem, *ef*, l. 14. demonstratam.
Pag. 218. l. 11. leg. FT. Pag. 219. l. 3. leg. datam rationem habebunt, quam &c.
Pag. 224. l. 27. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} - \frac{2}{3}x\sqrt{x})$ leg. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} : \frac{2}{3}x\sqrt{x})$. Pag. 225. l. 28. leg. $m:1$.
Pag. 228. l 3. dele quam. Pag. 230. l. 21. ABC leg. ADC.
Pag. 233. l. 21. leg. inclusum. Pag. 241. l. 13. leg. ELV. l. 17. leg. $LV = (aat - t^3) : aa$.
Pag. 242. l. 18. leg. rectæ AR. Pag. 244. l. 32. RM, leg. RA.
Pag. 245. l. 7. leg. *si præcedente modo basi* BR, *modo vertice* E *in directione* AE *id feratur.*
Pag. 248. l. 3. à fine, lineæ FF, lege Circuli FF.
Pag. 250. l. 28. leg. = constanti. Pag. 251. l. 18. leg.

EMENDANDA.

leg. diametro. Ibid. l. 29. LS leg. Lſ. Pag. 269. l. 9. init. leg. yv; $+ effdx : aa + yy$.

Pag. 262. l. 25. leg. $+$ D3. Pag. 266. l. 29. leg. Tangentem Hyperbolæ.

Pag. 267. l. 2. leg. *dc*. Pag. 269. l. 10. leg. §. 464. lin. 21. leg. $x = aa : \surd(aa - zz)$.

Pag. 271. l. 1. leg. *us*P. lin. 4. leg. Mμ. Pag. 273. l. 2. Aq leg. Nq.

Pag. 273. l. 33. leg. curva AC minus abſciſſa ejus.

Pag. 306. l. 5. M*lm* leg. L*lm*, & lin. 6. dele eſt.

Pag. 335. ſubter Fig. 134. in margine ſcribe etiam 135.

Pag. 313. l. 10. (MC $=$ LN) leg. (MC $-$ LN) : AM. Pag. 214. l. 10. leg. OM. LN : AM.

Ibid. l. 19. SM. leg. OM; & lineis 23, 24, 27, 28. IM leg. OM.

Pag 319. l. 13. GB leg. GH. Pag. 321. l. 4. TA leg. TM.

Pag. 326. l. 7. ſummi leg. ſuam. Pag. 328. l. 14. $a^3aau : cu$, leg. $a^3 - aau : cu$.

Ibid. l. 24. $\frac{ab}{b}\, du : u$, leg. $\frac{aa}{b}\, du : u$. Pag. 330. l. 14. $- t =$, leg. $t = \int(aadu$: &c.

Pag. 332. l. ult. & ſeq. pro BK leg. ωK, in Fig. 132.

Pag. 335. l. 14. leg. In eadem DT producta ſumatur ubique DN, quæ ſolicitationem tangentialem gravitatis in curvæ puncto D ex centrali derivatam ſignificet, exponetque ND $-$ DT, &c. Ibid. l. 30. leg. MNEC $+$ el. areæ CTE.

Pag. 336. lineis 12, 13, $+$ ſcribe $-$. Pag. 338. ad marginem Prop. 73. ſcribe Fig. 135.

Pag. 348. l. 29. BZX, leg. MZX. Pag. 349. l. 11. leg. occurrentibus.

Pag. 360. l. 2. NM^2 : aa, leg. NM^2. aa. Pag. 365. l. ult. leg. ABIH $=$ EKRF.

Pag. 366. l 26. in D. DC : CQ, leg. in D $=$ DC : CQ. Pag. 367. l. 27. ſed, leg. ſub.

Pag. 381. l. 9. CV, leg. OV. Pag. 383. l. 31. AD. Ad, leg. 4AD. Ad.

Pag. 390. l. 12. habebuntur, leg. dabunt. Pag. 392. l. 19. GI, leg. G1.

Pag. 393. l. 13 poſt, tertia, &c. adde δ, $\delta 2$, $\delta 3$, &c. Ibid. l. 26. leg. $- \frac{z^4 dddy}{2.3.4.dz^3}$.

Pag. 395. l. 26. ordinatæ leg. ordinata. Pag. 396. l. 12, $-$ *nm*R, Rωv, lege $-$ *nm*R, $-$ Rωv. Pag. 397. l. 1. leg. $\mp$ ST. Sſ, & lin. 3, 4. $\mp$ *d*DST.

Pag. 400. lin. 19. $e = A$, leg. $e - A$.

IN FIGURIS SUPPLENDA.

Fig. 33. Interſectio rectarum DV, *bf* vel arcus EIK ſignetur T.

Fig. 41. Initio lineæ punctis ductæ ſubter ES adſcribatur *e*.

Fig. 117. Interſectio rectarum AP, Oβ notetur *f*, & linearum fa ac OK litera *h*. Et jungantur ſi placet, AC, *oc*.

Fig. 125. Jungatur MK.

Fig. 133. Lineæ ſubter DC punctis ſignatæ initio adſcribatur *d*.

Fig. 138. Accidentale non verò ex rei neceſſitate eſt, quod BC transeat per punctum N, & ordinata IK radio oſculi *m*R congruat.

Fig. 140. Subter F, G, ſcribatur L, & ſubter E, H, K, ita ut ſigna F, G, I idem punctum axis SB, & EHK idem punctum hyperbolæ TDH deſignent.

N° 1.

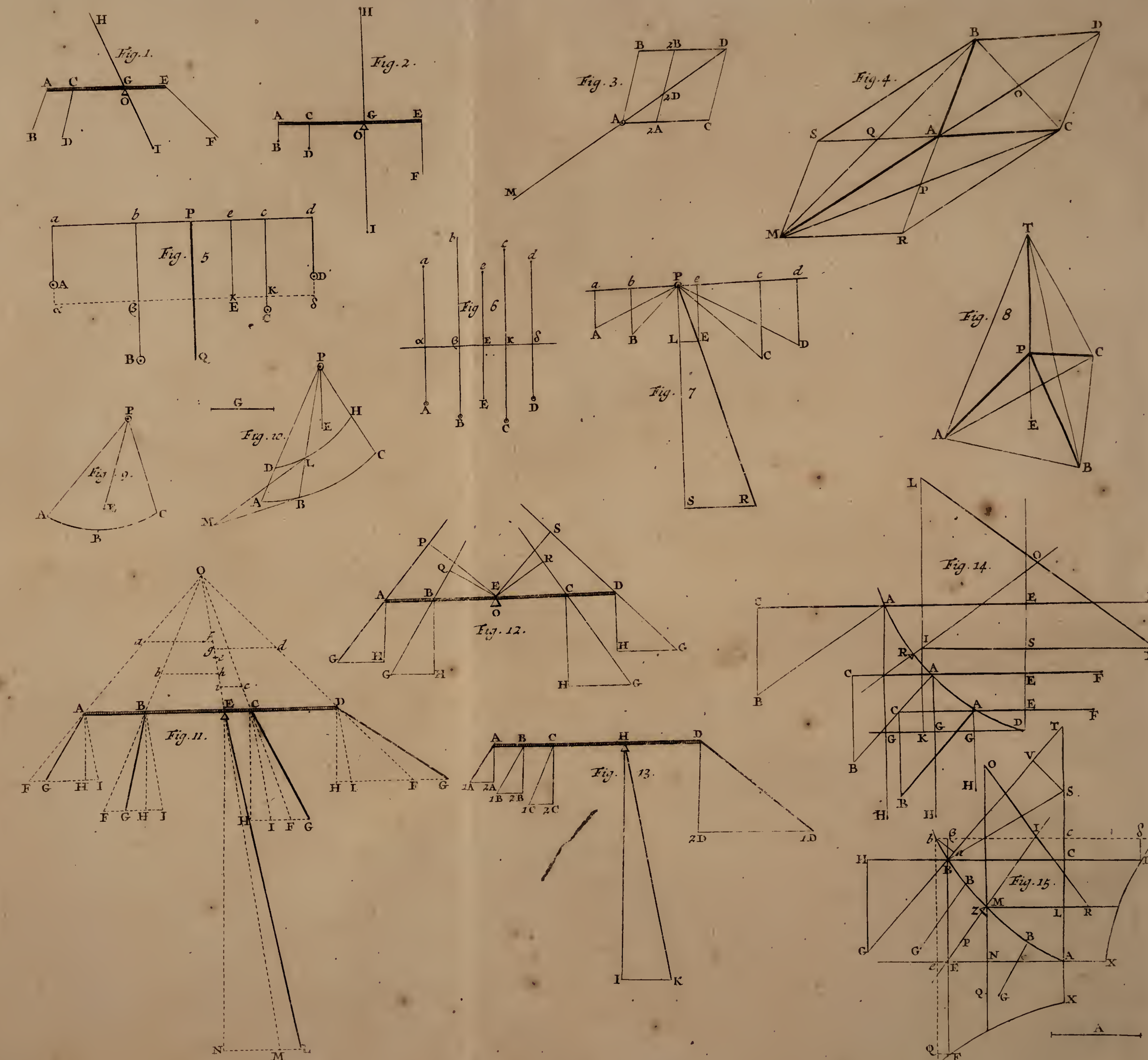
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

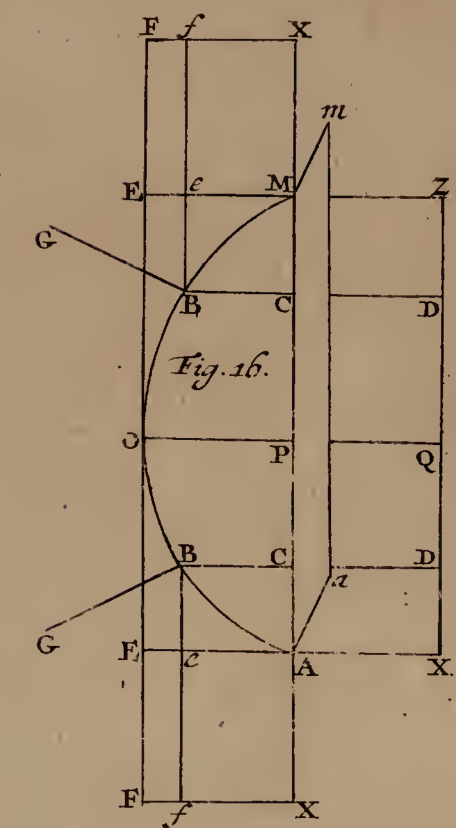
Fig. 16.

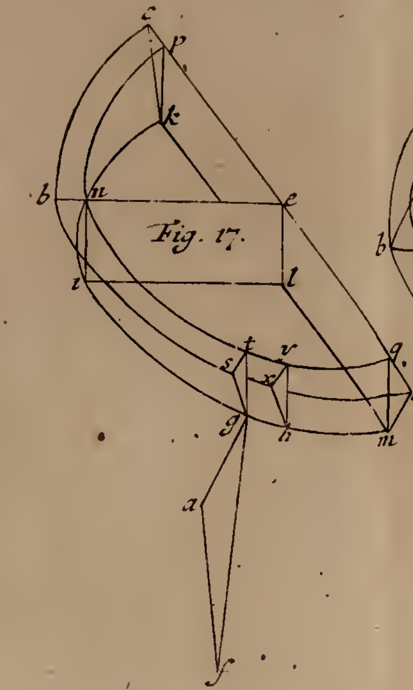
Fig. 17.

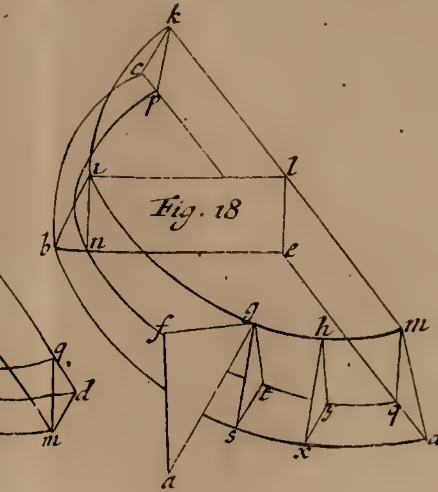
Fig. 18.

