汽車力學講義

陸軍交輜學校編印

民國二十六年

汽車力學講義

陸軍交輜學校編印

民國二十六年

汽車力學

目　錄

汽車力學

第一章 緒論

1. 力學之定義（Defnition of Mechanics）

研究物質在力作用下之一切現象之科學謂之力學，力學所研究之範圍爲物體在空間之運動，及使物體改變其運動的力之效用。

2. 力學之區分（D.vision of Mechanics）

力學可大別之爲兩部，即(1)運動學(Kine natics)與(2)力學（Dynamics）

運動學專研究運動之原理及定則，而不及其原因。

力學則研究使物體產生運動，或停止運動的力之作用。力學又可分爲靜力學(Statics)及動力學（Kinetics）兩種。

靜力學爲研究一組之力在平衡時的現象，而動力學則研究力之效應，即產生運動，或改變運動。

3.單位（Units）

定立準確之單位爲研究科學之基礎，凡科學界之一切現

象，皆賴度量衡數字之證明，吾人始能澈底了解其眞實意義，故有謂『科學卽計量者』。例如阿基米得原理 Archimedes Principlo）曰，物體在液體中所失去之重量，等於其所排去同體積液柱之重量。吾人欲於阿基米得原理作澈底了解，則當以事實證明之，設有鋼一塊在空氣中稱之其重爲 49.92 公分（Gram），在水中稱之，其重爲 43.52 公分，其所排去之水爲6.4 立方公分（C C.）水之密度（4°C）通常以每立方公分約等於一公分，故49.92－43,52＝6.4，卽6.4×1＝6.4，故阿基米得原理，可以數字證明其爲眞實·所以研究各種單位，亦爲力學中所必需。

科學界所用之單位，計分國際度量衡制或米制 System），及英制（British Sygtem）兩種。茲將各種單位，表列於下：

(a) 國際度量衡制

（I）度制單位

公里	公尺	公分
1＝	1000＝	100000
	1＝	100

(II)量制單位

公升	公撮
1＝	1000

(III)衡制單位

公噸	公斤	公分
1＝	1,000＝	1,000.00
	1＝	1,000

(b)英制

(I)度制單位

哩	碼	呎	吋
1	1760＝	5280＝	923390
	1＝	3＝	36
		1＝	12

(II)量制單位

立方呎	加侖	立方吋
1＝	(英)(約)6.24＝	1728
1＝	(美)(約)7.48＝	1728
	(英)1＝	231
	(美)1＝	(約)277.4

(III)衡制單位

噸	担	磅	兩
(英) 1=	20=	2240=	35840
(美) 1=	20=	2000=	32000
(英)	1=	112=	1792
(美)	1=	100=	1600
		1=	16

時間單位，在國際度量衡制及英制均爲秒。

國際度量衡制與英制換算率如下：

(I)度制

1吋=2.54公分　　1呎=0.30304尺公

1公分=0.394吋　　1公尺=3.218呎

(II)量制

1公升=0.22(英)加倫=0.264(美)加倫=3.7853公升

1(英)加倫=4.546公升

1(英)加倫=1.2(美)加倫

(III)衡制

1兩=28.4公分　　1磅=0.4536公斤=453.6公分

1公斤＝2.2磅＝35.2兩　　1公分＝0.0352兩

除上述單位外，復有所謂角單位者。角單位計分兩種，分述於下：

(1)分一圓為360等分，以其$\frac{1}{360}$為單位，是為一度，計如1°。分一度為六十分，復分一分其六十秒。以算式表之，則為

1度＝60分＝3600秒。

(2)以等於半徑長之圓弧，對於圓心所張之角度為單位，是為一弧度。

1弧度＝57度17分44.8秒

1度＝0.017弧度

練　習　題

1.有鐵棒一段，計長2碼，但知棒長一呎，其重量為35磅。問鐵棒共重若干磅？又折合若干公斤？

2.有水箱一只，其容積為15公升，問折合若干加倫（美制）？

3.有竹竿長2.94公尺，問折合若干呎？

4.自甲站至乙站計45公里，問折合若干哩？

第二章 運 動

4. 運動 Motion 與靜止 Rest.

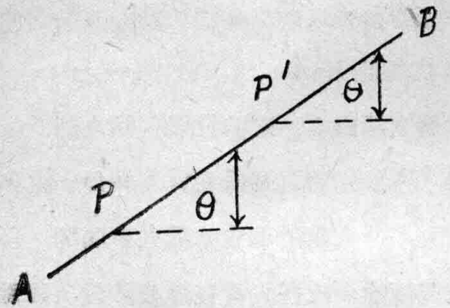
物體改變其位置，謂之運動；不變其位置，謂之靜止。

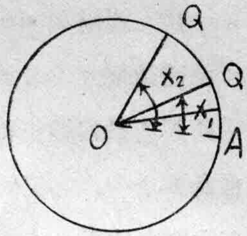
所謂運動與靜止者，乃指相對之關係而言。例如一火車以每時四十哩之速度前進，吾人坐於車中，對火車而論，吾人對火車之位置，固未嘗改變，故吾人為在靜止狀態；對地球而論，則吾人以每時四十哩之速前進，則吾人當在運動狀態中。故吾人於論運動與靜止，當先有標準物，以資參攷，此即所謂參考坐標者也。吾人日常所謂之運動與靜止，皆以地球為參考坐標，以吾人對地球改變其位置與否，決定吾人之為運動或靜止。參考坐標可其虛點，亦可為實物；任何物體均可作參考坐標，惟須為剛體耳。剛體者，在各種情形之下，其自身不改變其形狀與大小者也。

5 運動之區分 Division of Motion.

運動可分為直綫運動與圓運動兩種。沿直綫方向以改變其位置者，謂之直綫運動 Rectilinear Motion；故直綫運動之方向不變，只有位置之改變。繞一定點以等距離而旋轉，謂之圓運動 Cicular Motion；故圓運動之方向隨時而異，而

其對於定點之距離則不變。





第 一 圖　　　　　　　　第 二 圖

例如一點P沿AB直綫運動（見第一圖），其在P點時，與水平綫所成之角爲θ，其在P′點時，與水平綫所成之角亦爲θ，是則P點運動之方向并未改變，但其位置則由P移至P′；故P點之運動，爲直綫運動。又如一點Q，沿圓O之圓周，繞圓心O而旋轉（第二圖），其在Q點時，與水平綫OA所成之爲角α_1，其在Q′時，與OA所成之角爲α_2，故其方向隨時改變。但OQ與OQ′均爲圓O之半徑，卽OQ＝OQ′＝r，故其距離不變。故Q點之運動爲圓運動。

6．　位移 Displacement

物體運動時，自起點至終點之距離，謂之位移。

在直綫運動時，其起點至終點所經之直線距離，謂之綫

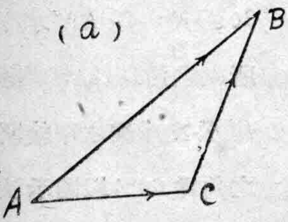
位移 Linear Displacement，如第一圖之PP′。

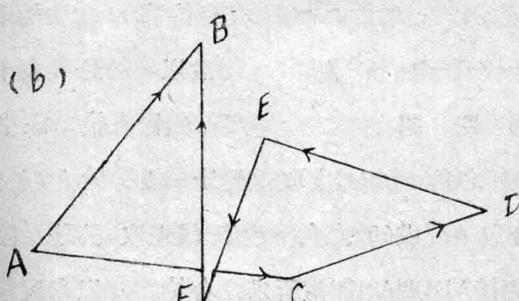
在圓運動時，其起點至終點所轉之角度，為圓運動之位移，名曰角移Angular Displacement，如第二圖之∠QOQ′。

a，記述位移，須注意下列數事：

1.起點　2.運動之方向　3.運動之順序如由A至B，及4.運動之量。

依位移之定義，可知位移與自起點至終點所經之途徑無關。如第三圖(a).一點先由A至C，再由C至B；其起點為A，終點為B，故其位移為A B。又如第三圖(b)，此點先由A至C，由C至D，……，由E至F，最後由F至B；其起點亦為A，而終點亦為B，故其位移仍為AB。故第三圖(a)(b)之途徑雖各異，而其位移則相同。A B名曰合位移Resultant Displacement，AC，CB，……等名曰分位移Comp-





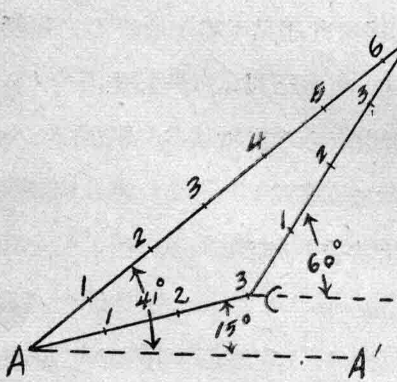
第三圖

onent Displacements,

b,位移之合成及分解 Composition and Resolution f Displacemen .

(1)合成——位移之合成，其法有二；一曰圖示法 GraphicalMethod，二曰解析法 Analytical Method.

(a)　圖　示　法



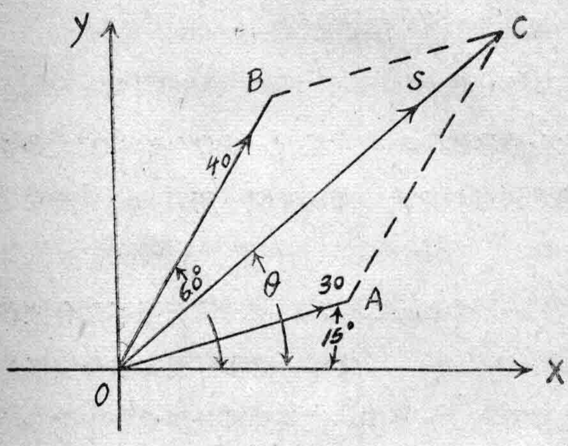
第　四　圖

設有位移 AC 等於 30 公尺，與 AA′水平綫所成之角爲15°;CB等於 40 公尺，與水平綫所成之角爲 60°;以圖示法求其合位移，其法如下：

設以一公分代表十公尺,。先作直綫 AC,令與 AA′水平綫成15°之角，於AC上取 3 公分，設等於 AC；自C作CB 直綫，令與 AA′成60°之角。於CB綫上取4公分，設等於CB;作直綫聯接AB 則AB卽爲所求之合位移。以米尺量得AB 之長爲6.5公分，幷量出其與AA′所成之角爲41°,故知合位移爲65公尺。其方向爲與AA′成41°之角。

上述圖示法曰位移之三角形。此外尙有平行四邊形法及多邊形法，其合位移之求法，與三角形法類似。在平行四邊形法，其對角綫卽爲所求之合位移，而在多邊形法，則其閉鎖多邊形最後所需之直綫，卽爲所求之合位移。

解　析　法



第　五　圖

作直角坐標 OX 及 OY 相交於O，作 OA 令等於30公尺，與OX成 15° 之角；作OB令等於40公尺，與OX成60之角　以OC表合位移，令等於S，與OX所成之角爲 θ，則S及 θ 可以下法算出之。

分位移OA可分解爲 OX及OY軸上之射影，設爲 $S'x$ 及 $S'y$ 則

$S'x = 30\cos 15^\circ$,　　　　$S'y = 30\sin 15^\circ$,

同理 $S''x = 40\cos 60°$, $S''y = 40\sin 60°$,

$Sx = S\cos\theta$, $Sy = S\sin\theta$,

於是 $Sx^2 + Sy^2 = S^2 = (S'x + S''x)^2 + (S'y + S''y)^2$

故 $S^2 = (30\cos 15° + 40\cos 60°)^2 + (30\sin 15° + 40\sin 60°)^2$

故 $S = \sqrt{4218} = 64.95$ 公尺

$$\tan\theta = \frac{S'y + S''y}{S'x + S''x} = \frac{42.50}{49.11} = 0.8654$$

故 $\theta = 40.9°$

故所求之合位移爲 S＝64.95公尺，與OX成40.9°之角；以之與第四圖之結果相比較，頗爲近似，所以 OC 爲所求之合位移。

(2)分解——分解者合成之反也。自第三圖可知合位移AB之分位移爲 AC，CB……，故每一位移可視其爲合位移，由多數之分位移所合成。是則一位移當可分解爲若干之分位移；固毫無疑義者也。其分解法亦有圖示及解析兩種。了解合成之圖示及解析法，則於分解時自可瞭然也。

7. 速度Velocity.

速度者，單位時間內之位移率也。在直綫運動時，其速度名曰綫速度 Linoar Velocity，在圓運動時，則名曰角速度Angular Velocity；綫速度通常以 V 表之，而角速度則以 w

表之。

其每單位時間內之位移率均相等者曰等速度 Unifovm Velocity；其不相等者曰變速度 Vavcabe Velecity 以等速度運動者曰等速運動；以變速度運動者曰變速運動。

在等速運動時，其速度之計算甚易，卽以時間除位移。

(1)直綫運動——設一點以等速運動，其起點至終點之綫位移，設爲S公分，所需時間設爲t秒，則速度V可以下式求之。

$$V = \frac{S}{t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1A)$$

(2)圓運動——設一點以等角速運動，其起點至終點之角移，設爲 θ 弧度，其時間爲t秒，則角速度 w 可以下式求之。

$$w = \frac{\theta}{t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1B)$$

8. 速度之單位Units of Velocity.

(1)直綫運動——直綫運動之速度單位分爲國際度量衡制及英制兩種，在國際度量衡制最常用之單位爲公分及秒，其記法爲公分/秒(Cm/sec)讀如每秒若干公分。公分/秒云者，卽每秒行若干公分之速度也。如 15 公分/秒卽其速度爲每秒15公分。如需用大單位時，則用公尺/秒(cm/sec)

或公里/時(Km/hu)亦可。在英制最常用之單位爲呎及秒，其記法爲呎/秒(ft/sec)。例如22呎/秒，即爲每秒22呎之速度。

(2)圓運動——圓運動之單位，計分兩種，一爲弧度及秒，其記法爲弧度/秒(radians/sec)讀如每秒若干弧度。例如12弧度/秒即角速度爲每秒週12弧度之角。一爲『週』及分，記週/分(revolutious/min)讀如每分若干週。例如150週/分，即爲每分旋轉150週之角速度。

9. 速度之分解及合成

(1)速度之合成——速度之合成其法與位移之合成同。茲舉例以明之。

例：有海輪一隻，以18公里/時之速度，向東北方向進行。乘客A君，在艙面上散步，以400公分/秒之速度由船之右舷向左舷前進(參觀第六圖)問其合成速度爲若干?

解：先算船之速度爲公分/秒，即 $V_1 = \frac{18 \times 1000 \times 120}{3600}$

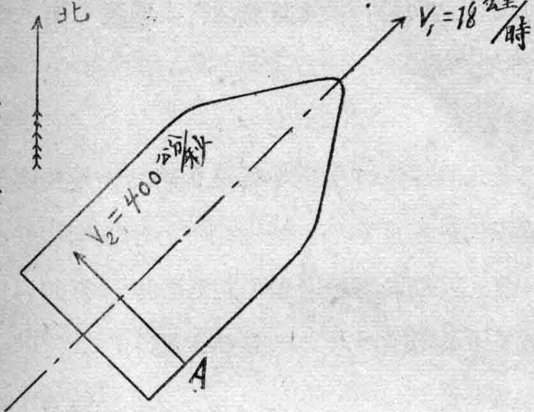
即 $V_2 = 500$ 公分/秒。

以圖示法求之如下：

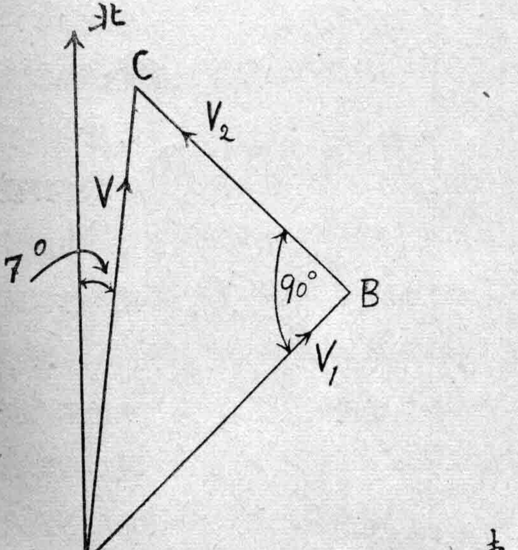
(a)三角形法

依船行方向作直綫，設於直綫上取每公分第於100公分

，則於直綫上取五公分之長，表船行速度。因A君由右舷至左舷，其方向係與船行方向成直角，故於直綫上第五公分末端，作垂綫，於垂線上取四公分之長。於是聯接起點至終點之直綫，卽爲所求之合成速度（見第七圖）。



第六圖



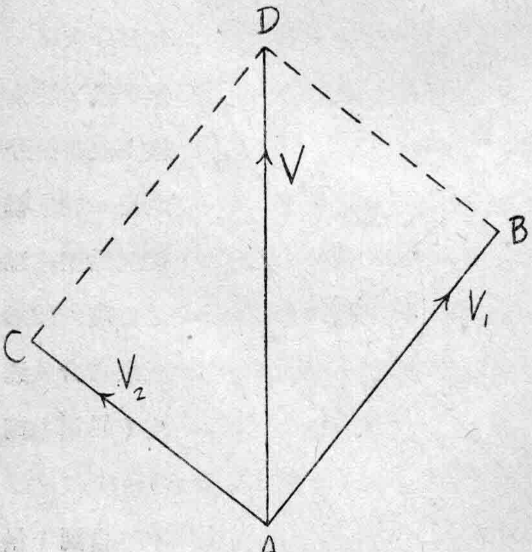
第七圖

自圖上量出AC＝6.3公

分，其與正北方所成之角爲7°，故所求之合成速度 V 爲6.30公分 秒，方向爲北7°東。

(b)平行四邊形法

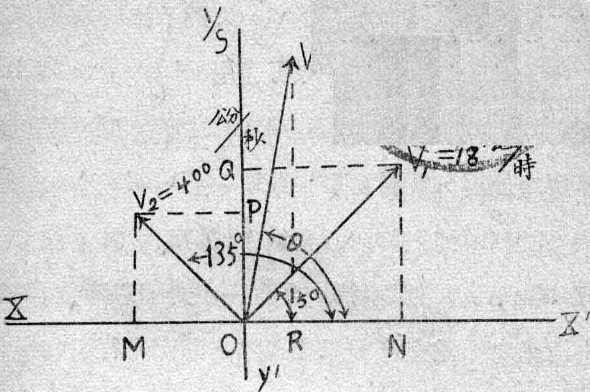
以平四邊形法求合成速度，與上述三角形法大致相似。先選擇適當單位以代表速度（如上圖之以一公分表示 100 公分/秒之速度） 依上法作V_1及V_2，然後完全其平行四邊形，其對角綫卽爲所求之合成速度。（見第八圖）



第 八 圖

作 AB 以表 V_1AC 以表 V_2;作AB 之平行綫CD, 及AC 之平行綫 BD，相交於 D 點。作直綫連接AD,則平行四邊形之對角綫AD,卽爲所求之合成速度。

以解析法求之如下：



第九圖

依第六節之理，

$$V^2=V^2x+V^2y=(V_1x+V_2x)^2+(V_1y+V_2y)^2$$

$$V_1x=500\cos 45°=500\times\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$V_2x=400\cos 135°=-400\times\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$V_1y=500\sin 45°=500\times\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$V_2y=400\sin 135°=40\ \ \times\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

故 $$V=\sqrt{\left(500\times\frac{\sqrt{2}}{2}-400\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(500\times\frac{\sqrt{2}}{2}+400\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(50)^2\times 2+(450)^2\times 2}$$

$$=\sqrt{41\text{coo}}=633$$

$$\text{tau}\ \theta=\frac{Vy}{Vx}=\frac{V_1y+V_2y}{V_1x+V_2x}=\frac{450\sqrt{2}}{50\sqrt{2}}=9$$

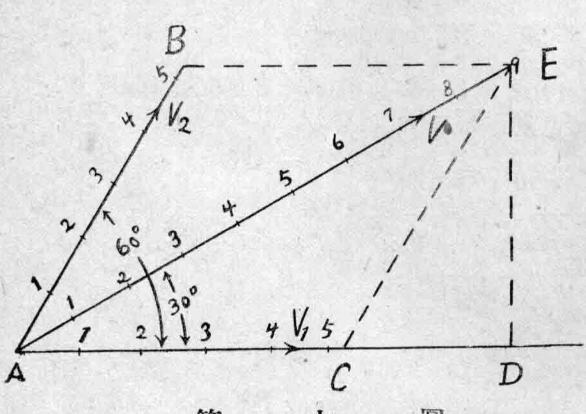
故 $\theta = \mathrm{tau}^{1}9 = 83.6°$

以解析法所求得之合成速度，與圖示法所求得者，甚為近似，故圖示法與解析法，均可適用。

(2)速度之分解——同第6節(2)之理，明悉速度合成，則於速度之分解，當屬易事。茲舉一例以明之。

例：設有一河，其河面寬為45公尺，其水流之速度為V_1公尺/時，且與河岸平行。今有一小舟，以速度10公尺/時，欲由河岸之A點直達對岸之B點，因而舟行方向，須使與河岸成30°之角，至聯接AB之直線與河岸所成之角為60°，假令為逆流行舟，問其兩分速度各為若干？

a.圖示法求分速度



第 十 圖

解：因為逆流行舟，故其平行於河岸之分速為消去流速之影響，即平行於河岸之分速＝V

1

而方向則相反。其他一分速度，則爲使舟向 AB 方向行進之速度，設爲V_2（參觀第十圖）。

以圖示法求V_1及V_2如下：

(1)令1公分代表10公尺/時之速度。

(2)作ACD直線，使與河岸平行，作AE直線，於其上取9公分之長度，作AB直綫，使與ACD成60°之角。

(3)以完成平行四邊法作BE截AB於B，作 EC 截ACD於C。則AB及AC卽爲所求之兩分速度。

故　$AC=V_1$，$AB=V_2$。

(4)量得AC＝5.2公分，AB＝5.2公分。

故　$V_1=52$公尺，$V_2=52$公尺。

故所欲求之兩分速度爲 $V_1=52$ 公尺/時，平行於河岸，且與流速方向相反；$V_2=52$公尺/時，沿AB之方向行進。

b.解析法求分速度（參見第十圖）

$$V_1+V_2\cos60^\circ=V\cos30^\circ$$

故　$V_1=90\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}V_2=\frac{1}{2}(90\sqrt{3}-V_2)$

但　$V_2\sin60^\circ=V\sin30^\circ=90\times\frac{1}{2}=45$

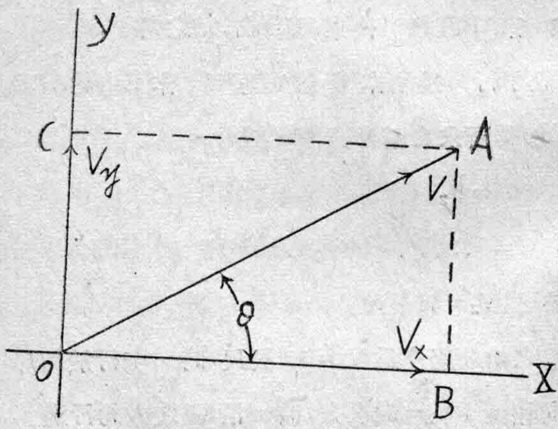
故　$V_2=\frac{90}{\sqrt{3}}=30\sqrt{3}=51.96$公尺/時

故　$V_1=\frac{1}{2}(90\sqrt{3}-30\sqrt{3})=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}(60-30)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times60$

$=30\sqrt{3}=51.96$公尺/時

以自解析法所得之結果，與自圖示法所得相比較，甚相接近，故分速度之求法，可如上述。

在求分速度時，如未明定分速度之方向關係，則通常以成直角分解爲最便。



第 十 一 圖

其法先作直角坐標（如第十一圖之OX及Oy），作OA表速度V，自A作AB垂直於OX，則OB爲所求之一分速度。OB名曰水平分速度 Horczontal Compoueut Velocity，通常以Vx記之。依同法求得OC，OC名曰垂直分速度Vevtical Componeut Velocity，通常以Vy記之。

依第6節解析法之理

$V_x = V\cos\theta$ ………(2A) $V_y = V\sin\theta$ ………(2B)

直角分解法於力學中用途甚廣，在以解析法求合成速度及合成力時多用之。

練　習　題

1. 何謂位移？速度？

設有一汽車，以等速度25公里/時，沿直綫進行，問於10秒時，該汽車所行之距離爲若干？

2. 汽船向南行，其速度爲15哩/時，風之方向爲東向，其風速爲12哩/時，問此船之實際進行爲如何？以圖示法求其路徑及速度。

3. 一火車以速度20哩/時前行，其時有爬蟲一，爬行於火車之玻璃窗上，以速度8呎/秒向上爬行，試求其合成速度。

4. 火車以1時間10公里之等速，在傾斜$\frac{1}{60}$之綫上進行時，問1分間可登高幾公尺？

5. 一點有兩分速度，各等於10公分/秒，若兩分速之方向線，以60°，120°，180°，或270°之角相交時，試以圖示法求其合速度。

6. 一槍彈射出後之某時，其水平分速度爲1600呎/秒，其垂直分速度爲200呎/秒，試求其合速度。

7. 火車軌道，與河岸成30°之角，火車以速度40公尺/分進行，試求其平行於河岸之分速度。

第三章 運 動(續)

10. 加速度Acceleration.

單位時間之速度改變率，請之加速度。在直線運動中之加速度，曰綫加速度 Linear Acceleration；在圓運動中之加速度，曰角加速度 Angular Acceleration。線加速度，通常以a表示之，角加速度，則以φ表示之。

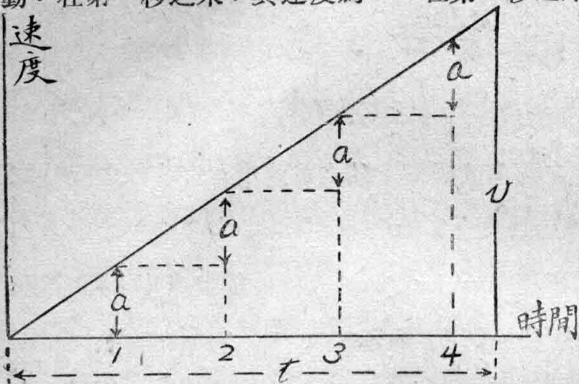
每單位時間內，其速度之改變率均相等者，曰等加速度 Uniform Acceleration；其不等者，曰等加速度，Variadle Acceleration。以等加速度運動者，曰變加速運動。Uniform Accelerated Motion；以變加速度運動者，曰變加速運動。Varible Accelerated Motion。

11. 加速與變速度，

在變速運動中，其速度隨時而異，其間速度之改變，當係加速度之作用；故變速運動，卽加速運動，物體之運動，其以等速運動者，殊不多睹，通常多爲變速運動。卽物體之爲加速運動者 所在皆是，故加速度之測定，當屬要必。

在等加速運動時，加速度 a 爲以時間 t 除速度之改變。茲以第十二圖說明之。例如一物體以等加速度 a 由靜止而運

動，在第一秒之末，其速度爲 a ，在第二秒之末，其速度爲 2a，故在第 t 秒之末，其速度當爲 at，由是得以等加速度運動時，速度與加速度及時間之關係，即

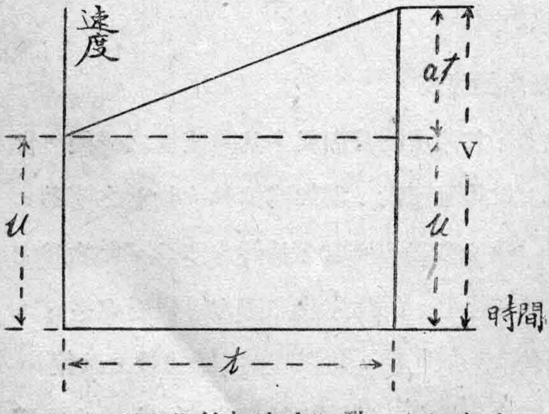


第十二圖　示以等加速度由靜止而運動

$$V = at \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3A)$$

$$故\quad a = \frac{V}{t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3B)$$

若物體以等加速度運動，而其初速爲 U，則在 t 秒時之速度，可以下式得之，（參看第十三圖），



第十三圖 以等加速度運動。其初速爲

$$V = u + at \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4A)$$

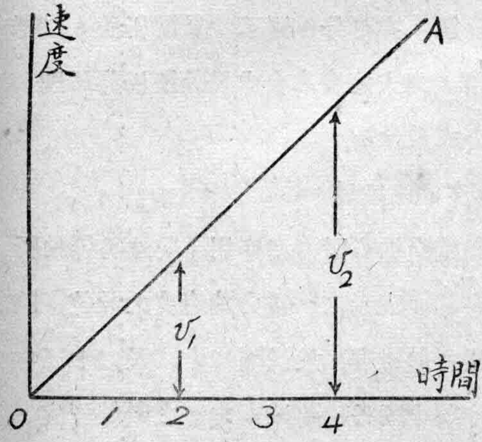
故 $$a = \frac{V - u}{t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4B)$$

在以變加速度運動時，其加速度及速度殊不易求得，通常以求其瞬時速度及瞬時加速度爲便。惟其法須用微積分學原理計之，茲從略。但在變速運動時，一般只求出其平均速度，Mean Velocity即視爲物體以等速度（即以平均速度）而運動，其結果亦無若何差異，平均速度之求法，於下節詳之。

12. 平均速度：

平均速度之求法，通常以所需之時間，除其全位移，設以Va表平均速度，t爲所需之時間，而S表全位移，則以公式表明之，

$$Ua = \frac{S}{t} \cdots\cdots (5)$$



第十四圖

平均速度亦可如下法求之，設一物體以變速度運動，至在第2秒時之

速度爲V_1，第4秒之速度爲V_2，則其由第2秒至第四秒之平均速度，爲在第2秒及第四秒時速度之和之半，以公式表之。

$$Sa = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

13. 加速度之單位。

加速度之單位，亦如速度之單位，然分爲國際度量衡制，及英制二者，在國際度量衡制，其單位通常爲公分及秒，記爲公分/秒^2 (Cm/Sec^2)，讀如每秒公分/秒，其意即爲每秒之速度，爲若干公分/秒也，在英制則加速度之單位，爲呎/秒^2(Ft/Sec^2)。

14. 加速度之合成及分解，

加速度之合成及分解，亦可分爲圖示法及解析法，二種，凡位移之合成及分解，與夫速度之合成及分解析諸法則，均可適用於加速度之合成及分解。

15. 重力加速度 g 之數值。

重力加速度者，物體受地心吸力之作用，向地心運動所發生之加速度也，通常以 g 表示之，重力加速度之數值，隨地而異，中國各地之重力加速度，於民國二十二及二十三年，由北平物理研究所，將中國各重要城市之 g 之數值測定，計南京之 g 之值，爲979.9（約值）公分/秒^2。

