Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 21

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 21.1. Untersuche für jede Filtrierung von S_3 mit Untergruppen, ob eine auflösende Filtrierung vorliegt oder nicht.

Aufgabe 21.2. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass G genau dann kommutativ ist, wenn die Kommutatoruntergruppe $K(G)$ trivial ist.

Aufgabe 21.3. Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die Beziehung $\varphi(K(G)) \subseteq K(H)$.

Die folgende Aussage heißt Satz von Cayley.

Jede Gruppe lässt sich als Untergruppe einer Permutationsgruppe realisieren. Jede endliche Gruppe lässt sich als Untergruppe einer endlichen Permutationsgruppe realisieren.

Aufgabe 21.4. Beweise den Satz von Cayley für Gruppen.

Aufgabe 21.5. Sei G eine einfache, nicht kommutative Gruppe. Zeige, dass G nicht auflösbar ist.

Wir erwähnen, dass die alternierenden Gruppen A_n, $n \geq 5$, einfach sind (das ist eine nichttriviale Aussage). Dies bedeutet, dass die Permutationsgruppen S_n, $n \geq 5$, nur die alternierende Gruppe als Normalteiler enthalten.

Aufgabe 21.6. Sei A_n eine alternierende Gruppe mit $n \geq 4$. Zeige, dass A_n nicht kommutativ ist.

Eine Gruppe G heißt *perfekt*, wenn sie gleich ihrer eigenen Kommutatoruntergruppe ist, also wenn $G = K(G)$ gilt.

Aufgabe 21.7. Sei G eine einfache, nicht kommutative Gruppe. Zeige, dass G perfekt ist.

Nach Aufgabe 5.12 ist das Zentrum $Z_1 = Z = Z(G)$ einer Gruppe G ein Normalteiler in G. Folglich gibt es eine Restklassengruppe $G/Z(G)$, die selbst wiederum ein Zentrum besitzt. Das Urbild dieser Gruppe in G wird mit Z_2 bezeichnet; sie ist wieder ein Normalteiler in G, so dass man eine Filtration

$$0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq Z_3 \subseteq \cdots$$

von Normalteilern in G erhält. Diese Filtration nennt man *Zentralreihe*.

Eine Gruppe G heißt *nilpotent*, wenn ihre Zentralreihe bei G endet, d.h. wenn G mit einer iterierten Zentrumsgruppe $Z_n(G)$ übereinstimmt.

Aufgabe 21.8. Zeige, dass eine nilpotente Gruppe auflösbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.9. (4 Punkte)

Zeige, dass für $n \leq 4$ die Permutationsgruppen S_n auflösbar sind.

Aufgabe 21.10. (3 Punkte)

Es sei G eine endliche Gruppe, für die jede Untergruppe ein Normalteiler sei. Zeige, dass G auflösbar ist.

Aufgabe 21.11. (2 Punkte)

Zeige, dass jede gerade Permutation $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, ein Produkt aus Dreierzykeln ist.

Aufgabe 21.12. (3 Punkte)

Zeige: Keine der alternierenden Gruppen A_n besitzt eine Untergruppe vom Index zwei.

Hinweis: Aufgabe 21.11 hilft.

Aufgabe 21.13. (3 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$. Zeige:

(1) G ist genau dann abelsch, wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist.
(2) Der Index von $Z(G)$ in G ist keine Primzahl.
(3) Ist G von der Ordnung pq für zwei Primzahlen p und q, so ist G abelsch oder $Z(G)$ trivial.

Aufgabe 21.14. (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit mindestens 4 Elementen. Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(K)$ perfekt ist.

Tipp: Es gibt ein $x \in K$ mit $x^2 - 1 \neq 0$.

Aufgabe 21.15. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(K)$ von

$$\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in K\} \cup \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in K\}$$

erzeugt wird.

Abbildungsverzeichnis