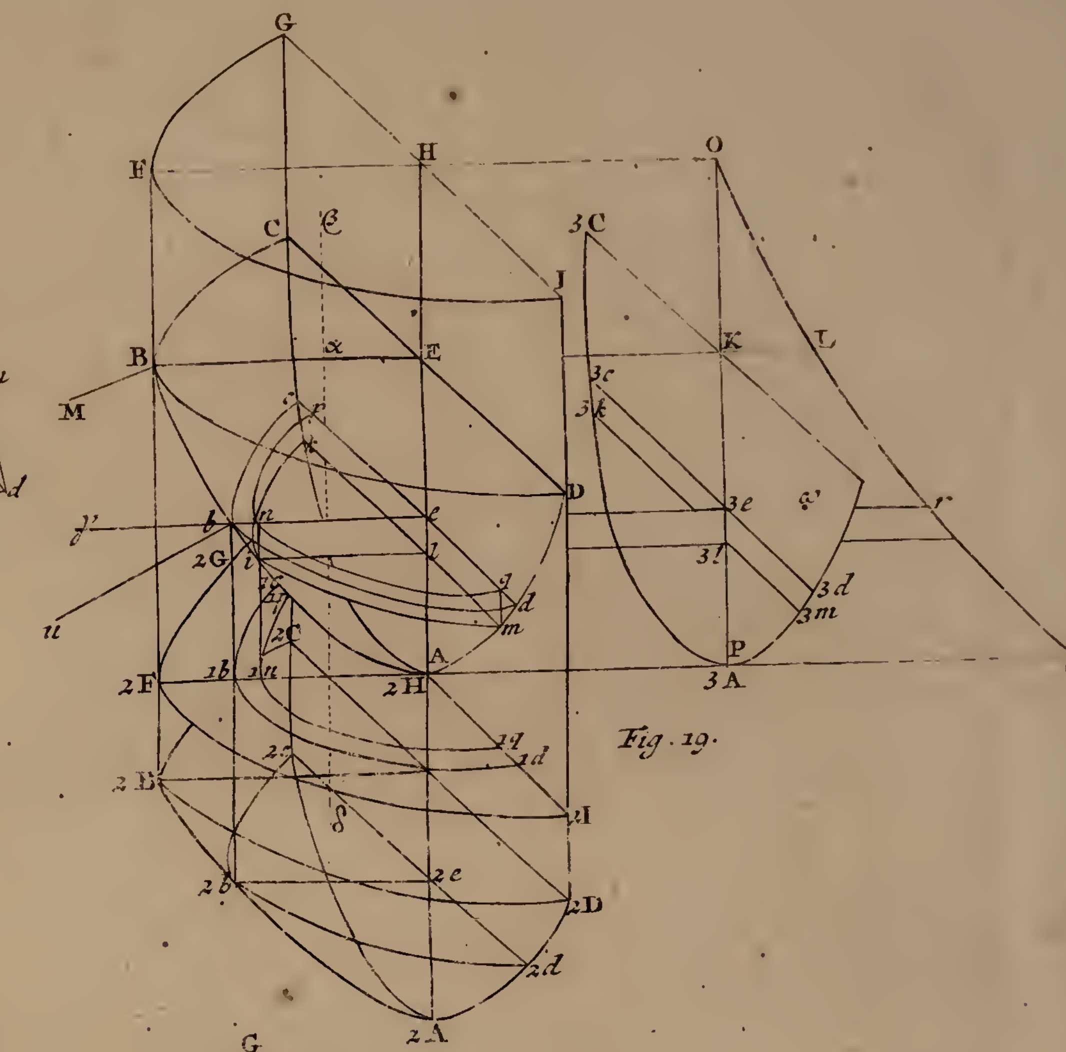
Fig. 19.

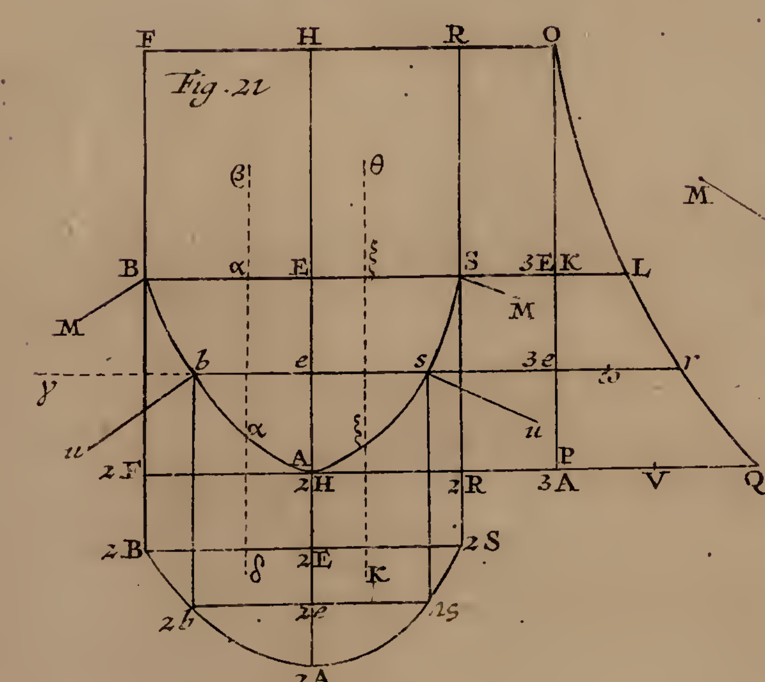
Fig. 21.

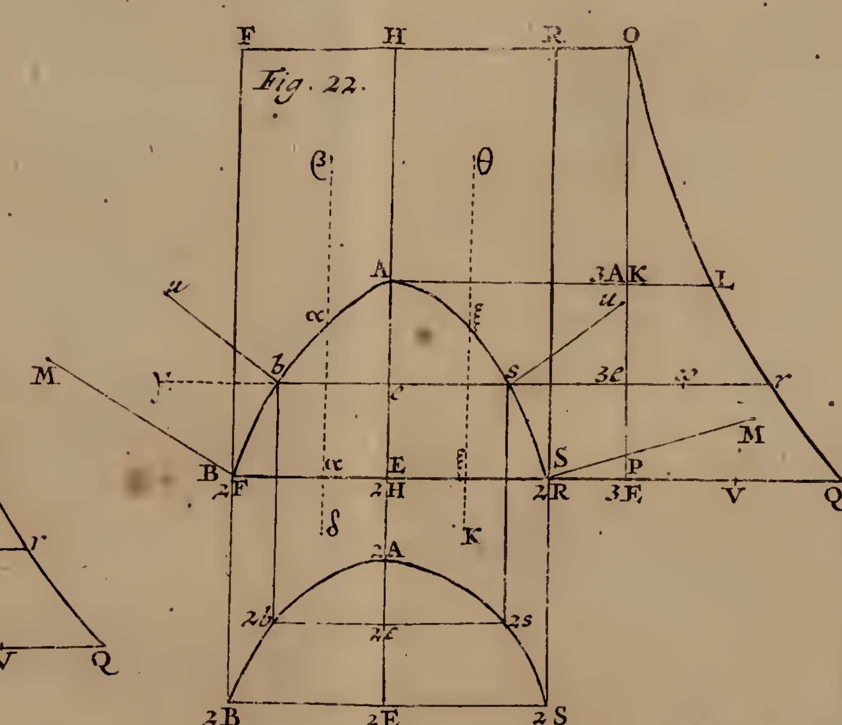
Fig. 22.

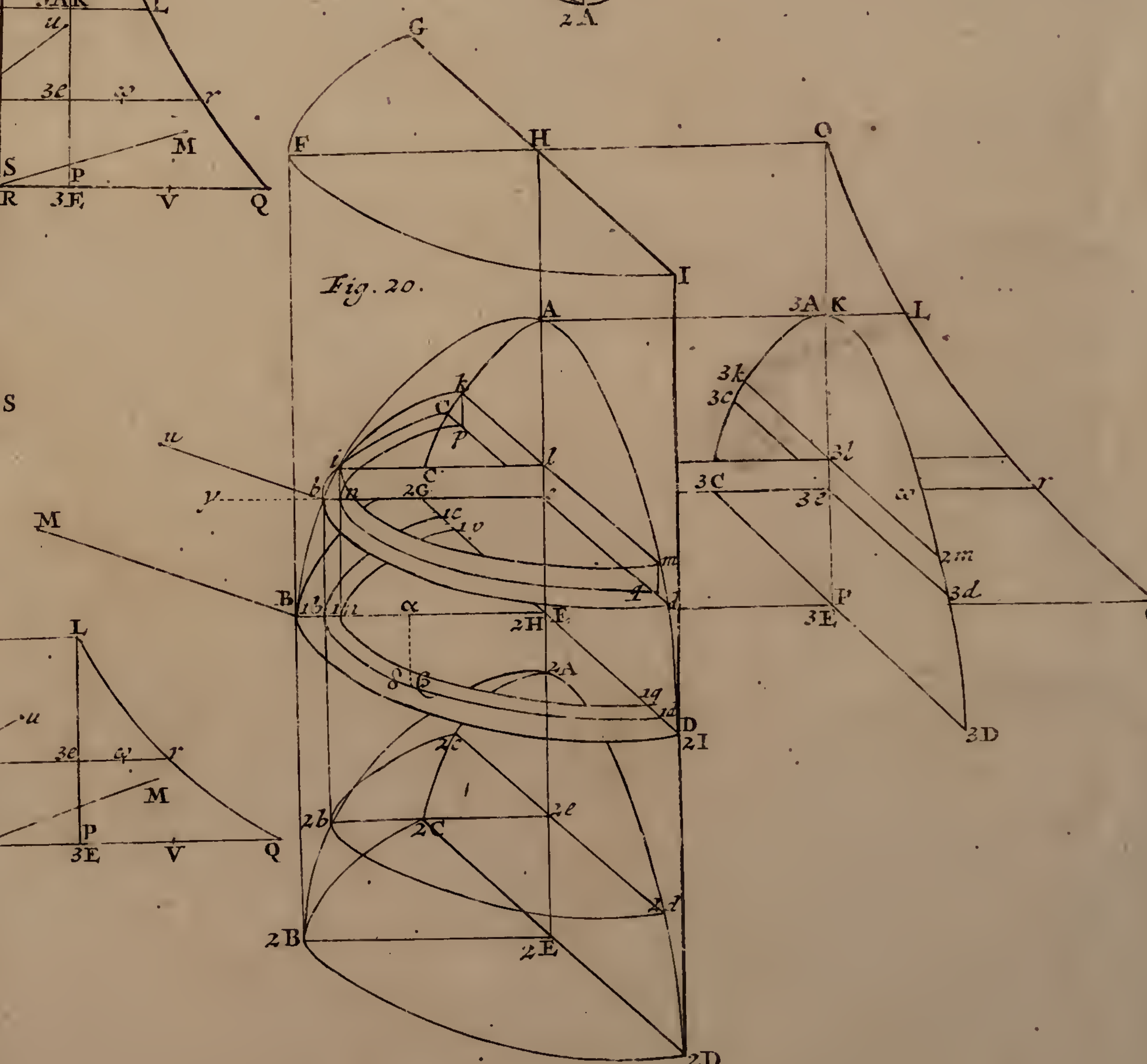
Fig. 20.

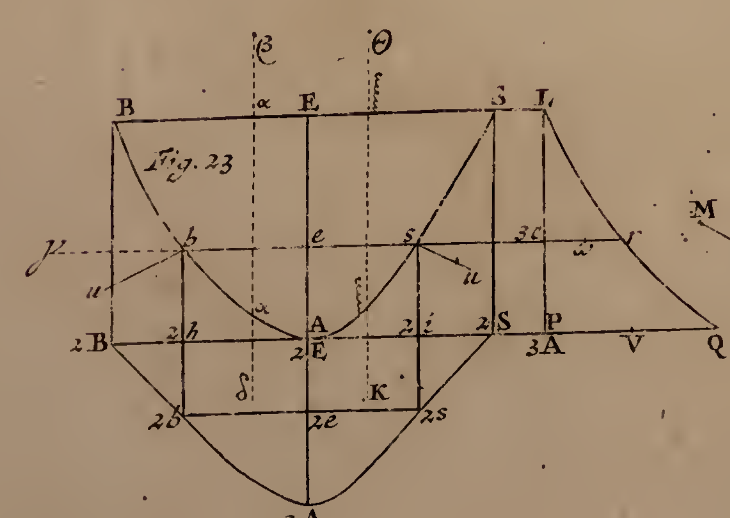
Fig. 23

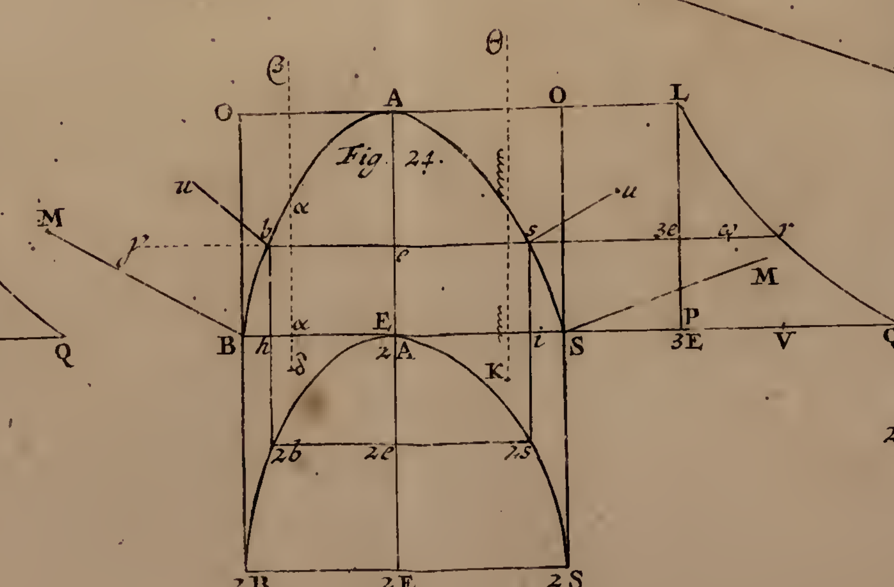
Fig. 24.

