百科小叢書

算學的性質

來斯 著

殷佩斯 譯

王雲五 主編

商務印書館發行

四二四四上

中華民國二十三年四月初版
　　　　　　　　八月再版

百科小叢書 算學的性質一冊（一一九七五）
The Nature of Mathematics

每冊定價大洋貳角伍分
外埠酌加運費匯費

原著者　James Rice
譯述者　殷佩斯
主編兼發行人　王雲五　上海河南路
印刷所　商務印書館　上海河南路
發行所　商務印書館　上海及各埠

（本書校對者朱廣福）

綱　要

引言：算學與人類的實際需要——算學與計算及測量之技術有別——埃及人，希臘人，印度人及阿拉伯人之貢獻。

數：數的演算之定律——應用於數之交換定律，綜合定律，及分配定律——加號，減號，及括弧之使用——代數記號——整數——分數與小數——無理數——正數與負數——關於人類實際活動每一階段之數的意義之普遍化。

代數學：問題與代數記號——公式——代數演算之基本定律，——代數式之因子分解——代數記號非僅爲"縮寫"——論理的原理與算學的原理——方程式——"algebra"名稱之原始——二次

方程式之解法及變根——方程式與實用問題——虛數——一數之"冪"的觀念之普遍化——代數學開始是普遍化的算術，後來變成處理自然現象之變量的有力的武器——函數。

幾何學：空間物體之展伸——面，線，及點是物體的真實性之抽象——幾何學是論此類抽象的——歐幾里得的大著：其內容之簡略的概論——公理與假設——作圖與證法——歐幾里得關於平行線的著名的假設——歐氏的一切結論悉依賴此假設——旁涉於我們的物理空間之實際觀察的事物。

極限，微積分，週期數：由觀察運動物體而引起的極限之觀念——宇宙是事象之流而不是靜的佈置——微分：對於物理學的定律之重要——應用於曲線之長的的觀念——積分：——會聚級數與發散級數——三角術與週期函數。

算學的性質

引　　言

科學的研究起源於人類的實際需要，算學雖然是科學中之最抽象的，但在這方面也不能例外。在人類的原始需要中我們能見到算術的計算之開始，卽人在交換物品或均分其獵獲品的時候，不得不計算到能維持其均分或交換之約略的公平。在較安定的境況中，耕田代替了畋獵，成爲一民族的生命之活動時，必需把墾過的面積分成適當的部份派給各個家族，因此便逼迫着他們生出些測量的初步觀念來。到現在，一提及“算學”這名詞時，在尋常的男人或女人的心中所引起的第一個觀念，便關聯到算術計算的技術，或解決幾何學問題的技巧。這是眞確

的，我們學校中的敎育已發展到如此，以致代數學這題目，呈現到聽講者的心上，正和三角術及微積分學一樣。但對於受過善良的中等敎育之尋常的男女學生，代數學仍是"普遍化的算術"（Generalised arithmetic）其中的計算是用字母來代替"眞實數目"的；三角術是代數學或算術與幾何學之混合；微積分學是一種特別的研求"好像"是代數學，所不同的是它有一種希奇的運算，可以由充分的實習與精勤而得專門的熟練，但論到它的理由和目的，迄今仍多少保留着些神秘。因此，不管我們的一切曲解，"算學"這名稱構成的些觀念，與其說是關聯到"科學"，毋寧說是清楚地關聯到"技術"，它的養成是人類原始需要之一，當任何社會生活之形式，無論是根據食物之取得，或食物之產生，現實的時候。

我們人類的些初期的天才者，誰首先識認"一""二"與"許多"之間的差別，誰又進一步把"許多"區分成"三""五""十"等等，於是誰又知道，一雙手或兩雙手上手指的數目，及脚上脚趾的數目是幫助計數的一種極方便的機械；或者誰採集了些火石或石子，將它們一個一個

的放下，於是指示給他的同伴以他們所要運去的數目，於是又知道這樣互相傳達意見的方法太笨，便發明了聲音和符號，把數目的觀念傳送給聽者，——對於這些天才者我們誠然沒有什麼記載。但是，僅僅計數，畢竟缺少一種特性使算術成爲算學的科學之一，並且是其中最基本的。我們很難確實知道，在人類思想中從計數至認"數"的本身之研究爲一種興趣之對象，這樣巨大的進步，即何時我們開始知道，六塊石子，六枝箭，六個人，六棵樹，其中有一些共同的東西，不是石子，不是箭，不是人，不是樹，只是那個"六"；何時人類的心上開始明白，"數"離開被數的物體而有其本身的興趣，並且在一切計數的情態中呈現一統一的行爲（這便是一切可用科學的方法總結算的事實之特性）。六隻羊與四隻羊合成十隻羊的一羣，六塊石子與四塊石子合成十塊石子的一堆，實則六與四總是合成"十"不管那些對象是什麼，這便是一種科學的綜合，這一定費了原始時代的那位牛頓先生的許多心力，並且使他博得他的些天稟較低的同伴們之讚許與尊敬。我們可以假定，他是一位宣教士或醫生。當我們研究到埃及與巴

比倫人之文明時，便有些記載表明這樣純理智的研究是數士階級之特殊的領域。但是卽在這些大國裏，儘管有它們的一切財富文物及豪華，而算學知識之眞實本性却沒有被認識出來。這陳述可以用一簡單的說明給讀者以證明。測量是埃及人的一種必需的技術。尼羅河每年的泛濫把它兩岸的耕地間之界線通統掃蕩去了。水退下去之後，各民族間土地之重新劃分必得要實行，於是大家以實地經驗而知道了一大組的測量命題，卽如何求得一個三角形的面積。但這對於埃及人只是"土地測量"。要想離開田畝而知道些形式或圖形，猶如離開物質的事物而另知道一些，這種欲望顯然從沒有發生在他們的心中。首先使它作精神上之發揚的是希臘人，雖然他仍謙遜地保留埃及的名稱"幾何學""Geometry,"這字字面上的意義是"土地之測量"，而實際當它爲一種心智的訓練，其不復像埃及的原型，猶如交響樂之與村俗調。再者，埃及人有他們的金字塔及廟宇之精巧的建築者，他們的些工具中有一種是一根繩用結分成十二等分。他們用這個做成一個三角形的三邊，各邊之長是 3，4，及 5，並且他們知

道較短的兩邊之間所夾的一個角是直角。但是離開了線，繩，及特別的大小而思考那直角三角形本身的，却是一位希臘人，而不是埃及人，這位希臘人並且發見了一條偉大的定理，卽弦的平方等於兩短邊的平方之和。尋常人或許不知道，這條定理，卽著名的畢達哥拉斯(Pythagoras)的發見，確實走進了我們對於物理的空間之一切觀念中，並且由於它的近世的展伸，形成一個出發點，用以介紹任何測量的方法到近世思想之幼兒，卽相對論者的"時空"中。

為知識而愛知識，成為黃金時代的希臘人的一種熱情；所以這是很自然的，算學這字之適當意義的初期發展便是他們的天才之表現。在他們看來，數是一個動人的題目，完全離開計算的技巧或被計數的物品之特別性質；於是圖形的一般定律運用了他們的知力完全離開我們日常生活中所習見的實物之無窮的形態。

"Mathematics"這字發見在柏拉圖時代的希臘文字中，但沒有特別形成它後來所取得的意義。對於那位大哲學家 Mathema (這字字面的意義是"一件學習的事物")

這字的意義是任何教授或研究的科目。可是他在"定律"中確說,三個科目是特別適合於自由人的;那三個科目是算術,測量的科學(意卽我們現在的幾何學),及天文學。他的注重這三個科目才逐漸使 mathema 這字專門用於這三種及其類似的對象之研究,因此在亞里斯多德時代,這爭論很是激烈,亞氏的些信徒說明這字的特殊用處,指出修辭學,詩學,音樂或文學這類科目,一個人卽使沒有學習過,也能了解它們,但是那些統括在 Mathemata 這名詞之下的科目決不會爲任何人所能了解,除非他對於它們受過有定程的教授。Mathematike 這字的第一次應用是在畢達哥拉斯時代,約在柏拉圖以前一世紀以上,並且在畢達哥拉斯派看來,這字似乎實際上已有些爲後來衆所公認的歸屬於它的專門意義;雖然如此,在亞理斯多德時代,Mathematics 這詞,字面的意義是"適合於學習的事物",曾確定其本身是關於算術,幾何學,天文學,光學等類科目的,這些科目被認爲是超出其他科目以上的些事物,最適合於文明人於其內領受敎育。

希臘思想家的心中對於這些事件很是清楚,所以他

們用完全不同的字來分別這些高尙的心之訓練與那些日常生活及事務上的技術和實用。例如，柏拉圖用"算術"(arithmetic) 這名詞，其意義和現在學校課程表上所用的正相同，但另用一個不同的字"計算法"(logistic)來表示計算的技術。因此他要論及"神速計算者"(Lightning Calculator,) 和那些能合計成行的數字又快又準的人，稱他們爲天生的精通計算者，但他卻不稱他們爲"算術家""Arithmeticians," 除非他們會表現自己能研究並握住眞確的數之理論，與計算顯然有別。他並不輕視計算法，因他承認，天性遲鈍的人可以由它而習得靈敏些，並且它是日常生活中所很必需的一種技能；但他却認爲這種計算技術的獲得，不過是爲研究眞正科學的一種預備。同樣地，在亞理斯多德時代，"幾何學"(Geometry)與"測地學"(Geodesy)之間也畫了一個淸楚的區別，前者是我們現在所用的幾何學意義(雖然這字的原始意義是"土地測量")，後者我們應稱之爲"測量"，不僅是陸地測量並包括一切長度，面積及體積之實際的測量。亞理斯多德似乎是第一個指明算學間的畫分的，這種畫分

直到現在均爲一切學校及大學課程上所認可，卽普通科學之分別爲兩枝，"純粹的"與"應用的。"他認力學，光學，音調學是算學中之較物理的支派，指明這些科目中的命題之證明依賴着幾何學及算術等純粹算學的科目。

雖然算術及幾何學等名詞是導源於希臘人，但我們切不可忘記，印度人曾獨立地開發了這些科目，並且我們現在的計數法也導源於印度人。1，2，3，等字形是我們從印度人的著作中所用的各種符號抄寫而來，旣代替了希臘的用字母計數的方法，又代替了羅馬的累贅的數字 I, II, III, IV, 等等。

一提及"算學"這字，便有三個科目的名字跳到尋常人的心上，但這三者之中的第三個，代數學，我們還沒有講到。"Algebra"這字的起源是阿拉伯文，它的第一次出現，是在第十世紀的一位阿拉伯的算學家 Al Khowarazmi 的一部著作中，但是算學中的些運算，我們所稱爲"代數的"，當然要早得多，並且，它的較幼稚的形式，竟要回溯到埃及人。一位希臘人，卽亞歷山大城的帶奧蕃塔斯 (Diophantos)，約在第四世紀之中葉，曾寫了一

部關於它的著作，算是西方的第一部代數學，並且實際上已把這科目發展得很高比之希臘人，因爲希臘人的特別天才較接近於幾何學。阿拉伯的代數學也是從印度人學習得來的，並把它帶到西方。在解釋方程式中，有一個著名的運算法，即方程式這一邊的些量可遷移到那一邊只消變一下符號。這種遷項認爲是些分離的量之復合，古人以爲是一種極重要的運算法。阿拉伯人 Al Khowarazmi 寫他的論文時，他稱這種運算法爲 "al-jabr m'wa'l muquabalah," "jabr" 這字便是指的這種復合。"muquabalah" 這字指的方程式中的另一運算法，即同一數字出現在方程式的兩邊符號相同時，可以從兩邊取消。("al" 一字是阿拉伯文中的有定冠詞）因此這論文在中世紀爲歐洲學者所熟悉的時候，他們便把它的阿拉伯文的名稱之首字歸屬於它，後來輾轉訛傳，便成爲現在的 "algebra."

數

我們已經知道，第一位算學家便是那位離開了三粒石子，三塊肉，三隻狗，或任何三件特殊的事物，而單獨思及那“三”這數目的人。這種由計數的事物中抽出的每種物理性質之“虛物”（emptying）便是這位哲學家所稱為“抽象”（abstraction）的例子。我們所論及的這位原始的算學家拋開事物本身的一切性質只採用其可數性。在他，三件事物是什麼，是毫無關係的，卽使三件事物不屬於同一種數也不相干：一隻狗，一棵樹，和一粒石子，也足以表現“三”的物理圖像，正和每類中的三個一樣。我承認，當他把任何三件事物加進任何四件事物之一堆中去的時候，我總得着同數目的事物之較大的一堆，卽七件。他不曾見到，四隻狗和三隻狗所組成一羣狗的數

目，與四粒石子和三粒石子所組成一堆石子的數目有什麼不同。這些說明表面是很瑣細的，但決不可蔑視，因爲它們對於了解我們所稱爲"綜合"的一種科學程序，是極關重要的。他既認爲這種情形對於一切堆或羣的相加都是眞確的，他開始以爲相加對於羣類沒有影響只影響於數目，於是他達到這樣的"同一形"

$$4+3=7$$

這當然是用我們近世的記號。古代及中世紀的人寫這結果用的是不同的記號，但從實質上說他們所加的是"數"而不是"事物"。3，4，7，這是數字是近世採用的印度人的記號；+這符號直到十五世紀時方才使用的；兩條平行線畫＝代表"等於"也是晚近的出品。讀者應該記在心上，我們所用的記號與希臘人，印度人，阿拉伯人，或中世紀的歐洲人所用的記號大不相同，但這些記號所指示的程序却是一樣的。

