大代數
難題詳解

全冊

A

Collection of Advanced Algebraic Problems

WITH

Solutions and Explanations.

商務印書館藏版

查理斯密斯氏，
霍爾氏，乃托氏
大代數難題詳解
第一卷
斯密斯氏題解

1. 求下之代數式之因子.

(1) $a^2(b-c)(c+a-b)(a+b-c)+b^2(c-a)(a+b-c)(b+c-a)$
$+c^2(a-b)(b+c-a)(c+a-b)$.

(2) $abcd(a^2+b^2+c^2+d^2)-b^2c^2d^2-c^2d^2a^2-d^2a^2b^2-a^2b^2c^2$.

(3) $2(a^3+b^3+c^3)+a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-3abc$.

(4) $a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b)+a^3(b+c)^2+b^3(c+a)^2$
$+c^3(a+b)^2+2abc(bc+ca+ab)$.

(解) (1) $b=c$, 則原式爲 0, 故 $b-c$, $c-a$, $a-b$ 爲原式之因子.

又 $a+b+c=0$, 則原式爲

$$a^2(b-c)(-2b)(-2c)+b^2(c-a)(-2c)(-2a)$$
$$+c^2(a-b)(-2a)(-2b),$$

卽 $4abc\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$ 卽 $4abc\{0\}=0$,

故 $a+b+c$ 爲原式之因子.

而原式爲五次式, 故殘[illegible]子爲壹次.

由是　　原式 $=A(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2$,

比較 a^4b 之係數, 則　　$1=-A$　　$\therefore A=-1$.

$$\therefore \text{原式}=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2.$$

(2) 原式 $=abcd\{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)\}-c^2d^2(a^2+b^2)-a^2b^2(c^2+d^2)$

$=cd(a^2+b^2)(ab-cd)-ab(c^2+d^2)(ab-cd)$

$=(ab-cd)\{cd(a^2+b^2)-ab(c^2+d^2)\}=(ab-cd)(ac-bd)(ad-bc).$

(3) 原式$=2(a^3+b^3+c^3-3abc)+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$

$+3abc.$

$=2(a^3+b^3+c^3-3abc)+a^2(b+c)+a\{(b+c)^2+bc\}+bc(b+c)$

$=2(a^3+b^3+c^3-3abc)+a(b+c)(a+b+c)+bc(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+a(b+c)+bc\}$

$=(a+b+c)\{2(a^2+b^2+c^2)-bc-ca-ab\}.$

(4) $b=-c$, 則原式爲

$a^4(0)+c^4(c+a)+c^4(a-c)+a^3(0)^2-c^3(c+a)^2+c^3(a-c)^2$

$-2ac^2(-c^2+ca-ac)$

$=+2c^4a-4c^4a+2c^4a=0.$

∴ 原式 $=(b+c)(c+a)(a+b)\{A(a^2+b^2+c^2)+B(bc+ca+ab)\}.$

比較 a^4b 之係數, 則 $1=A$,

比較 a^3b^2 之係數, 則 $1=A+B$, 　∴　 $B=1-A=1-1=0.$

∴ 原式 $=(b+c)(c+a)(a+b)(a^2+b^2+c^2).$

2. $a^2-\alpha^2=b^2-\beta^2=c^2-\gamma^2$, 則

$$\frac{b\gamma-c\beta}{a-\alpha}+\frac{c\alpha-a\gamma}{b-\beta}+\frac{a\beta-b\alpha}{c-\gamma}=0.$$

(解) $a^2-\alpha^2=b^2-\beta^2=c^2-\gamma^2=k$, 則

$$a+\alpha=\frac{k}{a-\alpha},\qquad b+\beta=\frac{k}{b-\beta},\qquad c+\gamma=\frac{k}{c-\gamma},$$

$$\therefore\ k\left\{\frac{b\gamma-c\beta}{a-\alpha}+\frac{c\alpha-a\gamma}{b-\beta}+\frac{a\beta-b\alpha}{c-\gamma}\right\}$$

$$=(a+\alpha)(b\gamma-c\beta)+(b+\beta)(c\alpha-a\gamma)+(c+\gamma)(a\beta-b\alpha)$$

$$=0.$$

3. $yz+zx+xy=a^2$, 則

$$\frac{1}{yz(a^2+x^2)}+\frac{1}{zx(a^2+y^2)}+\frac{1}{xy(a^2+z^2)}=\frac{2a^2}{xyz\sqrt{\{(a^2+x^2)(a^2+y^2)(a^2+z^2)\}}}$$

(解) $a^2+x^2=yz+zx+xy+x^2=(x+y)(z+x)$,

同法 $a^2+y^2=(y+z)(x+y)$, $a^2+z^2=(z+x)(y+z)$,

$$\therefore\quad \sqrt{\{(a^2+x^2)(a^2+y^2)(a^2+z^2)\}}=(x+y)(y+z)(z+x).$$

以上之各值代入 $\dfrac{1}{yz(a^2+x^2)}+\dfrac{1}{zx(a^2+y^2)}+\dfrac{1}{xy(a^2+z^2)}$ 之式中,則

$$\frac{1}{yz(x+y)(z+x)}+\frac{1}{zx(y+z)(x+y)}+\frac{1}{xy(z+x)(y+z)}$$

$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{xyz(y+z)(z+x)(x+y)}=\frac{2(xy+yz+zx)}{xyz\sqrt{\{(a^2+x^2)(a^2+y^2)(a^2+z^2)\}}}$$

4. $yz+zx+xy=0$, 則

$$(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2+2x^2y^2z^2=x^4(y+z)^2+y^4(z+x)^2+z^4(x+y)^2.$$

(解) $yz+zx+xy=0$, 則 $x(y+z)=-yz$,

故 $x^2(y+z)=-xyz$, $\therefore\quad x^4(y+z)^2=x^2y^2z^2$.

又 $(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2+2x^2y^2z^2$

$$=(y+z)^2\{x^2+(xy+xz+yz)\}^2+2x^2y^2z^2.$$

此式之最後部分 $xy+xz+yz=0$, $2x^2y^2z^2=2x^4(y+z)^2$,

$$\therefore\quad (y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2+2x^2y^2z^2=x^4(y+z)^2+2x^4(y+z)^2$$

$$=3x^4(y+z)^2,$$

此式爲等勢式,故亦等於 $3y^4(z+x)^2$, $3z^4(x+y)^2$.

5. $f(x)$ 爲 x 之有理整函數,以 $(x-a)(x-b)$ 除之,

則其殘爲 $x\left\{\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\right\}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$.

(解) Q 爲商, $Rx+R'$ 爲殘,則

$$f(x)=Q(x-a)(x-b)+Rx+R'.$$

此恆式中如 $x=a$ 及 b, 則順次得

$f(a)=Ra+R'$ 及 $f(b)=Rb+R'$,

自此兩方程式求 R 及 R', 則

$$R=\frac{f(a)-f(b)}{a-b},\qquad R'=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

由是 $\mathrm{R}x+\mathrm{R}'=x\left\{\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\right\}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$.

6. $2\{(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4\}$ 爲完全平方式.

(解) $b-c=x,\quad c-a=y,\quad a-b=z,$ 則 $x+y+z=0,$

故 $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0,$

又 $x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=4(xy+yz+zx)^2,$ 即

$x^4+y^4+z^4+2\{(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\}=4(xy+yz+zx)^2,$

$x+y+z=0,$ 故 $2(x^4+y^4+z^4)=4(xy+yz+zx)^2,$

即 $2\{(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4\}=$完全平方式.

7. $3\{(b-c)^6+(c-a)^6+(a-b)^6-2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^3\}$ 爲完全平方式.

(解) $b-c=x,\quad c-a=y,\quad a-b=z,$ 則

$x+y+z=0,$ 即 $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0,$ 轉項再平方之, 則

$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).$

$\therefore\quad x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2=0$......................(A)

又 原式 $=3\{\sum(b-c)^6-2(\sum a^2-\sum bc)^3\}$

$$=3\left\{\sum(b-c)^6-2\left[\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{2}\right]^3\right\}$$

$$=3\left\{x^6+y^6+z^6-\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{4}\right\}$$

$$=3\left\{x^6+y^6+z^6-3x^2y^2z^2-\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{4}\right\}+9x^2y^2z^2$$

$$=\frac{3}{4}(x^2+y^2+z^2)\{4(x^4+y^4+z^4-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2)$$
$$-(x^2+y^2+z^2)^2\}+9x^2y^2z^2$$

$$=\frac{9}{4}(x^2+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2)$$
$$+9x^2y^2z^2.$$

由 (A) 則 $=\frac{9}{4}(x^2+y^2+z^2)(0)+9x^2y^2z^2=9x^2y^2z^2=$完全平方式.

8. $(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7=\frac{7}{2}(b-c)(c-a)(a-b)\sum(b-c)^4.$

(解) $\alpha=b-c$, $\beta=c-a$, $\gamma=a-b$, 則 $\alpha+\beta+\gamma=0$,
α,β,γ 爲 $x^3+px+q=0$ 之三根, 則
由第九編129章. $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2p^2$, $\alpha\beta\gamma=-q$,

$$\alpha^7+\beta^7+\gamma^7=-7p^2q=\frac{7}{2}\alpha\beta\gamma(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4),$$

卽 $(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7=\frac{7}{2}(b-c)(c-a)(a-b)\sum(b-c)^4$.

9. a,b,c 爲正數量而皆不等, 則
$bc(a-b)(a-c)+ca(b-c)(b-a)+ab(c-a)(c-b)$ 爲正數量.

(解) 化原式爲最簡, 則 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)$,

卽 $\frac{1}{2}\{(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\}$, 故此式爲正數量.

10. $a+b+c=0$, 則 $a(a-b)^2(a-c)^2+b(b-c)^2(b-a)^2+c(c-a)^2(c-b)^2+27abc(bc+ca+ab)=0$.

(解) $a(a-b)^2(a-c)^2=a\{a^2-a(b+c)+bc\}^2$,
但 $b+c=-a$. 故 $=a(2a^2+bc)^2$.
$\therefore$ 原式之前邊 $=a(2a^2+bc)^2+b(2b^2+ca)^2+c(2c^2+ab)^2+27abc(bc+ca+ab)$
$=4(a^5+b^5+c^5)+4abc(a^2+b^2+c^2)+28abc(bc+ca+ab)$.

又 a,b,c 爲 $x^3+px+q=0$ 之三根, 則由第九編129章.
$bc+ca+ab=p$, $abc=-q$, $a^2+b^2+c^2=-2p$, $a^5+b^5+c^5=5pq$,
$\therefore$ 原式之前邊 $=4(5pq)+4(-q)(-2p)+28(-q)p=0$,

11. $a+b+c+d=0$, 則

(1) $(\sum a^2)^2=2\sum a^4+8abcd$ (2) $\frac{\sum a^5}{5}=\frac{\sum a^2}{2}\cdot\frac{\sum a^3}{3}$.

又 n 爲正整數, 則 $\sum a^{2n+1}$ 可以 $\sum a^3$ 除之.

(解) (1) $(\sum a^2)^2=\sum a^4+2\sum a^2b^2$..............................(A)
又 $a+b+c=-d$, 則 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=d^2$,
卽 $a^2+b^2+c^2-d^2=-2(ab+bc+ca)$,

即 $a^4+b^4+c^4+d^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2d^2(a^2+b^2+c^2)$

$$=4\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\}.$$

故 $\sum a^4=2\sum a^2b^2-8abcd,\quad \therefore\quad 2\sum a^2b^2=\sum a^4+8abcd$.........(B)

由 (A), (B) 得 $(\sum a^2)^2=2\sum a^4+8abcd.$

(2) $(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)=1+qx^2+rx^3+sx^4,$

由是 $q=\sum ac,\quad r=\sum abc,\quad s=abcd,$

$\therefore\quad \sum a^2=-2q,\quad \sum a^3=3r,\quad \sum a^5=-5qr,$

$\therefore\quad \dfrac{\sum a^5}{5}=\dfrac{\sum a^2}{2}\cdot\dfrac{\sum a^3}{3}.$

欲証明最後之例題，設 $a^3+b^3+c^3+d^3=0$，則

$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3=0,\quad \therefore\quad 3(a+b)(b+c)(c+a)=0,$

故 $a+b=0$ 或 $b+c=0$ 或 $c+a=0.$

$a+b=0$，則 $c+d=0,\quad \therefore\quad a=-b,\quad c=-d,$

以此代入 $\sum a^{2n+1}$ 即 $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}+d^{2n+1}$ 之式中，則

$-b^{2n+1}+b^{2n+1}-d^{2n+1}+d^{2n+1}=0.$

即 $a^3+b^3+c^3+d^3$ 為 0，則 $\sum a^{2n+1}=0$，故 $\sum a^{2n+1}$ 可以 $\sum a^3$ 除之.

又 $b+c=0,\quad c+a=0$ 亦同法.

12. $a+b+c+d=a^2+b^2+c^2+d^2=0$，則

$$a^8+b^8+c^8+d^8=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4)^2.$$

(証) 由 **11.** 例 (1) $(\sum a^2)^2=2\sum a^4+8abcd$ 而 $\sum a^2=0$，故

$$abcd=-\frac{1}{4}(\sum a^4).$$

又 $\sum a^2=0$，故由 **11.** 例 (1) 得 $(\sum a^4)^2=2\sum a^8+8a^2b^2c^2d^2,$

$\therefore\ \sum a^8=\dfrac{1}{2}(\sum a^4)^2-4a^2b^2c^2d^2=\dfrac{1}{2}(\sum a^4)^2-4\times\dfrac{1}{16}(\sum a^4)^2=\dfrac{1}{4}(\sum a^4)^2.$

13. $a+b+c+d+e+f=0$ 及 $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3=0$，則

$$(a+b)(b+c)(c+a)+(d+e)(e+f)(f+d)=0,$$

及 $$\frac{1}{7}\sum a^7=\frac{1}{5}\sum a^5\times\frac{1}{2}\sum a^2.$$

(解) $\{(a+b+c)+(d+e+f)\}^3=0$, 卽

$$(a+b+c)^3+(d+e+f)^3+3(a+b+c)(d+e+f)(a+b+c+d+e+f)=0,$$

但 $a+b+c+d+e+f=0$, $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3=0$, 故化上之恒式爲簡式,則

$$3(a+b)(b+c)(c+a)+3(d+e)(e+f)(f+d)=0\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

卽得第壹之証.

(A) 式中 a, b, c, d, e, f 各貳個相組合變形相加得

$$\sum(a+b)(b+c)(c+a)+\sum(d+e)(e+f)(f+d)=0,$$

卽 $$A\sum a^2b+B\sum abc=0\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

但 A 及 B 爲數字係數.

又 $(a+b+c+d+e+f)^3=0$, 則 $\sum a^3+M\sum a^2b+N\sum abc=0$

$$\therefore\ M\sum a^2b+N\sum abc=0\ldots\ldots\ldots\ldots(C)$$

但 M 及 N 爲數字係數.

由 (B) 及 (C) 得 $$\sum abc=0\ldots\ldots\ldots\ldots(D)$$

又 a, b, c, d, e, f 爲根,則得方程式如下

$$x^6+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0,$$

已知 $\sum a=0$, $\sum a^3=0$.

$\therefore\ \sum ab=p$, $\sum abc=-q$, $\sum abcd=r$, $\sum abcde=-s$,

及 $abcdef=t$.

由 (D) 知 $q=0$,

由上之關係得 $(\sum a)^2=0$, $\therefore\ \sum a^2=-2p\ldots\ldots\ldots\ldots(E)$

又由上之方程式得 $x^5+px^3+qx^2+rx+s+\frac{t}{x}=0$,

此 x 順次用 a, b, c, d, e, f 代之相加則

$$\sum a^5+p\sum a^3+q\sum a^2+r\sum a+6s+t\sum\left(\frac{1}{a}\right)=0.$$

$$\sum a=0,\ \sum a^3=0,\ q=0,$$

故 $$\sum a^5+6s+t\sum\left(\frac{1}{a}\right)=0,$$

卽 $$\sum a^5+6s+t\left(\frac{\sum abcde}{abcdef}\right)=0,$$

$$\therefore\ \sum a^5=-5s\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(F)$$

又由前之方程式得 $x^7+px^5+qx^4+rx^3+sx^2+tx=0$,

$$\therefore\ \sum a^7+p\sum a^5+s\sum a^2=0,$$

卽 $$\sum a^7+p(-5s)+s(-2p)=0,$$

$$\therefore\ \sum a^7=7ps\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(G)$$

由 (E),(F),(G) 得 $\frac{1}{7}\sum a^7=\frac{1}{2}\sum a^2\times\frac{1}{5}\sum a^5.$

14. 三數量 $ax+cy+bz$, $by+az+cx$, $cz+bx+ay$, 其壹數量等于零,則他貳量之立方和爲

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

(解) 原書於此題有誤,玆訂正之.

$ax+cy+bz=X$, $by+az+cx=Y$, $cz+bx+ay=Z$,

然則 $X+Y+Z=(a+b+c)(x+y+z)$, 但 $\omega^3=1$, 故

$$\begin{aligned}X+\omega Y+\omega^2Z&=(ax+cy+bz)+\omega(by+az+cx)\\&\quad+\omega^2(cz+bx+ay)\\&=x(a+b\omega^2+c\omega)+y(a\omega^2+b\omega+c)\\&\quad+z(a\omega+b+c\omega^2)\\&=x(a+b\omega^2+c\omega)+\omega^2y(a+b\omega^2+c\omega)\\&\quad+\omega z(a+b\omega^2+c\omega)\\&=(a+b\omega^2+c\omega)(x+\omega^2y+\omega z),\end{aligned}$$

同法

$$X+\omega^2Y+\omega Z=(a+b\omega+c\omega^2)(x+\omega y+\omega^2z),$$

$$(X+Y+Z)(X+\omega Y+\omega^2Z)(X+\omega^2Y+\omega Z)$$

$$=(a+b+c)(a+b\omega^2+c\omega)(a+b\omega+c\omega^2)(x+y+z)$$
$$(x+\omega^2y+\omega z)(x+\omega y+\omega^2z),$$

由第九編 139 章最後之例得

$$X^3+Y^3+Z^3-3XYZ=(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

但 X, Y, Z 之中有一(例如 Z)等于零,則

$$X^3+Y^3=(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

15. $u=x+y+z+a(y+z-2x)$, $v=x+y+z+a(z+x-2y)$, $w=x+y+z+a(x+y-2z)$, 則

$$27a^2(x^3+y^3+z^3-3xyz)=u^3+v^3+w^3-3uvw.$$

(解) $u+v+w=3(x+y+z)$,

$u-v=3a(y-x)$, $v-w=3a(z-y)$, $w-u=3a(x-z)$.

$A^3+B^3+C^3-3ABC=\frac{1}{2}(A+B+C)\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\}$ 之公式得

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=\frac{1}{2}(u+v+w)\{(u-v)^2+(v-w)^2+(w-u)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\times 3(x+y+z)\{9a^2(y-x)^2+9a^2(z-y)^2+9a^2(x-z)^2\}$$
$$=\frac{27}{2}a^2(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$

$\therefore$ $u^3+v^3+w^3-3uvw=27a^2(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

16. $X=ax+by+cz$, $Y=cx+ay+bz$, $Z=bx+cy+az$,
$A=ax+cy+bz$, $B=bx+ay+cz$, $C=cx+by+az$,

然則

$$(X-A)(X-B)(X-C)=(Y-A)(Y-B)(Y-C)$$
$$=(Z-A)(Z-B)(Z-C)=XYZ-ABC.$$

(解) 由既知之關係式得 $X-A=(b-c)(y-z)$,

$Y-A=(c-a)(x-y)$,

$$Z-A=(a-b)(z-x).$$

自此三式各得三對等勢式，而此三對相連乘，則

$$(X-A)(X-B)(X-C)=(Y-A)(Y-B)(Y-C)$$
$$=(Z-A)(Z-B)(Z-C)$$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y).$$

又上之最初三相等式各爲 k，解括弧而相加，則得

$$\sum X^3-\sum X^2\sum A+\sum X\sum AB-3ABC=3k,$$

即 $$\sum X^3-3XYZ-\sum X^2\sum A+\sum X\sum AB+3(XYZ-ABC)$$
$$=3k \quad\cdots\cdots\cdots(A)$$

但 $\sum X^3-3XYZ=\sum X(\sum X^2-\sum XY)$,

又由既知之關係式得 $\sum X=\sum A=\sum a\sum x$,

及 $$\sum XY=\sum(ax+by+cz)(cx+ay+bz)=\sum x^2\sum ab$$
$$+\sum xy(\sum a^2+\sum ab),$$
$$\sum AB=\sum(ax+cy+bz)(bx+ay+cz)=\sum x^2\sum ab$$
$$+\sum xy(\sum a^2+\sum ab).$$

$\therefore\ \sum XY=\sum AB.$

由是 (A) 如下

$$\sum X(\sum X^2-\sum XY)-\sum X^2\sum X+\sum X\sum XY+3(XYZ-ABC)=3k,$$

即 $3(XYZ-ABC)=3k,\qquad \therefore\ k=XYZ-ABC.$

17. $b^2<4ac$ 及 $b'^2<4a'c'$，則

$$(bc'-b'c)(ab'-a'b)<(ca'-ac')^2.$$

(解) $(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ac'+a'c)bb'-ab'^2c-a'b^2c'$,

$b^2<4ac,\ b'^2<4a'c',\ \therefore\ bb'<4\sqrt{aa'cc'}$，代入上式之第貳部分得

$$(bc'-b'c)(ab'-a'b)<(ac'+a'c)4\sqrt{aa'cc'}-8aa'cc'$$
$$<4(\sqrt{ac'}-\sqrt{a'c})^2\sqrt{aa'cc'}.$$

但 $4\sqrt{aa'cc'}<(\sqrt{ac'}+\sqrt{a'c})^2.$

$$\therefore\quad (bc'-b'c)(ab'-a'b)<\left(\sqrt{ac'}-\sqrt{a'c}\right)^2\left(\sqrt{ac'}+\sqrt{a'c}\right)^2$$
$$<(ac'-a'c)^2.$$

18. $b,\ bc-l^2$ 及 $abc+2lmn-al^2-bm^2-cn^2$ 皆爲正數量，則 $a,\ c,\ ac-m^2$ 及 $ab-n^2$ 皆爲正數量，但此各文字爲實數量．

(解) $b>0,\ bc-l^2>0,\quad \therefore\ c>\dfrac{l^2}{b}$ 而 $\dfrac{l^2}{b}$ 爲正，故知 c 爲正．

又 $abc+2lmn-al^2-bm^2-cn^2>0$, 而 $b>0$, 故

$$m^2-\frac{2lmn}{b}+\frac{al^2+cn^2-abc}{b}<0,$$

卽 $\left\{m+\dfrac{ln+\sqrt{(bc-l^2)(ab-n^2)}}{b}\right\}\left\{m+\dfrac{ln-\sqrt{(bc-l^2)(ab-n^2)}}{b}\right\}<0,$

$\therefore\ m$ 在 $\dfrac{-ln-\sqrt{(bc-l^2)(ab-n^2)}}{b}$ 及 $\dfrac{-ln+\sqrt{(bc-l^2)(ab-n^2)}}{b}$

之兩値之間，而 m 爲實數，故此兩値亦爲實數．而

$$bc-l^2>0,\qquad \therefore\ ab-n^2>0.$$

由是 $a>\dfrac{n^2}{b}$ 而 $\dfrac{n^2}{b}$ 爲正，$\quad\therefore\ a>0.$

次由 n 之貳次式施同法，則 $\qquad ac-m^2>0.$

19. a,b,c 不等而 $a(b-c)x+b(c-a)y+c(a-b)z=0$, $a(b-c)yz+b(c-a)zx+c(a-b)xy=0$, 則 $x=y=z$.

(解) 由兩方程式得 $\dfrac{a(b-c)}{x(y^2-z^2)}=\dfrac{b(c-a)}{y(z^2-x^2)}=\dfrac{c(a-b)}{z(x^2-y^2)}=\dfrac{1}{k}$,

$\therefore\ a(b-c)k=x(y^2-z^2),\quad b(c-a)k=y(z^2-x^2),$
$\quad c(a-b)k=z(x^2-y^2).$

由是 $\qquad \{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}k=\sum x(y^2-z^2),$

卽 $\qquad (x-y)(y-z)(z-x)=\{0\}k=0.$

$\therefore\ x=y$ 或 $y=z$ 或 $z=z$.

$x=y$, 則由第壹方程式得 $a(b-c)x+b(c-a)x+c(a-b)z=0$,

即 $c(a-b)(z-x)=0$, 但 $a-b$ 不爲 0, $\therefore z-x=0$.

由是 $x=y=z$.

20. $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$,

$$=(lx+my+nz)(l'x+m'y+n'z),$$ 則

$$(mn'-m'n)(gh-af)=(nl'-n'l)(hf-bg)=(lm'-l'm)(fg-ch).$$

(解) 比較既知恒式之係數, 則由第拾貳編 154 章

$a=ll'$, $b=mm'$, $c=nn'$, $2f=mn'+m'n$,

$2g=nl'+n'l$, $2h=lm'+l'm$.

$$4gh=(nl'+n'l)(lm'+l'm)=l^2m'n'+l'^2mn+ll'(mn'+m'n),$$

又 $4af=2ll'(mn'+m'n)$,

$$\therefore 4(gh-af)=l^2m'n'+l'^2mn-ll'(mn'+m'n)$$

$$=(lm'-l'm)(ln'-l'n).$$

由是

$$4(mn'-m'n)(gh-af)=-(mn'-m'n)(nl'-n'l)(lm'-l'm),$$

同樣 $4(nl'-n'l)(hf-bg)=-(nl'-n'l)(lm'-l'm)(mn'-m'n)$,

$$4(lm'-l'm)(fg-ch)=-(lm'-l'm)(mn'-m'n)(nl'-n'l).$$

21. 自 $cy+bz=az+cx=bx+ay=ax+by+cz$,

(1) 消去 x, y, z. (2) 消去 a, b, c.

(解) 由第壹節及第貳節得 $cx-cy+(a-b)z=0$,

由第三節及第四節得 $(a-b)x-(a-b)y+cz=0$,

此兩方程式相加得 $(c+a-b)(z+x-y)=0$,

$$\therefore c+a-b=0 \text{ 或 } z+x-y=0.$$

由此法得 $(c+a-b)(a+b-c)(b+c-a)=0$.

$$(z+x-y)(x+y-z)(y+z-x)=0.$$

22. $\dfrac{x-a}{y-b}+\dfrac{y-b}{x-a}=\dfrac{x-b}{y-a}+\dfrac{y-a}{x-b}$, 則

$a=b$ 或 $x=y$ 或 $x+y=a+b$

(解) $\frac{x-a}{y-b}-\frac{y-a}{x-b}=\frac{x-b}{y-a}-\frac{y-b}{x-a}$.

即 $\frac{(x-y)(x+y-a-b)}{(y-b)(x-b)}=\frac{(x-y)(x+y-a-b)}{(y-a)(x-a)}$,

$\therefore$ $x-y=0$ 或 $x+y-a-b=0$. 或 $\frac{1}{(y-b)(x-b)}=\frac{1}{(y-a)(x-a)}$

$\therefore$ $(a-b)(x+y-a-b)=0$.

23. $a+b+c=0$, 則 $\sum\frac{a^2}{b-c}\cdot\sum\frac{b-c}{a^2}=4abc\left(\sum\frac{1}{a}\right)^3$.

(解) $\sum\frac{a^2}{b-c}\cdot\sum\frac{b-c}{a^2}=\frac{\sum a^2(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}\cdot\frac{\sum b^2c^2(b-c)}{a^2b^2c^2}$

$=\frac{-\sum a^2\{a^2-a(b+c)+bc\}}{(b-c)(c-a)(a-b)}\cdot\frac{-(b-c)(c-a)(a-b)\sum bc}{a^2b^2c^2}$

$=(2\sum a^4)\frac{\sum bc}{a^2b^2c^2}=4\sum b^2c^2\cdot\frac{\sum bc}{a^2b^2c^2}$

$=4abc\sum\frac{1}{a^2},\sum\frac{1}{a}=4abc\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2\sum\frac{1}{a}=4abc\left(\sum\frac{1}{a}\right)^3$.

24. $\lambda(ax^2+bx+c)+\mu(a'x^2+b'x+c')=0$, λ 及 μ 爲實數值,則其根爲實根之要件爲

$b^2-4ac>0$ 及 $(bc'-b'c)(ab'-a'b)-(ca'-c'a)^2>0$.

(解) $\frac{\lambda}{\mu}=y$, 則原方程式爲

$$x^2(ay+a')+x(by+b')+(cy+c')=0,$$

由題意 $(by+b')^2-4(ay+a')(cy+c')>0$,

即 $(b^2-4ac)y^2+2\{bb'-2(ca'+c'a)\}y+b'^2-4a'c'>0$.........(A)

由下之補題得

$$4\{bb'-2(ca'+c'a)\}^2-4(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')<0,$$

$\therefore$ $(ac'-c'a)^2-(bc'-b'c)(ab'-a'b)<0$,

即 $(bc'-b'c)(ab'-a'b)-(ca'-c'a)<0$.

又 (A) 常爲正，而此式中 y 雖爲極大之值(正或負)

而 $b^2-4ac>0$，則 $(b^2-4ac)y^2$ 爲極大之正值，由是知 (A) 爲合理.

(補題) ax^2+bx+c 常爲正，則 $b^2-4abc<0$

何則 $ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$,

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ 常爲正，故 ax^2+bx+c 常爲正，則 $4ac-b^2$ 必爲正.

即 $4ac-b^2>0$, $\therefore\ b^2-4ac<0$.

25. 求下兩方程式之解答爲不定之關係

$$2a(1-x)+(b+c)x=2b(1-y)+(c+a)y,$$
$$2d(1-x)+(e+f)x=2e(1-y)+(f+d)y.$$

(解) $x-\dfrac{c+a-2b}{b+c-2a}y+\dfrac{2(a-b)}{b+c-2a}=0$,

及 $x-\dfrac{f+d-2e}{e+f-2d}y+\dfrac{2(d-e)}{e+f-2d}=0$,

此兩方程式之解答爲不定，則各式必全相同，

$$\therefore\ \frac{c+a-2b}{b+c-2a}=\frac{f+d-2e}{e+f-2d},\quad \frac{a-b}{b+c-2a}=\frac{d-e}{e+f-2d}.$$

26. $x+y+z=0$ 及 $\dfrac{x^3}{b-c}+\dfrac{y^3}{c-a}+\dfrac{z^3}{a-b}=0$，則

$$\sum(b-c)(b+c-2a)^2/x^2=0.$$

本題予未能解，俟諸異日.

27. $x+y+z=0$, $a^2x+b^2y+c^2z=0$，則

$(a+b+c)(a^3x+b^3y+c^3z)=(bc+ca+ab)(bcx+cay+abz)$.

(解) $x+y+z=0$, $a^2x+b^2y+c^2z=0$,

設 $$\frac{x}{b^2-c^2}=\frac{y}{c^2-a^2}=\frac{z}{a^2-b^2}=k,$$

則 $$k=\frac{\sum a^3x}{\sum a^3(b^2-c^2)}=\frac{a^3x+b^3y+c^3z}{-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)}\cdots\cdots\cdots(A)$$

又 $k=\frac{\sum bcx}{\sum bc(b^2-c^2)}=\frac{bcx+cay+abz}{-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)}$……………(B)

由(A)及(B)得所求之結果.

28. 解下之方程式.

(1) $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}.$

(2) $\frac{(a-x)^4+(b-x)^4}{(a-x)^2+(b-x)^2}=(a-b)^2.$

(3) $\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2+\left(\frac{x-b}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^2+2\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x+a)(x+b)(x+c)}-1=0.$

(4) $x+y+z=0,\quad ax+by+cz=0,$

$a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3=3(b-c)(c-a)(a-b).$

(5) $2yz=y+z,\quad 2zx=z+x,\quad 2xy=x+y.$

(6) $x(x+y+z)+yz=a^2,\quad y(x+y+z)+zx=b^2,$

$z(x+y+z)+xy=c^2.$

(7) $x^2(x^2+4)=y^2(y^2+4)=z^2(z^2+4)=5xyz.$

(8) $ayz+by+cz=bzx+cz+ax=cxy+ax+by$

$=a+b+c.$

(9) $x-y=2,\quad xz-yw=3,\quad xz^2-yw^2=5,\quad xz^3-yw^3=9.$

(10) $x+y+z=0,\quad \frac{a}{(c-a)x}+\frac{b}{(a-b)y}+\frac{c}{(b-c)z}=0,$

$\frac{b-c}{x}+\frac{c-a}{y}+\frac{a-b}{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$

(11) $\frac{cy+bz}{y+z}=\frac{az+cx}{z+x}=\frac{bx+ay}{x+y}=x+y+z.$

(12) $yz+bcx+aby+caz=0,$

$zx+abx+cay+bcz=0,$

$xy+cax+bcy+abz=0.$

(解) (1) $\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-3x-2},$

兩邊爲平方, 則

$$3x^2-x+1-2\sqrt{(2x^2-1)(x^2-x+2)}$$
$$=3x^2-x+1-2\sqrt{(2x^2+2x+3)(x^2-3x-2)},$$

卽 $(2x^2-1)(x^2-x+2)=(2x^2+2x+3)(x^2-3x-2)$,

故 $$\frac{x^2-x+2}{x^2-3x-2}=\frac{2x^2+2x+3}{2x^2-1},$$

自兩邊減 1, 則 $\dfrac{2x+4}{x^2-3x-2}=\dfrac{2x+4}{2x^2-1}$,

卽 $$(2x+4)\left\{\frac{1}{x^2-3x-2}-\frac{1}{2x^2-1}\right\}=0,$$

故 $2x+4=0$ 或 $\dfrac{1}{x^2-3x-2}-\dfrac{1}{2x^2-1}=0$,

由是 $x=-2$ 或 $\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$.

(2) $\dfrac{(a-x)^4+(b-x)^4}{(a-x)^2+(b-x)^2}=\{(a-x)-(b-x)\}^2$, 去分母解括弧而化之爲最簡, 則 $2(a-x)^2(b-x)^2-2(a-x)(b-x)\{(a-x)^2+(b-x)^2\}=0$,

故 $a-x=0$, $b-x=0$, 或 $(a-x)(b-x)-(a-x)^2-(b-x)^2=0$,

由是 $x=a, b$, 或 $\frac{1}{2}\{a+b\pm(a-b)\sqrt{-3}\}$.

(2) $\dfrac{x-a}{x+a}=y$, $\dfrac{x-b}{x+b}=z$, $\dfrac{x-c}{x+c}=u$, 則

原方程式爲 $$y^2+z^2+u^2+2yzu-1=0,$$

卽 $$y^2z^2+2yzu+u^2=1-(y^2+z^2)+y^2z^2,$$

卽 $$yz+u=\pm\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

但 $$1-y^2=1-\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2=\frac{4ax}{(x+a)^2},\quad 1-z^2=\frac{4bx}{(x+b)^2}.$$

由 (A) 得 $$\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\left(\frac{x-b}{x+b}\right)+\frac{x-c}{x+c}=\pm\frac{4x\sqrt{ab}}{(x+a)(x+b)},$$

卽 $$\frac{(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)}-1+\frac{x-c}{x+c}+1=\frac{\pm4x\sqrt{ab}}{(x+a)(x+b)},$$

即 $\frac{-2x(a+b)}{(x+a)(x+b)}+\frac{2x}{x+c}=\frac{\pm 4x\sqrt{ab}}{(x+a)(x+b)}$,

故 $x=0$ 或 $-(a+b)(x+c)+(x+a)(x+b)=\pm 2\sqrt{ab}(x+c)$,

即 $x^2\mp 2x\sqrt{ab}+ab=c(a\pm 2\sqrt{ab}+b)$,

故 $x\mp\sqrt{ab}=\pm\sqrt{c}(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})$.

由是 $x=\pm\sqrt{ab}\pm\sqrt{ca}\pm\sqrt{bc}$.

(4) $x+y+z=0,\quad ax+by+cz=0,$

設 $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=k,$

則 $k^3=\frac{a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3}{a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3}=\frac{3(b-c)(c-a)(a-b)}{3abc(b-c)(c-a)(a-b)}$,

∴ $k=\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)}}=\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}$.

(5) 之答爲 0, 0, 0 或 1, 1, 1.

(6) 變原三方程式, 則

$(x+y)(x+z)=a^2,\quad (y+z)(y+x)=b^2,\quad (z+x)(z+y)=c^2,$

由是 $(x+y)^2=\frac{a^2b^2}{c^2}$, ∴ $x+y=\pm\frac{ab}{c}$,

同法 $y+z=\pm\frac{bc}{a}$, $z+x=\pm\frac{ca}{b}$,

由是 $2x=\pm\frac{c^2a^2+a^2b^2-b^2c^2}{2abc}$.

(7) $x^2(x^2+4)=y^2(y^2+4)$, 則 $(x^2-y^2)(x^2+y^2+4)=0$,

故 $x^2=y^2$ 或 $x^2+y^2+4=0$,

同法 $y^2=z^2$ 或 $y^2+z^2+4=0$,

由是 $x^2=y^2=z^2$ ∴ $x=\pm y=\pm z$,

以此代入 $x^2(x^2+4)=5xyz$ 之式中得

$x^2(x^2\pm 5x+4)=0$ ∴ $x=0$ 或 $x=\pm 1,\ \pm 4$.

由是　　$x=\pm 1,\quad y=\pm 1,\quad z=\pm 1,$

或　　$x=\pm 4,\quad y=\pm 4,\quad z=\pm 4.$

(8)　此方程式由視察而知　$x=y=z=1.$

又　$x=\lambda+1,\quad y=\mu+1,\quad z=\nu+1$，則

原方程式爲　$a(\mu+1)(\nu+1)+b(\mu+1)+c(\nu+1)=a+b+c,$

變之則　　$\frac{c+a}{\mu}+\frac{a+b}{\nu}+a=0,$

同法　　$\frac{a+b}{\nu}+\frac{b+c}{\lambda}+b=0,\quad \frac{b+c}{\lambda}+\frac{c+a}{\mu}+c=0,$

由是　　$\lambda=\frac{2(b+c)}{a-b-c}$　即　$x=\frac{2(b+c)}{a-b-c}+1=\frac{a+b+c}{a-b-c},$

$$y=\frac{a+b+c}{b-c-a},\qquad z=\frac{a+b+c}{c-a-b}.$$

(9)　第壹以 z 乘之減第貳，則 $yw-yz=2z-3$..................(A)

第貳以 z 乘之減第三，則 $yw^2-yzw=3z-5$..................(B)

自 (A), (B) 消去 y，得 $z=\frac{3w-5}{2w-3}$..................(C)

又　第三以 z 乘之減第四，則 $yw^3-yzw^2=5z-9$..................(D)

自 (B), (D) 消去 y，得 $z=\frac{5w-9}{3w-5}$..................(E)

由 (C), (E) 得　　$\frac{3w-5}{2w-3}=\frac{5w-9}{3w-5}$　　$\therefore\quad w=2$ 或 $1,$

由是 x, y, z, w 爲 $1, -1, 1, 2$ 或 $1, -1, 2, 1.$

(10)　$z=-(x+y)$ 代入第貳，則

$\frac{a}{(c-a)x}+\frac{b}{(a-b)y}-\frac{c}{(b-c)(x+y)}=0,$　　$\frac{x}{y}=\lambda$ 而變化之，則

$$\lambda^2+\frac{a-b}{b}\left(\frac{a}{c-a}+\frac{b}{a-b}-\frac{c}{b-c}\right)\lambda+\frac{a(a-b)}{b(c-a)}=0.$$

即　$\lambda^2-\frac{a-b}{b}\left\{\frac{a(b-c)}{(c-a)(a-b)}+\frac{b}{b-c}\right\}\lambda+\frac{a(a-b)}{b(c-a)}=0,$

即 $\left(\lambda-\frac{a-b}{b-c}\right)\left\{\lambda-\frac{a(b-c)}{b(c-a)}\right\}=0.$

$$\lambda=\frac{x}{y}=\frac{a-b}{b-c} \quad 或 \quad \frac{x}{y}=\frac{a(b-c)}{b(c-a)}.$$

$\frac{x}{y}=\frac{a-b}{b-c}$ 則 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}$ (同法) $=\frac{z}{c-a}=k,$

$x=k(a-b),\ y=k(b-c),\ z=k(c-a)$ 代入第三，則

$\frac{b-c}{k(a-b)}+\frac{c-a}{k(b-c)}+\frac{a-b}{k(c-a)}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$

$\therefore\quad k=\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=\left(\frac{b-c}{a-b}+\frac{c-a}{b-c}+\frac{a-b}{c-a}\right)\Big/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$

$\frac{x}{y}=\frac{a(b-c)}{b(c-a)}$ 則 $\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=m,$

$x=a(b-c)m,\quad y=b(c-a)m,\quad z=c(a-b)m,$ 代入第三，則

$\frac{1}{am}+\frac{1}{bm}+\frac{1}{cm}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\qquad\therefore\quad m=1,$

由是 $x=a(b-c),\quad y=b(c-a),\quad z=c(a-b).$

(11) $\frac{cy+bz}{y+z}=\frac{az+cx}{z+x}$，則 $z\{z(a-b)-x(b-c)-y(c-a)\}=0,$

$$\therefore\qquad z=0 \ 或\ z(a-b)-x(b-c)-y(c-a)=0,$$

又 $\frac{az+cx}{z+x}=\frac{bx+ay}{x+y}$，則

$$x=0 \ 或\ x(b-c)-y(c-a)-z(a-b)=0,$$

由是 $x=y=z=0,$

或 $x=\frac{b(a-b)}{a-c},\ y=0,\ z=\frac{b(b-c)}{a-c}$，以下略.

(12) 此方程式由視察而知 $x=y=z=0.$

又第壹以 x 乘之，第貳以 y 乘之，由減法得 $b(x^2-yz)=a(y^2-zx),$

第貳第三由同法得 $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}=k,$ 則

$x^2-yz=ak,\quad y^2-zx=bk,\quad z^2-xy=ck,$

$k^2(a^2-bc)=(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)=x(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

同法 $\dfrac{a^2-bc}{x}=\dfrac{b^2-ca}{y}=\dfrac{c^2-ab}{z}=\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{k^2},$

$\therefore\quad x=(a^2-bc)\lambda,\quad y=(b^2-ca)\lambda,\quad z=(c^2-ab)\lambda,$

此 x, y, z 之値代入第壹求 λ 則得 $\lambda=1.$

由是 $x=a^2-bc,\quad y=b^2-ca,\quad z=c^2-ab.$

29. $\dfrac{x}{a+\alpha}+\dfrac{y}{b+\alpha}+\dfrac{z}{c+\alpha}=1,\quad \dfrac{x}{a+\beta}+\dfrac{y}{b+\beta}+\dfrac{z}{c+\beta}=1,$

$\dfrac{x}{a+\gamma}+\dfrac{y}{b+\gamma}+\dfrac{z}{c+\gamma}=1$, 則 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1+\dfrac{\alpha\beta\gamma}{abc}.$

(解) 先設 $\dfrac{x}{a+\theta}+\dfrac{y}{b+\theta}+\dfrac{z}{c+\theta}-1=\dfrac{(\alpha-\theta)(\beta-\theta)(\gamma-\theta)}{(a+\theta)(b+\theta)(c+\theta)}$..........(A)

(A) 式中 $\theta=\alpha, \beta$ 或 γ, 則順次適合於原三方程式, 而 (A) 去分母, 則 θ^3 之項消去, 故爲 θ 之貳次方程式, 故 (A) 爲恒式.

由是 (A) 如下而 θ 得爲任意之値卽 $-a$,

$$x+(a+\theta)\left\{\frac{y}{b+\theta}+\frac{z}{c+\theta}-1\right\}=\frac{(\alpha-\theta)(\beta-\theta)(\gamma-\theta)}{(b+\theta)(c+\theta)},$$

$\theta=-a$, 則 $\quad x=\dfrac{(\alpha+a)(\beta+a)(\gamma+a)}{(b-a)(c-a)},$

同法 $\quad y=\dfrac{(\alpha+b)(\beta+b)(\gamma+b)}{(c-b)(a-b)},$

$$z=\frac{(\alpha+c)(\beta+c)(\gamma+c)}{(a-c)(b-c)}.$$

故 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{a(b-a)(c-a)}+\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{a(\alpha+\beta+\gamma)}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{a^2}{(b-a)(c-a)},$

$\therefore\quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\alpha\beta\gamma\sum\dfrac{1}{a(b-a)(c-a)}+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\sum\dfrac{1}{(b-a)(c-a)}$

$+(\alpha+\beta+\gamma)\sum\dfrac{a}{(b-a)(c-a)}+\sum\dfrac{a^2}{(b-a)(c-a)}=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{abc}+1.$

30. 下之三方程式非 $a+b+c=0$, 則不成立,

$$\frac{a}{a'}x-\frac{b}{b'}y+\frac{a'}{x}+\frac{b'}{y}=0,\qquad \frac{b}{b'}y-\frac{c}{c'}z+\frac{b'}{y}+\frac{c'}{z}=0,$$

$$\frac{c}{c'}z-\frac{a}{a'}x+\frac{c'}{z}+\frac{a'}{x}=0.$$

(解) 三方程式相加,以 2 除之,則 $\frac{a'}{x}+\frac{b'}{y}+\frac{c'}{z}=0$,

故由第壹 $\frac{a}{a'}x-\frac{b}{b'}y=\frac{c'}{z}$ $\quad\therefore\quad ab'zx-a'byz=a'b'c'$..........(1)

同法 $bc'xy-b'czx=a'b'c'$......(2) $\qquad ca'yz-c'axy=a'b'c'$..........(3)

(1) 以 c 乘之, (2) 以 a 乘之, (3) 以 b 乘之,相加得

$$a'b'c'(a+b+c)=0\times xy=0,$$

故必 $\quad a+b+c=0.$

31. 自 $p=ax+cy+bz,\quad q=cx+by+az,\quad r=bx+ay+cz$ 及 $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=0$, 消去 $x, y, z.$

(解) $p-q=a(x-z)+b(z-y)+c(y-x)$,

$\therefore\quad (p-q)^2=\sum a^2(x-z)^2+2\sum ab(x-z)(z-y)$,

同法 $\quad (q-r)^2=\sum a^2(z-y)^2+2\sum ab(z-y)(y-x)$,

$\quad (r-p)^2=\sum a^2(y-x)^2+2\sum ab(y-x)(x-z)$.

$$\therefore\quad (p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2=\sum a^2\{(x-z)^2+(z-y)^2+(y-x)^2\}$$
$$+2\sum ab\{(x-z)(z-y)+(z-y)(y-x)+(y-x)(x-z)\},$$

即 $$2(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)=2\sum a^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$
$$-2\sum ab(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$
$$=2\sum a^2\times 0-2\sum ab\times 0,$$

$$\therefore\quad p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp=0.$$

32. 兩正整數之積等於其和之 12 倍,求兩數.

(解) 兩數為 x, y, 則 $xy=12(x+y)$,

$$\therefore\quad (x-12)(y-12)=144,$$

由是 $x-12=\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,$

$y-12=144,\ 72,\ 84,\ 36,\ 24,\ 18,\ 16,\ 12,$

$\therefore\ x=13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20,\ 21,\ 24,$

$y=156,\ 84,\ 60,\ 48,\ 36,\ 30,\ 28,\ 24.$

33. $x_1:y_1:z_1,\ x_2:y_2:z_2\ x_3:y_3:z_3$ 爲方程式 $x^3+y^3+z^3+axyz=0,\ lx+my+nz=0$ 之三解答，則

$$x_1x_2x_3+y_1y_2y_3+z_1z_2z_3=0.$$

本題予不能解.

34. $x+y+z=p_1,\quad yz+zx+xy=p_2,\quad xyz=p_3,$

及 $x^2+yz=a,\quad y^2+zx=b,\quad z^2+xy=c,$

則 $a+b+c=p_1^2-p_2,\quad bc+ca+ab=p_1^2p_2-2p_1p_3-p_2^2,$

及 $abc=p_1^3p_3-6p_1p_2p_3+p_2^3+8p_3^2.$

(解) $a+b+c=x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy$

$$=(x+y+z)^2-(yz+zx+xy)=p_1^2-p_2.$$

又 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(yz+zx+xy)=p_1^2-2p_2,$

及 $a^2+b^2+c^2=(x^2+yz)^2+(y^2+zx)^2+(z^2+xy)^2$

$$=(x^2+y^2+z^2)^2-(yz+zx+xy)^2+4xyz(x+y+z)$$

$$=(p_1^2-2p_2)^2-p_2^2+4p_3p_1=p_1^4-4p_1^2p_2+4p_1p_3+3p_2^2,$$

$\therefore\quad bc+ca+ab=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$

$$=\frac{1}{2}\{(p_1^2-p_2)^2-(p_1^4-4p_1^2p_2+4p_1p_3+3p_2^2)\}$$

$$=p_1^2p_2-2p_1p_3-p_2^2.$$

$abc=(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)$

$$=2x^2y^2z^2+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+xyz(x^3+y^3+z^3)$$

$$=2x^2y^2z^2+(xy+yz+zx)^3-3xyz(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$+xyz\{(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)\}$$

$$=2x^2y^2z^2+(xy+yz+zx)^3+xyz(x+y+z)^3$$

$$-6xyz(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$=2p_3^2+p_2^3+p_3p_1^3-6p_3(p_1-z)(p_1-x)(p_1-y)$$
$$=2p_3^2+p_2^3+p_1^3p_3-6p_3\{p_1^3-p_1^2\sum x+p_1\sum xy-xyz\}$$
$$=2p_3^2+p_2^3+p_1^3p_3-6p_3\{p_1^3-p_1^3+p_1p_2-p_3\}$$
$$=p_1^3p_3-6p_1p_2p_3+p_2^3+8p_3^2.$$

35. $x_1=x_0+x_0^2+x_0^3+\ldots\ldots$至無限,

$x_2=x_1+x_1^2+x_1^3+\ldots\ldots$ 〃 〃

$\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots$

然則 $x_n=nx_0+n^2x_0^2+n^3x_0^3+\ldots\ldots$亦至無限.

(解) 由等比級數 $x_1=\dfrac{x_0}{1-x_0},\quad x_2=\dfrac{x_1}{1-x_1},\quad x_3=\dfrac{x_2}{1-x_2},\ldots\ldots$

$$\therefore\ x_2=\frac{\dfrac{x_0}{1-x_0}}{1-\dfrac{x_0}{1-x_0}}=\frac{x_0}{1-2x_0},\quad x_3=\frac{\dfrac{x_0}{1-2x_0}}{1-\dfrac{x_0}{1-2x_0}}=\frac{x_0}{1-3x_0},\ldots\ldots$$

由是 $nx_n=\dfrac{nx_0}{1-nx_0}=nx_0+n^2x_0^2+n^3x_0^3+\ldots\ldots$

36. $x-1,\ y-1,\ z+1,\ u+1$ 爲等差級數, $x^2,\ y^2,\ z^2$ 及 $x^2,\ z^2,\ u^2$ 亦爲等差級數. 則 $x,\ y,\ z,\ u$ 之值如何.

(解) $(x-1)-(y-1)=(y-1)-(z+1)=(z+1)-(u+1)$,

卽 $$x-y=y-z-2=z-u.$$

$x^2-y^2=y^2-z^2$ 卽 $x^2-z^2=2(y^2-z^2)=2(x^2-y^2)$,

又 $$2(x^2-y^2)=z^2-u^2=x^2-z^2,$$

由是 $\dfrac{2(x^2-y^2)}{x-y}=\dfrac{z^2-u^2}{z-u}$ 卽 $2(x+y)=z+u$.

由 $x-y=z-u$ 及 $2(x+y)=z+u$ 得 $2z=3x+y$,

由 $x-y=y-z-2$ 及 $2z=3x+y$ 得 $y=\dfrac{5x+4}{3}$,

$$\therefore\ z=2y-x-2=\frac{2(5x+4)}{3}-x-2=\frac{7x+2}{3},$$

及　$u=y+z-x=\dfrac{5x+4}{3}+\dfrac{7x+2}{3}-x=3x+2.$

由是　$x^2-y^2=y^2-z^2$, 則 $x^2-\dfrac{(5x+4)^2}{9}=\dfrac{(5x+4)^2}{9}-\dfrac{(7x+2)^2}{9}$,

由是 $x=7$, $y=13$, $z=17$, $u=23$.

37. 任意之數可以 $p_1+p_2\underline{|2}+p_3\underline{|3}+p_4\underline{|4}+\dots\dots\dots$之形表之.

但　$p_1, p_2, p_3, \dots\dots\dots\dots$爲正整數

而 $p_1<2$, $p_2<3$, $p_3>4$, $\dots\dots\dots\dots$

由此法表 999 則如何.

(解)　任意之數爲 N, 以 2 除之, 商爲 Q_1, 殘數爲 p_1, 則
$N=p_1+Q_1\underline{|2}$,

又 Q_1 以 3 除之,商爲 Q_2, 殘數爲 p_2, 則

$N=p_1+(p_2+Q_2\times 3)\underline{|2}=p_1+p_2\underline{|2}+Q_2\underline{|3}$,

以下順次 $N=p_1+p_2\underline{|2}+p_3\underline{|3}+\dots\dots\dots\dots$

$999=1+1\underline{|2}+2\underline{|3}+1\underline{|4}+2\underline{|5}+1\underline{|6}.$

38. 級數 25, 26, 27,.........$N-2$, $N-1$, N　初末貳項之等差等比及調音中項爲此級數之項數, 求 N.

(解)　$s=\dfrac{n}{2}(25+N)$ 而 $n=\dfrac{1}{2}(25+N)=\sqrt{25N}=\dfrac{2\times 25N}{25+N}$,

$\therefore$　$25+N=10\sqrt{N}$, 由是 $(\sqrt{N}-5)^2=0$　　$\therefore$　$N=25$.

而　$\sqrt{25N}=\dfrac{2\times 25N}{25+N}$ 亦得 $N=25$.

39. r 進法之三位數以 $r-1$ 乘之, 則初末貳位交換, 中央之數增初末貳位之差, 原數如何.

(解)　原數爲 xr^2+yr+z, 由題意

$(xr^2+yr+z)(r-1)=zr^2+(y+z-x)r+x$,

$\therefore\quad z=x(r-1)+y\left(1-\frac{2r+1}{r^2+1}\right)\qquad \therefore\quad y=0$, 由是 $z=x(r-1)$.

由是 $z=r-1\qquad \therefore\qquad x=1$.

例如由十進法得 $109\times 9=981$, 卽 $8=0+(9-1)$.

40. 自 n 物取各 r 個之錯列,其內二物有定位置,則錯列之數爲 $$(n^2-3n+3)\,{}_{n-2}P_{r-2}.$$

(解) 全列數爲 ${}_nP_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}$

此內二物(例如 a, b) 其壹個有定位置,則 ${}_{n-1}P_{r-1}=\frac{\lfloor n-1}{\lfloor n-r}$,

而此內二個有定位置,則 ${}_{n-2}P_{r-2}=\frac{\lfloor n-2}{\lfloor n-r}$,

由是 $${}_nP_r-(2\,{}_{n-1}P_{r-1}-{}_{n-2}P_{r-2})=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}-\left(\frac{2\lfloor n-1}{\lfloor n-r}-\frac{\lfloor n-2}{\lfloor n-r}\right)$$
$$=(n^2-3n+3)\times{}_{n-2}P_{r-2}.$$

41. n 爲正整數,則級數

$$1-\frac{(2n-1)}{\lfloor 1}+\frac{(2n-1)(2n-2)}{\lfloor 2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{\lfloor n-1}$$

之和等于 $(-1)^{n-1}(2n-2)(n-3)\ldots(n+1)n/\lfloor n-1$.

(解) $1-\frac{(2n-1)}{\lfloor 1}=-\frac{(2n-2)}{\lfloor 1}=(-1)^1\frac{(2n-2)}{\lfloor 1}$,

$$1-\frac{(2n-1)}{\lfloor 1}+\frac{(2n-1)(2n-2)}{\lfloor 2}=-\frac{(2n-2)}{\lfloor 1}+\frac{(2n-1)(2n-2)}{\lfloor 2}$$
$$=\frac{(2n-2)(2n-3)}{\lfloor 2}=(-1)^2\frac{(2n-2)(2n-3)}{\lfloor 2},$$

……………………=………………………

$\therefore$ 此級數之和 $=(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots\ldots(n+1)n}{\lfloor n-1}$.

42. 求級數 $\frac{1}{\underline{|n-1}\;\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|n-2}\;\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|n-3}\;\underline{|3}}+\cdots$

$$+\frac{1}{\underline{|1}\;\underline{|n-1}}\text{ 之和.}$$

(解) $(1+x)^n=1+\frac{n}{\underline{|1}}x+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\cdots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-1}}x^{n-1}+x^n$,

$x=1$, 則 $2^n=1+\frac{n}{\underline{|1}}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-1}}+1$,

以 $\underline{|n}$ 除之, 則

$$\frac{2^n-2}{\underline{|n}}=\frac{1}{\underline{|1}\;\underline{|n-1}}+\frac{1}{\underline{|2}\;\underline{|n-2}}+\cdots+\frac{1}{\underline{|n-1}\;\underline{|1}}.$$

43. 由恒式 $\{1-x(2-x)\}^{-\frac{1}{2}}=(1-x)^{-1}$,

證明 $\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\;\underline{|n}}-\frac{\underline{|2n-2}}{\underline{|1}\;\underline{|n-1}\;\underline{|n-2}}+\frac{\underline{|2n-4}}{\underline{|2}\;\underline{|n-2}\;\underline{|n-4}}-\cdots\cdots=2^n$

(解) 開散恒式之兩邊如下

$$\left.\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}x(2-x)+\frac{1.3}{\underline{|2}}\frac{1}{2^2}x^2(2-x)^2+\cdots\\&+\frac{1.3.5\ldots.(2n-3)}{\underline{|n-1}}\;\frac{1}{2^{n-1}}x^{n-1}(2-x)^{n-1}\\&+\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{\underline{|n}}\;\frac{1}{2^n}x^n(2-x)^n+\cdots\end{aligned}\right\}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

逆記左邊 x^n 之係數為

$$\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{\underline{|n}}.\frac{1}{2^n}.2^n-\frac{1.3.5\ldots.(2n-3)}{\underline{|n-1}}\;\frac{1}{2^{n-1}}\;\frac{n-1}{\underline{|1}}2^{n-2}+\cdots\cdots$$

卽 $\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\;2^n\;\underline{|n}}-\frac{\underline{|2n-2}}{\underline{|n-1}\;2^n\;\underline{|n-1}}\;\frac{n-1}{\underline{|1}}+\cdots\cdots$

卽 $\frac{1}{2^n}\left\{\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\;\underline{|n}}-\frac{\underline{|2n-2}}{\underline{|1}\;\underline{|n-1}\;\underline{|n-2}}+\cdots\cdots\right\}$.

