

大正

學義



大代數學講義

原 著 者

日 本 上 野 清


譯 述 者

吳江王家莢 吳興張廷華

校 訂 者

紹興駱師曾 諸暨趙秉良

平湖王積沂 紹興壽孝天



C. R. Chies.

商務印書館發行

中華民國二十五年六月初版
中華民國二十七年十一月國難後第一版
卅四年四月

大代數學講義一冊

(54254)

每冊定價大洋拾元

外埠酌加運費滙費

翻印必究
版權所有

發行所	印刷者兼	校訂者	譯述者	原著者
商務印書館	上海河南路 商務印書館	趙秉良 駱師曾 王積沂	張廷華 王家華	上野清

8D六〇九七(五)

序

俯仰宇宙。自然界。人爲昇。形而上者。形而下者。系而爲學。釐而爲科。繁然錯列。莫殫莫究。卽就一科而言之。有委有原。有約有博。作者創始。述者增高。駸駸乎日進而未有極限。學者之習科學也。當其始患不得入其門。既入其門。則欲罷不能。恆以一探究竟博觀變化爲愉快。遊山者思登五嶽之高。觀水者思極九瀛之闊。人情大抵然乎。憶曩時初習代數。所循誦者爲製造局之譯本。深喜代數立術。能探究數之公性情。足與中土天元術相韻頡。以視舊有各術之枝枝節節而爲之者。難易蓋迥判矣。然嘗因其術而觸類引伸。覺意象之表。尙有種種繁賾之理。足供研究者在。惜所誦之本。尙語焉而不詳。偶見某雜誌。載級數求和之解法。批卻導竅。得未曾有。聞友人述。謂是固譯自東文大代數者耳。於是知海外著述。不乏淵博精深先得我心者。深自恨未諳東文。無由窺此鴻祕也。近年以來。代數學教科書。出版日多。初學入門。可無困難之感。默計此時明習代數之人。當倍蓰於十年以前。苟非遙譯程度較高之書。引入於深造之域。殆不足壓其拾級而登之願望。館中同人。不辭勞瘁。取日本上野清之大代數講義而譯之。期年而譯始成。又期年而印始成。某以與於校勘之役。藉得稍稍瀏覽。一償夙願。既深自幸。且以此忖度並世學子之心。知其對於是書之出版。亦必有以先覩爲快者焉。吁。來者不可知。由今日言之。則是書者。固代數學中之五嶽九瀛也矣。

例 言

一是書爲日本上野清氏所編纂。取英國斯密斯氏霍爾氏乃托氏三家之大代數學。譯述解證。演爲講義。其立義之嶄新。體例之完備。久爲彼國教育家所歡迎。今重譯之。以供吾國習代數者參考之用。

一斯密斯氏書。自開端始。霍爾氏乃托氏書。自比例始。本書以斯密斯氏本爲主。以霍爾氏乃托氏之說補其缺。皆依據一千八百九十三年間最新之版而蒐採。上野氏此書。實可謂集三家之大成。

一是書共分八卷。都三十二編。自第一編至第十九編專論數之運算及性質。可稱爲初等之部。自第二十編至第三十二編。於數之運算及性質外。詳論數之變化及配合。可稱爲高等之部。學者明此界限。循序漸進。自無難通之處。苟能反覆熟習。代數學之奧蘊畢宣矣。

一是書例題之解答。專爲查對而設。學者習至例題。宜先以己意解演之。後視其與是書合否。合則考其孰繁孰簡。不合則考其誤在何處。庶易得益。若第按文循誦。而曰是易解是易解。則非編纂者之本意也。

一是書材料豐富。凡代數學之理法。包括殆盡。即向之稱爲難題者。依此書之理法解之。自覺游刃有餘。

一是書各種名詞。悉照現今所通行者而用之。仍附載英文原名。以資考證。譯文之中。間有爲譯者所添註而非上野清氏原書之所有者。則標譯二字以爲區別。

一是書文字不尙高深。解說不厭煩瑣。務以達意爲主。惟卷帙浩繁。譯述警校。前後易數人之手。始克竣事。未當之處。訛誤之處。均恐不免。遺望海內大雅。匡其不逮。則幸甚矣。

目 錄

第 壹 卷

第 壹 編

	頁
定義	1
例題及解	7

第 貳 編

根原之法則, 名數量, 正負 數量, 絕對量	9
加法	10
減法	11
例題及解	13
乘法	14
指數之法則	18
例題及解	18
除法	19
例題及解	21
根原之公式	22
多項式配分法則	22

第 參 編

加法	25
減法	26
括弧用法	26
例題一及解	27

第 肆 編

乘法	31
----------	----

頁

要用之公式	41
例題二及解	41

第 伍 編

除法	52
除法之別定義	55
恒同式	56
例題三及解	56

第 陸 編

因子分割法, 公式用法 ..	62
例題四及解	64
普通二次式之因子	66
係數之關係	68
項之整列及集合	69
例題五及解	73
整除式之定理	78
輪換次序	83
等勢式	84
例題六及解	87

第 陸 編 (補)

等勢式(霍爾及乃托氏第 三十四編摘要)	95
例題(三十四 a) 及解	95
例題(三十四 b) 及解	97

第貳卷

第柒編

	頁
最高公因子	98
例題及解	99
兩多項式之最高公因子	99
例題七及解	106
最低公倍數	109
例題及解	109
兩多項式之最低公倍數	110
例題八及解	110

第捌編

分數	114
分數之定理	114
通分母	115
分數之加法	116
分數之乘法	118
分數之除法	118
例題九及解	122

第玖編

方程式壹未知數量	135
一次方程式	136
例題及解	138
因子分割法之應用	139

頁

二次方程式	140
例題及解	142
二根之詳論	143
特別之例	144
不整方程式	146
無理方程式	149
定理	151
根及係數之關係	152
二次三項式之值	156
例題十及解	160
高次方程式	175
反商方程式	177
二項方程式	179
一之立方根	180
例題十一及解	181

第玖編 (補)

二次三項式(霍爾及乃托 氏第九編摘要)	191
例題(九b)及解	192
雜方程式(霍爾及乃托氏 第拾編摘要)	192
例題(十a)及解	193
分指數及負指數之注意	194

第 參 卷

第 拾 編	頁		頁
通同方程式.. .. .	195	例題及解	253
十文字之法.. .. .	197	文字值之限制... .. .	253
論一次通同方程式之解 法,例解	199	例題及解.	254
例題十二及解... .. .	204	三次恆同式,例解... .. .	255
二次通同方程式,例解 ...	210	定義	257
例題十三及解... .. .	214	雜例	257
解諸未知數量之通同方 程式,例解	220	例題十六及解... .. .	259
例題十四及解... .. .	225		
		第 拾 貳 編 (補)	
第 拾 壹 編		消去法(霍爾及乃托氏第 三十四編摘要)... .. .	281
問題,例解	236		
例題十五及解... .. .	239	第 拾 叁 編	
		方乘	282
第 拾 貳 編		方根	284
雜定理及雜例題	250	分指數及負指數... .. .	285
消去法,例解	250	例題及解	288
普通二次式之定理	253	有理補因子.. .. .	288
		例題十七及解... .. .	289

第 肆 卷

第 拾 肆 編

	頁
不盡根	295
例題及解	296
不盡根之定理	297
相屬不盡根	297
例題十八及解	300
虛數及複虛數	304
相屬複虛數, 模數	306

第 拾 伍 編

平方根	308
立方根	312
例題十九及解	315

第 拾 陸 編

比	320
比例	321
例題及解	324
變數	325
例題及解	327
不定式	328
例題及解	329
例題二十及解	329

第 拾 柒 編

等差級數	336
例題及解	338

頁

等比級數	342
例題及解	345
調和級數	347
三級數之中項	347
例題二十一及解	349

第 拾 捌 編

記數法	359
例題及解	360
分底數	361
例題及解	362
定理	363
例題及解	364
例題二十二及解	366

第 拾 玖 編

排列	372
例題及解	374
組合法	375
例題及解	377
組合之最大值	380
定理	380
等次積	382
例題及解	383
雜例	383
例題二十三及解	387

第 五 卷

第 貳 拾 編

	頁
二項式之定理... ..	295
二項式展開之最大項, 最大係數... ..	398
例題二十四及解... ..	399
二項展開式係數之性質... ..	402
例題及解... ..	403
文單蒙 (Vandermonde) 氏定理之證... ..	406
多項式之定理... ..	407
例題及解... ..	408
多項式公項之係數... ..	408
例題及解... ..	408
例題二十五及解... ..	410

第 貳 拾 壹 編

欵級數及發級數... ..	421
欵級數之關係... ..	422
項之符號... ..	429
最要三級數... ..	430
無限數因子之積, 兩級數之積... ..	432
例題二十六及解... ..	434

第 貳 拾 貳 編

二項式之任意指數, 二項式之欵級數... ..	442
-------------------------	-----

	頁
尤拉 (Euler) 氏之證明... ..	444
例題及解... ..	445
項之符號... ..	446
最大項... ..	447
例題及解... ..	449
例題二十七及解... ..	450
係數之和... ..	453
例題及解... ..	454
二項級數... ..	455
例題及解... ..	456
相等係數... ..	457
多項式之展開式... ..	459
多項式之雜例... ..	460
同物之組合... ..	461
例題及解... ..	462
等次積, 雜例... ..	463
例題二十八及解... ..	466

第 貳 拾 參 編

分項分數及不定係數, 一次因子之分母... ..	484
例題及解... ..	485
同因子之分母... ..	487
分項分數之應用... ..	488
不定係數... ..	489
例題二十九及解... ..	491

第 陸 卷

第 貳 拾 肆 編

	頁
指數之定理..	498
例題三十及解..	502
對數,對數之性質..	505
對數級數..	506
對數之計算..	508
訥白爾(Napier)氏之對數..	508
例題三十一及解..	509
常用對數..	518
對數表之用法..	519
複利及年金..	520
例題三十二及解..	522

第 貳 拾 伍 編

級數之和..	525
例題及解..	525
問題..	527
例題及解..	528
問題..	529
例題及解..	530
分項..	531
問題..	532
積彈..	533
例題及解..	534

	頁
形數,多角數..	535
例題三十三及解..	536
問題..	542
例題及解..	544
問題..	544
例題及解..	545
級數諸項成立之規率..	546
逐差法..	546
循環級數,問題,定理..	548
餘級數及發級數..	553
二項式之級數..	555
可西(Cauchy)氏之定理..	556
例題三十四及解..	559

第 貳 拾 陸 編

不等式..	576
例題及解,定理..	579
雜例..	583
例題三十五及解..	585

第 貳 拾 柒 編 (上)

連分數,漸近分數..	594
例題及解..	597
連分數之作法..	598

第 七 卷

第 貳 拾 陸 編 (續)

	頁
連分數續,漸近分數之性質	601
例題三十六及解	605
一般之漸近分數	611
循環連分數	614
連分數之歛級數	616
連分數之二次不盡根	622
二次不盡根作連分數	623
連分數之級數	626
例題三十七及解	630

第 貳 拾 捌 編

數之法則	645
耶列多蘇 (<i>Eratosthenes</i>) 氏 之選法	645
例題及解	651
勿而馬 (<i>Fermat</i>) 氏之定理	652
例題及解	652
問題	653
例題及解	654
問題	655
例題及解	657

平方數之形	658
例題三十八及解	661
恒同餘數	666
等餘之性質	667
勿而馬 (<i>Fermat</i>) 氏之定理	668
維而孫 (<i>Wilson</i>) 氏之定理	669
勿而馬 (<i>Fermat</i>) 氏定理之 擴張	672
拉果蘭諾 (<i>Lagrange</i>) 氏之 定理	672
循環小數之分數變化	673
雜例	674
例題三十九及解	676

第 貳 拾 玖 編

不定方程式	682
例題四十及解	689

第 貳 拾 玖 編 (補)

二次不定方程式 (霍爾及 乃托氏第二十八編摘要)	698
例題(二十八)及解	701

第 捌 卷

第 叁 拾 編

	頁
適遇法	704
例題及解	707
多次試驗之適遇	712
例題及解	713
豫期, 例題及解	718
反適遇, 例題及解	721
證據之適遇, 例題及解	723
雜例	725
例題四十一及解	728

第 叁 拾 壹 編

定準數	743
例題及解	746
定理, 例題及解	747
小定準數	750
定準數之展開式	750
例題及解	752
乘法之原則, 例題及解	757
複縱線式, 通同一次方程 式, 例題及解	760
消去法	762
例題四十二及解	764

第 叁 拾 貳 編

論理方程式, 函數	775
根原之定理	775

	頁
根及係數之關係	776
根之等勢式	776
根之等勢函數	779
等勢函數之例	780
方程式之變化	781
應用	784
例題四十三及解	786
虛數	790
不盡根, 例題及解	791
兩方程式之公根, 根之關 係	792
可通度之根	793
例題四十四及解	794
變函數	799
有理整函數之變化	802
洛兒 (Rolle) 氏之定理	805
代加德 (Descartes) 氏之符 號規則	806
例題四十五及解	808
三次方程式	812
四次方程式	814
斯土莫 (Sturm) 氏之定理	815
綜合除法	820
拾之倍數	823
忽拏 (Horner) 氏之定理	823
例題四十六及解	827

查 理 斯 密 司 氏
霍 爾 氏, 乃 托 氏

大 代 數 學 講 義

第 壹 卷

第 壹 編

定 義

1. 代數學 (Algebra) 爲論數之學科。與算術 (Arithmetic) 同。

譯注。算術舊稱數學。今從本書原名。稱算術。

算術中以 5, 6, 等數字表數。其數字各有一定之值。代數學中以文字表數。其文字可代任何之數 (即未定之數)。此代任何數之文字。謂之元字。但在一個題內所用同一之元字。所代爲同一之數。

代數學中所用之元字。可以代任何之數。故凡所論數之理法可推之於任何數而皆同。

例如 5 加 6 所得之數爲 11。此算術中所論之理法。不能類推之於他數。若代數中用元字代數。如 a 加 a 其所得之數常爲 a 之 2 倍。此 a 不論爲任何數皆合。

2. 數 (Numbers) 謂整數及分數也。

又有數量者。如價值。長。面積。時間之類。各以其單位爲標準。而以數示其爲單位之若干倍或若干分。

例如記物之長爲 4。此必爲其單位所度得之數。其單位爲一尺。或一步。或一里。或爲別定之長。則其物之長。即爲 4 尺。或 4 步。或 4 里。或爲所定之長之 4 倍。

夫數者。本祇用以計算數量。故無論以元字或數字。爲數量之記號。其元字與數字。皆僅能表其數量之數。而數與數量。雖有分別。尋常亦屢有以數量二字爲數之代字者。

譯註 算術中全以數字與單位相連而言。如4尺或4步謂之名數。對名數而言。則凡不連率單位之數。謂之不名數。名數所以表數量。而名數中所用之數字。仍以表數而已。

〔注意〕此後各章。其關係尤要者。常加()爲記號。如下8章關係尤要。故作(3)。

3. 加號 + (Plus) 置此號於一數之前。以示此一數加於前一數也。

例 $6+3$ 。以示3加於6也。又 $6+3+2$ 。以示3加於6之後。又以2加之也。

$a+b$ 。以示b加於a也。又 $a+b+c$ 。以示b加於a之後。又以c加之也。

4. 減號 - (Minus) 置此號於一數之前。以示從前一數減去此一數也。

例 $6-3$ 。所以示自6減去3也。又 $6-3-2$ 。所以示自6減3之後又以2減之也。

$a-b$ 。所以示自a減去b也。又 $a-b-c$ 。所以示自a減b之後又以c減之也。此與加號之次序同。

加減兩號並用。如 $a+b-c$ 。爲b加於a之後而以c減之。

又 $a-b+c$ 。爲自a減去b而又以c加之也。

〔法則〕加減之運算。必從左順次以及於右。

例 $9+3+2=12+2=14$ 。此從左及於右者也。

又 $9+3+2=9+5=14$ 。此從右及於左者也。

加法之演算。從右及於左。其結果尙無不合。然依此習慣。以行於減法。則有大誤。

例 $9-3-2=6-2=4$ 。此從左及於右者也。

若從右及左而運算之。則 $9-3-2=9-1=8$ 。即爲大誤。何則以 $9-3-2$ 之意。謂從9減3餘6。又從6減2餘4。此4即所得之結果。若從右運算。則與題意違背。學者宜慎之。

又 $9+3-2=12-2=10$ 。此從左及於右者也。

$9+3-2=9+1=10$ 。此從右及於左者也。其結果尚無不合。

$9-3+2=6+2=8$ 。此從左及於右者也。

$9-3+2=9-5=4$ 。此從右及於左者也。其結果不合。

5. 乘號 \times [into] 置此號於一數之前。以示此一數乘於前一數也。

例 $a \times b$ 。所以示以 b 乘 a 也。 $a \times b \times c$ 。所以示以 b 乘 a 。又以 c 乘之也。文字與文字之間。或數字與文字之間。其乘號可省。例 $a \times b$ 記爲 ab 。 $a \times b \times c$ 記爲 abc 。

若夫數字與數字之間。其乘號斷不可省。否則大誤。例記 3×6 爲 36 。此 36 卽爲三十六之數。斷不可以代 3×6 者也。

有時以點 (.) 代乘號。然恐其與小數點相混。故記此點時。比小數點略低。例 6×8 則記如 6.8 。

[餘論] 數字與數字之間。加號有時可省。

例 $60+3$ 卽 63 。又 $6+\frac{3}{10}$ 卽 $6\frac{3}{10}$ 。

然如 $8+3$ 則不得記爲 83 。

6. 除號 \div [Divided by] 置此號於一數之前。以示用此一數以除前一數也。

例 $a \div b$ 。卽 a 以 b 除也。 $a \div b \div c$ 。所以示 a 以 b 除。又以 c 除之也。

乘除兩號並用。如 $a \div b \times c$ 。爲 a 以 b 除。又以 c 乘之也。又 $a \times b \div c$ 。爲 a 以 b 乘。又以 c 除之也。

[法則] 乘除之運算。亦從左順次以及於右。與加減之運算同。若連用加減乘除之記號。如 $a-b \times c + c \div d$ 。其運算之次序若何。則於 16 章之末別爲說明之。

7. 積 (Product) 凡二數或二個以上之數相乘。其結果爲諸數之連乘積 (Continued product)。或單稱積。而其所乘之諸數。爲其積之因子 (Factor)。

將積之因子分而爲二。彼此互爲係數 (Coefficient)。

例將 $3abx$ 之因子分爲 3 與 abx 。則 3 爲 abx 之係數。而 abx 爲 3 之係數。

若分爲 $3ab$ 與 x 。則 $3ab$ 爲 x 之係數。而 x 爲 $3ab$ 之係數。

積中一因子以數字表之者。謂之數字係數 (numerical coefficient)。

例 $3abx$ 。其 3 爲 abx 之數字係數。

[注意] 係數用數字係數之處最多。

8. 方乘 (Power) 諸因子相同。其所成之積。爲其因子之方乘。例 a 與 a 二因子所成之積 aa 。爲 a 之二方乘。又 aaa 爲 a 之三方乘。 $aaaa$ 爲 a 之四方乘。以下類推。

有時祇有一個因子 a 。卽以爲 a 之一方乘。

二方乘亦稱平方 (Square)。三方乘亦稱立方 (Cube)。例 aa 爲 a 之平方。 aaa 爲 a 之立方。

9. 指數 (Index) aa , aaa , $aaaa$ 等之方乘簡略記法。卽以 a^2 代 aa 。以 a^3 代 aaa 。以 a^4 代 $aaaa$ 。故 a^n 可以代 $aaaa\cdots$ 乘至 n 次之方乘也 (n 爲整數)。

其於 a 之右肩上所記之小數字 2, 3, 4 及文字 n 。所以示同因子之數。如 a^2b^2 卽爲 $aaabbb$ 。

如上所記之小數字及文字以示同因子之數者。稱爲指數。 a 之一方乘當記爲 a^1 。然可略之。僅記爲 a 。

10. 方根 (Root) 若一數之平方等於 a 。則其一數。爲 a 之平方根。例 4 之平方卽 4^2 等於 16。則 4 爲 16 之平方根。

平方根 (Square Root) 之記號。記以 $\sqrt{\quad}$ 。或略記以 $\sqrt{\quad}$ 。故 \sqrt{a} 爲 a 之平方根。 $\sqrt{16}$ 爲 16 之平方根。卽 $\sqrt{16}=4$ 。

若一數之立方等於 a 。則其一數爲 a 之立方根。例 3 之立方卽 3^3 等於 27。故 3 爲 27 之立方根。

立方根 (Cube Root) 之記號。記以 $\sqrt[3]{\quad}$ 。故 $\sqrt[3]{a}$ 爲 a 之立方根。又 $\sqrt[3]{27}$ 卽 3 爲 27 之立方根。

四乘根記以 $\sqrt[4]{\quad}$ 。五乘根記以 $\sqrt[5]{\quad}$ 。又 n 乘根記以 $\sqrt[n]{\quad}$ 。故 $\sqrt[n]{a}$ 爲 a 之四乘根。 $\sqrt[n]{a}$ 爲 a 之 n 乘根。但 n 限於整數。

√之記號。蓋從根字即 Radix 之首字碼 r 變化而成。此種記號稱爲根號 (Radical Sign)。

11. 不盡根 (Surd) 所得之方根。其小數無盡者。稱爲不盡根或無理數 (Irrational Surd)。例 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt[4]{4}$ 若精密求之。其小數無有窮盡。故稱 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt[4]{4}$ 等爲不盡根。

依算術上求平方根之法。 $\sqrt{7}$ 之值僅能得其略近數 2.6457..... 若於代數學 7 之平方根。祇記爲 $\sqrt{7}$ 而已。

12. 代數式 (Algebraical expression) 以種種之文字、數字、符號集合而成者。

例如 $7a+b^2-cd$ 或 $\sqrt{a+9}$ 等。皆爲代數式。

若如 $+ \times 6 - \div ab$ 爲任意集合毫無意義者。不得謂之代數式。

項 (Terms) 以 + 或 - 相連之各部爲項。

例 $2a-3bx+5cy^2$ 此代數式之各部。爲 $2a-3bx, +5cy^2$ 。即此代數式爲有三項者。

若以 \times 或 \div 相連之各部。不得曰項。例 $5+6-7$ 爲有 5, +6, -7 之三項。若 $5 \times 6 \div 7$ 。其全部分僅得爲一項。

例 $2a-3bx+5cy^2$ 爲 $2 \times a - 3 \times b \times x + 5 \times c \times y \times y$ 。其在 + 及 - 之間者得謂之項。其在 \times 與 + 或 - 之間者不得謂之項。

13. 同類項 (Like terms) 有二項。除數字係數之外。其餘悉相同者。謂之同類項。

例 a 與 $3a$ 爲同類項。 $5a^2b^2c$ 與 $3a^2b^2c$ 爲同類項。

至若 $5a^2b^2c$ 與 $3a^2b^2c$ 則爲異類而非同類項。何則。一數中 a 之因子有二。 b 之因子有三。而又一數中 a 之因子有三。 b 之因子有二。故相異也。又 $5a^2b$ 與 $5ax$ 亦爲異類項。

14. 壹項式 (Monomial expression) 代數式祇有一項者。例如 $3ab, 7 \div 6 \times 8$ 。皆爲壹項式。

多項式 (Multinomial expression) 代數式有二項或二以上之項者。

例如 $a+b, a-b \times c$ 爲二項式 (Binomial expression)。

$a-b+c$, ax^2+bx+c 爲三項式 (Trinomial expression)。

15. 相等號 = (Equals) 置此號於兩代數式之間。以示其兩代數式爲相等者。例 $a=b$ 。爲 a 等於 b 也。 $a+b=c$ 。爲 $a+b$ 等於 c 也。

若置符號 $>$ 於兩代數式之間。所以示前式大於後式。例 $a>b$ 爲 a 大於 b 也。

若置符號 $<$ 於兩代數式之間。所以示前式小於後式。例 $a<b$ 爲 a 小於 b 也。

若置符號 \neq 於兩代數式之間。所以示前式與後式不相等。例 $a\neq b$ 爲 a 不等於 b 。即爲 a 大於 b 或小於 b 也。故 $a\neq b$ 或記爲 $a\geq b$ 。

若置符號 \geq 於兩代數式之間。所以示前式不大於後式。例 $a\geq b$ 爲 a 不大於 b 。即爲 a 小於 b 或等於 b 也。故 $a\geq b$ 或記爲 $a\leq b$ 。

若置符號 \leq 於兩代數式之間。所以示前式不小於後式。例 $a\leq b$ 爲 a 不小於 b 。即爲 a 大於 b 或等於 b 也。故 $a\leq b$ 或記爲 $a\geq b$ 。

16. 括弧 (Brackets) 將二項或二項以上之代數式。置於括弧之內。視此代數式之全項。當作一項。例 $(a+b)c$ 其意謂於 b 加於 a 之結果。而以 c 乘之。其 $a+b$ 附以括弧者。視 $(a+b)$ 爲一項。即視爲 b 加於 a 之結果也。

又 $(a-b)(c+d)$ 。其意謂以 a 減 b 爲一數。 c 加 d 爲又一數。而以此二數相乘也。

又 $(a+b)^2(c+d)^2$ 其意謂以 a, b 和之平方爲一數。 c, d 和之平方爲又一數。而以此二數相乘也。

所有括弧之形。如 $(), \{ \}, []$ 。

括線 (Vinculum) 以——代括弧者也。

例 $a-\overline{b-c}$ 即 $a-(b-c)$ 。又 $\sqrt{a+b}$ 即 $\sqrt{(a+b)}$ 。根號無括弧及括線者。其根號僅屬於一數。如 $\sqrt{2a}$ 爲於 2 之平方根即 $\sqrt{2}$ 以 a 乘之。與 $\sqrt{2a}$ 或 $\sqrt{(2a)}$ 不同。若 $\sqrt{2a}$ 或 $\sqrt{(2a)}$ 。則爲 $2a$ 之平方根也。

又 $\sqrt{a+x}$ 爲於 a 之平方根即 \sqrt{a} 加以 x 也。與 $\sqrt{a+x}$ 或 $\sqrt{(a+x)}$ 不同。因 $\sqrt{a+x}$ 或 $\sqrt{(a+x)}$ 。爲 $a+x$ 之平方根也。欲表示全式之平方根。必用括弧或括線將全式包括之。

記分數時。於其分子分母間所置之橫線。與括線同其作用。

如 $\frac{a+b}{3}$ 可記為 $\frac{1}{3}(a+b)$ 。但 $\frac{1}{3}a+b$ 不得視為與 $\frac{1}{3}(a+b)$ 同也。

〔注意〕代數式之各項。雖無括弧。可視為與有括弧者無異。以行其加減。

例 $a+bc-d \div e+f$ 。此式為有 $a, +bc, -d \div e, +f$ 四項。其 $+bc$ 及 $d \div e$ 視為 $+(bc)$ 及 $(d \div e)$ 。故此式可作為 $a+(bc)-(d \div e)+f$ 。其意為於 a 加 b, c 之積。又從其所得之結果以 e 除 d 之商減之。末則加以 f 也。

此即如 4 章所云加減之運算從左以及於右也。

又如 $15+6 \times 8-36 \times 4 \div 18+72 \div 9-1$ 。其運算之次序如次。

$$\begin{aligned} & 15+(6 \times 8)-(36 \times 4 \div 18)+(72 \div 9)-1 \\ & =15+48-(144 \div 18)+8-1=15+48-8+8-1. \end{aligned}$$

〔法則〕於一式中加減乘除之運算。其次序先乘除而後加減。
(參觀 4 章及 6 章)。

例 題

1. 設 $a=1, b=2, c=3$ 及 $d=4$ 。試求下列各式之值。

$$\begin{aligned} (1) \quad 5a+3c-3b-2d &= 5 \times 1 + 3 \times 3 - 3 \times 2 - 2 \times 4 \\ &= 5 + 9 - 6 - 8 = 14 - 6 - 8 = 8 - 8 = 0 \quad [\text{答}] \end{aligned}$$

$$(2) \quad 26a-3bc+d = 26 \times 1 - 3 \times 2 \times 3 + 4 = 26 - 18 + 4 = 12 \quad [\text{答}]$$

$$(3) \quad ab+3bc-5d. \quad [\text{答 } 0] \qquad (4) \quad bc-ca-ab. \quad [\text{答 } 1]$$

$$(5) \quad a+bc+d. \quad [\text{答 } 11]$$

$$\begin{aligned} (6) \quad bcd+cd a+dab+abc \\ = 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 1 + 4 \times 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 = 50 \quad [\text{答}] \end{aligned}$$

2. 設 $a=3, b=1$ 及 $c=2$ 。則次之各值如何。

$$\begin{aligned} (1) \quad 2a^3-3b^2-4c^3 &= 2 \times 3^3 - 3 \times 1^2 - 4 \times 2^3 \\ &= 2 \times 27 - 3 \times 1 - 4 \times 8 = 54 - 3 - 32 = 19. \quad [\text{答}] \end{aligned}$$

$$(2) \quad 2a^2b-3b^3c^2 = 2 \times 3^2 \times 1 - 3 \times 1^3 \times 2^2 = 18 - 12 = 6. \quad [\text{答}]$$

$$(3) \quad \frac{1}{16}c^3 - \frac{1}{2}b^3 = \frac{1}{16} \times 2^3 - \frac{1}{2} \times 1^3 = \frac{1}{16} \times 8 - \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \quad [\text{答}]$$

$$(4) a^3 + 3ac^2 - 3a^2c - c^3. \text{ [答 1]}$$

$$(5) 2a^4b^2c - 3b^4c^2a - 2c^4a^2b. \text{ [答 0]}$$

3. $a=3, b=2, c=1$ 及 $d=0$. 求下各式之值。

$$(1) (3a+4d)(2b-3c) = (3 \times 3 + 4 \times 0)(2 \times 2 - 3 \times 1) \\ = (9+0)(4-3) = 9 \times 1 = 9. \text{ [答]}$$

$$(2) 2a^2 - (b^2 - 3c^2)d = 2 \times 3^2 - (2^2 - 3 \times 1^2) \times 0 = 18 - 0 = 18. \text{ [答]}$$

$$(3) a^3 - b^3 - 2(a-b+c)^3. \text{ [答 3]}$$

$$(4) a(b^2 - c^2) + b(c^2 - d^2) + d(a^2 - b^2). \text{ [答 11]}$$

$$(5) 3(a+b)^2(c+d) - 2(b+c)^2(a+d) = 3(3+2)^2(1+0) - 2(2+1)^2(3+0) \\ = 3 \cdot 5^2 \cdot 1 - 2 \cdot 3^2 \cdot 3 = 3 \times 25 \times 1 - 2 \times 9 \times 3 = 21. \text{ [答]}$$

$$(6) \frac{2a^2}{b+c} - \frac{2b^2}{c+a} - \frac{2c^2}{b+d} + \frac{2d^2}{a+d} = \frac{2 \times 3^2}{2+1} - \frac{2 \times 2^2}{1+3} - \frac{2 \times 1^2}{2+0} + \frac{2 \times 0^2}{3+0} \\ = \frac{2 \times 9}{3} - \frac{2 \times 4}{4} - \frac{2 \times 1}{2} + \frac{2 \times 0}{3} = 6 - 2 - 1 + 0 = 3. \text{ [答]}$$

4. 若 $a=5, b=4, c=3$. 求次之各值。

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3. \text{ [答]}$$

$$\sqrt{5ab} + c = \sqrt{5 \times 5 \times 4} + 3 = 5 \times 2 + 3 = 13. \text{ [答]}$$

$$\sqrt{b^4c^2 + b^2c^4} = \sqrt{4^4 \times 3^2 + 4^2 \times 3^4} = \sqrt{256 \times 9 + 16 \times 81} \\ = \sqrt{3600} = 60. \text{ [答]}$$

$$\sqrt[3]{a^2 + 4b^2 + 4c^2} = \sqrt[3]{5^2 + 4 \times 4^2 + 4 \times 3^2} = \sqrt[3]{25 + 64 + 36} \\ = \sqrt[3]{125} = 5. \text{ [答]}$$

5. (1) $a=2, b=1$. 或 (2) $a=5, b=3$. 或 (3) $a=12, b=5$. 則 $a^2 - b^2$ 恆等於 $(a+b)(a-b)$. 試證之。

[證] (1) $a^2 - b^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ 而 $(a+b)(a-b) = (2+1)(2-1) = 3 \times 1 = 3$. 即 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. (2) 及 (3) 亦用同法證之。

6. (1) $a=3, b=2$ 或 (2) $a=5, b=1$ 或 (3) $a=6, b=8$ 則次之式恆相等. 試證明之。

$$a^3 - b^3, (a-b)(a^2 + ab + b^2), (a-b)^3 + 3ab(a-b), (a+b)^3 - 3ab(a+b) - 2b^3.$$

第貳編

根原之法則

17. 名數量 (Concrete quantities) 凡名數量。必以其同類單位之若干倍計算之。例如長 14 尺。即長 1 尺之 14 倍。然如論財產。同一金額。而有收與付之不同。贏與絀之各異。論路之距離。於同一直線上。而有反對之兩方向。論時間。計某時以前之時。與某時以後之時。而有既往將來之分別。若此類者。不遑枚舉。

故名數量有正反對兩種性質。解問題時。當從其量之性質。互用特別之符號表之。

18. 正及負數量 某數量不論其單位若何。而如 $+4$ 者所以示增加單位 4 倍之意。如 -4 者。所以示減少單位 4 倍之意。

若以 $+4$ 表某人之財產增加 4 圓。(以一圓為單位)則以 -4 表某人之財產減少 4 圓。或以 $+4$ 表某人之借款增加 4 圓。則以 -4 表某人之借款減少 4 圓。

其他若以 $+4$ 表某人贏利 4 圓。則以 -4 表某人虧本 4 圓。或以 $+4$ 表某人虧本 4 圓。則以 -4 表某人贏利 4 圓。

若就直線上之方向計之。以 $+4$ 表其方向上之距離 4 尺。則以 -4 表其反對方向上之距離 4 尺。

19. 性質之符號 (Signs of Affections) 如前章所述。若從其反對之性質。別立新符號以表之。於計算時更覺煩冗。不若仍用 $+$ 及 $-$ 之符號為簡便也。

故於代數學所用之 $+$ 及 $-$ 之符號有二種意義焉。一如舊例。名曰加號減號。其效用與算術同。是謂運算之符號。一以區別數量之性質。表示其正反對之形狀。是謂性質之符號。

將性質之符號。置於數量之前。所以表示其數量之性質若何也。性質之符號 $+$ 。常畧而不用。例 $+4$ 可畧記為 4。若夫 5 加 6 即 $5+6$ 。此 $+$ 為運算之符號。斷不可畧。否則將 $5+6$ 畧記為 56 誤甚。

20. 正數量及負數量 於數量之前，置符號+者，謂之正數量(Positive quantity)。於數量之前，置符號-者，謂之負數量(Negative quantity)。而+及-謂之正號及負號。

〔註〕於代數學上之符號，雖有加減乘除之符號，及= $\langle \rangle$ 等種，而僅云符號時，大都指正號+負號-而言。

故變代數式之符號時，即將其式中之各項+變爲-，-變爲+而已。

例變 $a+b-c \times d$ 之符號，則得 $-a-b+c \times d$ 。

21. 絕對量(Absolute Magnitude) 僅計某量之大小，不論其符號之關係若何，此謂絕對量，即無性量。

例如昇上4尺，及降下4尺，當示以+4及-4，今僅曰4尺，即謂之絕對量。

又如計年數而曰五年，此五年爲從今以前之五年乎，抑爲從今以後之五年乎，今但曰五年，即謂之絕對量，又如計銀錢而曰五圓，此五圓既非我所有，亦非人所有，無所謂贏絀，無所謂損益，此謂之絕對量。

譬如開議會時，有提出五圓之議案，吾輩與絕對的相爲反對，而曰議員之於此五圓，爲支出抑爲收入，二者必居一於此，否則僅曰五圓，是有名而無實也，故反對此議案者，非有反對收入五圓之意，亦非有反對支出五圓之意，此即絕對二字之意義也。

加 法

22. 加法(Addition) 將二數量或諸數量合併而爲一，其法謂之加法，其結果謂之和(Sum)。

正數量示增，負數量示減，故加正數量，增其絕對量，加負數量，減其絕對量。

今舉一俗例，譬如火之始燃，加以薪，則火勢增，加以水，則火勢減，然則加正數量，與加負數量，其意亦猶是耳。

例如以+4，加於+6，則得 $+6+4$ ，即+10，以-4加於+10，則得 $+10-4$ ，即+6。

故 $+6+(+4)=+6+4,$
 $+10+(-4)=+10-4.$

又如以 $+b$ 加於 $+a$ 。得 $+a+b$ 。以 $-b$ 加於 $+a$ 。得 $+a-b$ 。即

$$+a+(+b)=+a+b.$$

$$+a+(-b)=+a-b.$$

由是得次之規則。

〔規則〕將任何項加於某代數式時。可不變其符號。以列於某代數式之次。

用 a 及 b 之數值。可以求得 $a+b$ 。及 $a-b$ 之數值。而於代數學。不論其 a 及 b 之值如何。則僅作 $a+b$ 及 $a-b$ 。其意義即已充足。至若 $5+3$ 及 $5-3$ 。可更充其意。即為 8 及 2 。

23. 負數之結果 $a-b$ 其 b 若大於 a 。則於算術上無從計算之。

例如 $a=3$ 及 $b=5$ 。則 $a-b$ 為 $3-5$ 。而 3 本不能減 5 。然減 5 同於減 3 之後又減 2 也。由此意以推之。則得

$$3-5=3-3-2=-2.$$

但此 -2 有二種見解。一以示 2 減於他代數式之意。一以示與 $+2$ 之性質相反對之意。若此 -2 為最後之結果。則以後之見解為合宜。

有時解問題時。所得負數之結果。與題理不能合者。例如計算某邑人口之數。若得負數之結果。則與人口之數不相合。解此問題時。其結果非但負數不能合理。即分數亦不能合理。

減 法

24. 減法 (Subtraction) 減法之運算。與加法適相反。減數量時。正者反減之。負者反加之。故減正數量減其絕對量。減負數量加其絕對量。

例如從 $+10$ 減 $+4$ 。得 $+10-4$ 。即 6 。

又從 $+6$ 減 -4 。得 $+6+4$ 。即 10 。

$$\text{故} \quad +10 - (+4) = +10 - 4 = +6.$$

$$+6 - (-4) = +6 + 4 = +10.$$

$$\text{又依同理} \quad a - (+b) = a - b.$$

$$a - (-b) = a + b.$$

由是得次之規則

[規則] 將任何項減自某代數式時。可變其符號。以列於某代數式之次。

25. 正項及負項 以上文字所表之量。祇限於正數。然存此限制。殊多不便。此後所用文字。其所表之量。未必定為正數。如前所述之 $a+b$ 。其 a, b 假定為正數量。此後所用之 a, b 。其所表之量為正為負。未可定也。即任何文字。可表正或負之數量。學者當注意之。

惟文字雖可表正或負之數量。而文字前置 $+$ 者。未必果為正數量。前置 $-$ 者。未必果為負數量。

例如 $+a$ 。此 a 所表者。若為 $+4$ 。則 $+(+4) = +4$ 。若為 -4 。則 $+(-4) = -4$ 。

然項之正負。則從外觀上判定之。其以 $+$ 置於前者。稱為正項 (Positive term)。以 $-$ 置於前者。稱為負項 (Negative term)。

26. 加減之公式 定 b 為正數量。證 22 及 24 章之結果如次。

$$\left. \begin{aligned} a + (+b) &= a + b \dots (1) \\ a + (-b) &= a - b \dots (2) \\ a - (+b) &= a - b \dots (3) \\ a - (-b) &= a + b \dots (4) \end{aligned} \right\} \dots (A)$$

於此公式。其 b 不但為任何之正數量能合於理。即 b 為任何之負數量亦合於理。

若 b 為負數等於 $-c$ 。但 c 為正整數。然

$$+b = +(-c) = -c.$$

$$-b = -(-c) = +c.$$

乃從(A)之四式中。以 $-c$ 代其 $+b$ 。以 $+c$ 代其 $-b$ 。則得

$$a+(-c)=a-c,$$

$$a+(+c)=a+c,$$

$$a-(-c)=a+c,$$

$$a-(+c)=a-c,$$

此即 b 爲負數量所得之關係。其 c 爲任何之正數量。均能合理。故 b 爲負數量。亦能合理。

由是知(A)之公式。其 b 不論其爲正數量或負數量。皆能合理。

27. 定義壹 兩數量 a 及 b 之差。爲從第壹數量 a 減去第貳數量 b 所得之結果也。

例5與4之差。爲 $5-4$ 。又4與5之差。爲 $4-5$ 。

故代數差。(即於代數學上所謂之兩數差)非同算術差(即於算術上所謂之兩數差)從大數減小數也。如欲表示 a 與 b 之算術差。其 a, b 爲未定之值。無從辨別其大小。則當記爲 $a\sim b$ 。而此 $a\sim b$ 之 \sim 。與 $-$ 判然不同。

此 $a\sim b$ 。其意以爲 a 若大於 b 。則爲 $a-b$ 。 a 若小於 b 。則爲 $b-a$ 。非若代數差所得之 $a-b$ 。無論 a, b 之值若何。早決定從 a 減 b 也。

定義貳 壹數量 a 比他數量 b 爲大。則 $a-b$ 必爲正。由此定義。連次記 $1, 2, 3, 4, \dots$ 其各數比其前數爲大。又連次記 $-1, -2, -3, -4, \dots$ 其各數比其前數爲小。

例 -4 必比 -3 爲小。何則。因 $(-3)-(-4)=-3+4=1$ 。其所得爲正數故也。

由是如 $7, 5, 0, -5, -7$ 等。可依大小之順序而列之。

例 題

1. (1) 5及 $+4$ 。(2) -5 及 4 。(3) $5, -3$ 及 -6 。(4) $-3, 4, -6$ 及 5 。求其各和。

[解 1, $-1, -4, 0$]

[解] (1) $5+(-4)=5-4=1$ 。

(4) $-3+4+(-6)+5=-3+4-6+5=0$ 。

2. (1) 從-4減3. (2) 於3減-4. (3) 於 $-b$ 減 $-a$. [答-7, 7, $-b+a$]

[解] (1) $-4-3=-7$. (2) $3-(-4)=3+4=7$.

3. 有風雨表, 第一日降下.01吋. 第二日上昇.015吋. 第三日又降下.01吋. 問比初日昇降若干吋. [答-.005吋]

[解] $-.01+.015+(-.01)$ 吋 $=.015-.02$ 吋 $=-.005$ 吋. 即降下.005吋.

4. 攝氏寒暑表原指10度. 浸入冷水中. 則降下20度. 問指在何度. [答-10度]

[解] $10+(-20)=10-20=-10$. 即零度下10度.

5. $a=1, b=-2$, 及 $c=3$. 則 $a-b+c$ 及 $-a+b-c$ 之值如何. [答6, -6]

[解] $a-b+c=1-(-2)+3=1+2+3=6$.

6. $a=1, b=-2, c=-1$. 或 $a=-2, b=-1, c=-3$. 則 $-a+b-c$ 之值如何. [答-2, 4]

7. $a=-3, b=-2, c=-1$. 則 $a-(-b)+(-c)$ 之值如何. [答-4]

[解] $a-(-b)+(-c)=a+b-c=(-3)+(-2)-(-1)=-4$.

8. $a=-2, b=-3, c=-5$. 則 $-a+(-b)-(-c)$ 之值如何. [答0]

9. $a=-1, b=-2, c=-3$. 則 $-(-a)+b-(-c)$ 之值如何. [答-6]

[解] $-(-a)+b-(-c)=a+b+c=(-1)+(-2)+(-3)=-6$.

乘 法

28. 乘法 (Multiplication) 於算術中乘法最初之定義. 而曰一數以他數乘之者. 為連次取其數. 其次數同於他數單位之倍數也. 例如5以4乘. 以其他數單位之倍數為4. 故取其數至四次即得.

然上之定義. 僅合於整數. 而不能合於分數. 故茲不得不別立定義. 使任何數之乘法. 皆可援此定義以說明之.

定義 第一數以第二數乘. 為以第二數代其第二數所有之單位即得.

例如5以4乘. 其4之中所有之單位. 為 $4=1+1+1+1$.

以5代其單位1. 則為 $5 \times 4=5+5+5+5$.

又 $\frac{5}{7}$ 以 $\frac{3}{4}$ 乘. 其 $\frac{3}{4}$ 為以單位1四等分之為一分. 而取其三分. 即

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}。以 \frac{5}{7} 代其單位 1。則以 \frac{5}{7} 四等分$$

之。即 $\frac{5}{7 \times 4}$ 爲一分。而取其三分。得

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{7 \times 4} + \frac{5}{7 \times 4} + \frac{5}{7 \times 4} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4}。$$

$$又 (-5) \times 4 = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -5 - 5 - 5 - 5 = -20。$$

上之定義。其以負數乘者亦可通用。

例 4 以 -5 乘。-5 即同於逐次減五回。

$$-5 = -1 - 1 - 1 - 1 - 1。$$

$$4 \times (-5) = -4 - 4 - 4 - 4 - 4 = -20。$$

又 -5 以 -4 乘。以

$$-4 = -1 - 1 - 1 - 1。故$$

$$\begin{aligned} (-5) \times (-4) &= -(-5) - (-5) - (-5) - (-5) \\ &= +5 + 5 + 5 + 5 \quad (\text{由 26 章}) \\ &= +20。 \end{aligned}$$

故此定義。對於任何數。皆能合用。

因得次之法則。

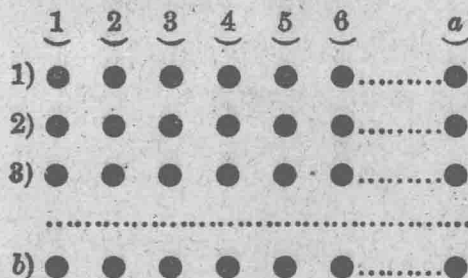
[法則] 求兩數量之積。先以兩數之絕對值相乘。次定其符號。若兩數量俱爲正或俱爲負。則其積爲正。置符號 + 於積之前以表之。若兩數量一爲正一爲負。則其積爲負。置符號 - 於積之前以表之。

$$\begin{array}{l} \text{例} \\ \left. \begin{array}{l} (+a) \times (+b) = +ab \dots (1) \\ (-a) \times (-b) = +ab \dots (2) \\ (+a) \times (-b) = -ab \dots (3) \\ (-a) \times (+b) = -ab \dots (4) \end{array} \right\} \dots (B) \end{array}$$

此法則。所以決定積之符號者。謂之符號之法則 (Law of Signs)。此法則簡言之。則曰同號得 +。異號得 - (Like signs give +, and unlike signs give -)。

29. 積之因子 不拘於次序如何。無論為整數或分數。第壹數以第貳數乘。同於第貳數以第壹數乘。此於算術已證明之。其證法如次。

先取兩整數 a 及 b 。用黑點 ● 作圖以示之。



此圖中所示。橫曰列。縱曰行。每列有 a 個黑點。共有 b 列。每行有 b 個黑點。共有 a 行。

故此黑點之全數。從橫列計算之。為有 a 個黑點之 b 倍。即 $a \times b$ 。從縱行計算之。為有 b 個黑點之 a 倍。即 $b \times a$ 。∴ $a \times b = b \times a$ 。

若 a 及 b 為分數。則由 28 章。

$$\frac{5}{7} \text{ 以 } \frac{3}{4} \text{ 乘。為 } \frac{5 \times 3}{7 \times 4} \text{ 又 } \frac{3}{4} \text{ 以 } \frac{5}{7} \text{ 乘。為 } \frac{3 \times 5}{4 \times 7}$$

惟依上之整數證法。 $5 \times 3 = 3 \times 5$ 。又 $7 \times 4 = 4 \times 7$ 。故 $\frac{5 \times 3}{7 \times 4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7}$ 。即

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

由是 $ab = ba$ 。已證得 a 及 b 凡為正數者。無不合理。

然此法則。不獨對於正數。即負數亦能合理。何則。依前章所述。而知兩數之積之絕對值。與符號不相關。即 $+a \times -b$ 及 $-b \times a$ 。其絕對值 ab 及 ba 相等。故 $+a \times -b = -b \times a$ 。

如是 a 及 b 為任何值。如次之公式皆能合理。

$$ab = ba \dots \dots \dots (1)$$

今試以 c 代前圖之黑點 ●

$$\begin{array}{cccccc}
 & \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & \underbrace{4} & \underbrace{a} \\
 1) & c & c & c & c & \dots\dots\dots c \\
 2) & c & c & c & c & \dots\dots\dots c \\
 & & & & & \dots\dots\dots \\
 & b) & c & c & c & c \dots\dots\dots c
 \end{array}$$

即 c 之全數。爲有 ab 個。故 $c \times (ab)$ 。

又以每列爲 c 之 a 倍。即 $c \times a$ 。共有 b 列。故 $c \times a \times b$ 。

由是 $c \times a \times b = c \times (ab)$ 。

此對於 a, b, c 之任何值。皆能合理。與 $ab = ba$ 之法則同。故得次之公式。

$$a \times b \times c = a \times (b \times c) \dots\dots\dots (2)$$

前云積之因子不拘於次序如何。茲可引用 (1) (2) 兩公式以證明之如次。

$$\begin{aligned}
 abc &= a(bc) && \text{由 (2)} \\
 &= a(cb) && \text{由 (1) } bc = cb \\
 &= acb && \text{由 (2)} \\
 \text{又} \quad abc &= a(bc) = (bc)a && \text{由 (1)} \\
 &= bca.
 \end{aligned}$$

如是得次之公式。

$$abc = acb = bca = bac = cab = cba \dots\dots\dots (C)$$

30. 壹項式之積 既知積之因子不拘於次序如何。由是
可求得壹項式之積如次。

$$3a \times 4a = 3 \times 4 \times a \times a = 12a^2.$$

$$(-3a) \times (-4b) = +3a \times 4b \quad (\text{由 28 章})$$

$$= 3 \times 4 \times a \times b = 12ab.$$

$$(ab)^2 = ab \times ab = a \times a \times b \times b = a^2b^2.$$

$$(\sqrt{2a})^2 = \sqrt{2a} \times \sqrt{2a} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times a \times a = 2a^2.$$

積之因子。雖不拘於次序。而通例恆以數字係數置於前。文字則依其次序順列於後。

例如 $3ab = 3ba = ba3 = a3b$ 。而通例用 $3ab$ 。

31. 指數之法則 (Index Law) 說明如次。

$$a^2 = aa, \quad a^3 = aaa, \quad \therefore a^2 \times a^3 = aa \times aaa = a^5 = a^{2+3}.$$

$$\text{又} \quad a^3 \times a^4 = aaa \times aaaa = a^7 = a^{3+4}.$$

$$\text{及} \quad a^4 \times a = aaaa \times a = a^5 = a^{4+1}.$$

〔法則〕由上例得兩個同文字方乘之積。其指數等於兩因子指數之和。

凡方乘之指數。爲正整數者。此法則皆能合理。設兩個 a 之方乘爲 a^m 及 a^n 。則

$$a^m = aaa \dots \text{至 } m \text{ 因子}, \quad a^n = aaa \dots \text{至 } n \text{ 因子},$$

$$\therefore a^m \times a^n = (aaa \dots \text{至 } m \text{ 因子}) \times (aaa \dots \text{至 } n \text{ 因子}) \\ = aaaaa \dots \text{至 } (m+n) \text{ 因子} = a^{m+n} \text{ (由定義)}$$

由是 m 及 n 爲任何正整數。即得次之指數之法則。

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \dots \dots \dots (D)$$

32. 平方根之符號由 28 章 $(-a) \times (-a) = +a^2 = (+a) \times (+a)$ 。反言之。 a^2 爲 $-a$ 與 $-a$ 之積。或爲 $+a$ 與 $+a$ 之積。故 a^2 之平方根爲 $+a$ 或爲 $-a$ 。即 $\sqrt{a^2} = \pm a$ 。

此複號 (Double sign) 士所以示 $+$ 或 $-$ 之兩意。

如是則任何兩代數式之平方根。必有二值。其值之絕對值相等。而符號相反。

例 題

1. 試以 $-4b$ 乘 $2a$ 。以 $-a^3$ 乘 a^2 。以 $-3ab^3$ 乘 $-2a^3b$ 。

[答 $-8ab, -a^5, 6a^4b^4$]

〔解〕 $2a \times -4b = -2a \times 4b = -2 \times 4 \times a \times b = -8ab$ 。

$$a^2 \times -a^3 = -a^{2+3} \text{ [從 (D)]} = -a^5.$$

$$-2a^3b \times -3ab^3 = +2a^3b \times 3ab^3 = 6a^{3+1}b^{1+3} = 6a^4b^4.$$

2. $-2xy^2$ 乘 $-3y^2z$ 。 $3ax^2y$ 乘 $-5a^2xy^2$ 。及 $3a^2bc^2x$ 乘 $12ab^2cx^3$ 。

[答 $6xy^4z, -15a^3x^3y^3, 36a^3b^3c^2x^4$]

3. $7a^4b^3c^2$ 乘 $-3a^3b^4c^7$ 。及 $-2ab^2x^3y^2$ 乘 $-4a^2b^2x^4y^6$ 。

[答 $-21a^7b^6c^9$, $8a^4b^5x^3y^8$]

4. 求 $(-a)^2$, $(-a)^3$, $(-a)^4$ 及 $(-a)^5$ 之值。 [答 a^2 , $-a^3$, a^4 , $-a^5$]

[解] $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$ 。 $(-a)^3 = (-a)^2(-a) = a^2 \times -a = -a^3$ 。

$(-a)^4 = (-a)^3(-a) = -a^3 \times -a = +a^4$ 。

$(-a)^5 = (-a)^4(-a) = a^4 \times -a = -a^5$ 。

5. 求 $(-ab)^2$, $(a^2b)^4$ 及 $(-3ab^2c^3)^3$ 之值。 [答 a^2b^2 , a^8b^4 , $-27a^9b^6c^9$]

[解] 本例之第三式之乘法如次。

$(-3ab^2c^3)^3 = -3ab^2c^3 \times -3ab^2c^3 \times -3ab^2c^3 = -27a^9b^6c^9$ 。

6. 證負數量之連次方乘。其號恆交互為正負。

[證] $-a$ 之平方為正。 $-a$ 之立方。即以 $-a$ 乘平方之正值。故為負。 $-a$ 之四方乘。即以 $-a$ 乘 $-a$ 之立方。故為正。以下同理。

7. $2a^2b$, $-3ab^2c^3$ 及 $-2a^2b^3y^2$ 試各求其立方。

[答 $8a^6b^3$, $-27a^6b^6c^9$ 及 $-8a^6b^9y^6$]

8. $(-a)^2 \times (-b)^3$, $(-2ab^2)^3 \times (-3a^2b)^3$, $(-3abc)^2 \times (2a^2b)^3$ 求其各值。

[答 $-a^2b^3$, $216a^9b^9$, $72a^6b^5c^2$]

[解] $(-a)^2 \times (-b)^3 = +a^2 \times -b^3 = -a^2b^3$ 。

$(-2ab^2)^3 \times (-3a^2b)^3 = -8a^3b^6 \times -27a^6b^3 = 216a^9b^9$ 。

$(-3abc)^2 \times (2a^2b)^3 = 9a^2b^2c^2 \times 8a^6b^3 = 72a^8b^5c^2$ 。

9. $a=2$, $b=-1$, $c=-2$ 。求 $3abc-2a^2bc^3+4c^4$ 之值。 [答 12]

[解] 原式 $= 3 \times 2 \times (-1) \times (-2) - 2 \times 2^2 \times (-1) \times (-2)^3 + 4 \times (-2)^4$

$= 3 \times 2 \times 1 \times 2 - 2 \times 4 \times 1 \times 8 + 4 \times 16 = 12 - 64 + 64 = 12$ 。

10. $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$, $d=-4$ 。則 $2a^2bc-3b^2cd+4c^2da-5d^2ab$ 之值為何。 [答 -148]

除 法

33. 除法 [Division] 其運算與乘法相反。設 $c \div b = a$ 。其 c 即為 b 除 a 時所得之結果。

故 b 除 a 。即求其何數以 b 乘之而能等於 a 也。

除法之運算與乘法相反。且乘法不拘於因子之次序。故連次以各數除。亦不拘於除數次序。

例 $a \div b \div c = a \div c \div b$

於29章中所證明者。知連次以兩數量乘之。同於以其積一次乘之。即 $a \times b \times c = a \times (bc)$ 。反之。 $a \div b \div c = a \div (b \times c)$ 。

但通例 $a \div (b \times c)$ 記爲 $a \div bc$ 。

即連次以兩數量除。同於以其積一次除之也。

乘除互用時。其乘數與除數亦不拘於次序。

即 $a \times b \div c = a \div c \times b$ 。

何則以 $a = a \div c \times c$ 。

$$\therefore a \times b = a \div c \times c \times b = a \div c \times b \times c \quad (29 \text{ 章})$$

兩邊以 c 除之。 $a \times b \div c = a \div c \times b$ 。

由是 a, b 之積。以 c 除。與 c 除 a 後以 b 乘。其結果相同。

34. 餘論 除法之運算。往往書除數於被除數之下。而中間記以橫線。

例 $\frac{a}{b} = a \div b$ 。 有時 $\frac{a}{b}$ 或記爲 a/b 。從 $a \div b$ 得分數 $\frac{a}{b}$ 。其 a 爲分子。 b 爲分母。

又 $\frac{1}{c} = 1 \div c$ 。則 $\frac{1}{c} \times c = 1 \div c \times c = 1$ 。

$a \times \frac{1}{c} \times c = a \times (\frac{1}{c} \times c) = a \times 1 = a$ 。此兩邊以 c 除之。爲 $a \times \frac{1}{c} = a \div c$ 。

故以任何數 c 除同於以 $\frac{1}{c}$ 乘。

由是 $a \times b \div c = a \div c \times b$ 可記之如次。

$$a \times b \times \frac{1}{c} = a \times \frac{1}{c} \times b \text{ 即與 29 章 (C) 同。}$$

35. 指數之除法 $a^3 \times a^2 = a^5$ 。及 $a^7 \times a^3 = a^{10}$ 。此法則已述明於前。反之則爲 $a^5 \div a^3 = a^2$ 。 $a^{10} \div a^7 = a^3$ 由此推之。若 m 及 n 爲正整數。而 $m > n$ 。則 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。

何則。由31章 $a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m$ 。兩邊以 a^n 除之 $a^{m-n} = a^m \div a^n$ 。

〔法則〕 任何數量之高次方乘，以同數量抵次方乘除之。其除得之指數，等於兩數量指數之差。

$$\text{因是 } a^5b^2 \div a^2b = a^{5-2}b^{2-1} = a^3b.$$

$$\text{及 } a^7b^6c^4 \div a^2b^3c^4 = a^{7-2}b^{6-3}c^{4-4} = a^5b^3c^0 = a^5b^3.$$

於上之第二例 $c^0=1$ 。何則。因 $c^4 \div c^4=1$ 。又因 $c^4 \div c^4=c^{4-4}=c^0$ 。故 $c^0=1$ 也。

36. 符號之除法 於 28 章已證得 $a \times (-b) = -ab$ 。

$$\therefore (-ab) \div (-b) = a, \text{ 及 } (-ab) \div a = -b.$$

$$\text{又 } (-a)(-b) = +ab = (+a)(+b),$$

$$\therefore +ab \div (-a) = -b, \text{ 及 } +ab \div (+a) = +b.$$

故被除數與除數。其符號相同者。商之符號爲 +。其符號相異者。商之符號爲 -。其法則全與乘法符號之法則同。

$$\text{例 } -a^3b^6 \div ab^2 = -a^2b^4. \text{ 及 } -2a^5bc^7 \div (-3a^4bc^2) = \frac{2}{3}ac^5.$$

例 題

1. $10a$ 以 $-2a$ 除。 $3a^2b^3$ 以 $-2ab^3$ 除。 $-7a^5b^3c^4$ 以 $-3a^2b^2c^2$ 除。求其各商。

$$[\text{答 } -5, -\frac{3}{2}a, \frac{7}{3}a^3bc^2]$$

$$[\text{解}] -7a^5b^3c^4 \div (-3a^2b^2c^2) = \frac{7}{3}a^{5-2}b^{3-2}c^{4-2} = \frac{7}{3}a^3bc^2.$$

2. $-2a^5b^7c^8$ 以 $4a^3bc^7$ 除。 $-6x^5y^4$ 以 $3x^3y$ 除。 $-5a^2b^4x^7y^3$ 以 $-2ab^4x^2y^5$ 除。求其各商。

$$[\text{答 } -\frac{1}{2}a^2b^6c, -2x^2y^3, \frac{5}{2}ax^5y^2]$$

$$[\text{解}] -2a^5b^7c^8 \div 4a^3bc^7 = -\frac{2}{4}a^{5-3}b^{7-1}c^{8-7} = -\frac{1}{2}a^2b^6c.$$

$$-5a^2b^4x^7y^3 \div (-2ab^4x^2y^5) = \frac{5}{2}a^{2-1}b^{4-4}x^{7-2}y^{3-5} = \frac{5}{2}ax^5y^2.$$

3. 於 $-2a^3bc^5$ 以 $-3ab^7c^2$ 乘而以 $8a^5b^6c^8$ 除之。 [答 $\frac{3}{4}ab^2c$]

$$[\text{解}] -2a^3bc^5(-3ab^7c^2) \div 8a^5b^6c^8 = 6a^4b^8c^7 \div 8a^5b^6c^8 = \frac{3}{4}ab^2c.$$

37. 根原之公式 凡屬於壹項式所有代數學根原之法則。如前諸章所示之(A), (B), (C), (D)諸公式是也。茲復彙集之如次。

$$\begin{array}{l} +(+a)=+a \\ +(-a)=-a \\ -(+a)=-a \\ -(-a)=+a \end{array} \left\{ \dots\dots\dots(A) \right.$$

$$\begin{array}{l} (+a)(+b)=+ab \\ (+a)(-b)=-ab \\ (-a)(+b)=-ab \\ (-a)(-b)=+ab \end{array} \left\{ \dots\dots\dots(B) \right.$$

$$abc=cba=cab=\dots\dots\dots(C) \quad a^m \div a^n = a^{m-n} \dots\dots\dots(D)$$

如上所示之公式於(A), (B), (C)已證得 a, b, c 為任何數。均能合理。於(D)證得 m 及 n 為正整數為合理。

多項式

38. 多項式 (Multinomial Expression) 以上所述皆一項式。至是進論多項式。

先記 $a+b+c+\dots\dots\dots$ 為任何之多項式。但 $a, b, c, \dots\dots\dots$ 為正或負之任何數。

例多項式 $3x^2y - \frac{5}{2}xy^2 - 7xyz$ 。由(A)可記為

$$(3x^2y) + (-\frac{5}{2}xy^2) + (-7xyz).$$

以 a 代 $3x^2y$ 。以 b 代 $-\frac{5}{2}xy^2$ 。以 c 代 $-7xyz$ 。則上之多項式即為 $a+b+c+\dots\dots\dots$

故以某代數式證明某定理時。皆可記其式為 $a+b+c+\dots\dots\dots$ 以證之。但 $a, b, c, \dots\dots\dots$ 為正或負之任何數。

39. 互換法則 (Commutative Law) 二或二以上諸代數量(即正量或負量)之和。不論其相加之次序如何。其結果恆同。此可由加法之意義說明之。

例如某人有若干項之存款及借款。欲計其總數。則於若干項內。不論以何項為先。何項為後。其求得之總數。恆相等。

$$\text{故} \quad a+b+c=c+a+b=b+c+a=\dots\dots\dots(E)$$

所示之(C)及(E)。其法則。謂之互換法則。即加法及乘法之運算。不拘於其次序如何也。

40. 餘論 既知加法之運算。不拘於次序。

$$\begin{aligned} \text{故 } a+(b+c+d+\dots) &= (b+c+d+\dots)+a \text{ [由 (E)]} \\ &= b+c+d+\dots+a \\ &= a+b+c+d+\dots \text{ [由 (E)]} \end{aligned}$$

由是知將代數式之全項一併加之。與將其各項分別加之。其結果相同。

代數式 $+a-b+c-d$ 可記為 $+a+(-b)+c+(-d)$ 之形。

$$\text{故 } +(+a-b+c-d) = +[+a+(-b)+c+(-d)].$$

因是將代數式之各項分別相加時。其置於項之前所含之符號。須記憶之。

凡所謂項者。其於項之前。必含有符號者也。

41. 多項式之減法 減法之運算與加法相反。於加法將代數式之全項一併加之。與將其各項分別加之。其結果同。由同理而知將代數式之全項一併減之。與將其各項分別減之。其結果亦同。即 $a-(b+c+d+\dots) = a-b-c-d-\dots$

42. 配分法則 (Distributive Law) c 為正整數。而 a 及 b 為任何數。可證得 $(a+b)c = ac+bc$ 。

$$\begin{aligned} (a+b)c &= (a+b)+(a+b)+(a+b)+\dots \text{ 至 } c \text{ 項 (乘法之定義)} \\ &= a+b+a+b+a+b+\dots \text{ (40 章)} \\ &= a+a+a+\dots \text{ 至 } c \text{ 項 } + b+b+b+\dots \text{ 至 } c \text{ 項} \\ &= ac+bc. \end{aligned}$$

由是 c 為正整數。證得 $(a+b)c = ac+bc \dots \dots \dots (F)$

除法與乘法相反。故 d 為正整數。

$$(a+b) \div d = a \div d + b \div d.$$

別證之。由 (F) $(ac+bc) \div c = a+b = ac \div c + bc \div c$ 。

$$\begin{aligned} \text{由是 } (a+b) \times c \div d &= \{(a+b) \times c\} \div d, \\ &= \{ac+bc\} \div d = ac \div d + bc \div d. \end{aligned}$$

$$\text{即 } (a+b) \times \frac{c}{d} = a \times \frac{c}{d} + b \times \frac{c}{d}.$$

由此式而知公式(F)其 c 爲分數，亦能合理。然 c 爲任何值，皆能合理。設 c 爲負數，證明如次。

$$(a+b)(-c) = -(a+b)c = -ac - bc = a(-c) + b(-c).$$

乃證得公式(F)其 a, b, c 爲任何值，皆能合理。

故兩代數量之和以第三數乘，等於各代數量以第三數乘所得積之和。是謂配分法則。

43. 除法之配分法則 此於前章已爲證明。茲別爲證之如次。

$$\begin{aligned} (a+b) \div c &= (a+b) \times \frac{1}{c} = a \times \frac{1}{c} + b \times \frac{1}{c} \\ &= a \div c + b \div c. \end{aligned}$$

故兩代數量之和以第三數除，等於各代數量以第三數除所得商之和。

44. 結合法則 (Associative Law) 由 40 章之理，而知

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+\dots &= (a+b)+c+(d+e)+\dots \\ &= a+(b+c+d)+e+\dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

即凡代數式，可任取若干項集合之。

又由 20 章之理，而知

$$abcde, \dots = a(bc)(de), \dots = a(bcd)e = \dots$$

即凡積可任取若干因子集合之。

45. 注意 此編所示者，爲代數學根原之法則。而於次編乃推廣之，以示此法之應用。

第 參 編

加法, 減法, 括弧用法

加 法

46. 加法 [Addition] 凡加任意之項於代數式。其項之符號不變。又取代數式之全體相加與次第分加其結果相同。此在前編已詳述之。由是得加法之法則如下。

〔法則〕 凡加二個或二個以上之代數式。其各項之號不變。而可任意連記之。

例如求 $a-2b+3c$ 及 $-4d-5c+6f$ 之和。其各符號不變。惟記為 $a-2b+3c-4d-5c+6f$ 。

47. 運算 如前法諸式相加之後。遇有同類項。須用加或減。化為簡式。

二同類項之號同者。先求其兩係數之和。乃記以公用之號。以公有之文字。附於係數後。

例如 $2a$ 及 $5a$ 連次相加。與一次加入 $7a$ 同。即 $+2a+5a=+7a$ 。

又以 $2a$ 及 $5a$ 連次相減。與一次減去 $7a$ 同。即 $-2a-5a=-7a$ 。

若二同類項之號異者。先求其兩係數之差。乃以大數之號為號。以公有之文字。附於係數後。

例如 $+5a-3a=+2a+3a-3a=+2a$

又 $+3a-5a=+3a-3a-2a=-2a$ 。

故有種種之同類項者。可依前法而併為一項。

〔第一例〕 $2a+5b$ 加 $a-6b$ 。則

其和 $=2a+5b+a-6b=2a+a+5b-6b=3a-b$ 。

〔第二例〕 $3a^2-5ab+7b^2$ 加 $-4a^2-2ab+3b^2$ 加 $2a^2+5ab-8b^2$ 。則

其和 $=3a^2-5ab+7b^2-4a^2-2ab+3b^2+2a^2+5ab-8b^2$ 。其 $3a^2, -4a^2,$

$+2a^2$ 。可用心算併為 $+a^2$ 。由同理得 $-2ab$ 及 $+2b^2$ 。

故所求之和 $= a^2 - 2ab + 2b^2$ 。

初學者可將同類項。列於一行加之。

例如

$$\begin{array}{r} 3a^2 - 5ab + 7b^2 \\ -4a^2 - 2ab + 3b^2 \\ \hline 2a^2 + 5ab - 8b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + 2b^2 \end{array}$$

減 法

48. 減法 (Subtraction) 凡減任意之項於代數式。須變其項之符號。又取代數式之全體相減。與次第分減其結果相同。在前編亦既詳言之。因得下之法則。

[法則] 凡減去任何代數式。須變其各項之號。而列於原式之次。

例如從 $2a - 3b - 4c$ 減去 $a - 2b + 3c$ 。則變其 $a - 2b + 3c$ 式各項之符號。而列於 $2a - 3b - 4c$ 之次。

即 $2a - 3b - 4c - a + 2b - 3c = a - b - 7c$ 。即所求之差。

49. 運算 置減式於被減式之下。將同類項列於一行而求其差。惟置時減式之符號仍其舊。至運算時。可反視其各號。而如加法施之。依前章例。列為

$$\begin{array}{r} 2a - 3b - 4c \\ a - 2b + 3c \\ \hline a - b - 7c \end{array}$$

減式之 a 。心中可記為 $-a$ 。 $-2b$ 可記為 $+2b$ 。 $+3c$ 可記為 $-3c$ 。

又從 $a^2 - 5ab + 2ac - 2b^2$ 減去 $3ab - 5ac + c^2$ 。

$$\begin{array}{r} a^2 - 5ab + 2ac - 2b^2 \\ 3ab - 5ac + c^2 \\ \hline a^2 - 8ab + 7ac - 2b^2 - c^2 \end{array}$$

即所求之差。

括 弧 用 法

50. 括弧 (Brackets) 一全代數式相加。用括弧括之。而於其

前置+號。然如46章所云。凡加任何代數式。其各項之號不變。而可連記之。由是知括弧之前置+者。可以逕去其括弧。

例如 $+(2a-5b+7c)=+2a-5b+7c$ 。故代數式中之若干項。可任意用括弧括之。而於其前置+。如

$3a-2b+4c-d+e-f=3a-2b+(4c-d+e-f)=3a+(-2b+4c)-d+(e-f)$
括弧內首項之號為+者。略而不記可也。

51. 括弧之減法 減一全代數式者。其代數式可以括弧括之。於其前置-。依48章所云。凡減任何代數式。則變其各項之號。而列於原式之次。由是知括弧之前置-者。欲去其括弧。必盡變其括弧內各項之號。

例如 $a-(2b-c+d)=a-2b+c-d$ 。

故有任意之代數式若干項。欲以括弧括之。而於其前置-者。必變其所括各項之號。

例如 $a-2b+3c-d=a-(2b-3c+d)=a-2b-(-3c+d)$ 。

52. 括弧解法 有時括弧內又有括弧。則須避諸括弧之混雜。而用種種相異之形。

例如 $a-[2b-\{3c-(2d-e)\}]$ 。

此式為從2b減去{}內之式。其結果再從a減去之。而在{}內之式。又為從2d減去e。其結果再從3c減去者也。

若遇此數種之括弧。欲解去之。可依50及51兩章之法則。例如下。

$$\begin{aligned} a-[b+\{c-(d-e)\}] &= a-[b+\{c-d+e\}] \\ &= a-(b+c-d+e) = a-b-c+d-e. \end{aligned}$$

例題一

試加下列之各式。

1. $3x-5y$, $5x-2y$, 及 $7y-4x$.

[答 $4x$]

[解] $3x-5y+5x-2y+7y-4x=3x+5x-4x-5y-2y+7y=4x$.

或 $3x-5y$

$5x-2y$

$-4x+7y$

 $4x$

2. $3x-5y+2z, 5x-7y-5z,$ 及 $6y-z-10x.$

[答 $-2x-6y-4z$]

3. $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c, \frac{1}{2}b - \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}a,$ 及 $\frac{1}{2}c - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b.$

[答 $\frac{5}{12}a + \frac{5}{12}b + \frac{5}{12}c$]

4. $a^3-a^2+a, a^2-a+1,$ 及 $a^4-a^3-1.$

[答 a^4]

5. $x^2-5xy-7y^2$ 及 $3y^2+4xy-x^2.$

[答 $-xy-4y^2$]

6. $m^2-3mn+2n^2, 3n^2-m^2,$ 及 $5mn-3n^2+2m^2.$

[答 $2m^2+2mn+2n^2$]

7. $3a^2-2ac-2ab, 2b^2+3bc+3ab,$ 及 $c^2-2ac-2bc.$

[答 $3a^2+2b^2+c^2+ab-4ac+bc$]

8. $\frac{3}{2}a^2b-5ab^2+7b^3, 2a^3-\frac{1}{2}a^2b+5ab^2,$ 及 $3b^3-2a^3.$

[答 a^2b+10b^3]

9. 試從 $a+b-2c$ 減 $3a-4b+2c.$

[解] $a+b-2c-3a+4b-2c$

$=a-3a+b+4b-2c-2c$

$=-2a+5b-4c.$ [答]

或 $a+b-2c$

$3a-4b+2c$

$\hline -2a+5b-4c.$

10. 試從 $c - \frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$ 減 $\frac{a}{2} + \frac{3}{2}b - \frac{5}{3}c.$ [答 $-a - \frac{13}{6}b + \frac{8}{3}c$]

11. 試從 $4x^2-5x-7$ 減 $3x^2-4x+2.$

[答 x^2-x-9]

12. 試從 $5b^4-3ab^3+4a^2b^2$ 減 $5a^4-3a^3b+4a^2b^2.$

[答 $-5a^4+3a^3b-3ab^3+5b^4$]

13. 求 $-3x^2-5xy+4y^2$ 及 $-5x^2+2xy-3y^2$ 之差.

[解] $-3x^2-5xy+4y^2-(-5x^2+2xy-3y^2)$

$=-3x^2-5xy+4y^2+5x^2-2xy+3y^2=2x^2-7xy+7y^2.$ [答]

14. 加何數於 $2bc-3ca-4ab$ 其和為 $bc+ca.$

[解] $bc+ca-(2bc-3ca-4ab)=bc+ca-2bc+3ca+4ab$

$=4ab-bc+4ca.$ [答]

15. 加何數於 $3a^2-2b^2+3c^2$ 其和為 $bc+ca+ab.$

[答 $-3a^2+2b^2-3c^2+bc+ca+ab$]

16. $3x - \{2y + (5x - 3x + y)\}$ 化爲簡式。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= 3x - \{2y + (5x - 3x - y)\} = 3x - \{2y + 5x - 3x - y\} \\ &= 3x - 2y - 5x + 3x + y = x - y. \text{〔答〕} \end{aligned}$$

又此解式之簡法如下。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3x - \{2y + (5x - 3x - y)\} = 3x - \{2y + (2x - y)\} \\ &= 3x - \{2y + 2x - y\} = 3x - \{2x + y\} = 3x - 2x - y \\ &= x - y. \end{aligned}$$

17. $x - \{3y + \{3z - (x - 2y)\} + 2x\}$ 化爲簡式。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= x - \{3y + \{3z - x + 2y\} + 2x\} = x - \{3y + 3z - x + 2y + 2x\} \\ &= x - \{x + 5y + 3z\} = x - x - 5y - 3z = -5y - 3z. \text{〔答〕} \end{aligned}$$

18. $y - 2x - \{z - x - (y - x + z)\}$ 化爲簡式。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= y - 2x - \{z - x - y + x - z\} = y - 2x - \{-y\} \\ &= y - 2x + y = -2x + 2y. \text{〔答〕} \end{aligned}$$

19. $a - \{a - b - \{a - b + c - (a - b + c - d)\}\}$ 化爲簡式。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= a - \{a - b - \{a - b + c - a + b - c + d\}\} \\ &= a - \{a - b - (+d)\} = a - \{a - b - d\} \\ &= a - a + b + d = b + d. \text{〔答〕} \end{aligned}$$

20. $2x - \{3x - 9y - \{2x - 3y - (x + 5y)\}\}$ 化爲簡式。 〔答 y〕

21. $a - \{3a + c - \{4a - (3b - c) + 3b\} - 2a\}$ 化爲簡式。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= a - \{3a + c - \{4a - 3b + c + 3b\} - 2a\} \\ &= a - \{3a + c - \{4a + c\} - 2a\} = a - \{3a + c - 4a - c - 2a\} \\ &= a - \{-3a\} = a + 3a = 4a. \text{〔答〕} \end{aligned}$$

22. 從 $y - \{2x - (z - y)\}$ 減 $x - (3y - z)$ 。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 所求之差} &= y - \{2x - (z - y)\} - \{x - (3y - z)\} \\ &= y - \{2x - z + y\} - \{x - 3y + z\} \\ &= y - 2x + z - y - x + 3y - z = -3x + 3y. \text{〔答〕} \end{aligned}$$

23. 從 $2n - (3n - 2m - n)$ 減 $2m - (3m - 2n - m)$ 。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 所求之差爲} & 2n - (3n - 2m - n) - \{2m - (3m - 2n - m)\} \\ &= 2n - (3n - 2m + n) - \{2m - (3m - 2n + m)\} = 4m - 4n. \text{〔答〕} \end{aligned}$$

24. 設 $a = -1$, $b = -2$, $c = -3$. 試求

$\{a-(b-c)\}^2 + \{b-(c-a)\}^2 + \{c-(a-b)\}^2$ 之值。

$$\begin{aligned} \text{[解] 原式} &= \{a-b+c\}^2 + \{b-c+a\}^2 + \{c-a+b\}^2 \\ &= \{-1-(-2)+(-3)\}^2 + \{-2-(-3)+(-1)\}^2 + \{-3-(-1)+(-2)\}^2 \\ &= \{-1+2-3\}^2 + \{-2+3-1\}^2 + \{-3+1-2\}^2 \\ &= \{-2\}^2 + \{0\}^2 + \{-4\}^2 = 4+0+16=20. \text{ [答]} \end{aligned}$$

25. 設 $a=1, b=2, c=-3$. 試求

$\{a^2-(b-c)^2\} - \{b^2-(c-a)^2\} - \{c^2-(a-b)^2\}$ 之值。

$$\begin{aligned} \text{[解] 原式} &= a^2 - (b-c)^2 - b^2 + (c-a)^2 - c^2 + (a-b)^2 \\ &= 1^2 - (2+3)^2 - 2^2 + (-3-1)^2 - (-3)^2 + (1-2)^2 \\ &= 1 - 5^2 - 4 + (-4)^2 - 9 + (-1)^2 \\ &= 1 - 25 - 4 + 16 - 9 + 1 = -20. \text{ [答]} \end{aligned}$$

第 肆 編

乘 法

53. 一項式之積 於第二編所示之結果。順序之如下。

- (1) 積之因子。其次序可以任意更換。
- (2) 兩數量積之符號。如兩數量之號。同者為正。異者為負。
- (3) 同數量兩方乘積之指數。等於其因子指數之和。

由是可依 (1), (2), (3) 三例求一項式之積如下。

$$\begin{aligned} (-2a^2bc^5) \times (-3a^3b^2c) &= +2a^2bc^5 \times 3a^3b^2c \text{ 依 (2) 例} \\ &= 2 \times 3 \times a^2a^3bb^2c^5c \text{ 依 (1) 例} \\ &= 6a^5b^3c^6 \text{ 依 (3) 例} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } (-3a^2b)(-5ab^3)(-7a^4b^2) &= \{+3a^2b \cdot 5ab^3\}(-7a^4b^2) \\ &= -3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^2 \cdot a^4bb^3b^2 = -105a^7b^6. \end{aligned}$$

54. 多項式及一項式之積 依 42 章所云任意兩代數量之和。乘第三數量之積。等於兩代數量各乘第三數量之積之和。

例如 $(x+y)z = xz + yz \dots\dots\dots(1)$

(1) 式中之 x, y 及 z 任為何數。皆合於理。故以 $a+b$ 代 x 用於式即得

$$\begin{aligned} \{(a+b)+y\}z &= (a+b)z + yz = az + bz + yz \\ \therefore (a+b+y)z &= az + bz + yz \end{aligned}$$

同法得 $(a+b+c+d+\dots\dots\dots)z = az + bz + cz + dz + \dots\dots\dots$

但 $a+b+c+d+\dots\dots$ 為任何多項式 (見 38 章)。

[法則] 多項式及一項式之積。等於多項式之各項。分乘其一項之積之和。

55. 兩多項式之積 先示乘法之通例。即兩多項式之乘法如下。

求 $(a+b+c+\dots\dots)(x+y+z+\dots\dots)$ 之積。依 38 章。

$c+y+z+\dots\dots$ 以 m 代之。由前章得

$$\begin{aligned}
 (a+b+c+\dots)(x+y+z+\dots) &= (a+b+c+\dots)m \\
 &= am+bm+cm+\dots = ma+mb+mc+\dots \\
 &= (x+y+z+\dots)a+(x+y+z+\dots)b+(x+y+z+\dots)c+\dots \\
 &= ax+ay+az+\dots+bx+by+bz+\dots+cx+cy+cz+\dots
 \end{aligned}$$

〔法則〕由是兩多項式之積。等於兩式中所有各項相乘積之和。

例如 $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ 。

又 $(3a+5b)(2a+3b)$

$$\begin{aligned}
 &= (3a \times 2a) + (3a \times 3b) + (5b \times 2a) + (5b \times 3b) \\
 &= 6a^2 + 9ab + 10ab + 15b^2 = 6a^2 + 19ab + 15b^2.
 \end{aligned}$$

又 $(a-b)(c-d) = \{a+(-b)\}\{c+(-d)\}$

$$= ac+a(-d)+(-b)c+(-b)(-d) = ac-ad-bc+bd.$$

兩多項式之乘法。須留意各式中各項之符號(視40章)。

56. 乘法之三公式 以下示以最要之例。名爲三公式。

$$(1) (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

〔法則〕由是任意兩數量和之平方。等於其各平方之和。加兩數量相乘積之二倍。

$$(2) (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = aa+a(-b)+(-b)a+(-b)(-b)$$

$$\therefore (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

〔法則〕由是任意兩數量差之平方。等於其各平方之和。減兩數量相乘積之二倍。

$$(3) (a+b)(a-b) = aa+a(-b)+ba+b(-b)$$

$$\therefore (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

〔法則〕由是任意兩數量和與差之積。等於兩數量平方之差。由此三公式。又得最要之公式如下。

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2) \dots \dots \dots (A)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \dots \dots \dots (B)$$

此兩公式其知之與否。足以驗其學力之淺深。

57. 多項式乘法之例 示簡便之法如下。

$$a^2 + 2ab - b^2 \dots\dots\dots \text{被乘式}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \dots\dots\dots \text{乘式}$$

$$\begin{array}{r} a^4 + 2a^3b - a^2b^2 \\ - 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 \\ \hline + a^2b^3 + 2ab^3 - b^4 \\ \hline a^4 - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4 \dots\dots\dots \text{積} \end{array}$$

如上法置乘式於被乘式之下。於其下作一橫綫。先以乘式之第一項 a^2 。乘被乘式之各項 $a^2, +2ab, -b^2$ 。得 $a^4, +2a^3b, -a^2b^2$ 。橫列於橫綫下。次以乘式之第二項 $-2ab$ 。乘被乘式之各項。得積橫列之。以與前列之同類項相配。次以乘式之第三項 $+b^2$ 。乘被乘式之各項。亦如前法列之。乃取此三列相加。即得全體之積。

依此方法可施乘法如下。

$a + b$	$a + b$	$a^2 + ab + b^2$
<u>$a + b$</u>	<u>$a - b$</u>	<u>$a - b$</u>
$a^2 + ab$	$a^2 + ab$	$a^3 + a^2b + ab^3$
<u>$+ ab + b^2$</u>	<u>$- ab - b^2$</u>	<u>$- a^2b - ab^2 - b^3$</u>
$a^2 + 2ab + b^2,$	$a^2 - b^2,$	$a^3 - b^3$

$a + b + c$	$3x^2 - xy + 2y^2$
<u>$a + b + c$</u>	<u>$3x^2 + xy - 2y^2$</u>
$a^2 + cb + ac$	$9x^4 - 3x^2y + 6x^2y^2$
$+ ab + bc$	$+ 3x^2y - x^2y^2 + 2xy^3$
<u>$+ ac + bc + c^2$</u>	<u>$- 6x^2y^2 + 2xy^3 - 4y^4$</u>
$a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2,$	$9x^4 - x^2y^2 + 4xy^3 - 4y^4$

58. 多項式之整列 代數式各項。為同文字之各方乘者。則以最高次方乘置於左。順次而置其低次於右。此種列法謂之該文字之遞降方乘 (Descending Powers)。

例如 $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ 。為 a 之遞降方乘。

同法以同文字之最低指數置於左。順次而置其高次於右。謂爲該文字之遞昇方乘 (Ascending Powers)。

例如前式 $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ 爲 b 之遞昇方乘。

如有 $a^3 - ab^2 + 6a^2b - b^3$ 之不整列式。依 a 之遞降方乘整列之。爲 $a^3 + 6a^2b - ab^2 - b^3$ 。依 a 之遞昇方乘整列之。爲 $-b^3 - ab^2 + 6a^2b + a^3$ 。

59. 注意 代數式所以欲整列爲遞降。或遞昇方乘者。以便於求兩多項式之積。如 57 章。蓋兩式不整列。則其積之同類項不能相配於一縱行。

例如

$$\begin{array}{r}
 6a - 3a^2 + 7 \\
 2 + 8a^2 + a \\
 \hline
 12a - 6a^2 + 14 \\
 + 48a^3 - 24a^4 + 56a^2 \\
 + 6a^2 - 3a^3 + 7a \\
 \hline
 19a + 56a^2 + 45a^3 + 14 - 24a^4
 \end{array}$$

如此求其積則不合法。若兩式皆整列於遞降方乘。則得

$$\begin{array}{r}
 -3a^2 + 6a + 7 \\
 8a^2 + a + 2 \\
 \hline
 -24a^4 + 48a^3 + 56a^2 \\
 - 3a^3 + 6a^2 + 7a \\
 - 6a^2 + 12a + 14 \\
 \hline
 -24a^4 + 45a^3 + 56a^2 + 19a + 14
 \end{array}$$

60. 定義 凡 n 個文字之積所成之項。謂之 n 乘元 (Dimensions) 或云 n 次 (Degree) 項。

例如 $3abc$ 爲三乘元。即三次項。 $5a^3b^2c$ 爲 $5aaabbc$ 爲六乘元。即六次項也。

故一項之次數。爲其因子指數之和。

乘元專指文字因子。不指數字。例如 $5ab$ 則 a, b 爲乘元。而 $5, a, b$ 爲因子。

稱某項或某代數式之次數。有時但指其中之特別一個。或數個文字之方乘而言。

例如 ax^2+bx+c 之第一項爲三次。第二項爲二次。第三項爲一次。然若專指 x 言。則謂爲 x 之二次式。因 $(x^2$ 卽 $xx)$ 故也。

又 $ax^2y+bxxy+cx^2$ 謂爲 x 之二次式。或謂爲 x, y 之三次式。因以第一項之 x, y 爲三次故也。

若是者。稱代數式之次數。卽指特別文字之最高次。

又某代數式。特別文字爲 x 。其不函 x 之項。謂爲 x 之無關係項。例如 ax^2+bx+c 。其 c 卽 x 之無關係項。

等次項 (Homogeneous) 代數式各項之乘元。其次數相等者。稱此代數式爲等次式。

例如 $a^3+3a^2b-5b^3$ 之各項。皆爲三次。故稱等次式。

又 $ax^2+bxxy+cy$ 。爲 x 及 y 二次之等次式。

又如 $ax^2+bcxy+d^3y^2$ 。雖各項不等次。而指 x 及 y 言。亦爲二次之等次式。

61. 兩等次式之積 亦必等次何也。兩多項式之積。爲其兩式各項積之總合。如 (55 章)。故兩式之各項。各自等次。則其各項之積。必爲兩式中各一項次數之和。

例如 $a^3+a^2b+b^2$ 。以 a^2-ab+b^2 乘之。其積爲 $a^5+2a^2b^3-ab^4+b^5$ 。卽五次之等次式。蓋因被乘式之各項三次。乘乘式之各項二次。故積之各項爲三次與二次之和。卽五次。

兩等次式之積。若不等次。其有誤可知。

62. 餘論 兩代數式之積。其特別一個最高次之項。必爲其兩式中各最高次之項之積。又其積之同文字之最低次項。必爲其兩式中各最低次之項之積。凡此皆當注意。

故兩代數式。其特別文字之最高次。及最低次項。祇有一項。則積內同文字之最高次。及最低次項。亦祇有一項。

例如 61 章。兩代數式中其 a 之爲最高及最低次者。祇有一項。故積內 a 之最高次 a^5 及最低次 b^5 。亦祇有一項也。

63. 分離係數 (Detached Coefficients) 代數式之簡畧乘法。可僅以兩式之係數相乘。謂之分離係數法。

例如 $3x^2-x+2$ 以 $3x^2+2x-2$ 乘之。

依 x 之遞降方乘。順次記其係數。即

$$\begin{array}{r}
 3-1+2 \\
 3+2-2 \\
 \hline
 9-3+6 \\
 +6-2+4 \\
 \hline
 -6+2-4 \\
 \hline
 9+3-2+6-4
 \end{array}$$

兩式內 x 之最高次。為 x^2 及 x^2 。故積之最高次為 x^4 。依 x^4 而順次記 x 之方乘。即

$9x^4+3x^3-2x^2+6x-4$ 。為所求之積。若方乘之某項缺者。則補以 0。

例如 $x^4-2x+x-3$ 。以 x^4+x^3-x-3 乘之。被乘式缺 x^3 。乘式缺 x^2 。

故各補以 0。

$$\begin{array}{r}
 1+0-2+1-3 \\
 1+1+0-1-3 \\
 \hline
 1+0-2+1-3 \\
 1+0-2+1-3 \\
 \hline
 -1-0+2-1+3 \dots\dots\dots \text{此項次於 0 項。故比} \\
 -3-0+6-3+9 \qquad \qquad \qquad \text{上列右二位。} \\
 \hline
 1+1-2-2-5-1+5+0+9
 \end{array}$$

即 $x^8+x^7-2x^6-2x^5-5x^4-x^3+5x^2+9$ 。即積。

凡等次式之積函二個文字者。亦可依分離係數法求之。

例如 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 。以 $a^2-2ab+b^2$ 乘之。則可以

$1-2+1$ 乘 $1-3+3-1$ 。詳於例題二。

64. 公式用法 56 章所示之三公式。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \dots\dots\dots (3)$$

此公式為施乘法者所必需。

此公式中之 a 及 b 任為何數。皆合於理。

今於(1)式之 b 用 $-b$ 代之。則得

$$\{a+(-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$

即 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 即從(1)式得(2)式。又於(3)式之 b 用 $\sqrt{2}$ 代之。則得

$$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2}) = a^2 - (\sqrt{2})^2 = a^2 - 2。$$

用不盡根。亦能合理。其用 $\sqrt{2}$ 之原理。此處暫不解釋。因至後編。自能明瞭也。

以上三公式既用任何數。皆合於理。故可於(1)式之 b 用 \square 代之。則 $(a+\square)^2 = a^2 + 2a\square + \square^2$ 。

故置 $b+c$ 於 \square 之內。亦無不合。

$$\text{即 } (a+(\overline{b+c}))^2 = a^2 + 2a\overline{b+c} + \overline{b+c}^2。 \text{若去此 } \square。$$

$$\text{即 } (a+b+c)^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2。$$

$$\therefore (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \dots \dots \dots (4)$$

於(4)式之 c 用 $-c$ 代之。則

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2a(-c) + 2b(-c)。$$

$$\therefore (a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc。$$

又於(3)式之 b 用 $b+c$ 代之。則

$$\{a+(b+c)\} \{a-(b+c)\} = a^2 - (b+c)^2 = a^2 - (b^2 + 2bc + c^2)。$$

$$\therefore (a+b+c)(a-b-c) = a^2 - b^2 - 2bc - c^2。$$

[增例] 再示數例於下。

$$(a^2+2b^2)(a^2-2b^2) = (a^2)^2 - (2b^2)^2 = a^4 - 4b^4。$$

$$(a^2+\sqrt{3}b^2)(a^2-\sqrt{3}b^2) = (a^2)^2 - (\sqrt{3}b^2)^2 = a^4 - 3b^4。$$

$$(a-b+c)(a+b-c) = \{a-(b-c)\} \{a+(b-c)\} = a^2 - (b-c)^2。$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = \{(a^2+b^2)+ab\} \{(a^2+b^2)-ab\} = (a^2+b^2)^2 - (ab)^2 \\ = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4。$$

末一例稍混。恐初學未易記憶。故重記其公式於下。

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$$

$$(x^3+x^2+x+1)(x^3-x^2+x-1) = \{(x^3+x)+(x^2+1)\} \{(x^3+x)-(x^2+1)\} \\ = (x^3+x)^2 - (x^2+1)^2 = x^6 + 2x^4 + x^2 - (x^4 + 2x^2 + 1) = x^6 + x^4 - x^2 - 1。$$

65. 多項式之平方 於前章及 51 章之法，已可求得三數和之平方。今更示以求諸數和之平方法。

例如 $(a+b+c+d+\dots)^2$ 。

即 $(a+b+c+d+\dots)(a+b+c+d+\dots)$ 。

任意兩代數式之積，等於此式各項，乘彼式各項之積之和。前已證明之。故如上之被乘式，第一項 a 以乘式第一項 a 乘之，得 a^2 。同法得 b^2, c^2, d^2, \dots 。又被乘式之一項（例如 b ）以乘式中相異之項（例如 d ）乘之，得 bd 。而被乘式之一項 d ，以乘式中相異之項 b 乘之，亦得 bd 。故得 $2bd$ 。同法得兩式各異項之積，為 $2ab, 2ac, \dots$ 。

由是所求之平方，為

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots + 2ab + 2ac + 2ad + \dots + 2bc + 2bd + \dots$$

即所有各項相乘積之和。

〔法則〕若干數量和之平方，等於各數量平方之和，加各相異兩數量之積之二倍。

例如求 $(a+b+c)^2$ 。則各項之平方，為 a^2, b^2, c^2 。又各相異兩項之積，為 ab, ac, bc 。

由是而 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ 。

$$\begin{aligned} \text{同法得 } (a+2b-3c)^2 &= a^2 + (2b)^2 + (-3c)^2 + 2a(2b) + 2a(-3c) + 2(2b)(-3c) \\ &= a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab - 6ac - 12bc. \end{aligned}$$

又 $(a-b+c-d)^2$

$$\begin{aligned} &= a^2 + (-b)^2 + c^2 + (-d)^2 + 2a(-b) + 2ac + 2a(-d) + 2(-b)c + 2(-b)(-d) \\ &\quad + 2c(-d) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd. \end{aligned}$$

以上諸例熟練之後，可省去運算，而直書其答式。

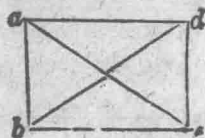
求兩多項式之平方，可以直線畫多角形，計其各邊與對角線。則雖童子亦易求得之。

其各線為 2 倍，各角點為平方，示之如下。

求 $(a+b+c+d)^2$ 。

四角形各角點之平方，為 a^2, b^2, c^2, d^2 。

又四邊之 2 倍，為 $2ab, 2bc, 2cd, 2da$ 。



對角線之 2 倍。爲 $2bd, 2ca$ 。

$$\therefore (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2bc + 2cd + 2da + 2bd + 2ca,$$

$(a+b+c+d+e)^2$ 則可作五角形圖求之。

66. 連乘積 凡求諸代數式之連乘積。可先求任兩式之積。乃次第以他式乘之。

例如 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 之連乘積。求法如下。

$$\begin{array}{r} x+a \\ \underline{x+b} \\ x^2+ax \\ \quad \underline{+bx+ab} \\ x^2+(a+b)x+ab \\ \quad \underline{x+c} \\ x^3+(a+b)x^2+abx \\ \quad \quad \underline{+ cx^2+(ac+bc)x+abc} \\ x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc. \text{ 即連乘積。} \end{array}$$

如上式爲依公有文字 x 方乘之順序而記其積。爲整列代數式之要例。

又如求 $(x^2+a^2)^2(x+a)^2(x-a)^2$ 之連乘積。

積之因子可任意更換其次序。故從便利置之如下。即所求之積

$$\begin{aligned} &= (x+a)^2(x-a)^2(x^2+a^2)^2 \\ &= \{(x+a)(x-a)(x^2+a^2)\}^2 = \{(x^2-a^2)(x^2+a^2)\}^2 \\ &= (x^4-a^4)^2 = x^8 - 2a^4x^4 + a^8. \end{aligned}$$

67. 視察法 兩多項式之積。等於此式各項乘彼式各項之積之和 (55 章)。故三多項式之積。等於兩多項式積之各項。乘第三式各項之積之和。即三多項式之連乘積。等於第一式各項與第二式各項之積。乘第三式各項之積之和。

同法推得諸多項式之連乘積。等於第一式各項。第二式各項。第三式各項。及他式各項相乘諸積之和。

依此法各多項式中各項之連乘積。可從視察得之。因而求得其全積。爲尤便捷。

例如 $(a+b)^2$ 即求 $(a+b)(a+b)(a+b)$ 之積。

此三式可觀察其各項連乘積。先從三式各取 a 乘得 a^3 。次從兩式各取 a 。從他一式取 b 乘得 a^2b 。然三式內可以各取一 b 。以各乘他二式之 a 。故得三個 a^2b 。即 $3a^2b$ 。又依同法從一式取 a 。從兩式各取 b 。亦可取三次。故得 $3ab^2$ 。末從三式各取 b 乘得 b^3 。

由是而 $(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。

例如求 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 之積。

先從三式各取 x 。得 x^3 。次從兩式各取 x 。從他一式取 a 或 b 或 c 。得 x^2a , x^2b , x^2c 。次從一式取 x 。從他兩式取 ab 或 bc 。得 xab , xac , xbc 。末從各式取 a 與 b 與 c 得 abc 。

由是而 $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + x^2a + x^2b + x^2c + xab + xac + xbc + abc$ 。
 $= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$ 。

68. 二項式之方乘 二項式之平方及立方。既詳於前矣。若繼此而更施乘法。則得四方乘五方乘等。但是等之運算。用分離係數法較易。

例如 $(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2$
 $= (a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2)(a+b)$ 。

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 爲	
三次之等次式。 $a+b$ 爲	1+3+3+1
一次之等次式。故其積	<u>1+1</u>
爲四次之等次式。而第	1+3+3+1
一項爲 a^4 。依此運算頗	<u>1+3+3+1</u>
易。	1+4+6+4+1

即 $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ 。

下列之公式。宜熟記之。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$(a+b)^2$ 之公式。又有簡要之記法如下。

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab(a+b).$$

於前公式中之 b ，用 $-b$ 代之，則

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b),$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

五方乘及高次之方乘，其遞求之法，稱為二項式之定理，詳於後編。

[要用之公式] 64章及本章所示之公式外，更有重要之公式，揭明如下。

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \dots\dots\dots(A)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3 \dots\dots\dots(B)$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4+a^2b^2+b^4 \dots\dots\dots(C)$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc \dots\dots\dots(D)$$

例 題 二

1. $2x-a$ ，以 $x-2a$ 乘之。

2. $3x - \frac{1}{3}$ ，以 $\frac{1}{3}x - 3$ 乘之。

[解] $2-1$

[解] $3 - \frac{1}{3}$

$$\frac{1-2}{2-1}$$

$$\frac{\frac{1}{3}-3}{\frac{1}{3}-3}$$

$$2-1$$

$$1 - \frac{1}{9}$$

$$\frac{-4+2}{2-5+2}$$

$$\frac{-9+1}{1-9\frac{1}{9}+1}$$

$$2-5+2$$

即 $2x^2 - 5ax + 2a^2$ 。

即 $x^2 - 9\frac{1}{9}x + 1$ 。

3. $x^2 - xy + y^2$ ，以 $x+y$ 乘之。

[解] 依公式 $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$ 。

4. $1+x+x^2+x^3$ ，以 $x-1$ 乘之。

[解] 改被乘式為 x 之遞降方乘，如 x^3+x^2+x+1 ，與乘式同一整列之。

$$\begin{array}{r}
 1+1+1+1 \\
 \underline{1-1} \\
 1+1+1+1 \\
 \underline{-1-1-1-1} \\
 1+0+0+0-1
 \end{array}$$

積之第一項爲 x^4 。而末項不含 x 。故所求之積爲 x^4-1 。

5. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$ 以 $y-x$ 乘之。

〔解〕改乘式爲 x 之遞降方乘。即 $-x+y$ 。與被乘式同一整列之。

$$\begin{array}{r}
 1+1+1+1+1 \\
 \underline{-1+1} \\
 -1-1-1-1-1 \\
 \underline{+1+1+1+1+1} \\
 -1+0+0+0+0+1
 \end{array}$$

即所求之積爲 $-x^5+y^5$ 。

6. x^2-x+2 以 x^2+x-2 乘之。

$$\begin{aligned}
 \text{〔解〕 所求之積} &= \{x^2-(x-2)\} \{x^2+(x-2)\} = x^4-(x-2)^2 \text{〔64章公式(3)} \\
 &= x^4-(x^2-4x+4) \text{〔64章公式(2)} \\
 &= x^4-x^2+4x-4.
 \end{aligned}$$

7. $1+ax+a^2x^2$ 以 $1-ax+a^2x^2$ 乘之。

$$\text{〔解〕 所求之積} = (1+ax+a^2x^2)(1-ax+a^2x^2) = 1+a^2x^2+a^4x^4. \text{〔公式(C)}]$$

8. x^4+x^2+1 以 x^4-x^2+1 乘之。

$$\text{〔解〕 所求之積爲 } (x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1) = x^8+x^4+1. \text{〔公式(C)}]$$

9. $3x^2-xy+2y^2$ 以 $3y^2-xy+2x^2$ 乘之。

〔解〕改乘式爲 $2x^2-xy+3y^2$ 如下。

$$\begin{array}{r}
 3-1+2 \\
 \underline{2-1+3} \\
 6-2+4 \\
 \underline{-3+1-2} \\
 \underline{+9-3+6}
 \end{array}$$

$$6-5+14-5+6 \quad \text{即 } 6x^4-5x^3y+14x^2y^2-5xy^3+6y^4.$$

10. x^3-5x^2+1 , 以 $2x^2+5x+1$ 乘之

[解] $1-5+0+1$

$$\begin{array}{r} 2+0+5+1 \\ \hline \end{array}$$

$$2-10+0+2$$

$$5-25+0+5$$

$$\begin{array}{r} 1-5+0+1 \\ \hline \end{array}$$

$$2-10+5-22-5+5+1 \text{ 即 } 2x^6-10x^5+5x^4-22x^3-5x^2+5x+1.$$

11. $x^3-5x^2y+y^3$, 以 $y^3+5xy^2+2x^3$ 乘之.

[解] 於前題之答, 入以 y 之遞昇方乘, 即得

$$2x^6-10x^5y+5x^4y^2-22x^3y^3-5x^2y^4+5xy^5+y^6.$$

12. $3a^3-2a^2b+3ab^2-3b^3$, 以 $2a^2+5a^2b-4ab^2+b^3$ 乘之.

[解] $3-2+3-3$

$$\begin{array}{r} 2+5-4+1 \\ \hline \end{array}$$

$$6-4+6-6$$

$$15-10+15-15$$

$$-12+8-12+12$$

$$\begin{array}{r} 3-2+3-3 \\ \hline \end{array}$$

$$6+11-16+20-29+15-3$$

即 $6a^6+11a^5b-16a^4b^2+20a^3b^3-29a^2b^4+15ab^5-3b^6$.

13. $2a^2x^3-3a^2x^2y^2+5y^5$, 以 $a^2x^3+4axy^4-2y^5$ 乘之.

[解] 改爲 $2(ax)^3-3(ax)^2(y^2)+5(y^2)^3$ 與 $(ax)^3+4(ax)(y^2)^2-2(y^2)^3$ 其 ax 及 y^2 各可視爲一個文字求之.

$$2-3+0+5$$

$$\begin{array}{r} 1+0+4-2 \\ \hline \end{array}$$

$$2-3+0+5$$

$$8-12+0+20$$

$$\begin{array}{r} -4+6+0-10 \\ \hline \end{array}$$

$$2-3+8-11+6+20-10$$

即 $2a^6x^6-3a^5x^5y^2+8a^4x^4y^4-11a^3x^3y^6+6a^2x^2y^8+20axy^{10}-10y^{12}$.

14. $2a-3a^2+5a^3-7a^4$ 以 $1-2a^2+6a^4$ 乘之。

$$[解] \quad 2-3+5+0-7$$

$$\quad \underline{1+0-2+0+6}$$

$$2-3+5+0-7$$

$$\quad -4+6-10-0+14$$

$$\quad \quad \quad \underline{12-18+30+0-42}$$

$$2-3+1+6-5-18+44+0-42$$

即 $2a-3a^2+a^3+6a^4-5a^5-18a^6+44a^7-42a^8$ 。

15. $a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2$ 以 $a+b+c$ 乘之。

$$[解] (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc \text{ [公式 (D)]}.$$

16. $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ 以 $x+y+z$ 乘之。

$$[解] (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy) = x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

17. $4a^2+9b^2+c^2+3bc+2ca-6ab$ 以 $2a+3b-c$ 乘之。

$$[解] \{2a+3b+(-c)\} \{(2a)^2+(3b)^2+(-c)^2-(3b)(-c)-(-c)(2a)-(2a)(3b)\} \\ = (2a)^2+(3b)^2+(-c)^2-3(2a)(3b)(-c) \text{ [公式 (D)]} \\ = 8a^2+27b^2-c^2+18abc.$$

18. 求 x^4+1, x^2+1, x^2-1 之連乘積。

$$[解] (x^2+1)(x^2-1)(x^4+1) = (x^4-1)(x^4+1) = x^8-1 \text{ (64 章 (3))}.$$

19. 求 $x^4+16y^4, x^2+4y^2, x+2y$ 及 $x-2y$ 之連乘積。

$$[解] (x-2y)(x+2y)(x^2+4y^2)(x^4+16y^4) = (x^2-4y^2)(x^2+4y^2)(x^4+16y^4) \\ = (x^4-16y^4)(x^4+16y^4) = x^8-256y^8.$$

20. 求 $(x-y)^2, (x+y)^2$ 及 $(x^2+y^2)^2$ 之連乘積。

$$[解] \{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\}^2 = \{(x^2-y^2)(x^2+y^2)\}^2 \\ = (x^4-y^4)^2 = x^8-2x^4y^4+y^8.$$

21. 求 $(x^2+1)^3, (x+1)^3$ 及 $(x-1)^3$ 之連乘積。

$$[解] \{(x-1)(x+1)(x^2+1)\}^3 = (x^4-1)^3 = x^{12}-3x^8+3x^4-1.$$

22. 求 x^2-x+1, x^2+x+1 及 x^4-x^2+1 之連乘積。

$$[解] (x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1) = (x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1) \\ = x^8+x^4+1 \text{ (公式 (C))}.$$

23. 求 $a^2 - 2ab + 4b^2$, $a^2 + 2ab + 4b^2$ 及 $a^4 - 4a^2b^2 + 16b^4$ 之連乘積。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & \{a^2 - a(2b) + (2b)^2\} \{a^2 + a(2b) + (2b)^2\} (a^4 - 4a^2b^2 + 16b^4) \\ & = \{a^4 + a^2(2b)^2 + (2b)^4\} (a^4 - 4a^2b^2 + 16b^4) \\ & = (a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4)(a^4 - 4a^2b^2 + 16b^4) = a^8 + 16a^4b^4 + 256b^8. \end{aligned}$$

24. 求下列各式之平方。

- (1) $a + 2b - 3c$, (2) $a^2 - ab + b^2$, (3) $bc + ca + ab$,
 (4) $1 - 2x + 3x^2$, (5) $x^3 + x^2 + x + 1$.

[解] 可用 64 章及 65 章之公式求之。

$$\begin{aligned} (1) \quad & (a + 2b - 3c)^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 2a(2b) + 2a(-3c) + 2(2b)(-3c) \\ & = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab - 6ac - 12bc. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (a^2 - ab + b^2)^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4 - 2a^2b + 2a^2b^2 - 2ab^3. \\ & = a^4 + 3a^2b^2 + b^4 - 2a^2b - 2ab^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & (bc + ca + ab)^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 + 2(bc)(ca) + 2(bc)(ab) + 2(ca)(ab) \\ & = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 + 2bc^2a + 2b^2ca + 2ca^2b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & (1 - 2x + 3x^2)^2 = 1 + 4x^2 + 9x^4 - 4x + 6x^2 - 12x^3 \\ & = 1 - 4x + 10x^2 - 12x^3 + 9x^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad & (x^3 + x^2 + x + 1)^2 = x^6 + x^4 + x^2 + 1 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x \\ & = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

[注意] 本例 (3) 又有如下法記之。亦為要用之公式。

$$(bc + ca + ab)^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 + 2abc(a + b + c).$$

25. 求下列各式之立方。

- (1) $a + b + c$, (2) $2a - 3b - 2c$, (3) $1 + x + x^2$.

[解] 可用 68 章之公式。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \{a + (b + c)\}^3 = a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3 \\ & = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \text{於前式之 } a, b, c \text{ 順次用 } 2a, -3b, -2c \text{ 代入之。則 } (2a - 3b - 2c)^3 \\ & = 8a^3 - 27b^3 - 8c^3 - 36a^2b - 24a^2c + 54b^2a - 54b^2c + 24c^2a - 36c^2b + 72abc. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & (1 + x + x^2)^3 = 1 + x^3 + x^6 + 3x + 3x^2 + 3x^2 + 3x^4 + 3x^4 + 3x^5 + 6x^3 \\ & = 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6. \end{aligned}$$

26. $(x+y+z)^2 - (-x+y+z)^2 + (x-y+z)^2 - (x+y-z)^2$ 化爲簡式。

[解] 可用 56 章 (A) 及 (B) 之兩公式。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \{(y+z)+x\}^2 - \{(y+z)-x\}^2 + \{x+(z-y)\}^2 - \{x-(z-y)\}^2 \\ &= 4(y+z)x + 4x(z-y) = 8xz. \end{aligned}$$

27. 試證 $(x+y)(x+z) - x^2 = (y+z)(y+x) - y^2 = (z+x)(z+y) - z^2$ 。

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } (x+y)(x+z) - x^2 &= (y+x)\{(y+z)-(y-x)\} - x^2 \\ &= (y+x)(y+z) - (y^2 - x^2) - x^2 = (y+z)(y+x) - y^2. \end{aligned}$$

又以同法得 $(y+z)(y+x) - y^2 = (z+x)(z+y) - z^2$ 。

28. 試證 $(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x+y+z)^2$ 。

[證] 先解去左邊之括弧，并其同類項而簡之。即得

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx. \text{ 即依 64 章知等於 } (x+y+z)^2.$$

29. 化 $\{x(x+a) - a(x-a)\}\{x(x-a) - a(x+a)\}$ 爲簡式。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= (x^2 + ax - ax + a^2)(x^2 - ax - ax - a^2) = (x^2 + a^2)\{(x^2 - a^2) - 2ax\} \\ &= (x^2 + a^2)(x^2 - a^2) - (x^2 + a^2)2ax = x^4 - a^4 - 2ax^3 - 2a^3x. \end{aligned}$$

30. 試證 $(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 = 3(y-z)(z-x)(x-y)$ 。

[證] $-(x-y) = -x+y = (z-x) + (y-z)$ 。用 68 章 $(a+b)^2$ 之簡要公式

$$\text{則 } -(x-y)^2 = \{(z-x) + (y-z)\}^2.$$

$$\text{即 } -(x-y)^2 = (z-x)^2 + (y-z)^2 + 3(z-x)(y-z)\{(z-x) + (y-z)\}.$$

$$\text{即 } -(x-y)^2 = (z-x)^2 + (y-z)^2 - 3(z-x)(y-z)(x-y).$$

$$\text{由是得 } (x-y)^2 + (z-x)^2 + (y-z)^2 = 3(z-x)(y-z)(x-y).$$

31. 試證 $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ 及

$$a^4 + b^4 = (a+b)^4 - 4ab(a+b)^2 + 2a^2b^2.$$

[證] 依 68 章之簡要公式。即得 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b).$$

$$\text{又 } (a+b)^4 = (a+b)^2(a^2 + 2ab + b^2) = (a+b)^2\{(a^2 - 2ab + b^2) + 4ab\}$$

$$= (a+b)^2(a-b)^2 + 4ab(a+b)^2$$

$$= (a^2 - b^2)^2 + 4ab(a+b)^2$$

$$= a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 4ab(a+b)^2.$$

由是得 $a^4 + b^4 = (a+b)^4 - 4ab(a+b)^2 + 2a^2b^2$ 。

32. 試證 $(x^2 + xy + y^2)^2 - 4xy(x^2 + y^2) = (x^2 - xy + y^2)^2$ 。

[證] 由 56 章公式。 $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ 故 $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$ 。依

此。則 $(x^2 + xy + y^2)^2 - 4xy(x^2 + y^2) = \{(x^2 + y^2) + xy\}^2 - 4(x^2 + y^2)xy$
 $= \{(x^2 + y^2) - xy\}^2 = (x^2 - xy + y^2)^2$ 。

33. 試證 $(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2 + 2(x+y)(x+z) + 2(x+z)(y+x)$
 $+ 2(z+x)(z+y) = 4(x+y+z)^2$ 。

[證] $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ 。以 $x+y, y+z, z+x$ 代其
 a, b, c 則左邊為 $\{(x+y) + (y+z) + (z+x)\}^2 = 4(x+y+z)^2$ 。

34. 試證 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ 。

[證] $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$
 $= (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ 。

35. 設 $x = a + d, y = b + d, z = c + d$ 。試求下題之證。

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

[證] $x - y = (a + d) - (b + d) = a - b, y - z = b - c, z - x = c - a$ 。

由是 $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ 解去兩邊之括弧。

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$$

即 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 。

36. $x = b + c, y = c + a, z = a + b$ 。試求下題之證。

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

[證] 此題與 35 同法證之。

37. 試證 $2(a-b)(a-c) + 2(b-c)(b-a) + 2(c-a)(c-b)$
 $= (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$ 。

[證] 因 $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$ 。平方之。得

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 2(a-b)(b-c) + 2(b-c)(c-a) + 2(c-a)(a-b) = 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 2(b-a)(b-c) - 2(c-b)(c-a) - 2(a-c)(a-b) = 0$$

是為本題之證。

38. 試證 $(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ax + by + cz)^2$
 $= (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2$ 。

[證] 解去左邊之括弧。化為簡式。即得

$$b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2 + c^2x^2 - 2acxz + a^2z^2 + a^2y^2 - 2abyx + b^2x^2$$

即 $(bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2$ 。

39. $x = a^2 - bc, y = b^2 - ca, z = c^2 - ab$ 。試證下列之式。

$$ax + by + cz = (x + y + z)(a + b + c), bc(x^2 - yz) = ca(y^2 - zx) = ab(z^2 - xy)$$

$$[\text{證}] ax+by+cz=a(a^2-bc)+b(b^2-ca)+c(c^2-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

$$\begin{aligned} \text{依 68 章公式 (D).} &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= (a+b+c)\{(a^2-bc)+(b^2-ca)+(c^2-ab)\} \\ &= (a+b+c)(x+y+z). \end{aligned}$$

$$\text{又 } x^2-yz=(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc,$$

$$\text{故 } bc(x^2-yz)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc),$$

$$ca(y^2-zx)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc),$$

$$ab(z^2-xy)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc),$$

$$\therefore bc(x^2-yz)=ca(y^2-zx)=ab(z^2-xy).$$

$$40. \text{ 設 } 3x=a+b+c.$$

試求 $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2-3(x-a)(x-b)(x-c)$ 之值。

[解] 依 68 章公式 (D).

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \{(x-a)+(x-b)+(x-c)\} [\{(x-a)-(x-b)\}^2 + \{(x-b)-(x-c)\}^2 \\ &\quad + \{(x-c)-(x-a)\}^2] \\ &= \frac{1}{2} \{3x-(a+b+c)\} \{(b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2\}. \end{aligned}$$

而 $3x=a+b+c$, 即 $3x-(a+b+c)=0$. \therefore 原式 $=0$.

$$\begin{aligned} 41. \text{ 試證 } (a^2+b^2+c^2)^2 &= (b^2+c^2)^2 + (ab+ac)^2 + (ab-ac)^2 + a^4 \\ &= (bc+ca+ab)^2 + (a^2-bc)^2 + (b^2-ca)^2 + (c^2-ab)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{證}] (a^2+b^2+c^2)^2 &= \{(b^2+c^2)+a^2\}^2 = (b^2+c^2)^2 + 2(b^2+c^2)a^2 + a^4 \\ &= (b^2+c^2)^2 + a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2 + (a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2) + a^4 \\ &= (b^2+c^2)(ab+ac)^2 + (ab-ac)^2 + a^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } (a^2+b^2+c^2)^2 &= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \\ &= (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ &= (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) + a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2. \\ &= (ab+bc+ca)^2 + (a^4 - 2a^2bc + b^2c^2) + (b^4 - 2b^2ca + c^2a^2) + (c^4 - 2c^2ab + a^2b^2) \\ &= (ab+bc+ca)^2 + (a^2-bc)^2 + (b^2-ca)^2 + (c^2-ab)^2. \end{aligned}$$

$$42. \text{ 試證 } (x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2)$$

$$= (ax-by)^2 + (ax-by)(ay+bx+by) + (ay+bx+by)^2.$$

$$\begin{aligned}
 & \text{〔解〕 } (x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2) \\
 &= a^2x^2+b^2y^2+a^2xy+b^2xy+a^2y^2+b^2x^2+abx^2+abxy+aby^2 \\
 &= (a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2+2abxy+2b^2xy+2aby^2)-abxy-b^2xy-aby^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad +a^2xy+abx^2+a^2x^2 \\
 &= (ay+bx+by)^2+(a^2x^2-2abxy+b^2y^2)+abxy-b^2y^2+a^2xy-aby^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad +abx^2-b^2xy \\
 &= (ay+bx+by)^2+(ax-by)^2+by(ax-by)+ay(ax-by)+bx(ax-by) \\
 &= (ay+bx+by)^2+(ax-by)^2+(ax-by)(by+ay+bx).
 \end{aligned}$$

43. 試證 $1+a^2+b^2+c^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+a^2b^2c^2$
 $=(1-bc-ca-ab)^2+(a+b+c-abc)^2$.

$$\begin{aligned}
 & \text{〔證〕 } 1+\{a^2+b^2+c^2\}+\{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\}+a^2b^2c^2 \\
 &= 1+\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}+\{(bc+ca+ab)^2-2abc(a+b+c)\} \\
 & \qquad \qquad \qquad a^2+b^2c^2 \\
 &= 1-2(ab+bc+ca)+(bc+ca+ab)^2+(a+b+c)^2-2abc(a+b+c)+a^2b^2c^2 \\
 &= (1-ab-bc-ca)^2+(a+b+c-abc)^2.
 \end{aligned}$$

44. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2+4(ad-bc)^2$.

$$\begin{aligned}
 & \text{〔證〕 } (a^2+b^2+c^2+d^2)^2=\{(a^2+b^2-c^2-d^2)+2(c^2+d^2)\}^2 \\
 &= (a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(a^2+b^2-c^2-d^2)(c^2+d^2)+4(c^2+d^2)^2 \\
 &= (a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(a^2+b^2)(c^2+d^2).
 \end{aligned}$$

但 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ (依 34 例)

$$\therefore (a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2+4(ad-bc)^2.$$

45. 試證明下列之二題。

(1) $(a+2)^2-4(a+1)^2+6a^2-4(a-1)^2+(a-2)^2=0$.

(2) $(a+2)(b+2)-4(a+1)(b+1)+6ab-4(a-1)(b-1)+(a-2)(b-2)=0$.

$$\begin{aligned}
 & \text{〔證〕 (1) 左邊 } = (a+2)^2+(a-2)^2-4\{(a+1)^2+(a-1)^2\}+6a^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad = 2(a^2+4)-8(a^2+1)+6a^2=2a^2+8-8a^2-8+6a^2=0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(2) 左邊 } = (a+2)(b+2)+(a-2)(b-2)-4\{(a+1)(b+1)+(a-1)(b-1)\} \\
 & \qquad \qquad \qquad +6ab \\
 &= ab+2(a+b)+4+ab-2(a+b)+4-4\{ab+(a+b)+1+ab-(a+b)+1\} \\
 & \qquad \qquad \qquad +6ab \\
 &= 2ab+8-4(2ab+2)+6ab=2ab+8-8ab-8+6ab=0.
 \end{aligned}$$

46. 試證下二題。

$$(1) (a+2)^3 - 4(a+1)^3 + 6a^3 - 4(a-1)^3 + (a-2)^3 = 0.$$

$$(2) (a+2)(b+2)(c+2) - 4(a+1)(b+1)(c+1) + 6abc - 4(a-1)(b-1)(c-1) + (a-2)(b-2)(c-2) = 0$$

〔證〕(1) 左邊 $= (a+2)^3 + (a-2)^3 - 4\{(a+1)^3 + (a-1)^3\} + 6a^3$
 $= 2a^3 + 24a - 4(2a^3 + 6a) + 6a^3 = 0.$

(2) 左邊 $= (a+2)(b+2)(c+2) + (a-2)(b-2)(c-2)$
 $- 4\{(a+1)(b+1)(c+1) + (a-1)(b-1)(c-1)\} + 6abc$
 $= abc + (ab+bc+ca)2 + (a+b+c)4 + 8 + abc - (ab+bc+ca)2 + (a+b+c)4$
 $- 8 - 4\{abc + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1 + abc - (ab+bc+ca)$
 $+ (a+b+c) - 1\} + 6abc$
 $= 2abc + 8(a+b+c) - 4\{2abc + 2(a+b+c)\} + 6abc = 0.$

47. 證 $(a+b+c)^2 + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$= 4a^2(b+c) + 4b^2(c+a) + 4c^2(a+b) + 4abc.$$

〔證〕令 $a+b+c=s$. 則左邊 $= s^2 + (s-2a)(s-2b)(s-2c)$
 $= s^3 + s^3 - 2s^2(a+b+c) + 4s(ab+bc+ca) - 8abc$
 $= 2s^3 - 2s^3 + 4s(ab+bc+ca) - 8abc$
 $= 4(a+b+c)(ab+bc+ca) - 8abc$
 $= 4a\{a(b+c) + bc\} + 4b\{b(c+a) + ca\} + 4c\{c(a+b) + ab\} - 8abc$
 $= 4a^2(b+c) + 4b^2(c+a) + 4c^2(a+b) + 4abc.$

48. 試證 $x(x-y+z)(x+y-z) + y(x+y-z)(-x+y+z)$

$$+ z(-x+y+z)(x-y+z) + (-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) + 4xyz.$$

〔證〕令 $x+y+z=s$. 則左邊
 $= x(s-2y)(s-2z) + y(s-2x)(s-2x) + z(s-2x)(s-2y) + (s-2x)(s-2y)(s-2z)$
 $= s^2(x+y+z) - 4s(xy+yz+zx) + 12xyz + s^3 - 2s^3 + 4s(xy+yz+zx) - 8xyz = 4xyz.$

49. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - bc - ca - ab - ad - bd - cd$. 以 $a+b+c+d$ 乘之.

〔解〕 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - bc - ca - ab - ad - bd - cd)(a+b+c+d)$.

上兩式之積 a^3, b^3, c^3, d^3 . 各有一個. 如 a^2b 之項. 則為 $a^2b - a^2b = 0$.

同法 a^2c, a^2d, b^2a, b^2c 等項。亦相消而為 0。又 abc 其係數為 -3 。故所求之積。為 $a^3+b^3+c^3+d^3-3abc-3abd-3bcd-3cad$ 。

$$50. (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)\dots(x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1) \\ = x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1.$$

$$\text{〔證〕 } (x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1=(x^2+x^2+1), \\ (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1) \\ =x^8+x^4+1=x^{2^3}+x^{2^2}+1.$$

$$\text{同法得 } (x^2+x+1)(x^3-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)=x^{2^4}+x^3+1, \\ \therefore \text{左邊} = x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1.$$

第 伍 編

除 法

69. 一項式之除法 以一項式除一項式之法。已詳於前。惟依 43 章兩代數之和。以第三數量除之。所得之商。等於以第三數量。分除其各數量之商之和。又依 54 章乘法之反法。多項式以一項式除之。所得之商。等於以一項式分除其各項之商之和。

$$\text{例如 } (a^2x - 3ax) \div ax = a^2x \div ax - 3ax \div ax = a - 3.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } (12x^3 - 5ax^2 - 2a^2x) \div 3x &= 12x^3 \div 3x - 5ax^2 \div 3x - 2a^2x \div 3x. \\ &= 4x^2 - \frac{5}{3}ax - \frac{2}{3}a^2. \end{aligned}$$

70. 多項式之除法 茲示以除法之通例。即以多項式除多項式之法。

除法為乘法之反法。故於除式當求以何式乘之。而得被除式。因之得求法如下。

被除式與除式。皆整列為某文字(假設 a)之遞降方乘。則其商亦得整列為遞降方乘。

依 62 章被除式之第一項。為除式第一項與商之第一項之積。故以除式之第一項。除被除式之第一項。得商之第一項。以乘除式。從被除式內減去之。則其餘式。等於商之他項與除式之積。是為餘式。此餘式又整列於 a 之遞降方乘。以除式之第一項除其第一項。得商之第二項。以乘除式。從餘式減去之。迭次施此方法。得商之第三項第四項等。以至得所求之商而止。

例如 $8a^3 + 8a^2b + 4ab^2 + b^3$ 。以 $2a + b$ 除之。與算術除法同式如下。

$$2a + b \overline{) 8a^3 + 8a^2b + 4ab^2 + b^3} \quad (4a^2 + 2ab + b^2) \dots \dots \dots \text{商}$$

$$\underline{8a^3 + 4a^2b}$$

$$4a^2b + 4ab^2 + b^3$$

$$\underline{4a^2b + 2ab^2}$$

$$2ab^2 + b^3$$

$$\underline{2ab^2 + b^3}$$

商之第一項。爲 $8a^3 \div 2a = 4a^2$ 。以乘除式。從被除式內減去之。得 $4a^2b + 4ab^2 + b^3$ 爲餘式。商之第二項爲 $4a^2b \div 2a = 2ab$ 。以乘除式。從餘式內減去之。得 $2ab^2 + b^3$ 爲第二餘式。商之第三項。爲 $2ab^2 \div 2a = b^2$ 。以乘除式。從第二餘式內減去之。則已無餘。故被除式。等於所減諸式之和。即被除式等於以 $4a^2, +2ab, +b^2$ 乘除式之積之和。即被除式等於 $4a^2 + 2ab + b^2$ 式乘除式之積。故 $4a^2 + 2ab + b^2$ 爲所求之商。

被除式與除式可整列爲同文字之遞降方乘。亦可均列爲遞昇方乘。如本例之 a 爲遞降方乘。其在 b 即遞昇方乘。惟被除式與除式。不可一式遞昇。一式遞降耳。

71. 例解 更舉數例解之如下。

[第一例] $a^4 - a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 + b^4$ 。以 $a^2 + b^2$ 除之。

$$(a^2 + b^2) a^4 - a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 + b^4 \div (a^2 - ab + b^2)$$

$$\begin{array}{r} a^4 \quad \quad + a^2b^2 \\ \hline -a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\ \hline -a^3b \quad \quad -ab^3 \\ \hline \quad + a^2b^2 \quad + b^4 \\ \hline \quad + a^2b^2 \quad + b^4 \end{array}$$

[第二例] $a^4 + a^2b^2 + b^4$ 。以 $a^2 - ab + b^2$ 除之。

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

已示於前。故 $a^4 + a^2b^2 + b^4 \div (a^2 - ab + b^2) = a^2 + ab + b^2$ 。雖然。當以實際之運算。解之如下。

$$\begin{array}{r} (a^2 - ab + b^2) a^4 \quad + a^2b^2 \quad + b^4(a^2 + ab + b^2) \\ \hline a^4 - a^3b + a^2b^2 \\ \hline \quad a^3b \quad \quad + b^4 \\ \hline \quad a^3b - a^2b^2 + ab^3 \\ \hline \quad \quad a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\ \hline \quad \quad a^2b^2 - ab^3 + b^4 \end{array}$$

此例於被除式與除式俱整列爲 a 之遞降方乘。而因欲便於逐次相減。故於被除式 a^3 及 a 之兩項。特空其位置。然不如此。而僅將各餘式。依 a 之遞降方乘整列之亦可。

例如 $a^2 - ab + b^2) a^4 + a^2b^2 + b^4 (a^2 + ab + b^2$

$$\begin{array}{r} a^4 - a^3b + a^2b^2 \\ \hline a^3b + b^4 \\ \hline a^3b - a^2b^2 + ab^3 \\ \hline a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\ \hline a^2b^2 - ab^3 + b^4 \end{array}$$

[第三例] $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 。以 $a + b + c$ 除之。

$a + b + c) a^3 - 3abc + b^3 + c^3 (a^2 - ab - ac + b^2 - bc + c^2$

$$\begin{array}{r} a^3 + a^2b + a^2c \\ \hline -a^2b - a^2c - 3abc + b^3 + c^3 \\ \hline -a^2b - ab^2 - abc \\ \hline -a^2c + ab^2 - 2abc + b^3 + c^3 \\ \hline -a^2c \quad -abc - ac^2 \\ \hline ab^2 - abc + ac^2 + b^3 + c^3 \\ ab^2 \quad \quad \quad + b^3 + b^2c \\ \hline -abc + ac^2 - b^2c + c^3 \\ -abc \quad \quad -b^2c - bc^2 \\ \hline ac^2 + bc^2 + c^3 \\ \hline ac^2 + bc^2 + c^3 \end{array}$$

如上例含二個以上之文字。不僅整列於 a 之遞降方乘。即其他文字。亦順次整列。故上例之 b 皆置於 c 前。又或僅作 a 式。其他二字以括弧括之。改爲簡式。如下。

$a + (b + c) a^3 - 3abc + (b^3 + c^3) (a^2 - (b + c)a + (b^2 - bc + c^2)$

$$\begin{array}{r} a^2 + a^2(b + c) \\ \hline -a^2(b + c) - 3abc + (b^3 + c^3) \\ \hline -a^2(b + c) - a(b + c)^2 \\ \hline a(b^2 - bc + c^2) + (b^3 + c^3) \\ \hline a(b^2 - bc + c^2) + (b^3 + c^3) \end{array}$$

惟從第一餘式之第二項 $-3abc$ 減 $-a(b+c)^2$ 得 $a(b^2-bc+c^2)$ 非熟練者不易知之。

72. 分離係數 除法亦如乘法用分離係數為便。

· 例如 $2x^6-7x^5+5x^4+3x^3-3x^2+4x-4$ 以 $2x^3-3x^2+x-2$ 除之。

$$2-3+1-2) 2-7+5+3-3+4-4 (1-2-1+2$$

$$\underline{2-3+1-2}$$

$$-4+4+5-3+4-4$$

$$\underline{-4+6-2+4}$$

$$-2+7-7+4-4$$

$$\underline{-2+3-1+2}$$

$$4-6+2-4$$

$$\underline{4-6+2-4}$$

商之第一項，為 $2x^6 \div 2x^3 = x^3$ 。故從 $1-2-1+2$ 而得 x^3-2x^2-x+2 。即所求之商。

73. 除法之別定義 於70章所示被除式之最初減餘式。其第一項已減盡而為0。故餘式比被除式。其 a 之次數必低。故逐次之餘式。必次第為 a 之低次式。至餘式之次數較低於除式。則知其已不能整除。即與算術之餘數比除數小則不能整除者同。由是除法之定義。須擴張之。如下。

[定義] 以 B 除 A 。求 $B \times C$ 等於 A 之代數式 C 。或求得 C 後。其 $B \times C$ 與 A 之差式內特別一文字。比 B 內特別一文字之次數低。此定義其第一為能整除者。第二為不能整除者。

例如 $a^3+3ab+4b^3$ 以 $a+b$ 除之

$$(a+b) a^2+3ab+4b^3 (a+2b$$

$$\underline{a^2+ab}$$

$$2ab+4b^3$$

$$\underline{2ab+2b^3}$$

$$2b^3$$

故得 $(a^2+3ab+4b^2)\div(a+b)=a+2b$ 。而餘式為 $2b^2$ 。

即 $a^2+3ab+4b^2=(a+b)(a+2b)+2b^2$ 。

又被除式與除式。其整列與前異者。則

$$\begin{array}{r} b+a)4b^2+3ab+a^2(4b-a \\ \underline{4b^2+4ab} \\ -ab+a^2 \\ \underline{-ab-a^2} \\ 2a^2 \end{array}$$

即 $a^2+3ab+4b^2=(a+b)(4b-a)+2a^2$ 。

第一之餘式為 $2b^2$ 。第二之餘式為 $2a^2$ 。蓋因第一為 a 之遞降方乘。故其餘式不復含 a 。第二為 b 之遞降方乘。故其餘式不復含 b 。由是知同文字之整列。有遞降遞昇之異。而餘式亦因之而異。

74. 恆同式 (Identity) 代數式之文字。不論為如何之值。常有相等之關係者。謂之恆同式。

例如 $a+a=2a$ 。其 a 為任何值無不相等。故為恆同式。

下列之恆同式。當熟記之。(乘法之公式亦為恆同式)

$$(x^2\pm 2ax+a^2)\div(x\pm a)=x\pm a.$$

$$(x^2-a^2)\div(x\pm a)=x\mp a.$$

$$(x^3\pm a^3)\div(x\pm a)=x^2\mp ax+a^2.$$

$$(x^4-a^4)\div(x\mp a)=x^3\pm ax^2+a^2x\pm a^3.$$

$$(x^4+a^2x^2+a^4)\div(x^2\mp ax+a^2)=x^2\pm ax+a^2.$$

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz)\div(x+y+z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx.$$

例題三

1. x^2-9y^2 。以 $x+3y$ 除之。

[解] 由 74 章之公式。 $\{x^2-(3y)^2\}\div(x+3y)=x-3y$ 。

2. x^4-16y^4 。以 x^2-4y^2 除之。

[答 x^2+4y^2]

3. $27x^3+64y^3$. 以 $4y+3x$ 除之.

[解] 由 74 章之公式.

$$\{(3x)^3+(4y)^3\} \div (3x+4y) = (3x)^2 - (3x)(4y) + (4y)^2 = 9x^2 - 12xy + 16y^2.$$

4. $3x^2-4xy-4y^2$. 以 $2y-x$ 除之.

[解] 除式列爲 $-x+2y$.

$$-1+2) 3-4-4 (-3-2 \text{ 即 } -3x-2y \text{ 商}$$

$$\begin{array}{r} 3-6 \\ \underline{2-4} \\ 2-4 \end{array}$$

{ 5. $1-5x^4+4x^5$. 以 $1-x$ 除之.

[答 $1+x+x^2+x^3-4x^4$]

{ 6. $x^5-5xy^4+4y^5$. 以 $x-y$ 除之.

[答 $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3-4y^4$]

[解] 5, 6 兩題. 可同用一分離係數求之. 即

$$1-1) 1+0+0+0-5+4 (1+1+1+1-4$$

$$\begin{array}{r} 1-1 \\ \underline{1+0+0-5+4} \\ 1-1 \\ \underline{1+0-5+4} \\ 1-1 \\ \underline{1-5+4} \\ 1-1 \\ \underline{-4+4} \\ -4+4 \end{array}$$

{ 7. $1-6x^5+5x^6$. 以 $1-2x+x^2$ 除之.

[答 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$]

{ 8. $m^6-6mn^5+5n^6$. 以 $m^2-2mn+n^2$ 除之.

[答 $m^4+2m^3n+3m^2n^2+4mn^3+5n^4$]

[解] 7, 8 兩題. 亦可同用一分離係數如前例.

9. $1-7x^6+6x^7$. 以 $(1-x)^2$ 除之.

[解] $(1-x)^2=1-2x+x^2$. 故

$$1-2+1)1+0+0+0+0+0-7+6(1+2+3+4+5+6$$

$$\underline{1-2+1}$$

$$2-1+0+0+0-7+6$$

即所求之商。爲

$$\underline{2-4+2}$$

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5$$

$$3-2+0+0-7+6$$

$$\underline{3-6+3}$$

$$4-3+0-7+6$$

$$\underline{4-8+4}$$

$$5-4-7+6$$

$$\underline{5-10+5}$$

$$6-12+6$$

$$\underline{6-12+6}$$

10. $1-x^3$ 以 $1-x^2$ 除之。

[解] $\{1-(x^2)^2\} \div (1-x^2) = 1+x^2+(x^2)^2+(x^2)^3 = 1+x^2+x^4+x^6$ 。

11. $1+x-8x^2+19x^3-15x^4$ 以 $1+3x-5x^2$ 除之。

(答 $1-2x+3x^2$)

{ 12. $4-9x^2+12x^3-4x^4$ 以 $2+3x-2x^2$ 除之。

{ 13. $4x^4-9x^2y^2+6xy^3-y^4$ 以 $2x^2+3xy-y^2$ 除之。

[解] $2+3-2)4+0-9+12-4(2-3+2$

$$\underline{4+6-4}$$

$$-6-5+12-4$$

(12. 答 $2-3x+2x^2$)

$$\underline{-6-9+6}$$

$$4+6-4$$

(13. 答 $2x^2-3xy+y^2$)

$$\underline{4+6-4}$$

14. $x^3-3x^2+3x+y^3-1$ 以 $x+y-1$ 除之。

[解] 本題含二文字。且爲不等次項。故不能用分離係數之法。

今由 68 章 $(a-b)^3$ 之公式。

$$x^3-3x^2+3x-1+y^3=(x-1)^3+y^3 \text{ 故所求之商。即}$$

$$\{(x-1)^3+y^3\} \div \{(x-1)+y\} = (x-1)^2-(x-1)y+y^2$$

15. $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$. 以 $x^2 + xy + y^2$ 除之。

[解] $1+1+1)1+1+1+1+1+1(1+0+0+1$ 即 $x^3 + y^3$.

$$\begin{array}{r} 1+1+1 \\ \hline 1+1+1 \\ \hline 1+1+1 \end{array}$$

16. $x^5 - 5x^4y + 7x^3y^2 - x^2y^3 - 4xy^4 + 2y^5$. 以 $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ 除之。

[答 $x^2 - 2xy - 2y^2$]

17. $a^2 - 2b^2 - 6c^2 + ab - ac + 7bc$. 以 $a - b + 2c$ 除之。

[解] 本題祇能用通例之除法。因題式中含三文字。故雖為等次。不能用分離係數之法。且又無公式可用也。

$$a - b + 2c) a^2 + ab - ac - 2b^2 + 7bc - 6c^2 (a + 2b - 3c$$

$$\begin{array}{r} a^2 - ab + 2ac \\ \hline 2ab - 3ac - 2b^2 + 7bc - 6c^2 \\ 2ab \quad - 2b^2 + 4bc \\ \hline -3ac \quad + 3bc - 6c^2 \\ -3ac \quad + 3bc - 6c^2 \end{array}$$

18. $a^2 + 2b^2 - 3c^2 + bc + 2ac + 3ab$. 以 $a + b - c$ 除之。

[解] 本題同前用通例除法。

[答 $a + 2b + 3c$]

19. $6a^4 + 4b^4 - a^3b + 13ab^3 + 2a^2b^2$. 以 $2a^2 + 4b^2 - 3ab$ 除之。

[解] 除式與被除式。皆整列為 a 之遞降方乘。用分離係數法。則得 $3+4+1$. 即所求之商。為 $3a^2 + 4ab + b^2$.

20. $x^4 + y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2z^2 - 1$. 以 $x^2 + y^2 - z^2 + 1$ 除之。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad x^4 + y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2z^2 - 1 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - (z^4 - 2z^2 + 1) \\ &= (x^2 + y^2)^2 - (z^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \{(x^2 + y^2)^2 - (z^2 - 1)^2\} \div \{(x^2 + y^2) - (z^2 - 1)\} = (x^2 + y^2) + (z^2 - 1).$$

21. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - c^3$. 以 $a - b - c$ 除之。

$$\text{[解]} \text{ 被除式 } = (a - b)^3 - c^3.$$

$$\text{故 } \{(a - b)^3 - c^3\} \div \{(a - b) - c\} = (a - b)^2 + (a - b)c + c^2.$$

22. $a^3 + 8b^3 - c^3 + 6abc$. 以 $a + 2b - c$ 除之。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \text{ 由 74 章 } \{a^3 + (2b)^3 + (-c)^3 - 3a(2b)(-c)\} \div \{a + 2b - c\} \\ = a^2 + (ab)^2 + (-c)^3 - a(2b) - 2b(-c) - (-c)a. \end{aligned}$$

故所求之商。爲 $a^2+4b^2+c^2-2ab+2bc+ca$ 。

23. $a^3+8b^3+27c^3+18abc$ 。以 $a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab$ 除之。

[解] 由 74 章 $a^3+(2b)^3+(3c)^3-3a(2b)(3c)$
 $=(a+2b+3c)(a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab)$ 。以
 $a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab$ 除之。得 $a+2b+3c$ 。

24. $27a^3-8b^3-27c^3-54abc$ 。以 $3a-2b-3c$ 除之。

[解] 與前例同。其商爲 $9a^2+4b^2+9c^2+6ab-6bc+9ca$ 。

25. $acx^3+(ad-bc)x^2-(ac+bd)x+bc$ 。以 $ax-b$ 除之。

[解] 用通常之除法如下。

$$\begin{array}{r}
 ax-b \overline{) acx^3+(ad-bc)x^2-(ac+bd)x+bc} \\
 \underline{acx^3} \\
 -bcx^2 \\
 \underline{adcx^2-(ac+bd)x+bc} \\
 -bdx \\
 \underline{-acx+bc} \\
 -acx+bc
 \end{array}$$

26. $2a^2x^2-2(b-c)(3b-4c)y^2+abxy$ 。以 $ax+2(b-c)y$ 除之。

[解] $ax+2(b-c)y \overline{) 2a^2x^2+abxy-2(b-c)(3b-4c)y^2}$ $(2ax-(3b-4c)y$

$$\begin{array}{r}
 \underline{2a^2x^2+4a(b-c)xy} \\
 -a(3b-4c)xy-2(b-c)(3b-4c)y^2 \\
 \underline{-a(3b-4c)xy-2(b-c)(3b-4c)y^2}
 \end{array}$$

27. $9a^2b^3-12a^4b+3b^5+2a^3b^2+4a^5-11ab^4$ 。以 $3b^3+4a^3-2ab^2$ 除之。

[解] 被除式 $=4a^5-12a^4b+2a^3b^2+9a^2b^3-11ab^4+3b^5$

及 除式 $=4a^3-2ab^2+3b^3$ 。

故 $4+0-2+3 \overline{) 4-12+2+9-11+3(1-3+1}$

$$\begin{array}{r}
 \underline{4+0-2+3} \\
 -12+4+6-11+3 \quad \text{即 } a^2-3ab+b^2 \\
 \underline{-12-0+6-9} \\
 4+0-2+3 \\
 \underline{4+0-2+3}
 \end{array}$$

28. 用 $x+y$ 除 x^3+y^3 之結果。以求 $x+y+z$ 除 $(x+y)^3+z^3$ 之商。

[答 $(x+y)^2-(x+y)z+z^2$]

29. 用 $x-y$ 除 x^3-y^3 之結果。以求 $x+y-2z$ 除 $(x+y)^3-8z^3$ 之商。

[解] 本例與 28 例同法。 $(x^3-y^3) \div (x-y) = x^2+xy+y^2$ 。

故以 $(x+y)$ 代 x 。以 $2z$ 代 y 。則答式爲

$$\{(x+y)^3-(2z)^3\} \div \{(x+y)-2z\} = (x+y)^2+(x+y)2z+4z^2.$$

第 陸 編

因 子 分 割 法

75. 定義 任意之代數式。其分母不含文字者。謂之整代數式。例如 $\frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{4}b^3$ 爲整代數式。

又如 $3a^2b - 4b^3$ 之爲整代數式。固不待論。

任意之代數式。指其某特別之文字。而稱爲整代數式者。必其分母不含此特別文字也。

例如 $\frac{x^2}{a} + \frac{x}{a+b}$ 雖分母含文字爲不整代數式。然以其不含 x 。故就 x 言。仍爲整代數式。

代數式各項不含平方根及他之方根者。稱爲有理 (Rational) 式。

例如 $\frac{b}{a} + \frac{d}{c}$ 爲有理式。 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 爲無理式。

76. 因子 此編就任意之代數式。推究其有若何因子。而僅示其簡易之例。

故此編所推究者。其因子爲有理整代數式。或關於特別文字。而爲有理整代數式。即其因子可整除其原代數式者也。

77. 一項因子 代數式之各項。皆含此一文字。可以之除盡各項者。即爲其式之因子。

例如 $2ax + x^2 = x(2a + x)$, $ax + a^2x^2 = ax(1 + ax)$
及 $2a^2b^2x + 3a^2b^2y = a^2b^2(2x + 3by)$ 皆易明瞭。

78* 公式用法 由已知之恆同式。可比較而求得諸因子。是等因子。最易顯出。

例如 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 。故

$$a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a+2b)(a-2b), \quad a^2 - 2 = a^2 - (\sqrt{2})^2 = (a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2}),$$

$$a^4 - 16b^4 = (a^2)^2 - (4b^2)^2 = (a^2 + 4b^2)(a^2 - 4b^2) = (a^2 + 4b^2)(a+2b)(a-2b),$$

$$\text{及 } a^3 - 9ab^2 = a(a^2 - 9b^2) = a(a+3b)(a-3b).$$

又 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 。故

$$a^3 + 8b^3 = a^3 + (2b)^3 = (a+2b)(a^2 - 2ab + 4b^2),$$

$$8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a+3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2),$$

$$\text{及 } a^3 + x^3 = (a^3)^{\frac{1}{3}} + (x^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3 + x^3)(a^0 - a^2x^0 + x^0) \\ = (a+x)(a^2 - ax + x^2)(a^0 - a^2x^0 + x^0).$$

又 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ 。故

$$a^3b^3 - \frac{1}{8}x^3y^3 = (ab)^3 - \left(\frac{1}{2}xy\right)^3 = (ab - \frac{1}{2}xy)(a^2b^2 + \frac{1}{2}abxy + \frac{1}{4}x^2y^2).$$

附與此同法之例於下。

$$(1) (a+b)^2 - (c+d)^2 = \{(a+b) + (c+d)\} \{(a+b) - (c+d)\} \\ = (a+b+c+d)(a+b-c-d).$$

$$(2) 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = \{2ab + (a^2 + b^2 - c^2)\} \{2ab - (a^2 + b^2 - c^2)\} \\ = \{(a^2 + 2ab + b^2) - c^2\} \{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)\} = \{(a+b)^2 - c^2\} \{c^2 - (a-b)^2\} \\ = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)。爲必要之公式。$$

$$(3) (a+2b)^3 - (2a+b)^3 \\ = \{(a+2b) - (2a+b)\} \{(a+2b)^2 + (a+2b)(2a+b) + (2a+b)^2\} \\ = (b-a)(7a^2 + 13ab + 7b^2).$$

79* 視察之因子 $x^2 + px + q$ 之因子。可以視察而得，由恆同式 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ 。則 $x^2 + px + q$ 有 $x+a, x+b$ 之因子 $a+b=p, ab=q$ 。

〔法則〕由是而 $x^2 + px + q$ 有一次因子。爲 x 之係數 p 。即等於 $x+a, x+b$ 兩因子第二項之和。 q 則等於其積。

例如 $x^2 + 7x + 12$ 。則 $3+4=7, 3 \times 4=12$ 。故

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4).$$

又 $x^2 - 7x + 12$ 則 $(-3) + (-4) = -7, (-3)(-4) = 12$ 。故

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4).$$

又 $x^2 + 3x - 18$ 。則 $-3+6=3, -3 \times 6 = -18$ 。故

$$x^2 + 3x - 18 = (x-3)(x+6).$$

已知 x^2+px+q 之因子，為 $x+a$ 及 $x+b$ 。則以同法視察，可知 $x^2+pxy+qy^2$ 之因子為 $x+ay$ 及 $x+by$ 。

又 $(x+y)^2+p(x+y)z+qz^2$ 之因子，為 $x+y+az$ 及 $x+y+bz$ 。

由以上之結果，得 $x^2+7xy+12y^2=(x+3y)(x+4y)$

$$x^2+3xy^2-18y^4=(x+6y^2)(x-3y^2)。$$

$$(a+b)^2-7(a+b)x+10x^2=(a+b-2x)(a+b-5x)。$$

及 $x^4-5x^2+4=(x^2)^2-5(x^2)+4=(x^2-4)(x^2-1)$
 $=(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)。$

例題四

求次之各因子。

1. $a^4-16b^4。$

[解] 原式 $= (a^2+4b^2)(a^2-4b^2) = (a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)。$

2. $16x^4-81a^4b^4。$ [答 $(4x^2+9a^2b^2)(2x-3ab)(2x+3ab)$]

3. $16-(3a+2b)^2。$

[解] 原式 $= \{4+(3a+2b)\}\{4-(3a+2b)\} = (4+3a+2b)(4-3a-2b)。$

4. $4y^2-(2z-x)^2$ [答 $(2y+2z-x)(2y-2z+x)$]

5. $20a^3x^3-45axy^2。$

[解] 原式 $= 5ax(4a^2x^2-9y^2) = 5ax(2ax+3y)(2ax-3y)。$

6. $36a^2x^6-4a^2x^2y^4。$ [答 $4a^2x^2(3x^2+y^2)(3x^2-y^2)$]

7. $(3a^2-b^2)^2-(a^2-3b^2)^2。$

[解] 原式 $= \{(3a^2-b^2)+(a^2-3b^2)\}\{(3a^2-b^2)-(a^2-3b^2)\}$
 $= (4a^2-4b^2)(2a^2+2b^2) = 8(a^2-b^2)(a^2+b^2) = 8(a+b)(a-b)(a^2+b^2)。$

8. $(5a^2-3b^2)^2-(3a^2-5b^2)^2。$ [答 $16(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$]

9. $(5x^2+2x-3)^2-(x^2-2x-3)^2。$

[解] 原式 $= \{(5x^2+2x-3)+(x^2-2x-3)\}\{(5x^2+2x-3)-(x^2-2x-3)\}$
 $= (6x^2-6)(4x^2+4x) = 24x(x^2-1)(x+1) = 24x(x-1)(x+1)^2。$

10. $(3x^2-4x-2)^2-(3x^2+4x-2)^2。$ [答 $16x(2-3x^2)$]

11. $32a^3b^3-4b^9。$

[解] 原式 $= 4b^3(8a^3-b^6) = 4b^3(2a-b^2)(4a^2+2ab^2+b^4)。$

12. $(a^2-2bc)^2-8b^2c^2$. [答 $(a^2-4bc)(a^4-2a^2bc+4b^2c^2)$]

[解] 原式 $= (a^2-2bc-2bc)\{ (a^2-2bc)^2 + (a^2-2bc)2bc + 4b^2c^2 \}$.

13. a^2-2a-8 .

[解] $-4+2=-2$, $-4 \times 2 = -8$, 故

$$\text{原式} = (a-4)(a+2).$$

14. $x+12-x^2$

[解] 原式 $= -(x^2-x-12) = -(x-4)(x+3)$.

15. $1-18x-63x^2$.

[解] $-21x+3x=-18x$, $-21x \times 3x = -63x^2$. 故

$$1-18x-63x^2 = (1-21x)(1+3x).$$

16. $8a-4a^2-4$.

[解] 原式 $= -4(a^2-2a+1) = -4(a-1)^2$.

17. $a^3b-4a^2b^2+3ab^3$.

[解] 原式 $= ab(a^2-4ab+3b^2) = ab(a-3b)(a-b)$.

18. $a^4b+5a^3b^2+4a^2b^3$.

[解] 原式 $= a^2b(a^2+5ab+4b^2) = a^2b(a+b)(a+4b)$.

19. $(b+c)^2-6a(b+c)+5a^2$.

[答 $(b+c-5a)(b+c-a)$]

20. $9(a+b)^2-6(a+b)(c+d)+(c+d)^2$.

[解] 原式 $= \{3(a+b)\}^2 - 2\{3(a+b)\}\{c+d\} + \{c+d\}^2 = \{3(a+b)-(c+d)\}^2$.

21. x^4-29x^2+100 .

[解] 原式 $= (x^2)^2 - 29(x^2) + 100 = (x^2-25)(x^2-4)$

$$= (x+5)(x-5)(x+2)(x-2).$$

22. $100x^4-29x^2y^2+y^4$.

[答 $(5x+y)(5x-y)(2x+y)(2x-y)$]

23. $x^4-8x^2y^2z^2+16y^4z^4$.

[解] 原式 $= (x^2)^2 - 2(x^2)(4y^2z^2) + (4y^2z^2)^2 = (x^2-4y^2z^2)^2$

$$= (x+2yz)^2(x-2yz)^2.$$

24. $9a^6-10a^4b^2+a^2b^4$.

[答 $a^2(a+b)(a-b)(3a+b)(3a-b)$]

25. $x^2-2ax-b^2+2ab$.

[解] 原式 $= (x^2-2ax+a^2) - (a^2-2ab+b^2) = (x-a)^2 - (a-b)^2$

$$= \{ (x-a) + (a-b) \} \{ (x-a) - (a-b) \} = (x-b)(x-2a+b).$$

$$26. x^2 + 2xy - a^2 - 2ay. \quad [\text{答 } (x-a)(x+2y+a)]$$

$$27. 4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2.$$

$$\begin{aligned} [\text{解}] \text{原式} &= \{2(ab+cd) + (a^2+b^2-c^2-d^2)\} \{2(ab+cd) - (a^2+b^2-c^2-d^2)\} \\ &= \{(a+b)^2 - (c-d)^2\} \{(c+d)^2 - (a-b)^2\} \\ &= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b). \end{aligned}$$

$$28. 4(xy-ab)^2 - (x^2+y^2-a^2-b^2)^2.$$

$$[\text{答 } (x+y+a+b)(x+y-a-b)(x-y+a-b)(-x+y+a-b)]$$

80* 普通二次式之因子 某特別文字即 x . 求其二次式之因子. 法如下.

x 之普通二次式. 爲 ax^2+bx+c (80章). 但 a, b 及 c 皆不含 x .

此問題須先將 x 之普通二次式. 分解其有理兩因子. 此各因子. 即 x 之一次式. 即爲 x 及 x 以外之文字或數字所成之有理式或無理式.

普通二次式. 爲 ax^2+bx+c . 欲求其兩因子. 必先將此式配爲兩平方之差.

[注意] 將代數式化爲兩式平方之差 A^2-B^2 . 最爲要法. 因所求之兩因子. 可從 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 解之. 又 $x^2+2ax+a^2$. 爲完全之平方式. 若祇有其首次兩項 $x^2, 2ax$. 欲配成完全三項式. 則其第三項. 必爲 x 係數 $2a$ 之半之平方即 a^2 .

例如 x^2+6x . 則其第三項. 爲 x 係數 6 之半之平方. 即 $3^2=9$. 其完全平方式. 即 $x^2+6x+9=(x+3)^2$.

$$\text{又 } x^2+5x \text{ 加 } \left(\frac{5}{2}\right)^2 \text{ 則得 } x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2.$$

$$\text{又 } x^2-px \text{ 加 } \left(\frac{-p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}. \text{ 則得 } x^2-px+\frac{p^2}{4} = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2.$$

81* 二次式之因子分割法 求 ax^2+bx+c 之因子.

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

今由前章於 $x^2 + \frac{b}{a}x$ 加 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ ，則為 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ，故於前式之括弧內加減 $\frac{b^2}{4a^2}$ ，則

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right\} = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2\right\}. \end{aligned}$$

由是而上式成爲兩平方之差之形。故所求之因子爲

$$ax^2 + bx + c = a\left\{x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right\}\left\{x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right\}$$

x 之二次式。常有 x 之一次兩因子。觀 91 章。

〔第一例〕求 $x^2 + 4x + 3$ 之因子。

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3 &= x^2 + 4x + 4 - 4 + 3 = (x+2)^2 - 1 \\ &= (x+2+1)(x+2-1) = (x+3)(x+1) \end{aligned}$$

〔簡法〕 $4=3+1$ ， $3=3 \times 1$ 。故 $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$ 。

〔第二例〕求 $x^2 - 5x + 3$ 之因子。

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 3 &= x^2 - 5x + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 3 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \\ &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \end{aligned}$$

此例不能用簡法。

〔第三例〕求 $3x^2 - 4x + 1$ 之因子。

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x + 1 &= 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 3\left\{x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\right\} \\ &= 3\left\{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right\} = 3\left(x - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1) = (3x-1)(x-1) \end{aligned}$$

〔簡法〕 $3x^2 - 4x + 1 = 3x^2 - 8x - x + 1 = 8x(x-1) - (x-1)$
 $= (x-1)(3x-1)$ 。

〔第四例〕求 $x^2+2ax-b^2-2ab$ 之因子。

$$\begin{aligned} x^2+2ax-b^2-2ab &= x^2+2ax+a^2-a^2-b^2-2ab=(x+a)^2-(a+b)^2 \\ &= \{(x+a)+(a+b)\} \{(x+a)-(a+b)\} \\ &= (x+2a+b)(x-b). \end{aligned}$$

〔簡法〕 $x^2+2ax-b^2-2ab=x^2-b^2+2a(x-b)=(x-b)(x+b+2a)$ 。

82. 公式用法 可用下列之公式。求二次式之因子。

$$ax^2+bx+c=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}$$

例如 $3x^2-4x+1$ 其 $a=3, b=-4, c=1$, 故從上之公式

$$\begin{aligned} 3x^2-4x+1 &= 3\left\{x+\frac{-4}{2\times 3}+\sqrt{\frac{16-4\times 3\times 1}{4\times 9}}\right\}\left\{x+\frac{-4}{2\times 3}-\sqrt{\frac{16-4\times 3\times 1}{4\times 9}}\right\} \\ &= 3\left(x-\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\right)\left(x-\frac{2}{3}-\frac{2}{6}\right)=(3x-1)(x-1). \end{aligned}$$

83*. 係數之關係 依 81 章。

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right).$$

於此公式中 $a, b, c, \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲正或零或負。

〔第一〕 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲正。則 ax^2+bx+c 之兩因子。視 b^2-4ac 爲完全平方數即有理。爲不完全平方數即無理。

例如 $3x^2-4x+1, b^2-4ac=(-4)^2-4\times 3\times 1=4=2^2$ 。

故 $3x^2-4x+1$ 有有理兩因子 $3x-1$ 及 $x-1$ 。

又 $x^2-5x+3, b^2-4ac=(-5)^2-4\times 1\times 3=13$ 爲不完全平方數。

故 x^2-5x+3 有無理兩因子 $x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ 及 $x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ 。

〔第二〕 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲 0。則前之公式。

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right) \text{ 即 } a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

故 $b^2-4ac=0$ 。則 ax^2+bx+c 爲 x 之完全平方式。

例如 $4x^2-12x+9$ 。

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4 \times 9) = 144 - 144 = 0.$$

$$\text{爲 } 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2.$$

〔第三〕 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 爲負。則 $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ 即 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 之平方根決不能求。

何也。凡正數或負數。其乘得之平方。皆爲正而不爲負也。

a 爲正則 $\sqrt{-a}$ 。即負數之平方根。謂之虛數 (imaginary)。而他之正負各數量。則與此虛數量有區別。均謂之實數 (Real)。

虛數之理。詳於後篇。此處祇求能辨虛數而已。由是知 $ax^2 + bx + c$ 之因子。若 $b^2 - 4ac$ 爲負。則爲虛數因子也。

〔註〕 求因子之通例。在求有理因子。而有時亦須求無理因子。例如 $x^3 - 8$ 。通例以 $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ 爲分解因子之結果。若再求 x 之一次三因子。則

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 4 &= x^2 + 2x + 1 + 3 = (x + 1)^2 - (-3) \\ &= (x + 1)^2 - (\sqrt{-3})^2 = (x + 1 + \sqrt{-3})(x + 1 - \sqrt{-3}), \end{aligned}$$

$$\text{故 } x^3 - 8 = (x - 2)(x + 1 + \sqrt{-3})(x + 1 - \sqrt{-3}).$$

求此虛數因子之理。詳於 179 章及 193 章。

84. 餘論 81 章於二次式分爲一次兩因子。(實數或虛數) 已示其法則。而普通三次式。如 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 。又四次五次等。其求因子法。以本編係授初學。故暫不說明。然在特別各式。可示明求因子之法如下。

85. 項之整列及集合 求代數式之因子。有時當將各項整列或集合之。其法如下。

$$\begin{aligned} \text{例如 } 1 + ax - x^2 - ax^3 &= (1 + ax) - x^2(1 + ax) \\ &= (1 + ax)(1 - x^2) = (1 + ax)(1 + x)(1 - x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或書爲 } 1 - x^2 + ax - ax^3 &= (1 - x^2) + ax(1 - x^2) \\ &= (1 - x^2)(1 + ax) = (1 + x)(1 - x)(1 + ax). \end{aligned}$$

求代數式之因子。原無普通之法則。然必整列或集合之。如下所示之方法爲最要。

〔(第一)〕 代數式含一次方之文字。則括合其共同文字之項。而其因子自易求得。

〔第一例〕求 $ab+bc+cd+da$ 之因子。

此式中 a, b, c, d 各爲一次方。今集合其 a 字。則
 $ab+bc+cd+da=(ab+da)+(bc+cd)=a(b+d)+c(b+d)=(b+d)(a+c)$ 。

〔第二例〕求 $x^2+(a+b+c)x+ab+ac$ 之因子。

此式中 a, b, c 各爲一次方。集合 a 字。則
 $x^2+(a+b+c)x+ab+ac=(x^2+bx+cx)+(ax+ab+ac)$
 $=x(x+b+c)+a(x+b+c)=(x+b+c)(x+a)$

〔第三例〕求 $ax^2+x+a+1$ 之因子。

集合一次方之 a 字。則

$$ax^2+x+a+1=a(x^2+1)+(x+1)=(x+1)\{a(x^2-x+1)+1\}$$

〔第四例〕求 $a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc$ 之因子。

此式中惟 c 爲一次方。故集合 c 字。則

$$a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc=(a^2+2ab-3b^2)-2c(a-b)$$

$$=(a-b)(a+3b-2c)$$

壹方乘之文字在代數式其因子分割法甚易。

〔(第二)〕代數式屬於某文字之二次式。如 81 章。其文字依遞降方乘整列。而求其因子(但爲有理因子)。

〔第一例〕求 $a^2+3b^2-c^2+2bc-4ab$ 之因子。

$$a^2+3b^2-c^2+2bc-4ab=a^2-4ab+3b^2+2bc-c^2$$

$$=a^2-4ab+4b^2-b^2+2bc-c^2=(a-2b)^2-(b-c)^2$$

$$=-(a-2b)+(b-c)\{(a-2b)-(b-c)\}=(a-b-c)(a-3b+c)$$

〔第二例〕求 $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$ 之因子。

$$\text{原式}=a^2-2ad+d^2-b^2-c^2+2bc=(a-d)^2-(b-c)^2$$

$$=(a-d+b-c)(a-d-b+c)$$

〔第三例〕求 $a^2+2ab-ac-3b^2+5bc-2c^2$ 之因子。

$$\text{原式}=a^2+a(2b-c)-3b^2+5bc-2c^2$$

$$=a^2+a(2b-c)+\left(\frac{2b-c}{2}\right)^2-\left(\frac{2b-c}{2}\right)^2-3b^2+5bc-2c^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(a + \frac{2b-c}{2}\right)^2 - \left(\frac{4b^2-4bc+c^2}{4} + 3b^2-5bc+2c^2\right) \\
 &= \left(a + \frac{2b-c}{2}\right)^2 - \frac{16b^2-24bc+9c^2}{4} = \left(a + \frac{2b-c}{2}\right)^2 - \left(\frac{4b-3c}{2}\right)^2 \\
 &= \left(a + \frac{2b-c}{2} + \frac{4b-3c}{2}\right) \left(a + \frac{2b-c}{2} - \frac{4b-3c}{2}\right) \\
 &= (a+3b-2c)(a-b+c).
 \end{aligned}$$

(簡法) 原式 $= a^2 + a(2b-c) - (3b^2-5bc+2c^2)$

$$\begin{aligned}
 &= a^2 + a(2b-c) - (3b-2c)(b-c) \\
 &= a^2 + a\{(3b-2c)-(b-c)\} - (3b-2c)(b-c) \\
 &= a^2 + a(3b-2c) - a(b-c) - (3b-2c)(b-c) \\
 &= a(a+3b-2c) - (b-c)(a+3b-2c) \\
 &= (a+3b-2c)(a-b+c).
 \end{aligned}$$

大注意 此簡法於 a 之係數 $2b-c$ 作為第三項 $(3b-2c)(b-c)$ 之和或差。即 $(3b-2c)-(b-c)=2b-c$ 。

此法見 79 章之 $x^2+px+q=(x+a)(x+b)$ 。而由 $p=a+b, q=ab$ 擴張之者。實為此後之要法。

(第四例) 求 $x^4+x^2-2ax+1-a^2$ 之因子。

此為 a 之二次式。故依 a 之遞降方乘整列。則

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= -\{a^2+2ax-x^4-x^2-1\} \\
 &= -\{a^2+2ax+x^2-x^4-2x^2-1\} \\
 &= -\{(a+x)^2-(x^2+1)^2\} = -(a+x+x^2+1)(a+x-x^2-1).
 \end{aligned}$$

[(第三)] 代數式中某特別之一字。祇含兩個方乘。其一個之平方等於他一個。則其因子可知二次式解之。見 81 章。

(第一例) 求 x^4-10x^2+9 之因子。

$$\begin{aligned}
 x^4-10x^2+9 &= (x^2)^2-10(x^2)+25-25+9 = (x^2-5)^2-16 \\
 &= (x^2-5+4)(x^2-5-4) = (x^2-1)(x^2-9) \\
 &= (x+1)(x-1)(x+3)(x-3).
 \end{aligned}$$

或 $x^4-10x^2+9 = x^4-6x^2+9-4x^2 = (x^2-3)^2-(2x)^2$

$$= (x^2-3+2x)(x^2-3-2x) = (x+3)(x-1)(x-3)(x+1).$$

〔第二例〕求 x^4+x^2+1 之因子。

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1 &= x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2 \\ &=(x^2+1+x)(x^2+1-x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1). \end{aligned}$$

〔注意〕若令 $x^4+x^2+1=x^4+x^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$
 $=\left(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$ 則不合於理。

〔第三例〕求 x^6-28x^3+27 之因子。

$$\begin{aligned} x^6-28x^3+27 &= x^6-28x^3+14^2-14^2+27=(x^3-14)^2-13^2 \\ &=(x^3-14+13)(x^3-14-13)=(x^3-1)(x^3-27) \\ &=(x-1)(x^2+x+1)(x-3)(x^2+3x+9). \end{aligned}$$

此例及第一例亦可用 79 章之方法求之。

〔第四例〕求 $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ 之因子。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^4-2b^2c^2+c^4) \\ &= a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2-(b^2+c^2)^2+(b^2-c^2)^2 \\ &= \{a^2-(b^2+c^2)\}^2-4b^2c^2 \\ &= (a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc) \\ &= \{a^2-(b-c)^2\} \{a^2-(b+c)^2\} \\ &= (a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{〔簡法〕原式} &= a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2 \\ &= a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b+c)^2(b-c)^2 \\ &= \{a^2-(b+c)^2\} \{a^2-(b-c)^2\} \\ &= (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c). \end{aligned}$$

〔〔第四〕〕 P 含有 x 之若干項者。如 aP^2+bP+c 。可依 81 章

$$aP^2+bP+c=a\left(P+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\left(P+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right).$$

〔第一例〕求 $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$ 之因子。

以 P 代 x^2+x 則

$$\begin{aligned} \text{原式} &= P^2+4P-12=(P+6)(P-2) \\ &= (x^2+x+6)(x^2+x-2)=(x^2+x+6)(x+2)(x-1). \end{aligned}$$

此例之 x^2+x-2 。依 83 章第壹 $b^2-4ac=1^2-4\times 1(-2)=9=3^2$ 。故得 $(x+2)(x-1)$ 。

然在 x^2+x+6 。則 $b^2-4ac=1^2-4\times 1\times 6=-23$ 。故不能得有理因子。

[第二例] 求 $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$ 之因子。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \{(x^2+x+4)+3x\} \{(x^2+x+4)+5x\} \\ &= (x^2+4x+4)(x^2+6x+4) = (x+2)^2(x^2+6x+4) \end{aligned}$$

[第三例] 求 $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$ 之因子。

$$2P^2+5PQ+2Q^2=(2P+Q)(P+2Q)。故$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \{2(x^2+6x+1)+(x^2+1)\} \{(x^2+6x+1)+2(x^2+1)\} \\ &= (3x^2+12x+3)(3x^2+6x+3) \\ &= 9(x^2+4x+1)(x-1)^2。 \end{aligned}$$

[第四例] 求 $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$ 之因子。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (x^2+x+1)(x^2+x+2)-12 \\ &= (x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12 \\ &= \{(x^2+x+1)+4\} \{(x^2+x+1)-3\} \\ &= (x^2+x+5)(x^2+x-2) \\ &= (x^2+x+5)(x+2)(x-1)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或原式} &= (x^2+x)^2+3(x^2+x)+2-12 \\ &= (x^2+x)^2+3(x^2+x)-10 \\ &= (x^2+x+5)(x^2+x-2) = (x^2+x+5)(x+2)(x-1)。 \end{aligned}$$

例題五

求次列各式之因子。

1. x^3+ax^2-x-a 。

[解] 原式 $= x(x^2-1)+a(x^2-1) = (x^2-1)(x+a) = (x+1)(x-1)(x+a)$ 。

2. $ac-bd-ad+bc$ 。

[解] 原式 $= a(c-d)+b(c-d) = (c-d)(a+b)$ 。

3. $ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$ 。

[解] 原式 $= a(c^2-d^2)-b(c^2-d^2) = (c^2-d^2)(a-b) = (c+d)(c-d)(a-b)$ 。

$$4. \quad acx^2 + (bc+ad)xy + bdy^2.$$

$$[\text{解}] \quad \text{原式} = ax(cx+dy) + by(cx+dy) = (cx+dy)(ax+by).$$

$$5. \quad acx^2 + bcx^2 + adx + bd.$$

$$[\text{解}] \quad \text{原式} = ax(cx^2+d) + b(cx^2+d) = (cx^2+d)(ax+b).$$

$$6. \quad (a+b)^2 + (a+c)^2 - (c+d)^2 - (b+d)^2.$$

$$[\text{解}] \quad \text{原式} = (a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2 \\ = (a+b+c+d)(a+b-c-d) + (a+c+b+d)(a+c-b-d) \\ = (a+b+c+d)(a+b-c-d+a+c-b-d) = 2(a+b+c+d)(a-d).$$

$$7. \quad a^4 + a^2b - ab^2 - b^4.$$

$$[\text{解}] \quad \text{原式} = a^2(a+b) - b^2(a+b) = (a+b)(a^2 - b^2) \\ = (a+b)(a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$8. \quad a^4 - a^2b - ab^2 + b^4.$$

$$[\text{答} \quad (a-b)^2(a^2 + ab + b^2)].$$

$$9. \quad a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1.$$

$$[\text{解}] \quad \text{原式} = a^2(b^2-1) - (b^2-1) = (b^2-1)(a^2-1) \\ = (b+1)(b-1)(a+1)(a-1).$$

$$10. \quad x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 + z^4.$$

$$[\text{解}] \quad \text{原式} = x^2(y^2 - z^2) - z^2(y^2 - z^2) = (y^2 - z^2)(x^2 - z^2) \\ = (y+z)(y-z)(x+z)(x-z).$$

$$11. \quad x^2y^2z^2 - x^2z - y^2z + 1.$$

$$[\text{解}] \quad \text{原式} = y^2z(x^2z-1) - (x^2z-1) = (x^2z-1)(y^2z-1).$$

$$12. \quad x^4 + x^2y + xz^2 + yz^2.$$

$$[\text{答} \quad (x+y)(x+z)(x^2 - xz + z^2)].$$

$$13. \quad x(x+z) - y(y+z).$$

$$[\text{解}] \quad \text{原式} = (x^2 - y^2) + z(x-y) = (x-y)(x+y+z).$$

$$14. \quad x^4 - 7x^2 - 18.$$

$$[\text{答} \quad (x+3)(x-3)(x^2+2)].$$

$$15. \quad x^4 - 23x^2 + 1.$$

$$[\text{解}] \quad \text{原式} = x^4 + 2x^2 + 1 - 25x^2 = (x^2+1)^2 - (5x)^2 \\ = (x^2+1+5x)(x^2+1-5x) = (x^2+5x+1)(x^2-5x+1).$$

$$16. \quad x^4 - 14x^2y^2 + y^4.$$

$$[\text{解}] \quad \text{原式} = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 16x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - (4xy)^2 \\ = (x^2+y^2+4xy)(x^2+y^2-4xy) = (x^2+4xy+y^2)(x^2-4xy+y^2).$$

17. $x^3 + x^4 + 1$.

[解] 原式 $= (x^4 + 1)^2 - x^4 = (x^4 + 1 + x^2)(x^4 + 1 - x^2)$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

18. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2$.

[解] 原式 $= x^4 - \{(a+b)^2 + (a-b)^2\}x^2 + (a+b)^2(a-b)^2$
 $= \{x^2 - (a+b)^2\} \{x^2 - (a-b)^2\}$
 $= (x+a+b)(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b)$.

19. $x^4 - 4x^2y^2z^2 + 4y^4z^4$.

[答 $(x^2 - 2y^2z^2)^2$].

20. $x^2 - 2(a+b)x - ab(a-2)(b+2)$.

[解] 原式 $= x^2 - 2(a+b)x + (a+b)^2 - (a+b)^2 - ab(a-2)(b+2)$
 $= \{x - (a+b)\}^2 - [(a+b)^2 + ab\{ab + 2(a-b) - 4\}]$
 $= (x-a-b)^2 - \{(a+b)^2 - 4ab + 2ab(a-b) + a^2b^2\}$
 $= (x-a-b)^2 - \{(a-b)^2 + 2ab(a-b) + a^2b^2\}$
 $= (x-a-b)^2 - (a-b+ab)^2$
 $= (x-a-b+a-b+ab)(x-a-b-a+b-ab)$
 $= (x-2b+ab)(x-2a-ab)$.

[簡法] 原式 $= x^2 - 2(a+b)x - (ab-2b)(ab+2a)$
 $= x^2 - \{(ab+2a) - (ab-2b)\}x - (ab-2b)(ab+2a)$
 $= x^2 - (ab+2a)x + (ab-2b)x - (ab-2b)(ab+2a)$
 $= x(x-ab-2a) + (ab-2b)(x-ab-2a)$
 $= (x-ab-2a)(x+ab-2b)$.

21. $x^3 + bx^2 + ax + ab$.

[答 $(x^2 + a)(x + b)$].

22. $(1+y)^2 - 2x^2(1+y^2) + x^4(1-y)^2$.

[解] 原式 $= (1+y)^2 - x^2\{(1+y)^2 + (1-y)^2\} + x^4(1-y)^2$
 $= (1+y)^2 - x^2(1+y)^2 - x^2(1-y)^2 + x^4(1-y)^2$
 $= (1+y)^2(1-x^2) - x^2(1-y)^2(1-x^2)$
 $= (1-x^2)\{(1+y)^2 - x^2(1-y)^2\}$
 $= (1+x)(1-x)\{1+y+x(1-y)\}\{1+y-x(1-y)\}$.

23. $x^2 - y^2 - 3xz - 2xz + 4yz$.

[解] 原式 $= x^2 - 2xz + z^2 - (y^2 - 4yz + 4z^2)$

$$\begin{aligned}
 &= (x-z)^2 - (y-2z)^2 = (x-z+y-2z)(x-z-y+2z) \\
 &= (x+y-3z)(x-y+z).
 \end{aligned}$$

24. $2y^2 - 5xy + 2x^2 - ay - ax - a^2$.

〔解〕依 a 之遞昇方乘整列而括合之。則

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (2y^2 - 5xy + 2x^2) - a(y+x) - a^2 \\
 &= (2y-x)(y-2x) - a\{(2y-x) - (y-2x)\} - a^2 \\
 &= (2y-x)(y-2x-a) + a(y-2x-a) \\
 &= (y-2x-a)(2y-x+a).
 \end{aligned}$$

25. $a^2 - 3b^2 - 3c^2 + 10bc - 2ca - 2ab$.

$$\begin{aligned}
 \text{〔解〕原式} &= a^2 - 2a(b+c) - 3b^2 - 3c^2 + 10bc \\
 &= a^2 - 2a(b+c) + (b+c)^2 - (b+c)^2 - 3b^2 - 3c^2 + 10bc \\
 &= \{a - (b+c)\}^2 - \{(b+c)^2 + 3b^2 + 3c^2 - 10bc\} \\
 &= (a-b-c)^2 - (2b-2c)^2 \\
 &= (a-b-c+2b-2c)(a-b-c-2b+2c) \\
 &= (a+b-3c)(a-3b+c).
 \end{aligned}$$

26. $2a^2 - 7ab - 22b^2 - 5a + 35b - 3$.

〔解〕依 a 之二次式整列之。則

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 2a^2 - a(7b+5) - (22b^2 - 35b + 3) \\
 &= 2a^2 - a(7b+5) - (11b-1)(2b-3) \\
 &= 2a^2 - a\{(11b-1) - 2(2b-3)\} - (11b-1)(2b-3) \\
 &= 2a^2 - a(11b-1) + 2a(2b-3) - (11b-1)(2b-3) \\
 &= a(2a-11b+1) + (2b-3)(2a-11b+1) \\
 &= (2a-11b+1)(a+2b-3). \text{若將原式括合其二次一次諸項。}
 \end{aligned}$$

則得 $(2a^2 - 7ab - 22b^2) - (5a - 35b) - 3$

$$\begin{aligned}
 &= (a+2b)(2a-11b) - \{3(2a-11b) - (a+2b)\} - 3 \\
 &= (2a-11b)(a+2b-3) + (a+2b-3) = (a+2b-3)(2a-11b+1).
 \end{aligned}$$

27. $1 + (b-a^2)x^2 - abx^3$.

$$\text{〔解〕原式} = 1 - a^2x^2 + bx^2(1-ax) = (1-ax)(1+ax+bx^2).$$

28. $1 - 2ax - (c-a^2)x^2 + acx^3$.

$$\text{〔解〕原式} = 1 - 2ax + a^2x^2 - cx^2(1-ax) = (1-ax)(1-ax-cx^2).$$

29. $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$.

[解] 括合 a 之二次式。則

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2 - a(b+c) + bc\} = (b-c)(a-b)(a-c). \end{aligned}$$

30. $b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2 + 2abc$.

[解] 集合 a 之二次式。則

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a^2(b+c) + a(b^2 + 2bc + c^2) + bc(b+c) \\ &= (b+c)\{a^2 + a(b+c) + bc\} = (b+c)(a+b)(a+c). \end{aligned}$$

31. $a^2b - ab^2 + a^2c - ac^2 - 2abc + b^2c + bc^2$.

[解] 原式 $= a^2(b+c) - a(b^2 + 2bc + c^2) + bc(b+c)$

$$= (b+c)\{a^2 - a(b+c) + bc\} = (b+c)(a-b)(a-c).$$

32. $x^3(a+1) - xy(x-y)(a-b) + y^3(b+1)$.

[解] 括合 a 與 b 之各項。則

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a\{x^3 - xy(x-y)\} + b\{xy(x-y) + y^3\} + x^3 + y^3 \\ &= ax(x^2 - xy + y^2) + by(x^2 - xy + y^2) + (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= (x^2 - xy + y^2)(ax + by + x + y). \end{aligned}$$

33. $ax(y^3 + b^3) + by(bx^3 + a^3y)$.

[解] 原式 $= xy(ay^2 + b^2x) + ab(b^2x + ay^3) = (b^2x + ay^3)(xy + ab)$.

34. $2x^3 - 4x^2y - x^2z + 2xy^2 + 2xyz - y^2z$.

[解] 原式 $= 2x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - z(x^2 - 2xy + y^2)$

$$\begin{aligned} &= 2x(x^2 - 2xy + y^2) - z(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= (x^2 - 2xy + y^2)(2x - z) = (x-y)^2(2x-z). \end{aligned}$$

35. $xyz(x^3 + y^3 + z^3) - y^3z^2 - z^2x^3 - x^2y^3$.

[解] 依 x 之遞降方乘括合之。則

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x^4yz - x^3(y^3 + z^3) + xyz(y^3 + z^3) - y^3z^2 \\ &= yz(x^4 - y^2z^2) - x(y^3 + z^3)(x^2 - yz) \\ &= (x^2 - yz)\{yz(x^2 + yz) - x(y^3 + z^3)\} \\ &= (x^2 - yz)(x^2yz + y^2z^2 - xy^3 - xz^3) \\ &= (x^2 - yz)\{z^2(y^2 - zx) - xy(y^2 - zx)\} \\ &= (x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy). \end{aligned}$$

$$36. (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24.$$

$$〔解〕 原式 = (x^2+x-12)(x^2+x-2) = (x-3)(x+4)(x-1)(x+2).$$

$$37. (x^2-4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2.$$

$$〔解〕 原式 = (x^2+4x+8+2x)(x^2+4x+8+x) \\ = (x^2+6x+8)(x^2+5x+8) = (x+4)(x+2)(x^2+5x+8).$$

$$38. (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24.$$

$$〔解〕 原式 = (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-24 \\ = \{(x^2+5x)+4\} \{(x^2+5x)+6\} - 24 = (x^2+5x)^2 + 10(x^2+5x) + 24 - 24 \\ = (x^2+5x)^2 + 10(x^2+5x) = (x^2+5x)(x^2+5x+10).$$

$$39. (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15.$$

$$〔解〕 原式 = (x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15 \\ = (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15 \\ = \{(x^2+8x+10)-3\} \{(x^2+8x+10)+5\} + 15 \\ = (x^2+8x+10)^2 + 2(x^2+8x+10) - 15 + 15 \\ = (x^2+8x+10)(x^2+8x+10+2) = (x^2+8x+10)(x^2+8x+12) \\ = (x^2+8x+10)(x+2)(x+6).$$

$$40. 4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2.$$

$$〔解〕 原式 = 4(x+5)(x+12)(x+6)(x+10)-3x^2 \\ = 4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2 \\ = 4\{(x^2+16x+60)+x\}(x^2+16x+60)-3x^2 \\ = 4(x^2+16x+60)^2 + 4x(x^2+16x+60) - 3x^2 \\ = \{2(x^2+16x+60)+3x\} \{2(x^2+16x+60)-x\} \\ = (2x^2+35x+120)(2x^2+31x+120) = (2x^2+35x+120)(2x+15)(x+8).$$

86. 定理 $x^n - a^n$ 可以 $x-a$ 除之。但 n 必為正整數。

$$x-a \overline{) x^n - a^n (x^{n-1}$$

$$\underline{x^n - ax^{n-1}}$$

$$ax^{n-1} - a^n = a(x^{n-1} - a^{n-1}) \dots \dots \text{除式}$$

由是而 $x^n - a^n = x^{n-1}(x-a) + a(x^{n-1} - a^{n-1}) \dots \dots (A)$

(A) 之右邊 $x^{n-1} - a^{n-1}$ 。如可以 $x-a$ 除盡。則凡右邊皆可以 $x-a$ 除盡。即知 $x-a$ 可以除盡其左邊。

故 $x-a$ 可以除盡 $x^{n-1}-a^{n-1}$ 。即能除盡 x^n-a^n 。

但 $x-a$ 能除盡 x^3-a^3 。故能除盡 x^4-a^4 。

即能除盡 x^5-a^5 。

即能除盡 x^6-a^6 。

準此推之。知 x^n-a^n 式。其 n 為任何正整數。無不可以 $x-a$ 除盡。

87. 餘論 因 $x^n+a^n=x^n-a^n+2a^n$ 。故以 $x-a$ 除 x^n+a^n 。可除盡 x^n-a^n 而仍餘 $2a^n$ 。

[定理] $x-a$ 決不能除盡 x^n+a^n 。

又 $x-a$ 能除盡 x^n-a^n 。故以 $-a$ 代 a 。則

$x^n-(-a)^n$ 。可以 $x-(-a)$ 除盡。

但 $x-(-a)=x+a$ 。 n 為奇數。則 $(-a)^n=-a^n$ 。為偶數。則 $(-a)^n=a^n$ 。

[定理] 由是 $n=$ 奇數。則 x^n+a^n 可以 $x+a$ 除盡。

[定理] 由是 $n=$ 偶數。則 x^n-a^n 可以 $x+a$ 除盡。

[四定理] 由是 n 為任意之正整數。則

$x-a$ 恆能除盡 x^n-a^n 。

$x-a$ 恆不能除盡 x^n+a^n 。

n 為奇數。 $x+a$ 恆能除盡 x^n+a^n 。

n 為偶數。 $x+a$ 恆不能除盡 x^n-a^n 。

依上之定理而得

$$\frac{x^n-a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}.$$

$$\frac{x^n \pm a^n}{x+a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots \pm a^{n-1}.$$

但第二式如 n 為奇數。則用複號 \pm 中之 $+$ 。 n 為偶數。則用複號 \pm 中之 $-$ 。

88. 定理 含 x 之有理整代數式。如用 a 代 x 。而此式為 0。則 $x-a$ 。必為此式之因子(最必要)。

此有理式。依 x 之遞降方乘。整列之如下。

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$$

由題意用 a 代 x 而設爲等於 0 如下。

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots = 0$$

從原式減去此式是減 0 也。故仍得原式。即

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$$

$$= ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots - (ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots)$$

$$= a(x^n - a^n) + b(x^{n-1} - a^{n-1}) + c(x^{n-2} - a^{n-2}) + \dots$$

由前章之定理。知 $x^n - a^n$, $x^{n-1} - a^{n-1}$, $x^{n-2} - a^{n-2}$, 皆能以 $x - a$ 除盡。故 $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$ 亦能以 $x - a$ 除盡。而爲其因子。

[別證] 此定理又可證之如下。

以 $x - a$ 除 $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$ 令其商爲 Q 。其餘爲 R 。則

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots = Q(x - a) + R \dots \dots \dots (A)$$

此恆同式不論用何數代 x 皆合於理。

故令 $x = a$ 。則

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots = Q(a - a) + R = R \dots \dots \dots (B)$$

但 Q 爲含 x 之式。故易 x 爲 a 。則 Q 之值當變。故爲 Q' 。又 R 爲 $x - a$ 除原式之餘式。不含有 x 。故 x 之值雖變。而 R 仍爲 R 。

由是而 R 爲 0。則 (B) 之左邊爲 0。即用 a 代 x 之原式爲 0。其原式能以 $x - a$ 除盡。若用 a 代 x 而不爲 0。則 (B) 之左邊。即爲以 $x - a$ 除原式之餘式。

[定理] 由是於 x 之有理整代數式用 a 代 x 。則其變化之式爲以 $x - a$ 除原式之餘式。

[第一例] 求以 $x - 2$ 除 $x^3 - 4x^2 + 2$ 之餘數式。

$$\text{令 } x = 2. \text{ 則餘數} = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 = -6.$$

[第二例] 求以 $x - a$ 除 $x^3 - 2a^2x + a^3$ 之餘數。

$$\text{令 } x = a. \text{ 則餘數} = a^3 - 2a^2a + a^3 = 0. \text{ 即原式能以 } x - a \text{ 除盡。}$$

[第三例] 示 $x - 1$, $x - 5$, $x + 2$ 及 $x + 4$ 爲 $x^4 - 23x^2 - 18x + 40$ 之因子。

$$\text{令 } x = 1 \text{ 則原式} = 1^4 - 23 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 40 = 0 \quad \therefore x - 1 \text{ 爲因子。}$$

$$\text{令 } x = 5 \text{ 則原式} = 5^4 - 23 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + 40 = 0 \quad \therefore x - 5 \text{ 爲因子。}$$

$$\text{令 } x = -2 \text{ 則原式} = (-2)^4 - 23(-2)^2 - 18(-2) + 40 = 0. \therefore x + 2 \text{ 爲因子。}$$

$$\text{令 } x = -4 \text{ 則原式} = (-4)^4 - 23(-4)^2 - 18(-4) + 40 = 0. \therefore x + 4 \text{ 爲因子。}$$

[第四例] 示 $a-b$ 爲 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 之因子。

令 $a=b$ 則原式 $=b^3(b-c)+b^3(c-b)+0=0$ 。

[第五例] 示 a 爲 $(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3$ 之因子。

令 $a=0$ 則原式 $=(b+c)^3-(b+c)^3-(-b+c)^3-(b-c)^3$
 $=(b+c)^3-(b+c)^3+(b-c)^3-(b-c)^3=0$ 。

增補之問題 求 $x-a$ 除 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$ 之商及餘式。設商爲 Q 。餘數爲 R 。依前之定理。則

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots=Q(x-a)+R。$$

以 a 代 x 得 $aa^n+ba^{n-1}+ca^{n-2}+\dots=R$ 。

由減法而 $a(x^n-a^n)+b(x^{n-1}-a^{n-1})+c(x^{n-2}-a^{n-2})+\dots=Q(x-a)$ 。

以 $x-a$ 除之。得

$$a(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\dots)+b(x^{n-2}+x^{n-3}a+\dots)+c(x^{n-3}+\dots)=Q。$$

$$\text{即 } Q=ax^{n-1}+(a+b)x^{n-2}+(a^2+ba+c)x^{n-3}+\dots$$

[例] 求 $x-m$ 除 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 之商及餘式。

$$\text{商} = ax^3+(am+b)x^2+(am^2+bm+c)x+am^3+bm^2+cm+d,$$

$$\text{及餘式} = am^4+bm^3+cm^2+dm+e。$$

89. 餘論 於代數式 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$ 內用 a 代 x 。若此式爲 0。則 $x-a$ 爲其因子。此理前已證明之。

今以 $x-a$ 除此式。則其商之第一項 (x 之最高次項) 必爲 ax^{n-1} 。由是原式 $=(x-a)(ax^{n-1}+\dots)$ 。

又設 $x=\beta$ 。而原式爲 0。則 $x=\beta$ 。其 $(x-a)(ax^{n-1}+\dots)$ 式亦必爲 0。但 $x=\beta$ 時。則 $x-a$ 不能爲 0。故知 $ax^{n-1}+\dots$ 式當爲 0。故 $ax^{n-1}+\dots$ 能以 $x-\beta$ 除盡。

由是原式 $=(x-a)(x-\beta)(ax^{n-2}+\dots)$ 。

又如以 γ, δ, \dots 等代 x 。而原式亦爲 0。則由同理而得

$$\text{原式} = (x-a)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\dots(ax^{n-r}+\dots),$$

但 r 爲 $x-a, x-\beta, x-\gamma, x-\delta, \dots$ 諸因子之數。若 $r=n$ 。則 $ax^{n-r}=ax^0$ 即 a 。

由是原式 $=a(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\dots$ 。

在上式之 $x-a, x-\beta, x-\gamma, x-\delta, \dots$ 爲 n 個因子。

[推論] 若 $x-a, x-\beta, \dots$ 等因子在 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$ 式內
 不僅一個。例如 $x-a$ 因子有 p 個。 $x-\beta$ 因子有 q 個。 \dots 則
 原式 $=a(x-a)^p(x-\beta)^q \dots$ 故 $p+q \dots = n$ 。

90 凡 x 之 n 次式 x 之值。不能多於 n 個。若於 n 個外。別以他
 字代 x 。則其式不能為 0。

何則。如 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$ 其 x 之 n 個值 $\alpha, \beta, \gamma \dots$ 等。能令其式
 為 0。故依前章得

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots$$

今若於 x 之 n 個 $\alpha, \beta, \gamma \dots$ 外。設有 x 之值 k 而以之代 x 。則 $a(k-\alpha)$
 $(k-\beta)(k-\gamma)\dots = 0$ 。

然 k 與 $\alpha, \beta, \gamma \dots$ 各值不同。則 $k-\alpha, k-\beta, k-\gamma \dots$ 各因子。均不能為
 0。而必 $a=0$ 。

故 x 之 n 次式若多於 n 個值。而其式為 0 者。則其第一項 (x 之
 最高次項) 之係數必為 0。

但 a 為 0。則原式必變為 $n-1$ 次式。即 $bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$ 而此式 x
 之值。若多於 $n-1$ 個。能令其式為 0。則依同理必 $b=0$ 。

由此依同理類推。則必 $c=0, d=0$ 一切係數。可順次而知其等
 於 0 也。

[定理之再述] 由是 x 之 n 次式。若 x 之值多於 n 個。而其式
 為 0 者。必其係數皆為 0 而後可。否則 x 之值。不能多於 n 個。若多
 於 n 個。其式不能為 0。

91. 定理 凡 x 之兩 n 次式。若 x 有多於 n 個之值相等。則兩
 式全相等。(此即謂兩 n 次式。其以字代 x 。而其值相等者。不能多
 於 n 個。若多於 n 個。則兩式相同云云)。

如 x 之兩 n 次式。為

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$$

及 $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\dots$

設此兩式中其 x 有多於 n 個之值相等。則兩式之差。為

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots - (px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\dots)$$

即 $(a-p)x^n + (b-q)x^{n-1} + (c-r)x^{n-2} + \dots$ 是 x 之值多於 n 個。而其式爲 0。則由前章之定理。其係數皆爲 0。

即 $a-p=0, b-q=0, c-r=0, \dots$

即 $a=p, b=q, c=r, \dots$ 則兩式全相同。故無論以何值代 x 。而彼此恆相等。

〔別言〕是故 n 次之兩代數式。其代 x 之值。多於 n 個而相等。則兩式內 x 之同方乘之係數必相等。

有限項(自二項以至多項。其項數有限者)之兩代數式。其所含文字之任何值相等。則其同文字同方乘之係數必相等。

故有限項之任意兩代數式。其所含文字之任何值相等。則任意一文字之各方乘之係數亦相等。(此定理。甚爲重要。以下諸編屢用及之)。

92. 定理 含 x 之有理整代數式。分割其一次因子。祇有一法。

例如 x^2-3x+2 。分割爲 $(x-1)(x-2)$ 。但僅此一法而已。決不能分割爲 $(x+1)(x-2)$ 或 $(x+2)(x+4)$ 。

設如 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$ 能分割爲 $a(x-a)^p(x-\beta)^q\dots$ 又依他之方法。分割爲 $a(x-a')^m(x-\beta')^n\dots$ 則令 $x=a$ 而原式爲 0 時。其第二方法變得之式。爲

$a(a-a')^m(a-\beta')^n\dots=0$ 。然則 $a-a'$; $a-\beta'$ 諸因子內。必有一因子爲 0。

今定 $a=a'$ 。於此兩方法之式。皆能以 $x-a$ 除盡。則各因子之數相等。即 $p=m$ 。

何則。 $a(x-a)^p(x-\beta)^q\dots = a(x-a')^m(x-\beta')^n\dots$ 若 p 與 m 不相等。則以 $x-a$ 除之。兩式內必有一式尙餘 $x-a$ 。如

$a(x-\beta')^n\dots = a(x-a)^{m-p}(x-\beta')^n\dots$ 則 $x=a$ 時。僅有一式爲 0。於理爲不合。

故由 a 等於 a' 。同法推得 β, \dots, β' 亦各相等。即兩方法全然相同。

93. 輪換次序 (Cyclical order) 代數式整列於特別之順序。亦爲必要之法。

例如代數式 $bc+ca+ab$ 爲依輪換次序整列者也。輪換次序如右式即換 a 爲 b ，換 b 爲 c ，換 c 爲 a 。謂之 a, b, c 輪換。

於 $bc+ca+ab$ 式，第一項 bc 換 b 爲 c ，換 c 爲 a ，即得第二項 ca 。又換此 c 爲 a ， a 爲 b ，即得第三項 ab 。

但不可如 $ab+ca+cb$ 式之不依順序。

又 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 亦爲依 a, b, c 之輪換次序整列者也。即從 $a^2(b-c)$ ，得 $b^2(c-a)$ ，從 $b^2(c-a)$ ，得 $c^2(a-b)$ 。又如 $(b-a)(c-a)(a-b)$ 亦爲依輪換次序整列者。

94. 等勢式 (Symmetrical expressions) 凡代數式以其任意之兩文字互換。而其值不變者。稱之爲等勢式。

例如 $a+b+c$ ， $bc+ca+ab$ ， $a^3+b^3+c^3-3abc$ ，皆爲等勢式。何則。因 $a+b+c$ 若將 a, b 互換。則爲 $b+a+c$ 。或將 a, c 互換。而爲 $c+b+a$ 。其值皆不變也。

又於 $bc+ca+ab$ 式互換 a, b 。則爲 $ac+cb+ba$ 。其值不變。

又於 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 式互換 b, a 。則爲 $b^3+a^3+c^3-3bac$ 。其值亦不變。故爲等勢式。

設有 $a+2b+3c$ 式。將 a, b 互換。爲 $b+2a+3c$ 。則其值變。故非等勢式。

代數式若祇以任意之二字互換。則其值變。若輪換其諸文字。則其值不變者。謂之輪換等勢式。

例如 $a^2b+b^2c+c^2a$ 互換 a, b 。則爲

$b^2a+a^2c+c^2b$ 。其值變。若將 a, b, c 輪換。則爲

$b^2c+c^2a+a^2b$ 。其值不變。故爲輪換等勢式。

又 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 式互換 a, b 。則爲 $(a-c)(c-b)(b-a)$

即 $-(c-a)(a-b)(b-c)$ 。其值變。然將 a, b, c 輪換。則得

$(c-a)(a-b)(b-c)$ 。其值不變。故爲輪換等勢式。

兩等勢式之積或商。亦爲等勢式。何則。各式內之文字。既能互換或輪換。而其值不變。則其積及商內之文字。亦必互換或輪換而其值不變。

[等勢公式] 等勢公式。學者以能自作之爲要。

例如 $2a+3b+5c$ 。非等勢式。若

$3a+3b+3c, -7a-7b-7c$. 則一見而知爲一次等勢式。蓋 a, b, c 之係數常相等。即爲等勢式也。故 $La+Lb+Lc$ 即 $L(a+b+c)$. 知其爲一次之等勢公式。

又 a, b, c 之二次等勢式爲 $2a^2+2b^2+2c^2$ 及 $6ab+6bc+6ca$. 或 $8a^2+8b^2+8c^2+6ab+6bc+6ca$. 故 $L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)$ 爲二次之等勢公式。何則。 $L=2, M=0$. 則得第一式。 $L=0, M=6$. 則得第二式。 $L=8, M=6$. 則得第三式。

一次式與二次式互換輪換皆同。自三次式以上。互換者雖可輪換。而輪換者不能互換。

例如 a, b, c 之三次互換公式爲

$$L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+Nabc.$$

又輪換公式爲

$$L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+b^2c+c^2a)+N(ab^2+bc^2+ca^2)+Pabc.$$

四次以上解法同。

〔第一例〕求 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 之因子。

令 $a=b$. 則原式 $=b^2(b-c)+b^2(c-b)+0=b^2(b-c)-b^2(b-c)=0$.

故 $a-b$ 爲原式之一因子。見 (88 章)。同法得 $b-c, c-a$ 亦爲因子。而原式爲三次式。故其因子之數有三。

$$\therefore \text{原式} = L(a-b)(b-c)(c-a).$$

但 L 爲 a, b, c 同一之某係數。故依 91 章。原式與右邊之式其同文字之係數當相等。

由是原式與右邊之式。比較其 a^2b 之係數。則於原式 a^2b 之係數爲 $+L$. 於右邊 a^2b 之係數爲 $-L$. 故 $-L=1$. 即 $L=-1$.

$$\therefore \text{原式} = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

數字代用法 此例用任意之值代 a, b, c . 其 L 常同。故 $a=0, b=1, c=2$. 則

$$\text{原式} = L(a-b)(b-c)(c-a).$$

$$\text{即 } 0+1^2(2-0)+2^2(0-1) = L(0-1)(1-2)(2-0).$$

$$\text{即 } -2 = 2L. \quad \therefore L = -1.$$

如上所用 a, b, c 之值。取其運算之簡易。若令 $a=99, b=7, c=8$ 則 $99^2(7-8)+7^2(8-99)+8^2(99-7)=L(99-7)(7-8)(8-99)$ 。依此運算亦為 $L=-1$ 。

[第二例] 求 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 之因子。

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \dots\dots\dots (1)$$

令 $b=c$ 。則 (1) 式為 0。故 $b-c$ 為 (1) 式之因子。同法得 $c-a, a-b$ 亦為 (1) 式之因子。但 (1) 式為四次式。故在 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之三次因子外。尚有一因子。為 a, b, c 之一次等勢式。即 $L(a+b+c)$ 。則 (1) 式與下之 (2) 式同值。

$$L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c) \dots\dots\dots (2)$$

比較其 a^2b 之係數。則 (1) 式為 1。(2) 式為 $-L$ 。故 $1=-L, \therefore L=-1$ 。由是原式 $=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$ 。

通例之分割法 用此例則當依 a 之遞降方乘整列之。

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = a^2(b-c) - a(b^2-c^2) + bc(b^2-c^2)$$

$$= (b-c)\{a^2 - a(b^2+bc+c^2) + bc(b+c)\}$$

$$= (b-c)\{b^2(c-a) + bc(c-a) - a(c^2-a^2)\} \quad \text{〔此依 } b \text{ 之遞降方乘整列者〕}$$

$$= (b-c)(c-a)\{b^2+bc-a(c-a)\}$$

$$= (b-c)(c-a)\{-c(a-b) - (a^2-b^2)\} \quad \text{〔此括 } c \text{ 之一方乘〕}$$

$$= -(b-c)(c-a)(a-b)(c+a+b)。$$

[第三例] 求 $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$ 之因子。

$$b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b) \dots\dots\dots (1)$$

令 $b=c$ 。則 (1) 式為 0。故 $b-c$ 為 (1) 式之因子。由是得

$(b-c)(c-a)(a-b)$ 之三次因子。但 (1) 式為五次式。尚有 a, b, c 二次等勢式之因子。故 (1) 式變為同值之 (2) 式。如下

$$(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)\} \dots\dots\dots (2)$$

比較其 a^4b 之係數。則 (1) 式為 0。(2) 式為 $-L$ 。 $\therefore L=0$ 。

又比較其 a^3b^2 之係數。則 (1) 式為 1。(2) 式為 $L-M$ 。 $\therefore 1=L-M$ 。但 $L=0$ 。 $\therefore M=-1$ 。

由是原式 $=-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)$ 。

常通之因子分割法用此例。則

$$\begin{aligned}
 & b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a) + a^2b^2(a-b) \\
 = & a^2(b^2 - c^2) - a^2(b^2 - c^2) + b^2c^2(b-c) \text{ [此係 } a \text{ 之遞降方乘整列者]} \\
 = & (b-c)\{a^2(b+c) - a^2(b^2 + bc + c^2) + b^2c^2\} \\
 = & (b-c)\{b^2(c^2 - a^2) - a^2b(c-a) - ca^2(c-a)\} \text{ [} b \text{ 爲遞降方乘]} \\
 = & (b-c)(c-a)\{b^2(c+a) - a^2b - ca^2\} \\
 = & (b-c)(c-a)\{-c(a^2 - b^2) - ab(a-b)\} \text{ [括 } c \text{ 之一方乘]} \\
 = & -(b-c)(c-a)(a-b)\{c(a+b) + ab\}.
 \end{aligned}$$

[注意] 查理斯密斯氏於因子分割法。未見完善。今多從篤獨亨他氏本改正之。

例題六

求下列各式之因子。

1. $(y-z)^3 + (z-x)^3 + (x-y)^3$.

[解] $y=z$, 則原式 $= 0 + (y-x)^3 + (x-y)^3 = 0$.

$\therefore y-z$ 爲因子。 \therefore 原式 $= L(y-z)(z-x)(x-y)$.

比較 x^2y 之係數。則 $-3 = -L$. $\therefore L=3$.

由是原式 $= 3(y-z)(z-x)(x-y)$.

[別法] $(y-z) + (z-x) = y-x = -(x-y)$ 已可明瞭。兩邊各求其立方。則 $[(y-z) + (z-x)]^3 = -(x-y)^3$.

即 $(y-z)^3 + (z-x)^3 + 3(y-z)(z-x)\{(y-z) + (z-x)\} = -(x-y)^3$.

即 $(y-z)^3 + (z-x)^3 + 3(y-z)(z-x)(y-x) = -(x-y)^3$.

$\therefore (y-z)^3 + (z-x)^3 + (x-y)^3 = -3(y-z)(z-x)(y-x)$.

2. $(y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5$.

[解] 原式 $= (y-z)(z-x)(x-y)\{L(x^2 + y^2 + z^2) + M(xy + yz + zx)\}$.

因 x^4y 之係數。爲 $-5 = -L$. $\therefore L=5$.

又 $x=0, y=1, z=2$. 則

$(1-2)^5 + (2-0)^5 + (0-1)^5 = (1-2)(2-0)(0-1)\{5(0+1+4) + M(0+2+0)\}$.

即 $-1+32-1=2\{25+2M\}$. $\therefore M=-5$.

由是原式 $= 5(y-z)(z-x)(x-y)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

$$3. a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2).$$

[解] $b=c$, 則原式 $=0$. \therefore 有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之因子.

$$\text{又 } b=-c, \text{ 則原式 } = a^4(c^2-c^2)+c^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-c^2)=0.$$

\therefore 有 $(b+c)(c+a)(a+b)$ 之因子.

$$\text{由是原式} = L(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$\text{比較 } a^4b^2 \text{ 之係數, 則 } 1 = -L. \therefore L = -1.$$

$$\therefore \text{原式} = -(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$4. a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3.$$

$$[\text{解}] \text{原式} = L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c). L=1.$$

$$\therefore \text{原式} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

$$5. a(b-c)^5+b(c-a)^5+c(a-b)^5.$$

[解] 原式有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之三次因子, 而原式為六次式, 故尚有三因子, 由是

$$\begin{aligned} \text{原式} = (b-c)(c-a)(a-b) \{ & L(a^3+b^3+c^3) + M(a^2b+b^2c+c^2a) \\ & + N(ab^2+bc^2+ca^2) + Pabc \} \end{aligned}$$

$$\text{比較 } a^3b \text{ 之係數, 則 } -1 = -L. \therefore L=1.$$

$$\text{比較 } a^4b^2 \text{ 之係數, 則 } 0 = L - M. \therefore M = L = 1.$$

$$\text{比較 } a^2b^4 \text{ 之係數, 則 } 0 = -L + N. \therefore N = L = 1.$$

又 $a=1, b=2, c=3$, 則

$$\begin{aligned} 1(2-3)^5 + 2(3-1)^5 + 3(1-2)^5 = & (2-3)(3-1)(1-2) \{ (1^3+2^3+3^3) \\ & + (1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 1) + (1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 1^2) + P \times 1 \times 2 \times 3 \}, \end{aligned}$$

$$\text{即 } -1 + 64 - 3 = 2 \{ 1 + 8 + 27 + 2 + 12 + 9 + 4 + 18 + 3 + 6P \}. \therefore P = -9.$$

$$\therefore \text{原式} = (b-c)(c-a)(a-b) \{ a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2 - 9abc \}.$$

$$6. bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b). \quad (\text{答 } -(b-c)(c-a)(a-b))$$

$$7. b^3c^3(b-c)+c^3a^3(c-a)+a^3b^3(a-b).$$

[解] 原式為七次式, 是三次因子 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之外, 尚有四因子, 然考原式 a 之最高方乘為 a^4 , 故四次式內之 a 方乘高於二次者, 可省略之如下.

$$\text{原式} = (b-c)(c-a)(a-b) \{ L(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) + M(a^2bc+b^2ca+c^2ab) \}$$

$$\text{比較 } a^4b^3 \text{ 之係數, 則 } 1 = -L. \therefore L = -1.$$

設 $a=1, b=2, c=3$ 則

比較 a^4b^2c 之係數 $0 = L - M$
 $2^3 \cdot 3^2(2-3) + 3^3 \cdot 1^3(3-1) + 1^3 \cdot 2^3(1-2)$
 $= (2-3)(3-1)(1-2) \{- (1^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 1^2) + M(1^2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 \cdot 2)\}$
 即 $-216 + 54 - 8 = 2 \{-49 + 36M\} \therefore M = -1$.

\therefore 原式 $= -(b-c)(c-a)(a-b) \{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c)\}$.

8. $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$.

[答 $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$]

9. $a^5(b-c) + b^5(c-a) + c^5(a-b)$.

[解] 原式 $= (b-c)(c-a)(a-b) \{L(a^3+b^3+c^3) + M(a^2b+b^2c+c^2a) + N(ab^2+bc^2+ca^2) + Pabc\}$.

比較 a^5b^1 之係數。則 $1 = -L$ 。 $\therefore L = -1$ 。

比較 a^4b^2 之係數。則 $0 = L - M$ 。 $\therefore M = L = -1$ 。

比較 a^2b^4 之係數。則 $0 = -L + N$ 。 $\therefore N = L = -1$ 。

若 $a=1, b=2, c=3$ ，則得 $P = -1$ 。由是原式為

$-(b-c)(c-a)(a-b)(a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+abc)$ 。

10. $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3$ 。

[解] $a=0$ 則原式 $= (b+c)^3 - (b+c)^3 - (c-b)^3 - (b-c)^3 = 0$ 。

\therefore 原式 $= Labc, a=b=c=1$ ，則

$(1+1+1)^3 - (1+1-1)^3 - (1+1-1)^3 - (1+1-1)^3 = L \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ 。

$\therefore L = 24$ 。由是原式 $= 24abc$ 。

11. $(a+b+c)^5 - (b+c-a)^5 - (c+a-b)^5 - (a+b-c)^5$ 。

[解] 原式 $= abc \{L(a^2+b^2+c^2) + M(ab+bc+ca)\}$ 。

若 $a=b=2, c=-1$ 則 $(2+2-1)^5 - (2-1-2)^5 - (-1+2-2)^5 - (2+2-1)^5$
 $= -4 \{L(4+4+1) + M(4-2-2)\}$ 即 $243 + 1 + 1 - 3125 = -4 \{9L + 0\}$

$\therefore L = 80$ 。又 $a=b=c=1$ 。則

$(1+1+1)^5 - (1+1-1)^5 - (1+1-1)^5 - (1+1-1)^5 = \{80(1+1+1) + M(1+1+1)\}$

$\therefore M = 0$ 。由是原式 $= 80abc(a^2+b^2+c^2)$ 。

12. $a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ 。

[解] $a=0$ 則原式 $= b(c-b)^2 + c(b-c)^2 + (b+c)(c-b)(b-c)$

$= (b-c)^2(b+c) - (b+c)(b-c)^2 = 0$ 。

∴ 原式 = $Labc$, $a=b=c=1$, 則 $1+1+1+1=L$,

∴ $L=4$ 由是原式 = $4abc$.

13. $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

[答 $2abc$]

14. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+a(a-b+c)(a+b-c)$

$+b(a+b-c)(-a+b+c)+c(-a+b+c)(a-b+c)$.

[答 $4abc$]

15. $(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(a+b-c)(-a+b+c)$

$+ (a-b)(-a+b+c)(a-b+c)$.

[答 $-4(b-c)(c-a)(a-b)$]

16. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

[答 $3(y+z)(z+x)(x+y)$]

17. $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$.

[解] $x=-y$, 則原式 = $(-y+y+z)^5+y^5-y^5-z^5=0$.

∴ 原式 = $(x+y)(y+z)(z+x)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)\}$.

比較 x^4y 之係數, 則 $5=L$, 若 $x=y=1, z=0$, 則

$2^5-1-1=2\{5(1+1)+M(1)\}$ ∴ $M=5$.

由是原式 = $5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$.

18. $(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$. [答 $-(b-c)(c-a)(a-b)$]

19. $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$.

[答 $-2(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$]

20. $(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4$.

[答 $-(b-c)(c-a)(a-b)\{3(a^2+b^2+c^2)+5(bc+ca+ab)\}$]

21. $a^3+b^3+c^3+5abc-a(a-b)(a-c)-b(b-c)(b-a)-c(c-a)(c-b)$.

[答 $(b+c)(c+a)(a+b)$]

22. $a^2(a+b)(a+c)(b-c)+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+c^2(c+a)(c+b)(a-b)$.

[解] $b=c$, 則原式 = $c^2(2c)(c+a)(c-a)+c^2(c+a)(2c)(a-c)$

$=2c^3(c^2-a^2)-2c^3(c^2-a^2)=0$.

故原式有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之因子.

又 $a+b+c=0$, 則

原式 = $a^2(-c)(-b)(b-c)+b^2(-a)(-c)(c-a)+c^2(-b)(-a)(a-b)$

$=abc\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}=abc\{0\}=0$.

由是原式 $= L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2$ 比得 $L = -1$.

即原式 $= -(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2$.

23. $(y+z)(z+x)(x+y) + xyz$.

[解] $x+y+z=0$. 則原式 $= (-x)(-y)(-z) + xyz = 0$,

\therefore 原式 $= (x+y+z) \{ L(x^2+y^2+z^2) + M(xy+yz+zx) \}$,

$\therefore L=0, M=1$. 由是原式 $= (x+y+z)(xy+yz+zx)$.

24. $a^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(a+b)^2 + abc(a+b+c)$

$+ (a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)$. [答 $(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)$]

25. $(x+y+z)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 - (x+y)^4 + x^4 + y^4 + z^4$.

[答 $12xyz(x+y+z)$]

26. $a^2(b+c-2a) + b^2(c+a-2b) + c^2(a+b-2c) + 2(c^2-a^2)(c-b)$

$+ 2(a^2-b^2)(a-c) + 2(b^2-c^2)(b-a)$. [答 $-3(b-c)(c-a)(a-b)$]

27. $(b+c-a-d)^4(b-c)(a-d) + (c+a-b-d)^4(c-a)(b-d)$

$+ (a+b-c-d)^4(a-b)(c-d)$.

[解] $b=c$ 則原式 $= (a-d)^4(c-a)(c-d) + (a-d)^4(a-c)(c-d) = 0$.

又 $d=a$ 則原式 $= 0$. 如此. 則

原式 $= L(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c)$.

$\therefore L=16$, 因是原式 $= 16(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c)$.

28. $12 \{ (x+y+z)^{2n} - (y+z)^{2n} - (z+x)^{2n} - (x+y)^{2n} + x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} \}$

能以 $(x+y+z)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 - (x+y)^4 + x^4 + y^4 + z^4$ 除盡.

[證] $(x+y+z)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 - (x+y)^4 + x^4 + y^4 + z^4 = 12xyz(x+y+z)$

今於第一式令 $x=0$. 則

$12 \{ (y+z)^{2n} - (y+z)^{2n} - z^{2n} - y^{2n} + y^{2n} + z^{2n} \} = 0$.

又 $x+y+z=0$. 則 $12 \{ -(-x)^{2n} - (-y)^{2n} - (-z)^{2n} + x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} \} = 0$

故第一式有 $12, x, y, z, (x+y+z)$ 之因子. 即可以第二式除盡之.

29. 求證 $a^3(b+c-a)^2 + b^3(c+a-b)^2 + c^3(a+b-c)^2 + abc(a^2+b^2+c^2)$

$+ (a^2+b^2+c^2 - bc - ca - ab)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 2abc(bc+ca+ab)$.

[證] 左邊 $a=0$, 則左邊 $= 0$. 故有 abc 之因子. 由是左邊為

$abc \{ L(a^2+b^2+c^2) + M(ab+bc+ca) \}$. 考得 $L=0, M=2$ 即與右邊相等.

$$30. \text{ 試證 } (b-c)^6 + (c-a)^6 + (a-b)^6 - 9(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 \\ = 2(a-b)^3(a-c)^3 + 2(b-c)^3(b-a)^3 + 2(c-a)^3(c-b)^3.$$

[證] $x=b-c, y=c-a, z=a-b$, 則

$$x+y+z=(b-c)+(c-a)+(a-b)=0. \therefore x+y=-z$$

$$(x+y)^2=-z^2. \text{ 即 } x^2+y^2+3xy(x+y)=-z^2.$$

$$\therefore x^3+y^3+z^3=-3xy(x+y)=3xyz. \text{ 又 } (x^3+y^3+z^3)^2=9x^2y^2z^2.$$

$$\text{即 } x^6+y^6+z^6+2x^3y^3+2y^3z^3+2z^3x^3=9x^2y^2z^2.$$

$$\therefore x^6+y^6+z^6-9x^2y^2z^2=-2x^3y^3-2y^3z^3-2z^3x^3.$$

$$\text{即 } (b-c)^6 + (c-a)^6 + (a-b)^6 - 9(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 \\ = -2(b-c)^3(c-a)^3 - 2(c-a)^3(a-b)^3 - 2(a-b)^3(b-c)^3 \\ = 2(c-b)^3(c-a)^3 + 2(a-c)^3(a-b)^3 + 2(b-a)^3(b-c)^3.$$

$$31. \text{ 證 } (b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3 + (a+d)^3 + (b+d)^3 + (c+d)^3 \\ = 3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

[證] $a+b+c+d=0$. 則左邊 $=0$. 即易知其等於右邊.

$$32. \text{ 化 } 4(a^2+ab+b^2)^3 - (a-b)^2(a+2b)^2(2a+b)^2 \text{ 爲最簡式.}$$

[解] $a=0$. 則原式 $=4(b^2)^3 - (-b)^2(2b)^2(b)^2=0$.

又 $a=-b$. 則原式 $=4(a^2-a^2+a^2)^3 - (2a)^2(-a)^2(a)^2=0$.

$$\text{由是原式} = ab(a+b) \{L(a^3+b^3) + M(a^2b+ab^2)\} \\ = ab(a+b)^2 \{L(a^2-ab+b^2) + Mab\}.$$

$$\therefore \text{原式} = ab(a+b)^2 \{L(a^2-2ab+b^2) + (L+M)ab\}.$$

$a=b=1$. 則

$$4(1+1+1)^3 - (1-1)^2(1+2)^2(2+1)^2 = 1(1+1)^2 \{L(1-2+1) + (L+M)\}.$$

即 $108=4(L+M)$. $\therefore L+M=27$. 又 $a=2, b=1$. 則

$$4(4+2+1)^3 - (2-1)^2(2+2)^2(4+1)^2 = 2(2+1)^2 \{L(4-4+1) + (27)2\}.$$

即 $1372-400=18\{L+54\}$. $\therefore L=0, M=27-L=27$.

由是原式 $=ab(a+b)^2 \{27ab\} = 27a^2b^2(a+b)^2$.

$$33. \text{ 能以 } a^4(b^2+c^2-a^2)^3 + b^4(c^2+a^2-b^2)^3 + c^4(a^2+b^2-c^2)^3 \text{ 能以 } \\ a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2 \text{ 除盡之.}$$

[證] $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

$$= -(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

設 $a+b+c=0$ 。則第一式

$$\begin{aligned} &= a^4\{b^2+c^2-(b+c)^2\}^3 + b^4\{c^2+a^2-(c+a)^2\}^3 + c^4\{a^2+b^2-(a+b)^2\}^3 \\ &= a^4\{-2bc\}^3 + b^4\{-2ca\}^3 + c^4\{-2ab\}^3 \\ &= -8a^3b^3c^3(a+b+c) = -8a^3b^3c^3(0) = 0. \therefore \text{第一式有 } a+b+c \text{ 之因子。} \end{aligned}$$

又 $a+b-c=0$ 。則第一式

$$\begin{aligned} &= a^4\{b^2+c^2-(c-b)^2\}^3 + b^4\{c^2+a^2-(c-a)^2\}^3 + c^4\{a^2+b^2-(a+b)^2\}^3 \\ &= a^4\{2bc\}^3 + b^4\{2ca\}^3 + c^4\{2ab\}^3 \\ &= 8a^3b^3c^3(a+b-c) = 8a^3b^3c^3(0) = 0. \end{aligned}$$

$\therefore a+b-c$ 亦為第一式之因子。同法考得 $b+c-a$, $c+a-b$ 均為第一式之因子。故如題云云。

34. $4\{cd(a^2-b^2)+ab(c^2-d^2)\}^2 + \{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\}^2$.

[解] 原式 $= 4\{c^2d^2(a^2-b^2)^2 + 2abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2) + a^2b^2(c^2-d^2)^2\}$
 $+ (a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2 - 8abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2) + 16a^2b^2c^2d^2$
 $= 4c^2d^2(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2(c^2-d^2)^2 + (a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2 + (4a^2b^2)(4c^2d^2)$
 $= \{(c^2+d^2)^2 - (c^2-d^2)^2\}(a^2-b^2)^2 + \{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2\}(c^2-d^2)^2$
 $+ (a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2 + \{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2\}\{(c^2+d^2)^2 - (c^2-d^2)^2\}.$

令 $a^2+b^2=x$, $a^2-b^2=y$, $c^2+d^2=m$, $c^2-d^2=n$ 。則

原式 $= \{m^2-n^2\}y^2 + \{x^2-y^2\}n^2 + y^2n^2 + \{x^2-y^2\}\{m^2-n^2\} = x^2m^2$.

即 原式 $= (a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2$ 此例不用通例之解式。

35. 求證 $(y^2-z^2)(1+xy)(1+xz) + (z^2-x^2)(1+yz)(1+yx)$

$+ (x^2-y^2)(1+zx)(1+zy) = (y-z)(z-x)(x-y)(xyz+x+y+z)$.

[證] $y=z$, 則原式 $= 0$ 。 \therefore 原式有 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 之三次因子。而原式為自六次式至二次式。故其餘之因子。尚有三二次一次零次。又原式 x 之最高方乘為 x^3 。故其餘之因子含 x 者。不多於一方乘。

\therefore 原式 $= (y-z)(z-x)(x-y)\{Lxyz + M(xy+yz+zx) + N(x+y+z) + P\}$.

比較 x^2y 之係數。 $0 = -P$, $\therefore P = 0$.

又比較 x^3y 之係數。 $-1 = -N$. $\therefore N = 1$.

又比較 x^2y^2 之係數。 $0 = -M$. $\therefore M = 0$.

又 $x=1, y=2, z=3$ 。則得 $L=1$ 。由是

$$\text{原式} = (y-z)(z-x)(x-y)(xyz+x+y+z).$$

$$36. \quad a^3(b-c)(c-d)(d-b) - b^3(c-d)(d-a)(a-c) \\ + c^3(d-a)(a-b)(b-d) - d^3(a-b)(b-c)(c-a).$$

[解] $b=c$, 則原式 $= 0$. 依此求因子. 則

$$\text{原式} = (b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d).$$

$$37. \quad b^2c^2d^2(b-c)(c-d)(d-b) - c^2d^2a^2(c-d)(d-a)(a-c) + d^2a^2b^2(b-a) \\ (a-b)(b-d) - a^2b^2c^2(a-b)(b-c)(c-a).$$

[解] 原式 $= (b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d) \{L(abc+bcd+cda+dab)\}$ 而 $L = -1$.

$$\therefore \text{原式} = -(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d) \{abc+bcd+cda+dab\}.$$

此式之 $\{ \}$ 爲三次式. 而其中無 a^3, a^2b , 等項者. 以原式無自 a^3 以上之高次項故也.

第陸編補

霍爾及乃托氏第三十四編摘要

等勢式

1. 緒言 霍爾及乃托氏之大代數自比例論始。故前數編之講義。無可入之材料。然在彼書 439 頁所載等勢式之例題。有為斯密氏所未詳者。因摘要以解之。

2. 記號 Σ 之記號。示等勢式之和。即總記其同種類之各項也。

如記 $a+b+c$ 則為 Σa 。然有時 $ab+bc+ca$ 不能為 Σab 。何則。以不見有 c 字故也。若欲知 Σab 之為 $ab+bc+ca$ 。可書為 $\Sigma_{abc} ab$ 。故 $\Sigma_{abc} ab = ab+bc+ca$ 。

又 $\Sigma_{abcd} ab = ab+bc+ca+ad+bd+cd$ 。

例題 [例題三十四 a]

求以下各式之因子(題之號數依原書)

9. $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc$.