還有一件事是古代的這位敏銳的觀察者所注意的，就是：他把四件事物的一羣加到三件事物的一羣，和把三件事的一羣加到四件事物的一羣，其得數是一樣的。這似

乎又是一件特別瑣細的事情，但這却顯示了＋號的正確的用法；我們現在將這結果寫成這樣

$$4+3=3+4$$

左邊讀作"四加三"意思是加三於四之結果；右邊讀作"三加四"意思是加四於三之結果。用任何一雙數目來代替 3 與 4，其結果都是眞確的，因此我們寫作一個普遍的結果如下：——

$$a+b=b+a$$

於是讀者立卽想到代數學。嚴格說來，這並不是代數學。現在我們用比較上面更加普遍的記號形式來作簡單的敘述，卽任何兩數相加之結果與它們所排列的次序是沒有關係的。我們使用任何方便的記號（經驗曾指示我們各種文字的字母是最方便的記號）來表示一個數，不須特別地敘述它的數值。（這種方法除了算術之外便有許多的用處。例如，化學家用一種特別的記號敘述些重要的結果，簡潔而明瞭。因此H代表氫的一個重量單位；O代表氧的 16 個重量單位；Cl代表氯的 35.5 個重量單位等等，差不多有百十個這樣的記號列成表式在任何化學著

作中。)這位算學家曾有一句話是關於上面所敘述的記號的。他說加法是"可以交換的"。再來作一個瑣細的敘述。假設我們要加 4 和 3 和 5。當然,我們寫它們的次序是無關緊要的;但依它們現在的情形,我們或先加 3 於 4,然後再加 5,或先加 5 於 3,然後再加 4,也是無關緊要的。這個我們可用下式表明

$$(4+3)+5=4+(3+5)$$

這裏我們有一個用"括弧"(即兩條曲線( )的名稱)的例子。在左邊,括弧內包括着 4 與 3 表示它們先相加然後加 5 於其和;在右邊,括弧中的 3 與 5 表示它們先相加然後加其和於 4。算學家又有一句特別話來應付這件事。他說及一條"組合"定律,他完全用記號寫成下式

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

當然照他的交換定律,這些"式"的任何一個都等於 $(a+c)+b$ 或 $a+(c+b)$ 或 $(b+c)+a$,以此類推;並且最後,假使他要願意,他可以不用括弧而寫下總和,如 $a+b+c$,或 $a+c+b$,或 $b+c+a$ 等等。事實上他能創

造出很像魔術般的問題包含着括弧的用法，正如大多數學生所知道的，將引得那些不注意者落到許多陷阱中；但普通說來學生所陷入的些錯誤是由於他沒有把被用的記號之簡單意義保留在心上。

減號在這方面也沒有什麼困難。假使我們加 6 於 5，從其結果中減去 4，我們用最正確的記號法表式如下

$$(5+6)-4$$

但是我們先從 6 中減去 4，然後加 5 於其結果，仍可得同樣的結果，正確地寫成下式，

$$5+(6-4)$$

或者，假使我們從 5 中減去 4，然後加 6 於其差，就是

$$(5-4)+6$$

餘類推。因為這些都是相等的，算學家又把他的記號簡單化了，寫作下面諸式

$5+6-4, 5-4+6$，等等。

隨他的方便或選擇。

再舉一個例子，稍有一點重要。假設我們加 3 於 7，再將其結果從 12 中減去。嚴正的記號是

$$12-(7+3)$$

現在是不是可以簡單地去了括弧，而寫成

$$12-\ 7+3\quad ?$$

顯然是不可以的；因為第一式的結果是 2，第二式是說"從 12 中減去 7 再加 3"得數是 8。實則 $12-(7+3)$ 就是等於 $(12-7)-3$，或 $12-7-3$，這就是說"從 12 中減去 7，再從其餘數中減去 3"。復次，讓我們從 7 中減去 3，再將這結果從 12 中減去。這可以記作

$$12-(7-3)$$

這式與 $12-7-3$ 完全不同，但與 $(12-7)+3$ 的結果是實際相同的，上式即從 12 減去 7 再加 3 之結果，因此，較概括的記號是

$$a-(b+c)=(a-b)-c$$

與 $a-(b-c)=(a-b)+c$

於是，成為一種慣例，假使我們去括弧而它前面是減號則括弧以內的符號必須改變。當然，上面的兩式可以各寫作 $a-b-c$ 及 $a-b+c$；但因為我們不"同時一齊"將許多數目相加或相減，一定要將它們配合成一對一對的，一段

一段的計算,因此括弧總是有的,雖然不一定要寫明。爲了這減號後面括弧內的符號之改變,學生們常常弄亂了。例如,我們寫

$$16-[10-(5+3)]$$

現在嚴格說來,這式的意義是:——"加 3 於 5,然後將其結果從 10 中減;再將這結果從 16 中減去"。答數當然是 14,和下面的式子一樣

$$16-[10-5-3]$$

並且這式又可以改作

$$16-10+5+3。$$

簡括地說,假使第一式用話語來解釋得正確,以後便不會弄錯;但有一純機械的方法將括弧一個一個的去掉,即"從裏往外去,並且必須改符號",所以

$$\begin{aligned} & a-[b-(c+d)] \\ =\ & a-[b-c-d] \\ =\ & a-b+c+d \end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned} & a-[b-(c-d)] \\ =\ & a-[b-c+d] \end{aligned}$$

$$= a - b + c - d$$

用實數來試驗總可以證明這是真確的。

我們現在又碰着一個結果將引起一個困難而又很基本的問題。假設我寫出

$$16-(3-7)$$

這是說"從 3 中減去 7,再將其結果從 16 中減去"。這顯然是無理取鬧:你不能從 3 中減去 7。但假使一個朋友向你借去 7 鎊,只還了你 3 鎊,他似乎以為這樣就算兩訖了,却教你吃了 4 鎊的虧。"在這交易上我減去了 4 鎊了!"這句自然的歎息,一定會從你的口脣上發出來。所以假使我寫作

$$16-(3-7)=16-3+7=20$$

遵守變號的規則,我以為這可以代表你那位朋友的經濟情形,他原有 16 鎊在他的衣袋裏,後向你借了 7 鎊,只還了 3 鎊,這樣猶如從他自己的小財產中"取去"(3-7)鎊,却得了4 鎊的利益。所以這樣一個式子

$$a-(b-c)$$

中假使 c 大於 b,並不一定是無理的,於是寫作

$$a - b + c$$

仍是十分健全的。對於這一點，我們姑且停一會，留待後來再講。

我們對於乘法表都是熟悉的，於是用 3×4 來作為例子，我們的原始算學家發見 4 件事物的 3 堆，與 3件事物的 4 堆其總數全相同時，他會覺得是一件有趣的事。我們寫它出來，其結果是

$$4\times3=3\times4$$

左邊讀作 "4 被 3 乘"，右邊讀作 "3 被 4 乘"，較概括的記號是，

$$a\times b=b\times a$$

這就是說兩數相乘是 "可以交換的"。

實際上，在我們用字母代表數目的時候，這十字符號 $\times$ 常常省去，所以 $a\times b$ 之積常寫作 ab，$b\times a$ 常寫作 ba。我們用實數的時候，這十字號自然不能省去：例如 34 是三十四，不是三乘四，必得要寫作 3×4，有時或寫作 3·4，這一點恰在橫行上有時是代替十字號的。(這恰在橫行上的一點決不能與在橫行以上的一點，例如3˙4，相混，因

爲後者是表示小數點的。)這種給與字母而不給與數字的特權,在這裏必須引起一個小小的旁枝問題;假使我們實際要擬定一個有兩個數字的數,前一數字是 a,後一數字是 b,則這個數一定要寫作 10a+b。這足以使我們想起在書寫或刷印數目時的一種普遍的慣例,卽最後一位是"個位",其前一位是"十位",餘類推,所以

$$356=6+(5\times10)+(3\times100)$$

但這個慣例不用於我們的字母記號中。實際上 abc 是 a 被 b 乘,其結果又被 c 乘。假使我們要擬定一個數,其第一數字是 a,第二數字是 b,第三數字是 c,我們必須寫作 c+10b+100a。除了這特別注意的解釋以外,十字乘號的省略,沒有什麼不方便。

在加法或乘法中,同一數重複好幾次的時候,便有兩種很方便的簡略用法。例如:

$$a+a+a+a+a$$

可以寫作 5a,這種經濟的寫法是明顯的。又如,

$$a\times a\times a\times a\times a$$

或 $a\,a\,a\,a\,a$

普通寫作 a^5, 5 是較小號的字,印在字母的右上角,和 a 5 不同,因爲這個實際與 5a 相同,這是我們知道的。於是我們讀這 a^5 上的 5 爲"指數"(index)或"冪"(power),a^5 則讀作"a 的五次冪"。現在試看下面的四個"式" ab, ba, a^b, b^a,我們認識前兩個是同樣的,但是這與第三式或第四式便不是同一數;並且第三式與第四式也不是代表的同一數;a^b 代表的是 a 乘以 a,其結果再乘以 a,這樣繼續乘着,直到 b 次爲止;同樣,b^a 代表的是 $b\times b\times b\times\cdots\cdots$ 直到 a 次。

現在剩下沒有講的是算術中的第四種基本法,卽除法。這是乘法的反面,所以當我們寫 $4\times 3=12$ 的時候,我們也可以寫 $12\div 3=4$ 或 $12\div 4=3$。實際上,除號÷,現在常用"斜線"(solidus)/ 來代替,上面的除法常寫作 12/3 及 12/4。當然,除法是不能交換的;因爲 12/3 與 3/12 決不是相同的。誠然,我們的所謂數,一向是只限於那些可數的個別的物體,則 3/12 這式便毫無意義,假使"數"只是尋常的表中的數字。因此,12/5,或 12/7 也都

沒有意思，而 12/2 及 12/6 才算是有意義；所以，假使我們除了 1,2,3,4, 等等以外沒有其他的數，則 a/b 也許有，也許沒有意義，並且卽使 a/b 是有意義的，b/a 便沒有意思。這裏所介紹的"意義"(Meaning) 這字應得稍加一點審愼的考慮。我們常說，像這樣的式 a+b 或 a−b，a 意卽任何數，b 也是任何數。這很難算一個正確的陳述方法。在任何特種的情形中，a 一定要指一個"某"數，b 也要指又一個"某"數，於是對於這問題的正確方法是這樣。假使 a 代表一個定數，並且 b 也代表一個定數，或等於或不等於 a，那麼 a+b這式便有意義，a−b 也有意義（假使 b 大於 a，則後式或須稍加一點條件）；ab也有意義。但是"數"字的意義若不加伸展，a/b 也許不會有意義。現在我們來討論這種伸展。

自然我們現在不僅是論及個別的，可數的對象，並論及將它們（指對象）分剖成些部分之結果以及對於度，量，衡，及其他物理性質等觀念之發達，所以根據某種規定，所分成的部分可以計其大小之相等或不等。因此一半，三分之一，四分之一等等觀念明顯地發生了。這些自

然是要介紹到伸展的數系中，寫作 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，有時因為印書的方便，更作 1/2，1/3，1/4。在埃及人算術計算之最早的記載中，只使用一種分數，名叫單位分數，即分數上的分子統是單位。例如我們所寫的 2/9，他們便作 1/6+1/18；2/95寫作 1/60+1/380+1/570。希臘人，羅馬人及印度人使用一種記號，相當於我們所用來記錄分數的方法。所以我們現在認 $\frac{a}{b}$ 或 a/b是有意義，只要 a 及 b 是"整數"如 1,2,3,4，等，即使 a 所代表的數不能適為 b 所代表的數除盡；因為將某事物分割成 b等份的一種物理的運算我們能將它繪畫出來，於是揀取其中的 a份，當為一件可認識的事物。實際上，這樣考察這問題的方法，只有 a 小於 b時，才能適用；於是這分數稱為"眞分數"(proper fraction)。假使 a大於 b，則此分數稱為"假分數"(improper fraction)，其中仍可取得一部份的整數，並且這整數與眞分數之聯合稱為"帶分數"(mixed number)，所以假使我們寫這假分數 16/7，也可用帶分數 $2\frac{2}{7}$ 來代表。這數系中既包含整數，又包含分數，我們可以變通我們的記號使能應付這種新局面，即允許 a 這

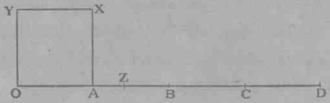
樣的一個單記號不但像以前一樣,能代表一個整數,並且在需要時能代一個分數,無論眞的或假的。在每種算術教科書上所說明的分數之加,減,乘,除的法則,於是可以使我們,像以前一樣,給 $a+b$, $a-b$、ab, a/b 以意義,只要 a 和 b 是代表的確數。交換與組合的原理依然有效力。假使我們注意到,我們可以利用小數的記法代替尋常的分數形式,以表示眞分數或帶分數。但是這裏有一個重要的區別,我們不久將見到的,即一個眞分數常可用尋常數字的一個有限數來表示,而其相當的小數式也許是無窮盡的,例如:

$$\frac{6}{7}=\cdot 857142857142857142\cdots\cdots$$

尋常寫作 $\cdot\dot{8}5714\dot{2}$

數的一切可能,我們決沒有講窮盡,這在希臘人因爲他們幾何學的天才,那時已經知道了。因爲 $2\times2=4$, $3\times3=9$, $4\times4=16$, $5\times5=25$等等,所以有時說 4, 9, 16, 25等數有平方根,而 2,3,5,6,7,10 等等沒有平方根,於是不是"整方"(perfect square)數。拿 2 來做例子;我們可以應用一切算術教本中求平方根的著名的方

法。這方法作得很完善，但永不會完結（當然，除非在有什麼，或失了興趣，逼着我們不得不停止的時候）。例如，1.4的平方是小於 2，但 1.5的平方却大於 2；1.41的平方小於 2，1.42 的平方却又較大，1.414 的平方較小，1.415的平方却又較大；1.4142的平方較小，1.4143 的平方却又較大，這樣可隨我們的意一直推算下去。於是我們可以排列成一組上升的數，例如 1，1.4，1.41，1.414，1.4142……它們的平方總是小於 2，但逐漸地增加與 2 接近，可隨我們的意愈接愈近，只要我能充分地耐煩。我們又能排列成一個降級數例如 1.5，1.42，1.415，1.4143……它們的平方逐漸地減少與 2 接近，但永不會達到 2。這個缺口可以如我們的意逐漸圍合到任何程度，但永不會絕對地關閉。這情形是很困惱人的，但是希臘人採用下面的線的證法，使 2 的平方根能真實存在，毫不困難。他在推論數時，幾乎總是將數繪畫出來，猶如代表幾何上的大小，像長度，面積，體積等。我們試在紙上畫一直線，更在其上作一O 點，再作 A，B，C，D……使O A = A B = B C = C D = ……假定每段等於 1 時。於是O A，O B，