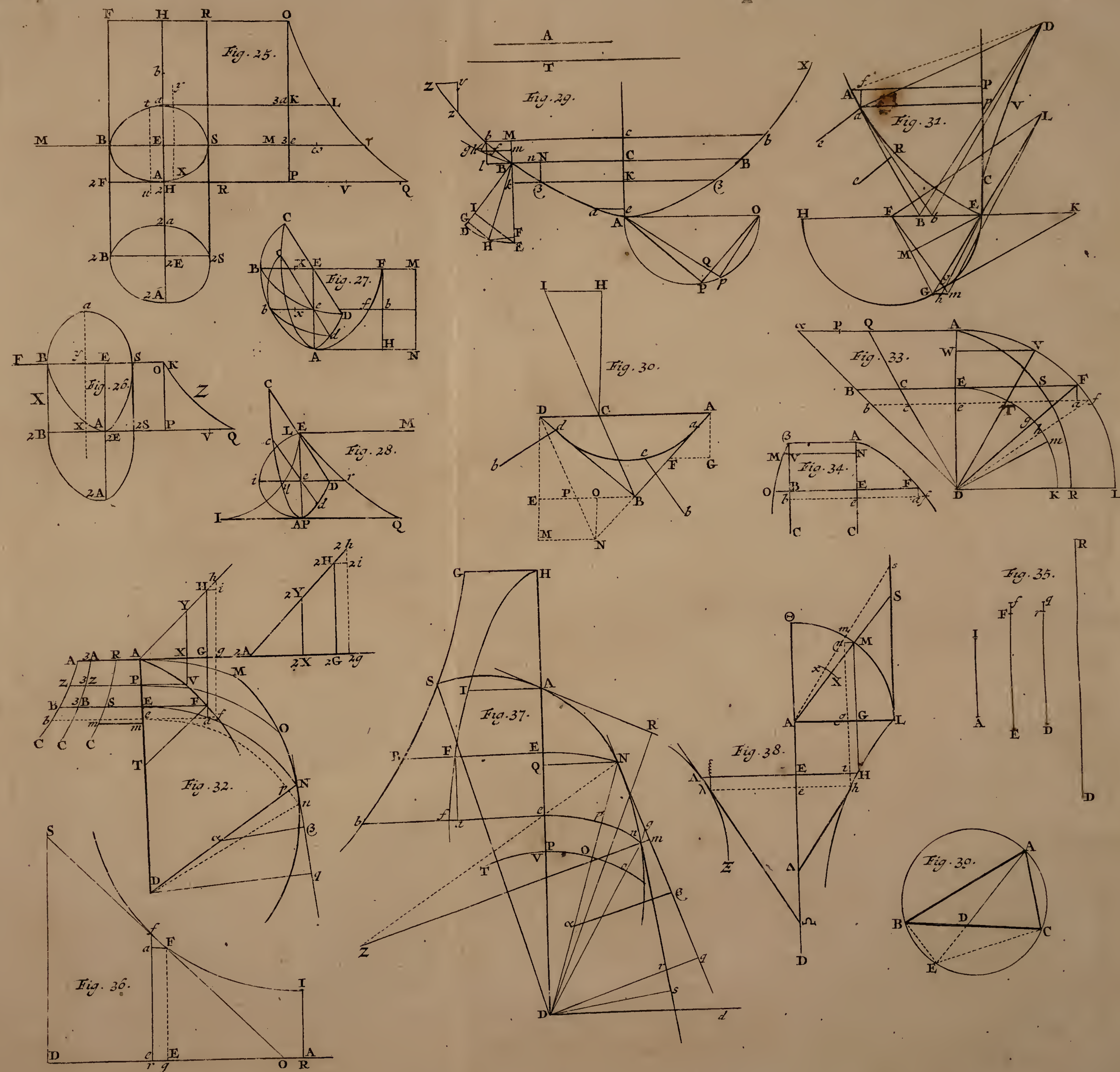
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.

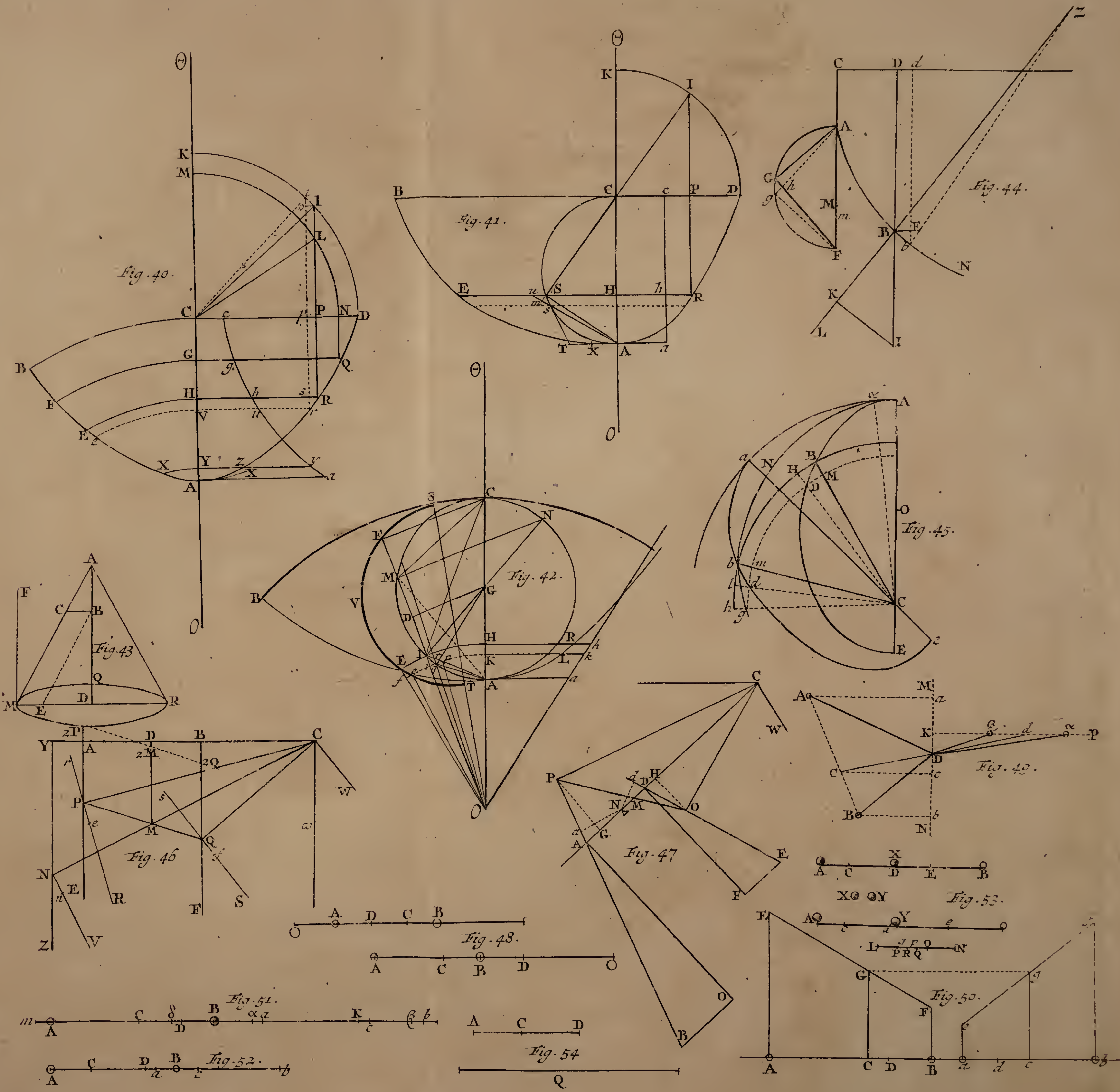
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46
Fig. 47
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54

N°. 5.

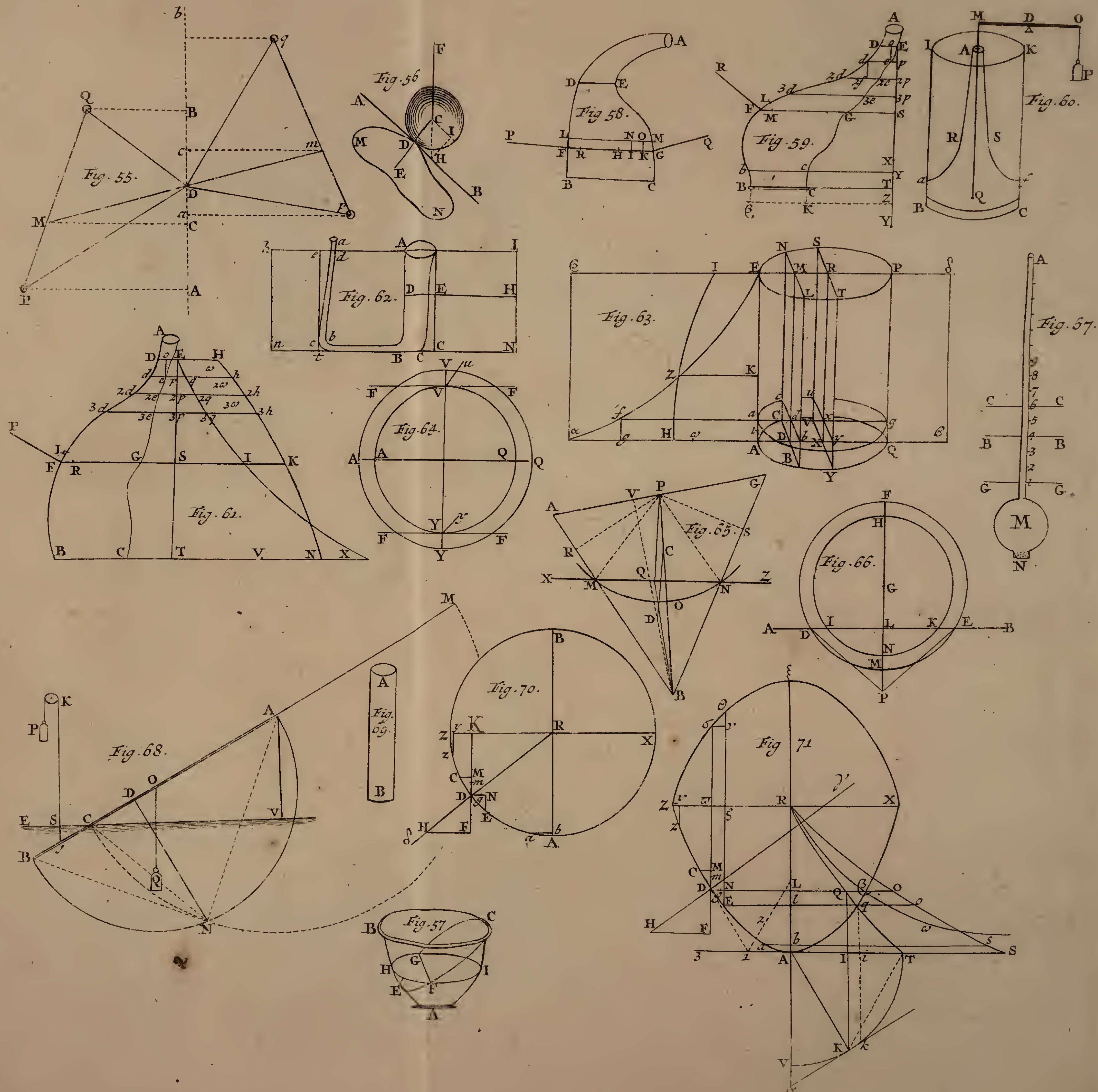
Fig. 55.
Fig. 56
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 61.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71
Fig. 57

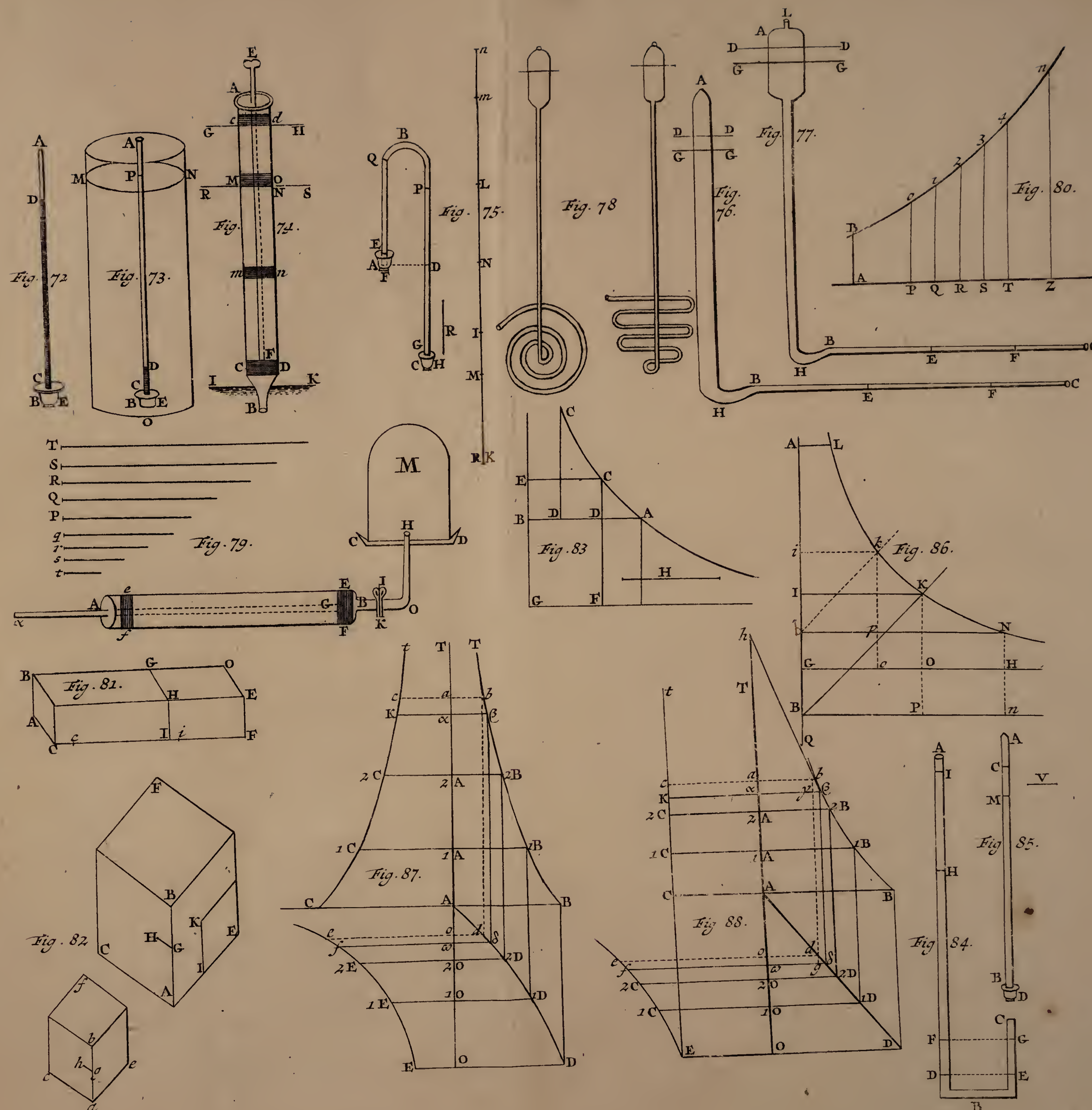
Fig. 72
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 75
Fig. 76
Fig. 77
Fig. 78
Fig. 79
Fig. 80
Fig. 81
Fig. 82
Fig. 83
Fig. 84
Fig. 85
Fig. 86
Fig. 87
Fig. 88
M