又右邊 x^n 之係數為 1, 故題言如此.

44. a, b, c, d 爲 $(1+x)^n$ 之開散式中任意連續四項之係數,則 $(a+b)(c^2-bd)=(c+d)(b^2-ac)$.

(解) $b=a\times\frac{n-r-1}{r+1}$, $c=b\times\frac{n-r-2}{r+2}$, $d=c\times\frac{n-r-3}{r+3}$,

$$a+b=a\left(1+\frac{n-r-1}{r+1}\right)=\frac{na}{r+1},\quad c+d=\frac{nc}{r+3},$$

又 $c^2-bd=c\times\frac{b(n-r-2)}{r+2}-b\times\frac{c(n-r-3)}{r+3}=\frac{nbc}{(r+2)(r+3)}$,

及 $b^2-ac=b\times\frac{a(n-r-1)}{r+1}-a\frac{b(n-r-2)}{r+2}=\frac{nad}{(r+1)(r+2)}$.

由是 $(a+b)(c^2-bd)=(c+d)(b^2-ac)=\frac{n^2abc}{(r+1)(r+2)(r+3)}$.

45. $(1+x)^n(1-x)^{-n}$ 之開散式中 x^n 之係數爲

$$2^n\frac{\underline{|n+r-1}}{\underline{|n-1}\,\underline{|r}}-n2^{n-1}\frac{\underline{|n+r-2}}{\underline{|n-2}\,\underline{|r}}+\frac{n(n-1)}{1.2}2^{n-2}\frac{\underline{|n+r-3}}{\underline{|n-3}\,\underline{|r}}$$

$$+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}n.2.$$

(解) $\{(1+x)(1-x)^{-1}\}^n=\{[2-(1-x)](1-x)^{-1}\}^n$

$$=\{2(1-x)^{-1}-1\}^n.$$

解散此最後之結果則如下

$$2^n(1-x)^{-n}-\frac{n}{1}2^{n-1}(1-x)^{-n+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}2^{n-2}(1-x)^{-n+2}+\cdots\cdots\cdots$$

$(1-x)^{-n}$ 之式中 x^r 之係數 $=\frac{\underline{|n+r-1}}{\underline{|r}\,\underline{|n-1}}$,

$(1-x)^{-n+1}$ 之式中 $\frac{\underline{|n+r-2}}{\underline{|r}\,\underline{|n-2}}$,

由是得所求之係數.

46. 求下之級數之和，

$$(1^2+1)\underline{|1}+(2^2+1)\underline{|2}+(3^2+1)\underline{|3}+\ldots\ldots+(n^2+1)\underline{|n}.$$

(解) $(n^2+1)\underline{|n}=\{n(n+1)-(n-1)\}\underline{|n}$

$$=(n+1)n\underline{|n}-n(n-1)\underline{|n-1},$$

$$\therefore\ S=\{2.1\underline{|1}-0\}+\{3.2\underline{|2}-2.1\underline{|1}\}+\{4.3\underline{|3}-3.2\underline{|2}\}+\ldots\ldots$$

$$+\{n(n-1)\underline{|n-1}-(n-1)(n-2)\underline{|n-2}\}$$

$$+\{(n+1)n\underline{|n}-n(n-1)\underline{|n-1}\}$$

$$=(n+1)n\underline{|n}=n\underline{|n+1}.$$

47. n 為大于 2 之任意正整數，則

$$1.n-\frac{n-1}{\underline{|1}}(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}(n-2)-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|3}}(n-3)$$

$+\ldots\ldots$ 之 n 項之和等于 0.

(解) 原式 $=n\left\{1-\frac{n-1}{\underline{|1}}+\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-1}}\right\}$

$$-(n-1)\left\{1-\frac{n-1}{\underline{|1}}+\frac{(n-2)(n-3)}{\underline{|2}}-\ldots\ldots+(-1)^{n-2}\frac{\underline{|n-2}}{\underline{|n-2}}\right\}$$

$$=n\{1-1\}^{n-1}-(n-1)(1-1)^{n-2}=0.$$

48. $\frac{1}{1-ax-ax^2}=1+p_1x+p_2x^2+\ldots\ldots+p_rx^r+\ldots\ldots$ 則

$$\frac{1-ax}{1+ax}\cdot\frac{1}{1-(a^2+2a)x+a^2x^2}=1+p_1^2x+p_2^2x^2+\ldots\ldots$$

但 x 使兩邊為斂級數.

(解) $1=(1-ax-ax^2)(1+p_1x+p_2x^2+\ldots\ldots+p^rx^r+\ldots\ldots)$,

右邊 x^r 之係數為 $p_r-ap_{r-1}-ap_{r-2}$, 左邊為 0.

$$\therefore\quad pr=a(p_{r-1}+p_{r-2}).$$

而 $p_1=a$, $p_2=a(a+1)$,

$$\therefore\quad p_3=a(a^2+2a),\quad p_4=a(a^3+3a^2+a),\quad p_5=a(a^4+4a^3+3a^2).$$

又第二開散式爲 $1+q_1x+q_2x^2+\ldots\ldots$ 則

$$1-ax=(1+ax)(\{1-(a^2+2a)x+a^2x^2\}(1+q_1x+q_2x^2+\ldots\ldots)$$
$$=\{1-(a^2+2a)x+a^2x^2\}\{1+(a+q_1)x+(aq_1+q_2)x^2+\ldots\ldots\},$$

比較 x 之同方乘之係數則 $-a=-(a^2+2a)+(a+q_1)$,

$\therefore\quad q_1=a^2=p_1{}^2,$

又 $0=-(a^2+2a)(a+q_1)+(aq_1+q_2)+a^2,\quad\therefore\quad q_2=a^2(a+1)^2=p_2{}^2,$

以下同法 $\therefore\quad 1+q_1x+q_2x^2+\ldots\ldots=1+p_1{}^2x+p_1{}^2x^2+\ldots\ldots\ldots$

49. $x<1$, 則

$$\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\ldots\ldots=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\ldots\ldots\ldots$$

(解) $\dfrac{x}{(1-x)^2}=x(1-x)^{-2}=x(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots\ldots),$

$\dfrac{x^2}{(1-x^2)^2}=x^2(1-x^2)^{-2}=x^2(1+2x^2+3x^4+4x^6+\ldots\ldots\ldots),$

$\dfrac{x^3}{(1-x^2)^3}=x^3(1-x^2)^{-3}=x^3(1+2x^3+3x^6+4x^9+\ldots\ldots\ldots),$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\therefore\quad \frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\ldots\ldots\ldots$$
$$=(x+x^2+x^3+\ldots\ldots)+2(x^2+x^4+x^6+\ldots\ldots)+3(x^3+x^6+x^9+\ldots\ldots)+\ldots\ldots$$
$$=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\ldots\ldots\ldots$$

50. 證 $$\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{b}{(1-a)(1-b)}\\[2ex] +\dfrac{c}{(1-a)(1-b)(1-c)}+\ldots\ldots\\[2ex] +\dfrac{k}{(1-a)(1-b)(1-c)\ldots(1-k)}\end{array}\right\}^2$$

$$=1+\frac{a(2-a)}{(1-a)^2}+\frac{b(2-b)}{(1-a)^2(1-b)^2}+\cdots+\frac{k(2-k)}{(1-a)^2(1-b)^2\cdots(1-k)^2}\Big\}$$

(解) 前節爲平方，則

$$1+\frac{a}{1-a}\left(\frac{a}{1-a}+2\right)+\frac{b}{(1-a)(1-b)}\left\{\frac{b}{(1-a)(1-b)}+\frac{2a}{(1-a)}+2\right\}$$

$$+\frac{c}{(1-a)(1-b)(1-c)}\left\{\frac{c}{(1-a)(1-b)(1-c)}+\frac{2b}{(1-a)(1-b)}+\frac{2a}{1-a}+2\right\}+\cdots$$

$$=1+\frac{a(2-a)}{(1-a)^2}+\frac{b(2-b)}{(1-a)^2(1-b)^2}+\frac{c(2-c)}{(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2}+\cdots\cdots$$

51. 求 $1+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7.10}{4.8.12.16}+\frac{1.4.7.10.13.16}{4.8.12.16.20.24}+\cdots\cdots$ 至無限項之和.

(解) $1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\frac{1.4.7.10}{4.8.12.16}+\cdots\cdots\cdots$

$$=1+\frac{1}{\underline{|1}}\frac{1}{4}+\frac{1.4}{\underline{|2}}\frac{1}{4^2}+\frac{1.4.7}{\underline{|3}}\frac{1}{4^3}+\frac{1.4.7.10}{\underline{|4}}\frac{1}{4^4}+\cdots=\left(1+\frac{3}{4}\right)^{-1},$$

又 $1-\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}-\frac{1.4.7.10}{4.8.12.16}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}},$

$$\therefore\quad 2\left(1+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7.10}{4.8.12.16}+\cdots\right)=\left(\frac{7}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}},$$

$$\therefore\quad 1+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7.10}{4.8.12.16}+\cdots=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{7}}+\sqrt[3]{4}\right).$$

52. 求 $1^2+\frac{3^2}{\underline{|1}}+\frac{5^2}{\underline{|3}}+\frac{7^2}{\underline{|5}}+\cdots\cdots\cdots$ 至無限項之和.

(解) $\frac{e+e^{-1}}{2}=1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|6}}+\cdots\cdots$

及 $\frac{e-e^{-1}}{2}=\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\cdots\cdots\cdots$

$$\text{普通項} = \frac{(2n+1)^2}{\underline{|2n-1}} = \frac{4+5(2n-1)+(2n-1)(2n-2)}{\underline{|2n-1}}$$

$$= \frac{4}{\underline{|2n-1}} + \frac{5}{\underline{|2n-2}} + \frac{1}{\underline{|2n-3}}.$$

$$\text{原級數} = 1+\left(\frac{4}{\underline{|1}}+5\right)+\left(\frac{4}{\underline{|3}}+\frac{5}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|1}}\right)$$

$$+\left(\frac{4}{\underline{|5}}+\frac{5}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|3}}\right)+\cdots\cdots$$

$$=5+4\left(\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}\cdots\right)+5\left(1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\right)$$

$$=1+4\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)+5\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)+\frac{e-e^{-1}}{2}=1+5e.$$

53. 求 $2+x+4x^2+19x^3+70x^4+229x^5+\ldots\ldots$ 之 n 項之和，但連續四項之係數有一次式之關係．

（解） 原級數之係數 2, 1, 4, 19, 70, 229,………

此第一逐差級數爲 −1, 3, 15, 51, 159,………

第二逐差級數爲 4, 12, 36, 108,………

原級數之第 n 項爲 u_n，第一逐差級數之第 n 項爲 v_n，則

$v_n-v_{n-1}=$ 第二逐差級數之第 $(n-1)$ 項 $=4\times3^{n-2}$,

同理 $v_{n-1}-v_{n-2}=4\times3^{n-3}, \ldots, v_2-v_1=4\times3^0=4$,

此各式相加得 $v_n-v_1=4(1+3+3^2+\ldots.3^{n-2})$

$v_1=-1 \quad \therefore \quad v_n+1=4\times\dfrac{1-3^{n-1}}{1-3} \quad \therefore \quad v_n=2.3^{n-1}-3.$

又 $u_n-u_{n-1}=v_{n-1},\quad u_{n-1}-u_{n-2}=v_{n-2}\ldots, u_2-u_1=v_1$,

此各式相加得 $u_n-u_1=v_1+v_2+\ldots.+v_{n-1}$

$$\therefore \quad u_n - u_1 = (2.3^0-3)+(2.3^1-3)+(2.3^2-3)+\ldots\ldots+(2.3^{n-2}-3)$$

$$=2(1+3+3^2+\ldots\ldots+3^{n-2})-3(n-1)$$

$$=2\times\frac{1-3^{n-1}}{1-3}-3(n-1), \quad \therefore \quad u_n=3^{n-1}-3n+4.$$

54. 求循環級數 1, 2, 3, 5, 8, 13,.... 之第 n 項卽前二項之和等于其次項者.

(解) $=1+2x+3x^2+5x^3+8x^4+13x^5+\ldots\ldots\ldots$

$$\therefore \quad (1-x-x^2)=1+2x+3x^2+5x^3+8x^4+13x^5+\ldots\ldots\ldots$$

$$-x-2x^2-3x^3-5x^4-8x^5-\ldots\ldots\ldots$$

$$-x^2-2x^3-3x^4-5x^5-\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \quad (1-x-x^2)=1+x,$$

$$\therefore \quad S=\frac{1+x}{1-x-x^2}=\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x}-\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}$$

此式中 x^n 之係數爲 $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n+\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$

$$=\{(5+1)^{n+1}+(-1)^n(\sqrt{5}-1)^{n+1}\}\div 2^{n+1}\sqrt{5}.$$

55. 求 $\frac{3}{1.2.4}+\frac{5}{3.4.6}+\frac{7}{5.6.8}+\ldots\ldots$ 至無限項之和.

(解) $s=\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.4}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{3.4.6}\right)+\left(\frac{1}{5.6}-\frac{1}{5.6.8}\right)+\ldots\ldots\ldots$

$$=\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\ldots\ldots\right)-\left(\frac{1}{1.2.4}+\frac{1}{3.4.6}+\frac{1}{5.6.8}+\ldots\ldots\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots\right)$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.6}+\frac{5}{5.6}-\frac{1}{6.8}+\ldots\ldots\right)$$

$$=\log_e 2-\frac{1}{3}\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\right)\right\}$$

$$=\log_e 2-\frac{1}{3}\left\{\log_e 2-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)\right\}$$

$$=\log_e 2-\frac{1}{3}\log_e 2+\frac{1}{12}=\frac{2}{3}\log 2+\frac{1}{12}.$$

56. n 為正整數

則 $\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{n}{1}\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{(x+3)^2}-\cdots$ 至 $n+1$ 項

$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{n}{1}\frac{1}{x+2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{x+3}+-\cdots\right)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x+n}\right).$$

(解) 後節相乘

則 $\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{n}{1}\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{(x+3)^2}-\cdots$

$$+\sum\frac{1}{(x+1)(x+2)}\left\{1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{n}{1}\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{(x+3)^2}-\cdots$$

$$+\sum\frac{1}{(x+1)(x+2)}\{1-1\}^n$$

卽得前節.

57. $y=x+x^2+2x^3+\cdots+\frac{|2n}{|n\,|n+1}x^{n+1}+\cdots$ 至無限

則 $y^2-y+x=0,$

而 $y^3=x^3+3x^4+9x^5+\cdots+\frac{3\,|2n}{|n-1\,|n+2}x^{n+2}+\cdots$

(解) $x=A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\cdots$ 代入級數, 則

$$y=(A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\cdots)+(A_1y+A_2y^2+\cdots\cdots)^2$$

$$+2(A_1y+\cdots)^3+\cdots$$

比較 y 之同方乘之係數，則 $1=A_1$,

$0=A_2+A_1^2$ ∴ $A_2=-1$. $0=A_3+2A_1A_2+2A_1^3$ ∴ $A_3=0$,

以下 $A_4=A_5=\dots\dots=0$.

由是 $x=y-y^2$ ∴ $y^2-y+x=0$.

又 $y^3=y^2-yx=y-x-yx$

$$=(x+x^2+2x^3+\dots\dots)-x-(x+x^2+2x^3+\dots\dots)x$$

$$=x^3+3x^4+\dots\dots\dots$$

即 $y^3=x^3+3x^4+9x^5+\dots\dots+\dfrac{3\,|\underline{2n}}{|\underline{n-1}\;|\underline{n+2}}x^{n+2}+\dots\dots\dots$

58. $_nH_r$ 為 $a, b, c, \dots\dots$ 之 n 文字之 r 乘元等次積之和，各文字無高于 m 方乘者，則 r 乘元之積之和為

$$_nH_r-\sum a^m.\,_nH_{r-m}+\sum a^m b^m.\,_nH_{r-2m}-\dots\dots\dots$$

(解) 自 $_nH_r$ 內去 a^m, b^m 等以上之項，即去 $\sum a^m.\,_nH_{r-m}$,

即 $_nH_r-\sum a^m.\,_nH_{r-m}$, 然 $\sum a^m.\,_nH_{r-m}$ 之內，如 $a^{r-m}b^m$ 之項有二故不可不再加 $\sum a^m b^m.\,_nH_{r-2m}$,

即 $_nH_r-\sum a^m.\,_nH_{r-m}+\sum a^m b^m.\,_nH_{r-2m}$, 以下準此.

例如 $(a+b+c+d)^5$ 之式中 a^2, b^2, c^2, d^2 以下之項為

$$_4H_5-\sum a^2.\,_4H_3+\sum a^2b^2.\,_4H_1.$$

59. a, b, c 自 0 次至 n 次，凡等次積之和為

$$\frac{a^{n+3}}{(a-b)(a-c)(a-1)}+\frac{b^{n+3}}{(b-c)(b-a)(b-1)}+\frac{c^{n+3}}{(c-a)(c-b)(c-1)}-\frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)}.$$

(解) 上式相加，則分子為

$$-a^{n+3}(b-c)(b-1)(c-1)-b^{n+3}(c-a)(c-1)(a-1)-c^{n+3}(a-b)(a-1)(b-1)+(a-b)(b-c)(c-a),$$

即有 $(a-b)(b-c)(c-a)(a-1)(b-1)(c-1)$ 之因子，而分母等于此因子.

由是此式爲自 n 次式至 0 次式之等次項.

60. 有人書名於 n 個信面,而各一信封中封入各一信及各一名帖,若每回之封入全誤,則封法之數爲

$$\underline{|n}\left\{\underline{|n}\,\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|1}}+\frac{\underline{|n-2}}{\underline{|2}}-\dots+(-1)^n\frac{1}{\underline{|n}}\right\}.$$

參照斯密斯 251 章第五例.

61. 於一平面畫相交之 n 個圓,而各圓周無三個相會於一點者,則此平面被分爲 n^2-n+2 部分.

(解) 一圓分平面爲圓內圓外之二部分,故 n 圓所分之數爲 $f(n)$,則 $f(1)=2$.

今交於 $n-1$ 圓作一圓周,則以 $2(n-1)$ 點交於 $n-1$ 圓.

故　$f(n)-f(n-1)=2(n-1)$, $f(n-1)-f(n-2)=2(n-2)$,.........

$f(2)-f(1)=2$, $f(1)=2$,

相加則 $f(n)=2(n-1)+2(n-2)+\dots+4+2+2$

$=n(n-1)+2.$

62. 證 $$\frac{n^2}{x+n}-\frac{n}{1}\frac{(n-1)^n}{x+n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n-2)^n}{x+n-2}+\dots$$

$$=\frac{x^{n-1}\underline{|n}}{(x-1)(x+3)\dots(x+n)}$$

(解) 前邊 $\frac{1}{x}$ 之係數爲

$n^n-\frac{n}{1}(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n-\dots$ 由斯密斯氏大代數第二十二編 294 章第四例 $a=n$, $b=-1$,

則 $n^n-\frac{n}{1}(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n-\dots=\underline{|n}.$

又後邊 $\frac{1}{x}$ 之係數爲 $\underline{|n}$ 故此式爲恒式.

63. 檢下之各級數爲斂級數否.

(1) $\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^3+1}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+1}+\cdots\cdots$

(2) $\frac{2}{2^3-1}+\frac{3}{3^3-1}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^3-1}+\cdots\cdots\cdots$

(3) $a+\frac{2^2-2+1}{2^4-2^3+1}a^2+\cdots\cdots+\frac{n^2-n+1}{n^4-n^2+1}a^n+\cdots\cdots\cdots$

(4) $\frac{2^3.4^3}{3^3.3^3}+\frac{2^3.4^3.5^3.7^3}{3^3.3^3.6^3.6^3}+\cdots\cdots+\frac{2^3.4^3.5^3.7^3\cdots\cdots(3n-1)^3(3n+1)^3}{3^3.3^3.6^3.6^3\cdots\cdots(3n)^3.(3n)^3}$

(5) $(1.\log\frac{3}{1}-1)+(2\log\frac{5}{3}-1)+\cdots\cdots+(n\log\frac{2n+1}{2n-1}-1)+\cdots\cdots\cdots$

(解) (1) $\frac{n}{n^2+1}>\frac{1}{n+1}$,

而 $\sum\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ 爲發級數,故 $\sum\frac{n}{n^2+1}$ 亦爲發級數.

(2) $\frac{n}{n^3-1}<\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$,

而 $\sum\frac{1}{n^2}$ 爲斂級數,故 $\sum\frac{n}{n^3-1}$ 亦爲斂級數.

(3) $\frac{n^2-n+1}{n^4-n^2+1}=\frac{n^3+1}{n^6+1}<\frac{n^3+1}{n^6}$,

而 $\sum\frac{n^3+1}{n^6}$ 爲斂級數,故 $a\ngtr 1$,則原級數爲斂級數.

(4) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(3n+2)^3(3n+4)^3}{(3n+3)^3(3n+3)^3}=\frac{\left(3+\frac{2}{n}\right)^3\left(3+\frac{4}{n}\right)^3}{\left(3+\frac{3}{n}\right)^3\left(3+\frac{3}{n}\right)^3}$,

n 無限增大;則 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 爲 1,故爲發級數.

(5) $S=(\log3-\log1-1)+(2\log5-2\log3-1)$
$+(3\log7-3\log5-1)+\cdots\cdots\cdots$

$$=-(2+log3+1+log5+1+log7+\dots)$$
$$=-(1+log3e+log5e+log7e+\dots)$$
$$=\frac{1}{loge}+\frac{1}{log3e}+\frac{1}{log5e}+\dots+\frac{1}{log(2n-1)e}+$$

由斯密斯大代數學 339 章之例, 此級數爲斂級數.

64. 求第 r 項爲 $\dfrac{(m+n)^r(2m-n)(3m-2n)\dots(rm-\overline{r-1}n)}{(m-n)^r(2m+n)(3m+2n)\dots(rm+\overline{r-1}n)}$ 之級數爲斂級數之關係.

(解) 第 $r+1$ 項

$$=\frac{(m+n)^{r+1}(2m-n)(3m-2n)\dots(rm-\overline{r-1}n)(\overline{r+1}m-rn)}{(m-n)^{r+1}(2m+n)(3m+2n)\dots(rm+\overline{r-1}n)(\overline{r+1}m+rn)}.$$

$$\therefore\ \frac{第(r+1)項}{第\ r\ 項}=\frac{(m+n)(\overline{r+1}m-rn)}{(m-n)(\overline{r+1}m+rn)}<1,$$

$$\therefore\ \frac{(m+n)\{\overline{r+1}m-rn\}}{(m-n)\{\overline{r+1}m+rn\}}-1<0,\ 即\ \frac{2mn}{(m-n)(\overline{r+1}m+rn)}<0,$$

$\therefore\ (m-n)(\overline{r+1}m+rn)<0\quad \therefore\ m-n<0\quad \therefore\ m<n$

又 $(m+n)(\overline{r+1}m-rn)<0\quad \therefore\ r(m^2-n^2)+m^2+mn>0,$

因 $m<n$, 故 $m^2+mn<2mn$, 而 $r=1$,

則 $m^2-n^2+2mn>0$ 卽 $\{m+n(1+\sqrt{2})\}\{m-n(1-\sqrt{2})\}>0,$

$\therefore\ m>n(\sqrt{2}-1)$, 卽 $m(\sqrt{2}+1)>n.$

由是所求之關係爲 $m<n<m(\sqrt{2}+1)$.

65. n 爲無限大, 則 $\left\{\dfrac{(m+1)(m+2)(m+3)\dots(m+n)}{1.2.3\dots n}\right\}^{\frac{1}{n}}$ 爲 1.

(解) 原式 $=\left(1+\dfrac{m}{1}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1+\dfrac{m}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1+\dfrac{m}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\dots\left(1+\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

而 $\left(1-\dfrac{m}{r}\right)^{\frac{1}{n}}=1+\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{m}{r}+\dfrac{1-n}{n^2}\cdot\dfrac{m^2}{r^2}+\dots$ 此式中 n 爲無限大,

則 $\left(1+\frac{m}{r}\right)^{\frac{1}{n}}=1$, 故原式 $=1$.

66. 證 $2\sqrt{(n^2+1)}=2n+\frac{1}{n+}\frac{1}{4n+}\frac{1}{n+}\frac{1}{4n+}\cdots$

(解) $2\sqrt{(n^2+1)}-2n=\frac{2}{\sqrt{(n^2+1)}+n}$

$\therefore\quad 2\sqrt{(n^2+1)}=2n+\frac{1}{\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{(n^2+1)}}{2}}$,

由是 $2\sqrt{(n^2+1)}=2n+\frac{1}{n+}\frac{1}{4n+}\frac{1}{n+}\frac{1}{4n+}\cdots\cdots\cdots$

67. $\phi(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{1}{\underline{|2}}\frac{a^2}{x(x+1)}+\frac{1}{\underline{|3}}\frac{a^3}{x(x+1)(x+2)}+\cdots\cdots$

則 $\frac{a\phi(x+1)}{x\phi(x)}=\frac{a}{x+}\frac{a}{x+1+}\frac{a}{x+2+}\cdots\cdots\cdots$

(解) $\phi(x+1)=1+\frac{a}{x+1}+\frac{1}{\underline{|2}}\frac{a^2}{(x+1)(x+2)}$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}\frac{a^3}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots\cdots\cdots$$

$\therefore\quad \phi(x)-\phi(x+1)=\frac{a}{x(x+1)}+\frac{1}{\underline{|2}}\frac{2a^2}{x(x+1)(x+2)}$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}\frac{3a^3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{a}{x(x+1)}\left\{1+\frac{a}{x+2}+\frac{1}{\underline{|2}}\frac{a^2}{(x+2)(x+3)}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{a}{x(x+1)}\phi(x+2),$$

$$x\phi(x)=\frac{1}{x+1}\{x(x+1)\phi(x+1)+a\phi(x+2)\},$$

由是 $\frac{a\phi(x+1)}{x\phi(x)}=\frac{a(x+1)\phi(x+1)}{x(x+1)\phi(x+1)+a\phi(x+2)}$

$$=\frac{a}{x+}\frac{a\phi(x+2)}{(x+1)\phi(x+1)}.$$

同理 $\frac{a\phi(x+2)}{(x+1)\phi(x+1)}=\frac{a}{x+1+}\frac{a\phi(x+3)}{(x+2)\phi(x+2)}$, 以下理同.

$$\therefore\quad \frac{a\phi(x+1)}{x\phi(x)}=\frac{a}{x+}\frac{a}{x+1+}\frac{a}{x+2+}\cdots\cdots$$

68. $\frac{p_n}{q_n}$ 及 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 爲 $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\frac{1}{k+}\frac{1}{l}$ 之最後兩漸近分數, 則 $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\frac{1}{k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\frac{1}{k+}\frac{1}{l}$

$$=\frac{p_nq_n+p_{n-1}q_{n-1}}{q_n^2+p_nq_{n-1}},$$

(解) 由斯密斯第二十七編 355 之公式

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{b_{n-1}p_{n-1}+a_{n-1}p_{n-2}}{b_{n-1}q_{n-1}+a_{n-1}q_{n-2}},$$

而本題所求之值爲 F,

則 $F=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{p_n}{q_n}$,

故由前之公式得 $F=\frac{q_np_n+p_{n-1}q_{n-1}}{q_nq_n+p_nq_{n-1}}=\frac{q_np_n+p_{n-1}q_{n-1}}{q_n^2+p_nq_{n-1}}$.

69. 證 $\frac{1}{2-}\frac{2}{3-}\frac{3}{4-}\cdots\frac{n}{n+1}\cdots$ 之第 n 漸近分數

爲 $\frac{\sum_1^n \underline{|r}}{1+\sum_1^n \underline{|r}}$.

(解) 由漸近分數之公式 $p_n=(n+1)p_{n-1}-np_{n-2}$,

$$q_n=(n+1)q_{n-1}-nq_{n-2}.$$

由是 $p_n - p_{n-1} = n(p_{n-1} - p_{n-2})$,

同理 $p_{n-1} - p_{n-2} = (n-1)(p_{n-2} - p_{n-3})$, 但 $p_1 = 1$,

$p_{n-2} - p_{n-3} = (n-2)(p_{n-3} - p_{n-4})$,

$p_{n-3} - p_{n-4} = (n-3)(p_{n-4} - p_{n-5})$, $\dfrac{1}{2-}\,\dfrac{2}{3-}=\dfrac{3}{4}$,

....

$p_3 - p_2 = 3(p_2 - p_1)$ $\therefore\ p_2 = 3$,

$p_2 - p_1 = 2$,

$p_1 = 1$,

由是 $p_2 - p_1 = \underline{|2}$, $p_3 - p_2 = 3\underline{|2} = \underline{|3}$,

$p_{n-1} - p_{n-2} = (n-1)\underline{|n-2} = \underline{|n-1}$, $p_n - p_{n-1} = n\underline{|n-1} = \underline{|n}$,

由加法得 $(p_n - p_{n-1}) + (p_{n-1} - p_{n-2}) + \dots + (p_2 - p_1) + p_1$

$$= \underline{|n} + \underline{|n-1} + \dots + \underline{|2} + 1,$$

$\therefore\ p_n = \sum_1^n \underline{|r}$, 此記號示 $\underline{|r}$ 之自 $\underline{|1}$ 至 $\underline{|n}$ 之和.

又同法 $q_n = \underline{|n} + \underline{|n-1} + \dots + \underline{|2} + 2 = \sum_1^n \underline{|r} + 1$.

70. 求 $\dfrac{1}{2-}\,\dfrac{4}{5-}\,\dfrac{9}{10-}\cdots\dfrac{n^2}{n^2+1-}\cdots$ 之第 n 漸近分數.

(解). $p_n = (n^2+1)p_{n-1} - n^2 p_{n-2}$ $\therefore\ p_n - p_{n-1} = n^2(p_{n-1} - p_{n-2})$,

與前例同法 $p_n = \sum_1^n (\underline{|n})^2$ 及 $q_n = \sum_1^n (\underline{|n})^2 + 1$,

$$\therefore\quad \frac{p_n}{q_n} = \frac{\sum_1^n (\underline{|n})^2}{1 + \sum_1^n (\underline{|n})^2}.$$

71. $\dfrac{a_1}{a_1+1-}\,\dfrac{a_2}{a_2+1-}\,\dfrac{a_3}{a_3+1-}\cdots$ 之第 n 漸近分數

爲 $s_n/(s_n+1)$, 但 $s_n = a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \dots$ 至 n 項.

(解) $p_n = (a_n+1)p_{n-1} - a_n p_{n-2}$, $\therefore\ p_n - p_{n-1} = a_n(p_{n-1} - p_{n-2})$,

與前例同法 $p_n=a_1+a_1a_2+\dots+a_1a_2a_3\dots a_n=s_n$,

$q_n=s_n+1$,

$$\therefore\quad \frac{p_n}{q_n}=\frac{s_n}{s_n+1}.$$

72. $\frac{1}{1-}\frac{a}{1-}\frac{a^2(1-a)}{1}-\frac{a^3(1-a^2)}{1}-\dots$

$$=1+\frac{a}{1-a}+\frac{a}{1-a}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}+\dots$$

$$=(1+a)(1+a^2)(1+a^3)\dots$$

(解) $p_n=p_{n-1}-a^{n-1}(1-a^{n-1})p_{n-2}$,

$$\therefore\quad \frac{p_n}{1-a^{n-1}}-p_{n-1}=a^{n-1}\left(\frac{p_{n-1}}{1-a^{n-1}}-p_{n-2}\right),$$

$$\frac{p_{n-1}}{1-a^{n-2}}-p_{n-2}=a^{n-2}\left(\frac{p_{n-2}}{1-a^{n-2}}-p_{n-3}\right),$$

....

$$\frac{p_3}{1-a^2}-p_2=a^2\left(\frac{p_2}{1-a^2}-p_1\right),$$

$$\frac{p_2}{1-a}-p_1=\frac{1}{1-a}-1=\frac{a}{1-a}.\quad \text{但 } p_1=1,\ p_2=1.$$

由是 $\frac{p_2}{1-a}-p_1=\frac{a}{1-a}$, $\frac{p_3}{1-a^2}-p_2=\frac{a}{1-a}\cdot a^2$,

$\frac{p_4}{1-a^3}-p_3=\frac{a}{1-a}\cdot a^2\cdot a^3,\ \dots\frac{p_n}{1-a^{n-1}}-p_{n-2}=\frac{a}{1-a}\cdot a\cdot a^2\dots a^{n-1}$

$$\therefore\quad \frac{p_2}{1-a}-p_1=\frac{a}{1-a},$$

$$\frac{p_3}{(1-a)(1-a^2)}-\frac{p_2}{1-a}=\frac{a}{1-a}\cdot\frac{a^2}{1-a^2},$$

$$\frac{p_4}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}-\frac{p_3}{(1-a)(1-a^2)}=\frac{a}{1-a}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}\cdot\frac{a^3}{1-a^3},$$

....

$$\frac{p_n}{(1-a)(1-a^2)\dots(1-a^{n-1})}-\frac{p_{n-1}}{(1-a)(1-a^2)\dots(1-a^{n-2})}$$

$$=\frac{a}{1-a}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}\cdots\frac{a^{n-1}}{1-a^{n-1}}$$

由加法 $\frac{p_n}{(1-a)(1-a^2)\dots(1-a^{n-1})}-p_1$

$$=\frac{a}{1-a}+\frac{a}{1-a}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}+\cdots\cdots+\frac{a}{1-a}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}\cdots\frac{a^{n-1}}{1-a^{n-1}}$$

即 $\frac{p_n}{(1-a)(1-a^2)\dots(1-a^{n-1})}$

$$=1+\frac{a}{1-a}+\frac{a}{1-a}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}+\cdots+\frac{a}{1-a}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}\cdots\frac{a^{n-1}}{1-a^{n-1}},$$

又 $q_1=1$, $q_2=1-a$,

由前法則 $\frac{q_n}{(1-a)(1-a^2)\dots(1-a^{n-1})}=1.$

$$\therefore\quad \frac{p_n}{q_n}=1+\frac{a}{1-a}+\frac{a}{1-a}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}+\cdots+\frac{a}{1-a}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}\cdots\frac{a^{n-1}}{1-a^{n-1}}.$$

$\frac{p}{q}$ 爲無限之連分數,

則 $\frac{p}{q}=1+\frac{a}{1-a}+\frac{a}{1-a}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}+\cdots\cdots$

次由斯密斯氏 301 章例題二十九之 29 例知此連分數等於

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^3)\cdots\cdots$$

73. a 大於 1,

則 $\frac{1}{2a-1}\,\frac{(a-1)(2a-1)}{+2a}\,\frac{(2a-1)(3a-1)}{+2a}\cdots\frac{(\overline{n-1}a-1)(na-1)}{+2a}\cdots\cdots$

之第 n 漸近分數爲

$$(a-1)\left\{\frac{1}{(a-1)(2a-1)}-\frac{1}{(2a-1)(3a-1)}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(na-1)(\overline{n+1}a-1)}\right\}$$

(解) $p_n=2ap_{n-1}+(\overline{n-1}a-1)(na-1)p_{n-2}$,

$$\therefore\quad p_n-(\overline{n+1}a-1)p_{n-1}=-(\overline{n-1}a-1)\{p_{n-1}-(na-1)p_{n-2}\},$$

$$p_{n-1}-(na-1)p_{n-2}=-(\overline{n-2}a-1)\{p_{n-2}-(\overline{n-1}a-1)p_{n-3}\},$$

....

$p_3-(4a-1)p_2=-(2a-1)\{p_2-(3a-1)p_1\}$, 但 $p_1=1$, $p_2=2a$,

$p_2-(3a-1)p_1=2a-(3a-1)=-(a-1)$.

由是 $p_3-(4a-1)p_2=(a-1)(2a-1)$, ...

$$p_n-(\overline{n+1}a-1)p_{n-1}=(-1)^{n-1}(a-1)(2a-1)\ldots(\overline{n-1}a-1).$$

$$\therefore\quad \frac{p_2}{(a-1)(2a-1)(3a-1)}-\frac{p_1}{(a-1)(2a-1)}=-\frac{1}{(2a-1)(3a-1)},$$

$$\frac{p_3}{(a-1)(2a-1)(3a-1)(4a-1)}-\frac{p_2}{(a-1)(2a-1)(3a-1)}=\frac{1}{(3a-1)(4a-1)},$$

....

$$\frac{p_n}{(a-1)(2a-1)\ldots(\overline{n+1}a-1)}-\frac{p_{n-1}}{(a-1)(2a-1)\ldots(na-1)}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(a-1)(\overline{n+1}a-1)}.$$

$$\therefore\frac{p_n}{(a-1)(2a-1)\ldots(\overline{n+1}a-1)}$$

$$=\frac{1}{(a-1)(2a-1)}-\frac{1}{(2a-1)(3a-1)}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(na-1)(\overline{n+1}a-1)}$$

次由 $q_1=2a-1$, $q_2=(2a-1)(3a-1)$

得 $\dfrac{q_n}{(a-1)(2a-1)\ldots(\overline{n+1}a-1)}=\dfrac{1}{a-1}$, 故題言如此.

74. 連續兩奇數之平方根爲連分數，則其第一漸近分數之差爲 1，而第三漸近分數之差爲 $\frac{497}{3855}$，兩數各如何.

(解) 兩數之第三漸近分數爲 $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$ 及 $a'+\cfrac{1}{b'+\cfrac{1}{c'}}$,

由是 $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}-\left(a'+\cfrac{1}{b'+\cfrac{1}{c'}}\right)=\frac{497}{3855}$,

即 $\frac{abc+a+c}{bc+1}-\frac{a'b'c'+a'+c'}{b'c'+1}=\frac{A}{257}-\frac{B}{15}=\frac{497}{3855}$

由不定方程式求 A, B, 則 $A=2072$, $B=119$,

即 $bc+1=257$, $b'c'+1=15$ $\therefore$ $bc=256$, $b'c'=14$,

及 $abc+a+c=2072$, $a'b'c'+a'+c'=119$,

$\therefore$ $257a+c=2072$, $15a'+c'=119$, 但 $a-a'=1$.

由是 $c=16$, $c'=14$, $a=8$, $a'=7$, $b=16$, $b'=1$.

而原兩奇數之平方根在 8, 9 及 7, 8 之間,

故原兩數在 64, 81 及 49, 64 之間,

由是所求之兩數爲 65 及 63.

75 遞昇連分數 $\frac{b_1+}{a_1}\frac{b_2+}{a_2}\frac{b_3+}{a_3}\frac{b_4+}{a_4}\cdots$ 之第 n 漸近分數爲 $\frac{p_n}{q_n}$. 則 $p_n=a_np_{n-1}+b_n$, $q_n=a_nq_{n-1}$.

由是 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots$ 至無限之值爲 1.

(解) $\frac{p_1}{q_1}=\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{b_1+\frac{b_2}{a_2}}{a_1}=\frac{a_2b_1+b_2}{a_1a_2}=\frac{a_2p_1+b_2}{a_2q_1}$, ………

由是 $\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_np_{n-1}+b_n}{a_nb_{n-1}}$.

然 $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_n+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}{a_n}=\frac{a_{n+1}p_n+b_{n+1}}{a_{n+1}q_n}$，故合理，

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\dots\dots=\frac{1}{2}+\frac{2}{2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\frac{4}{2.3.4.5}+\dots\dots\dots$$

$$=\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{2}{\underline{|3}}+\frac{3}{\underline{|4}}+\frac{4}{\underline{|5}}+\dots\dots\dots$$

$$=\left(1-\frac{1}{\underline{|2}}\right)+\left(\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}\right)+\left(\frac{1}{\underline{|3}}-\frac{1}{\underline{|4}}\right)+\left(\frac{1}{\underline{|4}}-\frac{1}{\underline{|5}}\right)+\dots\dots=1.$$

76. $\frac{1}{1-}\frac{x}{x+1-}\frac{2(x+2)}{x+3}\dots\dots-\frac{(n-1)(x+n-1)}{x+2n-1}$

等於 $(x+1)(x+2)\dots\dots(x+n)/\underline{|n}$.

（解） $p_{n+1}=(x+2n-1)p_n-(n-1)(x+n-1)p_{n-2}$,

∴ $p_{n+1}-(x+n)p_n=(n-1)\{p_n-(x+n-1)p_{n-2}\}$,

同法 $p_n-(x+n-1)p_{n-1}=(n-2)\{p_{n-1}-(x+n-2)p_{n-3}\}$,

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_4-(x+3)p_3=2\{p_3-(x+2)p_2\},$$

$$p_3-(x+2)p_2=1\{p_2-(x+1)p_1\},$$

但 $p_1=1$，$p_2=x+1$， $p_2-(x+1)p_1=(x+1)-(x+1)1=0.$

由是 $p_{n+1}=p_n(x+n)$,

$$p_n=p_{n-1}(n+n-1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_3=p_2(x+2)$$

$$p_2=p_1(x+1)$$

$$p_1=1,$$

由乘法得 $q_n=(x+1)(x+2)(x+3)\dots\dots(x+n)$.

又 $q_{n+1}-(x+n)q_n=(x-1)\{q_{n-1}-(x+n-1)q_{n-2}\}$.

而 $q_1=1$，$q_2=1$ 故 $q_3-(x+2)q_2=2\{q_2-(x+1)q_1\}$

則 $q_3=2=\lfloor 2$, 又 $q_4-(x+3)q_3=2\{q_3-(x+2)q_2\}$

則 $q_4=\lfloor 3, \ldots q_{n+1}=\lfloor n.$

由是 $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\dfrac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{\lfloor n}.$

77. $\sum_r^1=a_1+\dfrac{1}{a_2+}\dfrac{1}{a_3+}\ldots+\dfrac{1}{a_r}$

則 $\sum_n^1 \cdot \sum_2^n=\sum_1^n \cdot \sum^1{}_{n-1}$

(解) $\sum_n^1=\dfrac{p_n}{q_n}$, 由斯密斯 357 章第一例知 $\sum_1^n=\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$.

又 $\sum^1{}_{n-1}=\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\sum_n^1=a_1+\dfrac{1}{\sum_n^2}=\dfrac{p_n}{q_n}$ $\therefore$ $\sum_n^2=\dfrac{q_n}{p_n-a_1q_n}$,

由是 $\sum_2^n=\dfrac{q_n}{q_{n-1}}$.

$\therefore$ $\sum_n^1 \cdot \sum_2^n=\dfrac{p_n}{q_n}\cdot\dfrac{p_n}{q_{n-1}}=\dfrac{p_n}{q_{n-1}}$,

及 $\sum_1^n \cdot \sum^1{}_{n-1}=\dfrac{p_n}{p_{n-1}}\cdot\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{p_n}{q_{n-1}}$.

78. $\dfrac{a_1}{1+}\dfrac{a_2}{1+}\ldots+\dfrac{a_2}{1}$ 之第 r 漸近分數爲 $\dfrac{p_r}{q_r}$,

$\dfrac{a_n}{1+}\dfrac{a_{n-1}}{1}\ldots+\dfrac{a_1}{1}$ 之第 r 漸近分數爲 $\dfrac{p_r'}{q'_r}$.

則 $q_n=p'_{n-1}+q'$, $q_{n-1}=q'_{n-1}$ 及 $p_{n-1}=a_1q'_{n-2}$

(解) $q_n=q_{n-1}+a_nq_{n-2}$, $q_{n-1}=q_{n-2}+a_{n-1}q_{n-3}$,

又 $q_3=q_2+a_3q_1$, $q_2=1+a_2$, $q_1=1$,

$\therefore$ $\dfrac{q_3}{q_2}=1+\dfrac{a_3}{\dfrac{q_2}{q_1}}=1+\dfrac{a_3}{1+}\dfrac{a^2}{1}$.

即 $\dfrac{q_n}{q_{n-1}}=1+\dfrac{a_n}{\dfrac{q_{n-1}}{q_{n-2}}}=1+\dfrac{a_n}{1+\dfrac{a_{n-1}}{\dfrac{q_{n-2}}{q_{n-3}}}}=1+\dfrac{a_n}{1+}\dfrac{a_{n-1}}{1+}\ldots\dfrac{a_2}{1+}$,

$\therefore\quad \frac{q_n}{q_{n-1}}=1+\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}=\frac{q'_{n-1}+p'_{n-1}}{q'_{n-1}},$

$\therefore\quad q_n=p'_{n-1}+q'_{n-1}$ 及 $q_{n-1}=q'_{n-1}.$

又 $q'_n=q'_{n-1}+a_1q'_{n-2},$

則 $\frac{q'_n}{q'_{n-1}}=1+\cfrac{a_1}{\cfrac{q'_{n-1}}{q'_{n-2}}}=1+\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{1+}\cdots\frac{a_n}{+1}=1+\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$

$=\frac{q_{n-1}+p_{n-1}}{q_{n-1}},$

$\therefore\quad q'_n=q_{n-1}+p_{n-1}=q'_{n-1}+p_{n-1}$, 然 $q'_n=q'_{n-1}+a_1q'_{n-2},$

$\therefore\ p_{n-1}=a_1q'_{n-2}.$

79. $\frac{m^2}{2m+1}\ \frac{(m+1)^2}{-2m+3}\ \frac{(m+2)^2}{-2m+5-}\cdots\cdots$至無限項之值爲 m.

(解) $p_n=(2m+2n-1)p_{n-1}-(m+n-1)^2p_{n-2},$

$\therefore\quad p_n-(m+n)p_{n-1}=(m+n-1)\{p_{n-1}-(m+n-1)p_{n-2}\},$

$p_{n-1}-(m+n-1)p_{n-2}=(m+n-2)\{p_{n-2}-(m+n-2)p_{n-3}\},$

$p_3-(m+3)p_2=(m+2)\{p_2-(m+2)p_1\},$

但 $p_1=m^2,\ p_2=m^2(2m+3),$

$\therefore\quad p_2-(m+2)p_1=m^2(2m+3)-(m+2)m^2=m^2(m+1).$

由是 $p_3-(m+3)p_2=m^2(m+1)(m+2),$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$p_{n-1}-(m+n-1)p_{n-2}=m^2(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2),$

$p_n-(m+n)p_{n-1}=m^2(m+1)(m+2)\cdots(m+n).$

如前諸例,

則 $p_n=m^2(m+1)(m+2)\cdots(m+n)\left\{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right\},$

又 $q_n=m(m+1)(m+2)\cdots(m+n)\left\{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right\}$

$$\frac{p_n}{q_n}=m,\ 但\ \frac{p}{q}=m.$$

80. n 爲正整數, 則 $N^{\frac{1}{n}}$ 可以 1 爲分子之不循環連分數示之, 而 $N=2$, $n=3$, 則 $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{29}{23}$ 爲其漸近分數.

(解) $\sqrt[3]{2}=1+\sqrt[3]{2}-1=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=1+\dfrac{1}{3+(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2}$

$$=1+\frac{1}{3+(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2}+2)}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{10}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(4-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}}$$

$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}-8}{10}}}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{4+4\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}}{3}}}$$

$$=1+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{4\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}-11}{3},$$

$$\therefore\quad 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},\qquad 1+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},$$

$$1+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5}=1+\frac{1}{3+}\,\frac{5}{6}=1+\frac{6}{23}=\frac{29}{23}.$$

81. a, b, c 爲已知數量, 而 $a-x, b-y, c-z$ 皆爲正數量, 則 $(a-x)(b-y)(c-z)(ax+by+cz)$ 之最大値如何.

(解) $a(a-x)+b(b-y)+c(c-z)+(ax+by+cz)=a^2+b^2+c^2$ 卽爲常數, 故 $a(a-x)b(b-y)c(c-z)(ax+by+cz)$ 爲最大,

則 $a(a-x)=b(b-y)=c(c-z)=ax+by+cz$,

$$\therefore\quad ax-by+cz=\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

由是 $(a-x)(b-y)(c-z)(ax+by+cz)=\frac{(ax+by+cz)^4}{abc}=\frac{(a^2+b^2+c^2)^4}{2^4abc}$,

82. a, b, c 爲三正數量, 其內二數之和皆大於第三數,
而 $ax+by+cz=0$,
則 $ayz+bzx+cxy$ 對於 x 之任意實數値爲負.

(解) $z=-\frac{ax+by}{c}$,

$\therefore\quad ayz+bzx+cxy=-\frac{ax+by}{c}(ay+bx)+cxy$

$$=-\frac{1}{c}\{abx^2+(a^2+b^2-c^2)xy+aby^2\},$$

而 $abx^2+(a^2+b^2-c^2)xy+aby^2$ 爲正, 何則

$(a^2+b^2-c^2)^2y^2-4ab.aby^2$

$=-y^2(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)<0$ 故也.

83. m 及 n 爲正數而 $m>n$, 又 x 爲正,

則由 $x\gtrless 1$ 而 $\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}}{m}\gtrless\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}{n}$,

(解) $n(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})-m(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$, 此式中前項及後項皆有 mn 項, 而括此各項則有如 $x-1$, x^2-1 之項之和, 故 $x>1$ 則爲正, $x<1$ 則爲負,

84. a 爲任意正數, 而 $p<q$, 則除 $p>0>q$ 而 $\frac{a^p-1}{q}>\frac{a^q-1}{q}$.

(解) 第一 p, q 爲整數,

則由前例 $\frac{1+a+a^2+\cdots+a^{p-1}}{p}>\frac{1+a+a^2+\cdots+a^{q-1}}{q}$,

兩邊以 $a-1$ 乘之, 則 $\frac{a^p-1}{p}>\frac{a^q-1}{q}$.

次 $p=\frac{m}{n}$, $q=\frac{r}{s}$ 卽爲分數求 n, s 之 L.C.M. 爲 θ,

則 $p=\frac{m'}{\theta}$, $q=\frac{r'}{\theta}$,

$$\therefore \frac{1+a^{\frac{1}{\theta}}+a^{\frac{2}{\theta}}+\cdots+a^{\frac{m'-1}{\theta}}}{p} > \frac{1+a^{\frac{1}{\theta}}+a^{\frac{2}{\theta}}+\cdots+a^{\frac{r'-1}{\theta}}}{q},$$

兩邊以 $1-a^{\frac{1}{\theta}}$ 乘之,則 $\frac{a^{\frac{m'}{\theta}}-1}{p} > \frac{a^{\frac{r'}{\theta}}-1}{q}$,

即 $\frac{a^p-1}{p} > \frac{a^q-1}{q}$.

85. x 爲任意正數,則 $x^{-1}>x^{-x}>1+x-x^2$.

(解) $x>1$,則 $x^x>x$ ∴ $x^{-1}>x^{-x}$,

又 $x<1$,則 $x^{1-x}<1$ ∴ $x<x^x$ ∴ $x^{-1}>x^{-x}$,

次 $\frac{1}{x^x}>1+x-x^2$ 則 $1>x^x+x^{x+1}-x^{x+2}$,

即 $(x^{x+2}-x^x)-(x^{x+1}-1)>0$,

而 $x>1$,則 $x^{x+2}-x^x$ 大於 $x^{x+1}-1$.

又 $x<1$,則 $x^{x+2}-x^x$ 爲負,$-(x^{x+1}-1)$ 爲正,而其數大於前者之數,故皆爲 $x^{-x}>1+x-x^2$,

86. 凡文字爲正數,則 $x^my^n \ngtr \left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} m^m n^n$,

由是 $x^my^n=a$,試決定 $x+y$ 之極小值.

(解) $$\frac{\left(\frac{x}{m}+\frac{x}{m}+\cdots\text{至 } m \text{ 項}\right)+\left(\frac{y}{n}+\frac{y}{n}+\cdots\text{至 } n \text{ 項}\right)}{m+n}$$

$$\nless \sqrt[m+n]{\left\{\left(\frac{x}{m}\cdot\frac{x}{m}\cdots\text{至 } m \text{ 因子}\right)\left(\frac{y}{n}\cdot\frac{y}{n}\cdots\text{至 } n \text{ 因子}\right)\right\}},$$

即 $\left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} \nless \left(\frac{x^m}{m^m}\cdot\frac{y^n}{n^n}\right)$ ∴ $x^my^n \ngtr \left(\frac{x+y}{m+n}\right)^{m+n} m^m n^n$.

次 $x^my^n=a$,則 $(x+y)^{m+n} \ngtr \frac{(m+n)^{m+n}a}{m^mn^n}$,

$\therefore$ $x+y$ 之極小值 $=\sqrt[m+n]{\dfrac{(m+n)^{m+n}a}{m^m n^n}}$.

87. a, b, c 爲正數對於 x, y, z 之正值而 $x=a,\ y=b,\ z=c$,

則 $\dfrac{(x+y+z)^{a+b+c}}{x^a y^b z^c}$ 之值極小.

(解) $\dfrac{a\left(\dfrac{x}{a}\right)+b\left(\dfrac{y}{b}\right)+c\left(\dfrac{z}{c}\right)}{a+b+c} \nless \sqrt[a+b+c]{\left\{\left(\dfrac{x}{a}\right)^a\left(\dfrac{y}{b}\right)^b\left(\dfrac{z}{c}\right)^c\right\}}$,

$\therefore$ $\dfrac{(x+y+z)^{a+b+c}}{x^a y^b z^c} \nless \dfrac{(a+b+c)^{a+b+c}}{a^a b^b c^c}$,

故 $\dfrac{(x+y+z)^{a+b+c}}{x^a y^b z^c}$ 之極小值爲 $\dfrac{(a+b+c)^{a+b+c}}{a^a b^b c^c}$.

而 $x=a,\ y=b,\ z=c$, 則爲此值.

88. $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲正數而 $a>\alpha,\ b>\beta,\ c>\gamma,\ d>\delta$,

則 $8abcd+8\alpha\beta\gamma\delta>(a+\alpha)(b+\beta)(c+\gamma)(d+\delta)$.

(解) $a-\alpha=\mathrm{A},\ b-\beta=\mathrm{B},\ c-\gamma=\mathrm{C},\ d-\delta=\mathrm{D}$,

則 $2a=(a+\alpha)+\mathrm{A},\ 2b=(b+\beta)+\mathrm{B},\ 2c=(c+\gamma)+\mathrm{C},\ 2d=(d+\delta)+\mathrm{D}$,

又 $2\alpha=(a+\alpha)-\mathrm{A},\ 2\beta=(b+\beta)-\mathrm{B},\ 2\gamma=(c+\gamma)-\mathrm{C},\ 2\delta=(d+\delta)-\mathrm{D}$.

$$\therefore\quad 16abcd+16\alpha\beta\gamma\delta=2(a+\alpha)(b+\beta)(c+\gamma)(d+\delta)$$
$$+2\sum \mathrm{AB}(c+\gamma)(d+\delta)+2\mathrm{ABCD},$$

$$\therefore\quad 8abcd+8\alpha\beta\gamma\delta>(a+\alpha)(b+\beta)(c+\gamma)(d+\delta).$$

89. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b_1, b_2, b_3, \cdots b_n, c_1, c_2, c_3, \cdots c_n$ 爲三種正數,各從其大小遞降列之,

則 $\dfrac{a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3+\cdots\cdots}{n}>\dfrac{\sum a_1}{n}\cdot\dfrac{\sum b_1}{n}\cdots\cdots\cdots$

(解) 由斯密斯氏 348 章 $\dfrac{\sum a_1^{p}}{n}>\dfrac{\sum a_1^{q}}{n}\cdot\dfrac{\sum a_1^{\beta}}{n}\cdot\dfrac{\sum a_1^{r}}{n}\cdots\cdots\cdots$

90. a, b, c 爲正數,則 $a^a b^b c^c > \left\{\frac{1}{3}(a+b+c)\right\}^{a+b+c}$,

及 $(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c < \left\{\frac{2}{3}(a+b+c)\right\}^{a+b+c}$,

(解) $$\left\{\frac{a\left(\frac{1}{a}\right)+b\left(\frac{1}{b}\right)+c\left(\frac{1}{c}\right)}{a+b+c}\right\}^{a+b+c} > \left(\frac{1}{a}\right)^a\left(\frac{1}{b}\right)^b\left(\frac{1}{c}\right)^c,$$

$\therefore\ a^a b^b c^c > \left\{\frac{1}{3}(a+b+c)\right\}^{a+b+c}$

又 $$(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c < \left\{\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{a+b+c}\right\}^{a+b+c}$$
$$< \left\{\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}\right\}^{a+b+c},$$

但 $\frac{2}{3}(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)>0$,

$$\therefore\ \frac{2}{3}(a+b+c)^2>2(ab+bc+ca),$$

$$\therefore\ \frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}<\frac{2}{3}(a+b+c),$$

由是 $(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c < \left\{\frac{2}{3}(a+b+c)\right\}^{a+b+c}$,

91. a 爲大於 19 之素數,則 $a^{18}-1$ 爲 9576 之倍數.