[解] $a = -b$ 則原式 $= -b(b-c)^2 + b(c+b)^2 + c(-b-b)^2 - 8b^2c$
 $= b\{(b+c)^2 - (b-c)^2\} + 4b^2c - 8b^2c = 4b^2c + 4b^2c - 8b^2c = 0$ 。

由是原式 $= L(a+b)(b+c)(c+a)$ 。依此求 L 。則為 1。故題式為 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 。

() $L^2 (bc+ca+ab)^2 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2$ 。

[解] $a = -b$ 則原式 $= (bc - cb - b^2)^2 - b^2c^2 + c^2b^2 + b^4$
 $= -b^6 - b^2c^2 + b^2c^2 + b^6 = 0$ 。故有 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 之因子。

又 $a=0$ 。則原式 $= (bc)^2 - b^2c^2 = 0$ 。故有 abc 之因子。

由是原式 $= Labc(a+b)(b+c)(c+a)$ 。

$a=b=c=1$ 。則求得 L 為 3。故題式為 $3abc(a+b)(b+c)(c+a)$ 。

18. 證 $\Sigma a^2(b+c) - \Sigma a^2 - 2abc = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ 。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc \\ &= a^2(b+c) + a(b^2+c^2-2bc) + bc(b+c) - (b^3+c^3) - a^3 \\ &= (b+c) \{a^2+bc-(b^2-bc+c^2)\} - a \{a^2-(b-c)^2\} \\ &= (b+c) \{a^2-(b-c)^2\} - a \{a^2-(b-c)^2\} \\ &= \{a^2-(b-c)^2\} \{ (b+c) - a \} = (a+b-c)(a-b+c)(b+c-a). \end{aligned}$$

20. 試證 $4\Sigma(b-c)(b+c-2a)^2 = 9\Sigma(b-c)(b+c-a)^2$ 。

$$\text{〔解〕 原式} = 4(b-c)(b+c-2a)^2 + 4(c-a)(c+a-2b)^2 + 4(a-b)(a+b-2c)^2.$$

令 $b=c$ 。則原式 $= 0 + 4(c-a)(a-c)^2 + 4(a-c)(a-c)^2 = 0$ 。

故原式 $= A(b-c)(c-a)(a-b)$ 。

a^2b 之係數。爲 $16+16+8-4 = -4$ 。 $\therefore A = -36$ 。

又原式右邊 $= 9(b-c)(b+c-a)^2 + 9(c-a)(c+a-b)^2 + 9(a-b)(a+b-c)^2$
 $= 36(b-c)(c-a)(a-b)$ 。故如題云云。

22. 證 $\Sigma(ab-c^2)(ac-b^2) = (\Sigma bc)(\Sigma bc - \Sigma a^2)$ 。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= (ab-c^2)(ac-b^2) + (bc-a^2)(ba-c^2) + (ca-b^2)(cb-a^2) \\ &= abc(a+b+c) + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - (ac^3 + a^2c + ba^3 + b^3a + cb^3 + c^3b) \\ &= (bc+ca+ab)^2 - abc(a+b+c) - ac^3 - a^2c - ba^3 - b^3a - cb^3 - c^3b \\ &= (bc+ca+ab)^2 - a^2(bc+ca+ab) - b^2(bc+ca+ab) - c^2(bc+ca+ab) \\ &= (bc+ca+ab)(bc+ca+ab - a^2 - b^2 - c^2). \end{aligned}$$

23. 證 $abc(\Sigma a)^3 - (\Sigma bc)^3 = abc\Sigma a^3 - \Sigma b^3c^3 = (a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$ 。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } abc(a+b+c)^3 - (bc+ca+ab)^3 &= abc \{a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3\} \\ &\quad - \{a^3(b+c)^2 + 3a^2bc(b+c)^2 + 3ab^2c^2(b+c) + b^3c^3\} \\ &= bc(a^4 - b^2c^2) + 3abc(b+c)(a^2-bc) - a(b+c)^3(a^2-bc) \\ &= (a^2-bc) \{bc(a^2+bc) + 3abc(b+c) - a(b+c)^3\} \\ &= (a^2-bc) \{bc(a^2+bc) + 3abc(b+c) - ab^3 - ac^3 - 3abc(b+c)\} \\ &= (a^2-bc) \{a^2bc + b^2c^2 - ab^3 - ac^3\} = (a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } abc(a^3 + b^3 + c^3) - (b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3) &= bc(a^4 - b^2c^2) - ac^3(a^2-bc) - ab^3(a^2-bc) \\ &= (a^2-bc) \{bc(a^2-bc) - ac^3 - ab^3\} = (a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab). \end{aligned}$$

例題 (例題三十四b)

證下列之各式。

$$26. (x^3+6x^2y+3xy^2-y^3)^3+(y^3+6xy^2+3x^2y-x^3)^3 \\ =27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^3.$$

$$〔解〕 原式 = \{3xy(2x+y)+(x^3-y^3)\}^3 + \{3xy(x+2y)-(x^3-y^3)\}^3.$$

$$\text{令 } x^3-y^3=A, 3xy(2x+y)=M, 3xy(x+2y)=N. \text{ 則}$$

$$M+N=9xy(x+y), M-N=3xy(x-y), MN=9x^2y^2(2x^2+5xy+2y^2).$$

$$\text{由是原式} = (M+A)^3 + (N-A)^3$$

$$= M^3 + N^3 + 3A(M^2 - N^2) + 3A^2(M + N)$$

$$= (M+N) \{M^2 + N^2 - MN + 3A(M-N) + 3A^2\}.$$

$$= (M+N) \{(M-N)^2 + MN + 3A(M-N) + 3A^2\}$$

$$= 9xy(x+y) \{9x^2y^2(x-y)^2 + 9x^2y^2(2x^2+5xy+2y^2) + 9Axy(x-y) + 3A^2\}$$

$$= 9xy(x+y) \{27x^2y^2(x^2+xy+y^2) + 9(x^3-y^3)xy(x-y) + 3(x^3-y^3)^2\}$$

$$= 27xy(x+y)(x^2+xy+y^2) \{9x^2y^2 + 3(x-y)^2xy + (x^3-y^3)(x-y)\}$$

$$= 27xy(x+y)(x^2+xy+y^2) \{3xy(x^2+xy+y^2) + (x^3-y^3)(x-y)\}$$

$$= 27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2 \{3xy + (x-y)^2\}.$$

28. 求 $2a^2b^2c^2 + (a^3 + b^3 + c^3)abc + b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3$ 之因子。

$$〔解〕 原式 = a^4bc + a^3(b^3 + c^3) + 2a^2b^2c^2 + abc(b^3 + c^3) + b^3c^3$$

$$= bc(a^4 + 2a^2bc + b^2c^2) + a(b^3 + c^3)(a^2 + bc)$$

$$= (a^2 + bc) \{bc(a^2 + bc) + a(b^3 + c^3)\}$$

$$= (a^2 + bc) \{ab(b^2 + ca) + c^2(b^2 + ca)\}$$

$$= (a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab).$$

查 理 斯 密 司 氏
霍 爾 氏, 乃 托 氏
大 代 數 學 講 義

第 貳 卷

第 柒 編

最高公因子, 最低公倍數

最 高 公 因 子

95. 公因子 (Common Factor) 凡二個以上之整代數式, 能以一整代數式各除盡之, 則此一整代數式, 謂為各式之公因子。

最高公因子 (Highest Common Factor) 二個以上之整代數式, 其最高公因子, 即諸因子之中之最高次式, 最高公因子之記號, 則用 $H.C.F.$

例如 $a^4 - b^4$, $(a^2 - b^2)^2$ 之公因子為 $a + b$, $a - b$, $a^2 - b^2$, 而 $a^2 - b^2$ 為其最高公因子。

96. 一項式之最高公因子 二個以上之一項式, 其最高公因子, 可由視察而得。

例如求 a^3b^2c , 及 a^4b^3c 之最高公因子, 其能除盡各式者, 在 a 之最高方乘為 a^3 , 在 b 之最高方乘為 b^2 , 而 c 之最高方乘即為 c 。

故所求之 $H.C.F. = a^3b^2c$ 。

又求 $a^3b^4c^4$, a^2b^3 及 a^5bc^2 之最高公因子, 其可以除盡三式者, a 之最高方乘為 a^2 , b 之最高方乘為 b , 而 c 不能整除各式, 故所求之 $H.C.F. = a^2b$ 。

〔法則〕由是二個以上之一項式, 其最高公因子, 即各式中公有文字之最低方乘之積。

97. 因子分割法之應用 諸多項式之最高公因子, 若

已知各式之因子。可與前章同法求之。

例如求 $(x-2)^2(x-1)^2(x-3)$ 。及 $(x-2)^2(x-1)(x-3)^2$ 之最高公因子。其能整除各式之 $x-2$ 。其最高方乘為 $(x-2)^2$ 。又能整除各式之 $x-1$ 及 $x-3$ 。其最高方乘為 $x-1$ 及 $x-3$ 。

故所求之 $H.C.F. = (x-2)^2(x-1)(x-3)$ 。

又 $a^2b^3(a-b)^2(a+b)^3$ 及 $a^3b^2(a-b)(a+b)^2$ 之 $H.C.F.$ 為 $a^2b^2(a-b)(a+b)^2$ 。

例 題

1. 求 $a^4b^2 - a^2b^4$ 及 $a^4b^3 + a^3b^4$ 之最高公因子。

[解] $\left. \begin{aligned} a^4b^2 - a^2b^4 &= a^2b^2(a+b)(a-b) \\ a^4b^3 + a^3b^4 &= a^3b^3(a+b) \end{aligned} \right\} \therefore \text{所求之 } H.C.F. = a^2b^2(a+b)$ 。

2. 求 $a^6b^2 - 4a^4b^4$ 及 $a^6b^3 - 16a^2b^6$ 之最高公因子。〔答 $a^2b^2(a^2 - 4b^2)$ 〕。

3. 求 $a^3 + 3a^2b + 2ab^2$ 及 $a^4 + 6a^3b + 8a^2b^2$ 之最高公因子。〔答 $a(a+2b)$ 〕。

98*. 兩多項式之最高公因子 二次以上多項式之因子。雖不能以普通法求之。見(84章)。然如算術上兩數求最大公約數法求之。亦可得其最高公因子。

諸代數式中。含一項式之因子。可視察而得。故一項式之最高公因子。亦可視察而得。由是求兩多項式之最高公因子時。其一項式之因子。可置勿問祇求其兩式中公有之最高次多項可也。

設 A 及 B 為兩多項式。各依同文字之遞降方乘整列。又 B 之次數。較 A 為高。

以 A 除 B 得商為 Q 。其餘式為 R 。則

$$B = AQ + R \dots \dots \dots (1). \quad \therefore R = B - AQ \dots \dots \dots (2).$$

任意代數式之各項。能以某式除盡之。即其全式亦能以某式除盡。故(1)式之 B 。能以 A 及 R 之各公因子除盡。(2)式之 R 。能以 B 及 A 之各公因子除盡。

由是 A 及 B 之各公因子。與 A 及 R 之各公因子全然相同。故 A 及 R 之 $H.C.F.$ 。即所求 A 及 B 之 $H.C.F.$ 。

今設以 R 除 A 。其餘式為 S 。則 R 及 S 之 $H.C.F.$ 。可用同法推得與 A 及 R 之 $H.C.F.$ 同。亦即為所求 A 與 B 之 $H.C.F.$ 。若依此法續

除之。(即又以 S 除 R) 則其除式及被除式之 $H.C.F.$ 必與原兩式之 $H.C.F.$ 同。

故依此方法除至無餘。則其最後之除式。必為其最後之被除式之最高公因子。即為所求之最高公因子。

[註] 例如求 A 及 B 之最高公因子。依前述之講義。示式於下。

$$A) B(Q)$$

$$\underline{AQ}$$

$$R) A(Q_1)$$

$$\underline{RQ_1}$$

$$S) R(Q_2)$$

$$\underline{SQ_2}$$

……歷次除之至最後

$$\underline{X) U(Q_n)}$$

$$\underline{XQ_n}$$

$$0$$

$$A, B \text{ 之 } H.C.F. = R, A \text{ 之 } H.C.F.$$

$$= S, R \text{ 之 } H.C.F.$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= X, 0 \text{ 之 } H.C.F. = X \text{ 為所求之 } H.C.F. \text{ 即 } A$$

及 B 之最高公因子。

[注意] 依除法之性質。餘式之次數必比除式為低。例如 v 之三次式。其除得之餘式。不能高於 v 之二次式。

故如前次第施其除法。則餘式必次第為低次式。若所得餘式。無公有之文字。則原兩式。為無最高公因子。此猶在算術中最後之餘數為 1。則原兩數無最大公約數。

前述之求 $H.C.F.$ 法。其兩式內皆不含一項之公因子。即祇求多項式之 $H.C.F.$ 也。故其被除式或除式。以任何一項式除之或乘之。其所求之最高公因子皆不變。

[法則] 由是求兩多項式之 $H.C.F.$ 則以兩式之公有文字。依遞降方乘整列之。以其低次式除高次式。(若兩式為同次式。則可

任以一式除餘一式。又以餘式除前之除式。次第依法除之。至無餘式時。則其最後之除式。即其所求之 *H.C.F.* 但此法非求一項式之公因子者。蓋兩式之一項公因子。原可由視察得之也。又在運算時。其任意之除式。被除式或餘式。以一項因子除之或乘之。其最高公因子不變。

[第一例] 求 x^3+x^2-2 及 x^3+2x^2-3 之 *H.C.F.*

$$x^3+x^2-2 \quad x^3+2x^2-3 \quad (1)$$

$$\underline{x^3+x^2-2}$$

$$x^2-1 \quad x^3+x^2-2 \quad (x+1)$$

$$\underline{x^3-x}$$

$$x^2+x-2$$

$$\underline{x^2-1}$$

$$x-1 \quad x^2-1 \quad (x+1)$$

$$\underline{x^2-x}$$

$$x-1$$

故 $x-1$ 爲所求之 *H.C.F.*

$$\underline{x-1}$$

$$0$$

又此運算內第一之餘式 x^2-1 。爲有 $x-1$ 及 $x+1$ 之因子。而依 88 章。 $x=1$ 則原兩式爲 0。故 $x-1$ 爲原兩式之公因子。而 $x=-1$ 則兩式不能爲 0。故 $x+1$ 不爲原兩式之公因子。而 $x-1$ 爲 *H.C.F.*

[第二例] 求 $x^3+4x^2y-8xy^2+24y^3$ 及 $x^5-x^4y+8x^2y^3-8xy^4$ 之 *H.C.F.*

第二式可以 x 除。而 x 非兩式之公因子。故可省去。即以 x 除第二式。得 $x^4-x^3y+8xy^3-8y^4$ 。

$$x^3+4x^2y-8xy^2+24y^3 \quad x^4-x^3y+8xy^3-8y^4 \quad (x-5y)$$

$$\underline{x^4+4x^3y-8x^2y^2+24xy^3}$$

$$-5x^3y+8x^2y^2-16xy^3-8y^4$$

$$\underline{-5x^3y-20x^2y^2+40xy^3-120y^4}$$

$$28x^2y^2-56xy^3+112y^4$$

此餘式 = $28y^2(x^2 - 2xy + 4y^2)$ 此因子 $28y^2$ 可除去。故

$$x^2 - 2xy + 4y^2 \quad x^3 + 4x^2y - 8xy^2 + 24y^3 \quad (x + 6y)$$

$$\frac{x^3 - 2x^2y + 4xy^2}{6x^2y - 12xy^2 + 24y^3}$$

$$6x^2y - 12xy^2 + 24y^3$$

$$\frac{6x^2y - 12xy^2 + 24y^3}{6x^2y - 12xy^2 + 24y^3}$$

由是 $x^2 - 2xy + 4y^2$ 爲所求之 $H.C.F.$

〔第三例〕 求 $2x^4 + 9x^3 + 14x + 3$ 及 $3x^4 + 15x^3 + 5x^2 + 10x + 2$ 之 $H.C.F.$

依此例施除法。則得分數之商。今欲避之。故以 2 乘第二式。以下做此。

$$2x^4 + 9x^3 + 14x + 3 \quad 3x^4 + 15x^3 + 5x^2 + 10x + 2$$

2

$$\frac{6x^4 + 30x^3 + 10x^2 + 20x + 4(3)}{6x^4 + 27x^3 \quad + 42x + 9}$$

$$6x^4 + 27x^3 \quad + 42x + 9$$

$$3x^3 + 10x^2 - 22x - 5$$

$$3x^3 + 10x^2 - 22x - 5 \quad 2x^4 + 9x^3 + 14x + 3$$

3

$$\frac{6x^4 + 27x^3 + 42x + 9(2x)}{6x^4 + 20x^3 - 44x^2 - 10x}$$

$$6x^4 + 20x^3 - 44x^2 - 10x$$

$$7x^3 + 44x^2 + 52x + 9$$

3

$$\frac{21x^3 + 132x^2 + 156x + 27(7)}{21x^3 + 70x^2 - 154x - 35}$$

$$21x^3 + 70x^2 - 154x - 35$$

$$62)62x^2 + 310x + 62$$

$$x^2 + 5x + 1$$

$$x^2 + 5x + 1 \quad 3x^3 + 10x^2 - 22x - 5 \quad (3x - 5)$$

$$\frac{3x^3 + 15x^2 + 3x}{- 5x^2 - 25x - 5}$$

$$- 5x^2 - 25x - 5$$

$$- 5x^2 - 25x - 5$$

故 $x^2 + 5x + 1$ 爲所求之 $H.C.F.$ 然如 63 章用分離係數爲便。

99. 別法 求兩式之 $H.C.F.$ 。若依下之定理運算。較為省力。

[定理] 任意之兩式 A 及 B 。其特別文字 (設為 x) 之最高次公因子。與 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之最高公因子同。但 p, q, r, s 。為不含 x 之任意或正負數量。

欲證明此理。當先知 A 及 B 之公因子。為 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之因子。又 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之公因子。為 $s(pA+qB)-q(rA+sB)$ 之因子。即 $(sp-qr)A$ 之因子。

但 $sp-qr$ 內不含有 x 。故 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之公因子。為 A 之因子。而 $sp-qr$ 內不能有 A 之因子。

由同法得 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之公因子。為 $r(pA+qB)-p(rA+sB)$ 。即 $(rq-ps)B$ 之因子。即 B 之因子。

由是 A 及 B 之各公因子。恆為 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之因子。而 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之各公因子。恆為 A 及 B 之因子也。

故 A 及 B 之 $H.C.F.$ 。與 $pA+qB$ 及 $rA+sB$ 之 $H.C.F.$ 同。

[例] 求 $2x^4+x^3-6x^2-2x+3$, $2x^4-3x^3+2x-3$ 之 $H.C.F.$ 。

我第一式內減去第二式。即

$$\begin{aligned} (2x^4+x^3-6x^2-2x+3)-(2x^4-3x^3+2x-3) \\ =4x^3-6x^2-4x+6 \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

又於第一式內加入第二式。即

$$\begin{aligned} (2x^4+x^3-6x^2-2x+3)+(2x^4-3x^3+2x-3) \\ =2x^2(2x^2-x-3) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

所求之 $H.C.F.$ 。為 (1) 式及 (2) 式之 $H.C.F.$ 。又即為 (1) 式及 $2x^2-x-3$ 之 $H.C.F.$ 。

由是以 2 乘 $2x^2-x-3$ 。加入 (1) 式。則得

$$2(2x^2-x-3)+(4x^3-6x^2-4x+6)=2x(2x^2-x-3) \dots \dots \dots (3)$$

而 $2x^2-x-3$ 及 (3) 式之 $H.C.F.$ 。即所求之 $H.C.F.$ 。

∴ 所求之 $H.C.F.$ 。= $2x^2-x-3$ 。

100. 餘論 依 98 章求兩式 A 及 B 之 $H.C.F.$ 。逐次之餘式。為 R, S, \dots 。則 A 及 B 之各公因子。為 R 之因子。故亦為 A 及 B 之公因子。

由同法得 A 及 R 之各公因子。亦為 R 及 S 之公因子。以下同理。故 A 及 B 之各公因子。為各餘式之因子。而最後之餘式。為 A 及 B 之 $H.C.F.$ 。故 A 及 B 之各公因子。為所求最高公因子之因子可知矣。

由是兩式之各公因子為其 $H.C.F.$ 之因子。與一項式同。

求 A 及 B 之 $H.C.F.$ 之法。其所得之各餘式。皆得示 $FA+GB$ 之形。但 F 及 G 為 x 之有理整代數式。

何則。令逐次之商。為 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ 。逐次之餘式。為 $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ 。即

$$A) B(Q_1$$

$$\frac{Q_1 A}{R_1} A(Q_2$$

$$\frac{Q_2 R_1}{R_2} R_1(Q_3$$

$$\frac{Q_3 R_2}{\dots}$$

$$\frac{Q_4 R_3}{\dots}$$

$$\frac{Q_5 R_4}{\dots}$$

$$\dots$$

$$R_{n-1}) R_{n-2}(Q_n$$

$$\frac{Q_n R_{n-1}}{R_n} R_{n-1}(Q_{n+1}$$

$$\frac{Q_{n+1} R_n}{\dots}$$

$$\dots$$

R_n 為有 A 及 B 之公因子。即其 $H.C.F.$ 。若 A 及 B 無含有 x 之公因子。即 R_n 不含有 x 。

$$\text{但 } R_1 = B - Q_1 A = -Q_1 A + B.$$

$$R_2 = A - Q_2 R_1 = A - Q_2 (B - Q_1 A) = (Q_1 Q_2 + 1) A - Q_2 B.$$

$$\begin{aligned} R_3 &= R_1 - Q_3 R_2 = (-Q_1 A + B) - Q_3 \{(Q_1 Q_2 + 1) A - Q_2 B\} \\ &= -(Q_1 Q_2 Q_3 + Q_1 + Q_3) A + (Q_2 Q_3 + 1) B. \end{aligned}$$

$\dots = \dots$

$$R_n = R_{n-2} - Q_n R_{n-1}.$$

R_1 等於 $FA+GB$ 。則 F 為 $-Q_1$ 。 G 為 1 。

R_2 等於 $FA+GB$ 。則 F 為 $Q_1 Q_2 + 1$ 。 G 為 $-Q_2$ 。

以下皆如此。則 F 及 G 為 x 之有理整代數式。

同理推得 $R_n = FA+GB$ 。

A 及 B 不含有 x 之公因子。則 R_n 不含 x 。故 $\frac{F}{R_n}, \frac{G}{R_n}$ 爲 x 之有理整代數式。而 $1 = \frac{F}{R_n} A + \frac{G}{R_n} B$ ，但 $\frac{F}{R_n} = P, \frac{G}{R_n} = Q$ 。則 $1 = PA + QB$ 。而 P 及 Q 爲 x 之有理整代數式。由是得定理如下。

〔定理〕 A 及 B 爲 x 之有理整代數式。而在不含有 x 之公因子。則可作 $PA + QB = 1$ 之形。而 P 及 Q 爲 x 之有理整代數式。

〔例〕 $A = x^3 - 3x^2 + 1$ 及 $B = x^2 + 2x + 2$ 。求其 P 及 Q 。

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 2 \overline{) x^3 - 3x^2 + 1(x-5)} \\ \underline{x^2 + 2x^2 + 2x} \\ -5x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-5x^2 - 10x - 10} \\ 8x + 11 \end{array}$$

$$8x + 11 \overline{) x^2 + 2x + 2} \left(\frac{1}{8}x + \frac{5}{64} \right)$$

$$\begin{array}{r} \underline{x^2 + \frac{11}{8}x} \\ \frac{5}{8}x + 2 \\ \underline{\frac{5}{8}x + \frac{55}{64}} \\ \frac{73}{64} \end{array}$$

由是 $8x + 11 = (x^3 - 3x^2 + 1) - (x - 5)(x^2 + 2x + 2)$

$$\frac{73}{64} = (x^2 + 2x + 2) - \left(\frac{1}{8}x + \frac{5}{64} \right) (8x + 11)$$

$$= (x^2 + 2x + 2) - \left(\frac{1}{8}x + \frac{5}{64} \right) \{ (x^3 - 3x^2 + 1) - (x - 5)(x^2 + 2x + 2) \}$$

$$= - \left(\frac{1}{8}x + \frac{5}{64} \right) (x^3 - 3x^2 + 1) + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{35}{64}x + \frac{39}{64} \right) (x^2 + 2x + 2)$$

$$\text{即 } 1 = - \frac{1}{73} (8x + 5) (x^3 - 3x^2 + 1) + \frac{1}{73} (8x^2 - 35x + 39) (x^2 + 2x + 2)$$

$$\therefore P = - \frac{1}{73} (8x + 5), Q = \frac{1}{73} (8x^2 - 35x + 39)$$

101 諸多項式之最高公因子 三個以上之多項式，求其最高公因子之法如下。

諸多項式爲 A, B, C, D, \dots

求 A 及 B 之 $H.C.F.$ 爲 G 。

所求之 $H.C.F.$ 爲 A 及 B 之公因子，亦爲 G 之因子。見前章。故 G, C, D, \dots 之 $H.C.F.$ 可求。

依此法當先求第一式與第二式之 $H.C.F.$ ，次以之求第三式之 $H.C.F.$ ，逐次如此，至最後之 $H.C.F.$ ，即爲所求之 $H.C.F.$ 。

〔註〕在代數學之最高公因子，有時亦稱爲最大公約數，即 $(G, C.M.)$ ，然此名殊不適當。

何則，以一式與他式相較，就一文字論，祇能審其次數高低，不能定其數值大小，故可曰高而不可曰大。

例如 a^2 ，可謂爲比 a 高，不可謂爲比 a 大。蓋 a 爲 3，則 $a^2=9$ ， a^2 固比 a 大。若 $a=\frac{1}{3}$ ，則 $a^2=\frac{1}{9}$ ， a^2 又比 a 小也。

又兩式之最高公因子，(就一文字言)不得謂爲兩式數值之最大公約數。

例如 $14x^2+15x+1$ 及 $22x^2+23x+1$ 之 $H.C.F.$ 爲 $x+1$ 。

今設 $x=\frac{1}{2}$ ，則 $14x^2+15x+1=14\times\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{2}+1=12$ 。

$$22x^2+23x+1=22\times\frac{1}{4}+23\times\frac{1}{2}+1=18。$$

即兩式之數值 12, 18 之最大公約數爲 6，然其 $H.C.F.$ 爲

$x+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ 。故最高公因子，不得稱爲最大公約數。

例題七

求以下各兩式之 $H.C.F.$ 。

1. $a^2-5ab+4b^2$ 及 $a^3-5a^2b+4b^3$ 。

〔答 $a-b$ 〕

$$4a^2 - 3ab + b^2) 12a^3 - 5a^2b + b^3 (3a + b$$

$$\underline{12a^3 - 9a^2b + 3ab^2}$$

$$4a^2b - 3ab^2 + b^3$$

$$\underline{4a^2b - 3ab^2 + b^3}$$

∴ $4a^2 - 3ab + b^2$ 爲所求之 $H.C.F.$ 。

7. $a^3 - a^2b + ab^2 + 14b^3$ 及 $4a^3 + 3a^2b - 9ab^2 + 2b^3$ 。

[答 $a + 2b$]

8. $2x^4 + x^3 - 9x^2 + 8x - 2$ 及 $2x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 8x + 2$ 。

[解] $2 - 7 + 11 - 8 + 2) 2 + 1 - 9 + 8 - 2(1$

$$\underline{2 - 7 + 11 - 8 + 2}$$

$$\underline{48 - 20 + 16 - 4}$$

$$2 - 5 + 4 - 1) 2 - 7 + 11 - 8 + 2(1 - 1$$

$$\underline{2 - 5 + 4 - 1}$$

$$2 - 3 + 1) 2 - 5 + 4 - 1(1 - 1$$

$$\underline{-2 + 7 - 7 + 2}$$

$$\underline{2 - 3 + 1}$$

$$\underline{-2 + 5 - 4 + 1}$$

$$\underline{-2 + 3 - 1}$$

$$2 - 3 + 1$$

$$\underline{-2 + 3 - 1}$$

故 $2 - 3 + 1$ 即 $2x^2 - 3x + 1$ 爲所求之 $H.C.F.$ 。

9. $11x^4 - 9ax^3 - a^2x^2 - a^4$ 及 $13x^4 - 10ax^3 - 2a^2x^2 - a^4$ 。

[解] 從第二式減等一式，則

$$13x^4 - 10ax^3 - 2a^2x^2 - a^4 - (11x^4 - 9ax^3 - a^2x^2 - a^4) = x^2(2x^2 - ax - a^2)。$$

$$\text{而 } 2x^2 - ax - a^2 = (2x + a)(x - a)。$$

故所求之 $H.C.F.$ 必可除盡 $(2x + a)(x - a)$ 。

而 $2x + a$ 非兩式之公因子。故 $x - a$ 爲 $H.C.F.$ 。

10. $x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 18$ 及 $x^5 + 6x^2 - 49x + 42$ 。

[解] $1 + 1 - 9 - 3 + 18) 1 + 0 + 0 + 6 - 49 + 42(1 - 1$

$$\underline{1 + 1 - 9 - 3 + 18}$$

$$\underline{-1 + 9 + 9 - 67 + 42}$$

$$\underline{-1 - 1 + 9 + 3 - 18}$$

$$10) \underline{10 + 0 - 70 + 60}$$

$$1 + 0 - 7 + 6$$

$$\begin{array}{r}
 1+0-7+6)1+1-9-3+18(1+1 \\
 \underline{1+0-7+6} \\
 1-2-9+18 \\
 \underline{1+0-7+6} \\
 -2) -2-2+12 \\
 \underline{1+1-6} 1+0-7+6(1-1 \\
 \underline{1+1-6} \\
 -1-1+6 \\
 \underline{-1-1+6}
 \end{array}$$

∴ $1+1-6$ 即 x^2+x-6 爲 *H.O.F.*

11. $x^4-2x^3+5x^2-4x+3$ 及 $2x^4-x^3+6x^2+2x+3$. [答 x^2-x+3 .]

12. $x^4+3x^2+6x+35$ 及 $x^4+2x^3-5x^2+26x+21$. [答 x^2-3x+7 .]

最低公倍數

102. 定義 二個以上整代數式之公倍數 (*Common Multiple*) 謂可被各式整除之式。

二個以上整代數式之最低公倍數 (*Lowest Common Multiple*) 即可被各式整除最低次之式。最低公倍數之記號則用 *L.C.M.*

103. 一項式之最低公倍數 已知諸代數式之因子。則其最低公倍數。可由視察而得。

例如求 $a^3b^2(x-a)^2(x-b)^3$ 及 $ab^4(x-a)^4(x-b)$ 之 *L.C.M.*。此兩式之任意公倍數。則有 a^3 之因子。又有 b^4 、 $(x-a)^4$ 、 $(x-b)^3$ 之因子。故任意之公倍數爲 $a^3b^4(x-a)^4(x-b)^3$ 。惟諸公倍數內無有更低於此者。由是 $a^3b^4(x-a)^4(x-b)^3$ 爲所求之 *L.C.M.*

依上例得如下之法則。

[法則] 諸代數式之最低公倍數。爲諸式內所含各因子最高方乘之積。

例題

1. 求 $3x^2yz$, $27x^3y^2z^2$, $6xy^2z^4$ 之 *L.C.M.*

[解] 3, 27, 6 之最小公倍數 54。爲所求 *L.C.M.* 之數字係數。 x^3, y^2, z^4 爲其因子。故所求之 *L.C.M.* = $54x^3y^2z^4$ 。

2. 求 $6ab^2(a+b)^2$, $4a^2b(a^2-b^2)$ 之 $L.C.M.$

[解] $4a^2b(a^2-b^2)=4a^2b(a+b)(a-b)$.

故所求之 $L.C.M.=12a^2b^2(a+b)^2(a-b)$.

3. 求 $2axy(x-y)^2$, $3ax^2(x^2-y^2)$, $4y^2(x-y)^2$ 之 $L.C.M.$

[答 $12ax^2y^2(x^2-y^2)^2$]

4. 求 x^2-3x+2 , x^2-5x+6 , x^2-4x+3 之 $L.C.M.$

[解] $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

故所求之 $L.C.M.=(x-1)(x-2)(x-3)$.

104. 兩多項式之最低公倍數 多項式之因子。難由觀察得之者。可依 98 章之法。先求兩式之 $H.C.F.$ 如下。

[例] 求 x^3+x^2-2 及 x^3+2x^2-3 之 $L.C.M.$

此兩式之 $H.C.F.$ 依 98 章得 $x-1$ 。

而 $x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$, $x^3+2x^2-3=(x-1)(x^2+3x+3)$ 。

但 x^2+2x+2 , x^2+3x+3 兩式。爲以 $H.C.F.$ 除得之商。故無公因子。由是所求之 $L.C.M.=(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+3x+3)$ 。

105*. 最低公倍之定理 A 及 B 爲兩整代數式。 L 爲其最低公倍數。

a 及 b 爲 H 除 A 及 B 所得之商。

即 $A \div H = a$, $B \div H = b$, 故 $A = Ha$, $B = Hb$ 。

因 H 爲 A 及 B 之最高公因子。故 a 及 b 無公因子。由是 A 及 B 之 $L.C.M.$ 爲 $H \times a \times b$ 。

故 $L = Hab = Ha \times Hb \div H = A \times B \div H \dots \dots \dots (1)$

由是 $L \times H = A \times B \dots \dots \dots (2)$

[定理] 從 (1) 式則兩式之 $L.C.M.$ 等於兩式之積。以其 $H.C.F.$ 除得之商。從 (2) 式則兩式之積。等於其 $L.C.M.$ 與 $H.C.F.$ 之積。

例題 八

求以下諸式之 $L.C.M.$

1. $6x^2-5ax-6a^2$, $4x^3-2ax^2-9a^3$ 。

[解] $6x^2 - 5ax - 6a^2 = (2x - 3a)(3x + 2a)$ 。

$$4x^3 - 2ax^2 - 9a^3 = 4x^3 - 6ax^2 + 4ax^2 - 9a^3 = 2x^2(2x - 3a) + a(4x^2 - 9a^2)$$

$$= (2x - 3a)(2x^2 + 2ax + 3a^2)$$

∴ 所求之 *L.C.M.* = $(2x - 3a)(3x + 2a)(2x^2 + 2ax + 3a^2)$

$$= 12x^4 + 2ax^3 - 4a^2x^2 - 27a^3x - 18a^4$$

2. $4a^2 - 5ab + b^2, 3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$ 。

[解] $4a^2 - 5ab + b^2 = (4a - b)(a - b)$ 。

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3 = 3a^2(a - b) + b^2(a - b) = (a - b)(3a^2 + b^2)$$

∴ 所求之 *L.C.M.* = $(a - b)(4a - b)(3a^2 + b^2)$ 。

3. $3x^3 - 13x^2 + 23x - 21, 6x^3 + x^2 - 44x + 21$ 。

[解] 求得兩式之 *H.C.F.* 爲 $3x - 7$ 。

∴ 所求之 *L.C.M.* = $(3x^3 - 13x^2 + 23x - 21)(6x^3 + x^2 - 44x + 21) \div (3x - 7)$

$$= (3x^3 - 13x^2 + 23x - 21)(2x^2 + 5x - 3)$$

4. $x^4 - 11x^2 + 49, 7x^4 - 40x^3 + 75x^2 - 40x + 7$ 。

[答 $(x^2 + 5x + 7)(7x^4 - 40x^3 + 75x^2 - 40x + 7)$]

5. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6, x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$ 。

[解] $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 3x + 6$

$$= x^2(x + 2) + 4x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 4x + 3) = (x + 2)(x + 1)(x + 3)$$

而 $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x = x(x^3 + x^2 - 4x - 4) = x(x + 1)(x + 2)(x - 2)$ 。

∴ 所求之 *L.C.M.* = $x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x - 2)$ 。

6. $x^4 - x^3 + 3x - 8, x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 24x$ 。

[答 $x(x - 1)(x + 2)(x + 6)(x^2 - 2x + 4)$]

7. $8a^3 - 18ab^2, 8a^3 + 8a^2b - 6ab^2, 4a^2 - 8ab + 3b^2$ 。

[解] $8a^3 - 18ab^2 = 2a(4a^2 - 9b^2) = 2a(2a + 3b)(2a - 3b)$ 。

而 $8a^3 + 8a^2b - 6ab^2 = 2a(4a^2 + 4ab - 3b^2) = 2a(2a - b)(2a + 3b)$ 。

又 $4a^2 - 8ab + 3b^2 = (2a - 3b)(2a - b)$ 。

∴ 所求之 *L.C.M.* = $2a(2a - 3b)(2a - b)(2a + 3b)$ 。

8. $x^2 - 7x + 12, 3x^2 - 6x - 9, 2x^3 - 6x^2 - 8x$ 。 [答 $6x(x + 1)(x - 3)(x - 4)$]

9. $8x^3 + 27, 16x^4 + 36x^2 + 81, 6x^3 - 5x - 6$ 。

[答 $(3x + 2)(8x^3 + 27)(8x^3 - 27)$]

10. $x^2 - 6xy + 9y^2, x^2 - xy - 6y^2, 3x^2 - 12y^2$ 。 [答 $3(x - 3y)^2(x^2 - 4y^2)$]

$$11. x^2 - 7xy + 12y^2, x^2 - 6xy + 8y^2, x^2 - 5xy + 6y^2.$$

[答 $(x-2y)(x-3y)(x-4y)$]

12. 如 $ax^2+bx+c, a'x^2+b'x+c'$ 有 $x+f$ 之公因子。則
 $(ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$ 。試證之。

(證) $x+f$ 必可整除 $a(a'x^2+b'x+c')-a'(ax^2+bx+c)$ 。

$$\text{即 } (ab'-a'b)x+ac'-a'c=(ab'-a'b)\left(x+\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right). \therefore f=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

又 $x+f$ 可整除 $c'(ax^2+bx+c)-c(a'x^2+b'x+c')$ 。

$$\text{即 } (ac'-a'c)x^2+(bc'-b'c)x=(ac'-a'c)x\left(x+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}\right). \therefore f=\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}.$$

$$\text{由是 } \frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}. \therefore (ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b).$$

13. $ax^2+bx^2+cx+d, a'x^2+b'x^2+c'x+d'$ 如有 x 之二次公因子。試
 證 $\frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}=\frac{ca'-c'a}{bd'-b'd}=\frac{da'-d'a}{cd'-c'd}$ 。

(證) x 之二次公因子。爲 x^2+px+q 。而 x^2+px+q 必能除原兩式之和或差。故如下法。

$$\begin{aligned} a'(ax^2+bx^2+cx+d)-a(a'x^2+b'x^2+c'x+d') \\ = (ba'-b'a)\left(x^2+\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}x+\frac{da'-d'a}{ba'-b'a}\right). \end{aligned}$$

$$\therefore p=\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}, \quad q=\frac{da'-d'a}{ba'-b'a}.$$

$$\begin{aligned} d'(ax^2+bx^2+cx+d)-d(a'x^2+b'x^2+c'x+d') \\ = (ad'-a'd)x\left(x^2+\frac{bd'-b'd}{ad'-a'd}x+\frac{cd'-c'd}{ad'-a'd}\right). \end{aligned}$$

$$\therefore p=\frac{bd'-b'd}{ad'-a'd}, \quad q=\frac{cd'-c'd}{ad'-a'd}.$$

$$\text{由是 } \frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}=\frac{bd'-b'd}{ad'-a'd}. \text{ 即 } \frac{ca'-c'a}{bd'-b'd}=\frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}.$$

$$\text{又 } \frac{da'-d'a}{ba'-b'a}=\frac{cd'-c'd}{ad'-a'd}. \text{ 即 } \frac{da'-d'a}{cd'-c'd}=\frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}.$$

$$\therefore \frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}=\frac{ca'-c'a}{bd'-b'd}=\frac{da'-d'a}{cd'-c'd}.$$

14. $ax^2+bx+c, a'x^2+b'x+c'$. 有 $x+f$ 之公因子。則其關係如何。

[解] $x+f$ 可整除 $a(a'x^2+b'x+c')-a'(ax^2+bx+c)$

$$=(ab'-a'b)\left(x+\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right).$$

$$\therefore f=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=-\frac{ac'-a'c}{ba'-b'a} \dots \dots \dots (1).$$

又 $x+f$ 可整除 $c'(ax^2+bx+c)-c(a'x^2+b'x+c')$

$$=(ac'-a'c)x\left(x^2+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}\right).$$

即可整除 $x^2+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}$ 故由 88 章 $x=-f$. 則 $(-f)^2+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}=0$.

$$\therefore f^2=\frac{b'c-bc'}{ac'-a'c} \dots \dots \dots (2)$$

依 (1) (2) 兩式 $\left(-\frac{ac'-a'c}{ba'-b'a}\right)^2=\frac{b'c-bc'}{ac'-a'c}$.

由是 $(ac'-a'c)^2=(ba'-b'a)^2(b'c-bc')$.

15. 有 a, b, c , 三量。每二量之 *H.C.F.* 為 g_1, g_2, g_3 . *L.C.M.* 為 l_1, l_2, l_3 . 試證 $g_1g_2g_3l_1l_2l_3=(abc)^2$.

[證] 由 105 章 $g_1l_1=ab, g_2l_2=bc, g_3l_3=ca$, 以三個相等式相乘。即得 $g_1g_2g_3l_1l_2l_3=ab \cdot bc \cdot ca=(abc)^2$.

16. A, B, C , 為任意之三式。 $(BC), (CA), (AB)$, 及 (ABC) . 為 B 及 C, C 及 A, A 及 B, A, B 及 C 之最高公因子。則 A, B 及 C 之最低公倍數。為 $A \cdot B \cdot C \cdot (ABC) \div \{(BC) \cdot (CA) \cdot (AB)\}$ 其證如何。

[證] $B=(ABC)m, C=(ABC)n, A=(ABC)p$. 則 m, n, p 為以 *H.C.F.* 除其 A, B, C 之商。故無公因子。設 x, y, z 為三式之各因子。其 x 與 y, x 與 z, y 與 z 均無公因子。再設 α, β, γ 為每二個原式之公因子。而 α 與 β, α 與 γ, β 與 γ . 亦無公因子。則 $m=\beta\gamma y, n=\gamma\alpha z, p=\alpha\beta x$.

故 $(BC)=(ABC)\gamma, (CA)=(ABC)\alpha, (AB)=(ABC)\beta$.

$$\begin{aligned} \therefore A, B, C \text{ 之 } L.C.M. &= (ABC)\alpha\beta\gamma xyz \\ &= (ABC)\alpha\beta x \cdot (ABC)\beta\gamma y \cdot (ABC)\gamma\alpha z \cdot (ABC) \div \{(ABC)\gamma \cdot (ABC)\alpha \cdot (ABC)\beta\} \\ &= A \cdot B \cdot C \cdot (ABC) \div \{(BC) \cdot (CA) \cdot (AB)\}. \end{aligned}$$

第 捌 編

分 數

106. 分數 [Fractions] 表示除法運算之式。可於被除式之下作一橫線。而以除式書之。其商數謂之代數分數 (Algebraical Fraction)。

被除式爲分子 (Numerator)。除式爲分母 (Denominator)。

例如 $\frac{a}{b}$ 即 $a \div b$ 之意義。

由此定義 $\frac{a}{b} = a \div b$ 。故可推知 $\frac{a}{b} \times b = a \div b \times b = a$ 。

107* 定理 以同數量乘分母分子。其分數之值不變。

例如 $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ 。試證之。

依前章 $\frac{a}{b} \times b = a$ 兩邊皆以 m 乘之。則

$$\frac{a}{b} \times bm = am \text{ 兩邊皆以 } bm \text{ 除之。則}$$

$$\frac{a}{b} = am \div bm = \frac{am}{bm}$$

108. 約分 如前章凡分數以同數量乘分母分子。其值不變。故反之。以同數量除分母分子。則其值亦不變。

因之凡分數之分母分子。可去其公有之因子。而化爲簡式。

例如 $\frac{a^2x}{b^2x} = \frac{a^2}{b^2}$ 即去其分母分子公有之因子 x 也。

如分母分子無公因子。則其分數爲已約分數 (Lowest Terms)。質言之。曰最低項。

欲化分數爲已約分數。可以分母分子之 *H.C.F.* 除其分母分子。蓋如此則分母分子無公因子。且仍與原分數等值。

[第一例] 變 $\frac{3ax^2y}{6a^2xy}$ 爲已約分數。

分母分子之 *H.C.F.* 爲 $3axy$ 。故

$$\frac{3ax^2y}{6a^2xy} = \frac{3ax^2y \div 3axy}{6a^2xy \div 3axy} = \frac{x}{2a}$$

[第二例] 化 $\frac{x^2-7xy+10y^2}{x^2-8xy+12y^2}$ 爲最簡式。

$$\frac{x^2-7xy+10y^2}{x^2-8xy+12y^2} = \frac{(x-2y)(x-5y)}{(x-2y)(x-6y)} = \frac{x-5y}{x-6y}$$

[第三例] 化 $\frac{x^2-ax}{a^2-x^2}$ 爲最簡式。

$$\frac{x^2-ax}{a^2-x^2} = \frac{-x(a-x)}{(a+x)(a-x)} = \frac{-x}{a+x} = -\frac{x}{a+x}$$

此 $-\frac{x}{a+x} = \frac{x}{-(a+x)}$ 因在除法。凡被除數與除數。其號異者。

其商爲負也。

[第四例] 化 $\frac{x^4+3x^2+6x+35}{x^4+2x^3-5x^2+26x+21}$ 爲最簡式。

求分母分子之 *H.C.F.* 爲 x^2-3x+7 。

$$\text{故原分數} = \frac{(x^4+3x^2+6x+35) \div (x^2-3x+7)}{(x^4+2x^3-5x^2+26x+21) \div (x^2-3x+7)} = \frac{x^2+3x+5}{x^2+5x+3}$$

109. 通分母 以同數乘分母分子。其值不變。故異分母之諸分數。可變爲同分母。謂之通分。

其法先求各分母之最低公倍數。以其各分母除之。而各以所得之商。乘本分數之分母分子即得。

如是則所得之新分數。皆以諸分母之最低公倍數爲分母。

[例] 化 $\frac{a}{x^2y(x+y)}$, $\frac{b}{xy^2(x-y)}$, $\frac{c}{x^2y^2(x^2-y^2)}$ 爲同分母。

此諸分母之 *L.C.M.* 爲 $x^2y^2(x^2-y^2)$ 。以各分母除之。則順次得 $y^2(x-y)$, $x^2(x+y)$, xy 。各商。以之各乘分母分子。則得

$$\frac{a}{x^2y(x+y)} = \frac{a \times y^2(x-y)}{x^2y(x+y) \times y^2(x-y)} = \frac{ay^2(x-y)}{x^2y^3(x^2-y^2)},$$

$$\frac{b}{xy^3(x-y)} = \frac{b \times x^2(x+y)}{xy^3(x-y) \times x^2(x+y)} = \frac{bx^2(x+y)}{x^3y^3(x^2-y^2)},$$

$$\frac{c}{x^2y^2(x^2-y^2)} = \frac{c \times xy}{x^2y^2(x^2-y^2) \times xy} = \frac{cxy}{x^3y^3(x^2-y^2)}.$$

通諸分數爲同分母。若不用 *L.C.M.* 而用任意之公倍數。亦可變爲同分母。然欲求簡式。非用最低公倍數不可。

110. 分數之加法 同分母兩分數之和(或差)即以兩分子之和(或差)爲分子。而以其同分母爲分母。

此理可由 43 章推知之。

在 43 章 $(a+b) \div c = a \div c + b \div c$ 。

$$\text{故 } \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \text{ 即 } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},$$

$$\text{同法 } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c},$$

若兩分數爲異分母者。先化爲同分母。再依上法求之。至如多於二個之諸分數。相加或相減。亦依前法次第求之。即先通諸分母爲同分母。而後以通得之諸分子相加或減即得。

[第一例] 求 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$ 之值。

分母之 *L.C.M.* 爲 $(a+b)(a-b)$ 而。

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} + \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{(a-b) + (a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{2a}{a^2-b^2}$$

[第二例] 求 $\frac{a}{a-b} + \frac{ab}{b^2-a^2}$ 之值。

$$\frac{a}{a-b} + \frac{ab}{b^2-a^2} = \frac{a}{a-b} + \frac{ab}{-(a^2-b^2)} = \frac{a(a+b)}{a^2-b^2} - \frac{ab}{a^2-b^2} = \frac{a^2}{a^2-b^2}$$

[第三例] 化 $\frac{a}{a-x} + \frac{a}{a+x} + \frac{2a^2}{a^2+x^2} + \frac{4a^2}{a^4+x^4}$ 爲最簡式。

此例以每二分數依次相加爲便。式如下。

$$\frac{a}{a-x} + \frac{a}{a+x} = \frac{a(a+x) + a(a-x)}{a^2-x^2} = \frac{2a^2}{a^2-x^2},$$

$$\frac{2a^2}{a^2-x^2} + \frac{2a^2}{a^2+x^2} = \frac{2a^2(a^2+x^2)+2a^2(a^2-x^2)}{a^4-x^4} = \frac{4a^4}{a^4-x^4},$$

$$\frac{4a^4}{a^4-x^4} + \frac{4a^4}{a^4+x^4} = \frac{4a^4(a^4+x^4)+4a^4(a^4-x^4)}{a^8-x^8} = \frac{8a^8}{a^8-x^8}.$$

依上之運算。其第二式。可用 a^2, x^2 代第一之 a, x 。而以 2 乘之即得。其第三式。可用 a^4, x^4 代第二之 a^2, x^2 。亦以 2 乘之即得。故既得第一式之結果。則以後求之頗易。

[第四例] 化 $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x+3}$ 爲最簡式。

此例須括合同種類之項。而施運算之法。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} - \left(\frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+1} \right) \\ & = \frac{(x+3)-(x-3)}{x^2-9} - \frac{3(x+1)-3(x-1)}{x^2-1} = \frac{6}{x^2-9} - \frac{6}{x^2-1} \\ & = \frac{6(x^2-1)-6(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-1)} = \frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}. \end{aligned}$$

[第五例] 化 $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ 爲最簡式。

依等勢式之例。易化諸分數爲同分母。

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\ & = -\frac{a^2}{(a-b)(c-a)} - \frac{b^2}{(b-c)(a-b)} - \frac{c^2}{(c-a)(b-c)} \\ & = -\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1. \end{aligned}$$

但依 94 章第一例。則分子爲

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

[第六例] 化 $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x+b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}$ 爲最簡式。

$$\begin{aligned} \text{原式} & = -\frac{a^2}{(a-b)(c-a)(x+a)} - \frac{b^2}{(b-c)(a-b)(x+b)} - \frac{c^2}{(c-a)(b-c)(x+c)} \\ & = -\frac{a^2(b-c)(x+b)(x+c)+b^2(c-a)(x+c)(x+a)+c^2(a-b)(x+a)(x+b)}{(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)} \end{aligned}$$

但依 94 章，分子內之 $b=c$ ，則分子 $=0$ 。同法推之，則分子有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之因子。惟分子之 a 無高於 a^2 次，故此外之因子不含 a 。

由是分子 $=L(b-c)(c-a)(a-b)x^2$ 。

比較其 a^2bx^2 之係數，則 $1=-L$ 。 $\therefore L=-1$ 。

故分子 $=-(b-c)(c-a)(a-b)x^2$ 。

由是原式 $= -\frac{(b-c)(c-a)(a-b)x^2}{(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)}$
 $= \frac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}$

111. 分數之乘法 代數分數之乘法如下。

兩分數 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 試證 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ 。

依 106 章， $\frac{a}{b} \times b = a$ ， $\frac{c}{d} \times d = c$ 。

由是 $\frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d = ac$ ，即 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times bd = ac$ 。兩邊以 bd 除之，則

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ac \div bd = \frac{ac}{bd}$$

〔法則〕兩分數之積，以其分母之積為分母，分子之積為分子。同理推得諸分數之連乘積，即其諸分母之連乘積為分母，諸分子之連乘積為分子。

何則，因 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$ 。

又依同法得分數之方乘如下。

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{即} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

112. 分數之除法 代數分數之除法如下。

$$\text{證} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ 其理已明。又兩邊以 $\frac{d}{c}$ 乘之，則

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad \text{但} \quad \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = \frac{cd}{cd} = 1$$

由是 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

〔法則〕以 $\frac{c}{d}$ 除者，可以 $\frac{d}{c}$ 之反商（即 $\frac{d}{c}$ ）乘之。

〔特別之例〕乘法及除法，示以特別之例如下。

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

〔註〕代數分數之乘及除，可由 33 章證明之法則得之。

例如 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = a \div b \times (c \div d) = a \div b \times c \div d$

$$= a \times c \div b \div d = ac \div (bd) = \frac{ac}{bd}$$

〔第一例〕化 $\frac{x^3+a^3}{x^2-a^2} \times \frac{x-a}{x+a}$ 爲最簡式。

$$\text{原式} = \frac{(x^3+a^3)(x-a)}{(x^2-a^2)(x+a)^2} = \frac{(x+a)(x^2-ax+a^2)(x-a)}{(x+a)(x-a)(x+a)^2} = \frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2}$$

〔第二例〕化 $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$ 爲最簡式

$$\text{原式} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)} = \frac{1}{x + \frac{1}{y}} = \frac{xy}{xy\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} = \frac{xy}{y+x}$$

〔第三例〕化 $\frac{\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}}$ 爲最簡式。

$$\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x} = \frac{(a+x)^2 - (a-x)^2}{a^2 - x^2} = \frac{4ax}{a^2 - x^2}$$

$$\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x} = \frac{(a+x)^2 + (a-x)^2}{a^2 - x^2} = \frac{2(a^2 + x^2)}{a^2 - x^2}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{4ax}{a^2 - x^2} \div \frac{2(a^2 + x^2)}{a^2 - x^2} = \frac{4ax}{a^2 - x^2} \times \frac{a^2 - x^2}{2(a^2 + x^2)} = \frac{2ax}{a^2 + x^2}$$

113* 分數之定理 下示以必要之定理。即第二項內含有第一項者。

〔定理一〕 諸分數 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ 若相等。則必各等於

$$\frac{pa_1+qa_2+ra_3+\dots\dots\dots}{pb_1+qb_2+rb_3+\dots\dots\dots}$$

設各分數皆等於 x 。則 $\frac{a_1}{b_1}=x, a_1=b_1x,$

$$\therefore pa_1=pb_1x,$$

同法得

$$qa_2=qb_2x,$$

$$ra_3=rb_3x,$$

$$\dots\dots\dots$$

由加法得 $pa_1+qa_2+ra_3+\dots=(pb_1+qb_2+rb_3+\dots)x.$

$$\therefore \frac{pa_1+qa_2+ra_3+\dots}{pb_1+qb_2+rb_3+\dots}=x=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\dots\dots\dots$$

〔推論〕 若 $p=q=r=\dots=1$ 。則

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\dots=\frac{a_1+a_2+a_3+\dots\dots\dots}{b_1+b_2+b_3+\dots\dots\dots}$$

〔定理二〕 諸分數 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ 若相等。則必各等於 $\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ 。但 A 爲 a_1, a_2, a_3, \dots 所成 n 次之等次式。 B 爲在 A 內用 b_1 代 a_1, b_2 代 a_2, b_3 代 a_3 等所得之式。因各分數相等。故令各分數等於 x 。則

$$a_1=b_1x, a_2=b_2x, a_3=b_3x, \dots\dots\dots$$

在 A 之任意一項爲 $\lambda a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma \dots\dots$ 。則 $\lambda b_1^\alpha b_2^\beta b_3^\gamma \dots\dots$ 爲在 B 內相當之項。以 A, B 二式爲 n 次之等次式。故 $\alpha+\beta+\gamma+\dots=n$ 。

$$\text{由是 } \lambda a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma \dots\dots = \lambda (b_1x)^\alpha (b_2x)^\beta (b_3x)^\gamma \dots\dots$$

$$= \lambda b_1^\alpha b_2^\beta b_3^\gamma \dots\dots x^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}$$

而 $\alpha+\beta+\gamma+\dots=n$ 。故前式 $= \lambda b_1^\alpha b_2^\beta b_3^\gamma \dots\dots x^n$ 。

即 A 之任意一項 $= B$ 之相當項 $\times x^n$ 。

$\therefore A$ 之各項之和 $= B$ 之各項之和 $\times x^n$ 。

即 $A = x^n \times B$. $\therefore \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = x$.

[例] $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{\sqrt[3]{(\lambda a_1^3 + \beta a_2^3 + \gamma a_1 a_2 a_3)}}{\sqrt[3]{(\lambda b_1^3 + \beta b_2^3 + \gamma b_1 b_2 b_3)}}$.

[定理三] 若 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots$ 爲不等諸分數。而其分母皆爲正數。則分數 $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$ 必較此中之最大分數小。而較最小分數大也。

設 $\frac{a_1}{b_1}$ 爲最大分數。而以 x 代之。則

$\frac{a_1}{b_1} = x$. 故 $\frac{a_2}{b_2} < x, \frac{a_3}{b_3} < x, \dots$

由題意 b_1, b_2, b_3, \dots 皆爲正數。故得如下式。

$a_1 = b_1 x$

$a_2 < b_2 x$

$a_3 < b_3 x$

.....

由加法 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots < (b_1 + b_2 + b_3 + \dots) x$.

$\therefore \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots} < x = \frac{a_1}{b_1}$.

其 $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$ 比最小之分數大者。亦可以同法證明之。

[注意] 本題因 b_1, b_2, b_3, \dots 爲正數。故能合理。若爲負數。則不等式之兩邊。以負乘之。其大小適相反。

例如 $5 < 7$ 。兩邊以 -2 乘之。則 $-10 > -14$ 。

故如 b_2 爲負。則從 $\frac{a_2}{b_2} < x$ 變爲 $a_2 > b_2 x$ 。於理不合。

[第一例] $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 可證 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = x$. 則 $a = bx, c = dx$.

$\therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{bx+b}{bx-b} = \frac{x+1}{x-1} \times \frac{d}{d} = \frac{dx+d}{dx-d} = \frac{c+d}{c-d}$.

(別法) 因 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 故 $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$. 即 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

又 $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$. 即 $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

由是 $\frac{a+b}{b} \div \frac{a-b}{b} = \frac{c+d}{d} \div \frac{c-d}{d}$. 即 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

(第二例) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. 證其各等於 $\frac{\sqrt{(a^2-2ac+2c^2)}}{\sqrt{(b^2-2bd+2d^2)}}$. 此例依定理二

即可推得. 今別證之如下.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = x, \quad a = bx, \quad c = dx.$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2 - 2ac + 2c^2 &= (bx)^2 - 2(bx)(dx) + 2(dx)^2 \\ &= (b^2 - 2bd + 2d^2)x^2. \end{aligned}$$

$$\text{由是 } x^2 = \frac{a^2 - 2ac + 2c^2}{b^2 - 2bd + 2d^2} \quad \text{即 } x = \frac{\sqrt{(a^2 - 2ac + 2c^2)}}{\sqrt{(b^2 - 2bd + 2d^2)}}$$

(第三例) $\frac{ay+bz}{l} = \frac{ax+cx}{m} = \frac{bx+ay}{n}$. 試證

$$\frac{bcx}{-al+bm+cn} = \frac{cay}{al-bm+cn} = \frac{abz}{al+bm-cn}$$

$$\begin{aligned} \text{從定理一, 各分數} &= \frac{-a(ay+bz) + b(ax+cx) + c(bx+ay)}{-al+bm+cn} \\ &= \frac{2bcx}{-al+bm+cn}. \end{aligned}$$

$$\text{同法推得各分數} = \frac{2cay}{al-bm+cn} = \frac{2abz}{al+bm-cn}$$

例題九

化次之各分數為最簡式.

$$1. \frac{30a^2b^3c^5x^2y^4z^3}{36a^5bc^2x^5yz^4}$$

$$\text{答 } \frac{5b^2c^3y^3z^2}{6a^3x^3}$$

$$2. \frac{3a^7b^2c^{10}x^3yz^4}{a^3c^4x^5y^3}$$

$$\text{答 } \frac{3ab^2c^6x^3z^4}{y^3}$$

$$3. \frac{a^2-8ab+7b^2}{a^2-3ab-28b^2}$$

$$[解] \frac{(a-b)(a-7b)}{(a+4b)(a-7b)} = \frac{a-b}{a+4b} \quad [答]$$

$$4. \frac{7x^4y^4 - 8x^2y^2 + 1}{28x^4y^4 + 3x^2y^2 - 1}$$

$$[解] \frac{(7x^2y^2-1)(x^2y^2-1)}{(7x^2y^2-1)(4x^2y^2+1)} = \frac{x^2y^2-1}{4x^2y^2+1} \quad [答]$$

$$5. \frac{(x^3-y^3)(x+y)}{(x^3+y^3)(x-y)}$$

$$[解] \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2} \quad [答]$$

$$6. \frac{(x^6-y^6)(x-y)}{(x^3-y^3)(x^4-y^4)}$$

$$[解] \frac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)(x-y)}{(x^3-y^3)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)} = \frac{x^3-xy+y^2}{x^2+y^2} \quad [答]$$

$$7. \frac{2x^2+3x-1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$$

$$[解] 原式 = \frac{2x^2(x+1)+x-1}{x^2(x^2+2x+1)+(x^2+2x+1)} = \frac{(x+1)(2x^2+x-1)}{(x^2+2x+1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{2x^2+x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{2x-1}{x^2+1}$$

$$8. \frac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}$$

$$[解] 原式 = \frac{x^3(x-1)-(x-1)}{x^4+x^2+1-2x^3-2x^2-2x} = \frac{(x-1)(x^3-1)}{(x^4+x^2+1)-2x(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1-2x)} = \frac{(x-1)^2}{x^2-3x+1}$$

$$9. \frac{2x^3+5x^2y+xy^2-3y^3}{3x^4+3x^3y-4x^2y^2-xy^3+y^4}$$

$$[解] 原式 = \frac{2x^3+2x^2y-2xy^2+3x^2y+3xy^2-3y^3}{3x^4+3x^3y-3x^2y^2-x^2y^2-xy^3+y^4}$$

$$= \frac{2x(x^2+xy-y^2)+3y(x^2+xy-y^2)}{3x^2(x^2+xy-y^2)-y^2(x^2+xy-y^2)} = \frac{2x+3y}{3x^2-y^2}$$

$$10. \frac{54x^5-27x^4-3x^2-4}{36x^5+3x^3+3x-2}$$

$$答 \frac{9x^3-3x-2}{6x^3+3x-1}$$

$$11. \frac{(a+b)\{(a+b)^2-c^2\}}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= \frac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{\{2bc+(a^2-b^2-c^2)\}\{2bc-(a^2-b^2-c^2)\}} \\ &= \frac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}} \\ &= \frac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)} = \frac{a+b}{(a-b+c)(b+c-a)} \end{aligned}$$

$$12. \frac{x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)}{x^2y-z+y^2z-x+z^2x-y}$$

$$\text{〔解〕 原式} = \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)}{-(x-y)(y-z)(z-x)} = xy+yz+zx.$$

$$13. \frac{x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)}{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= \frac{-(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}{2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)} \\ &= -\frac{1}{2}(y-z)(z-x)(x-y). \end{aligned}$$

$$14. \frac{a(b-c)(c-d)-c(d-a)(a-b)}{b(c-d)(d-a)-d(a-b)(b-c)}.$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= \frac{a\{-c^2+(b+d)c-bd\}-c\{-a^2+(b+d)a-bd\}}{b\{-d^2+(a+c)d-ac\}-d\{-b^2+(a+c)b-ac\}} \\ &= \frac{ac(a-c)-bd(a-c)}{ac(d-b)-bd(d-b)} = \frac{(a-c)(ac-bd)}{(d-b)(ac-bd)} = \frac{a-c}{d-b}. \end{aligned}$$

$$15. \frac{x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$$

$$\text{〔解〕 原式} = \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)}{-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)} = \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$$

$$16. \frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}.$$

$$\text{〔解〕 原式} = \frac{2a(a-b)+2b(a+b)}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

$$17. \frac{3-x}{1-3x} - \frac{3+x}{1+3x} - \frac{1-16x}{9x^2-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= \frac{(3-x)(1+3x) - (3+x)(1-3x)}{1-9x^2} + \frac{1-16x}{1-9x^2} \\ &= \frac{16x}{1-9x^2} + \frac{1-16x}{1-9x^2} = \frac{1}{1-9x^2}. \end{aligned}$$

$$18. \frac{x}{x+2y} - \frac{y}{2y-x} - \frac{(x-y)^2}{x^2-4y^2}. \quad \left[\text{答 } \frac{y(x+y)}{x^2-4y^2} \right]$$

$$19. \frac{x-2a}{x+2a} - \frac{x+2a}{2a-x} + \frac{8ax}{x^2-4a^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= \frac{x-2a}{x+2a} + \frac{x+2a}{x-2a} + \frac{8ax}{x^2-4a^2} \\ &= \frac{(x-2a)^2 + (x+2a)^2 + 8ax}{x^2-4a^2} = \frac{2(x^2+4ax+4a^2)}{x^2-4a^2} = \frac{2(x+2a)}{x-2a}. \end{aligned}$$

$$20. \frac{1}{x+2} - \frac{3}{x+4} + \frac{3}{x+6} - \frac{1}{x+8}.$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+8} \right) - \left(\frac{3}{x+4} - \frac{3}{x+6} \right) = \frac{6}{(x+2)(x+8)} - \frac{6}{(x+4)(x+6)} \\ &= \frac{6(x+4)(x+6) - 6(x+2)(x+8)}{(x+2)(x+8)(x+4)(x+6)} = \frac{48}{(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)}. \end{aligned}$$

$$21. \frac{1}{x+a} - \frac{3}{x+3a} + \frac{3}{x+5a} - \frac{1}{x+7a}. \quad \left[\text{答 } \frac{48a^3}{(x+a)(x+3a)(x+5a)(x+7a)} \right]$$

$$22. \frac{1}{x-2a} - \frac{4}{x-a} + \frac{6}{x} - \frac{4}{x+a} + \frac{1}{x+2a}.$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= \left(\frac{1}{x-2a} + \frac{1}{x+2a} \right) - \left(\frac{4}{x-a} + \frac{4}{x+a} \right) + \frac{6}{x} \\ &= \frac{2x}{x^2-4a^2} - \frac{8x}{x^2-a^2} + \frac{6}{x} = \frac{24a^4}{x(x^2-4a^2)(x^2-a^2)}. \end{aligned}$$

$$23. \frac{1}{x^2-5xy+6y^2} - \frac{2}{x^2-4xy+3y^2} + \frac{1}{x^2-3xy+2y^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= \frac{1}{(x-2y)(x-3y)} - \frac{2}{(x-3y)(x-y)} + \frac{1}{(x-y)(x-2y)} \\ &= \frac{(x-y) - 2(x-2y) + (x-3y)}{(x-y)(x-2y)(x-3y)} = \frac{0}{(x-y)(x-2y)(x-3y)} = 0. \end{aligned}$$

$$24. \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}.$$

〔答 0〕

$$25. \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}, \quad \text{〔答 1〕}$$

$$26. \frac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(1+bc)(1+ba)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(1+ca)(1+cb)}{(c-a)(c-b)}.$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= -\frac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(c-a)} - \frac{(1+bc)(1+ba)}{(b-c)(a-b)} - \frac{(1+ca)(1+cb)}{(c-a)(b-c)} \\ &= -\frac{(b-c)(1+ab)(1+ac) + (c-a)(1+bc)(1+ba) + (a-b)(1+ca)(1+cb)}{(a-b)(b-c)(c-a)}. \end{aligned}$$

在分子 $b=c$, 則分子 $=0$. 故分子有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之因子. 而分子之 a 不高於 a^2 故分子 $=L(b-c)(c-a)(a-b)$. $\therefore L=1$. 由是原式為 -1 .

$$27. \frac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= abc \left\{ \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \right\} \\ &\quad + d \left\{ \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} \right\} = abc\{0\} + d\{1\} = d. \end{aligned}$$

$$28. \frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}$$

$$\text{〔解〕 } \frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x(x+z)-z(x+y)}{(x+y)(x+z)} = \frac{x}{x+y} - \frac{z}{x+z}.$$

$$\text{同法 } \frac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)} = \frac{y}{y+z} - \frac{x}{y+x}, \quad \frac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)} = \frac{z}{z+x} - \frac{y}{z+y}.$$

由加法原式 $=0$.

$$\begin{aligned} 29. \frac{(y-x)(z-x)}{(x-2y+z)(x+y-2z)} + \frac{(z-y)(x-y)}{(x+y-2z)(-2x+y+z)} \\ + \frac{(z-x)(z-y)}{(-2x+y+z)(x-2y+z)}. \end{aligned}$$

〔解〕 $x-y=a, y-z=b, z-x=c$. 則

$$\frac{(y-x)(z-x)}{(x-2y+z)(x+y-2z)} = \frac{-(x-y)(z-x)}{\{(x-y)-(y-z)\}\{(y-z)-(z-x)\}} = -\frac{ac}{(a-b)(b-c)}.$$

$$\therefore \text{原式} = -\frac{ac}{(a-b)(b-c)} - \frac{ba}{(b-c)(c-a)} - \frac{cb}{(c-a)(a-b)} = -1.$$

$$30. \frac{\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} - 3 \frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}{\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} + \frac{x}{x-c} - 3 \frac{x^2 + (ab+bc+ca)x}{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 分子} &= \frac{x+a}{x-a} + 1 + \frac{x+b}{x-b} + 1 + \frac{x+c}{x-c} + 1 - 3 \left\{ \frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)} + 1 \right\} \\ &= \frac{2x}{x-a} + \frac{2x}{x-b} + \frac{2x}{x-c} - 3 \frac{(x+c)(x+b)(x+a) + (x-a)(x-b)(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)} \\ &= \frac{2x}{x-a} + \frac{2x}{x-b} + \frac{2x}{x-c} - 3 \frac{2x^2 + 2(ab+bc+ca)x}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 2 \times \text{分母。} \end{aligned}$$

∴ 原式 = 2.

$$31. \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} \quad \text{〔答 } a+b+c \text{〕}$$

$$32. \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= -\frac{a^4}{(a-b)(c-a)} - \frac{b^4}{(b-c)(a-b)} - \frac{c^4}{(c-a)(b-c)} \\ &= -\frac{a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= -\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab. \end{aligned}$$

$$33. a^2 \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$$

〔解〕 通分母爲 $-(a-b)(b-c)(c-a)$ 。則

$$\begin{aligned} \text{分子} &= a^2(b-c)(a+b)(a+c) + b^2(c-a)(b+c)(b+a) + c^2(a-b)(c+a)(c+b) \\ &= -(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2. \end{aligned}$$

∴ 原式 = $(a+b+c)^2$

$$34. \frac{a^2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + b^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) + c^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}{a \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + b \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) + c \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

〔解〕 以 abc 乘分母子。則得

$$\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)} = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = a+b+c.$$

$$35. \frac{1}{(a-b+c)(a+b-c)} + \frac{1}{(a+b-c)(-a+b+c)} + \frac{1}{(-a+b+c)(a-b+c)}$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= \frac{(-a+b+c)+(a-b+c)+(a+b-c)}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)} \\ &= \frac{a+b+c}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)} \end{aligned}$$

$$36. \frac{b-c}{a^2-(b-c)^2} + \frac{c-a}{b^2-(c-a)^2} + \frac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 原式} &= \frac{b-c}{(a+b-c)(a-b+c)} + \frac{c-a}{(b+c-a)(b-c+a)} + \frac{a-b}{(c+a-b)(c-a+b)} \\ &= \frac{(b-c)(-a+b+c)+(c-a)(a-b+c)+(a-b)(a+b-c)}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分子} &= -a(b-c)+(b^2-c^2)-b(c-a)+(c^2-a^2)-c(a-b)+(a^2-b^2) \\ &= -\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\} + \{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\} \\ &= -\{0\} + \{0\} = 0. \end{aligned}$$

由是原式=0.

$$37. \text{ 試證 } 16 + \left(\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} - 2 \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} \right)^2 = 16 \left(\frac{x^4+a^4}{x^4-a^4} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } 16 + \left\{ \frac{(x+a)^2+(x-a)^2}{x^2-a^2} - \frac{2(x^2-a^2)}{x^2+a^2} \right\}^2 \\ &= 16 + \left\{ \frac{2(x^2+a^2)}{x^2-a^2} - \frac{2(x^2-a^2)}{x^2+a^2} \right\}^2 = 16 + \left\{ \frac{8a^2x^2}{x^4-a^4} \right\}^2 \\ &= 16 \left\{ 1 + \frac{4a^4x^4}{(x^4-a^4)^2} \right\} = 16 \left(\frac{x^4+a^4}{x^4-a^4} \right)^2. \end{aligned}$$

$$38. \text{ 證 } \frac{a+b}{ax+by} + \frac{a-b}{ax-by} + 2 \frac{a^2x+b^2y}{a^2x^2+b^2y^2} = 4 \frac{a^4x^3-b^4y^3}{a^4x^4-b^4y^4}$$

39. 證明以下諸式.

$$\begin{aligned} (1) \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(1+ax)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)(1+bx)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(1+cx)} \\ = \frac{1}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)} \end{aligned}$$

$$(2) \frac{a}{(a-b)(a-c)(1+ax)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)(1+bx)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)(1+cx)}$$

$$= \frac{-x}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$$

$$(3) \frac{1}{(a-b)(a-c)(1+ax)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)(1+bx)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(1+cx)}$$

$$= \frac{x^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$$

〔證〕茲就三題內之(3)證之。

$$\text{原式} = \frac{(b-c)(1+bx)(1+cx) + (c-a)(1+cx)(1+ax) + (a-b)(1+ax)(1+bx)}{(b-c)(c-a)(a-b)(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$$

$$\text{分子} = (b-c)(c-a)(a-b)(Lx^2 + Mx + N)$$

比較 a^2bx^2 之係數。則 $1 = -L$ 。 $\therefore L = -1$ 。

比較 a^2bx 之係數。則 $0 = -M$ 。 $\therefore M = 0$ 。

比較 a^2b 之係數。則 $0 = -N$ 。 $\therefore N = 0$ 。

$$\text{由是原式} = \frac{x^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$$

$$40. \frac{(a+p)(a+q)}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{(b+p)(b+q)}{(b-c)(b-a)(x+b)} + \frac{(c+p)(c+q)}{(c-a)(c-b)(x+c)}$$

〔解〕通分母爲 $-(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)$ 。則分子爲

$$(a+p)(a+q)(b-c)(x+b)(x+c) + (b+p)(b+q)(c-a)(x+c)(x+a) + (c+p)(c+q)(a-b)(x+a)(x+b)$$

$$= -(b-c)(c-a)(a-b)(x-p)(x-q)$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{(x-p)(x-q)}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$41. \frac{a(b+c-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(c+a-b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(a+b-c)}{(c-a)(c-b)} \quad \text{〔答 -2〕}$$

$$42. \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(c-a)(c-b)}$$

〔解〕同分母 $=(a-b)(b-c)(c-a)$ 。則分子爲

$$(b-c)(a-b+c)(a+b-c) + (c-a)(b-c+a)(b+c-a) + (a-b)(c-a+b)(c+a-b) = L(b-c)(c-a)(a-b)$$

比較 a^2b 之係數。則

$$1-1+1+1+1 = -L \quad \therefore L = -4$$

由是原式 =

$$43. \frac{a(b+c)}{b+c-a} + \frac{b(c+a)}{c+a-b} + \frac{c(a+b)}{a+b-c}$$

[解] 原式 = $\frac{a(b+c)(c+a-b)(a+b-c) + \text{以下 } a, b, c \text{ 之輪換}}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$

在分子 $a=0$, 則分子 = 0.

∴ 分子 = $Labc(a+b+c)$.

$a=b=c=1$, 則

$1(2)(1)(1)+1(2)(1)(1)+1(2)(1)(1) = L(1+1+1)$. ∴ $L=2$.

由是原式 = $\frac{2abc(a+b+c)}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$.

44. 求下式之證.

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(mn + \frac{1}{mn}\right)^2 - \left(m + \frac{1}{m}\right)\left(n + \frac{1}{n}\right)\left(mn + \frac{1}{mn}\right) = 4.$$

[證] 左邊 = $m^2 + 2 + \frac{1}{m^2} + n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}$

$$+ \left(mn + \frac{1}{mn}\right) \left\{ mn + \frac{1}{mn} - \left(m + \frac{1}{m}\right)\left(n + \frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$= 4 + \left(m^2 + \frac{1}{m^2}\right) + \left(n^2 + \frac{1}{n^2}\right) + \left(mn + \frac{1}{mn}\right) \left\{ -\frac{n}{m} - \frac{m}{n} \right\}$$

$$= 4 + \frac{m}{n} \left(mn + \frac{1}{mn}\right) + \frac{n}{m} \left(mn + \frac{1}{mn}\right) + \left(mn + \frac{1}{mn}\right) \left\{ -\frac{n}{m} - \frac{m}{n} \right\}$$

$$= 4 + \left(mn + \frac{1}{mn}\right) \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} - \frac{n}{m} - \frac{m}{n}\right) = 4.$$

45. 求下式之證.

$$\left(\frac{2bc}{b+c} - b\right) \div \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b-2c}\right) + \left(\frac{2bc}{b+c} - c\right) \div \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c-2b}\right) = bc.$$

[證] 左邊 = $b\left(\frac{2c}{b+c} - 1\right) \div \frac{b-c}{c(b-2c)} + c\left(\frac{2b}{b+c} - 1\right) \div \frac{c-b}{b(c-2b)}$

$$= \frac{b(c-b)}{b+c} \div \frac{-(c-b)}{c(b-2c)} + \frac{c(b-c)}{b+c} \div \frac{b-c}{b(2b-c)}$$

$$= \frac{b(c-b)}{b+c} \times \frac{c(b-2c)}{-(c-b)} + \frac{c(b-c)}{b+c} \times \frac{b(2b-c)}{b-c}$$

$$= -\frac{bc(b-2c)}{b+c} + \frac{bc(2b-c)}{b+c} = \frac{bc(-b+2c+2b-c)}{b+c}$$

$$= \frac{bc(b+c)}{b+c} = bc.$$

46. 證 $\frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} + \frac{a-b}{1+ab} = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}$.

47. $(yz+zx+xy)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - xyz\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$.

[解] 原式 $= \frac{yz+zx+xy}{x} + \frac{yz+zx+xy}{y} + \frac{yz+zx+xy}{z} - \frac{yz}{x} - \frac{zx}{y} - \frac{xy}{z}$

$$= \frac{yz}{x} + z + y + z + \frac{zx}{y} + x + y + x + \frac{xy}{z} - \frac{yz}{x} - \frac{zx}{y} - \frac{xy}{z}$$

$$= 2(x+y+z).$$

[別法] 原式 $= \frac{(yz+zx+xy)^2}{xyz} - xyz\left(\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{x^2y^2z^2}\right)$

$$= \frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2xyz(x+y+z)}{xyz} - \frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{xyz}$$

$$= 2(x+y+z)$$

48. 設 $\frac{y+z}{b-c} = \frac{z+x}{c-a} = \frac{x+y}{a-b}$ 試證此各分數等於

$$\frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}}.$$

[證] $\frac{y+z}{b-c} = \frac{z+x}{c-a} = \frac{x+y}{a-b} = k$ 則

$$y+z=(b-c)k, z+x=(c-a)k, x+y=(a-b)k,$$

$$\therefore (y+z)+(z+x)+(x+y)=(b-c+c-a+a-b)k.$$

即 $x+y+z=0$(1).

又 $k^2 = \frac{(y+z)^2}{(b-c)^2} = \frac{(z+x)^2}{(c-a)^2} = \frac{(x+y)^2}{(a-b)^2}$ 由 113 章定理一

$$= \frac{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2},$$
 由 (1) 式

$$= \frac{(-x)^2+(-y)^2+(-z)^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}.$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}}.$$

49. 設 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. 試證 $\frac{x^2+a^2}{x+a} + \frac{y^2+b^2}{y+b} = \frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+y+a+b}$.

[證] $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} = k$, 則 $x=yk, a=bk$.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2+a^2}{x+a} + \frac{y^2+b^2}{y+b} &= \frac{y^2k^2+b^2k^2}{yk+bk} + \frac{y^2+b^2}{y+b} = \frac{y^2k+b^2k}{y+b} + \frac{y^2+b^2}{y+b} \\ &= \frac{y^2(k+1)+b^2(k+1)}{y+b} \times \frac{k+1}{k+1} = \frac{(yk+y)^2+(bk+b)^2}{yk+bk+y+b} \\ &= \frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+a+y+b}. \end{aligned}$$

50. 設 $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$. 試證 $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$.

[證] $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c} = k$

$x=(b+c-a)k, y=(c+a-b)k, z=(a+b-c)k$.

$$\begin{aligned} \therefore (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z &= \{(b-c)(b+c-a)+(c-a)(c+a-b)+(a-b)(a+b-c)\}k \\ &= \{b^2-c^2-a(b-c)+c^2-a^2-b(c-a)+a^2-b^2-c(a-b)\}k \\ &= 0. \end{aligned}$$

51. 設 $\frac{bz-cy}{b-c} = \frac{cx-az}{c-a}$. 而 c 不為 0. 則此各分數. 等於 $\frac{ay-bx}{a-b}$.

又 $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$. 試證之.

[證] $\frac{bz-cy}{b-c} = \frac{cx-az}{c-a} = \frac{a(bz-cy)+b(cx-az)}{a(b-c)+b(c-a)} = \frac{-c(ay-bx)}{-c(a-b)}$.

而 $c \neq 0$. 故以 $-c$ 除分母子. 即得 $\frac{ay-bx}{a-b}$. 令此各分數. 皆等於 k . 則

$bz-cy=(b-c)k, cx-az=(c-a)k, ay-bx=(a-b)k$.

由加法 $(bz-cy)+(cx-az)+(ay-bx)=(b-c+c-a+a-b)k=0$.

即 $a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$.

52. 求下式之證.

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-d)(c-a)(c-b)} \\ + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)} = a+b+c+d. \end{aligned}$$

為 a, b, c, d 之轮换式

(證) 左邊之同分母為 $(a-b)(b-c)(c-a)(a-d)(b-d)(c-d)$ 。則
 分子 = $-a^4(b-c)(b-d)(c-d) - b^4(c-a)(c-d)(a-d) - c^4(a-b)(a-d)(b-d)$
 (為 a, b, c, d 之轮换式) $- d^4(a-b)(b-c)(c-a)$ 。
 $= (b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$ 。

由是左邊等於 $a+b+c+d$ 。即等於右邊。

53. 下列諸分數之和，若 $r < n-1$ 。則等於 0。若 $r = n-1$ 。則等於 1。若 $r = n$ 。則等於 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 。試證之。

$$\frac{a_1^r}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)} + \frac{a_2^r}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)} + \dots + \frac{a_n^r}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})}$$

(證) 通分母為

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)\dots(a_{n-1}-a_n)$$

則分子 = $a_1^r(a_2-a_3)(a_2-a_4)\dots(a_2-a_n)(a_3-a_4)\dots(a_3-a_n)\dots(a_{n-1}-a_n)$
 $+ a_2^r(a_1-a_2)\dots(a_1-a_n)(a_3-a_4)\dots(a_{n-1}-a_n) + \dots + a_n^r(a_1-a_2)\dots(a_{n-1}-a_n)$ 。

分子為等次式。而就其次數求分子之第一項。則 a_1^r 為 r 次，
 $(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)$ 為 $n-2$ 次， (a_3-a_4) 為 $n-3$ 次... $a_{n-1}-a_n$ 為 1 次故
 其次數為

$$r + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 = r + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ 次} \dots \dots \dots (A)$$

又分母有 $(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)\dots(a_{n-1}-a_n)$
 之因子。而其次數含 a_1 之因子 $n-1$ 。含 a_2 之因子 $n-2$ 。...含 a_{n-1}
 之因子 1。故得 $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n-1)$ 次。

今 $r = n-1$ 則分子之次數從 (A) 得 $n-1 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 。

即 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次。故原式等於 1。

故 r 若小於 $n-1$ 則分子之次數低於 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次。故原式可為 0。

又 $r = n$ 。則 (A) 為 $n + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = \frac{1}{2}n(n-1) + 1$ 次。分子有高於

$\frac{1}{2}n(n-1)$ 次 1 次者。故分子在前之因子外。有 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

故原式 = $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$54. \text{ 試證 } 1 + \frac{a_1}{x-a_1} + \frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{a_3x^2}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} + \dots$$

$$+ \frac{a_nx^{n-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = \frac{x^n}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$$

[證] $1 + \frac{a_1}{x-a_1} = \frac{x}{x-a_1}$, $1 + \frac{a_1}{x-a_1} + \frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)} = \frac{x}{x-a_1} + \frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}$

$$= \frac{x^2}{(x-a_1)(x-a_2)}$$

以下由同理推得本題之結果。

$$55. \text{ 求證 } \frac{b+c+d+\dots+k+l}{a(a+b+c+\dots+k+l)} = \frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{(a+b)(a+b+c)} + \dots$$

$$+ \frac{l}{(a+b+\dots+k)(a+b+\dots+k+l)}$$

[證] 從 $\frac{b+c+d+\dots+k+l}{a(a+b+c+\dots+k+l)}$ 減 $\frac{b}{a(a+b)}$ 則得

$$\frac{c+d+\dots+k+l}{(a+b)(a+b+\dots+k+l)}$$

從此式減 $\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}$ 則得

$$\frac{d+\dots+k+l}{(a+b+c)(a+b+c+\dots+k+l)}$$

以下可以同理推之。

第玖編

方程式 一未知數量

114. 方程式 (Equations) 兩代數式相等之式。謂之方程式。其兩相等式。稱方程式之兩節 (Members)。或稱兩邊 (Sides)。

例如 $x+a=b+c-d$ 之方程式。 $x+a$ 為前節或為左邊。 $b+c-d$ 為後節或為右邊。

方程式其內所含諸文字不論為何值而常相等。謂之恆同式 (Identity)。

例如 $x+x=2x$ 為恆同式。因 x 為 3 或為 6。其 $x+x$ 恆等於 $2x$ 也。

又 $2(x+a)=2x+2a$ 其 x, a 任為何值而常相等。故為恆同式。

非恆同式者。謂之方程式。此編及次編則專論此。蓋方程式內所含諸文字。不論何值而相等者。祇可謂之恆同式。若其所含諸文字。僅限於特別之值而相等者。乃可謂之方程式。

方程式內含已知數量 (Known Quantity)。及未知數量 (Unknown Quantity) 二種。已知數量用數字或 a, b, c 等最初之文字代之。未知數量則 x, y, z 等最後之文字代之。

115. 一未知數量 此編所論為有一未知數量之方程式。

解 (Solve) 方程式。即求其未知數量之值。其值用於方程式。能令兩邊相等乃為合理。而此未知數量之值。謂之方程式之根 (Root)。凡同根兩方程式。謂之等值 (Equivalent)。

僅有一未知數量 x 之方程式。為 x 之有理整式。而其最高次僅有 x 者。其方程式為一次 (Simple)。有 x^2 者為二次 (Quadratic)。有 x^3 者為三次 (Cubic) 以下類推。

116* 原則 解方程式須依下之原則。

[第一] 方程式之兩邊各加同數量。與原式為等值。

例如 $A=B$ 之方程式。兩邊各加 m 。得 $A+m=B+m$ 仍為等值可知。

[第二] 方程式之一邊。以其任意之項移於他邊。則必變其符號。

例如方程式 $a+b-c=p-q+r$ 兩邊各加 $-p+q-r$ 。則依原則第一。
 $a+b-c+(-p+q-r)=p-q+r+(-p+q-r)$ 。即 $a+b-c-p+q-r=0$ 。

依此右邊移於左邊。則 p 為 $-p$ 。 $-q$ 為 $+q$ 。 $+r$ 為 $-r$ 。已各變其符號。

由是凡方程式。以其他邊之各項。盡移於一邊。則其他邊可為 0。

又 $a+b-c=p-q+r$ 。移項可變為

$$a+q-r=p-b+c.$$

[第三] 方程式之兩邊。以同數量乘之或除之。則所得之方程式。亦與原式等值。

何則如 $A=B$ 。即知 $mA=mB$ 。反之若由 $mA=mB$ 。證明 $A=B$ 。則因 $mA=mB$ 。由原則第二。得 $m(A-B)=0$ 。而以 m 非 0。故 $A-B=0$ 。
 $\therefore A=B$ 。

又兩邊加以同數量 m 除之。可不必別用證法。即與以 $\frac{1}{m}$ 乘之同。

故 $\frac{A}{m}=\frac{B}{m}$ 即 $A+m=B\div m$ 。

117. 一次方程式 (Simple Equations) 示其解法於下。

[第一例] 解 $13x-7=5x+9$ 式。

$5x$ 與 -7 各移項。得 $13x-5x=9+7$ 。

(原則二)

即 $8x=16$ 。

兩邊以 x 之係數 8 除之。則 $x=2$ 。

(原則三)

[第二例] 解 $\frac{3x}{4}-2=\frac{2x}{5}+5$ 式。

去分母故以 4, 5 之 L.C.M. 20 乘之。則得

$$15x - 40 = 8x + 100, \quad (\text{原則三})$$

$$\text{移項則得} \quad 15x - 8x = 100 + 40, \quad (\text{原則二})$$

$$\text{即} \quad 7x = 140,$$

$$\text{兩邊以 } x \text{ 之係數 } 7 \text{ 除之。則 } x = 20. \quad (\text{原則三})$$

[第三例] 解 $a(x-a) = 2ab - b(x-b)$ 式。

$$\text{解去括弧。則 } ax - a^2 = 2ab - bx + b^2,$$

$$\text{移項則得} \quad ax + bx = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\text{即} \quad (a+b)x = (a+b)^2,$$

$$\text{兩邊以 } x \text{ 之係數 } a+b \text{ 除之。則 } x = a+b.$$

由以上三例。得解一次方程式之法則。順序之如下。

[法則] 方程式為分數式及有他之代數記號如括弧者。則第一當去其分母及其記號。(即有括弧者。解去其括弧)第二移未知數量之項於左邊。移已知數量之項於右邊。且令各邊皆集為一項。第三以未知數量之係數除已知數量。即得方程式之根。

118. 特別之例 凡一次方程式由 x 之項與已知項所成。故總可變為 $ax + b = 0$ 。而其解答為 $x = -\frac{b}{a}$ 。

由是得特別之例如下。

$$[\text{第一}] \quad b = 0. \text{ 則 } x = -\frac{0}{a} = 0.$$

$$[\text{第二}] \quad b = 0, a = 0. \text{ 則 } x = -\frac{0}{0}. \text{ 於此式無論 } x \text{ 為何值皆合於理。}$$

即為恆同式。

$$\frac{0}{0} \text{ 者。所以示任何之值。何則。因 } \frac{3}{5} = \frac{3 \times 0}{5 \times 0} = \frac{0}{0}.$$

$$\text{又 } 8 = \frac{8 \times 0}{1 \times 0} = \frac{0}{0}. \text{ 故為不定數。}$$

$$[\text{第三}] \quad a = 0. \text{ 則 } x = -\frac{b}{0} = -\infty. \text{ 即無窮大。}$$

何則。 a 之值次第減小。因而 $x = -\frac{b}{a}$ 之值。必次第增大。

例如 $a = \frac{1}{10}$. 則 $x = -\frac{b}{\frac{1}{10}} = -10b$,

$a = \frac{1}{100}$. 則 $x = -\frac{b}{\frac{1}{100}} = -100b$,

$a = \frac{1}{1000}$. 則 $x = -\frac{b}{\frac{1}{1000}} = -1000b$.

.....
 $\therefore a = 0$. 則 $x = -\infty$.

例 題

解以下之方程式。

1. $\frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{3}(x-3) + \frac{1}{4}(x-4) = 4$.

〔解〕兩邊以 12 乘之。則得, $6(x-2) - 4(x-3) + 3(x-4) = 48$.

即 $6x - 12 - 4x + 12 + 3x - 12 = 48$.

即 $5x = 60$. $\therefore x = 12$.

2. $\frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{4}(x-8) + \frac{1}{5}(x-5) = 0$.

〔答 $x = 0$ 〕

3. $a(x-a) = b(x-b)$.

〔答 $x = a + b$ 〕

4. $(x+a)(x+b) - (x-a)(x-b) = (a+b)^2$.

〔解〕解去括弧。得 $x^2 + (a+b)x + ab - x^2 + (a+b)x - ab = (a+b)^2$.

即 $2(a+b)x = (a+b)^2$. $\therefore x = \frac{1}{2}(a+b)$.

5. $a(2x-a) + b(2x-b) = 2ab$.

〔答 $x = \frac{1}{2}(a+b)$ 〕

6. $(a^2+x)(b^2+x) = (ab+x)^2$

〔解〕解去括弧。得 $a^2b^2 + (a^2+b^2)x + x^2 = a^2b^2 + 2abx + x^2$.

移項得 $(a^2 - 2ab + b^2)x = a^2b^2 - a^2b^2$. $\therefore x = 0$.

7. $3(x+3)^2 + 5(x+5)^2 = 8(x+8)^2$.

〔解〕 $5\{(x+5)^2 - (x+8)^2\} = 3\{(x+8)^2 - (x+3)^2\}$.

即 $5(-3)(2x+13) = 3(5)(2x+11)$.

故 $-2x - 13 = 2x + 11$. $\therefore x = -6$.

$$8. (x+a)^4 - (x-a)^4 - 8ax^3 + 8a^4 = 0.$$

$$〔解〕 \{(x+a)^2 + (x-a)^2\} \{(x+a)^2 - (x-a)^2\} - 8a(x^3 - a^3) = 0.$$

$$即 2(x^2 + a^2)4ax - 8a(x^3 - a^3) = 0.$$

$$即 (x^2 + a^2)x - (x^3 - a^3) = 0.$$

$$故 a^2x = -a^3. \therefore x = -a.$$

$$9. (x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = 3x(x^2-1).$$

$$〔解〕 (x-1)^3 + (x+1)^3 + x^3 = 3x^3 - 3x.$$

$$即 2x^3 + 6x + x^3 = 3x^3 - 3x. \therefore 9x = 0. \therefore x = 0.$$

$$10. (x+a)^3 + (x+b)^3 + (x+c)^3 = 3(x+a)(x+b)(x+c).$$

$$〔解〕 A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A+B+C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA)$$

$$= \frac{1}{2}(A+B+C)(2A^2 + 2B^2 + 2C^2 - 2AB - 2BC - 2CA)$$

$$= \frac{1}{2}(A+B+C)\{(A-B)^2 + (B-C)^2 + (C-A)^2\}.$$

$$故原方程式 $(x+a)^3 + (x+b)^3 + (x+c)^3 - 3(x+a)(x+b)(x+c) = 0.$$$

$$變為 \frac{1}{2}(x+a+x+b+x+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0.$$

$$即 3x+a+b+c = 0. \therefore x = -\frac{1}{3}(a+b+c).$$

119. 因子分割法之應用 凡因子有一爲0者。其積亦爲0。因子無一爲0者。其積亦不能爲0。

例如 $(x-2)(x-3)$ 必 $x-2$ 爲0。或 $x-3$ 爲0。則其式乃可爲0。

由是方程式 $(x-2)(x-3) = 0$ 。則 $x-2=0$ 。或 $x-3=0$ 乃合於理。故此方程式之根爲 $x=2$ 。或 $x=3$ 。其他皆不能適合。

又連乘積 $(x-a)(x-b)(x-c)\dots$ 則必 $x-a$ 爲0。或 $x-b$ 爲0。或 $x-c$ 爲0.....其式乃可爲0。若 $x-a$ 。或 $x-b$ 。或 $x-c$諸因子內無一爲0者。則此連乘積不能爲0。

由是方程式 $(x-a)(x-b)(x-c)\dots = 0$ 。則

$x-a=0$ 。或 $x-b=0$ 。或 $x-c=0$ 。乃合於理。故此方程式之根。爲 $x=a$ 。或 $x=b$ 。或 $x=c$

依上所示。可不論方程式之次數如何。其餘答法。祇分割其一次因子令等於 0。則其根可逕書出。

〔法則〕有任何次數之方程式。以其各項移於一邊而等於 0。其解法與同次代數式分割其因子法同。

〔第一例〕解 $x^2 - 5x = 6$ 式。

移項得 $x^2 - 5x - 6 = 0$ 。

即 $(x-6)(x+1) = 0$ 。

∴ $x-6=0$ 。或 $x+1=0$ 。

由是 $x=6$ 。或 $x=-1$ 。

〔第二例〕解 $x^3 - x^2 = 6x$ 式。

移項得 $x^3 - x^2 - 6x = 0$ 。

即 $x(x-3)(x+2) = 0$ 。

∴ $x=0$ 。或 $x=3$ 。或 $x=-2$ 。

120* 二次方程式 (Quadratic Equation) 二次方程式盡移其各項於一邊。則其公式如下。

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

但 a, b, c 為已知數量。

二次式因子分割法已見於第 80 章。今以同方法求二次方程式之根如下。

例如解二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 。

以 x^2 係數 a 除之。得 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ 。

以 x 係數之半。即 $\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}$ 之平方加而又減之。則得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

$$\text{即} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left\{ \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)} \right\}^2 = 0.$$

$$\text{即} \quad \left\{ x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)} \right\} \left\{ x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)} \right\} = 0.$$

$$\text{由是 } x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0. \text{ 或 } x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0.$$

$$\therefore x \text{ 之二根。爲 } -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

[簡解法] 平方根有 + 及 - 之二種。即 $\sqrt{16} = \pm 4$ 。故二次方程式之解法。如下爲便。

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$$\text{即 } x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

$$\text{兩邊各加 } \left(\frac{b}{2a}\right)^2. \text{ 則得 } x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}.$$

$$\text{即 } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$$\therefore x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

$$\text{由是 } x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

[第一例] 解 $x^2 - 13x + 42 = 0$ 式。

$$x^2 - 13x + \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 42.$$

$$\text{即 } \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore x - \frac{13}{2} = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{由是 } x = \frac{13}{2} \pm \frac{1}{2}. \text{ 即 } x = 7. \text{ 或 } x = 6.$$

[第二例] 解 $3x^2 - 10x + 6 = 0$ 式。

$$\text{即 } x^2 - \frac{10}{3}x + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2.$$

$$\text{即 } \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}.$$

$$\therefore x - \frac{5}{3} = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

由是 $x = \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{7}}{8}$ 或 $x = \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{7}}{8}$.

〔第三例〕解 $a(x^2+1) = x(a^2+1)$ 式。

變原方程式爲 $x^2 - \frac{x}{a}(a^2+1) = -1$.

即 $x^2 - \frac{x}{a}(a^2+1) + \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2 - 1$.

即 $\left(x - \frac{a^2+1}{2a}\right)^2 = \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{4a^2}$.

$\therefore x - \frac{a^2+1}{2a} = \pm \frac{a^2-1}{2a}$.

由是 $x = \frac{a^2+1}{2a} \pm \frac{a^2-1}{2a}$.

$\therefore x = a$, 或 $x = \frac{1}{a}$.

〔註〕以上所示二次方程式之解法, 用因子分割法求之更便。

例 題

解下之各方程式。

1. $9x^2 - 24x + 16 = 0$.

〔答 $\frac{4}{3}$ 〕

〔解〕由原方程式, 得 $(3x-4)^2 = 0$. $\therefore 3x-4=0$.

2. $5(x^2+4) = 4(x^2+9)$.

〔答 ± 4 〕

〔解〕由原方程式, 得 $x^2 = 16$. $\therefore x = \pm 4$.

3. $8x^2 = 8x + 8$.

〔答 $3, -\frac{1}{3}$ 〕

4. $16x^2 + 16x + 8 = 0$.

〔答 $-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$ 〕

〔解〕 $16x^2 + 16x + 4 = 1$, $(4x+2)^2 = 1$. $\therefore 4x+2 = \pm 1$.

5. $x^2 + (a-x)^2 = (a-2x)^2$.

〔答 $0, a$ 〕

〔解〕 $x^2 + (a-x)^2 = (a-x)^2 - 2(a-x)x + x^2$.

$2(a-x)x = 0$. 由是 $x = a$, 或 $x = 0$.

6. $x^2 + (a-2x)^2 = (a-3x)^2$. [答 $0, \frac{a}{2}$]

7. $x^2 + x = a^2 + a$. [答 $a, -(a+1)$]

[解] $x^2 - a^2 + x - a = 0$. 即 $(x-a)(x+a+1) = 0$.

8. $x^2 + 2ax = b^2 + 2ab$. [答 $b, -(2a+b)$]

[解] $x^2 + 2ax + a^2 = b^2 + 2ab + a^2$.

即 $(x+a)^2 = (b+a)^2$. $\therefore x+a = \pm(b+a)$.

9. $(x-a)^2 + (x-b)^2 = (a-b)^2$. [答 a, b]

[解] $(x-a)^2 + (x-b)^2 = \{(x-b) - (x-a)\}^2$.

由是 $0 = -2(x-a)(x-b)$. $\therefore x=a, x=b$.

10. $(a-x)^2 + (x-b)^2 = (a-b)^2$. [答 a, b]

[解] $(a-x)^2 + (x-b)^2 = \{(a-x) + (x-b)\}^2$.

即 $(a-x)^2 + (x-b)^2 = (a-x)^2 + (x-b)^2 + 3(a-x)(x-b)\{(a-x) + (x-b)\}$.

由是 $3(a-x)(x-b)(a-b) = 0$. $\therefore x=a$ 或 b .

11. $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$. [答 $1, \frac{a-b}{b-c}$]

[解] $(b-c) + (c-a) + (a-b) = 0$.

由原方程式減之。則得

$$(b-c)(x^2-1) + (c-a)(x-1) = 0.$$

即 $(x-1)\{(b-c)(x+1) + (c-a)\} = 0$. $\therefore x=1$ 或 $\frac{a-b}{b-c}$.

121*. 二根之詳論 前章解二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根。爲 $-\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, 及 $-\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$.

負數之平方根爲虛數。故 $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ 必依 b^2-4ac 之正負而定爲實數 (Real) 或虛數 (Imaginary).

故 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根。從 b^2-4ac 之正負。而得實根或虛根。

又此兩根可從 b^2-4ac 之爲完全平方或非完全平方。而定其爲有理式或無理式。

由是此兩根皆爲有理式或皆爲無理式。又皆爲實根或皆爲虛根。自易明瞭。

又 $b^2 - 4ac = 0$ 。則兩根爲等根。即 $-\frac{b}{2a}$ 。但此方程式不曰有一根 $-\frac{b}{2a}$ 而曰有相等之二根。

如 $b^2 - 4ac$ 不爲 0。則此方程式爲有不等之二根。

由是 $ax^2 + bx + c = 0$ 之兩根若相等。則其關係在 $b^2 = 4ac$ 。但依 83 章 $b^2 = 4ac$ 。則代數式 $ax^2 + bx + c$ 爲完全平方數。

〔注意〕 $b^2 - 4ac$ 之關係。最宜注意。

122. 特別之例 二次方程式特別之例。即在係數爲 0 者。示之如下。

〔第一〕 $c = 0$ 。則 $ax^2 + bx + c = 0$ 。

即 $ax^2 + bx = 0$ 。

即 $x(ax + b) = 0$ 。

∴ $x = 0$ 。及 $-\frac{b}{a}$ 。即此兩根爲 0。及 $-\frac{b}{a}$ 。

〔第二〕 $c = 0$ 。及 $b = 0$ 。則方程式爲 $ax^2 = 0$ 。由是此兩根皆爲 0。

〔第三〕 $b = 0$ 。則方程式爲 $ax^2 + c = 0$ 。

由是 $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ 。故兩根之數值相等。而符號相反。

〔第四〕 $a = 0$ 。及 $b = 0$ 。及 $c = 0$ 。則此方程式爲恆同式。即 x 爲任何之值。皆合於理。

〔第五〕 $a = 0$ 。及 $b = 0$ 。則在 $ax^2 + bx + c = 0$ 之式內。用 $\frac{1}{y}$ 代 x 。即 $\frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + c = 0$ 。即 $cy^2 + by + a = 0$ 。

而因 $a = 0$ 。及 $b = 0$ 。故 $cy^2 = 0$ 。

由第一例。則 y 俱爲 0。故 $x = \frac{1}{y} = \frac{1}{0} = \infty$ 。

即 x 之兩根。俱爲無窮大。

〔第六〕 $a = 0$ 。及 $c = 0$ 。則 $ax^2 + bx + c = 0$ 。變爲 $bx = 0$ 。由是 $x = 0$ 。

又依第五例 $cy^2 + by + a = 0$ 。則 $by = 0$ 。即 $y = 0$ 。

由是 $x = \frac{1}{y} = \frac{1}{0} = \infty$.

故在此例。則 x 之兩根爲 0 及 ∞ 。

[第七] $a=0$ 。則 $cy^2+by=0$ 。

故 $y=0$ 。及 $-\frac{b}{c}$ 。

由是 $x = \frac{1}{y} = \infty$ 。及 $-\frac{c}{b}$ 。

例如方程式 $(a-a')x^2+(b-b')x+c-c'=0$ 。設 $a=a'$ 。則 x 之一根爲 ∞ 。其餘一根爲 $-\frac{c-c'}{b-b'}$ 。即有限數。

設 $a=a'$ 。 $b=b'$ 。 $c=c'$ 。則此方程式不論 x 爲如何之值。皆合於理。則恆同式。

又方程式 $a(x+b)(x+c)+b(x+c)(x+a)=c(x+a)(x+b)$ 。除 $c=a+b$ 之外。不論 c 爲何值。必爲二次方程式。若 $c=a+b$ 。則 x^2 之係數爲零。故通例爲一次方程式。然依第七例作二次方程式求之。則其一根必爲無窮大。

[註] 無窮大之根。在代數學內。通例可置不論。

例如 $x^2+6x=x^2+12$ 。即 $6x=12$ 。 $\therefore x=2$ 。

若從 $x^2-x^2+6x=12$ 。即 $0x^2+6x=12$ 求之。則得 $x=2$ 。及 ∞ 。

123. 方程式之零及無窮大根 普通之方程式。即 n 次方程式。如

$$ax^n+bx^{n-1}+\dots+kx+l=0 \dots\dots\dots (1)$$

若 $l=0$ 。則得 $x(ax^{n-1}+bx^{n-2}+\dots+k)=0$ 。

又 $l=0$ 。 $k=0$ 。則 x 之二根爲 0。依此其末項次第爲 0。則 0 之根亦次第加多。

又 $x = \frac{1}{y}$ 。則得 $a\left(\frac{1}{y}\right)^n + b\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + \dots + k\left(\frac{1}{y}\right) + l = 0$ 。

即 $ly^n + ky^{n-1} + \dots + by + a = 0$ 。

故 $a=0$ 。則 y 之一根爲 0。即 x 之一根爲 ∞ 。

又 $a=0, b=0$ 。則 y 之二根爲 0。即 x 之二根爲 ∞ 。依此知方程式首項之係數次第爲 0。則 ∞ 之根。亦次第加增。

由是從 (1) 式之末項爲 0。則得 0 之根。從其首項爲 0。則得 ∞ 之根。若 (1) 式之係數皆爲 0。則爲恆同式。

此理已見於 90 章與 91 章。當參考之。

124* 不整方程式 方程式之分母有含未知數者。謂之不整方程式。而其解法須以此不整方程式。化爲與之等值之整方程式。

方程式以其分數之分母乘之。則爲整方程式。雖然。其乘法必須檢查。(即檢查其根合理與否)。

何則。方程式之兩邊。以含未知數量之式乘之。即另得一新方程式。而其乘式等於 0 之一根。必非原方程式之根。故新方程式生有增根。

例如 $x+1=5$ 之根。爲 $x=4$ 。但此兩邊以 $x-2$ 乘之。則得 $(x+1)(x-2)=5(x-2)$ 。

即 $(x-2)(x+1-5)=0$ 。∴ $x=4$ 。及 $x=2$ 。

此 $x=2$ 爲非原方程所有之根。而由 $x-2=0$ 所生出者。

不整方程式化爲整方程式。則以含有未知數之分母乘其兩邊。故必生有增根。

如 $A=B$ 之方程式。以 P 乘之。則 $PA=PB$ 。即 $P(A-B)=0$ 。

P 爲乘式之未知數。故 $P=0, A-B=0$ 。而生有 $P=0$ 之增根。而不整方程式。即可依此意解之。

或謂不整方程式以其分母之最低公倍數乘之。則不生增根。但如下之第二例。乘以分母之最低公倍數者。仍生增根也。解明於後。

[第一例] 解 $\frac{3}{x-5} + \frac{2x}{x-3} = 5$ 式。

以分母之 L.C.M. $(x-5)(x-3)$ 乘其兩邊。則得

$$3(x-3) + 2x(x-5) = 5(x-5)(x-3).$$

$$\therefore 3x^2 - 33x + 84 = 0.$$

由是

$$x=4, \text{ 或 } x=7.$$

[第二例] $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0.$

以分母之 *L.C.M.* x^2-1 乘之。則得

$$x^2-3x+2(x^2-1)+x+1=0.$$

即 $3x^2-2x-1=0. \therefore (3x+1)(x-1)=0.$

由是 $x=-\frac{1}{3}$ ，及 $x=1$ 。

故此方程式有 $-\frac{1}{3}$ 及 1 之兩根。然 1 非原方程式之根。即乘式 $x^2-1=0$ 之根。故為增根。

由是不整方程式化為整方程式之後。其不合理之根可省去。蓋不合理之根。必為乘式 $=0$ 之根。而非原方程式之根也。今以別法證之如下。

[別法] $x-1$ 為不合理之根。今先行設法令其結果不得此根。則在於不必逕去其分母。

例如 從 $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0.$ 變為

$$\frac{x^2-3x+(x+1)}{x^2-1}+2=0. \text{ 即 } \frac{(x-1)^2}{x^2-1}+2=0.$$

即 $\frac{x-1}{x+1}+2=0. \therefore x-1+2(x+1)=0. \therefore x=-\frac{1}{3}.$

[第三例] 解 $\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$ 式。

此例亦不必逕去其分母。可從兩邊之各項各減去 1 。

即 $\frac{x}{x-2}-1+\frac{x-9}{x-7}-1=\frac{x+1}{x-1}-1+\frac{x-8}{x-6}-1.$

即 $\frac{2}{x-2}+\frac{-2}{x-7}=\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x-6}.$

即 $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-6}.$

即 $\frac{-5}{(x-2)(x-7)}=\frac{-5}{(x-1)(x-6)}.$

由是 $(x-2)(x-7)=(x-1)(x-6)$.

$$\therefore x=4.$$

[第四例] 解 $\frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+b} + \frac{c}{x+c} = 3$ 式。

兩邊各減去 3, 則得

$$\frac{a}{x+a} - 1 + \frac{b}{x+b} - 1 + \frac{c}{x+c} - 1 = 0.$$

$$\text{即 } \frac{x}{x+a} + \frac{x}{x+b} + \frac{x}{x+c} = 0.$$

$$\therefore x=0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{或 } \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} = 0.$$

以分母之 *L.C.M.* 乘之, 則得

$$(x+b)(x+c) + (x+c)(x+a) + (x+a)(x+b) = 0.$$

$$\text{即 } 3x^2 + 2x(a+b+c) + bc + ca + ab = 0.$$

$$\therefore x = -\frac{1}{3} \{ (a+b+c) \pm \sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)} \} \dots \dots \dots (2)$$

由是此方程式之根爲 (1) 及 (2).

[第五例] 解 $\frac{b+c}{bc-x} + \frac{c+a}{ca-x} + \frac{a+b}{ab-x} = \frac{a+b+c}{x}$ 式。

$$\text{移項括之, 則得 } \frac{b+c}{bc-x} - \frac{a}{x} + \frac{c+a}{ca-x} - \frac{b}{x} + \frac{a+b}{ab-x} - \frac{c}{x} = 0.$$

$$\text{即 } \frac{(a+b+c)x - abc}{x(bc-x)} + \frac{(a+b+c)x - abc}{x(ca-x)} + \frac{(a+b+c)x - abc}{x(ab-x)} = 0.$$

$$\text{由是 } (a+b+c)x - abc = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{或 } \frac{1}{x(bc-x)} + \frac{1}{x(ca-x)} + \frac{1}{x(ab-x)} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{從 (1) 式 } x = \frac{abc}{a+b+c}$$

從 (2) 式去分母, 得

$$(ca-x)(ab-x) + (ab-x)(bc-x) + (bc-x)(ca-x) = 0.$$

$$\text{即 } 3x^2 - 2x(bc+ca+ab) + abc(a+b+c) = 0.$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \{ bc+ca+ab \pm \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)} \}$$

125* 無理方程式 [Irrational Equations] 方程式含有未知數量之平方根或立方根。或其他之方根。謂之無理方程式。今示其解法於下。

先移無理項於一邊。其餘諸項移於他邊。乃將兩邊各自乘。乘後如尚有無理之項。再依此法解之。至悉化為有理項而止。

[第一例] 解 $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+20} - 2\sqrt{x+11} = 0$ 式。

移項得 $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+20} = 2\sqrt{x+11}$ 。

兩邊自乘。則 $x+4 + 2\sqrt{(x+4)(x+20)} + x+20 = 4(x+11)$ 。

簡之得 $\sqrt{(x+4)(x+20)} = x+10$ 。

又以兩邊自乘。則 $(x+4)(x+20) = x^2 + 20x + 100$ 。

$$\therefore x = 5.$$

[第二例] 解 $\sqrt{2x+8} - 2\sqrt{x+5} = 2$ 式。

移項得 $\sqrt{2x+8} - 2 = 2\sqrt{x+5}$ 。

兩邊自乘。則 $2x+8 - 4\sqrt{2x+8} + 4 = 4(x+5)$ 。

即 $-4\sqrt{2x+8} = 2x+8$ 。

又以兩邊自乘。則 $16(2x+8) = (2x+8)^2$ 。

即 $(2x+8)(2x-8) = 0$ 。

$$\therefore x = -4 \text{ 或 } 4.$$

[第三例] 解 $\sqrt{ax+a} + \sqrt{bx+\beta} + \sqrt{cx+\gamma} = 0$ 式。

移項得 $\sqrt{ax+a} + \sqrt{bx+\beta} = -\sqrt{cx+\gamma}$ 。

兩邊自乘。則 $ax+a + 2\sqrt{(ax+a)(bx+\beta)} + bx+\beta = cx+\gamma$ 。

即 $(a+b-c)x + a + \beta - \gamma = -2\sqrt{(ax+a)(bx+\beta)}$ 。

又自乘。則 $(a+b-c)^2x^2 + 2(a+b-c)(a+\beta-\gamma)x + (a+\beta-\gamma)^2 = 4(ax+a)(bx+\beta)$ 。

即 $(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)x^2 + 2(a^2a+ab\beta+c\gamma-b\gamma-c\beta-ca-a\gamma-a\beta-ba)x + a^2+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma-2\gamma a-2a\beta = 0$ 。

由是可從二次方程式而得其根。

〔餘論〕以上諸例。在平方根號之前所用之符號。無+與-之差異。蓋代數量之平方根。必有兩符號。決非僅有一符號。即如 $\sqrt{16}=\pm 4$ 。故僅書 $+\sqrt{x+1}$ 。或 $-\sqrt{x+1}$ 。雖偏用一符號。而與 $\pm\sqrt{x+1}$ 兼用兩符號者同意。

又 $x+\sqrt{x+1}$ 。決非僅為 $+\sqrt{x+1}$ 。而亦能為 $-\sqrt{x+1}$ 。

即 $x+\sqrt{x+1}$ 。可為 $x\pm\sqrt{x+1}$ 。

例如 $\sqrt{(x+1)}=5$ 。即 $x+1=25$ 。 $\therefore x=24$ 。

又 $-\sqrt{(x+1)}=5$ 。則亦 $x+1=25$ 。 $\therefore x=24$ 。

故 $x=24$ 。則 $\sqrt{x+1}=5$ 之根。即 $\sqrt{24+1}=5$ 。 $+5=5$ 。

又 $x=24$ 。則 $-\sqrt{x+1}=5$ 之根。即 $-\sqrt{24+1}=5$ 。 $-(-5)=5$ 。

即 $\sqrt{x+1}=5$ 。則用 $\sqrt{25}=+5$ 。

$-\sqrt{x+1}=5$ 。則用 $\sqrt{25}=-5$ 。

126 兩邊之平方 有理方程式之兩邊各自乘。則生增根。例如有理方程式 $A=B$ 之兩邊各方之。則得 $A^2=B^2$ 。即 $A^2-B^2=0$ 。即 $(A-B)(A+B)=0$ 。

$\therefore A=B$ 。 $A=-B$ 。此 $A=-B$ 之根為增根。

由是方程式之兩邊各自乘。必不能與原方程式等值。然在無理方程式。獨能與原方程式等值。而不生增根。例如 $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ 之兩邊各方之。則得 $A=B$ 。即 $A-B=0$ 。即 $(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})=0$ 。

$\therefore \sqrt{A}=\sqrt{B}$ 。 $\sqrt{A}=-\sqrt{B}$ 。

又 $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ 。原含有 $\pm\sqrt{A}=\pm\sqrt{B}$ 之意義。故有 $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ 。
 $-\sqrt{A}=-\sqrt{B}$ 。 $\sqrt{A}=-\sqrt{B}$ 。 $-\sqrt{A}=\sqrt{B}$ 之四根。而此四根兩兩相等。故實得 $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ 。 $\sqrt{A}=-\sqrt{B}$ 之二根。故無理方程式。若兩邊求其平方。則仍與原方程式等值。

例如 $x+1=\sqrt{x+13}$ 。 $x+1=-\sqrt{x+13}$ 此二式皆兩邊自乘。則皆得 $(x+1)^2=x+13$ 。可參觀(152章)。

127. 定理 二次方程式祇有二根。

在 90 章 x 之 n 次式。曾證 x 之值。若多於 n 個。則其式不能相消而為 0。故 x 之二次式 x 之值。若多於二個。其式亦不能相消而為 0。故 x 之二次方程式。其根不能多於二。特證之如次。

若 $ax^2+bx+c=0$ 。設 x 之三根為 α, β, γ 。則

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \dots\dots\dots (1)$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \dots\dots\dots (2)$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \dots\dots\dots (3)$$

而此三方程式 a, b, c 非皆等於 0。則同時不能適合。證之如次。

從 (1) 式及 (2) 式由減法得 $a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$ 。

即 $(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0$ 。

但 α, β 原設為不等。即 $\alpha-\beta \neq 0$ 。

故 $a(\alpha+\beta)+b=0 \dots\dots\dots (4)$

又 $\beta-\gamma \neq 0$ 。故 (2) (3) 兩式。亦與前同法得

$$a(\beta+\gamma)+b=0 \dots\dots\dots (5)$$

從 (4) (5) 兩式。由減法得 $a(\alpha-\gamma)=0 \dots\dots\dots (6)$

$\alpha-\gamma \neq 0$ 。故非 $a=0$ 。則 6 式為不合理。

若 (6) 式為合理。即 $a=0$ 。從 (4) 式。則 $b=0$ 。從 (1) 式。則 $c=0$ 。

由是二次方程式。若有三根。則各項之係數皆為 0。即為恆同式。不論 x 為如何之根。皆合於理。故非恆同式。則二次方程式之根。祇有二個。

[第一例] 解 $a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = x^2$ 式。

$$x=a \text{ 則 } a^2 \frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)} = a^2$$

即 $a^2+0=a^2$ 為合理。

又 $x=b$ 亦能合理。

而 $x=c$ 則 $a^2 \frac{(c-b)(c-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(c-c)(c-a)}{(b-c)(b-a)} = c^2$ 。其右邊為 c^2 。故不合理。

由是此方程式 x 之二根。為 a, b 。且為 x 之二次方程式。故非恆同式。

$$[\text{第二例}] \quad a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

此方程式。亦爲二次方程式。而 $x=a$, $x=b$, $x=c$ 皆能適合。即有三根。故爲恆同式。

$$[\text{第三例}] \quad a^3 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^3 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^3 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^3.$$

此方程式爲三次方程式。而 $x=a$, $x=b$, $x=c$ 皆能適合。又 $x=0$ 則不能適合。故非恆同式。

故此方程式。爲有 a, b, c 三根之三次方程式。

$$[\text{第四例}] \quad (a-a)^2x + (a-b)^2y + (a-c)^2z = (a-d)^2.$$

$$(b-a)^2x + (b-b)^2y + (b-c)^2z = (b-d)^2.$$

$$(c-a)^2x + (c-b)^2y + (c-c)^2z = (c-d)^2.$$

上之三方程式。證其合理如下。

$$\text{先設} \quad (d-a)^2x + (d-b)^2y + (d-c)^2z = (d-d)^2.$$

但 d 爲任意之數量。

再設方程式 $(X-a)^2x + (X-b)^2y + (X-c)^2z = (X-d)^2$ 。此式爲 X 之二次方程式。然令 $X=a$, $X=b$, $X=c$ 。則與最初之三方程式適合。是 X 之值有三個。故知此方程式。爲恆同式。即 X 爲任意之值。均能合理。

由是 $X=d$ 。亦必適合。

$$\text{即} \quad (d-a)^2x + (d-b)^2y + (d-c)^2z = (d-d)^2.$$

128* 根及係數之關係 示二次方程式之根與其係數之關係如下。

依 120 章 $ax^2 + bx + c = 0$ 之根。爲 $-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ 。此二根爲 α, β 。則

$$\alpha = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \beta = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

$$\text{由加法得} \quad \alpha + \beta = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{又由乘法得} \quad \alpha\beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \dots \dots \dots (2)$$

(1) 式及 (2) 式。所以示兩根之和及積。全賴係數而著。故此兩式爲最要之式。

[別法] $ax^2+bx+c=0$ 。即 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 。其二根爲 α, β 。則

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 。即 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ 。其二根亦爲 α, β 。故此兩方程式全同。

由是比較其 x 之係數及末項。則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \text{ 及 } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

129. 任意方程式之根及係數之關係 任何次數之方程式。其根與係數之關係。可依下之方法求得之。

x 之 n 次式。爲 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+\dots$ 。而 x 之 n 個之值。即 $x=\alpha, x=\beta, x=\gamma, \dots$ 。可以代入。而令其式爲零。

故 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+\dots=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots$

此方程式之兩邊。 x 之同方乘之係數相等。故可得根及係數之關係。(詳在 437 章)。

[例] 三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 三根爲 α, β, γ 。則

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d &= a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}. \end{aligned}$$

比較其兩邊之係數。則

$$\left. \begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha &= \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma &= -\frac{d}{a} \end{aligned} \right\}$$

任意次數之方程式。其次項(即比最高方乘少一次之項)之係數爲各根之和。故次項之係數爲 0。則其各根之和爲 0。

例如前之三次方程式。若 $b=0$ 。則

$$ax^3+cx+d=0. \text{ 即三根之和 } \alpha+\beta+\gamma=-\frac{0}{a}=0.$$

[附則] $x^3+px+q=0$ 之三根爲 a, b, c 。則 $a+b+c=0$ 。而得恆同式如下。

$$bc+ca+ab=p \dots\dots\dots (1)$$

$$abc=-q \dots\dots\dots (2)$$

而因 $a+b+c=0 \dots\dots\dots (3)$

故 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2p \dots\dots (4)$

又因 a, b, c 爲 $x^3+px+q=0$ 之三根。

$$\left. \begin{array}{l} a^3+pa+q=0 \\ b^3+pb+q=0 \\ c^3+pc+q=0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

從(5)式由加法得 $a^3+b^3+c^3+p(a+b+c)+3q=0$ 。

$$\therefore a^3+b^3+c^3=-3q \dots\dots\dots (6)$$

(5)式之第一第二第三。次第以 $a^{n-3}, b^{n-3}, c^{n-3}$ 乘之相加。則得

$$a^n+b^n+c^n+p(a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2})+q(a^{n-3}+b^{n-3}+c^{n-3})=0。$$

由是此方程式設 $n=4$ 。則

$$a^4+b^4+c^4+p(a^2+b^2+c^2)+q(a+b+c)=0。$$

$$\text{即 } a^4+b^4+c^4+p(-2p)+q(0)=0。$$

$$\therefore a^4+b^4+c^4=2p^2。$$

$$n=5。則 a^5+b^5+c^5+p(a^3+b^3+c^3)+q(a^2+b^2+c^2)=0。$$

$$\text{即 } a^5+b^5+c^5+p(-3q)+q(-2p)=0。$$

$$\therefore a^5+b^5+c^5=5pq。$$

$$n=6。則 a^6+b^6+c^6+p(a^4+b^4+c^4)+q(a^3+b^3+c^3)=0。$$

$$\text{即 } a^6+b^6+c^6+p(2p^2)+q(-3q)=0。$$

$$\therefore a^6+b^6+c^6=3q^2-2p^3。$$

$$n=7。則 a^7+b^7+c^7=-7p^2q。$$

$$\text{由是 } \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=pq, \frac{a^2+b^2+c^2}{2}=-p, \frac{a^3+b^3+c^3}{3}=-q。$$

$$\therefore \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{3}。$$

$$\text{又 } \frac{a^7+b^7+c^7}{7}=-p^2q=-p \cdot pq=\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^5+b^5+c^5}{5}。$$

又因 $2 \cdot \frac{a^4+b^4+c^4}{4} = p^2$. 故

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7} = -q \cdot p^2 = 2 \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \cdot \frac{a^4+b^4+c^4}{4}.$$

此例之應用在 308 章第二例。

130. 已知根之方程式 凡高次方程式之根。每不能以普通之法求得之。然已知其根而反求其方程式。則任爲如何之高次式。皆易求得之。

例如求 4 及 5 爲根之方程式。則 $x=4, x=5$. 即 $x-4=0, x-5=0$.

$$\therefore (x-4)(x-5)=0, \text{ 即 } x^2-9x+20=0.$$

又如有 2, 3 及 -4 之根。而求其方程式。則 $x=2, x=3, x=-4$. 即 $x-2=0, x-3=0, x+4=0$.

$$\therefore (x-2)(x-3)(x+4)=0. \text{ 即 } x^3-x^2-14x+24=0.$$

[註] 方程式 $x^2-9x+20=0$ 所有之根爲 4, 5. 此外不能再有他根明矣。然以含 x 之他方程乘之。則其根除 4, 5 之外。必別有他根。若以 $x^5+7x^2-2=0$ 之方程式。爲無根之式。則 $(x^2-9x+20)(x^5+7x^2-2)=0$. 即 $(x-4)(x-5)(x^5+7x^2-2)=0$ 之方程式。亦另以 4 及 5 爲根。而別無他根。即與前之 $x^2-9x+20=0$ 方程式同。必無是理。

謂各方程式必有一根者。可以論理方程式。(Theory of Equations) 證明之。但屬於高等數學之部分。茲從略。

[第一例] a, β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之二根。則以 $\frac{a}{\beta}, \frac{\beta}{a}$ 爲二根之方程式若何。

$ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 a, β . 故由 128 章

$$a+\beta = -\frac{b}{a} \text{ 及 } a\beta = \frac{c}{a}.$$

又所求之方程式爲 $\left(x-\frac{\beta}{a}\right)\left(x-\frac{a}{\beta}\right)=0$.

$$\text{即 } x^2 - \left(\frac{\beta^2+a^2}{a\beta}\right)x + 1 = 0.$$

$$\text{即 } a\beta x^2 - \{(a+\beta)^2 - 2a\beta\}x + a\beta = 0.$$

$$\therefore \frac{c}{a}x^2 - \left\{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right\}x + \frac{c}{a} = 0$$

[第二例] a, β, γ 爲 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根。則 $\beta\gamma, \gamma a, a\beta$ 爲三根之方程式若何。

$$\text{由 129 章 } a+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, a\beta+\beta\gamma+\gamma a=\frac{c}{a}, a\beta\gamma=-\frac{d}{a}.$$

又所求之方程式爲 $(x-a\beta)(x-\beta\gamma)(x-\gamma a)=0$ 。

$$\text{即 } x^3-(a\beta+\beta\gamma+\gamma a)x^2+a\beta\gamma(a+\beta+\gamma)x-a^2\beta^2\gamma^2=0.$$

$$\therefore x^3-\frac{c}{a}x^2+\frac{bd}{a^2}x-\frac{d^2}{a^2}=0.$$

$$\text{即 } a^2x^3-acx^2+bdx-d^2=0.$$

131. 二次三項式之值 論其變化如下。

代數式 ax^2+bx+c 。因 x 之值變而全式之值亦變。然 x 爲任意之實數。可自 $+\infty$ 變至 $-\infty$ 。而此式之值。則僅限於其能變之值。不能任意變化之。

如 $2x-6$ 之一次式欲變爲 5。則令 $2x-6=5$ 。即 $x=5\frac{1}{2}$ 又欲變爲 0。則令 $2x-6=0$ 。即 $x=3$ 。其他不論如何之值。皆可變得。惟在二次式內。決不能如此。

代數式 ax^2+bx+c 用適宜之實數代 x 。令全式之值爲 λ 。即 $ax^2+bx+c=\lambda$ 。然此方程式。能否爲實根。其關係式由 121 章而得。

$$b^2-4a(c-\lambda)>0.$$

$$\text{即 } b^2-4ac+4a\lambda>0. \dots\dots\dots (1)$$

[第一] b^2-4ac 爲正。則在 (1) 式內之 $4a\lambda$ 。不論爲如何之正數。皆合於理。又 $4a\lambda$ 不大於 b^2-4ac 。則不論爲如何之負數。亦皆合理。以能與關係式 (即 (1) 式) 適合。而不致原式中 x 爲虛根也。

故 b^2-4ac 爲正。則在 ax^2+bx+c 式以實數代 x 。其值爲 λ 。則與 a 同號 (λ 與 a 同號。則 $4a\lambda$ 爲正) 之各數。皆合於理。又與 a 異號 (λ 與 a 異號。則 $4a\lambda$ 爲負) 而小於 $\frac{b^2-4ac}{4a}$ 之負數。亦能合理。

例如 $3x^2-7x+2$ 之式內。其 $(-7)^2-4\times 3\times 2>0$ 。故此式之值。能得任何之正數值。又能得比 $\frac{(-7)^2-4\times 3\times 2}{4\times 3}=2\frac{1}{12}$ 小之負數值。即用

任意之實數代 x 。則此式之值。可得任何之正數值。又可得比 $2\frac{1}{12}$ 小之負數值。

〔第二〕若 b^2-4ac 爲負。則在(1)式內之 $4a\lambda$ 。爲不比 $4ac-b^2$ 小之各正數值。皆合於理。

故 b^2-4ac 爲負。則以實數代 x 。而 ax^2+bx+c 之值。恆與 a 同號。而不小於 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 。

例如 $3x^2-2x+7$ 。則得 $(-2)^2-4\times 3\times 7 < 0$ 。故此式之值。由實數代 x 而得者。必不小於 $\frac{4\times 3\times 7-(-2)^2}{4\times 3}=6\frac{2}{3}$ 。

〔第三〕若 b^2-4ac 爲 0。則在(1)式內。其 $a\lambda$ 爲任何正數值。皆合於理。

依第一第二兩例。可知以下諸事。

代數式 ax^2+bx+c 。其 b^2-4ac 爲負或爲 0。則無論用如何之數代 x 。而不變其號。

即方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根爲虛根。或爲等根。則代數式 ax^2+bx+c 內。以任何實數代 x 。而所得之值。其號不變。

若方程式 $ax^2+bx+c=0$ 。爲不等之實根。則此代數式內。用任何實數以代 x 。恆變其號。

例如 $3x^2-2x+7=0$ 之兩根。爲 $\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{-20})$ 。即虛根。故 $3x^2-2x+7$ 之值。若 $x=0$ 則爲 $+7$ 。 $x=1$ 則爲 $+8$ 。 $x=10$ 則爲 $+287$ 。又 $x=-1$ 則爲 $+12$ 。其數恆爲正。

又 $-9x^2+12x-16=0$ 爲等根。即 $\frac{4}{3}$ 。故在 $-9x^2+12x-16$ 式內。無論用如何之實數代 x 。其數恆爲負。

又 $x^2-9x+18=0$ 。有不等之兩實根 3 及 6。故 $x^2-9x+18$ 之值。若 $x=2$ 則爲 $+4$ 。 $x=4$ 則爲 -2 。其號已變。又若 $x=7$ 則爲 $+4$ 。其號又變。

此證又可從下法得之。

方程式 $ax^2+bx+c=0$ 。爲有不等之二實根 α, β ，

則 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 。

但 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 其 x 之值。大於 α 及 β 。或小於 α 及 β 。則其數皆爲正。何則。 x 之值。若皆比 α, β 大。則 $x-\alpha, x-\beta$ 之積爲正。若皆比 α, β 小。則 $x-\alpha, x-\beta$ 爲負。而其積亦爲正數。

故以任意之值。代入方程式 ax^2+bx+c 中之 x 。如 x 之值。不在方程式兩根之間。則所得之值。必恆與 a 同號。

若所代 x 之值。在 α, β 兩根之間。則 $x-\alpha$ 與 $x-\beta$ 異號。即 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 爲負。故代數式 ax^2+bx+c 。即 $a(x-\alpha)(x-\beta)$ 之值。與 a 異號。

132. 別法 二次三項式 ax^2+bx+c 之值。從其 b^2-4ac 之正或負。而對於 x 之種種之值。變其號或不變其號。以別法證之如下。

$$\text{先設 } ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\} \dots\dots\dots (A)$$

[第一] b^2-4ac 爲正。

則在 (A) 式內。若 $x=-\frac{b}{2a}$ 。則此代數式爲負。若 x 增大至 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 大於 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 。則此代數式爲正。

故 b^2-4ac 爲正。則代數式 ax^2+bx+c 用適宜之實數值代 x 。則變其號。

[第二] b^2-4ac 爲負或爲零。

惟 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 恆爲正。而 $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲正或爲零。則 (A) 式必恆爲正。故代數式 ax^2+bx+c 。其 b^2-4ac 爲負或爲零。則 x 無論爲如何之數值。而不變其號。即常與 a 同號。

133. 應用 依 131 章及 132 章。於 x 之二次式。用適宜之實數值代 x 而變其號。則其方程式之實根。即可因此推知。

例如在代數式 $a^2(x-\beta)(x-\gamma)+b^2(x-\gamma)(x-\alpha)+c^2(x-\alpha)(x-\beta)$ 內。其 α, β, γ 依大小順序之爲 $\alpha > \beta > \gamma$ 。則此代數式。若 $x=\alpha$ 。其數必爲正。何則。 $\alpha-\beta$ 與 $\alpha-\gamma$ 皆爲正。故 $a^2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+0+0$ 爲正。

又 $x = \beta$ 。則 $0 + b^2(\beta - \gamma)(\beta - a) + 0$ 即 $-b^2(\beta - \gamma)(a - \beta)$ 爲負。

由是方程式 $a^2(x - \beta)(x - \gamma) + b^2(x - \gamma)(x - a) + c^2(x - a)(x - \beta) = 0$ 。在其代數式內。用 a, β 以代 x 。即必變其號。故 $a, b, c, a, \beta, \gamma$ 對於各實數值。皆爲實根。

〔第一例〕 $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10$ 。試就 x 之一切實數值。而證其數爲正。

$$\begin{aligned} \text{此代數式} &= \{(x-1)(x-6)\} \{(x-3)(x-4)\} + 10 \\ &= (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10 \\ &= (x^2 - 7x)^2 + 18(x^2 - 7x) + 82 \\ &= (x^2 - 7x + 9)^2 + 1. \end{aligned}$$

即 $(x^2 - 7x + 9)^2$ 。則以一切實數代 x 。其數皆爲正。

〔第二例〕 $\frac{4x^2 + 36x + 9}{12x^2 + 8x + 1}$ 。用適宜之實數值代 x 。則可得任意之實數值。試證之。

$$\text{令 } \frac{4x^2 + 36x + 9}{12x^2 + 8x + 1} = \lambda.$$

$$\text{則 } x^2(4 - 12\lambda) + (36 - 8\lambda)x + (9 - \lambda) = 0.$$

在此方程式內。 x 爲實根之關係。由 121 章。得

$$(36 - 8\lambda)^2 - 4(4 - 12\lambda)(9 - \lambda) > 0$$

$$\text{即 } 16(\lambda^2 - 8\lambda + 72) > 0.$$

$$\text{即 } 16(\lambda - 4)^2 + 896 > 0.$$

即上之關係 λ 爲任意之值。其式常爲正而大於 0。故能合理。故用適宜之實數值代 x 。可得 λ 爲任意之實數值。

〔第三例〕 $\frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x + 4}$ 。若 x 爲實數值。可證其式不大於 7。又不小於 $\frac{1}{7}$ 。

$$\text{令 } \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x + 4} = \lambda. \text{ 則 } x^2(1 - \lambda) - 3x(1 + \lambda) + 4(1 - \lambda) = 0.$$

x 爲實根。則其關係爲 $9(1 + \lambda)^2 - 16(1 - \lambda)^2 > 0$ 。

$$\text{即 } \{3(1 + \lambda) + 4(1 - \lambda)\} \{3(1 + \lambda) - 4(1 - \lambda)\} > 0,$$

$$\text{即 } -7(\lambda-7)\left(\lambda-\frac{1}{7}\right) > 0.$$

由上之關係 $\lambda-7$ 及 $\lambda-\frac{1}{7}$ ，可知其號相異，故 λ 在 7 與 $\frac{1}{7}$ 之間。

例 題 十

試解下列之方程式。

$$1. (x-a+2b)^2 - (x-2a+b)^2 = (a+b)^2.$$

$$[\text{解}] (x-a+2b)^2 - (x-2a+b)^2 = \{(x-a+2b) - (x-2a+b)\}^2.$$

$$\text{即 } (x-a+2b)^2 - (x-2a+b)^2 = (x-a+2b)^2 - (x-2a+b)^2 \\ - 3(x-a+2b)(x-2a+b)\{(x-a+2b) - (x-2a+b)\}.$$

$$\therefore 0 = -3(x-a+2b)(x-2a+b)(a+b).$$

由是 $x=a-2b$ ，或 $2a-b$ 。

$$2. (c+a-2b)x^2 + (a+b-2c)x + (b+c-2a) = 0.$$

$$[\text{解}] (c+a-2b)x^2 + (a+b-2c)x - (c+a-2b) - (a+b-2c) = 0.$$

$$\text{即 } (c+a-2b)(x^2-1) + (a+b-2c)(x-1) = 0.$$

$$\text{即 } (x-1)\{(c+a-2b)(x+1) + a+b-2c\} = 0.$$

$$\therefore x-1=0, \text{ 或 } (c+a-2b)(x+1) + a+b-2c=0.$$

$$\text{由是 } x=1, \text{ 或 } x = \frac{b+c-2a}{c+a-2b}.$$

$$3. \frac{a^2}{(x-a)^2} = \frac{b^2}{(x+b)^2}.$$

〔解〕去分母，則 $a^2(x+b)^2 = b^2(x-a)^2$ 。兩邊開平方，則

$$a(x+b) = \pm b(x-a). \quad \therefore x = \frac{-ab \mp ab}{a \mp b} = 0, \text{ 或 } \frac{2ab}{a-b}.$$

$$4. \frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = 2\frac{1}{2}.$$

$$[\text{解}] \frac{a+x}{b+x} - 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{b+x}{a+x}\right) = 0. \text{ 即 } \left(\frac{a+x}{b+x} - 2\right) - \frac{b+x}{2(a+x)} \left(\frac{a+x}{b+x} - 2\right) = 0.$$

$$\text{即 } \left(\frac{a+x}{b+x} - 2\right) \left(1 - \frac{b+x}{2(a+x)}\right) = 0. \quad \therefore \frac{a+x}{b+x} - 2 = 0, \text{ 或 } 1 - \frac{b+x}{2(a+x)} = 0.$$

由是 $x=a-2b$ ，或 $b-2a$ 。

$$5. \frac{ax+b}{a+bx} = \frac{cx+d}{c+dx}$$

[解] 去分母。則 $ada^2 + (ac+bd)x + bc = bca^2 + (ac+bd)x + ad$ 。

$\therefore x^2(ad-bc) = ad-bc$ 。由是 $x = \pm 1$ 。

$$6. \frac{a-x}{1-ax} = \frac{1-bx}{b-x}$$

[答 ± 1]

$$7. \frac{3x-4}{x+1} = x^2 + 2x - \frac{7}{x+1}$$

[解] $\frac{3x-4}{x+1} + \frac{7}{x+1} = x^2 + 2x$ 。即 $\frac{3(x+1)}{x+1} = x^2 + 2x$ 。

即 $3 = x^2 + 2x$ 。 $\therefore 4 = x^2 + 2x + 1$ 。 $\therefore \pm 2 = x + 1$ 。

由是 $x = 1$ ，或 -3 。

$$8. x+1 + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{x+1} + \frac{5x-4}{x^2-1}$$

[解] $x+1 + \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \frac{x^2}{x+1}$ 。即 $x+1 + \frac{x-4}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$(A)

去分母。則 $x^2 + 2x + 1 + x - 4 = x^2$ 。 $\therefore x = 1$ 。

[餘論] 此方程式之根 $x = 1$ 。用於原方程式。則

$1+1 + \frac{1-5+4}{1-1} = \frac{1}{1+1}$ 根為 $2 + \infty = \frac{1}{2}$ 不能適合。然用於(A)式。則

$1+1 + \frac{1-4}{1+1}$ 即 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 為能適合。

故原方程式。不以 $x-1$ 約之而變為(A)式。即不能合理。凡此皆當研究者也。

例如 $\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ 若 $x=2$ 。則 $\frac{4+2-6}{4-4} = \frac{0}{0}$ 不能適合。然以所含 $x-2$ 之

因子約之。則

$\frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+3}{x+2}$ 而得 $\frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$ 。故遇不整方程式時。於

此最當注意。

$$9. \frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+8} = 0.$$

$$[\text{解}] \left(\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x+8} \right) + \left(\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+6} \right) = 0. \text{ 即 } \frac{2x}{x^2-64} + \frac{2x}{x^2-36} = 0.$$

$$\therefore x=0. \text{ 或 } \frac{1}{x^2-64} + \frac{1}{x^2-36} = 0. \therefore x=0, \text{ 或 } \pm 5\sqrt{2}.$$

$$10. \frac{2}{x+8} + \frac{5}{x+9} = \frac{3}{x+15} + \frac{4}{x+6}.$$

$$[\text{解}] \frac{2}{x+8} - \frac{3}{x+15} = \frac{4}{x+6} - \frac{5}{x+9}. \text{ 即 } \frac{-x+6}{(x+8)(x+15)} = \frac{-x+6}{(x+6)(x+9)}.$$

$$\therefore -x+6=0. \text{ 或 } (x+8)(x+15) = (x+6)(x+9). \therefore x=6, \text{ 或 } -8\frac{1}{4}.$$

$$11. \frac{2}{2x-3} + \frac{1}{x-2} = \frac{6}{3x+2}.$$

答 $\frac{50}{29}$

$$12. \frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-c} + \frac{x-c}{x-a} = 3.$$

$$[\text{解}] \frac{x-a}{x-b} - 1 + \frac{x-b}{x-c} - 1 + \frac{x-c}{x-a} - 1 = 0.$$

$$\text{即 } \frac{b-a}{x-b} + \frac{c-b}{x-c} + \frac{a-c}{x-a} = 0. \text{ 去分母. 則}$$

$$(b-a)(x-c)(x-a) + (c-b)(x-a)(x-b) + (a-c)(x-b)(x-c) = 0.$$

$$\text{即 } x\{(a-b)(c+a) + (b-c)(a+b) + (c-a)(b+c)\};$$

$$= ca(a-b) + ab(b-c) + bc(c-a).$$

$$\therefore x = \frac{a^2c + b^2a + c^2b - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}.$$

$$13. \frac{x+a}{a-x} + \frac{x+b}{b-x} + \frac{x-c}{c-x} = 3.$$

$$[\text{解}] \frac{x+a}{a-x} - 1 + \frac{x+b}{b-x} - 1 + \frac{x+c}{c-x} - 1 = 0.$$

$$\text{即 } \frac{2x}{a-x} + \frac{2x}{b-x} + \frac{2x}{c-x} = 0. \therefore x=0.$$

$$\text{或 } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} + \frac{1}{c-x} = 0. \text{ 去分母. 則}$$

$$(b-x)(c-x) + (c-x)(a-x) + (a-x)(b-x) = 0.$$

$$\text{即 } 3x^2 - 2x(a+b+c) + bc + ca + ab = 0.$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \left\{ a+b+c \pm \sqrt{(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)} \right\}.$$

$$14. \quad \frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} = 3.$$

$$[\text{解}] \quad \frac{x+a}{x-a} - 1 + \frac{x+b}{x-b} - 1 + \frac{x+c}{x-c} - 1 = 0.$$

$$\text{即} \quad \frac{2a}{x-a} + \frac{2b}{x-b} + \frac{2c}{x-c} = 0. \text{去分母, 則}$$

$$a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0.$$

$$\text{即} \quad x^2(a+b+c) - 2x(ab+bc+ca) + 3abc = 0.$$

$$\therefore x = \frac{1}{a+b+c} [ab+bc+ca \pm \sqrt{\{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - abc(a+b+c)\}}]$$

$$15. \quad \frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = 4 + \frac{x-7}{x-1}.$$

〔解〕 以各項之分母除其分子, 而取整數之商, 則

$$2 - \frac{3}{x+1} + 3 - \frac{7}{x+2} = 4 + 1 - \frac{6}{x-1}. \quad \therefore \frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} = \frac{6}{x-1}.$$

去分母, 則 $3(x+2)(x-1) + 7(x^2-1) = 6(x+2)(x+1)$.

$$\text{即} \quad 4x^2 - 15x - 25 = 0. \quad \therefore x = 5, \text{或} -\frac{5}{4}.$$

$$16. \quad \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}.$$

$$[\text{解}] \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x}. \quad \text{即} \quad \frac{x}{6} = \frac{1}{x}. \quad \therefore x = \pm\sqrt{6}.$$

$$17. \quad \frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x-b}{x+b} = 0.$$

$$[\text{解}] \quad \frac{2(x^2+a^2)}{x^2-a^2} + \frac{2(x^2+b^2)}{x^2-b^2} = 0. \text{去分母, 則}$$

$$(x^2+a^2)(x^2-b^2) + (x^2-a^2)(x^2+b^2) = 0. \quad \text{即} \quad 2x^4 - 2a^2b^2 = 0.$$

由是 $x^2 = \pm ab$. $\therefore x = \pm\sqrt{ab}$, 或 $\pm\sqrt{-ab}$.

$$18. \quad \frac{x-1}{x+1} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3}$$

$$[\text{解}] \quad \frac{x-1}{x+1} + 1 + \frac{x-4}{x+4} + 1 = \frac{x-2}{x+2} + 1 + \frac{x-3}{x+3} + 1.$$

$$\text{即} \quad \frac{2x}{x+1} + \frac{2x}{x+4} = \frac{2x}{x+2} + \frac{2x}{x+3}. \quad \therefore x = 0.$$

$$\text{或 } \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

$$\text{即 } \frac{2x+5}{(x+1)(x+4)} = \frac{2x+5}{(x+2)(x+3)} \quad \therefore 2x+5=0. \quad \therefore x = -\frac{5}{2}$$

$$\text{或 } (x+1)(x+4) = (x+2)(x+3)$$

則 $x^2+5x+4 = x^2+5x+6$ 。但此關係與有限之根不合。故去之。

$$19. \quad \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$$

〔解〕 兩邊之分子爲1。故分母相等。

$$\text{故 } x+a + \frac{1}{x+b} = x-a + \frac{1}{x-b} \quad \therefore 2a = \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x+b}$$

$$\text{去分母, 則 } a(x^2-b^2) = b. \quad \therefore x = \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a} + b^2\right)}$$

$$20. \quad \frac{1}{3a-x} + \frac{1}{3b-x} + \frac{1}{3c-x} = 0.$$

〔解〕 去分母。則 $(3b-x)(3c-x) + (3c-x)(3a-x) + (3a-x)(3b-x) = 0$ 。

$$\text{即 } 3x^2 - 6x(a+b+c) + 9(bc+ca+ab) = 0.$$

$$\therefore x = a+b+c \pm \sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}.$$

$$21. \quad \frac{a+b}{x+b} + \frac{a+c}{x+c} = \frac{2(a+b+c)}{x+b+c}$$

$$\text{〔解〕 } \frac{a+b}{x+b} - 1 + \frac{a+c}{x+c} - 1 = \frac{2a+2b+2c}{x+b+c} - 2.$$

$$\text{即 } \frac{a-x}{x+b} + \frac{a-x}{x+c} = \frac{2(a-x)}{x+b+c} \quad \therefore x = a.$$

$$\text{或 } \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} = \frac{2}{x+b+c} \quad \therefore \frac{x+b+c}{x+b} + \frac{x+b+c}{x+c} = 2.$$

$$\text{即 } 1 + \frac{c}{x+b} + 1 + \frac{b}{x+c} = 2. \quad \therefore \frac{c}{x+b} + \frac{b}{x+c} = 0.$$

$$\therefore x = -\frac{b^2+c^2}{b+c}.$$

$$22. \quad \frac{a+c}{x+2b} + \frac{b+c}{x+2a} = \frac{a+b+2c}{x+a+b}$$

$$〔解〕 \frac{a+c}{x+2b} - \frac{a+c}{x+a+b} = \frac{b+c}{x+a+b} - \frac{b+c}{x+2a}$$

$$即 \frac{(a+c)(x-b)}{(x+2b)(x+a+b)} = \frac{(b+c)(x-b)}{(x+a+b)(x+2a)} \quad \therefore \frac{a+c}{x+2b} = \frac{b+c}{x+2a}$$

由是 $x = -2(a+b+c)$ 。

$$23. \frac{x-b}{x-a} - \frac{x-a}{x-b} = \frac{2(a-b)}{x-a-b}$$

$$〔解〕 1 + \frac{a-b}{x-a} \left(1 - \frac{a-b}{x-b}\right) = \frac{2(a-b)}{x-a-b}$$

$$\therefore \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{2}{x-a-b} \quad \therefore \frac{x-a-b}{x-a} + \frac{x-a-b}{x-b} = 2$$

$$即 1 - \frac{b}{x-a} + 1 - \frac{a}{x-b} = 2 \quad \therefore \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b} = 0$$

由是 $x = \frac{a^2+b^2}{a+b}$ 。

$$24. \frac{(x+a)(x+b)}{x+a+b} = \frac{(x+c)(x+d)}{x+c+d}$$

$$〔解〕 \frac{x(x+a+b)+ab}{x+a+b} = \frac{x(x+c+d)+cd}{x+c+d}$$

$$即 x + \frac{ab}{x+a+b} = x + \frac{cd}{x+c+d} \quad \therefore \frac{ab}{x+a+b} = \frac{cd}{x+c+d}$$

$$\therefore x = \frac{cd(a+b) - ab(c+d)}{ab - cd}$$

$$25. \frac{a(c-d)}{x+a} + \frac{d(a-b)}{x+d} = \frac{b(c-d)}{x+b} + \frac{c(a-b)}{x+c}$$

$$〔解〕 (c-d) \left(\frac{a}{x+a} - \frac{b}{x+b} \right) = (a-b) \left(\frac{c}{x+c} - \frac{d}{x+d} \right)$$

$$即 \frac{(c-d)(a-b)x}{(x+a)(x+b)} = \frac{(a-b)(c-d)x}{(x+c)(x+d)} \quad \therefore x=0$$

$$或 \frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{(x+c)(x+d)} \quad \therefore x = \frac{cd - ab}{a+b-c-d}$$

$$26. \frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$$

$$〔解〕 \frac{(a+b)x - a^2 - b^2}{ab} = \frac{(a+b)x - a^2 - b^2}{(x-a)(x-b)} \quad \therefore \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

或 $ab=(x-a)(x-b)$, $\therefore x=0$, 或 $a+b$.

$$27. \frac{a-b}{x+a-b} + \frac{b-c}{x+b-c} + \frac{c-a}{x+c-a} = 0.$$

[解] 去分母。則 $(a-b)(x+b-c)(x+c-a) + (b-c)(x+c-a)(x+a-b) + (c-a)(x+a-b)(x+b-c) = 0$.

即 $-x\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} + 3(a-b)(b-c)(c-a) = 0$

$$\therefore x = \frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$$

$$28. \frac{1}{1+2x} - \frac{2}{2+3x} + \frac{3}{3+4x} - \frac{4}{4+5x} = 0.$$

[解] $\frac{-x}{(1+2x)(2+3x)} + \frac{-x}{(3+4x)(4+5x)} = 0$, $\therefore x=0$.

或 $(3+4x)(4+5x) + (1+2x)(2+3x) = 0$, $\therefore x = \frac{1}{26}(19 \pm \sqrt{-3})$.

$$29. \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ma)(x-mb)} = \frac{(x+a)(x+b)}{(x+ma)(x+mb)}$$

[解] $\frac{(x+ma)(x+mb)}{(x-ma)(x-mb)} = \frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}$

即 $\frac{x^2 + mx(a+b) + m^2ab}{x^2 - mx(a+b) + m^2ab} = \frac{x^2 + x(a+b) + ab}{x^2 - x(a+b) + ab}$ 兩邊各減 1, 則

$$\frac{2mx(a+b)}{x^2 - mx(a+b) + m^2ab} = \frac{2x(a+b)}{x^2 - x(a+b) + ab} \quad \therefore x=0.$$

或 $\frac{m}{x^2 - mx(a+b) + m^2ab} = \frac{1}{x^2 - x(a+b) + ab}$ $\therefore x = \pm \sqrt{mab}$.

$$30. \sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}.$$

[解] $\sqrt{2x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$ 兩邊自乘。則

$$2x+9 = x+1+x-4+2\sqrt{(x+1)(x-4)}. \quad \therefore 6 = \sqrt{(x+1)(x-4)}.$$

兩邊自乘。則 $36 = x^2 - 3x - 4$. $\therefore x = 8$, 或 -5 .

$$31. \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}.$$

[解] 求兩邊之平方。則得

$$(x-1)(x-2) + (x-3)(x-4) + 2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = 2.$$

即 $x^2 - 5x + 6 = -\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$.

$$\text{又 } (x-2)^2(x-3)^2=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

$$\therefore (x-2)(x-3)\{(x-2)(x-3)-(x-1)(x-4)\}=0.$$

$$\text{即 } (x-2)(x-3)\{2\}=0. \quad \therefore x=2, \text{ 或 } 3.$$

$$32. \sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}.$$

[解] 兩邊求其平方。化爲簡式。則

$$\sqrt{(7x-5)(4x-1)}=\sqrt{(7x-4)(4x-2)}.$$

$$\therefore (7x-5)(4x-1)=(7x-4)(4x-2). \quad \therefore x=1.$$

$$33. \sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2+x}=a+b.$$

[解] 求兩邊之平方。則 $a^2-x+b^2+x+2\sqrt{(a^2-x)(b^2+x)}=(a+b)^2$ 。

$$\therefore \sqrt{(a^2-x)(b^2+x)}=ab. \quad \therefore a^2b^2+(a^2-b^2)x-x^2=a^2b^2.$$

由是 $x=0$, 或 a^2-b^2 。

$$34. \sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}.$$

[解] 兩邊自乘而簡之。則 $2\sqrt{(a-x)(b-x)}=0. \quad \therefore x=a, b.$

$$35. \sqrt{a-bx}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{a+c-(b+d)x}. \quad \left[\text{答 } x=\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$$

$$36. \sqrt{ax+b^2}+\sqrt{bx+a^2}=a-b.$$

[解] $(ax+b^2)-(bx+a^2)=(a-b)x-(a^2-b^2)$ 其式已明。又以原方程式除之。則 $\sqrt{ax+b^2}-\sqrt{bx+a^2}=x-(a+b)$,

與原方程式相加。則 $2\sqrt{ax+b^2}=x-2b$ 。

$$\therefore 4(ax+b^2)=x^2-4bx+4b^2. \quad \therefore x=0. \text{ 或 } 4(a+b).$$

$$37. \sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b+2x}. \quad \left[\text{答 } x=-a, \text{ 或 } -b\right]$$

$$38. \sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{2a+2b}.$$

[解] 兩邊各求其平方。則 $a+b+2\sqrt{(a-x)(b+x)}=2a+2b$ 。

$$\therefore 4(a-x)(b+x)=(a+b)^2. \quad \text{即 } 4\{ab+(a-b)x-x^2\}=(a+b)^2.$$

$$\therefore 4x^2-4(a-b)x+(a-b)^2=0. \quad \text{即 } \{2x-(a-b)\}^2=0.$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}(a-b).$$

$$39. \sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}=2\sqrt{ax}.$$

[解] 兩邊求其平方。則

$$(a+x)(x+b)+2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}+(a-x)(x-b)=4ax.$$

$$\therefore \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)} = (a-b)x, \quad \therefore (a^2-x^2)(x^2-b^2) = (a-b)^2x^2.$$

$$\text{即 } -x^4 + (a^2+b^2)x^2 - a^2b^2 = (a^2+b^2-2ab)x^2$$

$$\therefore x^4 - 2abx^2 + a^2b^2 = 0. \quad \text{即 } (x^2-ab)^2 = 0. \quad \therefore x = \pm\sqrt{ab}.$$

$$\sqrt[40]{\sqrt{a(a+b+x)} - \sqrt{a(a+b-x)}} = x.$$

[解] $a(a+b+x) - a(a+b-x) = 2ax$, 其式已明。

以原方程式除之。則 $\sqrt{a(a+b+x)} + \sqrt{a(a+b-x)} = 2a$ 。

但 $x \neq 0$ 。由加法。得 $2\sqrt{a(a+b+x)} = 2a+x$ 。

$$\therefore 4a(a+b+x) = 4a^2 + 4ax + x^2. \quad \therefore x = \pm 2\sqrt{ab}.$$

$$41. \sqrt{x^2+ax+b^2} - \sqrt{x^2-ax+b^2} = 2a.$$

[解] $(x^2+ax+b^2) - (x^2-ax+b^2) = 2ax$ 其式已明。

由除法。得 $\sqrt{x^2+ax+b^2} + \sqrt{x^2-ax+b^2} = x$ 。

由加法。得 $2\sqrt{x^2+ax+b^2} = x+2a$ 。

$$\therefore 4(x^2+ax+b^2) = x^2+4ax+4a^2. \quad \therefore x = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2-b^2)}.$$

$$42. \sqrt{x^2+ax+a^2} + \sqrt{x^2-ax+a^2} = \sqrt{2a^2-2b^2}.$$

[解] 兩邊求其平方。則

$$x^2+ax+a^2+2\sqrt{(x^2+a^2x^2+a^4)}+x^2-ax+a^2=2a^2-2b^2.$$

$$\therefore \sqrt{(x^2+a^2x^2+a^4)} = -x^2-b^2. \quad \therefore x^4+a^2x^2+a^4 = x^4+2b^2x^2+b^4.$$

由是 $x = \pm \sqrt{\frac{b^4-a^4}{a^2-2b^2}}$ 。

$$43. \sqrt{ax-b} + \sqrt{cx+b} = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx-b}.$$

[解] 兩邊自乘而簡之。則 $\sqrt{(ax-b)(cx+b)} = \sqrt{(ax+b)(cx-b)}$ 。

$$\therefore acx^2+bx(a-c)-b^2 = acx^2-bx(a-c)-b^2. \quad \therefore x=0.$$

$$44. \sqrt{x(a+b-x)} + \sqrt{a(b+x-a)} + \sqrt{b(a+x-b)} = 0.$$

[解] $\sqrt{x(a+b-x)} = -\sqrt{a(b+x-a)} - \sqrt{b(a+x-b)}$ 。

兩邊自乘。則 $x(a+b-x) = a(b+x-a) + b(a+x-b) + 2\sqrt{ab\{x^2-(a-b)^2\}}$ 。

$$\therefore x^2-(a-b)^2 = -2\sqrt{ab\{x^2-(a-b)^2\}}.$$

$$\{x^2-(a-b)^2\}^2 = 4ab\{x^2-(a-b)^2\}.$$

由是 $x^2-(a-b)^2 = 0$ 。或 $x^2-(a-b)^2 = 4ab$ 。

即 $x^2 = (a-b)^2$ 。或 $(a+b)^2$ 。 $\therefore x = \pm(a-b)$, $\pm(a+b)$ 。

45. $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} + \sqrt{x+c} = 0.$

[解] $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = -\sqrt{x+c}$ 兩邊求其平方, 則

$$x+a+x+b+2\sqrt{(x+a)(x+b)} = x+c.$$

$\therefore x+(a+b-c) = -2\sqrt{x^2+x(a+b)+ab}$ 兩邊自乘, 則

$$x^2+2x(a+b-c)+(a+b-c)^2 = 4x^2+4x(a+b)+4ab.$$

$\therefore 3x^2+2x(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca) = 0.$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \left\{ a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca} \right\}.$$

46. $\sqrt{ab(a+b+x)} = \sqrt{a(a+b)(b-x)} + \sqrt{b(a+b)(a-x)}.$

[解] 兩邊平方之, 則

$$ab(a+b+x) = a(a+b)(b-x) + b(a+b)(a-x) + 2(a+b)\sqrt{ab(a-x)(b-x)}.$$

$$\text{即 } ab(x-a-b) + x(a+b)^2 = 2(a+b)\sqrt{ab\{ab+x(x-a-b)\}}.$$

兩邊平方之, 則

$$\begin{aligned} a^2b^2(x-a-b)^2 + 2abx(x-a-b)(a+b)^2 + x^2(a+b)^4 \\ = 4a^2b^2(a+b)^2 + 4abx(x-a-b)(a+b)^2. \end{aligned}$$

$$\therefore a^2b^2(x-a-b)^2 - 2abx(x-a-b)(a+b)^2 + x^2(a+b)^4 = 4a^2b^2(a+b)^2.$$

兩邊開平方, 則 $ab(x-a-b) - x(a+b)^2 = \pm 2ab(a+b).$

$$\therefore x = \frac{\mp 2ab(a+b) - ab(a+b)}{(a+b)^2 - ab} = \frac{-3ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}, \text{ 或 } \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}.$$

47. $\sqrt{x^2-b^2-c^2} + \sqrt{x^2-c^2-a^2} + \sqrt{x^2-a^2-b^2} = x.$

[解] $\sqrt{x^2-b^2-c^2} + \sqrt{x^2-c^2-a^2} = x - \sqrt{x^2-a^2-b^2}$ 兩邊平方之, 則

$$x^2-b^2-c^2+x^2-c^2-a^2+2\sqrt{(x^2-b^2-c^2)(x^2-c^2-a^2)}.$$

$$= x^2+x^2-a^2-b^2-2x\sqrt{x^2-a^2-b^2}.$$

即 $\sqrt{(x^2-b^2-c^2)(x^2-c^2-a^2)} = c^2 - x\sqrt{x^2-a^2-b^2}.$ 又平方之, 則

$$x^4 - x^2(a^2+b^2+2c^2) + (b^2+c^2)(c^2+a^2) = c^4 + x^2(x^2-a^2-b^2)$$

$$- 2c^2x\sqrt{x^2-a^2-b^2}.$$

即 $-2c^2x^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = -2c^2x\sqrt{x^2-a^2-b^2}.$ 又平方之, 則

$$4c^4x^4 - 4c^2x^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 = 4c^4x^2(x^2-a^2-b^2).$$

$$\therefore -4c^2a^2b^2x^2 = -(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2. \quad \therefore x = \pm \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{2abc}.$$

$$48. \sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{b^2-x^2} + \sqrt{c^2-x^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2-x^2}.$$

(解) $\sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{b^2-x^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2-x^2} - \sqrt{c^2-x^2}$ 兩邊平方之。則

$$a^2-x^2+b^2-x^2+2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)} = a^2+b^2+c^2-x^2+c^2-x^2.$$

$$-2\sqrt{(a^2+b^2+c^2-x^2)(c^2-x^2)}.$$

即 $\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)} - c^2 = -\sqrt{(a^2+b^2+c^2-x^2)(c^2-x^2)}$ 。又平方之。則

$$a^2b^2-x^2(a^2+b^2)+x^4+c^4-2c^2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)} = (a^2+b^2+c^2-x^2)(c^2-x^2).$$

即 $a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2+2c^2x^2 = 2c^2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}$ 。又平方之。則

$$(a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)^2 + 4c^4x^2(a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2) + 4c^4x^4$$

$$= 4c^4\{a^2b^2-x^2(a^2+b^2)+x^4\}.$$

即 $4c^2a^2b^2x^2 = 4a^2b^2c^4 - (a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)^2.$

$$\therefore x = \pm \frac{1}{2abc} \sqrt{(2abc^2+a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)(2abc^2-a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$$

$$= \pm \frac{1}{2abc} \sqrt{(ab+bc+ca)(ab+bc-ca)(ab-bc+ca)(-ab+bc+ca)}$$

49. 問 x 爲如何之值。則 $\sqrt{14-(3x-2)(x-1)}$ 爲實數。

(解) 原式 $= \sqrt{12+5x-3x^2} = \sqrt{-3(x-3)(x+\frac{1}{3})}$ 。根號內之數量爲正。則 $x-3$ 與 $x+\frac{1}{3}$ 爲異號。故 x 在 $-\frac{4}{3}$ 與 3 之間。即 x 之值不小於 $-\frac{4}{3}$ 。不大於 3 。

50. $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ 證其在 5 與 9 之間無實數值。

(證) $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7} = \lambda$ 。則 $x^2(\lambda-1)+2x(\lambda-17)-(7\lambda-71)=0$ 。

此方程式 x 爲實根。則 $4(\lambda-17)^2-4(\lambda-1)\{-7\lambda-71\} > 0$ 。

即 $32(\lambda-5)(\lambda-9) > 0$ 。 $\therefore \lambda-5$ 與 $\lambda-9$ 同號。由是 λ 比 5 及 9 大。或比 5 及 9 小。故 5 與 9 之間無實數值。

51. x 爲實數。則 $\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}$ 不能小於 $-\frac{1}{3}$ 。試證之。

(證) $\frac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1} = \lambda$ 。則 $x^2(\lambda-1)+2x(\lambda+3)+(\lambda-5)=0$ 。

故 $4(\lambda+3)^2 - 4(\lambda-1)(\lambda-5) > 0$. 即 $48(\lambda + \frac{1}{3}) > 0$.

$$\therefore \lambda + \frac{1}{3} > 0. \text{ 即 } \lambda > -\frac{1}{3}.$$

52. x 爲實數. 則 $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 爲如何之值.

[解] $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = \lambda$. 則 $x^2(\lambda-1) + x(\lambda+1) + (\lambda-1) = 0$.

$$\therefore (\lambda+1)^2 - 4(\lambda-1)^2 > 0. \text{ 即 } -3(\lambda-3)(\lambda - \frac{1}{3}) > 0.$$

由是 λ 在 3 與 $\frac{1}{3}$ 之間.

53. 方程式 $x^2 + y^2 = 6x - 8y$. 求其 x 及 y 之最大值. 及最小值.

[解] 變原方程式爲 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$.

$$\text{故 } y+4 = \pm\sqrt{25 - (x-3)^2} = \pm\sqrt{-(x-8)(x+2)}.$$

$\therefore x$ 在 8 與 -2 之間.

$$\text{又 } x-3 = \pm\sqrt{25 - (y+4)^2} = \pm\sqrt{-(y-1)(y+9)}.$$

$\therefore y$ 在 1 與 -9 之間.

54. $x^2 + 4y^2 - 8x - 16y - 4 = 0$. 求 x 及 y 之最大值. 與最小值.

[解] 變原方程式爲 $(x-4)^2 + (2y-4)^2 = 36$.

$$\therefore 2y-4 = \pm\sqrt{36 - (x-4)^2} = \pm\sqrt{-(x+2)(x-10)}.$$

$\therefore x$ 在 -2 與 10 之間.

$$\text{又 } x-4 = \pm\sqrt{36 - (2y-4)^2} = \pm\sqrt{-4(y+1)(y-5)}.$$

$\therefore y$ 在 -1 與 5 之間.

55. x 及 y 之方程式. 適合於 $(x^2 + y^2) = 2a^2(x^2 - y^2)$. 則 y 之最大值如何.

[解] 從原方程式. 得 $x^4 + 2x^2(y^2 - a^2) + y^4 + 2a^2y^2 = 0$.

x 之實根爲 $4(y^2 - a^2)^2 - 4(y^4 + 2a^2y^2) > 0$.

$$\text{即 } 16\left(\frac{a}{2} + y\right)\left(\frac{a}{2} - y\right) > 0. \therefore y \text{ 在 } -\frac{a}{2} \text{ 與 } \frac{a}{2} \text{ 之間.}$$

由是 y 之最大值爲 $\frac{a}{2}$.

56. $x^2(b^2 + b'^2) + 2x(ab + a'b') + a^2 + a'^2 = 0$. 其實根爲等根. 試證明之.

(證) $4(ab+a'b')^2 - 4(b^2+b'^2)(a^2+a'^2) < 0$.

即 $-4(ab'-a'b)^2 < 0$. $\therefore ab' - a'b = 0$.

故由 121 章得等根.

57. $ax^2+bx+c=0$ 之兩根比為 $m:n$. 則 $mnb^2=(m+n)^2ac$.

(證) 兩根為 ma, na . 則 $ma+na = -\frac{b}{a}$, $ma \cdot na = \frac{c}{a}$.

$$\text{由是 } \frac{(m+n)^2 a^2}{mna^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{c}{a}} \quad \text{即} \quad \frac{(m+n)^2}{mn} = \frac{b^2}{ac}$$

58. $ax^2+2bx+c=0$. 及 $a'x^2+2b'x+c'=0$. 內有一個等根. 則 b^2-ac 及 $b'^2-a'c'$. 皆為完全平方數. 其證如何.

(證) 由題意. 前方程式之兩根為 α, β . 則後方程式之兩根為 α, γ .

由是 $\alpha+\beta = -\frac{2b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, $\alpha+\gamma = \frac{2b'}{a'}$, $\alpha\gamma = \frac{c'}{a'}$.

$\therefore \beta-\gamma = (\alpha+\beta) - (\alpha+\gamma) = \left(-\frac{2b}{a}\right) - \left(-\frac{2b'}{a'}\right) = \text{任意之有理數量} \dots (1)$

$$\text{又 } \alpha-\beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{\left\{\left(-\frac{2b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}\right\}} = \frac{2}{a}\sqrt{b^2-ac}$$

$$\text{及 } \alpha-\gamma = \sqrt{(\alpha+\gamma)^2 - 4\alpha\gamma} = \sqrt{\left\{\left(-\frac{2b'}{a'}\right)^2 - 4\frac{c'}{a'}\right\}} = \frac{2}{a'}\sqrt{b'^2-a'c'}$$

$$\therefore \beta-\gamma = (\alpha-\gamma) - (\alpha-\beta) = \frac{2}{a'}\sqrt{b'^2-a'c'} - \frac{2}{a}\sqrt{b^2-ac} \dots \dots \dots (2)$$

從 (1) 則 (2) 之左邊不為 0. 為有理數量. 故 (2) 之右邊之各項. 亦為有理式. 由是 b^2-ac 及 $b'^2-a'c'$ 為完全平方數.

59. α_1 及 α_2 為 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根. 則以 (1) α_1^2 及 α_2^2 (2) $\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2}$ 及 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

(3) $b+a\alpha_1$ 及 $b+a\alpha_2$ 為兩根之方程式各如何.

$$\text{[解]} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}, \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a}$$

(1) α_1^2 及 α_2^2 為兩根之方程式. 即 $(x-\alpha_1^2)(x-\alpha_2^2)=0$.

$$\text{即 } x^2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)x + \alpha_1^2 \alpha_2^2 = 0.$$

$$\text{即 } x^2 - \{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)\} x + (\alpha_1 \alpha_2)^2 = 0.$$

$$\therefore x^2 - \left\{ \left(-\frac{b}{a} \right)^2 - \frac{3c}{a} \left(-\frac{b}{a} \right) \right\} x + \left(\frac{c}{a} \right)^2 = 0,$$

即 $a^2x^2 + (b^2 - 3abc)x + c^2 = 0.$

(2) $\frac{x_1^2}{x_2}$ 及 $\frac{x_2^2}{x_1}$ 爲兩根之方程式。即 $\left(x - \frac{x_1^2}{x_2} \right) \left(x - \frac{x_2^2}{x_1} \right) = 0.$

即 $x^2 - \left(\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} \right) \left(\frac{x_1^2}{x_1} \right) = 0.$

即 $x_1x_2 - x^2 - \{ (x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2(x_1+x_2) \} x + (x_1x_2)^2 = 0.$

$$\therefore \frac{c}{a}x^2 - \left\{ \left(-\frac{c}{a} \right)^2 - 3\frac{c}{a} \left(-\frac{c}{a} \right) \right\} x + \left(\frac{c}{a} \right)^2 = 0.$$

即 $a^2cx^2 + (b^2 - 3abc)x + ac^2 = 0.$

(3) $b+ax_1$ 及 $b+ax_2$ 爲兩根之方程式。即

$$\{ x - (b+ax_1) \} \{ x - (b+ax_2) \} = 0.$$

即 $x^2 - \{ 2b+a(x_1+x_2) \} x + b^2 + ab(x_1+x_2) + a^2x_1x_2 = 0.$

$$\therefore x^2 - \left\{ 2b+a \left(-\frac{b}{a} \right) \right\} x + b^2 + ab \left(-\frac{b}{a} \right) + a^2 \left(\frac{c}{a} \right) = 0.$$

即 $x^2 - bx + ac = 0.$

60. x_1 及 x_2 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根。而於 a, b, c 之項。求 $x_1^2(bx_2+c) + x_2^2(bx_1+c)$ 。及 $x_1^2(bx_2+c)^2 + x_2^2(bx_1+c)^2$ 之值。

〔解〕 $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}.$

$$\therefore x_1^2(bx_2+c) + x_2^2(bx_1+c).$$

$$= b(x_1+x_2)x_1x_2 + c(x_1^2+x_2^2) = b \left(-\frac{b}{a} \right) \frac{c}{a} + c \left\{ \left(-\frac{b}{a} \right)^2 - \frac{2c}{a} \right\} = -\frac{2c^2}{a}.$$

$$\begin{aligned} & \text{又 } x_1^2(bx_2+c)^2 + x_2^2(bx_1+c)^2 = 2b^2x_1^2x_2^2 + 2bcx_1x_2(x_1+x_2) + c^2(x_1^2+x_2^2) \\ & = 2b^2 \left(\frac{c}{a} \right)^2 + 2bc \left(\frac{c}{a} \right) \left(-\frac{b}{a} \right) + c^2 \left\{ \left(-\frac{b}{a} \right)^2 - \frac{2c}{a} \right\} = \frac{b^2c^2}{a^2} - \frac{2c^3}{a}. \end{aligned}$$

61. $x^2+mx+m^2+a=0$ 之兩根爲 x_1 及 x_2 。試證

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2+a=0.$$

〔證〕 $x_1+x_2 = -m, x_1x_2 = m^2+a.$

$$\therefore (x_1+x_2)^2 - x_1x_2 = (-m)^2 - (m^2+a). \text{ 即 } x_1^2+x_1x_2+x_2^2+a=0$$

62. $(x^2+1)(a^2+1) = ma^2(ax-1)$ 之兩根爲 x_1 及 x_2 。

求 $(x_1^2+1)(x_2^2+1) = mx_1x_2(x_1x_2-1)$ 之證。

(證) 從原方程式得 $(a^2+1-ma^2)x^2+max+a^2+1=0$.

$$\therefore x_1+x_2 = -\frac{ma}{a^2+1-ma^2}, \quad x_1x_2 = \frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } (x_1^2+1)(x_2^2+1) &= (x_1+x_2)^2 + (x_1x_2-1)^2 = \left(-\frac{ma}{a^2+1-ma^2}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}-1\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{m^2a^2}{(a^2+1-ma^2)^2} + \frac{m^2a^4}{(a^2+1-ma^2)^2}$$

$$= \frac{m(a^2+1)}{a^2+1-ma^2} \left(\frac{ma^2}{a^2+1-ma^2}\right) = mx_1x_2 \left(\frac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}-1\right)$$

$$= mx_1x_2(x_1x_2-1).$$

63. $A(x^2+m^2)+Amx+Bm^2x^2=0$ 之兩根為 x_1 及 x_2 .

求 $A(x_1^2+x_2^2)+Ax_1x_2+Bx_1^2x_2^2=0$ 之證.

(證) 從原方程式得 $(A+Bm^2)x^2+Amx+Am^2=0$.

$$\therefore x_1+x_2 = -\frac{Am}{A+Bm^2} \text{ 及 } x_1x_2 = \frac{Am^2}{A+Bm^2}$$

$$\text{又 } x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{A^2m^2}{(A+Bm^2)^2} - \frac{2Am^2}{A+Bm^2}$$

$$= \frac{-Am^2(A+2Bm^2)}{(A+Bm^2)^2} = -\frac{Am^2}{A+Bm^2} \left(1 + \frac{Bm^2}{A+Bm^2}\right) = -x_1x_2 \left(1 + \frac{Bx_1x_2}{A}\right).$$

$$\text{由是 } A(x_1^2+x_2^2) = -x_1x_2(A+Bx_1x_2).$$

64. x 為實數, 則 $2(a-x)(x+\sqrt{x^2+b^2})$ 不大於 a^2+b^2 . 試證之.

(證) $2(a-x)(x+\sqrt{x^2+b^2}) = \lambda$.

$$\text{則 } 2(a-x)\sqrt{x^2+b^2} = \lambda - 2x(a-x).$$

兩邊平方之, 則 $4(a-x)^2(x^2+b^2) = \lambda^2 - 4\lambda x(a-x) + 4x^2(a-x)^2$.

$$\text{即 } 4b^2(a-x)^2 + 4\lambda x(a-x) - \lambda^2 = 0.$$

$$\text{即 } 4(b^2-\lambda)(a-x)^2 + 4a\lambda(a-x) - \lambda^2 = 0.$$

$a-x$ 為實數, 故 $16a^2\lambda^3 + 16(b^2-\lambda)\lambda^2 > 0$. 即 $16\lambda^2(a^2+b^2-\lambda) > 0$.

由是 λ 不大於 a^2+b^2 .

65. 對於 x 之實數, 求 $\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+2}{(x^2+1)^2}$ 之最小值.

[解] 以 x^2 除原式分母子，即得

$$\frac{2x^2 - 4x + 9 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\text{令 } x + \frac{1}{x} = y, \quad -\frac{2y^2 - 4y + 5}{y^2} = \lambda$$

$$\therefore y^2(\lambda - 2) + 4y - 5 = 0, \quad \therefore 16 + 20(\lambda - 2) > 0,$$

$$\text{即 } 20\left(\lambda - \frac{6}{5}\right) > 0, \quad \therefore \lambda \text{ 不小於 } \frac{6}{5}, \text{ 即所求之最小值爲 } \frac{6}{5}.$$

高次方程式

134. 高次方程式 高於二次之方程式，其普通之解法甚深，在此編不能驟示，故僅解明其特別之例而已。

135. 準二次方程式 因 $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ，與二次方程式同形，故其解法，與 $ax^2 + bx + c = 0$ 之二次方程式同，即 $ax^4 + bx^2 + c = 0$ 之根，爲

$$x^2 = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ 即 } x = \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)}.$$

又不僅未知數量之次數，與二次式同形，其未知數量之兩項，有與二次式同形者，例如含 x 之各項爲 P ，而 $aP^2 + bP + c = 0$ ，則

$$P = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ 爲等值之方程式。}$$

[第一例] 解 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ 式。

$$(x^2 - 9)(x^2 - 1) = 0, \quad \therefore x^2 = 9, \text{ 或 } 1, \quad \therefore x = \pm 3, \text{ 或 } \pm 1.$$

由是所求之根，爲 $+3, -3, +1, -1$ 之四根。

[第二例] 解 $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = 0$ 式。

$$\{(x^2 + x) + 6\} \{(x^2 + x) - 2\} = 0, \quad \therefore x^2 + x + 6 = 0 \text{ 或 } x^2 + x - 2 = 0.$$

$$\text{從 } x^2 + x + 6 = 0, \text{ 則 } x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-23}.$$

$$\text{從 } x^2 + x - 2 = 0, \text{ 則 } x = 1 \text{ 或 } -2.$$

故所求之根。爲 $1, -2, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-23}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-23}$ 。

〔第三例〕解 $(x^2+2)^2+8x(x^2+2)+15x^2=0$ 式。

$$(x^2+2+5x)(x^2+2+3x)=0. \therefore x^2+2+5x=0. \quad x^2+2+3x=0.$$

$$\text{從 } x^2+2+5x=0. \text{ 則 } x=-\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{從 } x^2+2+3x=0. \text{ 則 } x=-1, \text{ 或 } -2.$$

由是所求之根。爲 $-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}, -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, -1, -2$ 。

〔第四例〕解 $ax^2+bx+c+p\sqrt{ax^2+bx+c}+q=0$ 式。

令 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 。則 $y^2+py+q=0$ 。此 y 之根爲 α, β 。則從 $ax^2+bx+c=y^2$ 。得 $ax^2+bx+c=\alpha^2, ax^2+bx+c=\beta^2$ 。

由是可求得 x 之四根。

〔第五例〕解 $2x^2-4x+3\sqrt{x^2-2x+6}=15$ 式。

$$2(x^2-2x+6)+3\sqrt{(x^2-2x+6)}-27=0.$$

$$\text{令 } y=\sqrt{(x^2-2x+6)}. \text{ 則 } 2y^2+3y-27=0. \quad \therefore y=3 \text{ 或 } -\frac{9}{2}.$$

$$\text{故從 } x^2-2x+6=y^2. \text{ 則 } x^2-2x+6=9. \quad \therefore x=3 \text{ 或 } -1.$$

$$\text{又從 } x^2-2x+6=\frac{81}{4}. \text{ 則 } x=1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{61}.$$

由是所求之根。爲 $3, -1, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{61}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{61}$ 。

〔第六例〕解 $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=\frac{9}{16}a^4$ 。

左邊之第一因子與第四因子相乘。又中間之兩因子相乘。則

$$\text{得 } (x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)=\frac{9}{16}a^4.$$

$$\text{即 } \{(x^2+5ax+5a^2)-a^2\}\{(x^2+5ax+5a^2)+a^2\}=\frac{9}{16}a^4.$$

$$\text{即 } (x^2+5ax+5a^2)^2-a^4=\frac{9}{16}a^4.$$

$$\text{即 } (x^2+5ax+5a^2)^2=\frac{25}{16}a^4.$$

$$\therefore x^2 + 5ax + 5a^2 = \pm \frac{5}{4}a^2. \text{ 從 } x^2 + 5ax + 5a^2 = \frac{5}{4}a^2.$$

$$\text{則 } x = -\frac{5}{2}a \pm \frac{5}{2}\sqrt{10}. \text{ 又從 } x^2 + 5ax + 5a^2 = -\frac{5}{4}a^2.$$

$$\text{則 } \left(x + \frac{5}{2}a\right) = 0. \therefore -\frac{5}{2}a.$$

136. 反商方程式 (Reciprocal Equations) . 謂其係數前後相同之方程式。

例如下式。即反商方程式。

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0. \text{ (又見 443 章).}$$

〔第一例〕解 $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ 式。

$$a(x^2 + 1) + bx(x + 1) = 0. \text{ 即 } (x + 1)\{a(x^2 - x + 1) + bx\} = 0.$$

$$\therefore x + 1 = 0. \text{ 或 } a(x^2 - x + 1) + bx = 0.$$

$$\therefore x = 1, \text{ 或 } \frac{a-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(a-b)^2 - 4a^2}}{2a}.$$

〔第二例〕解 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ 式。

$$\text{以 } x^2 \text{ 除而括之。則得 } a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

$$\text{令 } y = x + \frac{1}{x}. \text{ 則 } y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}. \therefore a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

$$\text{由是得 } y \text{ 之兩根爲 } \alpha, \beta. \text{ 則 } x + \frac{1}{x} = \alpha. \text{ 及 } x + \frac{1}{x} = \beta.$$

又由此兩方程式。可得 x 之四根。

〔第三例〕解 $ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$ 式。

$$a(x^5 - 1) + bx(x^3 - 1) + cx^2(x - 1) = 0.$$

$$\text{即 } (x - 1)\{a(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + bx(x^2 + x + 1) + cx^2\} = 0.$$

$$\therefore x = 1, \text{ 或 } ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (a+b)x + a = 0.$$

第二之方程式。爲四次之反商方程式。故與第二例同法。

137. 視察法 依 88 章之定理。方程式之一根。可由視察求得。

〔第一例〕解 $x(x-1)(x-2)=a(a-1)(a-2)$ 式。

由視察而知其一根為 $x=a$ 。

又變原方程式。為 $x^3-3x^2+2x-a(a-1)(a-2)=0$ 。

以 $x-a$ 除之。則得 $x^3+(a-3)x+(a-1)(a-2)=0$ 。由是可得其二根。

〔第二例〕解 $x^3+2x^2-11x+6=0$ 式。

求方程式之一根。為如何之值。當依下之原則。但其根以有理數量為限。

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots\dots\dots+K=0$ 之一根為 $\pm\frac{\alpha}{\beta}$ 。則 α 為 K 之因子。 β 為 a 之因子。

依此原則得 $x^3+2x^2-11x+6=0$ 之一根。必為 6 之因子。

而在 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ 之內。惟 $x=2$ 為適合。故 $x=2$ 為其一根而變原方程式如下。

$$(x-2)(x^2+4x-3)=0.$$

由是從 $x^2+4x-3=0$ 。可得 $x=-2\pm\sqrt{7}$ 。

〔第三例〕解 $(a-x)^4+(x-b)^4=(a-b)^4$ 式。

$x=a$ 及 $x=b$ 為能適合。

又變原方程式。為 $(a-x)^4+(x-b)^4=\{(a-x)+(x-b)\}^4$ 。

$\therefore 0=4(a-x)^3(x-b)+6(a-x)^2(x-b)^2+4(a-x)(x-b)^3$ 。

即 $2(a-x)(x-b)\{2(a-x)^2+3(a-x)(x-b)+2(x-b)^2\}=0$ 。

故所求之根。為 a 及 b 與二次方程式。

$2(a-x)^2+3(a-x)(x-b)+2(x-b)^2=0$ 之二根。

〔第四例〕解 $a^4\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^4\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^4\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^4$ 式。

由視察而知 $x=a, x=b, x=c$ 均能適合。

又此方程式去其分母。則

$$\begin{aligned} a^4(b-c)(x-b)(x-c)+b^4(c-a)(x-c)(x-a)+c^4(a-b)(x-a)(x-b) \\ = -x^4(a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

而以 x^3 之係數爲 0。故諸根之和爲 0。(見 129 章)。因而他之一根。爲 $0-(a+b+c)$ 。即 $-a-b-c$ 。

由是所求之根。爲 $a, b, c, -a-b-c$ 。

138. 二項方程式 [Binomial Equations] 其普通之式。爲 $x^n \pm k = 0$ 。

下所示之例。可以已說明之方法解之。

二項方程式。其普通之解法。可用三角法內 De Moivre 氏之定理解之。

[第一例] 解 $x^3 - 1 = 0$ 式。

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0. \quad \therefore x-1=0. \text{ 即 } x=1.$$

$$\text{或 } x^2 + x + 1 = 0. \text{ 即 } x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

[注意] 由是 $x^3 = 1$ 有三根。即 1 之立方根爲

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

[第二例] 解 $x^4 - 1 = 0$ 式。

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1}) = 0.$$

故 1 之四方根爲 $1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ 。

[第三例] 解 $x^5 - 1 = 0$ 式。

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0. \quad \therefore x=1.$$

或 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 。即反商方程式。故由 136 章。而得

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0. \text{ 即 } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{由是 } x^2 - x \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = 0.$$

$$\text{即 } x^2 - x \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right)^2 = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1.$$

$$\therefore x - \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{(-10 \mp 2\sqrt{5})}}{4}.$$

由是 1 之五方根爲

$$1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}.$$

[第四例] 解 $x^4+1=0$ 式。

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})=0.$$

$$\text{由是 } x^2+1+x\sqrt{2}=0. \quad \therefore x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{-2}}{2}.$$

$$\text{或 } x^2+1-x\sqrt{2}=0. \quad \therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{-2}}{2}.$$

$$\text{故所求之根爲 } \frac{\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}. \text{ 即 } \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

139. 一之立方根 由前章之例。知 1 之立方根。爲

$$1, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}), \quad \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}).$$

1 之立方虛根可設爲 ω 。又令此二虛根中之一個爲 ω_1 。其他一個爲 ω_2 。以區別之則 1 之立方根爲 1, ω_1 , ω_2 。

示其關係式如下。

$$1+\omega_1+\omega_2=1+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})+\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=0.$$

$$\text{及 } \omega_1\omega_2=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=\frac{1}{4}(1+3)=1.$$

此關係亦可依 129 章得之。何則。三次方程式三根之和。原等於變號之 x^2 係數。而 $x^3-1=0$ 之式。其 x^2 係數爲 0。故 1, ω_1 , ω_2 之和爲 0。又三根之積。原等於三次方程式變號之末項。故 1, ω_1 , ω_2 之積爲 1。

$$\text{又 } \omega_1^2=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{-3})^2=\frac{1}{4}(1-2\sqrt{-3}-3)=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=\omega_2.$$

$$\text{及 } \omega_2^2=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{-3})^2=\frac{1}{4}(1+2\sqrt{-3}-3)=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\omega_1.$$

$$\text{即 } \omega_1^2=\omega_2 \text{ 及 } \omega_2^2=\omega_1, \text{ 由是 } \omega_1\omega_2=1, \omega_1^3=\omega_2^3=1.$$

且知 1 之立方虛根。其一根等於他一根之平方。故設 ω 爲 1 之立方虛根。則 1 之立方根爲 1, ω , ω^2 。

〔例〕 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

由是 $a+b+c$ 爲 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 之因子。

由是 $a + (\omega)b + (\omega^2)c$ 爲 $a^3 + (\omega b)^3 + (\omega^2 c)^3 - 3a(\omega b)(\omega^2 c)$ 。

即 $a^3 + \omega^3 b^3 + \omega^6 c^3 - 3\omega^3 abc$ 。

即 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 之因子。

同法 $a + (\omega^2)b + \omega c$ 爲 $a^3 + (\omega^2 b)^3 + (\omega c)^3 - 3a(\omega^2 b)(\omega c)$

即 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 之因子。

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$ 。

例 題 十 一

試解以下之方程式。

1. $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ 。

〔解〕 $(x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$ 。 $\therefore x = \pm 2$ 或 $\pm\sqrt{-2}$ 。

2. $x^6 + 7a^2x^3 - 8a^4 = 0$ 。

〔解〕 $(x^3 - a^2)(x^3 + 8a^2) = 0$ 。 $\therefore x^3 - a^2 = 0$ 。 $x^3 + 8a^2 = 0$ 。

由是 $x = a, a(\omega), a(\omega)^2, -2a, -2a(\omega), -2a(\omega)^2$ 。

3. $x^6 - 7a^2x^3 - 8a^4 = 0$ 。 [答 $-a, -a(\omega), -a(\omega)^2, 2a, 2a(\omega), 2a(\omega)^2$]。

4. $\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{2}$ 。 [答 1, $\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{-15})$]

〔解〕 $\frac{x}{x^2+1} = y$ 。則 $y + \frac{1}{y} = 2 + \frac{1}{2}$ 。由視察得 $y = 2$ ，或 $\frac{1}{2}$ 。

即 $\frac{x}{x^2+1} = 2$ ，或 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$ 。因之而得答數。

5. $\frac{x^2+2}{x^2+4x+1} + \frac{x^2+4x+1}{x^2+2} = \frac{5}{2}$ 。 [答 0, 1, 3, -8]。

〔解〕 $\frac{x^2+2}{x^2+4x+1} = y$ 。解法悉如前例。

6. $(x^2+x+1)(x^2+x+2) = 12$ 。 [答 1, -2, $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-19})$]

〔解〕 $x^2+x+1 = y$ 。則 $y(y+1) = 3$ 。由視察得 $y = 3$ 。

又 y 之係數爲 1。 $\therefore y = -1 - 3 = -4$ 。

由是 $x^2+x+1 = 3$ ，或 $x^2+x+1 = -4$ 。

$$7. (x^2+7x+5)^2-3x^2-21x=19. \quad \left[\text{答 } -1, -6, \frac{1}{2}(-7 \pm 3\sqrt{5}) \right].$$

[解] $(x^2+7x+5)^2-3(x^2+7x+5)=4$, 而 $x^2+7x+5=y$. 則

$$y^2-3y-4=0. \quad \therefore y=4, \text{ 或 } -1.$$

$$8. \sqrt{16-7x-x^2}=x^2+7x-\frac{1}{4}. \quad \left[\text{答 } \frac{1}{2}, -\frac{15}{2}, \frac{1}{2}(-7 \pm 4\sqrt{2}) \right].$$

[解] $(16-7x-x^2)+\sqrt{(16-7x-x^2)}-16+\frac{1}{4}=0$.

令 $\sqrt{(16-7x-x^2)}=y$. 則 $y^2+y-\frac{63}{4}=0$. $\therefore y=-\frac{9}{2}$, 或 $\frac{7}{2}$.

$$9. 6\sqrt{(x^2-2x+6)}=21+2x-x^2. \quad (\text{答 } 3, -1, 1 \pm 2\sqrt{19}).$$

[解] $(x^2-2x+6)+6\sqrt{(x^2-2x+6)}=27$. 令 $\sqrt{(x^2-2x+6)}=y$.

則 $y^2+6y-27=0$. $\therefore y=3$, 或 -9 .

$$10. (a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+x^2+x^4).$$

$$\left[\text{答 } \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}), \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2-4}) \right].$$

[解] $1+x+x^2=0$. 或 $(a-1)(1+x+x^2)=(a+1)(1-x+x^2)$.

$$11. (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24.$$

[解] $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$.

即 $(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24=24$.

$\therefore (x^2+5x)(x^2+5x+10)=0$. 由是 $x=0$, 或 -5 , 或 $\frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{-15})$.

$$12. (x+a)(x+3a)(x+5a)(x+7a)=384a^4.$$

[解] $(x^2+8ax+7a^2)(x^2+8ax+15a^2)=384a^4$.

即 $\{(x^2+8ax-9a^2)+16a^2\}\{(x^2+8ax-9a^2)+24a^2\}=384a^4$.

即 $(x^2+8ax-9a^2)^2+40a^2(x^2+8ax-9a^2)+384a^4=384a^4$.

$\therefore (x^2+8ax-9a^2)(x^2+8ax-9a^2+40a^2)=0$.

即 $(x-a)(x+9a)(x^2+8ax+31a^2)=0$.

由是 $x=a$, 或 $-9a$, 或 $-4a \pm a\sqrt{-15}$.

$$13. (x-3a)(x-a)(x+2a)(x+4a)=2376a^4.$$

[解] $(x^2+ax-12a^2)(x^2+ax-2a^2)=2376a^4$.

設 $x^2+ax-2a^2=y$. 則 $(y-10a^2)y=2376a^4$.

即 $y^2 - 10a^2y + 25a^4 = 2401a^4$. $\therefore y - 5a^2 = \pm 49a^2$.

由是 $y = 54a^2$, 或 $-44a^2$.

即 $x^2 + ax - 2a^2 = 54a^2$, 或 $x^2 + ax - 2a^2 = -44a^2$.

由是 $x = 7a$, 或 $-8a$, 或 $\frac{1}{2}a(-1 \pm \sqrt{-167})$.

14. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$. [答 $-4, -6, \frac{1}{2}(-15 \pm \sqrt{129})$].

[解] $(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2$.

即 $\{(x^2 + 10x + 24) + 4x\} \{(x^2 + 10x + 24) + x\} = 4x^2$.

即 $(x^2 + 10x + 24)^2 + 5x(x^2 + 10x + 24) + 4x^2 = 4x^2$.

$\therefore (x^2 + 10x + 24)(x^2 + 10x + 24 + 5x) = 0$.

由是 $x^2 + 10x + 24 = 0$, 或 $x^2 + 15x + 24 = 0$.

15. $2x^2 - 3x - 21 = 2x\sqrt{x^2 - 3x + 4}$.

[解] $(x^2 - 3x + 4) - 2x\sqrt{x^2 - 3x + 4} + x^2 = 25$.

$\therefore \sqrt{x^2 - 3x + 4} - x = \pm 5$. 即 $x^2 - 3x + 4 = (x \pm 5)^2$.

即 $-3x \mp 10x = 21$. $\therefore x = -\frac{21}{13}$, 或 3 .

16. $x^4 - 2(a+b)x^2 + a^2 + 2ab + b^2 = 0$. [答 $\pm\sqrt{(a+b)}$].

[解] $x^4 - 2(a+b)x^2 + (a+b)^2 = 0$. 即 $\{x^2 - (a+b)\}^2 = 0$.

17. $x^4 - 2a^2x^2 - 2b^2x^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = 0$.

[解] $x^4 - 2x^2(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)^2 = 4a^2b^2$. 兩邊各開平方.

則 $x^2 - (a^2 + b^2) = \pm 2ab$. 即 $x^2 = (a \pm b)^2$. $\therefore x = \pm(a \pm b)$.

18. $4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0$. [答 $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{-7})$].

[解] $4(x^4 + 2x^2 + 1) - 4x(x^2 + 1) - 15x^2 = 0$.

即 $4(x^2 + 1)^2 - 4x(x^2 + 1) - 15x^2 = 0$.

即 $\{2(x^2 + 1) - 5x\} \{2(x^2 + 1) + 3x\} = 0$.

由是 $2(x^2 + 1) - 5x = 0$, 或 $2(x^2 + 1) + 3x = 0$.

此方程式用反商方程式(136章)之解法即得.

19. $9x^4 - 24x^3 - 2x^2 - 24x + 9 = 0$. [答 $3, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}(-1 \pm \sqrt{-8})$].

[解] $9(x^2 + 1)^2 - 24x(x^2 + 1) - 20x^2 = 0$.

即 $\{3(x^2+1)-10x\}\{3(x^2+1)+2x\}=0$. 與前例同.

20. $x^5+1=0$.

[解] $x+1=0$, 或 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$. 從 $x+1=0$.

$\therefore x=-1$. 又從 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$. 得

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{x}\right) - 1 = 0. \quad \therefore x+\frac{1}{x} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

由是 $x^2 - \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})x + 1 = 0$. $\therefore x = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{5}) \pm \frac{1}{4}\sqrt{(-10 \pm 2\sqrt{5})}$.

由是所求之根爲

$$-1, \quad \frac{1}{4}\{1+\sqrt{5} \pm \sqrt{(-10+2\sqrt{5})}\}, \quad \frac{1}{4}\{1-\sqrt{5} \pm \sqrt{(-10-2\sqrt{5})}\}.$$

21. 解 $x^5-1=0$.

[解] $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=0$. $\therefore x=1, -1, \pm\sqrt{-1}$.

或 $x^4+1=0$. 由 138 章第四例. $x = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

22. 解 $3x^3-14x^2+20x-8=0$.

[答 $2, 2, \frac{2}{3}$].

[解] $3x^3-6x^2-8x^2+16x+4x-8=0$.

即 $3x^2(x-2)-8x(x-2)+4(x-2)=0$. $\therefore x-2=0$, 或 $3x^2-8x+4=0$.

23. 解 $x^4-15x^2+10x+24=0$.

[答 $2, 3, -1, -4$].

[解] $x^4-9x^2-6x^2+18x-8x+24=0$.

即 $x^2(x^2-9)-6x(x-3)-8(x-3)=0$.

即 $(x-3)\{x^2(x+3)-6x-8\}=0$. 即 $(x-3)(x+1)(x+4)(x-2)=0$.

24. 解 $x^4+7x^3-7x-1=0$.

[答 ± 1 , 或 $\frac{1}{2}(-7 \pm 3\sqrt{5})$].

[解] $x^4-1+7x(x^2-1)=0$. $\therefore x^2-1=0$, 或 $x^2+1+7x=0$.

25. 解 $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3=0$.

[解] 設 $x=a, b, c$ 則各適合. 而此方程式爲三次式. 由是所求之根爲 a, b, c .

26. 解 $x(x-1)(x-2)=9 \cdot 8 \cdot 7$.

[答 $9, -3 \pm \sqrt{-47}$].

[解] 由觀察得 $x=9$. 故以 $x-9$ 除原方程式. 即得二次式.

27. 解 $x(x-1)(x-2)(x-3)=9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

[解] $(x^2-3x)(x^2-3x+2)=54, 46$. 令 $x^2-3x=y$. 則
 $y(y+2)=54, 56$. $\therefore y=54$. 又 y 之係數爲 2. 故 y 之二根之和爲 -2. 由是他之一根. 爲 $y=-2-54=-56$.
 $\therefore x^2-3x=54$, 或 $x^2-3x=-56$.

$$\therefore x=9, \text{ 或 } -6. \text{ 或 } \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-215}).$$

28. 解 $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$.

[解] $(a-x)^3+(b-x)^3=\{(a-x)+(b-x)\}^3$
 $=(a-x)^3+(b-x)^3+3(a-x)(b-x)\{(a-x)+(b-x)\}$.
 $3(a-x)(b-x)(a+b-2x)=0$. 由是 $x=a, b, \frac{1}{2}(a+b)$.

29. 解 $(a-x)^4+(b-x)^4=(a+b-2x)^4$.

[解] $(a-x)^4+(b-x)^4=\{(a-x)+(b-x)\}^4$.
 $\therefore 4(a-x)^3(b-x)+6(a-x)^2(b-x)^2+4(a-x)(b-x)^3=0$.
 即 $2(a-x)(b-x)\{2(a-x)^2+3(a-x)(b-x)+2(b-x)^2\}=0$.
 即 $(a-x)(b-x)\{7x^2-7x(a+b)+2a^2+2b^2+3ab\}=0$.
 $\therefore x=a, \text{ 或 } b, \text{ 或 } \frac{1}{2}(a+b) \pm \frac{1}{14}(a-b)\sqrt{-7}$.

30. 解 $(a-x)^5+(b-x)^5=(a+b-2x)^5$.

[解] $(a-x)^5+(b-x)^5=\{(a-x)+(b-x)\}^5$. 即
 $5(a-x)^4(b-x)+10(a-x)^3(b-x)^2+10(a-x)^2(b-x)^3+5(a-x)(b-x)^4=0$.
 即 $(a-x)(b-x)\{(a-x)^3+2(a-x)^2(b-x)+2(a-x)(b-x)^2+(b-x)^3\}=0$.
 即 $(a-x)(b-x)\{(a-x)+(b-x)\}\{(a-x)^2+(a-x)(b-x)+(b-x)^2\}=0$.
 即 $(a-x)(b-x)(a+b-2x)\{3x^2-3x(a+b)+a^2+b^2+ab\}=0$.
 $\therefore x=a, b, \frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a+b) \pm \frac{1}{6}(a-b)\sqrt{-3}$.

31. 解 $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}$. [答 $a, b, \frac{1}{2}(a+b)$].

[解] 兩邊各求其立方. 則

$$a-x+b-x+3\sqrt[3]{a-x}\sqrt[3]{b-x}(\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x})=a+b-2x.$$

$$\text{即 } 3\sqrt[3]{a-x}\sqrt[3]{b-x}\sqrt[3]{a+b-2x}=0.$$

$$\therefore (a-x)(b-x)(a+b-2x)=0.$$

$$32. \text{ 解 } \sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}.$$

[解] 兩邊平方之。則

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+2\sqrt{(a-x)(b-x)}=\sqrt{a+b-2x}. \text{ 移項。則}$$

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}-2\sqrt{(a-x)(b-x)}. \text{ 又平方之。則}$$

$$a-x+b-x+2\sqrt{(a-x)(b-x)}$$

$$=a+b-2x+4\sqrt{(a-x)(b-x)}-4\sqrt{(a+b-2x)}\sqrt{(a-x)(b-x)}.$$

$$\text{即 } -2\sqrt{(a-x)(b-x)}=-4\sqrt{(a+b-2x)}\sqrt{(a-x)(b-x)}.$$

$$\text{又四方之 } (a-x)^2(b-x)^2=16(a+b-2x)^2(a-x)(b-x).$$

$$\text{即 } (a-x)(b-x)\{16(a+b-2x)^2-(a-x)(b-x)\}=0. \quad \therefore x=a, \text{ 或 } b.$$

$$\text{或 } 16(a+b-2x)^2-(a-x)(b-x)=0.$$

$$\text{即 } 16(a+b)^2-64x(a+b)+64x^2-ab+(a+b)x-x^2=0.$$

$$\text{即 } 63x^2-63x(a+b)+16(a+b)^2-ab=0.$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}\left\{a+b\pm\frac{1}{63}(a-b)\sqrt{-63}\right\}.$$

$$33. \text{ 解 } (a-x)^5+(x-b)^5=(a-b)^5. \quad \left[\text{答 } a, b, \frac{1}{2}\left\{a+b\pm(a-b)\sqrt{-3}\right\}\right].$$

[解] $(a-x)^5+(x-b)^5=\{(a-x)+(x-b)\}^5$ 與 30 例同法。

$$34. \sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{a-b} \text{ 試解之.}$$

[答 a, b].

[解] 求兩邊之立方如 31 例。

$$35. \text{ 解 } \sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}=\sqrt[4]{a-b}. \quad \left[\text{答 } a, b, \frac{1}{2}\left\{a+b\pm(a-b)\sqrt{-63}\right\}\right].$$

[解] 與 32 同法。

$$36. \text{ 解 } x^4+(a-x)^4=b^4.$$

$$[\text{解}] x=m+n, \text{ 及 } a-x=m-n. \text{ 則 } m=\frac{a}{2}, n=x-\frac{a}{2}.$$

$$\text{又從原方程式。得 } (m+n)^4+(m-n)^4=b^4.$$

$$\text{即 } 2m^4+12m^2n^2+2n^4=b^4.$$

$$\text{即 } 2\left(\frac{a}{2}\right)^4+12\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{a}{2}\right)^4=b^4.$$

$$\text{即 } \left(x - \frac{a}{2}\right)^4 + \frac{3}{2}a^2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{a^4}{16} + \frac{b^4}{2}.$$

$$\therefore \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2}}. \text{ 即 } x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left\{-\frac{3}{4}a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2}}\right\}}.$$

$$37. \text{ 解 } (x+a)^4 + (x+b)^4 = 17(a-b)^4.$$

$$[\text{解}] (x+a)^4 + (x+b)^4 = 17\{(x+a) - (x+b)\}^4.$$

$$\text{即 } \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^4 + 1 = 17\left\{\left(\frac{x+a}{x+b}\right) - 1\right\}^4 \text{ 令 } \left(\frac{x+a}{x+b}\right) = y. \text{ 則}$$

$$y^4 + 1 = 17(y-1)^4. \text{ 即 } 16y^4 - 68y^3 + 102y^2 - 68y + 16 = 0.$$

$$\therefore 8\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 34\left(y + \frac{1}{y}\right) + 51 = 0.$$

$$\text{即 } 8\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 34\left(y + \frac{1}{y}\right) + 35 = 0. \therefore y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}, \text{ 或 } \frac{7}{4}.$$

$$\text{由是 } y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0, \text{ 或 } y^2 - \frac{7}{4}y + 1 = 0.$$

$$\therefore y = 2, \text{ 或 } \frac{1}{2}, \text{ 或 } y = \frac{1}{8}(7 \pm \sqrt{-15}).$$

$$\text{即 } \frac{x+a}{x+b} = 2, \frac{x+a}{x+b} = \frac{1}{2}, \frac{x+a}{x+b} = \frac{1}{8}(7 \pm \sqrt{-15}).$$

$$\text{從 } \frac{x+a}{x+b} = 2, \text{ 或 } \frac{1}{2}, \text{ 得 } x = a - 2b, \text{ 或 } b - 2a.$$

$$\text{又從 } \frac{x+a}{x+b} = \frac{7 \pm \sqrt{-15}}{8}, \text{ 得 } \frac{a-b}{x+b} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{8}.$$

$$\therefore x+b = \frac{8(a-b)}{-1 \pm \sqrt{-15}} \text{ 以 } -1 \mp \sqrt{-15} \text{ 乘分子。則}$$

$$x+b = \frac{8(a-b)(-1 \mp \sqrt{-15})}{1 - (-15)} = \frac{(a-b)(-1 \mp \sqrt{-15})}{2}.$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}\{a+b \pm (a-b)\sqrt{-15}\}.$$

$$38. \text{ 解 } \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a-x} = \sqrt[4]{b}.$$

$$[\text{解}] \text{ 平方之。得 } \sqrt{x} + \sqrt{a-x} + 2\sqrt[4]{x(a-x)} = \sqrt{b}.$$

$$\text{即 } \sqrt{x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{b} - 2\sqrt[4]{x(a-x)}. \text{ 又平方之。即得}$$

$$x+a-x+2\sqrt{x(a-x)} = b - 4\sqrt{b}\sqrt[4]{x(a-x)} + 4\sqrt{x(a-x)}.$$

$$\text{即 } 2\sqrt{x(a-x)} - 4\sqrt{b^2\sqrt{x(a-x)}} = a-b. \quad \text{令 } \sqrt{x(a-x)} = y.$$

$$\text{即 } 2y^2 - 4y\sqrt{b} = a-b. \quad \therefore y = \sqrt{b} \pm \sqrt{\frac{a+b}{2}}.$$

$$\text{即 } x(a-x) = y^2 = \left(\sqrt{b} \pm \sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2.$$

$$39. \text{ 解 } abx(x+a+b)^2 - (ax+bx+ab)^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } abx\{x^2+3x^2(a+b)+3x(a+b)^2+(a+b)^3\} \\ = x^3(a+b)^2+3x^2(a+b)^2ab+3x(a+b)^2a^2b^2+a^3b^3. \end{aligned}$$

$$\text{即 } abx^4 - x^3(a+b)\{(a+b)^2-3ab\} + abx(a+b)\{(a+b)^2-3ab\} - a^3b^3 = 0.$$

$$\text{即 } ab(x^4 - a^2b^2) - x(a+b)(a^2 - ab + b^2)(x^2 - ab) = 0.$$

$$\text{即 } (x^2 - ab)\{ab(x^2 + ab) - x(a+b)(a^2 - ab + b^2)\} = 0.$$

$$\text{即 } (x^2 - ab)\{abx^2 - x(a^2 + b^2) + a^2b^2\} = 0.$$

$$\text{即 } (x^2 - ab)(bx - a^2)(ax - b^2) = 0. \quad \therefore x = \pm\sqrt{ab}, \frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}.$$

$$40. \text{ 解 } abcx(x+a+b+c)^2 - (xbc+xca+xab+abc)^2 = 0.$$

$$\text{〔解〕 } abcx\{(x+a)+(b+c)\}^2 = \{bc(x+a)+ax(b+c)\}^2. \text{ 去括弧而簡之.}$$

$$\text{則 } abcx\{(x+a)^2+(b+c)^2\} = b^2c^2(x+a)^2 + a^2x^2(b+c)^2.$$

$$\text{即 } bc(x+a)^2(ax-bc) - ax(b+c)^2(ax-bc) = 0.$$

$$\text{即 } (ax-bc)\{bc(x+a)^2 - ax(b+c)^2\} = 0.$$

$$\text{即 } (ax-bc)(bx-ca)(cx-ab) = 0.$$

$$\therefore x = \frac{bc}{a}, \text{ 或 } \frac{ca}{b}, \text{ 或 } \frac{ab}{c}.$$

$$41. \text{ 解 } \frac{(a-x)^4 + (x-b)^4}{(a+b-2x)^2} = \frac{a^4 + b^4}{(a+b)^2}$$

$$\text{〔解〕 } \frac{\{(a-x)^2 - (x-b)^2\}^2 + 2(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2} = \frac{(a^2-b^2)^2 + 2a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

$$\text{即 } \frac{(a+b-2x)^2(a-b)^2 + 2(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2} = \frac{(a-b)^2(a+b)^2 + 2a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

$$\text{即 } (a-b)^2 + \frac{2(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2} = (a-b)^2 + \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}$$

$$\therefore \frac{(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} \text{ 由是 } \frac{(a-x)(x-b)}{a+b-2x} = \pm \frac{ab}{a+b}$$

$$\therefore x = 0, a+b, \frac{a^2+b^2}{a+b}, \frac{2ab}{a+b}$$

42. $x^4 + b(a+b)x^3 + (ab-2)b^2x^2 - (a+b)b^3x + b^4 = 0.$

[解] $(x^2 - b^2)^2 + bx(a+b)(x^2 - b^2) + ab^3x^2 = 0.$

即 $(x^2 - b^2 + abx)(x^2 - b^2 + b^2x) = 0.$

∴ 從 $x^2 - b^2 + abx = 0$, $x = \frac{1}{2}b(-a \pm \sqrt{a^2 + 4}).$

又 從 $x^2 - b^2 + b^2x = 0$, $x = \frac{1}{2}b(-b \pm \sqrt{b^2 + 4}).$

43. 解 $(x^2 + b^2)^2 = 2ax^3 + 2ab^2x - a^2x^2.$

[解] $(x^2 + b^2)^2 - 2ax(x^2 + b^2) + a^2x^2 = 0.$

即 $\{(x^2 + b^2) - ax\}^2 = 0$. ∴ $x^2 + b^2 - ax = 0$, $x = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}).$

44. 解 $(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b) + abc = 0.$

[解] $x+b+c+a = y$. 則原方程式變為 $(y-a)(y-b)(y-c) + abc = 0.$

即 $y^3 - y^2(a+b+c) + y(ab+bc+ca) = 0$. ∴ $y = 0.$

即 $x+a+b+c = 0$. ∴ $x = -a-b-c.$

或 $y^2 - y(a+b+c) + ab+bc+ca = 0.$

∴ $y = \frac{1}{2}\{a+b+c \pm \sqrt{(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)}\}.$

即 $x = \frac{1}{2}\{-a-b-c \pm \sqrt{(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)}\}.$

45. 解 $\frac{a}{b+c-x} + \frac{b}{c+a-x} + \frac{c}{a+b-x} + 3 = 0.$

[解] $\frac{a+b+c-x}{b+c-x} + \frac{a+b+c-x}{c+a-x} + \frac{a+b+c-x}{a+b-x} = 0.$

∴ $x = a+b+c$, 或 $\frac{1}{b+c-x} + \frac{1}{c+a-x} + \frac{1}{a+b-x} = 0.$

即 $(c+a-x)(a+b-x) + (a+b-x)(b+c-x) + (b+c-x)(c+a-x) = 0.$

即 $3x^2 - 4x(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca = 0.$

∴ $x = \frac{1}{3}\{2(a+b+c) \pm \sqrt{(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)}\}.$

46. $\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2 - (b-c)^2} + \frac{(x-b)^2}{(x-b)^2 - (c-a)^2} + \frac{(x-c)^2}{(x-c)^2 - (a-b)^2} = 1.$

[解] $x = a$, 或 b , 或 c 為能適合. ∴ a, b, c 為根.

$$\text{又 } \frac{(x-a)^2}{(x-a+b-c)(x-a-b+c)} + \frac{(x-b)^2}{(x-b+c-a)(x-b-c+a)} + \frac{(x-c)^2}{(x-c+a-b)(x-c-a+b)} = 1.$$

$$\text{即 } (x-a)^2(x+a-b-c) + (x-b)^2(x-a+b-c) + (x-c)^2(x-a-b+c) \\ = (x+a-b-c)(x-a+b-c)(x-a-b+c).$$

由是此方程式。爲三次方程式。故所求之根爲 a, b, c 。

$$47. \frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)} = \frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)} + \frac{(x-c)(x-d)}{(x+c)(x+d)}.$$

$$\text{〔解〕 } \frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)} = y, \quad \frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)} = z, \text{ 則}$$

$$\text{原方程式爲 } y + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{z}. \text{ 即 } (y-z)(yz-1) = 0.$$

$$\therefore y = z, \text{ 即 } \frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)} = \frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}.$$

$$\therefore x = 0, \text{ 或 } \pm \sqrt{\frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{a+b-c-d}}.$$

$$\text{又 } yz = 1, \text{ 即 } \frac{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)} = 1.$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{-\frac{ab(c+d) + cd(a+b)}{a+b+c+d}}.$$

第 玖 編 補

霍爾及乃托氏第九編摘要

二 次 三 項 式

1. 二次三項式 在 ax^2+bx+c 內有如下之關係。

$$ax^2+bx+c = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} \right\}. \text{ 若 } b^2-4ac \text{ 爲負。則}$$

$$= a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} \right\}.$$

由是 b^2-4ac 爲負。則 ax^2+bx+c 式之值。與 a 同號。視 a 爲正則正。否則爲零。

2. 例解 $\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}$ 爲任意之實數。若 x 爲實數。則 a 值之界限若何。

令 $\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a} = y$ 。則

$$(a-5y)x^2 - 7x(1-y) + (5-ay) = 0.$$

因 x 爲實數。故 $49(1-y)^2 - 4(a-5y)(5-ay) \geq 0$ 卽爲正。

卽 $(49-20a)y^2 + 2(2a^2+1)y + (49-20a)$ 爲正。

由 1 章 $4(2a^2+1)^2 - 4(49-20a)^2$ 應爲負或零。

卽 $4(a-5)^2(a+12)(a-2)$ 爲負或零。

由是 a 在 2 與 -12 之間。則前之代數式爲負。而 $49-20a$ 爲正。若 $a=5$ 。或 -12。或 2。則此代數式爲零。然 $a=5$ 。則 $49-20a$ 爲負。故知此值之界限爲 2 及 -12。而 a 在其中間。

例題九 (b)

10. 代數式 $\frac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ 若 p 在 1 與 7 之間。則對於 x 之任意實數值試表之。

[解] $\frac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}=y$. 則

$$x^2(p+4y)+3x(y-1)-(py+4)=0.$$

x 爲實數。則 $9(y-1)^2+4(p+4y)(py+4)\geq 0$.

$$\text{即 } y^2(16p+9)+2y(2p^2+23)+(16p+9)\geq 0.$$

故此代數式爲正。由 2 章。

$$4(2p^2+23)^2-4(16p+9)^2 \text{ 當爲負。}$$

$$\text{即 } 4(p+4)^2(p-1)(p-7) \text{ 爲負。}$$

由是 $p-1$ 與 $p-7$ 不能不異號。

故 p 在 1 與 7 之間。

14. $\frac{(ax-b)(dx-c)}{(bx-a)(cx-d)}$ 若 a^2-b^2 與 c^2-d^2 爲同號。則對於 x 之任意實數值試表之。

[解] $\frac{(ax-b)(dx-c)}{(bx-a)(cx-d)}=y$. 則

$$(ad-bcy)x^2-(ac+bd)(1-y)x+(bc-ady)=0. \text{ 因 } x \text{ 爲實數。故}$$

$$(ac+bd)^2(1-y)^2-4(ad-bcy)(bc-ady)\geq 0.$$

$$\text{即 } (ac-bd)^2y^2-2y\{(ac-bd)^2-2(ad-bc)^2\}+(ac-bd)\geq 0.$$

$$\text{故 } \{(ac-bd)^2-2(ad-bc)^2\}^2-(ac-bd)^4 \text{ 爲負。}$$

$$\text{即 } (ad-bc)^2\{(ad-bc)^2-(ac-bd)^2\} \text{ 爲負。}$$

$$\text{即 } -(a^2-b^2)(c^2-d^2) \text{ 爲負。}$$

由是 a^2-b^2, c^2-d^2 不能不同號。

霍爾及乃托氏第拾編摘要

雜方程式

3. 雜方程式 在斯密氏書內所無者。爲指數方程式。今於此編補其例題於下。

例題十 (a)

11. $3^{2x} + 9 = 10 \cdot 3^x$.

〔解〕變原方程式爲 $(3^x)^2 - 10(3^x) + 9 = 0$.

即 $(3^x - 1)(3^x - 9) = 0$.

故 $3^x - 1 = 0$, 或 $3^x - 9 = 0$. 即 $3^x = 3^0$, 或 $3^x = 3^2$.由是 $x = 0$, 或 $x = 2$.

12. $5(5^x + 5^{-x}) = 26$.

〔解〕 $5\left(5^x + \frac{1}{5^x}\right) = 26$. 即 $(5^x)^2 - \frac{26}{5}(5^x) + 1 = 0$.

即 $\left(5^x - \frac{1}{5}\right)(5^x - 5) = 0$.

故 $5^x = 5^{-1}$, 或 $5^x = 5^1$.由是 $x = -1$, 或 $x = +1$, 即 $x = \pm 1$.

13. $2^{2x+8} + 1 = 32 \cdot 2^x$.

〔解〕 $2^{2x+8} + 1 = 2^5 \cdot 2^x$. 即 $(2^{x+4})^2 - 2(2^{x+4}) + 1 = 0$.開平方則 $2^{x+4} - 1 = 0$. 即 $2^{x+4} = 1 = 2^0$.由是 $x + 4 = 0$. 即 $x = -4$.

14. $2^{2x+8} - 57 = 65(2^x - 1)$.

〔解〕 $2^3 \cdot 2^{2x} - 65 \cdot 2^x + 8 = 0$. 即 $(2^x - 8)(8 \cdot 2^x - 1) = 0$.故 $2^x = 8 = 2^3$, 或 $2^x = \frac{1}{8} = 2^{-3}$.由是 $x = 3$, 或 $x = -3$. 即 $x = \pm 3$.

15. $\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 2$.

〔解〕 $\sqrt{2^x} - 2\sqrt{2^x} + 1 = 0$. 開平方得 $\sqrt{2^x} - 1 = 0$.故 $2^{\frac{x}{2}} = 1$. 即 $2^{\frac{x}{2}} = 2^0$. $\therefore x = 0$.

44. $2^{x^2} : 2^{2x} = 8 : 1$.

〔解〕 $2^{x^2} \times 1 = 2^{2x} \times 8$. 即 $2^{x^2} = 2^{2x+3}$.故 $x^2 = 2x + 3$. 因之 $x = 3$, 或 $x = -1$.

45. $a^{2x}(a^2 + 1) = (a^{2x} + a^x)a$.

[解] $a^{3x+1} - a^{2x+2} - a^{2x} + a^{x+1} = 0$ 。以 a 除之。則

$$a^{3x} - a^{2x+1} - a^{2x-1} + a^x = 0。$$

即 $a^{2x}(a^x - a) - a^{x-1}(a^x - a) = 0$ 。

即 $(a^x - a)(a^{2x} - a^{x-1}) = 0$ 。

故 $a^x = a$ ，或 $a^{2x} = a^{x-1}$ 。

由是 $x=1$ ，或 $2x=x-1$ ，故 $x=\pm 1$ 。

$$48. (a+x)^{\frac{2}{3}} + 4(a-x)^{\frac{2}{3}} = 5(a^2 - x^2)^{\frac{1}{3}}。$$

[解] $(a+x)^{\frac{1}{3}} = y$ 。 $(a-x)^{\frac{1}{3}} = z$ 。則原方程式。爲

$$y^2 + 4z^2 = 5yz。即 y^2 - 5yz + 4z^2 = 0。$$

即 $(y-z)(y-4z) = 0$ 。

由是 $y = z$ ，或 $y = 4z$ 。

即 $y^3 = z^3$ ，或 $y^3 = 64z^3$ 。

即 $a+x = a-x$ ，或 $a+x = 64(a-x)$ 。

由是 $x=0$ ，或 $x = \frac{63}{65}a$ 。

[注意] 以上所示之例題。如 12. 15. 等。曾有負指數。及分指數。

即如 5^{-2} 或 $2^{\frac{2}{3}}$ 此等雖未經證明。然 $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ 。及 $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$ 。即證明在後。故此處僅示其定義而已。

例如 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ 。 $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ 之類。

又如 $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ 。

凡分指數。及負指數。斯密氏於第十三編述之頗詳。然令先知其定義。方知指數上之計算亦頗簡便。

查 理 斯 密 司 氏
霍 爾 氏, 乃 托 氏

大 代 數 學 講 義

第 叁 卷

第 拾 編

通同方程式 (或名聯立方程式。即多元方程式)。

140. 通同方程式 [Simultaneous Equation] 一方程式含有二個或二個以上之未知數量。則其諸未知數量之值。能適合者。多至無限。何則。其一個未知數量。恆因他未知數量任意之值而變。而得種種之值。

例如 $2x+y=12$ 式。其 $y=12-2x$ 。若 $x=1$ 則 $y=10$ 。 $x=2$ 則 $y=8$ 。 $x=3$ 則 $y=6$ 。故 x 及 y 可有無限之值。皆能適合。

然同此二未知數量。有二個方程式。則其未知數量之值。求其皆能適合者。即為有限。推之至於含 n 個未知數量之方程式。亦有 n 個。則其未知數量之值。同時能適合者。亦必有限。

二個以上之方程式。其所含諸未知數量之值能適合者。謂之通同方程式。

含諸未知數量 x, y, z, \dots 之方程式。則其式之次數。當依未知數量中最高乘元之次數稱之

例如 $ax+a^2y+a^3z=a^4$ 。為一次方程式。

$xy+x+y+z=0$ 。為二次方程式。

$x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ 。為三次方程式。

141. 一次通同方程式 先論有二未知數量之一次方程式。

有 x, y, z, \dots 之一次方程式。為 $ax+by+cz+\dots=k$ 。在此方程式內 a, b, c, \dots, k 。為已知數量。

[註] 同一組之諸方程式。其同未知數量之係數。可用同文字而附點。或小數字。以區別其值之異。則較便利。

例如 a, b, c 用於第一方程。則第二方程用 a', b', c' 。第三方程用 a'', b'', c'' 。或第一用 a, b, c 。第二用 a_2, b_2, c_2 。

由是含 x 及 y 之一次通同方程式。則爲

$$ax + by = c,$$

$$a'x + b'y = c'.$$

142. 兩未知數量之方程式 如下。

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'.$$

以第二式 y 之係數 b' 乘第一式。得 $ab'x + bb'y = cb'$ 。

以第一式 y 之係數 b 乘第二式。得 $a'bx + bb'y = c'b$ 。

由減法得 $(ab' - a'b)x = cb' - c'b$ 。 $\therefore x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$

以 x 之值。代入第一式。則得 $a \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} + by = c$ 。

由是 $by = \frac{c(ab' - a'b) - a(cb' - c'b)}{ab' - a'b}$ $\therefore y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$

或不關於 x 而徑求 y 。則如第一次求 x 之法。從第一式得 $a'ax + a'by = a'a$ 。從第二式得 $a'ax + ab'y = ac'$ 。

由減法得 $(a'b - ab')y = a'a - ac'$ 。 $\therefore y = \frac{a'a - ac'}{a'b - ab'}$ 。

[註] x 及 y 得其一。則他一個可互換其係數得之。

例如 $x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$ 從 a, b 及 a', b' 互換。則得

$$y = \frac{ca' - c'a}{ba' - b'a} \text{ 即既知 } x \text{ 可以徑得 } y.$$

故凡解一次二通同方程式。必先消去他未知數量。而變爲第三之方程式。則其一未知數量。即可求得。依此方法。棄他之一未知數量者。謂之消去法 (Eliminated)。

143* 公式 依前章從

$$\left. \begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array} \right\} \text{ 則 } x = \frac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \quad \text{及 } y = \frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

由是 $\frac{x}{cb'-c'b} = \frac{1}{ab'-a'b}$ 即 $\frac{x}{bc'-b'c} = \frac{-1}{ab'-a'b}$

及 $\frac{y}{ac'-a'c} = \frac{1}{ab'-a'b}$ 即 $\frac{y}{ca'-c'a} = \frac{-1}{ab'-a'b}$

由是得最要之公式如下

$$\frac{x}{bc'-b'c} = \frac{y}{ca'-c'a} = \frac{-1}{ab'-a'b}$$

此最要之公式。稱爲十文字之法。

$$ax+by+c(-1)=0.$$

$$a'x+b'y+c'(-1)=0.$$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & a \\ \times & \times & \times & \\ a' & b' & c' & a' \end{array}$$

-1 x y
之 之 之
分 分 分
母 母 母

上之十文字。以其對角線上之兩文字相乘。一得正積。一得負積。

$$\therefore \frac{x}{bc'-b'c} = \frac{y}{ca'-c'a} = \frac{-1}{ab'-a'b}$$

又從 $\left. \begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array} \right\}$ 得 $\begin{array}{cccc} a & b & c & a \\ \times & \times & \times & \\ a' & b' & c' & a' \end{array}$

1 x y
之 之 之
分 分 分
母 母 母

$$\therefore \frac{x}{bc'-b'c} = \frac{y}{ca'-c'a} = \frac{1}{ab'-a'b}$$

〔第一例〕解 $3x+2y=13, 7x+3y=27$ 。

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 13 & 3 \\ \times & \times & \times & \\ 7 & 3 & 27 & 7 \end{array}$$

-1 x y
之 之 之
分 分 分
母 母 母

$$\therefore \frac{x}{2 \cdot 27 - 3 \cdot 13} = \frac{y}{13 \cdot 7 - 27 \cdot 3} = \frac{-1}{3 \cdot 3 - 7 \cdot 2} \quad \text{即} \quad \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{1}{5}.$$

由是 $x = \frac{15}{5} = 3, \quad y = \frac{10}{5} = 2.$

〔第二例〕解 $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 2, \quad \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = -7.$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 2 & 4 \\ \times & \times & \times & \\ 2 & -5 & -7 & 2 \end{array}$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{x}}{3(-7) - (-5)2} = \frac{\frac{1}{y}}{2 \cdot 2 - (-7)4} = \frac{-1}{4(-5) - 2 \cdot 3},$$

-1 $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{y}$
之 之 之
分 分 分
母 母 母

$$\text{即} \quad \frac{\frac{1}{x}}{-11} = \frac{\frac{1}{y}}{32} = \frac{1}{26}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{-11}{26}. \quad \text{即} \quad x = -\frac{26}{11}, \quad \frac{1}{y} = \frac{32}{26} \quad \text{即} \quad y = \frac{13}{16}.$$

〔第三例〕解 $x-y=a-b, ax-by=2(a^2-b^2).$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & (a-b) & 1 \\ \times & \times & \times & \\ a & -b & 2(a^2-b^2) & a \end{array}$$

$$\therefore \frac{x}{-2(a^2-b^2)+b(a-b)}$$

$$= \frac{y}{(a-b)a-2(a^2-b^2)} = \frac{-1}{-b+a}$$

-1 x y
之 之 之
分 分 分
母 母 母

$$\text{即} \quad \frac{x}{b^2+ab-2a^2} = \frac{y}{2b^2-ab-a^2} = \frac{1}{b-a}$$

$$\therefore x = \frac{b^2+ab-2a^2}{b-a} = 2a+b, \quad y = \frac{2b^2-ab-a^2}{b-a} = a+2b.$$

〔別法〕令 $y=x-(a-b)$ 代入第二式。則

$$ax - b \{ x - (a - b) \} = 2(a^2 - b^2)。即 x(a - b) = 2(a^2 - b^2) - b(a - b)。$$

$$\therefore x = 2(a + b) - b = 2a + b。又 y = x - (a - b) = 2a + b - (a - b) = a + 2b。$$

144. 論一次兩通同方程式之解法 如下

$$ax + by = c \dots\dots\dots(1)$$

$$a'x + b'y = c' \dots\dots\dots(2)$$

此方程式變為下之(3)(4)兩式。其 x 及 y 之值。能適合明矣。

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b \dots\dots\dots(3)$$

$$(ba' - b'a)y = ca' - c'a \dots\dots\dots(4)$$

故 $ab' - a'b \neq 0$ 。則 x 及 y 各能得一個有限值。

若 $ab' - a'b = 0$ 。則 x 及 y 皆為無限大。見[118章]。但此固因 $cb' - c'b \neq 0$ 。

又 $ab' - a'b = 0$ 。即 $b' = \frac{a'b}{a}$ 代入(3)式。為 $c \times \frac{a'b}{a} - c'b \neq 0$

即 $\frac{b}{a}(ca' - c'a) \neq 0$ 。故亦 $ca' - c'a \neq 0$ 。惟(3)(4)式。 x 及 y 之係數皆為0。以0除非0者。必為無限大。

若 $ab' - a'b = 0$ 。及 $cb' - c'b = 0$ 。則 $x = \frac{0}{0}$ 。

又從 $b' = \frac{a'b}{a}$ 得 $c \times \frac{a'b}{a} - c'b = 0$ 。即 $\frac{b}{a}(ca' - c'a) = 0$ 。

$\therefore ca' - c'a = 0$ 。由是 $y = \frac{0}{0}$ 。則對於 x 及 y 不論為如何之值皆能適合。

$ab' - a'b = 0$ 。則 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ 。

$ab' - a'b = 0$ 。及 $cb' - c'b = 0$ 。則 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ 。

不合理之方程式 [Inconsistent] 對於未知數量有限之值不適合者。謂之不合理之方程式。

例如 $ab' - a'b = 0$ 。 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ 而不等於 $\frac{c}{c'}$ 。

不定方程式 (Indeterminate) $ab' - a'b = 0$, $cb' - c'b = 0$

即 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ 。則兩方程式全然相同。故謂之不定式。

例如以 $\frac{a'}{a}$ 乘(1)式。則 $a'x + \frac{a'}{a}by = \frac{a'}{a}c$ 。即

$a'x + \frac{b'}{b}by = \frac{c'}{c}c$ 。即 $a'x + b'y = c'$ 。即(1)式與(2)式同在此例。則 x 及 y 之值。可多至無限而皆能適合。

a, a', b, b' , 不常為 0。今試設 a 及 a' 為 0。則從(1)式。 $y = \frac{c}{b}$ 。從(2)式。 $y = \frac{c'}{b'}$ 。而此結果非 $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ 則不合理。

由是 $a = a' = 0$ 。及 $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ 。則(1)式及(2)式為 $y = \frac{c}{b}$ 能適合。而 x 之值當為無限大。

若 $a = a' = 0$ 而 $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$ 。則 $by = c$ 及 $b'y = c'$ 。雖不合理。然在 $ax + by = c$ 及 $a'x + b'y = c'$ 之內。令 a 及 a' 減小。至於極限。則亦能合理。

何則 $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$ 。則 $cb' - c'b \neq 0$ 。

又 $a = a' = 0$ 。則 $ab' - a'b = 0$ 。故 x 及 y 之值。可為無限大。

145. 三未知數量之通同方程式 解法如下。

$$ax + by + cz = d \dots\dots\dots(1)$$

$$a'x + b'y + c'z = d' \dots\dots\dots(2)$$

$$a''x + b''y + c''z = d'' \dots\dots\dots(3)$$

[連次消去之法] 以 c' 乘(1)式。 c 乘(2)式。則得

$$ac'x + bc'y + cc'z = dc'$$

及 $a'cx + b'cy + cc'z = d'c$

$$\text{由減法得 } (ac' - a'c)x + (bc' - b'c)y = dc' - d'c \dots\dots\dots(4)$$

以 c'' 乘(1)式 c 乘(3)式如前法。則得

$$(ac'' - a''c)x + (bc'' - b''c)y = dc'' - d''c \dots\dots\dots(5)$$

從(4)式及(5)式。用 143 章之公式如下。

$$x = \frac{-(bc' - b'c)(dc'' - d''c) + (dc' - d''c)(bc'' - b''c)}{(ac' - a'c)(bc'' - b''c) - (bc' - b'c)(ac'' - a''c)}$$

[未定係數之法] 以 λ 乘(1)式。 μ 乘(2)式。與(3)式相加。則得 $x(\lambda a + \mu a' + a'') + y(\lambda b + \mu b' + b'') + z(\lambda c + \mu c' + c'') = \lambda d + \mu d' + d''$ 。

此方程式 λ 及 μ 爲任意之值。皆能適合。見(149章)。

今令 y 及 z 之係數爲 0。以求 λ 及 μ 之值。則

$$x(\lambda a + \mu a' + a'') = \lambda d + \mu d' + d'' \quad \therefore x = \frac{\lambda d + \mu d' + d''}{\lambda a + \mu a' + a''}$$

但從 $\left. \begin{aligned} \lambda b + \mu b' + b'' &= 0 \\ \lambda c + \mu c' + c'' &= 0 \end{aligned} \right\}$ 用 143 章之公式。得

$$\frac{\lambda}{b''c' - b'c''} = \frac{\mu}{b''c - bc''} = \frac{1}{bc' - b'c}$$

$$\therefore \lambda(bc' - b'c) = b''c' - b'c'' \quad \text{及} \quad \mu(bc' - b'c) = b''c - bc''$$

$$\text{由是 } x = \frac{\lambda d + \mu d' + d''}{\lambda a + \mu a' + a''} \times \frac{bc' - b'c}{bc' - b'c}$$

$$= \frac{d\lambda(bc' - b'c) + d'\mu(bc' - b'c) + d''(bc' - b'c)}{a\lambda(bc' - b'c) + a'\mu(bc' - b'c) + a''(bc' - b'c)}$$

$$\frac{d(b''c' - b'c'') + d'(b''c - bc'') + d''(bc' - b'c)}{a(b''c' - b'c'') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c)}$$

連次消去法。所得 x 之值。可以 c 約其分母分子。與未定係數法。所得 x 之值同。

依上法求得 x 之值。則 y 及 z 之值。可逕得之。即 y 之值。可在 x 值內。以 a 與 b 及 a' 與 b' 及 a'' 與 b'' 交換而得之。又 y 之值。可在 x 值內。以 a, b, c 及 a', b', c' 及 a'', b'', c'' 輪換而得之。至 z 之值。可用第二之輪換得之。

x, y, z 之值。其分母常同。而此分母非等於 0。則各值皆爲有限數。

[第一例] $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \dots\dots\dots (1) \\ 2x + 4y + z = 7 \dots\dots\dots (2) \\ 3x + 2y + 9z = 14 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$

以 2 乘(1)式。則 $2x + 4y + 6z = 12$ 。由此式減(2)式。則 $5z = 5$ 。 $\therefore z = 1$ 。

以 3 乘(1)式。則 $3x + 6y + 9z = 18$ 。由此式減(3)式。則 $4y = 4$ 。 $\therefore y = 1$ 。

\therefore 從(1)式。得 $x + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$ 。 $\therefore x = 1$ 。

[第二例] 解下之方程式。

$$x+y+z=1 \dots\dots\dots (1)$$

$$ax+by+cz=d \dots\dots\dots (2)$$

$$a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \dots\dots\dots (3)$$

以 c 乘(1)式減去(2)式。則得 $(c-a)x+(c-b)y=c-d \dots\dots\dots (4)$

以 c 乘(2)式減去(3)式。則得 $a(c-a)x+b(c-b)y=d(c-d) \dots\dots (5)$

以 b 乘(4)式減去(5)式。則得 $(b-a)(c-a)x=(b-d)(c-d)$ 。

$$\therefore x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}$$

y, z 之值。可如下式選書出之。

$$y = \frac{(c-d)(a-d)}{(c-b)(a-b)}, \quad z = \frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}$$

[第三例] 解下之方程式。

$$x+y+z=a+b+c \dots\dots\dots (1)$$

$$ax+by+cz=bc+ca+ab \dots\dots\dots (2)$$

$$bcx+cay+abz=3abc \dots\dots\dots (3)$$

從(1)式。則 $(x-c)+(y-a)+(z-b)=0$ 。

從(2)式。則 $a(x-c)+b(y-a)+c(z-b)=0$ 。

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \times & \times & \times & \times \\ a & b & c & a \end{array}$$

用 143 章十字字之法。則得

$$(z-b)(x-c)(y-a)$$

$$\frac{x-c}{c-b} = \frac{y-a}{a-c} = \frac{z-b}{b-a}$$

之 之 之
分 分 分
母 母 母

$$= \frac{bc(x-c)+ca(y-a)+ab(z-b)}{bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)} = \frac{bcx+cay+abz-bc^2-ca^2-ab^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

從(3)式。則 $\frac{x-c}{c-b} = \frac{y-a}{a-c} = \frac{z-b}{b-a} = \frac{3abc-bc^2-ca^2-ab^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$$\therefore x = c - \frac{3abc-bc^2-ca^2-ab^2}{(a-b)(c-a)} = \frac{a(b-c)^2}{(a-b)(c-a)}$$

由是 y 與 z 之值。可選書出。

[第四例] 解下之方程式。

$$x+ay+a^2z+a^3=0 \dots\dots\dots(1)$$

$$x+by+b^2z+b^3=0 \dots\dots\dots(2)$$

$$x+cy+c^2z+c^3=0 \dots\dots\dots(3)$$

先設 $\lambda^3+z\lambda^2+y\lambda+x=0$ 。此方程式內。用 a, b, c 代 λ 。則順次得 (1)。(2)。(3) 三式而適合。故 λ 之值為 a, b, c 。

又以 a, b, c 為三根之方程式。為 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)=0$ 。

$$\text{即 } \lambda^3-(a+b+c)\lambda^2+(ab+bc+ca)\lambda-abc=0.$$

與前之 λ 之三次方程式。比較其係數。則

$$z=-(a+b+c). \quad y=ab+bc+ca. \quad x=-abc.$$

146. 諸未知數量之通同方程式 含三個以上未知數量之一次通同方程式。依後編所示之定準數法。自易求得。

又用連次消去法。或未定係數之倍數法。亦能求得之。

$$\text{例如 } ax + by + cz + du = e \dots\dots\dots(1)$$

$$a'x + b'y + c'z + d'u = e' \dots\dots\dots(2)$$

$$a''x + b''y + c''z + d''u = e'' \dots\dots\dots(3)$$

$$a'''x + b'''y + c'''z + d'''u = e''' \dots\dots\dots(4)$$

λ 乘 (1) 式。 μ 乘 (2) 式。 γ 乘 (3) 式。與 (4) 式相加。則得

$$\begin{aligned} &x(a\lambda+a'\mu+a''\gamma+a''') + y(b\lambda+b'\mu+b''\gamma+b''') \\ &+ z(c\lambda+c'\mu+c''\gamma+c''') + u(d\lambda+d'\mu+d''\gamma+d''') \\ &= e\lambda + e'\mu + e''\gamma + e''' \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

λ, μ, γ 在 (5) 式內設 y, z, u 之係數為 0。則

$$x = \frac{e\lambda + e'\mu + e''\gamma + e'''}{a\lambda + a'\mu + a''\gamma + a'''} \dots\dots\dots(6)$$

但 λ, μ, γ 可從方程式。

$$\left. \begin{aligned} b\lambda + b'\mu + b''\gamma + b''' &= 0 \\ c\lambda + c'\mu + c''\gamma + c''' &= 0 \\ d\lambda + d'\mu + d''\gamma + d''' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

而用 145 章之法解之。得 λ, μ, γ 之各值。以此代入 (6) 式。即得 x 值。

又得 x 之後。則 y, z, u 各值。可由 a, b, c, d 及 a', b', c', d' 及 a'', b'', c'', d'' 及 a''', b''', c''', d''' 輪換得之。即由 x 之值得之也。但未知數量之分母則同。

例題十二

試解以下之方程式。

$$1. \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{x}{5} - \frac{3y}{10} = \frac{1}{2}.$$

[解] 去兩方程式之分母。則 $2x - y = 3, 2x - 3y = 5$ 。

$$\therefore (2x - y) - (2x - 3y) = 3 - 5. \text{ 即 } 2y = -2. \therefore y = -1.$$

$$x = \frac{1}{2}(y + 3) = 1.$$

$$2. \quad \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = 2, \quad \frac{18}{x} + \frac{8}{y} = 10. \quad \left[\text{答 } x = 2\frac{4}{7}, y = 2\frac{2}{3} \right].$$

[解] $\frac{9}{x} - \frac{4}{y} + \frac{1}{2} \left(\frac{18}{x} + \frac{8}{y} \right) = 2 + \frac{1}{2} \times 10$ 。即 $\frac{18}{x} = 7$ 。 $\therefore x = 2\frac{4}{7}$ 。

$$3. \quad x + \frac{3}{y} = \frac{7}{2}, \quad 3x - \frac{2}{y} = \frac{26}{3}. \quad (\text{答 } x = 3, y = 6).$$

[解] $3 \left(x + \frac{3}{y} \right) - \left(3x - \frac{2}{y} \right) = 3 \times \frac{7}{2} - \frac{26}{3}$ 。即 $\frac{11}{y} = \frac{11}{6}$ 。 $\therefore y = 6$ 。

$$4. \quad \frac{4}{x} - \frac{3}{y} + 5 = \frac{6}{x} + \frac{3}{y} = 10.$$

[解] $\frac{4}{x} - \frac{3}{y} + 5 = 10$ 。即 $\frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 5$ 。又 $\frac{6}{x} + \frac{3}{y} = 10$ 。

由加法 $\frac{10}{x} = 15$ 。 $\therefore x = \frac{2}{3}, y = 3$ 。

$$5. \quad ax + by = 2ab, \quad bx - ay = b^2 - a^2.$$

[解] $a(ax + by) + b(bx - ay) = a(2ab) + b(b^2 - a^2)$ 。

$$\text{即 } x(a^2 + b^2) = b(a^2 + b^2). \quad \therefore x = b, \text{ 及 } y = a.$$

$$6. \quad x + ay + a^2 = 0, \quad x + by + b^2 = 0. \quad (\text{答 } x = ab, y = -a - b).$$

[解] 由減法 $(a - b)y + a^2 - b^2 = 0$ 。 $\therefore y = -(a + b)$ 。

$$7. \quad x + y = 2a, \quad (a - b)x = (a + b)y.$$

[解] $y = \frac{(a-b)x}{a+b}$. $\therefore x + \frac{(a-b)x}{a+b} = 2a$. $\therefore x = a+b, y = a-b$.

8. $(b+c)x + (b-c)y = 2ab, (c+a)x + (c-a)y + 2ac$.

[解] 以 c 乘第一式, b 乘第二式, 由減法.

$(c^2-ab)x - (c^2-ab)y = 0$. $\therefore y = x$.

故從第一式 $(b+c)x + (b-c)x = 2ab$, 得 $x = a = y$.

9. $bx + ay = 2ab, a^2x + b^2y = a^3 + b^3$.

[解] $b(x-a) + a(y-b) = 0, a^2(x-a) + b^2(y-b) = 0$.

由視察得 $x-a=0, y-b=0$. $\therefore x=a, y=b$.

10. $(a+b)x + by = ax + (b+a)y = a^3 - b^3$.

[解] 從 $(a+b)x + by = ax + (b+a)y$ 得 $bx = ay$. $\therefore y = \frac{b}{a}x$.

由是 $(a+b)x + b \times \frac{b}{a}x = a^3 - b^3$.

即 $(a^2 + ab + b^2)x = a(a^3 - b^3)$. $\therefore x = a(a-b)$ 及 $y = b(a-b)$.

11. $x + y + z = 1, 2x + 3y + z = 4, 4x + 9y + z = 16$.

[解] 於第二式減第一式, 則 $x + 2y = 3$.

於第三式減第二式, 則 $2x + 6y = 12$, 即 $x + 3y = 6$.

$\therefore (x+3y) - (x+2y) = 6-3$. $\therefore y = 3, x = -3, z = 1$.

12. $x + y + z = 1, \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + 4z = 1, \frac{5}{3}x + \frac{3}{4}y - \frac{z}{2} = 1$.

[解] 變第二式, 爲 $2x + y + 16z = 4$, 變第三式, 爲 $20x + 9y - 6z = 12$.

乃於第二式減第一式, 則 $x + 15z = 3$. 又以 9 乘第二式, 而於第三式減去之, 則 $2x - 150z = -24$, 即 $x - 75z = -12$.

$\therefore (x+15z) - (x-75z) = 3 - (-12)$, 即 $90z = 15$.

由是 $z = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$.

13. $x + 2y + 3z = 3x + y + 2z = 2x + 3y + z = 6$. [答 $x = y = z = 1$].

14. $y + z = 2a, z + x = 2b, x + y = 2c$.

[解] $(y+z) + (z+x) - (x+y) = 2a + 2b - 2c$, 即 $2z = 2a + 2b - 2c$.

由是 $z = a + b - c, x = b + c - a, y = c + a - b$.

$$15. \quad y+z-x=2a, \quad z+x-y=2b, \quad x+y-z=2c. \quad y=.$$

[解] 於第一加第二。則 $2z=2a+2b$ 。

由是 $z=a+b, \quad x=b+c, \quad y=c+a$ 。

$$16. \quad y+z-3x=2a, \quad z+x-3y=2b, \quad x+y-3z=2c.$$

[解] 三方程式相加。得 $-x-y-z=2a+2b+2c$ 。

由此加第一式。則 $-4x=4a+2b+2c$ 。

$$\therefore x = -\frac{1}{2}(2a+b+c), \quad y = -\frac{1}{2}(2b+c+a), \quad z = -\frac{1}{2}(2c+a+b).$$

$$17. \quad ax+by+cz=1, \quad bx+cy+az=1, \quad cx+ay+bz=1.$$

[解] 第一第二次。由減法得 $(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0$ 。

第二第三次。由減法得 $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$ 。

用十文字之法。得

用行列式法

$$\frac{x}{(b-c)(a-b)-(c-a)^2} = \frac{y}{(c-a)(b-c)-(a-b)^2} = \frac{z}{(a-b)(c-a)-(b-c)^2}$$

此三分母。同為 $ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2$ 。故 $x=y=z$ 。

$$\text{由是 } ax+bx+cx=1. \quad \therefore x=y=z = \frac{1}{a+b+c}.$$

$$18. \quad \frac{y+z-x}{b+c} = \frac{z+x-y}{c+a} = \frac{x+y-z}{a+b} = 1.$$

$$[\text{解}] \quad \frac{(y+z-x)+(z+x-y)}{(b+c)+(c+a)} = 1. \quad \text{即 } \frac{2z}{a+b+2c} = 1. \quad \therefore z = \frac{1}{2}(a+b+2c).$$

$$19. \quad x+y+z=0, \quad ax+by+cz=1, \quad a^2x+b^2y+c^2z=a+b+c.$$

[解] $(a+b+c)(ax+by+cz)-(a^2x+b^2y+c^2z)=a+b+c-(a+b+c)$ 。

即 $a(b+c)x+b(c+a)y+c(a+b)z=0$ 。此式與第一用十文字之法。

$$\text{得 } \frac{x}{b(c+a)-c(a+b)} = \frac{y}{c(a+b)-a(b+c)} = \frac{z}{a(b+c)-b(c+a)}$$

$$\text{即 } \frac{x}{a(b-c)} = \frac{y}{b(c-a)} = \frac{z}{c(a-b)} = \frac{ax+by+cz}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$

$$\therefore \text{從第二 } \frac{x}{a(b-c)} = \frac{y}{b(c-a)} = \frac{z}{c(a-b)} = \frac{1}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$\text{由是 } x = -\frac{a}{(a-b)(c-a)}, \quad y = -\frac{b}{(b-c)(a-b)}, \quad z = -\frac{c}{(c-a)(b-c)}$$

20. $x+y+z=a+b+c, \quad bx+cy+az=bc+ca+ab,$

$$cx+ay+bz=bc+ca+ab.$$

〔解〕變三方程式爲順次。得 $(x-a)+(y-b)+(z-c)=0,$

$$b(x-a)+c(y-b)+a(z-c)=0, \quad c(x-a)+a(y-b)+b(z-c)=0,$$

由視察得 $x=a, \quad y=b, \quad z=c.$

21. $x+y+z=a+b+c, \quad bx+cy+az=a^2+b^2+c^2,$

$$cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2,$$

〔解〕從第一 $(x-b)+(y-c)+(z-a)=0.$

從第二 $b(x-b)+c(y-c)+a(z-a)=0.$ 用十文字之法。得

$$\frac{x-b}{a-c} = \frac{y-c}{b-a} = \frac{z-a}{c-b} = \frac{c(x-b)+a(y-c)+b(z-a)}{c(a-c)+a(b-a)+b(c-b)} = \frac{cx+ay+bz-bc-ca-ab}{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}.$$

$$\therefore \text{從第三} \quad \frac{x-b}{a-c} = \frac{y-c}{b-a} = \frac{z-a}{c-b} = \frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2} = -1.$$

由是 $x=b+c-a, \quad y=c+a-b, \quad z=a+b-c.$

22. $x+y+z=0, \quad (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=(b-c)(c-a)(a-b).$

$$bcx+ca y+abz=0.$$

〔解〕第一及第三用十文字之法。得

$$\frac{x}{ab-ca} = \frac{y}{bc-ab} = \frac{z}{ca-bc}.$$

$$\text{即} \quad \frac{x}{a(b-c)} = \frac{y}{b(c-a)} = \frac{z}{c(a-b)} = \frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)}.$$

$$\text{從第二得} \quad \frac{x}{a(b-c)} = \frac{y}{b(c-a)} = \frac{z}{c(a-b)} = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = 1.$$

由是 $x=a(b-c), \quad y=b(c-a), \quad z=c(a-b).$

23. $ax+by+cz=a, \quad bx+cy+az=b, \quad cx+ay+bz=c.$

〔解〕 $a(x-1)+by+cz=0, \quad b(x-1)+cy+az=0,$

$$c(x-1)+ay+bz=0. \quad \therefore \text{由視察得} \quad x=1, \quad y=z=0.$$

24. $x-ay+a^2z-a^3=0, \quad x-by+b^2z-b^3=0, \quad x-cy+c^2z-c^3=0.$

〔解〕在 $\lambda^3 - z\lambda^2 + y\lambda - x = 0$ 式內。以 λ 代 a, b, c 爲能適合。

故 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)=0.$

$$\text{即} \quad \lambda^3 - (a+b+c)\lambda^2 + (ab+bc+ca)\lambda - abc = 0.$$

$$\therefore \quad z=a+b+c, \quad y=ab+bc+ca, \quad x=abc.$$

$$25. \quad ax+by+cz=m, \quad a^2x+b^2y+c^2z=m^2, \quad a^3x+b^3y+c^3z=m^3.$$

〔解〕以 c 乘第一式而減第二式，則 $a(c-a)x+b(c-b)y=m(c-m)$ 。
以 c 乘第二式而減第三式，則 $a^2(c-a)x+b^2(c-b)y=m^2(c-m)$ 。於此
兩方程式，以 b 乘其前式而減後式，則

$$a(c-a)(b-a)x=m(c-m)(b-m). \quad \therefore x=\frac{m(c-m)(b-m)}{a(c-a)(b-a)}.$$

$$26. \quad ax+cy+bz=a^2+2bc, \quad cx+by+az=b^2+2ca, \\ bx+ay+cz=c^2+2ab.$$

$$〔解〕 \quad a(x-a)+c(y-b)+b(z-c)=0, \quad c(x-a)+b(y-b)+a(z-c)=0, \\ b(x-a)+a(y-b)+c(z-c)=0.$$

由觀察，得 $x=a, y=b, z=c$ 。

$$27. \quad x+y+z=2a+2b+2c, \quad ax+by+cz=2bc+2ca+2ab, \\ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$$

$$〔解〕 \quad \{x-(b+c)\} + \{y-(c+a)\} + \{z-(a+b)\} = 0.$$

$$a\{x-(b+c)\} + b\{y-(c+a)\} + c\{z-(a+b)\} = 0.$$

$$(b-c)\{x-(b+c)\} + (c-a)\{y-(c+a)\} + (a-b)\{z-(a+b)\} = 0.$$

\therefore 由觀察，得 $x=b+c, y=c+a, z=a+b$ 。

$$28. \quad ax+by+cz=a+b+c, \quad a^2x+b^2y+c^2z=(a+b+c)^2, \\ bcx+cay+abz=0.$$

$$〔解〕 \quad (a+b+c)(ax+by+cz)-(a^2x+b^2y+c^2z)=(a+b+c)^2-(a+b+c)^2.$$

即 $a(b+c)x+b(c+a)y+c(a+b)z=0$ 。此式與第三式用十字字

$$\text{之法，得 } \frac{x}{ca \cdot c(a+b) - b(c+a)ab} = \frac{y}{ab \cdot a(b+c) - c(a+b)bc} \\ = \frac{z}{bc \cdot b(c+a) - a(b+c)ca}.$$

$$\text{即 } \frac{x}{a(c-b)(ab+bc+ca)} = \frac{y}{b(a-c)(ab+bc+ca)} = \frac{z}{c(b-a)(ab+bc+ca)}.$$

$$\text{即 } \frac{x}{a(b-c)} = \frac{y}{b(c-a)} = \frac{z}{c(a-b)} = \frac{ax+by+cz}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

$$\therefore \text{從第一 } \frac{x}{a(b-c)} = \frac{y}{b(c-a)} = \frac{z}{c(a-b)} = \frac{a+b+c}{-(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

$$\text{由是 } x = -\frac{a(a+b+c)}{(c-a)(a-b)}, \quad y = -\frac{b(a+b+c)}{(a-b)(b-c)}, \quad z = -\frac{c(a+b+c)}{(b-c)(c-a)}.$$

29. $x+y+z=l+m+n, lx+my+nz=mn+nl+lm,$
 $(m-n)x+(n-l)y+(l-m)z=0.$

[解] 設 $x=\frac{\alpha}{2}, y=\frac{\beta}{2}, z=\frac{\gamma}{2}$ 則原三方程式變爲

$$\alpha+\beta+\gamma=2l+2m+2n, l\alpha+m\beta+n\gamma=2mn+2nl+2lm,$$

$$(m-n)\alpha+(n-l)\beta+(l-m)\gamma=0.$$

依 27 題解之, 得 $\alpha=m+n, \beta=n+l, \gamma=l+m.$

$$\therefore x=\frac{1}{2}(m+n), y=\frac{1}{2}(n+l), z=\frac{1}{2}(l+m).$$

30. $lx+ny+mz=nx+my+lz=mx+ly+nz=l^3+m^3+n^3-3lmn.$

[解] 三方程式相加. 以 $m+n+l$ 除之. 則

$$x+y+z=3(m^2+n^2+l^2-mn-nl-lm) \dots \dots \dots (A)$$

從第一減第二 $(l-n)x+(n-m)y+(m-l)z=0.$

從第二減第三 $(n-m)x+(m-l)y+(l-n)z=0.$

用十字文字之法. 得

$$\frac{x}{(n-m)(l-n)-(m-l)^2} = \frac{y}{(n-m)(m-l)-(l-n)^2} = \frac{z}{(l-n)(m-l)-(n-m)^2}.$$

此各分母同爲 $mn+ln+ml-m^2-n^2-l^2$. 故 $x=y=z$.