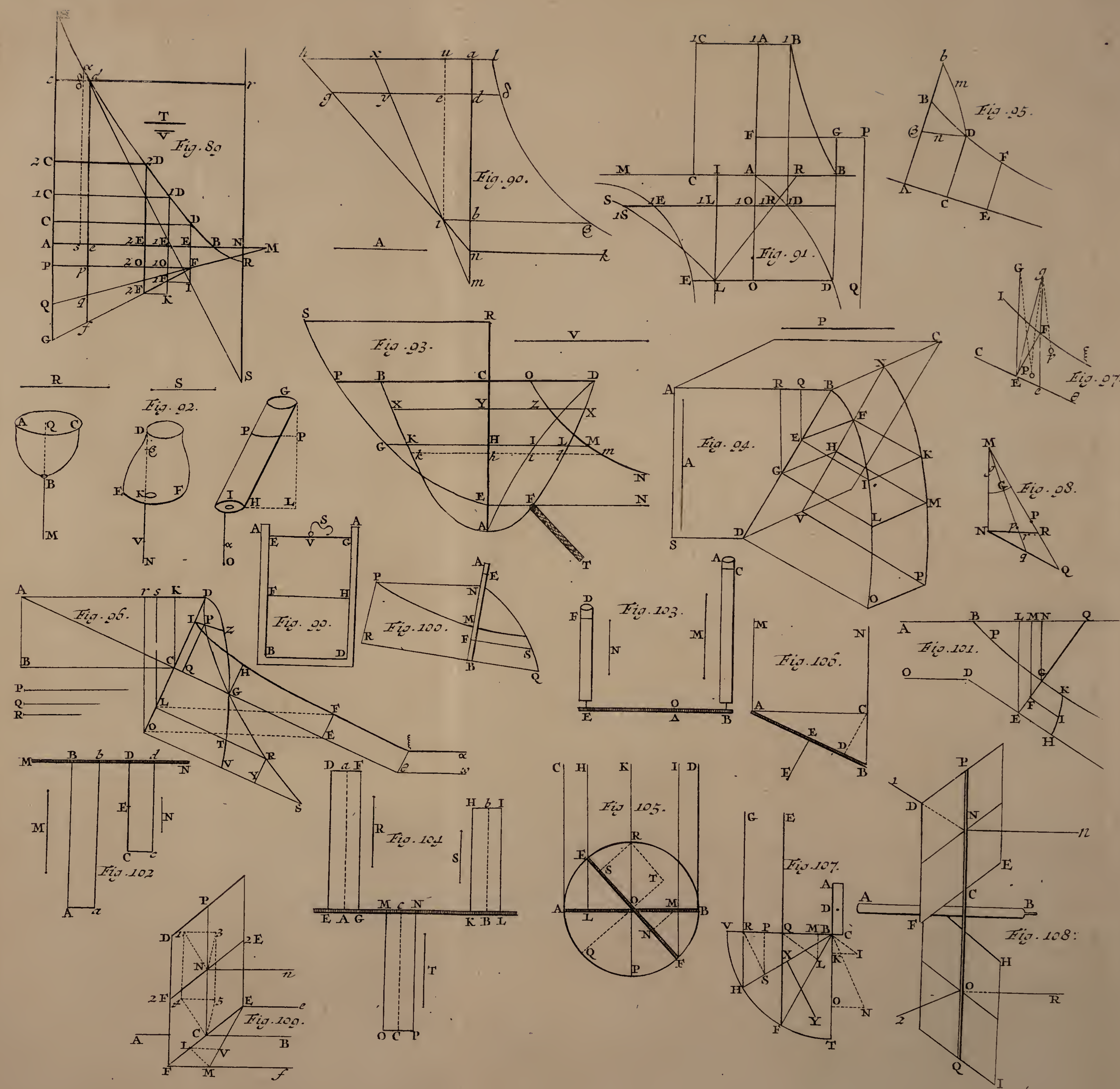
Fig. 89
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102
Fig. 103.
Fig. 104
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.

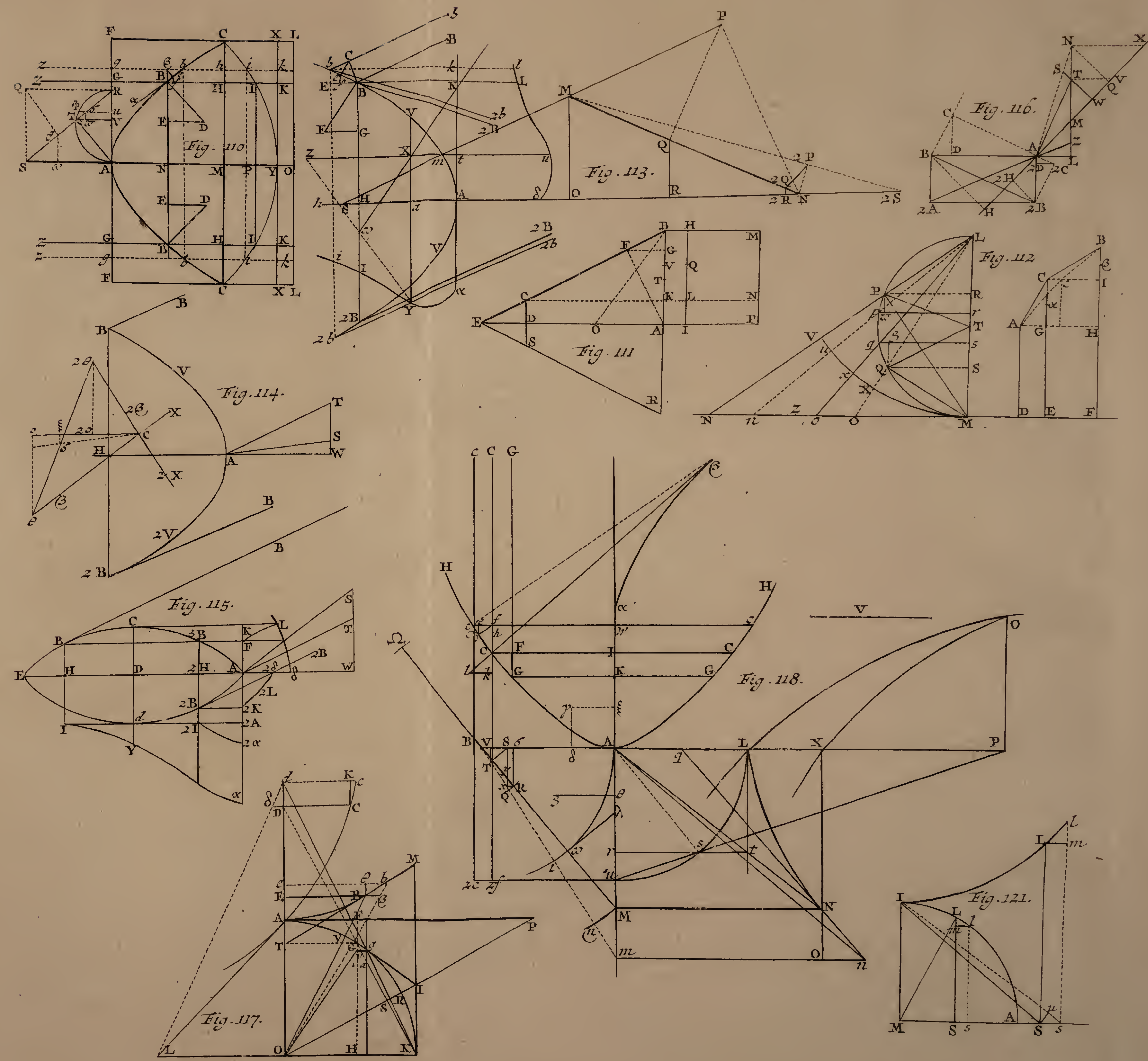
Fig. 110.
Fig. 111
Fig. 112
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 121.

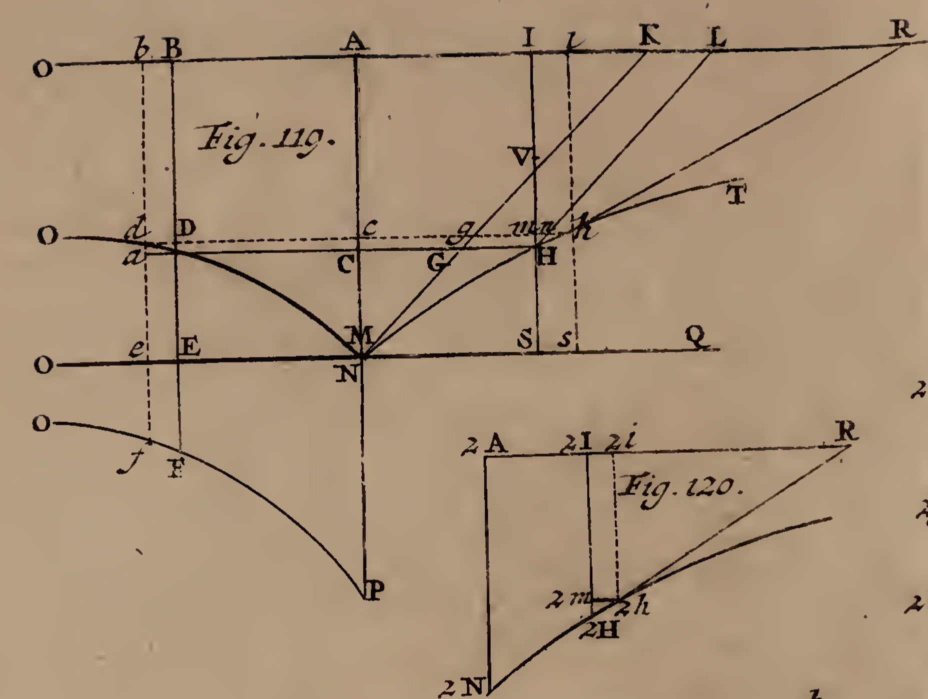
Fig. 119.
Fig. 120.

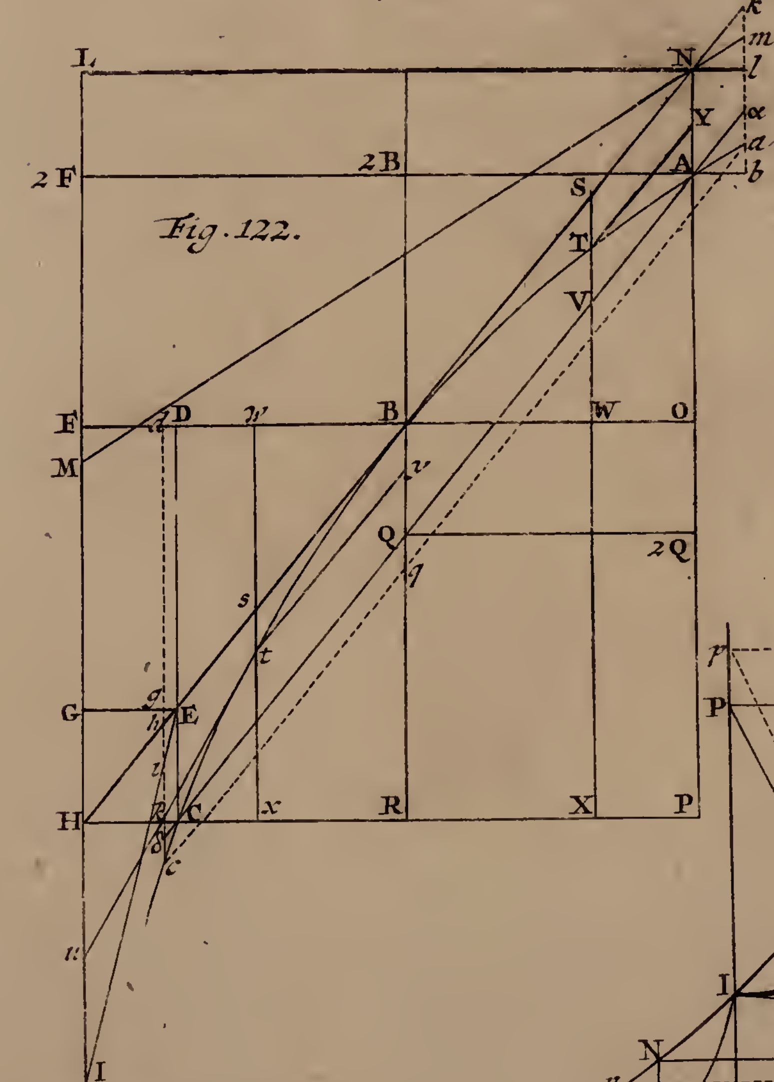
Fig. 122.