第一圖

OC，OD，……在幾何上的意義可認爲是代表的 1,2,3,4……等數。復次，將OA，AB，BC，……等線份再分爲些等分，其精細可以隨我們的意，我們可用來代表各種的分數，眞的及假的。但其中决沒有一點是代表 2的平方根，因爲它不能表示一個循環小數，這是我們知道的，可以改作一個普通的分數，分母與分子，都是尋常數字記的有限數。但我們試在OA邊上畫一正方OAXY。依照畢達哥拉斯的命題，對角線OX的平方等於OA的平方加AX的平方，卽 1的平方＋ 1的平方，就是 2。所以，假使我們用圓規在OABC線上畫一Z點，使 OZ＝OX，於是恰如OB可以說是"代表"的 2，OC是代表的 3，等等一樣，OZ 也確可以同一意義，是代表的一個數其平方是 2。總之，我們特意將數的系統伸展了，將我們就那線上

從O起到任一點的長度所代表的數也包括在內。這樣，依適當的作圖法，任何數的平方根都可以用這樣一個圖來表示。這樣的事情便是我們將任何數的平方根，立方根，四次根，等介紹進數的系統中之理由。我們要辨別它們與整數及分數不同，便稱它們為"無理"數("irrational" numbers)但這個形容詞決不能解釋為"無理由的"；因為這些數的存在是很"有理由的"一種假設，所以有大量的算學，在科學的及工程的研究上之實用的計算上絕對重要的算學，決不能沒有這些無理數。於是在我們說 a是代表一個無理數，即 5的七次根時，其意即表示 a適應這樣的關係

$$a^7=5。$$

我們又假定，如果 a代表一個無理數，b代表另一個有理或無理數，於是 a+b，a-b，ab，a/b，也代表些數，並且 a+b和 b+a是同一數，ab與 ba也是同一數。(這必得注意，如果 a和 b都是無理數，便不能斷定，ab一定是無理數。例如$\sqrt{2}$與$\sqrt{8}$是無理數；但$\sqrt{2}\times\sqrt{8}$不是無理數，因為它等於$\sqrt{16}$結果是4。) 我們作這假設，是取決於

"連續原理"(principle of continuity),因爲我們總能求得一個有理數,(整數或分數)接近那在研究中的無理數之指定的量,無論其如何的小,所以我們承認,凡對於有理數是眞確的些定律,則對於無理數也是眞確的。

在本節的前一段,我們曾注意於 a－b這樣的式不很健全假使 b所代表的數大於 a所代表的數。即使如此,我們也見到,這種式也不是完全無理由的。我們現在可作數的系統之最後的伸展,使對於這樣一種式的懷疑之痕跡可一齊掃除了。假定你向一定的方向走了 6呎,於是向後轉走回 4呎,你確曾走了 10呎,但最後的結果,你離動脚的地點只有 2呎。假使你先向右走了 6呎,再向左走了 8呎,你離開原來的地點仍是 2呎。這樣兩件事,用一簡單的記號如何能分別呢? 數學家的經驗曾引導他得到這問題的一個很簡單的答案。他用＋6代表向一方向 6呎,用－4代表向另一方向的 4呎,於是介紹了他的所謂"方向數"(directed number),這數有些是"正的"(positive)有些是"負的"(negative)(那一方認爲是"正方",那一方認爲是"負方"這完全由於你的選擇和方便。)他於

是把第一次所走的記載如下：

$$(+6)+(-4)$$

結果是+2。注意這+號有兩種意義，一個是表示方向，一個是表示由-4所代的結果加於由$+6$所代表的結果，"加法"的意義比以前更加普通了。第二次所走的表示如下·

$$(+6)+(-8)$$

結果是-2；因爲你現在離開起點 2呎在負的方向。於是第一式可縮寫爲

$$6-4=2$$

第二式可縮寫爲

$$6-8=-2$$

於是我們用這"方向"的慣例一舉而使我們系統中的數通統加倍；因爲我們先前的任何數，無論是有理數或無理數，整數或分數，都認爲是正數，現在它們各有其相當的負數。我們的字母記號 a,b,等等，在必需時，可以認爲是代表的負數。這裏必得要注意。在一個字母，如b 的前面，雖然不必須寫一個減號，但我們可以假定，它在必需時是代表的一個負數。現在我們試討論下式

$$a+b$$

a代表約+9，b代表−5。照上面的陳述，我們可以當它是向北走 9步，隨後向南走 5步，結果是偏北 4步，所以 a+b代表的+4。於是立刻有一個問題到了我們的口脣上，假使 b代表的負數則 a−b是什麼？這可以用一個簡單的情形來解答。哈里向北走 9呎，詹姆士向北走 5呎，則哈里離開詹姆士多遠？當然是在詹姆士以北 4呎；卽

$$(+9)-(+5)=+4$$

但是現在哈里向北走 9呎，詹姆士向南走 5呎；則哈里離開詹姆士多遠呢？答案當然是偏北 14呎；卽

$$(+9)-(-5)=+14$$

這裏我們又有："兩負成一正" 的一句話。假使括弧以外有一減號則括弧以內的符號要改變，這是不必游疑的，我們從一切人生的追求與活動中，可以有許多例證。例如，我們知道，一切的溫度計總刻着一個零度O；比這個較煖的溫，便記着+號(假使這符號省去了，至少也含有這+的意義)，並且比它低的溫度便記着−號。a溫度與 b溫的相差是多少？總寫作 a−b。試舉例來試驗。$+30^0$ 與

$+20^0$ 相差多少?答案是 $(+30^0)-(+20)$,卽$+10^0$,就是前者較後者高十度。20^0 與30^0 相差多少?答案是 $(+20)-(+30)$,卽-10^0,就是前者較後者低十度。$+30^0$ 與 -20^0 相差多少?答案是 $(+30)-(-20)$,卽$+30+20$,或$+50$,就是前者較後者高五十度。這是顯然正確的;從一標誌以下的 20至以上的30,中間有 50級。再如,走上扶梯十級,再回下十五級。則你在何處?答案是上升 $(+10)-(+15)$ 級,卽上升 (-5)級;實際是下降 5級。最後一個例證,是說明 ab 的意義,當 a及 b可以像代表正數一樣代表負數,的時候,一列火車穿過車站,向北駛行,我們知道它的速度是每分鐘 500碼,4分鐘後它走到那裏?是在車站以北 2,000碼,我們用正數代表那火車在車站的一刹那以後所經過的時間,並且用負數代表未到站以前所經過的時間。這結果所用記號記載如下

$$+500)\times(+4)$$

就是$+2,000$。

但是假使火車向南馳行,4分鐘後在那裏呢?答案很清楚地是在車站以南 2,000碼;於是我們的記號是

$$(-500)\times(+4)=-2\ 000$$

所以一負數與一正數相乘之積是一個負數。再從另一方面看。當火車向北駛行，在到站以前的 4分鐘它在那裏?顯然是在車站以南 2,000碼，這又可寫作

$$(+500)\times(-4)=-2,000$$

最後，並且是最有教益的一種，假使火車向南駛行，未到站以前 4分鐘，車在那裏?一定無疑是在車站以北 2,000碼，這又可以寫作

$$(-500)\times(-4)=+2,000$$

卽兩個負數相乘之積是一個正數。

要把捉住算學理論的本性，絕對是一件無希望的工作，除非讀者能了解算術中對於各種數的基本運算法之記號代表，並且除非他同時確實知道，這些概念並不是一種不準確的想像，却隨時受着我們物理世界中的許多活動及事故之對照，而這些只選了極有限的一點陳述在上文中。

代數學

數學家旣已發明了這種簡明的記號，藉以陳述他的數學中所應用的四種基本運算之結果，他便時時高興，要伸展他的記號法的範圍及權能遠超過於他的祖先所能想像到的以外。

大多數人知道，代數學對於"解題"是極有用的；事實上，有些由實用的活動中所發生的計算，如果沒有記號來代替那些開始不知道却又不得不求出的數，則這些計算完全是不可能的，每種代數學的敎科書上都還有這樣的問題使學者可以學得處理它們，如果它們發生於他自己的研究中。這類問題的解答足以使前節中所述的些專門運算加廣而且加深，於是敎科書上的起首幾章總是專注重於實習"公式"(formulae) 的使用。公式的熟讀與

了解，對於工程師，化學家，物理學家，或建築師，等等是一種絕對的必需。例如，一位工程師的計算表的 C^2Rt. 假使C 及 R及t有意義，則這全式才有意義。實際上這式告訴你，先將C 所指的數自乘，再用R所代表的數乘其積，最後再乘以 t所代表的數。依照工程師所慣用的，C 是電流的單位「安培」(ampères) 數，R 是電阻的單位「歐姆」(ohms) 數，t是電流所經過的秒數，這公式所計算出來的價值就是那電線上所發生的熱量。在使用電爐的現在，對於這 C^2Rt式在使用上如此的簡潔而精密，可以不須注重了。

再舉一個例，是一部代數學書中的一式 $x^2-5xy-7y^2$。這式中有三"項"(terms)，第一項，x^2告訴你將 x所代表的數自乘方；第二項告訴你 x所代的數與 y 所代的數相乘之積，再乘以5；第三項告訴你 y所代的數自乘方，其結果再乘以7，你於是從第一項中減去第二項，再從其差中減去第三項。這一種運算用言語來陳述要佔四五行的地位，若用字母來代表，只不過佔三分之一行的地位。

於是有許多很有用的運算都用記號來代表，例如：

$a(b+c)$，$a(b-c)$，$(a+b)(c+d)$，等等。

將 $a(b+c)$ 來做例子。照括弧的用法，這式是表示 b 和 c要先相加，然後將其和來乘 a。用 $5(7+3)$ 來試驗。結果是 5×10，卽50；但請注意 5×7 是 35，5×3 是15，這兩數相加是 50。就是

$$5(7+3)=5\times 7+5\times 3$$

由此可以擬定

$$a(b+c)=ab+ac$$

用任何數來試驗可以證明這公式是眞確的。

同樣，可用任何數來試下式仍是眞確的

$$a(b-c)=ab-ac$$

我們可將這公式無限地擴充，例如

$$a(b+c+d-e\cdots\cdots)=ab+ac+ad-ae\cdots\cdots$$

這稱爲 a "分配" 於括弧內的各項，這結果稱爲 "分配定律" (Distributive Law)。

再作一較廣闊的形式，

$$(a+b)(c+d)$$

因爲要試驗，用10代a，8代b，4代c，3代d。

結果是：

$$18\times 7 \text{ 卽 } 126$$

現在注意 ac是40，ad是30，bc是32，bd是24。這四個數相加，結果是 126。因此可以擬定

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

用任何數來試驗總可以證明是眞確的。但實際上，假使我們以爲先前的結果是正確的，我們便不須用實數來試驗，使我們相信這公式也是正確的；因爲我們只消將分配定律應用兩次便可以"證明"它。例如，

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$$

這裏(a+b)暫時當作一個數看待。現在再應用分配定律於上式的右邊

$$(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$$

這證法便完全了。

再取(a+b)(c−d)來討論；它等於(a+b)c−(a+b)d，就是等於 ac+bc−(ad+bd)，這又等於 ac+bc−ad−bd，只要括弧以內變號的規則在這裏也是對的，用任何

數來試驗,證明是如此。例如用上面的數,$a+b$是18, $b-d$是1,所以結果是18; 18又等於 $40+32-30-24$。

最後來討論

$$(a-b)(c-d)$$

這就是$(a-b)c-(a-b)d$, 又是 $ac-bc-(ad-bd)$ 即 $ac-bc-ad+bd$, 於是用實數的試驗以證明減號以後的括弧除去時其內的符號須改變的這條公共規則。

現在,上面的些各別的結果可以總括成一個結果,只要我們記好,字母於必需時可以代表負數,和代表正數一樣。例如

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

這式總是真確的,即使其中有幾個字母是代表的負數。以$+9$代a, -5代b, $+4$代c, -2代d。

左邊便是

$$[(+a)+(-5)][(+4)+(-2)]$$

右邊便是

$$(+9)\times(+4)+(+9)\times(-2)+(-5)\times(+4)+(-5)\times(-2)。$$

現在有一個關於正數與負數相乘之積的確實試驗，假使我們在前章所指出的是概括地眞確，於是

$$(+9)\times(+4)=+36$$
$$(+9)\times(-2)=-18$$
$$(-5)\times(+4)=-20$$
$$(-5)\times(-2)=+10$$

這四個數相加；即"代數字意義中"的相加，特別注意於符號；結果如下：$(+36)+(-18)$是$+18$，$(+18)+(-20)$是-2，於是$(-2)+(+10)$是8，$+8$就是應得的結果。

這些結果的特別式有時是極有用的。下面的兩個便是常見的：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

改作平常的語文，便是"兩數之和之平方等於兩數各個之平方再加其相乘之積之二倍，又兩數之差之平方等於兩數各個之平方減去其相乘之積之二倍"。記號公式比較這語文是何等的簡明。

下面又有一個有價值的“不時之需”:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

還有一種技能是算學家必得要訓練,正如藝匠一定要訓練使用他的工具的技能一樣,就是關於剛才所述的同樣的運算,但從反對方的觀點來對付。例如下式是我很容易看出的

$$\begin{aligned}&(3a+4b)(2a+7b)\\&=6a^2+8ab+21ab+28b^2\\&=6a^2+29ab+28b^2\end{aligned}$$