英國倫敦之 g 之値，在國際度量衡制為 981 公分/秒^2，英制為32.2呎/秒^2。於計算問題時，常命 $g = 980$ 公分/秒^2，或 $g = 32$ 呎／秒^2，其差誤亦甚小。

16. 運動公式，

(a)等速運動。

設　S＝位移，V＝速度，　t＝時間，則由定義

$$V = \frac{S}{t},$$

故

$$S = Vt \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

故在等速運動中，位移等於速度與時間之乘積，速度等於以時間除位移所得之商。

(b)變速運動

由靜止而運動

依12節之理。

$$S = V_a t \cdots\cdots\cdots\cdots (8A)$$

依同節之理

$$V_a - \frac{V}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (8B)$$

故

$$S = \frac{V}{2} t \cdots\cdots\cdots\cdots (8C)$$

由11節公式(3B)$V = at$

故

$$S = \frac{1}{2} a t^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (8D)$$

因 $$t=\frac{V}{a},$$

故 $$S=\frac{1}{2}a\left(\frac{V^2}{a}\right)=\frac{U^2}{2a}\cdots\cdots\cdots(8E)$$

或 $$V^2=2aS\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8F)$$

以初速 u 運動時

由公式(6)

$$Va=\frac{u+V}{2}$$

故 $$S=Vat=\frac{1}{2}(u+V)t\cdots(9A)$$

由公式(4A) $$V=u+at$$

故 $$S=\frac{1}{2}(u+u+at)t$$

$$=ut+\frac{1}{2}at^2\cdots\cdots\cdots\cdots(9B)$$

自公式(6A) $$t=\frac{V-u}{a}$$

故 $$S=u\times\frac{V-u}{a}+\frac{1}{2}\times a\times\frac{(V-u)^2}{a^2}$$

$$=\frac{V^2-u^2}{2a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9C)$$

或 $$V^2-u^2=2aS\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9D)$$

17. 物體自由落下之運動公式

物體自由落下者，謂物體墜落運動，係受重力加速度之作用，其空氣阻力等，均不計及也，故自由落下物體運動，可視爲眞空中物體落下運動，自由落下物體之運動公式，可

由前節所述之運動公式中將距離 S 換以高度 h，加速度 a 換以重力加速度 g 卽得，玆將兩公式互舉，以資對照。

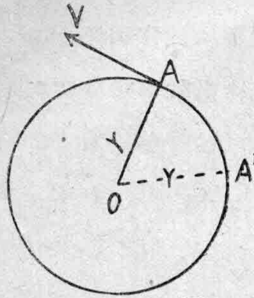
	運動公式	自由落下體之運動公式
等速運動	$V = \frac{S}{t}$	$V = \frac{h}{t}$
	$S = Vt$	$h = Ut$
變速運動	$V = at$	$V = gt$
	$S = \frac{1}{2}at^2$	$h = \frac{1}{2}gt^2$
	$S = \frac{V^2}{2a}$	$h = \frac{V^2}{2g}$
	$V^2 = 2aS$	$V^2 = 2gh$
	$V = u + at$	$V = u + gh$
	$S = \ddot{u}t + \frac{1}{2}at^2$	$h = ut + \frac{1}{2}gh^2$
	$S = \frac{V^2 - u^2}{2a}$	$h = \frac{V^2 - u^2}{2g}$
	$V^2 - u^2 = 2aS$	$V^2 - u^2 = 2gh$。

18. 線速度與角速度之關係，

設一質點（見第十五圖），以等角速度 ω 繞 O 點而旋轉，其半徑 $OA = \gamma$。當 A 點至圓週上運動時，其線速度 V 爲垂直於半徑之切線速度，若 A 點於一秒之時間內，由 A′轉至 A 點，其弧 $A'A = V$。自弧度計量之定義言之，則

$$\angle A'OA = \frac{A'A}{\gamma} = \frac{V}{\gamma}$$

但∠A′OA爲A點於一秒時內所轉之弧度，故其角速度



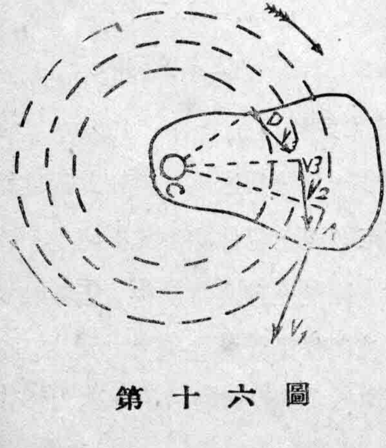
第十五圖

ω等於∠A′OA，故

$$\omega=\frac{V}{\gamma}\cdots\cdots\cdots\cdots(10A)$$

或 $$V=\omega\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots(10B)$$

由公式（10A）及（10B）可知角速度ω等於以其迴轉半徑γ除線速度V之商，而線速度V等於其迴轉半徑γ與角速度ω之乘積，一迴轉體內各點之角速度ω均相等，而其線速度則各異，如第十六圖，迴轉體ABCD，以C爲迴轉軸而旋轉，其A.B.D.點均至同一迴轉體內，於迴轉運動中，其關係位置不生變動，當A點繞C迴轉一週時B及D點亦然，故其角速度均相等，



第十六圖

依公式(10B)則

$V_1=\omega.AC$,

$V_2=\omega.BC$,

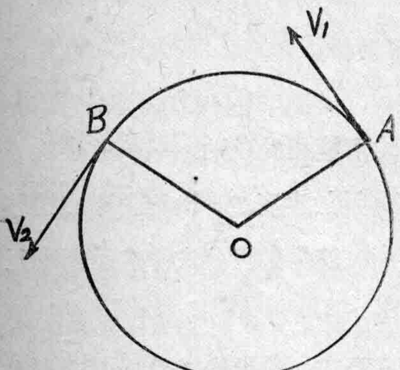
$V_3=\omega.DC$,

但 $AC>BC>DC$,

故 $V_1>V_2>V_3$,

故其線速度V_1V_2及V_3不相等，而離迴轉軸遠者，其線速度大，

19．線加速度與角加速度之關係



第　十　七　圖

設一質點以變角速度，繞迴轉軸O而旋轉，其在A點時之速線度爲V_1，B點時之線速度爲V_2。設此質點於t秒時內，其角速度由ω_1改變至ω_2，於是依定義，

$$\phi=\frac{\omega_2-\omega_1}{t}\cdots\cdots(11)$$

依公式（10A），

$$\omega_1=\frac{V^1}{OA},\qquad \omega_2=\frac{V_2}{OB}$$

因　$OA=OB=\gamma$

故　$\phi=\dfrac{V_2-V_1}{\gamma t}$

依公式（4B）$\alpha=\dfrac{V_2-V_1}{t}$

故　$\phi=\dfrac{\alpha}{\gamma}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12A)$

或　$\alpha=\phi\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12B)$

故角加速度等於以迴轉半徑，除線加速度之商，而線加

速度，等於迴轉半徑與角加速度之乘積，

依上節之理，以變角速度運動時，迴轉體內各點之角加速度均等　而線加速度，則各異，其距迴轉軸遠者，則線加速度大，

20. 角動公式

凡直線運動之公式，均可適用於角動，只須將直線運動公式中之位移S，速度V，及加速度a，換以角動之角移θ角速度ω，及角加速度ϕ，卽爲角動公式，玆將兩式互舉，以資對照，

	直線運動之公式	角動公式
等速運動	$S=Vt$	$\theta=\omega t$
變速運動	$V=\alpha t$	$\omega=\phi t$
	$Va=\frac{V}{2}$	$\omega a=\frac{\omega}{2}$
	$S=Vat=\frac{V}{2}t$	$\theta=\omega at=\frac{1}{2}\omega t$
	$S=\frac{1}{2}at^2$	$\theta=\frac{1}{2}\phi t^2$
	$S=\frac{U^2}{2a}$	$\theta=\frac{\omega^2}{2\phi}$
	$V^2=2\alpha S$	$\omega^2=2\phi\theta$
	$V=u+\alpha t$	$\omega=\omega_o+\phi t$
	$S=ut+\frac{1}{2}at^2$	$\theta=\omega_o t+\frac{1}{2}\phi t^2$

$$V^2-u^2=2aS \quad \omega^2-\omega_0^2=2\phi\theta$$

$$S=\frac{V^2-u^2}{2a} \qquad \theta=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\phi}$$

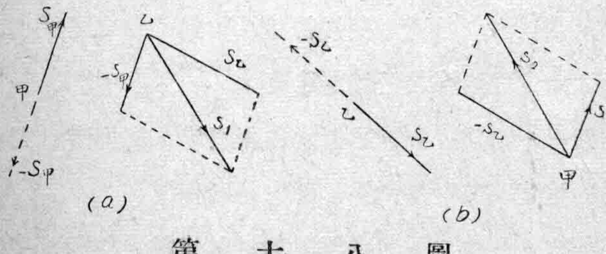
21. 相對運動 Relatire Motion

於第二章之始，已說明相對運動之概要，其所謂對參考坐標而言者，實卽相對之意也，例如在站上送客之人，當車開動后，對於車站而言，則送客者爲靜止，而對於車而言，則送客者爲運動，觀此對於相對運動之意義，當可瞭然、

相對運動之基本定理

定理一有甲乙兩點，其相對位置改變時，則自甲所見乙之相對位移，與自乙所見甲之相對位移，其數量相等，而方向相反

證明



第　十　八　圖

設甲乙兩點之位移，各爲 S甲 及 S乙。今若各加以相等位移，則其相對位置不變，玆先求乙對甲之相對位移（見第

十八圖(c))，於甲及乙點各加以相等位移(—$S_甲$)，則甲點因受量等而相反之兩位移，可視爲甲點仍在原地未動，乙點則受(—$S_甲$)及$S_乙$二位移之作用，由第二章位移之合成之理，可知乙之位移，必爲S_1。S_1爲自甲所見乙之相對位移，依同法可求得自乙所見甲之相對位移，(見第十八圖(b))爲S_2。S_1及S_2之數値相等，而其方向則相反，

定理二，已知甲乙兩點對於丙點之位移，則甲點對於乙點之相對位移，等於甲點之位移，與乙點位移之逆相加之向量和，乙點對於甲點之相對位移，等於乙點之位移與甲點位移之逆相加之兩量和，

定理二之證明，與定理一同

22. 相對速度 Rel tive Velocity.

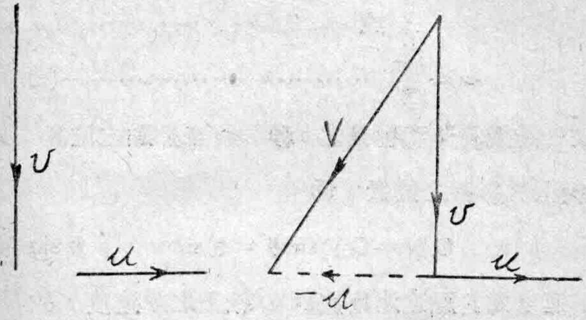
相對速度者，物體甲對於物體乙相對運動之速度也，相對運動之諸定理均適用於相對速度，

定理一．物體A對物體B之相對速度，與物體B對物體A之相對速度，其數量相等，而方向則相反，

定理二，已知A，B兩點，對於某定點之相對速度，則A對於B之相對速度，等於以A之速度，與B之速度之逆相加之向量和，B點對於A點之相對速度，等於B點之速度，

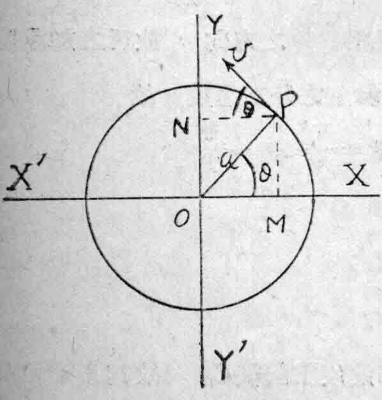
與A點之速度之逆相加之向量和，

例，雨中乘汽車駛行，汽車以速度u前進，而雨滴則以V之速度下降，則在汽車所見雨滴下降之速度為V（見第十九）圖



第十九圖

23. 簡諧運動 Simple Harmonic Motion（S.h.m.）



第 十 九 圖

一質點P以角速度運動於圓周上，則P在兩直角坐標軸上射影之運動，必以原點O為中心，而往復運動，P在直角坐標軸上射影之運動，曰簡諧運動（見第十九圖），原點O曰簡諧運動之中心點 Mean Position。OP之長為a，曰簡諧運動之振幅 Amplitude。

設P以T秒沿圓周旋轉一週，則T曰簡諧運動之週期Period。設P於一秒時間內，繞圓周旋轉η次，則η曰簡諧運動之頻率Fregueny．於是

$$\eta=\frac{1}{T}\text{或}\qquad T=\frac{1}{\eta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

設P通過X^1OX軸後之t秒，行至P點之位置，則其YOY′軸上射影N之位置，爲

$$ON=OP\sin\theta=a\sin\omega\ t=a\sin\frac{2\pi t}{T}$$

其速度爲P點之速度在YOY′軸上之分速度，故

$$V=U\cos\theta=\frac{2\pi a}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}$$

P點之加速度爲$\frac{V^2}{a}$，且沿PO之方向，故N之加速度，爲P點之加速度、在YOY′軸上之分加速度，故

$$a=\frac{V^1}{a}\sin\theta=\frac{V^2}{a}\sin\frac{2\pi t}{T}$$

$$=\frac{4\pi^2}{T^8}a\sin\frac{2\pi t}{\gamma}$$

但$a\sin\frac{2\pi t}{T}=ON$，故

$$a=\frac{4\pi^2}{T^2}ON$$

因在圓周上運動，其加速度常向圓心，故其X′OX及YOY′軸上之分加速度 亦必對向圓心，如以位移爲正號，則加速度當附以負號，以示與位移之方向相反，

總上所述可，得結論如下，

簡諧運動之位移$=a\sin\frac{2\pi t}{\tau}$……………(15A)

簡諧運動之速度$=\frac{2\pi a}{\tau}\cos\frac{2\pi t}{\tau}$………(15B)

簡諧運動之加速度$=\frac{4\pi^2}{\tau^2}a\sin\frac{2\pi t}{\tau}=\frac{4\pi^2}{\tau}$XON(15C)

簡諧運動加速度之方向，爲對向中點，

練 習 題

1.何謂加速度，角加速度，

一物體由靜止而運動，於5秒后，其速度爲160呎/秒，問其加速度爲若干？

2.試說明相對速度之意義及其定理，

3.何謂週期及頻率，

設一點在圓週上運動，於一秒內轉5週，問其週期爲幾何？又其頻率爲幾何？

4.簡諧運動之加速度，與其位移之號相同否，並說明其理由，

5:自高50公尺之塔頂，以初速15.2公尺/秒，向下投一石，於2秒后着地，問着地時之速度爲幾何，

6.試述線速度與角速度之關係，

設一點以角速度150轉/秒在圓周上運動，圓周之直徑爲10公尺，問線速度爲幾何？

7.一點在圓周上運動，其角速度爲150轉/分，經30秒后其角速度爲180轉/分，問其角加速度爲若干？

8.加速度之合成法如何？試略述之，

第四章　靜力學

24.　力 Fcrce

在力學中，"力"之意義爲使兩物體改變其相對運動之趨勢，所謂改變其相對運動云者，卽使在運動中之物體，改變其速度，或使之靜止；或使靜止之物體，發生運動是也，此種"力"之概念，基於牛頓氏之運動定律，Newton's Laus of Matiou而來，

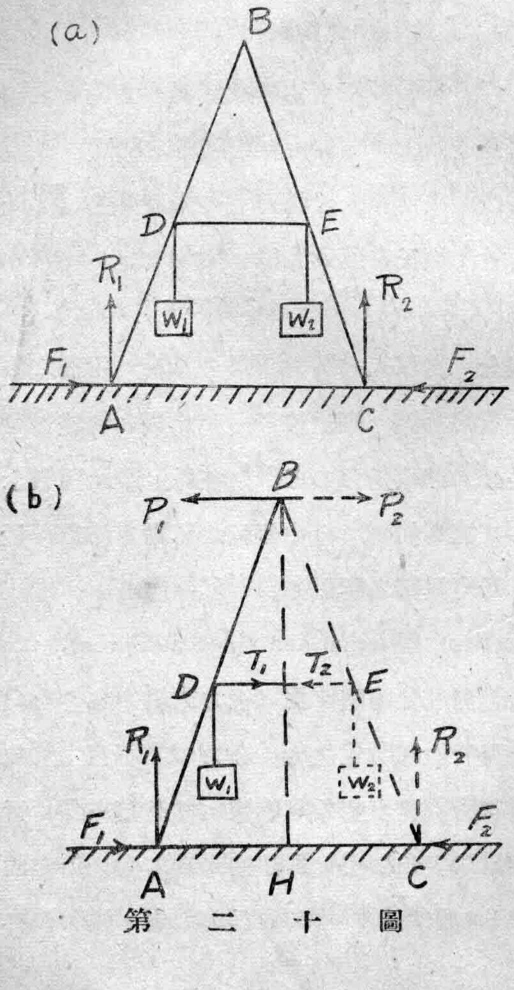
"力"之原始觀念，爲以人之體力，舉一重物，所需之力量。例如舉五公斤重之物體，則覺較舉一公斤重之物體，所需之力爲大，由是吾人卽感覺有力之作用在焉，然此種概念，殊不足以解釋"力"究爲何物，自牛頓氏之運動定律出，於是對於所謂"力"，乃有眞確之認識，

25.　外力及內力 External and Internal Forces.

外力者，一物體對於他物體所生之推力或挽力也，內力則爲物體內之一部對於他部所生之力，在力學之研究中，內力與外力之分，須就所研究之對象爲依據，其在第一步分析之視爲內力者，在第二步分析中，則往往視爲外力；但宜注意者，爲在第一步分析未完畢時，其視爲內力者，愼勿作外

力計，玆舉數例以明之，

〔例一〕 設置倒V形梯於地上，於梯之D，E兩點，以一細繫之，幷於D，E兩點，掛以重量W_1及W_2，就以倒V形梯爲一物而論（見第二十圖(a)），則其所受之外力與內力如下，重量W_1及W_2，地面所生之摩擦力F_1及F_2，地面A，C兩點所生之反作用力R_1及R_2均視爲外力，因其爲他物體對於倒V形梯所生之力也，其DE間繩



第 二 十 圖

之張力T_1及T_2，與倒V形梯AB及BC兩部，互相作用於B之壓力，均視爲內力，因其爲物體之一部，對他部所施之力也，但將倒V形梯AB之部而單獨研究其受力之關係（見第二十圖）b)），則繩之張力T_1，及BC之部在B點所施於AB之力P_1，均可視爲外力矣，反之，僅取BC之部，而單獨研究之，其情形亦然，

【例二】於駕駛汽車時，設將汽車之全部及駕駛者，爲一物體而論之則所受之外力，爲空氣之阻力，及路面對於車胎所生之摩擦阻力等，其汽缸內之蒸汽，對於活塞所生之蒸汽壓力，駕駛者加於離合器踏板Clutch Pedal之力，汽車改變方向時，轉向直拉桿Drag-link加於轉向關節之力等，均視爲內力，然以汽車之全部與駕駛者分別論之，則汽車所受之外力，除空氣阻力及摩擦阻力外，則駕駛者加於離合器踏板之力，與轉向直拉桿加於轉向關節之力，均當以外力視之，若分解汽車各部而分別論之，則活塞上所受之蒸汽壓力，又當以外力視之，

【例三】當汽車行駛時，其車輪軸與軸承之間，有滾動摩擦阻力發生，若就汽車之全部而論，則所受之外力，爲空氣之阻力，車胎與地面間之摩擦阻力，地面對於車胎所生之

正壓力，車輪之重量及其所分任之汽車之載重，與推進力等，均視爲外力，而輪軸與軸承間所生之滚動摩擦阻力，則視爲內力，若將軸承與輪軸分別論之，則其間之摩擦阻力，又當以外力視之矣，

觀於上舉三例，當可了解內力與外力之區分，本此以區分一問題中之內外力，當不致無所適從矣，力學中所論力之範圍，均爲外力之作用，及其所發生之效應，因物體中內力之和爲零故也，其理當於下節詳述之，

26. 牛頓氏運動定律，Newton's Laws of Motion.

1.第一運動定律 First Law of Motion.

凡一物體，若不受外力之作用，則靜者恆靜，動者恆以等速運動於一直線上，

2.第二運動定律 Second Law of Motion.

動量之改變，比例於所作用之力，而其方向與作用力之方向同，

3.第三運動定律 Third Law of Motion.

作用力與反作用力，其量相等而方向相反，

自第一運動定律之意義言之，若物體受外力之作用，則靜者必產生運動，而以等速運動者，必發生加速運動無疑，

然自力之定義言，則力之作用，爲使兩物體改變其相對運動者，是則第一運動定律，不曾解答"力"究爲何物之一問題，故第一運動定律，亦可視爲"力"之定義也，明矣，自第一運動定律引伸之，物體受一組之平衡力作用時，則物體亦將保持其原來之運動狀態，卽靜者恆靜，動者恆以等速運動於一直線上，蓋因一組平衡之力，其合力爲零故也，其理詳述於力之平衡中，

牛頓氏之第二運動定律，可以公式表示之如下，

$$F \propto ma,$$

今若以一組之力，$F_1, F_2, F_3, \cdots\cdots F_n$ 分別作用於質量爲m之質點，其相應而生之加速度，設爲 $a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_n$，則依第二運動定律，

$$F_1 \propto ma_1,$$

$$F_2 \propto ma_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$F_n \propto ma_n,$$

其中m爲質點之質量，在各式中均爲常數，故

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \cdots\cdots = \frac{F_n}{a_n}$$

故 $$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

是則二力之比較，只須比較其作用於同一質點所發生之加速度。故第二運動定律，不啻予吾人以計量力之標準與方法，故第二運動定律，亦可視爲力之計量定律，

27. 力之圖示法Graphical Representation of forces.

因力爲同時具有量與方向之數量，故亦而向量數，而得以一向線示之，記述一力時，所宜注意者，爲(1)力之量，（即力之大小），(2)力綫之方向，(3)力之作用點，及(4)力之順序 通常取適宜之比例尺度，以作成一向綫，即以其長度示力之大小，而其向線之方向，則示力線之方向 至於順序之指示，則通常於示力之向線上，附以箭頭指示之，有時亦有用文字以示順序者，

力線 Line of force 云者，爲一數學線 Mathematical Line，力即緣此線作用，而現示其効應也，

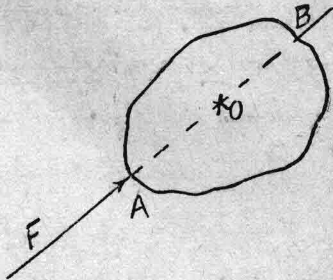
力之作用點，Point of application of force 爲力線上之一特殊點，可視爲力即於此點作用於物體也，

28. 力之特性Characteristics of fo ces.

(a)力之可傳性 Transmissibility of For es.

依經驗上所證明，作用於剛體之力，其作用點可爲沿力線上之任意點，而其外現之効應不變，此概念爲力之可傳性

例如力F作用於剛體AB之A點，其効應與作用力線上之O點，或B點時，完全相同，



第二十一圖

(b)力之產生成配偶 Forces Come in Pairs.

此特性基於牛頓氏之第三運動定律，蓋有作用力，則同時必發生量等而向反之反作用力也，

(c)力可圖示

因力爲一向量數，故可以一向線示之，其理見上節，

29. 力之單位 Unit of Force.

力之單位，分爲絕對單位，Absolute Units，及重方單位 Gravitational units 兩種，而絕對單位與重力單位中，復有國際制與英制之別。茲表列於下以明之，

	國際制	英制
絕對單位	達因	磅達
重力單位	公分	磅

30: 單位之力Unit Force.

單位之力云者，以單位之力，作用於單位質量之物體，

則其發生之加速度爲單位加速度之謂也，換言之，卽以單位之力作用於一公分質量之物體，其發生之加速度，爲每秒1公分/秒也；此意義可自第二運動定律得之，設K爲比例常數，則第二運動定律。可書作，

$$F = Kma$$

若F爲單位之力，m爲一公分之質量，a與每秒1公分/秒之加速度，則K＝1，於是

$$F = ma$$

因m及a均等於1，於是　　F＝1，單位

31. 達因及磅達之定義 Defiuitions of dyne and poundal.

(a)達因。Dyne.

一達因之力云者，卽以單位之力，作用於一公分質量之物體，其發生之加速度，爲每秒1公分/秒，

(b)磅達，Poundal.

一磅達之力云者，卽以單位之力，作用於一磅質量之物體，其發生之加速度，爲每秒1呎/秒，

32. 力之絕對單位，與重力單位之關係，

力之絕對單位，基於基本單位之長度，質量，及時間而

化出，其値爲不變，而重力單位，則由地球對物體所施之引力而化出，其値隨地而異，由實驗測得在赤道上物體之重量，較在兩極時少千分之五，可知力之重力單位，係因地而異。

於自由落下運動中，已述及物體受重力之作用而落下時，其發生之加速度爲 g，質量爲 m 之物體，受重力之作用而自由落下，其作用力當爲其自身之重量W，由第二運動定律，

$$W=mg.$$

其中重W，以重力單位表示之，而 mg 則爲絕對單位，故上式卽示重力單位，與絕對單位之關係。

33. 質量其重量Mass and Weight.

質量者物體內所包含之物質之量也，重量者，地球對物體所施之重力也。故質量不因異地而改變，而重量則隨地而異。

34. 力之合成及分解，Compsition and Resolution of Forces.

求諸力之合力之法則，曰力之合成，而分一力爲數力之法則，則曰力之分解：力之合成及分解；適用加速度之合

成及分解諸法則，其理證如下：

設有數力爲F_1，F_2，F_3，……F_n，分別作用於質量爲 m之質點；其相應而生之加速度，設爲 α_1，α_2，α_3，……α_n，則自第二運動定律，

$$F_1=ma_1$$

$$F_2=ma_2$$

$$F_3=ma_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n=ma_n$$

相加得 $F_1+F_2+F_3+\cdots+F_n=ma_1+ma_2+ma_3+\cdots+ma$

$$=m(a_1+{}_2+a_3+\cdots\cdots+{}_n)$$

若以 $\Sigma F_1=F_1+F_2+F_3+\cdots\cdots\cdots+F_n$，

故 $\Sigma\alpha_1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots\cdots\cdots+\alpha_n$，

則 $\Sigma F_1=m\Sigma\alpha_1$，

但$\Sigma\alpha_1$爲α_1，α_2，α_3，………α_n之合加速度，設爲α，

故 $\Sigma F_1=ma$

則依第二運動定律之理，必有 $F=ma$，故

$$F=\Sigma F_1=F_1+F_2+F_3+\cdots\cdots+F_n,$$

但F_1，F_2，F_3，……F_n諸力之合力爲ΣF_1，故F爲F_1F

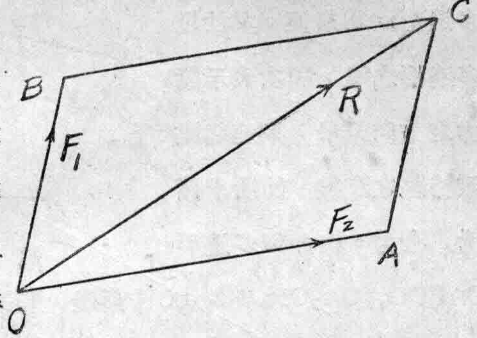
……F_n諸力，之合力　　　　但　$F=ma=m\sum a_1$，

故求合力之法則，與求合加速度之法則同。

依同理可證明力之分解，亦適用加速度之分解諸法則。

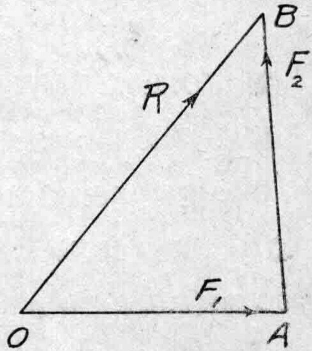
(α)力之合成

(1)圖示法



第二十二圖

力之平行四邊形法——以平行四邊形法，求交會一點之二力之合力時，先作平行四邊形相鄰之兩邊，分別平行交會於一點二力之力綫，於此二力綫上，選擇適宜之比例單位，截取OA及OB，分別表示二力F_2及F_1之大小，完成其平行四邊形，則通過O點之對角綫OC，即爲所求之合力，其合力之量及方向，均以OC表示之

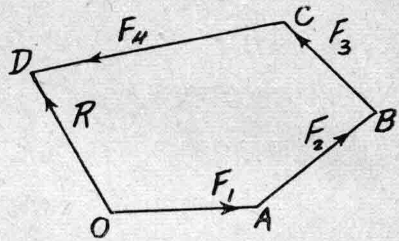


第二十三圖

力之三角形法——平行於二力之力綫，作直綫OA及AB爲三角形之相鄰之二邊，且表示交

會於一點之二力，則連接起點至終點之直綫，OB，卽示所求交會於一點之二力之合力。

力之多邊形——求交會於一點之多力之合力，以用力之多邊形法爲最便。其法以多邊形之邊，順次表示諸力之方向及量，則連起點至終點之直線，卽所求諸力之合力。例如以多邊形



第二十四圖

OABCD之OA，OB，BC，及CD諸邊，順次表示力F_1，F_2，F_3，及F_4，則連O點與D點之直線OD，卽表示所求之合力R。

【例】 求交會於一點之二力之合力，其二力如下所示：

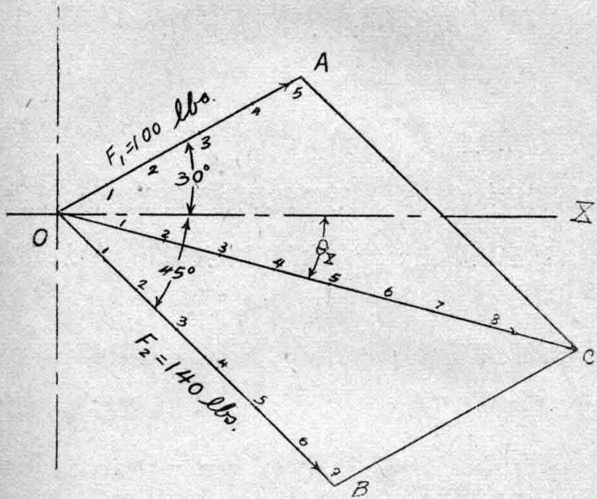
$F_1=100$磅，　　　$\theta_{1x}=30°$，

$F_2=140$,,，　　　$\theta_{2x}=315°$，

解：(i)以力之平行四邊形法，求合力。

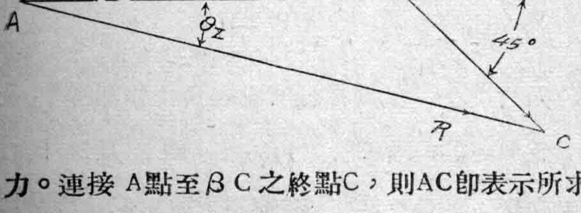
設以一公分表示20磅之力，作圖如下：

作OA使與OX成30°之角，且等於5公分；作OB使與OX成45°之角，且等於7公分。完成其平行四邊形OABC，則OC卽表示所求之合力R。由圖上，得OC＝9.6公分，與OX成14°45′之角，故　$R=20\times9.6=192$磅　$\theta_x=14°45'$



(ii)以力之三角形法求合力(仍用前圖之比例尺度)

作基線AX，作AB使與AX成30°之角，且表100 lbs 之力；自AB之終點B，作BC使與AX成45°之角，且表示140 lbs.之力。



連接A點至βC之終點C，則AC即表示所求之合力。由圖上量得AC＝9.6公分，θ_x＝14°45′，

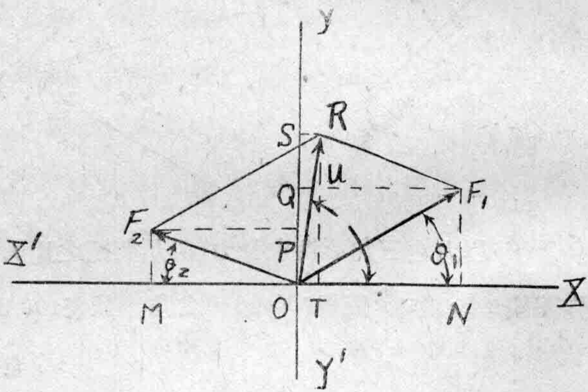
故 $R = 20 \times 9.6 = 192$ 磅

$\theta_x = 14°45'$.