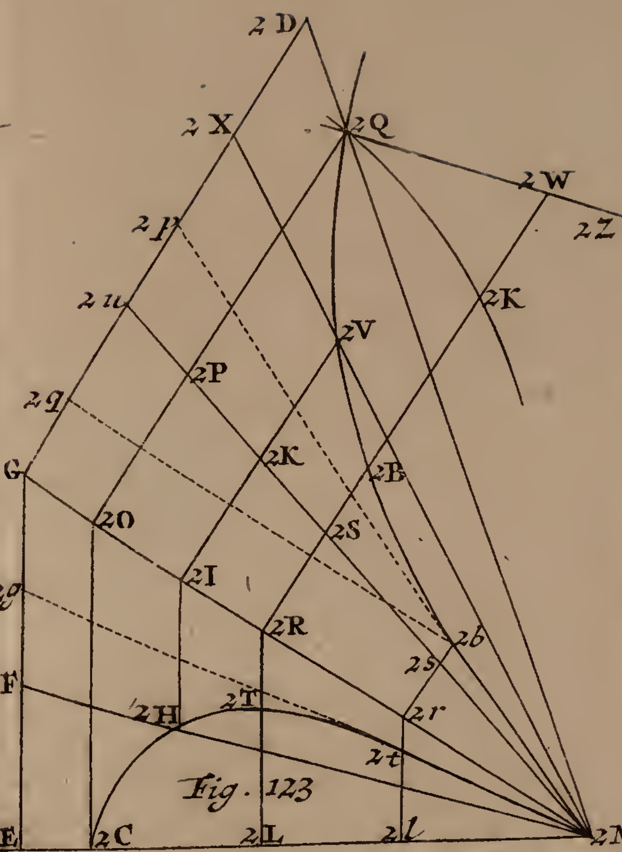
Fig. 123

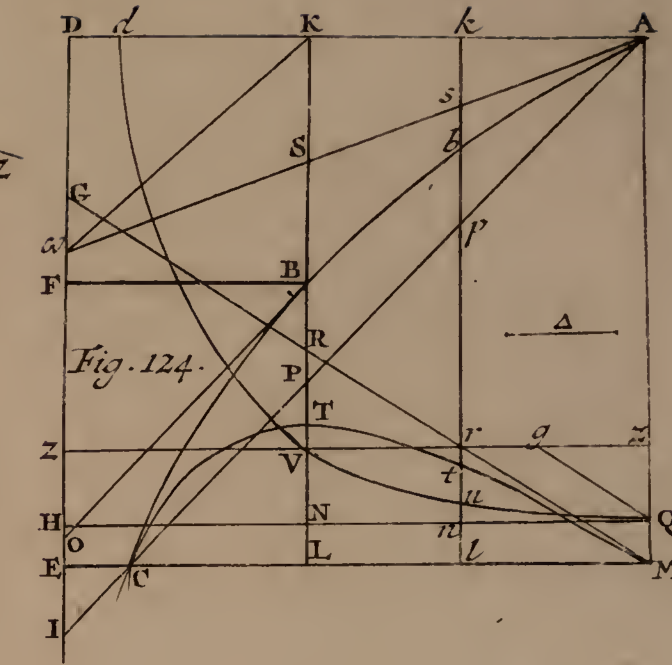
Fig. 124.

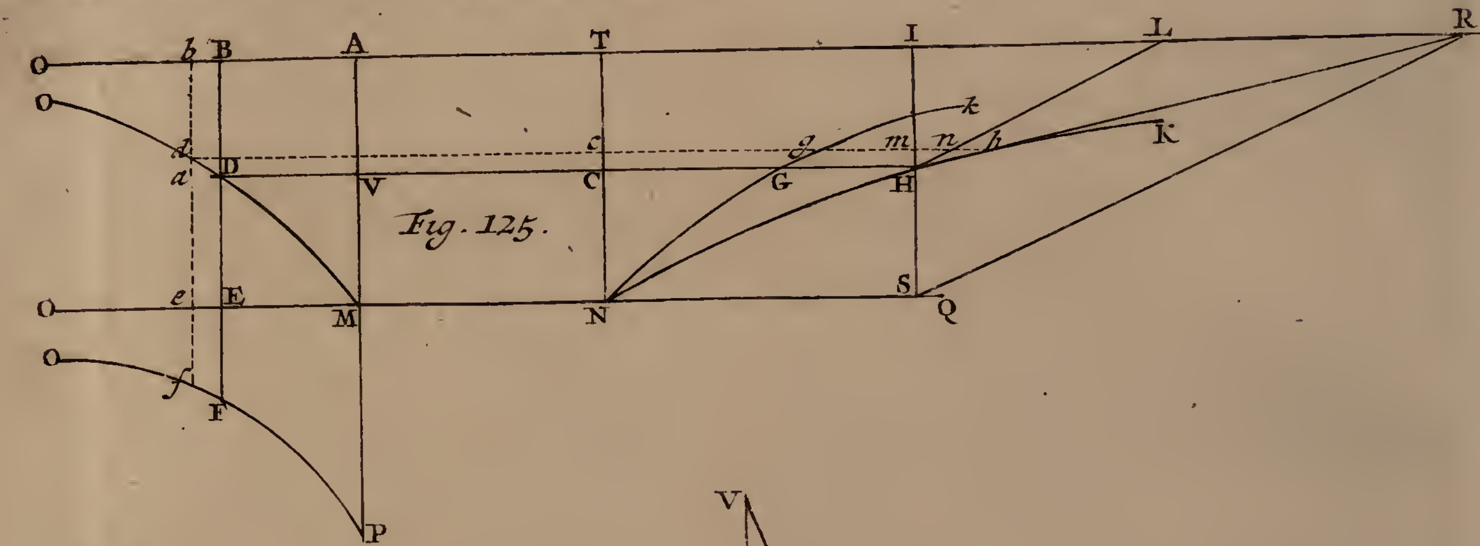
Fig. 125.

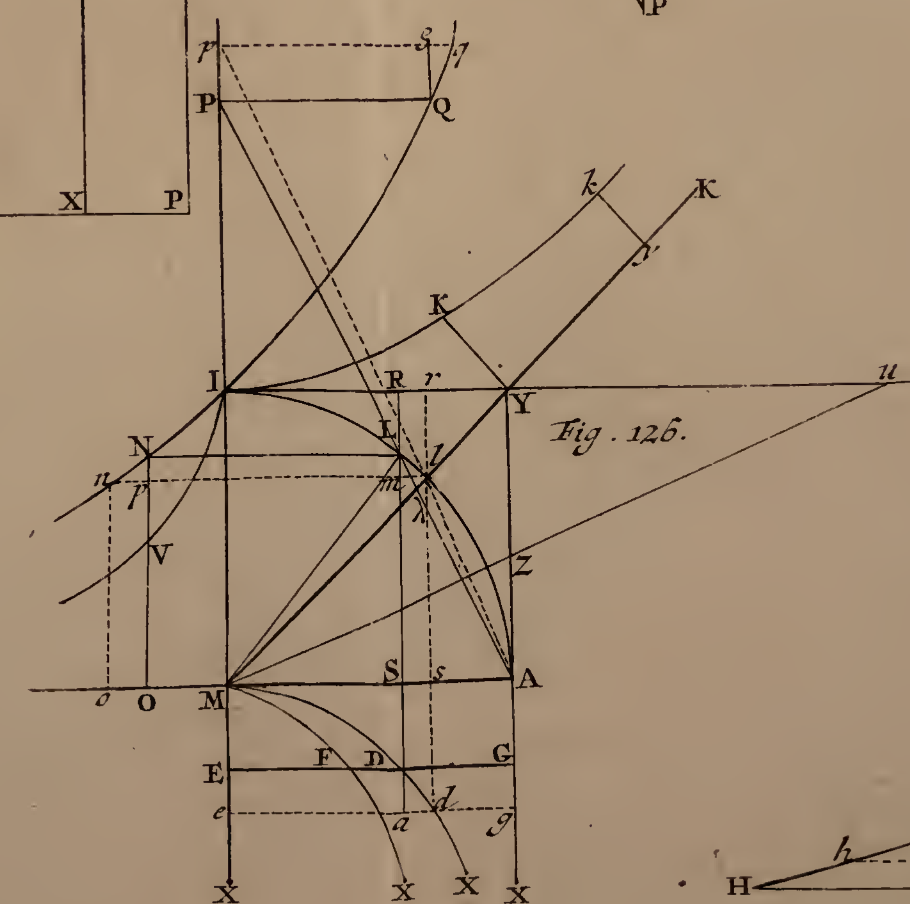
Fig. 126.

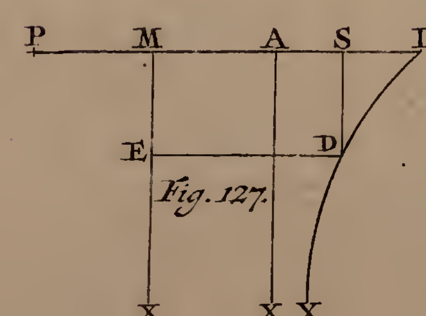
Fig. 127.

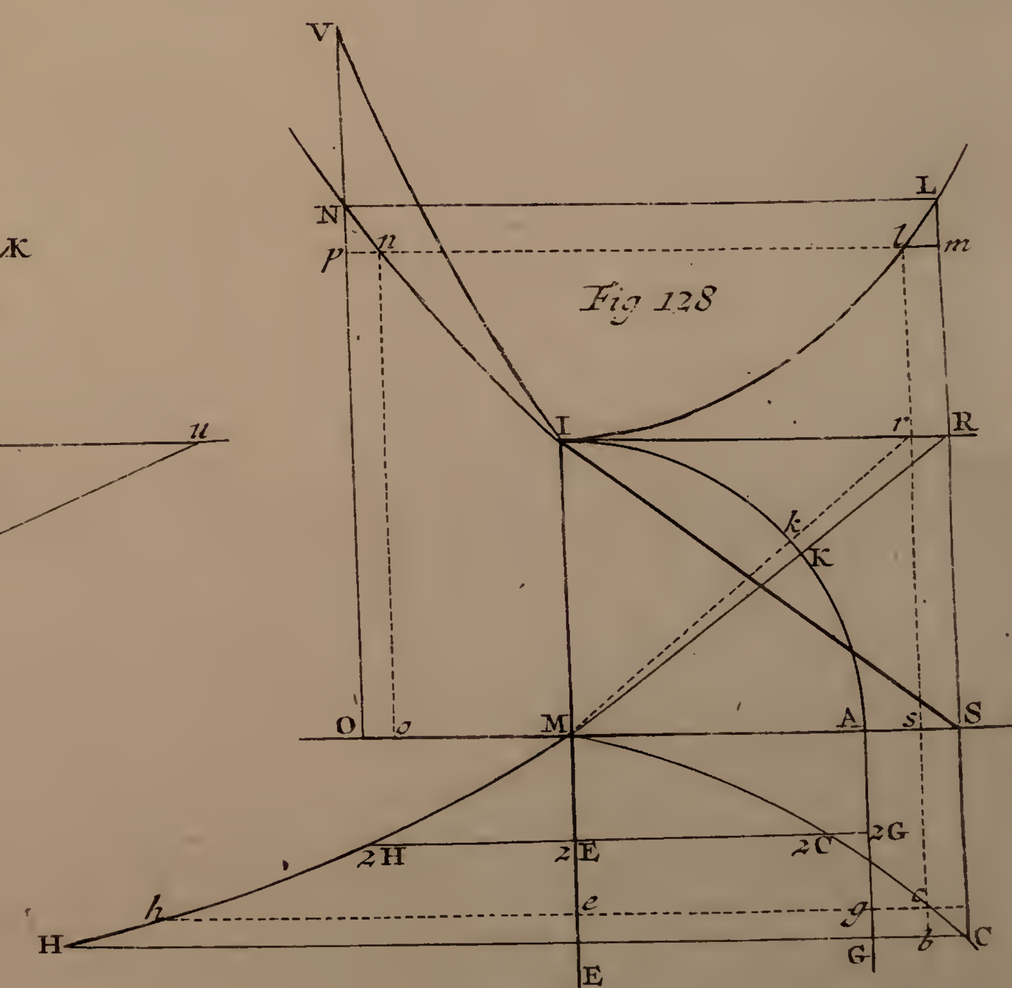
Fig 128

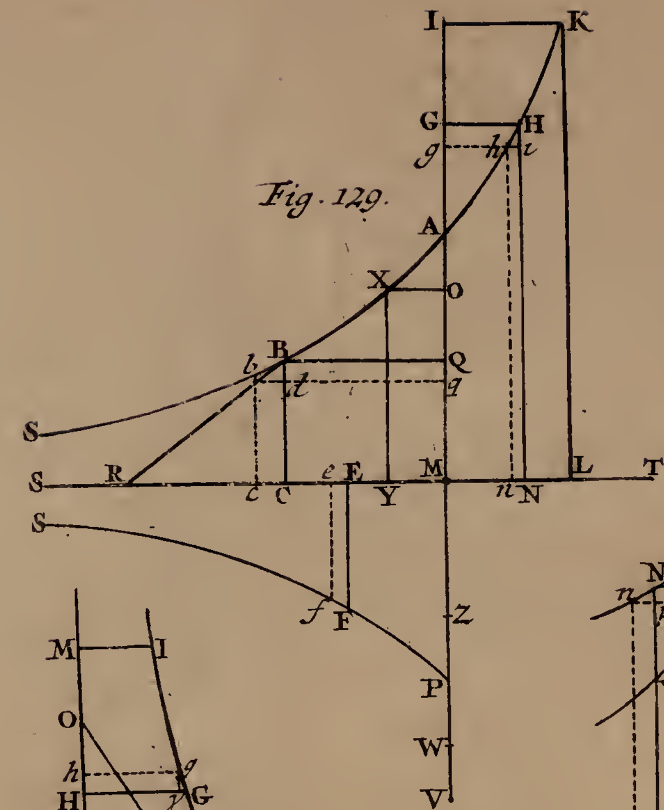
Fig. 129.