但是假設我們寫下一式

$$5a^2+41a+8b^2$$

對於這個我們能作逆的運算,使它表現爲兩個“因子”(fac-tor)相乘之積嗎?實際上,我們能將這式分解爲兩個因子;它是等於(5a+b)(a+8b),但是,若照上式,隨意取幾個數來代替 5,41,及8,事實上不會常常能分解爲兩個因子;至少,不能用我們曾經討論過的些數,即“實”數,無論整數或分數,有理數或無理數,正數或負數。卽使可以分解因子,而那些因子中的數也不會豫平常的那樣整

潔，也許含有很繁雜的分數，或竟是無理數。例如，a^2+b^2 便沒有像上面同樣的因子；$a^2+6ab+7b^2$ 雖然有因子，但它們是

$$[a+(3-\sqrt{2})b][a+(3+\sqrt{2})b]。$$

訓練分解因子的技能，以及能看出可解與不可解的機會之見識，是一位算學家所能訓練的一種最有用的成就，於是每種代數學的書上總有好多頁是專注意於由經驗所啓發得來的方法和技巧，對於分解各色各樣的代數式所必需的。

上面的些代數式的例子，自然還是些比較簡單的。一個式可以包含許多項，並且每項可以有更複雜的構造。再者我們可以造出更複雜的些式，其中含有剛才所指的那些數的積，商，及冪。下面的一式便有一種特別的意義，對於任何有無線電興趣，也許曾聽到過電路中的"阻抗"(Impedance)的人，這"阻抗"是在熱心於無線電者的談話中所自由往來的一個字：

$$\sqrt{\left\{\left(2\pi Lf-\frac{1}{2\pi kf}\right)^2+R^2\right\}}$$

依照代數式來講，它是教你作一大組的計算。首先，你用L乘f（它應讀作“f所代表的數”之縮寫）再乘以π，再乘以2。從這結果中減去由f，k，π，及2相乘之積除1所得之數。再將此結果乘方然後加R的平方。最後再將此結果開平方根。在一位工程師的袖珍册子中，你可以尋得這公式，它告訴你這是一條電路的阻抗，這電路的“電阻”(resistance)“感應係數”(inductance)及“電容”(capacity)各等於R，L，及k之尋常的電的單位數，又有一個交流電的“頻率”(frequency) f。π是圓周與其半徑之比率。在同一袖珍册子上，在同樣的關係中，你又可尋得另一式如上：——

$$\frac{E}{\sqrt{\left\{\left(2\pi Lf-\frac{1}{2\pi kf}\right)^2+R^2\right\}}}$$

這式是要教你將前式所得的數來除E，這除的目的是要求得這電路中所生的交流電之“巔”值("peak" value)在一種交流電動力，(其“巔”值是E)施於它的時候。

現在，讀者不要誤會，以爲這種記號的惟一價值僅是當作一種方便的省寫，簡明地表示些必需而有用的實用

上的計算。這便是一種很不充分的見解。總之，這些式並不是開始由某某高明的算學家所口授因而記錄下來的。它們是被證明過的。它們是從一定原理中用明白而尋常的推理所演繹出來的，並且，更有進者，這種演繹，若不用記號，是絕對不可能的。假使我稍費一點時間論及這些原理，這便可以明瞭。第一是"物理的原理"，即由實驗與試驗所發見的些定律，在這裏所應用的，便是由歐姆(Ohm),法拉第(Farady,)馬克斯維耳(Maxwell)等人所首先提出的些關於電路的定律。這些定律可以使一個人寫下一個"方程式"，恰足以陳述兩個算學式之值的相等。現在，這位實驗者，這位物理學家的話已經說過了，於是算學家開始來研究這方程式，絕對不涉及這式中的記號是什麼意義。在他看來，它們是些純粹抽象的量，依照他自己的科學之原理來處理，在這些原理之中我們首先遇着的是"論理的原理"(logical principles)它們是些普遍的規則，是一切人承認其對於任何推理都是重要的。例如，這樣的陳述"兩件事物各等於第三者，則此兩者必互相等"，又"從等量中減去等量，其餘量必相等"等等‥

…但是此外還有些原理，關於使用他的特別記號，即正式的算學原理，就是上面所曾論及的交換，綜合，分配的定律，以及其他我們這裏不能提及或說明的些定律。這也許可以幫助讀者了解代數學的記號不僅是一種方便的“用語”，並且是某某幾種推論之工具的必需部分，又了解正式的算學家，或稱“純粹的”算學家，對於他的演繹法及他的記號的範圍與權能之發展，更感興趣，比之對於僅爲他所能求得的些有實用的公式。

以上關於“方程式”的討論可以使讀者想起，當他在開始解決一個問題的時候，他總希望將“這問題變成一個方程式”；於是方程式與問題有重要的關聯。但是若說明算學家對於方程式的興趣，完全離開其發見問題的答案之實用的價值，則對於讀者更加有益。

我們試討論這代表某數的 x 字母，並寫下些含有它的代數式：——

$$4x-8$$

$$3x+4$$

$$x^2+2x-68$$

$$x^3+7x^2+5x+9$$

$$x^4-10x^3+8x^2-7x+1$$

起首兩式，只有x本身，沒有x的平方，或三次冪，或四次冪……等等。它們便稱爲"直線"式("linear" expression)；第三式稱爲"二次"式 (quadratic expression)因爲它含有 x的二次冪或平方 (x quadratus) 也有一次冪；第四式稱爲"立方"式 ("cubic" expression)因爲它含有x的立方；第五式稱爲"四次"式("quartic" expression)餘類推。若用一個特別的數來代x，於是計算出任何式的數值，使相當於 x的特別值，這顯然是一件簡單的事。我們"改變"x的值，則任何式的值也要改變；因爲後者是依賴着前者的。在專門的術語上，我們常稱 x爲"自變數"(independent variable) 於是稱含有它，並且依賴着它而變數值的式爲"x的函數"(function of x)。但是使算學家感覺興趣的，却是適才所陳述之逆轉演算。他問，"假使我給一數值與那式或函數，則我能否求得 x的值以適合此式嗎；或是否有一個值能適合這個嗎?"讓我們用上面的幾個式來試驗這算學家的難題。將第一式來試驗，

使全式的值是12,則 x的值是什麼。我們有下面的"方程式"。

$$4x-8=12$$

現在我們應用這條論理的原理"加等量於等量，其和必相等"。我們試將每邊各加以 8

$$4x-8+8=12+8$$

或 $4x=20$

於是 $x=5$。

我們立刻見到所以要每邊加 8的理由；它是要將所有的各實數項合併起來;它等於將－8 移到各邊並且改號。這就是一種合併法,阿拉伯人便用"al jabr"這字來稱它;並且使我們回想到,就是因一部阿拉伯書的名稱,才有這代數學的名稱。

我們試就第三式求同樣問題的解答；我們試問，若 $x^2+2x-68$等於12,則 x的值是什麼。讀者將求得，若使x等於8，這二次式便等於12；因爲x^2是64，2x是16；於是它們的和是80，若從其中減去68，便餘12。但這顯然是在"猜測",不像上式那樣的求得 x的值。是否有一種

規定的方法求得這樣的結果呢?是:有的，並且有一種修正法,使結果求得很快,只要將前面所提及的因子分解法練熟了。現在的一個例子，正好是應用修正法而作出的。試先寫下我們的方程式:——

$$x^2+2x-68=12。$$

我們試應用論理的原理,從等量中減去等量,其餘量必相等,於是兩邊各減去12

$$x^2+2x-68-12=12-12$$

或
$$x^2+2x-80=0。$$

這是一種"移項"法,與前面的直線函數例小有不同。現在任何對於因子分解法有經驗的人能將上式的左邊分解爲兩個因子;就是 $x-8$與$x+10$，讀者定然能使自己滿意，以爲這是對的;因爲應用前面所曾經述過的分配原理,便可求得

$$\begin{aligned}(x-8)(x+10) &= x(x+10)-8(x+10)\\ &=(x^2+10x)-(8x+80)\\ &= x^2+10x-8x-80\\ &= x^2+2x-80。\end{aligned}$$

於是再把這式變作

$$(x-8)(x+10)=0$$

x等於 8的這答案現在可以證實了，因爲，若使 x等於8，則上式中有一個因子變成零，另一個變成18，於是 18乘以零仍等於零。但是我們現在更發見了些東西；因爲，若以-10 代 x（特別注意減號），於是一個因子是0，另一因子是-18，0 與-18之相乘積也是0。所以，假使我們用-10代x於$x^2+2x-68$式中，我們一定能得12，因爲(-10)是 $+100$（記好“兩個負數相乘之積是正數”是我們的記號所能適應的一條規則）；2x是 -20，於是$+100-20-68=+80-68=12$。當然，挑選12這數，令那二次式與它相等，則計算的方法，比較簡單。假使我們挑選另一個數，因子分解便不會這樣容易；例如，假設我們教這式不等於12，而等於10，則比較要繁難一點，但決不是不可能的。這方程式是

$$x^2+2x-68=10$$

照上法移項，便得

$$x^2+2x-78=0$$

讀者可以盡力的嘗試，但他不會尋得兩個簡單的整數，其差爲2，其積爲78(因爲這就前面的解法)。但我們仍不失敗，中世紀的些算學家教導我們如何戰勝這困難。我們以不同的手段應用移項法，頗像我們應用在第一問題中的法子，兩邊各加68，我們便得

$$x^2+2x-68+68=10+68$$

$$x^2+2x=78$$

現在兩邊各加1。爲什麼?因爲這樣，我們便可使在左邊的一式成爲"整方" (perfect square)。例如

$$x^2+2x+1=79$$

但是 $x^2+2x+1=(x+1)(x+1)=(x+1)^2$

因此 $(x+1)^2=79$

於是 $x+1=\sqrt{79}$

所以 $x=\sqrt{79}-1$。

於是我們已經求得答案，雖然使 $x^2+2x-68$ 或等於10，其中代替x的數不是一個簡單的整數，而是一個無理數。但我們試躊躇一下；當我們令這式等於12的時候，我們知道可以有兩個答數。爲什麼現在沒有兩個呢? 確是有的，

因爲有兩個無理數，其自乘方都是79，卽$+\sqrt{79}$與$-\sqrt{79}$，所以我們得着

$$(x+1)^2=79$$

我們可以寫作

$$x+1=-\sqrt{79},$$

也可以寫作

$$x+1=+\sqrt{79}。$$

顯然x不能同時適應這兩個要求，但是假使我們令x等於$-\sqrt{79}-1$，也可使$x^2+2x-68$等於12，正和以$+\sqrt{79}-1$代替x一樣。

這第二法，在專門術語上稱爲"配方"(Completing the Square)，常可應用於任何二次式。我們再另舉一例。假設我們要使$x^2+6x+12$這式等6，則x的値是什麼?先寫下這方程式

$$x^2+6x+12=6$$

每兩邊各減去12

$$x^2+6x=6-12=-6。$$

現在兩邊再各加9

$$x^2+6x+9=-6+9=3。$$

加 9是和先前一樣，要使左邊的式成爲整方；因爲$x^2+6x+9=(x+3)(x+3)$卽$(x+3)^2$

因此 $(x+3)^2=3$

於是 $x+3=+\sqrt{3}$

或 $x+3=-\sqrt{3}$

所以 $x=+\sqrt{3}-3$

或 $x=-\sqrt{3}-3$。

和先前一樣，得了兩個無理答數，但答數仍是兩個，這便是一切“二次方程式”的一般的情形。

因爲要使這些方程式對於實際事物的問題而不是抽象的數的問題，發生關係，我們試研究下面的一個“難題”(puzzle)。“柱子若干，以等距離植在 40碼長的一塊空地上。假使再加柱子 2枚，則相鄰兩柱間的空地之距離便要縮短 1碼。原有多少柱?”假設原有柱間的空地共有 x段，則柱數必爲 $x+1$。於是相鄰兩柱間的距離是 $40/x$碼。問題告訴我們，若有柱 $x+3$枚，於是有空地 $x+2$段，相鄰兩柱間的距離是 $40/x-1$碼。若是如此，則全部的長度一

定是

$$(x+2)\left(\frac{40}{x}-1\right)碼$$

但全長是 40碼。於是我們得着這樣的方程式

$$(x+2)\left(\frac{40}{x}-1\right)=40。$$

用分配原理來計算左邊。便得

$$\begin{aligned}(x+2)\left(\frac{40}{x}-1\right)&=x\times\frac{40}{x}-x+2\times\frac{40}{x}-2\\&=40-x+\frac{80}{x}-2\\&=38-x+\frac{80}{x}\end{aligned}$$

因此 $38-x+\dfrac{80}{x}=40$。

依邏輯原理，便得 $-x+\dfrac{80}{x}=2$

等數乘等數其積必相等，這也是合論理的；於是兩各乘以x。左邊變成$x\left(-x+\dfrac{80}{x}\right)$右邊變成$2x$。

再分配左式，便得$-x^2+80$，於是

$$-x^2+80=2x$$

兩邊各加 x^2，於是得

$$80=2x+x^2。$$

但這恰巧是我們先前曾經做過的一個方程式。它有兩個"根"(roots)(它們的名稱是如此)，卽$+8$與-10；就是用這兩值之任何一個來代x，都能適應這方程式。但是第二個顯然是不合於我們的這問題；我們不能有減 10段的空地與減 9枚柱子；第一個"根"却是對的，卽 8段空地與 9枚柱子，讀者很容易證明這是適合的。

現在這眞是重要的一點。我們在處理一個關於計算實物的問題時，我們的答案一定要是可以數的數，卽"正整數"(positive integers)。所以當我們將問題作成方程式時，假使這方程式的根沒有一個是這樣的數，便證明這問題對於計算實物是不可能的；但這方程式仍可以有算學家的抽象的數，其中包括負數及無理數，並且，這雖然似乎是荒謬的，但是他的巨量的成績，不僅對他自己有熱烈的興趣並且對於科學家，工程師等也有很大的實用之成績，若沒有這類方程式便決不可能。再者，因爲要結束本章，我們可以給讀者以一個更可笑的一種數的例子。