(2)解析法

以解析法求合力時，先以各力向直角坐標軸之縱橫二軸上投影，其在橫軸上各分力之射影之代數和，等於合力在橫

第二十五圖



軸上之射影；其在縱軸上各分力之射影之代數和，等於合力在縱軸上之射影。於是依畢氏定理，

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

例如有F_1及F_2二力，其與橫軸所成之角，相應為θ_1及θ_2。設其合力為R，其與橫軸所成角為θ。使F_1及F_2向OX及OY二軸射影，則ON為F_1在橫軸上之射影，OM為F_2在橫軸上之射影，OT為R之射影。其F_1，F_2，及R在OY

軸上之射影，相應爲OQ，OP，及OS　於是

$$OT=ON-TN,$$

因 $QF_1//OX$，　$\therefore TN=uF_1$，　$\therefore OT=ON-uF_1$

但 $RF_1//OF_2$，$F_2S//TF_1$，$\therefore RF_1OF_2$，$\angle RF_1u=\theta_2$

故　$$nF_1=OM,$$

故　$$OT=ON-OM$$

但　OT爲R在X五軸之射影，ON爲F_1之射影，OM爲F_2之射影，

故　$$R_x=F_{1x}+F_1F_{2x},$$

其R_x表示R在X軸之射影，F_{1x}表示F_1之射影，F_{2x}表示F_2之射影。

依同法得，

$$R_y=F_{1y}+F_{2y}.$$

於是求得合力R爲

$$R^2=R_x^2+R_y^2$$

$$=(F_{1x}+F_{2x})^2+(F_{1y}+F_{2y})^2$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}=\frac{F_{1y}+R_{2y}}{F_{1x}+F_{2x}}$$

【例】 仍用圖示法之例題，以明二者相符合。

$$R_x=R\cos\theta \qquad R_y=R\sin\theta$$

$$F_{2x}=100\cos30°=50\sqrt{3}=50\sqrt{3}$$

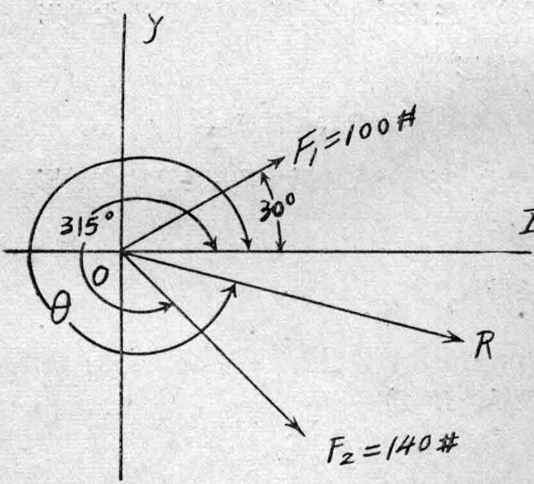
$$F_{1y}=100\sin30°=50\times1=50$$

$$F_{2x}=140\cos315°=140\cos45°$$

$$=70\times\sqrt{2}=70\sqrt{2}$$

$$F_{2y}=140\sin315°=140\sin°$$

$$=70\times\sqrt{2}=70\sqrt{2}$$



第二十六圖

$$R^2=R_x^2+R_y^2=(F_{1x}+F_{2x})^2+(F_{1y}+F_{2y})^2$$

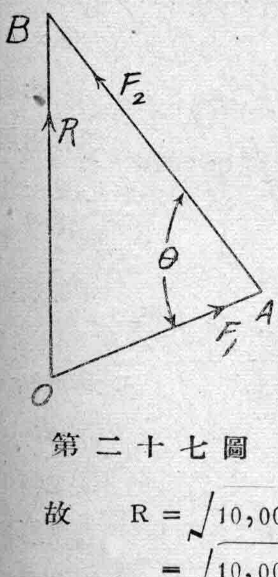
$$=(50\sqrt{3}+70\sqrt{2})^2+(50-70\sqrt{2})$$

故 $R=\sqrt{(50\sqrt{3}+70\sqrt{2})^2+(50-70\sqrt{2})^2}$

$=162$ lbs.

$$\theta=\tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}=\tan^{-1}\frac{50-70\sqrt{2}}{50\sqrt{3}+70\sqrt{2}}=345°15'$$

(3)求合力之別法（應用三角術之餘弦定律Law of cosine）



第二十七圖

先作成力之三角形（見圖示法(ii)），依餘弦定律，

$$\overline{OB}^2=\overline{OA}\ +\overline{AB}^2-2\overline{OA}.\overline{AB}\cos\theta$$

因 $\overline{OA}$，$\overline{AB}$比例於F_1及F_2，故比OB比例於R，

故 $R^2=F_1^{\,2}+F_2^{\,2}-2F_1F_2\cos\theta$

【例】仍用前例。(圖見圖示法(ii))

$R^2\,(100)^2+\,(140)^2-2\times100$ $140\cos105°$

故 $R=\sqrt{10,000+19,600-28,000\cos105°}$

$=\sqrt{10,000+19,600-28,000\times-0,259}$

$=192$ lbo.

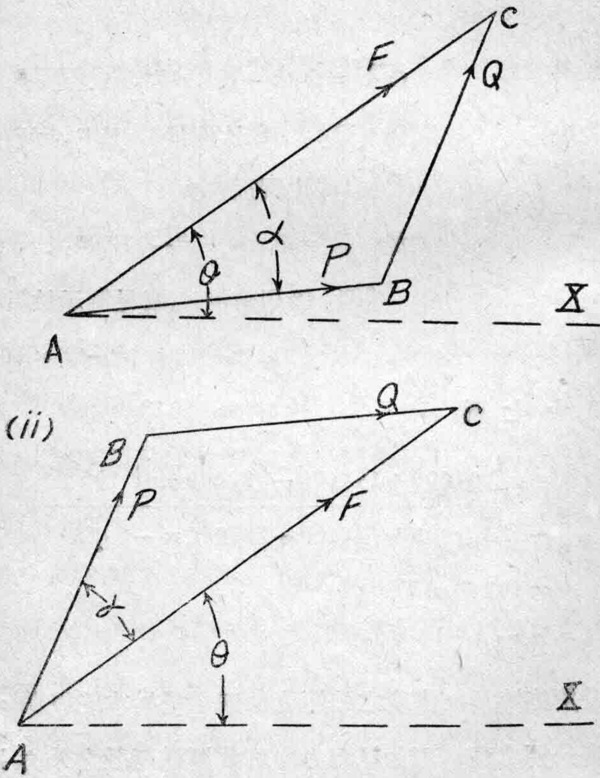
(b)力之分解

力之分解亦適用加速度之分解諸法則，已於本節證明。同於加速度分解之理，可知任何力均可分解為無數之分力；惟本節所論力之分解，則限於分解一合力為二分力，因此法

則於力學爲最常用者，茲分述於下：

(1)已知合力及一分力之量及方向，求另一分力。

設有合力F，其與水平軸（卽X軸）所成之角爲θ；今知其一分力爲P，與合力F之力綫所成之角爲α，求另一分力Q。



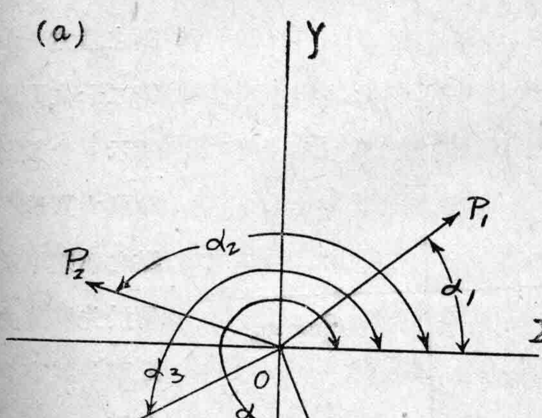
第二十八圖

此問題有兩解（見上作圖），圖(ii)卽將圖(i)以AB爲轉軸，旋轉180°後之圖形，兩解均適合題意，其結果亦相等。以圖示法求Q如下：

作基綫AX，再作AC以表示F，使與AX所成之角爲θ，自A點作AB，使與AC所成之角爲α，截取AB之長，使表示P。作BC，則BC卽表示所求之分力Q之量，而其方向卽Q之力線之法向。

(2)直角分解

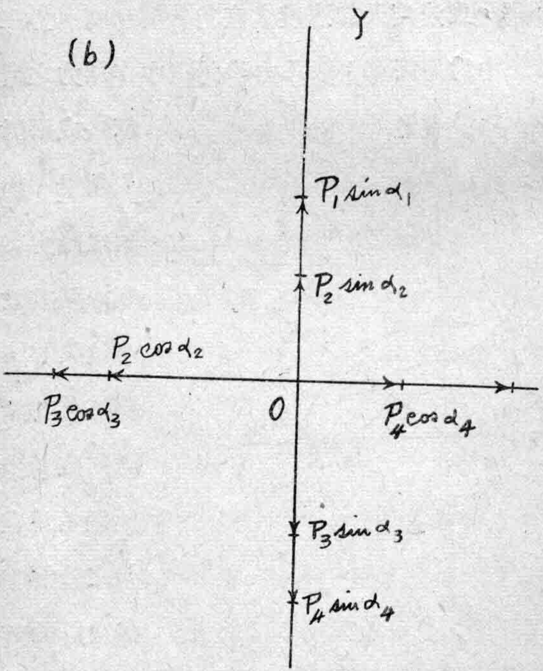
力之直角分解，與速度及加速度之直角分解法同。力之直角分解，在力學中爲用甚廣；舉凡力學問題中作用力之計算，或研討作用於一物體之諸力之關係及其效應結果等，莫不先將諸力向直角坐標軸上爲直角之分解，然後計論其在直角坐標之縱橫軸上



第二十九圖

諸力之射影，卽將諸力爲直角分解後，在縱橫軸上之分力之關係，進而研討其結果。茲舉一例以明之。

【例】 設有相交於同平面上一點 O 之四力 P_1，P_2，P_3，及 P_4，其與直角坐標之橫軸所成之角，分別爲 α_1，α_2，α_3，及 α_4，求諸力作用於 O 點之効應。



第 二 十 九 圖

解：

作用於 O 點之諸力，如第二十九圖(a)所示。今欲計論諸力對於 O 點之效應，莫便於先將諸力分別各爲直角分解，如第二十九圖(b)所示，次就其在縱橫軸上分力間之關係，進而討論之。

（I）設縱橫二軸上之諸分力之代數和各為零，即 $\Sigma F_n = O$，$\Sigma F_y = O$，則諸力平衡，O點不起運動，卽諸力對於O點不顯效應，因其合力為零也。

（II）設橫軸上諸分力之代數和為零，而縱軸上諸分力之代數和不為零，卽 $\Sigma F_x = O$，$\Sigma F_y O$，則O點沿縱軸方向運動，或為加速運動。

（III）設橫軸上諸分力之代數和，不為零，而縱軸上諸分力之代數和為零，卽 $\Sigma F_x O$，$\Sigma \bigcirc_y = O$，則O點必沿橫軸方向運動，或為加速運動。

（IV）設縱橫二軸上諸分力之代數和，均各不為零，卽 $\Sigma F_x O$，$\Sigma F_y O$，則諸力必可合成而為一合力，O點必沿合力R之方向運動。其合力R可以下法求之，卽

$$R = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2},$$

而 $\Sigma F_x = P_1\cos\alpha + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + P_4\cos\alpha_4$

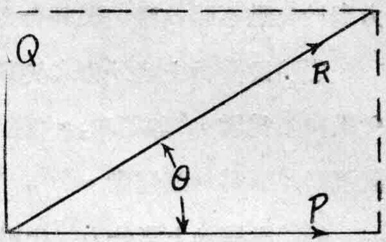
$$\Sigma F_y = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + P_4\sin\alpha_4$$

依上例可知欲明諸力作用於同平面內一點之效應，當以先將諸力為直角分解，然後就其在縱橫軸上之諸分力之代數和而推論之，固甚便也。

35. 互相垂直二力之合力

互相垂直二力之合力，其求法甚便。

(i)圖示法——用圖示法以求合力時，莫便於用力之平行四邊形法，因完成其平行四邊形后，其圖形為一長方形或正方形，其對角綫卽表其合力R(見第三十圖)。



第 三 十 圖

(ii)解析法——以解析法計算互相垂直二力之合力，亦甚便利，因合力R在縱橫軸上之射影，卽等於Q及P(見上圖)，依計算合力之公式，

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}$$

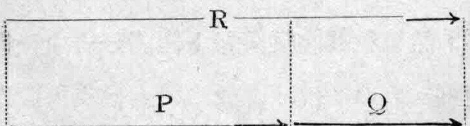
但 $R_x=P$， $R_y=Q$，

故 $R=\sqrt{P^2+Q^2}$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}=\tan^{-1}\frac{Q}{P}.$$

26. 二分力之力綫在同一直線上時之合力。

(i)二分力方向相同時——二分力方向相同時，其合力為二力之和，其理見第三十一圖，卽 $R=P+Q$.



第 三 十 一 圖

茲更以解析法證之下：

將P及Q＝二分力各爲直角分解，則

$$P_x = P, \qquad P_y = O;$$

$$Q_x = Q, \qquad Q_y = O;$$

自求合力之公式，

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

但　$R_x = P_x + Q_x$，　$R_x = P_y + Q_y$

故　$R = \sqrt{(P_x + Q_x)^2 + (P_y + Q_y)^2}$

以P_x，P_y，及Q_x，Q_y之值代入上式，則

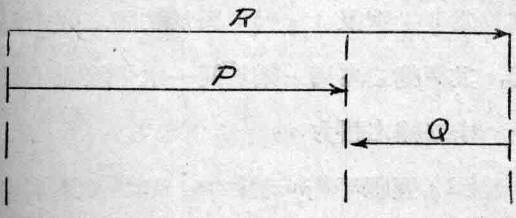
$$R = \sqrt{(P+Q)^2 + (O+O)^2}$$

$$= \sqrt{(P+Q)^2} = P+Q$$

(ii)二分力之方向相反時——二分力之方向相反時，其合爲二力之差，即

$$R = P - Q,$$

其理見第三十二圖。



第　三　十　二　圖

二分力之力線在同一直綫上時，其合力之方向恆與較大之力爲同向，而與較小之力爲反向。

練 習 題

1.設木板上釘一釘，以二繩繫釘上。二繩間之角為60°，且與木板釘面平行。若其一繩上之拉力為 4 磅，其他一繩上之拉力為 8 磅，以圖示法求作用於釘上之合力。

2.設有一力為 3 公斤；若已知其一分力為 2 公斤，且與力線所所成之角為40°。以圖示法求另一分力。

3.一拉力為 6 磅，與另一拉力Q，同作用於一質點，其二力線間之角為90°，若以 8 磅之力作用於質點，即與使保持平衡；求Q 之量及與 8 磅之力間角度。

4.一質點重 2 磅，以力P 使之靜止於平滑之斜面上，斜面與水平所成之角為40°，若(a)P與斜面平行時，(b) P為水平時，(c)P為拉力，與斜面間之角為20°，及(d)P為推力，與斜面間之角為30°時，試分別求出P之量為幾何？ 又在每次均須算出斜面間之反作用R。

5.有二繩，其長為 $3\frac{1}{4}$ 呎及 $3\frac{3}{4}$ 呎，繫於物體之同一點上，物體之重為磅，其兩繩之空端，繫於同一水平線上，相距 $3\frac{1}{2}$ 呎之兩釘上。求二繩之張力。

6.有三力P，Q及E，互保平衡。若P = Q，E = 1.25P，求P及Q二力線間之角度。又若P = Q = E 仍求P及Q二力線間之角度。

第五章　力之平衡

37.　力之平衡 Eouilibrium of Forces.

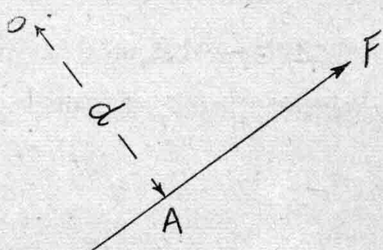
諸力作用於一物體，而此物體不改變其運動狀態，則曰諸力互保平衡。所謂不改變其運動狀態云者，指以平衡之力系，作用於物體，則靜止之物體恆保其靜止狀態，而以等速運動者，仍以等速運動。

38.　平衡力 Eqnilibrant.

不平衡之諸力，作用於物體時，則物體必沿合力之方向運動，而其速度之改變率，即所發生之加速度，則比例於合力之大小。今若以與合力量等而向反之力，作用於物體時，則物體必保其平衡狀態；因名此力曰平衡力。

39.　力矩 Moment of Force.

對於一點而論，如第三十三圖之O，則力矩等於力與力心至力綫之垂綫長，如OA，之乘積。若以M表力矩，



第三十三圖

d表示OA之長度，F表力　則其公式如下：

$$M = F\ d \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

其垂直距離d，曰力臂arm，而O點曰力矩之中心。

若一直線垂直於含力綫之平面，則對於此綫之力矩，等於力與自此綫至力綫之垂直距離之乘積。此垂線曰力矩軸 Axis of Moments.

40. 力矩之單位 Units of Moments.

以單位之力作用於物體，其力臂爲單位長度者，則其力矩爲單位力矩 Unit Moment.

自公式(A)觀之，可知力矩之單位實包含力之單位，與長度單位；故力矩之單位在英制爲呎磅或吋磅，在國際制則爲公尺公斤。

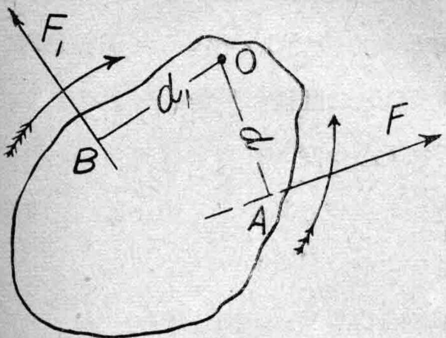
41. 力矩之因次公式 Dimensional Formula of moment.

力矩之因次公式爲 ml^2t^{-2}。因力之因次公式爲 mlt^{-2}，而自力矩軸至力綫之垂直距離d之因次公式爲 l，自公式(A)，

$$M = F\ d = mlt^{-2} \times l = ml^2t^{-2}.$$

42. 力矩之正負

力矩之正負視物體轉動之方向而定。通常以順時針向者

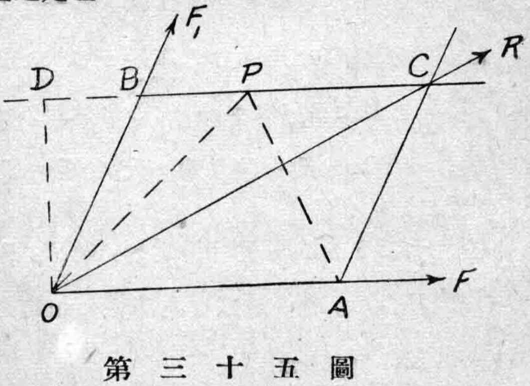


第三十四圖

爲正，反時針向者爲負。如第三十四圖，一剛體AOB，掛於O點：二力F及F_1作用A及B點，其垂直距離OA＝d，OB＝d_1。設以O點爲力矩軸，則F之力矩爲反時針向，故爲負，而F_1之力矩爲順時針向，故爲正。

43.　力矩之定理

(i)　諸力對於一點之矩之代數和，等於其合力對於此點之矩。



第三十五圖

(證一)

設二力爲F及F_1，其合力爲R，則F，F_1，及R比例於

OA，OB，及OC。取任意點P爲轉軸，過P作BPC//OB，交F_1之力線於B，合力R之力綫於C，作CB。延長BPC，作OD⊥BD。作AP及OP二直綫。於是

$$OA之矩=2\triangle OPA,$$

$$OB之矩=2\triangle OPB,$$

$$OC之矩=2\triangle OPC;$$

自上圖，$\triangle OPA=\triangle OBC,$

$$\triangle OPC=\triangle OPB+\triangle OPC,$$

故　$\triangle OPC=\triangle OBC-\triangle OPB,$

故　$\triangle OPC=\triangle OPA-\triangle OPB,$

故　$2\triangle OPC=2\triangle OPA-2\triangle OPB,$

故　OC之矩＝OA之矩－OB之矩；

但　$F:F_1:R=OA:OB:OC,$

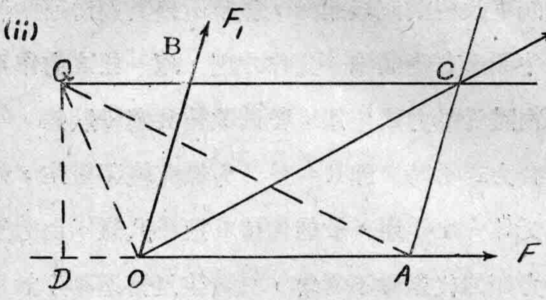
故　RF矩＝F之矩－F_1之矩＝Σm_p。

(證二)

設二力爲F及F_1，其合力爲R，則F，F_1及R比例於OA，OB，及OC。取任意點Q爲轉軸，如第三十六圖，作QD，QA，及QO。於是

$$OA之矩=2\triangle AOC,$$

$$OB之矩=2\triangle BOQ,$$



第三十六圖

$$OC\text{之矩} = 2\triangle COQ,$$

但 $\triangle COQ = \triangle BOQ + \triangle COB,$

而 $\triangle COB = \triangle AOC,$

故 $\triangle COQ = \triangle BOQ + \triangle AOC,$

故 $2\triangle COQ = 2\triangle BOQ + 2\triangle AOC,$

故 $OC\text{之矩} = OB\text{之矩} + OA\text{之矩}$。

因 $F : F_1 : R = OA : OB : OC,$

故 $R\text{之矩} = F\text{之矩} + F_1\text{之矩} = \Sigma m_Q$。

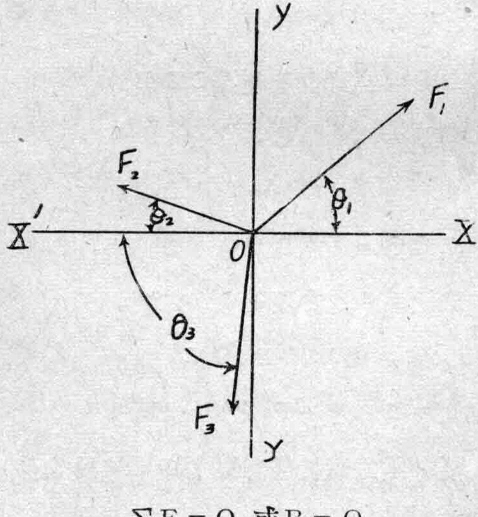
由上舉二例，可知諸力對於任意點之矩，等於其合力對於此點之矩，其理甚明。

同平面內一點上諸力之平衡

44．依力之平衡之意義言之：以一組平衡之力，作用於一物體，則此物體當不改其運動狀態；所謂不改其運動狀

態云者，旣不改變其直綫運動，復不改變其迴轉運動狀態之謂也。依牛頓氏之運動第一定律之理，以一組之力作用於一物體，則物體受外力之作用，勢將改變其運動狀態，唯一組之力，其合力爲零時，卽R＝O，方無直綫運發生，始得視爲物體未受外力之作用，故能保持其運動狀態。由力矩之理言之，則力矩之代數和不爲零，必發生迴轉運動；故以一組

第三十七圖



之力，作用於一物體，欲仍不改變其迴轉運動狀態，則其力矩之代數和勢非爲零不可。基於上述之理，一組之力互保平衡時，其一般之要件爲，

$$\Sigma F = O, \text{或} R = O, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

$$\Sigma m = O. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

凡力皆可分解爲水平與垂直二坐標軸上之分力，故力之平衡之一般要件，亦可視爲，

$$\Sigma F_x = O \text{ 及 } \Sigma_y = O \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A')$$

$$\Sigma m = O \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B')$$

「例」

有三力F_1，F_2，及F_3作用於一質點O，若三力互保平衡，試求其平衡條件。

解：過O點作直角坐標軸$X'OX$及yoy'，令F_1與XOX'軸所成之角為θ_1，F_2為θ_2，F_3為θ_3（視第三十七圖），將諸力分解，則依平衡要件，

$$\Sigma F_x = F_1\cos\theta_1 - F_2\cos\theta_2 - F_3\cos\theta_3 = O,$$

即　$$F_3\cos\theta_3 = F_1\cos\theta_1 - F_2\cos\theta^2 = O;$$

$$\Sigma F_y = F_1\sin\theta_1 + F_2\sin\theta_2 - F_3\sin\theta_3 = O,$$

即　$$F_3\sin\theta_3 = F_1\sin\theta_1 + F_2\sin\theta_2.$$

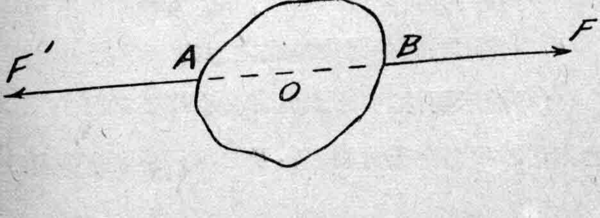
$$\tan\theta_3 = \frac{F_1\sin\theta_1 + F_2\sin\theta_2}{F_1\cos\theta_1 - F_2\cos\theta_2},$$

即　$$\theta_3 = \tan^{-1}\frac{F_1\sin\theta_1 + F_2\sin\theta_2}{F_1\cos\theta_1 - F_2\cos\theta_2}.$$

45.　作用於一物體之二力之平衡。

(a)圖示要件 Graphical condition.

第三十八圖



如第三十八圖所示，設一物體AOB，受二力F及F′之作用，其施力點順次爲A及B。AF′與BF等長，且表明力之大小，若將AF′及BF各向其反對方向延長，則二力線交於O點，且同在一直線上，二力F及F′必互保平衡。故作用於一物體之二力之平衡要件爲，

(i)表二力之直線等長，

(ii)二力綫(或其延綫)相交於一點，且方向恰相反。

(b)解析要件 Analytical Condition.

依前節(A)之理，可知作用於一物體之二力F及F′(見上圖)，互保平衡時，則

$$R = \Sigma F = F + F' = O$$

故　$$F = -F' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

F′前之負號乃指示與F之方向相反。

$$\theta = 180^\circ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

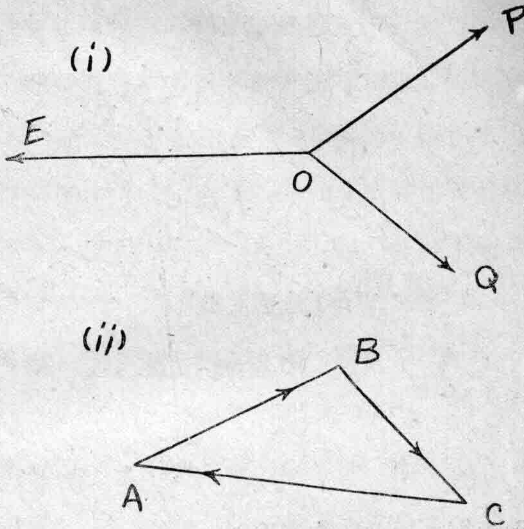
因二直線同在一直線上，相交於一點，且方向相反，則其間所夾之角爲一平角＝180°

46. 作用於同平面內一點之三力之平衡。

(a)圖示要件

設作用於O點之三力P，Q，及E，互保平衡(見第三十九

圖(i)），則作直綫AB，平行於P，且表示P之大小，依同法作BC及CA，順次表示Q及E；△ABC必爲一閉鎖三角形。故得作用於



第　三　十　九　圖

一點之三力平衡之圖示要件如下：——

(1)所作成之力之三角形爲閉鎖三角形；

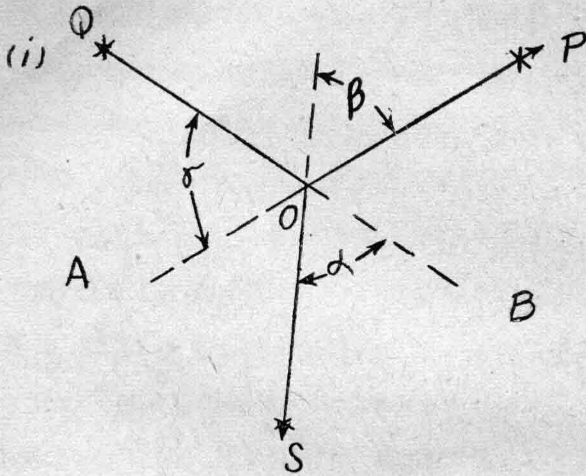
(2)三角形之邊順次表三力P，Q，及E之大小與方向。

(b)解析要件

作用於同平面內一點之三力平衡之解析要件，除將三力分解於直角坐標軸上其 $\Sigma F_x = O$，$\Sigma F_y = O$；$\Sigma m = O$ 之條件外，亦適合下述條件：——

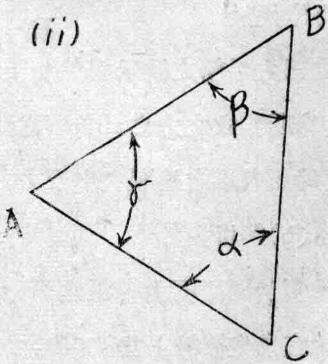
$$P ; Q : S = \sin A : \sin B : \sin C .$$

觀作用於一點O而至互保平衡之三力爲P，Q，及S，自三



第四十圖

力平衡之圖示要件之理，可作成一力之三角形ABC（見第四十圖(ii)）。今令P之延線與Q所成之角為γ；S之延線與P之角為β，Q之延線與S所成之角為α；則



$$AB:BC:CA=\sin\alpha:\sin\gamma:\sin\beta,$$

但 $$P:Q:S=AB:CA:BC,$$

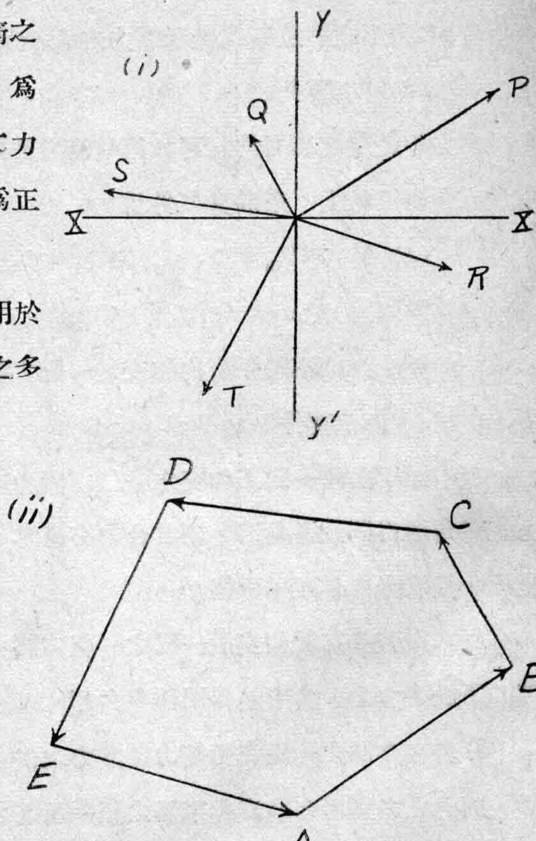
故 $$P:Q:S=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma,$$

但角A，B，C各爲角α，β，γ之補角（見四十六圖(i)），

故 $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin A : \sin B : \sin C$，

故 $P : Q : S = \sin A : \sin B : \sin C$.