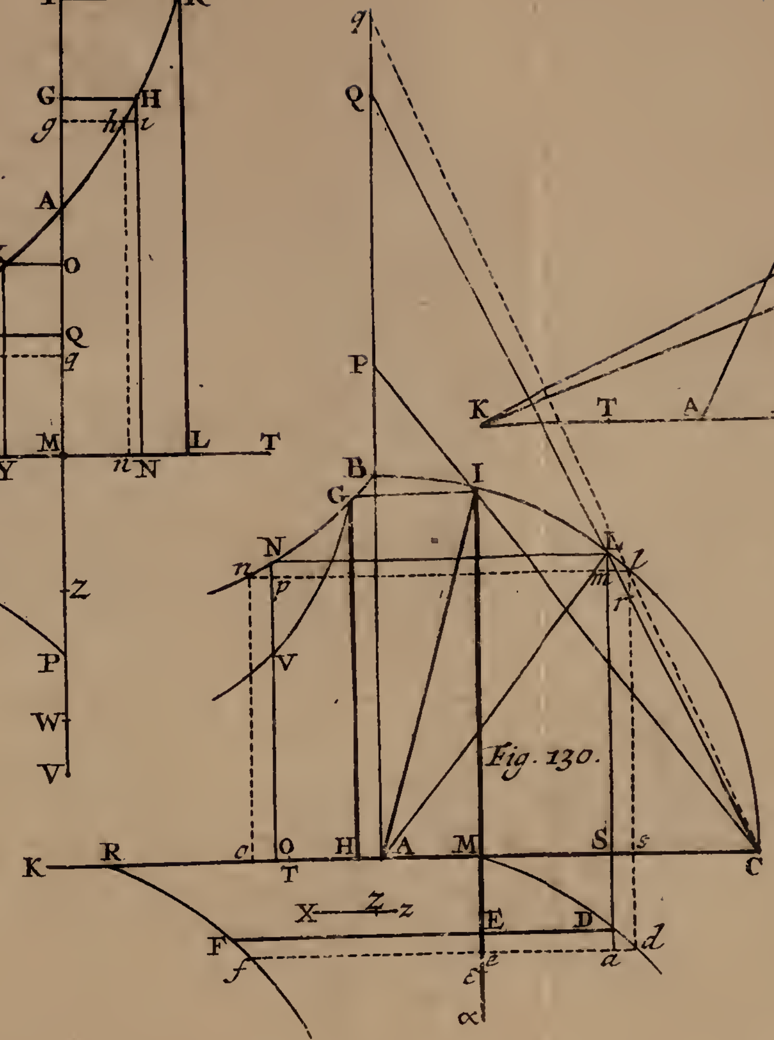
Fig. 130.

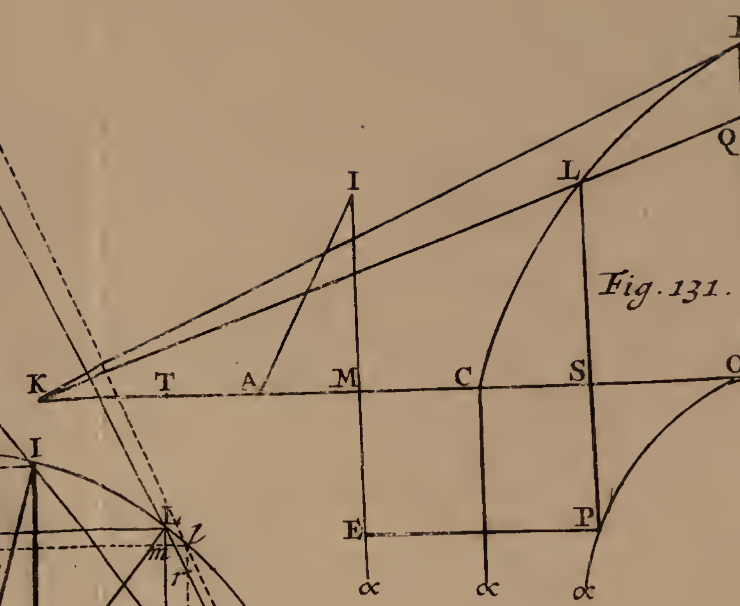
Fig. 131.

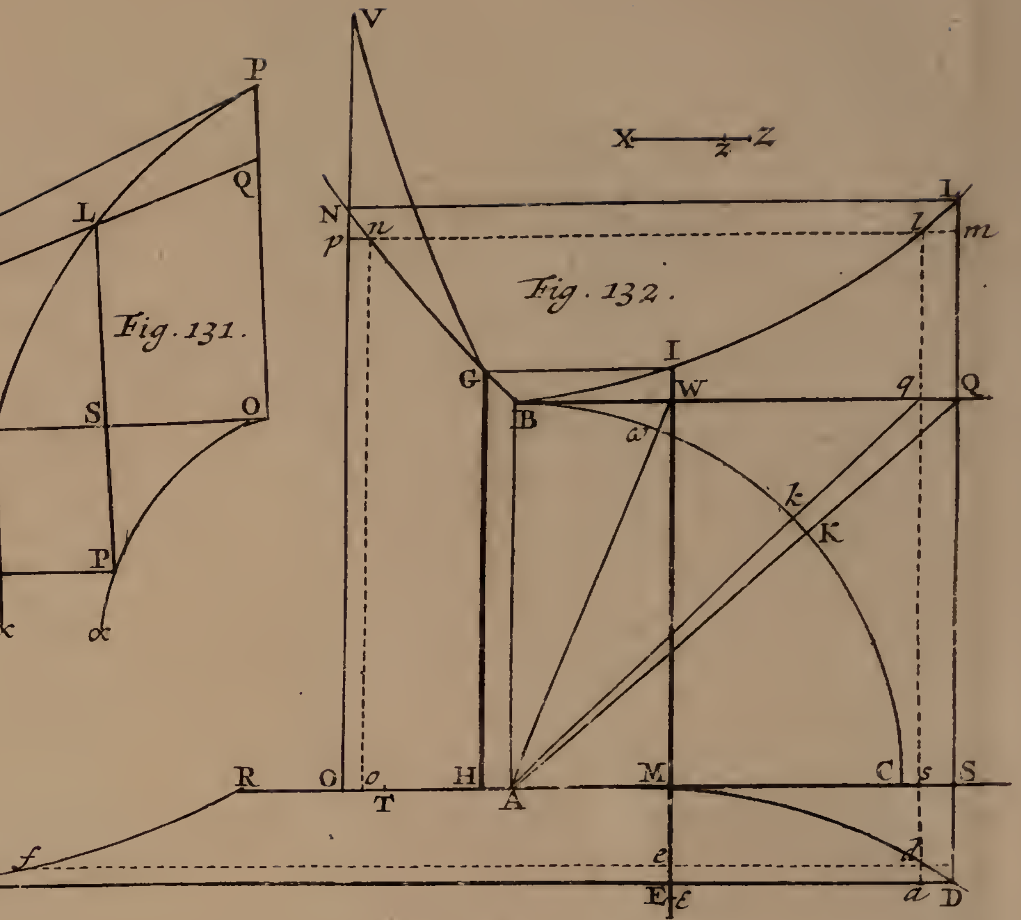
Fig. 132.

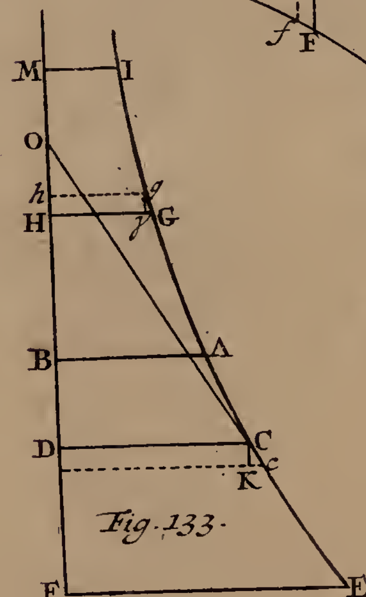
Fig. 133.

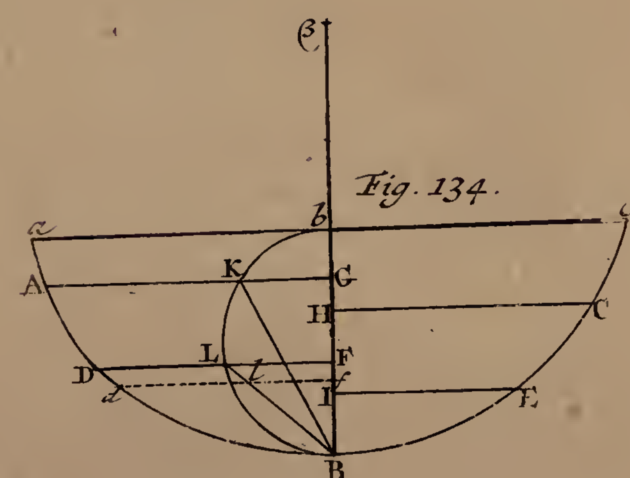
Fig. 134.

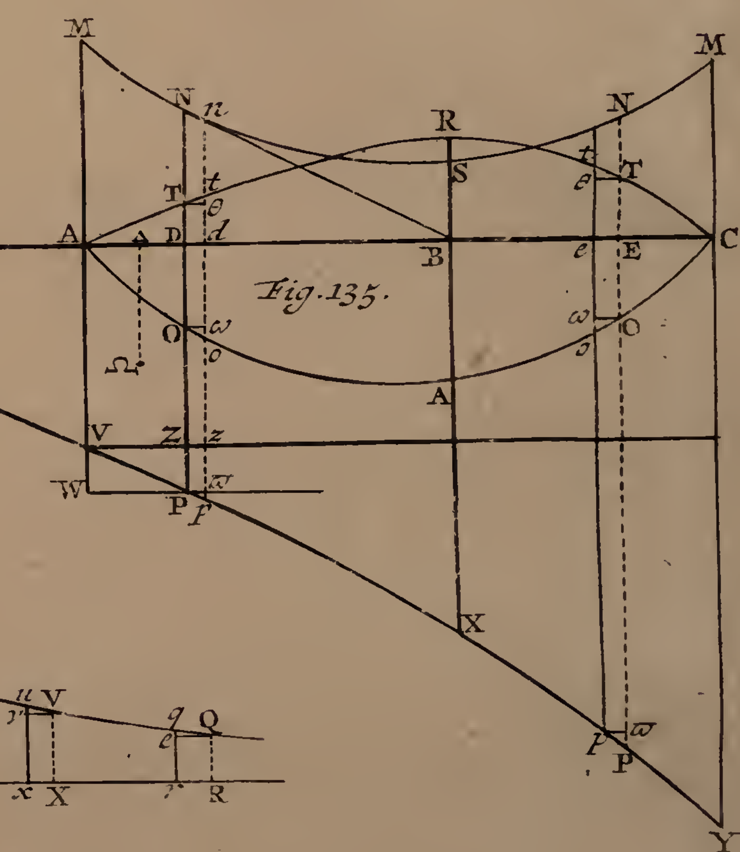
Fig. 135.

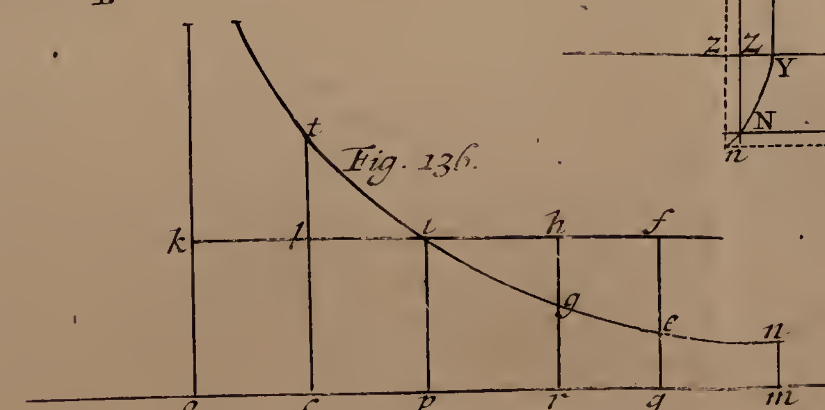
Fig. 136.