由是從 (A) 得 $x=y=z=\frac{m^2+n^2+l^2-mn-nl-lm}{m+n+l}.$

31. $l^2x+m^2y+n^2z=lmx+mny+nz=nlx+lmy+mnz=l+m+n,$

[解] $l(lx-1)+m(my-1)+n(nz-1)=0.$

$$m(lx-1)+n(my-1)+l(nz-1)=0.$$

$$n(lx-1)+l(my-1)+m(nz-1)=0.$$

由觀察. 得 $lx=my=nz=1.$

32. $\frac{x}{a+a} + \frac{y}{a+\beta} + \frac{z}{a+\gamma} = 1, \quad \frac{x}{b+a} + \frac{y}{b+\beta} + \frac{z}{b+\gamma} = 1,$

$$\frac{x}{c+a} + \frac{y}{c+\beta} + \frac{z}{c+\gamma} = 1.$$

[解] 設以 λ 之值. 代 a, b, c . 此方程式變爲 $\frac{x}{\lambda+a} + \frac{y}{\lambda+\beta} + \frac{z}{\lambda+\gamma} = 1.$

$$\lambda^3 - \lambda^2(x+y+z-a-\beta-\gamma) + \lambda\{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-x(\beta+\gamma)-y(\gamma+\alpha)-z(\alpha+\beta)\}$$

$$-(\beta\gamma x + \gamma\alpha y + \alpha\beta z - \alpha\beta\gamma) = 0.$$

又 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c) = 0.$

即 $\lambda^3 - \lambda^2(a+b+c) + \lambda(ab+bc+ca) - abc = 0.$

此兩方程式。比較其係數。則

$$x+y+z-a-\beta-\gamma=a+b+c \dots\dots\dots(1)$$

$$a\beta+\beta\gamma+\gamma a-x(\beta+\gamma)-y(\gamma+a)-z(a+\beta)=ab+bc+ca \dots\dots\dots(2)$$

$$\beta\gamma x+\gamma ay+a\beta z-a\beta\gamma=abc \dots\dots\dots(3)$$

以 $(a+\beta)$ 乘 (1) 加 (2) 則

$$(a-\gamma)x+(\beta-\gamma)y=a^2+a\beta+\beta^2+(a+\beta)(a+b+c)+ab+bc+ca \dots(4)$$

以 $a\beta$ 乘 (1) 減 (3)。則

$$\beta(a-\gamma)x-a(\beta-\gamma)y=a\beta(a+\beta)+a\beta(a+b+c)-abc \dots\dots\dots(5)$$

以 a 乘 (4) 減 (5)。則

$$(a-\gamma)(a-\beta)x=a^3+a^2(a+b+c)+a(ab+bc+ca)+abc.$$

$$\therefore x = \frac{(a+a)(a+b)(a+c)}{(a-\gamma)(a-\beta)}.$$

33. $y+z+w=a, z+w+x=b, w+x+y=c, x+y+z=d.$

[解] 四方程式相加。則 $3(x+y+z+w)=a+b+c+d \dots\dots\dots(A)$

(A) 從第一則 $3(x+a)=a+b+c+d. \therefore x=\frac{1}{3}(b+c+d-2a).$

(A) 從第二則 $3(y+b)=a+b+c+d. \therefore y=\frac{1}{3}(a+c+d-2b).$

(A) 從第三則 $3(z+c)=a+b+c+d. \therefore z=\frac{1}{3}(a+b+d-2c).$

(A) 從第四則 $3(w+d)=a+b+c+d. \therefore w=\frac{1}{3}(a+b+c-2d).$

34. $x+ay+a^2z+a^3w+a^4=0, x+by+b^2z+b^3w+b^4=0.$

$$x+cy+c^2z+c^3w+c^4=0, x+dy+d^2z+d^3w+d^4=0.$$

[解] 在 $\lambda^4+\lambda^3w+\lambda^2z+\lambda y+x=0, \lambda$ 之四根為 $a, b, c, d.$

故 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)(\lambda-d)=0.$

即 $\lambda^4-\lambda^3(a+b+c+d)+\lambda^2(ab+bc+ca+ad+bd+cd).$

$$-\lambda(abc+abd+acd+cad)+abcd=0.$$

比較此兩方程式之係數。則

$$w=-(a+b+c+d), z=ab+bc+ca+ad+bd+cd,$$

$$y=-(abc+abd+acd+cad), x=abcd.$$

二次通同方程式

147. 二次通同方程式 此處先論二次通同方程式。然後再解高於二次之通同方程式。

[第一類] 含二未知數量之兩方程式。其一爲二次式。一爲一次式。

例如 $3x+2y=7$, $3x^2-2y^2=25$, 試解之。

從第一式 $x=\frac{7-2y}{3}$ 。以此代入第二式。則得 $3\left(\frac{7-2y}{3}\right)^2-2y^2=25$ 。

由是 $y^2+14y+13=0$ 。即 $(y+13)(y+1)=0$ 。

$\therefore y=-1$ 或 $y=-13$,

$y=-1$ 。則 $x=\frac{7-2(-1)}{3}=3$, $y=-13$ 。則 $x=\frac{7-2(-13)}{3}=11$ 。

依上例凡兩方程式。其一爲一次式。一爲二次式。則在一次式內。以其一未知數量表他一未知數量。以代入第二之方程式內。則得他一未知數量之二次式。而二未知數量。均能依此求得之。今示以公式如下

$$lx+my+n=0.$$

$$ax^2+bx+cy^2+dx+ey+f=0.$$

從第一式。則 $x=-\frac{my+n}{l}$ 。以此代於第二式。則

$$a\left(\frac{my+n}{l}\right)^2-b\left(\frac{my+n}{l}\right)y+cy^2-d\left(\frac{my+n}{l}\right)+ey+f=0.$$

即 $y^2(am^2-bml+d^2)+y(2anm-bnl-dml+el^2)+an^2-ndl+l^2f=0$ 。

即得 y 之二次式。由此先求得 y 。而 x 之值亦易求得矣。

148. 任意之二次兩方程式 兩方程式均爲二次。則消去一未知數量。即爲他一未知數量之四次方程式。非前章之法所能解。

例如 $ax^2+bx+c=y$, $x^2+y^2=d$ 。

用第一式之 y 代於第二式。則

$$x^2+(ax^2+bx+c)^2=d.$$

即爲 x 之四次式。

149. [第二類] 兩方程式。爲二次之等次式。則恒能解之。惟此例必消去已知數量之項。

例如 $ax^2+bx+cy^2=d$, $a'x^2+b'xy+c'y^2=d'$ 。

d' 乘第一式, d 乘第二式相減, 則

$$d'(ax^2 + bxy + cy^2) - d(a'x^2 + b'xy + c'y^2) = dd' - dd'$$

$$\text{即 } (ad' - a'd)x^2 + (bd' - b'd)xy + (cd' - c'd)y^2 = 0.$$

此方程式由 81 章可分割為一次兩因子, 如 $lx + my = 0$ 之形, 然亦可用第一類之法解之。

[例] 解 $y^2 - xy = 15$, $x^2 + xy = 14$,

$$14(y^2 - xy) - 15(x^2 + xy) = 14 \times 15 - 15 \times 14,$$

$$\text{即 } 15x^2 + 29xy - 14y^2 = 0. \quad (5x - 2y)(3x + 7y) = 0.$$

$$\text{由是 } 5x - 2y = 0, \text{ 或 } 3x + 7y = 0.$$

$$5x - 2y = 0, \text{ 即 } x = \frac{2}{5}y. \text{ 從第一式 } y^2 - \frac{2}{5}y^2 = 15,$$

$$\therefore y = \pm 5, \quad x = \pm 2.$$

$$3x + 7y = 0, \text{ 即 } x = -\frac{7}{3}y. \text{ 從第一式 } y^2 + \frac{7}{3}y^2 = 15,$$

$$\therefore y = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad x = \mp \frac{7}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{由是 } x = 2, y = 5, \text{ 或 } x = -2, y = -5, \text{ 或 } x = -\frac{7}{\sqrt{2}}, y = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$\text{或 } x = \frac{7}{\sqrt{2}}, y = -\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

150. 特別之法 前設兩類之外, 尚有特別類之方程式亦能解之。

[第一例] 解 $x - y = 2$, $xy = 15$.

以第一式平方之, 加第二式之四倍, 則

$$(x - y)^2 + 4xy = 2^2 + 4 \times 15. \text{ 即 } (x + y)^2 = 64.$$

$$\therefore x + y = \pm 8. \text{ 與 } x - y = 2 \text{ 相加或減, 得}$$

$$x = \frac{\pm 8 + 2}{2} = 5, \text{ 或 } -3, \quad y = \frac{\pm 8 - 2}{2} = 3, \text{ 或 } -5.$$

$$\text{由是 } x = 5, y = 3, \text{ 或 } x = -3, y = -5.$$

[第二例] 解 $x^2 + xy + y^2 = a^2$, $x^4 + x^2y^2 + y^4 = b^4$.

以第一式除第二式, 則 $x^2 - xy + y^2 = \frac{b^4}{a^2}$ 從第一式減去此式, 則

$$2xy = a^2 - \frac{b^4}{a^2} \quad \therefore xy = \frac{a^4 - b^4}{2a^2}.$$

$$\text{由是 } (x^2 + xy + y^2) + xy = a^2 + \frac{a^4 - b^4}{2a^2} \quad \therefore x + y = \pm \sqrt{\frac{3a^4 - b^4}{2a^2}}.$$

$$\text{及 } (x^2 - xy + y^2) - xy = \frac{b^4}{a^2} - \frac{a^4 - b^4}{2a^2} \quad \therefore x - y = \pm \sqrt{\frac{3b^4 - a^4}{2a^2}}.$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \left\{ \pm \sqrt{\frac{3a^4 - b^4}{2a^2}} \pm \sqrt{\frac{3b^4 - a^4}{2a^2}} \right\}, \quad y = \frac{1}{2} \left\{ \pm \sqrt{\frac{3a^4 - b^4}{2a^2}} \mp \sqrt{\frac{3b^4 - a^4}{2a^2}} \right\}.$$

〔第三例〕解 $x^2 - 2y^2 = 4y$, $3x^2 + xy - 2y^2 = 16y$. 以 4 乘第一式減去第二式。則得 $x^2 - xy - 6y^2 = 0$.

$$\text{即 } (x - 3y)(x + 2y) = 0. \quad \therefore x = 3y, \text{ 或 } x = -2y.$$

$$x = 3y. \text{ 則從第一式得 } 9y^2 - 2y^2 = 4y. \quad \therefore y = 0, \text{ 或 } \frac{4}{7}.$$

$$x = -2y. \text{ 則從第一式得 } 4y^2 - 2y^2 = 4y. \quad \therefore y = 0, \text{ 或 } 2.$$

$$\text{由是 } x = y = 0, \text{ 或 } x = -4, y = 2, \text{ 或 } x = \frac{12}{7}, y = \frac{4}{7}.$$

$$\text{〔第四例〕解 } x^2 + y^2 = (x + y + 1)^2, \quad x^2 + y^2 = (x - y + 2)^2,$$

$$(x + y + 1)^2 = (x - y + 2)^2. \quad \therefore x + y + 1 = \pm(x - y + 2).$$

$$\therefore 2y = 1. \text{ 即 } y = \frac{1}{2}, \text{ 或 } 2x = -3. \text{ 即 } x = -\frac{3}{2}.$$

$$y = \frac{1}{2}. \text{ 則 } x^2 + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2} + 1)^2. \quad \therefore x = -\frac{2}{3}.$$

$$x = -\frac{3}{2}. \text{ 則 } \frac{9}{4} + y^2 = (-\frac{3}{2} + y + 1)^2. \quad \therefore y = -2.$$

$$\text{〔第五例〕解 } x + y = 2b. \quad x^4 + y^4 = 2a^4.$$

$$\text{令 } x = b + z. \text{ 則從第一式 } y = b - z.$$

$$\text{由是第二式變爲 } (b + z)^4 + (b - z)^4 = 2a^4.$$

$$\text{即 } z^4 + 6b^2z^2 + b^4 = a^4.$$

$$\therefore z = \pm \sqrt{-3b^2 \pm \sqrt{8b^4 + a^4}},$$

$$x = b \pm \sqrt{-3b^2 \pm \sqrt{8b^4 + a^4}},$$

$$y = b \mp \sqrt{-3b^2 \pm \sqrt{8b^4 + a^4}}.$$

例題十三

解以下之各方程式。

$$1. x+y=x^2-y^2=23.$$

[答 $x=12, y=11$].

[解] 以 $x+y=23$. 除 $x^2-y^2=23$. 則 $x-y=1$.

$$2. x^2-4y^2+x+3y=2x-y=1.$$

[解] $y=2x-1$. $\therefore x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)=1$.

即 $15x^2-23x+8=0$. 即 $(x-1)(15x-8)=0$.

$$\therefore x=1, y=1, \text{ 或 } x=\frac{8}{15}, y=\frac{1}{15}.$$

$$3. x^2+xy=12, xy-2y^2=1.$$

[解] $(x^2+xy)-12(xy-2y^2)=12-12$. 即 $x^2-11xy+24y^2=0$.

即 $(x-3y)(x-8y)=0$. $\therefore x=3y$, 或 $8y$.

若 $x=3y$. 則 $(3y)^2+3y^2=12$. $\therefore y=\pm 1, x=\pm 3$.

若 $x=8y$. 則 $(8y)^2+8y^2=12$. $\therefore y=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}, x=\pm 8\sqrt{\frac{1}{6}}$.

$$4. x^2+2y^2=22, 3y^2-xy-x^2=17.$$

[答 $\pm 2, \pm 3$, 或 $\pm\frac{16}{9}\sqrt{3}, \mp\frac{13}{9}\sqrt{3}$].

$$5. x-y=5, \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{5}{84}.$$

[解] 變第二式. 爲 $x-y=\frac{5}{84}xy$. \therefore 從第一得 $5=\frac{5}{84}xy$.

即 $xy=84, (x-y)^2+4xy=5^2+4\times 84$. 即 $x+y=\pm 19$.

從 $x+y=\pm 19$. 及 $x-y=5$. 得 $x=12, y=7$, 或 $x=-7, y=-12$.

$$6. x+y=a+b, \frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=1.$$

[答 a, b 或 $2a-b, 2b-a$].

[解] 由觀察得 $x=a, y=b$, 兩方程式爲適合.

又去第二式之分母而括之. 則 $(a-b)(x-y)+ay=a^2+b^2-ab$.

從第一式得 $y=a+b-x$.

$$\therefore (a-b)(x-a-b+x)+x(a+b-x)=a^2+b^2-ab.$$

$$\text{即 } x^2-x(3a-b)-ab+2a^2=0. \quad \therefore x \text{ 二根之和爲 } 3a-b.$$

$$\text{由是 } x=(3a-b)-a=2a-b, \quad \therefore y=2b-a.$$

$$7. a(x+y)=b(x-y)=xy. \quad \left[\text{答 } 0, 0 \text{ 或 } \frac{2ab}{b-a}, \frac{2ab}{b+a} \right].$$

(解) 由視察得 $x=y=0$.

又各以 xy 除之。則 $\frac{a}{y} + \frac{a}{x} = 1, \frac{b}{y} - \frac{b}{x} = 1$ 由此得 x, y .

$$8. \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{y^2} + \frac{1}{yx} = \frac{1}{b^2}.$$

(解) 兩方程式相加。開平方。則 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \pm \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{ab}$.

$$\text{從第一式 } a^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a. \quad \therefore x = \pm \frac{a\sqrt{(a^2+b^2)}}{b}.$$

$$\text{從第二式 } b^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = y. \quad \therefore y = \pm \frac{b\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}.$$

$$9. \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 10, \quad \frac{ab}{xy} = 3. \quad \left[\text{答 } \pm \frac{a}{3}, \pm b \text{ 或 } \pm a, \pm \frac{b}{3} \right].$$

$$\text{(解)} \left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} \right) + 2\frac{ab}{xy} = 10 + 2 \times 3. \quad \therefore \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \pm 4.$$

$$\text{又 } \left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} \right) - 2\frac{ab}{xy} = 10 - 2 \times 3. \quad \therefore \frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \pm 2.$$

$$\therefore \frac{2a}{x} = (\pm 4) + (\pm 2) = \pm 6, \text{ 或 } \pm 2. \quad \therefore x = \pm \frac{a}{3} \text{ 或 } \pm a.$$

$$10. x+y=2a, \quad x^3+y^3=2b^3.$$

(解) 以第一式除第二式。則 $x^2-xy+y^2 = \frac{b^3}{a}$.

$$\therefore (x+y)^2 - (x^2-xy+y^2) = (2a)^2 - \frac{b^3}{a}. \quad \text{即 } xy = \frac{4a^3 - b^3}{3a}.$$

$$\text{又 } (x^2-xy+y^2) - xy = \frac{b^3}{a} - \frac{4a^3 - b^3}{3a}. \quad \therefore x-y = \pm \sqrt{\frac{4b^3 - 4a^3}{3a}}.$$

$$\text{由是 } x = a \pm \sqrt{\frac{b^3 - a^3}{3a}}, \quad y = a \mp \sqrt{\frac{b^3 - a^3}{3a}}.$$

$$11. x^2 - xy + y^2 = 109, x^4 + x^2y^2 + y^4 = 4251.$$

[解] 以第一式除第二式，則 $x^2 + xy + y^2 = 39$ 。從此式減第一式，則 $2xy = -70$ 。即 $xy = -35$ 。

$$\therefore (x^2 + xy + y^2) + xy = 39 + (-35). \quad \therefore x + y = \pm 2.$$

$$\text{又 } (x^2 - xy + y^2) - xy = 109 - (-35). \quad \therefore x - y = \pm 12.$$

由是 $x = \pm 7, y = \mp 5$ ，或 $x = \pm 5, y = \mp 7$ 。

$$12. x^2 + xy + y^2 = 183, x + \sqrt{xy} + y = 19.$$

[解] 以第二式除第一式，則 $x - \sqrt{xy} + y = 7$ 。從第二式減此式，則 $2\sqrt{xy} = 12$ 。即 $xy = 36$ 。

$$\therefore (x^2 + xy + y^2) + xy = 183 + 36. \quad \therefore x + y = \pm 13.$$

$$\text{又 } (x^2 + xy + y^2) - 3xy = 183 - 3 \times 36. \quad \therefore x - y = \pm 5.$$

由是 $x = \pm 9, y = \pm 4$ ，或 $x = \pm 4, y = \pm 9$ 。

$$13. x + y = 72, \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6. \quad [\text{答 } 64, 8 \text{ 或 } 8, 64].$$

[解] 求第二式之立方。則 $x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 216$ 。

$$\therefore \text{從第一式 } 72 + 3\sqrt[3]{xy}(6) = 216. \quad \therefore xy = 512.$$

$$14. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2, xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8. \quad [\text{答 } -6 \pm \sqrt{30}, 6 \mp \sqrt{30}].$$

於第二式減第一式，則 $xy = 6$ 。又第一式為 $y + x = 2xy$ 。

$$\therefore y + x = 12.$$

$$15. x + y = 1, x^5 + y^5 = 31.$$

[解] 以第一式除第二式，則 $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 31$ 。

從 $(x + y)^4 = 1$ 減此式，則 $5x^3y + 5x^2y^2 + 5xy^3 = -30$ 。

即 $x^2 + xy + y^2 = \frac{-6}{xy}$ 。從 $(x + y)^2 = 1$ 減此式，則

$$xy = 1 + \frac{6}{xy}. \quad \text{即 } x^2y^2 - xy - 6 = 0. \quad \therefore xy = 3, \text{ 或 } xy = -2.$$

從 $x + y = 1, xy = 3, \text{ 或 } -2$ ，求 x 及 y 。則

$$x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-11}), y = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{-11}), \text{ 或 } x = 2, y = -1, \text{ 或 } x = -1, y = 2.$$

$$16. x^2 + y^2 + 3xy - 4(x + y) + 3 = 0, xy + 2(x + y) - 5 = 0.$$

[解] 從第一式減第二式而括之，則 $(x + y)^2 - 6(x + y) + 8 = 0$ 。

即 $(x+y-4)(x+y-2)=0$. $\therefore x+y=4$, 或 $x+y=2$.

由是從第二式 $xy=5-2(x+y)$. 即 $xy=-3$, 或 $xy=1$.

從 $x+y=4$, $xy=-3$, $x=2\pm\sqrt{7}$, $y=2\mp\sqrt{7}$.

從 $x+y=2$, $xy=1$, $x=y=1$.

17. $x^2+xy+x=14$, $y^2+xy+y=28$. [答 2, 4, 或 $-\frac{7}{8}$, $-\frac{14}{8}$].

[解] 兩方程式相加. 則 $(x+y)^2+(x+y)=42$. $\therefore x+y=6$, 或 -7 .

從第一式 $x=\frac{14}{x+y+1}=\frac{14}{6+1}=2$, 或 $x=\frac{14}{-7+1}=-\frac{7}{8}$.

18. $x^2+y^2=9$, $x^2-xy+y^2=3$. [答 2, 1, 或 1, 2].

[解] 以第二式除第一式. 則 $x+y=3$.

又 $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=3^2-3$. 即 $3xy=6$. $\therefore xy=2$.

19. $x(y-b)=y(x-a)=2ab$. [答 $2a$, $2b$, 或 $-a$, $-b$].

20. $x+\frac{1}{y}=1$, $y+\frac{1}{x}=4$.

[解] $xy+1=y$, $xy+1=4x$. $\therefore y=4x$.

由是從第二 $4x^2+1=4x$. $\therefore x=\frac{1}{2}$, $y=2$.

21. $ax+by=2ab$, $\frac{a}{y}+\frac{b}{x}=2$.

[解] 從第二式 $ax+by=2xy$. \therefore 從第一式 $xy=ab$.

又 $(ax+by)^2-4abxy=(2ab)^2-4ab(ab)$. 即 $ax-by=0$.

從 $ax+by=2ab$, 及 $ax-by=0$. $\therefore x=b$, $y=a$.

22. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$.

[答 6, 6, 或 $-\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{5})$, $-\frac{3}{2}(1\mp\sqrt{5})$].

[解] 去分母. 則 $x^3+y^3=12xy$, $x+y=\frac{1}{3}xy$.

由除法得 $x^2-xy+y^2=36$.

又 $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=\left(\frac{1}{3}\times xy\right)^2-36$.

即 $3xy = \frac{1}{9}x^2y^2 - 36$. $\therefore a^2y^2 - 27xy - 324 = 0$,

$\therefore xy = 36$, 或 -9 .

23. $\frac{x^2}{y} + xy = a^2$, $\frac{y^2}{x} + xy = b^2$. [答 $\pm a \sqrt{\frac{\pm ab}{a^2+b^2}}$, $\pm b \sqrt{\frac{\pm ab}{a^2+b^2}}$].

[解] $x(x^2+y^2) = a^2y$, $y(y^2+x^2) = b^2x$.

由除法得 $\frac{x}{y} = \frac{a^2y}{b^2x}$. $\therefore x = \pm \frac{a}{b}y$.

\therefore 從第二式 $y(y^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2) = \pm aby$. $\therefore y = 0$, 或 $\pm b \sqrt{\frac{\pm ab}{a^2+b^2}}$.

24. $xy - \frac{x}{y} = a$, $xy - \frac{y}{x} = \frac{1}{a}$. [答 $\pm \frac{1}{a} \sqrt{1+a^2}$, $\pm \sqrt{1+a^2}$].

[解] $(xy - a)(xy - \frac{1}{a}) = \frac{x}{y} \times \frac{y}{x}$. 即 $x^2y^2 - (a + \frac{1}{a})xy + 1 = 1$.

即 $xy = a + \frac{1}{a}$. 又從第一式 $\frac{x}{y} = xy - a = a + \frac{1}{a} - a = \frac{1}{a}$.

由是 $xy \times \frac{x}{y} = (a + \frac{1}{a}) \frac{1}{a}$. $\therefore x = \pm \frac{1}{a} \sqrt{1+a^2}$.

25. $x+y + \frac{y^2}{x} = 14$, $x^2+y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 84$. [答 2, 4, 或 8, 4].

[解] $x^2+xy+y^2 = 14x$. $x^4+x^2y^2+y^4 = 84x^2$.

由除法 $x^2-xy+y^2 = 6x$. 從第一式減此式. 即得 $2xy = 8x$.

$\therefore y = 4$, $x^2+4x+16 = 14x$. $\therefore x = 2$, 或 $x = 8$.

26. $x+y = 6$, $(x^2+y^2)(x^3+y^3) = 1440$.

[解] 從第二式 $\{(x+y)^2 - 2xy\} \{(x+y)^3 - 3xy(x+y)\} = 1440$.

\therefore 從第一式 $\{36 - 2xy\} \{216 - 18xy\} = 1440$.

即 $x^2y^2 - 30xy + 176 = 0$. $\therefore xy = 8$ 或 22 .

從 $xy = 8$, $x+y = 6$. 故 $x = 4$, $y = 2$, 或 $x = 2$, $y = 4$.

又從 $xy = 22$ 及 $x+y = 6$. 故 $x = 3 \pm \sqrt{-13}$, $y = 3 \mp \sqrt{-13}$.

27. $x+y = 8xy$, $x^2+y^2 = 40x^2y^2$.

[解] $(x+y)^2 - (x^2+y^2) = (8xy)^2 - 40x^2y^2$. 即 $12x^2y^2 - xy = 0$.

$\therefore xy = 0$ 或 $\frac{1}{12}$. 由是 $x+y = 0$ 或 $\frac{2}{3}$.

從 $xy=0$, $x+y=0$, $\therefore x=y=0$.

又從 $xy=\frac{1}{12}$, $x+y=\frac{2}{3}$. $\therefore x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{6}$, 或 $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{2}$.

28. $x^2-xy=8x+3$, $xy-y^2=8y-6$. [答 3, 6, 或 $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$].

[解] 從第一式減第二式。則 $x^2-2xy+y^2=8(x-y)+9$.

即 $(x-y)^2-8(x-y)-9=0$ $\therefore x-y=9$, 或 -1 .

若 $x-y=9$. 則從第一式。得 $x(x-y)=8x+3$.

即 $9x=8x+3$. $\therefore x=3$. 若 $x-y=-1$. 則從第一式 $-x=8x+3$.

即 $x=-\frac{1}{9}$.

29. $\frac{x+y}{1-xy}=3$, $\frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{3}$.

[解] $x+y=3(1-xy)$, $x-y=\frac{1}{3}(1+xy)$.

由是 $(x+y)^2-(x-y)^2=9(1-xy)^2-\frac{1}{9}(1+xy)^2$. 即 $2x^2y^2-5xy+2=0$.

$\therefore xy=2$, 或 $\frac{1}{2}$, 從第一式 $x+y=-3$, 或 $\frac{3}{2}$.

從第二式 $x-y=1$. 或 $\frac{1}{2}$. $\therefore x=-1$, $y=-2$, 或 $x=1$, $y=-\frac{1}{2}$.

30. $x-y=a(x^2-y^2)$, $x+y=b(x^2-y^2)$.

[解] 從第一式 $x-y=0$, 或 $1=a(x+y)$.

從第二式 $x+y=0$, 或 $1=b(x-y)$.

由是 $x=0$, $y=0$, $x=\frac{a+b}{2ab}$, $y=\frac{b-a}{2ab}$.

31. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}$.

[解] $2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=2\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)-\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2$.

即 $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)^2$. $\therefore \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$, 或 $-\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$.

從 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$. 則 $x=b$, $y=a$.

又從 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = -\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$. 則 $x = \frac{a^2}{b}$, $y = \frac{b^2}{a}$.

$$32. \quad \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{y}{b} + \frac{b}{y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

[解] 從第一式 $\frac{bx-ay}{ab} = \frac{bx-ay}{xy}$, $\therefore bx-ay=0$ (1). 或 $ab=xy$ (2),

從第二式 $\frac{y(x-b)}{bx} = \frac{x-b}{y}$, $\therefore x-b=0$ (3). 或 $bx=y^2$ (4).

從 (1)(3) 則 $x=b$, $y = \frac{b^2}{a}$. 從 (1)(4). 則 $x = \frac{a^2}{b}$, $y=a$.

從 (2)(3) 則 $x=b$, $y=a$. 從 (2)(4). 則 $x = \sqrt[3]{a^2b}$, $y = \sqrt[3]{ab^2}$.

[注意] (1)(2) 及 (3)(4). 不能於同時成立.

151. 解諸未知數量之通同方程式. 含二未知數量之二次通同方程式. 有一二之定則. 已述於前. 至未知數量在三個以上者. 原無一定之解法. 茲特舉其特別之例. 解之如下. 俾其他例題可以準此類推.

[第一例] 解 $\begin{cases} (x+y)(x+z) = a^2 \dots\dots\dots(1) \\ (y+z)(y+x) = b^2 \dots\dots\dots(2) \\ (z+x)(z+y) = c^2 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$

(2) 式及 (3) 式之積. 以 (1) 式除之. 則得

$$(y+z)^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}. \quad \therefore y+z = \pm \frac{bc}{a}. \quad \text{同法得 } z+x = \pm \frac{ca}{b}, \quad x+y = \pm \frac{ab}{c}.$$

$$\text{由是 } (y+z) + (z+x) - (x+y) = \pm \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - \frac{ab}{c} \right).$$

$$\text{即 } z = \pm \frac{b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2}{2abc}.$$

$$\text{同法 } x = \pm \frac{c^2a^2 + a^2b^2 - b^2c^2}{2abc}, \quad \text{及 } y = \pm \frac{a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2}{2abc}.$$

[第二例] 解 $\begin{cases} x(y+z) = a \dots\dots\dots(1) \\ y(z+x) = b \dots\dots\dots(2) \\ z(x+y) = c \dots\dots\dots(3) \end{cases}$

從(1)(2)兩式之和減去(3)式。則得 $2xy = a + b - c$ 。

同法 $2yz = b + c - a$, $2zx = c + a - b$ 。

$$\therefore \frac{(2xy)(2zx)}{2yz} = \frac{(a+b-c)(c+a-b)}{b+c-a} \text{。 即 } x = \pm \sqrt{\frac{(a+b-c)(c+a-b)}{2(b+c-a)}}$$

同法 $y = \pm \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{2(c+a-b)}}$, 及 $z = \pm \sqrt{\frac{(c+a-b)(b+c-a)}{2(a+b-c)}}$ 。

[第三例] 解 $\begin{cases} x^2 + 2yz = a \dots\dots\dots (1) \\ y^2 + 2zx = a \dots\dots\dots (2) \\ z^2 + 2xy = b \dots\dots\dots (3) \end{cases}$

此三方程式相加開平方。則得 $x + y + z = \pm \sqrt{2a + b} \dots\dots (4)$

從(1)式減(2)式。則 $(x - y)(x + y - 2z) = 0$ 。

$$\therefore x - y = 0 \dots\dots\dots (5)$$

或 $x + y - 2z = 0 \dots\dots\dots (6)$

(I) 從(5)式 $x = y$ 。 \therefore 從(4)式 $2x + z = \pm \sqrt{2a + b}$ 。

又從(2)式減(3)式。則 $y^2 + 2zx - z^2 - 2xy = a - b$ 。

$$\therefore \text{從(5)式 } x^2 - 2zx + z^2 = b - a \text{。 } \therefore x - z = \pm \sqrt{b - a} \text{。}$$

$$\text{由是 } x = y = \frac{1}{3} \{ \pm \sqrt{2a + b} \pm \sqrt{b - a} \} \text{。}$$

$$z = \frac{1}{3} \{ \pm \sqrt{2a + b} \mp 2\sqrt{b - a} \} \text{。}$$

(II) 從(6)式 $x + y = 2z$ 。

$$\therefore \text{從(4)式 } z = \pm \frac{1}{3} \sqrt{2a + b} \text{。 及 } x + y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{2a + b} \text{。}$$

又從(2)式 $y^2 + x(x + y) = a$ 。

$$\text{由是 } x = \pm \sqrt{\frac{a - b}{3}} \pm \frac{1}{3} \sqrt{2a + b} \text{。 } y = \mp \sqrt{\frac{a - b}{3}} \pm \frac{1}{3} \sqrt{2a + b} \text{。}$$

[第四例] 解 $b^2z + c^2y = c^2x + a^2z = a^2y + b^2x = xyz$ 。

$$a^2(b^2z + c^2y) + b^2(c^2x + a^2z) - c^2(a^2y + b^2x) = (a^2 + b^2 - c^2)xyz$$

$$\text{即 } 2a^2b^2z = (a^2 + b^2 - c^2)xyz$$

$$\therefore z = 0 \text{, 或 } xy = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2 - c^2} \text{。}$$

$$\text{同法 } x=0, \text{ 或 } yz = \frac{2b^2c^2}{b^2+c^2-a^2}$$

$$y=0, \text{ 或 } zx = \frac{2c^2a^2}{c^2+a^2-b^2}.$$

由是可知第二例。求 x, y, z

[第五例] 解 $x^2 - yz = a, y^2 - zx = b, z^2 - xy = c.$

$$(x^2 - yz)^2 - (y^2 - zx)(z^2 - xy) = a^2 - bc.$$

$$\text{即 } x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = a^2 - bc.$$

$$\text{同法 } \frac{x}{a^2 - bc} = \frac{y}{b^2 - ca} = \frac{z}{c^2 - ab} = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(a^2 - bc)^2} = \frac{yz}{(b^2 - ca)(c^2 - ab)} = \frac{x^2 - yz}{(a^2 - bc)^2 - (b^2 - ca)(c^2 - ab)}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(a^2 - bc)^2} = \frac{a}{a(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)}$$

$$\therefore x = \frac{a^2 - bc}{\pm \sqrt{(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)}}$$

$$\begin{aligned} \text{[第六例]} \quad & \begin{cases} x + y + z = a + b + c \dots\dots\dots (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \dots\dots\dots (2) \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3 \dots\dots\dots (3) \end{cases} \\ \text{解} \quad & \end{aligned}$$

由觀察可知 $x = a, y = b, z = c.$

又從 (1) 式。得 $(x - a) + (y - b) + (z - c) = 0.$

及從 (3) 式。得 $\frac{1}{a}(x - a) + \frac{1}{b}(y - b) + \frac{1}{c}(z - c) = 0.$

即 $bc(x - a) + ca(y - b) + ab(z - c) = 0.$

(1) 式及 (3) 式。變如上之方程式。用十字字之法。則

$$\frac{x - a}{a(b - c)} = \frac{y - b}{b(c - a)} = \frac{z - c}{c(a - b)} = K.$$

$$\begin{aligned} \therefore K^2 &= \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}{a^2(b - c)^2 + b^2(c - a)^2 + c^2(a - b)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2(ax + by + cz)}{a^2(b - c)^2 + b^2(c - a)^2 + c^2(a - b)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{從 (2) 式。} K^2 = \frac{-2(ax + by + cz - a^2 - b^2 - c^2)}{a^2(b - c)^2 + b^2(c - a)^2 + c^2(a - b)^2} \dots\dots\dots (4)$$

又
$$K = \frac{a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$

$$= \frac{ax+by+cz-a^2-b^2-c^2}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \dots\dots\dots (5)$$

以(5)式除(4)式。則
$$K = \frac{2(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}$$

$$\therefore \frac{x-a}{a(b-c)} = \frac{y-b}{b(c-a)} = \frac{z-c}{c(a-b)} = \frac{2(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}$$

[第七例] 解下之方程式。

$$x+y+z=6,$$

$$yz+zx+xy=11,$$

$$xyz=6.$$

此三方程式。依 129 章三次方程式之關係式可解。

如合 x, y, z 三根之三次方程式。其未知數為 λ 。則

$$(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0.$$

即 $\lambda^3 - (x+y+z)\lambda^2 + (xy+yz+zx)\lambda - xyz = 0.$

從上之三方程式。則此三次方程式為

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

$\therefore (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0.$

$\therefore \lambda = 1, 2, \text{ 或 } 3. \quad \therefore x=1, y=2, z=3.$

而原方程式為 x, y, z 之等勢式。故

$$x=1, y=2, z=3.$$

或 $x=1, y=3, z=2.$

或 $x=2, y=1, z=3.$

或 $x=2, y=3, z=1.$

或 $x=3, y=2, z=1.$

或 $x=3, y=1, z=2.$

[第八例] 解下之方程式。

$$x+y+z=a, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}, \quad yz+zx+xy = -c^2.$$

從第二式得 $a(yz+zx+xy) = xyz \quad \therefore$ 從第三式 $xyz = -ac^2.$

依前法 λ 之三根。爲 x, y, z 則其方程式。爲 $(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$ 。

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$ 。

即 $\lambda^3-a\lambda^2-c^2\lambda+ac^2=0$ 。

即 $(\lambda-a)(\lambda-c)(\lambda+c)=0$ 。 $\therefore \lambda=a, c, -c$ 。

由是 x, y, z 之值。爲 $a, c, -c$ 。

[第九例] 解下之方程式。

$$x^2(y-z)=a^2(b-a).$$

$$y^2(z-x)=b^2(c-a).$$

$$z^2(x-y)=c^2(a-b).$$

由加法得 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$
 $=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 。

即 $(y-z)(z-x)(x-y)=(b-c)(c-a)(a-b)$(A)

又由乘法得 $x^2(y-z)y^2(z-x)z^2(x-y)=a^2(b-c)b^2(c-a)c^2(a-b)$ 。

即 $x^2y^2z^2(y-z)(z-x)(x-y)=a^2b^2c^2(b-c)(c-a)(a-b)$(B)

從 (A) (B) 兩式。 $x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$ 。 $\therefore xyz=\pm abc$(C)

又從第一第二兩式。 $a^2(b-c)y+b^2(c-a)x=x^2y(y-z)+y^2x(z-x)$
 $=xyz(y-x)$ 。

\therefore 從 (C) 式。 $a^2(b-c)y+b^2(c-a)x=\pm abc(y-x)$ 。

即 $bx(bc-ab\pm ca)=ay(ca-ab\pm bc)$ 。

由是 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ ，或 $\frac{x(bc-ab-ca)}{a}=\frac{y(ca-ab-bc)}{b}$ 。

同法 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ，或 $\frac{x(bc-ca-ab)}{a}=\frac{y(ca-ab-bc)}{b}=\frac{x(ab-bc-ca)}{c}$ 。

(I) $xyz=abc$ ，及 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 。則 $\frac{x}{a}=\sqrt[3]{\frac{xyz}{abc}}=\sqrt[3]{1}$ 。

$\therefore x=a, a(\omega), a(\omega)^2$ 。 $y=b, b(\omega), b(\omega)^2$ 。 $z=c, c(\omega), c(\omega)^2$ 。

(II) $xyz=abc$ ，及 $\frac{a(bc-ca-ab)}{a}=\frac{y(ca-ab-bc)}{b}=\frac{z(ab-bc-ca)}{c}$ 。

$\therefore \frac{x(bc-ca-ab)}{a}=\sqrt[3]{\frac{xyz(bc-ca-ab)(ca-ab-bc)(ab-bc-ca)}{abc}}$
 $=\sqrt[3]{|(bc-ca-ab)(ca-ab-bc)(ab-bc-ca)|}$ 。

例題十四

解以下之方程式。

1. $yz=a^2, zx=b^2, xy=c^2.$

〔解〕 $\frac{(xz)(xy)}{-yz} = \frac{b^2c^2}{a^2}. \therefore x = \pm \frac{bc}{a}, y = \pm \frac{ca}{b}, z = \pm \frac{ab}{c}.$

2. $x(x+y+z)=a^2, y(x+y+z)=b^2, z(x+y+z)=c^2.$

〔解〕 三方程式相加開平方。則 $x+y+z = \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$

$\therefore x = \frac{a^2}{x+y+z} = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$

$y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, z = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$

3. $-yz+zx+xy=a, yz-zx+xy=b, yz+zx-xy=c.$

〔解〕 第一第二式相加。則 $2xy=a+b.$

同法 $2yz=b+c, 2zx=c+a.$

$\therefore \frac{(2zx)(2xy)}{2yz} = \frac{(a+b)(c+a)}{b+c}. \text{ 即 } x = \pm \sqrt{\frac{(a+b)(c+a)}{2(b+c)}},$

同法 $y = \pm \sqrt{\frac{(b+c)(a+b)}{2(c+a)}}, z = \pm \sqrt{\frac{(c+a)(b+c)}{2(a+b)}}.$

4. $yz=a(y+z), zx=b(z+x), xy=c(x+y).$

〔解〕 由視察可知 $x=y=z=0.$

又 $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}, \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b}, \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{c}.$

$\therefore \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}.$

即 $\frac{2}{x} = \frac{ca+ab-bc}{abc}.$

由是 $x = \frac{2abc}{ca+ab-bc}, y = \frac{2abc}{ab+bc-ca}, z = \frac{2abc}{bc+ca-ab}.$

5. $yz=by+cz, zx=cx+ax, xy=ax+by.$

〔解〕 由視察可知 $x=y=z=0.$

又 $\frac{b}{z} + \frac{c}{y} = 1, \frac{c}{x} + \frac{a}{z} = 1, \frac{a}{y} + \frac{b}{x} = 1.$

$$\therefore b\left(\frac{c}{x} + \frac{a}{z}\right) + c\left(\frac{a}{y} + \frac{b}{x}\right) - a\left(\frac{b}{z} + \frac{c}{y}\right) = b + c - a,$$

$$\text{即 } \frac{2bc}{x} = b + c - a, \quad \therefore x = \frac{2bc}{b+c-a}, \quad y = \frac{2ca}{c+a-b}, \quad z = \frac{2ab}{a+b-c}$$

$$6. \quad x^2 + 2yz = 12, \quad y^2 + 2zx = 12, \quad z^2 + 2xy = 12.$$

[解] 三方程式相加開平方。則 $x+y+z = \pm 6$ 。

從第一減第二式。則 $(x-y)(x+y-2z) = 0$ 。

$\therefore x-y=0, x+y-2z=0$ 。如 $x-y=0$ 。則從第二得 $x^2 + 2zx = 12$ 。

從第三得 $z^2 + 2x^2 = 12$ 。由減法 $x^2 - 2zx + z^2 = 0$ 。

$$\therefore x-z=0, \quad \therefore x=y=z.$$

故從 $x+y+z = \pm 6$ 。則 $3x = \pm 6$ 。 $\therefore x=y=z = \pm 2$ 。

又若 $x+y-2z=0$ 。則從 $x+y+z = \pm 6$ 。 $3z = \pm 6$ 。 $\therefore z = \pm 2$ 。

又從第二 $y^2 + (x+y)x = 12$ 。及 $x+y = 2z = \pm 4$ 。由是解此方程式。即得 x, y 而其根亦為 ± 2 。

$$7. \quad (y+z)(x+y+z) = a, \quad (z+x)(x+y+z) = b, \quad (x+y)(x+y+z) = c.$$

[解] 三方程式相加。則 $2(x+y+z)^2 = a+b+c$ 。

$$\therefore x+y+z = \pm \sqrt{\frac{a+b+c}{2}}.$$

又於第二加第三而減第一。則 $2x(x+y+z) = b+c-a$ 。

$$\therefore x = \frac{b+c-a}{2(x+y+z)} = \frac{b+c-a}{\pm \sqrt{2(a+b+c)}}.$$

$$8. \quad (y+b)(z+c) = a^2, \quad (z+c)(x+a) = b^2, \quad (x+a)(y+b) = c^2.$$

[解] 第二式第三式相乘。以第一式除之。則 $(x+a)^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$ 。

$$\therefore x = \pm \frac{bc}{a} - a, \quad y = \pm \frac{ca}{b} - b, \quad z = \pm \frac{ab}{c} - c.$$

$$9. \quad x^2 - (y-z)^2 = a^2, \quad y^2 - (z-x)^2 = b^2, \quad z^2 - (x-y)^2 = c^2.$$

[解] $(x+y-z)(x-y+z) = a^2, \quad (y+z-x)(y-z+x) = b^2,$

$$(z+x-y)(z-x+y) = c^2.$$

第一第二相乘。以第三式除之。則 $(x+y-z)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}$ 。

$$\therefore x+y-z = \pm \frac{ab}{c}, \quad y+z-x = \pm \frac{bc}{a}.$$

由加法 $xy = \pm \frac{ab}{c} \pm \frac{bc}{a}$. $\therefore y = \pm \frac{b(a^2+c^2)}{2ac}$. z, x 以同理求之。

10. $x(y+z-x) = a, y(z+x-y) = b, z(x+y-z) = c.$

[解] $y(z+x-y) + z(x+y-z) - x(y+z-x) = b + c - a.$

即 $-(y^2 - 2yz + z^2) + x^2 = b + c - a.$ $\therefore x^2 - (y-z)^2 = b + c - a.$

同法 $y^2 - (z-x)^2 = c + a - b, z^2 - (x-y)^2 = a + b - c.$

以此與 9 例同法解之。則

$$\frac{x}{a(-a+b+c)} = \frac{y}{b(a-b+c)} = \frac{z}{c(a+b-c)} = \pm \frac{1}{\sqrt{\{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\}}}$$

11. $\frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{x+y}{c} = 2xyz.$

[解] $\frac{(z+x) + (x+y) - (y+z)}{b+c-a} = 2xyz.$ 即 $\frac{2x}{b+c-a} = 2xyz.$

$\therefore x=0,$ 或 $yz = \frac{1}{b+c-a}.$ 同法 $y=0,$ 或 $zx = \frac{1}{c+a-b}.$

$z=0,$ 或 $xy = \frac{1}{a+b-c}.$ 由是 $x=y=z=0,$ 或

$$\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c} = \pm \frac{1}{\sqrt{\{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\}}}$$

12. $\frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{x+y}{c} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}.$

[解] 由視察 $x=y=z=0.$

又由前例。即知 $\frac{2x}{b+c-a} = \frac{2y}{c+a-b} = \frac{2z}{a+b-c} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}.$

$\therefore \frac{4(x^2+y^2+z^2)}{(b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2} = \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^2.$

由是 $\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{(b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}.$

$\therefore \frac{2x}{b+c-a} = \frac{2y}{c+a-b} = \frac{2z}{a+b-c} = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{(b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2}.$

13. $yz = a+y+z, zx = b+z+x, xy = c+x+y.$

[解] $(y-1)(z-1) = a+1, (z-1)(x-1) = b+1, (x-1)(y-1) = c+1.$

$$\text{由是 } \frac{(x-1)(x-1)(x-1)(y-1)}{(y-1)(z-1)} = \frac{(b+1)(c+1)}{a+1}.$$

$$\therefore x-1 = \pm \sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}.$$

$$14. \quad yz = a(y+z) + a, \quad zx = a(z+x) + \beta, \quad xy = a(x+y) + \gamma.$$

[解] $(y-a)(z-a) = a + a^2$, $(z-a)(x-a) = \beta + a^2$, $(x-a)(y-a) = \gamma + a^2$,
第二第三相乘。以第一除之。則

$$(x-a)^2 = \frac{(\beta + a^2)(\gamma + a^2)}{a + a^2}, \quad \therefore x = a \pm \sqrt{\frac{(\beta + a^2)(\gamma + a^2)}{a + a^2}}.$$

$$15. \quad yz - f^2 = cy + bz, \quad zx - g^2 = az + cx, \quad xy - h^2 = bx + ay.$$

[解] $(y-b)(z-c) = f^2 + bc$, $(z-c)(x-a) = g^2 + ca$, $(x-a)(y-b) = h^2 + ab$.

$$\therefore (x-a)^2 = \frac{(g^2 + ca)(h^2 + ab)}{f^2 + bc}. \quad \therefore x = a \pm \sqrt{\frac{(g^2 + ca)(h^2 + ab)}{f^2 + bc}}.$$

$$16. \quad x + y^{-1} = \frac{3}{2}, \quad y + z^{-1} = \frac{7}{3}, \quad z + x^{-1} = 4.$$

[解] 從第二式 $\frac{1}{z} = \frac{7}{3} - y$, 從第三式 $z = 4 - \frac{1}{x}$.

$$\therefore \left(\frac{7}{3} - y\right)\left(4 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{z} \times z. \quad \text{即 } 25x - 7 - 3y(4x - 1) = 0.$$

$$\therefore \text{第一式 } \frac{1}{y} = \frac{3}{2} - x. \quad \text{即 } y = \frac{2}{3 - 2x}.$$

$$\text{或 } 25x - 7 - \frac{6}{3 - 2x}(4x - 1) = 0. \quad \text{即 } 10x^2 - 13x + 3 = 0.$$

$$\therefore x = 1, \text{ 或 } x = \frac{3}{10}. \quad \text{由是 } x = 1, y = 2, z = 3.$$

$$\text{或 } x = \frac{3}{10}, y = \frac{5}{6}, z = \frac{2}{3}.$$

$$17. \quad x + y + z = 6, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 14, \quad xyz = 6.$$

[解] $(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 6^2 - 14. \quad \therefore xy + yz + zx = 11$

λ 之三根為 x, y, z 則 $(\lambda - x)(\lambda - y)(\lambda - z) = 0$.

即 $\lambda^3 - (x+y+z)\lambda^2 + (xy+yz+zx)\lambda - xyz = 0$.

即 $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. 即 $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$.

$\therefore \lambda = 1, 2, 3$. 由是 x, y, z 之值。為 $1, 2, 3$.

即 $x=1, y=2, z=3$, 或 $x=1, y=3, z=2$,

或 $x=2, y=1, z=3$, 或 $x=2, y=3, z=1$,

或 $x=3, y=1, z=2$, 或 $x=3, y=2, z=1$.

18. $x+y+z=15, x^3+y^3+z^3=495, xyz=105$.

[解] $x^3+y^3+z^3-3xyz=495-3 \times 105$.

即 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=180$.

即 $(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}=180$.

即 $15\{15^2-3(xy+yz+zx)\}=180. \therefore xy+yz+zx=71$.

λ 之三根。爲 x, y, z 則 $(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$.

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$.

即 $\lambda^3-15\lambda^2+71\lambda-105=0. \therefore (\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)=0$.

$\lambda=3, 5, 7. \therefore x, y, z$ 之值。爲 $3, 5, 7$.

19. $x+y+z=9, x^2+y^2+z^2=41, x^3+y^3+z^3=189$.

[解] $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=9^2-41. \therefore xy+yz+zx=20$.

又從 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\{(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\}$.

則 $189-3xyz=9\{41-20\}. \therefore xyz=0. (\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$.

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$.

即 $\lambda^3-9\lambda^2+20\lambda=0. \therefore \lambda=0, 4, 5$. 即 x, y, z 之值。爲 $0, 4, 5$.

20. $x+y+z=10, yz+zx+xy=33, (y+z)(z+x)(x+y)=294$.

[解] 以第一代入第三式。則 $(10-x)(10-y)(10-z)=294$.

即 $1000-100(x+y+z)+10(xy+yz+zx)-xyz=294$.

即 $1000-100(10)+10(33)-xyz=294. \therefore xyz=36$.

$$(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0.$$

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$.

即 $\lambda^3-10\lambda^2+33\lambda-36=0. \therefore (\lambda-3)^2(\lambda-4)=0$.

故 $\lambda=3, 3, 4$. 由是 x, y, z 之值爲 $3, 3, 4$.

21. $\frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$

[解] 與 11 及 12 兩例同法如下。

$$\frac{xyz+xyz-xyz}{x(bz+cy)+y(cx+az)-z(ay+bx)} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\text{即 } \frac{xyz}{2cxy} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} \quad \text{即 } \frac{z}{2c} = \frac{x}{2a} = \frac{y}{2b} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

以下與 12 例同法。

$$\left[\text{答 } 0, 0, 0, \text{ 或 } \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right]$$

$$22. \quad \frac{a}{x} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{b}{y} + \frac{z}{c} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{c}{z} = 1.$$

[解] $abc + cxy + bzx = bcx$, $cxy + abc + ayz = acy$, $bzx + ayz + abc = abx$.

從第一式減第二式而括之。則 $z(bx - ay) = c(bx - ay)$ 。

由是 $z = c$, 或 $bx = ay$ 。

(I) $z = c$, 則從第二 $cxy + abc + acy = acy$ 。即 $xy = -ab$ 。

又從第三 $bzx + acy + abc = abc$ 。即 $bx = -ay$ 。

從 $xy = -ab$, 及 $bx = -ay$, 得 $x = \pm a$, $y = \mp b$ 。

由是 $x = a$, $y = -b$, $z = c$, 或 $x = -a$, $y = b$, $z = c$ 。

(II) $bx = ay$ 。即 $y = \frac{b}{a}x$ 。

則從第二 $cx \times \frac{b}{a}x + abc + a \times \frac{b}{a}xz = ca \times \frac{b}{a}x$ 。即 $z = \frac{c(ax - a^2 - x^2)}{ax}$ 。

又從第三 $bzx + a \times \frac{b}{a}xz + abc = abz$ 。即 $z = \frac{ac}{a - 2x}$ 。

由是 $\frac{c(ax - a^2 - x^2)}{ax} = \frac{ac}{a - 2x}$ 。即 $(a - 2x)(ax - a^2 - x^2) = a^2x$ 。

$\therefore 2x^3 - 3ax^2 + 2a^2x - a^3 = 0$ 。即 $(x - a)(2x^2 - ax + a^2) = 0$ 。

由是 $x = a$, 或 $2x^2 - ax + a^2 = 0$ 。即 $x = \frac{1}{4}a(1 \pm \sqrt{-7})$ 。

$x = a$ 。則 $z = \frac{ac}{a - 2x} = \frac{ac}{a - 2a} = -c$, $y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a} \times a = b$ 。

又 $x = \frac{1}{4}a(1 \pm \sqrt{-7})$, $y = \frac{b}{a}x = \frac{1}{4}b(1 \pm \sqrt{-7})$ 。

$z = \frac{ac}{a - 2x} = \frac{ac}{a - \frac{1}{2}a(1 \pm \sqrt{-7})} = \frac{2c}{1 \mp \sqrt{-7}} = \frac{2c(1 \pm \sqrt{-7})}{1 - (-7)} = \frac{1}{4}c(1 \pm \sqrt{-7})$ 。

\therefore 原方程之根。為 $x = a$, $y = -b$, $z = c$ 。

或 $x = -a$, $y = b$, $z = c$, 或 $x = a$, $y = b$, $z = -c$ 。

或 $x = \frac{1}{4}a(1 \pm \sqrt{-7})$, $y = \frac{1}{4}b(1 \pm \sqrt{-7})$, $z = \frac{1}{4}c(1 \pm \sqrt{-7})$ 。

$$23. \quad ax = \frac{z}{y} + \frac{y}{z}, \quad by = \frac{z}{x} + \frac{x}{z}, \quad cz = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

[解] $axyz = y^2 + z^2, \quad bxyz = z^2 + x^2, \quad cxyz = x^2 + y^2.$

$$\therefore (b+c-a)xyz = (z^2 + x^2) + (x^2 + y^2) - (y^2 + z^2) = 2x^2.$$

由是 $x=0$, 或 $\frac{yz}{x} = \frac{2}{b+c-a}.$

同法 $y=0$. 或 $\frac{zx}{y} = \frac{2}{c+a-b}.$

$$\therefore \frac{yz}{x} \times \frac{zx}{y} = \frac{2}{b+c-a} \times \frac{2}{c+a-b} \quad \text{即} \quad z = \pm \frac{2}{\sqrt{\{(b+c-a)(c+a-b)\}}}.$$

由是所求之根。爲 $x=0, y=0, z=0.$

或 $x = \pm \frac{2}{\sqrt{\{(c+a-b)(a+b-c)\}}}, \quad y = \pm \frac{2}{\sqrt{\{(a+b-c)(b+c-a)\}}}.$

$$24. \quad y^2 + z^2 - x(y+z) = a^2, \quad z^2 + x^2 - y(z+x) = b^2, \quad x^2 + y^2 - z(x+y) = c^2.$$

[解] 從第二第三之和減第一。則 $2x^2 - 2yz = b^2 + c^2 - a^2.$

$$\therefore x^2 - yz = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2).$$

同法 $y^2 - zx = \frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2), \quad z^2 - xy = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$

由 151 章第五例。得 $x, y, z.$

所求之根。爲 $x = \pm \frac{b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2}{\sqrt{2a^6 + 2b^6 + 2c^6 - 6a^2b^2c^2}}.$

$$25. \quad x^2 + yz - a^2 = y^2 + zx - b^2 = z^2 + xy - c^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

[解] 從 $x^2 + yz - a^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$ $x^2 - (y-z)^2 = 2a^2.$

同法 $y^2 - (z-x)^2 = 2b^2, \quad z^2 - (x-y)^2 = 2c^2.$

由是與 9 例同法。即得 $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right).$

$$26. \quad x(x+y+z) - (y^2 + z^2 + yz) = a,$$

$$y(x+y+z) - (z^2 + x^2 + zx) = b,$$

$$z(x+y+z) - (x^2 + y^2 + xy) = c,$$

[解] 第一加第二。則 $2xy - 2z^2 = a + b. \quad \therefore z^2 - xy = -\frac{1}{2}(a+b).$

$$\text{同法 } x^2 - yz = -\frac{1}{2}(b+c), \quad y^2 - zx = -\frac{1}{2}(c+a).$$

由是與 151 章第五例同法。得

$$x = \pm \frac{(b+c)^2 - (c+a)(a+b)}{2\sqrt{3abc - a^3 - b^3 - c^3}}.$$

$$27. \quad x+y+z = a+b+c, \quad x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2,$$

$$(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = 0.$$

[解] $x = a + \lambda, y = b + \mu, z = c + \nu$. 則

$$\text{從第一 } \lambda + \mu + \nu = 0.$$

$$\text{從第二 } \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2a\lambda + 2b\mu + 2c\nu = 0.$$

$$\text{從第三 } (b-c)\lambda + (c-a)\mu + (a-b)\nu = 0.$$

$$\text{從第一及第三 } \frac{\lambda}{(a-b) - (c-a)} = \frac{\mu}{(b-c) - (a-b)} = \frac{\nu}{(c-a) - (b-c)} = K.$$

$$K^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{(2a-b-c)^2 + (2b-c-a)^2 + (2c-a-b)^2} \quad \text{從第二}$$

$$K^2 = \frac{-(a\lambda + b\mu + c\nu)}{3(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)} \dots \dots \dots (A)$$

$$\text{又 } K = \frac{a\lambda + b\mu + c\nu}{a(2a-b-c) + b(2b-c-a) + c(2c-a-b)}.$$

$$\text{即 } K = \frac{a\lambda + b\mu + c\nu}{2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)} \dots \dots \dots (B)$$

$$\text{以 (B) 除 (A). 則 } K = -\frac{2}{3} \quad \therefore \frac{\lambda}{2a-b-c} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{即 } \lambda = -\frac{2}{3}(2a-b-c). \quad \text{即 } x+a = -\frac{2}{3}(2a-b-c).$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}(2b+2c-a) \quad \text{又由觀察得 } x=a, y=b, z=c.$$

$$28. \quad (x+y)(x+z) = ax, \quad (y+z)(y+x) = by, \quad (z+x)(z+y) = cz.$$

[解] 第一第二相乘。以第三除之。則 $(x+y)^2 = \frac{abxy}{cz}$.

$$\therefore x+y = \pm \frac{1}{cz} \sqrt{abcxyz}. \quad \text{即 } z(x+y) = \pm \frac{1}{c} \sqrt{abcxyz}.$$

$$\text{同法 } x(y+z) = \pm \frac{1}{a} \sqrt{abcxyz}, \quad y(z+x) = \pm \frac{1}{b} \sqrt{abcxyz}.$$

由是 $x(y+z)+y(z+x)-z(x+y)=\pm\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\sqrt{abcxyz}$

即 $2xy=\pm\frac{bc+ca-ab}{abc}\sqrt{abcxyz}$

即 $4x^2y^2=\frac{(bc+ca-ab)^2}{abc}xyz$

$\therefore xy=0$ 。或 $\frac{xy}{z}=\frac{(bc+ca-ab)^2}{4abc}$ 。

同法 $yz=0$ 或 $\frac{yz}{x}=\frac{(ca+ab-bc)^2}{4abc}$, $zx=0$ 或 $\frac{zx}{y}=\frac{(ab+bc-ca)^2}{4abc}$ 。

由是 $x=y=z=0$ 。或 $x=\pm\frac{1}{4abc}(bc-ca+ab)(bc+ca-ab)$ 。

29. $x^2-yz=ax, y^2-zx=by, z^2-xy=cz$ 。

[解] $y(ax)+z(by)+x(cz)=y(x^2-yz)+z(y^2-zx)+x(z^2-xy)$ 。

即 $axy+bzy+czx=0$(A)

又 $z(ax)+x(by)+y(cz)=z(x^2-yz)+x(y^2-zx)+y(z^2-xy)$ 。

即 $bxy+cyz+azx=0$(B)

從 (A), (B) 用十字字之法 $\frac{xy}{c^2-ab}=\frac{yz}{a^2-bc}=\frac{zx}{b^2-ca}$

$\therefore \frac{yz}{a^2-bc}=\frac{xy}{c^2-ab}\times\frac{zx}{b^2-ca}\div\frac{yz}{a^2-bc}$

即 $\frac{yz}{(a^2-bc)^2}=\frac{x^2}{(b^2-ca)(c^2-ab)}=\frac{-(x^2-yz)}{(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)}$

\therefore 從第一 $\frac{x^2}{(b^2-ca)(c^2-ab)}=\frac{-ax}{a(a^3+b^3+c^3-3abc)}$

由是 $x=0$ ，或 $x=-\frac{(b^2-ca)(c^2-ab)}{a^3+b^3+c^3-3abc}$ 如 $x=0$ ，則從第三 $z^2=cx$ 。

$\therefore z=0$ ，或 c ，又推得各根如下。

$x=a, y=0, z=0$ ，或 $x=0, y=b, z=0$ ，或 $x=0, y=0, z=c$ 。

30. $x^2+a(2x+y+z)=y^2+b(2y+z+x)=z^2+c(2z+x+y)=(x+y+z)^2$ 。

[解] $a(2x+y+z)=(x+y+z)^2-x^2=(2x+y+z)(y+z)$ 。

$\therefore 2x+y+z=0$(1) 或 $y+z=a$(2)

同法 $2y+z+x=0$(3) 或 $z+x=b$(4)

及 $2z+x+y=0$(5) 或 $x+y=c$(6)

從 (1), (3), (5) $x=y=z=0$.

從 (2), (4), (6) $x=\frac{1}{2}(b+c-a)$, $y=\frac{1}{2}(c+a-b)$, $z=\frac{1}{2}(a+b-c)$.

從 (1), (3), (6) $x=\frac{1}{2}c$, $y=\frac{1}{2}c$, $z=-\frac{3}{2}c$.

從 (1), (4), (5) $x=\frac{1}{2}b$, $y=-\frac{3}{2}b$, $z=\frac{1}{2}b$.

從 (2), (3), (5) $x=-\frac{3}{2}a$, $y=\frac{1}{2}a$, $z=\frac{1}{2}a$.

31. $y^2+yz+z^2=a^2$, $z^2+zx+x^2=b^2$, $x^2+xy+y^2=c^2$.

[解] 三方程式相加而括之則

$$2(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = a^2 + b^2 + c^2.$$

即 $(x+y+z)^2 - 3(yz+zx+xy) = a^2 + b^2 + c^2 - (x+y+z)^2 \dots\dots\dots(A)$

又從第一減第二而括之則 $(y-x)(y+x+z) = a^2 - b^2$.

即 $\frac{a^2 - b^2}{x-y}$ (同法) $= \frac{b^2 - c^2}{y-z} = \frac{c^2 - a^2}{z-x} = -(x+y+z) \dots\dots\dots(B)$

$$\therefore \frac{(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2} = \frac{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx}$$

$$= (x+y+z)^2. \text{ 即 } \frac{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}{(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)} = (x+y+z)^2.$$

\therefore 從 (A) $\frac{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2 - (x+y+z)^2} = (x+y+z)^2$.

即 $(x+y+z)^4 - (a^2 + b^2 + c^2)(x+y+z)^2 + a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 = 0$.

$$\therefore (x+y+z)^2 = \frac{1}{2} \{ a^2 + b^2 + c^2 \pm \sqrt{3(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4)} \}.$$

由是得 $x+y+z$ 之值。設 $x+y+z=K$.

又從 (B) $\frac{a^2 - b^2}{x-y} = \frac{b^2 - c^2}{y-z} = -K$. $\therefore x-y = \frac{b^2 - a^2}{K}$, $y-z = \frac{c^2 - b^2}{K}$.

$\therefore (x+y+z) + (y-z) = K + \frac{c^2 - b^2}{K}$. 即 $x+2y = K + \frac{c^2 - b^2}{K}$.

又 $2(x-y) + (x+2y) = \frac{2(b^2 - a^2)}{K} + \left(K + \frac{c^2 - b^2}{K} \right)$.

$\therefore x = \frac{1}{3K} (K^3 + b^2 + c^2 - 2a^2)$.

$$32. \quad a^2x + b^2y + c^2z = 0, \quad \frac{(b-c)^2}{ax} + \frac{(c-a)^2}{by} + \frac{(a-b)^2}{cz} = 0.$$

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

〔解〕從第一 $cz = -\frac{a^2x + b^2y}{c}$ 。從第二。則

$$cz\{b(b-c)^2y + a(c-a)^2x\} + abxy(a-b)^2 = 0.$$

$$\text{即 } \frac{a^2x + b^2y}{c} \{b(b-c)^2y + a(c-a)^2x\} - abxy(a-b)^2 = 0.$$

$$\therefore a^3(c-a)^2x^2 - ab\{c(a-b)^2 - a(b-c)^2 - b(c-a)^2\}xy + b^3(b-c)^2y^2 = 0.$$

$$\text{即 } a^3(c-a)^2x^2 - ab(a+b)(c-a)(b-c)xy + b^3(b-c)^2y^2 = 0.$$

$$\text{即 } \{a^2(c-a)x - b^2(b-c)y\} \{a(c-a)x - b(b-c)y\} = 0.$$

由是 $\frac{b-c}{a^2x} = \frac{c-a}{b^2y}$, 或 $\frac{b-c}{ax} = \frac{c-a}{by}$.

$$\frac{b-c}{a^2x} = \frac{c-a}{b^2y} = \frac{a-b}{c^2z} = K. \text{ 則 } \frac{(b-c)(c-a)}{a^2b^2xy} = K^2.$$

$$\text{即 } \frac{1}{xy} = \frac{a^2b^2K^2}{(b-c)(c-a)}. \text{ 同法 } \frac{1}{yz} = \frac{b^2c^2K^2}{(c-a)(a-b)}, \quad \frac{1}{zx} = \frac{c^2a^2K^2}{(a-b)(b-c)}.$$

$$\therefore \text{從第三 } K^2 \left\{ \frac{c^2a^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{a^2b^2}{(b-c)(c-a)} + \frac{b^2c^2}{(c-a)(a-b)} \right\} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

$$\therefore K = \sqrt{-\frac{1}{abc}}, \text{ 即 } \frac{b-c}{a^2x} = \sqrt{-\frac{1}{abc}}. \therefore x = \frac{b-c}{a^2} \sqrt{(-abc)}.$$

$$\text{又 } \frac{b-c}{ax} = \frac{c-a}{by} = \frac{a-b}{cz}. \text{ 同法 } x = \frac{b-c}{a} \sqrt{\left(-\frac{abc}{bc+ca+ab}\right)}.$$

第拾壹編

問題

152. 問題 (Problems) 本編為研究方程式之應用問題。此等應用問題。有已知數量與未知數量二種。由此二種之關係。以求其未知數量。

解問題之方法。以代數記號表明已知數量與未知數量之關係。而作成方程式。然後將此方程式解之。以求未知數量。

解此方程式時。其結果須適合於所求之數量。其有不能適合者。因被問題意義所限制。而此限制在方程式不能顯著之例。如問題所求為人數。則得分數之答。為不合理也。

由是。解問題之次序有三。第一將已知數量與未知數量。以代數之記號作方程式。第二。解此方程式。求未知數量。第三。其求得之未知數量。須適合於問題之意義。其不合理者。則去之而檢查其合理不合理之法。則如下之諸例。

〔第一例〕 甲有銀5鎊。乙有銀10先令。問甲與乙若干。則甲所有為乙之四倍。(一鎊為二十先令)。

命 x 為甲與乙之先令數。則甲初有銀100先令者。今祇有 $100-x$ 先令。而乙乃有 $10+x$ 先令。依題理得方程式。

$$100-x=4(10+x). \quad \therefore x=12. \text{ 即甲與乙為 } 12 \text{ 先令。}$$

〔注意〕 x 示常數。故 x 當附於名數單位之種類。如本題以 x 為先令是也。

〔第二例〕 大工一人。小工二人。合營一事。則12日可成。大工三人。小工一人。則6日可成。問大工一人獨營之。須幾何日。

命 x =大工一人成事之日數。 y =小工一人成事之日數。則大工一人1日為全事之 $\frac{1}{x}$ 。小工一人1日為全事之 $\frac{1}{y}$ 又大工一小

工二日合營之事爲 $\frac{1}{12}$ 。故 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{12}$ 。又大工三小工一日合營之事爲 $\frac{1}{6}$ 。故 $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ 。

由此兩通同方程。求得 $x=20$ 。即大工一人獨營爲 20 日。

〔第三例〕某家有童子若干人。若 11 倍之。比其原數平方之 2 倍多 12。問童子之總數若干。

命 x 爲童子之數。則 $11x=2x^2+12$ 。即 $(2x-3)(x-4)=0$ 。

由是 $x=4$ 。或 $x=\frac{3}{2}$ 。

但童子之數爲分數 $\frac{3}{2}$ 則不合理。故 4 人爲所求之數。

〔第四例〕有桿長若干尺。若 11 倍之。比其長數平方之 2 倍多 12 尺。求桿長幾何。

命 x 爲桿之尺數。如前例得 $x=4$ 或 $\frac{3}{2}$ 。而桿之長爲分數亦能合理。故在本題。4 尺或 $\frac{3}{2}$ 尺均可爲所求之數。

〔第五例〕有二位之數。等於其數字之積之三倍。但知十位數比單位數少 2。試求此數。

命 x 爲十位數字。則單位數字爲 $x+2$ 。故原數爲 $10x+(x+2)$ 。依題理得方程式。爲 $10x+(x+2)=3x(x+2)$ 。∴ $x=2$ 或 $-\frac{1}{3}$ 。

然數字必限於正整數。故 $-\frac{1}{3}$ 爲不合理。由是十位數字爲 2。單位數字爲 $2+2=4$ 。∴ 原數 = 24。

〔第六例〕二位之數。等於其數字之和之 3 倍。問此數爲若干。

命 x 爲十位數字。 y 爲單位數字。則依題理 $10x+y=3(x+y)$ 。

即 $7x=2y$ 。因 x 及 y 爲 10 以下之正整數。故 $x=2$ 。則 $y=7$ 。即所求之數爲 27。

〔第七例〕某數與其平方根之和爲 90。求某數爲若干。

命 n 為所求之數。則 $n + \sqrt{n} = 90$ 。

$$\therefore (n-90)^2 = n, \text{ 即 } n^2 - 181n + 8100 = 0.$$

$\therefore n = 81$, 或 $n = 100$, 在本題之平方根有正負之兩值。故 $n = 81$, 則 $81 + \sqrt{81} = 81 + 9 = 90$, $n = 100$, 則 $100 + \sqrt{100} = 100 + 10 = 110$ 。

[第八例] 父子之年齡之和為 100 歲。父子年數之積之 $\frac{1}{10}$ 。比父之年數多 180。問各幾何歲。

命 x 為父之年數。則 $100 - x$ 為子之年數。

$$\therefore \frac{1}{10}x(100-x) = x + 180, \text{ 即 } x^2 - 90x + 1800 = 0.$$

$$\text{即 } (x-60)(x-30) = 0, \therefore x = 60, \text{ 或 } 30.$$

父之歲為 60。則子為 $100 - 60 = 40$, 即 40 歲。若父之歲為 30。則子為 70 歲。即不合理。

[第九例] 某人買豚、鵝、及鴨三種。鵝價若減一先令。而以原價為鵝數。則買鵝之總價。與 1 豚之價等。但知 1 鵝之價。等於 2 鴨之價。而 14 鴨之價。比 1 豚之價多 7 [先令]。問各 1 頭之價若干。

命 $x = 1$ 豚之價。 $y = 1$ 鵝之價。 $z = 1$ 鴨之價。

1 豚之價。既等於以鵝價少 1 之數。買鵝之總價。

$$\text{則 } x = y(y-1) \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{又因 1 鵝等於 2 鴨。故 } y = 2z \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{又 14 鴨比 1 豚多 7。故 } 14z = x + 7 \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{從 (1) 式。及 (2) 式。 } x = 2z(2z-1). \therefore \text{從 (3) 式 } 14z = 2z(2z-1) + 7.$$

$$\text{即 } 4z^2 - 16z + 7 = 0. \therefore z = \frac{7}{2}, \text{ 或 } z = \frac{1}{2}.$$

$$z = \frac{7}{2}. \text{ 則 } y = 2 \times \frac{7}{2} = 7. x = 7(7-1) = 42.$$

$$\text{又 } z = \frac{1}{2}. \text{ 則 } y = 2 \times \frac{1}{2} = 1. x = 1(1-1) = 0.$$

故 1 豚之價為 42 先令。1 鵝之價為 7 先令。1 鴨之價為 $3\frac{1}{2}$ 先令。若

1 鴨之價為 $\frac{1}{2}$ 先令。1 鵝之價為 1 先令。則豚為無價。便不合理。

例 題 十 五

1. 分 50 爲 二 分。第 一 分 之 二 倍。等 於 第 二 分 之 三 倍。問 各 若 干。

〔解〕 x 爲 第 一 分。則 $50-x$ 爲 第 二 分。

$$\therefore 2x=3(50-x). \quad \therefore x=30. \quad \text{第 二 分 } =50-30=20.$$

2. A 較 B 少 5 鎊。 C 等 於 A 及 B 之 和。而 A, B, C 之 和 爲 50 鎊。問 各 若 干。 [答 A 10 鎊, B 15 鎊, C 25 鎊]。

〔解〕 A 之 所 持 爲 x 鎊。則 $B=x+5$ 鎊。 $C=x+(x+5)$ 。即 $2x+5$ 鎊。

$$\text{由 是 } x+(x+5)+(2x+5)=50. \quad \therefore x=10.$$

3. 甲 70 歲。乙 45 歲。試 求 甲 歲 當 乙 歲 2 倍 之 年。 [答 20 年 前]。

〔解〕 所 求 之 年 爲 自 x 年 以 前。則 $70-x=2(45-x)$ 。 $\therefore x=20$ 。
即 20 年 以 前。

又 若 所 求 之 年 爲 x 年 以 後。則 $70+x=2(45+x)$ 。 $\therefore x=-20$ 。
即 -20 年 以 後。故 取 負 之 反 對。即 正 20 年 以 前。

4. 雞 卵 之 價。每 個 貴 $\frac{1}{4}$ 。則 付 金 1 鎊。差 少 40 個。問 買 雞 卵 20 個 之 原 價 若 干。(1 鎊 爲 20 先 令)。

〔解〕 20 個 之 原 價 爲 x 鎊。則 1 個 之 原 價 爲 $\frac{1}{20}x$ 鎊。

$$\text{由 是 } \frac{1}{20}x = \frac{1}{20}x(1+.25) + 40. \quad \therefore x = \frac{1}{10}. \quad \text{即 } \frac{1}{10} \times 20 \text{ 先 令。即 } 2 \text{ 先 令。}$$

5. 貨 幣 50 個 之 價。合 計 爲 14 鎊。其 間 半 磅 貨 之 數 8 倍 於 磅 貨。其 餘 爲 先 令 貨。問 各 貨 之 個 數。 [答 5, 15, 30]。

〔解〕 磅 貨 之 數 $=x$ 。則 半 磅 貨 之 數 $=8x$ 。而 先 令 貨 之 數 $=50-4x$ 。

$$\text{由 是 } x + \frac{1}{2}(8x) + \frac{1}{20}(50-4x) = 14. \quad \therefore x = 5.$$

6. 有 一 工 程 A 20 日 可 成。 B 12 日 可 成。若 先 使 A 動 工 後 以 B 代 之。則 合 計 14 日 完 工。求 A 之 作 工 日 數。

〔解〕甲作工日數 = x 。則甲每日所作爲全事之 $\frac{1}{20}$ 。乙每日所作爲全事之 $\frac{1}{12}$ 。故 $\frac{x}{20} + \frac{14-x}{12} = 1$ 。 $\therefore x = 5$ 。即 5 日。

7. 某人買每 2 個值 1 (辨士) 之雞卵若干個。又買每 12 個值 5 (辨士) 之雞卵四倍之。又買每 20 個值 8 (辨士) 之雞卵五倍之。後賣去每 100 個價 3 先令 8 辨士。獲利 3 先令 6 辨士。求所買雞卵之數 (1 先令爲 12 辨士)。

〔答 1800〕。

〔解〕最初所買之雞卵爲 x 個。則次所買爲 $4x$ 及 $5x$ 個。

$$\text{由是 } \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}(4x) + \frac{8}{20}(5x) = \frac{44}{100}(x + 4x + 5x) - 42. \quad \therefore x = 180.$$

$$\therefore \text{所求之雞卵數} = x + 4x + 5x = 10x = 10 \times 180 = 1800.$$

8. 某甲應付某乙金 63 鎊 5 先令。今以磅貨及半 (古倫) 貨給之。合計 100 個。問磅貨之數若干。但半古倫爲 2 先令 6 辨士。即 $2\frac{1}{2}$ 先令。

〔解〕磅貨之數爲 x 。則半古倫貨之數 = $100 - x$ 。

$$\text{由是 } 20x + \frac{5}{2}(100 - x) = 63 \times 20 + 5. \quad \therefore x = 58.$$

9. 有人從 A 地步至 B 地一小時行 4 哩。行至一時間後。有四輪車發自 A 地追及之。此人遂乘此車。又歷 2 時間。即至 B 地。求 A, B 之距離若干。但四輪車每時之速率爲 12 哩。

〔解〕A, B 之距離爲 x 。乘四輪車所行之路 = $12 \text{ 哩} \times 2 = 24 \text{ 哩}$ 。依題理步行 $x - 24$ 哩。比車發時早 1 時間。

$$\text{由是 } \frac{x - 24}{4} = \frac{x - 24}{12} + 1. \quad \therefore x = 30. \text{ 即 } 30 \text{ 哩}.$$

10. 旅客二人持共重 600 磅之行李。除火車許帶之重額外。應付運費 3 先令 4 辨士。及 11 先令 8 辨士。若以一人獨帶此行李計算。則應付運費 1 鎊。求一人許帶之重額若干。〔答 120 磅〕。

$$\text{〔解〕許帶重額爲 } x \text{ 磅。則 } \frac{3\frac{4}{12} + 11\frac{8}{12}}{600 - 2x} = \frac{20}{600 - x}.$$

11. 設如作成一事。A, B 共作之須 4 日。A, C 共作之須 6 日。B, C 共作之須 12 日。求 A, B, C 共作之日數。

〔解〕 各人獨成此事之日數爲 $A=x, B=y, C=z$, 則

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}.$$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{4}$. 由是所求之日爲 4 日。

〔注意〕 本題 A, B 共作。與 A, B, C 共作。均爲 4 日。可知 C 實未嘗作工也。

12. 父之年齡等於三子之和。然 9 年之後。則等於長子, 仲子之和。又經 3 年。則等於長子, 末子之和。又經 3 年。則等於仲子, 末子之和。求各年齡幾何。 [答 36, 15, 12, 9]。

〔解〕 長子之歲 = x . 仲子 = y . 末子 = z . 則父 = $x+y+z$.

由是 $x+y+z+9=(x+9)+(y+9)$.

$$x+y+z+9+3=(x+9+3)+(z+9+3).$$

$$x+y+z+9+3+3=(y+9+3+3)+(z+9+3+3).$$

從此三方程式。可得 x, y, z .

13. A, B 二人。從兩地同時相向而行。A 每時之速率比 B 多 2 哩。經 3 時而相會。若 B 每時之速率減 1 哩。而 A 爲前速之 $\frac{2}{3}$. 則經 4 時相會。求兩地之距離若干。

〔解〕 A 每時之速 = x 哩。則 B 每時之速 = $x-2$ 哩。

由是 $3x+3(x-2)=4 \times \frac{2}{3}x+4(x-2-1)$. $\therefore x=9$.

故所求之距離 = $3 \times 9 + 3(9-2) = 48$.

14. 一旅人擬至某地。預定在道之時限。若每時之速率增半哩。則至定限之 $\frac{4}{5}$. 已達某地。又若每時減速半哩。則比定限後 $2\frac{1}{2}$ 時。始達某地。求其距離若干。 [答 15 哩]。

〔解〕 所求之距離 = x 哩。每時之速 = y 哩。則

$$\frac{x}{y+\frac{1}{2}} = \frac{4}{5} \times \frac{x}{y}. \quad \therefore y=2.$$

又 $\frac{x}{y-\frac{1}{2}} = \frac{x}{y} + 2\frac{1}{2}$, 即 $\frac{x}{2-\frac{1}{2}} = \frac{x}{2} + 2\frac{1}{2}$. $\therefore x=15$.

15. 分 243 爲三分。第一分之 $\frac{1}{2}$, 與第二分之 $\frac{1}{3}$, 與第三分之 $\frac{1}{4}$ 各相等。試求各數。

[解] 依題理。第一分爲 $2x$, 第二分爲 $3x$, 第三分爲 $4x$, 則

$$2x+3x+4x=243, \text{由是得 } x=27.$$

16. 有磅貨及先令貨若干個。若易磅貨爲先令, 及先令貨爲辨士, 則爲原價 $\frac{1}{18}$, 若磅貨爲五磅, 及先令貨爲鎊, 則其增價與原價之比, 爲 15 比 2, 試證之。

[證] 磅貨之數 = P , 先令貨之數 = S , 則其原價爲 $P + \frac{1}{20}S$ 鎊。若磅爲先令, 先令爲辨士, 則其價爲 $\frac{1}{20}P + \frac{1}{20 \times 12}S$ 鎊。故

$$\frac{1}{20}P + \frac{1}{20 \times 12}S = \frac{1}{18} \left(P + \frac{1}{20}S \right) \text{ 化爲最簡式。 } S=4P.$$

由是原價 = $P + \frac{1}{20}S$, 即 $P + \frac{1}{20} \times 4P$, 即 $\frac{6}{5}P$ 鎊。又磅貨爲五磅, 先令貨爲鎊, 則其價 = $5P + S$, 即 $9P$ 鎊。由是與原價之比爲 $9P : \frac{6}{5}P = 15:2$ 。

17. 有金 1000 鎊, 分給 A, B, C, D , 祇知 B 所得者, 等於 A 之半, C 較 D 多 A 之 $\frac{1}{3}$, 若 B 多得 100 鎊, 則等於 C 與 D 之和, 問各得幾許,

[答 A 450 鎊, B 225 鎊, C 237 鎊 10 先令, D 81 鎊 10 先令]。

[解] A 之所得 = x 鎊, 則 B 之所得 = $\frac{1}{2}x$ 鎊。

又 C 之所得 = y 鎊, 則 D 之所得 = $y - \frac{1}{3}x$ 鎊。

$$\text{由是 } \frac{1}{2}x + 100 = y + \left(y - \frac{1}{3}x \right).$$

$$\text{及 } x + \frac{1}{2}x + y + \left(y - \frac{1}{3}x \right) = 1000.$$

18. 有兩數。第一數等於第二數之 $\frac{3}{5}$ 。而其各平方之差為16。問各若干。 [答 $\pm 3, \pm 5$].

[解] 第二數 = x 。則第一數 = $\frac{3}{5}x$ 。

$$\text{故 } x^2 - \left(\frac{3}{5}x\right)^2 = 16. \quad \therefore x = \pm 5.$$

19. 有二位之兩數。其數字同而次序異。其和等於兩數字和之平方。其差等於小數字平方之5倍。問兩數各若干。 [答 38, 83].

[解] 小數字為 x 。大數字為 y 。則兩數為 $10x+y$ 。及 $10y+x$ 。

$$\text{故 } (10x+y) + (10y+x) = (x+y)^2.$$

$$\text{即 } 11(x+y) = (x+y)^2. \quad \therefore x+y = 11.$$

$$\text{又 } (10y+x) - (10x+y) = 5x^2. \quad \text{即 } 9(y-x) = 5x^2.$$

$$\text{從 } x+y = 11. \quad 9(y-x) = 5x^2. \text{ 得 } x=3, y=8.$$

20. 某人行若干路。其三分之一。每時行10哩。又三分之一。每時行9哩。其餘每時行8哩。若其半每時行10哩。又其半每時行8哩。則其時間比前遲半分時。求路程若干。 [答 18哩].

[解] 全距離 = $6x$ 哩。則依題理。

$$\frac{2x}{10} + \frac{2x}{9} + \frac{2x}{8} = \frac{3x}{10} + \frac{3x}{8} - \frac{1}{60}. \quad \text{即 } \frac{x}{10} + \frac{x}{8} - \frac{2x}{9} = \frac{1}{120}.$$

$$\text{由是 } x=3. \quad \therefore 6x=18.$$

21. 有兩腳踏車。一自甲地至乙。一自乙地至甲。各於正午發車。及轉回時。於午後三時。再會於離甲9哩之處。甲乙之距離為27哩。求其初會之處。及其時刻。 [答 離甲15哩。一時].

[解] 第一車於再會時。共行 $27+(27-9)$ 哩。即45哩。又第二車共行 $27+9$ 哩。即36哩。

$$\therefore \text{第一車每時之速} = 45 \text{哩} \div 3 = 15 \text{哩}.$$

$$\text{第二車每時之速} = 36 \text{哩} \div 3 = 12 \text{哩}.$$

又初會之時刻為午後 x 時。則

$$15x + 12x = 27.$$

$$\therefore x = 1. \text{ 即午後1時}.$$

22. 有金 1015 鎊。分給 A, B, C 。但知 B 比 A 少 5 鎊。而 C 所得鎊數。等於 A 所得先令數。而又以 B 之鎊數倍之。問各得若干。

[答 A 10 鎊 B 5 鎊 C 1000 鎊]。

[解] A 之所得 = x 鎊。則 $B = x - 5$ 鎊。 $C = (x - 5) \times 20x$ (即 1 鎊為 20 先令。故 $20x$ 為 A 之先令數)。

由是 $x + (x - 5) + (x - 5) \times 20x = 1015$ 。即 $10x^2 - 49x - 510 = 0$ 。

即 $(x - 10)(10x + 51) = 0$ 。

$\therefore x = 10$ 。而 $10x + 51 = 0$ 之答。為不合題理。故省去不用。

23. 某街道建等距離之電信柱若干根。今若每 1 哩之柱數比前減去 1 根。則各柱間之距離增 $2\frac{14}{15}$ 碼。問 1 哩之柱數幾何。

[解] 1 哩即 1760 碼之柱數為 x 。則兩柱間之距離為 $\frac{1760}{x}$ 。

故 $\frac{1760}{x} + 2\frac{14}{15} = \frac{1760}{x-1}$ 。故 $\frac{44}{15} = \frac{1760}{x(x-1)}$ 。

由 $x(x-1) = 600$ 。 $\therefore x = 25$ 。或 -24 。惟 -24 為不合理。故從省。

24. 有兩數以其和乘大數。則得 144。又以其差乘小數。則得 14。問各若干。

[解] 大數為 x 。小數為 y 。則 $(x+y)x = 144$ $(x-y)y = 14$ 。

由除法得 $\frac{(x+y)x}{(x-y)y} = \frac{144}{14} = \frac{72}{7}$ 。

化之為 $7x^2 - 65xy + 72y^2 = 0$ 。即 $(x-8y)(7x-9y) = 0$ 。

$\therefore x = 8y$ 。及 $x = \frac{9}{7}y$ 。

從 $x = 8y$ 。用第二式。則 $(8y-y)y = 14$ 。

$\therefore y = \pm\sqrt{2}$ 。 $\therefore x = \pm 8\sqrt{2}$ 。

又從 $x = \frac{9}{7}y$ 。用第二式。則 $(\frac{9}{7}y - y)y = 14$ 。

$\therefore y = \pm 7$ 。 $\therefore x = \pm 9$ 。

25. A 及 B 從兩地同時相向而行。經五時相會。若 A 每時之速度增 1 哩。而 B 早 1 時起程。或 B 每時之速度減 1 哩。而 A 後 1 時起程。則其相會處。皆與前同點。求兩地之距離數。 [答 50 哩]。

〔解〕 A 每時之速度 $=x$ 哩, B 每時之速度 $=y$ 哩。則所求之距離 $=5x+5y$ 。而 A 行至會點之距離 $=5x$, B 行至會點之距離 $=5y$ 。

A 若每時增 1 哩, 則行 $5x$ 之時間為 $5x \div (x+1)$, 因 B 早 1 時起程而仍行 5 時, 故此 A 行之時間為 $5-1$, 即 4 時間。

$$\text{由是 } \frac{5x}{x+1} = 4, \quad \therefore x = 4.$$

又 B 若每時減 1 哩, 則行 $5y$ 之時間與前同法, 為

$$\frac{5y}{y-1} = 5+1, \quad \therefore y = 6.$$

由是所求之距離 $=5 \times 4 + 5 \times 6 = 50$ 。

26. 有兵卒若干人, 作為充實方陣, 今若改為中空方陣, 則外一邊之人數增 16 人, 而共列四層, 問人數若干。〔答 576 人〕。

〔解〕 一邊之人數為 x , 則中空方陣之外一邊人數 $=x+16$, 中空之一邊 $=x+16-4 \times 2 = x+8$ 。

$$\text{由是 } x^2 = (x+16)^2 - (x+8)^2, \quad \therefore x = 24, \quad \therefore x^2 = 576.$$

27. 有二位之數, 等於數字之和之 7 倍, 則其轉位數, 必等於數字之和之 4 倍, 試證之。

〔證〕 十位數字 $=x$, 單位數字 $=y$, 則

$$\text{原數} = 10x + y, \quad \text{轉位數} = 10y + x.$$

$$\text{依題理 } 10x + y = 7(x + y), \quad \therefore x = 2y.$$

$$\text{由是 } 10y + x = 4y + 8(2y) + x = 4y + 3x + x = 4(x + y).$$

28. A 從甲地至乙地, 計程 7 里, B 後 A 20 分起行, B 追及 A 復歸甲地, 同時 A 亦達於乙地, B 每時之速度 4 里, 求 A 之速度。

〔解〕 A 每時之速度 $=x$ 里, B 追及 A 之路 $=y$ 里,

$$\text{從 } \frac{y}{4} = \frac{y}{x} - \frac{20}{60}, \quad \text{及 } \frac{2y}{4} = \frac{7}{x} - \frac{20}{60} \quad \text{兩方程式消去 } y,$$

$$\text{則得 } x^2 + 25x - 84 = 0, \quad \text{即 } (x-3)(x+28) = 0, \quad \therefore x = 3.$$

29. A, B 各乘腳踏車同時起程, 但 A 從 L 地向 O 地, B 從 O 地向 L 地, 途中相會後, A 經 4 時達於 O 地, B 經 1 時達於 L 地, 求 B 所行之時。〔答 3 時〕。

[解] A 之時速 $=x$, B 之時速 $=y$. 則 A 行至會處之距離, 爲 B 行 1 時間之距離, 即等於 $y \times 1 = y$.

又 B 行至會處之距離, 爲 A 行 4 時間之距離, 即 $4x$.

$$\text{故 } \frac{y}{x} = \frac{4x}{y}. \quad \therefore y = 2x.$$

而兩地之距離, 爲 $y + 4x$, 即 $2x + 4x = 6x$.

由是所求 B 之時間爲 $\frac{6x}{y} = \frac{6x}{2x} = 3$.

30. 有三位之數, 其數字之和爲 10, 中數字等於首末兩數字之和. 若此數加 99, 則爲轉位數. 問原數若干. [答 253].

[解] 依題理中數爲 $10 \div 2 = 5$, 即他兩數字之和爲 5. 令百位數字爲 x , 則單位數字爲 $5 - x$.

$$\text{由是 } 100x + 50 + (5 - x) + 99 = 100(5 - x) + 50 + x. \quad \therefore x = 2.$$

31. 兩器各盛水與酒之混合物. 第一器中酒與水之比爲 1:3, 第二器中爲 3:5. 若從兩器取出若干量作成酒 5 呎, 及水 9 呎之混合物. 問應各取若干. [答 2 呎, 12 呎].

[解] 第一器取出之量爲 x 呎, 則第二器取出之量爲 $5 + 9 - x$, 即 $14 - x$ 呎. 而第一器取出之酒爲 $\frac{1}{1+3}x$, 即 $\frac{1}{4}x$. 第二器取出之酒爲 $\frac{3}{3+5}(14 - x)$, 即 $\frac{3}{8}(14 - x)$. 由是 $\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}(14 - x) = 5. \quad \therefore x = 2$.

又第二器取出之量爲 $14 - 2 = 12$.

[別法] 前解所計算者爲酒. 若計算水, 則以 9 呎代 5 呎, 即 $\frac{3}{1+3}x + \frac{5}{3+5}(14 - x) = 9. \quad \therefore x = 2$. 又第二爲 $14 - 2 = 12$.

32. 有一時計, 於 10 時 11 時之間, 其分針若在今後 6 分之位置, 則與今 3 分時前之時針位置正相反對. 問今爲何時.

[答 10 時 15 分].

[解] 今之時爲 10 時 x 分.

\therefore 今時分針之位置爲在 12 時中之 x 分.

\therefore 分針從今之位置, 至 10 時爲 $50 - x$ 分.

\therefore 從今後六分之分針至 10 時爲 $50 - x - 6$, 即 $44 - x$ 分 (1).

因時針之速率，爲分針之 $\frac{1}{12}$ 。故今時時針之位置，爲在10時後 $\frac{1}{12}x$ 分。 \therefore 今前3分之時針位置，爲在10時後 $\frac{1}{12}x - \frac{3}{12}$ 分。

(1) 之分針位置，與(2)之時針位置，正相反對，則兩針成一直線，即其距爲30分。故 $(44-x) + \left(\frac{1}{12}x - \frac{3}{12}\right) = 30$ 。

$\therefore x = 15$ 分。

33. A, B, C三人順次於午後3時4時及5時，從甲地起，行至乙地。C於午後7時追及B，更行 $4\frac{1}{2}$ 哩，於午後 $7\frac{1}{2}$ 時追及A，求B追及A之處及其時刻。 [答距甲地30哩，午後9時]。

[解] B追及A之時爲午後 x 時。

A, B, C各每時之速率，順次爲 a, b, c 哩。

依題理C爲行 $7-5=2$ 時追及B，更行 $4\frac{1}{2}$ 哩追及A，故至是共行 $2c+4\frac{1}{2}$ 哩。又C追及A，爲行 $7\frac{1}{2}-5=2\frac{1}{2}$ 時，故其行程爲 $2\frac{1}{2}c$ 。

$$\text{由是, } 2c+4\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}c. \quad \therefore c=9 \text{ 哩.}$$

又C追及B行 $2c$ 哩，B爲行 $7-4=3$ 時，故

$$2c=3b, \text{ 即 } b=\frac{2}{3}c=\frac{2}{3}\times 9=6 \text{ 哩.}$$

又A爲C追及之時，共行 $7\frac{1}{2}-3=4\frac{1}{2}$ 時，故

$$4\frac{1}{2}a=2\frac{1}{2}c, \text{ 即 } 4\frac{1}{2}a=2\frac{1}{2}\times 9. \quad \therefore a=5 \text{ 哩.}$$

又B之追及A，共行 $x-4$ 時，A行 $x-3$ 時，故

$$b(x-4)=a(x-3), \text{ 即 } 6(x-4)=5(x-3). \quad \therefore x=9 \text{ 時.}$$

而所求之距離，爲距甲地 $6(x-4)$ 哩，即 $6(9-4)=30$ 哩。

34. 長 60 碼之汽車與長 72 碼之汽車，在平行之鐵道上，同向而行，經 12 秒始通過。今若緩車之速度增 $\frac{1}{2}$ ，則其通過時間須 24 秒。求兩車每時之速度各若干。 [答 45 及 $22\frac{1}{2}$ 哩]。

[解] 急車每時之速為 x 哩，緩車每時之速為 y 哩，則得

$$\frac{12}{60 \times 60}(x-y) = \frac{60+72}{1760} \quad \text{及} \quad \frac{24}{60 \times 60}\left(x - \frac{3}{2}y\right) = \frac{60+72}{1760}.$$

35. A 及 B 各出 180 鎊，分給若干貧民。 B 比 A 每人多給 6 鎊，故比 A 少給 40 人。問 A 給每人之金數。 [答 3 鎊]。

[解] 所求之金為 x 鎊，則 A 所給之人數為 $\frac{180}{x}$ 人。

$$\text{由是 } \frac{180}{x} - 40 = \frac{180}{x+6}, \text{ 故 } x^2 + 6x - 27 = 0.$$

即 $(x-3)(x+9) = 0$ 。 $\therefore x = 3$ ，而 $x = -9$ 不用。

36. 有三船航過兩港間，第一比第二每時之速度疾半哩，故航過時間少 $1\frac{1}{2}$ 時，又第二比第三每時疾 $\frac{3}{4}$ ，故航過時間少 $2\frac{1}{2}$ 時，求兩港間之距離。 [答 450 哩]。

[解] 所求之距離為 x 哩，每時之速第一為 y 哩，第二為 $(y - \frac{1}{2})$ 哩，第三為 $y - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ ，即 $(y - \frac{5}{4})$ 哩。

$$\text{依題理，} \frac{x}{y - \frac{1}{2}} = \frac{x}{y} + 1\frac{1}{2}, \text{ 即 } x = 3y\left(y - \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{又 } \frac{x}{y - \frac{3}{4}} = \frac{x}{y} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}, \text{ 即 } x = \frac{16}{5}y\left(y - \frac{5}{4}\right).$$

$$\text{由是 } 3y\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{16}{5}y\left(y - \frac{5}{4}\right), \quad \therefore y = \frac{25}{2}.$$

$$\text{故 } x = 3y\left(y - \frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{25}{2}\left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\right) = 450 \text{ 哩.}$$

37. A 及 B 往復於 P 及 Q 兩地， A 比 B 後 1 時從 P 起行，至離 Q 2 哩之處追及 B ，更經 32 分又與 B 會，迨 A 歸 P 地時，則離 B 4 哩。問 PQ 之距離若干。 [答 30 哩]。

(解) PQ 之距離 $=x$ 哩。 A 及 B 每時之速爲 a 及 b 。因 A 比 B 後 1 時起程。而至離 Q 2 哩之處追及 B 。故

$$\frac{x-2}{b} - \frac{x-2}{a} = 1 \dots\dots\dots(1)$$

但 B 離 A 4 哩時。則已在歸途。因前已近 Q 2 哩故也。

由是
$$\frac{2x-4}{b} - \frac{2x}{a} = 1 \dots\dots\dots(2)$$

2 乘 (1) 式減 (2) 式。則 $\frac{4}{a} = 1$ 。 $\therefore a = 4$ 。

A 追及 B 後又行 2 哩。達於 Q 而歸。則 B 卽在此 2 哩之途中再會 A 。故此 32 分間。共行 2 哩 $\times 2 = 4$ 哩明矣。

由是 $\frac{32}{60}a + \frac{32}{60}b = 4$ 。 卽 $a + b = \frac{15}{2}$ 。

$a = 4$ 。故 $4 + b = \frac{15}{2}$ 。 $\therefore b = \frac{7}{2}$ 。

由是從 (1) 式 $\frac{x-2}{\frac{7}{2}} - \frac{x-2}{4} = 1$ 。 $\therefore x = 30$ 。

第拾貳編

雜定理及雜例題

153. 消去法 (Elimination) 在通同方程式內，其方程式之數。若多於已可決定未知數量之方程式。則此諸方程式之常數。必有種種之關係。而決定此關係之理。甚為緊要。

求得之關係式。必令其合一未知數量。故須由諸方程式。將其未知數量逐出之。但逐出二字。其意欠雅。故稱為消去未知數量。

消去法。在代數學中。頗有一番學力。學者能熟於消去法。則其於代數學思過半矣。

予所改消去法之處。實較斯密氏法少優。可以自信。

[第一例] $ax+b=0, a'x+b'=0$ 。消去 x 。

從第一。 $ax=-b$ 。從第二。 $-b'=a'x$ 。

此兩方程式。順次相乘。則 $ax(-b')=-b(a'x)$ 而 $x \neq 0$ 。故 $ab' = a'b$ 。

$\therefore ab' - a'b = 0$ 。此為所求之常數關係式。

[第二例] 從下之方程式消去 x 及 y 。

$$a x + b y + c = 0.$$

$$a' x + b' y + c' = 0.$$

$$a'' x + b'' y + c'' = 0.$$

依 143 章十文字之法從一二兩方程式。

$$\frac{x}{bc' - b'c} = \frac{y}{ca' - c'a} = \frac{1}{ab' - a'b} = K.$$

又變第三式 $a''x + b''y + c'' = 0$ 為下式。

$$a''(bc' - b'c) \frac{x}{bc' - b'c} + b''(ca' - c'a) \frac{y}{ca' - c'a} + c''(ab' - a'b) \frac{1}{ab' - a'b} = 0.$$

即 $a''(bc' - b'c)K + b''(ca' - c'a)K + c''(ab' - a'b)K = 0$ 。

$K \neq 0$ 。 $\therefore a''(bc' - b'c) + b''(ca' - c'a) + c''(ab' - a'b) = 0$ 。即為所求之關係式。

有 $n-1$ 個未知數量，而有 n 個之一次方程式，其一般之消去法，詳於後編定準數，而此例為其特例。

【第三例】從方程式 $ax^2+bx+c=0$ ，及 $a'x^2+b'x+c'=0$ 消去 x 。

依 143 章 $\frac{x^2}{bc'-b'c} = \frac{x}{ca'-c'a} = \frac{1}{ab'-a'b} = K$ 。

$$K^2 = \left(\frac{x}{ca'-c'a}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{bc'-b'c}\right) \left(\frac{1}{ab'-a'b}\right)$$

$$\therefore (ca'-c'a)^2 = (bc'-b'c)(ab'-a'b)$$

此關係式，為兩代數式 ax^2+bx+c 及 $a'x^2+b'x+c'$ ，有 $x-a$ 之公因子，故其關係式相同，何則兩式有 $x-a$ 之因子，則以 a 代 x 得 $aa^2+ba+c=0$ ，及 $a'a^2+b'a+c'=0$ ，消去 a ，即上之關係式。

【第四例】方程式 $ax^3+bx+c=0$ ，及 $a'x^3+b'x+c'=0$ ，消去 x 。

與第三例同，即 $\frac{x^3}{bc'-b'c} = \frac{x}{ca'-c'a} = \frac{1}{ab'-a'b} = K$ 。

$$K^3 = \left(\frac{x}{ca'-c'a}\right)^3 = \left(\frac{x^3}{bc'-b'c}\right) \left(\frac{1}{ab'-a'b}\right)^2$$

$$\therefore (ca'-c'a)^3 = (bc'-b'c)(ab'-a'b)^2 \text{ 為關係式。}$$

【第五例】從下之方程式消去 x 。

$$ax^2+bx+c=0 \dots\dots\dots (1)$$

$$a'x^3+b'x^2+c'x+d=0 \dots\dots\dots (2)$$

以 $a'x$ 乘 (1) 式， a 乘 (2) 式，用減法，則

$$(ab'-a'b)x^2+(ac'-a'c)x+ad=0 \dots\dots\dots (3)$$

從 (1) 式及 (3) 式，如第三例，即得關係式。

【第六例】從下之方程式，消去 x, y, z 。

$$x+y+z=a \dots\dots\dots (1)$$

$$x^2+y^2+z^2=b^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$x^3+y^3+z^3=c^3 \dots\dots\dots (3)$$

$$xyz=d^3 \dots\dots\dots (4)$$

從 (3) 式及 (4)，得 $x^3+y^3+z^3-3xyz=c^3-3d^3$ 。

$$\text{即 } (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = c^3-3d^3$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}(x+y+z)\{3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2\}=c^3-3d^3.$$

以(1)及(2)兩式代入此式。則得

$$\frac{1}{2}(a)\{3(b^2)-(a)^2\}=c^3-3d^3.$$

$a^3+2c^3-6d^3-3ab^2=0$ 。即所求之關係式。

[第七例] 從下之方程式消去 x, y, z

$$x^2(y+z)=a^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$y^2(z+x)=b^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$z^2(x+y)=c^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$xyz=abc \dots\dots\dots (4)$$

(1), (2), (3) 三式相加。又以 2 倍 (4) 式加之。則得

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz=a^2+b^2+c^2+2abc.$$

$$\text{即 } x^2(y+z)+x(y^2+z^2+2yz)+yz(y+z)=a^2+b^2+c^2+2abc.$$

$$\text{即 } (y+z)\{x^2+x(y+z)+yz\}=a^2+b^2+c^2+2abc.$$

$$\text{即 } (y+z)(x+y)(x+z)=a^2+b^2+c^2+2abc.$$

以此乘 (4) 式之平方 $x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$ 。則得

$$x^2(y+z)y^2(z+x)z^2(x+y)=a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2+2abc).$$

又以 (1), (2), (3) 三式代入此式。則

$$a^2b^2c^2=a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2+2abc).$$

a, b, c 非為 0。故 $a^2b^2c^2 \neq 0$ 。

$\therefore 1=a^2+b^2+c^2+2abc$ 。即所求之關係式。

[第八例] 從下之方程式。消去 l, m, n, l', m', n' 。

$$ll'=a, \quad mm'=b, \quad nn'=c.$$

$$mn'+m'n=2f, \quad nl'+n'l=2g, \quad lm'+l'm=2h.$$

以後之三方程式相乘而括合之。則得

$$8fgh=2lmnl'm'n'+ll'(m^2n'^2+m'^2n^2)+mm'(n^2l'^2+n'^2l^2)+nn'(l^2m'^2+l'^2m^2)$$

$$=ll'(mn'+m'n)^2+mm'(nl'+n'l)^2+nn'(lm'+l'm)^2-4ll'mm'nn'$$

$$=a(2f)^2+b(2g)^2+c(2h)^2-4abc.$$

$\therefore abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ 。即關係式。

154. 普通二次式之定理 x 及 y 之最普通二次式可分割為 x 及 y 之一次兩因子。

x 及 y 之最普通二次式如下。

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \dots\dots\dots (1)$$

上之代數式與下之一次兩因子之積全相等。試求其關係式。

$$(lx + my + n)(l'x + m'y + n') \dots\dots\dots (2)$$

但 l, m, n, l', m', n' 為不含 x 及 y 者。

以 (2) 式之兩因子相乘。則得

$$ll'x^2 + (lm' + l'm)xy + mm'y^2 + (nl' + n'l)x + (mn' + m'n)y + nn'.$$

是全與 (1) 式同。故與 (1) 式比較其 x^2, xy, y^2, x, y 之係數及常數項。則

$$ll' = a, \quad lm' + l'm = 2h, \quad mm' = b, \quad nl' + n'l = 2g.$$

$mn' + m'n = 2f, \quad nn' = c.$ 此通同方程式。全與 153 章之第八例同。由是所求之關係式為

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

例 題

1. $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + \lambda$ 為 x 及 y 之一次兩因子之積。則 λ 之值若何。 [答 $\lambda = 2$].

[解] $a = 12, \quad 2h = -10, \quad b = 2, \quad 2g = 11, \quad 2f = -5, \quad \lambda = c.$

故由 (3) 式得

$$12 \times 2\lambda + (-5)\frac{11}{2}\left(-\frac{10}{2}\right) - 12\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{11}{2}\right)^2 - \lambda\left(-\frac{10}{2}\right)^2 = 0.$$

$$\text{即 } 24\lambda + \frac{5^2 \times 11}{2} - 75 - \frac{11^2}{2} - 25\lambda = 0. \quad \therefore \lambda = 2.$$

2. $12x^2 + 36xy + \lambda y^2 + 6x + 6y + 3$ 為 x 及 y 之一次兩因子之積。則 λ 之值若何。 [答 $\lambda = 28$].

此例亦如前例。可從 (3) 式求得 λ 。

155. 文字值之制限 單方程式。含二未知數量。或諸未知數量。其未知數量。若任意不加限制。則可得無限之值。例如 $x + y = 5$ 。若 $x = 1$ 。則 $y = 4$ 。若 $x = 2$ 。則 $y = 3$ 。又 $x = 6$ 。則 $y = -1$ 。是所得

x, y 之值。可至無限。然其未知數量。或為有限制之數。則其答數亦必有限。例如 $x+y=5$ 。其 x 及 y 之值。以正整數為限制。則除 $x=0, y=5$ 。及 $x=1, y=4$ 。及 $x=2, y=3$ 。及 $x=3, y=2$ 。及 $x=4, y=1$ 。及 $x=5, y=0$ 之六組外。更無答數。

又如單方程式 $2x+5y=7$ 。 x 及 y 為正整數。則除 $x=1, y=1$ 外。更無答數。

又 $3(x-a)^2+4(y-b)^2=0$ 。各文字之數量。限為實數量。則除 $x-a=0, y-b=0$ 。即 $x=a, y=b$ 。此外別無答數。何則。因原方程式文字之項為平方。必兩項俱為正數。故非兩項皆為 0。則其式不能等於 0。〔下之例題各文字為實數〕。

例 題

1. $(a+b+c)^2=3(bc+ca+ab)$ 。則 $a=b=c$ 。試證之。

此題若不注意於 155 章之理論。則亦不易解。

〔證〕以原方程式之左邊。展其平方而化為簡式。則得

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0.$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0.$$

此式左邊為平方數之和。故為正數。由是各文字項。不能不為 0。

$$\therefore a=b, b=c, c=a.$$

2. x, x', y, y' 均為實數而

$$2(x^2+x'^2-xx')(y^2+y'^2-yy')=x^2y^2+x'^2y'^2.$$

求證 $x=x', y=y'$ 。

〔證〕解左邊與右邊同整列為 x 之方乘。則

$$x^3(y^2+2y'^2-2yy')-2xx'(y^2+y'^2-yy')+x'^2(2y^2+y'^2-2yy')=0.$$

$$\therefore (x^2-2xx'+x'^2)(y^2-2yy'+y'^2)+x^2y'^2-2xx'yy'+x'^2y^2=0.$$

$$\text{即 } (x-x')^2(y-y')^2-(xy'-x'y)^2=0.$$

由是 $(x-x')(y-y')=0$ 。及 $xy'-x'y=0$ 。

從第一 $x=x'$ 。或 $y=y'$ 。

$x=x'$ 。則從第二 $xy'-x'y=0$ 。得 $x=0$ 。或 $y=y'$ 。又 $y=y'$ 。則從第

二。得 $y=0$ 。或 $x=x'$ 。

但 $x=y=0$. 則亦 $x'=y'=0$.

由是 $y=y', x=x'$, 爲所求之結果.

$$3. \left. \begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots\dots\dots &= p^2 \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2+\dots\dots\dots &= q^2 \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\dots\dots\dots &= pq \end{aligned} \right\} \text{證 } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots\dots\dots \frac{p}{q}$$

但各數量爲實數.

[解] 第一第二及第三. 順次以 p^2, q^2 及 $\frac{1}{2}pq$ 除之. 則

得
$$\left(\frac{a_1}{p}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{p}\right)^2 + \left(\frac{a_3}{p}\right)^2 + \dots\dots\dots = 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$\left(\frac{b_1}{q}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{q}\right)^2 + \left(\frac{b_3}{q}\right)^2 + \dots\dots\dots = 1 \dots\dots\dots (2)$$

及
$$2\left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{b_1}{q}\right) + 2\left(\frac{a_2}{p}\right)\left(\frac{b_2}{q}\right) + 2\left(\frac{a_3}{p}\right)\left(\frac{b_3}{q}\right) + \dots\dots = 2 \dots\dots (3)$$

(1), (2) 兩式相加. 又減 (3) 式而括之. 則得

$$\left(\frac{a_1}{p} - \frac{b_1}{q}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{p} - \frac{b_2}{q}\right)^2 + \left(\frac{a_3}{p} - \frac{b_3}{q}\right)^2 + \dots\dots\dots = 0.$$

此左邊之各項爲正數.

$$\therefore \frac{a_1}{p} - \frac{b_1}{q} = 0, \quad \frac{a_2}{p} - \frac{b_2}{q} = 0, \quad \frac{a_3}{p} - \frac{b_3}{q} = \dots\dots\dots$$

由是
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots\dots\dots = \frac{p}{q}.$$

156. 三次恆同式 其最要之公式有三. 即

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

及
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

$$= (a+b+c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c).$$

前之二式甚易明瞭. 後一式亦已說明於 139 章. 此則示其應用之例. 其 ω 爲 1 之立方虛根.

$$\begin{aligned} \text{〔第一例〕 } & (b+c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)^2 - 3(b+c)(c+a)(a+b) \\ & = 2(a^2 + b^2 + c^2 - 3abc). \end{aligned}$$

$$\text{〔證〕 由公式左邊} = \frac{1}{2}(\overline{a+b} + \overline{b+c} + \overline{c+a})$$

$$\{(\overline{a+b-b+c})^2 + (\overline{b+c-c+a})^2 + (\overline{c+a-a+b})^2\}$$

$$= (a+b+c)\{(a-c)^2 + (b-a)^2 + (c-b)^2\}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}(a+b+c)\{(c-a)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2\}$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2 - 3abc).$$

$$\begin{aligned} \text{〔第二例〕 } & (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 \\ & - 3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 4(a^2 + b^2 + c^2 - 3abc). \end{aligned}$$

$$\text{〔證〕 左邊} = \frac{1}{2}(\overline{b+c-a} + \overline{c+a-b} + \overline{a+b-c})$$

$$\{(\overline{b+c-a-c+a-b})^2 + \text{以下二項, 爲 } a, b, c \text{ 之等勢}\}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{4(b-a)^2 + 4(c-b)^2 + 4(a-c)^2\}$$

$$= 4 \times \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

$$= 4(a^2 + b^2 + c^2 - 3abc).$$

$$\begin{aligned} \text{〔第三例〕 } & (x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2 - 3(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy) \\ & = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2. \end{aligned}$$

$$\text{〔證〕 左邊} = \frac{1}{2}(\overline{x^2 - yz} + \overline{y^2 - zx} + \overline{z^2 - xy})$$

$$\{(\overline{x^2 - yz - y^2 - zx})^2 + (\overline{y^2 - zx - z^2 - xy})^2 + (\overline{z^2 - xy - x^2 - yz})^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)\{(x+y+z)^2(x-y)^2 + \text{下二項爲等勢}\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}(x+y+z)^2\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}\right]^2 = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2.$$

$$\text{〔第四例〕 試證 } (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc).$$

可以 $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ$ 之形表之。

$$\text{〔證〕 由公式 } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z).$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c).$$

$$\begin{aligned} \text{但 } (x+y+z)(a+b+c) &= (ax+by+cz) + (bx+cy+az) + (cx+ay+bz). \\ (x+\omega y+\omega^2 z)(a+\omega^2 b+\omega c) & \\ &= (ax+by+cz) + \omega^2(bx+cy+az) + \omega(cx+ay+bz). \\ (x+\omega^2 y+\omega z)(a+\omega b+\omega^2 c) & \\ &= (ax+by+cz) + \omega(bx+cy+az) + \omega^2(cx+ay+bz). \end{aligned}$$

令 $ax+by+cz=X$, $bx+cy+az=Y$, $cx+ay+bz=Z$.

$$\begin{aligned} \text{則 } (x^3+y^3+z^3-3xyz)(a^3+b^3+c^3-3abc) & \\ = (X+Y+Z)(X+\omega Y+\omega^2 Z)(X+\omega^2 Y+\omega Z) &= X^3+Y^3+Z^3 \\ & \quad -3XYZ. \end{aligned}$$

157. 定義 用 \equiv 記號於兩代數式之間。即示兩代數式全然相同而為恆同式。

例如 $a^2-b^2 \equiv (a+b)(a-b)$ 。

又 Σ 記號所以示諸數量同類項之和。

例如 $a+b+c \equiv \Sigma a$, $ab+bc+ca \equiv \Sigma ab$ 。

由是 $(a+b+c+\dots)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+\dots+2ab+2ac+\dots+2bc+\dots$

略書之為 $(\Sigma a)^2 \equiv \Sigma a^2 + 2\Sigma ab$ 。

又 Π 記號為示同類數文字項之積之略號。

例如 $abc \equiv \Pi a$, $\Pi(b+c) = (b+c)(c+a)(a+b)$ 。

a^2b 為同類而 a, b, c 之轉換為 b^2c, c^2a 。

故 $\Sigma a^2b \equiv a^2b + b^2c + c^2a$ 。

又 $\Pi a^2b \equiv a^2b \times b^2c \times c^2a$ 。

158. 雜例 以下示以要用之例。

[第一例] $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$ 。則

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}。 \text{但 } n \text{ 為正整數。}$$

[證] $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$ 。

由此已知恆同式。得 $3(b+c)(c+a)(a+b)=0$ 。

即 $b+c=0$ (1), 或 $c+a=0$ (2), 或 $a+b=0$ (3)。

(1) $b+c=0$ 。則 $b=-c$, 及 $a+b+c=a$ 。

$$\begin{aligned} \therefore a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1} &= (a+b+c)^{2n+1} + (-c)^{2n+1} + c^{2n+1} \\ &= (a+b+c)^{2n+1} - c^{2n+1} + c^{2n+1} = (a+b+c)^{2n+1}. \end{aligned}$$

(2) $c+a=0$ 則 $c=-a$, 及 $a+b+c=b$.

$$\therefore a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=a^{2n+1}+(a+b+c)^{2n+1}+(-a)^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}.$$

(3) $a+b=0$, 可以同法推之.

[第二例] 若 x, y, z 為不等, 而

$y^3+z^3+m(y^2+z^2)=z^3+x^3+m(z^2+x^2)=x^3+y^3+m(x^2+y^2)$. 則此各式均等於 $2xyz$. 又 $x+y+z+m=0$.

[證] $y^3+z^3+m(y^2+z^2)=z^3+x^3+m(z^2+x^2)$. 故

$$y^3-x^3+m(y^2-x^2)=0, \text{ 即 } (y-x)\{y^2+yx+x^2+m(y+x)\}=0.$$

依題理 $y \neq x$. 故 $y-x$ 非為 0.

$$\text{由是 } y^2+yx+x^2+m(y+x)=0 \dots \dots \dots (1)$$

又 $z^3+x^3+m(z^2+x^2)=x^3+y^3+m(x^2+y^2)$. 由同法.

$$z-y \text{ 非為 } 0. \text{ 故 } z^2+zy+y^2+m(z+y)=0 \dots \dots \dots (2)$$

從 (1) 式減 (2) 式而括之. 則 $(x-z)(x+z+y+m)=0$. 而

$x-z$ 非為 0. 故 $x+y+z+m=0$. 即如題言.

次以 $m=-(x+y+z)$ 代於 (1) 式. 則

$$y^2+yx+x^2-(x+y+z)(y+x)=0. \text{ 即 } xy+yz+zx=0 \dots \dots \dots (3)$$

但 $y^3+z^3+m(y^2+z^2)=y^3+z^3-(x+y+z)(y^2+z^2)$

$$\begin{aligned} &= -(y^2x+z^2y+y^2z+z^2x) \\ &= -y(xy+yz)-z(yz+zx) \\ &= -y(-zx)-z(-xy) \\ &= 2xyz. \end{aligned}$$

[第三例] $a+b+c+d=0$. 則

$$a^4+b^4+c^4+d^4=2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd.$$

[證] 從 $a+b=-(c+d)$. 則 $a^2+b^2+2ab=c^2+d^2+2cd$.

故 $a^2+b^2-c^2-d^2=2(cd-ab)$. 又平方之. 則

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2c^2d^2-2a^2c^2-2b^2c^2-2a^2d^2-2b^2d^2 \\ = 4(c^2d^2-2abcd+a^2b^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \Sigma a^4 &= 2a^2b^2+2c^2d^2+2a^2c^2+2b^2c^2+2a^2d^2+2b^2d^2-8abcd \\ &= 2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd. \end{aligned}$$

[第四例] $ax+by+cz=0$. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$. 則

$$ax^2+by^2+cz^2=-(a+b+c)(y+z)(z+x)(x+y).$$

[證] 用 143 章文字之法。則兩方程式如下。

$$ax+by+cz=0 \dots\dots (1) \quad ayz+bzx+cxy=0 \dots\dots (2)$$

從 (1) 式及 (2) 式 $\frac{a}{y \cdot xy - zx \cdot z} = \frac{b}{z \cdot yz - xy \cdot x} = \frac{c}{x \cdot zx - yz \cdot y}$

即 $\frac{a}{x(y^2-z^2)} = \frac{b}{y(z^2-x^2)} = \frac{c}{z(x^2-y^2)} = K$.

依 113 章分數之定理。則

$$K = \frac{ax^2+by^2+cz^2}{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{ax^2+by^2+cz^2}{-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)} \dots\dots (3).$$

$$\text{又 } K = \frac{a+b+c}{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)} = \frac{a+b+c}{(y-z)(z-x)(x-y)} \dots\dots (4).$$

從 (3) 式及 (4) 式 $\frac{ax^2+by^2+cz^2}{(y+z)(z+x)(x+y)} = -(a+b+c)$.

例 題 十 六

1. $\frac{x}{y+z}=a$, $\frac{y}{z+x}=b$, $\frac{z}{x+y}=c$. 則 $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$.

[證] 從第一 $\frac{y+z}{x}=\frac{1}{a}$, 加 1 則 $\frac{x+y+z}{x}=\frac{1+a}{a}$.

即 $\frac{x}{x+y+z}=\frac{a}{1+a}$ 由同理 $\frac{y}{x+y+z}=\frac{b}{1+b}$

$$\frac{x}{x+y+z}=\frac{c}{1+c} \therefore \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1.$$

2. $ax+by=0$, 及 $cx^2+dxy+cy^2=0$. 則 $a^2c+b^2c=abd$.

[證] $y=-\frac{ax}{b}$ 代入第二式。則 $cx^2+dx\left(-\frac{ax}{b}\right)+c\left(-\frac{ax}{b}\right)^2=0$.

即 $(b^2c-abd+a^2c)x^2=0$. $\therefore b^2c+a^2c=abd$.

3. 從 $\frac{y-z}{y+s}=a$, $\frac{s-x}{s+y}=b$, $\frac{x-y}{x+z}=c$, 消去 x, y, z .

[答 $a+b+c+abc=0$].

[解] $a+y=X$, $y+s=Y$, $s+x=Z$, 則

第一 $\frac{(a+y)-(s+x)}{y+s}=a$ 爲 $\frac{X-Z}{Y}=a$.

即 $\frac{Z-X}{Y}=-a$, 同法從第二第三 $\frac{X-Y}{Z}=-b$, $\frac{Y-Z}{X}=-c$.

$$\text{由加法 } -(a+b+c) = \frac{Z-X}{Y} + \frac{X-Y}{Z} + \frac{Y-Z}{X}$$

$$= \frac{ZX(Z-X) + XY(X-Y) + YZ(Y-Z)}{XYZ} = \frac{-(X-Y)(Y-Z)(Z-X)}{XYZ}$$

即 $a+b+c = \frac{X-Y}{X} \cdot \frac{Y-Z}{Y} \cdot \frac{Z-X}{Z} = (-b)(-c)(-a) = -abc$.

$\therefore a+b+c+abc=0$.

4. 從 $\frac{y}{a} + \frac{z}{a} = a$, $\frac{s}{y} + \frac{y}{a} = b$, $\frac{a}{s} + \frac{s}{y} = c$, 消去 x, y, z .

[答 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=8$].

[解] 於第一加第二減第三, 則 $\frac{2y}{a} = a+b-c$, 同法

$$\frac{2s}{y} = b+c-a, \quad \frac{2a}{s} = c+a-b.$$

$\therefore (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = \frac{2y}{a} \cdot \frac{2s}{y} \cdot \frac{2a}{s} = 8$.

5. $a + \frac{1}{y} = 1$, $y + \frac{1}{a} = 1$, 則 $s + \frac{1}{a} = 1$. 試證之.

[證] $s + \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{a}} + \frac{1}{a} = \frac{1}{(y + \frac{1}{a}) - y} + \frac{1}{(a + \frac{1}{y}) - \frac{1}{y}} = \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-\frac{1}{y}}$

$$= \frac{1}{1-y} - \frac{y}{1-y} = 1.$$

6. 從 $a+c = \frac{b}{a} - da$, $a-c = \frac{d}{a} - ba$, 消去 a .

[答 $\frac{c^2}{(b-d)^2} - \frac{a^2}{(b+d)^2} = 1$].

[解] 由加法 $2a = \frac{1}{x}(b+d) - x(b+d)$. $\therefore \frac{2a}{b+d} = \frac{1}{x} - x$.

由減法 $2c = \frac{1}{x}(b-d) + x(b-d)$. $\therefore \frac{2c}{b-d} = \frac{1}{x} + x$.

由是 $\frac{4c^2}{(b-d)^2} - \frac{4a^2}{(b+d)^2} = \left(\frac{1}{x} + x\right)^2 - \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 = 4$.

7. 從 $x^2 - yz = a$, $y^2 - zx = b$, $z^2 - xy = c$, $ax + by + cz = d$, 消去 x, y, z .
 [答 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = d^3$].

[解] $x(x^2 - yz) + y(y^2 - zx) + z(z^2 - xy) = ax + by + cz$.

即 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = d$(1)

又依 56 章第三例.

$$(x^2 - yz)^3 + (y^2 - zx)^3 + (z^2 - xy)^3 - 3(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy) = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^3$$

即 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^3$(2)

由是從 (1) (2) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = d^3$.

8. $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = c^3$. 試於此式示任意之根. 及 a, b, c 之關係.
 [答 $a^3 + 2c^3 = 3ab^2$].

[解] 於此三方程式. 求 x, y, z 則各消去後. 其值不能求得. 即 x, y, z 之答為 ∞ .

故變第三方程式. 為 $\frac{1}{3}(x+y+z)\{3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2\} = c^3$,

故以第一及第二方程式. 代於此式. 則

$$\frac{1}{3}a\{3b^2 - a^2\} = c^3. \quad \therefore 3ab^2 = a^3 + 2c^3.$$

9. $bz + cy = cx + az = ay + bx$ 及 $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0$ 則 $a \pm b \pm c = 0$.

[證] 從最初之方程式.

$$ax - bz + c(x - y) = 0. \quad a(y - z) + bx - cx = 0.$$

從此兩方程式. 用十字字之法.

$$\frac{a}{zx - x(x - y)} = \frac{b}{(x - y)(y - z) + zx} = \frac{c}{zx + z(y - z)}$$



$$\text{即 } \frac{a}{x(y+z-x)} = \frac{b}{y(z+x-y)} = \frac{c}{z(x+y-z)} = K \dots\dots\dots (A)$$

$$\begin{aligned} \text{從 (A) } a+b+c &= K \{x(y+z-x) + y(z+x-y) + z(x+y-z)\} \\ &= -K(x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx) \end{aligned}$$

但從最後之方程式 $= -K(0)$, 由是 $a+b+c=0$.

又從最初之兩方程式用十文字之法。

$$\frac{x}{a(b+c-a)} = \frac{y}{b(c+a-b)} = \frac{z}{c(a+b-c)} = \lambda$$

$$\text{即 } x = a\lambda(b+c-a), y = b\lambda(c+a-b), z = c\lambda(a+b-c)$$

代於最後之方程式而括之。則

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 0.$$

由是 $\pm a \pm b \pm c = 0$, 畧之得 $a \pm b \pm c = 0$.

$$10. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0, \quad \text{則 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$\text{(證)} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1^2 \quad \text{即 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xyz}{abc} \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) = 1.$$

$$\text{故從第二 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$11. \quad x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \quad \text{則 } x^2y^2z^2 = 1 \quad \text{或 } x = y = z.$$

$$\text{(證)} \quad yz(x-y) = y-z, \quad zx(y-z) = z-x, \quad xy(z-x) = x-y,$$

$$\text{由是 } x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x) = (x-y)(y-z)(z-x).$$

$$\therefore x^2y^2z^2 = 1. \quad x-y=0 \quad \text{或 } y-z=0 \quad \text{即 } x=y=z.$$

$$12. \quad x = cy + bz, \quad y = az + cx, \quad z = bx + ay, \quad \text{則}$$

$$\frac{x^2}{1-a^2} = \frac{y^2}{1-b^2} = \frac{z^2}{1-c^2}$$

$$\text{(證)} \quad x - cy - bz = 0, \quad cx - y + az = 0, \quad bx + ay - z = 0.$$

$$\text{從第一第二用十文字之法。} \quad \frac{x}{-ca-b} = \frac{y}{-bc-a} = \frac{z}{-1+c^2}$$

$$\text{即 } \frac{x}{ca+b} = \frac{y}{cb+a} = \frac{z}{1-c^2} \dots\dots\dots (1)$$

第二第三依同法。及第三第一亦依同法。

$$\frac{x}{1-a^2} = \frac{y}{ab+c} = \frac{z}{ca+b} \dots\dots\dots (2)$$

及 $\frac{x}{ab+c} = \frac{y}{1-b^2} = \frac{z}{bc+a} \dots\dots\dots(3)$

從(1)及(3) $\frac{y^2}{(bc+a)(1-b^2)} = \frac{z^2}{(1-c^2)(bc+a)} \therefore \frac{y^2}{1-b^2} = \frac{z^2}{1-c^2}$

又從(2)及(3)依同法 $\frac{x^2}{1-a^2} = \frac{y^2}{1-b^2}$

13. $x^2 = y^2 + z^2 + 2ayz$, $y^2 = z^2 + x^2 + 2bzx$, $z^2 = x^2 + y^2 + 2cxy$. 則

$$\frac{x^2}{1-a^2} = \frac{y^2}{1-b^2} = \frac{z^2}{1-c^2}$$

[證] $x^2 - (y^2 + z^2) = 2ayz$ 平方之. 則 $x^4 - 2x^2(y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)^2 = 4a^2y^2z^2$,

即 $x^4 - 2x^2(y^2 + z^2) + (y^2 - z^2)^2 = -4y^2z^2(1-a^2)$,

即 $\Delta x^4 - 2\Delta y^2z^2 = -4y^2z^2(1-a^2)$,

同法 $\Delta x^4 = 2\Delta y^2z^2 = -4z^2x^2(1-b^2)$. $\Delta x^4 - 2\Delta y^2z^2 = -4x^2y^2(1-c^2)$.

由是 $y^2z^2(1-a^2) = z^2x^2(1-b^2) = x^2y^2(1-c^2)$. 以此除 $x^2y^2z^2$. 即得所求之結果.

14. x, y, z 爲不等. 而 $y = \frac{a+bx}{c+dx}$, $z = \frac{a+bx}{c+dx}$, $x = \frac{a+by}{c+dy}$.

則 $ad+bc+b^2+c^2=0$. 試證之.

[證] 本題三方程式之常數 a, b, c, d 在同位置. 當注意.

第一之 x 以第二代用之. 則

$$y = \frac{a+b\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)}{c+d\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)} = \frac{a(b+c) + (b^2+ad)x}{c^2+ad+d(b+c)x} \quad \text{又從第三 } y = \frac{a-cx}{dx-b}$$

由是 $\frac{a(b+c) + (b^2+ad)x}{c^2+ad+d(b+c)x} = \frac{a-cx}{dx-b}$ 去分母而括之. 則

$$(b^2+c^2+ad+bc)\{dx^2+(c-b)x-a\} = 0.$$

$$\therefore b^2+c^2+ad+bc=0. \text{ 或 } dx^2+(c-b)x-a=0.$$

然 $dx^2+(c-b)x-a=0$. 則 $x(dx+c)=a+bx$. 故變此方程式爲

$$x = \frac{a+bx}{c+dx}. \text{ 然第一爲 } y = \frac{a+bx}{c+dx}. \text{ 故 } x=y. \text{ 然依題意. 則 } x \neq y. \text{ 由是}$$

$b^2+c^2+ad+bc=0$. 爲真確無疑.

15. 從 $\frac{x^2}{yz} + \frac{yz}{x^2} = 1$, $\frac{y^2}{zx} + \frac{zx}{y^2} = m$, $\frac{z^2}{xy} + \frac{xy}{z^2} = n$, 消去 x, y, z .

[答 $l^2 + m^2 + n^2 - lmn - 4 = 0$].

[解] 最初之兩方程式相乘。則 $\left(\frac{x^2}{yz} + \frac{yz}{x^2}\right)\left(\frac{y^2}{zx} + \frac{zx}{y^2}\right) = lm$.

即 $\frac{z^2}{xy} + \frac{xy}{z^2} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{x^3}{y^3} = lm$. 從此式減第三。則 $\frac{y^3}{x^3} + \frac{x^3}{y^3} = lm - n$.

此式乘第三。則 $\left(\frac{z^2}{xy} + \frac{xy}{z^2}\right)\left(\frac{y^3}{x^3} + \frac{x^3}{y^3}\right) = n(lm - n)$.

即 $\frac{y^2 z^2}{x^4} + \frac{x^4}{y^2 z^2} + \frac{y^4}{z^2 x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^4} = lmn - n^2$.

即 $\left(\frac{yz}{x^2} + \frac{x^2}{yz}\right)^2 - 2 + \left(\frac{y^2}{zx} + \frac{zx}{y^2}\right)^2 - 2 = lmn - n^2$.

第一及第二代於此式。則 $l^2 - 2 + m^2 - 2 = lmn - n^2$.

16. 從 $bx^2 + lx + c = 0$, $cy^2 + my + a = 0$, $az^2 + nz + b = 0$, 及 $xyz = 1$. 消去 x, y, z .

[答 $al^2 + bm^2 + cn^2 + lmn = 4abc$].

[解] 變原方程式為 $bx + \frac{c}{x} = -1$, $cy + \frac{a}{y} = -m$, $az + \frac{b}{z} = -n$.

$\therefore \left(bx + \frac{c}{x}\right)\left(cy + \frac{a}{y}\right)\left(az + \frac{b}{z}\right) = (-1)(-m)(-n)$ 解此括弧。則

$abcxyz + \frac{ca^2z}{xy} + \frac{ab^2x}{yz} + \frac{bc^2y}{zx} + \frac{c^2ayz}{x} + \frac{a^2bzx}{y} + \frac{b^2cxy}{z} + \frac{abc}{xyz} = -lmn$.

$xyz = 1$. 故 $xy = \frac{1}{z}$, $yz = \frac{1}{x}$, $zx = \frac{1}{y}$. 代於上式而括之。則

$abc + c\left(a^2z^2 + \frac{b^2}{z^2}\right) + a\left(b^2x^2 + \frac{c^2}{x^2}\right) + b\left(c^2y^2 + \frac{a^2}{y^2}\right) + abc = -lmn$.

即 $2abc + c\left(az + \frac{b}{z}\right)^2 - 2abc + a\left(bx + \frac{c}{x}\right)^2 - 2abc + b\left(cy + \frac{a}{y}\right)^2 - 2abc$

$= -lmn$.

$\therefore 2abc + c(-n)^2 - 2abc + a(-1)^2 - 2abc + b(-m)^2 - 2abc = -lmn$.

即 $al^2 + bm^2 + cn^2 - 4abc + lmn = 0$.

17. 從 $y^2 + z^2 = ayz$, $x^2 + x^2 = bzx$, $x^2 + y^2 = cxy$ 消去 x, y, z .

但 xyz 非為 0.

[答 $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$].

【解】 $xyz \neq 0$. $\therefore x, y, z$ 各不為 0. 由是以 yz 除第一. 則

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = a. \text{ 同法 } \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = b, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = c.$$

$$\therefore \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = abc.$$

$$\text{即 } 1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 1 = abc.$$

$$\text{即 } \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 - 4 = abc.$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 - 4 = abc.$$

18. 從 $b\frac{y}{z} + c\frac{z}{y} = a, c\frac{z}{x} + a\frac{x}{z} = b, a\frac{x}{y} + b\frac{y}{x} = c$. 消去第一 x, y, z

及第二 a, b, c . [答 $a^3 + b^3 + c^3 - 5abc, y^3z^3 + z^3x^3 + x^3y^3 = -x^2y^2z^2$].

【解】(1) 三方程式相乘. 則 $\left(b\frac{y}{z} + c\frac{z}{y}\right) \left(c\frac{z}{x} + a\frac{x}{z}\right) \left(a\frac{x}{y} + b\frac{y}{x}\right) = abc.$

$$\text{即 } abc + b^2c\frac{y^2}{x^2} + c^2a\frac{z^2}{y^2} + a^2b\frac{x^2}{z^2} + ca^2\frac{x^2}{y^2} + ab^2\frac{y^2}{z^2} + bc^2\frac{z^2}{x^2} + abc = abc.$$

$$\begin{aligned} \therefore abc + c\left(a\frac{x}{y} + b\frac{y}{x}\right)^2 - 2abc + a\left(b\frac{y}{z} + c\frac{z}{y}\right)^2 - 2abc \\ + b\left(c\frac{z}{x} + a\frac{x}{z}\right)^2 - 2abc = 0. \end{aligned}$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 5abc = 0.$$

(2) 去原三方程式之分母. 且第一第二皆移項. 則

$$ayz - by^2 - cz^2 = 0, ax^2 - bxz + cz^2 = 0, ax^2 + by^2 = cxy.$$

從第一第二用十文字之法.

$$\frac{a}{-y^2z^2 - z^3x} = \frac{b}{-z^2x^2 - yz^3} = \frac{c}{-xy^2 + x^2y^2}$$



此各分數為 λ , 則

$$\lambda = \frac{ax^2 + by^2}{x^2(-y^2z^2 - z^3x) + y^2(-z^2x^2 - yz^3)} = \frac{cxy}{xy(-xy^2 + x^2y^2)}$$

在第三 $ax^2 + by^2$. 等於 cxy .

$$\text{由是 } x^3(-y^2z^2 - z^3x) + y^3(-z^2x^2 - yz^3) = xy(-xy^2 + x^2y^2).$$

$$\therefore x^3z^3 + x^2y^3 + y^3z^3 + x^2y^2z^2 = 0.$$

19. 從 $ax+yz=bc$, $by+zx=ca$, $cz+xy=ab$, $xyz=abc$. 消去 x, y, z .

[答] $b^3c^3=5a^2b^2c^2$.

[解] 三方程式相乘。則 $(ax+yz)(by+zx)(cz+xy)=(bc)(ca)(ab)$.

即 $abcxyz+xyz(ax^2+by^2+cz^2)+abx^2y^2+bcy^2z^2+caz^2x^2+x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$.

因 $xyz=abc$. 故

$a^2b^2c^3+abc(ax^2+by^2+cz^2)+abx^2y^2+bcy^2z^2+caz^2x^2=0$.

即 $a^2b^2c^2+bc(a^2x^2+y^2z^2)+ca(b^2y^2+z^2x^2)+ab(c^2z^2+x^2y^2)=0$.

即 $a^2b^2c^2+bc(ax+yz)^2-2abcxyz+ca(by+zx)^2-2abcxyz$
 $+ab(cz+xy)^2-2abcxyz=0$.

$\therefore a^2b^2c^2+bc(bc)^2-2a^2b^2c^2+ca(ca)^2-2a^2b^2c^2+ab(ab)^2-2a^2b^2c^2=0$.

$\therefore b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3=5a^2b^2c^2$.

20. 從 $\frac{x^2-xy-xz}{a}=\frac{y^2-yz-yx}{b}=\frac{z^2-zx-zy}{c}$, 及 $ax+by+cz=0$. 消去

x, y, z

[答] $a^3+b^3+c^3=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$.

[解] 各分數爲 λ . 則

$$\lambda = \frac{(x^2-xy-xz)-(y^2-yz-yx)-(z^2-zx-zy)}{a-b-c}$$

$$= \frac{(y-z-x)(z-x-y)}{a-b-c} = \frac{(y^2-yz-yx)(z^2-zx-zy)}{yz(a-b-c)} \dots \dots \dots (1)$$

但從原分數 $y^2-yz-yx=b\lambda$, $z^2-zx-zy=c\lambda$.

由是從 (1) $\lambda = \frac{bc\lambda^2}{yz(a-b-c)}$. 但 $\lambda \neq 0$.

$\therefore \frac{1}{\lambda} = \frac{bc}{yz(a-b-c)}$. $\therefore \frac{xyz}{\lambda} = \frac{ax}{\frac{a(a-b-c)}{bc}}$ 爲等勢式.

$$\text{故 } \frac{xyz}{\lambda} = \frac{ax}{\frac{a(a-b-c)}{bc}} = \frac{by}{\frac{b(b-c-a)}{ca}} = \frac{cz}{\frac{c(c-a-b)}{ab}}$$

由是 $\frac{ax+by}{\frac{bc}{a(a-b-c)} + \frac{ca}{b(b-c-a)}} = \frac{-cz}{\frac{c(c-a-b)}{ab}}$. 但 $ax+by=-cz$.

由是 $\frac{a(a-b-c)}{bc} + \frac{b(b-c-a)}{ca} = \frac{-c(c-a-b)}{ab}$.

$\therefore a^2(a-b-c)+b^2(b-c-a)+c^2(c-a-b)=0$.

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) = 0.$$

21. 從 $a^2yz = a^2(y+z)^2$, $b^2zx = \beta^2(z+x)^2$, $c^2xy = \gamma^2(x+y)^2$. 求得下之關係式 $\pm \frac{abc}{a\beta\gamma} = \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} - 4$.

(證) 三方程式開平方而變化之。則

$$\sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt{\frac{z}{y}} = \pm \frac{a}{\alpha}, \quad \sqrt{\frac{z}{x}} + \sqrt{\frac{x}{z}} = \pm \frac{b}{\beta}, \quad \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \pm \frac{c}{\gamma}.$$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt{\frac{z}{y}}\right) \left(\sqrt{\frac{z}{x}} + \sqrt{\frac{x}{z}}\right) \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \pm \frac{abc}{a\beta\gamma}$$

$$\text{即 } 1 + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 = \pm \frac{abc}{a\beta\gamma}$$

$$\text{即 } 2 + \left(\sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2 - 2 + \left(\sqrt{\frac{z}{x}} + \sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2 - 2 + \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 - 2 = \pm \frac{abc}{a\beta\gamma}$$

$$\therefore \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} - 4 = \pm \frac{abc}{a\beta\gamma}$$

22. $y^2 + z^2 + yz = a^2$, $z^2 + x^2 + zx = b^2$, $x^2 + y^2 + xy = c^2$. 及 $yz + zx + xy = 0$ 則 $a \pm b \pm c = 0$.

(證) 原三方程式相加。則 $2\Delta x^2 + \Delta yz = a^2 + b^2 + c^2$. 但 $\Delta yz = 0$. 故 $\Delta x^2 = \frac{1}{2}\Delta a^2$.

從第一減第二而括之。則 $(y-x)(x+y+z) = a^2 - b^2$.

$$\therefore x+y+z = \frac{a^2 - b^2}{y-x} \text{ 爲等勢式。故 } = \frac{b^2 - c^2}{z-y} = \frac{c^2 - a^2}{x-z}.$$

$$\text{由是 } (\Delta x)^2 = \frac{\Delta(a^2 - b^2)^2}{\Delta(y-x)^2}. \text{ 即 } \Delta x^2 + 2\Delta yz = \frac{2\Delta a^4 - 2\Delta b^2 c^2}{2\Delta x^2 - 2\Delta yz}.$$

$$\therefore \Delta x^2 = \frac{\Delta a^4 - \Delta b^2 c^2}{\Delta x^2} \quad \therefore (\Delta x^2)^2 = \Delta a^4 - \Delta b^2 c^2.$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\Delta a^2\right)^2 = \Delta a^4 - \Delta b^2 c^2. \text{ 即 } \Delta a^4 + 2\Delta b^2 c^2 = 4\Delta a^4 - 4\Delta b^2 c^2.$$

$$23. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}. \text{ 則 } \frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}}$$

但 n 爲正整數。

$$\text{(證)} \quad \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0. \quad \therefore (a+b)\{ab+c(a+b)+c^2\} = 0.$$

即 $(a+b)(a+c)(b+c)=0$. $\therefore a+b=0$, 或 $a+c=0$, 或 $b+c=0$,
若 $a+b=0$. 則 $a=-b$.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} &= \frac{1}{-b^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{c^{2n+1}} \\ &= \frac{1}{(-b+b+c)^{2n+1}} = \frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}} \text{ 其他同法.} \end{aligned}$$

24. $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1$. 則

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 0.$$

及 $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1} + \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1} + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1} = 1$.

[證] $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 1\right) - \left(1 - \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right) - \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) = 0$.

即 $a\{(b+c)^2 - a^2\} - b\{b^2 - (c-a)^2\} - c\{c^2 - (a-b)^2\} = 0$.

即 $(b+c-a)\{a(b+c+a) - b(b-c+a) - c(c+a-b)\} = 0$.

即 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 0$.

次 $b+c-a=0$. 則 $b^2+c^2-a^2 = b^2+c^2 - (b+c)^2 = -2bc$.

$c^2+a^2-b^2 = c^2+a^2 - (a-c)^2 = 2ac$, $a^2+b^2-c^2 = a^2+b^2 - (a-b)^2 = 2ab$.

故 $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1} + \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1} + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1}$
 $= \left(\frac{-2bc}{2bc}\right)^{2n+1} + \left(\frac{2ca}{2ca}\right)^{2n+1} + \left(\frac{2ab}{2ab}\right)^{2n+1} = -1 + 1 + 1 = 1$.

25. $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0$. $a^2x^3 + b^2y^3 + c^2z^3 = 0$. $\frac{1}{x} - a^2 = \frac{1}{y} - b^2 = \frac{1}{z} - c^2$.

則 $a^4x^3 + b^4y^3 + c^4z^3 = 0$. 及 $a^6x^3 + b^6y^3 + c^6z^3 = a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2$.

[證] $\frac{1}{x} - a^2 = \frac{1}{y} - b^2 = \frac{1}{z} - c^2 = \lambda$. 則

$$a^2x^3\left(\frac{1}{x} - a^2\right) + b^2y^3\left(\frac{1}{y} - b^2\right) + c^2z^3\left(\frac{1}{z} - c^2\right) = \lambda(a^2x^3 + b^2y^3 + c^2z^3).$$

即 $(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - (a^4x^3 + b^4y^3 + c^4z^3) - \lambda(0) = 0$.

即 $0 - (a^4x^3 + b^4y^3 + c^4z^3) = 0$. $\therefore a^4x^3 + b^4y^3 + c^4z^3 = 0$.

又 $a^4x^3\left(\frac{1}{x} - a^2\right) + b^4y^3\left(\frac{1}{y} - b^2\right) + c^4z^3\left(\frac{1}{z} - c^2\right) = \lambda(a^4x^3 + b^4y^3 + c^4z^3)$.

即 $(a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2) - (a^6x^3 + b^6y^3 + c^6z^3) = \lambda(0)$.

$$\therefore a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2 = a^6x^3 + b^6y^3 + c^6z^3.$$

26. $x - \frac{ayz}{x^2} = y - \frac{azx}{y^2} = z - \frac{axy}{z^2}$ 而 x, y, z 爲不等。則各等於

$x+y+z-a$ 試證之。

[證] 設各數皆等於 λ 。則第一第二式。爲 $x^3 - ayz = \lambda x^2$ 。

$y^3 - azx = \lambda y^2$ 。由減法得 $x^3 - y^3 + az(x-y) = \lambda(x^2 - y^2)$ 。

但 $x \neq y$ 。故兩邊以 $x-y$ 除之。則 $\lambda(x+y) = x^2 + xy + y^2 + az$ 。

由同法 $\lambda(y+z) = y^2 + yz + z^2 + ax$ 。

又由減法 $\lambda(x-z) = x^2 - z^2 + y(x-z) - a(x-z)$ 。但 $x \neq z$ 。故以 $x-z$ 除之則 $\lambda = x+y+z-a$ 。

27. x, y, z 爲不等。而 $2a-3y = \frac{(z-x)^2}{y}$ ， $2a-3z = \frac{(x-y)^2}{z}$ 。

則 $2a-3x = \frac{(y-z)^2}{x}$ 。及 $x+y+z=a$ 。

[證] 去已知兩方程式之分母。用減法。則

$$y(2a-3y) - z(2a-3z) = (z-x)^2 - (x-y)^2.$$

即 $2a(y-z) - 3(y^2 - z^2) = (z-y)(z-2x+y)$ 。因 $y \neq z$ 。

故 $2a-3(y+z) = -(z-2x+y)$ 。 $\therefore x+y+z=a$ 。

從第一方程式。 $2(x+y+z) - 3y = \frac{(z-x)^2}{y}$ 。去分母而變化之。

則 $2xy + 2yz - y^2 = z^2 - 2zx + x^2$ 。

$\therefore 2x(y+z+x) - 3x^2 = y^2 - 2yz + z^2$ 。

即 $2xa - 3x^2 = (y-z)^2$ 。 $\therefore 2a-3x = \frac{(y-z)^2}{x}$ 。

28. $x + \frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}$ 若 x 及 y 互換。其值不變。則 x 及 z 互換。其值

亦不變。又若 $x+y+z=1$ 。則此各式皆爲 0。但各數量皆不等。

[證] 依題意 $x + \frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2} = y + \frac{xz-y^2}{y^2+x^2+z^2}$ 。

$\therefore (x-y)(x^2+y^2+z^2) = z(x-y) + (x^2-y^2)$ 。依題意。 $x-y \neq 0$ 。故以 $x-y$ 除之。則 $x^2+y^2+z^2 = x+y+z$ 。

由是 $x + \frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2} = x + \frac{yz-x^2}{x+y+z} = \frac{yz+zx+xy}{x+y+z} = z + \frac{yx-z^2}{z+y+x}$ 。

又 $x+y+z=1$, 則 $x^2+y^2+z^2=1$. \therefore 得 $yz+zx+xy=0$.

而上之各式爲等於 $\frac{yz+zx+xy}{x+y+z}$. 故爲 0.

29. $y^2+z^2+m(y+z)=z^2+x^2+m(z+x)=x^2+y^2+m(x+y)$. 則此各式等於 $2xyz$. 但 x, y, z 各不等.

(證) $y^2+z^2+m(y+z)=z^2+x^2+m(z+x)$. $\therefore x^2-y^2+m(x-y)=0$.

但 $x-y \neq 0$. $\therefore x^2+xy+y^2+m=0$. 同法 $y^2+yz+z^2+m=0$.

由減法 $x^2-x^2+y(z-x)=0$. 但 $z-x \neq 0$. $\therefore z+x+y=0$.

由是 $x^2+y^2+m(x+y)=(x+y)(x^2-xy+y^2+m)$

$$=(x+y+z-z)(x^2+xy+y^2+m-2xy)=(0-z)(0-2xy)=2xyz.$$

30. $y^2+z^2+mxyz=z^2+x^2+mzx=x^2+y^2+mxy$. 則各等於 $\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)$. 但 x, y, z 各不等.

(證) 與前題同法. 從最初之兩相等式 $x+y+mx=0$.

同法 $y+z+mx=0$. \therefore 得 $m=1$. $\therefore x+y+z=0$.

由是各式 $=y^2+z^2+yz=z^2+x^2+zx=x^2+y^2+xy$

$$=\frac{1}{3}\{2(x^2+y^2+z^2)+2y+yz+zx\}=\frac{1}{6}\{3(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2\}$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2).$$

31. x, y 爲不等. 而 $\frac{(2x-y-z)^2}{x} = \frac{(2y-z-x)^2}{y}$. 則各等於 $\frac{(2z-x-y)^2}{z}$.

(證) $x+y+z=s$. 則 $\frac{(3x-s)^2}{x} = \frac{(3y-s)^2}{y} = K$.

$$\text{即 } 27x^2-27xs+9s^2-\frac{s^3}{x}=27y^2-27ys+9s^2-\frac{s^3}{y}=K \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{即 } 27(x^2-y^2)-27s(x-y)+\frac{s^3}{xy}(x-y)=0. \text{ 但 } x-y \neq 0.$$

$$\text{故以 } x-y \text{ 除之. 則 } 27(x+y)-27s+\frac{s^3}{xy}=0. \therefore s^3=27xyz.$$

$$\text{故 (1) 之第一邊爲 } K=27x^2-27xs+9s^2-\frac{27xyz}{x}$$

$$=9s^2-27(xy+yz+zx) \dots \dots \dots (2)$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \frac{(2z-x-y)^2}{z} &= \frac{(3z-s)^2}{z} = 27z^2 - 27zs + 9s^2 - \frac{s^3}{z} \\ &= 27z^2 - 27sz + 9s^2 - \frac{27xyz}{z} = 9s^2 - 27(xy+yz+zx) \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

從(2)及(3) $\frac{(2z-x-y)^2}{z} = K$.

32. a, b, c, d 各為實數量而非 0. 若 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = 4abcd$.
則 $a = \pm b$ 及 $c = \pm d$.

[證] 括之. 則 $(ac-bd)^2 + (ad-bc)^2 = 0$. $\therefore ac=bd, ad=bc$.
由是 $(a)(ad) = (bd)(bc)$. $\therefore a^2 = b^2$. $\therefore a = \pm b$.

33. a, b, c, x 各為實數量. 而 $(a^2+b^2)x^2 - 2b(a+c)x + b^2+c^2 = 0$.

則 $\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = x$.

[證] 從 $(ax-b)^2 + (bx-c)^2 = 0$. $ax-b=0, bx-c=0$.

34. $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2) = (ax+by+cz)^2$. 則 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

[證] 解括弧而括之. 則 $(bx-ay)^2 + (cy-bz)^2 + (az-cx)^2 = 0$.
故從 $bx-ay=0, cy-bz=0, az-cx=0$. 得證.

35. 示下各式之證.

(1) $2(a^2+b^2) = (a+b)^2$. 則 $a=b$.

(2) $3(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2$. 則 $a=b=c$.

(3) $4(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b+c+d)^2$. 則 $a=b=c=d$.

(4) $n(a^2+b^2+c^2+\dots+n \text{ 文字}) = (a+b+c+\dots+n \text{ 文字})^2$. 則 $a=b=c=\dots$

[證] 各從前項減後項. 則 $a^2-2ab+b^2$. 即如 $(a-b)^2$ 項之和.
故 $a-b=0, b-c=0 \dots \dots \therefore a=b=c \dots \dots$

36. a, b, c, d 各為實正數. 而 $a^4+b^4+c^4+d^4 = 4abcd$. 則 $a=b=c=d$.

[證] 括原恆同式. 則 $(a^2-b^2)^2 + (c^2-d^2)^2 + 2(ab-cd)^2 = 0$.

\therefore 從 $a^2=b^2, c^2=d^2, ab=cd$. 得 $a=b=c=d$.

37. $(n-1)x^2 + 2x(a_1-a_n) + a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + \dots + 2a_{n-1}^2 + a_n^2$

$= 2(a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n)$. 則 $a_2-a_1 = a_3-a_2 = \dots = a_n-a_{n-1} = x$.

[證] 本題亦以 x, a_1, a_2, \dots, a_n 爲實數量。今變原方程式爲

$$(n-1)x^3 + 2x\{(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n)\} + (a_1 - a_2)^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^2 = 0.$$

但 x^3 爲有 $n-1$ 個。故分配而括之。

$$\text{則 } \{x + (a_1 - a_2)\}^2 + \{x + (a_2 - a_3)\}^2 + \dots + \{x + (a_{n-1} - a_n)\}^2 = 0.$$

$$\therefore x = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}.$$

$$38. \quad a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + abc(a+b+c) \\ \equiv (a^2 + b^2 + c^2)(bc + ca + ab).$$

[證] 左邊依 a 之遞降方乘括之。其後當自明瞭。

$$\begin{aligned} \Sigma a^3(b+c) &= a^3(b+c) + a^2bc + a\{b^3 + c^3 + bc(b+c)\} + bc(b^2 + c^2) \\ &= a^3(ab + ac + bc) + a(b+c)(b^2 - bc + c^2 + bc) + bc(b^2 + c^2) \\ &= a^2(ab + ac + bc) + (b^2 + c^2)(ab + ac + bc) = (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

$$39. \quad (b+c-a-d)^4(b-c)(a-d) + (c+a-b-d)^4(c-a)(b-d) \\ + (a+b-c-d)^4(a-b)(c-d) \equiv 16(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c).$$

[證] $b=c$ 。則左邊 $= 0$ 。 $\therefore (b-c)(c-a)(a-b)$ 爲其因子。

又 $d=a$ 。則左邊 $= 0$ 。 $\therefore (d-a)(d-b)(d-c)$ 亦爲其因子。

\therefore 從左邊 $= A(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c)$ 。 $A=16$ 。

$$40. \quad 8(a+b+c)^3 - (b+c)^3 - (c+a)^3 - (a+b)^3 \\ \equiv 3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c).$$

[證] $8(a+b+c)^3 - (b+c)^3$ 爲有 $2(a+b+c) - (b+c)$ 。即 $2a+b+c$ 之因子。

又 $-(c+a)^3 - (a+b)^3$ 。即 $-\{(c+a)^3 + (a+b)^3\}$ 爲有 $(c+a) + (a+b)$ 。

即 $2a+b+c$ 之因子。故左邊有 $2a+b+c$ 之因子。同法知有

$a+2b+c$ 及 $a+b+2c$ 之因子。由此可得右邊。

$$41. \quad (a+b+c+d)^5 - (b+c+d)^5 - (c+d+a)^5 - (d+a+b)^5 - (a+b+c)^5 \\ + (b+c)^5 + (c+a)^5 + (a+b)^5 + (a+d)^5 + (b+d)^5 + (c+d)^5 + a^5 - b^5 - c^5 - d^5 \\ \equiv 60abcd(a+b+c+d).$$

[證] $a=0$ 。則原式之左邊 $= 0$ 。

\therefore 從左邊 $= Aabcd(a+b+c+d)$ 。得 $A=60$ 。

$$42. \quad (a+b+c)^3 abc - (bc+ca+ab)^3 \equiv abc(a^3 + b^3 + c^3) - (b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3).$$

$$\begin{aligned} \text{[證] 左邊} &= \{a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)\} abc \\ &\quad - \{b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3 + 3(bc+ca)(ca+ab)(ab+bc)\} \end{aligned}$$

$$= abc(a^2 + b^2 + c^2) + 3abc(a+b)(b+c)(c+a) - (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) \\ - 3c(b+a)a(c+b)b(a+b) = abc(a^2 + b^2 + c^2) - (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2).$$

$$43. (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 2(bc + ca + ab)^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2)(bc + ca + ab)^2 \\ \equiv (a^2 + b^2 + c^2 - 3abc)^2.$$

〔證〕 $a^2 + b^2 + c^2 = x$, $bc + ca + ab = y$. 則

$$\text{左邊} = x^2 + 2y^2 - 3xy^2 = (x + 2y)(x - y)^2. \\ = (a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)^2 \\ = (a + b + c)^2(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 - 3abc)^2.$$

$$44. (ca - b^2)(ab - c^2) + (ab - c^2)(bc - a^2) + (bc - a^2)(ca - b^2) \\ \equiv (bc + ca + ab)(bc + ca + ab - a^2 - b^2 - c^2).$$

$$\text{〔證〕 左邊} = \{(ca - b^2)(ab - c^2) + (ab - c^2)(bc - a^2) + (ab - c^2)^2\} \\ + \{(bc - a^2)(ca - b^2) - (ab - c^2)^2\}$$

$$= (ab - c^2)\{ca - b^2 + bc - a^2 + ab - c^2\} - c\{a^2 + b^2 + c^2 - 3abc\} \\ = (ab - c^2)(bc + ca + ab - a^2 - b^2 - c^2) - c(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) \\ = (bc + ca + ca - a^2 - b^2 - c^2)\{ab - c^2 + c(a + b + c)\}.$$

$$45. 2(c^2 + ca + a^2)(a^2 + ab + b^2) - (b^2 + bc + c^2)^2 \\ + 2(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2) - (c^2 + ca + a^2)^2 \\ + 2(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) - (a^2 + ab + b^2)^2 \equiv 3(bc + ca + ab)^2.$$

〔證〕 本題無別法可解。唯解左邊之第一項。

$$2a^4 - b^4 - c^4 + 2(a^2c + a^2b - b^2c - c^2b) + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2abc(a + b + c),$$

其第二項第三項可輪換 a, b, c 而得。相加即得右邊。

$$46. (3a - b - c)^2 + (3b - c - a)^2 + (3c - a - b)^2 \\ - 3(3a - b - c)(3b - c - a)(3c - a - b) \equiv 16(a^2 + b^2 + c^2 - 3abc).$$

〔證〕 右邊爲 $A^2 + B^2 + C^2 - 3ABC$. 則

$\frac{1}{2}(A+B+C)\{(A-B)^2 + (B-C)^2 + (C-A)^2\}$ 而 A 爲 $3a - b - c$. B, C 依此輪換。故以之代於上式。則

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(4a-4b)^2 + (4b-4c)^2 + (4c-4a)^2\}. \text{即得右邊.}$$

$$47. (na - b - c)^2 + (nb - c - a)^2 + (nc - a - b)^2 \\ - 3(na - b - c)(nb - c - a)(nc - a - b) \equiv (n+1)^2(n-2)(a^2 + b^2 + c^2 - 3abc).$$

〔證〕 與前題同法。即左邊爲

$$\frac{1}{2}\{(n-1)a+(n-1)b+(n-1)c\} \\ \{(n+1)^2(a-b)^2+(n+1)^2(b-c)^2+(n+1)^2(c-a)^2\} \\ = (n+1)^2(n-1)(a^2+b^2+c^2-3abc).$$

$$48. (x^2+2yz)^3+(y^2+2zx)^3+(z^2+2xy)^3 \\ -3(x^2+2yz)(y^2+2zx)(z^2+2xy) \equiv x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.$$

〔證〕如 156 章第四例用 ω 。則較容易。即

$$(x^2+2yz)+(y^2+2zx)+(z^2+2xy)=(x+y+z)^2.$$

$$\omega^3=1. \text{ 故 } (x^2+2yz)+\omega(y^2+2zx)+\omega^2(z^2+2xy)=(x+\omega^2y+\omega z)^2.$$

又 $(x^2+2yz)+\omega^2(y^2+2zx)+\omega(z^2+2xy)=(x+\omega y+\omega^2z)^2$ 兩邊各連乘。則原式 $= (x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$ 。

$$49. (by+az)^3+(bz+ax)^3+(bx+ay)^3-3(by+az)(bz+ax)(bx+ay) \\ \equiv (a^3+b^3)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

〔證〕與 47, 48 例同法。

$$50. 1+\omega+\omega^2=0. \text{ 則 } \{(b-c)(x-a)+\omega(c-a)(x-b)+\omega^2(a-b)(x-c)\}^3 \\ +\{(b-c)(x-a)+\omega^2(c-a)(x-b)+\omega(a-b)(x-c)\}^3 \\ \equiv 27(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c).$$

〔證〕左邊之第一項爲 A , 第二項爲 B , 則

$$\text{左邊} = A^3+B^3=(A+B)(A+\omega B)(A+\omega^2 B).$$

$$\text{但 } A+B=2(b-c)(x-a)+(\omega+\omega^2)(c-a)(x-b)+(\omega+\omega^2)(a-b)(x-c) \\ = 2(b-c)(x-a)-(c-a)(x-b)-(a-b)(x-c) \\ = 3(b-c)(x-a)-\{(b-c)(x-b)+(c-a)(x-b)+(a-b)(x-c)\} \\ = 3(b-c)(x-a)-\{0\}=3(b-c)(x-a).$$

$$\text{由同法 } A+\omega B=3\omega^2(c-a)(x-b), A+\omega^2 B=3\omega(a-b)(x-c).$$

$$\therefore \text{左邊} = 27(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c).$$

51. 兩平方數之和。所成之若干因子之積。可以兩平方數之和表之。

〔證〕 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ 其理已明。

故 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=A^2+B^2$ 。由同理

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)=(A^2+B^2)(e^2+f^2)=(Ae+Bf)^2+(Af-Be)^2.$$

又以此式爲 C^2+D^2 。同法得四因子之積。爲 E^2+F^2 。

由是可如題云云。

$$52. (a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) \equiv (ap+bq+cr+ds)^2 \\ + (aq-bp+cs-dr)^2 + (ar-bs-cp+dq)^2 + (as+br-cq-dp)^2.$$

$$〔證〕 (a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) \\ = (a^2p^2+b^2q^2+c^2r^2+d^2s^2) + (a^2q^2+b^2p^2+c^2s^2+d^2r^2) \\ + (a^2r^2+b^2s^2+c^2p^2+d^2q^2) + (a^2s^2+b^2r^2+c^2q^2+d^2p^2).$$

上之各項。補足 $2abpq, 2cdrs \dots$ 又各減去之。即得原式之右邊。

由是 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$ 。可得 $X^2+Y^2+Z^2+U^2$ 之形。

由同理 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$ 。

即為 $(X^2+Y^2+Z^2+U^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$ 之形。又此形可得 $M^2+N^2+P^2+Q^2$ 之形。

本題與前題為同性質之題。

$$53. (x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2) \text{ 可用 } X^2+XY+Y^2 \text{ 表之。}$$

$$〔證〕 1+(\omega)+(\omega)^2=0, \text{ 及 } (\omega)^3=1.$$

$$\text{故 } x^2+xy+y^2 = x^2 - (\omega + \omega^2)xy + (\omega^3)y^2 = (x - (\omega)y)(x - (\omega^2)y).$$

$$\therefore \text{左邊} = (x - (\omega)y)(a - (\omega)b)(x - (\omega^2)y)(a - (\omega^2)b).$$

$$\text{但 } (x - (\omega)y)(a - (\omega)b) = ax - \omega(bx + ay) + (\omega^2)by. \text{ 今用 } (\omega)^2 = -1 - (\omega) \\ = (ax - by) - \omega(bx + ay + by) = X - (\omega)Y.$$

$$\text{由同法得 } (x - (\omega^2)y)(a - (\omega^2)b) = X - (\omega^2)Y.$$

$$\therefore \text{左邊} = (X - (\omega)Y)(X - (\omega^2)Y) = X^2 + XY + Y^2.$$

$$54. (x^2+pxy+qy^2)(a^2+pab+qb^2) \text{ 可用 } X^2+pXY+qY^2 \text{ 表之。}$$

$$〔證〕 x^2+pxy+qy^2 = (x+ay)(x+\beta y). \text{ 則 } a+\beta = p, a\beta = q.$$

$$\therefore (x^2+pxy+qy^2)(a^2+pab+qb^2) = (x+ay)(a+\beta b)(x+\beta y)(a+ab).$$

$$\text{但 } (x+ay)(a+\beta b) = ax + aay + \beta bx + a\beta by \\ = ax + aay + (p-a)bx + qby = (ax + pbx + qby) + a(ay - bx) \\ = X + aY. \text{ 同法 } (x+\beta y)(a+ab) = X + \beta Y.$$

$$\therefore \text{左邊} = (X+aY)(X+\beta Y) = X^2 + pXY + qY^2.$$

$$55. 2s \equiv a+b+c. \text{ 則}$$

$$(1) a(s-b)(s-c) + b(s-c)(s-a) + c(s-a)(s-b) + 2(s-a)(s-b)(s-c) = abc.$$

$$(2) (s-a)^3 + (s-b)^3 + (s-c)^3 + 3abc = s^3.$$

$$\begin{aligned} (3) & (b+c)s(s-a)+a(s-b)(s-c)-2sbc \\ & = (c+a)s(s-b)+b(s-c)(s-a)-2sca \\ & = (a+b)s(s-c)+c(s-a)(s-b)-2sab. \end{aligned}$$

$$(4) a(b-c)(s-a)^2+b(c-a)(s-b)^2+c(a-b)(s-c)^2=0.$$

$$(5) s(s-b)(s-c)+s(s-c)(s-a)+s(s-a)(s-b)-(s-a)(s-b)(s-c)=abc.$$

$$\begin{aligned} (6) & (s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2+s^2(s-b)^2(s-c)^2+s^2(s-c)^2(s-a)^2+s^2(s-a)^2(s-b)^2 \\ & +s(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)=a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 (1) 左邊} & = s^2 \sum a - 2s \sum bc + 3abc + 2\{s^3 - s^2 \sum a + s \sum bc - abc\} \\ & = 2s^3 + 3abc + 2\{s^3 - 2s^2 - abc\} = 3abc + 2\{-abc\} = abc. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 左邊} & = 3s^3 - 3s^2(a+b+c) + 3s(a^2+b^2+c^2) - (a^3+b^3+c^3-3abc). \\ & = 3s^3 - 6s^2 + 3s(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc+ca) \\ & = -3s^2 + 3s(a^2+b^2+c^2) - 2s(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ & = -3s^2 + s(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) = -2s^3 + s(2s)^2 = s^3. \end{aligned}$$

(3) $(b+c)s(s-a)+a(s-b)(s-c)-2sbc$ 爲 $s^2(a+b+c)-2s(ab+bc+ca)+abc$ 爲 a, b, c 之輪換等勢式。故如題意。

(4) 解左邊之括弧。

$$\begin{aligned} (5) \text{ 左邊} & = s(s-c)(s-b+s-a)+(s-a)(s-b)(s-s+c) \\ & = s(s-c)c+(s-a)(s-b)c=(s^2-cs+s^2-as-bs+ab)c=abc. \end{aligned}$$

(6) 以本題(5)之恆同式之兩邊平方之。即得。

$$\begin{aligned} 56. \quad 2s = a+b+c+d. \text{ 則 } & 4(bc+ad)^2 - (b^2+c^2-a^2-d^2)^2 \\ & = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 從左邊} & = \{2(bc+ad)+(b^2+c^2-a^2-d^2)\} \\ & \quad \cdot \{2(bc+ad)-(b^2+c^2-a^2-d^2)\} \\ & = \{(b+c)^2-(a-d)^2\} \{(a+d)^2-(b-c)^2\} \text{ 可得右邊.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 57. \quad a+b+c+d=0. \text{ 則 } & ad(a+d)^2+bc(a-d)^2+ab(a+b)^2+cd(a-b)^2 \\ & +ac(a+c)^2+bd(a-c)^2+4abcd=0. \end{aligned}$$

〔證〕 $a+d=-(b+c)$, $a+b=-(c+d)$, $a+c=-(b+d)$ 。故

$$\begin{aligned} \text{左邊} & = ad(b+c)^2+bc(a-d)^2+ab(c+d)^2+cd(a-b)^2+ac(b+d)^2+bd(a-c)^2 \\ & +4abcd = ad(b^2+c^2)+bc(a^2+d^2)+ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)+ac(b^2+d^2) \\ & +bd(a^2+c^2)+4abcd. \end{aligned}$$

$$=abd(a+b+d)+acd(a+c+d)+bcd(b+c+d)+abc(a+b+c)+4abcd$$

$$=abd(-c)+acd(-b)+bcd(-a)+abc(-d)+4abcd=0.$$

58. $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)=(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$ 。則 $ac=bd$ 。

〔證〕 $(b+c)(d+a)(a+b)(c+d)=\{(a+b)+(c+d)\}\{cd(a+b)+ab(c+d)\}$ 。

即 $(cd+ab+bd+ac)(a+b)(c+d)=cd(a+b)^2+(cd+ab)(a+b)(c+d)$
 $+ab(c+d)^2$ 。

即 $cd(a+b)^2-(bd+ac)(a+b)(c+d)+ab(c+d)^2=0$ 。

即 $\{c(a+b)-b(c+d)\}\{d(a+b)-a(c+d)\}=0$ 。即 $-(bd-ac)^2=0$ 。

59. $a+b+c=0$ ，及 $x+y+z=0$ 。則

$$4(ax+by+cz)^3-3(ax+by+cz)(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

$$-2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y)=54abcxyz.$$

〔證〕左邊用 $-(a+b)$ 代 c 且 $a=0$ 。則左邊爲 0。推之 b, c, x, y, z 亦同。

∴ 左邊 = $Labcxyz$ 而得 $L=54$ 。

60. 設 $a+b+c=0$ 。則下各式之證如何。

(1) $2(a^7+b^7+c^7)=7abc(a^4+b^4+c^4)$ 。

(2) $6(a^7+b^7+c^7)=7(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)$ 。

(3) $a^6+b^6+c^6=3a^2b^2c^2+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^3$ 。

(4) $25(a^7+b^7+c^7)(a^3+b^3+c^3)=21(a^5+b^5+c^5)^2$ 。

〔證〕本題依 129 章。可得上各式之證。

61. $a+b+c+d=0$ 。則 $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(bcd+cda+dab+abc)^2$
 $=9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)$ 。

〔證〕 $a^3+b^3+c^3+d^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+(c+d)^3-3cd(c+d)$
 $=-(c+d)^3+3ab(c+d)+(c+d)^3+3cd(a+b)=3(abc+abd+acd+bcd)$

平方之。則 $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(abc+abd+acd+bcd)^2$ 。

又 $a^3+b^3+c^3+d^3=a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3=-3(a+b)(b+c)(c+a)$ 。

∴ $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(a+b)(b+c)(b+c)(c+a)(c+a)(a+b)$
 $=9\{ac+b(b+a+c)\}\{ab+c(a+b+c)\}\{bc+a(a+b+c)\}$
 $=9(ac-bd)(ab-cd)(bc-ad)$ 。

62. $a+b+c=0$ 。則 $\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{〔證〕 左邊} &= \frac{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)}{abc} \times \frac{\Sigma a(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)} \\
 &= \frac{-(b-c)(c-a)(a-b)}{abc} \times \frac{-\Sigma a\{a^2 - a(b+c) + bc\}}{(b-c)(c-a)(a-b)} = \frac{\Sigma a(2a^2 + bc)}{abc} \\
 &= \frac{2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + 9abc}{abc} = \frac{9abc}{abc} = 9.
 \end{aligned}$$

$$63. \frac{1}{1+l+ln} + \frac{m}{1+m+ml} + \frac{nm}{1+n+nm} = 1.$$

$$\frac{l}{1+l+ln} + \frac{ml}{1+m+ml} + \frac{1}{1+n+nm} = 1. \text{ 其分母皆非 } 0. \text{ 則 } l=m=n.$$

$$\text{〔證〕 以 } l \text{ 乘第一減第二, 則 } \frac{mnl-1}{1+n+nm} = l-1. \text{ 去分母.}$$

則 $l+ln=n+nm$. 即 $1+l+ln=1+n+nm$. 故以此代入第一.

$$\text{則 } \frac{1}{1+n+nm} + \frac{m}{1+m+ml} + \frac{nm}{1+n+nm} = 1.$$

$$\text{即 } \frac{m}{1+m+ml} = \frac{n}{1+n+nm}. \text{ 即 } \frac{1}{m} + 1 + l = \frac{1}{n} + 1 + m.$$

$\therefore (m-n)(1+mn) = 0$. 但 $1+n+nm$ 非 0 . 故 $1+mn \neq 0$.

$$\therefore m+n=0. \quad \therefore m=n.$$

$$64. a + (1-a)b + (1-a)(1-b)c + (1-a)(1-b)(1-c)d + \dots \dots \dots$$

$$\equiv 1 - (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned}
 \text{〔證〕 左邊} &= 1 - (1-a) + (1-a)b + (1-a)(1-b)c + (1-a)(1-b)(1-c)d + \dots \\
 &= 1 - (1-a)(1-b) + (1-a)(1-b)c + (1-a)(1-b)(1-c)d + \dots \\
 &= 1 - (1-a)(1-b)(1-c) + (1-a)(1-b)(1-c)d + \dots \dots \dots \\
 &= 1 - (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + \dots \dots \dots \text{以下類推.}
 \end{aligned}$$

$$65. \frac{1}{a} = 1 + 2(1-a) + 3(1-a)(1-2a) + \dots \dots \dots$$

$$+ \{n(1-a)(1-2a) \dots (1-\overline{n-1a})\} + \frac{1}{a} \{(1-a)(1-2a) \dots (1-na)\}.$$

〔證〕 用前例 $b=2a, c=3a, d=4a \dots \dots \dots$

$$\begin{aligned}
 \text{則 } a + (1-a)2a + (1-a)(1-2a)3a + (1-a)(1-2a)(1-3a)4a + \dots \dots \dots \\
 \equiv 1 - (1-a)(1-2a)(1-3a)(1-4a) \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

兩邊以 a 除之. 移項. 即得本題之證.

$$66. a^n + a^{n-1}(1-a^n) + a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1}) + \dots + \{a(1-a^n)(1-a^{n-1})\dots(1-a^2)\} + \{(1-a^n)(1-a^{n-1})\dots(1-a)\} = 1.$$

〔證〕左邊 = $1 - (1-a^n) + a^{n-1}(1-a^n) + a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1}) + \dots$
 $= 1 - (1-a^n)(1-a^{n-1}) + a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1}) + \dots$

順次如此括之。則

$$\text{左邊} = 1 - (1-a^n)(1-a^{n-1})\dots(1-a) + \{(1-a^n)(1-a^{n-1})\dots(1-a)\} = 1.$$

67. n 爲任意之正整數。則 $\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}$
 $+ \frac{(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \dots + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\dots(1-a)}{1-a^n} = n.$

〔證〕原式之左邊爲 F_n 。則

$$F_n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \dots + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\dots(1-a)}{1-a^n}.$$

$$F_{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + \frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)}{1-a^2} + \dots + \frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)\dots(1-a^2)}{1-a^n}$$

$$+ \frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)\dots(1-a)}{1-a^{n+1}}.$$

減上之相當項。則

$$F_{n+1} - F_n = a^n + a^{n-1}(1-a^n) + a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1}) + \dots + a\{(1-a^n)(1-a^{n-1})\dots(1-a^2)\} + \{(1-a^n)(1-a^{n-1})\dots(1-a)\} = 1,$$

從前例由是 $F_{n+1} = F_n + 1$ 。由是 $F_2 = F_1 + 1$, $F_3 = F_2 + 1$

然 $F_1 = \frac{1-a^1}{1-a} = 1$, $\therefore F_2 = F_1 + 1 = 2$, $F_3 = F_2 + 1 = 3$ $F_n = n$.

68. $a+b+c+d=0$, $x+y+z+u=0$, $ax+by+cz+du=0$ 。則

$$2(a^4x+b^4y+c^4z+d^4u) = (a^2x+b^2y+c^2z+d^2u)(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

〔證〕從第三 $(ax+by+cz+du)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = 0$ 。

$$\text{即 } x+y+z+u + ax\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) + by\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right) + cz\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$+ du\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0.$$

從 $x+y+z+u=0$ 。去上之分母。則

$$a^2x(bc+cd+db) + b^2y(cd+da+ac) + c^2z(da+ab+bd) + d^2u(ab+bc+ca) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{但 } a^2x(bc+cd+db) &= \frac{1}{2}a^2x\{(b+c+d)^2 - b^2 - c^2 - d^2\} \\ &= \frac{1}{2}a^2x(a^2 - b^2 - c^2 - d^2) = a^4x - \frac{1}{2}a^2x(a^2 + b^2 + c^2 + d^2). \end{aligned}$$

故上之方程式爲 $a^4x + b^4y + c^4z + d^4u$

$$-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a^2x + b^2y + c^2z + d^2u) = 0.$$

$$69. \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\text{(證)} \quad F_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$F_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{由減法。}$$

$$F_{2n} - F_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\text{又 } F_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$F_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{由減法。}$$

$$\begin{aligned} F_{2n} - F_n &= 1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

$$70. \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{u+a} + \frac{1}{v-b} = \frac{1}{u+a'} + \frac{1}{v-b'} = \frac{1}{f}. \quad \text{則}$$

$$f^2(ab' - a'b)^2 = aa'bb'(a-a')(b-b').$$

〔證〕 $uv = f(u+v)$,

$$uv = f(u+v) + f(a-b) - av + bu + ab,$$

$$uv = f(u+v) + f(a'-b') - a'v + b'u + a'b',$$

$$\therefore av - bu = f(a-b) + ab, \quad a'v - b'u = f(a'-b') + a'b'.$$

$$\text{由是 } u = \frac{aa'(b-b') + f(ab' - a'b)}{ab' - a'b}, \quad v = \frac{bb'(a-a') + f(ab' - a'b)}{ab' - a'b}. \quad \text{故}$$

$$uv = \frac{aa'bb'(a-a')(b-b') + \{aa'(b-b') + bb'(a-a')\}f(ab' - a'b) + f^2(ab' - a'b)^2}{(ab' - a'b)^2}.$$

$$\text{又 } f(u+v) = \frac{f\{aa'(b-b') + bb'(a-a') + 2f(ab' - a'b)\}}{ab' - a'b}.$$

$uv = f(u+v)$ 。故由此可得結果。

第拾貳編補

霍爾及乃托氏第三十四編摘要

消去法

533. 第三例 從 $x^2 - y^2 = px - qy$, $4xy = qx + py$, $x^2 + y^2 = 1$. 消去 x 及 y .

[解] $x(x^2 - y^2) + y(4xy) = x(px - qy) + y(qx + py)$.

即 $x^3 + 3xy^2 = p(x^2 + y^2) = p(1) = p$(A)

又 $y(x^2 - y^2) - x(4xy) = y(px - qy) - x(qx + py)$.

即 $-3x^2y - y^3 = -q(y^2 + x^2) = -q(1) = -q$(B)

從 (A) 式減 (B) 式。則 $(x+y)^3 = p+q$. $\therefore x+y = (p+q)^{\frac{1}{3}}$.

(A) 式加 (B) 式。則 $(x-y)^3 = p-q$. $\therefore x-y = (p-q)^{\frac{1}{3}}$.

由是 $(p+q)^{\frac{2}{3}} + (p-q)^{\frac{2}{3}} = (x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2) = 2$.

[例題三十四] $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1$.

$\frac{a}{x}(x-p) = \frac{b}{y}(y-q) = \frac{c}{z}(z-r)$. 消去 x, y, z .

[解] 令後式之各項為 λ . 則

$$x = \frac{ap}{a-\lambda}, \quad y = \frac{bq}{b-\lambda}, \quad z = \frac{cr}{c-\lambda}.$$

又 $(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 1^2 - 1$. 即 $xy + yz + zx = 0$. 以上之 x, y, z 代入。而求其 λ . 則得 x, y, z 之值。乃以所得之值。代用於 $x+y+z=1$ 而變化之。則

$$\frac{1}{(a-b)cr + (a-c) bq} + \frac{1}{(b-c)ap + (b-a) cr} + \frac{1}{(c-a) bq + (c-b) ap} = \frac{1}{bcqr + carc + abpq}$$

第拾參編

方乘, 方根, 分指數, 負指數

159. 自乘法 [Involution] 凡求一數量之方乘, 謂之自乘法。又求一數量之方根, 謂之開方法 [Evolution]。 $5^2=25$ 為自乘法。 $\sqrt{25}=5$ 。 為開方法。

本編專論自乘法及開方法, 以擴張指數之運用。

160. 指數之法則 依 31 章 m 及 n 為任意之正整數, 可證明之如下。

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \dots\dots\dots (1)$$

此為指數定則最要之公式。

由是 $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{m+n+p}$ 。 同理推之。

$$a^m \times a^n \times a^p \times \dots\dots\dots = a^{m+n+p+\dots\dots\dots} \dots\dots\dots (2)$$

[法則] 同數量若干方乘之積, 以各因子指數之和, 為其指數。

又 $a^m \times a^m \times a^m \times \dots\dots\dots n$ 因子 $= a^{m+m+m+\dots+n \times m} = a^{mn}$ 。

即 $(a^m)^n = a^{mn} \dots\dots\dots (3)$

[法則] 一數量之某方乘, 以方乘之指數, 與原指數之積, 為其指數。

又 $(ab)^m = ab \times ab \times ab \times \dots\dots\dots m$ 因子。

$$= (aaa \dots\dots\dots m \text{ 因子}) (bbb \dots\dots\dots m \text{ 因子}) = a^m b^m$$

同法, $(abc \dots\dots\dots)^m = a^m b^m c^m \dots\dots\dots (4)$

[法則] 積之方乘, 以各因子之方乘為其因子。

最普通者, 為 $(a^x b^y c^z \dots\dots\dots)^m = (a^x)^m (b^y)^m (c^z)^m \dots\dots\dots$ 從 (4) 式

$$= a^{xm} b^{ym} c^{zm} \dots\dots\dots \text{從 (3) 式}$$

由是 $(a^x b^y c^z \dots\dots\dots)^m = a^{xm} b^{ym} c^{zm} \dots\dots\dots (5)$

[法則] 代數式任意之方乘, 取方乘之指數乘因子之指數, 各以其積為因子之指數。

其特別之處。爲 $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(a \times \frac{1}{b}\right)^m = a^m \times \left(\frac{1}{b}\right)^m = a^m \times \frac{1}{b^m} = \frac{a^m}{b^m}$ 。

161. 符號之定則 正數量之方乘常爲正。而負數量之方乘。則各次正負相間。

$$(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2.$$

$$(-a)^3 = (-a)^2(-a) = +a^2(-a) = -a^3.$$

$$(-a)^4 = (-a)^3(-a) = -a^3(-a) = +a^4.$$

以下同理。故 $(-a)^{2n} = +a^{2n}$ 及 $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$ 。

〔別證〕 上之最後二式。可依前章之(3)式。逕得其證。

例如 $(-a)^{2n} = \{(-a)^2\}^n = (+a^2)^n = +a^{2n}$ 。

又 $(-a)^{2n+1} = (-a)(-a)^{2n} = -a(+a^{2n}) = -a^{2n+1}$ 。

〔法則〕 不論正數量與負數量。其偶數方乘皆爲正。而奇數方乘。則與原數量同符號。(如原數爲正亦正。原數爲負亦負)。

162. 算術上之方根 在算術上求其平方根或他方根。恆能得其畧近之值。然求一不盡數之平方根或立方根。甚爲繁雜。故本編於數根之實地計算法。不復縷述。僅於理論上之證明。而示其運算於下。

例如求 $\sqrt{62}$ 之略近值。先記 1, 2, 3, 諸數之平方。至所得平方大於 62 而止。而 7^2 小於 62, 8^2 大於 62。故 $\sqrt{62}$ 在 7 與 8 之間。

次記 7.1, 7.2, 7.3, 之平方。至大於 62 而止。而 $(7.8)^2$ 小於 62, $(7.9)^2$ 大於 62。故又知 $\sqrt{62}$ 在 7.8 與 7.9 之間。

次又記 7.81, 7.82, 7.83, 之平方。如前法求之。則又知 $\sqrt{62}$ 在 7.83 與 7.84 之間。

逐次如此。雖所得之平方。不能恰合於 62。而屢次所得一爲小於 62 之平方。一爲大於 62 之平方。其差可漸次減小。至求得 $\sqrt{62}$ 之略近值。極其精密。

此法不僅可用於求平方根。即求他方根亦可用之。故任意之整數或分數之 n 方根。恆能求得。

163. 根原定則之不盡根 代數學之根原定則。於文字之整數或分數。已證明其合理。而此編於不盡根。亦可證明之如下。

例如於根原定則中考察其互換法則。即證

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{b} \times \sqrt[n]{a}.$$

x, y 及 p, q 爲整數或分數。而令 x, y 之間有 $\sqrt[n]{a}$ 。 p, q 之間有 $\sqrt[m]{b}$ 如下。

$$x > \sqrt[n]{a} > y.$$

$$p > \sqrt[m]{b} > q.$$

而 x 與 y 之差及 p 與 q 之差。可設爲無限小。以此兩不等式之相應項相乘。則

$$x \times p > \sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} > y \times q.$$

或

$$p \times x > \sqrt[m]{b} \times \sqrt[n]{a} > q \times y.$$

因 p, q, x, y 爲分數或整數。故由互換法則。而得

$$x \times p = p \times x, \quad y \times q = q \times y.$$

依 162 章之證明。 x 與 y 爲 $\sqrt[n]{a}$ 之略近之值。其差可至任何小。又 p 與 q 亦然。故小至於極限。則 $p \times x$ 與 $q \times y$ 之差。可幾至於無而相等。由是夾於兩積之 $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b}$ 及 $\sqrt[m]{b} \times \sqrt[n]{a}$ 亦不能不相等。

$$\therefore \sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{b} \times \sqrt[n]{a}.$$

由是知不盡根。亦能依互換法則。而證其合理。

164. 方乘及方根之區別 一數量之平方根有二。立方根有三。已示於前。故一數量之 n 方根有 n 個。此即方根與方乘相異之處。何則。一數量之某方乘。祇有一個。例如 5 之平方。僅有 $5^2=25$ 之一數。而其方根即 $\sqrt{25}$ 。則有 $+5$ 及 -5 之二根是也。

165. 不盡根之法則 積之 m 方乘。等於其因子 m 方乘之積。已證於 160 章之 (4) 式。而不盡根之因子。亦可依 163 章同法證之。即 $(\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \dots)^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 \times \dots = a \times b \times \dots$

由是 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \dots = \sqrt{(a \times b \times \dots)}$ 。

[法則] 諸數量之各平方根之積。等於諸數量之積之平方根。由此法。則 $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{(2 \times 8)} = \sqrt{16} = 4$ 。

由此法而反用之。則 $\sqrt{75} = \sqrt{(5^2 \times 3)} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ 。

由此法而擴張之。則

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \dots \dots = \sqrt[n]{ab} \dots \dots \quad \text{及} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

又 $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$ 。何則。兩邊各乘至 np 方。皆為 a^{mp} 。一項式之 m 方乘。以其指數乘 m 為指數。即 $(a^n)^m = a^{nm}$ 。故求此式之 m 方根。可以 m 除其指數。即 $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^{m \div n} = a^{\frac{m}{n}}$ 。

$$\text{又} \quad \sqrt[2]{a^4} = a^2, \quad \sqrt[3]{a^6 b^9 c^6} = a^2 b^3 c^2, \quad \sqrt[n]{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}} = a^{\frac{\alpha}{n}} b^{\frac{\beta}{n}} c^{\frac{\gamma}{n}}$$

但此等方根。為在 2 方根, 3 方根, n 方根之內。各取其一個。而 n 方根。必有 n 個之說也。

分指數及負指數之法則

166. 指數 前所論之指數。皆為正整數。然如墨守此法則。則其用甚狹。今將其法則擴充之。證明指數之為分數或負數。如 $a^{\frac{1}{2}}$ 或 a^{-2} 等。無不合理。

凡指數不僅為正整數。即為分數及負數。而在代數記號。恆不關其值之如何。而能依同一之定則。

今有 a^n 試命 n 為分數或負數。則先依根原之指數定則。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

若 m, n 各為 $\frac{1}{2}$ 。則 $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$ 。

即 $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$ 。而 $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ 。

故 n 為分數。亦合於指數之常例。而 n 為 $\frac{1}{2}$ 。其意義即所以示 a 之平方根也。

又推求 a^{-2} 之意義。

設 $m=3, n=-2$ 。依指數之法則。

$$a^3 \times a^{-2} = a^{3-2} = a. \quad \therefore a^{-2} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}$$

由同理可推得 $a^{-1} = \frac{1}{a}, a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ 等。

167. 分指數及負指數之法則 今取普通之例示之如下。

〔第一〕 解 $a^{\frac{1}{n}}$ 之意義。但 n 爲任意之正整數。

由指數之法則。 $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \dots$ 至 n 因子

$$= a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}} = a^{n \times \frac{1}{n}} = a.$$

故知 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 。

〔第二〕 求 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義。但 m 及 n 爲任意之正整數。

由指數之法則。

$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times \dots$ 至 n 因子。

$$= a^{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m. \quad \therefore a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

又別法 $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ 。 即 $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ 。

由是知 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義。爲 a 之 m 方乘之 n 方根。亦可爲 a 之 n 方根之 m 方乘。故可書之如下。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

又 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義。從 165 章可得 $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}$ 。

〔註〕 $\sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m$ 之意義。苟如 164 章所示謂 n 方根。必有 n 個。則不能適合。故必如 165 章。僅取 n 方根內之一。乃合於理。例如 $\sqrt[2]{(a^4)} = \pm a^2$ 。則有二根。而 $(\sqrt[2]{a})^4$ 。即 $+a^2$ 祇此一個之值。即 $\sqrt[2]{(a^4)}$ 與 $(\sqrt[2]{a})^4$ 相異之點。

〔第三〕 示 $a^0 = 1$ 之意義。

由指數之法則。 $a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m$ 。 $\therefore a^0 = a^m \div a^m = 1$ 。

故不論 a 爲如何之數。而 $a^0 = 1$ 。 即 $2^0 = (\sqrt{5})^0 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = (-7)^0 = 1$ 。

〔第四〕 求 a^{-m} 之意義。但 m 爲任意之正整數。

由指數之法則。 $a^{-m} \times a^m = a^{-m+m} = a^0$ 。 但由第三 $a^0 = 1$ 。

故 $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ 及 $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$ 。

168. 指數之諸公式 在前章證明 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 之法。則無論爲分指數及負指數。皆可準此推求。故由此法。則不同 m 及 n 爲如何之數。均能合於下之諸公式。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

以上諸式。已證明於 160 章。茲再就分指數及負指數反覆推之。以證其合理。

[第一] 證 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。命 m 及 n 爲分數 $\frac{p}{q}$ 及 $\frac{r}{s}$ 。但 p, q, r, s 爲正數。則

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \times \sqrt[s]{a^r} && \text{〔由定義〕} \\ &= \sqrt[q]{a^{ps}} \times \sqrt[s]{a^{rq}} = \sqrt[q]{a^{ps+rq}} && \text{〔165 章〕} \\ &= a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} = a^{m+n}. \end{aligned}$$

又命 m 及 n 爲負數。則

$$a^{-m} \times a^{-n} \times \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} \text{〔由定義〕} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$$

$$\text{及 } a^{-m} \times a^n \times \frac{1}{a^m} \times a^n = a^n \div a^m = a^{n-m} = a^{-m+n}.$$

由是 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 對於 m 及 n 不論爲如何之值。均能合理。

推論 $a^{-m} \times a^n = a^{n-m}$ 。其 m 及 n 爲任意之值。亦能合理。故推得 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。

[第二] 證 $(a^m)^n = a^{mn}$ 。但 m 及 n 爲任意之值。

先設 n 爲正整數。 m 爲任意之值。則

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \dots \times n \text{ 因子} = a^{m+m+m+\dots+m} \text{〔167 章第一〕} = a^{mn}.$$

次設 n 爲正分數 $\frac{p}{q}$ 。而 p, q 爲正整數。則

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{(a^{mp})}. \text{ 因 } p \text{ 爲整數。故} \\ &= a^{\frac{mp}{q}} = a^{mn}. \end{aligned}$$

更設 n 爲負數。即 $-p$ 。則

$$(a^m)^n = (a^m)^{-p} = \frac{1}{(a^m)^p} = \frac{1}{a^{mp}} = a^{-mp} = a^{mn}.$$

由是 m 及 n 不論爲如何之值。而 $(a^m)^n = a^{mn}$ 。恆能合理。

〔第三〕 證 $(ab)^n = a^n b^n$ 。但 n 為任意之值。

在 160 章 n 為正整數。則已證明 $(ab)^n = a^n b^n$ 矣。

今設 m 為任意之數。 q 為正整數。則

$$\begin{aligned}(a^m b^m)^q &= a^m b^m \times a^m b^m \times \dots \times a^m b^m \quad q \text{ 因子} \\ &= a^{m+m+\dots+m} \times b^{m+m+\dots+m} \\ &= a^{mq} b^{mq}.\end{aligned}$$

設 n 為正分數 $\frac{p}{q}$ 。而 p 及 q 為正整數。則

$$(ab)^n = (ab)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{(a^p b^p)}. \quad (\text{因 } p \text{ 為正整數故}).$$

又 $(a^n b^n)^q = a^{nq} b^{nq}$ 。 $(\text{因 } q \text{ 為正整數故}).$

由是對於 n 之任意之正值。而 $a^n b^n = \sqrt[q]{(a^p b^p)} = (ab)^n$ 。

更設 n 為負數 $-m$ 。則

$$(ab)^n = (ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m b^m} = a^{-m} b^{-m} = a^n b^n.$$

例 題

1. 化 $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}}$ 為簡式。 $(\text{解}) a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = a^0$ 。
2. 化 $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ 為簡式。 $(\text{解}) a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 b^1 = a^2 b^2$ 。
3. 化 $(-a^{-2} b^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ 為簡式。 $(\text{解}) (a^{-2})^{-\frac{1}{2}} (b^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} = a^1 b^{-2} = \frac{a^2}{b^2}$ 。
4. 化 $\sqrt{(a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}})} \div \sqrt[3]{(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{-1})}$ 為簡式。
 $(\text{解}) a^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \div a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} c^{-1 \cdot \frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} c^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = a^{-1} b^{\frac{1}{2}} c^0 = \frac{2/b}{a}$ 。

169. 有理補因子 已知之無理式。以他代數式乘之。其積可變為有理式。則其乘式。謂為原式之有理補因子。例如下。

$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - \sqrt{b^2} = a^2 - b$ 。故 $a+\sqrt{b}$ 為 $a-\sqrt{b}$ 之有理補因子。而 $a-\sqrt{b}$ 亦為 $a+\sqrt{b}$ 之有理補因子。

又 $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$ 為 $a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d}$ 之有理補因子。

又從已知之恆同式 $2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$

$$= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \text{ 可推得}$$

$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ 之有理補因子爲

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})(\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r})(-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}).$$

而用此恆同式可求得特別之例如下。

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})=(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2-r=p+q-r+2\sqrt{pq}.$$

而 $(p+q-r-2\sqrt{pq})(p+q-r+2\sqrt{pq})=(p+q-r)^2-4pq$ 。故

$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ 之有理補因子爲 $(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})(p+q-r-2\sqrt{pq})$ 。

又從恆同式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ 。即得

$a+b^{\frac{1}{3}}$ 爲 $a^2-ab^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ 之有理補因子。

170. 求任意二項式有理補因子。

求 $ax^{\frac{p}{q}} \pm by^{\frac{r}{s}}$ 之有理補因子。則令

$X=ax^{\frac{p}{q}}$ 及 $Y=by^{\frac{r}{s}}$ 而 n 爲 q 及 s 之最小公倍數。則 X^n 及 Y^n 皆爲有理式。

由是 $(X+Y)\{X^{n-1}-X^{n-2}Y+\dots+(-1)^{n-1}Y^{n-1}\}=X^n+(-1)^{n-1}Y^n$ 。

及 $(X-Y)(X^{n-1}+X^{n-2}Y+\dots+Y^{n-1})=X^n-Y^n$ 。

故 $X+Y$ 及 $X-Y$ 之有理補因子爲

$$X^{n-1}-X^{n-2}Y+\dots+(-1)^{n-1}Y^{n-1}.$$

及

$$X^{n-1}+X^{n-2}Y+\dots+Y^{n-1}.$$

[例] 求 $x^{\frac{3}{2}}-ay^{\frac{5}{3}}$ 之有理補因子。令 $X=x^{\frac{3}{2}}$, $Y=ay^{\frac{5}{3}}$, $n=6$ 。

由是 $X^6=x^9$, $Y^6=a^6y^5$, 而 $X-Y$ 之有理補因子爲

$$X^5+X^4Y+X^3Y^2+X^2Y^3+XY^4+Y^5. \text{ 故}$$

$x^{\frac{3}{2}}-ay^{\frac{5}{3}}$ 之有理補因子爲

$$x^{\frac{15}{2}}+ax^{\frac{9}{2}}y^{\frac{5}{3}}+a^2x^6y^{\frac{10}{3}}+a^3x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{15}{3}}+a^4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{20}{3}}+a^5y^{\frac{25}{3}}.$$

例題十七

1. 化 $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}$ 爲最簡式。

答 $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ 。

[解] $a^{\frac{2}{3}+(-\frac{1}{3})}b^{\frac{1}{3}+(-\frac{2}{3})}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ 。

2. 化 $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{2}{3}} \times (a^2)^{-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{(a^{-\frac{1}{3}})^5}$ 爲簡式。

答 1。

[解] $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} \times (a^{-\frac{1}{2}})^{-5} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1+\frac{5}{2}} = a^0 = 1.$

8. 化 $(ab^{-2}c^3)^{\frac{1}{2}} \times (a^2b^2c^{-3})^{\frac{1}{2}}$ 爲簡式。 答 $\frac{a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}.$

[解] $a^{\frac{1}{2}}b^{-1}c^{\frac{3}{2}} \times ab^{\frac{1}{2}}c^{-1} = a^{\frac{1}{2}+1}b^{-1+\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}-1} = a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}.$

4. $(x^{\frac{2+a}{a-b}})^{\frac{1}{a-b}} \times (x^{\frac{a+c}{a-b}})^{\frac{1}{b-a}} \times (x^{\frac{a+b}{b-a}})^{\frac{1}{a-a}}.$ 答 1.

[解] $x^{\frac{2+a}{(a-b)(a-b)} + \frac{a+c}{(a-b)(b-a)} + \frac{a+b}{(b-a)(a-a)}} = x^0 = 1.$

5. 以 $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$ 乘 $x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}}.$ 答 $x - y.$

[解] 用 $(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3$ 式。

6. 以 $x^2 - 1 + x^{-2}$ 乘 $x^2 + 1 + x^{-2}.$ 答 $x^4 + 1 + x^{-4}.$

[解] $\{(x^2 + x^{-2}) + 1\} \{(x^2 + x^{-2}) - 1\} = (x^2 + x^{-2})^2 - 1 = x^4 + 2 + x^{-4} - 1.$

7. 以 $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}$ 乘 $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}.$ 答 $x + y + z - 3xyz.$

[解] 用 $(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)(a + b + c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 之恆同式。

8. 以 $x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$ 除 $x^{\frac{4}{2}} - 2 + x^{-\frac{4}{2}}.$ 答 $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}.$

[解] 因 $x^{\frac{4}{2}} - 2 + x^{-\frac{4}{2}} = (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2$ 而得。

9. 以 $a^{\frac{1}{10}} - x^{\frac{1}{5}}$ 除 $a^{\frac{1}{5}} - x.$ 答 $a^{\frac{2}{5}} + a^{\frac{1}{10}}x^{\frac{1}{5}} + a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{2}{5}} + a^{\frac{1}{10}}x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{4}{5}}.$

[解] $\frac{(a^{\frac{1}{10}})^5 - (x^{\frac{1}{5}})^5}{a^{\frac{1}{10}} - x^{\frac{1}{5}}} = (a^{\frac{1}{10}})^4 + (a^{\frac{1}{10}})^3x^{\frac{1}{5}} + (a^{\frac{1}{10}})^2x^{\frac{2}{5}} + a^{\frac{1}{10}}x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{4}{5}}.$

10. 以 $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$ 除 $x^{\frac{3}{2}} - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{3}{2}}.$ 答 $x + y.$

[解] $\frac{x(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) + y(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} = x + y.$

11. 求 $x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 4x - 4x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} = (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})^2$ 之證。

[證] $(x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + 4x) + 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$
 $= (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}})^2 + 2x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}) + x^{\frac{5}{2}} = (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})^2.$

12. 以 $3x-4+2x^{-1}$ 乘 $4x^2-5x-4-7x^{-1}+6x^{-2}$ 。其積以 $3x-10+10x^{-1}-4x^{-2}$ 除之。 答 $4x^2+3x+2-3x^{-1}$ 。

〔解〕 用分離係數法。則

$$\begin{array}{r}
 4-5-4-7+6 \\
 \underline{3-4+2} \\
 12-15-12-21+18 \\
 -16+20+16+28-24 \\
 +8-10-8-14+12 \\
 \hline
 3-10+10-4 \quad \left. \begin{array}{l} 12-31+16-15+38-38+12 \\ 12-40+40-16 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4+3+2-3 \\ 4+3+2-3 \end{array} \\
 \hline
 +9-2+1+38 \\
 +9-30+30-12 \\
 \hline
 6-29+50-38 \\
 6-20+20-8 \\
 \hline
 -9+30-30+12 \\
 -9+30-30+12 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

此商之最高項。為 $4x^2 \times 3x \div 3x$ 。即 $4x^2$ 。故得 $4x^2+3x+2-3x^{-1}$ 。

13. 以 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$ 除 $x-x^{-1}-2(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})+2(x^{\frac{5}{2}}-x^{-\frac{3}{2}})$ 。

〔解〕 變被除式為 $x-x^{-1}+(2x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}})+(2x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{3}{2}})$
 $=x-x^{-1}+2x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})+2x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})$ 。

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{商} &= \frac{x-x^{-1}+2x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})+2x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}} \\
 &= x^{\frac{1}{2}}+1+x^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

14. 化 $\frac{ax^{-1}+a^{-1}x+2}{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-1}$ 為簡式。 答 $a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{〔解〕} \quad \frac{(a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})^2}{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}-1+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} &= (a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}) \left\{ \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}-1+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} \right\} \\
 &= (a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}).
 \end{aligned}$$

此題第二節之 $\{ \}$ 與 a^2+b^3 以 a^2-ab+b^2 除之得 $a+b$ 同法。可則。因被除式之 a, b 之次數為 3 次。除式為 2 次。故得 $\frac{3}{2}$ 次。此式 $(ax^{-1})^{\frac{1}{2}} + (a^{-1}x)^{\frac{1}{2}}$ 為 $\frac{1}{2}$ 次。故 $(ax^{-1})^{\frac{1}{2}} - 1 + (a^{-1}x)^{\frac{1}{2}}$ 為 $\frac{1}{3}$ 次。故亦得 $\frac{3}{2}$ 次。而與前同形。

$$15. \text{ 以 } \frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \text{ 除 } \frac{x^{\frac{7}{3}}}{y^{\frac{14}{3}}} + \frac{y^{\frac{14}{3}}}{x^{\frac{7}{3}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & \left\{ \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} \right)^7 + \left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \right)^7 \right\} \div \left\{ \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} \right) + \left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \right) \right\} \\ & = \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} \right)^6 - \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} \right)^5 \left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \right) + \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} \right)^4 \left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \right)^2 - \dots + \left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \right)^6 \\ & = x^2 y^{-1\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}} y^{-\frac{8}{3}} + x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{4}{3}} - 1 + x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{4}{3}} - x^{-\frac{4}{3}} y^{\frac{8}{3}} + x^{-2} y^{1\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

$$16. \text{ 求 } \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1} + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1} = x^{\frac{2}{3}} + 2 \text{ 之證.}$$

$$\text{[證]} \quad \text{左邊} = \frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1} - \frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{1}{3}}+1} = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1 - (x^{\frac{1}{3}}-1) = x^{\frac{2}{3}} + 2.$$

$$17. \text{ 求 } (2x+y^{-1})(2y+x^{-1}) = (2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}})^2 \text{ 之證.}$$

$$\begin{aligned} \text{[證]} \quad & (2x+y^{-1})(2y+x^{-1}) \\ & = x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}) = (2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}})^2. \end{aligned}$$

$$18. \text{ 求 } \frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}} - \frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}} = 1 \text{ 之證.}$$

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad & \frac{ab^{-1}(ab-a^{-1}b^{-1}) + a^{-1}b(ab-a^{-1}b^{-1})}{(ab+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})} + \frac{ab-ab^{-1}-a^{-1}b+a^{-1}b^{-1}}{ab+a^{-1}b^{-1}} \\ & = \frac{ab^{-1}+a^{-1}b}{ab+a^{-1}b^{-1}} + \frac{ab-ab^{-1}-a^{-1}b+a^{-1}b^{-1}}{ab+a^{-1}b^{-1}} \\ & = \frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{ab+a^{-1}b^{-1}} = 1. \end{aligned}$$

19. 設 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$. 求 $(x+y+z)^3=27xyz$ 之證.

[證] $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=-z^{\frac{1}{3}}$ 兩邊立方之. 則

$$x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=-z. \text{ 即 } x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(-z^{\frac{1}{3}})=-z.$$

$\therefore x+y+z=3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$. 兩邊立方之. 則 $(x+y+z)^3=27xyz$.

20. 求以下諸式之有理補因子.

(1) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$.

(2) $a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$.

(3) $a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{2}{3}}$.

(4) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$.

[解] (1) $a^{\frac{1}{3}}=X, b^{\frac{1}{3}}=Y$. 則 $a^3=X^3, b^3=Y^3$. 故 $X+Y$ 之有理因子. 爲 $X^3-X^2Y+X^2Y^2-X^2Y^3+XY^4-Y^6$.

即有理補因子爲 $a^{\frac{2}{3}}-a^2b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}-ab^4+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$.

(2) $a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$ 爲 $X+Y$. 則 $a^4x^5=X^6, y^3=Y^6$. 故 $X+Y$ 之有理補因子. 與 (1) 同法. 得 $a^{\frac{10}{3}}x^{\frac{25}{3}}-a^{\frac{8}{3}}x^{\frac{10}{3}}y^{\frac{1}{3}}+a^2x^{\frac{5}{3}}y-a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{3}}y^2-y^{\frac{5}{3}}$.

(3) 用 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc$. 則

$$(a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{2}{3}})(a^2+b^2x^{\frac{2}{3}}+c^2x^{\frac{4}{3}}-bx^{\frac{1}{3}}cx^{\frac{2}{3}}-cx^{\frac{2}{3}}a-abx^{\frac{1}{3}}) \\ =a^3+b^3x+c^3x^2-3abcx.$$

故有理補因子爲 $a^2+b^2x^{\frac{2}{3}}+c^2x^{\frac{4}{3}}-bcx-cax^{\frac{2}{3}}-abx^{\frac{1}{3}}$.

$$(4) (x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}) \\ =x+y+z-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{又 } \{(x+y+z)-3(xyz)^{\frac{1}{3}}\}\{(x+y+z)^2+3(x+y+z)(xyz)^{\frac{1}{3}}+9(xyz)^{\frac{2}{3}}\} \\ = (x+y+z)^3-27xyz.$$

由是有理補因子爲 $(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})$. 與 $(x+y+z)^2+3(x+y+z)x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}+9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}$ 之積.

21. $(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(y-z)+(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(z-x)+(1-z^3)^{\frac{1}{3}}(x-y)=0$. 設 x, y, z 皆不等. 則 $(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$.

〔證〕 $a+b+c=0$ 。則 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 。從本題之已知關係式。即得

$$(1-x^3)(y-z)^3+(1-y^3)(z-x)^3+(1-z^3)(x-y)^3 \\ =3(y-z)(z-x)(x-y)(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(1-z^3)^{\frac{1}{3}}.$$

上之左邊 $=(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3-\{x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3\}$

$$=3(y-z)(z-x)(x-y)-3xyz(y-z)(z-x)(x-y)$$

$$=3(y-z)(z-x)(x-y)(1-xyz).$$

由是

$$3(y-z)(z-x)(x-y)(1-xyz)=3(y-z)(z-x)(x-y)(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(1-z^3)^{\frac{1}{3}}.$$

依題意 $(y-z)(z-x)(x-y) \neq 0$ 。

$$\therefore 1-xyz=(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(1-z^3)^{\frac{1}{3}}.$$

兩邊立方之。則 $(1-xyz)^3=(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)$ 。

查 理 斯 密 司 氏
霍 爾 氏, 乃 托 氏

大 代 數 學 講 義

第 四 卷

第 拾 肆 編

不 盡 根, 虛 數 及 複 虛 數

171. 定義 在算術上所求得之方根。僅為略近數者。稱為不盡根。

如代數式 \sqrt{a} 。其實雖非不盡根。而恆付以不盡根之名。

不盡根為同根號者。稱為同次。例如 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{6}$ 為二次即平方之不盡根。又 $\sqrt[3]{4}$ 為三次。即立方之不盡根。故 $\sqrt[n]{a}$ 為第 n 次之不盡根。

兩不盡根。其化出之無理因子相同者。謂之同類 (Similar)。例如 $\sqrt{8}$ 及 $\sqrt{18}$ 。化得 $2\sqrt{2}$ 及 $3\sqrt{2}$ 。俱有 $\sqrt{2}$ 之無理因子。故為同類。有不盡根式之運算。可依前編所證得之定理施之。

註 所設之根號置於數字之前者。為表算術上之一根。若置於代數式之前者。為表諸根內任意之一根。

例如 \sqrt{a} 為有兩方根即 $+\sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$ 。若所示為 $\sqrt{2}$ 。則僅表算術上之一根 1.414.....。即不以 $\pm\sqrt{2}$ 記之。

172. 有理數量亦可以不盡根之形表之。

例如 $2 = \sqrt{4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[4]{16}$ 。 $a = \sqrt{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[4]{a^4}$ 。

又依 165 章。 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 故 $2\sqrt{2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8}$ 。

$5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(5^3 \times 3)} = \sqrt[3]{375}$ 。

及 $a\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{(a^3 \times ab)} = \sqrt[3]{a^{n+1}b}$ 。

反之。 $\sqrt{18} = \sqrt{(9 \times 2)} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 。

及 $\sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{(3^3 \times 5)} + \sqrt[3]{(2^3 \times 5)} = 3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$ 。

173. 任意兩不盡根可化爲同次之不盡根。

例如 $\sqrt[n]{a}$ 及 $\sqrt[m]{b}$ 化爲同次。則依 165 章。得

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m} \quad \text{及} \quad \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{b^n}.$$

〔例〕 $\sqrt[3]{14}$ 與 $\sqrt{6}$ 何者爲大。

兩邊化爲同次。即

$$\sqrt[3]{14} = \sqrt[2]{14^2} = \sqrt{196}. \quad \text{及} \quad \sqrt{6} = \sqrt[3]{6^3} = \sqrt[3]{216}. \quad \text{故}$$

$$\sqrt{216} \text{ 大於 } \sqrt{196}. \quad \text{即} \quad \sqrt{6} \text{ 大於 } \sqrt[3]{14}.$$

故比較不盡根之大小。不必各求方根。依上法求之即得。

174. 同次兩不盡根之積易求得之。

例如 $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

由是求任意諸不盡根之積。先化諸不盡根爲同次。乃用如下之公式。即得

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \times \dots = \sqrt[n]{(abc\dots)}.$$

例 題

1. 以 $\sqrt[3]{2}$ 乘 $\sqrt{5}$.

$$\text{〔解〕} \quad \sqrt{5} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{5^3 \times 2^2} = \sqrt[6]{(5^3 \times 2^2)} = \sqrt[6]{500}.$$

2. $3\sqrt{5}$ 以 $2\sqrt[3]{2}$ 乘之。

$$\text{〔解〕} \quad 3\sqrt{5} \times 2\sqrt[3]{2} = 3 \times 2 \times \sqrt[6]{5^3 \times 2^2} = 6\sqrt[6]{500}.$$

3. $\sqrt{2}$ 以 $\sqrt[3]{2}$ 乘之。

$$\text{〔解〕} \quad \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3 \times 2^2} = \sqrt[6]{(2^3 \times 2^2)} = \sqrt[6]{32}.$$

$$\text{又別法} \quad \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}.$$

4. 以 $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ 乘 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \text{〔解〕} \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) &= \sqrt{3} \times \sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{5} + \sqrt{2} \times \sqrt{5} \\ &= 3 + \sqrt{6} + \sqrt{15} + \sqrt{10}. \end{aligned}$$

5. 以 $\sqrt{8}$ 除 $\sqrt[3]{4}$.

$$\text{〔解〕} \quad \sqrt[3]{4} \div \sqrt{8} = \sqrt[6]{4^2} \div \sqrt[6]{8^3} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{8^3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{32}}.$$

175. 不盡根 計算不盡根之略近數。原屬於算術之問題。

非代數學之問題。然在代數式。能變不盡根之形而歸於簡易。令

其便於實算。如分數之分母有不盡根。則依 169 章。乘其有理補因子而變爲有理式是也。

例如
$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2}{5} \sqrt{5}.$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}-1} = \frac{3(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{3}{4}(\sqrt{5}+1).$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}} = \frac{1}{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{(3-1)(5-1)} = \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1).$$

176. 兩同類二次不盡根 其積及商皆爲有理。

例如 $a\sqrt{b} \times c\sqrt{b} = acb$ 及 $a\sqrt{b} \div c\sqrt{b} = \frac{a}{c}$ 。兩式自易明瞭。

反之。若兩不盡根 \sqrt{a} 及 \sqrt{b} 之積爲有理。則爲同類。

何則。命此積爲有理數 x 。則 $x = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 。故

$x\sqrt{b} = (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times \sqrt{b} = b\sqrt{a}$ 。即 $x\sqrt{b}$ 與 $b\sqrt{a}$ 之兩不盡根爲同類。

又 $\sqrt{a} \div \sqrt{b}$ 爲有理。則其爲同類。可以同法推知。

177. 定理 下之定理。最爲重要。

若 $a + \sqrt{b} = x + \sqrt{y}$ 。而 a 及 x 爲有理數。 \sqrt{b} 及 \sqrt{y} 爲無理數。則 $a = x$, $b = y$ 。

何則。從 $a + \sqrt{b} = x + \sqrt{y}$, $a - x + \sqrt{b} = \sqrt{y}$ 。兩邊平方之。則 $(a-x)^2 + 2(a-x)\sqrt{b} + b = y$ 。

$$\therefore 2(a-x)\sqrt{b} = y - b - (a-x)^2.$$

此方程式。若不盡根等於有理數量。則不合理。故不盡根之係數。不能不爲 0。即 $a-x=0$ 。 $\therefore a=x$ 。

由是從原式 $\sqrt{b} = \sqrt{y}$ 。 $\therefore b=y$ 。

〔例〕證照不盡根。若不爲同類。則 $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \neq 0$ 。

何則。若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$ 。則 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = -\sqrt{c}$ 。兩邊平方之。則 $a + b + 2\sqrt{ab} = c$ 。由是 \sqrt{ab} 不能不爲有理數。若此數爲有理。則由 176 章。 \sqrt{a} 與 \sqrt{b} 爲同類。是不合於題意。故如題云云。

178. 相屬不盡根 $a + \sqrt{b}$ 及 $a - \sqrt{b}$ 兩式。互爲相屬二次不盡根。即 $a + \sqrt{b}$ 爲 $a - \sqrt{b}$ 之相屬。又 $a - \sqrt{b}$ 爲 $a + \sqrt{b}$ 之相屬。

兩相屬不盡根之和及積。恆爲有理。

$$\text{即 } (a+\sqrt{b})+(a-\sqrt{b})=2a, \quad (a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b.$$

反之。若 $a+\sqrt{b}$ 及 $c+\sqrt{d}$ 兩式之和及積爲有理。則其兩式互相屬。

何則。 $(a+\sqrt{b})+(c+\sqrt{d})=a+c+\sqrt{b}+\sqrt{d}$ 。此式爲有理。則由 177 章 $\sqrt{b}+\sqrt{d}$ 不能不爲 0。 $\therefore \sqrt{b}+\sqrt{d}=0$ 。即 $\sqrt{d}=-\sqrt{b}$ 。

又 $(a+\sqrt{b})(c+\sqrt{d})$ 。即 $(a+\sqrt{b})(c-\sqrt{b})=ac-b+(c-a)\sqrt{b}$ 。此式爲有理。則 $c-a=0$ 。故 $c=a$ 。

由是 $c+\sqrt{d}$ 。即 $a-\sqrt{b}$ 與 $a+\sqrt{b}$ 爲相屬。

179. 代數式 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots\dots+k$ 。其 $a, b, c, \dots\dots k$ 皆爲有理。若以 $a+\sqrt{\beta}$ 代 x 。而此式爲 0。則以其相屬之 $a-\sqrt{\beta}$ 代 x 。亦必爲 0。 $x=a+\sqrt{\beta}$ 。則依題意。

$a(a+\sqrt{\beta})^n+b(a+\sqrt{\beta})^{n-1}+c(a+\sqrt{\beta})^{n-2}+\dots\dots+k=0$ 。而 $a+\sqrt{\beta}$ 之方乘內 $\sqrt{\beta}$ 之偶數方乘爲有理。而其和爲 P 。又奇數方乘爲 $\sqrt{\beta}$ 之若干倍。而其和爲 $Q\sqrt{\beta}$ 。故原方程式爲 $P+Q\sqrt{\beta}=0$ 。故由 177 章 $P=0, Q=0$ 。

又 $x=a-\sqrt{\beta}$ 。則 $-\sqrt{\beta}$ 之偶數方乘。各爲正號之有理數。其和與前之 P 同。而 $-\sqrt{\beta}$ 之奇數方乘。各爲負 $\sqrt{\beta}$ 之若干倍。其和即 $-Q\sqrt{\beta}$ 。故得 $P-Q\sqrt{\beta}$ 。而以 $P=Q=0$ 。故 $P-Q\sqrt{\beta}=0$ 。

由是依 88 章之定理。知原式有 $x-a-\sqrt{\beta}$ 之因子。亦有 $x-a+\sqrt{\beta}$ 之因子。

故凡有理整代數式。能以相屬平方兩不盡根之一根除盡。則其餘一根亦能除盡。

[別證] $\{x-(a+\sqrt{\beta})\}\{x-(a-\sqrt{\beta})\}$ 爲 x 之二次式。故以此除 $ax^n+bx^{n-1}+\dots\dots+k$ 。則得商 Q 。而餘式爲普通 $Rx+R'$ 之一次式。

$$\therefore ax^n+bx^{n-1}+\dots\dots+k=Q\{x-(a+\sqrt{\beta})\}\{x-(a-\sqrt{\beta})\}+Rx+R'.$$

今 $x=a+\sqrt{\beta}$ 。則依題此左邊爲 0。故

$$0=Q\{0\}\{a+\sqrt{\beta}-(a-\sqrt{\beta})\}+R(a+\sqrt{\beta})+R'.$$

$$\text{即 } -R\sqrt{\beta}=Ra+R'. \quad \text{由 177 章則 } R=0. \quad \therefore R'=0.$$

$$\text{由是 } ax^n+bx^{n-1}+\dots\dots+k=Q\{x-(a+\sqrt{\beta})\}\{x-(a-\sqrt{\beta})\}.$$

即 $x=a-\sqrt{\beta}$ 亦得原式爲 0。

180. 二項式之平方根 有理數量與二次不盡根所成二項式之平方根。有時可化爲簡式。

例如求 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ 。但 \sqrt{b} 爲不盡根。

設 $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ 。兩邊平方之。則 $a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$ 。

今 \sqrt{b} 爲不盡根。故由 177 章。

$$x + y = a, \text{ 及 } 2\sqrt{xy} = \sqrt{b}. \text{ 即 } xy = \frac{1}{4}b.$$

由是 x 及 y 爲方程式 $x^2 - ax + \frac{1}{4}b = 0$ 之兩根 (見 128 章)。而此兩根爲 $\frac{1}{2}\{a + \sqrt{(a^2 - b)}\}$, 及 $\frac{1}{2}\{a - \sqrt{(a^2 - b)}\}$ 。

$$\text{故 } \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}}.$$

若 $\sqrt{(a^2 - b)}$ 非有理數。則前方程式之右邊。不能簡於左邊。亦不適於計算。故依此方法。必先審得 $a^2 - b$ 爲平方數。而後可施運算。又 x 及 y 若爲有理數。則其根可由視察而得。

[第一例] 求 $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$ 。

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}. \text{ 兩邊平方之。則 } 6 + 2\sqrt{5} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

$$\therefore x + y = 6, \text{ 及 } xy = 5. \text{ 由視察而得 } x = 5, y = 1.$$

$$\text{故 } \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1.$$

[第二例] 求 $\sqrt{28 - 5\sqrt{12}}$ 。

$$\sqrt{28 - 5\sqrt{12}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}. \text{ 則 } 28 - 5\sqrt{12} = x + y - 2\sqrt{xy}.$$

$$\therefore x + y = 28, \text{ 及 } 2\sqrt{xy} = 5\sqrt{12}. \text{ 即 } xy = 75.$$

$$\text{由視察而得 } x = 25, y = 3.$$

$$\therefore \sqrt{28 - 5\sqrt{12}} = \sqrt{25} - \sqrt{3} = 5 - \sqrt{3}.$$

[第三例] 求 $\sqrt{18 + 12\sqrt{3}}$ 。

在此例則 $\sqrt{(a^2 - b)}$ 。即 $\sqrt{(18^2 - 12^2 \times 3)}$ 。即 $\sqrt{-108}$ 爲無理數。故不能開平方。但此式雖不能以 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 之形顯之。而可以 $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}$ 之形顯之。何則。

$$\begin{aligned} \sqrt{18 + 12\sqrt{3}} &= \sqrt{\{\sqrt{3}(6\sqrt{3} + 12)\}} = \sqrt[4]{3}\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}(3 + \sqrt{3}) \\ &= 3\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3}\sqrt{3} = \sqrt[4]{243} + \sqrt[4]{27}. \end{aligned}$$

〔第四例〕 求 $\sqrt{(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})}$ 。

$\sqrt{(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ ，平方之。則

$10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15} = x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$ 。

由是 $x+y+z=10$, $xy=6$, $yz=10$, $zx=15$ 。從後之三方程式察得 $x=3$, $y=2$, $z=5$ 。代入第一方程式。適合 $3+2+5=10$ 。故

$\sqrt{(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$ 。

〔第五例〕 $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})} = x + \sqrt{y}$ 。則 $\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})} = x - \sqrt{y}$ 。試證之。

$a + \sqrt{b} = (x + \sqrt{y})^3 = x^3 + 3xy + (3x^2 + y)\sqrt{y}$ 。

由是 $x^3 + 3xy = a$ 及 $(3x^2 + y)\sqrt{y} = \sqrt{b}$ 。由減法得

$a - \sqrt{b} = x^3 + 3xy - (3x^2 + y)\sqrt{y} = (x - \sqrt{y})^3$ 。

$\therefore \sqrt[3]{(a - \sqrt{b})} = x - \sqrt{y}$ 。

例題十八

化以下各式爲簡式。

1. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ 。

答 $2 - \sqrt{3}$ 。

〔解〕 原式 = $\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{3-1} = 2 - \sqrt{3}$ 。

2. $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ 。

答 $5 - \sqrt{15}$ 。

〔解〕 原式 = $\frac{(5-3)\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = (\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{5} = 5 - \sqrt{15}$ 。

3. $\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ 。

答 $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ 。

〔解〕 原式 = $\frac{(\sqrt{8}-\sqrt{3}) + (\sqrt{8}+\sqrt{3})}{8-3} = \frac{2\sqrt{8}}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ 。

4. $(2-\sqrt{3})^{-3} + (2+\sqrt{3})^{-3}$ 。

答 52。

〔解〕 $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^3} + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^3} = \frac{(2+\sqrt{3})^3 + (2-\sqrt{3})^3}{(4-3)^3} = 2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2 \cdot 3 = 52$ 。

5. $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 。

〔解〕 $\frac{(6-3)\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} - \frac{(6-2)\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{(3-2)\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 。

$$= (\sqrt{6}-\sqrt{3})\sqrt{2} - (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{3} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{6}$$

$$= (2\sqrt{3}-\sqrt{6}) - (3\sqrt{2}-\sqrt{6}) + (3\sqrt{2}-2\sqrt{3}) = 0.$$

6. $\frac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$. 答 $14\frac{1}{2}$.

[解] $\frac{\{(7-2\sqrt{5})(31+13\sqrt{5})\}(5+\sqrt{7})}{\{(6-2\sqrt{7})(11+4\sqrt{7})\}(3+\sqrt{5})} = \frac{29(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{7})}{2(5+\sqrt{7})(3+\sqrt{5})} = \frac{29}{2}$.

7. $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{5}}}}$. 答 $\frac{2\sqrt{3+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}}{12}$.

[解] 原式 = $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{5}}}}{(\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{5}}})(\sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{5}}})} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{5}}}}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2-5}$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{5}}}}{2\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{5}}})\sqrt{6}}{12}.$$

8. $\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}}$. 與前例同法. 答 $\frac{\sqrt{30+2\sqrt{3-3\sqrt{2}}}}{12}$.

9. $\frac{1}{\sqrt{10+\sqrt{14+\sqrt{15+\sqrt{21}}}}}$. 答 $\frac{1}{2}(\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{14}-\sqrt{15})$.

[解] $\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{5+\sqrt{7}}+\sqrt{3(\sqrt{5+\sqrt{7}})})}} = \frac{1}{(\sqrt{5+\sqrt{7}})(\sqrt{2+\sqrt{3}})}$

$$= \frac{(\sqrt{7-\sqrt{5}})(\sqrt{3-\sqrt{2}})}{(7-5)(3-2)} = \frac{1}{2}(\sqrt{7-\sqrt{5}})(\sqrt{3-\sqrt{2}}).$$

10. $\frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{21-\sqrt{10-\sqrt{35}}}}}$. 與前例同法.

$$\frac{1}{10}(\sqrt{6+\sqrt{10-\sqrt{21-\sqrt{35}}}}).$$

11. $\frac{1}{\sqrt[3]{2-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2+1}}$. 答 $\frac{4\sqrt[3]{4+2\sqrt[3]{2+4}}}{3}$.

[解] $\frac{2-1}{\sqrt[3]{2-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2+1}} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1 + \frac{1}{3}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$.

12. $\frac{4}{\sqrt[3]{9-1}} + \frac{5}{\sqrt[3]{9+1}}$. 答 $3\sqrt[3]{3+1}$.

[解] 如前例各分子爲 $\frac{1}{2}(9-1)$, 及 $\frac{1}{2}(9+1)$.

13. $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{4}}}$. 答 $\sqrt[3]{2-1}$.

[解] $\frac{1 \times (1-\sqrt[3]{2})}{(1+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{2^2}})(1-\sqrt[3]{2})} = \frac{1-\sqrt[3]{2}}{1-2} = \sqrt[3]{2-1}$.

$$14. \frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{18}}}} \quad \text{答} \quad \frac{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{4}}{4}$$

$$[\text{解}] \frac{1}{\sqrt[3]{2(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3+1})}} \times \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{2(3-1)}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{4}}{4}$$

$$15. \sqrt{(101-28\sqrt{13})} \quad \text{答} \quad 7-2\sqrt{13}$$

$$[\text{解}] \sqrt{(101-28\sqrt{13})} = \sqrt{x-y}. \text{ 則 } 101-28\sqrt{13} = x+y-2\sqrt{xy}.$$

$$\therefore x+y=101, \quad xy=14^2 \times 13.$$

$$\therefore x=49, \quad y=52. \text{ 由是 } \sqrt{(101-28\sqrt{13})} = \sqrt{49-52}.$$

$$16. \sqrt{(28-5\sqrt{12})} \quad \text{答} \quad 5-\sqrt{3}$$

$$[\text{解}] \sqrt{(28-10\sqrt{3})} = \sqrt{(5^2-2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2)} = 5-\sqrt{3}.$$

$$17. \sqrt{\{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})\}} \quad \text{答} \quad 1+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

$$[\text{解}] \text{原式} = \sqrt{\{11+2(1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{35})\}} \\ = \sqrt{(13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35})} = \sqrt{x+y+z}. \text{ 則}$$

$$13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35} = x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}.$$

$$\therefore x+y+z=13, \quad xy=5, \quad yz=7, \quad zx=35.$$

$$\text{由是 } x=5, \quad y=1, \quad z=7. \quad \therefore \text{原式} = \sqrt{5+1+7}.$$

$$18. \sqrt{\{6-4\sqrt{3}+\sqrt{(16-8\sqrt{3})}\}} \quad \text{答} \quad \sqrt{3}-1$$

$$[\text{解}] \text{原式} = \sqrt{\{6-4\sqrt{3}+2\sqrt{(4-2\sqrt{3})}\}} \\ = \sqrt{\{6-4\sqrt{3}+2(\sqrt{3}-1)\}} = \sqrt{(4-2\sqrt{3})} = \sqrt{3}-1.$$

$$19. \sqrt[4]{(97-56\sqrt{3})} \quad \text{答} \quad 2-\sqrt{3}$$

$$[\text{解}] \text{原式} = \sqrt[4]{(7^2-2 \cdot 7 \cdot 4\sqrt{3}+4^2 \cdot 3)} = \sqrt[4]{(7-4\sqrt{3})^2} \\ = \sqrt{(7-4\sqrt{3})} = \sqrt{(4-2 \cdot 2\sqrt{3}+3)} = 2-\sqrt{3}.$$

$$20. \frac{\sqrt{(8+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{(3-2\sqrt{2})}} \quad \text{答} \quad 1$$

$$[\text{解}] \text{原式} = \frac{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$21. (\sqrt{2}+\sqrt{45}) \div \{\sqrt{2}+\sqrt{(7-2\sqrt{10})}\} \quad \text{答} \quad \frac{1}{5}(15+\sqrt{10})$$

$$[\text{解}] \text{原式} = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{(5-2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}+2)}} = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}} \\ = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}.$$

22. $\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}} - \frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}}$. 答 $\sqrt{2+\sqrt{6}} - \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

[解] 原式 = $\frac{(\sqrt{3+\sqrt{2}})\{\sqrt{2-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}\} - (\sqrt{3-\sqrt{2}})\{\sqrt{2+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}\}}{2 - (2+\sqrt{3})}$
 $= \frac{4 - 2\sqrt{3}\sqrt{(2+\sqrt{3})}}{-\sqrt{3}} = -\frac{4}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$
 $= -\frac{4}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(4+2\sqrt{3})\right\}} = -\frac{4}{\sqrt{3}} + 2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)\right\}$
 $= \sqrt{2}(\sqrt{3}+1) - \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

23. $\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{6})} - \sqrt{(5-2\sqrt{6})}}{\sqrt{(5+2\sqrt{6})} + \sqrt{(5-2\sqrt{6})}}$. 答 $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

[解] 原式 = $\frac{(\sqrt{3+\sqrt{2}}) - (\sqrt{3-\sqrt{2}})}{(\sqrt{3+\sqrt{2}}) + (\sqrt{3-\sqrt{2}})} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

24. $\sqrt{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$. 答 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

[解] $\sqrt{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

25. $\sqrt{11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$. 同上法. 答 $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

26. $\sqrt{17+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}-4\sqrt{5}-2\sqrt{10}+2\sqrt{30}}$.

答 $2+\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{6}$.

[解] $\sqrt{17+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}-4\sqrt{5}-2\sqrt{10}+2\sqrt{30}}$
 $= \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} - \sqrt{u}$.

則 $17+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}-4\sqrt{5}-2\sqrt{10}+2\sqrt{30}$

$= x+y+z+u+2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}-2\sqrt{xu}-2\sqrt{yu}+2\sqrt{zu}$.

∴ $x+y+z+u=17$, $xy=8$, $yz=12$, $zx=24$, $xu=20$, $yu=10$
 $zu=30$. 由是 $x=4$, $y=2$, $z=6$, $u=5$.

27. 求 $\frac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}} - \frac{1}{\sqrt{(8-\sqrt{60})}} - \frac{2}{\sqrt{(10+\sqrt{84})}} = 0$ 之證.