故三力平衡之另一解析要件，爲每一力與其他二力間夾角之正弦爲正比。



第四十一圖

47. 作用於同平面內一點之多力之平衡

(a)圖示要件

作用於同平面內一點O而互保平衡之諸力爲P，Q，S，T，及R，若以力之多角

形法作成力之圖形，必爲一閉鎖多角形，而其各邊順次表示諸力之大小及方向。故多力平衡之圖示要件爲

(1)可作成一閉鎖多角形，

(2)多角形之各邊順次表示諸力之大小及方向。

(b)解析要件

多力平衡解之析要件，可如第44節之理求之。將諸力分解於直角坐標軸上，則將其要件爲，

(1) $\Sigma F_x = O$, $\Sigma F_y = O$;

(2) $\Sigma m = O$.

不同平面內相交於一點之諸力之平衡

48. 圖示要件Graphical Condition.

在不同平面內一點上相交之一組之諸力，若其在空間的力之多角形爲閉鎖多角形，則其合力必爲零，卽R＝O，於是此一組之諸力必互保平衡。

反之；若在空間相交於一點之一組之諸力，互保平衡，則其所成之力之多角形必爲閉鎖多角形。

且若在空間之一組之平衡力，其力之多角形爲閉鎖多角形，則力之多角形在三參考平面之任一面上之射影 亦爲閉鎖圖形。

49. 解析要件Analy tical condition.

在不同平面內相交於一點之諸力，若互保平衡，則其合力必爲零，於是$\Sigma F_x = O$，$\Sigma F_y = O$，及$\Sigma F_z = O$，

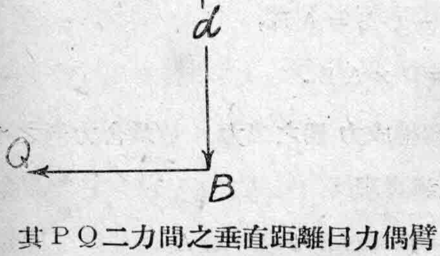
反之；在不同平面內，相交於一點之諸力，若其在直交之三軸上之分力之和爲零，即$\Sigma F_x = O$，$\Sigma F_y = O$及$\Sigma F_z = O$，則諸力之互保平衡。

50. 力偶 Comple.

量等而向反之一對平行力，稱爲力偶。

設P及Q爲量等而相反之二力兩互平行，分別作用於AB二點。AB直綫垂直於P及Q。則P及Q構成力偶，而其矩等於P或Q與PQ間垂直距離之乘積。若以d表示PQ間之垂直距離，則以公式表示之如下：

第四十二圖

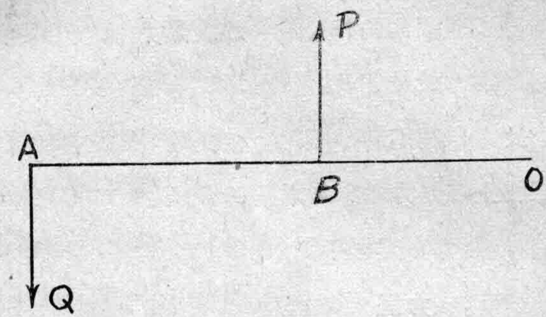


$$力偶之矩 = P \times d,$$
$$= Q \times d,$$

其PQ二力間之垂直距離曰力偶臂 Arm of eouple.

51. 力偶定理 Theor ems of Couple.

定理(I) 構成力偶之二力，對於同一平面內任意點之力矩和，常為定值。



第四十三圖

證：

(i)設P及Q為構成力偶之二力，O為含力偶平面內之任意點，則依力矩之定理。P及Q二力之力矩和為，

$$\Sigma m_o = Q \times OA - P \times OB,$$

但 $P = Q$,

故 $\Sigma M_o = P \times OB - P \times OA,$

$$= P(OB - OA);$$

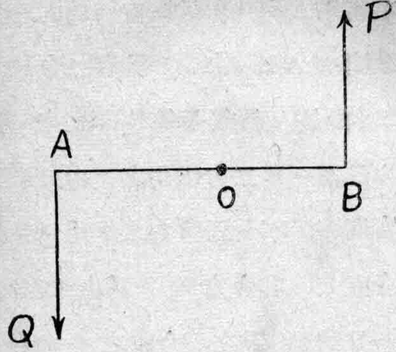
但 $OA - OB = AB,$

故 $\Sigma M_o = P \times AB.$

(ii)設P及Q為構成力偶之二力，O為含力偶之平面內之任意點，則依上述之理，

$$\Sigma M_o = P \times OB + Q \times OA$$

$$= P(OB + OA)$$



第四十四圖

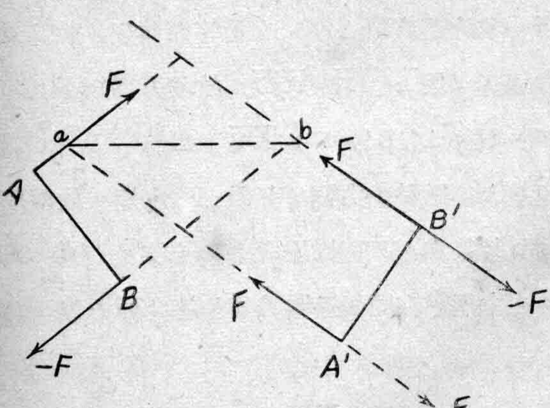
但　$OB + OA = AB$

故 $\Sigma M_o = P \times AB$

由上舉(i)及(ii)之結果，可知構成力偶之二力矩和，其值常爲一定，且恆等於力偶之矩。且力偶矩之正負，亦恆爲一定。

力偶之正負

力偶之轉率爲反時針向者，通常命其爲正，而順時針向者，通常命其爲負。



第四十五圖

定理(Ⅱ)　移力偶於同平面內之任何部份，其效果全等。

證：

設力偶爲F及－F，其臂爲AB。今欲移力偶於同一平面內之A′B′部份，令A′B′等於AB，於A′點以二力F及－F加之，且垂直於A′B′，由是A點受量等而向反之一對平衡之力；依同法於B′點以F及－F二力作用之，由是A′及B′二點雖受有力之作用，實則等於不受任何力之作用，今以A′之F與A′點之－F二力合成之，其合力R_1，爲由a至b，且比例於$\overline{ab}$；以B點之－F與B′點之F合成之，其合力R_2爲由b至a，且比例於$\overline{ba}$，依平衡之理，可知同時撤去AB兩點上之力偶F及－F及A′B′兩點上之力偶－F及F，於全部力系無礙，如是則A′B′兩點上剩餘之作用力爲F及－F。因F及－F均垂直於A′B′。量等而向反，故F及－F構成一對力偶。又因$\overline{A'B'}=\overline{AB}$，故其力偶矩，

$$M=F\times\overline{A'B'}=F\times\overline{AB},$$

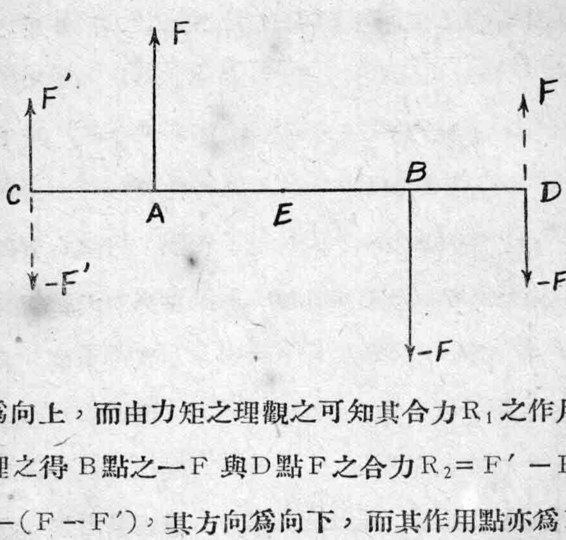
但$F\times\overline{AB}$爲AB兩點上力偶，F及－L之矩，故A′B′兩點上之力偶，其效果與AB兩點上之力偶全等。

定理(Ⅲ) 一力偶與在同平面內力矩相等之他力偶，其效果全等。

證：設有偶力F及－F，其臂爲AB，今將AB兩端延長，使AC＝BD，於C點上以量等而向反之一組之平衡力

F′及－F′作用之，則C點上可視爲未受力之作用，故與F及－F力偶無礙。依同理，於D點亦以一組平衡之之F′及－F′作用之。則F及－F力偶之效果，仍未改變。但A點上之F與C點上之－F′可合成之，其合力$R_1=F-F'$，其

第四十六圖



方向爲向上，而由力矩之理觀之可知其合力R_1之作用爲E；依同理之得B點之－F與D點F之合力$R_2=F'-F$，即$R_2=-(F-F')$，其方向爲向下，而其作用點亦爲E，是則E點上受量等而向反之二力R_1及R_2之作用，互保平衡，故E點上之R_1及R_2可同時撤去，於全部力系無礙。於是C及D點上之力F′及－F′構成力偶，而其効果全等，即

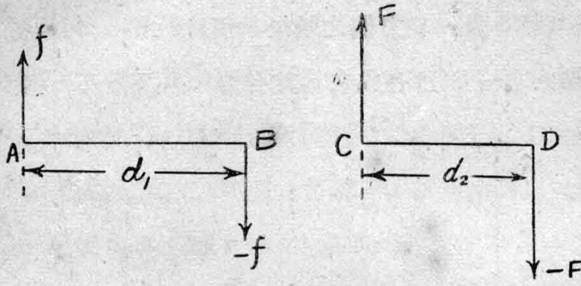
$$F\times AB=F'\times CD.$$

由本定理可得一結論曰：力偶在力偶矩不改變範圍內，

得易置為任意臂或力之他力偶。

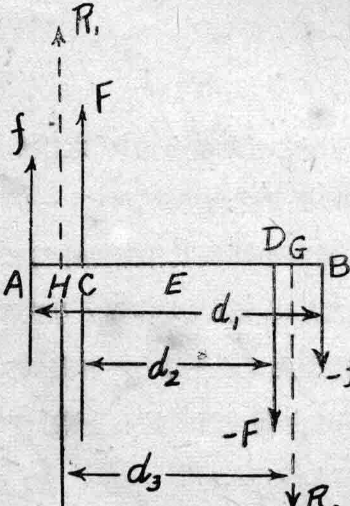
定理(Ⅳ) 在同平面內二力偶之合成，亦為一力偶；而其力矩等於二力矩之代數和。

證：今有力偶f及$-f$，其臂$AB=d_1$，又一力偶F及$-F$，其臂$CD=d_2$。如將二力偶合成之。則構成新力偶R_1及R_2；而$R_1\times d_3=f\times d_1+F\times d_2$•設二力偶臂之中點為E。由定理(Ⅱ)，力偶F及$-F$可移置於力偶$f$及



(1)

(2)



第四十七圖

$-f$ 之臂上，令兩中點相疊合（見第四十七圖(2)），因 f 及F及合成，且均向上，設其合力爲 R_1，則 $R_1=(f+F)$；同理，設 $-f$ 及 $-F$ 之合力爲 R_2，則 $R_2=-f+(-F=-(f+F)$ 故 $R_2=-R_1$，因 R_1 與 R_2 爲反向，而其量則相等，故 R_1 與 R_2 亦構成力偶。故二力偶之合成，亦爲一力偶。

自第41節，力矩定理可知，

$$R_1\times HE=f\times AE+F\times CE, \cdots\cdots (1)$$

同理 $$R_2\times EG=f\times EB+F\times ED, \cdots\cdots (2)$$

(1)+(2) $$R_1+HE+R_2\times EG=f\times AE$$
$$+f\times EB+F\times ED+F\times CE$$

因 $R_2=R_1$（量相等）

故 $$R_1(HE+EG)=f(AE+EB)$$
$$+F(CE+ED)$$

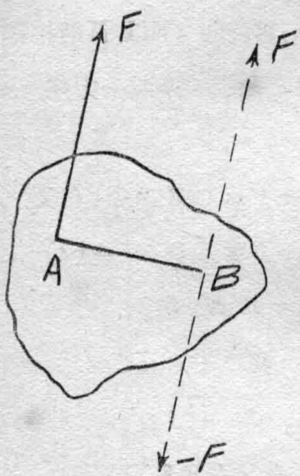
但 $$HE+EG=HG=d_3,$$
$$AE+EB=AB=d_1,$$
$$CE+ED=CD=d_2,$$

故 $$R_1\times d_3=f\times d_1+F\times d_2。$$

定理(V)　作用於剛體上一點之一力F，得易置爲作用於他點，而與此相等之一力F，及一對力偶。但其力偶矩須

等於F對於新選定之他點之力矩。

有剛體AB，其作用於A點之力為F；今欲將A點上之力F，易置於同體內B點上，及一力偶，而對於剛體AB，不改變其効應。設於B點上，以與A點上之力F之量等而向反之一組平衡力加之，於是A點上之F，與B點上之－F，構成力偶，其力偶矩為F×AB。但A點上之力F，對於B點之力矩，自力矩定義觀之



第四十八圖

$$\Sigma m_B = F \times FB。$$

故A點上之F與B點上之－F構成之力偶矩，與A點上之力F對於B點之力矩無異。但B點上之F，有使剛體沿力線方向成直線運動之効應，而B點上之F與A點上之F平行，故A點之力F之直線運動効應，等於B點上F之直線運動効應，即剛體不改其直線運動。故A點上之F，得易置為B點上之F，及一力偶，其矩＝F×AB。

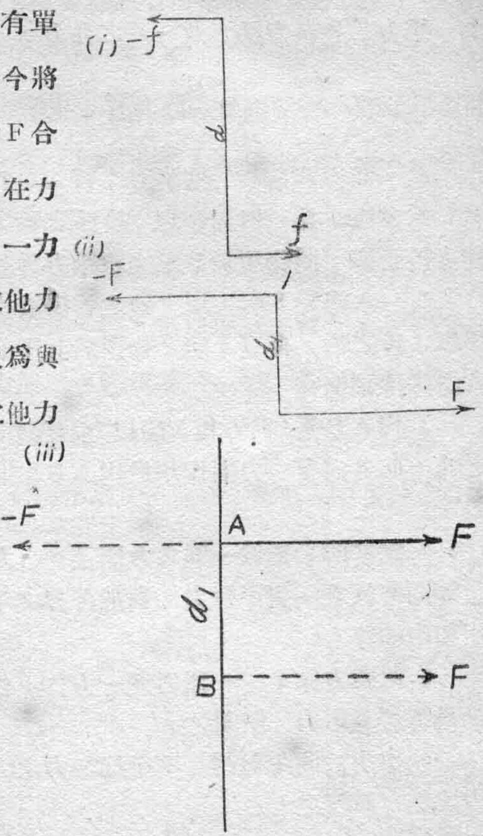
定理（Ⅵ）一力偶與同平面內一單力之合成，仍為一單

力。

設有力偶f及$-f$，其臂爲d（見第五十五圖(i)）；在同一平面內A點，有單力F作用於該點上，今將力偶f及$-f$與單力F合成之。依定理(Ⅲ)，在力偶矩不變之範圍內，一力偶得易置爲任意力之他力偶，將力f及$-f$改爲與A點上之力F等力之他力偶，其力偶臂由下式求之，（第五十五圖(ii)），

$$d_1=\frac{f\,d}{F}.$$

依定理(Ⅱ)，將新設之力偶F及$-F$，移置於AB兩點（AB = d_1），



第四十九圖

以新設力偶之$-F$加於A點，其F加於B點（第四十九圖

(iii))。由是A點上新受之力爲F及−F，此一組量等而向反之平衡力，作用於A點，故可撤去。故B點上之力F，卽爲一單力F與一力偶f及$-f$之合力。

練習題

1.一曲桿ABC，樞於C；臂AC爲水平，長9吋；臂BC爲垂直，長39吋。今以300磅之物，掛於A點。欲使曲桿保持平衡，問作用於B點之水平力爲若干？

2.一木桿長5呎，以2磅之物掛於桿之一端，其他端則掛以3磅之物，再以5磅之物掛於其中心，問置桿於何點，力能保持平衡。

3.桿AB長4呎，其A端以力20磅作用之，與AB成30°之角。此外尙有一力偶作用於桿AB，其矩爲40呎磅。求合力。

4.試釋明『對於一點之力矩』。自力矩之定義，試證明量等而向反之一對平行力，對於含力之平面內，任意點之力矩和均相等。

5.何謂力偶？一單力及一力偶，作用於同平面內，其効果等於一單力，試證之。

6.作用於同平面內，不平行二力之力矩之和，等於其合力之矩，試證之。

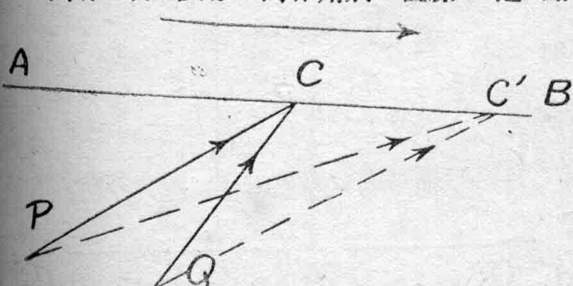
第六章　平行力及重心

51．平行力 Parallel Forces.

作用於剛體上之諸力，若其力線互相平行，即各二力間之垂直距離，處處相等，則曰此諸力互相平行，而名此諸力曰平行力。

自幾何學之定義，二平行直線，永不相交，故平行力之力線，亦得視為永不交於一點。然自理論上言之，二平行直線，或二平行力之力線，可視為交於一點，為交點在無窮遠之處，今將其理證之於下：

設有二力P及Q，同作用於一直線BB之C點，則∠PCQ為二力P及Q之交角。令P及Q之交點C，向前移動，



第　五　十　圖

設交於C′點，則∠PC′Q亦為二力P及Q之交角（見第五十圖）。但∠PC′Q＜∠PCQ，若二力之交點向前移至

極遠，則二力之交角亦愈小，若二力之交點移至無窮遠時，則二力之交角可小至無限小。故二力之交點遠在極限時，則二力之交角可視爲O°，卽二力線均與AB平行，亦卽P，Q二力線互相平行，故平行之二力，交於無窮遠。前述之理，於論重心學時頗多用之。

52. 平行力之合力 Resultant of Parallel Forces.

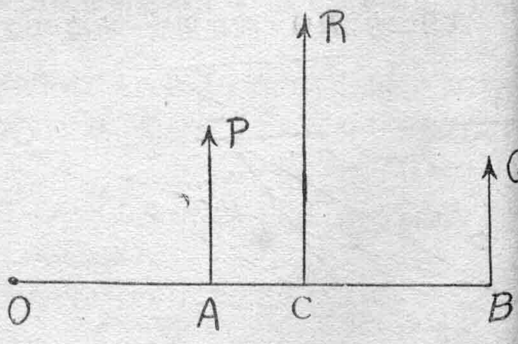
求平行力之合力之方法，可分爲解析法與圖示法二者，詳述於下。

(1)解析法

設二平行力P及Q作用同物體之AB兩點，且其力線爲同方向，設其合力爲R，則依力的合成之理，

$R=P+Q$；

而其合力之作用C點，



第五十一圖

則依力矩定理得之。設O爲力矩之轉軸，則取O點之力矩，

$$R\times OC=P\times OA+Q\times OB,$$

故$OC=\frac{P\times OA+Q\times OB}{R}=\frac{P\times OA+Q\times OB}{R}$.

若取C點爲力矩之軸，則

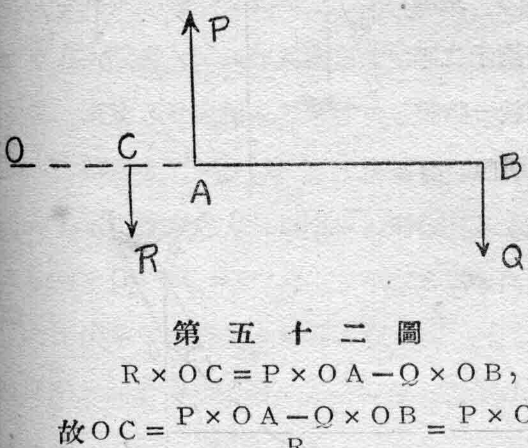
$P\times AC=Q\times CB$,

或　$\frac{AC}{CB}=\frac{Q}{P}$，卽$AC:CB=Q:P$.

若平行之二力P及Q，以相反方向作用於一物體時，則依求合力之理卽得，

$R=P-Q$.

設C爲合力R之作用點，O爲轉軸，則依力矩定理，



第　五　十　二　圖

$R\times OC=P\times OA-Q\times OB$,

故$OC=\frac{P\times OA-Q\times OB}{R}=\frac{P\times OA-Q\times OB}{P-Q}$.

若取C點爲力矩之軸，　則　$P\times AC=Q\times BC$

故　$AC:BC=Q:P$

故自上述之結果，可得結論如下：

(Ⅰ)合力R之方向，與大力爲同方向。

(Ⅱ)合力R之作用點C，在前例爲內分AB成如下之比

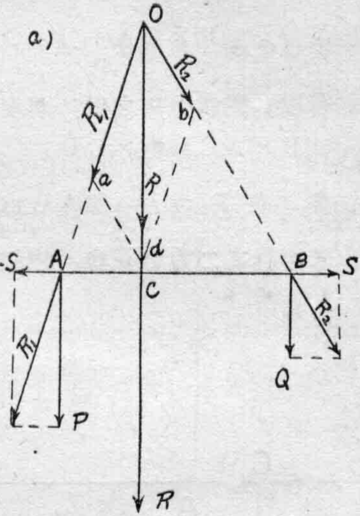
$AC:BC=Q:P$;

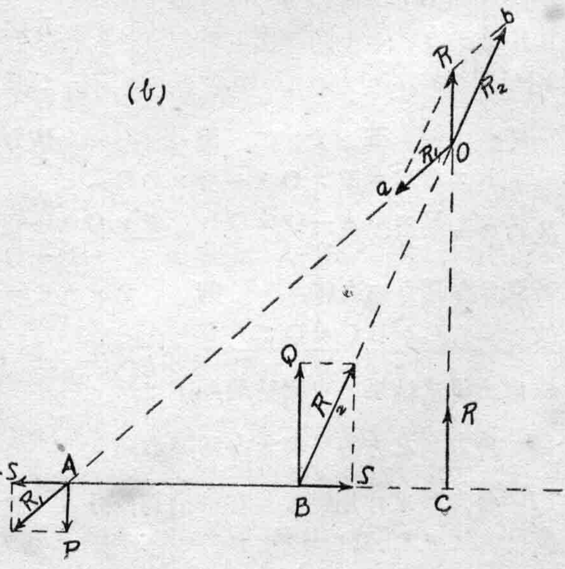
而於後例則爲外分AB成如下之比

$$AC : BC = Q : P.$$

(2)圖示法。

第五十三圖(a)及(b)均示平行力之合力，以圖示法求之。(a)圖示二平行力P及Q作用於一物體，其力線方向爲同向；圖(b)示二平行力爲反向。設於二平行力P及Q之作用點A及B，沿A





第五十三圖

B直線分別加以量等而向反之力 $-S$及S，則因S與$-S$互保平衡，故於力系無礙。但P及$-S$可合成而爲單力，設其合力爲R_1；依同理可求得Q及S之合力R_2。自第五十九圖可知R_1與R_2不互相平行，則延長R_1及R_2之力線，必交於一點，設其交點爲O，依力之可傳性之理，可將R_1及R_2視爲同作用於一點O之相交之二力，則R_1及R_2必可合成而爲一單力，設爲R，R卽爲所求之二平行力之合力。延長R之力線，使交AB直線或其延線於C，則C卽爲合力R之作用點。自第五十三圖(a)及(b)之結果，可知合力R恆與大力爲同向；二平行力之方向相同時，則合力R之作用點C，內分AB爲$AC:BC=Q:P$；二平行力之方向相反時，則合力R之作用點C，外分AB爲$AC:BC=Q:P$. 上述結果，核與解析法所得之結論，完全符合，故平力之合成，二者均可適用。

(3)多力之合成，

既了然於二平行力之合力之求法，則在二以上之平行諸力之合力，其求法先求出二平行力之合力，再以第三力與求出之合力合成之，如是輾轉相求，其最后所求之合力，卽爲所要之平行諸力之合力，其合力之作用點亦爲所要之平行諸

力之合力之作用點。

例如有平行諸力 $F_1, F_2, F_3, \cdots\cdots F_n$：作用於同一物體，其作用點依次爲 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots A_n$，設其合力爲 R，作用點爲 C，則自解析法，

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots\cdots + F_n.$$

設取 O 點爲平行諸力之轉軸，則依力矩定理，

$$R \times OC = F_1 \times OA + F_2 \times OA_2 + F_3 \times OA_3 + \cdots + F_n \times OA_n$$

故

$$OC = \frac{F_1 \times OA + F_2 \times OA_2 + F_3 \times OA_3 + \cdots + F_n \times OA}{R}$$

$$= \frac{F_1 \times OA_1 + F_2 \times OA_2 + F_3 \times OA_3 + \cdots + F_n \times OA_n}{F_1 + F_2 + F_3 + \cdots\cdots + F_n}$$

令

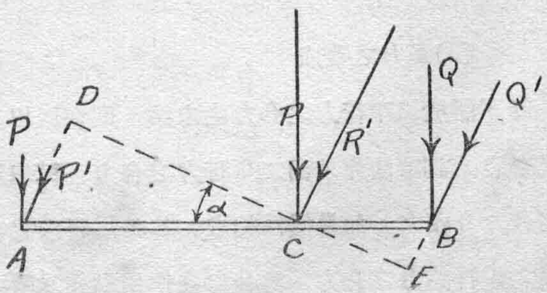
$$\Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots\cdots + F_n$$

$$\Sigma m_0 = F_1 \times OA_1 + F_2 \times OA_2 + F_3 \times OA_3 + \cdots + F_n \times OA_n$$

則 $$OC = \frac{\Sigma m_o}{\Sigma F}$$

53. 力心 Center of Parallel Forces.

一組之平行諸力之合力 R 之作用點 C，名



第五四圖

曰平行力之力心。

設有一鋼棒，受P及Q二力之作用，（見第五四圖），則自上節之理，可求得

$$R=P+Q$$

R之作用點C，內分AB為如下之比，

$$P:Q=BC:AC.$$

依定義，吾人名C點曰平行力P及Q之力心。今若將平行力P及Q之力線改變其方向，使與水平線所成之角為α，如圖P'及Q'，但不改變其量，則其合力R'必平行於P'及Q'，而其量亦不改變。過C作垂直於P'及Q'之垂線DE，則C點亦內分DE，為如下之比，

$$P':Q'=EC:CD$$

但以量而論，則$P'=P$，$Q'=Q$

故　　$P:Q\ \ EC:CD$

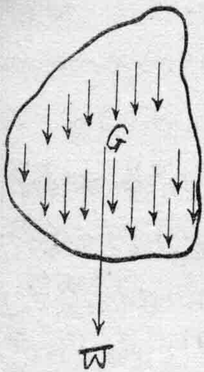
故P'及Q'之合力R'亦作用於C或經過C點。

自上述之理，可得一結論如下：

若其量不變，且互保平行，則無論P及Q二力之傾度如何，其合力R永遠作用於同一點C，換言之，即無論平行諸力之傾度如何改變，若其量不變，其力心永為同一之點C。

54. 重心 Centre of Gravity.

設有薄金屬板一，構成金屬板之各質子，受地心吸力之作用，各發生其相應之重力（見第五十五圖）。此多數之重力，均交會於地心，本非平行力，然因諸力之交點極遠，故自第59節之理，實際上仍得視爲平行力。設以w表各質子之重力，W表其合力，G爲力心，則自第52及第53之理，



第五十五圖

$$W = w + w + w + \cdots\cdots\cdots$$
$$= \Sigma w.$$

無論各質子之重力w之傾度如何，其合力W均經過其力心G。G點名曰此薄金屬板之重心點，簡稱曰重心。

55. 重心之特性 Characteri stics of Centre of Gravity.