(解) 由斯密斯氏 389 章 $a^{18}-1=M(19)$,

又 a^6-1 有 a^6-1, $a^3\pm1$, a^2-1 之因子.

$\therefore\ a^{18}-1=M(7)$, $a^3\pm1=(3m\pm1)^3\pm1=9(3m^3\pm3m^2+m)$,

$a^2-1=(2m+1)^2-1=4m(m+1)=4M\lfloor 2=M(8)$,

由是 $a^{18}-1=M(19.7.9.8)=M(9576)$.

92. 相異之素數 $m+1$, $n+1$, $p+1$ 之積爲底數之數,其 $mnp+1$ 方乘之末位數字與原末位數字同.

(解) $r=(m+1)(n+1)(p+1)$, 原數 $=a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots$

$\therefore$ 原數之 $mnp+1$ 方乘爲 $(a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots)^{mnp+1}$

$$=M(r)+a_0^{mnp+1}$$

故原數之 $mnp+1$ 方乘之末位數字等於 a_0^{mnp+1} 之末位數字,

而 $a_0^{mnp+1}=a_0 \cdot a_0^{mnp}$

而 $a_0^{mnp}=(a_0^m)^{np}=(a_0^m-1+1)^{np}=\{M(m+1)+1\}^{np}$

$$=M(m+1)+1,$$

同法 $a_0^{mnp}=M(n+1)+1=M(p+1)+1$,

$\therefore$ $a_0^{mnp}=M(m+1)(n+1)(p+1)+1$,

$\therefore$ $a_0^{mnp+1}=M(m+1)(n+1)(p+1)+a_0$.

93. 方程式 $x+2y+3z=6n$ 之正整解答(含 0)爲 $3n^2+3n+1$.

(解) 由斯密斯氏第二十九編例題四十 16 例之解

求 $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ 之式中 x^{6n} 之係數可也.

94. n 爲正整數,則 $(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)$ 爲 2^n 之倍數.

(解) $(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)=M(2^n)$

則 $(n+2)(n+3)(n+4)\cdots(n+1+n-1)(n+1+n)(n+1+n+1)$

$$=M(2^{n+1})$$

而 $(n+2)(n+3)\cdots(n+1+n-1)(n+1+n)(n+1+n+1)$

$$=\frac{M(2^n)}{n+1}(n+1+n)(2n+2)$$

$$=M(2^n)(2n+1)2=M(2^{n+1}).$$

95. q 爲素數,而 p 對於 q 而爲素數,

設 $\dfrac{p(p+q)(p+2q)\cdots(p+\overline{n-1}q)}{\underline{|n}}$ 爲既約分數,則分母爲 q 之某方乘.

(解) $\underline{|n}$ 內之因子 q 爲分母之素因子,故此分數爲既約分數,則其分母當爲 q.

又由斯密斯氏 388 章推論分子之各因子，以 q 除之，則當殘 $1, 2, 3, \ldots . q-1$.

即 q 之他因子含於分母之內.

由是如題所云.

96. p 爲素數，則 $1, 2, 3, \ldots . p-1$ 之各 $p-2$ 箇之積之和可以 p^2 除之.

(解) 由斯密斯氏 394 章此積之和爲 s_{p+2}，因

$$(p-2)S_{p-3}=\frac{p(p-1)\ldots.2}{\underline{|p-1}}+s_1\frac{(p-1)(p-2)\ldots.2}{\underline{|p-2}}+s_2\frac{(p-2)\ldots.2}{\underline{|p-3}}+\ldots$$

$+S_{p-3}\dfrac{3.2}{\underline{|2}}$，以 $s_1, s_2, \ldots . s_{p-3}$ 代入，則知爲 $M(p^2)$.

97. p 爲素數，則 $1, 2, 3, \ldots . p-1$ 之各 r 方乘之和，可以 p 除之，但 $r-p-2$ 及 r 爲正整數.

(解) 由斯密斯氏 321 章第三此和爲 s^r_{p-1}

因 $$p^{r+1}-p=(r+1)s^r_{p-1}+\frac{(r+1)r}{\underline{|2}}s_{p-1}^{r-1}+\ldots.+(r+1)s^1_{p-1}$$

以 s^1_{p-1}，$s^2_{p-1}\ldots$ 代入，則知爲 $M(p)$.

98. p 爲素數則 $\underline{|2p}-2\underline{|p}\,\underline{|p}$ 可以 p^5 除之.

(解) $\underline{|2p}-2\underline{|p}\,\underline{|p}=\underline{|p}\,2p(2p-1)(2p-2)\ldots.(p+1)-2\underline{|p}\,\underline{|p}$

$$=2p\underline{|p}\,\{(2p-1)(2p-2)\ldots.(p+1)-\underline{|p-1}\},$$

但 $(2p-1)(2p-2)\ldots.(p+1)=(2p-1)(2p-2)\ldots.\{2p-(p-1)\}$

$$=(2p)^{p-1}-(1+2+\ldots.+p-1)(2p)^{p-2}+\ldots.$$

$$+2p\{1.2\ldots.(p-2)+2.3\ldots.(p-1)+\ldots.\}+\underline{|p-1},$$

又由 96 題知 $1,2\ldots.(p-2)+2.3\ldots.(p-1)+\ldots.=M(p2)$,

$\therefore$ $(2p-1)(2p-2)\ldots.(p+1)=(2p)^{p-1}-\ldots.+2pM(p^2)+\underline{|p-1}$,

由是 $\underline{|2p}-2\underline{|p}\,\underline{|p}=2p\underline{|p}\,\{(2p)^{p-1}-\ldots.+2pM(p^2)\}=M(p^5)$.

99. 囊內有 a 箇白玉, b 箇黑玉,一度取出各一箇,再返入而取出 a 箇,則凡取出黑玉之適遇爲 $\frac{|\underline{a}\,|\underline{a}}{|\underline{a+b}\,|\underline{a-b}}$, 但 a 不小於 b.

本題及下二題另解於後

100. 囊內有貨幣 10 箇,而知其二箇爲磅貨,又取出二箇皆非磅貨,則此囊內有二箇磅貨之適遇爲三分之一試証之.

101. 囊內有若干箇玉,不知其黑白,而取出其一箇知爲白,然則取出他一箇爲白之適遇爲三分之二,試証之,但最初取出之玉不再返入.

102. α, β, γ 爲三次方程式 $x^3+3Hx+G=0$ 之三根,

則 $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$, $(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)$, $(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$ 爲三根之方程式爲

$$x^3+9Hx^2-27(G^2+4H^3)=0.$$

(解) $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3H$, $\alpha\beta\gamma=-G$.

第二方程式之 x^2 之係數 $=-\{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)$
$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\}=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$
$=-\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}=-\{-3.3H\}=9H$,

x 之係數 $=\sum(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)$
$=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\{(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)+(\alpha-\gamma)\}=0$,

末項 $=-(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$

$$=-\{\alpha^2-\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma\}\{\beta^2-\beta(\gamma+\alpha)+\gamma\alpha\}\{\gamma^2-\gamma(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}$$
$$=-(2\alpha^2+\beta\gamma)(2\beta^2+\gamma\alpha)(2\gamma^2+\alpha\beta)$$
$$=-\{9\alpha^2\beta^2\gamma^2+4(\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3)+2\alpha\beta\gamma(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\}$$
$$=-\{9G^2+4((\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3-3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha))$$
$$+2\alpha\beta\gamma((\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha))\}$$
$$=-\{9G^2+4\{27H^3+3G(-\gamma)(-\alpha)(-\beta)\}$$
$$-2G(-3(-\gamma)(-\alpha)(-\beta))\}$$

$$=-\{9G^2+4(27H^3+3G^2)-2G(-3G)\}=-27(G^2+4H^3)$$

由是第二方程式爲 $x^3+9Hx^2-27(G^2+4H^3)=0$.

103. s_r 爲方程式 $x^m+ax^2+b=0$ 之根之 r 方乘之和，則 $s_{2m-1}=0$，但 $m>5$.

(解) $x^m+ax^2+b=0$ 之根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$,

則　$\sum\alpha_1=0$, $\sum\alpha_1\alpha_2=0$, $\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0, \ldots$ $\sum\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}=0$.

由原方程式 $x^{m+1}+ax^3+bx=0$, 得 $\sum\alpha_1^{m+1}+a\sum\alpha_1^3+b\sum\alpha_1=0$,

但　$(\sum\alpha_1)^3=\sum\alpha_1^3+3\sum\alpha_1^2\alpha_2+6\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

$\therefore$　$0=\sum\alpha_1^3+3\sum\alpha_1(\sum\alpha_1\alpha_2)+6\times0$,

$\therefore$　$\sum\alpha_1^3=0$,　由是　$\sum\alpha_1^{m+1}=0$.

又由 $x^{m-1}+ax+\dfrac{b}{x}=0$, 得 $\sum\alpha_1^{m-1}+a\sum\alpha_1+b\sum\dfrac{1}{\alpha_1}=0$,

卽　$\sum\alpha_1^{m-1}+a\sum\alpha_1+b\sum\dfrac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}=0$　$\therefore$　$\sum\alpha_1^{m-1}=0$.

又由 $x^{2m-1}+xa^{m+1}+bx^{m-1}=0$,

得 $\sum\alpha_1^{2m-1}+a\sum\alpha_1^{m+1}+b\sum\alpha_1^{m-1}=0$,　$\therefore$　$s_{2m-1}=0$.

104. 方程式 $x^4-6x^3+18x^2-30x+25=0$ 之兩根爲 $\alpha+i\beta$, $\beta+i\alpha$ 之形,求此方程式之根.

(解) 他兩根爲 $\alpha-i\beta$, $\beta-i\alpha$, 故原方程式爲

$$\{x-(\alpha+i\beta)\}\{x-(\alpha-i\beta)\}\{x-(\beta+i\alpha)\}\{x-(\beta-i\alpha)\}=0,$$

卽　$x^4-2x^3(\alpha+\beta)+2x^2(\alpha+\beta)^2-2x(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)^2=0$,

比較此式及原方程式之係數,

則 $2(\alpha+\beta)=6$, $2(\alpha+\beta)^2=18$, $2(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)=30$, $(\alpha^2+\beta^2)^2=25$.

$\therefore$　$\alpha+\beta=3$,　$\alpha^2+\beta^2=5$　由是 $\alpha=1$ 或 2, $\beta=2$ 或 1.

由是所求之根爲 $1\pm2\sqrt{-1}$, $2\pm\sqrt{-1}$.

105. 方程式 $x^{2n+2}+(2-a)x^{2n+1}+(b-a+1)x^{2n}+(a+2ab)x+a+(2a-1)b=0$ 之兩根相等,而殘根之各一箇二箇三箇等之和爲等差級數試證之.

(解) $x^{2n}(x+1)^2-ax^{2n}(x+1)+b(x^{2n}-1)+(a+2nb)(x+1)=0,$

$\therefore\quad x=-1,$

$x^{2n}(x+1)-ax^{2n}+b(x^{2n-1}-x^{2n-2}+x^{2n-3}-\ldots+x-1)+a+2nb=0,$

卽 $x^{2n}(x+1)-a(x^{2n}-1)+b(x^{2n-1}+1)-b(x^{2n-2}-1)$

$+b(x^{2n-3}+1)-\ldots+b(x+1)=0,$

$\therefore\quad x=-1.$

除此兩等根之後，有殘根之方程式爲

$x^{2n}-a(x^{2n-1}-x^{2n-2}+x^{2n-3}-\ldots+x-1)$

$+b(x^{2n-2}-x^{2n-3}+x^{2n-4}-\ldots-x+1)$

$-b(x^{2n-3}-a^{2n-4}+\ldots+x-1)$

$+(x^{2n-3}-x^{2n-4}+\ldots-x+1)-\ldots+b=0,$

卽 $x^{2n}-ax^{2n-1}+(a+b)x^{2n-2}-(a+2b)x^{2n-3}+(a+3b)x^{2n-4}-\ldots$

$-(a-\overline{2n-2}b)x+a-\overline{2n-1}b=0,$

卽殘根之各一箇二箇三箇等之和爲 $a, a+b, a+2b$, 卽爲等差級數

106. n 爲偶數，而 $p_0, p_1, p_2, \ldots$ 皆爲正數，H 爲 $\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_3}{p_2}, \ldots \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}$ 之各比之最大值，及 K 爲 $\frac{p_2}{p_1}, \frac{p_4}{p_3}, \ldots \frac{p_n}{p_{n-1}}$ 之各比之最小值，則方程式 $p_0x^n-p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}-\ldots+p_n=0$ 之實根，在 H 及 K 之間．

又 H 不大於 K，則此方程式之各根爲虛根．

(解) 變原方程式爲

$$p_0x^{n-1}\left(x-\frac{p_1}{p_0}\right)+p_2x^{n-2}\left(x-\frac{p_3}{p_2}\right)+\ldots+p_{n-2}x\left(x-\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}\right)$$
$$+p_n=0,$$

$x=\mathrm{H}$, 則 $p_0\mathrm{H}^{n-1}\left(\mathrm{H}-\frac{p_1}{p_0}\right)+p_2\mathrm{H}^{n-1}\left(\mathrm{H}-\frac{p_3}{p_2}\right)+\ldots$

$+\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{H}\left(\mathrm{H}-\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}\right)+p_n$ 爲正．

又變原方程式爲

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}\left(\frac{p_2}{p_1}-x\right)+p_3x^{n-2}\left(\frac{p_4}{p_3}-x\right)+\cdots\cdots$$

$$+p_{n-1}\left(\frac{p^n}{p_{n-1}}-x\right)=0,$$

$x=\mathrm{K}$，則 $p_0\mathrm{K}^np_1\mathrm{K}^{n-1}+\left(\frac{p_2}{p_1}-\mathrm{K}\right)+p_3\mathrm{K}^{n-2}\left(\frac{p_4}{p_3}-\mathrm{K}\right)+\cdots\cdots$

$$+p_{n-1}\left(\frac{p_n}{p_{n-1}}-\mathrm{H}\right)$$ 爲正.

故 x 之各實根在 H 及 K 之間.

若 H<K，則 x 之各根爲虛根.

107. 證 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots\cdots \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$ 至 n 列及 n 行 $=a^{n-1}$

（解）$\triangle=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots\cdots \\ -a & 1+a & 1 & \cdots\cdots \\ 0 & 1 & 1+a & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1+a & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ 至 $n-1$ 列,行,

第二式與原式同形，故亦得與 a 之因子同形之式逐次如此，至最後得 $\triangle=a^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix}=a^{n-1}$

108. 證 $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ 至 n 列及 n 行 $=a^n+na^{n-1}$

(解) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1+a & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 1+a & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$

$=a^{n-1}+a\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots \\ 1 & 1+a & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ 至 $n-1$ 行,列,

但第二之 $n-1$ 行列式與原行列式同形,故亦得

$\Delta=a^{n-1}+a\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1+a & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ $n-1$ 行列 $+a\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots \\ 0 & 1+a & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ $n-1$ 行列,

$=2a^{n-1}+a^2\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots \\ 1 & 1+a & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ $n-2$ 行列,

....

$=(n-2)a^{n-1}+a^{n-2}\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix}=na^{n-2}+a^n$

109. 證 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ aa' & bb' & cc' & dd' \end{vmatrix}=(a-b)(c-d)(a'-c')(b'-d')$
$-(a-c)(b-d)(a'-b')(c'-d')$,

(解) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & a-b & c & c-d \\ a' & a'-b' & c' & c'-d' \\ aa' & aa'-bb' & cc' & cc'-dd' \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a-b & a-c & c-d \\ a' & a'-b' & a'-c' & c'-d' \\ aa' & aa'-bb' & aa'-cc' & cc'-dd' \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ \Delta=\begin{vmatrix} a-b & a-c & c-d \\ a'-b' & a'-c' & c'-d' \\ aa'-bb' & aa'-cc' & cc'-dd' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a-b & a-c & c-d \\ a'-b' & a'-c' & c'-d' \\ a'(a-b)+b(a'-b') & aa'-cc' & cc'-dd' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a-b & a-c & c-d \\ 0 & a'-c' & c'-d' \\ a'(a-b) & aa'-cc' & cc'-dd' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & a-c & c-d \\ a'-b' & a'-c' & c'-d' \\ b(a'-b') & aa'-cc' & cc'-dd' \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)\begin{vmatrix} 1 & a-c & c-d \\ 0 & a'-c' & c'-d' \\ a' & aa'-cc' & cc'-dd' \end{vmatrix}+(a'-b')\begin{vmatrix} 0 & a-c & c-d \\ 1 & a'-c' & c'-d' \\ b & aa'-cc' & cc'-dd' \end{vmatrix}$$

110. 證 $\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & bc+ca+ab & bc+ca+ab \\ bc+ca+ab & a^2+b^2+c^2 & bc+ca+ab \\ bc+ca+ab & bc+ca+ab & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix}=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$

(解) $\Delta=\begin{vmatrix} \sum a^2-\sum bc & 0 & bc+ca+ab \\ \sum bc-\sum a^2 & \sum a^2-\sum bc & bc+ca+ab \\ 0 & \sum bc-\sum a^2 & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix}$

$$=(\sum a^2-bc)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & bc+ca+ab \\ -1 & 1 & bc+ca+ab \\ 0 & -1 & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(\sum a^2-bc)^2\{a^2+b^2+c^2+(bc+ca+ab)+(bc+ca+ab)\}$$

$$=(\sum a^2-bc)^2(a+b+c)^2=(\sum a^3-3abc)^2.$$

111. 解下之方程式

$$\begin{vmatrix} x^2-a^2 & x^2-b^2 & x^2-c^2 \\ (x-a)^3 & (x-b)^3 & (x-c)^3 \\ (x+a)^3 & (x+b)^3 & (x+c)^3 \end{vmatrix}=0.$$

(解) 自原方程式之第一行減第二行，自第二行減第三行，以 $(a-b)(b-c)$ 除之，得

$$\begin{vmatrix} -(a+b) & -(b+c) & x^2-c^2 \\ -3x^2+3x(a+b)-(a^2+ab+b^2) & -3x^2+3x(b+c)-(b^2+bc+c^2) & (x-c)^3 \\ 3x^2+3x(a+b)+(a^2+ab+b^2) & 3x^2+3x(b+c)+b^2+bc+c^2 & (x+c)^3 \end{vmatrix}=0,$$

又自第一行減第二行以 $a-c$ 除之，得

$$\begin{vmatrix} -1 & -(b+c) & x^2-c^2 \\ 3x-a-b-c & -3x^2+3x(b+c)-(b^2+bc+c^2) & (x-c)^3 \\ 3x+a+b+c & 3x^2+3x(b+c)+b^2+bc+c^2 & (x+c)^3 \end{vmatrix}=0,$$

於第二列加第三列得

$$\begin{vmatrix} -1 & -(b+c) & x^2-c^2 \\ 6x & 6x(b+c) & 2x^3+6c^2x \\ 3x+a+b+c & 3x^2+3x(b+c)+b^2+bc+c^2 & (x+c)^3 \end{vmatrix}=0,$$

$$\therefore\quad x=0,$$

或
$$\begin{vmatrix} -3 & -3(b+c) & 3(x^2-c^2) \\ 3 & 3(b+c) & x^2+3c^2 \\ 3x+a+b+c & 3x^2+3x(b+c)+b^2+bc+c^2 & (x+c)^3 \end{vmatrix}=0,$$

於第一列加第二列得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4x^2 \\ 3 & 3(b+c) & x^2+3c^2 \\ 3x+a+b+c & 3x^2+3x(b+c)+b^2+bc+c^2 & (x+c)^3 \end{vmatrix}=0,$$

即 $$3\{3x^2+3x(b+c)+b^2+bc+c^2\}-3(b+c)(3x+a+b+c)=0,$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{bc+ca+ab}{3}}$$

112. 證 $\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix}=0,$

(解) $\Delta=\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b \\ c^2a^2 & ca & c \\ a^2b^2 & ab & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & c \\ c^2a^2 & ca & a \\ a^2b^2 & ab & b \end{vmatrix}$

$$\Delta=abc\begin{vmatrix} bc^2 & c & 1 \\ ca^2 & a & 1 \\ ab^2 & b & 1 \end{vmatrix}+abc\begin{vmatrix} b^2c & b & 1 \\ c^2a & c & 1 \\ a^2b & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$=abc\{bc^2(a-b)+ca^2(b-c)+ab^2(c-a)+b^2c(c-a)+c^2a(a-b)$$
$$+a^2b(b-c)\}$$
$$=abc\{c^2(a^2-b^2)+a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)\}=0,$$

113. 化下式爲最簡

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & 0 \\ 1 & b+c & bc & (p+b^2)(p+c^2) \\ 1 & c+a & ca & (p+c^2)(p+a^2) \\ 1 & a+b & ab & (p+a^2)(p+b^2) \end{vmatrix}$$

(解) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & 0 \\ 1 & b+c & bc & (p+b^2)(p+c^2) \\ 0 & a-b & c(a-b) & (p+c^2)(a^2-b^2) \\ 0 & a-c & b(a-c) & (p+b^2)(a^2-c^2) \end{vmatrix}$

$$=(a-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & 0 \\ 1 & b+c & bc & (p+b^2)(p+c^2) \\ 0 & 1 & c & (p+c^2)(a+b) \\ 0 & -1 & -b & -(p+b^2)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 0 & p & 0\\ 0 & b+c & bc-p & (p+b^2)(p+c^2)\\ 0 & 0 & -b+c & p(b-c)-(b-c)(ab+bc+ca)\\ 0 & -1 & -b & -(p+b^2)(c+a)\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(c-a)(b-c)\begin{vmatrix}1 & 0 & p & 0\\ 0 & b+c & bc-p & (p+b^2)(p+c^2)\\ 0 & 0 & -1 & p-(ab+bc+ca)\\ 0 & -1 & -b & -(p+b^2)(c+a)\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(c-a)(b-c)\begin{vmatrix}b+c & bc-p & (p+b^2)(p+c^2)\\ 0 & -1 & p-(ab+bc+ca)\\ -1 & -b & -(p+b^2)(c+a)\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(c-a)(b-c)[(b+c)\{(p+b^2)(c+a)+bp-b(ab+bc+ca)\}$$
$$-\{p(bc-p)-(bc-p)(ab+bc+ca)+(p+b^2)(p+c^2)\}]$$

$$\therefore\ \Delta=(a-b)(c-a)(b-c)[(b+c)\{p(a+b+c)-abc\}$$
$$-\{p(bc+ab+bc+ca+b^2+c^2)-bc(ab+ca)\}]$$
$$=(a-b)(c-a)(b-c)[0]=0.$$

114. 證 $\begin{vmatrix}-b^2c^2 & ab(c^2+a^2) & ac(a^2+b^2)\\ ba(b^2+c^2) & -c^2a^2 & bc(a^2+b^2)\\ ca(b^2+c^2) & cb(c^2+a^2) & -a^2b^2\end{vmatrix}=(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^3.$

(解) $\Delta=-b^2c^2\{a^4b^2c^2-b^2c^2(a^2+b^2)(c^2+a^2)\}$

$$-ba(b^2+c^2)\{-a^3b^3(c^2+a^2)-abc^2(a^2+b^2)(c^2+a^2)\}$$
$$+ca(b^2+c^2)\{ab^2c(c^2+a^2)(a^2+b^2)+c^3a^3(a^2+b^2)\}$$
$$=b^4c^4\{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\}+a^2b^2(b^2+c^2)(c^2+a^2)\{a^2b^2+a^2c^2$$
$$+b^2c^2\}+c^2a^2(b^2+c^2)(a^2+b^2)\{b^2c^2+a^2b^2+c^2a^2\}$$
$$=(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\{b^4c^4+a^2(b^2+c^2)(a^2b^2+2b^2c^2+c^2a^2)\}$$
$$=(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)^3.$$

115. 證 $\begin{vmatrix} b^2+c^2+1 & c^2+1 & b^2+1 & b+c \\ c^2+1 & c^2+a^2+1 & a^2+1 & c+a \\ b^2+1 & a^2+1 & a^2+b^2+1 & a+b \\ b+c & c+a & a+b & 3 \end{vmatrix}=(bc+ca+ab)^2.$

(解) $\Delta=\begin{vmatrix} b^2 & -a^2 & b^2-a^2 & b-a \\ c^2-b^2 & c^2 & -b^2 & c-b \\ b^2+1 & a^2+1 & a^2+b^2+1 & a+b \\ b+c & c+a & a+b & 3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} b^2-a^2 & -b^2 & b^2-a^2 & b-a \\ 2c^2-b^2 & b^2+c^2 & -b^2 & c-b \\ a^2+b^2+2 & -b^2 & a^2+b^2+1 & a+b \\ a+b+2c & c-b & a+b & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -b^2 & -a^2 & b-a \\ 2c^2 & b^2+c^2 & c^2 & c-b \\ 1 & -b^2 & a^2+1 & a+b \\ 2c & c-b & c+a & 3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ \Delta=\begin{vmatrix} 0 & -b^2 & -a^2 & b-a \\ 0 & b^2+bc & -ac & -2c-b \\ 1 & -b^2 & a^2+1 & a+b \\ 2c & c-b & c+a & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2c}\begin{vmatrix} 0 & -b^2 & -a^2 & b-a \\ 0 & b^2+bc & -ac & -2c-b \\ 0 & -2b^2c+b-c & 2ca^2+c-a & 2ca+2bc-3 \\ 2c & c-a & c+a & 3 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} -b^2 & -a^2 & b-a \\ b^2+bc & -ac & -2c-b \\ -2b^2c+b-c & 2ca^2+c-a & 2ca^2+2bc-3 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} -b^2 & -a^2 & b-a \\ bc & -a^2-ac & -a-2c \\ -2b^2c+b-c & 2ca^2+c-a & 2ca+2bc-3 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{b}\begin{vmatrix} -b^2 & -a^2 & b-a \\ 0 & -a(ab+bc+ac) & -(ab+bc+ca) \\ -2b^2c+b-c & 2ca^2+c-a & 2ca+2bc-3 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{b^3}\begin{vmatrix} -b^2 & 0 & b-a \\ 0 & -ab^2(ab+bc+ca) & -(ab+bc+ca) \\ -2b^2c+b-c & 4a^2b^2c+b^2c+a^2c-ab^2-a^2b & 2ca+2bc-3 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{ab+bc+ca}{b^3}\begin{vmatrix} -b^2 & 0 & b-a \\ 0 & ab^2 & 1 \\ -2b^2c+b-c & 4a^2b^2c+b^2c+a^2c-ab^2-a^2b & 2ca+2bc-3 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{b^3}[-b^2\{ab^2(2ca+2bc-3)-(4a^2b^2c+b^2c+a^2c-ab^2-a^2b)\}$$

$$+(-2b^2c+b-c)\{-ab^2(b-a)\}],$$

$$\therefore\ \triangle=\frac{ab+bc+ca}{b}[-\{2a^2b^2c+2ab^3c-2ab^2-b^2c-a^2c+a^2b\}$$

$$+\{-a(-2b^3c+2ab^2c+b^2-bc-ab+ca)\}]$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{b}(ab^2+b^2c+abc)=(ab+bc+ca)^2.$$

第二卷

霍爾氏,乃托氏題解

1. S_1, S_2, S_3 爲等差級數 n, $2n$, $3n$ 項之和,則 $S_3=3(S_2-S_1)$

(解) $S_1=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$, $S_2=\frac{1}{2}.2n\{2a+(2n-1)d\}$,

$S_3=\frac{1}{2}.3n\{2a+(3n-1)d\}$.

而 $S_2-S_1=\frac{1}{2}.2n\{2a+(2n-1)d\}-\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

$=\frac{1}{2}n\{2a+(3n-1)d\}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}.3n\{2a+(3n-1)d\}=\frac{1}{3}S_3$ $\therefore$ $S_3=3(S_2-S_1)$.

2. 有二數,其差,和,及積之比,爲 1, 7, 24, 二數各如何.

(解) 二數爲 x 及 y, 則 $\frac{x-y}{1}=\frac{x+y}{7}=\frac{xy}{24}$.

$\therefore$ $y=\frac{3}{4}x$, 由是 $x-\frac{3}{4}x=\frac{x\times\frac{3}{4}x}{24}$ $\therefore$ $x^2=8x$,

由是 $x=8$, $y=6$.

3. 於如何之記數轉倒 25 之數位,則爲其數之二倍.

(解) 底數爲 r, 則 $5r+2=2(2r+5)$ $\therefore$ $r=8$.

4. 解下之方程式

(1) $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44.$

(2) $x(y+z)+2=0,\quad y(z-2x)+21=0,\quad z(2x-y)=5.$

(解) (1) 原方程式爲 $(x^2-2x-15)(x^2-2x-8)=44,$

$x^2-2x-8=y$ 則 $(y-7)y=44\quad\therefore\quad y=11$ 或 $-4.$

卽 $x^2-2x-8=11,$ 則 $x=1\pm\sqrt{20}=1\pm2\sqrt{5},$

$x^2-2x-8=-4,$ 則 $x=1\pm\sqrt{5}.$

(2) $xy+zx=-2,\quad yz-2xy=-21,\quad 2zx-yz=5$

則 $xy=3,\quad yz=-15,\quad zx=-5\quad\therefore\quad x=\pm1,\quad y=\pm3,\quad z=\mp5$

5. A. P. 之初項爲 a, 最初 p 項之和爲 o, 則其次 q 項之和爲 $-\dfrac{a(p+q)q}{p-1}.$

(解) $S_p=\dfrac{p}{2}\{2a+(p-1)d\}=0\quad\therefore\quad d=\dfrac{-2a}{p-1},$

$$S_{p+q}=\frac{p+q}{2}\{2a+(p+q-1)d\}=\frac{p+q}{2}\left\{2a+(p+q-1)\frac{-2a}{p-1}\right\}$$

$$=-\frac{a(p+q)q}{p-1}$$

但 p 項之次之 q 項之和爲 $S_{p+q}-S_p=-\dfrac{a(p+q)q}{p-1}-0.$

6 解下之方程式

(1) $(a+b)(ax+b)(a-bx)=(a^2x-b^2)(a+bx).$

(2) $x^{\frac{1}{3}}+(2x-3)^{\frac{1}{3}}=\{12(x-1)\}^{\frac{1}{3}}.$

(解) (1) $(a+b)\{-abx^2+(a^2-b^2)x+ab\}=a^2bx^2+(a^3-b^3)x-ab^2,$

$\therefore\quad(2a+b)x^2-(a-b)x-(a+2b)=0\quad\therefore\quad x=1$ 或 $-\dfrac{a+2b}{2a+b}.$

(2) 二節爲立方，則

$$x+(2x-3)+3x^{\frac{1}{3}}(2x-3)^{\frac{1}{3}}\{x^{\frac{1}{3}}+(2x-3)^{\frac{1}{3}}\}=12(x-1).$$

由是 $3(x-1)+3x^{\frac{1}{3}}(2x-3)^{\frac{1}{3}}\{12(x-1)\}^{\frac{1}{3}}=12(x-1)$,

即 $\{12x(x-1)(2x-3)\}^{\frac{1}{3}}=3(x-1)$,

再爲立方,則 $12x(x-1)(2x-3)=27(x-1)^3$, $\therefore\ x=1$,

或 $4x(2x-3)=9(x-1)^2$ 卽 $(x-3)^2=0$ $\therefore\ x=3$.

7. 求初項爲 1,第二第十及第三十四項爲等比級數之等差級數.

(解) $l_2=1+(2-1)d=1+d$, $l_{10}=1+(10-1)d=1+9d$,

$l_{34}=1+(34-1)d=1+33d$,

由是 $(1+9d)^2=(1+d)(1+33d)$ $\therefore\ d=\frac{1}{3}$,

故所求之級數爲 $1,\ 1\frac{1}{3},\ 1\frac{2}{3},\ 2,\ \ldots$

8. α,β 爲 $x^2+px+q=0$ 之兩根,

則 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$, $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$ 之値如何.

(解) $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$.

$\therefore\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=p^2-q$,

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-p^3+3qp$,

$\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$=\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}=(p^2-q)(p^2-3q)$.

9. $2x=a+a^{-1}$ 及 $2y=b+b^{-1}$,

則 $xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$ 之値如何.

(解) $xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}=\frac{1}{4}\{4xy+\sqrt{(4x^2-4)(4y^2-4)}\}$

$=\frac{1}{4}\{(a+a^{-1})(b+b^{-1})+\sqrt{\{(a+a^{-1})^2-4\}\{(b+b^{-1})^2-4\}}\}$

$=\frac{1}{4}\{(a+a^{-1})(b+b^{-1})+(a-a^{-1})(b-b^{-1})\}=\frac{1}{2}(ab+a^{-1}b^{-1})$.

10. 求 $\dfrac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$ 之値.

(解) $(4+\sqrt{15})=\frac{1}{2}(8+2\sqrt{15})=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$,

故　$(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3$ 及 $(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3$,

又　$6+\sqrt{35}=\frac{1}{2}(12+2\sqrt{35})=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2$,

故　$(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3$ 及 $(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}(\sqrt{7}-\sqrt{5})^3$.

$$\therefore \text{原式}=\frac{\frac{1}{\sqrt{8}}\{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3\}}{\frac{1}{\sqrt{8}}\{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3-(\sqrt{7}-\sqrt{5})^3\}}=\frac{2(\sqrt{5})^3+6(\sqrt{5})(\sqrt{3})^2}{6(\sqrt{7})^2(\sqrt{5})+2(\sqrt{5})^3}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}(5+9)}{2\sqrt{5}(21+5)}=\frac{7}{13}.$$

11.　α 及 β 爲 1 之立方虛根,則 $\alpha^4+\beta^4+\alpha^{-1}\beta^{-1}=0$.

(解)　原式　$=\alpha.\alpha^3+\beta.\beta^3+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha\beta}$.

但 $\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\beta=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$　$\therefore$　$\alpha\beta=\frac{(-1)^2-(\sqrt{-3})^2}{4}=1$,

及　$\alpha+\beta=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=-1$,

由是原式 $=1-1=0$,

12.　以大於 4 之底數所記之數 12432, 以 111 及 112 可整除之.

(解)　底數爲 r, 則 $12432=r^4+2r^3+4r^2+3r+2$

$$=(r^2+r+1)(r^2+r+2)=111\times112.$$

13.　A 及 B 競走 1 哩間, A 讓 B 先走 11 碼,則 A 勝 B 57 秒, A 讓 B 先走 81 秒,則 A 負 B 88 碼,問各走 1 哩之時間如何.

(解)　A 及 B 走 1 哩卽 1760 碼之時間爲 x 及 y 秒, 則 1 秒間之速爲 $\frac{1760}{x}$ 及 $\frac{1760}{y}$ 碼.

故 $\dfrac{1760-11}{\dfrac{1760}{y}}-\dfrac{1760}{\dfrac{1760}{x}}=57$, $\therefore\ \dfrac{159}{160}y-x=57$,

又 $\dfrac{1760}{\dfrac{1760}{y}}-81=\dfrac{1760-88}{\dfrac{1760}{y}}$. $\therefore\ y=81+\dfrac{19}{20}x$.

由是 $\dfrac{159}{160}\left[81+\dfrac{19}{20}x\right]-x=57\quad\therefore\ x=420,\quad y=480$,

故 A 及 B 爲 420 秒及 480 秒.

14. 自 $x^2-yz=a^2$, $y^2-zx=b^2$, $z^2-xy=c^2$, $x+y+z=0$, 消去 x, y, z.

(解) 自第一減第二, 則 $(x-y)(x+y+z)=a^2-b^2$,

故由第四得 $a^2-b^2=0$, 同法 $b^2-c^2=0$, $\therefore\ a^2=b^2=c^2$.

15. 解 $ax^2+bxy+cy^2=bx^2+cxy+ay^2=d$.

(解) $x=ky$, 則 $ak^2y^2+bky^2+cy^2=bk^2y^2+cky^2+ay^2$,

$\therefore\ k^2(a-b)+k(b-c)+(c-a)=0\quad\therefore\ k=1$ 或 $k=\dfrac{c-a}{a-b}$.

$k=1$, 則 $x=y$, $\quad ay^2+cy^2+by^2=d$, $\therefore\ x=y=\pm\sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}}$.

$k=\dfrac{c-a}{a-b}$, 則 $x=\dfrac{(c-a)y}{a-b}$, $\therefore\ \dfrac{a(c-a)^2y^2}{(a-b)^2}+\dfrac{b(c-a)y^2}{a-b}+cy^2=d$,

即 $\{a(c-a)^2+b(c-a)(a-b)+c(a-b)^2\}y^2=d(a-b)^2$,

$\therefore\ y^2=\dfrac{d(c-a)^2}{a(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}$, $x^2=\dfrac{d(c-a)^2}{a(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}$.

16 有水夫往復 48 哩間費 14 時, 而於水流逆行 3 哩所費之時, 與順行 4 哩所費之時相等, 然則每時水流之速度幾許.

(解) 每時水流之速度爲 x 哩及漕力爲 y 哩, 則

$$\frac{48}{y+x}+\frac{48}{y-x}=14,\ 及\ \frac{3}{y-x}=\frac{4}{y+x}.$$

由第二得 $y=7x$, 故由第一得 $\frac{48}{8x}+\frac{48}{6x}=14$ $\therefore$ $x=1$,

卽每時水流之速度為 1 哩.

17. 求下二式之平方根

(1) $(a^2+ab+bc+ca)(bc+ca+ab+b^2)(bc+ca+ab+c^2)$,

(2) $1-x+\sqrt{22x-15-8x^2}$.

(解) (1) 原式 $=(a+b)(a+c)(b+a)(b+c)(c+a)(c+b)$

$$=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2,$$

$\therefore$ 所求之平方根 $=\pm(a+b)(b+c)(c+a)$.

(2) 原式 $=1-x+\sqrt{(5-4x)(-3+2x)}$

$$=\frac{2-2x+2\sqrt{(5-4x)(-3+2x)}}{2}=\left\{\frac{\sqrt{5-4x}+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2}}\right\}^2$$

$\therefore$ 所求之平方根 $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{5-4x}+\sqrt{2x-3}\}$.

18. 求 $(1-3x)^{\frac{10}{3}}$ 之開散式中 x^6 之係數.

又求 $\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{3}{2x}\right)^9$ 之式中無關係於 x 之項.

(解) $(1-3x)^{\frac{10}{3}}$ 之式中 x^6 之項為

$$\frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{\underline{|6}}(-3x)^6 \text{ 卽 } \frac{35}{9}x^6, \therefore x^6 \text{ 之係數為 } \frac{35}{9}.$$

又 $\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{3}{2x}\right)^9$ 之開散式中第 $(r+1)$ 項為

$$\frac{\underline{|9}}{\underline{|r}\,\underline{|9-r}}\left(\frac{4}{3}x^2\right)^{9-r}\left(-\frac{3}{2x}\right)^r \text{ 卽 } \frac{\underline{|9}}{\underline{|r}\,\underline{|9-r}}(-1)^r\frac{2^{18-3r}}{3^{9-2r}}x^{18-3r},$$

由題意 $18-3r=0$, $\therefore$ $r=6$,

由是此項為 $\frac{\underline{|9}}{\underline{|6}\,\underline{|3}}(-1)^6\frac{2^0}{3^{-3}}x^0$ 卽 2268.

19. 解下之方程式

(1) $\frac{2x-3}{x-1}-\frac{3x-8}{x-2}+\frac{x+3}{x-3}=0.$

(2) $x^2-y^2=xy-ab,\ (x+y)(ax+by)=2ab(a+b).$

(解) (1) $2+\frac{-1}{x-1}-\left(3+\frac{-2}{x-2}\right)+1+\frac{6}{x-3}=0,$

即 $\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{6}{x-3}=0,$ 即 $\frac{x}{(x-1)(x-2)}+\frac{6}{x-3}=0,$

由是 $x(x-3)+6(x^2-3x+2)=0,$ $\therefore\ x=\frac{21\pm\sqrt{105}}{14}.$

(2) $\frac{x^2-xy-y^2}{(x+y)(ax+by)}=\frac{-ab}{2ab(a+b)}$,去分母而括之,

則 $2(a+b)(x^2-xy-y^2)+(x+y)(ax+by)=0,$

$x^2(3a+2b)-xy(a+b)-y^2(2a+b)=0,$

即 $(x-y)\{x(3a+2b)+y(2a+b)\}=0,$

$x=y$, 則由第一 $x=y=\pm\sqrt{ab},$

又 $x(3a+2b)+y(2a+b)=0,$ 即 $\frac{x}{2a+b}=\frac{-y}{3a+2b},$

則 $\frac{x^2}{(2a+b)^2}=\frac{y^2}{(3a+2)^2}=\frac{-xy}{(2a+b)(3a+2b)}$

$$=\frac{x^2-y^2-xy}{(2a+b)^2-(3a+2b)^2+(2a+b)(3a+2b)}=\frac{-ab}{a^2-ab-b^2},$$

$$\therefore\ x=\pm\frac{(2a+b)\sqrt{ab}}{\sqrt{(b^2+ab-a^2)}},\ y=\pm\frac{(3a+2b)\sqrt{ab}}{\sqrt{(b^2+ab-a^2)}},$$

20. $a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2$ 爲完全平方式,則 a, b, c 爲調音級數.

(解) 由題意 $b^2(c-a)^2x^2y^2-4ac(b-c)(a-b)x^2y^2=0.$

卽 $b^2\{(c-a)^2+4ca\}-4abc(c+a)+4a^2c^2=0$,

卽 $b(c+a)=2ac$, 故 a, b, c 爲調音級數.

21. x, y, z 爲實數,而

$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$,

則 $x=y=z$.

(解) $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=\{(z-x)-(x-y)\}^2$

$+\{(x-y)-(y-z)\}^2+\{(y-z)-(z-x)\}^2$,

由是 $(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)=0$,

卽 $(y-z)(x-y+z-x)+(z-x)(x-y)=0$,

卽 $(z-x)(x-y)-(y-z)^2=0$,

卽 $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=0$,

卽 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$,

$\therefore$ $x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$, $x=y=z$.

22. 求十二進法之 $3e58261$ 之平方根.

又分數 $\frac{1}{5}$ 爲 $\cdot\dot{1}\dot{7}$, 求底數.

(解) 如通常求平方根法

```
1√3,e5,82,61 = 1e t5
 1   1
----------------
2e  2e5
 e  281
----------------
3tt  3482
  t  3304
----------------
3e85 17t61
   5 17t61
----------------
```

又 $\frac{1}{5}=\frac{1}{r}+\frac{7}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\frac{7}{r^4}+\cdots\cdots=\left(\frac{1}{r}+\frac{7}{r^2}\right)+\left(\frac{1}{r}+\frac{7}{r^2}\right)\frac{1}{r^2}+\cdots\cdots$

$\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{r}+\frac{7}{r^2}\right)\div\left(1-\frac{1}{r^2}\right)$, 由是 $r^2-5r-36=0$, $\therefore$ $r=9$.

23. 求自 $1, 2, 3, \ldots\ldots n$ 取各二箇之積之和,並證此和等於此等整數之立方和與平方和之半差

(解) $2(ab+ac+ad+\dots\dots+bc+bd+\dots\dots)$

$$=(a+b+c+\dots\dots)^2-(a^2+b^2+c^2+\dots\dots)$$ 明矣.

又 $(1+2+3+\dots\dots+n)^2=1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3.$

由是 $1.2+1.3+\dots\dots+2.3+2.4+\dots\dots$

$$=\frac{1}{2}\{1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3-(1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2)\}.$$

24. 某人與其家族一週間共食麵包 20 斤, 若此人之薪金增 5 分, 麵包之價騰貴 $2\frac{1}{2}$ 分, 則一週間多 6 分, 若薪金減 $7\frac{1}{2}$ 分, 麵包之價低落 1 折, 則一週間少 $1\frac{1}{2}$ 分, 問每週之薪金, 及麵包 1 斤之價如何.

(解) 一週間之薪金為 x 分, 麵包一斤之價為 y 分, 則

$$\frac{5x}{100}-\frac{2\frac{1}{2}\times 20y}{100}=6 \text{ 及 } \frac{7\frac{1}{2}x}{100}-\frac{10\times 20y}{100}=1\frac{1}{2}, \quad \therefore \quad x=180,\ y=6,$$

卽一週間之薪金為 18 角, 麵包一斤之價為 6 分.

25. 等差級數四數之和為 48, 其兩外項之積與中項之積之比如 27 : 35, 各數如何.

(解) 四數為 $x-3y,\ x-y,\ x+y,\ x+3y,$

則 $(x-3y)+(x-y)+(x+y)+(x+3y)=48, \quad \therefore \quad x=12,$

又 $$\frac{(x-3y)(x+3y)}{27}=\frac{(x-y)(x+y)}{35}, \quad \therefore \quad y=\pm 2.$$

由是四數為 6, 10, 14, 18.

26. 解下之方程式

(1) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0.$

(2) $$\frac{(x-a)(x-b)}{x-a-b}=\frac{(x-c)(x-d)}{x-c-d}.$$

(解) (1) $a(b-c)x^2+\{-a(b-c)-c(a-b)\}x+c(a-b)=0,$

卽 $a(b-c)x(x-1)-c(a-b)(x-1)=0,$

卽 $(x-1)\{a(b-c)x-c(a-b)\}=0, \quad \therefore \quad x=1$ 或 $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}.$

(2) $\dfrac{x(x-a-b)+ab}{x-a-b}=\dfrac{x(x-c-d)+cd}{x-c-d}$,

卽 $\dfrac{ab}{x-a-b}=\dfrac{cd}{x-c-d}$, $\therefore\ x=\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

27. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+\sqrt{c-x}=0$,

則 $(a+b+c+3x)(a+b+c-x)=4(bc+ca+ab)$,

及 $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$, 則 $(a+b+c)^3=27abc$.

(解) $a-x+b-x+2\sqrt{(a-x)(b-x)}=c-x$, 轉項而平方之,則

$(a+b-c-x)^2=4\{ab-(a+b)x+x^2\}$, 解括弧而變化之,則

$(a+b+c)^2+2x(a+b+c)-3x^2=(a+b+c)^2-(a+b-c)^2+4ab$,

卽 $(a+b+c+3x)(a+b+c-x)=4(bc+ca+ab)$.

又 $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c}$, 則 $a+b+3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=-c$,

$a+b+c=-3\sqrt[3]{ab}(-\sqrt[3]{c})$, $\therefore\ (a+b+c)^3=27abc$.

28. 有汽車行 1 時後有事故而停走 1 時,其後之速爲前之五分之三,故遲到 3 時,若多走 50 哩而生此事故,則遲到 $1\frac{1}{2}$ 時,此線路之長如何.

(解) 線路之長爲 x 哩,汽車每時之速爲 y 哩,

則 $1+1+\dfrac{x-y}{\frac{3}{5}y}=\dfrac{x}{y}+3$, $1+1+\dfrac{50}{y}+\dfrac{x-y-50}{\frac{3}{5}y}=\dfrac{x}{y}+1\dfrac{1}{2}$,

自第一減第二,則 $\dfrac{50}{\frac{3}{5}y}-\dfrac{50}{y}=3-1\dfrac{1}{2}$, $\therefore\ y=\dfrac{200}{9}=22\dfrac{2}{9}$,

又由第一得 $\dfrac{5(x-y)}{3y}-\dfrac{x}{y}=1$, $\therefore\ x=4y=88\dfrac{8}{9}$.

由是線路之長爲 $88\frac{8}{9}$ 哩,每時之速爲 $22\frac{2}{9}$ 哩.

29. 解方程式 $2x+y=2z$, $9z-7x=6y$, $x^3+y^3+z^3=216$.

(解) 由第一及第二得 $y=\frac{4}{3}x,\quad z=\frac{5}{3}x,$

$\therefore\quad x^3+\frac{64}{27}x^3+\frac{125}{27}x^3=216,\quad\therefore\quad x^3=27.$

30. 六回試驗內,其二回為數學試驗,而數學試驗不相連續,其方法有幾許.

(解) ${}_6P_6=\underline{|6}$ 內數學試驗二回相連續之方法為 $2{}_5P_5$.
由是 $\underline{|6}-2\underline{|5}=480.$

31. 半克郎貨,先令貨,四辨士貨,共 60 個,欲得 5 磅 4 先令 2 辨士之方法有幾種.

(解) 半克郎為 30 辨士, 1 先令為 12 辨士, 又 5 磅 4 先令 2 辨士 $=1250$ 辨士,而三種貨之個數順次為 x, y, z, 則
$x+y+z=60$, 及 $30x+12y+4z=1250,$

消去 z, 則 $13x+4y=505,\quad\therefore\quad x=1+4t,\ y=123-13t,$
由是 $z=9t-64.$

故 t 大於 $\frac{64}{9}$ 而小於 $\frac{123}{13}$, 卽 t 有 8 及 9 之二值.

由是有 $x=33,\ y=19,\ z=8$, 及 $x=37,\ y=6,\ z=17$ 之兩方法.

32. $x^3+ax^2+11x+6$ 及 $x^3+bx^2+14x+8$ 有 x^2+px+q 之通因子,則 a 及 b 之值如何.

(解) x^2+px+q 可除 $(x^3+ax^2+11x+6)-(x^3+bx^2+14x+8)$, 卽
可除 $(a-b)\left(x^2-\frac{3x}{a-b}-\frac{2}{a-b}\right),\quad\therefore\quad -\frac{3}{a-b}=p,\quad -\frac{2}{a-b}=q.$

又 x^2+px+q 可除 $4(x^3+ax^2+11x+6)-3(x^3+bx^2+14x+8)$,
卽可除 $x\{x^2+(4a-3b)x+2\},\quad\therefore\quad 4a-3b=p,\quad 2=q.$

由是 $-\frac{2}{a-b}=2,\quad\therefore\quad a-b=-1$; 又 $4a-3b=-\frac{3}{a-b}=3,$

$\therefore\quad a-b=-1,\ 4a-3b=3,$ 由是 $a=6,\ b=7.$

33. A, B, C 共力而成一事, 若此事 A 獨作之, 則須多作 6 時, B 獨作之, 則須多作 1 時, 又 C 獨作之, 則需 2 倍時間, 問三人共力而成之日數如何.

(解) 所求之日數爲 x, 則

$$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x},\quad\therefore\quad x=\frac{2}{3}\text{ 或 }-3,$$

由是所求之日數爲 $\frac{2}{3}$ 日.

34. 方程式 $ax+by=1$, $cx^2+dy^2=1$, 唯有一箇解答, 則

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{d}=1,\text{ 及 }x=\frac{a}{c},\quad y=\frac{b}{d}.$$

(解) $y=\dfrac{1-ax}{b}$, 則 $cx^2+\dfrac{d(1-ax)^2}{b^2}=1$,

卽 $x^2(b^2c+a^2d)-2adx+d-b^2=0$,

由題意 $4a^2d^2-(b^2c+a^2d)(d-b^2)=0$, $\therefore\quad \dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{d}=1.$

又 $x^2\left(\dfrac{a^2d^2}{d-b^2}\right)-2adx+d-b^2=0$,

卽 $a^2d^2x^2-2adx(d-b^2)+(d-b^2)^2=0$, $\therefore\quad adx-(d-b^2)=0$,

$$\therefore\quad x=\frac{1}{a}\left(1-\frac{b^2}{d}\right)=\frac{1}{a}\times\frac{a^2}{c}=\frac{a}{c}.$$

35. 由二項式之定理求 $(1-2x+2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 之開散式之最初五項.

(解) $(1-2x+2x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}(2x-2x^2)+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}(2x-2x^2)^2$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}(2x-2x^2)^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}(2x-2x^2)^4+\ldots.$$

$$=1+(x-x^2)+\frac{3}{2}(x^2-2x^3+x^4)+\frac{5}{2}(x^3-3x^4)+\frac{35}{8}x^4+\ldots.$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{13x^4}{8}+\ldots.$$

36. $x^2+px+q=0$ 之一根爲他一根之平方，則

$$p^3-q(3p-1)+q^2=0.$$

(解) 自 $\alpha^2+\alpha=-p,\ \alpha^2.\alpha=q$ 消去 α 可也.

37. 解 $x^4-5x^2-6x-5=0.$

(解) $x^4-4x^2+4=x^2+6x+9$ 則 $x^2-2=\pm(x+3)$,

$\therefore\ \ x^2\pm x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+2\pm3,\ \ \therefore\ \ x\mp\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{9\pm12}}{2}$,

由是 $x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$ 或 $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

別解法 即 $x^4-x-5(x^2+x+1)=0$, 則

$(x^2+x+1)\{x(x-1)-5\}=0$, 由是得答.

38. 化 $\dfrac{x^3-ax^2+19x-a-4}{x^3-(a+1)x^2+23x-a-7}$ 之分數爲最簡，求 a 之值，且化之爲最簡.

(解) 自分子減分母得 x^2-4x+3, 即 $(x-1)(x-3)$,
故此分母子可以 $x-1$ 或 $x-3$ 約之.

$x=1$, 則分母子消失，故 $a=8$, 又 $x=3$, 則分母子亦消失，故 $a=8$.

$$\therefore\ \ \text{原分數}=\frac{x^3-8x^2+19x-12}{x^3-9x^2+23x-15}=\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}=\frac{x-4}{x-5}.$$

39. a, b, c, x, y, z 爲實數，而

$(a+b+c)^2=3(bc+ca+ab-x^2-y^2-z^2)$, 則

$$a=b=c,\ \text{及}\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

(解) 括原恒同式爲 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+3(x^2+y^2+z^2)=0$,
此前節之各項皆爲正，$\therefore\ \ a=b=c,\ x=y=z=0.$

40. $x=\frac{6}{7}$, 則 $\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{-\frac{3}{2}}$ 之開散式之最大項如何.

(解) 第$(r+1)$項$=\dfrac{\frac{3}{2}+r-1}{r}\left(\dfrac{2x}{3}\right)\times$第$r$項

$=\dfrac{\frac{3}{2}+r-1}{r}\cdot\dfrac{4}{7}\times$ 第 r 項.

∴ 第$(r+1)$項 > 第r項,則必$\dfrac{6+4r-4}{7r}>1$, 即 $2>3r$,

由是第一項爲最大.

41. 兩數之和及其平方和之積爲 5500 又其差及平方差之積爲 352, 則各數如何.

(解) $(x+y)(x^2+y^2)=5500$, $(x-y)(x^2-y^2)=352$.

令 $x=a+b$, $y=a-b$, 則

$$4a(a^2+b^2)=5500,\quad 8ab^2=352\quad\therefore\quad b^2=\frac{44}{a},$$

由第一得 $a\left(a^2+\dfrac{44}{a}\right)=1375$ ∴ $a^3=1331$ ∴ $a=11$. $b=2$.

由是 $x=13$, $y=9$.

42. $x=\lambda a$, $y=(\lambda-1)b$, $z=(\lambda-3)c$, $\lambda=\dfrac{1+b^2+3c^2}{a^2+b^2+c^2}$

而 $x^2+y^2+z^2$ 以 a, b, c 之項示之.

(解) $x^2+y^2+z^2=\lambda^2a^2+(\lambda-1)^2b^2+(\lambda-3)^2c^2$

$=\lambda^2(a^2+b^2+c^2)-2\lambda(b^2+3c^2)+b^2+9c^2$

$=\dfrac{(1+b^2+3c^2)^2}{a^2+b^2+c^2}-\dfrac{2(b^2+3c^2)(1+b^2+3c^2)}{a^2+b^2+c^2}+b^2+9c^2$

$=\dfrac{(1+b^2+3c^2)(1-b^2-3c^2)}{a^2+b^2+c^2}+b^2+9c^2$

$=\dfrac{1-b^4-6b^2c^2-9c^4+a^2(b^2+9c^2)+(b^2+c^2)(b^2+9c^2)}{a^2+b^2+c^2}$

$=\dfrac{1+4b^2c^2+9c^2a^2+a^2b^2}{a^2+b^2+c^2}.$

43. 解下之方程式.

(1) $x^4+3x^2=16x+60$.　(2) $y^2+z^2-x=z^2+x^2-y=x^2+y^2-z=1$.

(解) (1) $x^4+4x^2+4=x^2+16x+64$, 則 $x^2+2=\pm(x+8)$,

$$\therefore\ x=\pm\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}\pm8-2\right)}=+\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}\ \text{或}\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-39}}{2},$$

由是 $x=3,\quad -2.\quad \dfrac{-1\pm\sqrt{-39}}{2}$.

(2) $y^2+z^2-x=1,\quad z^2+x^2-y=1,\quad x^2+y^2-z=1$.

由第一,第二得 $y^2-x^2+y-x=0$, $\therefore\ y-x=0$ 或 $y+x+1=0$,

由第二,第三得 $z^2-y^2+z-y=0$, $\therefore\ z-y=0$ 或 $z+y+1=0$,

故 $x=y=z$, 則由第一得 $2x^2-x=1$, $\therefore\ x=1$ 或 $-\frac{1}{2}$,

$\therefore\ x=y=z=1$, 或 $x=y=z=-\frac{1}{2}$.

又 $y+x+1=0$, $z+y+1=0$, 則 $x=-(y+1)$, $z=-(y+1)$

故由第一得 $y^2+(y+1)^2+(y+1)=1$, $\therefore\ y=-1$ 或 $-\frac{1}{2}$,

$\therefore\ x=0$, $y=-1$, $z=0$, 但 $y=-\frac{1}{2}$, 則與前得同解答,

又此式爲等勢式,故更得 $x=-1$, $y=0$, $z=0$, 或 $x=0$, $y=0$, $z=-1$ 之解答.

44. x, y, z 爲調和級數,則 $log(x+z)+log(x-2y+z)=2log(x-z)$.

(解) 由題意 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$, 卽 $y(x+z)=2xz$,

卽 $2y(x+z)=(x+z)^2-(x-z)^2$, $\therefore\ (x+z)(x+z-2y)=(x-z)^2$,

由是 $log(x+z)+log(x-2y+z)=2log(x-z)$.