假設我們要求 x的值，使$x^2+10x+30$ 這式能等於4。方程式是

$$x^2+10x+30=4$$

變作 $$x^2+10x+=4-30$$

我們用配方法，兩邊各加25（這數是5的平方，是 10的半數）。於是

$$x^2+10x+25=-26+25=-1$$

或 $$(x+5)^2=-1_{\text{。}}$$

於 x+5 一定等於(−1)的平方根。讀者或許要感歎着說"假使你要我相信一數的自乘方是一個負數，這簡直是胡說。一正數自乘得一正的結果，這是我已經知道的，並且你曾極用心的主張，一負數的自乘，其結果也是正的。"正是如此；對於我們所曾經定過界說的些數，如整數，分數，無理數，正數，負數等而論，這是完全眞確的。−1的平方根是我們所"不能數的"一個數，作這種批評也沒有用。無理數對於它也沒有用。實際說來，算學家"發明"（眞可以說是他的發明）了整個的一羣新的數，他定其界說爲它們的平方是−1，−2，−3，−4，或即前面所定過界說的任

何有理的或無理的正數之負。他先前分類的些數有一公共的名稱——"實數" (real number)。這新的數,他稱之爲"虛數" (imaginary number)。再者,他自己的好奇心與智巧使他能求得這種數所有的些有趣的性質;並且雖然這些性質對於"計數"當然是無用的(在這方面不會比無理數更壞些)但由他所演繹出來的許多合於科學家及工程師實用的判斷,若沒有這"虛數",便更加難以求得,這確是一件事實,讀者也許要驚訝,但決不因此而減少其眞確。例如,每個電氣工程師,研究那些應用於交流電機械中的公式之來源,一定要熟悉這種特別而又極其有用的數。

總之,數是抽象的實體,僅受我們所給與它們的界說之限制。"界說"僅不過是限制的別名。

這必得要提及,當我們使立方式或四次式等於任何數時,我們便得着立方方程式(或三次方程式)與四次方程式。這些總是可解的,只要我們承認無理數與虛數的答案同樣是正當的。三次方程式總有三個根,四次方程式總有四個根。對於更高"次" (degree) 的方程式也依此類

推，但是它們的解法却極端複雜，只有很少的幾位高深的算學家研究"方程式論"(Theory of Equations)，(這就是代數的這一枝派之名稱)達到這樣極高的程度。

讀者也許曾聽見過"對數"(logarithms)與"游尺"(slide rules)它們是些實用的手段可以使冗煩的計算很容易而迅速的作出。於是他很高興讀一點這種"無意義的"觀念(他起初看來，的確以爲是如此)，而這種觀念便是上面兩種方法之基礎。我們懂得 $2^2, 2^3, 5^2, 5^4 \ldots\ldots$ 的意義；最後一個，照他的說法是"四個5連乘。""那麼 $5^{\frac{1}{2}}$ 是什麼？"5自乘其一半麼！請先考慮下面的些結果

$$5^2 \times 5^3 = 5^5$$

$$5^4 \times 5^3 = 5^7$$

$$5^6 \times 5^4 = 5^{10}$$

餘類推。

注意右邊的指數總是左邊的指數之和；因爲當你以 5^3 乘 5^4 的時候，其中含有的5數是7個。於是下面各式也顯是對的

$$5^1 \times 5^1 = 5^2$$

$$5^2 \times 5^2 = 5^4$$

$$5^3 \times 5^3 = 5^6$$

假設我們承認 $5^{\frac{1}{2}}$ 也遵守這同一規則;於是

$$5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^1$$

因為 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{2}$ 之和是1。於是 $5^{\frac{1}{2}}$,照我們所一致贊同的;指數定律是要普遍的,便變成 $\sqrt{5}$,即 5的平方根。同理,$5^{\frac{1}{3}}$ 是 5的立方根,$5^{\frac{1}{4}}$ 是 5的四次根,餘類推。我們可以再進一步,給一種意義與負指數。5^{-2} 便是以 5^2 除 1的結果;就是 $1/5^2$, 5^{3} 是 $1/5^3$,其餘依此類推。

於是這裏有一個更進一步的例子,是算學家將他的些界說普遍化以推廣他的權能;並且如已經陳述過的,完全離開他自己對於他的方法之新伸展的樂趣,為實用的計算所使用的每種對數表與每種遊尺都依賴着這種新的伸展。

這樣代數學一向是被認為一種普遍化的算術,現在漸漸地有它自己的性質。在算術中,數的觀念是與任何特殊的事物分離,在代數學中,數的觀念更進一步,認為是從任何特殊的數抽象得來的。例如 7 這一數是不偏不倚

地指的任何七件事物之羣，在代數學中，字母 a 或 x也是不偏不倚地用來代表任何數的，當然要了解每個字在任何特殊問題中，或在一特殊式的任何特殊解析中，一定是指的同一數。式的解析，如上面所提出的，以及許多其他的，有些是不可思量的複雜，逐漸引到“變數”與“函數”的觀念，讀者將會知道，函數的觀念，便是物理學家及化學家由實驗而發見的定律所表現的自然秩序之算學的副本。一個代數式的值依賴着其中的變數之值，一個物理的量(例如引力）恰和這一樣，也依賴着由觀察而關涉到的其他物理的量(例如，攝引的物體間之距離及其質量)。如果沒這樣的些算學式，以及算學家爲它們發明的些處理它們的專門手段，則由算學表現的些自然的定律將絕對的不可能，而這些定律在十七世紀已經出現，並且以後其數量與重要日益增加。

幾何學

我們的外在的世界是一個形，色，聲，的世界。可見的對象之形，其種類是無限的，並且卽使同一物體之形，因受風或其自然原因的作用常會變成各種極不相同的形態。對於形態的基本定律之研究，常是算學家的一種移情的追求。希臘的些哲學家曾爲這種研究所攝引，他們曾顯示其卓越的天才，當他們熟悉了埃及人所發見的度量與測地的些規則的時候。雖然他們對於這種研究仍用“幾何學”(Geometry)的名稱，從而承認這衝動的來源，但他們認“量地術”與眞正科學的幾何學之比較，正如計算法與算術，或“數的科學”之比較一樣。測量是一種技術，對於實際生活一定無疑是有用的，却不能代替有學養的人眼中的幾何學之研究。

當我們看着任何尋常的對象例如一塊石頭的時候，我們看見它有一個表面。這石的本身是"伸展在空間"。我們說它是伸展，或它有廣長性 (extension) 在三因次中，意卽每個物體認爲可以分成些部分，其中的大多數，從接近表面的部份分開，均可以想像其爲長方塊的形狀，並且對於這塊，在決定它的大小和形狀以前，有三個條件必得要陳述，卽陳述它的長，闊，高，的量。但是面却不依這同樣的方法而伸展。假使我們將一根針的尖端接觸這石頭，我們說，這尖端是"在這石頭的面上"；但是稍加思想，我們便可以說這尖端是在包圍這石頭的空氣的面上，也是一樣的正確；總之，這面屬於空氣，正和屬於石頭一樣；它是將石頭與空氣隔開的；它眞個不包含空氣，也不包含石頭。再從別個方法來觀看這個。將一枝鉛筆從空氣中向下移動，移到水中；我們能十分確定，這"筆尖"(指筆端的小小一點尖頭)何時完全在空氣中，何時完全在水中。但是我們却承認總有一個短的時間，它一部分在空氣中，一部分在水中。我們可以俗語來說，它那時是在水的面上；但這在嚴格的幾何學的話語上，是絕對不正確的。

一物體伸展在這三因次中，無論其如何微小，決不能包含在一個面中。這是很清楚的，我們的介紹這種面的觀念，已在從事於另一種的抽象，與我們開始研究數時所用的典型迥不相同。面僅在二因次中伸展。一種普通的錯誤是認一張紙爲一個面；實則一張紙是一個長方形的立體，恰像一塊木頭。我們量一册書的前後封面間的厚，知道它是一吋；這册書有三百頁；於是每頁有 1/300吋厚，並且有幾種紙比這個還要更薄些。但是一吋的任何分數，無論它如何小，其量決不會是"無"。所以一張紙有六個面，恰像其他任何立體，雖然其中有四個面都是矩形，每矩形中有兩對邊的長度極其微小。

讓我們再來看一看一塊木頭；它的表面（或者說得十分精確，是木頭與周圍的空氣之間的面—但我們不要冒充博學，所以以後便免了這冗長的句子）有六部份；我們稱它們爲"面"(faces)這些面在這木塊的各邊上互相切着；每條邊爲兩個面所共有，並且因爲這性質，它的伸展比面少一因次；它僅伸展在一因次中，或依照教科書上所說的，它只有長，沒有闊或厚。注意，一根絲或線，無論

它如何細，決不適合這個。一切的實體都伸展在三因次的全體中。卽使我們用鉛筆畫在紙上的些鉛的筆畫，稱它們爲"線"(lines)也不眞確。在嚴格的幾何學意義上的線，是對於實質的雙重抽象之結果；紙上的些筆畫顯然有闊（否則便不會看見它）並且也有厚，因爲實際上有很淺的一條鉛躺在紙上。卽使這頁書上所印的字也有一點厚。實際說來，木塊的邊常是鈍的或圓的，顯然缺乏眞正幾何學的線之嚴格的特性，卽使最銳利的邊也有相當的鈍足以證明，一條線眞箇是實物體的外在的性質之抽象。

還有一種抽象，就是"點"(point)的觀念。木頭的些邊相遇在角上；一個角爲兩條邊所共有；所以，雖然因爲它無論如何尖銳總有一點鈍，故嚴格地說不是"點"的眞正的意義，但這角却給與我們一種觀念，卽兩條嚴格的幾何學的線交叉有一公共的點，這點是一個實體它可以說是有一一定的地位但沒有伸展在任何因次中；"它有位置而無部分"；或卽它有位置，但沒有長，沒有闊，也沒有厚；或簡單地說，它有位置而無大小。

現在，點，線，及面是幾何學所論及的些抽象；用它們

以及關於它們的些公理與定義，便造成一種希奇的形的科學，依純粹思想之程序，逐漸展示一個特複雜的命題或"定理"(theorems)之構造，這些定理的數量似乎是無限的，除非是由於人類的興趣全然耗盡了。

希臘的大算學家，歐幾里得(Euclid)他大約生在紀元前第三世紀之初，曾作了一個著名的搜集，將他那時代所知道的些幾何學的定理與問題搜集起來；他將它們依論理的次序而排列，使每個命題能從先前的命題中演繹出來。這部著作共有十三卷，抄錄過許多次（並且後來印刷過許多版）經許多大學者的編訂與註解，直到很近的時代，它仍是那些志願了解幾何學的學生之唯一教科書。這實用是如此的普遍，所以"歐幾里得原本"(Euclid' Element)（常縮寫着單用"Euclid"）竟被認爲"幾何學"的同義字。許多編輯者增加些命題，更提出些定理之表給與讀者，藉以試驗他的技能（這樣的定理常稱爲"附加難問" riders）但是由歐幾里得所採用的證明之排列及方法仍是不變的，幾乎很少有例外。

歐幾里得開始的些敍述，我們稱之爲定義，假設，及

公理。定義講的是上面所提及的抽象的材料，即點，線，及平面；如正方形，矩形，三角形等等圖形，這是可以用線作出的；其他如圓，以及後面的幾卷中，講的是立體形，如立方體，角錐體，球體等等。假設講的是些處理法，他假定其爲可許的，或是些幾何學的敘述，爲他所不能證明，只認爲是不待證明而自顯然的。例如，他假設從任何一點到任何一點可以畫一條直線；他又假設，雖然有無量數不同的線連接兩個定點，但只有一條是直的，或，同理，兩條直線不能包圍成一個面積。讀者注意到這個。每個人都有其直覺的實用的"直"的觀念；緊張的線索，尺的邊，對準目標的視線等等都是這些實用的觀念之說明；但是一條直線不能用嚴格理論的意義來下定義。任何這樣的定義單是一種言辭上的說法，包含文字及觀念，與"直"的本身一樣不可解。我們只有在歐幾里得的這些假定中尋得直線的些性質，對後來的命題之證法是必需的而且充分的。還有一個假設要我們承認的，就是一個圓可以以任何定點爲中心而畫成，並且它的圓周與那點有一定的距離。這個包括圓規的使用，但我們應細心注意，雖然在較先的

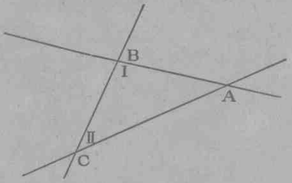
一個假設中，歐幾里得假定我們能用一直線連接兩點因此包括直尺的使用，但他並不曾假定那直尺上面是刻着等分的。讀者也許曾聽到過這樣的敘述：雖然我們能"依歐幾里得"來二等分一個角，但我們不能三等分它，並且讀者也許曾以為，一種顯然可能的方法，例如使用分度規(protractor)竟拒而不用，這似乎有點神秘。但他要回想到，這種不可能是依賴着歐幾里得所假設的些條件的。用一把分度的尺這方法是可能的，事實上一點也不困難；但假使我們自限於歐幾里得所假定的幾件工具之使用，這就是說，只有圓規和未刻分度的直尺，這便不很容易成就了。

還有一個對於平行直線的著名的假設，但我們暫時擱一會，來討論些歐幾里得所稱為"公理"(common notions)的敘述。這詞的使用，歐幾里得是依照的亞理斯多德的，他提出這名詞來代替"axiom"。但在現存的歐幾里得之一切版本中，都主張而且通用"axiom"這字(意即值得相信的一種敘述)。的確，亞理斯多德所附着於"axiom"這字的意義很是簡明；照他的意見，它只應

當用在敘述一種普通的性質，而不是如我們所認爲眞確的幾何學的性質；在作幾何學的敘述時，正確的名稱應當是假設，或定義，或 common notion。因此下面的兩條歐幾里得的公理，照亞理斯多德的意見，只有後一條算是眞正的 axiom。"事物能互相施而符合者便互相等"。"全體大於部份"。前者他歸入幾何的性質之定義的一類，或許就是假設。下面更有些 axiom；"假使兩個以上的數量各等於同一量，它們必互相等"與"假使相等的量加於其他相等的量，其和必相等"。但是在過去，"假設"(pos-tulate)與"公理"(axiom)這兩字的使用曾有過些變動；因此，上面所講到，不久也要討論到的平行的假設尤常被認爲平行之公理。

