Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis II

Arbeitsblatt 38

Übungsaufgaben

Aufgabe 38.1. Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Bestimme die Länge der affin-linearen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \, t \longmapsto tv + w.$$

Aufgabe 38.2. Es sei

$$f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Kurve und $c \in [a, b]$. Zeige, dass f genau dann rektifizierbar ist, wenn die beiden Einschränkungen von f auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ rektifizierbar sind, und dass in diesem Fall

$$L_a^b(f) = L_a^c(f) + L_c^b(f)$$

gilt.

Aufgabe 38.3. Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto x^3 - 5x^2 + 3x - 2,$$

von -5 nach 5.

Aufgabe 38.4.*

Bestimme die Länge der durch

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, t \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

gegebenen *Schraubenlinie* für t zwischen 0 und b, wobei $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Aufgabe 38.5.*

Berechne die Länge der archimedischen Spirale

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t\cos t,\ t\sin t)\,,$$

für die Umdrehung zwischen $t = 0$ und $t = 2\pi$.

Aufgabe 38.6. Bestimme die Länge der Neilschen Parabel

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^2, t^3),$$

von 0 bis b, wobei $b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 38.7. Bestimme die Länge des Graphen des cosinus hyperbolicus $\cosh t$ von a nach b.

Aufgabe 38.8.*

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 13,$$

zwischen 4 und 8.

Aufgabe 38.9.*

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$f\colon\ [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, \sin t).$$

a) Skizziere das Bild dieser Kurve und den Streckenzug, der sich ergibt, wenn man das Definitionsintervall in vier gleichlange Teilintervalle unterteilt.

b) Berechne die Gesamtlänge des in a) beschriebenen Streckenzugs.

c) Zeige, dass für die Länge L dieser Kurve die Abschätzung

$$L \leq \sqrt{2}\pi$$

gilt.

Aufgabe 38.10.*

Wir betrachten die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ ohne den offenen Kreis mit Mittelpunkt $M = (0,0)$ und Radius 3, also

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \geq 3\right\}.$$

Eine Person befindet sich im Punkt $A = (5,0)$ und möchte zum Punkt $B = (-5,0)$, wobei sie sich nur in T bewegen darf.

a) Zeige, dass die Person von A nach B entlang von zwei geraden Strecken kommen kann, deren Gesamtlänge $12,5$ ist.

b) Zeige, dass die Person von A nach B entlang eines stetigen Weges kommen kann, dessen Gesamtlänge maximal $11,9$ ist.

Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

auf einem euklidischen Vektorraum V heißt *Isometrie*, wenn für alle $v, w \in V$ die Gleichheit

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

gilt.

Aufgabe 38.11.*

Es sei

$$\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve und sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Isometrie. Beweise die Längengleichheit

$$L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma).$$

Aufgabe 38.12. Es sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann rektifizierbar ist, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.

Aufgabe 38.13.*

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven Abbildung

$$\varphi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1] \subseteq \mathbb{R},$$

die rektifizierbar ist, deren Länge aber > 1 ist.

Aufgabe 38.14.*

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven Abbildung

$$\varphi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1] \subseteq \mathbb{R},$$

die nicht rektifizierbar ist.

Die folgenden Aufgaben diskutieren, inwiefern höherdimensional ein „Mittelwertsatz“ gelten kann.

Aufgabe 38.15. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f(a) \neq f(b)$. Zeige, dass es kein $c \in [a,b]$ derart geben muss, dass

$$f'(c) = s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, gilt.

Aufgabe 38.16. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ und mit $f(a) \neq f(b)$. Zeige, dass es kein $c \in [a,b]$ derart geben muss, dass

$$f'(c) = s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, gilt.

Aufgabe 38.17. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ und mit $f(a) \neq f(b)$. Zeige, dass es kein $c \in [a,b]$ derart geben muss, dass $f'(c)$ und $f(b) - f(a)$ linear abhängig sind.

Aufgabe 38.18. Wir betrachten die Zykloide aus Beispiel 38.14, also die differenzierbare Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (x(t), y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

(1) Zeige, dass $x(t)$ streng wachsend ist.
(2) Zeige, dass

$$x\colon [0, 2\pi] \longrightarrow [0, 2\pi],\ t \longmapsto x(t),$$

bijektiv ist.
(3) Es sei $h(x)$ die Umkehrfunktion zu $x(t)$ aus Teil (2). Zeige, dass h in 0 und in 2π nicht differenzierbar ist.
(4) Drücke $y(t)$ als Funktion von x aus. Wie verhält sich der Graph zu dieser Funktion zu der Zykloide? Ist diese Funktion differenzierbar?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 38.19. (4 Punkte)

Ein Massenteil werde zum Zeitpunkt 0 von einem Berggipfel (der als Nullpunkt der Ebene angesetzt wird) mit konstanter horizontaler Geschwindigkeit v abgeschossen und bewege sich danach luftwiderstandsfrei unter der (konstanten) Schwerkraft der Erde. Berechne die Bahnkurve $f(t)$ des Körpers und die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t.

Aufgabe 38.20. (4 Punkte)

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - 4x + 11,$$

zwischen 2 und 9.

Aufgabe 38.21. (3 Punkte)

Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, t \longmapsto \left(\frac{t^3}{3}, \frac{4t^5}{5}, \frac{8t^7}{7}\right),$$

von a nach b.

Aufgabe 38.22. (5 Punkte)

Bestimme die Länge des Graphen der Exponentialfunktion $\exp t$ von a nach b.

Aufgabe 38.23. (5 (3+2) Punkte)

Person A befindet sich im Punkt $(0, -5)$ und will nach $(0, 5)$. Im Punkt $(0, 0)$ befindet sich eine weitere unbewegliche Person B. Da die Abstandsregel von 2 einzuhalten ist, muss A um B herumlaufen.

(1) Was ist die minimale Länge eines Weges, mit dem A an ihr Ziel gelangt?
(2) Man gebe eine Parametrisierung dieses kürzesten Weges an, wobei die Geschwindigkeit konstant gleich 1 sein soll.

Aufgabe 38.24. (8 Punkte)

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Zeige, dass es ein $c \in [a,b]$ derart gibt, dass $f'(c)$ und $f(b) - f(a)$ linear abhängig sind.

Abbildungsverzeichnis