45. 證 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1.3}{2.4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\ldots.=\dfrac{4}{3}(2-\sqrt{3})\sqrt{3}$.

(解) $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\dots=\left(1-\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

故 $1+\frac{1}{4}S=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 由是 $S=\frac{4}{3}(2\sqrt{3}-3)$.

46. $\frac{3x+2y}{3a-2b}=\frac{3y+2z}{3b-2c}=\frac{3z+2x}{3c-2a}$, 則

$$5(x+y+z)(5c+4b-3a)=(9x+8y+13z)(a+b+c).$$

(解) 各分數$=\frac{(3x+2y)+(3y+2z)+(3z+2x)}{(3a-2b)+(3b-2c)+(3c-2a)}=\frac{5(x+y+z)}{a+b+c}$,

又各分數$=\frac{(3x+2y)+2(3y+2z)+3(3z+2x)}{(3a-2b)+2(3b-2c)+3(3c-2a)}=\frac{9x+8y+13z}{5c+4b-3a}$.

由是 $\frac{5(x+y+z)}{a+b+c}=\frac{9x+8y+13z}{2c+4b-3a}$.

47. 用子音 17 母音 5, 可作四音之語幾種,但各語中央置相異之母音 2, 兩端置子音各 1.

(解) 一語之首置 1 子音之方法有 17 種, 又尾置 1 子音之方法有 17 種, 故兩端置子音各 1 之方法爲 17×17.

次於中央置母音 2 之方法有 ${}_5P_2=5\times4$ 種.

由是所求之數爲 $17\times17\times5\times4=5780$ 種.

48. 茲有一問題,由議員 600 人投票否決,後同數之議員再投票,以前之否決投票數二倍之,多數而可決,而第二回之多數(即可決數)與第一回之多數(即否決數)之比如 8 及 7, 求變心議員之數.

(解) 第一回 x 爲可決論者, 則 $600-x$ 爲否決論者, 故此問題以 $600-2x$ 之多數而否決.

然 y 爲變心者, 則第二回 $x+y$ 爲可決論者, $600-x-y$ 爲否決論者, 故本問題以 $2(x+y)-600$ 之多數而可決

由是 $2(x+y)-600=2(600-2x)$ 及 $\frac{x+y}{600-x}=\frac{8}{7}$,

由是 $x=250$, $y=150$, 卽變心者 150 人.

49. 證 $log\frac{(1+x)^{\frac{1-x}{2}}}{(1-x)^{\frac{1+x}{2}}}=x+\frac{5x^3}{2.3}+\frac{9x^5}{4.5}+\frac{13x^7}{6.7}+\cdots\cdots$

(解) 左邊 $=\frac{1-x}{2}log(1+x)-\frac{1+x}{2}log(1-x)$

$$=\frac{1}{2}\left\{log(1+x)-log(1-x)\right\}-\frac{x}{2}\left\{log(1+x)+log(1-x)\right\}$$

$$=\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots\right\}+x\left\{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=x+x^3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+x^5\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+x^7\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots$$

$$=x+\frac{5x^3}{2.3}+\frac{9x^5}{4.5}+\frac{13x^7}{6.7}+\cdots\cdots$$

50. 以若干人作中空方陣,四面各三層,若增 25 人而作方陣,則其一邊人數比中空方陣一邊人數之平方根多 22 人,求總人數.

(解) 中空方陣一邊人數爲 x, 則

總人數 $=x^2-(x-3\times2)^2=12x-36$.

由是 $(12x-36)+25=(\sqrt{x}+22)^2$, $\therefore$ $x=81$,

故總人數爲 $12\times81-36$ 卽 936 人.

51. 解下之方程式.

(1) $\sqrt[m]{(a+x)^2}+2\sqrt[m]{(a-x)^2}=3\sqrt[m]{(a^2-x^2)}$.

(2) $(x-a)^{\frac{1}{2}}(x-b)^{\frac{1}{2}}-(x-c)^{\frac{1}{2}}(x-d)^{\frac{1}{2}}=(a-c)^{\frac{1}{2}}(b-d)^{\frac{1}{2}}$.

(解) (1) $\sqrt[m]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}+2\sqrt[m]{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}=3$, $\sqrt[m]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}=y$, 則

$y+\frac{2}{y}=3$, $\therefore$ $y=1$ 或 2,

即 $\frac{a+x}{a-x}=1$ 或 2^n, $\therefore$ $x=0$ 或 $\frac{(2^n-1)a}{2^n+1}$.

(2) $\{(x-a)(x-b)\}^{\frac{1}{2}}-\{(x-c)(x-d)\}^{\frac{1}{2}}$

$$=[\{(x-c)-(x-a)\}\{(x-d)-(x-b)\}]^{\frac{1}{2}},$$

兩邊爲平方,去同類項,則

$$-2\{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\}^{\frac{1}{2}}=-(x-a)(x-d)-(x-b)(x-c),$$

$\therefore$ $(x-a)(x-d)-2\{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\}^{\frac{1}{2}}+(x-b)(x-c)=0,$

$\therefore$ $(x-a)^{\frac{1}{2}}(x-d)^{\frac{1}{2}}-(x-b)^{\frac{1}{2}}(x-c)^{\frac{1}{2}}=0.$

$\therefore$ $(x-a)(x-d)=(x-b)(x-c)$, $\therefore$ $x=\frac{bc-ad}{b+c-a-d}$.

52. $\sqrt[3]{4}=1+\frac{2}{6}+\frac{2.5}{6.12}+\frac{2.\ 5.\ 8}{6.12.18}+\cdots\cdots$

(解) $\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$,

由二項式定理得右邊.

53. 解 $\sqrt[3]{6(5x+6)}-\sqrt[3]{5(6x-11)}=1$.

(解) 兩邊爲立方,則

$6(5x+6)-5(6x-11)-3\sqrt[3]{6(5x+6)}\sqrt[3]{5(6x-11)}\{\sqrt[3]{6(5x+6)}$

$-\sqrt[3]{5(6x-11)}\}=1,$

即 $91-3\sqrt[3]{30(5x+6)(6x-11)}\{1\}=1,$

即 $-\sqrt[3]{30(5x+6)(6x-11)}=-30^3$, 再爲立方,則

$30(5x+6)(6x-11)=30^3$, $\therefore$ $(5x+6)(6x-11)=900,$

$\therefore$ $x=6$ 或 $-\frac{161}{30}$.

54. 一器內有酒 a 升,他器內有水 b 升,而自各器出 c 升互換入之,幾回後 $c(a+b)=ab$, 則各器內酒之量與最初換入時同,其證如何.

(解) 第一回後第一器有酒 $a-c$ 升,第二器有酒 c 升,第二回自第一器出酒 $\frac{a-c}{a}\times c$ 升,自第二器出酒 $\frac{c}{b}\times c$ 升,由題意 $\frac{a-c}{a}=\frac{c}{b}$,

卽 $c(a+b)=ab$,

卽第一回後自兩器出等量之酒而交換之,故各器內酒之量常相同可知.

55. m 及 n 之間之等差中項,與 a 及 b 之間之等比中項各等於 $\frac{ma+nb}{m+n}$,試於 a 及 b 之項求 m 及 n.

(解) $\frac{m+n}{2}=\sqrt{ab}=\frac{ma+nb}{m+n}$.

$\therefore\quad \frac{m+n}{2}\times\frac{ma+nb}{m+n}=(\sqrt{ab})^2$, 卽 $ma+nb=2ab\ldots(1)$

及 $m+n=2\sqrt{ab}\ldots(2)$

自 (1) 及 (2) 求 m, n, 則 $m=\frac{2a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $n=\frac{2b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

56. x, y, z 之和爲常數,而 $(x+y-2z)(z+x-2y)$ 因 yz 而變,則 $2(y+z)-x$ 亦因 yz 而變,試證之.

(解) $x+y+z=c$, 及 $(x+y-2z)(z+x-2y)=myz$,

故 $(c-3z)(c-3y)=myz$, 卽 $c^2-3c(y+z)+9yz=myz$,

卽 $c^2-3c(c-x)=(m-9)yz$, 卽 $3x-2c=\frac{m-9}{c}yz$,

卽 $x-2(y+z)=\frac{m-9}{c}yz$, 但 m 爲常數,故 $\frac{m-9}{c}$ 爲常數,由是 $x-2(y+z)$ 卽 $2(y+z)-x$ 因 yz 而變.

57. n 大於 3, 則

$1.2{}_nC_r-2.3{}_nC_{r-1}+3.4{}_nC_{r-2}-\ldots+(-1)^r(r+1)(r+2)=2{}_{n-3}C_r$.

(解) $(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\ldots$

$+{}_nC_{r-2}x^{r-2}+{}_nC_{r-1}x^{r-1}+{}_nC_rx^r+\ldots$,

及 $(1+x)^{-3}=1-3x+\frac{3.4}{1.2}x^2-\frac{4.5}{1.2}x^3+\ldots+(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r+\ldots$

右邊兩級數之積中 x^r 之係數爲

$$1{}_n\mathrm{C}_r-3{}_n\mathrm{C}_{r-1}+\frac{3.4}{2}{}_n\mathrm{C}_{r-2}-\ldots+(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

又左邊之積 $(1+x)^{n-3}$ 中 x 之係數爲 ${}_{n-3}\mathrm{C}_r$,
由是如題所云.

58. 解下之方程式.

(1) $\sqrt{(2x-1)}+\sqrt{(3x-2)}=\sqrt{(4x-3)}+\sqrt{(5x-4)}$.

(2) $4\{(x^2-16)^{\frac{3}{4}}+8\}=x^2+16(x^2-16)^{\frac{1}{4}}$.

(解) (1) $\sqrt{(2x-1)}-\sqrt{(5x-4)}=\sqrt{(4x-3)}-\sqrt{(3x-2)}$,

平方之則 $7x-5-2\sqrt{(2x-1)(5x-4)}=7x-5-2\sqrt{(4x-3)(3x-2)}$,

$\therefore\quad (2x-1)(5x-4)=(4x-3)(3x-2)$, $\quad\therefore\quad x=1$.

(2) $x^2-16=y^4$, $\quad 4(y^3+8)=y^4+16+16y$,

卽 $y^4-4y^3+16y-16=0$, $\quad\therefore\quad y^4-16-4y(y^2-4)=0$,

卽 $(y^2-4)(y^2+4-4y)=0$, $\quad$ 卽 $(y+2)(y-2)^3=0$,

$\therefore\quad y=\pm 2$,

由是 $x^2-16=16$, $\quad\therefore\quad x=\pm 4\sqrt{2}$.

59 x, y, z 有 $\frac{y-z}{1+yz}+\frac{z-x}{1+zx}+\frac{x-y}{1+xy}=0$ 之關係, 則其各二箇之值互相等.

(解) 去分母則 $\sum(y-z)(1+zx)(1+xy)=0$,

變化之則 $(y-z)(z-x)(x-y)=0$,

故各二箇之值互相等.

60. p 人之團體內百分之 a 爲士人, 而爲男之百分之 b, 及女之百分之 c, 男女之數各如何.

(解) 男及女之數爲 x 及 y, 則

$$x+y=p,\quad \frac{bx}{100}+\frac{cy}{100}=\frac{ap}{100},\quad\therefore\quad x=\frac{(a-c)p}{b-c},\quad y=\frac{(b-a)p}{b-c}.$$

61. $x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2ab}{a^2-b^2}}$, 則 $\frac{ab}{a^2+b^2}\left(x^{\frac{a}{b}}+x^{\frac{b}{a}}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$.

(解) $\frac{ab}{a^2+b^2}\left(x^{\frac{a}{b}}+x^{\frac{b}{a}}\right)=\frac{ab}{a^2+b^2}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2a^2}{a^2-b^2}}+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2b^2}{a^2-b^2}}\right\}$

$=\frac{ab}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2b^2}{a^2-b^2}}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2a^2-2b^2}{a^2-b^2}}+1\right\}=\frac{ab}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2b^2}{a^2-b^2}}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1\right\}$

$=\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2b^2}{a^2-b^2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$.

62. $(1-x+x^2-x^3)^{-1}$ 之開散式中 x^{4n} 之係數爲 1.

(解) $(1-x+x^2-x^3)^{-1}=\frac{1}{1-x+x^2-x^3}=\frac{1+x}{1-x^4}=(1+x)(1-x^4)^{-1}$

$=(1+x)(1+x^4+\ldots\ldots+x^{4n-4}+x^{4n}+x^{4n+4}+\ldots\ldots)$

故 x^{4n} 之係數爲 1.

63. 解方程式 $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}$.

(解) $\frac{a(x-a)+b(x-b)}{ab}=\frac{b(x-b)+a(x-a)}{(x-a)(x-b)}$,

$\therefore$ $a(x-a)+b(x-b)=0$ 或 $ab=(x-a)(x-b)$,

$\therefore$ $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$, 或 0 或 $a+b$.

64. n 項之 (1) 等差級數及 (2) 調和級數之初項及末項爲 a 及 b, 其各級數如何,又第一級數之第 r 項及第二級數之第 $(n-r+1)$ 項之積爲 ab, 試證之.

(解) A. P. 之通差爲 x, H. P. 之反商之 A. P. 之通差爲 y, 則

$b=a+(n-1)x$, 而 $\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+(n-1)y$,

$\therefore \quad x=\frac{b-a}{n-1}, \quad y=\frac{-(b-a)}{ab(n-1)}.$

由是 A.P. 爲 $a, a+x, a+2x, \ldots a+(n-1)x$,

卽 $a, a+\frac{b-a}{n-1}, \ a+\frac{2(b-a)}{n-1}, \ldots b.$

又 H.P. 之反商爲 $\frac{1}{a}, \frac{1}{a}-\frac{b-a}{ab(n-1)}, \frac{1}{a}-\frac{2(b-a)}{ab(n-1)}, \ldots \frac{1}{b}$,

卽 H.P. 爲 $a, \frac{ab(n-1)}{b(n-1)-(b-a)}, \frac{ab(n-1)}{b(n-1)-2(b-a)}, \ldots b$,

又 A.P. 之第 r 項 $=a+(r-1)\frac{b-a}{n-1}=\frac{a(n-r)+b(r-1)}{n-1}$,

H.P. 之第 $(n-r+1)$ 項 $=\frac{ab(n-1)}{b(n-1)-(n-r)(b-a)}$

$$=\frac{ab(n-1)}{a(n-r)+b(r-1)},$$

由是 $\frac{a(n-r)+b(r-1)}{n-1}\times\frac{ab(n-1)}{a(n-r)+b(r-1)}=ab.$

65. 方程式 $\left(1-q+\frac{p^2}{2}\right)x^2+p(1+q)x+q(q-1)+\frac{p^2}{2}=0$ 爲等根，則 $p^2=4q$.

(解) $\{p(1+q)\}^2-4\left(1-q+\frac{p^2}{2}\right)\left\{q(q-1)+\frac{p^2}{2}\right\}=0$,

卽 $p^2(1+q)^2-4\left\{\frac{p^4}{4}+\frac{p^2}{2}(q-1)^2-q(q-1)^2\right\}=0$,

卽 $p^4+p^2\{(q-1)^2-4q\}-4q(q-1)^2=0.$

卽 $\{p^2+(q-1)^2\}\{p^2-4q\}=0, \quad \therefore \quad p^2=4q.$

66. $a^2+b^2=7ab$, 則 $log\left\{\frac{1}{3}(a+b)\right\}=\frac{1}{2}(loga+logb)$.

(解) $(a+b)^2=9ab$, 卽 $\frac{1}{3}(a+b)=\sqrt{ab}$,

$\therefore\quad log\left\{\frac{1}{3}(a+b)\right\}=\frac{1}{2}(loga+logb).$

67. 方程式 $x^2(1-ac)-x(a^2+c^2)-(1+ac)=0$ 之一根爲 n, 於 a 及 c 之間插入調和 n 中項,則其插入之初末二項之差爲 $ac(a-c)$.

(解) $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+(n+2-1)d,\quad\therefore\quad d=\frac{a-c}{ac(n+1)}.$

故調和 n 中項之初末二項之反商爲

$$\frac{1}{a}+\frac{a-c}{ac(n+1)}\text{ 及 }\frac{1}{a}+\frac{n(a-c)}{ac(n+1)}.$$

故初末二項之差 $=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{a-c}{ac(n+1)}}-\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{n(a-c)}{ac(n+1)}}$

$$=\frac{ac(n+1)(a-c)(n-1)}{n^2ac+n(a^2+c^2)+ac},$$

但原方程式中 $x=n$, 故

$n^2(1-ac)-n(a^2+c^2)-(1+ac)=0.$

$\therefore$ 初末二項之差 $=\dfrac{ac(n+1)(a-c)(n-1)}{n^2-1}=ac(a-c).$

68. ${}_{n+2}C_8:{}_{n-2}P_4=57:16$, 求 n.

(解) $\dfrac{\lfloor n+2}{\lfloor 8\,\lfloor n-6}:\dfrac{\lfloor n-2}{\lfloor n-6}=57:16,$

$\therefore\quad\dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{8.7.6.5.4.3.2.1}=\dfrac{57}{16},$

$\therefore\quad(n+2)(n+1)n(n-1)=19.3.7.6.5.4.3=21.20.19.18,$

由是 $n+2=21,\qquad\therefore\qquad n=19.$

69. 某人以若干金買 $6\frac{1}{2}$ 分利之公債票,若此票每張之價低 3 磅,則所得之利比前多 $\frac{1}{3}$ 分,此票之實價如何.

(解) 所求之實價爲 x 磅,則初得之利爲 $\frac{100}{x}\times 6\frac{1}{2}$,

次得之利爲 $\frac{100}{x-3}\times 6\frac{1}{2}$,

由是 $\frac{100}{x-3}\times 6\frac{1}{2}-\frac{100}{x}\times 6\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, $\therefore\quad x=78$ 磅.

70. 解下之方程式,

$$\{(x^2+x+1)^3-(x^2+1)^3-x^3\}\{(x^2-x+1)^3-(x^2+1)^3+x^3\}$$
$$=3\{(x^4+x^2+1)^3-(x^4+1)^3-x^6\}.$$

(解) $\{3(x^2+1)x(x^2+x+1)\}\{-3(x^2+1)x(x^2-x+1)\}$
$$=3\{(x^4+1)x^2(x^4+x^2+1)\},$$

$\therefore\quad -x^2(x^2+1)^2(x^4+x^2+1)=x^2(x^4+1)(x^4+x^2+1)$,

由是 $x^2=0$, $\therefore\quad x=0$,

又 $x^4+x^2+1=0$, $\therefore\quad x^2+x+1=0$, $x^2-x+1=0$,

$\therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, $x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$,

又 $-(x^2+1)^2=x^4+1$, $\therefore\quad x^4+x^2+1=0$, 故與前得同解答.

71. 自 $x^2+ax+b=0$ 及 $xy+l(x+y)+m=0$ 之兩方程式消去 x, 由是所得 y 之二次方程式之二根與 x 之原二次方程式之二根相同,則 $a=2l$ 及 $b=m$ 或 $b+m=al$.

(解) 由第二得 $x=-\frac{ly+m}{y+l}$, 代入第一,則

$$(ly+m)^2-a(ly+m)(y+l)+b(y+l)^2=0,$$

即 $(l^2-al+b)y^2+(2lm+2bl-am-al^2)y+(m^2-alm+bl^2)=0$.

此與第一爲同根,故

$$\frac{l^2-al+b}{1}=\frac{2lm+2bl-am-al^2}{a}=\frac{m^2-alm+bl^2}{b}.$$

由此方程式得 $b(l^2-al+b)=m^2-alm+bl^2$,

即 $al(m-b)-(m^2-b^2)=0$, $\therefore$ $m=b$ 或 $al=m+b$.

若 $m=b$, 則由 $a(l^2-al+b)=2lm+2bl-am-al^2$ 得

$a(l^2-al+b)=2lb+2bl-ab-al^2$,

即 $(a-2l)(al-2b)=0$, $\therefore$ $a=2l$ 或 $al=2b$,

由是 $a=2l$ 及 $b=m$,

或 $al=2b$ 及 $b=m$, 即 $al=b+m$.

72. 已知 $log2=\cdot30103$ 及 $log3=\cdot47712$, 解下之方程式.

(1) $6^x=\frac{10}{3}-6^{-x}$, (2) $\sqrt{5^x}+\sqrt{5^{-x}}=\frac{29}{10}$.

(解) (1) $6^{2x}-\frac{10}{3}\cdot6^x=-1$, $\therefore$ $6^x=\frac{5}{3}\pm\frac{4}{3}=3$ 或 3^{-1}.

自 $6^x=3^{\pm1}$ 得 $xlog6=log3^{\pm1}$,

$$\therefore\quad x=\frac{\pm log3}{log3+log2}=\frac{\pm\cdot47712}{\cdot77815}=\pm\cdot614.$$

(2) $\left(5^{\frac{x}{2}}\right)^2-\frac{29}{10}\left(5^{\frac{x}{2}}\right)=-1$, $\therefore$ $5^{\frac{x}{2}}=\frac{29}{20}\pm\frac{21}{20}=\frac{5}{2}$ 或 $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$,

自 $5^{\frac{x}{2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\pm1}$ 得 $\frac{x}{2}log5=\pm log\left(\frac{5}{2}\right)$,

$$\therefore\quad x=\frac{\pm2log\left(\frac{5}{2}\right)}{log5}=\frac{\pm2\{log10log4\}}{log(10\div2)}$$

$$=\pm\frac{2(1-2log2)}{1-log2}=\pm\frac{2(1-\cdot60206)}{1-\cdot30103}=\pm1\cdot139.$$

73. 兩數之和爲 9, 其四方乘之和爲 2417, 兩數各如何.

(解) $x+y=9$, $x^4+y^4=2417$,

由第二得 $(x^2-y^2)^2+2x^2y^2=2417$,

即 $(x+y)^2(x-y)^2+\frac{1}{8}\{(x+y)^2-(x-y)^2\}=2417,$

∴ 由第一得 $81(x-y)^2+\frac{1}{8}\{81-(x-y)^2\}^2=2417,$

$(x-y)^4+486(x-y)^2+81^2-8\times2417=0,$

∴ $(x-y)^2=-243\pm\sqrt{(243^2-81^2+8\times2417)}$

$=-243\pm\sqrt{(81^2+2417)\times8}=-243\pm67\times4=25$ 或 $-511,$

∴ $x-y=\pm5$ 或 $\pm\sqrt{-511}.$

$x+y=9,\ x-y=\pm5,$ 則 $x=7,\ y=2,$ 或 $x=2,\ y=7.$

$x+y=9,\ x-y=\pm\sqrt{-511},$ 則 $x=\frac{9\pm\sqrt{-511}}{2},$

$y=\frac{9\mp\sqrt{-511}}{2}.$

74. A 以一時 4 哩之速出行,經 $2\frac{3}{4}$ 時,而 B 自同地起程追之,第一時行 $4\frac{1}{2}$ 哩,第二時行 $4\frac{3}{4}$ 哩,第三時行 5 哩,以下皆如此,每時之速增 $\frac{1}{4}$ 哩,則何時可追及 A.

(解) 所求之時為 n 時,則 A 行 $4\left(n+2\frac{3}{4}\right)$ 卽 $4n+11$ 哩,B 行 $\frac{n}{2}\left\{2\times4\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{4}\right\}$ 卽 $\frac{n(n+35)}{8}$ 哩.

∴ $\frac{n(n+35)}{8}=4n+11,$ ∴ $n=8$ 卽八日.

75. 大於 $(\sqrt{3}+1)^{2m}$ 之最小整數有 2^{m+1} 之因子.

(解) $(\sqrt{3}+1)^{2m}+(\sqrt{3}-1)^{2m}$ 之開散式為整數,大於 $(\sqrt{2}+1)^{2m}$ 而 $(\sqrt{3}-1)^{2m}<1.$

由是所求之整數 $=(\sqrt{3}+1)^{2m}+(\sqrt{3}-1)^{2m}$

$=(4+2\sqrt{3})^m+(4-2\sqrt{3})^m=2^m\{(2+\sqrt{3})^m+(2-\sqrt{3})^m\}$

$=2^{m+1}\{2^m+2^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}.3+\ldots.\}$,

由是所求之整數有 2^{m+1} 之因子.

76. 區別自然數(卽連續數)爲若干羣如下,

$\overline{1},\ \overline{2,3,4},\ \overline{5,6,7,8,9},\ldots\ldots\ldots$

此第 n 羣之和爲 $(n-1)^3+n^3$.

(解) 第1羣有1項,第2羣有3項,第3羣有5項,.....故此級數至 n 羣之項數爲 $1+3+5+\ldots.=n^2$, 而第 n 羣之末項之數爲 n^2, 故 $1+\overline{2+3+4}+\overline{5+6+7+8+9}\ldots.$第 n 羣 $=\frac{n^2}{2}(n^2+1)$.

又同上至第 $\overline{n-1}$ 羣 $=\frac{(n-1)^2}{2}\{(n-1)^2+1\}$,

$\therefore$ 所求之和 $=\frac{n^2}{2}(n^2+1)-\frac{(n-1)^2}{2}\{(n-1)^2+1\}=(n-1)^3+n^3$.

77. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1.3}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1.3.5}{\underline{|4}}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots.$之 n 項之和等於 $1-\frac{1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{2^n\underline{|n}}$.

(解) $(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\underline{|2}}x^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\underline{|3}}x^3-\ldots\ldots\ldots$

又 $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots.+x^{n-2}+x^{n-1}+x^n+\ldots\ldots\ldots$

此兩式之右邊之積中 x^n 之係數爲

$$1-\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\underline{|2}}-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\underline{|3}}-\ldots\ldots\ldots$$

卽 $1-\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1.3}{\underline{|4}}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1.3.5}{\underline{|4}}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots\ldots\right\}$,

又左邊之積 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ 之中 x^n 之係數 $=\frac{1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{2^n\underline{|n}}$,

由是如題所云.

78. $\frac{1+2x}{1-x+x^2}$ 之開散式中 n 爲 $3m, 3m+1, 3m+2$, 則 x^n 之係數爲 $(-1)^{\frac{n}{3}}$, $3(-1)^{\frac{n-1}{3}}$, $2(-1)^{\frac{n-2}{3}}$.

(解) $\frac{1+2x}{1-x+x^2}=\frac{(1+2x)(1+x)}{1+x^3}=\frac{1+3x+2x^2}{1+x^3}$

$=(1+3x+2x^2)(1+x^3)^{-1}$

$=(1+3x+2x^2)\{1-x^3+x^6-\ldots.+(-1)^m x^{3m}+\ldots.\}$.

$n=3m$, 則 x^n 之係數 $=(-1)^m=(-1)^{\frac{n}{3}}$.

$n=3m+1$, 則 x^n 之係數 $=3(-1)^m=3(-1)^{\frac{n-1}{3}}$.

$n=3m+2$, 則 x^n 之係數 $=2(-1)^m=2(-1)^{\frac{n-2}{3}}$.

79. 解下之方程式.

(1) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{xyz}{x+y+z}$.

(2) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}=x+y+z=3$.

(解) (1) $x=ak$, $y=bk$, $z=ck$,

卽 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{xyz}{x+y+z}=k$, 卽 $\frac{x+y+z}{a+b+c}=k$,

$\therefore\ k^2=\frac{xyz}{x+y+z}\times\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{akbkck}{a+b+c}=\frac{abck^3}{a+b+c}$,

$\therefore\quad k=0$ 或 $k=\dfrac{a+b+c}{abc}$,

$k=0$, 則 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=0$, $\quad\therefore\quad x=0,\ y=0,\ z=0.$

又 $k=\dfrac{a+b+c}{abc}$, 則 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=\dfrac{a+b+c}{abc}$.

(2) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}$, 則 $\dfrac{x-y}{z}+\dfrac{y-z}{x}+\dfrac{z-x}{y}=0$,

即 $(x-y)(y-z)(z-x)=0.$

$x-y=0$, 則 $x=y$, 而 $x+y+z=3$, 則 $z=3-2x$,

又 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3$, 則 $1+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}=3$,

即 $x^2-2xz+z^2=0$, $\quad\therefore\quad z=x$, 由是 $x=y=z=1.$

80. 級數 a, x, y, z, b 爲 A. P. 或爲 H. P. 而 xyz 之値爲 $7\frac{1}{2}$ 或 $3\frac{3}{5}$, a 及 b 爲正整數, 則此級數各如何.

(解) a, b 之間之等差三中項爲 $\dfrac{3a+b}{4}$, $\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{a+3b}{4}$.

又 $\dfrac{1}{a}$ 及 $\dfrac{1}{b}$ 之間之等差三中項爲 $\dfrac{a+3b}{4ab}$, $\dfrac{a+b}{2ab}$, $\dfrac{3a+b}{4ab}$.

由是 $xyz=\dfrac{3a+b}{2}\times\dfrac{a+b}{2}\times\dfrac{a+3b}{4}=7\dfrac{1}{2}$,

及 $\quad xyz=\dfrac{4ab}{a+3b}\times\dfrac{2ab}{a+b}\times\dfrac{4ab}{3a+b}=3\dfrac{3}{5}$,

即 $\dfrac{(3a+b)(a+b)(a+3b)}{8}=15$, $\dfrac{8a^3b^3}{(a+3b)(a+b)(3a+b)}=\dfrac{9}{5}$,

此兩方程式相乘得 $a^3b^3=27$, $\quad\therefore\quad ab=3$,

又由第二方程式得 $(3a+b)(a+b)(a+3b)=240$,

即　$(a+b)\{3(a+b)^2+4ab\}=240$,

即　$(a+b)\{3(a+b)^2+12\}=240$,　　$\therefore$　　$a+b=4$.

故　$ab=3$,　　$a+b=4$, 則　　$a=3$, $b=1$, 或 $a=1$, $b=3$.

81.　$ay-bx=c\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, 則除 $c^2<a^2+b^2$ 無適合於此方程式之 x 及 y 之實數值.

(解)　$a(y-b)-b(x-a)=c\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$,

兩邊爲平方, 去根號而括之, 則

$$(a^2-c^2)(y-b)^2-2ab(y-b)(x-a)+(b^2-c^2)(x-a)^2=0,$$

$y-b$ 爲實數,故 $4a^2b^2-4(a^2-c^2)(b^2-c^2)\nless 0$,

即　$c^2(a^2+b^2-c^2)\nless 0$,　　$\therefore$　　$a^2+b^2\nless c^2$.

82.　$(x+1)^2$ 大於 $5x-1$ 而小於 $7x-3$, 求 x 之整值.

(解)　$(x+1)^2>5x-1$, 即 $(x-1)(x-2)>0$...............(1)

又　　$(x+1)^2<7x-3$, 即 $(x-1)(x-4)<0$...............(2)

(1) 爲正而 (2) 爲負,　$\therefore$　$x>1$, $x>2$, $x>4$,　$\therefore$　$x=3$.

83.　P 之對數指標爲 p, Q 之反商之對數指標爲 $-q$, 而 P 及 Q 爲整數, 然則 $\log_{10}$ P $-\log_{10}$ Q $=p-q+1$.

(解)　10^p 及 10^{p-1} 之間凡數之對數有指標 p, 故

$$\mathrm{P}=10^{p+1}-10^p=10^p(10-1)=9\times 10^p.$$

$\frac{1}{10^{q-1}}$ 及 $\frac{1}{10^q}$ 之間凡數之對數有指標 $-q$, 故

$$\mathrm{Q}=10^q-10^{q-1}=9\times 10^{q-1}.$$

由是 $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}=10^{p-q+1}$,　　$\therefore$　　$\log \mathrm{P}-\log \mathrm{Q}=p-q+1$.

84. 金 20 兩, 5 人分之, 無 1 人得 3 兩以下者, 其方法有幾許

(解)　x^3 以上之多項式之 5 方乘, 即 $(x^3+x^4+x^5+\ldots)^5$, 其式中 x^{20} 之係數即所求之數.

而此多項式為 $x^{15}(1+x+x^2+\ldots)^5$

故所求之數等於 $(1+x+x^2+\ldots)^5$ 之式中 x^5 之係數.

而 $(1+x+x^2+\ldots)^5=\dfrac{1}{(1-x)^{-5}}$ 之式中 x^5 之係數為

$$\frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5}=126$$ 卽所求之數.

85. 父買股票分與二子,長子得實價 88 圓 4 分利之股票,次子得實價 63 圓 3 分利之股票各若干,次子所得之值比長子少 3500 圓,父死時二子之年齡為 17 歲及 14 歲,自此時始,至各 21 歲時,自其各股所得之利相等,問二子所得股票之價並其利各幾許.

(解) 長子之股票之價為 x 圓,則次子為 $x-3500$ 圓,而長子之年限為 4 年,次子為 7 年,其間所得之利相等,故

$$4\times\frac{4}{88}x=7\times\frac{3}{63}(x-3500),\quad\therefore\quad x=7700\text{ 圓},\ \text{次子}=4200\text{ 圓}.$$

所得之利 $=4\times\dfrac{4}{88}\times7700=1400$ 圓.

86. 有 7 進法之數三位,以 9 進法記之,則數位轉倒,原數如何.

(解) $49x+7y+z=81z+9y+x\qquad\therefore\qquad y=8(3x-5z)$,

此為 7 進法之數,故 $y<7$, $\quad\therefore\quad y=8(3x-5z)=0.$

$\therefore\quad 3x=5z$, 由是 $x=5$, $z=3$, 卽於 7 進法為 503.

87. 等差級數 m 項之和等於其次 n 項之和及其次 p 項之和,則 $(m+n)\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{p}\right)=(m+p)\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right)$.

(解) 此各和為 S, 則

$$S=\frac{m}{2}\{2a+(m-1)d\},\quad 2S=\frac{m+n}{2}\{2a+(m+n-1)d\}$$

$$=\frac{m+p}{2}\{2a+(m+p-1)d\}.$$

$\therefore\quad \frac{4S}{m+n}-\frac{2S}{m}=nd,\quad \therefore\quad d=\frac{2S(m-n)}{mn(m+n)}=-2S\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{m+n},$

又 $\frac{4S}{m+p}-\frac{2S}{m}=pd,\quad \therefore\quad d=-2S\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{m+p},$

由是 $-2S\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{m+n}=-2S\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{m+p},$

$\therefore\quad (m+p)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)=(m+n)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right).$

88. $\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2.$

(解) $\frac{1}{(x-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$

$$=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2-2\sum\frac{1}{(y-z)(z-x)}$$

$$=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2-2\frac{0}{(y-z)(z-x)(x-y)}.$$

89. m 為大於 1 之數(負或正),則

$1^m+3^m+5^m+\ldots\ldots+(2n-1)^m>n^{m+1}.$

(解) $\frac{1^m+3^m+\ldots+(2n-1)^m}{n}>\left\{\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n}\right\}^m$ 卽 $>n^m.$

90. 三方程式 $x^2-p_1x+q_1=0,\ x^2-p_2x+q_2=0,\ x^2-p_3x+q_3=0,$ 其各二式有共通之一根,則 $p_1^2+p_2^2+p_3^2+4(q_1+q_2+q_3)$

$$=2(p_2p_3+p_3p_1+p_1p_2).$$

(解) 三方程式之根順次為 $\beta,\gamma;\ \gamma,\alpha;\ \alpha,\beta.$ 則

$\beta+\gamma=p_1,\ \beta\gamma=q_1,\ \gamma+\alpha=p_2,\ \gamma\alpha=q_2,\ \alpha+\beta=p_3,\ \alpha\beta=q_3,$

$(\beta+\gamma)^2-4\beta\gamma=p_1^2-4q_1$ 卽 $(\beta-\gamma)^2=p_1^2-4q_1,$

又 $\beta-\gamma=(\alpha+\beta)-(\gamma+\alpha)=p_3-p_2,\quad \therefore\quad (p_3-p_2)^2=p_1^2-4q_1,$

$\therefore \quad p_2^2+p_3^2-p_1^2+4q_1=2p_2p_3,$

同法 $\quad p_3^2+p_1^2-p_2^2+4q_2=2p_3p_1,$

$\quad p_1^2+p_2^2-p_3^2+4q_3=4q_1p_2.$

由是 $p_1^2+p_2^2+p_3^2+4(q_1+q_2+q_3)=2(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1).$

91. A及B自甲地行至乙地, A於距乙地50哩之處追及2時行3哩之人力車,其後經2時而遇四時行9哩之四輪車,又B於距乙地45哩之處追及人力車,及遇四輪車後經40分時至距乙地31哩之處,然則A至乙地之時,B在何處,但A, B爲同速

(解) A及B每時之速 $=x$ 哩, B比A在 y 時後起程,然則A至乙地之時, B在 xy 哩後,今B及人力車每時相近 $x-\frac{3}{2}$ 哩,故此車以每時 $\frac{3}{2}$ 哩之速行 $50-45$ 即5哩,而B及車近 xy 哩,

由是 $\dfrac{xy}{x-\frac{3}{2}}=\dfrac{10}{3}$, 即 $3xy=10x-15$……………………(1)

又A遇四輪車之時, B在 xy 哩後,而A及四輪車在距乙地 $50-2x$ 哩之處,又B遇四輪車之時, B在距乙地 $31+\frac{40}{60}x$ 哩之處,故四輪車行 $\left(31+\frac{2}{3}x\right)-(50-2x)$ 哩.

而B及四輪車每時相近 $x+\frac{9}{4}$ 哩,此車行 $\frac{8}{3}x-19$ 哩,而B及車近 xy 哩.

由是 $\dfrac{xy}{x+\frac{9}{4}}=\dfrac{\frac{8x}{3}-19}{\frac{9}{4}}$, 即 $xy=\left(\frac{4x}{9}+1\right)\left(\frac{8x}{3}-19\right)$………(2)

由 (1) 及 (2) 得 $3\left(\frac{4x}{9}+1\right)\left(\frac{8x}{3}-19\right)=10x-15,$

即 $\frac{32}{9}x^2-\frac{52}{3}x-57=10x-15,\quad\therefore\quad x^2-\frac{123}{16}x=-\frac{189}{16},$

即 $x^2-\frac{123}{16}x+\left(\frac{123}{32}\right)^2=\frac{15129}{1024}+\frac{189}{16},$

$\therefore\quad x-\frac{123}{32}=\pm\frac{165}{32},\qquad\therefore\quad x=9.$

由 (1) 得 $xy=\frac{10x-15}{3}=\frac{10\times 9-15}{3}=25,$ 即由乙得 25 哩.

92. $a+b+c+d=0$, 則

$$abc+bcd+cda+dab=\sqrt{(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)}.$$

(解) $abc+bcd+cda+dab=abc+d(bc+ca+ab)$

$d=-(a+b+c),$ 故 $\quad=abc-(a+b+c)(bc+ca+ab)$

$=-(b+c)(c+a)(a+b).$

又 $(a+b)(a+c)=a(a+b+c)+bc=-ad+bc=bc-ad,$

同法 $(b+c)(b+a)=ca-bd,\ (c+a)(c+b)=ab-cd,$

由是 $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2=(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd),$

$\therefore\quad abc+bcd+cda+dab=\sqrt{(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}$

$=\sqrt{(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)}.$

93. A. P., G. P. 及 H. P. 之各最初兩項爲 $a, b,$ 又

$\frac{b^{2n+2}-a^{2n+2}}{ba(b^{2n}-a^{2n})}=\frac{n+1}{n}$, 則各第 $(n+2)$ 項爲 G. P.

(解) A. P. 之通差 $=b-a,$

$\therefore$ A. P. 之第 $(n+2)$ 項 $=a+(n+1)(b-a)=-na+(n+1)b.$

G. P. 之通比 $=\frac{b}{a},\quad\therefore$ 第 $(n+2)$ 項 $=a\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}=\frac{b^{n+1}}{a^n}.$

又 H. P. 反商之第 $(n+2)$ 項 $=-\frac{n}{a}+\frac{n+1}{b}$,

$\therefore$ H. P. 之第 $(n+2)$ 項 $=\frac{ab}{(n+1)a-nb}$.

次由 $\frac{b^{2n+2}-a^{2n+2}}{ba(b^{2n}-a^{2n})}=\frac{n+1}{n}$ 得

$n(b^{2n+2}-a^{2n+2})=(n+1)(b^{2n+1}a-a^{2n+1}b)$,

$\therefore\quad n\left(\frac{b^{2n+2}}{a^{2n}}-a^2\right)=(n+1)\left(\frac{b^{2n+2}}{a^{2n}}\cdot\frac{a}{b}-ab\right)$,

卽 $\left(\frac{b^{n+1}}{a^n}\right)^2=\frac{(n+1)ab^2-a^2bn}{(n+1)a-nb}=\{-na+(n+1)b\}\left\{\frac{ab}{(n+1)a-nb}\right\}$,

由是如題所云.

94. $\frac{x}{(x-a)(x-b)}$ 排列於 x 之遞昇方乘之開散式中, x^n 之係數爲 $\frac{a^n-b^n}{a-b}\cdot\frac{1}{a^nb^n}$, 又 $\frac{(1+x^2)^n}{(1-x)^3}$ 之開散式中 x^{2n} 之係數爲 $2^{n-1}(n^2+4n+2)$.

(解) $\frac{x}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}\right)$

$$=\frac{1}{a-b}\left\{-\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-1}+\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-1}\right\},$$

故 x^n 之係數爲 $\frac{1}{a-b}\left\{-\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\right\}=\frac{a^n-b^n}{a^nb^n(a-b)}$.

又 $\frac{(1+x^2)^n}{(1-x)^3}=\frac{\{(1-x)^2+2x\}^n}{(1-x)^3}$

$$=(1-x)^{2n-3}+2nx(1-x)^{2n-5}+\dots+\frac{n(n-1)}{2}(1-x)(2x)^{n-2}$$
$$+\frac{n}{1-x}(2x)^{n-1}+\frac{(2x)^n}{(1-x)^3}.$$

故 x^{2n} 在最後兩項之內,

由是 x^{2n} 之係數 $=n2^{n-1}+\frac{2^n(n+1)(n+2)}{2}=2^{n-1}(n^2+4n+2)$.

95. 解下之方程式,

$$\sqrt{x-y}+\frac{1}{2}\sqrt{x+y}=\frac{x-1}{\sqrt{x-y}},\ x^2+y^2:xy=34:15.$$

(解) 由第二得 $15x^2+15y^2=34xy$, 即 $(5x-3y)(3x-5y)=0$.

又由第一得 $2(x-y)+\sqrt{x^2-y^2}=2x-2$, $\therefore\ x^2=y^2+4(y-1)^2$.

$5x=3y$, 則 $\frac{9y^2}{25}=y^2+4(y-1)^2$, $\therefore\ y=\frac{25\pm10\sqrt{-1}}{29}$.

$3x=5y$, 則 $\frac{25}{9}y^2=y^2+4(y-1)^2$, $\therefore\ y=3$ 或 $\frac{3}{5}$.

由是 $x=5,1,\ \frac{15\pm9\sqrt{-1}}{29},\quad y=3,\ \frac{3}{5},\ \frac{25\pm10\sqrt{-1}}{29}$.

96. $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\cdots\cdots$ 以二次不盡根之形示之.

(解) $F=1+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\cdots\cdots$ $\therefore\ F-1=\frac{1}{3+}\frac{1}{2+F-1}$,

$F-1=\frac{F+1}{3F+4}$, $\qquad\therefore\qquad F=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

97. 任意整數之立方,可以兩平方數之差示之,又各奇數之立方,此方法有二種,

又連續兩數之立方差,可以兩平方數之差示之.

(解) $n^3=\frac{1}{4}\{4n^2.n\}=\frac{1}{4}\{(n^2+n)^2-(n^2-n)^2\}$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$$ 即兩整數之平方差.

n 為奇數,則可以下式之形示之,即有二種方法,

$$n^3=\left(\frac{n^3+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n^3-1}{2}\right)^2$$ 即兩整數之平方差.

98. 求 $\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{2}{\underline{|5}}+\frac{3}{\underline{|7}}+\frac{4}{\underline{|9}}++\cdots\cdots$之無限級數之値.

(解) $2S=\frac{2}{\underline{|3}}+\frac{4}{\underline{|5}}+\frac{6}{\underline{|7}}+\frac{8}{\underline{|9}}\cdots\cdots\cdots$

$$=\frac{3-1}{\underline{|3}}+\frac{5-1}{\underline{|5}}+\frac{7-1}{\underline{|7}}+\frac{9-1}{\underline{|7}}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}-\frac{1}{\underline{|5}}+\frac{1}{\underline{|6}}-\frac{1}{\underline{|7}}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{e},\qquad\therefore\qquad S=\frac{1}{2e}.$$

99. $x=\frac{a}{b+}\frac{c}{d+}\frac{a}{b+}\frac{c}{d+}\cdots\cdots$ 及 $y=\frac{c}{d+}\frac{a}{b+}\frac{c}{d+}\frac{a}{b+}\cdots$

然則 $bx-dy=a-c$.

(解) $x=\frac{a}{b+y}$, $y=\frac{c}{d+x}$, 由是 $xy+bx=a$, $xy+dy=c$,

$\therefore\quad bx-dy=a-c$.

100. 求 $1+5x+7x^2+17x^3+31x^4+\cdots\cdots$ 級數之 n 項之和及 n 項之値.

(解) 級數率爲 $1-px-qx^2$, 則

$$S=1+5x+7x^2+17x^3+31x^4+\cdots\cdots\cdots$$

$$-pxS=\quad -px-5px^2-7px^3-17px^4-\cdots\cdots\cdots$$

$$-px^2S=\qquad\qquad -qx^2-5qx^3-7qx^4-\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad S(1-px-qx^2)=1+(5-p)x,$$

p 及 q 之値可由 $7-5p-q=0$, $17-7p-5q=0$ 得之,

即 $p=1$, $q=2$.

由是 $S=\frac{1+4x}{1-x-2x^2}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1+x}$,

而第 n 項 $=\{2^n+(-1)^n\}x^{n-1}$,

n 項之和 $=\frac{2(1-2^nx^n)}{1-2x}-\frac{1-(-1)^nx^n}{1+x}$.

101. a, b, c 爲 H. P. 則

(1) $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}>4$. (2) $b^2(a-c)^2=2\{c^2(a-b)^2+a^2(c-b)^2\}$.

(解) (1) $b=\frac{2ac}{a+c}$, $\therefore \frac{a+b}{2a-b}=\frac{a(a+c)+2ac}{2a(a+c)-2ac}=\frac{a+3c}{2a}$,

由是 $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{a+3c}{2a}+\frac{c+3a}{2c}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$.

但 $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}>2$, $\therefore \frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}>1+\frac{3}{2}\times 2=4$.

(2) $b^2(a-c)^2=b^2(a^2-2ac+c^2)=2b^2(a^2+c^2)-b^2(a+c)^2$

$$=2b^2(a^2+c^2)-\left(\frac{2ac}{a+c}\right)^2(a+c)^2$$

$$=2b^2(a^2+c^2)-4a^2c^2=2\{b^2(a^2+c^2)-2a^2c^2\}$$

$$=2\{b^2(a^2+c^2)+2a^2c^2-2acb(a+c)\}$$

$$=2\{c^2(b-a)^2+a^2(c-b)^2\}.$$

102. a, b, c 皆爲實數,而 $x^3-3b^2x+2c^3$ 可以 $x-a$ 及 $x-b$ 除之,則 $a=b=c$ 或 $a=-2b=-2c$.

(解) $x=a$ 及 $x=b$, 則 $a^3-3ab^2+2c^3=0$, $b^3-3b^3+2c^3=0$, 由第二得 $b^3-c^3=0$, 但 b 及 c 爲實數, $\therefore b=c$.

故由第一得 $a^3-3ab^2-2b^3=0$, $\therefore a=b$ 或 $a=-2b$.

103. 於連續三奇數之平方和加 1, 則以 12 可整除之,然不能以 24 整除之.

(解) 三奇數爲 $2n-1,\ 2n+1,\ 2n+3$, 則

$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1=12(n^2+n+1)$, 但 n^2+n 爲偶數, 故 n^2+n+1 爲奇數, 故此和爲 12 之奇數倍.

104. a 爲負數或正數,而 $\dfrac{ac-b^2}{a}$ 爲 $ax^2+2bx+c$ 之最大値及最小値.

x, y, z 爲實數而 $x^4+y^4+z^4+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=2xyz(x+y+z)$, 則 $x=y=z$.

(解) $ax^2+2bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2+\dfrac{ac-b^2}{a}$, 故 a 爲正. 則

$a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2$ 爲正,故 $ax^2+2bx+c$ 之最小値爲 $\dfrac{ac-b^2}{a}$.

又 a 爲負,則 $a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2$ 爲負,故 ax^2+bx+c 之最大値爲 $\dfrac{ac-b^2}{a}$,

次之恆同式爲 $(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2=0$,

$\therefore\quad x^2-yz=0,\ y^2-zx=0,\ z^2-xy=0$,

又 $\quad x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=0$,

卽 $\quad (y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=0$,

$\therefore\quad x=y=z$.

105. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}$ 之開散式爲

$$\frac{x}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^5}{10}+\cdots$$

(解) 原式 $=\dfrac{\sqrt{1+x}}{2}-\dfrac{\sqrt{1-x}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{4}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^3}{6}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^4}{8}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{x^5}{10}-\cdots\right)\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{4}-\frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^3}{6}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^4}{8}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{x^5}{10}-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^3}{6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{x^5}{10}+\cdots\cdots\cdots$$

106. α,β 爲兩方程式 $x^2+px+q=0$, $x^{2n}+p^nx^n+q^n=0$ 之根，則 $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ 爲 $x^n+1+(x+1)^n=0$ 之根，但 n 爲偶數.

(解) $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$,

又 $\alpha^{2n}+p^n\alpha^n+q=0$, 及 $\beta^{2n}+p^n\beta^n+q=0$,

由是 $\alpha^{2n}-\beta^{2n}+p^n(\alpha^n-\beta^n)=0$, 即 $\alpha^n+\beta^n+p^n=0$,

n 爲偶數，故 $p^n=(\alpha+\beta)^n$, $\therefore$ $\alpha^n+\beta^n+(\alpha+\beta)^n=0$,

變之，則 $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n+1+\left(\frac{\beta}{\alpha}+1\right)^n=0$, 或 $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1+\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^n=0$,

$\therefore$ $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ 爲根之方程式爲 $x^n+1+(x+1)^n=0$.

107. 求無限連分數 $a+\frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\cdots$ 及 $c+\frac{d}{2c+}\frac{d}{2c+}\frac{d}{2c+}\cdots\cdots\cdots$ 之平方差.

(解) 兩連分數之値爲 x 及 y, 則

$x-a=\frac{b}{2a+(x-a)}$, $\therefore$ $x^2=a^2+b$, 同法 $y^2=c^2+d$,

$\therefore$ $x^2-y^2=a^2+b-c^2-d$.

108. 有若干金，若干人配分之，第二人比第一人多得 1 兩，第三人比第二人多得 2 兩，第四人比第三人多得 3 兩，以下皆如此配分之，若第一人得 1 兩，則最後之人得 67 兩，此人數及銀數如何.

(解) n 爲人數，則最後之人所得之銀數爲

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=1+\frac{n(n-1)}{2},$$

$\therefore \quad 1+\frac{n(n-1)}{2}=3\times20+7, \qquad \therefore \quad n=12.$

由是銀數為 $\sum\left\{1+\frac{n(n-1)}{2}\right\}=n+\frac{1}{2}\sum n(n-1)$

$$=n+\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)=12+\frac{1}{6}(12+1)12(12-1)=298.$$

109. 解下之方程式.

(1) $\frac{x}{a}+\frac{y+z}{b+c}=\frac{y}{b}+\frac{z+x}{c+a}=\frac{z}{c}+\frac{x+y}{a+b}=2.$

(2) $\frac{x^2+y^2}{xy}+x^2+y^2=13\frac{1}{3}, \quad \frac{xy}{x^2+y^2}+xy=3\frac{3}{10}.$

(解) $(b+c)x+a(y+z)=2a(b+c), \qquad (c+a)y+b(z+x)=2b(c+a),$

$(a+b)z+c(x+y)=2c(a+b),$

第一第二相加減第三, 則 $bx+ay=2ab$,

即 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, 同法 $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=2$, $\frac{z}{c}+\frac{x}{a}=2$,

由是 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=1, \qquad \therefore \quad x=a, y=b, z=c.$

(2) $3(x^2+y^2)(1+xy)=40xy$, 及 $10xy(1+x^2+y^2)=33(x^2+y^2)$,

即 $x^2+y^2=\frac{40xy}{3(1+xy)}, \quad x^2+y^2=\frac{10xy}{33-10xy}$,

$\therefore \quad \frac{40xy}{3(1+xy)}=\frac{10xy}{33-10xy}$,

由是 $xy=0$ 或 3.

$xy=0$ 為不合理, 故可省之

又 $xy=3$, 則 $x^2+y^2=10$,

由是 $x=3, y=1$, 或 $x=1, y=3$.

110. a 及 b 爲正數而不等,則 $a^n-b^n>n(a-b)(ab)^{\frac{n-1}{2}}$.

(解) $a^{n-1}+b^{n-1}>2(ab)^{\frac{n-1}{2}}$, $a^{n-2}b+ab^{n-2}>2(ab)^{\frac{n-1}{2}}$

$a^{n-3}b^2+a^2b^{n-3}>2(ab)^{\frac{n-1}{2}}$, $a^{n-4}b^3+a^3b^{n-4}>2(ab)^{\frac{n-1}{2}}$,

由是 $a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}>n(ab)^{\frac{n-1}{2}}$,

兩邊以 $a-b$ 乘之,則 $a^n-b^n>n(a-b)(ab)^{\frac{n-1}{2}}$.

111. $\frac{763}{396}$ 以連分數示之,又求適合於 $396x-763y=12$ 之 x 及 y 之最小值.

(解)
```
396)763(1
    396
    367)396(1
        367
         29)367(12
            348
             19)29(1
                19
                10)19(1
                   10
                    9)10(1
                       9
                       1)9(9
                         9
```

$\therefore\ \frac{763}{396}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{12}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{9}$.

連次漸近分數爲 $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{25}{13}$, $\frac{27}{14}$, $\frac{52}{27}$, $\frac{79}{41}$.

由是 $79.396-41.763=1$, $\therefore\ 948.396-492.763=396x-763y$.

$\therefore\ \frac{x-948}{763}=\frac{y-492}{396}=t$, 則

由是 $x=948+763t,\quad y=492+396t,\quad \therefore\quad x=948,\ y=492$

112. 有一事，甲一人作之，比乙丙二人作之，需日數 m 倍，乙一人作之，比甲丙二人作之，需日數 n 倍，丙一人作之，比甲乙二人作之，需日數 p 倍，然則各一人作之，其日數之比為 $m+1:n+1:p+1$，試證之

又證 $\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{p}{p+1}=2.$

(解) 一事為 w，甲，乙，丙各一人作 w 之日數為 x, y, z，則各一日之業為 $\dfrac{w}{x},\ \dfrac{w}{y},\ \dfrac{w}{z}$，

由題意 $\dfrac{mw}{x}=\dfrac{w}{y}+\dfrac{w}{z},\qquad \therefore\quad \dfrac{m}{x}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z},$

同法 $\dfrac{n}{y}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x},\qquad \dfrac{p}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}.$

$$\therefore\quad \frac{m+1}{x}=\frac{n+1}{y}=\frac{p+1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),$$

$$\therefore\quad \frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1,$$

由是 $1-\dfrac{1}{m+1}+1-\dfrac{1}{n+1}+1-\dfrac{1}{p+1}=3-1,$

即 $\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{p}{p+1}=2.$

113. 寄宿所之費用，一部為常數，他一部因寄宿人多少而變，而每年每人給食費 65 磅，有 50 人，則每人之利益為 9 磅，若有 60 人，則每人之利益為 10 磅 13 先令 4 辨士，問有 80 人，則其利益如何

（解） 人數爲 M，利益爲 P 磅，則 $M(65-P)=C+mM$，但 C 爲常費，而 m 爲某常數.

由是 $M=50$，則 $P=9$，　故 $2800=C+50m$，

又　$M=60$，則 $P=10\frac{2}{3}$，　故 $3260=C+60m$，

$\therefore\quad m=46,\ C=500.$

由是 $M=80$，則 $80(65-P)=500+80\times 46$，　$\therefore\quad P=12\frac{3}{4}$，

即所求之利益爲 12 磅 15 先令.

114. $x^2y=2x-y$，而 x^2 不大於 1，則

$$4\left(x^2+\frac{x^6}{3}+\frac{x^{10}}{5}+\cdots\right)=y^2+\frac{y^4}{2}+\frac{y^6}{3}+\cdots\cdots\cdots$$

（解） $y=\frac{2x}{1+x^2}$，$\therefore\quad 1-y^2=1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2=\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2$，變之爲對數式，則 $-\log(1-y^2)=2\{\log(1+x^2)-\log(1-x^2)\}$，

即　$y^2+\frac{y^4}{2}+\frac{y^6}{3}+\cdots\cdots=4\left\{x^2+\frac{x^6}{6}+\frac{x^{10}}{5}+\cdots\right\}$.

115. $\frac{x}{a^2-y^2}=\frac{y}{a^2-x^2}=\frac{1}{b}$，及 $xy=c^2$，a 及 c 不等，則

$(a^2-c^2)^2-b^2c^2=0$，或 $a^2+c^2-b^2=0$.

（解） $x(a^2-x^2)=y(a^2-y^2)$，即 $(x-y)(x^2+xy+y^2-a^2)=0$，

$\therefore\quad x-y=0$，或 $x^2+xy+y^2=a^2$，即 $x^2+y^2=a^2-c^2$.