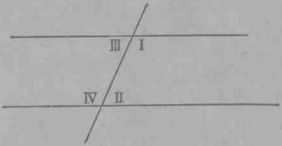
歐氏幾何學原本第一卷的命題分爲三類。第一類論及三角形，交錯直線及其間之角；在這些命題中間，不需平行之概念。第二類用上面所講到的些著名的假設介紹平行之觀念。對於這觀念有許多誤解，所以我們考慮一下歐幾里得的如何處置它，以及近世的些修正，因爲這些修正，與我們對於物理的空間之觀念有很重要的關係，我們

卽在此空間內觀察位置與運動的一切現象。在第一卷的第一類命題中，有一個是證明，一三角形的任何二角之和小於二直角。依此，假使在一定平面上的二直線與第三直線相交於B及C，而其自身相交於A，則圖中的I及II兩角，相加時小於二直角（第二圖）



第　二　圖

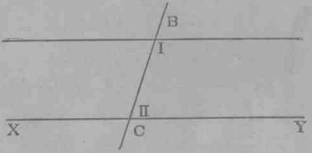
現在假設二線與第三線相交於B及C，使I及II兩角之和等於二直角（第三圖），於是這二線無論如何便不會在右手一邊相交。這可以用所謂"矛盾證法"(reductio ad absurdum)來證明。因為假使此二線假定在一邊相交的，則依前命題I及II相加小於二直角，這便與題中等於



第 三 圖

二直角的假設相矛盾了。並且，因爲從上命題可以證明，假使I及II相加等於二直角，於是 III 及 IV相加也等於二直角，則此二線在左手一邊也不會相交。

現在來到了界點 (critical point)。試考慮這圖中的一直線 XY及一定點B (第四圖)。我們知道，無論如何，



第 四 圖

總有一條經過B點的線（當然是在B與 XY的平面上）無論向任何方延長到多遠，決不會與 XY相交。這線的畫法是使 I 及 II角之和等於二直角，BC是割 XY的任意直線。這問題是，在這平面上除了這一條線之外，是否有其他的線經過B點而適合於同樣的性質；就是說，在這平面上，是否只有一條經過B點的線不會與 XY線相交於任何地方？現在讀者必得把一切直覺的觀念，如根據沿很直的馬路兩邊的列樹，或鐵路軌道，或其他相似的對象之觀念，嚴格地從他的心中拋開。這論證決不是論及"物質的對象"，而論及心中從這類物質對象而抽象得來的創造。顯然地，在事物的本性中，沒有人能將這樣的對象延長到任意的長度；這樣的延長卽使可以做到，也不是"在一平面上"，而是在地球的彎曲的表面。

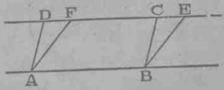
現在對於這問題，歐幾里得假定，經過B點只有一條平行線，卽只有一條線不在任何地方與 XY相交。

他陳說他的假定如下：——"假使一直線與其他二直線相交，作成兩個內角在它的一邊，其和小於二直角，則此二直線不相平行；但它們能在那兩角之和小於二直角

的一邊由延長而相交"。這顯然不承認經過B點的任何線有平行的性質；只有那一條，即使兩內角之和（第四圖的I及II兩角）等於二直線的一條；但讀者必得細心注意歐幾里得不得不假設它；他不能用他先前的些公理，假設，和定理來證明它。自從他那時以後，各時代的算學家曾覺得，這局面是不能令人滿意的，於是曾作了許多巧妙的嘗試，想證明這著名的假設，但總是無效；總似乎是在嚴格的考查這假定的證法中隱藏着一個與歐幾里得自己的假設同樣的假定。這局面的有趣的情形是下面的一件事實，上面已經敘述過，歐幾里得在他的第一卷書的前面曾十分滿意地證明（當然是在他論及平行線以前）任何三角形的兩角之和小於二直角，從這個自會得一顯然的結果，即假使畫兩直線與XY相交錯，並且假使它們自己也相交，則在那一邊的兩個內角之和小於二直角。因此，歐幾里得的假設便是這一條先前的定理之命題的"逆轉"；就是，一個命題，在別個命題中當作"終結"(conclusion)的，到這命題中便當作"假設" hypothesis，而在別個命題中當作假設的，到這裏便當作終結。純正的讀者自然可

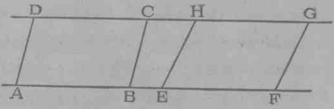
以以爲這是對的，並且以爲假使我們能證明一個命題是眞確的，則其逆命題當然也能證明是眞確的。但並不是如此。總之幾何學的推理應用論理學的命題，和應用特別的假設及幾何學自身之證明過的命題一樣，論理學家能很容易地駁倒這種輕易的假定，卽一命題及其逆命題一定"必然"都是眞確的。這也許是的，但不是"必然的"。逆命題一定要能像它的原命題一樣受嚴格的考查。例如，"假使一物體是紅的，便不是黑的"這是眞確的；但"假使一物體不是黑的，便是紅的，"這便不必然是眞確的了。

無論如何，歐幾里得總是根據下面的假定而進行，卽僅有一條平行線在上面所述的情況之中。他於是演繹出平行線的幾種簡單的性質，並證明下面一條人所熟知的定理，卽在任何平面三角形中的三角之和等於二直角。



第　五　圖

(不久我們還要回轉來討論這條定理。) 於是接着有重要的一組關於平行四邊形 (parallelograms) 的命題，所謂平行四邊形卽它的兩對邊是平行的。於是證明，凡同底，或等底的平行四邊形，並且在同樣的平行線之間，其面積必相等。(在第五圖中，平行四邊形ＡＢＣＤ與ＡＢＥＦ的面積相等。在第六圖中，假使ＡＢ＝ＥＦ，則平行四邊形ＡＢＣＤ與ＥＦＧＨ的面積相等)



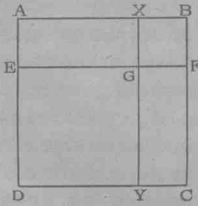
第六圖

注意這裏的處理法並不是算術的，卽我們不必從事於測量，這注意是於我們很有實益的。讀者自然要驚奇，我們不用闊來乘長，如何能算出面積來呢；並且假使我們來乘，這的確就是算術的演算。但是假使我們記得，只有未刻分度的直尺與圓規是假定爲可以用的工具，則用任何單位來量長或闊便超出題外。實則歐幾里得是根據"合

一”(Congruency) 的觀念對於面積的性質作一切的陳述，所謂“合一”卽圖形之完全的適合。在他的第一卷書的前部，他論及些三角形，它們有邊或角相等，所謂相等是假使將一個三角形重叠在其他一個之上而能完全適合。例如，第五圖，由證明平行線的些命題中可以見到三角形ADF是可與三角形BCE合一的；假使將前者重置在後者之上則兩者完全適合。所以三角形ADF的面積等於三角形BCE的面積，於是顯然可以明瞭這兩個平行四邊形的面積所以相等的理由，並不須量它們的長和闊。類似這樣的證法足以應用於其他的命題。注意，對於AB與EF等長的那一題，只須使用圓規。以後第一卷仍繼續論及圖形的面積，特別注意於同底，或等底，並且在同樣一對平行線之間的些三角形之面積的性質。並且讀者應注意這裏不含有測量及算術的演算，而且他的進行程序之全部的健全，根據他的平行假設之假定的真確。第一卷最後的結束是那著名的定理的一個美麗的證法，這定理是在他以前兩世紀的畢達哥拉斯(Pythagoras)所發見，卽關於直角三角形各邊之平方的問題。這證法或許是歐幾

里得自己作的。

第二卷論及些關於矩形面積的重要命題。其中每個命題都是代數學的一個重要命題之類似體，並且除了參考其中任何一個命題以外，或許沒有別樣可使讀者對於這兩種抽象的科學，幾何學與代數學，之不同的精神，得着一個更清楚的概念。



第七圖

取任意點X分AB線爲兩部份。作正方形ABCD及XBFG。依圖所示作成全形，依純粹幾何學的態度，不難證明，AB的平方等於AX的平方及BX的平方之

和，再加AX與BX兩邊所成矩形之面積的二倍。（這圖形本身幾乎可以直接證明不必作正式步驟的論證）在代數學中的類似的命題，前章已經講過，即：

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

這是很顯明的，只要我們假定 AX及 XB，用刻分度的尺來量度，各等於 a吋及 b吋，並且應用的是尋常的測量尺。

第三卷與第四卷講的是圓及可作於圓內或圓外各邊與圓相切的些直線圖形之一般的性質。第五卷是一串最精微的人所知道的推理之練，講的是數與量的關係，及"比"(ratio) 的概念，但完全脫離算術的除法之運算。這普通被認爲幾何學原本中最難學習的一卷，而最近世的版本，對於表現方面改變了許多，使初學者研究它比較簡單些。常被採用的是十九世紀著名算學家狄摩剛 (de Morgan)所介紹的些修正。因爲要滿意地討論相似形幾何學，第五卷的命題的確是必需的，這相似形的幾何學到了第六卷中更形龐大。

歐幾里得在這六卷書中講的是在一平面上的圖形之

幾何學，往後在第十一，第十二，第十三等卷中，講的是在三因次空間的立體圖形之幾何學，以應用於平面圖形中的類似的態度論述立方體，角墻，角錐，球體等等的性質，尤特別論及圖形的體積，而不取决於以測量長，闊，高爲基礎的測量尺。第六卷與第十一卷之間的各卷，大部分是關於算術的及代數的性質之命題，在幾何學原本的近世版本中往往删去。

因爲要再著重幾何學的抽象性，我們試再回復平行的問題。依歐幾里得的假設，我們能證明三角形的三角之和等於二直角。現在這定理對於那有三個尖角在我們的物理空間的任何平面三角形是否也是眞確的？一定無疑，在一大張紙上儘管細心的繪畫與度量，但由於我們的工具缺乏精密，决不會沒有不符的。每個陸地測量者，每個軍用地圖繪畫者，使用這個命題，覺得他的結果沒有什麼矛盾。天文家用這規則來求地球到太陽，月球，行星，以及銀河系中與我最鄰近的幾顆星之距離。但這雖然是顯著的，却僅能求得很少的幾個。他所使用的工具，其精密足以使他測到 1，000，000，000，000英里其結果仍有

相當的可靠。天空中大多數的星都超過這限度，於是他對於它們的距離之猜測，於幾何學之外，更應用物理科學作嚮導。總之，幾何學的結果不能對於極巨大的三角形作試驗。十九世紀中有幾位算學家，如德國的高斯(Gauss)，俄國的陸巴契夫斯基(Lobatschewski)，匈牙利的柏里埃(Bolyai)，不復作證明歐幾里得的假設之嘗試，進而推論經過一定點，除了歐幾里得所論及的那一條平行線以外，確有其他的直線能與一定直線平行(當然同在一平面上)結果竟是一種完全一貫的幾何學，但在這種幾何學中，有些結論，與從歐幾里得原本中演繹得來的不同。例如，在這種幾何學中，三角形的三角之和小於二直角，其比二直角所短少之和，隨着三角形的增大而增大。還有一派幾何學是德國算學家里曼(Riemann)所創的，它假定，對於任何定直線，一條平行線也沒有，即在同一平面上的任何直線一定會與它相交於某處。這種幾何學，實際上，很早便開始改變歐幾里得的假設，即在平行線的假設以前便已改變了，於是他的這個"任何三角形的二角之和必小於二直角"的命題也被取消。依里曼的假設之系統，可以

演繹出，三角形的三角之和大於二直角，其超過二直角之角度，隨三角形的增大而增大。

我們來化一點工夫轉論到另一個命題，卽畢達哥拉斯的直角三角形之定理。這定理的證法也依賴着歐幾里得的平行線的假設。沒有這個，這定理便無從演繹。現在這定理是日常實用所必需而不會矛盾的一整套的度量公式之根據。的確，這公理的簡單的形式對於那畫在地面上的擴大的三角形是不眞確的，但這樣畫的一個三角形不是平面三角形，無論如何，算學家能從這假定在平面上的三角形之定理，演繹出那些必得介紹進測量家與航海家的公式中的修正條件，因以使它們（指公式）有理論上的健全，於是在實用上，也有假定的正確。但還餘了一個對於科學家而兼哲學家，（如果他不是實行家）有興趣的問題—這定理在我們的物理空間也眞個是健全的嗎？就我們所能評判的而論，這定理對於較小的平面三角形，實用上是眞確的，但這樣的健全是否伸展的巨大的三角形？實則，這情況與那關於三角形的三角之定理在嚴密檢查時的情況相似，於是那樣的結論也是不能免的；假使歐

幾里得的平行線的假設被捨棄了，而以另一個假設來代替它，則關於直角三角形的通常的敍述便也不真確而要另一種結果來代替它，這結果是具有更加複雜的性質，至於它準確的形式我們現在還不能說。

顯然地，這情况需要實驗者，即物理學家或天文學，並且不須精密的論證便可使人相信，這問題是受理論的及實用的性質之許多的困難所窘迫。的確這位實用家，滿意他對地面上的結論之屢試屢驗的準確，並且聽到，當天文學試探我們的物理空間之深度時，假使有些不符之點被發見了，而這些不符畢竟是細微的，於是他對於那些氣質不同的人在這些"瑣事"中自尋煩惱，便聳聳他的肩，表示不屑。但對於科學家及哲學家，這並不是瑣事。哲學面對着許多關於人性的問題，但其中最古的一件工作，而且曾經費過些大思想家的心力的一件工作，恰巧就是我們物理的空間與時間之本性的問題，並且與它有關係而我們曾在討論的這些幾何學的結果却是其中最重要的角色。因為要掃除讀者對這左右兩難的情况之準確的性質之可能的誤解，我們必得關照他，這裏並沒有歐幾里得是