[證] 左邊 = $\frac{1}{\sqrt{(12-2\sqrt{35})}} - \frac{1}{\sqrt{(8-2\sqrt{15})}} - \frac{2}{\sqrt{(10+2\sqrt{21})}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{5}}} - \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{3}}} - \frac{2}{\sqrt{7+\sqrt{3}}}$
 $= \frac{1}{2}(\sqrt{7+\sqrt{5}}) - \frac{1}{2}(\sqrt{5+\sqrt{3}}) - \frac{1}{2}(\sqrt{7-\sqrt{3}}) = 0$.

$$99. \text{ 求 } \frac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}} - \frac{3}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}} - \frac{4}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 左邊} &= \frac{6-5}{\sqrt{6-\sqrt{5}}} - \frac{5-2}{\sqrt{5-\sqrt{2}}} - \frac{6-2}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{6+\sqrt{5}} - (\sqrt{5+\sqrt{2}}) - (\sqrt{6-\sqrt{2}}) = 0. \end{aligned}$$

虛數及複虛數

181. 虛數 在83章求二次式因子。曾示虛數之式。即 $\sqrt{-a}$ 。但 a 必為正數。惟此虛數式之用法。亦必依代數學之根原法則。

無論正數量與負數量。其平方必皆為正。前已說明。然 $\sqrt{-a}$ 之平方為 $(\sqrt{-a})^2 = \sqrt{(-a)^2} = -a$ 。故 $\sqrt{-a}$ 不能以正數或負數稱之。即不能示其性質若何。故稱之為虛數 (Imaginary)。

又 $a+b\sqrt{-1}$ 為複虛數 (Complex Quantity)。但 a 及 b 為實數。又 $a+\sqrt{-b}$ 亦為複虛數。

182. 新疑問 此等虛數。在代數學上可另立一新記號與否。亦一新疑問也。然代數學之根原法則。為代數學上之憲法。國有憲法。不能因有外國人之新來。而為之更立新制。故此虛數量。可不必另作新記號。而自能服從於原定之法則。

凡虛數量既不必另立新記號。而能服從於根原法則。故吾人對於此疑問。無須再計。仍用現在之記號。以 $\sqrt{-a}$ 顯虛數。而示明其在原則上。均能合理如下。

183. 虛數之單位 用 $\sqrt{-1}$ 。

以 -1 乘任意之數量。則其方向正相反對。即如向東4里之距離為 $+4$ 。以 -1 乘之。得 -4 。則變為向西4里之距離。此易知者也。

而 $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$ 。故任意之數量。以 $\sqrt{-1}$ 乘二次。其結果與以 -1 乘一次同。而與原數之方向正相反對。故以 $\sqrt{-1}$ 乘一次者。則變方向之半分。即九十度之變化是也。

例如向東4里為 $+4$ 。則向北4里為 $4\sqrt{-1}$ 。向西4里為 -4 。又向南4里為 $-4\sqrt{-1}$ 。又以 $\sqrt{-1}$ 乘之。則仍為東方4里。故順次以

$\sqrt{-1}$ 乘。即如時計之針，依反向而動。設針初在 3 時。第一次反動在 12 時。第二次在 9 時。第三次在 6 時。第四次則復在原處 3 時。

凡實數量祇能在一直接線上變其方向。即 +4 里為向東，-4 里為向西。而不能有別方向。惟虛數則以 $4\sqrt{-1}$ 及 $-4\sqrt{-1}$ 表向北與向南。故虛數之直線。與實數之直線交成直角而示其方向者也。

由是凡在一直接線之垂綫上所度之量。可用 $\sqrt{-1}$ 為其運算之記號。而此記號之意義。亦見完足矣。

記號 $\sqrt{-1}$ 。通例以 i 顯之。依前述轉成直角（九十度）之說。即 $-i$ 為 i 正相反對之方向。

184. 虛數之運算 時計之針所成直角之單位即 $\sqrt{-1}$ 。以 a 乘之。則其式為 ia 。即 a 倍其單位為其長數。又使 a 為時計之回轉於直角之數。則其式亦得 ai 。與前式同。故 $ai=ia$ 。即得交換法則。

又 bi 乘 ai 。依 28 章乘法之定義。即以 ai 代 bi 所有之單位。即將 b 個轉得之直角代以 a 。而各又轉一直角也。合兩直角。即成負號所表之方向。

由是 $ai \times bi = -ab = abii$ 。

依上法。記號 i 若在積中。則與他之記號同。可依交換法則得之。 $(ai) \times (ai) = aaii = a^2(-1) = -a^2$ 。而 $\sqrt{-a^2} = ai$ 。故虛數式祇須用一個。即 $\sqrt{-1}$ 。

185. 據上之定義 $\sqrt{-1}$ 即 i 為時計之針。依逆方向通過直角之運算。亦為在一直接線上可度之量。故就代數學之根原法則。所論虛數及複虛數。均可證明之。

前章所示甚為簡約。其詳細之處。則見於 De Morgan 氏之 *Duble Algebra*。又 Clifford 氏之 *Common Sense of the Exact Sciences* 第四編 12 章及 13 章。又 Hobson 氏之 *大三角法* 第十三編。皆為斯密氏所未詳。

186. 定理 $a+bi=0$ 。若 a 及 b 為實數。則 a 及 b 當俱為 0。何則。 $a=-bi$ 。是實數與虛數等。為不合於理。故必 $a=0$ 。 $b=0$ 。

[註] 此後遇 $a+bi$ 之形。則當知 a 及 b 恆為實數。

187. 定理 $a+bi=c+di$. 則 $a=c$, $b=d$.

何則 $a-c+(b-d)i=0$. 依 186 章. 必 $a-c=0$. 及 $b-d=0$ 也.
故兩複虛數相等. 則各實數及各虛數俱相等.

188. 相屬複虛數 $a+bi$ 及 $a-bi$ 互為相屬. 即與 178 章同.

$$(a+bi) + (a-bi) = 2a, \quad (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

由是兩相屬複虛數之和及積. 皆為實數.

反之兩複虛數. 其和及積皆為實數. 則為互相屬.

何則 $(a+bi) + (c+di) = a+c + (b+d)i$ 因為實數. 故 $b+d=0$.

即 $d=-b$.

又 $(a+bi)(c+di)$. 即 $(a+bi)(c-bi) = ac + b^2 - (a-c)bi$ 因為實數.

故 $a-c=0$. 即 $c=a$. 由是 $c+di$. 即 $a-bi$.

189. 定義 a^2+b^2 平方根之正數值. 即 $+\sqrt{a^2+b^2}$ 謂之 $a+bi$ 之模數 (Modulus). 恆以 $\text{mod}(a+bi)$ 記之. 故 $\text{mod}(a+bi) = +\sqrt{a^2+b^2}$.

兩相屬複虛數. 必有同一之模數. 又依 188 章.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$$

但 $\text{mod}(a+bi) = +\sqrt{a^2+b^2}$.

故兩相屬複虛數之積. 恆為 a^2+b^2 平方根之正數之積.

即 $\text{mod}(a+bi) = \text{mod}(a-bi) = +\sqrt{a^2+b^2}$.

因 a 及 b 皆為實數. 故 a^2+b^2 若為 0. 則 a 及 b 必皆為 0.

是故複虛數若消去. 則其模數亦必消去.

又在 $\text{mod}(a+bi) = +\sqrt{a^2+b^2}$ 式. 其 $b=0$. 則 $\text{mod}(a) = +\sqrt{a^2} = +a$.
故實數之模數即本數.

190. 積之模數 $a+bi$ 及 $c+di$ 之積. 為

$$ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

由是積之模數. 即

$$\begin{aligned} \text{mod}\{(a+bi)(c+di)\} &= \sqrt{\{(ac-bd)^2 + (bc+ad)^2\}} = \sqrt{\{(a^2+b^2)(c^2+d^2)\}} \\ &= \sqrt{\{(a^2+b^2) \times (c^2+d^2)\}} = \text{mod}(a+bi) \times \text{mod}(c+di). \end{aligned}$$

故兩複虛數之積之模數. 等於其各模數之積. 據此定理. 可擴充之於諸複虛數.

定理 若干數之複虛數. 其積之模數. 等於其各模數之積.

$$\begin{aligned} \text{mod} \{(a+bi)(c+di)(e+fi)\} &= \text{mod} \{(a+bi)(c+di)\} \text{mod} (e+fi) \\ &= \text{mod} (a+bi) \text{mod} (c+di) \text{mod} (e+fi). \end{aligned}$$

191. 商之模數 兩複虛數之積之模數。等於各模數之積。故反之兩式之商之模數。等於其各模數之商。

別證之如下。

$$(a+bi) \div (c+di) = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$\begin{aligned} \text{由是 } \text{mod} \left\{ \frac{a+bi}{c+di} \right\} &= \frac{\sqrt{\{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2\}}}{c^2+d^2} \\ &= \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(c^2+d^2)}} = \frac{\text{mod} (a+bi)}{\text{mod} (c+di)}. \end{aligned}$$

192. 實因子 凡能消去任意之積為 0。必其積之內有一因子為 0。今由 190 章之定理推之。雖其一因子。或若干因子為複虛數。而此題亦能合理。

何則。若干因子之積之模數。等於其各模數之積。而模數皆為實數。故非其因子之模數為 0。則積之模數不能為 0。若若干因子之積為 0。則其模數亦必為 0 (見 189 章)。即其因子亦必消失而為 0。反之。若諸因子之一因子為 0。則其模數為 0。故積之模數為 0。由是其積亦遂消失而為 0。

193. 定理 於 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+k$ 式。設 a, b, c, \dots, k 等。皆為實數。用 $a+\beta i$ 代 x 能令此式為 0。則用 $a-\beta i$ 代 x 。亦能令此式為 0。與 179 章同。

$x=a+\beta i$ 代入原式。所生各實項之和為 P 。各虛項之和為 Qi 。則原代數式為 $P+Qi$ 。

P 及 Q 皆為實數。故僅含 i 之偶數方乘。由是 P 及 Q 。雖變 i 之符號。而其值不變。故用 $a-\beta i$ 代 x 。其結果為 $P+Q(-i)$ 。即 $P-Qi$ 。

若原式用 $a+\beta i$ 代 x 。而其式為 0。則 $P+Qi=0$ 。

P 及 Q 皆為實數。故 $P=0$ 。及 $Q=0$ 。故 $P+Qi=0$ 。由是 $P-Qi=0$ 。即以 $a-\beta i$ 代原式中之 x 。其式亦為 0。

由 88 章若 $x-a-\beta i$ 為已知代數式之一因子。則 $x-a+\beta i$ 亦為其一因子。

故在 x 之有理整代數式。其係數若為實數。則於兩相屬複虛數中。能以一複虛數整除。其餘一複虛數。亦必能整除之。

第拾伍編

平方根, 立方根

194. 求已知代數式之平方 已示於前。本編則用反對之運算。示以求任意代數式之平方。等於已知代數式之方法。若已知之代數式。能有完全平方式之形。則其平方根。易由視察得之。

195. 由恆同式 $a^2 \pm 2ab + b^2 \equiv (a \pm b)^2$ 。而視察三項式之形狀。為兩數平方之和加(或減)兩數之積 2 倍所成。即知以其兩數之和(或差)為平方根也。

由是求三項式之平方根。先依某文字整列為遞降方乘。若能為完平方式。則其全式之平方根。即等於兩外項平方根之和(或中項為負。則等於其差)。

例如 $4a^3 - 12a^2b^3 + 9b^6$ 之平方根。取其兩外項之平方根。± $2a^2$ 及 ± $3b^3$ 。因中項為負。故得其差 ± $(2a^2 - 3b^3)$ 為所求之平方根。

[註] 代數式所含特別一文字。若僅有相異之兩方乘者。皆可依其文字之遞降方乘整列。而變為三項式。

例如 $a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$ 依 a 之遞降方乘整列。則得三項式為 $a^2 + 2a(b+c) + (b^2 + 2bc + c^2)$ 。

故據本章之理推之。可取其兩外項之平方根。± a 及 ± $(b+c)$ 即 ± $(a+b+c)$ 為原式之平方根。

[第一例] 求 $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$ 之平方根。

依 a 之遞降方乘整列。則原式 = $a^2 - 2a(b+c) + (b+c)^2$ 。

即 $\{a - (b+c)\}^2$ 。 ∴ 所求之平方根為 $a - b - c$ 。

[第二例] 求 $4x^4 + 9y^4 + 16z^4 + 12x^2y^2 - 16x^2z^2 - 24y^2z^2$ 之平方根。

依 x 之遞降方乘整列。則 $4x^4 + 4x^2(3y^2 - 4z^2) + 9y^4 - 24y^2z^2 + 16z^4$ 。

即 $4x^4 + 4x^2(3y^2 - 4z^2) + (3y^2 - 4z^2)^2$ 。

即 $\{2x^2 + (3y^2 - 4z^2)\}^2$ 。

由是所求之平方根爲 $2x^2 + 3y^2 - 4z^2$ 。

〔第三例〕 求 $a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx^3 + c^2x^4$ 之平方根。

依 a 之遞降方乘整列。則

$$a^2 + 2a(bx + cx^2) + b^2x^2 + 2bcx^3 + c^2x^4。$$

即 $a^2 + 2a(bx + cx^2) + (bx + cx^2)^2$ 。

即 $a + bx + cx^2$ 爲平方根。

〔第四例〕 求 $x^6 - 2x^5 + 3x^4 + 2x^3(y-1) + x^2(1-2y) + 2xy + y^2$ 之平方根。

此代數式。爲僅有 y^2 及 y 相異二方乘。故依 y 之遞降方乘整列。

則 $y^2 + 2y(x^3 - x^2 + x) + x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2$ 。

即 $y^2 + 2y(x^3 - x^2 + x) + (x^3 - x^2 + x)^2$ 。 即 $(y + x^3 - x^2 + x)^2$ 。

由是所求之平方根爲 $y + x^3 - x^2 + x$ 。

197. 求任意代數式之平方根。

今求 $(A+B)^2$ 之平方根。而 A 爲其平方根之若干項。 B 爲其餘之若干項。而 A 及 B 。皆依特別一文字之遞降 (或遞昇) 整列。其 A 項內各文字。皆比 B 項內各文字之次數高 (或低)。

若已知 $(A+B)^2$ 平方根之若干項 A 。而求其餘之若干項 B 。則其法如下。

先從 $(A+B)^2$ 減 A^2 。則其餘式爲 $(2A+B)B$ 。

前所設之特別文字。在此餘式內之最高次 (或最低次) 之項。必等於 A 之第一項與 B 之第一項之積之 2 倍。

由是欲求根之次項。其法將已求得之根之平方。從原式中減去之。再以根之第一項之 2 倍。除其餘式之最高次 (或最低次) 之項。所得商即根之次項。

根之初項爲原式中初項之平方根。故必先求其根之初項。乃次第依上法。求其根之全項。

例如求 $x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4$ 之平方根。

其法詳列於下。

$$\begin{aligned}
 & x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4(x^3 - 2x^2 + x - 2) \\
 & \quad (x^3)^2 = x^6 \\
 & \quad (x^3 - 2x^2)^2 = x^6 - 4x^5 + 4x^4 \\
 & \quad (x^3 - 2x^2 + x)^2 = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 4x^3 + x^2 \\
 & \quad (x^3 - 2x^2 + x - 2)^2 = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4.
 \end{aligned}$$

先求已知代數式(即依 x 文字之遞降方乘整列者)之第一項 x^6 之平方根得 x^3 。爲所求之平方根之第一項。

次從已知代數式減 x^3 之平方 x^6 。其餘式之第一項爲 $-4x^5$ 。以 $2x^3$ 除之得 $-2x^2$ 。爲所求之平方根之第二項。

次從已知代數式減 $x^3 - 2x^2$ 之平方 $x^6 - 4x^5 + 4x^4$ 。其餘式之第一項爲 $2x^4$ 。以 $2x^3$ 除之得 x 。爲所求之平方根之第三項。

又從原式減 $x^3 - 2x^2 + x$ 之平方。其餘式之第一項爲 $-4x^3$ 。以 $2x^3$ 除之得 -2 。爲所求之平方根之末項。

而減 $x^3 - 2x^2 + x - 2$ 之平方。則適盡無餘。

由是 $x^3 - 2x^2 + x - 2$ 爲所求之平方根。

以 x^3 , $x^3 - 2x^2$ 等之平方。置於原式之下。同行相對。則減後餘式之初項。易由視察而得。

198. 求代數式之平方根 用 91 章之定理。亦可求得。

如前章之例 $x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4$ 之平方根。設爲 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 。則

$$\begin{aligned}
 x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4 & \equiv (ax^3 + bx^2 + cx + d)^2 \\
 & \equiv a^2x^6 + 2abx^5 + (2ac + b^2)x^4 + 2(ad + bc)x^3 + (2bd + c^2)x^2 + 2cdx + d^2.
 \end{aligned}$$

比較 x 之同方乘之係數。則 $a^2 = 1$, $2ab = -4$, $2ac + b^2 = 6$, $2(ad + bc) = -8$, $2bd + c^2 = 9$, $2cd = -4$, $d^2 = 4$ 。

從 $a^2 = 1$ 。則 $a = 1$ 。從 $2ab = -4$ 。則 $b = -2$ 。從 $2ac + b^2 = 6$ 。則 $c = 1$ 。從 $2(ad + bc) = -8$ 。則 $d = -2$ 。

而末後之 $2bd + c^2 = 9$, $2cd = -4$, $d^2 = 4$ 。對於所得 a, b, c, d 之各值。皆能合理。

故以此各值代入 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 。則得 $x^3 - 2x^2 + x - 2$ 爲所求之平方根。

199. 平方根定義之擴張 代數式之平方根。非完全平方。則可以擴張其定義。即非完全平方之代數式。亦可依 197 或 198 章之法。得若干項之平方根。其根之平方式。與原代數有若干項相合。

例如 x^2+2x 之平方根為 $x+1$ 。何則。

$(x+1)^2=x^2+2x+1$ 。則可與前式合。至含 x 之項。

又 $1+x$ 之平方根。為 $1+\frac{1}{2}x$ 。而 $(1+\frac{1}{2}x)^2=1+x+\frac{1}{4}x^2$ 。與前式合至第二項。即與 $1+x$ 僅差 $\frac{1}{4}x^2$ 。又設 $1+x$ 之平方根。為 $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ 。則與前式僅差 $-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64}$ 。故 x 至無限小。則 $1+\frac{x}{2}$ 可為 $1+x$ 平方根之略近值。而 $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ 為 $1+x$ 之略近平方根。則更為精密。然 x 非甚小。則此值無用。

200. 已求得平方根之若干項 則可由通常之除法。而求得其項之次項。

設有已知代數式。以下所列之代數式為平方根。則

$$(a_1x^n+a_2x^{n-1}+\dots+a_rx^{n-r+1})+(a_{r+1}x^{n-r}+\dots+a_{2r}x^{n-2r+1})+R.$$

其係數 a_1, a_2, \dots, a_{2r} 可將上式乘為平方。自 $2r$ 項起。取其以前各項內 x 方乘之係數。與已知代數式內之相當 x 方乘之係數比較。即可求得之。

上式之平方如下。

$$\begin{aligned} & (a_1x^n+a_2x^{n-1}+\dots+a_rx^{n-r+1})^2 \\ & +2(a_1x^n+\dots+a_rx^{n-r+1})(a_{r+1}x^{n-r}+\dots+a_{2r}x^{n-2r+1}) \\ & +[(a_{r+1}x^{n-r}+\dots+a_{2r}x^{n-2r+1})^2+2R(a_1x^n+\dots+a_rx^{n-r+1}) \\ & \quad +2R(a_{r+1}x^{n-r}+\dots+a_{2r}x^{n-2r+1})+R^2]. \end{aligned}$$

惟已知之代數式內。第一項 x 之方乘為 x^{2n} 。至第 $2r$ 項 x 之方乘為 $x^{2n-2r+1}$ 。故欲決定 a_1, a_2, \dots, a_{2r} 諸係數。可取 x^{2n} 至 $x^{2n-2r+1}$ 各方乘之係數相比較。而不必取及 x^{2n-2r} 以下各方乘之係數。

但 R 內所含 x 之最高方乘為 x^{n-2r} 。故上式 () 內之 x 之最高方乘為 x^{2n-2r} 。

由是知〔〕內之式， x 各方乘之係數與 a_1, a_2, \dots, a_r 均無關係。故從所設之代數式，減平方根自首項至 r 項和之平方，而以首項至 r 項和之 2 倍，除其餘式，即得平方根之次 r 項。

201. 由通常記數所成之數，若其平方根，可求至 n 位，則以下之 $n-1$ 位，可由除法求得之，但此數須為 $2n-1$ 位之完平方，否則最後之數，不免有誤。

N 為有 $2n-1$ 位之完全平方數， p 為後有 $n-1$ 個 0 之 n 個數字之數， q 為其餘 $n-1$ 位之數，則

$$\sqrt{N} = p + q. \quad \therefore (N - p^2) / 2p = q + q^2 / 2p.$$

今 $2p < 2 \cdot 10^{2n-2}$ 及 $q > 10^{n-1}$ 。由是 $q^2 / 2p$ 不能不為分數，故若從 N 減 p^2 以 $2p$ 除其餘數，則其整商為 q 。

次設 \sqrt{N} 為有 m 數字，但 m 大於 $2n-1$ 。

又 p 為後有 $m-n$ 個 0 之 n 個數字之數， q 為後有 $m-2n+1$ 個 0 之 $n-1$ 個數字之數， r 為其餘之有 $m-2n+1$ 數字之數，則 $N = (p+q+r)^2$ 。

$$\therefore (N - p^2) / 2p - q = (q^2 + r^2 + 2qr) / 2p + r.$$

今 $10^m > p < 10^{m-1}$ ， $10^{m-n} > q < 10^{m-n-1}$ ，及 $10^{m-2n+1} > r < 10^{m-2n}$ 。

故 $(q^2 + r^2 + 2qr) / 2p$ 小於 10^{m-2n+1} 。

由是 $(q^2 + r^2 + 2qr) / 2p + r$ 小於 $2 \times 10^{m-2n+1}$ 。但此實不小於 10^{m-2n+1} 。由是 $(N - p^2) / 2p$ 比 q 僅多有 10^{m-2n+1} 。然其差異必小於 $2 \times 10^{m-2n+1}$ 。即商數 $(N - p^2) / 2p$ 中之 $n-1$ 之數字，與 q 中之 $n-1$ 數字，其所差異，不過最後之一數。

立方根

202. 恆同式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 為二項式立方之四項式。依某文字之遞降方乘，或遞昇方乘整列，則其兩外項之立方根，即為原二項式之項。

由是有四項之任意完全立方式，則其立方根，可由觀察得之，即依一文字之方乘整列，而取其兩外項之立方根，為所求之立方根。

例如 $27a^3 - 54a^2b + 36a^2b^2 - 8a^3b^3$ 爲完全立方。則其立方根爲 $3a^2 - 2ab$ 。而依 $3a^2 - 2ab$ 作一立方。即可知已知代數式爲完全立方。

若代數式之特別一文字。有三種相異之方乘。則可依其文字之方乘整列之。而變爲四項之形。

故若干項之代數式爲完全立方。其一文字之方乘。僅有三種。則亦可由視察而得其立方根。

例如求 $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 6abc + 3b^2c + 3bc^2$ 之立方根。

先依 a 之方乘整列。則得

$$a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b^2+c^2+2bc) + b^3+c^3+3b^2c+3bc^2$$

$$\text{即 } a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3.$$

由是所求之立方根爲 $a+b+c$ 。

203. 求任意代數式之立方根。

試求 $(A+B)^3$ 之立方根。但 A 爲立方根之若干項。 B 爲其餘之若干項。以 A 及 B 之各項。依一文字之遞降 (或遞昇) 整列。則 A 之各項比 B 之各項。其文字之次數高 (或低)。

若已知 A 之各項。而求 B 之各項。則由 $(A+B)^3$ 減 A^3 。其餘式爲 $(3A^2+3AB+B^2)B$ 。

今依整列之方法。則在餘式內之最高次 (或最低次) 之項。必等於 $3 \times A$ 之第一項之平方 $\times B$ 之第一項。

由是欲得立方根之次項 (即 B 之最高次或最低次項)。其法將已得若干項立方根之立方。從原式中減去之。再將立方根第一項之平方 3 倍之。以除其餘式之最高次 (或最低次) 之項即得。

依此法則。則第一項以後之各項。可以次第求得。而根之第一項。即爲已知代數式第一項之立方根。固自明瞭。

例如求 $x^6 - 6x^5y + 21x^4y^2 - 44x^3y^3 + 63x^2y^4 - 54xy^5 + 27y^6$ 之立方根。其法如下。

$$x^6 - 6x^5y + 21x^4y^2 - 44x^3y^3 + 63x^2y^4 - 54xy^5 + 27y^6.$$

$$(x^2)^3 = x^6$$

$$(x^2 - 2xy)^3 = x^6 - 6x^5y + 12x^4y^2 - 8x^3y^3$$

$$(x^2 - 2xy + 3y^2)^3 = x^6 - 6x^5y + 21x^4y^2 - 44x^3y^3 + 63x^2y^4 - 54xy^5 + 27y^6.$$

先將已知代數式。依 x 之遞降方乘整列。取其第一項之立方根得 x^2 。即爲所求立方根之第一項。

次從原式減 x^2 之立方。其餘式之第一項。爲 $-6x^5y$ 。以 $3 \times (x^2)^2$ 除之。得 $-2xy$ 爲立方根之第二項。

次從原式減 $x^2 - 2xy$ 之立方。其餘式之第一項爲 $9x^4y^2$ 。以 $3 \times (x^2)^2$ 除之。得 $3y^2$ 爲立方根之第三項。

而 $(x^2 - 2xy + 3y^2)^3$ 與原式等。故 $x^2 - 2xy + 3y^2$ 爲所求之立方根。

[註] 求立方根用上法者少。施諸實用。尙有簡易之法如下。

如前例第一項及末項之立方根。爲 x^2 及 $3y^2$ 。此即爲原式立方根之第一項及末項。而此第一項之平方 3 倍。即 $3 \times (x^2)^2$ 。以除原式之第二項。得 $-2xy$ 爲立方根之第二項。若已知代數式爲完全立方。則不能不爲 $(x^2 - 2xy + 3y^2)^3$ 。

又求次之立方式。

$$x^9 - 6x^8y + 15x^7y^2 - 29x^6y^3 + 51x^5y^4 - 60x^4y^5 + 64x^3y^6 - 63x^2y^7 + 27xy^8 - 27y^9.$$

若所設之式。爲完全立方。則其立方根之初項及末項。爲 $\sqrt[3]{x^9}$ 。及 $\sqrt[3]{-27y^9}$ 。依次得所求根之初項及末項。爲 x^3 及 $-3y^3$ 。

又立方根之第二項。不能不爲 $-6x^8y \div 3(x^3)^2 = -2x^2y$ 。而其末項之前一項。不能不爲 $27xy^8 \div 3(-3y^3)^2 = +xy^2$ 。

由是原式若爲完全立方。則不能不等於 $(x^3 - 2x^2y + xy^2 - 3y^3)^3$ 。即易得其立方根。

204. 任意方根 如下之恆同式 (見後 253 章)。

$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + a$ 低於 $n-1$ 次之項。亦可依 197 及 203 章之法。求其代數式之 n 方根。

[規則] 將代數式。依某文字之遞降或遞昇方乘整列。取其第一項之 n 方根。爲所求 n 方根之第一項。乃從原式中減其已

得根若干項之乘方。又以 n 方根第一項之 $n-1$ 方乘之 n 倍。除其餘式之第一項。即得 n 方根之次項。

依此規則。次第求之。則 n 方根可得。

如 6, 8, 12 諸方根。以有 2, 3 因子。故但求其平方根及立方根即得。若求 5, 7, 13 等方根。則不能不依此規則。

例題十九

記下之平方根。

- | | | | |
|----|--|---|--------------------|
| 1. | $4x^{10}-12x^6y^3+9y^6$. | 答 | $2x^5-3y^3$. |
| 2. | $x^8+9x^4y^{12}-6x^6y^6$. | 答 | $x^4-3x^2y^3$. |
| 3. | $a^2+4b^2+9c^2+12bc-6ca-4ab$. | 答 | $a-2b-3c$. |
| 4. | $25a^4+9b^4+4c^4+12b^2c^2-20c^2a^2-30a^2b^2$. | 答 | $5a^2-3b^2-2c^2$. |

求以下各式之平方根。

5. $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$. 答 x^3+x^2+x+1 .

[解] 從原式減 $(x^3+x^2)^2$ 。則其餘式之初項。為 $2x^4$ 。以 $2x^3$ 除之得 x 。故 x^3+x^2+x+1 為所求之平方根。何則。以末項為 1 故也。

6. $4x^4-8x^3y^2+4xy^6+y^8$. 答 $2x^2-2xy^2-y^4$.

[解] 從原式減 $(2x^2-2xy^2)^2$ 。則餘式之第一項為 $-4x^2y^4$ 。以 $2(2x^2)$ 除之。則得 $-y^4$ 。而原式等於 $(2x^2-2xy^2-y^4)^2$ 。

7. $49+112x^2+70x^3+64x^4+80x^5+25x^6$. 答 $7+8x^2+5x^3$.

[解] 先求 $7+8x^2$ 。次得 $5x^3$ 。

8. $x^4-2x^3+5x^2-6x+8-6x^{-1}+5x^{-2}-2x^{-3}+x^{-4}$. 答 $x^2-x+2-x^{-1}+x^{-2}$.

[解] 原式 $-(x^2-x)^2=4x^2+x$ 之低次項。 $\therefore 4x^2 \div 2x^2=2$ 。

由是原式 $-(x^2-x+2)^2=-2x+x$ 之低次項。

$\therefore -2x \div 2x^2=-x^{-1}$ 。又平方根之最後項為 $\pm x^{-2}$ 。故末得 $+x^{-2}$ 。

9. $\frac{25x^2}{y^2} + \frac{y^2}{25x^2} - 20\frac{x}{y} + \frac{4y}{5x} + 2$. 答 $\frac{5x}{y} - \frac{y}{5x} - 2$.

[解] $\left(\frac{5x}{y} - \frac{y}{5x}\right)^2 - 4\left(\frac{5x}{y} - \frac{y}{5x}\right) + 4 = \left(\frac{5x}{y} - \frac{y}{5x} - 2\right)^2$.

10. $x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + 2x + 4x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$. 答 $x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$.

[解] $(x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}})^2 - 2x + 4x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = (x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}})^2 - 2x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}) + x^{\frac{1}{2}}$
 $= (x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^2$.

11. $x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 4x + 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$. 答 $x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$

[解] $(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}})^2 + 2x^{\frac{5}{2}}(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}) + x^{\frac{5}{2}} = (x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{2}})^2$.

12. $x^{\frac{8}{5}} - 2a^{-\frac{2}{5}}x^{\frac{1}{5}} + 2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}} + a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{1}{5}} - 2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}} + a^{\frac{8}{5}}$.

答 $\pm(a^{-\frac{2}{5}}x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{4}{5}})$.

[解] $(x^{\frac{4}{5}} - a^{-\frac{2}{5}}x^{\frac{1}{5}})^2 + 2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}} - 2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}} + a^{\frac{8}{5}}$
 $= (x^{\frac{4}{5}} - a^{-\frac{2}{5}}x^{\frac{1}{5}})^2 + 2a^{\frac{4}{5}}(x^{\frac{4}{5}} - a^{-\frac{2}{5}}x^{\frac{1}{5}}) + a^{\frac{8}{5}} = (x^{\frac{4}{5}} - a^{-\frac{2}{5}}x^{\frac{1}{5}} + a^{\frac{4}{5}})^2$.

求下之各立方根。

13. $x^3 - 24x^2 + 192x - 512$. 答 $x - 8$.

14. $x^6 - 3x^5y + 6x^4y^2 - 7x^3y^3 + 6x^2y^4 - 3xy^5 + y^6$. 答 $x^2 - xy + y^2$.

[解] $x^2 - xy$ 自易求得。又知 $\sqrt[3]{y^6} = y^2$ 。即得所求之根。

15. $1 - 9x^2 + 33x^4 - 63x^6 + 66x^8 - 36x^{10} + 8x^{12}$. 答 $1 - 3x^2 + 2x^4$.

16. 求 $2a^2(b+c)^2 + 2b^2(c+a)^2 + 2c^2(a+b)^2 + 4abc(a+b+c)$ 之平方根。

答 $2(bc+ca+ab)$.

[解] $2\{(ab+ac)^2 + (bc+ba)^2 + (ca+bc)^2 + 2abc(a+b+c)\}$
 $= 4\{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c)\} = \{2(bc+ca+ab)\}^2$.

17. 求 $x^2(x^2+y^2+z^2) + y^2z^2 + 2x(y+z)(yz-x^2)$ 之平方根。

答 $x^2 - x(y+z) - yz$.

[解] $x^4 - 2x^3(y+z) + x^2(y^2+z^2) + 2xyz(y+z) + y^2z^2$
 $= x^4 - 2x^3(y+z) + x^2(y+z)^2 - 2yz\{x^2 - x(y+z)\} + y^2z^2$
 $= \{x^2 - x(y+z) - yz\}^2$.

18. 求 $(a-b)^4 - 2(a^2+b^2)(a-b)^2 + 2(a^4+b^4)$ 之平方根。答 a^2+b^2 .

[解] 原式 $= (a-b)^4 - \{(a+b)^2 + (a-b)^2\}(a-b)^2 + (a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^2$
 $= (a-b)^4 - (a^2-b^2)^2 - (a-b)^4 + (a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^2 = (a^2+b^2)^2$.

19. 證 $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a) + a^4$ 爲完全平方。

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 原式} &= (x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)+a^4 \\ &= \{(x^2+5ax+5a^2)-a^2\}\{(x^2+5ax+5a^2)+a^2\}+a^4 \\ &= (x^2+5ax+5a^2)^2-a^4+a^4=(x^2+5ax+5a^2)^2. \end{aligned}$$

20. $x^4+px^3+qx^2+rx+s$. 若 $p^2s=r^2$ 及 $p^3-4pq+8r=0$. 則爲完全平方. 試證之.

$$\text{〔證〕 } x^4+px^3+qx^2+rx+s=(x^2+\frac{1}{2}px+\sqrt{s})^2.$$

$$\text{則 } \quad \quad \quad =x^4+px^3+\left(\frac{1}{4}p^2+2\sqrt{s}\right)x^2+p\sqrt{s}x+s.$$

$$\text{由是 } q=\frac{1}{4}p^2+2\sqrt{s} \text{ 及 } r=p\sqrt{s}.$$

$$\text{從 } r=p\sqrt{s}, \text{ 則 } p^2s=r^2. \text{ 又 } pq=\frac{1}{4}p^3+2p\sqrt{s}=\frac{1}{4}p^3+2r.$$

21. $4x^6-24x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2-40x+25$ 爲完全平方. 求 A, B 及 C 之值. 答 $A=20, B=68, C=-44$ 或 $A=52, B=-68, C=76$.

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } 4x^6-24x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2-40x+25 &= (2x^3-6x^2+ax+b)^2 \\ &= 4x^6-24x^5+(36+4a)x^4+(4b-12a)x^3+(a^2-12b)x^2+2abx+b^2. \end{aligned}$$

$$\text{由是 } b^2=25. \quad \therefore b=5 \text{ 或 } -5.$$

$$\text{由 } 2ab=-40. \quad \therefore a=-4 \text{ 或 } 4.$$

$$A=36+4a=36+4(-4)=20, \quad \text{或 } A=36+4(4)=52.$$

$$B=4b-12a=4(5)-12(-4)=68, \quad \text{或 } B=4(-5)-12(4)=-68.$$

$$C=a^2-12b=(-4)^2-12(5)=-44, \quad \text{或 } C=4^2-12(-5)=76.$$

22. ax^3+bx^2+cx+d 爲完全立方. 則 $b^2=3ac$ 及 $c^2=3bd$.

$$\text{〔證〕 } ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)^3=m^3x^3+3m^2nx^2+3mn^2x+n^3.$$

$$\text{由是 } a=m^3, \quad b=3m^2n, \quad c=3mn^2, \quad d=n^3.$$

$$b^2=9m^4n^2=3m^3(3mn^2)=3ac,$$

$$c^2=9m^2n^4=3(3m^2n)n^3=3bd.$$

23. 求 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ 與 x, y, z 之有理式平方之關係.

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy &= (Ax+By+Cz)^2 \\ &= A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2+2BCyz+2CAzx+2ABxy. \end{aligned}$$

$$\therefore a=A^2, \quad b=B^2, \quad c=C^2, \quad f=BC, \quad g=CA, \quad h=AB.$$

由是 $af = A^2BC = (CA)(AB) = gh,$

$bg = B^2CA = (AB)(BC) = hf,$

$ch = C^2AB = (BC)(CA) = fg.$

24. $(a-\lambda)x^2 + (b-\lambda)y^2 + (c-\lambda)z^2 + 2fyz + 2gax + 2hxy$ 爲 x, y, z 之有理代數式之平方。試證下式之關係。

$$a - \frac{gh}{f} = b - \frac{hf}{g} = c - \frac{fg}{h} = \lambda.$$

[證] 如前例之關係。從 $(a-\lambda)f = gh$ 。則 $\lambda = a - \frac{gh}{f}$ 。以下同法。

25. 已知代數式之立方根之最初 r 項。試由通常之除法。求次之 r 項。

[證] P^3 爲已知代數式。其方根之 Q 爲最初 n 項。 R 爲其餘項。

$\therefore P = (a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_r x^{n-r+1}) + (a_{r+1}x^{n-r} + \dots + K) = Q + R.$

由是
$$\frac{P^3 - Q^3}{3Q^2} = R + \frac{3QR^2 + R^3}{3Q^2} \dots \dots \dots (1)$$

Q 爲 x 之 n 次, R 爲 x 之 $n-r$ 次式。故 $3QR^2 + R^3$ 爲 x 之 $3n-2r$ 次式。故 $\frac{3QR^2 + R^3}{3Q^2}$ 爲 x 之 $(3n-2r)-2n$ 即 $n-2r$ 次式。

故 (1) 式右邊之 R 。爲自 x^{n-2r} 以上之項。與 $\frac{3QR^2 + R^3}{3Q^2}$ 之整數部。相加。則爲 x^{n-2r+1} 以上之係數。即從 x^{n-r} 至 x^{n-2r+1} 之第 r 項。爲立方根之次項已明。故如題言。

26. 求證通常記數之數之立方根。其最初之數。知有 $n+2$ 位則可由除法而得次之 n 位。但此數爲 $2n+2$ 位之完全立方數。

[證] 全數爲 P^3 。立方根之最初 $n+2$ 位之數爲 p 。餘 n 位爲 q 。則 $P = 10^n p + q$ 。故

$$\frac{P^3 - 10^{3n} p^3}{3 \times 10^{2n} p^2} = q + \frac{3 \times 10^n p q^2 + q^3}{3 \times 10^{2n} p^2} = q + \frac{q^2}{10^n p} + \frac{q^3}{3 \times 10^{2n} p^2} \dots \dots \dots (1)$$

$q < 10^n, \therefore q^2 < 10^{2n}$ 。又 $10^{n+1} < p, \therefore 10^{n+1} < q^2 < 10^{2n} p$ 。

由是 $\frac{q^2}{10^n p} < \frac{1}{10}$ 又 $\frac{q^3}{10^{2n} p^2} < \frac{1}{10^{n+2}}$ 。故 (1) 之分數部。皆小於 1。

由是得 n 位 q 。

27. 求證方程式 $x^2+qx-r=0$ 之一正根之數值為 $n+2$ 位即 a 。則 $r-qa-a^2$ 。以 $3a^2+q$ 除之。其次之數字亦得至 $n-1$ 位。

[證] $x^2+qx-r=0$ 之一根為 $a+\frac{b}{10^{n-1}}$ 。則

$$\left(a+\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2+q\left(a+\frac{b}{10^{n-1}}\right)-r=0. \text{ 變之。則}$$

$$\frac{b}{10^{n-1}}(3a^2+q)+\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2+3\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)a=r-qa-a^2.$$

$$\therefore \frac{b}{10^{n-1}}+\frac{\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2 3a+\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2}{3a^2+q}=\frac{r-qa-a^2}{3a^2+q} \dots \dots \dots (1)$$

但 $10^{n+2}>a>10^{n+1}$ 及 b 之最小數字為 b' 。則 $10^{n-1}>b'>10^{n-2}$ 。

故 $\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2 3a < \left(\frac{10^{n-1}}{10^{n-1}}\right)^2 3 \times 10^{n+2}$ 。即 $3 \times 10^{n+2}$ 。

又 $3a^2+q > 3(10^{n+1})^2$ 即 $3 \times 10^{2n+2}$ 。

由是 $\frac{\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2 3a}{3a^2+q} < \frac{3 \times 10^{n+2}}{3 \times 10^{2n+2}}$ ，即 $\frac{1}{10^n}$ 。

同法 $\frac{\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2}{3a^2+q} < \frac{1}{10^{2n+2}}$ 。

由是 (1) 之分數部。為自 $\frac{b}{10^{n-1}}$ 以下之數位。故如題言。

第拾陸編

比及比例

205. 定義 一數量有他數量之若干倍。而審其大小之關係謂之比 (Ratio)。

相異之兩名數。不能相比。如人數與金數。里數與斤數。不能比較其大小是也。

a 及 b 之比。可以 $a:b$ 記之。即 a 爲比之第一項。 b 爲其第二項。第一項稱前項。第二項稱後項。

比之前項大於後項。則其比大於 1。謂之優比。前項小於後項。則其比小於 1。謂之劣比。前項等於後項。則其比等於 1。謂之等比。凡若干比。以其第一項之積。比第二項之積。謂之諸比之複比。例如 $ac:bd$ 爲 $a:b$ 及 $c:d$ 之複比。

又 $a^2:b^2$ 謂之 $a:b$ 之二倍比。 $\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 謂之 $a:b$ 之二分比。

206. 量 各量之比。恆以數顯之。故求一量爲他量之幾倍。則以他量之數。除此一量之數即得。故比者即分數也。

分數之原則。詳於第八編。而比之原則。與之全同。

故比之兩項。以相同之數乘或除之。則其值不變 (見 107 章)。

相異之兩比。通爲公分母。可以比較其大小 (見 106 章)。

113 章之諸定理。亦合於比理。

又下之定理尤爲緊要。

207. 定理 任意之比。其各項皆加相同之正數量。則其值較近於 1。

例如 x 爲正數量。加入 $a:b$ 之各項。則得 $a+x:b+x$ 。

$$\text{今 } \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}, \text{ 及 } \frac{a+x}{b+x} - 1 = \frac{a-b}{b+x}.$$

因分子相同，而 $\frac{a-b}{b+x}$ 之分母較大，故 $\frac{a-b}{b+x}$ 之商數小於 $\frac{a-b}{b}$ ，即 $\frac{a+x}{b+x}$ 與 1 之差，小於 $\frac{a}{b}$ 與 1 之差，即 $\frac{a+x}{b+x}$ 較 $\frac{a}{b}$ 為近於 1。

若 x 為甚大，則分數 $\frac{a-b}{b+x}$ 可為甚小，即 x 愈變大， $\frac{a-x}{b+x}$ 與 1 之差乃愈變小，故 x 若為無窮大，則 $\frac{a+x}{b+x}$ 至於極限而等於 1。

若兩數量之比為 1，則不必如上例 $a+x$ 與 $b+x$ 常相等，故 $a:b$ 與 $a+x:b+x$ 相等，所以 a 與 b 當為不相等者（參看 118 章）。

208. 餘論 任意之比，其各項加同數量，而近於 1，故大於 1 之比其各項加同數量，則其值減小而近於 1，小於 1 之比其各項加同數量，則其值增大而近於 1，故上之定理可簡言之如下。

各項加同數量，則優比之值減，劣比之值增。

209. 不可通度數 兩數量之比，恆有不能以兩整數表之者，例如正方形之對角線，與其一邊之比為 $\sqrt{2}:1$ ，而 $\sqrt{2}$ 非有限小數，即不能以相當之分數顯之是也。

由是兩數之比，不能以兩整數表之者，謂之不可通度 (Incommensurable)。

不可通度之兩數相比，雖不能表以整數，然亦可依所欲求之程度，求其略近之值，以證其比之關係，此種定理，可用 163 章之法明之。

$$\text{例如 } \sqrt{5}:4 = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{2.236067\dots}{4} = .559016\dots\dots\dots$$

故 $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 雖 $> \frac{559016}{1000000}$ 及 $< \frac{559017}{1000000}$ ，然所差俱在 $\frac{1}{1000000}$ 以內，為數甚微也。

比 例

210. 比例 有四數量，其第一與第二之比，等於第三與第四之比，則此四數量成為比例 (Proportion)。

例如 $a:b=c:d$ ，則 a, b, c, d 成比例。

其式則記爲 $a:b::c:d$ 。可讀爲 a 比 b 如 c 比 d 。

凡成比例之四數量。第一及第四謂之兩外項。第二及第三謂之兩中項。

211. 四數量 a, b, c, d 成比例。則由比之定義。得 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

兩邊以 bd 乘之。則 $ad = bc$ 。

故比例之兩外項之積。與兩中項之積相等。

反之。若 $ad = bc$ 。則 a, b, c, d 成比例。

何則。若 $ad = bc$ 。則 $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ 。

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。即 $a:b::c:d$ 。

由是又得下之四關係。凡 $ad = bc$ 。則

$$a:b=c:d。$$

$$a:c=b:d。$$

$$b:a=d:c。$$

$$b:d=a:c。$$

此四式內。其一式合理。則餘三式亦皆合理。

[例] $a:b=c:d$ 。則 $a+b:a-b=c+d:c-d$ 。

何則。若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。由 113 章第一例 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ 。

由是 $a+b:a-b=c+d:c-d$ 。

212. 連比例 有諸數量。其第一與第二之比。第二與第三之比。第三與第四之比 (以下皆如此)。而各各相等。則此諸數量謂之連比例 (Continued Proportion)。

例如 a, b, c, d, \dots 爲 $a:b=b:c=c:d=\dots$

即 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \dots$ 則成連比例。

$a:b=b:c$ 。則 b 稱爲 a 及 c 之比例中項。

a, b, c 爲連比例。則 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ 。 $\therefore b^2 = ac$ 。即 $b = \sqrt{ac}$ 。

故兩數量間之比例中項。等於其積之平方根。

$$\text{又 } \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{b}{c} \times \frac{b}{c}. \text{ 即 } \frac{a}{c} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

故三數量爲連比例。則第一與第三之比。等於第一與第二之
二倍比。及第二與第三之二倍比。

213. 比例之兩定義 歐几里得之幾何學上。有比例之
定義如次。

有四數量。其第一及第三以任意之等數倍之。又第二及第四
以任意之等數倍之。若第一之倍數較第二之倍數大或等或小。
從而第三之倍數較第四之倍數大或等或小。則此四數量成比
例。

四數量 a, b, c, d 在代數學上比例之定義。則爲 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

故如上所示第一 a 及第三 c 。均以 m 倍之。第二 b 及第四 d 。均
以 n 倍之。則無論 m, n 之值如何。恆得 $\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$ 。

由是 $ma \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} nb$ 。從而 $mc \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} nd$ 。故適合於幾何學上比例之定義。

次設 a, b, c, d 爲適合於幾何學之定義者。而 a 及 b 爲可通度
數。非如 $\sqrt{2}:1$ 。則 $a:b = m:n$ 。

但 m 及 n 爲整數。則 $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ 。 $\therefore na = mb$ 。

依定義 $na \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} mb$ 。從而 $nc \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} md$ 。

由是 $nc = md$ 。 $\therefore \frac{c}{d} = \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ 。

故 a, b, c, d 亦適合代數學上比例之定義。

若 a 及 b 爲不可通度之數。則不能求得二整數 m 及 n 以表之。
即不能作 $a:b = m:n$ 之式。

然若取 a 之倍數爲 na 。令 na 在 b 之相連兩倍數間。即在 mb 與
 $(m+1)b$ 之間。則

$$na > mb \text{ 及 } na < (m+1)b.$$

由是依定義得 $nc > md$ 及 $nc < (m+1)d$.

故 $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$ 或 $< \frac{m+1}{n}$. 及 $\frac{c}{d} > \frac{m}{n}$ 或 $< \frac{m+1}{n}$.

考上之不等式。則知 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 之差。為小於 $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n}$. 即 $\frac{1}{n}$.

然 n 為任意之等倍數。可為任何大。故 n 愈增大。則 $\frac{1}{n}$ 愈減小。

而 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 之差恆比 $\frac{1}{n}$ 更小。若 n 大至極限。則 $\frac{1}{n}$ 小至極限。而

得 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

例 題

1. $7+x:12+x$ 等於 $5:6$. 求 x . 答 18.

[解] $\frac{7+x}{12+x} = \frac{5}{6}$. $\therefore \frac{12-7}{12+x} = \frac{6-5}{6}$. $\therefore 12+x=30$.

2. $6x^2+6y^2=13xy$. 則 x 與 y 之比如何. 答 $2:3$, 或 $3:2$.

[解] 從原方程式 $(2x-3y)(3x-2y)=0$.

$\therefore 2x=3y$, 或 $3x=2y$. $\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, 或 $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$.

3. $5:9$ 之各項加最小整數。則其比大於 $7:10$. 求此整數若干. 答 5.

[解] $5+x:9+x > 7:10$.

即 $\frac{5+x}{9+x} > \frac{7}{10}$. $\therefore 10(5+x) > 7(9+x)$. $\therefore 3x > 13$.

由是 $x > 4\frac{1}{3}$. $x=5$.

4. $x+1:x+6$ 等於 $3:5$ 之二倍比求 x . 答 $\frac{29}{16}$.

[解] 從 $\frac{x+1}{x+6} = \frac{3^2}{5^2}$ 得 x .

5. $a:b=c:d$ 求下之證。

(1) $a^2+ab+b^2:c^2+cd+d^2 = a^2-ab+b^2:c^2-cd+d^2$.

(2) $a+b:c+d = \sqrt{(2a^2-3b^2)}:\sqrt{(2c^2-3d^2)}$.

$$(3) a^2+b^2+c^2+d^2 : (a+b)^2+(c+d)^2 = (a+c)^2+(b+d)^2 : (a+b+c+d)^2.$$

[證] 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

(1) 故 $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$ 及 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ 由除法.

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \div \frac{a+b}{a-b} = \frac{c^2+d^2}{c^2-d^2} \div \frac{c+d}{c-d} \quad \text{即} \quad \frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} = \frac{c^2-cd+d^2}{c^2+cd+d^2}.$$

(2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} = K. \quad K^2 = \frac{2a^2}{2c^2} = \frac{3b^2}{3d^2} = \frac{2a^2-3b^2}{2c^2-3d^2}.$

$$\therefore K = \frac{a+b}{c+d} = \frac{\sqrt{(2a^2-3b^2)}}{\sqrt{(2c^2-3d^2)}}.$$

(3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = K. \quad a = bK. \quad c = dK.$

$$\therefore \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{(a+b)^2+(c+d)^2} = \frac{b^2K^2+b^2+d^2K^2+d^2}{(bK+b)^2+(dK+d)^2} = \frac{(K^2+1)(b^2+d^2)}{(K+1)^2(b^2+d^2)} = \frac{K^2+1}{(K+1)^2}$$

$$= \frac{(K^2+1)(b+d)^2}{(K+1)^2(b+d)^2} = \frac{(bK+dK)^2+(b+d)^2}{(bK+dK+b+d)^2} = \frac{(a+d)^2+(b+a)^2}{(a+c+b+d)^2}.$$

6. $a : b = c : d$. 則 $ab+cd$ 為 a^2+c^2 及 b^2+d^2 之比例中項試證之.

[證] $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a^2}{ab} = \frac{c^2}{cd} = \frac{a^2+c^2}{ab+cd}$ 同法 $= \frac{ab+cd}{b^2+d^2}.$

由是 $a^2+c^2 : ab+cd = ab+cd : b^2+d^2.$

變數

214. 變數 二數量有一定之關係. 其第一量任意兩值之比. 等於第二量相當兩值之比. 則謂之第一量因第二量而變.

例如第一量之兩值為 $a_1 a_2$ 之比. 等於第二量之相當兩值 $b_1 b_2$ 之比. 則 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. 故 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

由是此二量之相當值為常比.

凡用 ∞ 記號. 即示因變之意. 故 $A \infty B$ 可讀為 A 因 B 變.

$a \infty b$. 則 $a : b$ 為常數. 而此常比. 命為 m . 則 $\frac{a}{b} = m. \quad a = mb.$

於任意之例欲求常比 m ，必先知 a 及 b 之相當數值。

例如 $a \propto b$ 知 b 等於 5， a 等於 15，則

$$\frac{a}{b} = m = \frac{15}{5}, \quad \therefore \frac{a}{b} = 3, \quad \text{即 } a = 3b.$$

215. 定義. 凡二數量，其第一量因第二量之反商而變，則謂之第一量因第二量反變。

例如 a 因 b 反變，則 $a : \frac{1}{b}$ 為常比，而 $ab = m$ 。

一數量依他二數量之積而變，則謂之此數量因他二數量合變。

例如 $a \propto bc$ 為 a 因 b 及 c 合變，即 $a = mbc$ ，但 m 為常數。

有三數量，其第一量依第二量及第三量之反商之積而變，則謂之第一量因第二量正變，因第三量反變。

例如 a 因 b 正變，因 c 反變，則 $a : b \times \frac{1}{c}$ 為常比，即 $a = m \frac{b}{c}$ ，但 m 為常數。

上所述各例之定義，知其相當數值，即可決定其常數。

例如 a 因 b 及 c 合變，若 b 為 4， c 為 3，而 a 為 6，則 $a = mbc$ 。

$$\text{即 } 6 = m \times 4 \times 3, \quad \therefore m = \frac{1}{2}. \quad \text{由是 } a = \frac{1}{2} bc.$$

216. 定理 a 唯與 b 及 c 相關係，若 c 為常數，則 a 因 b 變， b 為常數，則 a 因 c 變， b 及 c 皆為變數，則 a 因 bc 變。

設 a, b, c 之相當數值，為 a', b', c 及 a'', b', c' 然 c 之值，在第一及第二相同，故 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \dots \dots \dots (1)$

$$b' \text{ 之值，在第二及第三相同，故 } \frac{a'}{a''} = \frac{c}{c'} \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{由是從 (1) 式及 (2) 式，得 } \frac{a}{a''} = \frac{bc}{b'c'}. \quad \text{即 } \frac{a}{a''} = \frac{mbc}{mb'c'}.$$

$$\therefore a = mbc \quad '' = mb'c'. \quad \text{即得證。}$$

其例如下。

有牛肉若干。若重量 (W) 爲常數。則總價 (O) 因每斤之價 (P) 變。若每斤之價 (P) 爲常數。則總價 (O) 因重量 (W) 變。由是依定理。若重量與每斤之價。俱爲變數。則牛以之總價 (O)。當因重量 (W) 與每斤之價 (P) 之積而變。

例如 W 爲常數。則 $O \propto P$ 。又 P 爲常數。則 $O \propto W$ 。若 P 及 W 俱爲變數。則 $O \propto PW$ 。

又如三角形之面積。若高爲常數。即因底邊變。若底邊爲常數。則因高變。若高及底邊俱爲變數。則其面積因高及底邊之積而變。

又如氣體之壓力。若溫度爲常數。則因其質之密度變。若密度爲常數。則因溫度變。若密度及溫度俱爲變數。則氣體之壓力。因密度與溫度之積而變。

例 題

1. 圓之面積。因其半徑之平方變。若半徑 10 尺之圓面積爲 314.159 平方尺。問半徑 7 尺之圓面積若干。 答 153.93791 平方尺。

[解] 面積爲 A 。半徑爲 r 。則 $A \propto r^2$ 。即 $A = mr^2$ 。

即 $314.159 = m(10)^2$ 。 $\therefore m = 3.14159$ 。

由是 $A = 3.14159 \times 7^2 = 153.93791$ 。

2. 球之體積。因其半徑之立方變。半徑 1 尺之球之體積。爲 4.188 立方尺。問半徑 3 尺之球之體積若干。 答 113.076 立方尺。

[解] 球之體積爲 V 。半徑爲 r 。則 $V = mr^3$ 。

即 $4.188 = m \times 1^3$ 。 $\therefore m = 4.188$ 。

由是 $V = 4.188 \times 3^3 = 113.076$ 。

3. 物體於靜止時墜落。其距離因其時之平方變。今若物體於 2 秒間落 64 尺。問 6 秒間落若干尺。 答 576 尺。

[解] 距離爲 v 時爲 t 。則 $v = mt^2$ 。即 $64 = m(2)^2$ 。 $\therefore m = 16$ 。

由是 $v = 16(6)^2 = 576$ 。

4. 氣體之體積因溫度正變。因壓力反變。今壓力 15。溫度 260。則其體積爲 200 立方吋。若壓力 18。溫度 390。則其體積爲若干。 答 250 立方吋。

〔解〕 體積爲 V 。壓力爲 P 。溫度爲 T 。則 $V = mT \times \frac{1}{P}$ 。

$$\text{即 } 200 = m \times 260 \times \frac{1}{15} \quad \therefore m = \frac{150}{13}$$

$$\text{由是 } V = \frac{150}{13} \times 390 \times \frac{1}{18} = 250。$$

5. 在海岸望遠。其目力所到之距離。因目高於水平面之平方根變。今目高 6 呎。所望見之距離爲 3 哩。問目高 72 碼。其望見之距離若何。 答 18 哩。

〔解〕 距離爲 D 。目高爲 h 。則 $D = m\sqrt{h}$ 。

$$\text{即 } 3 = m\sqrt{6} \quad \therefore m = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$\text{由是 } D = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \sqrt{72 \times 3} = 18。 \text{但 } 1 \text{ 碼} = 3 \text{ 呎。}$$

不 定 式

217. 比爲分數。則有時對於文字之值。爲不定式。

例如 $x=0$ 。則 $\frac{x^2-x}{x^3-x}$ 之分母分子皆爲 0。即得 $\frac{0}{0}$ 之式。又 $x=1$ 所得亦同。

又上之分數。若 $x=\infty$ 。則 $\frac{\infty}{\infty}$ 亦爲不定式。

今以此等不定式。求其分數之極限值。示其方法於下。

例如分數 $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ 。若 $x=1$ 。則得 $\frac{0}{0}$ 。

$$\uparrow \quad \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

而 $x-1$ 實非 0。則以 $x-1$ 除其分母子。此分數之值仍不變。即 $x-1$ 雖任何小。亦能合理。

$$\text{由是 } x-1 \text{ 爲甚小。則得 } \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{x+1}{x^2+x+1}。$$

此第二之分數。若 x 近於 1。則其極限爲 $\frac{2}{3}$ 。

由是 x 爲甚小而近於 1。則分數 $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ 亦近於 $\frac{2}{3}$ 。而可以
 $L_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{2}{3}$ 記之。

例 題

1. 設 $x=2$ 。求 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-10x+16}$ 之極限值。 答 $\frac{1}{6}$ 。

$$[\text{解}] L_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-10x+16} = L_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-8)} = L_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-8} = \frac{1}{6}。$$

2. 設 $x=0$ 及 $x=\infty$ 。求 $\frac{x^2+2x}{2x^2+3x}$ 之極限值。 答 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{1}{2}$ 。

$$[\text{解}] L_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{2x^2+3x} = L_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x(2x+3)} = L_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{2x+3} = \frac{2}{3}。$$

$$L_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{2x^2+3x} = L_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{3}{x}\right)} = L_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{2}。$$

其 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{3}{x}$ 。因 $x=\infty$ 而爲 0。

3. 設 x 爲無窮大。求 $\frac{2x^2+100x+500}{5x^3-40}$ 之極限值。 答 0。

$$[\text{解}] L_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+100x+500}{5x^3-40} = L \frac{x^2 \left(2 + \frac{100}{x} + \frac{500}{x^2}\right)}{x^3 \left(5 - \frac{40}{x^3}\right)}$$

$$= L_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{100}{x} + \frac{500}{x^2}}{x \left(5 - \frac{40}{x^3}\right)} = 0。$$

例 題 二 十

1. $a+b, b+c, c+a$ 爲連比例。則 $b+c : c+a = c-a : a-b$ 。試證明之。

$$[\text{證}] \text{ 從 } \frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a}, \quad 1 - \frac{a+b}{b+c} = 1 - \frac{b+c}{c+a}。$$

$$\text{即 } \frac{c-a}{b+c} = \frac{a-b}{c+a} \quad \therefore \frac{b+c}{c+a} = \frac{c-a}{a-b}$$

$$2. \quad x:a=y:b=z:c, \quad \text{則 } \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = \frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}$$

$$\text{〔證〕 } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = K. \quad \text{則}$$

$$x = aK, \quad y = bK, \quad z = cK, \quad x+y+z = K(a+b+c).$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} &= \frac{(aK)^3}{a^3} + \frac{(bK)^3}{b^3} + \frac{(cK)^3}{c^3} = K^3(a+b+c) \\ &= \frac{K^3(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2} = \frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

3. $(a+b+c+d)(a-b-c+d) = (a-b+c-d)(a+b-c-d)$. 則 a, b, c, d 成比例。

$$\text{〔證〕 從原方程式 } \frac{a+b+c+d}{a-b+c-d} = \frac{a+b-c-d}{a-b-c+d}$$

$$\therefore \frac{(a+b+c+d) + (a-b+c-d)}{(a+b+c+d) - (a-b+c-d)} = \frac{(a+b-c-d) + (a-b-c+d)}{(a+b-c-d) - (a-b-c+d)}$$

$$\text{即 } \frac{2(a+c)}{2(b+d)} = \frac{2(a-c)}{2(b-d)} \quad \therefore \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \quad \text{再變之。則}$$

$$\frac{2a}{2c} = \frac{2b}{2d} \quad \therefore a:b=c:d$$

$$4. \quad b^2+c^2=a^2. \quad \text{則 } a+b+c:c+a-b=a+b-c:b+c-a.$$

$$\text{〔證〕 從 } b^2+c^2=a^2. \quad \text{則 } (b+c)^2 - a^2 = 2bc.$$

$$\text{即 } (b+c+a)(b+c-a) = 2bc \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{又 } (b-c)^2 = a^2 - 2bc. \quad \therefore 2bc = a^2 - (b-c)^2.$$

$$\text{即 } (a+b-c)(a-b+c) = 2bc \dots \dots \dots (2)$$

從 (1) (2) 得結果。

5. 從 7, 10, 19, 31 各數減如何相同之數則成比例。 答 3.

$$\text{〔解〕 } \frac{7-x}{10-x} = \frac{19-x}{31-x} \quad \therefore 1 - \frac{7-x}{10-x} = 1 - \frac{19-x}{31-x}$$

$$\text{即 } \frac{3}{10-x} = \frac{12}{31-x} \quad \therefore 31-x = 4(10-x). \quad \therefore x=3.$$

6. $\frac{b}{a+b} = \frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a+b+c}{2a+b+2c}$. 求 $a:b:c$ 之值. 答 $2:3:4$.

[解] $\frac{b+(a+c-b)}{(a+b)+(b+c-a)} = \frac{(a+c-b)+(a+b+c)}{(b+c-a)+(2a+b+2c)}$.

即 $\frac{a+c}{2b+c} = \frac{2(a+c)}{a+2b+3c}$. 即 $\frac{1}{2b+c} = \frac{2}{a+2b+3c}$.

$\therefore a+c=2b$(1)

又 $\frac{b}{a+b} = \frac{a+c-b}{b+c-a}$. 從 (1) $\frac{b}{a+b} = \frac{2b-b}{b+c-a}$.

$\therefore a+b=b+c-a$. 即 $c=2a$. \therefore 從 (1) $b = \frac{3}{2}a$.

由是 $a:b:c = a:\frac{3}{2}a:2a = 2:3:4$.

7. $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$. 則

$(a+b+c)(yz+zx+xy) = (x+y+z)(ax+by+cz)$.

[證] 已知分數為 K . 則

$K = \frac{x+y+z}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$(1)

又 $K = \frac{x+y}{(b+c-a)+(c+a-b)} = \frac{x+y}{2c}$. 同法 $= \frac{y+z}{2a} = \frac{z+x}{2b}$.

$\therefore K = \frac{z(x+y)+x(y+z)+y(z+x)}{2cz+2ax+2by} = \frac{yz+zx+xy}{ax+by+cz}$(2)

從 (1) (2) 可得其結果.

8. $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$. 則 $\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$.

[證] $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y) = K$. 則

$y+z = \frac{K}{a}$, $z+x = \frac{K}{b}$, $x+y = \frac{K}{c}$.

$\therefore x-y = (z+x) - (y+z) = \frac{K}{b} - \frac{K}{a} = \frac{K(a-b)}{ab}$. $\therefore \frac{x-y}{c(a-b)} = \frac{K}{abc}$.

又 $y-z = (x+y) - (z+x) = \frac{K}{c} - \frac{K}{b} = \frac{K(b-c)}{bc}$. $\therefore \frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{K}{abc}$.

$$\text{及 } z-x = (y+z)-(x+y) = \frac{K}{a} - \frac{K}{c} = \frac{K(c-a)}{ca} \therefore \frac{z-x}{y(c-a)} = \frac{K}{abc}$$

9. 證 $(l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3 + \dots) : (l_1 b_1 + l_2 b_2 + l_3 b_3 + \dots)$ 在 $a_1 : b_1, a_2 : b_2, a_3 : b_3, \dots$ 諸比之最大及最小之間。

[證] 與 (113 章定理三同)。

$$10. a : b = c : d \text{ 則 } \frac{a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} + d^{2n}}{a^{-2n} + b^{-2n} + c^{-2n} + d^{-2n}} = (abcd)^n$$

$$\begin{aligned} \text{[證]} \quad a^{-2n} + b^{-2n} + c^{-2n} + d^{-2n} &= \frac{1}{a^{2n}} + \frac{1}{b^{2n}} + \frac{1}{c^{2n}} + \frac{1}{d^{2n}} \\ &= \frac{d^{2n} + a^{2n}}{a^{2n} d^{2n}} + \frac{c^{2n} + b^{2n}}{b^{2n} c^{2n}} \quad \text{但 } ad = bc \\ &= \frac{d^{2n} + a^{2n}}{b^{2n} c^{2n}} + \frac{c^{2n} + b^{2n}}{b^{2n} c^{2n}} \quad \text{但 } b^2 c^2 = bcad \\ &= \frac{a^{2n} + d^{2n} + b^{2n} + c^{2n}}{(b^2 c^2)^n} = \frac{a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} + d^{2n}}{(abcd)^n} \end{aligned}$$

$$\text{由是 } \frac{a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} + d^{2n}}{a^{-2n} + b^{-2n} + c^{-2n} + d^{-2n}} = (abcd)^n$$

$$11. (a+b)(b+c)(c+d)(d+a) = (a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$$

則 $a : b = d : c$ 。

[證] 從已知方程式。

$$\{(a+b)(c+d)(b+c)(a+d)\} = \{(a+b) + (c+d)\} \{cd(a+b) + ab(c+d)\}$$

$$\text{即 } (a+b)(c+d)(ab+ac+bd+cd)$$

$$= cd(a+b)^2 + (a+b)(c+d)(cd+ab) + ab(c+d)^2$$

$$\therefore cd(a+b)^2 - (a+b)(c+d)(ac+bd) + ab(c+d)^2 = 0$$

$$\text{即 } c(a+b)\{d(a+b) - a(c+d)\} - b(c+d)\{d(a+b) - a(c+d)\} = 0$$

$$\text{即 } c(a+b)(bd-ac) - b(c+d)(bd-ac) = 0$$

$$\text{即 } (bd-ac)\{c(a+b) - b(c+d)\} = 0$$

$$\text{即 } (bd-ac)^2 = 0 \therefore bd = ac$$

$$12. (bcd+cda+dab+abc)^2 - abcd(a+b+c+d)^2 = 0 \text{ 則 } a, b, c, d \text{ 可任}$$

意排列而成比例。

$$\text{[證]} \quad \{cd(a+b) + ab(c+d)\}^2 - abcd\{(a+b) + (c+d)\}^2 = 0$$

$$\text{即 } c^2 d^2 (a+b)^2 + a^2 b^2 (c+d)^2 - abcd(a+b)^2 - abcd(c+d)^2 = 0$$

即 $cd(a+b)^2(cd-ab) - ab(c+d)^2(cd-ab) = 0$.

即 $(cd-ab)\{cd(a+b)^2 - ab(c+d)^2\} = 0$.

即 $(cd-ab)\{cda^2 + cdb^2 - abc^2 - abd^2\} = 0$.

即 $(cd-ab)\{ca(da-bc) - bd(da-bc)\} = 0$.

即 $(cd-ab)(da-bc)(ca-bd) = 0$.

$\therefore cd=ab, da=bc, ca=bd$.

13. $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{a-c} = \frac{z}{a-2b+c}$. 則 $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{x-z} = \frac{c}{x-2y+z}$.

(證) 已知分數為 K . 則

$$K = \frac{x + 2y + z}{(a+2b+c) + 2(a-c) + (a-2b+c)} = \frac{x+2y+z}{4a}$$

又 $K = \frac{x-z}{(a+2b+c) - (a-2b+c)} = \frac{x-z}{4b}$.

又 $K = \frac{x - 2y + z}{(a+2b+c) - 2(a-c) + (a-2b+c)} = \frac{x-2y+z}{4c}$.

由是 $\frac{x+2y+z}{4a} = \frac{x-z}{4b} = \frac{x-2y+z}{4c}$.

14. $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$. 及 $x+y+z=0$. 僅適合於 $x:y:z$ 之一組. 則

$$bc - f^2 + ca - g^2 + ab - h^2 + 2(gh - af) + 2(hf - bg) + 2(fg - ch) = 0.$$

(證) $\frac{x}{z} = \lambda, \frac{y}{z} = \mu$. 以 z^2 及 z 除已知兩方程式. 則

$$a\lambda^2 + b\mu^2 + c + 2f\lambda\mu + 2g\lambda + 2h\lambda\mu = 0. \quad \lambda + \mu + 1 = 0.$$

$\mu = -(\lambda + 1)$. 代入第一. 則

$\lambda^2(a+b-2h) + 2\lambda(b-f+g-h) + b+c-2f=0$. 依題意 λ 之解答唯一個. 故 $4(b-f+g-h)^2 - 4(a+b-2h)(b+c-2f) = 0$. 解而括之. 則

$$bc - f^2 + ca - g^2 + ab - h^2 + 2(gh - af) + 2(hf - bg) + 2(fg - ch) = 0.$$

15. $\frac{a}{p(px-gy-rz)} = \frac{b}{g(gy-rz-px)} = \frac{c}{r(rz-px-gy)}$. 則

$$\frac{p}{a(ax-by-cz)} = \frac{g}{b(by-cz-ax)} = \frac{r}{c(cz-ax-by)}$$

(證) 已知分數各以 pqr 乘之。則

$$\frac{agr}{px-gy-rz} = \frac{brp}{gy-rz-px} = \frac{cpq}{rz-px-by}$$

順次以兩個分母子相加。則得

$$\frac{agr+brp}{-2rz} = \frac{brp+cpq}{-2px} = \frac{cpq+agr}{-2gy}$$

$$\therefore \frac{br+cp}{x} = \frac{cp+ar}{y} = \frac{ax+bp}{z} = K.$$

$$K = \frac{a(br+cp) - b(cp+ar) - c(ax+bp)}{ax-by-cz} = \frac{-2bcp}{ax-by-cz}$$

$$\therefore -\frac{K}{2abc} = \frac{p}{a(ax-by-cz)} \quad \text{同法} = \frac{q}{b(by-cz-ax)} = \frac{r}{c(cz-ax-by)}$$

16. $ab=cd$ 。則各等於 $(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)/(a+b+c+d)^2$ 。

又 $a+b=c+d$ 。則各等於 $abcd\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)/(ab+cd)$ 。

(證) 從 $ab=cd$ 。則 $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ 。 $\therefore \frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{b+c}$ 。

由是 $\frac{(a+c)(b+c)}{a+b+c+d} = c$ 。

又從 $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$ 同法 $\frac{(c+d)(b+d)}{a+b+c+d} = d$ 。

由是 $\frac{(a+c)(b+c)(a+d)(b+d)}{(a+b+c+d)^2} = cd$ 。

次 $a+b=c+d=K$ 。則

$$\frac{K}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{及} \quad \frac{K}{cd} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad \therefore K\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

由是 $K = abcd\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)/(ab+cd)$ 。

17. $x=2$ 及 $x=\infty$ 。求下各分數之極限值。

$$(1) \frac{x^2-7x+10}{x^2+14} \quad (2) \frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6} \quad (3) \frac{x^2+6x-16}{x^2-12x+16}$$

答 (1) $\frac{3}{5}$, 1. (2) 0, 1. (3) ∞ , 0.

〔解〕 (1) $L_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 14} = L_{x \rightarrow 2} \frac{x - 5}{x - 7} = \frac{3}{5}$.

及 $L_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 14} = L_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}}{1 - \frac{9}{x} + \frac{14}{x^2}} = 1$.

(2) $L_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = L_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{0}{-1} = 0$.

及 $L_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = L_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} = 1$.

(3) $L_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{x^3 - 12x + 16} = L_{x \rightarrow 2} \frac{x + 8}{x^2 + 2x - 8} = \frac{10}{0} = \infty$.

及 $L_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x - 16}{x^3 - 12x + 16} = L_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{16}{x^3}}{1 - \frac{12}{x^2} + \frac{16}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$.

18. $x = a$ 求下之極限值。

(1) $\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}}$.

(2) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$.

答 (1) $3\sqrt[3]{a^2}$. (2) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

〔解〕 $L_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} = L_{x \rightarrow a} (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x^2}) = 3\sqrt[3]{a^2}$.

$L_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = L_{x \rightarrow a} \left\{ \sqrt{\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{x^2 - a^2}} + \sqrt{\frac{1}{x+a}} \right\}$

$= L_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(x+a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} + \sqrt{\frac{1}{x+a}} \right\} = \sqrt{\frac{0}{2a \cdot 2\sqrt{a}}} + \sqrt{\frac{1}{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

第拾柒編

等差，等比，調和級數

218. 級數 依定法次第演成之諸數。謂之級數 (Series)。

例如 1, 2, 3, 4..... 等。為各項依次多 1 所成之級數。

又 3, 6, 12, 24..... 等。為各項依次 2 倍所成之級數。

其他如 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ 等。或如 $1+a, 2+3a, 3+5a, 4+7a$ 等。皆以一定之規則連續成之。故皆為級數。

此編僅論簡單之級數。俟後編再詳論之。

等差級數

219. 定義 級數中之任一項。與其前項之差恆相等者。謂之等差級數 (Arithmetical Progression)。

例如 $b-a=c-b=d-c$ 則 a, b, c, d 為等差級數。略記為 (A. P.)。

A. P. 各項之差。謂之公差 (Common Difference)。下之各項。為等差級數。

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & \dots\dots\dots \\ 3, & -1, & -5, & -9, & \dots\dots\dots \\ a, & a+2b, & a+4b, & \dots\dots\dots \end{array}$$

此第一之公差為 2, 第二之公差為 -4, 第三之公差為 2b。

220. 等差級數之初項 為 a 。公差為 d 。則由定義得第 2 項 $=a+d$, 第 3 項 $=a+2d$, 第 4 項 $=a+3d$, 第 5 項 $=a+4d$ 。以下準此。

由是審其 d 之係數。恆比其項數少 1。

故 第 n 項 $=a+(n-1)d$ 。

故知 A. P. 之初項及公差。則各項皆可求得。

例如 A. P. 之初項爲 5, 公差爲 4, 則其第 10 項 $=5+(10-1)4=41$, 及第 30 項 $=5+(30-1)4=121$.

221. 知等差級數之任意二項則其級數即能決定. 例如第 m 項爲 a , 第 n 項爲 β . 則設 a 爲初項, d 爲公差. 故

$$a+(m-1)d=a, \quad a+(n-1)d=\beta.$$

於此兩方程式 a 及 d 之值, 可以 a, β 之項表之.

例如 A. P. 之第 7 項 15 及第 21 項 22, 求第 10 項.

a 爲初項, d 爲公差, 則

$$a+6d=15, \quad a+20d=22.$$

由是 $d=\frac{1}{2}$ 及 $a=12$. \therefore 第 10 項 $=12+9 \times \frac{1}{2}=16\frac{1}{2}$.

222. 等差中項 三數量爲等差級數, 則其中數謂爲他兩數之等差中項 (Arithmetic Mean).

如 a, b, c , 爲 A. P. 則依定義

$$b-a=c-b. \quad \therefore b=\frac{1}{2}(a+c).$$

故兩數量間之等差中項, 等於其兩數量之和之半.

諸數量爲 A. P. 則其中間之諸數量, 謂爲兩外項之等差諸中項.

例如 7, 9, 11, 13, 15 之五數, 其 9, 11, 13 稱爲 7 及 15 之等差三中項.

凡已知兩數量之間, 可插入若干之等差中項.

例如 a 及 b 爲已知兩數量, 今欲插入 n 項, 則 a, b 二項與其間插入之 n 項, 共得 $n+2$ 項之等差級數. a 爲其初項, b 爲其末項即第 $n+2$ 項.

由是設 d 爲公差, 則 $b=a+(n+2-1)d$. $\therefore d=\frac{b-a}{n+1}$.

即此級數爲 $a, a+\frac{b-a}{n+1}, a+2\frac{b-a}{n+1}, \dots\dots\dots$

故所求之等差中項, 爲

$$a+\frac{b-a}{n+1}, a+2\frac{b-a}{n+1}, \dots\dots\dots a+n\frac{b-a}{n+1}.$$

即 $\frac{na+b}{n+1}, \frac{(n-1)a+2b}{n+1}, \dots, \frac{a+nb}{n+1}$

例如 6 及 18 之間插入等差 5 中項。則

$$18=6+(5+2-1)d. \quad \therefore d=2.$$

由是 6, 6+2, 6+4, 6+6, 6+8, 6+10, 6+12,

即 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

故所求中項。爲 8, 10, 12, 14, 16.

223. 總和 求等差級數任意若干項之和。

a 爲初項。 d 爲公差。 n 爲項數。而第 n 項爲 l 。則

$$l=a+(n-1)d \dots \dots \dots (1)$$

又 S 爲所求之和。則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\dots+(l-2d)+(l-d)+l.$$

更以此和數。從末項逆記之。則

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\dots+(a+2d)+(a+d)+a.$$

由是加其相當之項。則得

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\dots \text{至 } n \text{ 項} =n(a+l)$$

$$\therefore S=\frac{n}{2}(a+l) \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{或從 (1) 式。} \therefore S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} \dots \dots \dots (3)$$

從 (1), (2), (3) 之三公式。則於 a, d, n, l, s 五量中任知其三量。即可得其餘二量。

例 題

1. 求等差級數 $3+6+9+\dots$ 至 20 項之和。 答 630.

[解] $a=3, d=3. \therefore S=\frac{20}{2}\{2 \times 3+(20-1)3\}=630.$

2. 從 1 起連續諸奇數之和。等於其項數之平方。試證明之。

[證] 於 $1+3+5+\dots. a=1, d=2$ 。則 n 項之和。爲

$$S=\frac{n}{2}\{2 \times 1+(n-1)2\}=\frac{n}{2}(2+2n-2)=n^2.$$

3. 將級數 $1+5+9+\dots$ 以若干項相加。則其和為 190。

答 10 項。

[解] $a=1, d=4, S=190$ 。從公式 (3)

$$190 = \frac{n}{2} \{2 \times 1 + (n-1)4\}。即 2n^2 - n - 190 = 0。$$

即 $(n-10)(2n+19)=0$ 。由是 $n=10$ 或 $n=-9\frac{1}{2}$ 。故 $n=10$ 為解答。

其 $n=-9\frac{1}{2}$ 之一根去之。以項必為正整數也。

4. 取 $5+7+9+\dots$ 之若干項。則其和為 480。 答 20 項。

[解] 從公式 (3) $(n-20)(n+24)=0$ 。 \therefore 取 $n=20$ 。

5. A. P. 之第 5 項 11, 第 9 項 7。試求其第 14 項。 答 2。

[解] $a+4d=11, a+8d=7$ 。 $\therefore d=-1, a=15$ 。

由是第 14 項 $=15+13(-1)=2$ 。

6. 第 4 項 b 及第 7 項 $3a+4b$ 。求 A. P. 之第 2 項。 答 $-2a-b$ 。

[解] 初項為 x 。公差為 d 。則 $x+3d=b, x+6d=3a+4b$ 。

$$\therefore d=a+b, x=-3a-2b。$$

由是第 2 項 $=x+d=-3a-2b+(a+b)=-2a-b$ 。

7. 5, 8, 11, \dots 級數之第幾項為 320。 答 第 106 項。

[解] $a=5, d=3$ 。 $\therefore 320=5+(n-1)3$ 。 $\therefore n=106$ 。

8. 證 A. P. 之各項加同數量。亦為 A. P.。

[證] a, b, c, d, \dots 為 A. P.。同數量為 x 。則從

$$b-a=c-b=d-c=\dots 得$$

$$(b+x)-(a+x)=(c+x)-(b+x)=(d+x)-(c+x)=\dots$$

$\therefore a+x, b+x, c+x, d+x, \dots$ 亦為 A. P.。

9. 證 A. P. 之各項乘同數量亦為 A. P.。

[證] 從 $b-a=c-b=d-c=\dots$ 得 $bx-ax=cx-bx=\dots$

10. A. P. 之各連續兩項間。插入定數之等差中項。則其全體亦為 A. P.。

[證] $b-a=c-b=d-c=\dots$ 而 a, b, c, d, \dots 之各兩項間。

插入 n 中項。則其差為 $\frac{b-a}{n+1}, \frac{c-b}{n+1}, \frac{d-c}{n+1}, \dots$ 而各相等。故如題言。

11. 求下列各級數之和。

$$(1) 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + 6\frac{3}{4} + \dots \text{至 } 23 \text{ 項。} \quad \text{答 } 621,$$

$$(2) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \dots \text{至 } 12 \text{ 項。} \quad \text{答 } -16.$$

$$(3) (a+9b) + (a+7b) + (a+5b) + \dots \text{至 } 10 \text{ 項。} \quad \text{答 } 10a.$$

$$(4) \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{n-3}{n} + \dots \text{至 } n \text{ 項。} \quad \text{答 } \frac{1}{2}(n-1).$$

[解] (1) $a = 2\frac{1}{4}, d = 2\frac{1}{4}.$

$$\therefore S = \frac{23}{2} \left\{ 2 \times 2\frac{1}{4} + (23-1)2\frac{1}{4} \right\} = 621.$$

$$(2) S = \frac{12}{2} \left\{ 2 \times \frac{1}{2} + (12-1) \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} = -16.$$

$$(3) S = \frac{10}{2} \{ 2(a+9b) + (10-1)(-2b) \} = 10a.$$

$$(4) S = \frac{n}{2} \left\{ 2\frac{n-1}{n} + (n-1) \left(-\frac{1}{n} \right) \right\} = \frac{1}{2}(n-1).$$

12. A. P. 之第 7 項 15 及第 21 項 8. 求最初 13 項之和。 答 195.

[解] $a+6d=15, a+20d=8. \therefore d=-\frac{1}{2}, a=18.$

由是所求之和 $= \frac{13}{2} \left\{ 2 \times 18 - (13-1) \frac{1}{2} \right\} = 195.$

13. 有第 11 項為 20 之 A. P. 求其第 21 項之和。 答 420.

[解] $a+10d=20.$

$$S = \frac{21}{2} \{ 2a + (21-1)d \} = 21 \{ a + 10d \} = 21 \{ 20 \} = 420.$$

14. 奇數項之 A. P. 其初項, 中央項, 末項, 亦為 A. P..

[證] 項數為 $2n+1$. 初項為 a . 中央項為 m . 末項為 l .

$$\text{則 } m = a + (n+1-1)d = a + nd, \quad l = a + (2n+1-1)d = a + 2nd.$$

由是 $a, a+nd, a+2nd$ 為 A. P..

15. 8, 16, 24, 之級數若干項之和加 1. 則可以奇數之平方數表之。

〔證〕 $S = \frac{n}{2} \{2 \times 8 + (n-1)8\} = 4n + 4n^2$.

由是 $S+1 = 1 + 4n + 4n^2 = (1+2n)^2$.

16. 取級數 $15+11+7+\dots\dots$ 若干項。則其和為 35。 答 5。

〔解〕 $35 = \frac{n}{2} \{2 \times 15 + (n-1)(-4)\}$. $\therefore 2n^2 - 17n + 35 = 0$.

即 $(n-5)(2n-7) = 0$. $\therefore n=5$ 而 $n = \frac{7}{2}$ 不用。

17. A. P. 前 5 項之和為 -5。及第 6 項為 -13。求公差如何。 答 -4。

〔解〕 $-5 = \frac{5}{2} \{2a + (5-1)d\}$ 及 $-13 = a + 5d$ 。從此兩方程式消去 a 求 d 之同數為 -4。

18. 於 200 及 400 間之各數。可以 7 整除者。求其諸數之和。

〔解〕 200 以 7 除。則餘 4. $\therefore 200 = 7$ 之倍數 + 4。

由是 $203 = 7$ 之倍數 + $7 = 7$ 之倍數。

又 400 以 7 除。則餘 1. $\therefore 400 - 1 = 399 = 7$ 之倍數。

由是 203, 210, 217, 399 之 A. P. 為所求之和。

故 $399 = 203 + (n-1)7$. $\therefore n = 29$ 。

由是 $S = \frac{29}{2} (203 + 399) = 8729$ 。

19. 於 A. P. 之級數。每 n 項合為一羣。則其諸羣亦為 A. P.。而其公差與原級數之公差之比。為 $n^2 : 1$ 。

〔證〕 $a, a+d, a+2d, \dots\dots$ 為原級數。每 n 項合為一羣。則

第一羣 (A) $= \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\} = an + \frac{n}{2}(n-1)d$ 。

第二羣 (B) $= \frac{n}{2} \{2(a+nd) + (n-1)d\} = an + \frac{n}{2}(n-1)d + n^2d$ 。

第三羣 (C) $= \frac{n}{2} \{2(a+2nd) + (n-1)d\} = an + \frac{n}{2}(n-1)d + 2n^2d$ 。

由是 A, B, C, 之公差為 n^2d 。故與 d 之比為 $n^2 : 1$ 。

等比級數

224. 定理 級數中任一項。與其前項之比恆相同者。謂之等比級數 (Geometrical Progression)。

例如 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \dots\dots\dots$ 則 $a, b, c, d \dots\dots\dots$ 爲等比級數。略記爲 G. P.

G. P. 各項與其前項之比。謂之公比 (Common Ratio)。

下之各項爲等比級數。

$$1, \quad 3, \quad 9, \quad 27, \quad \dots\dots\dots$$

$$4, \quad -2, \quad 1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \dots\dots\dots$$

$$a, \quad a^3, \quad a^5, \quad a^7, \quad \dots\dots\dots$$

此第一之公比爲 3。第二之公比爲 $-\frac{1}{2}$ 。第三之公比爲 a^2 。

225. 等比級數之第一項爲 a 。公比爲 r 。則

第 2 項爲 ar 。

第 3 項爲 ar^2 。

第 4 項爲 ar^3 。

以下準此。而 r 指數。恆比項數少 1。

故 第 n 項 $= ar^{n-1}$ 。

故知 G. P. 之初項及公比。則各項皆可求得。

例如初項爲 2。公比爲 3。則 G. P. 之第 6 項 $= 2 \times 3^5$ 及第 20 項 $= 2 \times 3^{19}$ 。

226. 知等比級數之任意兩項 則此級數即可決定。

例如知第 m 項爲 a 。及第 n 項爲 β 。則設 a 爲初項。 r 爲公比。即得

$$ar^{m-1} = a, \quad ar^{n-1} = \beta.$$

從此兩方程式 $r^{m-n} = \frac{a}{\beta}$ 。

$$\therefore r = \left(\frac{a}{\beta}\right)^{\frac{1}{m-n}} = a^{\frac{1}{m-n}} \beta^{\frac{-1}{m-n}}.$$

$$\text{又 } a = \frac{a}{r^{m-1}} = ar^{1-m} = a \left(a^{\frac{1}{m-n}} \beta^{\frac{1}{n-m}} \right)^{1-m} = a^{\frac{1-n}{m-n}} \beta^{\frac{1-m}{n-m}}.$$

[例] G. P. 之第3項爲18, 第5項爲 $40\frac{1}{2}$. 試求其初項.

設初項爲 a , 公比爲 r . 則

$$ar^2 = 18, \quad ar^4 = 40\frac{1}{2}. \quad \therefore r^2 = \frac{9}{4}.$$

$$\text{由是 } a = \frac{18}{r^2} = 18 \times \frac{4}{9} = 8.$$

故此級數爲 8, 12, 18,

227. 三數量爲 G. P.. 則其中數謂爲他兩數之等比中項 (Geometric Mean).

a, b, c 爲 G. P.. 則由定義得 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

$$\text{由是 } b^2 = ac. \quad \therefore b = \pm \sqrt{ac}.$$

故已知兩數量之等比中項, 等於其積之平方根.

若干數量爲 G. P.. 則其中間之諸數, 謂爲兩外項之等比諸中項.

如 a, b, c, d, e 爲 G. P.. 則 b, c, d 爲 a, e 之等比三中項.

凡已知兩數量之間, 可插入若干之等比中項.

如 a 及 b 爲已知二數量, 於其間插入 n 項之等比中項, 則 b 爲 G. P. 之第 $n+2$ 項. 故

$$ar^{n+2-1} = b. \quad \therefore r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

由是此級數爲 $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n, b$.

即其所求諸中項爲 ar, ar^2, \dots, ar^n .

$$\text{即 } a \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}, \quad a \sqrt[n+1]{\frac{b^2}{a^2}}, \quad \dots, \quad a \sqrt[n+1]{\frac{b^n}{a^n}}.$$

$$\text{即 } \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b}{a}}, \quad \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b^2}{a^2}}, \quad \dots, \quad \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b^n}{a^n}}.$$

$$\text{即 } \frac{a^{\frac{n}{n+1}} b^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{n}{n+1}} b^{\frac{1}{n+1}}}, \quad \frac{a^{\frac{n-1}{n+1}} b^{\frac{2}{n+1}}}{a^{\frac{n-1}{n+1}} b^{\frac{2}{n+1}}}, \quad \dots, \quad \frac{a^{\frac{1}{n+1}} b^{\frac{n}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}} b^{\frac{n}{n+1}}}.$$

例如求 3 及 96 之間之等比四中項。則項數為 $4+2=6$ 。公比為 r 。
 即得 $96=3r^5$ 。 $\therefore r=\sqrt[5]{32}=2$ 。

由是得 3, 6, 12, 24, 48, 96。

即所求之四中項為 6, 12, 24, 48。

228. 總和 求若干項等比級數之和。

a 為初項, r 為公比, n 為項數。而第 n 項為 l 。則

$$l = ar^{n-1}.$$

又 S 為所求之總數。則

$$S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

以 r 乘之。則

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n.$$

由減法得 $S - rS = a - ar^n$ 。 $\therefore S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

[例] 求級數 3, 6, 12, 至 10 項之和。

$a=3$, $r=2$, $n=10$ 。則由前之公式。得

$$S = \frac{3(1-2^{10})}{1-2} = 3(2^{10}-1) = 3069.$$

229. 無窮級數 由前章之公式。

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

若 r 為常分數。則不論正或負。在 n 增大時。 r^n 之絕對值必從而減小。故 n 之值增至無窮大。 r^n 即可減至無限小。

由是 r 若小於 1。則其項數多至無窮。而其和數 S 與 $\frac{a}{1-r}$ 之差甚為微小。

即 n 為無窮大。則 r^n 可為 0。而 $\frac{ar^n}{1-r} = 0$ 。

$$\text{故 } S = \frac{a}{1-r}.$$

故等比級數 $a + ar + ar^2 + \dots$ 。若 r 之值小於 1。則其無窮項數之和為 $\frac{a}{1-r}$ 。

例題

1. 求級數 $9-6+4\dots\dots$ 之無窮項之和。 答 $\frac{27}{5}$ 。

[解] $a=9, r=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}, S=\frac{a}{1-r}=\frac{9}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{27}{5}$ 。

2. 等比級數無窮項之和為 $4\frac{1}{2}$ ，第二項為 -2 ，則其級數如何。 答 $6, -2, \frac{2}{3}\dots\dots$

[解] $ar=-2$ ，及 $4\frac{1}{2}=\frac{a}{1-r}$ 。由是 $9r^2-9r-4=0$ 。

$\therefore r=-\frac{1}{3}$ 或 $r=\frac{4}{3}$ 因 $r=\frac{4}{3}>1$ 為不合理。

故 $r=-\frac{1}{3}, a=-\frac{2}{r}=6$ 。

3. G. P. 之第3項2，第6項 $-\frac{1}{4}$ ，則第10項如何。 答 $\frac{1}{64}$ 。

[解] $ar^2=2, ar^5=-\frac{1}{4} \therefore r^3=-\frac{1}{8} \therefore r=-\frac{1}{2}$ 。

又 $a=\frac{2}{r^2}=8$ 。由是 $ar^9=8\left(-\frac{1}{2}\right)^9=-\frac{1}{64}$ 。

4. 試於8及-1之間，插入等比兩中項，又於2及18之間，插入等比三中項。 答 $-4, 2$ ，又 $\pm 2\sqrt{3}, 6, \pm 6\sqrt{3}$ 。

[解] $8r^2=-1 \therefore r=-\frac{1}{2} \therefore 8\times-\frac{1}{2}=-4, -4\times-\frac{1}{2}=2$ 。

又 $2r^4=18 \therefore r=\pm\sqrt{3} \therefore \pm 2\sqrt{3}, 6, \pm 6\sqrt{3}$ 。

5. G. P. 之各項，以同數乘之，亦為 G. P.。

[證] $a, ar, ar^2\dots\dots$ 以 x 乘之，則

$ax, (ax)r, (ax)r^2\dots\dots$ 即亦為 G. P.。

6. G. P. 各項之反商亦為 G. P.。

[證] 依 $a, ar, ar^2\dots\dots$ 之反商為 $\frac{1}{a}, \frac{1}{a(r)}, \frac{1}{a(r)^2}\dots\dots$ 即亦為 G. P.。

7 G.P. 之連續各二項。插入同數之中項。則其式亦為 G.P.。

(證) $a, b, c, d \dots$ 為 G.P.。則 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$ 。而各兩項間。插入等比 n 中項。其比為 r 。則 $r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n+1]{\frac{c}{b}} = \dots$ 。各式皆同。故如題云云。

8. 求下列各式之和。

(1) $12+9+6\frac{3}{4}+\dots$ 至 20 項。 答 $48\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}$ 。

(2) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\dots$ 至 6 項。 答 $\frac{133}{243}$ 。

(3) $4+.8+.16+\dots$ 至無窮。 答 5。

(解) (1) $a=12, r=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ 。

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{12\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{3}{4}} = 48\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}。$$

(2) $a=1, r=-\frac{2}{3}$ 。 $\therefore S = \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^6}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3^6-2^6}{3^6 \times 5} = \frac{133}{243}$ 。

(3) $a=4, r=\frac{.8}{4}=.2, S = \frac{a}{1-r} = \frac{4}{1-.2} = 5$ 。

9. 等比級數諸數量之連乘積。等於 $(gl)^{\frac{n}{2}}$ 。但 n 為項數。 g 及 l 為諸數量中之最大及最小者。試證之。

(證) r 為公比。則 $l, lr, lr^2, \dots, lr^{n-1}$ 為諸數量。 $g = lr^{n-1}$ 而連乘積為 $l \cdot lr \cdot lr^2 \dots lr^{n-1}$ 。即 $l^n r^{1+2+3+\dots+(n-1)}$ 即 $l^n r^{\frac{n-1}{2}(1+n-1)}$ 即 $l^n r^{\frac{n}{2}(n-1)}$ 。即 $(l^2 r^{n-1})^{\frac{n}{2}}$ 即 $(lr^{n-1}l)^{\frac{n}{2}}$ 即 $(gl)^{\frac{n}{2}}$ 。

10. 求證 G.P. 諸數量之積。等於中項之 n 方乘。但 n 為項數且為奇數。

(證) 中項為 m 。則依前例設 $gl = m^2$ 。而諸數量之連乘積為 $\frac{n}{2} = (m^2)^{\frac{n}{2}} = m^n$ 。

11. G.P. 之最初 10 項之和。等於最初 5 項之和之 244 倍。求公比。 答 3。

[解] $\frac{a(1-r^{10})}{1-r} = 244 \times \frac{a(1-r^5)}{1-r}$ $\therefore 1-r^{10} = 244(1-r^5)$.

$\therefore 1+r^5 = 244$ $\therefore r = \sqrt[5]{243} = 3$.

12. G.P. 之公比小於 $\frac{1}{2}$ 。則各項大於以下諸項之和。試證之。

[證] 任設一項為 ar^m 。則其以下諸項之和為 $ar^{m+1} + ar^{m+2} + \dots$

即 $\frac{ar^{m+1}}{1-r}$ 。而 $ar^m - \frac{ar^{m+1}}{1-r} = \frac{ar^m(1-2r)}{1-r}$ 。

但 $r < \frac{1}{2}$ $\therefore 1-2r$ 為正。 $\therefore ar^m > \frac{ar^{m+1}}{1-r}$ 。

調和級數

230. 定理 級數中任意連續三項之差之比。等於第一與第三之比。謂之調和級數 (Harmonical Progression)。

例如 $a-b : b-c = a : c$ 。

$b-c : c-d = b : d$ 。

由是 a, b, c, d, \dots 為調和級數。略記為 H. P.

a, b, c 為調和級數。則由定義。

$a-b : b-c = a : c$ 。

$\therefore c(a-b) = a(b-c)$ 。

由是兩邊以 abc 除之。則得 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$ 。

由是 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 為等差級數。

故調和級數之反商為等差級數。

231. 調和中項 a, b, c 為調和級數。則 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 為等差級數。

由是 $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ $\therefore b = \frac{2ac}{a+c}$ 。

故兩數量之調和中項 (Harmonic Mean)。等於其和數除其積之 2 倍。

設 A, G, H. 爲 a 及 b 兩數量之等差, 等比, 調和之中項。則

$$A = \frac{1}{2}(a+b), \quad G = \sqrt{ab}, \quad H = \frac{2ab}{a+b}.$$

$$\therefore AH = \frac{1}{2}(a+b) \times \frac{2ab}{a+b} = ab = G^2.$$

故任意兩數間之等比中項。又爲其兩數之等差中項, 與調和
中項之等比中項。

232. 定理 兩不等正數量之等差中項。恆大於其等比中
項。

設 a 及 b 爲兩正數。則

$$\frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \text{ 爲正.}$$

$$\text{由是 } \frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}.$$

又兩不等正數量之等比中項。恆大於其調和中項。

$$\text{何則 } \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \text{ 爲正.}$$

$$\text{由是 } \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

233. 插入項 凡任意兩項之間。可插入 n 個調和中項。

先於 $\frac{1}{a}$ 及 $\frac{1}{b}$ 之間。求插入 n 個等差中項。則依 222 章。得

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right), \quad \frac{1}{a} + \frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \dots \dots \dots \text{而由此諸中}$$

項。求其反商。即爲所求之調和中項如下。

$$\frac{(n+1)ab}{nb+a}, \quad \frac{(n+1)ab}{(n-1)b+2b} \dots \dots \dots \frac{(n+1)ab}{b+na}$$

234. 求調和級數之總和 不能作一公式示之。

[餘論] 凡級數三項。其相連兩項之差之比爲等差級數。可
僅以第一項表之。至等比級數。則已進一步。而關係及於第二項。
至調和級數。則更進一步。而關係及於第三項。

例如有 a, b, c 三數。

此三數爲等差級數。則 $a-b=b-c$ 。

$$\therefore \frac{a-b}{b-c} = 1 = \frac{a}{a}$$

又此三數爲等比級數。則 $b^2=ac$ 。故 $ab-b^2=ab-ac$ 。

即 $b(a-b)=a(b-c)$ 。 $\therefore \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$ 。

又如爲調和級數。則依 230 章之定義。得

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$$

由是等差、等比、調和之三級數。乃極明瞭。試整列其次序如下。

$$a-b : b-c :: a : a \dots\dots\dots (\text{等差})$$

$$a-b : b-c :: a : b \dots\dots\dots (\text{等比})$$

$$a-b : b-c :: a : c \dots\dots\dots (\text{調和})$$

例 題 二 十 一

1. a, b, c 爲 A. P.。則 $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ 爲 A. P.。

[證] $a-b=b-c$ 。而 $a^2(b+c) - b^2(c+a) = ab(a-b) + c(a^2-b^2)$
 $= (a-b)(ab+ca+bc) = (b-c)(ab+ca+bc)$
 $= bc(b-c) + a(b^2-c^2) = b^2(c+a) - c^2(a+b)$ 。

2. 四數爲 A. P.。其平方之和爲 120。第一與第四之積。比他兩數之積少 8。求四數。 答 2, 4, 6, 8 或 -2, -4, -6, -8。

[解] $x-3y, x-y, x+y, x+3y$ 爲四數。則

$$(x-3y)^2 + (x-y)^2 + (x+y)^2 + (x+3y)^2 = 120。$$

即 $2(x^2+9y^2) + 2(x^2+y^2) = 120$ 。 $\therefore x^2+5y^2=30$ 。

又 $(x-3y)(x+3y) = (x-y)(x+y) - 8$ 。 $\therefore 8y^2=8$ 。 $\therefore y=\pm 1$ 。

由是 $x^2=30-5y^2=25$ 。 $\therefore x=\pm 5$ 。

\therefore 所求之四數爲 $\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$ 。

3. a, b, c 爲 A. P.。 b, c, d 爲 H. P.。求證 $a : b = c : d$ 。

[證] $a-b=b-c$ 及 $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c}$ 。 $\therefore \frac{b-c}{bc} = \frac{c-d}{cd}$ 。

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad \therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

4. 三數爲 G. P.。其和爲 14，其平方之和爲 84。求各數

答 2, 4, 8.

〔解〕 三數爲 x^2, xy, y^2 。則 $x^2 + xy + y^2 = 14$ 。

$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 84$ 。由此通同方程式。可得 x, y 。

5. 求證 a, b, c 爲等差級數。 x 爲 a 及 b 之等比中項。 y 爲 b 及 c 之等比中項。則 x^2, b^2, y^2 爲等差級數。

〔證〕 $a - b = b - c$, $x^2 = ab$, $y^2 = bc$, $2b = c + a$ 。

又 $x^2 + y^2 = b(a + c) = 2b^2$ 。 $\therefore x^2, b^2, y^2$ 爲 A. P.。

6. a, b, c 爲調和級數。則 $\frac{a}{b+c-a}$, $\frac{b}{c+a-b}$, $\frac{c}{a+b-c}$ 亦爲調和級數。試證之。

〔證〕 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ 。故以 $a+b+c$ 乘之。則

$$\frac{a+b+c}{a} - \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{b} - \frac{a+b+c}{c}$$

即 $\left(\frac{a+b+c}{a} - 2\right) - \left(\frac{a+b+c}{b} - 2\right) = \left(\frac{a+b+c}{b} - 2\right) - \left(\frac{a+b+c}{c} - 2\right)$ 。

即 $\frac{b+c-a}{a} - \frac{c+a-b}{b} = \frac{c+a-b}{b} - \frac{a+b-c}{c}$ 。

$\therefore \frac{a}{b+c-a}$, $\frac{b}{c+a-b}$, $\frac{c}{a+b-c}$ 爲 H. P.。

7. a, b, c, d 爲調和級數。則 $3(b-a)(d-c) = (c-b)(d-a)$ 。

〔證〕 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d} = \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) \right\}$
 $= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)$ 。 即 $\frac{b-a}{ab} = \frac{c-b}{bc} = \frac{d-c}{cd} = \frac{d-a}{3ad}$ 。

$\therefore \frac{(b-a)(d-c)}{ab \times cd} = \frac{(c-b)(d-a)}{bc \times 3ad}$ 。 $\therefore 3(b-a)(d-c) = (c-b)(d-a)$ 。

8. a, b, c 爲調和級數。則 $\frac{2}{b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}$ 。

〔證〕 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ 。 $\therefore \frac{b-a}{ab} = \frac{b-c}{bc}$ 。

$\therefore \frac{a}{b-a} = -\frac{c}{b-c}$ 。 即 $\frac{a}{b-a} + \frac{c}{b-c} = 0$ 。

$$\therefore \frac{a}{b-a} + 1 + \frac{c}{b-c} + 1 = 2, \quad \text{即} \quad \frac{b}{b-a} + \frac{b}{b-c} = 2.$$

9. a, b, c 爲 H. P. 則 $\frac{b+a}{b-a} + \frac{b+c}{b-c} = 2$. 試證之.

〔證〕 由前例 $\frac{a}{b-a} + \frac{c}{b-c} = 0$, 及 $\frac{b}{b-a} + \frac{b}{b-c} = 2$.

相加. 則 $\frac{b+a}{b-a} + \frac{b+c}{b-c} = 2 + 0 = 2$.

10. a, b, c 爲 A. P. 而 b, c, d 爲 G. P. c, d, e 爲 H. P. 則 a, c, e 爲 G. P. 試證之.

〔證〕 $2b = a + c, c^2 = bd, d = \frac{2ce}{c+e}$. 連乘之. 則

$$2bc^2d = (a+c)bd \frac{2ce}{c+e}. \quad \text{即} \quad c = \frac{e(a+c)}{c+e}.$$

$$\therefore c(c+e) = e(a+c). \quad \therefore c^2 = ae.$$

11. 求證 a, b, c 爲 H. P. 則 $a - \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, c - \frac{b}{2}$ 爲 G. P.

〔證〕 $b = \frac{2ac}{a+c}. \quad \therefore \frac{b}{2}(a+c) = ac$. 即 $0 = -\frac{b}{2}(a+c) + ac$.

$$\therefore \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2}(a+c) + ac = \left(a - \frac{b}{2}\right)\left(c - \frac{b}{2}\right).$$

由是 $a - \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, c - \frac{b}{2}$ 爲 G. P.

12. 若 a, b, c 爲 H. P. 則 $a, a-c, a-b$ 及 $c, c-a, c-b$ 亦爲 H. P. 試證之.

〔證〕 由定義 $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$. 即 $\frac{c}{b-c} = \frac{a}{a-b}$.

即 $\frac{a - (a-c)}{(a-c) - (a-b)} = \frac{a}{a-b}. \quad \therefore a, a-c, a-b$ 爲 H. P.

又 $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{c-b}$. 即 $\frac{c - (c-a)}{(c-a) - (c-b)} = \frac{c}{c-b}. \quad \therefore c, c-a, c-b$ 爲 H. P.

13. x, a_1, a_2, y 爲 A. P. 又 x, g_1, g_2, y 爲 G. P. 及 x, h_1, h_2, y 爲 H. P. 則 $\frac{g_1 g_2}{h_1 h_2} = \frac{a_1 + a_2}{h_1 + h_2}$. 試證明之.

[證] $x+y=a_1+a_2$, $xy=g_1g_2$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}. \quad \text{即} \quad \frac{y+x}{xy} = \frac{h_1+h_2}{h_1h_2}. \quad \therefore \frac{a_1+a_2}{g_1g_2} = \frac{h_1+h_2}{h_1h_2}.$$

14. G.P. 之第一項, 第二項及第三項之和, 與第三項, 第四項及第五項之和之比為 1:4, 而七項為 384, 則此級數如何.

答 6, ± 12 , 24,

[解] $\frac{a+ar+ar^2}{ar^2+ar^3+ar^4} = \frac{1}{4}$ 及 $ar^6 = 384$.

$$\therefore \frac{a(1+r+r^2)}{ar^2(1+r+r^2)} = \frac{1}{4}. \quad \therefore \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore r = \pm 2, \quad a = \frac{384}{r^6} = \frac{384}{64} = 6.$$

15. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為 H.P., 則

$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_{n-1}a_n = (n-1)a_1a_n$. 試證明之.

$$[\text{證}] \quad \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} = \dots = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = K.$$

$$\text{則} \quad \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) = (n-1)K.$$

$$\text{即} \quad (n-1)K = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}. \quad \therefore K = \frac{a_n - a_1}{(n-1)a_1a_n}.$$

$$\text{又} \quad K = \frac{a_2 - a_1}{a_1a_2} = \frac{a_3 - a_2}{a_2a_3} = \frac{a_4 - a_3}{a_3a_4} = \dots = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}a_n} = \frac{a_n - a_1}{(n-1)a_1a_n}.$$

$$\text{由是} \quad \frac{(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n-1})}{a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_{n-1}a_n} = \frac{a_n - a_1}{(n-1)a_1a_n}.$$

$$\text{即} \quad \frac{a_n - a_1}{a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n} = \frac{a_n - a_1}{(n-1)a_1a_n}.$$

$$\therefore a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n = (n-1)a_1a_n.$$

16. a, x, y, b 為等差級數, a, u, v, b 為調和級數. 則 $xv = yu = ab$. 試證之.

[證] 由 222 章 a, b 間之等差中項為 $a + \frac{b-a}{3}$, $a + 2\frac{b-a}{3}$.

$$x = a + \frac{b-a}{3} = \frac{1}{3}(2a+b), \quad y = a + 2\frac{b-a}{3} = \frac{1}{3}(a+2b).$$

又 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ 間之等差中項爲 $\frac{1}{u} = \frac{a+2b}{3ab}$, $\frac{1}{v} = \frac{2a+b}{3ab}$.

即 $u = \frac{3ab}{a+2b}$, $v = \frac{3ab}{2a+b}$.

由是 $xv = \frac{1}{3}(2a+b) \frac{3ab}{2a+b} = ab$,

$yu = \frac{1}{3}(a+2b) \frac{3ab}{a+2b} = ab$.

17. 有三數爲等差級數。而其兩外項之積。爲中項之 5 倍。而兩大數之和。等於最小數之 8 倍。求各數。 答 3, 9, 15.

〔解〕 設三數爲 $x-y$, x , $x+y$ 。則 $(x-y)(x+y) = 5x$ 。即 $x^2 - 5x = y^2$ 。

又 $x + (x+y) = 8(x-y)$ 。即 $y = \frac{2}{3}x$ 。

$\therefore \frac{4}{9}x^2 = x^2 - 5x$ 。 $\therefore x = 9$, 而 $y = 6$ 。

18. $\frac{a+b}{1-ab}$, b , $\frac{b+c}{1-bc}$ 爲 A. P.。則 a , $\frac{1}{b}$, c 爲 H. P.。試證明之。

〔證〕 $\frac{a+b}{1-ab} - b = b - \frac{b+c}{1-bc}$ 。即 $\frac{a(1+b^2)}{1-ab} = -\frac{c(1+b^2)}{1-bc}$ 。

$\therefore a(1-bc) = -c(1-ab)$ 。 $\therefore 2abc = c+a$ 。

即 $2b = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ 。 $\therefore \frac{1}{a}$, b , $\frac{1}{c}$ 爲 A. P.。

$\therefore a$, $\frac{1}{b}$, c 爲 H. P.。

19. a, b, c 爲 A. P.。及 a^2, b^2, c^2 爲 H. P.。則 $-\frac{1}{2}a, b, c$ 爲 G. P.。

〔證〕 $a-b = b-c$ 及 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$ 。

由是 $c^2(b^2 - a^2) = a^2(c^2 - b^2)$ 。即 $c^2(a+b)(a-b) = a^2(b+c)(b-c)$ 。

$\therefore c^2(a+b)(a-b) = a^2(b+c)(a-b)$ 。

$\therefore a-b = 0$, 或 $c^2(a+b) = a^2(b+c)$, $a-b = 0$ 。則 $b-c$ 亦爲 0。

$\therefore a = b = c$ 。

又 $c^2(a+b) = a^2(b+c)$ 。則 $ac(c-a) + b(c^2 - a^2) = 0$ 。而 $c-a = 0$ 與前同。故 $ac + b(c+a) = 0$ 。而 $c+a = 2b$ 。故 $ac + 2b^2 = 0$ 。

$$\therefore b^2 = -\frac{1}{2}ac, \quad \therefore -\frac{1}{2}a, b, c \text{ 爲 G. P.}$$

20. 有 a, b 爲最初兩項之等差級數及調和級數。 x 爲等差級數之任意一項。 y 爲相當之調和級數之一項。則 $x-a : y-a = b : y$ 。試證之。

$$[\text{證}] \quad x = a + (n-1)d. \quad \text{則} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{a} + (n-1)D.$$

$$\text{但} \quad d = b - a, \quad D = \frac{1}{b} - \frac{1}{a},$$

$$x = a + (n-1)(b-a), \quad \text{即} \quad x - a = (n-1)(b-a),$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + (n-1)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right), \quad \text{即} \quad \frac{b(y-a)}{y} = (n-1)(b-a).$$

$$\text{由是} \quad x - a = \frac{b(y-a)}{y}. \quad \therefore x - a : y - a = b : y.$$

21. a 爲 b 及 c 間之等差中項。 b 爲 a 及 c 間之等比中項。則 c 爲 a 及 b 間之調和中項。試證之。

$$[\text{證}] \quad 2a = b + c, \quad b^2 = ac, \quad \therefore 2a = \frac{ac}{b} + c. \quad \therefore c = \frac{2ab}{a+b}.$$

22. 自然數區分爲各羣。如 $1, |2, 3, |4, 5, 6, |7, 8, 9, 10, | \dots$ 。則第 K 羣之和爲 $\frac{1}{2}k(k^2+1)$ 。試證之。

[\text{證}] 如第 2 羣之末項爲 $\frac{1}{2} \cdot 2(1+2) = 3$ 。第 3 羣之末項爲 $\frac{1}{2} \cdot 3(3+1) = 6$ 。則第 K 羣之末項爲 $\frac{1}{2}k(1+k)$ 。

$$\text{故第 } K \text{ 羣之和爲} \quad \frac{1}{2}k \left\{ 2 \times \frac{1}{2}k(1+k) + (k-1)(-1) \right\} = \frac{1}{2}k(k^2+1).$$

23. A. P. 及 H. P. 之初項爲 a 。末項爲 l 。項數爲 n 。則 A. P. 之第 $r+1$ 項。及 H. P. 之第 $n-r$ 項之積。與 r 無關係。

$$[\text{證}] \quad \text{從} \quad l = a + (n-1)d, \quad d = \frac{l-a}{n-1}.$$

$$\text{又從} \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{a} + (n-1)D, \quad D = \frac{-(l-a)}{al(n-1)}.$$

$$\text{但 A. P. 之第 } r+1 \text{ 項} = a + rd = a + \frac{(l-a)r}{n-1} = \frac{a(n-1) + (l-a)r}{n-1}$$

H. P. 之第 $n-r$ 項 $= 1 / \left\{ \frac{1}{a} + (n-r-1) \frac{-(l-a)}{al(n-1)} \right\} = \frac{al(n-1)}{a(n-1) + (l-a)r}$

由是此兩項之積 $= \frac{a(n-1) + (l-a)r}{n-1} \times \frac{al(n-1)}{a(n-1) + (l-a)r} = al$.

24. 從 A. P. 之已知一項, 至等距離之各兩項之積, 取其逐次之差, 則亦為 A. P., 試證之。

[證] d 為公差, 已知一項為 a , 則 $a-nd$, 及 $a+nd$ 為與 a 等距離之兩項, 此積為 $(a-nd)(a+nd) = a^2 - n^2d^2$.

逐次積為 $a^2 - (n+1)^2d^2$, $a^2 - (n+2)^2d^2$, $a^2 - (n+3)^2d^2$.

而此差為 $(2n+1)d^2$, $(2n+3)d^2$, $(2n+5)d^2$

故亦為 A. P.

25. S_n, S_{2n}, S_{3n} 為 n 項, $2n$ 項, $3n$ 項之 G. P. 之和, 則 $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$. 試證之。

[證] $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $S_{2n} = S_n + \frac{ar^n(1-r^n)}{1-r}$.

即 $S_{2n} - S_n = r^n S_n$, 又 $S_{3n} = S_{2n} + \frac{ar^{2n}(1-r^n)}{1-r}$.

即 $S_{3n} - S_{2n} = r^{2n} S_n$, $\therefore (S_{2n} - S_n)^2 = r^{2n} S_n^2 = (S_{3n} - S_{2n}) S_n$.

26. a, b, c 皆為正數, 無論為 A. P. 為 G. P. 為 H. P., 若 n 為任意之正整數, 則 $a^n + c^n > 2b^n$. 試證之。

[證] $a < b < c$ 為 A. P., 則 $c-b = b-a = d$.

$a^n + c^n - 2b^n = (c^n - b^n) - (b^n - a^n)$

$= d \{ (c^{n-1} + c^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) - (b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + a^{n-1}) \}$.

此式之 $\{ \}$ 內為正, $\therefore a^n + c^n > 2b^n$.

又 H. P. 為 A. P. 之反商, 故知 A. P. 亦能合理。

又為 G. P., 則從 $b^2 = ac$, $a^n + c^n - 2b^n = a^n + c^n - 2a^{\frac{n}{2}}c^{\frac{n}{2}} = (a^{\frac{n}{2}} - c^{\frac{n}{2}})^2$. 其數為正, 故 $a^n + c^n > 2b^n$.

27. P, Q, R 為 (1) A. P., (2) G. P., (3) H. P. 之第 p 項, 第 q 項, 第 r 項, 求證 (1) $P(q-r) + Q(r-p) + R(p-q) = 0$.

(2) $P^{q-r}Q^{r-p}R^{p-q} = 1$.

(3) $QR(a-r) + RP(r-p) + PQ(p-q) = 0$.

(證) (1) $P = a + (p-1)d$, $Q = a + (q-1)d$, $R = a + (r-1)d$,
 $P(q-r) + Q(r-p) + R(p-q)$
 $= a\{(q-r) + (r-p) + (p-q)\} + d\{(p-1)(q-r) + (q-1)(r-p) + (r-1)(p-q)\}$
 $= a\{0\} + d\{0\} = 0.$

(2) $P = ar^{p-1}$, $Q = ar^{q-1}$, $R = ar^{r-1}$.
 $P^{q-r} + Q^{r-p} + R^{p-q} = a^{(q-r)(p-1) + (r-p)(q-1) + (p-q)(r-1)} r^{(q-r)(p-1) + (r-p)(q-1) + (p-q)(r-1)} = a^0 r^0 = 1.$

(3) $\frac{1}{P} = \frac{1}{a} + (p-1)d$, $\frac{1}{Q} = \frac{1}{a} + (q-1)d$, $\frac{1}{R} = \frac{1}{a} + (r-1)d$.
 $\frac{q-r}{P} + \frac{r-p}{Q} + \frac{p-q}{R} = \frac{1}{a}\{(q-r) + (r-p) + (p-q)\}$
 $+ d\{(p-1)(q-r) + (q-1)(r-p) + (r-1)(p-q)\} = 0.$

$\therefore QR(q-r) + RP(r-p) + PQ(p-q) = 0.$

28. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 爲 H. P. 則

$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \dots + a_n}, \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \dots + a_n}, \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}$ 亦爲 H.P.

(證) $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} = \dots = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$. 以 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 乘之。則

$$\left(1 + \frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{a_1}\right) - \left(1 + \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_n}{a_2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_n}{a_2}\right) - \left(1 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_3} = \dots\right)$$

即 $\frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{a_1} - \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_n}{a_2}$
 $= \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_n}{a_2} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_3} = \dots$

故此反商爲 H. P.

29. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 皆爲實數。而

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) = (a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n)^2.$$

則 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 爲 G. P.

(證) 解已知方程式之括弧。消去 $a_1^2 a_2^2, a_2^2 a_3^2, \dots$ 之項。再括之。

$$\text{則 } (a_1 a_n - a_2 a_{n-1})^2 + (a_2 a_{n-2} - a_3 a_{n-3})^2 + \dots = 0.$$

依題意 $a_1 a_n - a_2 a_{n-1} = 0, a_2 a_{n-2} - a_3 a_{n-3} = 0, \dots$

$$\therefore a_1 a_n = a_2 a_{n-1}, a_2 a_{n-2} = a_3 a_{n-3} \dots\dots\dots$$

由是 $a_1, a_2, a_3, \dots\dots\dots a_n$ 爲 G. P.

30. 任意之偶數平方 $(2n)^2$ 等於 A. P. 之 n 項之和。又任意之奇數平方 $(2n+1)^2$ 等於 A. P. 若干項之和加 1。試證之。

[證] $s = \frac{m}{2} \{2a + (m-1)d\} = \frac{d}{2} m^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right) m$ 。而 $a = \frac{d}{2}$ 。則

$$s = am^2 = 4n^2. \quad \therefore m = n, a = 4, d = 8.$$

由是 $4+12+20+\dots\dots\dots$ 至 n 項 $= 4n^2$ 。

次 $s+1 = \frac{d}{2} m^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right) m + 1$ 爲平方數。則

$$\left(a - \frac{d}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{d}{2} \times 1 = d. \quad \therefore a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{2d}, d = 2, \text{ 則}$$

$$a = 1 \pm 2 = 3, \text{ 或 } -1.$$

$$\text{由是 } s+1 = \left(m \sqrt{\frac{d}{2}} + 1\right)^2 = (m+1)^2 = (2n+1)^2. \quad \therefore m = 2n.$$

由是 $(3+5+7+9+\dots\dots\dots$ 至 $2n$ 項) $+ 1 = (2n+1)^2$ 。

或 $(-1+1+3+5+\dots\dots\dots$ 至 $2n+2$ 項) $+ 1 = (2n+1)^2$ 。

31. 任意正整數 p 之某方乘爲 $1, 3, 5, 7, \dots\dots\dots$ 級數之 p 項之和。又此和爲 p^r 。試求其初項。 答 $p^{r-1} - p + 1$ 。

[證及解] 初項 $= 2k+1$ 。則

$$s = \frac{p}{2} \{2(2k+1) + (p-1)2\} = 2pk + p^2 = p^r.$$

$$2k = p^{r-1} - p. \quad \therefore 2k+1 = p^{r-1} - p + 1.$$

由是此級數爲

$$s = (p^{r-1} - p + 1) + (p^{r-1} - p + 3) + (p^{r-1} - p + 5) + \dots\dots + (p^{r-1} - p + 2p - 1) \\ = p(p^{r-1}) - p(p) + (1+2+3+\dots\dots+2p-1) = p^r - p^2 + p^2 = p^r.$$

32. A. P. 及 G. P. 其第一項及第二項相同。而各項皆爲正數。試證 A. P. 之他項。小於 G. P. 之相應項。

[證] 初項及第二項爲 a 及 b 。A. P. 之第 m 項爲 A 。G. P. 之第 m 項爲 G 。則 $A = a + (m-1)(b-a) = m(b-a) + 2a - b$ 。

$$G = a \left(\frac{b}{a}\right)^{m-1} = \frac{b^{m-1}}{a^{m-2}}.$$

$$\begin{aligned}
 G-A &= \frac{b^{m-1}}{a^{m-2}} - \{m(b-a) + 2a - b\} \\
 &= \frac{1}{a^{m-2}} \{b^{m-1} - a^{m-1} - ma^{m-2}(b-a) + a^{m-2}(b-a)\} \\
 &= \frac{b-a}{a^{m-2}} \{b^{m-2} + b^{m-3}a + \dots + a^{m-2} - (m-1)a^{m-2}\} \\
 &= \frac{b-a}{a^{m-2}} \{(b^{m-2} - a^{m-2}) + a(b^{m-3} - a^{m-3}) + \dots + a^{m-2}(1-1)\}.
 \end{aligned}$$

此最後之結果。在 $\{ \}$ 內之各項。與 $b-a$ 爲同符號。故此式爲正數。由是 $G > A$ 。

第 拾 捌 編

記 數 法

235. 通常記數法 算術中所用數字。有十個記號。如 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 以表任意之數。且置於左之數字。常十倍於右一位。而單, 十, 百, 千等位。爲無數者。則用零 (即 0) 以補之。

此記法。謂之通常記數法。以 10 爲其底數 (Radix or Base)。

236. 記數法 欲用任意之底數以代 10。則必取小於底數之數字以書各數。

例如 r 進法。即用 r 爲底數以表 N 數。則

$$N = \dots\dots\dots d_3 d_2 d_1 d_0.$$

但 $d_0, d_1, d_2, d_3, \dots\dots\dots$ 爲小於 r 之數。而 d_0 爲單位。 d_1 爲 $d_1 \times r$ 。 d_2 爲 $d_2 \times r^2$ 。 $\dots\dots\dots$ 故

$$N = d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + d_3 r^3 + \dots\dots\dots$$

[註] 本編各文字皆爲正整數。

237. 定理 任意之正整數。可用任意之記數法表之。而每一記數法。所表之一數。祇有一種。

如 N 爲某正整數。以 r 之底數表之。則以 r 除 N 。得商爲 Q_1 。餘數爲 d_0 。則

$$N = d_0 + r \times Q_1.$$

又以 r 除 Q_1 。得商爲 Q_2 。餘數爲 d_1 。則

$$Q_1 = d_1 + r \times Q_2.$$

$$\therefore N = d_0 + r(d_1 + rQ_2) = d_0 + d_1 r + r^2 Q_2.$$

依此法逐次施之。至最後之商數 Q_n 小於 r 。即與最後之餘數全等爲 $Q_n \equiv d_n$ 。

$$\text{由是 } N = d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + d_3 r^3 + \dots\dots\dots + d_n r^n.$$

但 $d_0, d_1, d_2, \dots\dots\dots$ 俱爲 r 所除後之餘數。故俱小於 r 。又自 d 不能爲 0 外。其他皆得爲 0。

故記 N 以 r 進法。則其數為

$$d_n \dots \dots d_3 d_2 d_1 d_0.$$

如上法以 r 除 N 。其各次所得之商及餘數。為一定之數。故如定理所云。每一記數所表之一數。祇有一種。

例 題

1. 2157 記以 6 進法。

答 13553.

[解] 順次以 6 除之。如下

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 2157} \\ 6 \overline{) 359} \text{ 餘數 } 3 = d_0 \\ 6 \overline{) 59} \text{ 餘數 } 5 = d_1 \\ 6 \overline{) 9} \text{ 餘數 } 3 = d_2 \\ 1 \text{ 餘數 } 3 = d_3 \end{array}$$

$$\therefore 2157 = 1 \times 6^3 + 3 \times 6^2 + 5 \times 6 + 3.$$

即 2157 以 6 進法記之。為 13553。

2. 6 進法所記之數為 13553。今記以 8 進法得若干。答 4155。

[解] 13553 為以 6 為底數。今若以 8 除之。當先化 13 為 $1 \times 6 + 3$ 。即 9 乃以 8 除得商 1。餘數 1。

次以此餘數 1。與其次位 5 相連為 15。亦化為 $1 \times 6 + 5$ 。即 11 以 8 除得商 1。餘數 3。以下準此。

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 13553} \\ 8 \overline{) 1125} \text{ 餘數 } 5 \\ 8 \overline{) 53} \text{ 餘數 } 5 \\ 4 \text{ 餘數 } 1 \end{array}$$

由是所求之數為 4155。

3. 8 進法之數為 4155。今記以 10 進法得若干。

答 2157.

與前法同。

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 4155} \\ 10 \overline{) 327} \text{ 餘數 } 7 \\ 10 \overline{) 25} \text{ 餘數 } 5 \\ 2 \text{ 餘數 } 1 \end{array}$$

故所求之數為 2157。

或 $4155 = 4 \times 8^3 + 1 \times 8^2 + 5 \times 8 + 5 = \{(4 \times 8 + 1)8 + 5\}8 + 5$ 。故以 8 乘 4 加 1。以 8 乘之加 5。又以 8 乘之加 5。即得所求之結果。

4. 3166 記以 12 進法。

答 19et.

12 爲底數。則小於 12 之數有十及十一。故以 t 代十。以 e 代十一。

〔解〕

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 3166} \\ 12 \overline{) 263} \text{ 餘數 } 10 \text{ 即 } t \\ 12 \overline{) 21} \text{ 餘數 } 11 \text{ 即 } e \\ \quad \quad \quad \underline{1} \text{ 餘數 } 9 \end{array}$$

故所求之數爲 19et.

5. $\frac{17}{21}$ 記以 4 進法。

答 $\frac{101}{111}$.

〔解〕

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 17} \\ 4 \overline{) 4} \text{ 餘數 } 1 \\ \quad \quad \underline{1} \text{ 餘數 } 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{又 } 4 \overline{) 21} \\ 4 \overline{) 5} \text{ 餘數 } 1 \\ \quad \quad \underline{1} \text{ 餘數 } 1 \end{array}$$

$\therefore 101.$

$\therefore 111.$

由是所求之分數爲 $\frac{101}{111}$ 。

6. 4950 記之爲 20301。問用何數爲底數。

答 7.

〔解〕 所求之底數爲 r 。則 $2r^4 + 0r^3 + 3r^2 + 0r + 1 = 4950$ 。

即 $2r^4 + 3r^2 - 4949 = 0$ 。即 $(r^2 - 49)(2r^2 + 101) = 0$ 。

$\therefore r = \pm 7, r = \pm \sqrt{50\frac{1}{2}}$ 。

由是 $r = 7$ 。

238. 分底數 通常記數法之分數。亦可以任意記數法之分底數表之。如 $\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + \dots$ 可作 $abc\dots$ 。而以 $\frac{1}{r}$ 爲其底。

凡已知之分數。表以 r 進法之分底數。其法亦祇有一種。

設 F 爲已知之分數。則

$$F = abc\dots \equiv \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + \dots$$

但 a, b, c, \dots 爲正整數。或爲 0。皆小於 r 。以 r 乘上之恆同式。

則得 $F \times r = a + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} + \dots$

由是 a 爲 Fr 之整數部分。而 $\frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} + \dots$ 不能不爲分數部分。若 Fr 小於 1。則 a 爲 0。何則。以凡小於 1 之數中。不能有整數部分也。

設 Fr 之分數部。爲 F_1 。則 $F_1 = \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} + \dots$

又以 r 乘之。則 $F_1 \times r = b + \frac{c}{r} + \dots$

由是 b 又爲 $F_1 r$ 之整數部分。

依此順次以 r 底數乘其分數部分。即可求得 a, b, c, \dots

例 題

1. $\frac{1}{27}$ 以 6 之分底數記之。 答 .012

[解] $\frac{1}{27} \times 6 = 0 + \frac{6}{27}$, $\frac{6}{27} \times 6 = 1 + \frac{9}{27}$, $\frac{9}{27} \times 6 = 2$ 。

由是所求之結果爲 .012。

2. $\frac{1}{7}$ 以 3 之分底數記之。 答 .010212

[解] $\frac{1}{7} \times 3 = 0 + \frac{3}{7}$, $\frac{3}{7} \times 3 = 1 + \frac{2}{7}$, $\frac{2}{7} \times 3 = 0 + \frac{6}{7}$,

$\frac{6}{7} \times 3 = 2 + \frac{4}{7}$, $\frac{4}{7} \times 3 = 1 + \frac{5}{7}$, $\frac{5}{7} \times 3 = 2 + \frac{1}{7}$ 。

由是所求之結果爲 .010212。因最後之餘數。仍爲 $\frac{1}{7}$ 。故爲循環數。

3. 以 8 進法所記之 324.26。求以 6 進法記之。

[解] 此數爲 $3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 4 + \frac{2}{8} + \frac{6}{8^2}$ 。若記以 6 進法。可將整數與分數分求之。較爲便利。

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 324} \\ 6 \overline{) 43} \text{ 餘數 } 2 \\ \quad 5 \text{ 餘數 } 5 \end{array}$$

324 爲 552。

又 $.26 \times 6 = 2.04$, $.04 \times 6 = 0.30$, $.30 \times 6 = 2.20$, $.20 \times 6 = 1.40$,
 $.40 \times 6 = 3.00$. $\therefore .26$ 爲 $.20213$.

由是所求之數爲 552.20213.

4. 以 8 進法所表之 $.16315$ 變爲常分數. 答 $\frac{16277}{77700}$.

〔解〕 $N = .16315$.

$\therefore 8^2 N = 16.315$. 又 $8^5 N = 16315.315$.

$\therefore 8^5 N - 8^2 N = 16315 - 16$.

$\therefore N = \frac{16315 - 16}{8^5 - 8^2} = \frac{16315 - 16}{77700} = \frac{16277}{77700}$.

〔註〕 10^5 爲 10 進法。則有六位數。首位 1 而附以五個 0。爲 100000。
 今與之相同之 8^5 。爲 8 進法。亦有六位數。首位 1 而附五 0。爲 100000。
 故 $8^5 - 8^2 = 100000 - 100 = 77700$ 。

5. 以 7 進法所表之 $.231$ 變爲常分數. 答 $\frac{113}{330}$.

〔解〕 $N = .231$. $\therefore 7N = .231$.

又 $7^3 N = 231.31$. $\therefore N = \frac{231 - 2}{7^3 - 7} = \frac{226}{660} = \frac{113}{330}$.

6. 5 進法之數 314.23 變爲 7 進法. 答 150.3564.

〔解〕
$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 314} \\ \underline{7} \\ 22 \\ \underline{7} \\ 15 \\ \underline{7} \\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} .23 \times 7 = 3.41 \\ .41 \times 7 = 5.43 \\ .43 \times 7 = 6.31 \\ .31 \times 7 = 4.23 \end{array}$$

以 7 連乘 23。亦得循環數 .3564.

由是所求之數爲 150.3564.

239. 定理 r 進法所表任意之數。與其數字之和之差。恒能以 $r-1$ 除盡。

設 N 爲任意之數。 S 爲其數字 d_0, d_1, d_2, \dots 之和。則

$$N = d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + \dots + d_n r^n.$$

$$S = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n.$$

$$\therefore N-S=d_1(r+1)+d_2(r^2-1)+\dots\dots\dots+d_n(r^n-1).$$

上式之右邊，依86章各項能以 $r-1$ 除盡。故 $N-S$ 能用 $r-1$ 除盡。因 $N-S$ 能以 $r-1$ 除盡。故 N 及 S 以 $r-1$ 除之。其所得之餘數相同。

例 題

1. 同數字所記之兩數之差，恆能以 $r-1$ 除盡。其 r 為底數。

(證) 設兩數為 N_1 及 N_2 。因兩數字相同。故兩數字之和，均以 S 代之。則依前之定理 N_1-S 及 N_2-S 能以 $r-1$ 除盡。故知 $(N_1-S)-(N_2-S)=N_1-N_2$ 能以 $r-1$ 除盡。

2. 通常記數法。於其數之數字之和，能以9或3除盡之者。則其數亦能以9或3除盡。

(證) 原數為 N 。數字之和為 S 。則

$N-S$ 能以 $10-1$ 。即9整除。故 S 能以9整除。則 N 亦能以9整除。 S 能以3整除。則 N 亦能以3整除。

3. 某數之奇位數字之和，與偶位數字之和之差，能以 $r+1$ 整除者。則其數亦能以 $r+1$ 整除。

(證) $N=d_0+d_1r+d_2r^2+d_3r^3+\dots\dots\dots$

及 $D=(d_0+d_2+\dots\dots\dots)-(d_1+d_3+\dots\dots\dots)$

則 $N-D=d_1(r+1)+d_2(r^2-1)+d_3(r^3+1)+\dots\dots\dots$

上式之右邊，依87章各項能以 $r+1$ 除盡。故 $N-D$ 亦能以 $r+1$ 整除。故知 D 若能以 $r+1$ 整除。則 N 亦能以 $r+1$ 整除。

4. N_1 及 N_2 為任意之兩整數。以9除 N_1 、 N_2 及 $N_1 \times N_2$ 各數。其餘數順次為 n_1 、 n_2 及 p 。則 n_1 、 n_2 之積等於 p 。或其差為9之倍數。

(證) 但 $N_1=n_1+9$ 之倍數。 $N_2=n_2+9$ 之倍數。故

$N_1 \times N_2=(n_1+9\text{之倍數}) \times (n_2+9\text{之倍數})$

$=n_1n_2+n_1 \times 9\text{之倍數}+n_2 \times 9\text{之倍數}+9\text{之倍數} \times 9\text{之倍數}$

$=n_1n_2+9\text{之倍數}$ 。

但 $N_1 \times N_2=p+9\text{之倍數}$ 。

故 n_1n_2 等於 p 。如其不等。必其差為9之倍數。

此題可用以驗乘法之有誤與否。若 $n_1 n_2$ 非等於 p 。或其差不為 9 之倍數。則其乘積必有誤。

此題在算術中謂之九去法。

5. 7 進法所記之三位數。若變為 9 進法。則數字相同而位置相反。問此數為何數。 答 503.

[解] 設三位之數字為 a, b, c 。則 $7^2 a + 7b + c = 9^2 c + 9b + a$ 。

但 a, b, c 。俱為小於 7 之正整數。而由上之關係。則得 $b = 8(3a - 5c)$ 。即 b 為 8 之倍數。然 b 小於 7。故 b 不能不等於 0。

由是 $3a = 5c$ 。 $\therefore a = 5$ 及 $c = 3$ 。

故 7 進法之原數為 503。

6. 有三位數。若 2 倍之。則其數位倒轉。其首末兩數字所成之二位數。以 2 倍之。其數位亦倒轉。求證此數之記數法。以連續三數內之一數為底數。皆能合理。

[證] r 為底數。三位數為 abc 。則 $abc \times 2 = cba$ 。

cba 大於 abc 。故 c 大於 a 。

故 2 乘 c 必末位為 a 而進 1 於其左位。次 2 乘 b 其末位與前之 1 相加為 b 。亦進 1 於其左位。又次 2 乘 a 與前之 1 相加為 c 即得 cba 之積如下。

$$\begin{array}{r} abc \\ \times 2 \\ \hline cba \end{array}$$

$$2c = a + r \dots\dots\dots (1)$$

$$2b + 1 = b + r \dots\dots\dots (2)$$

$$2a + 1 = c \dots\dots\dots (3)$$

從 (1) 式及 (3) 式。得 $ac \times 2 = ca$ 。

又從 $2c = r + a$ 。 $2a + 1 = c$ 。消去 c 。則得 $3a = r - 2$ 。

a 為整數。故 $r - 2$ 為 3 之倍數。 $\therefore r - 2 = 0, 3, 6, 9, \dots\dots\dots$

\therefore 從 $r = 2, 5, 8, 11, \dots\dots\dots$ 而得

$a = 0, b = 1, c = 1$ 。或 $a = 1, b = 4, c = 3$ 。或 $a = 2, b = 7, c = 5$ 。或 $a = 3, b = 10, c = 7, \dots\dots\dots$ 即於 2, 5, 8, 11, $\dots\dots\dots$ 進法順次得 011, 143, 275, 367, $\dots\dots\dots$ 而以 1, 2, 3 或 2, 3, 4 或 3, 4, 5 或 4, 5, 6 或 5, 6, 7 或 6, 7, 8 等三數內之一數為底數。

例 題 二 十 二

1. 有以 7 及 9 為底數之二位數其數字相同。試求其數如何。

〔解〕 $7a+b=9b+a$. $\therefore 3a=4b$. $\therefore a=4, b=3$. 答 31.

由是所求之數 $=7a+b=7 \times 4+3=31$.

2. 於任意之已知記數法。試依定位數。求其最大最小值。

〔解〕 數字任何大。必比底數 r 小 1。又任何小。亦必首位為 1。而以下為 0。 \therefore 最大數 $= (r-1)(r-1)(r-1)\dots\dots(r-1)$ 。

最小數 $= 100\dots\dots 0$ 。

3. 有 6 位之數。用三數字輪次相列而成。則此數可以 1001 整除。試證之。

〔證〕 $abcabc = ar^5 + br^4 + cr^3 + ar^2 + br + c = (ar^2 + br + c)(r^3 + 1)$ 。

但 $r^3 + 1 = 1r^3 + 0r^2 + 0r + 1 = 1001$ 。

4. 依 1 斤, 2 斤, 4 斤, 8 斤, $\dots\dots$ 之次序。取 1027 斤。試求各數。

答 1 斤, 2 斤, 1024 斤。

〔解〕 $2 \overline{) 1027}$ 由是 $1027 = 1000000011$

$$2 \overline{) 513} \dots\dots 1 \qquad = 2^9 + 2^1 + 1$$

$$2 \overline{) 256} \dots\dots 1 \qquad = 1024 + 2 + 1.$$

$$2 \overline{) 128} \dots\dots 0$$

$$2 \overline{) 64} \dots\dots 0$$

$$2 \overline{) 32} \dots\dots 0$$

$$2 \overline{) 16} \dots\dots 0$$

$$2 \overline{) 8} \dots\dots 0$$

$$2 \overline{) 4} \dots\dots 0$$

$$2 \overline{) 2} \dots\dots 0$$

$$1 \dots\dots 0$$

5. 任意記數法所表之數 144。恆為平方數。試證之。

〔證〕 $144 = r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2$ 。故如題云云。

6. 任意記數法所表之 121, 12321, 1234321 等。恆為平方數。試證之。

(證) $121 = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2,$

$12321 = r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = (r^2 + r + 1)^2,$

$1234321 = r^6 + 2r^5 + 3r^4 + 4r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = (r^3 + r^2 + r + 1)^2.$

7. 有二位之數加 18. 則其數位倒置. 又此數以七進法記之. 亦為轉位數. 試求其數幾何. 答 46.

(解) 從 $10a + b + 18 = 10b + a$ 及 $10a + b = 7b + a$. 如是可得 a, b .

8. 有一數. 以 5 之底數表之. 則為 4.440. 問以何數為底數. 則為 4.54. 答 6.

(解) 一數為 $N+4$. 即 $N = .440$. $\therefore 5N = 4.40$. $\therefore 5^2 N = 440.40$.

$\therefore N = \frac{440 - 4}{5^2 - 5} = \frac{4 \times 5^2 + 4 \times 5 - 4}{120} = \frac{29}{30}$. 次 $.54 = \frac{5}{r} + \frac{4}{r(r-1)} = \frac{29}{30}$.

$\therefore (r-6)(29r-5) = 0$. $\therefore r = 6$.

9. 於通常記數法. 一數 N 之數字之和為 S . 他數 $2N$ 之數字之和為 $2Q$. 則 $S - Q$ 為 9 之倍數. 試證之.

(證) $N = 9$ 之倍數 $+ S$, $2N = 9$ 之倍數 $+ 2Q$.

$\therefore 2(S - Q) = (2N - 9 \text{ 之倍數}) - 2(N - 9 \text{ 之倍數}) = 9 \text{ 之倍數}$.

10. 以奇數為底數之數. 若為偶數. 則數字之和. 亦為偶數. 若為奇數. 則數字之和. 亦為奇數. 試證之.

(證) 由 239 章 $N = (r-1)$ 之倍數 $+ S$. 但 $r-1$ 為偶數. 故 n 為偶數或奇數. 從而 S 亦為偶數或奇數.

11. 於任意記數法. 凡三位數之平方. 與轉位數之平方之差. 恆能以 $r^2 - 1$ 整除. 試證之.

(證) $(ar^2 + br + c)^2 - (cr^2 + br + a)^2$. 能以 $(ar^2 + br + c) - (cr^2 + br + a)$ 整除. 而 $(ar^2 + br + c) - (cr^2 + br + a) = (a-c)(r^2 - 1)$. 故如題云云.

12. 以 r 為底數之任意數之平方. 與其轉位數之平方之差. 恆為 $r^2 - 1$ 之倍數.

(證) 原數為奇位數. 則

$$\begin{aligned} & (P_0 r^{2n} + P_1 r^{2n-1} + \dots + P_n r^n + \dots + P_{2n})^2 \\ & - (P_{2n} r^{2n} + P_{2n-1} r^{2n-1} + \dots + P_n r^n + \dots + P_0)^2 \\ & = (P_0 r^{2n} + P_1 r^{2n-1} + \dots + P_0) \{ P_0 (r^{2n} - 1) \\ & \quad + P_1 r (r^{2n-2} - 1) + \dots - P_{2n} (r^{2n} - 1) \}. \end{aligned}$$

故能以 r^2-1 整除。

又原數為偶位數，則

$$\begin{aligned} & (P_0 r^{2n+1} + P_1 r^{2n} + \dots + P_{2n+1})^2 - (P_{2n+1} r^{2n+1} + P_{2n} r^{2n} + \dots + P_0)^2 \\ &= \{P_0(r^{2n+1}+1) + P_1 r(r^{2n-1}+1) + \dots + P_{2n+1}(r^{2n+1}+1)\} \\ & \quad \{P_0(r^{2n+1}-1) + P_1 r(r^{2n-1}-1) + \dots - P_{2n+1}(r^{2n+1}-1)\}. \end{aligned}$$

上式兩因子之各項，為 $r+1$ 及 $r-1$ 之倍數，故能以 r^2-1 整除。

13. 7 進法之三位數變為 11 進法，則為轉位數，求其數幾何。

答 502, 或 361.

[解] $7^2a+7b+c=11^2c+11b+a$. $\therefore b=6(2a-5c)$.

由是 $2a-5c=0$, 或 1.

若 $2a-5c=0$, 則 $b=0$, $a=5$, $c=2$. 又 $2a-5c=1$, 則 $b=6$, $a=3$, $c=1$.

14. 以 5 及 9 為底數之數，其中諸數字相同，則無論各數字之次序如何，以 4 除之，恆得同一之餘數，試證之。

[證] 5 為底數之數為 N , 9 為底數之數為 N' . 其數字之和皆為 S . 則 $N-S=(5-1)$ 之倍數，即 4 之倍數。 $N'-S=(9-1)$ 之倍數，即 8 之倍數，故 4 除 N 及 N' 之餘數，皆等於 4 除 S 之餘數，即如題云云。

15. 3 進法所表之 6 位數，若以 12 進法記之，則得其最後之三數字，試求此數。

答 288, 289, 或 290.

[解] $3^5a+3^4b+3^3c+3^2d+3e+f=12^2d+12e+f$.

$\therefore e=3(9a+3b+c-5d)$, $e < 3$. $\therefore e=0$, $9a+3b+c+5d=0$.

又 $9a+3b+c=5d$, a 及 d 為六位數及三位數之首位數字，故不能為 0. 設 d 為 1, 或為 2, 然 $9a < 5d$, 故 d 不能等於 1, 因而 $d=2$.

由是所求之數為 $12^2d+12e+f=288+12 \times 0+f$.

故 $f=0, 1, 2$, 則所求之數為 288, 289, 290.

16. 8 進法之四位數，若 2 倍之，則數位倒轉，求其原數。

答 2775, 或 2525.

[解] $abcd \times 2 = dcba$. 此題以 $d \times 2$ 之末位為 a , 故 $d > a$.

$\therefore 2d = a + 8$, 又 $a \times 2 = d$, 或 $a \times 2 = d - 1$.

$2a = d$, 則從 $2d = a + 8$, 得 $3a = 8$ 為分數不合理，故 $2a = d - 1$.

從 $2d = a + 8$, 得 $a = 2$, $d = 5$.

由是 $(8^3a+8^2b+8c+d) \times 2 = 8^3d+8^2c+8b+a$.

$\therefore 341a+40b=170d+16c$. $\therefore 341 \times 2+40b=170 \times 5+16c$.

即 $2c=5b-21$. $\therefore b$ 爲大於 3 之奇數. $\therefore b=5$ 或 7.

由是 $c=2$ 或 7. \therefore 所求之數爲 2775 或 2525.

17. 有三位之數, 其數字成 A.P., 以其數字之和除之, 則得商 15. 又加 396, 則爲其轉位數. 求其原數. 答 135.

[解] $\frac{100a+10(a+d)+(a+2d)}{a+(a+d)+(a+2d)}=15$. $\therefore d=2a$.

又 $100a+10(a+d)+(a+2d)+396=100(a+2d)+10(a+d)+a$.

$\therefore d=2$. 由是 $a=1$. \therefore 原數爲 135.

18. $13ab45c$ 能以 792 整除. 求數字 a, b, c . 答 $a=8, b=0, c=6$.

[解] $792=8 \times 9 \times 11$. 故原數爲 8 之倍數. 故 $45c$ 爲 8 之倍數.

$\therefore c=6$. 又原數爲 9 之倍數. 故 $1+3+a+b+4+5+6$.

即 $a+b+19$ 爲 9 之倍數. 即 $a+b+1$ 爲 9 之倍數.

$\therefore a+b=8$ 或 $a+b=17$(1)

又原數爲 11 之倍數. 故 $1+a+4+6 \sim (3+b+5)$.

即 $a+3 \sim b$. 爲 11 之倍數. $\therefore a-b=8$ 或 $b-a=3$(2)

於 (1) (2) 從 $a+b=8, a-b=8$. 則 $a=8, b=0$.

又從 $a+b=8, b-a=3$. 則 $b=5\frac{1}{2}$. 爲不合理.

又從 $a+b=17, a-b=8$. 則 $a=12\frac{1}{2}$. 亦不合理.

又從 $a+b=17, b-a=3$. 則 $b=10$. 亦不合理.

由是 $a=8, b=0, c=6$ 得答.

19. 某底數所記之數爲 1155. 能以同底數所表之 12 整除之. 求其底數. 答 7.

[解] $r^3+r^2+r+5=(r+2)(r^2-r+7)-9$. 故 9 不能不爲 $r+2$ 之倍數. $\therefore r+2=9$. $\therefore r=7$.

20. 有通常記數法所表之四位數. 以 9 乘之. 則爲轉位數. 求其原數如何. 答 1089.

[解] $(1000a+100b+10c+d) \times 9 = 1000d+100c+10b+a$.

故 $a=1, d=9$. 則上之方程式爲 $c=89b+8$. 故 $b=0, c=8$.

21. r 進法之數 $(r^2-1)(r^n-1)$ 。以 $r-1$ 除之。其商為轉位數。試證之。

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } (r^2-1)(r^n-1) &= r^{n+2} - r^n - r^2 + 1 \\ &= r^{n+1}(r-1) + r^n(r-2) + r^{n-1}(r-1) + \dots + r^2(r-1) + 1 \\ &= (r-1)(r-2)(r-1)\dots(r-1)01. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } (r^2-1)(r^n-1) \div (r-1) &= r^{n+1} + r^n - r - 1 \\ &= r^{n+1} + r^{n-1}(r-1) + r^{n-2}(r-1) + \dots + r(r-2) + (r-1) \\ &= 10(r-1)(r-1)\dots(r-2)(r-1). \end{aligned}$$

即原數之轉位數。

22. 依任意之記數法。得 $\frac{1}{(r-1)^2} = .0123\dots(r-3)(r-1)$ 式。除 $(r-2)$ 之數字外。為自 0 至 $r-1$ 連續循環數。試證之。

$$\text{例如 } \frac{1}{(10-1)^2} = \frac{1}{81} = .012345679.$$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } \frac{1}{(r-1)^2} &= 1 \div (r^2 - 2r + 1) \\ &= \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \dots + \frac{r-2}{r^{r-1}} + \frac{r-1}{r^r} + \frac{r}{r^{r+1}} + \frac{r+1}{r^{r+2}} + \dots \\ &= \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \frac{3}{r^4} + \dots + \frac{r-3}{r^{r-2}} + \frac{r-2}{r^{r-1}} + \frac{r-1}{r^r} + \frac{r}{r^{r+1}} + \frac{r+1}{r^{r+2}} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{然 } \frac{r-3}{r^{r-2}} + \frac{r-2}{r^{r-1}} + \frac{r-1}{r^r} + \frac{r}{r^{r+1}} + \frac{r+1}{r^{r+2}} + \frac{r+2}{r^{r+3}} + \dots \\ = \frac{r-3}{r^{r-2}} + \frac{r-2}{r^{r-1}} + \frac{1}{r^{r-1}} - \frac{1}{r^r} + \frac{1}{r^r} + \frac{1}{r^{r+1}} + \frac{1}{r^{r+2}} + \frac{1}{r^{r+2}} + \frac{2}{r^{r+3}} + \dots \\ = \frac{r-3}{r^{r-2}} + \frac{r-1}{r^{r-1}} + \frac{1}{r^{r+1}} + \frac{2}{r^{r+2}} + \frac{3}{r^{r+3}} + \dots \end{aligned}$$

即循環末位為 $\frac{r-1}{r^{r-1}}$ 。以下續得相同之數字。

$$\text{由是 } \frac{1}{(r-1)^2} = .0123\dots(r-3)(r-1).$$

23. 有六位之數。以 3 倍之。則左端之數字移於右端。試證其右端之數字。必為 1 或 2。又求其兩原數若何。答 142857 與 285714。

〔證及解〕 右端之數字為 a 。其次之諸位數為 x 。則 $N=10^6a+x$ 及 $3N=10x+a$ 。由此消去 x 。

則 $N=142857a$ 而 $3N=142857a \times 3$ 。不能不為六位數。

$\therefore a=1$ ，或 $a=2$ 。設 $a=1$ ，則 $N=142857$ ， $a=2$ ，則 $N=285714$ 。

24. 有三位之數。其最後兩數字相等。今以某數乘之。則其積亦為三位數。其最初兩數字。等於原數之最後二位數字。而末位即其乘數。試求原數。 答 166, 199.

[解] $(100a+10b+b) \times c = 100b+10b+c$ 。即 $11b(10-c) = c(100a-1)$ 。

從此方程式 $c(100a-1)$ 為 11 之倍數。而 c 小於 10。

故 $100a-1=11$ 之倍數 $=99$ 。 $\therefore a=1$ 。

由是得方程式如下。

$11b(10-c) = 99c$ 。 即 $10b-bc-9c+90=90$ 。

即 $(10-c)(b+9) = 18 \times 5$ 或 15×6 。 $\therefore 10-c=5$ 或 6 。

$\therefore c=5$ 或 4 。 又 $b+9=18$ 或 15 。 $\therefore b=9$ 或 6 。

第拾玖編

排列及組合

240. 定義 從 n 個相異之物內。每次取 r 個。依其次序列成種種之式。謂之由 n 物取 r 個之排列法 (Permutations)。

依上之定義。每兩列中。若非同物或物同而所列之次序不同。則兩排列相異。

例如有 a, b, c, d 四物。每次取其二個。則其排列如下。

$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$

又每次取其三個。則其排列如下。

$abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca, dc b$

若於 n 物每次取 r 個。則其排列之種數。以 ${}_n P_r$ 表之。故上之二例爲 ${}_4 P_2 = 12, {}_4 P_3 = 24$ 。

241. 問題 於相異之 n 物內。求其每次取 r 個之排列數。

相異之 n 物爲 a, b, c, \dots

從 n 物內每次取一個。則其排列之數。依前之記法得 ${}_n P_1$ 。

即 ${}_n P_1 = n$ 爲已明瞭。

今於 n 字內。取 r 個之排列法。若計其特別一字不動之排列數。必與本字外所餘 $n-1$ 字內。取 $r-1$ 個之排列數相等。而在 n 字內。每字之排列數可依同樣計之。

故

$${}_n P_r = n \times {}_{n-1} P_{r-1}.$$

設 n 爲 $n-1$, r 爲 $r-1$, 則 ${}_{n-1} P_{r-1} = (n-1) \times {}_{n-2} P_{r-2}$ 。

設 n 爲 $n-2$, r 爲 $r-2$, 則 ${}_{n-2} P_{r-2} = (n-2) \times {}_{n-3} P_{r-3}$ 。

.....

次第得

$${}_{n-r+2} P_{r-r+2} = (n-r+2) \times {}_{n-r+1} P_{r-r+1}.$$

$${}_{n-r+1} P_1 = (n-r+1).$$

以上各式。將其兩邊連乘。而去其公有之因子。則得

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1).$$

若 n 物每次悉取之。則 $r=n$ 。故

$$\begin{aligned} {}_n P_n &= n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-n+1) \\ &= n(n-1)(n-2)\dots\dots 3\cdot 2\cdot 1. \end{aligned}$$

定義 $n(n-1)(n-2)\dots\dots 3\cdot 2\cdot 1$ 之積。可以記號 $|n$ 記之。讀爲 n 之逐乘數 (Factorial)。

例如 $|4| \equiv 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ 。

又 $n, n-1, n-2, \dots\dots n-r+1$ 。其 r 個數量之連乘積。以 ${}_n P_r$ 記之。

例如 ${}_n P_n \equiv n(n-1)(n-2)\dots\dots 3\cdot 2\cdot 1 = |n|$ 。 $\therefore {}_n P_n = |n|$, ${}_n P_r = n_r$ 。

242. 問題 n 物中。含若干同類之物。求其每次悉取之排列數。

設 n 物內有 p 個 a , q 個 b , r 個 c , $\dots\dots$ 等。令每次悉取之排列數爲 P 。今若於每列中。變其 p 個 a 字。爲 p 個相異之字。則依前例 p 個 a 字。每次取 P 個之排列。當有 $|p|$ 種。

故全排列數當爲 $P \times |p|$ 。

例如 4 物爲 a, a, a, b 。每次悉取之排列僅爲 $aaab, aaba, abaa, baaa$ 。

然 3 個 a 變爲相異之字。如 a', a'', a''' 。則 $aaab$ 一列。得 $|3| = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ 。如下。

$a'a''a'''b, a'a''a'b, a'a'a''b, a''a''a'b, a'''a'a''b, a'''a'a'b$ 。而 $aaba$ 。亦得 $|3| = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ 。如下。

$a'a''ba''', a'a''ba'', a'a'a''ba''', a'a''a''ba''', a'''a''ba''', a'''a''ba''$ 。其他 $abaa, baaa$ 亦得 $|3|$ 。

若再於 $P \times |p|$ 個排列式中。令 q 個 b 字。變爲相異之字。則依前法而得全排列數。爲 $P \times |p|$ 之 $|q|$ 倍。即 $P \times |p| \times |q|$ 。

又有同理 r 個 c 字以下。皆變爲相異之字。則得

$$P \times |p| \times |q| \times |r| \times \dots\dots$$

上得之結果。則以 n 物皆變爲相異者。但依前章之理。相異 n 物悉取之排列數。爲 ${}_n P_n = |n|$ 。 $\therefore P \times |p| \times |q| \times |r| \times \dots\dots = |n|$ 。

$$\therefore P = \frac{|n|}{|p| |q| |r| \dots\dots}$$

例題

1. 求 ${}_6P_3$, ${}_5P_4$ 及 ${}_7P_7$. 答 120, 120, 5040.

[解] ${}_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, ${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$,
 ${}_7P_7 = |7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

2. 求證 ${}_{10}P_4 = {}_7P_7$.

[證] ${}_{10}P_4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = |7 = {}_7P_7$.

3. ${}_n P_5 = 12 \times {}_n P_3$. 求 n 之值. 答 7.

[解] $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 12n(n-1)(n-2)$.

$\therefore (n-3)(n-4) = 12$. 即 $n(n-7) = 0$. $\therefore n = 7$.

4. ${}_{2n} P_3 = 100 \times {}_n P_2$. 求 n 之值. 答 13.

[解] $2n(2n-1)(2n-2) = 100n(n-1)$. 兩邊以 $4n(n-1)$ 除之.

則 $2n-1 = 25$. $\therefore n = 13$.

5. ${}_{2n} P_3 = 2 \times {}_n P_4$. 求 n 之值. 答 8.

6. 求 Acacia, Hannah, Success 及 Mississippi 各文字之排列數.

答 60, 90, 420, 34650.

[解] 試舉一以例其餘. 如第三之 Success. 其 s 字有 3. c 字有 2. u 及 o 各 1. 故 $n = 7$.

$$\therefore \frac{|7}{\underline{3} \underline{2}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 420.$$

7. 8 人圍一圓桌而坐. 其席次之變化若何. 又有相異之球 8 個. 以絲貫之作成輪形. 則其變化若何. 答 $|7, \frac{1}{2}|7$.

[解] 惟為圓桌. 故 $abcdefgh$ 與 $bcdefgha$. 其變化相同. 依此則省去順移法. 故可除去一人不動. 其餘 7 人. 作 ${}_7P_7$ 之排列. 故所求之變化為 $|7$.

又球之變化與人異. 無上下表裏之別. 故 abc 之現狀. 與 cba 無異. 其正反相對之各列全同. 故如前法之二分之一為 $\frac{1}{2}|7$.

8. 有四女與四男. 圍坐一圓桌. 男與男. 女與女. 各不相隣. 問其坐法有幾種. 答 144.

[解] 4 女席次之變化為 $|\underline{3} = 6$. 又此變化每種有 4 男之變化為 $|\underline{4} = 24$. 由是總變化為 $6 \times 24 = 144$.

9. 相異之 n 物。依每次悉取之排列。其內有特別之 r 個物。必依一定之次序。則其排列數為 $\frac{|n|}{|r|}$ 。試證之。

〔證〕 r 物有一定之次序而不變。則 r 個之物。當視為同物。而所求之數為 P 。若 r 個物為每次取 r 之排列。則依 242 章 $P \times |r| = |n|$ 。

$$\therefore P = \frac{|n|}{|r|}$$

10. 排列書籍 n 冊。其內之特別 2 冊不相隣接。則其變化為 $(n-2)|n-1|$ 。試證之。

〔證〕 特別 2 冊為 a, b 。而 a 之外其餘 $n-1$ 冊悉取之排列數為 $|n-1|$ 。此各列內於 b 之前後可接 a 。如 ab 或 ba 。則有 $2|n-1|$ 種。故所求之數為 $|n-2||n-1| = |n-1|(n-2)$ 。

11. n 物每次取 r 個。若所取可為同物。則其列數若何。答 n^r 。

〔解〕 例如 a, b, c 每次取二個。則得

$$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.$$

先於 n 物每次取 1。則其數為 n 。於此每 1 個各以 n 分配之。則為 $n \times n$ 。若又於每 1 個。各以 n 分配之。則為 $n \times n \times n$ 。

由是所求之列數為 $n \times n \times n \dots \dots r$ 因子 $= n^r$ 。

組 合 法

243. 定義 從相異之 n 物內。每次選出 r 個。不計其排列之次序若何。但求取出之物不全相同。則謂之由 n 物取 r 個之組合法 (Combinations)。

例如排列法中之 abc 與 acb 。以其次序之不同。而作為二列。但此二列其物全同。故在組合法中。若取 abc 。則不復取 acb 也。

故由 a, b, c, d 四字內。每次取其二個。則其組合為

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd.$$

由相異之 n 物內每次取 r 個。則其組合為

$${}_nC_r \text{ 如 } {}_4C_2 = 6 \text{ 是也。}$$

244. 問題 求於相異之 n 物。每次取 r 個之組合數。

相異之 n 物以 a, b, c, \dots 至 n 字顯之。而在 n 字取 r 個之組合中。若計其特別一字之組數。等於其餘之 $n-1$ 字內取 $r-1$ 個之組數。各文字可同樣計之。即組合內每字有 ${}_{n-1}C_{r-1}$ 個。

故由 n 字內每次取 r 個。其組合之總字數為 $n \times {}_{n-1}C_{r-1}$ 。

又各組中之字數為 r 。故文字之總數又為 $r \times {}_nC_r$ 。

由是
$$r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}。$$

設 n 為 $n-1$, r 為 $r-1$ 。則

$$(r-1) \times {}_{n-1}C_{r-1} = (n-1) \times {}_{n-2}C_{r-2}。$$

設 n 為 $n-2$, r 為 $r-2$ 。則 $(r-2) \times {}_{n-2}C_{r-2} = (n-2) \times {}_{n-3}C_{r-3}。$

.....

次第得 $2 \times {}_{n-r+2}C_2 = (n-r+2) \times {}_{n-r+1}C_1。$

$${}_{n-r+1}C_1 = n-r+1。$$

以此各式相乘。而約其公因子。則得

$$\underline{|r}_nC_r = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots(n-r+1)。$$

$$\therefore {}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots(n-r+1)}{\underline{|r}} = \frac{n_r}{\underline{|r}} \dots\dots (1)$$

以 $\underline{|n-r}$ 乘分母。則

$$\begin{aligned} {}_nC_r &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)\underline{|n-r}}{\underline{|r}\underline{|n-r}} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)(n-r)\dots\dots 2 \cdot 1}{\underline{|r}\underline{|n-r}} \\ &= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\underline{|n-r}} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

[別證] 由 n 物內。每次取 r 個之組合為 ${}_nC_r$ 。而此各組。若取其 r 字之排列。則得 $\underline{|r}$ 而成 ${}_nP_r$ 。 $\therefore {}_nC_r \times \underline{|r} = {}_nP_r$ 。

$$\text{由是 } {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{\underline{|r}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)}{\underline{|r}}。$$

[註] 於公式 (2) 設 $r=n$ 。則

$${}_nC_n = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\underline{|n-n}} = \frac{1}{\underline{|0}}。$$

而 ${}_nC_n=1$. $\therefore 1 = \frac{1}{\underline{0}}$ 即 $\underline{0}=1$.

又 $\underline{0}=1$ 可用他法求得.

即 $\underline{n} = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n \underline{n-1}$. 若 $n=1$. 則 $\underline{1} = 1 \cdot \underline{1-1}$.
 $\therefore \underline{0}=1$.

245. 定理 由相異之 n 物內. 每次取 r 個之組合數. 恆等於每次取 $n-r$ 個之組合數.

此題可直由事實上審得之. 即從 n 物內選取 r 個. 其餘為 $n-r$ 個. 故選 r 個之組數. 與選 $n-r$ 個之組數同.

此證又依前章公式 (2) 可得.

由 n 物取 r 個之組合為 ${}_nC_r = \frac{\underline{n}}{\underline{r} \underline{n-r}}$. 而由 n 物取 $n-r$ 個之組合. 則 r 可以 $n-r$ 代之. 故

$${}_nC_{n-r} = \frac{\underline{n}}{\underline{n-r} \underline{n-(n-r)}} = \frac{\underline{n}}{\underline{n-r} \underline{r}}$$

$$\therefore {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

第一證雖不用 244 章之公式 (1) 與 (2). 而自能合理.

例 題

1. 求 ${}_{10}C_4$, ${}_{12}C_9$ 及 ${}_{20}C_{17}$. 答 210, 220, 1140.

〔解〕 ${}_{20}C_{17} = {}_{20}C_{20-17} = {}_{20}C_3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$.

2. 設 ${}_nC_6 = {}_nC_{12}$. 求 ${}_nC_{18}$. 答 153.

〔解〕 ${}_nC_6 = {}_nC_{n-6}$. 即 ${}_nC_{12}$. $\therefore n-6=12$. $\therefore n=18$.

由是 ${}_{18}C_{18} = {}_{18}C_2 = \frac{18 \cdot 17}{1 \cdot 2} = 153$.

3. 設 ${}_nC_5 = {}_nC_6$. 求 n 之值. 答 11.

〔解〕 ${}_nC_5 = {}_nC_{n-5} = {}_nC_6$. $\therefore n-5=6$. $\therefore n=11$.

4. $3 \times {}_nC_4 = 5 \times {}_{n-1}C_5$. 求 n 之值. 答 10.

〔解〕 $3 \times \frac{\underline{n(n-1)(n-2)(n-3)}}{\underline{4}} = 5 \times \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{\underline{5}}$.

即 $3n = (n-4)(n-5)$ 。即 $n^2 - 12n + 20 = 0$ 。即 $(n-10)(n-2) = 0$ 。

∴ $n=10$ 或 2 。

但 ${}_{n-1}C_5$ 爲從 $n-1$ 物內取五個。故 $n-1$ 不小於 5。

即 n 不小於 6。 ∴ $n=10$ 。

5. ${}_nC_4 = 210$ ，求 n 之值。

答 10。

[解] $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} = 210$ 。

即 $(n^2 - 3n) \{ (n^2 - 3n) + 2 \} = 70 \times 72$ 。

∴ $n^2 - 3n = 70$ 。 ∴ $n = 10$ 。

6. 設 ${}_nP_r = 272$ 及 ${}_nC_r = 136$ 。求 n 及 r 之值。 答 $n=17, r=2$ 。

[解] ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r}$ 。即 $136 = \frac{272}{r}$ 。 ∴ $r = 2 = 1.2 = \underline{2}$ 。 ∴ $r=2$ 。

由是 ${}_nC_2 = 136$ 。即 $\frac{n(n-1)}{1.2} = 136$ 。 ∴ $n=17$ 。

7. 設 ${}_nC_{r-1} : {}_nC_r : {}_nC_{r+1} = 2 : 3 : 4$ 。求 n 及 r 。 答 $n=34, r=14$ 。

[解] $\frac{{}_nC_{r-1}}{2} = \frac{{}_nC_r}{3} = \frac{{}_nC_{r+1}}{4}$ 。但 ${}_nC_r = {}_nC_{r-1} \times \frac{n-r+1}{r}$ 。

又 ${}_nC_{r+1} = {}_nC_r \times \frac{n-r}{r+1}$ 。

∴ 從 $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{n-r+1}{r}$ 。及 $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{n-r}{r+1}$ 。得 $n=34, r=14$ 。

8. 於子音 6 字及母音 4 字之內。取子音 3 字。母音 2 字。拼成文字。問得字數若干。 答 14400。

[解] 從子音 6 字選 3 字。則其種數爲 ${}_6C_3$ 。而所選子音之種數。每一種可配以從母音 4 字選 2 字之種數 ${}_4C_2$ 。故共選之數。爲 ${}_6C_3 \times {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 120$ 。而此各組內。所含之 5 字。再依排列法變其次序。則得 $\underline{5} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 。

由是總字數爲 $120 \times 120 = 14400$ 。

9. 有五圓，壹圓，五角，壹角，五分，壹分，等貨幣各一個。問其中能得相異之價若干種。 答 63。

〔解〕 六種之貨幣。求每次取 6, 5, 4, 3, 2, 1 之組數。即得所求之數爲 ${}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + {}_6C_4 + {}_6C_5 + {}_6C_6 = 63$ 。

10. 有相異之 $2n$ 物。依每次取 n 個之組合法。其含特別一物之數。等於其不含特別一物之數。試證之。

$$〔證〕 \quad {}_{2n}C_n = \frac{|2n}{|n|2n-n} = \frac{|2n}{(|n|)^2}$$

又除去特別之一物。其餘 $2n-1$ 物。取 $n-1$ 之組合。爲

$${}_{2n-1}C_{n-1} = \frac{|2n-1}{|n-1|2n-1-(n-1)} = \frac{|2n-1}{|n-1||n|} \times \frac{2n}{2n} = \frac{|2n}{2(|n|)^2}$$

即適得全數之半。故如題云云。

11. 相異之 $4n$ 物。依每次取 n 個之組合法。其含特別一物之數。等於不含此物數之三分之一。試證之。

$$〔證〕 \quad {}_{4n}C_n = \frac{|4n}{|n|3n}。而含特別一物之數爲 {}_{n-1}C_{n-1}。$$

$$即 \frac{|4n-1}{|n-1|4n-1-(n-1)} = \frac{|4n-1}{|n-1|3n} \times \frac{4n}{4n} = \frac{|4n}{4|n|3n} = \frac{1}{4} {}_{4n}C_n。$$

$$又不含此一物之數。爲 ${}_{4n}C_n - {}_{n-1}C_{n-1} = \frac{3}{4} {}_{4n}C_n。$$$

12. 有 3 男 4 女。令於兩側以男女各 1 人爲一組打網毬。試求其組數。 答 36。

〔解〕 各側 1 男。故兩側須有 2 男。因而從 3 男內取 2 男之排列數。爲 ${}_3P_2 = 6$ 。此各列又各於 4 女內取 2 女之組數。爲 ${}_4C_2 = 6$ 。

$$故 \quad {}_3P_2 \times {}_4C_2 = 6 \times 6 = 36。$$

13. 以 1, 2, 3, 4, 5 五個數字。作大於 23000 之數。其數共有幾種。 答 90。

〔解〕 此五數字所成之五位數。爲 ${}_5P_5 = 120$ 種。此中以 1 爲首位之數。爲 ${}_4P_4 = 24$ 。又 21 爲首位之數。爲 ${}_3P_3 = 6$ 種。皆小於 23000。故所求種數爲 $120 - 24 - 6 = 90$ 。

14. 某選舉會。於候補者四人之內選舉三人。而選舉者每一人投票所書之姓名。不得過三人。問投票之法有幾種。 答 14。

〔解〕 從 4 人之內選 1 人。其數爲 ${}_4C_1$ 。選 2 人。其數爲 ${}_4C_2$ 。選 3 人。其數爲 ${}_4C_3$ 。

由是總數 $=4+6+4=14$ 。

246. 組合之最大值 已知 n 之值。求 ${}_nC_r$ 之最大值。

依 244 章。 ${}_nC_r = {}nC_{r-1} \times \frac{n-r+1}{r}$ 。

由此關係式 $n-r+1 \geq r$ 。從而 ${}_nC_r \geq {}nC_{r-1}$ 。

但從 $n-r+1 < r$ 。則 $n+1 < 2r$ 。即 $\frac{1}{2}(n+1) < r$ 。

故 $r < \frac{1}{2}(n+1)$ 。從而 ${}_nC_r < {}nC_{r-1}$ 。

故 r 若小於 $\frac{1}{2}(n+1)$ 。則由 n 物取 r 個之組合。必增加。

故 n 為偶數。則 ${}_nC_r$ 以 $r = \frac{1}{2}n$ 時為最大。

又 n 為奇數。則 ${}_nC_r$ 以 $r = \frac{1}{2}(n+1)$ 。或 $r = \frac{1}{2}(n+1) - 1 = \frac{1}{2}(n-1)$ 為最大。

例如 $n=10$ 。則 $r=5$ 時 ${}_nC_r$ 之值為最大。又 $n=11$ 。則 $r=5$ 或 $r=6$ 時 ${}_nC_r$ 之值為最大。

247. 定理 證 ${}_nC_r + {}nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$ 。

於 $n+1$ 物。每次取 r 個之組合數。內以其含特別之一物者。與不含特別之一物者。分為二羣。而含特別一物之組數。必為 n 物每次取 $r-1$ 個之組數。即 ${}_nC_{r-1}$ 。又不含特別一物之組數。必為 n 物每次取 r 個之組數。即 ${}_nC_r$ 。

$$\therefore {}nC_r + {}nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$$

〔別證〕 由 244 章。

$$\begin{aligned} {}nC_r + {}nC_{r-1} &= \frac{|n}{r} \frac{|n-r}{|n-r|} + \frac{|n}{r-1} \frac{|n-r+1}{|n-r+1|} = \frac{|n(n-r+1+r)}{|r| |n-r+1|} \\ &= \frac{|n+1}{|r| |n+1-r|} = {}_{n+1}C_r \end{aligned}$$

〔例〕 證 ${}_{n+1}P_r = {}_nP_r + r {}_nP_{r-1}$ 。

於 $n+1$ 物。每次取 r 個之排列數內。其不含特別一字者爲 ${}_n P_r$ 。而含有特別一字者爲 ${}_n P_{r-1}$ 。然此一字。在各列 r 個字之首尾或中間。卽有 r 種。故總計含有此特別字者。爲 $r \cdot {}_n P_{r-1}$ 。

$$\therefore {}_{n+1} P_r = {}_n P_r + r \cdot {}_n P_{r-1}$$

248. 定理 x, y 爲兩正整數。若 $x+y=m$ 。則

$${}_m C_n = {}_x C_n + {}_x C_{n-1} \cdot {}_y C_1 + {}_x C_{n-2} \cdot {}_y C_2 + \dots + {}_x C_1 \cdot {}_y C_{n-1} + {}_y C_n$$

設 m 文字爲 $a, b, c, \dots, p, q, \dots$ 分之爲 x 及 y 二羣。

若從 x 羣內全取 n 個爲 ${}_x C_n$ 。又從 x 羣內取 $n-1$ 個爲 ${}_x C_{n-1}$ 。而各附以從 y 羣取 1 之 ${}_y C_1$ 。則得 ${}_x C_{n-1} \cdot {}_y C_1$ 。又從 x 羣內取 $n-2$ 個。而各附以從 y 羣取 2 之 ${}_y C_2$ 。則得 ${}_x C_{n-2} \cdot {}_y C_2$ 。逐次如此。至末得從 y 羣取 n 個。卽 ${}_y C_n$ 。

依此所得之全數與從 $x+y$ (卽 m)。取 n 個之 ${}_m C_n$ 相等。已極明瞭。

$$\text{由是 } {}_{x+y} C_n = {}_x C_n + {}_x C_{n-1} \cdot {}_y C_1 + {}_x C_{n-2} \cdot {}_y C_2 + \dots + {}_y C_n$$

x 或 y 恆大於 n 。若 $r > n$ 。則 ${}_n C_r = 0$ 。

249. Vandermond 氏之定理 x, y, n 爲正整數。若 $x+y$ 大於 n 。由 244 章 ${}_n C_r = \frac{n!}{r!}$ 。則前章之定理。爲

$$\frac{(x+y)_n}{n!} = \frac{x_n}{n!} + \frac{x_{n-1} y_1}{(n-1)! 1!} + \frac{x_{n-2} y_2}{(n-2)! 2!} + \dots + \frac{x_{n-r} y_r}{(n-r)! r!} + \dots + \frac{y_n}{n!}$$

以 $n!$ 乘之。則

$$(x+y)_n = x_n + \frac{n}{1} x_{n-1} y_1 + \frac{n(n-1)}{2} x_{n-2} y_2 + \dots + \frac{n!}{r! (n-r)!} x_{n-r} y_r + \dots + y_n$$

上之方程式爲 x 及 y 逐乘數之次式。而 y 若爲大於 n 之特別正整數。則對於 x 之任意正整數。皆能合理。而此 x 之值。恆多於 x 種。由是依 91 章之定理。 x 卽非正整數。而爲任意之值。亦能合理。由同法。 x 之值若大於 n 。則 y 之多於 n 種值。其能合理亦同。是謂 Vandermond 氏之定理。卽

n 爲任意之正整數。則 x 及 y 無論爲如何之值。恆得下之相等式。

$$(x+y)_n = x_n + \frac{n}{1} x_{n-1} y_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x_{n-2} y_2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\frac{n}{r}}{\frac{n-r}{r}} x_{n-r} y_r + \dots + y_n$$

[例] 設 $n=3$ 。則 $(x+y)_3 = x_3 + 3x_2 y_1 + 3x_1 y_2 + y_3$ 。

即 $(x+y)(x+y-1)(x+y-2)$

$$= x(x-1)(x-2) + 3x(x-1)y + 3xy(y-1) + y(y-1)(y-2)。$$

等 次 積

250. 等次積 由 n 字內。每次取 r 個之積。若可複用同字。則其相異之積之數爲 ${}_n H_r$ 。

例如於 a, b, c 三字。每次取二個。則其所成積爲 $a^2, b^2, c^2, ab, ac, bc$ 。即 ${}_3 H_2 = 6$ 。

此中之 ab, ac, bc 爲前所示之組合數。

而等次積。則又計其餘之 aa 即 a^2 。 bb 即 b^2 。 cc 即 c^2 。

問題 求 ${}_n H_r$ 。

由 n 字每次取 r 個之積中。其一切文字之數。爲 ${}_n H_r \times r$ 。而此中特別一字(例如 a)之數。則爲 ${}_n H_r \times r \div n$ 。

又此含 a 之各積。以 a 除之。即除去一 a 。其所得之商。爲 $r-1$ 次。即由 n 字取 $r-1$ 之數之積。爲 ${}_n H_{r-1}$ 。此中含 a 字之數。爲 ${}_n H_{r-1} \times (r-1) \div n$ 。而以 a 除得之數。即除去 a 之共數爲 ${}_n H_{r-1}$ 。

$$\therefore \frac{r}{n} {}_n H_r = \frac{r-1}{n} \times {}_n H_{r-1} + {}_n H_{r-1}$$

$$\text{即 } {}_n H_r = \frac{n+r-1}{r} \times {}_n H_{r-1}$$

$$\text{設 } r \text{ 爲 } r-1 \text{。則 } {}_n H_{r-1} = \frac{n+r-2}{r-1} \times {}_n H_{r-2}$$

$$\text{設 } r \text{ 爲 } r-2 \text{。則 } {}_n H_{r-2} = \frac{n+r-3}{r-2} \times {}_n H_{r-3}$$

.....

$$\text{逐次得 } {}_n H_2 = \frac{n+1}{2} \times {}_n H_1$$

$${}_n H_1 = n$$

兩邊連乘而去其公因子。則得

$${}_n H_r = \frac{n(n+1)(n+2)\dots\dots(n+r-1)}{1.2.3\dots\dots r} = {}_{n+r-1} C_r \text{ (又見 293 章).}$$

例 題

1. 求 a, b, c, d 用同字每次取三個之組合數。 答 20.

[解] ${}_4 H_3 = {}_{4+3-1} C_3 = {}_6 C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$

2. 有 a 字 6, b 字 6, c 字 6, d 字 6. 求其每次取六字之組合數。 答 84.

[解] ${}_4 H_6 = {}_{4+6-1} C_6 = {}_9 C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$

3. 求證 ${}_n H_r = {}_{n-1} H_r + {}_n H_{r-1}.$

又 ${}_n H_r = {}_n H_{r-1} + {}_{n-1} H_{r-1} + {}_{n-2} H_{r-1} + \dots\dots + {}_1 H_{r-1}.$

[證] 由 247 章. ${}_{n+r-2} C_r + {}_{n+r-2} C_{r-1} = {}_{n+r-1} C_r.$

即 ${}_{n-1} H_r + {}_n H_{r-1} = {}_n H_r.$

又 ${}_n H_r = {}_n H_{r-1} + {}_{n-1} H_r = {}_n H_{r-1} + ({}_{n-1} H_{r-1} + {}_{n-2} H_r)$

$$= {}_n H_{r-1} + {}_{n-1} H_{r-1} + ({}_{n-2} H_{r-1} + {}_{n-3} H_r)$$

$$= {}_n H_{r-1} + {}_{n-1} H_{r-1} + {}_{n-2} H_{r-1} + \dots\dots$$

4. 求證 ${}_n H_r = {}_{n-1} H_r + {}_{n-1} H_{r-1} + {}_{n-1} H_{r-2} + \dots\dots + {}_{n-1} H_1 + 1.$

[證] 由前例. ${}_n H_r = {}_{n-1} H_r + {}_n H_{r-1} = {}_{n-1} H_r + ({}_{n-1} H_{r-1} + {}_n H_{r-2})$

$$= {}_{n-1} H_r + {}_{n-1} H_{r-1} + {}_{n-1} H_{r-2} + {}_n H_{r-3}. \text{ 以下同法.}$$

至最後得 ${}_n H_1 = {}_{n-1} H_1 + {}_n H_0 = {}_{n-1} H_1 + 1.$ 由是合於題意。

251. 雜例 排列及組合法之例。詳於次編二項式之定理。
(見 292 章)。

[第一例] 相異之 mn 物分給 n 人。每人得 m 個。其法有幾種。
答 $\frac{mn}{(m)^n}.$

從 mn 物內。取 m 個給第一人。其法為 ${}_m C_m.$ 而從此各餘數 $mn-m$ 內。取 m 個給第二人。其法為 ${}_{mn-m} C_m.$ 而其數變為 ${}_m C_m \times {}_{mn-m} C_m.$ 又從此各餘數 $mn-2m$ 內。取 m 個給第三人。為 ${}_{mn-2m} C_m.$ 以下準此求之。故所求變化之數。為

$$\begin{aligned} & {}_m C_m \times {}_{m-1} C_m \times {}_{m-2} C_m \times \dots \times {}_2 C_m \times {}_1 C_m \\ &= \frac{|m|}{|m|} \frac{|mn-m|}{|m|} \times \frac{|mn-2m|}{|m|} \times \dots \times \frac{|2m|}{|m|} \frac{|m|}{|m|} = \frac{|mn|}{(|m|)^n} \end{aligned}$$

〔第二例〕 求證下式。

$$1 - {}_n C_{1,n} H_1 + {}_n C_{2,n} H_2 - {}_n C_{3,n} H_3 + \dots + (-1)^n {}_n C_{n,n} H_n = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{因 } {}_n C_{r,n} H_r &= \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{|r|} \times \frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{|r|} \\ &= \frac{n^2(n^2-1^2)\dots\{n^2-(r-1)^2\}}{1^2 \cdot 2^2 \dots r^2}. \end{aligned}$$

由此恆同式以 $r=1, 2, 3, \dots, n$ 遞次代入之得。

$$\begin{aligned} 1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots \\ \dots + (-1)^n \frac{n^2(n^2-1^2)\dots\{n^2-(n-1)^2\}}{1^2 \cdot 2^2 \dots n^2} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{故最初二項之和} = -\frac{n^2-1^2}{1^2}.$$

$$\text{最初三項之和} = +\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2 \cdot 2^2}.$$

$$\text{最初四項之和} = -\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}.$$

$$\text{由是左邊一切項之和} = (-1)^n \frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots(n^2-n^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots n^2}.$$

〔第三例〕 一平面上有 n 直線各不平行。又三線不會於一點。則此 n 直線必分割平面為 $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ 部分。

〔證〕 n 直線所分平面之部分其數為 $F(n)$ 。則 $n-1$ 直線所分平面之部分。其數為 $F(n-1)$ 。

〔 $F(n)$ 謂之 n 之函數〕。

因各直線既不平行。則任一線必各與他直線相交。故 $n-1$ 直線。必截第 n 直線之部分為 n 。而此各分之兩邊。皆在分割平面內。故 n 直線所截平面之部分。較 $n-1$ 直線截得之部分多 n 。

$$\therefore F(n) = F(n-1) + n.$$

$$F(n) = F(n-1) + n$$

設 n 爲 $n-1$ 。則 $F(n-1) = F(n-2) + n-1$ 。

設 n 爲 $n-2$ 。則 $F(n-2) = F(n-3) + n-2$ 。

逐次得 $F(2) = F(1) + 2$ 。

$$F(1) = 1 + 1$$

加之。則 $F(n) = 1 + (1+2+\dots+n) = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$ 。

例如六直線爲 $F(6) = 1 + \frac{1}{2}6(6+1) = 22$ 。即分平面爲二十二部分。

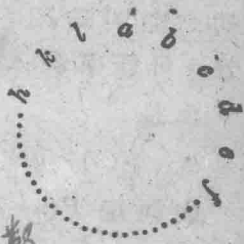
〔第四例〕有依一定次序連續之物。於此 n 物中。每次取三個。其中每二物。在前之次序不相隣接者。則其組合之數。爲

$$\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$$

又此 n 物。若依次連續如環狀（即最初一物與最後一物連續）。則其方法變化之數爲 $\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)$ 。

〔證〕先證其第二問。設 n 物爲 $a, b, c, d, e, f, \dots, h, k, l$ 依次連續。成環狀如圖。

n 物每次取三個。其內二物在環形上不連續。則先取 a 與間一個字之 c 。 ac 之次可附之字有 $n-5$ 。（即除連續於 a 之 b, l 與連續於 c 之 d 。及 a, c 本字外。所餘之字爲 $n-5$ ）。又取 a 與間一個字之 k 。 ak 之次。可附之字。亦有 $n-5$ 。故其方法爲 $2(n-5)$ 。 → 排列數



次取 a 與任意之字 e 。則 a, e 之次。可附之字數爲 $n-6$ 。（即除連續於 a 之 b, l 與連續於 e 之 d, f 。及 a, e 本字外。所餘之字爲 $n-6$ ）。而附於 ah, af 等字之次亦然。但除與 a 間一個字之 c, k 外。計有 $n-5$ 字。故其方法之數爲 $n-6$ 之 $n-5$ 倍。

由是以 a 爲第一字。每次取三字之全方法。爲

$$2(n-5) + (n-6)(n-5)$$

即 $(n-4)(n-5)$ 。 → 排列數

此外各字之爲第一字者亦然。故共有 n 倍之方法

即 $n(n-4)(n-5)$ 。 → 排列數

然在此各方法內所取之字，有重複者。如 $ace, aec, cae, cea, eac, eca$ 等之排列。當以 $\boxed{3}$ 除之。故所求之數為 $\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)$ 組合數

於第一問。則 a, l 不相連續。故 al 之次。所附之字有 $n-4$ 個。(即除與 a 連續之 b 。與 l 連續之 k 。及 a, l 本字外。所餘之字為 $n-4$)。即較第二問。增 $n-4$ 。

由是所求之數為 $\frac{1}{6}n(n-4)(n-5) + (n-4)$ 。即 $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$ 。

〔第五例〕有記名之信筒 n 個。以書信 n 通投入之。求其全行誤錯之度數。

$$\text{答 } \boxed{n} \left\{ \frac{1}{\boxed{2}} - \frac{1}{\boxed{3}} + \frac{1}{\boxed{4}} - \dots + \frac{(-1)^n}{\boxed{n}} \right\}。$$

〔解〕 n 通之書信為 a, b, c, \dots 。而與之相當之信筒為 a', b', c', \dots 。 $F(n)$ 為所求全行錯誤之度數。

設誤在 a 。則 a 必入於 b', c', \dots 等 $n-1$ 信筒內。先設 a 誤入於 k' 內。若 k 亦誤入於 a' 。則此時他信悉行錯誤之數為 $F(n-2)$ 。又 a 誤入於 k' 。而 k' 不誤入於 a' 。其餘 b 亦不入於 b' 。 c 亦不入於 c' 。如此一切之錯誤為 $F(n-1)$ 。故 a 入於 k' 共有之誤法為 $F(n-1) + F(n-2)$ 。惟 a 可任意誤入 $b'c'$ 等 $n-1$ 信筒。其誤數亦相同。

$$\text{由是 } F(n) = (n-1) \{ F(n-1) + F(n-2) \}。$$

$$\therefore F(n) - nF(n-1) = - \{ F(n-1) - (n-1)F(n-2) \}。$$

$$\text{依同理 } F(n-1) - (n-1)F(n-2) = - \{ F(n-2) - (n-2)F(n-3) \}。$$

$$\dots \dots \dots = \dots \dots \dots$$

$$F(3) - 3F(2) = - \{ F(2) - 2F(1) \}。$$

但一書信一信筒。則無錯誤。故 $F(1) = 0$ 。又二書信二信筒。則誤一次。故 $F(2) = 1$ 。

$$\text{由是 } F(3) - 3F(2) = - \{ 1 - 2 \times 0 \} = -1 = (-1)^3。$$

$$\therefore F(4) - 4F(3) = - \{ F(3) - 3F(2) \} = - \{ (-1)^3 \} = (-1)^4。$$

$$\text{依同理推之 } F(n) - nF(n-1) = (-1)^n。$$

$$\text{由是 } \frac{F(n)}{\boxed{n}} - \frac{F(n-1)}{\boxed{n-1}} = \frac{(-1)^n}{\boxed{n}}。$$

同法
$$\frac{F(n-1)}{\underline{n-1}} - \frac{F(n-2)}{\underline{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1}}{\underline{n-1}}.$$

.....

$$\frac{F(3)}{\underline{3}} - \frac{F(2)}{\underline{2}} = \frac{(-1)^3}{\underline{3}}.$$

$$\frac{F(2)}{\underline{2}} - \frac{F(1)}{\underline{1}} = \frac{(-1)^2}{\underline{2}}.$$

上式之各兩邊相加，則得
$$\frac{F(n)}{\underline{n}} = \frac{1}{\underline{2}} - \frac{1}{\underline{3}} + \dots + \frac{(-1)^n}{\underline{n}}.$$

例 題 二 十 三

1. 有相異之物 20 個，分給 5 人，各得 4 個。求其分法有幾種。

[解] 由 251 章第一例，得 $\frac{|20|}{(\underline{4})^5}$ 。即答

2. 11 人共乘一艇，用楫 8 枝，其內 5 人撐左舷，4 人撐右舷，其餘 2 人，可左右移動，則其撐法之變化如何。 答 185。

[解] 餘 2 人為 a, b ， a, b 不加於左邊，則左邊之撐法為 ${}_5C_4$ ，而加於右邊，則為 ${}_6C_4$ 。

$\therefore {}_5C_4 \times {}_6C_4 = 5 \times 15 = 75$ 。若 a 在左邊用去一楫，則左邊之撐法為 ${}_5C_3$ ，而 b 加入於右邊，右邊之撐法為 ${}_6C_4$ ，即 ${}_5C_3 \times {}_6C_4 = 10 \times 5 = 50$ 。又 b 在左邊用去一楫，亦得 50。若 a, b 同在左邊各撐一楫，則得 ${}_5C_2 \times {}_4C_4 = 10 \times 1 = 10$ 。 \therefore 答 = $75 + 50 + 50 + 10$ 。

3. 12 人為選舉者，今於候補者 3 人之內選舉 1 名，其法有幾種。又候補者得等數投票之方法若何。 答 3^{12} ， $\frac{|12|}{(\underline{4})^3}$ 。

[解] 各選舉人於 3 人之內選舉一名之方法有 3，故第一第二選舉人之方法為 3^2 ，此各合於第三選舉人之 3 方法，其變化為 3^3 。以下準此，故 12 人選舉之方法為 3^{12} 。又候補者 3 人等分 12 枚之投票，即 1 名得 $12 \div 3 = 4$ ，故與 1 題同法，得 $\frac{|12|}{(\underline{4})^3}$ 。

4. ${}_{4n}C_{2n} : {}_{2n}C_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n-1) : \{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)\}^2$ 。

[證] ${}_{4n}C_{2n} = \frac{|4n|}{\underline{2n} \underline{2n}}$ 及 ${}_{2n}C_n = \frac{|2n|}{\underline{n} \underline{n}}$ 。

$$\begin{aligned} \text{但 } \underline{4n} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (4n-2)(4n-1)4n \\ &= \{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4n-1)\} 2^{2n} \{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)2n\} \\ &= \{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4n-1)\} 2^{2n} \underline{2n}. \end{aligned}$$

$$\text{同法 } \underline{2n} = \{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\} 2^n \underline{n}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{{}_n C_{2n}}{{}_n C_n} &= \frac{\underline{4n}(\underline{n})^2}{(\underline{2n})^2 \underline{2n}} = \frac{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4n-1)\} 2^{2n} \underline{2n} (\underline{n})^2}{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\}^2 2^{2n} (\underline{n})^2 \underline{2n}} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4n-1)}{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\}^2} \end{aligned}$$

5. 用 0, 1, 2, 3, 4 之五數字作任意之數。而不合同數字可得若干種。 答 260.

[解] 一位數 = $5-1=4$, 二位數 = ${}_5 P_2 - 4=16$,

三位數 = ${}_5 P_3 - {}_4 P_2=48$, 四位數 = ${}_5 P_4 - {}_4 P_3=96$,

五位數 = ${}_5 P_5 - {}_4 P_4=96$. $\therefore 4+16+48+96+96=260$.

但於三位數之 ${}_5 P_3$ 內如 012, 013 等首位為 0。即為二位數。故此等三位數 ${}_4 P_2$ 當去之。以下同。

6. n 物內取 r 個之排列。中含特別之 p 字之數。恆為 ${}_{n-p} P_{r-p} \times {}_r P_p$ 。試證之。

[證] $p < r$ 於 n 物中取含特別之 p 物之組合。則為 ${}_{n-p} C_{r-p}$ 。此各列 r 物之排列 \underline{r} 。即得

$$\begin{aligned} \text{所求之排列。即 } {}_{n-p} C_{r-p} \times \underline{r} &= \frac{|n-p|}{|r-p| |n-r|} \times \underline{r} = \frac{|r|}{|r-p|} \times \frac{|n-p|}{|n-r|} \\ &= r(r-1) \cdots (r-p+1) \times (n-p)(n-p-1) \cdots (n-r+1) = {}_r P_p \times {}_{n-p} P_{r-p}. \end{aligned}$$

7. 平面上有 n 點。其內無三點同在一直線者。若取此二點。聯為一直線。則直線之數若干。 答 $\frac{1}{2}n(n-1)$.

[解] A, B, C, \dots 為 n 點。則直線 AB, AC, \dots 之數為 ${}_n C_2$ 。

8. 平面上有 n 點。除其內 m 點同在一直線之外。更無三點同在一直線上者。求此各點聯為直線之數。 答 $\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}m(m-1) + 1$.

[解] 先求 ${}_n C_2 - m C_2$ 再加 1 即 m 點連結之一直線即得。

9. 平面上有 n 點。除其內 m 點同在一直線上之外。亦無三點同在一直線上者。求此各三點連結成三角形之數。

〔解〕 $C_3 - nC_2 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$.

10. 平面上有 n 直線其內無三線會於一點者，^{亦無兩線平行} 此 n 直線所成 n 邊形之數為 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 。試證之。

〔證〕 a, b, c, \dots 之 n 直線如 abc, \dots, acb, \dots 等所成之 n 多角形與 242 章例題 7 輪置 8 球同法故為 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 。

11. 平面上有 n 點。其內各二點連結之直線。皆非平行者。且無三線同會於一點。若將此等直線引長之。其相交之點在原 n 點之外有幾何。

答 $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ 。

〔解〕 各二點連結之直線。其數為 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 。見(例題 7) 諸點之內。通過任意之二點相成之直線。為連結其餘 $n-2$ 點直線所可分截。而連結 $n-2$ 點之直線之數。由例題 7 得 $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ 。故此即為其分截點之數。而他之各直線。亦有此分截點。故總分截點為 $\frac{1}{2}(n-2)(n-3) \cdot \frac{1}{2}n(n-1)$ 。即 $\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$ 。但二直線會於一點。故上之得數當二分之。即所求之數為 $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ 。

12. 通過三角形之各角點。 $3m$ 直線。其 $3m$ 直線無一平行者。求此直線之交點。

答 $3m^2$ 。

〔解〕 各 m 線之一線與他之兩角點之 $2m$ 線交於 $2m$ 點。故總交點為 $2m$ 。 $3m = 6m^2$ 。然 a 與 b 交於 1 點。則 a, b 兩交點為 1 點。而 2 倍之也。故 $6m^2$ 當以 2 除之。即 $6m^2 \div 2 = 3m^2$ 。

13. 有一市街如碁盤形。以 m 條之線分割南北。以 n 條之線分割東西。其間皆通道路。某人自北西隅行至南東隅。欲取最近距離。則其行路之方法有幾種。

答 $\frac{|m+n-2|}{|m-1| |n-1|}$ 。

〔解〕 從北西隅行至南東隅。無論取如何之道路。其南北及東西之道路。皆須經過南北道路。如 $m-1$ 。東西道路為 $n-1$ 。故其行法之種數為於 $m+n-2$ 內。每次取 $m-1$ 或 $n-1$ 之組合數。

$$\frac{|m+n-2|}{|m-1| |n-1|}$$

14. 以 n 多角形之各角點為角點。作三角形。惟無一邊合於此多角形之邊者。試求三角形之數。(本題與 251 章第四例全同)。

$$\text{答 } \frac{1}{6}n(n-4)(n-5).$$

15. 有 $2n$ 人。其每 n 人圍坐二個圓桌之方法為 $\lfloor 2n/n^2$ 。試證之。

$$[\text{證}] \quad n \text{ 人從 } 2n \text{ 人內選出之方法為 } {}_{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \rfloor^2}.$$

又由 242 章例題 7。知 n 人換座之方法為 $\lfloor n-1$ 。而在第二圓桌。其餘之 n 人換座之方法亦 $\lfloor n-1$ 。

$$\therefore \text{所求之數} = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \rfloor^2} (\lfloor n-1 \rfloor)^2 = \frac{\lfloor 2n}{n^2}.$$

16. 與平行四邊形之各邊平行。引 m 直線。由是所成之平行四邊形之數。為 $\frac{1}{4}(m+2)^2(m+1)^2$ 。

〔證〕 $ABCD$ 為平行四邊形。 AB, CD 兩線與其平行線 m 。每次取 2 之組合。即此等之 $m+2$ 線為對邊之平行四邊形。其數 ${}_{m+2}C_2$ 。而他之二對邊 BC, AD 及其平行線 m 。每次取 2 所成之平行四邊形。亦得 ${}_{m+2}C_2$ 。

$$\text{由是所求之數為 } {}_{m+2}C_2 \times {}_{m+2}C_2 = \frac{(m+2)(m+1)}{\lfloor 2} \times \frac{(m+2)(m+1)}{\lfloor 2}.$$

17. p 個正符號。與 n 個負符號。置於一列。惟兩個負符號。不得連接。其列法如何。

$$\text{答 } \lfloor p+1 / \lfloor n \lfloor p+1-n.$$

〔解〕 $p > n$ 。置 p 個正符號於一列。則其中間為 $p-1$ 。而左右之外側各加 1。則為 $p+1$ 。此 $p+1$ 之處。置 n 個負符號。則其列法之數為

$${}_{p+1}C_n = \frac{\lfloor p+1}{\lfloor n \lfloor p+1-n}.$$

18. 以 m 物任意置於 $n+1$ 處。則其方法為 $\frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}$ 。試證之。

〔證〕 因 m 物配置 $n+1$ 處。並無定數。或 m 物皆置於一處。或某處置若干個。或置一個。或不置。故求 $n+1$ 物取 m 個之等次積即得。即

$${}_{n+1}H_m = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{\lfloor m} \times \frac{\lfloor n}{\lfloor n} = \frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}.$$

19. $2n$ 物分配 n 對 (2 個爲一對). 其方法爲 $\frac{|2n|}{2^n} |n|$. 試證之.
 (證) 如 251 章第一例求之. 則得

$$\begin{aligned} & {}_{2n}C_2 \times {}_{2n-2}C_2 \times {}_{2n-4}C_2 \times \dots \times {}_2C_2 \\ &= \frac{|2n|}{2} \frac{|2n-2|}{2} \times \dots \times \frac{|2|}{2} = \frac{|2n|}{2^n}. \end{aligned}$$

然 $2n$ 物爲相異之物. 則如上例. 而本題爲同物. 故當以取 n 對之排列 $|n|$ 爲列. 故得 $\frac{|2n|}{2^n} \div |n|$.

20. mn 物分爲 m 羣. 各羣爲 n 其方法之數若何. 答 $\frac{|mn|}{m(|n|)^m}$.

(解) 依 251 章得 $\frac{|mn|}{(|n|)^m}$. 但此例之 mn 爲同物. 故如前例. 亦當以 $|m|$ 除之.

21. 通過球之中心. 不同過一直徑之 n 平面. 分球面爲 $n^2 - n + 2$. 試證之.

(證) 截球之第 n 平面. 爲他之 $n-1$ 截平面之各圓周. 截於 2 點. 故第 n 平面之圓周. 由 $n-1$ 平面分爲 $2(n-1)$ 部分. 而第 n 平面之圓周. 於其兩側分界球面. 故其 $2(n-1)$ 部分之各弧. 於其兩側可分球面爲 $2(n-1)$ 部分. 由是若去第 n 平面. 則其餘之 $n-1$ 平面分球之數可減 $2(n-1)$. 今 n 平面分球之數爲 $F(n)$. 則

$$F(n) = F(n-1) + 2(n-1).$$

由同理 $F(n-1) = F(n-2) + 2(n-2).$

.....

$$F(2) = F(1) + 2(1). \quad \text{但 } F(1) = 2.$$

由加法得 $F(n) = 2 + 2\{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\}$
 $= 2 + 2 \times \frac{1}{2}(n-1)(n-1+1).$

22. 以 $m+n$ 直線分平面之數爲 $mn + 2m + 2n - 1$. 但此內 m 直線通過一點. n 直線通過他一點而諸直線無一平行者. 試證之.

(證) m 線通過自己之點. 交於他之 n 線. 則截爲 $n+2$ 部分. 故如前例 $F(m, n) = F(m-1, n) + n + 2$.

由同理 $F(m-1, n) = F(m-2, n) + n + 2, \dots$

$$F(2, n) = F(1, n) + n + 2, \quad F(1, n) = F(0, n) + n + 2 - 1 \dots (A)$$

但僅有 n 線。則分平面為 $2n$ 分。 $\therefore F(0, n) = 2n$ 。又 (A) 式為 n 線截一線。則比 $F(0, n)$ 多 $n+1$ 。即多 $n+2-1$ 部分。蓋減 1 者。即不計自己之點也。 \therefore 由加法得 $F(m, n) = m(n+2) + 2n - 1$ 。

23. 有通過球之中心之 $m+n$ 平面。求分截球面之數。但其內 m 平面通過一直徑。 n 平面通過他一直徑。 答 $2(mn+m+n-1)$ 。

[解] AA' 及 BB' 為 m 及 n 平面通過之直徑。通過 AA' 之第 m 平面之圓周。由通過 BB' 之 n 平面而分截 $2n$ 點。故此第 m 平面加以 A, A' 二點。共有 $2n+2$ 分點。

此各分點之兩側為球面之二部分。故若去第 m 平面。則可去一個 $2n+2$ 部分。即全部分減少 $2n+2$ 。

由是 $F(m, n) = F(m-1, n) + 2n + 2$ 。

依同理 $F(m-1, n) = F(m-2, n) + 2n + 2$ 。

.....

$$F(2, n) = F(1, n) + 2n + 2,$$

$$F(1, n) = F(0, n) + 2n + 2 - 2 \dots \dots \dots (A)$$

但 $F(0, n) = 2n$ (A) 式。為通過 AA' 之一平面為 n 平面所截。則祇為 $F(0, n)$ 增 $2n$ 。故從 $2n+2$ 減 2。

由是 $F(m, n) = m(2n+2) + 2n - 2 = 2(mn+m+n-1)$ 。

24. 通過中心之 $a+b+c \dots$ 平面分球之部分若何。但 a 為第一直徑。 b 為第二直徑。 c 為第三直徑。以下依次通過第 n 直徑。

答 $2\sum a + 2\sum ab - 2(n-1)$ 。

[解] 與前例相同 $a, b, c \dots$ 通過之直徑為 AA', BB', CC', \dots 通過 AA' 之一平面為 $b+c+\dots$ 所截之點為 $2(b+c+\dots)$ 。

故 $F(a, b, c \dots) = F(a-1, b, c \dots) + 2(b+c+\dots) + 2$ 。

依同理 $F(a-1, b, c \dots) = F(a-2, b, c \dots) + 2(b+c+\dots) + 2$ 。

.....

$$F(2, b, c \dots) = F(1, b, c \dots) + 2(b+c+\dots) + 2,$$

$$F(1, b, c \dots) = F(0, b, c \dots) + 2(b+c+\dots),$$

$\therefore F(a, b, c \dots) = F(b, c \dots) + 2a(b+c+\dots) + 2a - 2$ 。

同法 $F(b, c \dots) = F(c \dots) + 2b(c+\dots) + 2b - 2$ 。

遞次如此 $\therefore F(a, b, c \dots) = 2\sum ab + 2\sum a - 2(n-1)$ 。

但 $n-1$ 爲 AA', BB', CC', \dots 之數。

25. n 平面分空間爲 $\frac{1}{2}(n^2+5n+6)$ 部分。但在 n 面之內。必各四面不通過一點。試證之。

〔證〕 第 n 平面爲 $n-1$ 直線截於他之平面。由 251 章第三例。 $n-1$ 直線分第 n 平面爲 $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 部分。故

$$F(n) = F(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) + 1,$$

同理 $F(n-1) = F(n-2) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1, \dots$

$$F(2) = F(1) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1, \quad F(1) = 2.$$

由是 $F(n) = \frac{1}{2}\{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n\} + n + 1.$

但 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{1}{2}n(n^2-1)$ 。見此後 318 章。

26. 一直線上之 m 點。各與他一直線上之 n 點連結。則此等之連結線交於他點之點爲 $\frac{1}{2}mn(m-1)(n-1)$ 。但各連結線不引長。

〔證〕 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ 爲一直線上之 m 點。 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ 爲他一直線之 n 點。 $F(n, m)$ 爲 m 點與 n 點連結線所有交點之全數。 B_1A_r 爲 B_2, B_3, \dots, B_n 之各交於 $r-1$ 點。故其交點共爲 $(r-1)(n-1)$ 。故通過 B_1 之線所有交點之和爲 $(n-1)\{1+2+\dots+(m-1)\}$ 。

$$\begin{aligned} \text{由是 } F(n, m) - F(n-1, m) &= (n-1)\{1+2+\dots+(m-1)\} \\ &= \frac{1}{2}(n-1)m(m-1). \end{aligned}$$

同法 $F(n-1, m) - F(n-2, m) = \frac{1}{2}(n-2)m(m-1) \dots$

$$F(2, m) - F(1, m) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot m(m-1), \quad F(1, m) = 0.$$

由是 $F(n, m) = \frac{1}{2}m(m-1)\{1+2+\dots+(n-1)\} = \frac{1}{2}m(m-1) \cdot \frac{1}{2}n(n-1)$ 。

27. 平面有 n 點。其內無四點同在一圓周者。通過此各三點畫圓。此諸圓中每三個圓。於原點 n 點之外。別無公用之一點。若與他圓相交於二點。則其諸圓之交點之數。除原 n 點之外有 $\frac{1}{72}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(2n-1)$ 。試證之。

〔證〕 圓之數 $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ 。於原 n 點中之三點。無一點公用之一圓。與諸圓成各對之數爲

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}n(n-1)(n-2) \cdot \frac{1}{2}(n-2)(n-4)(n-5) \dots \dots \dots (A)$$

故如此諸圓之各對，爲有與 n 定點區別之二交點。如此交點之全數爲 $\frac{1}{36}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ 卽 $(A) \times 2$ 。

原點 n 之一個爲公共之圓。其各對之數爲 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}n(n-1)(n-2) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ 。如此圓之各對與原點 n 相異者，祇有一點。故其交之全數爲

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)。$$

由是所求之數爲 $\frac{1}{72}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{2(n-5)+9\}$ 。

查 理 斯 密 司 氏
 霍 爾 氏 乃 托 氏
大 代 數 學 講 義
 第 五 卷
第 貳 拾 編
二 項 式 之 定 理

252.* 諸代數式之積等於第壹式，每壹項第貳式，每壹項第三式，每壹項……所乘得各積之代數和。此於67章，已詳述之。

今由此方法推究貳項式之方乘積如次。

253.* 二項式之定理 假定各因子，皆如 $a+b$ 而有 n 個。
 即 $(a+b)(a+b)(a+b)\dots\dots\dots$

從各因子中每取壹字相乘，即得此連乘積之壹項。如法取之，將各積相加，即得此連乘積之壹切項。(詳67章)。

先從 n 因子中各取 a 字，此祇有壹法，故 a^n 爲此連乘積之壹項。次從 n 因子中取壹 b ，從其餘 $n-1$ 因子中各取 a ，惟從 n 因子中取壹 b 之方法，等於從 n 物中取 1 之組合法而得 ${}_nC_1$ ，故 ${}_nC_1 a^{n-1} b$ 爲此連乘積之第貳項。

又次從 n 因子中取貳 b ，其法等於從 n 物中取 2 之組合法而得 ${}_nC_2$ ，故 ${}_nC_2 a^{n-2} b^2$ 爲此連乘積之第三項。

總之於 n 因子中取 r 個 b (r 不大於 n 而爲正整數)，其法等於從 n 物中取 r 之組合法，即可求得其項爲 ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ 。

$$\begin{aligned} \therefore (a+b)(a+b)(a+b)\dots\dots\dots n \text{ 因子} \\ = a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots\dots\dots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

而其最後之項爲 ${}_nC_n a^{n-n} b^n$ 即 b^n 。

由是 n 爲正整數。則

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \dots + b^n.$$

此公式謂之二項式之定理 (Binomial Theorem)。

若由 244 章以 ${}_nC_1, {}_nC_2, {}_nC_3, \dots$ 之值代入之。則上之公式爲

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{|n}{r|n-r} a^{n-r} b^r + \dots + b^n.$$

此右邊之級數。謂之 $(a+b)^n$ 之展開式 (Expansion)。

254.* 歸納法之證 用歸納法 (Enduction)。證明二項式之定理。

n 爲任意之正整數。則

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{|n}{r|n-r} a^{n-r} b^r + \dots + b^n.$$

$$\text{即 } (a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \dots + b^n.$$

今假定此結果爲真。乃以 $(a+b)$ 乘之。而歸併其同方乘之項。

$$\begin{aligned} \text{則得 } (a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + (1+{}_nC_1) a^n b + ({}_nC_1 + {}_nC_2) a^{n-1} b^2 + \dots \\ &\quad + ({}_nC_{r-1} + {}_nC_r) a^{n-r+1} b^r + \dots + b^{n+1}. \end{aligned}$$

$$\text{今 } 1+{}_nC_1 = 1+n = {}_{n+1}C_1,$$

$${}_nC_1 + {}_nC_2 = n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} = {}_{n+1}C_2,$$

總之 ${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r$ (見 247 章)。

$$\begin{aligned} \text{由是得 } (a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + {}_{n+1}C_1 a^n b + {}_{n+1}C_2 a^{n-1} b^2 + \dots \\ &\quad + {}_{n+1}C_r a^{n-r+1} b^r + \dots + b^{n+1}. \end{aligned}$$

此定理對於 n 之任何值既爲真。則對於 n 任大之值亦必爲真。

今若 $n=1$ 。則易知此定理爲真。故 $n=2$ 。亦必爲真。如是 $n=3$ 。 $n=4$ 。…… 即無論 n 之值如何。此定理皆爲真可知矣。

[第一例] 展開 $(a+b)^4$ 。

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} ab^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

[第二例] 展開 $(2x-y)^3$ 。

$$\begin{aligned}(2x-y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(-y) + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} (2x)(-y)^2 + (-y)^3 \\ &= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3.\end{aligned}$$

[第三例] 展開 $(a-b)^n$ 。

$$\begin{aligned}(a-b)^n &= a^n + na^{n-1}(-b) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}(-b)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{|n|}{r|n-r|} a^{n-r}(-b)^r + \dots + (-b)^n \\ &= a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 - \dots \\ &\dots + (-1)^r \frac{|n|}{r|n-r|} a^{n-r}b^r + \dots + (-1)^n b^n.\end{aligned}$$

255. 公項 由二項式之定理，而得 $(a+b)^n$ 展開式之公項為

$$\frac{|n|}{r|n-r|} a^{n-r} b^r.$$

而以適當之值代其 r ，可得其任意之項。故謂之公項。如令 r 為 0，即得第一項。令 r 為 n ，即得第 $n+1$ 項。故此公項為自初項起之第 $r+1$ 項也。（見 244 章之註中）。

256. 等係數 與初末兩項等距離之項，其係數相等。

於 $(a+b)^n$ 之展開式，自初項順計之第 $r+1$ 項為 ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ 。自末項逆計之第 $r+1$ 項（即自首項順計之第 $n-r+1$ 項）為 ${}_nC_{n-r} a^r b^{n-r}$ 。

惟 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 。（由 245 章）。

又如次之證法可自了解。

將 $(a+b)^n$ 互換其 a, b 而為 $(b+a)^n$ 。其展開式相同。 $(a+b)^n$ 之第 $r+1$ 項為 ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ 。而 $(b+a)^n$ 之第 $r+1$ 項為 ${}_nC_r b^{n-r} a^r$ 。此其係數同為 ${}_nC_r$ 。故相等也。

257. 簡式 於 253 章之公式，令 $a=1, b=x$ 。則

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{|n|}{r|n-r|} x^r + \dots + x^n.$$

此公式凡論二項式之定理多可用之。而二項式之形，如 $(a+b)^n$ 者，亦包括於此公式。例如

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= \left\{ a \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right\}^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a} \right)^n = a^n \left\{ 1 + n \frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \dots \right\} \\
 &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots
 \end{aligned}$$

258. 二項式展開之最大項 $(1+x)^n$ 之第 $r+1$ 項。等於第 r 項以 $\frac{n-r+1}{r}x$ 乘之。

惟 $\frac{n-r+1}{r}x = \left(\frac{n+1}{r} - 1 \right)x$ 。而 $\frac{n+1}{r}$ 因 r 增大而減小。故 r 增大時。 $\frac{n-r+1}{r}x$ 從而減小。若 $\frac{n-r+1}{r}x$ 對於 r 之任何值而小於 1 時。則第 $r+1$ 項。必比第 r 項為小。故若使第 r 項為最大。必其

$$\frac{n-r+1}{r}x < 1 \quad \text{及} \quad \frac{n-(r-1)+1}{r-1}x > 1.$$

由是 $r > \frac{(n+1)x}{x+1}$ 及 $r < \frac{(n+1)x}{x-1} + 1$ 。

於 $(1+x)^n$ 之展開式。其各項之絕對值（無關於其正負）。不因其 x 之符號變化而異。故 $(1-x)^n$ 之 r 項。當 $r > \frac{(n+1)x}{x+1}$ 及 $r < \frac{(n+1)x}{x-1} + 1$ 時。其第 r 項。亦為最大之項。

若 $r = \frac{(n+1)x}{x+1}$ 。則 $\frac{n-r+1}{r}x = 1$ 。其最大之項不止一項。其第 r 項與第 $r+1$ 項同大。故此二項俱謂之最大項。

又 $(a+x)^n = a^n \left(1 + \frac{x}{a} \right)^n$ 。故 $(a+x)^n$ 之第 r 項。當 $r > \frac{(n+1)\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}+1}$ 及 $r < \frac{(n+1)\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1} + 1$ 時為最大。

[第一例] 於 $(1+x)^{20}$ 之展開式。其 $x = \frac{1}{4}$ 。求其最大項。

以第 r 項爲最大。則必 $r > \frac{(20+1)\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = 4\frac{1}{5}$ 及 $r < 4\frac{1}{5} + 1$ 。由是知其第五項爲最大。

〔第二例〕 設 $x = \frac{5}{6}$ 。試求 $(1+x)$ 之最大項。

其第 r 項。當 $r > \frac{(10+1)\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = 5$ 及 $r < 5 + 1$ 爲最大。則 5 項 6 項爲最大。

〔第三例〕 求 $(10+3x)^{15}$ 展開式之最大項。但 $x=4$ 。

其第 r 項。當 $r > \frac{(15+1)\frac{3x}{10}}{\frac{3x}{10}+1} = \frac{16 \times \frac{6}{5}}{\frac{6}{5}+1} = 8\frac{8}{11}$ 及 $r < 9\frac{8}{11}$ 爲最大。

故知第 9 項爲最大。

最大係數 二項展開式之最大係數。亦可用同法求之。

因 $(1 \pm x)^n$ 展開式第 $r+1$ 項之係數。等於第 r 項之係數以 $\pm \frac{n-r+1}{r}$ 乘之。由是第 r 項之係數。其絕對值爲最大者。則必

$$\frac{n-r+1}{r} < 1 \text{ 及 } \frac{n-(r-1)+1}{r-1} > 1. \text{ 即 } r > \frac{n+1}{2} \text{ 及 } r < 1 + \frac{n+1}{2}.$$

若 n 爲偶數。則第 r 項之係數。當 $r = \frac{n}{2} + 1$ 爲最大。若 n 爲奇數。則 $\frac{n+1}{2}$ 及 $\frac{n+3}{2}$ 之兩項。俱爲最大係數之項。

例 題 二 十 四

求次之各展開式。

- | | | |
|---------------------|---|--|
| 1. $(x+a)^5$. | 答 | $x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$. |
| 2. $(2a-x)^5$. | 答 | $32a^5 - 80a^4x + 80a^3x^2 - 40a^2x^3 + 10ax^4 - x^5$. |
| 3. $(1-x^2)^6$. | 答 | $1 - 6x^2 + 15x^4 - 20x^6 + 15x^8 - 6x^{10} + x^{12}$. |
| 4. $(2a-3a^2)^4$. | 答 | $16a^4 - 96a^5 + 216a^6 - 216a^7 + 81a^8$. |
| 5. $(2x^2-3)^4$. | 答 | $16x^8 - 96x^6 + 216x^4 - 216x^2 + 81$. |
| 6. $(x^2-2y^3)^5$. | 答 | $x^{10} - 10x^8y^3 + 40x^6y^6 - 80x^4y^9 + 80x^2y^{12} - 32y^{15}$. |

7. 求 $(x-3y)^{10}$ 之第三項。 答 $405x^8y^2$ 。

[解] 由 255 章之公式第三項 $= {}_{10}C_2 x^8 (-3y)^2$ 。

8. 求 $(3x-4)^{20}$ 之第五項。 答 $\frac{|20}{|16|4} 3^{16} 4^4 x^{16}$ 。

9. 求 $(2-x)^{22}$ 之第二十一項。 答 $924x^{20}$ 。

10. 求 $(x-y)^{42}$ 之第四十項。 答 $-\frac{|42}{|3|39} x^3 y^{39}$ 。

11. 求 $(1+x)^8$ 之中項。 答 $70x^4$ 。

[解] $(1+x)^8$ 之展開式有 $8+1$ 即 9 項。故中項為第五項。

由是可得其第五項。即為其中項。

12. 求 $(1+x)^{21}$ 之中項。 答 $\frac{|21}{|10|11} x^{10}$ 及 $\frac{|21}{|11|10} x^{11}$ 。

[解] 此展開式有 22 項。故中項為第 11 項第 12 項。

13. 求 $(x-3y)^n$ 之公項。 答 $(-1)^r \frac{|n}{|r|n-r} 3^r x^{n-r} y^r$ 。

[解] 第 $(r+1)$ 項 $= \frac{|n}{|r|n-r} x^{n-r} (-3y)^r$ 。

14. 求 $(x^2+y^3)^n$ 之公項。 答 $\frac{|n}{|r|n-r} x^{2n-2r} y^{3r}$ 。

15. 記 $(3x-2y)^{16}$ 之最初三項及最後三項。

答 $(3x)^{16} - 30(3x)^{14}y + 420(3x)^{12}y^2 \dots - 945x^2(2y)^{13} + 45x(2y)^{14} - (2y)^{16}$ 。

16. 求 $(1+x)^{12}$ 之最大係數之項。 答 $924x^6$ 。

17. 求 $(1+x)^{15}$ 之最大係數之項。 答 $6435x^7, 6435x^8$ 。

18. 試示 $(1+x)^{2n}$ 展開式 x^n 之係數。等於 $(1+x)^{2n-1}$ 展開式 x^n 之係數之 2 倍。

[證] $(1+x)^{2n}$ 其 x^n 之係數之項。為第 $(n+1)$ 項。即 $\frac{|2n}{|n|n} x^n$ 。

又 $(1+x)^{2n-1}$ 其 x^n 之項。為第 $(n+1)$ 項。即 $\frac{|2n-1}{|n|n-1} x^n = \frac{|2n}{2|n|n} x^n$ 。

故 $(1+x)^{2n}$ 式其 x^n 之係數。等於 $(1+x)^{2n-1}$ 式中 x^n 之係數之 2 倍。

19. $(1+x)^{2n}$ 之中項，爲 $\frac{1.3.5.\dots(2n-1)}{n} 2^n x^n$ 。

[證] 中項爲第 $(n+1)$ 項。故

$$\frac{|2n}{n} x^n = \frac{1.2.3.4.5.\dots(2n-1)2n}{n} x^n = \frac{1.3.5.\dots(2n-1)2n}{n} x^n$$

20. 用二項式之定理。求 $(99)^4$, $(51)^4$ 及 $(999)^3$ 。

$$\begin{aligned} [解] (99)^4 &= (100-1)^4 = (100)^4 - 4 \times (100)^3 + 6 \times (100)^2 - 4 \times 100 + 1 \\ &= 100000000 - 4000000 + 60000 - 400 + 1 = 96059601. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (51)^4 &= (50+1)^4 = (50)^4 + 4 \times (50)^3 + 6 \times (50)^2 + 4 \times 50 + 1 \\ &= 6250000 + 500000 + 15000 + 200 + 1 = 6765201. \end{aligned}$$

$$(999)^3 = (1000-1)^3 = (1000)^3 - 3 \times (1000)^2 + 3 \times 1000 - 1 = 997002999.$$

21. 於 $(x + \frac{1}{x})^n$ 展開式 x^r 之係數，爲 $\frac{|n}{\frac{1}{2}(n+r)} \frac{|n}{\frac{1}{2}(n-r)}$ 。

$$[證] 第(p+1)項，爲 \frac{|n}{p} \frac{|n-p}{n-p} x^{n-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p = \frac{|n}{p} \frac{|n-p}{n-p} x^{n-2p}.$$

$r = n - 2p$. $\therefore p = \frac{1}{2}(n - r)$. 以此代入，即得所求之係數，爲

$$\frac{|n}{\frac{1}{2}(n-r)} \frac{|n}{n - \frac{1}{2}(n-r)}$$

22. 求 $(x - \frac{1}{x})^{2n}$ 之中項。 答 $(-1)^n \frac{|2n}{(n)^2}$ 。

$$[解] 中項即第(n+1)項 = \frac{|2n}{n} x^n \left(-\frac{1}{x}\right)^n = (-1)^n \frac{|2n}{(n)^2}.$$

23. $(1+x)^n$ 展開式，第五，第六，及第七項之係數，爲等差級數。求其 n 之值。 答 7 或 14。

[解] 設第五，第六，第七項爲 a, b, c ，則

$$b = \frac{n-4}{5} a, c = \frac{n-5}{6} \times b = \frac{(n-4)(n-5)}{5.6} a. \text{ 由題意。 } a+c=2b.$$

$$\text{即 } a + \frac{(n-4)(n-5)}{5.6} a = 2 \times \frac{n-4}{5} a. \therefore 30 + (n-4)(n-5) = 12(n-4).$$

$$\text{即 } n^2 - 21n + 98 = 0. \therefore n = 7 \text{ 或 } 14.$$

24. $(1+x)^n$ 展開式第二, 第三, 及第四項之係數, 爲等差級數, 求其 n 之值. 答 7.

25. $(1+x)^n$ 展開式奇數項之和爲 a , 偶數項之和爲 b , 則

$$(1-x^2)^n = a^2 - b^2.$$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } (1+x)^n &= \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}x^4 + \dots\right) \\ &+ \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{3}x^3 + \dots\right) = a+b. \quad \therefore (1-x)^n = a-b. \end{aligned}$$

$$\therefore (1-x^2)^n = (1+x)^n(1-x)^n = a^2 - b^2.$$

259. 二項展開式係數之性質 如次之公式.

$$(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_r x^r + \dots + c_n x^n. \quad (1)$$

但 $c_0 = c_n = 1$, $c_1 = c_{n-1} = n$. 總之 $c_r = c_{n-r} = \frac{|n}{r | n-r}$.

〔第一〕 於 (1) 設 $x=1$. 則 $2^n = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n$.

故 $(1+x)^n$ 展開式係數之和等於 2^n .

〔第二〕 於 (1) 設 $x=-1$. 則 $(1-1)^n = c_0 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^n c_n$.

$$\therefore 0 = (c_0 + c_2 + c_4 + \dots) - (c_1 + c_3 + c_5 + \dots).$$

故二項式之展開式, 其奇數項係數之和, 等於其偶數項係數之和.

〔第三〕 因 $c_r = c_{n-r}$. 故 $c_0 = c_n$, $c_1 = c_{n-1}$ 由是

$$(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_r x^r + \dots + c_n x^n.$$

及 $(1+x)^n = c_n + c_{n-1}x + c_{n-2}x^2 + \dots + c_{n-r}x^r + \dots + c_0 x^n$.

此二級數之積, 其在右邊 x^n 之係數爲 $c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots + c_n^2$. 其在左邊, 即 $(1+x)^n \times (1+x)^n$. 即 $(1+x)^{2n}$. 惟 x^n 之係數, 依 255 章得

$$\frac{|2n}{n | n}. \quad \text{故 } (1+x)^n \text{ 展開式係數平方之和, 等於 } \frac{|2n}{n | n}.$$

〔第四〕 如第三 $(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_n x^n$.

而 $(1-x)^n = c_n - c_{n-1}x + c_{n-2}x^2 - \dots + (-1)^n c_0 x^n$.

於此右邊兩級數積中 x^n 之係數, 爲

$$(-1)^n \{c_0^2 - c_1^2 + c_2^2 - \dots + (-1)^n c_n^2\}.$$

而 $(1+x)^n \times (1-x)^n$ 。即 $(1-x^2)^n$ 其 x^n 之係數。如 n 係奇數則為 0。
如 n 係偶數。則為 $(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{|n|}{(\frac{1}{2}n) (\frac{1}{2}n)}$ 。

由是 $c_0^2 - c_1^2 + c_2^2 - \dots + (-1)^n c_n^2$ 。因 n 之奇或偶而為 0。或
 $(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{|n|}{(\frac{1}{2}n)^2}$ 。

例 題

1. 試示 $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots + rc_r + \dots + nc_n = n2^{n-1}$ 。

(證) $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots + rc_r + \dots + nc_n$
 $= n + 2 \frac{n(n-1)}{1.2.} + 3 \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.} + \dots + r \frac{|n|}{|r| |n-r|} + \dots + n$
 $= n \left\{ 1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.} + \dots + \frac{|n-1|}{|r-1| |n-r|} + \dots + 1 \right\}$
 $= n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$ 。

2. 試示 $c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \dots + (-1)^n \frac{c_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ 。

(證) $c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \dots = 1 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{3} \frac{n(n-1)}{1.2.} - \dots$
 $= \frac{1}{n+1} \left\{ n+1 - \frac{(n+1)n}{1.2.} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.} - \dots + (-1)^n \right\}$
 $= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left\{ 1 - (n+1) + \frac{(n+1)n}{1.2.} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.} + \dots + (-1)^{n+1} \right\}$
 $= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} (1-1)^{n+1} = \frac{1}{n+1}$ 。

3. n 為正整數。則

$$\frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{x+2} - \dots + (-1)^n \frac{c_n}{x+n} = \frac{|n|}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

試示明之。

(證) 此可用歸納法證明之。先假定本題 x 之一切值。及對於 n 之任何正整數而為真者。即

$$\frac{1}{x} - \frac{{}^nC_1}{x+1} + \frac{{}^nC_2}{x+2} - \dots + (-1)^n \frac{{}^nC_n}{x+n} = \frac{|n|}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

今以 $n+1$ 代其 x 。則

$$\frac{1}{x+1} - \frac{{}_n C_1}{x+2} + \frac{{}_n C_2}{x+3} - \dots + (-1)^n \frac{{}_n C_n}{x+n+1} = \frac{|n|}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}$$

由前之恆同式減此恆同式。則

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{{}_n C_1 + 1}{x+1} + \frac{{}_n C_2 + {}_n C_1}{x+2} - \dots + (-1)^r \frac{{}_n C_r + {}_n C_{r-1}}{x+r} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{x+n+1} \\ = \frac{|n+1|}{x(x+1)\dots(x+n+1)} \end{aligned}$$

但由 247 章對於 r 之任何正整數爲 ${}_n C_r + {}_n C_{r-1} = {}_{n+1} C_r$ 。

由是上之恆同式。爲

$$\frac{1}{x} - \frac{{}_{n+1} C_1}{x+1} + \frac{{}_{n+1} C_2}{x+2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{{}_{n+1} C_{n+1}}{x+n+1} = \frac{|n+1|}{x(x+1)\dots(x+n+1)}$$

故本題對於 n 項之某值而爲真者。此對於 n 任大之值亦爲真。然 $n=1$ 能合於本題。故 $n=2$ 亦必合於本題。由斯推之。 n 爲 3, 4, ……。凡對於一切之正整數。當無有不合者。本題之反證法。則詳於後之 297 章例題 3。

〔餘論〕 以 x 之特別值代入之。可得 c_0, c_1, \dots 之關係。

若 $x=1$ 。則 $\frac{c_0}{1} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} - \dots + \frac{1}{n+1}$ 。而 $x=\frac{1}{2}$ 。則

$$\frac{c_0}{1} - \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{5} - \dots = \frac{2^n |n|}{1.3.5.\dots(2n+1)}$$

$$4. \quad c_0 a - c_1(a-1) + c_2(a-2) - c_3(a-3) + \dots + (-1)^n c_n(a-n) = 0.$$

$$\text{及 } c_0 a^2 - c_1(a-1)^2 + c_2(a-2)^2 - c_3(a-3)^2 + \dots + (-1)^n c_n(a-n)^2 = 0.$$

〔證〕 由第二設 n 爲任意之正整數。則

$$1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \dots + (-1)^n = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$n > 1$ 。則 $n-1$ 爲正整數。故於 (1) 用 $n-1$ 以代其 n

$$1 - (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} - \dots + (-1)^{n-1} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

以 a 乘 (1) 以 n 乘 (2) 而相加。得

$$a - n(a-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(a-2) - \dots + (-1)^n(a-n) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

∴ $c_0 a - c_1(a-1) + c_2(a-2) - \dots + (-1)^n c_n(a-n) = 0$ 。但 $n > 1$ 。

$n > 2$ 。則於(3)之 n 尙可減1。故於(3)以 $n-1$ 代 n 。且以 $a-1$ 代 a 。則 $a-1-(n-1)(a-2)+\dots+(-1)^{n-1}(a-n)=0$(4)

以 a 乘(3)以 n 乘(4)而相加。則

$$a^2 - n(a-1)^2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (a-2)^2 - \dots + (-1)^n (a-n)^2 = 0.$$

$\therefore c_0 a^2 - c_1 (a-1)^2 + c_2 (a-2)^2 - \dots + (-1)^n c_n (a-n)^2 = 0$ ，但 $n > 2$ 。

[餘論] 準此方法推之。則

$$a^p - n(a-1)^p + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (a-2)^p - \dots + (-1)^n (a-n)^p = 0.$$

但 p 爲小於 n 之正整數。見 305 章。

260. 二項因子之積 求 $x+a, x+b, x+c, \dots, n$ 因子之積。如次之記法爲便。

於諸字中每取壹字之和 $a+b+c+\dots$ 以 S_1 代之。於諸字中每取二字相乘之和 $ab+ac+\dots$ 。以 S_2 代之。總之於諸字中每取 r 字相乘之和。則以 S_r 代之。

今所求者。爲二項因數 $(x+a)(x+b)(x+c)\dots$ 之積。

自此二項因數之各項。每取一字相乘。卽所求連乘積之一項。故此連乘積。等於每次一字各相乘積之和。

先從各因子中取 x 。此祇有一法。故 x^n 爲連乘積之一項。

又於 a, b, c, \dots 諸字中任取一字。於其餘 $n-1$ 因子取 x 。則得 $ax^{n-1}, bx^{n-1}, cx^{n-1}, \dots$ 其和爲 $S_1 x^{n-1}$ 。

又於 a, b, c, \dots 諸字中任取二字。於其餘 $n-2$ 因子取 x 。則得 $abx^{n-2}, acx^{n-2}, \dots$ 其和爲 $S_2 x^{n-2}$ 。

總之於 a, b, c, \dots 諸字中任取 r 個字。於其餘 $n-r$ 因子取 x 。其各乘積之和爲 $S_r x^{n-r}$ 。

由是 $(x+a)(x+b)(x+c)\dots$

$$= x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \dots + S_r x^{n-r} + \dots + S_n.$$

此末項 S_n 。卽 $abc\dots$ 至 n 因子之積也。

若 a, b, c, \dots 變爲負。則 S_1, S_3, S_5, \dots 爲負。而 S_2, S_4, S_6, \dots 爲正。

由是 $(x-a)(x-b)(x-c)\dots$

$$= x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^r S_r x^{n-r} + \dots + (-1)^n S_n.$$

261. 文單蒙 Vandermonde 氏定理之證 此定理如 249 章所載。而次之證明。則考自 Cayley 氏 (在 Messenger of Mathematics 第五卷)。

設 n 為正整數。 a 及 b 為任意之數量。則由 249 章。

$$(a+b)_n = a_n + n a_{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_{n-2} b^2 + \cdots + \frac{n}{r} \frac{n-r}{n-r} a_{n-r} b^r + \cdots + b_n.$$

假定 n 為任何正整數。而此定理恆為真。則於其左邊。即

$$(a+b)_n = (a+b)(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-n+1), \text{ 以 } a+b-n \text{ 乘之。}$$

$$\begin{aligned} \text{得 } (a+b)_n \times (a+b-n) &= (a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-n+1)(a+b-n) \\ &= (a+b)_{n+1}. \end{aligned}$$

又此右邊之級數。亦以 $a+b-n$ 乘之。惟此乘數可變成種種之形。以乘各項如次。

第一項以 $\{(a-n)+b\}$ 乘。

第二項以 $\{(a-n+1)+(b-1)\}$ 乘。

第三項以 $\{(a-n+2)+(b-2)\}$ 乘。

第 r 項以 $\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}$ 乘。

如是上之恆同式為

$$\begin{aligned} (a+b)_{n+1} &= a_n \{(a-n)+b\} + {}_n c_1 a_{n-1} b \{(a-n+1)+(b-1)\} \\ &\quad + {}_n c_2 a_{n-2} b^2 \{(a-n+2)+(b-2)\} + \cdots \\ &\quad + {}_n c_{r-1} a_{n-r+1} b_{r-1} \{(a-n+r-1)+(b-r+1)\} \\ &\quad + {}_n c_r a_{n-r} b_r \{(a-n+r)+(b-r)\} + \cdots \\ &\quad + b_n \{a+(b-n)\}. \end{aligned}$$

$$\text{但 } a_n \{(a-n)+b\} = a_n(a-n) + a_n b = a_{n+1} + a_n b_1,$$

$${}_n c_1 a_{n-1} b_1 \{(a-n+1)+(b-1)\} = {}_n c_1 (a_n b_1 + a_{n-1} b_2),$$

$${}_n c_{r-1} a_{n-r+1} b_{r-1} \{(a-n+r-1)+(b-r+1)\} = {}_n c_{r-1} (a_{n-r+2} b_{r-1} + a_{n-r+1} b_r),$$

$${}_n c_r a_{n-r} b_r \{(a-n+r)+(b-r)\} = {}_n c_r (a_{n-r+1} b_r + a_{n-r} b_{r+1}),$$

.....

$$b_n \{a+(b-n)\} = a_1 b_n + b_{n+1}.$$

$$\text{由是 } (a+b)_{n+1} = a_{n+1} + (1+{}_n c_1) a_n b_1 + \cdots$$

$$+ ({}_n c_{r-1} + {}_n c_r) a_{n+1-r} b_r + \cdots + b_{n+1}.$$

惟 ${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r$ 。

故 $(a+b)_{n+1} = a_{n+1} + {}_{n+1}C_1 a_n b_1 + \dots + {}_{n+1}C_r a_{n+1-r} b_r + \dots + b_{n+1}$ 。

由是此定理。若對於 n 任何之正整數值為真。則對於 $n+1$ 之值亦為真。惟 $n=2$ 此定理知其為真。故 $n=3$ 亦必為真。順次 4, 5, …… 亦無不真矣。

262. 多項式之定理 多項式 $a+b+c+\dots$ 之 n 方乘。亦可由二項式之方法求得。但 n 為正整數。

$(a+b+c+d+\dots)^n$ 。即 $\{a+(b+c+d+\dots)\}^n$ 其展開式之公項。

由二項式定理而得 $\frac{|n}{|r|} \frac{|n-r}{|n-r|} a^r (b+c+d+\dots)^{n-r}$ 。

由同理 $(b+c+d+\dots)^{n-r}$ 展開式之公項。為

$$\frac{|n-r}{|s|} \frac{|n-r-s}{|n-r-s|} b^s (c+d+\dots)^{n-r-s}$$

$(c+d+\dots)^{n-r-s}$ 之公項。為

$$\frac{|n-r-s}{|t|} \frac{|n-r-s-t}{|n-r-s-t|} c^t (d+\dots)^{n-r-s-t}。以下類推。$$

由是 $(a+b+c+d+\dots)^n$ 展開式之公式。為

$$\frac{|n}{|r|} \frac{|n-r}{|n-r|} \times \frac{|n-r}{|s|} \frac{|n-r-s}{|n-r-s|} \times \frac{|n-r-s}{|t|} \frac{|n-r-s-t}{|n-r-s-t|} \times \dots a^r b^s c^t \dots$$

即 $\frac{|n}{|r|} \frac{|n-r}{|s|} \frac{|n-r-s}{|t|} \dots a^r b^s c^t \dots$ 。

但 r, s, t, \dots 各值為零或為正整數。而 $r+s+t+\dots=n$ 。

[別證] 上之結果。可由 253 章之方法得之。

惟以連乘積 $(a+b+c+\dots)(a+b+c+\dots)\dots$ 之任一項。等於從諸因子各取其任一項相乘之積。

故 $a^r b^s c^t \dots$ 。先從 n 因子內之 r 因子取 a 。其方法之數為 ${}_nC_r$ 。然後從其餘 $n-r$ 因子內之 s 因子取 b 。其方法之數為 ${}_{n-r}C_s$ 。又從其餘 $n-r-s$ 因子內之 t 因子取 c 。其方法之數為 ${}_{n-r-s}C_t$ 。以下類推如是其方法之全數。為 ${}_nC_r \times {}_{n-r}C_s \times {}_{n-r-s}C_t \times \dots$ 。

$$\text{即 } \frac{\binom{n}{r}}{r \binom{n-r}{s}} \times \frac{\binom{n-r}{s}}{s \binom{n-r-s}{t}} \times \frac{\binom{n-r-s}{t}}{t \binom{n-r-s-t}{\dots}} \times \dots = \frac{\binom{n}{r \ s \ t \ \dots}}{r \ s \ t \ \dots}$$

由是 $(a+b+c+\dots)^n$ 展開式之公項爲

$$\frac{\binom{n}{r \ s \ t \ \dots}}{r \ s \ t \ \dots} a^r b^s c^t \dots$$

例題

1. 求 $(a+b+c)^3$ 展開式中 abc 之係數。

[解] 以 $n=3, r=s=t=1$ 代入公項之公式中。而得所求之係數

$$\text{爲 } \frac{\binom{3}{1 \ 1 \ 1}}{1 \ 1 \ 1} = 6.$$

2. 求 $(a+b+c+d)^4$ 展開式中 $a^2b^2, bcd^2, abcd$ 之係數。

[解] 求得各項爲 $\frac{\binom{4}{2 \ 2}}{2 \ 2} a^2 b^2, \frac{\binom{4}{1 \ 1 \ 2}}{1 \ 1 \ 2} bcd^2, \frac{\binom{4}{1 \ 1 \ 1 \ 1}}{1 \ 1 \ 1 \ 1} abcd$ 。故其各項係數爲 6, 12, 24。

263. 多項式公項之係數用前章求公項之公式。則得 $(a+bx+cx^2+dx^3+\dots)^n$ 展開式之公項爲

$$\frac{\binom{n}{r \ s \ t \ u \ \dots}}{r \ s \ t \ u \ \dots} a^r (bx)^s (cx^2)^t (dx^3)^u \dots$$

$$\text{即 } \frac{\binom{n}{r \ s \ t \ u \ \dots}}{r \ s \ t \ u \ \dots} a^r b^s c^t d^u \dots x^{s+2t+3u+\dots}$$

由是於此展開式中求其 x 之特別方乘。如 x^a 之係數。則可取其適合於次之方程式。所有 r, s, t, \dots 各異之正整數值。

$$s+2t+3u+\dots = a,$$

$$r+s+t+u+\dots = n.$$

由此方程式。求得 r, s, t, \dots 各相當值之和。即可求得其係數。

例題

1. 求 $(1+2x+3x^2)^4$ 展開式中 x^5 之係數。

答 312.