第一 $x=y$，則 $x=y=\pm c$，

由是 $\frac{\pm c}{a^2-c^2}=\frac{1}{b}$，　$\therefore\quad a^2-c^2=bc$，或 $a^2-c^2=-bc$，

$$\therefore\quad (a^2-c^2)^2-b^2c^2=0.$$

第二 $x^2+y^2=a^2-c^2$，則

$\frac{xy}{(a^2-y^2)(a^2-x^2)}=\frac{1}{b^2}$，即 $\frac{xy}{a^4-a^2(x^2+y^2)+x^2y^2}=\frac{1}{b^2}$，由是

$$\frac{c^2}{a^4-a^2(b^2-c^2)+c^4}=\frac{1}{b^2},\quad \therefore\quad a^2+c^2=b^2.$$

116. $(1+x+x^2)^{3r}=1+k_1x+k_2x^2+\dots\dots\dots$

及 $(x-1)^{3r}=x^{3r}-c_1x^{3r-1}+c_2x^{3r-2}-\dots\dots\dots$則

(1) $1-k_1+k_2-\dots.=1,$ (2) $1-k_1c_1+k_2c_2-\dots.=\pm\frac{\lfloor 3r}{\lfloor r\lfloor 2r}.$

(解) (1) $(1+x+x^2)^{3r}=1+k_1x+k_2x^2+\dots.$之式中 $x=-1$, 則

$$1=1-k_1+k_2-,\dots\dots\dots$$

(2) $(x^3-1)^{3r}=(x-1)^{3r}(x^2+x+1)^{3r}$

$$=(x^{3r}-c_1x^{3r-1}+c_2x^{3r-2}-\dots.)(1+k_1x+k_2x^2+\dots.),$$

左邊 $(x^3-1)^{3r}$ 之式中 x^{3r} 之係數爲 $(-1)^r\frac{\lfloor 3r}{\lfloor r\lfloor 2r}$,

右邊 x^{3r} 之係數爲 $1-c_1k_1+c_2k_2-\dots\dots\dots$

117. 解下之方程式.

(1) $(x-y)^2+2ab=ax+by,\quad xy+ab=bx+ay.$

(2) $x^2-y^2+z^2=6,\quad 2yz-zx+2xy=13,\quad x-y+z=2.$

(解) (1) 由第二得 $(x-a)(y-b)=0,\quad\therefore\quad x=a$, 或 $y=b$,

$x=a$, 則由第一得 $(a-y)^2+2ab=a^2+by$,

$\therefore\quad y^2-2ay-by+2ab=0,\quad\therefore\quad y=b$ 或 $2a$.

又 $y=b$, 則由第一得 $(x-b)^2+2ab=ax+b^2,\quad\therefore\quad x=a$ 或 $2b$.

由是 $x=a,\ a,\ 2b,$

$y=b,\ 2a,\ b.$

(2) 由第三得 $x+z=2+y$, 由第二得 $2y(x+z)-zx=13$,

$\therefore\quad 2y(2+y)-zx=13$, 卽 $zx=2y^2+4y-13$.

又由第三得 $x^2+2xz+z^2=4+4y+y^2$, 卽 $x^2-y^2+z^2+2xz=4+4y$,

$\therefore\quad 6+2(2y^2+4y-13)=4+4y,$

$\therefore\quad y^2+y-6=0,\quad\therefore\quad y=2$ 或 -3.

又 $x+z=2+y$, 則 $x+z=4$ 或 -1,
及 $zx=2y^2+4y-13$, 則 $zx=3$ 或 -7.

118. 有 n 正數量 $a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n$,

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots.<\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots.+a_n).$$

則此各二個之積之平方根之等差中項小於原數量之等差中項,試證之.

(解) 自 n 字取各二個,其方法有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 種.

故 $2\sqrt{a_1a_2}<a_1+a_2$ 之形之不等式,取 $\frac{n(n-1)}{2}$ 對相加,則

$$2\sqrt{a_1a_2}+2\sqrt{a_1a_3}+\ldots.<(a_1+a_2)+(a_1+a_3)\ldots.\text{至 }\frac{n(n-1)}{2}\text{ 對}$$
$$<a_1+a_2+a_3+\ldots.\text{至 }n(n-1)\text{ 項},$$

右邊之 $n(n-1)$ 項中含 n 文字 $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ 各相等之數,故各字之數爲 $n(n-1)\div n=n-1$,

$$\therefore\quad 2\sqrt{a_1a_2}+2\sqrt{a_1a_3}+\ldots.<(n-1)(a_1+a_2+a_3+\ldots.).$$

又兩邊以 $n(n-1)$ 除之,則

$$\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots.}{\frac{n(n-1)}{2}}<\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots.}{n}.$$

119. $b^2x^4+a^2y^4=a^2b^2$, 及 $a^2+b^2=x^2+y^2=1$, 則

$$b^4x^6+a^4y^6=(b^2x^4+a^2y^4)^2.$$

(解) $\cdot b^2x^4+a^2y^4=a^2b^2(1)=a^2b^2(x^2+y^2)$,

即 $\quad b^2x^2(x^2-a^2)=a^2y^2(b^2-y^2)$

但 $x^2-a^2=b^2-y^2$, $\therefore\quad b^2x^2=a^2y^2$, $\therefore\quad a^2b^2x^2y^2=b^4x^4=a^4y^4$.

今 $b^4x^6+a^4y^6=(b^4x^6+a^4y^6)(x^2+y^2)$

$$=b^4x^8+a^4y^8+x^2y^2(b^4x^4+a^4y^4)$$
$$=b^4x^8+a^4y^8+2a^2b^2x^4y^4=(b^2x^4+a^2y^4)^2$$

120. 求第 r 項 (1) 爲 $\frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$, (2) 爲 $(a+r^2b)x^{n-r}$ 之級數最初 n 項之和.

(解) (1) $\frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{(r+1)^2}$,

$$\therefore\quad S=\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}\right\}-\left\{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\overline{n+1}^2}\right\}$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

(2) $S=a(x^{n-1}+x_n^{-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+1)$

$\quad +b(1x^{n-1}+4x^{n-2}+9x^{n-3}+\cdots\cdots+n^2)$,

但 $x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+1+=\frac{1-x^n}{1-x}$.

又第二級數以 $\left(1-\frac{1}{x}\right)^3$ 爲級數率, 而爲循環級數, 何則, 第二級數以 $1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ 乘之, 則其積之最初二項爲 $x^{n-1}+x^{n-2}$, 而其他項皆爲 0, 而

$\frac{1}{x}$ 之係數 $=-3n^3+3(n-1)^2-(n-1)^2=-(n+1)^2$,

$\frac{1}{x^2}$ 之係數 $=3n^2-(n-1)^2=2n^2+2n-1$,

$\frac{1}{x^3}$ 之係數 $=-n^2$.

$$\therefore\quad S=a\frac{x^n-1}{x-1}$$

$$+\frac{b}{(x-1)^3}\{x^{n+2}+x^{n+1}-(n+1)^2x^2+(2n^2+2n-1)x-n^2\}$$

121. 求 $\frac{x+2}{2x^2+3x+6}$ 之最大値.

(解) $\frac{x+2}{2x^2+3x+6}=y$, 則 $2yx^2+(3y-1)x+6y-2=0$.

x 爲實數, 則 $(3y-1)^2>8y(6y-2)$,

即 $1+10y-39y^2=(1+13y)(1-3y)>0$, $\therefore$ y 之最大值爲 $\frac{1}{3}$.

122. 解下之方程式.

(1) $1+x^4=7(1+x)^4$, (2) $3xy+2z=xz+6y=2yz+3x=0$.

(解) (1) $3x^4+14x^3+21x^2+14x+3=0$,

即 $3(x^2+1)^2+14x(x^2+1)+15x^2=0$,

即 $\{3(x^2+1)+5x\}\{(x^2+1)+3x\}=0$,

$\therefore$ $3(x^2+1)+5x=0$, 或 $x^2+1+3x=0$.

由是 $x=\frac{-5\pm\sqrt{-11}}{6}$, 或 $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

(2) $3xy=-2z$, $xz=-6y$, $2yz=-3x$,

由乘法得 $6x^2y^2z^2=-36xyz$, $\therefore$ $xyz=0$, 或 $xyz=-6$.

$xyz=0$, 則 $x=0$, $y=0$, $z=0$, 適合於原方程式,

$xyz=-6$, 則 $3x^2=-2xyz=12$, 又 $6y^2=-xyz=6$,

及 $2z^2=-3xyz=18$, $\therefore$ $x=\pm2$, $y=\pm1$, $z=\pm3$.

123. a_1, a_2, a_3, a_4 爲開散二項式之任意連續係數, 則

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

(解) $(1+x)^n$ 之開散式中 $x^r, x^{r+1}, x^{r+2}, x^{r+3}$ 之係數爲 a_1, a_2, a_3, a_4,

則 $\frac{a_1}{a_1+a_2}=\frac{1}{1+\frac{a_2}{a_1}}=\frac{1}{1+\frac{{}_nC_{r+1}}{{}_nC_r}}=\frac{1}{1+\frac{n-r}{r+1}}=\frac{r+1}{n+1}$.

同樣 $\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{r+3}{n+1}$, 及 $\frac{a_2}{a_2+a_3}=\frac{r+2}{n+1}$, 由是得證.

124. 分 $\dfrac{x^3+7x^2-x-8}{(x^2+x+1)(x^2-3x-1)}$ 爲若干項,及開散 $\dfrac{3x-8}{x^2-4x+4}$ 求其普通項.

(解) $\dfrac{x^3+7x^2-x-8}{(x^2+x+1)(x^2-3x-1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-3x-1}$,

然則 $x^3+7x^2-x-8=(Ax+B)(x^2-3x-1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$..(1)

$x^2-3x-1=0$, 卽 $x^2=3x+1$, 則

$$x^3+7x^2-x-8=x(3x+1)+7x^2-x-8=10x^2-8=30x+2,$$

及 $(Cx+D)(x^2+x+1)=(Cx+D)(4x+2)$

$$=4C(3x+1)+4Dx+2Cx+2D=(14C+4D)x+(4C+2D),$$

$$\therefore\quad 30x+2=(14C+4D)x+(4C+2D),$$

卽 $7C+2D=15$, 及 $2C+D=1$. $\therefore\quad C=\dfrac{13}{3},\quad D=-\dfrac{23}{3}$.

又 (1) 式中係數相等, 則

$A+C=1$; 及 $-B+D=-8$, $\therefore\quad A=-\dfrac{10}{3}$, 及 $B=\dfrac{1}{3}$.

由是 $\dfrac{x^3+7x^2-x-8}{(x^2+x+1)(x^2-3x-1)}=\dfrac{1}{3}\,\dfrac{13x-23}{x^2-3x-1}-\dfrac{1}{3}\,\dfrac{10x-1}{x^2+x+1}$.

次解第二問題.

$$\frac{3x-8}{4-4x+x^2}=\frac{1}{4}(3x-8)\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$$

$$=\frac{1}{4}(3x-8)\left\{1+\ldots\ldots+\frac{rx^{r-1}}{2^{r-1}}+\frac{(r+1)x^r}{2^r}+\ldots\ldots\right\}.$$

由是 x^r 之係數 $=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{3r}{2^{r-1}}-\dfrac{8(r+1)}{2^r}\right\}=\dfrac{6r-8(r+1)}{2^{r+2}}=-\dfrac{r+4}{2^{r+1}}$.

125. $\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{2}x+2x^2+lx^3+5x^4+7x^5+\ldots\ldots$ 之循環級數,其級數率爲二次式,而求第四項之未知係數之級數率及普通項.

(解) 級數率為 $1-px-qx^2$, 則

$$2=-\frac{1}{2}p+\frac{5}{4}q,\quad l=2p-\frac{1}{2}q,\quad 5=pl+2q,\quad 7=5p+ql.$$

由最初兩方程式得 $9p=5l+4$, 及 $9q=2l+16$, 由是

$45=l(5l+4)+2(2l+16)$, 卽 $5l^2+8l=13$, $\therefore\ l=1$ 或 $-\frac{13}{5}$.

唯 $l=1$ 適合於第四方程式 $7=5p+ql$, 卽 $l=1, p=1, q=2$,
而級數率為 $1-x-2x^2$.

$$由是原式之分數=\frac{\frac{5}{4}-\frac{7}{4}x}{1-x-2x^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{1+x}+\frac{1}{1-2x}\right),$$

而普通項 $=\frac{1}{4}\{2^{n-1}+4(-1)^{n-1}\}x^{n-1}=\{2^{n-3}+(-1)^{n-1}\}x^{n-1}$.

126. x, y, z 不等,而 $2a-3y=\frac{(z-x)^2}{y}$, 及 $2a-3z=\frac{(x-y)^2}{z}$,

則 $2a-3x=\frac{(y-z)^2}{x}$, 及 $x+y+z=a$.

(解) 由既知兩恒同式,

$(2a-3y)y-(2a-3z)z=(z-x)^2-(x-y)^2$,

卽 $2a(y-z)-3(y^2-z^2)=(z-y)(z-2x+y)$, 但 $y-z\neq 0$,

$\therefore\quad 2a-3(y+z)=-(z-2x+y)$, $\quad\therefore\quad x+y+z=a$.

次由 $2a-3y=\frac{(z-x)^2}{y}$ 得 $2(x+y+z)-3y=\frac{(z-x)^2}{y}$,

卽 $2xy-y^2+2yz=z^2-2zx+x^2$, $\quad\therefore\quad x(2y+2z-x)=(y-z)^2$,

由是 $2(y+z+x)-3x=\frac{(y-z)^2}{x}$, $\quad\therefore\quad 2a-3x=\frac{(y-z)^2}{x}$.

127. 解下之方程式

(1) $xy+6=2x-x^2$, $xy-9=2y-y^2$

(2) $(ax)^{\log a}=(by)^{\log b}$, $b^{\log x}=a^{\log y}$,

(解) (1) $x^2+xy-2x+6=0,\ y^2+xy-2y-9=0,$

由加法得 $(x+y)^2-2(x+y)-3=0,\quad \therefore\ x+y=3$ 或 $-1.$

又由減法得 $(x+y)(x-y)-2(x-y)+15=0,$

故 $x+y=3$, 則 $3(x-y)-2(x-y)+15=0,\quad \therefore\quad x-y=-15,$

$\therefore\quad x=-6,\ y=9,$

次 $x+y=-1$, 則 $-(x-y)-2(x-y)+15=0,\quad \therefore\quad x-y=5,$

$\therefore\quad x=2,\ y=-3.$

(2) $\log a(\log a+\log x)=\log b(\log b+\log y),$

$\log x\log b=\log y\log a,\quad \therefore\quad \log y=\dfrac{\log x\log b}{\log a},$

由是 $\log a(\log a+\log x)=\log b\left(\log b+\dfrac{\log x\log b}{\log a}\right),$

$\therefore\quad \log x=\dfrac{-\log a\{(\log a)^2-(\log b)^2\}}{(\log a)^2-(\log b)^2}=-\log a=\log\left(\dfrac{1}{a}\right),\quad \therefore\quad x=\dfrac{1}{a},$

又 $\log y=\dfrac{-\log a\log b}{\log a}=-\log b=\log\left(\dfrac{1}{b}\right),\quad \therefore\quad y=\dfrac{1}{b},$

128. 求下之極限值.

(1) $x=\infty\quad x\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^4+a^4}.$

(2) $x=a\quad \dfrac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}.$

(解) (1) $\dfrac{x^2(x^2+a^2)-(x^4+a^4)}{x\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^4+a^4}}=\dfrac{a^2x^2-a^4}{x\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^4+a^4}}$

$$=\frac{a^2-\frac{a^4}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{a^4}{x^4}}}\ (\text{但 } x=\infty)=\frac{a^2-0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{a^2}{2}.$$

(2) $\dfrac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}=\dfrac{(a+2x)-3x}{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}}\cdot\dfrac{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}{(3a+x)-4x}$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}},(x=a)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{4a}+2\sqrt{a}}{\sqrt{3a}+\sqrt{3a}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}.$

129. 有兩數其積為 192, 以其 G. C. M. 及 L. C. M. 之調和中項除等差中項,其商為 $3\frac{25}{48}$, 兩數各如何.

(解) 兩數為 x, y, 則 $xy=192$.

g 為兩數之 G. C. M. 及 l 為 L. C. M. 則

$$3\frac{25}{48}=\frac{g+l}{2}\div\frac{2gl}{g+l}=\frac{(g+l)^2}{4gl}.$$

但 $xy=gl=192$ 明矣, $\therefore\quad (g+l)^2=3\frac{25}{48}\times4\times192,$

即 $g+l=52$, 又 $gl=192$, $\therefore\quad g=4,\ l=48.$

今 $x=4p,\ y=4q$, 則 p, q 互為素數,

而 $xy=16pq=192,\quad\therefore\quad pq=12,$

$\therefore\quad p=3,\ q=4$, 或 $p=1,\ q=12.$

由是 $x=12,\ y=16$, 或 $x=4,\ y=48.$

130. 解下之方程式.

(1) $\sqrt[3]{13x+37}-\sqrt[3]{13x-37}=\sqrt[3]{2}.$

(2) $b\sqrt{1-z^2}+c\sqrt{1-y^2}=a,\ c\sqrt{1-x^2}+a\sqrt{1-z^2}=b,$

$a\sqrt{1-y^2}+b\sqrt{1-x^2}=c.$

(解) (1) 兩邊為立方, 則

$(13x+37)-(13x-37)$

$-3\sqrt[3]{(13x+37)(13x-37)}(\sqrt[3]{13x+37}-\sqrt[3]{13x-37})=2,$

但 $\sqrt[3]{13x+37}-\sqrt[3]{13x-37}=\sqrt[3]{2}$, 故

$74-3\sqrt[3]{(13^2x^2-37^2)}\sqrt[3]{2}=2,$

卽 $24^3=2(13^2x^2-37^2)$, $\therefore$ $x^2=\dfrac{24^2.12+37^2}{13^2}$, $\therefore$ $x=\pm 7$.

(2) 由三方程式得 $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, 及 $\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1-z^2}$,

由是得 $x^2=\dfrac{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2}$, 又 y^2, z^2 亦同法.

131. 無限級數 $\dfrac{1}{2^3\underline{|3}}-\dfrac{1.3}{2^4\underline{|4}}+\dfrac{1.3.5}{2^5\underline{|5}}-\cdots$ 爲 $\dfrac{23}{24}-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$,

(解) $2^{\frac{3}{2}}=(1+1)^{\frac{3}{2}}$

$$=1+\frac{3}{2}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\underline{|2}}-\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\underline{|3}}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\underline{|4}}-\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\underline{|5}}+\cdots$$

$\therefore$ $2\sqrt{2}=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{8}-3S=\dfrac{23}{8}-3S$, $\therefore$ $S=\dfrac{23}{24}-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$.

132. 有三位數, 轉倒其位, 則爲 2 倍, 然則其百位及箇位之數字所成之數, 亦有如此之關係, 其證如何.
又證如此之數, 唯有一箇.

(解) 底數爲 r, 數字爲 a, b, c, 則

ar^2+br+c 以 2 乘之而爲 cr^2+br+a, 故 c 大於 a,
又 r 大於 a,b,c 明矣

故 $2c=r+a$, $2b+1=r+b$, $2a+1=c$,

由是 $(ar+c)\times 2=r(c-1)+r+a=cr+a$.

又 $r=2c-a=2(2a+1)-a=3a+2$, 卽有此關係之三位數, 但爲 $3a+2$ 之形而已.

133. 於 $\dfrac{1+x^3}{(1-x^2)(1-x)}$, 及 $1-x+x^2$ 之積求 x^{12} 及 x^r 之係數.

(解) $\dfrac{1+x^3}{(1-x^2)(1-x)}\times(1-x+x^2)=\dfrac{(1-x+x^2)^2}{(1-x)^2}=\left(1+\dfrac{x^2}{1-x}\right)^2$

$$=1+2x^2(1-x)^{-1}+x^4(1-x)^{-2}$$

由是 x^r 之係數 $=2+(r-3)=r-1$, $\therefore$ x^{12} 之係數 $=11$.

134. 有矩形之地,縱邊之 3 倍,及橫邊之 2 倍之和爲 96 碼,則其最大面積如何.

(解) 縱橫二邊爲 x, y 碼,則 $3x+2y=96$,

$\therefore$ $(3x+2y)^2=24xy+(3x-2y)^2=96^2$, 故 xy 爲最大,則必 $3x-2y=0$,

由是 $xy=96^2\div 24=384$, 即 384 平方碼

135. $(a+b+c+d)^4+(a+b-c-d)^4+(a-b+c-d)^4+(a-b-c+d)^4-(a+b+c-d)^4-(a+b-c+d)^4-(a-b+c+d)^4-(-a+b+c+d)^4=192abcd$.

(解) 原式之右邊 $a=0$, 則原式爲 0.

$\therefore$ 右邊 $=Mabcd$.

$a=b=c=d=1$, 代入右邊,則 $4^4-2^4-2^4-2^4-2^4=192$,

$\therefore$ $M=192$.

136. $x^4+ax^3+bx^2+cx+1$, 及 $x^4+2ax^3+2bx^2+2cx+1$ 皆爲完平方,求 a, b, c 之值.

(解) $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=(x^2+\frac{a}{2}x+1)^2$,

及 $x^4+2ax^3+2bx^2+2cx+1=(x^2+ax+1)^2$.

然比較係數而 $b=\frac{a^2}{4}+2$; $c=a$, $2b=a^2+2$, $2c=2a$,

故 $\frac{a^2}{2}+4=a^2+2$, $\therefore$ $a^2=4$, $\therefore$ $a=\pm 2$, $c=\pm 2$, $b=3$.

137. 解下之方程式,

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{x-y}}=3$, $x^2+y^2=65$.

(2)　$\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-1}=\dfrac{2}{\sqrt{3-2x^2}}$.

(解)　$\dfrac{2\sqrt[3]{x+y}}{2\sqrt[3]{x-y}}=\dfrac{1+3}{1-3}$，$\therefore\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{64}{-8}=-8$,

$\therefore\ \dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{9}$，$\therefore\ \dfrac{x^2}{49}=\dfrac{y^2}{81}=\dfrac{x^2+y^2}{130}=\dfrac{65}{130}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore\ x=\pm\dfrac{7}{\sqrt{2}}$. $y=\pm\dfrac{9}{\sqrt{2}}$.

(2)　$(2x^2+1)+(2x^2-1)=2$ 明矣，此各邊以原方程式之各邊除之；則 $\sqrt{(2x^2+1)}+\sqrt{(2x^2-1)}=\sqrt{(3-2x^2)}$,

$\therefore\ 4x^2+2\sqrt{(4x^4-1)}=3-2x^2$,　$\therefore\ (6x^2-3)^2=4(4x^4-1)$,

由是　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $\pm\sqrt{\dfrac{13}{10}}$.

138.　羊 10 頭，以某價賣之，他 5 頭每頭之價增 10 先令賣之，而各部之共價爲二位同數字之磅數，每頭之價如何.

(解)　二位數字爲 x 及 y，每頭各價之差爲 $\dfrac{10}{20}$ 磅，故

$\dfrac{10x+y}{10}-\dfrac{10y+x}{5}=\dfrac{10}{20}$，卽 $8x-19y=5$，而 x 及 y 小於 10 明矣，由是 $x=3$, $y=1$.

故最初每頭之價爲 $\dfrac{31}{10}$ 磅 $=3$ 磅 2 先令.

139.　求下之 n 項之和.

(1)　$(2n-1)+2(2n-3)+3(2n-5)+\cdots\cdots\cdots$

(2)　1, 3, 6, 10, 15,....之各平方和.

(3)　級數 (2) 之奇數項之和.

(解)　(1)　$S=2n(1+2+3+\cdots\cdots+n)-(1.1+2.3+3.5+\cdots\cdots)$,

但 $1.1+2.3+3.5+\ldots\ldots+n(2n-1)=2\sum n^2-\sum n$

$$=2.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\therefore\quad S=2n\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left\{2n-\frac{2(2n+1)}{3}+1\right\}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(2) 普通項$=\frac{n(n+1)}{2}$,

$$\therefore\quad S=\sum\frac{n^2(n+1)^2}{2}=\frac{1}{4}\sum n(n+1)\{(n+2)(n+3)-4(n+2)+2\}$$

$$=\frac{1}{4}\{\sum n(n+1)(n+2)(n+3)-4\sum n(n+1)(n+2)+2\sum n(n+1)\},$$

但 $\sum n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$,

$$\sum n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

$$\sum n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$S=\frac{1}{4}\left\{n\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}-n(n+1)(n+2)(n+3)\right.$$

$$\left.+\frac{2n(n+1)(n+2)}{3}\right\}=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1).$$

(3) 普通項爲 $\frac{1}{2}(2n-1)2n$, 卽 $n(2n-1)$,

$$\therefore\quad S=\sum n(2n-1)=2\sum n^2-\sum n=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1).$$

140. α, β, γ 爲方程式 $x^3+qx+r=0$ 之三根，則

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)=5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)$$

（解） 由 $\alpha+\beta+\gamma=0$. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$, $\alpha\beta\gamma=-r$ 之關係可直得之．

又 $1+qy^2+ry^3=(1+\alpha y)(1+\beta y)(1+\gamma y)$,

$$\log\{1+(qy^2+ry^3)\}=\log(1+\alpha y)+\log(1+\beta y)+\log(1+\gamma y),$$

即 $$\frac{qy^2+ry^3}{1}-\frac{(qy^2+ry^3)^2}{2}+\frac{(qy^2+ry^3)^3}{3}-\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{\alpha y}{1}-\frac{\alpha^2y^2}{2}+\frac{\alpha^3y^3}{3}-\cdots\right)+\left(\frac{\beta y}{1}-\frac{\beta^2y^2}{2}+\frac{\beta^3y^3}{3}-\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{\gamma y}{1}-\frac{\gamma^2y^2}{2}+\cdots\right),$$

比較兩邊之係數，則 $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}=-q$,

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}=r,\quad \frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}{4}=\frac{q^2}{2},\quad \frac{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}{5}=-qr,$$

由是可得證．

141. 解下之方程式．

(1) $x(3y-5)=4$, $y(2x+7)=27$.

(2) $x^3+y^3+z^3=495$, $x+y+z=15$, $xyz=105$.

（解） (1) 第一以 2 乘之，第二以 3 乘之，由減法得

$-10x-21y=-73$, $\therefore\ x=\dfrac{1}{10}(73-21y)$, 代入第二，則

$y\left(\dfrac{73-21y}{5}+7\right)=27$, 即 $7y^2-36y+45=0$, $\therefore\ y=3$ 或 $\dfrac{15}{7}$,

故 $x=1$ 或 $\dfrac{14}{5}$.

(2) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$$=(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\},$$

即 $495-3(105)=15\{15^2-3(xy+yz+zx)\}$,

$\therefore\quad xy+yz+zx=71.$

由是 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$,

即 $\lambda^3-15\lambda^2+71\lambda-105=0$,

即 $(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)=0,\quad \therefore\ \lambda=3, 5, 7,$

又 $\lambda=x, y, z,\quad \therefore\quad x, y, z$ 之根爲 3, 5, 7.

142. a, b, c 爲 $x^3+qx^2+r=0$ 之三根, 則 $a+b-c,\ b+c-a,\ c+a-b$ 爲三根之方程式如何.

(解) $x=a$, 所求之方程式中 $y=b+c-a$, 則

由是 $y=(a+b+c)-2a=-q-2x,\quad \therefore\quad x=\frac{y+q}{2}$, 代入既知方程式, 則 $(y+q)^3-2q(y+q)^2+8r=0.$

143. 求下之級數.

(1) $n+(n-1)x+(n-2)x^2+\ldots\ldots+2x^{n-2}+x^{n-1}.$

(2) $3-x-2x^2-16x^3-28x^4-676x^5+\ldots\ldots$至無限.

(3) $6+9+14+23+40+\ldots\ldots$至 n 項.

(解) (1) $S=n+(n-1)x+(n-2)x^2+\ldots\ldots+2x^{n-2}+x^{n-1},$

$$xS=\qquad nx+(n-1)x^2+\ldots\ldots+3x^{n-2}+2x^{n-1}+x^n,$$

$\therefore\quad (1-x)S=n-(x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{n-1}+x^n)$

$$=n-\frac{x-x^{n+1}}{1-x},\qquad \therefore\qquad S=\frac{n}{1-x}-\frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2}.$$

(2) $1-px-qx^2-rx^3$, 爲級數率, 則

$$S=3-x-2x^2-16x^3-28x^4-676x^5-\ldots\ldots$$

$$-pxS=\ -3px+px^2+2px^3+16px^4+28px^5+\ldots\ldots$$

$$-qx^2S=\qquad -3qx^2+qx^3+2qx^4+16qx^5+\ldots\ldots$$

$$-rx^3S=\qquad\qquad -3rx^3+rx^4+2rx^5+\ldots\ldots$$

故 $S(1-px-qx^2-rx^3)=3-(3p+1)x-(3q-p+2)x^2$,

由是 $2p+q-3r=16,\ 16p+2q+r=28,\ 28p+16q+2r=676$,

$\therefore\quad p=-5,\ q=50,\ r=8.$

由是 $S=\dfrac{3+14x-157x^2}{1+5x-50x^2-8x^3}.$

(3) 原級數爲　6,　9,　14,　23,　40,………

第一差爲　3,　5,　9,　17,………

第二差爲　2,　4,　8,………

原級數之第 n 項爲 u_n, 第一差之第 n 項爲 v_n, 而第二差之第 n 項爲 2^n, 故 $u_n-u_{n-1}=v_{n-1}$, 及 $v_n-v_{n-1}=2^{n-1}$.

由是 $v_n-v_1=(v_n-v_{n-1})+(v_{n-1}-v_{n-2})+(v_{n-2}-v_{n-3})+\ldots+(v_2-v_1)$

$$=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+2=\frac{2^n-2}{2-1}=2^n-2.$$

但 $v_1=3$, 故 $v_n=2^n+1$.

又 $u_n-u_1=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+\ldots+(u_3-u_2)+(u_2-u_1)$

$\therefore\quad u_n-6=v_{n-1}+v_{n-2}+\ldots+v_2+v_1$

$$=(2^{n-1}+1)+(2^{n-2}+1)+\ldots+(2^2+1)+(2+1)$$

$$=(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2)+n-1=2^n-2+n-1,$$

$\therefore\quad u_n=2^n+n+3.$

由是 $S=\sum u_n=\sum 2^n+\sum n+3n=2^{n+1}-2+\dfrac{n(n+1)}{2}+3n$

$$=2^{n+1}+\frac{1}{2}n(n+7)-2.$$

144. 自 $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=a^{-1},\ x+y+z=b,\ x^2+y^2+z^2=c^2,\ x^3+y^3+z^3=d^3$, 消去 x, y, z.

又 x, y, z 爲有限値, 而其數不等, 證 b 不等於 d.

(解) 由第一得 $yz+zx+xy=\dfrac{1}{a}xyz,$

由第二第三得 $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=b^2-c^2$,

$\therefore\quad xy+yz+zx=\dfrac{b^2-c^2}{2}.$

$\therefore$ 由第一得 $xyz=a(yz+zx+xy)=\dfrac{a(b^2-c^2)}{2}.$

又由第三得 $x^3+y^3+z^3-3xyz+3xyz=d^3$,

即 $(x+y+z)\{(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\}+3xyz=d^3$,

由是 $b\left\{c^2-\dfrac{b^2-c^2}{2}\right\}+\dfrac{3a(b^2-c^2)}{2}=d^3.$

又由第二第三得

$b^3-d^3=(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$,

若 $b=d$, 則 $(x+y)(y+z)(z+x)=0$,

$\therefore$ x, y, z 爲相等之數.

145. $3x^2(x^2+8)+16(x^3-1)=0$ 有等根, 試求之.

(解) $3x^4+16x^3+24x^2-16=0$,

即 $(8x^4+16x^3)-5x^4+24x^2-16=0$,

即 $8x^3(x+2)-(5x^4-24x^2+16)=0$,

即 $8x^3(x+2)-(x^2-4)(5x^2-4)=0$,

即 $(x+2)\{8x^3-(x-2)(5x^2-4)\}=0$,

即 $(x+2)(3x^3+10x^2+4x-8)=0$,

即 $(x+2)\{3x^2(x+2)+4(x^2+x-2)\}=0$,

即 $(x+2)^2\{3x^2+4(x-1)\}=0$,

即 $(x+2)^3(3x-2)=0$, $\therefore\quad x=-2,\ -2,\ -2,\ \dfrac{2}{3}.$

別法 由高次式之法則求 $3x^4+16x^3+24x^2-16$, 及第一變函數 $12x^3+48x^2+48x$ 之 H. C. F. 得 $(x+2)^2$, 即得解.

146 有旅人行往某地，第一日行 1 哩，第二日行 3 哩，第三日行 5 哩，逐次如此，每日增 2 哩，此人起程三日之後，第二人自同地起程，行往同地，第二人第一日行 12 哩，第二日行 13 哩，逐次如此，每日增 1 哩，則第二人追及第一人在第幾日，又說明此問題之兩解答

(解) 所求之日數為 n，則 $1+3+5+\ldots$ 至 n 項 $=n^2$,

及 $12+13+\ldots$ 至$(n-3)$項$=\frac{n-3}{2}\{24+(n-4)\}$,

由是 $n^2=\frac{n-3}{2}\{n+20\}$，即 $n^2-17n+60=0$, $\therefore$ $n=5$ 或 12

第一人 第 5 日之速為 $1+(5-1)2=7$ 哩,

第二人 第 5 日之速為 $12+(2-1)1=13$ 哩，即第二人追及第一人之日也，然自第 6 日始，第一人行 9, 11, 13, ...哩，每日增 2 哩，至第 12 日之速為 23 哩，而第二人為 21 哩，則第一人再追及第二人，12 日以後，則第一人常在先.

147. 求 $\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\cdots$ 之值.

(解) $x=\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{x}$，即 $x=\frac{3x+2}{10x+7}$, $\therefore$ $x=\frac{\sqrt{6}-1}{5}$

148. 解 $x^3+3ax^2+3(a^2-bc)x+a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

(解) $(x+a)^3-3bc(x+a)+b^3+c^3=0$,

即 $(x+a)^3-3bc(x+a)+(b+c)^3-3bc(b+c)=0$,

即 $(x+a)^3+(b+c)^3-3bc(x+a+b+c)=0$.

$\therefore$ $x+a+b+c=0$, 或 $(x+a)^2-(x+a)(b+c)+(b+c)^2-3bc=0$.

由是 $x=-(a+b+c)$.

或 $(x+a)^2-(x+a)(b+c)+b^2-bc+c^2=0$,

即 $x+a=\frac{b+c}{2}\pm\sqrt{\frac{-3(b-c)^2}{4}}$, $\therefore$ $x=-a+\frac{b+c\pm(b-c)\sqrt{-3}}{2}$.

149. n 爲不能以 a, b 或 $a+b$ 除之之素數，則

$a^{n-2}b-a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3-\dots+ab^{n-2}=M(n)+1.$

(解) 由勿而買氏之定理 $a^n-a=M(n)$, $b^n-b=M(n)$,

由是 $(a^n+b^n)-(a+b)=M(n)$, 但 n 爲奇數明矣，故兩邊以 $a+b$ 除之，則 $a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\dots+b^{n-1}-1=M(n)$.

又 $a^{n-1}-1=M(n)$, 及 $b^{n-1}-1=M(n)$, 又 $a+b$ 因 n 爲素數，故

$$a^{n-2}b-a^{n-3}b^2+\dots+ab^{n-2}=M(n)+1.$$

150. 求無限項之和爲 $(1-abx^2)(1-ax)^{-2}(1-bx)^{-2}$ 之級數之第 n 項，及 n 項之和.

(解) $$\frac{1-abx^2}{(1-ax)^2(1-bx)^2}=\frac{1}{a-b}\left\{\frac{a}{(1-ax)^2}-\frac{b}{(1-bx)^2}\right\}.$$

$$\therefore\quad 第\ n\ 項=\frac{1}{a-b}\{na^nx^{n-1}-nb^nx^{n-1}\}=\frac{n(a^n-b^n)x^{n-1}}{a-b}.$$

$$又\ n\ 項之和=\frac{a-b}{a-b}+\frac{2(a^2-b^2)x}{a-b}+\frac{3(a^3-b^3)x^2}{a-b}+\dots+\frac{n(a^n-b^n)x^{n-1}}{a-b}$$

$$=\frac{1}{a-b}\{(a+2a^2x+\dots+na^nx^{n-1})-(b+2b^2x+\dots+nb^nx^{n-1})\}$$

$$=\frac{1}{a-b}\left\{\frac{a(1-a^nx^n)}{(1-ax)^2}-\frac{na^{n+1}x^{n+1}}{1-ax}-\frac{b(1-b^nx^n)}{(1-bx)^2}+\frac{nb^{n+1}x^{n+1}}{1-bx}\right\}.$$

151. a, b, c 爲 $x^3+px+q=0$ 之三根，則

$\frac{b^2+c^2}{a}$, $\frac{c^2+a^2}{b}$, $\frac{a^2+b^2}{c}$ 爲三根之方程式如何.

(解) $a+b+c=0$, $ab+bc+ca=p$, $abc=-q$.

既知方程式中 $x=a$, 則 $y=\frac{b^2+c^2}{a}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a}-a$,

即 $$y=\frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{x}-x=\frac{-2p}{x}-x,$$

即 $x^2+xy+2p=0$, $\therefore\quad x^3+px+q=-px-x^2y+q$,

$\therefore\quad px+x^2y=q$, 卽 $px+y(-xy-2p)=q$, $\quad\therefore\quad x=\dfrac{-2py-q}{y^2-p}$.

由是 $x^2+xy+2p=0$, 則 $\dfrac{(2py+q)^2}{(y^2-p)^2}-\dfrac{y(2py+q)}{y^2-p}+2p=0$,

$\therefore\quad qy^3-2p^2y^2-5pqy-2p^3-q^2=0$.

152. 證 $(y+z-2x)^4+(z+x-2y)^4+(x+y-2z)^4$

$$=18(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2.$$

(解) $y+z-2x=a$, $z+x-2y=b$, $x+y-2z=c$, 則 $a+b+c=0$

$\therefore\quad a^2+2ab+b^2=c^2$, 卽 $a^2+b^2-c^2=-2ab$,

$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=4a^2b^2$,

由是 $\quad a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$$=2\{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\}$$

$$=2\{ab+bc+ca\}^2.$$

但 $\quad ab=(y+z-2x)(z+x-2y)=-2x^2-2y^2+z^2+5xy-yz-zx$,

$bc=(z+x-2y)(x+y-2z)=-2y^2-2z^2+x^2+5yz-zx-xy$,

$ca=(x+y-2z)(y+z-2x)=-2z^2-2x^2+y^2+5zx-xy-yz$,

$\therefore\quad ab+bc+ca=-3(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$.

由是 $a^4+b^4+c^4=18(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$.

153. 解下之方程式,

(1) $x^3-30x+133=0$.

(2) $x^5-4x^4-10x^3+40x^2+9x-36=0$, 但根爲 $\pm a$, $\pm b$, c 之形.

(解) (1) $x=y+\dfrac{10}{y}$, 則 $x^3=y^3+\dfrac{1000}{y^3}+30\left(y+\dfrac{10}{y}\right)$,

卽 $x^3=y^3+\dfrac{1000}{y^3}+30x$, $\quad\therefore\quad x^3-30x+133=y^3+\dfrac{1000}{y^3}+133$,

即 $y^3+\frac{1000}{y^3}+133=0$,　∴　$y^6+133y^3+1000=0$,

即 $y^3=-\frac{133}{2}\pm\sqrt{\frac{13689}{4}}=-\frac{133}{2}\pm\frac{117}{2}=-125$ 或 -8,

∴　$y=-5$ 或 -2, 即 $x=-5+\frac{10}{-5}=-2+\frac{10}{-2}=-7$.

故原方程式為 $(x+7)(x^2-7x+19)=0$,

即　$x^2-7x+19=0$,　∴　$x=\frac{7\pm3\sqrt{-3}}{2}$.

(2)　$x^5-4x^4-10x^3+40x^2+9x-36$

$$=(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)$$

$$=x^5-cx^4-(a^2+b^2)x^3+c(a^2+b^2)x^2+a^2b^2x-a^2b^2c,$$

比較 x 之同方乘之係數, 則 $c=4$, $a^2+b^2=10$, $c(a^2+b^2)=40$, $a^2b^2=9$, $a^2b^2c=36$.

由是 $ab=3$ 或 -3, $a^2+b^2=10$, $c=4$,

即　$a+b=4$ 或 -4, $a-b=2$ 或 -2.

$a+b=2$ 或 -2, $a-b=4$ 或 -4.

由是 $a=\pm3$, $b=\pm1$, $c=4$.

或　$a=\pm1$, $b=\pm3$, $c=4$.

∴　所求之根為 ±3,　±1,　4.

154. 每時所作事業之量,從每時之工資而正變,從每日作業時數之平方根而反變,然則每日作 9 時,每時得工資 1 角,而 6 日作成之事業,若每日作 16 時,每時得工資 1 角半,則幾日作成.

(解)　Q 為每時作業之量, P 為每時之工資之數, H 為每日働作時數, 則　$Q=\frac{mP}{\sqrt{H}}$, 但 m 為常數,

又 W 為全事業,則 $\frac{W}{9\times6}=\frac{m\times1}{\sqrt{9}}$.

x 爲所求之日數,則 $\frac{W}{16x}=\frac{m\times 1\frac{1}{2}}{\sqrt{16}}$,

$\therefore \quad \frac{16x}{54}=\frac{1\times 4\times 2}{3\times 3}$, $\quad\therefore\quad x=3$.

155. 級數 $1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots$ 之 n 項之和爲 S_n,

級數 $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ldots\ldots$ 之 $n-1$ 項之和爲 λ_{n-1} 則

$$18S_n\lambda_{n-1}-S_n+2=0.$$

(解) $S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$, $\quad \lambda_{n-1}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3n(n+1)(n+2)}$,

由是 $\lambda_{n-1}=\frac{1}{18}-\frac{1}{9S_n}$, $\quad\therefore\quad 18S_n\lambda_{n-1}=S_n-2$.

156. 解下之方程式.

(1) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$.

(2) $\frac{1}{5}\,\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}+\frac{1}{9}\,\frac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-6)}-\frac{2}{13}\,\frac{(x+5)(x-7)}{(x+6)(x-8)}=\frac{92}{585}$.

(解) (1) $(12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4)=5.2.3.4$,

即 $\{(12x)^2-5(12x)+4\}\{(12x)^2-5(12x)+6\}=120$,

$(12x)^2-5(12x)+5=y$, 則 $(y-1)(y+1)=120$, 即 $y^2=121$,

$\therefore \quad y=\pm 11$, $\quad\therefore\quad (12x)^2-5(12x)+5=\pm 11$,

$\therefore \quad 12x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{25}{4}-5\pm 11\right)}=\frac{5}{2}\pm\frac{7}{2}$ 或 $\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{-39}{4}}$,

$\therefore \quad x=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{12}$ 或 $\frac{5\pm\sqrt{-39}}{24}$.

(2) $\frac{92}{585}=\frac{92}{5\times 9\times 13}=\frac{A}{5}+\frac{B}{9}-\frac{C}{13}$, $\therefore\quad 92=117A+65B+45C$,

$A=B=1$，則 $92=182+45C$， $\therefore\quad C=-2$，

$$\therefore\quad \frac{1}{5}\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}+\frac{1}{9}\frac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-6)}-\frac{2}{13}\frac{(x+5)(x-7)}{(x+6)(x-8)}$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{2}{13},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{5}\left\{\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}-1\right\}+\frac{1}{9}\left\{\frac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-6)}-1\right\}$$

$$-\frac{2}{13}\left\{\frac{(x+5)(x-7)}{(x+6)(x-8)}-1\right\}=0,$$

卽 $\dfrac{1}{5}\dfrac{5}{(x+2)(x-4)}+\dfrac{1}{9}\dfrac{9}{(x+4)(x-6)}-\dfrac{2}{13}\dfrac{13}{(x+6)(x-8)}=0,$

卽 $\dfrac{1}{(x+2)(x-4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x-6)}-\dfrac{2}{(x+6)(x-8)}=0.$

$x^2-2x=y$，則 $\dfrac{1}{y-8}+\dfrac{1}{y-24}-\dfrac{2}{y-48}=0,$

卽 $\dfrac{1}{y-8}-\dfrac{1}{y-48}+\dfrac{1}{y-24}-\dfrac{1}{y-48}=0,$

卽 $\dfrac{-40}{(y-8)(y-48)}+\dfrac{-24}{(y-24)(y-48)}=0,\quad \therefore\quad y=18.$

由是 $x^2-2x=18,\quad \therefore\quad x=1\pm\sqrt{19}.$

157. 250 磅之金，每年減少 1 折，若干年後爲 25 磅，其年數如何，但 $log3=\cdot4771213$.

(解) 所求之年數爲 x，則 $250\left(\dfrac{9}{10}\right)^x=25$，卽 $\left(\dfrac{9}{10}\right)^x=\dfrac{1}{10}$,

$$\therefore\quad xlog\frac{9}{10}=-log10,\ 卽\ x(2log3-1)=-1,$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{1-2log3}=\frac{1}{1-2\times\cdot4771213}=22\ 年(近似).$$

158. 證下之無限級數相等.

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\frac{1.4.7.10}{4.8.12.16}+\cdots\cdots\cdots$$

$$1+\frac{2}{6}+\frac{2.5}{6.12}+\frac{2.5.8}{6.12.18}+\frac{2.5.8.11}{6.12.18.24}+\cdots\cdots\cdots$$

(解) 第一級數 $=\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}=$ 第二級數.

159. $\left\{1-\frac{x}{\alpha}+\frac{x(x-\alpha)}{\alpha\beta}-\frac{x(x-\alpha)(x-\beta)}{\alpha\beta\gamma}+\cdots\right\}\times$

$\left\{1+\frac{x}{\alpha}+\frac{x(x+\alpha)}{\alpha\beta}+\frac{x(x+\alpha)(x+\beta)}{\alpha\beta\gamma}+\cdots\right\}$

$=1-\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{x^2(x^2-\alpha^2)}{\alpha^2\beta^2}-\frac{x^2(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}+\cdots\cdots\cdots$

(解) $1-\frac{x}{\alpha}+\frac{x(x-\alpha)}{\alpha\beta}=-\frac{x-\alpha}{\alpha}+\frac{x(x-\alpha)}{\alpha\beta}=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{\alpha\beta}$,

及 $\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{\alpha\beta}-\frac{x(x-\alpha)(x-\beta)}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$,以下同理,

∴ 左邊第一因子之級數 $=\pm\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-s)\cdots\cdot}{\alpha\beta\gamma s}$

第二因子之級數 $=\frac{(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\cdots\cdot}{\alpha\beta\gamma s\cdots}$.

由是 $\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots\cdot}{\alpha\beta\gamma\cdots}\times\frac{(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\cdots\cdot}{\alpha\beta\gamma\cdots\cdot}$

$=\frac{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)\cdots\cdot}{\alpha^2\beta^2\gamma^2\cdots\cdot}=1-\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{x^2(x^2-\alpha^2)}{\alpha^2\beta^2}-\cdots\cdots\cdots$

160. n 爲大於 1 之正整數，則 $n^5-5n^3+60n^2-56n$ 爲 120 之倍數.

（解）$n^5-5n^3+60n^2-56n=n(n^4-5n^2+4)+60n(n-1)$

$=n(n^2-1)(n^2-4)+60n(n-1)$

$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+60n(n-1)$

$=\mathrm{M}(1.2.3.4.5)+60\mathrm{M}(1.2)=\mathrm{M}(120).$

161. 若干人作一事，同時就業，則 24 時而成，今各一人順次於等時間後就業，作成後，以各人勞作時數爲比例而給工資，第一人所得，爲最後之人之 11 倍，如此而作成之時數如何.

（解）x 爲作成時數，y 爲等時間，n 爲人數，m 爲 1 人 1 時間作業之量，則全業爲 $24mn$,

而第一人作 x 時，第二人作 $x-y$ 時，第三人作 $x-2y$ 時，及最後之人作 $x-(n-1)y$ 時.

由是 $xm+(x-y)m+\ldots\ldots+\{x-(n-1)y\}m=24mn,$

卽 $x+(x-y)+\ldots\ldots+\{x-(n-1)y\}=24n,$

卽 $\dfrac{n}{2}\{x+x-(n-1)y\}=24n.$

$$x-(n-1)y=48-x.$$

又 $x=11\{x-(n-1)y\}$，故

$x=11(48-x),\qquad\therefore\qquad x=44$，卽 44 時.

162. 解下之方程式.

(1) $\dfrac{x}{y^2-3}=\dfrac{y}{x^2-3}=\dfrac{-7}{x^3+y^3}.$

(2) $y^2+z^2-x(y+z)=a^2,\quad z^2+x^2-y(z+x)=b^2,$

$x^2+y^2-z(x+y)=c^2.$

（解）$\dfrac{x}{y^2-3}=\dfrac{y}{x^2-3}=-\dfrac{7}{x^3+y^3}=\dfrac{x-y}{-(x^2-y^2)}=-\dfrac{1}{x+y},$

$x=y$, 則 $\dfrac{x}{x^2-3}=-\dfrac{7}{x^3+x^3}$, ∴ $2x^4+7x^2-21=0$,

∴ $x=\pm\sqrt{\dfrac{-7\pm\sqrt{217}}{4}}$.

$x\neq y$, 則 $\dfrac{7}{x^3+y^3}=\dfrac{1}{x+y}$, ∴ $x^2-xy+y^2=7$,

又 $\dfrac{x}{y^2-3}=\dfrac{y}{x^2-3}$, 即 $x^3-y^3-3(x-y)=0$, ∴ $x^2+xy+y^2=3$,

由是 $x=\pm2$, $y=\mp1$, 或 $x=\pm1$, $y=\mp2$.

(2) 自第一第二之和減第三, 則 $2z^2-2xy=a^2+b^2-c^2$,

∴ $z^2-xy=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$, $x^2-yz=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$,

$y^2-zx=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}$,

由是 $x=k(b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2)$, 但 $k=\dfrac{1}{2(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)}$

163. 解下之方程式.

$$a^3(b-c)(x-b)(x-c)+b^3(c-a)(x-c)(x-a)+c^3(a-b)(x-a)(x-b)=0,$$

又二根相等, 則 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}\pm\dfrac{1}{\sqrt{b}}\pm\dfrac{1}{\sqrt{c}}=0$.

(解) $x^2\{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\}$

$-x\{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)\}$

$+abc\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}=0$,

即 $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)x^2+(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)x$

$-abc(b-c)(c-a)(a-b)=0$,

$\therefore\quad (a+b+c)x^2-(ab+bc+ca)x+abc=0,$

卽 $4(a+b+c)^2x^2-4(a+b+c)(ab+bc+ca)x=-4abc(a+b+c),$

卽 $4(a+b+c)^2x^2-4(a+b+c)(ab+bc+ca)x+(ab+bc+ca)^2$

$$=(ab+bc+ca)^2-4abc(a+b+c),$$

$\therefore\ 2(a+b+c)x-(ab+bc+ca)=\pm\sqrt{(ab+bc+ca)^2-4abc(a+b+c)}.$

若爲等根，則 $(ab+bc+ca)^2=4abc(a+b+c),$

卽 $(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}-\sqrt{ca})(\sqrt{ab}-\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

$$(-\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})=0,$$

$$\therefore\quad \pm\sqrt{ab}\pm\sqrt{bc}\pm\sqrt{ca}=0,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{a}}\pm\frac{1}{\sqrt{b}}\pm\frac{1}{\sqrt{c}}=0.$$

164. 求下之級數之和.

(1) $1.2.4+2.3.5+3.4.6+\ldots.$至 n 項.

(2) $\frac{1^2}{\underline{|3}}+\frac{2^2}{\underline{|4}}+\frac{3^2}{\underline{|5}}+\ldots.$至無限.

(解) (1) 第 n 項 $=n(n+1)(n+3)=n(n+1)(n+2)+n(n+1),$

$\therefore\quad S=\sum n(n+1)(n+2)+\sum n(n+1)$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)+\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+13).$$

(2) 第 n 項 $=\frac{n^2}{\underline{|n+2}}=\frac{(n+1)(n+2)-3(n+2)+4}{\underline{|n+2}}$

$$=\frac{1}{\underline{|n}}-\frac{3}{\underline{|n+1}}+\frac{4}{\underline{|n+2}}.$$

$$S=\left(\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}\cdots\right)-3\left(\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\right)$$

$$+4\left(\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\cdots\right)$$

$$=(e-1)-3(e-2)+4\left(e-2-\frac{1}{2}\right)=2e-5.$$

165. a, b, c, d 爲不等之正數量，$s=a+b+c+d$，則

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)>81abcd.$$

(解) $\frac{b+c+d}{3}>\sqrt[3]{(bcd)}$, $\therefore\quad s-a>3(bcd)^{\frac{1}{3}}$,

由是 $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)>3(bcd)^{\frac{1}{3}}3(cda)^{\frac{1}{3}}3(dab)^{\frac{1}{3}}3(abc)^{\frac{1}{3}}$

$$>81abcd.$$

166. 解下之方程式.

(1) $\sqrt{x+a}-\sqrt{y-a}=\frac{5}{2}\sqrt{a}$, $\sqrt{x-a}-\sqrt{y+a}=\frac{3}{2}\sqrt{a}$.

(2) $x+y+z=x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(x^3+y^3+z^3)=3$.

(解) (1) $x+a=y-a+5\sqrt{a(y-a)}+\frac{25}{4}a$,

卽 $x-y=\frac{17}{4}a+5\sqrt{a(y-a)}$,

又 $x-a=y+a+3\sqrt{a(y+a)}+\frac{9}{4}a$, 卽 $x-y=\frac{17}{4}a+3\sqrt{a(y+a)}$,

由減法得 $5\sqrt{a(y-a)}-3\sqrt{a(y+a)}=0$, $\therefore\quad y=\frac{17}{8}a$.

$y=\frac{17}{8}a$, 代入第一,則 $x-\frac{17}{8}a=\frac{17}{4}a+5\sqrt{a\left(\frac{17}{8}a-a\right)}$,

$$\therefore \quad x=\frac{51a+30a\sqrt{2}}{8}.$$

(2) $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=3^2-3$, 卽 $yz+zx+xy=3$,

$\therefore \quad x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=0,\ x+y+z=3,\ x^3+y^3+z^3=6,$

由是 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0, \quad \therefore \quad xyz=2.$

λ 之三根爲 x, y, z, 則

$$\lambda^3-\lambda^2(x+y+z)+\lambda(xy+yz+zx)-xyz=0,$$

卽 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-2=0$, 卽 $(\lambda-1)^3=1$,

$\therefore \quad \lambda-1=1$ 或 $\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}, \quad \therefore \quad \lambda=2,\ \dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2},$

由是 x, y, z 之值爲 $2,\ \dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}.$

167. 自 $lx+my+nz=mx+ny+lz=nx+ly+mz$

$=k^2(l^2+m^2+n^2)=1$, 消去 l, m, n.

(解) $(z-x)l+(x-y)m+(y-z)n=0,$

$(y-z)l+(z-x)m+(x-y)n=0,$

$$\therefore \quad \frac{l}{(x-y)^2+(z-x)(y-z)}=\frac{m}{(y-z)^2-(x-y)(z-x)}$$

$$=\frac{n}{(z-x)^2-(y-z)(x-y)},$$

此三分數之分母皆相等爲 $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$,

$$\therefore \quad l=m=n=\frac{1}{x+y+z},$$

由是 $k^2\left\{\dfrac{3}{(x+y+z)^2}\right\}=1, \quad \therefore \quad (x+y+z)^2=3k^2.$

168. 化 $\dfrac{a(b+c-a)^2+\dots\dots+\dots\dots+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{a^2(b+c-a)+\dots\dots+\dots\dots-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$

爲最簡.

(解) $a=0$, 則分母子爲 0,

$\therefore$ 分子 $=Labc$, 分母 $=Mabc$, 而 $a=b=c=1$, 則

$L=4$, $M=2$,

$$\therefore \text{原式} =\frac{4abc}{2abc}=2.$$

169. $(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$

爲完平方式, 又求其平方根

(解) 原式 $=\frac{1}{2}\{(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)\}\times$

$$[\sum\{(x^2-yz)-(y^2-zx)\}^2]$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)\{\sum(x-y)^2(x+y+z)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{\sum(x-y)^2\}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

$$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

$$\text{平方根} =x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

170. 有三驛 A, B, C, 某人自 A 步行至 B, 自 B 乘車至 C, 自 C 乘馬至 A, 而費 $15\frac{1}{2}$ 時, 若自 A 乘車至 B, 自 B 乘馬至 C, 自 C 步行至 A, 則費 12 時, 但此道程步行, 則需 22 時, 乘馬則需 $8\frac{1}{4}$ 時, 乘車則需 11 時, 又步行 1 哩, 乘馬 1 哩, 乘車 1 哩之時之和爲半時, 問各每時之速, 及三驛間之距離各幾許.

(解) 同道程間步行, 乘車, 乘馬所費之時爲 22, 11, $8\frac{1}{4}$ 時, 故其各速之比爲 $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{8\frac{1}{4}}$, 卽 3, 6, 8, 故各每時之速順次爲 $3k$, $6k$, $8k$.

又 AB, BC, CA 之距離爲 x, y, z 哩.

然則 $\frac{x}{3k}+\frac{y}{6k}+\frac{z}{8k}=15\frac{1}{2}$, $\frac{x}{6k}+\frac{y}{8k}+\frac{z}{3k}=12$, $\frac{x+y+z}{3k}=22$.

又 $\frac{1}{3k}+\frac{1}{6k}+\frac{1}{8k}=\frac{1}{2}$, $\therefore$ $k=\frac{5}{4}$.