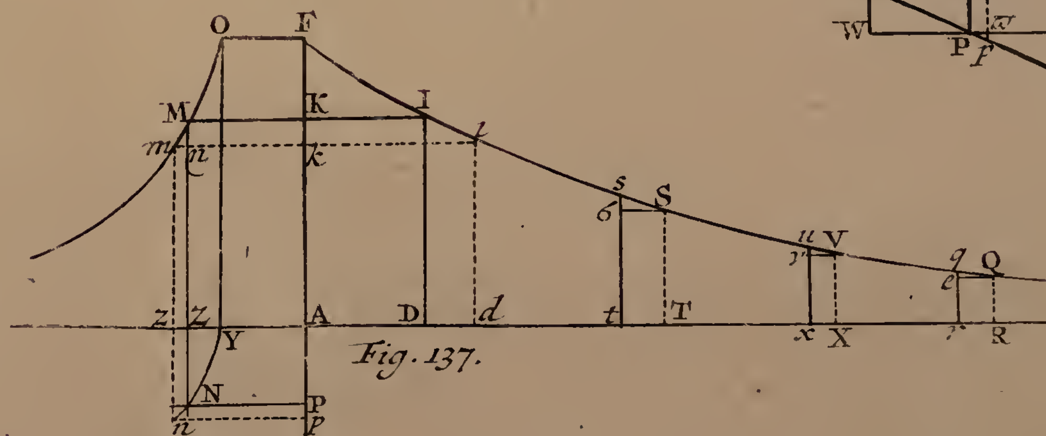
Fig. 137.

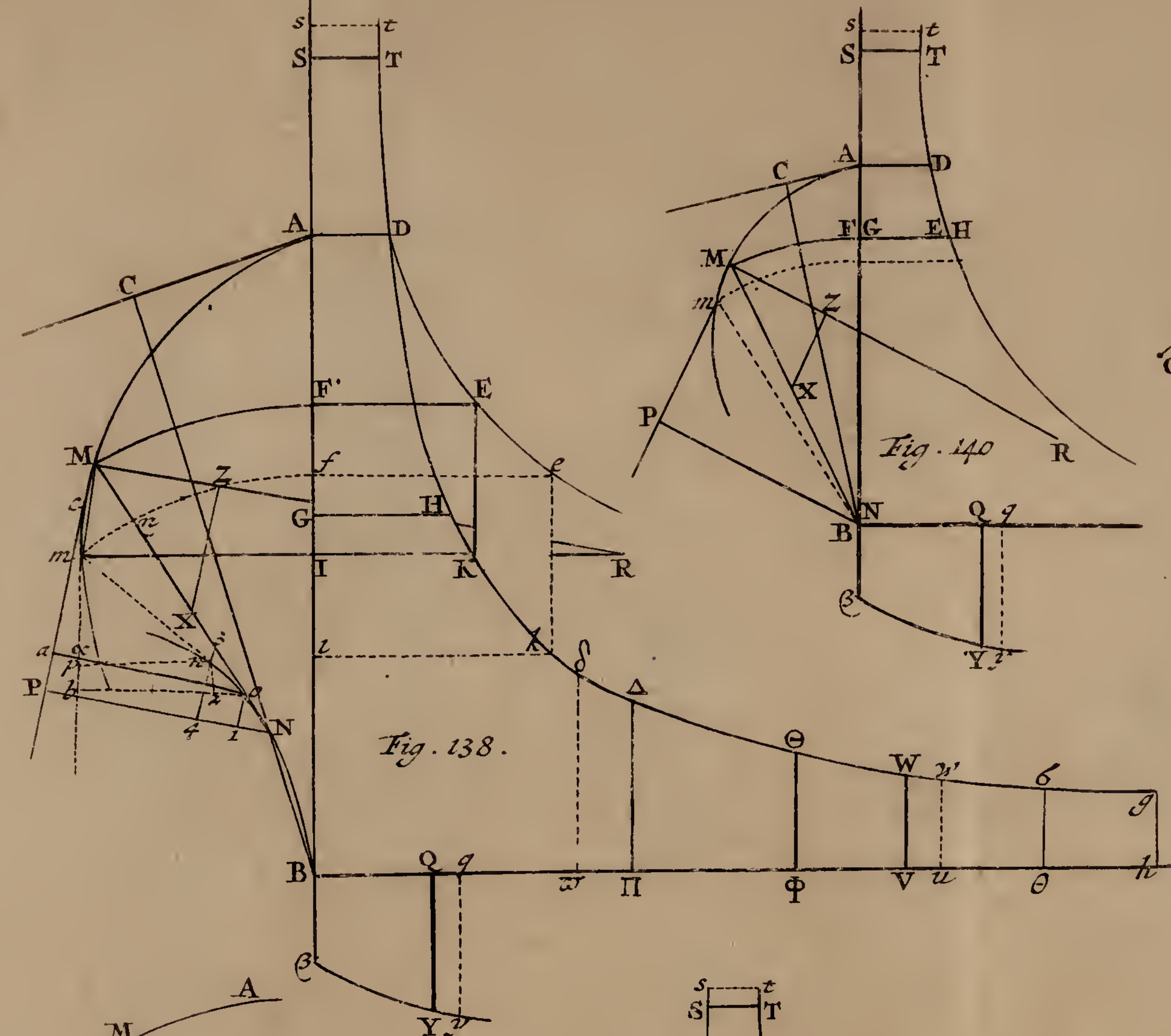

Fig. 138.

Fig. 140

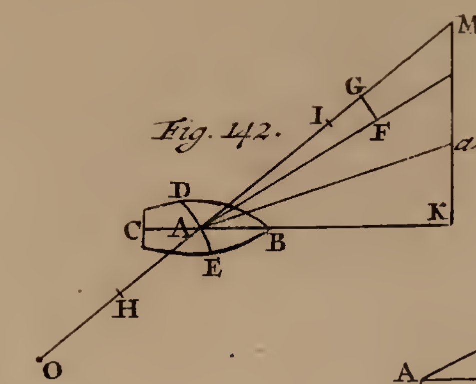

Fig. 142.

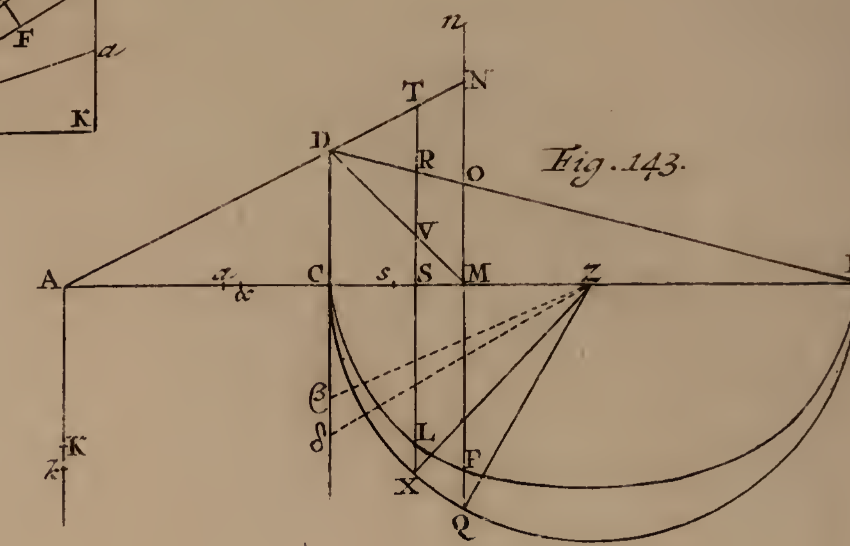

Fig. 143.

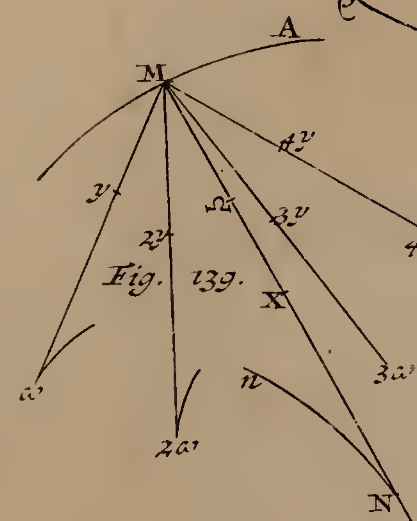

Fig. 139.

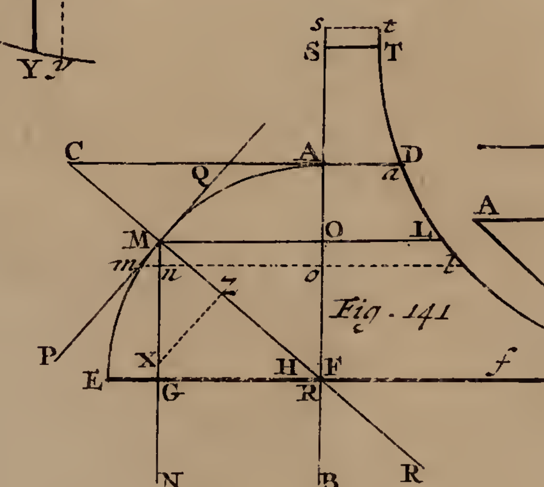

Fig. 141

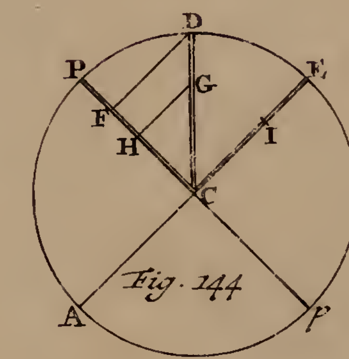

Fig. 144

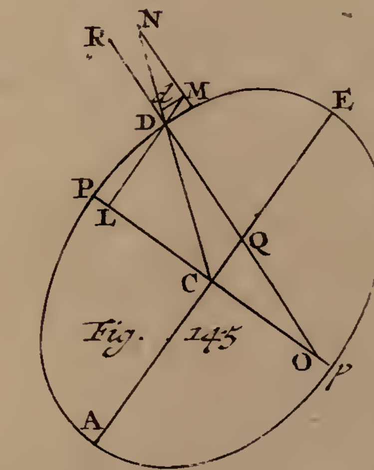

Fig. 145

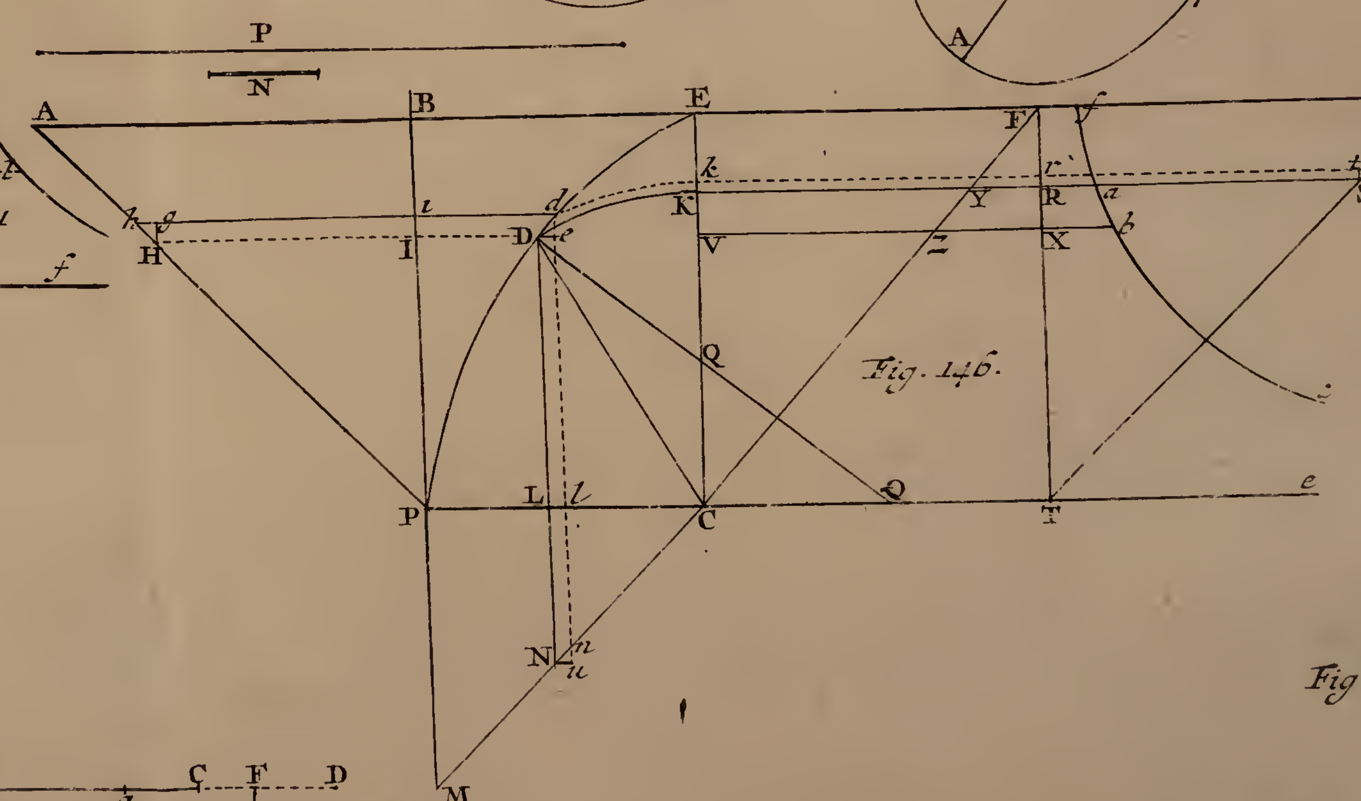

Fig. 146.