[解] $(1+2x+3x^2)^4$ 之公項爲 $\frac{\binom{4}{r \ s \ t}}{r \ s \ t} 1^r 2^s 3^t x^{s+2t}$ 。

而所求為 x^5 之項。故 $s+2t=5$, $r+s+t=4$ 。求其適合於此兩式所有 r, s, t 之值。以 $s=5-2t$ 。故 $t < 3$ 。又 $r+s+t=4$ 。故 $s < 4$ 。於 $s=5-2t$ 不能 $t=0$ 。故與 $t=1, t=2$ 二值相應。 $s=5-2t=3$ 。故 $r=4-s-t=0$ 。

$$\therefore r=0, s=3, t=1. \text{ 則 } \frac{|4}{\underline{r|s|t}} 1^r 2^s 3^t x^{s+2t} = \frac{|4}{\underline{3|1}} 2^3 3^1 x^5 = 96x^5.$$

$$\text{又 } r=1, s=1, t=2. \text{ 則 } \frac{|4}{\underline{1|1|2}} 2^1 3^2 x^5 = 216x^5.$$

由是 x^5 之係數為 $96+216$ 為 312 。

[別法] 此例題甚簡單。故於實際可用次之法則。求得 x^5 之係數

$$(1+2x+3x^2)^4 = \{1+(2x+3x^2)\}^4$$

$$= 1 + 4(2x+3x^2) + 6(2x+3x^2)^2 + 4(2x+3x^2)^3 + (2x+3x^2)^4.$$

於此展開式中最初之三項。 x 之次數低於 x^5 。而於第四項 $4(2x+3x^2)^3$ 其 x^5 之係數為 216 。又於末項 $(2x+3x^2)^4$ 其 x^5 之係數為 96 。

2. 求 $(1+x+x^2)^3$ 展開式中 x^4 之係數。 答 6.

$$[\text{解}] \text{ 從 } \frac{|3}{\underline{r|s|t}} 1^r 1^s 1^t x^{s+2t}. \quad s+2t=4, \quad r+s+t=3.$$

由是 $r=0, s=2, t=1$, 及 $r=1, s=0, t=2$ 。故 x^4 之係數為

$$\frac{|3}{\underline{2|1}} + \frac{|3}{\underline{1|2}} = 3+3=6.$$

3. 求 $(1+x+x^2)^4$ 展開式中 x^5 之係數。 答 16.

[解] $r+s+t=4, s+2t=5$ 。故與例題 1 同。

4. 求 $(2+x-x^2)^5$ 展開式中 x^5 之係數。 答 0.

$$[\text{解}] (2+x-x^2)^5 = (2+x)^5 - 5(2+x)^4 x^2 + 10(2+x)^3 x^4 - 10(2+x)^2 x^6 + 5(2+x)x^8 - x^{10}.$$

$\therefore x^5$ 之係數為 $-10+5 \times 2=0$ 。

5. 求 $(7+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$ 展開式中 x^{10} 之係數。 答 39.

$$[\text{解}] \frac{|3}{\underline{r|s|t|u|p|q}} 7^r 1^s 1^t 1^u 1^p 1^q x^{s+2t+3u+4p+5q}.$$

$\therefore r+s+t+u+p+q=3, \quad s+2t+3u+4p+5q=10.$

凡適合於此兩方程式之值。有五組如次。

$$r=0, s=0, t=0, u=2, p=1, q=0.$$

$$r=0, s=0, t=1, u=0, p=2, q=0.$$

$$r=1, s=0, t=0, u=0, p=0, q=2.$$

$$r=0, s=0, t=1, u=1, p=0, q=1.$$

$$r=0, s=1, t=0, u=0, p=1, q=1.$$

$$\begin{aligned} \text{由是 } x^{10} \text{ 之係數} &= \frac{|3}{|2|1} 7^0 + \frac{|3}{|1|2} 7^0 + \frac{|3}{|1|2} 7^1 + \frac{|3}{|1|1|1} 7^0 + \frac{|3}{|1|1|1} 7^0 \\ &= 3+3+21+6+6=39. \end{aligned}$$

6. 求 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^5$ 展開式中中項之係數。 答 381.

[解] 此展開式中最高次之項為 x^{20} 。故此式有 21 項。而中項為第十一項。即有 x^{10} 之項。

$$\text{由是 } \frac{|5}{|r|s|t|u|p} x^{s+2t+3u+4p}.$$

$$r+s+t+u+p=5, \quad s+2t+3u+4p=10.$$

由是 r, s 等之值得十二組如次。

$$r=0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 0.$$

$$s=3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0.$$

$$t=0, 2, 1, 0, 1, 3, 0, 3, 2, 1, 0, 5.$$

$$u=1, 0, 2, 0, 1, 1, 3, 0, 2, 0, 2, 0.$$

$$p=1, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0.$$

故 x^{10} 之係數為

$$\begin{aligned} &\frac{|5}{|3|1|1} + \frac{|5}{|2|2|1} + \frac{|5}{|2|1|2} + \frac{|5}{|1|2|2} + \frac{|5}{|1|1|1|1|1} + \frac{|5}{|1|3|1} + \frac{|5}{|1|1|3} \\ &+ \frac{|5}{|1|3|1} + \frac{|5}{|1|2|2} + \frac{|5}{|2|1|2} + \frac{|5}{|2|2|1} + \frac{|5}{|5}. \end{aligned}$$

例題二十五

1. 試示 $c_0 - 2c_1 + 3c_2 - \dots + (-1)^n (n+1)c_n = 0$.

[證] $c_0 - 2c_1 + 3c_2 - \dots + (-1)^n (n+1)c_n$

$$= 1 - 2 \frac{n}{1} + 3 \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \dots + (-1)^n (n+1)$$

$$= \left\{ 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \dots + (-1)^n \right\} - n \left\{ 1 - \frac{n-1}{1} + \dots + (-1)^{n-1} \right\}$$

$$= (1-1)^n - n(1-1)^{n-1} = 0.$$

2. 試示 $c_1 - 2c_2 + 3c_3 - \dots + (-1)^{n-1}nc_n = 0$.

[證] $n - 2 \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 3 \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots + (-1)^{n-1}n$

$$= n \left\{ 1 + \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} - \dots + (-1)^{n-1} \right\} = n(1-1)^{n-1} = 0.$$

3. 試示 $c_0 + 2c_1 + 3c_2 + \dots + (n+1)c_n = 2^{n-1}(n+2)$.

[證] $1 + 2 \frac{n}{1} + 3 \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \dots + (n+1) \cdot 1$

$$= \left\{ 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \dots + 1 \right\} + n \left\{ 1 + \frac{n-1}{1} + \dots + 1 \right\}$$

$$= (1+1)^n + n(1+1)^{n-1} = 2^n + n2^{n-1} = 2^{n-1}(n+2).$$

4. 試示 $c_2 + 2c_3 + 3c_4 + \dots + (n-1)c_n = 1 + (n-2)2^{n-1}$.

[證] $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 3 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + (n-1)$

$$= n \left\{ 1 + \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + 1 \right\}$$

$$- \left\{ 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + 1 \right\} + 1$$

$$= n(1+1)^{n-1} - (1+1)^n + 1 = n2^{n-1} - 2^n + 1.$$

5. 試示 $c_0 + 3c_1 + 5c_2 + \dots + (2n+1)c_n = (n+1)2^n$.

[證] $1 + 3 \frac{n}{1} + 5 \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \dots + (2n+1) \cdot 1$

$$= \left\{ 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \dots + 1 \right\} + 2n \left\{ 1 + (n-1) + \dots + 1 \right\}$$

$$= (1+1)^n + 2n(1+1)^{n-1} = 2^n + 2n2^{n-1} = 2^n(1+n).$$

6. 試示 $3c_1 + 7c_2 + 11c_3 + \dots + (4n-1)c_n = 1 + (2n-1)2^n$.

[證] $4(c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots + nc_n) - (c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n)$

$$= 4n \left\{ 1 + \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + \dots + 1 \right\} - (2^n - 1) \text{ 由 259 章第一}$$

$$= 4n(1+1)^{n-1} - 2^n + 1 = 2n2^n - 2^n + 1 = 1 + (2n-1)2^n.$$

$$7. \text{ 試示 } \frac{c_0}{1} + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \dots + \frac{c_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{【證】 } & \frac{1}{1} + \frac{n}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ 1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + 1 - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ (1+1)^{n+1} - 1 \right\} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \end{aligned}$$

$$8. \text{ 試示 } \frac{c_0}{1} + \frac{c_2}{3} + \frac{c_4}{5} + \frac{c_6}{7} + \dots = \frac{2^n}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{【證】 } & \frac{c_0}{1} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} - \frac{c_3}{4} + \dots + (-1)^n \frac{c_n}{n+1} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ 1 - \left\{ 1 - (n+1) + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + (-1)^{n+1} \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{n+1} [1 - \{1-1\}^{n+1}] = \frac{1}{n+1}. \text{ 此結果加前例 7 之恆同式。而} \end{aligned}$$

以 2 除之即得。

$$9. \text{ 試示 } \frac{c_1}{2} + \frac{c_3}{4} + \frac{c_5}{6} + \dots = \frac{2^n-1}{n+1}.$$

【證】 由 7 例之恆同式。減 8 例之恆同式。直得本例之恆同式。

$$10. \text{ 試示 } \frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{4} + \dots + \frac{c_n}{n+2} = \frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\begin{aligned} \text{【證】 } & \frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{4} + \dots + \frac{c_n}{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{n}{1 \cdot 3} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{n}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n+1} \\ & \quad - \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{n}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ n+1 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left\{ \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n+1} \left\{ 1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + 1 - 1 \right\} \\
 &- \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left\{ 1 + \frac{n+2}{1} + \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + 1 - 1 - (n+2) \right\} \\
 &= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1) - \frac{1}{(n+1)(n+2)} (2^{n+2} - n - 3) = \frac{1 + n2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.
 \end{aligned}$$

11. 試證 $\frac{c_1}{1} - \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{c_n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

(證) $F_n = \frac{c_1}{1} - \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{c_n}{n}$
 $= \frac{n}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

則 $F_{n+1} = \frac{n+1}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots$
 $\dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{1} + (-1)^n \frac{1}{n+1}$.

$\therefore F_{n+1} - F_n = \frac{1}{1} - \frac{n}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots + (-1)^{n-1} + (-1)^n \frac{1}{n+1}$
 $= -\frac{1}{n+1} \left[1 - \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right.$
 $\left. \dots + (-1)^n \frac{n+1}{1} + (-1)^{n+1} - 1 \right]$
 $= -\frac{1}{n+1} \{ (1-1)^{n+1} - 1 \} = \frac{1}{n+1}$. $\therefore F_{n+1} = F_n + \frac{1}{n+1}$. 由是 $F_1 = 1$.

故 $F_2 = 1 + \frac{1}{2}$. 故 $F_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$.

由是 $F_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

12. 試證 $\frac{c_0}{1} - \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{7} - \dots + (-1)^n \frac{c_n}{3n+1} = \frac{3^n |n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n+1)}$.

(證) 於 259 章例題 3 $\frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{x+2} - \dots + (-1)^n \frac{c_n}{x+n}$
 $= \frac{|n}{x(x+1) \dots (x+n)}$.

$$\text{令 } x = \frac{1}{3}, \text{ 則 } \frac{3c_0}{1} - \frac{3c_1}{4} + \frac{3c_2}{7} - \dots + (-1)^n \frac{3c_n}{3n+1} = \frac{3^{n+1} |n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n+1)}$$

以 3 除之即得。

$$13. \text{ 試證 } c_0 c_r + c_1 c_{r+1} + \dots + c_{n-r} c_n = \frac{|2n}{|n+r| |n-r|}$$

$$[\text{證}] (1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-r} x^{n-r} + \dots + c_n x^n,$$

$$\text{及 } (1+x)^n = c_n + c_{n-1} x + c_{n-2} x^2 + \dots + c_r x^{n-r} + \dots + c_0 x^n.$$

於此兩恆同式右邊之積中，其 x^{n-r} 之係數為

$$c_0 c_r + c_1 c_{r+1} + \dots + c_{n-r} c_n.$$

又於左邊之積 $(1+x)^n \times (1+x)^n$ 即 $(1+x)^{2n}$ 。其 x^{n-r} 之係數為。

$$\frac{|2n}{|n-r| |2n-(n-r)|} \quad \text{即} \quad \frac{|2n}{|n-r| |n+r|}$$

$$14. \text{ 設 } (1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n, \text{ 則}$$

$$n(1+x)^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1},$$

$$\text{及 } \{1+(n+1)x\} (1+x)^{n-1} = c_0 + 2c_1 x + \dots + (n+1)c_n x^n.$$

$$\text{由是求其次之證 } c_1^2 + 2c_2^2 + 3c_3^2 + \dots + n c_n^2 = \frac{|2n-1}{|n-1| |n-1|}$$

$$\text{及 } c_0^2 + 2c_1^2 + 3c_2^2 + \dots + (n+1)c_n^2 = \frac{(n+2) |2n-1}{|n| |n-1|}$$

$$[\text{證}] \text{ 由 255 章於 } (1+x)^n \text{ 中 } x^r \text{ 之係數為 } \frac{|n}{|r| |n-r|} = c_r.$$

$$\text{又於 } n(1+x)^{n-1} \text{ 其 } x^{r-1} \text{ 之係數為 } n \frac{|n-1}{|r-1| |n-r|} = \frac{r |n}{|r| |n-r|} = r c_r.$$

即得 $n(1+x)^{n-1}$ 一切之項。故 r 為 $1, 2, 3, \dots, n$ 。則

$$n(1+x)^{n-1} = 1c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1} \dots \dots \dots (1)$$

$$(1) \text{ 以 } x \text{ 乘。又加 } (1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n, \text{ 則}$$

$$\{1+(n+1)x\} (1+x)^{n-1} = c_0 + 2c_1 x + \dots + (n+1)c_n x^n \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{又 } (1+x)^n = c_n + c_{n-1} x + \dots + c_{n-r} x^r + \dots + c_0 x^n \dots \dots \dots (3)$$

於 (1) 及 (3) 級數之積中 x^{n-1} 之係數為 $c_1^2 + 2c_2^2 + \dots + n c_n^2$ 。

$$\text{而於 } n(1+x)^{n-1} (1+x)^n \text{ 即 } n(1+x)^{2n-1} x^{n-1} \text{ 之係數為 } \frac{|2n-1}{|n-1| |n-1|}$$

$$\therefore c_1^2 + 2c_2^2 + \dots + nc_n^2 = \frac{|2n-1}{n-1} \frac{1}{n-1}$$

又於(2), (3) 級數之積中 x^n 之係數為 $c_0^2 + 2c_1^2 + 3c_2^2 + \dots + (n+1)c_n^2$ 。而於 $\{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1} \times (1+x)^n$, 即 $\{1+(n+1)x\}(1+x)^{2n-1}$ 其 x^n 之係數為

$$\frac{|2n-1}{n-1} \frac{1}{n} + (n+1) \frac{|2n-1}{n-1} \frac{1}{n} = \frac{(n+2)|2n-1}{n|n-1}$$

$$\therefore c_0^2 + 2c_1^2 + \dots + (n+1)c_n^2 = \frac{(n+2)|2n+1}{n|n-1}$$

15. 試由 $\{(1+x)^n - 1\}^m$ 展開式 (但 m, n 為正整數) 表示

$${}_m C_{1 \cdot n} C_{m-n} C_{2 \cdot 2n} C_m + {}_m C_{3 \cdot 3n} C_m - \dots = (-1)^{m-1} n^m$$

[證] $\{(1+x)^n - 1\}^m = (1+x)^{mn} - {}_m C_1 (1+x)^{(m-1)n} + {}_m C_2 (1+x)^{(m-2)n} - \dots$
 $\dots + (-1)^{m-1} {}_m C_{m-1} (1+x)^n + (-1)^m$

於此右邊 x^m 之係數為

$$(-1)^{m-1} \{ {}_m C_{1 \cdot n} C_{m-n} C_{2 \cdot 2n} C_m + {}_m C_{3 \cdot 3n} C_m - \dots + (-1)^{m-1} {}_m C_{m \cdot mn} C_m \}$$

又 $\{(1+x)^n - 1\}^m = \left\{ nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \right\}^m$ 而 x^m 之係數 $= n^m$ 。

$$\therefore n^m = (-1)^{m-1} \{ {}_m C_{1 \cdot n} C_{m-n} C_{2 \cdot 2n} C_m + \dots \}$$

16. 設 $n > 3$ 試示次之合證。

$$(1) a - n(a-1) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (a-2) - \dots + (-1)^n (a-n) = 0$$

$$(2) ab - n(a-1)(b-1) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (a-2)(b-2) - \dots + (-1)^n (a-n)(b-n) = 0$$

$$(3) abc - n(a-1)(b-1)(c-1) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (a-2)(b-2)(c-2) - \dots$$

$$\dots + (-1)^n (a-n)(b-n)(c-n) = 0$$

$$[證] (1-1)^n = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + (-1)^n = 0 \dots (1)$$

$n > 1$, 則 n 變為 $n-1$,

$$1 - (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + (-1)^{n-1} = 0 \dots (2)$$

(1) 以 a 乘, (2) 以 n 乘而相加, 則

$$a - n(a-1) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(a-2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a-3) + \dots + (-1)^n(a-n) = 0 \dots (3)$$

$n > 2$. 則 a 變為 $a-1$. n 變為 $n-1$. 則

$$a-1 - (n-1)(a-2) + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}(a-3) - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a-4) + \dots + (-1)^{n-1}(a-n) = 0 \dots (4)$$

(3) 以 b 乘 (4) 以 n 乘而相加. 則 $ab - n(a-1)(b-1)$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(a-2)(b-2) - \dots + (-1)^n(a-n)(b-n) = 0 \dots (5)$$

$n > 3$. 則 a 變為 $a-1$. b 變為 $b-1$. n 變為 $n-1$. 則

$$(a-1)(b-1) - (n-1)(a-2)(b-2) + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}(a-3)(b-3) - \dots + (-1)^n(a-n)(b-n) = 0 \dots (6)$$

(5) 以 c 乘 (6) 以 n 乘而相加. 則 $abc - n(a-1)(b-1)(c-1)$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(a-2)(b-2)(c-2) - \dots + (-1)^n(a-n)(b-n)(c-n) = 0.$$

17. 於二項展開式中有一中項. 其係數為偶數.

[證] 諸項之係數. 除中項外. 與初末兩項等距離之各兩項相等. 故中項外. 其他諸項之和. 為各等項之 2 倍. 即偶數.

又凡二項式各項係數之和. 由 259 章第一為偶數. 由是知中項之係數為偶數.

18. $x^2 + (a+b)x + ab$ 之 n 方乘. 其 x^n 之係數. 為

$$a^n + {}_nC_1^2 a^{n-1}b + {}_nC_2^2 a^{n-2}b^2 + \dots + b^n.$$

$$\begin{aligned} \text{[證]} \quad \{x^2 + (a+b)x + ab\}^n &= (x+a)^n \times (x+b)^n \\ &= \{x^n + {}_nC_1 x^{n-1}a + {}_nC_2 x^{n-2}a^2 + \dots + {}_nC_r x^{n-r}a^r + \dots + a^n\} \\ &\quad \times \{b^n + {}_nC_1 b^{n-1}x + {}_nC_2 b^{n-2}x^2 + \dots + {}_nC_r b^{n-r}x^r + \dots + x^n\}. \end{aligned}$$

於此兩級數之積. x^n 之係數. 為

$$a^n + {}_nC_1^2 a^{n-1}b + \dots + {}_nC_r^2 a^r b^{n-r} + \dots + {}_nC_1^2 a b^{n-1} + b^n.$$

19. 設 n 為正整數. 而 P_n 為 $(1+x)^n$ 展開式各係數之積.

$$\text{試示} \quad \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n+1)^n}{n}.$$

[證] $(1+x)^n$ 一切項之係數. 為 $\frac{n!}{r!(n-r)!}$. 今 r 為 $1, 2, 3, \dots, n$. 則

得各項之係數。而其積為 P_n 。

$$\begin{aligned} \text{即 } P_n &= \frac{\overline{1} \overline{n}}{\overline{1} \overline{n-1}} \times \frac{\overline{1} \overline{n}}{\overline{2} \overline{n-2}} \times \dots \times \frac{\overline{1} \overline{n}}{\overline{n-2} \overline{2}} \times \frac{\overline{1} \overline{n}}{\overline{n-1} \overline{1}} \\ &= \frac{(\overline{n})^{n-1}}{\{\overline{1} \overline{2} \overline{3} \dots \overline{n-1}\}^2} \end{aligned}$$

$$\text{又 } P_{n+1} = \frac{(\overline{n+1})^n}{\{\overline{1} \overline{2} \overline{3} \dots \overline{n}\}^2} \text{。由是 } \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\overline{n}(\overline{n+1})^n}{(\overline{n})^2} = \frac{(n+1)^n}{n}$$

20. 試示 $(1-x)^n = (1+x)^n - 2nx(1+x)^{n-1} + \frac{2n(2n-2)}{1 \cdot 2} x^2(1+x)^{n-2} - \dots$ 。

[證] $(1-x)^n = \{(1+x) - 2x\}^n$

$$= (1+x)^n - n(1+x)^{n-1} 2x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (1+x)^{n-2} (2x)^2 - \dots$$

$$= (1+x)^n - 2nx(1+x)^{n-1} + \frac{2n(2n-2)}{1 \cdot 2} x^2(1+x)^{n-2} - \dots$$

21. n 為正整數。則

$$1 - n \frac{1+x}{1+nx} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1+2x}{(1+nx)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1+3x}{(1+nx)^3} + \dots = 0$$

[證] 此級數得變如次。

$$1 - n \frac{1}{1+nx} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(1+nx)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(1+nx)^3} + \dots$$

$$= \frac{nx}{1+nx} \left\{ 1 - \frac{n-1}{1} \cdot \frac{1}{1+nx} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(1+nx)^2} - \dots \right\}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right)^n - \frac{nx}{1+nx} \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right)^n = 0$$

22. 試示 $(a+b+c+d+e)^5 = \Sigma a^5 + 5 \Sigma a^4 b + 10 \Sigma a^3 b^2 + 20 \Sigma a^3 b c + 30 \Sigma a^2 b^2 c + 60 \Sigma a^2 b c d + 120 a b c d e$ 。

[證] $(a+b+c+d+e)^5$ 之一切項。為 $\frac{\overline{5}}{\overline{p} \overline{q} \overline{r} \overline{s} \overline{t}} a^p b^q c^r d^s e^t$ 。

但 p, q, r, s, t 為正整數。則 $p+q+r+s+t=5$ 。

故由 262 章得如次。

a^5 之係數為 1,

$$a^4 b \text{ 之係數} = \frac{\overline{5}}{\overline{4} \overline{1}} = 5,$$

$$a^3 b^2 \text{ 之係數} = \frac{\overline{5}}{\overline{3} \overline{2}} = 10,$$

$$a^3 b c \text{ 之係數} = \frac{\overline{5}}{\overline{3} \overline{1} \overline{1}} = 20,$$

$$a^2 b^2 c \text{ 之係數} = \frac{\overline{5}}{\overline{2} \overline{2} \overline{1}} = 30,$$

$$a^2bcd \text{ 之係數} = \frac{|5}{|2|1|1|1|} = 60, \quad abcde \text{ 之係數} = \frac{|5}{|1|1|1|1|1|} = 120.$$

23. 設 $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. 則

$$a_r - na_{r-1} + \frac{n(n-1)}{2} a_{r-2} - \dots + \frac{(-1)^r |n}{|r|n-r} a_0 = 0. \text{ 試證之.}$$

但 r 非 3 之倍數.

$$〔證〕 (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 - \dots + (-1)^r \frac{|n}{|r|n-r} + \dots$$

$$\text{及 } (1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_r x^r + \dots$$

於此兩級數之積。 x^r 之係數為

$$a_r - na_{r-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_{r-2} - \dots + (-1)^r \frac{|n}{|r|n-r} a_0.$$

又於 $(1+x+x^2)^n (1-x)^n$ 即 $(1-x^3)^n$. 其 r 必為 3 之倍數. 今 r 非為 3 之倍數. 故 x^r 之係數為 0. 如題言.

24. 於 $(1+x+x^2+\dots+x^r)^n$ 展開式. n 為正整數. 其與初末項等距兩項之係數各相等. 試示明之.

$$〔證〕 (1+x+\dots+x^r)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$+ a_{nr-2}x^{nr-2} + a_{nr-1}x^{nr-1} + a_{nr}x^{nr} \quad (1)$$

$$\text{又 } (1+x^{-1}+x^{-2}+\dots+x^{-r})^n = a_0 + a_1x^{-1} + \dots$$

$$+ a_{nr-2}x^{-nr+2} + a_{nr-1}x^{-nr+1} + a_{nr}x^{-nr}.$$

$$\text{以 } x^{nr} \text{ 乘之. 爲 } (1+x+x^2+\dots+x^r)^n = a_0x^{nr} + a_1x^{nr-1} + a_2x^{nr-2} + \dots$$

$$+ a_{nr-2}x^2 + a_{nr-1}x + a_{nr} \quad (2)$$

$$\text{由是 } a_0 = a_{nr}, \quad a_1 = a_{nr-1}, \quad a_2 = a_{nr-2}, \quad \dots$$

25. 於 $(1+x+x^2)^n$ 展開式中 x 之遞昇方乘之係數. 順次為

$$a_0, a_1, a_2, \dots. \text{ 則 } a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \dots + a_{2n}^2 = a_n.$$

$$\text{及 } a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1}^2 = \frac{1}{2} \{ a_n - (-1)^n a_n^2 \}. \text{ 試證之.}$$

$$〔證〕 (1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_r x^r + \dots + a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n}x^{2n},$$

$$(1-x+x^2)^n = a_0 - a_1x + \dots + (-1)^r a_r x^r + \dots - a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n}x^{2n}.$$

$$\text{由 24. } (1+x+x^2)^n = a_{2n} + a_{2n-1}x + \dots + a_1x^{2n-1} + a_0x^{2n}.$$

$$\text{由是於 } (1+x+x^2)^n (1-x+x^2)^n = (1-x^2+x^4)^n.$$

x^{2n} 之係數，為 $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \dots + a_{2n}^2$ 。

而於 $(1+x^2+x^4)^n$ 中 x^{2n} 之係數，等於 $(1+x+x^2)^n$ 中 x^n 之係數 a_n 。

故 $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \dots + a_{2n}^2 = a_n$, $a_0 = a_{2n}$, $a_1 = a_{2n-1}$, $a_2 = a_{2n-2}$, \dots 。

故 $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \dots + a_{2n}^2 = 2\{a_0^2 - a_1^2 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1}^2\} + (-1)^n a_n^2 = a_n$ 。

26. 設 $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 。則 $a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - \dots = 0$ 。

[證] $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_r x^r + \dots + a_{2n} x^{2n}$ 。

由 24. $(1-x+x^2)^n = a_{2n} - a_{2n-1}x + \dots + (-1)^r a_{2n-r} x^r + \dots + a_0 x^{2n}$ 。

由是於 $(1+x+x^2)^n (1-x+x^2)^n = (1+x^2+x^4)^n$ 中 x^{2n-1} 之係數，為

$$-a_0a_1 + a_1a_2 - a_2a_3 + \dots + a_{2n-1}a_{2n}$$

而於 $(1+x^2+x^4)^n$ 中僅有 x 之偶數方乘之項。故 x^{2n-1} 之係數為 0。

由是 $a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - \dots = 0$ 。

27. 於 $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r)^n$ 之展開式， n 為小於 r 之整數。則僅含 a_1, a_2, a_3, \dots 諸數量各一個之項之係數為 $\lfloor n \rfloor$ 。

[證] $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r)^n$ 之公項為 $\frac{\lfloor n \rfloor}{\lfloor \alpha \rfloor \lfloor \beta \rfloor \lfloor \gamma \rfloor} a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma \dots$ 。

但 α, β, γ ，為 0，或為正整數。而 $\alpha + \beta + \gamma + \dots = n$ 。

今 $n < r$ 於此 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 內含有 n 個。其餘 $n-r$ 個。則不含有於其內。故 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 內含有 1 或為 0。

由是 a_1, a_2, a_3, \dots 各一個之項之係數為 $\frac{\lfloor n \rfloor}{\lfloor \alpha \rfloor \lfloor \beta \rfloor \lfloor \gamma \rfloor \dots}$ 其分母之因子為 $\lfloor 1 \rfloor$ 或為 $\lfloor 0 \rfloor$ 而成者。故為 $\lfloor n \rfloor$ 。

28. $(1+x), (1+x+x^2), \dots, (1+x+x^2+\dots+x^n)$ 之連乘積。其與初末二項等距各項之係數相等。又凡奇數項係類之和。等於偶數項係數之和。且各為 $\frac{1}{2} \lfloor (n+1) \rfloor$ 。

[證] $(1+x)(1+x+x^2) \dots (1+x+x^2+\dots+x^n)$
 $= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{\frac{1}{2}n(n+1)} x^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ (1)

於 (1) 以 x^{-1} 代其 x 。則

$$(1+x^{-1})(1+x^{-1}+x^{-2}) \dots (1+x^{-1}+x^{-2}+\dots+x^{-n})$$

$$= a_0 + a_1x^{-1} + a_2x^{-2} + \dots + a_{\frac{1}{2}n(n+1)} x^{-\frac{1}{2}n(n+1)}$$
 (2)

於 (2) 以 $x^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 乘之。則 $(1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+x^2+\cdots+x^n)$
 $= a_{\frac{1}{2}n(n+1)} + \cdots + a_0 x^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 。

由是 $a_0 = a_{\frac{1}{2}n(n+1)}$, $a_1 = a_{\frac{1}{2}n(n-1)}$, \cdots

於 (1) $x=1$ 。則 $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 。則奇數項之係數和。加偶數項之係數和 = $\lfloor n+1 \rfloor$ 。

又 $x=-1$ 。則 $0 = a_0 - a_1 + a_2 \cdots$ 即奇數之係數和。減偶數項之和數和 = 0。由是此各項之和 = $\frac{1}{2} \lfloor n+1 \rfloor$ 。

29. 於 $(1+x+x^2)^n$ 展開式。其 x^n 之係數為

$$1 + \frac{n(n-1)}{1^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \cdots$$

[證] $(1+x+x^2)^n = \{x(1+x)+1\}^n$

$$= x^n(1+x)^n + \frac{n}{1} x^{n-1}(1+x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}(1+x)^{n-2} + \cdots$$

於此級數。其 x^n 之係數。為 $1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} + \cdots$
 $= 1 + \frac{n(n-1)}{1^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2 \cdot 2^2} + \cdots$

30. 設八個奇數之和為 18。則其方法之數。有 792。但同一之數。不得重用。而計加法之順序。須以各異之方法入算。試證之。

[證] 八個奇數之和為 18。則其中之最大奇數為 11。何則。因最小之奇數為 1。而 $1+1+1+1+1+1+1+1$ 最大奇數 = 18。

故於 1, 3, 5, 7, 9, 11, 中任取八個數。使其和為 18。

由是於 $(x^1+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11})^8$ 之展開式。其 x^{18} 之係數即為所求方法之數。而 $(x^1+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11})^8 = x^8(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})^8$ 。故可於 $(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})^8$ 中。求其 x^{10} 之係數。而

$$(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})^8 = \left(\frac{1-x^{12}}{1-x^2} \right)^8 = (1-x^{12})^8(1-x^2)^{-8}$$

$$= (1-8x^{12}+\cdots) \left(1+8x^2+\cdots + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{\lfloor 5} x^{10} + \cdots \right)$$

$$= 1 + \cdots + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{\lfloor 5} x^{10} + \cdots \quad \therefore x^{10} \text{ 之係數} = 792.$$

第貳拾壹編

歛級數及發級數

264. 級數 [Series] 其各項之諸數量。依某定律順次而成者也。

例如 1, 2, 3, 4. 以順次增 1 爲定律。

又如 $\sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt{8}$. 以順次增 2 而開平方爲定律。凡若此者。皆謂之級數。

級數至第若干項而止。其項數有限者。謂之有限級數。級數之項以次連續而無有終止者。謂之無限級數。

凡等比級數之公比。其數小於 1 者。則其 n 項之和。不能無限增大 (此於前已詳述之)。蓋以 n 增至極大時。其和雖亦次第增大。而能與一個定數量漸相切近。其和之大無論如何。總不能逾越其定數量。故級數雖無限。其和之大。非必無限也。

級數自首項以下至 n 項。其 n 漸增。其和漸近於其定限 s 。迨 n 充分增大時。其和與 s 之差甚微。則此級數。謂之歛級數 (Convergent)。而 s 爲此級數之和。

例 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ 其和爲 2。此之謂歛級數。

凡級數自首項以下至 n 項。若 n 增至無限時。其和亦爲無限。則此級數謂之發級數 (Divergent)。

例 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ 此之謂發級數。

自級數首項至於 n 項。若 n 增至無限時。其和非爲無限大。而亦無切近之定數量者。此等級數。不得謂之歛級數。又不得謂之發級數。而稱謂不定級數。或中性級數 (Oscillating)。

例 $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ 。若 n 爲奇數。其和爲 1。若 n 爲偶數。其和爲 0。此之謂不定級數。

不定級數之各項。有正亦有負。而決不能爲同符號。申明之如次。

凡各項之符號相同者。則此級數。必非不定級數。必為斂級數或發級數。何則。有同符號之項。其級數 n 項之和。因 n 漸增而次第增大。迨 n 增至無限時。其和或無限大而為發級數。或近於有限數量而為斂級數。要不出乎此二者也。

265. 定理 級數之各項為有限數量而符號相同者。則其級數必為發級數。

何則。其各項為其限數量。則可取最小項之有限數量 a 。而知此級數各項之和。必比 na 為大。惟 na 。因 n 之增而增大。故此級數 n 增至無限時。其和亦增至無限。即為發級數。

266. 記法 某級數連續之諸項。以 u_1, u_2, u_3, \dots 表之。即 u_1 為首項。 u_2 為第二項。 u_3 為第三項。以下仿此。而凡為無限級數。不能一一盡記。故以 u_n 表其壹切之項。即表其級數之第 n 項。

以 U_n 表其首項以下 n 項之和。而級數為斂級數者。則以 U 表其全項之和(即無限項之和)。由是

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$$

及
$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

267. 斂級數之關係 設 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$ 其級數為斂級數者。則有關係如次。

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \text{ 當 } n \text{ 增至無限時。則其和切近於 } U。$$

由是知 $n+1$ 項之和 U_{n+1} 。較 n 項之和 U_n 。尤近於定限 U 。即 $U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, \dots$ 次第漸近於 U 。其各和與 U 之差。能因 n 增大而遞次減小至於極微之數。

$$\text{令 } U_{n+1} = U_n + u_{n+1}$$

$$U_{n+1} - U_n = u_{n+1},$$

$$U_{n+2} - U_n = u_{n+1} + u_{n+2},$$

$$U_{n+3} - U_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3},$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$U - U_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} + \dots$$

故級數為斂級數。必其 n 增至無限時。其第 $n+1$ 項減小至無限。

又自其第 $(n+1)$ 以下若干項之和，必更小於任何之小數。

例如級數 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 雖 n 增至無限時，其第 n 項亦減小至無限，然而非為斂級數。

何則，第 $(n+1)$ 項以下連續 n 項之和 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ 比其量小項 $\frac{1}{2n}$ 之 n 倍即 $\frac{1}{2}$ 為大，則此級數之和，不能小於任何之小數，故此級數非為斂級數。

268. 注意 本編中所論之級數，若其各項之符號，皆為正者，則此等級數為斂級，或為發級，與皆為負號者同，故各項之符號，俱為正，與俱為負，皆可用正符號以表示之。

級數之為斂級數，抑為發級數，可由次之定理而知之。

269. 定理一 若級數之各項，小於他斂級數相對應之項者，則此級數為斂級數。

令第一級數為 $U = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$

又令第二級數為 $V = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$

而 $u_1 < v_1, u_2 < v_2, \dots$

總之其對於 r 之任何正整數，而得 $u_r < v_r$ 。

由是 $U < V$ 。

V 為有限，則 U 亦必有限，即得本定理之證，蓋以其和為有限，而其各項之符號相同故也。

由同理，若級數之各項，大於他發級數相對應之項者，則可證得此級數為發級數。

〔第一例〕 級數 $\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$ 為斂級數，試證明之。

$$U = \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$V = \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots$$

U 之各項，比 V 之相對應之項為小，而 V 為等比級數，其公比為 $\frac{1}{2}$ ，故 V 為斂級數。

惟 V 爲斂級數。而 $U < V$ 。故 U 爲斂級數。

[第二例] 級數 $\frac{a+x}{b+x} + \frac{(a+x)(2a+x)}{(b+x)(2b+x)} + \frac{(a+x)(2a+x)(3a+x)}{(b+x)(2b+x)(3b+x)} + \dots$

其 a, b 及 x 俱爲正。而 $a < b$ 。則此級數爲斂級數。

此級數之各項。比 $\frac{a+x}{b+x} + \frac{(a+x)^2}{(b+x)^2} + \frac{(a+x)^3}{(b+x)^3} + \dots$ 之相應各項爲小。

何則。以 a, b 及 x 俱爲正。而 $b > a$ 。茲設 r 爲大於 1 之任何正整數。

$$\text{則 } \frac{ra+x}{rb+x} < \frac{a+x}{b+x}.$$

而此第二級數爲斂級數。故原級數亦爲斂級數。

餘論 欲確定第一級數之爲斂級數。不必如本定理將其各項一一考其比第二級數之相應各項爲小而後知之。但從其有限之若干項以下之項。其比第二級數之相應項爲小者。即可定其級數爲斂級數。

何則。以級數有限項之和。其數既有限。而以後之項能爲斂級。即原級數爲斂級數。

[例] 試證 $1 + \frac{4}{|2|} + \frac{4^2}{|3|} + \frac{4^3}{|4|} + \frac{4^4}{|5|} + \frac{4^5}{|6|} + \frac{4^6}{|7|} + \dots$ 爲斂級數。

此級數之第六項及第六項以下之項。爲 $\frac{4^6}{|6|} + \frac{4^6}{|7|} + \dots$ 比第二級數 $\frac{4^6}{5|5|} + \frac{4^6}{5^2|5|} + \dots$ 之相應項爲小。而此第二級數有公比 $\frac{4}{5}$ 而爲斂級數。故原級數亦爲斂級數。

270. 定理二 兩級數相應項之比常爲有限。則此兩級數俱爲斂級數。或俱爲發級數。

設兩級數爲 $U = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$

及 $V = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$

其諸項皆爲正數量。故由 113 章。知 $\frac{U}{V}$ 爲在諸分數 $\frac{u_i}{v_i}$ 內最大及最小分數之間。故 $\frac{U}{V}$ 爲有限。

惟因 $\frac{U}{V}$ 爲有限。故 U 爲有限。 V 亦爲有限。 U 爲無限。則 V 亦爲無限。即 U 爲歛級數。 V 亦爲歛級數。 U 爲發級數。 V 亦爲發級數。

例如兩級數 $\frac{8}{2 \cdot 3} + \frac{16}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{8n}{(n+1)(n+2)} + \dots$

及 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \dots \dots \dots$ 二者俱爲

歛級數。或俱爲發級數。

何則。其第 r 項之比爲

$$\frac{8r}{(r+1)(r+2)} : \frac{1}{r} = \frac{8r^2}{(r+1)(r+2)} = 8 \left(1 - \frac{1}{r+1}\right) \left(1 - \frac{2}{r+2}\right).$$

而 r 爲 1, 2, 3, 故此比之值不大於 8。由是 $\frac{U}{V}$ 爲有限。由 267 章。已知 V 爲發級數。故 U 亦爲發級數。

271. 定理三 於級數若干項之後。其各後項與其前項之比。恆小於某定數量。但某定數量爲小於 1 者。則其級數爲歛級數。

設自第 r 項之後。各項與前項之比。恆小於定數量 k 。但 $k < 1$ 。

則 $\frac{u_{r+1}}{u_r} < k, \quad \frac{u_{r+2}}{u_{r+1}} < k, \quad \dots \dots \dots$

即 $u_{r+1} < u_r k, \quad u_{r+2} < u_{r+1} k < u_r k^2, \quad \dots \dots \dots$

由是 $u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \dots < u_r (1 + k + k^2 + \dots) < \frac{u_r}{1-k}$ 。但 k 小於 1。

此級數第 r 項以前 r 項之和原爲有限。而自 r 項至無限項之和。恆小於有限數 $\frac{u_r}{1-k}$ 而爲歛級數。則其全級數爲歛級數可知。

272. 定理四 於級數若干項之後。其各後項與其前項之比。若等於 1 或大於 1。則其級數爲發級數。

第一於第 r 項以後之各項。與其前項之比。爲等於 1。

則 $u_r = u_{r+1} = u_{r+2} = u_{r+3} = \dots \dots \dots$

故 $u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} + \dots + u_{r+n} = nu_r$ 。

而 nu_r 因 n 漸增而大。當 n 增至無限時。 nu_r 亦增至無限。故此級數爲發級數。

第二於第 r 項以後之各項。與其前項之比。為大於 1。

$$\text{則 } u_{r+1} > u_r, \quad u_{r+2} > u_{r+1} > u_r, \dots\dots\dots$$

$$\text{由是 } u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} + \dots\dots + u_{r+n} > nu_r.$$

而 nu_r 因 n 漸增而大。與第一同。故此級數為發級數。

[第一例] 級數 $\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + \dots\dots + \frac{2^{n-1}}{n} + \dots\dots$ 其第 $n+1$ 項。與其前第 n 項之比。為 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n}{n+1} \div \frac{2^{n-1}}{n} = \frac{2n}{n+1}$ 。惟以 $n > 1$ 。所以 $2n > n+1$ 。由是知此比 $\frac{2n}{n+1} > 1$ 。

故此級數為發級數。

[第二例] 級數 $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots\dots + n^2x^{n-1} + \dots\dots$ 其第 $n+1$ 項與第 n 項之比。為 $(n+1)^2x^n \div n^2x^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2x$ 。

今定 $x < 1$ 。設一定數量為 k 。但 k 為在 x 與 1 之間。即 $x < k < 1$ 。而設此 k 為大於前之比。

$$\text{即 } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2x < k. \quad \therefore \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt{x} < \sqrt{k}.$$

$$\text{由是 } n > \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k} - \sqrt{x}}.$$

如上之關係。可得 k 之值。然以此級數 r 項以後各項之比為小於 k 。故 $x < 1$ 。此級數為斂級數。

若 $x = 1$ 。則此級數為 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots$ 易知其為發級數。

又若 $x > 1$ 。則此級數比 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots$ 為大。其為發級數。自無待言。

273. 餘論 凡級數若干項後。其各項之比 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 。恆小於 1。雖可由定理三而知此級數為斂級數。然若此項數 n 增至無限。此比殆同於 1。則不能由定理三。決定其為斂級數抑為發級數。

$$\text{例 } \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots\dots\dots$$

$$\text{其比 } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^k}{(n+1)^k} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}.$$

由是 k 爲正。則 $(1 + \frac{1}{n})^k$ 大於 1。故此比常小於 1。然 n 增至無限時。此比殆等於 1。

即不能由定理三決定此級數爲斂級數與否。凡若此者。不可不用別法。以推求之。

274. 定理 級數 $\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots$ 若 k 大於 1。則爲斂級數。若 k 等於 1 或小於 1。則爲發級數。

第一 $k > 1$ 。此級數之各項。比其前項爲小。故有次之關係。

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} < \frac{2}{2^k}$$

$$\frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k} < \frac{4}{4^k}$$

.....

$$\frac{1}{2^{nk}} + \frac{1}{(2^n+1)^k} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^k} < \frac{2^n}{2^{nk}}$$

由是知全級數。比 $\frac{1}{1^k} + \frac{2}{2^k} + \frac{4}{4^k} + \dots + \frac{2^n}{2^{nk}} + \dots$ 爲小。

即比 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{2(k-1)}} + \dots + \frac{1}{2^{n(k-1)}} + \dots$ 爲小。

後之級數 $k > 1$ 。即公比 $\frac{1}{2^{k-1}} < 1$ 。即爲公比小於 1 之等比級數。故原級數。爲斂級數。

第二 $k = 1$ 。則原級數爲 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ 如次集合之。

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right] + \dots$$

$$+ \left[\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right] + \dots$$

於其括弧內各羣之值。皆比 $\frac{1}{2}$ 爲大。何則。

$$\text{以 } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

.....

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{由是 } 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right] + \dots \\ + \left[\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right] \\ > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \text{ 至 } n+1 \text{ 項.} \end{aligned}$$

故 $k=1$. 原級數 $> 1 + \frac{1}{2}n$.

令 n 爲無限. 則 $1 + \frac{1}{2}n$ 亦爲無限. 故其級數爲發級數.

第三 $k < 1$. 則以原級數 $\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots$ 之各項. 大於 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ 之相應項. 則

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

而 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ 爲發級數. 故原級數之 $k < 1$. 則爲發級數.

275. 注意 欲決定他種級數爲斂級或發級與否. 可以前章之級數爲基本. 由定理一及定理二之方法決定之.

[第一例] 設級數之公項爲 $\frac{2n}{n^2+1}$. 試決定此級數爲斂級數. 抑爲發級數.

$$n > 1. \text{ 則 } \frac{2n}{n^2+1} > \frac{1}{n}. \text{ 即 } \Delta \frac{2n}{n^2+1} > \Delta \frac{1}{n}.$$

但 $\Delta \frac{1}{n}$ 爲發級數. 故 $\Delta \frac{2n}{n^2+1}$ 爲發級數.

[第二例] 級數之公項爲 $\frac{n+2}{n^3+1}$. 試決定此級數爲斂級數. 抑爲發級數.

$$\Delta \frac{n+2}{n^3+1} < \frac{n+2}{n^3} < \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}. \text{ 由是 } \Delta \frac{n+2}{n^3+1} < 3\Delta \frac{1}{n^2}.$$

但由 274 章。可證知 $\sum \frac{1}{n^2}$ 爲歛級數。故 $\sum \frac{n+1}{n^3+1}$ 爲歛級數。

276. 項之符號 級數之諸項。其符號相同者。原可用前之法則。決定其爲歛級數或發級數。然使級數之各項有正有負。則將此級數之各項。均變爲正項。以決定之。若爲歛級數。即定原級數爲歛級數。何則。凡級數全項皆正。而能爲歛級數者。則變其中一部分之項之符號。仍不失其爲歛級數也。

然變其級數之負項爲正而爲發級數者。則原級數未必爲發級數。

例 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ 爲歛級數 (見 277 章之例)。

而 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ 爲發級數。

凡全項有同符號而爲歛級數者。謂之絕對歛級數 (Absolutely convergent)。

若 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ 不得謂之絕對歛級數。

277. 定理五 凡級數之各項有正負相間者。則可由次之定理直知其爲歛級數。

級數之項正負相間。其各項比其前項爲小。而其項之絕對值。可小至無限者。則此級數爲歛級數。

設此級數爲 $u_1 - u_2 + u_3 - \dots \pm u_n \mp u_{n+1} \pm \dots$

可記其級數如次之形。

$$U = u_1 - u_2 + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) \mp \dots$$

及 $U = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) - \dots$

惟以 $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ 故 $(u_2 - u_3), (u_3 - u_4), (u_4 - u_5), \dots$ 俱爲正。

故於第一式 $U > u_1 - u_2$ 。於第二式 $U < u_1$ 。

乃知其和 U 在 u_1 及 $u_1 - u_2$ 之間。故 U 爲有限值。

又從原級數減 U_n 。則爲

$U - U_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2}) \pm (u_{n+3} - u_{n+4}) \pm \dots$ 。換其形。而爲

$U - U_n = \pm u_{n+1} \mp (u_{n+2} - u_{n+3}) \mp (u_{n+4} - u_{n+5}) \mp \dots$, 則知 $U - U_n$ 之絕對值, 爲在於 $u_{n+1} - u_{n+2}$ 與 u_{n+1} 之間, 而 $U - U_n$ 當 n 增至無限時, 其值爲無限小, 故此級數爲斂級數。

例 $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, 爲斂級數。

何則, 以 $U = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$

又 $U = \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \dots$

故其和 U 在 $\frac{1}{2}$ 與 1 之間, 其值有限。

又 $U - U_n = \pm \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \pm \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) \pm \dots$

及 $U - U_n = \pm \frac{1}{n+1} \mp \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \mp \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) \mp \dots$

即 $U - U_n$ 之絕對值, 爲在於 $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ 與 $\frac{1}{n+1}$ 之間, 當 n 增至無限時, 其值無限小, 故爲斂級數。

又 $\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots$ 非爲斂級數。

何則, 同前法, 知其和爲在 $\frac{2}{1}$ 及 $\frac{2}{1} - \frac{3}{2}$ 之間爲有限, 然雖爲有限, 而其第 n 項 $\frac{n+1}{n}$ 當 n 增至無限時, 其值非無限小, 故此級數非爲斂級數, 即爲不定級數。

278. 最要三級數之斂級數, 可用前章之法則考證之如次。

[第一] 二項級數。

即 $1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n} x^n + \dots$

m 爲正整數, 則此級數之項數爲有限, 若 m 非爲正整數 (爲分數或負數), 則其 $m, m-1, m-2, m-3, \dots$ 之諸因子中, 無一爲 0 者, 故此級數之項, 連續至無限。

m 非爲正整數。欲決定其爲斂級數與否。須推究其後項與前項之比。即 $u_{n+1} : u_n$ 。

$$\begin{aligned} \text{惟 } \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)(m-n+1)}{n} x^n : \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{n-1} x^{n-1} \\ &= \frac{m-n+1}{n} x = -x \left(1 - \frac{m+1}{n}\right). \end{aligned}$$

令 n 大於 $m+1$ 。則 $1 - \frac{m+1}{n}$ 爲正數。故 x 爲正。則 u_{n+1} 及 u_n 符號相異。即其各項變爲正負相間者。若 x 爲負。則 u_{n+1} 及 u_n 符號相同。即全項之符號爲相同者。

惟 n 漸增大。 $1 - \frac{m+1}{n}$ 次第近於 1。

故 n 充分增大時。 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 之絕對值。殆近於 x 。

若是 x 如小於 1。則 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 自初項或若干項後。當小於 1。由 271 章。此連次各項之絕對值相加所成之級數。爲斂級數。故此級數之項。無論其符號異同如何。要皆爲斂級數。

即凡二項級數 x 之值小於 1 者。爲斂級數。

[註] 此級數 $x=1$ 。則 $n > -1$ 爲斂級數。而 $x=-1$ 。則 $n > 0$ 。爲斂級數。(見 338 章)。

[第二] 指數級數 即 $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots$

其後項與前項之比。爲 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^n}{n} \div \frac{x^{n-1}}{n-1} = \frac{x}{n}$ 。

而此比至若干項以後。 n 比 x 爲大。其值乃小於 1。故此級數對於 x 之任意值。皆爲斂級數。

[第三] 對數級數 即 $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots$

以 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} \div (-1)^n \frac{x^n}{n} = -\frac{nx}{n+1} = -x \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ 。

由是觀之。 x 小於 1。則 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 之值爲小於 1。

所以對數級數。凡 x 之值在 -1 及 $+1$ 之間者。則為斂級數。

若 $x=1$ 。則此級數為 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ 。由定理五而知為斂級數。

若 $x=-1$ 。則此級數為 $-(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots)$ 知為發級數 (274 章)。

279. 無限數因子之積 無限數因子之積之斂級數。及其他之斂級數所有諸定理。詳載於後編 (見 337 章)。惟於次章所示之二定理為最緊要。不可不先證明之。

280. 兩級數之積 設兩級數。為

$$U = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots + u_nx^n + \dots$$

$$V = v_0 + v_1x + v_2x^2 + \dots + v_nx^n + \dots$$

此皆為斂級數。而第三級數。為

$$P = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0)x + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0)x^2 + \dots \\ + (u_0v_n + u_1v_{n-1} + \dots + u_nv_0)x^n + \dots$$

其 x 之任意方乘係數。等於前兩級數。乘積中 x 之同方乘係數。若合於次之兩例。則 P 等於 $U \times V$ 而為斂級數。

(1) 兩級數 U 及 V 其各項皆為正者。

(2) 兩級數 U 及 V 雖有負項。設變為正項仍不失為斂級數者。

[註] 此章及此編全體所載。蓋從可西 [Cauchy] 氏解析幾何學。略為變更而得者。

[第一] U 及 V 其各項俱為正者。則

$$U_{2n} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots + u_nx^n + \dots + u_{2n}x^{2n},$$

$$\text{及 } V_{2n} = v_0 + v_1x + v_2x^2 + \dots + v_nx^n + \dots + v_{2n}x^{2n}.$$

$$\therefore U_{2n} \times V_{2n} = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0)x + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0)x^2 + \dots \\ + (u_0v_{2n} + u_1v_{2n-1} + \dots + u_nv_n + \dots + u_{2n-1}v_1 + u_{2n}v_0)x^{2n} + x^{2n} \text{ 以上之項。}$$

$$\text{即 } U_{2n} \times V_{2n} = P_{2n} + x^{2n} \text{ 以上之項。}$$

$$\text{由是 } U_{2n} \times V_{2n} > P_{2n}.$$

$$\text{又 } P_{2n} = U_n \times V_n + \text{其他之項。}$$

$$\text{由是 } P_{2n} > U_n \times V_n.$$

故知 P_{2n} 在於 $U_n \times V_n$ 與 $U_{2n} \times V_{2n}$ 之間。

今兩級數 U 及 V 為斂級數。故 n 增至無限時。 U_{2n} 及 U_n 漸近於 U 。 V_{2n} 及 V_n 漸近於 V 。即知 U_{2n} 及 U_n 之極限為 U 。 V_{2n} 及 V_n 之極限為 V 。

由是 $U_{2n} \times V_{2n}$ 及 $U_n \times V_n$ 之極限為 $U \times V$ 。即此兩積之中間 P_{2n} 之極限為 $U \times V$ 。即 $P = U \times V$ 。

是即證得 U 及 V 無限級數之積等於 P 。而為斂級數。

(第二) U 及 V 其各項非皆為正者。

可使其負項為正。而變 U 及 V 為 U' 及 V' 。

P 由於 U 及 V 所成之級數。依同法令 P' 為由於 U' 及 V' 所成之級數。

由是 $U_{2n} \times V_{2n} - P_{2n} = (U_{2n} \times V_{2n})$ 級數中 x^{2n} 以上之項。

同法 $U'_{2n} \times V'_{2n} - P'_{2n} = (U'_{2n} \times V'_{2n})$ 級數中 x^{2n} 以上之項。

然以 $U_{2n} \times V_{2n}$ 有負項。故 $(U_{2n} \times V_{2n})$ 級數中 x^{2n} 以上之項。不大於 $(U'_{2n} \times V'_{2n})$ 級數中 x^{2n} 以上之項。即 $U_{2n} \times V_{2n} - P_{2n}$ 不大於 $U'_{2n} \times V'_{2n} - P'_{2n}$ 。

但變 U 及 V 之負項為正。而 U' 及 V' 尚為斂級數。

由是依第一之證法。 n 增至無限。 P'_{2n} 之極限。等於 $U'_{2n} \times V'_{2n}$ 之極限。即 $U' \times V'$ 。蓋 n 無限大時。 $U'_{2n} \times V'_{2n} - P'_{2n}$ 為無限小也。

然則不大於 $U'_{2n} \times V'_{2n} - P'_{2n}$ 者之 $U_{2n} \times V_{2n} - P_{2n}$ 。當 n 增至無限時。其小愈為無限可知。

故 $U' \times V' = P'$ 。則 $U \times V = P$ 。

(注意) 兩級數 U 及 V 為斂級數。若變其負項為正。而非為斂級數者。則其級數 P 未必為斂級數。若 P 非為斂級數。則不能有 $U \times V = P$ 之關係。何則。因 P 非為有限值。故於 P 內 x 之某特別方乘之係數。雖等於 $U \times V$ 內 x 之同方乘係數。而不能等於 $U \times V$ 。

(註) U 或 V 為絕對的斂級數。則可證得 P 為斂級數 (見庫利氏代數學第二卷 127 頁)。

281. 恆同兩級數之定理 設兩級數

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad \text{及} \quad b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

爲欵級數。而對於 x 之任何值。此兩級數恆相等。則 $a_0 = b_0$,

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots$$

何則。此兩級數俱爲欵級數。則其差亦爲欵級數可知。

$$\text{由是 } a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots = 0. \quad (1)$$

此級數對於 x 之任何值而爲 0。故此級數對於 x 之任何值爲欵級數。

$$\text{若 } x=0. \text{ 則 } a_0 - b_0 = 0. \quad \therefore a_0 = b_0.$$

$$\text{由是 } x\{a_1 - b_1 + (a_2 - b_2)x + (a_3 - b_3)x^2 + \dots\} = 0. \quad (2)$$

惟 (1) 對於 x 之任何值。皆爲欵級數。設 x 任意之值爲 x_1 。其級數 $a_2 - b_2 + (a_3 - b_3)x_1 + \dots$ 等於有限值 L_1 。

$$\text{由是 (2) 爲 } x_1\{a_1 - b_1 + x_1 L_1\} = 0.$$

而此方程式。對於 x 之任何值無不合理。故當 x 之值極小時 $a_1 - b_1$ 與 L_1 之差無限小。其極限 $a_1 = b_1$ 。

$$\text{由同法於 } x_1\{a_2 - b_2 + x_1 L_2\} = 0, a_2 = b_2.$$

$$\text{順次 } a_3 = b_3, a_4 = b_4, \dots$$

由是知兩欵級數。對於 x 之任何值而兩相等者。則此兩欵級數 x 之同方乘係數各相等。

此特例有限項之兩級數。已於 91 章證明之。

例題二十六

試決定次之各級數爲欵級數或發級數。

$$1. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \dots$$

$$\text{〔解〕 將此級數變之 } \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

$$\dots \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

由定理五之例解。此級數爲欵級數。

$$2. \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \frac{1}{(a+4b)(a+5b)} + \dots$$

〔解〕 此級數變為 $\frac{1}{b} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \dots \right)$

故由定理五。此級數為斂級數。

$$3. \frac{3}{4} + \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots + \frac{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+2)}{4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)} + \dots$$

$$〔解〕 \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+2)(n+3)}{4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)(2n+4)} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+2)}{4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)} = \frac{n+3}{2n+4} = \frac{1 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{4}{n}}$$

故此比 n 為 ∞ 。則其極限為 $\frac{1}{2}$ 而常小於 1。由是由定理三。此級數為斂級數。

$$4. \frac{3}{4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)} + \dots$$

〔解〕 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+3}{3n+4}$ 如前例證得為斂級數。

$$5. \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n} + \dots$$

〔解〕 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{3n+3} < \frac{2}{3}$ 故亦為斂級數。

$$6. \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \dots$$

〔解〕 $U = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n-1} + \dots$

又由定理二之例。 $V = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 為發級數。

而 $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{x+n-1}$ 其對於 n 之任何值皆小於 1。則其值有限。故由定理二。 V 為發級數。 U 亦為發級數

$$7. \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+3x} + \dots$$

〔解〕 $x = \frac{1}{y}$ 。則此級數為 $y \left(\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y+3} + \dots \right)$ 。而由前例

$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y+3} + \dots$ 為發級數。故 y 為有限。則原級數為發級數。

$$8. \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^3} + \dots$$

(解) 此級數比 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$ 爲小。若 $x > 1$ ，則 $\frac{1}{x} < 1$ 。故第二之級數爲斂級數。而原級數亦爲斂級數。

又若 $x = 1$ ，則原級數爲 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ 故爲發級數。

又若 $x < 1$ ，則原級數比 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ 爲大。故爲發級數。

$$9. \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^3} + \dots + \frac{x^n}{1+x^{2n}} + \dots$$

(解) 此級數比 $1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots$ 爲小。

$x < 1$ ，則第二級數爲斂級數。故原級數亦爲斂級數。

$x = 1$ ，則原級數爲 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ 故爲發級數。

$x > 1$ ，則原級數比 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ 爲大。故爲發級數。

$$10. \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+3x^3} + \dots + \frac{1}{1+nx^n} + \dots$$

(解) $x = 1$ ，則此級數爲 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ 故爲發級數。

又 $x < 1$ ，則此級數比 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ 爲大。故爲發級數。

又此級數比 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$ 爲小。而於 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$

若 $x > 1$ 則爲斂級數。故 $x > 1$ 原級數爲斂級數。

$$11. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

(解) 此級數比 $1+x+x^2+x^3+\dots$ 爲小。而 $x < 1$ ，此第二級數爲斂級數。故 $x < 1$ ，此級數爲斂級數。

$x = 1$ ，則此級數爲 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots = 1$ 。

故 $x = 1$ ，則此級數爲斂級數。

又 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^n}{(n+1)(n+2)} \div \frac{x^{n-1}}{n(n+1)} = \frac{xn}{n+2} = x - \frac{2x}{n+2}$, 而 $x > 1$, 則 x 之值爲有限, 當 n 增至極大時, $x - \frac{2x}{n+2}$ 殆等於 x , 惟 x 大於 1, 故 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$; 乃由定理四而知爲發級數。

$$12. \quad 1 - \frac{x}{1+a} + \frac{x^2}{1+2a} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{1+na} + \dots$$

[解] $x < 1$ 及 $x = 1$, 則各項次第減小, 且正負相間, 故爲歛級數。又 $x > 1$, 則 n 爲無限大, 其值亦無限大, 故爲發級數。

$$13. \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \dots + \frac{1+n}{1+n^2} + \dots$$

[解] $u_n = \frac{1+n}{1+n^2} > \frac{n}{n^2}$, 即 $u_n > \frac{1}{n}$, 而 n 爲 1, 2, 3, …… 則此級數比 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ 之發級數爲大, 故爲發級數。

$$14. \quad 1 + \frac{2^2-1^2}{2^2+1^2} + \frac{3^2-2^2}{3^2+2^2} + \dots + \frac{n^2-(n-1)^2}{n^2+(n-1)^2} + \dots$$

[解] $u_n = \frac{2n-1}{2n^2-(2n-1)} > \frac{2n}{2n^2}$, 即 $u_n > \frac{1}{n}$, 故如前例證得此級數爲發級數。

$$15. \quad \frac{m}{x+m} + \frac{m^2}{x+2m} + \frac{m^3}{x+3m} + \dots$$

$$[解] \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m^{n+1}}{x+(n+1)m} \div \frac{m^n}{x+nm} = \frac{m(x+nm)}{x+(n+1)m} = \left\{ 1 - \frac{m}{x+(n+1)m} \right\} m,$$

$m < 1$, 則此比小於 1, 故爲歛級數。

又 $m < 1$, 則此比不小於 1, 故爲發級數。

$$16. \quad \frac{1}{x+1} + \frac{m}{x+m} + \frac{m^2}{x+m^2} + \dots$$

[解] 此級數比 $\frac{1}{x} + \frac{m}{x} + \frac{m^2}{x} + \dots$ 爲小, 而 $m < 1$, 則此第二級數爲歛級數, 故原級數 $m < 1$ 爲歛級數。

又 $m = 1$, 則原級數爲 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \dots$ 而爲發級數。

又 $m > 1$, 則 $u_n = \frac{m^n}{x+m}$. 以 n 無限大, 其值亦無限大, 故為發級數.

$$17. \frac{(1+a)(1+b)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(2+a)(2+b)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{(n+a)(n+b)}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$[\text{解}] \quad u_n = \frac{(n+a)(n+b)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + (a+b)n + ab}{n^3 + 3n^2 + 2n} > \frac{n^2}{n^3 + 3n^2 + 2n} > \frac{n^2}{6n^3},$$

$$\text{即 } u_n > \frac{1}{6n}. \therefore \text{原級數} > \sum \frac{1}{6n}. \text{即 } > \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right)$$

由是原級數為發級數.

$$18. \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1+2\sqrt{3}} + \frac{3}{1+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{n}{1+n\sqrt{(n+1)}} + \dots$$

$$[\text{解}] \quad u_n = \frac{n}{1+n\sqrt{(n+1)}} > \frac{n}{2n\sqrt{(n+1)}}. \text{即 } \frac{1}{2\sqrt{(n+1)}} > \frac{1}{2(n+1)}.$$

$$\therefore \text{此級數} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots \right). \text{故為發級數.}$$

$$19. \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{4}}{4+\sqrt{4}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} + \dots$$

$$[\text{解}] \quad u_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} > \frac{\sqrt{n}}{2n}. \text{即 } > \frac{1}{2\sqrt{n}} > \frac{1}{2n}.$$

$$\therefore U > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right). \text{故為發級數.}$$

$$20. \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \dots$$

$$[\text{解}] \quad n \text{ 若大於 } 4, \text{ 則 } u_{n-1} = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) > \frac{1}{2(n+1)}.$$

$$\therefore U > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots \right). \text{故為發級數.}$$

$$21. (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{5}-2) + \dots + (\sqrt{n^2+1}-n) + \dots$$

$$[\text{解}] \quad u_n = \sqrt{(n^2+1)} - n = \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)} - n} > \frac{1}{2n+1}, \text{故為發級數.}$$

$$22. \frac{1^x}{1^b} + \frac{x}{3^b} + \frac{x^2}{5^b} + \dots + \frac{x^n}{(2n+1)^b} + \dots$$

$$[\text{解}] \quad \frac{u_{n+1}}{u^n} = \frac{x^n}{(2n+1)^b} \div \frac{x^{n-1}}{(2n-1)^b} = x \left(1 - \frac{2}{2n+1} \right)^b, \text{ } x \text{ 若大於 } 1, \text{ 則}$$

此比大於1。x若小於1，則此比小於1。由是因 $x > 1$ 或 $x < 1$ 。定此級數為發級數或斂級數。

若 $x=1$ ，則此級數為 $\frac{1}{1^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{7^k} + \dots$ 而

$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{7^k} + \dots < \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots$ 故 $k > 1$ ，則此級數為斂級數。

又 $k=1$ 。則此級數 $= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$ 故為發級數。

又 $k < 1$ 。則 $\frac{1}{1^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + \dots$ 之各項比 $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$ 之相應項為大。故為發級數。

$$23. \quad \frac{2}{2} + \frac{4x}{5} + \frac{6x^2}{10} + \dots + \frac{2nx^{n-1}}{n^2+1} + \dots$$

〔解〕 此級數比 $1+x+x^2+x^3+\dots$ 為小。而 $x < 1$ 。則此第二級數為斂級數。故 $x < 1$ 。則原級數為斂級數。

$x=1$ 。則此級數為 $\frac{2}{2} + \frac{4}{5} + \frac{6}{10} + \dots + \frac{2n}{n^2+1} + \dots$ 而比 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{n}{n^2}$ 為大。故為發級數。

$x > 1$ 。則比 $\frac{2}{2} + \frac{4}{5} + \frac{6}{10} + \dots$ 為大。故為發級數。

$$24. \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \dots + \frac{2n-5}{n^3-5n}x^{n-1} + \dots$$

$$\text{〔解〕} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)-5}{(n+1)^3-5(n+1)} x^n \div \frac{2n-5}{n^3-5n} x^{n-1}$$

$$= \frac{n(2n-3)(n^2-5)}{(n+1)(2n-5)(n^2+2n-4)} x = \frac{\left(2-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{5}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n^2}\right)} x. \quad n \text{ 無限大。則}$$

此比之極限為 $\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} x$ 。即等於 x 。故此比之大於1或小於1。因乎 $x < 1$ 而定。由是 $x < 1$ ，則為斂級數。 $x > 1$ ，則為發級數。 $x=1$ ，則

$\sum \frac{2n-5}{n^3-5n} < \sum \frac{2}{n^2}$. 惟 $\sum \frac{2}{n^2}$ 爲斂級數。故 $x=1$ 。則原級數爲斂級數。

25. $\frac{1}{1^2-x} + \frac{1}{2^2-x} + \frac{1}{3^2-x} + \dots + \frac{1}{n^2-x} + \dots$. 除 x 爲整平方數外。對於一切值爲斂級數。試證之。

[證] x 爲不完全平方數之有限數。今設各項之分母爲 $1^2 - \frac{1^2}{2}$, $2^2 - \frac{2^2}{2}$, $3^2 - \frac{3^2}{2}$, \dots , $n^2 - \frac{n^2}{2}$, \dots 至若干項後。此諸分母。比原分

母爲小。故原級數 $< \frac{1}{1^2 - \frac{1^2}{2}} + \frac{1}{2^2 - \frac{2^2}{2}} + \frac{1}{3^2 - \frac{3^2}{2}} + \dots + \frac{1}{n^2 - \frac{n^2}{2}} + \dots$
 $< 2 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \right)$.

由是此級數爲斂級數。

26. $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) n^m x^n$.

[解] $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) (n+1)^m x^{n+1} \div \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) n^m x^n$
 $= x \left(\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^m$. n 增至極大時。此比殆等於 x 。

故 $x < 1$ 。則爲斂級數。 $x > 1$ 。則爲發級數。

$x=1$ 。而第一 $m = \frac{1}{2}$ 。則 $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) n^{\frac{1}{2}} = \sum \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}}$
 $= \sum \frac{1}{\sqrt{n-1}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} = \sum \frac{1}{\sqrt{(n-1)^2 + (n-1) + n-1}} > \sum \frac{1}{2(n-1)}$.

而 $\sum \frac{1}{2(n-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$ 爲發級數。由是原級數 $x=1$ 。

而 $m = \frac{1}{2}$ 。則爲發級數。故 $x=1$ 。而 $m > \frac{1}{2}$ 。亦爲發級數。

$x=1$ 。而第二 $m < \frac{1}{2}$ 。則 $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) n^m$

$= \sum \frac{1}{(\sqrt{n^2 - n + n - 1}) n^{\frac{1}{2} - m}} < \sum \frac{1}{2n^k}$. 但 $k > 1$.

而 $\sum \frac{1}{2n^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots \right)$ 爲斂級數。(274) 章。

由是 $x=1$ ，而 $m < \frac{1}{2}$ ，則原級數爲斂級數。

27. $\sum n^k \{ \sqrt{(n-1)} - 2\sqrt{(n-2)} + \sqrt{(n-3)} \} x^n$ 。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^k \{ \sqrt{n} - 2\sqrt{(n-1)} + \sqrt{(n-2)} \} x^{n+1}}{n^k \{ \sqrt{(n-1)} - 2\sqrt{(n-2)} + \sqrt{(n-3)} \} x^n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \left\{ \frac{\sqrt{n} - 2\sqrt{(n-1)} + \sqrt{(n-2)}}{\sqrt{(n-1)} - 2\sqrt{(n-2)} + \sqrt{(n-3)}} \right\} x. \end{aligned}$$

n 爲無限大，則此比殆等於 x 。故 $x < 1$ ，則爲斂級數。而 $x > 1$ ，則爲發級數。若 $x=1$ ，而 $k = \frac{1}{2}$ ，則原級數爲

$$\begin{aligned} & - \sum \sqrt{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(n-2)} + \sqrt{(n-3)}} - \frac{1}{\sqrt{(n-2)} + \sqrt{(n-2)}} \right\} \\ &= - \sum \sqrt{n} \left\{ \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n-3}}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2})(\sqrt{n-2} + \sqrt{n-3})} \right\} \\ &> \sum \sqrt{n} \frac{1}{(2\sqrt{n-1})(2\sqrt{n-2})} > \sum \frac{\sqrt{(n-1)}}{4\sqrt{(n-1)}\sqrt{(n-2)}} \text{ 即 } \frac{1}{2} \sum \frac{1}{\sqrt{(n-2)}}. \end{aligned}$$

由 274 章 $\sum \frac{1}{\sqrt{(n-2)}} = \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \dots$ 爲發級數。

由是原級數 $x=1$ ， $k = \frac{1}{2}$ ，則爲發級數。

又原級數 $x=1$ ， $k > \frac{1}{2}$ ，亦爲發級數。

若 $x=1$ ，而 $k < \frac{1}{2}$ ，則原級數爲

$$\begin{aligned} & - n^k \left\{ \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n-3}}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2})(\sqrt{n-2} + \sqrt{n-3})} \right\} \\ &= - \sum \frac{2n^k}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2})(\sqrt{n-2} + \sqrt{n-3})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n-3})} \\ &< \sum \frac{2n^k}{(\sqrt{n})(\sqrt{n})(\sqrt{n})} = 2 \sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}-k}} \text{ 由 274 章。此級數爲斂級數。} \end{aligned}$$

故 $x=1$ ，而 $k < \frac{1}{2}$ ，則原級數爲斂級數。

第貳拾貳編

二項式之任意指數

282. 二項式之歛級數 如於第二十編所示 n 爲正整數。證得

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r} x^r + \dots$$

而於本編證明此公式。不獨限於 n 爲正整數。即對於 n 之任何數。(負數或分數) 皆爲合理。但此公式右邊之級數爲歛級數。

n 爲正整數。此公式右邊之級數。迄於第 $n+1$ 項而止。而爲有限項之級數。若 n 非爲正整數。則 $n, n-1, n-2, n-3, \dots$ 等因子。皆不能爲 0。故此級數各項連續至無限。

二項式之公項。即第 $r+1$ 項。爲 $\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r} x^r$ 。

而 n 非爲正整數。此式不能從簡記爲 $\frac{\binom{n}{r}}{r} x^r$ 。然可用 241 章之記法。記爲 $\frac{n_r}{r} x^r$ 。

故對於 n 之任何值。二項式之定理爲

$$(1+x)^n = 1 + n_1 x + \frac{n_2}{2} x^2 + \frac{n_3}{3} x^3 + \dots + \frac{n_r}{r} x^r + \dots$$

283. 二項式定理之證明 從簡用 $f(m)$ 表任意之級數。

$$1 + \frac{m_1}{1} x + \frac{m_2}{2} x^2 + \dots + \frac{m_r}{r} x^r + \dots$$

$$\text{故 } f(m) \equiv 1 + \frac{m_1}{1} x + \frac{m_2}{2} x^2 + \dots + \frac{m_r}{r} x^r + \dots,$$

$$f(n) \equiv 1 + \frac{n_1}{1} x + \frac{n_2}{2} x^2 + \dots + \frac{n_r}{r} x^r + \dots,$$

$$\text{及 } f(m+n) \equiv 1 + \frac{(m+n)_1}{|1|} x + \frac{(m+n)_2}{|2|} x^2 + \dots + \frac{(m+n)_r}{|r|} x^r + \dots$$

今求得於 $f(m) \times f(n)$ 中 x^r 之係數為

$$\frac{m_r}{|r|} + \frac{m_{r-1}n_1}{|r-1| |1|} + \frac{m_{r-2}n_2}{|r-2| |2|} + \dots + \frac{m_{r-s}n_s}{|r-s| |s|} + \dots + \frac{n_r}{|r|}$$

即
$$\frac{1}{|r|} \left\{ m_r + \dots + \frac{|r|}{|r-s| |s|} m_{r-s} n_s + \dots + n_r \right\}$$

而由 Vandermonde 氏之定理 (249 章及 261 章)。此係數等於 $\frac{(m+n)^r}{|r|}$ 。即等於 $f(m+n)$ 中 x^r 之係數

故 $f(m+n)$ 與 $f(m) \times f(n)$ 。其 x 之同方乘係數相等。而 $x < 1$ 。則 $f(m)f(n)$ 及 $f(m+n)$ 。對於 m 及 n 之任何值。皆為斂級數 (278 章)。

由是依 280 章 $f(m) \times f(n) = f(m+n) \dots \dots \dots (A)$

即此恆同式。若 $x < 1$ 。則對於 m 及 n 之任何值。無不合理。

今使於 $f(m)$ 其 $m=0$ 。則可知 $f(0)=1$ 。又使 $m=1$ 。則可知 $f(1)=1+x$ 。

又使於 $f(m)$ 其 $m=r$ 。但 r 為正整數。則

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 + \frac{r_1}{|1|} x + \frac{r_2}{|2|} x^2 + \dots + \frac{r_r}{|r|} x^r \\ &= 1 + \frac{r}{|1|} x + \frac{r(r-1)}{|2|} x^2 + \dots + x^r = (1+x)^r. \end{aligned}$$

由是從 (A) 得次之結果。

$$f(m) \times f(n) \times f(p) \times \dots \equiv f(m+n) \times f(p) \times \dots \equiv f(m+n+p+\dots)$$

今 $m=n=p=\dots = \frac{r}{s}$ 。但 r 及 s 為正整數。

即上之恆同式有 s 個因子。

$$f\left(\frac{r}{s}\right) \times f\left(\frac{r}{s}\right) \times f\left(\frac{r}{s}\right) \times \dots = f\left(\frac{r}{s} + \frac{r}{s} + \frac{r}{s} + \dots\right)$$

即
$$\left\{ f\left(\frac{r}{s}\right) \right\}^s = f\left(\frac{r}{s} \times s\right) = f(r)$$

惟以 r 為正整數。故 $f(r) = (1+x)^r$ 。

$$\therefore \left\{ f\left(\frac{r}{s}\right) \right\}^s = (1+x)^r. \quad \therefore (1+x)^{\frac{r}{s}} = f\left(\frac{r}{s}\right).$$

由是證得於 $(1+x)^n$ 。其 n 爲正分數者。亦能適合於二項式之定理。即證得二項式之指數。無論爲整數爲分數之任何正數。皆合於二項式之定理。

又次證明二項式之定理。對於任意之負指數。亦能合理。

$$\text{由 (A) 得 } f(-n) \times f(n) = f(-n+n) = f(0) = 1.$$

$$\therefore f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n}.$$

由是證得於 $(1+x)^n$ 。其 n 爲負數者。亦能適合於二項式之定理。至是乃證得二項式之指數。無論正與負之整數或分數。無不合於二項式之定理。

284. 尤拉 (Euler) 氏之證明 於二項式之定理。由尤拉氏所證明者如次。

以 $f(m)$ 表級數

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-r+1)}{|r|} x^r + \dots.$$

$$\text{即 } f(m) \equiv 1 + mx + \frac{m_2}{2} x^2 + \dots + \frac{m_r}{|r|} x^r + \dots \quad (1)$$

$$f(n) \equiv 1 + nx + \frac{n_2}{2} x^2 + \dots + \frac{n_r}{|r|} x^r + \dots \quad (2)$$

$$\text{及 } f(m+n) \equiv 1 + (m+n)x + \frac{(m+n)_2}{2} x^2 + \dots + \frac{(m+n)_r}{|r|} x^r + \dots$$

今將 (1), (2) 右邊之級數相乘。依 x 之遞昇方乘整列之。其 m 及 n 之值無論如何。而其積之形。常如

$$1 + (m+n)x + \left(\frac{m_2}{2} + \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} + \frac{n_2}{2} \right) x^2 + \dots$$

然 m 及 n 爲正整數。則知 (1) 及 (2) 級數之形。蓋從 $(1+x)^m$ 及 $(1+x)^n$ 而得。

$$\text{即 } f(m) = (1+x)^m, \quad f(n) = (1+x)^n.$$

$$\text{而 } f(m) \times f(n) = (1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n} = f(m+n).$$

由是 m 及 n 爲正整數。則 $f(m) \times f(n) = f(m+n) \dots \dots (A)$

而此 (A) 不論 m 及 n 之值爲何數。皆能合理。但 $f(m)$ 及 $f(n)$ 爲絕對的歛級數 (280 章)。

此後證法與 283 章同。故不贅。

例 題

1. $(1+x)^{-1}$ 展開之。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad (1+x)^{-1} &= 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-2)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)(-2)(-3) \dots (-r)}{r} x^r + \dots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^r x^r + \dots \end{aligned}$$

此例須解得 x 之極限值爲要。何則。由 229 章等比級數 $1-x+x^2-\dots$ 其 x 若不在 -1 及 $+1$ 之間。不能等於 $\frac{1}{1+x}$ 。故此例 x 之值在 -1 及 $+1$ 之間爲合理。

2. $(1-x)^{-2}$ 展開之。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad (1-x)^{-2} &= 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-3)}{1 \cdot 2} (-x)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-x)^3 \\ &\quad + \dots + \frac{(-2)(-3) \dots (-r+1)}{r} (-x)^r + \dots \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (r+1)x^r + \dots \end{aligned}$$

此結果不能對於 x 之任何值皆爲合理。例若 $x=2$ 。則 $1=1+2 \cdot 2+3 \cdot 2^2+4 \cdot 2^3+\dots$ 卽爲不合理。

3. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 展開之。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots \left\{ \frac{1}{2} - (r+1) \right\}}{r} x^r + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots + (-1)^{r-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2r} x^r + \dots \end{aligned}$$

4. $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ 展開之。

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2}(-x)^2 + \dots \\
 &\quad + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{2r-1}{2}\right)}{r}(-x)^r + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2r}x^r + \dots
 \end{aligned}$$

其任何項皆為正。何則。以一切項皆有 $2r$ 之負因子故也。

5. 將 $(a^3 - 3a^2x)^{\frac{5}{3}}$ 之展開式。列為 x 之遞昇方乘。

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad (a^3 - 3a^2x)^{\frac{5}{3}} &= \left\{a^3 \left(1 - \frac{3x}{a}\right)\right\}^{\frac{5}{3}} = a^5 \left(1 - \frac{3x}{a}\right)^{\frac{5}{3}} \\
 &= a^5 \left[1 + \frac{5}{3} \left(-\frac{3x}{a}\right) + \frac{\frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 3} \left(-\frac{3x}{a}\right)^2 + \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 3} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{3x}{a}\right)^3 + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 3} \left(-\frac{1}{3}\right) \dots \left\{\frac{5}{3} - (r-1)\right\}}{r} \left(-\frac{3x}{a}\right)^r + \dots \right] \\
 &= a^5 \left\{ 1 - \frac{5}{1} \frac{x}{a} + \frac{5 \cdot 2}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{5 \cdot 2 \cdot 1}{3} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3r-8)}{r} \left(\frac{x}{a}\right)^r + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

自第二項之次皆為正項。何則。因其一切項之負因子。有 $r-2+r$ 個。即有偶數負因子故也。

285. 項之符號 惟 $(1+x)^n$ 之第 $(r+1)$ 項。等於第 r 項。以 $\frac{n-r+1}{r}x$ 即 $\left(-1 + \frac{n+1}{r}\right)x$ 乘之即得。

$$\begin{aligned}
 \text{例如第 } (r+1) \text{ 項} &= \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r} x^r \\
 &= \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{r-1} x^{r-1} \times \frac{n-r+1}{r} x \\
 &= \text{第 } r \text{ 項} \times \frac{n-r+1}{r} x = \text{第 } r \text{ 項} \times \left(-1 + \frac{n+1}{r}\right)x.
 \end{aligned}$$

即 $\left(-1 + \frac{n+1}{r}\right)x$ 爲第 $(r+1)$ 項與 r 項之比。

今若 $n+1$ 爲負數。則 $-1 + \frac{n+1}{r}$ 必爲負數。又 $n+1$ 無論其爲正或負。迨至 $r > n+1$ 。則 $1 > \frac{n+1}{r}$ 。而 $-1 + \frac{n+1}{r}$ 。必爲負數。

由是 x 爲正。則其第 $(r+1)$ 項與第 r 項之比 $r > n+1$ 恆爲負。故於 $(1+x)^n$ 之展開式。至 r 大於 $n+1$ 之正整數。則自 r 項後之諸項。必正負相間。何則。因其 r 項以下前後兩項之比爲負。故其各兩項符號相異可知。

又 x 爲負。則第 $(r+1)$ 項與第 r 項之比 $r > n+1$ 恆爲正。可得而知之。

因 $-1 + \frac{n+1}{r}$ 爲負。而 x 又爲負。其兩項之比 $\left(-1 + \frac{n+1}{r}\right)x$ 。即爲兩負數之積。而恆爲正也。故於 $(1-x)^n$ 之展開式。 r 大於 $n+1$ 之正整數。則自 r 項後之諸項。其符號悉相同。惟 n 爲負。則 $(1-x)^n$ 之各項。皆係正號而爲特別之例。

例 $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 之展開式。其自 r 項以下。與第 r 項同符號。而 r 大於 $\frac{3}{2} + 1$ 。即 $2\frac{1}{2}$ 。其次之正整數爲 3。

故 $r=3$ 。而第三項 = $\frac{\frac{3}{2} + 1}{2} (-x)^2$ 爲正。則此展開式自第三項以下。皆爲正項。

又 $(1+x)^{\frac{15}{2}}$ 之展開式。自第九項以下。正負相間。何則。 r 大於 $\frac{15}{2} + 1$ 。即 $8\frac{1}{2}$ 。其次之正整數爲 9。故 $r=9$ 。

286. 最大項 於 $(1 \pm x)^n$ 之展開式。

$$\begin{aligned} \text{第 } (r+1) \text{ 項} &= \text{第 } r \text{ 項} \times \pm \frac{n-r+1}{r} x \\ &= \text{第 } r \text{ 項} \times \mp \left(1 - \frac{n+1}{r}\right) x. \end{aligned}$$

而 n 非為正整數。其 $(1 \pm x)^n$ 之展開式為級數者。必其 x 之絕對值。小於 1 而後可。

(第壹) 假定 $n+1$ 為負數。以 $-m$ 代之。

則第 $(r+1)$ 項與第 r 項。其比之絕對值為 $\left(1 + \frac{m}{r}\right)x$ 。

即第 $(r+1)$ 項之絕對值 = 第 r 項 $\times \left(1 + \frac{m}{r}\right)x$ 。

由是因 $x\left(1 + \frac{m}{r}\right) \leq 1$ 。從而第 r 項 \geq 第 $(r+1)$ 項。

惟從 $x\left(1 + \frac{m}{r}\right) \leq 1$ 而得 $r \geq \frac{mx}{1-x}$ 。即 $\frac{-(1+n)x}{1-x}$ 。

由是因 $r \geq \frac{-(1+n)x}{1-x}$ 從而第 r 項 \geq 第 $(r+1)$ 項。

於此 $\frac{-(1+n)x}{1-x}$ 若為整數。即得其正數 r 。凡若此者。則其第 r 項與第 $(r+1)$ 項相等。共為最大項。

若 $\frac{-(1+n)x}{1-x}$ 非為整數。則取其次大之整數 r 。即惟有第 r 項為其最大項。何則。以其所取之 r 。比 $\frac{-(1+n)x}{1-x}$ 為大。故第 r 項比第 $(r+1)$ 項為大。

(第二) 假定 $n+1$ 為正數。而其始大之整數為 k 。

然至 r 等於 k 或大於 k 時。則 $\frac{n+1}{r} - 1$ 比 1 為小。而為負數。何則。以 $n+1 < k$ 。而 $r \geq k$ 。故 $\frac{n+1}{r} < 1$ 。

惟第 $(r+1)$ 項 = 第 r 項 $\times \left(\frac{n+1}{r} - 1\right)x$ 。而 x 小於 1。所以第 r 項 $>$ 第 $(r+1)$ 項。

即 $r = k$ 或 $r > k$ 。則第 r 項比其次項即 $(r+1)$ 項為大。由是第 k 項後之各項。其比前項為小可知。即第 k 項以後。皆不得為最大項。而其最大項迄第 k 項而止。

若 r 小於 $n+1$ ，而 $\frac{n+1}{r}-1$ 爲正，則因 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 1$ ，從而第 r 項 $\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}$ 第 $(r+1)$ 項。

惟從 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 1$ ，而得 $r \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \frac{(n+1)x}{1+x}$ 。

即因 $r \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{(n+1)x}{1+x}$ ，從而第 r 項 $\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}$ 第 $(r+1)$ 項。

故若 $\frac{(n+1)x}{1+x}$ 爲整數，第 r 項與第 $(r+1)$ 項相等，而俱爲最大項。

若 $\frac{(n+1)x}{1+x}$ 非爲整數，則取其始大之整數 r ，即第 r 項爲最大項。

例 題

1. 求 $(1-x)^{-\frac{8}{3}}$ 之最大項。但 $x = \frac{8}{9}$ 。

〔解〕 $n+1$ 爲負，而 $\frac{-(1+n)x}{1-x} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{8}{9}}{1-\frac{8}{9}} = 4$ 。

由是第 4 項及第 5 項相等而爲最大項。

2. $x = \frac{3}{4}$ 求於 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ 之展開式。從何項始爲歛級數。

〔解〕 $n+1$ 爲負，而 $\frac{-(1+n)x}{1-x} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 22\frac{1}{2}$ 。

由是知從第 23 項始以後爲歛級數。

3. $4x=3a$ 求 $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ 展開式之最大項。

〔解〕 $(a+x)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 。所求之最大項，爲與 $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 之

最大項相應者。今 $(n+1) \frac{x}{a} \div \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{21}{2} \cdot \frac{3}{4} \div \frac{7}{4} = \frac{9}{2}$ 。由是 r 爲始

大於 $\frac{9}{2}$ 之整數即 5。故第 5 項爲所求之最大項。

例題二十七

1. 由二項式之定理。求下列各展開式之公項。

$$(1) (1-x)^{-2}, \quad (2) (1-x)^{-3}, \quad (3) (1-x)^{-n}, \quad (4) (1+x)^{-\frac{3}{2}},$$

$$(5) (1-x)^{\frac{2}{3}}, \quad (6) (1+x)^{\frac{5}{3}}, \quad (7) (1-5x)^{-\frac{3}{2}}, \quad (8) (1-5x)^{\frac{3}{2}},$$

$$(9) (1-x)^{\frac{2}{p}}, \quad (10) (2a+3x)^{-\frac{3}{2}}, \quad (11) (a^2-2ax)^{\frac{5}{2}}, \quad (12) (4-7x)^{\frac{3}{2}}.$$

$$[\text{解}] \quad (1) \frac{(-2)(-3)\cdots\{-2-(r-1)\}}{r} (-x)^r = (r+1)x^r.$$

$$(2) \frac{(-3)(-4)\cdots\{-3-(r-1)\}}{r} (-x)^r = \frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r.$$

以下皆由公項之公式求得。

$$(3) \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+n-1)}{n-1} x^r. \quad (4) (-1)^r \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3r-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3r} x^r.$$

$$(5) (-1)^{r-1} \frac{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdots (3r-5)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3r} x^r. \quad (6) (-1)^r \frac{5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3r-8)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3r} x^r.$$

$$(7) \frac{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdots (5r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} x^r. \quad (8) -\frac{2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 13 \cdots (5r-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} x^r.$$

$$(9) \frac{q(q+p)(q+2p)\cdots\{q+(r-1)p\}}{p^2 r} x^r.$$

$$(10) (2a)^{-\frac{3}{2}} \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdots (5r-8)}{r} \left(\frac{3x}{10a}\right)^r.$$

$$(11) -\frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-7)}{r} x^r a^{5-r}, \quad r > 3.$$

$$(12) \frac{2 \cdot 5 \cdot 12 \cdots (7r-9)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots 4r} x^r 4^{\frac{3}{2}}.$$

2. 求於 (1) $\left(1+\frac{4}{3}x\right)^{\frac{31}{4}}$ 及 (2) $\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{\frac{21}{4}}$ 最初之負項。

〔解〕 (1) 第 $(r+1)$ 項為第 r 項 $\times \frac{n-r+1}{r} \left(\frac{4}{3}x\right)$ 。故求最初之負項。則以 $\frac{n-r+1}{r}$ 為最初之負數。即 $\frac{\frac{31}{4}-r+1}{r} < 0$ 。 $\therefore r > 7\frac{3}{4}$ 。

由是 $r=8$ 。故第 9 項為最初之負項。同法第 8 項為 (2) 最初之負項。

3. $x = \frac{7}{9}$. 求 $(1+x)^{-12}$ 展開式之最大項。

[解] 因 $r \frac{>}{<} \frac{-(1+n)x}{1-x}$ 即 $\frac{>}{<} \frac{11 \times \frac{7}{9}}{1 - \frac{7}{9}}$ 即 $\frac{>}{<} 38 \frac{1}{2}$. 從而第 r 項 $\frac{>}{<} 38 \frac{1}{2}$ 第 $(r+1)$ 項. \therefore 最大項為 39 項。

4. 求 $(1 - \frac{2}{3}x)^{-2}$ 展開式之最大項。但 $x = \frac{3}{4}$ 。

[解] 因 $r \frac{>}{<} \frac{-(1+n)\frac{2}{3}x}{1 - \frac{2}{3}x}$ 即 $\frac{>}{<} \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3}}$ 即 $\frac{>}{<} 1$. 從而第 r 項 $\frac{>}{<} 1$ 第 $(r+1)$ 項。故最大項。為第 1 項及第 2 項。

5. 設 $x = \frac{5}{6}$ 求於 $(1-x)^{\frac{122}{5}}$ 之展開式中。自何項以後始為歛級數。

[解] 若第 r 項之次項。始比第 r 項為小。而為歛級數。斯時 $r > \frac{(n+1)x}{x+1}$ 即 $r > \frac{(\frac{122}{5}+1)\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}+1}$ 即 $r > 11 \frac{6}{11}$. 故第 11 項之後為歛級數。

6. 試於 $\frac{19-21x}{(1-x)^8}$ 展開式。示其最初 19 項皆為正。而其內最大項之係為 100。

$$\begin{aligned} \text{[證]} \quad (1-x)^{-8} &= 1 + 3x + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + (r+1)(r+2)x^r + \dots\} \end{aligned}$$

$$\frac{19-21x}{(1-x)^8} = \frac{1}{2} (19-21x) \{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + \dots + (r+1)(r+2)x^r + \dots\}$$

$$\therefore x^r \text{ 之係數} = \frac{1}{2} \{19(r+1)(r+2) - 21r(r+1)\} = 100 - (r-9)^2.$$

由是 $r < 19$ 則為正項。又 x^r 之係數 $100 - (r-9)^2$. 則以 $r=9$ 為最大。
 \therefore 其係數 = 100。

7. 二項展開式連續四項之係數。順次為 a_1, a_2, a_3, a_4 . 則

$$\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

[證] a_1 為 $(1+x)^n$ 之第 r 項係數。則

$$a_2 = a_1 \frac{n-r+1}{r}, \quad a_3 = a_2 \frac{n-r}{r+1}, \quad a_4 = a_3 \frac{n-r-1}{r+2}.$$

$$\text{由是 } \frac{a_1}{a_1+a_2} = \frac{r}{n+1}, \quad \frac{a_2}{a_2+a_3} = \frac{r+1}{n+1}, \quad \frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{r+2}{n+1}.$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{r}{n+1} + \frac{r+2}{n+1} = 2 \frac{r+1}{n+1} = \frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

8. 由二項式之定理。求次之各展開式中之公項。但展開式依 x 之遞昇方乘而列者。

$$(1) \frac{a}{\sqrt[3]{(a^2-x^2)}}, \quad (2) \frac{a+x}{a-x}, \quad (3) \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2,$$

$$(4) (a+x)^{\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5) (a+x)^2(a-x)^{-3}, \quad (6) (a-x)^4(a+x)^{-2}.$$

$$[\text{解}] (1) \frac{a}{\sqrt[3]{(a^2-x^2)}} = a(a^2-x^2)^{-\frac{1}{3}} = a \cdot a^{-\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{3}} \text{ 之第 } (r+1) \text{ 項爲 } \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})\cdots\{\frac{1}{3}-(r-1)\}}{1 \cdot 2 \cdots r} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^r$$

$$= (-1)^r \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3r-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3r} (-1)^r a^{-2r} x^{2r} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3r-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3r} a^{-2r} x^{2r}.$$

$$\therefore \text{公項} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3r-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3r} a^{-2r} x^{2r}.$$

$$(2) \frac{a+x}{a-x} = (a+x)(a-x)^{-1}$$

$$= (a+x)(a^{-1} + a^{-2}x + \cdots + a^{-r}x^{r-1} + a^{-1-r}x^r + \cdots).$$

由是 x^r 之項即公項 $= x(a^{-r}x^{r-1}) + a(a^{-1-r}x^r) = 2a^{-r}x^r$.

$$(3) (a+x)^2(a-x)^{-2} = (a^2+2ax+x^2)\{a^{-2}+2a^{-3}x+3a^{-4}x^2+\cdots + (r-1)a^{-r}x^{r-2}+ra^{-1-r}x^{r-1}+(r+1)a^{-2-r}x^r+\cdots\}.$$

$$\therefore x^r \text{ 之項即公項} = x^2(r-1)a^{-r}x^{r-2} + 2ax \times ra^{-1-r}x^{r-1} + a^2(r+1)a^{-2-r}x^r = 4ra^{-r}x^r.$$

$$(4) \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left\{1 + \frac{1x^2}{2a^2} + \frac{1 \cdot 3x^4}{2 \cdot 4a^4} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2r} \frac{x^{2r}}{a^{2r}} + \cdots\right\}.$$

$$\therefore x^{2r} \text{ 項} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2r} a^{-2r} x^{2r}$$

由是 n 爲偶數，則其公項 $= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} a^{-n} x^n$ 。

又 x^{2r+1} 之項 $= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2r} a^{-2r-1} x^{2r+1}$ 。

由是 n 爲奇數，則 $n=2r+1$ 。即 $2r=n-1$ 。

其公項 $= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)} a^{-n} x^n$ 。

$$(5) \quad (2r^2+2r+1) a^{-r-1} x^r.$$

$$(6) \quad (-1)^r 16(r-1) a^{2-r} x^r.$$

9. 試於 $(1+x^2)^3(1-x^3)^{-2}$ 展開式，證其 x^{3n} 之係數爲 $2n$ 。

[證] 原式 $= (1+3x^2+3x^4+x^6) \{1+2x^3+3x^6+\cdots + (n-1)x^{3n-6}+nx^{3n-3}+(n+1)x^{3n}+\cdots\}$ 。

$\therefore x^{3n}$ 之係數 $= (n+1) + (n-1) = 2n$ 。

10. 試於 $(1+2x)^3(1-x)^{-2}$ 展開式，證 x^n 之係數爲 $27(n-1)$ 。但 $n \geq 3$ 。

[證] $(1+6x+12x^2+8x^3) \{1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots\}$ 。

由是 x^n 之係數 $= (n+1)+6n+12(n-1)+8(n-2) = 27(n-1)$ 。

287. 係數之和 欲求 $(1-x)^n$ 展開式自初項至 $r+1$ 項係數之和，可如次法求之。而 n 不拘於正整數。

$$\text{因 } (1-x)^n = 1 - \frac{n_1}{1}x + \frac{n_2}{2}x^2 - \cdots + (-1)^r \frac{n_r}{r}x^r - \cdots$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^r + \cdots$$

此右邊兩級數之積，其 x^r 之係數爲 $1 - \frac{n_1}{1} + \frac{n_2}{2} - \cdots + (-1)^r \frac{n_r}{r}$ 。

又以 $(1-x)^n \times (1-x)^{-1}$ ，即 $(1-x)^{n-1}$ ，其展開式中 x^r 之係數爲 $(-1)^r \frac{(n-1)_r}{r}$ 。

由是知 $(1-x)^n$ 展開式中，自初項至 $r+1$ 項係數之和

$$1 - \frac{n_1}{1} + \frac{n_2}{2} - \cdots + (-1)^r \frac{n_r}{r} \text{ 等於 } (-1)^r \frac{(n-1)_r}{r}.$$

簡言之，於 $(1-x)^n$ 展開式中，其自初項至 $r+1$ 項係數之和，等於 $\frac{(1-x)^n}{1-x}$ 即 $(1-x)^{n-1}$ 展開式中 x^r 之係數。

依同法任意之級數 $\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_r x^r + \dots$

其 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_r$ 等於 $\frac{\phi(x)}{1-x}$ 展開式中 x^r 之係數。

故欲於 $\phi(x)$ 展開式中，求其自初項至 $r+1$ 項係數之和，可於 $\frac{\phi(x)}{1-x}$ 展開式中，求其 x^r 之係數即得。

例 題

1. 於 $(1-x)^{-3}$ 展開式中，求其最初第 r 項係數之和。

[解] 可於 $\frac{(1-x)^{-3}}{1-x}$ ，即 $(1-x)^{-4}$ 展開式中，求其 x^{r-1} 之係數。
即 $\frac{1}{6} r(r+1)(r+2)$ 。

2. 求級數 $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n$ 項之和。

[解] $(1-x)^{-4} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4x + 3 \cdot 4 \cdot 5x^2 + \dots)$ 。故所求之和，等於 $(1-x)^{-4}$ 最初 n 項之和而 6 倍之。即等於 $\frac{(1-x)^{-4}}{1-x} = (1-x)^{-5}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數 6 倍。即 $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ 。

3. 求於 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^2}$ 展開式最初 $n+r$ 項係數之和。

[解] 所求之和，等於 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}$ 展開式 x^{n+r-1} 之係數。

今 $(1+x)^n = \{2 - (1-x)\}^n$

$$= 2^n - n \cdot 2^{n-1}(1-x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 2^{n-2}(1-x)^2 + \dots + (1-x)^n.$$

由是 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \frac{2^n}{(1-x)^3} - \frac{n \cdot 2^{n-1}}{(1-x)^2} + \frac{n(n-1)2^{n-2}}{1-x} + (1-x \text{ 之 } n-3 \text{ 次整數式})$ 。

而於 $(1-x)^{-3}$, $(1-x)^{-2}$, $(1-x)^{-1}$, x^{n+r-1} 之係數，順次為

$\frac{1}{2}(n+r)(n+r+1)$, $n+r$, 1。由是於 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}$ 中 x^{n+r-1} 之係數，為

$2^{n-1}(n+r)(n+r+1) - 2^{n-1}n(n+r) + 2^{n-2}n(n-1)$ 。即所求之和。

4. 求 $1 + n + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + n$ 項之和。

〔解〕 $(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$

又於 $(1-x)^{-n-1}$ 中 x^{n-1} 之係數，爲 $\frac{|2n-1|}{|n| |n-1|}$ ，即所求之和。

288. 二項級數 從 $(1+x)^n$ 之展開式內，以特別值代其 n 及 x 所成之級數，爲二項級數。苟知此級數爲二項級數，可由二項式之定理，直求得其和。

茲將二項式變化之，惟其指數爲正整數不適於用，若指數爲負整數，則

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{n(n+1) \dots (n+r-1)}{|r|} x^r + \dots$$

於此展開式，變其形如次。

$$(1-x)^{-n} = \frac{1}{|n-1|} [1 \cdot 2 \dots (n-1) + \{2 \cdot 3 \dots n\} x + \dots + \{(r+1) \dots (r+n-1)\} x^r + \dots]$$

〔註〕 由上之公式。

$$1 \cdot 2 \dots (n-1) + (2 \cdot 3 \dots n) x + \dots + \{(r+1)(r+2) \dots (r+n-1)\} x^r + \dots = (1-x)^{-n} |n-1|$$

上式之右邊爲級數，其無限項之和，等於左邊，故二項式之指數非爲正整數，而展開式爲級數者，方能合理。

若指數爲負分數， $-\frac{p}{q}$ ，則

$$(1 \pm x)^{-\frac{p}{q}} = 1 \mp \frac{p}{|1|} \cdot \frac{x}{q} + \frac{p(p+q)}{|2|} \left(\frac{x}{q}\right)^2 \mp \frac{p(p+q)(p+2q)}{|3|} \left(\frac{x}{q}\right)^3 + \dots (A)$$

$$\text{或} = 1 \mp \frac{p}{q} x + \frac{p(p+q)}{q \cdot 2q} x^2 \mp \frac{p(p+q)(p+2q)}{q \cdot 2q \cdot 3q} x^3 + \dots (B)$$

此級數 (A) 或 (B) 有次之性質。

(1) 各連接之項，其分子及分母有遞加因子。

(2) 分子之連次因子，成等差級數，而以其指數之分母爲公差，如 $p, p+q, p+2q, \dots$

(3) 分母之連次因子爲 $1, 2, 3, \dots$ 或爲其倍數 $q, 2q, 3q, \dots$

若適合於上之性質，則可用二項式之定理，直求得其和。

例題

1. 求 $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots$ 至無限項之和。

$$[\text{解}] \quad S = \frac{1}{1} \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1 \cdot 3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

於(A) $p=1, q=2$. 而 $\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$. $\therefore x = \frac{2}{3}$. 以代入於(A)而得

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots = 1 + S.$$

由是 $S = \sqrt{3} - 1$.

2. 求 $1 + \frac{2}{6} + \frac{2 \cdot 5}{6 \cdot 12} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{6 \cdot 12 \cdot 18} + \dots$ 至無限項之和。

$$[\text{解}] \quad S = 1 + \frac{2}{1} \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{2 \cdot 5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \dots$$

$p=2, q=3$. 故 $\frac{1}{6} = \frac{x}{3}$. $\therefore x = \frac{1}{2}$.

由是由(A)得 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$. 爲所求之和。

3. 求 $\frac{3}{18} + \frac{3 \cdot 7}{18 \cdot 24} + \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{18 \cdot 24 \cdot 30} + \dots$ 至無限項之和。

$$[\text{解}] \quad S = \frac{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 4} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \dots$$

兩邊以 $\frac{(-5)(-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{6}\right)^2$ 乘, 且以 $1 + \frac{-5}{1} \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{(-5)(-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{6}\right)^2$ 加之, 則

$$\begin{aligned} & \frac{(-5)(-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 S + 1 + \frac{-5}{1} \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{(-5)(-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{-5}{1} \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{(-5)(-1)}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{(-5)(-1)3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ & \quad + \frac{(-5)(-1)3 \cdot 7}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \frac{(-5)(-1)3 \cdot 7 \cdot 11}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{5}{72} S + \frac{17}{72} = 1 + \frac{-5}{1} \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{(-5)(-1)}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{(-5)(-1)3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \dots$$

$$\therefore \frac{5}{72} S = -\frac{17}{72} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}}. \text{ 由是 } S = \frac{1}{5} (8\sqrt[4]{27} - 17).$$

4. 求 $\frac{3}{4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \dots$ 至無限項之和。

[解] 由 $(1 - \frac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}$ ，即得所求之和為 $2\sqrt{2}-1$ 。

5. 求 $\frac{1}{2^3 \sqrt{3}} - \frac{1 \cdot 3}{2^4 \sqrt{4}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^5 \sqrt{5}} - \dots$ 至無限項之和。

由 $(1+1)^{\frac{3}{2}}$ ，即得所求之和為 $\frac{23}{24} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$ 。

6. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} + \dots$ 至無限項
 $= 1 + \frac{2}{6} + \frac{2 \cdot 5}{6 \cdot 12} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{6 \cdot 12 \cdot 18} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{6 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 24} + \dots$ 至無限項試證之。

[證] $(1 - \frac{3}{4})^{-\frac{1}{3}} = (1 - \frac{1}{2})^{-\frac{2}{3}}$ 。

289. 相等係數 準 231 章。凡以 x 之遞昇方乘表兩級數。而此兩級數。各為欵級數而相等者。則其 x 之同方乘係數各相等。今乃用此定理。以解次之諸例。

[第一例] n 為任意之整數。試證

$$1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots = 0.$$

$$\text{惟以 } (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \\ + (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} x^n.$$

又 $x > 1$ 。則 $(1 - \frac{1}{x})^{-n}$ 之展開式為合理。故

$$(1 - \frac{1}{x})^{-n} = 1 + n \frac{1}{x} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{x^3} + \dots \\ + \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1}{x^n} + \dots$$

於上兩級數相乘積中 x^0 之係數為

$$1 \times 1 - nx \times n \frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 \times \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \times \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{x^3} + \dots$$

$$\text{即 } 1 - n^2 + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots$$

即等於 $(1-x)^n \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-n}$ 中 x^0 之係數。

$$\text{而 } (1-x)^n \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-n} = (1-x)^n \times \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-n}$$

$$= (-1)^n (x-1)^n \frac{x^n}{(x-1)^n} = (-1)^n x^n.$$

其 x^0 之係數為 0。

$$\text{由是 } 1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots = 0.$$

[第二例] 求 $(n+1) + n \frac{1}{2} + (n-1) \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots + 1 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}$ 之和。

$$\text{惟以 } (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} x^n + \dots$$

$$\text{又以 } (1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \dots$$

故於上兩級數之積，其 x^n 之係數為

$$(n+1) + n \frac{1}{2} + (n-1) \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots + 1 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

$$\text{又於 } (1-x)^{-\frac{1}{2}} \times (1-x)^{-2} \text{ 即 } (1-x)^{-\frac{5}{2}} \text{ 其 } x^n \text{ 之係數為 } \frac{-\frac{5}{2} \cdot -\frac{7}{2} \dots (\frac{5}{2} - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

$$\text{即 } \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \text{ 爲所求之和也。}$$

$$[\text{第三例}] \text{ 證 } 1 - 3n + \frac{(3n-1)(3n-2)}{1 \cdot 2} - \frac{(3n-2)(3n-3)(3n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$= (-1)^n.$$

$$\text{惟因 } \frac{1+x}{1+x^3} = \frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{1-x(1-x)}.$$

$$\text{即 } (1+x)(1+x^3)^{-1} = \{1-x(1-x)\}^{-1}.$$

$$\text{即 } (1+x)\{1-x^3+x^6-\dots+(-1)^n x^{3n}+\dots\}$$

$$= 1 + x(1-x) + x^2(1-x)^2 + \dots + x^{3n+1}(1-x)^{3n+1} + \dots$$

於上之左邊 x^{3n+1} 之係數為 $(-1)^n$ 。

又於右邊所有含 x^{3n+1} 之項。為在於 $x^{3n+1}(1-x)^{3n+1}$ 之項。及以上各項內。即在於次之諸項以內。

$$x^{3n+1}(1-x)^{3n+1} + x^{3n}(1-x)^{3n} + x^{3n-1}(1-x)^{3n-1} + \dots$$

而 x^{3n+1} 之係數。於 $x^{3n+1}(1-x)^{3n+1}$ 內為 1。於 $x^{3n}(1-x)^{3n}$ 內為 $-3n$ 。於 $x^{3n-1}(1-x)^{3n-1}$ 內為 $\frac{(3n-1)(3n-2)}{1 \cdot 2}$ 。以下類推。

由是推求得 x^{3n+1} 之係數為

$$1 - 3n + \frac{(3n-1)(3n-2)}{1 \cdot 2} - \frac{(3n-2)(3n-3)(3n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \text{ 故如題言。}$$

290. 多項式之展開式 用二項式之方法。可求得多項式之展開式。

設多項式 $(p+qx+rx^2+\dots)^n$ 變其形記之。如 $p^n \left(1 + \frac{q}{p}x + \frac{r}{p}x^2 + \dots\right)^n$ 。以其初項為 1。則計算較便。乃令 $\frac{q}{p} = a$, $\frac{r}{p} = b$, 則所設之式。為 $p^n(1+ax+bx^2+cx^3+\dots)^n$ 。

今用二項式之方法。展開 $(1+ax+bx^2+cx^3+\dots)^n$ 。即展開 $\{1+(ax+bx^2+cx^3+\dots)\}^n$ 。其公項為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r} (ax+bx^2+cx^3+\dots)^r$$

但 n 非正整數。故此公項之係數。不能如 255 章記之。為 $\frac{n}{r(n-r)}$ 。

又展開 $(ax+bx^2+cx^3+\dots)^r$ 。其 r 為項之次第數。其為正整數可知。故由 262 章。

$$(ax+bx^2+cx^3+\dots)^r \text{ 之公項。為 } \frac{r}{\alpha \beta \gamma \dots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots x^{\alpha+2\beta+3\gamma+\dots}$$

但 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 為零或為正整數。而 $\alpha+\beta+\gamma+\dots=r$ 。

由是 $(1+ax+bx^2+cx^3+\dots)^n$ 之公項。為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{\alpha \beta \gamma \dots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots x^{\alpha+2\beta+3\gamma+\dots}$$

於多項式之展開式。求其 x 之某特別方乘。即 x^k 之係數。而 α, β, γ 爲 0 或爲正整數。任用何法取之。要使適合於方程式 $\alpha+2\beta+3\gamma+\dots=k$ 。而其所得各種之值與 r 相應。而 r 之值。則從 $\alpha+\beta+\gamma+\dots=r$ 求得之。

而與 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 之各組值相當諸係數之和。即爲所求之係數。此處俱與 262 章同樣。視下例當自明瞭。

[第一例] 試於 $(1-x+2x^2-3x^3)^{-\frac{1}{2}}$ 求其 x^5 之係數。

凡適合於 $\alpha+2\beta+3\gamma=5$ 所有 α, β, γ 之值如次。

$$\begin{array}{l} \alpha=0 \\ \beta=1 \\ \gamma=1 \end{array} \left. \begin{array}{l} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 5 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

與上各組相應而得 r 之各值。即 $r=2, 3, 3, 4, 5$ 。

由是與此相應之係數。(即 x^5 之係數)。爲

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(2)^1(-3)^1}{\underbrace{1 \quad 1}} \quad , \quad \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-1)^2(-3)^1}{\underbrace{2 \quad 1}} \quad , \quad \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})(-1)^1(2)^2}{\underbrace{1 \quad 2}}$$

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-1)^3(2)^1}{\underbrace{3 \quad 1}} \quad , \quad \text{及} \quad \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})(-1)^5}{\underbrace{5}}$$

$$\text{即} \quad -\frac{9}{2}, \quad \frac{45}{16}, \quad \frac{15}{4}, \quad -\frac{35}{16}, \quad \frac{63}{256}.$$

$$\text{由是所求之係數} = -\frac{9}{2} + \frac{45}{16} + \frac{15}{4} - \frac{35}{16} + \frac{63}{256} = \frac{31}{256}.$$

291. 多項式之雜例 如上例展開多項式。求其第六項(即 x^5 之項)甚覺煩雜。有時於特別之多項式。可用簡便之方法求得之。

[第二例] 試於 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{-2}$ 求其 x^{13} 之係數。

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^{-2} = \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^{-2} = (1-x)^2(1-x^5)^{-2}$$

$$= (1-2x+x^2)(1+2x^5+3x^{10}+4x^{15}+\dots).$$

於此兩級數之積中。無有 x^{13} 之項者。故所求之係數爲 0。

[第三例] 試於 $(1+x+x^2+x^3)^{-1}$ 求其 x^n 之係數。

$$(1+x+x^2+x^3)^{-1} = \frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1-x}{1-x^4} = (1-x)(1-x^4)^{-1} \\ = (1-x)(1+x^4+x^8+\dots+x^{4r-4}+x^{4r}+\dots).$$

由是 x^{4r} 之係數 = 1, x^{4r+1} 之係數 = -1,
 x^{4r+2} 之係數 = 0, x^{4r+3} 之係數 = 0.

故 n 之值凡若 $4r$ 者。則 x^n 之係數為 1。若 $4r+1$ 者。則為 -1。又若 $4r+2$ 及 $4r+3$ 。則俱為 0。

[第四例] 試於 $(1+2x+3x^2+4x^3+\dots$ 至無限) ^{n} 之展開式。求其 x^r 之係數。

惟因 $1+2x+3x^2+\dots = (1-x)^{-2}$. \therefore 原式 $= (1-x)^{-2n}$.

由是 x^r 之係數為 $\frac{2n(2n+1)(2n+2)\dots(2n+r-1)}{r!}$.

292. 同物之組合 有若干種相同之物。如第一種有 p 個，第二種有 q 個，第三種有 r 個等。今於其總數 n 個中每次取 a 個。求其組合之數如次。

設有 p 個 a , q 個 b , r 個 c , 而 $a+b+c+\dots = n$ 。則於 n 個物中每次取 a 個。可於次之積中求其 x^a 之係數。即得

$$(1+ax+a^2x^2+\dots+a^px^p)(1+bx+b^2x^2+\dots+b^qx^q) \\ (1+cx+c^2x^2+\dots+c^rx^r)\dots$$

於此連乘積諸項 x 之次數。同於 a, b, c, \dots 各文字之次數可知。亦即從 a, b, c, \dots 中取 a 個所有種種方法之數之和。但 a 之數限於 p , b 之數限於 q , c 之數限於 r, \dots 。即所求組合之數。可令 $a=b=c=\dots=1$ 。而於

$(1+x+x^2+\dots+x^p)(1+x+x^2+\dots+x^q)(1+x+x^2+\dots+x^r)\dots$
 中求其 x^a 之係數即得。

排列 如上例。於 n 物每次取 a 個。設其排列之數為 P_a 。則

$$\left\{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^p}{p}\right\} \left\{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^q}{q}\right\} \dots \\ = 1 + \frac{P_1}{1}x + \frac{P_2}{2}x^2 + \dots + \frac{P_n}{n}x^n.$$

何則。因於

$$\left\{1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{2} + \dots + \frac{a^px^p}{p}\right\} \left\{1 + \frac{bx}{1} + \frac{b^2x^2}{2} + \dots + \frac{b^qx^q}{q}\right\} \dots$$

中 x^a 之係數。而以 $|a$ 乘之。則等於如

$\frac{|a}{l|m\dots}$ $a^l b^m \dots$ 形各項之和。而 $l+m+\dots=a$ 即與 n 物內有 l 個 a , m 個 b , \dots 每次取 a 個排列之公式 $\frac{|a}{l|m\dots}$ 相合。

例題

1. 從 a 五個, b 四個, c 二個每次取七個。求其組合。〔答 12〕。

〔解〕 所求組合之數。為於 $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2)$ 。即 $(1-x^6)(1-x^5)(1-x^3)(1-x)^{-3}$ 中 x^7 之係數。即於 $(1-x^3-x^5-x^6+x^8+\dots)(1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+36x^7+\dots)$ 中 x^7 之係數。即 $36-15-6-3=12$ 。

2. 第一種 p 個, 第二種 q 個, 第三種 r 個 \dots 其選出之全數如何。〔答 $(p+1)(q+1)(r+1)\dots-1$ 〕。

〔解〕 此組合之全數。等於 $(1+x+x^2+\dots+x^p)(1+x+\dots+x^q)(1+x+\dots+x^r)\dots$ 中 x^1, x^2, \dots, x^n 各係數之和。而此和以 1 代此積而減其內 x^0 之係數 1 即得。 $\therefore (p+1)(q+1)(r+1)\dots-1$ 。

〔別解〕 從 p 個 a , q 個 b , r 個 c 等內。可求其取 1 取 2 取 3 \dots 方法之總數。以其取 a 之時有 $0, 1, 2, \dots, p$, 即 $p+1$ 。取 b 之時有 $q+1$ 。取 a, b 之時有 $(p+1)(q+1)$ 。同法推之。取 a, b, c, \dots 之時。有 $(p+1)(q+1)(r+1)\dots$ 於此內減 1。即為所求之數。 $\therefore (p+1)(q+1)(r+1)\dots-1$ 。

3. 考驗三種科目。設各科之足分為 m 分。則受驗生得三種科目之分數為 $2m$ 者。其方法之數為 $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 。試證明之。

〔證〕 各科目所得之分。為自 0 分至 m 分。故各科目之分。等於 $1+x+x^2+\dots+x^m$ 中 x 之某指數。而於 $(1+x+x^2+\dots+x^m)^3$ 。

即 $\left(\frac{1-x^{m+1}}{1-x}\right)^3$ 。即 $(1-x^{m+1})^3(1-x)^{-3}$ 中。其 x^{2m} 之係數。為所求方法之數。

$$\begin{aligned} \dots (1-x^{m+1})^3(1-x)^{-3} &= (1-3x^{m+1}+\dots)\left(1+3x+\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}x^2+\frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\dots\right) \\ &= (1-3x^{m+1}+\dots)\frac{1}{2}\{1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\dots \\ &\quad +m(m+1)x^{m-1}+\dots+(2m+1)(2m+2)x^{2m}+\dots\}. \\ \therefore x^{2m} \text{ 之係數} &= \frac{1}{2}\{(2m+1)(2m+2)-3m(m+1)\} = \frac{1}{2}(m+1)(m+2). \end{aligned}$$

293. 等次積 由 n 文字所成 r 乘元等次積之數。可以求得。其法已於 250 章詳述之。(凡等次積可以複用同文字)。而此結果可更用他法求得如次。

設 n 個文字 a, b, c, \dots 而作連乘積

$$(1+ax+a^2x^2+\dots)(1+bx+b^2x^2+\dots)(1+cx+c^2x^2+\dots)\dots$$

此 x^r 之係數。其必為諸文字 a, b, c, \dots 之 r 乘元可知。即知此係數為由此等文字。每次每 r 個諸方法之和。(等次積之和。其式如 300 章第四例所示者是也。)

由是於上之連乘積 $a=b=c=\dots=1$ 。其所求 r 乘元等次積之數。可從

$$(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)\dots n \text{ 因子即 } (1+x+x^2+\dots)^n.$$

即 $(1-x)^{-n}$ 求其 x^r 之係數即得。

$$\therefore {}_nH_r = \frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{r} = \frac{|n+r-1|}{|r| |n-1|}.$$

此結果可得從 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 表出之。

推論 $(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)^r$ 之展開式。其項數為 $\frac{|n+r-1|}{|r| |n-1|}$ 。

何則。以 $(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)^r$ 展開式之各項。皆為 r 次項。即從 a_1, a_2, a_3, \dots 之 n 個文字內取 r 個之等次積。故此展開式之項數為 ${}_nH_r$ 。

294. 雜例 茲於此編之終。更示以下諸例。

[第一例] 由二項式定理求 $\sqrt{14}$ 至小數六位止。

$$\sqrt{14} = \sqrt{(16-2)} = 4\left(1 - \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = 4\left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{8^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{8^3} - \dots\right\}$$

$$=4\{1-.0625-.001953-.0001220-.0000095-.0000010\}$$

$$=3.741657.$$

[第二例] 當 x 甚小時 $\frac{(1-3x)^{-\frac{3}{2}}+(1-4x)^{-\frac{3}{2}}}{(1-3x)^{-\frac{1}{2}}+(1-4x)^{-\frac{1}{2}}}$ 殆等於 $1+\frac{3}{2}x$.

惟 x 甚小。則其平方及其他高次之方乘愈小。可以捨去不計。故於 x 之一切方乘。可僅取其一次方乘。其餘悉捨去之。其原式如次。

$$\frac{1+\frac{3}{2}\cdot 3x+1+\frac{3}{2}\cdot 4x}{1+\frac{1}{2}\cdot 3x+1+\frac{1}{2}\cdot 4x} = \frac{2+5x}{2+2x} = \frac{1+\frac{5}{2}x}{1+x}$$

$$= \left(1+\frac{5}{2}x\right)(1+x)^{-1} = \left(1+\frac{5}{2}x\right)(1-x) = 1+\frac{3}{2}x.$$

[第三例] 證 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}$ 之整數部。為 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ 。

$\sqrt{3}-1$ 其值小於 1。即為常分數。故 $(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ 亦為常分數。由是若 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ 為整數。其整數當為 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}$ 之整數部。

$$\text{令 } (\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$$

$$= \left\{ 3^n \sqrt{3} + (2n+1)3^n + \frac{(2n+1)2n}{1\cdot 2} 3^{n-1} \sqrt{3} + \dots + (2n+1)\sqrt{3} + 1 \right\}$$

$$- \left\{ 3^n \sqrt{3} - (2n+1)3^n + \frac{(2n+1)2n}{1\cdot 2} 3^{n-1} \sqrt{3} - \dots + (2n+1)\sqrt{3} - 1 \right\}$$

$$= 2 \left\{ (2n+1)3^n + \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} 3^{n-1} + \dots + 1 \right\}.$$

其所有無理之項悉消去。而 $3^n, 3^{n-1}, \dots$ 之係數皆為整數。故此式為整數之 2 倍即為偶數。是為本題之證。

由次法可證明 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ 。得以 2^{n+1} 整除之。

設 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ 以 I_{2n+1} 表之。

則 $I_1=2, I_3=20$ ，以下類推。

又以 $(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 = 8$ 。

$$\text{由是 } 8I_{2n+1} = \{(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}\} \{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2\}$$

$$= (\sqrt{3}+1)^{2n+3} - (\sqrt{3}-1)^{2n+3} + 4\{(\sqrt{3}+1)^{2n-1} - (\sqrt{3}-1)^{2n-1}\}.$$

$$\therefore I_{2n+3} = 8I_{2n+1} - 4I_{2n-1} \dots \dots \dots (A)$$

由(A) I_{2n+1} 及 I_{2n-1} 爲整數。則 I_{2n+3} 亦爲整數。今 I_3 及 I_1 爲整數。故 I_5 亦爲整數。故由歸納法知 $I_7, I_9, I_{11}, \dots, I_{2n+1}$ 皆爲整數。

於(A)若 I_{2n+1} 得以 2^{n+1} 整除。及 I_{2n-1} 得以 2^n 整除。則 $8I_{2n+1}$ 得以 2^{n+4} 整除。及 $4I_{2n-1}$ 得以 2^{n+2} 整除。即 I_{2n+3} 得以 2^{n+2} 整除。

今 I_3 得以 2^3 整除。 I_1 得以 2^1 整除。故 I_5 得以 2^5 整除。由歸納法知 I_7 得以 2^7 整除。準此推之。可知 I_{2n-1} 得以 2^n 整除。及 I_{2n+1} 得以 2^{n+1} 整除之。

[第四例] 試證 $a^n - n(a+b)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(a+2b)^n - \dots = (-b)^n \underline{n}$ 。
但 n 爲任意之正整數。

$$\text{令 } \frac{y+a}{b} = x. \text{ 則 } \frac{y+a+b}{b} = x+1, \frac{y+a+2b}{b} = x+2 \dots$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{b}{y+a}, \frac{1}{x+1} = \frac{b}{y+a+b}, \dots, \frac{1}{x+n} = \frac{b}{y+a+nb}$$

$$\text{惟因 } \frac{\underline{n}}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{x+2} - \dots + (-1)^n \frac{c_n}{x+n}$$

(見 259 章例題 3) 乃以同值代入之。而得

$$\frac{\underline{n} b^n}{(y+a)(y+a+b)\dots(y+a+nb)} = \frac{c_0}{y+a} - \frac{c_1}{y+a+b} + \dots + (-1)^r \frac{c_r}{y+a+rb} + \dots$$

展開上式之兩邊。而爲 $\frac{1}{y}$ 之方乘如次。

$$\begin{aligned} \text{左邊} &= \frac{\underline{n} b^n}{y^{n+1} \left(1 + \frac{a}{y}\right) \left(1 + \frac{a+b}{y}\right) \dots \left(1 + \frac{a+nb}{y}\right)} \\ &= \underline{n} b^n \cdot \frac{1}{y^{n+1}} \left(1 + \frac{a}{y}\right)^{-1} \left(1 + \frac{a+b}{y}\right)^{-1} \dots \left(1 + \frac{a+nb}{y}\right)^{-1} \\ &= \underline{n} b^n \cdot \frac{1}{y^{n+1}} \left(1 - \frac{a}{y} + \dots\right) \left(1 - \frac{a+b}{y} + \dots\right) \dots \left(1 - \frac{a+nb}{y} + \dots\right) \\ &= \underline{n} b^n \cdot \frac{1}{y^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{y} \text{ 及高次之項} \right) \end{aligned}$$

$$= \lfloor n \rfloor b^n \left(\frac{1}{y^{n+1}} + \frac{1}{y^{n+2}} \text{ 及高次之項} \right).$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ 右邊} &= \frac{c_0}{y} \left(1 + \frac{a}{y} \right)^{-1} - \frac{c_1}{y} \left(1 + \frac{a+b}{y} \right)^{-1} + \dots + (-1)^r \frac{c_r}{y} \left(1 + \frac{a+rb}{y} \right)^{-1} + \dots \\ &= \frac{c_0}{y} \left\{ 1 - \frac{a}{y} + \dots + (-1)^n \frac{a^n}{y^n} + \dots \right\} \\ &\quad - \frac{c_1}{y} \left\{ 1 - \frac{a+b}{y} + \dots + (-1)^n \frac{(a+b)^n}{y^n} + \dots \right\} + \dots \\ &\quad + (-1)^r \frac{c_r}{y} \left\{ 1 - \dots + (-1)^n \frac{(a+rb)^n}{y^n} + \dots \right\} + \dots \end{aligned}$$

故於右邊 $\frac{1}{y^{k+1}}$ 之係數為

$$(-1)^k \{ c_0 a^k - c_1 (a+b)^k + \dots + (-1)^r c_r (a+rb)^k + \dots \}.$$

又於左邊 $\frac{1}{y}$ 之最低次為 $\frac{1}{y^{n+1}}$ 。故若 $n+1$ 比 $k+1$ 為大，即 $n > k$ ，則其左邊無有 $\frac{1}{y^{k+1}}$ 之項。又若 $n+1$ 等於 $k+1$ ，則其左邊 $\frac{1}{y^{k+1}}$ 之項之係數為 $\lfloor n \rfloor b^n$ 。

由是 $n=k$ ，則 $(-1)^n \{ c_0 a^n - c_1 (a+b)^n + \dots \} = \lfloor n \rfloor b^n$ 。

$$\text{即 } a^n - \frac{n}{1} (a+b)^n + \dots = (-1)^n \lfloor n \rfloor b^n.$$

例題二十八

1. 求下列各級數無限項之和。

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{\underline{1}} \cdot \frac{3}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{\underline{2}} \cdot \frac{3^2}{2^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{\underline{3}} \cdot \frac{3^3}{2^9} + \dots \quad [\text{答 } 2].$$

$$(2) \quad 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots \quad \left[\text{答 } \sqrt{\frac{2}{3}} \right].$$

$$(3) \quad 1 + \frac{4}{\underline{1}} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4 \cdot 7}{\underline{2}} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{\underline{3}} \cdot \frac{1}{4^3} + \dots \quad [\text{答 } 4\sqrt[3]{4}].$$

$$(4) \quad \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \dots \quad [\text{答 } \sqrt{27-2}].$$

(5) $\frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots$ [答 1].

(6) $1 + \frac{2}{6} + \frac{2 \cdot 5}{6 \cdot 12} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{6 \cdot 12 \cdot 18} + \dots$ [答 $\sqrt[3]{4}$].

(7) $1 - \frac{3}{4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \dots$ [答 $\sqrt{\frac{8}{27}}$].

(8) $\frac{4}{18} + \frac{4 \cdot 12}{18 \cdot 27} + \frac{4 \cdot 12 \cdot 20}{18 \cdot 27 \cdot 36} + \dots$ [答 $\frac{1}{2}$].

(9) $1 + \frac{2}{9} + \frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 18} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{9 \cdot 18 \cdot 27} + \dots$ [答 $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$].

(10) $\frac{1}{9 \cdot 18} + \frac{1 \cdot 3}{9 \cdot 18 \cdot 27} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{9 \cdot 18 \cdot 27 \cdot 36} + \dots$ [答 $\frac{10}{9} - \frac{1}{3} \sqrt{11}$].

(11) $\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots$ [答 $\frac{1}{24}$].

(12) $\frac{7}{72} + \frac{7 \cdot 28}{72 \cdot 96} + \frac{7 \cdot 28 \cdot 49}{72 \cdot 96 \cdot 120} + \dots$ [答 $\frac{37}{245}$].

[解] 本題可參考 288 章。

(1) $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$ 若 $x = \frac{3}{4}$

則 $(1 - \frac{3}{4})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{3^2}{2^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3} \cdot \frac{3^3}{2^6} + \dots$

(2) $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$ 若 $x = \frac{1}{2}$

則 $(1 + \frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots$

(3) $(1-x)^{-\frac{4}{3}} = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{4 \cdot 7}{3 \cdot 6}x^2 + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 + \dots$ 若 $x = \frac{3}{4}$

則 $(1 - \frac{3}{4})^{-\frac{4}{3}} = 1 + \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4 \cdot 7}{2} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{3} \cdot \frac{1}{4^3} + \dots$

(4) $(1-x)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$ 若 $x = \frac{2}{3}$

則 $(1 - \frac{2}{3})^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{3} + \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 6 \cdot 9} + \dots$

(5) $S = \frac{3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \frac{1}{2} \left\{ 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots \right\}$

$$\text{而 } \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = 1 + 1 + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots \quad \therefore S = 1.$$

$$(6) \quad (1-x)^{-\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6}x^2 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 + \dots \quad \text{若 } x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{則 } \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{6} + \frac{2 \cdot 5}{6 \cdot 12} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{6 \cdot 12 \cdot 18} + \dots$$

$$(7) \quad (1+x)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad \text{設 } x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{則 } \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \dots$$

$$(8) \quad (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1} \cdot \frac{x}{2} - \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots \quad \text{若 } x = \frac{8}{9}.$$

$$\text{則 } \left(1 - \frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{4}{9}\right)^2 - \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{4}{9}\right)^3 - \dots$$

$$\text{即 } \frac{1}{3} = 1 - \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \left(\frac{4}{18} + \frac{4 \cdot 12}{18 \cdot 27} + \dots\right) = \frac{5}{9} - \frac{4}{9}S. \quad \therefore S = \frac{1}{2}.$$

$$(9) \quad (1-x)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6}x^2 + \dots \quad \therefore S = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$(10) \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

$$\therefore \left(1 + \frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{9} - S.$$

$$(11) \quad (1-x)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

$$\text{故 } (1-1)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots$$

$$\text{即 } 0 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{8} + 3S. \quad \therefore S = \frac{1}{24}.$$

$$(12) \quad S = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{24} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} \left(\frac{7}{24}\right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{7}{24}\right)^3 + \dots$$

$$\text{若 } x = \frac{7}{8}, \text{ 則 } \left(1 - \frac{7}{8}\right)^{\frac{5}{2}} = 1 - \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{24} + \frac{5 \cdot 2}{1 \cdot 2} \left(\frac{7}{24}\right)^2 + \frac{5 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{7}{24}\right)^3 \\ + \frac{5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{7}{24}\right)^4 + \frac{5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{7}{24}\right)^5 + \dots$$

由是 $\frac{1}{32} = 1 - \frac{35}{24} + \frac{5 \cdot 7^2}{24^2} + 5 \left(\frac{7}{24}\right)^2 S$. $\therefore S = \frac{37}{245}$.

2. 試證 $\frac{1+n \frac{a}{a+b} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \dots}{1+n \frac{b}{a+b} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \dots} = \frac{a^n}{b^n}$.

[證] 分子 $= \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^{-n} = \frac{(a+b)^n}{b^n}$. 分母 $= \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)^{-n} = \frac{(a+b)^n}{a^n}$.

由是 原式 $= \frac{(a+b)^n}{b^n} \div \frac{(a+b)^n}{a^n} = \frac{a^n}{b^n}$.

3. $(1+x)^n = 2^n \left\{ 1 - n \frac{1-x}{1+x} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \dots \right\}$.

[證] $(1+x)^n = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{-n} = \left\{ \frac{(1+x)+(1-x)}{2(1+x)} \right\}^{-n} = 2^n \left\{ 1 + \frac{1-x}{1+x} \right\}^{-n}$
 $= 2^n \left\{ 1 - n \frac{1-x}{1+x} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \dots \right\}$.

4. x 大於 $\frac{1}{2}$ 則

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \dots$$

[證] $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x}{1+x} (1+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{1+x} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{1+x} \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

5. $(1-x^2)^n = (1+x)^{2n} - 2nx(1+x)^{2n-1} + \frac{2n(2n-2)}{1 \cdot 2} x^2(1+x)^{2n-2} - \dots$

[證] 惟因 $(1-x^2)^n = (1+x)^n \{(1+x)-2x\}^n$. 由是可得本題之證.

6. $1+n \frac{a-x}{a+x} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2 + \dots = \left(\frac{a+x}{2x}\right)^n$.

[證] 左邊 $= \left(1 - \frac{a-x}{a+x}\right)^{-n} = \left(\frac{2x}{a+x}\right)^{-n} = \left(\frac{a+x}{2x}\right)^n$.

7. $(1+x)^{2n} = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2(1+x)^{n-2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3(1+x)^{n-3} + \dots$

[證] 惟因 $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{-n}$ 。將此右邊展開之即得。

$$8. a < b. \text{ 則 } a^2 b^2 = (a+b)^4 \left\{ \frac{a^2}{b^2} - \frac{4}{1} \cdot \frac{a^3}{b^3} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^4}{b^4} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{a^5}{b^5} + \dots \right\}.$$

[證] $a^2 b^2 = (a+b)^4 \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{b}{a+b}\right)^4 = (a+b)^4 \frac{a^2}{b^2} \left(1 + \frac{a}{b}\right)^{-4}$ 。但 $\frac{a}{b} < 1$ 。故展開 $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^{-4}$ 式。即可求得本題之證。

$$9. 1 - \frac{n+x}{1+x} + \frac{(n+2x)(n-1)}{2(1+x)^2} - \frac{(n+3x)(n-1)(n-2)}{3(1+x)^3} + \dots = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{[證] 左邊} &= \left\{ 1 - n \frac{1}{1+x} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{n \cdot n \cdot (n-2)}{3} \cdot \frac{1}{(1+x)^3} + \dots \right\} \\ &\quad - \frac{x}{1+x} \left\{ 1 - \frac{n-1}{1} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} - \dots \right\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^n - \frac{x}{1+x} \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

10. y 之數值比 x 之數值之三分之一小。則

$$\begin{aligned} 1 + n \frac{2y}{x+y} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{2y}{x+y}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{2y}{x+y}\right)^3 + \dots \\ = 1 + n \frac{2y}{x-y} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{2y}{x-y}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[證] } 1 + n \frac{2y}{x+y} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{2y}{x+y}\right)^2 + \dots &= \left(1 - \frac{2y}{x+y}\right)^{-n} = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{-n} \\ &= \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^n = \left(1 + \frac{2y}{x-y}\right)^n = 1 + n \frac{2y}{x-y} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{2y}{x-y}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

但 $y = \frac{x}{3}$ 。則 $\frac{2y}{x-y}$ 等於 1。故 y 為常數。須比 $\frac{x}{3}$ 為小。

$$11. \text{ 求 } r - (r-1)n + (r-2) \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - (r-3) \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \text{ 至 } r \text{ 項}$$

之和。

$$\left[\text{答 } (-1)^{r-1} \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-r)}{r-1} \right].$$

$$\text{[解] } (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 - \dots + (-1)^r \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r} x^r + \dots$$

$$\text{及 } (1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + rx^{r-1} + (r+1)x^r + \dots$$

於此兩級數之積。求其 x^{r-1} 之係數。爲

$$r - (r-1)n + (r-2) \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - (r-3) \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \text{至 } r \text{ 項。}$$

又 $(1-x)^n \times (1-x)^{-2}$ 。即 $(1+x)^{n-2}$ 。其 x^{r-1} 之係數。爲

$$(-1)^{r-1} \frac{(n-2)(n-3)\dots\{n-2-(r-1)+1\}}{\underbrace{r-1}} = (-1)^{r-1} \frac{\overbrace{n-2}^{\quad}}{\underbrace{r-1} \underbrace{|n-r-1|}}.$$

12. 設 n 爲正整數。則

$$n - \frac{n^2(n-1)}{\underbrace{1 \quad 2}} + \frac{n^2(n^2-1^2)(n-2)}{\underbrace{2 \quad 3}} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n-3)}{\underbrace{3 \quad 4}} + \dots = 0.$$

[證] $(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{\underbrace{2}} x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{\underbrace{3}} x^3 + \dots$

$$(1-x)^n = (-1)^n (x-1)^n = (-1)^n \left\{ x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\underbrace{2}} x^{n-2} \dots \right\}.$$

於此兩級數之積。其 x^{n-1} 之係數。爲

$$(-1)^{n+1} \left\{ n - \frac{n^2(n-1)}{\underbrace{1 \quad 2}} + \frac{n^2(n^2-1)(n-2)}{\underbrace{2 \quad 3}} - \dots \right\}.$$

又 $(1-x)^{-n} \times (1-x)^n = (1-x)^0 = 1$ 。內 x^{n-1} 之係數爲 0。由是得本題之證。

[注意] 本題之 n 若爲負數或分數。則如 $n^2(n-1)$ 。與 $n^2(n^2-1^2)(n-2)\dots$ 各分子增大而爲發級數。故 n 爲正整數。而大於 1。

13. n 爲正整數。則 $n - \frac{n(n^2-1^2)}{\underbrace{1 \quad 2}} + \frac{n(n^2+1^2)(n^2+2^2)}{\underbrace{2 \quad 3}} - \dots$

$$+ (-1)^r \frac{n(n^2-1^2)\dots(n^2-r^2)}{\underbrace{r \quad r+1}} + \dots = (-1)^{n+1}.$$

[證] $(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{\underbrace{2}} x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{\underbrace{3}} x^3 + \dots$

及 $(1-x)^{n-1} = (-1)^{n-1} (x-1)^{n-1}$

$$= (-1)^{n-1} \left\{ x^{n-1} - (n-1)x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{\underbrace{2}} x^{n-3} - \dots \right\}.$$

於此兩級數之積。其 x^n 之係數爲

$$(-1)^{n-1} \left\{ n - \frac{n(n^2-1^2)}{\underbrace{1 \quad 2}} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{\underbrace{2 \quad 3}} - \dots \right\}.$$

又於 $(1-x)^{-n} \times (1-x)^{n-1}$ 。即 $(1-x)^{-1}$ 內 x^n 之係數爲 $(-1)^n$ 。故得本題之證。

14. n 不小於 4 而為正整數。則

$$1 - 4n + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = 0.$$

〔證〕 $(1-x)^n = (-1)^n \left\{ x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \dots \right\}.$

及 $(1-x)^{-4} = 1 + 4x + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$

於此兩級數之積。 x^n 之係數為 $(-1)^n \left\{ 1 - 4x + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \dots \right\}.$

又於 $(1-x)^n \times (1-x)^{-4} = (1-x)^{n-4}$ 。而 $n-4$ 為正。故 x^n 之係數為 0。由是得本題之證。

15. 試證 $1 \cdot n(n+1) + 2(n-1)n + 3(n-2)(n-1) + \dots + n \cdot 1 \cdot 2$
 $= \frac{1}{1 \cdot 2} n(n+1)(n+2)(n+3).$

〔證〕 $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots.$

及 $(1-x)^{-3} = \frac{1}{1 \cdot 2} \{ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots \}.$

於此兩級數之積。 x^{n-1} 之係數為 $\frac{1}{2} \{ 1 \cdot n(n+1) + 2(n-1)n + \dots + n \cdot 1 \cdot 2 \}.$

又 $(1-x)^{-2} \times (1-x)^{-3} = (1-x)^{-5}$ 。內 x^{n-1} 之係數為 $\frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3).$

16. $1 \cdot n(n+1) + \frac{n}{1} (n-1)n + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} (n-2)(n-1)$
 $+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (n-3)(n-2) + \dots = 2 \frac{|2n+1}{|n-1| |n+2}|.$

〔證〕 $(1-x)^{-3} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$

及 $2(1-x)^{-2} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots$

於此兩級數之積。 x^{n-1} 之係數為 $1 \cdot n(n+1) + \frac{n}{1} (n-1)n + \dots$

又於 $(1-x)^{-3} \times 2(1-x)^{-2} = 2(1-x)^{-5}$ 內 x^{n-1} 之係數。為

$$2 \frac{(n+3)(n+4) \dots (2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)} = \frac{2 |2n+1}{|n+2| |n-1}|.$$

17. $p_r = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2r}$. 則 $p_n + p_{n-1}p_1 + p_{n-2}p_2 + \cdots + p_1p_{n-1} + p_n = 1$.

〔證〕 $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n + \cdots$

兩邊各平方之。 $(1-x)^{-1} = (1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n + \cdots)^2$. 於此級數 x^n 之係數為 $p_n \cdot 1 + p_{n-1}p_1 + p_{n-2}p_2 + \cdots + 1 \cdot p_n$. 而於 $(1-x)^{-1}$ 中 x^n 之係數為 1.

18. $p_r = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2r}$ 及 $q_r = \frac{5 \cdot 7 \cdots (2r+3)}{2 \cdot 4 \cdots 2r}$. 則

$p_r + p_{r-1}q_1 + \cdots + q_r = \frac{1}{2}(r+1)(r+2)$.

〔證〕 $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_r x^r + \cdots$

及 $(1-x)^{-\frac{3}{2}} = 1 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_r x^r + \cdots$

$\therefore p_r \cdot 1 + p_{r-1}q_1 + p_{r-2}q_2 + \cdots + 1 \cdot q_r = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \times (1-x)^{-\frac{3}{2}}$.

即 $(1-x)^{-2}$ 中 x^r 之係數為 $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$.

19. $1 + 2(n-1) + 2^2 \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} + 2^3 \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$
 $= \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$.

〔證〕 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

$2x^2(1-x)^{-2} = 2x^2 + 2 \cdot 2x^3 + \cdots + 2(n-1)x^n + \cdots$

$2^2x^4(1-x)^{-3} = 2^2x^4 + 2^2 \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} x^5 + 2^2 \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} x^6 + \cdots + 2^2 \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} x^n + \cdots$

$2^3x^6(1-x)^{-4} = 2^3x^6 + 2^3 \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^7 + \cdots + 2^3 \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^n + \cdots$

\therefore 此左邊之和

$= (1-x)^{-1} \{1 + 2x^2(1-x)^{-1} + 2^2x^4(1-x)^{-2} + 2^3x^6(1-x)^{-3} + \cdots\}$

$= (1-x)^{-1} \{1 - 2x^2(1-x)^{-1}\}^{-1} = \frac{1}{1-x} \left(\frac{1-x-2x^2}{1-x} \right)^{-1}$

$= \frac{1}{1-x-2x^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{1-2x} + \frac{1}{1+x} \right)$.

而此式中 x^n 之係數為 $\frac{1}{3} \{2^{n+1} + (-1)^n\}$.

又於此右邊之和。其 x^n 之係數爲

$$1 + 2(n-1) + 2^2 \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} + 2^3 \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$20. \quad \frac{a^n - b^n}{a-b} = (a+b)^{n-1} - (n-2)ab(a+b)^{n-3} \\ + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 (a+b)^{n-5} - \dots$$

〔解〕 於 $(1-ax)^{-1} - (1-bx)^{-1}$ 。其 x^n 之係數爲 $a^n - b^n$ 。由是 $\frac{a^n - b^n}{a-b}$ 爲 $\frac{1}{a-b} \{(1-ax)^{-1} - (1-bx)^{-1}\}$ 。即 $\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}$ 中 x^n 之係數。

$$\text{又 } \frac{x}{(1-ax)(1-bx)} = x \{ [1 - (a+b)x + abx^2]^{-1} \\ = x \{ 1 - (a+b)x \}^{-1} - abx^3 \{ 1 - (a+b)x \}^{-2} + a^2 b^2 x^5 \{ 1 - (a+b)x \}^{-3} + \dots$$

此級數中 x^n 之係數爲

$$(a+b)^{n-1} - (n-2)ab(a+b)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 (a+b)^{n-5} - \dots$$

21. 試從 $(1+2x+x^2)^{2n}$ 之展開式。證

$$2^{2n} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 1} 2^{2n-2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2 \cdot 2} 2^{2n-4} + \dots + \frac{2n}{n \cdot n} \\ = \frac{4n}{2n \cdot 2n}.$$

$$\text{〔證〕 } (1+2x+x^2)^{2n} = (1-x^2)^{2n} \left\{ \frac{2x}{1+x^2} + 1 \right\}^{2n} \\ = 2^{2n} x^{2n} + \frac{2n}{1} 2^{2n-1} x^{2n-1} (1+x^2) \\ + \frac{2n(2n-1)}{2} 2^{2n-2} x^{2n-2} (1+x^2)^2 + \dots + (1+x^2)^{2n}.$$

於此級數之第1項，第3項，第5項……有 x^{2n} 之項。故 x^{2n} 之係數爲

$$2^{2n} + \frac{2n(2n-1)}{2 \cdot 1} 2^{2n-2} \frac{2}{1} + \dots + \frac{2n}{n \cdot n}.$$

又於 $(1+2x+x^2)^{2n} = (1+x)^{4n}$ 其 x^{2n} 之係數爲 $\frac{4n}{2n \cdot 2n}$ 。

22. 設 $m > 2n$ 或 $m = 2n$. 試證

$$\frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{|m|} - n \frac{n(n+1)\dots(n+m-4)}{|m-3|} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n+1)\dots(n+m-7)}{|m-6|} - \dots = 0 \text{ 或 } = 1.$$

〔證〕 $(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{|2|}x^2 + \dots + \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{|m|}x^m + \dots$

又 $(1-x^3)^n = 1 - nx^3 + \frac{n(n-1)}{|2|}x^6 - \dots$

於此兩級數之積。其 x^m 之係數為

$$\frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{|m|} - \frac{n(n+1)\dots(n+m-4)}{|m-3|} + \dots$$

又於 $(1-x)^{-n} \times (1-x^3)^n = (1+x+x^2)^n$ 其 $m > 2n$. 則 x^m 之係數為 0.

又 $m = 2n$. 則 x^m 等於 x^{2n} . 故其係數為 1.

23. 試於 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots$ 求其 x^n 之係數。〔答 1〕.

〔解〕 原式 = $\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots}{1-x} = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$.

$x < 1$, 則 $x^{2^n} = 0$. \therefore 原式 = $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$

由是 x^n 之係數等於 1.

24. x 為常分數。則 $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^9)(1-x^{27})\dots} = (1+x)(1+x^2)\dots$

〔證〕 左邊 =

$$\frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\dots}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1-x^3)(1+x^3)(1+x^6)\dots(1-x^9)(1+x^9)\dots}$$

$$= \frac{(1+x)(1+x^3)(1+x^9)\dots}{(1-x^{2^n})(1-x^{3 \cdot 2^n})(1-x^{5 \cdot 2^n})\dots}$$

$x < 1$. 故 n 為 ∞ 則此分母為 1.

25. 6 重分 12 物。欲使各重所得之物數。不能少於 1. 亦不得多於 3. 其配分之方法共有幾種。 答 141.

〔解〕 以 x 之指數表物。所求方法之數。可於 $(x+x^2+x^3)^6$. 求其 x^{12} 之係數。而

$$(x+x^2+x^3)^6 = x^6(1+x+x^2)^6 = x^6(1-x^3)^6(1-x)^{-6}$$

$$= x^6(1-6x^3+15x^6-\dots)\left(1+6x+\dots+\frac{6\cdot7\cdot8}{\underline{3}}x^3+\dots+\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}{\underline{6}}x^6+\dots\right).$$

其 x^{12} 之係數。爲 $15-6\cdot7\cdot8+\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}{\underline{6}}=141$ 。

26. 於 n 物內。有同種之物 p 個。其他各相異。則此組合之全數。爲 $(p+1)2^{n-p}-1$ 。試證明之。

[證] 此例可與 292 章參看。設 n 物內有 p 個 a 。而其他之物。爲 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-p}$ 。則所求之組合全數。等於次之積中 x 之各異方乘係數之和。

$$(1+ax+ax^2+\dots+ax^p)(1+b_1x)(1+b_2x)\dots(1+b_{n-p}x).$$

故於此積 $a=b_1=b_2=\dots=x=1$ 。則 $(1+p)(1+1)^{n-p}=(p+1)2^{n-p}$ 。於此內減其不含 x 之 1 項。即得所求。

27. 以 n 個同種之物分給 r 人。其各人無 1 物不得者。則其方法之數。爲 ${}_{n+r-1}C_{r-1}$ 。試證之。

[證] 設同種之物爲 a 。則所求之方法。等於

$$(1+ax+ax^2+\dots+ax^n)^r \text{ 內 } x^n \text{ 之係數。今 } a=1. \text{ 則所求之數。爲於}$$

$$(1+x+x^2+\dots+x^n)^r = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^r = (1-x^{n+1})^r(1-x)^{-r} \text{ 內 } x^n \text{ 之係數。}$$

而於 $(1-x^{n+1})^r$ 內。無有 x^n 之係數。故可於 $(1-x)^{-r}$ 內。求其 x^n 之係數即 $\frac{r(r+1)\dots(r+n-1)}{\underline{n}} = {}_{n+r-1}C_{r-1}$ 。

28. 從 $2n$ 物內取 n 個組合之數爲 2^n 。但於 $2n$ 物內有 n 個同種。其餘 n 個各爲異種。

[證] 所求之數。等於 $(1+x+x^2+\dots+x^n)(1+x)^n$ 中 x^n 之係數。而此積即 $(1-x^{n+1})(1+x)^n(1-x)^{-1} = (1-x^{n+1})(1+x)^n(1+x+x^2+\dots)$ 。故可於 $(1+x)^n$ 。求得其係數之和爲 2^n 。

29. 從 $3n$ 物取 n 個組合之數爲 $2^{2n-1} \frac{\underline{2n-1}}{\underline{n} \underline{n-1}}$ 。但此內有 n 物爲同種。其餘 $2n$ 物爲異種。

〔證〕 所求之數。等於 $(1+x+x^2+\dots+x^n)(1+x)^{2n}$ 內 x^n 之係數。而此係數可如次求得。

$$(1+x+x^2+\dots+x^n)(1+x)^{2n} = (1+x+x^2+\dots+x^n)(1+c_1x+c_2x^2+\dots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n+c_{n+1}x^{n+1}+\dots+c_2x^{2n-2}+c_1x^{2n-1}+x^{2n}).$$

於上之積。其 x^n 之係數 $= 1+c_1+c_2+\dots+c_{n-1}+c_n$ 。

而 $(1+x)^{2n}$ 之係數之和 $= 2^{2n} = 1+c_1+c_2+\dots+c_{n-1}+c_n+c_{n-1}+\dots+c_2+c_1+1$ 。

$$\begin{aligned} \therefore 1+c_1+c_2+\dots+c_{n-1}+c_n &= \frac{1}{2}(2^{2n}+c_n) = \frac{1}{2}\left(2^{2n} + \frac{2n}{\underline{n} \cdot \underline{n}}\right) \\ &= 2^{2n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{\underline{n} \cdot \underline{n}}. \end{aligned}$$

即為所求之數。

30. 設考驗四種科學。其各科足分之數為 m 分。而所得之總分數。須平均各科得 m 之半者。則其方法之數為

$$\frac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+3).$$

〔證〕 總分數 $4m$ 之半得 $2m$ 。其方法之數等於 $(1+x+x^2+\dots+x^m)^4$ 內 x^{2m} 之係數。

$$\begin{aligned} \text{由是 } (1+x+x^2+\dots+x^m)^4 &= (1-x^{m+1})^4(1-x)^{-4} \\ &= \frac{1}{6}(1-4x^{m+1}+\dots)\{1\cdot 2\cdot 3+\dots+m(m+1)(m+2)x^{m-1}+\dots \\ &\quad + (2m+1)(2m+2)(2m+3)x^{2m}+\dots\}. \end{aligned}$$

由是所求之數為

$$\frac{1}{6}\{(2m+1)(2m+2)(2m+3)-4m(m+1)(m+2)\} = \frac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+3).$$

31. 於 $(1-2x-2x^2)^{\frac{7}{2}}$ 求其 x^4 之係數。 〔答 $-\frac{245}{8}$ 〕。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } (1-2x-2x^2)^{\frac{7}{2}} &= 1-7x(1+x) + \frac{7\cdot 5}{1\cdot 2}x^2(1+x)^2 + \frac{7\cdot 5\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}x^3(1+x)^3 \\ &+ \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4(1+x)^4 + \dots = 1+\dots+x^4\left\{\frac{7\cdot 5}{1\cdot 2} - \frac{7\cdot 5\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}3 + \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right\} + \dots \end{aligned}$$

32. 於 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^6$ 及 $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^8$ 之展開式。求其 x^5 之係數。 〔答 246, 792〕。

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad (1+x+x^2+x^3+x^4)^6 &= (1-x^5)^6(1-x)^{-6} \\
 &= (1-6x^5+\dots)\frac{1}{5}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+\dots+6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10x^5+\dots) \\
 &= 1+\dots+246x^5+\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{又} \quad (1+x+\dots+x^6)^8 &= (1-x^7)^8(1-x)^{-8} \\
 &= (1-8x^7+\dots)\frac{1}{7}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7+\dots+6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12x^7+\dots) \\
 &= 1+\dots+792x^7+\dots
 \end{aligned}$$

33. 設於紙面各記以 5·4·3·2·1·0 點。乃於此六種中。任取七枚而得 30 點。其方法之數如何。 [答 462]。

[解] 所求之數等於 $(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5)^7$ 。即 $(1-x^6)^7(1-x)^{-7}$ 內 x^{30} 之係數。

34. 骰子之各面。記以 1·2·3·4·5·6。今將骰子四個。於一次擲出 20 點。其方法之數如何。 [答 85]。

[解] 所求之數等於 $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$ 中 x^{20} 之係數。

35. 以 x 之遞昇方乘。記 $(4a^2+6ax+9x^2)^{-1}$ 之展開式。求其 x^n 之係數。 [答 x^{3r} 之係數為 $3^{3r}2^{-3r-2}a^{-3r-2}$ 。 x^{3r+1} 之係數為 $-3^{3r+1}2^{-3r-3}a^{-3r-3}$ 。 x^{3r+2} 之係數為 0]。

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad (4a^2+6ax+9x^2)^{-1} &= \frac{1}{4a^2+6ax+9x^2} = \frac{2a-3x}{8a^3-27x^3} \\
 &= 2a\left(1-\frac{3x}{2a}\right)\frac{1}{8a^3}\left(1-\frac{27x^3}{8a^3}\right)^{-1} \\
 &= \frac{1}{4a^2}\left(1-\frac{3x}{2a}\right)\left\{1+\left(\frac{3x}{2a}\right)^3+\left(\frac{3x}{2a}\right)^6+\dots+\left(\frac{3x}{2a}\right)^{3r}+\dots\right\}.
 \end{aligned}$$

由是 x^n 之係數。若 $n=3r$ ，則為 $\frac{1}{4a^2}\left(\frac{3}{2a}\right)^{3r}$ 。 $n=3r+1$ ，則為 $-\frac{1}{4a^2}\left(\frac{3}{2a}\right)^{3r+1}$ 。 $n=3r+2$ ，則為 0。

36. 於 $\frac{1+x}{(1+x+x^2)^2}$ 展開式 x^{3m} 之係數為 $2m+1$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{[證]} \quad \frac{1+x}{(1+x+x^2)^2} &= \frac{(1+x)(1-x)^2}{(1-x^3)^2} = (1-x-x^2+x^3)\{1+2x^3+3x^6+\dots \\
 &\quad +mx^{3(m-1)}+(m+1)x^{3m}+\dots\}.
 \end{aligned}$$

故 x^{3m} 之係數為 $m+(m+1)$ 。

37. 於 $(1+2x+3x^2+\dots)^2$ 展開式 x^r 之係數為 $\frac{1}{6}(r+1)(r+2)(r+3)$.

〔證〕 原式 = $\{(1-x)^{-2}\}^2 = (1-x)^{-4}$

$$= \frac{1}{3} \{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4x + \dots + (r+1)(r+2)(r+3)x^r + \dots\}.$$

38. 於 $(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots$ 至無限) 2 之展開式求其 x^n 之係數.

〔解〕 原式 = $\{2(1-x)^{-3}\}^2 = 4(1-x)^{-6}$ 展開式. 由此求其 x^n 之係數為 $\frac{1}{30}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$.

39. 於 $\{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2x + 3 \cdot 4 \cdot 2^2 x^2 + \dots + (n+1)(n+2)2^n x^n + \dots$ 至無限) n 之展開式求其 x^r 之係數. [答 $2^{n+r} \frac{3n+r-1}{r} \frac{3n-1}{r}$].

〔解〕 原式 = $\{2(1-2x)^{-3}\}^n = 2^n (1-2x)^{-3n}$. 由此求其 x^r 之係數即得.

40. $(1+x+2x^2+3x^3+\dots)^2$ 之展開式. 其 x^r 之係數為 $\frac{1}{6}r(r^2+11)$.

〔證〕 原式 = $\{1+x(1-x)^{-2}\}^2 = 1+2x(1-x)^{-2}+x^2(1-x)^{-4}$

$$= 1+2x(1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}+\dots)$$

$$+ \frac{1}{6}x^2\{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4x + \dots + (n-1)n(n+1)x^{n-2} + \dots\}.$$

由是所求之係數 = $2r + \frac{1}{6}(r-1)r(r+1) = \frac{1}{6}r(r^2+11)$.

41. $p-q$ 比 p 或 q 為小. 則 $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ 殆等於 $\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}$.

〔證〕 $\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[n]{(p+q+p-q)}}{\sqrt[n]{(p+q+q-p)}} = \frac{\sqrt[n]{\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)}}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{q-p}{p+q}\right)}} = \frac{1+\frac{1}{n}\frac{p-q}{p+q}+\dots}{1+\frac{1}{n}\frac{q-p}{p+q}+\dots}$

$\frac{p+q}{p+q}$ 之平方及高次方乘均微小. 故可捨去而為 $\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n+1)q+(n-1)p}$

42. $(6\sqrt{6}+14)^{2n+1} = N$. 設 F 為此分數部. 則 $NF = 20^{2n+1}$.

〔證〕 $6\sqrt{6}-14$ 為常分數. 故 $(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}$ 亦為常分數. 而

$$(6\sqrt{6}+14)^{2n+1} - (6\sqrt{6}-14)^{2n+1}$$

$$= 2 \left\{ 14^{2n+1} + \frac{(2n+1)2n}{1 \cdot 2} 14^{2n-1} \cdot 6^3 + \dots + \frac{(2n+1)}{1} 14 \cdot 6^{2n} \right\}.$$

$\therefore (6\sqrt{6}+14)^{2n+1} - (6\sqrt{6}-14)^{2n+1}$ 爲任意之整數而 $(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}$ 爲常分數。故爲 N 之分數部。由是

$$NF = (6\sqrt{6}+14)^{2n+1} (6\sqrt{6}-14)^{2n+1} = 20^{2n+1}.$$

43. 於 $(3\sqrt{3}+5)^{2r+1} = I + F$ 其於 I 爲整數。 F 爲常分數。則

$$F(I+F) = 2^{2r+1}.$$

[證] $(3\sqrt{3}+5)^{2r+1} - (3\sqrt{3}-5)^{2r+1}$

$$= 2 \left\{ 5^{2r+1} + \frac{(2r+1)2r}{1 \cdot 2} 5^{2r-1} \cdot 3^2 + \dots + \frac{2r+1}{1} 5 \cdot 3^r \right\} = \text{或整數} = I.$$

又 $(3\sqrt{3}-5)^{2r+1}$ 爲常分數即 F 。

由是 $F(I+F) = (3\sqrt{3}+5)^{2r+1} (3\sqrt{3}-5)^{2r+1} = 2^{2r+1}$ 。

44. 較大於 $(3+\sqrt{7})^{2m}$ 之整數。可以 2^{m+1} 整除之。

[證] $(3+\sqrt{7})^{2m} + (3-\sqrt{7})^{2m} = 2 \left\{ 3^{2m} + \frac{2m(2m-1)}{1 \cdot 2} 3^{2m-2} \cdot 7 + \dots + 7^m \right\}$
 $= \text{或整數}.$

$(3-\sqrt{7})^{2m}$ 爲常分數。故 $(3+\sqrt{7})^{2m} + (3-\sqrt{7})^{2m}$ 爲較大於 $(3+\sqrt{7})^{2m}$ 之整數。今 $(3+\sqrt{7})^{2r} + (3-\sqrt{7})^{2r} = I_{2r}$ 。

$$\begin{aligned} \text{則 } I_{2r-2} I_2 &= \{ (3+\sqrt{7})^{2r-2} + (3-\sqrt{7})^{2r-2} \} \{ (3+\sqrt{7})^2 + (3-\sqrt{7})^2 \} \\ &= I_{2r} + (3+\sqrt{7})^2 (3-\sqrt{7})^2 \{ (3+\sqrt{7})^{2r-4} + (3-\sqrt{7})^{2r-4} \} \\ &= I_{2r} + 2^2 I_{2r-4}. \quad \text{即 } I_{2r-2} \cdot 2^2 = I_{2r} + 2^2 I_{2r-4}. \end{aligned}$$

$$\therefore I_{2r} = 2^2 I_{2(r-1)} + 2^2 I_{2(r-2)}.$$

故若 $I_{2(r-2)}$ 得以 2^{r-2+1} 整除。及 $I_{2(r-1)}$ 得以 2^{r-1+1} 整除。則 I_{2r} 得以 2^{r+1} 整除。

然 I_2 得以 2^2 整除。 I_4 得以 2^3 整除。故 I_6 得以 2^4 整除。以下可順次類推。

45. m 爲正整數。則略大於 $(3+\sqrt{5})^m$ 之整數。可以 2^m 整除之。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad I_{m-2} I_2 &= \{ (3+\sqrt{5})^{m-2} + (3-\sqrt{5})^{m-2} \} \{ (3+\sqrt{5})^2 + (3-\sqrt{5})^2 \} \\ &= I_m + 2^4 I_{m-4}. \quad \therefore I_m = 2^4 I_{m-2} + 2^4 I_{m-4}. \end{aligned}$$

$$\text{而 } I_1 = 2 \cdot 3, \quad I_2 = 2^2 \cdot 9, \quad I_3 = 2^4 \cdot 9, \quad I_4 = 2^4 \cdot 47.$$

I_1 爲 2^1 之倍數及 I_3 爲 2^3 之倍數。故 I_5 爲 2^5 之倍數。然則 I_7 亦爲 2^7 之倍數。以下皆可順次類推。若 m 爲奇數。亦可由同理推得之。

46. $\frac{1+x+y+xy}{1+x+y}$ 之公項爲 $(-1)^{m+n} \frac{|m+n-2|}{|m-1| |n-1|} x^m y^n$. 試證之.

[證] 原式 $= 1 + xy \{1 + (x+y)\}^{-1}$ 之展開式. 由斯求之. 即可得本題之證.

47. 於 $\frac{x}{(-x)^2 - cx}$ 展開式中. 試證其 x^r 之係數爲

$$r \left\{ 1 + \frac{r^2-1^2}{3} c + \frac{(r^2-1^2)(r^2-2^2)}{5} c^2 + \frac{(r^2-1^2)(r^2-2^2)(r^2-3^2)}{7} c^3 + \dots \right\}.$$

[證] 原式 $= x(1-x)^{-2} \{1 - cx(1-x)^{-2}\}^{-1}$
 $= x(1-x)^{-2} + cx^2(1-x)^{-4} + c^2x^3(1-x)^{-6} + \dots$

展開此各項. 而取其 x^r 之係數即得.

$$48. 1 \cdot 2 \cdot n + 3 \cdot 4 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 5 \cdot 6 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$+ (2n-3)(2n-2)n + (2n-1)2n \cdot 1 = 2^n n^2.$$

[證] $2(1-x)^{-3} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + (2n-1)2nx^{2n-2} + \dots$

及 $(1+x^2)^n = x^{2n} + nx^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{2n-4} + \dots + nx^2 + 1.$

\therefore 於 $2(1+x^2)^n(1-x)^{-3}$ 內 x^{2n-2} 之係數. 即爲原式之左邊.

又 $(1+x^2)^n = [2 - (1-x)\{2 - (1-x)\}]^n$
 $= 2^n - n2^{n-1}(1-x)\{2 - (1-x)\} + n(n-1)2^{n-2}(1-x)^2\{2 - (1-x)\}^2$
 $+ (1-x)^3$ 以上之項.

$\therefore 2(1+x^2)^n(1-x)^{-3} = \frac{2^{n+1}}{(1-x)^3} - \frac{n2^{n+1}}{(1-x)^2} + \frac{n^2 2^n}{1-x} + (2n-3)$ 次之整代數式.

故於 $2(1+x^2)^n(1-x)^{-3}$ 內 x^{2n-2} 之係數. 爲原式之右邊.

49. 於 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}$ 之展開式. 試證其 x^{n+r+1} 之係數. 爲 $2^{n-1}(n+2r)$.

[證] $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \frac{\{2 - (1-x)\}^n}{(1-x)^3} = \frac{2^n}{(1-x)^3} - \frac{n2^{n-1}}{1-x} + (n-2)$ 次之整代數式.

由是 x^{n+r+1} 之係數. 爲 $2^n(n+r) - n \cdot 2^{n-1}$.

51. 於 $\frac{(1-3x)^n}{(1-2x)^3}$ 之展開式. 試證其 x^{n+r-1} 之係數爲 $(-1)^n(r-2n)2^{n-1}$.

[證] 與前題同法求之。

$$51. n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(n-4)^n - \dots \text{至 } (n+1) \text{ 項} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n.$$

[證] 於 293 章第四例。令其 $a=n, b=-2$ 。則易於求得。

$$52. a^{n+1} - n(a+b)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(a+2b)^{n+1} - \dots = \frac{1}{2} [n+1](2a+nb)(-b)^n.$$

[證] 由 290 章第四例。

$$\frac{c_0}{1+ay^{-1}} + \frac{c_1}{1+(a+b)y^{-1}} + \dots = \frac{|n| b^n y^{-n}}{(1+ay^{-1}) \{1+(a+b)y^{-1}\} \dots \{1+(a+nb)y^{-1}\}}.$$

左邊 y^{-n-1} 之係數 $= (-1)^{n+1} \{c_0 a^{n+1} - c_1 (a+b)^{n+1} + \dots\}$ 。

$$\text{又右邊} = \frac{|n| b^n y^{-n}}{1+y^{-1}\{a+(a+b)+\dots+(a+nb)\} + \text{含有 } y^{-2} \text{ 之項}}$$

故右邊 y^{-n-1} 之係數。為 $-|n| b^n \{(n+1)a + \frac{1}{2}n(n+1)b\}$ 。

53. 二項式任意方乘之展開式。若其連續三項。為等差級數。而指數為有理者。則其形為 q^2-2 。但 q 為整數。

[證] $(1+x)^n$ 之第 $(r+1)$ 項。第 $(r+2)$ 項。第 $(r+3)$ 項。為等差級數。而令其第 $(r+1)$ 項為 p_r 。則 $p_r + \frac{(n-r)(n-r-1)}{(r+1)(r+2)} p_r = 2 \frac{n-r}{r+1} p_r$ 化之。即 $(n-r)^2 - (2r+5)(n-r) + \frac{1}{4}(2r+5)^2 = \frac{1}{4}(8r+17)$ 。

上之方程式 n 為有理數。則 $8r+17$ 必為平方數。

$$\therefore 8r+17 = (2q+1)^2. \text{ 即 } r = \frac{1}{2}q(q+1) - 2.$$

$$\therefore n = (q+1)^2 - 2 \text{ 或 } q^2 - 2.$$

54. $(1+x+x^2)^n$ 展開式係數平方之和為 $\Sigma_0^n \frac{|2n|}{r|r|2n-2r}$ 。但為正整數。

$$[證] (1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}.$$

由例題二十五 24。

$$(1+x+x^2)^{2n} = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_{2n}.$$

故 Σa_r^2 為 $(1+x+x^2)^{2n}$ 內 x^{2n} 之係數。

$$\text{又 } \{1+x(1+x)\}^{2n} = 1 + 2nx(1+x) + \dots + \frac{|2n|}{n|n|} x^n (1+x)^n + \dots$$

$$+ \frac{|2n|}{(n+r)|n-r|} x^{n+r} (1+x)^{n+r} + \dots$$

又 $x^{n+r}(1+x)^{n+r}$ 內 x^{2n} 之係數爲 $\frac{n+r}{n-r} \cdot 2r$ 。故得本題之證。

$$55. \quad n \text{ 爲正整數。則 } 1 + \frac{n(n-1)}{2(2r+1)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2r+1)(2r+3)} + \dots$$

$$= 2^n \frac{r(r+1)(r+2)\dots(r+n-1)}{2r(2r+1)(2r+2)\dots(2r+n-1)}.$$

〔證〕 $(1-2x)^{-r} = (1-x)^{-2r} \left\{ 1 - \frac{x^2}{(1-x)^2} \right\}^{-r}$

$$= (1-x)^{-2r} + \frac{r}{1} x^2 (1-x)^{-2r-2} + \dots$$

於此恆同式內。求其相等 x^{2n} 之係數即得。

第 貳 拾 參 編

分 項 分 數 及 不 定 係 數

295. 分項分數 (Partial Fraction) 於第八編。曾示求已知諸分數之代數和。即合併若干之散分數而為一分數之法則也。而本編則示以與前反對之法則。即從已知之一分數分析為若干散分數。此法則謂之分項分數。

296. 注意 已知分數之分子。其所含某文字之次數。常比其分母為低。若分子比分母為高。則先以分母除其分子。即可以整代數式與分數式之代數和。表其原分數。而以所得之分數式分析之。

297. 一次因子之分母 設分母可分括為若干一次因子之積。即知此一分數之分項分數有若干。而其各一次因子即為各分數之分母。

若所設之一分數。可分括為 $x-a, x-b, x-c, \dots, n$ 因子。而其分子為 $F(x)$ 。但 $F(x)$ 中之高次項。不高於 x 之 $n-1$ 。次則可得其分項如次。其 A, B, C, \dots 為與 x 不相關。故可求得其值。

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\dots} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots$$

兩邊以 $(x-a)(x-b)(x-c)\dots$ 乘之。得

$$F(x) = A(x-b)(x-c)\dots + B(x-a)(x-c)\dots + C(x-a)(x-b)\dots + \dots \quad (1)$$

【第一法】 (1) 為恆同式。故於其兩邊 $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$ 之係數全相同。故可從其兩邊比較 x 之同方乘係數。而得 A, B, C, \dots 之各值。

【第二法】 用別法求得 A, B, C, \dots 之值。如次。

(1) 為恆同式。故對於 x 之任何值皆合理。

若 $x=a$ 。則 $F(a)=A(a-b)(a-c)\dots\dots$ 。故 $A=\frac{F(a)}{(a-b)(a-c)\dots\dots}$ 。

又 $x=b$ 。由同法 $B=\frac{F(b)}{(b-a)(b-c)\dots\dots}$ 。以下類推。

惟因 $\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)\dots\dots} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots\dots$ 。

故 $\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)\dots\dots} \equiv \sum \frac{F(a)}{(a-b)(a-c)\dots\dots} \cdot \frac{1}{x-a}$ 。

例 題

1. 試化 $\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)}$ 爲分項分數。

[解] $\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ 。由第一法 $3x+7=A(x-2)+B(x-1)$ 。

設 $x=1$ 。則 $10=-A$ 。 $\therefore A=-10$ 。若 $x=2$ 。則 $13=B$ 。

由是 $\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)} = -\frac{10}{x-1} + \frac{13}{x-2}$ 。

又由第二法之公式爲

$$\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)} = \frac{3 \cdot 1 + 7}{1-2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{3 \cdot 2 + 7}{(2-1)} \cdot \frac{1}{x-2} = -\frac{10}{x-1} + \frac{13}{x-2}$$

2. 試化 $\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ 爲分項分數。

[解] $\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$ 。則

$(b-c)(c-a)(a-b) = A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b)$ 。

如 $x=a$ 。則 $(b-c)(c-a)(a-b) = A(a-b)(a-c)$ 。 $\therefore A=c-b$ 。

由是 $\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{c-b}{x-a} + \frac{a-c}{x-b} + \frac{b-a}{x-c}$ 。

3. 試化 $\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots\dots(x+n)}$ 爲分項分數。

[解] $\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots\dots(x+n)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \dots\dots + \frac{A_r}{x+r} + \frac{A_n}{x+n}$ 。

$1 \equiv A_0(x+1)(x+2)\dots(x+n) + A_1x(x+2)(x+3)\dots(x+n) + \dots + A_r x(x+1)\dots(x+r-1)(x+r+1)\dots(x+n) + \dots + A_n x(x+1)\dots(x+n-1)$ 。

設 $x=0$ 。則右邊除第1項外皆消盡。即 $1=A_0 \frac{1}{n}$ 。 $\therefore A_0 = \frac{1}{n}$ 。

又 $x=-r$ 。則 $1=A_r(-r)(-r+1)\cdots(-1)(1)(2)\cdots(n-r)$ 。

$$\therefore A_r = (-1)^r \frac{1}{r \frac{1}{n-r}}$$

$$\therefore \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{x} + \cdots + (-1)^r \frac{1}{r \frac{1}{n-r}} \cdot \frac{1}{x+r} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{x+n} \right\}$$

見 259 章第三例。

4. 試化 $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ 爲分項分數。〔答 $\sum \frac{pa^2+qa+r}{(a-b)(a-c)} \frac{1}{x-a}$ 〕。

$$[\text{解}] \frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}。 \text{ 則}$$

$$px^2+qx+r \equiv A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b)。$$

$$\text{設 } x=a, \text{ 則 } pa^2+qa+r \equiv A(a-b)(a-c)。 \therefore A = \frac{pa^2+qa+r}{(a-b)(a-c)}。$$

5. 試化 $\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}$ 爲分項分數。

$$[\text{解}] x^2+2x+5 = (x+1+2i)(x+1-2i)。 \text{ 但 } i = \sqrt{-1}。$$

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1+2i} + \frac{C}{x+1-2i}。$$

$$\therefore x^2+15 \equiv A(x+1+2i)(x+1-2i) + B(x-1)(x+1-2i) + C(x-1)(x+1+2i)。$$

$$\text{若 } x=1, \text{ 則 } 16 = A(2+2i)(2-2i) = 8A。 \therefore A=2。$$

$$\text{又 } x=-1-2i, \text{ 則 } (1+2i)^2+15 = B(-2-2i)(-4i)。 \therefore B = -\frac{3+i}{2-2i}。$$

$$x=-1+2i, \text{ 則 } (1-2i)^2+15 = C(-2+2i)(4i)。 \therefore C = -\frac{3-i}{2+2i}。$$

$$\therefore \frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{2}{x-1} - \frac{3+i}{2-2i} \cdot \frac{1}{x+1+2i} - \frac{3-i}{2+2i} \cdot \frac{1}{x+1-2i}$$

298. 別法 上之末例。其分母含有虛數量者。然通例當求有理因子法如次。

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} \text{ 但其第二項之分母。爲二次式。}$$

故其分子取低於二次者爲一次式。而以 $Bx+C$ 表之。

$$\text{由是 } x^2+15 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x-1).$$

$$x=1. \text{ 則 } 1+15=8A. \quad \therefore A=2.$$

由是於上之方程式 $A=2$ 。則

$$x^2+15 = 2(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x-1).$$

$$\text{即 } -x^2-4x+5 = (Bx+C)(x-1). \quad \therefore Bx+C = -x-5.$$

$$\text{故 } \frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{2}{x-1} - \frac{x+5}{x^2+2x+5}.$$

299. 同因子之分母 如上所述分項分數之分母。含有相異之因子者。若含有相同之因子。則如次。

[第一例] 試化 $\frac{2x+5}{(x-1)^2(x-3)}$ 爲分項分數。

$$\text{令 } \frac{2x+5}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-3}. \text{ 去分母}$$

$$2x+5 = A(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)^2(x-3) + D(x-1)^2.$$

$$x=1. \text{ 則 } 7 = A(1-3). \quad \therefore A = -\frac{7}{2}. \text{ 而以 } -\frac{7}{2} \text{ 代上之方程式之 } A. \text{ 則}$$

$$2x+5 = -\frac{7}{2}(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)^2(x-3) + D(x-1)^2.$$

$$\text{即 } \frac{11}{2}(x-1) = B(x-1)(x-3) + C(x-1)^2(x-3) + D(x-1)^2.$$

$$\text{兩邊以 } x-1 \text{ 除之得 } \frac{11}{2} = B(x-3) + C(x-1)(x-3) + D(x-1)^2.$$

$$x=1. \text{ 則 } \frac{11}{2} = -2B. \quad \therefore B = -\frac{11}{4}.$$

以此代入上之方程式。則得

$$\frac{11}{2} = -\frac{11}{4}(x-3) + C(x-1)(x-3) + D(x-1)^2.$$

$$\text{即 } \frac{11}{4}(x-1) = C(x-1)(x-3) + D(x-1)^2.$$

兩邊以 $x-1$ 除之。得 $\frac{11}{4} = C(x-3) + D(x-1)$ 。

又 $x=1$ 。則 $\frac{11}{4} = -2C$ 。 $\therefore C = -\frac{11}{8}$ 。

由是得 $D = \frac{11}{8}$ 。

故 $\frac{2x+5}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{11}{8(x-3)} - \frac{7}{2(x-1)^2} - \frac{11}{4(x-1)^2} - \frac{11}{8(x-1)}$ 。

[第二例] 試化 $\frac{(1+x)^n}{(1-2x)^3}$ 爲分項分數。

$\frac{(1+x)^n}{(1-2x)^3} = \frac{A}{(1-2x)^3} + \frac{B}{(1-2x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \text{整代數式}$ 。

$\therefore (1+x)^n = A + B(1-2x) + C(1-2x)^2 + (1-2x)^3 + \text{整代數式}$ 。

令 $1-2x=y$ 。則

$(1+x)^n = \left(\frac{3}{2} - \frac{y}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \left(3^n - n3^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 3^{n-2}y^2 + y \text{ 之高次項}\right)$ 。

又前式右邊 $= A + By + Cy^2 + y^3 + y$ 之整代數式。

乃比較 y^0, y^1, y^2 之係數。得

$$A = \frac{3^n}{2^n}, \quad B = -\frac{n3^{n-1}}{2^n}, \quad C = \frac{n(n-1)3^{n-2}}{2^{n+1}}。$$

故 $\frac{(1+x)^n}{(1-2x)^3} = \text{整代數式} + \frac{3^n}{2^n(1-2x)^3} - \frac{n3^{n-1}}{2^n(1-2x)^2} + \frac{n(n-1)3^{n-2}}{2^{n+1}(1-2x)}$ 。

300. 分項分數之應用 爰舉數例如次。

[第一例] 於 $\frac{1}{1-5x+6x^2}$ 之展開式。求其 x^n 之係數。

$\frac{1}{1-5x+6x^2} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$ [由分數分項之法]

$$= 3\{1+3x+(3x)^2+\dots+(3x)^n+\dots\} - 2\{1+2x+(2x)^2+\dots+(2x)^n+\dots\}。$$

由是 x^n 之係數爲 $3^{n+1} - 2^{n+1}$ 。

[第二例] 於 $\frac{(1+x)^n}{(1-2x)^3}$ 之展開式。求其 x^{n+r} 之係數。

由 299 章第二例。

$$\frac{(1+x)^n}{(1-2x)^3} = \frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-2x)^3} - \frac{n3^{n-1}}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-2x)^2} + \frac{n(n-1)3^{n-2}}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-2x} + (n-3)$$

次之整代數式。

由是可得所求之係數。

[第三例] 三文字 a, b, c 其所有 n 乘元等次積之和。爲

$$\frac{a^{n+2}(c-b) + b^{n+2}(a-c) + c^{n+2}(b-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}。$$

此乘元等次積之和。等於次之積中 x^n 之係數。

$$(1+ax+a^2x^2+\dots)(1+bx+b^2x^2+\dots)(1+cx+c^2x^2+\dots) \text{ [見 293 章]。}$$

即 $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$ 化爲分項式。則爲

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{1-ax} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} \cdot \frac{1}{1-bx} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{1-cx}。$$

$$\text{III } x^n \text{ 之係數爲 } \frac{a^{n+2}}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^{n+2}}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^{n+2}}{(c-a)(c-b)}。$$

$$\text{即 } \frac{a^{n+2}(c-b) + b^{n+2}(a-c) + c^{n+2}(b-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}。$$

[第四例] r 文字 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 其所有 n 乘元等次積之和若何。

$$\text{如前例從 } \frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)(1-a_3x)\dots} \text{ 即 } \sum \frac{a_1^{r-1}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots} \cdot \frac{1}{1-a_1x}。$$

$$\text{求其 } x^n \text{ 之係數爲 } \sum \frac{a_1^{n+r-1}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_r)} \text{ 即得所求。}$$

301. 不定係數 [Indeterminate Coefficients] 欲變化某代數式時。豫定一代數式之形。於其各項附以未知之係數。乃從恆同方程式之理。以定其未知係數之值。如於 92 章及 281 章所示者。即由此法以證明之。茲示以二例如次。

[第一例] 於 $(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\dots(1+c^rx)$ 之遞昇方乘積。求其 x^n 之係數。

此連乘積爲 x 之 n 次式。故設恆同式如次。

$$(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\dots(1+c^rx)$$

$$= A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_r x^r + \dots + A_n x^n。$$

但 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ 不含有 x 者。

今以 cx 代入上之恆同式之 x 。則得

$$(1+c^2x)(1+c^3x)(1+c^4x)\dots(1+c^{n+1}x) \\ \equiv A_0 + A_1cx + A_2c^2x^2 + \dots + A_r c^r x^r + \dots + A_n c^n x^n.$$

此恆同式之兩邊以 $1+cx$ 乘之。

$$(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\dots(1+c^{n+1}x) \\ \equiv (1+cx)(A_0 + A_1cx + A_2c^2x^2 + \dots + A_r c^r x^r + \dots + A_n c^n x^n).$$

$$\text{即 } (A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_r x^r + \dots + A_n x^n)(1+c^{n+1}x) \\ \equiv (1+cx)(A_0 + A_1cx + A_2c^2x^2 + \dots + A_r c^r x^r + \dots + A_n c^n x^n).$$

於此恆同式比較其 x^r 之係數。

$$A_r + c^{n+1}A_{r-1} = A_r c^r + A_{r-1} c^r,$$

$$\therefore A_r = \frac{c^{n+1} - c^r}{c^r - 1} A_{r-1} = c^r \frac{c^{n-r+1} - 1}{c^r - 1} A_{r-1} \dots \dots \dots (a)$$

於 (a) 以 $r-1$ 易其 r 。則 $A_{r-1} = c^{r-1} \frac{c^{n-r+2} - 1}{c^{r-1} - 1} A_{r-2}$ 。

又以 $r-2$ 易其 r 。則 $A_{r-2} = c^{r-2} \frac{c^{n-r+3} - 1}{c^{r-2} - 1} A_{r-3}$ 。

逐次如此。至最後 $A_0 = 1$ 。

由是變化如次。

$$A_r = c^r \frac{c^{n-r+1} - 1}{c^r - 1} A_{r-1} = c^r \frac{c^{n-r+1} - 1}{c^r - 1} c^{r-1} \frac{c^{n-r+2} - 1}{c^{r-1} - 1} A_{r-2} \\ = c^r c^{r-1} \frac{(c^{n-r+1} - 1)(c^{n-r+2} - 1)}{(c^r - 1)(c^{r-1} - 1)} c^{r-2} \frac{c^{n-r+3} - 1}{c^{r-2} - 1} A_{r-3} \\ = \dots \dots \dots \\ = c^r c^{r-1} c^{r-2} \dots c^2 c^1 \frac{(c^{n-r+1} - 1)(c^{n-r+2} - 1) \dots (c^{n-1} - 1)(c - 1)}{(c^r - 1)(c^{r-1} - 1) \dots (c^2 - 1)(c - 1)} A_0 \\ = c^{\frac{1}{2}r(r+1)} \frac{(c^n - 1)(c^{n-1} - 1) \dots (c^{n-r+1} - 1)}{(c^r - 1)(c^{r-1} - 1) \dots (c - 1)}.$$

〔第二例〕 求 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ 之和。

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \equiv A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3 \dots \dots \dots (a)$$

但 A_1, A_2, A_3 不含有 n 。又於 (a) 所設之未知係數 A_3 以下 A_4, A_5 等皆為 0。故迄於 A_3 而止。

於 (a) 用 $n+1$ 代其 n 。則

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=A_1(n+1)+A_2(n+1)^2+A_3(n+1)^3\cdots(b)$$

從此方程式減 (a)。則得

$$(n+1)^2=A_1+(2n+1)A_2+(3n^2+3n+1)A_3。$$

於此方程式之兩邊。比較其 n^2 , n^1 , n^0 之係數。

$$3A_3=1, \quad 3A_3+2A_2=2, \quad A_3+A_2+A_1=1。$$

$$\text{由是 } A_1=\frac{1}{6}, \quad A_2=\frac{1}{2}, \quad A_3=\frac{1}{3}。$$

$$\therefore 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)。$$

試驗上之結果。 $n=1$ 為合理。 $n=2$ 亦為合理。由斯推之。知 $n=3, 4, \cdots$ 即 n 為任意之正整數。無不合理。

他之級數之和。亦可如斯求得之。(如於 321 章所示者。可應用此種之解法)。

例題二十九

試化下列各分數為分項式。

$$1. \frac{3x}{x^2+7x+6} \quad \left[\text{答 } \frac{18}{5(x+6)} - \frac{3}{5(x+1)} \right]。$$

$$2. \frac{x+1}{x^2-5x+6} \quad \left[\text{答 } \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right]。$$

$$3. \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)} \quad \left[\text{答 } \frac{3}{4(x+3)} - \frac{5}{8(x+5)} - \frac{1}{8(x+1)} \right]。$$

$$4. \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} \quad \left[\text{答 } \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} \right]。$$

〔解〕 $\frac{x^2+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ 。則 $x^2+1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$ 。

若 $x=0$ 。則 $A=1$ 。以代入於上之方程式得

$$x^2+1 = (x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \text{ 即 } -2 = Bx(x+1) + Cx \text{。若 } x=-1 \text{。則 } C=-2 \text{。}$$

以代入於上之方程式。得 $-2 = B(x+1) - 2$ 。 $\therefore B=0$ 。

$$5. \frac{8-x}{(2-x)^2(1+x)} \quad \left[\text{答 } \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} \right]$$

$$6. \frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+x+6} \quad \left[\text{答} \frac{1}{12(x+1)} - \frac{7}{3(x-2)} + \frac{13}{4(x-3)} \right].$$

$$7. \frac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)} \quad \left[\text{答} \frac{1}{5(x+2)} + \frac{4x-8}{5(x^2+1)} \right].$$

$$8. \frac{1+7x-x^2}{(1+3x)^2(1-10x)} \quad \left[\text{答} \frac{1}{1-10x} + \frac{1}{3(1+3x)} - \frac{1}{3(1+3x)^2} \right].$$

$$9. \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} \quad \left[\text{答} \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} \right].$$

$$10. \frac{5-9x}{(1-3x)^3(1+x)} \quad \left[\text{答} \frac{3}{2(1-3x)^3} + \frac{21}{8(1-3x)^2} + \frac{21}{32(1-3x)} + \frac{1}{32(1+x)} \right].$$

$$11. \frac{6x^2+x-1}{(x^2+1)(x-2)(x+3)} \quad \left[\text{答} \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} \right].$$

$$(\text{解}) \quad \frac{6x^2+x-1}{(x^2+1)(x-2)(x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+3}$$

$$6x^2+x-1 = (Ax+B)(x-2)(x+3) + C(x^2+1)(x+3) + D(x^2+1)(x-2).$$

比較 x^3 之係數。 $0=A$, $x=2$ 。則 $25=25C$ 。 $\therefore C=1$ 。

若 $x=-3$ 。則 $50=-50D$ 。 $\therefore D=-1$ 。終得 $B=1$ 。

$$12. \frac{x^3+2}{(x-2)^2(x^2+1)} \quad \left[\text{答} \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{4}{5(x-2)} + \frac{x+2}{5(x^2+1)} \right].$$

$$13. \frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)} \quad \left[\text{答} \frac{2}{5(x-1)^2} + \frac{11}{25(x-1)} - \frac{11x-4}{25(x^2+4)} \right].$$

$$14. \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x-2)(x^2+1)} \quad \left[\text{答} \frac{3}{5(x-2)} - \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+2}{10(x^2+1)} \right].$$

$$15. \frac{1+2x}{x^2(x+2)^3(x+1)} \quad \left[\text{答} \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x} - \frac{1}{x+1} + \frac{17}{16(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3}{4(x+2)^3} \right].$$

$$16. \frac{1+2x}{x^2(x+2)^3(x+1)} \quad \left[\text{答} \frac{1}{4(x+2)^3} + \frac{1}{6(x+2)^2} + \frac{11}{144(x+2)} + \frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{8x^3} - \frac{3}{16x} \right].$$

$$17. \text{於} \frac{x+4}{x^2+5x+6} \text{之展開式。求} x^n \text{之係數。} \left[\text{答} (-1)^n (2^n - 3^{n-1}) \right].$$

[解] $\frac{x+4}{x^2+5x+6} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1} - \frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}$ 其 x^n 之係數爲 $(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} - \frac{1}{3}(-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$ 。即 $(-1)^n (2^n - 3^{n-1})$ 。

18. 於 $\frac{x-2}{(x+2)(x-1)^2}$ 之展開式。求 x^n 之係數。

$$\left[\text{答 } \frac{4}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{9} (3n+7) \right]$$

19. 於 $\frac{x+5}{(x^2-1)(x+2)}$ 之展開式。證其 x^{2n-1} 之係數爲 $1 - \frac{1}{2^{2n}}$ 。

20. 於 $\frac{3-2x}{1-2x-3x^2}$ 之展開式。求其最初 n 項係數之和。

[解] 由 287 章。 $\frac{3-2x}{1-2x-3x^2}$ 展開式最初 n 項係數之和。等於

$\frac{3-2x}{(1-x)(1-2x-3x^2)}$ 展開式 x^{n-1} 之係數。而

$\frac{3-2x}{(1-x)(1-2x-3x^2)} = \frac{21}{8(1-3x)} - \frac{1}{4(1-x)} + \frac{5}{8(1+x)}$ 。由是 x^{n-1} 之係數。爲 $\frac{7}{8}(3)^n - \frac{1}{4} + \frac{5}{8}(-1)^{n-1}$ 。即爲所求之和。

21. 於 $\frac{2-5x}{(1-5x)(1-3x)(1-2x)}$ 之展開式。求其最初 n 項係數之和。

與前例同法。

$$\left[\text{答 } \frac{1}{24} (9+5^{n+2}-23^{n+2}-2^{n+4}) \right]$$

22. 於 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}$ 之展開式。求其 x^n 之係數。並最初 n 項係數之和。

$$\left[\text{答 } (n^2+7n+8)2^{n-3}, \frac{1}{3} (n^3+9n^2+14n)2^{n-4} \right]$$

[解] $(1+x)^n = \{2-(1-x)\}^n = 2^n - n2^{n-1}(1-x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 2^{n-2}(1-x)^2 + \dots$

$\therefore \frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \frac{2^n}{(1-x)^3} - \frac{n2^{n-1}}{(1-x)^2} + \frac{n(n-1)2^{n-2}}{1-x} + x$ 之 $(n-3)$ 次之整代數式。

由是 x^n 之係數爲 $2^{n-1}(n+1)(n+2) - n2^{n-1}(n+1) + n(n-1)2^{n-2}$ 。

由第二之解答。則於 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^4}$ 求 x^{n-1} 之係數即得。

23. 於 $\frac{(1+3x)^n}{(1+2x)^2}$ 展開式。證其 x^{n+r} 之係數為 $(-2)^r(r-2n+1)$ 。

$$24. \frac{x^{n+1}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} \\ = x + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sum \frac{a_1^{n+1}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots} \cdot \frac{1}{x-a_1}.$$

[證] $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) = x^n - \sum a_1 x^{n-1} +$ 次數較 x^{n-1} 為低之項。

$\therefore (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)(x+a_1+a_2+\cdots+a_n) = \{x^n - \sum a_1 x^{n-1} +$
次數較 x^{n-1} 為低之項 $\} (x+a_1+a_2+\cdots+a_n) = x^{n+1} -$ 次數較 x^n 為低之項。

將此恆同式移項。以 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 除之。則

$$\frac{x^{n+1}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = x + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{\text{次數較 } x^n \text{ 為低之項}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} \\ = x + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

由分項分數法。 $A_r = \frac{a_r^{n+1}}{(a_r-a_1)(a_r-a_2)\cdots(a_r-a_n)}$ 。

$$\therefore \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n} = \sum \frac{a_1^{n+1}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots} \cdot \frac{1}{x-a_1}.$$

25. 試證 $\{(1-z)(1-cz)(1-c^2z)(1-c^3z)\}^{-1}$ 展開式中 z^{n-1} 之係數為 $\frac{(1-c^n)(1-c^{n+1})(1-c^{n+2})}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)}$ 。

$$[\text{證}] \text{原式} = \frac{1}{(1-z)(1-cz)(1-c^2z)(1-c^3z)} \\ = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-cz} + \frac{C}{1-c^2z} + \frac{D}{1-c^3z}.$$

$$\text{惟因 } A = \frac{1}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)}, \quad B = -\frac{c}{(1-c)^2(1-c^2)} = -\frac{c(1+c+c^2)}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)},$$

$$C = \frac{c^2}{(1-c)^2(1-c^2)} = \frac{c^2(1+c+c^2)}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)}, \quad D = -\frac{c^3}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)}.$$

又原式 $= A(1-z)^{-1} + B(1-cz)^{-1} + C(1-c^2z)^{-1} + D(1-c^3z)^{-1}$ 。

於上之展開式。其 z^{n-1} 之係數為

$$A + Bc^{n-1} + Cc^{2n-2} + Dc^{3n-3}$$

$$= \frac{1}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)} \{1-c^n(1+c+c^2) + c^{2n+1}(1+c+c^2) - c^{3n+3}\}$$

$$= \frac{(1-c^n)(1-c^{n+1})(1-c^{n+2})}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)}.$$

26. 試證
$$\frac{a(b-c)(bc-aa')(a^m-a'^m)}{a-a'} + \frac{b(c-a)(ca-bb')(b^m-b'^m)}{b-b'} + \frac{c(a-b)(ab-cc')(c^m-c'^m)}{c-c'}$$

$$= \frac{1}{abc} (b-c)(c-a)(a-b)(bc-aa')(ca-bb')(ab-cc') H_{m-3}.$$

但 $aa' = bb'$ 及 H_{m-3} 爲 a, b, c, a', b', c' 之 $m-3$ 乘元等次積之和。

[證] 由 300 章第四例。 $H_{m-3} = \sum \frac{a^{m+2}}{(a-b)(a-c)(a-a')(a-b')(a-c')}$ 。

此 \sum 含分數六項。而其中之一對爲

$$\frac{a^{m+2}}{(a-b)(a-c)(a-a')(a-b')(a-c')} + \frac{a'^{m+2}}{(a'-a)(a'-b)(a'-c)(a'-b')(a'-c')}$$

$$= \frac{a^{m+2}}{(a-a')(a-b)(a-c) \left(a - \frac{cc'}{b}\right) \left(a - \frac{bb'}{c}\right)}$$

$$+ \frac{a'^{m+2}}{(a'-a) \left(\frac{cc'}{a} - b\right) \left(\frac{bb'}{a} - c\right) \left(a' - \frac{aa'}{b}\right) \left(a' - \frac{aa'}{c}\right)}$$

$$= \frac{a^2bc(a^m - a'^m)}{(a-a')(a-b)(a-c)(ab-cc')(ac-bb')}。$$
 餘兩對準此類推。

由是
$$\frac{1}{abc} (b-c)(c-a)(a-b)(bc-aa')(ca-bb')(ab-cc') H_{m-3}$$

$$= \frac{a(b-c)(bc-aa')(a^m-a'^m)}{a-a'} + \dots + \dots$$

27. 級數 $1-c, 1-c^2, 1-c^3, \dots$ 之任意連續 r 項之積。可以其初 r 項之積整除之。試求其證。

[證] 由 301 章第一例。 $(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x) \dots (1+c^rx)$ 之展開式內。 x^r 之係數爲 $c^{1r(r+1)} \frac{(c^n-1)(c^{n-1}-1) \dots (c^{n-r+1}-1)}{(c^r-1)(c^{r-1}-1) \dots (c-1)}$ 。

此係數爲 c 之整代數式。故 $(c^n-1)(c^{n-1}-1) \dots (c^{n-r+1}-1)$ 。可以 $(c-1)(c^2-1) \dots (c^r-1)$ 整除之。

28. c 小於 1. 則 $(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\cdots$ 至無限

$$= 1 + \frac{c}{1-c}x + \frac{c^3}{(1-c)(1-c^2)}x^2 + \cdots + \frac{c^{1+n(n+1)}}{(1-c)\cdots(1-c^n)}x^n + \cdots$$

[證] $(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\cdots$ 至無限 $= A_0 + A_1x + \cdots + A_r x^r + \cdots$
以 cx 代 x . (但 c 比 1 小. 故 n 爲極大. 則 $1+c^n x^n = 1$)

$$(1+c^2x)(1+c^3x)\cdots = A_0 + A_1cx + \cdots + A_r c^r x^r + \cdots$$

$$\therefore (1+cx)(A_0 + A_1cx + \cdots + A_r c^r x^r + \cdots) = A_0 + A_1x + \cdots + A_r x^r + \cdots$$

於此兩邊比較 x^r 之係數. 得 $A_r c^r + A_{r-1} c^r = A_r$.

$$\therefore A_r = \frac{c^r}{1-c^r} A_{r-1}.$$

$$\text{同法 } A_r = \frac{c^r}{1-c^r} \cdot \frac{c^{r-1}}{1-c^{r-1}} \cdots \frac{c}{1-c} A_0. \text{ 但 } A_0 = 1.$$

29. c 小於 1. 則 $(1+c^2x)(1+c^3x)(1+c^5x)\cdots$ 至無限

$$= 1 + \frac{c}{1-c^2}x + \frac{c^4}{(1-c^2)(1-c^4)}x^2 + \frac{c^9}{(1-c^2)(1-c^4)(1-c^6)}x^3 + \cdots$$

[證] $(1+cx)(1+c^3x)(1+c^5x)\cdots = A_0 + A_1x + \cdots + A_r x^r + \cdots$

$$\text{以 } cx \text{ 代其 } x, \text{ 與前題同法得 } A_r = \frac{c^{2r-1}}{1-c^{2r}} \cdot \frac{c^{2r-3}}{1-c^{2r-2}} \cdots \frac{c}{1-c^2} A_0.$$

30. c 小於 1. 則 $\frac{1}{(1-x)(1-cx)(1-c^2x)\cdots}$

$$= 1 + \frac{x}{1-c} + \frac{x^2}{(1-c)(1-c^2)} + \frac{x^3}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)} + \cdots$$

[證] $\frac{1}{(1-x)(1-cx)(1-c^2x)\cdots} = A_0 + A_1x + \cdots + A_r x^r + \cdots$

以 cx 易其 x . 則

$$\frac{1}{(1-cx)(1-c^2x)(1-c^3x)\cdots} = A_0 + A_1cx + \cdots + A_r c^r x^r + \cdots$$

$$\therefore A_0 + A_1cx + \cdots + A_r c^r x^r = (1-x)(A_0 + A_1x + \cdots + A_r x^r + \cdots).$$

比較 x^r 之係數. 得 $A_r c^r = A_r - A_{r-1}$.

$$\text{如前例 } A_r = \frac{1}{1-c^2} \cdot \frac{1}{1-c^{r-1}} \cdots \frac{1}{1-c} A_0.$$

$$31. \frac{(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\cdots}{(1-x)(1-cx)(1-c^2x)\cdots} = 1 + \frac{1+c}{1-c}x + \frac{(1+c)(1+c^2)}{(1-c)(1-c^2)}x^2 + \cdots$$

[證] 與前例同法求之.

32. $\frac{(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\cdots}{(1-cx)(1-c^2x)(1-c^3x)\cdots}$ 其 x^r 之係數爲 $c^r \frac{(1+1)(1+c)\cdots(1+c^{r-1})}{(1-c)(1-c^2)\cdots(c-c^r)}$

[證] 原式 = $A_0 + A_1x + \cdots$ 而以 cx 易其 x 與前例同法。

33. $\frac{1}{1-x} + \frac{y}{1-ax} + \frac{y^2}{1-a^2x} + \frac{y^3}{1-a^3x} + \cdots = \frac{1}{1-y} + \frac{x}{1-ay} + \frac{x^2}{1-a^2y} + \cdots$

[證] 原恆同式左邊 x^r 之係數 = $1 + ya^r + y^2a^{2r} + \cdots = \frac{1}{1-ya^r}$

∴ 左邊 = $\sum \frac{x^r}{1-ya^r}$

34. $\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{x^3}{(1-x^3)^2} + \cdots$

[證] 左邊

$$= (x+x^2+x^3+\cdots) + (2x^2+2x^4+2x^6+\cdots) + (3x^3+3x^6+3x^9+\cdots) + \cdots$$

$$= (x+2x^2+3x^3+\cdots) + (x^2+2x^4+3x^6+\cdots) + (x^3+2x^6+3x^9+\cdots) + \cdots$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{x^3}{(1-x^3)^2} + \cdots$$

35. Lambert 氏之級數。即 $\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^4}{1-x^4} + \cdots$

等於 $x \frac{1+x}{1-x} + x^4 \frac{1+x^2}{1-x^2} + x^9 \frac{1+x^3}{1-x^3} + \cdots$ 試求其證。

[證] 第一之級數 = $x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$

$$+ x^3 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots$$

$$+ x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \cdots$$

$$+ x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \cdots$$

$$+ \cdots$$

$$= (x+x^2+x^3+x^4+\cdots) + (x^3+x^3+x^4+\cdots) + (x^4+x^6+x^8+\cdots)$$

$$+ (x^6+x^8+\cdots) + (x^9+x^{12}+\cdots) + (x^{12}+\cdots) + \cdots$$

$$= \left(\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} \right) + \left(\frac{x^4}{1-x^2} + \frac{x^6}{1-x^2} \right) + \left(\frac{x^9}{1-x^3} + \frac{x^{12}}{1-x^3} \right) + \cdots$$

$$= x \frac{1+x}{1-x} + x^4 \frac{1+x^2}{1-x^2} + x^9 \frac{1+x^3}{1-x^3} + \cdots$$

查 理 斯 密 司 氏

霍 爾 氏, 乃 托 氏

大 代 數 學 講 義

第 陸 卷

第 貳 拾 肆 編

指 數 之 定 理, 對 數, 對 數 級 數

302. 指 數 之 定 理 $\frac{1}{n}$ 之 值 為 小 於 1 者, 則 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$ 由二項式定理展開之式為歛級數。

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} &= 1 + nx \frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ &\quad + \frac{nx(nx-1) \dots (nx-r+1)}{r} \cdot \frac{1}{n^r} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \\ &\quad + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right) \dots \left(x - \frac{r-1}{n}\right)}{r} + \dots \end{aligned}$$

今 $x=1$, 則

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3} + \dots \\ &\quad + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)}{r} + \dots \end{aligned}$$

但 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^s = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ns}$.

$$\text{故 } \left\{ 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3}+\dots \right\}^n$$

$$= 1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3}+\dots$$

此式 n 爲任何值皆合理。而 n 爲無限大。則 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots$ 殆同於 0。乃得次式。

$$\left(1+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{r}+\dots \right)^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^r}{r}+\dots$$

其 $1+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{r}+\dots$ 以 e 代之。則

$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^r}{r}+\dots$ 。是之謂指數之定理。而 e^x 對於 x 之任何值爲級數（參觀 278 章）。

303. e 之性質 考此 e 之數量。可知其值。必比 2 爲大。又因 $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots > 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$

而 $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots$ 之極限爲 3。則知 e 之值。比 3 爲小。

由是 e 之值。必在 2 與 3 之間。實際計算之。得 $e=2.71827\dots$

此 e 之值。爲不可通度者。試證之如次。

假定 $e=m/n$ 爲可通度者。則

$$\frac{m}{n} = 1+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots。以 n 乘之。得$$

$$m|n-1 = |n + |n + \dots + 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \dots。$$

然此右邊分數部之和。比 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$ 爲小。而

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n+1} / \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n}。$$

即分數部之和比 $\frac{1}{n}$ 爲小。則是其右邊非爲整數可知。然其左邊則明明爲整數。夫以整數等於非整數。於理不合。故 e 不能等於 $\frac{m}{n}$ 。即 e 爲不可通度。

304. 別證 指數之定理。其法如次。(此爲 Prof. Hill 氏所證明。於其所著之 Cambridge Philosophical Society 第五卷 415 頁揭載之。然於 Cauchy 氏所著之 Analyse Algebrique。亦以同法證明)。

此證明先定二項式之定理。對於正整指數爲真。即

$$f(m) = 1 + m + \frac{m^2}{2} + \dots + \frac{m^r}{r} + \dots$$

$$f(n) = 1 + n + \frac{n^2}{2} + \dots + \frac{n^s}{s} + \dots$$

$$\text{及 } f(m+n) = 1 + (m+n) + \frac{(m+n)^2}{2} + \dots + \frac{(m+n)^p}{p} + \dots$$

於 $f(m) \times f(n)$ 中 $m^r n^s$ 之係數爲 $\frac{1}{r! s!}$ 。

而於 $f(m+n)$ 中 $m^r n^s$ 之係數。則含於 $\frac{(m+n)^{r+s}}{r+s}$ 以內。其係數爲 $\frac{r+s}{r! s!} \times \frac{1}{r+s}$ 即 $\frac{1}{r! s!}$ 。

如是於 $f(m) \times f(n)$ 及 $f(m+n)$ 中 $m^r n^s$ 之係數相同。且 $f(m)$, $f(n)$ 及 $f(m+n)$ 。其 m 及 n 爲任何值。皆爲斂級數。故由 280 章。得

$$f(m) \times f(n) = f(m+n) \dots \dots \dots (1)$$

今以 x 爲正整數。由 (1) 得

$$f(1) \times f(1) \times f(1) \times \dots \text{至 } x \text{ 因數} = f(1+1+1+\dots \text{至 } x \text{ 項})。$$

$$\therefore \{f(1)\}^x = f(x) \dots \dots \dots (2)$$

次令 x 爲正分數 $\frac{p}{q}$ 。但 p 及 q 爲正數。則由 (1) 得

$$\left\{ f\left(\frac{p}{q}\right) \right\}^q = f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \dots \text{至 } q \text{ 項}\right) = f(p)$$

$$\text{由 (2)} \quad = \{f(1)\}^p。$$

$$\therefore f\left(\frac{p}{q}\right) = \{f(1)\}^{\frac{p}{q}}.$$

由是證得 $\{f(1)\}^x = f(x)$ 。其 x 爲任何之正值，皆爲合理。

更以 x 爲負數設爲 $-y$ 。但 y 爲正數。由 (1) 得

$$f(-y) \times f(y) = f(-y+y) = f(0)。但 f(0) = 1。$$

$$由是 f(x) = f(-y) = \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{\{f(1)\}^y} \quad (y \text{ 爲正數}) = \{f(1)\}^{-y} = \{f(1)\}^x。$$

至是乃證得 $\{f(1)\}^x = f(x)$ 。其 x 之值，無論爲正數爲分數爲負數，無不爲真。

$$但 f(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1^2}{3} + \dots。$$

$$\therefore e^x = f\left(\frac{1}{e}\right) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^r}{r} + \dots。$$

$$305. \text{ 定理 } n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^n - \dots = \lfloor n \rfloor。$$

試證明之如次。

$$由 304 章，得 (e^x - 1)^n = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right)^n。$$

$$由二項式之定理，得 (e^x - 1)^n = e^{nx} - n e^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{(n-2)x} - \dots。$$

於 $\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right)^n$ 展開式中 x^r 之係數，若 $r < n$ 則爲 0。

若 $r = n$ 則爲 1。

又於 $e^{nx} - n e^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{(n-2)x} - \dots$ 中 x^n 之係數爲

$$\frac{1}{n} \left\{ n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^n - \dots \right\}。$$

令 $r = n$ ，於兩展開式中比較其 x^n 之係數得

$$\frac{1}{n} \left\{ n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^n - \dots \right\} = 1。$$

$$即 n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^n - \dots = \lfloor n \rfloor。$$

此爲本定理證得之結果也。

將上之定理推廣之。

$$(e^{ax} - e^{bx})^n = e^{nax} - n e^{(n-1)a+b}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{(n-2)a+2b}x^2 - \dots$$

$$\text{及 } (e^{ax} - e^{bx})^n = e^{nbx} (e^{(a-b)x} - 1)^n = e^{nbx} \left\{ (a-b)x + \frac{(a-b)^2 x^2}{2} + \dots \right\}^n$$

由是於 $(e^{ax} - e^{bx})^n$ 之兩展開式中比較 x^n 之係數得

$$\frac{1}{n} \left\{ (na)^n - n(n-1)a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)a^{n-2}b^2 - \dots \right\} = (a-b)^n$$

若以 x 代其 na 。以 y 代其 $b-a$ 。則得次式。

$$x^n - n(x+y)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (x+2y)^n - \dots = (-1)^n y^n \frac{1}{n}$$

若 k 小於 n 。而為任何之正整數。

$$x^k - n(x+y)^k + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (x+2y)^k - \dots \text{ 至 } n+1 \text{ 項} = 0$$

因是得最要之特別公式如次。但 $k < n$ 。

$$1^k - n \cdot 2^k + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 3^k - \dots \text{ 至 } n+1 \text{ 項} = 0$$

$$\text{及 } m^k - n(m-1)^k + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (m-2)^k - \dots \text{ 至 } n+1 \text{ 項} = 0$$

例題三十

1. n 為無限大。則 $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ 之極限為 e^x 。

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + n \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{n^3} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} x^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3} x^3 + \dots \end{aligned}$$

n 為無限大。則 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots$ 為 0。

$$\text{故 } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ 之極限} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = e^x$$

2. n 為無限大。則 $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ 之極限為 e^a 。

〔證〕 $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{b}} = \left\{ \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} \right\}^{\frac{a}{b}}$. 而 $n = \infty$. 則 $\frac{a}{n} = 0$.

故 $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}$ 之極限為 e . \therefore 得 $e^{\frac{a}{b}}$.

$$3. \quad n^{n+1} - n(n-1)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^{n+1} - \dots = \frac{1}{2} n |n+1|.$$

〔證〕 $\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right)^n = (e^x - 1)^n = e^{nx} - ne^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{(n-2)x} - \dots$.

比較 x^{n+1} 之係數為

$$\frac{n}{2} = \frac{n^{n+1}}{n+1} - n \frac{(n-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n-2)^{n+1}}{n+1} - \dots$$

$$\therefore \frac{1}{2} n |n+1| = n^{n+1} - n(n-1)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^{n+1} - \dots$$

$$4. \quad n^{n+2} - n(n-1)^{n+2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^{n+2} - \dots = \frac{n}{24} (3n+1) |n+2|.$$

〔證〕 將 3 之恆同式比較 x^{n+2} 之係數即得。

$$5. \quad \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots\right) = 1.$$

〔證〕 於 $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ 以 1 及 -1 代其 x 得

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots \quad \text{及} \quad e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \dots$$

$$6. \quad e^{-1} = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots$$

〔證〕 $e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

$$= \left(1 - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots = 0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \dots$$

$$7. \quad \frac{3}{2}e = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \frac{1+2+3+4}{4} + \dots$$

〔證〕 $3e = 2e + e = \left(2 + \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots\right) + \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)$

$$\begin{aligned}
 &= -2 + \left(\frac{2}{1} + 1\right) + \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{3}\right) + \dots \\
 &= -2 + \frac{3}{1} + \frac{4}{2} + \frac{5}{3} + \frac{6}{4} + \dots = 2\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{3}{4} + \dots\right) \\
 &= 2\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{6}{3} + \frac{10}{4} + \frac{15}{5} + \dots\right) \\
 &= 2\left(1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \frac{1+2+3+4}{4} + \frac{1+2+3+4+5}{5} + \dots\right).
 \end{aligned}$$

$$8. \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots\right)^2 = 1 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots\right)^2.$$

$$[\text{證}] \quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right).$$

$$e^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right).$$

$$\text{由是 } e \times e^{-1} = 1 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right)^2.$$

$$9. \quad e^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)} + \dots$$

$$[\text{證}] \quad e^{-1} = \left(1 - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots = 0 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$10. \quad \frac{e-1}{e+1} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots \right\} \div \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right\}.$$

$$[\text{證}] \quad e(1-e^{-1}) = e-1. \quad \therefore \frac{e}{1} = \frac{e-1}{1-e^{-1}} = \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots}$$

$$\text{即 } \frac{e-1}{e+1} = \frac{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right)}{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right)}$$

$$11. \quad \frac{e^2+1}{e^2-1} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots \right\} \div \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right\}.$$

$$[\text{證}] \quad \frac{e^2+1}{e^2-1} = \frac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}} = \frac{2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\right)}{2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots\right)}$$

12. 於 $1 + \frac{(1+2x)}{1} + \frac{(1+2x)^2}{2} + \frac{(1+2x)^3}{3} + \dots$ 之展開式 x^n 之係數爲 $\frac{2^n e}{n}$.

$$[\text{證}] \quad 1 + \frac{(1+2x)}{1} + \frac{(1+2x)^2}{2} + \frac{(1+2x)^3}{3} + \dots = e^{1+2x} = e \cdot e^{2x}$$

於 e^{2x} 內 x^n 之係數爲 $\frac{2^n}{n}$. 故所求之係數爲 $\frac{2^n e}{n}$.

對 數

306. 定義 第一數之某方乘。等於第二數時。乃稱其方乘之指數。爲以第一數作底數 (Base)。而成第二數之對數 (Logarithm)。

例 $a^x = y$. 稱其 x 爲以 a 爲底數。而成 y 之對數。記以 $x = \text{Log}_a y$.

先示對數之根原性質。次示實際計算對數時所有簡捷之法則。

307. 對數之性質 茲示對數之根原性質如次。

[第一] a 之值不論如何。而 $a^0 = 1$. $\therefore \text{Log} 1 = 0$.

因是底數不論如何。而 1 之對數恆爲 0。

[第二] $\text{Log}_a x = \alpha$, $\text{Log}_a y = \beta$, $\text{Log}_a z = \gamma$, ... 因 $x = a^\alpha$, $y = a^\beta$, $z = a^\gamma$, ...
 $\therefore xyz \dots = a^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}$.

即得 $\text{Log}_a (xyz \dots) = \alpha + \beta + \gamma + \dots = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y + \text{Log}_a z + \dots$.

由是積之對數。等於其因子各對數之和。

[第三] $\text{Log}_a x = \alpha$, $\text{Log}_a y = \beta$. 因 $x = a^\alpha$, $y = a^\beta$. $\therefore x \div y = a^{\alpha-\beta}$.

即得 $\text{Log}_a (x \div y) = \alpha - \beta = \text{Log}_a x - \text{Log}_a y$.

由是商之對數。等於被除數與除數兩對數之代數差。

[第四] $x = a^\alpha$. 而 $x^m = a^{m\alpha}$ (m 爲任何值)。

$\therefore \text{Log}_a x^m = m\alpha = m \text{Log}_a x$.

因是一數某方乘之對數。等於其數之對數。而以其指數乘之。

[第五] $\text{Log}_a x = \alpha, \text{Log}_b x = \beta$. 則 $x = a^\alpha = b^\beta$. 而 $a = b^{\frac{\beta}{\alpha}}$, 及 $b = a^{\frac{\alpha}{\beta}}$.

故 $\frac{\beta}{\alpha} = \text{Log}_b a$ 及 $\frac{\alpha}{\beta} = \text{Log}_a b$.

由是 $\text{Log}_a b \times \text{Log}_b a = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = 1$.

$\therefore \beta = \alpha \text{Log}_b a$, 即 $\text{Log}_b x = \text{Log}_a x \cdot \text{Log}_b a$.

由是底數 b 任何數之對數, 等於底數 a 同數之對數, 而以 $\text{Log}_b a$ 乘之.

308. 對數級數 $a = e^k$. 即 $k = \text{Log}_e a$. 而 $a^x = e^{xk} = e^{x \text{Log}_e a}$. 由 304 章. 得

$$a^x = e^{x \text{Log}_e a} = 1 + x \text{Log}_e a + \frac{(x \text{Log}_e a)^2}{2} + \dots + \frac{(x \text{Log}_e a)^r}{r} + \dots,$$

令 $a = 1 + y$. 則 $(1 + y)^x = 1 + x \text{Log}_e (1 + y) + \frac{1}{2} \{x \text{Log}_e (1 + y)\}^2 + \dots$.

此式中之 y 爲小於 1 者. 又 $(1 + y)^x$ 由二項式之定理. 得

$$\begin{aligned} (1 + y)^x &= 1 + xy + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} y^2 + \dots + \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)}{r!} y^r + \dots \\ &= 1 + x \text{Log}_e (1 + y) + \frac{1}{2} \{x \text{Log}_e (1 + y)\}^2 + \dots \end{aligned}$$

此相等之兩級數爲欽級數. 但 y 爲小於 1 者.

乃於此兩級數中比較其 x^1 之係數.

$\text{Log}_e (1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots + (-1)^{r-1} \frac{y^r}{r} + \dots$ 是之謂對數級數.

[第一例] 試以 ab 及 $a+b$ 爲級數之各項. 以表 $a^m + b^m$.

$$\begin{aligned} \text{恆同式 } (1 - ax)(1 - bx) &\equiv 1 - (a+b)x + abx^2 \\ &\equiv 1 - sx + px^2. \end{aligned}$$

但 $a+b=s, ab=p$. 由是

$\text{Log}_e (1 - ax) + \text{Log}_e (1 - bx) = \text{Log}_e (1 - sx + px^2)$. 由上之對數級數. 即得

$$\begin{aligned} \left(ax + \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^3 x^3}{3} + \dots \right) + \left(bx + \frac{b^2 x^2}{2} + \frac{b^3 x^3}{3} + \dots \right) \\ = \left\{ x(s - px) + \frac{x^2(s - px)^2}{2} + \frac{x^3(s - px)^3}{3} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

於此方程式左邊 x^n 之係數爲 $\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n}$ 。又於右邊 x^n 之係數。可從 $\frac{x^n(s-px)^n}{n} + \frac{x^{n-1}(s-px)^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}(s-px)^{n-2}}{n-2} + \dots$ 以內求得之。即

$$\frac{1}{n} s^n + \frac{1}{n-1} \{-(n-1)s^{n-2}p\} + \frac{1}{n-2} \left\{ \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} s^{n-4} p^2 \right\} + \dots$$

此 x^n 之兩係數相等。又以 $s=a+b$, $p=ab$ 。故

$$a^n + b^n = (a+b)^n - nab(a+b)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 (a+b)^{n-4} - \dots$$

$$+ (-1)^r \frac{n(n-r-1)(n-r-2)\dots(n-2r+1)}{r!} a^r b^r (a+b)^{n-2r} + \dots$$

[第二例] $a+b+c=0$ 。則 $10(a^7+b^7+c^7)=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$ 。

以 $-p$ 代其 $bc+ca+ab$ 。以 q 代其 abc 。又以 $a+b+c=0$ 。故得恆同式。爲 $(1-ax)(1-bx)(1-cx) \equiv 1-px^2-qx^3$ 。

乃如前例。取兩邊之對數。而於兩展開式中比較其 x 種種方乘之係數即得。

又如 129 章可求得 $\frac{1}{r}(a^r+b^r+c^r)$ 。以 p 及 q 表示之。

[第三例] $a+b+c=0$ 。則 $a^n+b^n+c^n$ 。當可以 abc 及 $bc+ca+ab$ 之項表示之。

$-p=bc+ca+ab$, $q=abc$ 。則

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx) \equiv 1-px^2-qx^3$$

從其對數式比較其 x 同方乘之係數。則知 $\frac{1}{n}(a^n+b^n+c^n)$ 等於 $\sum \frac{1}{r} x^{2r}(p+qx)^r$ 中所有 x^n 之係數。

設 $n=6m \pm 1$ 。則於 $\sum \frac{1}{r} x^{2r}(p+qx)^r$ 中所含有 x^{6m+1} 之諸項。可由下式觀察而知之。

$$\frac{1}{2m} x^{4m}(p+qx)^{2m} + \frac{1}{2m+1} x^{4m+2}(p+qx)^{2m+1} + \frac{1}{2m+2} x^{4m+4}(p+qx)^{2m+2}$$

$$+ \dots + \frac{1}{3m-1} x^{6m-2}(p+qx)^{3m-1} + \frac{1}{3m} x^{6m}(p+qx)^{3m}$$

以此式之各項中所有 x^{6m-1} 之係數，皆含有 pq 之因子。又所有 x^{6m+1} 之係數，皆含有 p^2q 之因子。因此知 $a+b+c=0$ 。若 n 為 $6m-1$ ，則 $a^n+b^n+c^n$ 得以 $abc(bc+ac+ab)$ 整除之。又若 n 為 $6m+1$ ，則 $a^n+b^n+c^n$ 得以 $abc(bc+ca+ab)^2$ 整除之。

惟 $a+b+c=0$ ，則 $c=-(a+b)$ 。故 $bc+ca+ab$ ，即 $-(a^2+ab+b^2)$ ，而依 Cauchy 氏之定理，即知 $a^n+b^n-(a+b)^n$ 。若 n 為 $6m-1$ ，則得以 $ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$ 整除。若 n 為 $6m+1$ ，則得以 $ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$ 整除。

309. 對數之計算 求任何數對數之漸近值，可將前之對數級數，變為收斂最速之級數，然後求其漸近值為最便捷。

對數級數
$$\text{Log}_e(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \dots \dots (1)$$

變其 y 之符號
$$\text{Log}_e(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \dots \dots \dots (2)$$

由是
$$\text{Log}_e \frac{1+y}{1-y} = \text{Log}_e(1+y) - \text{Log}_e(1-y) = 2\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots\right) \dots (3)$$

令 $\frac{1+y}{1-y} = \frac{m}{n}$ ，則 $y = \frac{m-n}{m+n}$ ，即變 (3) 為

$$\text{Log}_e \frac{m}{n} = 2\left\{\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \dots\right\} \dots (4)$$

用此級數求底數 e 之對數甚易。例如 $m=2, n=1$ ，則

$$\text{Log}_e 2 = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \dots\right\} = .693147 \dots$$

又 $m=3, n=2$ ，由 (4) 得

$$\text{Log}_e 3 - \text{Log}_e 2 = 2\left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} + \dots\right\} = .405465 \dots$$

由是 $\text{Log}_e 3 = .693147 + .405465 = 1.09861$ 。

用此方法，則凡底數 e 任何數之對數，其漸近值皆可求得之。

310. 訥白爾 (Napier) 氏之對數 即自然對數，如前章所述以 e 為底數之對數是也。

此對數為研究學理時所用，若於實際計算時，則用以 10 為底數之對數為便，故稱以 10 為底數之對數，為常用對數。

求底數 e 之對數。已於前章詳述。而求底數 10 之對數。則先求底數 e 之對數。而以常因子 $\text{Log}_{10} e$ 或 $\frac{1}{\text{Log}_e 10}$ 乘之可也。〔見 307 章第五〕此常因子名模數 (Modulus)。其值為 .43429……。

例題 三十一

$$1. \text{Log}(x+n) = \text{Log} x + \text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \text{Log}\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) \\ + \text{Log}\left(1 + \frac{1}{2+x}\right) + \dots + \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n-1+x}\right).$$

$$\text{〔證〕 } \text{Log}(x+n) = \text{Log}\left\{x \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x+3}{x+2} \dots \frac{x+n-1}{x+n-2} \cdot \frac{x+n}{x+n-1}\right\} \\ = \text{Log} x + \text{Log} \frac{x+1}{x} + \text{Log} \frac{x+2}{x+1} + \dots + \text{Log} \frac{x+n}{x+n-1}.$$

$$2. \text{Log}_e \sqrt{12} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \frac{1}{4^2} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \frac{1}{4^3} \\ + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) \frac{1}{4^4} + \dots \text{至無限}.$$

$$\text{〔證〕 } \text{Log}_e \sqrt{12} = \text{Log}_e \sqrt{\left(3^2 \div \frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2} \left\{2 \text{Log}_e 3 - \text{Log}_e \frac{3}{4}\right\} \\ = \text{Log}_e \left\{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \div \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right\} - \frac{1}{2} \text{Log}_e \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ = \left\{\text{Log}_e \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \text{Log}_e \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right\} - \frac{1}{2} \text{Log}_e \left(1 - \frac{1}{4}\right) \text{ 用公式 (2) (3)} \\ = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \dots\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^3} + \dots\right) \\ = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \frac{1}{4^2} + \dots.$$

$$3. \text{Log}_e \sqrt{10} = \left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9^3} + \dots \text{至無限}\right\} \\ + \left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9^7} + \dots \text{至無限}\right\}.$$

$$[\text{證}] \quad \text{Log}_e \sqrt{10} = \frac{1}{2} \text{Log}_e 10 = \frac{1}{2} \text{Log}_e \left\{ \left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \right)^2 \left(\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} \right) \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Log}_e \sqrt{10} &= \frac{1}{2} \text{Log}_e \left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \right)^2 + \frac{1}{2} \text{Log}_e \frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} \\ &= 3 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \dots \right\} + \left\{ \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^5} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

$$4. \quad \text{Log}_e 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \text{ 至無限.}$$

〔證〕 由對數公式 (1).

$$\text{Log}_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots.$$

$$\begin{aligned} \therefore 2 \text{Log}_e 2 &= 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \dots = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{因是 } \text{Log}_e 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots.$$

$$5. \quad \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{9}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \text{ 至無限} = 3 \text{Log}_e 2 - 1.$$

$$[\text{證}] \quad \text{原級數} = \frac{3+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5+2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{7+2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + 2 \left(\text{Log}_e 2 - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{由 4 題})$$

$$= \text{Log}_e 2 + 2 \left(\text{Log}_e 2 - \frac{1}{2} \right) = 3 \text{Log}_e 2 - 1.$$

$$6. \quad \text{Log}_e \frac{x}{1-x} = 2 \left\{ \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2x-1)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2x-1)^5} + \dots \right\}.$$

$$[\text{證}] \quad \text{Log}_e \frac{x}{1-x} = \text{Log}_e \frac{1+(2x-1)}{1-(2x-1)}$$

$$= \text{Log}_e \{1+(2x-1)\} - \text{Log}_e \{1-(2x-1)\}.$$

由此求其結果即得。

$$7. \quad \text{Log}_e x = \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3-1}{(x+1)^3} + \dots.$$

(證) $\text{Log}_e x = \text{Log}_e \left\{ \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \div \left(1 - \frac{x}{x+1}\right) \right\}$
 $= \text{Log}_e \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) - \text{Log}_e \left(1 - \frac{x}{x+1}\right)$
 $= - \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(x+1)^3} + \dots \right\} + \left\{ \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{(x+1)^3} + \dots \right\}$
 $= \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \frac{x^3-1}{(x+1)^3} + \dots$

8. $\text{Log}_e \frac{a+x}{a-x} = \frac{2ax}{a^2+x^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{2ax}{a^2+x^2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2ax}{a^2+x^2} \right)^5 + \dots$

(證) $\text{Log}_e \frac{a+x}{a-x} = \text{Log}_e \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2} = \frac{1}{2} \text{Log}_e \frac{a^2+x^2+2ax}{a^2+x^2-2ax}$
 $= \frac{1}{2} \text{Log}_e \left(1 + \frac{2ax}{a^2+x^2}\right) - \frac{1}{2} \text{Log}_e \left(1 - \frac{2ax}{a^2+x^2}\right)$ 。由此求其結果即得。

9. $2 \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right) = \frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)^5 - \dots$

(證) $\left(\frac{1+ix}{1-ix} \right)^2 = \frac{1 + \frac{2ix}{1-x^2}}{1 - \frac{2ix}{1-x^2}}$ 之對數式爲

$2 \{ \text{Log}_e(1+ix) - \text{Log}_e(1-ix) \} = \text{Log}_e \left(1 + \frac{2ix}{1-x^2} \right) - \text{Log}_e \left(1 - \frac{2ix}{1-x^2} \right)$

$\therefore 4i \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right) = 2i \left\{ \frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)^5 - \dots \right\}$

10. $\{ \text{Log}_e(1+x) \}^2 = 2 \left\{ \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) x^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) x^4 - \dots \right\}$

(證) 由 308 章, $1 + yx + \frac{y(y-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{y(y-1)\dots(y-r+1)}{r} x^r + \dots$
 $= 1 + y \text{Log}_e(1+x) + \frac{1}{2} \{ y \text{Log}_e(1+x) \}^2 + \dots$

於此方程式中比較 y^2 之係數。

$\frac{x^2}{2} - \frac{1+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots = \frac{1}{2} \{ \text{Log}_e(1+x) \}^2$

11. $\text{Log}_e(1+x+x^2)$ 展開式中 x^n 之係數爲 $\frac{1}{n}$ 或 $\frac{-2}{n}$ 試推究之。

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } \operatorname{Log}_e(1+x+x^2) &= \operatorname{Log}_e(1-x^3) - \operatorname{Log}_e(1-x) \\ &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots\right) - \left(x^3 + \frac{x^6}{2} + \dots + \frac{x^{3m}}{m} + \dots\right). \end{aligned}$$

令 $n=3m+1$ 。則 x^n 之係數 $= \frac{1}{n}$ 。

又令 $n=3m$ 。則 x^n 之係數 $= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{\frac{1}{3}n} = -\frac{2}{n}$ 。

12. $\operatorname{Log}_e(1-x+x^2)$ 依 x 之遞升方乘展開之。得 $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$ 。
則 $a_3+a_6+a_9+\dots = \frac{2}{3} \operatorname{Log}_e 2$ 。

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } \operatorname{Log}_e(1-x+x^2) &= \operatorname{Log}_e(1+x^3) - \operatorname{Log}_e(1+x) \\ &= \left(x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \dots\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots\right) \\ &= -x + \frac{x^2}{2} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^6 - \dots \\ &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \dots. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_3 + a_6 + a_9 + \dots &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) - \dots \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = \frac{2}{3} \operatorname{Log}_e 2. \end{aligned}$$

13. $\operatorname{Log}_e \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 依 x 之遞升方乘展開之。

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } \operatorname{Log}_e \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} &= \operatorname{Log}_e \left\{ \frac{(1-x^3)(1+x)}{(1+x^3)(1-x)} \right\} = \operatorname{Log}_e \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \operatorname{Log}_e \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right) \\ &= 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots \right) - 2 \left(x^3 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^9}{5} + \dots \right) \\ &= 2 \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{2x^9}{9} + \dots \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. \quad &\frac{1}{n} + \frac{x}{n(n+1)} + \frac{x^2}{n(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \\ &= e^x \left\{ \frac{1}{n} - \frac{x}{1(n+1)} + \frac{x^2}{2(n+2)} - \frac{x^3}{3(n+3)} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{〔證〕 左邊} = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)x + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2}\right)x^2$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n+3} \right) x^3 + \dots \\
 & = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right) - \frac{x}{n+1} \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots \right) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{n+2} \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots \right) + \dots \\
 & = \frac{1}{n} e^x - \frac{x}{n+1} e^x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{n+2} e^x - \dots = e^x \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{n+2} - \dots \right).
 \end{aligned}$$

15. $2 \operatorname{Log}_e(1-x) \equiv \operatorname{Log}_e(1-2x+x^2)$ 試證

$$2^n - n2^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} 2^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-6} + \dots = 2.$$

(證) 將 $2 \operatorname{Log}_e(1-x) \equiv \operatorname{Log}_e\{1-x(2-x)\}$ 變之爲

$$2 \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \right) = x(2-x) + \frac{x^2(2-x)^2}{2} + \frac{x^3(2-x)^3}{3} + \dots$$

於左邊 x^n 之係數爲 $\frac{2}{n}$ 。又於右邊 x^n 之係數。爲在於

$$\frac{x^n(2-x)^n}{n} + \frac{x^{n-1}(2-x)^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}(2-x)^{n-2}}{n-2} + \dots \text{ 以內。即}$$

$$\frac{2^n}{n} - 2^{n-2} + \frac{n-3}{1 \cdot 2} 2^{n-4} - \frac{(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-6} + \dots$$

16. $\operatorname{Log}_e \frac{1}{1-x-x^2+x^3}$ 依 x 之正整方乘展開之。其 x^n 之係數以 n 爲奇數或偶數而得 $\frac{1}{n}$ 或 $\frac{3}{n}$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{(證)} \quad \operatorname{Log}_e \frac{1}{1-x-x^2+x^3} &= \operatorname{Log}_e \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = -\operatorname{Log}_e(1-x) - \operatorname{Log}_e(1-x^2) \\
 &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \right) + \left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots + \frac{x^{2m}}{m} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

由是 n 爲奇數。則 x^n 之係數爲 $\frac{1}{n}$ 。若 n 爲偶數。則 x^n 之係數爲

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{1}{2}n} = \frac{3}{n}.$$

17. 於 $\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}$ 之展開式中 x^r 之係數為 $\frac{1}{r}(1^r+2^r+3^r+\dots+n^r)$.

試由此求其 $1^2+2^2+3^2+\dots$ 及 $1^3+2^3+3^3+\dots$ 至 n 項之和。

(證) $\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}} = e^x \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = e^{nx} + e^{(n-1)x} + e^{(n-2)x} + \dots + e^x$.

於此展開式之各項, x^r 之係數為 $\frac{1}{r}\{n^r+(n-1)^r+(n-2)^r+\dots+1^r\}$.

$$\begin{aligned} \text{又 } \frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}} &= \frac{nx + \frac{n^2x^2}{2} + \frac{n^3x^3}{3} + \dots}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots} \\ &= \left(n + \frac{n^2x}{2} + \frac{n^3x^2}{3} + \dots\right) \left\{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} - \dots\right)\right\}^{-1} \\ &= \left(n + \frac{n^2x}{2} + \frac{n^3x^2}{3} + \dots\right) \left\{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} - \dots\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \dots\right)^2 + \dots\right\}. \end{aligned}$$

於此展開式中, 求其 x^2 及 x^3 之係數, 可得 $1^2+2^2+3^2+\dots$ 及 $1^3+2^3+3^3+\dots$ 之和。

18. 於 e^{e^x} 展開式中 x^r 之係數為 a_r , 而 $a_r = \frac{1}{r} \left(\frac{1^r}{1} + \frac{2^r}{2} + \frac{3^r}{3} + \dots \right)$.

由此求得 $\frac{1^3}{1} + \frac{2^3}{2} + \frac{3^3}{3} + \dots = 5e$ 及 $\frac{1^4}{1} + \frac{2^4}{2} + \frac{3^4}{3} + \dots = 15e$. 試證之。

(證) $e^{e^x} = 1 + e^x + \frac{e^{2x}}{2} + \dots + \frac{e^{kx}}{k} + \dots$ 於此展開式中 x^r 之係數為

$$a_r = \frac{1}{r} \left(\frac{1^r}{1} + \frac{2^r}{2} + \frac{3^r}{3} + \dots + \frac{k^r}{k} + \dots \right).$$

又 $e^{e^x} = e^{1+x+\frac{1}{2}x^2+\dots} = e \cdot e^x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$

$$= e \left\{ 1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \dots\right) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^2}{2} + \dots\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x + \frac{x^2}{2} + \dots\right)^3 + \dots \right\}.$$

於此展開式中求 x^3 之係數為 $e \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5e}{3}$.