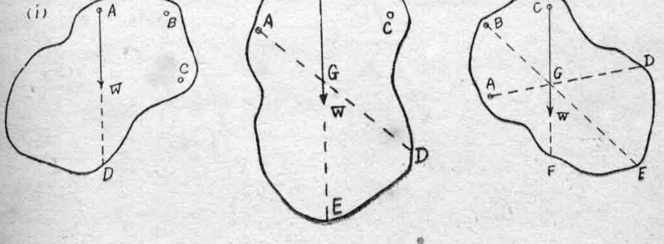
若知一物體之重心所在，則吾人可想像物體之全重量，集中於重心之一點，而物體對於重力之効應，不因之而改變。此種現象，卽重心所具之特性也。故前述重心之特性，亦可視爲重心之定義 Definiticn of Centre of Yravity.

56. 重心之測定 Determination of entre of Gravity.

測定重心之法，約分三種，即(1)以實驗法測重心，Centre of Gravity by Experimental Method，(2)以作圖法測重心，Centre of Gravety by Graphical Method，及(3)以計算法測重心，Centre of Gravity by Calculation，是也，究以何時須用何法爲最便，則當視物體之形狀 Shape 及組成 Composition 而定。約言之，凡不規則之物體 Irr gu'ar body，而其質量之分配不勻者 Non-evenly distributed，莫便於以實驗法測重心；有規則之物體 Regular fody，且其質量之分配平勻者 Evenly distrituted，則用作圖法或計算法，均甚便利。有時測定一物體之重心，須兼用兩法者；例如測定L形之物體，須作圖法與計算法兼用，而汽車重心之測定，則須實驗法與計算法兼用是，當於后詳論之。茲將測定重心之方法，分述於后。

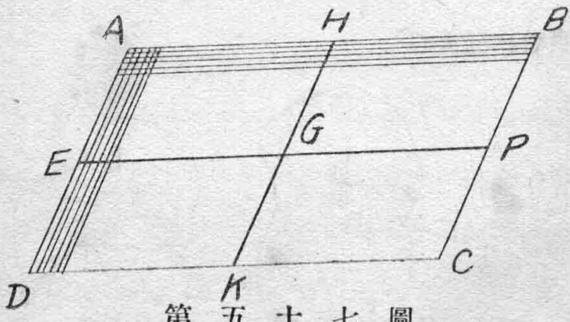
(a)以實驗法測重心

第五十六圖



設有不規則之物體ＡＢＣ，且其質量分配不匀，欲測定其重心，先於ＡＢＣ物體上任取ＡＢＣ三點，鑽三小孔Ａ，Ｂ，及Ｃ。以孔Ａ掛於釘上，釘上繫一鉛球線，俟物體靜止后，沿鉛球線作ＡＤ（見第五六圖(i)），則物體之重心必落於ＡＤ線內。次以Ｂ點掛於釘上，依同法求得ＢＥ，則物體之重心必落於ＢＥ線內。ＡＤ與ＢＥ之交點爲Ｇ；物體之重心既落於ＡＤ線內，復落於ＢＥ線內，故物體之重心必落於ＡＤ與ＢＥ之交點Ｇ（見第五六圖(iii)）。故Ｇ爲所求物體ＡＢＣ之重心。再次以孔Ｃ掛於釘上，依同法作ＣＦ，依同理知物體之重心必落於ＣＦ線內，若Ｇ爲物體ＡＢＣ之重心，則ＣＦ亦必交ＡＤ與ＢＥ線於Ｇ（見第五十六圖(iii)）。由實驗證明ＣＦ交ＡＤ與ＢＥ於Ｇ，故Ｇ爲所求之重心。

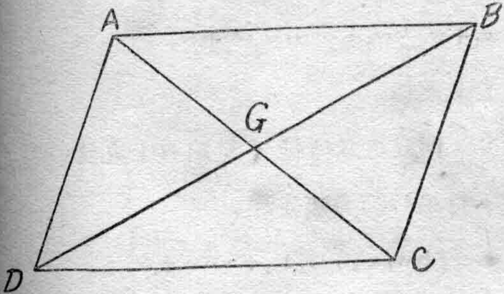
(b)以作圖法測重心。



第五十七圖

設有一平行四邊形體之薄金屬片ＡＢＣＤ，其質量平匀分配，則

吾人可想像其爲平行於ＡＢ之無數的細而匀之金屬棒所組成（見第五十七圖）；其各細而匀之金屬棒之重心在棒之中點，連各棒之中點而爲ＨＫ線，故金屬板之重心必落於ＨＫ內。同樣吾人亦可想像其爲平行於ＡＤ之無數細而匀之金屬棒所組成（見第五七圖），依同法可知金屬板之重心亦必落於ＥＦ內。自本節（a）之理，可知ＨＫ與ＥＦ之交點Ｇ，爲求金屬板之重心。



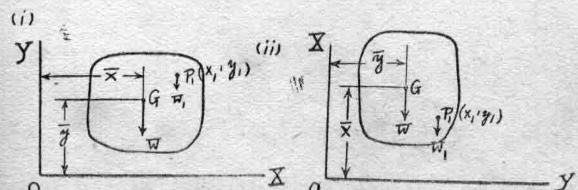
第　五　十　八　圖

薄平行四邊形板重心之另一求法，爲作兩對角線ＡＣ及ＢＤ，其交點Ｇ即爲所求之重心（見第五十八圖）。學者試自證之。

(c)以計算法測重心。

設有薄金屬板，如圖所示。此薄金屬板，吾人可想像其

第五十九圖



爲無數質點 P ，P_2，P_3，…　P_n 所組成，各質點受地心引力之作用，其重量各爲 w_1，w_2，w_3，………w_n。今取直角坐標軸 OX 及 Oy，各質點之坐標分別爲 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ $P_3(x_3, y_3)$，………$P_n(x_n, y_n)$。設金屬板之重心爲 $G(\overline{x}, \overline{y})$，其重爲 W，則自第 51 節平行力之理，薄金屬板之合成重量（即金屬板之重量 W）爲，

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots\cdots + w_n$$

$$= \Sigma w,$$

設其橫軸爲 OX，則取 O 爲轉軸（見第五十九圖(i)），於是對於 O 之力矩，自第42節力矩定理，

$$W\overline{x} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \cdots\cdots + w_n x_n$$

$$= \Sigma wx$$

故　$$\overline{x} = \frac{\Sigma wx}{W}$$

於是將坐標軸旋轉，使橫軸爲 Oy，（見第五九圖(ii)），同前理

$$W\overline{y} = {}_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 + \cdots\cdots + w_n y_n$$

$$= \Sigma wy$$

故　$$\overline{y} = \frac{\Sigma wy}{W}$$

故重心G之坐標爲 $\overline{x}$，$\overline{y}$.

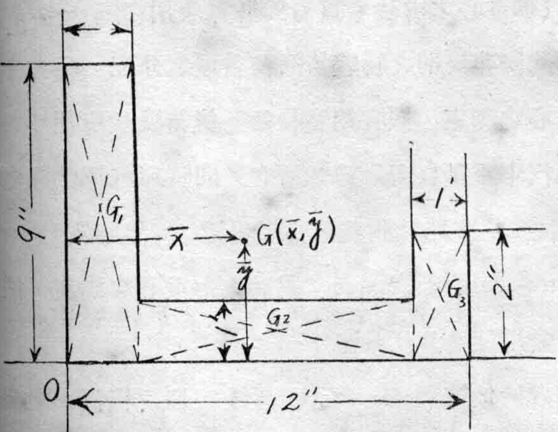
上舉之例係以薄金屬板為極薄之板，而假定其無厚度，事實上無論何物均有長，寬，及厚，故只求得重心G之二坐標$\overline{x}$，$\overline{y}$，尚不能蕆事，尤須求其第三坐標$\overline{Z}$，其求法同$\overline{x}$，$\overline{y}$，故一物體之重心G為

$$\overline{x}=\frac{\Sigma wx}{W}$$

$$\overline{y}=\frac{\Sigma wy}{W}$$

$$\overline{Z}=\frac{\Sigma wZ}{W}$$

57. 作圖及計算兩者兼用之例



第 六 十 圖

設有L形物體，如圖所示，其每方吋之重為w，求重心，其法先分物體為三部先以作圖法求得各部之重心為$G_1(\frac{1}{2},\frac{9}{2})$，$G_2(6,\frac{1}{2})$，$G_3(\frac{23}{2},1)$，次以計算法求G之坐標$\overline{x}$及$\overline{y}$，自前節(c)，得

$$\overline{W}=9w+10w+2w=w(10+9+2)=21w,$$

取O為轉軸，則

$$\overline{W}\,\overline{x}=\tfrac{1}{2}\times 9w+6\times 10w+\frac{23}{2}\times 2w$$

$$=w(4.5+60+23)=87.5w$$

故 $$\overline{x}=\frac{87.5w}{\overline{W}}=\frac{87.5}{21}=\frac{87.5}{21}$$

$$\overline{W}\,\overline{y}=\tfrac{9}{2}\times 9w+\tfrac{1}{2}\times 10w+1\times 2w$$

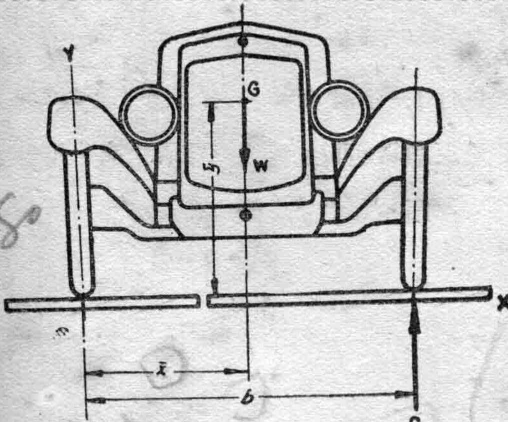
$$=w(40.5+5+2)=47.5w$$

故 $$\overline{y}=\frac{47.5w}{\overline{W}}=\frac{47.5}{21}=\frac{47.5}{21}$$

58. 汽車重心之求法（實驗與計算兼用之例）。

汽車之形狀既非規則之物體，而其重量之分配，復非平勻者，故其重心之測定，似宜用實驗法。惟實驗法以用小物體為有效，如汽車重量之大，殊非所宜，同時以計算法測之，則因構造複雜，亦殊難測其重心之坐標，故美國 New Departure Manufocturing Company 對於汽車重心之測定，採用實驗與計算兼用法，其法如下：

先將汽車置於地磅 Scale Platform 上，以求得汽車之全重量，次將汽車一側之兩輪置於地磅上，其他側之兩輪則置於地面上，地平面須與地磅為同一水平面（見第六一圖（i））。設自地磅上讀出之反應為 S_1，汽車之全重量為 w，



第六十一圖（一）

兩前輪或兩後輪之接觸中心間之距離爲b，則取O點爲轉軸而求其力矩，依力矩定理，

$$\Sigma m_o = S_1 b - \overline{w}\,\overline{x} = 0$$

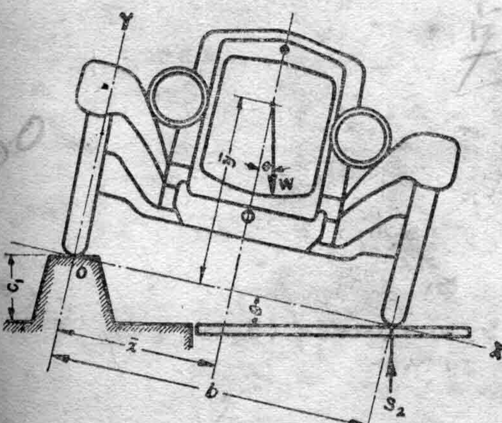
故

$$\overline{w}\,\overline{x} = S_1 b$$

故

$$\overline{x} = \frac{S_1 b}{W}$$

於是求得汽車重心在橫方向之位置。其兩輪接觸中心間之距離b之標準爲56吋，惟亦路

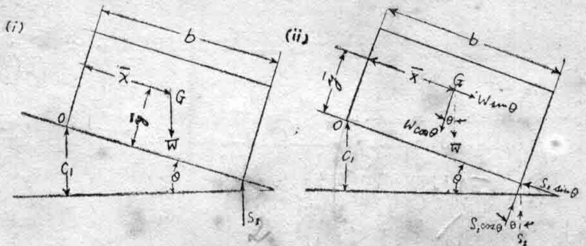


第六十一圖（二）

有變更。

再次則將置於地上一側之兩輪，昇高若干距離C_1，設其地磅上讀出之新反應為S_2而$\overline{y}$為汽車重心之高，則其力之圖形如下！

第六十二圖



第六二圖(i)為作用於汽車之力之圖形。為便利計算計，將$\overline{W}$及S_2就斜面而為直角分解，則W分解為兩分力$\overline{W}\cos\theta$及$\overline{W}\sin\theta$作用於重心G，S_2分解為兩分力，$S_2\cos\theta$，垂直於斜面，及$S_2\sin\theta$，沿斜面作用（見第六二圖(ii)），於是取O為轉軸，則

$$\Sigma m_0 = S_2\cos\theta\, b - \overline{w}\sin\theta . \overline{y} - \overline{w}\cos\theta\,\overline{x} = O$$

故 $$\overline{w}\,\overline{y}\sin\theta = S_2 b\cos\theta - \overline{w}\,\overline{x}\cos\theta$$

$$= (S_2 b - \overline{w}\,\overline{x})\cos\theta$$

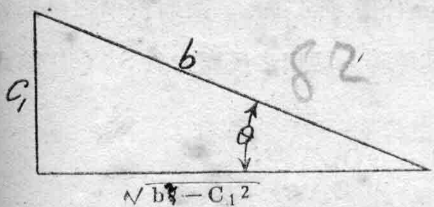
故 $$\overline{y} = \frac{(S_2 b - \overline{w}\,\overline{x})\cos\theta}{W\sin\theta} = \frac{(S_2 b - \overline{w}\,\overline{x})}{\overline{W}}\cot\theta$$

但 $$\overline{x} = \frac{S_1 b}{W}$$

故　$\overline{wx} = \frac{S_1 b}{W} \cdot \overline{w} = S_1 b$

代入上式，

故　$\overline{y} = \frac{(S_2 b - S_1 b)}{W} \cot\theta = \frac{b(S_2 - S_1)}{W} \cot\theta$



第六十三圖

自第六十三圖，

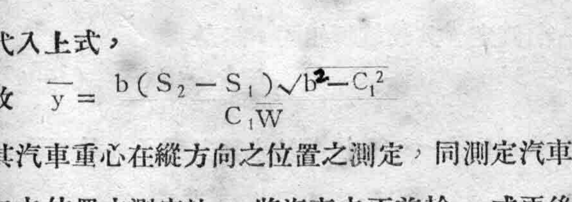
$$\cot\theta = \frac{\sqrt{b^2 - C_1^2}}{C_1}$$

代入上式，

故　$\overline{y} = \frac{b(S_2 - S_1)\sqrt{b^2 - C_1^2}}{C_1 W}$

其汽車重心在縱方向之位置之測定，同測定汽車重心在橫方向之位置之測定法。將汽車之兩前輪，或兩後輪置於地磅上，而以其餘兩輪置於與地磅同水平面之地上，設由地磅上讀出之反應力為 S_3，其前後兩輪之接觸點間之距離為 l（見第六十四圖（ii）），汽車重心在縱方向之坐標為 $\overline{z}$，則

第六十四圖



$$\bar{Z} = \frac{S_3 \ell}{W}$$

學者試化出此公式。因汽車為一立體之物，其重心之位置須有三坐標（即$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{Z}$）方足以定之。至其在縱方向之高，仍同於測定汽車重心在橫方向之高，設將汽車之兩前輪或兩後輪昇高C_2，而其地磅上讀出之反應力為S_4（見第六十四圖(ii)），則

$$\bar{y} = \frac{\ell(S_4 - S_3)\sqrt{\ell^2 - C_2^2}}{C_2 W}$$

~~學者試化出此公式~~。因$\bar{y}$為汽車重心之高，無論自橫方向或縱方向側定，其數值須相同，於是

$$\frac{(S_2 - S_1) b \sqrt{b^5 - C_1^2}}{C_1 W} = \frac{(S_4 - S_3)\sqrt{\ell^2 - C_2^2}}{C_2 W}$$

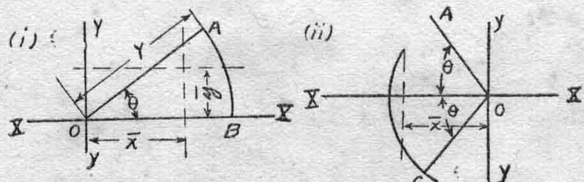
~~學者試以汽車一輛，依此法求出其重心，并測驗上式之真確性~~。

59. 各種物體之重心

(1)線之重心 Ceutre of Grevity of Lines.

(a)直線 Straight line——直線之重心在其中點。

第六十五圖



(b)圓弧 Cicular arc

(i)圓弧AB（圖六五(i)）：

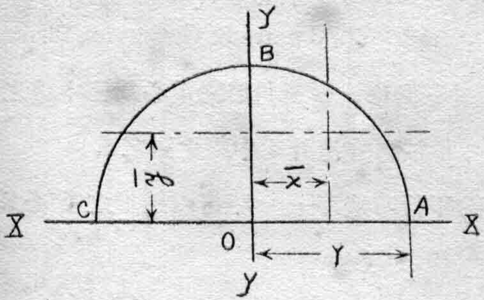
$\overline{x} = \gamma \sin\theta / \theta$ 弧度；

$\overline{y} = 2\gamma \sin^2 \frac{1}{2}\theta / \theta$ 弧度。

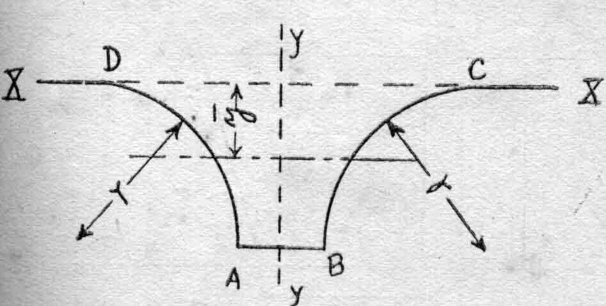
(ii)圓弧AC（圖六五(ii)）：

$\overline{x} = \gamma \sin\theta / \theta$ 弧度；

$\overline{y} = O$



第六十六圖



第　六　十　七　圖

(c)象限AB（圖六六）：

$$\bar{x}=\bar{y}=2\gamma/\pi=0.6366\gamma.$$

(d)半圓周（圖六六）：

$$\bar{y}=2\gamma/\pi=0.6366\pi；\bar{x}=0$$

(e)圓弧與直線併合形（圖六七）：

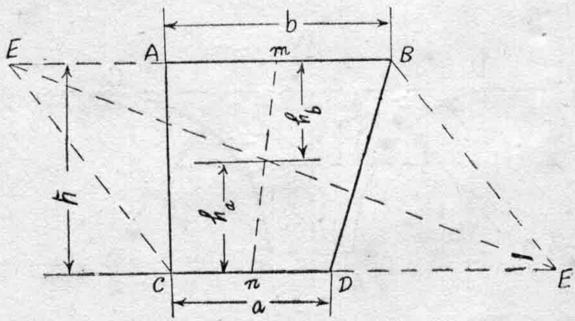
$\overparen{AD}$及$\overparen{BC}$為兩象限，其半徑為γ.

$$\bar{y}=\frac{(AB)\gamma+2[0.5\pi\gamma(\gamma-0.6366\gamma)]}{AB+2(0.5\pi\gamma)}$$

(2)平面體之重心Ceutre of Gravity of Plane Areas.

(f)三角形——三角形之重心為三中線之交點，位於自底邊計，中線之⅓之處。

(g)平行四邊形——平行四邊形之重心為兩對角線之交點。

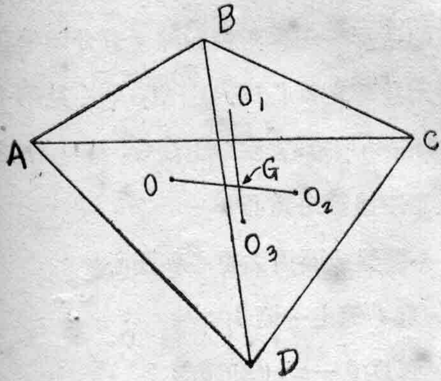


第六十八圖

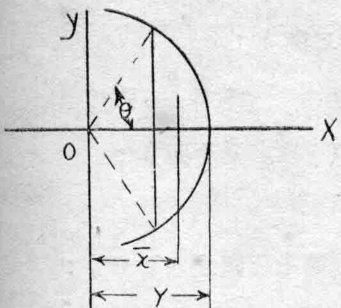
(h)梯形之重心落於連接兩平行邊中點m及n之線內，其h_A及h_B如下：

$$h_A=\frac{h(a+2b)}{3(a+b)},$$

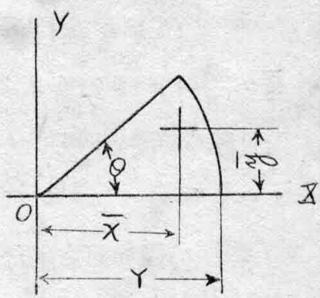
$$h_B=\frac{h(2a+b)}{3(a+b)}.$$



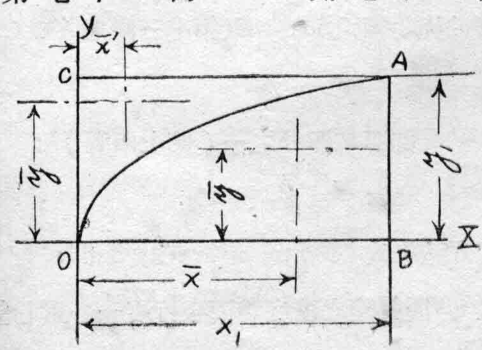
第七十圖



第七十一圖



第七十二圖



第七十三圖

（i）任意四邊形——作兩對角線，各分四邊形爲兩三角形，求各三角形之重心 O，O_1，O_2，O_3（見第七十圖），連接每對三角形重心之二線 OO_2 及 O_1O_3 之交點，卽爲所求任意四邊形之重心。

（j）圓——圓盤或圓周之重心在圓心。

(k)圓之一部（第七一圖）：

$$\bar{x}=\frac{2}{3}\gamma\sin^3\theta/(\text{弧度}\,\theta-\cos\theta\sin\theta)$$

（l）扇形面（第七二圖）：

$$\bar{x}=\frac{2}{3}\gamma\sin\theta\,\text{弧度}\,\theta\;;\;\bar{y}=\frac{4}{3}\gamma\sin^2\frac{\theta}{2}/\text{弧度}\,\theta$$

(m)圓之四分之一（90°之扇形面）：

$$\bar{x}=\bar{y}=\frac{4}{3}\gamma/\pi-0.4244\gamma.$$

(n)拋物面之半部（第七三圖之AOC）：

$$\bar{x}=\frac{3}{5}x_1\;;\;\bar{y}=\frac{3}{8}y_1.$$

(p)拋物面之Spandrel(第七三圖之AOC)：

$$\bar{x}'=\frac{3}{10}x_1\;;\;\bar{y}'=\frac{3}{4}y_2.$$

(g)橢圓面之四分之一（第七四圖）：

$$\bar{x}=\frac{4}{3}(a/\pi)\,;\;\bar{y}=\frac{4}{3}(b/\pi).$$

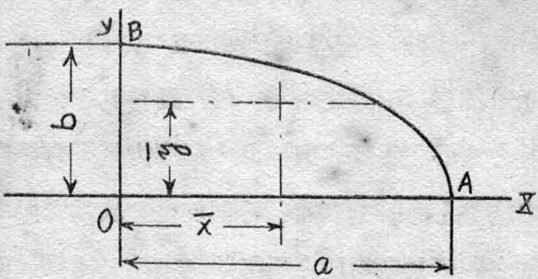
(3)立體之重心Centre of Gravity Solids.

（r）圓柱體之頂底兩面平行者——重心落於連接

頂底兩平行面之重心之線，卽圓柱體之軸內。

(s)圓錐體——重心落於連接底面重心與頂點之線內，重心之高自底面計之，爲$\frac{1}{4}h$.

第七十四圖



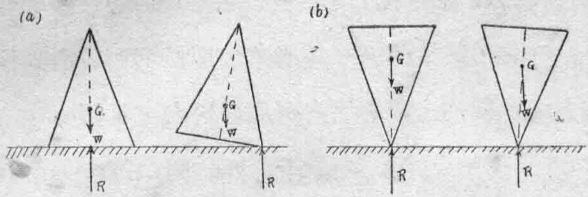
(t)半圓球體——重心爲$\bar{x}=\frac{3}{8}\gamma$：$\bar{y}=0$.

(u)中空半圓球體——重心爲

$\bar{x}=3(R^4-\gamma^4)/8(R^3-\gamma^3)$：$\bar{y}=0$. R爲外圓之半徑，$\gamma$爲內圓之半徑。

60. 穩平衡及不穩平衡 Stable and Unstable Equilibrium.

物體受一組平衡力之作用，保持其平衡狀態，若稍動搖，其能回復其原位置者曰穩平衡Stable Equilibrium；其不能回復其原位置者，曰不穩平衡 Unstable Equilibrium；其隨處皆可靜止者，曰隨遇平衡 Neutral Eguilibrium.



第七十五圖

第七五圖(a)示穩定平衡，因稍動搖其平衡力　其作用於圓錐體之重心之重量W與棹面之反應力R，有能使其囘復原位置之趨勢；而第七五圖(b)則反是，故爲不穩定平衡。自上圖觀之，可知自物體之平衡狀態，稍爲擾動，而其作用於重心之重力之力線，仍落於底面積之內者，則物體必爲在穩平衡狀態；而其作用於重心之重力之力線落於底面積之外者，則爲在不穩平衡狀態。

概言之，凡物體之重心位置高者，則多爲不穩平衡；而其重心位置低者，則多爲穩平衡。

第七章　摩　擦

61. 摩擦 Friction.

有甲乙二物體之面，互相接觸，若二接觸面，均爲絕對平滑 Absolute Smooth ，則以平行於接觸面之力，作用於二物體，或二者之一時，必起相對運動，且此種運動，永不靜止。但宇宙間無絕對平滑之物體，故當二物體之面相接相壓時，其凸凹部份，互相嚙合，於是物體受力之作用，而起相對運動，則其嚙合之凸凹部份，於二物體之接觸面間，發生抵抗力，此種抵抗力，吾人名之曰摩擦力，簡稱曰摩擦。

摩擦力之大小，隨二接觸面之粗滑，及相壓之壓力之大小而異；例如投擲一石塊於冰上，則其滑行較遠，而投擲同一石塊於路上，則其行甚近，蓋因冰面較路面爲平滑也。

61. 摩擦之區分 Divisson of Friction

摩擦力大別之爲二種，一曰靜摩擦， Static Friction 一曰動摩擦， Kinetic F riction

靜摩擦——二物體相接相壓，而不起運動，其接觸面間之摩擦，曰靜摩擦，二物體無論其均爲靜止，或一爲靜止，一爲運動；或二者均爲運動體，在運動開始前之摩擦，均謂

之靜摩擦。

動摩擦——二物體相接相壓，其二接觸面間起相對運動，其間之摩擦，曰動摩擦，

動摩擦又可分爲動摩擦， Sliding Frictson 及滚動摩擦 Rolling Friction 兩種，俟於后詳論之。

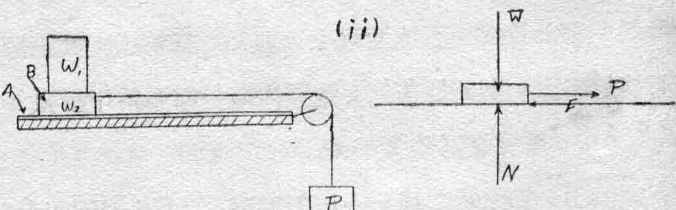
62. 摩擦係數 Coefficient of Friction

摩擦力F，與正壓力N之比例常數，曰摩擦係數，摩擦係數，通常以μ表示之，以公式示F，N，與μ之關係如下：

$$\frac{F}{N}=\mu$$

摩擦係數之測定法如下：

將欲測定其摩擦係數之物體，使其二接觸面成較平滑狀



第七十六圖

態，固置A於一長棹上，棹之一端裝置滑車一具。以其他一物B置於其上，二二物接觸，上加法碼壓緊之，以細槳線一條，繫於B之一端，槳線之他端則繫一盤。其裝置如第七十

六圖（i）所示。於盤內置法碼，逐漸增加其重量，俟A，B，二物間起等速運動爲止。設B之重爲W_2，上加之法碼爲W_1，盤內之法碼爲P，則物體B所受作用力之圖形如第七十六圖(ii)所示。因A，B間之相對運動爲等速運動，故所受之一組之力爲在平衡狀態，於是

$$\Sigma F_x = P - F = O,$$

故　$$F = P,$$

$$\Sigma F_y = N - = O\overline{W},$$

故　$$N = \overline{W}$$

其中　$$\overline{W} = W_1 + W_2.$$

依摩擦係數之定義，

$$\mu = \frac{F}{N} = \frac{P}{W} = \frac{P}{W_1 + W_2}.$$

摩擦係數隨二接觸面材料之性質而異，已於前述之。茲將汽車中所用材料之摩擦係數，列表於下，以資參考。

（1）橡皮輪胎（空心）與各種路面之摩擦係數表

路　面　現　狀	摩　擦　係　數 (μ)
水泥石磚路	0.7～1.0

水泥柏油路	0.8～0.85
碎石路（好）	0.6～0.8
不常修繕之方石路	0.6
大方石路	0.59
柏油路	0.55
堅實之柏油路	0.57
冰雪道	0.2～0.27

附註： 1.實心胎在柏油路上摩擦係數為$\mu=0.1$至$\mu=0.12$

2.實心胎在潮濕路面之摩擦係數為 $\mu=0.2$至$\mu=0.3$

（2） 掣帶之摩擦係數表

材　　料	壓　　力 每平方吋一磅	速度：每小時一哩 7	 15	潤　　滑
鑄　　鉄	10	0.43	0.37	乾　　爆
鑄　　鉄	40	0.36	0.30	乾　　爆
	10	0.60	0.55	乾　　爆
	40	0.43	0.40	乾　　爆
	10	0.43	0.72	乾　　爆
	40	0.43	0.53	乾　　爆

7

鑄　鉄	20	0.32	0.28	以水爲潤滑物
	80	0.30	0.26	以水爲潤滑物
	40	0.037	0.032	以水爲潤滑物
	120	0.073	0.055	以水爲潤滑物
	40	0.041	0.038	以水爲潤滑物
	120	0.070	0.053	以水爲潤滑物

(3) 鋼珠軸承之摩擦係數表

荷重（單位爲磅）	每分鐘轉數		
	65	385	780
840	0.0033	0.0035	0.0037
1870	0.0020	0.0021	0.0022
2420	0.0017	0.0018	0.0019
3480	0.0016	0.0016	0.00165
4500	0.0015	0.0015	0.0015
6600	0.0015	0.0013	0.0013
10800	....	....	0.0011

63. 摩擦角 Angle of Friction

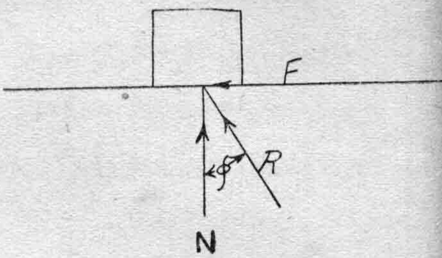
摩擦力F與正壓力N之合力R，正壓力N所成之角ϕ，曰摩擦角，由是

$$\frac{F}{N} = \mathrm{ta}\ \phi,$$

但

$$\frac{F}{N} = \mu,$$

故　$\mu=\tan\phi$.