由是最初三方程式爲

$8x+4y+3z=465$, $4x+3y+8z=360$, $x+y+z=82\frac{1}{2}$.

$$\therefore \quad x=37\frac{1}{2},\ y=30,\ z=15.$$

故 AB, BC, CA 之距離爲 $37\frac{1}{2}$, 30, 15 哩, 而步行, 乘車, 乘馬每時之速爲 $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 10 哩.

171. n 爲不小於 3 之整數, 則 $n^7-7n^5+14n^3-8n$ 以 840 可整除之.

(解) $n(n^6-8)-7n^3(n^2-2)=n(n^2-2)(n^4-5n^2+4)$,

$=(n^2-2)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)=M(\underline{|5})=M(120)$.

而 n 爲 7 之倍數, 則原式可以 7 除之明矣.

若 n 不爲 7 之倍數, 則 $n^6-1=M(7)$, 〔勿而買氏之定理〕

故 $n^6-8=M(7)$.

於此原式爲 7 之倍數.

故原式爲 $M(120\times7)$.

172. 解下之方程式

(1) $\sqrt{x^2+12y}+\sqrt{y^2+12x}=33$, $x+y=23$.

(2) $\frac{u(y-x)}{z-u}=a,\quad \frac{z(y-x)}{z-u}=b,\quad \frac{y(u-z)}{x-y}=c,\quad \frac{x(u-z)}{x-y}=d.$

(解) $y=23-x,$

故 $\sqrt{x^2+12(23-x)}+\sqrt{(23-x)^2+12x}=33,$

即 $\sqrt{x^2-12x+276}+\sqrt{x^2-34x+529}=33,$

又 $(x^2-12x+276)-(x^2-34x+529)=11(2x-23),$

由除法得 $\sqrt{x^2-12x+276}-\sqrt{x^2-34x+529}=\frac{2x-23}{3},$

由加法得 $2\sqrt{x^2-12x+276}=33+\frac{2x-23}{3}=\frac{2x+76}{3},$

平方之,得 $x^2-12x+276=\frac{(x+38)^2}{9},$

$\therefore\quad x=13$ 或 $10,\ y=10$ 或 $13.$

(2) 由第一第二得 $\frac{u}{z}=\frac{a}{b}$, 由第三第四得 $\frac{y}{x}=\frac{c}{d}$,

又由四個方程式得 $uy=ac,\quad zx=bd.$

由是 $y=\frac{c}{d}x,\quad z=\frac{bd}{x},\quad u=\frac{a}{b}z=\frac{ad}{x},$

$\therefore$ 由第一得 $\dfrac{\frac{ad}{x}\left(\frac{c}{d}x-x\right)}{\frac{bd}{x}-\frac{ad}{x}}=a,\quad \therefore\quad x=\frac{d(b-a)}{c-d},$

故 $y=\frac{c(b-a)}{c-d},\quad z=\frac{b(c-d)}{b-a},\quad u=\frac{a(c-d)}{b-a}.$

173. n 個不等正數量 $a, b, c, \ldots$ 之和爲 s, 則

$$\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\frac{s}{s-c}+\cdots>\frac{n^2}{n-1}.$$

(解) 先設 n 個數量 $x, y, z, \ldots$

$$(x+y+z+\ldots\ldots)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\ldots\ldots\right)$$

$$=n+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\ldots\ldots\ldots$$

但 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2,\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}>2,\ldots\ldots\ldots$

又上之恒同式之左邊之積爲 $n\times n=n^2$ 項，而此右邊之 n 以外之項爲 n^2-n，故

$$(x+y+z\ldots\ldots)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\ldots\ldots\right)>n+n^2-n,$$

$x=\frac{s-a}{s},\quad y=\frac{s-b}{s},\quad z=\frac{s-c}{s},\ldots\ldots$ 則

$$x+y+z+\ldots\ldots=\frac{ns-s}{s}=n-1.$$

由是 $(n-1)\left(\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\frac{s}{s-c}+\ldots\ldots\right)>n^2,$

$$\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\frac{s}{s-c}+\ldots\ldots>\frac{n^2}{n-1}.$$

174. 有商人以綿換油，而綿之斤數與所換之油之升數與油1升之價之先令數爲遞降等比級數，若綿多1斤，每斤多換1升，每升之價多1先令，則共價多508磅9先令，若綿少1斤，每斤少換1升，每升之價少1先令，則共價少483磅13先令，問油之共價如何.

(解) 所有之綿爲 x 斤，每斤換得之油爲 y 升，各升之價爲 z 先令，則油之共價爲 xyz 先令，由是

$$(x+1)(y+1)(z+1)=xyz+508\times20+9$$

$$(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-483\times20-13,$$

而 x, y, z 爲等比級數，故 $y^2=xz$.

由第一第二得 $(yz+zx+xy)+(x+y+z)=10168,$

$$(yz+zx+xy)-(x+y+z)=9672,$$

$\therefore\quad yz+zx+xy=9920$, 及 $x+y+z=248$.

但 $yz+zx+xy=yz+y^2+xy=y(x+y+z)=9920,$

即 $\qquad 248y=9920;\qquad\therefore\qquad y=40.$

$x+z=208$, 及 $xz=1600,\qquad\therefore\qquad x=200,\ z=8.$

由是油之共價爲 3200 磅.

175. 證 $\sum(b+c-a-x)^4(b-c)(a-x)$

$$=16(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c).$$

(解) $x=a,\ x=b,\ x=c$, 則原式之左邊爲 0,

故原式可以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除之.

又此式爲 x 之五次式，而 x^5 及 x^4 之項爲 0，何則

x^5 之係數 $=-(b-c)-(c-a)-(a-b)=0,$

x^4 之係數 $=\sum\{a(b-c)+4(b-c)(b+c-a)\}=0.$

由是原式之左邊 $=f(a,b,c)(x-a)(x-b)(x-c),$

但 $f(a,b,c)$ 爲 a,b,c 之三次式，而 $b=c,\ c=a,\ a=b$, 則此原式爲 0,

故 $\qquad$ 原式之左邊 $=\mathrm{A}(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c),$

$x=0$, 則 $\sum(b-c)(b+c-a)^4=-\mathrm{A}abc(b-c)(c-a)(a-b).$

又 $a=3,\ b=2,\ c=1$, 則 $12\mathrm{A}=3.0^4-4.2^4+4^4=192,$

$$\therefore\qquad \mathrm{A}=16.$$

176. α,β,γ 爲方程式 $x^3-px^2+r=0$ 之三根，則

$\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha},\ \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta},\ \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$ 爲根之方程式如何.

(解) $y=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=\frac{\beta+\gamma+\alpha}{\alpha}-1=\frac{p}{\alpha}-1$, 卽 $y=\frac{p}{x}-1$,

卽 $x=\frac{p}{y+1}$, $\therefore$ $\frac{p^3}{(y+1)^3}-\frac{p^3}{(y+1)^2}+r=0$,

卽 $r(y+1)^3-p^3y=0$ 爲所求之方程式.

177. a^2+b^2 之形之諸因子之連乘積,可以二平方式之和表之,又 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2)=p^2+q^2$, 而 p 及 q 求以 a, b, c, d, e, f, g, h 之項表之.

(解) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2,$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)=\{(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\}(e^2+f^2)$$

$$=\{(ac+bd)e+(ad-bc)f\}^2+\{(ac+bd)f-(ad-bc)e\}^2$$

$$=(ace+bde+adf-bcf)^2+(acf+bdf-ade+bce)^2,$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2)$$

$$=\{(ace+bde+adf-bcf)^2+(acf+bdf-ade+bce)^2\}(g^2+h^2)$$

$$=\{(ace+bde+adf-bcf)g+(acf+bdf-ade+bce)h\}^2$$

$$+\{(ace+bde+adf-bcf)h-(acf+bdf-ade+bce)g\}^2,$$

$\therefore$ $p=aceg+bdeg+adfg-bcfg+acfh+bdfh-adeh+bceh$,

$q=aceh+bdeh+adfh-bcfh-acfg-bdfg+adeg-bceg$.

178. 解方程式 $x^2+y^2=61$, 及 $x^3-y^3=91$.

(解) $(x-y)^2+2xy=61$, 及 $(x-y)^3+3xy(x-y)=91$,

$x-y=u$, $xy=v$, 則 $u^2+2v=61$, 及 $u^3+3vu=91$,

$\therefore$ $u^3+3\left(\frac{61-u^2}{2}\right)u=91$, 卽 $u^3-183u+182=0$,

卽 $(u-1)(u^2+u-182)=0$, $\therefore$ $u=1$, 或 13, 或 -14.

由是 $x-y=1$, $xy=30$, 則 $x=6$, $y=5$, 或 $x=-5$, $y=-0$.

$x-y=13$, $xy=-54$, 則 $x=\frac{13\pm\sqrt{-47}}{2}$, $y=\frac{-13\pm\sqrt{-47}}{2}$.

$x-y=-14$, $xy=-\frac{135}{2}$, 則 $x=\frac{-14\pm\sqrt{-74}}{2}$, $y=\frac{14\pm\sqrt{-74}}{2}$

179. 四科目之試驗,各科最多得點爲 m, 受驗者得 $2m$ 點之方法之數爲 $\frac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+3)$.

(解) 所求方法之數等於 $(x^0+x^1+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^m)^4$ 之式中 x^{2m} 之係數,而此式爲

$$\left(\frac{1-x^{m+1}}{1-x}\right)^4=(1-x^{m+1})^4(1-x)^{-4}$$

$$=(1-4x^{m+1}+6x^{2m+2}+\ldots)(1-x)^{-4}.$$

而 $(1-x)^{-4}$ 之式中 x^r 之係數爲 $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}$,

由是所求之係數 $=\frac{1}{6}(2m+1)(2m+2)(2m+3)-\frac{4}{6}m(m+1)(m+2)$

$$=\frac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+3).$$

180. α, β 爲 $x^2+px+1=0$ 之二根, 及 γ, δ 爲 $x^2+qx+1=0$ 之二根, 則　$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$.

(解) $\alpha\beta=1$, $\alpha+\beta=-p$, 及 $\gamma\delta=1$, $\gamma+\delta=-q$.

由是 $(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)$

$=(\alpha\beta-\gamma\delta+\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha\beta-\gamma\delta+\beta\delta-\alpha\gamma)=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\beta\delta-\alpha\gamma)$

$=\alpha\beta\delta^2+\alpha\beta\gamma^2-\alpha^2\gamma\delta-\beta^2\gamma\delta=\delta^2+\gamma^2-(\alpha^2+\beta^2)$

$=\{(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\}-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=\{q^2-2\}-\{p^2-2\}=q^2-p^2$

181. a_m 爲 $(1+x)^n$ 之開散式中 x^n 之係數,則

$$a_0-a_1+a_2-\dots+(-1)^{m-1}a_{m-1}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{\lfloor m-1}(-1)^{m-1}.$$

(解) $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{m-1}x^{m-1}+\dots\dots$

又 $(1-x)^{-1}=1-x+x^2-\dots+(-1)^{m-1}x^{m-1}\dots\dots$

由是 $(-1)^{m-1}S=(1+x)^{n-1}$ 之開散式中 x^{m-1} 之係數

$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(\overline{n-1}-\overline{m-1}+1)}{\lfloor m-1}.$$

$$\therefore\quad S=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{\lfloor m-1}(-1)^{m-1}.$$

182. 今有一數,等於三素因子之積,其素因子之各平方和爲 2331 而小於此數,此數所含素數之種類(1 亦在內)有 7560, 又此數之整除數(1 及本數亦在內)之和爲 10560, 此數如何.

(解) a, b, c 爲一數之素因子, $a^2+b^2+c^2=2331$............(1)

又此數之整除數之種類爲 $abc\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$,

$\therefore\quad (a-1)(b-1)(c-1)=7560$..............(2)

又整除數之和爲 $(a+1)(b+1)(c+1)=10560$..............(3)

由 (2) 及 3 相加減得 $abc+a+b+c=9060$..............(4)

$bc+ca+ab+1=1500$..............(5)

由 (1) 及 (5) 得 $(a+b+c)^2=5329$, $\therefore\quad a+b+c=73$,

故由 (4) 得 $abc=8987=11.19.43$.

183. $x^3-ax^2+bx+c=0$ 之各二根之積爲根作方程式,

又解 $2x^5+x^4+x+2=12x^3+12x^2$.

(解) 所求方程式之根爲 $\beta\gamma,\ \gamma\alpha,\ \alpha\beta$, 又 $y=\beta\gamma$, 則

$$y=\beta\gamma=\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}=\frac{-c}{x},\ 即\ x=-\frac{c}{y},$$

代入原方程式, 則 $-\frac{c^3}{y^3}-\frac{ac^2}{y^2}-\frac{bc}{y}+c=0.$

$$\therefore\quad y^3-by^2-acy-c^2=0.$$

$2x^5+x^4+x+2=12x^3+12x^2$, 即 $2(x^5+1)+x(x^3+1)=12x^2(x+1)$,

$\therefore\quad x+1=0$, 或 $2(x^4-x^3+x^2-x+1)+x(x^2-x+1)=12x^2$,

即 $2x^4-x^3-11x^2-x+2=0$, 即 $2(x^2+1)^2-x(x^2+1)-15x^2=0$,

即 $\{(x^2+1)-3x\}\{2(x^2+1)+5x\}=0$,

$\therefore\quad x^2+1-3x=0,\quad \therefore\quad x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2},$

$2x^2+5x+2=0,\quad \therefore\quad x=-2$ 或 $-\frac{1}{2}.$

由是所求之根爲 $-1,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$

184. n 爲正整數, 則

$$n^n-n(n-2)^n+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}(n-4)^n-\ldots\ldots=2^n\lfloor n.$$

(解) $(e^x-e^{-x})^n=2^n(x+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}+\ldots\ldots)^n,$

此右邊 x^n 之係數 $=2^n$.

又 $(e^x-e^{-x})^n=e^{nx}-ne^{(n-2)x}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}e^{(n-4)x}-\ldots\ldots$

此右邊 x^n 之係數爲 $\frac{n^n}{\lfloor n}-\frac{n(n-2)^n}{\lfloor n}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\frac{(n-4)^n}{\lfloor n}-\ldots\ldots$

185. $(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}=N$, 而 F 爲 N 之分數部, 則

$$NF=20^{2n+1}.$$

(解) $6\sqrt{6}=\sqrt{216}$, 故在 14 及 15 之間, 由是 $6\sqrt{6}-14$ 爲眞分數.

又 $(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}-(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}$ 爲整數, 故 $(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}$ 必爲 N 之眞分數, 即 $(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}=N$, $(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}=F$.

故 $\quad NF=(216-196)^{2n+1}=20^{2n+1}$.

186. 解下之方程式.

(1) $x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=0,\ x^3+y^3+z^3=-1$.

(2) $x^2-(y-z)^2=a^2,\ y^2-(z-x)^2=b^2,\ z^2-(x-y)^2=c^2$.

(解) (1) 由第一第二得 $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2^2$.

$$\therefore \quad xy+yz+zx=2.$$

又 $\quad x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\{(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\}$,

即 $\quad -1-3xyz=2\{-2\}, \quad \therefore \quad xyz=1$.

λ 之三根爲 x, y, z, 則

$$\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0,$$

即 $\quad \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1=0, \quad \therefore \quad \lambda=1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$,

由是 x, y, z 之根爲 $1,\ \dfrac{1+\sqrt{-3}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}$,

(2) $(x+y-z)(x-y+z)=a^2,\ (y+z-x)(y-z+x)=b^2,$

$(z+x-y)(z-x+y)=c^2,$

故 $(x+y-z)^2=\dfrac{a^2b^2}{c^2}, \quad \therefore \quad x+y-z=\pm\dfrac{ab}{c}$,

由同法 $y+z-x=\pm\dfrac{bc}{a}, \quad z+x-y=\pm\dfrac{ca}{b}$.

$$\therefore \quad x=\pm\frac{a(b^2+c^2)}{2bc}, \quad y=\pm\frac{b(c^2+a^2)}{2ca}, \quad z=\pm\frac{c(a^2+b^2)}{2ab}.$$

187. 英國公選時,被再選之自由黨之全數,比英吉利保守黨之數多 15 人,保守黨之全數,比英吉利自由黨之二倍多 5 人,蘇格土保守黨之數,與威勒爾士自由黨之數同,蘇格土自由黨之多數,等於威勒爾士保守黨之二倍,而與愛倫土自由黨之多數之比爲 2 : 3, 又英吉利保守黨之多數,比愛倫土一部之全數多 10 人,此一部之全數爲 652 人,而其內 60 人自蘇格土人之內被再選,求英吉利,蘇格土,愛倫土,及威勒爾士人內被再選之人數.

(解) 蘇格土保守黨之人數爲 x, 則 x 爲威勒爾士自由黨之人數,故蘇格土自由黨之數爲 $60-x$,

由是蘇格土自由黨之多數爲 $60-2x$, 故威勒爾士保守黨之數爲 $30-x$, 由是威勒爾士之一部之數爲 30,

又愛倫土自由黨之多數爲 $\frac{3}{2}(60-2x)$, 卽 $90-3x$.

卽如下

	保守黨	自由黨
英	y	z
蘇	x	$60-x$
威	$30-x$	x
愛	u	$u+90-3x$.

由是有下之方程式,

$z+u-3x+150=y+15$, 卽 $3x+y-z-u=135$,

$y+u+30=2z+5$, 卽 $y-2z+u=-25$,

$y-z=2u+90-3x+10$, 卽 $3x+y-z-2u=100$,

$y+z+60+30+2u+90-3x=652$ 卽 $-3x+y+z+2u=472$.

由此四方程式得 $x=19$, $y=286$, $z=173$, $u=35$.

卽　英 286 人，蘇 19 人，愛 35 人，威 11 人皆保守

　　英 173 人，蘇 41 人，愛 68 人，威 19 人皆自由

188. 證 $a^5(c-b)+b^5(a-c)+c^5(b-a)$

$$=(b-c)(c-a)(a-b)(\sum a^3+\sum a^2b+abc).$$

(解) 左邊之因子爲 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 明矣.

$\therefore$ 左邊 $=(b-c)(c-a)(a-b)\{A\sum a^3+B\sum a^2b+Cabc\}$,

比較 a^5b 之係數，則 $A=1$,

又比較 a^4b^2 之係數，則 $A-B=0$, $\quad\therefore\quad B=1$,

又 $a=2$, $b=1$, $c=-1$, 則

$$32(-1-1)+1(2+1)-1(1-2)$$

$$=(1+1)(-1-2)(2-1)\{8+1-1+4-4+2-1+2+1-2C\},$$

卽 $-60=-6\{12-2C\}$, $\quad\therefore\quad C=1$.

189. 證 $\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(a-1)^6$

(解) $\Delta=\begin{vmatrix} a^3-1 & 3a^3-3 & 3a-3 & 0 \\ a^2-1 & a^2+2a-3 & 2a-2 & 0 \\ a-1 & 2a-2 & a-1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^3-1 & 3a^2-3 & 3a-3 \\ a^2-1 & a^2+2a-3 & 2a-2 \\ a-1 & 2a-2 & a-1 \end{vmatrix}$

$$=(a-1)^3\begin{vmatrix} a^2+a+1 & 3a+3 & 3 \\ a+1 & a+3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(a-1)^3\begin{vmatrix} a^2+a-2 & 3a-3 & 0 \\ a-1 & a-1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a-1)^5\begin{vmatrix}a+2 & 3 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(a-1)^5\begin{vmatrix}x+2 & 3\\1 & 1\end{vmatrix}=(a-1)^6.$$

190. $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}=0$, 則除 $b=a+c$ 而 a, b, c 爲調和級數.

(解) $\frac{a+c}{ac}+\frac{a+c-2b}{ac-b(a+c)+b^2}=0$,

即 $b^2(a+c)-b\{(a+c)^2+2ac\}+2ac(a+c)=0$,

由是 $b=a+c$, 或 $b(a+c)-2ac=0$.

191. 解下之方程式.

(1) $x^3-13x^2+15x+189=0$.

(2) $x^4-4x^2+8x+35=0$.

(解) (1) $x^3-7x^2-6x^2+42x-27x+189=0$,

即 $x^2(x-7)-6x(x-7)-27(x-7)=0$, $\therefore\ x=7$,

或 $x^2-6x-27=0$, $\therefore\ x=9$, 或 -3.

(2) $x^4+12x^2+36=16x^2-8x+1$, 即 $(x^2+6)^2=(4x-1)^2$,

由是 $x^2+6=4x-1$, 或 $x^2+6=-(4x-1)$,

$\therefore\ x=2\pm\sqrt{-3}$, 或 $x=-2\pm\sqrt{-1}$.

192. 知兩數 a 及 b, 而 a_1 及 b_1 有 $3a_1=2a+b$, $3b_1=a+2b$ 之關係, 又 a_2 及 b_2 與 a_1 及 b_1 有前之關係, 以下順次如此, 則 a_n 及 b_n 與 a 及 b 之關係如何; 又 n 爲無限大, 則 $a_n=b_n$, 試證之.

(解) $a_1=\frac{2a+b}{3}=a-\frac{a-b}{3}$, $b_1=b+\frac{a-b}{3}$,

故 $a_1+b_1=a+b$, 及 $a_1-b_1=\frac{a-b}{3}$.

同法 $a_2=a_1-\frac{a_1-b_1}{3}=a-\frac{a-b}{3}-\frac{a-b}{3^2}$,

$$b_2=b_1+\frac{a_1-b_1}{3}=b+\frac{a-b}{3}+\frac{a-b}{3^2},$$

故 $a_2+b_2=a+b$, $a_2-b_2=\frac{a_1-b_1}{3}=\frac{a-b}{3^2}$,

又 $a_3=a_2-\frac{a_2-b_2}{3}=a-\frac{a-b}{3}-\frac{a-b}{3^2}-\frac{a-b}{3^3}$, 以下同理,

由是 $a_n=a-(a-b)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$,

即 $a_n=a-\frac{1}{2}(a-b)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$,

同法 $b_n=b+\frac{1}{2}(a-b)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$.

$n=\infty$, 則 $a_n=a-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{a+b}{2}$,

$$b_n=b+\frac{1}{2}(a-b)=\frac{a+b}{2}.$$

193. $x+y+z+w=0$, 則

$$wx(w+x)^2+yz(w-x)^2+wy(w+y)^2+zx(w-y)^2+wz(w+z)^2+xy(w-z)^2+4xyzw=0.$$

(解) 左邊 $=w^3(x+y+z)+w^2\{2(x^2+y^2+z^2)+yz+zx+xy\}$

$+w(x^3+y^3+z^3-2xyz)+xyz(x+y+z)$

$=-w^3(x+y+z)^2+w^2\{2(x^2+y^2+z^2)+yz+zx+xy\}$

$+w(x^3+y^3+z^3-2xyz)-xyzw$

$=w^2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)+w(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

$=w\{-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)+(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

$=w\{-(x^3+y^3+z^3-3xyz)+(x^3+y^3+z^3-3xyz)\}=0.$

194. 有 $a+\dfrac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}$, a, b, c 之不等文字二個相交換,其値不變,則任意交換他二個,而其値亦不變.試證之.
又 $a+b+c=1$, 則此式爲 0

(解) a 及 b 相交換,其値不變,則

$a+\dfrac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}=b+\dfrac{ac-b^2}{a^2+b^2+c^2}$, 由是 $a-b=\dfrac{(a-b)c+(a^2-b^2)}{a^2+b^2+c^2}$,

由題意 $a-b$ 不爲 0, $\therefore\quad 1=\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$.

故 $a-c=\dfrac{a^2-c^2+ab-bc}{a^2+b^2+c^2}$, 卽 $a+\dfrac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}=c+\dfrac{ab-c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

又 $a^2+b^2+c^2=a+b+c$, 故 $a+b+c=1$, 則

原式 $=a+\dfrac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}=a+\dfrac{bc-a^2}{a+b+c}=\dfrac{bc+ca+ab}{a+b+c}$,

但 $2(bc+ca+ab)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=0$, $\therefore$ 原式 $=0$.

195. 自兩地 A 及 B, 有兩下等汽車於 6 時及 6 時 45 分起程,而兩上等汽車於 7 時 15 分及 8 時 30 分起程,此各二車同時相通過,各每時之速爲 x_1, x_2, x_3, x_4 哩,則有下之關係,試證之.

$$\frac{3x_2}{x_2-x_1}=\frac{4m+5x_3}{x_1+x_3}=\frac{4m+10x_4}{x_1+x_4},$$

但 m 爲 A B 之距離之哩數.

(解) 兩下等汽車爲 T_1, T_2, 兩上等汽車爲 T_3, T_4, 此等車自 6 時後經 y 時而各車通過他車.

然四車 T_1, T_2, T_3, T_4 至互通過時所行之距離其哩數順次爲

$$x_1y,\quad x_2\left(y-\frac{3}{4}\right),\quad x_3\left(y-\frac{5}{4}\right),\quad x_4\left(y-\frac{5}{2}\right)$$

由題意 $x_1y+x_3\left(y-\frac{5}{4}\right)=m=x_1y+x_4\left(y-\frac{5}{2}\right)$,

而 $(x_1+x_3)y=m+\frac{5}{4}x_3$, 及 $(x_1+x_4)y=m+\frac{5}{2}x_4$.

由此等方程式 $4y=\frac{4m+5x_3}{x_1+x_3}=\frac{4m+10x_4}{x_1+x_4}$.

又 $x_1y=x_2\left(y-\frac{3}{4}\right)$, 故 $4y=\frac{3x_2}{x_2-x_1}$, 即得證.

196. 展開下式之左邊,省三次以上之項,則爲右邊,試證之.

$$\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}+(1-y)^{-\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{(1-x)(1-y)}}=1+\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{8}(3x^2+xy+3y^2).$$

(解) 左邊$=\dfrac{\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2\right)+\left(1+\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2\right)}{1+\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)\left(1-\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2\right)}$

$$=\frac{1+\frac{1}{4}(x+y)+\frac{3}{16}(x^2+y^2)}{1-\frac{1}{4}(x+y)-\frac{1}{16}(x^2-2xy+y^2)}$$

$$=\left\{1+\frac{1}{4}(x+y)+\frac{3}{16}(x^2+y^2)\right\}\left\{1-\frac{1}{4}(x+y)-\frac{1}{16}(x^2-2xy+y^2)\right\}^{-1}$$

$$=\left\{1+\frac{1}{4}(x+y)+\frac{3}{16}(x^2+y^2)\right\}\times$$

$$\left\{1+\frac{1}{4}(x+y)+\frac{1}{16}(x^2-2xy+y^2)+\frac{1}{16}(x+y)^2\right\}$$

$$=\left\{1+\frac{1}{4}(x+y)+\frac{3}{16}(x^2+y^2)\right\}\left\{1+\frac{1}{4}(x+y)+\frac{1}{8}(x^2+y^2)\right\}$$

$$=1+\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{16}\{3(x^2+y^2)+2(x^2+y^2)+(x+y)^2\}$$

$$=1+\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{8}(3x^2+xy+3y^2).$$

197. 有級數 $a, a-b, a-2b, \ldots. a-(n-1)b$, n 爲 $3m^2-1$ 之形, $2a=(3m-2)(m+1)b$, 則其級數之各二項之積之和爲 0, 試證之.

(解) S_1 爲此級數之和, S_2 爲此級數各項之平方和, P 爲各二項之積之和, 由是 $S_1^2=S_2$, 則 $P=0$ 可知.

而 $S_1=\frac{n}{2}\{2a-(n-1)b\}$.

$$S_2=a^2+(a-b)^2+(a-2b)^2+\ldots.+\{a-(n-1)b\}^2$$

$$=na^2-2ab\{1+2+3+\ldots.+(n-1)\}+b^2\{1^2+2^2+\ldots.+(n-1)^2\}$$

$$=na^2-n(n-1)ab+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}b^2.$$

由是 $S_1^2=S_2$, 則

$$\frac{n}{4}\{2a+(n-1)b\}^2=a^2-(n-1)ab+\frac{(n-1)(2n-1)}{6}b^2,$$

即 $(n-1)a^2-(n-1)^2ab+\frac{1}{12}(n-1)(3n^2-7n+2)b^2=0$,

即 $a^2-(n-1)ab+\frac{1}{12}(3n^2-7n+2)b^2=0$,

由是 $\frac{2a}{b}=(n-1)\pm\sqrt{\{(n-1)^2-\frac{1}{3}(3n^2-7n+2)\}}$

$$=(n-1)\pm\sqrt{\frac{1}{3}(n+1)},$$

$n=3m^2-1$, 則 $\frac{2a}{b}=3m^2\pm m-2=(3m\mp2)(m\pm1)$.

198. n 爲偶數, 而 $\alpha+\beta$ 及 $\alpha-\beta$ 爲等差級數之兩中項, 則等差級數各項之立方和爲 $n\alpha\{\alpha^2+(n^2-1)\beta^2\}$.

(解) $n=2m$, 而通差 $=-2\beta$, 故

$a+(2m-1)\beta, \ldots. a+3\beta,\ a+\beta,\ a-\beta,\ a-3\beta, \ldots. a-(2m-1)\beta.$

由是 $\{a+(2m-1)\beta\}^3+\{a-(2m-1)\beta\}^3=2a\{a^2+3(2m-1)^2\beta^2\}$,

$\therefore\ S=2a\sum_{r=1}^{r=m}\{a^2+(2m-1)^2\beta^2\}$.

但 $1^2+2^2+3^2+\ldots.+(2m)^2=\dfrac{2m(2m+1)(4m+1)}{6}$,

及 $1^2+2^2+3^2+\ldots.+m^2=\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$,

以 4 乘此第二, 自第一減之, 得

$$1^2+3^2+5^2+\ldots.+(2m-1)^2=\frac{2m(2m+1)(2m-1)}{6}.$$

$\therefore\ S=2a\{ma^2+m(2m+1)(2m-1)\beta^2\}=na\{a^2+(n^2-1)\beta^2\}$.

199. a, b, c 爲正數量, 則 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$.

(解) 本題證 $a^8+b^8+c^8>a^2b^2c^2(bc+ca+ab)$ 可也,

即證 $\dfrac{a^6}{b^2c^2}+\dfrac{b^6}{c^2a^2}+\dfrac{c^6}{a^2b^2}>bc+ca+ab$ 可也.

$\left(\dfrac{a^3}{bc}-\dfrac{b^3}{ca}\right)^2>0$, 故 $\dfrac{a^6}{b^2c^2}+\dfrac{b^6}{c^2a^2}>\dfrac{2a^2b^2}{c^2}$.

$\therefore\ \dfrac{a^6}{b^2c^2}+\dfrac{b^6}{c^2a^2}+\dfrac{c^6}{a^2b^2}>\dfrac{a^2b^2}{c^2}+\dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2}$.

又 $\left(\dfrac{bc}{a}-\dfrac{ca}{b}\right)^2>0$, $\therefore\ \dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2}>2c^2$.

$\therefore\ \dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2}+\dfrac{a^2b^2}{c^2}>a^2+b^2+c^2$,

又知 $a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab$.

由是 $\dfrac{a^6}{b^2c^2}+\dfrac{b^6}{c^2a^2}+\dfrac{c^6}{a^2b^2}>bc+ca+ab$.

200. A, B, C 欲至距離 a 哩之某地,同時起程, A 每時步行 u 哩, B, C 乘車每時行 v 哩,若干時後, B 下車步行, C 待 A 同走,由是 A, C 共乘車而行,與 B 共至某地,則此時間爲 $\frac{a}{v}\left(\frac{3v+u}{3u+v}\right)$ 時,試證之.

(解) B 至下車之時爲 x 時,則至此時 A 步行 ux 哩, B 及 C 各乘車行 vx 哩, B 此後尙當走 $\frac{a-vx}{u}$ 時,故全時間爲 $x+\frac{a-vx}{u}$ 時.

C 待 A 時兩人離 $(v-u)x$ 哩,故需 $\frac{(v-u)x}{u+v}$ 時,故 A 至遇 C 須行 $\left\{x+\frac{(v-u)x}{u+v}\right\}u$ 哩,故殘道程爲 $a-\left\{x+\frac{(v-u)x}{u+v}\right\}u$ 哩,而於此距離乘車之時間爲 $\frac{a-\left\{x+\frac{(v-u)x}{u+v}\right\}u}{v}$ 時.

又 B 下車後之時間爲 $\frac{a-vx}{u}=\frac{(v-u)x}{u+v}+\frac{a-\left\{x+\frac{(v-u)x}{u+v}\right\}u}{v}$,

由此方程式得 $x(u+v)+\frac{u(v-u)x}{u+v}=a$, $\therefore\quad x=\frac{a(u+v)}{v(3u+v)}$.

$$由是全時間 =x+\frac{a-vx}{u}=\frac{a(u+v)}{v(3u+v)}+\frac{a-\frac{a(u+v)}{3u+v}}{u}$$

$$=\frac{a}{v}\left(\frac{3v+u}{3u+v}\right).$$

201. 一市街區劃如棊盤目,其南北劃 m 條線,東西劃 n 條線,爲通行之道,有人自其北西隅至南東隅取最近路,其方法有幾.

(解) 以 a, b 二邊之矩形爲市街，而 a 爲其南北線，b 爲其東西線，其通行路經 a 縱線，d 橫線，而 b 爲 $m-1$，及 b 爲 $n-1$，故於任意之順序，通行 $m+n-2$ 部分.

故其方法一種等於自 $m+n-2$，取 $m-1$ 之組合 (*combination*)，他種等於取 $n-1$ 之組合，卽 $\dfrac{\lfloor m+n-2}{\lfloor m-1 \, \lfloor n-1}$.

202. 解 $\sqrt[4]{x+27}+\sqrt[4]{55-x}=4$.

(解) 平方之，則 $\sqrt{x+27}+\sqrt{55-x}+2\sqrt[4]{(x+27)(55-x)}=16$,

卽 $$\sqrt{x+27}+\sqrt{55-x}=16-2\sqrt[4]{(x+27)(55-x)},$$

再平方之，則 $$82+2\sqrt{(x+27)(55-x)}=256+4\sqrt{(x+27)(55-x)}-64\sqrt[4]{(x+27)(55-x)},$$

$\sqrt[4]{(x+27)(55-x)}=y$，則

$$y^2-32y+87=0, \quad \therefore \quad y=3 \text{ 或 } 29.$$

卽 $(x+27)(55-x)=3^4$，或 $(x+27)(55-x)=29^4$,

$$\therefore \quad x=54, \quad -26, \quad 14\pm 840\sqrt{-1}.$$

203. 級數 $ab+(a+x)(b+x)+(a+2x)(b+2x)+\ldots$ 至 $2n$ 項，最後 n 項之和大於最初 n 項之和之數，與末項大於初項之數之比，如 n^2 與 $2n-1$ 之比，其證如何.

(解) 原級數至 $2n$ 項之和爲 S_{2n}，則

$$S_{2n}=2nab+x(a+b)(1+2+3+\ldots \text{至 } 2n-1 \text{ 項})$$
$$+x^2(1^2+2^2+\ldots \text{至 } 2n-1 \text{ 項})$$
$$=2nab+n(2n-1)(a+b)x+\frac{1}{3}n(2n-1)(4n-1)x^2.$$

以 n 代 $2n$，則

$$S_n=nab+\frac{1}{2}n(n-1)(a+b)x+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)x^2.$$

$\therefore\quad S_{2n}-2S_n=n^2(a+b)x+n^2(2n-1)x^2=n^2x\{a+b+(2n-1)x\}.$

l 爲末項，則 $l-ab=(a+\overline{2n-1}.x)(b+\overline{2n-1}.x)-ab$

$$=(2n-1)x\{a+b+(2n-1)x\}.$$

$$\therefore\quad S_{2n}-2S_n:l-ab=n^2:2n-1,$$

但 $S_{2n}-2S_n=(S_{2n}-S_n)-S_n$，而 $S_{2n}-S_n$ 爲最後 n 項之和，S_n 爲最初 n 項之和

204. 求下之第 n 漸近分數.

(1) $\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\cdots\cdots$ (2) $\frac{4}{3+}\frac{4}{3+}\frac{4}{3+}\cdots\cdots$

(解). (1) $\frac{p_n}{q_n}$ 爲第 n 漸近分數，然則 $p_n=2p_{n-1}-p_{n-2}$，卽連次漸近分數之分子爲循環級數，其級數率爲 $1-2x+x^2$.

$S=p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots\cdots$ 則由循環級數之公式 $S=\frac{p_1+(p_2-2p_1)x}{1-2x+x^2}$

$p_1=1,\ p_2=2$，由是 $S=\frac{1}{(1-x)^2}$，而 $p_n=n$.

同法 $S_1=q_1+q_2x+q_3x^2+\cdots\cdots q_n=n+1,\quad\therefore\quad\frac{p_n}{q_n}=\frac{n}{n+1}.$

(2) 此級數率爲 $1-3x-4x^2$，而

$$p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots\cdots=\frac{p_1+(p_2-3p_1)x}{1-3x-4x^2}=\frac{4}{1-3x-4x^2}$$

$$=\frac{4}{5}\left(\frac{4}{1-4x}+\frac{1}{1+x}\right).$$

$$q_1+q_2x+q_3x^2+\cdots\cdots=\frac{q_1+(q_2-3q_1)x}{1-3x-4x^2}=\frac{3+4x}{1-3x-4x^2}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{16}{1-4x}-\frac{1}{1+x}\right).$$

$\therefore\quad p_n=\frac{4}{5}\{4^n+(-1)^{n-1}\}$，及 $q_n=\frac{1}{5}\{4^{n+1}+(-1)^n\}$.

205. 證 $(a-x)^4(y-z)^4+(a-y)^4(z-x)^4+(a-z)^4(x-y)^4=$

$$2\{(a-y)^2(a-x)^2(x-y)^2(x-z)^2+(a-z)^2(a-y)^2(y-z)^2(y-x)^2+(a-x)^2(a-z)^2(z-x)^2(z-y)^2\}.$$

(解) $(a-x)(y-z)=\alpha$, $(a-y)(z-x)=\beta$, $(a-z)(x-y)=\gamma$, 則 $\alpha+\beta+\gamma=0$, 故 $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$.

206. $x^3+qx+r=0$ 之三根爲 α,β,γ, 而

$\frac{m\alpha+n}{m\alpha-n}+\frac{m\beta+n}{m\beta-n}+\frac{m\gamma+n}{m\gamma-n}$ 以 m, n, q, r 之項示之.

(解) $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$, $\alpha\beta\gamma=-r$.

$$\text{原式}=\frac{\sum(m\beta-n)(m\gamma-n)(m\alpha+n)}{(m\alpha-n)(m\beta-n)(m\gamma-n)}$$

$$=\frac{\sum\{m^3\alpha\beta\gamma+m^2n(\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta)+mn^2(\alpha-\beta-\gamma)+n^3\}}{m^3\alpha\beta\gamma-m^2n(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)+mn^2(\alpha+\beta+\gamma)-n^3}$$

$$=\frac{\sum\{-m^3r+m^2n(2\beta\gamma-q)+2mn^2\alpha+n^3\}}{-m^3r-m^2nq-n^3}$$

$$=\frac{-3m^3r+m^2n(2\beta\gamma+2\gamma\alpha+2\alpha\beta-3q)+2mn^2(\alpha+\beta+\gamma)+3n^3}{-m^3r-m^2nq-n^3}$$

$$=\frac{-3m^3r-m^2nq+3n^3}{-m^3r-m^2nq-n^3}=\frac{3m^3r+m^2nq-3n^3}{m^3r+m^2nq+n^3}.$$

207. 英國每年 46 人之內死亡 1 人, 33 人之內出生 1 人, 然則人口至二倍在何年後.

但 $\log 2=\cdot3010300$, $\log 1531=3\cdot1849752$, $\log 1518=3\cdot1812718$.

(解) x 爲初年之人口, 然則此年末之人口爲

$x+\frac{x}{33}-\frac{x}{46}=\frac{1531x}{1518}$, n 爲所求之年數, 則 $\left(\frac{1531}{1518}\right)^n x=2x$,

即 $n(\log 1531-\log 1518)=\log 2$,

$$\therefore\quad n=\frac{\cdot 3010300}{3\cdot 1849752-3\cdot 1812718}=81,\text{（殆 81 年）}.$$

208. $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ 証

$$a_r-na_{r-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a_{r-2}-\ldots+(-1)^r\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a_0=0,$$

但 r 非 3 之倍數，若爲 3 之倍數，則此級數之值如何.

（解）$(1-x^3)^n=(1-x)^n(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)$.

比較 x^r 之係數，則除 r 爲 3 之倍數，而左邊 x^r 之係數爲 0，即得所求之結果.

若 r 爲 3 之倍數，即 $3m$，則左邊 x^{3m} 之係數爲

$$(-1)^m\frac{\underline{|n}}{\underline{|m}\,\underline{|n-m}}\ \text{即}\ (-1)^{\frac{r}{3}}\frac{\underline{|n}}{\underline{|\tfrac{r}{3}}\,\underline{|n-\tfrac{r}{3}}}\ \text{即所求之值.}$$

209. 甲乙丙丁戊之五人種組織一會，甲比丁之三分之一少 1 人，比戊之半少 3 人，乙丁之和比丙戊之和多 3 人，乙及丁比全數之半少 1 人，戊及丙等於全數之十六分之七，各人數如何.

（解）甲乙丙丁戊人數順次爲 x, y, z, u, v，則

$$x=\frac{u}{3}-1=\frac{v}{2}-3,\ y+u-z-v=3,\ z+u=\frac{x+y+z+u+v}{2}-1,$$

$$z+v=\frac{7(x+y+z+u+v)}{16}.$$ 由是求 x, y, z, u, v 得

$$x=7,\ y=14,\ z=15,\ u=24,\ v=20.$$

210. 求第 n 項爲 $\frac{(n+1)(-x)^{n+1}}{n(n+2)}$ 之級數之無限項之和.

(解) 第 n 項 $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)-x)^{n+1}$,

由是 $S=\frac{1}{2}\left\{\left(-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{4}-\cdots\right)+\left(-\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^4}{5}+\frac{x^5}{6}-\cdots\right)\right\}$

$$=-\frac{1}{2}x\log(1+x)-\frac{1}{2x}\left\{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right\},$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1+x^2}{2x}\log(1+x).$$

211. n 為正整數，則

$$n-\frac{n(n^2-1)}{\lfloor 2}+\frac{n(n^2-1)(n^2-2^2)}{\lfloor 2\lfloor 3}-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^r\frac{n(n^2-1)(n^2-2^2)\cdots\cdots(x^2-r^2)}{\lfloor r\lfloor r+1}+\cdots\cdots=(-1)^{n+1}.$$

(解) $(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\cdots$

$$+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+(-1)^nx^n.$$

$$(1-x)^{-(n+1)}=1+(n+1)x+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}x^2$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\cdots$$

於此兩結果之積比較 x^{n-1} 之係數，而原式左邊之級數為 S，則

$(-1)^{n-1}S=(1-x)^{-1}$ 之開散式之 x^{n-1} 之係數 $=1=(-1)^{2n}$,

$$\therefore\quad S=(-1)^{n+1}.$$

212. 求下之級數之和.

(1) 6, 24, 60, 120, 210, 336,....至 n 項.

(2) $4-9x+16x^2-25x^3+36x^4-49x^5+\cdots\cdots$至無限.

(3) $\frac{1.3}{2}+\frac{3.5}{2^2}+\frac{5.7}{2^3}+\frac{7.9}{2^4}+\ldots$至無限.

(解) (1) $S=6+24+60+120+210+336+\ldots\ldots$

第一差 $18+36+60+90+126+\ldots\ldots$

第二差 $18+24+30+36+\ldots\ldots$

S及第一差,第二差之第 n 項順次爲 u_n, v_n, w_n, 則

$w_n=18+(n-1)6=6n+12,\quad v_n-v_{n-1}=w_{n-1}=6n+6,$

$$\therefore\quad v_n=(v_n-v_{n-1})+(v_{n-1}-v_{n-2})+(v_{n-2}-v_{n-3})+\ldots+(v_2-v_1)+v_1$$

$$=(6n+6)+6n+(6n-6)+\ldots+18+6$$

$$=\frac{n}{2}(6n+6+18)+6=3(n+2)(n+1).$$

又 $$u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+(u_{n-2}-u_{n-3})+\ldots+(u_2-u_1)+u_1$$

$$=v_{n-1}+v_{n-2}+v_{n-3}+\ldots+v_1+u_1$$

$$=3\{(n+1)n+n(n-1)+\ldots+3.2\}+6$$

$$=3\left\{\frac{n}{3}(n+1)(n+2)-1.2\right\}-6=n(n+1)(n+2).$$

由是 $S=1.2.3+2.3.4\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$

(2) 由斯密斯氏326章級數率爲 $(1-x)^3$, 即

$$S=4-9x+16x^2-25x^3+36x^4-\ldots\ldots$$

$$3xS=\quad 12x-27x^2+48x^3-75x^4+\ldots\ldots$$

$$3x^2S=\quad 12x^2-27x^3+48x^4-\ldots\ldots$$

$$x^3S=\quad 4x^3-9x^4+\ldots\ldots$$

由加法得 $(1+x)^3S=4+3x+x^2,\quad \therefore\quad S=\frac{4+3x+x^2}{(1+x)^3}.$

(3) $x=\frac{1}{2}$, 則 $S=1.3x+3.5x^2+5.7x^3+7.9x^4+\dots\dots\dots$

$u_n=(2n-1)(2n+1)x^n$, 由是級數率爲 $(1-x)^3$,

$$\therefore \quad S=\frac{3+6x-x^2}{(1-x)^3}=46.$$

213. 解方程式 $\begin{vmatrix} 4x & 6x+2 & 8x+1 \\ 6x+2 & 9x+3 & 12x \\ 8x+1 & 12x & 16x+2 \end{vmatrix}=0.$

(解) 自第一列第三列之和減第二列, 自第三列減第一列之二倍, 則

$$\begin{vmatrix} 4x & 6x+2 & 8x+1 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

卽 $4x(12)-(6x+2)(-3)+(8x+1)16=0, \quad \therefore \quad x=-\frac{11}{97}.$

214. 證 (1) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)>6abc.$

(2) $n(a^{p+q}+b^{p+q}+c^{p+q}+..)>(a^p+b^p+c^p+..)(a^q+b^q+c^q+..)$,

但 $a, b, c, \dots.$ 爲 n 個數量.

(解) (1) $a^2+b^2c^2>2\sqrt{a^2b^2c^2}=2abc$,

$$b^2+c^2a^2>2abc, \ c^2+a^2b^2>2abc,$$

由是 $$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)>6abc.$$

(2) a^p-b^p 及 a^q-b^q 皆爲正或皆爲負,

由是 $(a^p-b^p)(a^q-b^q)>0$, 卽 $a^{p+q}+b^{p+q}>a^pb^q+a^qb^p$.

同法 $a^{p+q}+c^{p+q}>a^pc^q+a^qc^p$, $b^{p+q}+c^{p+q}>b^pc^q+b^qc^p, \dots\dots\dots$

此不等式有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個, 故由加法得

$$(n-1)(a^{p+q}+b^{p+q}+c^{p+q}+\dots.)>\sum a^pb^q,$$

由是 $n(a^{p+q}+b^{p+q}+c^{p+q}+\ldots.)>\sum a^{p+q}+\sum a^p b^q.$

215. 解方程式 $yz=a(y+z)+\alpha,\quad zx=a(z+x)+\beta,$ $xy=a(x+y)+\gamma.$

(解) $yz-a(y+z)+a^2=a^2+\alpha$, 即 $(y-a)(z-a)=a^2+\alpha,$ $(z-a)(x-a)=a^2+\beta,\ (x-a)(y-a)=a^2+\gamma,$

$$\therefore\quad (z-a)^2=\frac{(a^2+\alpha)(a^2+\beta)}{a^2+\gamma},\qquad \therefore\quad z=a\pm\sqrt{\frac{(a^2+\alpha)(a^2+\beta)}{a^2+\gamma}},$$

$$x=a\pm\sqrt{\frac{(a^2+\beta)(a^2+\gamma)}{a^2+\alpha}},\quad y=a\pm\sqrt{\frac{(a^2+\gamma)(a^2+\alpha)}{a^2+\beta}}.$$

216. n 爲素數,則

$$1(2^{n-1}+1)+2\left(3^{n-1}+\frac{1}{2}\right)+3\left(4^{n-1}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+(n-1)\left(n^{n-1}+\frac{1}{n-1}\right)$$

爲 n 之倍數.

(解) 原式 $=\{1.2^{n-1}+2.3^{n-1}+\ldots\ldots+(n-2)(n-1)^{n-1}\}$

$$+(n-1)n^{n-1}+n-1.$$

由勿而買氏之定理 $2^{n-1},3^{n-1},\ldots(n-1)^{n-1}$ 爲 $1+M(n)$.

$\therefore$ 原式 $=\{1+2+3+\ldots+(n-1)\}+(n-1)n^{n-1}+M(n)$

$$=\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)n^{n-1}+M(n)=M(n).$$

217. 射的競爭時,各射得 5, 4, 3, 2 或 0 點,則 7 射得 30 點之方法之數如何.

(解) 7 射得 30 點之方法之數爲 $(x^5+x^4+x^3+x^2+x^0)^7$ 之式中 x^{30} 之係數.

今 $(x^5+x^4+x^3+x^2+1)^7=\{x^4(x+1)+x^3+x^2+1\}^7=x^{28}(x+1)^7$

$$+7x^{21}(x+1)^6(x^3+x^2+1)+21x^{20}(x+1)^5(x^3+x^2+1)^2$$
$$+35x^{16}(x+1)^4(x^3+x^2+1)+\cdots\cdots$$
$$=21+7(1+15+20)+21(2+5)=21+252+147=420.$$

218. $\dfrac{12b}{5}=\dfrac{9d}{b}=\dfrac{5e}{c}=\dfrac{d^2}{c^2}$, 則 $x^5-bx^3+cx^2+dx-e$ 爲完平方式及完立方式之積, 試證之.

(解) $x^5-bx^3+cx^2+dx-e=(x+3k)^2(x-2k)^3$, 則

$$=x^5-15k^2x+10k^3x^2+60k^4x-72k^5.$$

由是 $b=15k^2,\ c=10k^3,\ d=60k^4,\ e=72k^5.$

$$\therefore\quad 36k^2=\frac{12b}{5}=\frac{9d}{b}=\frac{5e}{c}=\frac{d^2}{c^2}.$$

219. 囊內有 6 黑玉, 及不多於 6 個之白玉, 今取出三個, 不再返入, 而皆得白, 然則其次取出一黑之適遇爲 $\dfrac{677}{909}$, 試證之.

(解) 取出三白, 故白玉之數有 3, 4, 5, 6, 其適遇皆同樣.

$$p_1=\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7},\quad p_2=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8},\quad p_3=\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9},\quad p_4=\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10},$$

即 $p_1=\dfrac{1}{84},\ p_3=\dfrac{1}{30},\ p_4=\dfrac{2}{33},\ p_4=\dfrac{1}{11}.$

$$\therefore\quad \frac{Q_1}{55}=\frac{Q_2}{154}=\frac{Q_3}{280}=\frac{Q_4}{420}=\frac{1}{909}.$$

次取出一黑之適遇 $=Q_1\times 1+Q_2\times\dfrac{6}{7}+Q_3\times\dfrac{3}{4}+Q_4\times\dfrac{2}{3}$

$$=\frac{55}{909}+\frac{6}{7}\times\frac{154}{909}+\frac{3}{4}\times\frac{280}{909}+\frac{2}{3}\times\frac{420}{909}=\frac{677}{909}.$$

220. 最初 n 整數之平方各二個之積之和爲

$\dfrac{n}{360}(n^2-1)(4n^2-1)(5n+6)$, 試證之.

(解) $2S=(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)^2-(1^4+2^4+3^4+\dots+n^4)$.

$(n+1)^5-n^5=5n^4+10n^3+10n^2+5n+1$, 故

$$5\sum n^4+10\sum n^3+10\sum n^2+5\sum n+n$$
$$=\{(n+1)^5-n^5\}+\{n^5-(n-1)^5\}+\{(n-1)^5-(n-2)^5\}+\dots\dots$$
$$+\{2^5-1^5\}=(n+1)^5-1,\text{ 即}$$

$$5\sum n^4+10\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+10.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+5.\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=(n+1)^5-1,$$

$$\therefore\quad \sum n^4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

由是 $2S=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}-\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$,

$$\therefore\quad S=\frac{1}{360}n(n+1)(2n+1)(n-1)(2n-1)(5n+6).$$

221. $\dfrac{\alpha^2(b-c)}{x-a}+\dfrac{\beta^2(c-a)}{x-b}+\dfrac{\gamma^2(a-b)}{x-c}=0$ 爲等根, 則

$$\alpha(b-c)\pm\beta(c-a)\pm\gamma(a-b)=0.$$

(解) $x^2\{\alpha^2(b-c)+\beta^2(c-a)+\gamma^2(a-b)\}$

$$+x\{\alpha^2(b^2-c^2)+\beta^2(c^2-a^2)+\gamma^2(a^2-b^2)\}$$
$$+\alpha^2bc(b-c)+\beta^2ca(c-a)+\gamma^2ab(a-b)=0,$$

此方程式爲等根, 則

$$\{\alpha^2(b^2-c^2)+\beta^2(c^2-a^2)+\gamma^2(a^2-b^2)\}^2$$
$$=4\{\alpha^2(b-c)+\beta^2(c-a)+\gamma^2(a-b)\}\times$$
$$\{\alpha^2bc(b-c)+\beta^2ca(c-a)+\gamma^2ab(a-b)\},$$

即 $\alpha^4(b-c)^4+\beta^4(c-a)+\gamma^2(a-b)^4$

$$-2\beta^2\gamma^2(c-a)^2(a-b)^2-2\gamma^2\alpha^2(a-b)^2(b-c)^2-2\alpha^2\beta^2(b-c)^2(c-a)^2=0.$$

此左邊之形爲 $A^4+B^4+C^4-2B^2C^2-2C^2A^2-2A^2B^2$,

即 $(A+B+C)(A+B-C)(A-B+C)(A-B-C)$.

$\therefore$ 此左邊爲 $\alpha(b-c)\pm\beta(c-a)\pm\gamma(a-b)=0$.

222. n 爲正整數，則

$$n=2^{n-1}-\frac{n-2}{1}2^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{\underline{|2}}2^{n-5}$$

$$-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{\underline{|3}}2^{n-7}+\cdots\cdots$$

（解） 2^{n-1}, $(n-2)2^{n-3}$, $\frac{(n-4)(n-3)}{\underline{|2}}2^{n-5}$, ... 順次爲 $(1-2x)^{-1}$, $(1-2x)^{-2}$, $(1-2x)^{-3}$, ... 之式中 x^{n-1} x^{n-3} x^{n-5}....之係數.

由是所求之和等於 $\frac{1}{1-2x}-\frac{x^2}{(1-2x)^2}+\frac{x^4}{(1-2x)^3}-\cdots$ 之開散式中 x^{n-1} 之係數.

此級數爲 G. P. 故其和爲 $\frac{1}{1-2x}\div\left(1+\frac{x^2}{1-2x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}$.

故比較 x^{n-1} 之係數得證.

223. 解下之方程式.

(1) $x^2+2yz=y^2+2zx=z^2+2xy+3=76$.

(2) $x+y+z=a+b+c$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$,

$ax+by+cz=bc+ca+ab$.

（解） (1) $x^2+2yz=76\ldots(1)$, $y^2+2zx=76\ldots(2)$,

$z^2+2xy=73\ldots(3)$.

(1)(2)(3) 相加開平方得 $x+y+z=\pm15\ldots(4)$

由 (1)(2) 得 $x^2-y^2-2z(x-y)=0$, $\therefore$ $x-y=0$,

或 $x+y-2z=0$.

第壹 $x=y$, 則由 (4) 得 $2x+z=\pm15$,

由 (2) 及 (3) 得 $x^2+2zx=76$, 及 $z^2+2x^2=73$,

由減法得 $z^2-2zx+x^2=-3$, $\therefore$ $x-z=\pm\sqrt{-3}$.

故由 $2x+z=\pm15$, $x-z=\pm\sqrt{-3}$ 得

$$x=\frac{\pm15\pm\sqrt{-3}}{3}=y,\quad z=\frac{\pm15\mp2\sqrt{-3}}{3}$$

第貳 $x+y=2z$, 則由 (4) 得 $z=\pm5$,

由 $x+y=\pm10$ 及 (3) 得 $25+2xy=73$, $\therefore$ $xy=24$,

由是 $x=\pm4$, $y=\pm6$, $z=\pm5$,

$x=\pm6$, $y=\pm4$, $z=\pm5$.

(2) $(x-a)+(y-b)+(z-c)=0$ ....(1)

$bc(x-a)+ca(y-b)+ab(z-c)=0$ ....(2)

由 (1) 及 (2) 則如下

$$\frac{x-a}{a(b-c)}=\frac{y-b}{b(c-a)}=\frac{z-c}{c(a-b)}=\frac{a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$

$$=\frac{ax+by+cz-a^2-b^2-c^2}{-(b-c)(c-a)(a-b)}=\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

由是得 x, y, z.

224. 一直線上 n 點與他直線上 m 點各相連結,此等連結線以其諸定點為界,則於此定點之外相交於 $\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1)$ 點.

(解) 一直線上 n 點為 $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$, 他直線上 m 點為 $B_1, B_2, B_3, \dots B_m$, 而 A_1 及 B_1 在同部分之方.

然則 A_2B_1 截自 A_1 引之 $m-1$ 線,

A_3B_1 截自 A_1, A_2 引之 $2(m-1)$ 線,

A_4B_1 截自 A_1,A_2,A_3 引之 $3(m-1)$ 線,

....

A_nB_1 截自 $A_1,A_2,A_3\ldots A_{n-1}$ 引之 $(n-1)(m-1)$ 線.