又於前之結果 $r=3$ 。則 x^3 之係數為 $a_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1^3}{1} + \frac{2^3}{2} + \frac{3^3}{3} + \dots \right)$ 。

$\therefore \frac{1^3}{1} + \frac{2^3}{2} + \frac{3^3}{3} + \dots = 5e$ 。又比較其 x^4 之係數而得最後之結果。

$$19. \quad e \left\{ 1 + \frac{n}{1^2} + \frac{n(n-1)}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots \right\}$$

$$= 1 + (n+1) + \frac{(n+1)(n+2)}{1^2 \cdot 2^2} + \dots$$

[證] $(x+1)^n e^x = \frac{1}{e} \{ (1+x)^n e^{1+x} \}$ 以其兩邊於同時展開之為

$$\left\{ x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \dots \right\} \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{e} \left\{ (1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \frac{(1+x)^{n+2}}{2} + \frac{(1+x)^{n+3}}{3} + \dots \right\}.$$

於此兩邊比較其 x^n 之係數。

$$1 + \frac{n}{1^2} + \frac{n(n-1)}{1^2 \cdot 2^2} + \dots = \frac{1}{e} \left\{ 1 + \frac{n+1}{1^2} + \frac{(n+1)(n+2)}{1^2 \cdot 2^2} + \dots \right\}.$$

20. 由級數 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ 之第 $n+1$ 項。求其 n 項之和。若 n 為無限。則等於 $\text{Log}_e 2$ 。

[證] $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{將此恆同}$$

$$\text{式移項得 } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}.$$

若 n 為無限大。則此右邊之級數。至無限而為 $\text{Log}_e 2$ 。

$$21. \quad \text{Log}_e(1+n) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \text{Log}_e(1+n).$$

[證] 假定 $e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}} > 1+n$ 。兩邊以 $e^{\frac{1}{n+1}}$ 乘之

$$e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}} > (1+n)e^{\frac{1}{n+1}} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{但 } e^{\frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$$

$$\text{故 } (1+n)^{\frac{1}{1+n}} = 1 + n + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n+1} + \dots$$

$$\therefore e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}} > (1+n)e^{\frac{1}{1+n}} > 1+n+1 \dots \dots \dots (2)$$

如(1)爲真，則(2)亦爲真。即對於 n 爲真，則對於 $n+1$ 亦爲真。然 $e > 2$ 。
即 $e > 1 + \frac{1}{1}$ 即 $n=1$ 則(1)爲合理。故 $n=2, 3, 4, \dots$ 無不合理。

由是知(1)之對數式與題意相合。

22. 試證次列之各題。

$$(1) (x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

$$(2) (x+y)^{11} - x^{11} - y^{11} = 11xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2 \{ (x^2+xy+y^2)^3 + x^2y^2(x+y)^2 \}.$$

$$(3) (x+y)^{15} - x^{15} - y^{15} = 15xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2 \{ (x^2+xy+y^2)^5 + 2x^2y^2(x+y)^2 \}.$$

【證】 $-x=a$, $-y=b$, 及 $x+y=c$. 則 $a+b+c=0$,
 $xy(x+y)=abc$, 及 $x^2+xy+y^2 = -(bc+ca+ab)$.

$a+b+c=0$. 故由 308 章第三例。 $\frac{1}{r}(a^r+b^r+c^r)$. 即爲含於
 $(px^2+qx^3) + \frac{1}{2}(px^2+qx^3)^2 + \frac{1}{3}(px^2+qx^3)^3 + \dots$ 中 x^r 之係數。

但 $p = -(bc+ca+ab)$, $q = abc$. 由是

$$(1) \frac{1}{7}(a^7+b^7+c^7) = \frac{1}{3} \cdot 3p^2q = abc(bc+ca+ab)^2.$$

惟以 $-x=a$, $-y=b$, $x+y=c$.

$$\text{故 } \frac{1}{7} \{ -x^7 - y^7 - (x+y)^7 \} = xy(x+y) \{ -y(x+y) - x(x+y) + xy \}^2.$$

$$\therefore (x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

$$(2) \frac{1}{11}(a^{11}+b^{11}+c^{11}) = p^4q + pq^3 = pq(p^3+q^3) \\ = abc(bc+ca+ab) \{ (bc+ca+ab)^3 + a^2b^2c^2 \}.$$

此可以前之法則求得其結果。

$$(3) \quad \frac{1}{13}(a^{13}+b^{13}+c^{13})=2p^2q^3+p^5q=p^2q(2q^2+p^3)$$

$$=abc(bc+ca+ab)^2\{(bc+ca+ab)^3+2a^2b^2c^2\}.$$

$$23. \quad x^{2n}+y^{2n}+(x+y)^{2n}=2p^n+n(n-2)p^{n-2}q^2$$

$$+\frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{3 \cdot 4}p^{n-4}q^4+\dots$$

$$+\frac{n(n-r-1)\dots(n-3r+1)}{3 \cdot 4 \dots 2r}p^{n-2r}q^{2r}+\dots$$

但 $p \equiv x^2+xy+y^2$ 及 $q \equiv xy(x+y)$ 。

[證] $-x=a, -y=b$, 及 $x+y=c$. 則 $a+b+c=0$, $xy(x+y)=abc$ 及 $x^2+xy+y^2=-(bc+ca+ab)$ 。

由是如 308 章第三例. $p=-(bc+ca+ab)$, $q=abc$. 則

$$\frac{1}{2n}(a^{2n}+b^{2n}+c^{2n})=\sum_r \frac{1}{r}(px^2+qx^2)^r \text{ 中所有 } x^{2n} \text{ 之係數.}$$

$$\text{但 } \sum_r \frac{1}{r}(px^2+qx^2)^r = \frac{1}{n}x^{2n}(p+qx)^n + \frac{1}{n-1}x^{2n-2}(p+qx)^{n-1}$$

$$+\frac{1}{n-2}x^{2n-4}(p+qx)^{n-2}+\dots+\frac{1}{n-1}x^{2n-2r}(p+qx)^{n-r}+\dots$$

$$\text{由是 } \frac{1}{2n}(a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}) = \frac{1}{n}p^n + \frac{n-2}{2}p^{n-2}q^2$$

$$+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{4}p^{n-4}q^4+\dots+\frac{(n-r-1)\dots(n-3r+1)}{2r}p^{n-2r}q^{2r}+\dots$$

24. 試證明下式.

(1) n 為奇數. 則 $(b-c)^n+(c-a)^n+(a-b)^n$ 得以 $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ 整除. (2) 若 n 為 $6m-1$. 則此代數式. 得以 $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ 整除. (3) 又 n 為 $6m+1$. 則此代數式. 得以 $(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4$ 整除.

[證] $b-c=x, c-a=y, a-b=z$. 則 $x+y+z=0$. 故由等勢式

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=3(b-c)(c-a)(a-b)=3xyz, \text{ 而}$$

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=-2(yz+zx+xy), \text{ 及}$$

$$(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4=2(yz+zx+xy)^2.$$

由 308 章第三例. $x+y+z=0$.

則 $x^2+y^2+z^2$ 之式。若 n 爲 $6m-1$ 得以 $xyz(yz+zx+xy)$ 整除。

又若 n 爲 $6m+1$ 得以 $xyz(yz+zx+xy)^2$ 整除。

由是得 (2) 及 (3) 之證。

次由 88 章之定理。 $(b-c)^{2n+1}+(c-a)^{2n+1}+(a-b)^{2n+1}$ 爲可以 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 整除。而

$$(b-c)(c-a)(a-b) = \frac{1}{3} \{ (b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 \}.$$

由是得 (1) 之證。

常用對數

311. 常用對數 [Common Logarithms]。即以 10 爲底數之對數也。通常記對數時。略記爲 Log 。不必以其底數 10 表出之。

兩數之各位。含有同一之數字。但異其小數點之位置者。即其大數等於小數乘 10 之某整方乘。由 207 章第二。知此兩數之對數。惟異其整數而已。

$$\text{例 } \text{Log } 421.5 = \text{Log } (4.215 \times 100) = \text{Log } 4.215 + \text{Log } 100 = \text{Log } 4.215 + 2.$$

$$\text{又如已知 } \text{Log } 2 = .301030.$$

$$\text{則 } \text{Log } .02 = \text{Log } (2 \div 100) = \text{Log } 2 - \text{Log } 100 = .301030 - 2.$$

由上之性質。常用對數之小數部。常可爲正數。故 $\text{Log } .02$ 爲 $.301030 - 2$ 。原等於 -1.69897 。但記此對數時。不記爲 -1.69897 。而記爲 $\bar{2}.301030$ 。此記法其整數部 $\bar{2}$ 。即與 -2 之意同。而其小數部常爲正數也。

定義 記對數時。其小數部常爲正數。此小數部。稱曰假數 (Mantissa)。其整數部。稱曰指標 (Characteristic)。

312. 指標 凡任何數之對數。其指標可由觀察得之。

何則。若一數爲大於 1 之數。其整數部之位數爲 n 位。則知其數小於 10^n 。而大於 10^{n-1} 。而其數之對數。則在 $\text{Log } 10^n$ 及 $\text{Log } 10^{n-1}$ 。即 n 與 $n-1$ 之間。故知其數之對數。爲 $n-1$ + 小數部。

故凡大於 1 之數。其對數之指標。等於其數之整數位少一也。

若一數爲小於1之數，而其首位數字之前，有 n 個0者，則知此數大於 10^{-n-1} ，而小於 10^{-n} 。由是知記其對數之小數部爲正數時，此數之對數，爲 $-(n+1)$ +小數部。∴此指標爲 $-(n+1)$ 。

故凡小於1之數，其對數之指標，等於其首位以前之0數多1，但此指標爲負數。

例 3571.4 之指標爲3，而 .00035714 爲-4，即 $\bar{4}$ 。

反之，若已知任何數對數之指標，則其數之小數點，亦可決定。例某數以數字3, 5, 7, 1, 4 順列而成者，而其數之對數3.55283，因其指標爲3，乃知此數有四位整數，即3571.4也。

又列記數字35714之對數爲 $\bar{2}.55283$ ，因其指標爲 $\bar{2}$ ，此數首位以前有一個0，即.035714也。

313. 對數表 自1迄99999之各數，一一求其對數彙錄之，其對數之小數，求至七位爲止者，謂之七位對數表。然通常對數其小數至五位爲止，已足用矣。

表中所載者，僅有假數，而其指標可由觀察而知之。

用對數表之法有二，第一從真數求對數，第二從對數求真數。

[第一] 從真數求對數。

若真數不多於五位，則其對數可從表中檢得之。若在五位以上之數，則其對數爲表中所不載，於此欲求其對數，可以略大略小兩真數之差，與原數及略小數之差相比，若其差爲甚小時，則兩數之差，殆與對數之差成比例，用此原則，可求得原數之對數，欲證明此原則，可直從308章解得。

$$\begin{aligned} \text{即 } \log_{10}(N+x) - \log_{10} N &= \log_{10} \left(1 + \frac{x}{N}\right) = \mu \log_e \left(1 + \frac{x}{N}\right) \\ &= \mu \left(\frac{x}{N} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{N^2} + \dots\right) = \mu \frac{x}{N} \text{ (略近數)} \end{aligned}$$

其 μ 爲對數之根數，所以代表 $1/\log_e 10$ 者也。

上之原則稱比例差之原則 (Principle of Proportional Differences)。

[例] 求 357.247 之對數。

從表中檢得 $\log 357.24 = 2.5529601$ 及 $\log 357.25 = 2.5529722$ ，而此

兩對數之差，為 .0000121。又 $(357.247 - 357.24)$ 與 $(357.25 - 357.24)$ 之比為 $\frac{7}{10}$ 。由是於 357.24 加以 .0000121 之 $\frac{7}{10}$ 。其所得之數，即 357.247 之對數之略近值。

但 .0000121 之 $\frac{7}{10}$ 為 .00000847。因對數之小數迄七位而止。茲依四捨五入之法，將 .00000847 作為 .0000085。由是得 357.247 之對數，為 $2.5529601 + .0000085 = 2.5529686$ 。

〔第二〕 從對數求真數。

例求與對數 $\bar{4}.5529652$ 相當之真數。

從表中檢得 $\text{Log } 3.5724 = .5529601$ ，及 $\text{Log } 3.5725 = .5529722$ 。而 $(.5529652 - .5529601)$ 與 $(.5529722 - .5529601)$ 之比為 $\frac{51}{121}$ 。由是從比例差之原則，而得與對數 .5529652 相當之真數，為

$$3.5724 + .0001 \times \frac{51}{121} = 3.5724 + .00004 = 3.57244.$$

即 $.5529652 = \text{Log } 3.57244$ 。

$\therefore \bar{4}.5529652 = \text{Log } .000357244$ 。

複利及年金

314. 複利法。計算長期間之複利及年金值。用對數法求之。易得其近似值。

(複利者。即利上加利之算法也)。

凡屬於複利之問題。則如下所述之三類是也。(學生解此種問題時。可參照算術上之方法。自易明白)。

〔第一〕 知本金及年限及利率求本利和。

P 為本金。 n 為年數。 r 為利率。(即每年一圓所得之利息)。 A 為所求之本利和。

第一年間 P 之利金為 Pr 。而於第一年末。應得本利之和。為 $P + Pr$ 即 $P(1+r)$ 。

此 $P(1+r)$ 。即爲第二年之本金。而於第二年末。應得本利之和。爲 $\{P(1+r)\}(1+r)$ 。即 $P(1+r)^2$ 。依同法推之。第 n 年末。應得本利之和。爲 $P(1+r)^n$ 。

$$\text{故} \quad A = P(1+r)^n.$$

$$\text{由是} \quad \text{Log } A = \text{Log } P + n \text{Log}(1+r).$$

若半年一轉利計算之。則此本利之和。爲 $P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}$ 。

[例] 本金 350 圓。年利 5 分。問於 25 年間所得本利之和如何。

$$P=350, \quad r=\frac{5}{100}, \quad \text{及} \quad n=25.$$

$$\begin{aligned} \text{由是} \quad \text{Log } A &= \text{Log } 350 + 25 \text{Log}\left(1+\frac{5}{100}\right) \\ &= \text{Log } 350 + 25(\text{Log } 105 - \text{Log } 100). \end{aligned}$$

從表檢得 $\text{Log } 350 = 2.5440680$, $\text{Log } 105 = 2.0211893$ 。

由此求得 $\text{Log } A = 3.073805$ 。

又從表檢得與對數 3.073805 相當之真數爲 1185.22。

故 $A = 1185.22$ 圓。

[第二] 已知滿若干年限以後所得之期款。求其現價 (Present Value)。

A 爲 n 年後之期款。 P 爲現價。 r 爲利率。以 P 爲本金。 n 年後所得利之和爲 A 。故由第一。得 $P = A(1+r)^{-n}$ 。

[第三] 求於 n 年間每年之終支取 A 圓之現價。

r 爲利率。則由第二。得

$$\text{第一年支取之現價爲 } A(1+r)^{-1},$$

$$\text{第二年支取之現價爲 } A(1+r)^{-2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{第 } n \text{ 年支取之現價爲 } A(1+r)^{-n}.$$

$$\text{故所求之現價爲 } A\left\{\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^n}\right\} = \frac{A}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right\}.$$

[例] 年利 4 分。求於 20 年間每年取金 30 圓之現價。

$$A=30, \quad n=20, \quad r=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}.$$

$$\text{所求之現價} = 30 \times 25 \left\{ 1 - \left(\frac{25}{26} \right)^{20} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{今 } \text{Log} \left(\frac{25}{26} \right)^{20} &= 20 (\text{Log } 25 - \text{Log } 26) = 20 (1.3979400 - 1.4149733) \\ &= 20 (-.0170333) = -.340666 \\ &= \bar{1}.659334 = \text{Log } .456389. \end{aligned}$$

由是得所求之現價 = $30 \times 25 (1 - .456389) = 407.7 \dots \dots$ 圓。

例題三十二

用次之對數解各例題。

$\text{Log } 1.02 = .0086002$	$\text{Log } 1.262 = .1010594$	$\text{Log } 3 = .4771213$
$\text{Log } 1.025 = .0107239$	$\text{Log } 1.4816 = .1707310$	$\text{Log } 3.0832 = .4890017$
$\text{Log } 1.033 = .0141003$	$\text{Log } 1.4817 = .1707603$	$\text{Log } 4.4230 = .6457169$
$\text{Log } 1.04 = .0170333$	$\text{Log } 1.6386 = .2144730$	$\text{Log } 5.1 = .7075702$
$\text{Log } 1.05 = .0211893$	$\text{Log } 1.6387 = .2144995$	$\text{Log } 5.577 = .7464006$
$\text{Log } 1.06 = .0253059$	$\text{Log } 1.7292 = .2378452$	$\text{Log } 6.3862 = .8052425$
$\text{Log } 1.1467 = .0594498$	$\text{Log } 1.7349 = .2392744$	$\text{Log } 7.4297 = .8709713$
$\text{Log } 1.1468 = .0594877$	$\text{Log } 2 = .3010300$	$\text{Log } 7.4298 = .8709771$
$\text{Log } 1.2258 = .0884196$	$\text{Log } 2.0829 = .3186684$	

1. 求 $\sqrt[20]{105}$. [答 1.262].

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } \text{Log } \sqrt[20]{105} &= \frac{1}{20} \text{Log} (1.05 \times 100) = \frac{1}{20} (\text{Log } 1.05 + \text{Log } 100) \\ &= \frac{1}{20} (.0211893 + 2) = .10105947 = \text{Log } 1.262. \end{aligned}$$

2. 求 $\sqrt[10]{51}$. [答 1.48169].

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } \text{Log } \sqrt[10]{51} &= \frac{1}{10} \text{Log} (5.1 \times 10) = \frac{1}{10} (\text{Log } 5.1 + \text{Log } 10) \\ &= \frac{1}{10} (.7075702 + 1) = .17075702. \end{aligned}$$

但 $\text{Log } 1.4816 = .1707310$ 及 $\text{Log } 1.4817 = .1707603$.

由是 $\text{Log } \sqrt[10]{51} - \text{Log } 1.4816 = .17075702 - .1707310 = .0000260$.

及 $\text{Log } 1.4817 - \text{Log } 1.4816 = .1707603 - .1707310 = .0000293$.

$$\therefore \sqrt[10]{51} = 1.4816 + \frac{260}{293} \times 0001 = 1.48169.$$

3. 本金 100 圓。年利 5 分。求於 50 年間所得本利之和。

[答 1146.74 圓].

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad A &= 100 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{50}. \quad \therefore \text{Log } A = \text{Log } 100 + 50 \text{Log } 1.05 \\ &= 2 + 50 \times .0211893 = 3.059465 = \text{Log } 1146.74 \end{aligned}$$

4. 年利 5 分。於 15 年間之本利和。及年利 4 分。於 18 年間之本利和。此二數皆大於本金 2 倍。試證之。

[證] 由第一。 $A = P(1+r)^n$ 。其 $(1+r)^n = (1.05)^{15}$ 。

$\text{Log}(1.05)^{15} = 15 \text{Log } 1.05 = .3178396 > \text{Log } 2$ 。由是 $A = P(1.05)^{15} > 2P$ 。

又 $(1+r)^n = (1.04)^{18}$ 。 $\text{Log}(1.04)^{18} = 18 \text{Log } 1.04 = .3065994 > \text{Log } 2$ 。

由是 $A = P(1.04)^{18} > 2P$ 。

5. 年利 4 分。每半年一轉利。問 500 圓於 10 年間之本利之總數幾何。

[答 742.98 圓].

$$\text{[證]} \quad A = 500 \left(1 + \frac{.04}{2}\right)^{10}.$$

6. 某國每年於 1000 人中生出 85 人。於 1000 人中死亡 52 人。則其人口經 22 年後。過於以前人口之 2 倍。其證若何。

[證] P 為現在之人口數。 A 為 22 年後之人口數。

每年於 1000 人中增 $85 - 52 = 33$ 。故 $A = P \left(1 + \frac{33}{1000}\right)^{22}$ 。

$$\therefore \text{Log } \frac{A}{P} = 22 \text{Log } 1.033 = 22 \times .0141003 = .3102066 > \text{Log } 2.$$

由是 $A > 2P$ 。

7. 每年應支 30 圓。今不支。以年利 $2\frac{1}{2}$ 分計算之。至 20 年之終。一併支取。求其全數幾何。

[答 785.5 圓].

[解] 於 20 年之終。應得第一年之預金為 $30(1+.025)^{20}$ 。第二年之預金為 $30(1+.025)^{19}$ 第二十年之預金為 $30(1+.025)$ 。

$$\begin{aligned} \text{故所求之金} &= 30 \{ (1.025)^{20} + (1.025)^{19} + \dots + 1.025 \} \\ &= 30 \times \frac{(1.025)^{21} - 1.025}{1.025 - 1} \end{aligned}$$

8. 年利4分。於40年間支取年金100圓之現價如何。

[答 1979.275 圓]。

[解] 由314章第三 $\frac{100}{.04} \left\{ 1 - \frac{1}{(1.04)^{40}} \right\}$ 。

9. 借款30000圓。年利4分。逐年以等金償之。至30年償清。問此等金若干。

[答 約1735 圓]。

[解] $30000 = \frac{A}{.04} \left\{ 1 - \frac{1}{(1.04)^{30}} \right\}$ 。

10. 有房屋一座。每年可得賃金70圓。而支出房租10圓。今預訂契約於26年以後之14年間。此房劃歸某人。問此契約之現價如何。

[答 約122.58 圓]。

[解] 自今以後27年起至40年終。此期限內劃歸某人。而此證書之現價其每年之收入款為70-10。即60圓。

$$\begin{aligned} \text{故由314章得 } & 60 \left\{ \frac{1}{(1.06)^{27}} + \frac{1}{(1.06)^{28}} + \dots + \frac{1}{(1.06)^{40}} \right\} \\ & \frac{60}{(1.06)^{27}} \left\{ \frac{1 - \frac{1}{(1.06)^{14}}}{1 - \frac{1}{1.06}} \right\} = 1000(1.06)^{-26} \{ 1 - (1.06)^{-14} \}. \end{aligned}$$

第貳拾伍編

級數之和

315. 級數 級數之最要者。既已述明於前。如於第十七編所述者。爲等差、等比、調和級數。於第二十二編之288章所述者。爲二項級數。於第二十四編所述者。爲指數及對數級數。而於是編更述他種最要之級數如次。

316. 記法 以 v_n 表級數之第 n 項。以 S_n 表 n 項和。而以 S_∞ 表歛級數無限項之和。

317. 公項之差 級數之和。要不能以同一之法則求得之。然大都可將其公項即第 n 項 v_n 分其項爲二式之差。一式含有 n 。一式含有 $n-1$ 。如是依同法分其各項。而求級數之和。

例如級數爲 $\frac{a}{x(x+a)} + \frac{a}{(x+a)(x+2a)} + \frac{a}{(x+2a)(x+3a)} + \dots$

此級數之第 n 項 $v_n = \frac{a}{(x+n-1 \cdot a)(x+na)} = \frac{1}{x+(n-1)a} - \frac{1}{x+na}$ 。

依同法分其各項爲二式之差。則此級數爲

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right) + \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+2a}\right) + \left(\frac{1}{x+2a} - \frac{1}{x+3a}\right) + \dots$$

$$+ \left\{ \frac{1}{x+(n-1)a} - \frac{1}{x+na} \right\}$$

觀此可知其和僅存初項與末項。其餘悉消去也。

由是得 $S_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+na} = \frac{na}{x(x+na)}$ 。

例題

1. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$ n 項之和

[答 $1 - \frac{1}{n+1}$]

[解] $S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$
 $= 1 - \frac{1}{n+1}$.

2. 求 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$ n 項之和。 [答 $1 - \frac{1}{n+1}$].

[解] $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

3. 求 $\frac{1}{3 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 3} + \dots$ 無限項之和。 [答 $\frac{1}{2}$].

[解] $u_n = \frac{1}{(n+2) \cdot n} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{n+2}$.

故 $S_\infty = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots = \frac{1}{2}$.

4. 求 $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$ 至無限項之和。 [答 1].

[解] $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

5. 求 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$ 至 n 項之和。
 [答 $\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \right\}$].

[解] $2u_n = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}$.

6. 求 $\frac{2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{4}{5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1}{3^n} + \dots$

至無限項之和。 [答 $\frac{1}{4}$].

[解] $\frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$.

故 $4u_n = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{3}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^n}$.

7. 求 $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \dots$ 至無限項之和。 [答 $\frac{1}{2}$].

[解] $S_\infty = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4-1} - \frac{1}{4+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6-1} - \frac{1}{6+1} \right) + \dots$
 $= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots \right\} = \frac{1}{2}(1)$.

8. 求 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^2}{(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^3}{(1-x^3)(1-x^4)} + \dots$ n 項之和。

[答 $\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)(1-x^{n+1})}$].

[解] $u_n = \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}} \right)$.

故 $S_n = \frac{1}{1-x} \left\{ \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right) + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}} \right) \right\}$
 $= \frac{1}{1-x} \left\{ \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{n+1}} \right\}$.

318. 問題 求次之級數 n 項之和。

$$\{a(a+b) \dots (a+r-1 \cdot b)\} + \{(a+b)(a+2b) \dots (a+rb)\} + \dots$$

$$+ \{(a+n-1 \cdot b)(a+nb) \dots (a+n+r-2 \cdot b)\} + \dots$$

此級數之規率。(1) 各項有 r 個因子。(2) 任何項之諸因子爲等差級數。(3) 連續諸項之第一因子。其次序與第一項之連續因子相同。而爲等差級數。

欲求此級數之和。先將原級數各項最後因子之次。附加一因子。而成一規率相同之新級數。乃以 V_n 表此新級數之第 n 項。

即 $V_n = \{(a+n-1 \cdot b)(a+nb) \dots (a+n+r-1 \cdot b)\}$ 。

而 $V_n - V_{n-1} = \{(a+n-1 \cdot b)(a+nb) \dots (a+n+r-1 \cdot b)\}$
 $- \{(a+n-2 \cdot b)(a+n-1 \cdot b) \dots (a+n+r-2 \cdot b)\}$

$= \{(a+n-1 \cdot b)(a+nb) \dots (a+n+r-2 \cdot b)\} \{a+n+r-1 \cdot b - (a+n-2 \cdot b)\}$
 $= (r+1)b \{(a+n-1 \cdot b)(a+nb) \dots (a+n+r-2 \cdot b)\}$ 。

惟因原級數之第 n 項 $u_n = (a+n-1 \cdot b)(a+nb) \dots (a+n+r-2 \cdot b)$ 。

故 $V_n - V_{n-1} = (r+1)b \times u_n$ 。

依同法 $V_{n-1} - V_{n-2} = (r+1)b \times u_{n-1}$ 。

.....

$V_2 - V_1 = (r+1)b \times u_2$ 。

$V_1 - V_0 = (r+1)b \times u_1$ 。

但 V_0 爲 V_1 之前項。可由其規率以作之。故

$V_0 = \{a-b, a(a+b) \dots (a+r-1 \cdot b)\}$ 或從 V_n 以 0 易其 n 即得。

乃從加法得 $(V_n - V_0) = (r+1)b\{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n\} = (r+1)bS_n$.

$$\therefore S_n = (V_n - V_0) / (r+1)b.$$

例 題

1. 求 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$ 之和。 [答 $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$].

[解] $u_n = n(n+1)$, $V_n = n(n+1)(n+2)$, $V_0 = 0 \cdot 1 \cdot 2$, $r=2$, 及 $b=1$.

由是 $S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

[別法] 如次得簡易之解法。

$$n(n+1) = \frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)\},$$

$$(n-1)n = \frac{1}{3}\{(n-1)n(n+1) - (n-2)(n-1)n\},$$

.....

$$1 \cdot 2 = \frac{1}{3}\{1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2\}.$$

由是 $S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

2. 求 $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$ 之和。

[答 $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$].

[解] $u_n = n(n+1)(n+2)$, $V_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

$\therefore V_0 = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0$. 又 $r=3$, $b=1$. 如上法即得。

3. 求 $3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + \dots$ n 項之和。

[解] $u_n = (2n+1)(2n+3)(2n+5)$, $V_n = (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)$,

$$V_0 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad r=3, \quad b=2.$$

由是 $S_n = \frac{1}{4 \cdot 2}\{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7) - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\}$.

求多項級數之和, 可變其級數之形以求之, 如次所示之例。

4. 求 $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots$ n 項之和。

[解] $u_n = n(n+2) = n(n+1) + n$.

但 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ 。

又 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 。

由是 $S = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}n(n+1)$ 。

5. 求 $2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + (n+1)(n+2)(3n-2)$ 至 n 項之和。

[解] 但 $u_n = (n+1)(n+2)(3n-2) = 3n(n+1)(n+2) - 2(n+1)(n+2)$ 。

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{3}{4} \{n(n+1)(n+2)(n+3) - 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3\} - \frac{2}{3} \{(n+1)(n+2)(n+3) - 1 \cdot 2 \cdot 3\} \\ &= \frac{1}{12}(9n-8)(n+1)(n+2)(n+3) + 4. \end{aligned}$$

319. 問題 有級數其公項如次。求其級數之和。

$$\frac{1}{(a+n-1 \cdot b)(a+nb)(a+n+1 \cdot b) \dots (a+n+r-2 \cdot b)}$$

此級數各項。即前章所述級數各項之反商。欲求其級數之和。先去其分母之第一因子。而得新級數。其公項為

$$V_n = \frac{1}{(a+nb)(a+n+1 \cdot b) \dots (a+n+r-2 \cdot b)}$$

$$\text{而 } V_n - V_{n-1} = \frac{1}{(a+nb)(a+n+1 \cdot b) \dots (a+n+r-2 \cdot b)}$$

$$= \frac{1}{(a+n-1 \cdot b)(a+nb) \dots (a+n+r-3 \cdot b)} \cdot \frac{1}{(a+n-1 \cdot b)(a+n+r-2 \cdot b)}$$

$$= \frac{1}{(a+n-1 \cdot b) \dots (a+n+r-2 \cdot b)} \{(a+n-1 \cdot b) - (a+n+r-2 \cdot b)\}.$$

$$\therefore V_n - V_{n-1} = -(r-1)b \times u_n,$$

$$\text{依同法 } V_{n-1} - V_{n-2} = -(r-1)b \times u_{n-1},$$

.....

$$V_2 - V_1 = -(r-1)b \times u_2,$$

$$V_1 - V_0 = -(r-1)b \times u_1.$$

但 V_0 為 V_1 之前項。可由其規率以作之。

$$\text{故 } V_0 = \frac{1}{a(a+b)\dots(a+r-2)b}.$$

乃從加法得 $V_n - V_0 = -(r-1)b\{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n\} = -(r-1)bS_n$.

$$\therefore S_n = \frac{V_0 - V_n}{(r-1)b}.$$

例題

1. 求 $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 至 n 項之和。

$$[\text{解}] \quad U_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad V_n = \frac{1}{n+2}, \quad V_0 = \frac{1}{2}, \quad b=1, \quad r=2.$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{1 \cdot 1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

2. 求 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ 至 n 項及無限項之和。

$$[\text{解}] \quad U_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad V_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$V_0 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad r=4, \quad b=1. \quad \text{由是}$$

$$S_n = \frac{1}{3 \cdot 1} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\}.$$

$$n = \infty. \quad \text{故 } S_\infty = \frac{1}{3 \cdot 1} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 0 \right\} = \frac{1}{18}.$$

3. $\frac{1}{2 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$.

$$\left[\text{答 } \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3 \cdot 7} - \frac{1}{(4n+3)(4n+7)} \right\} \right].$$

求此種級數之和，可以他級數表之。其例如次。

4. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$

$$[\text{解}] \quad U_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n+1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

即一般之項 $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 及 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 兩級數之和。

$$\text{故 } S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

$$5. \quad \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{n(n+2)(n+4)}.$$

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad U_n &= \frac{1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{n(n+4)+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}. \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right\} + \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \right\}.$$

320. 分項 於前所述之級數，可用分項分數之方法，以求得其和，其方法示明如次。

例如級數為 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$ 其第 n 項

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}. \quad \text{從第二十三編分項分數之法，而得}$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad \text{及} \quad B = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{由是 } 2u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}.$$

$$\therefore 2u_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}, \quad 2u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \quad 2u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}, \quad \dots \dots \dots$$

$$2u_{n-2} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}, \quad 2u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}, \quad 2u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}.$$

$$\text{乃從加法，得 } 2S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

$$\therefore S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

321. 問題 求自然數 r 方乘之和。

凡 $1, 2, 3, 4, \dots$ 連續之整數。謂之自然數。

[第一] 求 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ 之和。

$u_n = n^2 = n(n+1) - n$ 。因是由 318 章

$$S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)。$$

[第二] 求 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ 之和。

$$u_n = n^3 = n(n+1)(n+2) - 3n^2 - 2n$$

$$= n(n+1)(n+2) - 3n(n+1) + n。由 318 章$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3 \times \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3) - 4(n+2) + 2\} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2。 \end{aligned}$$

$$\text{惟 } 1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)。$$

$$\text{故 } 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+\dots+n)^2。$$

即自然數立方之和。等於自然數之和之平方。

[別法] 又 $1^3+2^3+\dots+n^3$ 之和。可如次之法則求得之。

$$\text{由恆同式 } 4n^3 = \{n(n+1)\}^2 - \{(n-1)n\}^2。$$

$$\text{順次推之 } 4(n-1)^3 = \{(n-1)n\}^2 - \{(n-2)(n-1)\}^2，$$

.....

$$4 \cdot 2^3 = (2 \cdot 3)^2 - (1 \cdot 2)^2，$$

$$4 \cdot 1^3 = (1 \cdot 2)^2 - (0 \cdot 1)^2。$$

$$\text{乃由加法得 } 4S_n = n^2(n+1)^2。 \therefore S_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2。$$

[第三] 求 $1^r + 2^r + 3^r + \dots + n^r$ 之和。求 r 之特別值之和。可如前法求得之。

例如 $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$ 之和。變其第 n 項。

爲 $n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) - 6n(n+1)(n+2) + 7n(n+1) - n$ 。可依此變其各項。然後求得其和。

又 r 方乘之和。可用二項式之定理。以低於 r 次方乘之項表之。如次。

$$(n+1)^{r+1} = n^{r+1} + (r+1)n^r + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} n^{r-1} + \dots + 1,$$

$$n^{r+1} = (n-1)^{r+1} + (r+1)(n-1)^r + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} (n-1)^{r-1} + \dots + 1,$$

$$3^{r+1} = 2^{r+1} + (r+1)2^r + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} 2^{r-1} + \dots + 1,$$

$$2^{r+1} = 1^{r+1} + (r+1)1^r + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} 1^{r-1} + \dots + 1,$$

$$1^{r+1} = \dots + 1.$$

乃由加法得

$$(n+1)^{r+1} - (n+1) = (r+1)S_n + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} S_n^{r-1} + \dots + (r+1)S_n^1.$$

但 $S_n^r = 1^r + 2^r + \dots + n^r$, $S_n^{r-1} = 1^{r-1} + 2^{r-1} + \dots + n^{r-1}$ 。其餘類推。

[推論] 依上法則。如 $a, a+b, a+2b, \dots$ 之等差級數。可得其各項方乘之和。

例 $(a+nb)^{r+1} - na^{r+1} - nb^{r+1}$

$$= (r+1)bS_n^r + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} b^2 S_n^{r-1} + \dots + (r+1)b^n S_n^1.$$

但 $S_n^r = a^r + (a+b)^r + \dots + (a+n-1 \cdot b)^r$ 。

322. 積彈 (Piles of Shot) 以彈丸疊成錐體。其底面之形式分三種。(1) 等邊三角形。(2) 正方形。(3) 長方形。求其積彈之數。

[譯者註] 積彈即堆垛。其底面為等邊三角形者。即三角垛。為正方形者。即正方垛。為長方形者。即長方垛。

[第一] 底面為等邊三角形者。其底面以上之各層為由底面每邊遞次減1所成之諸三角形。至其最上一層。祇有一個。而其底面彈丸之數。為

$$u_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1).$$

$$\begin{aligned} \text{由是 } S_n &= \frac{1}{2}1(1+1) + \frac{1}{2}2(2+1) + \frac{1}{2}3(3+1) + \dots + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}\{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + n(n+1)\} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

〔第二〕底面爲正方形者。其底面以上之各層。爲由底面每邊遞次減一所成之正方形。故

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

此即自然數平方之和。

〔第三〕底面爲長方形者。其長邊之彈數有 n 個。短邊之彈數有 m 個。其底面以上之各層。爲由底面之各邊遞次減 1。所成之長方形。至第一層。其長方形之短邊祇有一個。其長邊有 $n-m-1$ 個。即 $n-m+1$ 個。

$$\begin{aligned} \text{故 } S_n &= (n-m+1)1 + (n-m+2)2 + \dots \\ &\quad + (n-2)(m-2) + (n-1)(m-1) + nm \\ &= \overline{(n-m+1)}1 + \overline{(n-m+2)}2 + \dots + \overline{(n-m+m-2)}(m-2) \\ &\quad + \overline{(n-m+m-1)}(m-1) + \overline{(n-m+m)}m \\ &= (n-m)\{1+2+\dots+(m-2) + (m-1) + m\} + 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 \\ &= (n-m)\frac{1}{2}m(m+1) + \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(3n-m+1). \end{aligned}$$

例 題

1. 積彈丸爲三角形塔。共有八層。而底面之一邊爲 12 個。其總數若何。

〔解〕若積成錐體。則由第一得 $\frac{1}{6}\cdot 12(12+1)(12+2)$ 。即 $\frac{1}{6}\cdot 12\cdot 13\cdot 14$ 。茲僅有 8 層。缺其上部 $\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 5\cdot 6$ 。

故所求之總數爲 $\frac{1}{6}(12\cdot 13\cdot 14 - 4\cdot 5\cdot 6)$ 。

2. 以彈丸積成 10 層之長方形塔。而底面之兩邊爲 20 個及 25 個。求其總數幾何。

〔答 9260〕。

〔解〕 於 $\Sigma_n(n+5)$ 。其 n 自 20 以至 11。

故 $S=11\cdot 16+12\cdot 17+13\cdot 18+14\cdot 19+15\cdot 20+\dots+20\cdot 25$ 。

〔別法〕 由第三得 $\frac{1}{6}20(20+1)(3\cdot 25-20+1)-\frac{1}{6}10(10+1)(3\cdot 15-10+1)$ 。

323. 形數 (Figurate Numbers) 諸級數相連續。其第一級數之各項皆為 1。以次任何級數之第 n 項。等於其前之各級數 n 項之和。順是而得形數之次序。

第一次 1, 1, 1, 1, 1, ...

第二次 1, 2, 3, 4, 5, ... 其第 n 項 = $1+1+\dots$ 至 n 項 = n 。

第三次 1, 3, 6, 10, 15, ... 其第 n 項 = $1+2+3+\dots$ 至 n 項 = $\frac{1}{2}n(n+1)$ 。

第四次 1, 4, 10, 20, 35, ... 其第 n 項 = $1+3+6+\dots$ 至 n 項
 $= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 。

.....

第五次之第 n 項 = $1+4+10+\dots$ 至 n 項

$$= \frac{1}{6} \{n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1) + \dots + 1\cdot 2\cdot 3\}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} n(n+1)(n+2)(n+3)。$$

第 r 次之第 n 項 爲 $\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-2)}{r-1}$ 。

〔譯者註〕 形數即乘垛。第一次即元垛。第二次即一乘垛。第三次即二乘垛。以下類推。

324. 多角數 (Polygonal Numbers) 等差級數。其前二項有如 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), 者。乃將各等差級數。取其 1 項, 2 項, 3 項順次至於 n 項各相加。而以其和為新級數之各項。此種新級數。即謂之多角數。如次所列者是也。

(1) 1, 2, 3, ... n 即二角數 (Linear Numbers)。

(2) 1, 3, 6, ... $\frac{1}{2}n(n+1)$ 即三角數 (Triangular Numbers)。

(3) 1, 4, 9, ... n^2 即四角數 (Square Numbers)。

(4) $1, 5, 12, \dots, n + \frac{3}{2}n(n-1) \dots$ 卽五角數 (Pentagonal Numbers).

$(r-1) 1, r, 3r-3, \dots, n + \frac{1}{2}n(n-1)(r-2) \dots$ 卽 r 角數 (r -gonal Numbers).

(1) 從 $1, 1, 1, 1, \dots$ 取其 1 項, 2 項, \dots 至 n 項. 而得
 $1, 1+1, 1+1+1, \dots$ 卽 $1, 2, 3, \dots$

(2) 從 $1, 2, 3, 4, \dots$ 取其 1 項, 2 項, \dots 至 n 項. 而得
 $1, 1+2, 1+2+3, \dots$ 卽 $1, 3, 6, \dots$

(3) 從 $1, 3, 5, 7, \dots$ 取其 1 項, 2 項, \dots 至 n 項. 而得
 $1, 1+3, 1+3+5, \dots$ 卽 $1, 4, 9, \dots$

$(r-1)$ 從 $1, r-1, 2r-3, 3r-5, \dots$ 取其 1 項, 2 項, \dots 至 n 項. 而得
 $1, r, 3r-3, 6r-8, \dots$

r 多角數之第 n 項. 爲 $n + \frac{1}{2}n(n-1)(r-2)$. 卽此以爲 r 多角數之公項. 其中 n 各項之和爲 $\frac{1}{2}n(n+1)$. 又 $n(n-1)$ 各項之和. 由 318 章. 得 $\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$. 故 r 多角數 n 項之和爲

$$\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(r-2).$$

例題三十三

求次之各級數 n 項之和. 如爲斂級數. 又求其無限項之和.

1. $4 \cdot 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10 \cdot 13 + 10 \cdot 13 \cdot 16 + \dots$

[解] $u_n = (3n+1)(3n+4)(3n+7)$.

$V_n = (3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10)$, $V_0 = 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10$, $b = 3$.

$\therefore S_n = \frac{1}{12} \{ (3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10) - 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \}$. (318 章).

2. $\frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 11 \cdot 15} + \frac{1}{11 \cdot 15 \cdot 19} + \dots$

[答] $\frac{1}{8} \left(\frac{1}{3 \cdot 7} - \frac{1}{(4n+3)(4n+7)} \right) S_\infty = \frac{1}{168}$.

$$[\text{解}] \quad u_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}, \quad V_n = \frac{1}{(4n+3)(4n+7)}.$$

$$V_0 = \frac{1}{3 \cdot 7}, \quad r=3, \quad b=4.$$

$$3. \quad 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 6 + \dots \quad \left[\text{答} \quad \frac{1}{12} n(n+1)(3n^2+23n+46) \right].$$

$$[\text{解}] \quad u_n = n(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2) + 2n(n+1) + 2n.$$

$$\therefore S_n = \{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)\} + 2\{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot n + 1\} \\ + 2(1+2+\dots+n) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) + \frac{2}{3} n(n+1)(n+2) + n(n+1).$$

$$4. \quad 1 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 7 \cdot 11 + \dots \quad \left[\text{答} \quad \frac{4}{3} n(n+1)(n+2) - 3n \right].$$

$$[\text{解}] \quad u_n = (2n-1)(2n+3) = 4n(n+1) - 3.$$

$$5. \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 7 + 4 \cdot 5 \cdot 9 + \dots \quad \left[\text{答} \quad \frac{1}{2} n(n+1)^2(n+2) \right].$$

$$[\text{解}] \quad u_n = n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1).$$

$$6. \quad 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 5^2 + \dots \quad \left[\text{答} \quad \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5) \right].$$

$$[\text{解}] \quad u_n = n(n+1)^2 = n(n+1)(n+2) - n(n+1).$$

$$7. \quad 1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 7^2 + 7 \cdot 9^2 + \dots \quad \left[\text{答} \quad \frac{1}{24} (2n-1)(2n+1)(2n+3)(6n+7) + \frac{7}{8} \right].$$

$$8. \quad \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 13} + \dots$$

$$\left[\text{答} \quad \frac{11}{180} - \frac{6n+11}{12(2n+1)(2n+3)(2n+5)}, \quad S_\infty = \frac{11}{180} \right].$$

$$[\text{解}] \quad u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+5)} = \frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \\ = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} - \frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

與 379 例題 5 同。

$$9. \quad \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$\left[\text{答} \quad \frac{5}{36} - \frac{3n+5}{6(n+1)(n+2)(n+3)}, S_{\infty} = \frac{5}{36} \right].$$

$$10. \quad \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{6}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{7}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

$$\left[\text{答} \quad \frac{5}{4} - \frac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}, S_{\infty} = \frac{5}{4} \right].$$

$$[\text{解}] \quad u_n = \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$11. \quad \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{4}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \dots$$

$$\left[\text{答} \quad \frac{1}{8} - \frac{4n+3}{8(2n+1)(2n+3)}, S_{\infty} = \frac{1}{8} \right].$$

$$12. \quad \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{6}{4 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

$$\left[\text{答} \quad \frac{29}{36} - \frac{6n^2+27n+29}{6(n+1)(n+2)(n+3)}, S_{\infty} = \frac{29}{36} \right].$$

〔解〕 與前例同法。

$$13. \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots \quad \left[\text{答} \quad \frac{2n}{n+1}, S_{\infty} = 2 \right].$$

$$[\text{解}] \quad u_n = \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}.$$

$$14. \quad \frac{1^2}{1} + \frac{1^2+2^2}{2} + \frac{1^2+2^2+3^2}{3} + \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4} + \dots$$

$$[\text{解}] \quad u_n = \frac{\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)}{n} = \frac{1}{3}n(n+1) + \frac{1}{6}(n+1).$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{1}{3} \{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)\} + \frac{1}{6} \{2+3+4+\dots+(n+1)\} \\ &= \frac{1}{36}(n+1)(n+2)(4n+3) - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$15. \quad 1 \cdot 1^2 + 2(1^2+2^2) + 3(1^2+2^2+3^2) + \dots$$

$$\left[\text{答} \quad \frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(8n^2+11n+1) \right].$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } u_n &= \frac{1}{6} n^2(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} n(n+1) \{2(n+2)(n+3) - 9(n+2) + 6\} \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{3}{2} n(n+1)(n+2) + n(n+1). \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{3} \Sigma n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{3}{2} \Sigma n(n+1)(n+2) + \Sigma n(n+1).$$

$$16. a^2 + (a+b)^2 + (a+2b)^2 + \dots$$

$$\left[\text{答 } na^2 + n(n-1)ab + \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)b^2 \right].$$

$$\text{〔解〕 } u_n = \{a + (n-1)b\}^2 = a^2 + 2(n-1)ab + (n-1)^2 b^2.$$

$$\therefore S_n = \Sigma a^2 + 2ab \Sigma (n-1) + b^2 \Sigma (n-1)^2.$$

$$17. a^3 + (a+b)^3 + (a+2b)^3 + \dots$$

$$\left[\text{答 } na^3 + \frac{3}{2} n(n-1)a^2b + \frac{1}{2} n(n-1)(2n-1)ab^2 + \frac{1}{4} n^2(n-1)^2 b^3 \right].$$

$$18. 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots$$

$$\left[\text{答 } \frac{1}{3} n(4n^2 - 1) \right].$$

〔解〕 如 16 題 $a=1, b=2$.

$$19. 1^3 + 5^3 + 9^3 + 13^3 + \dots$$

$$\left[\text{答 } \frac{1}{3} n(16n^2 - 12n - 1) \right].$$

$$20. 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1). \text{ 試證之.}$$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 左邊} &= 1^2 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + \dots + \{(2n+1)^2 - (2n)^2\} \\ &= 1 + 5 + 9 + \dots + (4n+1) = (n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

$$21. 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - (2n)^2 = -n(2n+1).$$

〔證〕 由前例之結果 $(n+1)(2n+1)$ 減 $(2n+1)^2$.

$$22. 1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (2n+1)^3 = 4n^3 + 9n^2 + 6n + 1.$$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 左邊} &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (2n+1)^3 - 2\{2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (2n+1)(2n+2) \right\}^2 - 16(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) \\ &= (2n+1)^2(n+1)^2 - 16 \times \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 = 4n^3 + 9n^2 + 6n + 1. \end{aligned}$$

$$23. \text{ 求 } 1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n \cdot 1 \text{ 之和.}$$

$$\left[\text{答 } \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \right].$$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } S_n &= 1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n \cdot n - (n-1) \} \\ &= n(1+2+3+4+\dots+n) - \{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n\}. \end{aligned}$$

$$24. \quad n \cdot n + (n-1)(n+1) + (n-2)(n+2) + \dots + 2(2n-2) + 1(2n-1).$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } S_n &= n^2 + (n^2 - 1^2) + (n^2 - 2^2) + \dots + \{n^2 - (n-2)^2\} + \{n^2 - (n-1)^2\} \\ &= n^2(1+1+\dots+1) - \{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\} \\ &= n^2 \cdot n - \frac{1}{6}(n-1)(n-1+1)\{2(n-1)+1\} = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1). \end{aligned}$$

$$25. \quad ab + (a-1)(b-1) + (a-2)(b-2) + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } S_n &= ab + \{ab - (a+b) + 1^2\} + \{ab - 2(a+b) + 2^2\} + \dots \\ &+ \{ab - (n-1)(a+b) + (n-1)^2\} = nab - (a+b)\{1+2+\dots+(n-1)\} \\ &+ 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = nab - (a+b)\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{6}(n-1)(n-1+1) \\ &\{2(n-1)+1\} = nab - \frac{1}{2}n(n-1)(a+b) + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1). \end{aligned}$$

$$26. \quad S_n^r \equiv 1^r + 2^r + \dots + n^r \quad \text{則 (1) } 5S_n^4 = 6S_n^1 \times S_n^2 - S_n^2 \quad (2) S_n^7 + S_n^5 = 2(S_n^3)^2.$$

$$\text{〔證〕 於 321 章第三 } r=4, \text{ 則 } (n+1)^5 - (n+1) = 5S_n^4 + 10S_n^3 + 10S_n^2 - 5S_n^1.$$

$$\begin{aligned} \therefore 5S_n^4 &= (n+1)^5 - (n+1) - 10S_n^3 + 5S_n^1 - 10S_n^2 \\ &= n(n+1)(n+2)(n^2+2n+2) - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{2}n(n+1) - 10S_n^2 \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(n^2+n+3) - 10S_n^2 = 3n(n+1)S_n^2 - S_n^2 \\ &= 6S_n^1 \times S_n^2 - S_n^2. \quad \text{即得 (1) 之證。} \end{aligned}$$

又用 321 章第三之公式得 (2) 之證。

$$27. \quad (1) \quad \frac{1}{2 \cdot 3} 2 + \frac{2}{3 \cdot 4} 2^2 + \frac{3}{4 \cdot 5} 2^3 + \dots$$

$$(2) \quad \frac{3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots$$

$$(3) \quad \frac{4}{1 \cdot 2} \left(\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{2 \cdot 3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{6}{3 \cdot 4} \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \quad \left[\text{答 } 2 - \frac{2}{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right].$$

$$(4) \quad \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{5}{7}\right) + \frac{9}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{5}{7}\right)^2 + \frac{10}{3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \dots$$

$$\left[\text{答 } \frac{5}{4} - \frac{5}{2(n+1)(n-2)} \left(\frac{5}{7}\right)^n \right].$$

$$(5) \frac{9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{3}{4}\right) + \frac{10}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{11}{3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots$$

$$\left[\text{答 } \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{3}{4}\right)^n \right].$$

$$(6) \frac{15}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{6}{7}\right) + \frac{16}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \frac{17}{3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{6}{7}\right)^3 + \dots$$

$$\left[\text{答 } 3 - \frac{6}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{6}{7}\right)^n \right].$$

$$[\text{解}] (1) u_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)} 2^n = \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1}.$$

$$\therefore S_n = \left(\frac{2^2}{3} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2^3}{4} - \frac{2^2}{3}\right) + \dots + \left(\frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1}\right) = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1.$$

$$(2) u_n = \frac{n+2}{n(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{2^n} = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

$$\therefore S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2 \cdot 2^1}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 2^1} - \frac{1}{3 \cdot 2^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1)2^n}\right) \\ = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

$$(3) u_n = \frac{n+3}{n(n+1)} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{3(n+1) - 2n}{n(n+1)} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$$(4) u_n = \frac{n+7}{n(n+1)(n+2)} \left(\frac{5}{7}\right)^n = \frac{7(n+2) - 5n}{2n(n+1)(n+2)} \left(\frac{5}{7}\right)^n \\ = \frac{5}{2n(n+1)} \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1} - \frac{5}{2(n+1)(n+2)} \left(\frac{5}{7}\right)^n.$$

$$(5) u_n = \frac{n+8}{n(n+1)(n+2)} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{3}{n(n+1)} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \frac{3}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

$$(6) u_n = \frac{n+14}{n(n+1)(n+2)} \left(\frac{6}{7}\right)^n = \frac{6}{n(n+1)} \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} - \frac{6}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{6}{7}\right)^n.$$

28. n 個自然數取 2 個爲積之和，爲 $\frac{1}{24} n(n^2-1)(3n+2)$,

〔證〕 $(1+2+3+4+\dots+n)^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2+2\{1 \cdot 2+1 \cdot 3+\dots+2 \cdot 3+\dots+(n-1)n\}$.

$$\text{即 } \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2S.$$

$$\therefore S = \frac{n}{24}(n+1)(n-1)(3n+2).$$

29. n 個自然數取三個為積之和。為 $\frac{1}{48}(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2$ 。

[證] $1 \cdot 2 \cdot 3, \dots, n$ 以 a, b, c, \dots 表之。

$$(a+b+c+\dots)^3 = \sum a^3 + 3\sum a^2b + 6\sum abc.$$

$$\therefore S = \frac{1}{6} \{ (\sum a)^3 - \sum a^3 - 3\sum a^2b \} \dots \dots \dots (1)$$

$$(\sum a)^3 = (1+2+3+\dots+n)^3 = \frac{1}{8}n^3(n+1)^3,$$

$$\sum a^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

$$\sum a^2b = (a^2+b^2+c^2+\dots)(a+b+c+\dots) - (a^3+b^3+c^3+\dots)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{6}n^2(n+1)^2(n-1).$$

由是得 (1) 之結果。

30. n 個自然數之平方取二個為積之和。為

$$\frac{1}{360}n(n^2-1)(4n^2-1)(5n+6).$$

$$\begin{aligned} \text{[證]} \quad (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)^2 &= 1^4+2^4+\dots+n^4 \\ &\quad + 2(1^2 \cdot 2^2 + 1^2 \cdot 3^2 + \dots + 2^2 \cdot 3^2 + \dots). \end{aligned}$$

$$\text{即 } \left\{ \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) \right\}^2 = 1^4+2^4+\dots+n^4+2S.$$

由 26 例可得 $1^4+2^4+\dots+n^4$ 。

325. 問題 求次之級數 n 項之和。

$$\frac{a}{b} + \frac{a(a+x)}{b(b+x)} + \frac{a(a+x)(a+2x)}{b(b+x)(b+2x)} + \dots + \frac{a(a+x)\dots(a+n-1x)}{b(b+x)\dots(b+n-1x)} + \dots$$

此級數之分母子逐次增一因子。其所增之因子。皆為等差級數之項。而其公差相等。

今依此級數之規率。於其分子。增一因子而為新級數。其公項以 V_n 表之。則

$$V_n = \frac{a(a+x)\dots(a+\overline{n-1}x)(a+nx)}{b(b+x)\dots(b+n-1x)}$$

$$\begin{aligned} \text{然 } V_n - V_{n-1} &= \frac{a(a+x)\dots(a+\overline{n-1}x)(a+nx)}{b(b+x)\dots(b+n-1x)} - \frac{a(a+x)\dots(a+\overline{n-1}x)}{b(b+x)\dots(b+n-2x)} \\ &= \frac{a(a+x)\dots(a+\overline{n-1}x)}{b(b+x)\dots(b+n-1x)} \{ (a+nx) - (b+\overline{n-1}x) \}. \end{aligned}$$

$$\therefore V_n - V_{n-1} = u_n \times (a+x-b),$$

$$V_{n-1} - V_{n-2} = u_{n-1} \times (a+x-b),$$

.....

$$V_2 - V_1 = u_2 \times (a+x-b).$$

$$\text{又 } V_1 = \frac{a(a+x)}{b} = (a+x)u_1 = u_1 \times (a+x-b) + bu_1 = u_1 \times (a+x-b) + a.$$

$$\text{相加得 } V_n = S_n \times (a+x-b) + a.$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{a+x-b} (V_n - a) = \frac{a}{a+x-b} \left\{ \frac{(a+x)\dots(a+nx)}{b(b+x)\dots(b+n-1x)} - 1 \right\}.$$

[例] 求次之級數之和。

$$\frac{a}{b} - \frac{a(a-x)}{b(b+x)} + \frac{a(a-x)(a-2x)}{b(b+x)(b+2x)} - \dots$$

此級數之分母逐次所增之因子。其公差相同。但分子與分母公差之符號全相反。而此級數之和。可以 $-a$ 易其前之級數 a 即得。

$$\begin{aligned} \text{惟前之級數爲 } & \frac{a}{b} + \frac{a(a+x)}{b(b+x)} + \frac{a(a+x)(a+2x)}{b(b+x)(b+2x)} + \dots \\ &= \frac{a}{a+x-b} \left\{ \frac{(a+x)\dots(a+nx)}{b(b+x)\dots(b+n-1x)} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{以 } -a \text{ 易其 } a. \text{ 得 } & - \left\{ \frac{a}{b} - \frac{a(a-x)}{b(b+x)} + \frac{a(a-x)(a-2x)}{b(b+x)(b+2x)} - \dots \right\} \\ &= \frac{a}{a+b-x} \left\{ \frac{(-1)^n (a-x)\dots(a-nx)}{b(b+x)\dots(b+n-1x)} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{即 } -S_n = \frac{a}{a+b-x} \left\{ \frac{(-1)^n (a-x)\dots(a-nx)}{b(b+x)\dots(b+n-1x)} - 1 \right\}.$$

$$\therefore S_n = \frac{a}{a+b-x} \left\{ 1 - (-1)^n \frac{(a-x)\dots(a-nx)}{b(b+x)\dots(b+n-1x)} \right\}.$$

例題

1. 求 $\frac{2}{3} + \frac{2.5}{3.6} + \frac{2.5.8}{3.6.9} + \dots$ n 項之和。

$$[\text{解}] \quad a=2, b=3, x=3, \text{ 則 } S_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2.5.8 \dots (3n+2)}{3.6.9 \dots 3n} - \frac{2}{1} \right\}.$$

[註] 此為特別之級數。以其連次之項。等於 $(1-x)^{-\frac{2}{3}}$ 展開式中 $x, x^2, x^3 \dots$ 之係數。

$$\begin{aligned} \text{例 } (1-x)^{-\frac{2}{3}} &= 1 - \frac{-2}{3}x + \frac{(-\frac{2}{3})(-\frac{4}{3})}{2}x^2 - \frac{(-\frac{2}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{6}{3})}{3}x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{2}{3}x + \frac{2.5}{3.6}x^2 + \frac{2.5.7}{3.6.9}x^3 + \dots \end{aligned}$$

故 $1+S_n = (1-x)^{-\frac{2}{3}}$ 展開式之最初 $n+1$ 項之係數之和。由 287 章知其等於 $(1-x)^{-\frac{2}{3}} \times (1-x)^{-1}$ 。即 $(1-x)^{-\frac{5}{3}}$ 中 x^n 之係數。依此可求得其結果。

$$2. \quad \frac{2}{3} + \frac{2.6}{3.7} + \frac{2.6.10}{3.7.11} + \dots \quad \left[\text{答 } \frac{2}{3} \left\{ \frac{6.10 \dots (4n+2)}{3.7 \dots (4n-1)} - 1 \right\} \right].$$

$$3. \quad 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots$$

$$\left[\text{答 } (-1)^{n-1} \frac{(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1.2 \dots (n-1)} \right].$$

[解] 於 325 章之例。 $a=m, b=1, x=1$ 。

$$\begin{aligned} \text{則 } \frac{m}{1} - \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} - \dots \\ = \frac{m}{m+1-1} \left[1 - (-1)^{n-1} \frac{(m-1) \dots \{m-(n-1)\}}{1.2 \dots (n-1)} \right]. \end{aligned}$$

$$\therefore 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots = (-1)^{n-1} \frac{(m-1) \dots (m-n+1)}{1.2 \dots (n-1)}.$$

326. 問題 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ 求其 $n+1$ 項之和。但 a_n 為 n 之 r 次整代數式。

$$S_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n;$$

$$(1-x)^{r+1} = 1 - (r+1)x + \frac{(r+1)r}{1.2}x^2 - \dots + (-1)^{r+1}x^{r+1}.$$

$$\text{由是 } S_n \times (1-x)^{r+1} = a_0 + \{a_1 - (r+1)a_0\}x + \dots \\ + \left\{a_p - (r+1)a_{p-1} + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} a_{p-2} - \dots\right\} x^p + \dots + (-1)^{r+1} a_n x^{n+r+1}.$$

由題意， a_p 為 p 之 r 次整代數式。

$$\text{假定 } a_p = A_r p^r + A_{r-1} p^{r-1} + A_{r-2} p^{r-2} + \dots + A_0,$$

由 305 章，級數 $p^k - (r+1)(p-1)^k + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} (p-2)^k - \dots$ 至 $(r+2)$ 項之和， k 為小於 $(r+1)$ 之整數，則此級數恆為零，因是無論 p 之值如何。

$$a_p - (r+1)a_{p-1} + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} a_{p-2} - \dots \text{ 至 } (r+2) \text{ 項之和恆為零。}$$

故 $S_n \times (1-x)^{r+1}$ 之諸項中，除其最初 $r+1$ 項及最後 $r+1$ 項以外，其他皆可消去之。

何則，其積除最初 $r+1$ 項及最後 $r+1$ 項以外，其他諸項之係數皆如 $a_p - (r+1)a_{p-1} + \dots$ 至 $n+2$ 項恆為零故也。

由是 S_n 可從次式求得。

$$S_n \times (1-x)^{r+1} = a_0 + \{a_1 - (r+1)a_0\}x + \dots \\ + \{a_{r-1} - (r+1)a_{r-2} + \dots + (-1)^r (r+1)a_0\}x^r \\ + \left\{ - (r+1)a_n + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2} a_{n-1} - \dots \right\} x^{n+1} + \dots \\ + (-1)^{r+1} a_n x^{n+r+1}.$$

例 題

1. 求 $1+2x+3x^2+4x^3+\dots+(n+1)x^n$ 之和。

$$[\text{解}] S_{n+1} = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots+(n+1)x^n, (1-x)^2 = 1-2x+x^2.$$

$\therefore (1-x)^2 S_{n+1} = 1+x^{n+1} \{n-2(n+1)\} + (n+1)x^{n+2}$ 。其他諸項為恆同式， $k-2(k-1)+(k-2) \equiv 0$ 。

$$\text{故悉消去之，即為 } (1-x)^2 S_{n+1} = 1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}.$$

$$\therefore S_{n+1} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+2)x^{n+1} - (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

2. 求 $1^3+2^3x+3^3x^2+4^3x^3+\dots+(n+1)^3x^n$ 級數 $n+1$ 項之和。

$$[\text{解}] \quad S_{n+1} = 1^3 + 2^3x + 3^3x^2 + \dots + (n+1)^3x^n.$$

$$(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4.$$

$\therefore S_{n+1} \times (1-x)^4 = 1 + (2^3 - 4)x + (3^3 - 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 1^3)x^2$
 $+ (4^3 - 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 2^3 - 4 \cdot 1^3)x^3 + \{-4(n+1)^3 + 6n^3 - 4(n-1)^3 + (n-2)^3\}x^{n+1}$
 $+ \{6(n+1)^3 - 4n^3 + (n-1)^3\}x^{n+2} + \{-4(n+1)^3 + n^3\}x^{n+3} + (n+1)^3x^{n+4}$
 恆同式。 $k^3 - 4(k-1)^3 + 6(k-2)^3 - 4(k-3)^3 + (k-4)^3 = 0$ 。其他諸項，悉消去之。由是

$S_{n+1} = \{1 + 4x + x^2 - (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)x^{n+1} + (3n^3 + 15n^2 + 21n + 5)x^{n+2}$
 $- (3n^3 + 12n^2 + 12n + 4)x^{n+3} + (n+1)^3x^{n+4}\} / (1-x)^4$ 。若 x 之值小於 1。
 則此級數為斂級數。故其無限項之和，為 $S_{\infty} = (1 + 4x + x^2) / (1-x)^4$ 。

327. 級數諸項成立之規率 無論何種級數。若能知其公項。即可明瞭其級數諸項成立之規率。如前章所示之級數是。若僅示初項以下之二三項。則其級數諸項。從何種規率而成立。尙未可決定也。例如 $x + x^2 + x^3 + \dots$ 為無限項之級數。此最簡單為等比級數。而其公項為 x 。然其他之規率。有如 $\frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^9}{1 - x^{10}}$ 之展開式。為 $x + x^2 + x^3 + \dots + x^9 + x^{11} + 9x^{12} + 9x^{13} + \dots$ 。此級數自第 9 項以下。與等比級數有異。

〔註〕於本書所示之級數。如僅示以級數之前諸項。則其級數之規率。取其最簡單者以為用。

逐 差 法

328. 逐差法 [Method of Differences] 將任何級數 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 。取其連續各二項之差。而得新級數 $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1})$ 為第一差級數。又將第一差級數。取其連續各二項之差而得新級數為第二差級數。以下類推。

例級數 2, 7, 15, 26, 40, 之第一差級數為 5, 8, 11, 14, 第二差級數為 3, 3, 3,

329. 逐次推差 未知規率之級數。可先逐次推求其差級數。乃以後之差級數之規率。逐次導入於前之差級數。而得其規率。如是至終。可決定原級數之規率。

[第一例] 求 $1+6+23+58+117+206+\dots$ 之第 n 項。

第一差級數爲 $5+17+35+59+89+\dots$,

第二差級數爲 $12+18+24+30+\dots$,

第三差級數爲 $6+6+6+6+\dots$,

乃知第二差級數爲等差級數。其第 n 項爲 $12+(n-1)6$ 。

即 $6(n+1)$ 。

今以 v_n 表第一差級數之第 n 項。而得

$$v_n - v_{n-1} = 6n,$$

$$v_{n-1} - v_{n-2} = 6(n-1),$$

.....

$$v_2 - v_1 = 6 \cdot 2,$$

及

$$v_1 = 6 \cdot 1 - 1.$$

由加法得 $v_n = 6(1+2+\dots+n) - 1 = 3n(n+1) - 1$ 。

又以 u_n 表原級數之第 n 項。而得

$$u_n - u_{n-1} = v_{n-1} = 3(n-1)n - 1,$$

$$u_{n-1} - u_{n-2} = 3(n-2)(n-1) - 1,$$

.....

$$u_2 - u_1 = 3 \cdot 1 \cdot 2 - 1,$$

及

$$u_1 = 1.$$

由加法得 $u_n = 3\{(n-1)n + (n-2)(n-1) + \dots + 1 \cdot 2\} - n + 2$
 $= (n-1)n(n+1) - n + 2.$

[第二例] 求 $6+9+14+23+40+\dots$ 之第 n 項。

第一差級數爲 $3+5+9+17+\dots$,

第二差級數爲 $2+4+8+\dots$,

由是知第二差級數爲等比級數。其第 $(n-1)$ 項爲 2^{n-1} 。今以 u_n 表第一差級數之第 n 項。而得

$$v_n - v_{n-1} = 2^{n-1},$$

$$v_{n-1} - v_{n-2} = 2^{n-2},$$

.....

$$v_2 - v_1 = 2^1,$$

$$v_1 = 3.$$

由加法得 $v_n = (2+2^2+\dots+2^{n-1})+3=2^n+1$.

由是可得原級數之公項 u_n 如次。

$$u_n - u_{n-1} = v_{n-1} = 2^{n-1} + 1,$$

$$u_{n-1} - u_{n-2} = 2^{n-2} + 1,$$

.....

$$u_2 - u_1 = 2^1 + 1,$$

及

$$u_1 = 6.$$

由加法得 $u_n = (2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2)+n+5=2^n+n+3$.

既知原級數之公項為 2^n+n+3 。則此級數 n 項之和。可如次求得。

$$\begin{aligned} & (2+2^2+\dots+2^n) + \{n+(n-1)+\dots+1\} + 3n \\ & = 2^{n+1} - 2 + \frac{1}{2}n(n+1) + 3n. \end{aligned}$$

〔註〕依前兩例得求級數規率之法則如次。

先將原級數。逐次推求其差級數。至求得之差級數。為等差或等比級數。乃以次之差級數導入前之差級數。以求其第 n 項。如是可求原級數之第 n 項。

循環級數

331. 定義 級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$ 其於連續 $r+1$ 項之間。有 $a_nx^n+px(a_{n-1}x^{n-1})+qx^2(a_{n-2}x^{n-2})+\dots\equiv 0$ 之關係者。謂之 r 次循環級數。而以其 $1+px+qx^2+\dots$ 為級數率 (Scale of Relation)。此關係不僅對於其第 n 項以前之 r 項為合理。即自初項至 r 項以後之諸項。皆適合於此關係也。

例級數 $1+2x+4x^2+8x^3+\dots$ 為一次循環級數。而其級數率為 $1-2x$ 。

又級數 $1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\dots$ 為二次循環級數。而其級數率為 $1-2x+x^2$ 。

332. 問題 將已知之循環級數。求其 n 項之和。

級數 $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\dots$ 假定其級數率為 $1+px+qx^2$ (此級數率為二次者。若為一次。則 $q=0$ 。若二次以上。可由此關係類推之)

$$S_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n(1+px+qx^2) &= a_0 + (a_1+pa_0)x + (a_2+pa_1+qa_0)x^2 + \dots \\ &\quad + (a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n + (pa_n+qa_{n-1})x^{n+1} + qa_nx^{n+2} \\ &= a_0 + (a_1+pa_0)x + (pa_n+qa_{n-1})x^{n+1} + qa_nx^{n+2} \end{aligned}$$

其間 $(a_2+pa_1+qa_0)x^2 + \dots + (a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n$ 諸項。皆適合於 $a_kx^k + px(a_{k-1}x^{k-1}) + qx^2(a_{k-2}x^{k-2}) \equiv 0$ 之關係。故悉消去之。(但此關係其 k 之值為大於 1)。

$$\text{由是 } S_n = \frac{a_0 + (a_1+pa_0)x + (pa_n+qa_{n-1})x^{n+1} + qa_nx^{n+2}}{1+px+qx^2}$$

此已知級數。如為斂級數。則 n 增至極大時。其第 n 項為極小。故其無窮項之和。為

$$S_\infty = \frac{a_0 + (a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$$

若將代數式 $\frac{a_0 + (a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$ 依 x 之遞昇方乘展開之。而為斂級數者。其展開式中 x^n 之係數。與此循環級數中 x^n 之係數相同。

故此代數式 $\frac{a_0 + (a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$ 稱為二次循環級數之母函數 (The generating function)。

333. 定理 r 次之循環級數。苟知其自初項至 $2r$ 項。即可決定其級數率。

此級數為 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ 以此級數為 r 次之循環級數。而其級數率為 $1 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_r x^r$ 。

$$\text{由定義 } a_{r+1} + p_1a_r + p_2a_{r-1} + \dots + p_r a_0 = 0,$$

$$a_{r+2} + p_1a_{r+1} + p_2a_r + \dots + p_r a_1 = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{2r} + p_1a_{2r-1} + p_2a_{2r-2} + \dots + p_r a_{r-1} = 0.$$

從此 r 個方程式。始可求得其 r 個未知數 p_1, p_2, \dots, p_r 以決定其級數率。而自 $2r$ 項以下之諸項。即皆可推得矣。例 a_{2r+1} 可由方程式 $a_{2r+1} + p_1a_{2r} + \dots + p_r a_r$ 推得之。以下做此。

若在循環級數之中間。知其任何之連續 $2r$ 項。其級數率可依同法決定之。

334. 餘論 由 305 章。而知 $p < r+1$ 。則

$k^p - (r+1)(k-1)^p + \frac{(r+1)r}{1 \cdot 2}(k-2)^p - \dots$ 至 $(r+2)$ 項 $\equiv 0$ 。其 k 爲任何值恆合於理。

由是觀之。級數 $1^r + 2^r x + 3^r x^2 + \dots + (n+1)^r x^n + \dots$ 其級數率爲 $(1-x)^{r+1}$ 可知。

又級數 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ 其 a_n 爲 n 之 r 次整代數式。則其級數率爲 $(1-x)^{r+1}$ 可知。

335. 公項 如 332 之法則。可求得循環級數若干項之和。然欲求其和不可不先求知其公項。茲從僅有級數最初之若干項。示以求公項之法如次。

由 333 章 r 次之級數率。可從初項至 $2r$ 項求得之。既求得其級數率。乃從 332 章求其公項。

若級數率。可以一次因子表之者。則其母函數。可以分項分數之級數表之。其分項分數之形。爲 $\frac{A}{1-ax}$ 或 $\frac{A}{(1-ax)^2}$ 由二項式之定理。可將此母函數展開。求得 x 之任何方乘之係數。即可得其公項。

其 x 之值。原爲大小不定之數。故循環級數。爲斂級數或非爲斂級數。其母函數依 x 之遞昇方乘展開之式。必與原級數相等。

試取由 332 章所定之母函數 $\frac{a_0 + (a_1 + pa_0)y}{1 + py + qy^2}$ 設想其 y 爲甚小時。乃依 x 之遞昇方乘展開之。而於此展開式中 y^0 及 y^1 之係數。順次以 a_0 及 a_1 明之。而其連續諸項。皆服從 $ak + pa_{k-1} + qa_{k-2} = 0$ 之規率。故此展開式之任何項。必與已知級數之相應係數同。

則是循環級數。無論其爲斂級數或非斂級數。皆可假定其 x 爲甚小。依 x 之遞昇方程式。記其母函數之展開式。而求得其公項。

〔第一例〕 求 $3 + 4x + 6x^2 + 10x^3 + \dots$ 之第 n 項。

於此例雖未知其循環級數之次數如何。然可用其最初之已知四項。決定其爲二次之循環級數。但同此已知之四項。而能爲高

於二次之循環級數者甚多。茲則僅取其最低者以爲用(參觀327章)。假定其級數率爲 $1+px+qx^2$ 。從其最初之四項而作方程式。得 $6+4p+3q=0$ 及 $10+6p+4q=0$,

由是求得 $p=-3, q=2$ 。 \therefore 級數率 $=1-3x+2x^2$ 。

故此母函數爲 $\frac{3+(4-9)x}{1-3x+2x^2} = \frac{3-5x}{1-3x+2x^2} = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$
 $=2(1+x+\dots+x^{n-1}+\dots) + (1+2x+\dots+2^{n-1}x^{n-1}+\dots)$ 。

由是得此級數之第 n 項爲 $(2+2^{n-1})x^{n-1}$ 。

又此級數 n 項之和。可由332章之法求得。然亦可用別法直求之如次。

於 $\frac{2}{1-x}$ 之展開式。取其 n 項。爲

$$2(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) = \frac{2(1-x^n)}{1-x}.$$

於 $\frac{1}{1-2x}$ 之展開式。取其 n 項。爲

$$1+2x+2^2x^2+\dots+2^{n-1}x^{n-1} = \frac{1-2^n x^n}{1-2x}.$$

由是得 $S_n = \frac{2(1-x^n)}{1-x} + \frac{1-2^n x^n}{1-2x}$ 。

此級數 $x < \frac{1}{2}$ 。則爲斂級數。

若 $x = \frac{1}{2}$ 。則 $1-2x=0$ 。而 S_n 爲不定數。

[第二例] 求 $1+3+7+13+21+31+\dots$ 之第 n 項及 n 項之和。

先置級數 $1+3x+7x^2+13x^3+21x^4+31x^5+\dots$ 。假定此級數爲循環級數。可用其已知之六項。爲三次之循環級數。乃假定其級數率爲 $1+px+qx^2+rx^3$ 。作次之方程式。

$$13+7p+3q+r=0,$$

$$21+13p+7q+3r=0,$$

$$31+21p+13q+7r=0.$$

從此三個方程式。而得 $p=-3, q=3, r=-1$ 。

即得級數率爲 $1-3x+3x^2-x^3$ 。

$$\begin{aligned} \text{故此母函數爲 } \frac{1+x^2}{(1-x)^3} &= \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + \dots + n(n+1)x^{n-1}\} - 2\{1+2x+\dots+nx^{n-1}\} \\ &\quad + \{1+x+\dots+x^{n-1}\}. \end{aligned}$$

由是此級數之第 n 項爲 $\{n(n+1)-2n+1\}x^{n-1}$ 。

即 n^2-n+1 。即 $n(n-1)+1$ 。

而此級數 n 項之和爲

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \{2 \cdot 1 + 1\} + \{3 \cdot 2 + 1\} + \dots + \{n(n-1) + 1\} \\ &= n + \{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n\} = n + \frac{1}{3}(n-1)n(n+1). \end{aligned}$$

【第三例】 求 $2+2+8+20+\dots$ 之第 n 項。

先置級數 $2+2x+8x^2+20x^3+\dots$ 假定其爲二次循環級數。其級數率爲 $1+px+qx^2$ 。

則 $8+2p+2q=0$, $20+8p+2q=0$ 。

$\therefore p=-2$, $q=-2$ 。

其母函數爲 $\frac{2-2x}{1-2x-2x^2}$ (此以下原書所述有誤故訂正之)。

$$\begin{aligned} \frac{2-2x}{1-2x-2x^2} &= \frac{1}{1-(1+\sqrt{3})x} + \frac{1}{1-(1-\sqrt{3})x} \\ &= \{1+(1+\sqrt{3})x+\dots+(1+\sqrt{3})^{n-1}x^{n-1}+\dots\} \\ &\quad + \{1+(1-\sqrt{3})x+\dots+(1-\sqrt{3})^{n-1}x^{n-1}+\dots\}. \end{aligned}$$

故第 n 項爲 $\{(1+\sqrt{3})^{n-1}+(1-\sqrt{3})^{n-1}\}x^{n-1}$ 。

但 $(1+\sqrt{3})^{n-1}+(1-\sqrt{3})^{n-1}$ 爲有理數。因 n 任爲何數其方根均可相消而不見也。

【譯者附述】 若欲求此級數之第 n 項。爲不含方根之數。則其級數率。必在二次以上。惟欲求二次以上之級數率。至少須知其連續之 6 項 (見 333 章)。今則僅知四項。故不能求其二次以上之級數率。然可用推差法求之如次。

原級數 2, 2, 8, 20,

第一差 0, 6, 12,

第二差 6, 6,

以 u_n 爲原級數之第 n 項。

則第一差之第 n 項 $= u_{n+1} - u_n$

而第一差之級數爲等差級數。其初項爲 0。公差爲 6。故其第 n 項爲 $0 + (n-1)6$ 即 $6(n-1)$ 。

故 $u_{n+1} - u_n = 6(n-1)$ 。

由是 $u_n - u_{n-1} = 6(n-2)$, $u_{n-1} - u_{n-2} = 6(n-3)$,

又 $u_1 = 2$ 。由加法得

$u_n = 6\{1+2+\dots+(n-2)\} + 2 = 3n^2 - 9n + 8$ 。

故求得 $2+2x+8x^2+20x^3+\dots$ 之第 n 項。爲 $(3n^2-9n+8)x^{n-1}$ 。

由 334 章而知此級數爲 n 之二次式。故此級數率必爲三次式。

歛級數及發級數

336. 歛級數 於第二十一編中所未經論及者。乃於此處續論之。

337. 無限乘積之歛式 由無限數諸因子而成之積。其諸因子之極限。非近於 1。則不能爲歛式。何則。於積增一因子。其值亦增。迨因子增至無限時。其值亦從而增至無限。

故須考察 $\Pi(1+u_r) \equiv (1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\dots(1+u_n)+\dots$ 之形。其無限數因子中 u_1, u_2, u_3, \dots 之關係若何。

其 Π 之記號。所以示連類諸文字所有之等次積。

例 $\Pi(a+b-c)$ 爲 $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$,

又 Πa^2bc 爲 $a^2bc \times ab^2c \times abc^2$ 。

今於 $\Pi(1+u_r)$ 其 n 增至無限時。此積爲歛式或爲發式。可由次之定理決定之。

定理 無限數因子之積 $\Pi(1+u_r)$ 。其任何因子爲大於 1 者。則可從無限級數 $\sum u_r$ 爲歛級數或發級數。而決定 $\Pi(1+u_r)$ 爲歛式或發式。

以 $e^x = 1+x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^r}{r} + \dots$ 其 x 爲任何之正數。而 $e^x > 1+x$ 。

故 $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\dots < e^{u_1} \cdot e^{u_2} \cdot e^{u_3} \dots < e^{u_1+u_2+u_3+\dots}$

由是 $\sum u_r$ 若為斂級數，則 $e^{u_1+u_2+u_3+\dots}$ 為有限值，從而決定 $\prod(1+u_r)$ 為斂式。

又 $(1+u_1)(1+u_2) > 1+u_1+u_2$,

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3) > (1+u_1+u_2)(1+u_3) > 1+u_1+u_2+u_3$$

以下順次如斯，則 $\prod(1+u_r) > 1+\sum u_r$

由是 $\sum u_r$ 若為發級數，則 $\prod(1+u_r)$ 亦為發式。

[第一例] $\frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}$ 其 n 增至無限時， a 若

大於 b ，則其值無限大， a 若小於 b ，則其值為零。

何則， $a > b$ ，則 $a-b$ 為正。

$$\text{故原式} = \left(1 + \frac{a-b}{b}\right) \left(1 + \frac{a-b}{b+1}\right) \dots \left(1 + \frac{a-b}{b+n-1}\right) + \dots,$$

$$\text{即原式} > 1 + \frac{a-b}{b} + \frac{a-b}{b+1} + \dots + \frac{a-b}{b+n-1} + \dots,$$

$$\text{即原式} > 1 + (a-b) \left\{ \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2} + \dots + \frac{1}{b+n-1} + \dots \right\}.$$

但由 274 章而知 $\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+n-1} + \dots$ 為發級數，故原式 n 增至無限時， a 若大於 b ，其值為無限大。

又 $b > a$ ，則由前之同理，其原式之反商 $\frac{b(b+1)(b+2)\dots}{a(a+1)(a+2)\dots}$ 為無限大。

$$\text{故 } \frac{a(a+1)(a+2)\dots}{b(b+1)(b+2)\dots} = 0.$$

[第二例] $\frac{a}{b} + \frac{a(a+x)}{b(b+x)} + \frac{a(a+x)(a+2x)}{b(b+x)(b+2x)} + \dots$ 此為斂級數

抑為發級數，試決定之。

$$\text{由 325 章 } S_n = \frac{a}{a+x-b} \left\{ \frac{a(a+x)(a+2x)\dots(a+nx)}{b(b+x)(b+2x)\dots(b+n-1x)} - 1 \right\}.$$

今由第一例而知 $\frac{(a+x)(a+2x)\dots(a+nx)}{b(b+x)(b+2x)\dots(b+n-1x)}$ ，若 $a+x > b$ ，則其值為無限大，若 $a+x < b$ ，則其值為 0。

由是知 $b > a+x$ 。則原級數爲歛級數。其無限項之和爲

$$\frac{a}{a+x-b} \{0-1\} = \frac{a}{b-a-x}.$$

又 $b < a+x$ 。則原級數爲發級數。

又 $b = a+x$ 。惟因 $\frac{a}{b} + \frac{a}{b+x} + \frac{a}{b+2x} + \dots$ 已知其爲發級數。故原級數爲發級數。

338. 二項式之級數 二項級數

$1+mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$ 其 m 爲任何數, $x < 1$ 。

則此級數爲歛級數。 $x > 1$ 。則此級數爲發級數。

若 $x=1$ 。則此級數。即 $1+m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$

乃設此級數之項數 r 爲大於 $m+1$ 之正整數。則此級數第 r 項以下之諸項。必正負相間。何則。以 r 既大於 $m+1$ 之正整數。則

第 $(r+1)$ 項 = $\frac{m(m-1) \dots (m-r+1)}{r}$ 。其 $m-r+1$ 必爲負數故也。

$$\begin{aligned} \text{且 } \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n} \bigg/ \frac{m(m-1) \dots (m-n+2)}{n-1} \\ &= \frac{m-n+1}{n}. \end{aligned}$$

故 $n > m+1$ 時。若 $m+1$ 爲正。則 u_{n+1}/u_n 爲小於 1。若 $m+1$ 爲負。則 u_{n+1}/u_n 爲大於 1。

故由第二十一編定理五。而知此級數。 $m+1$ 若爲正。其 n 增至無限時。爲歛級數。

$$\text{今 } \pm \frac{1}{u_n} = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{(-m)(1-m) \dots (n-1-m)}.$$

$$\therefore \pm \frac{1}{u_n} = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1+m}{1-m}\right) \left(1 + \frac{1+m}{2-m}\right) \dots \left(1 + \frac{1+m}{n-1-m}\right).$$

若其 $m+1$ 爲正。而小於 r 。則其第 r 項以上諸因子之積。

$\frac{1}{m} \left(1 + \frac{1+m}{1-m}\right) \left(1 + \frac{1+m}{2-m}\right) \dots \left(1 + \frac{1+m}{r-1-m}\right)$ 。大於其第 r 項以下諸因子之積。

$$\left(1 + \frac{1+m}{r-m}\right) \left(1 + \frac{1+m}{r+1-m}\right) \left(1 + \frac{1+m}{r+2-m}\right) \dots$$

即知 $\frac{1}{m} \left(1 + \frac{1+m}{1-m}\right) \left(1 + \frac{1+m}{2-m}\right) \dots \left(1 + \frac{1+m}{r-1-m}\right)$

$$> (1+m) \left\{ \frac{1}{r-m} + \frac{1}{r+1-m} + \dots \right\}.$$

由是 n 增至無限時。則 $1/u_n$ 爲無限大。即 $1+m$ 爲正數。而 u_n 爲無限小。

故二項級數。若 $m > -1$ 而 $x=1$ 。則爲斂級數。

又 $x=-1$ 。則此級數爲

$$1 - m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

上之級數之和。由 287 章或 325 章。而得

$$\frac{(1-m)(2-m)(3-m) \dots (n-1-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}.$$

乃由 337 章第一例。而知 n 爲無限大時。若 m 爲正。則其和爲 0。若 m 爲負。則其和爲 ∞ 。

故二項級數 m 爲正。而 $x=-1$ 。則爲斂級數。

339. 可西 (Cauchy) 氏之定理 級數 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ 皆爲正項。其各項恆比其前項爲小者。則此級數。恆視他級數 $u_1 + au_1 + a^2u_1 + \dots + a^nu_1 + \dots$ 若爲斂級數或發級數。從而決定其爲斂級數或發級數。但 a 爲任何之正整數。

因原級數之各項。既比其前項爲小。則有次之關係。

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n < au_1 \quad \text{即} \quad (a-1)u_1 + u_1,$$

$$u_{a+1} + u_{a+2} + \dots + u_{a^2} < (a^2-a)u_a \quad \text{即} \quad (a-1)au_a,$$

$$(u_{a^{n+1}} + u_{a^{n+2}} + \dots + u_{a^{n+1}}) < (a^{n+1}-a^n)u_{a^n} \quad \text{即} \quad (a-1)a^n u_{a^n}$$

由加法得 $S < (a-1)\Sigma + u_1 \dots \dots \dots (1)$

其 $(a-1)\Sigma = (a-1)(u_1 + au_1 + a^2u_1 + \dots + a^nu_1)$

又以 $a < 2$ 故 $a(u_1 + u_2 + \dots + u_n) > au_n$,

$$a(u_{a+1} + u_{a+2} + \dots + u_{a^2}) > a(a^2 - a)u_{a^2} > a^2 u_{a^2},$$

.....

$$a(u_{a^{n-1}+1} + u_{a^{n-1}+2} + \dots + u_{a^n}) > a(a^n - a^{n-1})u_{a^n} > a^n u_{a^n}$$

由加法得 $aS > \Delta - u_1$ (2)

從 (1) 及 (2) 可見 S 爲有限, 則 Δ 亦爲有限. 若 S 爲無限大, 則 Δ 亦爲無限大.

[例] 級數 $\sum \frac{1}{n(\log a)^k}$ 若 k 大於 1, 則爲斂級數. 若 k 小於 1, 則爲發級數.

由 Cauchy 氏之定理, 此級數視他級數 $\sum \frac{a^n}{a^n (\log a^n)^k}$ 爲斂級數或發級數, 從而決定其爲斂級數發級數.

$$\sum \frac{a^n}{a^n (\log a^n)^k} = \sum \frac{1}{n^k} \cdot \frac{1}{(\log a)^k} = \frac{1}{(\log a)^k} \sum \frac{1}{n^k}$$

故由 274 章, 原級數 $k > 1$, 則爲斂級數. $k < 1$, 則爲發級數.

340. 附言 於是編所論斂級數, 以次之二定理爲結論, 其要旨蓋詳於 Boole 氏及 Bertrand 氏之微分書中.

341. 定理 某級數, 從其某一項爲始, 以及於次之諸項, 其各項與其前項之比較, 各項爲正之已知他斂級數相應項之比爲小者, 則其級數爲斂級數.

將題中所云之某一項, 記以 u_1 則得

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

及已知之他斂級數, 其與原級數 u_1 相應之項, 記以 v_1 則得

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

若 r 爲任何值, 而 $\frac{u_{r+1}}{u_r} < \frac{v_{r+1}}{v_r}$, 則

$$\begin{aligned} V &= v_1 + v_1 \frac{v_2}{v_1} + v_1 \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} + v_1 \frac{v_4}{v_3} \cdot \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} + \dots \\ &> v_1 + v_1 \frac{u_2}{u_1} + v_1 \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} + v_1 \frac{u_4}{u_3} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} + \dots \end{aligned}$$

$$> \frac{v_1}{u_1} (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots)$$

$$> \frac{v_1}{u_1} U.$$

若 V 爲斂級數，則 U 不得不爲斂級數矣。

原級數於 U 之初項以前爲有限若干項之和，惟其有限，故 U 爲斂級數，而原級數亦必爲斂級數可知。

由同理自其某一項以及次之諸項，若 $u_{r+1} : u_r > v_{r+1} : v_r$ 而 $\sum u_r$ 之諸項符號相同者，則 $\sum u_r$ 爲發級數，而 $\sum v_r$ 亦爲發級數。

342. 定理 某級數其各項皆爲正者，其 $n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 之極限，若大於 1，則爲斂級數，若小於 1，則爲發級數。

何則，設 $n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 之極限爲 α ，而定級數 $\sum \frac{1}{n^\beta} \equiv \sum v_n$ ，則

$$n \left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = n \left\{ \frac{(n+1)^\beta - n^\beta}{(n+1)^\beta} \right\} = \frac{\beta n^\beta + n \text{ 之低次項}}{n^\beta + n \text{ 之低次項}}$$

由是得 $n \left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ 之極限 (n 爲無限大) 爲 β 。

若 $\alpha > 1$ ，而 β 在於 α 及 1 之間，則 $n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 之極限，比 $n \left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ 之極限爲大，即前式常比後式爲大，然祇能從 n 爲有限值時考察之，而不能令 n 爲 ∞ 也。故將上二式

$$n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > n \left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \text{ 變爲 } \frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

如是可由前定理而知 $\sum v_n$ 爲斂級數，則 $\sum u_n$ 亦爲斂級數，惟 $\beta > 1$ ，故 $\sum v_n$ 爲斂級數。

由同法 $\alpha < 1$ ，而 β 在 α 與 1 之間， $\sum v_n$ 爲發級數，則 $\sum u_n$ 亦爲發級數，惟 $\beta < 1$ ，故 $\sum v_n$ 爲發級數。

若 $n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 之極限爲 1，則此級數爲斂級數於否未可檢定。

[第一例] $\frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}x + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}x^2 + \dots$ 此級數爲斂級數抑爲發級數，試檢定之。

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a+n}{b+n} x$ 。而 n 爲無限數。則 $\frac{a+n}{b+n} = 1$ 。故此極限爲 x 。

由是 n 卽爲有限數。其前後項之比。若

$x > 1$ 。則 $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ 。若 $x < 1$ 。則 $\frac{v_{n+2}}{v_n} < 1$ 。

乃知此級數 $x > 1$ 。則爲發級數。 $x < 1$ 。則爲歛級數。

若 $x = 1$ 。則 $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ 之極限爲 1。而

$n \left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right) = n \left(1 - \frac{a+n}{b+n} \right) = n \left(\frac{b-a}{b+n} \right)$ 爲無限大。則 $\frac{n}{b+n} = 1$ 。故此極限爲 $b-a$ 。

故若 $b-a > 1$ 。則爲歛級數。若 $b-a < 1$ 。則爲發級數。

若 $b = a+1$ 。則此級數爲

$\frac{a}{b} + \frac{a}{b+1} + \frac{a}{b+2} + \dots$ 卽發級數。(此例卽 337 章第二例之結果。)

例題 三十四

1. 求次列各級數 n 項之和。若爲歛級數。並求其無限項之和。

(1) $\frac{4}{5} + \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 8} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \dots$

(2) $\frac{2}{4} + \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$

(3) $\frac{3}{8} + \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 10} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{8 \cdot 10 \cdot 12} + \dots$

(4) $\frac{11}{14} + \frac{11 \cdot 13}{14 \cdot 16} + \frac{11 \cdot 13 \cdot 15}{14 \cdot 16 \cdot 18} + \dots$

〔解〕 (1) $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4 \cdot 7}{5} - \frac{4}{1} \right\}$, $\frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{5 \cdot 8} - \frac{4 \cdot 7}{5} \right\}$, \dots

$$\frac{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+4)}{5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} - \frac{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)} \right\}.$$

由加法 $S_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+4)}{5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} - \frac{4}{1} \right\} = \frac{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+4)}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n+2)} - 2$ 。

$$(2) \text{ 同法 } S_n = \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n+2)}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)} - 2.$$

$$(3) \text{ 同法 } S_n = 1 - \frac{5 \cdot 7 \cdots (2n+3)}{8 \cdot 10 \cdots (2n+6)}, S_\infty = 1.$$

$$(4) \text{ 同法 } S_n = 11 \left\{ 1 - \frac{13 \cdot 15 \cdots (2n+11)}{14 \cdot 16 \cdots (2n+12)} \right\}, S_\infty = 11.$$

8. 由推差法求次列各級數第 n 項及 n 項之和。

$$(1) 2+2+8+20+38+\cdots$$

$$(2) 7+14+19+22+23+22+\cdots$$

$$(3) 1+4+11+26+57+120+\cdots$$

$$(4) 1+0+1+8+29+80+193+\cdots$$

$$(5) 1+5+15+35+70+126+\cdots$$

$$(6) 1+2+29+130+377+866+1717+\cdots$$

[解] (1) 一次差爲 0, 6, 12, 18, $\cdots \therefore v_n = 0 + (n-1)6 = 6(n-1).$

$$\therefore u_n - u_{n-1} = 6(n-2), u_{n-1} - u_{n-2} = 6(n-3) \cdots u_3 - u_2 = 6, u_2 = 2.$$

$$\therefore u_n = 2 + 6\{1+2+3+\cdots+(n-2)\} = 2 + 3(n-1)(n-2).$$

$$\therefore S_n = 2n + n(n-1)(n-2).$$

$$(2) \text{ 一次差爲 } 7, 5, 3, 1, -1, \cdots \therefore v_n = 7 - (n-1)2.$$

$$\text{同法 } u_n = 7n - (n-1)(n-2), S_n = \frac{7}{2}n(n+1) - \frac{1}{3}n(n-1)(n-2).$$

(3) 一次差爲 3, 7, 15, 31, 63, \cdots 二次差爲 4, 8, 16, 32, \cdots

$$\therefore u_n = 2^{n+1}. \therefore v_n - v_{n-1} = 2^n, v_{n-1} - v_{n-2} = 2^{n-1} \cdots v_2 - v_1 = 2^2, v_1 = 3,$$

$$\therefore v_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - n.$$

$$\text{由是 } u_n - u_{n-1} = 2^n - 1, u_{n-1} - u_{n-2} = 2^{n-1} - 1 \cdots u_2 - u_1 = 2^2 - 1,$$

$$u_1 = 2 - 1 = 1.$$

$$\therefore u_n = (2 + 2^2 + \cdots + 2^n) - n = 2^{n+1} - 2 - n.$$

$$\therefore S_n = (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1}) - \{3 + 4 + 5 + \cdots + (n+2)\}$$

$$= 2^{n+2} - 1 - \frac{1}{2}(n+2)(n+3).$$

(4) 一次差爲 -1, 1, 7, 21, 51, 113, \cdots 二次差爲 2, 6, 14, 30, 62, \cdots

三次差爲 4, 8, 16, 32, \cdots

$$w_n - w_{n-1} = 2^n, \quad w_{n-1} - w_{n-2} = 2^{n-1} \dots \dots \dots w_2 - w_1 = 2^2, \quad w_1 = 2.$$

$$\therefore w_n = 2^{n+1} - 2.$$

$$\therefore v_n - v_{n-1} = 2^n - 1, \quad v_{n-1} - v_{n-2} = 2^{n-2} - 2, \dots \dots v_2 - v_1 = 2^2 - 2, \quad v_1 = 1.$$

$$\therefore v_n = (2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) - 2(n-1) - 1 = 2^{n+1} - 2(n+1) - 1.$$

由是 $u_n - u_{n-1} = 2^n - 2_{n-1}, \quad u_{n-1} - u_{n-2} = 2^{n-1} - 2(n-1) - 1 \dots \dots \dots$

$$u_2 - u_1 = 2^2 - 2 \cdot 2 - 1, \quad u_1 = 1 = 2 - 2 \cdot 0 - 1.$$

$$\therefore u_n = (2 + 2^2 + \dots + 2^n) - 2(2 + 3 + 4 + \dots + n) - n = 2^{n+1} - n(n+1) - 1.$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= (2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1}) - \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= 2^{n+2} - 4 - \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1). \end{aligned}$$

(5) 一次差爲 4, 10, 20, 35, 56, \dots \dots \dots 二次差爲 6, 10, 15, 21, \dots \dots \dots
三次差爲 4, 5, 6, \dots \dots \dots

$$\therefore w_n - w_{n-1} = n+2, \quad w_{n-1} - w_{n-2} = n+1, \dots \quad w_2 - w_1 = 4, \quad w_1 = 1 + 2 + 3.$$

$$\therefore v_n - v_{n-1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \quad v_{n-1} - v_{n-2} = \frac{1}{2}n(n+1), \quad v_2 - v_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4.$$

$$v_1 = 4 = \frac{1}{2}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3),$$

$$\therefore v_n = \frac{1}{2} \{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n+1)(n+2)\} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$\therefore u_n - u_{n-1} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2), \quad u_{n-1} - u_{n-2} = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1), \dots \dots$$

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad u_1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

$$\begin{aligned} \therefore u_n &= \frac{1}{6} \{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)\} \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)(n+1)(n+3). \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

(6) 一次差爲 1, 27, 101, 247, 489, 851, \dots \dots \dots
二次差爲 26, 74, 146, 242, 332, \dots \dots \dots
三次差爲 48, 72, 96, 120, \dots \dots \dots 以下同法。

$$\therefore v_n = (n-2)(n-1)n(n+1) + (n-1)n - n + 2.$$

$$S_n = \frac{1}{5}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) + 2n.$$

3. 假定次列各級數為循環級數。求其母函數。

(1) $2+4x+14x^2+52x^3+\dots$

(2) $1+3x+11x^2+43x^3+\dots$

(3) $1+6x+49x^2+288x^3+\dots$

(4) $1+x+2x^2+7x^3+14x^4+35x^5+\dots$

(5) $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+5^2x^4+6^2x^5+\dots$

[解] (1) 令級數率為 $1+px+qx^2$ 。則 $14+4p+2q=0$,

$$52+14p+4q=C. \therefore p=-4, q=1.$$

由是母函數 $= \frac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2} = \frac{2+(4-4.2)x}{1-4x+x^2} = \frac{2-4x}{1-4x+x^2}$

(2) 同法 $\frac{1-2x}{1-5x+4x^2}$

(3) 同法 $\frac{1-6x}{1-12x+32x^2}$

(4) 令級數率為 $1+px+qx^2+rx^3$ 。則 $7+2p+q+r=0$,

$$14+7p+2q+r=0, 35+14p+7q+2r=0.$$

$$\therefore p = -\frac{14}{15}, \quad q = -\frac{7}{3}, \quad r = -\frac{14}{5}.$$

原級數為 $S = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ 以 $1+px+qx^2+rx^3$ 乘之。則

$$S = \frac{a_0 + (a_1+pa_0)x + (a_2+pr_1+pa_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3}, \quad [232 \text{ 章}]$$

$$= \frac{15+x-19x^2}{15-14x-35x^2-42x^3} \text{ 即母函數.}$$

(5) 同法母函數 $= \frac{1+x}{(1-x)^3}$

4. 求次之循環級數第 n 項及 n 項之和。

(1) $2+6+14+30+\dots$ (2) $2-5+29-89+\dots$ (3) $1+2+7+20+\dots$

[解] (1) 令級數 $2+6x+14x^2+30x^3+\dots$ 之級數率為 $1+px+qx^2$

而得 $1-3x+2x^2$, \therefore 此級數 $= \frac{2+(6-3.2)x}{1-3x+2x^2} = \frac{4}{1-2x} - \frac{2}{1-x}$,

由此展開式之第 n 項 $= 2^{n+1} - 2$. $\therefore S_n = 2^{n+2} - 2n - 4$

$$(2) u_n = \frac{1}{7} \{3^n + 11(1-4)^{n-1}\}, S_n = \frac{1}{10} + \frac{3^{n+1}}{14} - \frac{11}{35}(-4)^n.$$

$$(3) u_n = \frac{1}{4} \{3n - (-1)^n\}, S_n = \frac{1}{8} \{3^{n+1} - 3\}, \text{但 } n \text{ 爲偶數.}$$

又等於 $\frac{1}{8} \{3^{n+1} - 3\}$ 而 n 爲奇數。

5. 級數 $1, 3, 4, 7, \dots$ 其各項等於其前二項之和。求此級數之第 n 項。

[解] $S = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + \dots$ 由題意 $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$,

$\therefore u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0$ 。即 $1 - x - x^2$ 爲級數率。

由是母函數爲 $\frac{1+2x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\alpha+\beta} \left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha x} + \frac{2+\beta}{1-\beta x} \right)$,

$$\text{但 } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \text{第 } n \text{ 項} = \frac{1}{\alpha-\beta} \{(2+\alpha)\alpha^{n-1} - (2+\beta)\beta^{n-1}\} = \frac{1}{2n} \{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n\}.$$

6. 於 $\frac{a+bx+cx^2+dx^3}{(1-x)^4}$ 之展開式中 x^n 之係數爲 $(n+1)^3$ 。則 a, b, c, d 之值如何。 答 $a=1, b=4, c=1, d=0$ 。

$$[\text{解}] \frac{a+bx+cx^2+dx^3}{(1-x)^4} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$\text{但 } a_n = (n+1)^3 \quad \therefore a_0 = 1^3, a_1 = 2^3, \dots$$

由是 $S = 1^3 + 2^3x + 3^3x^2 + \dots$ 此級數率爲 $(1-x)^4$ 。故由 332 章求得母函數爲

$$\frac{a_0 + (a_1 + pa_0)x + (a_2 + pa_1 + pa_0)x^2 + (a_3 + pa_2 + pa_1 + pa_0)x^3}{1 - 4x + 6x^2 + 4x^3 - x^4},$$

$\therefore p = -4, q = 6, r = -4$, 以此值及 a_0, a, \dots 之值代入上之函數爲

$$\frac{1+4x+x^3}{(1-x)^4},$$

$$\therefore a=1, b=4, c=1, d=0.$$

7. 證明 $1^r + 2^r x + 3^r x^2 + 4^r x^3 + \dots$ 爲 $\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r}{(1-x)^{r+1}}$ 之展開式

又證 $a_r = 0$ 及 $a_{r-2} = a_{r-1}$

〔證〕 最初之證明同 332 章。而後之所證。以

$a_0 + a_1x + \dots + a_r x^r = (1-x)^{r+1}(1^r + 2^r x + 3^r x^2 + \dots)$ 比較其 x^r 之係數。

$$a_r = (r+1)r - (r+1)r^r + \frac{(r+1)^r}{1 \cdot 2} (r-1)^r - \dots + (-1)^r (r+1)1^r = 0.$$

由 255 章例題 4。又比較 x^{r-s} 之係數。

$$a_{r-s} = (r-s+1)^r - (r+1)(r-s) + \dots + (-1)^{r-s} \frac{\binom{r+1}{r-s} 1^r}{\binom{r-s}{r-s} \binom{r+1}{r-s}}$$

又比較 x^{s-1} 之係數。

$$a_{s-1} = s^r - (r+1)(s-1)^r + \dots + (-1)^{s-1} \frac{\binom{r+1}{r-s+2} 1^r}{\binom{r-s+2}{r-s+2} \binom{r+1}{s-1}}$$

$$\text{由是 } a_{r-s} - a_{s-1} = (r-s+1)^r - (r+1)(r-s)^r + \dots + (-1)^{r-s} \frac{\binom{r+1}{r-s} 1^r}{\binom{r-s}{r-s} \binom{r+1}{s+1}}$$

$$- \left\{ s^r - (r+1)(s-1)^r + \dots + (-1)^{s-1} \frac{\binom{r+1}{r-s+2} 1^r}{\binom{r-s+2}{r-s+2} \binom{r+1}{s-1}} \right\}$$

$$= (r-s+1)^r (r+1)(r-s)^r + \dots + (-1)^{r-s} \frac{\binom{r+1}{r-s} 1^r}{\binom{r-s}{r-s} \binom{r+1}{s+1}}$$

$$+ (-1)^{r-s+1} \frac{\binom{r+1}{r-s+1} 0^r}{\binom{r-s+1}{r-s+1} \binom{r+1}{s}} + (-1)^{r-s+2} \frac{\binom{r+1}{r-s+2} (-1)^r}{\binom{r-s+2}{r-s+2} \binom{r+1}{s-1}} = 0.$$

由 305 章。∴ $a_{r-s} = a_{s-1}$

8. $2 + 5x + 9x^2 + 15x^3 + 25x^4 + 43x^5 + \dots$ 爲斂級數。令其級數率爲 $1 + px + qx^2 + rx^3$ 。求其無限項之和。又此級數之第 $(n+1)$ 項爲 $(2^n + 2n+1)x^n$ 。試證之。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } 15 + 9p + 5q + 2r &= 0, & 25 + 15p + 9q + 5r &= 0, \\ 43 + 25p + 15q + 9r &= 0, & \therefore p &= -4, \quad q = 5, \quad r = -2. \end{aligned}$$

$$\text{由是得母函數} = \frac{2 - 3x - x^2}{1 - 4x + 5x^2 - 2x^3} = S_\infty.$$

$$\begin{aligned} \text{又將母函數分項得} & \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} \\ &= 2(1 + 2x + 3x^2 + \dots) - (1 + x + x^2 + \dots) + (1 + 2x + 2^2x^2 + \dots). \end{aligned}$$

$$\therefore \text{第 } (n+1) \text{ 項} = \{2(n+1) - 1 + 2^n\} x^n = (2^n + 2n+1)x^n.$$

9. 求級數 $1 + 4x + 11x^2 + 26x^3 + 57x^4 + 120x^5 + \dots$ 無限項之和。其 x 小於 $\frac{1}{2}$ 。

$$\begin{aligned} \text{〔解〕 } 26 + 11p + 4q + r &= 0, & 57 + 26p + 11q + 4r &= 0, \\ 120 + 57p + 26q + 11r &= 0, & \therefore p &= -4, \quad q = 5, \quad r = -2. \end{aligned}$$

$$\text{由是得母函數} = \frac{1}{1 - 4x + 5x^2 - 2x^3} = \frac{1}{(1-x^2)(1-2x)} = S_\infty.$$

10. 求 $1 + \frac{x}{a} + \frac{x(x+a)}{ab} + \frac{x(x+a)(x+b)}{abc} + \dots$ n 項之和。

(解) $S_n = \frac{a+x}{a} \left\{ 1 + \frac{x}{b} + \frac{x(x+b)}{bc} + \dots \right\} = \frac{a+x}{a} \cdot \frac{b+x}{b} \left\{ 1 + \frac{x}{c} + \dots \right\}$
 $= \frac{a+x}{a} \cdot \frac{b+x}{b} \cdot \frac{c+x}{c} \dots \frac{l+x}{l}$

11. 證 $\frac{1}{x+a} + \frac{a}{(x+a)(x+b)} + \frac{ab}{(x+a)(x+b)(x+c)} + \dots$
 $+ \frac{abc \dots k}{(x+a)(x+b) \dots (x+k)(x+l)} = \frac{1}{x} - \frac{abc \dots kl}{x(x+a)(x+b) \dots (x+l)}$

(證) 左邊 $= \frac{1}{x} - \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} - \frac{a}{(x+a)(x+b)} - \frac{ab}{(x+a)(x+b)(x+c)} - \dots \right\}$
 $= \frac{1}{x} - \left\{ \frac{a}{x(x+a)} - \frac{a}{(x+a)(x+b)} - \frac{ab}{(x+a)(x+b)(x+c)} - \dots \right\}$
 $= \frac{1}{x} - \left\{ \frac{ab}{x(x+a)(x+b)} - \frac{ab}{(x+a)(x+b)(x+c)} - \dots \right\} = \dots$
 $= \frac{1}{x} - \frac{abc \dots kl}{x(x+a)(x+b) \dots (x+l)}$

12. 證 $\frac{1}{p+n} + \frac{1+n}{(p+n)(p+2n)} + \frac{(1+n)(1+2n)}{(p+n)(p+2n)(p+3n)} + \dots$ 至無限
 $= \frac{1}{n-1}$ 但 $p > 1$ 及 $p+n > 0$

(證) $\frac{1}{p+n} = \frac{1}{p-1} \left\{ 1 - \frac{1+n}{p+n} \right\}$
 $\frac{1+n}{(p+n)(p+2n)} = \frac{1}{p-1} \left\{ \frac{1+n}{p+n} - \frac{(1+n)(1+2n)}{(p+n)(p+2n)} \right\}$
 $\frac{(1+n)(1+2n)}{(p+n)(p+2n)(p+3n)} = \frac{1}{p-1} \left\{ \frac{(1+n)(1+2n)}{(p+n)(p+2n)} - \frac{(1+n)(1+2n)(1+3n)}{(p+n)(p+2n)(p+3n)} \right\} \dots$

由加法, $S_r = \frac{1}{p-1} \left\{ 1 - \frac{(1+n)(1+2n) \dots (1+rn)}{(p+n)(p+2n) \dots (p+rn)} \right\}$

由題意, $n+p$ 為正, 則 $p > 1$, 故 r 為無限大, 而 $S_\infty = \frac{1}{p-1}$

13. 設 $m > 1$, 則

$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1 \cdot 2}{(m+1)(m+2)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \dots$ 至無限 $= \frac{m}{m-1}$

(證) $\frac{1}{m+1} = \frac{1}{m-1} \left\{ 1 - \frac{1 \cdot 2}{(m+1)(m+2)} \right\}$
 $\frac{1 \cdot 2}{(m+1)(m+2)} = \frac{1}{m-1} \left\{ \frac{1 \cdot 2}{(m+1)(m+2)} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(m+1)(m+2)(m+3)} \right\} \dots$

$$\therefore S_n = 1 + \frac{1}{m-1} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(m+1)(m+2) \cdots (m+n-1)} \right\}$$

今 $m > 1$ 而 n 為無限大。則 $S_\infty = 1 + \frac{1}{m-1}$

14. 設 $m+n$ 為正或 n 為正整數。則

$$\frac{1}{m+1} - \frac{n-1}{(m+1)(m+2)} + \frac{(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)} - \cdots = \frac{1}{m+n}$$

(證) 分各項為兩分數之差如前例。則

$$S_r = \frac{1}{m+n} \left\{ 1 + (-1)^{r-1} \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-r)}{(m+1)(m+2) \cdots (m+r)} \right\}$$

至 $r=n$ 。則於 $\{ \}$ 中分子之一因子 $n-r$ 為 0。

$$\text{由是 } S_\infty = \frac{1}{m+n}$$

15. n 為正整數。則 $\frac{n}{n+1} - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$
 $\pm \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{(n+1)(n+2) \cdots 2n} = \frac{1}{2}$

(證) 由前例 $\frac{1}{n} S_r = \frac{1}{n+n} \left\{ 1 + (-1)^{r-1} \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-r)}{(n+1)(n+2) \cdots (n+r)} \right\}$

$$n = \infty \text{ 則 } S_\infty = \frac{1}{2}$$

16. m 為正整數。則 $1 - m \frac{2n+1}{2n+2} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)} + \cdots$
 $= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{(2n+2)(2n+4) \cdots (2n+2m)}$

(證) $m=1$ 。則 $1 - \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{2n+2}$

若 $m=2$ 。則 $1 - 2 \frac{2n+1}{2n+2} + \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)} = \frac{1 \cdot 3}{(2n+2)(2n+4)}$

由是可知 $m=1$ 或 2 時。皆與題意相合。又對於 n 之任意值及 m 之特別值。如次亦能合理。

$$\text{假定 } 1 - {}_m C_1 \frac{2n+1}{2n+2} + \cdots + (-1)^m {}_m C_m \frac{(2n+1) \cdots (2n+2m-1)}{(2n+2) \cdots (2n+2m)} + \cdots$$

$$+ (-1)^m {}_m C_m \frac{(2n+1) \cdots (2n+2m-1)}{(2n+2) \cdots (2n+2m)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{(2n+2)(2n+4) \cdots (2n+2m)}$$

設 n 變為 $n+1$, 則

$$1 - {}_m C_1 \frac{2n+3}{2n+4} + \dots + (-1)^r {}_m C_r \frac{(2n+3) \dots (2n+2r+1)}{(2n+4) \dots (2n+2r+2)} + \dots$$

$$+ (-1)^m {}_m C_m \frac{(2n+3) \dots (2n+2m+1)}{(2n+4) \dots (2n+2m+2)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{(2n+4)(2n+6) \dots (2n+2m+2)}$$

第二級數以 $\frac{2n+1}{2n+2}$ 乘而減第一級數。又因 ${}_m C_r + {}_m C_{r-1} = {}_{m+1} C_r$ 故得次式。

$$1 - {}_{m+1} C_1 \frac{2n+1}{2n+2} + \dots + (-1)^r {}_{m+1} C_r \frac{(2n+1) \dots (2n+2r-1)}{(2n+2) \dots (2n+2r)} + \dots$$

$$+ (-1)^{m+1} {}_{m+1} C_{m+1} \frac{(2n+1) \dots (2n+2m+1)}{(2n+2) \dots (2n+2m+2)}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{(2n+2) \dots (2n+2m)} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{(2n+4) \dots (2n+2m+2)}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)(2m+1)}{(2n+2)(2n+4) \dots (2n+2m+2)}$$

此定理對於 n 之任何值及 m 之特別值為合理。即對於 m 為任何大之值。亦能合理。以 $m=1, m=2$ 為合理。故 m 為任何之正整數亦為合理。

17. m, n 及 $m-n+1$ 為正整數。則

$$1 + n \frac{m}{m-n+1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{m(m-1)}{(m-n+1)(m-n+2)}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)} + \dots \text{至 } n+1 \text{ 項}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2) \dots (m+n)}{(m-n+1)(m-n+2) \dots (m-n+m)}$$

〔證〕 由 Vandermonde 氏之定理 (243 章)。

$$(a+b)_n = a_n - n a_{n-1} b_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_{n-2} b_2 + \dots + \frac{|n}{|r| |n-r|} a_{n-r} b_r + \dots$$

$$\therefore \frac{(a+b)_n}{a_n} = 1 + n \frac{a_{n-1}}{a_n} b_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_n} b_2 + \dots$$

$$= 1 + n \frac{b}{a-n+1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{b(b-1)}{(a-n+1)(a-n+2)} + \dots$$

$$+ \frac{|n}{|r| |n-r|} \cdot \frac{b(b-1) \dots (b-r+1)}{(a-n+1)(a-n+2) \dots (a-n+r)} + \dots$$

今 $b=a=m$ 。則

$$\frac{(2m)_n}{m_n} = 1 + n \frac{m}{m-n+1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{m(m-1)}{(m-n+1)(m-n+2)} + \dots$$

$$+ \frac{|n}{r} \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{(m-n+1)(m-n+2)\dots(m-n+r)}$$

次求 $(2m)_n/m_n$

$$\frac{(2m)_n}{m_n} = \frac{2m(2m-1)(2m-2)\dots(2m-n+1)}{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)} \times \frac{(m+1)(m+2)\dots(m-n+m)}{(m+1)(m+2)\dots(m-n+m)}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)\dots(2m-n)(2m-n+1)\dots(2m-2)(2m-1)2m}{(m-n+1)\dots(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)\dots(m-n+m)}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}{(m-n+1)(m-n+2)\dots(m-n+m)} \quad \text{即合題意。}$$

18. $m+1 > 0$ 。則

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}m + \frac{1}{4} \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{1}{5} \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

(證) $S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - (3-1) \frac{m}{\underline{3}} + (4-1) \frac{m(m-1)}{\underline{4}} - (5-1) \frac{m(m-1)(m-2)}{\underline{5}} + \dots$

$$= 1 - \frac{m}{\underline{2}} + \frac{m(m-1)}{\underline{3}} - \frac{m(m-1)(m-2)}{\underline{4}} + \dots - \left\{ \frac{1}{\underline{2}} - \frac{m}{\underline{3}} + \frac{m(m-1)}{\underline{4}} - \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} (1-1)^{m+1}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{(m+1)(m+2)} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \right\} (1-1)^{m+2}.$$

因 $m+1 > 0$ 。故 $S = \frac{1}{(m+1)(m+2)}$ 。

19. 從最初 n 偶數中。取 r 個為積之和為 P_r 。從最初 n 奇數中。取 r 個為積之和為 Q_r 。證明

$$1 + P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)$$

$$1 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n$$

(證) $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\dots(1+a_n)$

$$= 1 + \sum a_i + \sum a_1 a_2 + \sum a_1 a_2 a_3 + \dots + a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

今 $a_1=2, a_2=4, a_3=6, \dots, a_n=2n$

$$1 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = (1+2)(1+4)(1+6)\dots(1+2n) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1).$$

又 $a_1=1, a_2=3, a_3=5, \dots, a_n=2n-1$

$$1+Q_1+Q_2+Q_3+\dots+Q_n=(1+1)(1+3)(1+5)\dots(1+2n-1) \\ =2\cdot4\cdot6\dots2n.$$

20. $\{a+(a+1)+(a+2)+\dots+(a+n)\}\{a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\dots+(a+n)^2\}=a^3+(a+1)^3+\dots+(a+n)^3.$

(證) 左邊 = $\left\{(n+1)a + \frac{1}{2}n(n+1)\right\}\left\{a^2+na + \frac{1}{2}n(n+1)\right\}$
 $= (n+1)a^3 + \frac{3}{2}n(n+1)a^2 + \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)a + \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
 $= (n+1)a^3 + 3a^2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\} + 3a\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\} + \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$
 $= (n+1)a^3 + 3a^2(1+2+\dots+n) + 3a(1^2+2^2+\dots+n^2) + (1^3+2^3+\dots+n^3)$
 $= a^3 + (a^3+3a^2+3a+1) + (a^3+3a^2\cdot2+3a\cdot2^2+2^3) + \dots$
 $+ (a^3+3a^2n+3an^2+n^3) = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + \dots + (a+n)^3.$

21. 證 $1 - \frac{(1-a^n)}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{(1-a)(1-a^2)} - \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \dots$ 若 n 為奇數則為 0. 若為偶數則為 $(1-a)(1-a^3)\dots(1-a^{n-1})$ (Gauss).

(證) $S_n = 1 - \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{(1-a)(1-a^2)} - \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \dots$

又 $S_{n+1} = 1 - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + \frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)}{(1-a)(1-a^2)} - \frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)(1-a^{n-1})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \dots$

原級數以 $1-a^{n+1}$ 乘之得

$$(1-a^{n+1})S_n = (1-a^{n+1}) - \frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)}{1-a} + \frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)(1-a^{n-1})}{(1-a)(1-a^2)} \\ - \frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \dots$$

$$= (1-a^{n+1}) - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \left(1-a^n \frac{1-a^2}{1-a^2}\right) + \frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)}{(1-a)(1-a^2)} \left(1-a^{n-1} \frac{1-a^3}{1-a^3}\right) \\ - \frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)(1-a^{n-1})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} \left(1-a^{n-2} \frac{1-a^4}{1-a^4}\right) + \dots$$

$$= 1 - \frac{a^{n+1}(1-a) + (1-a^{n+1})^2}{1-a} + \frac{(1-a^{n+1})\{a^n(1-a^2) + (1-a^n)\}}{(1-a)(1-a^2)} \\ - \frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)\{a^{n-1}(1-a^3) + (1-a^{n-1})\}}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \dots$$

$$= 1 - \frac{1-a^{n+2}}{1-a} + \frac{(1-a^{n+2})(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-a^2)} - \frac{(1-a^{n+2})(1-a^{n+1})(1-a^n)}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \dots$$

$$\therefore (1-a^{n+1})S_n = S_{n+2}$$

$$(1-a^{n-1})S_{n-2} = S_n$$

.....

$$\therefore S_{n+2} = (1-a^{n+1})S_n = (1-a^{n+1})(1-a^{n-1})S_{n-2} = \dots$$

$$= (1-a^{n+1})(1-a^{n-1})(1-a^{n-3}) \dots$$

$$\text{即得 } S_n = (1-a^{n-1})(1-a^{n-3})(1-a^{n-5})$$

n 爲奇數，則上之諸因子中有一因子爲 $1-a^0=1-1=0$ 。∴ $S_n=0$ 。

又 n 爲偶數，則 $S_n = (1-a^{n-1})(1-a^{n-3}) \dots (1-a)$ 。

22. 求 $\frac{n}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n-1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{n-2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 之和。

$$\text{〔解〕 } S_n = \frac{(n+1)-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n+1)-2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(n+1)-3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= (n+1) \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right\} - \left\{ \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

$$= (n+1) \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} - \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right\} = \frac{n(n+1)}{4(n+2)}$$

23. 求 $\frac{2x^2}{1 \cdot 3} - \frac{3x^3}{2 \cdot 4} + \frac{4x^4}{3 \cdot 5} - \dots$ 無限項之和。

$$\text{〔解〕 } S = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1+3)x^2}{1 \cdot 3} - \frac{(2+4)x^3}{2 \cdot 4} + \frac{(3+5)x^4}{3 \cdot 5} - \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left[x \left\{ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right\} + \frac{1}{x} \left\{ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right\} - 1 + \frac{x}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[x \log(1+x) + \frac{1}{x} \log(1+x) - 1 + \frac{x}{2} \right] \text{ 由 309 章}$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \log(1+x) + \frac{1}{4} x - \frac{1}{2}$$

24. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \dots$ 爲級數，求其和。

$$\text{〔解〕 } S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) x^2 + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) x^n + \dots$$

$$= \left\{ x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \right\} - \frac{1}{x} \left\{ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right\} + 1$$

$$= -\log(1-x) + \frac{1}{x} \log(1-x) + 1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \log(1-x).$$

25. 求 $1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5x + 5 \cdot 6 \cdot 7x^2 + 7 \cdot 8 \cdot 9x^3 + \dots +$ 無限項之和。但 x 小於 1。

[解] 由 334 章其級數率為 $(1-x)^4$ 。

即得 $p = -4$, $q = 6$, $r = -4$, $a_0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $a_1 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$,

$a_2 = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, $a_3 = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$,

$$\therefore S = \frac{a_0 + (a_1 + pa_0)x + (a_2 + pa_1 + qa_0)x^2 + (a_3 + pa_2 + qa_1 + ra_0)x^3}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{6 + (60 - 4 \cdot 6)x + (210 - 4 \cdot 60 + 6 \cdot 6)x^2 + (504 - 4 \cdot 210 + 6 \cdot 60 - 4 \cdot 6)x^3}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{6 + 36x + 6x^2}{(1-x)^4}.$$

26. n 為正整數。則 $1 - 3n + \frac{3n(3n-3)}{1 \cdot 2} - \frac{3n(3n-4)(3n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$
 $= 2(-1)^n$ 。試證之。

[證] $S = (1 - 3n + 1 - 1) + \frac{(3n-2) + 2(3n-3)}{1 \cdot 2} - \frac{(3n-3) + 3(3n-4)(3n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
 $+ \dots = 1 - (3n-1) + \frac{(3n-2)(3n-3)}{1 \cdot 2} + \frac{(3n-3)(3n-4)(3n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$
 $= \left\{ 1 - (3n-3) + \frac{(3n-4)(3n-5)}{1 \cdot 2} - \dots \right\}.$

又 $(1+x)(1+x^3)^{-1} = (1-x+x^2)^{-1} = 1 + x(1-x) + x^2(1-x)^2 + \dots$
 $+ x^r(1-x)^r + \dots$ 即 $(1+x)(1-x^3+x^6-\dots) = 1 + x + x^2(1-1) + x^3\left(1 - \frac{2}{1}\right)$
 $+ x^r \left\{ 1 - (r-1) + \frac{(r-2)(r-3)}{1 \cdot 2} - \dots \right\} + \dots$ 於此兩邊比較 x^{3n} 及 x^{3n-2} 之係數。

$$(-1)^n = 1 - (3n-1) + \frac{(3n-2)(3n-3)}{1 \cdot 2} - \dots \text{及}$$

$$-(-1)^n = 1 - (3n-3) + \frac{(3n-4)(3n-5)}{1 \cdot 2} - \dots \text{由是}$$

$$S = (-1)^n - \{-(-1)^n\} = 2(-1)^n.$$

27. a_1, a_2, a_3, \dots 爲正整數, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ 爲發級數, 則

$\frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)} + \frac{a_3}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)} + \dots$ 爲斂級數等於 1.

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } S_n &= \left\{ 1 - \frac{1}{a_1+1} \right\} + \left\{ \frac{1}{a_1+1} - \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)} \right\} + \dots \\ &+ \left\{ \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_{n-1}+1)} - \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)}. \end{aligned}$$

惟以 $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)$ 爲發級數, 因比 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 爲大也, 故至無限項爲無限大. $\therefore S_\infty = 1$.

28. $\frac{1^m}{2^{m+s}} + \frac{2^m}{3^{m+s}} + \frac{3^m}{4^{m+s}} + \dots + \frac{n^m}{(n+1)^{m+s}} + \dots$ 若 $x > 1$, 則爲斂級數, 若 $x < 1$, 則爲發級數.

$$\text{〔證〕 第 } n \text{ 項} = \frac{n^m}{(n+1)^{m+s}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m (n+1)^s}$$

但 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$, 其 $n = \infty$ 則爲 1^m , 其值有限, 故原級數視其第 n 項 $\frac{1}{(n+1)^s}$ 級數之斂級數或發級數, 從而決定原級數爲斂級數或發級數, 而於第 n 項 $\frac{1}{(n+1)^s}$ 之級數, 由 272 章而知 $x > 1$, 即爲斂級數, 而 $x < 1$, 則爲發級數.

29. $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ 爲發級數, 則

$\frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_1+u_2} + \dots + \frac{u_n}{u_1+u_2+\dots+u_{n-1}} + \dots$ 亦爲發級數.

〔證〕 設第二級數爲 $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots$ 則

$$1 + v_1 = \frac{u_1 + u_2}{u_1}, \quad 1 + v_2 = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{u_1 + u_2}, \quad \dots, \quad 1 + v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}}$$

$$\text{由是 } (1+v_1)(1+v_2)\dots(1+v_n) = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{u_1}$$

又由 337 章 $(1+v_1)(1+v_2)\cdots(1+v_n) < e^{v_1+v_2+\cdots+v_n}$

故 $(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\cdots$ 若為發級數，則 $v_1+v_2+v_3+\cdots$ 亦為發級數，即如題所言。

30. 問 x 之值如何，則其無限積 $(1+a)(1+ax)(1+ax^2)(1+ax^3)\cdots$ 為有限值。

[解] 由 337 章， $a+ax+ax^2+ax^3+\cdots$ 若為斂級數，則

$(1+a)(1+ax)(1+ax^2)\cdots$ 亦為斂級數，但須 $x < 1$ ，則

$a+ax+ax^2+\cdots$ 為斂級數。

由是所求 x 之值，必小於 1。

31. v_n 常為有限值而大於 1， n 雖增至無限時，其值要近於 1，則兩無限積 $v_1v_2v_3v_4\cdots$ 及 $v_1^1v_2^2v_3^3v_4^4\cdots$ 或俱為有限，或俱為無限。

[證] 由題意， $v_1 > v_2 > v_3 > v_4 \cdots$ 故

$$v_1v_2v_3v_4\cdots < v_1^1v_2^2v_3^3v_4^4\cdots \quad (1)$$

及 $(v_1v_2v_3v_4\cdots)^2 > v_1^1v_2^2v_3^3v_4^4\cdots \quad (2)$

由 (1) $v_1^1v_2^2v_3^3v_4^4\cdots$ 為有限，則 $v_1v_2v_3v_4\cdots$ 為有限。

由 (2) $v_1^1v_2^2v_3^3v_4^4\cdots$ 為有限，則 $v_1v_2v_3v_4\cdots$ 為有限。

又由 (1) $v_1v_2v_3v_4\cdots$ 為無限，則 $v_1^1v_2^2v_3^3v_4^4\cdots$ 為無限。

由 (2) $v_1^1v_2^2v_3^3v_4^4\cdots$ 為無限，則 $v_1v_2v_3v_4\cdots$ 為無限。

32. 試驗次之級數為斂級數與否。

$$(1) \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^3}{4^4} + \cdots + \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} + \cdots$$

$$(2) \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}} + \cdots$$

$$(3) \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} + \cdots + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)(2n+2)} + \cdots$$

$$(4) \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n(2n+1)} + \cdots$$

$$(5) \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \cdots$$

〔解〕 (1) $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ 將 n 任何增大而 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 要

不能大於 e 。由是 $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} > \frac{1}{n+1} \frac{1}{e}$ 。即 $e \sum \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} > \sum \frac{1}{n+1}$ 。

但 $\sum \frac{1}{n+1}$ 爲發級數。故原級數亦爲發級數。

(2) $e^n = 1 + n + \frac{n^2}{2} + \dots \therefore e^n > n$, 即 $e > n^{\frac{1}{n}}$ 。

由是 $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}} > \frac{1}{e} \sum \frac{1}{n}$ 。但 $\sum \frac{1}{n}$ 爲發級數。故原級數爲發級數。

(3) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+3)(2n+4)} \div \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)(2n+2)}$
 $= \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+4)}$

$\therefore 1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+4)} = \frac{6n+8}{(2n+3)(2n+4)}$

由是 $n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n \frac{6n+8}{(2n+3)(2n+4)} = \frac{6 + \frac{8}{n}}{\left(2 + \frac{3}{n}\right)\left(2 + \frac{4}{n}\right)}$

$$n = \infty = \frac{6}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

故由 337 章。而知爲斂級數。

(4) $U_n = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdots 2n}$ 而 $u_n < \frac{1}{2n+1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)(2n+1)}$

$\therefore u_n > \frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}} > \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 故原級數爲斂級數。

(5) $n \left(1 + \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n \left\{ 1 - \frac{(a+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} \right\} = \frac{n(1+\gamma-a-\beta) + \gamma - a\beta}{n^2 + n(\gamma+1) + \gamma}$

$n = \infty$ 。則 $= 1 + \gamma - a - \beta$ 。

故此級數 $1 + \gamma - a - \beta > 1$ 。即 $\gamma > a + \beta$ 爲斂級數。而 $1 + \gamma - a - \beta < 1$ 。即 $\gamma < a + \beta$ 爲發級數。

若 $1 + \gamma - a - \beta = 0$ 。則 $1 + \gamma = a + \beta$ 。

$$\begin{aligned} \text{故 } u_{n+1} &= \frac{a(a+1)\cdots(a+n)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{1\cdot 2\cdots(n+1)(a+\beta)(a+\beta+1)\cdots(a+\beta+n)} \\ &= \frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{1\cdot 2\cdots n} \cdot \frac{(a+\beta)(a+\beta+1)\cdots(a+\beta+n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \times \frac{\beta(a+n)}{(n+1)(a+\beta+n)} \end{aligned}$$

$$\text{但 } \frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{1\cdot 2\cdots n} > \frac{(a+\beta)(a+\beta+1)\cdots(a+\beta+n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)},$$

$$\therefore u_{n+1} > \frac{\beta(a+n)}{(n+1)(a+\beta+n)}.$$

$$\text{同法 } u_n > \frac{\beta(a+n-1)}{n(a+\beta+n-1)} = \frac{\beta}{2n} \left(1 + \frac{a-\beta+n-1}{a+\beta+n-1} \right).$$

n 任意增加。其 $\frac{a-\beta+n-1}{a+\beta+n-1}$ 爲正。

$$\text{故 } \frac{\beta(a+n-1)}{n(a+\beta+n-1)} > \frac{\beta}{2n}.$$

$$\text{即 } n_n > \frac{\beta}{2n}.$$

由是 $\triangleright n_n > \triangleright \frac{\beta}{2n} > \triangleright \frac{\beta}{2n}$ 爲發級數。故原級數亦爲發級數。

第貳拾陸編

不 等 式

343. 不等式 (Inequalities) 兩正數量之等差中項。大於其等比中項。即 $\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$ 。此不等式之定理已述於232章。今將其他之諸定理屬於不等式者。進而考察之。

[注意] 是編代數式中之文字。皆表實數。且為正整數。

344. 不等式之原則 如次所述之原則。皆易於整明者 (即幾何學之公理)。

第一 $a > b$ 則 $a+x > b+x$, 及 $a-x > b-x$ 。

第二 $a > b$ 則 $-a < -b$ 。

第三 $a > b$ 則 $ma > mb$, 及 $-ma < -mb$ 。

第四 $a > b, a' > b', a'' > b'', \dots$ 則 $a+a'+a''+\dots > b+b'+b''+\dots$,
及 $aa'a''\dots > bb'b''\dots$ 。

第五 $a > b$ 則 $a^m > b^m$, 及 $a^{-m} < b^{-m}$ 。

[第一例] 試證 $a^3+b^3 > a^2b+ab^2$ 。

$a-b$ 為正。則 a^2-b^2 亦為正。 $a-b$ 為負。則 a^2-b^2 亦為負。故 $(a^2-b^2)(a-b)$ 必為正而大於0。惟 $(a^2-b^2)(a-b) = a^3+b^3-a^2b-ab^2$ 。
故 $a^3+b^3-a^2b-ab^2 > 0$, 即 $a^3+b^3 > a^2b+ab^2$ 。

[第二例] 試證 $a^m+a^{-m} > a^n+a^{-n}$ 。但 $m > n$ 。

$a > 1$ 則 a^m-a^n 及 $1-a^{-m-n}$ 俱為正。

$a < 1$ 則 a^m-a^n 及 $1-a^{-m-n}$ 俱為負。

故 $(a^m-a^n)(1-a^{-m-n}) > 0$, 即 $a^m-a^n-a^{-n}+a^{-m} > 0$,

$\therefore a^m+a^{-m} > a^n+a^{-n}$ 。

[第三例] 試證 $(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2) > (ll'+mm'+nn')^2$ 。
 惟 $(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2) - (ll'+mm'+nn')^2$
 $= (mn'-m'n)^2 + (nl'-n'l)^2 + (lm'-l'm)^2$ 。

此右邊常為正。∴ $(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2) > (ll'+mm'+nn')^2$ 。

[註] 如其 $mn'-m'n=0, nl'-n'l=0, lm'-l'm=0$ 。

則 $l/l'=m/m'=n/n'$ 。而 $(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2) = (ll'+mm'+nn')^2$ 。

345. 定理一 知兩正數量之和為常數。則其積惟兩數相等時為最大。

設已知兩正數量之和為 $2a$ 。而其兩數為 $a+x$ 及 $a-x$ 。則其積為 a^2-x^2 。而此積以 $x=0$ 為最大。即兩數之最大積 $= a^2$ 。

可見兩數 $a+x, a-x$ 其 $x=0$ 。而兩數各為 a 則其積最大。

上之定理。與 232 章之結果同。

即 a 及 b 兩數之和為 $a+b$ 。設其兩數各為 $\frac{a+b}{2}$ 。則其積為最大。

故 $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) > ab$ 。

即 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 。此即 232 章之結果也。

346. 定理二 知諸正數量之和。其積以諸數相等為最大。

設於積中之任何二因子 a 及 b 為不平等者。今從其和 $a+b$ 變為兩數之最大積。則 a 及 b 各以 $\frac{a+b}{2}$ 代之。由上之定理而得

$$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

因任何不等兩因子之和。變其兩因子為互相等。則其積增大。從可知諸數量連乘積之最大者。其諸數悉相等。

設積之諸因子為 a, b, c, \dots 各不平等。則

$$abcd \dots < \left(\frac{a+b+c+d+\dots}{n}\right)^n$$

故 $\frac{a+b+c+d+\dots}{n} > \sqrt[n]{abcd \dots}$

此結果爲若干項之等差中項及等比中項之關係。即於次所述之定理是也。

定理三 諸正數量之等差中項。比其等比中項爲大。

此定理已證明於前。茲更用別法證之如次。

$$\text{已證得 } ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad cd < \left(\frac{c+d}{2}\right)^2,$$

$$\therefore abcd < \left(\frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2}\right)^2.$$

惟以兩數爲 $\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}$ 。依定理壹得

$$\frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2} < \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) \right\}^2,$$

$$\text{即 } \frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2} < \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^2,$$

$$\therefore abcd < \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^4.$$

由同法得 $abcdefgh < \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^4 \left(\frac{e+f+g+h}{4} \right)^4,$

$$\text{即 } abcd efgh < \left(\frac{a+b+c+d}{4} \times \frac{e+f+g+h}{4} \right)^4,$$

惟 $\frac{a+b+c+d}{4} \times \frac{e+f+g+h}{4} < \left(\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8} \right)^2,$

$$\therefore abcd efgh < \left(\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8} \right)^8.$$

以此方法逐次推之。其 m 爲 2 之整數方乘。得 $abcd \dots$ 至 m 因子 $< \left(\frac{a+b+c+d+\dots \text{至 } m \text{ 項}}{m} \right)^m$ 。

而 n 非爲 2 之整數方乘。設 $m = n + r$ 。

今 n 數量 a, b, c, d, \dots 至 n 凡相等。設 $\frac{a+b+c+d+\dots \text{至 } n \text{ 項}}{n} = k,$

而 $n+r$ 爲 2 之整數方乘。

故 $abcd \dots$ 至 n 因子 $\times k \times k \times k \times \dots$ 至 r 因子

$$< \left(\frac{a+b+c+d+\dots+rk}{n+r} \right)^{n+r}$$

但 $a+b+c+d+\dots$ 至 n 項 $=nk$ 。以此代入上之不等式。爲

$$abcd\dots\text{至 } n \text{ 因子} \times k < \left(\frac{nk+rk}{n+r}\right)^{n+r}$$

即 $abcd\dots\text{至 } n \text{ 因子} \times k < k^{n+r}$ 。

兩邊各以 k 除之。得 $abcd\dots\text{至 } n \text{ 因子} < k^n$ 。

即證得 $abcd\dots\text{至 } n \text{ 因子} < \left(\frac{a+b+c+d+\dots\text{至 } n \text{ 項}}{n}\right)^n$ 。

例 題

1. 試證 $a^3+b^3+c^3 > 3abc$ 。

〔證〕 $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} > \sqrt[3]{(a^3, b^3, c^3)}$ 即 $> abc$ 。

2. 試證 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1} > n$ 。

〔證〕 $\frac{1}{n} \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \right) > \sqrt[n]{\left(\frac{a_1}{a_2} \times \frac{a_2}{a_3} \times \frac{a_3}{a_4} \times \dots \times \frac{a_n}{a_1} \right)} > \sqrt[n]{1}$ 。

3. 已知 a, b, c 爲正數量。而 $a-x, b-y$ 亦爲正。

求 $(a-x)(b-y)(cx+dy)$ 之最大值。

〔解〕 $cd(a-x)(b-y)(cx+dy)$ 。即 $(ac-cx)(bd-dy)(cx+dy)$ 。

而此三因子 $ac-cx, bd-dy, cx+dy$ 之和。爲 $ac+bd$ 。故此積之最大者。必

$$ac-cx = bd-dy = cx+dy = \frac{ac+bd}{3}$$

即知 $cd(a-x)(b-y)(cx+dy)$ 之最大值爲 $\left(\frac{ac+bd}{3}\right)^3$ 。

$\therefore (a-x)(b-y)(cx+dy)$ 之最大值爲 $\frac{1}{cd} \left(\frac{ac+bd}{3}\right)^3$ 。

$$\text{即 } \frac{(ac+bd)^3}{27cd}$$

4. x, y, z 不相等。而 $x+y+z$ 爲常數。求 $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ 爲最大之關係式。

〔解〕 $\frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma} = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{y}{\beta}\right)^\beta \left(\frac{z}{\gamma}\right)^\gamma = \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{x}{\alpha} \dots \frac{y}{\beta} \cdot \frac{y}{\beta} \cdot \frac{y}{\beta} \dots \frac{z}{\gamma} \cdot \frac{z}{\gamma} \cdot \frac{z}{\gamma} \dots$

$$\begin{aligned} & \text{而 } \frac{x}{a} + \frac{x}{a} + \frac{x}{a} + \cdots + \frac{y}{\beta} + \frac{y}{\beta} + \frac{y}{\beta} + \cdots + \frac{z}{\gamma} + \frac{z}{\gamma} + \frac{z}{\gamma} + \cdots \\ & = a \cdot \frac{x}{a} + \beta \cdot \frac{y}{\beta} + \gamma \cdot \frac{z}{\gamma} = x + y + z \text{ 爲常數。} \end{aligned}$$

故由定理二 $\left(\frac{x}{a}\right)^a \left(\frac{y}{\beta}\right)^\beta \left(\frac{z}{\gamma}\right)^\gamma$ 爲最大。則 $\frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ 。

即求得 $x^a y^\beta z^\gamma$ 爲最大之關係式爲 $\frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ 。

上之解法其 a, β, γ 爲整數。若爲分數。令其分母之最小公倍數爲 n 。則 $na, n\beta, n\gamma$ 爲整數。乃與前同法求 $x^{na} y^{n\beta} z^{n\gamma}$ 最大之關係式爲 $\frac{x}{na} = \frac{y}{n\beta} = \frac{z}{n\gamma}$ 。同以 $\frac{1}{n}$ 約之。即 $\frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ 。

347. 定理四 諸正數量之積爲常數。其和以諸數量相等爲最小。

先設不等兩數量爲 a 及 b 。則 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$ 。故 $a + b > \sqrt{ab} + \sqrt{ab}$ 。乃知不等兩數量 a 及 b 之和。恆大於同積之相等兩數量 \sqrt{ab} 及 \sqrt{ab} 之和。

今於諸數量中任取兩不等數 a 及 b 。而以 \sqrt{ab} 及 \sqrt{ab} 代之。則諸數量之積不變。而其和減小。

從可知諸數量之積爲常數。則以相等諸數量之和爲最小。即本定理之證。

348. 定理五 設 m 及 r 爲正整數。而 $m > r$ 。

$$\text{則 } \frac{a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m}{n} > \frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n} \times \frac{a_1^{m-r} + a_2^{m-r} + \cdots + a_n^{m-r}}{n}$$

按題式如合理。則次式亦必合理。

$$n(a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m) > (a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r) (a_1^{m-r} + a_2^{m-r} + \cdots + a_n^{m-r})$$

於此兩邊各減去 $a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m$ 則

$$(n-1)(a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m) > \sum (a_1^r a_2^{m-r} + a_1^{m-r} a_2^r)$$

前不等式之左邊爲 n 項之 n 倍共有 n^2 個文字。其右邊爲 n 項與 n 項之積。共有 n^2 項。而後之不等式之各邊。各減去 $a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m$ 之 n 項。故知其左邊有 $n^2 - n$ 即 $n(n-1)$ 個文字。其右邊有 $n(n-1)$ 項。

而其左邊取二文字及右邊取二項之組合。如次。

$\Delta (a_1^m + a_2^m - a_1^r a_2^{m-r} - a_1^{m-r} a_2^r) > 0$, 此式能合理。則題式亦為合理。

惟 $a_1^m + a_2^m - a_1^r a_2^{m-r} - a_1^{m-r} a_2^r = (a_1^r - a_2^r)(a_1^{m-r} - a_2^{m-r})$ 。

而 $a_1^r - a_2^r$ 及 $a_1^{m-r} - a_2^{m-r}$ 正則俱正。負則俱負。故兩同號相乘之積。必恆為正。

即 $\Delta (a_1^m + a_2^m - a_1^r a_2^{m-r} - a_1^{m-r} a_2^r) > 0$ 。即知題式為合理。

〔推論〕 從上之定理。

$$\frac{a_1^{m-r} + a_2^{m-r} + \dots + a_n^{m-r}}{n} > \frac{a_1^s + a_2^s + \dots + a_n^s}{n} \times \frac{a_1^{m-r-s} + a_2^{m-r-s} + \dots + a_n^{m-r-s}}{n}$$

令 $m-r-s=t$ 。則 $m=r+s+t$ 。而

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n} > \frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \times \frac{a_1^s + a_2^s + \dots + a_n^s}{n} \times \frac{a_1^t + a_2^t + \dots + a_n^t}{n}$$

又 $\alpha + \beta + \gamma + \dots = m$ 。則

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n} > \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \times \frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \dots + a_n^\beta}{n} \times \frac{a_1^\gamma + a_2^\gamma + \dots + a_n^\gamma}{n} \times \dots$$

即 $\frac{\Delta a_1^m}{n} > \frac{\Delta a_1^\alpha}{n} \cdot \frac{\Delta a_1^\beta}{n} \cdot \frac{\Delta a_1^\gamma}{n} \cdot \dots$

若 $\alpha = \beta = \gamma = \dots = 1$ 。則 $\frac{\Delta a_1^m}{n} > \left(\frac{\Delta a_1}{n}\right)^m$ 。

例 題

1. 試證 $3(a^3 + b^3 + c^3) > (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$ 。

〔證〕 由定理五 $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \times \frac{a + b + c}{3}$

故 $3(a^3 + b^3 + c^3) > (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$ 。

2. 試證 $a^5 + b^5 + c^5 > abc(a^2 + b^2 + c^2)$ 。

〔證〕 由定理五 $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{3} > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \times \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$

由定理五推論 $> \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \times \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ 。

惟由定理三 $> \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \times abc$.

$\therefore a^5 + b^5 + c^5 > abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

349. 定理六 a, b, c, \dots 及 a, β, γ, \dots 爲正數時。則

$$\left(\frac{aa + b\beta + c\gamma + \dots}{a + b + c + \dots}\right)^{a+b+c+\dots} > a^a \beta^b \gamma^c \dots$$

第壹 a, b, c, \dots 爲整數。而取 a 個 a, b 個 β, c 個 γ, \dots 由定理三。得

$$\frac{(a+a+a+\dots a \text{ 項}) + (\beta+\beta+\beta+\dots \beta \text{ 項}) + \dots}{a+b+c+\dots} > a+b+c+\dots \sqrt[a+b+c+\dots]{(a^a \beta^b \gamma^c \dots)}$$

$$\text{即 } \left(\frac{aa + b\beta + c\gamma + \dots}{a + b + c + \dots}\right)^{a+b+c+\dots} > a^a \beta^b \gamma^c \dots \quad (\text{A})$$

第貳若 a, b, c, \dots 非爲整數。取其分母之最小公倍數爲 m 。則 ma, mb, mc, \dots 爲整數。

$$\text{故 } \left(\frac{maa + mb\beta + \dots}{ma + mb + \dots}\right)^{ma+mb+\dots} > a^{ma} \beta^{mb} \dots,$$

$$\text{由是 } \left\{\frac{aa + b\beta + \dots}{a + b + \dots}\right\}^{a+b+\dots} > a^a \beta^b \dots,$$

推論壹 有 n 個文字 a, b, c, \dots 而 $a = \frac{1}{a}, \beta = \frac{1}{b}, \dots$

$$\text{由上之定理得 } \left\{\frac{n}{a+b+\dots}\right\}^{a+b+\dots} > \frac{1}{a^a b^b \dots},$$

$$\therefore \left\{\frac{a+b+\dots}{n}\right\}^{a+b+\dots} < a^a b^b \dots$$

推論貳 將 (A) 以 a^r 代 a, b^r 代 b, \dots

又以 a^{m-r} 代 a, b^{m-r} 代 β, \dots 而 $m > r$

$$\text{則 } \left\{\frac{a^m + b^m + \dots}{a^r + b^r + \dots}\right\}^{a^r + b^r + \dots} > (a^a b^b \dots)^{m-r} \quad (\text{B})$$

又以 a^r, b^r, \dots 代 a, b, \dots 又以 a^{t-r}, b^{t-r}, \dots 代 a, β, \dots 而 $t < r$ 。

$$\text{則 } \left\{\frac{a^t + b^t + \dots}{a^r + b^r + \dots}\right\}^{a^r + b^r + \dots} < \{a^a b^b \dots\}^{r-t},$$

$$\therefore \left\{\frac{a^r + b^r + \dots}{a^t + b^t + \dots}\right\}^{a^r + b^r + \dots} < \{a^a b^b \dots\}^{r-t} \quad (\text{C})$$

由是 $m-r$ 及 $r-t$ 俱爲正。或俱爲負。從 (B) 及 (C) 得

$$\left\{ \frac{a^m + b^m + \dots}{a^r + b^r + \dots} \right\}^{\frac{1}{m-r}} > \left\{ \frac{a^r + b^r + \dots}{a^t + b^t + \dots} \right\}^{\frac{1}{r-t}}$$

由是 $m > r > t$ 。則

$$(a^m + b^m + \dots)^{r-t} \times (a^r + b^r + \dots)^{t-m} \times (a^t + b^t + \dots)^{m-r} > 1. \quad (D)$$

如次爲 (D) 之特例。

$m > r$ ，而 $t=0$ ，則 $a^0 + b^0 + \dots = n$ 。變 (D) 爲

$$(a^m + b^m + \dots)^r \times (a^r + b^r + \dots)^{-m} \times n^m \times n^{-r} > 1.$$

$$\text{即 } \left\{ \frac{a^m + b^m + \dots}{n} \right\}^r > \left\{ \frac{a^r + b^r + \dots}{n} \right\}^m. \quad (E)$$

又 $t=0$ ， $m=1$ ，則 $m > r > t$ ，而 r 爲常分數。

$$\text{由 (E) 得 } \left\{ \frac{a+b+\dots}{n} \right\}^r > \frac{a^r + b^r + \dots}{n} \quad (F)$$

又 $t=0$ ， $r=1$ ，則 $m > 1$ 。由 (E) 得

$$\frac{a^m + b^m + \dots}{n} > \left\{ \frac{a+b+\dots}{n} \right\}^m. \quad (G)$$

今若 $m=1$ ， $r=0$ ，則 t 必爲負數。由 (D) 得

$$(a+b+\dots)^{-t} \times n^{t-1} \times (a^t + b^t + \dots) > 0,$$

$$\therefore \frac{a^t + b^t + \dots}{n} > \left\{ \frac{a+b+\dots}{n} \right\}^t. \quad (H)$$

由 (F)，(G)，(H) 若非爲常分數，則

$$\frac{a^s + b^s + \dots}{n} > \left(\frac{a+b+\dots}{n} \right)^s.$$

若爲常分數。則 $\frac{a^s + b^s + \dots}{n} < \left(\frac{a+b+\dots}{n} \right)^s.$

350. 雜例 次示雜例數條以爲是編之總結。

[第一例] 不等數量 a_1, a_2, \dots 而

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ 則 } \frac{s}{s-a_1} + \frac{s}{s-a_2} + \dots + \frac{s}{s-a_n} > \frac{n^2}{n-1}.$$

不等數量 a_1, a_2, \dots, a_n 。由定理二

$$\frac{1}{n} \left(\frac{s}{s-a_1} + \frac{s}{s-a_2} + \dots + \frac{s}{s-a_n} \right) > \sqrt[n]{\frac{s^n}{(s-a_1)(s-a_2)\dots(s-a_n)}}$$

$$\text{及 } \frac{(s-a_1) + (s-a_2) + \dots + (s-a_n)}{n} > \sqrt[n]{\{(s-a_1)(s-a_2)\dots(s-a_n)\}}.$$

但 $(s-a_1) + (s-a_2) + \dots + (s-a_n) = ns - s_0$ 故將上之兩不等式相乘得

$$\frac{1}{n} \left(\frac{s}{s-a_1} + \frac{s}{s-a_2} + \dots + \frac{s}{s-a_n} \right) \times \frac{ns-s}{n} > \sqrt[n]{s^n} = s.$$

$$\text{即 } \frac{n-1}{n^2} \left(\frac{s}{s-a_1} + \frac{s}{s-a_2} + \dots + \frac{s}{s-a_n} \right) > 1.$$

[第二例] 設 $a+b+c+d=3s$, 則 $abcd > 81(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$.
何則. 由定理二 $\frac{(s-b) + (s-c) + (s-d)}{3} > \sqrt[3]{\{(s-b)(s-c)(s-d)\}}$.

$$\text{但 } (s-b) + (s-c) + (s-d) = 3s - (b+c+d) = 3s - (3s-a) = a,$$

$$\therefore a > 3\sqrt[3]{\{(s-b)(s-c)(s-d)\}},$$

$$\text{由同理 } b > 3\sqrt[3]{\{(s-c)(s-d)(s-a)\}},$$

$$c > 3\sqrt[3]{\{(s-a)(s-b)(s-d)\}},$$

$$d > 3\sqrt[3]{\{(s-a)(s-b)(s-c)\}},$$

$$\text{由乘法得 } abcd > 81(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

[第三例] 設不等正數量 x, y, z , 則 $\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} \right)^{x+y+z} > x^x y^y z^z$.

第壹若 x, y, z 為整數. 則以 $x^2+y^2+z^2$ 個數量中 x 有 x 個, y 有 y 個, z 有 z 個, 由定理三

$$\frac{(x+x+\dots+x \text{ 項}) + (y+y+\dots+y \text{ 項}) + (z+z+\dots+z \text{ 項})}{x+y+z} > (x^x y^y z^z)^{\frac{1}{x+y+z}}.$$

$$\therefore \frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} > (x^x y^y z^z)^{\frac{1}{x+y+z}}.$$

第貳若 x, y, z 為分數. 而其分母之最小公倍數為 m . 則 mx, my, mz 為整數.

由是與前之同理而得次之不等式.

$$\left(\frac{m^2 x^2 + m^2 y^2 + m^2 z^2}{mx + my + mz} \right)^{mx+my+mz} > (mx)^{mx} (my)^{my} (mz)^{mz}$$

即
$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{m(s+y+z)} \times m^{m(x+y+z)} > (x^s y^s z^s)^m \times m^{m(a_1+y+s)}$$

由此定理任何諸數量可由同法證得。

即
$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2+\dots}{x+y+z}\right)^{s+y+z+\dots} > x^s y^s z^s \dots$$

例題三十五

於次之諸例。凡所表之文字。皆為正數量。試證之。

1. $y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 < xyz(x+y+z)$ 。

[證] $y^2z^2 + z^2x^2 > 2\sqrt{(y^2z^2 \cdot z^2x^2)} = 2xyz^2$ 。

同法 $z^2x^2 + x^2y^2 > 2x^2yz$, $x^2y^2 + y^2z^2 > 2xy^2z$ 。

由加法 $2(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) > 2xyz(x+y+z)$ 。

若 $x=y=z$ 則 $y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 = xyz(x+y+z)$ 。

2. $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\dots) < (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\dots)^2$

[證] $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\dots)$

$= \Sigma a_1^2b_1^2 + \Sigma (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2)$ 。

但 $a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 > 2a_1b_1a_2b_2$

$\therefore (a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\dots)$

$> \Sigma a_1^2b_1^2 + 2\Sigma a_1b_1a_2b_2 > (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\dots)^2$

若 $a_1=a_2=\dots$ 及 $b_1=b_2=\dots$ 則 $(\Sigma a_1^2)(\Sigma b_1^2) = (\Sigma a_1b_1)^2$ 。

3. $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\dots)\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\dots\right) < (a_1+a_2+a_3+\dots)^2$

[證] $\Sigma a_1b_1 \Sigma \frac{a_1}{b_1} = \Sigma a_1^2 + \Sigma a_1a_2\left(\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_1}{b_2}\right) > \Sigma a_1^2 + 2\Sigma a_1a_2 = (\Sigma a_1)^2$ 。

若 $a_1=a_2=\dots$ $b_1=b_2=\dots$ 則 $\Sigma a_1b_1 \Sigma \frac{a_1}{b_1} = (\Sigma a_1)^2$ 。

4. $a^5+b^5 < a^5b+ab^5$ 。

[證] $(a^5-b^5)(a-b) > 0$ 。

5. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) < 9$ 。

[證] $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} > 3\sqrt{\left(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c}\right)}$, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} > 3\sqrt{\left(\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{c}{z}\right)}$ 。

$$\therefore \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) > 9.$$

若 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, 則 $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) = 9.$

6. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) < 9abc.$

[證] $a+b+c > 3\sqrt[3]{abc}$, $a^2+b^2+c^2 > 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$

由乘法得 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) > 9abc.$

7. $a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc < 4abcd.$

[證] $\frac{a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc}{4} > \sqrt[4]{(a^2cd \cdot b^2da \cdot c^2ab \cdot d^2bc)} = abcd.$

8. $(bc+ca+ab)^2 < 3abc(a+b+c).$

[證] 由例題 1. $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 > abc(a+b+c).$

又 $(bc+ca+ab)^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 + 2abc(a+b+c)$
 $> abc(a+b+c) + 2abc(a+b+c) = 3abc(a+b+c).$

9. $a^4 + b^4 + c^4 < abc(a+b+c).$

[證] $b^4 + c^4 > 2b^2c^2$, $c^4 + a^4 > 2c^2a^2$, $a^4 + b^4 > 2a^2b^2.$

$\therefore 2(b^4 + c^4 + a^4) > 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) > 2abc(a+b+c).$

10. $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 < abcd(a+b+c+d).$

[證] $\frac{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}{4} > \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^5$ 由定理二 $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 > abcd.$

$\therefore \frac{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}{4} > \frac{a+b+c+d}{4} \cdot abcd.$

11. $x > a$, 則 $\frac{a-x}{a+x} < \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}.$

[證] $a-x > 0$, $\therefore (a-x)\{(a+x)^2 - (a^2+x^2)\} = 0.$

即 $(a+x)(a^2-x^2) - (a^2+x^2)(a-x) > 0$, $\therefore \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2} = \frac{a-x}{a+x} > 0.$

12. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}.$

[證] $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 2\sqrt{\frac{1}{bc}}$, $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} > 2\sqrt{\frac{1}{ca}}.$

由加法即得所證之式。

13. $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a$. 則 $na > (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 > a$.

[證] $\frac{a}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} > \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2$

$\therefore na > (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$.

又 $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 > x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a$.

14. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 各大於 a . 而 $(x_1 - a)(x_2 - a) \dots (x_n - a) = b^n$.

則 $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ 之最小值為 $(a+b)^n$. 但 a, b 為正數.

[證] $x_1 = y_1 + a, x_2 = y_2 + a, \dots$ 則 $y_1 y_2 \dots y_n = b^n$.

由題意求 $(a+y_1)(a+y_2) \dots (a+y_n)$ 之最小值. 先於 y_1, y_2, \dots 中任意取不等二數量 y_r, y_s . 而定 $y_r y_s = y^2$. 則 $y_r + y_s > 2\sqrt{y_r y_s} = 2y$.

由是 $(a+y_r)(a+y_s) = a^2 + y^2 + 2a(y_r + y_s) > a^2 + y^2 + 2ay = (a+y)^2$.

故於 $(a+y_1)(a+y_2) \dots (a+y_n)$ 中任意取兩因子 $a+y_r, a+y_s$. 而以其等比中項 $a+y$ 代之. 則仍不失其 $y_1 y_2 \dots y_n = b^n$ 之關係. 而其積減小. 由是知諸因子各相等為 $a+y$. 則其積為最小. 故 $y^n = b^n$ 所求之最小值為 $(a+y)^n = (a+b)^n$.

15. $\frac{(a+b)xy}{ay+bx} \triangleright \frac{ax+by}{a+b}$.

[證] $x^2 + y^2 \triangleleft 2xy$. $\therefore ab(x^2 + y^2) \triangleleft 2abxy$. 以 $xy(a^2 + b^2)$ 加於兩邊.

則 $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) \triangleleft xy(a+b)^2$. 即 $(ax+by)(ay+bx) \triangleleft xy(a+b)^2$.

16. $\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \triangleleft \frac{9}{a+b+c}$.

[證] $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \right) \triangleleft \sqrt[3]{\left(\frac{2}{b+c} \cdot \frac{2}{c+a} \cdot \frac{2}{a+b} \right)}$.

又 $\frac{1}{3} \{ (b+c) + (c+a) + (a+b) \} \triangleleft \sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

由乘法 $\frac{1}{9} \left(\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \right) (2a+2b+2c) \triangleleft 2$.

17. $\frac{3}{b+c+d} + \frac{3}{c+d+a} + \frac{3}{d+a+b} + \frac{3}{a+b+c} \triangleleft \frac{16}{a+b+c+d}$.

[證] 如前例 $\frac{1}{4} \triangleright \frac{3}{b+c+d} \triangleleft \sqrt[4]{II} \frac{3}{b+c+d}$ 及 $\frac{1}{4} \triangleright \frac{b+c+d}{3} \triangleleft \sqrt[4]{II} \frac{b+c+d}{3}$

相乘. 即得所證之式.

18. $a > b > c$, 則 $\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^a < \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^b$.

[證] $\log\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^a = a\left\{\log\left(1+\frac{c}{a}\right) - \log\left(1-\frac{c}{a}\right)\right\} = 2a\left(\frac{c}{a} + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{a^3} + \dots\right)$
 $= 2\left(c + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{a^2} + \dots\right)$. 又 $\log\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^b = 2\left(c + \frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{b^2} + \dots\right)$

惟 $\frac{c^3}{a^2} < \frac{c^3}{b^2}$ 由是 $\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^a < \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^b$.

19. $x^2 = y^2 + z^2$ 因 $n \geq 2$ 而定 $x^n \geq y^n + z^n$

[證] x 大於 y 及 z , 故因 $n-2 \geq 0$, 從而定 $x^{n-2} - y^{n-2} \geq 0$
 及 $x^{n-2} - z^{n-2} \geq 0$. 由是 $x^2 y^2 (x^{n-2} - y^{n-2}) + x^2 z^2 (x^{n-2} - z^{n-2}) \geq 0$
 即 $x^n (y^2 + z^2) - x^2 (y^n + z^n) \geq 0 \therefore x^n \geq y^n + z^n$.

20. $(abcd)^{\frac{1}{p+q+r+s}}$ 爲在 $a^{\frac{1}{p}}, b^{\frac{1}{q}}, c^{\frac{1}{r}}, d^{\frac{1}{s}}$ 之最大及最小值之間. 證明之.

[證] 設 $a^{\frac{1}{p}}$ 爲最大. 而令 $a^{\frac{1}{p}} = \lambda$, 則 $a = \lambda^p \therefore b^{\frac{1}{q}} < \lambda$.
 即 $b < \lambda^q$. 同法 $c < \lambda^r, d < \lambda^s$. 由是 $abcd < \lambda^{p+q+r+s}$.

$\therefore (abcd)^{\frac{1}{p+q+r+s}} < \lambda = a^{\frac{1}{p}}$ 又 $d^{\frac{1}{s}}$ 爲最小, 則 $(abcd)^{\frac{1}{p+q+r+s}} > d^{\frac{1}{s}}$.

21. $1+x+x^2+\dots+x^{2n} < (2n+1)x^n$.

[證] $\frac{1+x+x^2+\dots+x^{2n}}{2n+1} < \sqrt[2n+1]{(1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \dots \cdot x^{2n})}$
 $< \sqrt[2n+1]{x^{1+2+\dots+2n}} = \sqrt[2n+1]{x^{n(2n+1)}} = x^n$.

22. n 爲正整數而 $a > 1$, 則 $n \frac{a^{2n+1}+1}{a^{2n}-1} > \frac{a}{a-1}$.

[證] 從 $(a^{2n}-1)(a-1) > 0$, 而得 $a^{2n+1}+1 > a^{2n}+a$,

從 $(a^{2n-1}-1)(a^2-1) > 0$, 而得 $a^{2n+1}+1 > a^{2n-1}+a^2$.

.....

從 $(a-1)(a^{2n}-1) > 0$, 而得 $a^{2n+1}+1 > a+a^{2n}$. 由加法

$2n(a^{2n+1}+1) > 2a(a^{2n-1}+a^{2n-2}+\dots+a+1) = \frac{2a(a^{2n}-1)}{a-1}$.

23. $(m+1)(m+2)(m+3)\dots(m+n) < (m+n)^{2n-1}$.

[證] $(m+1)(m+2n-1) < (m+n)^2$, $(m+2)(m+2n-2) < (m+n)^2$.
 $(m+3)(m+2n-3) < (m+n)^2$, $(m+2n-1)(m+1) < (m+n)^2$.

由乘法 $\{(m+1)(m+2)(m+3) \cdots (m+2n-1)\}^2 < (m+n)^{2(2n-1)}$.

24. $abc < (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

[證] $a^2 > a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c)$,

$b^2 > (b+c-a)(b-c+a)$, $c^2 > (c+a-b)(c-a+b)$.

由乘法 $a^2 b^2 c^2 > (b+c-a)^2 (c+a-b)^2 (a+b-c)^2$.

25. $abcd < (b+c+d-2a)(c+d+a-2b)(d+a+b-2c)(a+b+c-2d)$.

[證] $\sqrt[3]{\{(c+d+a-2b)(d+a+b-2c)(a+b+c-2d)\}}$

$$< \frac{1}{3} \{ (c+d+a-2b) + (d+a+b-2c) + (a+b+c-2d) \} = a.$$

同法 $\sqrt[3]{\{(b+c+d-2a)(d+a+b-2c)(a+b+c-2d)\}} < b$,

$$\sqrt[3]{\{(b+c+d-2a)(c+d+a-2b)(d+a+b-2d)\}} < c,$$

$$\sqrt[3]{\{(b+c+d-2a)(c+d+a-2b)(d+a+b-2c)\}} < d.$$

由乘法 $(b+c+d-2a)(c+d+a-2b)(d+a+b-2c)(a+b+c-2d) < abcd$.

26. $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n < (n-1)^n (s-a_1)(s-a_2) \cdots (s-a_n)$,

但 $(n-1)s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.

[證] $\sqrt[n-1]{\{(s-a_2)(s-a_3) \cdots (s-a_n)\}} < \frac{(s-a_2) + (s-a_3) + \cdots + (s-a_n)}{n-1} = \frac{a_1}{n-1}$.

同法 $\sqrt[n-1]{\{(s-a_3)(s-a_4) \cdots (s-a_n)(s-a_1)\}} < \frac{a_2}{n-1}$.

.....

$$\sqrt[n-1]{\{(s-a_1)(s-a_2) \cdots (s-a_{n-1})\}} < \frac{a_n}{n-1}.$$

由乘法 $(s-a_1)(s-a_2) \cdots (s-a_n) < \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(n-1)^n}$.

27. a, b, c 爲不等數量, 其二數之和, 要比他一數爲大.

則 $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{1}{a+b+c}$.

[證] $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > 3 \sqrt[3]{\left(\frac{1}{b+c-a} \cdot \frac{1}{c+a-b} \cdot \frac{1}{a+b-c} \right)}$
 $> \frac{3}{\sqrt[3]{\{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\}}}$

$$> \frac{\sqrt[3]{\{a^2-(b-c)^2\}\{b^2-(c-a)^2\}\{c^2-(a-b)^2\}}}{\sqrt[3]{(a^2b^2c^2)}} = \sqrt[3]{abc}$$

而 $\sqrt[3]{abc} < \frac{1}{3}(a+b+c)$. 故 $\frac{9}{a+b+c}$.

28. a, b, c 爲不等數量。則

$$(b-c)^2(b+c-a) + (c-a)^2(c+a-b) + (a-b)^2(a+b-c) > 0.$$

(證) $a > b > c$ 。則 $c+a-b, a+b-c$ 爲正。故 $b+c-a$ 若爲正。則原數爲正數可知。若 $b+c-a$ 爲負。而以 $-x$ 代之。則 $a=b+c+x$ 。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -(b-c)^2x + (-b-x)^2(2c+x) + (c+x)^2(2b+x) \\ &= x\{b^2+c^2+8bc-(b-c)^2\} + 2\{x^3+2x^2(b+c)+bc(b+c)\} \\ &= 10bcx + \text{正數量} > 0. \end{aligned}$$

29. a, b, c 爲不等正數量。

$$\text{則 } a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b) > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{(證) 原式} &= a^2(a-b)(a-c) - b^2(a-b)\{a-c-(a-b)\} \\ &\quad - c^2(a-c)\{a-b-(a-c)\} \\ &= (a-b)(a-c)(a^2-b^2-c^2) + b^2(a-b)^2 + c^2(a-c)^2 \\ &= (a-b)(a-c)\{a^2-(b-c)^2\} + b^2(a-b)^2 + c^2(a-c)^2 - 2bc(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(a-c)\{a^2-(b-c)^2\} + \{b(a-b)-c(a-c)\}^2. \end{aligned}$$

上式之 $a > b > c$ 卽爲正。

30. x 之值不等於 1 而 p, q, r 各不相等。

$$\text{則 } px^{p-r} + qx^{q-r} + rx^{r-p} > p+q+r.$$

$$\begin{aligned} \text{(證) } &\frac{1}{p+q+r} \{ (x^{p-r} + x^{q-r} + \dots p \text{ 項}) + (x^{r-p} + x^{r-q} + \dots q \text{ 項}) \\ &\quad + (x^{p-q} + x^{q-p} + \dots r \text{ 項}) \} > \{ x^{p(q-r)} \cdot x^{q(r-p)} \cdot x^{r(p-q)} \}^{\frac{1}{p+q+r}} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{卽 } px^{p-r} + qx^{q-r} + rx^{r-p} > p+q+r.$$

$$31. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} > \sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

$$\text{(證) 惟 } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \right\}^2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

$$32. \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}.$$

〔證〕 惟 $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdots \frac{4n-1}{4n+1} < \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{13}{15} \cdots \frac{4n+1}{4n+3}$

$\therefore \left\{ \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdots \frac{4n-1}{4n+1} \right\}^2 > \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdots \frac{4n-1}{4n+1} \cdot \frac{4n+1}{4n+3} = \frac{3}{4n+3}$

33. x, y, z 爲不等數量。試從 $ax^a + by^b + cz^c = d$ 之關係。求 $x^ay^bz^c$ 之最大值。

〔解〕 $ax^a + by^b + cz^c = d$ 。則 ax^a, by^b, cz^c 以 $ax^a = by^b = cz^c$ 爲最大。故 $abcx^ay^bz^c$ 之最大值爲 $\left(\frac{1}{3}d\right)^3$ 。由 $x^ay^bz^c$ 之最大值爲 $\frac{d^3}{27abc}$ 。

34. $n > 2$ 。則 $(n!)^2 > n^n$ 。

〔證〕 $1 \cdot n = n, 2(n-1) > n, \dots, r\{n - (r-1)\} > n, n \cdot 1 = n$ 。由乘法 $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)\{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1\} > n \cdot n \cdot n \cdots n$ 因子。
 $\therefore (n!)^2 > n^n$ 。

35. n 爲正。則 $(1+x)^n(1+x^n) > 2^{n+1}x^n$ 。

〔證〕 $1+x > 2\sqrt{x}$ 。即 $(1+x)^n > 2^n \sqrt{x^n}$ 。又 $1+x^n > 2\sqrt{x^n}$ 。
 $\therefore (1+x)^n(1+x^n) > (2^n \sqrt{x^n})(2\sqrt{x^n}) = 2^{n+1}x^n$ 。

36. 於奇數項之等比級數。其奇數項之等差中項。比偶數項之等差中項爲大。試證明之。

〔證〕 於 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{2n-1} + ar^{2n}$ 。

由題意欲證明 $\frac{a + ar^2 + \cdots + ar^{2n}}{n+1} > \frac{ar + ar^3 + \cdots + ar^{2n-1}}{n}$ 。

即 $\frac{1+r^2+\cdots+r^{2n}}{r+r^3+\cdots+r^{2n-1}} > \frac{n+1}{n}$ 。但 $F(n) = \frac{1+r^2+\cdots+r^{2n}}{r+r^3+\cdots+r^{2n-1}}$

則 $F(n+1) + \frac{1}{F(n)} = \frac{1+r^2+\cdots+r^{2n}+r^{2n+2}}{r+r^3+\cdots+r^{2n-1}+r^{2n+1}} + \frac{r+r^3+\cdots+r^{2n-1}}{1+r^2+\cdots+r^{2n}}$
 $= \frac{(1+r^2)(1+r^2+\cdots+r^{2n})}{r(1+r^2+r^4+\cdots+r^{2n})} = r + \frac{1}{r} > 2$ 。

故 $F(n+1) > 2 - \frac{1}{F(n)}$ 。惟 $F(n) > \frac{n+1}{n}$ 。

故 $F(n+1) > 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1}$ 。然 $F(1) > \frac{1+1}{1}$ 。

故 $F(2) > \frac{2+1}{2} \cdots$ 。故 $F(n) > \frac{n+1}{n}$ 。

37. 等差級數及等比級數。有同一之初項。同一之末項。及同一之項數。則 *A.P.* 之和。恆比 *G.P.* 之和為大。

(證) $1+r^{n-1}=1+r^{n-1}$, $(1-r)(1-r^{n-2})>0$.

即 $1+r^{n-1}-r-r^{n-2}>0$. $\therefore 1+r^{n-1}>r+r^{n-2}$.

同法 $1+r^{n-1}>r^2+r^{n-3}, \dots, 1+r^{n-1}>r^{n-2}+r^2$, $1+r^{n-1}=r^{n-1}+1$.

由加法 $n(1+r^{n-1})>2(1+r+r^2+\dots+r^{n-1})$.

由是 $\frac{n}{2}(a+ar^{n-1})>a+ar+ar^2+\dots+ar^{n-1}$.

38. 從已知 n 正數量中。取 r 個作等比中項。其諸等比中項之等差中項為 p_r 。則 $p_1>p_2>p_3>\dots>p_n$.

(證) 從 n 正整量 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 中取 r 個。其取法有 ${}_nC_r$ 個。

故 $P_r = \frac{1}{{}_nC_r} \{ \sqrt[r]{a_1 a_2 \dots a_r} + \sqrt[r]{a_2 a_3 \dots a_{r+1}} + \dots \}$.

及 $P_{r-1} = \frac{1}{{}_nC_{r-1}} \{ r \sqrt[r-1]{a_1 a_2 \dots a_{r-1}} + r \sqrt[r-1]{a_2 a_3 \dots a_{r+1}} + \dots \}$. 求於

P_{r-1} 中含有 r 個特別文字。如 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 而得 ${}_nC_{r-1}$ 個。即 r 個。以此諸項比較如次。

$r \sqrt[r-1]{a_1 a_2 \dots a_{r-1}} + r \sqrt[r-1]{a_2 a_3 \dots a_r} + r \sqrt[r-1]{a_3 a_4 \dots a_{r+1}} + \dots$

$> r \sqrt[r-1]{r \sqrt[r-1]{a_1 a_2 \dots a_{r-1}} \cdot r \sqrt[r-1]{a_2 a_3 \dots a_r} \cdot r \sqrt[r-1]{a_3 a_4 \dots a_{r+1}} \cdot \dots}$

$> r \sqrt[r-1]{r^{r-1} a_1^{r-1} a_2^{r-1} \dots a_{r-1}^{r-1}} = r \sqrt[r-1]{a_1 a_2 \dots a_r}$

上之不等式之第一邊。為於 n 字中所含之特別文字。而於此 r 字中。取 $r-1$ 個。以為因子。而有 r 項之式。逐次如斯取之。則於其各項中所不含有之文字。為有 $n-r+1$ 個。乃以此 $n-r+1$ 中之一字。以次合於 $r-1$ 之因子而取 r 字。則含於總項數中所有同一 $r-1$ 因子之項。為有 $n-r+1$ 倍。

例於 a, b, c, d, e 內取特別之 4 字。如 $abcd, acde, bcde$ 。則凡含有 acd 之因子者。可取諸 $abcd$ 內。又可取諸 $acde$ 內。故所合同一之三因子。其項數有 $5-3=2$ 倍。

由是從此不等式之第 1 項。為從 n 字中逐次取特別之 r 字。而各次於 r 字取 $r-1$ 個以為因子。其項之總數。等於從 n 字取 $r-1$ 個以為因子之項數之 $n-r+1$ 倍。又與此不等式之最後一項相應之式。為從 n 字中取 r 字以為因子之項數之 r 。故

$$(n-r+1) \{ \sqrt[r-1]{a_1 a_2 \cdots a_{r-1}} + \sqrt[r-1]{a_2 a_3 \cdots a_r} + \cdots \}$$

$$> r \{ \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_r} + \sqrt{a_2 a_3 \cdots a_{r+1}} + \cdots \}$$

即 $\frac{1}{r} \{ \sqrt[r-1]{a_1 a_2 \cdots a_{r-1}} + \sqrt[r-1]{a_2 a_3 \cdots a_r} + \cdots \}$

$$> \frac{1}{n-r+1} \{ \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_r} + \sqrt{a_2 a_3 \cdots a_{r+1}} + \cdots \}.$$

但 $\frac{{}_n C_r}{{}_n C_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$ 。即 $\frac{1}{{}_n C_{r-1}} : \frac{1}{{}_n C_r} = \frac{1}{r} : \frac{1}{n-r+1}$ 。

以此代入前之不等式。得 $p_{r-1} > p_r$ 。

39. $S = a + b + c + \cdots$ 。則 $\left(\frac{s-a}{n-1}\right)^a \left(\frac{s-b}{n-1}\right)^b \left(\frac{s-c}{n-1}\right)^c \cdots < \left(\frac{s}{n}\right)^s$ 。

但 a, b, c, \cdots 爲 n 個之不等數量。

(證) $\sqrt{\left\{ \left(\frac{s-a}{n-1}\right)^a \left(\frac{s-b}{n-1}\right)^b \left(\frac{s-c}{n-1}\right)^c \cdots \right\}} < \frac{1}{s} \left\{ a \left(\frac{s-a}{n-1}\right) + b \left(\frac{s-b}{n-1}\right) \right.$

$$\left. + c \left(\frac{s-c}{n-1}\right) + \cdots \right\} < \frac{s^2 - a^2 - b^2 - c^2 - \cdots}{(n-1)s}$$

$$< \frac{s}{n} - \frac{(n-s) \sum a^2 + \sum (a-b)^2}{n(n-1)s} < \frac{s}{n}.$$

$\therefore \left(\frac{s-a}{n-1}\right)^a \left(\frac{s-b}{n-1}\right)^b \left(\frac{s-c}{n-1}\right)^c < \left(\frac{s}{n}\right)^s$ 。

40. n 爲正整數。則 $2^{n(n+1)} > (n+1)^{n+1} \left(\frac{n}{1}\right)^n \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \cdots \left(\frac{2}{n-1}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right)^1$ 。

(證) $2^n = (1+1)^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{n}{n}$ 。

又 $\frac{1}{n+1} \left\{ 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{n}{n} \right\} > \left\{ 1 \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdots \frac{n}{n} \right\}^{\frac{1}{n+1}}$ 。

即 $\frac{1}{n+1} (2^n)^{\frac{1}{n+1}} > \left\{ \frac{n^n (n-1)^{n-1} (n-2)^{n-2} \cdots 2^{2^1} 1^1}{1^n \cdot 2^{n-1} \cdot 3^{n-2} \cdots (n-1)^2 n^1} \right\}^{\frac{1}{n+1}}$ 。

$\therefore 2^{n(n+1)} > (n+1)^{n+1} \left(\frac{n}{1}\right)^n \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \cdots \left(\frac{2}{n-1}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right)^1$ 。

第貳拾柒編 (上)

連分數

351. 連分數 [Continued Fractions] 分數式之形。

有如 $a \pm \frac{b}{c} \pm \frac{d}{e} \pm \frac{f}{g} \pm \dots$ 者。謂之連分數。

但如上之記法。頗費紙幅。故記其式如次。

$$a \pm \frac{b}{c \pm \frac{d}{e \pm \frac{f}{g} \pm \dots}}$$

352. 漸近分數 [Convergent Fraction] 連分數式。從前向後。任於何處截止之。而截取之各分數。謂之連分數之漸近分數。

例如 $a \pm \frac{b}{c \pm \frac{d}{e \pm \frac{f}{g} \pm \dots}}$ 其

$$\text{第一漸近分數} = \frac{a}{1}, \text{第二漸近分數} = a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c},$$

$$\text{第三漸近分數} = a \pm \frac{b}{c \pm \frac{d}{e}} = a \pm \frac{be}{c \pm d} = \frac{ac \pm ad \pm be}{ce \pm d}, \text{而第 } r \text{ 漸近分}$$

數。以 $\frac{p_r}{q_r}$ 表之。故 $\frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}$ 謂之第三及第四漸近分數。

又分數 $\frac{a}{1}, \frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \dots$ 稱連分數之元 (Elements)。順次稱為第一元, 第二元, 第三元, \dots

353. 定理 連分數 $a + \frac{b}{c} + \frac{d}{e} + \dots$ 其 a, b, c, d, e, \dots

皆為正者。則各次之漸近分數。比連分數大小相間。

何則。第一漸近分數 $\frac{a}{1}$ 。截去 $\frac{b}{c} + \frac{d}{c} + \dots$ 諸正數。故其比原連分數爲小可知。

第二漸近分數 $a + \frac{b}{c}$ 。其分母 c 比 $c + \frac{d}{c} + \dots$ 爲小。故 $a + \frac{b}{c}$ 比原連分數爲大。

又第三漸近分數 $a + \frac{b}{c} + \frac{d}{c}$ 。其分母 $c + \frac{d}{c}$ 比 $c + \frac{d}{c} + \dots$ 爲大。故 $a + \frac{b}{c} + \frac{d}{c}$ 比原連分數爲小。

從可知第四漸近分數。比原連分數爲大。以下順次比原連分數。大小相間。

354. 漸近分數之計算法 求漸近分數。同於算術。從其最下項計算之。

$$\text{例 } \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2 b_2}{b_2 b_3 + a_3}} = \frac{a_1 b_2 b_3 + a_1 a_3}{b_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_3}$$

但上之方法。祇能用以專求某次之漸近分數。若欲求累次漸近分數。仍須一一從其最下項以求之。其計算之法。甚爲繁冗。

然連分數之任何次漸近分數。與其前之漸近分數。有一定之關係。而累次之漸近分數。可從前之漸近分數推得之。示明如次。

355. 連次兩漸近分數 求其關係。

於連分數 $a + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots$ 其最初之三漸近分數爲 $\frac{a}{1}$, $\frac{ab_1 + a_1}{b_1}$ 及 $\frac{ab_1 b_2 + aa_2 + a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}$ 。

今記此第三漸近分數。爲 $\frac{(ab_1 + a_1)b_2 + (a)a_2}{b_1 b_2 + 1 \cdot a_2}$ 。

由是可見以最後元之分母乘前一次漸近分數之分母子。又以最後元之分子乘更前一次漸近分數之分母子。乃取乘得之兩分母及兩分子各相加。卽爲本次漸近分數之分母子。

如第三元之分數。爲 $\frac{a_2}{b_2}$ 卽爲最後元。先以最後元之分母 b_2 乘第

二次漸近分數 $\frac{ab_1+a_1}{b_1}$ 得 $\frac{(ab_1+a_1)b_2}{b_1b_2}$ 。又以最後元之分子 a_2 乘第一漸近分數 $\frac{a}{1}$ 得 $\frac{aa_2}{a_2}$ 。乃取乘得之兩分母相加。得 $b_1b_2+a_2$ 為第三漸近分數之分母。取乘得之兩分子相加。得 $(ab_1+a_1)b_2+aa_2$ 為第三漸近分數之分子。

又可見既得第二漸近分數。則以下各次之漸近分數。可由同法求得之。而此法對於任何之漸近分數。皆能合理。證明如次。

設於第 n 漸近分數。其最後之元為 $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ 。而 $\frac{p_r}{q_r}$ 為第 r 漸近分數。則第 n 漸近分數為 $\frac{p_n}{q_n}$ 。第 $n+1$ 漸近分數為 $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 。用前法假定。

$$p_n = b_{n-1}p_{n-1} + a_{n-1}p_{n-2} \quad q_n = b_{n-1}q_{n-1} + a_{n-1}q_{n-2} \quad (1)$$

$$p_{n+1} = b_n p_n + a_n p_{n-1} \quad q_{n+1} = b_n q_n + a_n q_{n-1} \quad (2)$$

但第 $n+1$ 漸近分數。可以 $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a_n}{b_n}$ 。即 $\frac{a_{n-1}b_n}{b_{n-1}b_n + a_n}$ 代第 n 漸近分數之最後元 $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ 以求之。

即於 (1) 用 $a_{n-1}b_n$ 代其 a_{n-1} 。用 $b_{n-1}b_n + a_n$ 代其 b_{n-1} 。則得

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (b_{n-1}b_n + a_n)p_{n-1} + a_{n-1}b_n p_{n-2} \\ &= b_n(b_{n-1}p_{n-1} + a_{n-1}p_{n-2}) + a_n p_{n-1} \\ &= b_n p_n + a_n p_{n-1} \end{aligned}$$

由同法。 $q_{n+1} = b_n q_n + a_n q_{n-1}$ 所得與 (2) 同。

由是證得此法對於第 n 漸近分數如為合理。則對於第 $n+1$ 漸近分數。亦為合理。然第三漸近分數。於前亦既證明其為合理。則由歸納法知第四、第五及以下任何之漸近分數。亦皆合理。

推論壹 連分數 $a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots$ 其

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{及} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

推論貳 連分數 $\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} - \dots$ 其

$$p_n = b_n p_{n-1} - a_n p_{n-2} \quad \text{及} \quad q_n = b_n q_{n-1} - a_n q_{n-2}$$

例題

試由連次漸近分數之關係。如上之法則。求次各連分數之第五漸近分數。

1. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}$ 答 $\frac{73}{43}$

[解] $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}, \frac{p_2}{q_2} = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{5}{3}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{3 \cdot 3 + 1} = \frac{17}{10}$

$\therefore \frac{p_5}{q_5} = \frac{4 \cdot 17 + 5}{4 \cdot 10 + 3} = \frac{73}{43}$

2. $\frac{1}{\frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}} + \dots$ 答 $\frac{29}{140}$

[解] $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{4}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{4 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{5}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{4 \cdot 1 + 1}{4 \cdot 5 + 4} = \frac{5}{24}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{1 \cdot 5 + 1}{1 \cdot 24 + 5} = \frac{6}{29}$

$\therefore \frac{p_5}{q_5} = \frac{4 \cdot 6 + 5}{4 \cdot 29 + 24} = \frac{29}{140}$

3. $\frac{1}{\frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{5}}}}}$ 答 $\frac{597}{1522}$

[解] $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{2 + \frac{3}{3}} = \frac{3}{8}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{4 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{4 \cdot 8 + 3 \cdot 2} = \frac{15}{38}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{5 \cdot 15 + 4 \cdot 3}{5 \cdot 38 + 4 \cdot 8} = \frac{87}{222}$

$\therefore \frac{p_5}{q_5} = \frac{6 \cdot 87 + 5 \cdot 15}{6 \cdot 222 + 5 \cdot 38} = \frac{597}{1522}$

4. $3 + \frac{2}{5 + \frac{2}{5 + \frac{2}{5}}}$ 答 $\frac{2627}{779}$

5. $\frac{1}{\frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \frac{5}{1}}}}}$ 答 $\frac{28}{48}$

[解] $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{1}} = \frac{1}{3}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{1 \cdot 3 + 3 \cdot 1} = \frac{4}{6}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{1 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{1 \cdot 6 + 4 \cdot 3} = \frac{8}{18}$

$\therefore \frac{p_5}{q_5} = \frac{1 \cdot 8 + 5 \cdot 4}{1 \cdot 18 + 5 \cdot 6} = \frac{28}{48}$

將此答數 $\frac{28}{48}$ 約小之得 $\frac{7}{12}$ 。然於運算中間約其分母子。則不能合。試再演算如次。

$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{1}} = \frac{1}{3}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{1 \cdot 3 + 3 \cdot 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{1 \cdot 3 + 4 \cdot 3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$$\therefore \frac{p_2}{q_2} = \frac{1.2+5.2}{1.5+5.3} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \text{ 即誤.}$$

更用算術繁分數求簡之法。如次之所得。必為正答。

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1} = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{4}{6} = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{9}{6}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{10}{14} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \text{ 可知 } \frac{3}{5} \text{ 決非正答.}$$

$$6. \quad \frac{4}{4} + \frac{3}{3} + \frac{2}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots \text{ 答 } \frac{120}{144}$$

$$[\text{解}] \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{4}{4}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{4}{4+\frac{1}{2}} = \frac{12}{15}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{2.12+2.4}{2.15+2.4} = \frac{32}{38}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{1.32+1.12}{1.38+1.15} = \frac{44}{53}$$

$$\therefore \frac{p_5}{q_5} = \frac{2.44+1.32}{2.53+1.38} = \frac{120}{144}$$

$$7. \quad \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \dots \text{ 答 } \frac{62}{63}$$

$$[\text{解}] \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{3}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{2}{3-\frac{2}{3}} = \frac{6}{7}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{3.6-2.2}{3.7-2.3} = \frac{14}{15}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{3.14-2.6}{3.15-2.7} = \frac{30}{31}$$

$$\therefore \frac{p_5}{q_5} = \frac{3.30-2.14}{3.31-2.15} = \frac{62}{63}$$

$$8. \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{1} - \dots \text{ 答 } \frac{5}{3}$$

$$[\text{解}] \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{1.4-1.1}{1.3-1.1} = \frac{3}{2}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{4.3-1.4}{4.2-1.3} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \frac{p_5}{q_5} = \frac{1.8-1.3}{1.5-1.2} = \frac{5}{3}$$

356. 連分數之作法 連分數之形。如 $a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \dots$

其 a, b, c, d, \dots 為正整數者。則此連分數有特別之性質。而此等性質。可從有理分數作成諸元有限之連分數。以考察之。

設 $\frac{m}{n}$ 為已知分數。而 m 大於 n 。則 n 除 m 。以 a 為其商。而以 p 為

其餘。即得 $\frac{m}{n} = a + \frac{p}{n}$

乃用 p 除 n ，以 b 爲其商，而以 q 爲其餘，則 $\frac{p}{n} = \frac{1}{\frac{n}{p}} = \frac{1}{b + \frac{q}{p}}$ 。

又 q 除 p ，以 c 爲其商，而以 r 爲其餘，則 $\frac{q}{p} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{1}{c + \frac{r}{q}}$ 。

由是 $\frac{m}{n} = a + \frac{p}{n} = a + \frac{1}{b + \frac{q}{p}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{r}{q}}}$ 。

即 $\frac{m}{n} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}$

m 及 n 無有公約數者，則如上之法則，遞次轉除，其次第所得之餘數 p, q, r, \dots 必漸減小，至最後之餘數必爲 1，故此連分數之元爲有限。

例 $\frac{55}{24}$ 變爲連分數。

$$\frac{55}{24} = 2 + \frac{7}{24}, \quad \frac{7}{24} = \frac{1}{\frac{24}{7}} = \frac{1}{3 + \frac{3}{7}}, \quad \frac{3}{7} = \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$$

$$\therefore \frac{55}{24} = 2 + \frac{7}{24} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{3}{7}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

若 m 及 n 爲有公約數者，其所作之連分數，與其既約分數所作之連分數相同。

即 $\frac{m}{n} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}$

$$\text{例 } \frac{mk}{nk} = a + \frac{pk}{nk}, \quad \frac{pk}{nk} = \frac{1}{\frac{nk}{pk}} = \frac{1}{b + \frac{qk}{pk}}$$

$$\frac{qk}{pk} = \frac{1}{\frac{pk}{qk}} = \frac{1}{c + \frac{rk}{qk}}, \dots$$

$$\therefore \frac{mk}{nk} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}$$

例 試將 $\frac{491}{1224}$ 及 3.14159 變為漸近分數。而求其第四漸近分數。

答 $\frac{71}{177}, \frac{355}{113}$

$$[\text{解}] \quad \frac{491}{1224} = \frac{1}{2 + \frac{242}{491}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{7}{242}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{34} + \frac{4}{7}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{34} + \frac{1}{1} + \frac{3}{4}$$

$$\text{由是 } \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{34.2 + 1}{34.5 + 2} = \frac{69}{172},$$

$$\therefore \frac{p_4}{q_4} = \frac{1.69 + 2}{1.172 + 5} = \frac{71}{177}$$

次求 3.14159 之第四漸近分數。

$$3.14159 = \frac{314159}{100000} = 3 + \frac{14159}{100000} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{887}{14159}} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{33}{854}$$

$$\text{由是 } \frac{p_1}{q_1} = 3, \quad \frac{p_2}{q_2} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{15.22 + 3}{15.7 + 1} = \frac{333}{106},$$

$$\therefore \frac{p_4}{q_4} = \frac{1.333 + 22}{1.106 + 7} = \frac{355}{113}$$

[註] 直徑 1 之圓周為 3.14159。故直徑 113 之圓周殆近於 355。
連分數之性質。及關於連分數之理論。詳述於第七卷中。

查理斯密司氏
霍爾氏, 乃托氏
大代數學講義

第柒卷

第貳拾柒編(續)

連分數續

357. 漸近分數之性質 連分數 $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$

而以 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲其第 n 之漸近分數, 茲示其性質如次。

[第一] 由 355 章

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2}}{(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) q_{n-1}}$$

去分母得 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = - (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$

由同理順次得

$$p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1} = - (p_{n-2} q_{n-3} - p_{n-3} q_{n-2}),$$

$$p_{n-2} q_{n-3} - p_{n-3} q_{n-2} = - (p_{n-3} q_{n-4} - p_{n-4} q_{n-3}),$$

$$\dots\dots\dots = - \dots\dots\dots$$

$$p_3 q_2 - p_2 q_3 = - (p_2 q_1 - p_1 q_2)$$

但 $p_2 q_1 - p_1 q_2 = (a_1 a_2 + 1) - a_1 a_2 = 1$

由是 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = - (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$
 $= (-1)^2 (p_{n-2} q_{n-3} - p_{n-3} q_{n-2})$
 $= (-1)^3 (p_{n-3} q_{n-4} - p_{n-4} q_{n-3}) = \dots\dots\dots$
 $= (-1)^{n-3} (p_3 q_2 - p_2 q_3)$
 $= (-1)^{n-2} (p_2 q_1 - p_1 q_2) = (-1)^n \div (-1)^2 = (-1)^n$

$$\therefore p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{及 } \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \dots \dots \dots (2)$$

推論 連分數 $\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$ 爲小於1者，則有次之關係。

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}, \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$$

此關係如 (1) 及 (2)。但 $p_2 q_1 - p_1 q_2 = -1$ 。

〔第二〕 p_n 及 q_n 之各公約數，亦爲 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$ 之公約數。而 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$ 爲 ± 1 。由是知 p_n 及 q_n 無公約數。故連分數皆爲已約分數。

〔第三〕 $F \equiv a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}} + \frac{1}{a_n + \dots}$ 則於其第 n 漸近分數。

$$\frac{p_n}{q_n} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}} + \frac{1}{a_n} \text{ 而以 } \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \dots}} \text{ 代其 } \frac{1}{a_n} \text{ 即可得 } F.$$

故於 $\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$ 以 $a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \dots}$ 代其 a_n 。則得

$$F = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \dots} \right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \dots} \right) q_{n-1} + q_{n-2}}$$

$$\text{即 } F = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2} + \left(\frac{1}{a_{n+1} + \dots} \right) p_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2} + \left(\frac{1}{a_{n+1} + \dots} \right) q_{n-1}} = \frac{p_n + \lambda p_{n-1}}{q_n + \lambda q_{n-1}}$$

但 λ 係代 $\frac{1}{a_{n+1} + \dots}$ 。即 λ 之值爲小於1之正數量。

$$\text{是由 } F - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n + \lambda p_{n-1}}{q_n + \lambda q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\lambda(p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1})}{q_n(q_n + \lambda q_{n-1})} = \frac{(-1)^{n-1} \lambda}{q_n(q_n + \lambda q_{n-1})}$$

$$\text{又 } F - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n + \lambda p_{n-1}}{q_n + \lambda q_{n-1}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_{n-1}(q_n + \lambda q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}(q_n + \lambda q_{n-1})}$$

今 λ 小於1。而 q_n 大於 q_{n-1} 。由是知 $F - \frac{p_n}{q_n}$ 比 $F - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 爲小。

故任何之漸近分數。比原連分數。必較前之漸近分數比原連分數為近。其漸近分數次數愈多。則愈切近於原連分數。

推論 $F - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}\lambda}{q_n(q_n + \lambda q_{n-1})}$ 及 $F - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}(q_{n-1} + \lambda q_n)}$ 。以 $(-1)^{n-1}$ 與 $(-1)^n$ 其正負各異。故 $F - \frac{p_n}{q_n}$ 與 $F - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 其一為正者。其他必為負。若 F 大於 $\frac{p_n}{q_n}$ 。則必小於 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 。若 F 小於 $\frac{p_n}{q_n}$ 。則必大於 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 。從可知 F 在於 $\frac{p_n}{q_n}$ 與 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 之間。

例 $\frac{491}{1224}$ 之漸近分數為 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{69}{172}$, $\frac{71}{177}$ 。

而 $\frac{1}{2} > \frac{491}{1224} > \frac{2}{5}$, $\frac{2}{5} < \frac{491}{1224} < \frac{69}{172}$ 及 $\frac{69}{172} > \frac{491}{1224} > \frac{71}{177}$ 。

〔第四〕以任何之分數 $\frac{x}{y}$ 比原連分數。而較其第 n 漸近分數為近者。則此分數之分母子。比第 n 漸近分數之分母子為大。

即 $x > p_n$ 及 $y > q_n$ 。以 $\frac{p_n}{q_n}$ 比 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 較近於原連分數。而從第三之推論。知 F 在於此兩漸近分數之間。

即 $\frac{p_n}{q_n} > F > \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 或 $\frac{p_n}{q_n} < F < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 。

而 $\frac{x}{y}$ 比 $\frac{p_n}{q_n}$ 及 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 更近於連分數。

故知 $\frac{x}{y}$ 必在 $\frac{p_n}{q_n}$ 與 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 之間。即 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{x}{y} < \frac{p_n}{q_n}$ 。

即 $\frac{p_{n-1}y - q_{n-1}x}{q_{n-1}y} < \frac{p_n q_n - p_{n-1} q_{n-1}}{q_{n-1} q_n}$ 。

即 $\frac{p_{n-1}y - q_{n-1}x}{q_{n-1}y} < \frac{1}{q_n q_{n-1}}$ $\therefore q_n(p_{n-1}y - q_{n-1}x) < y$ 。

$p_{n-1}y - q_{n-1}x$ 為整數量。故 $y > q_n$ 。

而 $\frac{x}{y}$ 為在於 $\frac{p_n}{q_n}$ 與 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 之間。凡 p_n 比 p_{n-1} 大。

q_n 比 q_{n-1} 大。今 y 比 q_n 大。故知 x 比 p_n 爲大。

〔第五〕由第三而知 $F \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{1}{q_{n-1}(q_n + \lambda q_{n-1})}$ 。而 λ 爲小於 1 之正數量。則是 $q_n + q_{n-1}$ 比 $q_n + \lambda q_{n-1}$ 爲大。

$$\text{故 } \frac{1}{q_{n-1}(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_{n-1}(q_n + \lambda q_{n-1})}.$$

$$\text{即 } F \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} > \frac{1}{q_{n-1}(q_n + q_{n-1})}.$$

$$\text{又以 } F \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

故任何之漸近分數與原連分數之差。爲在於 $\frac{1}{d_1 d_2}$ 與 $\frac{1}{d_1(d_1 + d_2)}$ 之間。但 d_1 及 d_2 爲其漸近分數之分母及其次之漸近分數之分母。

例 $\frac{491}{1224}$ 之漸近分數爲 $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{69}{172}, \dots$

而 $\frac{491}{1224} - \frac{2}{5}$ 爲在於 $\frac{1}{5 \times 172}$ 與 $\frac{1}{5(5+172)}$ 之間。

〔第一例〕 p_r/q_r 爲連分數 $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$ 之第 r 項。

$$\text{則 } \frac{p_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \dots}} + \frac{1}{a_2 + a_1}.$$

$$\text{何則 } p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad p_{n-1} = a_{n-1} p_{n-2} + p_{n-3}, \quad \dots = \dots$$

$$p_2 = a_2 p_1 + 1, \quad \text{又 } p_1 = a_1.$$

$$\begin{aligned} \text{由是 } \frac{p_n}{q_{n-1}} &= a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{p_{n-3}}{p_{n-2}}} \\ &= a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{p_{n-4}}{p_{n-3}}}} = \dots = \dots \\ &= a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \dots}} + \frac{1}{a_2 + a_1}. \end{aligned}$$

$$\text{由同法 } \frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \dots}} + \frac{1}{a_2 + a_1}.$$

[第二例] 以 $n+1$ 除 n 至 n 商為 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \dots$ 但 n 為正整數。

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n-1}{n}}, \quad \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2 - \frac{n-2}{n-1}}, \quad \dots$$

$$\text{而 } \frac{2}{3} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} \quad \text{由是 } \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n-1}{n}} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \dots} \text{ 至 } n \text{ 商。}$$

[第三例] $\frac{p_r}{q_r}$ 為 $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots$ 之第 r 漸近分數。則 $p_{n+1} = aq_n$,

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a}{b + \frac{p_n}{q_n}} = \frac{aq_n}{bq_n + p_n}$$

惟 $q_{n+1} = bq_n + aq_{n-1}$, 若 $aq_{n-1} = p_n$, 則 $p_{n+1} = aq_n$ 。

今 $p_1 = a$, $q_1 = b$, $p_2 = ab$, $q_2 = b^2 + a$, $p_3 = a(b^2 + a)$, \dots

則是 $aq_1 = p_2$, $aq_2 = p_3$, 由此遞推得 $aq_3 = p_4 \dots$ 至 $aq_n = p_{n+1}$ 即為本例之證。

例 題 三 十 六

1. 連分數之各分子為 1 而以 $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}$ 為其連續三漸近分數。

則 $p_3 - p_1 : q_3 - q_1 = p_2 : q_2$ 。

[證] 由 355 推論一, $p_3 = Ap_2 + p_1$ 及 $q_3 = Aq_2 + q_1$

$$\therefore p_3 - p_1 = Ap_2 \quad \text{及} \quad q_3 - q_1 = Aq_2 \quad \therefore p_3 - p_1 : q_3 - q_1 = p_2 : q_2$$

2. 以 $\frac{p_n}{q_n}$ 為 $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots$ 之第 n 漸近分數。

則 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n$ 。

[證] $p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}$ 及 $q_n = b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2}$ 。

$$\begin{aligned} \text{故 } p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} &= (b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}) q_{n-1} - (b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2}) p_{n-1} \\ &= -a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\text{同理 } p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2} = -a_{n-1}(p_{n-2}q_{n-3} - p_{n-3}q_{n-2})$$

..... =

$$p_2q_1 - q_2p_1 = -a_1a_2$$

$$\begin{aligned} \text{由是 } p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} &= (-1)^2 a_n a_{n-1} (p_{n-2}q_{n-3} - p_{n-3}q_{n-2}) = \dots\dots \\ &= (-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots\dots a_n. \end{aligned}$$

3. 將兩種尺度比較。先使其零點相合。第一尺之第百分點。若與第二尺之第六十三分點相合。則其第二尺之第十七分點。必與第一尺之第二十七分點近合。試證明之。

[證] 求 $63/100$ 之漸近分數。

$$\text{即 } \frac{63}{100} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{其漸近分數爲 } \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{5}{3}, \frac{12}{8}, \frac{17}{19}, \frac{17}{27}.$$

由是 $\frac{63}{100}$ 即為 27 與 17 近合。

$$4. \text{ 如 } a_1, a_2, \dots\dots a_n \text{ 爲調和級數。則 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \dots\dots - \frac{1}{2} - \frac{a_2}{a_1}.$$

$$[\text{證}] \text{ 由題意 } \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} = \dots\dots = \frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}.$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-2}}{2a_{n-2} - a_{n-1}} = \frac{1}{2} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}.$$

$$\text{同理 } \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{1}{2} - \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}, \quad \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = \frac{1}{2} - \frac{a_{n-3}}{a_{n-4}}, \dots\dots \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2} - \frac{a_2}{a_1}.$$

$$\text{由是 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \dots\dots - \frac{a_2}{a_1}.$$

$$5. \quad na_1 + \frac{1}{na_2} + \frac{1}{na_3} + \frac{1}{na_4} + \dots\dots \equiv n \left(a_1 + \frac{1}{n^2 a_2} + \frac{1}{n^2 a_3} + \frac{1}{n^2 a_4} + \dots\dots \right)$$

$$[\text{證}] \quad \frac{1}{na_r} + \frac{1}{na_{r+1}} + \dots\dots = u_r \text{ 則}$$

$$na_1 + \frac{1}{na_2} + \frac{1}{na_3} + \frac{1}{na_4} + \dots\dots = na_1 + \frac{1}{na_2 + \frac{1}{na_3 + u_4}}$$

$$= n \left(a_1 + \frac{1}{n^2 a_2 + \frac{1}{n a_3 + u_4}} \right) = n \left(a_1 + \frac{1}{n^2 a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{u_4}{n} \right).$$

$$\frac{u_4}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n a_4 + \frac{1}{n a_5 + u_5}} \right) = \frac{1}{n^2 a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{u_5}{n} + \dots$$

$$\therefore n a_1 + \frac{1}{n a_2} + \frac{1}{n a_3} + \frac{1}{n a_4} + \dots = n \left(a_1 + \frac{1}{n^2 a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{n^2 a_4} + \dots \right)$$

〔注意〕本題之恆同式以 n 除之。即得

$$\left(n a_1 + \frac{1}{n a_2} + \frac{1}{n a_3} + \frac{1}{n a_4} + \dots \right) \div n = a_1 + \frac{1}{n^2 a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{n^2 a_4} + \dots$$

$$6. P \equiv \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} + \dots + \frac{k}{k+1} \quad \text{及} \quad Q \equiv \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \dots + \frac{h}{k}$$

$$\text{則 } P(a+Q+1) = a+Q.$$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } Q_2 &= \frac{a}{b}, \quad P_2 = \frac{a}{a} + \frac{b}{b+1} = \frac{1}{1} + \frac{b}{a(b+1)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{a+Q_2} = \frac{a+Q_2}{a+Q_2+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{a}{b} + \frac{b}{c}, \quad P_3 = \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c+1} = \frac{1}{1} + \frac{b}{ba+c+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{a} + \frac{ca}{b(c+1)} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{a+Q_3} = \frac{a+Q_3}{a+Q_3+1}. \end{aligned}$$

今假定於 P_{n-1}, Q_{n-1} 亦有此關係 $P_{n-1} = \frac{a+Q_{n-1}}{a+Q_{n-1}+1}$.

$$\begin{aligned} \text{則 } Q_n &= \frac{a}{b+Q_{n-1}}, \quad \text{而 } P_n = \frac{a}{a+P_{n-1}} = \frac{a}{a+1} + \frac{1}{b+Q_{n-1}} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{a} + \frac{a}{b+Q_{n-1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{a+Q_n} = \frac{a+Q_n}{a+Q_n+1}. \end{aligned}$$

即於 P_{n-1}, Q_{n-1} 此關係為合理。則於 P_n, Q_n 亦必為合理。

$$\text{故一般 } P = \frac{a+Q}{a+Q+1}, \quad \text{即 } P(a+Q+1) = a+Q.$$

$$7. \text{ 求 } \frac{n}{n} + \frac{n-1}{n+n-1} + \frac{n-2}{n+n-2} + \dots + \frac{2}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \text{ 之值。} \quad \text{答 } \frac{n+1}{n+2}.$$

$$\text{〔解〕 } u_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} = \frac{1+1}{1+2}, \quad u_2 = \frac{2}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2+2}$$

今假定 $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ 。則 $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+1+u_n} = \frac{n+1}{n+1+\frac{n+1}{n+2}} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)+2}$ 。

u_n 若為合理。則 u_{n+1} 亦為合理。故即得所求之值。

8. n 為偶數或奇數。則 $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{1} - \frac{1}{4} - \dots$ 至 n 商 $= \frac{2n}{n+1}$ 。

[證] $u_1 = \frac{1}{1} = \frac{2 \cdot 1}{1+1}$, $u_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 2}{2+1}$ 。今假定 $u_n = \frac{2n}{n+1}$ 。

則 $u_{n+2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4 - u_n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4 - \frac{2n}{n+1}} = \frac{2(n+2)}{(n+2)+1}$ 。

由是 u_n 為合理。則 u_{n+2} 亦為合理。而 u_1 為合理。故對於 u_3, u_5, \dots 等之奇數項。皆為合理。又 u_2 為合理。故對於 u_4, u_6, \dots 等之偶數項。皆為合理。

9. 遞昇連分數 $\frac{b_1+b_2+b_3+\dots}{a_1 a_2 a_3 \dots}$ 等於 $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \frac{b_3}{a_1 a_2 a_3} + \dots$

[證] $\frac{b_1+b_2}{a_1 a_2} = \frac{b_1 + \frac{b_2}{a_2}}{a_1} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2}$ 。

又 $\frac{b_1+b_2+b_3}{a_1 a_2 a_3} = \frac{b_1 + \frac{b_2+b_3}{a_2}}{a_1} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \frac{b_3}{a_1 a_2 a_3} + \dots$ 以下順次推之。

10. 以 p_n 為連分數 $\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$ 第 n 漸近分數之分子。試證其線關係為從級數 $p_1^2, p_2^2, p_3^2, \dots$ 之各連續四項而成之者。又問此關係如何。

[解] 於本題所謂線關係 (Linear Relation) 者。即一次之恆同式也。(譯者補註) 線為幾何學上之名詞。於代數學。謂之一次式。

$$p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2} \text{ 及 } p_{n+1} = b_{n+1} p_n + a_{n+1} p_{n-1}$$

$$\text{由是 } (p_n - b_n p_{n-1})^2 = a_n^2 p_{n-2}^2 \text{ 及 } (b_{n+1} p_n + a_{n+1} p_{n-1})^2 = p_{n+1}^2$$

$$\therefore b_{n+1} a_{n+1} (p_n - b_n p_{n-1})^2 + b_n (b_{n+1} p_n + a_{n+1} p_{n-1})^2$$

$$= b_{n+1} a_{n+1} a_n^2 p_{n-2}^2 + b_n p_{n+1}^2$$

$$\text{即 } b_{n+1} a_{n+1} (p_n^2 - 2b_n p_n p_{n-1} + b_n^2 p_{n-1}^2)$$

$$+ b_n (b_{n+1}^2 p_n^2 + 2a_{n+1} b_{n+1} p_n p_{n-1} + a_{n+1}^2 p_{n-1}^2)$$

$$= b_{n+1} a_{n+1} a_n^2 p_{n-2}^2 + b_n p_{n+1}^2$$

即 $b_n p_{2n+1}^2 - (b_{n+1} a_{n+1} + b_{n+1}^2 b_n) p_{2n}^2$
 $- a_{n+1} b_n (b_{n+1} b_n + a_{n+1}) p_{2n-1}^2 + a_{n+1} b_{n+1} a_n^2 p_{2n-2}^2 = 0,$

由同理 $b_{n-1} p_{2n}^2 - (b_n a_n + b_n^2 b_{n-1}) p_{2n-1}^2 - a_n b_{n-1} (b^n b_{n-1} + a_n) p_{2n-2}^2$
 $+ a_n b_n a_{n-1}^2 p_{2n-3}^2 = 0.$

11. 以 $\frac{p_r}{q_r}$ 爲 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots$ 之第 r 漸近分數。

則 $p_{2n+2} = p_{2n} + b q_{2n}$, 及 $q_{2n+2} = a p_{2n} + (ab+1) q_{2n}$ 試證明之。

(證) $\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n} + b q_{2n}}{(ab+1) q_{2n} + a p_{2n}}$

由是 $p_{2n+2} = p_{2n} + b q_{2n}$, 及 $q_{2n+2} = a p_{2n} + (ab+1) q_{2n}$ 。

12. 以 $\frac{p_r}{q_r}$ 爲 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots$ 之第 r 漸近分數。

則 $p_{3n+3} = b p_{3n} + (bc+1) q_{3n}$, 試證之。

(證) $\frac{p_{3n+3}}{q_{3n+3}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{p_{3n}}{q_{3n}} = \frac{(bc+1) q_{3n} + b p_{3n}}{(abc+a+c) q_{3n} + a p_{3n}}$

由是 $p_{3n+3} = b p_{3n} + (bc+1) q_{3n}$

13. 以 $\frac{p_r}{q_r}$ 爲 $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} + \frac{a}{1} + \frac{b}{1} + \dots$ 之第 r 漸近分數。

則 $p_{2n} q_{2n-1} - q_{2n} p_{2n-1} = -a^n b^n$ 。

(證) $p_{2n} = p_{2n-1} + b p_{2n-2}$, 及 $q_{2n} = q_{2n-1} + b q_{2n-2}$,

$\therefore p_{2n} q_{2n-1} - q_{2n} p_{2n-1} = (p_{2n-1} + b p_{2n-2}) q_{2n-1} - (q_{2n-1} + b q_{2n-2}) p_{2n-1}$
 $= -b (p_{2n-1} q_{2n-2} - q_{2n-1} p_{2n-2}) \dots \dots \dots (1)$

同法 $p_{2n-1} q_{2n-2} - q_{2n-1} p_{2n-2} = -a (p_{2n-2} q_{2n-3} - q_{2n-2} p_{2n-3}) \dots \dots \dots (2)$

(1) 及 (2) 兩邊相乘而以 $p_{2n-1} q_{2n-2} - q_{2n-1} p_{2n-2}$ 除之。得

$p_{2n} q_{2n-1} - q_{2n} p_{2n-1} = ab (p_{2n-2} q_{2n-3} - q_{2n-2} p_{2n-3})$

由同理 $p_{2n-2} q_{2n-3} - q_{2n-2} p_{2n-3} = ab (p_{2n-4} q_{2n-5} - q_{2n-4} p_{2n-5})$
 $\dots \dots \dots = \dots \dots \dots$

$p_2 q_1 - p_1 q_2 = -ab$ 。

由乘法得 $p_{2n} q_{2n-1} - p_{2n-1} q_{2n} = -a^n b^n$ 。

14. 以 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots$ 之第 n 漸近分數。

則 $q_{2n} = p_{2n+1}$, 及 $b p_{2n+1} = a p_{2n} + ab p_{2n+1}$

$$〔證〕 \quad \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n} + bq_{2n}}{ap_{2n} + (ab+1)q_{2n}}$$

由是 $p_{2n+2} = p_{2n} + bq_{2n}$, 及 $q_{2n+2} = ap_{2n} + (ab+1)q_{2n}$

但 $p_{2n+2} = bp_{2n+1} + p_{2n}$, 及 $q_{2n+2} = bq_{2n+1} + q_{2n}$

則 $p_{2n} + bq_{2n} = bp_{2n+1} + p_{2n} \quad \therefore q_{2n} = p_{2n+1}$

又 $ap_{2n} + (ab+1)q_{2n} = bq_{2n+1} + q_{2n}$

$\therefore bq_{2n+1} = ap_{2n} + abq_{2n} = ap_{2n} + abp_{2n+1}$

$$15. \quad \frac{p}{q} = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} \quad \text{則} \quad \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \sim \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{pq}$$

〔證〕 以 $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$ 爲 $\frac{p}{q}$ 之漸近分數。

則 $p = lp_n + p_{n-1}, p_n = kp_{n-1} + p_{n-2}, \dots, p_3 = cp_2 + p_1, p_2 = ab + 1, p_1 = a$ 。

然則 $\frac{p}{p_n} = 1 + \frac{1}{\frac{p_n}{p_n}}, \frac{p_n}{p_{n-1}} = k + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-1}}}, \frac{p_3}{p_2} = c + \frac{1}{\frac{p_2}{p_2}}, \frac{p_2}{p_1} = b + \frac{1}{\frac{p_1}{p_1}}$

由是 $\frac{p_n}{p} = \frac{1}{\frac{p}{p_n}} = \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$ 。

又 $q = lq_n + q_{n-1}, q_n = kq_{n-1} + q_{n-2}, \dots, q_3 = cq_2 + q_1, q_2 = b, q_1 = 1$ 。

由是 $\frac{q_n}{q} = \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b}$ 。

由 357 章 (1) 之公式而知 $pq_n - p_nq = (-1)^n$ 。

$\therefore \frac{p_n}{p} \sim \frac{q_n}{q} = \frac{1}{pq}$ 即 $\frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \sim \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{pq}$ 。

16. 試作 $\frac{P}{Q}$ 之連分數。其第一次除得商爲 a 。而其最後之漸近

分數爲 $\frac{p}{q}$ 。則作 $\frac{Q}{q}$ 之連分數。其最後之漸近分數爲 $(P-aQ)/(p-pq)$ 。

〔證〕 $\frac{P}{Q} = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l}$ 而以 $\frac{p}{q}$ 爲此最後之漸近分

數。故由 15 題證得 $\frac{Q}{q} = l + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b}$ 。

$$\text{及 } \frac{P}{p} = l + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

若以 x/y 為 Q/q 最後之漸近分數，則 $P = aQ + x$, $p = aq + y$.

$$\text{由是 } \frac{x}{y} = \frac{P - aQ}{p - aq}$$

17. x 之值，為接近於連分數，連續兩漸近分數 $\frac{p}{q}$ 及 $\frac{p'}{q'}$.

$$\text{則因 } \frac{p}{q} \geq \frac{p'}{q'} \text{ 而得 } \frac{pp'}{qq'} \geq x^2$$

[證] 由 357 章第三而得 $x = \frac{p' + \lambda p}{q' + \lambda q}$ ，但 λ 為小於 1 之正數。

$$\text{由是 } pp' - qq'x^2 = pp' - qq' \left(\frac{p' + \lambda p}{q' + \lambda q} \right)^2$$

$$\text{即 } pp' - qq'x^2 = \frac{pp'(q' + \lambda q)^2 - qq'(p' + \lambda p)^2}{(q' + \lambda q)^2} = \frac{(p'q' - \lambda^2 pq)(pq' - p'q)}{(q' + \lambda q)^2}$$

而 $\lambda < 1$, $p < p'$, $q < q'$, 故 $p'q' - \lambda^2 pq$ 為正數。因是 $pp' - qq'x^2$ 。當視 $pq' - p'q$ 為正或負而定其為正或負。故因 $\frac{p}{q} \geq \frac{p'}{q'}$ 而得 $\frac{pp'}{qq'} \geq x^2$.

一 般 之 漸 近 分 數

358. 問題 求第 n 漸近分數。

於 355 章所述之漸近分數，均從連續三漸近分數之關係式求之。即此連續三漸近分數中知其二，乃可決定其第三漸近分數。且可決定其次之漸近分數。然有時求第 n 漸近分數，可不必用其前之漸近分數以求得之。爰示其例如次。

[第一例] 求連分數 $\frac{1}{3} + \frac{1.3}{4} + \frac{3.5}{4} + \frac{5.7}{4} + \dots$ 之第 n 漸近分數。

第 n 次之元為 $\frac{(2n-3)(2n-1)}{4}$ 。故 $p_n = 4p_{n-1} + (2n-3)(2n-1)p_{n-2}$ 。於其

兩邊各減以 $(2n+1)p_{n-1}$ 。

$$\text{則 } p_n - (2n+1)p_{n-1} = -(2n-3)p_{n-1} + (2n-3)(2n-1)p_{n-2}$$

$$\text{即 } p_n - (2n+1)p_{n-1} = -(2n-3)\{p_{n-1} - (2n-1)p_{n-2}\}$$

由同法 $p_{n-1} - (2n-1)p_{n-2} = -(2n-5)\{p_{n-2} - (2n-3)p_{n-3}\}$,

..... =

$$p_3 - 7p_2 = -3\{p_2 - 5p_1\},$$

而 $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{3}$, 及 $\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{3} + \frac{1.3}{4} = \frac{4}{15}$. 故 $p_1 = 1, p_2 = 4$.

則 $p_2 - 5p_1 = -1$.

由是 $p_n - (2n+1)p_{n-1} = -(2n-3)\{p_{n-1} - (2n-1)p_{n-2}\}$
 $= (-1)^2(2n-3)(2n-5)\{p_{n-2} - (2n-3)p_{n-3}\}$
 $= \dots\dots\dots$
 $= (-1)^{n-1}(2n-3)(2n-5)\dots\dots\dots 3.1$

此兩邊以 $1.3\dots\dots(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)$ 除之。得

$$\frac{p_n}{1.3\dots\dots(2n+1)} - \frac{p_{n-1}}{1.3\dots\dots(2n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

而以 $n-1$ 代其 n 逐次如斯。得

$$\frac{p_{n-1}}{1.3\dots\dots(2n-1)} - \frac{p_{n-2}}{1.3\dots\dots(2n-3)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n-3)}$$

..... =

$$\frac{p_2}{1.3.5} - \frac{p_1}{1.3} = \frac{(-1)^1}{3.5}$$

及

$$\frac{p_1}{1.3} = \frac{1}{1.3}$$

由加法得

$$\frac{p_n}{1.3.5\dots\dots(2n+1)} = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \dots\dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)} \quad (1)$$

又 $q_n = 4q_{n-1} + (2n-3)(2n-1)q_{n-2}$ 與前之求 p_n 同法。

得 $q_n - (2n+1)q_{n-1} = -(2n-3)\{q_{n-1} - (2n-1)q_{n-2}\}$

同理 $q_{n-1} - (2n-1)q_{n-2} = -(2n-5)\{q_{n-2} - (2n-3)q_{n-3}\}$

..... =

$$q_3 - 7q_2 = -3\{q_2 - 5q_1\}$$

但 $q_1 = 3, q_2 = 15$, 故 $q_2 - 5q_1 = 0$.

由是 $q_n - (2n+1)q_{n-1} = (-1)^{n-2}3.5\dots\dots(2n-3)\{q_2 - 5q_1\} = 0$.

兩邊以 $1.3.5\dots(2n-3)(2n-1)(2n+1)$ 除之。得

$$\frac{q_n}{1.3.5\dots(2n+1)} - \frac{q_{n-1}}{1.3.5\dots(2n-1)} = 0.$$

即
$$\frac{q_n}{1.3.5\dots(2n+1)} = \frac{q_{n-1}}{1.3.5\dots(2n-1)}$$

同法
$$= \frac{q_{n-2}}{1.3.5\dots(2n-3)}$$

.....

$$= \frac{q_2}{1.3.5} = \frac{q_1}{1.3} = 1.$$

(2)

(1) 以 (2) 除之。得
$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

即為所求之第 n 漸近分數。

[第二例] 求 $\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \dots$ 之第 n 漸近分數。

$$p_n = np_{n-1} + np_{n-2}. \therefore p_n - (n+1)p_{n-1} = -\{p_{n-1} - np_{n-2}\}.$$

同法
$$p_{n-1} - np_{n-2} = -\{p_{n-2} - (n-1)p_{n-3}\}$$

..... =

$$p_3 - 4p_2 = -\{p_2 - 3p_1\}$$

但 $p_1 = 1, p_2 = 2$. 故 $p_2 - 3p_1 = -1$.

$$\begin{aligned} \therefore p_n - (n+1)p_{n-1} &= (-1)\{p_{n-1} - np_{n-2}\} \\ &= (-1)^2\{p_{n-2} - (n-1)p_{n-3}\} \\ &= \dots = (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

兩邊以 $\frac{1}{n+1}$ 除之。得
$$\frac{p_n}{n+1} - \frac{p_{n-1}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n+1},$$

同理
$$\frac{p_{n-1}}{n} - \frac{p_{n-2}}{n-1} = \frac{(-1)^{n-2}}{n},$$

..... =

$$\frac{p_2}{3} - \frac{p_1}{2} = \frac{(-1)^1}{3},$$

$$\frac{p_1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \frac{p_n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$$

$$\text{又 } \frac{q_n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

由是可得 $\frac{p_n}{q_n}$

若 n 爲無限大，則由第廿四編指數之定理，得

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}$$

故 $\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \dots$ 至無限項 $= \frac{1}{e-1}$

359. 循環連分數 (Periodic Continued Fractions) 連分數之諸元，依相同之順序連續而下者，謂之循環連分數。

而循環連分數，亦如算術之循環小數，分純循環混循環兩種。

例 $a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \dots$ 爲純循環連分數。

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \dots$ 爲混循環連分數。

360. 問題 循環連分數，其循環之元，祇有一個者，求其第 n 漸近分數。此連分數爲

$$a + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \dots$$

其第二以下之漸近分數，有 $p_n = cp_{n-1} + bp_{n-2}$ 之關係，其 c 及 b 爲常數。故 n 爲任何值皆合理。茲設循環級數

$$u_1 + u_2x + u_3x^2 + \dots + u_nx^{n-1} + \dots$$

爲由 $\frac{A+Bx}{1-cx-bx^2}$ 之展開式而成。而其第二項以下連次之係數

爲由其級數率 $u_n = cn_{n-1} + bn_{n-2}$ 之關係而連結者。由是令 $u_1 = p_1$, $u_2 = p_2$ 及一切之項 $u_n = p_n$ ，即可得 A 及 B 之值。

何則循環級數 $p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots + p_nx^{n-1} + \dots$ 之級數率爲 $1-cx-bx^2$ ，而其母函數爲 $\frac{p_1 + (p_2 - cp_1)x}{1-cx-bx^2}$ 。

而 $A = p_1 = a, B = p_2 - cp_1 = (ac + b) - ac = b.$

故 $\frac{a+bx}{1-cx-bx^2} = p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots + p_nx^{n-1} + \dots$ 其 x^{n-1} 之係數為 $p_n.$

惟 p_n 為 $a + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \dots$ 之第 n 漸近分數 $\frac{p_n}{q_n}$ 之分子。而 p_n 即等於 $\frac{a+bx}{1-cx-bx^2}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。

由同法第 n 漸近分數 $\frac{p_n}{q_n}$ 之分母 q_n 等於 $\frac{q_1 + (q_2 - cq_1)x}{1-cx-bx^2}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。因 $q_1 = 1, q_2 - cq_1 = c - c \cdot 1 = 0.$

故 q_n 等於 $\frac{1}{1-cx-bx^2}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。由是得第 n 漸近分數。

[第一例] 求 $1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \dots$ 之第 n 漸近分數。

第 n 漸近分數之分子。為等於 $\frac{a+bx}{1-cx-dx^2}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。

今 $a = 1, b = 3, c = 2.$

故第 n 漸近分數之分子。為等於 $\frac{1+3x}{1-2x-3x^2}.$

即 $\frac{3}{2(1-3x)} - \frac{1}{2+2x}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。即 $p_n = \frac{1}{2} \{3^n + (-1)^n\}.$

又 q_n 等於 $\frac{1}{1-2x-3x^2}$ 即 $\frac{3}{4(1-3x)} + \frac{1}{4(1+x)}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。

即 $q_n = \frac{1}{4} \{3^n - (-1)^n\}.$

由是求得第 n 漸近分數。為 $\frac{2\{3^n + (-1)^n\}}{3^n - (-1)^n}.$

[第二例] 求 $\frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} + \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} + \dots$ 之第 n 漸近分數。其關係式

為 $p_{2n} = dp_{2n-1} + cp_{2n-2}, p_{2n-1} = bp_{2n-2} + ap_{2n-3}$ 及 $p_{2n-2} = dp_{2n-3} + cp_{2n-4}.$

由此三方程式消去 p_{2n-1} 及 p_{2n-3} 而得

$p_{2n} - (a+c+bd)p_{2n-2} + acp_{2n-4} = 0.$

此結果 a 及 c 爲等勢式。又 b 及 d 爲等勢式。則是 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ 互換。其值不變。

$$\text{故 } p_{2n-1} - (a+c+bd)p_{2n-3} + acp_{2n-5} = 0.$$

其 n 爲任何值。皆合於理。依此作級數率而得

$$1 - (a+c+bd)x^2 + acx^4.$$

由是知 p_n 爲 $\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。

惟於循環級數 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 之母函數爲 $\frac{a_0 + (a_1 + pa_0)x}{1 + px + qx^2}$ 。

茲循環級數 $p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots$ 其級數率爲 $1 - (a+c+bd)x^2 + acx^4$ 。即 $1 + 0 \cdot x - (a+c+bd)x^2 + 0 \cdot x^3 + acx^4$ 。則由同理可求得其 A, B, C, D 之值如次。

$$A = p_1 = \frac{a}{b} \text{ 之分子} = a, B = p_2 + 0 \cdot p_1 = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \text{ 之分子} = ad,$$

$$C = p_3 + 0 \cdot p_2 + \{-(a+c+bd)\} p_1 = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \text{ 之分子} - (a+c+bd)a \\ = a(bd+a) - (a+c+bd)a = -ac,$$

$$D = p_4 + 0 \cdot p_3 + \{-(a+c+bd)\} p_2 + 0 \cdot p_1 \\ = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \text{ 之分子} - (a+c+bd) \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \text{ 之分子} \\ = a(bd^2 + cd + ad) - (a+c+bd)ad = 0.$$

$$\text{由是 } \frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4} = \frac{a+adx-acx^2}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}.$$

乃得 p_n 爲 $\frac{a+adx-acx^2}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。

由同法而得 q_n 爲 $\frac{b+(bd+c)x-acx^2}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。

由是可得第 n 漸近分數 $\frac{p_n}{q_n}$ 之值。

361. 連分數之斂級數 連分數之元。其個數多至無限者。則欲決定斂級數。抑爲發級數。其法亦當研究之。

若求得一式，能實表第 n 漸近分數，則其連分數為斂級與否，固可用前所述之規則以考定之。然於 n 增大時，欲實求其第 n 漸近分數之值，頗非易易。

連分數 $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots$ 由 357 章而得

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{q_{n-1} q_n}$$

由此推之， $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = (-1)^{n-2} \frac{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}{q_{n-2} q_{n-1}}$

..... =

$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{a_1}{q_1} = \frac{a_1 a_2}{q_1 q_2}$$

以上相加 $\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_1}{q_1} - \frac{a_1 a_2}{q_1 q_2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{q_{n-1} q_n}$

可見連分數之元俱為正，則此右邊之各項正負相間，又各項均比前項為小，試將第 r 項與前項比。如

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_r}{q_{r-1} q_r} : \frac{a_1 a_2 \dots a_{r-1}}{q_{r-2} q_{r-1}} = \frac{a_r q_{r-2}}{q_r}$$

而此 $\frac{a_r q_{r-2}}{q_r}$ 為小於 1，因 $q_r = b_r q_{r-1} + a_r q_{r-2}$ 而以 q_r 除之，為

$$1 = \frac{b_r q_{r-1}}{q_r} + \frac{a_r q_{r-2}}{q_r} \therefore 1 > \frac{a_r q_{r-2}}{q_r}$$

故此右邊由 277 章定理五，而知其為斂級數。

即 $\frac{p_n}{q_n}$ 為斂級數。

又據突翰多爾 (Todhunter) 氏大代數學之 783 章所述，得連分數斂級之定理。

$b_n b_{n-1} : a_n$ 其比常大於某有限數量，則此連分數為斂級數，證明之如次。

設 k 為某有限數量，則 $\frac{b_n b_{n-1}}{a_n} > k$ ，即 $b_n b_{n-1} > a_n k$

而以前所得級數之第 n 項為 u_n ，則 $u_n = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n}{q_{n-1} q_n}$

$$\text{但 } q_n = b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } u_n &= \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}{q_{n-1} q_n} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}{q_{n-1} (a_n q_{n-2} + b_n q_{n-1})} \\ &= \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}{q_{n-1} \left(q_{n-2} + \frac{b_n}{a_n} q_{n-1} \right)}. \end{aligned}$$

$$\text{但 } b_n b_{n-1} > k a_n \quad \text{則} \quad \frac{b_n}{a_n} > \frac{k}{b_{n-1}}$$

$$\therefore \frac{b_n}{a_n} q_{n-1} > \frac{k}{b_{n-1}} q_{n-1} = \frac{k}{b_{n-1}} (b_{n-1} q_{n-2} + a_{n-1} q_{n-2}) > k q_{n-2}$$

$$\text{由是 } u_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{q_{n-1} \left(q_{n-2} + \frac{b_n}{a_n} q_{n-1} \right)} < \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{q_{n-1} (q_{n-2} + k q_{n-2})}$$

$$\text{即 } u_n < \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{q_{n-2} q_{n-1} (1+k)}$$

$$\text{惟因 } u_1 = \frac{a_1}{q_1}, \quad u_2 = \frac{a_1 a_2}{q_1 q_2}, \quad u_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{q_2 q_3}, \dots, \quad u_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{q_{n-1} q_n}$$

及得

$$u_3 < \frac{a_1 a_2}{q_1 q_2 (1+k)} = \frac{u_2}{1+k}$$

$$u_4 < \frac{a_1 a_2 a_3}{q_2 q_3 (1+k)} = \frac{u_3}{1+k}$$

$$\dots < \dots$$

$$u_n < \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{q_{n-2} q_{n-1} (1+k)} = \frac{u_{n-1}}{1+k}$$

$$\text{由乘法得 } u_n < \frac{a_1 a_2}{q_1 q_2 (1+k)^{n-2}}$$

但以 $(1+k)^{n-2}$ 其 k 為有限數量。則 n 增至極大時。 $(1+k)^{n-2}$ 必為無限大。

由是 u_n 當 n 增至極大時。必為無限小。故得次之定理。

無限連分數 $\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$ 諸文字所表者。皆為正數量。

則 $b_n b_{n-1} : a_n$ 其比常大於某有限數量者。必為斂級數。

無限連分數 $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}$ 諸文字所知者。皆為正數量。則

此連分數。必為斂級數。當注意之。何則。若以此連分數之元表示 $b_n b_{n-1} : a_n$ 常為有限數量故也。

362. 注意 以下五章連分數中所代之文字 a, b, c, \dots 皆為正整數。而其連分數之形。常若 $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}$

用此形之連分數有兩便利。一因各漸近分數。皆為已約分數(視 357 章第二)。二因此連分數之真值。與任何漸近分數之差。其界限甚狹小。可由視察而知之。

363. 定理 凡純循環連分數。恆等於含有理係數二次方程式之一正根。而此方程式之兩根。其符號正相反。其一根大於 1。一根小於 1。又其負根之反商。恆等於原連分數。每節循環各元。依其反對之順序而成連分數之數值。

設定原連分數。為

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}} + \frac{1}{k + \frac{1}{l + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \dots}}}}$$

而以 $\frac{P'}{Q'}$ 及 $\frac{P}{Q}$ 為第一次循環連分數最後之兩漸近分數。

$$\text{即 } \frac{P'}{Q'} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}} + \frac{1}{k}, \quad \frac{P}{Q} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}} + \frac{1}{k + \frac{1}{l}}$$

$$\text{又 } x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}} + \frac{1}{k + \frac{1}{l + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \dots}}}}$$

$$= a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}} + \frac{1}{k + \frac{1}{l + x}}$$

$$\text{由 355 章得 } x = \frac{xP + P'}{xQ + Q'}$$

$$\therefore x^2Q + x(Q - P) - P' = 0 \dots \dots \dots (1)$$

此方程式(1)之第三項 $-P'$ 為負。則其兩根之符號相反可知。而其正根即為原連分數之值明矣。

今由 357 章第一例。

$$\frac{P}{P'} = l + \frac{1}{k + \dots} + \frac{1}{b + \frac{1}{a}}, \quad \text{及 } \frac{Q}{Q'} = l + \frac{1}{k + \dots} + \frac{1}{b}$$

由是 $y = l + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{a} + \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \dots$

與前同法。得 $y = \frac{Py+Q}{P'y+Q'}$

$$\therefore y^2 P' + y(Q' - P) - Q = 0 \dots \dots \dots (2)$$

此方程式(2)之兩根。其符號相反可知。而其正根為 $l + \frac{1}{k} + \dots$

$+\frac{1}{a} + \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \dots$ 之值又可知矣。

而(1)之方程式 $x^2 Q + x(Q' - P) - P' = 0$ 。

變之為 $\left(-\frac{1}{x}\right)^2 P' + \left(-\frac{1}{x}\right)(Q' - P) - Q = 0$ 。

即與(2)之方程式相同。而 y 與 $-\frac{1}{x}$ 相當。

故(1)之負根之反商。恆等於第二連分數之數值。亦即

$$x = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots$$

$$x = \frac{1}{-\left(l + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{l} + \frac{1}{k} + \dots\right)}$$

又(1)及(2)之正根。可由視察而知其為大於1。故(1)之負根必小於1。

推論 連分數 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{l} + \frac{1}{a} + \dots$ 亦可如本定理。證得其為合理。何則。此連分數為本定理連分數之反商。故可以用 $\frac{1}{x}$ 代前之 x 。用 $\frac{1}{y}$ 代前之 y 。

即 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{l} + \frac{1}{a} + \dots$ 等於 $Px^2 - (Q' - P)x - Q = 0$ 之正根。又 $-\left(l + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{a} + \frac{1}{l} + \dots\right)$ 為等於 $Px^2 - (Q' - P)x - Q = 0$ 之負根。亦等於 $Qy^2 - (Q' - P)y - P = 0$ 之正根。

由是此連分數之兩根。亦如本定理。其 x 之二次方程式之一根為大於1。其他之一根為小於1也。

364. 定理 凡混循環連分數。其不在循環部分以內之元爲多於1者。此種連分數。爲等於含有有理係數二次方程式之一根。而此二次方程式之二根。爲同符號者。

$$\text{設原連分數爲 } x = a + \frac{1}{b + \dots + \frac{1}{k + a + \beta + \dots + \frac{1}{\mu + \nu + a + \beta + \dots}}}$$

$$\text{及循環部分爲 } y = a + \frac{1}{\beta + \dots + \frac{1}{\mu + \nu + a + \beta + \dots}}$$

而以 $\frac{A'}{B'}$ 及 $\frac{A}{B}$ 爲非循環部分 (即 $a + \frac{1}{b + \dots + \frac{1}{k}}$) 之最後兩漸近分數。如前章之定理。得 $x = \frac{yA + A'}{yB + B'} \dots \dots \dots (1)$

又以 $\frac{P'}{Q'}$ 及 $\frac{P}{Q}$ 爲於第一次循環部分 (即 $a + \frac{1}{\beta + \dots + \frac{1}{\mu + \nu}}$) 之最後二漸近分數。則得 $y = \frac{yP + P'}{yQ + Q'} \dots \dots \dots (2)$

由(1)及(2)消去其 y 。即得含有有理係數 x 之二次方程式。

今若以(2)之正根代於(1)。則所得爲 x 之正數值可知。而此正數值。即爲原連分數實際之值。又可知矣。

又從前章 $\frac{1}{y}$ 之負值爲 $-\left\{ \nu + \frac{1}{\mu + \dots + \frac{1}{a + \nu + \mu + \dots}} \right\}$ 。以之代入於(1)。則得 $x = a + \frac{1}{b + \dots + \frac{1}{k - \nu - \frac{1}{\mu} - \dots}}$

此右邊必爲正。如次之證明。

若 $k > \nu$ 。則易知此 x 之值爲正。

若 $k < \nu$ 。則 $\frac{1}{k - \nu - \frac{1}{\mu} - \dots}$ 爲負。而小於1。惟 k 之前至少有一元。故知 x 之值亦必爲正。

何則以 $\frac{1}{k - \nu - \frac{1}{\mu} - \dots}$ 爲小於1之負數。而 $\frac{1}{j + k - \nu - \frac{1}{\mu} - \dots}$ 必爲正數也。

又 k 原爲不等於 ν 。若 $k = \nu$ 。則其連分數之循環部。變爲自 k 始。不自 a 始矣。

由是知 x 之兩值俱爲正。

連分數之二次不盡根

365. 二次不盡根 其根不能等於有限元之連分數。何則。有限元之連分數。其分母子可通度。即為通常之分數。

而二次不盡根。可成循環連分數。如 $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}$ 之形。但 a, b, c, \dots 皆為正整數。

茲舉例如次。

[例] 試變 $\sqrt{8}$ 為連分數。

略小於 $\sqrt{8}$ 而與 $\sqrt{8}$ 最近之整數為 2。而於 $\sqrt{8}$ 同時以 2 加減之。即得

$$\sqrt{8} = 2 + \sqrt{8-2} = 2 + \frac{(\sqrt{8-2})(\sqrt{8+2})}{\sqrt{8+2}} = 2 + \frac{4}{\sqrt{8+2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{8+2}}{4}}$$

又略小於 $\frac{\sqrt{8+2}}{4}$ 而與 $\frac{\sqrt{8+2}}{4}$ 最近之整數為 1。

$$\text{故 } \frac{\sqrt{8+2}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{8-2}}{4} = 1 + \frac{4}{4(\sqrt{8+2})} = 1 + \frac{1}{\sqrt{8+2}}$$

又略小於 $\sqrt{8+2}$ 而與 $\sqrt{8+2}$ 最近之整數為 4。

$$\text{故 } \sqrt{8+2} = 4 + \sqrt{8-2} = 4 + \frac{1}{\frac{\sqrt{8+2}}{4}}$$

其 $\frac{\sqrt{8+2}}{4}$ 與前之分數同。故可得循環連分數。為

$$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$$

故 $\sqrt{8}$ 等於混循環連分數。但其最初一元非為循環。而此一元之值。等於循環部末商之半。

若反求之。試求 $2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$ 之值。

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}} \quad \text{則 } x - 2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$$

$$\text{即 } x-2 = \frac{1}{1+4+x-2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2+x}} = \frac{2+x}{3+x},$$

$$\therefore (x-2)(3+x) = 2+x, \text{ 即 } x^2 - 8 = 0.$$

而此方程式之正根， $x = \sqrt{8}$ 為所求之值。

366. 二次不盡根作連分數 示其變化之法如次。

設 \sqrt{N} 為任意之二次不盡根，而以 a 為略小於 \sqrt{N} 之整數，則

$$\sqrt{N} = a + (\sqrt{N} - a) = a + \frac{N - a^2}{\sqrt{N} + a} = a + \frac{1}{\frac{\sqrt{N} + a}{r_1}}. \text{ 但 } N - a^2 = r_1$$

惟 a 為略小於 \sqrt{N} 之整數，故 $\sqrt{N} - a$ 為正，而小於 1。

$$\text{而 } \frac{\sqrt{N} - a}{r_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{N} + a}{r_1}}. \text{ 故 } \frac{\sqrt{N} + a}{r_1} \text{ 為大於 1.}$$

今以 b 為略小於 $\frac{\sqrt{N} + a}{r_1}$ 之整數，則

$$\frac{\sqrt{N} + a}{r_1} = b + \frac{\sqrt{N} - (br_1 - a)}{r_1} = b + \frac{N - (br_1 - a)^2}{r_1 \{\sqrt{N} + (br_1 - a)\}} = b + \frac{1}{\frac{\sqrt{N} + a_2}{r_2}}$$

$$\text{但 } a_2 = br_1 - a, \text{ 及 } r_2 = \frac{N - a_2^2}{r_1}.$$

與前同理，可知 $\frac{\sqrt{N} + a_2}{r_2}$ 為大於 1，而以 c 為略小於 $\frac{\sqrt{N} + a_2}{r_2}$ 之整

數，則

$$\frac{\sqrt{N} + a_2}{r_2} = c + \frac{\sqrt{N} - (cr_2 - a_2)}{r_2} = c + \frac{N - (cr_2 - a_2)^2}{r_2 \{\sqrt{N} + cr_2 - a_2\}} = c + \frac{1}{\frac{\sqrt{N} + a_3}{r_3}}$$

$$\text{但 } a_3 = cr_2 - a_2, \text{ 及 } r_3 = \frac{N - a_3^2}{r_2}.$$

依此方法次第推之，則得 $\sqrt{N} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d} + \dots}}$

此連分數無有限止，而為循環連分數，其所以能為循環者，詳述於次之定理。

367. 定理 任意之二次不盡根，可化為循環連分數。

先於前章所示之 a_1, a_2, a_3, \dots 及 r_1, r_2, r_3, \dots 證明其為正整數。

當 \sqrt{N} 為連分數時，依前章之法則，而得 a_1, a_2, a_3, \dots 及 r_1, r_2, r_3, \dots 之關係。

$$r_1 = N - a^2 \dots \dots \dots (1)$$

$$a_2 = br_1 - a, \quad r_1 r_2 = N - a_2^2 \dots \dots \dots (2)$$

$$a_3 = cr_2 - a_2, \quad r_2 r_3 = N - a_3^2 \dots \dots \dots (3)$$

$$a_4 = dr_3 - a_3, \quad r_3 r_4 = N - a_4^2 \dots \dots \dots (4)$$

.....