第七十七圖

所以當物體開始運動時，其摩擦角之正切函數，即等於其摩擦係數，

物體開始運動時之摩擦角，曰摩擦限角；Limiting Angle of Friction.

64. 摩擦錐體，Cone of Friction

摩擦力F與正壓力N之合力R，以N爲轉軸而旋轉，其迴轉所成之錐體，曰摩擦錐體。

65. 滑動摩擦 Sliding Friction.

二接觸面間所起之相對運動，爲純粹之滑行，其間所產生之摩擦阻力，曰滑動摩擦。所謂滑行者，二接觸面起相對運動之謂也。

滑動摩察係數之測定，與測定靜摩擦係數略同。故知滑動摩擦與正壓力成正比。

66. 滑動摩擦定律 Laws of Sliding Frlctien.

摩擦運動，極爲複雜，欲由理論以求其定律，殊非易事。茲由實驗結果，得定律數則如下：

(1)摩擦力F，與正壓力N成正比，

(2)靜摩擦力，通常較動摩擦力大。

(3)摩擦與接觸面之大小無關。

(4)摩擦與接觸面之本質及狀況有關，即潤滑面之摩擦小於乾燥面之摩擦。

(5)尋常溫度之變遷，對於乾燥面之摩擦，其影響甚小，而對於潤滑面之摩擦，則影響殊鉅，因溫度變遷，影響於潤滑油之特性甚大也。

(6)動摩擦因時間增加而減小，

(7)在低速度時。摩擦力之大小，與速度無關，而在高速度時，則速度增加，摩擦力減小，

(8)潤滑面之摩擦係數，與接觸面之特性之關係較少，而與潤滑油之特性及使用方法之關係較多，茲分述於下：

(a)間時加油之摩擦，大於不斷加油之摩擦。

(b)增加壓力，無異壓出接觸面間之潤滑油層，故增大摩擦係數，

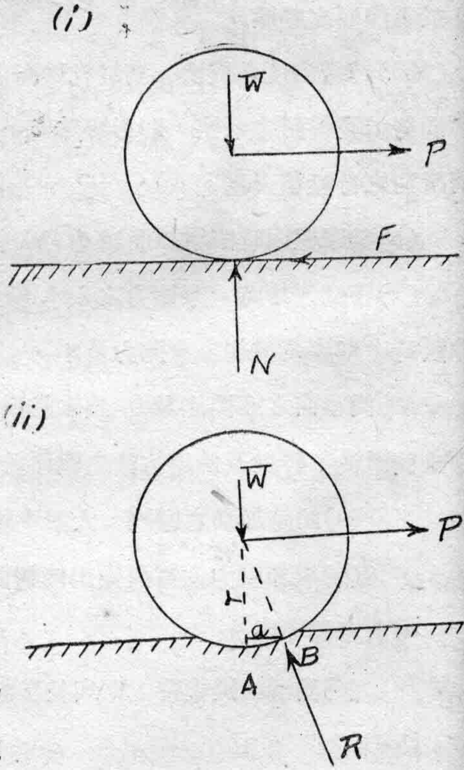
(c)潤滑油變壞時，則與乾燥面之摩擦定律，甚相近似。

67. 滾動摩擦Rolling Friction.

二物體起相對運動，其接觸面，僅爲一點，則其間所生之摩擦力，曰滾動摩擦。

68. 滾動摩擦定律 Lawsof Rolliug Friction.

由實驗之結果，滾動摩擦阻力，約與其載重成正比，與輪幅之半徑成反比，



第七十八圖

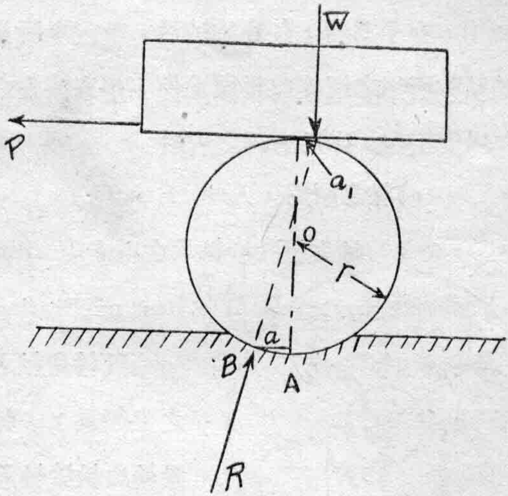
純粹之滾動如第七十八圖(i)所示者，殆不可能。由實際經驗，以一正圓柱體之曲面，置於一平面上，則圓柱體之曲面與平面，幷非完全接觸於一線上，而爲一小的接觸面，如第七十八圖(ii)所示。若以力P作用於圓心，使輪向前爲等速運動，則支持面對於輪之反應力之合力R，作

用於輪之半徑前B點之處。設AB之水平距離為a，其運動為等速運動，且輪之邊緣平滑，不作鋸齒狀，則取B點為轉軸，依力矩定理，

$$\Sigma m_B = P\gamma - \overline{W}a = 0$$

故　$P = \dfrac{\overline{W}a}{\gamma}$.

若荷重載於輪之邊緣，如第七十九圖所示，而推力P為使輪以等速前進，則取B點為轉軸，亦同上述之理，



第　七　十　九　圖

故　$P = \dfrac{\overline{W}(a + a_1)}{2\gamma}$

若　$a_1 = a$,

於是　$P = \dfrac{\overline{W} \times 2a}{2\gamma} = \dfrac{\overline{W}a}{\gamma}$

由實驗證明，其AB間之距離a，對於同一材料，或不

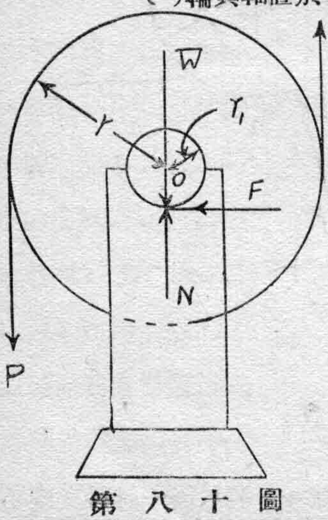
同荷重，或不同半徑，其數値均爲定値；故 α 名曰滾動摩擦係數，

6．摩擦力與汽車 Friction and Automobile.

摩擦力之於汽車，其關係甚爲密切；汽車行駛時，其輪胎與路面間，輪軸與軸承間，及掣帶與掣輪間，均有摩擦力之作用，存乎其間，茲分述於后．至汽車所用之工具，如掉換輪胎時所用之螺旋起重機，係利用摩擦力之作用，支起車身，以便工作，亦爲論列之於后

(a)軸之摩擦，Axle Friction.

( )輪與軸置於軸承之上者，Wheel and Axle Rest on Bearings.



第八十圖

設輪與軸之重共爲 w，輪之半徑爲 γ，軸之半徑爲 γ_1，置輪與軸於軸承上，令其間之靜摩擦係數爲 μ，P 及 P 爲作作於輪週之一對力偶，使輪軸發生轉動，其力偶矩爲 $P\times 2\gamma$，當輪軸開始轉動時，自61節之理，

$$F = \mu N\text{，而}N = ,W$$

故　　$$F = \mu W.$$

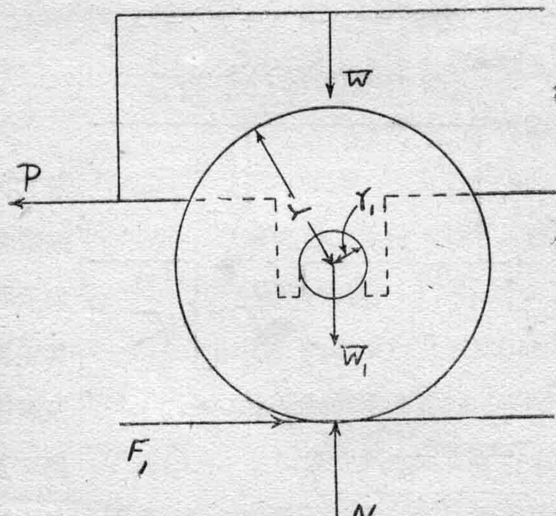
此時輪與軸仍在平衡狀態，由力的平衡之理，如取O爲轉軸，則

$$\Sigma m_0 = P \times 2\gamma - F \times \gamma_1 = 2P\gamma \times \mu\overline{W}\gamma_1 = O,$$

故　　$$P = \frac{\mu \overline{W} r_1}{2\gamma}.$$

若輪與軸已開始轉動，其速度爲等速度；令動摩擦係數爲μ_1，則同上述之理。

$$P = \frac{\mu_1 \overline{W} \gamma_1}{2\gamma}$$



第八十一圖

(2)軸承與荷重置於軸上者 Bearings and Load Rest on Axle.

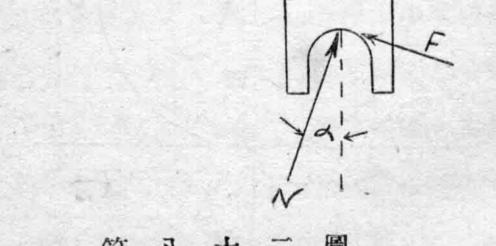
設置輪於水平面上，而以其軸負軸承及其荷重之重量；輪與軸之重爲W_1，軸承及其荷重之重爲W，輪之半徑爲R，軸之半徑爲γ_1（見第八十一圖），P爲作用於荷重，使發生等速運動之力，則輪與地平面間，必發生一摩擦阻力F，設μ爲靜摩擦係數，若以輪，軸，及荷重等爲一剛體論，則

$$\Sigma F_x = F_1 - P = 0$$

故 $$F_1 = P \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\Sigma F_y = N_1 - (W + W_1) = 0$$

故 $$N_1 = W + W_1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



第八十二圖

若以軸承及其荷重爲一剛體論；則其軸承所受之力爲正壓力N，及摩擦力F，與W及P。同於上述之理，

$$\Sigma F_x = P + F\cos\alpha - N\sin\alpha = 0$$

故 $$P = N\sin\alpha - F\cos\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

$$\Sigma F_y = N\cos\alpha + F\sin\alpha - W = 0$$

故 $$W = N\cos\alpha + F\sin\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

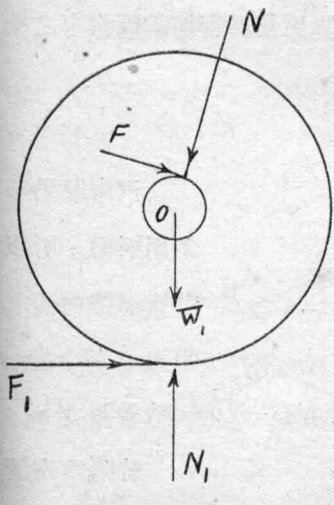
將(A)及(B)各平方加之，則

$$P^2 + W^2 = (N\sin\alpha - F\cos\alpha)^2 + (N\cos + F\sin\alpha)^2$$

$$= N^2 + F^2$$

但 $$F = \mu N$$

故 $$P^2 + W^2 = N^2(1+\mu^2) \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$



第八十三圖

若以輪與軸爲一剛體論，則其所受力之作用，如第八十三圖所示。N爲軸承及其荷重所加於軸之正壓力，F爲軸與軸承間之摩擦力，以輪，軸，及荷重等爲一剛體論時，軸與軸承間之N及F，均視爲內力，其和各爲零，由是知軸承加於軸之正壓力，等於軸施於軸承之正壓力，而其間之摩擦力亦相等。由本節(a(1))

之理，設取O爲轉軸，則

$$\Sigma m_0 = F_1 \times \gamma - F \times \gamma_1 = O,$$

故 $$F_1 = \frac{F\gamma_1}{\gamma} = \frac{\mu N \gamma_1}{\gamma},$$

自公式(1) $F^1 = P$,

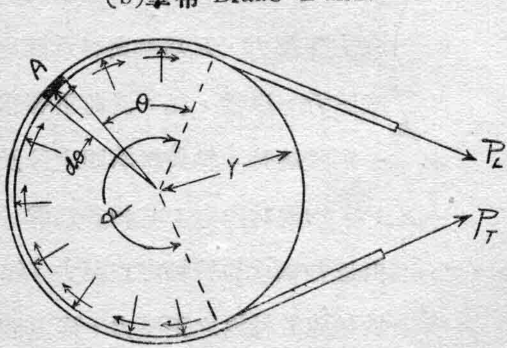
故 $$P = \frac{\mu N \gamma_1}{\gamma}$$

自公式(3) (4)消去N，則

$$P = \frac{\mu \gamma W}{\sqrt{\gamma^2 + (\mu\gamma)^2 - (\mu\gamma_1)^2}}$$

因$F_1 = F$，而F_1爲輪與地平面間之摩擦阻力，由是知荷重載於輪軸上時，其輪與地平面間之摩擦阻力，如上式所示。此式對於汽車上之應用，其關係甚爲密切，因汽車之總荷重，係分載於前后之各輪軸也。

(b)掣帶 Brake Band.

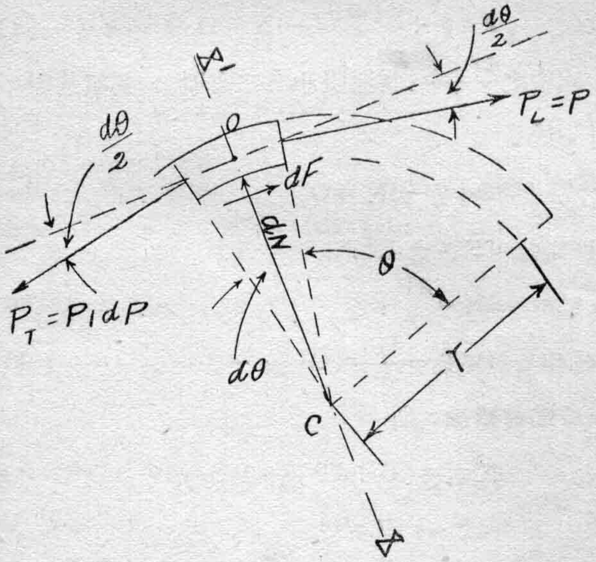


第八十四圖

汽車掣動，多用掣帶；所以計算掣帶兩端之張力， Tension，殊爲重要。

普通汽車所用掣帶掣動，係

以手或足施力於槓桿，藉槓桿或一組之槓桿之作用，傳力於掣帶，使掣帶與輪之間，發生相對運動，利用摩擦力之消耗汽車之動能，而使汽車停止其運動。其計算掣動時，所需施於槓桿之力之法則如下：



第八十五圖

設取掣帶上之小部，如第八十四圖之A，而分析之，則其所受諸力之作用，有如第八十五圖所示。以OC爲X軸，而將P_L及P_T分解之，當車輪始動時，仍可以在平衡狀態視之，於是

$$\Sigma F_x=(P+dP)\sin\frac{d\theta}{2}+P\sin\frac{d\theta}{2}-dN=0$$

故 $2P\sin\frac{d\theta}{2}+dP\sin\frac{d\theta}{2}-dN=O$ ………(1)

因 $d\theta$ 爲無限小之角，故以 $\frac{d\theta}{2}$ 代上式之 $\sin\frac{d\theta}{2}$，亦無若何不當，於是

$$2P\frac{d\theta}{2}+\frac{dPd\theta}{2}-dN=O,$$

故 $Pd\theta+\frac{d\theta b\theta}{2}-dN=O,$ ……………(2)

中式中之 $\frac{dPd\theta}{2}$，爲無限小之二次項，其値甚微，可略而不計，於是

$$Pd\theta-dN=O$$

但 $dF=\mu dN,$

故 $dN=\frac{dF}{\mu},$

故 $Pd\theta-\frac{dF}{\mu}=O$ ……………………(3)

取C點爲轉軸，則

$$\Sigma m_c=(P+dP)r-Pr-rdF=O$$

故 $rdP-rdF=O$

故 $dF=dP$

以dF之値代入(3)式，於是

$Pd\theta-\frac{dP}{\mu}=O$ …………………………(4)

故 $\frac{dP}{P}=\mu d\theta$. ……………………(4)

因P之値爲從 P_L 至 P_T，而 θ 爲自O至 β，將公式(4)

之兩端積分之，

$$\int_{P_L}^{P_T}\frac{dP}{P}=\int_{O}^{\beta}\mu d\theta,$$

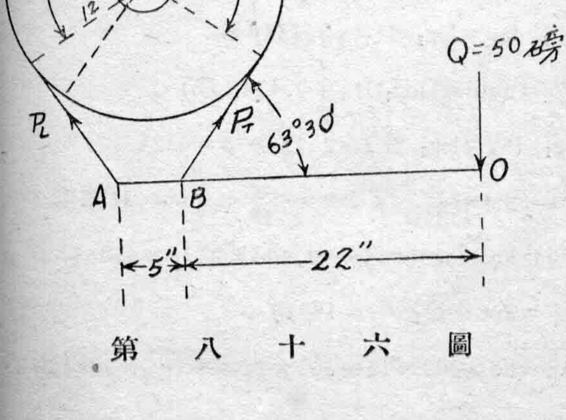
$$\Big[\log_E P\Big]_{P_L}^{P_T}=\mu\Big[\theta\Big]_{O}^{\beta},$$

故　$\log_E\frac{P_T}{P_L}=\mu\beta$ ………………………… (5)

故　$\frac{P_T}{P_L}=e^{\mu\beta}$ ………………………… (5)

玆舉一例以明之。

設有掣動之掣帶，如第八十六圖所示。其掣帶係加垂直力Q於槓桿ABO之O點，利用槓桿之作用，使掣帶緊張而發生掣動作用。設靜摩擦係數爲0.25求掣帶緊張之端之



第　八　十　六　圖

張力，及以D爲轉軸之轉矩 Torque. 其軸與軸承間之摩擦，及槓桿與支樞間之摩擦，可不必計及。

解：以OA爲X軸，將各力分解之，取A爲轉軸，則

$$\Sigma M_A = P_T \sin 63°30' \times 5 - 50 \times 27 = 0,$$

故 $5 \times 0.895 P \quad = 50 \times 27,$

故 $P_T = \dfrac{10 \times 27}{\times 0.895} = 302$磅，

以公式(5)求P_L，

$$\log_e \frac{P_T}{P_L} = \mu\beta,$$

但 $\log_{10} \dfrac{P_T}{P_L} = 0.434 \log_e \dfrac{P_T}{P_L}$

故 $\log_{10} \dfrac{P_T}{P_L} = 0.4 \quad \mu\beta$

故 $\log_{10} P_T - \log_{10} P_L = 0.434\mu\beta$

故 $\log_{10} P_L = \log_{10} P_T - 0.434\mu\beta$

故 $P_L = \text{antilog}(\log_{10} P_T - 0.434\mu\beta)$

$\log_{10} P_T = \log_{10} 3\ 2 = 2\ 48, \quad \mu = 0.25$

$\beta \ = \dfrac{250}{360} \times 2\pi = \dfrac{2}{18} \times \pi = 4\ 36$弧度，

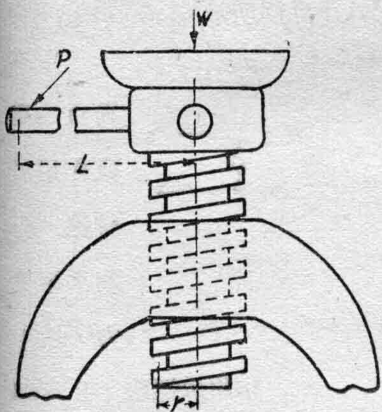
故 $P_L = \text{anti log}\ (2.48 - 0.434 \times 0.25 \times 4.36)$

$= \text{ant ilog}\ 2.01 = 102$磅，

故 $\text{Tor qne} = 102 \times 12 - 302 \times 12 = -200 \times 12$吋磅

$=-200$呎磅。

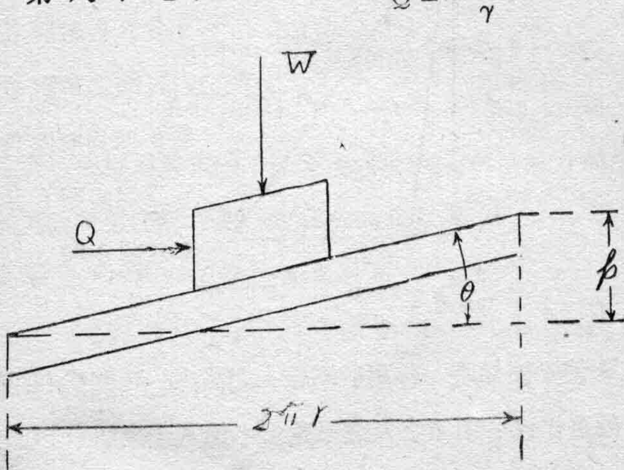
(c)螺旋起重機 Jack Screw.



第八十七圖

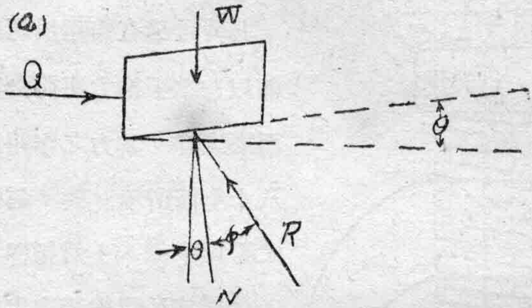
用螺旋起重機以舉重時，其荷重垂直作用於螺線，而以一水平推力使荷重沿斜面而上昇。其力之作用如第八十七圖所示。設 r 爲螺線之平均半徑，l 爲槓桿之長，Q 爲施於螺線平均半徑之水平壓力，則依力矩定理，

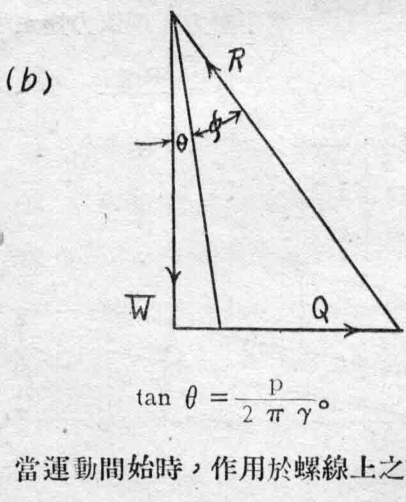
$$Q=\frac{Pl}{\gamma}$$



第八十八圖

雖云荷重W所生之壓力，係平均分佈於螺線週之全部，不僅及螺線之一週，且及於若干週；爲便於研究計，可視爲作用於一點，其力之作用如第八十九圖所示。





第八十九圖

W爲荷重，垂直作用於螺線，Q爲水平推力，水平作用於螺線，R爲螺線斜面所生之反應力。令R與斜面之正壓力N間之角爲 φ，於是φ 卽爲摩擦角。設 p 爲螺齒距（見第八十八圖）則

$$\tan\ \theta = \frac{p}{2\ \pi\ \gamma}。$$

當運動開始時，作用於螺線上之諸力，可視爲在平衡狀態，故可作成一閉鎖之力之三角形（第八十九圖(b)）。自第

八十九圖(b)，

$$\tan(\phi+\theta)=\frac{Q}{W},$$

故　$$Q=W\tan(\phi+\theta)$$

$$=W\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi},$$

以$\tan\theta$之值代入上式，

$$Q=W\frac{\frac{p}{2\pi r}+\mathrm{tau}\phi}{1-\frac{p}{2\pi r}\mathrm{tau}\phi},$$

但ϕ為摩擦角，故

$$\tan\phi=\mu,$$

以 $\tan\phi$之值代入，則

$$Q-W\frac{\frac{p}{2\pi r}+\mu}{1-\frac{p}{2\pi r}\mu}=W\frac{p+2\pi r\mu}{2\pi r-p\mu}\cdots\cdots(A)$$

上式以使螺旋起重機，向上運動所需之水平推力。若使螺旋起重機向下運動，則所需之水平推力為

$$Q=W\tan(\phi-\theta),$$

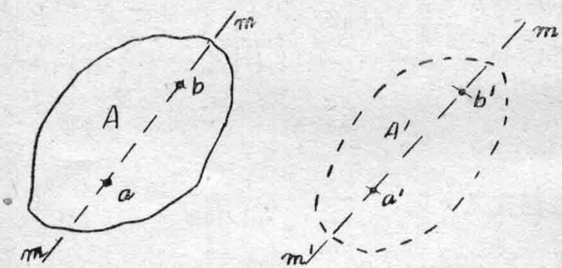
$$W=\frac{p-2\pi r\mu}{2\pi r+p\mu}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

學者可練習化書公式(B)。

第八章　動力學

70.　移動 Translation

物體運動中，於某一時間內，其連接物體內兩質點之直線，與在另一時間內，其連接物體內同前兩點之直線，互相平行，則曰此物體移動。移動只適用於剛體。例如在運動中之剛體A，（見第九十圖），在某時間內，其中之二質點a及b，及連接ab之直線mm，如圖所示，在另一時內，剛體A移動至A′之位置；其中之二質點a及b則移至a′及b′，其連接a′b′之直線，為m′m′.自定義，mm平行於m′m′，復因A為剛體；則ab之距離，在運動中必為定值，即$\overline{ab}=\overline{a'b'}$。



第九十圖

物體之移動，不關於其為直線運動，或曲綫運動。

71. **移動之特質**，Peculiar Facts of Translation

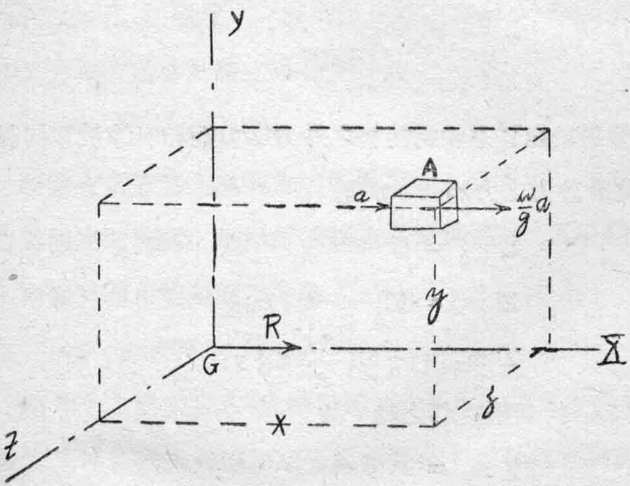
(1)剛體內各質點之運動途徑，在任何情形時均同，

(2)在某定時內，剛體內各質點之速度均同，——卽量，方向，與順序均同。

(3)在某定時內，剛體內各質點之加速度，其量，方向，與順秩均同，

72. **力與移動**，Force and Trans'ation

設A示移動體中之質點，(見第九十一圖)，其加速度爲 a，其有效力爲$\frac{W}{g}a$，與加速度 a 之方向及順序均同，G 爲移動體之重心，R 爲合力。



第九十一圖

以G爲原點；X軸平行於加速度a之方向，作直角坐標，如圖所示。設以ΣF_x，ΣF_y，及ΣF_z表X，Y，及Z軸上之分力之代數和，Σm_x，Σm_y，及Σm_z表以X，Y，及Z軸爲轉軸之分力矩之代數和，則

$$\Sigma F_x = \frac{W}{g}\bar{\alpha}_x,$$

$$\Sigma F_y = \frac{W}{g}\bar{\alpha}_y,$$

$$\Sigma F_z = \frac{W}{g}\bar{\alpha}_z,$$

但$\bar{\alpha}_y = 0$，$\bar{\alpha}_z = 0$，$\bar{\alpha}_x = \alpha$，

故

$$\Sigma F_x = \frac{W}{g}\alpha,$$

$$\Sigma F_y = 0,$$

$$\Sigma F_z = 0。$$

然對於以任意軸爲轉軸之外力之力矩和，等於以同軸爲轉軸之有效力之力矩和，於是

$$\Sigma m_x = 0,$$

$$\Sigma m_y = \Sigma\left(\frac{W}{g}\alpha\right)z,$$

$$\Sigma m_z = -\Sigma\left(\frac{W}{g}\alpha\right)y,$$

因y，z均爲過重心之軸，故

$$\Sigma m_y = 0,$$

$$\Sigma m_z = O$$

由是得移動體之動力公式如下，

$$\Sigma F_x = \frac{W}{g}\alpha,$$

$$\Sigma F_y = O\ ,$$

$$\Sigma F_z = O\ ,$$

$$\Sigma m_x = O\ ,$$

$$\Sigma m_y = O\ ,$$

$$\Sigma m_z = O\ 。$$

以此一組之公式求一移動體所受之外力，自易解決。

故得作用於移動體之外力之合力 爲一單力 ，且等於 $\frac{W}{g}\alpha$，平行於加速度 α，與加速度 α 之方向，及順序均同，且其力線通過移動體之重心，

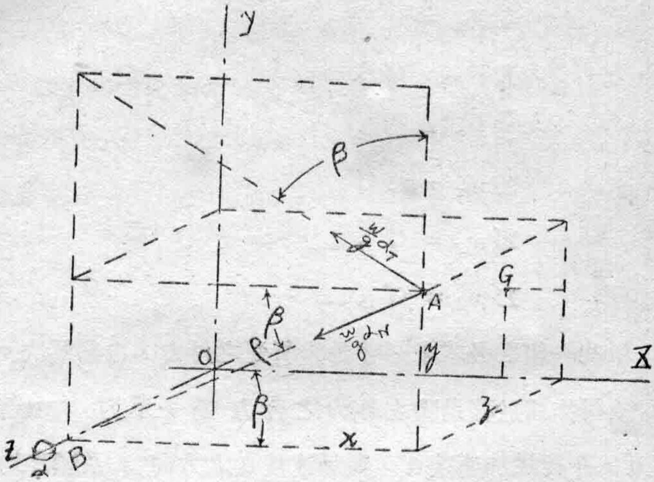
73. 轉動 Rotation.

運動中之物體，其質點之運動途徑，循圓周而行，而其中心爲固定之線者，則曰此物體之運動爲轉動。此直線曰轉軸，轉動只適用於剛體之運動。

74. 力與轉動 Forces and Rotation.