又 A_2B_2 截自 A_1 引之 $m-2$ 線,

A_3B_2 截自 A_1,A_2 引之 $2(m-2)$ 線,

A_4B_2 截自 A_1,A_2,A_3 引之 $3(m-2)$ 線,

....

A_nB_2 截自 $A_1,A_2,A_3,\ldots A_{n-1}$ 引之 $(n-1)(m-2)$ 線.

以下逐次取 $B_1,B_2,\ldots B_m$ 之 m 點亦如此.

終 A_2B_{m-1} 截自 A_1 引之 1 線,

A_3B_{m-1} 截自 A_1A_2 引之 2 線,

A_4A_{m-1} 截自 A_1,A_2,A_3 引之 3 線,

....

A_nB_{m-1} 截自 $A_1,A_2,A_3,\ldots A_{n-1}$ 引之 $n-1$ 線.

又 A_2B_m 不截自 A_1 引之線, A_3B_m 不截自 A_1,A_2 引之線,以下同.

由是所求之交點爲

$$\{1+2+3+\ldots+(n-1)\}\{(m-1)+(m-2)+\ldots+1\}$$

即 $$\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{m(m-1)}{2}.$$

225. $y=x+x^2+x^5$, 則 $x=y+ay^2+by^3+cy^4+dy^5+\ldots\ldots\ldots$

而 $a^2d-3abc+2b^3=-1$, 試證之.

(解) $x=y+ay^2+by^3+cy^4+dy^5$

$$=(x+x^2+x^5)+a(x+x^2+x^5)^2+b(x+x^2+x^5)^3+\ldots\ldots\ldots$$

y 之係數爲 1 明矣，比較 x 之各方乘之係數，則

$$a+1=0, \qquad \therefore \qquad a=-1,$$

$$b+2a=0, \qquad 即 \qquad b=-2a=2,$$

$$c+3b+a=0, \qquad 即 \qquad c=-5,$$

$$d+4c+3b+1=0, \qquad 即 \qquad d=13,$$

由是 $a^2d-3abc+2b^3=13-30+16=-1.$

226. 某人以等額之金買犢，豚，羊，犢 1 頭之價比豚 1 頭之價高 1 磅，比羊 1 頭之價高 2 磅，而其頭數合爲 47 頭，豚數比犢多 9 磅之羊之數，各頭數如何.

(解) 犢，豚，羊各 1 頭之價爲 $x, x-1, x-2$ 磅，其各金額爲 y 磅，則

$$\frac{y}{x}+\frac{y}{x-1}+\frac{y}{x-2}=47, \quad \frac{y}{x-1}-\frac{y}{x}=\frac{9}{x-2}.$$

由第二得 $y=\dfrac{9x(x-1)}{x-2}$，∴ 由第一得 $\dfrac{9x(x-1)}{x-2}\cdot\dfrac{3x^2-6x+2}{x(x-1)(x-2)}=47,$

由是 $(x-5)(20x-34)=0, \qquad \therefore \qquad x=5.$

故各頭數爲 12 犢，15 豚，20 羊.

227. 以無限連分數 $\dfrac{1}{1+}\dfrac{1^2}{1+}\dfrac{2^2}{1+}\dfrac{3^2}{1+}\cdots\dfrac{n^2}{1+}\cdots\cdots\cdots$ 之形表 $log 2.$

(解) 已知 $log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots.$

若 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{x}{n+1}=\dfrac{1}{n+y_n}$，則 $y_n=\dfrac{n^2x}{n+1-nx},$

$$\therefore \quad \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\frac{x}{1+}\frac{1^2x}{2-x+}\frac{2^2x}{3-2x+}\frac{3^2x}{4-3x+}\cdots$$

$$=log(1+x),$$

令 $x=1$, 則 $\frac{1}{1+}\frac{1^2}{1+}\frac{2^2}{1+}\frac{3^2}{1+}\cdots\cdots=\log 2.$

228. 六科目之試驗,各科之最高點爲 100 點,受驗者得全數之四折之方法之數爲 $\frac{\underline{|1}}{\underline{|5}}\left\{\frac{\underline{|245}}{\underline{|240}}-6.\frac{\underline{|144}}{\underline{|139}}+15.\frac{\underline{|43}}{\underline{|38}}\right\}$

(解) 所求之數等於 $(x^0+x^1+x^2+\ldots\ldots+x^{100})^6$ 之式中 x^{240} 之係數,

卽等於 $\left(\frac{1-x^{101}}{1-x}\right)^6$, 卽 $(1-x^{101})^6(1-x)^{-6}$ 之式中 x^{240} 之係數.

由是所求之數等於 $(1-6x^{101}+15x^{202}-\ldots\ldots)(1-x)^{-6}$ 之式中 x^{240} 之係數.

但 $(1-x)^{-6}$ 之式中 x^r 之係數爲 $\frac{\underline{|r+5}}{\underline{|5}\ \underline{|r}}$,

故於下式之積求 x^{240} 之係數,

$$(1-6x^{101}+15x^{202}-\ldots)\times$$

$$\left(1+\ldots+\frac{\underline{|43}}{\underline{|5}\ \underline{|38}}x^{38}+\ldots+\frac{\underline{|144}}{\underline{|5}\ \underline{|139}}x^{139}+\ldots+\frac{\underline{|245}}{\underline{|5}\ \underline{|240}}x^{240}\right)$$

卽得本題之結果.

229. $\frac{x}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^5}{10}+\frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{x^7}{14}+\cdots\cdots\cdots$

爲斂級數,試驗之.

(解) $u_n=\frac{1.3.5\ldots(4n-3)(4n-5)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots\ldots(4n-4)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{4n-2}$,

由是 $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{4n(4n+2)}{(4n-3)(4n-1)}\cdot\frac{1}{x^2}$

故 $x<1$, 則此級數爲斂級數, $x>1$, 則爲發級數.

若 $x=1$, 則 $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ 之極限 $=1$.

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) \text{之極限} = \frac{n(24n-3)}{(4n-3)(4n-1)} \text{之極限} = \frac{3}{2},$$

由是爲歛級數.

230. 求循環級數 $1+6+40+288+\ldots$ 之級數率第 n 項及 n 項之和，又此級數 r 項之和爲第 r 項之級數 n 項之和爲

$$\frac{2}{3^2}(2^{2n}-1)+\frac{4}{7^2}(2^{3n}-1)-\frac{5n}{21}.$$

（解） 級數率爲 $1-px-qx^2$，則

$$288=40p+6q,\ 40=6p+q, \quad \therefore \quad p=12,\ q=-32,$$

故級數率爲 $1-12x+32x^2$.

故此級數之普通函數 $=\dfrac{x-6x^2}{1-12x+32x^2}=\dfrac{x}{2}\left\{\dfrac{1}{1-4x}+\dfrac{1}{1-8x}\right\}$,

而此 x^n 之係數爲 $\dfrac{1}{2}(4^{n-1}+8^{n-1})$.

$$\therefore \quad S_n=\frac{1}{2}(1+4+4^2+\ldots+4^{n-1})+\frac{1}{2}(1+8+8^2+\ldots+8^{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4^n-1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8^n-1}{7}=\frac{2^{2n-1}}{3}+\frac{2^{3n-1}}{7}-\frac{5}{21}.$$

$$\therefore \quad S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n=\frac{1}{3}\sum 2^{2n-1}+\frac{1}{7}\sum 2^{3n-1}-\frac{5n}{21}$$

$$=\frac{2}{3^2}(2^{2n}-1)+\frac{4}{7^2}(2^{3n}-1)-\frac{5n}{21}.$$

231. 於某處測正午，三日之內，二日太陽爲雲所遮，今求五日間至少四日無雲之適遇.

（解） 雲之適遇爲 $\dfrac{2}{3}$，晴之適遇爲 $\dfrac{1}{3}$，而至少晴 4 回，故所求之適遇爲 $\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\right)^5$ 之式之末二項 $\left(\text{卽}\ \dfrac{1}{3}\ \text{之四次}\right)$.

即 $5\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{11}{243}$，即所求之適遇．

232. 解下之方程式．

$x^2+(y-z)^2=a^2,\quad y^2+(z-x)^2=b^2,\quad z^2+(x-y)^2=c^2.$

（解）自第一減第二，則 $(x-y)\{x+y-(x+y-2z)\}=a^2-b^2$,

$\therefore\quad x-y=\frac{a^2-b^2}{2z}$，代入第三，則 $z^2+\frac{(a^2-b^2)^2}{4z^2}=c^2$,

$$\therefore\quad 4z^4-4c^2z^2+c^4=c^4-(a^2-b^2)^2,$$

即 $2z^2-c^2=\pm\sqrt{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}$,

即 $4z^2=2c^2\pm2\sqrt{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}$

$$=(\sqrt{a^2-b^2+c^2}\pm\sqrt{-a^2+b^2+c^2})^2,$$

$$\therefore\quad 2z=\pm\sqrt{a^2-b^2+c^2}\pm\sqrt{-a^2+b^2+c^2}.$$

233. 自 $\frac{x^2-xy-xz}{a}=\frac{y^2-yz-yx}{b}=\frac{z^2-zx-zy}{c}$，及 $ax+by+cz=0$ 消去 x, y, z.

（解）$\frac{x^2-xy-xz}{a}=\frac{y^2-yz-yx}{b}=\frac{z^2-zx-zy}{c}=k,$

$x^2-xy-xz=ak,\ y^2-yz-yx=bk,\ z^2-zx-zy=ck,$

$\therefore\quad x^2-y^2-z(x-y)=(a-b)k$，即 $-(x-y)(z-x-y)=(a-b)k$,

但 $z(z-x-y)=ck,\qquad\therefore\qquad -(x-y)\frac{ck}{z}=(a-b)k$

$\therefore\quad cx-cy+(a-b)z=0$，同法 $bx-bz+(a-c)z=0$.

由是 $x:y:z=a(b+c-a):b(c+a-b):c(a+b-c)$,

以 x, y, z 之值代入 $ax+by+cz=0$，則

$$a^3+b^3+c^3=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

234. $x^3+px^2+qx+r=0$ 之二根相等,而符號相反,則 $pq=r$.

(解) $x=a$, 則他一根爲 $x=-a$,

由是 $a^3+pa^2+qa+r=0$, 及 $-a^3+pa^2-qa+r=0$,

$\therefore$ $2pa^2+2r=0$, 及 $2a^3+2qa=0$, 卽 $pa^2=-r$, $q=-a^2$,

由是 $pa^2.q=(-r)(-a^2)$, $\therefore$ $pq=r$.

235. 求下之級數之和.

(1) $1+2^3x+3^3x^2+\dots+n^3x^{n-1}$.

(2) $\frac{25}{1^2.2^3.3^3}+\frac{52}{2^2.3^3.4^3}+\dots+\frac{5n^2+12n+8}{n^2(n+1)^3(n+2)^3}$.

(解) (1) 級數率爲 $(1-x)^4$, 則

$$S=1+8x+27x^2+64x^3+125x^4\dots+n^3x^{n-1}$$

$$-4xS=-4x-32x^2-108x^3-256x^4\dots-4(n-1)^3x^{n-1}-4n^3x^n$$

$$6x^2S=6x^2+48x^3+162x^4\dots+6(n-2)^3x^{n-1}+6(n-1)^3x^n+6n^3x^{n+1}$$

$$-4x^3S=-4x^3-32x^4\dots-4(n-3)^3x^{n-1}-4(n-2)^3x^n-4(n-1)^3x^{n+1}-4n^3x^{n+2}$$

$$x^4S=x^4\dots+(n-4)^3x^{n-1}+(n-3)^3x^n+(n-2)^3x^{n+1}+(n-1)^3x^{n+2}$$

由加法得

$$S(1-x)^4=1+4x+x^2-(n+1)^3x^n+(3n^3+6n^2-4)x^{n+1}-(3n^3+3n^2-3n+1)x^{n+2}+(n-1)^3x^{n+2}+n^3x^{n+2}$$

卽得 S.

(2) $\frac{5n^2+12n+8}{n^2(n+1)^3(n+2)^3}=\frac{(n+2)^3-n^2(n+1)}{n^2(n+1)^3(n+2)^3}=\frac{1}{n^2(n+1)^3}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^3}$,

故 $u_n=v_n-v_{n-1}$, 但 $v_n=\frac{1}{n^2(n+1)^3}$,

由是 $S_n=\frac{1}{1^2.2^3}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^3}$.

236. $(1+a^3x^4)(1+a^5x^8)(1+a^9x^{16})(1+a^{17}x^{32})\ldots\ldots$

$=1+A_4x^4+A_8x^8+A_{12}x^{12}+\ldots\ldots$ 則

$A_{8n+4}=a^3A_{8n}$ 及 $A_{8n}=a^{2n}A_{4n}$, 試證之,

及求此開散式之最初拾項.

(解) 於 $(1+a^3x^4)(1+a^5x^8)(1+a^9x^{16})\ldots\ldots$

$=1+A_4x^4+A_8x^8+\ldots\ldots+A_{4n}x^{4n}+\ldots\ldots$ 之式用 $a^{\frac{1}{2}}x^2$ 代 x, 得

$(1+a^5x^8)(1+a^9x^{16})(1+a^{17}x^{32})\ldots\ldots$

$=1+A_4a^2x^8+A_8a^4x^{16}+\ldots\ldots+A_{4n}a^{2n}x^{8n}+\ldots\ldots$

$\therefore\quad 1+A_4x^4+A_8x^8+\ldots+A_{8n}x^{8n}+A_{8n+4}x^{8n+4}+\ldots\ldots$

$=(1+a^3x^4)(1+A_4a^2x^8+A_8a^4x^{16}+\ldots+A_{4n}a^{2n}x^{8n}+\ldots)$.

比較 x^{8n} 之係數, 則 $A_{8n}=A_{4n}a^{2n}$,

又比較 x^{8n+4} 之係數 則 $A_{8n+4}=A_{4n}a^{2n}a^3=a^3A_{8n}$.

而 $A_4=a^3$, $A_8=a^2A_4=a^5$, $A_{12}=a^3A_8=a^8$, $A_{16}=a^4A_8=a^9$,

$A_{20}=a^3A_{16}=a^{12}$, $A_{24}=a^6A_{12}=a^{14}$, $A_{28}=a^3A_{24}=a^{17}$,

$A_{32}=a^8A_{16}=a^{17}$, $A_{36}=a^3A_{32}=a^{20}$.

由是最初拾項爲

$1+a^3x^4+a^5x^8+a^8x^{12}+a^9x^{16}+a^{12}x^{20}+a^{14}x^{24}+a^{17}x^{28}+a^{17}x^{32}+a^{20}x^{36}$.

237. 海上自 A 至 B 無海流, 自 B 至 C 有海流, 有人自 A 至 C, 順漕 3 時, 又自 C 至 A, 以 $3\frac{1}{2}$ 時而歸, 若自 A 至 C 有海流, 則順漕 $2\frac{3}{4}$ 時, 而逆漕之時數如何.

(解) AB$=x$ 哩, BC$=y$ 哩, 每時之漕力爲 u 哩, 海流爲 v 哩

然則 $\frac{x}{u}+\frac{y}{u+v}=3,\quad \frac{x}{u}+\frac{y}{u-v}=3\frac{1}{2},\quad \frac{x+y}{u+v}=2\frac{3}{4}.$

由是求 $\frac{x+y}{u-v}$ 之值可也.

由上之方程式得 $\frac{y}{u-v}-\frac{y}{u+v}=\frac{1}{2}$, 卽 $4vy=u^2-v^2$,

由加法得 $4v(x+y)=(u+v)(2u-v)$,

故 $\frac{2u-v}{4v}=\frac{x+y}{u+v}=\frac{11}{4}$, 卽 $u=6v$,

由是 $\frac{x+y}{u-v}=\frac{x+y}{u+v}\cdot\frac{u+v}{u-v}=\frac{11}{4}\times\frac{7}{5}=2\frac{17}{20}$ 卽 $2\frac{17}{20}$ 時.

238. $\frac{3}{3+}\ \frac{3}{2+}\ \frac{3}{2+}\cdots$之第 n 漸近分數爲 $\frac{3^{n+1}+3(-1)^{n+1}}{3^{n+1}-(-1)^{n+1}}$.

(解) $p_n=2p_{n-1}+3p_{n-2}$, 故連次漸近分數之分子爲有 $1-2x-3x^2$ 之級數率之循環級數.

$$S_p=p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots\cdots\cdots$$

$$-2xS_p=-2p_1x-2p_2x^2-\cdots\cdots\cdots$$

$$-3x^2S_p=\qquad -3p_1x^2-\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad S_p=\frac{p_1+(p_2-2p_1)x}{1-2x-3x^2}=\frac{3}{(1-3x)(1+x)},$$

卽 $$S_p=\frac{9}{4(1-3x)}+\frac{3}{4(1+x)},$$

故 $$p_n=\frac{9}{4}\cdot 3^{n-1}+\frac{3}{4}(-1)^{n-1}=\frac{1}{4}\{3^{n+1}+3(-1)^{n+1}\}.$$

同法 $S_q=\frac{9}{4(1-3x)}-\frac{1}{4(1+x)},\quad \therefore\quad q_n=\frac{1}{4}\{3^{n+1}-(-1)^{n+1}\}$

239. 方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n=f(x)=0$ 之係數皆爲整數，而 $f(0)$ 及 $f(1)$ 各爲奇數，則此方程式不有可通度之根，其證如何.

(解) 此方程式 x^n 之係數爲 1，他係數皆爲整數，故不有分數之根，又 $f(0)$ 爲 p_n 而爲奇數，故不有偶數之根，由是最後項之外各項爲偶數，故 $f(2m)$ 爲奇數.

然不有奇數之根何則，x 爲奇數，則

$$x^n = \text{奇數} = \text{偶數} + 1,$$

由是 $f(x) = \text{偶數} + 1 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n$

$$= \text{偶數} + f(1) = \text{奇數},$$

故此式不爲 0.

故此方程式不有可通度之根.

240. $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}=0$，則 $\sqrt{ax+\alpha}+\sqrt{bx+\beta}+\sqrt{cx+\gamma}=0$ 爲一次式，試證之.

又解 $\sqrt{6x^2-15x-7}+\sqrt{4x^2-8x-11}-\sqrt{2x^2-5x+5}=2x-3.$

(解) 平方之，則

$$ax+\alpha+bx+\beta+2\sqrt{(ax+\alpha)(bx+\beta)}=cx+\gamma,$$

移項再平方之，則

$$4(ax+\alpha)(bx+\beta)=\{(c-a-b)x+(\gamma-\alpha-\beta)\}^2,$$

卽 $4ab=(c-a-b)^2$，則此方程式中 x^2 之項消失而爲一次式.而此關係爲 $\pm 2\sqrt{ab}=c-a-b$,

卽 $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=c, \qquad \therefore \qquad \sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\pm\sqrt{c}.$

次 $\sqrt{6x^2-15x-7}+\sqrt{4x^2-8x-11}=(2x-3)+\sqrt{2x^2-5x+5}.$

又恆同式 $(6x^2-15x-7)-(4x^2-8x-11)=(2x-3)^2-(2x^2-5x+5)$,

由除法得 $\sqrt{6x^2-15x-7}-\sqrt{4x^2-8x-11}$

$$=(2x-3)-\sqrt{2x^2-5x+5},$$

由加法得 $2\sqrt{6x^2-15x-7}=2(2x-3)$,

由是 $2x^2-3x-2=0$, $\therefore$ $x=2$ 或 $-\frac{1}{2}$.

241. 囊中有 3 紅玉及 3 綠玉, 某人無心取出其內 3 玉, 又入 3 黑玉, 再無心取出 3 玉, 此末三玉爲各異之色之適遇對於 3 而爲 8, 試證之.

(解) 第一次取出之玉有 3 紅玉, 或 3 綠玉, 或 2 紅 1 綠玉, 或 1 紅 2 綠玉之四樣, 然第二次取出之玉爲相異之色之三玉, 故此四樣之初二樣不起.

故此二樣之各適遇 $=\frac{3\times {}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$.

囊內入 3 黑玉, 後有 2 紅, 1 綠, 3 黑玉, 或 1 紅, 2 綠, 3 黑玉.

由是取出各色之適遇 $=\frac{1.2.3}{{}_6C_3}=\frac{6}{20}$.

故所求之適遇 $=2\times\frac{9}{20}\times\frac{6}{20}\times\frac{27}{100}$.

由是反於此之適遇對於 27 而爲 72, 此 72 與 27 之比卽 8 與 3 之比.

242. 求方程式 $x^4-7x^2+4x-3=0$ 之四根之五方乘之和.

(解) 四根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 則

$\sum\alpha=0$, $\sum\alpha\beta=-7$, $\sum\alpha\beta\gamma=-4$, $\alpha\beta\gamma\delta=-3$.

$\sum\alpha^2=(\sum\alpha)^2-2\sum\alpha\beta=14$.

由 $x^3-7x+4-\frac{3}{x}=0$, 得 $\sum\alpha^3-7\sum\alpha+163\sum\frac{1}{\alpha}=0$,

卽 $\sum\alpha^3-7\sum\alpha+16-\frac{3\sum\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma\delta}=0$, 卽 $\sum\alpha^3+16-\frac{3(-4)}{-3}=0$,

$\therefore\qquad \sum\alpha^3=-12.$

又由 $x^5-7x^3+4x^2-3x=0$ 得 $\sum\alpha^5-7\sum\alpha^3+4\sum\alpha^2-3\sum\alpha=0$,

卽 $\sum\alpha^5-7(-12)+4(14)=0$, $\qquad\therefore\qquad \sum\alpha^5=-140$.

243. 等比及調音級數之第 p, 第 q, 第 r 項同爲 a, b, c, 則 $a(b-c)\log a+b(c-a)\log b+c(a-b)\log c=0$.

(解) G.P. 之初項爲 x, 通比爲 y, 則

$a=xy^{p-1}$, $b=xy^{q-1}$, $c=xy^{r-1}$, $\quad\therefore\quad \frac{a}{b}=y^{p-q}$, $\frac{b}{c}=y^{q-r}$,

$(p-q)\log y=\log a-\log b$, $(q-r)\log y=\log b-\log c$,

$$\therefore\quad \frac{p-q}{q-r}=\frac{\log a-\log b}{\log b-\log c}.$$

又 H.P. 中 $\frac{1}{a}=x'+(p-1)y'$, $\frac{1}{b}=x'+(q-1)y'$, $\frac{1}{c}=x'+(r-1)y'$,

$$\frac{a-b}{ab}=-(p-q)y',\qquad \frac{b-c}{bc}=-(q-r)y',$$

$$\therefore\quad \frac{c(a-b)}{a(b-c)}=\frac{p-q}{q-r},\qquad\therefore\quad \frac{c(a-b)}{a(b-c)}=\frac{\log a-\log b}{\log b-\log c}.$$

$$\therefore\quad a(b-c)\log a+b(c-a)\log b+c(a-b)\log c=0.$$

244. 有四數, 第一第三及第四之和比第二多 8, 第一第二之平方和比第三第四之平方和多 36, 第一第二之積及第三第四之積之和爲 42, 而第一之立方等於第二第三及第四之立方和, 四數各如何.

(解) 第一,第二,第三及第四爲 x, y, z 及 u, 則

$$x+z+u-y=8 \dots\dots(1)$$

$$x^2+y^2-(z^2+u^2)=36 \dots\dots(2)$$

$$xy+yz=42 \dots\dots(3)$$

$$x^3=y^3+z^3+u^3 \dots\dots(4)$$

由 (2)(3) 得 $(x-y)^2-(z+u)^2=-48$; 以 (1) 除之, 得

$$(x-y)-(z+u)=-6, \quad \therefore \quad x-y=1, \text{ 及 } z+u=7.$$

又 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=1+3xy$,

$z^3+u^3=(z+u)^3-3zu(z+u)=343-21zu$,

$\therefore$ 由 (4) 得 $1+3xy-(343-21zu)=0$, 卽 $xy+7zu=114$.

由此式及 (3) 得 $xy=30$, $zu=12$.

由 $x-y=1$, $xy=30$, $z+u=7$, $zu=12$, 得四數 3, 4, 5, 6.

245. T_n, T_{n+1}, T_{n+2} 爲級數率, $T_{n+2}=aT_{n+1}-bT_n$ 數之連續 3 項, 則 $\frac{1}{b^n}\{T_{n+1}^2-aT_nT_{n+1}+bT_n^2\}=$ 常數.

(解) $T_{n+2}=aT_{n+1}-bT_n$, 則

$$\frac{1}{b^n}(T_{n+1}^2-aT_{n+1}T_n+bT_n^2)=\frac{1}{b^n}\{bT_n^2+T_{n+1}(T_{n+1}-aT_n)\}$$

$$=\frac{1}{b^{n-1}}(T_n^2-T_{n+1}T_{n-1})=\frac{1}{b^{n-1}}\{T_n^2-T_{n-1}(aT_n-bT_{n-1})\}$$

$$=\frac{1}{b^{n-1}}(T_n^2-aT_nT_{n-1}+bT_{n-1}^2)=\frac{1}{b^{n-2}}(T_{n-1}^2-aT_{n-1}T_{n-2}+bT_{n-2}^2)=\dots$$

$=T_1^2-aT_1T_0+bT_0^2=$ 常數, 因無關係於 n 故也.

246. 自下之方程式消去 x, y, z,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}, \quad x^2+y^2+z^2=b^2,$$

$$x^3+y^3+z^3=c^3, \qquad xyz=d^3.$$

(解) 由第一第四得 $yz+zx+xy=\frac{d^3}{a}$,

又 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(yz+zx+xy)=b^2+\frac{2d^3}{a}$,

由是 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(yz+zx+xy)\}$,

則 $$c^3-3d^3=\sqrt{\left(b^2+\frac{2d^3}{a}\right)}\left\{b^2-\frac{d^3}{a}\right\}$$

$$\therefore\quad a^3(c^3-2d^3)^2=(ab^2+2d^3)^2.$$

247. $x^4-px^3+qx^2-rx+\frac{r^2}{p^2}=0$ 之四根爲比例,

由是解 $x^4-12x^3+47x^2-72x+36=0$.

(解) 四根爲 a, b, c, d, 則 $a+b+c+d=p$,

$abc+abd+bcd+acd=r,\quad abcd=\frac{r^2}{p^2}$.

故 $abcdp^2=r^2$, 則 $abcd(a+b+c+d)^2=(abc+abd+bcd+acd)^2$,

即 $abcd\{(a+b)+(c+d)\}^2=\{cd(a+b)+ab(c+d)\}^2$,

即 $abcd(a+b)^2+abcd(c+d)^2=c^2d^2(a+b)^2+a^2b^2(c+d)^2$,

$\therefore\quad cd(a+b)^2(ab-cd)-ab(c+d)^2(ab-cd)=0$,

即 $(ab-cd)\{cd(a+b)^2-ab(c+d)^2\}=0$,

即 $(ab-cd)(ad-bc)(ac-bd)=0$,

$\therefore\quad ab=cd,\ ad=bc,\ ac=bd$, 即 a, b, c, d 於任意之順序爲比例.

$x^4-12x^3+47x^2-72x+36=0$, 則 $(x^2+6)^2-12x(x^2+6)+35x^2=0$,

即 $(x^2+6-5x)(x^2+6-7x)=0$,

$\therefore\quad x^2+6-7x=0,\ x^2+6-5x=0$, 由是 $x=2, 6, 1, 3$.

248. 有三人競射, A 5 發中四回, B 4 發中三回, C 3 發中二回,今三人同發,求至少二人中的之適遇,又求二人中的時 C 不中之適遇.

(解) A, B, C 中的之適遇 $=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$.

A 一人不中之適遇 $=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{10}$.

B 一人不中之適遇 $=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$.

C 一人不中之適遇 $=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.

∴ 所求之適遇 $=\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+\frac{2}{15}+\frac{1}{5}=\frac{5}{6}$.

第二設題爲

$$p_1=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{10},\ p_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15},\ p_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{5},$$

$$\therefore\ \frac{Q_1}{3}=\frac{Q_2}{4}=\frac{Q_3}{6}=\frac{Q_1+Q_2+Q_3}{13}=\frac{1}{13},\quad \therefore\ Q_3=\frac{6}{13}.$$

249. 求下之級數之項之和.

(1) $1+0-1+0+7+28+79+\dots\dots$

(2) $-\frac{2.2}{1.2.3.4}+\frac{1.2^2}{2.3.4.5}+\frac{6.2^3}{3.4.5.6}+\frac{13.2^4}{4.5.6.7}+\dots\dots$

(3) $3+x+9x^2+x^3+33x^4+x^5+129x^6+\dots\dots$

(解) (1) $S=1+0-1+0+7+28+79+\dots\dots$

第一差 $=-1-1+1+7+21+51+\dots\dots$

第二差 $=0+2+6+14+30+\dots\dots$

第三差 $=2+4+8+16+\dots\dots$

$w_n-w_{n-1}=2^{n-1},\ v_n-v_{n-1}=w_{n-1},\ u_n-u_{n-1}=v_{n-1}.$

$w_n=(w_n-w_{n-1})+(w_{n-1}-w_{n-2})+\dots+(w_2-w_1)+w_1$

$=2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2+0=2^n-2,$

$$v_n=(v_n-v_{n-1})+(v_{n-1}-v_{n-2})+\dots+(v_2-v_1)+v_1$$

$$=w_{n-1}+w_{n-2}+\dots+w_1+v_1$$

$$=(2^{n-1}-2)+(2^{n-2}-2)+\dots+(2-2)-1=2^n-2-2(n-1)-1$$

$$=2^n-2n-1.$$

$$u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+\dots+(u_2-u_1)+u_1$$

$$=v_{n-1}+v_{n-2}+\dots+v_1+u_1$$

$$\{2^{n-1}-2(n-1)-1\}+\{2^{n-2}-2(n-2)-1\}+\dots\dots$$

$$+\{2-2.1-1\}+1$$

$$=(2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2)-2\{(n-1)+(n-2)+\dots+1\}$$

$$-(n-1)+1$$

$$=2^n-2-n(n-1)-(n-1)+1=2^n-n^2.$$

$$\therefore\quad S^n=\sum(2^n-n^2)=\sum 2^n-\sum n^2=2^{n+1}-2-\frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

(2) $$S_n=\frac{-2.2}{1.2.3.4}+\frac{1.2^2}{2.3.4.5}+\frac{6.2^3}{3.4.5.6}+\frac{13.3^3}{4.5\,6.7}+\dots\dots\dots$$

$$\therefore\quad u_n=\frac{(n^2-3)2^n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+3)}-\frac{2^n}{n(n+2)},$$

同法 $$u_{n-1}=\frac{2^n}{n(n+2)}-\frac{2^{n-1}}{(n-1)(n+1)},$$

$$u_{n-2}=\frac{2^{n-1}}{(n-1)(n+1)}-\frac{2^{n-2}}{(n-2)n},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_2=\frac{2^3}{3.5}-\frac{2^2}{2.4},$$

$$u_1=\frac{2^2}{2.4}-\frac{2}{1\,3},$$

$$\therefore \qquad S_n=\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+3)}-\frac{2}{3}.$$

(3) $S_n=(1+x+x^2+x^3+\ldots$ 至 n 項$)+(2+8x^2+32x^4+128x^6+\ldots)$.

$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$ 至 n 項 $=\frac{1-x^n}{1-x}$.

第二級數 n 爲偶數, 卽爲 $2m$, 則爲 m 項, 而

$2+8x^2+32x^4+128x^6+\ldots$

$$=2\{1+(2x)^2+(2x)^4+\ldots+(2x)2(m-1)\}$$

$$=2.\frac{1-(2x)^{2m}}{1-2x}=2.\frac{1-2^nx^n}{1-2x},$$

n 爲奇數, 卽爲 $2m+1$, 則爲 $m+1$ 項, 而

$$2\{1+(2x)^2+(2x)^4+\ldots+(2x)^{2m}\}=2.\frac{1-(2x)^{2(m+1)}}{1-2x}$$

$$=2.\frac{1-2^{n+1}x^{n+1}}{1-2x}.$$

250. 解下之方程式.

(1) $y^2+yz+z^2=ax,\ z^2+zx+x^2=ay,\ x^2+xy+y^2=az.$

(2) $x(y+z-x)=a,\ y(z+x-y)=b,\ z(x+y-z)=c.$

(解) (1) 第一以 y 乘之, 第二以 x 乘之, 由減法得

$x^3-y^3+z(x^2-y^2)+z^2(x-y)=0,$

卽 $(x-y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)=0,$

同法 $(x-z)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)=0.$

由是 $x=y=z$, 或 $x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=0.$

$x=y=z$, 則 $x=y=z=0$ 或 $\frac{1}{3}a.$

又 $x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=0$, 則由第一得 $x^2+xy+xz+ax=0$,

$\therefore \qquad x+y+z=-a$, 則此方程式爲不定.

(2) 自第一,第二之和減第三,得 $z^2-(x^2-2xy+y^2)=a+b-c$,

即 $(z+x-y)(z-x+y)=a+b-c$,

同法 $(x+y-z)(x-y+z)=b+c-a$, $(y+z-x)(y-z+x)=c+a-b$.

$$\therefore\quad (x-y+z)^2=\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{c+a-b},$$

$$\therefore\quad x-y+z=\pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{c+a-b}},$$

同法 $y-z+x=\pm\sqrt{\dfrac{(b+c-a)(c+a-b)}{a+b-c}}$,

$$\therefore\quad 2x=\pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{c+a-b}}\pm\sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)}{a+b-c}}.$$

251. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$, n 爲奇數,則

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$

又 $u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4)=0$,則

$$(u^2-v^2)^6=16u^2v^2(1-u^8)(1-v^8).$$

(解) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a+b+c}=0$,即 $\dfrac{a+b}{ab}+\dfrac{a+b}{c(a+b+c)}=0$,

$\therefore\quad (a+b)\{c(a+b+c)+ab\}=0$,即 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$,

由是 $a=-b$,或 $b=-c$,或 $c=-a$.

$a=-b$,則 $a^n+b^n+c^n=a^n-a^n+c^n=c^n$.

又 $\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{a^n}-\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{c^n}$,故合於題意.

又 $u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4)=0$,則

$u^6-v^6-3u^2v^2(u^2-v^2)=-8u^2v^2(u^2-v^2)-4uv(1-u^4v^4)$,

即 $(u^2-v^2)^3=-4uv\{1-u^4v^4+2uv(u^2-v^2)\}$.

$\therefore\ (u^2-v^2)^6=16u^2v^2\{1-2u^4v^4+u^8v^8+4u^2v^2(u^2-v^2)^2$

$+4uv(u^2-v^2)(1-u^4v^4)\}$...........(1)

又由原式得 $4u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4)=-(u^6-v^6)-u^2v^2(u^2-v^2)$, 以 u^2-v^2 乘之,得

$$4u^2v^2(u^2-v^2)^2+4uv(u^2-v^2)(1-u^4v^4)$$
$$=-(u^2-v^2)(u^6-v^6)-u^2v^2(u^2-v^2)^2.$$

由是得 (1) 式如下,

$$(u^2-v^2)^6=16u^2v^2\{1-2u^4v^4+u^8v^8-(u^2-v^2)(u^6-v^6)-u^2v^2(u^2-v^2)^2\}$$
$$=16u^2v^2\{1-u^8-v^8+u^8v^8\}=16u^2v^2(1-u^8)(1-v^8).$$

252. $x+y+z=3p,\ yz+zx+xy=3q,\ xyz=r$, 則

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-27p^3+36pq-8r,$$

及 $$(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3=27p^3-24r.$$

(解) $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=(3p-2x)(3p-2y)(3p-2z)$

$=27p^3-18p^2(x+y+z)+12p(yz+zx+xy)-8xyz$

$=27p^3-54p^3+36pq-8r=-27p^3+36pq-8r.$

又 $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$

$=(3p-2x)^3+(3p-2y)^3+(3p-2z)^3$

$=81p^3-54p^2(x+y+z)+36p(x^2+y^2+z^2)-8(x^3+y^3+z^3)$

$=81p^3-54p^3+36p\{(x+y+z)^2-2(yz+zx+xy)\}$

$-8\{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)+3xyz\}$

$=27p^3+36p\{9p^2-6q\}-8\{3p((x+y+z)^2-3(yz+zx+xy))+3r\}$

$=27p^3+36p(9p^2-6q)-8\{3p(9p^2-9q)+3r\}=27p^3-24r.$

253. 分割下之代數式爲 x,y,z 之一次因子,

$$\{a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+c(a+b)z^2\}^2-4abc(x^2+y^2+z^2)(ax^2+by^2+cz^2).$$

(解) 原式中 x^4 之係數 $=a^2(b+c)^2-na^2bc=a^2(b-c)^2$,

x^2y^2 之係數 $=2ab(b+c)(c+a)-4abc(a+b)=-2ab(b-c)(c-a)$.

由是原式 $=a^2(b-c)^2x^4+b^2(c-a)^2y^4+c^2(a-b)^2z^4$

$-2ab(b-c)(c-a)x^2y^2-2bc(c-a)(a-b)y^2z^2-2ca(a-b)(b-c)z^2x^2$

$$=\{x\sqrt{a(b-c)}+y\sqrt{b(c-a)}+z\sqrt{c(a-b)}\}$$

$$\{x\sqrt{a(b-c)}+y\sqrt{b(c-a)}-z\sqrt{c(a-b)}\}$$

$$\{x\sqrt{a(b-c)}-y\sqrt{b(c-a)}+z\sqrt{c(a-b)}\}$$

$$\{x\sqrt{a(b-c)}-y\sqrt{b(c-a)}-z\sqrt{c(a-b)}\}$$

254. $\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}>x^xy^yz^z>\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}$.

(解) x, y, z 不爲整數,則其分母之 G. C. M 爲 p, 作整數 px, py, pz, $x^{px}y^{py}z^{pz}$ 爲 $px+py+pz$ 個因子之積, 此等因子之等差中項爲

$\frac{px^2+py^2+pz^2}{px+py+pz}$, 即 $\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$.

故 $\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{px+py+pz}>x^{px}y^{py}z^{pz}$.

此式開 p 方根, 即得所求之結果.

255. $\left\{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1+x}{1-x}$, 則

$$\sum_{r=1}^{r=n}(-1)^{n-r}\frac{\lfloor n+r-1}{\lfloor r\ \lfloor r-1\ \lfloor n-r}=1.$$

(解) $(1-4y)^{-\frac{1}{2}}$ 之開散式爲 $1+p_1y+p_2y^2+p_3y^3+\ldots+p_ry^r+\ldots$

但 $p_r=\frac{\lfloor 2r}{\lfloor r\ \lfloor r}$.

y 用 $x(1+x)^{-2}$ 代之, 則得普通項爲

$$\frac{\lfloor 2r}{\lfloor r \lfloor r} x^r \left\{1 - 2rx + \frac{2r(2r+1)}{1.2}x^2 - \ldots\right\}$$ 之級數.

於此及下之諸項求 x^n 之係數,使 $(1+x)(1-x)^{-1}$ 之式中 x^n 之係數之和相等,則

$$2 = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{\lfloor 2r}{\lfloor r \lfloor r}(-1)^{n-r} \frac{2r(2r+1)\ldots(n-r+1)}{\lfloor n-r}.$$

$$\therefore \quad 1 = \sum_{r=1}^{r=n}(-1)^{n-r} \frac{\lfloor 2r}{\lfloor r \lfloor r} \cdot \frac{r(2r+1)\ldots(n+r-1)}{\lfloor n-r}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n}(-1)^{n-r} \frac{\lfloor n+r-1}{\lfloor r \lfloor r-1 \lfloor n-r}$$

256. 解下之方程式.

(1) $ax+by+z=zx+ay+b=yz+bx+a=0.$

(2) $x+y+z-u=12,$

$x^2+y^2-z^2-u^2=6,$

$x^3+y^3-z^3+u^3=218, \qquad xy+zu=45.$

(解) (1) 由第一得 $z=-(ax+by)$, 代入第二及第三,則

$x(ax+by)=ay+b$, 及 $y(ax+by)=bx+a$,

即 $y=\dfrac{ax^2-b}{a-bx}$, $\quad\therefore\quad \dfrac{ax^2-b}{a-bx}\left(ax+\dfrac{abx^2-b^2}{a-bx}\right)=bx+a,$

即 $(ax^2-b)(a^2x-b^2)=(a-bx)^2(bx+a),$

即 $a^3x^3-ab^2x^2-a^2bx+b^3=b^3x^3-ab^2x^2-a^2bx+a^3,$

$\therefore\quad (a^3-b^3)x^3=a^3-b^3, \quad\therefore\quad x^3=1, \quad\therefore\quad x=1, \omega, \omega^2.$

由是 $y=1, \dfrac{a\omega^2-b}{a-b\omega}, \dfrac{a\omega-b}{a-b\omega^2}$

(2) 由第二及第四得 $(x+y)^2-(z+u)^2=96$..................(1)

但 $(x+y)+(z-u)=12, \quad\therefore\quad (x+y)-(z-u)=8,$

$$\therefore \quad x+y=10, \text{ 及 } z-u=2.$$

又 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1000-30xy$,

及 $z^3-u^3=(z-u)^3+3zu(z-u)=8+6zu$.

由是 $992-30xy-6zu=(x^3+y^3)-(z^3-u^3)=218$,

$$\therefore \quad 5xy+zu=129, \quad \therefore \quad xy=21,\ zu=24.$$

故由 $\left.\begin{matrix}x+y=10\\xy=21\end{matrix}\right\}$ 及 $\left.\begin{matrix}z-u=2\\zu=24\end{matrix}\right\}$ 得 $\left.\begin{matrix}x=3 \text{ 或 } 7\\y=7 \text{ 或 } 3\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}z=6 \text{ 或 } -4\\u=4 \text{ 或 } -6\end{matrix}\right\}$.

257. p 殆等於 q, $n>1$, 則

$$\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

若 $\frac{p}{q}$ 至第 r 小數位而等於 1, 則此近似值至小數第何位而爲正.

(解) $p=q+x$; 但 x 爲甚小, 然則

$$\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}=\frac{2nq+(n+1)x}{2nq+(n-1)x}=\left(1+\frac{n+1}{2nq}x\right)\left(1+\frac{n-1}{2nq}x\right)^{-1}$$

$$=\left(1+\frac{n+1}{2nq}x\right)\left(1-\frac{n-1}{2nq}x\right), \text{ 捨 } x^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{nq}x\right)=\left(1+\frac{x}{q}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

取至 x^3 之項, 則原方程式之左邊爲

$$\left(1+\frac{n+1}{2nq}x\right)\left\{1-\frac{n-1}{2nq}x+\frac{(n-1)^2}{4n^2q^2}x^2-\frac{(n-1)^3}{8n^3q^3}x^3+\ldots\right\}$$

而右邊爲 $1+\frac{x}{nq}-\frac{n-1}{2n^2q^2}x^2+\frac{(n-1)(n-2)}{6n^3q^3}x^3-\ldots\ldots$

此兩邊 x^2 之係數之差 $=\frac{(n-1)^2-(n+1)(n-1)+2(n-1)}{4n^2q^2}=0$

又 x^3 之係數之差 $=\frac{6(n+1)(n-1)^2-3(n-1)^3-8(n-1)(n-2)}{48n^2q^2}$

$=\frac{(n-1)(3n^2-2n+7)}{48n^2q^2}.$

此差於 $\frac{x^3}{q^3}$ 之項有之,而 $\frac{x}{q}$ 爲有 $r-1$ 個 0 之小數,則 $\frac{x^3}{q^3}$ 必爲至少有 $3r-3$ 個 0 之小數.

258. 有人買茶及珈啡合爲 54 斤,若買茶之量之六分之五,及砂糖之量之五分之四,則其價爲十一分之九,若買珈啡之量之茶,則其價當增 5 先令,而珈啡 6 斤之價比茶 2 斤之價多 5 先令,問各 1 斤之價如何.

(解) 茶及珈啡 1 斤之價爲 x 及 y 先令,u 及 v 爲各斤數,則總價 $=ux+vy$ 先令.

由是 $\frac{5}{6}ux+\frac{4}{5}vy=\frac{9}{11}(ux+vy)$, 即 $\frac{u}{6y}=\frac{v}{5x}$.

又 $vx+uy=ux+vy+5$, 即 $(x-y)(v-u)=5$.

又 $u+v=54$, 及 $6y-2x=5$.

由是 $\qquad \frac{v+u}{v-u}=\frac{54(x-y)}{5}=\frac{27(x-y)}{3y-x}$,

但 $\frac{5x+6y}{5x-6y}=\frac{v+u}{v-u}$, $\qquad \therefore \qquad \frac{5x+6y}{5x-6y}=\frac{27(x-y)}{3y-x}$,

即 $70x^2-153xy+72y^2=0$, $\qquad \therefore \qquad (2x-3y)(35x-24y)=0$.

$2x-3y=0$, 及 $6y-2x=5$, 則 $x=2\frac{1}{2}$, $y=1\frac{2}{3}$.

茶價高於珈啡之價,故 $35x-24y=0$ 爲不合理.

259. S_n 爲自 n 個自然數,取各二個之積之和,則

$$\frac{2}{\underline{|3}}+\frac{11}{\underline{|4}}+\dots\dots+\frac{S_{n-1}}{\underline{|n}}=\frac{11}{24}e.$$

(解) $2S_n=(1+2+3+\dots\dots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2)$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2),\ S_{n-1}=\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(3n-1).$$

又 $\sum\frac{S_{n-1}}{\underline{|n}}=\frac{1}{24}\sum\frac{3n-1}{\underline{|n-3}}=\frac{1}{24}\sum\left\{\frac{3}{\underline{|n-4}}+\frac{8}{\underline{|n-3}}\right\}$

$$=\frac{1}{24}\left\{3\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\dots\dots\right)+8\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\dots\dots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{24}(3e+8e)=\frac{11}{24}e.$$

260. $\frac{P}{pa^2+2qab+rb^2}=\frac{Q}{pac+q(bc-a^2)-rab}=\frac{R}{pc^2-2qca+ra^2},$

則 P, p 或 Q, q 或 R, r 相互換, 此方程式不變.

(解) 各比之值為 $\frac{1}{k}$, 則

$$pa^2+2qab+rb^2=kP\dots\dots\dots\dots(1)$$

$$pac+q(bc-a^2)-rab=kQ\dots\dots\dots\dots(2)$$

$$pc^2-2qac+rc^2=kR\dots\dots\dots\dots(3)$$

(1) 以 a 乘之, (2) 以 b 乘之, 由加法得

$$pa(a^2+bc)+qb(a^2+bc)=k(aP+bQ),$$

即 $$(pc+qb)(a^2+bc)=k(aP+bQ),$$

由 (2) 及 (3) 得 $$(pc-qa)(a^2+bc)=k(aQ+bR).$$

$$\therefore\quad \frac{pa+qb}{pc-qa}=\frac{aP+bQ}{aQ+bR},\quad 即\ \frac{p}{q}=\frac{Pa^2+2Qab+Rb^2}{Pac+Q(bc-a^2)-Rab}$$

用 r 代之,消去 v, 則 $\frac{r}{q}=\frac{Pc^2-2Qac+Ra^2}{Pac+Q(bc-a^2)-Rab}$.

261. $\alpha+\beta+\gamma=0$, 則

$$\alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3}=\alpha\beta\gamma(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n)$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1}).$$

(解) α, β, γ 爲方程式 $x^3+qx+r=0$ 之三根.

此方程式以 x^n 乘之,順次用 α, β, γ 代 x, 則

$$(\alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3})+q(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1})+r(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n)=0,$$

但 $q=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\}=-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$,

及 $r=-\alpha\beta\gamma$, 由是可得所求之結果.

262. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之四根,以此係數表 $\sum(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2$.

(解) $\sum(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2=2\sum\alpha^2\beta^2-2\sum\alpha\beta\gamma^2+12\alpha\beta\gamma\delta$.

但 $\sum\alpha^2\beta^2=(\sum\alpha\beta)^2-2\sum\alpha\sum\alpha\beta\gamma+2\alpha\beta\gamma\delta$,

$\sum\alpha\beta\gamma^2=\sum\alpha\sum\alpha\beta\gamma-4\alpha\beta\gamma\delta$.

$$\therefore \quad \sum(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2=2(\sum\alpha\beta)^2-6\sum\alpha\sum\alpha\beta\gamma+24\alpha\beta\gamma\delta$$
$$=2q^2-6pr+24s.$$

263. 某人買鷄,鵝,鴨各若干頭,各 1 頭之價之先令數,等於各鳥之數,而總數爲 23 頭,總價爲 10 磅 11 先令,各種類如何.

(解) x, y, z 爲鷄,鵝,鴨之頭數,則

$$x^2+y^2+z^2=211, \text{ 及 } x+y+z=23.$$

消去 z, 得 $x^2+xy+y^2-23(x+y)+159=0$,

由是 $\quad 2x=-(y-23)\pm\sqrt{-3y^2+46y-107}$.

故 $-3y^2+46y-107=u^2$, 卽 $3y^2-46y+107+u^2=0$.........(1)

由是 $3y=23\pm\sqrt{208-3u^2}$. 故 $208-3u^2=t^2$, 由是 u 不能小於 9, 試設 $u=2, 6, 8$, 代入 (1) 式, 則

$3y^2-46y+107=-4$ 或 -36 或 -64, $\therefore$ $y=3, 11, 9$.

卽雞 11, 鵝 9, 鴨 3 頭.

264. 方程式 $(y+z-8x)^{\frac{1}{3}}+(z+x-8y)^{\frac{1}{3}}+(x+y-8z)^{\frac{1}{3}}=0$, 與方程式 $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2=0$ 爲等值, 試證之.

(解) 由第一得

$$(y+z-8x)+(z+x-8y)+(x+y-8z)$$

$$=3(y+z-8x)^{\frac{1}{3}}(z+x-8y)^{\frac{1}{3}}(x+y-8z)^{\frac{1}{3}},$$

卽 $-8(x+y+z)^3=(y+z-8x)(z+x-8y)(x+y-8z)$,

$x+y+z=p$, 則 $-8p^3=(p-9x)(p-9y)(p-9z)$,

卽 $$p^3-6p^2(x+y+z)+81p(yz+zx+xy)-729xyz=-8p^3,$$

卽 $$(x+y+z)(yz+zx+xy)-9xyz=0.$$

卽 $$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)-6xyz=0.$$

265. 方程式 $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{c}{x+c}+\frac{d}{x+d}$ 有等根, 則 a 或 b 及 c 或 d 相等, 或 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.

又此根爲 $-a, -a, 0$ 或 $-b, -b, 0$ 或 $0, 0, -\frac{2ab}{a+b}$.

(解) $\frac{a}{x+a}-\frac{c}{x+c}=\frac{d}{x+d}-\frac{b}{x+b}$, $\therefore$ $\frac{(a-c)x}{(x+a)(x+c)}=\frac{(d-b)x}{(x+b)(x+d)}$,

$\therefore$ $x=0$, 或 $(a+b-c-d)x^2+2(ab-cd)x+ab(c+d)-cd(a+b)=0$.

原方程式有等根, 則第二之一根爲 0, 或第二之二根爲等根.

此第一 $ab(c+d)-cd(a+b)=0$, 卽 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$,

而公根爲 $x=\frac{-2(ab-cd)}{a+b-c-d}=\frac{-2ab(a+b)+2cd(a+b)}{(a+b-c-d)(a+b)}$

$$=\frac{-2ab(a+b)+2ab(c+d)}{(a+b-c-d)(a+b)}=-\frac{2ab}{a+b}.$$

又第二 $4(ab-cd)^2-4(a+b-c-d)\{ab(c+d)-cd(a+b)\}=0$,

卽 $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)=0$,

故 $a=c$, $a=d$, $b=d$.

$a=c$, 則 $x=-\frac{ab-cd}{a+b-c-d}=-a$. 其他亦同.

266. 解下之方程式.

(1) $x+y+z=ab$, $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=a^{-1}b$, $xyz=a^3$.

(2) $ayz+by+cz=bzx+cz+ax=cxy+ax+by=a+b+c$.

(解) (1) $x+y+z=ab$,

$(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})xyz=a^{-1}b.a^3$, 卽 $yz+zx+xy=a^2b$, $xyz=a^3$.

λ 之三根爲 x, y, z, 則

$$\lambda^3-\lambda^2(x+y+z)+\lambda(yz+zx+xy)-xyz=0,$$

卽

$$\lambda^3-ab^2\lambda^2+a^2b\lambda-a^3=0.$$

∴ $\lambda=a,\ \frac{1}{2}\{b-1\pm\sqrt{b^2-2b-3}\}$ 卽 x, y, z 之値也.

(2) 由第一,第二得 $z=\frac{ax-by}{ay-bx}$, 代入 $ax+(bx+c)z=a+b+c$ 之式中, 則 $ax+\frac{(bx+c)(ax-by)}{ay-bx}=a+b+c$,

卽 $(a^2-b^2)xy+x(ac+ab+b^2+bc)-y(bc+a^2+ab+ac)=0$,

即 $(a-b)xy+x(b+c)-y(a+c)=0,$

由是 $y=\dfrac{(b+c)x}{(a+c)-(a-b)x},$

代入 $cxy+ax+by=a+b+c$ 之式中，則

$$\frac{(b+c)(cx+b)x}{(a+c)-(a-b)x}=a+b+c-ax,$$

即 x^2+x 之項 $-\dfrac{(a+c)(a+b+c)}{bc+c^2-a^2+ab}=0$, 而由視察知 $x=y=z=1$,

$\therefore$ x 之他根爲 $x=\dfrac{(a+c)(a+b+c)}{a^2-c^2-ab-bc}=\dfrac{a+b+c}{a-b-c}.$

267. 化下式爲最簡，

$$\frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\epsilon)}+\frac{\beta^3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\epsilon)}$$

$$+\frac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\gamma-\epsilon)}+\frac{\delta^3}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)(\delta-\epsilon)}$$

$$+\frac{\epsilon^3}{(\epsilon-\alpha)(\epsilon-\beta)(\epsilon-\gamma)(\epsilon-\delta)}.$$

(解) $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\epsilon)$,

及 $\phi(x)$ 不爲四次以上之式，則 $\phi(x)\div f(x)$ 爲眞分數而分解之，

則 $\dfrac{\phi(x)}{f(x)}=\dfrac{\phi(\alpha)}{(x-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\epsilon)}+$ 等勢項.

$x=0$, 則

$$\frac{\phi(0)}{f(0)}=\frac{\phi(\alpha)}{-\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\epsilon)}+\frac{\phi(\beta)}{-\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\epsilon)}+\dots$$

由本題得 $\phi(x)=x^4$, 即 $\phi(0)=0$,

故 $\dfrac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\epsilon)}+\dfrac{\beta^3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\epsilon)}+\dots=0.$

268. 甲乙丙三種人之年齡之和爲 2160 歲．而平均年齡爲 36 歲，甲乙之平均年齡爲 39 歲，乙丙之平均年齡爲 $32\frac{8}{11}$ 歲，又甲丙之平均年齡爲 $36\frac{2}{3}$ 歲，若甲各增 1 歲，乙各增 7 歲，丙各增 6 歲，則其平均年齡增 5 歲，問各人數及各平均年齡幾許．

（解） 甲乙丙之人數順次爲 x, y, z，各平均年齡爲 u, v, w，則 $ux+vy+wz=2160$，

$$\frac{ux+vy+wz}{x+y+z}=36,\ \text{即}\ x+y+z=60,$$

$$ux+vy=39(x+y),\ vy+wz=32\frac{8}{11}(y+z),\ ux-wz=36\frac{2}{3}(x+z).$$

此末三方程式相加，得 $2(ux+vy+wz)=75\frac{2}{3}x+71\frac{8}{11}y+69\frac{13}{33}z.$

但 $ux+vy+wz=36(x+y+z)$，

$\therefore\ 72(x+y+z)=75\frac{2}{3}x+71\frac{8}{11}y+69\frac{13}{33}z,\ \ \therefore\ 121x-9y-86z=0.$

增加之平均年齡爲 $\frac{x+6y+7z}{x+y+z}$ 而等於 5，$\therefore\ 4x-y-2z=0.$

由此最後兩方程式得 $\frac{x}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z}{5}$，但 $x+y+z=60$，

$$\therefore\quad x=16,\ y=24,\ z=20.$$

又 $16u+24v=39\times40$，即 $2u+3v=195$，

$$24v+20w=\frac{360}{11}\times44,\ \text{即}\ 6v+5w=360,$$

$$16u+20w=\frac{110}{3}\times36,\ \text{即}\ 4u+5v=330,$$

$$\therefore\quad u=45,\ v=35,\ w=30.$$

269. $a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4y^4$ 等於 x, y 之一次兩代數式之四方乘之和，其係數之關係如何.