否"差誤"的問題。我們的空間儘管可以是"非歐幾里得"的；但這對於歐幾里得用他的公理與假設，從論理上與系統上發展得來的些命題之準確與調和，決不會發生影響。作爲對於這些抽象體如點，線，面，等之推理的練習，他的幾何學是完全有用的。至於我們的物理空間是否有什麽物質的實體享有那從點，線，等所演繹得的性質，這是實驗科學家的事情；對於算學家則毫無興趣。他的演繹對於實在的事物確有密切的關係，這只是一件僥倖的事情，並且是對於會計師，建築師，工程師，物理學家，或天文家有極大的重要的一件事；但對於這位"純粹的算學家，"無論他的結論是否有實際的應用，總是一樣的。

雖然這有點逸出本文的眞正目的之外（本文是要解析並敍述推理之心的純粹算學的程序，）但讀者如知道剛才所述的科學問題目下的狀態如何，也許要感覺興趣的。實驗家所遇着的實用性質之最嚴重的困難是，在我們的空間之一切物體其可觀察的幾何的關係正在檢查之中，它們却不是靜止的而有相對的運動。（總之，在一幾何問題之純粹算學的考慮中，圖中的，點，線，等的形勢是

總不變動的。)假使一個人窺見物體恰在那窺見的一剎那間它們所實占的地位,則情形便不會這樣的煩雜;但事實上不是如此。當我們看着太陽時,我們所看見的差不多是八分鐘以前的太陽,因爲它的光傳送到地球上須經過八分鐘的時間。並且,因爲各物體離開我們的距離不同,所以一物體所在的地位與窺見那地位時的時間上的遲延是隨物體而各異的。在最近數年來,由於發見光的行動並不是詳細記錄物體或光波在變形的媒介中的運動(在前世紀或兩世紀曾流行這種見解,)於是這問題被安放在一個完全新的基礎上。根據這新確定的實驗事實之基礎,愛因斯坦(Einstein)曾定下一個關於我們的科學定律之本性的廣闊的原理(被稱爲相對性原理)並且總是,爲了科學家曾將這地位簡單化了,雖然仍有一種很流行而不合理的相反的觀念。這原理曾引導到關於我們的空間之"測度學"(metrics)的些結論,其意義即聯係到可觀察的物體之可測量的關係,並且這些結論曾經伸張到可以包括那些物理現象之偉大的範,例如那包括在"引力"(gravi-tation)及"電磁"(electromagnetism)等名詞之中的。

其中最出乎預料之外的結果，引起那些有訓練者之無限的稱讚因而順從這論證，這結果就是，在十分公平地考慮一種物質的基本微粒子，即我們所稱爲"電子" (electron)的些性質的時間，我們差不多不得不斷定我們的物理空間之大是有限的。這論斷並不是什麼奇僻之論，雖然一位純正的人在第一次聽到這樣的見解時，或許要問，限制它的大小的"界限"或"牆壁"是什麼性質？但是頃刻的回想便足以指示我們，這並不必需界限的；地球的表面，其大小是有限的，但沒有界限；我們能離開爬山越嶺及經過兩極荒涼之區的種種物理的困難，而從許許多多不同的途徑來環繞它。我們驟然見了這樣的比擬，自然覺得它不十分健全；我們之所以能用直覺方法想像到地球表面可以是有限而無"界"的，是因爲我們曾直接看見橘子，皮球等類的事物。對於這"有限而無界的空間，"我們便不能有這樣的直覺。但是這樣的推測，和那關於地球表面的結論，是一樣確定地根據可觀察的實驗的結果。物理學家與天文家把這推論弄得十分確定（或許有點粗疏，）根據他們所認爲完全不能辯駁的證據，相信如有一位人物

能使他自身渡過這空間，而且能延長許多許多年的壽命，繼續依着他所信爲一直線的前進，最後他總有時候，會回到他的出發點。（我們常說在地球上"依一方向"而進行；航海家所謂直一地到一地的一條最短的筆直的路線，實際所走的不是一條直線而是在地球表面上的一個大圓。）這位物理學家在空間所走的路程便是 10^{22} 即 10000000000000000000000 公里 (kilometres)!! 這樣巨大的數一定要使我們的心驚駭而戰慄，但這却不是無限。

假使是如此，則我們對於"歐幾里得的幾何學是否適用於我們的空間?" 這問題，便立刻有一個回答—"它是不適用的。" 現在我們所讀到的 "彎曲的" 空間，就是這個意思。所謂彎曲的空間這名詞的使用，就是說，歐幾里得的幾何學系統對於我們的空間，不見得是眞確的。至其對於由地上的測量，或在擴張得離地球不過遠的區域中所觀察到的一致，是由於這類觀察的狹小的性質，恰如地面上的一小片水面是平的，而海洋面便顯然是彎曲的。

在 "相對性原理" 出世以前，便已有些更理論的考慮，指向着這類似的結論。如果假定我們的空間之範圍是

有限的，我們必定要問我們自己，是否在它的全範圍內滿佈着星河，和我們所知道的與我們比較近些的星河相似。現在對於這樣一個問題的回答，若認爲空間是無限的，便要引起些嚴重的困難。例如，假設我們承認，星不是"不可數的，"卽，旣不眞是無量數的，也不大過於什麽可想像的數目。於是它們的數是有限的。我們能想像，它們依照我們所知道的星的方法，分佈在空間之有限部分——一定無疑是極巨大的，但仍是有限的，於是比之無限的空間，等於無物。這樣的局面是不能持久的；由統計的考慮及尋常的運動定律很容易證明，這些星將來終必逐漸地散開，在空間分佈的密度愈變愈小，後來經過長久的時間，一定無疑是極長極長的，但仍是有限的，有些小的星團，例如我們的太陽系，便看不見有鄰近的星。現在，哲學的說來，我們假定無限的時間不會比假定無限的空間之理由更短少些，其結果一樣使我們難以解說下面的事實，卽我們現在此地顯然有許多鄰近的星在天空中。

再從另一方面說，假使我們承認星的數目確實是無限的，並且承認空間的任何部分，無論離開我們多少遠，

都居住着些像我們一樣的銀河系，但這也不會比上面的假設更好些。物理學家所發見的引力定律與光之傳播定律會引到下面的一種結論，即我們的天空將時時有一種非常巨大的光燄，太陽的光若和它比較，簡則是一點微弱的閃光，並且諸天體所施於我們的引力一定是無限的，將使我們的地球碎成極微的小塊。

的確，這些結論之全部力量可以用些特殊的假定來免除，即假定空間有一種吸收的，一部分不透明的物質，並且對於牛頓的引力定律稍加以修改。但是，先前已經述過的愛因斯坦的偉大的原理，以及由它所得的奇異的結果，即對於我們的宇宙之大小與電的物質說之間的關聯，於是確立了這"宇宙有限而無界"的論證。

現在是我們回復到我們的純粹算學的推理之研究的時候了。

極限：微積分：週期數

算學根據於數和形的抽象，是很適用於一個靜的世界之記號的表現；但若論及事象之流，便更需另一個元素。這種發見是近世的成績，雖然這方法的萌芽可以在公元前三世紀的希臘著名算學家阿基米得 (Archimedes) 的著作中見到。但在他當時，因爲記號方法的貧乏阻止它的生長，一直到十六與十七世紀中因爲代數的記號法之發展，才能將"流數"(fluxions) 的概念形成一種特別的記號法，這一部分由於牛頓，一部分由於來勃尼茲(Leibniz)。

在我們的世界中，最顯明的變化之例，便是運動，或位置之變化。一物體現在是在某一定的位置，但它是在運動的；我們說，它有一定的速度。要作關於這物體的物理

學上的主要報告，我們必定要陳述它的位置及它的運動速率。前者是幾何學上的事情。後者是什麼呢？關於它在一指定的位置的速度我們能眞箇講些什麼？從表面上說，我們顯然僅能論及兩個位置之間的速度。這兩個位置之間有一可度量的距離，物體走過這距離經過一可度量的時間。我們用時間來除距離便得着速度；這就是"速度"(speed) 的意義，並且若僅論及一個位置，這種運算顯然是不可能的。所以"在一指定地位的速度"這句話是無意義的。實際上，這樣的考慮之論理的困難，很感動了些古代的希臘哲學家，致使他們想出幾種巧妙的奇論，想用以證明運動是我們感覺上的一種幻像。(有興趣的讀者試翻閱一種百科全書上的埃里亞 (Elea) 的哲學家芝諾 (Zeno) 條，可以得着更詳的報告。)但是近世的算學家已經把這些言詞上的詭辯拋在一邊。

因爲要說明算學家將我們從這種困難的情境中救援出來的方法，我們試來討論一種很簡單的運動。假使一個光滑的球從一塊斜板的槽中下滾，應用近世的物理試驗的裝置，可以證明一條聯接距離與時間的簡單定律。假使

這物體的下滾，假定第一秒是 3吋，則二秒便離開出發點 12吋，三秒便是 27 吋，四秒便是 48吋，以下依此類推。這定律的本質在下面的事實中，即12吋是3吋的4倍，而4是2的平方；27吋是3吋的9倍，而9是3的平方；48吋是3吋16倍，而16是4的平方。我們可以將那板的傾斜度任意改變，而這一條"平方定律"的物理上的事實並不變化。例如，假使板的傾斜度變大了，於是那球第一秒也許要滾下5吋；則二秒一定是滾下20吋，三秒便是45吋，餘類推。

自然，我們實際上不能觀察這球在任何刹那間；我們觀察的運動，受新的限制，並且為分立的時間段落所隔離，假使我們發明精巧的時計，這些時間段落一定無疑可以更短些，但不能無限的縮小。我們現在從這些事實作了一種新的抽象。我們假定，凡我們所曾經觀察對於被限制的一組位置與刹那是真確的，則對於任何刹那及其相應的位置也是真確的。我們在自然事象中求"連續性的原理"(Principle of Continuity,) 並且將我們的觀察與假定，形成這樣一句話：——"距離隨時間之平方而變。"

但我們能將它們更簡明地形成一個代數公式。以 a 时代表開始一秒中所走過的距離；於是在 x秒中所走過的距離是 ax^2 时。注意 x可以代表任何秒數，無論是整數或分數。（球從一塊板上滾下，這秒數不會十分大；即使這樣，我們也能想像到一塊很長的板供我們自由使用。）兩剎那間之速度，可應用大家熟悉的代數的結果來計算。假定它費了 x秒的時間走到一個位置，我們稱它爲P位置；又費了一個更大的秒數，假定是 z，超過P而達到一個位置，我們稱爲 Q。於是從P到 Q須$z-x$秒數；而P與Q之間的距離，只消從 az^2中減 ax^2便得，其結果是az^2-ax^2，或 $a(z^2-x^2)$时。要求得從P到 Q的速度，即平均速度，我們可用$(z-x)$秒來除 $a(z^2-x^2)$时，這可寫作

$$每秒\ \frac{a(z^2-x^2)}{z-x}\ 时$$

現在，在P位置的速度是什麼?這裏，我們遇着前面所曾講過的困難。物體在P的位置是完全確定；不須關涉到這物體的任何其他位置，這是哲學家所稱爲“簡單位置”(Simple location)的問題，這物體是在那裏而不在别

處。但是速度顯然是關涉到其他位置的，否則我們做這件事似乎毫無意識。我們不能說從P到P的速度；假使我們這樣說，我們必得使上面的公式中的 z 等於x，於是變作

$$每秒\ \frac{a(x^2-x^2)}{x-x}\ 呎$$

$$即\quad每秒\ \frac{0}{0}\ 呎$$

這顯然是一種完全無意義的運算。但有一避免的方法。不管 Q是怎樣接近P，只要它們實際上是不同的位置，z便不等於x，於是那公式也有意義，可以用數目計算其值，只要有數目指定給 z與x。當z的值逐漸縮小，與 x值愈接愈近時，則這公式的商是否有一個極限的值？我們試回憶及在代數學的一節中所論及簡單因子分解法：——

$$z^2-x^2=(z-x)(z+x)$$

$$\frac{a(z^2-x^2)}{z-x}=\frac{a(z-x)(z+x)}{z-x}$$

於是這式的右邊恰巧是 a (z+x)，因為分母z－x與分子中的 z－x因數相抵消。此刻，若令 z等於x，則a(z+x)便不是無意義的；於是它的值是 a(x+x)，或2ax。這便認

爲是物體在P位置的速度，卽每秒2ax吋。這要點是，當我們以爲Q位置與P愈接愈近的時候，則從P到Q的速度，也向着每秒 2ax吋這數值而進行，愈走愈近，以此數爲極限，於是這極限值便給予我們以在P的速度之正確的觀念。

但是現在純粹算學家參加進來了，並且說：——"這是眞確的，由於我們的需要用科學方法來處理我們的物理世界，才提出這種處理法給我們；但是這種處理法畢竟可以應用於變數 x 的各種函數而不必關涉到物質的事物。它有它自身的一種興趣，這純粹是屬智慧的；確有些爲它所順從的算學定律是由於這處理法的界說與我們自己的智的組織"。因此我們將這處理法應用於x^3恰和應用於x^2一樣。讓我們來將一個變數從 x所表示的值變到z所表示的值；另有一個變數，是第一個變數的立方，其値從x^3變到z^3。第二個變數的相對變化，比第一個變數的相對變化，便是

$$\frac{z^3-x^3}{z-x}$$

只要 z與 x不同，這比總是有意義的。和先前一樣，z等 x時，則此式便無意義，因爲它變成%。

但我們也能將分子來分解因數，其中的一個因數是 $z-x$。

這兩個因數是 $z-x$及z^2+zx+x^2，這是讀者所能很容易證實的。因此：——

$$\frac{z^3-x^3}{z-x}=\frac{(z-x)(z^2+zx+x^2)}{(z-x)}$$

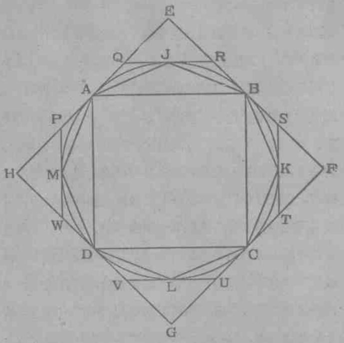
於是這恰巧是　　　　z^2+zx+x^2

這恰和先前一樣，在$(z^3-x^3)/z-x$式不能有意義的情形之下，而z^2+zx+x^2式則仍有意義，卽$3x^2$；因爲令z等於x，便得x^2+xx+x^2，卽$3x^2$。算學家依恰準同樣的方法，可以證給你看，這種處理法將從 x^4產生$4x^3$，從x^5產生$5x^4$，等等；寫作普遍式，便是從x^n產nx^{n-1}。他給這種處理法定了一個特別名稱"微分法"(differentiation)。他稱這結果爲"微分係數"(differential coefficient)。例如，關於 x 的 x^2之"微分係數"是2z ；x^3的，是$3x^2$，x^n的，是nx^{n-1}。