第九十二圖中之A，表轉動體之一質點，取Z軸爲轉軸，xy平面與轉動體重心運動之平面相叠合，設G爲轉動體之重

心，因Z軸為轉軸，故質點A運動於一圓周上，含圓周之平面，垂直於Z軸，而其圓心則在Z軸上之B點。



第九十二圖

設α表在某定時內物體之角加速度，且為正，如圖中圓箭頭所示。設ρ表AB之距離，即質點A所畫之圓之半徑，β表轉動中，隨轉動而變之等角，如圖中所示。設ΣF_x，ΣF_y，ΣF_z，Σm_x，Σm_y，Σm_z分表作用於物體之外力之分力之和，及以各軸為轉軸之力矩和，於是

$$\Sigma F_x=\frac{W}{g}\overline{\alpha}_x,\ \Sigma F_y=\frac{W}{g}\overline{\alpha}_y,\ \Sigma F_z=\frac{W}{g}\overline{\alpha}_z。$$

設作用於質點A之有效力為$\frac{W}{g}\alpha$，其力線在質點運動

之平面中；在第九十二圖，則以$\frac{W}{g}\alpha_T$及$\frac{W}{g}\alpha_N$表之。$\frac{W}{g}a_T$之方向，由假設α為正而定之，而$\frac{W}{g}\alpha_N$則無疑的對向於中心B，然外力之合力，等於作用於各質點之有效力之合力，吾人已前知之矣。故依力矩原理，對於任意軸為轉軸之外力之力矩和，等於有效力對於同軸之力矩和。現所討論之物體，對於轉軸為有對稱面，而因物體為均勻體，且其重心在xy平面，故

$$\Sigma m_x = O, \qquad \Sigma m_y = O。$$

自第九十二圖，

$$\Sigma m_z = \Sigma\left(\frac{W}{g}\overline{\alpha}_T \rho\right),$$

而$\overline{\alpha}_T$可以$\alpha\rho$代之，

故 $$\Sigma m_z = \Sigma\left(\frac{W}{g}\alpha\rho^2\right) = \alpha\Sigma\frac{W}{g}\rho^2。$$

$\Sigma\frac{W}{g}\rho^2$為物體以Z軸為轉軸之慣矩，可以I_z表之，

故 $$\Sigma m_z = I_z\alpha$$

由是得轉動體之動力公式如下：

$$\Sigma F_x = \frac{W}{g}\overline{\alpha}_x,$$

$$\Sigma F_y = \frac{W}{g}\overline{\alpha}_y,$$

$$\Sigma F_z = O,$$

$$\Sigma m_x = O,$$

$$\Sigma m_y = 0 \ ,$$

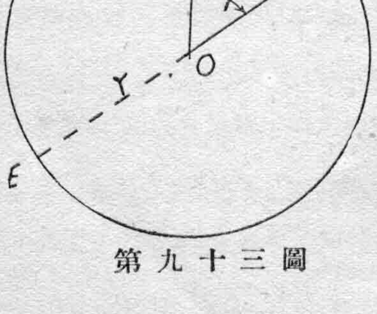
$$\Sigma m_z = I_z \alpha .$$

以此一組之公式，求轉動體所受之外力，自易事也。

75. 離心力 Ceutr ifugal Force.

以繩繫一石，持繩之他端而旋轉之，則覺有一種拉力，有使物向外飛去趨勢。若於其運動間，忽將此繩剪斷，則石必順繩之方向，向外飛去無疑。此種使物體向外飛去之力，卽離心力也。

持繩而旋轉時，物體受離心力之作用，有向外飛去之趨勢，同時繩對於石亦生一拉力，使物體向心力運動；此力曰向心力 Ceutr ipetdal Force. 由實驗之結果，知向心力與離心力量等而向反，故二力平衡。以一組平衡之力作用於石，故石得沿圓周而運動，因離心力與向心力量等而向反，故一般離心力之計量，以測量其向心力而得，茲述於下：



第九十三圖

設質點A，以等速度

沿O圓之圓周而運動（見第九十三圖），於t秒內，質點A行至B，則弧AB＝Vt。設圓之半徑爲r。

質點A由A至B間之運動，可視爲兩分運動所合成（其理見位移之合成），其一分運動爲AD，沿動路之切線方向而運動，其另一分運動爲BD＝AC，平行於OA而運動。設AC＝S，自第九十三圖，

$$\angle AOB=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\gamma}=\frac{Vt}{\gamma},$$

$$DB=AC=S=\gamma\left(1-\cos\frac{Vt}{\gamma}\right)。$$

$$a_n=\frac{d^2S}{dt^2}=\frac{V^2}{\gamma}\cos\frac{Vt}{\gamma},$$

當t＝O，即質點在A時，$\cos\frac{Vt}{\gamma}=1$。

故 $a_n=\frac{V^2}{\gamma}$

依力之定義，F＝ma，故向心之力爲

$$F=m\,a_n=m\frac{V^2}{\gamma}。$$

因 $V=\omega\gamma$，故向心力亦爲

$$F=m\gamma\omega^2。$$

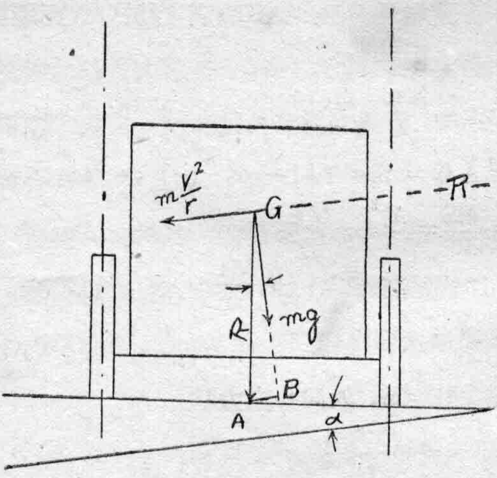
因離心力與向心力量等而向反，故離心力

$$F'=m\frac{V^2}{\gamma}=m\gamma\omega^2。$$

76.　離心力之應用Application of Centrifugal Force.

(a)汽車行駛於灣路時離心力之作用，

火車軌道在轉灣之處，其外軌常高於內軌，此吾人所習見之事實也。其所以須將外軌增高者，因火車於轉灣時，受離心力之作用，有向軌外傾倒之虞，汽車在轉灣時，亦有同樣趨勢，故亦須於離心力之作用，詳加研討，茲述如下。



第九十四圖

設轉灣處道路之平面，與水平成∝叉之角，其曲線部份之曲半徑爲R，而汽車以速度V行駛於其上，（見第九十四圖）。此時汽車所受力之作用，一爲離心力，一爲其自身之重心，依離心力之定義。

$$汽車之離心力=\frac{MV^2}{R},$$

$$汽車之重力=Mg。$$

但離心力$M\frac{V^2}{R}$與其重力Mg，可合成爲一合力，設爲Q，於是$M\frac{V^2}{R}$，Mg及Q成一力之三角形。自力之三角形△AGB（見上圖），

$$\tan\alpha=\frac{AB}{BG}=\frac{\frac{V^2}{Rg}}{g}=\frac{V^2}{Rg}$$

故 $$\tan\alpha=\frac{V^2}{Rg}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

自上式論之，tan∝爲路面之坡度 Slope of the road sur Faee，R爲灣路之曲半徑，g爲重力加速度，乃一常數，由是知如 tan·∝及R之値已定，則行駛於灣路所需之速度，自易測定，故行駛於灣路之速度，爲

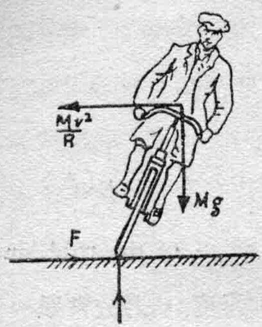
$$V=\sqrt{Rg\tan\alpha}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

玆更就公式(B)進而研究之，若$V>\sqrt{Rg\ \mathrm{tau}\ \alpha}$，則汽車向外傾側，若$V\geq\sqrt{Rg\ \mathrm{tau}\ \alpha}$，則汽車可安全通過灣路，故汽車於轉灣時，不宜以高速度行駛者，職是故也。

(b)二輪機踏車，或自行車與離心力之關係。

二輪機踏車，或自行車，在轉灣時所受力之作用，除離心力及乘者與車身之重力外，尙受地面之垂直反應力Q及摩

擦力F之作用（見第九十五圖）。重力與反應力Q構成一力偶，使車為順時針向之轉動，而摩擦力F與離心力，$M\frac{V^2}{R}$則構另一力偶，使車為反時針向之轉動，若二力偶矩之量相等，則可無傾倒之虞，若離心力與摩擦力構成之力偶矩，大於重力及反應力構成之力偶矩，則車有向外傾之危險，故轉灣時，若速度愈高，曲半徑愈小，則離心力自愈大，而乘者愈宜身向內傾以保平衡，否則難免向外傾倒，但摩擦力之值為有限，若速度過高，曲半徑太小，則雖向內側，亦不免於傾覆，故駕駛二輪機踏車時，於轉灣之處，宜注意減低其速度，



第九十五圖

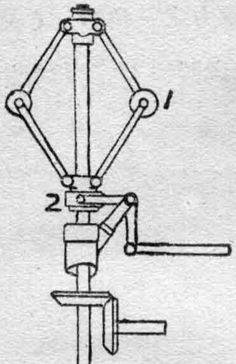
(c)離心調速器 Centrifugal Governor.

離心調速器係利用離心力之作用，開關汽門，使進入汽缸內之蒸汽量。隨速度之變遷而增減，以使速度保持一定之數値。離心調速器多用以調節蒸汽機關之速度，其原理如下。

離心調速器之構造如第九十六圖(1)所示。1為鋼球，2為圓筒，套於直鋼桿上。圓筒之上裝一連桿，使與蒸汽機汽

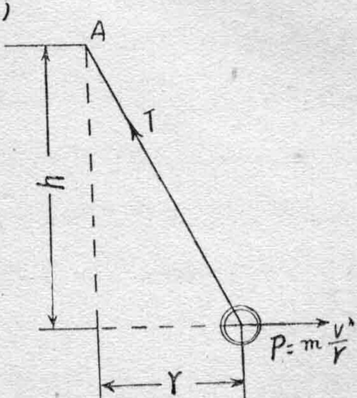
門之開關連接，當蒸汽機之速度增大時，則1受離心力之作用，向外飛去，因而提高2，於是關閉汽缸之汽門，使進入汽缸之蒸汽減少，減低蒸汽機之速度，當蒸汽機之速度減低時，則1受重力之作用而下降，因而使2亦隨之而下降，於是開啓汽缸之汽門，使進入汽缸內之蒸汽加多，增加其速度。其調速作用，僅與蒸汽機之速度有關，而與鋼球之重，及連桿之長短無關，茲證之於下。

(1)

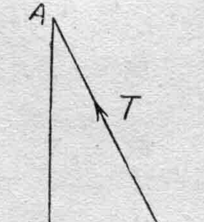


第九十六圖

(2)



(3



若蒸汽機之速度保持一定值時，則節速器所受力之作用，當爲離心力P，鋼球所生之重力W，及連桿之拉力T，(見第九十六圖(2))。玆就調速器之半論之，(因調速器爲對稱體)。平行於P,W,及T，作成力之三角形，(見第九十六圖(3))，則圖(2)之三角形，與圖(3)之三角形相似，於是

$$P : W = \gamma : h$$

取A爲轉軸，則

$$\Sigma m_A = Ph - W\gamma = O,$$

故　$$Ph = W\gamma,$$

但　$$P = \frac{W}{g}\,\frac{V^2}{\gamma},$$

故　$$\frac{V^2}{g\gamma}h = \gamma,$$

故　$$V^2 h = g\gamma^2,$$

故　$$h = \frac{g\gamma^2}{V^2},$$

但　$$V = \frac{2\pi\gamma N}{60},$$

故　$$h = \frac{g^2 \times (60)^2}{4\pi^2 \times {}^2N^2} = \frac{(60)^2 g}{4\pi^2} \times \frac{1}{N^2},$$

因$\frac{(60)^2 g}{4\pi^2}$為一常數，設$K=\frac{(60)^2 g}{4\pi^2}$，

則　　$h=K\frac{1}{N^2}$，

故　　$h \propto \frac{1}{N^2}$，

故節速器調節速度之作用，僅與蒸汽機之速度有關。

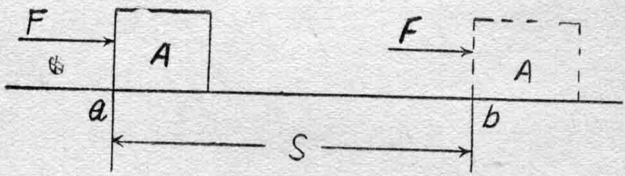
第九章　功與能

77.　功 Work

凡力作用於物體　其物體依力線方向而運動，則曰此力作功；（見第九十七圖）其量以力與物體之位移之乘積測之。例如第九十七圖，力F作用於物體A，使沿力線方向而運動，於某定時內　物體A由a至b，設以W表功，S表a，b間之距離，卽爲物體A之位移，以公式示之如下：

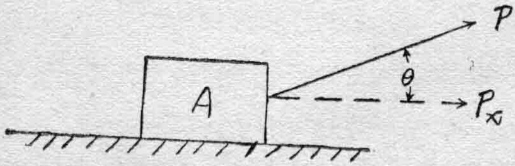
$$W = Fs.$$

第九十七圖



然此定義殊不足以概括一般情況，如第九十八圖所示，

第九十八圖



力P以與水平成θ角之方向，作用於物體A，

而A則沿水平方向而運動，於是上述定義，不復適於此情況矣。此項情況，爲吾人所習見者，如以繩繫於車上，而負繩於背以牽引之。然力作用於運動之物體，常有一分力切於運動途徑，如第九十八圖P_x，而其作功之力，卽爲此分力P_x、P_x名曰作功，分力，Wor King Component.於是

$$W = P_x S = P\cos\theta . S = P\ S\cos\theta .$$

又如諸力作用於物體，而物體起運動，則其所作之功之和，等於其合力所作之功，其理當於功之定理中詳述之。

78. 功之正負

力作用於物體，則物體起運動，其運動方向，與作用力之方向相同者，則其所作之功爲正功；其運動方向與作用力之方向相逆者，則其所作之功曰負功。前者之例，如上第九十七圖及第九十八圖所示，而後者之例，如摩擦力所作之功。前者爲力作功於物體，後者爲抗力而作功。

79. 功之單位 Units of Work.

以單位之力，作用於物體，使運動於其方向，而其位移，爲單位之位移，則其所作之功，爲單位之功。此單位之功，爲計量功之單位。功之單位，分爲絕對單位，與重力單位二者，二者之中，復有國際制卽 C.g.S.制，與英制，卽

f.p.S.制之别。茲表列於下以明之。

	國際制C.g.S.	英制f.p.s.
絕對單位	爾格erg（達因公分）	磅達呎 pdl.-ft.
重力單位	克糎 gm.-ur.	呎磅 ft.lb.

爾格——以一達因之力，作用於物體，其位移爲一公分，則其所作之功，爲一爾格，故在絕對單位之國際制中，亦有名單位之功爲達因公分者。由是知1爾格＝1達因公分。

克糎——以一克之力，作用於物體，其位移爲一公分（即一糎），則其所作之功曰克糎。

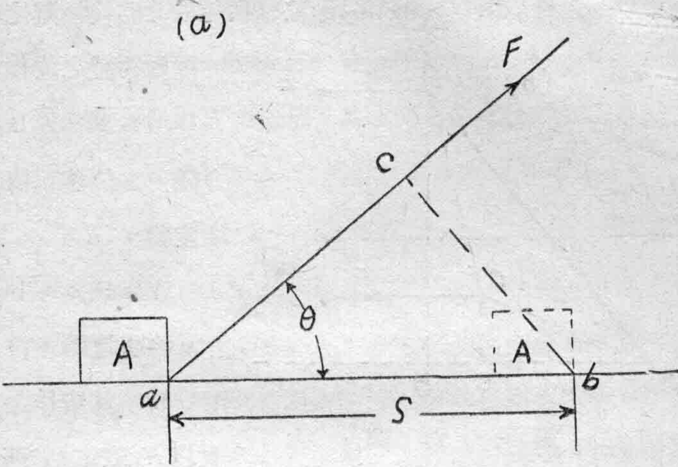
磅達呎 Poundal-foot——以一磅達之力，作用於物體，其位移爲一呎，則其所作之功爲磅達呎。

呎磅——以一磅之力，作用於物體，其位移爲一呎，則其所作之功曰呎磅。

80. 功之定理Theorems of Work.

(1)力所作之功，不關於物體運動之路線。

設以與水平成θ角之力F，作用於物體A，而A之位移爲在水平方向上之$\overline{ab}$，$\overline{ac}$爲$\overline{ab}$在力線上之射影，（見第九十九圖）。依功之定義，



第九十九圖

$$W = F \times \overline{ac},$$

但 $$\overline{ac} = \overline{ab}\cos\theta,$$

故 $$W = F \times \overline{ab}\cos\theta,$$

而 $$\overline{ab} = S$$

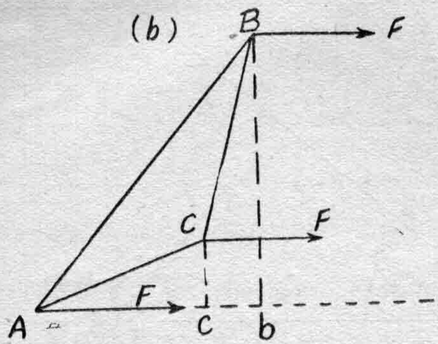
故 $$W = F \times S\cos\theta$$

$$= S \times F\cos\theta$$

$F\cos\theta$ 爲力F之作功分力，故力所作之功，與運動之路綫無關。

設力F之量不變，作用於物體，而其運動路綫，則爲自

A至C，復自C至B，由第六節位移與運動之路線無關之理，可知物體之位移為$\overline{AB}$。$\overline{Ab}$為$\overline{AB}$在力綫上之位移，依功之定義。



第一百圖

$$W = F \times \overline{Ab}。$$

當物體運動，自A至C時，其所作之功設以W_1表之，則依同理，

$$W_1 = F \times \overline{Ac},$$

設以W_2表由C至B所作之功，則

$$W^2 = F \times \overline{cb},$$

$$W_1 + W_2 = F \times \overline{Ac} + F \times \overline{cb}$$

$$= F(\overline{Ac} + \overline{cb}),\ \because \overline{Ac} + \overline{cb} = \overline{Ab},$$

$$= F \times \overline{Ab}$$

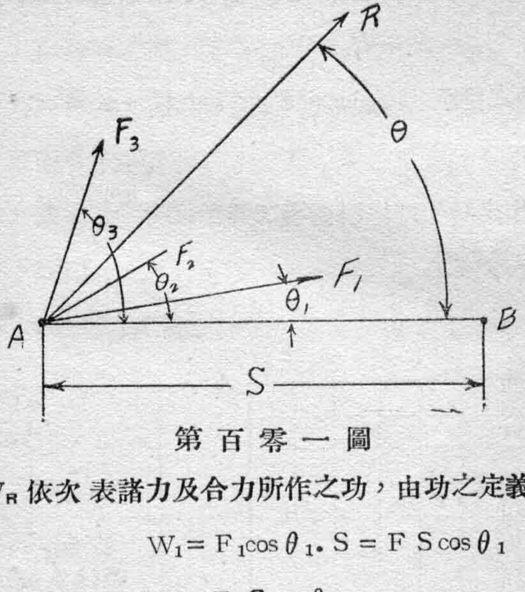
但　　$F \times \overline{Ab} = W$

故　　$W = W_1 + W_2.$

故力所作功，與物運動之路綫無關。

(2)諸力作用於一物體，使之運動於其方向，則各分力所作之功之代數和，等於其合力所作功。

對於諸力作用於一物體，其所作之功之代數和，等於其合力所作之功，已於第77節述及，茲更證之如下：



第百零一圖

設諸力F_1, F_2, F_3，作用於物體A，其合力爲R，物體運動於AB方向，其位移爲S，設W_1, W_2, W_3，及W_R依次表諸力及合力所作之功，由功之定義，

$$W_1 = F_1 \cos\theta_1 \cdot S = F S \cos\theta_1$$

$$W_2 = F_2 S \cos\theta_2$$

$$W_3 = F_3 S \cos\theta_3$$

$$W_R = F S \cos\theta,$$

但　$W_1 + W_2 + W_3 = F_1 S\cos\theta_1 + F_2 S\cos\theta_2 + F_3 S\cos\theta_3$

$= S(F_1\cos\theta_1 + F_2\cos\theta_2 + F_3\cos_3\theta)$

依幾何學之射影定理，

$$F_1\cos\theta_1 + F_2\cos\theta_2 + F_3\cos\theta_3 = R\cos\theta$$

上式之兩邊，各乘以S，則

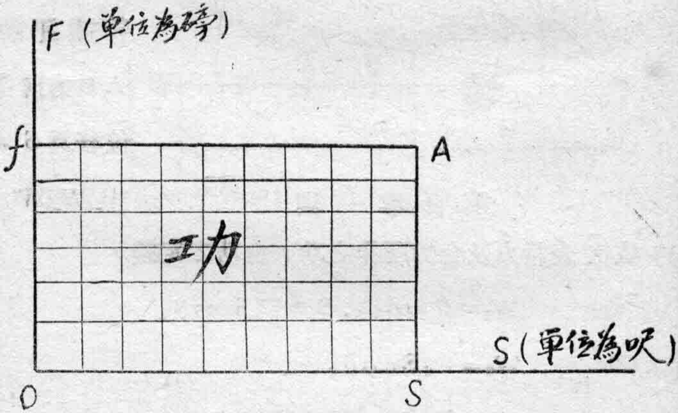
$$RS\cos\theta = S(F_1\cos\theta_1 + F_2\cos\theta_2 + F_3\cos\theta_3\theta)$$

故 $$W_R = W_1 + W_2 + W_3$$

81. 功之圖示 Graphicai Representation of Work.

(1)不變力

不變力所作之功，可以第百零二圖示之。



第 百 零 二 圖

設不變力為F，作用於物體，其位移為S，則其所作之功，

$$W = FS.$$

今若以F及S分別表直角生標之縱橫二軸，於縱橫二軸上，各以適宜之比例單位，表F及S，設爲f及S。於縱軸上取f單位，橫軸上取S單位，而完成其平行四邊形，則四邊形所含之面積，卽示力F所作之功。

自幾何之理，

口OSAf＝f×S＝fS，

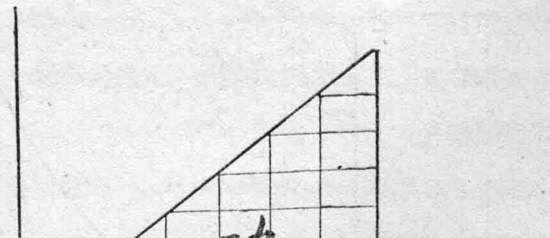
而fS比例於FS，且W＝FS，故fS比例W.

故　　口OSAf比例於W

故口SAf之面積，表作功之量。

(2)變力之量之變化，與位移成正比。

力之量之變化，正比於位移時，則功之圖示爲一三角形之面積，如第百零三圖所示。因



第　百　零　三　圖

力旣正比於位移，則力與位移之曲綫之坡度爲一定，設

$$\frac{dF_1}{dS_1}=\gamma,\quad \frac{dF_2}{dS_2}=r$$

則

$$\frac{dF_1}{dS_1}=\frac{dF_2}{dS_2}=\cdots\cdots\cdots\cdots r$$

故所作之功，可以力與位移之曲綫S及軸所含之面積量之。

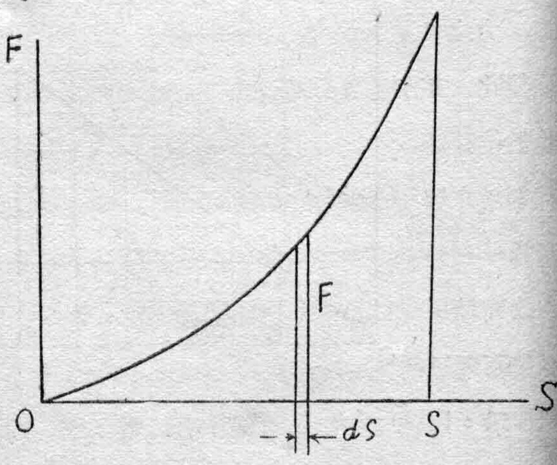
〔別解〕 設物未受力之作用時爲在靜止狀態，其運動後最終之作用力爲F，故其平均之作用力，

$$F_m=\tfrac{1}{2}F,$$

依功之定義，

$$W=F_m S=\tfrac{1}{2}FS$$

但½FS表以F及S爲縱橫軸之△AFS之面積（見第百零三圖），故功之量可以△OFS之面積



第百零四圖

量之。

(3)變力

變力所作之功，以下式量之，

$$W=\int_{0}^{S} F\,d\,S.$$

以變力作功時，其在位移上各點之力之量，均隨位移而變，設取無限小之位移 d S（見第百零四圖）而計論之，則在此距離中之力，可視爲不變力，於是其所作之功，

$$d\,W=F\,d\,S.$$

故 $$\int d\,W=\int F\,d\,S$$

故 $$W=\int_{0}^{S} F\,d\,S.$$

82　能 Energy.

能之定義，頗不易决定，一般所同意者爲『能作功者曰能』。

能可分爲機械能，Mechanical Energy，熱能 Heat Encrgy，電能 Electrical Energy，等，而本章所論者，則爲機械能。

能可互變，如由機械能變爲熱能，電能，或由電能變爲機械能及熱能等，但不能創造，亦不能消滅之。

機械能復可分爲勢能及動能二者。

83.　勢能 Potential Energy.

舉一物向上，使昇高至高於其原位置 h 之處，當取去其支持之力時，則物體有回復其原位置而作功之能，於是名此能曰勢能。勢能以物體之重量（即其重力）與其昇高之距離之乘積量之，以公式表之如下：

$$P.E.=mgh,$$

84. 動能，Kinetic Energy.

物體在運動中，若使其由運動而靜止，則因其有速度之關係，有作功之能。此能曰動能。動能以物體質量之半與其速度之平方之乘積量之。以公式表之如下：

$$K.E.=\frac{1}{2}mV^2.$$

85. 能之計量 Measurement of Euergy.

自勢能之計量言之，

$$P.E.=mgh.$$

其中 mg 為物體之重力，而 h 為使物體自其原位置至最終位置之位移，故 mgh 實為物體運動於力之方向所作之功；即使物體昇高 h 時，則吾人對物體所作之功為

$$W=mgh.$$

又自動能之計量言之，

$$K.E.=\frac{1}{2}V^2.$$

若使物體由速度V而靜止，則其所有之位移爲，

$$S=\frac{V^2}{2a},\qquad 故 V^2=2aS$$

故　$K.E.=m.aS=maS.$

但　$F=ma$

故　$K.E.=FS$

而　$W=FS$

故動能可以使物體由運動而靜止時，自其所作之功量之。

由上述之理，吾人可曰能以功量之。

86. **能之單位** Units of Energy.

能旣以功量之，故能之單位，同功之單位。

87. **能不滅律** Law of Couservation of Energy.

設舉一物體至h高之處，則自第八十三節之理，其勢能，

$$P.E.=mgh \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

若取去其支持之力，則物體受重力之作用，必至h處自由落下，依『自由落下』運動定律，當物體復至其原位置時之度速度爲

$$V^2=2gh,$$

故　$gh=\frac{1}{2}V^2, \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$

故物體此時所有之能爲$\frac{1}{2}mV^2$，卽其所有之動能。但當物體復至其原位置時，其所有勢能完全消滅，而此時物體所有之能全爲動能。今以m乘公式(B)之兩端，則

$$mgh=\frac{1}{2}mV^2$$

故物體所失之勢能，等於其所得之動能，反之亦然。此種原理，名曰能不滅律。

88. 圓運動之動能Kinetic Energy of Circular Mation.

物體繞其迴轉軸而迴轉時，若知其角速度，設爲ω，則其動能，可以下式得之。

$$K.E.=\frac{1}{2}I\omega^2$$

其中I，名曰慣矩 Moment of Inertia，且$I=MK^2$，M爲迴轉體之質量，K爲迴轉半徑 Radius of gyration. 在圓輪以其中心爲轉軸時，設γ爲其平均半徑，則K＝γ，故圓輪以其中心爲轉軸時，其慣矩，$I_0=M\gamma^2$.

直綫運動與圓運動之動能之關係，

由上述之理，圓運動之動能，

$$K.E.=\frac{1}{2}I\omega^2,$$

但 $I=m\gamma^2,\qquad \omega=\frac{V^2}{\gamma}$

故 $K.E.=\frac{1}{2}m\gamma^2,\left(\frac{V}{\gamma}\right)^2=\frac{1}{2}mV^2$

而$\frac{1}{2}mV^2$為物體直綫運動之動能，故圓輪以其中心為轉軸而運動時，其直綫運動之動能，等於其圓運動之動能，即

$$\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}I\omega^2。$$

89. 摩擦所消耗之功，Work Lost in Friction.

摩擦為消耗動能之最大因素，其消耗之動能，以熱能之形態而消散。此消耗之功，不得由工作之他部復得而為有効功，因摩擦力均為反運動方向而生，故在他部，仍須消蝕一部之功也。汽車利用摩擦以掣動，即利用其能消耗汽車在運動中所有之動能。但汽車雖消蝕其所有之動能，而摩擦力則對於汽車作負功，即汽車為抵抗摩擦而作功，且其所作之功，等於所消蝕之動能。由是得功與動能之關係如下式：

$$W=K.E.$$

此公式為計算汽車掣動所需之阻力，或其掣動距離之基本公式。掣動距離者，汽車於掣動後，尚須滑行之距離，而後汽車始歸於靜止者也。

例如一汽車之重為W磅，其行駛之速度為V呎/秒，若其摩擦阻力為F，則其掣動距離，可如下法以求之。

設所求之掣動距離為S，則依功之原理，

$$W=FS$$

故 $$F\,S = \frac{1}{2}\frac{W}{g}V^2$$

故 $$S = \frac{WV^2}{2gF} \qquad \therefore F = \mu W$$

故 $$S = \frac{V^2}{2g\mu} = \frac{V^2}{2g\mu}$$

又如所求者爲摩擦力 F，則

$$F = \frac{W\gamma^2}{2gS},$$

90. 功率 Power.

單位時間內，所作功之量，曰功率。設有一機械，於 t 秒內所作之功爲 W，則其功率可以下式表之：

$$功率\,P = \frac{W}{t} = \frac{FS}{t}.$$

91. 功率之單位 Units of Power.