N 及 a 為正整數，而 a 為略小於 \sqrt{N} 之整數，故 $N - a^2$ 為正整數。即由 (1) 可知 r_1 為整數。

$$\begin{aligned} \text{由 (2) } r_2 &= \frac{N - a_2^2}{r_1} = \frac{N - (br_1 - a)^2}{r_1} = \frac{(N - a^2) + 2abr_1 - b^2 r_1^2}{r_1} \\ &= \frac{r_1 + 2abr_1 - b^2 r_1^2}{r_1} = 1 + 2ab - b^2 r_1, \end{aligned}$$

故 $a_2 = br_1 - a$ ，及 $r_2 = 1 + 2ab - b^2 r_1$ ，但 r_1 為整數，故知 a_2 及 r_2 亦必為整數。

同法由 (3) 得 $a_3 = cr_2 - a_2$ 及 $r_3 = 1 + 2a_2 c - c^2 r_2$ ，但 a_2 及 r_2 已知其為整數，則 a_3 及 r_3 亦可知其為整數。

又由 (4) 得 $a_4 = dr_3 - a_3$ 及 $r_4 = r_2 + 2a_3 d - d^2 r_3$ ，但 a_3 及 r_3 已知其為整數，則 a_4 及 r_4 亦可知其為整數。

準此推之， a_n 及 r_n 對於 n 之任何值，皆為整數可知矣。

且由此可證明 a_n 及 r_n 對於 n 之任何值，其各整數皆為正。

既知 a, b, c, \dots 為略小於 \sqrt{N} ， $\frac{\sqrt{N+a}}{r_1}$ ， $\frac{\sqrt{N+a_2}}{r_2}$ 之正數，則

$\sqrt{N-a}$ ， $\sqrt{N-a_2}, \dots$ 為正數可知。故 $N - a^2$ ， $N - a_2^2$ ， $N - a_3^2, \dots$ 皆為正。即 r_1, r_2, r_3, \dots 皆為正也。

又 b 為略小於 $\frac{\sqrt{N+a}}{r_1}$ 之整數，即 $\frac{\sqrt{N+a}}{r_1} > b$ ，而 $\frac{\sqrt{N+a}}{r_1} < b+1$ 。

即 $\sqrt{N+a} < br_1 + r_1$ 而 $a < br_1$ 。何則，假定 $a \geq br_1$ ，則上之不等式為 $\sqrt{N} < r_1$ ，而 a 小於 \sqrt{N} ，是 $a < r_1$ 。惟 b 與 r_1 均為正數，以 b 乘其右邊

仍爲 $a < br_1$, 如是則與假定式相反。故知 a 不能大於 br_1 , 又不能等於 br_1 也。

由是從 (2) $a_2 = br_1 - a$, 而知 a_2 爲正數。

又 c 爲略小於 $\frac{\sqrt{N+a_2}}{r_2}$ 之整數。即 $\frac{\sqrt{N+a_2}}{r_2} > c$, 而 $\frac{\sqrt{N+a_2}}{r_2} < c+1$ 。

即 $\sqrt{N+a_2} < cr_2 + r_2$, 而 $a_2 < cr_2$, 可與前同法證之。而知 a_2 不能等於 cr_2 , 又不能大於 cr_2 也。由是從 (3) 而知 a_3 爲正數。

準此推之。 a_n 對於 n 爲任何值皆爲正。

至是諸數量 r_1, r_2, r_3, \dots 及 a_1, a_2, a_3, \dots 已證得爲整數且爲正。

從上之關係式而得 $r_n r_{n-1} = N - a_n^2$ 。其 $a_n < \sqrt{N}$ 而 $a_n > a$ 。

何則。因 $r_1 = N - a^2$, $r_1 r_2 = N - a_2^2$ 。故 $r_1 > r_1 r_2$, 即 $N - a^2 > N - a_2^2$ 。

$\therefore a_2 > a$ 。而 $r_n r_{n-1} = N - a_n^2$ 爲正整數。故 $a_n < \sqrt{N}$ 。即 $a_n > a$ 。

由是知 a_n 之值。祇限於 $1, 2, 3, \dots, a$ 以內。

又由 (1), (2), (3) 之關係式。

$a_2 + a = br_1$, $a_3 + a_2 = cr_2, \dots$ 至 $a_{n+1} + a_n = kr_n$,

但 k 爲正整數。故 r_n 不能大於 kr_n 。

又 a_{n+1} 及 a_n 於前已證得爲不能大於 a 。

故 $a_{n+1} + a_n > 2a$ 。即 $r_n > 2a$ 。

由是可知 $\frac{\sqrt{N+a_n}}{r_n}$ 其所有異值。至多不過於 $2a \times a$ 。即 $2a^2$ 種。

故不盡根化連分數時。至第 $2a^2$ 商以後。不能不爲循環矣。

368. 定理 任意二次不盡根。所變得之循環連分數。其有一元非爲循環者。而此一元之二倍。等於其循環一節中最後之商。又於循環一節中之各商。除最後一商以外。無論順讀與逆讀。得同一之順序(如 365 章所述。此其特例也)。

\sqrt{N} 爲二次不盡根。由前章而知 \sqrt{N} 。必可化爲循環連分數。又知任意之循環連分數。等於含有理係數二次方程式之一根。而其含有理係數 x 之二次方程式之一根爲 \sqrt{N} 。

則此方程式必爲 $x^2 - N = 0$ 。

今 $x^2 - N = 0$ 其兩根之絕對值皆大於 1。而此兩根之符號相異。

故由 363 及 364 章而知等於 \sqrt{N} 之連分數。為混循環連分數。其非為循環之項。祇有一元也。

$$\text{由是 } \sqrt{N} = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{h} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{b} + \dots$$

$$\text{即 } \sqrt{N} - a = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{h} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{b} + \dots$$

今 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{h} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{b} + \dots$ 為含有理係數二次方程式之一根。而此正根為 $\sqrt{N} - a$ 。負根為 $-\sqrt{N} - a$ 。

$$\text{於是 由 353 章得 } \frac{1}{\sqrt{N} + a} = \frac{1}{l+k+h} + \dots + \frac{1}{c+b+l} + \dots$$

$$\therefore \sqrt{N} + a = l + \frac{1}{k} + \frac{1}{h} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{l} + \dots$$

$$\text{故 } \sqrt{N} = l - a + \frac{1}{k} + \frac{1}{h} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{l} + \dots$$

$$= a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{h} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{b} + \dots$$

由此知 $l - a = a$ 。即 $l = 2a$ ， $k = b$ ， $h = c$ ，……

$$\text{即證得 } \sqrt{N} = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{b} + \dots$$

連分數之級數

369. 任意之級數。可以連分數表之。設定級數。

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

此級數 (1) n 項之和。恆等於次之連分數 (2) 第 n 漸近分數。

$$\frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{u_1 + u_2} - \frac{u_3 u_4}{u_2 + u_3} - \frac{u_4 u_5}{u_3 + u_4} - \dots - \frac{u_{n-2} u_n}{u_{n-1} + u_n} \quad (2)$$

此定理可用歸納法證明之。

先假定 (1) 之最初 n 項之和。等於連分數 (2) 之第 n 漸近分數。

$$\text{即假定 } u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{u_1 + u_2} - \frac{u_3 u_4}{u_2 + u_3} - \dots - \frac{u_{n-2} u_n}{u_{n-1} + u_n}$$

今變其 u_n 爲 $u_n + u_{n+1}$ 。則變 $\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1} + u_n}$ 爲 $\frac{u_{n-2}(u_n + u_{n+1})}{u_{n-1} + u_n + u_{n+1}}$ 。

而 $\frac{u_{n-2}(u_n + u_{n+1})}{u_{n-1} + u_n + u_{n+1}}$ 等於 $\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1} + u_n} - \frac{u_{n-1}u_{n+1}}{u_n + u_{n+1}}$ 。

因 $\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1} + u_n} - \frac{u_{n-1}u_{n+1}}{u_n + u_{n+1}} = \frac{u_{n-2}u_n(u_n + u_{n+1})}{(u_{n-1} + u_n)(u_n + u_{n+1}) - u_{n-1}u_{n+1}}$
 $= \frac{u_{n-2}(u_n + u_{n+1})}{u_{n-1} + u_n + u_{n+1}}$

由是 $u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}$,

$$= \frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{u_1 + u_2} - \dots - \frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1} + u_n} - \frac{u_{n-1}u_{n+1}}{u_n + u_{n+1}}$$

即 (1) 之最初 $(n+1)$ 項之和, 等於 (2) 之第 $(n+1)$ 漸近分數。

若 (1) 之最初 n 項之和, 等於 (2) 之第 n 漸近分數爲真者, 則 (1)

之最初 $(n+1)$ 項之和, 等於 (2) 之第 $(n+1)$ 漸近分數亦爲真。

惟令 n 爲 1 或 2 或 3 易證得 (1) 之和, 爲等於 (2) 之漸近分數, 故知對於 n 之任何值皆爲真也。

茲示例如次。

$$1+3+5 = \frac{1}{1} - \frac{3}{1+3} - \frac{15}{3+5} = \frac{1}{1} - \frac{3}{4} - \frac{5}{8},$$

$$1+2^2+3^2 = \frac{1}{1} - \frac{2^2}{1+2^2} - \frac{1 \cdot 3^2}{2^2+3^2} = \frac{1}{1} - \frac{4}{5} - \frac{9}{13},$$

$$a+ar+ar^2 = \frac{a}{1} - \frac{ar}{a+ar} - \frac{a^2r^2}{ar+ar^2} = \frac{1}{1} - \frac{r}{1+r} - \frac{ar}{1+r^2}.$$

故此定理, 爲 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

$$= \frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{u_1 + u_2} - \frac{u_1 u_3}{u_2 + u_3} - \dots - \frac{u_{n-2} u_n}{u_{n-1} + u_n} \quad (A)$$

若 (A) 級數之各項正負相間, 則得

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n$$

$$= \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{u_1 - u_2} + \frac{u_1 u_3}{u_2 - u_3} + \dots + \frac{u_{n-2} u_n}{u_{n-1} + u_n} \quad (B)$$

370. 兩定理 如次之 (C) 及 (D) 之兩定理爲最緊要。

$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2 b_3} \pm \dots \text{至 } n \text{ 項}$$

$$= \frac{a_1}{b_1} \mp \frac{b_1 a_2}{b_2 \pm a_2} \mp \frac{b_2 a_3}{b_3 \mp a_3} \mp \dots \text{至 } n \text{ 商} \quad (C)$$

$$\frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \pm \frac{1}{a_4} + \dots \text{至 } n \text{ 項}$$

$$= \frac{1}{a_1} \mp \frac{a_1^2}{a_2 \pm a_1} \mp \frac{a_2^2}{a_3 \pm a_2} \mp \dots \text{至 } n \text{ 商} \quad (D)$$

上二式之複號。或取其上之符號。或取其下之符號。此兩定理可如前章用歸納法證明之。

次示C之證法。

設於(C)級數 n 項之和而為 $n+1$ 項之和。

則可以 $\frac{a_n}{b_n} \pm \frac{a_n a_{n+1}}{b_n b_{n+1}}$ 代其 $\frac{a_n}{b_n}$ 。

$$\text{故變 } \frac{b_{n-1} a_n}{b_n \pm a_n} \text{ 爲 } \frac{b_{n-1} \left(\frac{a_n}{b_n} \pm \frac{a_n a_{n+1}}{b_n b_{n+1}} \right)}{1 \pm \left(\frac{a_n}{b_n} \pm \frac{a_n a_{n+1}}{b_n b_{n+1}} \right)} \text{ 即等於 } \frac{b_{n-1} a_n}{b_n \pm a_n} \mp \frac{b_n a_{n+1}}{b_{n+1} \pm a_{n+1}}$$

故(C)對於 n 為真。則對於 $n+1$ 亦為真。今於C令其 n 為2。可由觀察而知其為真。故(C)對於 n 之任何值。皆為真也。

於次所示者。為(C)之特例。

$$a_1 \pm a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 \pm a_1 a_2 a_3 a_4 + \dots$$

$$= \frac{a_1}{1} \mp \frac{a_2}{1 \pm a_2} \mp \frac{a_1 a_3}{1 \pm a_3} \mp \frac{a_2 a_4}{1 \pm a_4} \mp \dots \quad (E)$$

$$\text{及 } \frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \pm \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \dots$$

$$= \frac{1}{a_1} \mp \frac{a_1}{a_2 \pm 1} \mp \frac{a_2}{a_3 \pm 1} \mp \frac{a_3}{a_4 \pm 1} \mp \dots \quad (F)$$

令(C)之分母皆為1。即等於E。令(C)之分子皆為1。而以 a 代其分母之 b 。即等於(F)。

[第一例] 試證 $\frac{1}{1} + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \dots$ 至無限

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \text{至無限 (Brouncker 氏)}$$

令 $a_1=1, a_2=3, a_3=5, \dots$ 以代於(D)而用其下之符號。爲

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{1+3-1+5-3+} \dots \dots$$

$$= \frac{1}{1+2} + \frac{1^2}{2} + \dots \dots$$

[第二例] 試證 $\frac{1}{1} + \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{1} + \frac{3^2}{1} + \dots$ 至無限 $= \log_2 2$ (Euler 氏)。

令 $a_1=1, a_2=2, a_3=3, \dots$ 以代於(D)而用其下之符號。

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1+2-1+3-2+4-3+} \dots \dots$$

惟由 308. 章 $\log_e (1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \dots$ 。

令 $y=1$ 。則 $\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \dots$ 。

$$\text{而 } \frac{1}{1+2-1+3-2+4-3+} \dots \dots = \frac{1}{1+1} + \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{1} + \frac{3^2}{1} + \dots \dots$$

故得題之證。

[第三例] 求 $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \dots \dots$ 至無限之值。

令 $a_1=1, a_2=2, a_3=3, a_4=4, \dots \dots$ 以代於(F)而用其下之符號。

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \dots \dots = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = 1 - e^{-1}.$$

[第四例] 求 $\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \dots$ 之第 n 漸近分數。

令 $a_1=a_2=a_3=\dots=3$ 以代於(F)。

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} + \dots = \frac{1}{3} + \frac{3}{3-1+3-1+} \dots = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \dots$$

而 $\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} + \dots$ 至 n 項之和。爲

$$\frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\}.$$

即爲所求之第 n 漸近分數。

〔第五例〕試證 $1 + \frac{r}{1-r} + \frac{1r}{r+2} + \frac{2r}{r+3} + \frac{3r}{r+4} + \dots = e^r$.

令 $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = r$, 又 $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3, \dots$ 以代於 (C).

$$\begin{aligned} & \frac{r}{1} + \frac{r}{2+r} + \frac{2r}{3+r} + \frac{3r}{4+r} + \dots \\ &= \frac{r}{1} + \frac{rr}{1 \cdot 2} + \frac{rrr}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{rrrr}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\ &= \frac{r}{1} + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4} + \dots = e^r - 1. \end{aligned}$$

故 $1 + \frac{r}{1-r} + \frac{r}{r+2} + \frac{2r}{r+3} + \frac{3r}{r+4} + \dots = e^r$.

例題三十七

1. 試將二次不盡根各化爲連分數。

- (1) $\sqrt{17}$. (2) $\sqrt{140}$.
 (3) $\sqrt{33}$. (4) $\sqrt{43}$.
 (5) $\sqrt{a^2+1}$. (6) $\sqrt{a^2+2a}$.

〔解〕 (1) $\sqrt{17} = 4 + \sqrt{17-4} = 4 + \frac{1}{\sqrt{17+4}}$, $\sqrt{17+4}$
 $= 8 + \sqrt{17-4} = 8 + \frac{1}{\sqrt{17+4}}$, $\therefore \sqrt{17} = 4 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8} + \dots}$

(2) $\sqrt{140} = 11 + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{22} + \dots$

(3) $\sqrt{33} = 5 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \dots$

(4) $\sqrt{43} = 6 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{12} + \dots$

(5) $\sqrt{a^2+1} = a + \sqrt{a^2+1} - a = a + \frac{1}{a - \sqrt{a^2+1}}$
 $= a + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} + \dots$

(6) $\sqrt{a^2+2a} = a + \sqrt{a^2+2a} - a = a + \frac{1}{\sqrt{(a^2+2a)+a}}$
 $\frac{1}{2a}$

又 $\frac{\sqrt{a^2+2a}+a}{2a} = 1 + \frac{\sqrt{a^2+2a}-a}{2a} = 1 + \frac{1}{\sqrt{a^2+2a}+a}$

$\therefore \sqrt{a^2+2a} = a + \frac{1}{1 + \frac{1}{2a} + \frac{1}{1} + \dots}$

2. 試證 $\sqrt{N} = a + \frac{b}{2a+2a} + \dots$ 但 a 為任意之值而 $b = N - a^2$.

[證] $\sqrt{N} = a + \sqrt{N-a} = a + \frac{N-a^2}{\sqrt{N+a}} = a + \frac{b}{a+\sqrt{N}}$
 $= a + \frac{b}{a + \frac{b}{a+\sqrt{N}}} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{a+\sqrt{N}}} + \dots$

3. 求次之連分數之值。

(1) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \dots$ 至無限

(2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ 至無限

(3) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ 至無限。

[解] (1) $x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \dots$ 即 $x - 1 = \frac{1}{3 + 2 + x - 1}$

$3x^2 - 5 = 0, \therefore x = \sqrt{\frac{5}{3}}$

(2) $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ 即 $x = 1 + \frac{1}{2 + 3 + x}$

$\therefore 7x^2 - 8x - 3 = 0 \therefore x = \frac{1}{7}(4 + \sqrt{37})$

(3) $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ 令 $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = y$

則 $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + y = y, \therefore y = \frac{1}{2}(\sqrt{30} - 5)$

由是得 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + y = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\sqrt{30} - 5)$

即 $x = \frac{\sqrt{30} + 1}{2\sqrt{30} + 4} = \frac{1}{52}(28 - \sqrt{30})$

4. 試證 $7 + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \dots$ 至無限 $= 5 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right)$ 至無限。

惟以 $7 + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \dots = \sqrt{50}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \sqrt{2}$ 。故得此題之證。

5. 試證 $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} \right) \left(d + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{d} \right) = \frac{b+d+bcd}{a+c+acb^0}$

(證) $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \dots = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + x + \dots$

$$\text{即 } x = \frac{bcd + d + b + (bc + 1)x}{abcd + ab + cd + ad + 1 + (abc + c + a)x^0}$$

$$\therefore x^2 + \frac{abcd + ab + cd + ad - bc}{abc + c + a} x - \frac{bcd + b + d}{abc + c + a} = 0.$$

此方程式之正根為 α , 其負根為 $-\beta$ 。則 $\alpha\beta = \frac{bcd + b + d}{abc + c + a^0}$

又由 368 章此二根之積, 即 $-\alpha\beta$,

故證得 $-\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} \right) \left(d + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{d} + \dots \right)$ 。

C. $x = y + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2y} + \dots$ 至無限, 則 $y = x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x} - \dots$ 至無限。

試證之。

$$(證) \quad x = y + \frac{1}{2y + x - y} \quad \therefore x^2 - y^2 = 1 \quad \therefore y = x - \frac{1}{x + y}$$

$$= x - \frac{1}{x + x - \frac{1}{x + y}} = x - \frac{1}{2x - \frac{1}{x + y}} = x - \frac{1}{2x - 2x - \dots}$$

7. $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots$ 至無限, $y = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \dots$ 至無限。

及 $z = \frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \dots$ 至無限。

則 $x(y^2 - z^2) + 2y(z^2 - x^2) + 3z(x^2 + y^2) = 0$ 。試證之。

(證) $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + x$ 故 $ax^2 + abx - b = 0$, 由同法從第二及第三, 得

$$2ay^2 + 4aby - 2b = 0 \quad \text{及} \quad 3az^2 + 9bz - 3b = 0.$$

由此三方程式消去 a 及 b 而得 $x(y^2 - z^2) + 2y(z^2 - x^2) + 3z(x^2 - y^2) = 0$ 。

8. n 爲任意之正整數。則 $n = 1 + \frac{n^2-1^2}{3} + \frac{n^2+2^2}{5} + \frac{n^2-3^2}{7} + \dots$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } n &= 1 + n - 1 = 1 + \frac{n^2-1}{n+1} = 1 + \frac{n^2-1}{3+n-2} = 1 + \frac{n^2-1}{3+\frac{n^2-2^2}{n+2}} \\ &= 1 + \frac{n^2-1}{3+\frac{n^2-2^2}{5+n-3}} = 1 + \frac{n^2-1}{3+\frac{n^2-2^2}{5+\frac{n^2-3^2}{n+3}}} = 1 + \frac{n^2-1^2}{3} + \frac{n^2-2^2}{5} + \frac{n^2-3^2}{7} + \dots \end{aligned}$$

9. $\frac{1+a^2+a^4+\dots+a^{2n}}{a+a^3+a^5+\dots+a^{2n-1}} = a + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+\frac{1}{a}} - \frac{1}{a+\frac{1}{a}} - \dots$ 至 n 商。

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } \frac{1+a^2+a^4+\dots+a^{2n}}{a+a^3+a^5+\dots+a^{2n-1}} &= \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2} \div \frac{a-a^{2n+1}}{1-a^2} = \frac{1-a^{2n+2}}{a-a^{2n+1}} \\ &= a + \frac{1}{a} - \frac{a-a^{2n-1}}{1-a^{2n}} = a + \frac{1}{a} - \frac{1}{\frac{1-a^{2n}}{a-a^{2n-1}}} = a + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+\frac{1}{a-\frac{a-a^{2n-2}}{1-a^{2n-2}}}} = \dots \\ &= a + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+\frac{1}{a}} - \frac{1}{a+\frac{1}{a}} - \dots \end{aligned}$$

10. $x = \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} + \dots$ 及 $y = \frac{c}{d+b} + \frac{a}{d+b} + \dots$

則 $bx - dy = a - c$ 。

$$\text{〔證〕 } x = \frac{a}{b+y} \quad \text{及} \quad y = \frac{c}{d+x} \quad \therefore bx + xy = a, \quad dy + xy = c,$$

由是 $bx - dy = a - c$ 。

11. $a + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a} + \dots$ 比於 $b + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \dots$

若 $1+a : 1+b$ 。

$$\text{〔證〕 } x = a + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a} + \dots$$

$$\therefore x = a + \frac{1}{1+b+x} = \frac{(ab+a+b)x+(a+1)}{(b+1)x+1}$$

由是 $x^2(b+1) - x(ab+a+b-1) - (a+1) = 0$ 。

(1)

$$\text{同法 } y = b + \frac{1}{1 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{1 + \dots}}}} = b + \frac{1}{1 + \frac{1}{a + y}}$$

$$\therefore y^2(a+1) - y(ab+a+b-1) - (b+1) = 0.$$

$$\text{比較(1)及(2)得 } x = \frac{a+1}{b+1}y. \therefore x : y = a+1 : b+1.$$

$$12. \frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \dots \text{之第 } n \text{ 漸近分數爲 } \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

〔證〕 原連分數自第二元以後，其循環元凡爲 $-\frac{2}{3}$ 。故由 358 章

之例。 $n > 2$ ，則 $p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}$ ，移項，得

$$p_n - 2p_{n-1} = p_{n-1} - 2p_{n-2}$$

$$\text{由同理 } = p_{n-2} - 2p_{n-3} = p_{n-3} - 2p_{n-4} = \dots \dots \dots$$

$$= p_3 - 2p_2 = 7 - 2 \cdot 3 = 1.$$

$$\text{但以 } p_2 = 3, p_3 = 7.$$

$$\text{故 } (p_n - 2p_{n-1}) + 2(p_{n-1} - 2p_{n-2}) + 2^2(p_{n-2} - 2p_{n-3}) + \dots + 2^{n-3}(p_3 - 2p_2) \\ = 1 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + \dots + 2^{n-3} \cdot 1.$$

$$\text{即 } p_n - 2^{n-2}p_2 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-3}.$$

$$\therefore p_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-3} + 2^{n-2} \cdot 3 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} \\ = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1.$$

$$\text{由同法 } q_n = 2^n + 1. \therefore \frac{p_n}{q_n} = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

〔別法〕 又用 360 章之法。其第 $(n-1)$ 漸近分數爲 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 。

然 p_{n-1} 爲等於 $\frac{3-2x}{1-3x+2x^2} = \frac{4}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$ 展開式中 x^{n-2} 之係數。

$$\text{即 } 4(2^{n-2}) - 1 = 2^n - 1.$$

又 q_{n-1} 爲等於 $\frac{1}{1-3x+2x^2} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$ 展開式中 x^{n-2} 之係數。

$$\text{即 } 2(2^{n-2}) - 1 = 2^{n-1} - 1$$

$$\therefore \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1} - 1}. \text{ 由是 } \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{3} - \frac{4}{2^{n-1} - 1} = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

13. $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ 之第 n 漸近分數爲

$$\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}$$

〔證〕 由 360 章, $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$, 故第 n 漸近分數之分子爲於

$$\frac{2+x}{1-2x-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{(1+\sqrt{2})^2}{1-x(1+\sqrt{2})} - \frac{(1-\sqrt{2})^2}{1-x(1-\sqrt{2})} \right\}$$

展開式中 x^{n-1} 之係數

$$\text{即 } \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1} \} \text{ 也。}$$

又分母爲於 $\frac{1}{1-2x-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{1+\sqrt{2}}{1-x(1+\sqrt{2})} - \frac{1-\sqrt{2}}{1-x(1-\sqrt{2})} \right\}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數, 即 $\frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n \}$ 也。

\therefore 第 n 漸近分數爲 $\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}$ 。

14. $\frac{1}{1} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \dots$ 之第 n 漸近分數爲 $2^n - 1$ 。

〔證〕 $p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}$, 故 $p_n - 2p_{n-1} = p_{n-1} - 2p_{n-2}$ 。

同理 $= p_{n-2} - 2p_{n-3} = \dots = p_2 - 2p_1 = 1$ 。

但 $p_1 = 1, p_2 = 3$ 。

$\therefore (p_n - 2p_{n-1}) + 2(p_{n-1} - 2p_{n-2}) + 2^2(p_{n-2} - 2p_{n-3}) + \dots + 2^{n-2}(p_2 - 2p_1)$
 $= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2}$ 。如前例 $p_n = 2^n - 1$ 。又 $q_n = 1$ 。

15. $\frac{1}{a+b} - \frac{ab}{a+b} - \frac{ab}{a+b} - \dots$ 之第 n 漸近分數爲 $\frac{a^n - b^n}{a^{n+1} - b^{n+1}}$ 。

〔證〕 $p_n = (a+b)p_{n-1} - abp_{n-2}$, 故 $p_n - ap_{n-1} = b(p_{n-1} - ap_{n-2})$ 。

同理 $= b^2(p_{n-2} - ap_{n-3}) = \dots = b^{n-2}(p_2 - ap_1) = b^{n-2} \cdot b = b^{n-1}$ 。

但 $p_1 = 1, p_2 = a + b$ 。

$\therefore (p_n - ap_{n-1}) + \frac{a}{b} \cdot b(p_{n-1} - ap_{n-2}) + \frac{a^2}{b^2} \cdot b^2(p_{n-2} - ap_{n-3}) + \dots$
 $+ \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} b^{n-2}(p_2 - ap_1) = b^{n-1} + \frac{a}{b} b^{n-1} + \frac{a^2}{b^2} b^{n-1} + \dots + \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} b^{n-1}$

$$\text{即 } p_n - a^{n-1} p_1 = b^{n-1} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}}{1 - \frac{a}{b}} \right\} = \frac{b(a^{n-1} - b^{n-1})}{a-b}$$

$$\therefore p_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}. \text{ 由同法 } q_n = (a+b)q_{n-1} - abq_{n-2} \text{ 得 } q_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

16. 求 $\frac{2}{1} - \frac{3}{5} - \frac{8}{7} - \dots - \frac{r^2-1}{-2r+1} - \dots$ 之第 n 漸近分數。

[解] 惟 $P_n = (2n+1)P_{n-1} - (n^2-1)P_{n-2}$

故 $P_n - nP_{n-1} = (n+1)\{P_{n-1} - (n-1)P_{n-2}\}$ 。

由同理 $p_{n-1} - (n-1)p_{n-2} = n\{p_{n-2} - (n-2)p_{n-3}\}$ 。

..... =

$$p_3 - 3p_2 = 4\{p_2 - 2p_1\}.$$

由是 $p_n - np_{n-1} = (n+1)\{p_{n-1} - (n-1)p_{n-2}\} = (n+1)n\{p_{n-2} - (n-2)p_{n-3}\}$

$$= (n+1)n \dots 4\{p_2 - 2p_1\} = \frac{n+1}{3}(10-4) = \underline{n+1}.$$

但 $p_1 = 2, p_2 = 10, \therefore \frac{p_n}{n} - \frac{p_{n-1}}{n-1} = n+1.$

同理 $\frac{p_{n-1}}{n-1} - \frac{p_{n-2}}{n-2} = n.$

..... = $\frac{p_3}{3} - \frac{p_2}{2} = 4, \frac{p_2}{2} - \frac{p_1}{1} = 3.$

由加法得 $\frac{p_n}{n} - \frac{p_1}{1} = 3+4+\dots+(n+1).$

$$\therefore p_n = \underline{n} \{2+3+4+\dots+(n+1)\} = \frac{1}{2}n(n+3)\underline{n}.$$

由同法 $q_n = \underline{n} \therefore$ 所求之漸近分數為 $\frac{p_n}{q_n} = \frac{n(n+3)}{2}.$

17. 於諸分數 $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ 其 $p_r = q_{r-1}, q_r = (n^2-1)p_{r-1} + 2q_{r-1}$,

若 n 至無限大時, 則 p_n/q_n 之極限為 $1/(1+n)$.

[證] $\frac{p_r}{q_r} = \frac{q_{r-1}}{(n^2-1)p_{r-1} + 2q_{r-1}} = \frac{1}{(n^2-1)\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}} + 2}$. 若 n 增至無限大時,

p_r 殆等於 $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$ 而此極限之值為 L 。則 $L = \frac{1}{(n^2-1)L+2}$

$$\therefore n^2 L^2 - (L-1)^2 = 0. \quad \therefore L = \frac{1}{n+1}.$$

18. 連分數 $\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}}$ 之第 n 漸近分數

比於第 $(n-1)$ 漸近分數為 $b_n + \frac{a_n}{b_{n-1} + \dots + \frac{a_3}{b_2} : b_n + \frac{a_n}{b_{n-1}} + \dots + \frac{a_2}{b_1}$

(證) $p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}, \quad \therefore \frac{p_n}{p_{n-1}} = b_n + \frac{a_n}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}$

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}, \dots, \frac{p_3}{p_2} = b_3 + \frac{a_3}{p_1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = b_2.$$

由是 $\frac{p_n}{p_{n-1}} = b_n + \frac{a_n}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}} = b_n + \frac{a_n}{b_{n-1} + \frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}$

$$= b_n + \frac{a_n}{b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2} + \frac{p_{n-3}}{p_{n-4}}}} + \dots + \frac{a_3}{b_2}$$

由同法。 $\frac{q_n}{q_{n-1}} = b_n + \frac{a_n}{b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2} + \dots + \frac{a_3}{q_2}}}$ 而 $\frac{q_2}{q_1} = b_2 + \frac{a_2}{b_1}$

故 $\frac{q_n}{q_{n-1}} = b_n + \frac{a_n}{b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2} + \dots + \frac{a_3}{b_2} + \frac{a_2}{b_1}}}$

$$\therefore \frac{p_n}{q_n} \div \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n}{p_{n-1}} \div \frac{q_n}{q_{n-1}} = b_n + \frac{a_n}{b_{n-1} + \dots + \frac{a_3}{b_2} : b_n + \frac{a_n}{b_{n-1}} + \dots + \frac{a_2}{b_1}.$$

19. 純循環連分數取其循環之一節，二節，……令其各漸近分數為 y_1, y_2, \dots 而於 y_1 之前兩漸近分數為 $P/Q, P'/Q'$ 。

則 $y_n = (P'y_{n-1} + P)/(Q'y_{n-1} + Q)$ 。

(證) 純循環連分數為 $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots + \frac{1}{h + \frac{1}{k + \frac{1}{l + a + \dots}}}}$

$$y_1 = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots + \frac{1}{h + \frac{1}{k + \frac{1}{l}}}}$$

$$y_2 = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots + \frac{1}{h + \frac{1}{k + \frac{1}{l + a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots + \frac{1}{l}}}}}}}$$

$$y_n = a + \frac{1}{b+c} + \dots + \frac{1}{k+l} + \frac{1}{a+b} + \dots + \frac{1}{l} + \dots \text{至 } n \text{ 回之循環。}$$

今以 y_1, y_2, \dots 代 $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots$ 而其第一次循環中最後之三漸

近分數為 $\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'},$ 及 $\frac{A''}{B''},$

$$\text{即 } \frac{A}{B} = a + \frac{1}{b+z} + \dots + \frac{1}{h}.$$

$$\frac{A'}{B'} = a + \frac{1}{b+c} + \dots + \frac{1}{h+k}.$$

$$\text{及 } \frac{A''}{B''} = a + \frac{1}{b+c} + \dots + \frac{1}{h+k+l}, \text{ 而 } p_1 = lA' + A, \text{ 及 } q_1 = lB' + B.$$

$$\text{又 } y_n = a + \frac{1}{b+c} + \dots + \frac{1}{l} + \frac{1}{y_{n-1}}.$$

$$\therefore y_n = \frac{\left(l + \frac{1}{y_{n-1}}\right)A' + A}{\left(l + \frac{1}{y_{n-1}}\right)B' + B} = \frac{A''y_{n-1} + A'}{B''y_{n-1} + B'}.$$

但 $\frac{A'}{B'}$ 及 $\frac{A''}{B''}$ 為於 y_1 之前兩漸近分數。故即為題中之 $\frac{P'}{Q'}$ 及 $\frac{P''}{Q''}$ 。

20. 設 n 為完平方之整數 Z 。將 \sqrt{Z} 化為連分數。而得

$$a + \frac{1}{b+c} + \dots + \frac{1}{k+2a+b} + \dots \text{ 又取其循環之一節, 二節, } \dots$$

而其各漸近分數為 P_1, P_2, \dots, P_r , 則 $\frac{P_r + \sqrt{Z}}{P_r - \sqrt{Z}} = \left(\frac{P_1 + \sqrt{Z}}{P_1 - \sqrt{Z}}\right)^r$ 。

(證) 以 $a + \frac{1}{b+c} + \dots + \frac{1}{k}$ 之最後三漸近分數為 $\frac{A''}{B''}, \frac{A'}{B'}, \frac{A}{B}$,

$$\text{而 } \frac{A}{B} = P_r, p_r = a + \frac{1}{b+c} + \dots + \frac{1}{k+a+p_{r-1}}.$$

$$\text{及 } \sqrt{Z} = a + \frac{1}{b+c} + \dots + \frac{1}{k+a+\sqrt{Z}}.$$

$$\text{由是 } P_r = \frac{\left(k + \frac{1}{a+p_{r-1}}\right)A' + A''}{\left(k + \frac{1}{a+p_{r-1}}\right)B' + B''} = \frac{A(a+p_{r-1}) + A'}{B(a+p_{r-1}) + B'}.$$

$$\text{又 } \sqrt{Z} = \frac{\left(k + \frac{1}{a + \sqrt{Z}}\right)A' + A''}{\left(k + \frac{1}{a + \sqrt{Z}}\right)B' + B''} = \frac{A(a + \sqrt{Z}) + A'}{B(a + \sqrt{Z}) + B''}$$

變化之爲 $Aa + A' - BZ - (Ba + B' - A)\sqrt{Z} = 0$,
 \sqrt{Z} 爲無理數。故上之關係不可不如此。

$$Ba + B' - A = 0 \quad \text{及} \quad Aa + A' - BZ = 0.$$

$$\text{以此代入於 } P_r \text{ 之式爲 } P_r = \frac{Aa + A' + AP_{r-1}}{Ba + B' + BP_{r-1}} = \frac{BZ + AP_{r-1}}{A + BP_{r-1}}$$

$$\text{而 } \frac{A}{B} = P_1, \text{ 故 } P_r = \frac{Z + P_1 P_{r-1}}{P_1 + P_{r-1}}$$

$$\text{由是 } \frac{P_r}{\sqrt{Z}} = \frac{Z + P_1 P_{r-1}}{(P_1 + P_{r-1})\sqrt{Z}}$$

$$\therefore \frac{P_r + \sqrt{Z}}{P_r - \sqrt{Z}} = \frac{(Z + P_1 P_{r-1}) + (P_1 + P_{r-1})\sqrt{Z}}{(Z + P_1 P_{r-1}) - (P_1 + P_{r-1})\sqrt{Z}} = \left(\frac{P_1 + \sqrt{Z}}{P_1 - \sqrt{Z}}\right) \left(\frac{P_{r-1} + \sqrt{Z}}{P_{r-1} - \sqrt{Z}}\right)$$

r 爲任意之正整數爲合理。故以 $r-1$ 代其 r 。亦爲合理。

$$\frac{P_{r-1} + \sqrt{Z}}{P_{r-1} - \sqrt{Z}} = \left(\frac{P_1 + \sqrt{Z}}{P_1 - \sqrt{Z}}\right) \left(\frac{P_{r-2} + \sqrt{Z}}{P_{r-2} - \sqrt{Z}}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{由是 } \frac{P_r + \sqrt{Z}}{P_r - \sqrt{Z}} &= \left(\frac{P_1 + \sqrt{Z}}{P_1 - \sqrt{Z}}\right)^2 \left(\frac{P_{r-2} + \sqrt{Z}}{P_{r-2} - \sqrt{Z}}\right) = \left(\frac{P_1 + \sqrt{Z}}{P_1 - \sqrt{Z}}\right)^3 \left(\frac{P_{r-3} + \sqrt{Z}}{P_{r-3} - \sqrt{Z}}\right) \\ &= \dots = \left(\frac{P_1 + \sqrt{Z}}{P_1 - \sqrt{Z}}\right)^r \end{aligned}$$

21. 求 $\frac{1}{a+a^{-1}} - \frac{1}{a+a^{-1}} - \frac{1}{a+a^{-1}} - \dots$ 之第 n 漸近分數。而 n 增至無限時。其第 n 漸近分數之極限。因 a 之小於 1, 或大於 1, 而等於 a 或 a^{-1} 。

[證] $P_n = (a+a^{-1})P_{n-1} - P_{n-2}$ 故由 360 章。

$$P_n \text{ 等於 } \frac{1}{1 - (a+a^{-1})x + x^2} = \frac{1}{a-a^{-1}} \left(\frac{a}{1-ax} - \frac{a^{-1}}{1-a^{-1}x} \right) \text{ 展開式 } x^{n-1} \text{ 之係數。}$$

$$\text{由是 } P_n = \frac{1}{a-a^{-1}} (a^n - a^{-n})$$

$$\begin{aligned} \text{又 } Q_n \text{ 等於 } \frac{a+a^{-1}-x}{1-(a+a^{-1})x+x^2} &= \frac{1}{a-a^{-1}} \left(\frac{a^2}{1-ax} - \frac{a^{-2}}{1-a^{-1}x} \right) \text{ 展開式中} \\ x^{n-1} \text{ 之係數。由是 } Q_n &= \frac{1}{a-a^{-1}} (a^{n+1} - a^{-(n-1)}) \end{aligned}$$

$\therefore \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a^n - a^{-n}}{a^{n+1} - a^{-n-1}}$ 即得所求。

若 a 大於 1, 則 $\frac{P_n}{Q_n}$ 之極限爲 $\frac{a^n}{a^{n+1}} = a^{-1}$. 何則, 以 n 爲無限大, 則 a^{-n} , a^{-n-1} 爲 0 故也。

又若 a 小於 1, 則 $\frac{P_n}{Q_n}$ 之極限爲 $\frac{-a^{-n}}{-a^{-n-1}} = a$.

22. $\frac{1}{2} - \frac{2}{2+2} + \frac{3}{2+2+2} - \frac{3}{2+2+2} + \dots$ 之第 n 漸近分數, 爲 $\frac{3}{8} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}$.

[證] 370 章之公式 (F) 於

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \dots = \frac{1}{a_1 + a_2 - 1} + \frac{a_2}{a_3 - 1} + \frac{a_3}{a_4 - 1} + \dots$$

中其 $a_1 = 2$,

$a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 3$, 則得

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} - \dots = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \dots$$

故第 n 漸近分數

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \dots + \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} \right\}.$$

23. $e^{-x} = \frac{1}{1} - \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{2-x} - \frac{2x^3}{3-x} + \dots + \frac{(n-1)x^{n-1}}{n-x} + \dots$ 至無限。

[證] $e^{-x} = \frac{1}{1} - x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$

$$= \frac{1}{1} + \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{2-x} - \frac{2x^3}{3-x} + \dots + \frac{(n-1)x^{n-1}}{n-x} + \dots$$

由 370 章 (C).

24. $\frac{x}{a} - \frac{x^2}{ab} + \frac{x^3}{abc} - \dots = \frac{x}{a} + \frac{ax}{b-x} + \frac{bx}{c-x} + \dots$

[證] $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = x$ 及 $b_1 = a$, $b_2 = b$, $b_3 = c$, \dots 以代於 370 章 (C) 即可證得。

25. $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots = e^{-\frac{1}{2}}$.

[證] 由 370 章 (F)

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = e^{-\frac{1}{2}}.$$

26. 求 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{6}{8} + \dots + \frac{3(n-2)}{3n-4} + \dots$ 至無限之值。

(解) 由 370 章 (F) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{6}{8} + \dots + \frac{3(n-2)}{3n-5} + \dots$
 $= \frac{1}{1} - \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.3.6} - \frac{1}{1.3.6.9} + \dots = e^{-\frac{1}{3}}$.

27. $\frac{1}{3} + \frac{1^2.3^2}{5} + \frac{2^2.4^2}{7} + \frac{3^2.5^2}{9} + \dots + \frac{(n-1)^2(n+1)^2}{2n+1}$
 $= \frac{1}{1.3} - \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+2)}$.

(證) 由 370 章 (D) $\frac{1}{1.3} - \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+2)}$
 $= \frac{1}{1.3} + \frac{1^2.3^2}{2.4+1.3} + \frac{2^2.4^2}{3.5-2.4} + \dots + \frac{(n-1)^2(n+1)^2}{n(n+2)-(n-1)(n+1)} + \dots$
 $= \frac{1}{3} + \frac{1^2.3^2}{5} + \frac{2^2.4^2}{7} + \dots + \frac{(n-1)^2(n+1)^2}{2n+1} + \dots$

28. $\frac{2}{1-9} \frac{2}{-1-9} \frac{2}{-1-9} \dots$ 之第 n 漸近分數, 爲 $6 \frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$

(證) 先以 $\frac{A}{B}$ 爲 $-\frac{2}{9-1} \frac{2}{-1-9} \dots$ 之第 $(n-1)$ 漸近分數。如於

360 章第二例 $a=-2, b=9, c=-2, d=1$ 。

則 $\frac{a+adx-acx^2}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4} = \frac{-2(1+x+2x^2)}{1-5x^2+4x^4}$,

及 $\frac{b+(bd+c)x-acx^2}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4} = \frac{9+7x-4x^2}{1-5x^2+4x^4}$

而 A 等於前之分數展開式中 x^{n-2} 之係數, B 等於後之分數展開式中 x^{n-2} 之係數。

而 $\frac{-2(1+x+2x^2)}{1-5x^2+4x^4} = -2 \left\{ -\frac{2}{3(1-x)} - \frac{1}{3(1+x)} + \frac{4}{3(1-2x)} + \frac{2}{3(1+2x)} \right\}$ 於此展開式中 x^{n-2} 之係數, 爲

$-2 \left\{ -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-1)^{n-2} + \frac{1}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^{n-2}2^{n-1} \right\} = -\frac{2}{3}(2^{n-1}-1)\{2+(-1)^{n-2}\} = 4$ 。

又 $\frac{9+7x-4x^2}{1-5x^2+4x^4} = -\frac{2}{1-x} - \frac{1}{1+x} + \frac{8}{1-2x} + \frac{4}{1+2x}$, 於此展開式中 x^{n-2} 之係數, 爲

$-2-(-1)^{n-2}+8 \cdot 2^{n-2}+4(-1)^{n-2}2^{n-2} = (2^n-1)\{2+(-1)^{n-2}\} = B$ 。

$$\text{由是 } \frac{A}{B} = -\frac{2(2^{n-1}-1)}{3(2^n-1)}.$$

$$\text{故所求之漸近分數 } \frac{P_n}{Q_n} = \frac{2}{1} - \frac{2(2^{n-1}-1)}{3(2^n-1)} = \frac{6(2^n-1)}{2^{n+1}-1}.$$

$$29. \frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \dots \text{之第 } n \text{ 漸近分數爲 } \frac{6n-1+(-1)^n}{6n+7+(-1)^n}.$$

[證] 如前例。先求其 $-\frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \dots$ 之第 $n-1$ 漸近分數。而

$$\frac{1}{3} + \frac{A}{B} \text{ 即得所求之漸近分數也。}$$

但 $\frac{A}{B}$ 爲所設 $-\frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \dots$ 之第 $n-1$ 之漸近分數。

$$30. \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{7} - \dots \text{至無限} = 1.$$

[證] 由 370 章 (D) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1^2}{2+1} - \frac{2^2}{3+2} - \frac{3^2}{4+3} - \dots$
 $\dots = \frac{1}{1} - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \dots$ 但 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ 至無限 $= \infty$ 。

$$\text{由是 } 1 - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{7} - \dots = \frac{1}{1 - \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{7} - \dots} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\therefore \frac{1^2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{3^2}{7} - \dots = 1.$$

$$31. \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1.2}{3} + \frac{3.4}{3} + \frac{5.6}{3} + \dots \text{至無限。}$$

$$[\text{證}] \sqrt{2} = (1+1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \dots$$

$$\text{由 370 章 (C)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2.1}{4-1} + \frac{4.3}{6-3} + \frac{6.5}{8-5} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1.2}{3} + \frac{3.4}{3} + \frac{5.6}{3} + \dots$$

$$32. 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{2.3}{1} + \frac{4.5}{1} + \frac{6.7}{1} + \dots \text{至無限。}$$

$$[\text{證}] \frac{1}{\sqrt{2}} = (1+1)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \dots$$

$$\begin{aligned} \text{由是 } 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{2} - \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2.3}{4} + \frac{4.5}{6} - \frac{6.7}{8} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{2.3}{1} + \frac{4.5}{1} + \frac{6.7}{1} + \dots \end{aligned}$$

33. $\frac{1}{4} - \frac{3.4}{9} + \frac{5.6}{13} - \frac{7.8}{17} + \frac{9.10}{21} - \dots$ 至無限 = 1.

[證] 由 370 章 (C) $\frac{1}{4} - \frac{3.4}{9} + \frac{5.6}{13} - \frac{7.8}{17} + \frac{9.10}{21} - \dots$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.6} + \frac{1.3.5}{4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10} + \dots$$

又由 325 章 $\frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.6} + \frac{1.3.5}{4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10} + \dots = \frac{1}{1+2-4}(-1) = 1.$

34. $(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1} - \frac{(n-1)x}{2} + \frac{(n-1)x}{(n-1)x+2} - \frac{2(n-2)x}{3} + \frac{2(n-2)x}{(n-2)x+3} - \frac{3(n-3)x}{4} + \frac{3(n-3)x}{(n-3)x+4} - \dots$

[證] $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$

$$= 1 + \frac{nx}{1} - \frac{1(n-1)x}{(n-1)x+2} - \frac{2(n-2)x}{(n-2)x+3} - \frac{3(n-3)x}{(n-3)x+4} - \dots \text{370 章 (C).}$$

35. n 為整數。則 $2^n = 1 + \frac{n}{1} - \frac{n-1}{n+1} + \frac{2(n-2)}{n+1} - \frac{3(n-3)}{n+1} - \dots - \frac{(n-1)1}{n+1}$

[證] 於前例 $x=1$ 。即可為本題之證。

36. $\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{x}{a'}\right)\left(1 + \frac{x}{a''}\right) \dots = 1 + \frac{x}{a} - \frac{a(x+a)}{x+a+a'} - \frac{a'(x+a')}{x+a'+a''} - \dots$

[證] $\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{x}{a'}\right)\left(1 + \frac{x}{a''}\right) \dots = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x(x+a)}{aa'} + \frac{x(x+a)(x+a')}{aa'a''} + \dots$

由 370 章 = $1 + \frac{x}{a} - \frac{a(x+a)}{x+a+a'} - \frac{a'(x+a')}{x+a'+a''} - \dots$

37. 試證 $\frac{1}{n} - \frac{n}{2n+1} - \dots$ 至無限 = $\frac{1}{n-1} + \frac{n}{2n+1} + \frac{2n}{3n-1} + \dots$ 至無限。

[證] $\frac{1}{n} - \frac{n}{2n+1} - \frac{2n}{3n+1} - \dots = \frac{1}{n} + \frac{1}{n.2n} + \frac{1}{n.2n.3n} + \dots = e^{\frac{1}{n}} - 1.$

又 $e^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n.2n} - \frac{1}{n.2n.3n} + \dots = 1 - \frac{1}{n} + \frac{n}{2n-1} - \frac{2n}{3n-1} + \dots$

$$\therefore \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{n}}} = n + \frac{1}{2n-1} + \frac{2n}{3n-1} + \dots$$

$$\therefore n-1 + \frac{n}{2n-1} + \frac{2n}{3n-1} + \dots = \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = \frac{1}{e^{-\frac{1}{n}} - 1}$$

$$\therefore \frac{1}{n-1} + \frac{n}{2n-1} + \frac{2n}{3n-1} + \dots = e^{-\frac{1}{n}} - 1.$$

第 貳 拾 捌 編

數 之 法 則

371. 注意 於本編專論數之性質。所用之數限於正整數。編中所云可除者。皆為除盡而無餘者也。

記號 $M(p)$ 所以表示 p 之倍數也。如 65, 125 等。皆為 5 之倍數。可記為 $M(5)$ 。

定義 除 1 及本數外。更無他數可以除盡者。此種數謂之素數 (Prime)。若更有他數可以除盡者。此種數謂之複數 (Composite)。

有兩數不能以他一數同時除盡者。則此兩數謂之相互素數。或僅謂之互素 (Relatively Prime)。

372. 耶列多蘇 Eratosthenes 氏之撰法 此法用以檢定各異之素數也。

先從 1 起順次列其連續數如次。

1,	2,	3,	4,	5,	6̇,	7,	8,	9,	10̇,
11,	12̇,	13,	14̇,	15̇,	16,	17,	18̇,	19,	20̇,
21̇,	22̇,	23,	24̇,	25̇,	26̇,	27̇,	28̇,	29,	30̇,
31,	32̇,	33̇,	34̇,	35̇,	36̇,	37,	38̇,	39̇,	40̇,

.....

如上所列之數。其第一之素數為 2。自 2 以下每間一數所有 4, 6, 8, 10, 12, 皆為 2 之倍數。故為複數。乃於其各數字之上附一小點以記之。

其第二之素數為 3。自 3 以下每間 2 數。所有 6, 9, 12, 15, 18, 皆為 3 之倍數。故為複數。乃於其各數字之上。亦附一小點以記之。

其第三之素數爲5。自5以下每間4數。附小點於其各數字之上。則凡5之倍數。皆有點以爲記。

其第四之素數爲7。自7以下每間6數。附小點於其各數字之上。則凡7之倍數。皆有點以爲記。

依次於11, 13, 17,之倍數。皆如上法附點記之。

於是從所列之連續數中。除其附點之諸數外。所有1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,皆爲素數也。

任何之壹數。分檢定其素數與否。可如次之法則推究之。

設複數由兩因子而成。而其數非爲完平方數。則其數之平方根。比其壹因子爲大。而比其他壹因子爲小。例 $\sqrt{15}$ 比3爲大。而比5爲小。

由是知凡爲複數必含有小於其平方根之素因子。如某數爲小於121。欲檢定其數爲素數與否。則可以小於 $\sqrt{121}=11$ 之素數。即2, 3, 5, 7, 逐次除之。如皆不能盡。即可決定此數爲素數也。

何則。某數爲小於121之數。假定此數爲複數。則必含有小於 $\sqrt{121}=11$ 之素因子。而小於11之素數祇有2, 3, 5, 7四數。若逐次以2, 3, 5, 7除之。而皆不能除盡。則此數非爲複數而爲素數可知。

例欲檢283爲素數與否。則以283爲小於 $17^2=289$ 之數。假定此數爲複數。則必含有小於17之素因子。而小於17之素數。惟限於2, 3, 5, 7, 11, 13。今逐次以各素數除283而皆不能除盡。則知283必爲素數。

373. 定理 素數之數無限。

素數之數如有限。則諸素數中必有一數爲最大者。茲假定最大之數爲 p 。

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times p = |p|$ 。此 $|p|$ 爲 p 或小於 p 之各素數皆可除盡之。故 $|p+1|$ 。以 p 或小於 p 之各素數除之皆餘1。則是 $|p+1|$ 如爲複數。必含有大於 p 之素因子。否則 $|p+1|$ 。即爲素數。如是 p 非爲最大之素數可知。故曰素數之數無限。

此素數之數無限

〔例〕求連續之 n 個數皆為複數者。

則以 $|n+1+r$ 為 n 個數中之壹數。但 r 為 $2, 3, 4, \dots, n+1$ 以內任意之壹數。即 $|n+1+r$ 可以 r 除盡而皆為複數。

例 $|4+1+r=120+r$ 。而 r 為 $2, 3, 4, 5$ 以內之任一數。故得連續四複數為 $122, 123, 124, 125$ 。

374. 定理 凡有理整代數式。對於未知元之任何值。不能僅表素數。

何則。假定有理整代數式 $a \pm bx \pm cx^2 \pm dx^3 \pm \dots$ 對於 x 之任何值而為素數。其 a, b, c, d, \dots 為常數。設以 m 易 x 而其全式之值為 p 時。(但 p 非為 1。亦非為 0)

$$\text{則 } p = a \pm bm \pm cm^2 \pm dm^3 \pm \dots$$

又令 $x = m + np$ 以代於原代數式。(但 n 為任意之整數) 則為 $a \pm b(m + np) \pm c(m + np)^2 \pm d(m + np)^3 \pm \dots = a \pm bm \pm cm^2 \pm \dots \pm (bn + 2mn + n^2 + 3m^2n + \dots)p = p \pm M(p)$ 。此式為 p 之倍數即複數。而非素數。由是知前所假定者不能僅表素數也。

如次之公式祇能對於 x 之適宜之值而為素數。

(1) $x < 40$ 。則 $x^2 + x + 41$ 為素數尤拉 (Euler 氏)。

(2) $x < 16$ 。則 $x^2 + x + 17$ 為素數鮑洛 (Barlow 氏)。

(3) $x < 29$ 。則 $2x^2 + 29$ 為素數鮑洛 (Barlow 氏)。

375. 數之因子 凡算術上所述因子之諸性質。皆歸屬於次之定理。

定理 一數可除盡兩因子之積。而對於其壹因子為互素者。則其一數必可以除盡他一因子。

何則。設以 x 除 ab 而得除盡。而 x 對於 a 為互素。今化 $\frac{a}{x}$ 為連分數。

而以 $\frac{p}{q}$ 為於 $\frac{a}{x}$ 前之漸近分數。(凡連分數之漸近分數。皆為已約分數) 則由 357 章第一而得 $qa - px = \pm 1$ 。∴ $qab - pax = \pm b$ 。

惟以所設之 ab 為可以 x 除得。則 $qab - pax$ 必可以 x 除得。即 b 可以 x 除得。

既知上之定理。而於次之定理自易推求。

〔第一〕諸因子之積。如可以一素數除者。則諸因子中至少有一因子。可以此一素數除。

〔第二〕如 a^n 可以一素數除者。則 a 亦可以此一素數除。

〔第三〕 a 對於 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 爲互素。則對於其積 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 亦爲互素。

〔第四〕 a 對於 b 爲互素。則 a^n 對於 b^n 亦爲互素。

〔第五〕一數可各以諸素數除者。則亦可以諸素數之積除。

376. 定理 將各個複數分割其素因子。無論如何分割。其所得之素因子必爲同一。

設 N 非爲素數除 N 及 1 外他數 x 可以除得。而其商爲 y 。則 $N=xy$ 。又 x, y 非爲素數。而 $x=zw, y=uv$ 。則 $N=zwuv$ 。

依此續次分解之。至分出之諸因子。皆爲素數而止。今定 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ 爲其分出之素因子。則 $N=\alpha\beta\gamma\delta\dots$ 。若其各素因子有同因子者。則 $N=\alpha^p\beta^q\gamma^r\delta^s\dots$ 。但 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ 爲其各異之素因子。

乃證將 N 分割其素因子。不能用別法於 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ 以外。分出特異之素因子。

假定將 N 分割其素因子。用前之法則。分得其各素因子爲 $a, \beta, \gamma, \delta, \dots$ 。更用別法可分得其各素因子爲 a, b, c, d, \dots 。則 $N=abcd\dots$ 。

即 $abcd\dots = \alpha\beta\gamma\delta\dots$ 。

因 N 可被 a 除。即 $\alpha\beta\gamma\delta\dots$ 亦可被 a 除。而 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ 皆爲素數。故 a 必爲 $\alpha\beta\gamma\delta\dots$ 內之一因子。若其 $a=\alpha$ 則 $bcd\dots = \beta\gamma\delta\dots$ 。同法可得 $b=\beta, c=\gamma, d=\delta, \dots$ 。

由是 a, b, c, d, \dots 與 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ 其各素數相同。

故將 N 分割其素因子。無論若何分割。其分出之各素因子。必爲同一也。

〔例〕將 29645, 13689, 90508 分割其素因子。

答 5. 7². 11², 3⁴. 13³, 及 2². 11³. 17.

377. 問題 求含於 $\lfloor n \rfloor$ 內壹素數之最高方乘。

$x > y$ 其 $\frac{x}{y}$ 之整數部。可用 $I\left(\frac{x}{y}\right)$ 之記號表之。

例 $\frac{20}{6} = 3\frac{2}{6}$ 可以 $I\left(\frac{20}{6}\right)$ 表其整數部 3 也。

如 a 爲任意之素數。而於 $\lfloor n \rfloor$ 之因子內。可以 a 除者。其因子爲 $a, 2a, 3a, \dots, I\left(\frac{n}{a}\right) \cdot a$ 即有 $I\left(\frac{n}{a}\right)$ 個因子。可以 a 除。

由同法於 $\lfloor n \rfloor$ 內可被 a^2 除得者。其因子有 $I\left(\frac{n}{a^2}\right)$ 個。以下類推。由是素數 a 含於 $\lfloor n \rfloor$ 內者。其全數爲有

$$I\left(\frac{n}{a}\right) + I\left(\frac{n}{a^2}\right) + I\left(\frac{n}{a^3}\right) + \dots \text{個。}$$

[第一例] 求於 $\lfloor 50 \rfloor$ 內含有 2 及 7 之最高方乘。

$$I\left(\frac{50}{2}\right) = 25, \quad I\left(\frac{50}{2^2}\right) = 12, \quad I\left(\frac{50}{2^3}\right) = 6, \quad I\left(\frac{50}{2^4}\right) = 3, \quad I\left(\frac{50}{2^5}\right) = 1.$$

$\therefore 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$ 。即求得含於 $\lfloor 50 \rfloor$ 內 2 之最高方乘。爲 2^{47} 。

$$\text{又 } I\left(\frac{50}{7}\right) = 7, \quad I\left(\frac{50}{7^2}\right) = 1.$$

$\therefore 7^{7+1}$ 即 7^8 爲所求之最高方乘。

[第二例] 求於 $\lfloor 80 \rfloor$ 內含有 3 及 5 之最高方乘。

答 $3^{26}, 5^{19}$ 。

[第三例] 求於 $\lfloor 1000 \rfloor$ 內含 7 之最高方乘。

答 7^{164} 。

378. 定理 任意 r 個連續數之積。可以 $\lfloor r \rfloor$ 除之。

設以 n 爲連續數之第一數。其積爲 $n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)$

$$= \frac{n+r-1}{n-1}.$$

由 244 章於 $n+r-1$ 個中取 r 個之組合。爲 ${}_{n+r-1}C_r = \frac{n+r-1}{r} \frac{n-1}{n-1}$ 其

對於 n 及 r 之任何值。已知其皆為整數。故 $\frac{n+r-1}{n-1}$ 。

即 $n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)$ 可以 r 除之。

〔別證〕此定理又可用前章之法則證之。

今以 a 除 $n+r-1$ 所得之整商。恆不小於以 a 分除 $n-1$ 及 r 所得整商之和。

$$\text{即 } I\left(\frac{n+r-1}{a}\right) \leq I\left(\frac{n-1}{a}\right) + I\left(\frac{r}{a}\right),$$

$$\text{同法 } I\left(\frac{n+r-1}{a^2}\right) \leq I\left(\frac{n-1}{a^2}\right) + I\left(\frac{r}{a^2}\right),$$

$$I\left(\frac{n+r-1}{a^3}\right) \leq I\left(\frac{n-1}{a^3}\right) + I\left(\frac{r}{a^3}\right),$$

兩邊相加得。

$$I\left(\frac{n+r-1}{a}\right) + I\left(\frac{n+r-1}{a^2}\right) + \cdots \leq I\left(\frac{n-1}{a}\right) + I\left(\frac{n-1}{a^2}\right) + \cdots \\ + I\left(\frac{r}{a}\right) + I\left(\frac{r}{a^2}\right) + \cdots$$

由前章知於 $n+r-1$ 內所有 a 之倍數。決不小於 $n-1$ 及 r 內所有 a 之倍數之和。而 a 為任意之素數。故無論任何素數。含於 $n+r-1$ 內者。其倍數比含於 $n-1$ 及 r 各倍數之和為大。則是各素數。凡含於 $n-1 \times r$ 內者。無不含於 $n+r-1$ 。故 $n+r-1$ 可以 $n-1 \times r$ 除之。即 $n+r-1$ 可以 r 除之。

〔推論〕 $a+\beta+\gamma+\cdots=n$ 。則 $\frac{n}{a, \beta, \gamma, \cdots}$ 為整數。

何則。由前之證法。可知 $I\left(\frac{a}{n}\right)$ 不小於其各部分 $I\left(\frac{a}{n}\right) + I\left(\frac{\beta}{n}\right) + \cdots$

379. 定理 n 為素數於 $(a+b)^n$ 之展開式。除初項末項外。其他各項可以 n 整除之。

由二項式定理。而知 $(a+b)^n$ 之展開式。其任一項之係數。為 $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r}$ 。但此式為第 $r+1$ 項之係數。而 r 為任意之整

正數。爲在於 0 與 n 之間。即 r 大於 0 而小於 n 。何則。如 $r=0$ 。則此式爲初項之係數其值爲 1。如 $r=n$ 。則此式爲末項之係數。其值亦爲 1。今以 r 表 0 與 n 間任意之整數。即以上式表初項與末項間任一項之係數。

於前章既證明 $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$ 爲整數。惟以 n 大於 r 而爲素數。則 n 對於 r 而爲互素。故可知 $\frac{(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$ 必爲整數。即上式 $=n \times$ 整數。

由是證得二項式。除首末兩項外。其他各項可以 n 除之。

由同理 n 爲素數。於 $(a+b+c+\cdots)^n$ 展開式之各項。凡爲含有二個及二個以上文字之係數。皆可以 n 整除之。

何則。由多項式之定理。其各項中含有二個及二個以上文字之係數。爲 $\frac{n!}{a! \beta! \gamma! \cdots}$ 。但 $a+\beta+\gamma+\cdots=n$ 。而 n 之值。常比 a, β, γ, \cdots 之各值爲大。今 n 爲素數。則 n 對於 a, β, γ, \cdots 爲互素。由是知 $a! \beta! \gamma! \cdots$ 可以整除 $n!$ 。

$$\text{即 } \frac{n!}{a! \beta! \gamma! \cdots} = \frac{n! \cdot n!}{a! \beta! \gamma! \cdots} = n \times \text{整數。}$$

故上式可得以 n 整除之。

例 題

1. $n(n+1)(2n+1)$ 爲 6 之倍數。

$$\text{〔證〕 } n(n+1)(2n+1) = n(n+1)\{(n+2)+(n-1)\}$$

$$= n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1) = 1 \times 2 \times 3 \text{ 之倍數} + 1 \times 2 \times 3 \text{ 之倍數。}$$

2. n 爲奇數。則 $(n^2+3)(n^2+7) = M(32)$ 。

$$\text{〔證〕 } n = 2m+1。 \text{ 則 } (n^2+3)(n^2+7) = \{(2m+1)^2+3\}\{(2m+1)^2+7\}$$

$$= 16(m^2+m+1)(m^2+m+2) = 16 \times \text{連續兩數之積} = 16 \times 2 \text{ 之倍數。}$$

3. n 爲奇數。則 $n^4+4n^2+11 = M(16)$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{〔證〕 } n^4 + 4n^2 + 11 &= (n^2 - 1)(n^2 + 5) + 16 \\
 &= \{(2m+1)^2 - 1\} \{(2m+1)^2 + 5\} + 16 \\
 &= 8(2m^2 + 2m + 3)m(m+1) + 16 = 8M(2) + 16 = M(16).
 \end{aligned}$$

$$4. \quad 1 + 7^{2n+1} = M(8).$$

〔證〕 $1 + 7^{2n+1}$ 可以 $1+7$ ，即 8 除得。

$$5. \quad 19^{2n} - 1 = M(360).$$

〔證〕 $19^{2n} - 1 = 361^n - 1$ 可以 $361 - 1$ ，即 360 除得。

$$6. \quad n \text{ 爲大於 } 3 \text{ 之素數，則 } n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = M(360).$$

〔證〕 $n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = M(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = M(120)$ ，

又 $n = 3m + 1$ ， $n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = 9m(m+1)(3m-1)(3m+1)(3m+2)$ 。

∴ 此式爲 360 之倍數。

380. 勿而馬 Fermat 氏之定理 n 爲素數，而 m 對於 n 爲互素，則 $m^{n-1} - 1$ 可以 n 除之。

於前章既證得於 $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$ 展開式其各項中含有二個及二個以上文字之係數，可以 n 除得。

即 $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n + M(n)$ 。

今 $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 1$ 則 $m^n = m + M(n)$ ，

∴ $m^n - m = m(m^{n-1} - 1) = M(n)$ 。惟 m 對於 n 爲互素。

即 m 非爲 n 之倍數，則 $m^{n-1} - 1$ 爲 n 之倍數明矣。

例 題

$$1. \quad 1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \dots + (n-1)^{n-1} + 1 = M(n).$$

〔證〕 原式 $= (1^{n-1} - 1) + (2^{n-1} - 1) + (3^{n-1} - 1) + \dots + \{(n-1)^{n-1} - 1\} + n$
 $= M(n) + M(n) + M(n) + \dots + M(n) + n = M(n)$ 。

2. a 及 b 爲素數而對於 n 各爲互素則 $a^{n-1} - b^{n-1}$ 爲 n 之倍數。

〔證〕 $a^{n-1} - b^{n-1} = (a^{n-1} - 1) - (b^{n-1} - 1) = M(n) - M(n) = M(n)$ 。

$$3. \quad n^5 - n = M(30).$$

〔證〕 $n^5 - n = n(n^4 - 1) = M(5)$ 。

又 $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1) = M(6)$ 。 ∴ $n^5 - n = M(5 \times 6)$ 。

4. $n^7 - n = M(42)$.

[證] $n^7 - n = n(n^6 - 1) = M(7)$.

及 $n^7 - n = (n-1)n(n+1)(n^4 + n^2 + 1) = M(6)$. $\therefore n^7 - n = M(7 \times 6)$.

5. x 及 y 各對於 1365 而為互素，則 $x^{12} - y^{12} = M(1365)$.

[證] $1365 = 3 \times 5 \times 7 \times 13$. 則 x 及 y 對於 3, 5, 7, 13, 為互素.

又 $x^{12} - y^{12}$ 必含有 $x^2 - y^2, x^3 - y^3, x^4 - y^4, x^6 - y^6, x^{12} - y^{12}$ 之因子.

由是 $x^2 - y^2 = (x^2 - 1) - (y^2 - 1) = M(3) - M(3) = M(3), x^3 - y^3 = M(4),$

$x^4 - y^4 = M(5), x^6 - y^6 = M(7), x^{12} - y^{12} = M(13).$

$\therefore x^{12} - y^{12} = M(3 \times 5 \times 7 \times 13)$.

6. m 及 n 為素數。則 $m^{n-1} + n^{m-1} - 1 = M(mn)$.

[證] $m^{n-1} + n^{m-1} - 1 = m^{n-1} + M(n) = M(mn)$.

又 $m^{n-1} + n^{m-1} - 1 = n^{m-1} + M(n) = M(n)$. \therefore 原式 $= M(mn)$.

7. m, n 及 p 皆為素數。則 $(np)^{m-1} + (pm)^{n-1} + (mn)^{p-1} - 1 = M(mnp)$.

[證] 原式 $= \{(np)^{m-1} + (pm)^{n-1}\} + \{(mn)^{p-1} - 1\} = M(p) + M(p) = M(p)$.

由同法。原式為 $M(m), M(n)$. $\therefore M(mnp)$.

8. 任何數之四方乘為 $5m$ 或 $5m+1$.

[證] 任意之數以 5 除。其餘數總不外乎 0, 1, 2, 3, 4, 以內。故任意之數為 $5m, 5m+1, 5m+2, 5m+3, 5m+4$. 而此四方乘。可以 $5m, 5m+1$ 概之。

[別證] 一數為 5 之倍數。則其四方乘。亦為 5 之倍數即 $5m$. 又設任何數 a 為非 5 之倍數。則由 Fermat 氏之定理。 $a^4 - 1 = M(5)$ 即 $5m$.

$\therefore a^4 = 5m + 1$.

9. 任意數之 12 方乘為 $13m$ 或 $13m+1$.

[證] 任意數為 $13m, 13m+1, 13m+2, \dots, 13m+12$. 而此 12 方乘。可以 $13m, 13m+1$ 概之。

10. 任意之 8 方乘為 $17m$ 或 $17m \pm 1$.

[證] 如前例。

381. 問題 求於已知數內所有整除數之數。

設已知數為 N . 而從 N 約得各異之素因子。為 a, b, c, \dots .

則 $N = a^x b^y c^z \dots$.

故 N 可以次之連乘積之各項整除之。其連乘積爲
 $(1+a+a^2+\dots+a^x)(1+b+b^2+\dots+b^y)(1+c+c^2+\dots+c^z)$ 。
 由是得整除 N 之除數，並 N 及 1，共爲 $(x+1)(y+1)(z+1)\dots\dots$ 。

例題

1. 問 600 有若干種整除數。 答 24.

[解] $600=2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. $\therefore (3+1)(1+1)(2+1)=24$.

2. 試從已知數求其整除數之和。

[解] $N=a^x b^y c^z \dots\dots$ 而其整除數之和爲

$$(1+a+a^2+\dots+a^x)(1+b+b^2+\dots+b^y)(1+c+c^2+\dots+c^z)\dots\dots$$

$$= \frac{(1-a^{x+1})(1-b^{y+1})(1-c^{z+1})\dots\dots}{(1-a)(1-b)(1-c)\dots\dots}$$

3. 1000, 3600, 及 14553 求其整除數之數。 答 16, 45, 24.

4. 6, 28 及 496 皆爲完數 (Perfect numbers) 試證之。

[證] 完數者爲除本數外其他各整除數之和，等於其數也。例如 6 之整除數之和，除本數 6 外其他爲 $1+2+3$ 。

即 $6=2 \times 3$. \therefore 6 之整除數之和，爲 $\frac{(1-2^2)(1-3^2)}{(1-2)(1-3)} - 6 = 6$.

而 $28=2^2 \times 7$. \therefore 28 之整除數之和，爲 $\frac{(1-2^3)(1-7^2)}{(1-2)(1-7)} - 28 = 28$.

及 $496=2^4 \times 31$. \therefore 496 之整除數之和，爲 $\frac{(1-2^5)(1-31^2)}{(1-2)(1-31)} - 496 = 496$.

5. 求含有 6 種整除數之最小數。 答 12.

[解] $N=a^x b^y c^z \dots\dots$ 其 $a, b, c, \dots\dots$ 大於 1 而爲各異之素因子。惟以 N 之整除數之數，爲 $(x+1)(y+1)(z+1)\dots\dots = 6 = 2 \times 3$ 。

$\therefore x+1=2, y+1=3, \therefore x=1, y=2$.

由是 $N=3^1 \times 2^2 = 12$.

6. 整除數有 15 種其最小數如何。 答 144.

[解] $(x+1)(y+1)(z+1)\dots\dots = 15 = 3 \times 5$.

$x+1=3, y+1=5, \therefore x=2, y=4$,

由是 $N=2^4 \times 3^2 = 144$.

7. 有整除數 20 種求其最小數。 答 240.

[解] $(x+1)(y+1)(z+1)\dots = 20 = 2 \times 2 \times 5.$

$x=1, y=1, z=4, \therefore N=2^4 \times 3^1 \times 5^1 = 240.$

8. 4725 以如何之最小數乘之。而得 (1) 爲平方數。(2) 爲立方數。

答 21, 245.

[解] $4725 = 5^2 \times 3^3 \times 7$

故 (1) 之乘數 $= 3 \times 7 = 21.$ (2) 之乘數 $= 5 \times 7^2 = 245.$

382. 問題 將已知數分括爲壹對因子。而爲互素者。求其方法有幾。

例如 360 分括爲 $1 \times 360, 8 \times 45, 9 \times 40, 5 \times 72.$ 其 1 對於 360, 8 對於 45, 9 對於 40, 5 對於 72, 各壹對之因子。皆爲互素。至若 360 分括爲 $18 \times 20.$ 其 18 對於 20. 非爲互素。故不取。

若將 360 求其各壹對互素數之對數。則以

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$ 而 $(1+2^3)(1+3^2)(1+5)$ 之項數。

即 $(1+1)(1+1)(1+1) = 8$ 半之。即 $8 \div 2 = 4.$ 即爲所求之對數。

何則 $(1+2^3)(1+3^2)(1+5)$

$$= 1 + 2^3 + 3^2 + 5 + 2^3 \times 3^2 + 3^2 \times 5 + 2^3 \times 5 + 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$= 1 + 8 + 9 + 5 + 72 + 45 + 40 + 360.$$

即 1 對於 360 爲互素,

$$360 = 1 \times 360.$$

8 對於 45 爲互素,

$$360 = 8 \times 45.$$

9 對於 40 爲互素,

$$360 = 9 \times 40.$$

5 對於 72 爲互素,

$$360 = 5 \times 72.$$

由是可證明如次。

設已知數爲 $N = a^x b^y c^z \dots$

分割上式之因子爲壹對。則其壹因子中含有 a 者。他之壹因子不能含有 a 。壹因子含有 b 者。他之壹因子不能含有 b 。以下類推。故互爲素數各壹對之因子。不外乎次之連乘積各項以內。

$(1+a^x)(1+b^y)(1+c^z)\dots$

若 a, b, c, \dots 有 n 字。則上之積有 n 因子。而其項數爲 $(1+1)(1+1)(1+1)\dots = 2^n$ 。故所求各對之數爲 $2^n \div 2 = 2^{n-1}$ 。但此內含有 $1 \times N$ 之壹對。

383. 問題 凡小於已知數之正整數。而對於已知數爲互素者。求其正整數之數。

設已知數爲 N 。而 $N = a^x b^y c^z \dots$ 。但 a, b, c, \dots 爲 N 之各異之素因子。

凡有正整數不大於 N 。而可以 a 整除者。不外乎 a 之 $1, 2, 3, \dots, \frac{N}{a}$ 倍。即 $a, 2a, 3a, \dots, \frac{N}{a}a$ 。故凡不大於 N 。而可以 a 整除者。其數共有 $\frac{N}{a}$ 個。由同理。凡可以 b 整除者。其數有 $\frac{N}{b}$ 個。

凡可以 ab 整除者。其數有 $\frac{N}{ab}$ 個。又可以 abc 整除者。其數有 $\frac{N}{abc}$ 個。以下類推。

今考得小於 N 而與 N 非爲互素者。其各種正整數。在次所示之式中。每種祇有壹個。即凡小於 N 而與 N 有公因子者。其所有種數。在次所示之 (a) 式中。每種祇有壹個。而無有重複也。

$$\sum \frac{N}{a} - \sum \frac{N}{ab} + \sum \frac{N}{abc} - \sum \frac{N}{abcd} + \dots \dots \dots (a)$$

但此式爲略記之式。詳之。即

$$\left(\frac{N}{a} + \frac{N}{b} + \frac{N}{c} + \dots \right) - \left(\frac{N}{ab} + \frac{N}{bc} + \dots \right) + \left(\frac{N}{abc} + \dots \right) - \left(\frac{N}{abcd} + \dots \right) + \dots$$

推求其故。可先假定壹整數爲小於 N 。而可以 N 之壹素因子 a 整除者。即假定此壹整數爲小於 N 。而與 N 有公因子 a 而非爲互素者。

則此壹整數。即爲 (a) 式 $\frac{N}{a}$ 個 (即 $a, 2a, 3a, \dots, \frac{N}{a}a$) 內之壹數。

次假定壹整數爲小於 N 而可以 N 之二素因子 a, b 整除者。即假定壹整數爲小於 N 。而與 N 有公因子 a, b 而非爲互素者。

則此一整數可於 (a) 式 $\sum \frac{N}{a}$ 之 $\frac{N}{a}$ 個內及 $\frac{N}{b}$ 個內各取得壹個。

又可於 $\sum \frac{N}{ab}$ 之 $\frac{N}{ab}$ 個內取得壹個。

即 $2 - 1 = 1$ 個。即此假定之壹整數。在 (a) 式中祇有壹個。

又次假定壹整數為小於 N 。而得以 N 之素因子 a, b, c, \dots 之 r 個整除者。

則此壹整數可於 (a) 式 $\Sigma \frac{N}{a}$ 之 $\frac{N}{a}, \frac{N}{b}, \frac{N}{c}, \dots$ 內各取得壹個即 r 個。

又可於 $\Sigma \frac{N}{ab}$ 之 $\frac{N}{ab}, \frac{N}{ac}, \frac{N}{ad}, \dots, \frac{N}{bc}, \frac{N}{bd}$ 內各取得壹個。即 $\frac{r(r-1)}{1.2}$ 個。

(即於 a, b, c, \dots, r 個中取二個之順列數)。

又可於 $\Sigma \frac{N}{abc}$ 內取得 $\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}$ 個。以下同理。

由是此壹整數之個數在 (a) 式內共得

$$\begin{aligned} r - \frac{r(r-1)}{1.2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} - \dots + (-1)^{r-1} \frac{r(r-1)\dots 1}{r} \\ = 1 - \left\{ 1 - r + \frac{r(r-1)}{1.2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} + \dots - (-1)^{r-1} \frac{r(r-1)\dots 1}{r} \right\} \\ = 1 - (1-1)^r = 1. \end{aligned}$$

由是可見與 N 非為互素之各整數。計其各種之個數在 (a) 式內。祇各有壹個。即小於 N 而與 N 不為互素者。計其相異正整數之個數。適如 (a) 式之值。

即知小於 N 而與 N 為互素之正整數。其個數等於從 N 個內減 (a) 式之值。即

$$\begin{aligned} N - \Sigma \frac{N}{a} + \Sigma \frac{N}{ab} - \Sigma \frac{N}{abc} + \dots \\ = N \left\{ 1 - \Sigma \frac{1}{a} + \Sigma \frac{1}{ab} - \Sigma \frac{1}{abc} + \dots \right\} \\ = N \left(1 - \frac{1}{a} \right) \left(1 - \frac{1}{b} \right) \left(1 - \frac{1}{c} \right) \dots \dots \dots (260 \text{ 章}). \end{aligned}$$

例 題

1. 問小於 100 而與 100 為互素者。其數有幾個。 答 39。

〔解〕 $100 = 2^2 \times 5^2$ 。故 $100 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{5} \right) = 40$ 。但此內當除去不用之 1。故所求之個數為 $40 - 1 = 39$ 。

2. 問小於 1575 而與 1575 爲互素者。其數有幾個。 答 719。

(解) $1575 = 5^2 \times 3^2 \times 7$. $\therefore 1575 \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) - 1 = 719$.

3. 小於 n (但 $n > 2$) 而與 n 爲互素其數 (此內含有 1) 之個數。爲偶數。而此各數中有二分之壹。爲大於 $\frac{1}{2}N$ 試證之。

(證) 壹數 A 對於 N 爲互素。其又壹數 $N-A$ 亦對於 N 爲互素。如是對於 N 而爲互素者。各有壹對。故爲偶數。

又此各數內 $A > \frac{N}{2}$ 。則 $N-A$ 爲 $< \frac{N}{2}$ 。故知此等數內其半爲大於

$$\frac{N}{2}.$$

384. 平方數之形 平方數有種種之形狀。何者可以成立。何者不可以成立。茲舉其要例如次。

[第一例] 凡各平方數。爲 $M(3)$ 或爲 $M(3)+1$ 。

設各根數。爲 3 之倍數或非 3 之倍數。

即各數不外乎 $3m$ 或 $3m \pm 1$ 。

故其平方數。爲 $(3m)^2 = 9m^2 = M(3)$ 。

$$(3m \pm 1)^2 = (3m)^2 \pm 2(3m) + 1 = M(3) + 1.$$

[第二例] 凡各平方數。爲 $M(5)$ 或 $M(5) \pm 1$ 。

各根數不外乎 $5m$, $5m \pm 1$, $5m \pm 2$ 。

故其平方數。爲 $(5m)^2 = M(5)$ 。

$$(5m \pm 1)^2 = (5m)^2 \pm 2(5m) + 1 = M(5) + 1,$$

$$(5m \pm 2)^2 = (5m)^2 \pm 4(5m) + 4 = M(5) - 1.$$

[第三例] $a^2 + b^2 = c^2$ 但 a, b, c 爲整數。則 abc 可以 60 整除。

準第一例各平方數。爲 $M(3)$ 或 $M(3)+1$ 。

若使 a^2, b^2 俱爲 $M(3)+1$ 。則從 $a^2 + b^2 = c^2$ 。得 $c^2 = M(3)+2$ 。然平方數不能成 $M(3)+2$ 之形。

由是 a^2, b^2 或俱爲 $M(3)$ 。或其壹爲 $M(3)$ 其壹爲 $M(3)+1$ 。

則從 $a^2 + b^2 = c^2$ 。得 $c^2 = M(3)$ 或 $M(3)+1$ 。即知 a 或 b 爲 $M(3)$ 。

次準第二例。各平方數為 $M(5)$ 或 $M(5) \pm 1$ 。

若使 a^2, b^2 俱為 $M(5)+1$ 或俱為 $M(5)-1$ 。則從 $a^2+b^2=c^2$ 。得 $c^2=M(5)+2$ 。或 $c^2=M(5)-2$ 。然平方數。不能成 $M(5) \pm 2$ 之形。

由是 a^2, b^2 或俱為 $M(5)$ 。或其一為 $M(5)+1$ 。其他之一為 $M(5)-1$ 。或其一為 $M(5)$ 。其他之一為 $M(5) \pm 1$ 。以上各種。於 a^2, b^2, c^2 。內必有一個平方數為 $M(5)$ 之形。

故知於 a, b, c 內必有一數為 5 之倍數。

又各數為 $4m$ 或 $4m+1$ 或 $4m+2$ 或 $4m+3$ 。則其平方數為 $M(16)$ 或 $M(8)+1$ 或 $M(16)+4$ 。

若使 a^2, b^2 為 $M(8)+1, M(16)+4$ 。則從 $a^2+b^2=c^2$ 。得 $c^2=M(8)+1+M(16)+4=M(8)+5$ 。不能成平方數之形。 a^2, b^2 俱為 $M(16)+4$ 亦不可。

又使 a^2, b^2 俱為 $M(8)+1$ 。則 $c=M(8)+2$ 。亦不能成平方數之形。

由是 a^2, b^2 或俱為 $M(16)$ 。或俱為 $M(16)+4$ 。或其一為 $M(16)$ 。其他一為 $M(16)+4$ 。故 a, b, c 內必有一數為 4 之倍數。

從上之證明。而得 abc 有 $3 \times 5 \times 4$ 之倍數。即可以 60 整除之。

〔第四例〕各立方數為 $M(7)$ 或 $M(7) \pm 1$ 。又各立方數為 $M(9)$ 或 $M(9) \pm 1$ 。

各根數為 $7m$ 或 $7m \pm 1$ 或 $7m \pm 2$ 或 $7m \pm 3$ 。

故其立方數為 $(7m)^3 = M(7)$ 。

$$(7m \pm 1)^3 = (7m)^3 \pm 3(7m)^2 + 3(7m) \pm 1 = M(7) \pm 1,$$

同法

$$(7m \pm 2)^3 = M(7) \pm 2^3 = M(7) \pm 7 \pm 1 = M(7) \pm 1,$$

$$(7m \pm 3)^3 = M(7) \pm 27 = M(7) \pm 28 \mp 1 = M(7) \mp 1.$$

又各數為 $3m$ 或 $3m \pm 1$ 。故其立方為 $(3m)^3 = 27m = M(9)$ 。

$$(3m \pm 1)^3 = (3m)^3 \pm 3(3m)^2 \pm 3(3m) \pm 1 = M(9) \pm 1.$$

〔第五例〕各四方乘數為 $M(5)$ 或 $M(5)+1$ 。

各根數為 $5m$ 或 $5m \pm 1$ 或 $5m \pm 2$ 。故其四方乘為

$$(5m)^4 = M(5), \quad (5m \pm 1)^4 = M(5) + 1, \quad (5m \pm 2)^4 = M(5) + 16 = M(5) + 1.$$

〔第六例〕平方數之末位數。不能有2, 3, 7, 8四數。

各數爲 $10m+a$ (但 a 爲1, 2, 3, ……9, 0以內之數)。

故 $(10m+a)^2 = M(10) + a^2$, 而 a^2 爲1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 0以內之數。即其末位之數字。祇有1, 4, 5, 6, 9或0。而無2, 3, 7, 8四個數字。

〔第七例〕平方數末位之數字爲奇數者。則其十位之數字必爲偶數。

奇數1, 3, 5, 7, 9之平方爲01, 09, 25, 49, 81。其十位之數字爲0或偶數。

而 a 爲在1, 3, 5, 7, 9以內之壹數字。則以

$(10m+a)^2 = 100m^2 + 20am + a^2$ 。其 $20am$ 爲偶數。而以 a^2 之十位數字。(即偶數)加於 $20am$ 其仍爲偶數可知。

〔第八例〕任何數末位之數字。與其 $(4n+1)$ 方乘。末位之數字相同。

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9順次之各四方乘。爲1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561。其末位之數字。不外乎1, 5, 6。而末位之數字1, 5, 6任乘至若干方乘。其末位仍爲1, 5, 6。

故任何數 $4n$ 乘方之末位。不外乎1, 5, 6以內之數。

而 $4n+1$ 方乘之末位數字 $1 \times 1 = 1$, $1 \times 3 = 3$, $1 \times 7 = 7$, $1 \times 9 = 9$ 。又 $5 \times 5 = 25$, 又 $6 \times 2 = 12$, $6 \times 4 = 24$, $6 \times 6 = 36$, $6 \times 8 = 48$ 。故末位有1, 3, 7, 9其數 $4n+1$ 方乘之末位。亦有1, 3, 7, 9。又末位有2, 4, 6, 8。其數 $4n+1$ 方乘之末位。亦有2, 4, 6, 8。又末位有5。其數 $4n+1$ 方乘之末位。亦有5。故如題所云。

〔第九例〕連續四數之積。決不能成立爲平方數。

設連續四數爲 $a, a+1, a+2, a+3$ 。

$$\begin{aligned} \text{則 } a(a+1)(a+2)(a+3) &= (a^2+3a)(a^2+3a+2) \\ &= \{(a^2+3a+1)-1\} \cdot \{(a^2+3a+1)+1\} \\ &= (a^2+3a+1)^2 - 1. \end{aligned}$$

即連續四數之積。其形如 N^2-1 。故不能成立爲平方形。

例題三十八

1. 凡大於3之任意兩素數。其平方差可以24整除。

[證] 設 x, y 為兩素數。由 Fermat 氏之定理。

$$x^2-1=M(3), \text{ 又 } x=2m+1, \therefore x^2-1=(2m+1)^2-1=4m(m+1)=M(8),$$

由是 $x^2-1=M(24)$ 。由同法 $y^2-1=M(24)$ 。 $\therefore x^2-y^2=M(24)$ 。

2. n 為奇數而大於3。則 $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)=M(2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$ 。

$$\begin{aligned} \text{[證]} \quad n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9) &= (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) \\ &= M(\underline{7}) = M(2^4, 3^2, 5, 7). \end{aligned}$$

又 $n-3=2m$ 。故 $(n-3)(n-1)(n+1)(n+3)=16m(m+1)(m+2)(m+3)$
 $=16M(\underline{5})=M(2^7)$ 。由是 $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)=M(2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$ 。

3. n 為奇數。則 $(n+2m)^n - (n+2m) = M(24)$ 。

[證] $(n+2m)^n - (n+2m) = (n+2m)\{(n+2m)^{n-1} - 1\}$ 。而 n 為奇數。則 $(n+2m)^{n-1} - 1$ 。可以 $(n+2m)^2 - 1$ 整除。

$$\text{故 } (n+2m)^n - (n+2m) = M(n+2m-1)(n+2m)(n+2m+1).$$

而 $n+2m-1$ 為偶數。 $\therefore (n+2m)^n - (n+2m) = M(2 \cdot 3 \cdot 4) = M(24)$ 。

4. $a^{4m+p} - a^{4n+p} = M(30)$ 。

[證] $a^{4m+p} - a^{4n+p} = a^{4n+p}(a^{4(m-n)} - 1)$ 。而

$$a^{4(m-n)} - 1 = (a^4)^{m-n} - 1. \text{ 故得以 } a^4 - 1 \text{ 整除。}$$

又由 384 章第五例。 a^4 為 $M(5)$ 或 $M(5)+1$ 。故設 $a^4 = M(5)$ 。則 $a = M(5)$ 。又以原式為有 $(a-1)a(a+1)$ 之因子。故 $M(1 \cdot 2 \cdot 3) = M(6)$ 。 \therefore 原式 $= M(5 \cdot 6) = M(30)$ 。次設 $a^4 = M(5)+1$ 。則 $a^4 - 1 = M(5)$ 。 \therefore 原式 $= M(5 \cdot 6) = M(30)$ 。

5. $N - a^2 = x$ 及 $(a+1)^2 - N = y$ 。而 x 及 y 為正數。則 $N - xy$ 為平方數。

$$\begin{aligned} \text{[證]} \quad N - xy &= N - (N - a^2)\{(a+1)^2 - N\} \\ &= N^2 - 2a(a+1)N + a^2(a+1)^2 = \{N - a(a+1)\}^2. \end{aligned}$$

6. 問 1000 以下之數。不能以 2, 3 或 5 整除者共有幾種。

[解] 1000 以下之數。凡有 2, 3, 5 之因子。其最大數為 990。故求 990 以下之數對於 990 為素數者。其種數有 $990 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 264$ 種。又於 990 與 1000 之間。惟 991 與 997 二種為無 2, 3, 5 之因子者。由是所求之數。為 $264 + 2 = 266$ 種。

7. P, Q, R, p, q, r , 爲整數。而 p, q, r , 相互爲素數。然 $\frac{P}{p} + \frac{Q}{q} + \frac{R}{r}$ 爲整數。則 $\frac{P}{p}, \frac{Q}{q}, \frac{R}{r}$ 亦爲整數。

(證) $\frac{P}{p} + \frac{Q}{q} + \frac{R}{r} = \text{整數} = a$ 。然 $\frac{Pqr}{p} + Qr + Rq = aqr$ 。故 $\frac{Pqr}{p}$ 不可不爲整數。而 p, q, r 相互爲素數。故知 $\frac{qr}{p}$ 不能爲整數。由是 $\frac{P}{p}$ 決爲整數。

同法 $\frac{Q}{q}, \frac{R}{r}$ 亦爲整數。

8. 284 與 220 爲不完伴數 (Amicable Numbers)。所謂不完伴數者即其各整除數之和。等於他壹數也。

(證) $284 = 2^2 \times 71$ 。故 284 之整除數之和。爲

$$(1+2+2^2)(1+71) - 284 = 220。$$

又 $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ 。故 220 之整除數之和。爲

$$(1+2+2^2)(1+5)(1+11) - 220 = 284。$$

9. 證 $2^n - 1$ 爲素數。則 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 爲完數 (Perfect Number)。所謂完數者。即其整除數之和等於本數也。

(證) $2^n - 1$ 爲素數。則 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 之素因子。爲 2 及 $2^n - 1$ 。

故 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 之整除數之和。爲

$$(1+2+2^2+\dots+2^{n-1})\{1+(2^n-1)\} - 2^{n-1}(2^n-1)$$

$$= \frac{1-2^n}{1-2}(2^n) - 2^{n-1}(2^n-1) = 2^{n-1}(2^n-1)。$$

10. $x^{16} - 1$ 爲可以 680 整除者。求其 20 以下 x 之任何整數值。

(解) 由 Fermat 氏之定理。 $x^{16} - 1 = M(17)$, $x^4 - 1 = M(5)$ 。

又由題意而知 x 爲奇數。故 $x^2 - 1 = M(8)$ 。

故 x 爲奇數而非爲 5, 17 之倍數。則 $x^{16} - 1 = M(17 \cdot 5 \cdot 8) = M(680)$ 。

由是所求 x 之值。爲於 20 以下除 5, 17 外如 3, 7, 9, 11, 13, 19。

11. 凡數字之和爲 15。其數不能爲完平方數及完立方數。

(證) 凡數等於 $9m + \text{數字之和}$ 。即 $9m + 15$ 。即 $M(9) + 6$ 。然凡平方數 $(9m)^2, (9m \pm 1)^2, (9m \pm 2)^2, (9m \pm 3)^2, (9m \pm 4)^2$ 。不外乎 $M(9), M(9) + 4, M(9) + 7$ 。故知 $M(9) + 6$ 不能爲完平方數。

又完立方數爲 $(9m)^3, (9m \pm 1)^3, (9m \pm 2)^3, (9m \pm 3)^3, (9m \pm 4)^3$ 。不外乎 $M(9), M(9) \pm 1$ ，故知 $9m + 15$ 卽 $M(9) + 6$ 不能爲完立方數。

12. 各平方數得以兩平方數之差表之。

[證] 各平方數爲偶數，則 $(2n)^2 = 4n^2 = (n^2 + 1)^2 - (n^2 - 1)^2$ 。

又各平方數爲奇數，則 $(2n + 1)^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ，

而 $a + b = (2n + 1)^2, a - b = 1$ 。則 $a = 2n^2 + 2n + 1, b = 2n^2 + 2n$ ，

由是 $(2n + 1)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2 - (2n^2 + 2n)^2$ 。

13. 以 7, 8, 9 除一數。順次餘 1, 2, 3。試示此等數一般之形。且證此等之最小數爲 498。

[解] 所求之數爲 $M(7) + 1 = M(7) + 7 - 6 = M(7) - 6$ ，

$M(8) + 2 = M(8) + 8 - 6 = M(8) - 6, M(9) + 3 = M(9) + 9 - 6 = M(9) - 6$ 。

由是得所求之數爲 $M(7 \cdot 8 \cdot 9) - 6 = M(504) - 6$ 。

故其一般之形爲 $504m - 6$ 。而最小數爲 $504 - 6 = 498$ 。

14. n 爲素數。而 N 對於 n 爲互素。則 $N^{n^2-n} - 1 = M(n^2)$ 。

及 $N^{n^r-n^{r-1}} - 1 = M(n^r)$ 。

[證] 由 Fermat 氏之定理 $N^{n-1} - 1 = M(n)$ 。

$\therefore N^{n^2-n} = (N^{n-1})^n = \{1 + M(n)\}^n = 1 + nM(n) + \dots = 1 + M(n^2)$ 。

由是 $N^{n^2-n} - 1 = M(n^2)$ 。

又 $N^{n^3-n^2} = (N^{n^2-n})^n = \{1 + M(n^2)\}^n = 1 + nM(n^2) + \dots = 1 + M(n^3)$ 。

由是 $N^{n^3-n^2} - 1 = M(n^3)$ 。由同法推得 $N^{n^r-n^{r-1}} - 1 = M(n^r)$ 。

15. n 爲素數。而 N 對於 n 爲互素。則 $N^{1+2+\dots+(n-1)} \pm 1 = M(n^2)$ 。

[證] 準前例 $N^{n(n-1)} - 1 = M(n^2)$ 。

卽 $(N^{\frac{1}{2}n(n-1)} + 1)(N^{\frac{1}{2}n(n-1)} - 1) = M(n^2)$ 。

而 $N^{1+2+\dots+(n-1)} \pm 1 = N^{\frac{1}{2}n(n-1)} \pm 1$ 。

又 $N^{\frac{1}{2}n(n-1)} + 1$ 與 $N^{\frac{1}{2}n(n-1)} - 1$ 之差爲 2。其積不能以 n^2 整除。故此兩因子。其一必可以 n^2 整除。

16. p 爲素數。而 $(1+x)^{p-2} = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$

則 $a_1 + 2, a_2 - 3, a_3 + 4, \dots$ 爲 p 之倍數。

[證] 於 $(1+x)^{p-2}$ 展開式第 $(r+1)$ 項之係數。爲

$$\frac{(p-2)(p-3)\cdots\{p-(r+1)\}}{\lfloor r} = \frac{M(p)+(-2)(-3)\cdots\{-(r+1)\}}{\lfloor r}$$

$$= \frac{M(p)+(-1)^r r+1}{\lfloor r} = \frac{M(p)}{\lfloor r} + (-1)^r(r+1).$$

又於 $1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ 第 $r+1$ 項之係數為 a_r .

$\therefore a_r = M(p) + (-1)^r(r+1)$. 即 $a_r - (-1)^r(r+1) = M(p)$, $r=1$.

則 $a_1+2 = M(p)$. $r=2$, $a_2-3 = M(p)$, $r=3$. 則 $a_3+4 = M(p)\cdots\cdots$

17. 三個素數為 A, P . 其任意數非為 3, 則其公差必為 6 之倍數.

(證) 三個素數為 $x, x+a, x+2a$, 由例題 $1x > 3$.

則 $(x+a)^2 - x^2 = M(24)$, 及 $(x+2a)^2 - (x+a)^2 = M(24)$.

即 $2ax+a^2 = M(24)$, 及 $2ax+3a^2 = M(24)$.

由是 $(2ax+3a^2) - (2ax+a^2) = M(24)$. 即 $2a^2 = M(24)$.

$\therefore a^2 = M(12)$. 故 $a = M(6)$.

18. 試示 $\frac{\lfloor 2a \lfloor 2b}{\lfloor a \lfloor b \lfloor a+b}$ 為整數.

(證) 設如本題於其分母所有任意之素因子為 p .

證得 $1\left(\frac{2a}{p}\right) + 1\left(\frac{2b}{p}\right) < 1\left(\frac{a}{p}\right) + 1\left(\frac{b}{p}\right) + 1\left(\frac{a+b}{p}\right)$. 由 378 章先定

$a = mp + a$, $b = np + \beta$ 而 a, β 為 0. 或為小於 p 之正整數. 以此代用於前之關係式. 而得

$$1\left(\frac{2mp+a}{p}\right) + 1\left(\frac{2np+\beta}{p}\right) < 1\left(\frac{mp+a}{p}\right) + 1\left(\frac{np+\beta}{p}\right) + 1\left(\frac{mp+np+a+\beta}{p}\right).$$

$$\text{即 } 2m + 1\left(\frac{2a}{p}\right) + 2n + 1\left(\frac{2\beta}{p}\right) < m + 1\left(\frac{a}{p}\right) + n + 1\left(\frac{\beta}{p}\right) + m + n + 1\left(\frac{a+\beta}{p}\right).$$

但 $\frac{a}{p}, \frac{\beta}{p}$ 為小於 1. 故 $1\left(\frac{a}{p}\right) = 0$. $1\left(\frac{\beta}{p}\right) = 0$.

由是 $1\left(\frac{2a}{p}\right) + 1\left(\frac{2\beta}{p}\right) < 1\left(\frac{a+\beta}{p}\right)$ 惟 a, β 為小於 p . 故 $a+\beta$. 若小於 p . 則

$1\left(\frac{a+\beta}{p}\right) = 0$. 故於前之關係為能合理.

又 $a+\beta$ 若大於 p . 要比 $2p$ 為小. 故 $1\left(\frac{a+\beta}{p}\right)$ 至大不能多於 1.

而 $1\left(\frac{2a}{p}\right)$ 或 $1\left(\frac{2\beta}{p}\right)$ 至小必有壹數爲 1。故於前之關係亦能合理。如是於 $|a| |b| |a+b|$ 內所有之素因子。於 $|2a| |2b|$ 內無不有之。故如題所云。

19. $\frac{|2n}{n+1|n}$ 爲整數。試證明之。

[證] 如前例可知 $1\left(\frac{2n}{p}\right) < 1\left(\frac{n+1}{p}\right) + 1\left(\frac{n}{p}\right)$ 。而 $n = mp + a$ 。

則 $2m + 1\left(\frac{2a}{p}\right) < 2m + 1\left(\frac{a+1}{p}\right)$ 。惟 $2a$ 爲小於 $a+1$ 。故前之關係爲合理。

20. 試示 $\frac{|nr}{n|r|n}$ 爲整數。

[證] 由 378 章 $\frac{|nr-1}{(n-1)r|r-1}$ 爲整數。其分母子以 nr 乘之爲

$\frac{|nr}{n(n-1)r|r} =$ 整數。同法 $\frac{|(n-1)r}{(n-1)|(n-2)r|r}$ 及 $\frac{|(n-2)r}{(n-2)|(n-3)r|r} \dots\dots$

$\frac{|2r}{2|r|r}$ 爲整數。凡此連乘之。即得 $\frac{|nr}{n(|r|)^n}$ 爲整數。

21. 兩數各爲 n 項平方數之和。其積可以 $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 項平方數之和表之。

[證] 兩數 $a_1^2+a_2^2+\dots\dots+a_n^2$ 及 $b_1^2+b_2^2+\dots\dots+b_n^2$ 。則其積爲 $(a_1^2+a_2^2+\dots\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots\dots+b_n^2) = (a_1b_1+a_2b_2+\dots\dots+a_nb_n)^2 + \Sigma(a_r b_s - a_s b_r)^2$ 。但 Σ 之項數爲於 n 物取二個之組合。

即 ${}_nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ 。故此積等於 $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 項平方數之和。

22. a 及 b 非俱爲 3 之倍數。則 a^2+b^2 決非爲 3 之倍數。

又 7 及 11 亦得同樣之結果證之。

[證] 凡數爲 $3m$ 及 $3m\pm 1$ 。其平方數爲 $M(3)$ 及 $M(3)+1$ 。

故 a 及 b 非俱爲 $3m$ 。則 $a^2+b^2 = (3m)^2 + (3m+1)^2 = M(3)+1$ 。

或 $a^2+b^2 = (3m+1)^2 + (3m+1)^2 = M(3)+2$ 。二者皆不能以 3 整除。

又凡數爲 $7m, 7m\pm 1, 7m\pm 2, 7m\pm 3$ 其平方數。爲 $M(7), M(7)+1, M(7)+2, M(7)+4$ 。故 a, b 非俱爲 $7m$ 。則 a^2+b^2 決非爲 $M(7)$ 。如以 11 試之亦合。

23. $a^2+b^2=c^2$. 則 $ab(a^2-b^2)$ 爲 84 之倍數。

[證] 由 384 章第三例 $ab=M(12)$ 若 a, b 爲 7 之倍數。則 $a^2-b^2=M(7)$ 。

$\therefore ab(a^2-b^2)=M(12 \cdot 7)$ 又 a, b 若非爲 7 之倍數。則由前例 a^2, b^2 , 爲 $M(7)+1, M(7)+2, M(7)+4$, 以內之數。使 a^2, b^2 或俱爲 $M(7)+1$. 或俱爲 $M(7)+2$. 或俱爲 $M(7)+4$. 則 $a^2+b^2=c^2$ 爲 $M(7)+1$. 或 $M(7)+2$. 或 $M(7)+4$.

故 $a^2-b^2=M(7)$. 由是 $ab(a^2-b^2)=M(12 \cdot 7)$.

24. a, b, c, d 之有理值爲 $a^2+b^2=3(c^2+d^2)$, $a^2+b^2=7(c^2+d^2)$ 或 $a^2+b^2=11(c^2+d^2)$ 其關係若何。

[證] 於 $a^2+b^2=3(c^2+d^2)$ 可知 a 及 b . 皆爲 3 之倍數。(例題 22.)

由是 $a=3m$ 及 $b=3n$. $\therefore 9(m^2+n^2)=3(c^2+d^2)$.

即 $c^2+d^2=3(m^2+n^2)$. 故 c 及 d . 亦俱爲 3 之倍數。是則 a, b, c, d 凡爲 3 之倍數者。皆可成立爲 $a^2+b^2=3(c^2+d^2)$.

又 $a^2+b^2=7(c^2+d^2)$ 及 $a^2+b^2=11(c^2+d^2)$ 亦可以 7 及 11 代上式之 3. 而同法證得之。

25. $a^2+c^2=2b^2$. 則 $a^2-b^2=M(24)$.

[證] 平方數爲 $M(3)$ 或 $M(3)+1$. 故 $2b^2$ 爲 $M(3)$, 或 $M(3)+2$. 而 $a^2+c^2=2b^2$. 故 c^2 不可與 a^2 同時爲 $M(3)$ 或 $M(3)+1$.

由是 $2(a^2-b^2)=a^2-(2b^2-a^2)=a^2-c^2=M(3)$. $\therefore a^2-b^2=M(3)$.

又 a^2 爲 $M(16), M(16)+4$, 或 $M(8)+1$, 而 $2b^2$ 爲 $M(16), M(16)+8$ 或 $M(8)+2$. 且 c^2 與 a^2 同時爲 $M(16), M(16)+4, M(8)+1$.

$\therefore a^2-b^2=M(8)$. 於是 $a^2-b^2=M(3 \cdot 8)$.

恆同餘數

385. 定義 兩數 a 及 b 而以第三數 c 除之。其所得之餘數爲同壹者。則稱此兩數爲對於其模數 (Modulus) c 而成之恆同餘數 (Congruent).

而此記法爲 $a \equiv b \pmod{c}$.

例如 $a=mc+r$ $b=nc+r$. 即記爲 $a \equiv b \pmod{c}$.

又 21 及 1 各以 10 除。其所得之餘數同為 1。

$$\therefore 21 \equiv 1 \pmod{10}.$$

又 $(a+1)^2$ 及 1 以 a 除之。其所得之餘數同為 1。

$$\therefore (a+1)^2 \equiv 1 \pmod{a}.$$

於恆同餘數式 $a \equiv b \pmod{c}$ 。其 $a-b$ 必為 c 之倍數

何則。以 $a=mc+r$ ， $b=nc+r$ 。故 $a-b=c(m-n)$ 。

即 $a-b$ 為有 c 之倍數即可記為 $a-b \equiv 0 \pmod{c}$ 。

386. 定理 $a_1 \equiv b_1 \pmod{x}$ 及 $a_2 \equiv b_2 \pmod{x}$ 。

則 $a_1+a_2 \equiv b_1+b_2 \pmod{x}$ 。及 $a_1a_2 \equiv b_1b_2 \pmod{x}$ 。

假設 $a_1=m_1x+r_1$ ， $a_2=m_2x+r_2$ ，及 $b_1=n_1x+r_1$ ， $b_2=n_2x+r_2$ 。

故 $a_1+a_2-(b_1+b_2)=(m_1+m_2-n_1-n_2)x$ 。

即 $a_1+a_2 \equiv b_1+b_2 \pmod{x}$ 。

又 $a_1a_2=(m_1x+r_1)(m_2x+r_2)=M(x)+r_1r_2$ 。

$$b_1b_2=(n_1x+r_1)(n_2x+r_2)=M(x)+r_1r_2.$$

由是 $a_1a_2-b_1b_2=M(x)$ 。 $\therefore a_1a_2 \equiv b_1b_2 \pmod{x}$ 。

凡各兩數對於同壹模數而為恆同餘數式者。此恆同餘數式任多至若干。皆合於本定理。(恆同餘數式。簡稱等餘式)。

387. 等餘之性質 等餘式與方程式。有許多類似之性質。例如等餘式 $Ax^2+Bx+C \equiv 0 \pmod{p}$ 而 A, B, C 為常數。其對於 x 之三值 a, b, c 為能適合者。且 $a-b$ 為 1 或對於 p 而為素數。其他 $b-c, c-a$ 亦然。則此等餘式對於 x 之壹切整數值。可以適合。而 A, B, C 皆為 p 之倍數。

何則。以 $Aa^2+Ba+C=0 \pmod{p}$ 。

$$Ab^2+Bb+C=0 \pmod{p}.$$

由減法 $(a-b)\{A(a+b)+B\}=0 \pmod{p}$ 。

惟因 $a-b$ 為 1。或對 p 而為素數。故以 $a-b$ 除上之等餘式。而得

$$A(a+b)+B=0 \pmod{p}.$$

由同法 $A(a+c)+B=0 \pmod{p}$ 。

相減 $A(b-c)=0 \pmod{p}$ 。

惟因 $b-c$ 為 1 或對於 p 而為素數。

故 $A=0(\text{mod. } p)$, 同法 $B=0(\text{mod. } p)$.

由斯法則可證得其壹般之定理。即等餘式含有 x 之 n 次。其對於 x 之整數值。而能適合者。其值多於 n 。且此等任何兩值之差為 1。或對於模數而為素數者。則此等餘式對於 x 之各整數值均能適合。而 x 之各異方乘之係數。必為模數之倍數。

388. 定理 a 及 b 為互素。則 $a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$ 而以 b 除之。其所餘之數各異。

試於 a 之若干倍 $a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$ 以內。取其 a 之 s 倍及 r 倍。即 sa 及 ra 。假定此 sa 及 ra 以 b 除之。而其餘為相等。則 $ra - sa = M(b)$ 。然 a 與 b 為互素。而 r 及 s 取諸 $a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$ 以內。其數小於 b 。則 $r - s$ 決非可以 b 除之。故 $ra - sa = M(b)$ 為不合理。

即 $a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$ 以 b 除之。其餘數各異。

反定理 a 及 b 非為互素。則 $a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$ 而以 b 除之。其所餘之數。必有相同者。

何則。設以 k 為 a 及 b 之公因子。 $a = ka$, $b = k\beta$ 。則於 $a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$ 以內之二數 $(r+\beta)a$ 及 ra 。而以 b 除之。其餘數必相等。其故以 $(r+\beta)a = ra + \beta a = ra + \beta ka = ra + ba$ 以 b 除之。得 $a + \frac{ra}{b}$ 。又 ra 以 b 除之。其餘數兩相等。但 $r+\beta$ 在 $a, 2a, 3a, \dots, ra, \dots, (r+\beta)a, \dots, (b-1)a$ 諸倍數之內。故 $b-1 > r+\beta$ 。

即 $r+\beta$ 為 a 與 $(b-1)a$ 間 a 之倍數。

推論 a 與 b 為互素。 n 為任意之整數。則 $n, n+a, n+2a, \dots, n+(b-1)a$ 以 b 除之。其所得之餘數各異。其諸餘數任意之順次為 $0, 1, 2, \dots, (b-1)$ 。此證法與本定理同。

389. 勿而馬 Fermat 氏之定理 前 380 章 Fermat 氏之定理。可用前章之定理以證明之。

a 與 b 為互素。則 $a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$ 以 b 除之。其各異之餘數。為 $1, 2, 3, 4, \dots, (b-1)$ 。

由是 $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (b-1)a = M(b) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (b-1)$ 。

即 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (b-1)a \cdot a \cdot \dots \cdot a = M(b) + \underline{b-1}$ 。

即 $\underline{b-1} a^{b-1} = M(b) + \underline{b-1}$.

∴ $\underline{b-1}(a^{b-1}-1) = M(b)$.

若 b 爲素數。則 b 與 $\underline{b-1}$ 爲互素。故得 Fermat 氏之定理。

$a^{b-1}-1 = M(b)$ 。

即恆同餘數式爲 $a^{b-1}-1 \equiv 0 \pmod{b}$ 。

390. 維而孫 Wilson 氏之定理 $\cdot n$ 爲素數。則 $1 + \underline{n-1}$

可以整除之。

凡小於 n 之數。如 $1, 2, 3, \dots, (n-1)$ (1)

而 a 爲小於 n 之任意數。逐次以乘 (1) 得

$1 \cdot a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \dots, (n-1) a$ (2)

惟 a 小於 n 。而 n 爲素數。則 a 與 n 必爲互素。由 388 章。而以 n 除 (2)。其各異之餘數。可順序列之爲 $1, 2, 3, \dots, (n-1)$ 。其餘數爲 1 者。祇有一個。

設於 (2) 之內有 ma 以 n 除。而其餘數爲 1。

即 $ma = M(n) + 1$ (3)

而於 (3) 惟 a 等於 $n-1$ 或 1 時。其 m 與 a 必相等。何則。若由 (3) 令其 m 等於 a 。則得 $a^2 = M(n) + 1$ 。即 $(a+1)(a-1) = M(n)$ 。

然 n 爲素數。而 a 又小於 n 。故必 $a = n-1$ 。或 $a = 1$ 。否則不能適合此關係。所以惟 a 等於 $n-1$ 或 1 時。其 m 與 a 必相等。

今於 $2, 3, 4, \dots, (n-3)(n-2)$ 內取相異之二數。其積爲 $M(n) + 1$ 者。以此各異之積連乘之。而得

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2) = (M(n) + 1) \{M(n) + 1\} \cdot \dots = M(n) + 1$ 。

於此以 $n-1$ 乘之。得 $\underline{n-1} = (n-1) \{M(n) + 1\}$ 。

即 $\underline{n-1} = M(n) + n - 1 = M(n) - 1$ 。

∴ $\underline{n-1} + 1 = M(n)$ 。

[別證] 由 305 章得

$$(n-1)^{n-1} - (n-1)(n-2)^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} (n-3)^{n-1} - \dots$$

$$+ (-1)^{n-2} \frac{(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2}{n-2} 1^{n-1} = \underline{n-1}$$

今 n 爲素數。故 n 對於 $n-1, n-2, \dots$ 爲互素。準 Fermat 氏之定理。
 $(n-1)^{n-1} = 1 + M(n)$, $(n-2)^{n-1} = 1 + M(n)$, 由是知上之級數。爲

$$1 + M(n) - (n-1)\{1 + M(n)\} + \frac{(n-1)(n-2)}{1,2}\{1 + M(n)\} - \dots \\
+ (-1)^{n-2} \frac{(n-1)(n-2) \dots 2}{n-2}\{1 + M(n)\} = |n-1.$$

$$\text{即 } 1 - (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1,2} - \dots + (-1)^{n-2}(n-1) + M(n) = |n-1.$$

$$\text{即 } (1-1)^{n-1} - (-1)^{n-1} + M(n) = |n-1.$$

$$\text{即 } -(-1)^{n-1} + M(n) = |n-1.$$

惟 n 爲大於 2 之素數。故 $n-1$ 爲偶數。故 $-(-1)^{n-1} = -1$ 。

$$\text{即得 } M(n) = 1 + |n-1.$$

此進而孫 Wilson 之定理。所以表示素數之特性者也。

故於此定理正言之曰。 n 爲素數。則 $1 + |n-1$ 。可以 n 整除之。

又可反言之曰。 n 非爲素數。則 $1 + |n-1$ 。決不可以 n 整除之。

何則。 n 非爲素數。則 n 之因子悉含於 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 以內。則是 n 非爲素數。必可以整除 $|n-1$ 。故 $1 + |n-1$ 。決不能以 n 整除之。

391. 定理 凡小於 n 而對於 n 爲互素。其所有整數之總數。以 $\phi(n)$ 表之。而 a, b, c, \dots 其各爲互素。則

$$\phi(abc \dots) = \phi(a)\phi(b)\phi(c) \dots$$

但 1 對於任何大之整數。而爲互素。

說明 ϕ 之記號如 1, 2, 3, 4 四數。其各對於 5。而爲互素。故 $\phi(5) = 4$ 。
 又 1, 3, 5, 7 四數。其各對於 8。而爲互素。故 $\phi(8) = 4$ 。

先設兩數 a, b 以證之。而積爲 ab 。

試自 1 迄 ab 。將各數以次列之。

1	2.....k.....	a
a+1	a+2.....a+k.....	2a
2a+1	2a+2.....2a+k.....	3a
.....		
(b-1)a+1	(b-1)a+2.....(b-1)a+k.....	ba

如上之列法。於其縱行第 k 行之各整數為 $k, a+k, 2a+k, \dots, (b-1)a+k$ 。若 k 對於 a 而為素數。則 $a+k, 2a+k, \dots, (b-1)a+k$ 各對於 a 而為素數。若 k 對於 a 而非為素數。則各對於 a 亦非為素數。故於諸縱行中。凡對於 a 而為素數。其行數應有 $\phi(a)$ 行。(第一縱行亦含於此內)。

又從 388 章。 a 與 b 為互素。而知以 b 除 $k, a+k, 2a+k, \dots, (b-1)a+k$ 。其餘數為 $0, 1, 2, \dots, (b-1)$ 。

而以 b 除 $k, a+k, 2a+k, \dots, (b-1)a+k$ 內之任一數時。如其餘數對於 b 為素數。則此一數對於 b 亦為素數可知。若其餘數對於 b 而非為素數。則此一數對於 b 亦非為素數可知。

由是於 $0, 1, 2, \dots, (b-1)$ 內所有對於 b 為素數之數。即為於任一行內所有對於 b 為素數之數。故凡對於 b 而為素數。其含於各行以內。其數有 $\phi(b)$ 。

惟對於 a 而為素數。其行數有 $\phi(a)$ 。而於各行中。其對於 b 而為素數。其數有 $\phi(b)$ 。

今對於 a 為素數。又對於 b 為素數。則亦必對於 $a \times b$ 而為素數。故凡小於 ab 而對於 ab 為素數。其數為 $\phi(a) \times \phi(b)$ 。

即 $\phi(ab) = \phi(a) \times \phi(b)$ 。

由上之證法。可推及兩數以上之諸數如次。

$\phi(abc \dots) = \phi(a \times bc \dots) = \phi(a) \times \phi(bc \dots) = \phi(a) \times \phi(b) \phi(c) \dots$ 。

392. 例題 求小於已知數而對於其數為素數之總數。此即 383 章之問題。直可由前章之定理求得之。

已知數為 $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ 但 $a, b, c \dots$ 為其各異之素因子。

先求小於 a^α 而對於 a^α 為素數之數如次。

以小於 a^α 而對於 a^α 非為素數者。如 $a, 2a, 3a, \dots, aa, \dots, a^{\alpha-1}$ 。其數凡 $a^{\alpha-1}$ 個。故求得小於 a^α 而對於 a^α 為素數之數。等於 a^α 內減 $a^{\alpha-1}$ 。

即 $\phi(a^\alpha) = a^\alpha - a^{\alpha-1} = a^\alpha \left(1 - \frac{1}{a}\right)$ 。

同理 $\phi(b^\beta) = b^\beta \left(1 - \frac{1}{b}\right)$, $\phi(c^\gamma) = c^\gamma \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$

由前章之定理。即得

$$\begin{aligned}\phi(a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots) &= \phi(a^\alpha) \phi(b^\beta) \phi(c^\gamma) \dots \\ &= a^\alpha \left(1 - \frac{1}{a}\right) b^\beta \left(1 - \frac{1}{b}\right) c^\gamma \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots\end{aligned}$$

$$\text{由是得 } \phi(N) = N \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$$

393. 勿而馬 Fermat 氏定理之擴張 a 與 m 爲互素。 $\phi(m)$ 爲小於 m 而對於 m 爲素數之數。(但 1 亦含於其內)。則 $a^{\phi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$ 。

設小於 m 而對於 m 爲素數。其所有 ϕm 個之數。爲 $1, a, \beta, \gamma, \dots (m-1)$ 逐次將各數以 a 乘之。得 $a \cdot 1, a \cdot a, a \cdot \beta, a \cdot \gamma, \dots a(m-1)$ 。然此之各數以 m 除之。其所得之餘數各異。何則試假定此各數內任意之二數 $a \cdot r$ 及 $a \cdot s$ 。以 m 除之。其餘數若相同。則必 $a(r-s)$ 爲 m 之倍數而後可。今 a 對於 m 而爲素數。

又 $r-s$ 小於 m 。則是 $a(r-s)$ 不能爲 m 之倍數可知。故 $a \cdot 1, a \cdot a, a \cdot \beta, a \cdot \gamma, \dots a(m-1)$ 之各數以 m 除之。其餘數各異。

且於 $a \cdot 1, a \cdot a, a \cdot \beta, a \cdot \gamma, \dots a(m-1)$ 內其各數之兩因子。皆對於 m 。而爲素數。則以 m 除其各數。所得各異之餘數。亦皆對於 m 而爲素數。故此 $\phi(m)$ 個之餘數。必爲 $1, a, \beta, \gamma, \dots (m-1)$ 。

$$\text{由是知 } a \cdot a \cdot a \cdot \beta \cdot \gamma \dots a(m-1) \equiv 1 \cdot a \cdot \beta \cdot \gamma \dots (m-1) \pmod{m},$$

$$\text{即 } a^{\phi(m)} \cdot 1 \cdot a \cdot \beta \cdot \gamma \dots (m-1) \equiv 1 \cdot a \cdot \beta \cdot \gamma \dots (m-1) \pmod{m},$$

$$\therefore \{a^{\phi(m)} - 1\} 1 \cdot a \cdot \beta \cdot \gamma \dots (m-1) \equiv 0 \pmod{m}.$$

但 $1 \cdot a \cdot \beta \cdot \gamma \dots (m-1)$ 對於 m 而爲素數。故 $a^{\phi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$ 。

若 m 爲素數。則凡小於 m 者。其各對於 m 爲素數。因是 $\phi(m) = m-1$ 。

如是上之式爲 $a^{m-1} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$ 此即 Fermat 氏之定理也。

394. 拉果蘭諸 Lagrange 氏之定理 p 爲素數。則於 $1, 2, 3, \dots p-1$ 中取 r 個以爲積。其諸積之和可以 p 除之。但 r 不大於 $p-2$ 。

$$\begin{aligned}\text{恆同式 } (x-1)(x-2)\dots(x-p-1) &\equiv x^{p-1} - S_1 x^{p-2} + S_2 x^{p-3} - \dots \\ &\quad + (-1)^{p-1} S_{p-1}.\end{aligned}$$

而以 $x-1$ 易上式之 x ，則得

$$(x-2)(x-3)\cdots(x-p) = (x-1)^{p-1} - s_1(x-1)^{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1}s_{p-1},$$

$$\begin{aligned} \text{由是得 } (x-p)\{(x^{p-1} - s_1x^{p-2} + s_2x^{p-3} - \cdots + (-1)^{p-1}s_{p-1})\} \\ \equiv (x-1)\{(x-1)^{p-1} - s_1(x-1)^{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1}s_{p-1}\}. \end{aligned}$$

由上之定理，將 x 之異方乘諸項，比較其係數，而得

$$1. \quad s_1 = \frac{p(p-1)}{1.2}.$$

$$2. \quad s_2 = \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} + s_1 \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}.$$

$$3. \quad s_3 = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4} + s_1 \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3} + s_2 \frac{(p-2)(p-3)}{1.2}.$$

.....

$$(p-2) \cdot s_{p-2} = \frac{p(p-1)\cdots 2}{1.2\cdots(p-1)} + s_1 \frac{(p-1)(p-2)\cdots 2}{1.2\cdots(p-2)} + s_2 \frac{(p-2)\cdots 2}{1.2\cdots(p-3)} + \cdots + s_{p-3} \frac{3.2}{1.2}$$

p 為素數，故各右邊之第壹項可以 p 整除之。依第壹之方程式而知 s_1 為 p 之倍數。然則 s_2 亦為 p 之倍數可知。且順是以下至 s_{p-2} 皆為 p 之倍數，亦可知矣。

但準 260 章 s_1 為於 $1, 2, 3, \dots, p-1$ 中取壹個之和， s_2 為取貳個各積之和……至 s_{p-2} 為取 $p-2$ 個各積之和。由是上之證明，適與題意相合。

又既知 Fermat 氏之定理，而 Lagrange 氏之定理，可由 387 章之定理導得之。如次所記之恆同餘數式。

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

此為 x 之 $p-2$ 次式。而準 Fermat 氏之定理，此式適合於 x 之 $(p-1)$ 個之值， $1, 2, \dots, p-1$ 。但此中任兩值之差，對於 1 或 p 為素數。

故由 387 章上之恆同餘數式，對於 x 之各值為適合時，則其 x 之各異方乘之係數，必為 p 之倍數。

又 $x=0$ 可直從 Wilson 氏之定理推得之。

395. 循環小數之分數變化 分數之分母，僅含有 2 及 5 之因子，則此分數化為小數，其小數之位數有限，其故以

$$\frac{a}{2^p 5^q} = \frac{a \cdot 5^p 2^q}{10^{p+q}}.$$

若分數之分母。其有因子對於10而為素數者。則此分數。可化為循環分數。

今有已約分數 $\frac{a}{2^p \cdot 5^q \cdot b}$ 。其 b 對於10而為素數者。令其循環壹節中。所有之數字有 α 個。其非為循環之數字。有 β 個。則

$$\frac{a}{2^p \cdot 5^q \cdot b} = \frac{a \cdot 5^p \cdot 2^q}{10^{p+q} b} = \frac{N}{10^\beta (10^\alpha - 1)}$$

$$\therefore 10^{p+q} \cdot b \cdot N = a \cdot 5^p \cdot 2^q \cdot 10^\beta (10^\alpha - 1).$$

惟 b 對於 a 及 10 為素數。故 $10^\alpha - 1 = M(b)$ 。

而此 α 為以能合於此關係式中 10 之最低方乘之指數。何則。將分數化為循環小數。其循環壹節中之位數。雖可增多。然常取其位數之最少者。例化 $\frac{23}{99}$ 為 $\dot{.}23$ 。亦即為 $\dot{.}232323$ 。然常用 $\dot{.}23$ 。

循環壹節中之位數。惟與 b 為有關係而與 2^p 及 5^q 無涉。何則。以循環壹節中之位數為 α 。而 α 為等於 $M(b) + 1$ 之 10 之最低方乘數故也。

今以 α 為等於 $\phi(b)$ 或 $\phi(b)$ 之若干部分。試證明之如次。

準 393 章 Fermat 氏定理之擴張。

$$10^{\phi(b)} - 1 = M(b). \quad \text{又以 } 10^\alpha - 1 = M(b).$$

假令 α 不等於 $\phi(b)$ 或 $\phi(b)$ 之若干部分。即 $\phi(b) = k\alpha + r$ (但 $r < \alpha$)。

$$\begin{aligned} \text{則 } 10^{\phi(b)} - 1 &= 10^{k\alpha} \cdot 10^r - 1 = \{M(b) + 1\}^k \cdot 10^r - 1 \\ &= M(b) + 10^r - 1. \end{aligned}$$

$$\therefore 10^r - 1 = M(b).$$

惟以 α 為等於 $M(b) + 1$ 之 10 之最低方乘數。今 $r < \alpha$ 為不合理。故 b 對於 10 為素數。而為分數分母之因子。

則此分數化為循環小數。具循環壹節中之位數為等於 $\phi(b)$ 或 $\phi(b)$ 之若干部分。

396. 雜例 雜舉數例以為此編之終結。

[第壹例] $3^{2n+2} - 8n - 9$ 為 64 之倍數。

$$\begin{aligned}
 8^{2n+2} - 8n - 9 &= 9^{n+1} - 8n - 9 = (1+8)^{n+1} - 8n - 9 \\
 &= 1 + (n+1)8 + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} 8^2 + \dots - 8n - 9 \\
 &= 8n + 9 + M(8^2) - 8n - 9 = M(8^2).
 \end{aligned}$$

〔第二例〕 $3^{2n} - 32n^2 + 24n - 1 \equiv 0 \pmod{512}$.

設 $u_n = 3^{2n} - 32n^2 + 24n - 1$.

則 $u_{n+1} = 3^{2(n+1)} - 32(n+1)^2 + 24(n+1) - 1$.

又 $9u_n = 3^{2(n+1)} - 288n^2 + 216n - 9$.

由是 $u_{n+1} - 9u_n = 256n^2 - 256n = 256n(n-1)$
 $= 256M(2) = M(512)$.

若 $n=1$ 。則 $u_1 = 3^2 - 32 + 24 - 1 = 0$ 。

故 $u_{n+1} - 9u_n = M(512)$ 。 $\therefore u_2 = M(512)$ 。

同理推之 $u_3, u_4, u_5, \dots, u_n$ 亦為 $M(512)$ 。

〔第三例〕 於 n^2+1 之素因子中。無有如 $4m-1$ 之形。

2 以外其他之素數。皆如 $2k+1$ 之形。

假定 $2k+1$ 為 n^2+1 中之壹素因子。則 n^2 不可以 $2k+1$ 整除之。即 n 對於 $2k+1$ 為素數。故準 Fermat 氏之定理。 $n^{2k} - 1 = M(2k+1) \dots (A)$

由前之假定 $n^2+1 = M(2k+1)$ 。

$\therefore n^{2k} = \{M(2k+1) - 1\}^k = M(2k+1) + (-1)^k$ 。

以比 (A) 式 $n^{2k} = M(2k+1) + 1$ 。

則是 $(-1)^k = +1$ 。即 k 必為偶數。

故 n^2+1 之素因子。有 $2k+1$ 之形。而不能有 $4m-1$ 之形。

諸因子皆如 $4m+1$ 之形。其連乘積亦如 $4m+1$ 之形。故 n^2+1 之約數為奇數者。亦必如 $4m+1$ 之形。

〔第四例〕 各整數為連 9 數末附 0 者之約數。(連 9 數者。即以若干 9 字連續之數例 99,999,.....)。

將 $10, 10^2, 10^3, \dots$ 以任壹數 n 約之為 0。或得各異之餘數。而此各餘數中。無論何者。皆為循環。週而復始。

設 10^x 及 10^y 。以 n 除之。得同餘數。

則 $10^x - 10^y = M(n)$ 。即連 9 數末附 0 者之數。如 $10^5 - 10^2 = 99900$ 而為 n 之倍數也。

例題三十九

1. 試示次之各證。

$$(1) \quad 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 = M(54).$$

$$(2) \quad 5^{2n+1} + n^5 - 5n^3 + 4n - 5 = M(120).$$

$$(3) \quad 4^{2n+1} + 3^{n+2} \equiv 0 \pmod{13}.$$

$$(4) \quad 3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{8n+1} \equiv 0 \pmod{17}.$$

[證] (1) 設 $u_n = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$.

$$\text{則 } u_{n+1} = 2^{2n+3} - 9(n+1)^2 + 3(n+1) - 2.$$

由是 $u_{n+1} - 4u_n = 27n^2 - 27n = M(54)$. 然 $u_1 = 0$.

$\therefore u_2 = M(54)$ 以下準此推之。

$$\begin{aligned} (2) \quad 5^{2n+1} + n^5 - 5n^3 + 4n - 5 &= 5(24+1)^n + n^5 - 5n^3 + 4n - 5 \\ &= 5\{M(24) + 1\} + n^5 - 5n^3 + 4n - 5 = M(120) + n^5 - 5n^3 + 4n \\ &= M(120) + (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = M(120) + M(1.2.3.4.5) \\ &= M(120). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad 4^{2n+1} + 3^{n+2} &= 4(13+3)^n + 9 \cdot 3^n = 4\{M(13) + 3^n\} + 9 \cdot 3^n \\ &= 4M(13) + 13 \cdot 3^n = M(13). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad 3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{8n+1} &= 9(81)^n + 8(64)^n = 9(85-4)^n + 8(68-4)^n \\ &= 9\{M(17) - 4\}^n + 8\{M(17) - 4\}^n \\ &= 9\{M(17) + (-4)^n\} + 8\{M(17) + (-4)^n\} = M(17) + 17(-4)^n = M(17). \end{aligned}$$

2. a 爲素數, b 與 a 爲互素, 則 $2^{2b^2}, 1^{2b^2}, \dots, \left(\frac{a-1}{2}\right)^{2b^2}$ 以 a 除之, 可

得各異之餘數。

[證] 取題中諸數之任二個 r^{2b^2}, s^{2b^2} , 假定此 r^{2b^2}, s^{2b^2} 以 a 除之, 得同餘數, 則 $(r^2 - s^2)b^2 = M(a)$.

即 $(r+s)(r-s)b^2 = M(a)$, 然 r^2 及 s^2 無論何數, 皆小於 a , 故 $r+s, r-s$ 必小於 a , 而 b 與 a 爲互素, 由是此假定爲不合理, 故如題云云。

3. $4n+1$ 爲素數, 必爲 $\{2n\}^2 + 1$ 之因子, 又 $4n-1$ 爲素數, 必爲 $\{2n-1\}^2 - 1$ 之因子。

[證] $4n+1$ 爲素數, 準 Wilson 氏之定理, 得 $(4n+1) \mid (4n+1)!$.

即 $\{(4n+1)-1\}\{(4n+1)-2\}\cdots\{(4n+1)-2n\}|2n+1 = M(4n+1)$.

即 $M(4n+1) + (-1)^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \cdots 2n | 2n+1 = M(4n+1)$.

即 $M(4n+1) + (\underline{2n})^2 + 1 = M(4n+1)$. $\therefore (\underline{2n})^2 + 1 = M(4n+1)$.

又 $4n-1$ 爲素數。則 $\underline{4n-2+1} = M(4n-1)$.

即 $\{(4n-1)-1\}\{(4n-1)-2\}\cdots\{(4n-1)-(2n-1)\}|2n-1+1 = M(4n-1)$.

即 $M(4n-1) + (-1)^{2n-1} (\underline{2n-1})^2 + 1 = M(4n-1)$.

$\therefore (\underline{2n-1})^2 - 1 = M(4n-1)$.

4. n 爲素數。而 r 小於 n 。則 $\underline{r-1} | \underline{n-r} + (-1)^{r-1} = M(n)$.

[證] $\underline{n-1} = \underline{n-r}(n-r+1)(n-r+2)\cdots(n-1)$

$$= \underline{n-r}\{n-(r-1)\}\{n-(r-2)\}\cdots(n-1)$$

$$= \underline{n-r}\{M(n) + (-1)^{r-1}\underline{r-1}\} = M(n) + (-1)^{r-1}\underline{r-1} | \underline{n-r}$$

又 n 爲素數。故 $\underline{n-1} + 1 = M(n)$ 。即 $\underline{n-1} = M(n) - 1$ 。

由是 $M(n) - 1 = M(n) + (-1)^{r-1}\underline{r-1} | \underline{n-r}$ 。

即 $(-1)^{r-1}\underline{r-1} | \underline{n-r} + 1 = M(n)$ 。以 $(-1)^{r-1}$ 乘之。得

$$\underline{r-1} | \underline{n-r} + (-1)^{r-1} = M(n)$$

5. m 及 n 爲互素。則 m^2+n^2 之約數爲奇數者。必如 $4k+1$ 之形。

[證] $2r+1$ 爲 m^2+n^2 之素因子。以 m 及 n 爲互素。故 $2r+1$ 對於 m 及 n 爲素數。

由是 $m^{2r} = 1 + M(2r+1)$ 。而 $m^2+n^2 = M(2r+1)$ 。

故 $\{M(2r+1) - n^2\}^r = m^{2r} = 1 + M(2r+1)$ 。 $\therefore (-1)^r n^{2r} = 1 + M(2r+1)$ 。

但 $n^{2r} = 1 + M(2r+1)$ 。故 $(-1)^r \{1 + M(2r+1)\} = 1 + M(2r+1)$ 。

故 $(-1)^r = 1$ 而知其 r 爲偶數。即 $r = 2k$ 。

由是 m^2+n^2 之約數爲奇數者。必如 $4k+1$ 之形。

6. $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$ 至無限 $= \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)^{-1} \cdots$

但 $2, 3, 5, \cdots$ 順次以素數連續。

[證] $S = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots$

若 $n > 1$ ，則此級數可如次取得

$$\frac{1}{2^n} S = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} + \dots$$

$$\therefore S \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \dots$$

即消去含有因子 2 之分母。

$$\text{同法 } S \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \dots$$

即消去含有因子 2, 3 之分母。

逐次如此消去含有 2, 3, 5, 7, …… 之分母

$$\text{即得 } S \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \left(1 - \frac{1}{7^n}\right) \dots = 1.$$

7. 小於 n 而對於 n 為素數，則其各數 (含 1 於內) 之等差中項為 $\frac{1}{2} n$ ，試證之。

[證] a 小於 n 而對於 n 為素數，則其壹數 $n - a$ 對於 n 亦為素數，而此壹對之等差中項為 $\frac{1}{2}(a + n - a)$ 即 $\frac{1}{2}n$ 。

又 b 為小於 n 而對於 n 為素數，則其各壹對之等差中項，由同法而得 $\frac{1}{2}n$ ，如此各壹對之等差中項為 $\frac{1}{2}n$ ，故知其各數之等差中項為 $\frac{1}{2}n$ 。

8. N 為任意之數，而 a, b, c, \dots 為其各異之素因子，則凡小於 N 而對於 N 為素數者，其各數之和，為 $\frac{N^2}{2} \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$ ，而此等數平方之和，為 $\frac{N^3}{3} \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots + \frac{N}{6} (1 - a)(1 - b) \dots$ 。

[證] 小於 N 而對於 N 為素數者，其數之個數，為 $N \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots$ ，而此個數之等差中項，由前例而得 $\frac{1}{2}N$ 。

又於等差中項以其項數 (即個數) 乘之，即得其和。

由是所求之和，為 $\frac{1}{2}N \times N \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots$

又小於 N 而對於 N 不為素數者，其數之平方之和為 S ，試於

383章 (a) 式即個數。爲 $\sum \frac{N}{a} - \sum \frac{N}{ab} + \sum \frac{N}{abc} - \sum \frac{N}{abcd} + \dots$ 求其各個數平方之和。

但 $\sum \frac{N}{a}$ 之壹部 $\frac{N}{a}$ 項爲 $a, 2a, 3a, \dots, \left(\frac{N}{a}\right)a$,

$$\text{由是 } S = \sum \left\{ a^2 + 2^2 a^2 + \dots + \left(\frac{N}{a}\right)^2 a^2 \right\} - \sum \left\{ a^2 b^2 + 2^2 a^2 b^2 + \dots + \left(\frac{N}{ab}\right)^2 a^2 b^2 \right\} \\ + \sum \left\{ a^2 b^2 c^2 + 2^2 a^2 b^2 c^2 + \dots + \left(\frac{N}{abc}\right)^2 a^2 b^2 c^2 \right\} \dots \dots$$

$$\text{令 } a^2 + 2^2 a^2 + \dots + \left(\frac{N}{a}\right)^2 a^2 = \frac{1}{6} a^2 \frac{N}{a} \left(\frac{N}{a} + 1\right) \left(\frac{2N}{a} + 1\right) \\ = \frac{1}{6} \frac{N}{a} (N+a)(2N+a) \\ = \frac{1}{6} \left\{ \frac{2N^2}{a} + 3N^2 + Na \right\}.$$

$$\text{由是 } 6S = 2N^2 \left\{ \sum \frac{1}{a} - \sum \frac{1}{ab} + \sum \frac{1}{abc} - \dots \right\}$$

$$+ 3N^2 \left\{ r - \frac{r(r-1)}{1.2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} - \dots \right\} + N \{ \sum a - \sum ab + \sum abc \dots \}$$

$$= 2N^2 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots \right\}$$

$$+ 3N^2 + N \{ 1 - (1-a)(1-b)(1-c) \dots \}.$$

$$\text{令自1迄 } N \text{ 數平方之和。爲 } \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) \dots \dots \dots (A)$$

由是小於 N 而對於 N 爲素數者。其各數平方之和。爲等於從 (A) 減 (S)。即 $\frac{1}{6} N^2 \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots + \frac{1}{6} N(1-a)(1-b) \dots$

9. 小於 m 而對於 m 爲素數。其數之個數爲 $\phi(m)$ 。而 n 之諸約數爲 d_1, d_2, d_3, \dots 則 $\sum \phi(d) = n$ 。

[證] $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ 而 a, b, c, \dots 爲其素因子。其任意之約數爲 $d = a^p b^q c^r \dots$ 但 p, q, r, \dots 不大於 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 可得如次

$$\phi(d) = d \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots = a^{\alpha-1} (a-1) b^{\beta-1} (b-1) c^{\gamma-1} (c-1) \dots$$

今於 $\phi(d)$ 所有各異之值。(即對於 p, q, r, \dots 所由成立之值)。可由次之連乘積各異之項明之。

$$1 + (a-1) + a(a-1) + a^2(a-1) + \dots + a^{a-1}(a-1).$$

$$1 + (b-1) + b(b-1) + b^2(b-1) + \dots + b^{b-1}(b-1).$$

$$1 + (c-1) + c(c-1) + c^2(c-1) + \dots + c^{c-1}(c-1).$$

$$\text{但 } 1 + (a-1) + a(a-1) + a^2(a-1) + \dots + a^{a-1}(a-1).$$

$$= 1 + (a-1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{a-1})$$

$$= 1 + (a-1) \cdot \frac{a^a - 1}{a - 1} = 1 + a^a - 1 = a^a.$$

由是 $\Sigma \phi(d)$ 等於 a^a, b^b, c^c, \dots 之連乘積 $\Sigma \phi(d) = n$.

10. 分數 $\frac{a}{b}$ 其 b 為素數。且對於 10 而為素數。而其循環之位數為偶數。則此等數位之前半與後半之和為連九數。

[證] $\frac{a}{b} = \frac{N}{10^{2p} - 1}$, 但 N 為整數。

$\therefore a(10^{2p} - 1) = bN = M(b)$, a 對於 b 為素數。

故 $10^{2p} - 1 = M(b)$, 即 $(10^p + 1)(10^p - 1) = M(b)$ 。

但連九數 $10^{2p} - 1$ 為最低循環位。故凡小於 $10^{2p} - 1$ 之連九數。非為 b 之倍數。即 $10^p - 1$ 非為 $M(b)$ 。由是 $10^p + 1 = M(b)$ 。

今 $\frac{a}{b} = c_1 c_2 c_3 \dots c_p c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{2p}$, 但 c_1, c_2, c_3, \dots 為數字。

$$\therefore 10^p \times \frac{a}{b} = c_1 c_2 c_3 \dots c_p \cdot c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{2p} c_1 c_2 c_3 \dots c_p,$$

$$\text{由是 } (10^p + 1) \frac{a}{b} = c_1 c_2 c_3 \dots c_p \cdot c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{2p} c_1 c_2 c_3 \dots c_p \\ + c_1 c_2 c_3 \dots c_p c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{2p},$$

但 $10^p + 1$ 為 $M(b)$ 。故 $(10^p + 1) \frac{a}{b}$ 為整數。所以

$$c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{2p} c_1 c_2 \dots c_p + c_1 c_2 \dots c_p c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{2p} = \text{整數}.$$

$$\text{即 } \frac{c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{2p} c_1 c_2 \dots c_p}{999 \dots 9} + \frac{c_1 c_2 \dots c_p c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{2p}}{999 \dots 9} = \text{整數}.$$

$$\therefore c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{2p} + c_1 c_2 \dots c_p = .9999 \dots = .9 = 1.$$

11. $\frac{1}{p}$ 爲有 $p-1$ 位之循環位。則 p 爲素數。又此循環小數。若以 $2, 3, \dots, (p-1)$ 乘之。則其循環之數位。依其順序逐次輪換之。

[證] 例 $\frac{1}{7} = .\dot{1}42857$ 以 $2, 3, 4, 5, 6$ 乘之。順次得

$$.285714, .428571, .571428, .714285, .857142$$

先設 $\frac{1}{p} = .c_1c_2c_3\dots c_{p-1}$ 而 $p)1$ 。 ($c_1c_2c_3\dots c_{p-1}$,

$$\text{由是 } \frac{c_1p}{r_1} \quad 10 = c_1p + r_1 \quad \frac{c_2p}{r_2} \quad 10r_1 = c_2p + r_2 \quad \frac{c_3p}{r_3} \quad 10r_2 = c_3p + r_3 \dots$$

p 對於 10 爲素數。故對於 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ 亦爲素數。故 p 爲素數而 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ 其 $p-1$ 個之數各相異。而皆小於 p 。故其各值即爲 $1, 2, 3, \dots, p-1$ 內之各值。今於此 $1, 2, 3, \dots, p-1$ 內之任意數 k 。則 $\frac{k}{p} = \frac{1}{p} \times k$ 爲循環小數。即以 p 除 k 。而 k 爲 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ 內之壹數。則順次連續除之。其餘諸數至 r_{p-1} 而後復爲 r_1, r_2, \dots 故所得之商即爲循環之數字。且依其順序而逐次輪換之。

12. $\frac{1}{P} \frac{1}{Q} \frac{1}{R}, \dots$ 順次爲 p 位, q 位, r 位之循環小數。其 P, Q, R, \dots 爲素數。則 $1/PQR, \dots$ 爲有 n 位之循環位。但 n 爲 p, q, r, \dots 之最低公倍數。

[證] $10^p - 1 = M(P), 10^q - 1 = M(Q), 10^r - 1 = M(R), \dots, n$ 爲 p, q, r, \dots 之 LCM。則 $10^n - 1$ 爲 $10^p - 1, 10^q - 1, 10^r - 1, \dots$ 之倍數。

即 $10^n - 1 = M(PQR, \dots)$ 。而 10 之任意方乘要比 10^n 爲低爲能適合。故如題云云。

第貳拾玖編

不定方程式

397. 不定方程式 (Indeterminate Equation) 祇有壹個方程式。其中含有多個之未知數。則其未知數之值。不能壹定。而可得無限之答數。前論通同方程式。已將此理說明之。即 n 個未知數而有 n 個方程式。其答數為有壹定。若其方程式之數少於 n 。則其答數為無定。

然未知數之值。若以正整數為限制。有時其答數亦為有限。

例 $x+y=3$ 。其 x 及 y 之值。若兼分數及負數。其答數為無限。若以正整數為限制。則此方程式。 x 及 y 之值。其答數祇有 $x=2, y=1$ 。或 $x=1, y=2$ 或 $x=0, y=3$ 或 $x=3, y=0$ 四對而已。

是編所求未知數之值。皆以正整數為限制。

398. 二未知數之壹次方程式 有 x, y 二未知數之壹次方程式。可得以 $ax+by=\pm c$ 。或 $ax-by=\pm c$ 之形包括之。但 a, b, c 為正整數。

若將此方程式之形。分別詳記之則為 $ax+by=c, ax+by=-c, ax-by=c, ax-by=-c$ 簡省之。不外乎 $ax+by=c, ax-by=c$ 之兩種。何則。若為 $ax+by=-c$ 而 a, b 為正數。則 x, y 不得不為負數。故不合。

若為 $ax-by=-c$ 。即 $by-ax=c$ 。不過將 $ax-by=c$ 之 x, y 互換而已。若將前兩式。更簡省之。不外 $ax\pm by=c$ 。

[係數之關係] 於 $ax\pm by=c$ 。其 a, b, c 無公因子者。則 a 與 b 必為互素。如謂 a, b 非為互素。而有公因子為 m 。則 $a=mA, b=mB$ 。原方程式為 $c=m(Ax\pm By)$ 。而 x, y 為整數。則 $m(Ax\pm By)=M(m)$ 。

即 $c=M(m)$ 。則是 a, b, c 有公因子為 m 。與所言者不合。故 a, b, c 無公因子。則 a 與 b 必為互素可知矣。

399. 定理 如 $ax \pm by$ 之 a 及 b 爲互素。則凡合於此方程式內 x 及 y 之整數值。可以求得之。

試將 $\frac{a}{b}$ 作連分數。而以 $\frac{p}{q}$ 爲切近於 $\frac{a}{b}$ 之漸近分數。設以 $\frac{a}{b}$ 當作連分數之第 n 漸近分數。

而 $\frac{p}{q}$ 爲第 $n-1$ 漸近分數。則由 357 章。得

$aq - pb = \pm 1$ 。故以 $\pm c$ 乘之。得

$$a(\pm cq) - b(\pm cp) = c \dots \dots \dots (1)$$

及 $a(\pm cq) + b(\mp cp) = c \dots \dots \dots (2)$

而原方程式 $ax - by = c \dots \dots \dots (a)$

及 $ax + by = c \dots \dots \dots (b)$

將 (1) 與原方程式 (a) 比較。得

$$x = cq, \quad y = cp \quad \text{或} \quad x = -cq, \quad y = -cp.$$

又 (2) 與原方程式 (b) 比較。得

$$x = cq, \quad y = -cp. \quad \text{或} \quad x = -cq, \quad y = cp.$$

於上之各組中。至少有壹組其 x 及 y 之值。皆爲正整數。適合於 $ax \pm by = c$ 。

若 a 及 b 兩數中其有壹數爲 1 者。則不必如上之求法用 $\frac{a}{b}$ 之連分數求之。

但於方程式 $ax \pm y = c$ 任設壹整數 a 爲 x 之值。則

$$x = a, \quad \pm y = c - aa,$$

又於方程式 $x \pm by = c$ 如前之法則。 $x = c \mp b\beta, \quad y = \beta$ 。

無論如何可求得 x, y 之正整數。

由是方程式 $ax \pm by = c$ 。其根之值。至少有壹組爲正整數。

400. 問題 於方程式 $ax - by = c$ 。所有各組正整數之根中。知其壹組之根。求其他組之根。

設於 $ax - by = c$ 。所有壹組正整數之根。爲

$$x = a, \quad y = \beta. \quad \text{則得} \quad a\alpha - b\beta = c.$$

由減法得 $a(x - a) - b(y - \beta) = 0$ 。

即 $a(x-a) = b(y-\beta)$ 。 a 可整除 $a(x-a)$ 。故亦可整除 $b(y-\beta)$ 。

惟 a 對於 b 爲素數。故 a 可以整除 $y-\beta$ 。

今令 $y-\beta = ma$ 。但 m 爲任意之整數。

故 $a(x-a) = b(y-\beta) = mab$ 。

故 $x-a = mb$ 。

即得 $x = a + mb$ ， $y = \beta + ma$ 。

由是 $x = a$ ， $y = \beta$ 適合於 $ax - by = c$ 。

而 m 爲任意之整數。 $x = a + mb$ ， $y = \beta + ma$ 亦適合於 $ax - by = c$ 。

m 爲正整數。可任意擇定之。故知方程式 $ax - by = c$ 。其正整數之根爲無限。

401. 問題 於方程式 $ax + by = c$ 。所有各組正整數之根中。知其壹組之根。求其他組之根。

設於 $ax + by = c$ 。所有壹組正整數之根。爲 $x = a$ ， $y = \beta$ 。

則得 $ax + b\beta = c$ ， 由減法 $a(x-a) + b(y-\beta) = 0$ 。 a 可得整除 $a(x-a)$

即可得整除 $-b(y-\beta)$ 。而 a 對於 b 爲素數。故 a 可得整除 $y-\beta$ 。

今令 $y-\beta = ma$ 。但 m 爲任意之整數。

故 $a(x-a) = -b(y-\beta) = -mab$ 。 $\therefore x-a = -mb$ 。

由是 $x = a - mb$ ， $y = \beta + ma$ 。

以 $a > mb$ ， $\beta > -ma$ 。

即 $\frac{a}{b} > m > -\frac{\beta}{a}$ 。

即 m 爲小於 $\frac{a}{b}$ 而大於 $-\frac{\beta}{a}$ 。故知方程式 $ax + by = c$ 。其正整數之根爲有限。

402. 問題 凡適合於方程式 $ax + by = c$ 。所有 x, y 之值爲正整數者。求其答之總數。

於 399 章已證得 $x = cq$ ， $y = -cp$ 或 $x = -cq$ ， $y = cp$ 爲適合於方程式 $ax + by = c$ 。但 $\frac{p}{q}$ 爲切近於 $\frac{a}{b}$ 之漸近分數。

先假定 $x = cq$ ， $y = -cp$ 爲適合於原方程式。而其他適合於原方程式所有 x, y 之值。由 401 章。得

$$x = cq - mb, \quad y = -cp + ma \dots \dots \dots (1)$$

但 m 爲任意之整數。

於 (1) x, y 之值大於 0 而爲正整數。所以 m 必爲正整數。

即由 (1) 得 $cq - mb > 0$ 及 $-cp + ma > 0$ 。

$$\text{故 } m < \frac{cq}{b} \text{ 及 } m > \frac{cp}{a}$$

故 m 之最大整數值爲 $I\left(\frac{cq}{b}\right)$ ，又 m 之最小整數值爲 $I\left(\frac{cp}{a}\right) + 1$ 。

即得 m 之整數值。其總數爲有

$$I\left(\frac{cq}{b}\right) - \left\{ I\left(\frac{cp}{a}\right) + 1 \right\} + 1 = I\left(\frac{cq}{b}\right) - I\left(\frac{cp}{a}\right) \text{ 個。}$$

由是與 m 之值相應所得 x 及 y 各組之值。其答之總數。爲有

$$I\left(\frac{cq}{b}\right) - I\left(\frac{cp}{a}\right)$$

試以 I 示整數部。 f 示分數部。

$$\frac{cq}{b} = I_1 + f_1 \text{ 及 } \frac{cp}{a} = I_2 + f_2,$$

$$\text{則 } \frac{c}{ab} = \frac{a(cq) - b(cp)}{ab} = \frac{cq}{b} - \frac{cp}{a} = I_1 - I_2 + f_1 - f_2,$$

但若 $f_1 < f_2$ ，則 $f_1 - f_2$ 爲正。其於 $I_1 - I_2 + f_1 - f_2$ 內之正數部爲 $I_1 - I_2$ ，

若 $f_1 < f_2$ ，則 $f_1 - f_2$ 爲負。其於 $I_1 - I_2 + f_1 - f_2$ 內之正數部爲 $I_1 - I_2 - 1$ ，

即 $f_1 < f_2$ ，則 $I\left(\frac{c}{ab}\right)$ 爲 $I_1 - I_2$ ，若 $f_1 < f_2$ ，則 $I\left(\frac{c}{ab}\right)$ 爲 $I_1 - I_2 - 1$ ，

故 $ax + by = c$ 之解答。因 $\frac{cq}{b}$ 之分數部。比 $\frac{cp}{a}$ 之分數部小與不小。

而決定解答之總數。爲 $I\left(\frac{c}{ab}\right) + 1$ 或 $I\left(\frac{c}{ab}\right)$ 。

又 $x = -cq, y = cp$ 。可由同法求得其答之總數。其總數因 $\frac{cp}{a}$ 之分數部比 $\frac{cq}{b}$ 之分數部小與不小。而決定爲 $I\left(\frac{c}{ab}\right) + 1$ 或 $I\left(\frac{c}{ab}\right)$ 。

〔第壹例〕 求適合於方程式 $7x-13y=26$ 。所有 x 及 y 之正整數值。

$$\frac{7}{13} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6}。其切近於 \frac{7}{13} 之漸近分數為 \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2}。$$

$$然 7 \cdot 2 - 13 \cdot 1 = 1。 \therefore 7(2 \times 26) - 13(1 \times 26) = 26。$$

故其壹個答數為 $x=52, y=26$ 。

而其壹般之答數。為 $x=52+13m, y=26+7m$ 。即於此題式之答數為無限。

又由視察得 $x=0, y=-2$ 。亦適合於原方程式。故答數之總式。又為 $x=13m, y=-2+7m$ 。

〔第貳例〕 求適合於 $7x+10y=280$ 。所有正數值之解答。

$$\frac{7}{10} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}。而取其漸近分數。為 \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}。$$

$$由是 7 \cdot 3 - 10 \cdot 2 = 1。 \therefore 7(3 \times 280) - 10(2 \times 280) = 280。$$

即得其壹個之答數。為 $x=840, y=-560$ 。

故共有之答數為 $x=840-10m, y=-560+7m$ 。而 $m \geq 84$ 及 $m \leq 80$

由是順次 $m=84, 83, 82, 81, 80$ 。而得

$$\begin{array}{ccccc} x=0 & x=10 & x=20 & x=30 & x=40 \\ y=28 & y=21 & y=14 & y=7 & y=0 \end{array}$$

以上共有五組。

〔第參例〕 求於 $3x+5y=1306$ 。所有正整數解答之總數。

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}。故 \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2}。$$

$$\therefore 3(2 \times 1306) + 5(-1306) = 1306。$$

由是得壹般之解答。為 $x=2612-5m, y=3m-1306$ 。惟因 x 及 y 為正整數。

$$故 5m \geq 2612。即 m \geq 522 \frac{2}{5}。即 m \geq 522，$$

$$3m \leq 1306。即 m \leq 435 \frac{1}{3}。即 m \leq 435。$$

由是求得解答之總數為 $522-435=87$ 。

403. 三未知數量之兩方程式。

$ax+by+cz=d$, $a'x+b'y+c'z=d'$ 求其正整數之解答。

先從兩式消去其壹未知數。而為含二個未知數之壹方程式。

$$\text{即 } (ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c \dots\dots\dots (1)$$

於此方程式 $ac'-a'c$ 與 $bc'-b'c$ 。如非為互素。則其公因子。即為 $dc'-d'c$ 之因子。可將 (1) 式。以其公因子約之。今假定 $ac'-a'c$ 與 $bc'-b'c$ 為互素。則由前章之定理而得壹切之解答。

$$x=a+(bc'-b'c)n, \quad y=\beta-(ac'-a'c)n \dots\dots\dots (2)$$

但 $x=a$, $y=\beta$ 為任意之整根。 n 為任意之整數。

今以 (2) 之 x, y 壹切之值。代入於原方程式之第壹式。而得

$$a\{a+(bc'-b'c)n\}+b\{\beta-(ac'-a'c)n\}+cz=d,$$

則 $cz+\{a(bc'-b'c)-b(ac'-a'c)\}n=d-aa-b\beta$, 此即為 $Az+Bn=C$ 。

A 與 B 如有公因子。則其公因子。即為 C 之因子。可以其公因子約其全式。今假定 A 與 B 為互素。則可求得。如 $z=\gamma+Bm$, $n=\delta-Am$ 為壹切之解答。

乃由 (2) 得 $x=a+(bc'-b'c)(\delta-Am)$,

$$y=\beta-(ac'-a'c)(\delta-Am),$$

$$z=\gamma+Bm.$$

[例] $5x+7y+2z=24$, $3x-y-4z=4$ 求其正整數值之解答。

從兩方程式消去 z 。而得 $13x+13y=52$,

$$\therefore x+y=4. \text{ 由是 } x=2+n, \quad y=2-n.$$

故由第壹式得 $5(2+n)+7(2-n)+2z=24$ 。即 $z-n=0$ 。

由是得解答之總式。 $x=2+n, y=2-n, z=n$ 。 x, y, z 之正整數之值如次。

$$n=0 \quad \text{則} \quad x=2, \quad y=2, \quad z=0.$$

$$n=1 \quad \text{則} \quad x=3, \quad y=1, \quad z=1.$$

$$n=2 \quad \text{則} \quad x=4, \quad y=0, \quad z=2.$$

如欲得 x, y, z 之正整數值皆大於 0。則其適合於原方程式者。祇有壹個答數。為 $x=3, y=1, z=1$ 。

404. 雜例 次揭數例以補上文之闕略。其所用之法。或有不同之處。係據鮑洛 (Barlow) 氏所著數之理論一書。

[第壹例] 方程式 $3x+2y+8z=40$ 。求其正整數之解答。(除去答數中有0者)。

x, y 皆大於0。故 x, y 為最小時各等於1。由此得 $3+2+8z=40$ 。

$$\text{即 } z = \frac{35}{8} \quad \text{即 } z > 5.$$

由是從方程式。則得

$$\begin{aligned} z=4, & \quad 3x+2y=8, \\ z=3, & \quad 3x+2y=16, \\ z=2, & \quad 3x+2y=24, \\ z=1, & \quad 3x+2y=32. \end{aligned}$$

由此四方程式。求得 x, y, z 之值如次。

$$\begin{array}{cccccccccccc} x=2 & \left. \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 3 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{c} 6 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{c} 4 \\ 6 \\ 2 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{c} 2 \\ 9 \\ 2 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{c} 10 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{c} 8 \\ 4 \\ 1 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 1 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{c} 4 \\ 10 \\ 1 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{c} 2 \\ 13 \\ 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

[第貳例] 方程式 $6x^2-13xy+6y^2=16$ 。求其正整數之解答。

將原式分括之。為 $(3x-2y)(2x-3y)=16$ 。以 x, y 為整數時。其 $2x-3y$ 不得不為整數。而此 $2x-3y$ 不得不為16之因子。此因子必與 $2x-3y$ 為同符號。由是記以16之因子。而得下列各通同方程式。

$$3x-2y = \pm 16, \quad 2x-3y = \pm 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$3x-2y = \pm 8, \quad 2x-3y = \pm 2 \dots\dots\dots (2)$$

$$3x-2y = \pm 4, \quad 2x-3y = \pm 4 \dots\dots\dots (3)$$

$$3x-2y = \pm 2, \quad 2x-3y = \pm 8 \dots\dots\dots (4)$$

$$3x-2y = \pm 1, \quad 2x-3y = \pm 16 \dots\dots\dots (5)$$

從 (1) 得 $5x = \pm (48-2)$ 。從 (2) 得 $5x = \pm (24-4)$ 。

從 (3) 得 $5x = \pm (12-8)$ 。從 (4) 得 $5x = \pm (6-16)$ 。

從 (5) 得 $5x = \pm (3-32)$ 。

以上所得之諸式中。其 x 之值為正整數者。

惟 $5x = + (24-4)$ 及 $5x = - (6-16)$ 。

即 $x=4$ 或 2 ，而與 x 相應所有 y 之值為 2 或 4 。

〔第三例〕 $3x^2+7xy-2x-5y-35=0$ 。求其正整數之解答。

變原式為 $y(7x-5)+3x^2-2x-35=0$ 。

則 $y+\frac{3x^2-2x-35}{7x-5}=0$ 。以 7 乘之。 $7y+\frac{21x^2-14x-245}{7x-5}=0$ 。

$\therefore 7y+3x+\frac{x-245}{7x-5}=0$ 。以 7 乘之。 $49y+21x+\frac{7x-1715}{7x-5}=0$ 。

$\therefore 49y+21x+1-\frac{1710}{7x-5}=0$ 。由是知 $\frac{1710}{7x-5}$ 必為整數。

而 $7x-5$ 必為 1710 之因子。今 $1710=1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 19$ 。其中之因子。等於 $7x-5$ 而 x 為正整數者。惟 $2 \times 3 \times 19$ ， $3 \times 3 \times 2$ ，即 114 ， 9 ， 2 三個因子。

然 $7x-5=114$ 。則 $x=17$ 。以之代入於方程式。得 y 之值為負數。故祇有 $7x-5=9$ ， $7x-5=2$ 為合理。即得 $x=2$ ， $y=3$ ，或 $x=1$ ， $y=17$ 。

例 題 四 十

1. 試將次列方程式。求其正整數之解答。

$$(1) \quad 7x+15y=59$$

$$(2) \quad 8x+13y=138.$$

$$(3) \quad 7x+9y=100$$

$$(4) \quad 15x+71y=10653.$$

〔解〕 本例用特別之解法如次。

(1) 由原方程式。 $x=-2y+\frac{59-y}{7}$ 。故 $\frac{59-y}{7}=m$ 即整數。

故 $59-y=7m$ 。 $\therefore y=59-7m$ 。

$\therefore x=-2y+m=-2(59-7m)+m=15m-118$ 。

故 $m < 8$ 及 $m < 9$ 。 $\therefore m=8$ ， $x=2$ ， $y=3$ 。

(2) 由原方程式 $x=1+\frac{13(10-y)}{8}=1+13m$ 。但 $\frac{10-y}{8}=m$ 。

$\therefore y=10-8m$ ，及 $x=1+13m$ 。由是 $10-8m > 0$ 及 $1+13m > 0$ 。

而得 $m < 2$ ， $m > -1$ 。故 $m=1$ ，及 $m=0$ 。

則 $x=14$ ， $y=2$ ，及 $x=1$ ， $y=10$ 。

(3) $x=13-\frac{9(y-1)}{7}=13-9m$ 。但 $\frac{y-1}{7}=m$ 。

∴ 由 $x=13-9m$, $y=7m+1$, 則 $m < 2$ 及 $m > -1$.

故 $m=1$ 或 0 . 則 $x=4$, $y=8$ 或 $x=13$, $y=1$.

(4) 用連分數求之即如下.

$$\frac{15}{71} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{4}{19}$$

由是 $15 \cdot 19 - 71 \cdot 4 = 1$. ∴ $15(19 \cdot 10653) - 71(4 \cdot 10653) = 10653$.

又原方程式 $15x + 71y = 10653$.

由減法 $15(x - 202407) + 71(y + 42612) = 0$.

∴ $x = 202407 - 71m$, $y = -42612 + 15m$. 故 $m > 2850$ 及 $m < 2841$.

∴ m 為 2850, 2849, …… 2841. 而 x 之值為 696, 625, 554, …… 57.
 y 之值為 3, 18, 33, …… 138.

2. $2x + 3y = 133$ 及 $7x + 11y = 2312$. 求其正整數解答之數.

〔解〕 由 $2x + 3y = 133$ 得 $2(-1) + 3 \cdot 1 = 1$. 即 $2(-133) + 3 \cdot 133 = 133$.

由減法, $2(x + 133) + 3(y - 133) = 0$. ∴ $x = 3m - 133$, $y = 133 - 2m$.

由是 m 之值. 為自 45 至 66. 即 22 個正整數解答.

又由 $7x + 11y = 2312$ 得 $7(-3) + 11 \cdot 2 = 1$.

故 $7(-3 \cdot 2312) + 11(2 \cdot 2312) = 2312$.

∴ $x = 11m - 6936$, $y = 4624 - 7m$. 而 m 之值為自 631 至 660. 即得 30 個正整數解答.

3. 求次之各方程式壹般之解答.

$$(1) 7x - 13y = 15.$$

$$(2) 9x - 11y = 4.$$

$$(3) 119x - 105y = 217.$$

$$(4) 49x - 69y = 100.$$

〔解〕 (1) $7 \cdot 2 - 13 \cdot 1 = 1$. 故 $7 \cdot 30 - 13 \cdot 15 = 15$. 由原方程式減之. 得 $7(x - 30) - 13(y - 15) = 0$. ∴ $x = 30 + 13n$, $y = 15 + 7n$.

及 $y = 15 + 7n = 1 + 7(2 + n) = 1 + 7m$.

(2) $9 \cdot 5 - 11 \cdot 4 = 1$. 故 $9 \cdot 20 - 11 \cdot 16 = 4$.

由原方程式減之. 得 $9(x - 20) = 11(y - 16)$.

∴ $x = 20 + 11n$, $y = 16 + 9n$.

及 $y = 16 + 9n = 7 + 9(1 + n) = 7 + 9m$.

(3) 原方程式以 7 除之. 得 $17x - 15y = 31$.

由是容易求得 $x = 15m - 7$, 及 $y = 17m - 10$.

$$(4) 49 \cdot 31 - 69 \cdot 22 = 1, \quad \therefore 49(3100) - 69(2200) = 100.$$

$$\text{故 } x = 3100 + 69n = 64 + 69(44 + n) = 64 + 69m.$$

$$\text{及 } y = 2200 + 49n = 44 + 49(44 + n) = 44 + 49m.$$

4. 求次列各方程式自 0 以上之正整數解答。

$$(1) 2x + 3y + 7z = 23, \quad \text{答 } 3, 1, 2 \text{ 及 } 5, 2, 1 \text{ 及 } 2, 4, 1$$

$$(2) 7x + 4y + 18z = 109, \quad \text{答 } 1, 21, 1 \text{ 及 } 5, 14, 1 \text{ 及 } 9, 7, 1 \text{ 及 } 3, 13, 2$$

$$\text{及 } 7, 6, 2 \text{ 及 } 1, 12, 3 \text{ 及 } 5, 5, 3 \text{ 及 } 3, 4, 4 \text{ 及 } 1, 3, 5.$$

$$(3) 5x + y + 7z = 39, \quad 2x + 4y + 9z = 63, \quad \text{答 } 2, 8, 3.$$

$$(4) 3x + 2y + 3z = 250, \quad 9x - 4y + 5z = 170, \quad \text{答 } 8, 38, 50$$

$$\text{及 } 19, 44, 35 \text{ 及 } 30, 50, 20 \text{ 及 } 41, 56, 5.$$

【解】(1) 於 $2x + 3y + 7z = 23$. 其 z 在 1, 2, 3 之內。

設 $z = 3$. 則由 $2x + 3y = 2$ 不能得 x, y 之正整數。

若 $z = 2$. 則由 $2x + 3y = 9$ 可得 x, y 之正整數。

又若 $z = 1$. 則由 $2x + 3y = 16$ 亦可得 x, y 之正整數。

$$(2) \text{ 於 } 7x + 4y + 18z = 109, \quad 7x + 4y < 1.$$

$$\therefore 18z > 109 - 1. \text{ 故 } z \text{ 爲 } 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$(3) \text{ 將 } 5x + y + 7z = 39 \text{ 及 } 2x + 4y + 9z = 63 \text{ 消去其 } y. \text{ 得 } 18x + 19z = 93.$$

由此可得 x, z 之各值。

$$(4) \text{ 由原方程式消去 } y. \text{ 得 } 15x + 11z = 670.$$

$$\text{由是 } x = 2010 - 11m, \quad z = 15m - 2680 \text{ 及 } y = 1130 - 6m \text{ 而 } m > 182,$$

$$\text{及 } m < 179.$$

5. 求次列各方程式自 0 以上之正整數解答。

$$(1) 2xy - 3x + 2y = 1329, \quad \text{答 } 1325, 2, \text{ 及 } 441, 3, \text{ 及 } 101, 8, \text{ 及 } 77, 10,$$

$$\text{及 } 33, 21, \text{ 及 } 25, 27, \text{ 及 } 5, 112, \text{ 及 } 1, 333.$$

$$(2) x^2 - xy + 2x - 3y = 11, \quad \text{答 } 5, 3.$$

$$(3) 2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28, \quad \text{答 } 8, 5.$$

$$(4) 2x^2 - xy - y^2 + 2x + 7y = 84, \quad \text{答 } 6, 1, \text{ 及 } 13, 14.$$

【解】(1) $(x+1)(2y-3) = 1326$.

故 $x+1$ 爲 1326 之因子。而 $2y-3$ 非等於奇數。則 y 不爲整數。

由是 $x+1$ 爲 2, 6, 26, 34, 78, 102, 442, 1326.

$$(2) \quad (x+3)(x-y-1)=8. \quad \therefore x+3=8, \quad x-y-1=1.$$

$$(3) \quad (2x-3y)(x+4y)=28. \quad \therefore x+4y \text{ 爲 } 28 \text{ 之因子. 而 } x+4y < 5.$$

$$\therefore x+4y=7, \quad 2x-3y=4 \text{ 或 } x+4y=14, \quad 2x-3y=2,$$

$$\text{或 } x+4y=28, \quad 2x-3y=1.$$

$$(4) \quad (2x+y-4)(x-y+3)=72.$$

由是 $2x+y-4$ 爲 72, 36, 24, 18, 12, 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1, 其相應之各因子 $x-y+3$ 爲 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

*6. 於 $ax+by+cz=d$. 其 x, y, z 之各整數值. 爲三個大等差級數. 試證明之.

[證] 設 $ax+by+cz=d$ 之整數解答. 爲 $x=a, y=\beta, z=\gamma$.

則 $ax+b\beta+c\gamma=d$. 而 $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$.

$$\text{故 } am(b-c)+bm(c-a)+cm(a-b)=0.$$

由加法 $a\{a+m(b-c)\}+b\{\beta+m(c-a)\}+c\{\gamma+m(a-b)\}=d$. 與原方程式比較. 得 $x=a+m(b-c), y=\beta+m(c-a), z=\gamma+m(a-b)$.

故 m 爲 0, 1, 2, 3, …… 而得 x, y 如次.

$$x=a, \quad a+(b-c), \quad a+2(b-c), \quad a+3(b-c) \dots\dots \text{即 } A.P.$$

$$y=\beta, \quad \beta+(c-a), \quad \beta+2(c-a), \quad \beta+3(c-a) \dots\dots \text{即 } A.P.$$

$$z=\gamma, \quad \gamma+(a-b), \quad \gamma+2(a-b), \quad \gamma+3(a-b) \dots\dots \text{即 } A.P.$$

7. 將 316 分爲二分. 使其壹分可以 13 整除. 而他壹分可以 11 整除. 答 195, 121, 52, 264.

[解] 二分爲 $13x, 11y$. 則 $13x+11y=316$. 由斯求 x, y , 而得 $13x, 11y$ 之值.

8. 用 2.5「先令」及 2「先令」之銀幣. 兌換 1「鎊」6「先令」6「本土」其方法有幾種. 答 3.

[解] 2.5「先令」即 30「本土」. 又 2「先令」即 24「本土」. 今令此兩種銀幣之數爲 x 及 y . 又以 1「鎊」6「先令」6「本土」=318「本土」.

$$\text{故 } 30x+24y=318. \quad \text{即 } 5x+4y=53. \quad \therefore x=53-4m, \quad y=5m-53.$$

故 $m > 13$ 又 $m < 11$. 即得 m 之數爲 3 個.

9. 用 21「先令」與 5「先令」之銀幣. 兌換金額百鎊. 問可有幾法. 答 20.

[解] 令此兩種銀幣之數爲 x 及 y 。而 100「鎊」。即 2000「先令」。故 $21x+5y=2000$ 。由此得 $x=2000-5m$, $y=21m-8000$ 。

故定 m 之值。自 381 迄 400 之各數爲適合。

即得所求之數。爲 $400-381+1$ 。即 20。

10. 甲欲付乙銀 11「先令」而僅有 5「先令」之幣 8 個。乙則僅有 2「先令」之幣若干。問其調換之法則有幾何。 答 3。

[解] 令甲付乙以 5「先令」之銀幣個數爲 x 。乙還甲以 2「先令」銀幣之個數爲 y 。故 $5x-2y=11$ 。

即得 $x=11-2m$, $y=22-5m$ 。惟 $x \geq 8$ 。

故 $x=7$, $y=12$, 或 $x=5$, $y=7$ 。或 $x=3$, $y=2$ 。即有三個方法。

11. 以 2.5「先令」及 2「先令」二種銀幣。兌換銀款可有 8 種。求其最大數。及最小數。

答 3「鎊」14「先令」6「本土」, 4「鎊」10「先令」。

[解] 令此兩種銀幣之個數爲 x 及 y 。所兌換之銀款 $6z$ 「本土」。

則 $30x+24y=6z$ 。 $\therefore 5x+4y=z$ 。 又以 $5z-4z=z$ 。

由是 $5(x-z)+4(y+z)=0$ 。 $\therefore x=z-4m$, $y=5m-z$ 。

故 $m < \frac{z}{4}$ 及 $m < \frac{z}{5}$ 。即 $m = \frac{z-\alpha}{4}$ 及 $m = \frac{z+\beta}{5}$ 。 α 及 β 爲正整數。

但不大於 4, 5 而上二個 m 之值。其中間之整數。由題意得。

$$\frac{z-\alpha}{4} - \frac{z+\beta}{5} = 8-1. \quad \therefore z=140+5\alpha+4\beta. \text{ 故 } z \text{ 爲最大之數。}$$

則 $\alpha=4$, $\beta=5$ 。 $\therefore z=180$ 「本土」。

又 z 爲最小之數。則 $\alpha=1$, $\beta=1$ 。 $\therefore z=149$ 「本土」。

由是得 $6z=6 \times 180=4$ 「鎊」10「先令」最大數。

又 $6z=6 \times 149=3$ 「鎊」14「先令」6「本土」最小數。

12. 以 4「本土」及 3「本土」二種幣兌銀款。祇有 3 種。求此各種之值。

[解] 令此二種幣之個數爲 x , y 。其兌得之銀數爲 z 。

則得 $4x+3y=z$ 。 又以 $4z-3z=z$ 。 故 $4(x-z)+3(y+z)=0$ 。

$\therefore x=z-3m$ 及 $y=4m-z$ 。

由是 $m < \frac{z}{3}$ 及 $m > \frac{z}{4}$ 。即 $m = \frac{z-a}{3}$ 及 $m = \frac{z+\beta}{4}$ 。

但 a, β 不大於 3, 4 因題云祇有三種。故得 $\frac{z-a}{3} - \frac{z+\beta}{4} = 3-1$ 。

由是得 $z = 24 + 4a + 3\beta$ 故 $a = 1, 2, 3$ 及 $\beta = 1, 2, 3, 4$ 。

由是 $a=1, \beta=1$ 。∴ $z = 24 + 4 + 3 = 31$ [本土] = 2 [先令] 7 [本土]。

$a=1, \beta=2$ 。∴ $z = 24 + 4 + 6 = 34$ [本土] = 2 [先令] 10 [本土]。

$a=1, \beta=3$ 。∴ $z = 24 + 4 + 9 = 37$ [本土] = 3 [先令] 1 [本土]。

$a=1, \beta=4$ 。∴ $z = 24 + 4 + 12 = 40$ [本土] = 3 [先令] 4 [本土]。

$a=2, \beta=1$ 。∴ $z = 24 + 8 + 3 = 35$ [本土] = 2 [先令] 11 [本土]。

$a=2, \beta=2$ 。∴ $z = 24 + 8 + 6 = 38$ [本土] = 3 [先令] 2 [本土]。

$a=2, \beta=3$ 。∴ $z = 24 + 8 + 9 = 41$ [本土] = 3 [先令] 5 [本土]。

$a=2, \beta=4$ 。∴ $z = 24 + 8 + 12 = 44$ [本土] = 3 [先令] 8 [本土]。

$a=3, \beta=1$ 。∴ $z = 24 + 12 + 3 = 39$ [本土] = 3 [先令] 3 [本土]。

$a=3, \beta=2$ 。∴ $z = 24 + 12 + 6 = 42$ [本土] = 3 [先令] 6 [本土]。

$a=3, \beta=3$ 。∴ $z = 24 + 12 + 9 = 45$ [本土] = 3 [先令] 9 [本土]。

$a=3, \beta=4$ 。∴ $z = 24 + 12 + 12 = 48$ [本土] = 4 [先令]。

[餘論] 本題可為造設不定方程式問題之本例。如此題之 12 個解答。即可設為 12 個問題。茲示其 (1) (2) 如次。即以三方法解答之也。

(1) 以 4 [本土] 與 3 [本土] 之二種幣。兌換 2 [先令] 7 [本土] 之幣。其方法之數幾何。

從 $4x + 3y = 2$ [先令] 7 [本土] = 31。而得 $x = 31 - 3m$, $y = 4m - 31$ 。

∴ $m > 7$ 及 $m < 11$ 。∴ $m = 8, 9, 10$ 。故其方法之數為 3。

(2) 以 4 [本土] 與 3 [本土] 之二種幣。買價值 2 [先令] 10 [本土] 之物。其配用二種幣之方法。有幾種。

從 $4x + 3y = 2$ [先令] 10 [本土] = 34。即得 $x = 34 - 3m$, $y = 4m - 34$ 。

∴ $m > 8$ 及 $m < 12$ 。∴ $m = 9, 10, 11$ 。故其方法之數為 3。

以上可得同樣之解答。

13. 有二位之數。等於其二數字之積之倍數。其數有幾種。

[解] 二位之數爲 $10x+y=axy$ 。即 $10+\frac{y}{x}=my$ 。故 $\frac{y}{x}$ 爲整數。

由是 $y=x$ 。則 $11=my$ 。∴ $m=11$ 。 $y=x=1$ 。故所求之數爲 11。

又 $y=2x$ 。則 $12=my$ 。∴ $m=2$ 或 3 或 6。∴ $y=6$ 或 4 或 2。

∴ $x=3$ 或 2 或 1。故所求之數爲 36 或 24 或 12。

又 $y=4x$ 。則 $14=my$ 。即 $7=2mx$ 不能解答。

又 $y=5x$ 。則所求之數爲 15。

又 $y=6x$ 。或 $7x$ 。或 $8x$ 。或 $9x$ 。……皆不能解答。

14. 有兩數。各爲二位之數。其末位之數字相同。而此兩數若各以 9 除之。則任一個之商。互等於他之餘數。求此兩數如何。

[解] 兩數爲 $10x+z$ 。 $10y+z$ 。

由題意得 $10x+z=9\alpha+\beta$ 。 $10y+z=9\beta+\alpha$ 。

由減法 $10(x-y)=8(\alpha-\beta)$ 。即 $5(x-y)=4(\alpha-\beta)$ α, β 爲 9 除之殘數。故比 9 爲小。

由是 $\alpha-\beta < 9$ 。由是 $x-y=4$ 及 $\alpha-\beta=5$ 。

若 $\alpha=8$ 。則 $\beta=3$ 。∴ $10x+z=9\times 8+3=75$ 。及 $10y+z=9\times 3+8=35$ 。

又 $\alpha=7$ 。則 $\beta=2$ 。∴ $10x+z=9\times 7+2=65$ 。及 $10y+z=9\times 2+7=25$ 。

又 $\alpha=6$ 。則 $\beta=1$ 。∴ $10x+z=9\times 6+1=55$ 。及 $10y+z=9\times 1+6=15$ 。

而 $\alpha < 5$ 。故如上之所求得三對之解答。

15. 於西歷 1887 年。某人之年齡。等於其生時西歷年數之數字之和。問此人年幾何。 答 21 歲。

[解] 此人之年齡。無論如何。必小於 100。故爲二位之數爲 $10x+y$ 。而其生時之西歷年數爲 1 千 8 百 $(8-x)$ 拾 $(7-y)$ 年。

故由題意得 $1+8+(8-x)+(7-y)=10x+y$ 。即 $11x+2y=24$ 。

由是 $x=24-2m$ 。 $y=11m-120$ 。故 $m=11$ 。而 $x=2$ 。 $y=1$ 。

$$16. \frac{1}{(1-x^a)(1-x^{2a})\dots(1-x^{na})} = 1 + A_1x + \dots + A_nx^n + \dots$$

則方程式 $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=m$ 正整數解答之數。爲 A_m (含有零)。但 a_1, a_2, \dots, a_n 皆爲整數方程式 $x+2y=n$ 解答之數爲

$$\frac{1}{4}\{2n+3+(-1)^n\}.$$

以銀1000鎊買物品三種。其每個之各價爲1「先令」, 2「先令」, 5「鎊」。則各物品個數分配之方法。其數有1005201。

$$(證) \frac{1}{1-x^1} = 1 + x^1 + x^{2 \cdot 1} + \dots + x^{s_1 a_1} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^{2 \cdot 2} + \dots + x^{s_2 a_2} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^{2 \cdot 3} + \dots + x^{s_3 a_3} + \dots$$

.....

由是原方程式爲

$$(1+x^1+x^{2 \cdot 1}+\dots+x^{s_1 a_1}+\dots)(1+x^2+x^{2 \cdot 2}+\dots+x^{s_2 a_2}+\dots)$$

$$(1+x^3+\dots)\dots=1+A_1x+A_2x^2+\dots+A_mx^m+\dots$$

但 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots = m$ 。故上之右邊之積。其 $x^{s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3} \dots$ 之係數。等於右邊 x^m 之係數 A_m 。

故 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \dots = m$ 。解答之數爲 A_m 。

又 $x+2y=n$ 。解答之數。如前證於 $\frac{1}{(1-X)(1-X^2)}$ 求其 X^n 之係數。

而由 $\frac{1}{(1-X)(1-X^2)} = \frac{1}{4(1+X)} + \frac{1}{4(1-X)} + \frac{1}{2(1-X)^2}$ 求得 X^n 之係數爲 $\frac{1}{4}\{2n+3+(-1)^n\}$ 。

證明最後之題意。即求 $x+2y+100z=20000$ 之解答。於

$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{100})}$ 。即 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}\{1+x^{100}+x^{200}+\dots\}$ 求其 x^{20000} 之係數。

由前證於 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ 其 x^n 之係數。爲 $\frac{1}{4}\{2n+3+(-1)^n\}$ 。

故由此結果。求 x 之方乘。即 $x^{20000}, x^{19900}, x^{19800}, \dots$ 之係數。順次乘 $1+x^{100}+x^{200}+\dots$ 之各項。其 x^{20000} 之係數。爲 $\frac{1}{4}(2 \cdot 20000+3+1)$ 。

$$+\frac{1}{4}(2 \cdot 19900+3+1) + \dots + \frac{1}{4}(2 \cdot 100+3+1) + \frac{1}{4}(2 \cdot 0+3+1)。$$

$$= \frac{1}{4} \{2(20000 + 19900 + \dots + 100) + (3 + 3 + \dots + 3) + (1 + 1 + \dots + 1)\} + 1$$

$$= \frac{1}{4} \{2 \cdot \frac{200}{2} (20000 + 100) + 3 \cdot 200 + 200\} + 1 = 1005201.$$

17. 以 300 鎊買物品三種。其每個各值。為 5「先令」, 3「先令」, 1「先令」。則其個數分配之方法。共有 1201801。

[證] $5x + 3y + z = 6000$ 。故 $3y + z$ 為 5 之倍數。故 $3y + z = 5k$ 。

但 $5k$ 可從 0 至 6000 選得。

即 k 可從 0 至 1200 任意選得。

由是 $3y + z = 5k$ 壹般之解答。為 $y = 5k - m$, $z = 3m - 10k$ 。

$\therefore m > 5k$ 及 $m < \frac{10k}{3}$ 。

故解答之個數。 m 為 $5k - \frac{10}{3}k + 1 = \frac{5k}{3} + 1 \dots \dots \dots (1)$

設 $k = 3p$ 。則 k 即 $3p$ 。其值為從 0 至 1200。故 p 為 0 至 400。而以 $k = 3p$ 代於 (1) 為 $5p + 1$ 。

$$\text{由是 } \Sigma_0^{400} (5p + 1) = 1 + (5 \cdot 1 + 1) + (5 \cdot 2 + 1) + \dots + (5 \cdot 400 + 1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 401(1 + 2001) = 401401.$$

又 $k = 3p + 1$ 。則 $3p + 1$ 為從 0 至 1200。故 p 為從 0 至 399。而 (1) 之整數部為 $5p + 2$ 。

$$\text{由是 } \Sigma_0^{399} (5p + 2) = \frac{1}{2} \cdot 400(2 + 1997) = 399800.$$

又 $k = 3p + 2$ 。則 p 為從 0 至 399。

$$\text{故 } \Sigma_0^{399} (5p + 4) = \frac{1}{2} \cdot 400(4 + 1999) = 400600.$$

故所求之解答。為 $401401 + 399800 + 400600 = 1201801$ 。

第 貳 拾 玖 編 補

霍爾氏乃托氏第二十八編摘要

二次不定方程式

1. 壹般二次方程式求適合於 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 。所有 x 及 y 之正整數值。

以 a 乘原方程式而移其項。 $a^2x^2+2ax(hy+g)=-a(by^2+2fy+c)$,

兩邊加以 $(hy+g)^2$ 。開平方得

$$ax+hy+g=\pm\sqrt{\{(h^2-ab)y^2+2(hg-af)y+(g^2-ac)\}}\dots\dots\dots(1)$$

惟因 x 及 y 之值為正整數。則此平方根號內之式。不得不為完平方。乃令 $(h^2-ab)y^2+2(hg-af)y+(g^2-ac)=py^2+2qy+r=z^2$ 。

將 $py^2+2qy+r=z^2$ 。以 p 乘之而移其項。

$p^2y^2+2pqy=-pr+pz^2$ 。兩邊加以 q^2 。開平方。得

$$py+q=\pm\sqrt{q^2-pr+pz^2}.$$

此根號內之式。亦不得不為完平方數。又令 $q^2-pr+pz^2=t^2$ 。

即 $t^2-pz^2=q^2-pr$ 。但 t 及 z 為正整數。 p, q, r 為常數。

此方程式之 t 及 z 。若非為正整數。則原方程式之 x 及 y 。不能為正整數。

a, b, h 皆為正者。則其解答之數有限。何則。若 x 及 y 之正整數值為極大時。則原方程式之 $ax^2+2hxy+by^2$ 亦必極大。如是原方程式之左邊。不能等於 0 矣。

又 h^2-ab 為負。則其解答之數有限。何則。於 (1) 式中 h^2-ab 為 y^2 之係數。若 y 之值為極大時。根號內之值變為負故也。

[例] 求方程式 $x^2-4xy+6y^2-2x-20y=29$ 之正整數解答。

將此方程式變為 $x^2-4xy+4y^2-2x+4y+1=30+24y-2y^2$ 。開平方。

得 $x-2y-1 = \pm\sqrt{30+24y-2y^2}$.

即 $x=2y+1 \pm\sqrt{30+24y-2y^2}$.

但 $30+24y-2y^2=102-2(y-6)^2$. 由是知 $(y-6)^2$ 不大於 51.

故 $(y-6)^2=1$ 或 49. 則 $30+24y-2y^2=100$ 或 4.

即 $y^2-12y=-35$ 或 13. 其正根為 6 ± 1 或 $6+7$.

由是求得 $y=5, x=21$. 又 $y=5, x=1$. 又 $y=7, x=25$.

又 $y=7, x=5$. 又 $y=13, x=29$. 又 $y=13, x=25$.

2. 雜例 試揭二次不定方程式之雜例如次.

[第壹例] 兩正整數各平方之和, 與其積之差, 等於完平方數. 求此兩數所有之值.

x 及 y 為兩正整數. 由題例式為 $x^2+y^2-xy=z^2$.

$\therefore x(x-y) = (z+y)(z-y)$. 即 $mxn(x-y) = n(z+y)m(z-y)$.

則 $mx = n(z+y)$ 及 $n(x-y) = m(z-y)$

但 m 及 n 為正整數.

由是 $mx - ny - nz = 0$ (1) $nx + (m-n)y - mz = 0$ (2).

以 m 乘 (1), n 乘 (2) 相減. 得 $(m^2 - n^2)x = (2mn - n^2)y$.

又以 n 乘 (1), m 乘 (2) 相減. 得 $(m^2 + n^2 - mn)y = (m^2 - n^2)z$.

$$\therefore \frac{x}{2mn - n^2} = \frac{y}{m^2 - n^2} = \frac{z}{m^2 - mn + n^2}$$

$$\therefore x = 2mn - n^2, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 - mn + n^2.$$

以 m 及 n 為任意之數. 即可求得 x 及 y 之值.

例如 $m=7, n=4$. 則得 $x=40, y=33, z=37$.

[第貳例] 三個正整數為等差級數. 而取其任意之二數相加為平方數. 試求正整數之值.

設等差級數之三個正整數. 為 $x-y, x, x+y$.

而 $(x-y)+x=p^2, (x-y)+(x+y)=q^2, x+(x+y)=r^2$.

即 $p^2=2x-y, q^2=2x, r^2=2x+y$.

故 $p^2+r^2=2q^2$. 即 $r^2-q^2=q^2-p^2$.

由是得 $m(r-q) = n(q-p)$ 及 $n(r+q) = m(q+p)$.

從此兩方程式得 $\frac{p}{m^2+2mn-m^2} = \frac{q}{m^2+n^2} = \frac{r}{m^2+2mn-n^2}$,

即得 $p = n^2 + 2mn - m^2$, $q = m^2 + n^2$, $r = m^2 + 2mn - n^2$.

$\therefore x = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)^2$, $y = 4mn(m^2 - n^2)$.

3. 問題 求 $x^2 - Ny^2 = \pm 1$ 之正整數解答。

此解法於司密司氏第二十七編連分數 366 章已說明之。今不厭煩複。乃從霍爾氏所說明者。述之如次。

[第壹] 將 \sqrt{N} 作連分數。(即司密司氏 366 章之所述。茲復略述之)。

$\sqrt{N} = a_1 + \frac{r_1}{\sqrt{N+a_1}}$ 。但 $r_1 = N - a_1^2$ 。

又 $\frac{\sqrt{N+a_1}}{r_1} = b_1 + \frac{\sqrt{N-a_2}}{r_1} = b_1 + \frac{r_2}{\sqrt{N+a_2}}$ 。

但 $a_2 = b_1 r_1 - a_1$ 及 $r_1 r_2 = N - a_2^2$, (此處略) 其壹般之形。若

$\frac{\sqrt{N+a_{n-1}}}{r_{n-1}} = b_{n-1} + \frac{r_n}{\sqrt{N+a_n}}$ 。

但 $a_n = b_{n-1} r_{n-1} - a_{n-1}$ 及 $r_{n-1} r_n = N - a_n^2$ 。

由是得 $\sqrt{N} = a_1 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}$

此 $\sqrt{N}, \frac{\sqrt{N+a_1}}{r_1}, \frac{\sqrt{N+a_2}}{r_2}, \frac{\sqrt{N+a_3}}{r_3}, \dots$ 諸商名為第壹, 第貳, 第三, \dots 之完商。

[第貳] $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$ 為 \sqrt{N} 之連續三漸近分數。其 $\frac{p''}{q''}$ 為與壹部之商 b_n 相應之漸近分數。而於此運算時。所得之完商。為 $\frac{\sqrt{N+a_n}}{r_n}$ 。

由是 $\sqrt{N} = \frac{\left(\frac{\sqrt{N+a_n}}{r_n}\right)p' + p}{\left(\frac{\sqrt{N+a_n}}{r_n}\right)q' + q} = \frac{p'\sqrt{N+a_n} + r_n p}{q'\sqrt{N+a_n} + r_n q}$, 去分母。得

$Nq' + (a_n q' + r_n q)\sqrt{N} = a_n p' + r_n p + p'\sqrt{N}$ 。

惟各文字皆為有理數。故將兩邊比較。得

$Nq' = a_n p' + r_n p$ 及 $a_n q' + r_n q = p'$,

由此兩方程式。得 $r_n(pq' - p'q) = Nq'^2 - p'^2 \dots\dots\dots (1)$

求 \sqrt{N} 之連分數時。遞次所得連分數之各商中。可得 r_n 爲 1。
故令 $r_n = 1$ 。則 $p'q' - p'q = Nq'^2 - p'^2 \dots\dots\dots (2)$

(至是可爲本題之證) $\frac{\sqrt{N+a_n}}{r_n}$ 爲與 $\frac{p'}{q'}$ 相應之完商。由此以求得 (2) 式。

故得 $r_n = 1$ 。則 $p'^2 - Nq'^2 = p'q - pq'$ 。

而 $p'q - pq' = \pm 1 \quad \therefore p'^2 - Nq'^2 = \pm 1$ 。

又原方程式爲 $x^2 - Ny^2 = \pm 1$ 。

比較得 $x = p'$ 及 $y = q'$ 。

[注意] $\frac{p'}{q'}$ 爲任何循環期之漸近分數。

[例] 來 $x^2 - 13y^2 = \pm 1$ 之正整數解答。

$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \dots\dots$ 以下循環。

取其最初循環部之漸近分數爲 $\frac{18}{5}$

$\therefore x = 18, y = 5$ 而 $18^2 - 13 \cdot 5^2 = -1$ 。

由是得 $x^2 - 13y^2 = -1$ 之解答。爲 $x = 18, y = 5$ 。

又取其貳個循環部之漸近分數。爲 $\frac{649}{180}$

而得 $x^2 - 13y^2 = 1$ 之解答爲 $x = 649, y = 180$ 。

此種證法爲司密司原本所無。茲取霍爾氏所證者。述其大略。未能詳備也。

例題二十八

20. 欲得直角三角形。其三邊皆爲整數者。試示以壹般之方法。

[解] 令直角兩邊爲 x, y 。斜邊爲 z 。則

$x^2 + y^2 = z^2$ 。即 $x^2 = (z+y)(z-y)$ 。

由是得 $mx = n(z+y)$ 及 $nx = m(z-y)$ 。

由此兩方程式得 $\frac{x}{2mn} = \frac{y}{m^2-n^2} = \frac{z}{m^2+n^2}$

$\therefore x=2mn, y=m^2-n^2, z=m^2+n^2.$

〔別解〕 惟三角形三邊之和必大於他之壹邊。

故 $x+y>z$ 。今令 $x+\frac{n}{m}y=z$ 。但 $m>n$ 。

又以 $x^2+y^2=z^2$ 。由是 $x^2+y^2=\left(x+\frac{n}{m}y\right)^2$ 。

即 $y^2=\frac{2n}{m}xy+\frac{n^2}{m^2}y^2$ 。 $\therefore y(m^2-n^2)=2mny$ 。

由是得 $x=m^2-n^2, y=2mn$ 。

又 $z=x+\frac{n}{m}y=m^2-n^2+\frac{n}{m}(2mn)=m^2+n^2$ 。

21. 予有三友。皆新結婚。一日各攜其妻來見予。行相見禮。既畢。三友乃各述其妻之名曰 Geertruij, 曰 Catriin 曰 Anna。而此三友之名。曰 Hendrick, Claas 及 Cornelius。予以年老事煩。閱時竟忘却友人某某之配爲某某。

但記得彼等相語曰。予等六人往市。各買得多數之豕。其每頭之值以「先令」計之。其數各等於所買豕之頭數。但云 Hendrick 比 Catriin 夫人。多買得豕 23 頭。Claas 比 Geertruij 夫人多 11 頭。而夫比其妻皆多費 3「鎊」3「先令」。予因是推得各友人之妻爲何人矣。

(是題在千七百四十三年。刊行於數學問題集)。

令 x 爲三人內任壹人所買之豕數。

又以每頭之值爲 x 「先令」。故各壹人所買豕之總價爲 x^2 「先令」。同法。此各人之妻所買豕之總價。爲 y^2 「先令」。

而 $x^2-y^2=63$ 。 ($\therefore 3$ 「鎊」3「先令」=63「先令」)

即 $(x+y)(x-y)=63 \times 1$ 或 21×3 或 9×7 。

$\therefore x+y=63, x-y=1$ 。則 $x=32, y=31$,

$x+y=21, x-y=3$ 。則 $x=12, y=9$,

$x+y=9, x-y=7$ 。則 $x=8, y=1$ 。

故知三友人買得之豕。爲 32, 12, 8 頭。

其妻買得之豕。爲 31, 9, 1 頭。

惟以 Hendrick 氏比 Catriin 夫人多買 23 頭。故知 Hendrick 氏買得豕 32 頭。Catriin 夫人買得豕 9 頭。

又以 Claas 氏比 Geertruij 夫人多買 11 頭。故 Claas 氏買得豕 12 頭。Geertruij 夫人買得豕 1 頭。

由是知 Cornelius 氏買得豕 8 頭。Anna 夫人買得豕 31 頭。

於是可推得各夫婦及各買豕之數如次。

Hendrick	32}	Claas	12}	Cornelius	8}
Anna	31}	Catriin	9}	Geertruij	1}

查 理 斯 密 司 氏
霍 爾 氏, 乃 托 氏

大 代 數 學 講 義

第 捌 卷

第 叁 拾 編

適 遇 法

405. 適遇法 [Probability 或 Chance] 述其定義如次。

定義 設有壹事。其獲成功也有 a 次。其遭失敗也有 b 次。乃取其折中之數。謂其成功之適遇。編 $\frac{a}{a+b}$ 其失敗之適遇。為 $\frac{b}{a+b}$

適遇者。事出於或然而適相遇之謂。原文 (Probability) 有不確不實之意義。

英文 (Equally, likely) 日文譯為同樣二字。今改為折中二字。雖與原文稍有出入。然大旨不差。取其容易講解故也。

欲充足上之定義。須先將折中二字之意義釋明之。凡有若干事。其各事之成就不分難易。則任取諸事中之壹事。而豫定其成就之率。必皆相等。即每事之適遇。均為若干分之壹。是為折中之意義。再設例以明之。

如筒內有籌百枝。每籌記以第一至第一百之號數。則於筒內任掣一籌。欲得第六號籌。或欲得第七號籌。或欲得第九十九號籌。其適遇皆相等。即欲掣得百籌內某號之籌。其適遇皆相等。故取其折中之數。每一籌之適遇。皆為百分之一。又如囊中盛黑白球二種。各不知其數。於無心任取其一球。則其所取出者為黑球。

抑爲白球。夫固不可預知。而其黑球與白球之適遇。皆爲 $\frac{1}{2}$ 。何則。以其所取出者是黑球。或不是黑球。二者必居壹於此。故得黑之適遇。取其折中之數爲 $\frac{1}{2}$ 。又以非黑球。卽是白球。是黑球。卽非白球。故得白之適遇。亦爲 $\frac{1}{2}$ 。

若於囊中僅盛白球壹種。則任何取出其壹球皆爲白。故其適遇爲1。而適遇爲1者。其適遇已爲定遇矣。

又盛黑白赤三種球於囊中。各不知其數。而無心取其壹球。其所取出者爲黑爲白及爲赤。固不可知之。而其各色之適遇。皆爲 $\frac{1}{3}$ 。何則。以其所取出者。或黑或白或赤。三者必居壹於此。故取其折中之數爲 $\frac{1}{3}$ 。若求所取之球或白或赤而不爲黑。則其適遇易知爲 $\frac{2}{3}$ 。因非赤則或黑或白。三者之中居其二。故其折中數亦爲 $\frac{2}{3}$ 。

然如上解釋折中之意義。不無漏略。故再爲解釋之如次。

設盛白球四個。黑球貳個於囊中。任取其壹球。求其出黑之適遇與出白之適遇。則以出黑之折中數。每取壹次爲 $\frac{2}{4+2}$ 。

故 $\frac{2}{4+2}$ 。卽出黑之適遇(所謂出黑之折中數者。因4+2個球中有黑球貳個。若連取4+2次。應得黑球2次。故每取壹次。其出黑之折中數。爲4+2分之2)。

而出白之折中數。爲 $\frac{4}{4+2}$ 。故 $\frac{4}{4+2}$ 。卽出白之適遇。

然如次例。其折中數。必由於永久之經驗而後知之。

例如錢有表裏貳面。其投出時。表面之適遇。與裏面之適遇同爲 $\frac{1}{2}$ 。然所投之次數不多。其得表面之次數。與裏面之次數。未必相同。有投八次。而出表面五次。出裏面三次者。有投十九次而出表面九次。出裏面十次者。而必由永久之經驗。則其出表面之適

遇與出裏面之適遇大概相等。即投之次數愈增。而其適遇之比愈近於 $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$ 。如是折中數。乃由於永久之經驗而知之者也。

今設有一事。其得成功也有 a 次。其遭失敗也有 b 次。即由於永久之經驗。而知於 $a+b$ 次中獲成功也 a 次。遭失敗也 b 次。因是取其折中數。得成功之適遇為 $\frac{a}{a+b}$ 。失敗之適遇為 $\frac{b}{a+b}$ 。與最初之定義相合。即由是得次之定義。

壹事成或敗之適遇。為由於永久經驗中成或敗之次數。與其總次數之比。

例如計算人口生育之數。由永久之經驗。而知生育 41 人中。男子 21 人。女子 20 人。則知生育男子之適遇為 $\frac{21}{41}$ 。

又二人射的由永久之經驗。而知於八次中。甲中 5 次。故得八次內。甲中之適遇為 $\frac{5}{8}$ 。

406. 餘論 凡百發百中者其適遇為 1。又由適遇之定義。設其中之適遇為 p 。則其不中之適遇。為 $1-p$ 。何則。若其中之適遇 $= \frac{a}{a+b} = p$ 。則其不中之適遇。為 $1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b} = 1-p$ 。

某事成功之適遇與其失敗之適遇。其比同於 a 之與 b 。若其 a 大於 b 。則稱此事件為 a 對於 b 而成功者。若 a 小於 b 。則稱此事件為 b 對於 a 而失敗者。

例如謀畫某事。其成功之適遇與其失敗之適遇。其比為 10:5。則云此事 10 對於 5 而成功者。若其比為 5:10。則云此事 10 對於 5 而失敗者。蓋適遇之值。取其數之多者以名之。

407. 不能同時並立之諸事 諸事中若有一事成立而他事均歸失敗者。則諸事為不能同時並立。

例如有骰子壹個(六面體)。其於擲出 1 時。其他 2, 3, 4, 5, 6 不能同時擲出。必須有貳以上個之骰子。方可擲出貳以上個之數也。

若有相異諸事。不能於同時並立。則其相異諸事中任壹事成立之適遇。等於各異事成立適遇之和。證明如次。

設有三件相異之事。而此三異事中各一事成立之適遇。以同分母之分數表之。爲 $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \frac{a_3}{d}$ 。

即 d 次內。各異事成立之次數。爲 a_1, a_2, a_3 。惟各異事不能同時成立。故知 d 次內。三異事共能成立之次數爲 $a_1 + a_2 + a_3$ 。即得三異事中任壹事之適遇爲 $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{d}$ 即 $\frac{a_1}{d} + \frac{a_2}{d} + \frac{a_3}{d}$ 。

若考三個以上之相異事 (但各異點不能同時並立者) 可由同法推之。

茲設實例以證明之。

設盛球 12 個於囊中。其中赤者 2 個。黑者 3 個。白者 4 個。今任取其壹。求取赤黑白三種以內之適遇。

惟於 12 個中赤黑白三種之球數爲 2+3+4。則所求之適遇爲 $\frac{2+3+4}{12}$ 即 $\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12}$ 。

即赤黑白任壹色出來之適遇爲 $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ 。其不出來之適遇爲 $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ 。

例 題

1. 六面體之骰子擲一度時。求其擲出 3 之適遇。

[解] 凡壹個骰子其擲出此數之適遇。與擲出他數之適遇相同。即擲出 3 之適遇與擲出 1, 2, 4, 5, 6 各壹數之適遇相同。故出 3 之適遇爲 $\frac{1}{6}$ 。

2. 骰子一顆求擲出奇數之適遇。

[解] 骰子之六面中。有三面爲奇數。故所求之適遇爲 $\frac{3}{6}$ 即 $\frac{1}{2}$ 。

3. 囊中盛白玉5, 赤玉7, 任取其壹。求其出赤之適遇。

〔解〕 出赤之次數可有7。不出赤之次數(即出白之次數)可有5。而共有 $7+5=12$ 次。故於壹次取壹個其出赤之適遇為 $\frac{7}{12}$ 。

4. 囊中盛赤玉5, 白玉7, 任取其貳。求其所出者皆為白之適遇。

〔解〕 玉之數共12個。而從此12個中取出2個之組合。為 ${}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$ 。而其中於白玉7中取出2個之組合。為 ${}_{7}C_2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ 。

故所求之適遇為 $\frac{21}{66}$ 即 $\frac{7}{22}$ 。

5. 囊中盛赤玉3, 白玉2, 任取貳個。若以取出貳赤為勝。則其適遇為7對於3而敗。

〔證〕 從總數5中取出貳個之組合為 ${}_5C_2 = 10$ 。而此中取出貳赤之組合為 ${}_3C_2 = 3$ 。即取出貳赤之適遇為 $\frac{3}{10}$ 。其不出貳赤之適遇為 $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ 。

故由406章。其出與不出適遇之比。為 $\frac{3}{10} : \frac{7}{10} = 3 : 7$ 。即7對於3而敗。

6. 囊中盛黑白赤三種玉各貳個。任取三個。若欲取出三色完全者。則其適遇為3對於2而敗。若欲所取中有貳個為白者。則其適遇為4對於1而敗。試證之。

〔證〕 從總數6中取出三個之組合為 ${}_6C_3 = 20$ 。其中三色完全者。其數等於(黑+黑)(赤+赤)(白+白)連乘積之項數。即 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 。

由是得取出三色完全之適遇。為 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ 。其不出之適遇。為 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ 。而其比為 $\frac{2}{5} : \frac{3}{5} = 2 : 3$ 。即3對於2而敗。

若欲取出三個。其中有二個為白者。則除此二白外。從其餘四個中。取出壹個之組合。以加於二白即得。而從四中取壹之組合

爲 $C_1=4$ 。故取出三個中有二白之適遇爲 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$ 。其不出之適遇爲 $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ 。而其比爲 $\frac{1}{5}:\frac{4}{5}$ 。即 $1:4$ 。即 4 對於 1 而敗。

7. 有 n 個人。同坐於圓桌之周圍。其中甲乙二人相鄰與不相鄰適遇之比。若 2 比 $n-3$ 試證之。

[解] 席次之變化爲 ${}_{n-1}P_{n-1}=|n-1|$ 。而以此相鄰之二人。當作壹人。則其席次之變化爲 $|n-2|$ 。惟以甲乙二人相鄰。甲在於乙之右或左。故於席次二人相鄰之全數爲 $2|n-2|$ 。

由是得甲乙二人鄰坐之適遇爲 $\frac{2|n-2|}{|n-1|}=\frac{2}{n-1}$ 。其不鄰坐之適遇爲 $1-\frac{2}{n-1}=\frac{n-3}{n-1}$ 。而其比爲 $\frac{2}{n-1}:\frac{n-3}{n-1}$ 。即 $2:n-3$ 。

408. 無關係之諸事 設有二事不相關係而可以同時並立者。則二事同時成立之適遇。等於各事成立適遇之乘積。

例如從甲囊出赤玉之適遇爲 $\frac{2}{5}$ 。從乙囊出赤玉之適遇爲 $\frac{3}{4}$ 。而從甲乙二囊。於同時各出赤玉壹個之適遇。爲 $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ 。

證明其公例如次。

假定第壹事於 a_1+b_1 次中。其成就有 a_1 次。其失敗有 b_1 次。又假定第二事。於 a_2+b_2 次中。其成就有 a_2 次。其失敗有 b_2 次。惟 a_1+b_1 與 a_2+b_2 兩事組合之。總爲 $(a_1+b_1)(a_2+b_2)$ 而其中祇有 a_1a_2 爲二事同時成就者。故其適遇爲 $\frac{a_1a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$ 。即 $\frac{a_1}{a_1+b_1} \times \frac{a_2}{a_2+b_2}$ 。

[推論] 設以二件無關係之事。其成就之各適遇爲 p_1 及 p_2 。則其於同時並敗之適遇爲 $(1-p_1)(1-p_2)$ 。

又第壹成第二敗之適遇爲 $p_1(1-p_2)$ 。第壹敗第二成之適遇爲 $(1-p_1)p_2$ 。

此三者相加爲 $(1-p_1)(1-p_2)+p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2=1-p_1p_2$ 。

由是兩事不相關係者。其同時並成之適遇爲 p_1p_2 。其非同時並成之適遇爲 $1-p_1p_2$ 。

由同法無關係之若干事。其成就之各適遇爲 p_1, p_2, p_3, \dots 。則其於同時並成之適遇爲 $p_1 p_2 p_3, \dots$ 。而同時並敗之適遇爲 $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3), \dots$ 。

409. 有關係之諸事 若有二事互相關係。則第二事之成敗。必因第壹事之成敗而異。凡若此者。亦可應用前章之定理。若以第壹事成就之適遇爲 p_1 。則於第壹成就以後。假定與第壹事相應。而得第二事成就之適遇爲 p_2 。如是第一第二兩者俱成之適遇。亦必爲 $p_1 \times p_2$ 。

二以上之出來事。可由同法推之。

408章與409章其所有之適遇相等。其算法亦相等。但第一事與第二事。有相關係與無相關係之不同耳。

例題

1. 將錢擲二次皆出表面。其適遇如何。

[解] 錢有表裏兩面。則各壹次擲出表面之適遇。爲 $\frac{1}{2}$ 。

故由408章。得所求之適遇爲 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。

2. 壹個骰子每擲六次。求其中至少有一次出6之適遇。

[解] 此題意謂每擲六次。其中或有一次出6。或有二次出6。或有三次。四次。五次。六次出6者。其諸適遇之和。即爲本題所求之適遇。即除全次皆不出6之適遇外。其餘諸適遇之和。即爲所求之適遇。

惟以擲一次不出6之適遇爲 $1 - \frac{1}{6}$ 。而由408章。擲六次不出6之適遇爲 $(1 - \frac{1}{6})^6 = (\frac{5}{6})^6$ 。由是所求之適遇。爲 $1 - (\frac{5}{6})^6$ 。

3. 囊中納赤玉五。白玉七。連次取一玉者二次。求其取出之玉皆爲白之適遇。

[解] 第一次取出白玉一之適遇爲 $\frac{7}{5+7} = \frac{7}{12}$ 。因第一次取出

之白玉不再入於囊中。則囊中存赤玉五白玉六。故第二次取出白玉一之適遇爲 $\frac{6}{5+6} = \frac{6}{11}$ 。

$$\therefore \text{所求之適遇爲 } \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{7}{22}。$$

4. 今將赤玉五白玉七納於甲囊。赤玉三白玉十二納於乙囊。於無心時在任一囊中。取出一玉。求其出赤之適遇。

囊有二而取得一囊之適遇爲 $\frac{1}{2}$ 。

而從第一囊出赤玉一之適遇爲 $\frac{5}{12}$ 。以 $\frac{1}{2}$ 乘之。得 $\frac{5}{12} \times \frac{1}{2}$ 。

又從第二囊出赤玉一之適遇爲 $\frac{3}{15}$ 。以 $\frac{1}{2}$ 乘之。得 $\frac{3}{15} \times \frac{1}{2}$ 。

惟此事不能並成。故所求之適遇爲 $\frac{5}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{15} \times \frac{1}{2}$ 。即 $\frac{37}{120}$ 。

5. 將赤玉2白玉10分貯二囊。(每囊至少有一玉)乃於任一囊中。取出赤玉一。欲令其爲最小之適遇。或爲最大之適遇。問此二囊中之玉。宜若何分配。

[解] 設第一囊中所納赤玉之數爲 x 。白玉之數爲 y 。

則第二囊中所納赤玉之數爲 $2-x$ 。白玉之數爲 $10-y$ 。

又設所求之適遇爲 u 。

$$\text{由前例 } u = \frac{x}{2(x+y)} + \frac{2-x}{2(2-x+10-y)} = \frac{6x - (x-1)(x+y)}{(x+y)\{12 - (x+y)\}} \quad (A)$$

惟任一囊至少有一玉。故不能 $x=y=0$ 。或 $2-x=10-y=0$ 。即 x 與 y 不能同時爲 0。

又不能於同時 $x=2$, $y=10$ 。

故 $0 < x < 2$ 及 $0 < y < 10$ 。

$$\text{今 } x=0 \text{ 則 (A) 爲 } u = \frac{1}{12-y} \dots\dots\dots (B)$$

$$x=1 \text{ 則 (A) 爲 } u = \frac{6}{(1+y)(11-y)} \dots\dots\dots (C)$$

$$x=2 \text{ 則 (A) 爲 } u = \frac{1}{2+y} \dots\dots\dots (D)$$

於(B)及(D)其 $y=1$ 及 $y=9$ 。則 $u=\frac{1}{11}$ 即極小。又於(C)其 $y=0$ 。則 $u=\frac{6}{11}$ 即極大。

由是得最小之適遇。其壹囊中有白玉壹。另壹囊中有赤玉貳白玉九。又最大之適遇。其壹囊中祇有赤玉壹也。

410. 多次試驗之適遇 既知壹次試驗時成就之適遇。則於 n 次試驗時。其間有壹次。貳次。三次。迄 n 次成就之適遇。亦可推得之。

何則。設壹事成就之適遇為 p 。則其不成之適遇為 $1-p=q$ 。由408章於 n 次中有 r 次成。即有 $n-r$ 不成。而其適遇為 $p^r q^{n-r}$ 。

惟於 n 中取其 r 次。其方法之全數為 ${}_nC_r$ 個。

由是知於 n 次試驗時。其中有 r 次成就之適遇為 ${}_nC_r p^r q^{n-r}$ 。

故將貳項式 $(p+q)^n$ 展開之。其連次之項。即可為於 n 次試驗時。其有 n 次。 $n-1$ 次。 $n-2$ 次。……成就之適遇。如

$$(p+q)^n = p^n + {}_nC_1 p^{n-1} q + {}_nC_2 p^{n-2} q^2 + \dots + {}_nC_r p^r q^{n-r} + \dots$$

其連次之項如 p^n 。為於 n 次中有 n 次成就之適遇。 ${}_nC_1 p^{n-1} q$ 。為於 n 次中有 $n-1$ 次成就之適遇。 ${}_nC_2 p^{n-2} q^2$ 為於 n 次中有 $n-2$ 次成就之適遇。以下類推。

[推論壹] 於 n 次試驗中。其成者與不成者之最大適遇。可於 $(p+q)^n$ 展開式中求其最大項即得。

[推論貳] 於 n 次試驗時。其至少有 r 次成就之適遇。為

$$p^n + n p^{n-1} q + \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2 + \dots + \frac{{}^n}{r} \frac{{}^n}{n-r} p^r q^{n-r}.$$

何則。於 $(p+q)^n$ 展開式中。其在 $\frac{{}^n}{r} \frac{{}^n}{n-r} p^r q^{n-r}$ 以上之項。為等於 n 次中有 r 以上次成就之適遇。其在 $\frac{{}^n}{r} \frac{{}^n}{n-r} p^r q^{n-r}$ 以下之項。等於 n 次中有 r 以下成就之適遇。

例題

1. 求以四個骰子擲出得10之適遇。(即四個骰子表面點數之和為10者)。

[解] 骰子有六面。第壹骰子之每壹面。可與第貳骰子之任壹面配合。故貳個骰子配合。其法為 6^2 。同法四個骰子配合。其法為 6^4 。

各骰子記以自1迄6之點數。而於此四個骰子之表面。其點數之和為10者。等於 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$ 展開式中 x^{10} 之係數。何則。 x^{10} 之係數。即為於1, 2, 3, 4, 5, 6六數中取四數。而其和為10之全數。惟 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$ 展開式中 x^{10} 之係數為80。此易於求得之。

$$\text{故所求之適遇} = \frac{80}{6^4} = \frac{5}{81}.$$

2. 求以貳個骰子擲出。得8之適遇。

[解] 貳個骰子配合之法。為有 6^2 種。而於 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$ 展開式中 x^8 之係數為5。

$$\text{由是得所求之適遇} = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}.$$

3. 求以貳個骰子擲出得10之適遇。

[解] 於 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$ 展開式中 x^{10} 之係數為3。

$$\text{故所求之適遇} = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}.$$

4. 求以三個骰子擲出得15之適遇。

[解] 於 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$ 展開式中 x^{15} 之係數為10。

$$\text{故所求之適遇} = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}.$$

5. 甲乙貳人各擲壹骰。甲勝於乙。不能大於7與5之比。試證之。

[證] 甲乙各擲壹骰。即擲貳骰。其方法之數為 6^2 。即36。

而貳個骰子擲出時。有六個同數不分勝負。

故甲與乙擲出同數之適遇為 $\frac{1}{6}$ 。

而擲出不同數之適遇為 $1 - \frac{1}{6}$ 。即 $\frac{5}{6}$ 。

甲乙二人同時相擲。故其得勝之數為 $\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$ 。即 $\frac{5}{12}$ 。

即甲勝於乙之數。不大於 $1 - \frac{5}{12} : \frac{5}{12}$ 。即 7:5

6. 甲乙二人各擲貳骰。求其得數各相等之適遇。

[解] 擲貳骰時。其擲出點數之和。有 2, 3, 4, …… 12 之十一種。故兩骰擲出各種之全數。等於次之展開式係數之和。

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$$

$$=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}$$

由是各於其全數 6^2 即 36 內各擲出 2, 3, 4, …… 12 之適遇。為

$$\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$$

即貳骰擲出 2 者。則以 x^2 之係數 1 為分子。擲出 3 者。則以 x^3 之係數 2 為分子。以下類推。

由是得甲乙同時擲出貳點之適遇為 $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36}$ 同時擲出三點之

適遇為 $\frac{2}{36} \cdot \frac{2}{36}$ 。以下遞推。惟 $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36}$ 與 $\frac{2}{36} \cdot \frac{2}{36}$ 不能同時成立。

故甲乙擲出各相等之適遇。為

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} + \frac{2}{36} \cdot \frac{2}{36} + \frac{3}{36} \cdot \frac{3}{36} + \dots + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36}$$

$$=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2) \div (36)^2 = \frac{73}{648}$$

7. 甲乙二人打球。每回勝敗之適遇相等。而以先得勝六次者為全勝。今於 (1) 甲勝 5 回。乙勝 4 回時。 (2) 甲勝 5 回。乙勝 3 回時。 (3) 甲勝 4 回。乙勝 2 回時。求甲均得全勝之適遇。

[解] 若乙於 (1) 欲得全勝。須再勝貳回。故乙勝之適遇。為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

由是知乙負(即甲勝)之適遇爲 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 。

若乙於(2)欲得全勝。須再勝三回。故乙勝之適遇爲 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ 。

由是知乙負(即甲勝)之適遇爲 $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ 。

若甲於(3)欲得全勝。其於次之貳回。甲得勝之適遇爲 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。其於次之貳回間。甲或僅勝壹回之適遇爲 $\frac{1}{2}$ 。然此時甲勝五回。乙勝三回。其境遇與(2)同。

故此時甲勝之適遇爲 $\frac{7}{8}$ 。

若於次之貳回間。甲皆爲負。則其適遇爲 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。然此時甲勝四回。乙勝四回。其以後甲勝貳回之適遇爲 $\frac{1}{2}$ 。

故於(3)甲得全勝之適遇爲 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{16}$ 。

甲於(3)全勝之適遇。可如次之法則求之。凡貳人共打十一次。必有壹人得勝六次。故於甲勝4回乙勝2回時。此後競爭之勝負。可於次之五回間決定之。惟於五回間。甲至少勝貳回爲全勝。

今假定甲與乙特別競爭壹事。其各人之勝適遇爲 a 及 b 。其於五回間。甲勝貳回或貳回以上之適遇。等於 $(a+b)^5$ 展開式中。含有 a^2 及 a^2 以上之項。即 $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3$ 。

由是 $a = \frac{1}{2}$ 。 $b = \frac{1}{2}$ 。則甲得全勝之適遇爲

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) + 10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{13}{16}$$

此與前求得之結果同。

8. 甲乙競爭。其每回勝負之適遇相等。今於爭勝間。甲須再勝貳回。乙須再勝三回。可得全體之勝。此時甲之適遇爲11對於5而勝。試證之。

〔證〕以甲須再勝貳回。乙須再勝三回。則此後競爭之勝負。總可於次之四回間決定之。而於此四回間。甲至少勝貳回為全勝。

今假定甲及乙於特別之競爭。其各人之勝適遇為 a 及 b 。其於四回間。甲勝貳回或貳回以上之適遇。等於 $(a+b)^4$ 展開式中。含有 a^2 及 a^3 以上之各項。即 $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2$ 。

由是 $a = \frac{1}{2}$ 。 $b = \frac{1}{2}$ 。則甲得全體之勝為

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{16}。其負之適遇為 $1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}。$$$

故甲為 11 對於 5 而勝。

9. 甲乙競爭。其每回勝負之適遇相等。今於爭勝間甲須再勝 n 回為全勝。乙須再勝 $n+1$ 回為全勝。此時甲之適遇。為

$$1 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}。對於 $1 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$ 而勝。試證之。$$

〔證〕此後競爭之勝負。總可於次之 $2n$ 回內決定之。而於此 $2n$ 回。甲至少勝 n 回為全勝。

今假定甲乙特別競爭壹事。而兩人之勝適遇為 a 及 b 。其於 $2n$ 回間。甲勝 n 回或 n 回以上之適遇。等於 $(a+b)^{2n}$ 展開式中。含有 a^n 及 a^{n+1} 以上之各項。

$$\text{即 } a^{2n} + 2na^{2n-1}b + \frac{|2n}{2} \frac{a^{2n-2}b^2}{|2n-2} + \dots + \frac{|2n}{n} \frac{a^n b^n}{|n}$$

令甲全勝之適遇為 x 。乙全勝之適遇為 y 。

$$\text{則 } x = a^{2n} + 2na^{2n-1}b + \frac{|2n}{2} \frac{a^{2n-2}b^2}{|2n-2} + \dots + \frac{|2n}{n} \frac{a^n b^n}{|n}$$

$$y = \frac{|2n}{n+1} \frac{a^{n-1}b^{n+1}}{|n-1} + \dots + b^{2n}。$$

由是 $a = b = \frac{1}{2}$ 。則 $x + y = 1$ 。

$$\text{又 } x - y = \frac{|2n}{n} \frac{1}{|n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}。$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right\}, \quad y = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right\}。$$

10. 甲乙競爭。每回甲勝之適遇爲 $\frac{3}{5}$ 。求甲於三回間極少勝貳回之適遇。

〔解〕 惟甲勝之適遇爲 $\frac{3}{5}=a$ 。則乙勝之適遇爲 $\frac{2}{5}=b$ 。若甲於三回間勝貳回或三回。其適遇等於 $(a+b)^3$ 展開式內取其 a^3+3a^2b 。即得所求之適遇爲 $(\frac{3}{5})^3+3(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})=\frac{81}{125}$ 。

11. 甲乙競爭。每回甲勝之適遇爲 $\frac{2}{3}$ 。求甲於5回間至少勝3回之適遇。

〔解〕 與前例同法求之。其適遇等於 $(a+b)^5$ 展開式中取其 a^3 及 a^4 以上之各項。而 $a=\frac{2}{3}$ ， $b=\frac{1}{3}$ 。

$$\text{即 } \left(\frac{2}{3}\right)^5 + 5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{192}{243}$$

12. 將壹骰擲6回。求其至少擲出六點2回之適遇。

〔解〕 任壹骰每擲壹回。其出六之適遇爲 $\frac{1}{6}$ 。故其擲出貳個六點及貳個以上六點之適遇如次。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6}\right)^6 + 6\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{12281}{46656} \end{aligned}$$

13. 將壹個錢擲五回。求其間有三回連出表面(或裏面)之適遇。

〔解〕 於第貳回及第三回所擲出者。如與第壹回同面。則此適遇爲 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。

如第貳回與第壹回同面。而第三第四第五各回與第壹回相異(即第三第四第五各回連出同面)之適遇。爲 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ 。

如第貳第三第四各回與第壹回相異之適遇。爲 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ 。

第貳回與第壹回相異。而第三第四第五各回與第壹回同面之適遇。爲 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ 。

由是得三回連出同面之適遇。爲 $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$ 。

14. 三人輪番擲錢。其以最初出表面者爲勝。求此三人順次得勝之適遇。

〔解〕甲乙丙三人。最初得勝之各適遇爲同一。而求最初甲勝。次乙勝。又次丙勝之適遇如次。

以任何壹人擲錢。出表面之適遇。(迄任何回擲出表面適遇之數)爲

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \dots \text{至無窮}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) = 1.$$

故甲乙兩人。輪番擲錢出表面之適遇。可將上之無窮級數。取其相間之各項。即得

$$\text{甲} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) = \frac{2}{3},$$

$$\text{乙} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots \right) = \frac{1}{3}.$$

甲乙丙三人。輪番擲錢出表面之適遇。可將上無窮級數。取其每相間貳項之各項。即得

$$\text{甲} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \dots \right) = \frac{4}{7},$$

$$\text{乙} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \dots \right) = \frac{2}{7},$$

$$\text{丙} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \dots \right) = \frac{1}{7}.$$

由是順次得所求之適遇爲 $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$ 及 $\frac{1}{7}$ 。

411. 豫期 (Expectation) 欲得何種權利。而希望某事之成就。此成就適遇之值。謂之豫期。

例如能成就某事。可得銀壹圓。其豫期即從某事成就之適遇如何而定其值。

設某事成就時。所得之金額為 M 。其某事成就之適遇為 $\frac{a}{a+b}$ 。

則其豫期為 $M \times \frac{a}{a+b}$ 。

何則。設於壹次試驗時。所得豫期之金額為 E 。則 $E(a+b)$ 為於 $a+b$ 回試驗時。所得豫期之金額。而事成就之適遇為 $\frac{a}{a+b}$ 。其值即將 M 平分為 $a+b$ 分。而取其 a 分。故於 $a+b$ 回試驗其豫期之金額為 Ma 。

由是 $E(a+b) = Ma$ 。 $\therefore E = M \times \frac{a}{a+b}$ 。

即其所豫期者。等於以金額乘適遇。

例題

1. 囊中有白玉五。黑玉七。令人從此囊內取壹玉。若取出者為黑。則給與英金壹「先令」。若取出者為白。則給與五「先令」。求其所豫期。

〔解〕 出黑之適遇為 $\frac{7}{12}$ 。故其豫期為 1 「先令」 $\times \frac{7}{12} = 7$ 「本土」。

出白之適遇為 $\frac{5}{12}$ 。故其豫期為 5 「先令」 $\times \frac{5}{12} = 2$ 「先令」 1 「本土」。

由是所求豫期之總 = 7 「本土」 $+ 2$ 「先令」 1 「本土」

= 2 「先令」 8 「本土」。

2. 囊中有「鎊」幣貳枚。貳「先令」半之幣 3 枚。「先令」幣 7 枚。令人從此囊內。(1) 祇許取出壹枚。(2) 祇許取出貳枚。各求其所豫期。

〔解〕 三種貨幣之各值。為 20 「先令」， $2\frac{1}{2}$ 「先令」， 1 「先令」。

(1) 貨幣之數凡十貳個。故取壹個其各種之適遇。順次得 $\frac{2}{12}$ 。

$\frac{3}{12}$ 及 $\frac{7}{12}$ 。

由是所求之豫期。爲 $(20 \times \frac{1}{6} + 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{7}{12})$ 「先令」 = 4 「先令」
 $6\frac{1}{2}$ 「本土」。

(2) 從 20 「先令」, $2\frac{1}{2}$ 「先令」, 1 「先令」三種貨幣中。取出貳枚。其值不外乎 40 「先令」, $22\frac{1}{2}$ 「先令」, 21 「先令」, 5 「先令」, $3\frac{1}{2}$ 「先令」及 2 「先令」六種。

〔第壹〕其值爲 40 「先令」者。即取出「鎊」幣貳枚。而其適遇可由 409 章例題 3 而得 $\frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{66}$ 。

〔第貳〕其值爲 $22\frac{1}{2}$ 「先令」者。代取出「鎊」幣及 $2\frac{1}{2}$ 「先令」之幣各壹枚。而此貳種內有先出後出貳法。故其適遇爲 $2 \times \frac{2}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{6}{66}$ 。

〔第參〕其值爲 21 「先令」者。即出「鎊」幣及「先令」幣各壹枚。故同法得 $2 \times \frac{2}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{14}{66}$ 。

〔第肆〕其值爲 5 「先令」者。即取出 $2\frac{1}{2}$ 「先令」之幣貳枚。故其適遇爲 $\frac{3}{12} \times \frac{2}{11} = \frac{3}{66}$ 。

〔第伍〕其值爲 $3\frac{1}{2}$ 「先令」者。即取出 $2\frac{1}{2}$ 「先令」之幣及「先令」幣各壹枚。故其適遇爲 $2 \times \frac{3}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{21}{66}$ 。

〔第陸〕其值爲 2 「先令」者。即取出「先令」幣貳枚。故其適遇爲 $\frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{21}{66}$ 。

由是得所求之豫期。爲

$40 \times \frac{1}{66} + 22\frac{1}{2} \times \frac{6}{66} + 21 \times \frac{14}{66} + 5 \times \frac{3}{66} + 3\frac{1}{2} \times \frac{21}{66} + 2 \times \frac{21}{66} = 9$ 「先令」 1 「本土」。

3. 貳人交互擲錢。豫約初出表面者。給與壹「先令」。問貳人之豫期如何。

〔解〕 惟次擲者。望初擲者不出表面。猶可得勝。否則即已見敗。故初擲者之適遇。等於次擲者適遇之貳倍。

由是初擲者之適遇爲 $\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ ，次擲者之適遇 $= \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ 。

∴ 所求之豫期爲 $\frac{2}{3} \times 12$ 「本土」=8「本土」。

及 $\frac{1}{3} \times 12$ 「本土」=4「本土」。

4. 貳人交互擲壹骰。豫約先出六者。得11「先令」。問各人之豫期如何。

〔解〕 出六之適遇爲 $\frac{1}{6}$ 。不出六之適遇爲 $\frac{5}{6}$ 。

由是得初擲者之適遇爲 $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \dots$ 至無窮。

次擲者之適遇爲 $\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \dots$ 至無窮。

則初擲者與次擲者之比。若6與5。

由是將11「先令」分爲貳分。其比若6:5。則得6「先令」。即所求之豫期。

此節在 Hall Knight 上講得清楚

412. 反適遇 (Inverse Probability) 設有某事。可由種種原因而成。今於事之已成時。欲於種種原因中。決定此事從何壹原因而成。其決定壹原因之適遇。即謂之反適遇。

茲示反適遇之例如次。

設從兩囊之任一囊內取出黑玉1。但知第壹囊有黑玉2。白玉7。第貳囊有黑玉5。白玉4。求其所取之黑玉出自第壹囊之適遇。

假定於兩囊中各取出玉 N 個。則從第壹囊內出黑之數。平均當有 $\frac{2}{9}N$ 個。從第貳囊中出黑之數。平均當有 $\frac{5}{9}N$ 個。

由是從兩囊內取出黑玉之個數爲 $\frac{2}{9}N + \frac{5}{9}N$ 。而其中從第壹囊取出黑玉之個數爲 $\frac{2}{9}N$ 個。

故出自第壹囊之適遇。爲 $\frac{2}{9}N \div \left(\frac{2}{9}N + \frac{5}{9}N\right) = \frac{2}{7}$ 。

壹般之命題 設從 n 個原因中。欲決定成就某事之壹原因。而各原因數之適遇爲 P_1, P_2, \dots, P_n 。但此等原因。不能同時成立。(即某事僅能由壹原因而成。不能由於貳原因。或貳以上原因而成。則某事必從 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 中之壹原因而成。若各原因能成某事之適遇。順次爲 p_1, p_2, \dots, p_n 。則第 r 原因。能成某事之適遇。爲 $P_r p_r \div (P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_n p_n)$ 。