(解) $a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4y^4=(ax+by)^4+(cx+dy)^4$,
比較兩邊之係數，則

$$a_0=a^4+c^4,\ a_1=a^3b+c^3d,\ a_2=a^2b^2+c^2d^2,\ a_3=ab^3+cd^3,\ a_4=b^4+d^4.$$

由此諸方程式得 $a_0a_2-a_1^2=a^2c^2(ad-bc)^2$,

$$a_1a_3-a_2^2=abcd(ad-bc)^2,$$

$$a_2a_4-a_3^2=b^2d^2(ad-bc)^2,$$

$$(a_0a_2-a_1^2)(a_2a_4-a_3^2)=(a_1a_3-a_2^2)^2.$$

由是 $bda_0+aca_2=bd(a^4+c^4)+ac(a^2b^2+c^2d^2)=(ad+bc)(a^3b+c^3d)$,

即 $$bda_0-(ad+bc)a_1+aca_2=0.$$

同法 $$bda_1-(ad+bc)a_2+aca_3=0.$$

及 $$bda_2-(ad+bc)a_3+aca_4=0.$$

由是消去 $bd,\ ad+bc,\ ac$，則

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0$$

270. 求下之方程式之實根.

$$x^2+v^2+w^2=a^2,\qquad vw+u(y+z)=bc,$$

$$y^2+w^2+u^2=b^2,\qquad wu+v(z+x)=ca,$$

$$z^2+u^2+v^2=c^2,\qquad uv+w(x+y)=ab.$$

(解) $(y^2+u^2+w^2)(z^2+u^2+v^2)=b^2c^2=(vw+uy+uz)^2$,
變之得 $(u^2-yz)^2+(wu-vy)^2+(uv-wz)^2=0.$

根爲實根，故 $u^2-yz=0,\ wu-vy=0,\ uv-wz=0.$

自他方程式亦得相等之結果，卽

$u^2=yz,\ v^2=zx,\ w^2=xy,\ vw=ux,\ wu=vy,\ uv=wz.$

用此等之値代入原方程式，則

$$x(x+y+z)=a^2,\qquad u(x+y+z)=bc,$$

$$y(x+y+z)=b^2,\qquad v(x+y+z)=ca,$$

$$z(x+y+z)=c^2,\qquad w(x+y+z)=ab.$$

由是 $(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2,$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ u=\pm\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

271. 某國語法，一强母音一弱母音之間不插入子音，今 a, o, u 爲强母音，e, i 爲弱母音，自 n 子音及母音 aeo 成各 $n+3$ 音之語之全數爲 $2\,\underline{|n+3}\,(n+2)$，但一語中不複用同音.

(解) 凡 $n+3$ 音內有母音 $a, e, o.$

子音除不插入之位置外，得列於任意位置.

但母音之順序如下，

(1) aeo,　(2) oea,　(3) aoe,　(4) eoa　(5) eao,　(6) oae.

今(1)及(2)除母音相連續之外不能成立，故以此順序整列母音者有 $2\,\underline{|n+1}$ 語.

又如 aoe 之四種，先考察其一種 aoe 於任何語中必相連續，而 a 必在先，故如此整列而成立之語之數爲 ${}_{n+2}C_2\times\underline{|n}$ 語.

其他三種之語亦同數，故語之全數爲

$2\,\underline{|n+1}+2(n+2)(n+1)\underline{|n}$，卽可導得所求之形.

272. $x^2+y^2=2z^2$, 而 x, y, z 爲整數, 則

$$2x=r(l^2+2lk-k^2),\ 2y=r(k^2+2lk-b^2),\ 2z=r(l^2+k^2),$$

但 r, l 及 k 爲整數.

(解) $x^2-z^2=z^2-y^2$, 卽 $(x+z)(x-z)=(z+y)(z-y)$,

此方程式如下則合理,

卽 $k(x+z)=l(z+b)$, 及 $l(x-z)=k(z-y)$,

卽 $kx-ly+(k-l)z=0$, 及 $lx+ky-(k+l)z=0$,

由是 $\dfrac{x}{2kl+lb^2-k^2}=\dfrac{y}{k^2+2lk-l^2}=\dfrac{z}{k^2+l^2}=\dfrac{r}{2}$.

273. 求 $\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{2}{3+}\,\dfrac{4}{5+}\,\dfrac{6}{7+}\cdots$ 至無限之値.

(解) 第 n 漸近分數爲 $\dfrac{2(n-2)}{2n-3}$,

由是 $$u_n=(2n-3)u_{n-1}+2(n-2)u_{n-2}$$

卽 $$u_n-2(n-1)u_{n-1}=-\{u_{n-1}-2(n-1)u_{n-2}\}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_3-2.2u_2=-(u_2-2u_1),$$

由乘法得 $u_n-2(n-1)u_{n-1}=(-1)^{n-2}(u_2-2u_1)$.

但 $p_1=1$, $p_2=1$, $q_1=1$, $q_2=2$,

由是 $p_n-2(n-1)p_{n-1}=(-1)^{n-1}$, $q_n-2(n-1)q_{n-1}=0$.

故 $q_n=2(n-1)q_{n-1}=2^2(n-1)(n-2)q_{n-2}=\ldots\ldots=2^{n-1}\underline{|n-1}$.

又 $$\frac{p_n}{\underline{|n-1}}-\frac{2p_{n-1}}{\underline{|n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}}{\underline{|n-1}},$$

$$\frac{2p_{n-1}}{\underline{|n-2}}-\frac{2^2p_{n-1}}{\underline{|n-3}}=\frac{2(-1)^{n-2}}{\underline{|n-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2^{n-2}p_2}{\underline{|1}} - 2^{n-1}p_1 = \frac{2^{n-2}(-1)}{\underline{|1}},$$

由加法得 $\frac{p_n}{\underline{|n-1}} - 2^{n-1} = -2^{n-2} + \frac{2^{n-3}}{\underline{|2}} - \frac{2^{n-4}}{\underline{|3}} - \cdots\cdots$

即 $\frac{p_n}{2^{n-1}\underline{|n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\underline{|2}} - \frac{1}{2^3\underline{|3}} + \cdots\cdots$ $\therefore$ $\frac{p_n}{q_n} = e^{-\frac{1}{2}}$.

274. 求下之值.

(1) $\frac{x^2}{2.3} + \frac{2x^3}{3.4} + \frac{3x^4}{4.5} + \ldots$至無限.

(2) $\frac{\underline{|1}}{a+1} + \frac{\underline{|2}}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{\underline{|n}}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$.

(解) (1) $\frac{n}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2}$.

$$\therefore \quad S = x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right) + x^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\right) + x^4\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right) + \cdots\cdots$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\right) + \frac{2}{x}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)$$

$$= \{x+\log(1-x)\} + \frac{2}{x}\left\{-x-\frac{x^2}{2}-\log(1-x)\right\}.$$

(2) $\frac{\underline{|n}}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$

$$= \frac{1}{a-1}\left\{\frac{\underline{|n}}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)} - \frac{\underline{|n+1}}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\right\}.$$

及 $\frac{\underline{|1}}{a+1} = \frac{1}{a-1}\left(1-\frac{2}{a+1}\right)$,

$$\therefore \quad S = \frac{1}{a-1}\left\{1 - \frac{\underline{|n+1}}{(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n)}\right\}.$$

275. 解下之方程式.

(1) $2xyz+3=(2x-1)(3y+1)(4z-1)+12$

$$=(2x+1)(3y-1)(4z+1)+80=0.$$

(2) $3ux-2vy=vx+uy=3u^2+2v^2=14,\ xy=10uv$

(解) (1) $2x=u,\ 3y=v,\ 4z=w$, 則

$uvw=-36,\ (u-1)(v+1)(w-1)=-12,\ (u+1)(v-1)(w+1)=-80.$

故由第二得 $uvw+(-vw+wu-uv)+(-u+v-w)-1=-12,$

即 $$(-vw+wu-uv)+(-u+v-w)=23.$$

由第三得 $$(vw-wu+uv)+(-u+v-w)=-43.$$

由此兩方程式得 $vw-wu+uv=-33$, 及 $-u+v-w=-10$,

即 $v(-w)+(-w)(-u)+(-u)v=33$, 及 $(-u)+v+(-w)=-10.$

故 $-u,\ +v,\ -w$ 為方程式 $\lambda^3+10\lambda^2+33\lambda+36=0$ 之三根,

即 $$(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda+4)=0,$$

$\therefore\ -u,\ v,\ -w$ 為 $-3,\ -3,\ -4$, 即 $2x,\ -3y,\ 4z$ 為 $3,\ 3,\ 4.$

(2) 由 $3ux-2vy=14,\ vx+uy=14$ 得

$$(3u^2+2v^2)x=14(u+2v),\ 及\ (3u^2+2v^2)y=14(3u-v).$$

但 $3u^2+2v^2=14$, $\therefore\ x=u+2v,\ y=3u-v,$

$$\therefore\ (u+2v)(3u-v)=10uv,$$

即 $3u^2-5uv-2v^2=0$, 即 $(u-2v)(3u+v)=0.$

$u=2v$, 則由 $3u^2+2v^2=14$ 得 $u=\pm2,\ v=\pm1.$

$v=-3u$, 則 $u=\mp\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},\ v=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$

276. 證 $\begin{vmatrix} a^2+\lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2+\lambda & bc & bd \\ ac & bc & c^2+\lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2+\lambda \end{vmatrix}$ 以 λ^3 可除盡之，又求其他因子．

（解） 第一列不變，而第二，第三及第四列各以 a 乘之，則與以 a^3 乘原式爲等值，又新得之式之第一列以 b, c, d 乘之，順次減第二，第三及第四，則

$$a^3\Delta=\begin{vmatrix} a^2+\lambda & ab & ac & ad \\ -b\lambda & a\lambda & 0 & 0 \\ -c\lambda & 0 & a\lambda & 0 \\ -d\lambda & 0 & 0 & a\lambda \end{vmatrix}=a^3\lambda^3\begin{vmatrix} a^2+\lambda & b & c & d \\ -b & 1 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 1 & 0 \\ -d & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

殘因子爲最後之式，卽 $a^2+b^2+c^2+d^2+\lambda$.

277. $a, b, c, \ldots\ldots$ 爲方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$ 之根，求 $a^3+b^3+c^3+\ldots\ldots$ 而證

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\ldots\ldots=p_1-\frac{p_{n-1}(p_1{}^2-2p_2)}{p_n}$$

（解） $\sum a=-p_1$，$\sum ab=p_2$，$\sum abc=-p_3$，$\therefore\ \sum a^2=p_1{}^2-2p_2$，

今 $(\sum a)^3=\sum a^3+3\sum a^2b+6abc$，$\therefore\ -p_1{}^3=\sum a^3+3\sum a^2b-6p_3$.

又 $\sum a^2\sum a=\sum a^3+\sum a^2b$，卽 $-p_1(p_1{}^2-2p_2)=\sum a^3+\sum a^2b$

自最後兩方程式消去 $\sum a^2b$，則 $2\sum a^3+6p_3=-3p_1(p_1{}^2-2p_2)+p_1{}^3$，

卽
$$\sum a^3=-p_1{}^3+3p_1p_2-3p_3.$$

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots$ 爲根之方程式爲 $p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+p_{n-2}x^{n-2}+\ldots\ldots=0$,

$$\therefore\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots\ldots=-\frac{p_{n-1}}{p_n},$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2+c^2+\ldots)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots\right)=-\frac{p_{n-1}}{p_n}(p_1^2-2p_2),$$

即
$$-p_1+\sum\frac{a^2}{2}=-\frac{p_{n-1}}{p_n}(p_1^2-2p_2).$$

278. 開散 $\frac{1+2x}{1-x^3}$, 或由他方法證

$$1-3n+\frac{(3n-1)(3n-2)}{1.2}-\frac{(3n-2)(3n-3)(3n-4)}{1.2.3}$$
$$+\frac{(3n-3)(3n-4)(3n-5)(3n-6)}{1.2.3.4}-\ldots=(-1)^n,$$ 但 n 為整數.

(解) $$\frac{1+2x}{1-x^3}=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{1+x+x^2}=(1-x)^{-1}+x(1+x+x^2)^{-1}$$

$$=(1-x)^{-1}+\frac{x}{1+x}\left(1+\frac{x^2}{1+x}\right)^{-1}$$

$$=\{1+x+x^2+x^3+\ldots\}+\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{x^3}{(1+x)^3}-\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

又 $$\frac{1+2x}{1-x^3}=(1+2x)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

此最後開散式之各項為 x^{3n}, 或 x^{3n+1} 之形.

開散 (1) 之各項則如下

$$1+x+x^2+\ldots+x^r+\ldots\ldots$$
$$+x\{1-x+x^2-\ldots+(-1)^rx^r+\ldots\}$$
$$-x^3\{1-2x+3x^2-\ldots+(-1)^r(r+1)x^r+\ldots\}$$
$$+x^5\{1-3x+6x^2-\ldots+(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r+\ldots\}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

於此開散式及 (2) 比較 x^{3n+2} 之係數, 則

$$0=1+(-1)^{3n+1}-(-1)^{3n-1}3n+(-1)^{3n-3}\frac{(3n-2)(3n-1)}{1.\ 2}$$

$$+(-1)^{3n-5}\frac{(3n-4)(3n-3)(3n-2)}{1.\ 2.\ 3}+\cdots\cdots\cdots$$

第一項轉項,以 $(-1)^{3n+1}$ 除之,則得所求之結果.

(別法) 由二項之定理而

$$1,\ 3n,\ \frac{(3n-2)(3n-1)}{1.\ 2},\ \frac{(3n-4)(3n-3)(3n-2)}{1.\ 2.\ 3},\ \cdots\cdots\cdots$$

為 $(1-x)^{-1}$, $(1-x)^{-2}$, $(1-x)^{-4}$, ... 之開散式中 x^{3n+1}, x^{3n-1}, x^{3n-3}, ...之係數,

由是所求之和等於 $\frac{1}{1-x}-\frac{x^2}{(1-x)^2}+\frac{x^4}{(1-x)^3}-\cdots\cdots\cdots$ 之開散式中 x^{3n+1} 之係數.

而既知代數式,其項數雖有限,然此級數可接續至無限.

此最後之代數式為其和如下之 G. P.,

$$\frac{1}{1-x}\div\left(1+\frac{x^2}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1+x}{1+x^3}$$

$$=(1+x)\{1-x^3+x^6-x^9+\ldots+(-1)^n x^{3n}+\ldots\}.$$

故既知級數 $=(-1)^n$.

279. A 及 B 獵取 10 鳥,各發射之數之平方和為 2880,其積為各射殺鳥數之積之 48 倍,若 A 發射 B 許,B 發射 A 許,則 B 比 A 多射殺 5 鳥,求各射殺之數.

(解) x 及 y 為 A, B 射數,

A u 射而殺 1 鳥, B v 射而殺 1 鳥,

然則 $\frac{x}{u}$ 及 $\frac{y}{v}$ 為各射殺之數.

由是 $x^2+y^2=2880$, $xy=\frac{48xy}{uv}$, 卽 $uv=48$,

$$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}=10, \text{及} \frac{x}{v}-\frac{y}{u}=5.$$

由最後兩方程式得 $\frac{x^2+y^2}{u}=10x-5y$, $\therefore \quad u(2x-y)=576.$

$$\frac{x^2+y^2}{v}=10y+5x, \quad \therefore \quad v(2y+x)=576.$$

$\therefore \quad uv(2x-y)(2y+x)=576\times576$, $\therefore \quad (2x-y)(2y+x)=12\times576.$

$$\therefore \quad \frac{(2x-y)(2y+x)}{x^2+y^2}=\frac{12\times576}{2880}=\frac{12}{5},$$

卽 $2x^2-15xy+22y^2=0$, 卽 $(x-2y)(2x-11y)=0.$

由方程式 $2x-11y=0$ 不能得 x 及 y 之整數.

故由 $x=2y$ 得 $x=48$, $y=24$.

故 $\frac{48}{u}+\frac{24}{v}=10$ 及 $uv=48$, $\therefore \quad u=8$, $v=6$.

由是 A 及 B 射殺之數爲 $\frac{48}{8}$, $\frac{24}{6}$, 卽 6, 4.

280. $8(a^3+b^3+c^3)^2>9(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab).$

(解) 由 $a^3+b^3+c^3>3abc$ 得

$$2(a^3+b^3+c^3)^2>18a^2b^2c^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

及

$$3(a^3+b^3+c^3)^2>9abc(a^3+b^3+c^3) \quad \cdots\cdots(2)$$

又 $(b^3-c^3)^2+(c^3-a^3)^2+(a^3-b^3)^2>0$,

卽 $a^6+b^6+c^6>b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3.$

由是 $3(a^3+b^3+c^3)^2>3(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3) \quad \cdots\cdots(3)$

由 (1), (2), (3) 得

$$8(a^3+b^3+c^3)^2>9\{2a^2b^2c^2+abc(a^3+b^3+c^3)+b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3\}$$

即 $\quad 8(a^3+b^3+c^3)^2>9(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$.

281. $\dfrac{2}{3-}\,\dfrac{4}{4-}\,\dfrac{6}{5-}\cdots\cdots$ 之第 n 漸近分數爲 $2-\dfrac{2^{n+1}}{\sum_0^n 2^r|\underline{n-r}}$.

n 爲無限大，求此極限.

(解) $u_n=(n+2)u_{n-1}-2nu_{n-2}$,

$$\therefore\qquad u_n-2y_{n-1}=n(u_{n-1}-2u_{n-2}),$$

同法 $$u_{n-1}-2u_{n-2}=(n-1)(u_{n-2}-2u_{n-3}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_3-2u_2=3(u_2-2u_1).$$

今 $p_1=2,\ q_1=3,\ p_2=8,\ q_2=8$, 由是

$$p_n-2p_{n-1}=2|\underline{n},\qquad\qquad q_n-2q_{n-1}=|\underline{n},$$

$$2p_{n-1}-2^2p_{n-2}=2^2|\underline{n-1},\qquad\qquad 2q_{n-1}-2^2q_{n-2}=2|\underline{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2^{n-2}p_2-2^{n-1}p_1=2^{n-1}|\underline{2}.\qquad\qquad 2^{n-2}q_2-2^{n-1}q_1=2^{n-2}|\underline{2},$$

$$2^{n-1}p_1=2^n|\underline{1},\qquad\qquad 2^{n-1}q_1=2^{n-1}3=2^{n-1}|\underline{1}+2^n,$$

由加法得

$$p_n=2^n|\underline{1}+2^{n-1}|\underline{2}+2^{n-2}|\underline{3}+\cdots\cdots+2|\underline{n},$$

$$q_n=2^n+2^{n-1}|\underline{1}+2^{n-2}|\underline{2}+\cdots\cdots+|\underline{n}.$$

$$\therefore\qquad \frac{p_n}{q_n}=2-\frac{2^{n+1}}{q_n},\ 及\ q_n=\sum_0^n 2^r|\underline{n-r}.$$

今 $$\frac{q_n}{2_n}-1=\frac{|\underline{1}}{2}+\frac{|\underline{2}}{2^2}+\frac{|\underline{3}}{2^3}+\frac{|\underline{4}}{2^4}+\cdots\cdots\cdots$$

若 v_n 爲此級數之第 n 項，則

$$v_{n-1}=\frac{\lfloor n-1}{2^{n-1}}, \text{及 } v_n=\frac{\lfloor n}{2^n},$$

由是 $\dfrac{v_n}{v_{n-1}}=\dfrac{n}{2}$, 而此級數爲發級數明矣.

故 $\dfrac{2^{n+1}}{q_n}$ 之極限 $=0$, $\quad\therefore\quad$ $\dfrac{p_n}{q_n}$ 之極限 $=2$.

282. $\dfrac{1}{a+}\ \dfrac{1}{b+}\ \dfrac{1}{c+}\ \dfrac{1}{a+}\ \dfrac{1}{b+}\ \dfrac{1}{c+}\cdots\cdots$ 之第 n 漸近分數爲 $\dfrac{p_n}{q_n}$,

則 $p_{3n+3}=bp_{3n}+(bc+1)q_{3n}$.

(解) $\dfrac{p_{3n+3}}{q_{3n+3}}=\dfrac{1}{a+}\ \dfrac{1}{b+}\ \dfrac{1}{c+}\ \dfrac{p_{3n}}{q_{3n}}$.

最初三漸近分數爲 $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{b}{ab+1}$, $\dfrac{bc+1}{abc+a+c}$,

$$\therefore\quad \frac{p_{3n+3}}{q_{3n+3}}=\frac{(bc+1)q_{3n}+bp_{3n}}{(abc+a+c)q_{3n}+(ab+1)p_{3n}},$$

而漸近分數之分母子爲已約分數, 故 $p_{3n+3}=bp_{3n}+(bc+1)q_{3n}$.

283. 有長 1, 2, 3, ... n 寸之 n 直線, 取其內各四線作內容一圓之四角形, 其方法之數爲

$$\frac{1}{48}\Big\{2n(n-2)(2n-5)-3+3(-1)^n\Big\}.$$

(解) a, b, c, d 順次爲四角形之四邊, 而內容一圓, 故 $a+c=b+d$.

先取 1 寸爲其一邊, 則 $a=1$ 而 $c=4$, 則 $b=2$, $d=3$, 若 $c=5$, 則 $b=2$, $d=4$, 若 $c=6$, 則有 $b=2$, $d=5$ 或 $b=3$, $d=4$ 之二種, 而 $c=7$, 則亦有二種,

若 $c=8$ 或 $c=9$, 則有三種, $c=2m$ 或 $c=2m+1$, 則各有 $m-1$ 種, 由是 1 寸爲一邊, 而四角形之數如下

$n=2m$，則為 $2\{1+2+3+\dots+(m-2)\}+(m-1)$，即 $m(m-1)^2$，

$n=2m+1$，則為 $2\{1+2+3+\dots+(m-1)\}$，即 $(m-1)$.

(1) $n=2m$.

一邊為 1 寸，則四角形之數為 $(m-1)^2$.

一邊為 2 寸，則四角形之數為自 2, 3, 4, ... $2m$ 寸之邊而成，故定 $(a-1)+(c-1)=(b-1)+(d-1)$ 之關係可也.

即一邊為 2 寸，則與 1, 2, 3, ... $2m-1$ 寸之邊所成四角形之數等，故等於 $(m-1)(m-2)$.

同法一邊為 3 寸，則 3, 4, 5, ... $2m$ 寸之邊所成四角形之數與 1, 2, 3, ... $2m-2$ 寸之邊所成四角形之數等，故等於 $(m-2)^2$.

一邊為 4 寸，則 4, 5, 6, ... $2m$ 寸之邊，所成四角形之數為 $(m-2)(m-3)$，以下準此.

由是四角形之全數為 $\sum(m-1)^2+\sum(m-1)(m-2)$

$$=\frac{1}{6}(m-1)m(2m-1)+\frac{1}{3}(m-2)(m-1)m$$

$$=\frac{1}{6}(m-1)m(4m-5)=\frac{1}{24}n(n-2)(2n-5)\dots\dots\dots(1)$$

(2) $n=2m+1$.

一邊為 1 寸，則四角形之數為 $m(m-1)$.

如 (1) 四角形之全數為 $\sum m(m-1)+\sum(m-1)^2$

$$=\frac{1}{3}(m-1)m(m+1)+\frac{1}{6}(m-1)m(2m-1)$$

$$=\frac{1}{6}(m-1)m(4m+1)=\frac{1}{24}(n-3)(n-1)(2n-1)$$

$$=\frac{1}{24}\{n(n-2)(2n-5)-3\}\dots\dots\dots\dots(1)$$

(1)及(2)之公式含有於 $\frac{1}{48}\{2n(n-2)(2n-5)-3+3(-1)^n\}$ 之內.

284. 小於 n 而與 n 爲素數之各數，其平方及立方之等差中項爲 u_2, u_3，則 $n^3-6nu_2+4u_3=0$，但 1 亦算入素數之內.

(解) 由數之法則得

$$u_2\phi(n)=\frac{n^2}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots+\frac{n}{6}(1-a)(1-b)(1-c)\cdots$$

及 $$u_3\phi(n)=\frac{n^4}{4}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots+\frac{n^2}{4}(1-a)(1-b)(1-c)\cdots$$

$$\therefore\quad 6nu_2\phi(n)-4u_3\phi(n)=n^4\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots=n^3\phi(n),$$

$$\therefore\quad n^3-6nu_2+4u_3=0.$$

285. n 爲 $6m-1$ 之形，則 $(y-z)^n+(z-x)^n+(x-y)^n$ 可以 $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ 除之，又 n 爲 $6m+1$ 之形，則可以 $(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$ 除之.

(解) $y-z,\ z-x,\ x-y$ 爲 $a,\ b,\ c$，則 $a+b+c=0$，而恒同式 $(a-at)(1-bt)(1-ct)=1-qt^2-rt^3$，

但 $q=-(bc+ca+ab)$ 而 $r=abc$.

取對數式而比較 t^n 之係數，則

$\frac{1}{n}(a^n+b^n+c^n)=(qt^2+rt^3)+\frac{1}{2}(qt^2+rt^3)^2+\frac{1}{3}(qt^2+rt^3)^3+\ldots$之式中 t^n 之係數.

$n=6m\pm1$，則右邊之係數唯

$$\frac{t^{4m}}{2m}(q+rt)^{2m}+\frac{t^{4m+2}}{2m+1}(q+rt)^{2m+1}+\frac{t^{4m+4}}{2m+2}(q+rt)^{2m+2}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{t^{6m}}{3m}(q+rt)^{2m}.$$

開散此式中之二項式,則有t^{6m-1}之各項可以qr除之,有t^{6m+1}之各項可以q^2r除之.

今$a+b+c=0$,故$a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$,

卽$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=-2(ab+bc+ca)$,

卽$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=-(ab+bc+ca)=q$.

故$(x-y)^n+(y-z)^n+(z-x)^n$指數n爲$6m+1$,則可以$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$除之,又爲$6m+1$,則可以$(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$除之.

286. S爲$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$之$n$方乘之和,P爲自此諸數取各$m$個之積之和,則$\lfloor n-1 \, S > \lfloor n-m \, \lfloor m \, P$.

(解) $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 爲$a, b, c, d, e, \ldots$則

$mabcdef\ldots$至m因子$<a^m+b^m+c^m+d^m+e^m+f^m+\ldots$至$m$項,

$macdefg\ldots$至m因子$<a^m+c^m+d^m+e^m+f^m+\ldots$至$m$項,

$mabcfgh\ldots$至m因子$<a^m+b^m+c^m+f^m+g^m+\ldots$至$m$項,

....

由加法得 $mP<\dfrac{\lfloor n-1}{\lfloor n-m \, \lfloor m-1}S$,因$a^m, b^m, c^m, \ldots$各等於自$n-1$物取各$m-1$個之組合之數故也.

287. $x^3+qx-r=0$及$rx^3-2q^2x^2-5qrx-2q^3-r^2=0$之兩方程式有共通之一根,則第一方程式有一對等根,又此等根爲a,求第二方程式之各根.

(解) 消去x^3,則$qx^2+3rx+q^2=0$,

卽 $$q(x^2+q)=-3rx,$$

但 $$x(x^2+q)=r,$$

$$\therefore\quad \frac{q}{x}=-3x,\text{ 卽 } 3x^2+q=0,$$

而已知第一方程式有一對等根.

等根爲 a, 則第三根必爲 $-2a$,

由是 $q=-3a^2$, $r=-2a^3$, 故第二方程式爲

$x^3+9ax^2+15a^2x-25a^3=0$, 卽 $(x-a)(x^2+10ax+25a^2)=0$,

$$\therefore\quad \text{其根爲 } a,\ -5a,\ -5a.$$

288. $x\sqrt{2a^2-3x^2}+y\sqrt{2a^2-3y^2}+z\sqrt{2a^2-3z^2}=0$, 用 a^2 代 $x^2+y^2+z^2$, 則

$$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=0.$$

(解) $p+q+r=0$, 則 $p^4+q^4+r^4-2q^2r^2-2r^2p^2-2p^2q^2=0$.

由原方程式得

$$x^4(2a^2-3x^2)^2+y^4(2a^2-3y^2)^2+z^4(2a^2-3z^2)^2$$
$$-2y^2z^2(2a^2-3y^2)(2a^2-3z^2)-2z^2x^2(2a^2-3z^2)(2a^2-3x^2)$$
$$-2x^2y^2(2a^2-3x^2)(2a^2-3y^2)=0,$$

就 a 之方乘整列之, 則

$$4a^4(x^4+y^4+z^4-2y^2z^2-2z^2x^2-2x^2y^2)$$
$$-12a(x^6+y^6+z^6-y^4z^2-y^2z^4-z^4x^2-z^2x^4-x^4y^2-x^2y^4)$$
$$+9(x^8+y^8+z^8-2y^4z^4-2z^4x^4-2x^4y^4)=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$x^4+y^4+z^4-2y^2z^2-2z^2x^2-2x^2y^2$ 爲 P, 則

$$\sum x^6-\sum x^4y^2=(x^2+y^2+z^2)\mathrm{P}+6x^2y^2z^2=a^2\mathrm{P}+6x^2y^2z^2,$$

及 $\sum x^8-2\sum y^4z^4=(x^4+y^4+z^4+2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2)\mathrm{P}+8x^2y^2z^2\sum x^2$
$$=a^4\mathrm{P}+8a^2x^2y^2z^2.$$

故 (1) 爲 $4a^4\mathrm{P}-12a^2(a^2\mathrm{P}+6x^2y^2z^2)+9(a^4\mathrm{P}+8a^2x^2y^2z^2)$
$$=a^4\mathrm{P}.$$

故 $P=0$, 但 $P=-(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$.

289. 求適合於下之聯立方程式之 $x_1, x_2, \ldots. x_n$ 之值,

$$\frac{x_1}{a_1-b_1}+\frac{x_2}{a_1-b_2}+\ldots.+\frac{x_n}{a_1-b_n}=1,$$

$$\frac{x_1}{a_2-b_1}+\frac{x_2}{a_2-b_2}+\ldots.+\frac{x_n}{a_2-b_n}=1,$$

....

$$\frac{x_1}{a_n-b_1}+\frac{x_2}{a_n-b_2}+\ldots.+\frac{x_n}{a_n-b_n}=1.$$

(解) 假定下之方程式,

$$\frac{x_1}{\theta-b_1}+\frac{x_2}{\theta-b_2}+\ldots.+\frac{x_n}{\theta-b_n}=1-\frac{(\theta-a_1)(\theta-a_2)\ldots.(\theta-a_n)}{(\theta-b_1)(\theta-b_2)\ldots.(\theta-b_n)},$$

此方程式去分母而爲 θ 之 $(n-1)$ 次式,而 θ 對於 $a_1, a_2, \ldots. a_n$ 之 n 值無不適合,故此方程式對於 θ 之任意之值而適合.

由是此方程式各邊以 $\theta-b_1$ 乘之,而 $\theta=b_1$, 則

$$x_1=\frac{-(b_1-a_1)(b_1-a_2)\ldots\ldots(b_1-a_n)}{(b_1-b_1)(b_1-b_2)\ldots\ldots(b_1-b_n)}.$$

290. 證 $\begin{vmatrix} yz-x^2 & zx-y^2 & xy-z^2 \\ zx-y^2 & xy-z^2 & yz-x^2 \\ xy-z^2 & yz-x^2 & zx-y^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r^2 & u^2 & u^2 \\ u^2 & r^2 & u^2 \\ u^2 & u^2 & r^2 \end{vmatrix}$

但 $r^2=x^2+y^2+z^2$ 及 $u^2=yz+zx+xy$.

(解) 自左邊第二列減第一列,自第三列減第二列,則

$$(x+y+z)^2\begin{vmatrix} yz-x^2 & zx-y^2 & xy-z^2 \\ x-y & y-z & z-x \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}$$

第三行及第一行，第二行相加，則

$$(x+y+z)^2\begin{vmatrix} yz-x^2 & zx-y^2 & xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2 \\ x-y & y-z & 0 \\ y-z & z-x & 0 \end{vmatrix}$$

卽 $-(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)\{(x-y)(z-x)-(y-z)^2\}$，

卽 $(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$.

又右邊 $=r^2(r^4-u^4-u^2)(u^2r^2-u^4)+u^2(u^4-u^2r^2)$

$=(r^2-u^2)\{r^2(r^2+u^2)-2u^4\}=(r^2-u^2)^2(r^2+2u^2)$

$=(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2(x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy)$

$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$.

291. A, B, C. 三人作一事，初 A 作若干日後 B 助之，又若干日後 C 助之，若 B 及 C 働作 2 倍，則於此二人働作之日數可成全業，又 A 働作三分之二，C 働作四倍，則於此二人働作之日數可成全業，又 A, B 作之，則 40 日間可成全業，若三人始終共力，則於 B 働作之日數可成全業，又 B 不在與 C 不在之日數之比爲 3 : 5，各働作之日數如何.

(解) A, B, C 每日所成之業爲 u, v, w，働作之日數爲 x, y, z，則

$$ux+wy+wz=1,\ 2vy+2wz=1,\ \frac{2}{3}ux+4wz=1,$$

$$40(u+v)=1,\ (u+v+w)y=1,\ x-y : x-z=3 : 5.$$

由最初三方程式得 $ux-vy-wz=0,\ ux+3vy-9wz=0$,

$$\therefore\quad \frac{ux}{3}=\frac{vy}{2}=\frac{wz}{1}.$$

自第一減第五，則 $u(x-y)+w(z-y)=0$，但 $\frac{u}{3z}=\frac{w}{x}$,

卽 $3yz-4zx+xy=0$.

又 $5(x-y)=3(x-z)$, 卽 $2x=5y-3z$,

又 $3yz=x(4z-y)$, 由是 $6yz=(5y-3z)(4z-y)$,

卽 $5y^2-17yz+12z^2=0$, 卽 $(y-z)(5y-12z)=0$.

$y-z=0$ 不合理, 因方程式 $5(x-y)=3(x-z)$ 不能爲 $5(x-y)=3(x-y)$ 故也.

$5y-12z=0$, 則 $2x=9z$,

$$\therefore \qquad \frac{x}{45}=\frac{y}{24}=\frac{z}{10},$$

又 $\frac{ux}{3}=\frac{vy}{2}=\frac{wz}{1}$, 則 $15u=12v=10w$.

$(u+v)40=1$, 則 $u=\frac{1}{90}$, $v=\frac{1}{72}$, $w=\frac{1}{60}$.

$(u+v+w)y=1$, 則 $y=24$, $\quad\therefore\quad x=15$, $z=10$.

292. 自 $1, x, x^2, x^3, \ldots. x^{n-1}$ 取各 r 個之積之和爲 S_r, 則 $S_{n-r}=S_rx^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2r)}$

(解) S_r 爲 $(1+a)(1+ax)(1+ax^2)\ldots\ldots(1+ax^{n-1})$ 之開散式中 a^r 之係數.

故 $(1+a)(1+ax)\ldots(1+ax^{n-1})=1+S_1a+S_2a^2+\ldots+S_ra^r+\ldots\ldots$

用 ax 代 a, 則

$$(1+ax)(1+ax^2)\ldots(1+ax^n)=1+S_1ax+S_2a^2x^2+\ldots+S_ra^rx^r\ldots\ldots$$

$$\therefore \qquad (1+ax^n)(1+S_1a+S_2a^2+\ldots.+S_ra^r+\ldots.)$$
$$=(1+a)(1+S_1ax+S_2a^2x^2+\ldots.+S_ra^rx^r\ldots.).$$

比較 a^{n-r} 之係數, 則 $S_{n-r}+x^nS_{n-r-1}=x^{n-r}S_{n-r}+x^{n-r-1}S_{n-r-1}$.

$$\therefore \qquad (1-x^{n-r})S_{n-r}=(1-x^{r+1})x^{n-r-1}S_{n-r-1}.$$

用 $r+1$ 代 r, 則

$$(1-x^{n-r-1})S_{n-r-1}=(1-x^{r+2})x^{n-r-2}S_{n-r-2},$$

$$(1-x^{n-r-2})S_{n-r-2}=(1-x^{r+3})x^{n-r-3}S_{n-r-3},$$

....

$$(1-x^{r+1})S_{r+1}=(1-x^{n-r})x^{r}S_{r}.$$

此各式相乘通除各邊之二項因子, 則

$$S_{n-r}=x^{r}x^{r+1}\ldots x^{n-r-1}S_{r}=S_{r}x^{r+(r+1)+\ldots+(n-r-1)}$$

$$=S_{r}x^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2r)}.$$

293. a, b, c 爲正數, 其任意二個之和大於他一個, 則

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^{a}\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^{b}\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^{c}<1.$$

(解) a, b, c 不爲整數, 以 m 乘之, 則 ma, mb, mc 爲整數, 然則此式爲

$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^{ma}\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^{mb}\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^{mc}$ 爲 $ma+mb+mc$ 個正因子之積, 但 a, b, c 之中其二個之和大於他一個, 故皆爲正因子.

此等因子之等差中項爲 $\dfrac{(ma+b-c)+(mb+c-a)+(mc+a-b)}{ma+mb+mc}$ 故等於 1.

由是上之代數式爲 $1^{ma+mb+mc}$ 卽小於 1.

294. 分割 $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)-8a^2b^2c^2$ 於因子.

又證 $4\{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+(\alpha+\beta+\gamma)^4\}=(\beta+\gamma)^4+(\gamma+\alpha)^4+(\alpha+\beta)^4$

$$+6(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2+6(\gamma+\alpha)^2(\alpha+\beta)^2+6(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2$$

(解) 原式 $=(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)(a^2+b^2+c^2)-8a^2b^2c^2$

$=a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)-a^6-b^6-c^6-2a^2b^2c^2$

$=(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2).$

又 $(x+y+z)^4+(-x+y+z)^4=2\{x^4+6x^2(y+z)^2+(y+z)^4\}$,

及 $(x-y+z)^4+(x+y-z)^4=2\{x^4+6x^2(y-z)+(y-z)^4\}$

$$\therefore\quad (x+y+z)^4+(-x+y+z)^4+(x-y+z)^4+(x+y-z)^4$$
$$=4(x^4+y^4+z^4+6y^2z^2+6z^2x^2+6x^2y^2).$$

$x=\beta+\gamma$, $y=\gamma+\delta$, $z=\alpha+\beta$, 以 4 除之,則得所求之第二結果

295. $1, 2, 3, \ldots. n$ 之 r 次等次積及 r 方乘之和爲

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n-1}\left\{1^{n+r-1}-\frac{n-1}{1}2^{n+r-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}3^{n+r-1}-\ldots\text{至 } n \text{ 項}\right\}.$$

(解) 所求之和等於級數 $\left.\begin{array}{l}1+x+x^2+\ldots\ldots+x^r+\ldots\ldots\\1+2x+2^2x^2+\cdots+2^rx^r+\ldots\ldots\\1+3x+3^2x^2+\cdots+3^rx^r+\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$ 之積中 x^r 之係數,卽等於 $\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-2x}\cdot\frac{1}{1-3x}\cdots\frac{1}{1-nx}$ 之開散式中 x^r 之係數.

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\ldots.(1-nx)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}+\frac{C}{1-3x}+\ldots\ldots$$

然則 $A=\frac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n-1}$, $B=\frac{(-1)^{n-2}2^{n-1}}{\lfloor n-2}=\frac{(-1)^{n-2}(n-1)2^{n-1}}{\lfloor n-1}$,

$$C=\frac{(-1)^{n-3}3^{n-1}}{\lfloor 2\ \lfloor n-3}=\frac{(-1)^{n-3}(n-1)(n-2)3^{n-1}}{\lfloor 2\ \lfloor n-1},\ldots\ldots\ldots$$

由是所求之和等於

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n-1}\left\{\frac{1}{1-x}-\frac{(n-1)2^{n-1}}{1-2x}+\frac{(n-1)(n-2)3^{n-1}}{\lfloor 2\ (1-3x)}-\ldots\ldots\right\}\text{之式中}$$

x^r 之係數,由是得所求之結果.

6. n 爲正整數,則

$$1-3n+\frac{3n(3n-3)}{1.2}-\frac{3n(3n-4)(3n-5)}{2.2.3}+\ldots.=2(-1)^n.$$

(解) 原式 $=1-3n\left\{1-\frac{3n-3}{1.2}+\frac{(3n-4)(3n-5)}{1.2.3}-\dots\right\}$.

令 $1, \frac{3n-3}{1.2}, \frac{(3n-4)(3n-5)}{1.2.3}, \dots\dots$ 順次爲 $(1-x)^{-1}, \frac{(1-x)^{-2}}{2}, \frac{(1-x)^{-3}}{3}, \dots\dots$ 之開散式中 $x^{3n-2}, x^{3n-4}, x^{3n-6}, \dots$ 之係數.

$$\therefore\quad 1-\frac{3n-3}{1.2}+\frac{(3n-4)(3n-5)}{1.2.3}-\dots\dots$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{x^2}{2(1-x)^2}+\frac{x^4}{3(1-x)^3}-\dots \text{之 } x^{3n-2} \text{ 之係數.}$$

此級數爲 $\frac{1}{x^2}log\left(1+\frac{x^2}{1-x}\right)$, 即 $\frac{1}{x^2}log\frac{1+x^2}{1-x^2}$ 之開散式.

故所求之級數 $=1-3n\left\{log\frac{1+x^3}{1-x^2} \text{ 之 } x^{3n} \text{ 之係數}\right\}$,

令 $log\frac{1+2^3}{1-x^2}=x^3-\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}-\dots\dots$

$$+(-1)^{p-1}\frac{x^{3p}}{p}+\left(x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\dots+\frac{x^{2p}}{p}+\dots\right).$$

n 若爲奇數, 則 x^{3n} 之係數爲 $(-1)^{n-1}\ \frac{1}{n}$, 即 $\frac{1}{n}$.

n 若爲偶數, 則 x^{3n} 之係數爲 $(-1)^{n-1}\ \frac{1}{n}+\frac{2}{3n}$, 即 $\frac{1}{3n}$.

由是 n 爲奇數或偶數而

所求之級數之值 $=1-3n\left(\frac{1}{n}\right)$ 或 $1-3n\left(-\frac{1}{3n}\right)$.

此代數式順次等於 -2, $+2$, 故各等於 $2(-1)^n$.

297. $x(2a-y)=y(2a-z)=z(2a-u)=u(2a-x)=b^2$, 則除 $b^2=2a^2$ 而 $x=y=z=u$,

又有此關係之方程式不止一個.

(解) $x=2a-\frac{b^2}{u},\ u=2a-\frac{b^2}{z},\ z=2a-\frac{b^2}{y},\ y=2a-\frac{b^2}{z},$

由是 $x=2a-\frac{b^2}{2a-}\ \frac{b^2}{2a-}\ \frac{b^2}{2a-}\ \frac{b^2}{x}$

故 $p_n=a_np_{n-1}-b_np_{n-2},\ q_n=a_nq_{n-1}-b_nq_{n-1}$

此連分數之漸近分數為 $\frac{2a}{1},\ \frac{4a^2-b^2}{2a},\ \frac{8a^3-4ab^2}{4a^2-b^2},$

$\frac{16a^4-12a^2b^2+b^4}{8a^3-4ab^2},\ \frac{(16a^4-12a^2b^2+b^4)x-b^2(8a^3-4ab^2)}{(8a^3-4ab^2)x-b^2(4a^2-b^2)}$

最後之式與 x 相等，則

$$4a(2a^2-b^2)x^2-8a^2(2a^2-b^2)x+4ab^2(2a^2-b^2)=0,$$

即 $$4a(2a^2-b^2)(x^2-2ax+b^2)=0.$$

由是除 $2a^2-b^2=0$ 而 $x^2-2ax+b^2=0$，同法 y, z, u 亦得此方程式， $\therefore\quad x=y=z=u.$

若 $2a^2-b^2=0$，則 $x=2a-\frac{2a^2}{2a-}\ \frac{2a^2}{2a-}\ \frac{2a^2}{y}=\frac{-4a^4}{2a^2y-4a^3},$

即 $x(2a-y)=2a^2$，由是有原方程式之關係之方程式不止一個.

298. a, b, c 為正而不等，則方程式

$ax+yz+z=0,\ zx+by+z=0,\ yz+zx+c=0,\ x, y, z$ 有三個各異之實數值，而 x 及 y 之三值之比為 $b(b-c):a(c-a)$.

(解) 由第三得 $z=-\frac{c}{x+y}$ 代入第一二方程式得

$$ax(x+y)=c(y+1),\quad by(x+y)=c(x+1).$$

由此兩方程式之第一得 $y=\frac{ax^2-c}{c-ax}$，即 $x+y=\frac{c(x-1)}{c-ax}.$

又由第二得 $b(ax^2-c)(x-1)-(x+1)(c-ax)^2=0,$

即 $$(ab-a^2)x^3+Px^2+Qx+(bc-c^2)=0.$$

根之考察不必問 a 或大或小於 b, 假定 a 大而考 $c>a$ 及 $c<a$ 之時可也.

此代數式 $b(ax^2-c)(x-1)-(x+1)(c-ax)^2$ 對於 x 之種種之值而表示符號.

(1) $c>a$, 卽 $\frac{c}{a}>\sqrt{\frac{c}{a}}>1$.

$x=-\infty$, 則此符號爲 $+$.

$x=-1$, 則此符號爲 $+$, $x=1$, 則此符號爲 $-$,

$x=\sqrt{\frac{c}{a}}$, 則此符號爲 $-$, $x=\frac{c}{a}$, 則此符號爲 $+$,

$x=\infty$, 則此符號爲 $-$.

由是符號生三個變化, 故有三實根.

若 $a<b$, 此代數式 $x=-\infty$ 則爲負, 而 $x=+\infty$ 則爲正, 而符號亦生三個變化.

(2) $c<a$, 卽 $1>\sqrt{\frac{c}{a}}>\frac{c}{a}$,

$x=-\infty$, 則此符號爲 $+$, $x=-1$, 則此符號爲 $-$,

$x=\sqrt{\frac{c}{a}}$, 則此符號爲 $+$, $x=\frac{c}{a}$, 則此符號爲 $+$,

$x=1$, 則此符號爲 $-$, $x=+\infty$, 則此符號爲 $-$,

由是如前有三實根.

此根之積爲 $\frac{bc-c^2}{ab-a^2}$ 卽 $\frac{c(b-c)}{a(b-a)}$.

同樣 y 有三實根, 而 a 及 b 互換, 則此等之值之積爲 $\frac{c(a-c)}{b(a-b)}$, 由是可得本題之第二問.

x 及 y 之值爲實數, 而 z 必爲實數.

299. $A=ax-by-cz,\quad B=by-cz-ax,\quad C=cz-ax-by,$

$D=bz+cy,\quad E=cx+az,\quad F=ay+bx,$ 則

$ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF$

$$=(a^2+b^2+c^2)(ax+by+cz)(x^2+y^2+z^2).$$

(解) 左邊$=A(BC-D^2)-F(CF-DE)+E(DF-BE)$

$$=\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ax-by-cz & bx+ay & az+cx \\ bx+ay & -ax+by-cz & bz+cy \\ az+cx & bz+cy & -ax-by+cz \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2x-aby-caz & b^2x+aby & caz+c^2x \\ abx+a^2y & -abx+b^2y-bcz & bcz+c^2y \\ a^2+cax & b^2z+bcy & -cax-bcy+c^2z \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} x(a^2+b^2+c^2) & b^2x+aby & caz+c^2x \\ y(a^2+b^2+c^2) & -abx+b^2y-bcz & bcz+c^2y \\ z(a^2+b^2+c^2) & b^2z+bcy & -caz-bcy+c^2z \end{vmatrix}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{a}\begin{vmatrix} x & bx+ay & az+cx \\ y & -ax+by-cz & bz+cy \\ z & bz+cy & -ax-by+cz \end{vmatrix}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{a}\Big[x\{(ax-by+cz)(ax+by-cz)-(bz+cy)^2\}$$

$$-y\{(bx+ay)(-ax-by+cz)-(bz+cy)(az+cx)\}$$

$$+z\{(bx+ay)(bz+cy)-(-ax+by-cz)(az+cx)\}\Big]$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{a}\Big[x\{a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2-b^2z^2-c^2y^2\}$$

$$+y\{ab(x^2+y^2+z^2)+xy(a^2+b^2+c^2)\}$$

$$+z\{zx(a^2+b^2+c^2)+ca(x^2+y^2+z^2)\}\Big]$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{a}\{a(x^2+y^2+z^2)(by+cz)+x\{a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2-b^2z^2-c^2y^2$$
$$+(a^2+b^2+c^2)(y^2+z^2)\}\}$$
$$=(a^2+b^2+c^2)\{(x^2+y^2+z^2)(by+cz)+ax(x^2+y^2+z^2)\}$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)(ax+by+cz).$$

300. 有學生每日習讀之語數，與每日步行之哩數，及每日用功之時數爲比例，而步行每日增 1 哩，用功每日增 1 時，最初之日習讀 12000 語，最後之日習讀 72000 語，合計習讀 232000 語，而中央之日習讀 62000 語，問最初之日之用功時數及步行哩數如何.

(解) 最初之日步行 x 哩，用功 y 時，而日數爲 n，然則第 r 日步行 $x+r-1$ 哩，用功 $y+r-1$ 時，故 m 爲常數，則習讀之語之數爲 $\frac{1}{m}(x+r-1)(y+r-1)$.

由是 $\frac{1}{m}\{xy+(x+1)(y+1)+(x+2)(y+2)+\ldots\ldots$至 n 項$\}=232000$,

即 $$nxy+(x+y)(1+2+3+\ldots+\overline{n-1})$$
$$+\{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+(n-1)^2\}=232000m,$$

即 $$nxy+\frac{n(n-1)}{2}(x+y)+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)=232000m.$$

但 $\frac{1}{m}xy=12000$, 即 $xy=12000m$.

故 $$n+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\frac{1}{xy}=\frac{116}{6}\ldots\ldots\ldots(1)$$

中央之日習讀 62000 語，故 n 爲 $\frac{n}{2}$，則

$$\frac{n}{2}+\frac{n(n-2)}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{24}n(n-2)(n-1)\frac{1}{xy}=\frac{31}{6}\ldots\ldots\ldots(2)$$

以 2 乘 (2), 自 (1) 減之,得 $\frac{n^2}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{n^2(n-1)}{4}\frac{1}{xy}=9.$

最後之日習讀 72000 語, 故

$\frac{1}{m}(x+n-1)(y+n-1)=72000,$

即 $$xy+(n-1)xy+(n-1)^2=72000m,$$

$$\therefore\quad 1+(n-1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+(n-1)^2\frac{1}{xy}=6,$$

即 $$(n-1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+(n-1)^2\frac{1}{xy}=5.$$

故 $\frac{n^2}{4}\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{n-1}{xy}\right\}=9,$ 及 $(n-1)\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{n-1}{xy}\right\}=5,$

$$\therefore\quad \frac{n^2}{4(n-1)}=\frac{9}{5},$$

$\therefore\quad 5n^2-36n+36=0,$ 或 $(5n-6)(n-6)=0.$

用 $n=6$ 代入 (1) (2), 則

$$15\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{55}{xy}=\frac{40}{3},\quad 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{5}{xy}=\frac{13}{6},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12},\quad \frac{1}{xy}=\frac{1}{12},$$

即 $x+y=7,\quad xy=12,\quad \therefore\quad x=3,\quad y=4.$

斯密斯氏題解補遺

26. $x+y+z=0$, 及 $\frac{x^3}{b-c}-\frac{y^3}{c-a}-\frac{z^3}{a-b}=0$, 則

$$\sum(b-c)(b+c-2a)^2/x^2=0.$$

(解) $x+y+z=0$, 則 $x^3+y^3+z^3=3xyz$

即 $\frac{x^3}{a-b}+\frac{y^3}{a-b}+\frac{z^3}{a-b}=\frac{3xyz}{a-b}$,

而自 $\frac{x^3}{b-c}+\frac{y^3}{c-a}+\frac{z^3}{a-b}=0$ 減前之方程式, 變化之, 則得

$$(c-a)(c+a-2b)x^3-(b-c)(b+c-2a)y^3$$
$$-3(b-c)(c-a)(a-b)xy(x+y)=0,$$

以 $(c+a-2b)x-(b+c-2a)y$ 乘之, 括同類項, 則得

$$(c-a)(c+a-2b)^2x^4+(b-c)(b+c-2a)^2y^4+2x^3y(c-a)(c+a-2b)^2$$
$$+2xy^3(b-c)(b+c-2a)^2-9(b-c)(c-a)(a-b)x^2y^2=0,$$

但 $\sum(c-a)(c+a-2b)^2=-9(b-c)(c-a)(a-b)$, 故上之方程式終當如下,

$$\sum(c-a)(c+a-2b)^2x^2z^2=0, \quad \therefore \quad \sum\frac{(b-c)(b+c-2a)^2}{x^2}=0.$$

33. 方程式 $x^3+y^3+z^3+axyz=0$, $lx+my+nz=0$ 之根爲 $x_1:y_1$, $x_2:y_2$, $x_3:y_3$, 則

$$x_1x_2x_3+y_1y_2y_3+z_1z_2z_3=0.$$

(解) $x^3+y^3+z^3+axyz=0$, 則

$$\left(\frac{x}{z}\right)^3+\left(\frac{y}{z}\right)^3+1+a\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{z}\right)=0, \qquad (1)$$

又 $lx+my+nz=0$, 則

$$l\left(\frac{x}{z}\right)+m\left(\frac{y}{z}\right)+n=0. \tag{2}$$

由 (2) 得 $\frac{y}{z}=-\frac{1}{m}\left\{l\left(\frac{x}{z}\right)+n\right\}$, 代入 (1) 式,得

$$\left(\frac{x}{z}\right)^3-\frac{1}{m^3}\left\{l\left(\frac{x}{z}\right)+n\right\}+1-\frac{a}{m}\left(\frac{x}{z}\right)\left\{l\left(\frac{x}{z}\right)+n\right\}=0,$$

即 $\left(\frac{x}{z}\right)^3+\frac{l(3ln+am^2)}{l^3-m^3}\left(\frac{x}{z}\right)^2+\frac{n(3ln+m^2)}{l^3-m^3}\left(\frac{x}{z}\right)-\frac{m^3-n^3}{l^3-m^3}=0,$

次 $\frac{x}{z}$ 之三次方程式由題意 $\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}, \frac{x_3}{z_3}$ 爲此三根,

由是
$$\frac{x_1x_2x_3}{z_1z_2z_3}=\frac{m^3-n^3}{l^3-m^3} \tag{3}$$

同法自 (2) 求 $\frac{x}{z}$, 代入 (1) 式,則得 $\frac{y}{z}$ 之三次方程式如下,

$$\left(\frac{y}{z}\right)^3+\frac{m(3mn+al^3)}{m^3-l^3}\left(\frac{y}{z}\right)^2+\frac{n(3mn+al^2)}{m^3-l^3}\left(\frac{y}{z}\right)-\frac{l^3-n^3}{m^3-l^3},$$

由是
$$\frac{y_1y_2y_3}{z_1z_2z_3}=\frac{l^3-n^3}{m^3-l^3} \tag{4}$$

由 (3) (4) 得 $\frac{x_1x_2x_3}{z_1z_2z_3}+\frac{y_1y_2y_3}{z_1z_2z_3}=\frac{m^3-n^3}{l^3-m^3}+\frac{l^3-n^3}{m^3-l^3}=-1,$

$$\therefore\quad x_1x_2x_3+y_1y_2y_3+z_1z_2z_3=0.$$

60. 有人書名於 n 個信面,而各一信封中封入各一信及各一名帖,若每回之封入全誤,則封法之數爲

$$\lfloor n\left\{\lfloor n-\frac{\lfloor n-1}{\lfloor 1}+\frac{\lfloor n-2}{\lfloor 2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{\lfloor n}\right\}.$$

(解) 由 251 章第五例 $F(n)-nF'(n-1)=(-1)^n$,

第五例之一信,本題以一信及一名帖代之,故具每組有三個,故

$$F'(n-1)=nF(n-1)+(n-1)F(n-2),$$

由是 $F(n)-n\{nF(n-1)+(n-1)F(n-2)\}=(-1)^n$

而 $\dfrac{F(n)}{\underline{|n}}=\dfrac{nF(n-1)}{\underline{|n-1}}+\dfrac{F(n-2)}{\underline{|n-2}}+\dfrac{(-1)^n}{\underline{|n}}$, 由是得所求之結果.

99. 囊內有 a 個白玉, b 個黑玉, 一度取出一個, 不再返入, 而取出 a 個皆爲黑玉之適遇爲 $\dfrac{\underline{|a}\ \underline{|a}}{\underline{|a+b}\ \underline{|a-b}}$, 但 a 不小於 b.

(解) 自 a 個內取 b 個之方法之數爲 ${}_aC_b=\dfrac{\underline{|a}}{\underline{|a-b}\ \underline{|b}}$ ....(1)

又自 $a+b$ 個內取出一黑玉之適遇爲 $\dfrac{b}{a+b}$,

自 $a+b-1$ 個內取出一黑玉之適遇爲 $\dfrac{b-1}{a+b-1}$,

由是 $\dfrac{b}{a+b}\times\dfrac{b-1}{a+b-1}\times\dfrac{b-2}{a+b-2}\times\cdots\cdots\times\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{\underline{|a}\ \underline{|b}}{\underline{|a+b}}$ ....(2)

由 (1) (2) 得所求之結果.

商務印書館出版

民國新教科書 代數學問題詳解　一冊　一元三角

是書即照民國新教科書代數學問題詳加解證。式簡理明。凡習原書者。不可不購置一編。以資參考。

教師諸君如欲購備以下各書可省卻種種預備之勞

書名	冊數	價目
暗射中學算術題解	二冊	各六角
大代數學難題詳解	一冊	五角
暗射代數學題解	二冊	各六角
幾何學難題詳解（平面、立體）	各一冊	各八角
民國新教科書幾何學問題詳解	一冊	一元五角
溫特渥斯平面幾何學解法	一冊	八角
同上立體幾何學解法	一冊	六角
暗射立體幾何學題解	一冊	二角五分
暗射平面幾何學題解	一冊	六角
三角法難題詳解	一冊	八角
共和國教科書平三角大要問題詳解	一冊	三角五分
民國新教科書三角學問題詳解	一冊	一元五角

Advanced Problems of High Algebra
With Solutions and Explanation
For Middle Schools
Commercial Press, Limited

丁未年十月初版
中華民國十一年七月六版

(大代數難題詳解一册)
(每册定價大洋伍角)
(外埠酌加運費匯費)

編譯者　無錫周藩
校訂者　紹興駱師曾
發行者　商務印書館
印刷所　上海北河南路北首寶山路　商務印書館
總發行所　上海棋盤街中市　商務印書館
分售處　商務印書分館　北京天津保定奉天吉林龍江　濟南太原開封鄭州西安南京　杭州蘭谿安慶蕪湖南昌漢口　長沙常德衡州成都重慶瀘縣　福州廣州潮州香港梧州雲南　貴陽張家口　新嘉坡