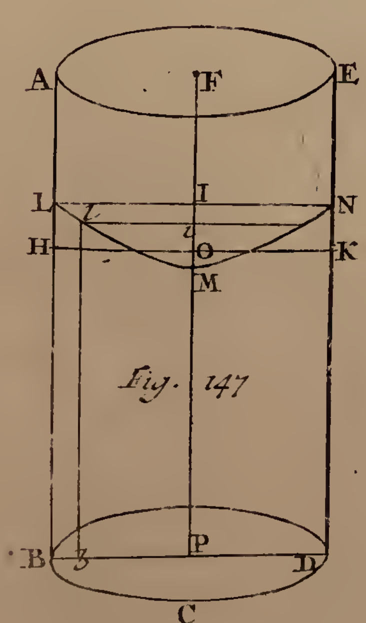

Fig. 147

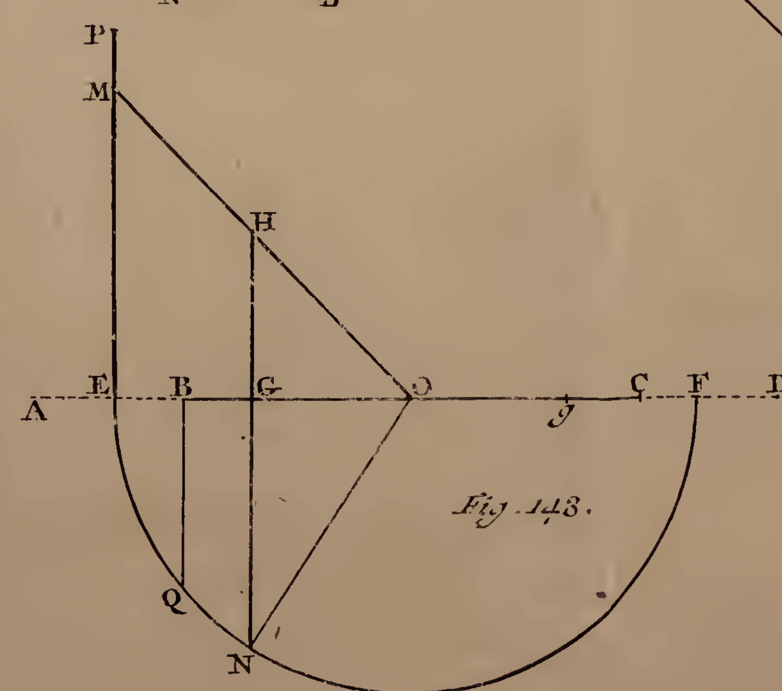

Fig. 148.

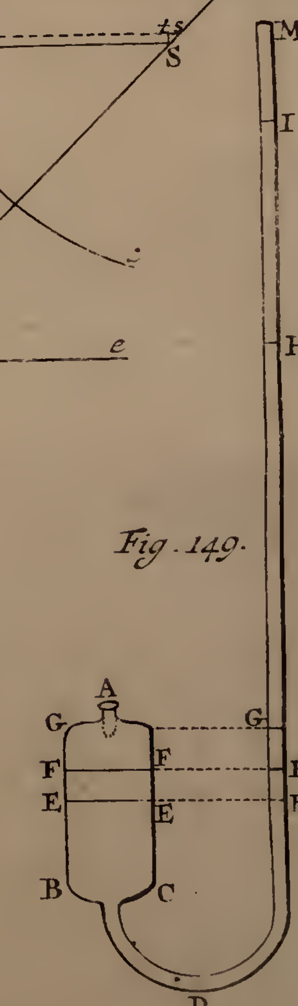

Fig. 149.

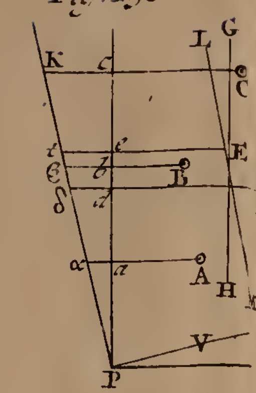

Fig. 150.

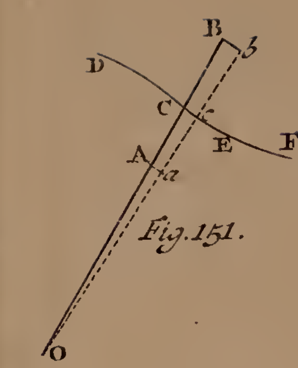

Fig. 151.

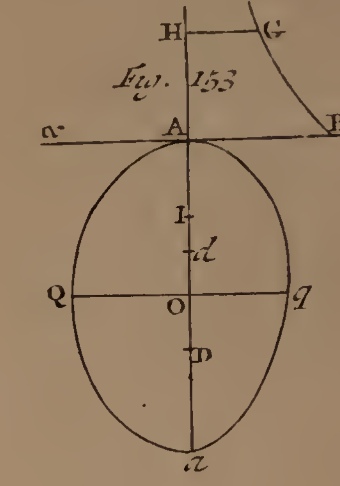

Fig. 153

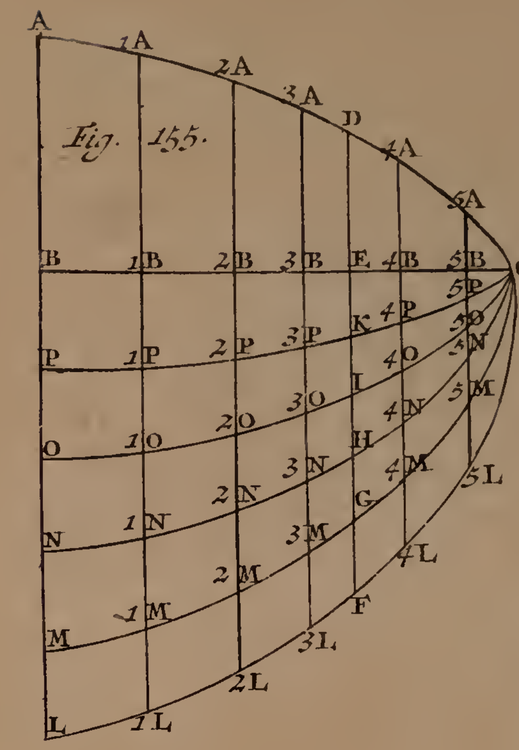

Fig. 155.

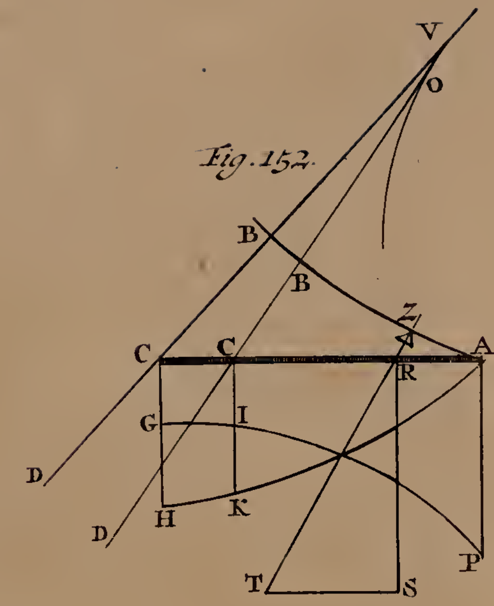

Fig. 152.

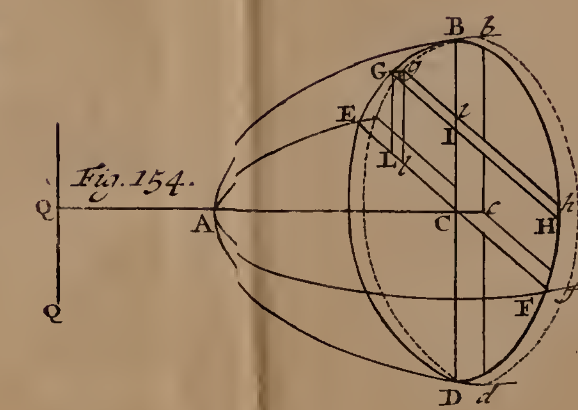

Fig. 154.

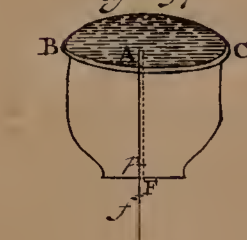

Fig. 157.

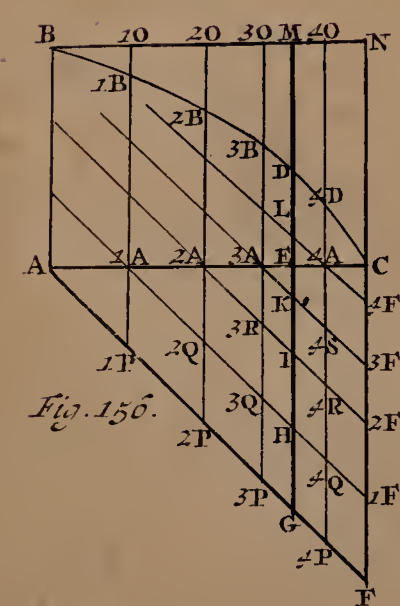

Fig. 156.

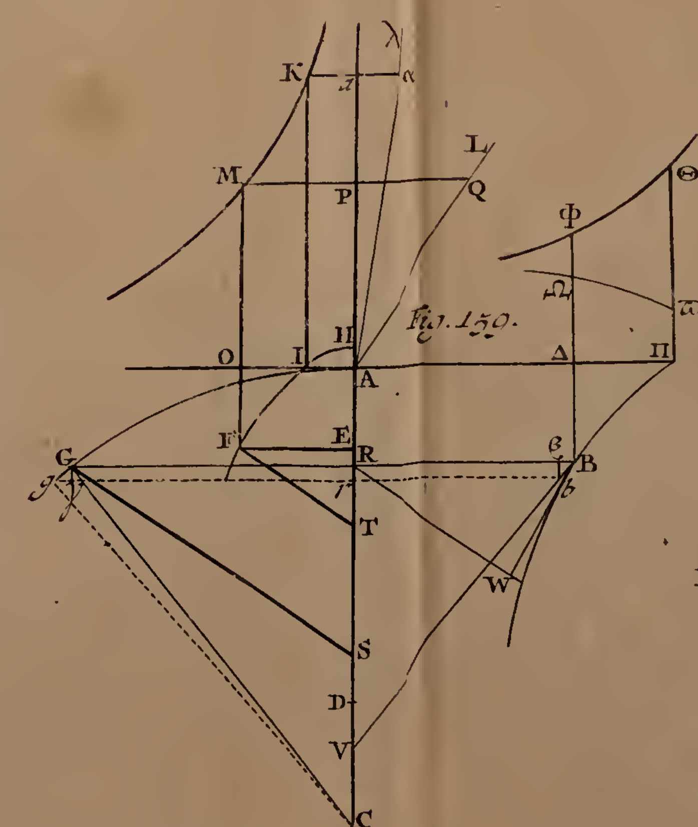

Fig. 159.

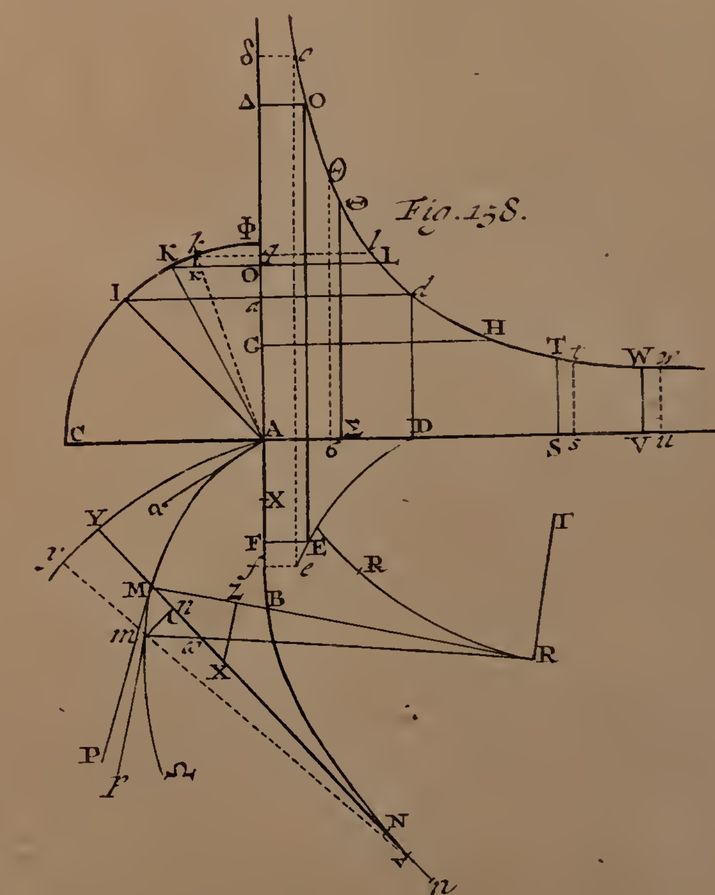

Fig. 158.

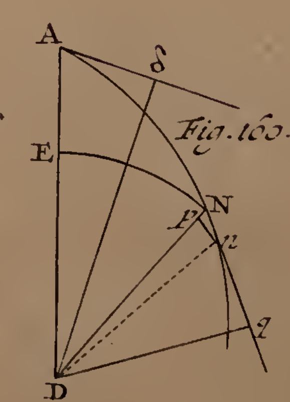

Fig. 160.