觀上式可知功率之單位，含有功之單位及時間單位，故功率單位，可讀爲每秒若干呎磅。(ft.tb/sec.) 功率單位，亦有國際制與英制之別，茲分舉以明之。

國際制………公斤公尺/秒 (Kg m./sec)

英　制…………呎　磅　秒 (ft tb /sec)

其他之功率單位，如電及熱之功率單位，亦分舉於下，以資參考。

電之功率單位爲瓦 Watt， 1瓦 $= 10^7$ 爾格。

熱之功率單位爲B.T.U.　1B.T.U.=1磅之水昇高溫度1°F.所需之熱量。

92. 馬力 Horse Power.

工程中所用之工率單位，曰馬力，馬力亦有國際制與英制之別，茲分舉之。

國際制——1馬力=75公尺公斤/秒，即每秒能作75公尺公斤之功。

英　制——1馬力=33,000呎磅/分=550呎磅/秒，即每秒能作550呎磅之功，或每分能作33,000呎磅之功。

以電功單位示馬力，則1馬力=0,746仟瓦 (Kilowatts)=¾仟瓦。

以熱之功率單位示馬力，則1馬力$=\frac{33,000}{778}$

$=42,416$ B.T.U./分。

93. 機械効率，Mechanical Efficiency.

在同時間內，其所發出之能，與供給之能之比，曰機械効率，以公式示之如下：

$$\text{機械効率}=\frac{\text{發出之能}}{\text{供給之能}}$$

機械効率，通常以分數表之。

但由第86節之理，其發出之能，可以機械所作之功量

之，而供給之能，則以外界對機械所作之功量之。

故 $$\text{機械効率}=\frac{\text{機械所作之功}}{\text{對機械所作之功}}$$

而機械所作之功，通常以掣動馬力 B.H.P. 示之，對機械所作之功，則以指示馬力 I.H.P. 示之

故 $$\text{機械効率}=\frac{\text{B.H.P.}}{\text{I.H.P.}}$$

94. 指示馬力 Indicated Horse Power.

自機械設計者所作之壓力，容積之循環圖解，計算出機械所有之馬力，曰指示馬力。指示馬力，以下式計算之，

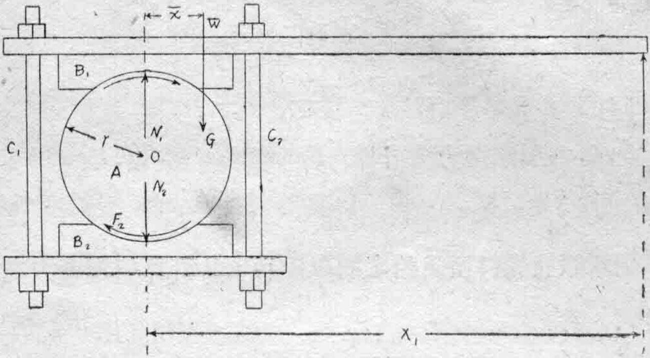
$$\text{I.H.P.}=\frac{PLKN}{33000}\text{呎磅/分}$$

P 爲自循環圖解上所得之平均蒸汽壓力，或平均氣體壓力，L 爲汽缸之長度，A 爲活塞之頂面積，N 爲飛輪每轉之旋轉次數。

95. 掣動馬力 Brake Horse Power.

掣動馬力者，機械實際上所能作功之馬力也。掣動馬力，以功率計 Dynamometer 量之，其最常用之功率計，爲 Prony 掣動功率計。用 Prony 制動功率計，測制動馬力之法則，詳述於下：

Prony 制動功率計之圖解，如第百零五圖所示。A 爲引擎之飛輪，B_1 及 B_2，爲兩木塊，用以掣動，而 B_1 之他端，



第百零五圖 （Prcny 制動功率計圖解）

則置於天秤上，以便測出其所生之壓力，設W爲爲制動器之重量，其重心爲G，P爲B_1在平秤上所讀出之壓力。當飛輪旋轉時，設爲順時針向，則掣動器對於飛輪所生之摩擦與正壓力，與圖示者量等而向反。依功之原理，N_1及N_2對於飛輪A無功可作，故對於飛輪A作功者，厥爲F_1及F_2。若飛輪A每分鐘轉N次，則摩擦力所作之功，爲

$$W=(F_1+F_2)2\pi\gamma N$$

故 $$H.P.=\frac{(F_1+F_2)2\pi\gamma N}{33,000}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

取O爲轉軸，則由力矩之理，

$$\Sigma m_0=Fx_1-W\bar{x}-(F_1+F_2)\gamma=O$$

故 $$(F_1+F_2)\gamma=Px_1-W\bar{x}$$

以$(F_1+F_2)\gamma$之值代入(A)

$$H.P.=\frac{2\pi(Px_1-W\bar{x})N}{33,000}$$

$$=\frac{(Px_1-W\bar{x})N}{5250}$$

96. 引擎馬力之計算，Calculation of the Powor of a Engine.

引擎吸收燃料所供給之能以作功，其計算引擎馬力之基本公式，爲

$$H.P.=\frac{PLAM}{33,000}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

P爲在作功衝程時，對活塞頂部所生之平均有效壓力，其單位爲每平方吋若干磅，A爲活塞之頂面積，其單位爲平方吋，L爲作功衝程之長，單位爲呎，M爲每分鐘作功衝程之次數。

在四循環之內燃機，四衝程中，只有一次爲作功衝程，即曲軸旋轉兩次，實得作功衝程一次。故四循環內燃機之馬力，爲

$$H.F.=\frac{PLARN}{2\times 33000}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

其中R爲曲軸每分鐘之旋轉次數，N爲汽缸之數。設活塞之速度爲S，則$S=2LR$，

故　$$LR=\frac{S}{2}$$

以LR之值代入(B)

故　　$$H.P. = \frac{PANS}{4 \times 33000} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

公式(C)所求出之馬力　爲指示馬力。

美國N.A.C.C.(National Autombile Chaw bea of Commeree)之規定。P＝90磅/平方吋，A＝0.7854D^2平方吋，S＝1000呎/分，

故　　$$I.H.P. = \frac{1000 \times 90 \times 0.7854 D^2 N}{4 \times 33000}$$

N.A.C.C.復假定平均機械効率爲0.75，

故　　$$B.H.P. = \frac{1000 \times 90 \times 0.7854 D^2 N \cdot 0.75}{4 \times 330\,0}$$

$$= \frac{D^2 N}{2.489}$$

$$= \frac{D^2 N}{2.5} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (D)$$

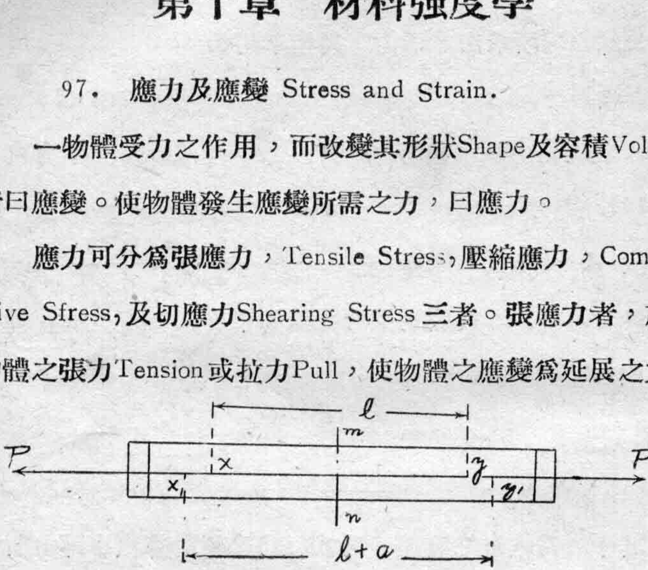
其中D爲汽缸之直徑，公式(D)，爲計算汽車馬力所用之公式，且在國際間一般均用之。

第十章　材料強度學

97. **應力及應變** Stress and Strain.

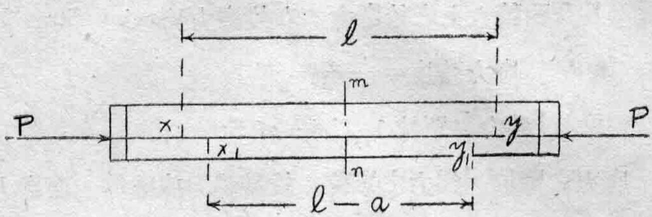
一物體受力之作用，而改變其形狀Shape及容積Volume者曰應變。使物體發生應變所需之力，曰應力。

應力可分爲張應力，Tensile Stress，壓縮應力，Compressive Sfress，及切應力Shearing Stress三者。張應力者，施於物體之張力Tension或拉力Pull，使物體之應變爲延展之力也



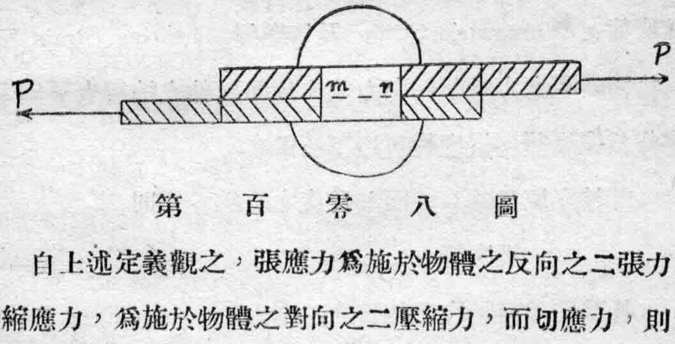
第　百　零　六　圖

。如第百零六圖所示，施於綫棒軸上之張力P及P，與物體之切斷面mn垂直，則綫棒軸上之任意兩點 x，y，延展至x_1，y_1，P及P，名曰張應方。壓縮應力者，施於物體之壓縮力 Compression 或推力 Push，使物體之應變爲縮短其原長度之力也。如第百零七圖所示，P及P爲施於綫棒軸上相向之二力，垂直於綫棒之切斷面mn，使棒軸上任意之兩點 x，y，壓縮至



第　百　零　七　圖

x_1及y_1，此相向之一對之力P及P，曰壓縮應力。切應力，如第百零八圖所示。施於連接兩鋼板之帽釘斷面mn上之拉力P及P。



第　百　零　八　圖

自上述定義觀之，張應力爲施於物體之反向之二張力，壓縮應力，爲施於物體之對向之二壓縮力，而切應力，則爲施於物體之二接觸面切線之張力。

98.　應力強度，Intensity of Stress，

應力強度者，單位面積之應力也。在等應力，Uniform Stress，則

$$應力強度=\frac{P}{A}$$

P爲在面積A上之總應力。在變應力Varyiny Stress，則

$$應力強度=\frac{dP}{dA}.$$

99. 應力之單位, Units of Stress.

應力之單位，爲力之單位，故爲磅，或噸等，而應力強度之單位，則爲每平方吋若干磅，或每平方呎若干噸等。在國際制則應力之單位爲公斤或公噸等，而應力強度之單位，爲每平方公分若干公斤，或每平方公尺若干公噸等。

100. 應變亦可分爲縱應變， Longtitudinal Strain，容積應變， Volumetric Strain 及切應變 Shearing Strain 三者。物體受張應力或壓縮應力之作用而延伸或縮短者，則名其應變爲縱應變。縱應變可以下法求之。

設棒之原長爲L，而其長度之改爲e，則

$$縱應變=\frac{e}{L}。$$

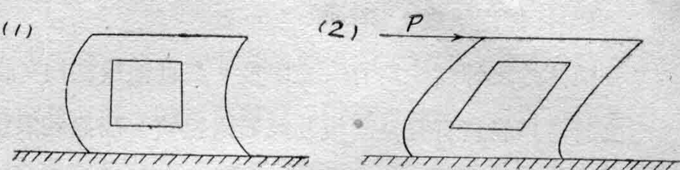
物體之各面，均受相等之正應力 Normal Stress， 則物體改變其容積，於是名此應變曰容積應變。容積應變，可以下法求之。

設物體之原容積爲V，其容積之改變爲v，則

$$容積應變=\frac{v}{V}。$$

物體受切應力之作用而改變其形狀者，則名其應變，曰

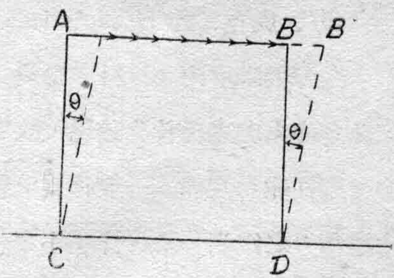
切應變。



第　百　零　九　圖

茲舉例以明之。設以書一册置棹上，於書之端，以鉛筆劃一正方形，(見第百零九圖(1))，今若以手施力P於書之上緣，則書之變形如第百零九圖(2)所示，其鉛筆所劃之正方形，則變成菱形矣。一般固體，均有同樣應變，惟其程度較低耳。切應變以其應變之角θ量之，其單位爲弧度，(見第百一十圖)。一般金屬之切應變θ均甚小，故將切應變寫成下式，亦甚精確，

$$切應變=\theta=\frac{BB'}{BD.}$$



第　百　一　十　圖

自上述應變公式觀之，應變只有一數值，而無單位。

101. 材料之彈性，Elasticity of material.

任何物質，受應力之作用發生應變，然若撤去作用之應

力，則均有回復其原狀之現象，此種性質，曰材料之彈性。

102. 彈性限度， Elastic Limits.

各種材料之彈性，均有一定限度，在此限度之內，當應力撤去時，則材料有完全回復其原狀之性質，而過此限度，則不能完全回復其原狀，而保留一部之應變。故彈性限度之定義，可如下述：

物質所能任受之最大應力強度，在此應力強度內，則物質不發生永久應變， Permanent Set 者，曰彈性限度。永久應變者，發生應變之應力撤去後，物質仍保留一部之應變，而不克回復其原狀之謂也。

103. 虎克定律 Hooke's Law.

在彈性限度內，材料之應變，與發生應變之應力成正比，此定律由虎克氏首先發現，故名曰虎克定律。多數材料，均能服從虎克定律。一般物質，雖在其彈性限度內，其第一次經應力之作用，常保持極小之永久應變，而此後則完全服從虎克定律，吾人卽以此等物質爲完全彈性體論，此種現象之發生，或因在製造上先已發生若干之應變，故第一次所加之應力撤去後，而仍保持若干之應變者，殆卽使在製造上發生之應變回復其原狀也。少數彈性物質，對於虎克定律，亦

不常眞。

104. 彈性係數 Moduli of Elasticity.

各種彈性體，在其彈性限度內，其應力強度與應變之比，曰彈性係數。彈性係數計分縱彈性係數，Longtitudinal Modulus of Elasticity 或楊氏係數，Youngs Modulus 容積彈性係數，Bulk Modulus, 及切彈性係數，Shearing Modulus of Elasticity 或剛性係數，Modulus of Rigidity 三者。

張應力與縱應變之比，曰縱彈性係數，或楊氏係數。縱彈性係數，復分爲伸張彈性係數，Tensile Modulus of Elasticity 及壓縮彈性係數，Compressiva Modulus of Elasticity 二者。縱彈性係數，通常以E表之，故縱彈性係數，可以公式表之如下，

$$\text{縱彈性係數} = \frac{\text{張應力}}{\text{縱應變}}$$

即

$$F = \frac{P}{A} \div \frac{e}{L} = \frac{PL}{Ae}。$$

應力與容積應變之比，曰容積彈性係數。容積彈性係數，通常以K表之，故容積彈性係數，可以公式表之如下，

$$\text{容積彈性係數} = \frac{\text{應力}}{\text{容積應變}},$$

或

$$K = p \div \frac{v}{V} = \frac{pV}{v}。$$

切應力與切應變之比　曰切彈性係數，或剛性係數。剛

性係數，通常以G表之，以公式示之如下，

$$切彈性係數=\frac{切應力}{切應變}$$

或 $$G=\frac{q}{\theta}。$$

105. 縱彈性係數E，及剛性係數G之單位，Units of E and G.

因彈性係數之定義，爲應力與應變之比，應力之單位，爲每單位面積若干磅，而應變爲無單位之數值，故E及G之單位，仍從應力之單位，即每單位面積若干磅，每單位扭轉若干磅。

106. 超過彈性限度時應力與應變之關係，Stress and Strain above Elastic Limit.

物質受應力之作用，已達其彈性限度，此時雖不增加應力之強度，而應變亦繼續發生，此後稍加應力，則發生較大之應變。應力強度達到此種情況時，吾人名此曰屈服點，Yeilding Point. 此種現象之發生，或因達屈服點時，材料之內部，已發生一部之破裂，因而改變其特性所致。

107. 斷裂 Break.

物體所受之應力，增至屈服點後，若繼續增加其強度至最高度時，則物體發現裂痕而斷裂。物體在達到斷點前所能

任受之最大應力強度，曰斷點強度，Breaking Strength 或極限強度，Ultimate strencth.

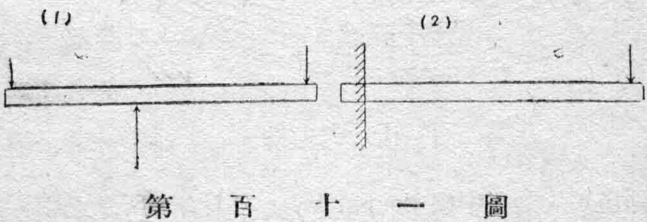
108. 資用強度， Working strength —— 安全因數，Faetor of safety.

機械或建築物之一部，於達到其安全限度Limits ef safety 前，所能任受之最大應力強度，曰資用強度。在靜壓下之斷點強度，與給予之資用強度之比，曰安全因數。安全因數，可小至2或3，可大至20以上。

109. 樑 Beam

一棒形物，受一組平衡外力之作用，其平衡之外力垂直作用於中心軸，則名此曰樑。凡所謂樑，當不盡指橫置之棒形物 惟爲便利計，以橫樑而研究之，似較易從事也。

其樑之支持於一點，如第百十一圖(1)所示，或以支持



第 百 十 一 圖

力固定其一端，而其他端則爲懸於空間，如第百十一圖(2)所示者，均曰肱樑 Canti lever beam 其樑之兩端，均以

物支持之者，曰簡樑， simple beam 其兩端均固定者，曰固定樑， Fixed beam.

110. 樑之應力， stress in Beams.

於研究樑之應力以前，吾人所宜注意者，爲吾人對樑之假設，卽

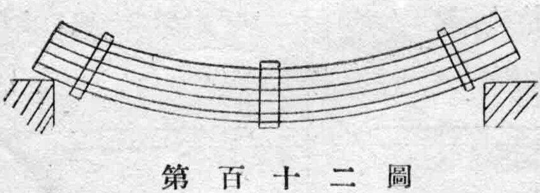
(a)樑內各部所含之物質，爲均勻分佈。

(b)樑爲直綫，且其各部之斷面積均等。

(c)其作用之外力，互保平衡。

(d)樑之長度，大於斷面者遠甚。

一般實體之樑，吾人可假想其爲無數同長之板，疊合而成，其兩端則以力加之，使各在一平面內，如第百十二圖所示。若以荷重加之，則樑必彎曲，自第百十二圖可知其中必有一葉與原長無異，在其上者爲短縮，而在其下者，則爲伸張。故知在中線 Neutral layer 之上者，所受之應力爲壓縮應力，而在中線之下者所受之應力，爲張應力。

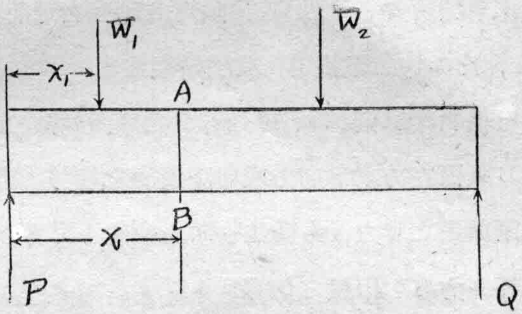


第 百 十 二 圖

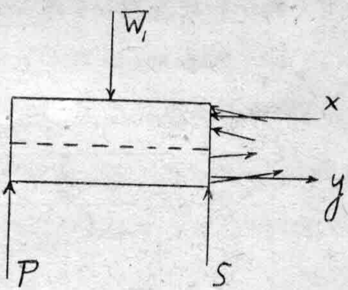
111. 樑中之彎曲矩及切力 Bending Moment and shear

Force in Beams.

(1)



(2)



第百十三圖

如第百十三圖(1)，樑所負之荷重，爲W_1及W_2，其支持力爲P及Q，若於樑中任取一斷面AB，則力P及W，有使在AB斷面左方之部轉動之趨勢，同樣Q及W_2，亦有使在AB斷面右方之部轉動之趨勢。此種趨勢，可於AB面內任取一點爲轉軸，而求其力矩之代數和以測定之。由此法以測定之力矩，曰彎曲矩。任意斷面之彎曲矩，可用以計量在該斷面上，樑之彎曲趨勢。

設以B爲轉軸，則

$$彎曲矩_{AB} = Px - W_1(x - x_1),$$

$$=(P-W_1)x+W_1x_1$$

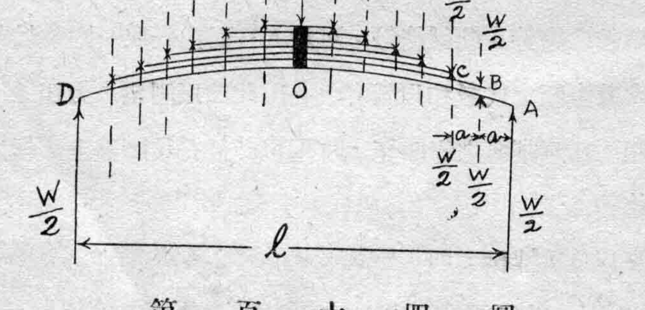
由實驗所知，P及W_1對於AB斷面之彎曲矩，等於Q與W_2對於AB之彎曲矩，其理姑從略。

自第百十三圖(2)，可知若P及W_1相等，則由合力以使樑AB斷面左方之部向上或向下運動之趨勢，若不相等，則在此斷面上之應力，必發生一向上或向下之力S，以$W_1 \gtrless P$爲轉移。力S，曰樑之切力。

對於任意斷面之切力，可以下式計算之。

$$切力_{AB}=P-W_1$$

112. 鋼板彈簧， Leave spring.



第百十四圖

鋼板彈簧，各種車輛多用之，而汽車上用之尤夥。鋼板彈簧之形狀，如第百十四圖所示。此彈簧構造上之目的，爲使壓力集中於相連二片中之短者之兩端。假設最長兩片間B點之壓力，因作用於其中點C之荷重W而產生，則B點之壓力當爲$\frac{W}{2}$。設AB之水平距離爲a，則OB之彎曲矩當爲

$$M=\frac{W}{2}a.$$

若OB之部爲等斷面，且其端點BA接合，使成一等強度之樑，則全片之片應力，可視爲等値，於是因其曲半徑大於彎曲深度，故其最大應力強度，可以下式求之，卽

$$f=\frac{M}{I}c=\frac{Wa}{2}\frac{c}{I}$$

其中I爲以中心爲軸之慣矩。

同理，可知第二與第三片間之壓力爲$\frac{W}{2}$，其彎曲矩及最大應力強度，與上述者等。因其各片均爲等斷面，等應力強度，教彈簧全部之應力強度相等。因假定各片之直線部份任受之彎曲矩爲相等，故其曲半徑之改變亦等，且因其最初之半徑甚小，故其曲半徑之改變如下，

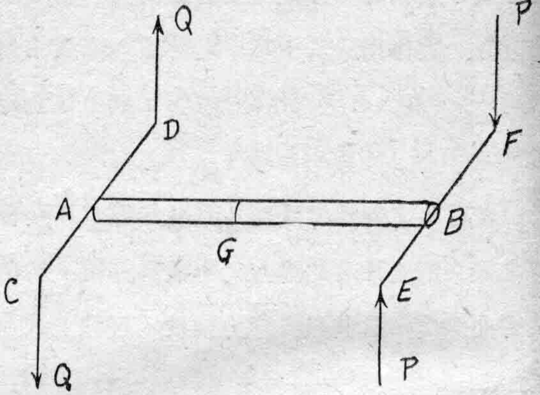
$$\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma_1}=\frac{M}{EI}=-\frac{Wa}{2EI}$$

於是O點對AD兩點之偏轉度，

$$V_0=\frac{M\ell_2}{8EI}=\frac{Wa\ell_2}{16EI}.$$

113. 扭力 Torsion

一圓棒，其兩端受向反等力偶矩而之二力偶之作用，其二力偶作用於二平行面，且與圓棒之軸垂直，如此一組之力，互保平衡時，則曰此圓棒被扭轉。其力偶之作用，可由棒之一



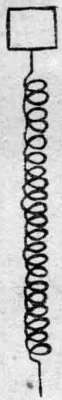
第 百 十 五 圖

端傳於他端，而對於任意斷面，如第百十五圖之G，發生切應力。

114. 螺簧 spiral spring.

螺簧之組成為以金屬線，繞一圓柱體，其金屬線以等角度分割垂直於圓柱體之各平面。其應力及彈性係數之測得，可如下述。設作用於螺簧軸之力為 f，因反作用與作用力量等而向反，故螺簧之任意斷面上，受切於其斷面而垂直作用之二 f，f，此作用之力 f，相當於切應力 f / a，a 為金屬

線之斷面積。於是其發生之切應變 $\theta=(f/a)\div n=f/an$，n為扭轉係數。若 ℓ 為螺簧之全長，則金屬線之下降距離，為



第百十六圖

$$\theta\ell=\frac{\ell f}{an}$$

設R為圓柱體之半徑，則沿圓柱體之軸而作用之力 f，對於斷面，發生一轉矩 fR，若 ϕ 為單位長度之扭轉應變，則

$$fR=\frac{n\pi\gamma^{n}}{2}\phi$$

故

$$\phi=\frac{2fR}{n\pi\gamma^{n}}$$

故其全長之扭轉應變，為

$$\ell\phi=\frac{2fR\ell}{n\pi\gamma^{n}}$$

故其沿徑之部，自螺簧底端之扭轉為 $\ell\phi$，故其底端下降之距離，為

$$R\ell\phi=\frac{2fR^{2}\ell}{n\pi\gamma^{n}}$$

於是 $$\frac{\text{因切力而生之伸張}}{\text{因扭轉而生之伸張}}=\frac{\theta\ell}{R\ell\phi}=\frac{\ell f}{n\pi\gamma^{2}}\div\frac{2fR^{2}\ell}{n\pi\gamma^{n}}$$

$$=\frac{\gamma^{2}}{2R^{2}}.$$

115. 汽缸應力 stress of Cylinder.

汽缸之應力，與其直徑成正比。玆證之如下，

設汽缸內蒸汽壓力之平均有效壓力，爲P，D_A表汽缸A之直徑，則汽缸內壁之面積，爲$\pi D_A \ell$，於是其應力，爲

$$\text{Stress}_A = P \times \pi D_A \ell$$

設汽缸B之直徑爲D_B，其長爲ℓ，其平均有効蒸汽壓力爲P，則其應力，

$$\text{Sterss}_B = P \times \pi D_B \ell$$

故 $$\frac{\text{Stress}_A}{\text{Stress}_B} = \frac{P \times \pi D_A}{P \times \pi D_B} = \frac{D_A}{D_B}.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						4	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	16	20	23	26	30
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	5	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	16	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4406	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ANTILOGARITHMS.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ANTILOGARITHMS.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

TRIGONOMETRICAL TABLE.

Angle.	Radians.	Sine.	Tangent.	Cotangent.	Cosine.		
0°	0	0	0	∞	1	1·5708	90°
1	·0175	·0175	·0175	57·2900	·9998	1·5533	89
2	·0349	·0349	·0349	28·6363	·9994	1·5359	88
3	·0524	·0523	·0524	19·0811	·9986	1·5184	87
4	0698	·0698	·0699	14·3006	·9976	1·5010	86
5	·0873	·0872	·0875	11·4301	·9962	1·4835	85
6	·1047	·1045	·1051	9·5144	·9945	1·4661	84
7	·1222	·1219	·1228	8·1443	·9925	1·4486	83
8	·1396	·1392	·1405	7·1154	·9903	1·4312	82
9	·1571	·1564	·1584	6·3138	·9877	1·4137	81
10	·1745	·1736	·1763	5·6713	·9848	1·3963	80
11	·1920	·1908	·1944	5·1446	·9816	1·3788	79
12	·2094	·2079	·2126	4·7046	·9781	1·3614	78
13	·2269	·2250	·2309	4·3315	·9744	1·3439	77
14	·2443	·2419	·2493	4·0108	·9703	1·3265	76
15	·2618	·2588	·2679	3·7321	·9659	1·3090	75
16	·2793	·2756	·2867	3·4874	·9613	1·2915	74
17	·2967	·2924	·3057	3·2709	·9563	1·2741	73
18	·3142	·3090	·3249	3·0777	·9511	1·2566	72
19	·3316	·3256	·3443	2·9042	·9455	1·2392	71
20	·3491	·3420	·3640	2·7475	·9397	1·2217	70
21	·3665	·3584	·3839	2·6051	·9336	1·2043	69
22	·3840	·3746	·4040	2·4751	·9272	1·1868	68
23	·4014	·3907	·4245	2·3559	·9205	1·1694	67
24	·4189	·4067	·4452	2·2460	·9135	1·1519	66
25	·4363	·4226	·4663	2·1445	·9063	1·1345	65
26	·4538	·4384	·4877	2·0503	·8988	1·1170	64
27	·4712	·4540	·5095	1·9626	·8910	1·0996	63
28	·4887	·4695	·5317	1·8807	·8830	1·0821	62
29	·5061	·4848	·5543	1·8040	·8746	1·0647	61
30	·5236	·5000	·5774	1·7321	·8660	1·0472	60
31	·5411	·5150	·6009	1·6643	·8572	1·0297	59
32	·5585	·5299	·6249	1·6003	·8480	1·0123	58
33	·5760	·5446	·6494	1·5399	·8387	·9948	57
34	·5934	·5592	·6745	1·4826	·8290	·9774	56
35	·6109	·5736	·7002	1·4281	·8192	·9599	55
36	·6283	·5878	·7265	1·3764	·8090	·9425	54
37	·6458	·6018	·7536	1·3270	·7986	·9250	53
38	·6632	·6157	·7813	1·2799	·7880	·9076	52
39	·6807	·6293	·8098	1·2349	·7771	·8901	51
40	·6981	·6428	·8391	1·1918	·7660	·8727	50
41	·7156	·6561	·8693	1·1504	·7547	·8552	49
42	·7330	·6691	·9004	1·1106	·7431	·8378	48
43	·7505	·6820	·9325	1·0724	·7314	·8203	47
44	·7679	·6947	·9657	1·0355	·7193	·8029	46
45	·7854	·7071	1·0000	1·0000	·7071	·7854	45
		Cosine.	Cotangent.	Tangent.	Sine.	Radians.	Angle.