這是可以預料的，算學家覺得，這種微分法可以應用於一個變數之最複雜的函數。他曾爲它發明了一種特別的記號法及記號。一種很廣闊的"微分學"(differential calculus)的著述在最近三世紀內已經出現了，其中對於這方法在特殊事例中之效力有極詳盡而很精微的討論，並且還有特別多的純理智的問題，用以試驗學者之技能與機巧。還不止此，這種方法本是從物理學家的需要中萌芽出來，及它發展到很高的形式時，又回復到物理學家那裏，給他一種驚人的權能，以算學的處理法來對付他的觀念的現象。如果沒有它，他便無法對付我們這世界之永遠在變化的情形；他便不能解決這些現象之量的情態？的確他便無方法將他的些定律列成公式以表現它們的普遍意義。我們曾聽到"運動方程式"(equations of motion)，"電磁場方程式"(equations of electromagnetic field)，"引力方程式"(equations of gravitation)，"光波傳送方程式"(equations of wave propagation)，等等這些名詞。現在讀者應該知道，這些並不是像在上面代數學的一節中所提及的些簡單型的方程式，它們是"微分方程式"

(differential equations)，卽那些代表各種物理的數量所依賴的變數之記號的微分係數之方程式，例如時間與"位置之坐標" (co-ordinates of position)——"坐標"這名字是給任何一種長度或角度之度量的，這種度量幫助確定一點對於另一標準點或稱"原點"(Origin)的位置的。

這並不是算學中致力於極限的這些方法之唯一的情態。在上面討論幾何學的一節中，我們曾看見歐幾里得如何處理兩點間之距離並不介紹一把刻分度的直尺作爲他所假定的應用器具之一。他不是一位"測量者"，而是一位幾何學家。現在我們依相似的方法，怎樣來處理曲線上兩點間的長度呢?自然的衝動便是去拿一條線索；儘量地當心的將它沿着那曲線量去，再將它拿起，伸直，於是將它很緊張地放在一把尺的旁邊。這是一種尋常實用的方法；但這是度量法，不是幾何學。幾何學家進行的方法如下。認圓爲最容易的曲線，拿來作簡單的說明，我們可以假設，在圓內作一內接正方形ＡＢＣＤ，在圓外作一外切正方形ＥＦＧＨ如下圖。



第八圖

圓周的長度顯然是在這兩個正方形的周位之間。此刻在將內接圖形的邊數加多，於是得着一個內接八邊形 A J B K C L D M，同樣得着一個外切八邊形 P Q R S T U V W。這圓周在這兩個八邊形的周界之間，並且其極

限是互相接近的。我們可以想像到這方法繼續做下去，到後來內接正多邊形與外切正多邊形各有許許多多的邊，每邊的長度極短。圓周總是在這兩個周界之間，並且這兩個周界的差，顯然是逐漸減少到無限的小，於是我們認這圓周的長度是這兩個周界的公共極限，當它們因邊數的任意無限增加而互相接近的時候。當然，這必得要知道，並不是，而且也不要，用一把刻分度的尺來量各個多邊形的邊。(如果這樣，便和用一條線索來量那實在的曲線一樣。)歐幾里得在他的幾何原本第四卷中，曾證明了些關於這種內接及外切多邊形的命題，這些命題，得着後來的些幾何學家所發見的些類似命題的幫助，使我們能將這樣一個正多形的一邊之長與圓的半徑比較而不必度量其中的任何一個。據算學家說，這圓周是那有無限的邊數之多邊形的無限小的長度之"積分"(integral)他所講的這方法便是"積分法"(integration)。相似的方法可以應用於其他一切的曲線，並且確能應用於與這例子完全不同性質的問題，於是敘述方法及結果的著作稱爲"積分學"(Integral Calculus)的教科書。關於後面所舉的

可。讀者應該知道，當他讀到 π（這著名的希臘文記號是用來代替圓周與直徑之比的）的值已經做到許多位的小數，他必不以爲這是由度量得來的。上述的一條線索的方法，僅能將前三位小數正確地量出。即使要得到3.14159，也必得使用上述的積分法，或其他可取的方法，至於要得更多的小數，那只是耐性的問題。

關於使用極限的觀念之另一說明，包括在下面的敘述中。我寫下這下面的些分數：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{32}$，等等，在這級數中每個分數的分母都是前者的兩倍；此刻，我依此級數無限延長而將它們相加，即求這級數之和

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots$$

現在無論我將這級數延長到多少遠，其相加之和決不會大於1。的確，我能依我的意思使"項"數達到充分的大，於是可以使和漸近於1。如算學家所說，這級數之和的極限是1，在它加到無限的時候。現在大家或許以爲，這樣的級數自然是"會聚的"(convergent)只因爲連續的各項是愈變愈小。這完全是一種誤解。假使我寫下這樣的級數

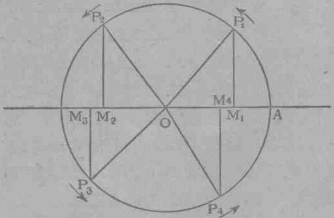
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots$$

它沒有這樣的"會聚"性質；它是"發散的"（divergent）；卽如果"項"數達到充分的大，其和之值是沒有極限的。隨你任意寫下一數，無論多大，只要相加的"項"數充分地增大，總能使其和超過那個數。這些事情對於門外漢也許是一件驚奇的敘述，但它的眞確之證明是堅定的，並且在任何代數學教科書中的"級數之會聚與發散"一章裏總可以見到。可是這一個級數，其連續各項之値顯然是遞減的，正如前一個級數一樣。所以，試驗一級數的會聚性顯然要更加精微些，比之上面那種似是的擬想。的確，會聚性的試驗及會聚級數之極限和的研究，造成算學解析的一支，不但對於函授性質之研究（一種純粹算學的興趣）是無價之寶，並且對於那些應用算學解析於科學的及工程的問題的人也有極大的實用價値。事實常是這樣的，算學研究之每一新的支派，總發生於人類之實際需要，隨後由於人類的純理知的興趣，便好像是爲它自身而發展，這樣做，它對於人類的駕馭世界之力量及研究這些力量之本性及原始，便又成爲一種更有力的幫助。

這敘述還有一個最後的說明，我們試回想，許多自然

現象因時間的繼續前進而表示其幾種情態之再現；依我們說，這些便是週期的 (periodic)。這類的例子很多，如時季的光明與黑暗之再現；有潮汐的海及江口之海平面的升落；每日及每季的濕度之變遷等等，都會跳到讀者的心上。許多機械上的事件，例如鐘擺之左右動盪，彈簧末端物體之上下振動，及漣漪或波浪走過水面時之運動等等，都表現同樣的情態。

我們試費一息時間考慮一點的動作，它以均勻的速度，依着一圓周而運行。



第　九　圖

以A爲起點;使它環行,並且令x代表它從起點運行到任何地位在圓弧上的距離。爲方便起見,我們假定這圓的半徑之長是1,於是當OP線轉過一直角時 $x=\pi/2$ (π是圓周與直徑之比),當OP轉過二直線時,$x=\pi$,餘類推;實則,x是繼續穩定地增加;它是一個變數,P點繞圓每走完全一周,增加2π。現在,對OA線作一垂直線PM。PM與OM之長,隨x而變。它們和x一樣,也是變數,但是依賴着x之值而變的,故被稱爲"因變數"(dependent variables)。它們實則是x的函數;算學家稱它們爲x的"圓函數"(circular functions)。實際上它們久已被用爲POA角的重要度量,即稱爲那角的"正弦"(sine)與"餘弦"(cosine)。它們起原於測量家與航海家的需要,並且是每個海員所習知的。但從算學家的觀點看來,它們是"x的正弦函數"與"x的餘弦函數",爲方便起見,寫作 Sin x 與 Cos x。現在讀者立刻要觀察到,它們x的週期函數,當x每加2π時,它們的值必重複一遍。當x從O增加到$\pi/2$時,Sin x的值是由P_1M_1在P的相當位置之長度而定。當x是O時,它開始的值也是O

當 x 是 $\pi/2$ 時，它的值便達到1。當 x 從 $\pi/2$ 增加到 π 時，Sin x（由 P_2M_2 線來表示）便從 1減少到O。當 x 從 π 增加到 $3\pi/2$ 時，Sin x 的值便從O變到 -1，對於其間的 x 的一切值，均是負值。（注意 M_3P_3 與 M_2P_2 或 M_1P_1 的方向相反。）當 x 從 $3\pi/2$ 增加到 2π 時，Sin x便從 -1 變到O。現在，當 x 從 2π 增加到 $5\pi/2$ 時，則Sin x的值和當x從在O與 $\pi/2$ 之間時它所有的一個值之級數是同樣的，以後依此類推。對於 Cos x，顯然也能得着相似的結論。實則，假使我們給 x 定一任何值，例如3，

$\text{Sin}\,3=\text{Sin}(3+2\pi)=\text{Sin}(3+4\pi)=\text{Sin}(3+6\pi)$ 等等

與 $\text{Cos}\,3=\text{Cos}(3+2\pi)=\text{Cos}(3+4\pi)=\text{Cos}(3+6\pi)$ 等等，

並且任何這類的敘述對於可選定的 x 之其他任何數值都是真確的。

於是事實上，在這些函數中，我們有一大組 x 的函數之最簡的例子，它具有這週期性，或值之再現，當 x 的值穩定地增加的時候。要把這事實關聯到前幾頁的級數之敘述，知道下面的這件事也是有興趣的，即算學家能證明這數級

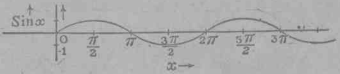
$$1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots\cdots\text{以至無限}$$

是聚會的並且它的極限是 Sin x。(注意分母數字後面加一感歎號，不是指示的那數字，却是指的所謂"數之階乘積"(factorial of the number)。卽$2!=1\times2$，$3!=1\times2\times3$，$4!=1\times2\times3\times4$，餘依此類推。)下面的級數

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\cdots\cdots\text{以至無限}$$

也是會聚的並且它的極限是 Cos x。

假使我們依尋常的方法作成函數 Sin x的一個圖，便產生一個人所熟知的"波形"



第 十 圖

總之，這些函數及其他類似它們的函數便是算學家所使用的記號材料；他們之所以使用它們，是要以惟一可能的方法，來表現自然之廣大的週期現象之數量的形勢

及物理學的種種實驗之數量的形勢；至於這些實驗是用來發見原子之內所發生的光之放射的本性，並相信這種發生是週期的；或用來發見光之傳播的本性，或用來發見物體中被信爲溫熱性之本質的分子震顫的本性。

並且我們的結尾和開始一樣。人類之物質的需要，在其求滿足需要之程序中，曾引起些純理知的問題。人受着解決這些問題的內心的驅使，並無任何外來的動機，覺覺得，在這些解法中，他發見了些武器，使他控制他的環境之能力增加百倍，這在他自己也感着不斷增加的驚奇。算學具有人類精神的本質，於是其中秘藏着的算學的著作，該應是人類的一種最光榮的產財。

參考書目

下列各書,介紹給初學算學者入門之用:

H. S. Hall and F. H. Stevens: An Elementary Course of Mathematics (London. 1922)

I. L. Miller: Introduction to Mathematics (New York. 1930)

C. V. Durell and R. C. Fawdry: Arithmetic (London. 1930)

C. I. Palmer: Arithmetic with Applications, 3rd ed.(New York and London. 1930)

C. V. Durell and Others: Elementary Algebra with Introduction. (London, 1925)

G. St. L. Carson and D. E. Smith: Elements of

Algebra (New York and London. 1915)

C. V. Durell: Elementary Geometry (London 1919)

G. St. L. Carson and D. E. Smith: Plane Geometry (London and New York 1915)

C. V. Durell and R. M. Wright: Elementary Trigonometry (London 1930)

S. P. Thompson: Calculus Made Easy; 2nd ed. (London 1919)

較高深的幾種書介紹如下:

C. Smith: A Treatise on Algebra; 5th ed. (London. 1920)

G. Chrystral: Algebra; 2nd ed., 2 vols. (London. 1922)

R. C. J. Nixon: Euclid Revised; 3rd ed. (Oxford 1915)

Sir T. L. 所譯歐幾里得幾何原本十三卷，附有很完

全的導言與註解。書共三冊，1926 年，The Clarendon Press, Oxford 出版。

J. Perry: Calculus for Engineers; 13th impression (London 1920)

算學史可讀下列幾種：

W. W. R. Bull: A Short Account of the History of Mathematics; 6th ed. (London. 1915)

J. W. N. Sullivan: The History of Mathematics in Europe (Oxford. 1925)

一種較完備的歷史

D. E. Smith: History of Mathematics, 2 vols. (New York and London)

下列一種，可亦參閱：

Sir T. Heath: A History of Greek Mathematics; 2 vols. (Oxford 1921)

下列三種之內容，係討論算學哲學者，

S. Brodetsky: The Meaning of Mathematics(London 1929)

(Benn's Sixpenny Library)

A. N. White Reed: An Introduction to Mathematics (London and New York)(Home University Library)

A. R. Forsyth: Mathematics in Life and Thought (University of Wales Press. 1929)