[證明] 假令試驗多至 N 次。則第壹原因之數。當有 NP_1 次。而事之成於第壹原因者。有 $NP_1 p_1$ 次。同法事之成於第貳原因者。有 $NP_2 p_2$ 次。以下準此。

由是其事之成於第 r 原因者。當有 $NP_r p_r$ 次。而此 $NP_r p_r$ 次。爲由全數 $N(P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_n p_n)$ 內而生。故第 r 原因之適遇爲 $P_r p_r \div (P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_n p_n)$

略記之即爲 $\frac{P_r p_r}{\sum P p}$ 。

例 題

1. 置黑白貳種玉於三囊中。第壹囊有白二黑三。第貳囊有白四黑一。第三囊有白三黑七。今於無心中從任壹囊內。取出壹個。試求決其從第三囊內取出黑玉之適遇。

[解] 囊有三。故出黑玉原因之適遇爲 $P_1 = P_2 = P_3 = \frac{1}{3}$ 。

又從 P_1, P_2, P_3 出黑玉之適遇。順次爲 $p_1 = \frac{3}{5}, p_2 = \frac{1}{5}, p_3 = \frac{7}{10}$ 。

由是得所求之適遇爲 $\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10}} = \frac{7}{15}$

2. 但知囊中有玉四塊。曰白。白黑。其適遇相等。今於無心時。取出白玉一。其於囊中含有白三黑一之適遇如何。

〔解〕 此囊中含有玉四塊。其各種配合。有如 (1) 白 4, (2) 白 3 黑 1, (3) 白 2, 黑 2, (4) 白 1, 黑 3, (5) 黑 4, 五類。

由 410 章。此各適遇。順次得 $\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}$

又從其各種配合出白之適遇。順次得 $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$

由是得所求之適遇。爲 $\frac{\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{16} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{16}} = \frac{3}{8}$

每一致白或黑
出白之機會
= ...
油一星
機會
 $C_3^4 (\frac{1}{2})^3 \cdot \frac{1}{2}$
= $\frac{4}{16}$

413. 證據之適遇 (Probability of Testimony) 即關於證據人信用之適遇也。

此種解例。視次之解例。即可知之。

例 題

1. 囊中有黑玉 99 塊。白玉 1 塊。於無心中。取出一玉時。旁有人云。所出之玉爲白。而此人之證言。十次中有九次確實。求其果爲白之適遇。

〔解〕 玉爲白之適遇爲 $\frac{1}{100}$ 。不爲白之適遇爲 $\frac{99}{100}$

又證言確實之適遇爲 $\frac{1}{100} \times \frac{9}{10}$ 。不確實之適遇爲 $\frac{99}{100} \times \frac{1}{10}$

故由 412 章。所求之適遇爲 $\frac{\frac{1}{100} \times \frac{9}{10}}{\frac{1}{100} \times \frac{9}{10} + \frac{99}{100} \times \frac{1}{10}} = \frac{1}{12}$

2. 囊中置百籤。籤上記以自1迄百之號數。今於無心中。取出壹籤。旁有人云。所出者為某號籤。而此證言十有九中。其出此籤之適遇如何。

〔解〕 試驗多至 $1000N$ 回時。此某號之籤。應出 $10N$ 回。而以其中 $9N$ 為此人確當之證言。又此某號之籤不出之遇合。應有 $990N$ 回。而以其中 $99N$ 。為此人不當之證言。

但此問題與前例1異。前例祇有玉之黑白貳種。證言者祇有誤黑為白而已。於本例有自1迄百各號數之籤。其誤處有99端。此所以與前例相異也。

故出某籤時。其證言之不確者。為 $99N \div 99$ 。即 N 回。

於前解得此人證言之確實者。為 $9N$ 回。此又解得此人證言之不確者 N 回。

由是得所求之適遇為 $\frac{9N}{9N+N}$ 。即 $\frac{9}{10}$ 。

3. 甲之證言4次。可中3次。乙之證言6次。可中5次。今囊中有白玉1。黑玉9。於無心中取出壹玉。甲乙二人皆云取出者為白玉。求其出白玉之適遇。

〔解〕 惟以此出白玉之適遇為 $\frac{1}{10}$ 。故甲乙二人皆云出白玉。其正確之適遇為 $\frac{1}{10} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$ 。

又出黑玉之適遇為 $\frac{9}{10}$ 。故甲乙二人皆云白玉。其不當之適遇為 $\frac{9}{10} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6}$ 。

由412章得所求之適遇為 $\frac{\frac{1}{10} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}}{\frac{1}{10} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6}} = \frac{5}{8}$ 。

4. 甲之證言4次可中3次。乙之證言6次可中5次。今囊中有白玉壹塊。各異色之玉9塊。於無心中取出壹玉。甲乙二人皆云取出者為白玉。求其出白玉之適遇。

〔解〕 惟以此出白玉之適遇爲 $\frac{1}{10}$ 。故甲乙二人皆云出白玉。其正確之適遇爲 $\frac{1}{10} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{16}$ 。不出白玉之適遇爲 $\frac{9}{10}$ 。而甲證言所誤之適遇爲 $\frac{1}{4}$ 。但甲誤言各色之玉有9。故甲證言所誤之適遇當爲 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{9}$ 。同法乙證言所誤之適遇當爲 $\frac{1}{6} \times \frac{1}{9}$ 。故甲乙二人共誤言出白之適遇爲 $\frac{9}{10} \times \frac{1}{4 \times 9} \times \frac{1}{6 \times 9} = \frac{1}{2160}$ 。

由是所求之適遇爲 $\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{1}{2160}} = \frac{135}{136}$ 。

5. 甲乙丙三人之各證言。甲4次可中3次。乙5次可中4次。丙7次可中6次。今有某事成就之適遇爲 $\frac{1}{2}$ 。當試驗時。甲乙云成。丙云不成。問此事果能成就之適遇如何。

〔解〕 云此事爲成者。甲證之適遇爲 $\frac{3}{4}$ 。乙證之適遇爲 $\frac{4}{5}$ 。丙證之適遇爲 $1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$ 。

由是此事成之適遇爲 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{7}$ 。

又此事之不成者。其各人證言之適遇爲甲 $\frac{1}{4}$ 。乙 $\frac{1}{5}$ 。丙 $\frac{6}{7}$ 。

由是此事不成之適遇爲 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{6}{7}$ 。

∴ 所求之適遇 = $\frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{6}{7}} = \frac{2}{3}$ 。

414. 雜例 示以次之諸例。卽爲本編之結局。但於是編所述之適遇法。未能詳備。如欲深爲研究。可參考英國學術辭書

由是得所求之適遇爲 $\frac{1}{r+1}$ 。此與囊中之全數 n 不相關。故囊內之玉。任爲何數。其答數相同。

〔推論〕 如前從囊中取出 r 塊白玉後。又更取出白玉壹塊。其適遇可逕由前之結果求得之。

何則。設試驗多至於 N 回(或設有 N 囊)則取出 r 塊白玉之適遇爲 $\frac{N}{r+1}$ 種。(前之結果 $\frac{1}{r+1}$ 。即爲試驗一回之適遇)又取出 $r+1$ 塊白玉之適遇爲 $\frac{N}{r+2}$ 。而連得 $r+1$ 塊白玉之回數。包含於連得 r 塊白玉回數之內。故得所求之適遇 $= \frac{N}{r+2} \div \frac{N}{r+1} = \frac{r+1}{r+2}$ 。

〔第貳例〕 甲乙二人爲遊戲競爭。甲持 a 籌。乙持 b 籌。以記勝負。負者與勝者壹籌。迨壹人取盡他壹人之籌爲全勝。而於每回之勝負。甲勝之適遇比乙。若 $p:q$ 。求甲乙各得全勝之適遇。

〔解〕 設於競爭之中間。甲持 n 籌而令其全勝之適遇爲 u_n 。

因甲得勝之適遇爲 $\frac{p}{p+q}$ 。故甲於次回得全勝之適遇爲 u_{n+1} 。

若次回得負。其適遇爲 $\frac{q}{p+q}$ 。故甲於次回得全勝之適遇爲 u_{n-1} 。

由是 $u_n = \frac{p}{p+q}u_{n+1} + \frac{q}{p+q}u_{n-1}$ 。

$\therefore pu_{n+1} - (p+q)u_n + qu_{n-1} = 0$

由第廿五編循環級數上之方程式。可令等於 $\frac{A+Bx}{p-(p+q)x+qx^2}$ 之展開式。其 x^n 之係數爲 u_n 可知。而其 A, B 爲所取適當之值。

乃由分項分數爲 $\frac{A+Bx}{p-(p+q)x+qx^2} = \frac{C}{p-qx} + \frac{D}{1-x}$ 。

由是 x^n 之係數 $= D + \frac{C}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^n = u_n$ 。

今試求 C, D 之值。惟以甲全負第 $u_0 = 0$ 。甲全勝時 $u_{a+b} = 1$ 。

故得如次 $0 = D + \frac{C}{p}$ 。 $1 = D + \frac{C}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}$ 。

$$\text{因求得 } C = p \div \left\{ \left(\frac{q}{p} \right)^{a+b} - 1 \right\}, \quad D = 1 \div \left\{ 1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{a+b} \right\},$$

$$u_n = \left\{ 1 - \left(\frac{q}{p} \right)^n \right\} \div \left\{ 1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{a+b} \right\}.$$

$$\text{由是甲得全勝之適遇爲 } \left\{ 1 - \left(\frac{q}{p} \right)^a \right\} \div \left\{ 1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{a+b} \right\},$$

$$\text{同法乙得全勝之適遇爲 } \left\{ 1 - \left(\frac{q}{p} \right)^b \right\} \div \left\{ 1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{a+b} \right\}.$$

例 題 四 十 一

1. 甲乙二人交互擲二骰。以得八者爲勝。甲先擲時。求各勝之適遇。

[解] 擲二骰時。其第壹骰與第貳骰點數之和爲8者。有2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2五個方法。

而將二骰擲出各點數所有之方法。爲等於 $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$ 各係數之和36。

由是擲出8之適遇爲 $\frac{5}{36}$ 。不出8之適遇爲 $\frac{31}{36}$ 。

故甲第壹勝之適遇爲

$$\frac{5}{36} + \frac{5}{36} \left(\frac{31}{36} \right)^2 + \frac{5}{36} \left(\frac{31}{36} \right)^4 + \dots \text{至無窮} = \frac{36}{67}.$$

又乙第貳勝之適遇爲

$$\frac{5}{36} \left(\frac{31}{36} \right) + \frac{5}{36} \left(\frac{31}{36} \right)^3 + \frac{5}{36} \left(\frac{31}{36} \right)^5 + \dots \text{至無窮} = \frac{31}{67}.$$

2. 甲乙丙三人交互擲三骰。以得六者爲勝。求甲乙丙順次得勝之適遇。

[解] 擲三骰得6方法之數等於 $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$ 展開式中 x^6 之係數。而此係數爲10。

由是得6之適遇爲 $\frac{10}{6^3}$ 。

甲勝之適遇。爲 $\frac{10}{6^3} + \frac{10}{6^3} \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^3 + \frac{10}{6^3} \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^6 + \dots$ 至無窮 = $\frac{11664}{33397}$ 。

乙勝之適遇。爲

$$\frac{10}{6^3} \left(1 - \frac{10}{6^3}\right) + \frac{10}{6^3} \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^4 + \frac{10}{6^3} \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^7 + \dots$$
 至無窮 = $\frac{11124}{33397}$ 。

丙勝之適遇。爲

$$\frac{10}{6^3} \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^2 + \frac{10}{6^3} \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^5 + \frac{10}{6^3} \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^8 + \dots$$
 至無窮 = $\frac{10609}{33397}$ 。

3. 將白玉3黑玉5入於囊中。甲乙丙三人順次取出壹玉。以取出白者爲勝。則其各適遇之比。順次若 27 : 18 : 11. (但取出後。不再入囊) 試證之。

[證] 於初之幾次取出者或非白玉。然至第五次以後。必有白玉取出。

由是自第壹迄第六次出白玉之適遇。順次爲 $\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}, \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$ 。
 $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}, \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}, \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$ 。由是三人適遇之比。爲

$$\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}\right) : \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}\right)。$$

4. 壹般擲至 50 回。其間擲出六點之回數最容易得者有幾回。

[解] 出六之適遇爲 $\frac{1}{6}$ 。不出六之適遇爲 $\frac{5}{6}$ 。

故擲至 50 回時。其間擲出六者或 0 回。或 1 回。或 2 回。或 3 回。... 或 50 回。此擲出六所有之回數。同於 $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^{50}$ 展開式中含有 $\left(\frac{1}{6}\right)^0, \left(\frac{1}{6}\right)^1, \left(\frac{1}{6}\right)^2, \dots, \left(\frac{1}{6}\right)^{50}$ 各項 $\frac{1}{6}$ 之指數。

而於 50 回間。擲出六者。其最卷得之適遇。可將上之展開式。求其最大項。

由是以 $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^{50}$ 之最大項爲 $r+1$ 。則 $\frac{50-r-1}{r} \cdot \frac{1}{\frac{5}{6}} > 1$ 。

$\therefore r = 8\frac{1}{2}$ 即 $r+1=9$ 。即知第9項為最大項。其 $\frac{1}{6}$ 之指數為8。

由是得出六最易之回數。當有8回。

5. 貳骰擲出大於七點之適遇。等於小於七點之適遇。其證如何。

(證) 於 $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$ 展開式中。含有 x^7 之項為中項。而在中項以上之諸項。與在中項以下之諸項。其係數相等。故如題所云。

6. 筒內有三籤。籤上記以1, 2, 3號數。今無心取出壹籤。重復入於筒內而取之。如是取至四次。則前後取出各籤號數之和。其偶數之適遇。與奇數適遇之比。若41:40。試證之。

(證) 奇數之籤有2。偶數之籤有1。故每壹次間。出奇數之適遇為 $\frac{2}{3}$ 。出偶數之適遇為 $\frac{1}{3}$ 。

而四次號數之和為奇數者。或三籤為奇數。壹籤為偶數者。或以三籤為偶數。壹籤為奇數者。

由是於 $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^4$ 之展開式。

$$\text{其出奇數之適遇} = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{81}$$

$$\text{其出偶數之適遇} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 6\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{41}{81}$$

故出偶數與出奇數各適遇之比。為 $\frac{41}{81} : \frac{40}{81}$ 即 41:40。

7. 筒中入百籤。籤上記以自1迄百各號數。乃於無心中取出貳籤。其貳號之和得奇數之適遇。比於得偶數之適遇。若50:49。

(證) 百籤內奇偶各五十。於奇數之籤中取出貳籤之方法。為 ${}_{50}C_2 = \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2}$ 。於偶數之籤中取出貳籤之方法。亦為 $\frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2}$ 。

而於百籤中。取出貳籤方法之數為 ${}_{100}C_2 = \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} = 50 \cdot 99$ 。

惟以兩奇數及兩偶數之各和。皆為偶數。故凡兩籤之和為偶

數者之適遇爲 $\frac{1}{50 \cdot 99} \left(\frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} + \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \right) = \frac{49}{99}$ 。

又兩籤之和爲奇數者之適遇 $= 1 - \frac{49}{99} = \frac{50}{99}$ 。故出奇數與偶數之比若 50 : 49。

8. 有 n 籤記以自 1 迄 n 之號數。令人於無心中。取出貳籤。乃憑其取出貳號之相第數。給付以錢。問其人得錢之豫期如何。

[解] 設 p, q 爲任意之兩數。今從 n 籤中。取出貳籤方法之數。有 ${}_n C_2 = \frac{1}{2} n(n-1)$ 個。

而任意貳籤之相乘積得 pq 。其適遇爲 $\frac{pq}{\frac{1}{2} n(n-1)} = \frac{2pq}{n(n-1)}$ 。

故其豫期爲 $\frac{2 \sum pq}{n(n-1)}$ 錢。

但由題意 p, q 爲自 1 迄 n 各異之數。而 $\sum pq$ 爲自 1 迄 n 兩個各異之數之組合。

$$\begin{aligned} \therefore 2 \sum pq &= (1+2+3+\dots+n)^2 - (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) \\ &= \frac{n^2}{4}(n+1)^2 - \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \frac{1}{12} n(n-1)(3n+2)(n+1). \end{aligned}$$

由是所求之豫期。爲 $\frac{2 \sum pq}{n(n-1)} = \frac{1}{12} (n+1)(3n+2)$ 錢。

9. 既知壹事於 n 年內。共有 n 回發起。則其於特別之壹年間。此事不發起之適遇爲 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 。試證明之。

[證] 於 n 年內有壹年此事不發起之適遇爲 $\frac{n-1}{n}$ 。即 $1 - \frac{1}{n}$ 。

貳年不發起之適遇。爲 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ 。三年不發起之適遇爲 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3$ 。

以下準此。

而此事之發起。無論何壹年皆可。

故所求之適遇爲 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 。

10. 於無心中將 p 個數分配 p 個人不足。則其中之壹人未經受取之適遇爲 $\frac{p^p - |p|}{p^p}$ 。試證明之。

〔證〕 本題於無心中分配不足時。求其中之壹人。不得壹物之適遇。

則於無心中分配時。於 p 個人中。至多可有 $p-1$ 個人。不得壹物者。

設 p 人爲 A, B, C, \dots 則 $(A+B+C+\dots)^p$ 之各項。皆爲 p 次式。而 A, B, C, \dots 之指數。即所以示 A, B, C, \dots 各人受取之物數。而上式爲 p 項式。故此 p 個人共受取 p 物之方法有 p^p 個。

又 A, B, C, \dots 各壹人各得物之方法。由排列法。得 $p! = |p|$ 。故 p 個人中不得受取壹物之遇合爲 $p^p - |p|$ 。

由是所求之適遇爲 $\frac{p^p - |p|}{p^p}$ 。

11. 甲作信郵送與乙。乙得甲信後必有還信。今通信 m 次中。約有壹次被郵局失誤。則乙得接收甲信之適遇爲 $\frac{m-1}{2m-1}$ 。試求其證。

〔證〕 甲與乙信多至 $m^2 a$ 次時。其被郵局之失誤者。爲有 ma 次。故乙得接收甲信之次數爲 $ma(m-1)$ 。

由是甲信與乙之還信。共數爲 $m^2 a + ma(m-1)$ 。即 $ma(2m-1)$ 。其中乙接收 $ma(m-1)$ 次。

故所求之適遇爲 $\frac{ma(m-1)}{ma(2m-1)} = \frac{m-1}{2m-1}$ 。

12. 甲囊內有壹鎊之金幣與一先令之銀幣各 3 枚。於無心中取出四枚。納入於乙空囊。又於乙囊內取出貳枚。而爲金幣。則此乙囊內所存。其豫期當爲 11「先令」6「本土」。其證若何。

〔證〕 從乙囊中取出貳個鎊幣。則乙囊中所入之四幣。爲鎊幣 3 枚。與先令幣 1 枚。或爲鎊幣與先令幣各貳枚。

而令入於乙囊內所有鎊幣3枚。先令幣1枚之適遇為 P_1 。惟於甲囊中鎊幣與先令幣各3枚內。取出4枚方法之數為

$${}_8C_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15. \text{ 而其中取出鎊幣3枚。與先令幣1枚方法之數}$$

$$\text{為 } {}_3C_3 \times {}_3C_1 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \frac{3}{1} = 3, \quad \therefore P_1 = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

又令入於乙囊內所有鎊幣與先令幣各貳枚之適遇為 P_2 。而從甲囊中鎊幣與先令幣各3枚內。取出鎊幣與先令幣各貳枚

$$\text{方法之數為 } {}_3C_2 \times {}_3C_2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \times \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 9, \quad \therefore P_2 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

又於鎊幣3枚。先令幣1枚內。取出鎊幣2枚。設其適遇為 p_1 。則

$$p_1 = \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{2}.$$

又於鎊幣與先令幣各貳枚內取出鎊幣2枚。設其適遇為 p_2 。則

$$p_2 = \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}.$$

故有鎊幣3枚。先令幣1枚。其由412章實計其適遇如次。

$$\frac{P_1 p_1}{P_1 p_1 + P_2 p_2} = \frac{1}{2}.$$

又有鎊幣與先令幣各貳枚。實計其適遇如次。 $\frac{P_2 p_2}{P_1 p_1 + P_2 p_2} = \frac{1}{2}.$

而於乙囊內取出鎊幣2枚。其餘所存者。為鎊幣與先令幣各壹枚。即21「先令」或為2「先令」。

由是所求之豫期為 $\frac{1}{2} \times 21$ 「先令」 + $\frac{1}{2} \times 2$ 「先令」。即11「先令」6「本土」。

13. 甲囊內有鎊幣與先令幣各4枚。無心取出4枚。另入乙空囊。即於乙囊內取出貳枚而為鎊幣者。則甲囊內所存之豫期為 $29\frac{1}{3}$ 「本土」。試證之。

如前例用同法求其所存全額之豫期。

從乙囊內取出2枚而為鎊幣者。則乙囊內所有之貨幣。或為鎊幣4枚。或為鎊幣3枚。與先令1枚。或為鎊幣與先令幣各2枚。

$$\text{由前例 } P_1 = \frac{{}_4C_4}{{}_8C_4} = \frac{1}{70}, \quad P_2 = \frac{{}_4C_3 \times {}_4C_1}{{}_8C_4} = \frac{16}{70}, \quad P_3 = \frac{{}_4C_2 \times {}_4C_2}{{}_8C_4} = \frac{36}{70}.$$

$$\text{又 } p_1 = \frac{{}_4C_2}{{}_4C_2} = 1, \quad p_2 = \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{2}, \quad p_3 = \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}.$$

各實計其適遇為

$$\frac{P_1 p_1}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3} = \frac{1}{15}, \quad \frac{P_2 p_2}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3} = \frac{8}{15}, \quad \frac{P_3 p_3}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3} = \frac{6}{15}.$$

而於乙囊中取出鑄幣 2 枚後。其中所存為 40「先令」。或為 21「先令」。或為 2「先令」。

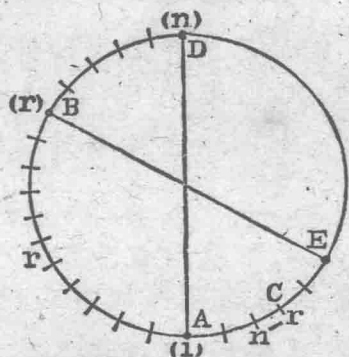
∴ 乙囊中所存之豫期。為

$$\frac{1}{15} \times 40 \text{「先令」} + \frac{8}{15} \times 21 \text{「先令」} + \frac{6}{15} \times 2 \text{「先令」} = 14\frac{2}{3} \text{「先令」}.$$

若以最初取出之 2「鎊」。加於前所得之豫期 $14\frac{2}{3}$ 「先令」。得 $54\frac{2}{3}$ 「先令」。從 4「鎊」4「先令」減去 $54\frac{2}{3}$ 「先令」。其餘為 $29\frac{1}{3}$ 「先令」。即得所求。

14. 於圓周上無心設三點。則其三點皆在於半圓周上之適遇為 $\frac{3}{4}$ 。試求其證。

〔證〕 先無心設 A 點於圓周上。從 A 點過圓心引直徑 AD 。又無心設二點 B 及 C 於圓周上。此二點或皆在於 AD 之右(一)。或皆在於 AD 之左(二)。或 B 點在 AD 之左。 C 點在 AD 之右(三)。或 B 點在 AD 之右。 C 點在 AD 之左(四)。即無心設二點 B 及 C 時。可有四個方法。



由是 B 及 C 貳者在 AD 同傍之適遇 $= \frac{1}{2}$ 。 (a)

又 B 及 C 在 AD 異傍者。可將全圓等分為 $2n$ 分。令其各部分為極小。故 B 常在於分點之上。如圖以 A 為起點之處。而 B 點之所在。

為在第 r 點。乃從 B 點過圓心。引直徑 BE 。則 AE 所有之部分為 $n-r$ 。而 C 若在於 AF 弧之內。則 A, B, C 三點在於半圓周上。故凡 B 點在第 r 分點時。 A, B, C 三點在於半圓周上之適遇為 $\frac{n-r}{n}$ 。惟欲

使 B 點在第 r 分點。即在於半圓周 ABD 上。其適遇為 $\frac{1}{n}$ 。

由是 B, C 在 AD 異傍。而 A, B, C 在半圓周上之適遇。為

$$\frac{n-r}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n-r}{n^2}.$$

而所取之 r 為從 1 迄 n 之數。故 B, C 在 AD 異傍而 A, B, C 在半圓周上。其一切之適遇為

$$\begin{aligned} \sum \frac{n-r}{n^2} &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \{1+2+3+\dots+(n-1)\} \\ &= \frac{1}{n^2} \times \frac{n-1}{2} (1+n-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

$$\text{因 } n = \infty \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{2}.$$

但 B, C 二點在 AD 之左或右。其適遇為 $\frac{1}{2}$ 。故三點在半圓周上之適遇 $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。 (b)

由是 (a) 及 (b) 相加為 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 。即得本題之證。

15. 無心截棒為三部分。其一部分不大於他二部分之和。其適遇如何。

[解] 棒之長為 CD 。以 M 為其中點。分 CD 為 $2n$ 等分。(但 n 為至大之數)。



而以 M 為起點之處。於其任意之點。即第 r 點之處 A 。為所截之分點。則棒之第壹截分點之適遇為 $\frac{1}{2n}$ 而其所截之處。在於 M

之左或右。故所截之分點 A 。其適遇為 $\frac{2}{2n}$ 。

又於 M 之右方第 $n-r$ 分點之處記以 B 。則 AB 等於棒之長 CD 之半。

又第貳所截之分點若在於 BM 之間。則其一截分比他二截分之和為小。且於此三截分內任何二截分之和。比他之一截分為大。

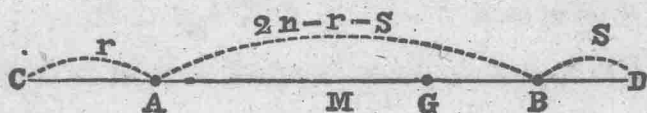
而第貳截分點在於 M 之間。其適遇為 $\frac{n-r}{2n}$ 。

由是 r 為從 1 迄 n 之各數。如前例得

$$\begin{aligned} \sum \frac{2}{2n} \times \frac{n-r}{2n} &= \sum \frac{n-r}{2n^2} = \frac{1}{2n^2} (1+2+3+\dots+n-1) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} (\because n=\infty) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

16. 無心截棒為四部分。其中之任一部分不大於他三部分之和。試求其適遇。

[解] 如題將棒截為四部分。其所截之處任取三點。若此三點在棒之中央 M 之同傍。則此三截分之和。小於他之一截分。而其適遇為 $\frac{1}{4}$ 。 (a)



又將三截分點分置於 M 之左右。或為三截分點中之一點。在 M 之左。其他二點在 M 之右者。或為三截分點中之二點在 M 之左。其他一點在 M 之右者。惟有二截分點在 M 之同傍。可交換其位置。故此三截分點分置 M 之左右。其方法有四種。而其適遇為 $\frac{3}{4}$ 。 (b)

將棒之長 CD 分為 $2n$ 等分。(但 n 為至大之數) 截 M 之左於 A 。截 M 之右於 B 。而 A 為自 C 之第 r 分點。 B 為自 D 之第 s 分點。但第三

分點 G 。在於 A, B 之間。則此壹截分大於棒之半部分之適遇爲 $\frac{2n-r-s}{n}$ 。

而其兩端所截之分點 A, B 。自 C 之第 r 分點及自 D 之第 s 分點。其適遇各爲 $\frac{1}{n}$ 。

而一端截於 A 。同時其他之壹端截於 B 。此其適遇爲 $\frac{1}{n^2}$ 。

如前所述。其一截分大於棒之半部分。則此壹截分大於其他三截分之和。而此適遇可如前法。於 $\Sigma \frac{1}{n^2} \times \frac{2n-r-s}{2n}$ 。其 s 爲自 1 迄 $n-r$ 之數。

$$\begin{aligned} \text{故 } \Sigma \frac{2n-r-s}{2n^3} &= \frac{1}{2n^3} \{n+(n+1)+(n+2)+\dots+(2n-r-1)\} \\ &= \frac{(n-r)(3n-r-1)}{4n^3}. \end{aligned}$$

又其 r 爲自 1 迄 n 之數。

$$\begin{aligned} \text{故 } \Sigma \frac{(n-r)(3n-r-1)}{4n^3} &= \frac{1}{4n^3} \{1 \cdot 2n + 2(2n+1) + 3(2n+2) + \dots + (n-1)(3n-2)\} \\ &= \frac{1}{4n^3} \{2n(1+2+3+\dots+n-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-2)(n-1)\} \\ &= \frac{1}{4n^3} \left\{ n^2(n-1) + \frac{n}{3}(n-1)(n-2) \right\} = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \right\}. \end{aligned}$$

因 $n = \infty$ 。則前之值 $= \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3}$ 。..... (γ)

由是三截分點在 M 之左右。其適遇從 (β) (γ) 得 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ 。加 (α) 得 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (δ)

上所得之 (δ)。爲棒之三截分之和比他壹截分爲小之全適遇。由是棒之三截分之和。比他壹截分爲大之適遇爲 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 。

17. 無心取 $4n$ 邊之正多角形之三邊。引長之以包括其多角

形而得銳角三角形。則其適遇爲 $\frac{(n-1)(n-2)}{(4n-1)(4n-2)}$ 。試求其證

〔證〕 正 $4n$ 多角形之各角。爲 $\frac{8nR_{\perp} - 4R_{\perp}}{4n} = \left(2 - \frac{1}{n}\right)R_{\perp}$ 。今取三邊作三角形。其第壹邊與第貳邊之交角。要不大於直角者。乃以所取之第壹邊爲此正多角形之首邊。以次計至第 m 之壹邊。取爲第貳邊。則此兩邊之引長線。與多角形之 $m-2$ 邊。成爲 m 凹多角形。其總角爲 $(2m-4)R_{\perp}$ 。設此兩邊引長線之交角爲 θ 。則

$$\begin{aligned}\theta &= (2m-4)R_{\perp} - 2\left\{2R_{\perp} - \left(2 - \frac{1}{n}\right)R_{\perp}\right\} - (m-3)\left\{4R_{\perp} - \left(2 - \frac{1}{n}\right)R_{\perp}\right\} \\ &= \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{m}{n}\right)R_{\perp},\end{aligned}$$

$$\therefore \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{m}{n}\right)R_{\perp} > R_{\perp}, \quad \therefore m < n+1.$$

故取第貳邊與第壹邊距離最少者。必取其從第壹邊爲始之第 m 。即第 $n+1$ 之壹邊。

今定第貳邊。取其從第壹邊爲始之第 $n+r$ 之壹邊。又第三邊與第貳邊距離最少者。必取其從第貳邊爲始之第 $n+1$ 之壹邊。即從第壹邊爲始之第 $n+r+n+1$ 之壹邊。又從第三邊計至第壹邊。至少亦必有 $n+1$ 之邊。故第三邊至多取至第壹邊爲始之第 $4n-(n+1)$ 。即第 $3n-1$ 之壹邊。由是可以取得第三邊之數。當有 $(3n-1)-(n+r+n+1)+1$ 。即 $n-r-1$ 個。

而於無心取第壹邊與其第 $n+r$ 相當之壹邊。取爲第貳邊。則是選取其第三邊之數。當有 $4n-2$ 個。(其中含有貳邊平行不能成爲三角形者)。

由是選取第壹第貳兩邊。其適遇爲 $\frac{n-r-1}{4n-2}$ 。

又於無心定得第壹邊而其他之邊數有 $4n-1$ 。

又第貳邊。如前所述從第壹邊之第 $n+1$ 之壹邊爲始。至第 $2n$ 之壹邊。而與第壹邊平行。故所取之第貳邊至第 $2n-1$ 而止。

由是 r 爲自 1 迄 $n-1$ 之數。順次 $r=n-1, n-2, n-3, \dots, 2, 1$ 其所求之適遇如次。

$$\frac{1}{4n-1} \cdot 2 \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{4n-2} = \frac{1}{4n-1} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4n-2} \{1+2+3+\dots+(n-2)\}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{(4n-1)(4n-2)}.$$

18. 有 m 人列坐於一圓周。從其內任選三人。其三人不鄰坐之適遇為 $\frac{(m-4)(m-5)}{(m-1)(m-2)}$ 。試求其證。

〔證〕 除去第一人。於其餘諸人中選取第二人。其適遇為 $\frac{1}{m-1}$ 。惟第一人與第二人互換其位置。故其適遇為 $\frac{2}{m-1}$ 。又除去第一人而於餘諸人中選取第二人。此第二人非列於第一人之次者。斯時之適遇為(除第一人之左右四座及第一人之座) $\frac{m-5}{m-1}$ 。

而於前之兩方法。第三人非列於第壹及第貳人之次者。其適遇順次得 $\frac{m-5}{m-2}$ 及 $\frac{m-6}{m-2}$ 。

$$\text{由是所求之適遇為 } \frac{2}{m-1} \cdot \frac{m-5}{m-2} + \frac{m-5}{m-1} \cdot \frac{m-6}{m-2} = \frac{(m-4)(m-5)}{(m-1)(m-2)}.$$

19. 無心記奇數 m 個。偶數 n 個。則奇數與偶數不鄰接之適遇為 $\frac{|n| |n+1|}{m+n |n-m+1|}$ 。但 $m > n+1$ 。試求其證。

〔證〕 記 n 偶數之方法有 $|n|$ 個。此左右及各中間記 m 奇數。有 $n+1$ 處。故記 m 奇數方法之數為 ${}_{n+1}P_m = \frac{|n+1|}{|n-m+1|}$ 。

又記全數方法之數為 $|m+n|$ 。

$$\text{由是所求之適遇為 } \frac{|n| |n+1|}{|n-m+1| |m+n|}.$$

20. 將 m 個物分給 a 男及 b 女。則男組得物成奇數之適遇。為 $\frac{(b+a)^m - (b-a)^m}{2(b+a)^m}$ 。試證之。

〔證〕 男得任壹物之適遇為 $\frac{a}{a+b}$ 。由是男得 $0, 1, 2, 3, \dots, m$ 個

之適遇。如次之展開式之各項。

$$\left(\frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}\right)^m = C_0 + C_1 + C_2 + \dots$$

$$\text{又 } \left(\frac{b}{a+b} - \frac{a}{a+b}\right)^m = C_0 - C_1 + C_2 - \dots$$

由是 $\frac{(b+a)^m - (b-a)^m}{(a+b)^m} = 2(C_1 + C_3 + C_5 + \dots) = 2 \times (\text{另得奇數之適遇})$ 。

21. 有兩整數。其和 100。而其積比 1000 為大。求其適遇。

〔解〕 兩數中之一數為 1, 2, 3, ……99。而其積大於 1000。則其一數 > 11 及 < 89 。

$$\text{由是所求之適遇爲 } \frac{77}{99} = \frac{7}{9}。$$

22. 既知兩正數量之和。而其積不小於其最大積之 $\frac{3}{4}$ 。其適遇為 $\frac{1}{2}$ 。又其積小於最大積之半。其適遇為 $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。試各證明之。

〔證〕 設既知之和 $= 4a$ 。兩數之最大積 $= 2a \times 2a = 4a^2$ 。又令其壹數 $= x$ 。則他之壹數 $= 4a - x$ 。

$$\text{由題之前節 } x(4a-x) < \frac{3}{4}(4a^2)。即 x^2 - 4ax + 3a^2 > 0。$$

即 $(x-a)(x-3a) > 0$ 。是 x 之值在 a 與 $3a$ 之間。故其適遇為 $\frac{3a-a}{4a} = \frac{1}{2}$ 。

$$\text{又由題之後節 } x(4a-x) < \frac{1}{2}(4a^2)。$$

$$\text{即 } x^2 - 4ax + 2a^2 > 0。即 \{x - a(2 + \sqrt{2})\}\{x - a(2 - \sqrt{2})\} > 0。$$

故 x 之值不小於 $(2 - \sqrt{2})a$ 。又不大於 $(2 + \sqrt{2})a$ 。

$$\text{由是所求之適遇爲 } \frac{4a - 2\sqrt{2}a}{4a} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}。$$

23. 甲乙二人為爭競之戲。甲持 a 籌。乙持 b 籌。以記勝負。而甲乙每回勝負之適遇相等。每回必分勝負。而勝者取負者壹籌。迨壹人取盡他壹人之籌。則為全體之勝。如是甲得全體之勝。其適遇為 $\frac{a}{a+b}$ 。試證明之。

〔證〕 設於勝負中間甲持 n 籌。其得全體之勝之適遇為 u_n

然甲於次回得勝之適遇為 $\frac{1}{2}$ 。故甲於次得全體之勝之適遇為 u_{n+1}

若甲於次回得負之適遇為 $\frac{1}{2}$ 。則甲於次得全體之勝之適遇為 u_{n-1}

由是 $u_n = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_{n-1}$ 即 $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$ 。

惟 $u_0 = 0$ 。故由循環級數 u_n 等於 $\frac{u_1 x}{(1-x)^2}$ 展開式中 x^n 之係數。

$$\therefore u_n = nu_1 \quad \therefore \frac{u_n}{n} = u_1$$

由是 $\frac{u_a}{a} = \frac{u_b}{b} = \frac{1}{a+b}$ 即 $u_a = \frac{a}{a+b}$ 。

24. 於瓶內入玉若干。知此玉為白或黑。今取出 $p+q$ 個 (但取出之玉不再入於瓶內)。其中白 p 個。黑 q 個。則於次取出黑壹個之適遇。為 $(q+1) \div (p+q+2)$ 。試證明之。

〔證〕 既取出白 p 個黑 q 個。其後再取出壹個。不知為白抑為黑。如為白。則得白 $p+1$ 個。如為黑。則得黑 $q+1$ 個。如是則於次出黑壹個之適遇。為 $\frac{q+1}{p+1+q+1} = \frac{q+1}{p+q+2}$ 即得題證。

25. 甲乙爭競。各分勝負。每勝壹回得壹點。以 $2m+1$ 點決定全體之勝負。甲得 x 點乙得 y 點後。其次之壹點得勝之適遇。甲與乙之比。若 $2m+1-x$ 與 $2m+1-y$ 。而於最初之壹回甲得勝。於末後

$2m$ 回內。甲勝 m 回之適遇為 $\frac{((2m+1)^2)}{2(m)^2(m+1)(4m+1)}$ 試求其證。

〔證〕 甲得 x 點乙得 y 點後。甲得次之壹點之適遇為

$\frac{2m+1-x}{4m+2-x-y}$ 。乙得又次之壹點之適遇為 $\frac{2m+1-y}{4m+1-x-y}$ 。(但此分母

比甲得前勝適遇之分母 $4m+2-x-y$ 減少壹回故得 $(4m+1-x-y)$ 。由是甲得 x 點。乙得 y 點後。甲得次之壹點。乙得又次之壹點。其適

$$\text{遇爲 } \frac{(2m+1-x)(2m+1-y)}{(4m+2-x-y)(4m+1-x-y)} \quad (a)$$

而乙得次之壹點。甲得又次之壹點。其適遇亦如上之值。

由此理推之。於任意之順序。 q 點內甲得 p 點之適遇。比於他之順序。 q 點內甲得 p 點之適遇。其值爲同壹。即無論任何之順序。其於定數之勝負間。勝之度數不變。則其適遇必爲同壹也。

由題意甲於最初勝壹點。故於 $2m$ 回內勝 $m-1$ 回。其終又勝壹回。(如前所述。無論如何順序甲勝 $m+1$ 回)。

即於 $2m-1$ 回間。甲勝 $m-1$ 回之適遇。等於最初 m 回之終勝 $m-1$ 回之適遇。

而甲初負 m 回終勝 $m-1$ 回之適遇。可連用 (a) 式。得

$$\frac{2m+1}{4m+1} \cdot \frac{2m}{4m} \cdot \frac{2m-1}{4m-1} \cdots \frac{m+2}{3m+2} \cdot \frac{2m}{3m+1} \cdot \frac{2m-1}{3m} \cdots \frac{m+2}{2m+3}$$

從 $2m-1$ 回內。取 $m-1$ 方法之數爲 ${}_{2m-1}C_{m-1}$ 。而於最後之勝負。

甲勝之適遇爲 $\frac{m+1}{2m+2}$ (何則。如上之連乘積。最勝之因子 $\frac{m+2}{2m+3}$ 爲

於第 $2m$ 回勝之適遇。故於第 $2m+1$ 回後勝之適遇爲 $\frac{m+1}{2m+2}$)。

由是所求之適遇爲

$$\frac{|2m-1|}{|m-1|} \cdot \frac{|(2m+1)(2m) \cdots (m+2)|}{|(4m+1)4m \cdots (3m+2)(3m+1) \cdots (2m+3)|} \cdot \frac{|2m(2m-1) \cdots (m+2)|}{|2m+2|} \cdot \frac{m+1}{2m+2}$$

$$= \frac{|2m-1|}{|m-1|} \cdot \frac{|2m+1|}{|m|} \cdot \frac{|2m+1|}{|m+1|} \cdot \frac{|2m|}{|m|} \cdot \frac{|2m|}{|4m+1|} = \frac{((2m)(2m+1))^2}{2(|m|^3 |m+1| |4m+1|)}$$

第 參 拾 壹 編

定 準 數

415. 定準數 (Determinate) 其意為有一定之排列也。

譯註。定準數我國或譯為排列定數。

先說明定準數之排列定位法。

試將九個數量列為正
方形。除同行同列不計外。
取其三個數量相乘而得
次之六個積數。為

a_1	a_2	a_3	(第壹列)
b_1	b_2	b_3	(第貳列)
c_1	c_2	c_3	(第三列)
(第壹行)	(第貳行)	(第三行)	

$a_1b_2c_3, a_1b_3c_2, a_2b_3c_1, a_2b_1c_3, a_3b_1c_2, a_3b_2c_1$ 。

此六個乘積各文字下所標之小數字 1, 2, 3。其次序有順逆之不同。乃從其逆次序之奇偶。而定其積之正負。凡逆次序之數為偶者。則其積為正。若逆次序之數為奇者。則其積為負。如法將上之六個乘積定其正負而連為一式如次。

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \dots\dots\dots (A)$$

試考 $a_1b_2c_3$ 其小數字 1, 2, 3 之次序皆為順。故其逆次序之數為 0。而定此積為正。

$a_1b_3c_2$ 小數字之次序 1, 3, 2。其 2 在 3 後。逆次序之數為 1。故此積為負。

$a_2b_3c_1$ 小數字之次序 2, 3, 1。其 1 在 2 後。又 1 在 3 後。逆次序之數有 2。故此積為正。

$a_2b_1c_3$ 小數字之次序 2, 1, 3。其 1 在 2 後。逆次序之數為 1。故此積為負。

$a_3b_1c_2$ 小數字之次序 3, 1, 2。其 1 在 3 後。又 2 在 3 後。逆次序之數有 2。故此積為正。

$a_3 b_2 c_1$ 小數字之次序 3, 2, 1, 其 2 在 3 後, 又 1 在 3 後, 又 1 在 2 後, 逆次序之數有 3, 故此積爲負。

如 (A) 式稱爲含有 $a_1, a_2, a_3, b_1, \dots$ 諸元 (elements) 之定準數, 如從所記之正方形而得 $a_1 b_2 c_3$ 等之各積, 稱爲此定準數之項。

416. 定義 如次將 n^2 個數量, 列爲正方形。

$$\begin{array}{|cccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots\dots\dots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots\dots\dots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots\dots\dots c_n \\ \dots\dots\dots & & & \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots\dots\dots m_n \end{array}$$

而同列之數量用同文字, (如第一列用 a , 第貳列用 b) 同行之數量, 用相同之小數字 (如第一行 a, b, c, \dots 下標以 1, 第貳行標以 2), 即文字可表列數, 小數字可表行數, 例如 c_2 試計文字之次序 a, b, c , 其 c 列在第三, 即知此列爲第三列, 又以所標之小數字爲 2, 即表在第貳行, 故知 c_2 爲在第三列第貳行。

今將上之正方形, 除同行同列不計外, 於其每行每列各取壹數量相乘, 而得諸積, 從其所標小數字逆次序之數, 奇者爲負, 偶者爲正, 如是求其積之代數和, 此爲 n^2 元之定準數。

有 n^2 元如上列爲正方形, 於其兩側引直線。

於此正方形從左上隅引至右下隅之對角線, 稱爲主對角線 (Principal diagonal), 而與主對角線相當之元 $a_1, b_2, c_3, \dots, m_n$ 之積, 稱爲定準數之主項 (Principal term)。

主項以外, 其餘諸項所列文字之次序與主項同, 但各文字下, 所標之小數字, 其次序各異, 例如表某項, 則置 $abc \dots m$ 於其各文字之下, 標以自 1 迄 n 之小數字爲 $a_1 b_2 c_3 \dots m_n$ 或 $a_2 b_1 c_3 \dots m_{n-1}$ 其他種種, 可用 1, 2, 3, \dots, n 之錯列諸數標記之。

故既知主項爲 $a_1 b_2 c_3 \dots m_n$, 其餘諸項, 自易求得之, 而記定準數之略法, 往往僅記其主項於括弧內以代表其各式者, 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 c_3).$$

又記定準數之略法。或以 $\Delta(\pm a_1 b_2 c_3 \dots m_n)$ 表之。而定準數之記號。通例用 Δ 表之。

有 n^2 元之定準數。即可列成 n 行， n 列而稱爲 n 次之定準數。

417. 項 凡 n 次之定準數。其各項有 n 個文字。而文字下所標之數字爲 $1, 2, 3, \dots, n$ 之各錯列數。故 ${}_n P_n$ 即 $|n$ 爲 n 次定準數之項數。

例如三次之定準數。有 $|3| = 6$ 項。

418. 項之符號 定準數之任意壹項。其符號視所標數字之次序順逆而定。其逆次序之數。偶者爲正。奇者爲負。既已述明於前。然如次之法則。以行數代其列數。其結果仍與前之結果同。

法則 從第壹列順次及於諸列各取壹元。而爲任意之項。其符號則視行之次序如何。其逆次序之數。偶者爲正。奇者爲負。

上之法則。所以示行與列交換。而得同壹之結果。

如於六次之定準數內。第壹列取 c_1 。第貳列取 f_2 。第三列及第三列以下。順次取 $b_3 d_4 \dots$ 而得任意之項。爲 $c_1 f_2 b_3 d_4 a_5 e_6$ 。此積仍與 $a_5 b_3 c_1 d_4 e_6 f_2$ 同值。而其符號亦相同。釋明如次。

如前章所述者。先依羅馬文字之次序順列之。而其下所標之小數字。用 $1, 2, 3, \dots$ 之錯列數。如 $a_5 b_3 c_1 d_4 e_6 f_2$ 。茲則用羅馬文字 a, b, c, \dots 之錯列數。而其下所標之小數字。依自然數之次序。如 $c_1 f_2 b_3 d_4 a_5 e_6$ 。試於 $a_5 b_3 c_1 d_4 e_6 f_2$ 取其 f_2 計之。其 f 字下所標之 2 。列於 $5, 3, 4, 6$ 四數之後。(此數字之逆序有四) 而於 $c_1 f_2 b_3 d_4 a_5 e_6$ 亦取 f_2 計之其 b, d, a, e 四文字。列於 f 之後。(依羅馬文字之次序 f 當列於 b, d, a, e 之後) 一則從所標之小數字 2 以前。有大於 2 之四個數字。(即列之逆次序) 一則從羅馬文字之錯列數。其 f 以後有前列之四個文字。(即行之逆次序)。故文字逆序之數。與所標小數字逆序之數相同。餘可類推。

由是行與列。可以交換而得次之定理。

[定理] 定準數行與列交換。其值不變。

$$\text{例如} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 題

1. 計 2314, 3142, 及 4231 之逆次序。

〔解〕 2314 其次序 2, 1 與 3, 1。即逆次序有 2。

3142 其次序 3, 1 與 3, 2 與 4, 2。即逆次序有 3。

4231 其次序 4, 2 與 4, 3 與 4, 1 與 2, 1 與 3, 1。即逆次序有 5。

2. 計 4132, 35142, 531264 之逆次序。

〔解〕 4132 其次序 4, 1 與 4, 3 與 4, 2 與 3, 2。即逆次序有 4。

35142 其次序 3, 1 與 3, 2 與 5, 1 與 5, 4 與 5, 2 與 4, 2。即逆次序有 6。

531264 其次序 5, 3 與 5, 1 與 5, 2 與 5, 4 與 3, 1 與 3, 2 與 6, 4。即逆次序有 7。

3. 於 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ 其 bfg , cdh , ceg 各項之符號如何。

答 +, +, -。

〔解〕 bfg 為取第 2 行, 第 3 行, 第 1 行之元。其行數之次序為 231。計其逆次序有 2。故為正。

cdh 其行數之次序為 312。計其逆次序有 2。故為正。

ceg 其行數之次序為 321。計其逆次序有 3。故為負。

4. 於 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & r & q \end{vmatrix}$ 其 $bgiq$, $celn$, $dfkm$ 各項之符號如何。

答 +, -, -。

〔解〕 $bgiq$ 其行數之次序 2314。即逆次序 2。∴ 正。

$celn$ 其行數之次序 3142。即逆次序 3。∴ 負。

$dfkm$ 其行數之次序 4231。即逆次序 5。∴ 負。

419. 定理壹 凡定準數之任壹項。交換其所標兩數字可得又壹項(1)。而此又壹項與原項。必變其符號(2)。

先證(1)。設 $Ph_{\alpha}k_{\beta}$ 爲定準數之壹項。但 P 爲 h_{α} , k_{β} 貳元外其他諸元之積。(列如 $a_1b_3c_4d_2$ 記爲 Pc_4d_2 其 P 即 a_1b_3)。

此 $Ph_{\alpha}k_{\beta}$ 以其所標之兩數字互標。而爲 $Ph_{\beta}k_{\alpha}$ 。必爲定準數中之又壹項。

何則。 $Ph_{\alpha}k_{\beta}$ 爲定準數之壹項。則 P 所含有之元。決不在於 h 行及 k 行之內。亦決不在於 α 列及 β 列之內。故 $Ph_{\beta}k_{\alpha}$ 其中無同行同列之元。其爲定準數之又壹項可知。

次證(2)。假設交換之兩數字。其標此數字之貳元爲鄰接者。如 $Ah_{\alpha}k_{\beta}B$ 爲定準數之任壹項。其 A, B 爲在於 $h_{\alpha}k_{\beta}$ 前後諸元之積。若 α, β 互換。則爲 $Ah_{\beta}k_{\alpha}B$ 。如(1)所證而知 $Ah_{\beta}k_{\alpha}B$ 無同行同列之元在內者。故亦爲定準數之壹項。

惟交換 $\alpha\beta$ 之次序爲 $\beta\alpha$ 。則此項必增一逆次序或減一逆次序。例如變 h_1k_3 爲 h_3k_1 。即變 13 之次序爲 31。則此項必增一逆次序。若變 h_3k_1 爲 h_1k_3 。即變 31 之次序爲 13 則此項必減一逆次序。而 hk 前後諸元所標之數字。不因此貳數九交換而增減其逆次序之數。故 $Ah_{\alpha}k_{\beta}B$ 與 $Ah_{\beta}k_{\alpha}B$ 。必異其符號。

若交換之兩數字 α, β 。其標此數字之貳元。不相鄰接。而其間隔以 r 個元者。

先將 α 向右順次交換其鄰接兩元所標之數字至 $r+1$ 次。而 α 至於 β 處。再將 β 向左。順次交換鄰接之數字至 r 次。而 β 至於 α 之原處。

由是 α 與 β 交換。同於交換其鄰接數字至 $2r+1$ 次。其次數恆爲奇數。故與原項必變其符號。

例如 $a_1b_3c_2d_5e_4$ 交換其 b_3 與 e_4 所標之數字。則逐次將 3 與右一元數字互換。至於 4 之處。後又逐次將 4 與左一元數字互換。至於 3 之處。

原項	$a_1b_3c_2d_5e_4$	第壹	$a_1b_2c_3d_5e_4$	第貳	$a_1b_2c_3d_4e_5$
第三	$a_1b_2c_3d_4e_5$	第四	$a_1b_2c_4d_5e_3$	第五	$a_1b_1c_2d_5e_3$

故交換五次 $a_1 b_3 c_2 d_5 e_4$ 變為 $a_1 b_4 c_2 d_5 e_3$ 。

420. 定理貳 定準數交換其任貳行或任貳列。則其符號變而其絕對值不變。

設以 h 及 k 兩文字。表某定準數之任兩列。今以此兩列交換之。而為第壹及第貳之兩定準數。

而於第壹定準數之任壹項 $Ah_a Bk_\beta C$ 。其 h, k 交換。得 $Ak_a Bh_\beta C$ 。為在第貳定準數與前同位諸元所成之項。考此兩項。為第壹第貳兩定準數。同行同列之各元而成者。故各自同其符號。然由 419 章而知 $Ak_a Bh_\beta C$ 。亦為第壹定準數之壹項。其符號與 $Ah_a Bk_\beta C$ 相反。

由是知第貳定準數之任壹項。均為第壹定準數之壹項。但其符號各異耳。

故第壹第貳之兩定準數。其絕對值相等。而其符號相反。

既證得貳列交換此定理為真。由 418 章知列與行為同樣。故貳行交換。此定理亦必為真。

例如三元之定準數。逐次變其行列。由本定理而得如次。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \end{vmatrix}$$

421. 定理三 定準數有貳列或貳行相等。則其值為 0。

貳列(或貳行)相等。則交換其貳列(或貳行)。仍與前無異。而由定理貳交換其貳列(或貳行)。其絕對值不變而變其符號。今其值與符號皆相等。是必為 0 而後可。故此定準數之值必為 0。

$$\text{例 } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} = 0. \text{ 又 } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

例 題

1 求 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ 之值。

〔解〕 設此定準數 $a=b$ 則 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$ 。(由定理三)

故 $a-b$ 爲此定準數之壹因子。由同法 $b-c, c-a$ 亦爲此定準數之壹因子。而其各項爲三次式。

$\therefore \Delta = L(a-b)(b-c)(c-a)$, 其 Δ 含有 bc^2 之係數爲 1。

而 $L(a-b)(b-c)(c-a)$ 含有 bc^2 之係數爲 L 。 $\therefore L=1$ 。

由是 $\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)$ 。

2. 求 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$ 之值。

〔解〕 設 $a=b$ 。則 $\Delta=0$ 。由同法得。

$\Delta = L(a-b)(b-c)(c-a)(a-d)(b-d)(c-d)$ 。

於 Δ 含有 bc^2d^3 之係數爲 1。又於右邊 bc^2d^3 之係數爲 $-L$ 。

由是 $L=-1$ 。

$\therefore \Delta = -(a-b)(b-c)(c-a)(a-d)(b-d)(c-d)$ 。

3. 求 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$ 之值。

答 $-(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$ 。

422. 定理四 定準數之任壹列或任壹行。以某數乘之。等於某數乘定準數之全體。

何則。定準數之各項。皆含有每行每列之壹元。故以某壹數乘任壹列或任壹行。即以某壹數乘各項。故同於以某壹數乘定準數之全體。

例 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \times m = \begin{vmatrix} a_1 & ma_2 & a_3 \\ b_1 & mb_2 & b_3 \\ c_1 & mc_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & ma_2 & ma_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\text{又 } \begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ na_2 & nb_2 & nc_2 \\ pa_3 & pb_3 & pc_3 \end{vmatrix} = mnp \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & nb_1 & pc_1 \\ ma_2 & nb_2 & pc_2 \\ ma_3 & nb_3 & pc_3 \end{vmatrix}$$

推論 由本定理及定理三推得如次。

定準數之貳列或貳行，其各元及係數相同者，則此定準數之值為0。

$$\text{例如 } \begin{vmatrix} ma & na & 1 \\ mb & nb & 1 \\ mc & nc & 1 \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & b & 1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix} = mn \times 0 = 0.$$

423. 小定準數 將定準數除去其同數之行與列，而以其餘諸元作正方形，此謂之小定準數。(Minor determinants).

除去定準數之第壹行壹列，其餘部分之小定準數，謂之第壹小定準數。又除去定準數之第貳行貳列，其餘部分之小定準數，謂之第貳小定準數。餘做此

或取通過某行某列之壹元，則其餘部分之小定準數，稱為某壹元之小定準數。如其壹元為 x ，則為 x 之小定準數。而以 Δ_x 表示之。

$$\text{例如 } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ 及 } \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ 為 } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

之小定準數如次。記為 Δ_{c_3} , Δ_{b_2} , Δ_{a_1} 。

424. 定準數之展開式 設四次之定準數為

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \text{ 將此定準數展開。而以 } a_1A_1 \text{ 為於 } \Delta \text{ 之諸項}$$

中所含有 a_1 之諸項之和。同法以 a_2A_2 , a_3A_3 及 a_4A_4 為含有 a_2 , a_3 及 a_4 諸項之和。

然於 Δ 之全項中，無論何壹項，必含有 a_1, a_2, a_3, a_4 內之壹元。故可以 $a_1A_1, a_2A_2, a_3A_3, a_4A_4$ 包括 Δ 之全項。

$$\text{由是 } \Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 \dots \dots \dots (1)$$

於 Δ 之諸項中。凡含有 a_1 者。決不含有與 a_1 同行同列之元。而 Δ_{a_1} 為 a_1 之小定準數。於 Δ_{a_1} 之各項。皆無有含 a_1 者。故於 Δ 之諸項中。凡含有 a_1 之項。即為 a_1 與 Δ_{a_1} 之某壹項之積。

反言之。 Δ_{a_1} 之壹項 T 與 a_1 之積。即得 Δ 之壹項。而 Δ 之壹項 $a_1 T$ 。其符號與 Δ_{a_1} 之壹項 T 之符號同相。何則。於 Δ 之壹項 $a_1 T$ 。其 a 所標之小數字為最小數1。故與 T 之諸元所標之數字。其逆次序無所增減。由是凡含有 a_1 之諸項之和為 $+a_1 \Delta_{a_1}$ 。

又於 Δ 之各項中。凡含有 a_2 之項。等於 a_2 與 Δ_{a_2} 之某壹項之積。反言之 a_2 與 Δ_{a_2} 之某壹項 T 之積。等於 Δ 之某壹項。而於 Δ 之壹項 $a_2 T$ 。其 a 所標之小數字為2。惟於 T 之諸元所標之小數字有1在內。而1列於2之次。即增壹個逆次序。故 $a_2 T$ 與 T 其符號相異。由是凡含有 a_2 之諸項之和。為 $-a_2 \Delta_{a_2}$ 。

由同法 $a_3 T$ 其3列於2, 1之前。故比 T 增2個逆次序。由是凡含有 a_3 之諸項之和為 $+a_3 \Delta_{a_3}$ 。

* 以是推之。凡含有 a_4 之諸項之和為 $-a_4 \Delta_{a_4}$ 。

$$\therefore \Delta = a_1 \Delta_{a_1} - a_2 \Delta_{a_2} + a_3 \Delta_{a_3} - a_4 \Delta_{a_4} \dots \dots \dots (2)$$

又由419及420章而得如次。

$$\begin{aligned} \Delta &= -b_1 \Delta_{b_1} + b_2 \Delta_{b_2} - b_3 \Delta_{b_3} + b_4 \Delta_{b_4} \\ &= a_1 \Delta_{a_1} - b_1 \Delta_{b_1} + c_1 \Delta_{c_1} - d_1 \Delta_{d_1} = \dots \dots \dots \end{aligned}$$

何則。 b_1 為第貳列。若行與列交換。其 $b_1 \Delta_{b_1}$ 恰如 $a_2 \Delta_{a_2}$ 故得 $-b_1 \Delta_{b_1}$ 。其餘類推

【推論】(1)及(2)比較。而知諸元 a_1, a_2, a_3, a_4 之係數。其絕對值等於各元之小定準數。

$$\text{即 } A_1 = \Delta_{a_1}, \quad A_2 = -\Delta_{a_2}, \dots$$

425. 展開式之公例 於前章所示為四次定準數之展開式。今從此法而得展開式之公例。

於 n 次之定準數。其第一列之元為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 。

由前章 (2) 得 $\Delta = a_1 \Delta_{a_1} - a_2 \Delta_{a_2} + a_3 \Delta_{a_3} - \dots + (-1)^{n-1} a_n \Delta_{a_n}$ 。

又第 r 列之元為 $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ 。

則 $\Delta = (-1)^{r-1} \{k_1 \Delta_{k_1} - k_2 \Delta_{k_2} + \dots + (-1)^{n-1} k_n \Delta_{k_n}\}$ 。

例 Δ 用第貳列之小定準數表之。則 $(-1)^{n-1}$ 為 -1 。即與前章所示之 $-b_1 \Delta_{b_1} + b_2 \Delta_{b_2} - b_3 \Delta_{b_3} + \dots$ 同。

又第三列。則 $(-1)^{n-1}$ 為 $+1$ 。以次類推。

例展開次之三次定準數。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

例 題

求次之各證。

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad 2. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ & 2 & -1 & 2 \\ & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 27.$$

$$\text{〔證〕 於 } 1. \Delta = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1-2) - 1(2-1) + 2(4-1) = 4.$$

$$\text{又 於 } 2. \Delta = -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1(1-4) - 2(-2-4) + 2(4+2) = 27.$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 18. \quad 4. \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 16.$$

$$5. \begin{vmatrix} a & o & c \\ a & b & o \\ o & b & c \end{vmatrix} = 2abc.$$

$$6. \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = a(b-c)(a-b).$$

[證] 5 之 $\Delta = a \begin{vmatrix} b & o \\ b & c \end{vmatrix} - o \begin{vmatrix} a & o \\ o & c \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & b \\ o & b \end{vmatrix}$
 $= a(bc) - o + c(ab) = 2abc.$

6 之 $\Delta = a \begin{vmatrix} b & b \\ b & c \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & b \\ a & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$
 $= a(bc - b^2) - a(ac - ab) = a(b-c)(a-b).$

$$7. \begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} = 4abc.$$

$$8. \begin{vmatrix} b+c & c & b \\ c & c+a & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix} = 4abc.$$

$$9. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9.$$

$$10. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 1.$$

[證] 9 之 $\Delta = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
 $= 3 \cdot 7 - 2 \cdot 2 + 2(-2) - 2 \cdot 2 = 9$

11. 試於 $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$ 直記 a, f, c 之係數。

又 a, b, \dots 之係數為 A, B, \dots 而於

$\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}$ 其 A, B, \dots 之係數為 A', B', \dots 則
 $\frac{A'}{a} = \frac{B'}{b} = \dots = \Delta$

[解] 最初之解答 a, f, c 之係數可直得次形。

$$\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & g \\ h & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}.$$

於次之證 $B = ac - g^2, C = ab - h^2, F = af - gh.$

$$\begin{aligned} \therefore A' &= BC - F^2 = (ac - g^2)(ab - h^2) - (af - gh)^2 \\ &= a\{a(bc - f^2) - h(hc - gf) + g(hf - bg)\} \\ &= a\{aA - hH + gG\} = a\Delta. \end{aligned}$$

由是 $\frac{A'}{a} = \Delta$ 由同法證得 $\frac{B'}{b} = \frac{C'}{c} = \frac{G'}{g} \dots \dots = \Delta$.

426. 定理五 凡定準數任壹行之元。與他行相應元之係數相乘積之和等於0。

設第 r 行之元 a_r, b_r, \dots 各與第 s 行相應之元之係數 A_s, B_s, \dots 相乘。其積之和為 $a_r A_s + b_r B_s + \dots$

若將此式而為一新定準數。又假定新定準數中 a'_s, b'_s, \dots 為與係數 A_s, B_s, \dots 相應之元。則其值為 $a'_s A_s + b'_s B_s + \dots$

此式與前式均等於新定準數之全值。故 $a_r = a'_s, b_r = b'_s, \dots$ 因是知此定準數第 r 行之元與第 s 行之元相等。惟從定理三有貳行相同。其定準數之值為0。故此新定準數必為0。

$$\text{即 } a_r A_s + b_r B_s + \dots = 0.$$

$$\text{故於 } \Delta = [a_1 b_2 c_3 d_4]. \text{ 如次推得 } \Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4,$$

$$\text{又 } 0 = b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + b_4 A_4, \quad 0 = a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3 + d_1 D_3.$$

以下類推

427. 定理六 定準數之任意列或任壹行。為兩數量之和者。可以同次之兩定準數表之。

證明如次

$$\begin{vmatrix} a_1 + a'_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + a'_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

其第壹行之係數為 A_1, A_2, A_3 ，則由424章得

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_1 + a'_1)A_1 + (a_2 + a'_2)A_2 + (a_3 + a'_3)A_3 \\ &= (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) + (a'_1 A_1 + a'_2 A_2 + a'_3 A_3) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

由同法可證得如次。

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1 & b_1-\beta_1 & c_1 \\ a_2+a_2 & b_2-\beta_2 & c_2 \\ a_3+a_3 & b_3-\beta_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

428. 定理七 凡定準數之任壹行。或任壹列之諸元。加他之任壹行。或任壹列相應諸元之同倍數者。其值不變。

試證次之三次定準數。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+mb_1+nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2+nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3+nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (A)$$

由定理五。上式之右邊等於

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} mb_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nc_1 & b_1 & c_1 \\ nc_2 & b_2 & c_2 \\ nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

惟上之最後貳項。準422章可證知其為0。故知(A)之等式為恆等式。此即為本題之證。

例 題

1. 試證 $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$

[證] 以爲二行加於第三行。得

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+c+a \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. 證 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 8abcd.$

〔證〕 以第一列加於他之各列。得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} = aA_1 + 0A_2 + 0A_3 + 0A_4 = aA_1 = a \begin{vmatrix} 2b & 2c & 2d \\ 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2d \end{vmatrix}$$

$$= 2ab \begin{vmatrix} 1 & 2c & 2d \\ 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} = 2ab \begin{vmatrix} 2c & 2d \\ 0 & 2d \end{vmatrix} = 4abd \begin{vmatrix} 2c & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 8abcd.$$

3. 試證 $\begin{vmatrix} a+2b & a+4b & a+6b \\ a+3b & a+5b & a+7b \\ a+4b & a+6b & a+8b \end{vmatrix} = 0.$

〔證〕 $\Delta = \begin{vmatrix} a+2b & 2b & a+6b \\ a+3b & 2b & a+7b \\ a+4b & 2b & a+8b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b & 2b & 4b \\ a+3b & 2b & 4b \\ a+4b & 2b & 4b \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc.$

〔證〕 若 $a=0$ 。則 $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & -c & -b \\ b-c & c & b \\ c-b & c & b \end{vmatrix} = 0.$ $\therefore a$ 爲一因子。

由同法 b, c 亦爲因子。 $\therefore \Delta = Aabc, a=b=c=1$ 。則 $8=A$ 。

5. 求 $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$ 之值。

〔解〕 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ 12 & -12 & -12 & 12 \end{vmatrix} = 48 \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

6. 求 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 及 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 之值。

(解) 第一 = $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 5 & 1 \\ -4 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 10 & 5 \\ -4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

第二 = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$
 $= -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 9.$

429. 乘法之原則 如次所示為最要之一例。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l & m & n \\ a_2 & b_2 & c_2 & p & q & r \\ a_3 & b_3 & c_3 & s & t & u \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

(證) 原式為六次式。而 $[a_1 b_2 c_3]$ 及 $[a_1 \beta_2 \gamma_3]$ 各任壹項之積。亦為六次式可知。

惟 $[a_1 b_2 c_3] \times [a_1 \beta_2 \gamma_3]$ 其各項中無有含 l, m, n, \dots 之項者。故 $\Delta = [a_1 b_2 c_3] \times [a_1 \beta_2 \gamma_3] +$ 含 $l, m, n,$ 等之項。而此含 $l, m, n,$ 等之項皆為 0。何則。凡含有 l, m, n 等任一元 l 之項。即 l 乘 l 之小定準數之各項。令 l 之小定準數為 Δ' 。則

$$\Delta' = \left| \begin{array}{cccc} a_2 & b_2 & c_2 & q & r \\ a_3 & b_3 & c_3 & t & u \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array} \right| \quad \text{此 } \Delta' \text{ 之任意項，例如含有 } a_2 \text{ 之項爲}$$

$$a_2 \times \left| \begin{array}{ccc} b_3 & c_3 & t & u \\ 0 & 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array} \right|$$

此式爲0。∴ $\Delta' = 0$ 。由是凡含有 l, m, n 等元之項，皆爲0。

$$\therefore \Delta = [a_1 b_2 c_3] \times [a_1 \beta_2 \gamma_3].$$

依同法可推得凡於 $2n$ 次之定準數，其中有壹個 n 次之小定準數其元爲零者，則此定準數爲兩個 n 次定準數之積。

430. 定準數乘法 今就兩個三次之定準數考之。其他任何次定準數之乘法，仍可由同理推得。

$$\Delta_1 = \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right|, \quad \Delta_2 = \left| \begin{array}{ccc} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array} \right|.$$

由前章易得其相乘積爲六次定準數。若從前章式中令 $l = -1, m = 0, n = 0, p = 0, q = -1, r = 0, s = 0, t = 0, u = -1$ 。則可化爲三次定準數。

$$\Delta_1 \times \Delta_2 = \left| \begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array} \right| \dots\dots\dots (A)$$

a_1 乘第一列， β_1 乘第二列， γ_1 乘第三列，以之加於第四列。又 a_2 乘第一列， β_2 乘第二列， γ_2 乘第三列，以之加於第五列。 a_3 乘第一列， β_3 乘第二列， γ_3 乘第三列，以之加於第六列而得次式，仍與 (A) 同值。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_1a_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1 & b_1a_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1 & c_1a_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1a_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2 & b_1a_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2 & c_1a_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1a_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3 & b_1a_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3 & c_1a_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

此式由 427 章等於次之兩式之積。

即 $- \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 與

$$\begin{vmatrix} a_1a_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1 & b_1a_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1 & c_1a_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 \\ a_1a_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2 & b_1a_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2 & c_1a_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 \\ a_1a_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3 & b_1a_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3 & c_1a_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$
 之積。而

$- \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ 。故此第貳式即為所求之積。(即積之公式)

例 題

1. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$ 以 $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$ 乘之。

[解] 所求之積 = $\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix}$ 由上之公式。

則 $X = ax + by + cz$, $Y = ay + bz + cx$, $Z = az + bx + cy$ 。

∴ 所求之積 = $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ$
 $= (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ 。

2. 證 $\begin{vmatrix} 2bc - a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac - b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix} = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$ 。

[證] 視積之公式 $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b & c \\ c & -a & b \\ b & -c & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & c & a \end{vmatrix}$

$$= -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \times -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2.$$

3. [證] $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$. 但 A, B, \dots 爲於 $(a_1 b_2 c_3)$ 中

a_1, b_1, \dots 之係數。

[證] $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 & B_1 a_1 + B_2 a_2 + B_3 a_3 & C_1 a_1 - C_2 a_2 + C_3 a_3 \\ A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 & B_1 b_1 + B_2 b_2 + B_3 b_3 & C_1 b_1 + C_2 b_2 + C_3 b_3 \\ A_1 c_1 + A_2 c_2 + A_3 c_3 & B_1 c_1 + B_2 c_2 + B_3 c_3 & C_1 c_1 + C_2 c_2 + C_3 c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a_1 b_2 c_3) & 0 & 0 \\ 0 & (a_1 b_2 c_3) & 0 \\ 0 & 0 & (a_1 b_2 c_3) \end{vmatrix} = (a_1 b_2 c_3)^3$$

兩邊以 $(a_1 b_2 c_3)$ 除之。即得 $(A_1 B_2 C_3) = (a_1 b_2 c_3)^2$. 但由 426 章。

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = B_1 b_1 + B_2 b_2 + B_3 b_3 = C_1 c_1 + C_2 c_2 + C_3 c_3 = (a_1 b_2 c_3).$$

$$\text{又 } A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 = \dots = 0.$$

431. 複縱線式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$

如此式爲四次定準數而缺少壹列者。乃用複縱線記之。

此式通例。可化爲少一次之定準數。而原書中。未有說明。惟於後之例題四十二 26 示明壹例。而其值大都爲 0 者。

432. 通同壹次方程式 今用定準數以解壹次通同方程式。

先解壹次之三元方程式。 $a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3$$

此三元方程式順次以 A_1, A_2, A_3 乘之而相加。得

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)y+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)z = k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3.$$

但 A_1, A_2, A_3 爲於 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 各項中 a_1, a_2, a_3 之係數。由 426 章。

得 $a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=[a_1b_2c_3]$ 。

又 $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0$ 。

故上之方程式如次。 $[a_1b_2c_3]x=[k_1b_2c_3]$ ，

由同法 $[a_1b_2c_3]y=[a_1k_2c_3]$ ， $[a_1b_2c_3]z=[a_1b_2k_3]$ ，

次解普通之壹次方程式。卽有 n 個之未知量者。

$$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+\dots=k_1,$$

$$a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+\dots=k_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_nx_1+b_nx_2+c_nx_3+\dots=k_n.$$

如前之法則。將上之方程式。順次以 A_1, A_2, A_3, \dots 乘之而相加。

得 $(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+\dots)x=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+\dots$ 。

但 A_1, A_2, A_3, \dots 爲 $[a_1b_2c_3, \dots]$ 各項中 a_1, a_2, a_3, \dots 之係數。

由 426 章其 x_2, x_3, x_4, \dots 之係數皆爲 0。故

$$x_1 = \frac{[k_1b_2c_3, \dots]}{[a_1b_2c_3, \dots]}, \text{ 同法 } x_2 = \frac{[a_1k_2c_3, \dots]}{[a_1b_2c_3, \dots]}, \dots\dots\dots$$

例 題

1. 解 $x+2y+3z=6, 2x+4y+z=7, 3x+2y+9z=14$ 之方程式。

[解] 由本章之公式

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 14 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}} = 1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}} = 1.$$

2. 解次之方程式 $x+y+z+w+k=0$.

$$ax+by+cz+d+w+k^2=0$$

$$a^2x+b^2y+c^2z+d^2w+k^3=0$$

$$a^3x+b^3y+c^3z+d^3w+k^4=0$$

$$[\text{解}] \quad x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ b & c & d & k^2 \\ b^2 & c^2 & d^2 & k^3 \\ b^3 & c^3 & d^3 & k^4 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \frac{k(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

433. 消去法 次之三方程式。爲同時合理者。求其係數之關係式。

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

於 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 各項中 c_1, c_2, c_3 之係數爲 C_1, C_2, C_3 以此係數順次

乘原三式而相加。得

$$(a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3)x + (b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3)y + c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = 0.$$

惟 x 及 y 之係數。由 426 章得 0. $\therefore c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = 0.$

即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$ 即所求之關係式。

次之通同方程式。可用同法直得關係式。

$$a_1x + b_1y + c_1z = a_2x + b_2y + c_2z = a_3x + b_3y + c_3z = 0.$$

於此方程式。其 x, y, z 皆非爲 0。則得其關係式爲 $[a_1b_2c_3] = 0.$

何則。由前例得 $(c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3)z = 0.$

然 $z \neq 0$, $\therefore c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = 0.$

即 $[a_1b_2c_3] = 0.$

由同法有 n 個方程式其形如 $a_1x + b_1y + \dots + k_1 = 0$ 。而有 $n-1$ 個未知數量者。則其關係式。爲 $[a_1b_2c_3 \dots k_n] = 0.$

434. 賽爾維司端 Sylvester 氏之消去法 此法就 x 之有理整式之任意兩方程式消去其 x 。如次所示之例。

〔第壹例〕 試就兩方程式 $ax^2+bx+c=0, px^2+qx+r=0$ 消去其 x 。

於第壹之方程式。以 x 乘之。得 $ax^3+bx^2+cx=0,$

第壹之方程式。 $ax^2+bx+c=0,$

於第貳之方程式。以 x 乘之。得 $px^3+qx^2+rx=0,$

第貳之方程式。 $px^2+qx+r=0.$

將上之四個方程式消去 x^3, x^2, x 未知數量。與 433 章同法。

而得
$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

〔通法〕 通法用十字法如次。



$$\frac{1}{aq-pb} = \frac{x^2}{br-qc} = \frac{x}{cp-ra}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(cp-ra)^2} = \frac{x^2}{br-qc} \times \frac{1}{aq-pb}$$

由是 $(cp-ra)^2 = (br-qc)(aq-pb).$

〔第貳例〕 試就 $ax^3+bx^2+cx+d=0, px^2+qx+r=0$ 消去其 x 。

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx = 0,$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

$$px^4+qx^3+rx^2 = 0,$$

$$px^3+qx^2+rx = 0,$$

$$px^2+qx+r=0.$$

消去 x^4, x^3, x^2, x 之四個未知數量。為

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

例題四十二

1. 試示 $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$

〔證〕 $\Delta = (b^2+c^2) \begin{vmatrix} c^2+a^2 & bc \\ cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} - ab \begin{vmatrix} -ab & ac \\ cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} + ca \begin{vmatrix} ab & ac \\ c^2+a^2 & bc \end{vmatrix}$
 $= a^2(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2) - a^2b^2(a^2+b^2-c^2) + c^2a^2(b^2-c^2-a^2) = 4a^2b^2c^2.$

2. 試示 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0.$

〔證〕 自第二列及第三列減第一列

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 0 & b-a & (b-a)(a+b+c) \\ 0 & c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(a+b+c) \\ c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$= (b-c)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ 1 & a+b+c \end{vmatrix} = (b-c)(c-a) \times 0 = 0.$$

3. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$

〔證〕 $\Delta = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b' & c'+a' & a'+b' \\ b'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c' & c'+a' & a'+b' \\ c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}$

但 $\begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b' & c'+a' & a'+b' \\ b'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & a+b \\ b' & c' & a'+b' \\ b'' & c'' & a''+b'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a+b \\ b' & a' & a'+b' \\ b'' & a'' & a''+b'' \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ b' & c' & a' \\ b'' & c'' & a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ b' & c' & b' \\ b'' & c'' & b'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a+b & a+b \\ b' & a'+b' & a'+b' \\ b'' & a''+b'' & a''+b'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\text{又} \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c' & c'+a' & a'+b' \\ c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \therefore \Delta = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^2$$

〔證〕 自第一列及第二列減第三列。

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & -a-b-c \\ 0 & a+b+c & -a-b-c \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ c & a & 2c+a+2b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2 (2c+a+2b+a) = 2(a+b+c)^3$$

$$5. \text{ 試示 } \begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

$$\text{〔證〕 } \Delta = abc \begin{vmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix} \text{ 此以下略。}$$

$$6. \begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2(bc+ca+ab)^2$$

$$\text{〔證〕 } \Delta = (b+c)^2 \{ (c+a)^2 (a+b)^2 - a^4 \} - c^2 \{ c^2 (a+b)^2 - a^2 b^2 \} + b^2 \{ c^2 a^2 - b^2 (c+a)^2 \} = (ab+bc+ca) \{ (b+c)^2 (ab+bc+ca+2a^2) - c^2 (ca+bc-ab) + b^2 (ca-bc-ab) \}$$

$$= (ab+bc+ca) \{ (ab+bc+ca) (\overline{b+c}^2 - c^2 - b^2) + 2a^2 (b+c)^2 + 2abc^2 + 2cab^2 \}$$

$$= (ab+bc+ca) \{ (ab+bc+ca) 2bc + 2a(b+c)(ab+bc+ca) \} = 2(ab+bc+ca)^2$$

$$7. \begin{vmatrix} -bc & bc+b^2 & bc+c^2 \\ ca+a^2 & -ca & ca+c^2 \\ ab+a^2 & ab+b^2 & -ab \end{vmatrix} = (bc+ca+ab)^3.$$

[證] $\Delta = -bc\{a^2bc - (ab+b^2)(c+a+c^2)\} - (ca+a^2)$
 $\{-ab(bc+b^2) - (ab+b^2)(bc+c^2)\} + (ab+a^2)\{(bc+b^2)(ca+c^2) + ca(bc+c^2)\}$
 $= b^2c^2(ab+bc+ca) + ab(b+c)(c+a)(ab+bc+ca) + ac(a+b)(b+c)(ab+bc+ca)$
 $= (ab+bc+ca)\{b^2c^2 + ab(b+c)(c+a) + ac(a+b)(b+c)\} = (ab+bc+ca)^3.$

$$8. \begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

[證] $a=0$ 則 $\Delta = \begin{vmatrix} b^2 & 0 & bc \\ 0 & (b+c)^2 & 0 \\ bc & 0 & c^2 \end{vmatrix} = bc \begin{vmatrix} b & 0 & b \\ 0 & (b+c)^2 & 0 \\ c & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$

$\therefore a$ 爲 Δ 之因子。由同法 b, c 亦爲 Δ 之因子。又以 Δ 之第一列加於第二及第三列。以第一行加於第二及第三行。則

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(a+b+c)^2 & (b+c)(a+b+c) & (c+a)(a+b+c) \\ (b+c)(a+b+c) & (b+c)^2 & ab \\ (c+a)(a+b+c) & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2 & b+c & c+a \\ b+c & (b+c)^2 & ab \\ c+a & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}.$$

由是 $abc(a+b+c)^2$ 爲 Δ 之因子。而 Δ 爲六次式。

$$\Delta = Labc(a+b+c)^3, \quad a=b=c=1 \quad \text{則} \quad L=2.$$

$$9. \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

$$10. \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c)(-a+b+c)(-b+c+a)(-c+a+b).$$

〔證〕 將第一式之第二行第三行及第四行順次以 bc, ca 及 ab 乘之。然後將第一列第二列第三列及第四列順次以 $abc, a, b,$ 及 c 除之。而得第二式。其值不變。由是第一式等於第二式。次於第一式以其他之三列加於第一列。皆為 $a+b+c$ 。故 $a+b+c$ 為第一式之因子。又第一列以第二列加之。而減第三第四列之和。則皆為 $-a+b+c$ 。故 $-a+b+c$ 為第一式之因子。其他用同樣之法而得 $a-b+c$ 及 $a+b-c$ 之因子。

$$11. \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & \gamma^2 & \beta^2 \\ b^2 & \gamma^2 & 0 & a^2 \\ c^2 & \beta^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & aa & b\beta & c\gamma \\ aa & 0 & c\gamma & b\beta \\ b\beta & c\gamma & 0 & aa \\ c\gamma & b\beta & aa & 0 \end{vmatrix}.$$

〔證〕 第一式各列順次以 $a\beta\gamma, abc, a\beta c, ab\gamma$ 乘之。其各行順次以 $abc, a\beta\gamma, ab\gamma, a\beta c$ 除之而得第二式。

$$12. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc.$$

〔證〕 $a=0$ 。則 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = 0$ 。

故 a 為 Δ 之因子。由是 $\Delta = Labc$ 。比較 abc 之係數為 $1=L$ 。

$$13. \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$

〔證〕 $\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ -b & b & 0 & 1 \\ 0 & -c & c & 1 \\ 0 & 0 & -d & 1+d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ -c & c & 1 \\ 0 & -d & 1+d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -c & c & 1 \\ 0 & -d & 1+d \end{vmatrix}$

$$= ac\{c(1+d)+d\} + ac(c+d) + bd(c+d) = abcd \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$

$$14. \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c).$$

〔證〕 於第一列加他三列而得 $a+b+c+d$ 。又從第一列加第二列而減第三第四列。得 $a+b-c-d$ 。以下由同法得

$$\Delta = L(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c). \text{ 又 } 1=L.$$

$$15. \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = x^2(x+10).$$

$$\text{〔證〕 } \Delta = \begin{vmatrix} 10+x & 2 & 3 & 4 \\ 10+x & 2+x & 3 & 4 \\ 10+x & 2 & 3+x & 4 \\ 10+x & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = (10+x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}$$

$$= (x+10) \begin{vmatrix} 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & 0 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = (x+10)(-1) \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ x & -x & 0 \\ 0 & x & -x \end{vmatrix}$$

$$= (x+10)(-1) \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = (x+10)(-1)(-x)^3 = x^2(x+10).$$

$$16. \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

$$\text{〔證〕 } \Delta = \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & da \\ -b^2 & ab & -bd & bc \\ -c^2 & cd & ca & -bc \\ -d^2 & -cd & bd & ad \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ -b^2 & ab & -bd & bc \\ -c^2 & cd & ca & -bc \\ -d^2 & -cd & bd & ad \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{a}(a^2+b^2+c^2+d^2) \begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.
 \end{aligned}$$

$$17. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{〔證〕 } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix}.$$

上之第二式之各列。順次以 a, b, c, d 乘之。而第四行以 $abcd$ 除之。其值不變。其絕對值等於第一式而符號爲負。由是原式爲 0。

$$18. \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = a(b-a)^3.$$

$$\begin{aligned}
 \text{〔證〕 } \Delta &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & b-a & 0 & a \\ 0 & 0 & b-a & b \\ a-b & a-b & a-b & b \end{vmatrix} = -(a-b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ b-a & 0 & a \\ 0 & b-a & a \end{vmatrix} \\
 &= -(a-b) \times -(b-a) \{0 - a(b-a)\} = a(b-a)^3
 \end{aligned}$$

$$19. \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = -(a-b)^4.$$

$$\begin{aligned}
 \text{〔證〕 } \Delta &= \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & b \\ 0 & b-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a-b & b \\ a-b & a-b & a-b & b \end{vmatrix} = (a-b)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix} \\
 &= (a-b)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} - (a-b)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = -(a-b)^3 a + (a-b)^3 b.
 \end{aligned}$$

$$20. \begin{vmatrix} ax-by-cz & ay+bx & cx+az \\ ay+bx & by-cz-ax & bz+cy \\ cx+az & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)(ax + by + cz).$$

〔證〕 各行順次以 a, b, c 乘之。各列順次以 x, y, z 乘之。而於第一行加以第二第三行。然後於第一列加以第二第三列如次。

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{1}{abcxyz} \begin{vmatrix} (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) & b^2(x^2+y^2+z^2) & c^2(x^2+y^2+z^2) \\ (a^2+b^2+c^2)y^2 & by(by-cz-ax) & cy(bz+cy) \\ (a^2+b^2+c^2)z^2 & bz(bz+cy) & cz(cz-ax-by) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{ax} (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ y & by-cz-ax & bz+cy \\ z & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{但 } \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ y & by-cz-ax & bz+cy \\ z & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & -cz-ax & bz+cy \\ z & cy & cz-ax-by \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & -cz-ax & bz \\ z & cy & -ax-by \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} bz & -ax-by \\ -cz-ax & cy \end{vmatrix} \\
 &= -bcyz + (cz+ax)(ax+by) = (ax+by+cz)ax.
 \end{aligned}$$

$$\text{由是 } \Delta = \frac{1}{ax} (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)ax(ax + by + cz)$$

$$21. \begin{vmatrix} a^2 & a^2 - (b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2 - (c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2 - (a-b)^2 & ab \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } \Delta &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2 - (b-c)^2 & 2bc \\ 2b^2 & b^2 - (c-a)^2 & 2ca \\ 2c^2 & c^2 - (a-b)^2 & 2ab \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2a^2 & -(a^2 + b^2 + c^2) & 2bc \\ 2b^2 & -(b^2 + c^2 + a^2) & 2ca \\ 2c^2 & -(c^2 + a^2 + b^2) & 2ab \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2 + c^2) \begin{vmatrix} a^2 & 1 & bc \\ b^2 & 1 & ca \\ c^2 & 1 & ab \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -(a^2 + b^2 + c^2) \{ a^2(ab - ca) - b^2(ab - bc) + c^2(ca - bc) \}$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

$$22. \begin{vmatrix} (b-c)^2 & (a-b)^2 & (a-c)^2 \\ (b-a)^2 & (c-a)^2 & (b-c)^2 \\ (c-a)^2 & (c-b)^2 & (a-b)^2 \end{vmatrix} = -2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^2.$$

〔證〕 於第一行加以第二第三行。得

$$\Delta = \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \begin{vmatrix} 1 & (a-b)^2 & (a-c)^2 \\ 1 & (c-a)^2 & (b-c)^2 \\ 1 & (c-b)^2 & (a-b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= - \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \{ \Sigma (a-b)^4 - \Sigma (b-c)^2(c-a)^2 \}$$

$$= - \frac{1}{4} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \}^4$$

23. 某定準數為0。其任意一列之小定準數。與他之任意一列之小定準數。其比例之記法如何。

$$\text{〔證〕 } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{然 } a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n = 0.$$

$$\text{由 426 章 } c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_nA_n = 0 \dots \dots \dots$$

此 $n-1$ 個之方程式。以 $B_1 B_2 \dots$ 代 $A_1 A_2 \dots$ 為能適合。

$$\text{故 } A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = \dots \dots \dots$$

$$24. \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1.$$

[證] $\Delta = abcd \begin{vmatrix} a + \frac{1}{a} & b & c & d \\ a & b + \frac{1}{b} & c & d \\ a & b & c + \frac{1}{c} & d \\ a & b & c & d + \frac{1}{d} \end{vmatrix}$

$$= abcd \begin{vmatrix} a + \frac{1}{a} & b & c & d \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = a^2+1+b^2+c^2+d^2.$$

$$25. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2+a^2 & ab+a\beta & ac+a\gamma \\ 1 & ab+a\beta & b^2+\beta^2 & bc+\beta\gamma \\ 1 & ac+a\gamma & bc+\beta\gamma & c^2+\gamma^2 \end{vmatrix} = (b\gamma - c\beta + ca - a\gamma + a\beta - ba)^2$$

[證] 由第二列減第三列。由第三列減第四列。且令
 $a-b=A$, $b-c=B$, $a-\beta=\lambda$, $\beta-\gamma=\mu$ 如次。

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & aA+a\lambda & bA+\beta\lambda & cA+\gamma\lambda \\ 0 & aB+a\mu & bB+\beta\mu & cB+\gamma\mu \\ 1 & ac+a\gamma & bc+\beta\gamma & c^2+\gamma^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ aA+a\lambda & bA+\beta\mu & cA+\gamma\lambda \\ aB+a\mu & bB+\beta\mu & cB+\gamma\mu \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ aA+a\lambda & -A^2-\lambda^2 & -AB-\lambda\mu \\ aB+a\mu & -AB-\lambda\mu & -B^2-\mu^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A^2-\lambda^2 & -AB-\lambda\mu \\ -AB-\lambda\mu & -B^2-\mu^2 \end{vmatrix}$$

$$= (A^2+\lambda^2)(B^2+\mu^2) - (AB-\lambda\mu)^2 = (A\mu - B\lambda)^2 = (b\gamma - c\beta + ca - a\gamma + a\beta - ba)^2$$

$$26. \text{ 證 } \begin{vmatrix} o & o & o & a & b & c \\ o & o & z & a & b & o \\ o & y & o & a & o & c \\ x & o & o & o & b & c \\ x & y & z & o & o & o \end{vmatrix} = 0.$$

[證] 於第五列加第一列之倍。於第四列加第二列及第三列。

則 $\begin{vmatrix} o & o & o & a & b & c \\ o & o & z & a & b & o \\ o & y & o & a & o & c \\ x & y & z & 2a & 2b & 2c \\ x & y & z & 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$ 第四列與第五列相等。由是此值爲0。

$$27. \begin{vmatrix} x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \\ z^2 - xy & x^2 - yz & y^2 - zx \\ y^2 - zx & z^2 - xy & x^2 - yz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}^2. \text{ 試證之。}$$

[證] $\Delta = (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \begin{vmatrix} 1 & y^2 - zx & z^2 - xy \\ 1 & x^2 - yz & y^2 - zx \\ 1 & z^2 - xy & x^2 - yz \end{vmatrix}$

$$= (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \begin{vmatrix} 1 & y^2 - zx & z^2 - xy \\ 0 & (x-y)(x+y+z) & (y-z)(y+z+x) \\ 0 & (z-x)(x+y+z) & (x-y)(x+y+z) \end{vmatrix}$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)(x+y+z)^2 \{ (x-y)^2 - (z-x)(y-z) \}$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{3}xyz)^2 = \{ -x(yz - x^2) + y(y^2 - zx) - z(xy - z^2) \}^2$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} x & z & x & -y & y & z \\ x & y & x & y & z & x \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} y & z \\ z & x \end{vmatrix} \right\}^2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}^2$$

$$28. \begin{vmatrix} \lambda & c & -b \\ -c & \lambda & a \\ b & -a & \lambda \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a^2 + \lambda^2 & ab - \lambda c & ac + \lambda b \\ ab + \lambda c & b^2 + \lambda^2 & bc - \lambda a \\ ac + \lambda b & bc + \lambda a & c^2 + \lambda^2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 \lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

[證] 由430章。兩式之積爲

$$\begin{vmatrix}
 \lambda(a^2+\lambda^2)-c(ab-\lambda c)+b(ac+\lambda b) & & \\
 \lambda(ab+\lambda c)-c(b^2+\lambda^2)+b(bc-\lambda a) & & \\
 \lambda(ac-\lambda b)-c(bc+\lambda a)+b(c^2+\lambda^2) & & \\
 c(a^2+\lambda^2)+\lambda(ab-\lambda c)-a(ac+\lambda b) & & \\
 c(ab+\lambda c)+\lambda(b^2+\lambda^2)-a(bc-\lambda a) & & \\
 c(ac-\lambda b)+\lambda(bc+\lambda a)-a(c^2+\lambda^2) & & \\
 & -b(b^2+\lambda^2)+a(ab+\lambda c)+\lambda(ac+\lambda b) & \\
 & -b(ab+\lambda c)+a(b^2+\lambda^2)+\lambda(bc-\lambda a) & \\
 & -b(ac-\lambda b)+a(bc+\lambda a)-\lambda(c^2+\lambda^2) & \\
 \lambda^3+(a^2+b^2+c^2)\lambda & 0 & 0 \\
 0 & \lambda^3+(a^2+b^2+c^2)\lambda & 0 \\
 0 & 0 & \lambda^3+(a^2+b^2+c^2)\lambda
 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3(\lambda^2+a^2+b^2+c^2)^3.$$

$$29. \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ w & z & y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x-w & y-z \\ a-d & b-c \end{vmatrix}.$$

[證] 由第四行減第一行。又由第三行減第二行。得

$$\begin{vmatrix} x & y & z-y & w-x \\ a & b & c-b & d-a \\ d & c & b-c & a-d \\ w & z & y-z & x-w \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2x & 2y & z-y & w-x \\ 2a & 2b & c-b & d-a \\ 2d & 2c & b-c & a-d \\ 2w & 2z & y-z & x-w \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x+w & y+z & z-y & w-x \\ a+d & b+c & c-b & d-a \\ 0 & 0 & 2(b-c) & 2(a-d) \\ 0 & 0 & 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b-c & a-d \\ y-z & x-w \end{vmatrix}.$$

第 參 拾 貳 編

論 理 方 程 式

435. 函數 (Function) 凡含有 x 之任何代數式，謂之 x 之函數。而以其類似者，分別記以 $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ 等各個之記號。

凡含有 x 之 n 次有理整代數式，其公式爲

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

但 a_0, a_1, a_2, \dots 不含有 x 者。又 n 爲任意之整數。

凡方程式，往往將其諸項盡集於壹邊，而令又壹邊爲 0。故凡含有 x 之 n 次有理整方程式，其公式可爲

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

方程式以不含 x 之任意數除其各項，其值不變。故以 a_0 除上之方程式，而得 x 之 n 次方程式，爲

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0.$$

但 $p_1 = \frac{a_1}{a_0}$, $p_2 = \frac{a_2}{a_0}, \dots$ 亦皆不含 x 者。而 p_1, p_2, p_3, \dots

任爲何數。

436. 根原之定理 各方程式，必有壹實根或虛根。

n 次方程式，必有 n 根。其理可得證明如次。

設方程式爲 $f(x) = 0$ 。即 $f(x) \equiv x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n$

由根原之定理，此方程式必有壹根。設此壹根爲 a_1 。由 88 章此 $f(x)$ 可以 $x - a_1$ 除盡之。

故 $f(x) = (x - a_1)\phi(x)$ 。但 $\phi(x)$ 爲 x 之整函數，而爲 $n - 1$ 次式。

又 $\phi(x) = 0$ 。亦必有壹根。設此一根爲 a_2 。故 $\phi(x) = (x - a_2)\varphi(x)$ 。

但 $\varphi(x)$ 爲 x 之整函數，而爲 $n - 2$ 次式。故 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\varphi(x)$ 。

順是推之。得 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n)$ 。

如是可知 a_1, a_2, \dots, a_n 為 $f(x)=0$ 之各根。而以任壹根代其 x 。無不適合。

上之根數量 a_1, a_2, \dots, a_n 為各相異者。

若含於 $f(x)$ 之各因子。其 $x-a_1$ 有 p 個。 $x-a_2$ 有 q 個。 $x-a_3$ 有 r 個。其他因子。亦不止壹個者。則 $f(x)=(x-a_1)^p(x-a_2)^q(x-a_3)^r \dots$

但此式為 n 次式。故 $p+q+r+\dots=n$ 。

故凡 n 次方程式 $f(x)=0$ 。若其根有 p 個 a_1 。 q 個 a_2 。 r 個 a_3 。則 $p+q+r+\dots=n$ 。

437. 根及係數之關係 設 a_1, a_2, a_3, \dots 為方程式 $f(x)=0$ 之各根。

$$f(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \dots (x-a_n)$$

$$\begin{aligned} \text{由 260 章得 } x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n \\ \equiv x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \dots + (-1)^n S_n \end{aligned}$$

於上之恆同式。比較 x 各方乘之係數。為

$$S_1 = -\Delta a_1 = -p_1, \quad S_2 = \Delta a_1 a_2 = p_2, \dots$$

$$S_r = (-1)^r p_r, \dots, S_n = (-1)^n p_n$$

438. 根之等勢式 由前章之法。將方程式各項之係數。示以根之等勢函數。而若干根函數之值。可得以各係數表之。

[第壹例] 設方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根為 a, b, c 。求其 (1) Δa^2 , (2) $\Delta a^2 b^2$ 之值。

$$\text{惟因 } a+b+c=-p, \quad ab+bc+ca=q, \quad abc=-r.$$

$$\text{由是 } \Delta a^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = p^2 - 2q,$$

$$\text{又 } \Delta a^2 b^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) = q^2 - 2pr.$$

[第貳例] 設方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p_n=0$ 之根為 a, b, c, \dots 。求 Δa^2 及 Δa^3 之值。

$$\text{惟因 } \Delta a = -p_1, \quad \Delta ab = p_2 \text{ 及 } \Delta abc = -p_3 \dots$$

$$\text{今 } (\Delta a)^2 = (a+b+c+\dots)^2 = \Delta a^2 + 2\Delta ab.$$

$$\therefore \Delta a^2 = (\Delta a)^2 - 2\Delta ab = p_1^2 - 2p_2.$$

$$\text{又 } \Delta a^2 \Delta a = \Delta a^3 + \Delta a^2 b.$$

而 $\Sigma a^2b = \Sigma ab \Sigma a - 3 \Sigma abc$,

[何則於 $\Sigma ab \cdot \Sigma a$ 其中含有 a^2b 及 abc 等之項。惟其中 a^2b 或 ab^2 等各祇有壹項。而以 ab, bc, ca 等乘 a, b, c 等則有 $3abc$ 。

$\therefore \Sigma ab \cdot \Sigma a = \Sigma a^2b + 3 \Sigma abc$ 。

由是 $\Sigma a^3 = \Sigma a^2 \Sigma a - \Sigma ab \cdot \Sigma a + 3 \Sigma abc$
 $= (p_1^2 - 2p_2)(-p_1) - p_2(-p_1) - 3p_3$

439. 定理 設有 n 個數量 a_1, a_2, a_3, \dots 。其 m 為小於 n 之任何整數量。則

$\Sigma a_1^m = \Sigma a_1^{m-1} \cdot \Sigma a_1 - \Sigma a_1^{m-2} \cdot \Sigma a_1 a_2 + \Sigma a_1^{m-3} \cdot \Sigma a_1 a_2 a_3 - \dots$
 $\pm \Sigma a_1 \cdot \Sigma a_1 a_2 \dots a_{m-1} \pm m \cdot \Sigma a_1 a_2 \dots a_m$

此式有次之關係。

$$\left. \begin{aligned} \Sigma a_1^m &= \Sigma a_1 \cdot \Sigma a_1^{m-1} - \Sigma a_1^{m-1} a_2, \\ \Sigma a_1^{m-1} a_2 &= \Sigma a_1 a_2 \cdot \Sigma a_1^{m-2} - \Sigma a_1^{m-2} a_2 a_3, \\ \Sigma a_1^{m-2} a_2 a_3 &= \Sigma a_1 a_2 a_3 \cdot \Sigma a_1^{m-3} - \Sigma a_1^{m-3} a_2 a_3 a_4, \\ &\dots = \dots \end{aligned} \right\} \dots (A)$$

$\Sigma a_1^2 a_2 a_3 \dots a_{m-1} = \Sigma a_1 a_2 \dots a_{m-1} \cdot \Sigma a_1 - m \Sigma a_1 a_2 \dots a_m$

先證第壹之關係。其於 $\Sigma a_1 \cdot \Sigma a_1^{m-1}$ 中。含有 a_1^m 及 $a_1^{m-1} a_2$ 等項。而其各項之係數為一。故 $\Sigma a_1 \cdot \Sigma a_1^{m-1} = \Sigma a_1^m + \Sigma a_1^{m-1} a_2$ 。

除最後之關係式外。其他之關係亦可用同法證得之。

次證最後之關係。其於 $\Sigma a_1 a_2 \dots a_{m-1} \cdot \Sigma a_1$ 中之各項含有如 $a_1^2 a_2 a_3 \dots a_{m-1}$ 之形。及 $a_1 a_2 \dots a_m$ 之形之貳種。而此第壹種如 $a_1 a_2 \dots a_m \times a_1$ 之形者。祇各有壹項。其第貳種以 Σa_1 之各項乘於 $\Sigma a_1 a_2 \dots a_{m-1}$ 而得如 $a_1 a_2 \dots a_m$ 之形者有 m 倍。

由是 $\Sigma a_1 a_2 \dots a_{m-1} \cdot \Sigma a_1 = \Sigma a_1^2 a_2 \dots a_{m-1} + m \cdot \Sigma a_1 a_2 \dots a_m$

乃由關係式 (A)。直得次式。

$\Sigma a_1^m = \Sigma a_1^{m-1} \cdot \Sigma a_1 - \Sigma a_1^{m-2} \cdot \Sigma a_1 a_2 + \Sigma a_1^{m-3} \cdot \Sigma a_1 a_2 a_3 - \dots$
 $\pm m \Sigma a_1 a_2 \dots a_m \dots (B)$

設 a_1, a_2, a_3, \dots 為方程式 $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ 之 n 根。

故 $\Sigma a_1 = -p_1, \Sigma a_1 a_2 = p_2, \Sigma a_1 a_2 a_3 = -p_3, \dots$ 以代入於 B。而得

$\Sigma a_1^m + p_1 \Sigma a_1^{m-1} + p_2 \Sigma a_1^{m-2} + \dots + p_{m-1} \Sigma a_1 + p_m \cdot m = 0 \dots (C)$

(C) 爲 n 次方程式各根 m 乘幕 ($m > n$) 之和。而以係數及根之低乘幕之和表示之。由是可得次之諸公式。

$$\Delta a_1 + p_1 = 0,$$

$$\Delta a_1^2 + p_1 \Delta a_1 + 2p_2 = 0,$$

$$\Delta a_1^3 + p_1 \Delta a_1^2 + p_2 \Delta a_1 + 3p_3 = 0,$$

$$\Delta a_1^4 + p_1 \Delta a_1^3 + p_2 \Delta a_1^2 + p_3 \Delta a_1 + 4p_4 = 0,$$

.....

今欲消去 Δa_1^2 及 Δa_1 。將上之最初之三方程式列之如次。

$$p_1 \Delta a_1^2 + p_2 \Delta a_1 + 3p_3 + \Delta a_1^3 = 0,$$

$$\Delta a_1^2 + p_1 \Delta a_1 + 2p_2 = 0,$$

$$\Delta a_1 + p_1 = 0.$$

由 434 章

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 3p_3 + \Delta a_1^3 \\ 1 & p_1 & 2p_2 \\ 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 3p_3 \\ 1 & p_1 & 2p_2 \\ 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \Delta a_1^3 \\ 1 & p_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 3p_3 \\ 1 & p_1 & 2p_2 \\ 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix} + \Delta a_1^3 = 0,$$

如欲求 Δa_1^m 。則取前之最初方程式消去其 Δa_1^{m-1} , Δa_1^{m-2} ,
..... Δa_1 。由前之法則。推得

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{m-1} & m \cdot p_m + \Delta a_1^m \\ 1 & p_1 & p_2 & \dots & p_{m-2} & (m-1)p_{m-1} \\ 0 & 1 & p_1 & \dots & p_{m-3} & (m-2)p_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & p_{m-4} & (m-3)p_{m-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_1 \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{m-1} & m p_m \\ 1 & p_1 & p_2 & \dots & p_{m-2} & (m-1)p_{m-1} \\ 0 & 1 & p_1 & \dots & p_{m-3} & (m-2)p_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & p_{m-4} & (m-3)p_{m-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{m-1} & \Delta a_1^m \\ 1 & p_1 & p_2 & \dots & p_{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & \dots & p_{m-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & p_{m-4} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{即 } \left| \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{m-1} & m p_m \\ 1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-2} & (m-1)p_{m-1} \\ 0 & 1 & p_1 & \cdots & p_{m-3} & (m-2)p_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & p_{m-4} & (m-3)p_{m-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_1 \end{array} \right| + \Sigma a_1^m = 0.$$

由是 Σa_1^m 爲 p_1, p_2, \dots 之整函數。

若 m 大於 n , 其與 (C) 相應之關係式, 亦容易求得。何則。設 a_1, a_2, \dots 爲 $f(x)=0$ 之根。故得次之 n 方程式。

$$a_1^n + p_1 a_1^{n-1} + p_2 a_1^{n-2} + \cdots + p_n = 0,$$

$$a_2^n + p_1 a_2^{n-1} + p_2 a_2^{n-2} + \cdots + p_n = 0.$$

$$\cdots$$

$$a_n^n + p_1 a_n^{n-1} + p_2 a_n^{n-2} + \cdots + p_n = 0,$$

將上之諸方程式順次以 $a_1^{m-n}, a_2^{m-n}, \dots$ 乘之。而得

$$a_1^m + p_1 a_1^{m-1} + p_2 a_1^{m-2} + \cdots + p_n a_1^{m-n} = 0,$$

$$a_2^m + p_1 a_2^{m-1} + p_2 a_2^{m-2} + \cdots + p_n a_2^{m-n} = 0,$$

$$\cdots$$

$$a_n^m + p_1 a_n^{m-1} + p_2 a_n^{m-2} + \cdots + p_n a_n^{m-n} = 0,$$

由加法得 $\Sigma a_1^m + p_1 \Sigma a_1^{m-1} + p_2 \Sigma a_1^{m-2} + \cdots + p_n \Sigma a_1^{m-n} = 0 \dots (D)$ 。

(C) 爲奈端 [Newton] 氏之考察。由 (D) 可得以任何方程式各根 m 乘冪之和。表示其方程之有理整函數。但 m 爲任意之正整數。

440. 根之等勢函數 凡方程式各根之有理整等勢函數。可用次之關係式表示其係數之項。

$$\Sigma a_1 = -p_1, \quad \Sigma a_1 a_2 = p_2, \quad \Sigma a_1 a_2 a_3 = -p_3.$$

先推究三次之等勢函數。由前之關係易知

$$-p_1^3 = \Sigma a_1^3 + 3 \Sigma a_1^2 a_2 + 6 \Sigma a_1 a_2 a_3,$$

$$-p_1 p_2 = \Sigma a_1^2 a_2 + 3 \Sigma a_1 a_2 a_3,$$

$$-p_3 = \Sigma a_1 a_2 a_3.$$

由上之三方程式。可求得 $\Sigma a_1^2, \Sigma a_1^2 a_2, \Sigma a_1 a_2 a_3$ 而此三者之外更無他種三次之等勢函數。

同法可得以 $p_1^4, p_1^2 p_2, p_1 p_3, p_2^2, p^4$ 表示四次之等勢函數。而四次之等勢函數。可得同值之方程式。

五次及五次以上之等勢函數值。可用同法推得之。

於 p 字下之右隅所表示數字之和。等於等勢函數之次數。

例 p_1^4 即 $p_1 \cdot p_1 \cdot p_1 \cdot p_1$ 其所表數字之和為 $1+1+1+1=4$ 。則為四次之等勢函數。

441. 等勢函數之例 方程式根之有理整等勢函數可得以其各根某乘冪之項表示之。而用奈端氏所定之考案為便。此方法視次例可知。

[第壹例] 試以 $\Sigma a_1^p, \Sigma a_1^q$, 及 Σa_1^{p+q} 之項表示 $\Sigma a_1^p a_2^q$ 。

$$\Sigma a_1^p = a_1^p + a_2^p + a_3^p + \dots$$

$$\Sigma a_1^q = a_1^q + a_2^q + a_3^q + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \Sigma a_1^p \cdot \Sigma a_1^q &= a_1^{p+q} + a_2^{p+q} + \dots + a_1^r a_2^q + \dots + a_1^q a_2^p + \dots \\ &= \Sigma a_1^{p+q} + \Sigma a_1^p a_2^q. \end{aligned}$$

$$\text{由是} \quad \Sigma a_1^p a_2^q = \Sigma a_1^p \cdot \Sigma a_1^q - \Sigma a_1^{p+q}.$$

若 $p=q$, 則

$$\begin{aligned} \Sigma a_1^p \cdot \Sigma a_1^p &= a_1^{2p} + a_2^{2p} + \dots + a_1^p a_2^p + \dots + a_1^p a_2^p + \dots \\ &= \Sigma a_1^{2p} + 2 \Sigma a_1^p a_2^p. \end{aligned}$$

$$\text{由是} \quad \Sigma a_1^p a_2^p = \frac{1}{2} (\Sigma a_1^{2p}) - \frac{1}{2} \Sigma a_1^{2p}.$$

[第貳例] 試以各根某乘冪和之項。表示 $\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r$ 。

$$\Sigma a_1^p = S_p = a_1^p + a_2^p + a_3^p + \dots$$

$$\Sigma a_1^q = S_q = a_1^q + a_2^q + a_3^q + \dots$$

$$\Sigma a_1^r = S_r = a_1^r + a_2^r + a_3^r + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{由是} \quad S_p \cdot S_q \cdot S_r &= \Sigma a_1^{p+q+r} + \Sigma a_1^{p+q} a_2^r + \Sigma a_1^{p+r} a_2^q \\ &\quad + \Sigma a_1^{q+r} a_2^p + \Sigma a_1^p a_2^q a_3^r. \end{aligned}$$

由第壹例。得

$$\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r = S_p \cdot S_q \cdot S_r - S_{p+q} \cdot S_r - S_{p+r} \cdot S_q - S_{q+r} \cdot S_p + 2 S_{p+q+r}$$

前式惟 p, q, r 之值各相異者。能合於理。若 $p=q=r$, 則

$$S_p^3 = a_1^p + a_2^p + a_3^p + \dots)^3 = \Sigma a_1^{3p} + 3 \Sigma a_1^{2p} a_2^p + 6 \Sigma a_1^p a_2^p a_3^p.$$

由第壹例得 $\sum a_1^{2p} a_2^p = \sum a_1^{2p} \cdot \sum a_1^p - \sum a_1^{3p}$.

故 $S_p^3 = \sum a_1^{3p} + 3(\sum a_1^{2p} \cdot \sum a_1^p - \sum a_1^{3p}) + 6 \sum a_1^p a_2^p a_3^p$.

由是 $\sum a_1^p a_2^p a_3^p = \frac{1}{6} \{S_p^3 - 3S_{2p} S_p + 3S_{3p}\}$.

方程式之變化

442. 方程式之變化 推究壹方程式之根與他之已知方程式之根。有特別關係者。

〔第壹〕 求與已知方程式之根符號反對者之方程式。

設已知方程式為 $f(x)=0$ 。則所求之方程式為 $f(-y)=0$ 。

何則。設 $f(x)=0$ 之壹根為 a 。則 $f(a)=0$ 。而 $-a$ 為 $f(-y)=0$ 之壹根。

例已知方程式 $p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ 。則所求之方程式為 $p_0 (-y)^n + p_1 (-y)^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ 。以 -1 乘之。即得 $p_0 y^n - p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} - \dots - (-1)^n p_n = 0$ 。

由是知欲求一方程式。與已知方程式各根之符號相反者。將已知方程式從第二項起變其相間項之符號即得。

〔第貳〕 以壹數量乘已知方程式之各根。求以乘得數為根之方程式。

設已知方程式為 $f(x)=0$ 。以壹數量乘其各根。令 $y=cx$ 。故 $\frac{y}{c}=x$ 。

以是所求之方程式為 $f\left(\frac{y}{c}\right)=0$ 。

何則。設 $f(x)=0$ 之壹根為 a 。則 $f(a)=0$ 。而 ac 為 $f\left(\frac{y}{c}\right)=0$ 之壹根。

例已知方程式為 $p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ 。則所求之方程式。為 $p_0 \left(\frac{y}{c}\right)^n + p_1 \left(\frac{y}{c}\right)^{n-1} + p_2 \left(\frac{y}{c}\right)^{n-2} + \dots + p_n = 0$ 。

即 $p_0 y^n + p_1 c y^{n-1} + p_2 c^2 y^{n-2} + \dots + p_n c^n = 0$ 。

〔注意〕 上之變化。為去方程式各項係數分母之要法。

〔例〕以 c 乘 $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{18} = 0$ 之根而為根。其方程式如何。

所求之方程式。為 $y^3 - \frac{1}{2}cy^2 + \frac{1}{12}c^2y + \frac{1}{18}c^3 = 0$ 。

由是去已知方程式之分數。以 c 之最小數 6 乘之。即得所求之方程式。為 $y^3 - 3y^2 + 3y + 12 = 0$ 。

〔第三〕從已知方程式之各根同減一數。求以減餘者為根之方程式。

從已知方程式 $f(x) = 0$ 之各根減 c 。即 $y = x - c$ 。故 $x = y + c$ 。而 $f(y + c) = 0$ 。為所求之方程式。

何則。設以 a 為 $f(x) = 0$ 之壹根。則 $f(a) = 0$ 。而 $a - c$ 為 $f(y + c) = 0$ 之壹根。

求 $f(y + c)$ 之簡法。詳示於後之 472 章。

〔注意〕上之變化法。用以求數係數方程根之漸近數。或用以消去已知方程式之特別壹項者。

〔例〕求其根為從 $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 = 0$ 減 c 之方程式。

所求之方程式為 $f(y + c) = 0$ 。

即 $(y + c)^3 - 3(y + c)^2 - 9(y + c) + 5 = 0$ 。

即 $y^3 + (3c - 3)y^2 + (3c^2 - 6c - 9)y + c^3 - 3c^2 - 9c + 5 = 0$ 。

如欲消去其第二項即 y^2 之係數而為 0。則令 $3c - 3 = 0$ 。∴ $c = 1$ 。

如欲消去其第三項即 y 之係數而為 0。則令 $3c^2 - 6c - 9 = 0$ 。

即 $(c - 3)(c + 1) = 0$ 。∴ $c = 3$ 或 $c = -1$ 。

〔第四〕以已知方程式各根之反商為各根。其方程式如何。

設已知方程式為 $f(x) = 0$ 。則其所求之方程式為 $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ 。

此變化法。用以求已知方程根負乘冪之和者。蓋以 $f\left(\frac{1}{x}\right)$

即 $f(x^{-1})$ 為 $f(x) = 0$ 之根之負乘冪故也。

443. 反商方程式 方程式任壹根之反商。亦為此方程式之根者。則此方程式。謂之反商方程式。

例 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 之貳根爲 2 及 $\frac{1}{2}$ 。而此反商 $\frac{1}{2}$, 2, 亦爲此方程式之根。故謂之反商方程式。

方程式爲反商方程式者。可求其關係。

設方程式爲 $p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ 。

而以其根之反商爲根作方程式。爲

$$p_0\left(\frac{1}{x}\right)^n + p_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + p_2\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \dots + p_n = 0.$$

以 x^n 乘之。爲 $p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n = 0$ 。

若原方程式爲反商方程式。則此方程式之根。與原方程式之根相同。故此方程式與原方程式 x 等冪之係數。其比相同。

$$\text{即 } \frac{p_0}{p_n} = \frac{p_1}{p_{n-1}} = \frac{p_2}{p_{n-2}} = \dots = \frac{p_n}{p_0}$$

從上式之首末貳等比而得 $p_n^2 = p_0^2$ 。即 $p_n = \pm p_0$ 。

由同法 $p_{n-1} = \pm p_1$, $p_{n-2} = \pm p_2 \dots$

$p_n = +p_0$ 。則自左向右。與自右向左。各項係數之次序相等。此謂反商方程式之第壹種。

$p_n = -p_0$ 。則向左向右。各項係數之絕對值仍相等。惟異其符號而已。此謂反商方程式之第貳種。

444. 反商方程式之性質 反商方程式之性質。其最要者如次。學者可自明瞭也。

[第壹] 第壹種之反商方程式。其次數爲奇數者。則必含有 -1 之壹根。

例 $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$ 之壹根爲 -1 。

[第貳] 第貳種之反商方程式。其次數爲奇數者。則必含有 $+1$ 之壹根。

例 $2x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$ 之壹根爲 $+1$ 。

[第三] 第貳種之反商方程式。其次數爲偶數者。則必含有 ± 1 之貳根。

例 $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$ 之貳根爲 ± 1 。

此方程式可令等於 $2x^4 - 5x^3 + ax^2 - ax^2 + 5x - 2 = 0$ 而推究之。即 x^2 之係數為零者。

〔第四〕 既知第壹第貳第叁之性質。乃將上所述之反商方程式。除去其與根 $(-1, +1, \pm 1)$ 相應之因子。則其餘之方程式。必為第壹種之反商方程式。而其次數為偶數者。

〔第五〕 第壹種之反商方程式。其次數為偶數。可以 y 代其 $x+x^{-1}$ 。而所得之方程式。其次數必為原方程式次數之半。

設反商方程式為 $a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$,

然 $a_0(x^{2n}+1) + a_1(x^{2n-1}+x) + \dots = 0$,

以 x^2 除之得 $a_0(x^n+x^{-n}) + a_1(x^{n-1}+x^{-n+1}) + \dots = 0$ 。

今 $x+x^{-1}=y$ 。則 $x^2+x^{-2}=y^2-2$ 。

其關係之公式為 $x^n+x^{-n}=(x^{n-1}+x^{-n+1})(x+x^{-1})-(x^{n-2}+x^{-n-2})$,

若是 x^n+x^{-n} 可得以 y 之 n 次之整代數式表示之。故知原方程式為 y 之 n 次方程式。

〔例〕 解 $6x^6 - 25x^5 + 31x^4 - 31x^2 + 25x - 6 = 0$ 。

由第三而知此方程式有 ± 1 之貳根。故以 x^2-1 除之。得

$$6x^4 - 25x^3 + 37x^2 - 25x + 6 = 0.$$

以 x^3 除之得 $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x + \frac{1}{x}\right) + 37 = 0$ 。

令 $x + \frac{1}{x} = y$ 則 $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$,

由是 $6y^2 - 25y + 25 = 0$ 。 $\therefore y = \frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$ 。

從 $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ 則得 $x = 2$ 或 $\frac{1}{2}$ 。

從 $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{3}$ 則得 $x = \frac{1}{6}(5 \pm \sqrt{-11})$ 。

由是得所求之根為 $\pm 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}(5 \pm \sqrt{-11})$ 。

445. 應用 上所述之例。為應用於反商方程式者。茲更示方程式變化他種應用之例。

〔第壹例〕 設 a, b, c 爲方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根。今以 bc, ca, ab 爲三根。其方程式如何。

惟以 $abc=-r$ (437 章第壹例)。

則 $bc = \frac{abc}{a} = \frac{-r}{a}$ 。但 bc 爲所求方程式之壹根。即 $y = bc$ 。

又以 $x=a$ 。 $y = \frac{-r}{x}$ 而 y 之三根 bc, ca, ab 與 x 之三根 a, b, c 相應。

故於原方程式以 $-\frac{r}{y}$ 代其 x 。則 $\left(\frac{-r}{y}\right)^3 + p\left(\frac{-r}{y}\right)^2 + q\left(\frac{-r}{y}\right) + r = 0$ 。

即 $-r^2 + pry - qy^2 + y^3 = 0$ 。

〔別法〕 以 $a+b+c=-p$, $bc+ca+ab=q$, $abc=-r$ 。

所求之方程式爲 $(y-bc)(y-ca)(y-ab)=0$ 。

即 $y^3 - (bc+ca+ab)y^2 + abc(a+b+c) - a^2b^2c^2 = 0$ 。

即 $y^3 - qy^2 + pry - r^2 = 0$ 。

〔第貳例〕 方程式爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 。乃以其各根之平方爲根。求其方程式。

從原方程式化得 $x(x^2+q) = -(px^2+r)$ 。

$$\therefore x^2(x^2+q)^2 = (px^2+r)^2。$$

今 $y=x^2$ 。 則 $y(y+q)^2 = (py+r)^2$ 。

即 $y^3 + (2q-p^2)y^2 + (q^2-2pr)y - r^2 = 0$ 。

〔第三例〕 設 a, b, c 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根。乃以 $a(b+c)$, $b(c+a)$, $c(a+b)$ 爲三根。其方程式如何。

惟以 $a+b+c=-p$ 。故 $a(b+c) = a(-p-a)$ 。

同法 $b(c+a) = b(-p-b)$, $c(a+b) = c(-p-c)$ 。

由是 $y = x(-p-x)$, $\therefore x^2+px+y=0$ 。

又從原方程式得 $x(x^2+px)+qx+r=0$ 。

即 $x(-y)+qx+r=0$ 。

$\therefore x = \frac{r}{y-q}$ $\therefore \left(\frac{r}{y-q}\right)^2 + p\left(\frac{r}{y-q}\right) + y = 0$ 。

即 $r^2 + pr(y-q) + y(y-q)^2 = 0$ 。

例題四十三

1. a_1, a_2, a_3 爲 $x^3 + px + q = 0$ 之三根。求次之各值如何。

- (i) $(a_2 + a_3)(a_3 + a_1)(a_1 + a_2)$.
 (ii) $(a_2 + a_3 - 2a_1)(a_3 + a_1 - 2a_2)(a_1 + a_2 - 2a_3)$.
 (iii) Σa_1^3 , (iv) Σa_1^2 , (v) Σa_1^4 .
 (vi) $\Sigma a_1^2 a_2$, (vii) $\Sigma a_1^3 a_2$, (viii) $\Sigma (a_2^3 - a_3 a_1)(a_3^3 - a_1 a_2)$.
 (ix) $(a_1^2 - a_2 a_3)(a_2^2 - a_1 a_3)(a_3^2 - a_2 a_1)$. (x) $\Sigma \frac{1}{a_2 + a_3}$.
 (xi) $\Sigma \frac{1}{a_2 + a_3 - a_1}$. (xii) $\Sigma \frac{1}{a_1^2 + a_2 a_3}$.

【解】 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, $\Sigma a_1 a_2 = p$, $a_1 a_2 a_3 = -q$.

- (i) 原式 $= (-a_3)(-a_2)(-a_1) = -a_1 a_2 a_3 = q$.
 (ii) 原式 $= (-a_1 - 2a_2)(-a_2 - 2a_3)(-a_3 - 2a_1) = -27 a_1 a_2 a_3 = 27q$.
 (iii) 原式 $= (\Sigma a_1)^2 - 2 \Sigma a_1 a_2 = -2p$.
 (iv) 原式 $= \Sigma a_1 (\Sigma a_1^2 - \Sigma a_1 a_2) + 3 a_1 a_2 a_3 = -3q$.
 (v) 原式 $= (\Sigma a_1^2)^2 - 2 \Sigma a_1^2 a_2^2 = (\Sigma a_1^2)^2 - 2 \{ (\Sigma a_1 a_2)^2 - 2 a_1 a_2 a_3 \Sigma a_1 \} = 2p^2$.
 (vi) 原式 $= \Sigma a_1 \Sigma a_1 a_2 - 3 a_1 a_2 a_3 = 3q$.
 (vii) 原式 $= \Sigma a_1^3 (a_2 + a_3) = -\Sigma a_1^4 = -2p^2$.
 (viii) 原式 $= \Sigma a_2^3 a_3^2 - \Sigma a_1 a_3^3 + a_1 a_2 a_3 \Sigma a_1$. 由 (v) 及 (vii)
 $= \frac{1}{2} \{ (\Sigma a_1^2)^2 - \Sigma a_1^4 \} - (-2p^2) = 3p^2$.
 (ix) 原式 $= a_1^2 a_2^2 a_3^2 - \Sigma a_1^3 a_2^2 + a_1 a_2 a_3 \Sigma a_1^2 - a_1^2 a_2^2 a_3^2$
 $= -\{ (\Sigma a_1 a_2)^2 - 3 a_1 a_2 a_3 (a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_1) \} + a_1 a_2 a_3 \Sigma a_1^2$
 $= -\{ p^2 - 3(-q)(-a_3)(-a_1)(-a_2) \} - (-q)(-3q) = -p^2$.
 (x) 原式 $= \Sigma \frac{1}{-a} = -\frac{a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2}{a_1 a_2 a_3} = -\frac{p}{-q} = \frac{p}{q}$.
 (xi) 原式 $= \Sigma \frac{1}{-2a_1} = \frac{p}{2q}$.
 (xii) 原式 $= \Sigma \frac{1}{-a_1(a_2 + a_3) + a_2 a_3} = \Sigma \frac{1}{2a_2 a_3 - p}$
 $= \frac{\Sigma (2a_3 a_1 - p)(2a_2 a_3 - p)}{(2a_2 a_3 - p)(2a_3 a_1 - p)(2a_1 a_2 - p)}$.

$$= \frac{4a_1a_2a_3 \sum a_1 - 4p \sum a_1a_2 + 3p^2}{8a_1^2a_2^2a_3^2 - 4pa_1a_2a_3 \sum a_1 + 2p^2 \sum a_1a_2 - p^3} = \frac{-p^2}{8q^2 - p^3}$$

2. 求 $x^4 + px + q = 0$ 各根之 (i) 平方和 (ii) 立方和 (iii) 四乘方和。

〔解〕 以 a_1, a_2, a_3, a_4 爲其四根。

則 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, \sum a_1a_2 = 0, \sum a_1a_2a_3 = -p, a_1a_2a_3a_4 = q.$

(i) $\sum a_1^2 = (\sum a_1)^2 - 2\sum a_1a_2 = 0.$

(ii) 用 439 章之公式。則 $\sum a_1^3 = - \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 3p_3 \\ 1 & p_1 & 2p_2 \\ 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3p.$

(iii) $\sum a_1^4 = - \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 4p_4 \\ 1 & p_1 & p_2 & 3p_3 \\ 0 & p_1 & 2p_2 & \\ 0 & 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & p & 4q \\ 1 & 0 & 0 & 3p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4q.$

3. 設 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 之三根爲 a, b, c 。則次之值若何。

(i) $(b+c-3a)(c+a-3b)(a+b-3c).$

(ii) $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right).$

(iii) $\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{ab}\right).$

〔解〕 $a+b+c = -p, \sum ab = q, abc = -r.$

(i) 原式 $= (-p-4a)(-p-4b)(-p-4c)$
 $= -(p^3 + 4p^2 \sum a + 16p \sum ab + 64abc)$
 $= -(p^3 - 4p^2 + 16pq - 64r) = 3p^3 - 16pq + 64r.$

(ii) 如以 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 爲三根。其方程式爲 $\frac{1}{x^3} + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x} + r = 0.$

即 $x^3 + \frac{q}{r}x^2 + \frac{p}{r}x + \frac{1}{r} = 0. \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{p}{r}.$

$\sum \frac{1}{ab} = \frac{p}{r}, \frac{1}{abc} = -\frac{1}{r}.$ 原式 $= \left(-\frac{q}{r} - \frac{2}{a}\right)\left(-\frac{q}{r} - \frac{2}{b}\right)\left(-\frac{q}{r} - \frac{2}{c}\right)$

$= -\frac{q^3}{r^3} + \frac{2q^2}{r^3} \sum \frac{1}{a} - 4\frac{q}{r} \sum \frac{1}{ab} - \frac{8}{abc}$

$= -\frac{q^3}{r^3} + \frac{2q^3}{r^3} - \frac{4q}{r^2} + \frac{8}{r} = \frac{q^3 - 4qr + 8r^2}{r^3}$

$$(iii) \text{ 原式} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} - \Delta \frac{1}{a^3 b^3} + \frac{1}{abc} \Delta \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2 b^2 c^2} = \frac{q^3 - p^3 r}{r^4}.$$

4. 求次之方程式各根平方之和及立方之和。

$$(i) \quad x^3 - 14x + 8 = 0, \quad (ii) \quad x^4 - 22x^2 + 84x - 49 = 0.$$

[解] 由 2 及 3 得 (i) 平方之和 28, 立方之和 -24, (ii) 44, -952.

5. 設 $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ 之根爲 a, b, c, \dots , 則次之值如何。

$$(i) \quad \Delta a^2, \quad (ii) \quad \Delta a^3, \quad (iii) \quad \Delta \frac{1}{a^2}, \quad (iv) \quad \Delta \frac{a^2}{b}, \quad (v) \quad \Delta \frac{a^3}{b}, \quad (vi) \quad \Delta \frac{a^3}{b^2}.$$

[解] $a + b + c + \dots = -p_1, \quad \Delta ab = p_2, \quad \Delta abc = -p_3, \dots, \quad abc \dots = (-1)^n p_n$

$$(i) \quad \Delta a^2 = (\Delta a)^2 - 2 \Delta ab = p_1^2 - 2p_2.$$

$$(ii) \quad \text{由 } \Delta a^3 + p_1 \Delta a^2 + p_2 \Delta a + 3p_3 = 0.$$

$$\Delta a^3 = -p_1(p_1^2 - 2p_2) - p_2(-p_1) - 3p_3 = 3p_1 p_2 - p_1^3 - 3p_3.$$

$$(iii) \quad \Delta \frac{1}{a^2} = \Delta \frac{b^2 c^2 \dots}{p_n^2} = \frac{1}{p_n^2} \{ (\Delta bc \dots)^2 - 2abc \dots \Delta bc \dots \}$$

$$= \frac{1}{p_n^2} \{ p_{n-1}^2 - 2(-1)^n p_n (-1)^{n-2} p_{n-2} \} = \frac{p_{n-1}^2 + 2p_n p_{n-2}}{p_n^2}.$$

$$(iv) \quad \Delta \frac{a^2}{b} = \frac{\Delta a^2 - b^2}{b} + \frac{\Delta a^2 - a^2}{a} + \frac{\Delta a^2 - c^2}{c} + \dots + = \Delta a^2 \Delta \frac{1}{a} + \Delta a.$$

$$\text{但 } \Delta \frac{1}{a} = -\frac{p_{n-1}}{p_n} \text{ 故 } = (p_1^2 - 2p_2) \left(-\frac{p_{n-1}}{p_n} \right) - (-p_1)$$

$$= p_1 + \frac{p_{n-1}(2p_2 - p_1^2)}{p_n}$$

$$(v) \quad \Delta \frac{a^3}{b} = \frac{\Delta a^3 - b^3}{b} + \frac{\Delta a^3 - a^3}{a} + \frac{\Delta a^3 - c^3}{c} + \dots = \Delta a^3 \Delta \frac{1}{a} - \Delta a^3$$

$$= (3p_1 p_2 - p_1^3 - 3p_3) \left(-\frac{p_{n-1}}{p_n} \right) - (p_1^3 - 2p_2) = (p_1^3 + 3p_3 - 3p_1 p_2) \frac{p_{n-1}}{p_n} + 2p_2 - p_1^3.$$

$$(vi) \quad \Delta \frac{a^3}{b^2} = \frac{\Delta a^3 - b^3}{b^2} + \frac{\Delta a^3 - a^3}{a^2} + \dots = \Delta a^3 \Delta \frac{1}{a^2} - \Delta a$$

$$= \Delta a^3 \left\{ \left(\Delta \frac{1}{a} \right)^2 - 2 \Delta \frac{1}{ab} \right\} - \Delta a \quad \text{惟 } \Delta \frac{1}{ab} = \frac{p_{n-2}}{p_n} \text{ 故}$$

$$= \frac{1}{p_n^2} (3p_1 p_2 - p_1^3 - 3p_3) (p_{n-1}^2 - 2p_{n-2} p_n) + p_1.$$

6. 以方程式 $x^3-4x^2+3x-1=0$ 之各根加 2 而為根。其方程式如何。

〔解〕 $x+2=y$ 。則 $x=y-2$ 。由是所求之方程式為
 $(y-2)^3-4(y-2)^2+3(y-2)-1=0$ 。即 $y^3-10y^2+31y-31=0$ 。

7. 以 $6x^3-5x^2-\frac{1}{4}=0$ 各根之 c 倍為各根。求其方程式。又最高方乘之係數為 1。而得整方程式。求 c 之最小整數值。

〔解〕 $cx=y$ 。則 $\frac{6y^3}{c^3}-\frac{5y^2}{c^2}-\frac{1}{4}=0$ 。即 $y^3-\frac{5c}{6}y^2-\frac{c^3}{24}=0$ 。∴ $c=6$ 。

8. 設 x^3+px^2+qx+r 之各根為 a, b, c 。求其有下列各根之方程式

- (i) ab, bc, ca . (ii) $b+c, c+a, a+b$.
 (iii) $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{a+c}, \frac{c}{a+b}$. (iv) $a(b+c), b(c+a), c(a+b)$.
 (v) $b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2$. (vi) $bc-a^2, ca-b^2, ab-c^2$.

〔解〕 $a+b+c=-p$, $\Sigma ab=q$, $abc=-r$ 。

(i) 與 445 章第一例同法求之即得。

(ii) $b+c=a+b+c-a=-p-a$ 。即 $y=-p-x$ ∴ $x=-(y+p)$
 以此代入原式而整列之。得 $y^3+2py^2+(p^2+q)y-r+pq=0$ 。

(iii) $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{-p-a}$ 即 $y=\frac{x}{-p-x}$ ∴ $x=\frac{-py}{y+1}$

由是 $-\frac{p^3y^3}{(y+1)^3}+\frac{p^2y^2}{(y+1)^2}-\frac{pqy}{y+1}+r=0$ 。

即 $y^2(r-pq)+y^2(3r-2pq+p^2)+y(3r-pq)+r=0$ 。

(iv) $a(b+c)=a(-p-a)$ 。即 $y=x(-p-x)$ 。∴ $x^2+px=-y$ 。

從原方程式 $x(x^2+px)+qx+r=0$ 。即 $x(-y)+qx+r=0$ 。

∴ $x=\frac{r}{y-q}$ 由是 $\frac{r^2}{(y-q)^2}+\frac{pr}{y-q}=-y$ 。

∴ $y^3-2qy^2+y(q^2+rp)+r^2-pqr=0$ 。

(v) $b^2+c^2=(a+b+c)^2-2\Sigma ab-a^2=p^2-2q-a^2$ 。

即 $y=p^2-2q-x^2$ 。∴ $x^2=p^2-2q-y$ 。

以此代入原式得 $x(p^2-2q-y)+p(p^2-2q-y)+qx+r=0$ 。

$$\therefore x^2 = \frac{(2pq - p^2 - r + py)^2}{(p^2 - q - y)^2} = p^2 - 2q - y.$$

$$(vi) \quad bc - a^2 = \frac{abc}{a} - a^2 = \frac{-r}{a} - a^2, \quad \text{即} \quad y = -\frac{r}{x} - x^2.$$

由是 $x^2 + xy + r = 0$. 原方程式為 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

由此兩方程式消去其 x . 則 $y^3 - (3p - p^2)y^2 + (3q^2 - qp^2)y + rp^3 - q^3 = 0$.

9. $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ 之根為 a, b, c, d . 求其有次之各根之方程式.

$$(i) \quad b+c+d, c+d+a, d+a+b, a+b+c.$$

$$(ii) \quad b+c+d-2a, c+d+a-2b, d+a+b-2c, a+b+c-2d.$$

$$(iii) \quad b^2+c^2+d^2-a^2, c^2+d^2+a^2-b^2, d^2+a^2+b^2-c^2, a^2+b^2+c^2-d^2.$$

$$[解] \quad \Sigma a = -p, \quad \Sigma ab = q, \quad \Sigma abc = -r, \quad abcd = s.$$

$$(i) \quad b+c+d = -p-a, \quad \text{即} \quad y = -p-x.$$

$$\therefore \text{由原方程式} (y+p)^4 - p(y+p)^3 + q(y+p)^2 - r(y+p) + s = 0.$$

$$(ii) \quad b+c+d-2a = -p-3a, \quad \text{即} \quad y = -p-3x.$$

$$\therefore \text{由原方程式} \left(\frac{y+p}{3}\right)^4 - p\left(\frac{y+p}{3}\right)^3 - q\left(\frac{y+p}{3}\right)^2 - r\left(\frac{y+p}{3}\right) + s = 0.$$

$$(iii) \quad b^2+c^2+d^2-a^2 = (\Sigma a)^2 - 2\Sigma ab - 2a^2, \quad \text{即} \quad y = p^2 - 2y - 2x^2.$$

此式與原方程式消去其 x 即得.

10. 以 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 各根之立方為各根. 求其方程式.

$$[解] \quad \text{由原方程式} (x^3+r)^3 = -(px^2+qx)^3 \\ = -p^3x^6 - q^3x^3 - 3pqx^3(px^2+qx)$$

$$= -p^3x^6 - q^3x^3 + 3pqx^3(x^3+r),$$

$$x^3 = y, \quad \text{則} \quad (y+r)^3 = -p^3y^3 - q^3y + 3pqy(y+r).$$

446. 虛數 凡方程式. 其係數為實數而含有虛根者. 則其虛根之數. 必為偶數.

設 $f(x) = 0$ 之壹根為 $a + b\sqrt{-1}$. 則 $x - a - b\sqrt{-1}$ 必為 $f(x) = 0$ 之壹因子. 由 193 章而知 $x - a + b\sqrt{-1}$ 亦必為 $f(x) = 0$ 之壹因子. 故 $a - b\sqrt{-1}$ 亦為 $f(x) = 0$ 之壹根.

因是 $f(x) = 0$ 之貳根. 若為 $a \pm b\sqrt{-1}$. 則此 $f(x)$ 必含有 $(x - a - b\sqrt{-1})(x - a + b\sqrt{-1})$. 即 $(x - a)^2 + b^2$ 之實數二次因子.

447. 不盡根 凡方程式其係數爲有理數而含有不盡根者。則其不盡根之數必爲偶數。

設 $f(x)=0$ 之壹根爲 $a+\sqrt{b}$ 。則 $x-a-\sqrt{b}$ 必爲 $f(x)=0$ 之壹因子。由 179 章而知 $x-a+\sqrt{b}$ 亦必爲其壹因子。故 $a-\sqrt{b}$ 亦爲 $f(x)=0$ 之壹因子。

由是 $f(x)=0$ 若有 $a\pm\sqrt{b}$ 之二根。則此 $f(x)$ 必含有 $(x-a)^2-b$ 之有理二次因子。

例 題

1. 既知 $x^4-2x^3-22x^2+64x-15=0$ 之一根爲 $2+\sqrt{3}$ 。試解此方程式。

〔解〕 $2+\sqrt{3}$ 爲此方程式之一根。故 $2-\sqrt{3}$ 亦爲此方程式之一根。故以 $(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=x^2-4x+1$ 除原方程式。得 $x^2+2x-15=0$ 。 $\therefore x=3$ 或 -5 。

由是此方程式之各根爲 $2\pm\sqrt{3}$, 3 , -5 。

2. 既知 $2x^3-15x^2+46x-42=0$ 之一根爲 $3+\sqrt{-5}$ 。試解此方程式。

〔解〕 $3+\sqrt{-5}$ 爲此方程式之一根。故 $3-\sqrt{-5}$ 亦爲此方程式之一根。故以 $(x-3-\sqrt{-5})(x-3+\sqrt{-5})=x^2-6x+14$ 除原方程式。得 $2x-8=0$ 。 $\therefore x=\frac{8}{2}$ 。故此方程式之根爲 $3\pm\sqrt{-5}$, $\frac{8}{2}$ 。

3. 既知 $x^6-4x^5-11x^4+40x^3+11x^2-4x-1=0$ 之壹根爲 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 。試解此方程式。

〔解〕 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 爲有理係數方程式之一根。而含有 \sqrt{a} 及 \sqrt{b} 之不盡根。當有 $\pm\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 之四根。由是知本題爲有 $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$ 之四根。故以 $(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})=x^4-10x^2+1$ 除原方程式。得 $x^2-4x-1=0$ 。由是 $x=2\pm\sqrt{5}$ 。

故所求之根爲 $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$, $2\pm\sqrt{5}$ 。

4. 解 $x^4-x^3-9x^2-14x+8=0$ 。但其一根爲 $-1+\sqrt[3]{3}$ 。

〔解〕 $x+1-\sqrt[3]{3}$ 爲原方程式之壹因子。而有 $x+1-\sqrt[3]{3}$ 之因子者。其有理式爲 $(x+1)^3-3$ 。

由是方程式爲 $\{(x+1)^3-3\}(x-4)=0$.

故原方程式之根爲 4, $-1+\sqrt[3]{3}$, $-1+\omega\sqrt[3]{3}$, $-1+\omega^2\sqrt[3]{3}$.

但 ω 爲 1 之立方根。

448. 兩方程式之公根 兩方程式 $f(x)=0$, $\phi(x)=0$. 如有壹或壹以上之公共根者. 則其公根必爲 $f(x)$, $\phi(x)$ 之公因子. 故用 98 章之方法. 即可求得其公根.

[例] 求 $x^3-3x^2-10x+24=0$ 及 $x^3-6x^2-40x+192=0$ 之公根.

此 H.C.F. 爲 $x-4$. \therefore 公根爲 4.

449. 根之關係 知方程式貳根之關係. 可求得其根.

[第壹例] $x^3-3x^2-10x+24=0$ 之壹根. 爲他壹根之貳倍. 試解此方程式.

設此方程式之貳根爲 a, b . 而 $a=2b$. 以 a 爲此方程式之壹根.

故 $a^3-3a^2-10a+24=0$ (1)

又以 b 即 $\frac{1}{2}a$. 亦爲此方程式之壹根.

故 $\left(\frac{1}{2}a\right)^3-3\left(\frac{1}{2}a\right)^2-10\left(\frac{1}{2}a\right)+24=0$.

即 $a^3-6a^2-40a+192=0$ (2)

求 (1), (2) 左邊之公因子得 $a-4$. $\therefore a=4, b=2$.

既知其貳根爲 4, 2. 則其餘之壹根. 亦易於求得爲 -3.

[第貳例] $2x^3-15x^2+37x-30=0$ 之三根爲等差級數. 試解此方程式.

三根爲等差級數. 故其和等於中央壹根之三倍. 而三根之和爲 $+\frac{15}{2}$. 今令 a 爲中央之壹根. 則 $3a=\frac{15}{2}$ 即 $a=\frac{5}{2}$. 故原方程式之壹因子爲 $2a-5$. 以除原方程式得 $x^2-5x+6=0$. $\therefore x=2, 3$.

[貳根之關係] 凡方程式 $f(x)=0$ 之貳根爲 a 及 b . 此關係式 $b=\phi(a)$. 則 $f(x)=0$ 及 $f\{\phi(x)\}=0$ 必有壹根爲此貳式所公有者. 故由 448 章可求得其公根.

[例] $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根 (i) 等差級數, (ii) 等比級數, 其關係如何。

$$(i) \quad a+b+c=3b, \quad \therefore b=\frac{1}{3}(a+b+c)=-\frac{1}{3}p.$$

$$b \text{ 爲壹根, 故 } \left(-\frac{p}{3}\right)^3+p\left(-\frac{p}{3}\right)^2+q\left(-\frac{p}{3}\right)+r=0.$$

$$\text{即} \quad 2p^3-9pq+27r=0.$$

$$(ii) \quad abc=b^3, \quad \therefore b=\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{-r}. b \text{ 爲原方程式之壹根.}$$

$$\text{故 } -r+p(-r)^{\frac{2}{3}}+q(-r)^{\frac{1}{3}}+r=0. \text{ 即 } p^3r=q^3.$$

450. 可通度之根 凡方程式各項之係數悉爲有理者, 其可通度之根, 易於求得之。

第壹項之係數爲 1, 而他項之係數悉爲整數者, 則其方程式無有分數之根。

何則, 若以 $\frac{a}{b}$ 爲 $f(x)=0$ 之壹根, (但 $\frac{a}{b}$ 爲已約分數)。

$$\text{則} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n+p_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\dots\dots\dots+p_n=0.$$

$$\text{以 } b^{n-1} \text{ 乘之, 得 } \frac{a^n}{b}+p_1a^{n-1}+\dots\dots\dots+b^{n-1}p_n=0.$$

惟以 a 與 b 爲互素, 則 a^n 與 b 亦爲互素。

今第壹項爲分數, 其他項之係數爲整數, 是與題意相反, 故方程式其第壹項之係數爲 1, 其他各項之係數悉爲整數者, 則無分數之根。

由 442 章第貳, 任意之方程式可得變化之, 使其第壹項之係數爲 1, 而他項之係數悉爲整數, 由是方程式若無有可通度之根, 而其根爲分數者, 可依 442 章第貳變化之法, 變其方程式, 以求其根。

設 a 爲 $f(x)=0$ 之整根, 則 $x-a$ 爲 $f(x)$ 之壹因子, 故此 a 爲於 $f(x)$ 中不含 x 項之壹因子, 若將 p_n 之諸因子一一代入於 $f(x)$ 而其式爲 0 者, 則此因子, 卽爲所求之根。

[例] 求 $x^4-27x^2+42x+8=0$ 之可通度之根。

此可通度之根。爲8之因子。故此根必在 $\pm 8, \pm 4, \pm 2, \pm 1$ 之內。以是順次代入於原方程式。而其式之值爲0者。惟4及2。故知其貳根爲4及2。由原方程式得 $(x-2)(x-4)(x^2+6x+1)=0$ 。

$$\therefore x=2, 4, -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

例 題 四 十 四

1. $x^4+2x^3-16x^2-22x+7=0$ 之一根爲 $2+\sqrt{3}$ 。試解此方程式。

[解] 以 $\{x-(2+\sqrt{3})\}\{x-(2-\sqrt{3})\}=x^2-4x+1$ 除原方程之左邊。得 $x^2+6x+7=0$ 。∴ $x=-3 \pm \sqrt{2}$ 。由是所求之根爲 $2 \pm \sqrt{3}, -3 \pm \sqrt{2}$ 。

2. $3x^3-23x^2+72x-70=0$ 之一根爲 $3+\sqrt{-5}$ 。試解此方程式。

[答 $3 \pm \sqrt{-5}$ 。]

3. $3x^5-4x^4-42x^3+56x^2+27x-36=0$ 之一根爲 $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ 求其他之根。

[解] 原方程式有 $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{5}$ 之四根。故

$$(x-\sqrt{2}-\sqrt{5})(x-\sqrt{2}+\sqrt{5})(x+\sqrt{2}-\sqrt{5})(x+\sqrt{2}+\sqrt{5})=x^4-14x^2+9.$$

以除原式。得 $3x-4=0$ ∴ $x=\frac{4}{3}$ 。

4. $2x^6-3x^5+5x^4+6x^3-27x+81=0$ 之一根爲 $\sqrt{2}+\sqrt{-1}$ 求其他根。

[解] 原方程式之根爲 $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{-1}, \frac{3}{4}(1 \pm \sqrt{-7})$ 。

5. 求有 $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ 之一根而爲有理係數之準二次方程式。

[解] $(x-\sqrt{3}-\sqrt{5})(x-\sqrt{3}+\sqrt{5})(x+\sqrt{3}-\sqrt{5})(x+\sqrt{3}+\sqrt{5})=0$ 。

即 $x^4-16x^2+4=0$ 。爲所求之方程式。

6. 求有 $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$ 之一根而爲有理係數之準二次方程式。

[答 $x^4+2x^2+25=0$]

7. 試示 $x^3-2x^2-2x+1=0$ 及 $x^4-7x^2+1=0$ 之二個公共根。

[解] 求 $x^3-2x^2-2x+1=0$ 及 $x^4-7x^2+1=0$ 之H.C.F.爲 x^2-3x+1 。故有二個公共根。

8. 既知 $x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0$ 之二根爲如 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ 及 $\alpha+2\beta\sqrt{-1}$ 之形。試解此方程式。

〔解〕 原方程式四根之和 $=4a=-(-4)$. $\therefore a=1$.

又 $\alpha+\beta\sqrt{-1}=a$, $\alpha+2\beta\sqrt{-1}=b$. 則 $b=2a-\alpha$. 即 $b=2a-1$.

由是原方程式. 得 $a^4-4a^3+11a^2-14a+10=0$ (1)

又 $(2a-1)^4-4(2a-1)^3+11(2a-1)^2-14(2a-1)+10=0$.

即 $4a^4-16a^3+29a^2-28a+10=0$ (2)

由 (1)(2) $a^2-2a+2=0$. $\therefore a=1\pm\sqrt{-1}$, $b=1\pm 2\sqrt{-1}$.

9. $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根為 $H.P$ 求其關係.

〔解〕 a, b, c , 為三根. 則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, $\therefore a+c=\frac{2ac}{b}$.

即 $a+b+c=\frac{2abc}{b^2}+b$ 即 $-p=\frac{-2r}{x^2}+x$. $\therefore x^3+px^2-2r=0$.

由原方程式減之. 得 $qx+3r=0$. $\therefore x=\frac{3r}{q}$.

以代於原方程式而簡之. 得 $2q^3-9pqr+27r^2=0$.

10. $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之四根為 $A.P$ 其關係如何.

〔解〕 設 a, b, c, d 為四根. 則 $\Sigma a=-p$, $\Sigma ab=q$, $\Sigma abc=-r$, $abcd=s$

惟其四根為 $A.P$. 故 $a+d=b+c=-\frac{p}{2}$.

由 $\Sigma abc=-r$. $bc\left(-\frac{p}{2}\right)+ad\left(-\frac{p}{2}\right)=-r$. $\therefore bc+ad=\frac{2r}{p}$.

又由 $\Sigma ab=q$, $ad+bc+a\left(-\frac{p}{2}\right)+d\left(-\frac{p}{2}\right)=q$, $\therefore ad+bc=q-\frac{p^2}{4}$.

由是 $\frac{2r}{p}=q-\frac{p^2}{4}$, $\therefore p^3-4pq+8r=0$ (所求之第一關係)

$a=m-3n$, $b=m-n$, $c=m+n$, $d=m+3n$. 則 $\Sigma a=4m=-p$.

$\therefore m=-\frac{p}{4}$, $\Sigma ab=6m^2-10n^2=q$. $\therefore n^2=\frac{3p^2-8q}{80}$.

又由 $abcd=m^4-10m^2n^2+9n^4=s$.

$$\left(-\frac{p}{4}\right)^4-10\left(-\frac{p}{4}\right)^2\left(\frac{3p^2-8q}{80}\right)+9\left(\frac{3p^2-8q}{80}\right)^2=s.$$

即 $(p^3+4q)(36q-11p^2)-1600s=0$ (所求之第二關係).

11. $x^3-3x^2-13x+15=0$ 之三根為 $A.P$. 試解此方程式.

〔解〕 三根爲 a, b, c 。則 $2b = a + c$ 。即 $3b = a + b + c = 3$ 。

$\therefore b = 1, abc = -15$ 。 $\therefore ac = -15, a + b + c = 3$ 。 $\therefore a + c = 2$ 。

由是 $a = 5, c = -3$ 。故所求之根爲 $5, 1, -3$ 。

12. $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0$ 之四根爲 A, P 。試解此方程式。

〔解〕 由 10 題 $m = -\frac{p}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ 。

$$n^2 = \frac{3p^2 - 8q}{80} = \frac{3 \cdot 2^2 - 8(-21)}{80} = \frac{9}{4}, \quad \therefore n = \frac{3}{2}.$$

$\therefore m - 3n = -\frac{1}{2} - 3, \frac{3}{2} = -5, m - n = -2, m + n = 1, m + 3n = 4$ 。

\therefore 所求之根爲 $-5, -2, 1, 4$ 。

13. 求次之方程式可通度之根。

(i) $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$ 。 (ii) $x^4 - x^3 + 13x^2 + 16x - 48 = 0$ 。

(iii) $3x^3 - 26x^2 + 34x - 12 = 0$ 。

〔解〕 (i) 所求之根爲在 $\pm 15, \pm 5, \pm 3, \pm 1$ 之內。而以 3 代其 x 爲適合。 $\therefore x = 3$ 。

(ii) 與前同法。得所求之根爲 $+4, -4$ 。

(iii) $y = cx$ 而變原方程式爲 $3\left(\frac{y}{c}\right)^3 - 26\left(\frac{y}{c}\right)^2 + 34\left(\frac{y}{c}\right) - 12 = 0$ 。

即 $3y^2 - 26cy + 34c^2y - 12c^3 = 0$ 。設 $c = 3$ 則 $y^3 - 26y + 102y - 180 = 0$ 。

$\therefore y = 2$ 故 $x = \frac{y}{c} = \frac{2}{3}$ 。

14. 既知 $4x^3 - 32x^2 - x + 8 = 0$ 二根之和爲 0。試解此方程式。

〔解〕 二根爲 a, b 則 $a + b = 0$ 。即 $a = -b$ 。

由是 $-4b^3 - 32b^2 + b + 8 = 0$ ，又 $4b^3 - 32b^2 - b + 8 = 0$ 。

由此兩方程式 $-64b^2 + 16 = 0$ 。 $\therefore b = \frac{1}{2}$ 。 $\therefore a = -\frac{1}{2}$ 。

乃以 $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 4x^2 - 1$ 除原方程式。得 $x - 8 = 0$ 。

$\therefore x = 8$ ，故所求之根爲 $\pm \frac{1}{2}, 8$ 。

15. 已知 $x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 8x + 6 = 0$ 二根之和爲 0。試解此方程式。

[解] 設二根爲 x 及 $-x$ 。則得又一方程式 $x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 8x + 6 = 0$ 。與原方程式相消得 $8x^3 - 16x = 0$ 。 $x^2 - 2 = 0$ 。 $\therefore x = \pm\sqrt{2}$ 。故以 $x^2 - 2$ 除原方程式。得 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 。 $\therefore x = -2 \pm \sqrt{5}$ 。故所求之根爲 $\pm\sqrt{2}$ ， $-2 \pm \sqrt{5}$ 。

16. 既知 $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ 二根之和爲 0。則其關係如何。

[解] 二根之和爲 0。則其二根數量相等。而符號相反。故以 $-x$ 代 $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ 之 x 。而得 $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ 。

由加法得 $x^4 + qx^2 + s = 0$ 。由減法得 $px^3 + rx = 0$ 。 $\therefore x^2 = -\frac{r}{p}$ 。

$\therefore \left(-\frac{r}{p}\right)^2 + q\left(-\frac{r}{p}\right) + s = 0$ 。 $\therefore r^2 - pqr + p^2s = 0$ 。爲所求之關係。

17. 既知 $x^3 - 79x + 210 = 0$ 二根之關係爲 $a = 2\beta + 1$ 。試解此方程式。

[解] $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 。 $\therefore \gamma = -(\alpha + \beta) = -(3\beta + 1)$ $\alpha\beta\gamma = -210$ 。

即 $-(2\beta + 1)\beta(3\beta + 1) = -210$ 。即 $6\beta^3 + \beta^2 + \beta - 210 = 0$ 。

$\therefore 6x^3 + 5x^2 + x - 210 = 0$ 。原方程式爲 $x^3 - 79x + 210 = 0$ 。

求得上兩方程式之公共根爲 3。 $\therefore \alpha = 2\beta + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ 。

\therefore 由原方程式 $(x-7)(x-3)(x+10) = 0$ 。 \therefore 所求之根爲 7, 3, -10。

18. 既知 $3x^3 - 32x^2 + 33x + 108 = 0$ 之一根。爲他一根之平方。試解此方程式。

[解] 以 x^2 代於原方程式之 x 。得 $3x^6 - 32x^4 + 33x^2 + 108 = 0$ 。

此式與原方程式。求其公共根而得 $x = 3$ 。

故所求之根爲 3, 9, $-\frac{3}{4}$ 。

19. $x^n + np x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} q x^{n-2} + \dots = 0$ 之根爲 A, P 。如 n 爲偶數。則於 $-p + r \left\{ \frac{3(p^2 - q)}{n+1} \right\}^{\frac{1}{2}}$ 以 1, 3, 5, ……代其 r 。即得各根。如 n 爲奇數。則以 2, 4, 6, ……代其 r 。即得各根。試證之。

[證] 設最小數爲 a 。公差爲 b 。則 $\frac{n}{2} \{2a + (n-1)b\} = -np$ 。

$$\therefore d = -\frac{2(p+a)}{n-1}. \text{又各二根之積之和} = -\frac{n(n-1)}{1.2}q.$$

$$\text{即 } (-np)^2 - 2\frac{n(n-1)}{1.2}q = a^2 + (a+d)^2 + \dots + \{a+(n-1)d\}^2.$$

由 321 章求上之右邊之級數而得

$$n^2p^2 - n(n-1)q = na(a+nd) + \frac{nd^2}{3}(n^2-1) - \frac{nd}{2}\{2a+(n-1)d\}. \text{以}$$

$$d = -\frac{2(p+a)}{n-1} \text{ 代入上式且變化之得}$$

$$np^2 - n(n-1)q = a^2 - \frac{2an(p+a)}{n-1} + \frac{4(n+1)(p+a)^2}{3(n-1)} + \frac{2p(p+a)}{n-1}.$$

$$\therefore a^2(x+1) + 2ap(n+1) - p^2(3n^2-7n+2) + 3q(n-1)^2 = 0.$$

$$\therefore a = -p + (n-1)\left\{\frac{3(p^2-q)}{n+1}\right\}^{\frac{1}{2}}. \text{即 } r = n-1.$$

若 n 爲偶數。則 r 爲 1, 3, 5, …… 又 n 爲奇數。則 r 爲 2, 4, 6, …… 其各根順次得

$$-p + \left\{\frac{3(p^2-q)}{n-1}\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad -p + 3\left\{\frac{3(p^2-q)}{n-1}\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad -p + 5\left\{\frac{3(p^2-q)}{n-1}\right\}^{\frac{1}{2}}, \dots \dots \dots \text{何則。以}$$

$$d = -\frac{2(p+a)}{n-1} = -2\left\{\frac{3(p^2-q)}{n-1}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{ 故也。}$$

20. $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ 之四根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 有次之關係者。則其係數之關係如何。

$$(i) \alpha\beta = \gamma\delta. \quad (ii) \alpha\beta + \gamma\delta = 0.$$

$$\text{[解]} \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = -p, \quad \Sigma \alpha\beta = q, \quad \Sigma \alpha\beta\gamma = -r, \quad \alpha\beta\gamma\delta = s.$$

$$(i) \text{ 以 } \alpha\beta = \gamma\delta, \text{ 故 } \alpha^2\beta^2 = s, \text{ 又以 } \Sigma \alpha\beta\gamma = -r, \text{ 則 } \alpha\beta(\gamma + \delta) + \gamma\delta(\alpha + \beta) = -r$$

$$\text{即 } \alpha\beta(-p) = -r, \therefore \alpha^2\beta^2p^2 = r^2, \text{ 即 } sp^2 = r^2, \therefore p^2s - r^2 = 0.$$

$$(ii) \alpha\beta + \gamma\delta = 0. \therefore \alpha^2\beta^2 = -s.$$

$$\text{又以 } \Sigma \alpha\beta\gamma = \alpha\beta(\gamma + \delta) + \gamma\delta(\alpha + \beta) = -r, \alpha\beta\{(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)\} = -r.$$

$$\text{由是 } \alpha^2\beta^2\{(\gamma + \delta + \alpha + \beta)^2 - 4(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)\} = r^2, \text{ 惟 } \Sigma \alpha\beta = q.$$

$$\text{即 } (\gamma + \delta)(\alpha + \beta) = q, \therefore -s\{(-p)^2 - 4q\} = r^2, \text{ 即 } r^2 - 4sq + p^2s = 0.$$

21. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 之四根。有 $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ 之關係。則 $4abc - b^3 - 8a^2d = 0$ 。

(解) $\Sigma a = -\frac{b}{a}, \Sigma a\beta = \frac{c}{a}, \Sigma a\beta\gamma = \frac{d}{a}.$

由上之關係, $a + \beta = \gamma + \delta = -\frac{b}{2a}$. 又 $\Sigma a\beta\gamma = a\beta(\gamma + \delta) + \gamma\delta(a + \beta) = -\frac{d}{a}.$

即 $a\beta\left(-\frac{b}{2a}\right) + \gamma\delta\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{d}{a}, \therefore a\beta + \gamma\delta = \frac{2d}{b}.$

又由 $\Sigma a\beta = \frac{c}{a}, a\beta + \gamma\delta + (a + \beta)(\gamma + \delta) = \frac{c}{a}.$

即 $\frac{2d}{b} + \left(-\frac{b}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{c}{a}. \therefore 4abc - b^3 - 8a^2d = 0.$

22. $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ 之根為 a, b, c, \dots

則 $(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\dots = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC.$

但 $A = p_n + p_{n-3} + \dots, B = p_{n-1} + p_{n-4} + \dots, C = p_{n-2} + p_{n-5} + \dots$

[證] $(x-a)(x-b)(x-c)\dots = x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n$ 如 $x=1$.

則 $(1-a)(1-b)(1-c)\dots = 1 + p_1 + \dots + p_n$

$= (p_n + p_{n-3} + \dots) + (p_{n-1} + p_{n-4} + \dots) + (p_{n-2} + p_{n-5} + \dots).$

$\therefore (1-a)(1-b)(1-c)\dots = A + B + C.$

$(1-\omega a)(1-\omega b)(1-\omega c)\dots = A + \omega B + \omega^2 C.$

$(1-\omega^2 a)(1-\omega^2 b)(1-\omega^2 c)\dots = A + \omega^2 B + \omega C.$

由是 $(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\dots = A^3 + B^3 + C^3 - 3AEC.$

451. 變函數 [Derived Function] 於次之恆同式.

$f(x) \equiv p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n$ 以 $x+h$ 代其 x .

則 $f(x+h) \equiv p_0(x+h)^n + p_1(x+h)^{n-1} + p_2(x+h)^{n-2} + \dots + p_n$

由二項式之定理, 將其右邊各項展開之, 得

$p_0(x+h)^n = p_0x^n + p_0nx^{n-1}h + p_0\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots$

$p_1(x+h)^{n-1} = p_1x^{n-1} + p_1(n-1)x^{n-2}h + p_1\frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}h^2 + \dots$

$p_2(x+h)^{n-2} = p_2x^{n-2} + p_2(n-2)x^{n-3}h + p_2\frac{(n-2)(n-3)}{2}x^{n-4}h^2 + \dots$

由是 $f(x+h) = \{p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n\}$

$+ h\{np_0x^{n-1} + (n-1)p_1x^{n-2} + (n-2)p_2x^{n-3} + \dots + p_{n-1}\}$

$$+\frac{h^2}{2}\{n(n-1)p_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)p_1x^{n-3}+\dots+p_{n-2}\}$$

$$\text{即 } f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\dots$$

[註] 此 $f(x+h)$ 之展開式由微分學中戴勞(Taylor)氏之法則。整列為 h 之遞昇方乘式。

將上之法則推考之。知 $f(x)$ 之各項。與 $f'(x)$ 之關係。為將 $f(x)$ 各項 x 之指數。乘其本項。而以原指數減 1 為其指數。以下 $f''(x)$ 與 $f'(x)$ 之關係。及 $f'''(x)$ 與 $f''(x)$ 之關係等。亦可如是推得之。

[定義] 函數 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 之壹次變函數。 $f''(x)$ 為 $f(x)$ 之貳次變函數。以下準此。

$$\text{例 } f(x)=p_0x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4.$$

$$\text{則 } f'(x)=4p_0x^3+3p_1x^2+2p_2x+p_3.$$

$$f''(x)=12p_0x^2+6p_1x+2p_2$$

452. 定理 若 $f(x)$ 為 x 之任何有理整函數。 $f(x)$ 為其第壹變函數。而方程式 $f(x)=0$ 之 n 根。(實根或虛根) 為 a_1, a_2, a_3, \dots

$$\text{則 } f'(x)=\frac{f(x)}{x-a_1}+\frac{f(x)}{x-a_2}+\frac{f(x)}{x-a_3}+\dots$$

以 $f(x)=0$ 之各根為 a_1, a_2, a_3, \dots

$$\text{故知 } f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots$$

$$\text{由是 } f(x+h)=p_0(x-a_1+h)(x-a_2+h)(x-a_3+h)\dots$$

$$=p_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)$$

+ h {從 $(x-a_1), (x-a_2), \dots, (x-a_n)$ 內取各異之 $n-1$ 因子相乘積之和} + 含有 h^2 及 h^2 以上之項。

$$\text{即 } f(x+h)=f(x)+h\left\{\frac{f(x)}{x-a_1}+\frac{f(x)}{x-a_2}+\frac{f(x)}{x-a_3}+\dots\right\}$$

+ {含有 h^2 及 h^2 以上之項}。

惟 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h^2$ 及 h^2 以上之項

於此兩恆同式比較其右邊 h 之係數為

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a_1} + \frac{f(x)}{x-a_2} + \frac{f(x)}{x-a_3} + \dots$$

上之恆同式。其 a_1, a_2, a_3, \dots 之值互相異者。若 a_1 有 r 個。 a_2 有 s 個。即其因子如 $x-a_1$ 有 r 個。 $x-a_2$ 有 s 個。則得次式。

$$f'(x) = \frac{rf(x)}{x-a_1} + \frac{sf(x)}{x-a_2} + \dots$$

453. 等根 設 $f(x)=0$ 之 n 根爲 a_1, a_2, \dots, a_n 。

即 $f(x) = p_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ 。

惟 $f'(x) = p_0 \times (n \text{ 數量 } x-a_1, x-a_2, \dots, x-a_n \text{ 之每 } n-1 \text{ 個乘積之和})$ 。

於 $f(x)=0$ 諸根中。如 a_1 者祇有壹。則 $f(x)$ 所含諸因子中。如 $x-a_1$ 亦祇有壹。而 $f'(x)$ 之各項內有壹項不含 $x-a_1$ 。其餘諸項皆含 $x-a_1$ 。故 $f'(x)$ 不能有 $x-a_1$ 之因子。

由是知 $f(x)=0$ 之各相異者。則與 $f'(x)=0$ 。不能有如 $x-a$ 之公因子。

若 $f(x)=0$ 其根如 a_1 者有 r 個。則於 $f'(x)$ 之各項內。其壹項如 $\frac{f(x)}{x-a_1}$ 者含有 $r-1$ 個 $x-a_1$ 。其他含有 r 個 $x-a_1$ 。故 $f'(x)$ 有 $r-1$ 個 $x-a_1$ 之因子。即知於 $f(x)=0$ 之等根有 r 個者。則於 $f'(x)=0$ 其根必有 $r-1$ 個。

故求 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之 *H.C.F.* 可得 $f(x)=0$ 之等根。而以其 *H.C.F.* 除 $f(x)$ 得商爲 $\phi(x)$ 。則 $\phi(x)=0$ 之各根。必含有於 $f(x)=0$ 之內而各相異者也。

[第壹例] 求 $x^4-5x^3-9x^2+81x-108=0$ 之等根。

$$f(x) = x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 81x - 108, \quad f'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x + 81.$$

求 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之 *H.C.F.* 而得 x^2-6x+9 。即 $(x-3)^2$ 。以 x^2-6x+9 除 $f(x)$ 得 x^2+x-12 。即 $(x-3)(x+4)$ 。故 $f(x) = (x-3)^3(x+4)$ 。

由是 $f(x)=0$ 之各根爲 $3, 3, 3, -4$ 。

[第貳例] 三次方程式有等根者。則其各根皆爲可通度之根。試證之。

三次方程式有三根。而由 446 及 447 章。若其中有不可通度之根。則必有不等之兩根。其餘之壹根爲可通度之根。

故有等根者。其各根皆爲可通度之根明矣。

〔第三例〕有等根之方程式爲 $x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72 = 0$ 。試解之。

$$f(x) = x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72, \quad f'(x) = 5x^4 - 45x^2 + 20x + 60.$$

求 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之 $H.C.F.$ 而得 $x^3 - x^2 - 8x + 12$ 。乃以 $x^3 - x^2 - 8x + 12$ 除 $f(x)$ 。得商爲 $x^2 + x - 6$ 。

$$\text{即 } \phi(x) = x^2 + x - 6 = 0. \quad \therefore x = 2, -3.$$

因是知原方程式有貳個相異之根爲 2, -3。

$$\text{又以 } x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2(x+3). \quad \text{故 } f(x) = (x-2)^3(x+3)^2.$$

\therefore 原方程式之根。爲 2, 2, 2, -3, -3。

454. 有理整函數之變化 x 之有理整函數爲

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n.$$

x 之值有限。項數亦有限。則其諸項之和。必爲有限。

x 之值充分增大時。第壹項即 x 之最高冪之項。可大於其次諸項之和。(又於函數中間之任壹項。可大於其次諸項之和)。

依同理 x 之值充分減小時。最後項即不含 x 之項。可大於其前之諸項之和。(又於函數中間之任壹項。可大於其前之諸項之和)。

例 x 充分增大時 p_0x^n 大於 $p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n$ 。證明如次。

先令 k 爲 p_1, p_2, \dots, p_n 諸係數中之最大係數。則

$$\begin{aligned} \frac{p_0x^n}{p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n} &> \frac{p_0x^n}{k(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)} \quad \text{即 } \frac{p_0x^n(x-1)}{kx^n - 1} \\ &> \frac{p_0x^n(x-1)}{kx^n} \quad \text{即 } \frac{p_0(x-1)}{k}. \end{aligned}$$

x 充分增大。則 $\frac{p_0(x-1)}{k}$ 可得任大之值。故由前之不等式。得

$$p_0x^n > \frac{p_0}{k}(x-1)(p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n).$$

則 p_0x^n 比 $p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n$ 之若干倍爲大。

由同理 x 充分減小。可證得 $p_n > p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x$ 。

x 變爲 $x+h$ 。則由 451 章。得 $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots$ 。

但 x 之值有限。而 $f(x)$ 爲 x 之整函數。故 h, h^2, \dots 之係數 $f'(x), f''(x), \dots$ 其值爲有限。

然當 h 充分減小時。知上式右邊之第壹項 $hf'(x)$ (與前所述最

後項之 p_n 相當。可大於其次諸項之和。但 $f(x)$ 如對於 x 之特別值而為 0 者。則取其次之項。若次項亦為 0。則取其又次之項。

h 充分減小時。 $hf'(x)$ 從而減小。而其次諸項之和亦從而減小。故此右邊當 h 充分減小時。可得任小之值。即 $f(x+h) - f(x)$ 當 h 充分減小時。可得任小之值。

由是知 $f(x)$ 與 $f(x+h)$ 之差。可至於極微小之數。

由此理乃知 x 之變化自 a 迄 b 時。其 $f(x)$ 為自 $f(a)$ 迄 $f(b)$ 漸次變化無有間斷也。

又 $f(x)$ 為自 $f(a)$ 迄 $f(b)$ 。其間函數之值或增或減而無壹定。

例於 $f(x) = x^2 - 6x + 1$ 其 $x = 2$ 則 $f(2) = -7$, $x = 3$ 則 $f(3) = -8$, $x = 10$ 則 $f(10) = 41$ 。其增減無定。若 $f(x)$ 為不整方程式。如 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 。其 $x = 3$ 則 $f(3) = 1$, 又 $x = 2$ 則 $f(2) = \infty$ 。

455. 定理 x 自 a 變於 β 之際。而 $f(a)$ 及 $f(\beta)$ 為異符號。則 $f(x) = 0$ 。至少有壹根在於 a 與 β 之間。

何則 $f(x)$ 為自 $f(a)$ 迄 $f(\beta)$ 漸次變化無或間斷。而 $f(a)$ 及 $f(\beta)$ 其符號相異。則 $f(x)$ 及 $f(\beta)$ 之間。必有壹值為 0。因正負兩數互變之間。必經過一個 0 也。故 $f(x) = 0$ 其 x 之值。至少有壹根在於 a 與 β 之間。

例於 $f(x) = x^3 - 4x + 2$, $f(1) = -1$ 及 $f(2) = 2$ 。

由是知 $x^3 - 4x + 2 = 0$ 之壹根。在於 1 與 2 之間。

456. 定理 奇次之方程式至少有壹實根。

方程式 $f(x) = 0$ 即 $f(x) = x^{2n+1} + p_1x^{2n} + \dots + p_{2n+1}$ 。

x 充分增大時 x^{2n+1} 之值比 $p_1x^{2n} + \dots + p_{2n+1}$ 為大。故 $x = +\infty$ 。但 $f(+\infty)$ 為正。而 $f(-\infty)$ 為負。

故 $f(+\infty) = \text{正}$, $f(0) = p_{2n+1}$, $f(-\infty) = \text{負}$ 。

由是知於 $+\infty$ 與 $-\infty$ 之間。至少有壹實根存在。若 p_{2n+1} 為正者。則壹實根為負。而在於 0 與 $-\infty$ 之間。若 p_{2n+1} 為負。則壹實根為正而在於 $+\infty$ 與 0 之間。

457. 定理 偶次之方程式。其第壹項之係數為 1。最後之項為負者。至少有貳實根。而此貳實根符號各異。

於 $x^{2n} + p_1 x^{2n-1} + \dots + p_{2n} = 0$ 。其 p_{2n} 爲負者如次。

$f(+\infty) = \text{正}$, $f(0) = p_{2n}$, $f(-\infty) = \text{正}$ 。

由是 p_{2n} 爲負者。則其壹根在於 $+\infty$ 與 0 之間而爲正根。其他之壹根。在於 $-\infty$ 與 0 之間而爲負根。

458. 要例 a, b, c, f, g, h 爲實數。則次式之根皆爲實根。試證明之。

$$(x-a)(x-b)(x-c) - f^2(x-a) - g^2(x-b) - h^2(x-c) - 2fgh = 0.$$

[證] $a > b > c$ 記原方程式爲

$$(x-a)\{(x-b)(x-c) - f^2\} - \{g^2(x-b) + h^2(x-c) + 2fgh\} = 0.$$

今於 $(x-b)(x-c) - f^2$ 以 $+\infty, b, c, -\infty$ 代其 x 。則此式爲 $+, -, -, +$ 。

故二次方程式 $(x-b)(x-c) - f^2 = 0$ 有貳實根。設此貳實根爲 α, β 。而 α 爲在於 $+\infty$ 與 b 之間。 β 爲在於 c 與 $-\infty$ 之間。則 $\alpha > b > c > \beta$ 。

今於原方程式以 $+\infty, \alpha, \beta, -\infty$ 代其 x 。則原方程式爲 $+\infty, -\{g\sqrt{\alpha-b} + h\sqrt{\alpha-c}\}^2, +\{g\sqrt{b-\beta} + h\sqrt{c-\beta}\}^2, -\infty$ 。

如上以 α 代原方程式之 x 。其化法如次。

$x = \alpha$ 。則 $f^2 = (a-b)(a-c)$ 。故原方程式爲

$$-\{g^2(a-b) + h^2(a-c) + 2gh\sqrt{(a-b)(a-c)}\} = -\{g\sqrt{\alpha-b} + h\sqrt{\alpha-c}\}^2.$$

$x = \beta$ 。亦如法化之。

由是原方程式之實根。爲在於 $+\infty$ 與 α 之間。又在於 α 與 β 之間。又在於 β 與 $-\infty$ 之間。故皆爲實根。

若 $a = \beta$ 。則前之證明爲無效。何則。以 $+\infty, \alpha, a, -\infty$ 代其 x 。則原方程式爲 $+\infty, -\{g\sqrt{\alpha-c} + h\sqrt{\alpha-c}\}^2, -\{g\sqrt{\alpha-c} + h\sqrt{\alpha-c}\}^2, -\infty$ 。其實根不能有三種發見也。

然 $a = \beta$ 。則 $(x-b)(x-c) - f^2$ 爲完平方式。故 $b = c, f = 0$ 。

由是原方程式爲 $(x-a)(x-b)^2 - (g^2 + h^2)(x-b) = 0$ 。

$\therefore x = b$ 或 $(x-a)(x-b) - (g^2 + h^2) = 0$ 。

$\therefore x = \frac{1}{2}(a+b) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2 + g^2 + h^2}$ 。故皆爲實根。

若 a 爲原方程式之實根。則以 $+\infty, \alpha, \beta, -\infty$ 代原方程式之 x 。而得 $+\infty, 0, +\{g\sqrt{b-\beta} + h\sqrt{c-\beta}\}^2, -\infty$ 。

α 之外。知其他之壹實根。為在於 β 與 $-\infty$ 之間。而其餘之壹根。決不為虛數。因方程式如有虛根者。其虛根之個數。必成偶數故也。

此三次方程式於解析立體幾何學中最為要用。而謂之解析立方式 (Discriminations Cubic)。

459. 定理 $f(a)$ 及 $f(\beta)$ 為異符號。則 $f(x)=0$ 之根。其在 α 與 β 之間者有奇數。若為同符號。則其根在 α 與 β 之間者。或無或為偶數。

設 $f(x)=0$ 之根。在 α 與 β 之間者。為 a, b, c, \dots, k 。

則 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-k)\phi(x)$ 。

但 $\phi(x)$ 其所含之根。不在 a, b, c, \dots, k 諸實根以內者。即 $\phi(x)$ 由於偶數虛數及其他之實根所成實數因子之積。

然 $f(a)=(a-a)(a-b)(a-c) \dots (a-k)\phi(a)$ ，

及 $f(\beta)=(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c) \dots (\beta-k)\phi(\beta)$ 。

今 $\alpha > \beta$ 。則 $a-a, a-b, \dots, a-k$ 皆為正。

$\beta-a, \beta-b, \dots, \beta-k$ 皆為負。

又 $\phi(a)$ 及 $\phi(\beta)$ 與 $\phi(x)$ 之符號不變。故各符號相同。

故若 $f(a)$ 及 $f(\beta)$ 為異符號者。則 a, b, c, \dots, k 為奇數。 $f(a)$ 及 $f(\beta)$ 為同符號者。則 a, b, c, \dots, k 為偶數。

460. 洛兒 [Rolle] 氏之定理 $f(x)=0$ 之實根。有在於 $f(x)=0$ 鄰接貳實根之間者。

設將 $f(x)=0$ 之實根。自大至小順次列之。如 a, b, c, \dots, k 。而 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-k)\phi(x)$ 。

但 $\phi(x)$ 為由二次實數因子 (與偶數虛根相應之數) 而成者。此二次因子。無論以何之實數代 x 。其符號不變。

由 452 章變為 $f(x+\lambda)=(x-a+\lambda)(x-b+\lambda) \dots (x-k+\lambda)$

$\times \{\phi(x)+\lambda\phi'(x)+\lambda$ 之高次項}

$$= f(x) + \lambda \left\{ \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \dots + \frac{f(x)}{x-k} + \frac{f(x)\phi'(x)}{\phi(x)} \right\} + \dots$$

$$\text{由是 } f(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \dots + \frac{f(x)}{x-k} + \frac{f(x)\phi'(x)}{\phi(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } f(x) &= (x-b)(x-c) \cdots \cdots (x-k)\phi(x) \\ &+ (x-a)(x-c) \cdots \cdots (x-k)\phi(x) \\ &+ (x-a)(x-b) \cdots \cdots (x-k)\phi(x) \\ &\cdots \cdots \cdots \end{aligned}$$

乃順次以 a, b, c, \cdots 代 x 得

$$\begin{aligned} f'(a) &= (a-b)(a-c) \cdots \cdots (a-k)\phi(a), \\ f'(b) &= (b-a)(b-c) \cdots \cdots (b-k)\phi(b), \\ f'(c) &= (c-a)(c-b) \cdots \cdots (c-k)\phi(c), \\ &\cdots = \cdots \end{aligned}$$

今 $\phi(a), \phi(b), \phi(c), \cdots$ 爲同符號。而 $a > b > c > \cdots$ 。

故 $f'(a), f'(b), f'(c), \cdots$ 正負相間。

由是知 $f'(x) = 0$ 之壹根。在於 a 與 b 之間。又在於 b 與 c 之間。以下準此。

例 $f(x) = x^2 - 8x + 12 = 0$ 。則 $f'(x) = 2x - 8$ 。

惟 $2x - 8 = 0$ 之根爲 4。爲在於 $f(x) = 0$ 之貳根 2 與 6 之間。

461. 代加德 (Descartes) 氏之符號規則 於 $f(x) = 0$ 。所有正實根之數。不能多於各項符號變化之數。又所有負實根之數。不多於 $f(-x)$ 各項符號變化之數。

例 $5x^9 + 6x^8 - 2x^7 + 3x^6 + 8x^5 - 3x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 10x - 12 = 0$ 。

記其各項之符號。爲 $++-++---+-$ 。

即 $+-$ 變化之數爲五。故正實根之數不多於五。

又 $f(-x) = -5x^9 + 6x^8 + 2x^7 + 3x^6 - 8x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 9x^2 - 10x - 12 = 0$ 。

記其符號爲 $-++++-+---$ 。

即 $+-$ 變化之數爲四。故 $f(x) = 0$ 負實根之數。不多於四。

今若於任何多項式以 $x-a$ (a 爲正數) 乘之。其各項符號變化之數。至少比原方程式增一次。

假定多項式各項之符號。爲 $++-++---+-$ 。(如前所述其變化之數有五) 於此以 $x-a$ 即 $+-$ 乘之。而考其符號變化之次數如下式。

$$\text{乘} \left\{ \begin{array}{cccccccc} + & + & - & + & + & - & - & + \\ + & - & & & & & & \end{array} \right.$$

$$\text{加} \left\{ \begin{array}{cccccccc} + & + & - & + & + & - & - & + \\ - & - & + & - & - & + & + & - \end{array} \right.$$

$$\text{積} \dots\dots + \pm - + \pm - \mp \mp + - +.$$

因 x 為正。故以 x 乘之。其分積如第壹列。其符號悉與原式同。又因 $-a$ 為負。故以 $-a$ 乘之。其分積如第貳列。其符號悉與原式相異。乃將第貳列置於第壹列同次元項之上。而此第壹列之第貳項為正。第貳列之第壹項為負。故全積之第貳項正負不能判定。然其第三項可定為負。故全積第二項之符號為正或負。必與原式變化之次數無所增減。又於全積之第五項亦然。

自第六項迄第九項為 $- \mp \mp +$ 。若取 $- + - +$ 則其符號之變化增壹。又取 $- + + +$ 或 $- - - +$ 。則其符號之變化無所增減。則因此複號而積中符號之變化。與原式有增無減可知。

而原式之最後項為負。故第壹列最後項為負。於其下所置第貳列之項亦為負。故積之第末貳項為負。

又積之最後項負以負乘之為正。

故於積之最後項符號之變化增壹。若原式之最後項為正。則積之最後項為負。其符號之變化亦增壹。

由是任何多項式以 $x-a$ 乘之。其積之符號變化之數。至少比原方程式增壹。

若純為虛根及負根所成實數係數之方程式。其符號必無變化。而以正根因子 $x-a$ 乘之。可增一符號變化之數。故於 $f(x)=0$ 正根之數。不能多於 $f(x)$ 各項符號變化之數。

此規則之第貳部。可從前所說明者而知之。即以負根代 $f(-x)=0$ 之正根。則與前同。

〔例〕 $x^7 + 2x^6 - x^4 + 4x^3 + 3x - 1$ 以 $x-1$ 乘之。則

$$\begin{array}{cccc} + & + & - & + \\ + & - & & \\ \hline + & + & - & + \\ & - & + & - \\ \hline + & \pm & - & - & + & - & + & - & + \end{array}$$

原式符號之變化有三，而積之符號之變化有六。

462. 應用 用前章符號之規則，方程式實根增減之數，可得而知之。然欲確知其實根之數，須視後斯土莫 (Sturm) 氏之定理。今於其定理之前，先示以解三次及四次式之公法。

阿塔爾 (Abel) 氏曰，四次以上之方程式，無解開之公法。惟於特別形，如反商方程式，迄於五次，常可得而解之。

例題四十五

1. 下列方程式為有等根者，試解之。

(i) $4x^3 - 12x^2 - 15x - 4 = 0$. [答 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 4$].

(ii) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36 = 0$. [答 $3, 3, \pm 2\sqrt{-1}$].

(iii) $16x^4 - 24x^2 + 16x - 3 = 0$. [答 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$].

(iv) $2x^4 - 23x^3 + 84x^2 - 80x - 64 = 0$. [答 $4, 4, 4, -\frac{1}{2}$].

[解] 皆可由 453 章以解之。

2. $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ 為有二等根者，試求其關係。

[解] 三根為 α, α, β 。則 $2\alpha + \beta = -\frac{3b}{a}$, $\alpha^2 + 2\alpha\beta = \frac{3c}{a}$ 。

由是消去其 β ，即為 $aa^2 + 2ba + c = 0$ (1)

又變原方程式，為 $aa^3 + 3ba^2 + 3ca + d = 0$ 。

即 $a(aa^2 + 2ba + c) + ba^2 + 2ca + d = 0$ 。

$\therefore ba^2 + 2ca + d = 0$ (2)

由 (1)(2) 消去 a ，故所求之關係為 $(bc - ad)^2 = 4(bd - c^2)(ca - b^3)$ 。

3. $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ 為有二等根者，則其等根為 $\frac{bc - ad}{2(ac - b^3)}$ 。

[證] 由前例可直求得之。

4. 證次之方程式皆為實根。

$$\frac{a^2}{x-a'} + \frac{b^2}{x-b'} + \frac{c^2}{x-c'} + \dots + \frac{k}{x-k'} - \lambda = 0.$$

〔證〕 若有虛根。假定其一根為 $p+q\sqrt{-1}$ 。而其又一根為 $p-q\sqrt{-1}$ 。由是

$$\frac{a^2}{(p-a')+q\sqrt{-1}} + \frac{b^2}{(p-b')+q\sqrt{-1}} + \dots + \frac{k^2}{(p-k')+q\sqrt{-1}} - \lambda = 0.$$

$$\frac{a^2}{(p-a')-q\sqrt{-1}} + \frac{b^2}{(p-b')-q\sqrt{-1}} + \dots + \frac{k^2}{(p-k')-q\sqrt{-1}} + \lambda = 0.$$

$$\text{由減法 } 2q\sqrt{-1} \left\{ \frac{a^2}{(p-a')^2+q^2} + \frac{b^2}{(p-b')^2+q^2} + \dots + \frac{k^2}{(p-k')^2+q^2} \right\} = 0.$$

於上之方程式。其括弧內之正數量非為 0。則是 q 不得不為 0。故原方程式決無虛根。

5. 證次之方程式皆為實根。

$$\frac{a^2}{x-a} + \frac{b^2}{x-\beta} + \frac{c^2}{x-\gamma} + \dots = m + n^2x.$$

〔證〕 若有虛根。如前題得

$$\frac{a^2}{(p-a)+q\sqrt{-1}} + \frac{b^2}{(p-\beta)+q\sqrt{-1}} + \dots = m + n^2(p+q\sqrt{-1})$$

$$\frac{a^2}{(p-a)-q\sqrt{-1}} + \frac{b^2}{(p-\beta)-q\sqrt{-1}} + \dots = m + n^2(p-q\sqrt{-1}).$$

$$\text{由減法 } 2q\sqrt{-1} \left\{ \frac{a^2}{(p-a)^2+q^2} + \frac{b^2}{(p-\beta)^2+q^2} + \dots + n^2 \right\} = 0.$$

由是 $q=0$ 。故如題云云。

6. $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ 依大小之順序次第列之。而 b 為正整數。則次之方程式皆為實根。試證之。

$$(x-a_1)(x-a_3) \dots (x-a_{2n-1}) + b(x-a_2)(x-a_4) \dots (x-a_n) = 0.$$

又求此方程式根之位置。

〔證〕 $a_1 > a_2 > a_3 \dots > a_{2n}$ 故於原方程式 $f(x) = 0$ 。逐次以 $a_1, a_2, a_3 \dots a_{2n}$ 代其 x 而正負相間。 $f(a_1)$ 為正。 $f(a_2)$ 為負。 $f(a_3)$ 為正……。則是 x 之根在 $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ 之間。故有 n 個之實根。即所有根皆為實根也。

7. 設 a, b, c, d 為不等之正數量。試證次之方程式之根。皆為實數。

$$\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} + \frac{x}{x-c} + x + d = 0.$$

又此四根爲 a, β, γ, δ 。則

$$\frac{a^2}{(a-a)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-\beta)(c-\gamma)(c-\delta)} = 0.$$

〔解〕 去原方程式之分母爲

$$x(x-b)(x-c) + x(x-c)(x-a) + x(x-a)(x-b) + (x-a)(x-b)(x-c)(x+d) = 0.$$

$a > b > c$ 則此方程式順次以 $a, b, c, 0, -d$ 代 x 。即得

$$f(a) = +a(a-b)(a-c), \quad f(b) = -b(b-c)(a-b),$$

$$f(c) = +c(a-c)(b-c), \quad f(0) = -abcd.$$

$$f(-d) = -d\{(b-d)(c-d) + (c-d)(a-d) + (a-d)(b-d)\}.$$

故 x 之根在 a, b 及 b, c 及 $c, 0$ 及 $0, -d$ 之間。故共有四實根。

又 a, β, γ, δ 爲其四根。以 a 代 x 。則得

$$\frac{a}{a-a} + \frac{a}{a-b} + \frac{a}{a-c} + a + d = 0.$$

又以 β, γ, δ 順次代 x 。則得如上之等勢式。

此四方程式順次將二式相減而簡單之。則

$$\Sigma \frac{a}{(a-a)(a-\beta)} - 1 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\Sigma \frac{a}{(a-\beta)(a-\gamma)} - 1 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\Sigma \frac{a}{(a-\gamma)(a-\delta)} - 1 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

(1) (2) 相加又 (2) (3) 相加如次。

$$\Sigma \frac{a^2}{(a-a)(a-\beta)(a-\gamma)} - (a+\gamma) \Sigma \frac{a}{(a-a)(a-\beta)(a-\gamma)} - 2 = 0.$$

$$\Sigma \frac{a^2}{(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} - (\beta+\delta) \Sigma \frac{a}{(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} - 2 = 0.$$

$$\text{由減法 } (\beta-\gamma) \Sigma \frac{a^2}{(a-a)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}$$

$$+ (a\beta - \gamma\delta) \Sigma \frac{a}{(a-a)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} = 0.$$

$$\text{由 (1) (3) 得 } (a+\beta-\gamma-\delta)\Sigma \frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} \\ + (a\beta-\gamma\delta)\Sigma \frac{a}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} = 0.$$

$$\text{由加法 } (a+2\beta-2\gamma-\delta)\Sigma \frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} = 0.$$

但 $a+2\beta-2\gamma-\delta = (a-\gamma) + (\beta-\gamma) + (\beta-\delta)$ 。而 a, β, γ, δ 不相等。

$$\text{故 } a+2\beta-2\gamma-\delta \neq 0. \therefore \Sigma \frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} = 0.$$

8. 次之方程式。其有理根爲 $p(\omega)+q(\omega)^{-1}$ 試證之。

$x^5-4pqx^3+5p^2q^2x-p^5-q^5=0$ 。但 ω 爲 1 之五方根。

[證] $\omega^5=1$, 又 $x=p(\omega)+q(\omega)^{-1}$. $\therefore x^2=p^2(\omega^2)+q^2(\omega)^{-2}+2pq$.

$$\therefore (x^2-2pq) = (p^2(\omega^2)+q^2(\omega)^{-2}). \therefore x^4-4pqx^2+2p^2q^2 = p^4(\omega^4)+p^4(\omega)^{-4}$$

由是 $x(x^4-4pqx^2+2p^2q^2) = (p(\omega)+q(\omega)^{-1})(p^4(\omega^4)+q^4(\omega)^{-4})$.

$$\text{即 } x^5-4pqx^3+2p^2q^2x = p^5(\omega^5)+q^5(\omega)^{-5}+pq(p^3(\omega^3)+q^3(\omega)^{-3}).$$

$$\therefore x^5-4pqx^3+2p^2q^2x-p^5-q^5 \\ = pq\{(p(\omega)+q(\omega)^{-1})^3-3pq(p(\omega)+q(\omega)^{-1})\} = pq\{x^3-3pqx\}.$$

$$\therefore x^5-5pqx^3+5p^2q^2x-p^5-q^5=0.$$

9. a, β, γ, δ 爲 $x^4+4px^3+6qx^2+4rx+s=0$ 之四根。求有次之各根之方程式。

$$(i) \quad a\beta+\gamma\delta, \quad a\gamma+\beta\delta, \quad a\delta+\beta\gamma.$$

$$(ii) \quad (a+\beta)(\gamma+\delta), \quad (a+\gamma)(\beta+\delta), \quad (a+\delta)(\beta+\gamma).$$

[解] $a+\beta+\gamma+\delta = -4p$, $\Sigma a\beta = 6q$, $\Sigma a\beta\gamma = -4r$, $a\beta\gamma\delta = s$.

$$(i) \quad (a\beta+\gamma\delta) + (a\gamma+\beta\delta) + (a\delta+\beta\gamma) = 6q.$$

$$(a\beta+\gamma\delta)(a\gamma+\beta\delta) + (a\gamma+\beta\delta)(a\delta+\beta\gamma) + (a\delta+\beta\gamma)(a\beta+\gamma\delta)$$

$$= a(\Sigma a\beta\gamma - \beta\gamma\delta) + \beta(\Sigma a\beta\gamma - a\gamma\delta) + \gamma(\Sigma a\beta\gamma - a\beta\delta) + \delta(\Sigma a\beta\gamma - a\beta\gamma)$$

$$= (a+\beta+\gamma+\delta)\Sigma a\beta\gamma - 4a\beta\gamma\delta = 4(4pr-s),$$

$$(a\beta+\gamma\delta)(a\gamma+\beta\delta)(a\delta+\beta\gamma) = a\beta\gamma\delta\Sigma a^2 + \Sigma a^2\beta^2\gamma^2$$

$$= a\beta\gamma\delta\{(\Sigma a)^2 - 2\Sigma a\beta\} + (\Sigma a\beta\gamma)^2 - 2a\beta\gamma\delta\Sigma a\beta = 8(2p^2s - 3qs + 2r^2).$$

由是所求之方程式爲 $y^3-6qy^2+4(4pr-s)y-8(2p^2s-3qs+2r^2)=0$.

$$(ii) \quad (a+\beta+\gamma+\delta)^2 = 16p^2.$$

$$\text{即 } 2(a\beta + \gamma\delta) + 2(a + \beta)(\gamma + \delta) + (a + \beta + \gamma + \delta)^2 - 2\sum a\beta = 16p^2.$$

$$\therefore 2y + 2z + 16p^2 - 12q = 16p^2. \therefore y = -(z - 6q).$$

以 $y = -(z - 6q)$ 代入 (i) 方程式。即得所求之方程式為 0。

$$\text{即 } (z - 6q)^3 + 6q(z - 6q)^2 + 4(4pr - s)(z - 6q) + 8(2p^2s - 3qs + 2r^2) = 0.$$

10. a, β, γ, δ 為 $x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = 0$ 之四根。若變其根為 $(a + \beta - \gamma - \delta)^2, (a - \beta + \gamma - \delta)^2, (a - \beta - \gamma + \delta)^2$ 。則其方程式如何。

$$[\text{證}] (a + \beta - \gamma - \delta)^2 = (\sum a)^2 + 4(a + \beta)(\gamma + \delta).$$

將前例 (ii) 之方程式比較之。得 $y = 16p^2 - 4z$ 。

$$\therefore z - 6q = \frac{1}{4}(7 - 16p^2 + 24q) \text{ 以代入 (ii) 之方程式而去其分母。得}$$

$$(y - 16p^2 + 24q)^3 - 24q(y - 16p^2 + 24q)^2 + 64(4pr - s)(y - 16p^2 + 24q) - 512(2p^2s - 3qs + 2r^2) = 0.$$

11. a_1, a_2, a_3 為 $x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$ 之三根。

則 $\sum a_1^3 a_2^2 = 2p_1^2 p_3 - p_1 p_2^2 + p_2 p_3$ 試證之。

$$[\text{證}] a_1 + a_2 + a_3 = -p_1, \quad a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3 = p_2, \quad a_1 a_2 a_3 = -p_3.$$

$$\text{由是 } \sum a_1^3 a_2^2 = a_1^2 a_2^2 (a_1 + a_2) + a_2^2 a_3^2 (a_2 + a_3) + a_3^2 a_1^2 (a_3 + a_1)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3)(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2) - a_1 a_2 a_3 \sum a_1 a_2$$

$$= -p_1 \{ (\sum a_1 a_2)^2 - 2a_1 a_2 a_3 \sum a_1 \} + p_3 p_2$$

$$= -p_1(p_2^2 - 2p_3 p_1) + p_2 p_3 = 2p_1^2 p_3 - p_1 p_2^2 + p_2 p_3.$$

三 次 方 程 式

463. 普通三次方程式 其形如 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 。

此方程式由 442 章第二。於其各根增以 $\frac{a}{3}$ 。乃得消去有 x^2 之項

如次形。 $x^3 + px + q = 0$ 。

由是解此形之方程式。

464. 解法 解 $x^3 + px + q = 0$ 。

$$x^3 + px + q = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{及 } x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{由 (2) } (x + a + b)(x + \omega a + \omega^2 b)(x + \omega^2 a + \omega b) = 0.$$

但 ω 為 1 之立方根之虛根。

∴ 於(2) x 之根。爲 $-a-b$, $-\omega a-\omega^2 b$, $-\omega^2 a-\omega b$ 。

比較(1)與(2)之係數。得 $p=-3ab$, $q=a^3+b^3$ 。

由此求得 a^3, b^3 爲 $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$ 。

乃從 a, b 之值。而得 $-a-b$, $-\omega a-\omega^2 b$, $-\omega^2 a-\omega b$ 各值。即爲所求之根。

465. 餘論 上之解法。名迦但(Cardan)氏之解法。不過稍爲變通耳。

然以 p 及 q 表 a 及 b 。而得 $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ 爲負者。則不能求其值。

何則。如 $(3+5\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ 之形。不能記爲 $a+\beta\sqrt{-1}$ 。

例 $(3+5\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = a+\beta\sqrt{-1}$ 。則

$$3+5\sqrt{-1} = (a^3-3a\beta^2) + (3a^2\beta-\beta^3)\sqrt{-1}.$$

即得三次式。仍不能求得 a, β 之值。

故 a^3, b^3 之值而爲 $\frac{q}{2} \pm \sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$ 者。則不能用此解法。

凡若此者。如後467章第三例所示。即證明三次方程式如 $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ 爲負者。則其根皆爲實根。

即迦但氏之解法。僅可解有 $-a-b$ 之實根。與 $-\omega a-\omega^2 b$, $-\omega^2 a-\omega b$ 之貳虛根者。故有三實根方程式之解法。不能適合。

求三次方程式實根之漸近數。則用忽拏(Horner)氏之解法(見475章)爲便。

[例] 解 $x^3+4x-5=0$ 。

令原方程式爲 $x^3-3abx+a^3+b^3=0$ 。則 $-3ab=4$, 及 $a^3+b^3=-5$ 。

由是求得 a 及 b 之值。爲 $\left\{-\frac{5}{2} \pm \frac{1}{18}\sqrt{2793}\right\}^{\frac{1}{3}}$ 。

既求得 a 及 b 之近似值。則可求得其根爲 $-a-b$, $-\omega a-\omega^2 b$, $-\omega^2 a-\omega b$ 。

本題可用簡法解得。即如469章所示。其可通度之根。可得知之。即原方程式爲 $(x-1)(x^2+x+5)=0$ 。

故求得 x 之根爲 $1, -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-19})$.

[別法] 令 $x = y - \frac{4}{3y}$, 則原方程式爲

$$\left(y - \frac{4}{3y}\right)^3 + 4\left(y - \frac{4}{3y}\right) - 5 = 0, \text{ 即 } y^3 - \frac{64}{27y^3} - 5 = 0.$$

$$\therefore y^6 - 5y^3 - \frac{64}{27} = 0, \quad y^3 = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{931}{108}}$$

四次方程式

466. 四次方程式之解法。須從三次方程式之解法得之。而其種種解法中稱最簡便者。莫如弗拉利(Ferrari)氏之解法。

[弗拉利氏之例解] 設原方程式爲 $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ 。
於此兩邊各加以 $(ax + \beta)^2$ 。

$$\text{則 } x^4 + px^3 + (q + a^2)x^2 + (r + 2a\beta)x + s + \beta^2 = (ax + \beta)^2.$$

令左邊爲完平方式。如 $\left(x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda\right)^2$ 。而比較其 x^3 及 x^2 以下各項

之係數。爲 $2\lambda + \frac{p^2}{4} = q + a^2$, $p\lambda = r + 2a\beta$, $\lambda^2 = s + \beta^2$ 。

由此三方程式消去其 a, β 。如次得 λ 之三次方程式爲

$$4(\lambda^2 - s)\left(2\lambda + \frac{p^2}{4} - q\right) - (p\lambda - r)^2 = 0.$$

求得此三方程式之實根。而 a 及 β 之值亦可決定之。

又因 $\left(x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda\right)^2 = (ax + \beta)^2$ 。

$$\text{則 } x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda \pm (ax + \beta) = 0.$$

但 a, β, λ 爲既知之值。故方程式之四根。可完全求得之。

[例] 解 $x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 22x + 5 = 0$ 。

兩邊加以 $(ax + \beta)^2$ 。

$$\text{則 } x^4 + 6x^3 + (14 + a^2)x^2 + (22 + 2a\beta)x + 5 + \beta^2 = (ax + \beta)^2.$$

令左邊爲 $(x^2+3x+\lambda)^2$ 。而比較 x^2 及 x^2 以下各項之係數。爲

$$9+2\lambda=14+a^2, \quad 6\lambda=22+2a\beta, \quad \lambda^2=5+\beta^2.$$

由是 $(\lambda^2-5)(2\lambda-5)-(3\lambda-11)^2=0$ 。

$$\therefore \lambda^3-7\lambda^2+28\lambda-48=0.$$

此方程式之壹實根爲 3。

然以 $\lambda=3$ 。則 $a^2=1$, $2a\beta=-4$, $\beta^2=4$ 。

由是 $(x^2+3x+3)^2=(x-2)^2$ 。

故所求之根爲 $-2\pm\sqrt{3}$, $-1\pm 2\sqrt{-1}$ 。

斯土莫 Sturm 氏之定理

467. 斯土莫氏之定理 設 $f(x)=0$ 。爲不含等根之方程式。(如有等根。則可由 453 章去其等根。) $f_1(x)$ 爲 $f(x)$ 之第壹變函數。

今將 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 用求最高公因子之法則。轉輾相除而變其各次餘式之符號。

惟 $f(x)=0$ 無有等根者。故 $f(x)$, $f_1(x)$ 無有公因子。其最後之餘式。爲不含 x 之式。而此餘式亦變其符號。

既變其各次餘式之符號。而以其所得之各式。假定爲 $f_2(x)$, $f_3(x)$,
..... $f_m(x)$ 。但 $f_m(x)$ 不含有 x 者。

乃使 $f(x)=0$ 實根之數。爲在於 a 及 β 之間。(但 $\beta > a$) 則於 $x=a$ 時。其 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_m(x)$ 相接符號變化之數。多於 $x=\beta$ 時符號變化之數。

[證明] 何則。試以 q_1, q_2, \dots, q_{m-1} 爲所得之商。 $-f_2(x)$, $-f_3(x)$,
 $-f_m(x)$ 爲其餘式。由是如次。

$$f(x) = q_1 f_1(x) - f_2(x),$$

$$f_1(x) = q_2 f_2(x) - f_3(x),$$

$$f_2(x) = q_3 f_3(x) - f_4(x),$$

$$\dots = \dots$$

$$f_{m-2}(x) = q_{m-1} f_{m-1}(x) - f_m(x).$$

(1) 上之諸函數中。其連續貳函數。對於 x 之任壹值決不爲 0。何則。若其連續貳函數於同時爲 0。則其他各函數亦皆爲 0。

例 $f_2(x)=f_3(x)=0$ 。則 $f(x)=0$, $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$,。

(2) 除 $f(x)$ 之外其他任意函數之值而為 0 者，則與此函數連續之貳函數，其符號相異。

例 $f_2(x)=0$ 。則 $f_1(x)=-f_3(x)$ 。

由(1)及(2)乃得次之法則。

將 x 之值次第增變， $f(x)$ 非為 0 時，即將 x 增變尚未經過 $f(x)=0$ 之實根時，則與前記斯土莫氏連續諸函數，其符號變化之數無所增減。

因各函數之值未經過 0 時，其符號不變，而於任意函數經過 0 時，其連接之貳函數必異其符號，故集此三個函數，其中生符號之變化者，祇有壹而已。

次假定 a 為 $f(x)=0$ 之壹實根，則

$(fa \mp \lambda) = f(a) \mp \lambda f'(a) \dots \dots \dots$ 而 $f(a)=0$ 。此右邊級數之總符號，當 λ 極微小時，則與 $\mp \lambda f'(a)$ 之符號相同，因斯時第三項以下之和小於 $\lambda f'(a)$ 故也。

由是 λ 之值當微小時， $f(a-\lambda)$ 之符號，與 $f'(a)$ 異， $f(a+\lambda)$ 之符號與 $f'(a)$ 同。

更為詳說之，由 451 章以 $f(x)=0$ 之壹實根為 a 。

則 $f(a-\lambda) = f(a) - \lambda f'(a) + \dots \dots \dots$

及 $f(a+\lambda) = f(a) + \lambda f'(a) + \dots \dots \dots$

故 x 變為 $a-\lambda$ 時， $f(a-\lambda)$ 與 $f'(a)$ 為異符號， x 變為 $a+\lambda$ 時， $f(a+\lambda)$ 與 $f'(a)$ 為同符號。

即 x 從 $a-\lambda$ 迄於 $a+\lambda$ ，其間必經過其壹實根 a ，故兩函數符號變化之數必減少一次。

將 x 增變，其連續諸函數，除 x 經過 $f(x)=0$ 之實根外，其符號變化無所增減，於前既證明之，而於 x 經過壹實根時，其符號變化之數減壹亦既證明之，所以於 $x=a$ 時符號變化之數，多於 $x=\beta$ 時符號變化之數，而其差等於在 a 及 β 之間所有實根之數。

求方程式實根之全數，則於斯土莫氏之諸函數，用 $-\infty$ 及 $+\infty$ 代 x ，然用 $+\infty$ 其符號變化之數，比用 $-\infty$ 其符號變化之數減少。

而其差即為實根之全數。

〔第壹例〕 求 $x^4+4x^3-4x-13=0$ 之實根。其數有幾。

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 4x - 13,$$

$$f_1(x) = 4(x^3 + 3x^2 - 1).$$

〔注意〕 求最高公因子之法則。可於演算間以正數量乘或除。故以正數量4除 $f(x)$ 。以下遞次轉除。乃反其各次之餘式。而得次之函數。

$$f_2(x) = x^2 + x + 4,$$

$$f_3(x) = 2x + 3,$$

$$f_4(x) = -19.$$

乃用 $-\infty, 0, +\infty$ 順次代入諸函數之 x 。其根號之級數列之如次。 $+ - + - -, - - + + -, + + + + -$ 。

以 $+ - + - -$ 其正負變化之數。比 $- - + + -$ 為多。

又以 $- - + + -$ 其正負變化之數。比 $+ + + + -$ 為多。

故知於 $-\infty$ 與 0 之間有壹實根。又於 0 與 $+\infty$ 之間有壹實根。

〔第貳例〕 求 $x^5-5x+1=0$ 實根之數。及其位置。

$$f(x) = x^5 - 5x + 1,$$

$$f_1(x) = 5(x^4 - 1),$$

$$f_2(x) = 4x - 1,$$

$$f_3(x) = +255.$$

於上之函數 $f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$

x 變為 $-\infty$ 時。則 $- \quad + \quad - \quad +,$

x 變為 -2 時。則 $- \quad + \quad - \quad +,$

x 變為 -1 時。則 $+ \quad 0 \quad - \quad +,$

x 變為 0 時。則 $+ \quad - \quad - \quad +,$

x 變為 1 時。則 $- \quad 0 \quad + \quad +,$

x 變為 2 時。則 $+ \quad + \quad + \quad +.$

由是知於 -2 及 -1 之間。有壹負實根。於 0 及 1 之間。有壹正實根。又於 1 及 2 之間。有壹正實根。而其餘之貳根為虛根。何則。 x 變

爲2時。諸函數符號之級數爲++++。則 x 變爲2以上之數。其符號之級數相等。

〔第三例〕 $x^3+px+q=0$ 知其皆爲實根。求其關係。

$$f(x)=x^3+px+q,$$

$$f_1(x)=3x^2+p,$$

$$f_2(x)=-2px-3q,$$

$$f_3(x)=-(27q^2+4p^3).$$

$$x=-\infty \text{ 則 } \quad - \quad + \quad +2p \quad -(27q^2+4p^3),$$

$$x=+\infty \text{ 則 } \quad + \quad + \quad -2p \quad -(27q^2+4p^3).$$

若此三根悉爲實根。則 $x=-\infty$ 。其諸函數符號變化之數應有三。而 $x=+\infty$ 其諸函數符號變化之數應爲0。故 p 及 $27q^2+4p^3$ 二者。必皆爲負數。

468. 特別之解法 用斯士莫氏之定理。以決定方程式之實根數及其位置。雖爲完全之解法。而須先求得其諸函數。再考其諸函數符號之變化。演算頗覺繁冗。有時可不由此定理。徑以某數量代入原函數。即可解得方程式之實根數及其位置。此爲特別之解法。揭例如次。

〔第壹例〕 求 $x^4-41x^2+40x+126=0$ 之實根數及其位置。

以1, 2, 3, 4, 5, 6代 $f(x)$ 之 x 。順次記以 $f(x)$ 之值之符號。爲

++--++。由是知於2, 3之間。及5, 6之間。各至少有壹根。而準代加德氏之規則。考得原方程式各項符號變化之數有貳。即知正根不多於貳。故原方程式祇有在2與3及5與6之間兩個正根。

又以0, -1, -2, -3, -4, -5代 $f(x)$ 之 x 。由同法知負根在-1, -2之間及-6, -7之間。

〔第貳例〕 求 $x^4-14x^2+16x+9=0$ 之實根數及其位置。

於此例。其負根有貳個。在於0與-1之間。及-4與-5之間。此固易於求得之。

其正根亦有貳個。皆在於2與3之間。而 $f(2)$ 與 $f(3)$ 皆爲正。故不能顯出。然細考之。即得 $f(2)$ 爲正。 $f(2\frac{1}{4})$ 爲負。 $f(3)$ 爲正。

由是知貳正根爲在於2與 $2\frac{1}{4}$ 之間。及 $2\frac{1}{4}$ 與3之間。

〔第三例〕用任意之方法。求 $x^6-5x^5-7x^2+8x+20=0$ 之實根數及其位置。

準代加德氏符號之規則。知此方程式之正根不多於貳。其負根亦不多於貳。

今 $f(1)$ 爲正。 $f(2)$ 爲負。故知1與2之間有壹實根。而 $f(\infty)$ 爲正。故其他壹實根。以正數量代入之。求得其壹實根在5與6之間。

x 變爲 $-x$ 。則原方程式變爲 $x^6+5x^5-7x^2-8x+20=0$ 。此方程式之正根。卽原方程式之負根。

今此方程式之左邊 $f(x)$ 。用0與1間之數代入之皆得正值。

而 $x>1$ 。則 $f(x)>6x^4-15x^2+20$ 。

而 $6x^4-15x^2+20$ 。其 x 之值。無論如何常爲正數量。

何則。以 $4\times 6\times 20-15^2>0$ 。卽 $f(x)$ 常爲正數量。

由是知原方程式不能有負根。

469. 差之方程式 設 $f(x)=0$ 之貳根爲 α, β 。而 $y=\alpha-\beta$ 。則 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 。惟 $\alpha=y+\beta$ 。故 $f(y+\beta)=0$ 。此方程式與 $f(\beta)=0$ 消去其 β 。由是所成之方程式。其根等於 $f(x)=0$ 各貳根之差。

此所成之方程式有 $\alpha-\beta$ 及 $\beta-\alpha$ 貳根。故含僅有 y 之偶數方乘。而此 y^2 之方程式內。其 y^2 之根。爲由 $f(x)=0$ 之壹對實根組合之數。又 $f(x)=0$ 其根若皆爲實根者。則 y^2 之方程式內。其 y^2 必皆爲正實之值。

今試舉方程式 $x^3+px+q=0$ 以考察之。

求將 $x^3+px+q=0$ 。以其根之差爲根。而作方程式。

$$y=\alpha-\beta \text{ 或 } \beta-\alpha \therefore y^3=(\alpha-\beta)^3.$$

但 α, β, γ 爲原方程式之三根。

$$\text{以 } \alpha+\beta+\gamma=0. \therefore \alpha+\beta=-\gamma, \alpha\beta\gamma=-q. \therefore \alpha\beta=-\frac{q}{\gamma},$$

$$\text{故 } y^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=y^2+\frac{4q}{\gamma}, \therefore \gamma^2-y^2\gamma+4q=0. \text{ 又 } \gamma^3+p\gamma+q=0.$$

$$\text{由是得 } \gamma = \frac{3q}{y^2+p}$$

$$\therefore 27q^3 + 3pq(y^2+p)^2 + q(y^2+p)^3 = 0.$$

即 $y^6 + 6py^4 + 9p^2y^2 + 4p^3 + 27q^2 = 0$. 此即所求之方程式也。

準代加德氏之符號規則。上之 y^2 之方程式。其 p 及 $4p^3 + 27q^2$ 非俱為負。則不能有三正根。又若 $4p^3 + 27q^2$ 為負。則 y^2 之方程式之三正根。當在 $+\infty, -2p, -p, 0$ 之間。何則。試以 $+\infty, -2p, -p, 0$ 代入此方程式之 y^2 順次記 $f(y^2)$ 之值之符號為 $+, -, +, -$ 。

由是方程式如 $x^3 + px + q = 0$ 為有三實根者。其關係全在 $4p^3 + 27q^2$ 之值為負也。

470. 任何方程式之實根 示以推求實根近似之值以作本編之結局。求近似值之方法有種種。茲僅示以忽擊氏之法。特將可為是法之準備者先為說明之。

471. 綜合除法 (Synthetic Division) 如次所示。

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

以 $x - \lambda$ 除之。其商為

$$Q \equiv b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-1}$$

假定其餘為 R 。但 R 不含有 x 者。

$$\text{如是則 } f(x) \equiv Q \times (x - \lambda) + R,$$

但 $Q \times (x - \lambda) + R$ 等於次式。

$$b_0x^n + (b_1 - \lambda b_0)x^{n-1} + (b_2 - \lambda b_1)x^{n-2} + \dots + (b_{n-1} - \lambda b_{n-2})x + R - \lambda b_{n-1}$$

試將此式與 $f(x)$ 比較 x 同方乘之係數。

$$b_0 = a_0, b_1 - \lambda b_0 = a_1, b_2 - \lambda b_1 = a_2, \dots, b_{n-1} - \lambda b_{n-2} = a_{n-1}, R - \lambda b_{n-1} = a_n$$

由上之關係 $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$ 之值。可如次之所示直求得之。

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ & \lambda b_0 & \lambda b_1 & \lambda b_2 & \dots & \lambda b_{n-2} & \lambda b_{n-1} \end{array}$$

$$\hline b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \quad b_{n-1} \quad R$$

第壹 $b_0 = a_0$ 。第貳 b_0 以 λ 乘之加 a_1 而得 b_1 。第三 b_1 以 λ 乘之加 a_2 而得 b_2 。以下準此。

[例] $x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 15x^2 + 7$ 以 $x - 2$ 除之。求其商及其餘。

$$1-6+2+15+0+7$$

$$2-8-12+6+12$$

$$1-4-6+3+6+19$$

故所求之商爲 $x^4-4x^3-6x^2+3x+6$ 。其餘爲 19。

上之方法。謂之綜合除法。即解析除之方法而後綜合之。以成此規則者也。

此法擴充之可用於多項式之除法。因非要例故略之。

472. 係數之關係 $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$ 之值可以 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ 及 λ 表示之。

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1 + \lambda a_0, \quad b_2 = a_2 + \lambda a_1 + \lambda^2 a_0,$$

$$b_3 = a_3 + \lambda a_2 + \lambda^2 a_1 + \lambda^3 a_0, \dots$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + \lambda a_{n-2} + \lambda^2 a_{n-3} + \lambda^3 a_{n-4} + \dots + \lambda^{n-1} a_0.$$

$$\text{及 } R = a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \lambda^3 a_{n-3} + \dots = f(\lambda).$$

$$\text{故 } \frac{f(x)}{x-\lambda} = a_0 x^{n-1} + (a_1 + \lambda a_0) x^{n-2} + \dots$$

由上諸式。可得 439 章之公式。

何則。設 a, b, c, \dots 爲 $f(x)=0$ 之根。則

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \dots \quad (\text{見 452 章})$$

$$= \{a_0 x^{n-1} + (a_1 + a a_0) x^{n-2} + (a_2 + a a_1 + a^2 a_0) x^{n-3} + \dots\}$$

$$+ \{a_0 x^{n-1} + (a_1 + b a_0) x^{n-2} + (a_2 + b a_1 + b^2 a_0) x^{n-3} + \dots\} + \dots$$

$$= n a_0 x^{n-1} + (n a_1 + a_0 \Sigma a) x^{n-2} + (n a_2 + a_1 \Sigma a + a_0 \Sigma a^2) x^{n-3} + \dots$$

$$\text{但 } f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \dots$$

比較兩式同方乘之係數爲

$$n a_0 = n a_0,$$

$$(n-1) a_1 = n a_1 + a_0 \Sigma a,$$

$$(n-2) a_2 = n a_2 + a_1 \Sigma a + a_0 \Sigma a^2,$$

$$\dots = \dots$$

473. 問題 從 $f(x)=0$ 之各根減 λ 以爲根。求其方程式。已於 442 章第三示明其法。以 $y+\lambda$ 代入 $f(x)$ 之 x 而得之。今更示以簡法如次。

設從 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n=0$ 之各根減 λ 以爲根。其方程式。爲 $b_0y^n+b_1y^{n-1}+b_2y^{n-2}+\dots+b_n=0$ 。

然 $y=x-\lambda$ 。故上之方程式。

即 $b_0(x-\lambda)^n+b_1(x-\lambda)^{n-1}+\dots+b_{n-1}(x-\lambda)+b_n=0$ 。

由是 $f(x)=b_0(x-\lambda)^n+b_1(x-\lambda)^{n-1}+\dots+b_{n-1}(x-\lambda)+b_n$ 。

此右邊以 $x-\lambda$ 除。則餘 b_n 。

又此第壹商以 $x-\lambda$ 除。則餘 b_{n-1} 。

又此第貳商以 $x-\lambda$ 除。則餘 b_{n-2} 。

以下順次餘 $b_{n-3}, b_{n-4}, \dots, b_2, b_1, b_0$ 。

故以 $x-\lambda$ 逐次除 $f(x)$ 。即得其餘爲 $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ 。

[第壹例] 求從 $x^4-2x^3+3x-5=0$ 之各根減 2 而作方程式。

以累除所得之餘數。(演式中之粗字) 爲所求方程式之係數。(用 471 章之法)。

$$\begin{array}{r}
 1-2+0+3-5 \\
 \quad 2 \ 0 \ 0 \ 6 \\
 \hline
 1 \ 0 \ 0 \ 3 \ 1 \\
 \quad 2 \ 4 \ 8 \\
 \hline
 1 \ -2 \ 4 \ 11 \\
 \quad 2 \ 8 \\
 \hline
 1 \ 4 \ 12 \\
 \quad 2 \\
 \hline
 1 \ 6
 \end{array}$$

第壹以 $x-2$ 除 $f(x)$ 得商 x^3+3 而餘 1。

第貳以 $x-2$ 除 x^3+3 得商 x^2+2x+4 而餘 11。

第三以 $x-2$ 除 x^2+2x+4 得商 $x+4$ 而餘 12。

第四以 $x-2$ 除 $x+4$ 得商 1 而餘 6。

由是得所求之方程式。爲

$$y^4 + 6y^3 + 12y^2 + 11y + 1 = 0.$$

[第貳例] 求從 $x^3 - x^2 - x + 4 = 0$ 之各根加 3 而作方程式。

其除式爲 $x+3$ 。由是

$$\begin{array}{r} 1-1-1+4 \\ -3+12-33 \\ \hline 1-4+11-29 \\ -3+21 \\ \hline 1-7+32 \\ -3 \\ \hline 1-10. \end{array}$$

由是得所求之方程式爲 $y^3 - 10y^2 + 32y - 29 = 0$ 。

474. 拾之倍數 若將 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ 。各根十倍之。而作方程式。

以 $\frac{y}{10}$ 代 x 。則 $a_0y^n + 10a_1y^{n-1} + 10^2a_2y^{n-2} + \dots + 10^n a_n = 0$ 。

即 y^n 之項 1 倍。 y^{n-1} 之項 10 倍。 y^{n-2} 之項 10^2 倍。 ……迄於末項爲 10^n 倍。

[例] 試將 $x^4 - 2x^3 + 5x + 8 = 0$ 之各根十倍之而作方程式。

所作之方程式爲 $y^4 - 20y^3 + 5000y + 80000 = 0$ 。此後欲其應用便利。不用 y 而用 x 。

即 $x^4 - 20x^3 + 5000x + 80000 = 0$ 。

475. 忽擊 Horner 氏之法 有數字係數之方程式。求其實根之漸近值。

由斯土莫氏之定理。知方程式之壹正實根。在於連續兩整數之間。而第壹從其各根減兩整數中之小者以爲根而作方程式。則此變得之方程式。其根必在於 0 與 1 之間矣。

乃將此方程式之根十倍之。(474章)則新方程式之根。爲在於0與10之間。

今驗此新方程式之根。爲在於10以內兩整數之間。乃如前法從其各根減此兩整數中之小者而變化之。亦將變得之方程式以其根十倍之。驗得其根在連續某兩整數之間。又從其根減其兩整數之小者而變化之。如法遞推將連次所減之各整數依次列之。卽爲殆近於原方程式之壹實根。

從原方程式減所求壹實根之整數部後。將其各根十倍之。所得次之整數部。爲所求根之十分位。卽小數第壹位。次從各根減其整數部後。又以其根十倍之。所得又次之整數部。爲所求根之百分位。卽小數第貳位。以下準此。

惟施此方法所當注意者。從各次之根減某整數時。方程式已知項(卽最後之項)之符號。須無更變。若此已知項之符號更變。則此方程式之根。已超過原方程式之根矣。

如欲求負根。令 x 變爲 $-x$ 。然後如前法求之。

[第壹例] 求 $x^3-3x-4=0$ 之正實根迄小數二位止。考此方程式之正根祇有壹。而此正根在於2與3之間。第壹從各根減2而變化之。得

$$x^3+6x^2+9x-2=0,$$

次將此方程式之各根十倍之。得

$$x^3+60x^2+900x-2000=0,$$

考此根在1與2之間。由是從此各根減1而變化之。

$$x^3+63x^2+1023x-1039=0,$$

又將此根十倍之。考其根在9與10之間。

故所求之根爲2.19.....

若欲更求以下之小數。可將此方程式之各根減9而變化之。

$$x^3+657x^2+11388x-66541=0,$$

將此根十倍之。以求其小數位。

其演算法如次。

1	0	-3	-4	(2.19.....
	2	+4	2	
	2	+1	-2000	
	2	8		
	4	+900		
	2			
	60			
	1	+ 61	+ 961	
	61	+961	-1039000	
	1	+ 62		
	62	+102300		
	1			
	630			
	9	+ 5751	+ 972459	
	639	+108051	- 66541	
	9	+ 5832		
	648	+113883		
	9			
	657			

〔簡法〕 將上列之演算式簡記如次。

1	0	-3	-4	(2.19.....
	2	+1	-2000	
	4	900	-1039000	
	60	961		
	61	102300	-66541	
	62	108051		
	630	113883		
	639			
	648			
	657			

[第貳例] 求30之立方根。

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 0 \quad 0 \quad -30 \quad (3.107\dots\dots\dots) \\
 \quad 8 \quad 9 \quad \quad \quad -3000 \\
 \quad \quad 2700 \\
 \quad 6 \quad 2791 \quad \quad \quad -209000000 \\
 \quad 90 \quad 28830000 \\
 \quad 91 \\
 \quad 92 \\
 \quad 9300 \quad 28895149 \quad \quad -6733957 \\
 \quad 9307 \quad 28960347 \\
 \quad 9314 \\
 \quad 9321
 \end{array}$$

次示以略法。

於演算時。變其方程式之根而又倍之。至二回三回而後。其最後之貳項。(即 x 之一次項及已知數之項)比之他項甚大。

由是可用畧法。即從左項至右項之諸係數原應順次附加以1, 2, 3, ……個0者。今不附加以0。而於其係數末位之數字。從右項向左項逐次捨去其1, 2, 3, ……個數字。

茲將上之演算式。已得3.107之後。施用此略法更求以下之小數。

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 9321 \quad 28960347 \quad -6733957 \quad (3.1072325) \\
 \quad 93 \quad 2896220 \\
 \quad \quad 2896408 \quad -941517 \\
 \quad \quad \quad -72597 \\
 \quad \quad \quad -14669 \\
 \quad \quad \quad -189
 \end{array}$$

從原有3.107之後得次位之新數字為2。追求得2以後。斯時各項所有之係數。為

93, 2896406, -941517。其第壹項已消去。

乃從下列之第貳項捨去壹數字，第壹項捨去貳數字。如是可徑以 289640 除 941517。但其除法用略除法。每除壹次將除數捨去壹數字。其連次所得之商。即其次所得各位之小數也。

476. 虛根 方程式虛根之數值。於理論上可以次之方法求得之。然此為最簡單之法。而其他則甚煩雜也。

例求 $x^3+3x-1=0$ 虛根之數值。

試於 $f(x)$ 以 $a+\beta i$ 代 x 。則得 $(a+\beta i)^3+3(a+\beta i)-1=0$ 。

即 $a^3+3a-1-3a\beta^2+(3a^2\beta-\beta^3+3\beta)i=0$ 。

$\therefore a^3+3a-1-3a\beta^2=0, 3a^2\beta-\beta^3+3\beta=0$ 。

第貳方程式以 β 除之。為 $3a^2-\beta^2+3=0$ 。與第壹方程式消去其 β 。而得 $8a^3+6a+1=0$ 。

此方程式之壹實根其值為 $-0.16109\dots\dots$

又 $\beta^2=3(a^2+1)$ 。 $\therefore \beta=\pm 1.75438\dots\dots$

由是得所求之根為 $-0.16109\dots\dots \pm 1.75438\dots\dots \sqrt{-1}$ 。

例題四十六

1. 解次之各方程式。

(i) $x^3-12x+65=0$ 。

(ii) $x^3-9x+28=0$ 。

(iii) $x^3-48x-520=0$ 。

(iv) $x^3-21x-344=0$ 。

(v) $x^3-2x+5=0$ 。

(vi) $x^3-6x-11=0$ 。

(答) (i) $-5, -(\omega-4\omega^2), -(\omega^2-4\omega)$, 即 $-5, \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \sqrt{-3}$ 。

(ii) $-4, -(\omega-3\omega^2), -(\omega^2-3\omega)$ 。

(iii) $10, 2(\omega+\omega^2), 2(\omega^2+8\omega)$ 。

(iv) $8, (\omega+7\omega^2), (\omega^2+7\omega)$ 。

(v) $-2.094\dots, -1.703\dots(\omega), -0.391\dots(\omega^2), -1.703\dots(\omega^2), -0.391\dots(\omega)$ 。

(vi) $3.0913, 2.1699(\omega)+0.9214(\omega^2), 2.1699(\omega^2)+0.9214(\omega)$ 。

上之解法由 465 章。

2. 解次之各方程式。

- (i) $x^4 + 2x^3 + 14x + 15 = 0$. 答 $-1, -3, 1 \pm 2i$.
 (ii) $x^4 - 12x - 5 = 0$. 答 $1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm 2\sqrt{-1}$.
 (iii) $x^4 - 12x^2 + 24x + 140 = 0$. 答 $3 \pm \sqrt{-5}, -3 \pm \sqrt{-1}$.
 (iv) $4x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x - 12 = 0$. 答 $-2, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{-25})$.

上之解法由 466 章。

3. 用 Sturm 氏之定理。求次之方程式實根之數及其位置。

- (i) $x^3 - 3x + 6 = 0$. (ii) $x^3 - x^2 - 33x - 61 = 0$.
 (iii) $2x^4 - x^2 - 10x + 3 = 0$. (iv) $x^4 - 14x^2 + 16x + 9 = 0$.
 (v) $x^4 - 7x^2 + 3x - 20 = 0$.

- (答) (i) 於 -3 與 -2 之間有一實根。
 (ii) 於 -7 與 -6 之間及 1 與 2 之間各有一實根。
 (iii) 於 0 與 1 之間及 1 與 2 之間各有一實根。
 (iv) 於 2 與 3 之間有二實根。及 0 與 -1 之間有一實根。
 及 -4 與 -5 之間有一實根。
 (v) 於 2 與 3 及 -3 與 -4 之間各有一實根。

上之解法由 467 章。

4. $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$. 求 Sturm 氏之各函數。又 $p^2 < q$ 則有二虛根。試表示之。

[解] $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3qx + r$.
 $f_1(x) = 3(x^2 + 2px + q)$.
 $f_2(x) = 2(p^2 - q)x + pq - r$.
 $f_3(x) = (2p^3 - 3pq + r)^2 + 4(p^2 - q)^2(q - p^2)$.

由是 $p^2 < q$ 則以 $+\infty, -\infty$ 代 x . 其諸函數順次得 $++-+$. 及 $-+++$. 即有一實根。其他之二根為虛根。

5. p 或 r 為負而 $-4p^3r > 27r^3$. 則 $x^3 + px^2 + r = 0$. 皆為實根。試證明之。

[證] $f(x) = x^3 + px^2 + r$. $f_1(x) = 3x^2 + 2px$.
 $f_2(x) = 2p^2x - 9r$. $f_3(x) = +9(-4p^3r + 27r^2)$.

p 或 r 有一為負。則 $-4p^3r$ 為正。故 $f_3(x)$ 為正。以 $-\infty$ 及 $+\infty$ 代 x 而得上之諸函數。順次為 $-+-+$ 及 $++++$ 故其實根有三。

6. 方程式 $f(x)=0$ 其係數皆為整數。而 $f(0)$ 及 $f(1)$ 皆為奇數。則此方程式決無整根。試證明之。

[證] 於 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ 。

$f(0) = a_n = \text{奇數}$, $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \text{奇數}$ 。

故 $\frac{a_n}{a_0}$ 為奇數。即凡根之積皆為奇數。設或 $f(x)=0$ 之根為整數。

而以 $2x+1$ 代 x 。則 $f(2x+1) = a_0(2x+1)^n + a_1(2x+1)^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 。

即偶數 $+ a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ 。

即偶數 $+ \text{奇數} = 0$ 。是不合於理。故知原方程式決無整根。

7. $x^3 - 2x - 5 = 0$ 之一正實根為 2.09455143 試示之。

[證] 如 475 章第一例。

8. 求次之各方程式之正實根。迄小數四位止。

(i) $x^3 - 7x + 7 = 0$. (ii) $x^3 - 8x - 40 = 0$.

(iii) $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$. (iv) $x^4 + x^3 - 4x^2 - 16 = 0$.

(v) $x^4 - 14x^2 + 16x + 9 = 0$. (vi) $x^5 - 2 = 0$.

[答] (i) 1.3569, 1.6920. (ii) 4.1891. (iii) .4679, 1.6527, 3.8793.

(iv) 2.2317. (v) 2.1622, 2.4142. (vi) 1.1487.

9. 求次之方程式之實根。及其位置。

(i) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 24x + 144 = 0$. (ii) $x^4 - 26x^2 + 48x + 9 = 0$.

[答] (i) 3, 3, -4, -4. (ii) 3, 3, $-3 \pm \sqrt{8}$.

10. $x^6 - 7x^3 + 15x^2 + 3x - 4 = 0$ 之實根。不多於四。又其四根在 1 與 -1 之間。試證之。

[證] 此可由 467 章證得之。

11. 知 $2x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 4x + 6 = 0$ 。有可通度之根。試解之。

[解] $y = mx$. 即 $x = \frac{y}{m}$.

則 $2y^5 - 7my^4 + 6m^2y^3 - 11m^3y^2 + 4m^4y + 6m^5 = 0$.

如 $m=2$. 則 $y^5 - 7y^4 + 12y^3 - 44y^2 + 32y + 96 = 0$

以 96 之因子 -1, 2, 6 代 y 為能適合。

故 $y = -1, 2, 6$. 即 $x = -\frac{1}{2}, 1, 3$.

由是知其他之根爲 $\pm\sqrt{-2}$ 。

12. 試以 $x^3-3px^2-3(1-p)x+1=0$ 各根之平方爲根而作方程式。由此方程式對於 p 之任何實根而有三實根。試示之。

[解] $x^3-3(1-p)x=3px^2-1$ ，兩邊平方之。

則 $x^6-6(1-p)x^4+9(1-p)^2x^2=9p^2x^4-6px^2+1$ 。

$\therefore x^6-3(3p^2-2p+2)x^4+3(3p^2-4p+3)x^2-1=0$ 。

$x^2=y$ 。則 $y^3-3(3p^2-2p+2)y^2+3(3p^2-4p+3)y-1=0$ 。

y 之三根，皆爲實根。可由467章證得之。

13. $x^3-3px^2-3(1-p)x+1=0$ 之三根。對於 p 之任何實數皆爲實根。試證之。又此三根爲 α, β, γ ，則

$\beta(1-\gamma)=\gamma(1-\alpha)=\alpha(1-\beta)=1$ 。或 $\beta(1-\alpha)=\gamma(1-\beta)=\alpha(1-\gamma)=1$ 。

[證] $f(x)=x^3-3px^2-3(1-p)x+1$ ， $f'(x)=x^2-2px-(1-p)$ ，

$f''(x)=x-p$ ， $f'''(x)=+1$ 。

$f(x)$ $f'(x)$ $f''(x)$ $f'''(x)$

$x=+\infty$ + + + + 即符號之變化爲0。

$x=-\infty$ - + - + 即符號之變化爲3。

由是知有實根三。又以 $x^3-3px^2-3(1-p)x+1=0$ 之三根爲 α, β, γ 。則 $\alpha\beta\gamma=-1$ 。而令 $\beta(1-\gamma)$ ， $\gamma(1-\alpha)$ ，及 $\alpha(1-\beta)$ 爲 y 。則

$$y=\beta(1-\gamma)=\beta-\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}=\beta+\frac{1}{\alpha} \quad \therefore \alpha=\frac{1}{y-\beta}$$

$$y=\gamma(1-\alpha)=\gamma-\frac{\alpha\beta\gamma}{\beta}=\gamma+\frac{1}{\beta} \quad \therefore \gamma=\frac{\beta y-1}{\beta}$$

$$y=\alpha(1-\beta)=\alpha-\frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma}=\alpha+\frac{1}{\gamma} \quad \text{將 } \alpha, \gamma \text{ 相當之值代入之。}$$

$$\text{即 } y=\frac{1}{y-\beta}+\frac{\beta}{\beta y-1} \quad \therefore (y^2-1)(\beta^2-\beta y+1)=0。$$

由是 $y-1=0$ 。 $\therefore y=1$ 。 即 $\beta(1-\gamma)=\gamma(1-\alpha)=\alpha(1-\beta)=1$ 。

由同法 $\beta(1-\alpha)=\gamma(1-\beta)=\alpha(1-\gamma)=1$ 。

14. 以 $x^5+px+q=0$ 之根各一對之和爲根。則得方程式如次。
 $x^{10}-3px^6-11qx^5-4p^2x^2+4pqx-q^2=0$ 。

[證] 設 $x^5+px+q=0$ 之五根爲 a, b, c, d, e 。

則 $\Sigma a=0$, $\Sigma ab=0$, $\Sigma abc=0$, $\Sigma abcd=p$, $abcde=q$.

又所求方程式之根有 $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $b+c$, $b+d$, $b+e$, $c+d$, $c+e$, $d+e$ 之十根。

從 $\Sigma(a+b)=0$, $\Sigma(a+b)(a+c)=0$ 等之關係。可求得第二之十次方程式。此演式甚繁。且多占紙幅。故略之。

15. $x^4+4ax^3+6a^2x^2+4ax+1=0$ 。若非 $1>a^2>\frac{1}{9}$ 則決無實根。又 a^2 在此極限內。則此方程式有二實根。試各證明之。

〔證〕 $f(x)=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4ax+1$,

$$f'(x)=x^3+3ax^2+3a^2x+a,$$

$$f''(x)=-(1-a^2)(3ax+1),$$

$$f'''(x)=-\left(a^2-\frac{1}{9}\right).$$

於上之四個函數。若其 $1>a^2>\frac{1}{9}$ 。

以 $x=+\infty$ 代入之。順次得 $++--$

以 $x=-\infty$ 代入之。順次得 $+-+-$

即符號變化之差為 2。故 x 有二實根。

若 $1<a^2$ 。

則以 $x=+\infty$ 代入之。順次得 $+++-$

以 $x=-\infty$ 代入之。順次得 $+- - -$

即符號變化之差為 0。故 x 無一為實根。

又 $a^2<\frac{1}{9}$ 。

則以 $x=+\infty$ 代入之。順次得 $++-+$

以 $x=-\infty$ 代入之。順次得 $+-++$

即符號變化之差為 0。故 x 無一為實根。

16. a 為 $x^4+ax^3-4x^2-ax+1$ 之一根。則 $\frac{1+a}{1-a}$ 亦為根。

又其他之根為 $-\frac{1}{a}$ 及 $\frac{a-1}{a+1}$ 並證明之。

〔證〕 將 $x^4+ax^3-4x^2-ax+1=0$ 。括之為 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x-\frac{1}{x}\right)-4=0$ 。

$$\therefore x - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 16}).$$

$$\text{若 } x = a, \text{ 則 } a - \frac{1}{a} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 16}).$$

$$\text{由是 } x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}, \text{ 即 } (x - a)\left(1 + \frac{1}{xa}\right) = 0.$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{xa} = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{a}.$$

又他之二根爲 β, γ . 則從原方程式得 $a\left(-\frac{1}{a}\right)\beta\gamma = 1$.

$$\text{即 } -\beta\gamma = 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{又 } a\left(\frac{1}{a}\right) + a\beta + a\gamma + \left(-\frac{1}{a}\right)\beta - \left(-\frac{1}{a}\right)\gamma + \beta\gamma = -6 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{從 (1)(2) 求得 } \beta, \gamma \text{ 爲 } \beta = \frac{a-1}{a+1}, \quad \gamma = \frac{1+a}{1-a}.$$

17. $a, \beta, \gamma \dots\dots\dots$ 爲 $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots\dots\dots + p_n = 0$ 之根.

.) $\Sigma a\beta^2\gamma = -p_2p_3 + 3p_1p_4 - 5p_5$ 試證明之.

[證] 用 440 章及 441 章之公式. 可直證得之.

18. $a_1, a_2 \dots\dots\dots$ 爲 $x^5 - 5px^3 + 5p^2x - q = 0$ 之根.

則 $\Sigma a_1^4 a_2^3 a_3^2 a_4 + 5q^2 + 500p^5 = 0$.

[證] 與前題同法.